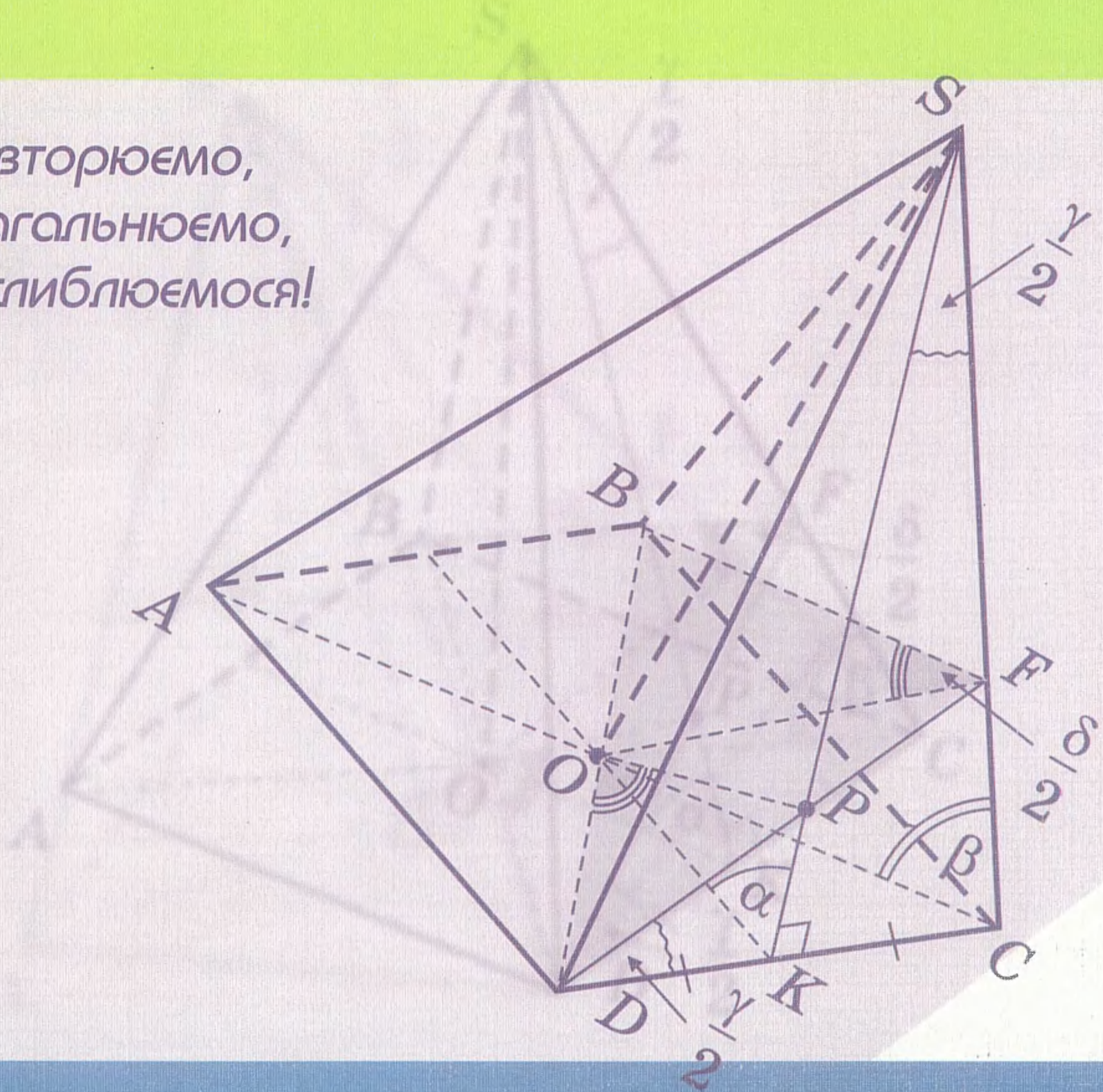
Г. В. Апостолова
В. В. Ясінський

Повторюємо,
узагальнюємо,
заглиблюємося!



ГЕОМЕТРІЯ СТАРШОКЛАСНИКАМ І АБІТУРІЄНТАМ

Г. В. Апостолова
В. В. Ясінський

ГЕОМЕТРІЯ СТАРШОКЛАСНИКАМ І АБІТУРІЄНТАМ

Повторюємо,
узагальнюємо,
заглиблюємося!

Схвалено Міністерством освіти і науки України

ФАКТ
ВИДАВНИЦТВО
Київ · 2008

УДК 514(075)
ББК 22.14я7
А76

Схвалено до використання
у навчально-виховному процесі
(протокол №4 від 8 листопада 2006 року
засідання комісії з математики
Науково-методичної ради
з питань освіти Міністерства освіти і науки України).

Рецензенти:

член-кореспондент НАН України В. С. Мельник;

учитель-методист ліцею «Поділ» м. Києва
заслужений учитель України М. М. Фридман

Навчальний посібник містить комплект опорних схем з планіметрії та стереометрії, що допоможе старшокласникам і абітурієнтам повторити опорні факти шкільного курсу геометрії, узагальнити їх, поглибити знання предмета, навчитися розв'язувати геометричні задачі.

Чітке, лаконічне наочне подання навчального матеріалу у вигляді опорних конспектів дозволить це зробити швидко, полегшить визначення головної (опорної) інформації, її запам'ятовування і використання при розв'язуванні задач, допоможе навчитися записувати розв'язання задач скороченою математичною мовою.

Може бути використаний старшокласниками загальноосвітніх навчальних закладів, ліцеїв, гімназій, класів з поглибленим вивченням математики, а також абітурієнтами з метою узагальнення й поглиблення знань шкільного курсу геометрії, підготовки до вступних іспитів до вищих навчальних закладів і математичних змагань.

ISBN 966-359-139-0

ПЕРЕДМОВА

Цей навчальний посібник допоможе старшокласникам і абітурієнтам повторити теореми і опорні факти шкільного курсу геометрії, узагальнити їх, поглибити знання предмету, навчитися розв'язувати геометричні задачі. Чітке, лаконічне наочне подання навчального матеріалу в вигляді опорних конспектів (ОК) дозволяє це зробити швидко, полегшує виділення головної (опорної) інформації, її запам'ятовування і використання при розв'язуванні задач, допомагає навчитися записувати розв'язання задач скороченою математичною мовою.

На початку посібника наводиться логічна схема побудови геометрії, пропонуються для повторення аксіоми геометрії (планіметрії і стереометрії).

Наприкінці розміщено словник позначень і скорочень, що використовуються у посібнику й за допомоги яких моделювання розв'язування задач можна зробити чітким, коротким, зберегти час на його запис на іспитах.

Опорні конспекти «Скарбничка теорем шкільного курсу планіметрії» і «Скарбничка теорем шкільного курсу стереометрії» пропонують для повторення твердження, які вивчаються за державною програмою в курсі геометрії загальноосвітніх навчальних закладів. Окремо розглядаються основні опорні задачі планіметричної побудови і побудови перерізів просторових фігур.

Особлива увага приділяється темам, розв'язування задач за якими традиційно викликає труднощі в абітурієнтів, наприклад, таким, як метод координат, вектори, геометричні перетворення, перехід між кутами у правильних пірамідах тощо.

З метою формування навичок розв'язування задач читачам пропонується система опорних задач з певних тем (опорні задачі трапеції, опорні задачі кола, деякі ГМТ у просторі тощо); виділено окремими конспектами застосування певних методів розв'язування, таких, як метод координат, векторний метод, метод площ, використання подібності трикутників, геометричних перетворень тощо.

Узагальнювальні опорні конспекти, наприклад, такі, як «Опорні факти про R та r трикутника», «Опорні факти про довжини відрізків у трикутнику», «Опорні задачі про кути між лінійними елементами трикутника», «Опорні задачі трапеції», «Дещо про деякі піраміди» тощо, дозволять не тільки систематизувати і узагальнити знання з певних тем, але й допоможуть легко задіяти їх для пошуку розв'язування задач.

Зауважимо таке:

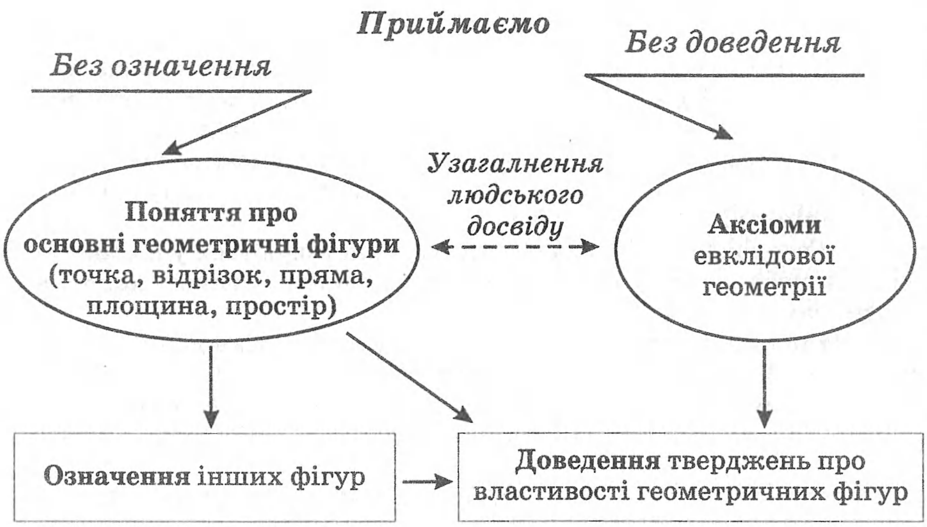
опорні факти, тобто відомі математичні твердження, що зазвичай можна використовувати на іспитах і математичних змаганнях без доведення, виділено піктограмою $\boxed{\text{О.Ф.}}$.

опорні задачі позначено піктограмою $\boxed{\text{О.З.}}$.

теореми і твердження-наслідки мають за піктограми відповідно $\boxed{\text{Т}}$ і $\boxed{\text{Н}}$.

твердження і опорні конспекти підвищеної складності позначено зірочкою *.

ОК-1
ЛОГІЧНА СХЕМА ПОБУДОВИ ГЕОМЕТРІЇ



Аксіома – приймається без доведення.

Теорема – доводиться логічним міркуванням (доведенням).

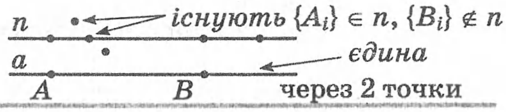
Доведення – спирається на аксіоми і твердження, доведені раніше; складається з логічних кроків.

Логічний крок:

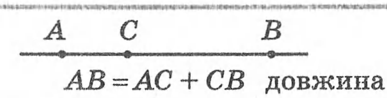
1. Вихідне твердження (декілька тверджень);
2. «Тоді»;
3. Твердження-висновок.

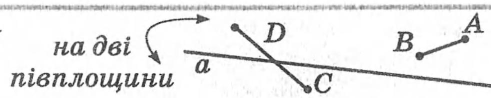
АКСІОМИ

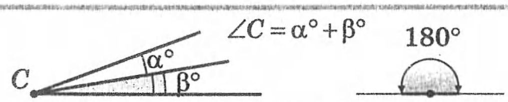
ПЛАНІМЕТРІЇ

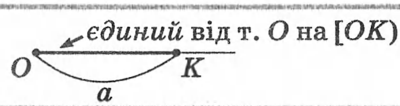
A-I


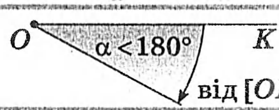
A-II


A-III


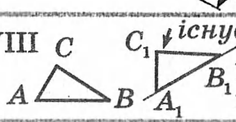
A-IV


A-V


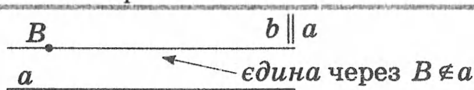
A-VI


A-VII


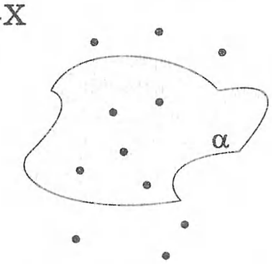
єдиний у півплощині від $[OK)$ з вершиною O

A-VIII


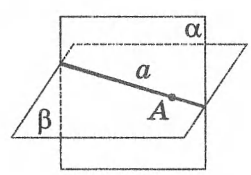
$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ у заданому розміщенні відносно a

A-IX


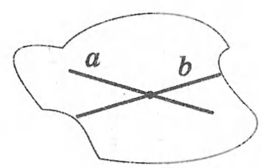
СТЕРЕОМЕТРІЇ

A-X


α – довільна:
існують $\{A_i\} \subset \alpha$;
існують $\{B_i\} \not\subset \alpha$.

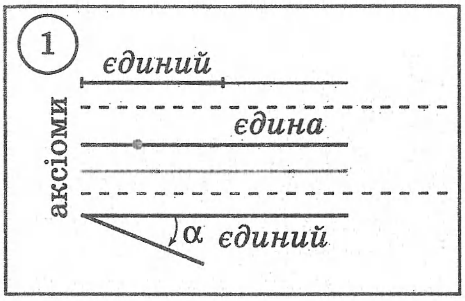
A-XI


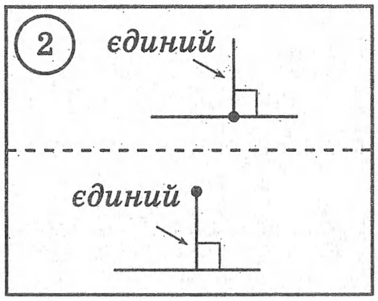
$A \in \alpha$ $A \in \beta$	$\Rightarrow \alpha \cap \beta = a$, $A \in a$.

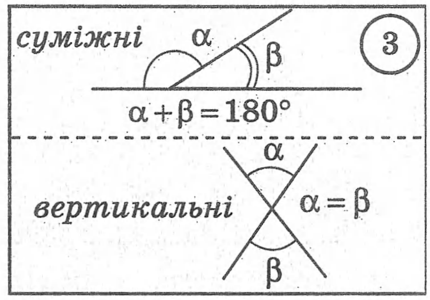
A-XII


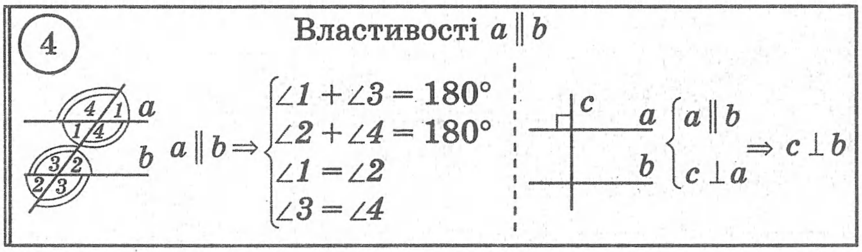
$a \cap b \Rightarrow \alpha \supset \{a; b\}$,
α – *єдина*.

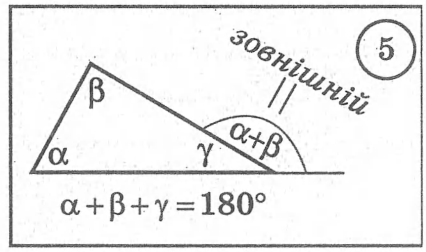
ОК-2
Скарбничка теорем шкільного курсу планіметрії

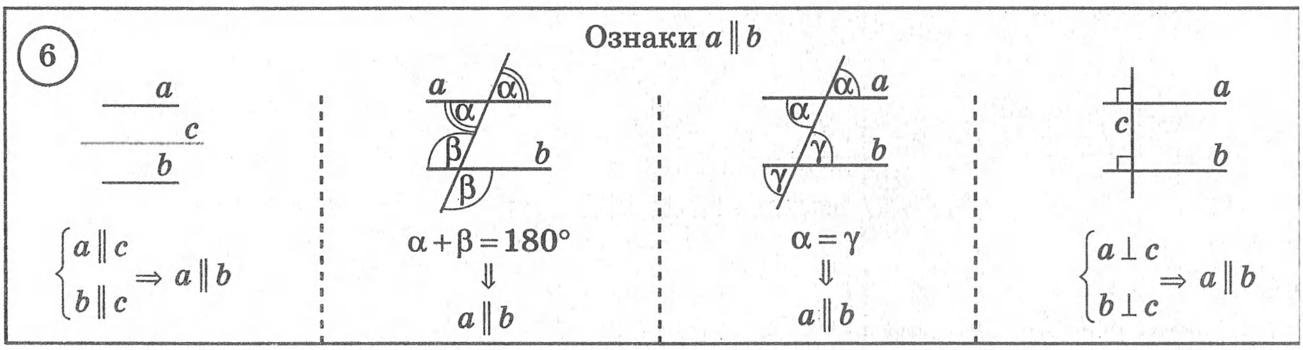


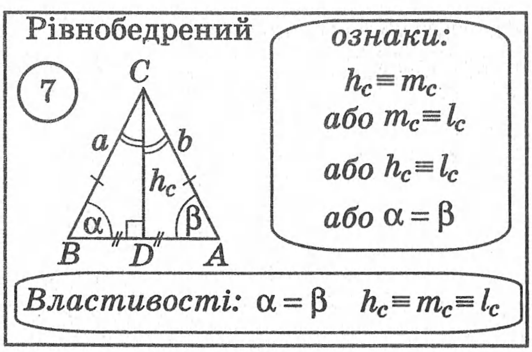


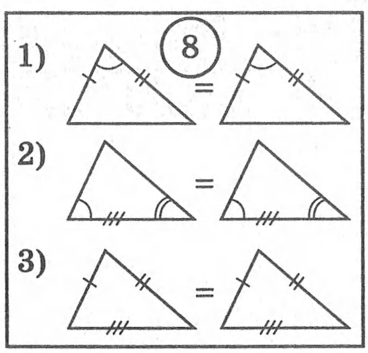


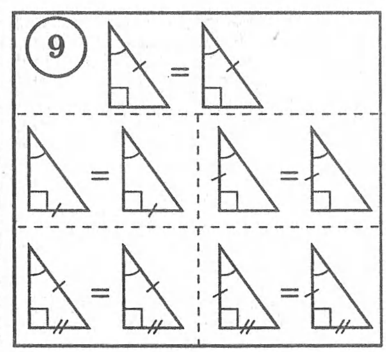


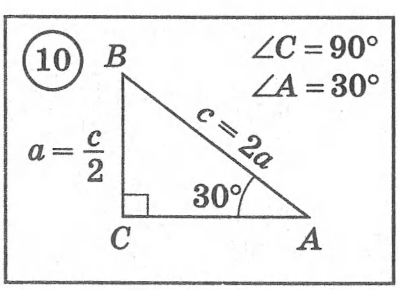


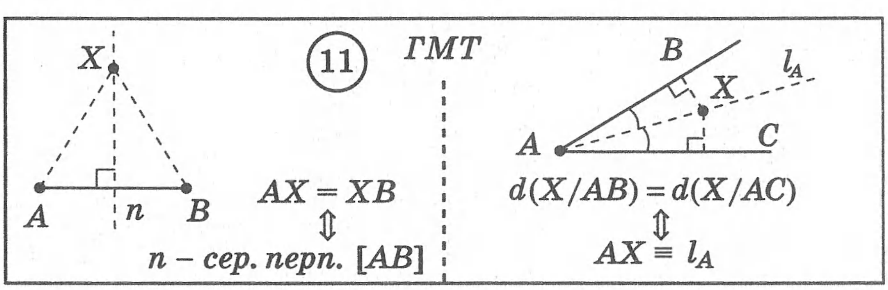






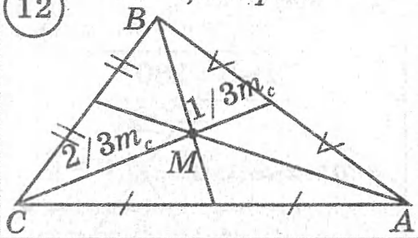




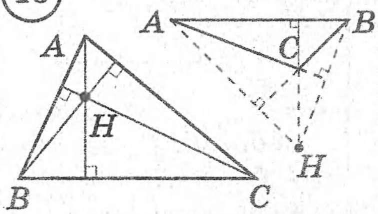


ОК-3
Скарбничка теорем шкільного курсу планіметрії

12 *M – центроїд*

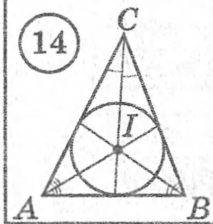


13 *H – ортоцентр*

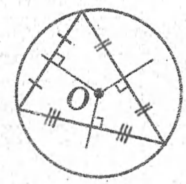


I – інцентр

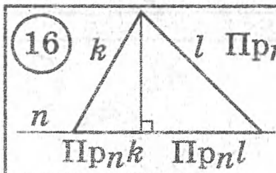
14



15



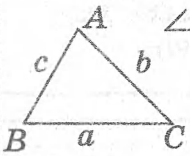
16



Пр$_n k \leqslant$ Пр$_n l$

$\downarrow \quad \uparrow$

$k \leqslant l$



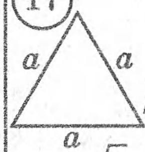
$\angle A > \angle C \leftrightarrows a > c$

$|b-c| < a < b+c$

$|a-c| < b < a+c$

$|a-b| < c < a+b$

17



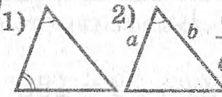
$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

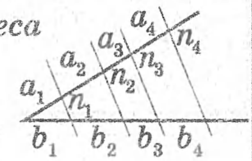
18 *Ознаки подібності*

1) 2)



$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ 3) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

22 *Теорема Фалеса*

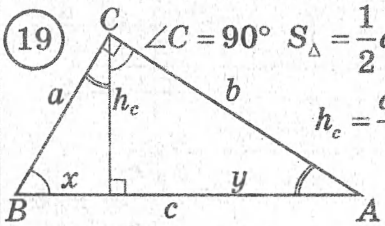


$n_1 \parallel n_2 \parallel n_3 \parallel n_4$

пряма $\Downarrow\Uparrow$ *обернена*

$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = b_1 : b_2 : b_3 : b_4$

19



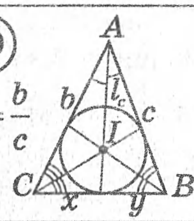
$\angle C = 90°$ $S_\Delta = \frac{1}{2}ab$

$h_c = \frac{ab}{c}$

$h_c = \sqrt{xy};$ $a = \sqrt{cx};$ $b = \sqrt{cy}$

20

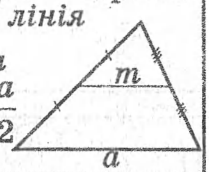
$\frac{x}{y} = \frac{b}{c}$



21 *m — середня лінія*

$m \parallel a$

$m = \frac{a}{2}$



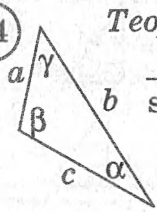
23 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow \angle A = \angle A_1;$

$\angle B = \angle B_1;\ \angle C = \angle C_1;$

$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k = \frac{m_a}{m_{a_1}} = \frac{l_B}{l_{B_1}} = \frac{h_C}{h_{C_1}}$

– відношення відповідних лінійних елементів; $\boxed{\frac{S}{S_1} = k^2.}$

24 *Теорема синусів*



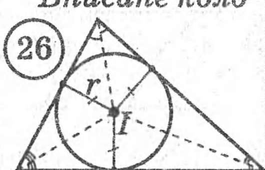
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Теорема косинусів

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Вписане коло

26



$O \equiv I$ $r = \frac{S}{p}$

описаного кола

$r = \frac{a+b-c}{2}$

$R = \frac{c}{2}$

$AO = OB = m_c = R$

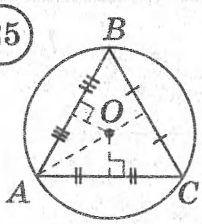
27

$S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin(a\hat{}b) = pr = \frac{abc}{4R}$

$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *– формула Герона*

Описане коло $R = \frac{a}{2\sin A}$

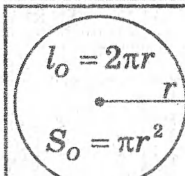
25



$R = \frac{abc}{4S}$

O – точка перетину серединних перпендикулярів до сторін

28



$l_O = 2\pi r$

$S_O = \pi r^2$

1 *радіан* $= \frac{180°}{\pi} \approx 57°18'$

$1° = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017$ *радіан*

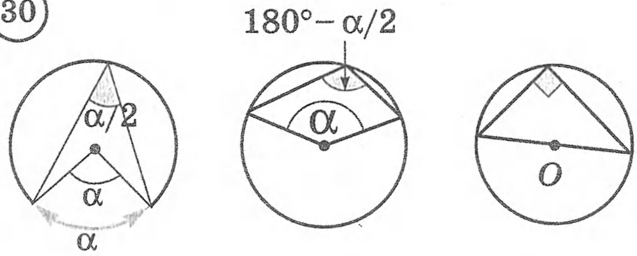
29

сектор

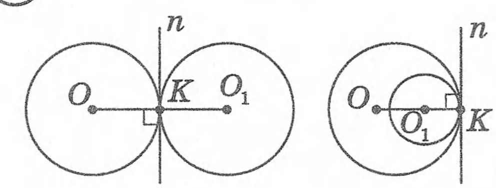
$S = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot \alpha°$

ОК-4
Скарбничка теорем шкільного курсу планіметрії

30

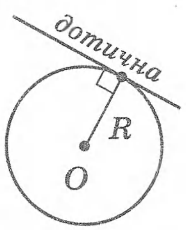


31 *Дотичні кола*

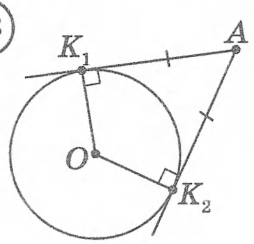


$K \in OO_1; \quad n \perp OO_1$

32

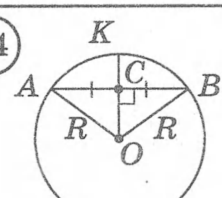


33



$AK_1 = AK_2$

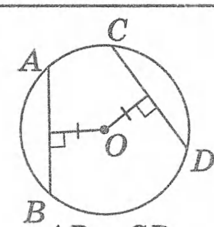
34



$OK \perp AB$

$\downarrow \quad \uparrow$

$AC = CB$

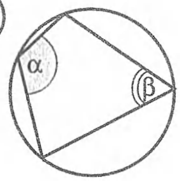


$AB = CD$

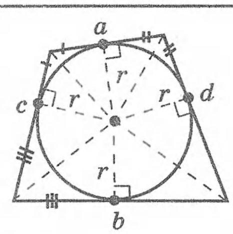
$\downarrow \quad \uparrow$

$d(O/AB) = d(O/CD)$

35

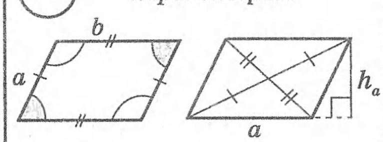


$\alpha + \beta = 180°$



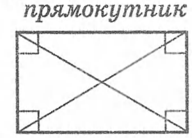
$S = pr \qquad a + b = c + d$

36 *паралелограм*



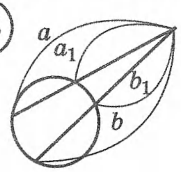
$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2 \qquad S = a \cdot h_a$

37 *прямокутник*

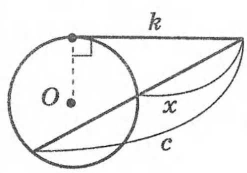


$d_1 = d_2 \quad S = a \cdot b$

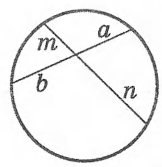
38



$aa_1 = bb_1$

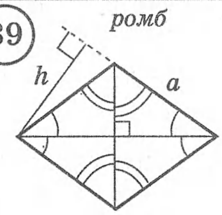


$k^2 = xc$



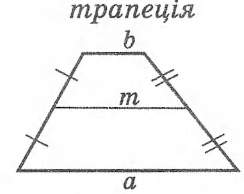
$mn = ab$

39 *ромб*



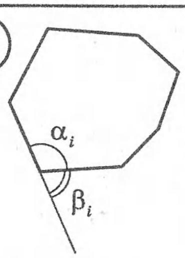
$S = a \cdot h$

трапеція



$m = \dfrac{a+b}{2} \qquad m \parallel a \parallel b$

40



$\sum_i \alpha_i = 180°(n-2)$

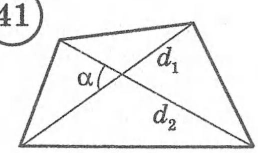
$\sum_i \beta_i = 360°$

Правильний багатокутник

$R_n = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$

$r_n = \dfrac{a}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}}$

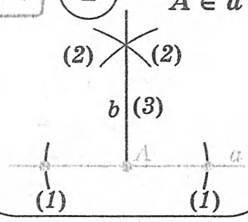
41



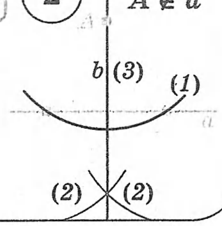
$S = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\alpha$

ОК-5
Основні опорні задачі на побудову

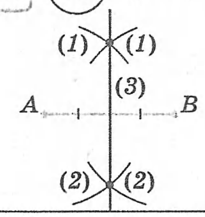
О.З. 1 $b \perp a$, $A \in a$



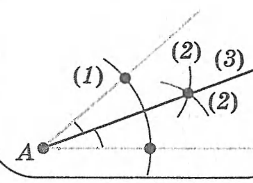
О.З. 2 $b \perp a$, $A \notin a$



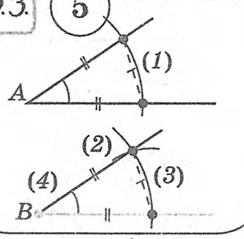
О.З. 3 $[AB] : 2$



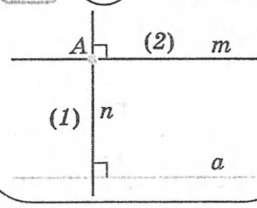
О.З. 4 $\angle A : 2$



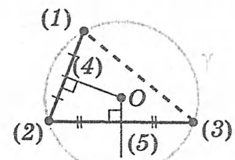
О.З. 5 $\angle B = \angle A$



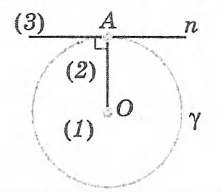
О.З. 6 $m \parallel a$ через $A \notin a$



О.З. 7 т. O центр γ

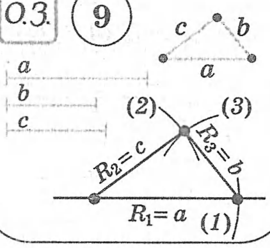


О.З. 8 n – дотична до γ у точці A

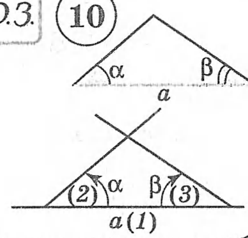


* БАЗОВІ ТРИКУТНИКИ

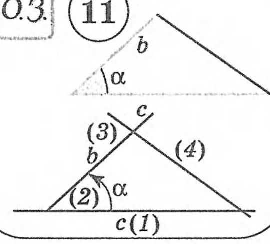
О.З. 9



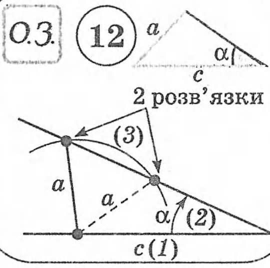
О.З. 10



О.З. 11

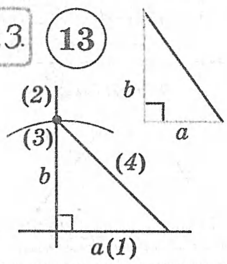


О.З. 12

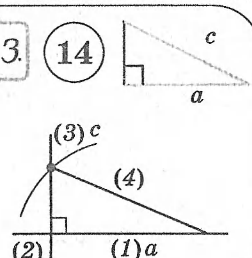


* БАЗОВІ ПРЯМОКУТНІ ТРИКУТНИКИ

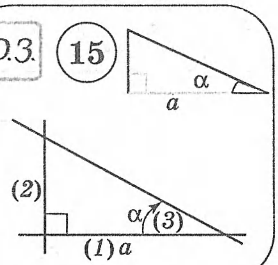
О.З. 13



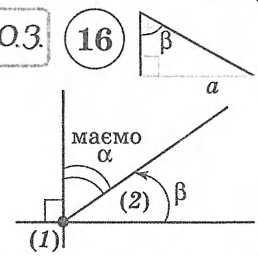
О.З. 14



О.З. 15

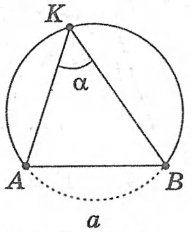


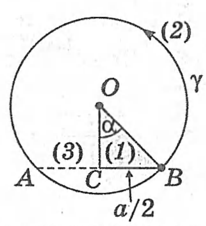
О.З. 16



О.З. 17 **Геометричне місце точок, з яких даний відрізок видно під заданим кутом (сегмент, що вміщує заданий кут)**

Будуємо $\smile AKB$ за a і α





План побудови:

1) $a \to \dfrac{a}{2}$;

2) $\dfrac{a}{2}, \alpha \to \Delta OCB \left(\angle C = 90°; CB = \dfrac{a}{2}; \angle O = \alpha\right)$;

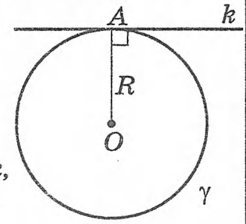
3) т. O, $OB \to \gamma$ (O – центр, $R = OB$);

4) $[CB] \to (AB)$.

ОК-6
Задачі на побудову і запис їх розв'язання

Див. ОК–5

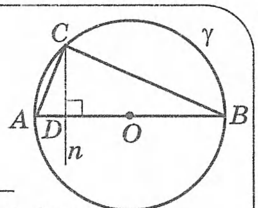
О.З. 19 ***Дано*** : γ; $A \in \gamma$. ***Побудувати***: k – *дотична до* γ; $A \in k$.



Побудова.
1) $\gamma \to$ т. O;
2) $O, A \to (OA)$;
3) $(OA), A \to k \perp (OA), A \in k$, k – шукана.

Доведення.
За побудовою: $OA \equiv R$, $k \perp OA$ в т. A. Існує єдина $k \perp (OA)$ в т. A . Тоді дотична $k' \equiv k$ (бо $k' \perp OA$), щ.в.д.

О.З. 21

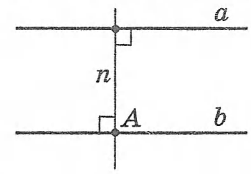


Дано : a, b. ***Побудувати***: $x = \sqrt{ab}$.

Побудова.
1) $a, b \to \dfrac{a+b}{2}$;
2) $\dfrac{a+b}{2} \to \gamma\left(R = \dfrac{a+b}{2}\right)$;
3) на $[AB] \equiv 2R \to [AD] = a \to D$;
4) $AB, D \to n \perp AB$, $D \in n$, $n \cap \gamma = C$, $[CD]$ – шуканий.

Доведення.
1) $AB = 2R \to \angle ACB = 90°$;
2) $\left.\begin{array}{l} \angle C = 90° \\ CD \perp AB \\ AD = a \\ AB = \dfrac{a+b}{2} \end{array}\right| \begin{array}{l} DB = a+b-a = b \\ \to CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \\ = \sqrt{ab}, \text{ щ.в.д.} \end{array}$

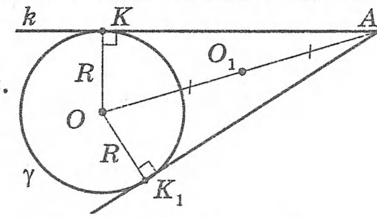
О.З. 18 ***Дано***: a; $A \notin a$. ***Побудувати***: $b \parallel a$; $A \in a$.



Побудова.
1) $A, a \to n \perp a, A \in n$;
2) $A, n \to b \perp n, A \in b$.

Доведення. За побудовою: $\left.\begin{array}{l} b \perp n \\ a \perp n \end{array}\right| \Rightarrow b \parallel a$. Щ.в.д.

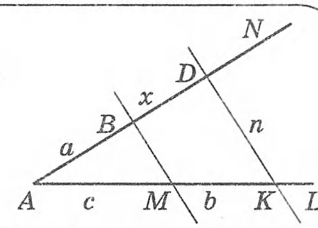
О.З. 20 ***Дано***: γ; $A \notin \gamma$. ***Побудувати***: k – *дотична*; $A \in k$.



Побудова.
1) $OA \to \dfrac{OA}{2} \to O_1$;
2) $O_1, O, A \to \gamma_1$ ($R_1 = O_1A$, центр O_1), $\gamma_1 \cap \gamma = \{K; K_1\}$.
(AK) і (AK_1) – шукані 2 розв'язки.

Доведення.
1) $\{O; A; K\} \subset \gamma_1$, $OA = 2R_1 \to \angle OKA = 90°$.
2) Нехай k – дотична до γ у т. $K \to k \perp OK$, але $(AK) \perp OK$ тоді $(AK) \equiv k$ (бо до OK у т. K можна провести лише один перпендикуляр). Щ.в.д. Аналогічно AK_1 – дотична.

О.З. 22 ***Дано***: a, b. ***Побудувати***: $x = \dfrac{a \cdot b}{c}$.

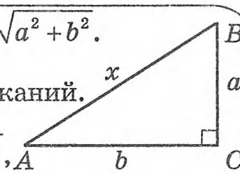


Побудова.
1) $\angle NAL$ – довільний;
2) На $[AL)$: $AM = c$; $MK = b$;
3) На $[AN)$: $AB = a$;
4) $n \parallel (BM)$, $K \in n \to n \cap (AN) = D$, $[BD]$ – шуканий.

Доведення.
За побудовою: $\left.\begin{array}{l} AB = a; AM = c; MK = b \\ BM \parallel DK \end{array}\right| \to \dfrac{a}{c} = \dfrac{BD}{b}$ і $BD = \dfrac{ab}{c}$.
Щ.в.д.

О.З. 23 ***Дано***: a, b. ***Побудувати*** $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Побудова.
$a, b \to \triangle ABC$ (за двома катетами), AB – шуканий.

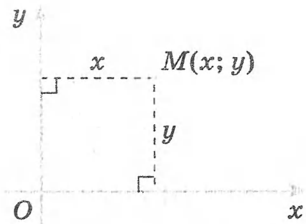


Доведення.
За побудовою $\left.\begin{array}{l} AC = b; CB = a; \\ \angle A = 90° \end{array}\right| \to x = \sqrt{a^2 + b^2}$, щ.в.д.

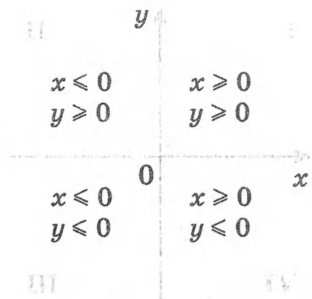
Записуючи розв'язання задач на побудову, потрібно пам'ятати, що:

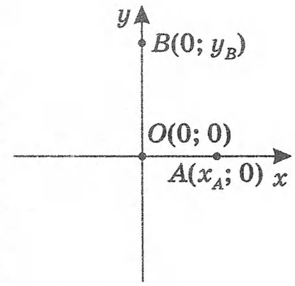
- *аналіз*, тобто міркування в процесі пошуку способів розв'язання (коли учень «зробив вигляд», що шукана побудова відбулася), є особливою справою учня і не є обов'язковим елементом запису розв'язання;
- обов'язковими є *запис етапів побудови* та *доведення* того, що отримана фігура є шуканою;
- бажано провести *дослідження* того, коли відповідна побудова можлива, а коли ні, проте це робити не обов'язково (мається на увазі, що за даних в умові параметрів шукана побудова можлива);
- у *записі етапів побудови* можна спиратися на опорні факти (опорні задачі) побудови (в деталізацію яких учень при розв'язанні може не вдаватися).

ОК-7
Прямокутна система координат Декарта

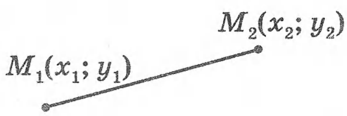


(x; y) – координати точки M:
x – абсциса, y – ордината



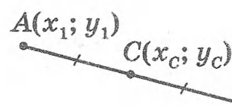


ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ



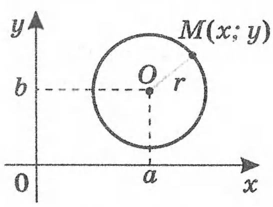
$$\boxed{M_1M_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$$

КООРДИНАТИ СЕРЕДИНИ ВІДРІЗКА



$$\boxed{x_C=\frac{x_1+x_2}{2};\ y_C=\frac{y_1+y_2}{2}}$$

РІВНЯННЯ КОЛА



$O\ (a;\ b)$ – центр, r – радіус

$$MO=\text{const}=r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

$$x^2+y^2+nx+my+p=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2\frac{n}{2}x+\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2+y^2+2\frac{m}{2}y+\left(\frac{m}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2+p=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{n}{2}\right)^2+\left(y+\frac{m}{2}\right)^2=\underbrace{\frac{n^2}{4}+\frac{m^2}{4}-p}_{=R^2}.$$

$R^2>0$ – коло, $R^2=0$ – точка, $R^2<0$ – порожня множина.

КООРДИНАТИ ТОЧКИ, ЯКА ДІЛИТЬ ВІДРІЗОК У ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ

За теоремою Фалеса: $\dfrac{A_1C_1}{C_1B_1}=\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{n}{m},\ \left|\dfrac{x-x_1}{x_2-x}\right|=\dfrac{n}{m}.$

Можливі два випадки: $x_2>x>x_1$ або $x_1>x>x_2$.

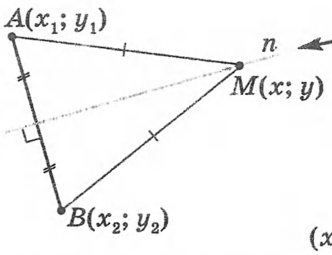
В обох: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x}>0$, тоді $\left|\dfrac{x-x_1}{x_2-x}\right|=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}=\dfrac{n}{m}$ і $x=\dfrac{nx_2+mx_1}{n+m}$.

Аналогічно: $y=\dfrac{ny_2+my_1}{n+m}$.

$$\boxed{|AC|:|CB|=n:m\Rightarrow C\left(\frac{nx_2+mx_1}{n+m};\ \frac{ny_2+my_1}{n+m}\right)}$$

$$\boxed{|AC|:|CB|=\lambda\Rightarrow C\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ \frac{y_2+\lambda y_1}{1+\lambda}\right)}$$

ОК-8
Рівняння прямої



За побудовою $[AB]$: задана пряма n – серединний перпендикуляр до $[AB]$.

$$AM^2 = BM^2$$

$$\Downarrow$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\overbrace{2(x_1 - x_2)}^{a}x + \overbrace{2(y_1 - y_2)}^{b}y + \overbrace{x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2}^{c} = 0.$$

$$\Downarrow$$

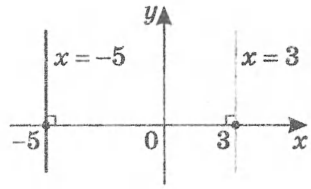
$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

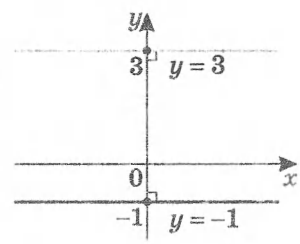
Пам'ятаємо:

- тільки **за умови $b \neq 0$** рівняння прямої $ax + by + c = 0$ можна записати у вигляді $y = kx + l$, графік – не паралельний осі Oy;
- **при $b = 0$** маємо пряму, паралельну осі Oy, її рівняння $x = m$ не можна представити у вигляді $y = kx + l$;
- **при $a = 0$** маємо пряму, паралельну осі Ox, її рівняння $y = l$;
- **при $c = 0$** маємо рівняння прямої пропорційності $y = kx$.

$ax + by + c = 0$

$b = 0 \to x = \text{const}$ $\qquad$ $a = 0 \to y = \text{const}$





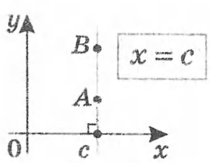
РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДВІ ЗАДАНІ ТОЧКИ $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$

Випадок 1.

$$\underline{x_1 = x_2 \triangleq c}$$

$$\Downarrow$$

$$(AB) \parallel Oy$$



$\boxed{x = c}$

Випадок 2.

$$\underline{x_1 \neq x_2}$$

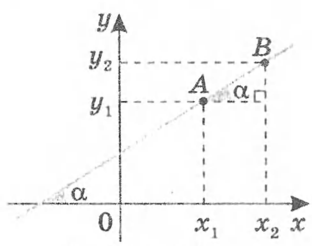
$$\Downarrow$$

$$(AB) \nparallel Oy$$

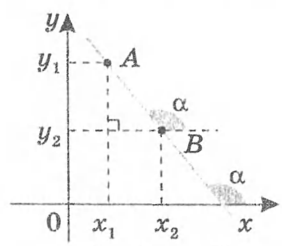
$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + l, \\ y_2 = kx_2 + l. \end{cases}$$

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$\boxed{k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$



$k = \text{tg}\alpha > 0$



$k = \text{tg}\alpha < 0$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$

k – кутовий коефіцієнт прямої $y = kx + l$

НЕОБХІДНА І ДОСТАТНЯ УМОВА НАЛЕЖНОСТІ ТРЬОХ ТОЧОК ОДНІЙ ПРЯМІЙ

Т **Необхідною і достатньою умовою розміщення трьох точок $C(x; y)$, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ на одній прямій є виконання співвідношень**

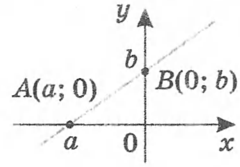
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

(Тобто існує таке число λ, що вказані співвідношення виконуються.)

Н *Рівняння прямої у відрізках.* **Рівняння прямої, яка проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ і яка не паралельна осям координат ($x \neq x_2$ і $y \neq y_2$), можна записати у вигляді** $\boxed{\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$.

$$\Rightarrow$$

$$(AB): \; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



ОК-9
Взаємне розміщення двох прямих на координатній площині

ПРЯМІ ЗБІГАЮТЬСЯ

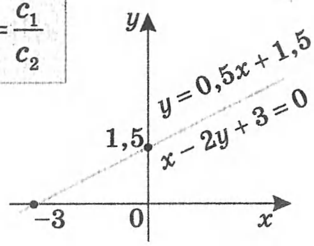
$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \Leftrightarrow a_2x + b_2y + c_2 = 0$ – відрізняються множенням на число.

$$\boxed{\lambda = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

$2x - 4y + 6 = 0 \,|:2$

$x - 2y + 3 = 0$

$2 = \frac{2}{1} = \frac{-4}{-2} = \frac{6}{3}.$



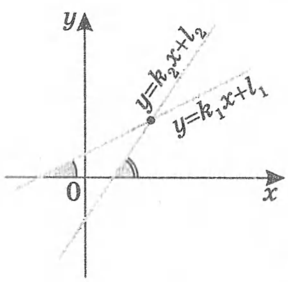
ПРЯМІ ПАРАЛЕЛЬНІ

$$\boxed{a_{1,2} = 0 \text{ або } b_{1,2} = 0}$$

Якщо $\begin{cases} a_1 = a_2 = 0, \\ b_{1,2} \neq 0, \end{cases}$ то $y = -\frac{c_1}{b_1} \parallel y = -\frac{c_2}{b_2}.$

Якщо $\begin{cases} b_1 = b_2 = 0, \\ a_{1,2} \neq 0, \end{cases}$ то $x = -\frac{c_1}{a_1} \parallel x = -\frac{c_2}{a_2}.$

ПРЯМІ ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ



$a_{1,2} \neq 0$ і $b_{1,2} \neq 0$

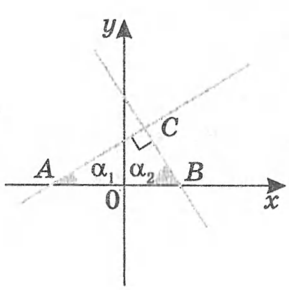
$k_1 \neq k_2$

$\Downarrow$

$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}}$

якщо $a_{1,2} \neq 0$ і $b_{1,2} \neq 0.$

ПРЯМІ ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ



$\alpha_1 = 90° - \alpha_2$

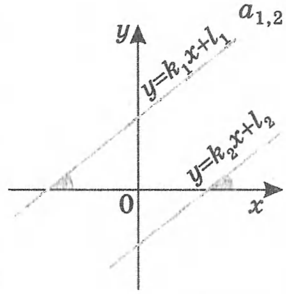
$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}(90° - \alpha_2) =$

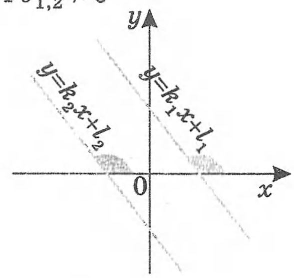
$= \operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{1}{-k_2}.$

$$\boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}}$$

ПРЯМІ ПАРАЛЕЛЬНІ

$a_{1,2} \neq 0$ і $b_{1,2} \neq 0$





$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

$k_1 = -\frac{a_1}{b_1} = k_2 = -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}}$

якщо $a_{1,2} \neq 0$ і $b_{1,2} \neq 0.$

$\Downarrow$

СИСТЕМА ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ $(a_{1,2} \neq 0;\ b_{1,2} \neq 0)$:

а) має безліч розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$;

б) не має розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

в) має єдиний розв'язок, якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Зауваження. Для того щоб знайти *координати точок перетину прямої з колом*, треба розв'язати систему рівнянь, одне з яких є рівнянням даної прямої, а друге – рівнянням заданого кола. Можливі такі випадки:

а) система має два розв'яки – пряма перетинає коло;

б) система має один розв'язок – пряма дотикається до кола;

в) система не має розв'язків – пряма і коло не мають спільних точок.

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b) = r^2 \\ y = kx + l \end{cases} \Rightarrow (x-a)^2 + (kx + k - b)^2 = r^2:$

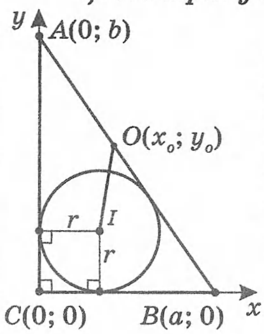
$D > 0$ – перетинаються;

$D = 0$ – дотикаються;

$D < 0$ – не мають спільних точок.

ОК-10
Метод координат як спосіб розв'язування задач

1 ***Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Знайдіть відстань між центрами вписаного і описаного кіл цього трикутника.***



Як відомо, центром вписаного у трикутник кола є точка перетину його бісектрис, а центр описаного навколо прямокутного трикутника кола O збігається із серединою гіпотенузи. Тоді маємо таку задачу.

Дано: $\angle C = 90°$, $CB = a$, $AC = b$, $AO = OB$, I – інцентр.

Знайти: OI.

1) Розмістимо початок координат у точці C, а осі Ox і Oy спрямуємо вздовж катетів трикутника. Тоді $A(0;\ b)$, $B(a;\ 0)$, $C(0;\ 0)$, $I(r;\ r)$, $O(x_o;\ y_o)$ – середина $[AB]$ і $x_o = \dfrac{a}{2}, y_o = \dfrac{b}{2}$.

2) $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, $c = \sqrt{a^2+b^2}$, тоді $OI^2 = (r-x_0)^2 +$

$(r-y_0)^2 = 2r^2 - 2r(x_o+y_o) + x_o^2 + y_o^2 =$

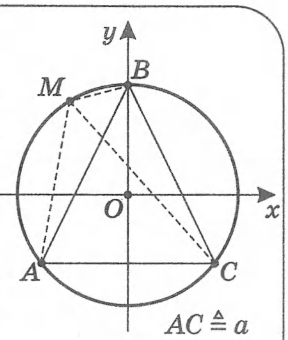
$2r(r - x_o - y_o) + x_o^2 + y_o^2 = (a+b-c)\left(-\dfrac{c}{2}\right) + \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} =$

$= \dfrac{c^2}{2} - \dfrac{a+b}{2}c + \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{3}{4}c^2 - \dfrac{a+b}{2}c.$

Відповідь: $\dfrac{1}{2}\sqrt{3(a^2+b^2) - 2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}$.

Для порівняння спробуйте розв'язати цю задачу без використання методу координат (якщо з точки I опустити перпендикуляр до CB, то він поділить катет на відрізки, довжини яких дорівнюють r і $a - r$. Тоді з утвореного прямокутного трикутника можна знайти IB та $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}$. Тепер з трикутника BOI за теоремою косинусів можна знайти OI, якщо виразити $\cos\dfrac{B}{2}$ через $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}$.).

2 ***Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин вписаного в нього правильного трикутника не залежить від положення точки на колі.***



Доведення

1) Оберемо центр кола O за початок координат і спрямуємо вісь Oy вздовж прямої OB:

$A\left(-\dfrac{a}{2}; -\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right), B\left(0; \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right), C\left(\dfrac{a}{2}; -\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right).$

2) $a = R\sqrt{3}$, тоді:

$A\left(-\dfrac{R\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{R}{2}\right), B(0; R), C\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{R}{2}\right).$

3) Корданати довільної точки $M(x; y)$ кола задовольняють рівняння кола, тобто $x^2 + y^2 = R^2$.

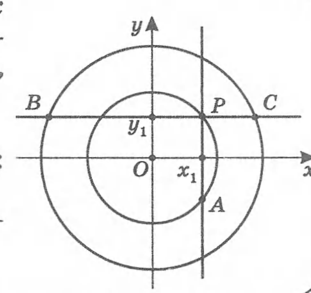
4) Маємо: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \left(x + \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 +$

$+\left(y + \dfrac{R}{2}\right)^2 + x^2 + (y - R) + \left(x - \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 +$

$+\left(y + \dfrac{R}{2}\right)^2 = 3(x^2+y^2) + 3R^2 = 6R^2,$

тобто не залежить від положення точки M на колі. Щ.в.д.

3 ***Через довільну точку P меншого з двох концентричних кіл, радіусів R і r провели пряму, яка перетинає більше коло у точках B і C. Перпендикуляр до (BC), проведений через точку P, перетинає менше коло в точці A. Знайдіть $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2$.***



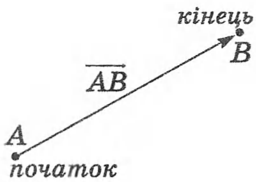
Розв'язання

1) Через центр O даних кіл проводимо вісі $Ox \parallel BC$ і Oy, тоді: $P(x_1;\ y_1)$, $A(x_1;\ -y_1)$, $C(x_2;\ y_1)$, $B(-x_2;\ y_1)$.

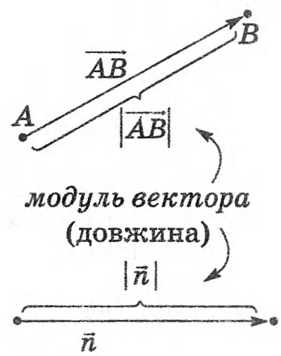
2) $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = (2y_1)^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 = 2(x_1^2 + y_1^2) + 2(x_2^2 + y_1^2) = 2r^2 + 2R^2$.

Відповідь: $2(r^2 + R^2)$.

ОК-11
Вектор як напрямлений відрізок

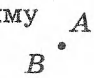


ВЕКТОР – напрямлений відрізок



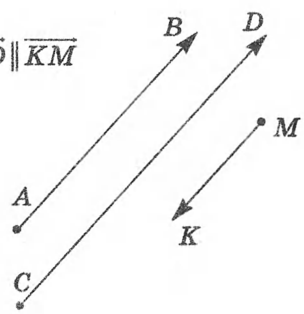
$\vec{0}$ – *нульовий вектор*

$|\vec{0}|=0$ не має напряму



КОЛІНЕАРНІ ВЕКТОРИ

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{KM}$

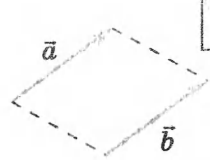


$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ – *однаково напрямлені*

$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{KM}$ – *протилежно напрямлені*

РІВНІ ВЕКТОРИ

$\boxed{\vec{a}=\vec{b}, \text{ якщо } \vec{a} \xrightarrow[\text{перенесенням}]{\text{паралельним}} \vec{b}}$



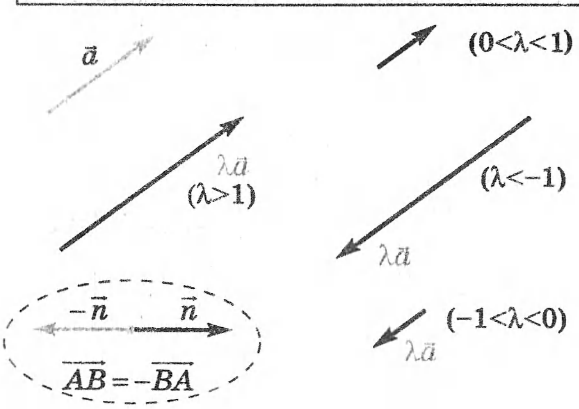
$\boxed{\vec{a}=\vec{b}, \text{ якщо } \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b} \text{ і } |\vec{a}|=|\vec{b}|}$

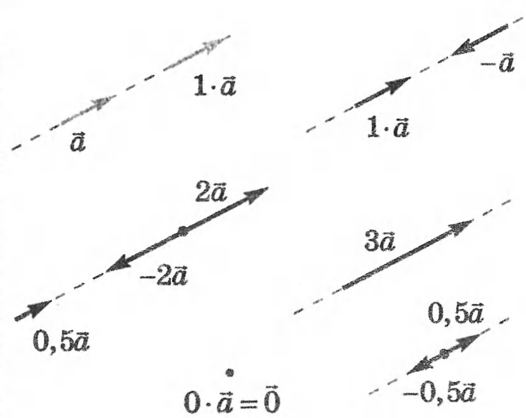
ВЛАСТИВОСТІ РІВНОСТІ ВЕКТОРІВ

1. $\vec{a}=\vec{a}$;
2. $\vec{a}=\vec{b}$ і $\vec{b}=\vec{c} \Rightarrow \vec{a}=\vec{c}$

МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

$$\boxed{\vec{c}=\lambda\vec{a}, \text{ якщо } |\vec{c}|=\lambda\cdot|\vec{a}| \text{ і } \begin{matrix}\vec{c}\uparrow\uparrow\vec{a} \text{ при } \lambda>0 \\ \vec{c}\uparrow\downarrow\vec{a} \text{ при } \lambda<0\end{matrix}}$$

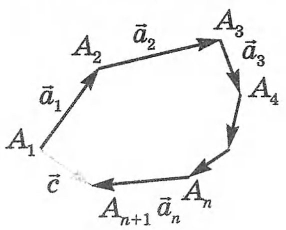


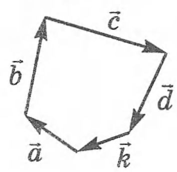


ОК-12
Додавання і віднімання векторів

ДОДАВАННЯ ВЕКТОРІВ

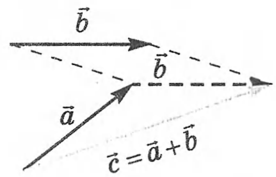
За правилом багатокутника:



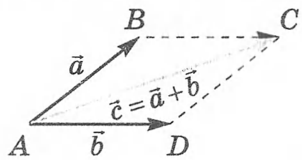


$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{k}=0$

За правилом трикутника:



За правилом паралелограма:

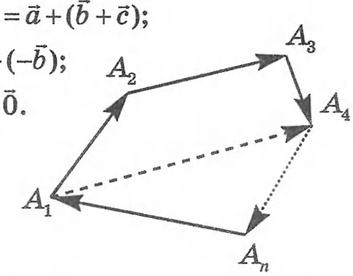


$ABCD$ – паралелограм

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$

ВЛАСТИВОСТІ СУМИ ВЕКТОРІВ

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
3. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$;
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

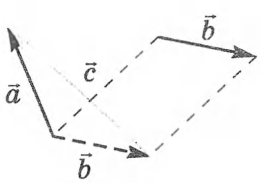


$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\ldots+\overrightarrow{A_nA_1}=\vec{0}$

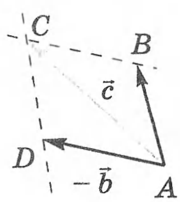
$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}=\overrightarrow{A_1A_4}$

ВІДНІМАННЯ ВЕКТОРІВ

За правилом трикутника:



За правилом паралелограма:



$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

$\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$

РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРА ЗА ДВОМА НЕКОЛІНЕАРНИМИ ВЕКТОРАМИ

$\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні

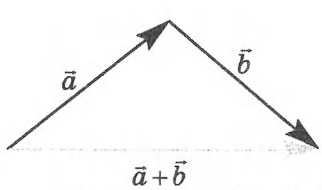
Проводимо $(BC)\parallel a$ і $(AC)\parallel b$

$\overrightarrow{BC}\parallel\vec{a}$, тоді $\overrightarrow{BC}=\lambda\vec{a}$,

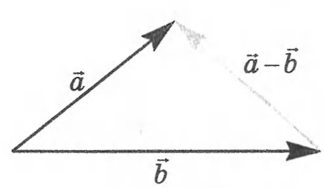
$\overrightarrow{CA}\parallel\vec{b}$, тоді $\overrightarrow{CA}=\mu\vec{b}$,

$\boxed{\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}}$

НЕРІВНОСТІ ТРИКУТНИКА ДЛЯ ВЕКТОРІВ



$\boxed{|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|}$

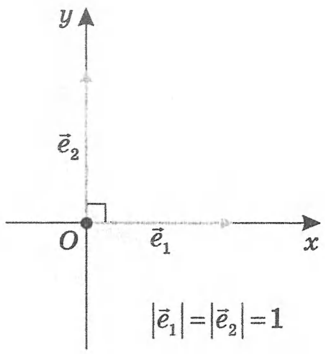


$\boxed{|\vec{a}-\vec{b}|\geqslant\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big|}$

$|\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$

$|\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{b}|\geqslant|\vec{a}|$

ОК-13
Вектор на координатній площині



$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$

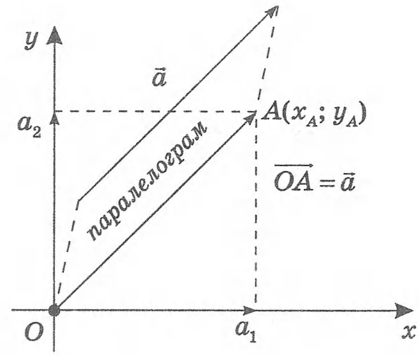
$\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ – координатні вектори, або *орти*

$\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$, тоді

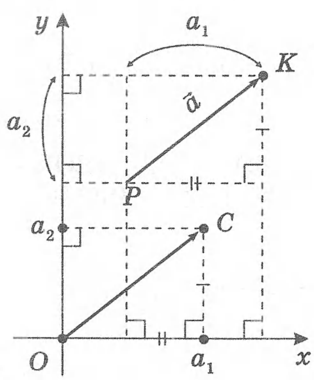
єдино можливим чином

$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e} + a_2\vec{e}$

a_1 і a_2 – *координати вектора*,
a_1 і a_2 визначаються однозначно.



Записують: $\vec{a}(a_1; a_2)$, або $\overrightarrow{OA}(a_1; a_2)$, або $\overrightarrow{(a_1; a_2)}$.



$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = x_K - x_P \\ a_2 = y_K - y_P \end{array}}$$

$\overrightarrow{PK}(a_1; a_2)$

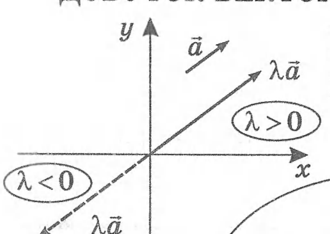
$\overrightarrow{OC} = \vec{a} = \overrightarrow{PK}$

$|\overrightarrow{PK}| = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

$$\boxed{|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

1. $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{(x_K - x_P; y_K - y_P)}$.
2. $\overrightarrow{PK} = -\overrightarrow{KP}; -\vec{a}(a_1; a_2) = \overrightarrow{(-a_1; -a_2)}$.
3. **Рівні вектори мають рівні координати** і навпаки, **якщо координати двох векторів однакові то ці вектори рівні.**
4. Нульові вектори мають нульові координати: $\vec{0}(0; 0)$.
5. Модуль вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ дорівнює $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

ДОБУТОК ВЕКТОРА НА ЧИСЛО



$$\boxed{\lambda\vec{a} = \overrightarrow{(\lambda a_1; \lambda a_2)}}$$

$\vec{a}$ і $\vec{b}$ *колінеарні* $\Leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a}$

$\dfrac{b_1}{a_1} = \lambda = \dfrac{b_2}{a_2}$

Властивості:
$\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$.

СУМА ВЕКТОРІВ

$$\boxed{\vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(b_1; b_2) = \overrightarrow{=(a_1 + b_1; a_2 + b_2)}}$$

Властивості:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
4. $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$
5. $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a} = (\lambda + \mu)\vec{a}$

РІЗНИЦЯ ВЕКТОРІВ

$$\boxed{\vec{a}(a_1; a_2) - \vec{b}(b_1; b_2) = \overrightarrow{=(a_1 - b_1; a_2 - b_2)}}$$

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

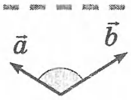
СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

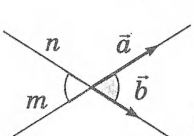
$$\boxed{\vec{a}(a_1; a_2) \cdot \vec{b}(b_1; b_2) \overset{def}{=} a_1b_1 + a_2b_2}$$

Властивості

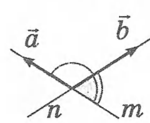
1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \triangleq \vec{a}^2$ – *скалярний квадрат*
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \vec{a}\hat{\ }\vec{b}$
5. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \ (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$

$\cos(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, може бути від'ємним.





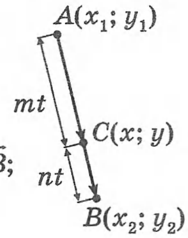
$\cos(n\hat{\ }m) = \left|\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right|$, не може бути від'ємним.



ОК-14
Векторний метод доведення теорем

Т Якщо $A(x_1;\ y_1)$ та $B(x_2;\ y_2)$ – кінці відрізка і $C(x;\ y)$ ділить відрізок AB у відношенні $AC : CB = m : n$, то

$$\boxed{x=\frac{nx_1+mx_2}{n+m};\ y=\frac{ny_1+my_2}{n+m}.}$$



Доведення

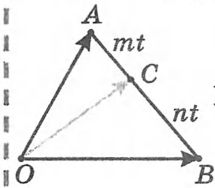
1) $|\overrightarrow{AC}|:|\overrightarrow{CB}|=m:n\rightarrow n\cdot\overrightarrow{AC}=m\cdot\overrightarrow{CB};$

2) $n\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{n(x-x_1);n(y-y_1)})$ і

$m\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{m(x_2-x);m(y_2-y)}).$

Тоді $\begin{cases}n(x-x_1)=m(x_2-x)\\ n(y-y_1)=m(y_2-y)\end{cases}$ Розв'язком системи є шукані значення x і y.

Н 1 Якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні $m:n$, рахуючи від точки A,



то $\boxed{\overrightarrow{OC}=\frac{1}{m+n}\left(n\cdot\overrightarrow{OA}+m\cdot\overrightarrow{OB}\right)}$

Нехай $O(0;\ 0)$, $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$.

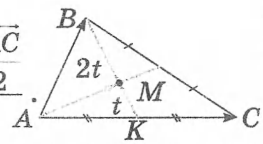
За теоремою $C\left(\frac{nx_A+mx_B}{m+n};\frac{ny_A+my_B}{m+n}\right).$

Тоді $\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{\frac{nx_A+mx_B}{m+n};\frac{ny_A+my_B}{m+n}}\right)=$

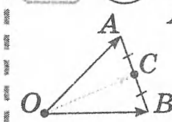
$=\frac{1}{m+n}\left(n\cdot\overrightarrow{OA}+m\cdot\overrightarrow{OB}\right).$ $\boxed{\frac{AC}{CB}=\lambda;\overrightarrow{OC}=\frac{1}{1+\lambda}\left(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}\right)}$

Н 2 Якщо M – центроїд трикутника ABC:

$$\boxed{\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right),}\quad \text{бо } \overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+2\frac{\overrightarrow{AC}}{2}}{2+1}.$$

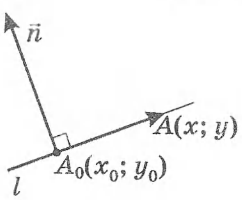


Н 3 У випадку, коли C – середина відрізка AB, тобто $m=n=1$:



$$\boxed{\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).}$$

Т ЯКЩО $\vec{n}\perp l$ – ПРЯМІЙ $ax+by+c=0$ $\quad \vec{n}=\lambda(\overrightarrow{a;b})$



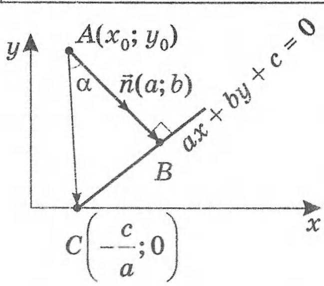
$\overrightarrow{A_0A}=(\overrightarrow{x-x_0;y-y_0}).$

$$\begin{array}{r}ax+by+c=0\\ -\ \ ax_0+by_0+c=0\\ \hline a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,\end{array}$$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_0A}=0.$ Щ.в.д.

Т ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ $(x_0;\ y_0)$ ДО ПРЯМОЇ $ax+by+c=0$

$$\boxed{d\left((x_0;y_0)/ax+by+c=0\right)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$



$d=|AB|=|AC|\cos\alpha,$

$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AC}|},$

$\overrightarrow{AC}\left(-x_0-\frac{c}{a};-y_0\right)$

$\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{n};\ \vec{n}=(\overrightarrow{a;b})$

$d=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\vec{n}|}=\frac{|-ax_0-c-by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$ Щ.в.д.

Т Три точки A, B і C лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли існують числа k, n, m такі, що $k+n+m=0$ $(k\neq0, n\neq0, m\neq0,)$ і для довільної точки O виконується співвідношення $k\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}=0$

Доведення

1. *Необхідність*

1) $\{A;B;C\}$ лежать на одній прямій $\Rightarrow \overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA};$

2) $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}\Rightarrow\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\lambda\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}\right);$

3) $\lambda OA+\underbrace{(1-\lambda)}_{n}OB+\underbrace{(-1)}_{m}OC=0\Rightarrow k+n+m=0.$

2. *Достатність*

1) $\begin{cases}k\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}=0\\ k+n+m=0\\ k\neq0,n\neq0,m\neq0\end{cases}\Rightarrow\ \frac{n+m}{k}=-1;\quad \overrightarrow{OC}=-\frac{k}{m}\overrightarrow{OA}-\frac{n}{m}\overrightarrow{OB}.$

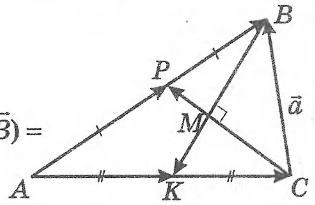
2) $\underbrace{\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}}_{\overrightarrow{BC}}=\overrightarrow{BO}-(k/m)\overrightarrow{OA}-(n/m)\overrightarrow{OB};$

$\overrightarrow{BC}=(k/m)\overrightarrow{AO}+\underbrace{\frac{n+m}{m}}_{-k/m}\overrightarrow{BO}=(k/m)\underbrace{(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})}_{\overrightarrow{AB}};$

3) $\overrightarrow{BC}=(k/m)\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{BC}\parallel AB$ і $\{A,B,C\}$ – на одній прямій.

ОК-15
Векторний метод розв'язування задач

1 Медіани BK і CP трикутника ABC взаємно перпендикулярні. Доведіть, що $\angle A < 45°$.



1) $\angle A = \overrightarrow{AP}\,\hat{}\,\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{AB} \triangleq \vec{c}$;

$\overrightarrow{AC} \triangleq \vec{b}$; $\overrightarrow{CB} \triangleq \vec{a}$; $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$.

2) За ОК-14: $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) =$

$= \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{c} - 2\vec{b})$;

3) $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(-\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - 2\vec{c})$.

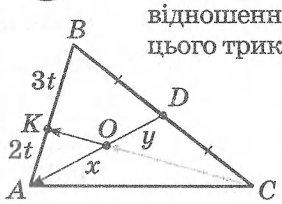
4) $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{BK} \Rightarrow \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BK} = 0$, тоді

$$(\vec{c} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} - 2\vec{c}) = 5\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{b}^2 - 2\vec{c}^2 = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{2}{5}(b^2 + c^2).$$

$$\cos A = \frac{2}{5} \cdot \frac{b^2 + c^2}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{2}{5}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geqslant \frac{4}{5}.$$

5) $\cos A \geqslant \frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$, Тоді $\angle A < 45°$. Щ. в. д.

3 У трикутнику ABC точка K ділить сторону AB у відношенні $AK : KB = 2 : 3$. У якому відношенні відрізок CK ділить медіану AD цього трикутника?



Дано: $AK : KB = 2 : 3$, $BD = DC$.
Знайти: $AO : OD$.

1) $AK : KB = 2 : 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}\left(3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}\right)$.

2) $\overrightarrow{CO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CK} \Rightarrow \overrightarrow{CO} = \lambda\overrightarrow{CK} = \frac{\lambda}{5}\left(3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}\right)$.

3) $AO : OD = x : y \Rightarrow \overrightarrow{CO} = \frac{1}{x+y}\left(y\overrightarrow{CA} + x\overrightarrow{CD}\right) =$

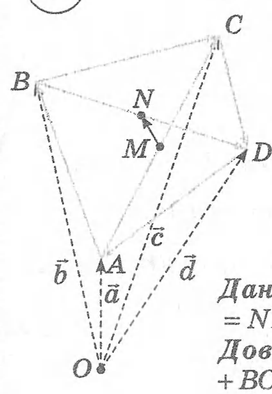
$= \frac{1}{x+y}\left(y\overrightarrow{CA} + x\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)$.

4) $$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x+y}\left(y\overrightarrow{CA} + x\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) = \\ = \frac{\lambda}{5}\left(3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}\right)\end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases}\frac{y}{x+y} = \frac{3\lambda}{5}, \\ \frac{x}{2(x+y)} = \frac{2\lambda}{5}.\end{cases}$$

5) Поділимо друге рівняння системи на перше: $\frac{x}{2y} = \frac{2}{3}$; $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$.

Відповідь: 4 : 3 (рахуючи від вершини A).

2* Доведіть, що сума квадратів усіх сторін чотирикутника дорівнює сумі квадратів його діагоналей плюс квадрат подвоєної відстані між серединами діагоналей.



Дано: $ABCD$, $BN = ND$, $AM = MC$.
Довести: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + (2MN)^2$.

Розглянемо точку O поза чотирикутником $ABCD$. Позначимо:

$\overrightarrow{OA} \triangleq \vec{a}, \overrightarrow{OB} \triangleq \vec{b}, \overrightarrow{OC} \triangleq \vec{c}, \overrightarrow{OD} \triangleq \vec{d}$.

1) $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{c} - \vec{b} = \overrightarrow{BC}$,

$\vec{d} - \vec{c} = \overrightarrow{CD}, \vec{a} - \vec{d} = \overrightarrow{DA}$,

$\vec{c} - \vec{a} = \overrightarrow{AC}, \vec{d} - \vec{b} = \overrightarrow{BD}$;

2) M і N – середини $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$, тоді (за ОК-14)

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}), \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d})$;

3) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$,

$2\overrightarrow{MN} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{a} - \vec{c}$;

4) Із (1) і (3) маємо, що треба довести співвідношення

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{d} - \vec{c}|^2 + |\vec{a} - \vec{d}|^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2 + |\vec{d} - \vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{a} + \vec{d} - \vec{c}|^2,$$

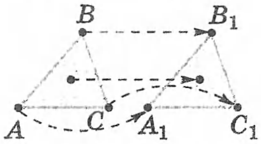
тобто

$$|\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{d}|^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2 + |\vec{d} - \vec{b}|^2 + 2(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{d} - \vec{c}).$$

Якщо використати те, що скалярний добуток вектора самого на себе дорівнює квадрату його модуля, то легко переконатися в тому, що останнє співвідношення виконується.

ОК-16
Геометричні перетворення

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

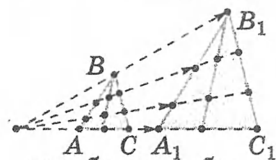


прообраз образ

Геометричним перетворенням називається відповідність, яка встановлюється між двома фігурами як сукупностями точок.

Для будь-якого геометричного перетворення існує *обернене перетворення*, коли прообраз і образ міняються місцями.

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$



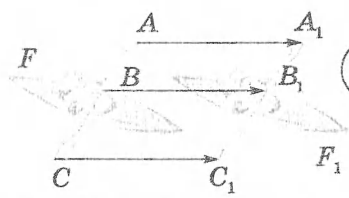
прообраз образ

Геометричні перетворення, які зберігають форму і розміри фігур, називають РУХОМ.

Перетворення рух зберігає довжини відрізків і міри кутів.

РУХ

ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ



$F \to F_1$ паралельним перенесенням

якщо:

$A \to A_1$

$B \to B_1$

...

$\begin{cases} AA_1 \parallel BB_1 \parallel \ldots \\ AA_1 = BB_1 = \ldots \end{cases}$

AA_1B_1B – паралелограм

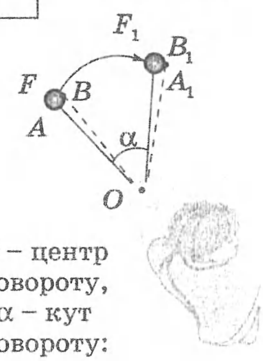
AA_1C_1C – паралелограм

BB_1C_1C – паралелограм

....

$AB \to A_1B_1$ і $AB = A_1B_1$, це – рух.

ПОВОРОТ



O – центр повороту, α – кут повороту:

$F \to F_1$ поворотом навколо т. O

якщо:

$A \to A_1$, $B \to B_1$, ...

$\begin{cases} OA\,\hat{}\,OA_1 = \alpha \\ OA = OA_1 \end{cases}$

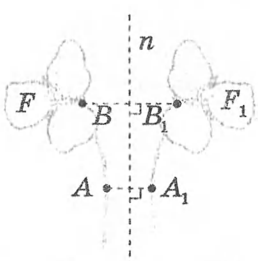
$\begin{cases} OB\,\hat{}\,OB_1 = \alpha \\ OB = OB_1 \end{cases}$

...

$AB \to A_1B_1$ і $AB = A_1B_1$, це – рух.

РУХ

ОСЬОВА СИМЕТРІЯ



n – вісь симетрії

$F \to F_1$ осьовою симетрією відносно n

якщо:

$A \to A_1$

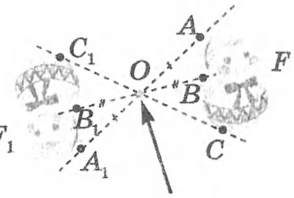
$AA_1 \perp n$

$d(A/n) = d(A_1/n)$

...

$AB \to A_1B_1$ і $AB = A_1B_1$, і це – рух.

ЦЕНТРАЛЬНА СИМЕТРІЯ



центр симетрії

$F \to F_1$ центральною симетрією відносно т. O

якщо:

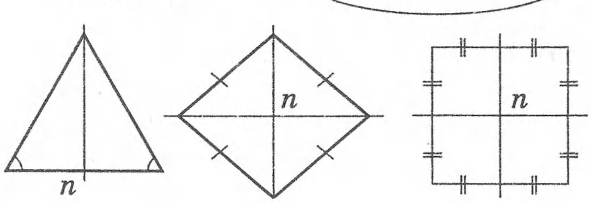
$\begin{cases} A_1 \in (AO) \\ AO = OA_1 \end{cases}$

...

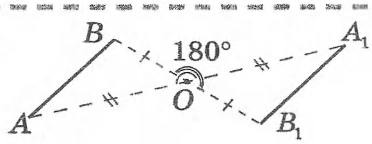
$AB \to A_1B_1$ і $AB = A_1B_1$, і це – рух.

F – симетрична відносно n

$F \to F$ сим. відносно n



Центральна симетрія – це поворот на 180°.



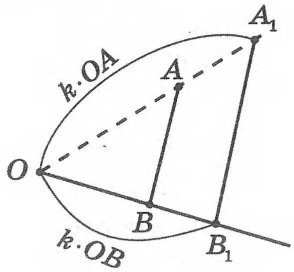
F – центрально-симетрична відносно O

$F \to F$ сим. відносно т. O

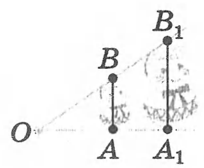
ОК-17
Геометричні перетворення

ГОМОТЕТІЯ

$F \to F_1$ гомотетією з $k > 0$ відносно т. O якщо $A \to A_1$ ... **т. $A_1 \in [OA)$ і $OA_1 = k \cdot OA$**

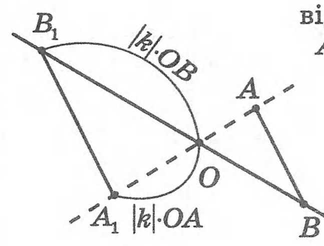


Гомотетією відносно т. O
$AB \to A_1B_1$

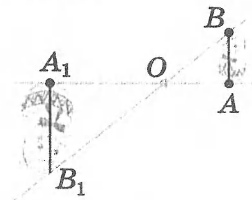


$\triangle OA_1B_1 \backsim \triangle OAB$ $\qquad$ $k > 0$

$F \to F_1$ гомотетією з $k < 0$ відносно т. O якщо $A \to A_1$ ... $\begin{cases} \text{т. } A_1 \in (OA) \\ \text{т. } A_1 \notin [OA) \\ OA_1 = |k| \cdot OA \end{cases}$



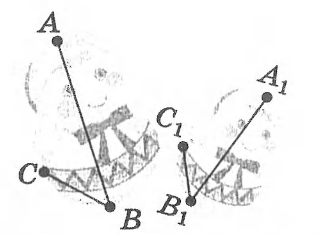
Гомотетією відносно т. O
$AB \to A_1B_1$

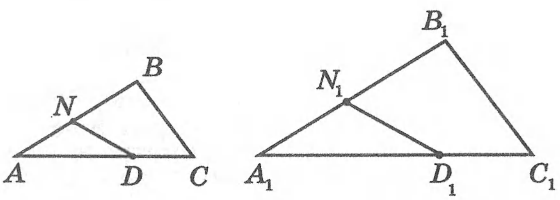


$\triangle OA_1B_1 \backsim \triangle OAB$ $\qquad$ $k < 0$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

$F \to F_1$ перетв. подібності з коеф. k $F \backsim F_1$ якщо $A \to A_1$, $B \to B_1$, ... і **$A_1B_1 = k \cdot AB$, $k > 0$**





$A_1B_1 = k \cdot AB$
$B_1C_1 = k \cdot BC$
$A_1C_1 = k \cdot AC$
$N_1D_1 = k \cdot ND$

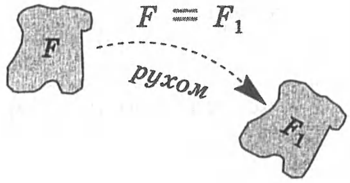
При $k = 1$ це **рух**.

Перетворення подібності можна уявити як перетворення, яке отримуємо послідовним виконанням перетворень гомотетії і руху.

ФІГУРИ РІВНІ

$F = F_1$, якщо $F \xrightarrow[\text{рухом}]{} F_1$

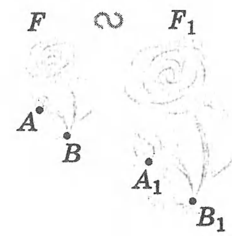
У рівних фігурах усі відповідні лінійні елементи рівні.



ФІГУРИ ПОДІБНІ

$F \backsim F_1$ з k, якщо $F \xrightarrow[\text{подібністю з } k]{} F_1$

У подібних фігурах усі відповідні лінійні елементи пропорційні з коефіцієнтом k:
$P_1 = kP$, $A_1B_1 = kAB$, ...



$\boxed{S_1 = k^2 S}$

ОК-18 *

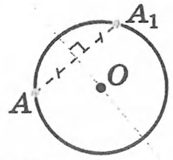
Групи симетрії фігури

Види перетворень, які переводять дану фігуру саму в себе, називають групою симетрії цієї фігури.

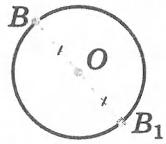
ГРУПА СИМЕТРІЇ КОЛА

Коло переходить саме в себе перетвореннями:

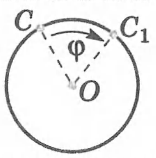
1. осьова симетрія відносно довільного діаметра цього кола;



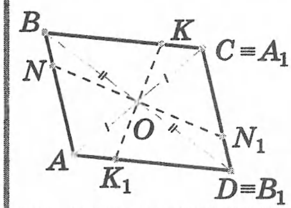
2. центральна симетрія відносно центра кола;



3. поворот із центром у центрі кола на довільний кут.



ГРУПА СИМЕТРІЇ ПАРАЛЕЛОГРАМА

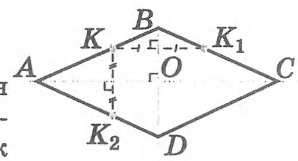


Паралелограм переходить сам у себе перетворенням: центральна симетрія відносно точки перетину діагоналей.

ГРУПА СИМЕТРІЇ РОМБА

Ромб переходить сам у себе перетвореннями:

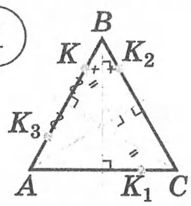
1. осьова симетрія відносно діагоналей;
2. центральна симетрія відносно точки перетину діагоналей (як паралелограм).



ГРУПА СИМЕТРІЇ РІВНОСТОРОННЬОГО ТРИКУТНИКА

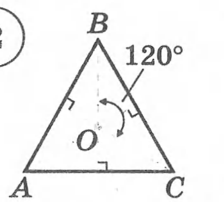
Рівносторонній трикутник переходить сам у себе перетвореннями:

1.



осьова симетрія відносно кожної з висот трикутника;

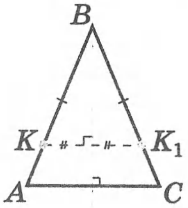
2.



поворот відносно центра трикутника на 120° і 240°.

ГРУПА СИМЕТРІЇ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

Рівнобедрений трикутник переходить сам у себе перетворенням:

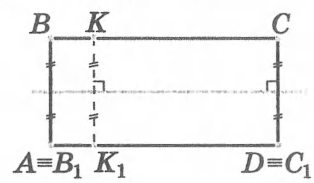


осьова симетрія відносно висоти, проведеної до основи.

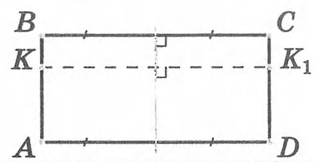
ГРУПА СИМЕТРІЇ ПРЯМОКУТНИКА

Прямокутник переходить сам у себе перетвореннями:

1. центральна симетрія відносно точки перетину діагоналей (як паралелограм);



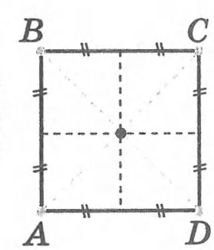
2. осьова симетрія відносно прямих, що проходять через середини протилежних сторін.



ГРУПА СИМЕТРІЇ КВАДРАТА

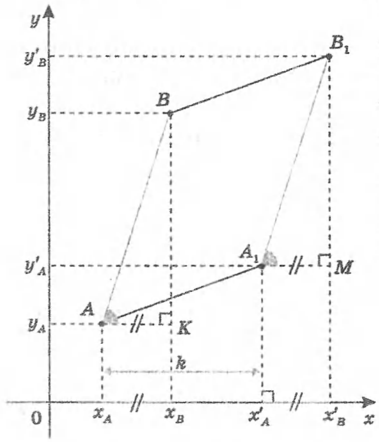
Квадрат переходить сам у себе перетвореннями:

1. центральна симетрія відносно точки перетину діагоналей (як паралелограм);
2. осьова симетрія відносно прямих, що проходять через середини протилежних сторін (як прямокутник);
3. осьова симетрія відносно діагоналей (як ромб).



ОК-19
Геометричні перетворення на координатній площині
ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ

Нагадаємо: ***паралельним перенесенням називається перетворення, при якому всі точки фігури зміщуються в одному й тому самому напрямі на одну й ту саму відстань.***



Тобто дві довільні точки A і B фігури-прообразу переходять у точки A_1 і B_1 фігури-образу так, що чотирикутник ABB_1A_1 – паралелограм. Нехай

$$\left.\begin{array}{l} A(x_A;\, y_A) \to A_1(x'_A;\, y'_A) \\ B(x_B;\, y_B) \to B_1(x'_B;\, y'_B) \end{array}\right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x'_A = x_A + k,\; y'_A = y_A + m \\ x'_B = x_B + k,\; y'_B = y_B + m, \text{ тоді:} \end{array}\right.$$

. . . .

паралельним перенесенням називається перетворення, при якому довільна точка $(x;\, y)$ фігури-прообразу переходить у точку $(x + k;\, y + m)$ фігури-образу.

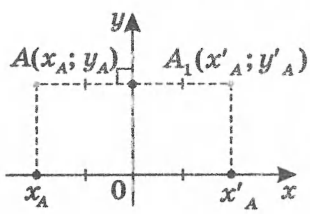
ВЛАСТИВОСТІ

1. $|AB| \to |A_1B_1| = |AB|$ (рух);
2. $(AB) \to (A_1B_1) \parallel (AB)$ або сама в себе;
3. $a\hat{\ }b = a_1\hat{\ }b_1$;
4. Композиція двох паралельних перенесень є паралельним перенесенням
5. $c \in [AB] \to c_1 \in [A_1B_1]$.

ОСЬОВА СИМЕТРІЯ

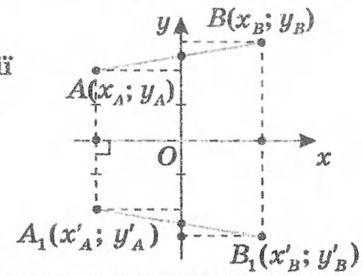
Якщо вісь симетрії (Oy): $A(x_A;\, y_A) \to A_1(x'_A;\, y'_A)$

$$\boxed{\begin{array}{c} y'_A = y_A \\ x'_A = -x_A \end{array}}$$

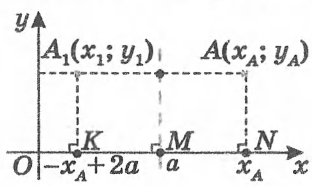


Якщо вісь симетрії (Ox): $A(x_B;\, y_B) \to A_1(x'_B;\, y'_B)$

$$\boxed{\begin{array}{c} x'_B = x_B \\ y'_B = -y_B \end{array}}$$



Якщо вісь симетрії $x = m$



1) $y_1 = y_A$.
2) M – середина відрізка KN:

$$a = \frac{x_1 + x_A}{2} \to x_1 = 2a - x_A.$$

$$\boxed{A(x_A;\, y_A) \to A_1(2a - x_A;\, y_A)}$$

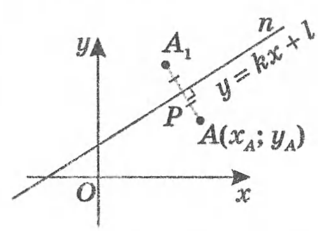
Якщо вісь симетрії $y = b$

$$\boxed{B(x_B;\, y_B) \to B_1(x_B;\, 2b - y_B)}$$

ВЛАСТИВОСТІ

1. $|AB| \to |A_1B_1| = |AB|$ (рух);
2. $(AB) \to (A_1B_1) \parallel (AB)$;
3. $c \in [AB] \to c_1 \in [A_1B_1]$;
4. $a\hat{\ }b \to a_1\hat{\ }b_1 = a\hat{\ }b$.

$\boxed{0.3}$* **Якщо вісь симетрії $y = kx + l$**



1) $(AA_1) \perp n$ тоді $(AA_1): y = -\dfrac{1}{k}x + l.$

2) $A \in (AA_1)$: $y_A = -\dfrac{1}{k}x_A + l$

$$-\;\; y = -\frac{1}{k}x + l$$

$$(y - y_A) = -\frac{1}{k}(x - x_A),\;\; y = -\frac{1}{k}x + \frac{1}{k}x_A + y_A \text{ – рівняння } (AA_1).$$

3) Шукаємо $P(x_P;\, y_P)$ як розв'язок системи

$$\begin{cases} y_P = kx_P + l \\ y_P = -\dfrac{1}{k}x_P + \dfrac{1}{k}x_A + y_A \end{cases} \to \begin{cases} x_P = \dfrac{x_A - lk + y_A k}{k^2 + 1}, \\ y_P = \dfrac{kx_A + y_A k^2 + l}{k^2 + 1}. \end{cases}$$

4) Шукаємо x_1 і y_1 з умови, що P – середина відрізка A_1A:

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{x_1 + x_A}{2} \\ y_P = \dfrac{y_1 + y_A}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 2x_P - x_A = \dfrac{k}{k^2 + 1}(2y_A - 2l - k^2 x_A) \\ y_1 = 2y_P - y_A = \dfrac{1}{k^2 + 1}(2kx_A + (k^2 - 1)y_A + 2l). \end{cases}$$

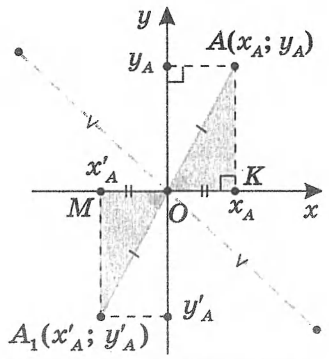
ОК-20

Геометричні перетворення на координатній площині

ЦЕНТРАЛЬНА СИМЕТРІЯ

Якщо центром симетрії є початок координат:

$A(x_A; y_A) \to A_1(x'_A; y'_A)$



$$\boxed{x'_A = -x_A \text{ і } y'_A = -y_A}$$

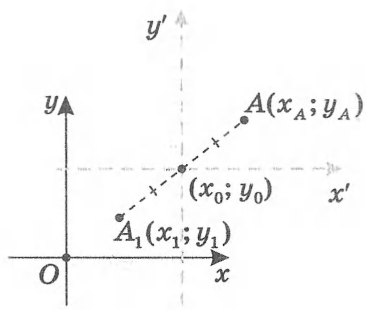
ВЛАСТИВОСТІ

1) $|AB| \to |A_1B_1| = |AB|$ (рух);
2) $(AB) \to (A_1B_1) \parallel (AB)$;
3) $c \in [AB] \to c_1 \in [A_1B_1]$;
4) $a\hat{\ }b \to a_1\hat{\ }b_1 = a\hat{\ }b$.

О.З. * **Якщо центром симетрії є точка $(x_0; y_0)$:**

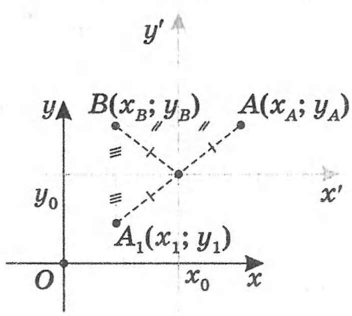
$A(x_A; y_A) \to A_1(x_1; y_1)$

1) перенесемо осі координат паралельно самим собі і помістимо початок координат у точку $(x_0; y_0)$;
   У новій системі координат: $A(x_A - x_0; y_A - y_0)$.
2) шукаємо точку A', симетричну A відносно нового початку координат.
   У новій системі координат: $A'(-x_A + x_0; -y_A + y_0)$;
3) повернемося до старої системи координат оберненим паралельним перенесенням:
   $x_1 = (-x_A + x_0) - (-x_0) = -x_A + 2x_0$;
   $y_1 = (-y_A + y_0) - (-y_0) = -y_A + 2y_0$.



$$\boxed{A(x_A; y_A) \to A_1(2x_0 - x_A; 2y_0 - y_A)}$$

Зауваження.
Таку саму формулу отримаємо, якщо здійснити комбінацію перетворень симетрії відносно осей Ox' і Oy', (тобто відносно прямих $x = x_0$ і $y = y_0$ у системі координат $(x0y)$):

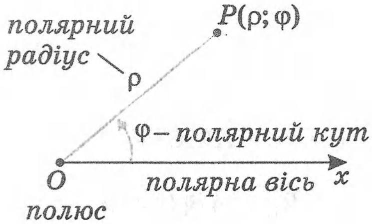


$$\begin{cases} x_B = 2x_0 - x_A \\ y_B = y_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_B = 2x_0 - x_A \\ y_1 = 2y_0 - y_B = 2y_0 - y_A \end{cases}$$

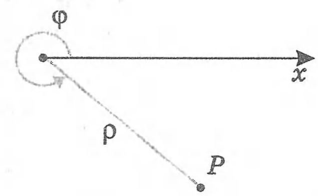
ОК-21 *

Полярна система координат і перетворення поворот



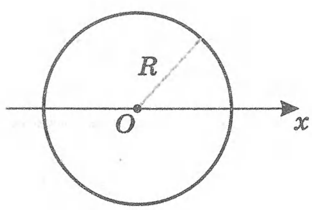
ρ і φ – ***полярні координати точки*** $P(\rho;\varphi)$

Зауваження. φ може приймати довільні значення



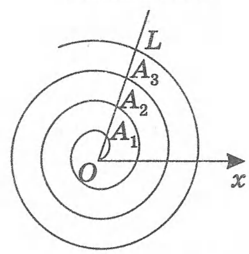
Рівняння кола

$$\boxed{\rho = R}$$



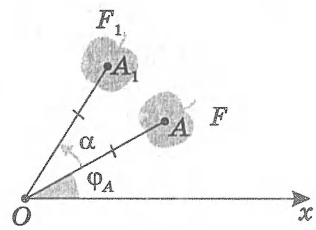
Спіраль Архімеда

$$\boxed{\rho = a\varphi}$$



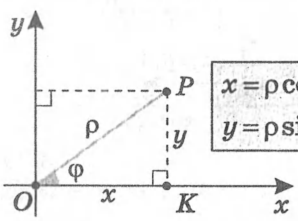
$$|OA_1| = |A_1A_2| = $$
$$= |A_2A_3| = \ldots\ |A_{i-1}A_i| = \ldots$$

Перетворення поворот відносно полюса



$$\boxed{A(\rho;\varphi) \to A_1(\rho;\varphi+\alpha)}$$

Від рівняння фігури в прямокутних декартових координатах можна перейти до рівняння тієї самої фігури в полярних координатах (і навпаки).



З $\triangle OKP$:

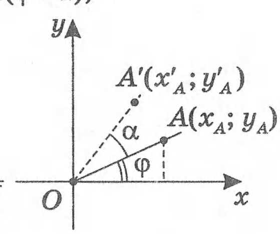
$$\boxed{\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \end{matrix}}$$

Якщо центром повороту на кут α є початок координат (0; 0): $A(x_A; y_A) \to A_1(x'_A; y'_A)$

$x'_A = |OA|\cos(\varphi+\alpha)$, $y'_A = |OA|\sin(\varphi+\alpha)$,

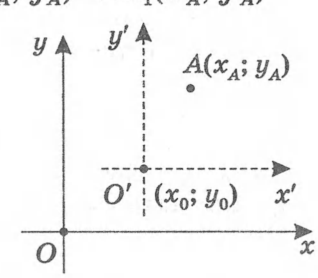
$|OA| = \sqrt{x_A^2+y_A^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y_A}{x_A}$.

$$\sin\varphi = \frac{y_A}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}} \qquad \cos\varphi = \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}}$$



Якщо центром повороту на кут α є точка $(x_0; y_0)$: $A(x_A; y_A) \to A_1(x'_A; y'_A)$

1. Перенесемо осі декартової системи координат паралельно самим собі і розмістимо початок координат у точці $(x_0; y_0)$. У новій системі координат $A(x_A - x_0; y_A - y_0)$.
2. Точку $A(x_A - x_0; y_A - y_0)$ повернемо на кут α відносно початку нової системи координат O'.
3. Повернемося до старої декартової системи координат оберненим паралельним перенесенням: $(x; y) \to (x_A + x_0; y_A + y_0)$, де



$$x'_A = \sqrt{(x_A-x_0)^2+(y_A-y_0)^2}\cos(\varphi+\alpha)+x_0;\ \ y'_A = \sqrt{(x_A-x_0)^2+(y_A-y_0)^2}\sin(\varphi+\alpha)+y_0;\ \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_A-y_0}{x_A-x_0}.$$

ОК-22 *

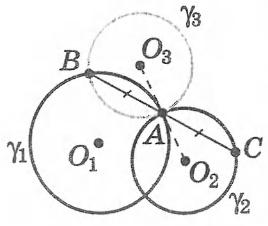
Приклади використання геометричних перетворень у розв'язуванні задач

1

Через спільну точку A двох кіл проведіть пряму так, щоб ці кола відтинали на ній рівні хорди.

Дано: $\gamma_1 \cap \gamma_2 = A$.

Побудувати: (AC), $|BA| = |AC|$.



План побудови.

1) γ_3 симетрично γ_2 відносно т. A;
2) $\gamma_3 \cap \gamma_1 = B$. CB – шукана.

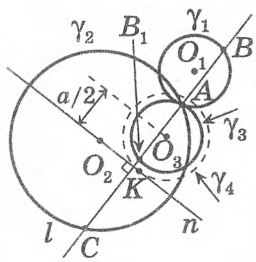
Доведення. C – симетрична B відносно A, тоді $|BA| = |AC|$.

2

Через спільну точку A двох кіл проведіть пряму так, щоб різниця хорд, що відтинаються на цих колах, дорівнювала a.

Дано: $\gamma_1 \cap \gamma_2 = A$; a.

Побудувати: (AB), $AC - AB = a$.



План побудови.

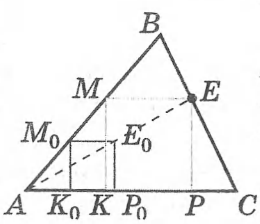
1) γ_3 сим. γ_1 відносно т. A;
2) γ_4 з центром O_3 і $R = \dfrac{a}{2}$;
3) через O_2 n – дотичну до γ_4;
4) через A проведемо $l \perp n$; l – шукана.

Доведення.

1) $d(O_3/n) = R = \dfrac{a}{2}$;
2) $\gamma_3 \cap l = B_1$ – сим. B відносно $A \to AB_1 = AB$;
3) $AK - \dfrac{AB_1}{2} = \dfrac{a}{2} \to AC - AB = a$.

5

Дано трикутник ABC. Побудуйте квадрат, дві вершини якого лежать на стороні AC і по одній на сторонах AB і BC.



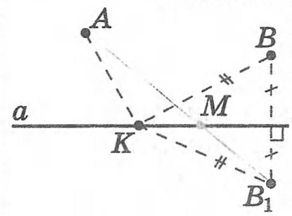
Дано: $\triangle ABC$.

Побудувати: *$KMEP$ – квадрат вписаний.*

1) $K_0M_0E_0P_0$ – квадрат;
2) $K_0M_0E_0P_0 \to KMEP$ гомотетією з центром A і $k = \dfrac{AE}{AE_0}$.

3

Дано пряму a і дві точки A і B по один бік від неї. Побудуйте на прямій a точку M, щоб сума довжин AM і MB була найменшою.



Дано: a; A; B.

Побудувати: $M \in a$, $(AM + MB) = (AM + MB)_{min}$.

План побудови.

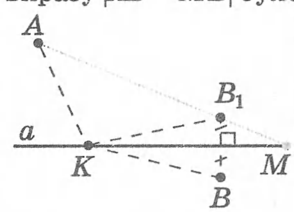
1) B_1 – сим. B відносно a;
2) $AB_1 \cap a = M$ – шукана.

Доведення. Нехай $K \neq M$ тоді:

$AK + KB = AK + KB_1 > AM + MB_1 = AM + MB$.

4

Дано пряму a і дві точки A і B по різні боки від неї. Побудуйте на прямій a точку M, щоб значення виразу $|AB - MB|$ було найбільшим.



Дано: a; A; B.

Побудувати: $M \in a$, $|AB - MB| = |AB - MB|_{max}$.

План побудови.

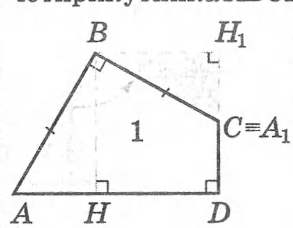
1) *B_1 – сим. B відносно a;*
2) $AB_1 \cap a = M$ – шукана.

Доведення. Нехай $K \neq M$ тоді:

$|AK - KB| = |AK - KB_1| < AB_1 = |AM - MB_1|$.

5

У чотирикутнику $ABCD$ кути при вершинах B і D – прямі, $BH \perp AD$, $|BH| = 1$; $AB = BC$. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$.



Дано: $\angle B = \angle D = 90°$; $AB = BC$, $BH \perp AD$, $BH = 1$.

Знайти: $S_{ABCD} \triangleq S$ – ?

1) $\triangle ABH \to \triangle CBH_1$, поворотом відносно точки B на 90°:
2) $\angle ABH = \angle CBH_1$ і $\angle HBH_1 = 90°$;

HBH_1D – прямокутник, $BH_1 = BH = 1$ $\Rightarrow HBH_1D$ – квадрат;

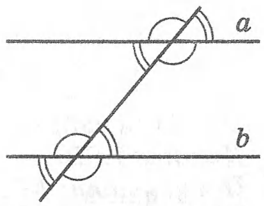
3) $\triangle ABH = \triangle CBH_1 \to S_{ABH} = S_{CBH_1}$.

Тоді: $S_{ABCD} = S_{HBH_1D} = BH^2 = 1$.

Відповідь: 1.

ОК-23
Кути з відповідно паралельними і відповідно перпендикулярними сторонами

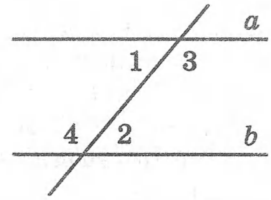
Нагадаємо:



ТТ

якщо
$a \parallel b$

ТТ



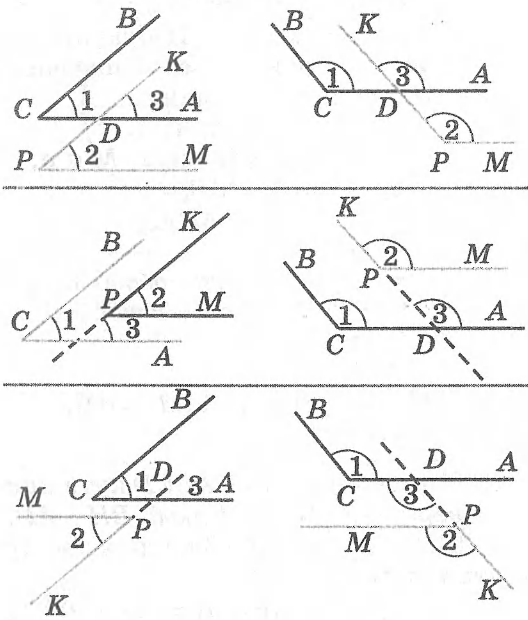
$\angle 1 = \angle 2$
$\Updownarrow$
$\angle 1 + \angle 4 = 180°$
$\Updownarrow$
$a \parallel b$

ТТ **Якщо сторони одного кута паралельні сторонам іншого кута і якщо вони обидва гострі або обидва тупі, то вони рівні.**

CA ∥ PM; CB ∥ PK, $\angle 1$ і $\angle 2$ – гострі або $\angle 1$ та $\angle 2$ – тупі.

Треба довести, що $\angle 1 = \angle 2$.

Доведення

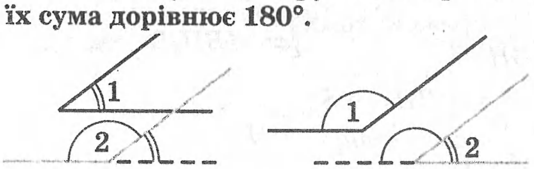


Прямі $CA \parallel PM$; $CB \parallel PK$. Тоді $\angle 3 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 1$. Звідки маємо: $\angle 2 = \angle 1$.

Теорему доведено.

$\Downarrow$

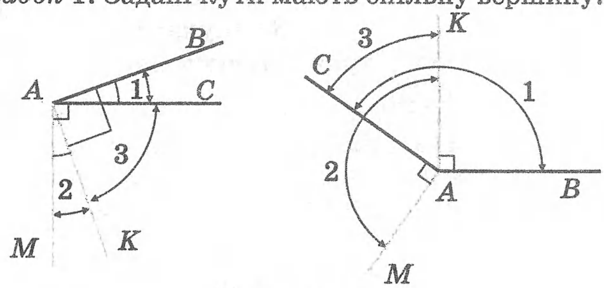
Н **Якщо сторони одного кута паралельні сторнам другого і один з них тупий, а другий гострий, то їх сума дорівнює 180°.**



$\angle 1 = (180° - \angle 2)$ і $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, щ.в.д.

ТТ **Якщо сторони одного кута перпендикулярні до сторін другого і обидва вони гострі або обидва тупі, то такі кути рівні.**

Випадок 1. Задані кути мають спільну вершину.

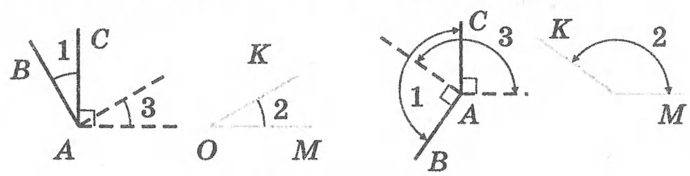


Доведення

$\angle 1 = 90° - \angle 3 = \angle 2$ або $\angle 1 = 90° + \angle 3 = \angle 2$.

Теорему доведено.

Випадок 2. Кути не мають спільної вершини.



Доведення

$AB \perp OK$; $AC \perp OM$

Через вершину кута 1 проведемо промені паралельно сторонам кута 2 таким чином, щоб утворений ними кут 3 був:

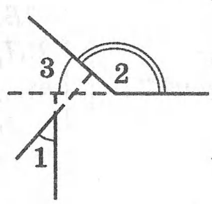
а) гострим, якщо кут 2 – гострий;

б) тупим, якщо кут 2 – тупий. За теоремою про кути з відповідно паралельними сторонами $\angle 3 = \angle 2$, і маємо випадок 1.

Теорему доведено.

$\Downarrow$

Н **Якщо сторони одного кута перпендикулярні до сторін другого і один з них тупий, а другий гострий, то їх сума дорівнює 180°.**



Сторони гострого кута 3, що є суміжним з тупим кутом 2, перпендикулярні до сторін гострого кута.

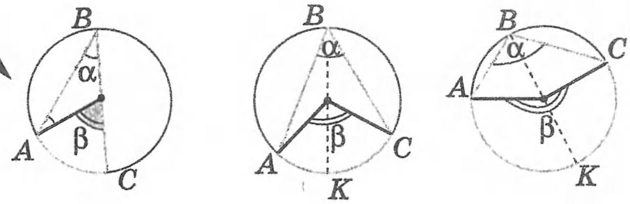
Тоді за теоремою: $\angle 1 = \angle 3 = (180° - \angle 2)$ і $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, щ.в.д.

ОК-24
Вписаний кут кола і опорні задачі кола

Нагадаємо:

Вписаним кутом називається кут, вершина якого належить колу, а його сторони перетинають це коло.

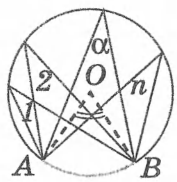
Т



Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

$\alpha = \dfrac{\beta}{2}$

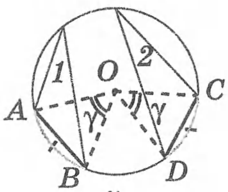
Н ① **Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні.**



$\alpha = \smile AB : 2$

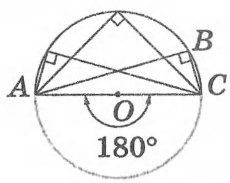
$\angle 1 = \angle 2 \ldots \angle n = \alpha$

Н ② **Вписані кути, що спираються на рівні дуги, рівні між собою.**



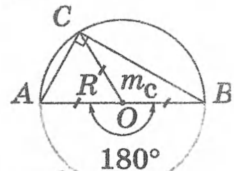
$\angle 1 = \dfrac{\gamma}{2} = \angle 2$

Н ③ **Вписаний кут, що спирається на діаметр, прямий.**



$AC = 2R \Rightarrow \angle ABC = 90°$

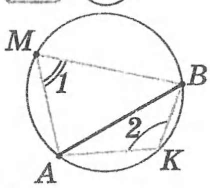
Н ④ **У прямокутному трикутнику медіана гіпотенузи дорівнює половині гіпотенузи.**



$m_c = R = \dfrac{c}{2}$

О.З. ①

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$



$\angle 1 = \smile AKB : 2$

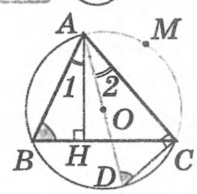
$+\angle 2 = \smile AMB : 2$

$\angle 1 + \angle 2 = 360° : 2 = 180°$

$\angle 1 = 180° - \angle 2$

О.З. ②

$AH \perp BC \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$



1) $AD \equiv 2R \to \angle DCA = 90°$;

2) $\smile AMC \to \angle ADC = \angle B$;

3) $\angle 1 = 90° - \angle B = \angle 2$.

Т

$x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

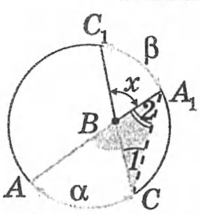
$\angle 2 = \dfrac{\alpha}{2}$

$+$

$\angle 1 = \dfrac{\beta}{2}$

$x = \angle 1 + \angle 2$

(як зовнішній кут $\triangle A_1BC$)



Т

$x = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

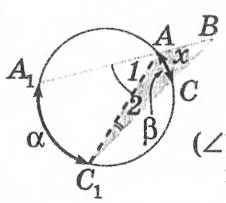
$\angle 1 = \dfrac{\alpha}{2}$

$-$

$\angle 2 = \dfrac{\beta}{2}$

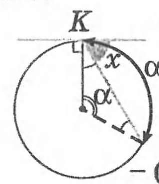
$x = \angle 1 - \angle 2$

($\angle 1$ – зовнішній кут $\triangle ABC_1$)



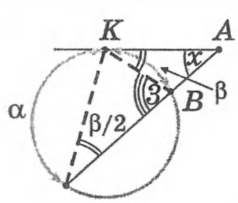
Т

$x = \dfrac{\alpha}{2}$



$x = 90° -$

$- (180° - \alpha) : 2$

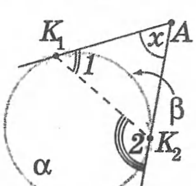


Н ①

$x = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\angle 3 = x + \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$

(як зовнішній кут $\triangle AKB$)



Н ②

$x = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

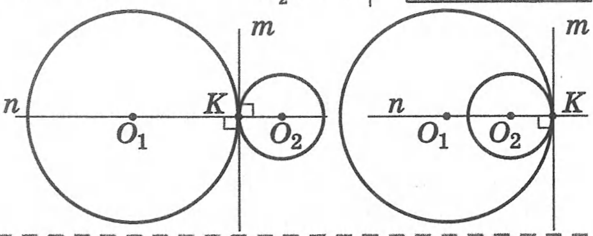
$\angle 2 = x + \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$

(як зовнішній кут $\triangle AK_1K_2$)

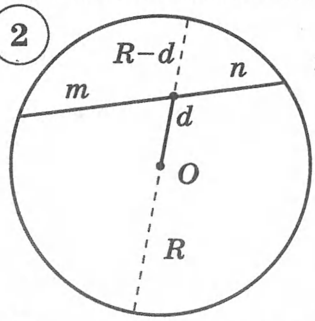
ОК-25
Опорні факти і задачі про кола

О.Ф. 1

$\left.\begin{matrix} O_1K \perp m \\ O_2K \perp m \end{matrix}\right| \Rightarrow \boxed{\{O_1, O_2, K\} \subset n}$



О.З. 2



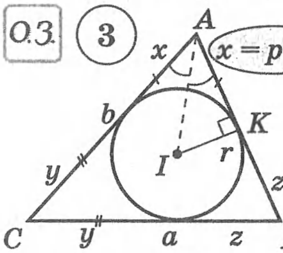
$m \cdot n = (R + d) \cdot (R - d)$

(див. ОК–4(38))

$m \cdot n = R^2 - d^2$

$\boxed{d^2 = R^2 - m \cdot n}$

О.З. 3



$x = p - a$

$2x + 2y + 2z = 2p$

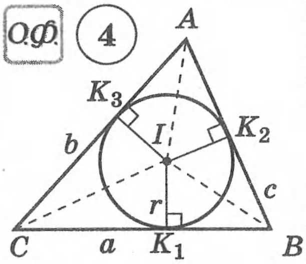
$x = p - (\underbrace{y + z}_{a})$

$\boxed{r = (p - a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$

$p \triangleq \frac{P}{2}$

$\Downarrow$

О.Ф. 4



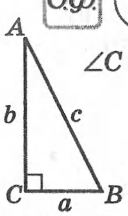
$S = S_1 + S_2 + S_3 =$

$= \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc$

$\boxed{r = \frac{S}{p}}$

$\Downarrow$

О.Ф. 5



$\angle C = 90° \to \operatorname{tg}\frac{C}{2} = 1$

$r = p - c$

$\boxed{\frac{a + b - c}{2} = r}$

О.З. 6

$2r = a + b - c =$

$= a + b - 2R$

$\angle C = 90° \to \boxed{r + R = \frac{a + b}{2}}$

О.З. 7

$S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

$\frac{1}{r} = \frac{a + b + c}{2S} =$

$= \frac{a}{ah_a} + \frac{b}{bh_b} + \frac{c}{ch_c}$

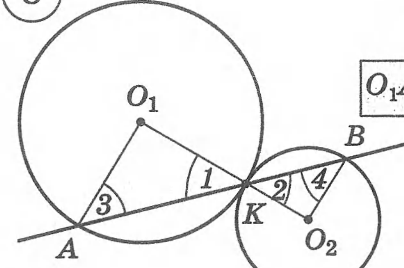
$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}$

О.З. 8

$K \in (AB)$

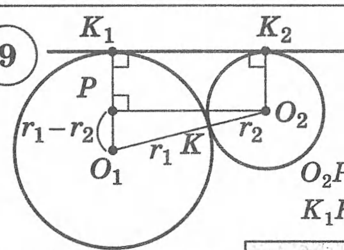
$\Downarrow$

$\boxed{O_1A \parallel O_2B}$



$\left.\begin{matrix} \angle 1 = \angle 2 \\ O_1A = O_1K \\ O_2B = O_2K \end{matrix}\right| \Rightarrow \angle 3 = \angle 1 = \angle 2 = \angle 4 \Rightarrow O_1A \parallel O_2B$

О.З. 9



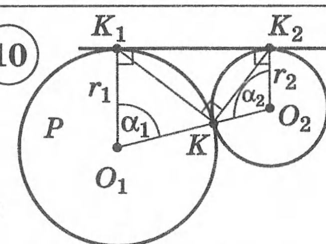
$O_2P \perp O_1K_1;$

$K_1K_2 = O_2P$

$O_2P = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}$

$\boxed{K_1K_2 = 2 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}}$

О.З. 10



$O_1K_1 \parallel O_2K_2$

$\Downarrow$

$\alpha_1 + \alpha_2 = 180°$

(див. ОК–24)

$\left.\begin{matrix} \angle KK_1K_2 = \frac{\alpha_1}{2} \\ \angle KK_2K_1 = \frac{\alpha_2}{2} \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} \angle K_1KK_2 = \\ = 180° - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \end{matrix}$

$\boxed{\begin{matrix} \angle K_1KK_2 = \\ = 90° \end{matrix}}$

О.З. 11

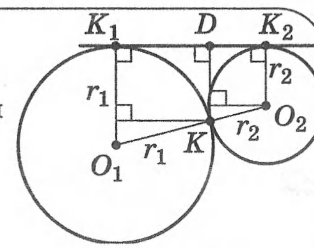
$O_1K_1K_2O_2$ – трапеція

$KD \parallel O_1K_1 \parallel O_2K_2$

$\frac{\frac{r_1 - KD}{r_1} = \frac{KD - r_2}{r_2}}{}$

$\Downarrow$

$KD = \frac{r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_1}{r_1 + r_2}$



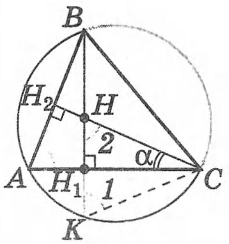
(див. ОК–36(15))

$\boxed{d(K / K_1K_2) = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}}$

ОК-26

Про сегмент, що вміщує заданий кут, і деякі опорні задачі кола

О.З. **Точки, симетричні ортоцентру трикутника відносно його сторін, лежать на колі, описаному навколо цього трикутника.**



Дано: $BH_1 \perp AC$, $CH_2 \perp AB$.
Довести: $HH_1 = H_1K$.

1) $\smile AB$: $\angle A = \angle 1$;

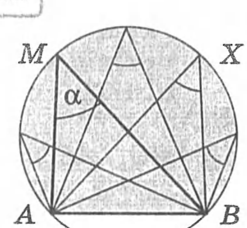
2) $\left.\begin{array}{l} BH_1 \perp AC \\ CH_2 \perp AB \end{array}\right| \Rightarrow \angle A = \angle 2$;

3) $\left.\begin{array}{l} \angle 1 = \angle A = \angle 2 \\ CH_1 \perp HK \end{array}\right| \Rightarrow HH_1 = H_1K$.

Нагадаємо:

Сегментом називають частину площини, обмежену дугою кола і хордою.

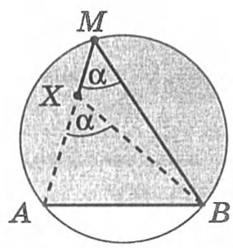
Т **Геометричне місце точок, з яких відрізок AB видно під кутом α, є дуга вказаного сегмента, що вміщує заданий кут α.**

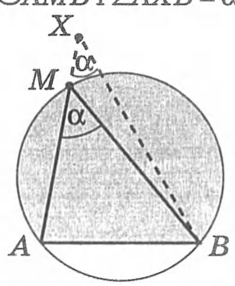


I. *Необхідність* $\left.\begin{array}{l} X \in \smile AMB \\ \angle AMB = \alpha \end{array}\right| \Rightarrow \angle AXB = \alpha$.

$\Leftarrow$ II. *Достатність*

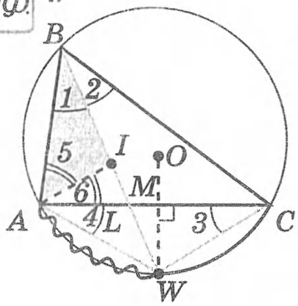
Від супротивного: нехай $X \notin \smile AMB$ і $\angle AXB = \alpha$.





У $\triangle MXB$: α – зовнішній кут і α – внутрішній кут – цього бути не може тоді $X \in \smile AMB$.

О.ф. * **Точка перетину продовження бісектриси кута трикутника з описаним навколо цього трикутника колом рівновіддалена від інцентра трикутника та двох інших його вершин**



Дано: $BW \equiv l_B$; $AI \equiv l_A$.
Довести: $AW = IW = CW$.

1) $\angle 1 = \angle 2 \rightarrow AW = WC$;

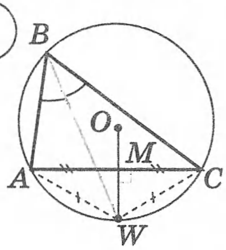
2) $\smile WC : \angle 4 = \angle 2 = \dfrac{\angle B}{2}$;

3) $AI \equiv l_A \rightarrow \angle 5 = \angle 6 = \dfrac{\angle A}{2}$;

4) $\triangle ABI$: $\angle AIW = \angle 5 + \angle 1 = \dfrac{\angle A}{2} + \dfrac{\angle B}{2}$;

5) $\angle IAW = \dfrac{\angle A + \angle B}{2} = \angle AIW$, $\boxed{IW = AW = WC.}$

Н (1)

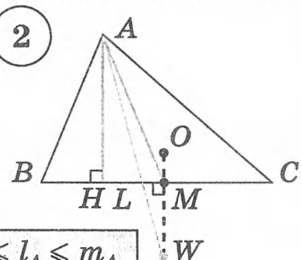


$WM \perp AC$

$\Downarrow$

$O \in WM$ – *сер. перп. до* AC

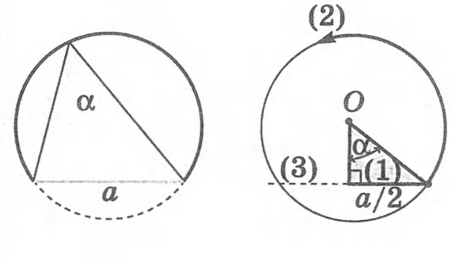
Н (2)



$\boxed{h_A \leqslant l_A \leqslant m_A}$

бо A і W – у різних півплощинах відносно (BC); $M \equiv Пр_{BC}W$; $H \equiv Пр_{BC}A$.

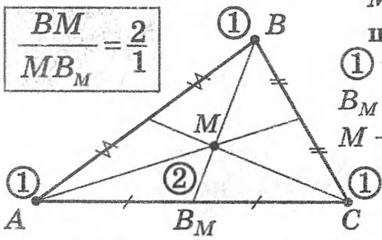
О.З. Побудуйте геометричне місце точок, з яких даний відрізок a видно під заданим кутом α. (див ОК–5).



ОК-27
Чудові точки трикутника

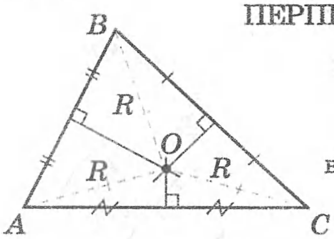
1 ТОЧКА ПЕРЕТИНУ МЕДІАН

$$\boxed{\frac{BM}{MB_M}=\frac{2}{1}}$$



M – ЦЕНТРОЇД – центр ваги $\triangle ABC$;
① – одиничні маси;
B_M – центр ваги $[AC]$;
M – центр ваги $[BB_M]$;
M – єдина

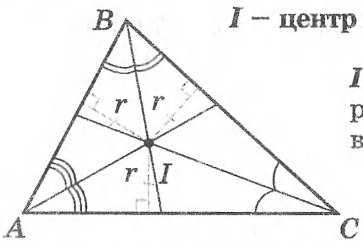
2 ТОЧКА ПЕРЕТИНУ СЕРЕДИННИХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРІВ



O – центр описаного кола;
O – рівновіддалена від вершин; O – єдина

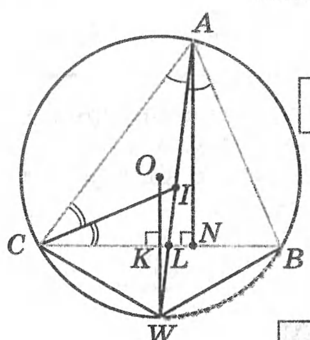
3 ТОЧКА ПЕРЕТИНУ БІСЕКТРИС

I – центр вписаного кола



I – ІНЦЕНТР,
рівновіддалена від вершин; I – єдина

5 ТОЧКА ПЕРЕТИНУ БІСЕКТРИСИ КУТА ТРИКУТНИКА З ЙОГО ОПИСАНИМ КОЛОМ



(див. ОК–26)

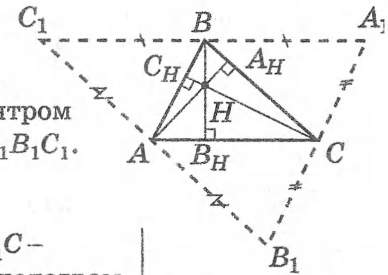
$$\boxed{CW=WI=WB}$$

$AL \equiv l_a$
$AN \equiv h_a$

WO – серединний перпендикуляр до CB.

l_a завжди між h_a та m_a.

6 ТОЧКА ПЕРЕТИНУ ВИСОТ



H – ОРТОЦЕНТР;
H – єдина, бо є центром описаного кола $\triangle A_1B_1C_1$.

Дійсно:

$$\left.\begin{matrix} A_1C_1 \parallel AC \\ B_1C_1 \parallel BC \\ A_1B_1 \parallel AB \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} ABA_1C - \\ \text{паралелограм,} \\ AC_1BC - \\ \text{паралелограм} \end{matrix}\right| \Rightarrow BA_1 = AC = C_1B$$

і BB_H – серединний перпендикуляр до $[C_1A_1]$.

7 Точка перетину бісектрис кута трикутника з бісектрисами зовнішніх кутів цього трикутника – ЦЕНТР його ЗОВНІВПИСАНОГО КОЛА

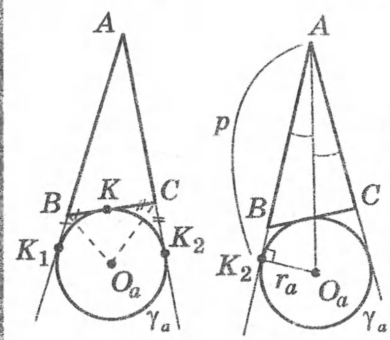
$$\left.\begin{matrix} O_aC = l_{KCK_2} \\ O_aB = l_{KBK_1} \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} d(O_a / AK_2) = d(O_a / AK_1) \\ і\ AO_a \equiv l_A \text{ (див. ОК–2(11)).} \end{matrix}$$

О.З. γ_a – зовнівписане коло $\triangle ABC$:

$AK_1 = AK_2 = p$

$$\left.\begin{matrix} BK_1 = BK \\ CK = CK_2 \end{matrix}\right| \Rightarrow BC = K_1B + K_2C$$

З $\triangle AK_2O_a$ і ОК–25(3):



$$r_a = p\cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

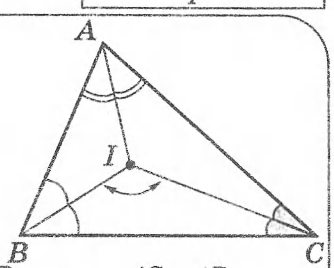
$$r = \frac{S}{p} = (p-a)\cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r_a = \frac{pr}{p-a} \qquad r_a = \frac{S}{p-a}}$$

О.З. 8

$$\boxed{\angle CIB = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}}$$



$\underline{\triangle CIB}$:

$$\angle CIB = 180^\circ - \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle B}{2} = 180^\circ - \frac{\angle C - \angle B}{2} =$$

$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}.$$

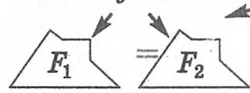
ОК-28

Про деякі властивості площі та опорні факти, що з них випливають

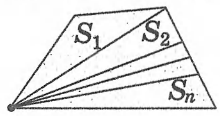
ВЛАСТИВОСТІ ПЛОЩІ, НА ЯКІ СПИРАЄМОСЯ ПРИ ОБЧИСЛЕННЯХ:

– *рівні фігури* (ті, що можна сумістити) *мають рівні площі*;
– *якщо фігуру поділено на частини, то площа фігури дорівнює сумі площ її частин* $S = S_1 + S_2 + ... + S_n$.

можна сумістити

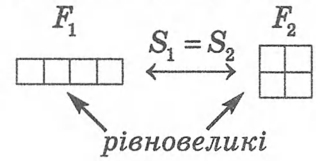


$F_1 = F_2 \Rightarrow S_1 = S_2$

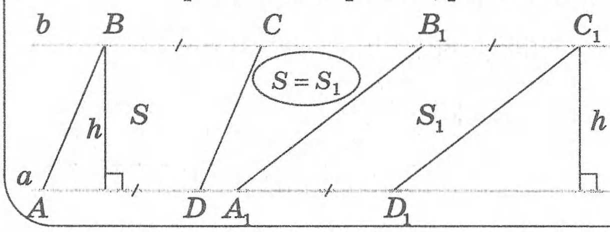


Нагадаємо:

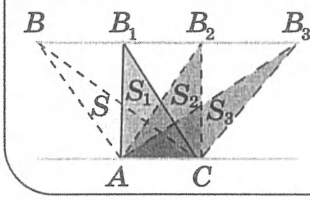
Дві фігури рівновеликі, якщо площі цих фігур рівні.



ОФ 1 Паралелограми, які мають дві рівні сторони, що належать спільним паралельним прямим, рівновеликі.



ОФ 2 Трикутники, в яких одна сторона спільна, а протилежні їй вершини належать прямій, паралельній цій стороні, рівновеликі.



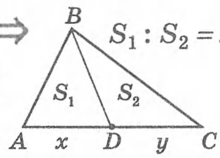
$AC \parallel BB_3$
$\Downarrow$
$S = S_1 = S_2 = S_3$

ОФ 3 Площі трикутників, які мають *рівні висоти*, відносяться як довжини їхніх сторін, до яких ці висоти проведено.

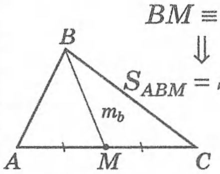
$S = \frac{1}{2}h \cdot AC, S_1 = \frac{1}{2}h \cdot A_1C_1 \Rightarrow S : S_1 = AC : A_1C_1$

$\Rightarrow$ *Якщо h – спільна*

$S_1 : S_2 = x : y$

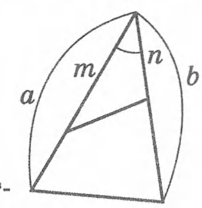


$BM \equiv m_b$
$\Downarrow$
$S_{ABM} = S_{MBC}$



ОФ 4

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m \cdot n}{a \cdot b}$

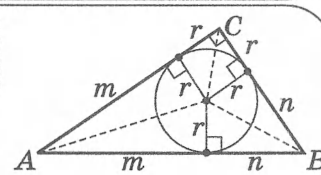


Площі трикутників, які мають *рівний кут*, відносяться як добутки їх сторін, що містять цей кут.

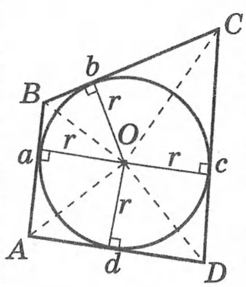
ОЗ 7

$\angle C = 90°$
$S = m \cdot n$

$2S = b \cdot a = (m + r)(n + r)$
$S = p \cdot r = (m + n + r) \cdot r$
$S = m \cdot n$



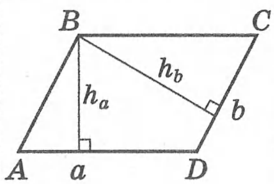
ОФ 5



$S_{ABCD} = p \cdot r$
$p \triangleq (a + b + c + d) : 2$

ОФ 6

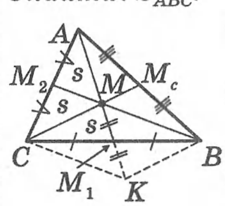
ABCD – паралелограм
$\Downarrow$
$h_b : h_a = a : b$



$S = ah_a = bh_b$

ОЗ 8

Дано: m_a; m_b; m_c.
Знайти: S_{ABC}.

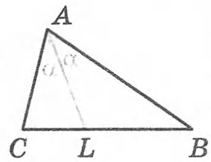


1) $M_1K = AM_1 \to CMBK$ – паралелограм і $CK = BM = \frac{2}{3}m_b$;
2) $\frac{2}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b; \frac{2}{3}m_c \to S_{CMK}$ (за формулою Герона);
3) $MM_1 = M_1K \to S_{CMM_1} = S_{CM_1K} \triangleq s$;
4) $AM : MM_1 = 2:1 \to S_{CAM} = 2s = S_{CMA}$;
5) $S_{ACM_1} = S_{AM_1B} = 3s$;
6) $S_{ABC} = 6s = 3S_{CMK}$.

ОК-29
Метод площ у розв'язуванні задач

1 Методом площ можна довести відому властивість бісектриси трикутника (див. ОК–30(5)).

Якщо AL – бісектриса трикутника ABC, то $CL : LB = AC : AB$.



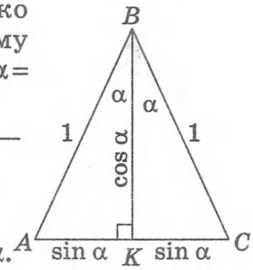
Доведення

h_a – спільна для $\triangle ACL$ і $\triangle ABL$, тоді $CL : LB = S_{ACL} : S_{ABL} =$

$$=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot AL\sin\alpha}{\frac{1}{2}AB\cdot AL\sin\alpha}=AC:AB.$$

Щ. в. д.

2 Методом площ легко можна довести відому формулу тригонометрії $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.



Доведення

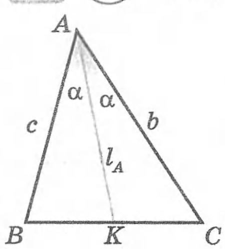
1) $AB = BC = 1$, $BK \equiv l_B$. Тоді $BK \perp AC$ і $AK = AB\sin\alpha = \sin\alpha$, $BK = AB\cos\alpha = \cos\alpha$.

2) $S_{ABC} = S_{ABK} + S_{CBK}$. Звідси

$$\frac{1}{2}\sin 2\alpha = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\right) \text{ і } \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Щ. в. д.

О.Ф. **3** Доведіть, що довжину бісектриси кута ABC можна обчислити за формулою $\boxed{l_A=\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}}$.



Дано: $AK \equiv l_A$.

Довести: $l_A=\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

Доведення

1) $S_1=\frac{1}{2}c\cdot l_A\cdot\sin\frac{A}{2}$, $S_2=\frac{1}{2}l_A\cdot b\cdot\sin\frac{A}{2}$;

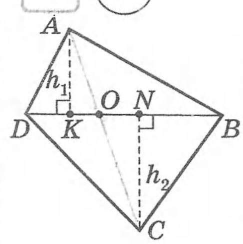
2) $S=\frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin A=\frac{1}{2}c\cdot b\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$;

3) $S=S_1+S_2\to(c+b)l_A\sin\frac{A}{2}=2c\cdot b\cdot\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

і $l_A=2bc\cos\frac{A}{2}:(b+c)$.

Щ.в.д.

О.З. **4** **Доведіть, що в чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC ділиться точкою перетину діагоналей O у відношенні $AO : OC = S_{ABD} : S_{CBD}$.**



Дано: $ABCD$.

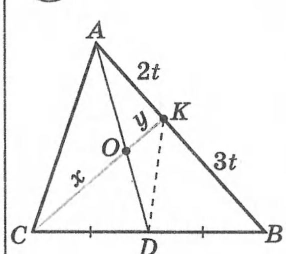
Довести: $AO : OC = S_{ABD} : S_{CBD}$

Доведення

1. З вершин A і C чотирикутника $ABCD$ проведемо перпендикуляри h_1 і h_2 до BD.
2. $\triangle AOK \backsim \triangle CON$, бо $\angle AOK = \angle CON$ (як вертикальні). Тоді $AO : OC = h_1 : h_2$.
3. BD – спільна сторона трикутників ABD і CBD, тоді $S_{ABD} : S_{CBD} = h_1 : h_2$.
4. $AO : OC = h_1 : h_2 = S_{ABD} : S_{CBD}$.

Щ.в.д.

5 **У трикутнику ABC на стороні AB позначили точку K так, що $AK : KB = 2 : 3$. У якому відношенні медіана AD ділить відрізок CK?**



1) у чотирикутнику $AKDC$ $CO : OK = S_{ACD} : S_{ADK}$ (див. О.З.–4);

2) AD – медіана, тоді $S_{ACD}=S_{ADB}=\frac{1}{2}S$;

3) $AK : KB = 2 : 3$, тоді $S_{ADK} : S_{KDB} = 2 : 3$ і $S_{ADK}=\frac{2}{5}S_{ADB}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}S=\frac{1}{5}S$;

4) $CO : OK = S_{ACD} : S_{ADK}=\frac{1}{2}S:\frac{1}{5}S=\frac{5}{2}$.

Відповідь: $CO : OK = 5 : 2$. (Порівняйте з ОК - 15(3).)

ОК-30

Властивості подібних трикутників та їх використання для доведення теорем

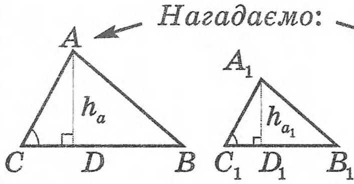
$\triangle ABC \underset{k}{\sim} \triangle A_1B_1C_1$

$\Downarrow$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$$

$$S = k^2 \cdot S_1$$

Нагадаємо:



Всі відповідні лінійні елементи пропорційні!

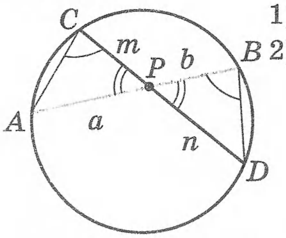
$\triangle ABC \underset{k}{\sim} \triangle A_1B_1C_1$

$a = ka_1;\ h_a = kh_{a_1};\ m_a = km_{a_1};\ l_a = kl_{a_1}\ \ldots;$

$P = kP_1.$

Т 1

$\boxed{m \cdot n = a \cdot b}$



1) $\smile AD$: $\angle ACD = \angle ABD$;

2) $\angle CPA = \angle BPD$ як верт.

$\Downarrow$

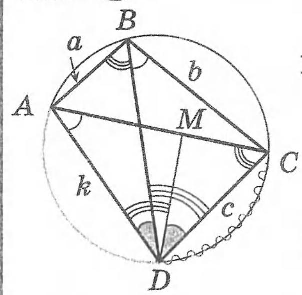
$\triangle CPA \sim \triangle BPD$

і $\frac{a}{n} = \frac{m}{b}$.

Т 2*

ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ

$\boxed{d_1 \cdot d_2 = a \cdot c + k \cdot b}$



1) Будуємо:

$\angle MDC = \angle ADB$;

2) $\triangle ABD \sim \triangle MCD$: $\frac{CM}{c} = \frac{a}{d_2}$;

3) $\triangle AMD \sim \triangle BCD$: $\frac{AM}{k} = \frac{b}{d_2}$;

4) $CM + AM = \frac{a \cdot c + k \cdot b}{d_2} = d_1$.

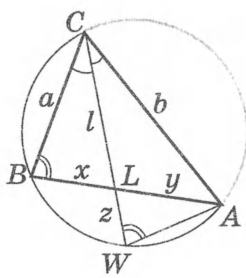
Щ.в.д.

$AC \triangleq d_1,\ BD \triangleq d_2$

Т 3*

ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА

$\boxed{l^2 = ab - xy}$



$\smile CA$: $\angle CBA = \angle CWA$

$\triangle CBL \sim \triangle CWA$

$$\frac{l+z}{a} = \frac{b}{l};$$

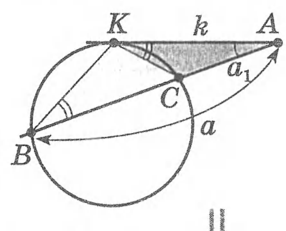
$$l^2 + lz = ab.$$

$\shortparallel$

xy (1)

Т 4

$\boxed{k^2 = a_1 \cdot a}$



$\angle KBC = \frac{1}{2} \smile KC = \angle AKC$

$\angle A$ – спільний

$\Downarrow$

$\triangle BKA \sim \triangle KCA$

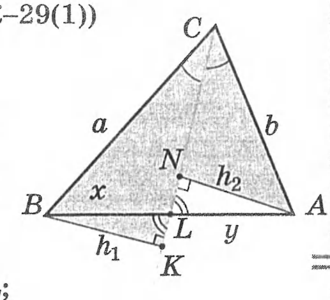
і $\frac{k}{a_1} = \frac{a}{k}$.

$\Downarrow$

Н **Для січних, проведених з однієї точки до кола, добуток січної на її зовнішню частину є величиною сталою для даного кола.**

Т 5 (див. ОК–29(1))

$\boxed{CL \equiv l_c \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b}}$



1) $BK \perp CL$ і $AN \perp CL$;

2) $\angle BCK = \angle NCA = \frac{\angle C}{2}$, тоді

$\triangle CBK \sim \triangle CAN$: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$;

3) $\angle BLK = \angle NLA \to \triangle BLK \sim \triangle ALN$: $\frac{x}{y} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$.

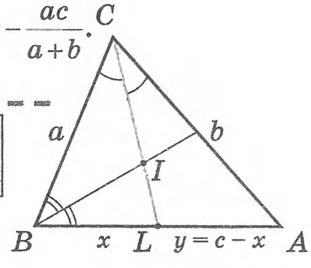
$\Longrightarrow$

Н $\boxed{x = \frac{ac}{a+b},\ y = \frac{bc}{a+b}}$

$y = c - x \to \frac{x}{c-x} = \frac{a}{b},\ y = c - \frac{ac}{a+b}$.

$\Longrightarrow$

Н $\boxed{\frac{CI}{IL} = \frac{a+b}{c}}$



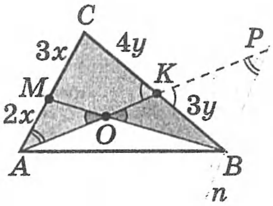
$\underline{\triangle BCL}$: $\frac{CI}{IL} = \frac{a}{x} = \frac{a(a+b)}{a \cdot c}$.

ОК-31
Використання подібності трикутників у розв'язуванні задач

1

Дано: $\frac{AM}{MC}=\frac{2}{3}$; $\frac{BK}{KC}=\frac{3}{4}$.

Знайти: $\frac{BO}{OM}$.



1) Через B провели $n \parallel AC \to \Delta BKP \sim \Delta CKA$:
(за 2-ма кутами)

$$\frac{BP}{AC}=\frac{BK}{KC}=\frac{3}{4} \text{ і } BP=\frac{3}{4}AC;$$

2) $\Delta BOP \sim \Delta MOA \to \frac{BO}{OM}=\frac{BP}{AM}=\frac{\frac{3}{4}AC}{\frac{2}{5}AC}=\frac{15}{8}$.
(за 2-ма кутами)

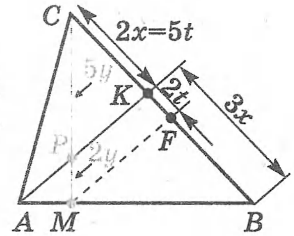
Відповідь: 15 : 8.

(Порівняйте з ОК - 15(3) і ОК -29(5))

2

Дано: $CK : KB = 2 : 3$;
$CP : PM = 5 : 2$.

Знайти: $BM : MA$.



$MF \parallel AK$ за побудовою.

1) $\angle MCB$:

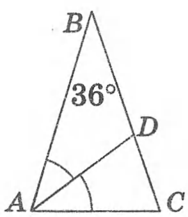
$$\frac{CK}{KF}=\frac{CP}{PM}=\frac{5}{2}\to CK=5t=2x,\ KF=2t;$$

2) $\angle ABC$:

$$\frac{MB}{AM}=\frac{FB}{KF}=\frac{3x-2t}{2t}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{t}-1=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}-1=\frac{11}{4}.$$

Відповідь: 11 : 4.

3



Дано: $AB = BC$, $\angle B = 36°$,
$AD \equiv l_A$.

Довести: $\Delta ADC \sim \Delta BAC$.

1) $\angle A=\angle C=\frac{180°-36°}{2}=72°$;

2) $\angle C$ – спільний

$\underline{\angle DAC=72°:2=36°=\angle B}$

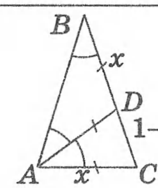
↓

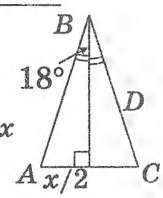
$\Delta ADC \sim \Delta BAC$.

$\Longrightarrow$

4 О.ф.

Довести: $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 36°=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.





Розглянемо ΔABC:

$AB=BC=1, \angle B=36°, AC \triangleq x$.

1) $AD \equiv l_A \to AD = AC = x$ (див. 3);

2) $\angle BAD = 36° = \angle B \to BD = AD = x$;

3) $AD \equiv l_A \to \frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}$; $x^2+x-1=0$, $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (бо $x>0$)

$x^2+x-1=0, x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (бо $x>0$)

4) З ΔABK: $\sin 18°=\frac{x/2}{1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$;

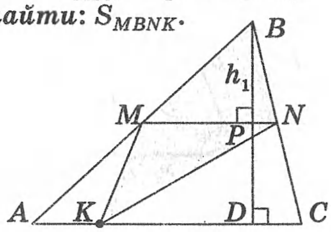
5) З ΔABC за т. косинусів:

$x^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 36°$, тоді $\cos 36°=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

5

Дано: $S_{ABC}=S$; $MN \parallel AC$;
$S_{MBN}=S_1$; $K \in [AC]$.

Знайти: S_{MBNK}.



1) $BD \equiv h$, $BP \triangleq h_1$, $PD \triangleq h_2$;

2) $d(MN/AC)=h_2 \to S_{MKN} : S_{MBN} = h_2 : h_1$;

3) $MN \parallel AC \to \Delta MBN \sim \Delta ABC$, тоді $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_1}}=\frac{h}{h_1}=\frac{h_2}{h_1}+1=\frac{S_{MKN}}{S_1}+1$.

4) $S_{MBNK}=S_{MBN}+S_{MKN}=S_1+\left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_1}}-1\right)S_1=\sqrt{SS_1}$

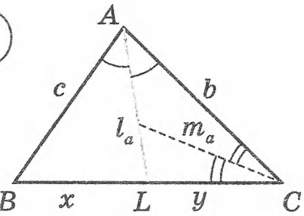
Відповідь: $\sqrt{SS_1}$

ОК-32

О.Ф. Опорні факти про довжини відрізків у трикутнику

ВЛАСТИВОСТІ БІСЕКТРИСИ

1



$$\frac{x}{y}=\frac{c}{b}$$

$$x=\frac{ac}{b+c}$$

$$y=\frac{ab}{b+c}$$

$$\boxed{\frac{AI}{IL}=\frac{b+c}{a}}$$

Див. ОК–30(5)

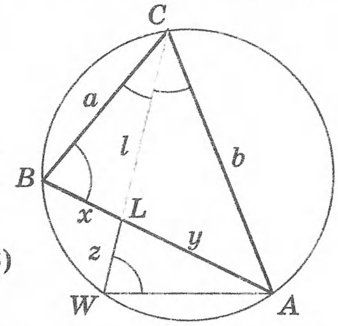
2 Див. ОК–29(3)

$$\boxed{l_a=\frac{2bc}{b+c}\cdot\cos\frac{A}{2}}$$

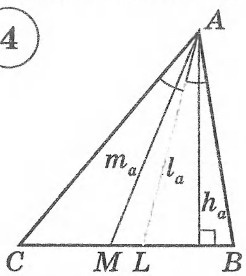
3 ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА

$$\boxed{l^2=ab-xy}$$

Див. ОК–30(3)



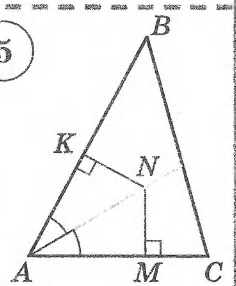
4



l_a завжди між m_a і h_a!

Див. ОК–26

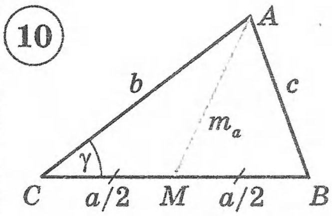
5



l – ГМТ рівновіддалених від сторін кута

ПРО МЕДІАНУ

10



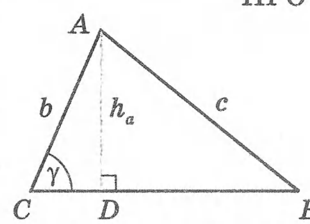
$$m_a^2=b^2+\frac{a^2}{4}-2b\frac{a}{2}\cos\gamma \quad \Big|\cdot 2$$

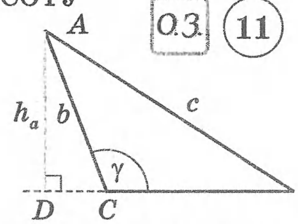
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \quad \Big|\,-$$

$$m_a^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

ПРО ВИСОТУ

О.З. **11**



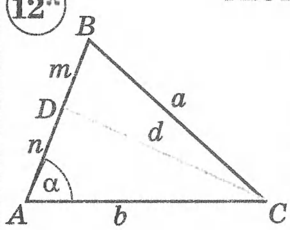


$$CD=|b\sin\gamma|$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \qquad h_a^2=b^2-CD^2$$

$$b\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a} \qquad h_a^2=b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2$$

12* ТЕОРЕМА СТЮАРТА



1) $\triangle ACD$

$$d^2=b^2+n^2-2bn\cos\alpha \quad \Big|\cdot c$$

2) $\triangle ABC$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \quad \Big|\cdot n \quad -$$

$$d^2c-a^2n=b^2c+n^2c-b^2n-c^2n$$

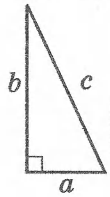
$$d^2-a^2\frac{n}{c}=b^2\frac{c-n}{c}-n(c-n)$$

$(c-n=m)$

$$d^2=b^2\frac{m}{c}+a^2\frac{n}{c}-mn$$

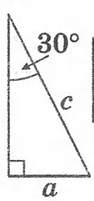
ЯКЩО ТРИКУТНИК ПРЯМОКУТНИЙ

6 ТЕОРЕМА ПІФАГОРА



$$\boxed{c^2=a^2+b^2}$$

7

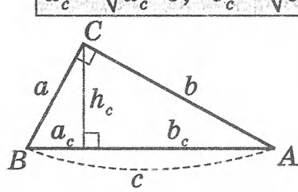


$$\boxed{a=\frac{c}{2}}$$

8

$$h_c=\sqrt{a_c\cdot b_c}$$

$$a_c=\sqrt{a_c\cdot c};\quad b_c=\sqrt{b_c\cdot c}$$



$\Longrightarrow$

О.З. **9**

$$\boxed{\frac{1}{h_c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

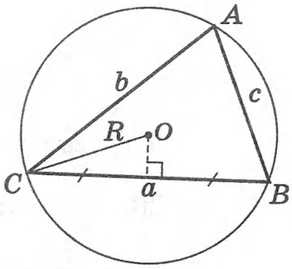
$$h_c^2=a_c\cdot b_c,\ a^2=a_c\cdot c,\ b^2=b_c\cdot c$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{b_c+a_c}{a_c\cdot b_c\cdot c}=\frac{c}{a_c\cdot b_c}=\frac{1}{h_c^2}$$

ОК-33

О.Ф. Опорні факти про R та r трикутника

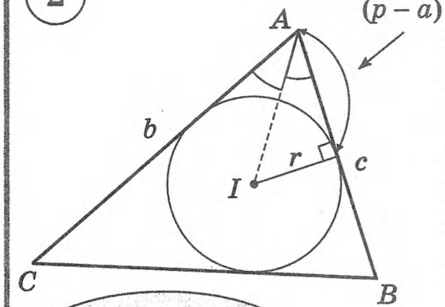
1



$$R=\frac{a}{2\sin A} = \frac{abc}{4S}$$

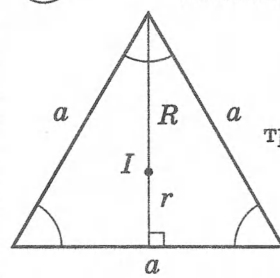
2

Див. ОК-25(3) $(p-a)$



$$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = S/p \qquad p \triangleq \frac{P}{2}$$

3 ЯКЩО ТРИКУТНИК ПРАВИЛЬНИЙ



$O \equiv I$ – центр трикутника

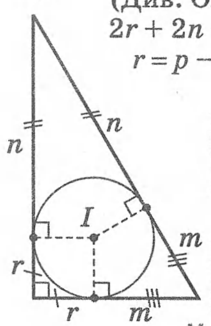
$$R=\frac{a\sqrt{3}}{3} \quad r=\frac{a\sqrt{3}}{6} \quad R=2r$$

4 ЯКЩО $\angle C = 90°$

(Див. ОК-25(5,6))

$2r + 2n + 2m = 2p$

$r = p - \underbrace{(n+m)}_{a}$



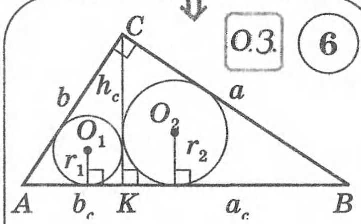
$$\boxed{r=\frac{a+b-c}{2}}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{r+R=\frac{a+b}{2}}$$

$\Downarrow$

О.З. 6



$CK \equiv h_c$

$$r_1=\frac{b_c+h_c-b}{2}$$

$$r_2=\frac{a_c+h_c-a}{2}$$

$$r+r_1+r_2=$$

$$=\frac{a+b-c+b_c+a_c+2h_c-a-b}{2}$$

$$\boxed{r+r_1+r_2=h_c}$$

О.З. 5* ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА

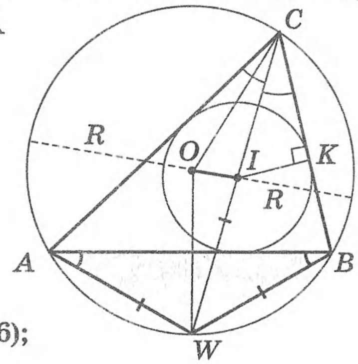
1) $(R+OI)\cdot(R-OI)=CI\cdot WI$

$OI^2=R^2-CI\cdot WI;$

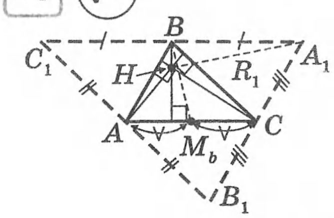
2) $\underline{\triangle CIK}: CI=\dfrac{r}{\sin\frac{C}{2}};$

3) $\underline{\triangle ABW}: AW=2R\sin\dfrac{\widehat{C}}{2}=WI$ (ОК–26);

$$OI^2=R^2-\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}2R\sin\frac{C}{2};\ \boxed{OI^2=R^2-2Rr}$$



О.З. 7* ЯКЩО $C_1A_1 \parallel CA;\ B_1A_1 \parallel BA;\ C_1B_1 \parallel CB$



1) H – ортоцентр; $C_1B=BA_1$; $A_1C=CB_1$; $C_1A=AB_1$ – див ОК–27(6);

2) з п.1 $\rightarrow H$ – центр кола описаного навколо $\triangle A_1B_1C_1$;

3) $\triangle A_1B_1C_1 \underset{k=2}{\backsim} \triangle ABC \rightarrow \boxed{R_1=2R;}$

4) $2R=R_1=HA_1$, $C_1B=BA_1=AC=b$ $\rightarrow (2R)^2=b^2+BH^2$; аналогічно:

$$\boxed{R^2=\frac{a^2+AH^2}{4}=\frac{c^2+CH^2}{4}=\frac{b^2+BH^2}{4}}.$$

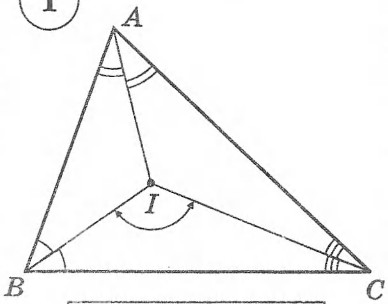
5) $AM_b=M_bC$, $C_1B=BC_1$ $\rightarrow$ Перетворення гомотетії з $k=-2$ $B\rightarrow B_1, M_b\rightarrow B$ $\rightarrow$ *центр гомотетії* – – центроїд M (бо $BM:MM_B=2:1$)

6) Перетворення гомотетії з $k=-2$ $M_b\rightarrow B, O\rightarrow H$ $\rightarrow \boxed{BH=2OM_b}$; аналогічно: $\boxed{AH=2OM_a, CH=2OM_c}$.

ОК-34

О.3 Опорні задачі про кути між лінійними елементами трикутника

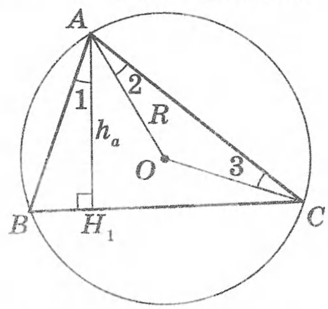
1



$$\boxed{\angle CIB = 90° + \frac{\angle A}{2}}$$

Див. ОК–27(8)

2 $\boxed{AB\,\hat{}\,h_a = OA\,\hat{}\,AC}$

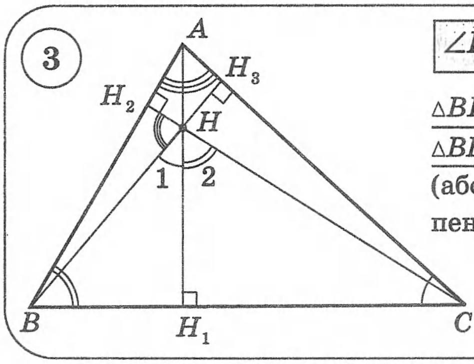


1) $\angle 1 = 90° - \angle B$ ($\triangle BH_1A$)

2) $\angle AOC = 2\angle B$ ($\smile AC$)

3) $\angle 3 = \angle 2 = \dfrac{180° - 2\angle B}{2} = \angle 1$

3



$\boxed{\angle BHH_1 = \angle C}$

$\underline{\triangle BH_3C}$: $\angle H_3BC = 90° - \angle C$

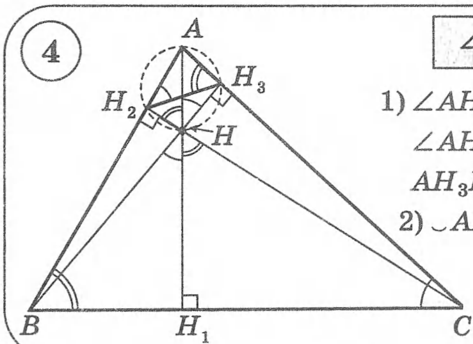
$\underline{\triangle BHH_1}$: $\angle 1 = 90° - \angle H_3BC = \angle C$

(або як кути з відповідно перпендикулярними сторонами).

Аналогічно:

$$\boxed{\begin{aligned}\angle CHH_1 &= \angle B\\ \angle BHH_2 &= \angle A\end{aligned}}$$

4



$\boxed{\angle AH_2H_3 = \angle C}$

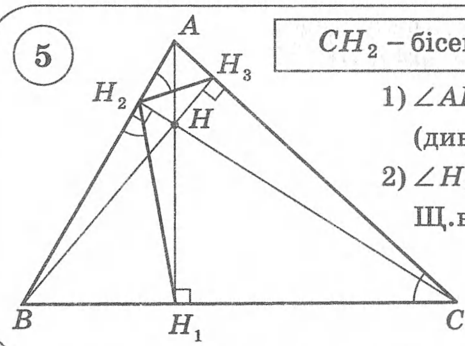
1) $\angle AH_2H = 90° = \angle AH_3H$, тоді $\angle AH_2H + \angle AH_3H = 180°$ і AH_3HH_2 – описаний;

2) $\smile AH_3$: $\angle AH_2H_3 = \angle AHH_3 = \angle C$.

Аналогічно:

$\boxed{\angle AH_3H_2 = \angle B.}$

5



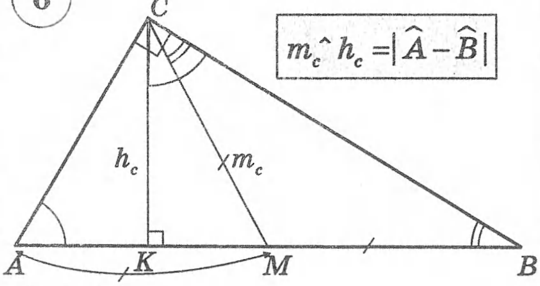
$\boxed{CH_2 \text{ – бісектриса кута } H_1H_2H_3}$

1) $\angle AH_2H_3 = \angle C = \angle H_1H_2B$ (див. 4);

2) $\angle H_3H_2C = 90° - \angle C = \angle H_1H_2C$. Щ.в.д.

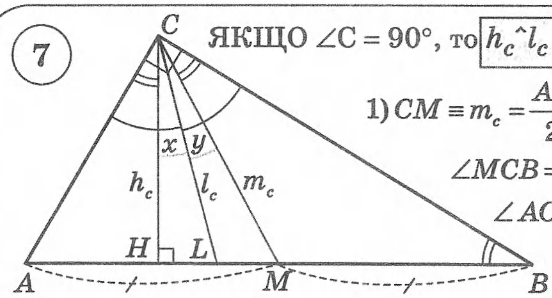
6 ЯКЩО $\angle C = 90°$, то

$\boxed{m_c\,\hat{}\,h_c = |\hat{A} - \hat{B}|}$



$\left.\begin{aligned}&\angle C = 90°\\ &CK \equiv h_c\\ &CM \equiv m_c\end{aligned}\right| \to h_c\,\hat{}\,m_c = |\hat{A} - \hat{B}| \quad \left(\text{бо } m_c = \dfrac{c}{2}\right).$

7 ЯКЩО $\angle C = 90°$, то $\boxed{h_c\,\hat{}\,l_c = m_c\,\hat{}\,l_c}$



1) $CM \equiv m_c = \dfrac{AB}{2} = MA$;

$\angle MCB = \angle B \triangleq \alpha$;

$\angle ACH = \angle B$;

2) $\angle x = \dfrac{90°}{2} - \angle BCH = \dfrac{90°}{2} - \alpha$;

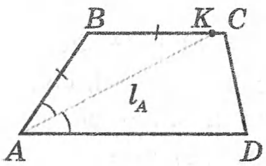
3) $\angle y = \dfrac{90°}{2} - \angle MCB = \dfrac{90°}{2} - \alpha = \angle x$.

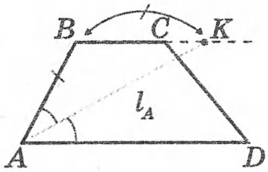
ОК-35

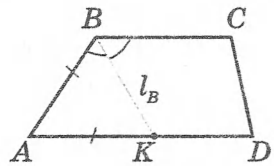
О.З. Опорні задачі трапеції

1

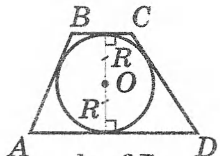
$ABCD$ – трапеція, l – бісектриса кута





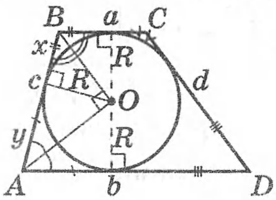


2



$h = 2R$

3



$\angle AOB = 180° - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle B}{2} =$

$= 180° - \frac{180°}{2} = 90°$

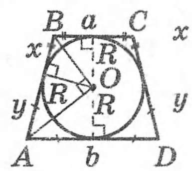
$\boxed{a + b = d + c}$

$\boxed{\angle AOB = 90°,\quad R = \sqrt{xy}}$

$\Rightarrow$

4

$AB = CD$



$x = \frac{a}{2}$

$y = \frac{b}{2}$

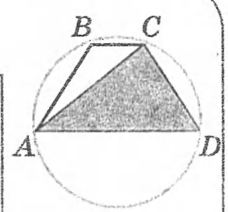
$\boxed{R = \frac{\sqrt{ab}}{2}}$ $\boxed{h = \sqrt{ab}}$

5

$ABCD$ – *вписана*

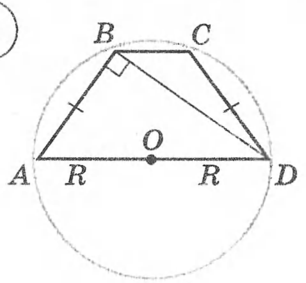
$\Updownarrow$

$AB = CD$



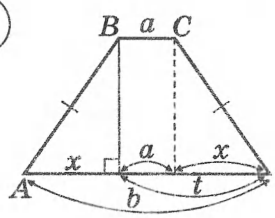
$R_{ABCD} = R_{ACD} = R_{ABC}$

6



$\angle ABD = 90° \Rightarrow O \in AD,$
$AD = 2R.$

7

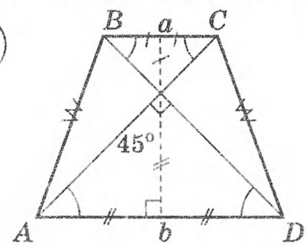


$AB = CD$

$\Downarrow$

$x = \frac{b-a}{2}, \quad t = \frac{b+a}{2}$

8



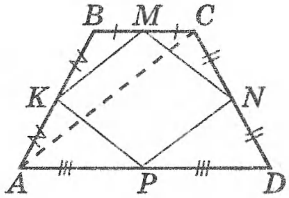
$AB = CD,\ CA \perp BD$

$\Downarrow$

$h = \frac{b+a}{2},\ S = h^2$

9

K, M, N, P – середини сторін
$KMNP$ – паралелограм

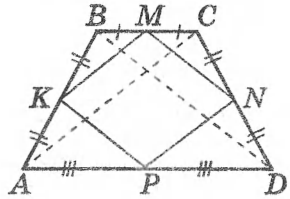


$KM \parallel AC \parallel PN,\ KM = \frac{AC}{2} = PN$

$AB = CD$

$\Downarrow$

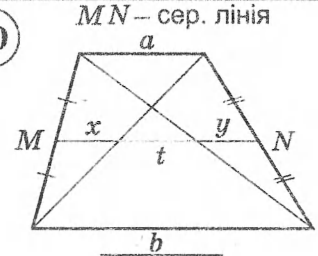
$KMNP$ – ромб



$KM = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2} = MN$

10

MN – сер. лінія



$\boxed{x = y = \frac{a}{2}}$

$x = \frac{a}{2};\ y = \frac{a}{2};\ x + t + y = \frac{a+b}{2}$

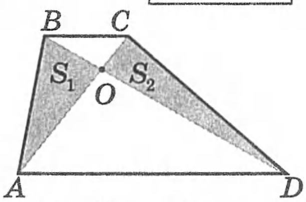
$\boxed{t = \frac{b-a}{2}}$

О.3.

ОК-36
Опорні задачі трапеції

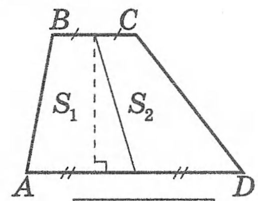
11

$\boxed{S_1 = S_2}$



$S_1 = S_{ABC} - S_{BOC} =$
$= S_{BCD} - S_{BOC} = S_2$
(бо $S_{ABC} = S_{BCD}$)

12



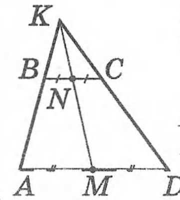
$\boxed{S_1 = S_2}$

(бо h – спільна)

13

Середини основ і т. K належать прямій.

Дано: $BN = NC$, $K = (AB) \cap (CD)$, $(KN) \cap (AD) \triangleq M$; $AM = MD$ — ?



$\Delta KBN \backsim \Delta KAM$;
$\Delta KNC \backsim \Delta KMD$;

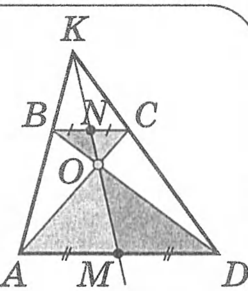
$$\frac{BN}{AM} = \frac{KN}{KM} = \frac{NC}{MD}$$

$AM = MD$

14

Дано: $K = (AB) \cap (CD)$,
$O = (AC) \cap (BD)$,
$(KO) \cap (BC) \triangleq N$
$(KO) \cap (AD) \triangleq M$

Довести: $BN = NC$, $AM = MD$



1) $\Delta AOM \backsim \Delta CON$,
$\Delta DOM \backsim \Delta BON$:

$$\frac{AM}{NC} = \frac{OM}{ON} = \frac{MD}{BN} \triangleq p \rightarrow \left| \begin{matrix} AM = p \cdot NC \\ MD = p \cdot BN \end{matrix} \right.;$$

2) $\Delta KAM \backsim \Delta KBN$, $\Delta KDM \backsim \Delta KCN$:

$$\frac{AM}{BN} = \frac{KM}{KN} = \frac{MD}{NC} \triangleq q \rightarrow \left| \begin{matrix} AM = q \cdot BN \\ MD = q \cdot NC \end{matrix} \right.;$$

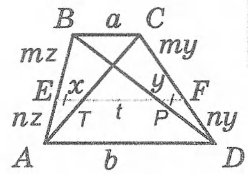
Точки K, O і середини основ належать прямій.

3) $AM \cdot MD = pq \cdot NC^2 = pq \cdot BN^2$, $BN = NC \underset{\text{за (13)}}{\Rightarrow} AM = MD$

15

Якщо $EF \parallel BC \parallel AD$;
$AE : EB = n : m$
$\Downarrow$

$$\boxed{EF = \frac{an + bm}{m + n}}$$



1) $\frac{CF}{FD} = \frac{BE}{EA} = \frac{m}{n}$
(т. Фалеса)

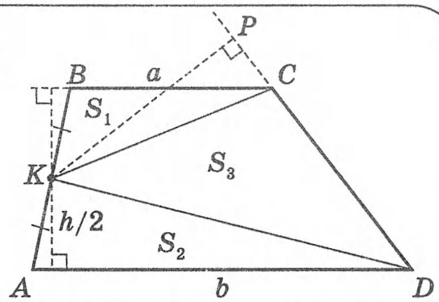
2) $\left. \begin{matrix} \Delta AET \backsim \Delta ABC \\ \Delta DFP \backsim \Delta DCB \end{matrix} \right| \rightarrow \frac{x}{a} = \frac{n}{n+m} = \frac{y}{a}$

$\boxed{x = y}$

3) $\Delta TCF \backsim \Delta ACD$
$\frac{t+y}{b} = \frac{m}{n+m}$

4) $\Delta AET \backsim \Delta ABC = \frac{an+bm}{n+m}$

16*



$KB = KA$ $KP = \perp(CD)$	$\Rightarrow S = KP \cdot CD$

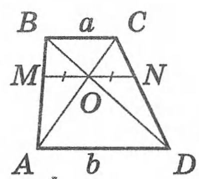
$S_3 = \frac{S}{2}$

$$\left. \begin{matrix} S_1 = \frac{1}{2} a \cdot \frac{h}{2} \\ + \\ S_2 = \frac{1}{2} b \cdot \frac{h}{2} \end{matrix} \right| \rightarrow S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \frac{(a+b)}{2} \cdot h = \frac{S}{2}$$

$\Leftarrow$ Якщо $MN \parallel AD$ і $O \in MN$ $\Rightarrow$

17

$\Delta AMO \backsim \Delta ABC$
$\Delta DON \backsim \Delta DBC$



$$\frac{AM}{AB} \underset{\text{за т. Фалеса}}{=} \frac{DN}{CD}$$

$$\frac{MO}{a} = \frac{AM}{AB} = \frac{DN}{CD} = \frac{ON}{a}$$

$\boxed{MO = NO}$

18

$\Delta AMO \backsim \Delta ABC$;
$\Delta CON \backsim \Delta CAD$:

$\frac{MO}{a} = \frac{AO}{AC}$;
$\frac{ON}{b} = \frac{OC}{AC}$; $MO = ON$

$\Downarrow$

$a \cdot AO = b \cdot OC$

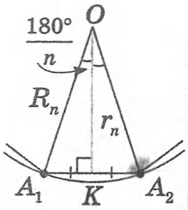
і $\frac{a}{b} = \frac{OC}{AO} \underset{\text{за т. Фалеса}}{=} \frac{MB}{AM} = \frac{CN}{ND} = \frac{OB}{OD}$

$$\boxed{\frac{MB}{AM} = \frac{CN}{ND} = \frac{a}{b}} \quad \boxed{\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD} = \frac{a}{b}}$$

ОК-37

0.3

Правильні багатокутники
(n-кутники)



$A_1A_2 = a_n$

$$\boxed{R_n = \frac{a_n}{2} : \sin\frac{180^\circ}{n}, \quad r_n = \frac{a_n}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}$$

$S_n = n \cdot \underbrace{S_{A_1OA_2}} \, n\cdot\frac{1}{2}a_n \underbrace{r_n} = \frac{1}{2}P_n r_n$, тоді

$$S_n = n\left(\frac{1}{2}R_n^2 \sin\frac{360^\circ}{n}\right) \quad S_n = n\cdot\frac{1}{2}a_n\left(\frac{a_n}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}P_n r_n, \quad S_n = \frac{n}{2}R_n^2 \sin\frac{360^\circ}{n}, \quad S_n = \frac{na_n^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}$$

$n = 3$: $R_3 = \dfrac{a_3}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{3}$; $r_3 = \dfrac{a_3}{2}\operatorname{ctg}60^\circ = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{6}$; $R_3 = 2r_3 \quad S_3 = \dfrac{a_3^2\sqrt{3}}{4}$.

$n = 4$: $R_4 = \dfrac{a_4}{2\sin 45^\circ} = \dfrac{a_4\sqrt{2}}{2}$; $r_4 = \dfrac{a_4}{2}\operatorname{ctg}45^\circ = \dfrac{a_4}{2}$; $R_4 = \sqrt{2}r_4$; $S_4 = a_4^2$.

$n = 6$: $R_6 = \dfrac{a_6}{\sin 60^\circ} = a_6$; $r_6 = \dfrac{a_6}{2}\operatorname{ctg}30^\circ = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$; $R_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r_6$; $S_6 = \dfrac{a_6^2 3\sqrt{3}}{2}$.

Правильні $\underbrace{A_1\ldots A_n}_{F_1} \; і \; \underbrace{B_1\ldots B_n}_{F_2} \;\backsim\; \rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{P_1}{P_2} = k$ *– коефіцієнт подібності*; $\dfrac{S_1}{S_2} = k^2$.

$R_5 = \dfrac{a_5}{2\sin 36^\circ}$; $r_5 = \dfrac{a_5}{2}\operatorname{ctg}36^\circ$; $R_5 = \dfrac{r_5}{\cos 36^\circ}$.

$n = 5$

$\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ (див. ОК-31) $\rightarrow$ $\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \dfrac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$;

$\sin 18^\circ = \dfrac{1}{4}\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

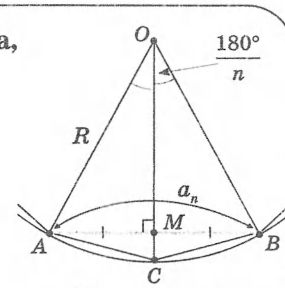
$\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ$ $\rightarrow$ $\sin 36^\circ = 2\cdot\dfrac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} =$

$= \dfrac{1}{4}\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$.

$$\boxed{R_5 = \frac{a_5\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}, \quad r_5 = \frac{R_5}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)}$$

$\cos 36^\circ = \dfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$ (див. ОК – 31).

* **Якщо a_n і a_{2n} – сторони правильного n-кутника і правильного $2n$-кутника, вписаних у коло, радіус якого дорівнює R, то виконується співвідношення** $a_{2n}^2 = 2R(R - r_n) = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \dfrac{a_n^2}{4}}$.



$AC = CB = a_{2n}$

Доведення

$AO = OC = OB = R$, $OM = r_n$.

З $\triangle AOC$: $a_{2n}^2 = AC^2 = 2R^2 - 2R\cdot R\cos\dfrac{180^\circ}{n} = 2R^2 - 2Rr_n = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \dfrac{a_n^2}{4}}$.

$\Downarrow$

$a_4 = R\sqrt{2}$, $r_4 = \dfrac{a_4}{2}$ $\rightarrow$ $a_8^2 = 2R(R - r_4) = 2R\left(R - \dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right) = R^2\left(2-\sqrt{2}\right)$.

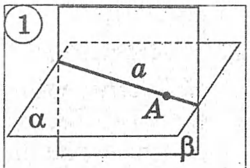
$\Downarrow$

$a_6 = R$, $r_6 = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$ $\rightarrow$ $a_{12}^2 = 2R(R - r_6) = 2R\left(R - \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right) = R^2\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

ОК-38

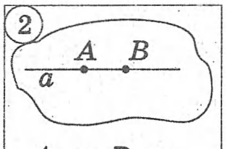
Скарбничка аксіом, теорем і означень шкільного курсу стереометрії

(1)



$\left.\begin{array}{l} A\in\alpha \\ A\in\beta \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha\cap\beta=a, \\ A\in a \end{array}$

(2)

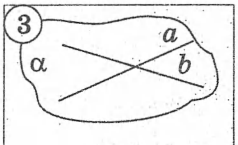


$\underline{A\in\alpha, B\in\alpha}$

$\Downarrow$

$a\subset\alpha$

(3)

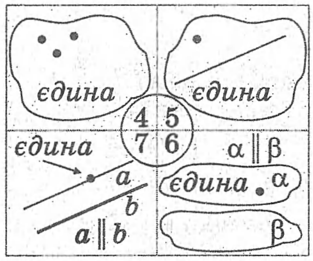


$\underline{a\cap b}$

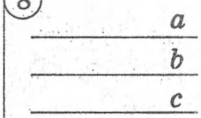
$\Downarrow$

єдина $\alpha\supset\{a;b\}$

(4) (5) (7) (6)



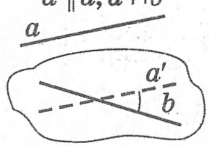
(8)



$\left.\begin{array}{l} a\parallel b \\ b\parallel c \end{array}\right| \Rightarrow a\parallel c$

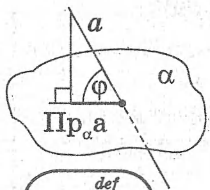
(9)

$a'\parallel a, a'\cap b$



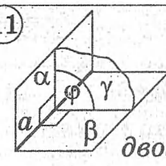
$a\hat{\ }b \overset{def}{=} a'\hat{\ }b \leqslant 90°$

(10)



$a\hat{\ }\alpha \overset{def}{=} \varphi$

(11)



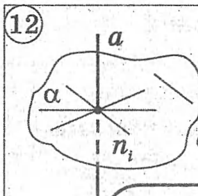
$\gamma\perp a$

лінійний кут двогранного кута

$\alpha\hat{\ }\beta \overset{def}{=} \varphi$

$\gamma\perp\alpha, \alpha\perp\beta$

(12)

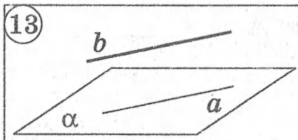


$a\perp n_i$

довільна

$a \underset{def}{\perp} \alpha$

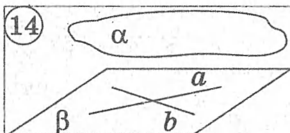
(13)



$\left.\begin{array}{l} b\parallel a \\ a\subset\alpha \end{array}\right| \Rightarrow b\parallel\alpha$

ознака

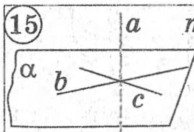
(14)



$\left.\begin{array}{l} a\parallel\alpha \\ b\parallel\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \beta\parallel\alpha$

ознака

(15)

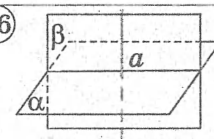


теорема про два перп. (ТДП)

$\left.\begin{array}{l} a\perp b \\ a\perp c \end{array}\right| \Rightarrow a\perp\alpha$

ознака

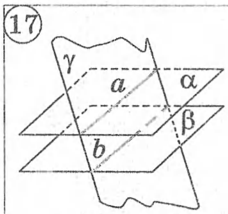
(16)



$\left.\begin{array}{l} a\perp\alpha \\ a\subset\beta \end{array}\right| \Rightarrow a\perp\alpha$

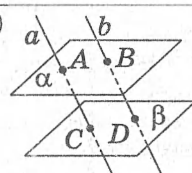
ознака

(17)



$\alpha\parallel\beta \Rightarrow a\parallel b$

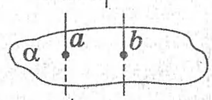
(18)



$\left.\begin{array}{l} a\parallel b \\ \alpha\parallel\beta \end{array}\right| \Rightarrow |AC|=|BD|$

(19)

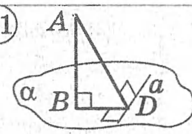
$\left.\begin{array}{l} a\parallel b \\ a\perp\alpha \end{array}\right| \Rightarrow b\perp\alpha$



$\left.\begin{array}{l} a\perp\alpha \\ b\perp\alpha \end{array}\right| \Rightarrow a\parallel b$

(20)

(21)



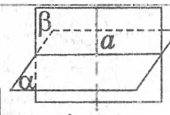
$a\perp AB$

$\Downarrow\Uparrow$

$a\perp AD$

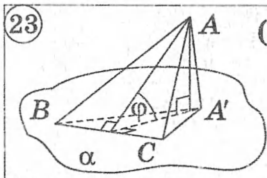
теорема про три перпен. (ТТП)

(22)



$\left.\begin{array}{l} \beta\perp\alpha \\ a\perp b \end{array}\right| \Rightarrow a\perp\alpha$

(23)



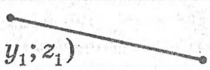
$(ABC)\hat{\ }(A'BC)=\varphi$

$\underline{AA'\perp\alpha}$

$\Downarrow$

$S_{A'BC}=S_{ABC}\cos\varphi$

(24)

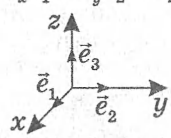


$A(x_1;y_1;z_1)$ $B(x_2;y_2;z_2)$

$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

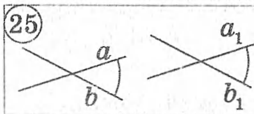
(28)

$\vec{a}=a_x\vec{e}_1+a_y\vec{e}_2+a_z\vec{e}_3$



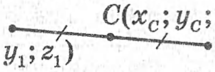
$|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=|\vec{e}_3|=1$

(25)



$\left.\begin{array}{l} a\parallel a_1 \\ b\parallel b_1 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} a\hat{\ }b \\ \parallel \\ a_1\hat{\ }b_1 \end{array}$

(27)



$C(x_C;y_C;z_C;)$

$A(x_1;y_1;z_1)$ $B(x_2;y_2;z_2)$

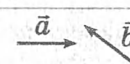
$x_C=\dfrac{x_1+x_2}{2}; y_C=\dfrac{y_1+y_2}{2}; z_C=\dfrac{z_1+z_2}{2}$

(29)

$\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\}\not\subset\alpha$

$\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\eta\vec{c}$

(30)



$\cos(\vec{a}\hat{\ }\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$0\leqslant a\hat{\ }b\leqslant 180°$

(26)

паралельне проектування

1) $a\to a'$; $\boxed{A_iA'_i\parallel h}$

2) $A_1A_2\parallel A_3A_4 \to A'_1A'_2\parallel A'_3A'_4$;

3) $A_5\in[A_3A_4]\to A'_5\in[A'_3A'_4]$;

4) $\dfrac{A_3A_5}{A_5A_4}=\dfrac{A'_3A'_5}{A'_5A'_4}$, *де* $\{A_3;A_4;A_5\}\in a$

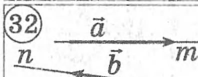
(31)

$\vec{a}\cdot\vec{b}\overset{def}{=}a_1b_1+$

$+a_2b_2+a_3b_3=$

$=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\hat{\ }\vec{b})$

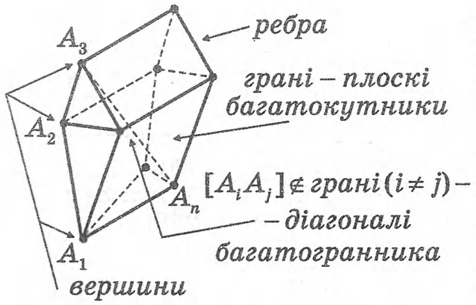
(32)



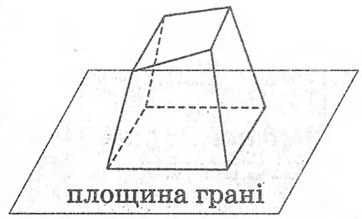
$\cos(m\hat{\ }n)=\cos(\vec{a}\hat{\ }\vec{b})\geqslant 0$

$0\leqslant m\hat{\ }n\leqslant 90°$

ОК-39
Багатогранник

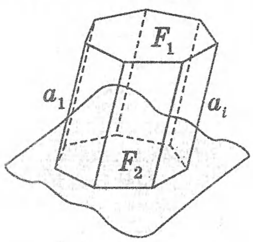


опуклий



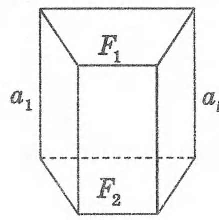
ПРИЗМА

похила призма



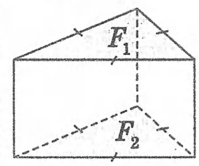
$(F_1) \parallel (F_2)$; $F_1 = F_2$;
бічні грані – паралелограми; $a_1 \parallel a_2 \parallel \ldots \parallel a_n$.

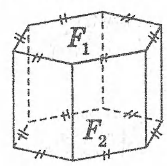
пряма призма



$(F_1) \parallel (F_2)$; $F_1 = F_2$;
бічні грані – прямокутники; $a_i \perp (F_{1,2})$.

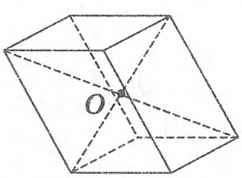
правильна призма





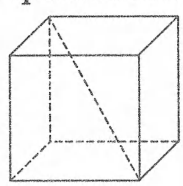
$F_{1,2}$ – правильні багатокутники
$a_i \perp (F_{1,2})$;
$F_1 = F_2$;
бічні грані – прямокутники

паралелепіпед



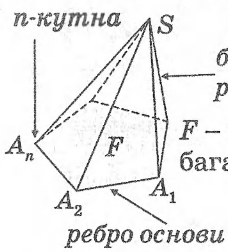
Усі грані – паралелограми;
т. O – центр симетрії

прямокутний паралелепіпед



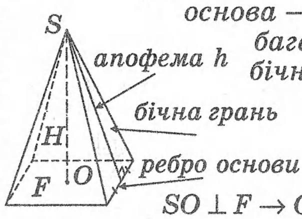
Всі грані – прямокутники;
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. $a = b = c$ – куб

ПІРАМІДА



правильна піраміда

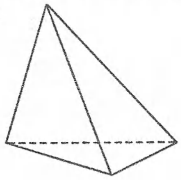
основа – правильний багатокутник, бічні ребра рівні



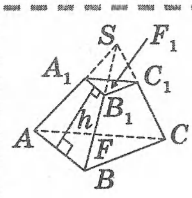
$S_{біч} = \dfrac{P_{осн}}{2} h$

$SO \perp F \to O$ – центр F.

тетраедр
$n = 3$



зрізана піраміда



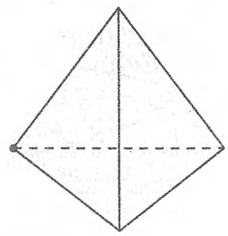
$(F_1) \parallel (F)$, h – апофема,
$d(F_1/F_2)$ – висота,
бічні грані – трапеції,
$F_1 \sim F$.

ПРАВИЛЬНІ БАГАТОГРАННИКИ

Всі грані – рівні між собою правильні багатокутники; у кожній вершині сходиться однакова кількість ребер.

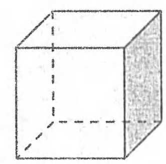
правильний тетраедр

3 ребра з однієї вершини



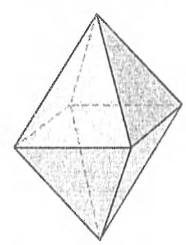
куб

3 ребра з однієї вершини



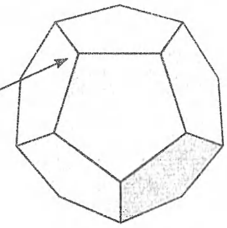
правильний октаедр

4 ребра з однієї вершини



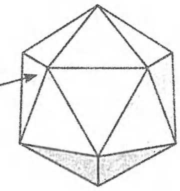
правильний додекаедр

3 ребра з однієї вершини



правильний ікосаедр

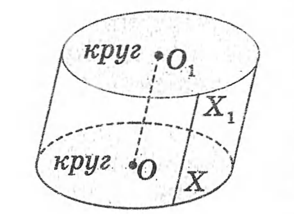
5 ребер з однієї вершини



ОК-40

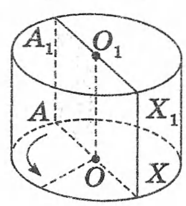
Кругові циліндр і конус, тіла обертання

круговий циліндр



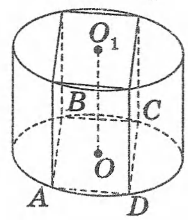
твірна $X_1X \parallel OO_1$;
основи – рівні круги.

прямий циліндр



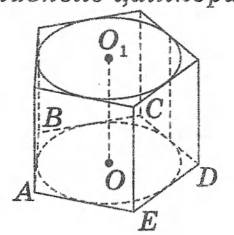
OO_1 – вісь;
твірна $X_1X \parallel OO_1$;
AA_1X_1X – осьовий переріз – прямокутник.

призма, вписана в циліндр



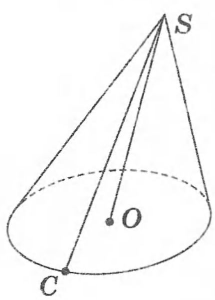
$ABCD$ – вписаний в основу.

призма, описана навколо циліндра



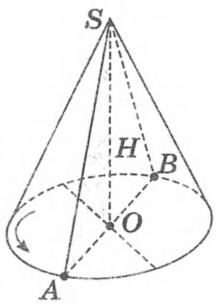
$ABCDE$ – описаний навколо основи.

круговий конус



SC – твірна.

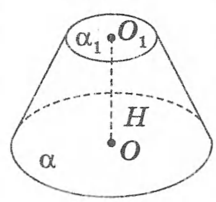
прямий конус



$\triangle SAB$ – осьовий переріз;
вісь $SO \perp$ основі.

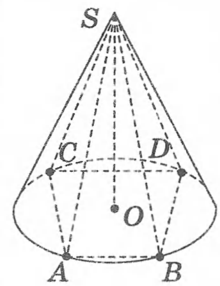
зрізаний конус

$\alpha_1 \parallel \alpha$.



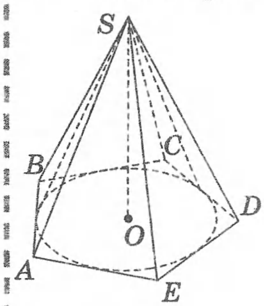
$\alpha \perp OO_1$
$\alpha_1 \perp OO_1$
OO_1 – висота

піраміда, вписана в конус



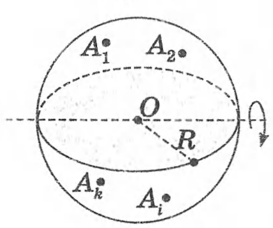
$ABCD$ – вписаний в основу.

піраміда, описана навколо конуса



$ABCDE$ – описаний навколо основи.

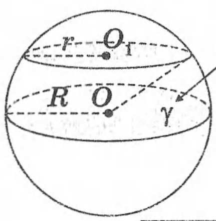
куля



$d(O/A_i) = R$

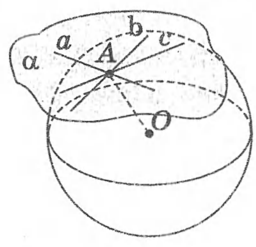
переріз площиною – круг

великий круг – діаметральна площина



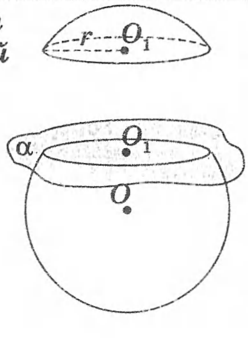
$r = \sqrt{R^2 - OO_1}$; $OO_1 \perp \gamma$.

α – дотична площина;
A – точка дотику;

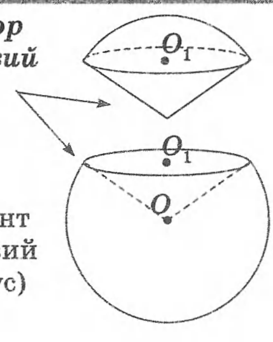


$\{a; b; c\} \subset \alpha$
$\Downarrow$
$a \perp OA$;
$b \perp OA$;
$c \perp OA$;
$R = OA \perp \alpha$.

сегмент кульовий



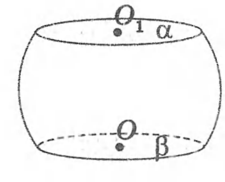
сектор кульовий



(сегмент кульовий $\pm$ конус)

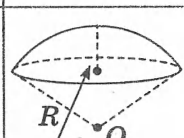
шар кульовий

$\alpha \parallel \beta$

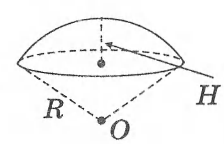


ОК-41

Площі поверхонь

$S_{біч.\ призми}$	$P_{\perp}l,$	l – довжина бічного ребра; $P_{\perp}$ – периметр перпендикулярного перерізу (площиною, що перпендикулярна бічним ребрам).
$S_{біч.\ прямої\ призми}$	$Pl,$	P – периметр основи; l – довжина бічного ребра.
$S_{біч.\ правильної\ піраміди}$	$\frac{1}{2}Ph$	P – периметр основи; h – апофема.
$S_{біч.\ правильної\ зріз.\ піраміди}$	$\frac{1}{2}(P_1+P_2)h$	$P_{1,2}$ – периметр основи; h – апофема.
$S_{біч.\ циліндра}$	$2\pi RH$	R – радіус основи; H – висота.
$S_{біч.\ конуса}$	πRl	R – радіус основи; l – твірна.
$S_{біч.\ зріз.\ конуса}$	$\pi(R_1+R_2)l$	$R_{1,2}$ – радіуси основи; l – твірна.
$S_{поверхні\ кулі}$	$4\pi R^2$	R – радіус кулі.
$S_{сегментної\ поверхні}$	$2\pi RH$	 R – радіус основи; H – висота сегментної поверхні.

Об'єми

$V_{призми}$	$S_{осн.}H = S_{\perp}l,$	l – довжина бічного ребра; $S_{\perp}$ – площина перпендикулярного перерізу.
$V_{прямокут.\ паралелепіпеда}$	$abc,$	a, b, c – його виміри.
$V_{піраміди}$	$\frac{1}{3}S_{осн.}H$	$S_{осн.}$ – площа основи.
$V_{зріз.\ піраміди}$	$\frac{H}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)$	$S_{1,2}$ – площі основ.
$V_{конуса}$	$\frac{1}{3}\pi R^2H$	R – радіус основи.
$V_{зріз.\ конуса}$	$\frac{1}{3}\pi H\left(S_1^2+S_1S_2+S_2^2\right)$	$R_{1,2}$ – радіуси основи.
$V_{кулі}$	$\frac{4}{3}\pi R^3$	R – радіус кулі.
$V_{кульового\ сектору}$	$\frac{2}{3}\pi R^2H$	
$V_{кульового\ сегменту}$	$\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$	
$V_{тіла\ обертання}$	$\pi\int_a^b f^2(x)dx$	Тіло обмежено площинами $x=a$, $x=b$ і обертанням $y=f(x)\geqslant 0$ навколо (Ox).

$T' \underset{k}{\backsim} T \longrightarrow S':S=k^2$ ← Фігури T і T' подібні → $T' \underset{k}{\backsim} T \longrightarrow V':V=k^3$

ОК-42

О.Ф. Опорні факти про перпендикулярність і паралельність прямих і площин

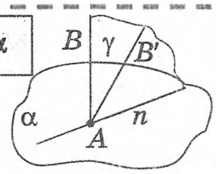
Зі шкільного курсу стереометрії ви знаєте, що *через точку поза площиною можна провести тільки одну площину, паралельну даній* (ОК–38(6)).

Доведемо ще декілька корисних опорних фактів.

У фактах (1) – (5) відповідні доведення будемо проводити від супротивного.

---

1 $\boxed{A \in \alpha \Rightarrow \text{єдина } (AB) \perp \alpha}$



1) будуємо $AB \perp \alpha$;

2) нехай існує $(AB') \perp \alpha$, $(AB) \neq \alpha$.

Побудуємо: $\gamma \supset \{(AB); (AB')\}$, $n \triangleq \gamma \cap \alpha$;

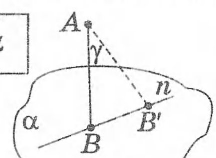
3) $\left.\begin{matrix} n \subset \alpha \\ (AB) \perp \alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow (AB) \perp n$; $\left.\begin{matrix} n \subset \alpha \\ (AB') \perp \alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow (AB') \perp n$.

4) у площині γ: $\left.\begin{matrix} (AB) \perp n \\ (AB') \perp n \end{matrix}\right|$ – цього бути не може;

Висновок: AB – єдиний перпендикуляр, щ.в.д.

---

2 $\boxed{A \notin \alpha \Rightarrow \text{єдина } (AB) \perp \alpha}$



1) будуємо $AB \perp \alpha$;

2) нехай існує $(AB') \perp \alpha$, $(AB') \neq (AB)$.

Побудуємо: $\gamma \supset \{(AB); (AB')\}$, $n \triangleq \gamma \cap \alpha$;

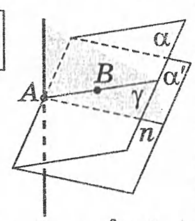
3) $\left.\begin{matrix} (AB) \perp \alpha \\ n \subset \alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow (AB) \perp n$; $\left.\begin{matrix} (AB') \perp \alpha \\ n \subset \alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow (AB') \perp n$;

4) у площині γ: $\left.\begin{matrix} (AB) \perp n \\ (AB') \perp n \end{matrix}\right|$ – цього бути не може;

Висновок: AB – єдиний перпендикуляр, щ.в.д.

---

3 $\boxed{A \in a \Rightarrow \text{єдина } \alpha \perp a, A \in \alpha}$



1) будуємо $\alpha \perp a$, $A \in \alpha$;

2) нехай існує $\alpha' \perp a$. ($\alpha' \neq \alpha$; $A \in \alpha'$);

Побудуємо $B \in \alpha$, $\gamma \supset \{B\, a\}$; $(AB) = \gamma \cap \alpha$; $n \triangleq \gamma \cap \alpha'$;

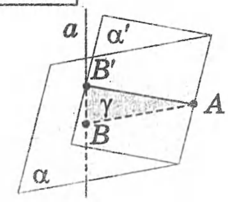
3) $\left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ (BA) \subset \alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow a \perp (AB)$; $\left.\begin{matrix} n \subset \alpha' \\ a \perp \alpha' \end{matrix}\right| \Rightarrow a \perp n$;

4) площа γ: $\left.\begin{matrix} (AB) \perp n \\ m \perp a, n \cap a = A \end{matrix}\right|$ – цього бути не може.

Висновок: α – єдина, щ.в.д.

---

4 $\boxed{A \notin \alpha \Rightarrow \text{єдина } \alpha \perp a, A \in \alpha}$



1) будуємо $\alpha \perp a$, $A \in \alpha$;

2) нехай існує $\alpha' \perp a$, $\alpha' \neq \alpha$; $A \in \alpha'$.

$\alpha \cap a \triangleq B$; $\alpha' \cap a \triangleq B'$;

3) $\left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ (BA) \subset \alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow a \perp (AB)$; $\left.\begin{matrix} a \perp \alpha' \\ (B'A) \subset \alpha' \end{matrix}\right| \Rightarrow a \perp (AB')$;

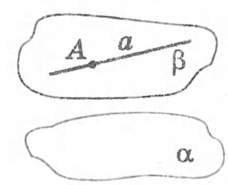
4) $(AB) \cap (AB') = A \; \Big| \Rightarrow \gamma \supset \{(AB); (AB')\}$;

5) у площені γ: $\triangle BAB'$ містить $\angle ABB' = \angle AB'B = 90^\circ$ чого бути не може.

Висновок: α – єдина, щ.в.д.

---

5 $\boxed{a \parallel \alpha \Rightarrow \text{єдина } \beta \parallel \alpha, a \in \beta}$



1) будуємо $\beta \parallel \alpha$, $a \in \beta$;

2) нехай існує $\beta' \parallel \alpha$, $a \subset \beta'$ і $\beta' \neq \beta$.

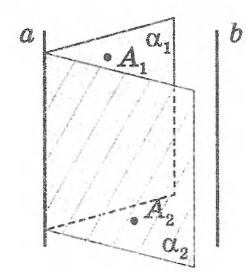
Тоді $\left\{\begin{matrix} a \subset \beta' \\ a \in \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A \in \beta' \\ A \in \beta \end{matrix}\right.$

і цього бути не може (ОК–38(6)).

Висновок: β – єдина площина паралельна α.

---

6 $\boxed{a \parallel b \Rightarrow a \in \alpha_i, b \parallel \alpha_i, i \in N}$



1) $A_1 \notin a$, $A_1 \notin b$;
будуємо $\alpha_1 \supset \{a; A_1\}$,
$b \parallel a_1$ (за ознакою паралельності прямої і площини);

2) $A_2 \neq A_1$, $A_2 \notin a$, $A_2 \notin b$;
будуємо $\alpha_2 \supset \{a; A_2\}$,
$b_2 \parallel a_2$...

ОК-43

О.Ф. Опорні факти про перпендикулярність і паралельність прямих і площин

Зі шкільного курсу стереометрії ви знаєте (ОК–38(13), (14)) *ознаки* паралельності прямої і площини та паралельності двох площин і такі *теореми*:

(ОК – 38(17)) *прямі перетину двох паралельних площин третьою паралельні між собою;*

(ОК – 38(19)) *якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то друга з цих прямих теж перпендикулярна до заданої площини;*

(ОК – 38(20)) *прямі перпендикулярні до однієї площини паралельні між собою.*

Доведемо ще декілька корисних опорних фактів.

---

7 Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої з цих площин.

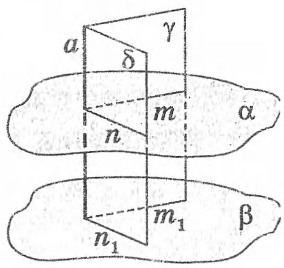
$$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel\beta\\ a\perp\alpha\end{matrix}\right|\Rightarrow a\perp\beta$$

1) Побудова: $\gamma\supset a;\ \delta\supset a;\ \delta\neq\gamma.$

2) $\gamma\cap\alpha\triangleq m;\ \gamma\cap\beta\triangleq m_1;\ \delta\cap\alpha\triangleq n;\ \delta\cap\beta\triangleq n_1.$

$\alpha\parallel\beta \Rightarrow m\parallel m_1;\ n\parallel n_1$ *(ОК – 38 – (17)).*

3) $\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\ \{m;n\}\subset\alpha\end{matrix}\right|\Rightarrow a\perp m,\ a\perp n.$



4) у пл. γ: $\left.\begin{matrix}a\perp m\\ m_1\parallel m\end{matrix}\right|\Rightarrow a\perp m_1.$

У пл. δ: $\left.\begin{matrix}a\perp n\\ n_1\parallel n\end{matrix}\right|\Rightarrow a\perp n_1.$

5) $\left.\begin{matrix}a\perp m_1\\ a\perp n_1\\ \{m_1;n_1\}\subset\beta\end{matrix}\right|\Rightarrow \alpha\perp\beta$, щ.в.д.

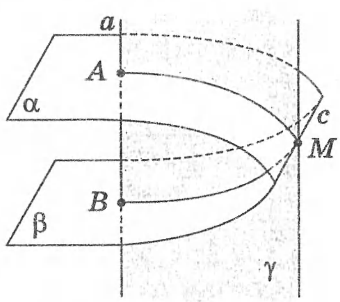
---

7 Площини, що перпендикулярні одній прямій, паралельні між собою.

$$\left.\begin{matrix}a\perp\beta\\ a\perp\alpha\end{matrix}\right|\Rightarrow\alpha\parallel\beta$$

$A\triangleq a\cap\alpha;\ B\triangleq a\cap\beta;$

Нехай $\alpha\nparallel\beta$ і $c\triangleq\alpha\cap\beta$.



1) Побудова:

а) $M\in c;$

б) $\gamma\supset\{a;M\}.$

2) $\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\ (AM)\subset\alpha\end{matrix}\right|\Rightarrow a\perp(AM)$ 3) $\left.\begin{matrix}a\perp\beta\\ (BM)\subset\beta\end{matrix}\right|\Rightarrow a\perp(BM);$

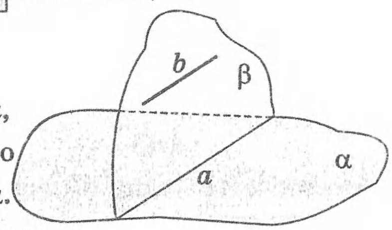
4) у пл. γ: $\left.\begin{matrix}(MA)\perp a\\ (MB)\perp a\end{matrix}\right|$ – цього бути не може.

Висновок: $\alpha\parallel\beta$, щ.в.д.

---

8 Якщо пряма деякої площини паралельна до іншої площини, то вона паралельна і до лінії перетину цих площин.

$$\left.\begin{matrix}b\parallel\alpha\\ b\subset\beta\end{matrix}\right|\Rightarrow \begin{matrix}a\parallel b\text{, де}\\ a\equiv\beta\cap\alpha\end{matrix}$$



Нехай $b\nparallel a$:

$\left.\begin{matrix}\{a;b\}\subset\beta\\ b\nparallel a\end{matrix}\right|\Rightarrow$ $b\cap a$, тобто $b\cap\alpha$.

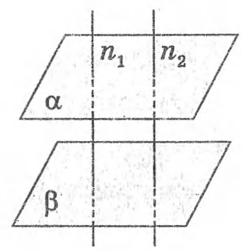
Цього бути не може.

Висновок: $a\parallel b$, щ.в.д.

---

10 Прямі, що перпендикулярні паралельним площинам, паралельні між собою.

$$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel\beta\\ n_1\perp\alpha\\ n_2\perp\beta\end{matrix}\right|\Rightarrow n_1\parallel n_2$$



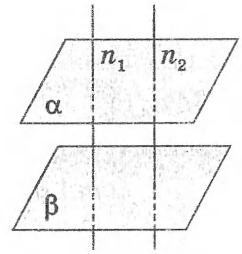
1) $\left.\begin{matrix}\alpha\parallel\beta\\ n_1\perp\alpha\end{matrix}\right|\Rightarrow n_1\perp\beta$ (див. (7)).

2) $\left.\begin{matrix}n_1\perp\beta\\ n_2\perp\beta\end{matrix}\right|\Rightarrow n_1\parallel n_2$ (ОК– 36(20)), щ.в.д.

---

11 Якщо з двох паралельних прямих кожна перпендикулярна до певної з двох площин, то ці площини паралельні між собою.

$$\left.\begin{matrix}n_1\perp\alpha\\ n_2\perp\beta\\ n_1\parallel n_2\end{matrix}\right|\Rightarrow\alpha\parallel\beta$$



1) $\left.\begin{matrix}n_1\parallel n_2\\ n_1\perp\alpha\end{matrix}\right|\Rightarrow$ $n_2\perp\alpha$ (ОК–36(19)).

2) $\left.\begin{matrix}n_2\perp\alpha\\ n_2\perp\beta\end{matrix}\right|\Rightarrow\alpha\parallel\beta$ (див. (9)).

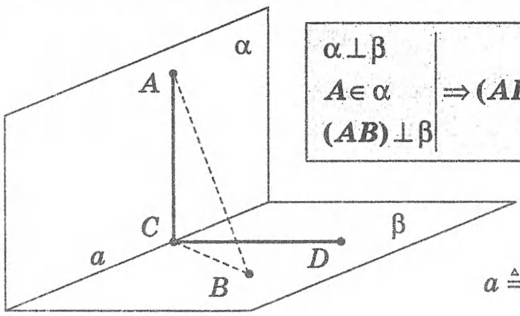
ОК-44

ОФ Опорні факти про перпендикулярність і паралельність прямих і площин

Зі шкільного курсу стереометрії ви знаєте *ознаку перпендикулярності прямої і площини* (ОК–38(15)), *ознаку перпендикулярності двох площин* (ОК – 38(16)), а також *теорему* (ОК–38(22)) – ***якщо у одній з двох взаємно перпендикулярних площин провести пряму перпендикулярно до лінії перетину цих площин, то така пряма буде перпендикулярною до другої площини.***

Доведемо ще декілька корисних опорних фактів.

(12) Якщо з точки одній з двох взаємно перпендикулярних площин провести пряму перпендикулярну до другої з цих площин, то така пряма належить першій площині.



$$\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta\\ A\in\alpha\\ (AB)\perp\beta\end{array}\right|\Rightarrow (AB)\subset\alpha$$

$a \triangleq \alpha\cap\beta$

Нехай $(AB)\not\subset\alpha$, тобто $B\not\subset a$.

1) Побудова:

а) у пл.α $(AC)\perp a$;

б) у пл.β $(CD)\perp a$.

2) $\left.\begin{array}{r} a\perp(AC)\\ a\perp(CD)\end{array}\right| \begin{array}{l}\Rightarrow a\perp(ACD) \text{ і}\\ \alpha\,\hat{}\,\beta=\angle ACD=\dfrac{\pi}{2};\end{array}$

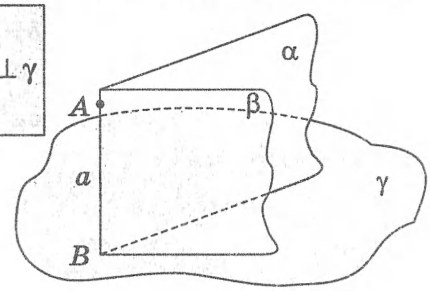
3) $\left.\begin{array}{l} AC\perp CD\\ AC\perp a\end{array}\right|\Rightarrow AC\perp\beta;$

4) $\left.\begin{array}{l} AC\perp\beta\\ AB\perp\beta\\ AB\not\equiv AC\end{array}\right|$ – цього не може бути (*ОК*–42–(2)).

Висновок: B збігається з C і $(AB)\subset\alpha$. Щ.в.д.

(13) Якщо дві площини, що перетинаються, перпендикулярні до третьої площини, то лінія перетину двох перших площин перпендикулярна до третьої площини.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\gamma\\ \beta\perp\gamma\\ a\triangleq\alpha\cap\beta\end{array}\right|\Rightarrow a\perp\gamma$$



1) Побудова:

а) довільна $A\in a$;

б) $(AB)\perp\gamma$.

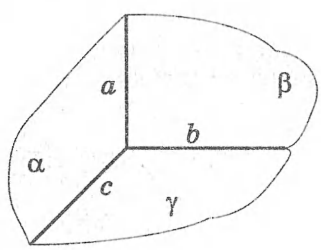
2) $\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\gamma\\ A\in\alpha\\ (AB)\perp\gamma\end{array}\right|\Rightarrow \begin{array}{l}(AB)\subset\alpha\\ \text{(див. (12))}\end{array}$

3) $\left.\begin{array}{l}\beta\perp\gamma\\ A\in\beta\\ (AB)\perp\gamma\end{array}\right|\Rightarrow \begin{array}{l}(AB)\subset\beta\\ \text{(див. (12))}\end{array}$

4) $\left.\begin{array}{l}(AB)\subset\alpha\\ (AB)\subset\beta\end{array}\right|\Rightarrow (AB)=\alpha\cap\beta=a.$ Щ.в.д.

(14) Лінії перетину трьох, попарно перпендикулярних площин, попарно перпендикулярні між собою.

$$\left.\begin{array}{r}\alpha\perp\beta\\ \beta\perp\gamma\\ \alpha\perp\gamma\end{array}\right|\Rightarrow \begin{array}{l}a\perp b\\ b\perp c\\ c\perp a\end{array}$$



$a\triangleq\alpha\cap\beta;\ \beta\triangleq\beta\cap\gamma;\ c\triangleq\alpha\cap\gamma.$

1) $\left.\begin{array}{r}\alpha\perp\gamma\\ \beta\perp\gamma\end{array}\right|\Rightarrow \left.\begin{array}{c}a\perp\gamma\\ \text{(див. (13))}\end{array}\right|\Rightarrow\begin{array}{l}a\perp b\\ a\perp c\end{array}$

2) $\left.\begin{array}{r}\beta\perp\alpha\\ \gamma\perp\alpha\end{array}\right|\Rightarrow \left.\begin{array}{c}b\perp\alpha\\ \text{(див. (13))}\end{array}\right|\Rightarrow\begin{array}{l}b\perp a\\ b\perp c\end{array}.$ Щ.в.д.

(15) Якщо з однієї точки поза площиною провести перпендикуляр і похилі до цієї площини, то:

а) рівні похилі мають рівні проекції;

б) рівні проекції відповідають рівним похилим;

в) більші похилі мають більші проекції;

г) більшій проекції відповідає більша похила.

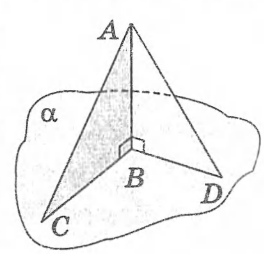
$$AB\perp\alpha$$

а) $AC=AD\Rightarrow CB=BD;$

б) $CB=BD\Rightarrow AC=AD;$

в) $AC>AD\Rightarrow CB>BD;$

г) $CB>BD\Rightarrow AC>AD.$



Обертаючи прямокутний $\triangle ABD$ навколо AB можно сумістити площину (ABD) і (ABC) і твердження *а*, *б*, *в*, *г* зводяться до теорем планиметрії, тобто виконуються. Щ.в.д.

ОК-45

ОФ Про деякі властивості проектування

Зі властивостями паралельного проектування ви знайомі зі шкільного курсу математики (ОК – 38(26)).

Доведемо ще декілька корисних опорних фактів.

---

1 Точки, рівновіддалені від двох прямих, що перетинаються, проектуються на площину, що містить ці прямі, у бісектрису кута, утвореного ними.

$$\frac{MO \perp \alpha \qquad \rho(M/a)=\rho(M/b)}{} \Downarrow \quad O \in l,$$

де l – бісектриса $\angle(a;b)$

1) Побудова: $MK \perp a; MN \perp b$.

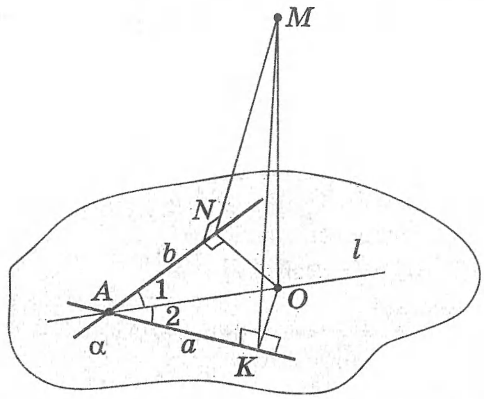
Тоді $MK=\rho(M/a)=\rho(M/b)=MN$;

2) $\left.\begin{array}{l} MO \perp \alpha \\ MK \perp a \\ OK = \text{Пр}_\alpha MK \end{array}\right| \Rightarrow OK \perp a$ за ТПП (ОК – 38(21)).

Аналогічно: $ON \perp b$.

3) $\left.\begin{array}{l} MO \perp \alpha \\ MN = MK \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} ON = OK \\ \text{(ОК – 44(15))}; \end{array}$

4) у пл. α: O – рівновіддалена від сторін кута $\angle(a;b)$, тоді O належить бісектрисі цього кута. Щ.в.д.



---

2 Пряма перетину двох площин, що утворюють рівні двогранні кути із третьою площиною, проектується на останню у бісектрису кута, утвореного прямими перетину перших двох площин із третьою.

$$\frac{M \in c; MO \perp \gamma \qquad \alpha\hat{\ }\gamma=\beta\hat{\ }\gamma}{} \Downarrow \quad O \in l,$$

де l – бісектриса $\angle(a;b)$

$a \triangleq \alpha \cap \gamma; b \triangleq \beta \cap \gamma; c \triangleq \alpha \cap \beta$

1) Побудова: $MK \perp a; MN \perp b$

2) $\left.\begin{array}{l} MO \perp \gamma; MK \perp a \\ OK = \text{Пр}_\gamma MK \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} OK \perp a \text{ (за ТТП)}; \\ \text{аналогічно } ON \perp b; \end{array}$

3) $\left.\begin{array}{l} a \perp MK \\ a \perp OK \end{array}\right| \Rightarrow (MKO) \perp a.$

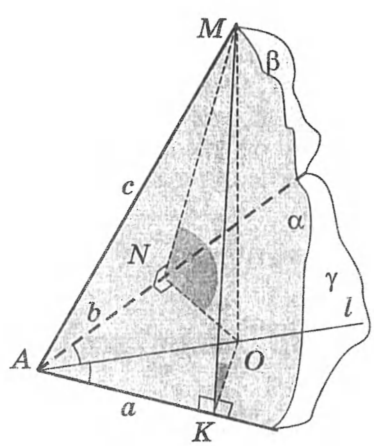
Аналогічно $(MNO) \perp b$.

Тоді $\angle MKO = \alpha\hat{\ }\gamma = \beta\hat{\ }\gamma = \angle MNO$;

4) $MO \perp \gamma \Rightarrow MO \perp OK, MO \perp ON$;

5) $\left.\begin{array}{l} \angle MOK = \angle MON = 90^\circ \\ \angle MKO = \angle MNO; \\ MO \text{ – спільна} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} \triangle MOK = \triangle MON \\ \text{і } OK = ON; \end{array}$

6) У пл. γ: O – рівновіддалена від a і b, тоді $O \in l$ – бісектрисі цього кута. Щ.в.д.



ОК-46

ОФ Про деякі властивості проектування

3 Для того, щоб ребро тригранного кута проектувалося в бісектрису плоского кута, необхідно і достатньо, щоб його два інші плоскі кути були рівні між собою.

$\angle BAC = \angle BAD$

необхідно $\Updownarrow$ *достатньо*

$\text{Пр}_\tau\, AB$ – *бісектриса* $\angle CAD$

1) Побудова:

а) $M \in (AB)$; $MO \perp \tau$, тоді $\text{Пр}_\tau AM = AO$;

б) $ON \perp AD$; $OK \perp AC$;

2) $\left.\begin{array}{l} MO \perp \tau \\ ON \perp AD \end{array}\right| \Rightarrow MN \perp AD$ (за ТПП).

Аналогічно $MK \perp AC$;

3) необхідність: *маємо* $\angle KAO = \angle OAN$;

довести $\angle BAC = \angle BAD$;

а) $\triangle ANO = \triangle AKO$ (за гіпотенузою і гострим кутом), тоді $AN = AK$;

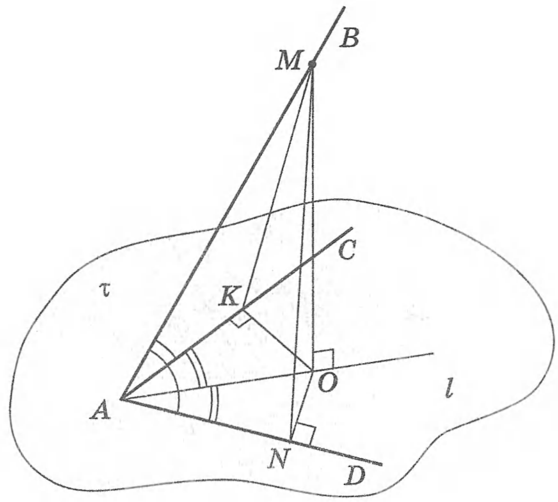
б) $\triangle ANM = \triangle AKM$ (за двома катетами), тоді $\angle ONM = \angle OKM$, щ.в.д;

4) достатність: *маємо* $\angle BAC = \angle BAD$;

довести $\angle KAO = \angle OAN$;

а) $\triangle ANM = \triangle AKM$ (за гіпотенузою і гострим кутом), тоді $AN = AK$;

б) $\triangle ANO = \triangle AKO$ (за гіпотенузою і катетом), тоді $\angle OAN = \angle OAK$, щ.в.д.



---

4 а) Точки, рівновіддалені від кінців відрізка, що лежить у певній площині, проектуються на цю площину у серединний перпендикуляр до заданого відрізка.

б) Якщо похилі, проведені з однієї точки до однієї площини, утворюють з цією площиною рівні кути, то проекція спільної точки похилих на дану площину належить серединному перпендикуляру до відрізка з кінцями у основах похилих.

$[AB] \subset \alpha$; $MO \perp \alpha$

$\left.\begin{array}{c} |MA| = |MB| \\ (\text{або } (AM)\hat{\ }\alpha = (BM)\hat{\ }\alpha) \end{array}\right| \Rightarrow O \in n,$

де n – серединний перпендикуляр до $[AB]$

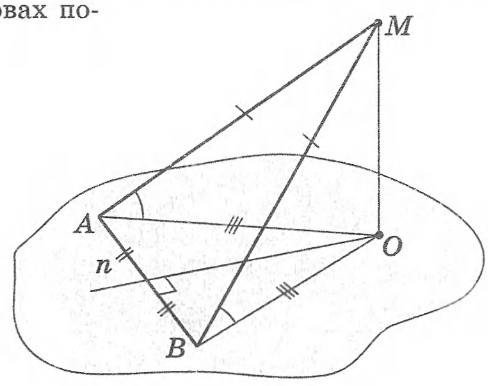
1) $MO \perp \alpha \Rightarrow MO \perp AO$, $MO \perp OB$;

2) $\left.\begin{array}{l} \angle MOA = \angle MOB = 90^\circ \\ AM = MB;\ MO \text{ – спільна} \\ (\textit{або } \angle MAO = \angle MBO; \\ MO \text{ – спільна}) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} \triangle AOM = \triangle BOM \\ \text{і } AO = OB; \end{array}$

3) у пл. α: $OA = OB \Rightarrow O \in n$,

де n – серединний перпендикуляр до $[AB]$.

Щ.в.д.



ОК-47

О.Ф. Опорні факти проектування точки на площину трикутника

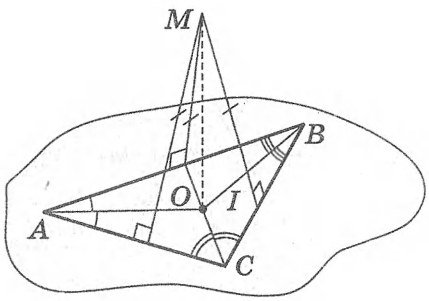
Наведемо важливі опорні факти, які є наслідками тверджень, доведених у ОК–45, 46.

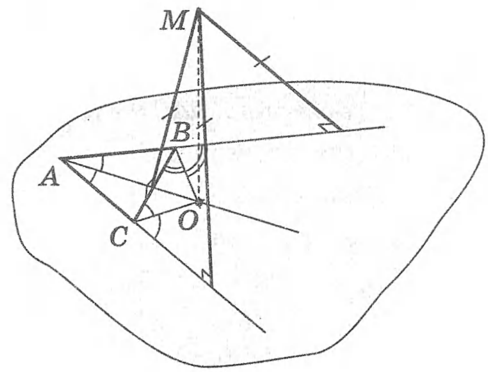
1 З ОК–45(1) випливає.

Точка, рівновіддалена від сторін трикутника, проектується на площину цього трикутника або в центр вписаного кола, або в центр зовнівписаного кола даного трикутника

$$\frac{MO \perp (ABC) \qquad d(M/(AB)) = d(M/(AC)) = d(M/(CB))}{\Downarrow}$$

або O – центр вписаного кола у $\triangle ABC$,
або O – центр зовнівписаного кола у $\triangle ABC$.



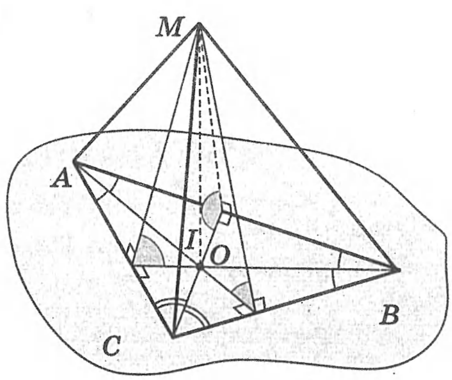


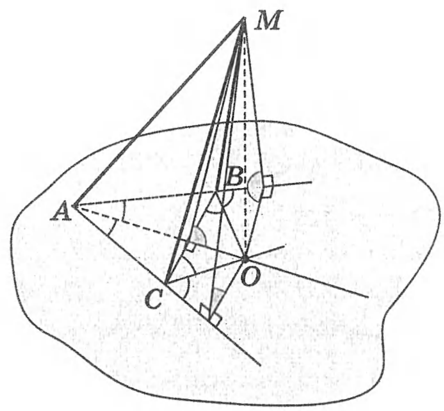
2 З ОК–45(2) випливає.

Точка, спільна для площин, що утворюють рівні двогранні кути з площиною трикутника, проектується на цю площину, або в центр вписаного кола, або в центр зовнівписаного кола цього трикутника.

$$\frac{MO \perp (ABC) \qquad (MAB)\hat{\ }(ABC) = (MAC)\hat{\ }(ABC) = (MBC)\hat{\ }(ABC)}{\Downarrow}$$

або O – центр вписаного кола у $\triangle ABC$,
або O – центр зовнівписаного кола у $\triangle ABC$.





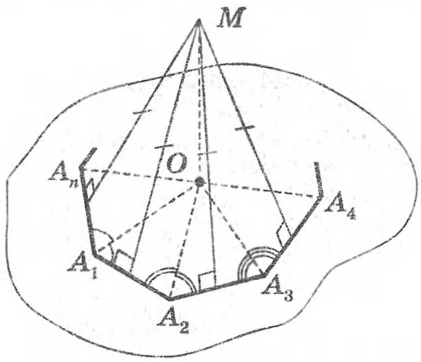
ОК-48

ОФ **Опорні факти проектування точки на площину багатокутника**

(3) З ОК–45(1) випливає.

Точка, рівновіддалена від сторін плоского багатокутника, (n > 3), проектується на площину цього багатокутника у центр вписаного у нього кола.

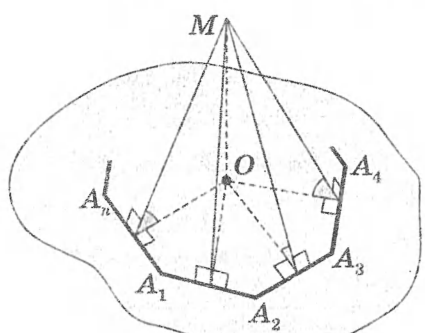
$$MO \perp (A_1A_2...A_n)$$
$$\underline{d(M/(A_1A_2)) = ... = d(M/A_nA_1)}$$
$$\Downarrow$$
O – центр вписаного кола у $A_1A_2...A_n$ $(n > 3)$



(4) З ОК–45(2) випливає.

Точка, спільна для площин, що утворюють рівні двогранні кути з площиною плоского багатокутника (n > 3), проектується на цю площину в центр кола, вписаного у цей багатокутник.

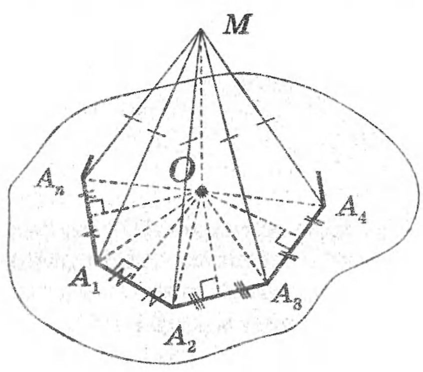
$$MO \perp (A_1A_2...A_n)$$
$$\underline{(MA_1A_2)\hat{}(A_1A_2...A_n) = (MA_nA_1)\hat{}(A_1A_2...A_n)}$$
$$\Downarrow$$
O – центр вписаного кола у $A_1A_2...A_n$ $(n > 3)$



(5) З ОК–46(4) випливає.

Точка, рівновіддалена від вершин плоского багатокутника, проектується на площину цього багатокутника у центр кола, описаного навколо нього.

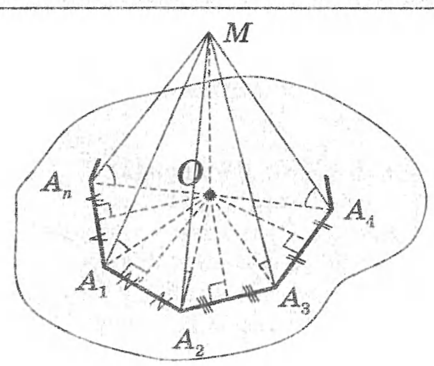
$$MO \perp (A_1A_2...A_n)$$
$$\underline{MA_1 = MA_2 = ...MA_n}$$
$$\Downarrow$$
O – центр описаного кола $A_1A_2...A_n$ $(n > 3)$



(6) З ОК–46(4) випливає.

Якщо відрізки, що з'єднують певну точку простору з вершинами плоского багатокутника, утворюють рівні кути з площиною цього багатокутника, то дана точка проектується на площину багатокутника у центр кола, описаного навколо нього.

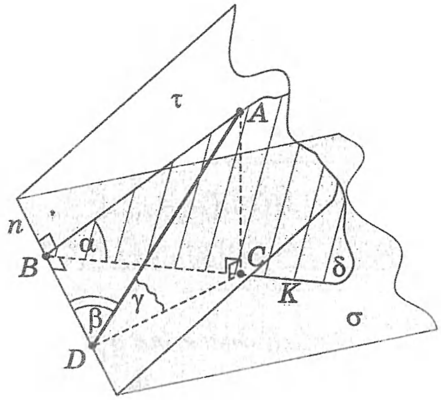
$$MO \perp (A_1A_2...A_n)$$
$$(MA_1)\hat{}(A_1A_2...A_n) = (MA_i)\hat{}(A_1A_2...A_n)$$
$$\underline{i \in \{1, ... n\}}$$
$$\Downarrow$$
O – центр описаного кола $A_1A_2...A_n$ $(n > 3)$



ОК-49 *

Теорема про три синуси для двогранного кута

Т **Якщо в одній з граней двогранного кута α провести пряму, що утворює з ребром цього кута кут β, то синус кута γ між даною прямою і другою гранню двогранного кута дорівнює $\sin\alpha \cdot \sin\beta$**



$$n \triangleq \tau \cap \sigma,\ D \in n,\ A \in \tau;$$
$$\tau \,\hat{}\, \delta = \alpha,\ (AD)\,\hat{}\, n = \beta,\ (AD)\,\hat{}\,\sigma = \gamma;$$

$$\boxed{\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

1) Побудова:

а) $(ABK) \perp n$, $(ABK) \cap \delta = BK$, тоді $\tau \,\hat{}\, \sigma = \angle ABK = \alpha$;

б) у площині (ABK): $(AC) \perp (BC)$;

2) $\left.\begin{array}{l} (AC) \perp (BC) \\ (ABC) \perp \sigma \\ (BC) = (ABC) \cap \sigma \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} (AC) \perp \sigma \text{ і} \\ (AD)\,\hat{}\,\sigma = \angle ADC = \gamma; \end{array}$

3) $\underline{\triangle ABD}$: $AB = AD \sin\beta$;

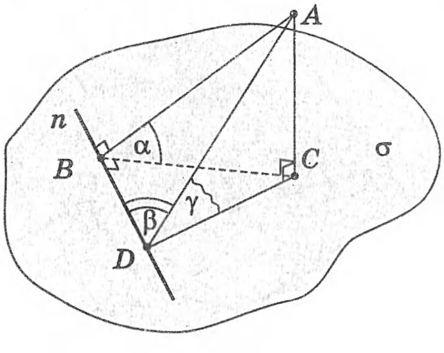
$\underline{\triangle ACB}$: $AC = AB\sin\alpha = AD\sin\alpha\sin\beta$;

$\underline{\triangle ACD}$: $\sin\gamma = \dfrac{AC}{AD} = \sin\alpha\sin\beta$, щ.в.д.

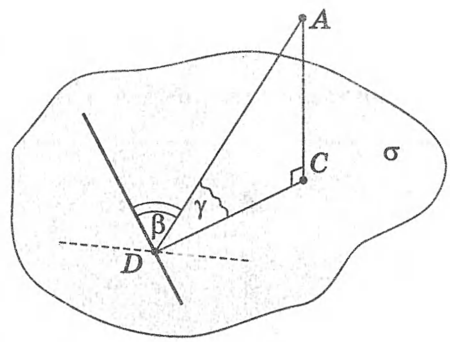
Н **1** *Якщо розглядати*, що:
AD – похила до σ,
CD – проекція AD на σ,
n – деяка пряма у площині σ,
AB – перпендикуляр проведений з точки похилої A до n,
то *теорема про три синуси має вигляд*

Синус кута нахилу похилої до площини (γ) дорівнює добутку синусів кута між даною похилою і деякою прямою n цієї площини (β) і кута між перпендикуляром, що проведено з точки похилої до прямої n, і площиною (α).

$$\sin\gamma = \sin\beta \cdot \sin\alpha$$



Н **2** **Кут між похилою і площиною найменший з усіх кутів, які похила утворює з прямими, проведеними на площині через основу похилої.**

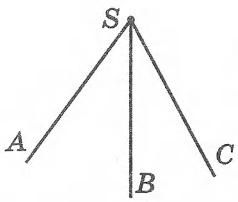


γ – кут між похилою AD і площиною σ;
β – кут між похилою AD і прямою $n \subset \sigma$.
З теореми про три синуси маємо:

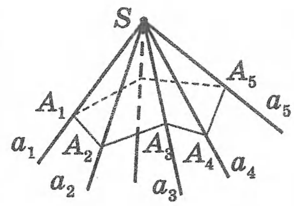
$\sin\gamma \leqslant \sin\beta$ і $\gamma \leqslant \beta$,

щ.в.д.

ОК-50
Тригранний кут і багатогранний кут



Тригранний кут – сукупність $\{[SA); [SB); [SC)\} \not\subset \alpha$.
S – вершина;
$[SA]; [SB); [SC)$ – ребра;
$\angle ASB; \angle BSC; \angle ASC$ – грані, або плоскі кути

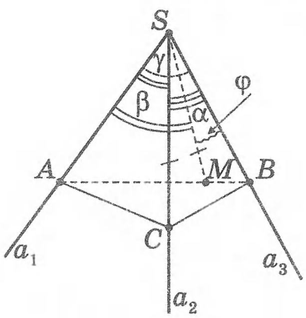


Багатогранний кут
$a_1\hat{\ }a_{i \pm 1}$ – плоскі кути, або грані;
$a_1\hat{\ }a_{i \pm 1} < 180°$;
a_i – ребра;
S – вершина.

1*

Міра кожного з плоских кутів тригранного кута менша суми мір двох інших його плоских кутів

$\gamma < \alpha + \beta \qquad \alpha < \gamma + \beta \qquad \beta < \gamma + \alpha$

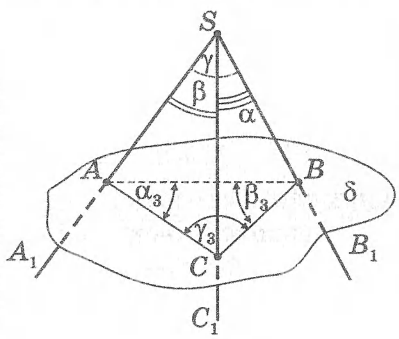


Нехай γ – більший з $\{\gamma; \alpha; \beta\}$.
1) Побудова:
а) довільні: $A \in a_1$; $B \in a_3$;
б) у площині (a_1a_3) т. M: $a_1\hat{\ }(SM) = \beta$; $\angle MSB = \gamma - \beta \triangleq \varphi$;
в) $C \in a_2$, $SC = SM$;
2) $\triangle ASM = \triangle ASC$ (AS – спільна; $SC = SM$; $\angle ASM = \angle ASC = \beta$).
Тоді $AM = AC$;
3) $\underline{\triangle ABC}$: $CB > AB - AC = MB$ (бо $AM = AC$ за п.2);
4) $\underline{\triangle SBC \text{ і } \triangle SBM}$: SB – спільна; $SC = SM$; $CB > MB \Rightarrow \alpha > \varphi$, тобто $\alpha > \gamma - \beta$ і $\alpha + \beta > \gamma$. Аналогічно: $\alpha < \gamma + \beta$; $\beta < \gamma + \alpha$. Щ.в.д.

2*

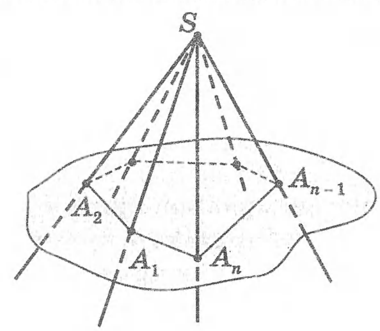
Сума плоских кутів тригранного кута менша за 2π.

$\alpha + \beta + \varphi < 2\pi$



1) Побудова: довільна δ,
$\delta \cap (SA_1) \triangleq A$; $\delta \cap (SC_1) \triangleq C$; $\delta \cap (SB_1) \triangleq B$;
2) позначимо плоскі кути тригранного кута:
при вершині A через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$;
при вершині B через $\beta_1, \beta_2, \beta_3$;
при вершині C через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$;
при тому $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ – кути $\triangle ABC$;
3) за властивостю 1:
$\alpha_3 < \alpha_1 + \alpha_2$;
$\beta_3 < \beta_1 + \beta_2$;
$\gamma_3 < \gamma_1 + \gamma_2$.
4) $\alpha + \beta + \gamma = 3\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2)$, бо сума кутів кожного з трикутників ASC, CSB, ASB дорівнює π. Тоді, враховуючи п. 3, маємо, що $\alpha + \beta + \gamma < 3\pi - (\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) = 2\pi$, щ.в.д.

3*



Аналогічно (2) доводиться така властивість багатогранного кута.

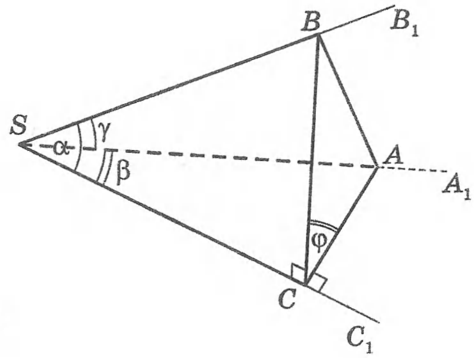
В опуклому багатогранному куті сума мір плоских кутів менша від 2π.

Сума внутрішніх кутів $A_1A_2\ldots A_n$ дорівнює $\pi(n-2)$. Тоді шукана сума плоских кутів даного багатогранного кута менша від $n \cdot \pi - \pi(n-2) = 2\pi$, щ.в.д.

ОК-51 *
Теорема косинусів для тригранного кута

ТТ **Якщо α, β, γ – плоскі кути тригранного кута, а φ – лінійний кут двогранного кута, протилежного γ, то**

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}$$



1) Побудова: $(CBA)\perp SC$, тоді $(SC_1B_1)\,\hat{}\,(SC_1A_1)=\angle ACB=\varphi$;

2) $\underline{\triangle SCB}$: $SB=\dfrac{SC}{\cos\alpha}$; $BC=SC\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\underline{\triangle SCA}$: $SA=\dfrac{SC}{\cos\beta}$; $AC=SC\operatorname{tg}\beta$;

4) $\underline{\triangle SAB}$: $AB^2=SB^2+SA^2-2SB\cdot SB\cos\gamma$; $AB^2=\dfrac{SC^2}{\cos^2\alpha}+\dfrac{SC^2}{\cos^2\beta}+\dfrac{2SC^2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}$;

5) $\underline{\triangle ABC}$: $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cos\varphi$; $AB^2=SC^2\operatorname{tg}^2\alpha+SC^2\operatorname{tg}^2\beta-2SC^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\varphi$;

6) $\underbrace{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}_{=1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\underbrace{\dfrac{1}{\cos^2\beta}}_{=1+\operatorname{tg}^2\beta}-\dfrac{2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\varphi.$

$$\cos\varphi=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},\ \text{щ.в.д.}$$

$\Downarrow$

Н

ТЕОРЕМА ПРО ТРИ КОСИНУСИ

Якщо двогранний кут тригранного кута прямий, то косинус протилежного плоского кута дорівнює добутку косинусів двох інших його плоских кутів.

Якщо $\varphi=90°$, то $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$

О.З. Довести, що плоскі кути триганного кута рівні, якщо рівні двогранні кути.

Розв'язання

За теоремою косинусів виконується: $\dfrac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\cos\alpha-\cos\gamma\cos\beta}{\sin\gamma\sin\beta}=\dfrac{\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\gamma}$.

З першої рівності отримаємо:

$\dfrac{\cos\gamma}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos\gamma\cos\beta}{\sin\gamma}$; $\cos\gamma\sin\gamma-\cos\alpha\sin\gamma\cos\beta=\cos\alpha\sin\alpha-\cos\gamma\sin\alpha\cos\beta$;

$\dfrac{1}{2}(\sin2\gamma-\sin2\alpha)=\cos\beta\cdot\sin(\gamma-\alpha)$; $\sin(\gamma-\alpha)\cos(\gamma+\alpha)=\cos\beta\cdot\sin(\gamma-\alpha)$.

Звідси маємо:
$\gamma-\alpha=0$ або $\beta=\gamma+\alpha$. Остання рівність неможлива за ОК–50(1). Тоді $\gamma=\alpha$.
Аналогічно доводимо, що $\alpha=\beta$.
Щ.в.д.

ОК-52 *

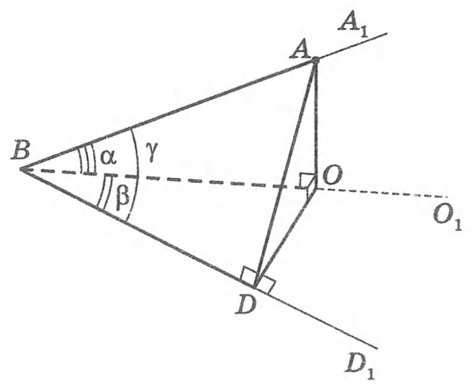
Теорема про три косинуси і наслідки з неї

Ми вже розглядали теорему про три косинуси як наслідок теореми косинусів для тригранного кута. Доведемо цю теорему іншим способом – без використання теореми косинусів для тригранного кута.

Т 1 ТЕОРЕМА ПРО ТРИ КОСИНУСИ

Якщо двогранний кут тригранного кута прямий, то косинус протилежного плоского кута дорівнює добутку косинусів двох інших його плоских кутів:

$$\boxed{\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta}$$

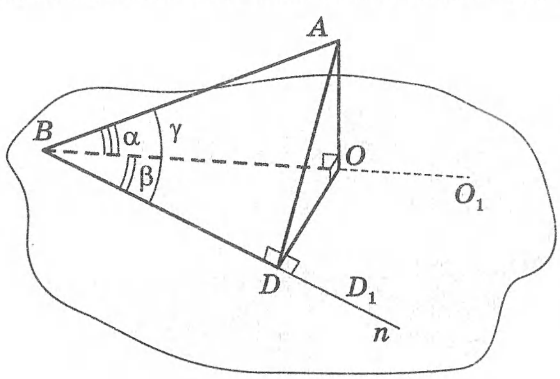


1) Побудова:
   а) довільна $A \in BA_1$, $AO \perp (BO_1D_1)$;
   б) $OD \perp BD_1$;
2) $(AO) \subset (BA_1O_1)$ за ОК–44(12);
3) $AD \perp BD_1$ за ТТП;
4) $\triangle AOB$: $OB = AB\cos\alpha$;
   $\triangle BDO$: $BD = OB\cos\beta = AB\cos\alpha\cos\beta$;
   $\triangle ADB$: $BD = AB\cos\gamma$.

Тоді $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.
Щ.в.д.

Н 1

Якщо розглядати, що (AB) – похила до (OBD), (OB) – проекція (AB) на (OBD), $n \equiv (BD)$ – деяка пряма, *то теорема про три косинуси має вигляд*:



Н 2

Кут між похилою і площиною – найменший з усіх кутів, які похила утворює з прямими, проведеними на площині через основу похилої.

Косинус кута між похилою до площини (γ) і прямою n цієї площини дорівнює добутку косинусів кута нахилу похилої до площини (α) та кута між даною прямою n і проекцією похилої на площину (β).

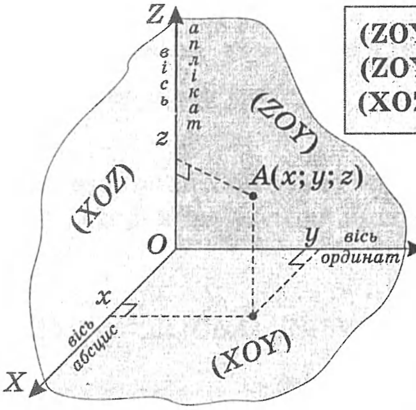
α – кут між похилою (AB) і площиною (ODB);
γ – кут між похилою (AB) і прямою $n \subset (ODB)$;
З теореми при три косинуси маємо:
$\cos\gamma \leqslant \cos\alpha$ і $\gamma \geqslant \alpha$. Щ.в.д.

(Порівняйте з ОК–49 наслідок 2.)

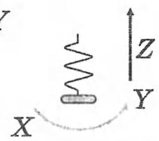
З а у в а ж е н н я. *Якщо двогранні кути тригранного кута прямі, то і його плоскі кути теж прямі* (див. ОК–51(О.З.)). І навпаки, *якщо плоскі кути тригранного кута прямі, то і його двогранні кути теж прямі* (за ознаками перпендикулярності прямої і площини та двох площин).

ОК-53

Декартова, або прямокутна система координат. Система рівняннь, що визначає пряму.

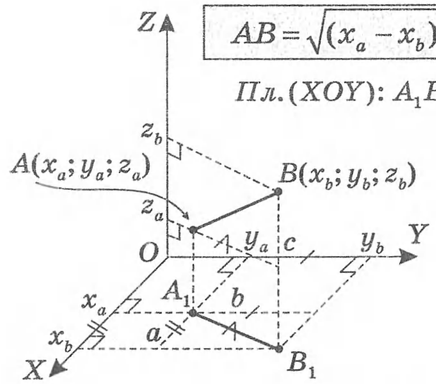


$(ZOY) \perp (XOY)$ $(OZ) \perp (OY)$]
$(ZOY) \perp (XOZ)$ $(OZ) \perp (OX)$
$(XOZ) \perp (XOY)$ $(OY) \perp (OX)$



за правилом буравчика

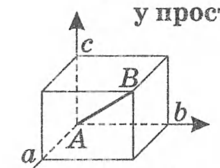
ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ



$$AB = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$$

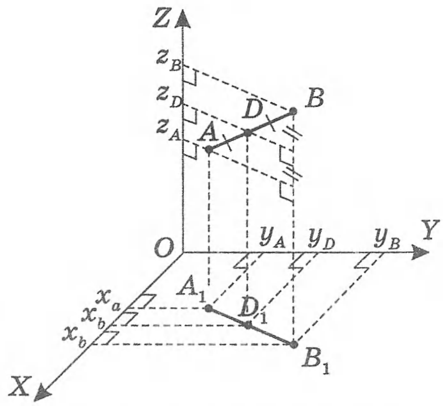
Пл. (XOY): $A_1B_1 = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$

Теорема Піфагора у просторі



$AB^2 = a^2 + b^2 + c^2$

КООРДИНАТИ СЕРЕДИНИ ВІДРІЗКА



$$D\left(\frac{x_a + x_b}{2}; \frac{y_a + y_b}{2}; \frac{z_a + z_b}{2}\right)$$

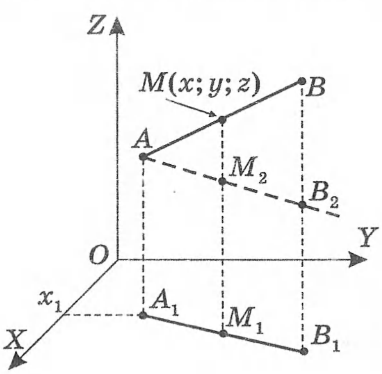
Пл.(XOY): $D_1\left(\frac{x_a + x_b}{2}; \frac{y_a + y_b}{2}; 0\right)$.

Пл.(ABB_1): $z_D = \frac{z_A + z_B}{2}$.

ПРЯМА – *перетин двох площин.*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0; \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0. \end{cases}$$

– точки $(x; y; z)$ належать прямій.



Якщо пряма проходить через точки $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$ і не паралельна жодній координатній площині, то їй відповідає система рівнянь:

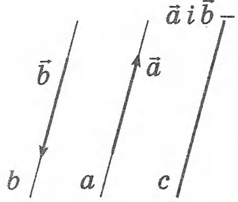
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

1) A_1, M_1, B_1 – проекції A, M, B на (XOY); $(AB_2) \parallel (A_1B_1)$, $(AB_2) \subset (A_1B_1A)$. Тоді $|AA_1| = |M_2M| = |B_2B_1| = z_1$; $|MM_1| = z$; $|BB_1| = z_2$;

2) <u>У (A_1AB)</u>: $\triangle ABB_2 \sim \triangle AMM_2$ і $\frac{AM}{MB} = \frac{MM_2}{BB_2} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Аналогічно, проектуючи точки A, M, B на дві інши координатні площини, отримаємо: $\frac{AM}{MB} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$; $\frac{AM}{MB} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Щ.в.д.

ОК-54
Вектор у просторі



$\vec{a}$ і $\vec{b}$ – *колінеарні*, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

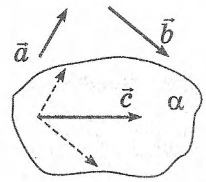
$\Updownarrow$

$\boxed{\vec{a} = \lambda \vec{b}}$, $\quad \left.\begin{matrix} \vec{a} \parallel \vec{c} \\ \vec{b} \parallel \vec{c} \end{matrix}\right| \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{c}$

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda.$

$\vec{a}$ і $\vec{b}$ – компланарні, якщо $\vec{a} \parallel \alpha$ і $\vec{b} \parallel \alpha$ *або* $\{\vec{a}; \vec{b}\} \subset \alpha$.

$\Updownarrow$



Якщо $\vec{c} \subset \alpha, \vec{a} \parallel \alpha, \vec{b} \parallel \alpha$ і $\vec{a} \nparallel \vec{b}$:

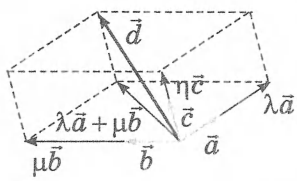
$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$

$\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ – *лінійно незалежні*; якщо вони не компланарні.

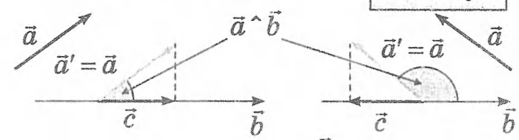
Довільний вектор

$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \eta \vec{c}$

єдиним чином



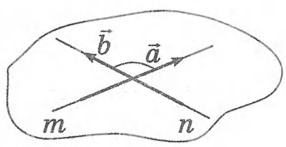
Проекція на напрям $\vec{b}$: $\boxed{\vec{c} \overset{def}{=} \text{Пр}_{\vec{b}}\, \vec{a}}$



$\vec{c} = |\vec{a}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

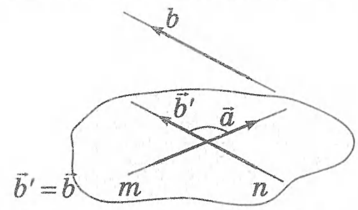
КУТ між $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$\boxed{\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$



Якщо

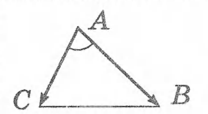
$m \cap n$ $\qquad$ $m \dot{-} n$



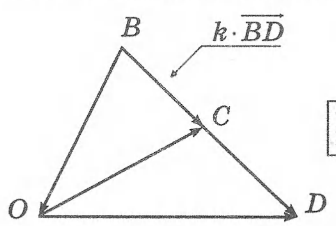
$\cos(m \wedge n) = |\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})|$

бо $m \wedge n \leqslant 90°$

$\boxed{\cos(m \wedge n) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$



$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 \cdot AB^2 - \left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}\right)^2}$



$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{BD};$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$. Тоді:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + k\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}\right) =$

$= k \cdot \overrightarrow{OD} + (1-k)\overrightarrow{OB}$, щ.в.д.

Якщо $\frac{BC}{BD} = k$, то

$\boxed{\overrightarrow{OC} = k \cdot \overrightarrow{OD} + (1-k)\overrightarrow{OB}}$

$\Uparrow$

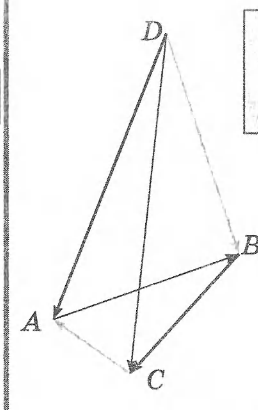
Необхідна і достатня умова належності точок {B; C; D} одній прямій

$\Downarrow$

$\boxed{\overrightarrow{OC} = \frac{n}{n+m} \cdot \overrightarrow{OD} + \frac{m}{n+m} \cdot \overrightarrow{OB}}$

Якщо $\frac{BC}{CD} = \frac{n}{m}$, то

$\left(\text{бо } \frac{BC}{BD} = \frac{n}{n+m} = k\right).$



$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

правило чотирьох точок

$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} \\ +\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \cdot\overrightarrow{DC} \\ \cdot\overrightarrow{DA} \\ \cdot\overrightarrow{DB} \end{matrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} =$

$= \underline{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}} - \underline{\underline{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}}} +$

$+ \underline{\underline{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA}}} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} +$

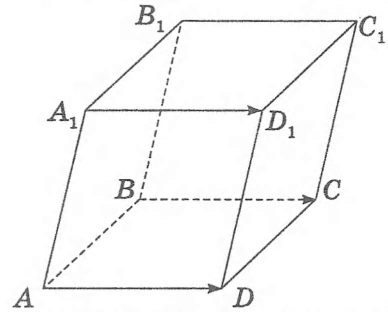
$+ \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} - \underline{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB}} = 0$, щ.в.д.

ОК-55
Вектор у задачах

1

Дано: паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Вкажіть: вектор, що дорівнює сумі $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$.



Розв'язання

1) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$;

2) $\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{DA}$;

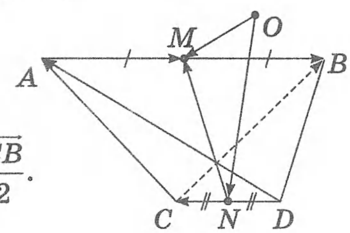
3) $\underline{\underline{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}}}+\underline{\overrightarrow{A_1D_1}}+\underline{\underline{\overrightarrow{CB}}}+\underline{\overrightarrow{DA}}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}$.

Відповідь: $\overrightarrow{DC}$.

2

Дано: трапецію $ABCD$ ($CD \parallel AB$), $AM=MB$, $CN=ND$, $O \notin (ABC)$.

Виразіть: вектор $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}$ через вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$.



Розв'язання

1) $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{NM}$;

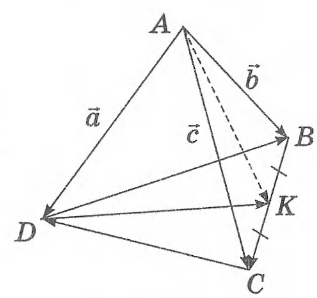
2) $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{DC}}{2}+\overrightarrow{CA}+\dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}}{2}+\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{DA}}{2}+\dfrac{\overrightarrow{CB}}{2}$.

Відповідь: $-\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

3

Дано: $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $K\in[CB]$, $CK=KB$.

Знайти: $\overrightarrow{DK}$.



Розв'язання

1) $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AK}-\vec{a}$;

2) $CK:KB=1:1 \to \overrightarrow{AK}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$;

3) $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AK}-\vec{a}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{a}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a})$.

Відповідь: $\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a})$.

4

Дано: $\vec{a}\,^\wedge\vec{b}=\vec{a}\,^\wedge\vec{c}=\vec{b}\,^\wedge\vec{c}=60^\circ$; $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$.

Знайти: $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$.

Розв'язання

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=$

$=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{a}=$

$=|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cos\vec{a}\,^\wedge\vec{c}-\vec{a}^2+$

$+2|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\vec{b}\,^\wedge\vec{c}-2|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos\vec{b}\,^\wedge\vec{a}=$

$=\cos 60^\circ-1+2\cos 60^\circ-$

$-2\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}-1=-0{,}5$.

Відповідь: $-0{,}5$.

5

Дано: $\vec{a}(3;1;0)$; $\vec{b}(0;1;1)$.

Знайти: $|2\vec{a}+3\vec{b}|$.

Розв'язання

1) $2\vec{a}+3\vec{b}=(\overline{6;2+3;-3})=$

$=(\overline{6;5;-3})$;

2) $|2\vec{a}+3\vec{b}|=$

$=\sqrt{(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})}=$

$=\sqrt{36+25+9}=\sqrt{70}$.

Відповідь: $\sqrt{70}$.

6

Дано: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Доведіть: $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$ перпендикулярний $\vec{c}$.

Розв'язання

Умова $\vec{c}\perp\vec{x}$ рівносильна умові $\vec{c}\cdot\vec{x}=0$.

$\vec{c}\cdot((\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b})=$

$=(\vec{b}\cdot\vec{c})(\underbrace{\vec{c}\cdot\vec{a}}_{=\vec{a}\cdot\vec{c}})-$

$-(\vec{a}\cdot\vec{c})(\underbrace{\vec{c}\cdot\vec{b}}_{=\vec{b}\cdot\vec{c}})=0$,

щ.в.д.

ОК-56
Вектор у задачах

7 ***Дано***: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – одиничні взаємноперпендикулярні вектори; $\vec{p} = 12\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{c}$.

Знайти: $\vec{c} \wedge \vec{p}$.

Розв'язання

1) $\cos(\vec{c} \wedge \vec{p}) = \dfrac{\vec{c}\cdot\vec{p}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{p}|} = \dfrac{\vec{c}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$ (бо $|\vec{c}|=1$);

2) $\vec{c}\cdot\vec{p} = 12\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{c}}_{0} + 4\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{c}}_{0} - 3\underbrace{\vec{c}^2}_{1} = -3$;

3) $|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p}\cdot\vec{p}} = \sqrt{12^2a^2 + 4^2b^2 + 3^2c^2} = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{169} = 13$;

4) $\cos(\vec{c} \wedge \vec{p}) = -\dfrac{3}{13}, \vec{c} \wedge \vec{p} = \arccos\left(-\dfrac{3}{13}\right) = \pi - \arccos\dfrac{3}{13}$.

Відповідь: $\pi - \arccos\dfrac{3}{13}$.

8 **Дано:** $\vec{b} = \overrightarrow{(2;-1;0)}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 10$; $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Знайдіть: $\vec{a}$

Розв'язання

1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$, тоді

$\vec{a} = \lambda\vec{b} = \overrightarrow{(2\lambda; -\lambda; 0)}$;

2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \lambda\vec{b}^2 =$

$= \lambda(2^2 + (-1)^2 + 0) =$

$= 5\lambda$ і 10, $\lambda = 2$.

Відповідь: $\vec{a} = \overrightarrow{(4;-2;0)}$.

9 ***Дано***: $\vec{a}(-1; 1; 1)$ і $\vec{b}(2; 0; 1)$.

Знайдіть: $\vec{x}$, який компланарний площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і утворює кут $\dfrac{\pi}{2}$ з вектором $\vec{b}$ та $\vec{a}\cdot\vec{x} = 7$.

Розв'язання

1) $\vec{x}$ компланарний площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тоді $\vec{x} = \lambda a + \mu b = \overrightarrow{(-\lambda + 2\mu; \lambda; \lambda + \mu)}$;

2) $\vec{x} \perp \vec{b}$, тоді $\vec{x}\cdot\vec{b} = 0$, $\overrightarrow{(\lambda + 2\mu; \lambda; \lambda + \mu)}\cdot\overrightarrow{(2;0;1)} = -2\lambda + 4\mu + 0 + \lambda + \mu = 0$, і $5\mu = \lambda$;

3) $\vec{a}\cdot\vec{x} = \overrightarrow{(-1;1;1)}\cdot\overrightarrow{(-\lambda + 2\mu; \lambda; \lambda + \mu)} = \lambda - 2\mu + \lambda + \lambda + \mu = 3\lambda - \mu = 7$;

4) $\begin{cases} \lambda = 5\mu \\ 3\lambda - \mu = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 5\mu \\ 3(5\mu) - \mu = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0{,}5 \\ \lambda = 2{,}5 \end{cases}$;

5) $\overrightarrow{(-\lambda + 2\mu; \lambda; \lambda + \mu)} = \overrightarrow{(-2{,}5 + 1; 2{,}5; 2{,}5 + 0{,}5)} = \overrightarrow{(-1{,}5; 2{,}5; 3)}$.

Відповідь: $\overrightarrow{(-1{,}5; 2{,}5; 3)}$.

10* ***Дано***: три ненульові вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, кожні два з яких неколінеарні.

Знайдіть: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, якщо $\vec{a} + \vec{b}$ колінеарний з $\vec{c}$, а $\vec{b} + \vec{c}$ колінеарний з $\vec{a}$.

Розв'язання

1) $\vec{a} + \vec{b} \parallel \vec{c}$, тоді $\vec{a} + \vec{b} = \lambda\vec{c}$;

2) $\vec{b} + \vec{c} \parallel \vec{a}$, тоді $\vec{b} + \vec{c} = \mu\vec{a}$;

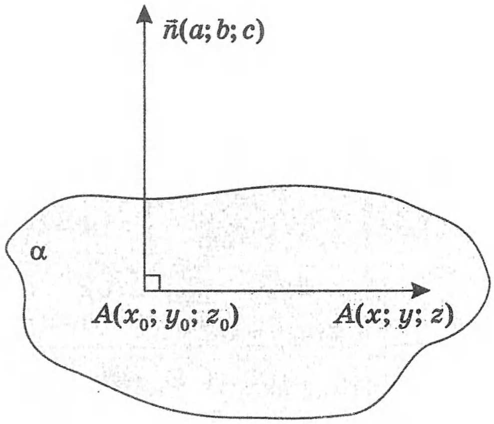
3) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\lambda + 1)\vec{c}$ і $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\mu + 1)\vec{a}$, тобто $(\lambda + 1)\vec{c} = (\mu + 1)\vec{a}$;
вектори $\vec{c}$ і $\vec{a}$ – колінеарні;

4) $(\lambda + 1)\vec{c} = (\mu + 1)\vec{a}$, тоді якщо $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \neq 0$, що протерічить умові.

Висновок: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.

Відповідь: $\vec{0}$.

ОК-57
Рівняння площини і нормалі до неї



1) $\vec{n}\perp\alpha \Rightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{A_0A}$, де $A(x,y,z)$ довільна точка площини α: $A_0(x_0;y_0;z_0)\in\alpha$, $\vec{n}\perp\alpha$.
$\overrightarrow{A_0A}=(\overrightarrow{x-x_0;y-y_0;z-z_0})$;
2) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_0A}=0$ тоді $-ax_0-by_0-cz_0\triangleq d$, тобто

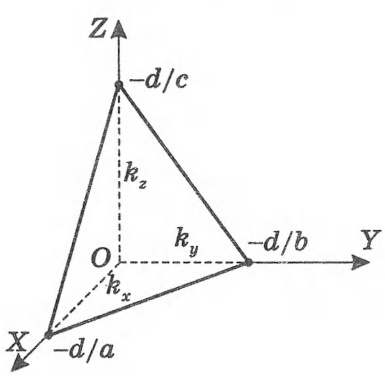
$\Downarrow$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
рівняння площини, що проходить через $(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $(\overrightarrow{a;b;c})$

$\Downarrow$

Рівняння площини: $ax+by+cz+d=0$ α	***Вектор перпендикулярний до площини $ax+by+cz=0$:*** $\vec{n}=(\overrightarrow{a;b;c})$

$d=0$	т. $O(0;0;0)\in\alpha$	$a=0$	$\vec{n}=(0;b;c)\Rightarrow\vec{n}\perp OX$, $\alpha\parallel(OX)$;
$b=0$	$\alpha\parallel(OY)$;	$c=0$	$\alpha\parallel(OZ)$
$a=d=0$	$\alpha\supset(OX)$	$a=b=0$	$\alpha\supset(XOY)$
$b=d=0$	$\alpha\supset(OY)$	$a=c=0$	$\alpha\supset(XOZ)$
$c=d=0$	$\alpha\supset(OZ)$	$b=c=0$	$\alpha\supset(YOZ)$



Якщо $a\neq0$; $b\neq0$; $c\neq0$,
рівняння площини $ax+by+cz+d=0$
можна представити у вигляді:

$$\frac{x}{-d/a}+\frac{y}{-d/b}+\frac{z}{-d/c}-1=0$$

Рівняння площини у відрізках $\dfrac{x}{k_x}+\dfrac{y}{k_y}+\dfrac{z}{k_z}=1$

ОК-58
Дещо про площини

ВИЗНАЧЕННЯ КУТА МІЖ ПЛОЩИНАМИ МЕТОДОМ КООРДИНАТ

$$(\alpha_1 \,\hat{}\, \alpha_2) = (\vec{n}_1 \,\hat{}\, \vec{n}_2)$$
якщо $(\vec{n}_1 \,\hat{}\, \vec{n}_2) \leqslant 90^\circ$

або

$$(\alpha_1 \,\hat{}\, \alpha_2) = 180^\circ - (\vec{n}_1 \,\hat{}\, \vec{n}_2)$$
якщо $(\vec{n}_1 \,\hat{}\, \vec{n}_2) > 90^\circ$

$$\cos(\alpha_1 \,\hat{}\, \alpha_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|};$$

$$\cos(\alpha_1 \,\hat{}\, \alpha_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

УМОВИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ І ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ДВОХ ПЛОЩИН

Умова $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ $\Longleftrightarrow$ $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$

тобто

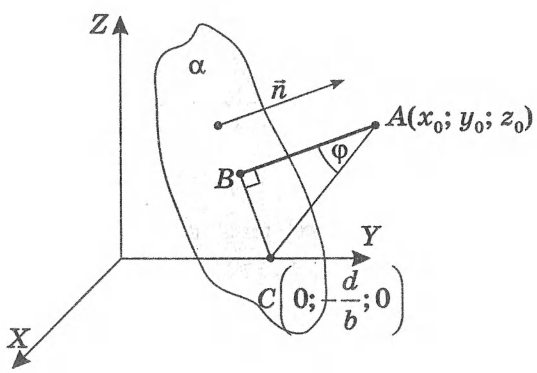
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \triangleq \lambda$$

Умова $\alpha_1 \perp \alpha_2$ $\Longleftrightarrow$ $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

тобто

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ



$$\vec{n} = \overrightarrow{(a; b; c)} \perp \alpha;$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{\left(x_0; \frac{d}{b} + y_0; z_0\right)};$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{CA}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{CA}|};$$

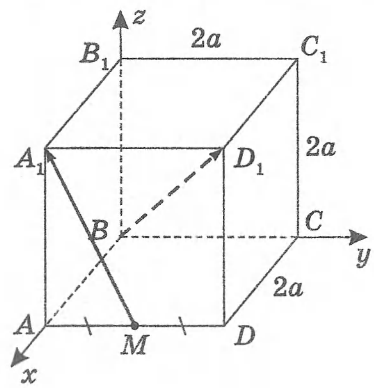
$$\rho(A/\alpha) = |AB| = |CA| \cos\varphi;$$

$$\rho(A/\alpha) = |CA| \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{CA}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{CA}|} = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{CA}|}{|\vec{n}|}.$$

$$\rho\big((x_0; y_0; z_0)/(ax + by + cz + d = 0)\big) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ОК-59
Метод координат і вектори приходять на допомогу

1 ***У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка H – середина ребра AD. Знайдіть кут між прямими MA_1 і BD_1.***



Розв'язання

1) Уведемо прямокутну систему координат із початком у точці B і спрямуємо вісь Ox вздовж ребра BA, Oy – вздовж BC, Oz – вздовж BB_1. Довжину ребра куба позначимо як $2a$. Тоді $B(0;\,0;\,0)$, $D_1(2a;\,2a;\,2a)$, $A_1(2a;\,0;\,2a)$, $M(2a;\,a;\,0)$.

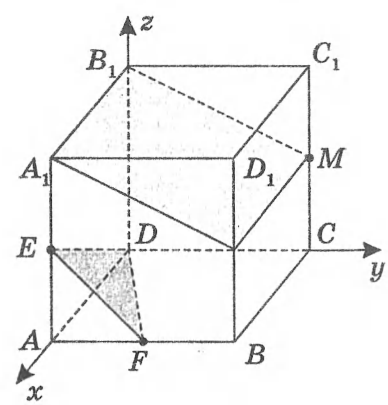
2) $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{(2a;2a;2a)}$, $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{(0;-a;2a)}$;

3) $\cos(\overrightarrow{BD_1}\,\hat{}\,\overrightarrow{MA_1})=\cos(\overrightarrow{BD_1}\,\hat{}\,\overrightarrow{MA_1})=\dfrac{\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{MA_1}}{|\overrightarrow{BD_1}|\cdot|\overrightarrow{MA_1}|}$,

$|BD_1|=\sqrt{4a^2+4a^2+4a^2}=2a\sqrt{3}$; $|MA_1|=\sqrt{a^2+4a^2}=a\sqrt{5}$, $\cos(\overrightarrow{BD_1}\,\hat{}\,\overrightarrow{MA_1})=\dfrac{-2a^2+4a^2}{2a^2\sqrt{15}}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

Відповідь: $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

2 ***У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F, M – середини ребер AA_1, AB, CC_1. Знайдіть кут між площинами EFD і A_1D_1M.***



Розв'язання

1) Уведемо прямокутну систему координат (див. мал.).

Довжину ребра куба позначимо як α. Тоді: $D(0;\,0;\,0)$, $E\left(a;0;\dfrac{a}{2}\right)$, $F\left(a;\dfrac{a}{2};0\right)$, $A_1(a;\,0;\,a)$, $D_1(0;\,0;\,a)$, $M\left(0;a;\dfrac{a}{2}\right)$;

2) за відомими координатами точок E, F, D знайдемо рівняння площини (EFD): $x-2y-2z=0$ (див. ОК–57);

3) за відомими координатами точок A_1, D_1 і M знайдемо рівняння площини (A_1D_1M): $y+2z-2a=0$ (див. ОК–57);

4) вектор $\vec{n}_1(1;\,-2;\,-2)$ – перпендикулярний до (EFD); вектор $\vec{n}_2(0;\,1;\,2)$ – перепендикулярний до (A_1D_1M);

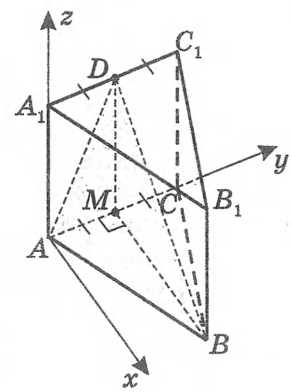
5) кут між площинами EFD і A_1D_1M (позначимо як φ) дорівнює куту між прямими n_1 і n_2, $\varphi\in[0;\,90\,]$:

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|1\cdot0-2\cdot1-2\cdot2|}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Відповідь: $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

ОК-60
Метод координат і вектори приходять на допомогу

3 ***У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ $|AB|=4см$, $|AA_1|=3см$. Знайдіть відстань від вершини C_1 до площини ADB, де D – середина ребра A_1C_1.***

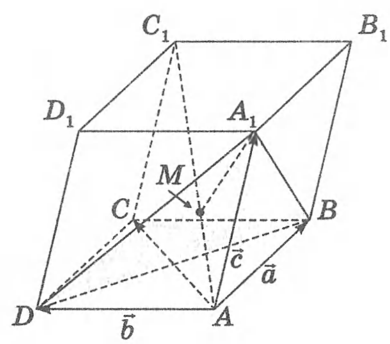


Розв'язання

1) Уведемо прямокутну систему координат, при тому $[Oz)\equiv[AA_1)$, $[Oy)\equiv[AC)$. Тоді $BM \parallel Ox$, якщо M – середина ребра AC;
2) запишемо координати точок A, B, D і C_1: $A(0;0;0)$, $B\left(2\sqrt{3};2;0\right)$, $D(0;2;3)$, $C_1(0;4;3)$;
3) за відомими координатами точок A, B і D знайдемо рівняння площини (ADB): $\sqrt{3}x-3y+2z=0$;
4) відстань ρ від точки $C_1(0;4;3)$ до (ADB) дорівнює
$$\rho=\frac{|\sqrt{3}\cdot 0-3\cdot 4+2\cdot 3|}{\sqrt{3+9+4}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Відповідь: $\frac{3}{2}$ см.

4* ***Через кінці трьох ребер паралелепіпеда, що виходять із однієї вершини, провели площину. В якому відношенні вона поділяє діагональ паралелепіпеда, що виходить з тієї самої вершини?***



Розв'язання

Нехай $(DA_1B)\cap(AC_1)=M$. Треба знайти $|AM|:|MC_1|$.

1) $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{A_1D}$ і $\overrightarrow{A_1M}$ – компланарні, тоді $\overrightarrow{A_1M}=\alpha\overrightarrow{A_1B}+\beta\overrightarrow{A_1D}$;
2) $\overrightarrow{AB}\triangleq\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}\triangleq\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}\triangleq\vec{c}$. Маємо: $\overrightarrow{A_1B}=\vec{a}-\vec{c}$, $\overrightarrow{A_1D}=\vec{b}-\vec{c}$;
3) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AM}\\ \overrightarrow{A_1A}=-\vec{c}\\ \overrightarrow{AM}\parallel\overrightarrow{AC_1}\end{array}\right| \to \begin{array}{l}\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC_1}=x(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\ \overrightarrow{A_1M}=x\vec{a}+x\vec{b}+(x-1)\vec{c};\end{array}$
4) $\alpha\overrightarrow{A_1B}+\beta\overrightarrow{A_1D}=\overrightarrow{A_1M}=x\vec{a}+x\vec{b}+(x-1)\vec{c}$, звідси

$$\begin{cases}x=\alpha\\ x=\beta\\ x-1=-\alpha-\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\ \alpha=\frac{1}{3};\ \overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}\ \text{і}\ \frac{AM}{MC_1}=\frac{1}{2}.\\ \beta=\frac{1}{3}\end{cases}$$

Відповідь: 1 : 2.

ОК-61
Рівняння сфери

Точки сфери (X; Y; Z) рівновіддалені від центра сфери $O(a; b; c)$ на R.

Тоді за ОК–53 $R=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ і *рівняння сфери*

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$$

Лінія перетину двох сфер – коло.

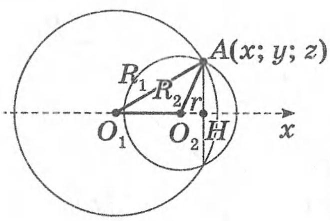
Нехай $(O_1O_2)\equiv(Ox)$, тоді $O_1(a; 0; 0)$; $O_2(b; 0; 0)$; $(x; y; z)$ точка перетину двох сфер:

$$\begin{cases}(x-a)^2+y^2+z^2=R_1^2\\(x-b)^2+y^2+z^2=R_2^2\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$2(b-a)x=R_1^2-R_2^2-a^2+b^2.$$

Маємо $x=\text{const}$ – рівняння площини $\gamma\parallel(YOZ)$ (див. ОК–57)

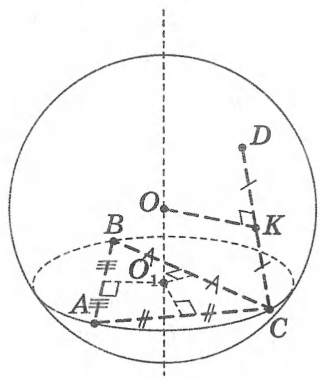


$|AH|\equiv r$ – радіус кола перетину.

Висновок: перетин сфери площиною – коло, щ.в.д.

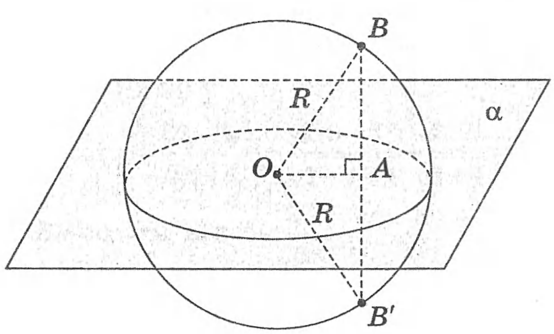
Умова перетину двох сфер: можливість скласти трикутник з відрізків довжини R_1, R_2, $|O_1O_2|$

Через чотири точки, що не належать одній площині, можна провести сферу, при тому єдину.



1) O_1 – центр описаного кола $\triangle ABC$. ГМТ рівновіддалених від точок A, B, C є пряма $d\perp(ABC)$ у точці O_1;
2) ГМТ рівновіддалених від точок D і C є площина $\gamma\perp DC$, $\gamma\cap DC\triangleq K$, $KD=KC$;
3) $O\triangleq d\cap\gamma$ – рівновіддалена від A, B, C, D і єдина.

* ***Довільна діаметральна площина кулі є її площиною симетрії***

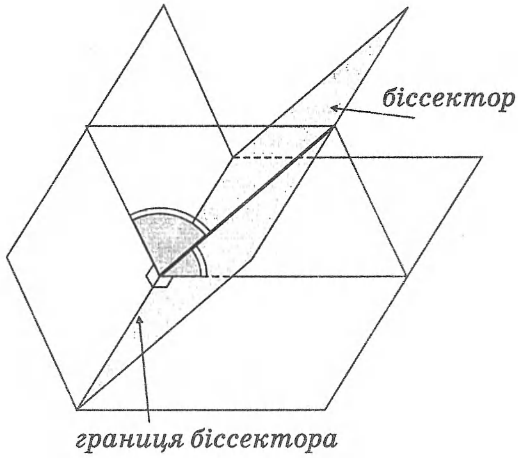


Побудова:
1) B – довільна точка сфери, $(BA)\perp\alpha$, $A\triangleq\alpha\cap(BA)$;
2) $B'\triangleq(AB)\cap(\gamma$ – сфера);
3) $\triangle OAB=\triangle OAB'$ (за катетом OA і гіпотенузою $OB=OB'=R$).

Тоді $|AB|=|AB'|$ і B' – точка симетрична B відносно α, щ.в.д.

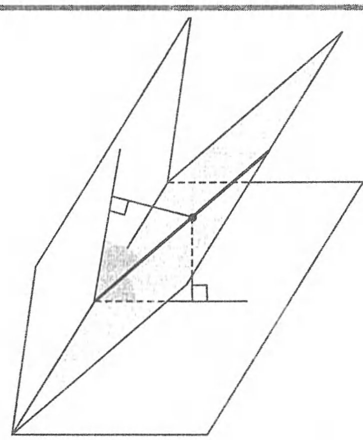
ОК-62
Біссектор двогранного кута і його властивості

Біссектором двогранного кута називається півплощина, що поділяє цей кут на два рівні двогранні кути.

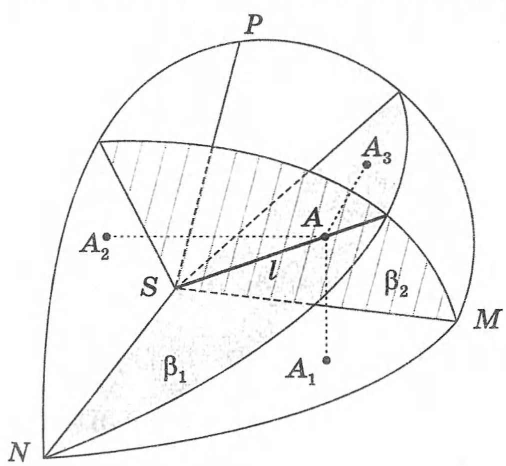


Біссектор перетинає лінійний кут двогранного кута за його бісектрисою.

Бісектриса кожного лінійного кута двогранного кута належить біссектору даного двогранного кута.



Біссектор двогранного кута є ГМТ цього кута, рівновіддалених від площин його граней.



Біссекторні площини двогранних кутів тригранного кута перетинаються по одному променю.

Розглянемо біссектори β_1 і β_2:
точки площини β_1 рівновіддалені від (NSP) і (NSM);
точки площини β_2 рівновіддалені від (PSM) і (NSM);

$$\beta_1 \cap \beta_2 \triangleq l.$$

Побудова:

1) Довільна $A \in l$ і
$AA_1 \perp (NSM)$;
$AA_2 \perp (NSP)$;
$AA_3 \perp (PSM)$;
2) $A \in \beta_1 \Rightarrow |AA_1| = |AA_2|$;
3) $A \in \beta_2 \Rightarrow |AA_1| = |AA_3|$;
4) Тоді $|AA_2| = |AA_3|$, і
$A \in \beta_3$, бо рівновіддалена від (PSN) і (PSM).
Щ.в.д.

Наслідок:
У будь-який тригранний кут можливо вписати сферу.

ОК-63
Куля, вписана в піраміду

Центр кулі, вписаної у багатогранник, є спільною точкою бісекторних площин усіх внутрішніх двогранних кутів багатогранника.

$\Longrightarrow$

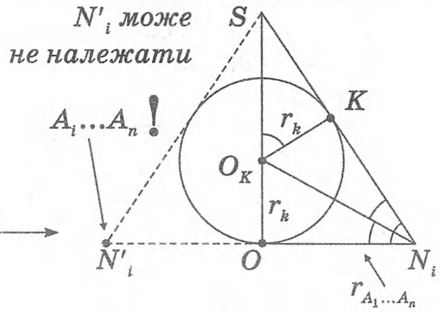
У будь-який тетраедр можна вписати сферу (див. ОК – 62).

У будь-яку правильну піраміду можна вписати сферу.

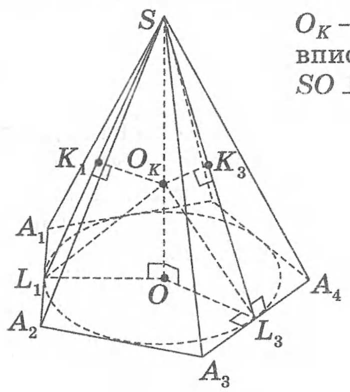
$\Downarrow$

З а у в а ж е н н я.
Не в кожному багатограннику бісектори двогранних кутів перетинаються в одній точці, отже не в кожний багатогранник можна вписати коло.

З а у в а ж е н н я.
У перерізі (SON_i) правильної піраміди $A_1 \ldots A_n$, де SO – її висота, SN_i – апофема, маємо (наприклад, якщо $n = 3$): $\longrightarrow$



ТГ



O_K – центр вписаної кулі
$SO \perp \alpha_{\text{осн.}}$

Якщо в основу піраміди можна вписати коло, а основа висоти піраміди – центр цього кола, то в піраміду можна вписати сферу.

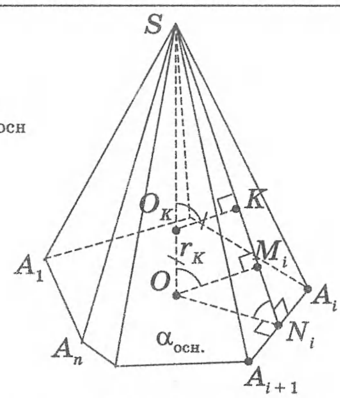
Д о в е д е н н я

Нехай: $L_1, L_2 \ldots$ – точки дотику вписаного у основу піраміди кола, O – його центр.

1) $OL_1 = OL_2$
SO – спільний катет
$\angle SOL_1 = \angle SOL_2 = 90°$
$\Longrightarrow \triangle SOL_1 = \triangle SOL_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2) У $\triangle SOL_1$, $\triangle SOL_2 \ldots$ бісектриси кутів L_1, $L_2 \ldots$ перетинаються у одній точці O_K.
3) З точки O_K проведемо перпендикуляри: $O_KK_1 \perp SL_1$, $O_KK_2 \perp SL_2 \ldots$. Тоді $\triangle L_1O_KK_1 = \triangle L_2O_KK_2 = \ldots$ (за гіпотенузою і гострим кутом) і $O_KK_1 = O_KK_2 = \ldots$
4) у $\triangle SL_1O$ точка O_K бісектриси L_1O_K рівновіддалена від сторін SL_1 і L_1O, тобто $O_KO = O_KK_1 = O_KK_2 = \ldots$ і точка O_K рівновіддалена від всіх граней піраміди, щ.в.д.

О.З.

$SO \perp \alpha_{\text{осн}}$



Якщо $SO \perp \alpha_{\text{осн}\,i}$
$\rho(S/A_1A_2) = \rho(S/A_iA_{i+1}) = \text{const}$,
або $(SA_1A_2) \,\hat{}\, \alpha_{\text{осн}} = (SA_iA_{i+1}) \,\hat{}\, \alpha_{\text{осн}} = \text{const}$,
або $(SO) \,\hat{}\, (SA_1A_2) = (SO) \,\hat{}\, (SA_iA_{i+1}) = \text{const}$,
або $\rho(O/(SA_1A_2)) = \rho(O/(SA_iA_{i+1})) = \text{const}$,
то $O \equiv O_{\text{вп.кола у } A_1 \ldots A_n}$; $O_{\text{кулі}} \in SO$.

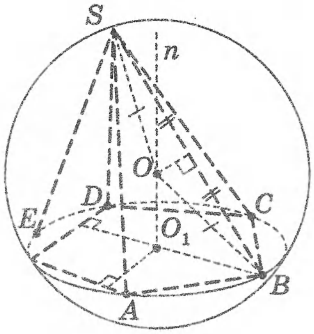
1) Побудова:
а) $SN_i \perp A_iA_{i+1}$ і $\rho(S/A_iA_{i+1}) \equiv SN_i$;
б) у (SON_i): $OM_i \perp SN_i$;
2) $SO \perp \alpha_{\text{осн}}$, $SN_i \perp A_iA_{i+1}$, $ON_i \equiv \text{Пр}_{\alpha_{\text{осн}}} SN_i$ $\Longrightarrow$ $ON_i \perp A_iA_{i+1}$ і $(SA_iA_{i+1}) \,\hat{}\, \alpha_{\text{осн}} = \angle SN_iO$;
3) $OM_i \perp SN_i$ за побуд., $(SON_i) \perp (SA_iA_{i+1})$, $(SN_i) = (SON_i) \cap (SA_iA_{i+1})$ $\Longrightarrow$ $OM_i \perp (SA_iA_{i+1})$ і $(SO) \,\hat{}\, (SA_iA_{i+1}) = \angle OSN_i$, $\rho(O/(SA_iA_{i+1})) = OM_i$;
4) доведення рівностей
$\triangle SON_1 = \ldots \triangle SON_i = \ldots \triangle SON_n$
або рівностей
$\triangle SOM_1 = \ldots \triangle SOM_i = \ldots \triangle SOM_n$.
Тоді SO – ГМТ рівновіддалених від бічних граней, щ.в.д.

ОК-64
Сфера, описана навколо піраміди

Т **Для того, щоб навколо піраміди можна було описати сферу, необхідно і достатньо, щоб навколо основи піраміди можна було описати коло.**

Необхідність доведіть самостійно.

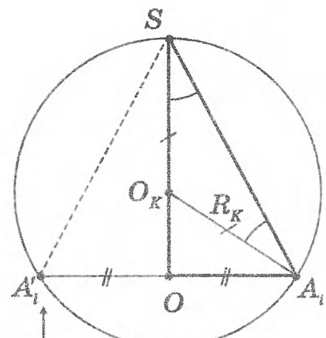
Достатність ⟶ Доведення.



1) Нехай O – центр кола, описаного навколо багатокутної основи. Тоді пряма n, що перпендикулярна площині основи у точці O, є ГМТ рівновіддалених від вершин основи;
2) площина, перпендикулярна ребру SB у його середині, є ГМТ рівновіддалених від S і B, перетинає пряму n у точці O. Тоді точка O рівновіддалена від вершин основи і вершини піраміди – шукана. Щ.в.д.

Навколо будь-якої правильної піраміди можна описати сферу.

Зауваження.
У перерізі (SOA_i) SO і SA_i – висота і ребро правильної піраміди, маємо (наприклад, якщо $n = 3$):

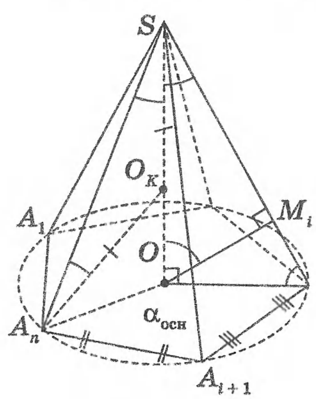


може не належати $A_1...A_n$ **!**

Н **Навколо будь-якого тетраедра можна описати сферу**

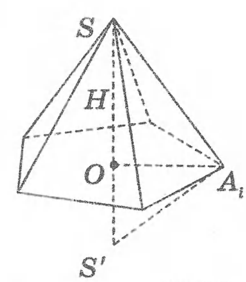
О.З.

Якщо $SO \perp \alpha_{осн}$
$SA_1 = SA_i = \text{const}$,
або $(SA_1)\,\hat{}\,\alpha_{осн} = (SA_i)\,\hat{}\,\alpha_{осн} = \text{const}$,
або $(SO)\,\hat{}\,(SA_1) = (SO)\,\hat{}\,(SA_i) = \text{const}$,
або $\rho(O/(SA_1)) = \rho(O/(SA_i)) = \text{const}$,
то $O \equiv O_{оп.кола\, A_1...A_n}$; $O_{кулі} \in SO$



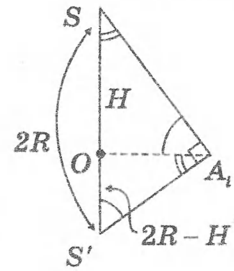
1) Побудова $OM_i \perp SA_i$, $OM_i \equiv \rho(O/SA_i)$;
2) $SO \perp \alpha_{осн}$, $OA_i \equiv Пр_{\alpha_{осн}} SA_i$ $\Longrightarrow$ $(SA_i)\,\hat{}\,\alpha_{осн} = \angle SN_iO$;
3) $(SO)\,\hat{}\,(SA_i) \equiv \angle OSA_i$;
4) доведення рівностей $\Delta SOA_1 = \ldots \Delta SOA_i = \ldots \Delta SOA_n$.
Тоді SO – ГМТ рівновіддалених від вершин основи, щ.в.д.

Порада.
Якщо висота піраміди SO містить центр описаної сфери, O_K – продовжить (SO) до перетину із сферою у точці S'.



Можливі випадки:
$O_K \in [SO]$
$O_K \equiv O$
$O_K \notin [SO]$
але $\xrightarrow{\text{Завжди}}$

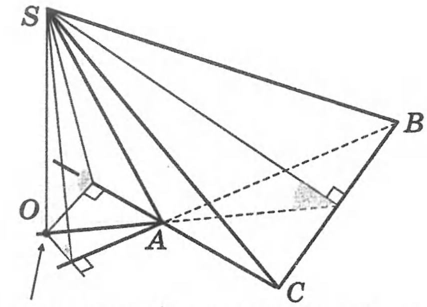
$|SS'| = 2R_{оп.кулі}$
$\Downarrow$
$\angle SA_iS' = 90°$



Радіус кола, описаного навколо основи:
$OA_i = r = \sqrt{H(2R - H)}$

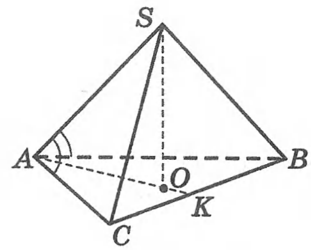
ОК-65

О.Ф. Дещо про деякі піраміди

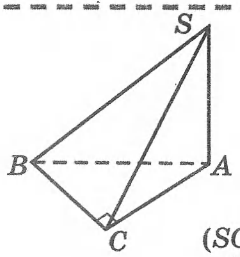


центр зовнівписаного кола

Для тетраедра:
якщо
$\rho(S/(AB)) =$
$= \rho(S/(AC)) =$
$= \rho(S/(CB))$
або $(SAC) \,\hat{}\, (ABC) =$
$= (SAB) \,\hat{}\, (ABC) =$
$= (SCB) \,\hat{}\, (ABC)$
і $SO \perp (ABC)$,
то *можливий випадок*
(див. ОК–45 та ОК–47)



Якщо $\angle SAB = \angle SAC$
і $SO \perp (ABC)$, то (AO) –
бісектриса $\angle BAC$ (див. ОК–46(3))

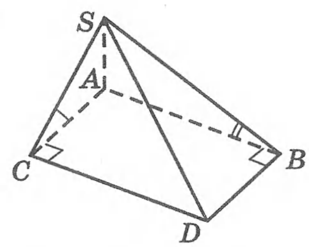


ЯКЩО $\left.\begin{matrix}(ASC) \perp (ABC) \\ (ASB) \perp (ABC)\end{matrix}\right| \Rightarrow (AS) \perp (ABC)$ (див. ОК – 44)

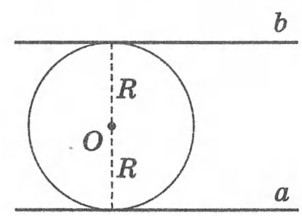
Якщо, крім того,

$\angle C = 90°$
$\downarrow$
$(SCB) \,\hat{}\, (ABC) = \angle SCA$
(бо $SC \perp CB$ за ТТП)

$ABCD$ – прямокутник
$\downarrow$
$(SDC) \,\hat{}\, (ABC) = \angle SCA$,
$\angle(SDB) \,\hat{}\, (ABC) = \angle SBA$
(бо $SC \perp CD$; $SB \perp DB$ за ТТП)



ФОРМУЛА СІМПСОНА
для фігур з площиною перерізу $S(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

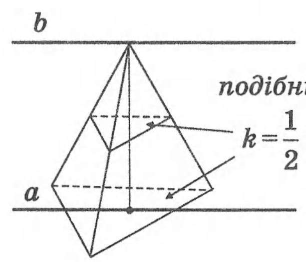


$$V = \int_a^b (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)dx = \left(\frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2} + \gamma x\right)\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{b-a}{6}(2\alpha(b^2 + ba + a^2) + 3\beta(b+a) + 6\gamma)$$

$$S_{\text{нижн. осн.}} = S(a) = \alpha a^2 + \beta a + \gamma; \quad S_{\text{верхн. осн.}} = S(b) = \alpha b^2 + \beta b + \gamma;$$

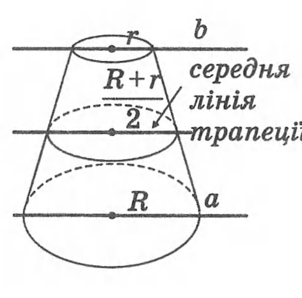
$$S_{\text{серед.}} = S\left(\frac{b+a}{2}\right) = \frac{\alpha(b-a)^2}{4} + \frac{\beta(b-a)^2}{2} + \gamma;$$



ФОРМУЛА СІМПСОНА $\quad V = \dfrac{b-a}{6}\left(S_{\text{ниж.}} + 4S_{\text{серед.}} + S_{\text{верх.}}\right)$

$$V_{\text{кулі}} = \frac{2R}{6}(0 + 4\pi R^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi R^3; \quad V_{\text{пір.}} = \frac{H}{6}\left(S_{\text{осн.}} + 4\frac{S_{\text{осн.}}}{4} + 0\right) = \frac{HS_{\text{осн.}}}{3};$$

$$V_{\text{кон.}} = \frac{H}{6}\left(S_{\text{осн.}} + 4\frac{S_{\text{осн.}}}{4} + 0\right) = \frac{HS_{\text{осн.}}}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3};$$

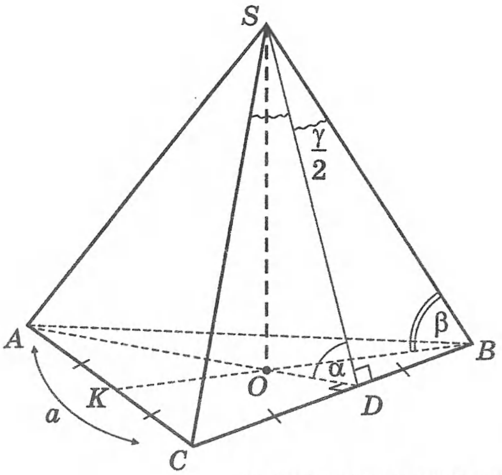


$$V_{\text{зріз. кон.}} = \frac{H}{6}\left(\pi R^2 + 4\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 \pi + \pi r^2\right) =$$

$$= \frac{\pi H}{6}(2R^2 + 2Rr + 2r^2) = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

ОК-66

0.3 Перехід між кутами правильної трикутної піраміди



$AB = AC = CB \triangleq a$; $(SCB)\,\hat{}\,(ABC) \triangleq \alpha$;
$SB\,\hat{}\,(ABC) \triangleq \beta$; $\angle CSB \triangleq \gamma$.

Побудова: $SO \perp (ABC)$; $SD \perp CB$.

1) $\angle CSD = \angle DSB = \frac{\gamma}{2}$ (бо $SC = SB$; $SD \perp CB$);

2) $\left.\begin{array}{l} SO \perp (ABC) \\ OB = \text{Пр}_{(ABC)} SB \end{array}\right| \Rightarrow SB\,\hat{}\,(ABC) = \angle SBO = \beta$;

3) $\left.\begin{array}{l} SO \perp (ABC) \\ SD \perp CB \\ OD = \text{Пр}_{(ABC)} SD \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} OD \perp SB \text{ (за ТПП)}, \\ (SCB)\,\hat{}\,(ABC) = \angle SDO = \alpha. \end{array}$

АЛГОРИТМ ПОШУКУ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ДВОМА КУТАМИ

1) Знайти два прямокутні трикутники, що містять ці кути і мають спільну сторону.

Спочатку двічі записати цю сторону; потім попереду поставити знак «Δ», а позаду літеру, що визначить відповідний кут у трикутник.

$\alpha \leftrightarrow \beta$

спочатку: SO SO

$\alpha \Leftrightarrow \beta$

потім: ΔSOD ΔSOB

2) Записати всі три пари з літер, що позначають трикутники (це сторони трикутника).

Виділити спільну сторону та сторону, що належить основі. Зайве закреслити.

$\alpha \leftrightarrow \beta$

ΔSOD ΔSOB

$\downarrow$ $\downarrow$

SO; OD; $\cancel{SD}$ SO; OB; $\cancel{SB}$

3) Спільну сторону за допомогою тригонометричної функції кута визначити через неспільну сторону (виходячи з відповідного трикутника); останню записати через довжину сторони основи.

$SO = OD \operatorname{tg}\alpha = OB \operatorname{tg}\beta$

$OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\beta$

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta}$

Відповідно наведеному алгоритму для трикутної правильної піраміди маємо:

$\frac{\gamma}{2} \leftrightarrow \beta$

ΔSBD ΔSBO

SB; BD; $\cancel{SD}$ SB; OB; $\cancel{SO}$

$SB = \frac{BD}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{OB}{\cos\beta}$; $BD = \frac{a}{2}$, $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $\frac{a}{2\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3\cos\beta}$

$\boxed{3\cos\beta = 2\sqrt{3}\sin\frac{\gamma}{2}}$

$\frac{\gamma}{2} \leftrightarrow \alpha$

ΔSDB ΔSDO

SD; DB; $\cancel{SB}$ SD; OD; $\cancel{SO}$

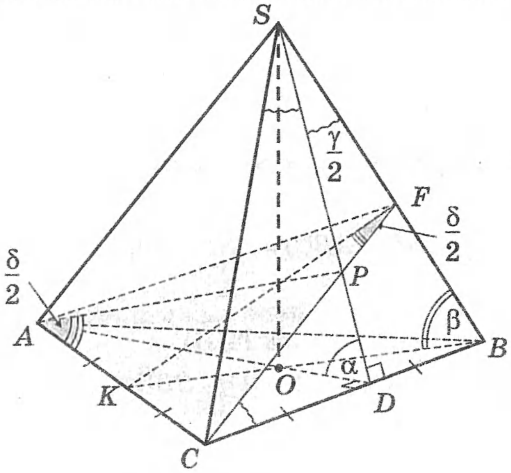
$SD = BD\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{OD}{\cos\alpha}$; $DB = \frac{a}{2}$; $OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}$

$\boxed{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\cos\alpha = \sqrt{3}}$

ОК-67

0.3 Двогранний кут при бічному ребрі правильної трикутної піраміди

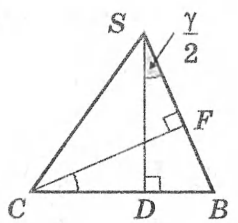


1) Побудова: $(AFC)\perp SB$;

$(ASB)\hat{\ }(SCB)=\angle AFC \triangleq \delta$;

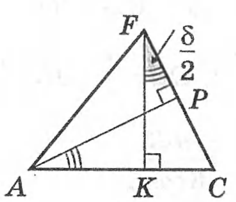
$\angle AFK=\angle KFC=\frac{\delta}{2}$.

2) $\underline{\triangle CSB}$: $\angle DSB=\angle FCB=\frac{\gamma}{2}$ (як кути з взаємно перпендикулярними сторонами)

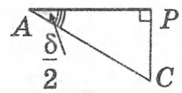


3) $(AFC)\perp(CSB)$, $(SOD)\perp(CSB)$ $\Rightarrow$ $(AFC)\cap(SOD)=$ $=(AP)\perp(CSB)$ (див. ОК–44(13)). Тоді $AP\perp CF,\ AP\perp SD$.

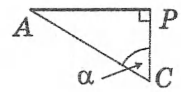
4) $\underline{\triangle AFC}$: $\angle PAC=\angle KFC=\frac{\delta}{2}$ (як кути з відповідно перпендикулярними сторонами)



Використовуючи алгоритм з ОК–62, знайдемо зв'язки кута $\frac{\delta}{2}$:



$$\frac{\gamma}{2}\leftrightarrow\alpha$$



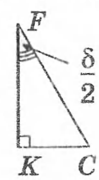
$\triangle APC$ $\qquad$ $\triangle APD$

$\underline{AP}$; $\underline{\underline{AC}}$; $\cancel{PC}$ $\qquad$ $\underline{AP}$; $\underline{\underline{AD}}$; $\cancel{PD}$

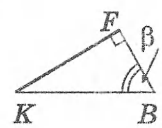
$$AP=AC\cos\frac{\delta}{2}=AD\sin\alpha;\quad AC=a;\quad AD=\frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$a\cos\frac{\delta}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\alpha;$$

$$\boxed{\cos\frac{\delta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}$$



$$\frac{\gamma}{2}\leftrightarrow\beta$$



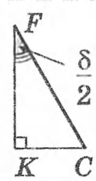
$\triangle KFC$ $\qquad$ $\triangle KFB$

$\underline{KF}$; $\underline{\underline{KC}}$; $\cancel{FC}$ $\qquad$ $\underline{KF}$; $\underline{\underline{KB}}$; $\cancel{FB}$

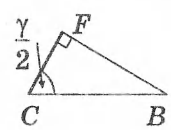
$$KF=KC\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}=KB\sin\beta;\quad KC=\frac{a}{2};\ KB=\frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\beta;$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}=\sqrt{3}\sin\beta}$$



$$\frac{\delta}{2}\leftrightarrow\frac{\gamma}{2}$$



$\triangle CFK$ $\qquad$ $\triangle CFB$

$\underline{CF}$; $\underline{\underline{CK}}$; $\cancel{FK}$ $\qquad$ $\underline{CF}$; $\underline{\underline{CB}}$; $\cancel{FB}$

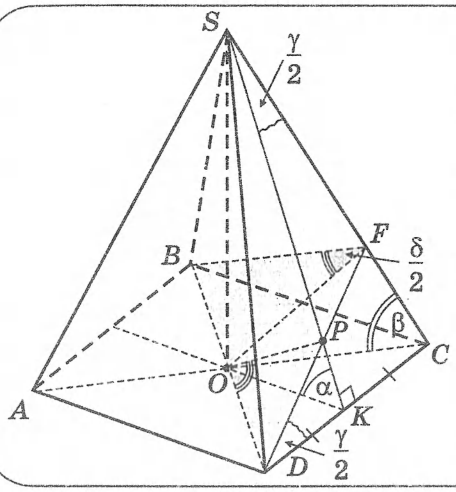
$$CF=\frac{CK}{\sin\frac{\delta}{2}}=CB\cos\frac{\gamma}{2};\quad CK=\frac{a}{2};\ CB=a;$$

$$\frac{a}{2\sin\frac{\delta}{2}}=a\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\boxed{\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}=\frac{1}{2}}$$

ОК-68

0.3 Перехід між кутами правильної чотирикутної піраміди



$SO \perp (ABC)$; $(BFD) \perp SC$; $SK \perp DC$.

$SC\,\hat{}\,(ABC) = \angle SCO \triangleq \beta$; $(SDC)\,\hat{}\,(ABC) = \angle SKO \triangleq \alpha$;

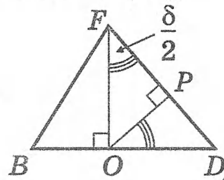
$(SBC)\,\hat{}\,(SDC) = \angle BFD \triangleq \delta$; $\angle DSC \triangleq \gamma$.

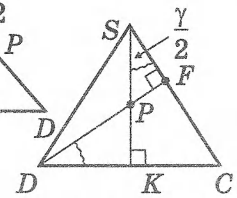
1) $\left.\begin{matrix}(BFD) \perp (SDC)\\ (SOK) \perp (SDC)\end{matrix}\right| \Rightarrow$ $(BFD) \cap (SOK) = OP \perp (SDC)$ (див. ОК–44(13)).

Тоді $OP \perp SK$; $OP \perp DF$;

2) $\triangle \underline{BFD}$: $\angle POD = \angle OFD = \dfrac{\delta}{2}$;

3) $\triangle \underline{DSC}$: $\angle FDC = \angle KSC = \dfrac{\gamma}{2}$.





Перехід між кутами виконуємо за алгоритмом ОК–62:

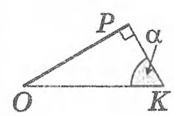
$\alpha \leftrightarrow \beta$

$\triangle SOK$ $\quad$ $\triangle SOC$

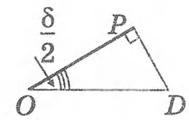
$\underline{SO}$; $\underline{\underline{OK}}$; $\cancel{SK}$ $\quad$ $\underline{SO}$; $\underline{\underline{OC}}$; $\cancel{SC}$

$$SO = OK\,\mathrm{tg}\,\alpha = OC\,\mathrm{tg}\,\beta;\ OK = \frac{a}{2};\ OC = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\beta}$$



$\beta \leftrightarrow \frac{\delta}{2}$



$\triangle OPK$ $\quad$ $\triangle OPD$

$\underline{OP}$; $\underline{\underline{OK}}$; $\cancel{PK}$ $\quad$ $\underline{OP}$; $\underline{\underline{OD}}$; $\cancel{PD}$

$$OP = OK\sin\alpha = OD\cos\frac{\delta}{2};\quad OK = \frac{a}{2};\ OD = a\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\boxed{\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}}$$

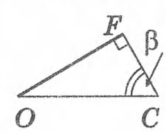
$\alpha \leftrightarrow \frac{\gamma}{2}$

$\triangle SKO$ $\quad$ $\triangle SKC$

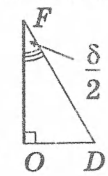
$\underline{SK}$; $\underline{\underline{OK}}$; $\cancel{SO}$ $\quad$ $\underline{SK}$; $\underline{\underline{KC}}$; $\cancel{SC}$

$$SK = \frac{OK}{\cos\alpha} = KC\,\mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2};\quad OK = \frac{a}{2};\ KC = \frac{a}{2}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}}$$



$\beta \leftrightarrow \frac{\delta}{2}$



$\triangle OFC$ $\quad$ $\triangle OFD$

$\underline{OF}$; $\underline{\underline{OC}}$; $\cancel{FC}$ $\quad$ $\underline{OF}$; $\underline{\underline{OD}}$; $\cancel{FD}$

$$OF = OC = \sin\beta = OD\,\mathrm{ctg}\,\frac{\delta}{2};\quad OD = a\frac{\sqrt{2}}{2};\ OC = a\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\boxed{\sin\beta = \mathrm{ctg}\,\frac{\delta}{2}}$$

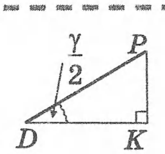
$\beta \leftrightarrow \frac{\gamma}{2}$

$\triangle SCO$ $\quad$ $\triangle SCK$

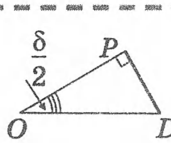
$\underline{SC}$; $\underline{\underline{CO}}$; $\cancel{SO}$ $\quad$ $\underline{SC}$; $\underline{\underline{CK}}$; $\cancel{SK}$

$$SK = \frac{CO}{\cos\beta} = \frac{CK}{\sin\frac{\gamma}{2}};\quad OC = a\frac{\sqrt{2}}{2};\ CK = \frac{a}{2};$$

$$\boxed{\cos\beta = \sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$



$\frac{\gamma}{2} \leftrightarrow \frac{\delta}{2}$



$\triangle PDK$ $\quad$ $\triangle PDO$

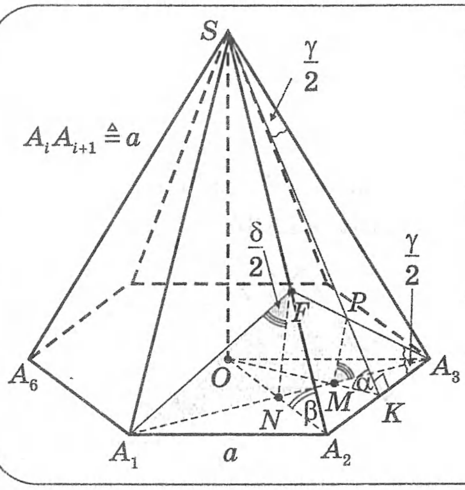
$\underline{PD}$; $\underline{\underline{DK}}$; $\cancel{KP}$ $\quad$ $\underline{PD}$; $\underline{\underline{OD}}$; $\cancel{OP}$

$$PD = \frac{DK}{\sin\frac{\gamma}{2}} = OD\sin\frac{\delta}{2};\quad DK = \frac{a}{2};\ OD = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

ОК-69

0.3. Перехід між кутами правильної шестикутної піраміди



$SO \perp (A_1 \ldots A_6)$; $(A_1FA_3) \perp SA_2$; $SK \perp A_2A_3$;

$(SA_2)\hat{}(A_1 \ldots A_6) = \angle SA_2O \triangleq \beta$; $(SA_2A_3)\hat{}(A_1 \ldots A_6) = \angle SKO \triangleq \alpha$;

$(SA_1A_2)\hat{}(SA_2A_3) = \angle A_1FA_3 \triangleq \delta$; $\angle A_iSA_{i+1} \triangleq \gamma$.

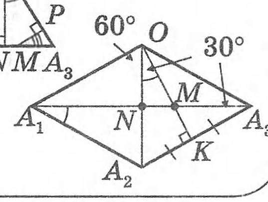
---

1) $\left.\begin{array}{l}(A_1FA_3) \perp (SA_2A_3)\\ (SOK) \perp (SA_2A_3)\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}(A_1FA_3) \cap (SOK) = (MP) \perp (SA_2A_3)\\ \text{і } MP \perp SK;\ MP \perp A_3F.\end{array}$

2) $\underline{\triangle A_1FA_3}$: $\angle PMA_3 = \angle A_3FN = \frac{\delta}{2}$.

3) $\underline{A_1 \ldots A_6}$ і $\underline{\triangle MKA_3}$: $MK = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$NA_2 = \frac{a}{2}$; $OK = A_1N = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $OA_2 = a$.



Перехід між кутами виконуємо за алгоритмом ОК–62:

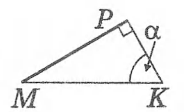
$\alpha \leftrightarrow \beta$

$\triangle SOK$ $\quad$ $\triangle SOA_2$

$\underline{SO}$; $\underline{\underline{OK}}$; $\cancel{SK}$ $\quad$ $\underline{SO}$; $\underline{\underline{OA_2}}$; $\cancel{SA_2}$

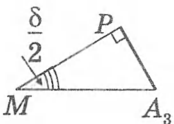
$SO = OK \operatorname{tg}\alpha = OA_2 \operatorname{tg}\beta$; $\quad OK = a\frac{\sqrt{3}}{2}$; $OA_2 = a$;

$$\boxed{\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha}$$



$\alpha \leftrightarrow \frac{\delta}{2}$

$\triangle MPK$ $\quad$ $\triangle MPA_3$



$\underline{MP}$; $\underline{\underline{KM}}$; $\cancel{PK}$ $\quad$ $\underline{MP}$; $\underline{\underline{A_3M}}$; $\cancel{PA_3}$

$MP = KM \sin\alpha = A_3M \cos\frac{\delta}{2}$; $\quad MK = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; $A_3M = \frac{a}{\sqrt{3}}$;

$$\boxed{\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}}$$

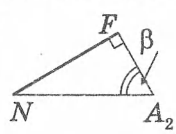
$\alpha \leftrightarrow \frac{\gamma}{2}$

$\triangle SKO$ $\quad$ $\triangle SKA_3$

$\underline{SK}$; $\underline{\underline{OK}}$; $\cancel{SO}$ $\quad$ $\underline{SK}$; $\underline{\underline{KA_3}}$; $\cancel{SA_3}$

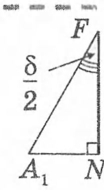
$SK = \frac{OK}{\cos\alpha} = KA_3 \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$; $\quad OK = a\frac{\sqrt{3}}{2}$; $KA_2 = \frac{a}{2}$;

$$\boxed{\cos\alpha = \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$



$\beta \leftrightarrow \frac{\delta}{2}$

$\triangle FNA_2$ $\quad$ $\triangle FNA_1$



$\underline{FN}$; $\underline{\underline{NA_2}}$; $\cancel{FA_2}$ $\quad$ $\underline{FN}$; $\underline{\underline{NA_1}}$; $\cancel{FA_1}$

$FN = NA_2 \sin\beta = NA_1 \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$; $\quad NA_2 = \frac{a}{2}$; $NA_1 = a\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\boxed{\sin\beta = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}}$$

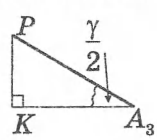
$\beta \leftrightarrow \frac{\gamma}{2}$

$\triangle SA_2O$ $\quad$ $\triangle SA_2K$

$\underline{SA_2}$; $\underline{\underline{A_2O}}$; $\cancel{SO}$ $\quad$ $\underline{SA_2}$; $\underline{\underline{A_2K}}$; $\cancel{SK}$

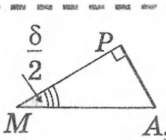
$SA_2 = \frac{A_2O}{\cos\beta} = \frac{A_2K}{\sin\frac{\gamma}{2}}$; $\quad OA_2 = a$; $A_2K = \frac{a}{2}$;

$$\boxed{\cos\beta = \sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$



$\frac{\gamma}{2} \leftrightarrow \frac{\delta}{2}$

$\triangle PA_3K$ $\quad$ $\triangle PA_3M$



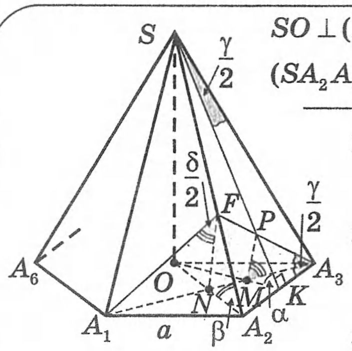
$\underline{PA_3}$; $\underline{\underline{A_3K}}$; $\cancel{KP}$ $\quad$ $\underline{PA_3}$; $\underline{\underline{A_3M}}$; $\cancel{MP}$

$PA_3 = \frac{A_3K}{\cos\frac{\gamma}{2}} = A_3M \sin\frac{\delta}{2}$; $\quad A_3K = \frac{a}{2}$; $A_3M = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$$\boxed{\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

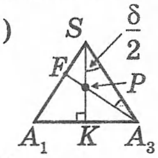
ОК-70

0.3 **Перехід між кутами правильної n-кутної піраміди**

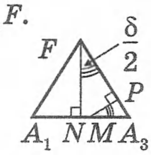


$SO \perp (A_1 \dots A_6)$; $(A_1FA_2) \perp SA_2$; $SK \perp A_2A_3$; $(SA_2)\hat{\ }(A_1\dots A_6) = \angle SA_2O \triangleq \beta$;
$(SA_2A_3)\hat{\ }(A_1\dots A_6) = \angle SKO \triangleq \alpha$; $(SA_1A_2)\hat{\ }(SA_2A_3) = \angle A_1FA_3 \triangleq \delta$; $\angle A_1FA_3 \triangleq \gamma$.

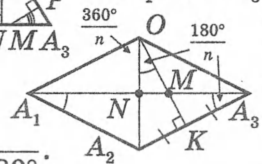
1) $\left.\begin{array}{l}(A_1FA_3) \perp (SA_2A_3) \\ (SOK) \perp (SA_2A_3)\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}((A_1FA_2) \cap (SOK)) = (MP) \perp (SA_2A_3) \\ \text{і } MP \perp SK;\ MP \perp A_3F.\end{array}$



2) $\underline{\triangle A_1FA_3}$: $\angle PMA_3 = \angle A_1FN = \delta/2$;
$\underline{\triangle A_2SA_3}$: $\angle KSA_3 = \angle FA_3A_2 = \gamma/2$;



3) $\underline{A_1 \dots A_6}$, $OK = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$; $A_1N = a\cos\frac{180^\circ}{n}$;



$NA_2 = a\sin\frac{180^\circ}{n}$; $OA_2 = \frac{a}{2\alpha\frac{180^\circ}{n}}$. 4) $\triangle MKA_3 : MK = \frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$; $MA_3 = \frac{a}{2\cos\frac{180^\circ}{n}}$.

Перехід між кутами виконуємо за алгоритмом ОК–62:

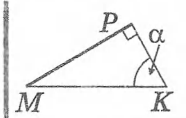
$\alpha \leftrightarrow \beta$

$\triangle SOK$ $\triangle SOA_2$

$\underline{SO}$; $\underline{\underline{OK}}$; $\cancel{SK}$ $\underline{SO}$; $\underline{\underline{OA_2}}$; $\cancel{SA_2}$

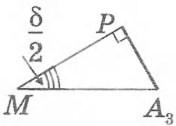
$SO = OK\operatorname{tg}\alpha = OA_2\operatorname{tg}\beta$; $OK = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$;

$OA_2 = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$ $\boxed{\operatorname{tg}\beta = \cos\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\alpha}$



$\alpha \leftrightarrow \frac{\delta}{2}$

$\triangle MPK$ $\triangle MPA_3$



$\underline{MP}$; $\underline{\underline{KM}}$; $\cancel{PK}$ $\underline{MP}$; $\underline{\underline{A_3M}}$; $\cancel{PA_3}$

$MP = KM\sin\alpha = MA_3\cos\frac{\delta}{2}$; $MK = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$;

$A_3M = \frac{a}{2\cos\frac{180^\circ}{n}}$; $\boxed{\cos\frac{\delta}{2} = \sin\frac{180^\circ}{n}\sin\alpha}$

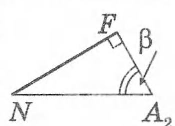
$\alpha \leftrightarrow \frac{\gamma}{2}$

$\triangle SKO$ $\triangle SKA_3$

$\underline{SK}$; $\underline{\underline{OK}}$; $\cancel{SO}$ $\underline{SK}$; $\underline{\underline{KA_3}}$; $\cancel{SA_3}$

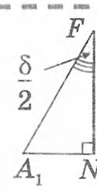
$SK = \frac{OK}{\cos\alpha} = KA_3\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$; $KA_3 = \frac{a}{2}$;

$OK = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$; $\boxed{\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}$



$\beta \leftrightarrow \frac{\delta}{2}$

$\triangle FNA_2$ $\triangle FNA_1$



$\underline{MP}$; $\underline{\underline{KM}}$; $\cancel{PK}$ $\underline{MP}$; $\underline{\underline{A_3M}}$; $\cancel{PA_3}$

$FN = NA_2\sin\beta = NA_1\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$; $NA_2 = a\sin\frac{180^\circ}{n}$;

$NA_1 = a\cos\frac{180^\circ}{n}$; $\boxed{\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}\sin\beta}$

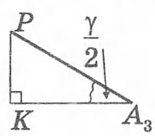
$\beta \leftrightarrow \frac{\gamma}{2}$

$\triangle SA_2O$ $\triangle SA_2K$

$\underline{SA_2}$; $\underline{\underline{OA_2}}$; $\cancel{SO}$ $\underline{SA_2}$; $\underline{\underline{A_2K}}$; $\cancel{SK}$

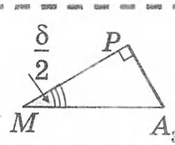
$SA_2 = \frac{A_2O}{\cos\beta} = \frac{A_2K}{\sin\frac{\gamma}{2}}$; $OA_2 = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$; $A_2K = \frac{a}{2}$;

$\boxed{\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{180^\circ}{n}\cos\beta}$



$\frac{\gamma}{2} \leftrightarrow \frac{\delta}{2}$

$\triangle PA_3K$ $\triangle PA_3M$



$\underline{PA_3}$; $\underline{\underline{A_3K}}$; $\cancel{PK}$ $\underline{PA_3}$; $\underline{\underline{A_3M}}$; $\cancel{PM}$

$PA_3 = \frac{A_3K}{\cos\frac{\gamma}{2}} = A_3M\sin\frac{\delta}{2}$; $A_3M = \frac{a}{2\cos\frac{180^\circ}{n}}$;

$A_3K = \frac{a}{2}$; $\boxed{\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{180^\circ}{n}}$

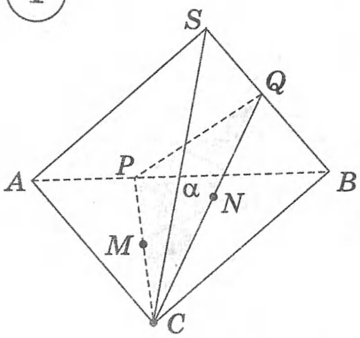
ОК-71

03 Побудова перерізів багатогранників

I. Якщо дві площини мають дві спільні точки, то пряма, проведена через ці точки, є лінією перетину цих площин.

Наприклад, побудуємо переріз тетраедра $SABC$ площиною α, що проходить через:

1 $\boldsymbol{M \in (ABC);\ N \in (CSB);\ C.}$

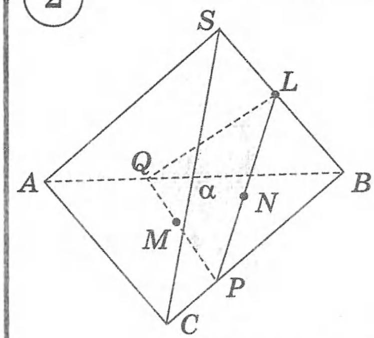


Побудова.

1) У (CSB): $(CN) \cap (SB) \triangleq Q$.
2) У (ABC): $(CM) \cap (AB) \triangleq P$.
3) $\{P; Q\} \subset (ASB)$; $\{P; Q\} \subset \alpha$ $\Downarrow$ $(PQ) = \alpha \cap (ASB)$.

$\triangle PQS$ **– шуканий переріз.**

2 $\boldsymbol{M \in (ABC);\ N \in (CSB);\ L \in [SB].}$



Побудова.

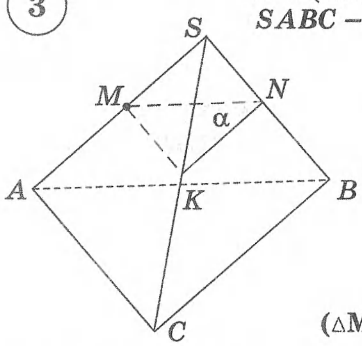
1) У (CSB): $(LN) \cap (CB) \triangleq P$.
2) У (ABC): $(PM) \cap (AB) \triangleq Q$.
3) $\alpha \cap (ASB) = (LQ)$.

$\triangle PQL$ **– шуканий переріз.**

II. Лінії перетину двох паралельних площин третьою паралельні між собою.

Наприклад, побудуємо переріз площиною α, що проходить через:

3 $\boldsymbol{M \in (AS);\ \alpha \parallel (ABC);}$ ***SABC – тетреедр.***



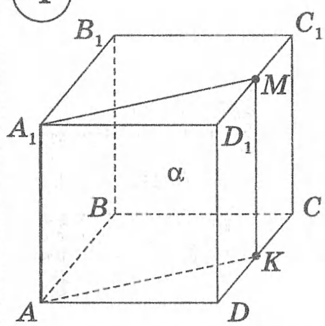
Побудова.

1) $MK \parallel AC$.
2) $MN \parallel AB$.

$\triangle MNK$ **– шуканий переріз.**

($\triangle MNK \sim \triangle ABC$)

4 $\boldsymbol{M \in [D_1C_1];\ (AA_1);}$ $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ ***– куб.***



Аналіз.

$(AA_1B_1B) \parallel (DD_1C_1C)$, тоді $\alpha \cap (DD_1C_1C) \parallel (AA_1) \parallel (DD_1)$.

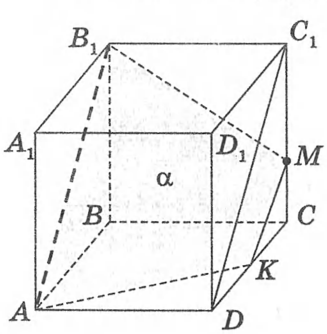
Побудова.

$MK \parallel DD_1$.

$\boldsymbol{AA_1MK}$ **– шуканий переріз (прямокутник).**

5 $\boldsymbol{[AB_1];\ M \in [CC_1];}$ $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ **– куб.**

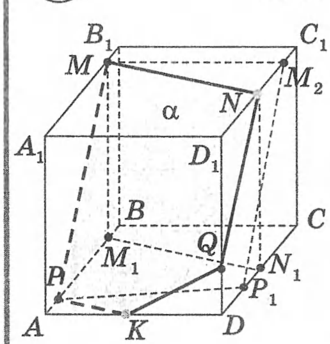
Аналіз. $(AA_1B_1B) \parallel (DD_1C_1C)$, тоді $\alpha \cap (DD_1C_1C) \parallel (AB_1) \parallel (DC_1)$.



Побудова. $MK \parallel DC_1$.

$\boldsymbol{AB_1MK}$ **– шуканий переріз (трапеція).**

6* $\boldsymbol{M \in [A_1B_1];\ K \in [AD];\ N \in [D_1C_1];}$ $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ **– куб.**



Побудова.

1) $MM_1 \parallel BB_1$, $NN_1 \parallel DD_1$ $\Rightarrow M_1N_1 \parallel MN$;
2) $PK \parallel M_1N_1$ (тоді $PK \parallel MN$);
3) $PP_1 \parallel AD$, $MM_2 \parallel B_1C_1$ $\Rightarrow P_1M_2 \parallel PM$;
4) $NQ \parallel P_1M_2$ (тоді $NQ \parallel PM$).

$\boldsymbol{PMNQK}$ **– шуканий переріз.**

ОК-72

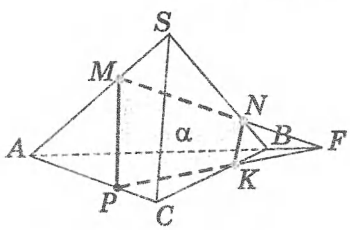
О.3 Побудова перерізів багатогранників

III. Спільна точка трьох площин (вершина тригранного кута) є спільною точкою ліній їх попарного перетину (ребер тригранного кута)

Наприклад, побудуємо переріз площиною α, що проходить через:

7 $M \in [AS]$; $N \in [SB]$; $K \in [CB]$; $SABC$ – **тетраедр.**

Аналіз. Площини α. (ASB) і (ABC) при попарному перетині утворюють тригранний кут. Його вершиною є точка $(AB) \cap (MN) \triangleq F$.



Тоді $((\alpha \cap (ABC)) \cap (AB)) = F$.

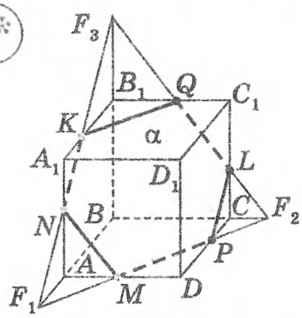
$\left.\begin{array}{l}\{P; K\} \subset \alpha \\ \{P; K\} \subset (ABC)\end{array}\right| \Rightarrow (\alpha \cap (ABC)) = (FK)$;

Побудова.

1) $(MN \cap AB) \triangleq F$;
2) $(FK) \cap (AC) \triangleq P$.

***PMNK* – шуканий переріз.**

8* $M \in [AD]$; $N \in [AA_1]$; $K \in [A_1B_1]$; $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – **куб.**



Побудова.

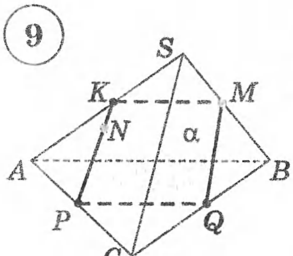
1) $(NK) \cap (AB) \triangleq F_1$ – вершина тригранного кута, грані якого належать площинам (AA_1B); (ABC); α;
2) $(F_1M) \cap (DC) \triangleq P$;
3) $(F_1M) \cap (BC) \triangleq F_2$ – спільна точка площини α; (ABC); (BB_1C);
4) $(NK) \cap (BB_1) \triangleq F_3$ – спільна точка площини α; (ABB_1); (BB_1C);
5) $(F_3F_2) \cap (CC_1) \triangleq L$; $(F_3F_2) \cap (B_1C_1) \triangleq Q$.

***MNKQLP* – шуканий переріз.**

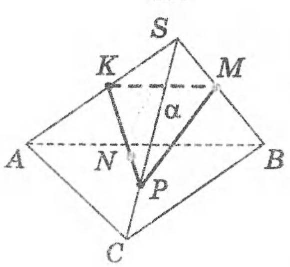
IV. Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині; і перетинає цю площину, то лінія перетину паралельна даній прямій.

Наприклад, побудуємо переріз площиною α, що проходить через:

9



або



$M \in [SB]$; $N \in (ASC)$;
$\alpha \parallel (AB)$;
$SABC$ – **тетраедр.**

Аналіз.

$(\alpha \cap (ASB)) \parallel (AB)$;
$(\alpha \cap (ABC)) \parallel (AB)$;

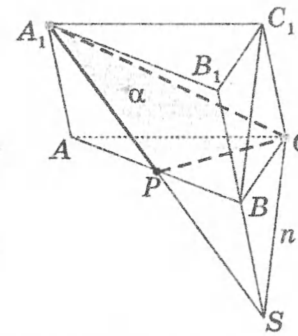
Побудова.

1) У (ASB):
$(KM) \parallel (AB)$;
$(KN) \cap (AC) \triangleq P$;
(або $(KN) \cap (SC) \triangleq P$);
2) якщо
$(KN) \cap (AC)$, то
$(PQ) \parallel (AB)$ і
***KMQP* – шуканий переріз.**
Якщо $(KN) \cap (SC)$, то
***KMP* – шуканий переріз.**

10* A_1; C; $\alpha \parallel (BC_1)$;
$ABCA_1B_1C_1$ – **призма.**

Аналіз.

$\alpha \cap (BB_1C) \triangleq n$.



Побудова.

1) Будуємо $n \parallel (BC_1)$,
$C \in n$;
$S \triangleq n \cap (BB_1)$;
2) S – спільна точка площин α;
(BB_1C); (AA_1B).

$\left.\begin{array}{l}\{S; A_1\} \subset \alpha \\ \{S; A_1\} \subset (AA_1B)\end{array}\right| \Rightarrow (\alpha \cap (AA_1B)) = (A_1S)$;

Будуємо (A_1S), $(A_1S) \cap (AB) \triangleq P$.

ΔPA_1C – шуканий переріз.

О.3

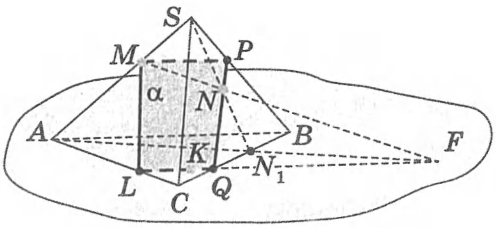
ОК-73
Побудова перерізів багатогранників

V. **Якщо пряма лежить у площині перерізу, то точка її перетину з певною площиною грані фігури є вершина тригранного кута, що утворено площинами: перерізу, грані фігури і допоміжною площиною, що містить дану пряму.**

Наприклад, побудуємо переріз площиною α, що проходить через:

11*

$M \in [AS]$; $N \in (SBC)$; $K \in (ABC)$; $SABC$ – **тетраедр.**

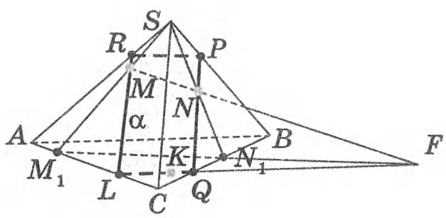


1) Шукаємо $(MN) \cap (ABC)$:
   допоміжна площина (MSN): $(MSN) \cap (CB) \triangleq N_1$,
   тоді $(MSN) \cap (ABC) = (AN_1)$;
   $F \triangleq (AN_1) \cap (MN)$ – вершина тригранного кута , тобто $(MN) \cap (ABC) = F$;
2) $\{F; K\} \subset \alpha$, $\{F; K\} \subset (ABC) \Rightarrow \alpha \cap (ABC) = (KF)$,
   $(KF) \cap (CB) \triangleq Q$; $(KF) \cap (AC) \triangleq L$;
3) $\{N; Q\} \subset (SCB)$, $\{N; Q\} \subset \alpha \Rightarrow \alpha \cap (SCB) = (NQ)$,
   $(NQ) \cap (SB) \triangleq P$.

***LMPQ* – шуканий переріз.**

12*

$M \in (ASC)$; $N \in (SCB)$;
$K \in (ABC)$; $SABC$ – **тетраедр.**

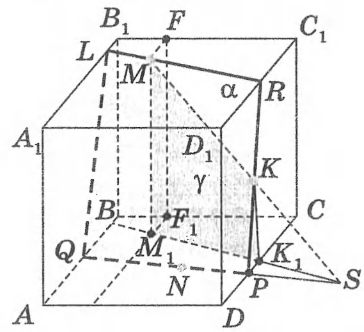


1) *Допоміжна площина* (MSN):
   $(MSN) \cap (CB) \triangleq N_1$;
   $(MSN) \cap (AC) \triangleq M_1$;
   $(MSN) \cap (ABC) = (M_1N_1)$;
   $(M_1N_1) \cap (MN) \triangleq F$;
   $(MN) \cap (ABC) = \mathrm{F}$.
   F – вершина тригранного кута, що утворено площинами α; (ABC) та (MSN).
2) $(\alpha \cap (ABC)) = (KF)$:
   $(KF) \cap (CB) \triangleq Q$;
   $(KF) \cap (AC) \triangleq L$;
3) $(\alpha \cap (ASC)) = (ML)$
   $(ML) \cap (AS) \triangleq R$;
4) $(\alpha \cap (SCB)) = (QN)$
   $(QN) \cap (SB) \triangleq P$.

***LRPQ* – шуканий переріз.**

13*

$M \in (A_1B_1C_1)$; $K \in (DD_1C_1)$;
$N \in (ABC)$; $ABCDA_1B_1C_1D_1$– **паралелепіпед.**



1) *Допоміжна площина* $\gamma \parallel (CC_1)$ (тобто $\gamma \perp (ABC)$):
   а) $KK_1 \parallel CC_1$;
   б) $\left.\begin{array}{l} MF \perp B_1C_1 \\ FF_1 \parallel CC_1 \\ MM_1 \parallel CC_1 \\ M_1F_1 \perp BC \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} (MKK_1) \triangleq \gamma; \\ \gamma \cap (ABC) = (M_1K_1); \\ (MK) \cap (M_1K_1) \triangleq S. \end{array}$

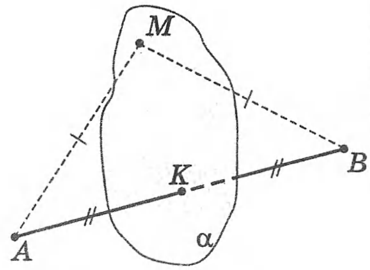
   S – вершина тригранного кута, що утворено площинами: γ, α, (ABC);
2) $\alpha \cap (ABC) = (SN)$:
   $(SN) \cap (CD) \triangleq P$;
   $(SN) \cap (AB) \triangleq Q$;
3) $\alpha \cap (DD_1C) = (PK)$: $(PK) \cap (D_1C_1) \triangleq R$;
4) $\alpha \cap (A_1B_1C_1) = (RM)$: $(RM) \cap (A_1B_1) \triangleq L$.

***RPQL* – шуканий переріз.**

ОК-74

Оф. Деякі ГМТ у просторі

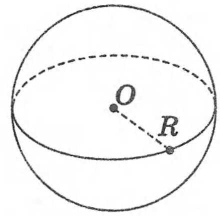
ГМТ рівновіддалених від кінців даного відрізка [AB] є



$\alpha \perp (AB)$ через середину $[AB]$

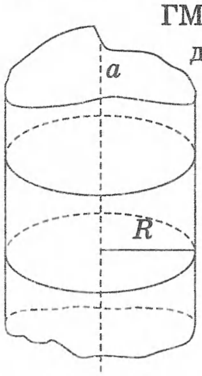
де $\alpha \cap (AB) \triangleq K$, $|AK| = |KB|$.

ГМТ рівновіддалених від данної точки O на R є



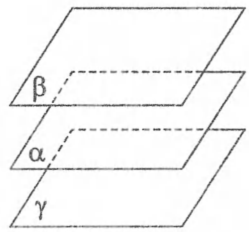
сфера

ГМТ рівновіддалених від даної прямої a на R є



циліндрична поверхня

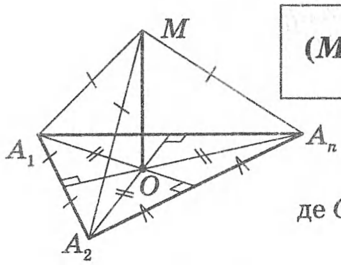
ГМТ рівновіддалених від від даної площини α на h є



площини $\beta \parallel \alpha, \gamma \parallel \alpha$

$\rho(\beta/\alpha) = \rho(\gamma/\alpha) = h.$

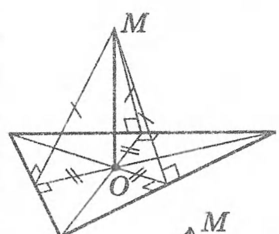
ГМТ рівновіддалених від вершин даного багатокутника $A_1A_2...A_n$ на R є



$(MO) \perp (A_1A_1...A_n)$

де $O \equiv O_{\text{оп.кола } A_1A_2\dots A_n}$.

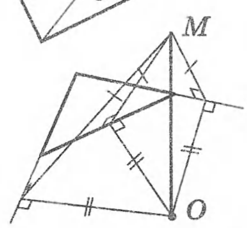
ГМТ рівновіддалених від сторін даного багатокутника $A_1A_2...A_n$ є



$(MO) \perp (A_1A_1...A_n)$

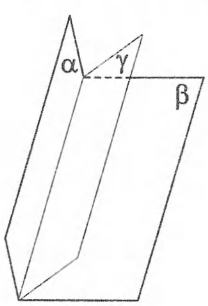
де $O \equiv O_{\text{вп.кола у } A_1A_2\dots A_n}$.

або



де $O \equiv O_{\text{зовні впис.кола } A_1A_2\dots A_n}$ (можливо лише при n=3).

ГМТ рівновіддалених від граней α і β двогранного кута є

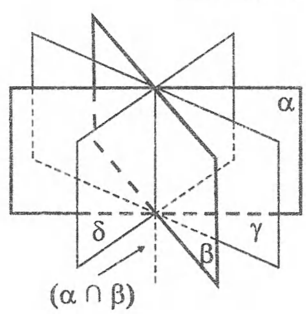


бісекторна напівплощина γ,

що проходить через ребро двогранного кута і поділяє кут навпіл

$$\gamma \hat{\ } \alpha = \gamma \hat{\ } \beta = \frac{\alpha \hat{\ } \beta}{2}$$

ГМТ рівновіддалених від площин α і β є



бісекторні площини γ і δ,

які проходять через $(\alpha \cap \beta)$ і поділяють утворені ними двогранні кути навпіл.

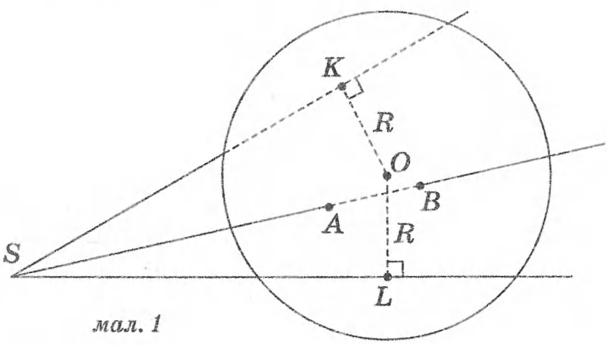
Оф

ОК-75
Дещо про кулю

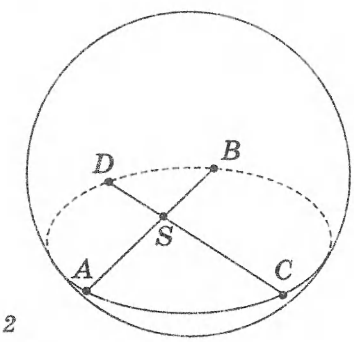
1. Через чотири точки, що не належать одній площині, можна провести сферу, до того ж тільки одну (ОК–61).
2. Рівняння сфери: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (ОК–61).
3. Центр сфери – центр її симетрії.
4. Довільна діаметральна площина кулі є площиною її симетрії (ОК–61).
5. Лінія перетину двох сфер – коло (ОК–61).

Наступні властивості легко довести, якщо побудувати відповідні січні площині і у цих площинах скористатися відповідними теоремами планіметрії для хорд, січних та дотичних кола.

6. Перерізи, що знаходяться на однаковій віддалі від центра кулі, рівні круги.
7. З двох перерізів має більший радіус той, що ближче до центра.
8. Кола двох великих кругів при перетині діляться навпіл.
9. Через дві точки сферичної поверхні, що не є кінцями одного діаметра, можна провести коло великого круга і тільки одне.
10. Площина перпендикулярна до радіуса у кінці його, який лежить на поверхні кулі, є дотичною площиною.
11. Дотична площина перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.
12. Перпендикуляр з центра сфери до січної проходить через середину хорди, що відтинає на цій січній.
13. Площина, що проходить через центр сфери перпендикулярно до її хорди, проходить через середину цієї хорди.
14. Площина, що проходить через середину хорди перпендикулярно до цієї хорди, проходить через центр сфери.



мал. 1



мал. 2

15. Якщо дві прямі перетинаються в т. S і є дотичними до сфери у точках K і L, то $|SK|=|SL|$ (див. мал.1).
16. Якщо дві прямі перетинаються в точці S, і одна з них дотикається до сфери у точці K, а друга перетинає її у точках A і B, то $|SA|\cdot|SB|=|SK|^2$ (див. мал. 1).
17. Якщо дві прямі перетинаються в середині кулі в точці S і перетинають сферу відповідно в точках A, B, і C, D, то $|SA|\cdot|SB|=|SC|\cdot|SD|$ (див. мал. 2).

О.Ф.

ОК-76
Описуємо циліндр, конус та сферу

ЦИЛІНДР

Для того, щоб **навколо призми** можна було описати циліндр, ***необхідно і достатньо***, щоб призма була пряма і навколо її основи можна було описати коло.

Навколо **будь-якої прямої трикутної призми** можна описати циліндр.

Навколо **будь-якої правильної призми** можна описати циліндр.

Кожне *бічне ребро* вписаної в циліндр призми є твірною бічної поверхні циліндра.

КОНУС

Для того, щоб **навколо піраміди** можна було описати конус, ***необхідно і достатньо***, щоб бічні ребра піраміди були однієї довжини.

Навколо **будь-якої правильної піраміди** можна описати конус.

Кожне *бічне ребро* вписаної в конус піраміди є твірною конуса, а *висота конуса* співпадає з висотою піраміди.

Кути нахилу бічних ребер піраміди рівні між собою і дорівнюють куту нахилу твірної конуса до основи.

СФЕРА

Для того, щоб **навколо піраміди** можна було описати сферу, ***необхідно і достатньо***, щоб навколо основи піраміди можна було описати коло.

Навколо **будь-якого тетраедра** можна описати сферу.

Навколо **будь-якої правильної піраміди** можна описати сферу.

Для того, щоб **навколо призми** можна було описати сферу, ***необхідно і достатньо***, щоб призма була пряма і щоб навколо її основи можна було описати коло.

Навколо **будь-якої правильної призми** можна описати сферу.

Центр сфери, описаної навколо призми, – середина відрізка, що з'єднує центри кіл, які описані навколо основ призми.

Центр сфери, що описана навколо **багатогранника**, є спільною точкою всіх площин, які проведено перпендикулярно до ребер багатогранника через їх середини.

ОФ

ОК-77
Вписуємо циліндр, конус та сферу

ЦИЛІНДР

Для того, щоб **в призму** можна було вписати циліндр, ***необхідно і достатньо***, щоб призма була пряма і в основу її можна було вписати коло.

У будь-яку **пряму трикутну призму** і в будь-яку **правильну призму** можна вписати циліндр.

Кожна *бічна грань* призми дотикається до бічної поверхні циліндра по його твірній. Ця твірна проходить через точку дотику відповідних сторін основи призми з колом основи циліндра.

КОНУС

Для того, щоб **в піраміду** можна було вписати конус, ***необхідно і достатньо***, щоб в основу піраміди можна було вписати коло, і основа висоти піраміди була центром цього кола.

У будь-яку правильну піраміду можна вписати конус.

Кожна *бічна грань* піраміди дотикається до бічної поверхні конуса по його твірній. Ця твірна проходить через точку дотику відповідної сторони основи піраміди з колом основи конуса. Ця твірна є висотою бічної грані піраміди.

Двогранні кути при основі піраміди рівні між собою і дорівнюють куту нахилу твірної конуса до площини основи.

СФЕРА

Для того, щоб **в призму** можна було вписати **сферу**, необхідно і достатньо, щоб в перпендикулярний переріз* призми можна було вписати коло і щоб висота призми дорівнювала діаметру цього кола.

Центр сфери належить прямій, що проведена паралельно бічним ребрам через центр кола, вписаного в перпендикулярний переріз.

Діаметр сфери дорівнює діаметру кола, вписаного в перпендикулярний переріз.

У правильну призму можна вписати сферу **тоді і тільки тоді**, коли її висота дорівнює діаметру кола, вписаного в основу.

У будь-який тетраедр можна вписати сферу.

У піраміду можна вписати сферу, якщо в основу піраміди можна вписати коло, а основа висоти піраміди – центр цього кола.

У будь-яку правильну піраміду можна вписати сферу.

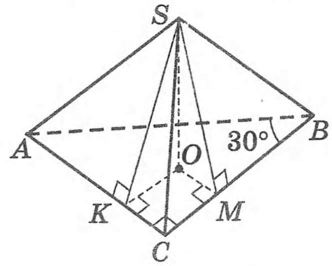
Центр кулі, вписаної в **багатогранник**, є спільною точкою бісекторних площин всіх внутрішніх двогранних кутів багатогранника.

---

*Якщо провести площину перпендикулярно прямим, що містять бічні ребра призми, то багатокутник з вершинами в точках перетину даної площини з усіма цими прямими називають *перпендикулярним перерізом призми*.

ОК-78
Розв'язуємо задачі про трикутну піраміду

1 Основою піраміди є прямокутний трикутник, у якого кути утворюють арифметичну прогресію, а довжина меншого з катетів 6 см. Усі грані піраміди нахилені до площини основи під кутом 30°. Знайдіть об'єм піраміди.



Дано: $\angle C=90°; (SCB)\hat{}(ABC)=(SAC)\hat{}(ABC)=(SAB)\hat{}(ABC)=30°;$

$\div\widehat{B};\widehat{A};\widehat{C}\ (\widehat{B}<\widehat{A}); \min\{AC;CB\}=6$ см.

Знайти: V.

Розв'язання

1) У $\triangle ABC$: $\widehat{B}<\widehat{A}<\widehat{C}=90° \Rightarrow AC<CB$, тоді $AC=6$ см;

2) $\div\widehat{B},\widehat{A},90° \to \begin{cases}\widehat{A}-\widehat{B}=90°-\widehat{A}\\ \widehat{A}+\widehat{B}=90°\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\widehat{A}=60°\\ \widehat{B}=30°.\end{cases}$ У $\triangle ABC$: $\angle C=90°$, $\angle B=30°$, $AC=6$м. $\Rightarrow$ $AB=12\,см, AC=AB\cos 30°=6\sqrt{3}$ і радіус кола вписаного у $\triangle ABC$ дорівнює $r=\dfrac{6+6\sqrt{3}-12}{2}=3(\sqrt{3}-1)$;

4) $(SCB)\hat{}(ABC)=(SAC)\hat{}(ABC)=(SAB)\hat{}(ABC)$, $SO\perp(ABC)$ $\Rightarrow O$ – іноцентр $\triangle ABC$;

5) $OM\perp CB$; $SO\perp(ABC)$; O – іноцентр $\triangle ABC$ $\Rightarrow$ $SM\perp CB$ і $\angle SMO=(SCB)\hat{}(ABC)=30°$; $OM=r=3(\sqrt{3}-1)$;

6) $\underline{\triangle SOM}$: $SO=OM\cdot\operatorname{tg}30°=3(\sqrt{3}-1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$;

7) $V=\dfrac{1}{3}S_{ABC}\cdot SO=\dfrac{1}{6}AC\cdot CB\cdot SO=\dfrac{1}{6}\cdot 6\cdot 6\sqrt{3}(3-\sqrt{3})=18(\sqrt{3}-1)$.

Відповідь: $18(\sqrt{3}-1)$.

2 Довжина висоти правильної трикутної призми h, а міра двогранного кута, утвореного бічними гранями, дорівнює 2φ. Знайдіть об'єм піраміди.

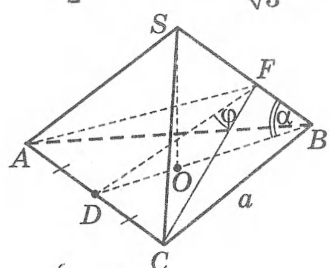
Дано: $SABC$ – правильна; $SO\perp(ABC)$; $SO=h$; $(AFC)\perp SB$; $\angle AFC=2\varphi$.

Знайти: V.

Розв'язання

1) З $\triangle DFB$ і $\triangle DFC$ маємо (див. ОК–67): $DF=DB\sin\alpha=DC\operatorname{ctg}\varphi$, $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\varphi$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\varphi$;

2) $\underline{\triangle SOB}$: $OB=SO\operatorname{ctg}\alpha$; $OB=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SO=h$. Тоді $a=h\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$;



3) $V=\dfrac{1}{3}S_{ABC}\cdot SO=\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{h}h=\dfrac{h^2\sqrt{3}}{4}\operatorname{ctg}^2\alpha$;

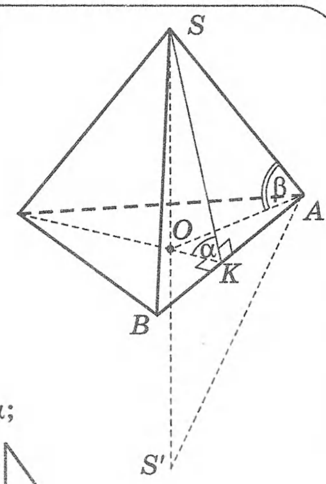
4) $\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1=3\operatorname{tg}^2\alpha-1$ і $V=\dfrac{h^3\sqrt{3}}{4(3\operatorname{tg}^2\varphi-1)}$;

5) Дослідження: відповідно до геометричного змісту задачі повинні виконуватися умови: $\begin{cases}3\operatorname{tg}^2\alpha-1>0\\ 0<2\varphi<2\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|\operatorname{tg}\varphi|>\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\varphi>\dfrac{\pi}{6}\\ \varphi<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

Відповідь: $\dfrac{h^3\sqrt{3}}{4(3\operatorname{tg}^3\varphi-1)}$ при $\varphi\in\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

ОК-79

Розв'язуємо задачі про трикутну піраміду



3 У правильній трикутній піраміді відношення радіусів описаної і вписаної куль дорівнює n. Знайдіть кут нахилу бічного ребра до площі основи.

Розв'язання

Позначили радіуси описаної і вписаної куль як R і r відповідно, довжину ребра основи як a.

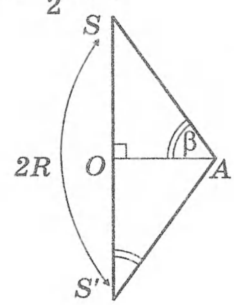
1) $SO \perp (ABC)$ – O центр основи; $OK \perp BA$ і $BK = KA$, SK – апофема;

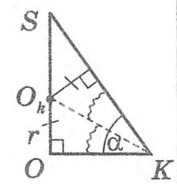
$\angle SKO \triangleq \alpha$ – лінійний кут двогранного кута при ребрі основи,

$\angle SAO \triangleq \beta$ – кут нахилу бічного ребра до площини основи;

2) $\underline{\triangle SOK \text{ і } \triangle SOA}$: $SO = OK\,\mathrm{tg}\,\alpha = OA\,\mathrm{tg}\,\beta$, $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\mathrm{tg}\,\beta$ і $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha$;

3) Продовжимо SO до перетину з описаною кулею у точці S':





$$SA = 2R\sin\beta,\ OA = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 2R\sin\beta\cos\beta = R\sin 2\beta,$$

$$OA = R\frac{2\,\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}^2\beta} = \frac{4R\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4+\mathrm{tg}^2\alpha} = \left(4R\cdot\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right) : \left(4+\frac{4-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right);$$

4) $O_к$ – центр вписаної кулі, $O_кP = OO_к = r$, $O_кK$ – бісектриса кута K. Тоді $r = OK\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;

5) З п. 3 - 4 маємо: $\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \left(8R\dfrac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right) : \left(4+\dfrac{4\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = \dfrac{2r}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$, $\dfrac{R\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = r\left(1+\dfrac{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$;

6) Позначимо $\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} \triangleq x > 0$ і розв'яжемо останнє рівняння відносно x: $\dfrac{nx}{1-x} = 1+\dfrac{x}{(1-x)^2}$,

$(n+1)x^2 - (n+1)x + 1 = 0$. За умовою $n \neq -1$ (бо $n > 0$). Дискримінант квадратного рівняння $D = (n+1)(n-3) > 0$ за умови $n > 3$ ($R > 3r$); $x_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\dfrac{n-3}{n+1}}\right)$. За геометричним змістом $\alpha \in (0; 90°)$, $\dfrac{\alpha}{2} \in (0; 45°)$ і $x \in (0; 1)$. Отримані значення $x_{1,2} \in (0; 1)$;

7) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2\sqrt{x}}{1-x} = \dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{1\pm\sqrt{\frac{n-3}{n+1}}}}{1\mp\sqrt{\frac{n-3}{n+1}}}$; $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{1\pm\sqrt{\frac{n-3}{n+1}}}}{1\mp\sqrt{\frac{n-3}{n+1}}}$.

Відповідь: $\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{\frac{n-3}{n+1}}}}{1-\sqrt{\frac{n-3}{n+1}}}$; $\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{\frac{n-3}{n+1}}}}{1+\sqrt{\frac{n-3}{n+1}}}$ (дві відповіді).

ОК-80
Розв'язуємо задачі про трикутну піраміду

4 Радіуси вписаної і описаної куль правильної трикутної піраміди дорівнюють r і R відповідно. Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання

1) Скористаємося позначеннями, малюнком і розв'язком задачі 3.

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot SO=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha=\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right)^3\cdot\frac{3}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha=\left(\frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{1-x}=\frac{(2r)^3\cdot 3\cdot 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}\cdot 4\cdot(1-x)}=\frac{12r^3}{x(1-x)};$$

2) обчислимо добуток $x\cdot(x-1)$ при тому розглянемо два варіанти, яким відповідають верхні і нижні знаки алгебраїчного додаванні, відповідно:

$$x(x-1)=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{\frac{R-3r}{R+r}}\left(1-\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R-3r}{R+r}}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(1\pm\sqrt{\frac{R-3r}{R+r}}\right)\left(1\mp\sqrt{\frac{R-3r}{R+r}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{R-3r}{R+r}\right)=\frac{r}{R+r};$$

3) $V=\dfrac{12r^3(R+r)}{r}=12r^2(R+r)$.

Відповідь: $12r^2(R+r)$.

5 Радіуси вписаної і описаної куль правильної трикутної піраміди дорівнюють r і R відповідно. Знайдіть площу поверхні піраміди.

Розв'язання

Скористаємося позначеннями, малюнком і розв'язком задач 3–4.

1) Площа бічної поверхні дорівнює: $S_{б.п.}=3\cdot\frac{1}{2}a\cdot SK=\frac{3}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$;

2) $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-x}{1+x}$; $S_{б.п.}=\dfrac{3\sqrt{3}r^2(1+x)}{x(1-x)}$ і $x(1-x)=\dfrac{r}{R+r}$ (див. задачу 4);

3) площа основи піраміди дорівнює $S_{осн.}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3r^2\sqrt{3}}{x}$

і шукана площа $S_{пов.\,поверх.}=\dfrac{3\sqrt{3}r^2(1+x)}{x(1-x)}+\dfrac{3\sqrt{3}r^2}{x}=\dfrac{3\sqrt{3}r^2\cdot 2}{x(x-1)}=6\sqrt{3}r(R+r)$.

Відповідь: $6\sqrt{3}r(R+r)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Апостолова Г.В.* **Планіметрія в опорних схемах.** – К. Факт, 2000. – 64 с.
2. *Апостолова Г.В.* **Стереометрія в опорних схемах.** – К. Факт, 2000. – 68 с.
3. *Апостолова Г.В.* **Геометрія-7.** – К. Ґенеза, 2004. – 216 с.
4. *Апостолова Г.В.* **Геометрія-8.** – К. Ґенеза, 2005. – 256 с.
5. *Апостолова Г.В.* **Геометрія-9.** – К. Ґенеза, 2006. – 248 с.
6. *Кушнір І.А.* **Повернення втраченої геометрії.** – К. Факт, 2000. – 280 с.
7. *Кушнір І.А.* **Трикутник і тетраедр у задачах.** – К. Радянська школа, 1991. – 207 с.
8. *Тадеєв В.О.* **Геометрія –10.** Дворівневий підручник. – Тернопіль. Навчальна книга-Богдан, 2003. – 384 с.
9. *Финкельштейн Л.П.* **Задачи на построение.** – К. Факт, 1998. – 60 с.
10. *Ясінський В.В.* **Математика.** Навчальний посібник для слухачів ІДП НТУУ «КПІ». – ІДП НТУУ «КПІ», 2007. – 368 с.

... У величезному саду геометрії
кожний може підібрати собі
букет за смаком.

Давід Гільберт

СЛОВНИК ПОЗНАЧЕНЬ

(KM)	– **пряма** KM;
$[KM]$	– **відрізок** KM;
$[KM)$	– **промінь** KM з початком у точці K;
(ABC)	– **площина**, що містить точки A, B, C;
(ab)	– **площина**, що містить прямі a, b;
$a\hat{}b$; $\angle(ab)$	– **кут** між прямими a і b;
$a\hat{}(ABC)$	– **кут** між прямою a і площиною (ABC);
$(KM)\hat{}(ABC)$	– **кут** між прямою (KM) і площиною (ABC);
$\alpha\hat{}\beta$; $\angle(\alpha\beta)$	– **кут** між площинами α і β;
$\text{Пр}_a AB$	– **проекція** відрізка AB на пряму a;
$\text{Пр}_\alpha a$	– **проекція** прямої a на площину α;
$\text{Пр}_\alpha ABCD$	– **проекція** чотирикутника $ABCD$ на площину α;
$a \parallel b$	– прямі a і b **паралельні**;
$a \perp b$	– прямі a і b **перпендикулярні**;
$a \dot{-} b$	– прямі a і b **мимобіжні**;
$A \in a$	– точка A **належить** прямій a;
$K \in (ABC)$	– точка K **належить** площині (ABC);
$D \notin \alpha$	– точка D **не належить** площині a;
$\{a; B\}$	– **множина**, що складається з точок прямої a і точки B;
$\{A; B\} \subset c$	– точки A і B **належать** прямій c;
$a \subset (ABC)$	– точки площини (ABC) **належать** прямій a;
$\{A; B\} \not\subset c$	– точки A і B **не належать** прямій c;
$b \not\subset \alpha$	– точки прямої b **не належать** площині α;
$M = a \cap b$	– M є точкою **перетину** прямих a і b;
$K = (MP) \cap \alpha$	– K є точкою **перетину** прямої MP з площиною α;
$c = \alpha \cap (ABC)$	– пряма c є прямою **перетину** площин α і (ABC);
$\gamma \supset \{a; B\}$	– площина γ **проходить через** пряму a і точку B;
$d(A/b)$	– **відстань** точки A від прямої b;
$d(a/b)$	– **відстань** між прямими a і b;
$d(A/\alpha)$	– **відстань** точки A від площини α;
$d((ABC)/\alpha)$	– **відстань** між площинами (ABC) і α;
$\equiv$	– **«збігається»**, або **тотожня рівність**;
$a \overset{def}{=} b$	– рівність **за означенням**;
$\angle A \triangleq \alpha$	– **позначимо** кут A через α;
$\Rightarrow$	– **тоді (випливає)** – знак логічного слідування;
$\rightarrow$	– **тоді маємо**, або **тоді будуємо**;
У $\triangle ABC$: a, b, c	– сторони, протилежні кутам A, B, C (відповідно);
m_a, h_a, l_a	– медіана, висота і бісектриса, які виходять з вершини A;
P і p	– периметр і півпериметр багатокутника (трикутника);
r	– радіус вписаного у багатокутник (трикутник) кола;
R	– радіус описаного навколо багатокутника (трикутника) кола;
Щ.в.д.	– що вимагалося довести;
ГМТ	– геометричне місце точок.

ЗМІСТ

Апостолова, Галина
Ясінський, Василь
А76 Геометрія старшокласникам і абітурієнтам. — К.: Факт, 2008. — 88 с.: іл.

ISBN 966-359-139-0

УДК 514(075)
ББК 22.14я7

Науково-методичне видання

АПОСТОЛОВА Галина Вадимівна
ЯСІНСЬКИЙ Василь Васильович
ГЕОМЕТРІЯ СТАРШОКЛАСНИКАМ І АБІТУРІЄНТАМ

Технічний редактор *Ксенія Дельфінчикова*
Коректор *Олена Коржова*
Верстка та макетування *Андрія Репенка*

Здано до виробництва 01.12.2007. Підписано до друку 05.01.2008.
Формат 60×84/8. Папір офсетний. Гарнітура «SchoolBook».
Друк офсетний. Обл.-вид. арк. 5,2. Наклад 7000 прим.
Зам. № 7-387.

ТОВ «Видавництво „Факт“»
04080, Україна, Київ-80, а/с 76
Реєстраційне свідоцтво
ДК № 1284 від 19.03.2003
Тел.: (044) 287 1886, 287 1882
E-mail: office@fact.kiev.ua
Відділ збуту: (044) 463 6887
E-mail: sbyt@fact.kiev.ua
www.fact.kiev.ua

Віддруковано з готових позитивів
у ВАТ «Харківська книжкова фабрика ім. М. В. Фрунзе»
61057, м. Харків, вул. Донець-Захаржевського, 6/8.
Свідоцтво про реєстрацію
ДК №1580 від 28.11.2003 р.

Галина Вадимівна Апостолова — вчитель-методист, кандидат фізико-математичних наук, професор Київського обласного інституту післядипломної освіти педагогічних кадрів

Василь Васильович Ясінський — заслужений працівник народної освіти України, професор, директор Інституту моніторингу якості освіти Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»