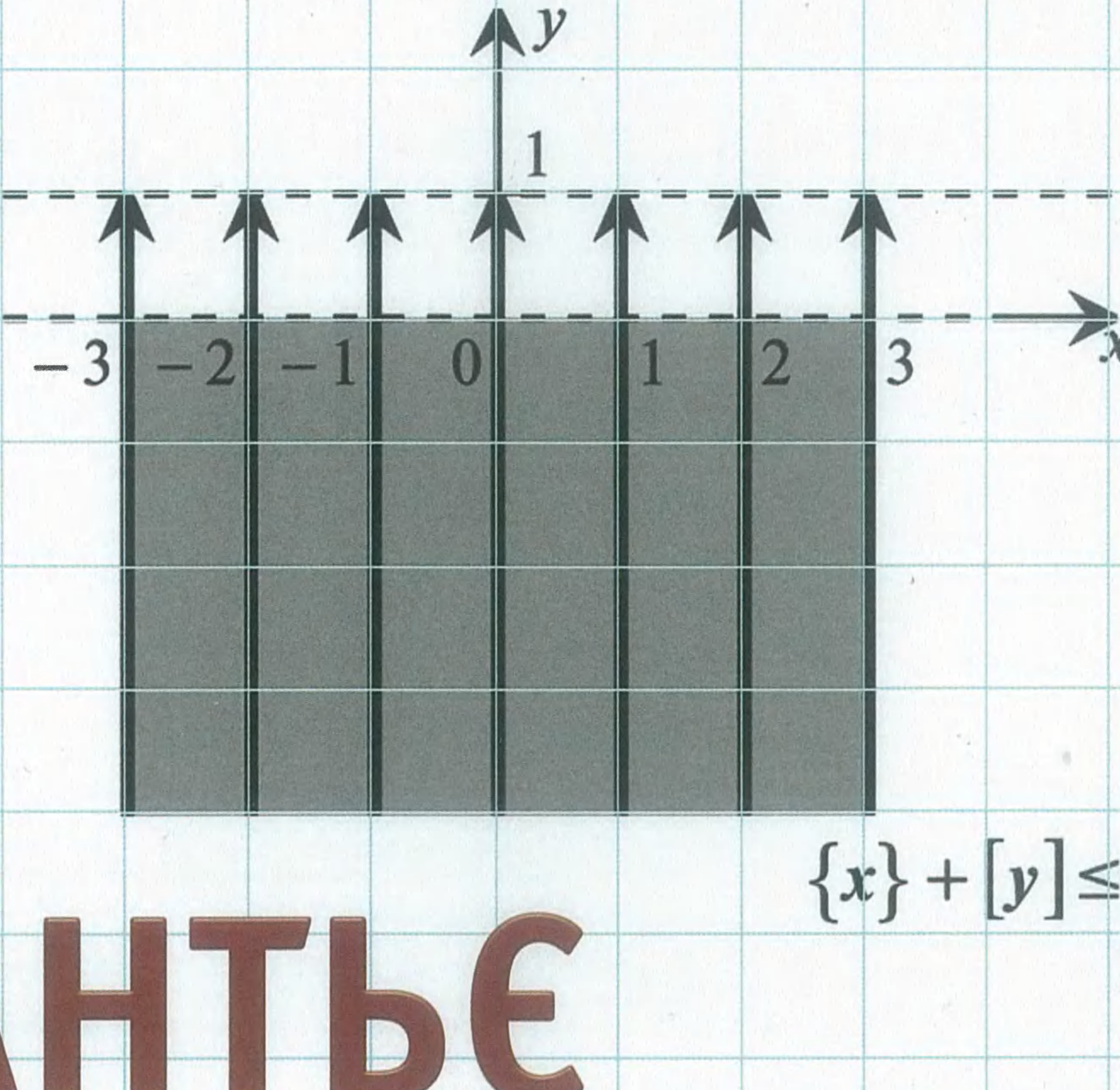
Г. В. АПОСТОЛОВА
В. В. ЯСІНСЬКИЙ



$\{x\} + [y] \leq 0$

АНТЬЄ І МАНТИСА ЧИСЛА

Г. В. АПОСТОЛОВА, В. В. ЯСІНСЬКИЙ

АНТЬЄ І МАНТИСА ЧИСЛА

Схвалено Міністерством освіти і науки України

Навчальний посібник

ФАКТ
ВИДАВНИЦТВО

Київ · 2006

УДК 511.235(075.4)
ББК 22.132я7
А76

Схвалено Міністерством освіти і науки України
(лист МОН України № 1/11—2430 від 29.05.06)

Рецензенти:
член-кореспондент НАН України,
директор Центру тестування
та моніторингу знань НТУУ «КПІ»
В. С. Мельник;
вчитель-методист
Л. П. Фінкельштейн

ISBN 966-359-092-0

© Г. В. Апостолова,
В. В. Ясінський, 2006
© Дизайн, макет. «Факт», 2006

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Посібник має на меті ознайомити учнів і абітурієнтів із властивостями цілої та дробової частини числа, методами розв'язування задач на використання цих понять. Він може бути корисним також при підготовці учнів до щорічних учнівських олімпіад з математики.

У посібнику представлено близько 160 задач із розв'язаннями або вказівками і відповіді до них. Читачу пропонується пройти шлях від означення антьє і мантиси числа, найпростіших завдань цієї теми до задач конкурсного й олімпіадного рівнів, ознайомитися з можливостями використання понять цілої та дробової частини числа у задачах на подільність.

При написанні посібника був врахований багаторічний досвід роботи авторів у системі доуніверситетської підготовки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут».

Посібник може бути використаний учителями математики при організації факультативних занять та для роботи в класах із поглибленим вивченням математики. Учні, які цікавляться математикою, можуть користуватися матеріалами цієї книги і самостійно.

Автори вдячні кандидату фіз.-мат. наук, співробітнику Інституту математики НАНУ Дмитру Фінкельштейну за корисні зауваження, що сприяли покращенню рукопису.

§ 1. ОЗНАЧЕННЯ. ПЕРШІ ЗАДАЧІ

«Антьє? Це французький математик».

З відповіді студента на екзамені

Цілою частиною числа x називають найбільше ціле число, що не перевершує дане число x, позначають її через $[x]$.

Цілу частину числа ще називають **«антьє»**, від французького «entiere» (цілий).

Таким чином, *для будь-якого дійсного числа x його цілою частиною $[x]$ буде ціле число n, для якого виконується умова*

$$(1.1) \qquad n \le x < n+1, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Приклади.

$$[2]=2; \quad [2{,}9]=2; \quad [-2]=-2; \quad [-2{,}9]=-3.$$

Різницю між числом x та його цілою частиною називають **дробовою частиною числа x** і позначають через $\{x\}$.

Дробову частину числа іноді в літературі називають «**мантиса**» від латинського «mantissa» (додача, добавка).

Тобто за означенням

$$(1.2) \qquad \{x\} = x - [x],$$

і очевидно що

$$(1.3) \qquad 0 \le \{x\} < 1,$$

$$(1.4) \qquad x = [x] + \{x\}.$$

Приклади.

$$\{2\} = 0; \quad \{2{,}9\} = 0{,}9; \quad \{-2\} = 0; \quad \{-2{,}9\} = 0{,}1.$$

Звернемо увагу на останнє співвідношення. Якщо деяке число від'ємне, то ціла частина цього числа — також від'ємна, а дробова частина його — завжди число невід'ємне, згідно з формулою (1.3). Наприклад, розглянемо число $-3{,}1$. Його ціла частина дорівнює найбільшому цілому числу, що розташоване на числовій осі ліворуч $-3{,}1$, тобто $[-3{,}1] = -4$. Тоді, за (1.2), маємо

$$\{-3{,}1\} = -3{,}1 - [-3{,}1] = -3{,}1 + 4 = 0{,}9.$$

У задачах 1—11 треба знайти цілу та дробову частину числа a.

1. $a = 5$.

Відповідь. $[a] = 5; \quad \{a\} = 0.$

2. $a = -5$.

Відповідь. $[a] = -5; \quad \{a\} = 0.$

3. $a = 5{,}2$.

Відповідь. $[a] = 5; \quad \{a\} = 0{,}2.$

4. $a = -5{,}2$.

Відповідь. $[a] = -6; \quad \{a\} = 0{,}8.$

5. $a=\sqrt{2}$.

Розв'язання.

Оскільки $\sqrt{2}\in[1;2)$, то $[a]=1;\ \{a\}=\sqrt{2}-1$.

Відповідь. $[a]=1;\quad \{a\}=\sqrt{2}-1$.

6. $a=-\sqrt{2}$.

Відповідь. $[a]=-2;\quad \{a\}=2-\sqrt{2}$.

7. $a=\sqrt{5}$.

Відповідь. $[a]=2;\quad \{a\}=\sqrt{5}-2$.

8. $a=-\sqrt{5}$.

Відповідь. $[a]=-3;\quad \{a\}=3-\sqrt{5}$.

9. $a=\dfrac{1}{n}$, де $n\in\mathbb{N}$.

Розв'язання.

При всіх $n>1$ число $\dfrac{1}{n}\in(0;1)$ і $\left[\dfrac{1}{n}\right]=0$, тоді $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}=\dfrac{1}{n}-0=\dfrac{1}{n}$.

Для $n=1$ число $\dfrac{1}{n}=1$, і тому $\left[\dfrac{1}{n}\right]=1$, а $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}=0$.

Відповідь. При $n>1\quad [a]=0;\quad \{a\}=\dfrac{1}{n}$;

при $n=1\quad [a]=1;\quad \{a\}=0$.

10. $a=\dfrac{1}{k}$, де $k\in\mathbb{Z}$.

Розв'язання.

Зрозуміло, що $k\neq 0$.

При $k=1$ $\left[\frac{1}{k}\right]=1$, а $\left\{\frac{1}{k}\right\}=0$,

при $k>1$ $\left[\frac{1}{k}\right]=0$, а $\left\{\frac{1}{k}\right\}=\frac{1}{k}$ (див. задачу 9),

при $k<0$ $\frac{1}{k}\in[-1;0)$, тоді $\left[\frac{1}{k}\right]=-1$; а $\left\{\frac{1}{k}\right\}=\frac{1}{k}-(-1)=\frac{1}{k}+1$.

Відповідь. При $k=1$ $[a]=1$; $\{a\}=0$;

при $k>1$ $[a]=0$; $\{a\}=\frac{1}{k}$;

при $k<0$ $[a]=-1$; $\{a\}=1+\frac{1}{k}$.

11. $a=\cos x$, якщо $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Відповідь. При $x=0$ $[a]=1$; $\{a\}=0$;

при $x=\frac{\pi}{2}$ $[a]=0$; $\{a\}=0$;

при $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $[a]=0$; $\{a\}=\cos x$.

У задачах 12 і 13 знайти $[a]$.

12. $a=\cos x$ при $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Відповідь. При $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$ $[a]=0$;

при $x=0$ $[a]=1$.

13. $a=\sin x$, при $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Відповідь. При $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right)$ $[a]=-1$;

при $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ $[a]=0$;

при $x=\frac{\pi}{2}$ $[a]=1$.

У задачах 14 і 15 знайти $[a]$ *та* $\{a\}$.

14. $a=\cos^2 x$.

Розв'язання.

Для всіх $x\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, $\cos^2 x\in[0;1)$, тоді

$$[a]=0;\quad \{a\}=\cos^2 x-0=\cos^2 x\,.$$

Для $x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, $\cos^2 x=1$, тоді $[a]=1$, а $\{a\}=0$.

Відповідь. При $x\neq\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$[a]=0;\quad \{a\}=\cos^2 x$;

при $x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$[a]=1;\quad \{a\}=0$.

15. $a=|\cos x|$.

Вказівка.

Розв'язування та відповідь збігаються з розв'язуванням та відповіддю попередньої задачі.

Відповідь. При $x\neq\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$[a]=0;\quad \{a\}=\cos^2 x$;

при $x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$[a]=1;\quad \{a\}=0$.

16. Знайти $\{a\}$, якщо $a = \sin x$.

Розв'язання.

Якщо $-1 \le \sin x < 0$, тобто $x \in (-\pi + 2n\pi; 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, то

$$[\sin x] = -1, \quad \{\sin x\} = \sin x - (-1) = 1 + \sin x.$$

Коли $\sin x$ — невід'ємне число, то розглянемо два випадки: $\sin x = 1$ та $0 \le \sin x < 1$.

1) $\sin x = 1$, тобто $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді

$$[\sin x] = 1; \quad \{\sin x\} = 0.$$

2) $0 \le \sin x < 1$, тобто

$$x \in \left[2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \pi + 2n\pi\right], \ n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді

$$[\sin x] = 0; \quad \{\sin x\} = \sin x - 0 = \sin x.$$

Відповідь. При $x \in (-\pi + 2n\pi; 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$,

$\{a\} = 1 + \sin x$;

при $x \in \left[2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \pi + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$,

$\{a\} = \sin x$;

при $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ $\quad \{a\} = 0$.

17. Знайти $|[\cos x]|$ та $|\{\cos x\}|$.

Розв'язання.

Очевидно, що $|\{\cos x\}| = \{\cos x\}$, бо $\{\cos x\}$ не може бути від'ємним. Знайдемо $[\cos x]$; значення дробової частини $\cos x$ залежать від значення його цілої частини (1.2). Можливі три випадки (див. задачу 16):

1) $-1 \le \cos x < 0$,

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right), n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді

$$[\cos x] = -1; \quad \|[\cos x]\| = 1;$$

$$\|\{\cos x\}\| = \{\cos x\} = 1 + \cos x.$$

2) $0 \le \cos x < 1$,

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; 2n\pi\right) \cup \left(2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right], n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді

$$[\cos x] = 0; \quad \|[\cos x]\| = 0;$$

$$\|\{\cos x\}\| = \{\cos x\} = \cos x.$$

3) $\cos x = 1$,

$$x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді

$$[\cos x] = \|[\cos x]\| = 1; \quad \{\cos x\} = \|\{\cos x\}\| = 0.$$

Відповідь. При $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\|[\cos x]\| = 1; \quad \|\{\cos x\}\| = 1 + \cos x;$$

при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; 2n\pi\right) \cup \left(2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\|[\cos x]\| = 0; \quad \|\{\cos x\}\| = \cos x;$$

при $x = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\|[\cos x]\| = 1; \quad \|\{\cos x\}\| = 0.$$

18. Знайти $[-\cos x]$ та $\{-\cos x\}$.

Вказівка.

Задача розв'язується аналогічно задачі 17.

Відповідь. При $\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi; \frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$, $n\in\mathbb{Z}$,

$[-\cos x]=-1$; $\{-\cos x\}=1-\cos x$;

при $x\in\left[\frac{\pi}{2}+2n\pi; \pi+2n\pi\right)\cup\left(\pi+2n\pi; \frac{3\pi}{2}+2n\pi\right]$, $n\in\mathbb{Z}$

$[-\cos x]=0$; $\{-\cos x\}=-\cos x$;

при $x=\pi+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$,

$[-\cos x]=1$; $\{-\cos x\}=0$.

19. Знайти $[2^x]$ та $\{2^x\}$, якщо $x\in(-\infty;1]$.

Розв'язання.

Для $x<0$ $\quad 0<2^x<1$, тоді $[2^x]=0$, а $\{2^x\}=2^x$.

Для $0\le x<1$ $\quad 1\le 2^x<2$, тоді $[2^x]=1$, а $\{2^x\}=2^x-1$.

Для $x=1$ $\quad 2^x=2$, тоді $[2^x]=2$, а $\{2^x\}=0$.

Відповідь. При $x<0$ $\quad [2^x]=0$, $\quad \{2^x\}=2^x$;

при $0\le x<1$ $\quad [2^x]=1$, $\quad \{2^x\}=2^x-1$;

при $x=1$ $\quad [2^x]=2$, $\quad \{2^x\}=0$.

У задачах 20—30 треба розв'язати рівняння і нерівності відносно x.

20. $[x]\le 1$.

Розв'язання.

Очевидно, що, відповідно до означення антьє числа, маємо $x\in(-\infty;2)$.

Відповідь. $x\in(-\infty;2)$.

21. $1 \le [x] < 2.$

Розв'язання.

Відповідно до означення антьє числа, розв'язком буде перетин множин $(-\infty; 2)$ і $[1; \infty)$. Отже, $x \in [1; 2)$.

Відповідь. $x \in [1; 2)$.

22. $\{x\} = 0{,}1.$

Розв'язання.

Підставимо задане значення $\{x\}$ у (1.2):

$$0{,}1 = x - [x].$$

На x обмежень немає, тобто $[x] = k,\ \ k \in \mathbb{Z};$ тоді розв'язком будуть усі x, такі що

$$x = k + 0{,}1, \text{ де } k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x = k + 0{,}1,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

23. $\left\{\dfrac{x}{3}\right\} = -0{,}2.$

Розв'язання.

Згідно (1.3) дробова частина числа не може бути від'ємною, тому $x \in \varnothing$.

Відповідь. $x \in \varnothing$.

24. $\{x\} > 0.$

Відповідь. $x \ne k,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

25. $\{x\} \le 0.$

Відповідь. $x \in \mathbb{Z}$.

26. $[2x-1]\le 3.$

Розв'язання.

$2x-1<4$ (див. (1.1)), тоді $x\in(-\infty;2{,}5)$.

Відповідь. $x\in(-\infty;2{,}5)$.

27. $[x]=1.$

Відповідь. $x\in[1;2)$.

28. $\left[\frac{x}{2}\right]=2.$

Розв'язання.

За означенням цілої частини числа

$$\frac{x}{2}\in[2;3) \quad\Leftrightarrow\quad x\in[4;6).$$

Відповідь. $x\in[4;6)$

29. $\left\{\frac{[x]}{2}\right\}=0.$

Розв'язання.

Умова означає, що число $\frac{[x]}{2}$ — ціле, тобто

$$\frac{[x]}{2}=k,\ k\in\mathbb{Z} \quad\Leftrightarrow\quad [x]=2k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Тоді $x\in[2k;2k+1),\ k\in\mathbb{Z}.$

Відповідь. $x\in[2k;2k+1),\ k\in\mathbb{Z}.$

30. $\left[\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2}\right]\right]=1.$

Розв'язання.

Очевидно, що

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2}\right]\in[1;2) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{x}{2}\right]\in[2;4).$$

Число $\left[\frac{x}{2}\right]$ може бути тільки цілим, отже,

$$\left[\begin{array}{l}\left[\frac{x}{2}\right]=2\\ \left[\frac{x}{2}\right]=3\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}\in[2;3)\\ \frac{x}{2}\in[3;4)\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x\in[4;6)\cup[6;8).$$

Відповідь. $x\in[4;8)$.

У задачах 31 і 32 треба розв'язати систему рівнянь відносно x і y.

31. $\begin{cases}[x]+\{y\}=2{,}3\\ [y]+\{x\}=1{,}1\end{cases}.$

Розв'язання.

Оскільки $[x]$ і $[y]$ — цілі числа, а $\{x\}$ і $\{y\}$ — числа з інтервалу $[0;1)$, то, враховуючи, що

$$2{,}3=2+0{,}3 \quad \text{і} \quad 1{,}1=1+0{,}1,$$

маємо

$$[x]=2;\quad \{y\}=0{,}3;\quad [y]=1;\quad \{x\}=0{,}1.$$

Відповідь. $x=2{,}1;\ y=1{,}3$.

32. $\begin{cases}[x]+\{y\}=2{,}3\\ [y]+\{x\}=-1{,}1\end{cases}$

Вказівка.

Розв'язування аналогічне розв'язуванню задачі 31, із врахуванням того, що $-1{,}1=-2+0{,}9$.

Відповідь. $x=2{,}9$; $y=-1{,}7$.

У задачах 33—36 треба з'ясувати, яке з чисел більше.

33. $\operatorname{ctg}1$ або $\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Розв'язання.

Доведемо спочатку нерівність $\operatorname{tg}x>x$ для всіх $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

При $x=0$ $\quad\operatorname{tg}x=0=x$.

При $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\quad(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2x}>(x)'=1$.

Тоді $\operatorname{tg}x>x$ для всіх $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\operatorname{ctg}1=\operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2}\right]=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right)=\operatorname{tg}\left\{\frac{\pi}{2}\right\}>\left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Відповідь. $\operatorname{ctg}1>\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

34. $\cos 3$ або $-\cos\{\pi\}$.

Розв'язання.

$$\cos 3=\cos[\pi]=-\cos(\pi-[\pi])=-\cos\{\pi\}.$$

Відповідь. $\cos 3=-\cos\{\pi\}$.

35. $\cos\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ або $\sin 1$.

Розв'язання.

$$\cos\left\{\frac{\pi}{2}\right\}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}\right]=\sin 1.$$

Відповідь. $\cos\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}=\sin 1$.

36. $\sin[x]$ або x, якщо $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання.

На інтервалі $t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\sin t$ монотонно зростає. Тоді, із врахуванням того, що $[x]\le x$, маємо:

$$\sin[x]\le\sin x.$$

Врахуємо, що при $x>0$ $\sin x<x$, оскільки

$$\sin 0=0 \quad \text{і} \quad (\sin x)'<(x)'.$$

Тоді $\sin[x]\le\sin x<x$.

Відповідь. $\sin[x]<x$.

§ 2. ВЛАСТИВОСТІ АНТЬЄ ТА МАНТИСИ ЧИСЛА

Перші п'ять властивостей цілої та дробової частини числа випливають безпосередньо з їх означень. Отже, *для будь-якого дійсного x виконуються* властивості (2.1)—(2.5).

1. $x = [x] + \{x\}$. (2.1)

2. $0 \le \{x\} < 1$. (2.2)

3. $0 \le x - [x] < 1$. (2.3)

4. $[x] \le x < [x] + 1$. (2.4)

5. $x - 1 < [x] \le x$. (2.5)

6. $[x + m] = [x] + m$, *якщо* $m \in \mathbb{Z}$. (2.6)

Доведемо це.

Позначимо $\{x\} = \alpha$. Тобто $x = [x] + \alpha$, де $\alpha \in [0; 1)$. Тоді число $x + m$ має вигляд

$x + m = [x] + \alpha + m$, де $[x] + m$ — ціле, а $\alpha \in [0; 1)$.

Отже, за означенням цілої частини числа маємо

$$[x + m] = [x] + m,$$

що і треба було довести.

7. *Якщо* $[x]=[y]$, *то* $|x-y|<1.$ (2.7)

Для доведення цієї властивості позначимо

$$[x]=[y]=k\in\mathbb{Z}.$$

За властивістю 2.4 маємо:

$$\begin{cases} k\le x<k+1 \\ k\le y<k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\le x<k+1 \\ -k-1<-y\le -k \end{cases} \Leftrightarrow \ -1<x-y<1,$$

що і треба було довести.

8. *З означення* $\{x\}$ *випливає таке:*

$$\{x+m\}=\{x\},\ \text{якщо}\ m\in\mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Отже, *функція* $f(x)=\{x\}$ — *періодична з основним періодом* $T_0=1.$

9. З (2.1) та (2.6) випливає таке:

Для будь-яких дійсних x і y виконується:

$$[x+y]=[x]+[y]+[\{x\}+\{y\}], \tag{2.9}$$

бо

$$[x+y]=[[x]+[y]+\{x\}+\{y\}].$$

10. *Для будь-яких дійсних x і y виконується:*

$$[x]+[y]\le[x+y]\le[x]+[y]+1. \tag{2.10}$$

Для доведення додамо дві очевидні нерівності:

$$0\le\{x\}<1 \quad \text{та} \quad 0\le\{y\}<1,$$

отримаємо, що

$$0\le\{x\}+\{y\}<2.$$

Звідки випливає, що $[\{x\}+\{y\}]$ може приймати лише два значення, а саме: 0, або 1. Враховуючи (2.9), маємо, що (2.10) виконується.

З властивості (2.10) випливає, що:

11. *Для будь-якої кінцевої кількості доданків виконується нерівність*

$$[x_1]+[x_2]+\ldots+[x_n]\le[x_1+x_2+\ldots+x_n]\le$$
$$\le[x_1]+[x_2]+\ldots+[x_n]+n-1. \qquad (2.11)$$

12. *Якщо* $|x-y|<1$, *то* $\left|[x]-[y]\right|\in\{0;1\}$. (2.12)

Дійсно, позначимо $[x]=k_1$, $[y]=k_2$, $\{k_1,k_2\}\subset\mathbb{Z}$. Згідно (2.4) маємо:

$$\begin{cases}k_1\le x<k_1+1\\k_2\le y<k_2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_1\le x<k_1+1\\-k_2-1<-y\le-k_2\end{cases}.$$

Звідки $(k_1-k_2)-1<x-y<(k_1-k_2)+1$, і

$$k_1-k_2<(x-y)+1<2,\quad k_1-k_2>(x-y)-1>-2,$$

бо за умовою $-1<x-y<1$. Тоді $-2<k_1-k_2<2$ і, отже, $(k_1-k_2)\in\{-1;0;1\}$. Що і треба було довести.

13. *Якщо* n *— натуральне число, то*

$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]. \qquad (2.13)$$

Для доведення позначимо: $\left[\frac{[x]}{n}\right]=k$, $k\in\mathbb{Z}$. Тоді

$$k\le\frac{[x]}{n}<k+1,\quad \text{або}\quad nk\le[x]<n(k+1).$$

Але числа nk та $n(k+1)$ —цілі, тоді

$$nk\le x<n(k+1)\quad\Leftrightarrow\quad k\le\frac{x}{n}<k+1$$

Тобто $\left[\frac{x}{n}\right]=k$, що й вимагалося довести.

14. *Якщо m і n — натуральні числа, то*

$$\left[\frac{x}{mn}\right]=\left[\frac{1}{n}\left[\frac{x}{m}\right]\right]=\left[\frac{1}{m}\left[\frac{x}{n}\right]\right]. \qquad (2.14)$$

Твердження безпосередньо випливає з властивості (2.13).

15. *Для будь-яких натуральних чисел m, n виконується нерівність*

$$n-m<\left[\frac{n}{m}\right]m\le n. \qquad (2.15)$$

Для доведення скористаємося властивістю (2.5):

$$\frac{n}{m}-1<\left[\frac{n}{m}\right]\le\frac{n}{m}.$$

Якщо останню нерівність помножити на число $m>0$, отримаємо шукане твердження.

16. $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x].$ (2.16)

Для доведення розглянемо два випадки

$$\{x\}<\frac{1}{2} \quad \text{і} \quad \{x\}\ge\frac{1}{2}.$$

Якщо $\{x\}<\frac{1}{2}$, то $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x], [2x]=2[x]$ і

$$[2x]-[x]=[x]=\left[x+\frac{1}{2}\right].$$

Якщо $\{x\}\ge\frac{1}{2}$, то $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]+1,\ [2x]=2[x]+1$ і

$$[2x]-[x]=[x]+1=\left[x+\frac{1}{2}\right].$$

Твердження доведено.

17. *Для будь-якого дійсного x та для будь-якого натурального n виконується рівність:*

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]. \qquad (2.17)$$

Доведемо цей факт.

Представимо x у вигляді $x=[x]+\{x\}$. Будемо доводити еквівалентну рівність (враховуючи (2.6)):

$$n[x]+[\{x\}]+\left[\{x\}+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[\{x\}+\frac{n-1}{n}\right]=n[x]+[n\{x\}].$$

Тобто треба довести, що

$$\left[\{x\}+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[\{x\}+\frac{n-1}{n}\right]=[n\{x\}], \qquad (*)$$

де $\{x\}\in[0;1)$.

Нехай $\{x\}\in\left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right)$, $k\in\{1,2,\ldots,n\}$. Тоді

$$(n\{x\})\in[k-1;k); \quad [n\{x\}]=k-1;$$

$$\left(\{x\}+\frac{l}{n}\right)\in\left[\frac{k+l-1}{n};\frac{k+l}{n}\right),\ l\in\{1,\ldots,n-1\}.$$

Починаючи з $l=n+1-k$ (коли $k+1=n+1$)

$$\left[\{x\}+\frac{l}{n}\right]=1.$$

Звідки ліва частина $(*)$ дорівнює

$$1\cdot(n-1-(n+1-k)+1)=k-1.$$

Таким чином, рівність (2.17) виконується.

18. *Для будь-якого дійсного x та для будь-якого натурального n:*

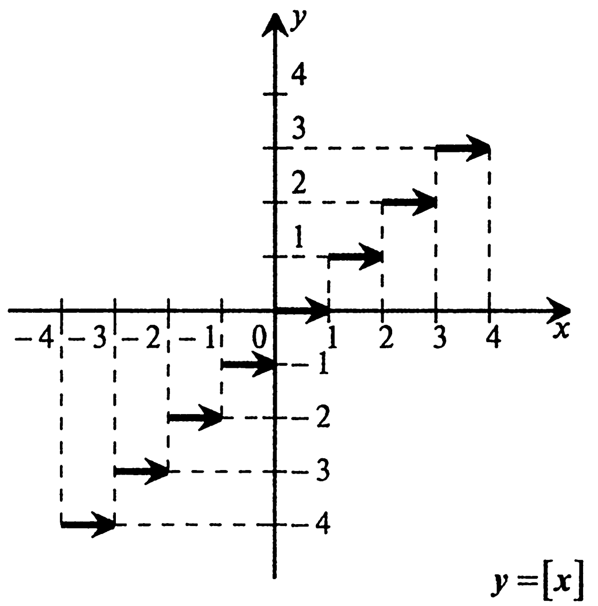
$$n[x]\le[nx]\le n[x]+n-1. \qquad (2.18)$$

Випливає з (2.11), якщо $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$

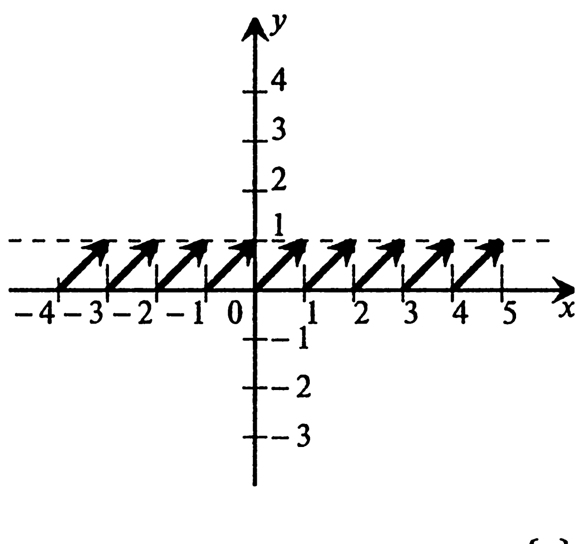
19. Закінчуючи перелік властивостей цілої та дробової частини числа, наведемо *графіки функцій* $y=[x]$ та $y=\{x\}$.

Нехай $x\in[0;1)$. Очевидно, що тоді $[x]=0$ та $\{x\}=x$.

Зобразимо відповідні точки площини відрізком зі стрілкою на кінці (стрілка вказує на точку, що вилучається). Згідно (2.6) та (2.8), якщо $m\in\mathbb{Z}$, то $[x+m]=[x]+m$ і $\{x+m\}=\{x\}$. Тоді на інтервалі $x\in[m;m+1)$ отримаємо $y=[x]$ зсувом попереднього графіка вздовж осей OX та OY на m одиниць, а $y=\{x\}$ — зсувом уздовж осі OX на m одиниць. Тобто маємо (див. мал. 1 і мал. 2):



Мал. 1



Мал. 2

§ 3. РІВНЯННЯ, ЩО МІСТЯТЬ АНТЬЄ ТА МАНТИСУ ЧИСЛА

Деякі рівняння, що містять знаки антьє та мантиси, ми вже розв'язували (див. § 1). Розв'язок багатьох рівнянь випливає безпосередньо з означення цілої та дробової частин числа і спирається на найпростіші їх властивості (2.1)–(2.8).

Розв'язати рівняння 37—80 відносно x.

37. $\left[x^2\right]=2.$

Розв'язання.

З (2.4) маємо:

$$2 \le x^2 < 2+1,$$

тобто

$$\sqrt{2} \le |x| < \sqrt{3},$$

звідки

$$x \in \left(-\sqrt{3};\, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2};\, \sqrt{3}\right).$$

Відповідь. $x \in \left(-\sqrt{3};\, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2};\, \sqrt{3}\right).$

38. $[\lg x] = -2.$

Розв'язання.

З (2.4) випливає: $-2 \le \lg x < -1$, тобто $10^{-2} \le x < 10^{-1}$.

Відповідь. $10^{-2} \le x < 10^{-1}$.

39. $\left[x^2\right] = x.$

Розв'язання.

З умови випливає, що x — ціле число. Тоді x^2 — також ціле число. Отже, задане рівняння рівносильне рівнянню $x^2 = x$, тобто $x = 0$ або $x = 1$.

Відповідь. $x \in \{0; 1\}$.

40. $\left[x^2 - 4x\right] = x - 6.$

Розв'язання.

З умови випливає, що $x-6$ — ціле число. Тоді числа x, $4x$, x^2, x^2-4x — теж цілі, тобто $\left[x^2 - 4x\right] = x^2 - 4x$ і

$$x^2 - 4x = x - 6, \quad x^2 - 5x + 6 = 0,$$

звідки $x = 2$ або $x = 3$.

Відповідь. $x \in \{2; 3\}$.

41. $[x] + [2x] = 3.$

Розв'язання.

Використовуючи (2.4) для $[x]$ і $[2x]$, отримаємо:

$$[x] + [2x] \le x + 2x < ([x] + 1) + ([2x] + 1),$$

тобто $3 \le 3x < 5$, отже, розв'язок треба шукати на інтервалі

$$x \in \left[1; 1\frac{2}{3}\right).$$

Тоді $[x]=1$ і $[2x]=3-[x]=2$, тобто

$$2\le 2x<3,\quad x\in[1;1{,}5).$$

Відповідь. $x\in[1;1{,}5)$.

42. $[2x]-[x]=3$.

Розв'язання.

Перший спосіб

Можна здійснити аналогічно тому, як ми це зробили у завданні № 41 (не забудьте при тому, що нерівності не можна віднімати, а можна лише додавати, і що при множенні нерівності на -1 вона змінює знак).

Другий спосіб

Скористаємося властивістю (2.16). Тоді

$$[2x]-[x]=\left[x+\frac{1}{2}\right]=3,$$

звідки

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\in[3;\,4)\quad\Leftrightarrow\quad x\in[2{,}5;\,3{,}5).$$

Відповідь. $x\in[2{,}5;\,3{,}5)$.

43. $\frac{x}{2\pi}=[\cos x]$.

Розв'язання.

Оскільки $-1\le\cos x\le 1$, то $[\cos x]\in\{-1;0;1\}$.

1) Нехай $[\cos x]=0$. Тоді

$$\frac{x}{2\pi}=0,\ \ x=0.$$

Але $\cos 0=1$, тобто $[\cos x]\ne 0$. Отже, у цьому випадку розв'язків нема.

2) Нехай $[\cos x]=1$. Тоді

$$\frac{x}{2\pi}=1,\ x=2\pi;\quad \cos 2\pi=1,\ [\cos 2\pi]=1.$$

Таким чином, $x=2\pi$ — розв'язок даного рівняння.

3) Нехай $[\cos x]=-1$. Тоді

$$\frac{x}{2\pi}=-1,\ x=-2\pi;\quad \cos(-2\pi)=1,\ [\cos(-2\pi)]\neq-1.$$

Отже, розв'язків нема.

Відповідь. $x=2\pi$.

44. $[x]=\sin x$.

Розв'язання.

Оскільки $[x]\in\mathbb{Z}$, то $\sin x\in\{-1;0;1\}$.

1) Нехай $\sin x=-1$, тобто $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Тоді $x\in[-1;0)$ і розв'язків нема, бо $-\frac{\pi}{2}<-1<0<\frac{3\pi}{2}$.

2) Нехай $\sin x=0$, тобто $x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Тоді $[x]=0,\ x\in[0;1)$ і розв'язком даного рівняння буде $x=0$ — єдине число з інтервалу $[0;1)$, що належить множині $\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

3) Нехай $\sin x=1$, тобто $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Тоді $[x]=1,\ x\in[1;2)$ і розв'язком буде $x=\frac{\pi}{2}$ — єдине число з інтервалу $[1;2)$, що належить множині $\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ n\in\mathbb{Z}$.

Відповідь. $x\in\left\{0;\frac{\pi}{2}\right\}$.

45. $\frac{2}{x}+\frac{x}{2}=[x]$ при $x>0$.

Розв'язання.

Позначимо ціле додатне число $\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$ через k. При тому $k\geq 2$ (як сума обернених додатних величин). Маємо:

$$x^2+2kx+4=0, x=k\pm\sqrt{k^2-4}.$$

Згідно (2.4)

$$\left[\begin{array}{ll} k\leq k+\sqrt{k^2-4}<k+1 & (*) \\ k\leq k-\sqrt{k^2-4}<k+1 & (**) \end{array}\right.$$

1) Якщо $k=2$, то $x=2$ і $(*)$ та $(**)$ виконуються.

2) Якщо $k>2$, то виконується лише $(*)$, тобто

$$0\leq\sqrt{k^2-4}<1,\ 0\leq k<\sqrt{5}$$

і, враховуючи що $k>2$ та $k\in\mathbb{Z}$, маємо, що $x\in\varnothing$.

Відповідь. $x=2$.

46. $[x]\{x\}+x=2\{x\}+10$.

Розв'язання.

Скориставшись рівностями $\{x\}=x-[x]$ і $[x]=x-\{x\}$, задане рівняння можна, відповідно, представити у двох виглядах:

$$([x]-1)x=[x]^2-2[x]+10$$

та

$$x(\{x\}+1)=\{x\}^2+2\{x\}+10.$$

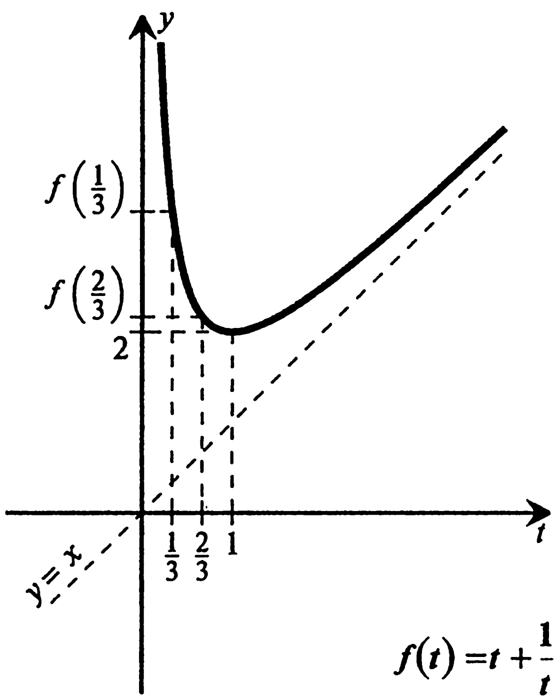
З першого маємо

$$x=[x]-1+\frac{9}{[x]-1},$$

а з другого

$$x=\{x\}+1+\frac{9}{\{x\}+1}=3\left(\frac{\{x\}+1}{3}+\frac{3}{\{x\}+1}\right).$$

Позначимо $t=\dfrac{\{x\}+1}{3}$. З умови $\{x\}\in[0;1)$ отримаємо, що $t\in\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. З графіка функції $f(t)=t+\dfrac{1}{t}$ (мал. 3) маємо, що $f(t)$ при $t\in\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ спадна функція. Тоді $f(t)\in\left(f\left(\dfrac{2}{3}\right);f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right]$, тобто $f(t)\in\left(2\dfrac{1}{6};3\dfrac{1}{3}\right]$; отже,



Мал. 3

$$x=3f(t)\in(6{,}5;10].$$

Маємо, що

$$\begin{cases}x\in(6{,}5;10]\\ x=[x]-1+\dfrac{9}{[x]-1}.\end{cases}$$

Розглянемо інтервали, на яких $[x]$ має стале значення:

при $x\in(6{,}5;7)$ $\quad[x]=6,\ x=5+\dfrac{9}{5}=6{,}8\in(6{,}5;7);$

при $x\in[7;8)$ $\quad[x]=7,\ x=6+\dfrac{9}{6}=7{,}5\in[7;8);$

при $x\in[8;9)$ $\quad[x]=8,\ x=7+\dfrac{9}{7}=8\dfrac{2}{7}\in[8;9);$

при $x \in [9;10)$ $\quad [x]=9,\ x=8+\frac{9}{8}=9\frac{1}{8}\in[9;10)$;

при $x=10$ $\quad [x]=10,\ x=10$.

Відповідь. $x\in\left\{6{,}8;\,7{,}5;\,8\frac{2}{7};\,9\frac{1}{8};\,10\right\}$.

Зауваження. Другий спосіб розв'язування такого рівняння представлено у завданні 74.

47. $\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$.

Розв'язання.

Позначимо

$$t=\frac{15x-7}{5}=\left[\frac{5+6x}{8}\right],\ t\in\mathbb{Z}.$$

Тоді

$$x=\frac{5t+7}{15},\quad t=\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\left[\frac{5+6\cdot\frac{5t+7}{15}}{8}\right]=\left[\frac{10t+39}{40}\right].$$

Враховуючи (2.4) маємо:

$$t\le\frac{10t+39}{40}<t+1,\quad -\frac{1}{30}<t\le1{,}3.$$

Оскільки $t\in\mathbb{Z}$, отримаємо $t\in\{0;1\}$.

Якщо $t=0$, то $x=\frac{7}{15}$; якщо $t=1$, то $x=\frac{4}{5}$.

Відповідь. $x\in\left\{\frac{7}{15};\frac{4}{5}\right\}$.

48. $\dfrac{x+1}{1-2x}=3[x]x+1.$

Розв'язання.

Позначимо ціле число $[x]$ через k. Згідно (2.4),

$$k \le x < k+1.$$

Маємо:

$$\frac{x+1}{1-2x}=3kx+1,$$

після перетворень, отримаємо квадратне рівняння

$$6kx^2+3x(1-k)=0, \text{ за умови } x \ne \frac{1}{2}.$$

Звідки $x=0$ або $x=\dfrac{k-1}{2k}$.

Перевіримо, чи задовольняють знайдені значення x умові задачі. Те, що $x=0$ — корінь даного рівняння — очевидно. При $x=\dfrac{k-1}{2k}$ $(k \ne 0)$ маємо:

$$k \le \frac{k-1}{2k} < k+1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{k-1}{2k} \ge k \\ \dfrac{k-1}{2k} < k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{k-1-2k^2}{2k} \ge 0 \\ \dfrac{k-1-2k^2-2k}{2k} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2k^2-k+1}{2k} \le 0 \\ \dfrac{2k^2+k+1}{2k} > 0 \end{cases}.$$

Чисельники обох нерівностей останьої системи додатні, отже, система несумісна.

Відповідь. $x=0$.

49. $\sqrt{5-x^2}=\dfrac{x}{[x]}$.

Розв'язання.

Позначимо $[x]=k$, $k\in\mathbb{Z}$. При цьому з області визначення даного в умові рівняння: $|x|\le\sqrt{5}$, $[x]\ne 0$, маємо, що

$$k\in\{-3;-2;-1;1;2\}.$$

Зауважимо, що $\dfrac{x}{[x]}>0$ при всіх значеннях k. Шукані розв'язки будуть розв'язками рівняння

$$5-x^2=\left(\frac{x}{k}\right)^2,$$

при тому (див. 2.4)

$$x\in[k;k+1),\ \ k\in\{-3;-2;-1;1;2\}. \qquad (*)$$

Розв'язуючи квадратне рівняння, знаходимо: $x=\dfrac{\pm k\sqrt{5}}{\sqrt{1+k^2}}$.

Тоді, враховуючи $(*)$, маємо:

$$\begin{cases} k<0 \\ k\in\{-3;-2;-1\} \\ \dfrac{-k\sqrt{5}}{\sqrt{1+k^2}}<k+1 \\ \dfrac{-k\sqrt{5}}{\sqrt{1+k^2}}\ge k \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} k>0 \\ k\in\{1;2\} \\ \dfrac{k\sqrt{5}}{\sqrt{1+k^2}}<k+1. \\ \dfrac{k\sqrt{5}}{\sqrt{1+k^2}}\ge 0 \end{cases}$$

Таким чином, після підстановки відповідних значень k, маємо:

$$\left[\begin{array}{l} k\in\{-3;-2\} \\ k\in\{1;2\} \end{array}\right., \ \text{отже,}\ \left[\begin{array}{l} x\in[-3;-1) \\ x\in[1;3) \end{array}\right..$$

Відповідь. $x\in[-3;-1)\cup[1;3)$.

50. $[x]=\left[\frac{x}{2}\right]$.

Розв'язання.

Перший спосіб

Задане рівняння представимо у вигляді

$$\left[\frac{x}{2}\right]-[x]=0. \qquad (*)$$

Беручи до уваги (2.5), маємо:

$$x-1<[x]\le x \quad \text{і} \quad \frac{x}{2}-1<\left[\frac{x}{2}\right]\le\frac{x}{2};$$

$$x-1<[x]\le x \quad \text{і} \quad -\frac{x}{2}\le-\left[\frac{x}{2}\right]<-\frac{x}{2}+1.$$

Додамо ці подвійні нерівності:

$$x-\frac{x}{2}-1<[x]-\left[\frac{x}{2}\right]<x-\frac{x}{2}+1.$$

Тоді, враховуючи $(*)$, маємо

$$\frac{x}{2}-1<0<\frac{x}{2}+1 \quad \Leftrightarrow \quad -1<\frac{x}{2}<1.$$

Розглянемо інтервали, на яких $\left[\frac{x}{2}\right]$ має стале значення:

1) $\frac{x}{2}\in(-1;0)$. Тоді $[x]=\left[\frac{x}{2}\right]=-1$, отже, $x\in[-1;0)$.

2) $\frac{x}{2}\in[0;1)$. Тоді $[x]=\left[\frac{x}{2}\right]=0$, отже, $x\in[0;1)$.

Отже,

$$x\in[-1;1).$$

Другий спосіб

Позначимо $y=\dfrac{x}{2}$ і скористаємося властивістю (2.16). Тоді

$$[2y]-[y]=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[y+\frac{1}{2}\right]=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0\le y+\frac{1}{2}<1.$$

Звідки $y\in[-0{,}5;0{,}5)$ і $x\in[-1;1)$.

Відповідь. $x\in[-1;1)$.

51. $[x]+[2x]+[3x]=3$

Розв'язання.

Очевидно, що

$$x>0;\ [3x]\ge[2x]\ge[x];\ [x]\le 1.$$

Отже, $[x]\in\{0;1\}$.

1) Нехай $[x]=0$, тобто $0\le x<1$. Тоді $0\le 2x<2$, $0\le 3x<3$ і, відповідно, $[2x]\in\{0;1\}$, а $[3x]\in\{0;1;2\}$. Легко переконатися, що умову задачі задовольняє лише один випадок:

$$[2x]=1,\quad [3x]=2.$$

Тобто

$$\begin{cases}0\le x<1\\ 1\le 2x<2\\ 2\le 3x<3\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}0\le x<1\\ \dfrac{1}{2}\le x<1\\ \dfrac{2}{3}\le x<1\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left[\frac{2}{3};1\right).$$

2) Нехай $[x]=1$, тобто $1\le x<2$. Тоді $2\le 2x<4$, $3\le 3x<6$ і, відповідно, $[2x]\in\{2;3\}$, а $[3x]\in\{3;4;5\}$. Легко переконатися, що в цьому випадку умова задачі виконана бути не може.

Відповідь. $x\in\left[\dfrac{2}{3};1\right)$.

52. $x^2-8[x]+7=0.$

Розв'язання.

Нехай $x=n+\alpha$, де $\alpha\in[0;1)$, $n\in\mathbb{Z}$. Тоді $[x]=n$ і $n\geq 1$ (бо $8[x]=x^2+7>0$). Тоді рівняння має вигляд:

$$\alpha^2+2n\alpha+n^2-8n+7=0,$$

Звідки, враховуючи що α — невід'ємне, отримаємо

$$\alpha=-n+\sqrt{8n-7}.$$

Враховуючи обмеження на α і n, отримаємо систему:

$$\begin{cases} n\in\mathbb{N} \\ -n+\sqrt{8n-7}\geq 0, \\ -n+\sqrt{8n-7}<1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} n\in\mathbb{N} \\ \left[\begin{array}{l} n>4 \\ n<2 \end{array}\right. , \\ 1\leq n\leq 7 \end{cases} \text{ або } n\in\{1;5;6;7\}.$$

Підставляючи відповідні значення n у вирази для α і x, отримаємо, що $x\in\left\{1;\sqrt{33};\sqrt{41};7\right\}$ є шуканими розв'язками.

Відповідь. $x\in\left\{1;\sqrt{33};\sqrt{41};7\right\}.$

53. $\left[x^2\right]=[x].$

Розв'язання.

З умови випливає, що $x\geq 0$. Позначимо

$$k=\left[x^2\right]=[x],\quad k\geq 0, k\in\mathbb{Z}.$$

З (2.4) маємо:

$$\begin{cases} k\leq x^2<k+1 \\ k\leq x<k+1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \sqrt{k}\leq x<\sqrt{k+1} \\ k\leq x<k+1 \end{cases}.$$

Розташуємо на числовій осі точки з координатами $\sqrt{k}$, $\sqrt{k+1}, k, k+1$.

·Оскільки k — невід'ємне ціле число, то $\sqrt{k} \le k$. Очевидно, що

$$\sqrt{k} < \sqrt{k+1}, k < k+1.$$

Розв'язок існує, тобто

$$\left[\sqrt{k}; \sqrt{k+1}\right) \cap [k; k+1) \ne \varnothing,$$

якщо виконується умова $k < \sqrt{k+1}$ (мал. 4) :

Мал. 4

Отже, шуканим розв'язком буде $x \in \left[k; \sqrt{k+1}\right)$ при

$$0 \le k < \sqrt{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad k \in \left[0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Враховуючи, що $k \in \mathbb{Z}$, маємо $k \in \{0; 1\}$. Тоді $x \in \left[0; \sqrt{2}\right)$.

Відповідь. $x \in \left[0; \sqrt{2}\right)$.

54. $\left[3x^2\right] - [2x] + 1 = 0.$

Розв'язання.

Перший спосіб

Дане рівняння рівносильно рівнянню

$$\left[3x^2 + 1\right] = [2x] \text{ (див. (2.6)).}$$

Позначимо

$$n = \left[3x^2 + 1\right] = [2x],$$

де $n \in \mathbb{N}$ (бо $3x^2 + 1 \ge 1$).

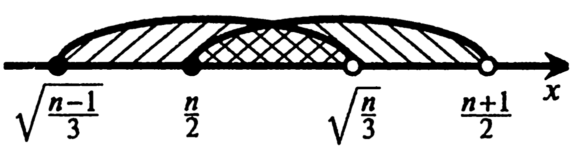
Тоді (див. (2.4)):

$$n \le 3x^2+1 < n+1 \quad \text{і} \quad n \le 2x < n+1.$$

Звідки

$$\sqrt{\frac{n-1}{3}} \le x < \sqrt{\frac{n}{3}} \quad \text{і} \quad \frac{n}{2} \le x < \frac{n+1}{2}.$$

Далі, аналогічно розв'язанню задачі 53, маємо порівняти числа, що обмежують вказані інтервали, розмістити їх на числовій осі і сформулювати умову існування розв'язку (мал. 5):



Мал. 5

Маємо:

$$\frac{n}{2} < \sqrt{\frac{n}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad n \in \left(0; \frac{4}{3}\right).$$

Оскільки $n \in \mathbb{N}$, то $n = 1$. Тоді

$$1 = \left[3x^2+1\right] = [2x].$$

Звідки

$$\begin{cases} 1 \le 2x < 2 \\ 0 \le 3x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 \le |x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Отже, $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Другий спосіб

Враховуючи (2.5), маємо:

$$3x^2-1<\left[3x^2\right]\le 3x^2;$$

$$2x-1<[2x]\le 2x,\quad -2x\le -[2x]<2x-1.$$

Тоді

$$3x^2-2x<\left[3x^2\right]-[2x]+1<3x^2-2x+2.$$

Оскільки $\left[3x^2\right]-[2x]+1=0$, маємо

$$\begin{cases}3x^2-2x+2>0\\ 3x^2-2x<0\end{cases}\Leftrightarrow\quad x\in\left(0;\frac{2}{3}\right).$$

Отже, розв'язки даного умовою рівняння слід шукати на проміжку $\left(0;\frac{2}{3}\right)$.

Перетворимо рівняння до вигляду $\left[3x^2\right]=[2x]-1$ і знайдемо його корені на інтервалах сталості $[2x]$: $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$ і $x\in\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$.

При $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$ $[2x]=0$, $\left[3x^2\right]=-1$. Коренів немає (бо $3x^2\ge 0$).

При $x\in\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$ $[2x]=1$, $\left[3x^2\right]=1-1=0$. Звідки, $0\le 3x^2<1$,

$$\begin{cases}x\in\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)\\ 0\le x^2<\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\quad x\in\left[\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Відповідь. $x\in\left[\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

55. $\left[x^2\right]+[2x]-3=0.$

Відповідь. $x\in\left(-\sqrt{11};-\sqrt{10}\right]\cup\left[1;\sqrt{2}\right)\cup\{-3\}.$

56. $\left[x^2\right]-[2x]+3=0.$

Відповідь. $x\in\varnothing.$

57. $\left[x(x+1)\right]=(x-1)(x-2).$

Розв'язання.

За властивістю (2.4)

$$(x-1)(x-2)\le x(x+1)<(x-1)(x-2)+1.$$

Звідки $x\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right).$

Оскільки $(x-1)(x-2)$ — ціле число, розв'язками будуть значення x проміжку $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ при яких вираз $(x-1)(x-2)$ приймає цілі значення. Графік функції $y=(x-1)(x-2)$ — парабола, абсциса вершини якої $x=1{,}5.$

Тоді на інтервалі $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ функція $y=(x-1)(x-2)$ спадає від $\frac{3}{4}$ до $\frac{5}{16}$ і y не має цілих значень.

Відповідь. $x\in\varnothing.$

58. $x^2-3x+2=[\sin x].$

Розв'язання.

Оскільки $-1\le\sin x\le 1$, то

$$[\sin x]\in\{-1;0;1\}$$

і можливі три випадки.

1) $[\sin x]=1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

У цьому випадку

$$x^2-3x+2=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left\{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Не існує цілих значень n, що задовольняють рівнянню

$$\frac{\pi}{2}+2\pi n=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

2) $[\sin x]=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x\in[0;1).$

Тоді

$$x^2-3x+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in\{1;2\}.$$

Врахуємо, що $0<1<\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}<2<\pi$. Маємо $\{\sin 1;\sin 2\}\in[0;1)$.

Тобто $x\in\{1;2\}$ — розв'язки задачі.

3) $[\sin x]=-1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x\in[-1;0).$

Тоді

$$x^2-3x+2=-1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3x+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in\varnothing.$$

Відповідь. $x\in\{1;2\}$.

59. $[\operatorname{tg} x]=2\cos^2 x.$

Розв'язання.

Права частина рівності — ціле число; $0\le 2\cos^2 x\le 2$, але $\cos x\ne 0$. Тоді $2\cos^2 x\in\{1;2\}$ і можливі два випадки:

$$1)\ \begin{cases}|\cos x|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ [\operatorname{tg} x]=1\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

$$2)\begin{cases}|\cos x|=1\\ [\operatorname{tg} x]=2\end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in\varnothing.$$

Відповідь. $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

60. $\left[\dfrac{1}{\cos^2 x}\right]=\sin^4 x-\cos^4 x.$

Розв'язання.

$$\sin^4 x-\cos^4 x=$$
$$=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=$$
$$=-\cos 2x\in[-1;0),\quad \text{бо}\left[\frac{1}{\cos^2 x}\right]>0.$$

Врахуємо, що $\cos^2 x\in(0;1]$, тобто

$$\frac{1}{\cos^2 x}\ge 1 \quad \text{і} \quad \left[\frac{1}{\cos^2 x}\right]\ge 1.$$

Тоді маємо, що

$$\left[\frac{1}{\cos^2 x}\right]=1 \quad \text{і} \quad \cos 2x=-1.$$

Отже,

$$\begin{cases}1\le\dfrac{1}{\cos^2 x}<2\\ \cos 2x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2 x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right]\\ \cos 2x=-1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1+\cos 2x\in(1;2]\\ \cos 2x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in\varnothing.$$

Відповідь. $x\in\varnothing.$

61. $\dfrac{\left[\dfrac{x}{\pi}\right]}{\operatorname{tg}[\pi x]}=0.$

Розв'язання.

Задане рівняння рівносильне умові

$$\begin{cases}\left[\dfrac{x}{\pi}\right]=0\\ \operatorname{tg}[\pi x]\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\leq\dfrac{x}{\pi}<1\\ [\pi x]\neq \pi n, n\in\mathbb{Z}\\ [\pi x]\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\leq x<\pi\\ [\pi x]\neq 0\end{cases}.$$

Ми врахували, що $\pi n\notin\mathbb{Z}$ при всіх цілих $n\neq 0$ і що $\dfrac{\pi}{2}+\pi k\notin\mathbb{Z}$ при всіх $k\in\mathbb{Z}$.

Відповідь. $x\in(0;\pi)$.

62. $[\sin x]\{\sin x\}=\sin x.$

Розв'язання.

Скориставшись записом $\sin x=[\sin x]+\{\sin x\}$, рівняння можна представити у вигляді

$$[\sin x]\{\sin x\}=[\sin x]+\{\sin x\}.$$

Оскільки $\sin x\in[-1;1]$, то $[\sin x]\in\{-1;0;1\}$. Тоді:

1) якщо $[\sin x]=-1$, $-\{\sin x\}=-1+\{\sin x\}$, звідки

$$\{\sin x\}=\frac{1}{2},\quad \sin x=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\text{і}\quad x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$$

2) якщо $[\sin x]=0$, $0=\{\sin x\}$ і $\sin x=0$, отже,

$$x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$$

3) якщо $[\sin x]=1$, $\{\sin x\}=1+\{\sin x\}$ — розв'язків нема.

Відповідь. $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n; \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

63. $[\sin x+5]+\sqrt{\sin x+[\sin x]}=6$.

Розв'язання.

Розглянемо три можливі випадки.

1) $\sin x=1$. Тоді маємо:

$$[1+5]+\sqrt{1-1}=6 \quad \Leftrightarrow \quad 6=6,$$

і $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є розв'язком.

2) $0 \le \sin x<1$. Тоді $[\sin x]=0$ і $[\sin x+5]=5$, маємо:

$$5+\sqrt{\sin x}=6 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x=1 \notin [0;1).$$

Розв'язків немає.

3) $-1 \le \sin x<0$. Тоді $[\sin x]=-1$ і $[\sin x+5]=4$, тоді:

$$4+\sqrt{\sin x-1}=6.$$

Маємо $\sin x-1<0$ і останнє рівняння не має змісту.

Відповідь. $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

64. $\left[1-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right]=\dfrac{2006}{[x]}+\dfrac{[x]}{2006}-1$.

Розв'язання.

$$1-\frac{1}{2}\sin 2x \ge 0,$$

$$\text{тоді } \frac{2006}{[x]}+\frac{[x]}{2006} \ge 1>0$$

і виконується нерівність для обернених величин:

$$\frac{2006}{[x]}+\frac{[x]}{2006}\ge 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2006}{[x]}+\frac{[x]}{2006}-1\ge 1.$$

Але $\left[1-\frac{1}{2}\sin 2x\right]\le 1$. Тоді

$$\begin{cases}\left[1-\frac{1}{2}\sin 2x\right]=1\\ \frac{2006}{[x]}+\frac{[x]}{2006}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\le 1-\frac{1}{2}\sin 2x<2\\ \frac{[x]}{2006}=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-1\le \sin 2x\le 0\\ [x]=2006\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\pi+2\pi n\le 2x\le 2\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ 2006\le x<2007\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\in\left[\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi+\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}\\ x\in[2006;2007)\end{cases}$$

Система нерівностей

$$\begin{cases}\frac{\pi}{2}+\pi n\ge 2006\\ \pi+\pi n<2007\end{cases},\ n\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}n\ge 668\\ n<669\end{cases}$$

має єдиний цілий розв'язок

$$n=668.$$

(Переконайтеся самостійно, що інші взаєморозміщення інтервалів $\left[\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi+\pi n\right]$ і $[2006;2007)$ не мають розв'язків для $n\in\mathbb{Z}$.)

Відповідь. $x\in\left[\frac{\pi}{2}+668\pi;669\pi\right]$.

65. $\operatorname{tg}[x]\operatorname{tg}\{x\}=1$.

Розв'язання.

Дане рівняння рівносильне умові

$$\begin{cases}\sin[x]\sin\{x\}=\cos[x]\cos\{x\}\\ \cos[x]\neq 0\\ \cos\{x\}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos([x]+\{x\})=0\\ [x]\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \{x\}\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi t,\ t\in\mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi t,\ t\in\mathbb{Z}$.

66. $[\operatorname{tg} x]\sqrt{3-\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{tg} x$.

Вказівка.

Визначте область допустимих значень рівняння і розгляньте, яких саме значень може набувати $[\operatorname{tg} x]$.

Відповідь. $x_1=-\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{12}{5}}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$;

$x_2=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $x_3=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

67. $\sin^2 2x+\left[\dfrac{x}{\pi}\right]=\cos^2 3x$.

Вказівка.

Після тотожних перетворень отримайте рівняння

$$\cos x\cos 5x=\left[\frac{x}{\pi}\right],$$

рівносильне даному. Врахуйте, що його права частина — ціле число, а ліва — належить проміжку $[-1;1]$; розгляньте можливі значення $\left[\dfrac{x}{\pi}\right]$.

Відповідь. $x \in \left\{\dfrac{\pi}{2}; \pi; \dfrac{\pi}{10}(2n+1) \mid n \in \{0;1;2;3;4\}\right\}$.

68. $[x^2] = 1 + \sin x$.

Відповідь. $x = \dfrac{\pi}{2}$.

69. $\left[\dfrac{x}{5}\right] = \left[\dfrac{x}{4}\right]$.

Розв'язання.

Перший спосіб

Враховуючи (2.5), маємо:

$$\frac{x}{4} - 1 < \left[\frac{x}{4}\right] \le \frac{x}{4};$$

$$\frac{x}{5} - 1 < \left[\frac{x}{5}\right] \le \frac{x}{5}.$$

Звідки

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} - 1 < \left[\frac{x}{4}\right] - \left[\frac{x}{5}\right] < \frac{x}{4} - \frac{x}{5} + 1.$$

За умовою $\left[\dfrac{x}{4}\right] - \left[\dfrac{x}{5}\right] = 0$, тоді

$$\frac{x}{20} - 1 < 0 < \frac{x}{20} + 1; \quad -1 < \frac{x}{20} < 1; \quad -4 < \frac{x}{5} < 4.$$

Отже, $\left[\frac{x}{5}\right] \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. Розглянемо послідовно всі можливі випадки:

1) $\left[\frac{x}{4}\right] = -4 = \left[\frac{x}{5}\right]$.

$$\begin{cases} -4 \le \frac{x}{4} < -3 \\ -4 \le \frac{x}{5} < -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} -16 \le x < -12 \\ -20 \le x < -15 \end{cases}; \quad x \in [-16; -15).$$

2) $\left[\frac{x}{4}\right] = -3 = \left[\frac{x}{5}\right]$.

$$\begin{cases} -3 \le \frac{x}{4} < -2 \\ -3 \le \frac{x}{5} < -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} -12 \le x < -8 \\ -15 \le x < -10 \end{cases}; \quad x \in [-12; -10).$$

3) $\left[\frac{x}{4}\right] = -2 = \left[\frac{x}{5}\right]$.

$$\begin{cases} -2 \le \frac{x}{4} < -1 \\ -2 \le \frac{x}{5} < -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} -8 \le x < -4 \\ -10 \le x < -5 \end{cases}; \quad x \in [-8; -5).$$

4) $\left[\frac{x}{4}\right] = -1 = \left[\frac{x}{5}\right]$.

$$\begin{cases} -1 \le \frac{x}{4} < 0 \\ -1 \le \frac{x}{5} < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -4 \le x < 0 \\ -5 \le x < 0 \end{cases}; \quad x \in [-4; 0).$$

5) $\left[\frac{x}{4}\right]=0=\left[\frac{x}{5}\right]$.

$$\begin{cases} 0\le \frac{x}{4}<1 \\ 0\le \frac{x}{5}<1 \end{cases};\quad \begin{cases} 0\le x<4 \\ 0\le x<5 \end{cases};\quad x\in[0;4).$$

6) $\left[\frac{x}{4}\right]=1=\left[\frac{x}{5}\right]$.

$$\begin{cases} 1\le \frac{x}{4}<2 \\ 1\le \frac{x}{5}<2 \end{cases};\quad \begin{cases} 4\le x<8 \\ 5\le x<10 \end{cases};\quad x\in[5;8).$$

7) $\left[\frac{x}{4}\right]=2=\left[\frac{x}{5}\right]$.

$$\begin{cases} 2\le \frac{x}{4}<3 \\ 2\le \frac{x}{5}<3 \end{cases};\quad \begin{cases} 8\le x<12 \\ 10\le x<15 \end{cases};\quad x\in[10;12).$$

8) $\left[\frac{x}{4}\right]=3=\left[\frac{x}{5}\right]$.

$$\begin{cases} 3\le \frac{x}{4}<4 \\ 3\le \frac{x}{5}<4 \end{cases};\quad \begin{cases} 12\le x<16 \\ 15\le x<20 \end{cases};\quad x\in[15;16).$$

Відповідь. $x\in[-16;-15)\cup[-12;-10)\cup$
$\cup[-8;-5)\cup[-4;4)\cup[5;8)\cup[10;12)\cup[15;16)$.

Другий спосіб

Нехай

$$\left[\frac{x}{4}\right]=k=\left[\frac{x}{5}\right], \text{ де } k\in\mathbb{Z}.$$

За (2.4), для знаходження x треба розглянути систему нерівностей:

$$\begin{cases} k\le\dfrac{x}{4}<k+1 \\ k\le\dfrac{x}{5}<k+1 \end{cases},$$

$$\text{тобто } \begin{cases} 4k\le x<k+1 \\ 5k\le x<k+1 \end{cases}. \qquad (*)$$

Для розв'язання системи $(*)$ необхідно розташувати в порядку зростання числа:

$$4k;\quad 4k+4;\quad 5k;\quad 5k+5.$$

Очевидно, що

$$4k+4>4k;\quad 5k+5>5k;$$

крім того:

1) $4k>5k$, якщо $k<0$;

2) $4k<5k$, якщо $k>0$;

3) $4k=5k$, якщо $k=0$.

Розглянемо ці три випадки.

1) Нехай $k<0$.

Розв'язком системи $(*)$ буде інтервал $x\in[4k;5k+5)$ за умови, що $4k<5k+5$, тобто якщо $-5<k<0$ і $k\in\mathbb{Z}$.

2) Нехай $k>0$.

Розв'язком системи $(*)$ буде інтервал $x\in[5k;4k+4)$ за умови, що $5k<4k+4$, тобто якщо $0<k<4$ і $k\in\mathbb{Z}$.

3) Нехай $k=0$.

Розв'язком системи (*) буде інтервал $x\in[0;4)$. Очевидно, що останній інтервал міститься серед інтервалів $[5k;4k+4)$, якщо $k=0$.

Відповідь. $x\in[4k;5k+5)$, де $k\in\{-4;-3;-2;-1\}$;

$x\in[5k;4k+4)$, де $k\in\{0;1;2;3\}$.

Примітка. Другий спосіб розв'язання задачі 69 для нас важливий тому, що за його допомогою може бути розв'язана узагальнена задача 70.

70. $\left[\dfrac{x}{n}\right]=\left[\dfrac{x}{m}\right]$, де $\{n,m\}\subset\mathbb{N}$ і $m>n$.

Розв'язання.

Аналогічно попередньому, позначимо $\left[\dfrac{x}{n}\right]=\left[\dfrac{x}{m}\right]=k,\ \ k\in\mathbb{Z}$ і $m>n$. Тоді

$$\begin{cases} k\le\dfrac{x}{m}<k+1 \\ k\le\dfrac{x}{n}<k+1 \end{cases},\ \text{тобто}\ \begin{cases} mk\le x<mk+m \\ nk\le x<nk+n \end{cases}.$$

1) Нехай $k<0$, тоді $mk<nk$. Розв'язком буде $x\in[nk;mk+m)$ за умови, що $nk<mk+m$, тобто якщо $-\dfrac{m}{m-n}<k<0,\ \ k\in\mathbb{Z}$.

2) Нехай $k\ge0$. Розв'язком буде $x\in[mk;nk+n)$ за умови, що $mk<nk+n$, тобто якщо $0\le k<\dfrac{n}{m-n},\ \ k\in\mathbb{Z}$.

Відповідь. $x\in[nk;mk+m)$, де $k\in\left(-\dfrac{m}{m-n};0\right)\cap\mathbb{Z}$;

$x\in[mk;nk+n)$, де $k\in\left[0;\dfrac{n}{m-n}\right)\cap\mathbb{Z}$.

71. $\left[x^3\right]+\left[x^2\right]+[x]=\{x\}-1.$

Розв'язання.

Представимо дане рівняння у вигляді

$$\{x\}=\left[x^3\right]+\left[x^2\right]+[x]+1.$$

Легко бачити, що права частина останього рівняння — ціле число. Отже, $\{x\}=0, [x]=x$. Тоді:

$$x^3+x^2+x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\left(x^2+1\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1.$$

Відповідь. $x=-1.$

72. $[x]+\dfrac{1}{[x]}=\{x\}+\dfrac{1}{\{x\}}.$

Розв'язання.

Область визначення рівняння: $[x]\neq 0$ і $\{x\}\neq 0.$

За означенням дробової частини числа права частина даного рівняння додатна, тоді додатною є і його ліва частина, тобто $x>0$. Після тотожних перетворень отримаємо

$$[x]-\{x\}=\frac{[x]-\{x\}}{[x]\{x\}},$$

звідки

$$[x]-\{x\}=0 \quad \text{або} \quad [x]\{x\}=1.$$

Перша умова виконується лише у випадку $[x]=\{x\}=0$, що неможливо (див. область визначення). Якщо другу умову записати у вигляді $\{x\}=\dfrac{1}{[x]}$, то неважко побачити, що вона виконується для всіх $[x]\in\mathbb{N}, [x]\neq 1.$

Відповідь. $x=t+\dfrac{1}{t},\ t\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$

73. $x\{x\}=1.$

Розв'язання.

Оскільки за означенням $\{x\}\in[0;1)$, то з умови задачі випливає, що $x>1$. Нехай $[x]=k$, $k\geq 1$. Тоді $x=k+\{x\}$, а задане рівняння можна записати у вигляді:

$$(k+\{x\})\{x\}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \{x\}^2+k\{x\}-1=0.$$

Останнє рівняння має два корені, один з яких

$$\{x\}=\frac{-k-\sqrt{k^2+4}}{2}\text{ –}$$

сторонній, оскільки не може бути додатним, а другий

$$\{x\}=\frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2}>0$$

повинен задовольняти умові

$$\frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2}<1 \text{ при } k\geq 1.$$

Легко переконатися, що ця нерівність виконується для всіх $k\in\mathbb{N}$. Тоді

$$x=k+\frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2}=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2},\ k\in\mathbb{N}.$$

Відповідь. $x=\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2},\ k\in\mathbb{N}.$

74. $[x]\{x\}+x=2\{x\}+10.$

Розв'язання.

Скориставшись рівністю $x=[x]+\{x\}$, дане рівняння можна представити у вигляді

$$[x]\{x\}+[x]+\{x\}=2\{x\}+10,$$

або

$$[x]=\frac{10+\{x\}}{\{x\}+1}=1+\frac{9}{\{x\}+1}.$$

Оскільки $[x]$ — ціле, а $0\le\{x\}<1$, то число $\frac{9}{\{x\}+1}$ — ціле і належить проміжку $[5;9]$.

1) Нехай $\frac{9}{\{x\}+1}=5$, тоді $\{x\}=\frac{9}{5}-1=\frac{4}{5}$, $[x]=6$ і $x=6\frac{4}{5}$.

2) Нехай $\frac{9}{\{x\}+1}=6$, тоді $\{x\}=\frac{9}{6}-1=\frac{1}{2}$, $[x]=7$ і $x=7\frac{1}{2}$.

3) Нехай $\frac{9}{\{x\}+1}=7$, тоді $\{x\}=\frac{9}{7}-1=\frac{2}{7}$, $[x]=8$ і $x=8\frac{2}{7}$.

4) Нехай $\frac{9}{\{x\}+1}=8$, тоді $\{x\}=\frac{9}{8}-1=\frac{1}{8}$, $[x]=9$ і $x=9\frac{1}{8}$.

5) Нехай $\frac{9}{\{x\}+1}=9$, тоді $\{x\}=\frac{9}{9}-1=0$, $[x]=10$ і $x=10$.

Відповідь. $x\in\left\{6\frac{4}{5};7\frac{1}{2};8\frac{2}{7};9\frac{1}{8};10\right\}$.

75. $\frac{1}{\{x\}}+\frac{1}{[x]}=\frac{1}{|x|}$.

Розв'язання.

Враховуючи, що $[x]\ne 0, \{x\}\ne 0, |x|\ne 0$, тобто $x\notin\mathbb{Z}$ і $x\notin(0;1)$, маємо:

$$\frac{[x]+\{x\}}{[x]\{x\}}=\frac{1}{|x|};\quad \frac{x}{[x](x-[x])}=\frac{1}{|x|};\quad x|x|=[x](x-[x]).$$

Позначимо $[x]=k$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\ne 0$. Тоді

$$x|x|-kx+k^2=0.$$

1) При $x > 0$

$$x^2 - kx + k^2 = 0 \text{ —}$$

коренів нема.

2) При $x < 0$ $(k < 0)$

$$-x^2 - kx + k^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + kx - k^2 = 0.$$

Останнє рівняння має два корені, але, оскільки x і k — від'ємні, розв'язком буде лише один з них, а саме:

$$x = k\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Тоді маємо (див. (2.4)):

$$\begin{cases} k\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \geq k \\ k\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < k+1 \\ k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \leq 1 \\ k\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} - 1\right) < 1 \\ k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k\dfrac{\sqrt{5}-3}{2} < 1 \\ k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\dfrac{\sqrt{5}+3}{2} \\ k < 0 \end{cases}.$$

На проміжку $\left(-\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}; 0\right)$ є лише два цілих числа: -1 і -2. Отже:

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \text{ або } x = 1-\sqrt{5}.$$

Відповідь. $x \in \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 1-\sqrt{5}\right\}.$

76. $\dfrac{1}{[x]^2}=\dfrac{1}{2|x|-1}$.

Розв'язання.

Перший спосіб

Знайдемо область визначення рівняння:

$$\begin{cases}[x]\neq 0\\ 2|x|\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\notin[0;1)\\ x\neq-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Ліва частина рівняння додатна. Тоді

$$2|x|-1>0 \Leftrightarrow |x|>\frac{1}{2}.$$

Враховуючи область визначення, маємо, що

$$x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup[1;+\infty).$$

Позначимо $[x]=k$ і врахуємо, що $x=[x]+\{x\}$.

1) При $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ маємо $k\leq-1$ і рівняння

$$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{-2k-2\{x\}-1} \Leftrightarrow k^2+2k+2\{x\}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k+1)^2=-2\{x\}.$$

Врахуємо, що $\{x\}\in[0;1)$ і $(k+1)^2\geq 0$. Тоді маємо:

$$k+1=\{x\}=0;\quad k=[x]=-1 \quad \text{і} \quad x=-1.$$

2) При $x\in[1;+\infty)$ маємо $k\geq 1$ і рівняння

$$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{2k+2\{x\}-1} \Leftrightarrow k^2=2k+2\{x\}-1.$$

Звідки

$$\{x\}=\frac{k^2-2k+1}{2}=\frac{(k-1)^2}{2}.$$

Врахуємо, що $\{x\}\in[0;1)$ і $k-1\geq 0$. Тоді маємо:

$$0\leq k-1<\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad k\in\{1;2\}.$$

Якщо $k=1$, $\{x\}=0$, $x=1$.

Якщо $k=2$, $\{x\}=\frac{1}{2}$, $x=2{,}5$.

Отже, $x\in\{-1;1;2{,}5\}$.

Другий спосіб

Задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}2|x|=[x]^2+1\\ |x|\neq\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Звідки маємо, що $2|x|$ — ціле число, тоді і $2x$ — ціле. З останнього випливає, що число x або ціле, або дорівнює: $k+0{,}5$, де $k\in\mathbb{Z}, k\neq 0$ (бо $[x]\neq 0$).

Якщо $x\in\mathbb{Z}$, маємо:

$$x^2=2|x|-1, \quad x^2-2|x|+1=0, \quad (|x|-1)^2=0, \quad x=\pm 1.$$

Якщо $x=k+0{,}5$ і $k>0$, маємо:

$$[k+0{,}5]^2=2|k+0{,}5|-1, \quad k^2=2k+1-1, \quad k^2-2k=0, \quad k\in\{0;2\}.$$

Значення $k=0$ не задовольняє умові $k\neq 0$. Тоді $k=2$ і $x=2{,}5$.

Якщо $x=k+0{,}5$ і $k<0$, то і $x<0$. Маємо:

$$[k+0{,}5]^2=2|k+0{,}5|-1, \quad k^2=-2k-1-1, \quad k^2+2k+2=0,$$

останнє рівняння не має коренів.

Відповідь. $x\in\{-1;1;2{,}5\}$.

77. $1-|x+1|=\dfrac{[x]-x}{|x-1|}$.

Розв'язання.

Дане рівняння рівносильне рівнянню

$$|x-1|(|x+1|-1)=\{x\} \text{ при } x\neq 1.$$

З умови $\{x\}\geq 0$ випливає, що $|x+1|-1\geq 0$ і розв'язок рівняння задовольняє умові

$$x\in(-\infty;-2]\cup[0;1)\cup(1;\infty).$$

Розглянемо три випадки.

1) Нехай $x\in(-\infty;-2]$. Тоді рівняння має вигляд:

$$-(x-1)(-(x+1)-1)=\{x\} \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x-2=\{x\}. \qquad (*)$$

З умови $\{x\}<1$ випливає, що розв'язки містяться серед розв'язків нерівності $x^2+x-3<0$, тобто $x\in\left(\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2};-2\right]$.

Врахуємо, що $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\in(-3;-2)$, тоді

$$\left[\begin{array}{l} x=-3+\{x\} \\ x=-2 \end{array}\right..$$

Підставимо ці значення x у рівняння $(*)$, отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l} \{x\}=3-\sqrt{5} \\ x=-2 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{5} \\ x=-2 \end{array}\right..$$

2) Нехай $x\in[0;1)$. Тоді $\{x\}=x$ і дане рівняння має вигляд:

$$-(x-1)x=x \quad\Leftrightarrow\quad x=0.$$

3) Нехай $x\in(1;\infty)$. Тоді маємо, що

$$(x-1)x=\{x\}.$$

З умови $\{x\}<1$ випливає:

$$(x-1)x<1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x-1<0,$$

отже, розв'язок треба шукати серед $x \in \left(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Врахуємо, що $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \in (1;2)$, тоді $x=1+\{x\}$. Маємо рівняння

$$\{x\}(\{x\}+1)=\{x\},$$

яке на множині $\left(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ коренів не має.

Відповідь. $x \in \left\{-\sqrt{5};-2;0\right\}$.

78. $[\underbrace{[\ldots[}_{n}\, x : 2\,]\ldots : 2\,] : 2\,]=1.$

Розв'язання.

З означення цілої частини числа випливає:

1) $1 \le [\underbrace{[\ldots[}_{n-1}\, x : 2\,]\ldots : 2\,] : 2\,] : 2<2$, тобто

$$2 \le [\underbrace{[\ldots[}_{n-1}\, x : 2\,]\ldots : 2\,] : 2\,]<4.$$

2) $2 \le [\underbrace{[\ldots[}_{n-2}\, x : 2\,]\ldots : 2\,] : 2\,] : 2<4$, бо ціле число

$$[\underbrace{[\ldots[}_{n-1}\, x : 2\,]\ldots : 2\,] : 2\,]$$

міститься в інтервалі $[2;4)$ і може приймати лише два значення: 2 або 3. Тоді

$$2^2=4 \le [\underbrace{[\ldots[}_{n-2}\, x : 2\,]\ldots : 2\,] : 2\,]<8=2^3.$$

....

n) На n-ому кроці отримаємо:

$$2^n \le x < 2^{n+1}.$$

Відповідь. $x \in \left[2^n; 2^{n+1}\right)$.

79. $\left[\sqrt{x}+1\right]=a$.

Розв'язання.

Ліва частина рівняння — ціле додатне число. Тоді $a \in \mathbb{Z}$ і $a \ge 1$.

За властивістю (2.4) маємо, що

$$a \le \sqrt{x}+1 < a+1 \quad \Leftrightarrow \quad a-1 \le \sqrt{x} < a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \ge (a-1)^2 \\ x < a^2 \end{cases}.$$

Відповідь. При $a \in \mathbb{N}$ $\quad x \in \left[(a-1)^2; a^2\right)$;

при $a \notin \mathbb{N}$ $\quad x \in \varnothing$.

80. $\left[x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}\right]=a$.

Розв'язання.

Очевидно, що a — ціле число. Позначимо $\sqrt{x+\frac{1}{4}}=t \ge 0$. Тоді $x=t^2-\frac{1}{4}$ і маємо рівняння

$$\left[t^2-\frac{1}{4}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{4}}\right]=a \quad \Leftrightarrow \quad \left[t^2-\frac{1}{4}+\left|t+\frac{1}{2}\right|\right]=a.$$

Врахуємо, що $t \geq 0$: $\left|t+\frac{1}{2}\right| = t+\frac{1}{2}$. Тоді

$$a = \left[t^2 + t + \frac{1}{4}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\right] = a.$$

Ціле число $a > 0$, тобто $a \in \mathbb{N}$.

За властивістю (2.4) отримаємо

$$a \leq \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 < a+1, \quad \sqrt{a} \leq t + \frac{1}{2} < \sqrt{a+1},$$

$$\sqrt{a} - \frac{1}{2} \leq t < \sqrt{a+1} - \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$\sqrt{a} - \frac{1}{2} \leq \sqrt{x+\frac{1}{4}} < \sqrt{a+1} - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a - \sqrt{a} \leq x < a - \sqrt{a+1} + 1.$$

Відповідь. При $a \in \mathbb{N}$

$x \in \left[a - \sqrt{a};\ a - \sqrt{a+1} + 1\right)$;

при $a \notin \mathbb{N}$ $\quad x \in \varnothing$.

81. $\left[\dfrac{x}{a}\right] = \left[\dfrac{x}{a-1}\right]$, $a \in \mathbb{N}, a \geq 2$.

Вказівка.

Позначте $m = a$, $n = a-1$ і див. задачу 70.

Відповідь. $x \in \left[(a-1)k;\ a(k+1)\right)$,

де $k \in (-a; 0) \cap \mathbb{Z}$;

$x \in \left[ak;\quad (a-1)(k+1)\right)$,

де $k \in [0; a-1) \cap \mathbb{Z}$.

82. Знайти всі такі дійсні числа p, що для довільного $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$[x]+[x+p]+[x+2p]=[3x].$$

Вказівка.

Позначте $[x]=n$ і $\{x\}=t$, перейдіть до рівняння

$$[t+p]+[t+2p]=[3t];$$

скористайтеся властивістю (2.10), врахуйте, що $t \in [0;1)$ і $[t]=0$.

Відповідь. $p=\frac{1}{3}$.

83. Знайти всі значення x, при яких числа $x, [x], \{x\}$ утворюють арифметичну прогресію.

Розв'язання.

За властивістю арифметичної прогресії маємо

$$[x]=\frac{x+\{x\}}{2}, \quad [x]=\frac{x+x-[x]}{2}, \quad [x]=\frac{2}{3}x.$$

Скориставшись (2.4), отримаємо

$$\frac{2x}{3} \le x < \frac{2x}{3}+1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \ge 0 \\ x < 3 \end{cases}.$$

При $x \in [0;3)$ число $\frac{2}{3}x$ буде цілим, якщо $x \in \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$.

Відповідь. $x \in \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$.

84. Знайти всі значення x, при яких числа $x, [x], \{x\}$ утворюють геометричну прогресію.

Вказівка.

Запишіть

$$[x]^2 = x \cdot \{x\},$$

зробіть заміну $\{x\}=x-[x]$ і розв'яжіть квадратне рівняння відносно $[x]$. Врахуйте, що x не може бути від'ємним.

Відповідь. $x\in\left\{0;\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}\right\}$.

85. Знайти найменше додатне x, яке задовольняє співвідношенню

$$\{x^2\}-\{x\}^2=\frac{1}{2006}.$$

Розв'язання.

Якщо $[x]=0$, то $x=\{x\}$ і задана рівність не виконується. Ми шукаємо найменше додатне x. Розглянемо $[x]=1$. Тоді

$$x=1+\alpha,\ \text{де}\ \alpha=\{x\}\in(0;1),$$

$$\{x^2\}=\{1+2\alpha+\alpha^2\}=\{\alpha^2+2\alpha\}.$$

Ми шукаємо найменше невід'ємне α. Тоді вважатимемо, що

$$0\le\alpha^2+2\alpha<1.$$

Маємо

$$\alpha^2+2\alpha-\alpha^2=\frac{1}{2006}\quad\Leftrightarrow\quad\alpha=\frac{1}{4012}.$$

Отже,

$$\{x\}=\frac{1}{4012}\ \text{ і }\ x=1\frac{1}{4012}.$$

Відповідь. $x=1\dfrac{1}{4012}$.

§ 4. НЕРІВНОСТІ, ЩО МІСТЯТЬ АНТЬЄ ТА МАНТИСУ ЧИСЛА

Найпростіші нерівності з антьє та мантисою числа були розглянуті у § 1. Розв'язуючи більш складні нерівності, як і при розв'язуванні рівнянь, будемо спиратись на властивості цілої та дробової частини числа, що наведені у § 2.

У задачах 86—104 розв'язати нерівності відносно x:

86. $\left[x^2\right] > 2.$

Розв'язання.

З (2.1) маємо $x^2 \geq 3,\ |x| \geq \sqrt{3}.$

Відповідь. $x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}; \infty\right).$

87. $\left[x^2\right] \geq 2.$

Розв'язання.

З (2.1) маємо $x^2 \geq 2,\ |x| \geq \sqrt{2}.$

Відповідь. $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; \infty\right).$

88. $[x^2] < 2.$

Розв'язання.

Дана в умові нерівність рівносильна нерівності $[x^2] \le 1$. Тоді $x^2 < 2,\ |x| < \sqrt{2}.$

Відповідь. $x \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right).$

89. $1 \le [7x] < 4.$

Розв'язання.

Спираючись на (2.1), отримаємо $1 \le 7x < 4$, тобто $x \in \left[\frac{1}{7}; \frac{4}{7}\right).$

Відповідь. $x \in \left[\frac{1}{7}; \frac{4}{7}\right).$

90. $1 < [7x] \le 4.$

Розв'язання.

Згідно (2.1) маємо $2 \le 7x < 5$, $x \in \left[\frac{2}{7}; \frac{5}{7}\right).$

Відповідь. $x \in \left[\frac{2}{7}; \frac{5}{7}\right).$

91. $\left[\frac{x^2+9}{12}\right] \le 2.$

Розв'язання.

За (2.1) маємо:

$$\frac{x^2+9}{12} < 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 25 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 5,$$

тобто $x \in (-5; 5).$

Відповідь. $x \in (-5; 5).$

92. $\left[\frac{2x^2+1}{4}\right] \geq 9$.

Вказівка.

Дивись завдання 87.

Відповідь. $x \in (-\infty; -4] \cup \left[\frac{\sqrt{35}}{2}; +\infty\right)$.

93. $[\sin x] \geq 1$.

Розв'язання.

Врахуємо, що $-1 \leq \sin x \leq 1$, тоді задана нерівність виконується тільки у випадку $\sin x = 1$.

Відповідь. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

94. $[\sin x] < 1$.

Розв'язання.

Умова рівносильна нерівності $\sin x < 1$.

Відповідь. $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

95. $[\cos x] > 0$.

Розв'язання.

Задана нерівність рівносильна умові $\cos x \in (0; 1]$.

Відповідь. $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

96. $[x^2] - [x] \geq 0$.

Розв'язання.

Дана в умові нерівність рівносильна нерівності

$$[x^2] \geq [x].$$

Очевидно, що всі $[x]\le 0$, тобто $x\in(-\infty;1)$, задовольняють умові задачі.

При всіх $x\ge 1$ $x^2\ge x$ і $[x^2]\ge[x]$.

Таким чином, $x\in\mathbb{R}$.

Відповідь. $x\in\mathbb{R}$.

97. $[x^2]-[2x]\ge 0.$

Розв'язання.

Очевидно, що всі x, при яких $[2x]\le 0$, задовольняють умові задачі. Тоді $2x<1$, або $x\in(-\infty;0;5)$ — розв'язки заданої нерівності.

Якщо $x\ge 2$, то $x^2\ge 2x$ і $[x^2]\ge[2x]$. Отже, інтервал $x\in[2;\infty)$ теж є розв'язками системи.

Розглянемо інтервал $x\in[0{,}5;2)$. Розіб'ємо його на три інтервали: $[0{,}5;1)$, $[1;1{,}5)$ і $[1{,}5;2)$.

1) При $x\in[0{,}5;1)$ $[2x]=1, x^2<1, [x^2]=0$ і розв'язків немає.

2) При $x\in[1;1{,}5)$ $[2x]=2$; умова $[x^2]\ge 2$ виконується при $x\ge\sqrt{2}$, $x\in[\sqrt{2};1{,}5)$.

3) При $x\in[1{,}5;2)$ $[2x]=3$; умова $[x^2]\ge 3$ виконується при $x\ge\sqrt{3}$, $x\in[\sqrt{3};2)$.

Відповідь. $x\in(-\infty;0{,}5)\cup[\sqrt{2};1{,}5)\cup[\sqrt{3};\infty)$.

98. $[x^2]+[2x]\ge 0.$

Розв'язання.

Очевидно, що всі x, для яких $[2x]\ge 0$, задовольняють умові. Тоді $x\ge 0$ — розв'язки даної нерівності. З'ясуємо, чи буде нерівність мати розв'язки при $x\in(-\infty;0)$. Останній інтервал розіб'ємо на такі інтервали, для яких $[2x]$ — стала величина, тобто:

$$[2x]=n,\quad \frac{n}{2}\le x<\frac{n+1}{2},\ \text{де}\ n\in\mathbb{Z}, n\le -1.$$

Тоді $\left[x^2\right]\ge -n,\ \ x^2\ge -n,\ \ |x|\ge\sqrt{-n}$ і, враховуючи, що $x<0$, маємо $x\le-\sqrt{-n}$.

Розв'язками заданої нерівності для $x<0$ будуть розв'язки системи

$$\begin{cases}\dfrac{n}{2}\le x<\dfrac{n+1}{2}\\ x\le-\sqrt{-n}\end{cases},\ \text{де}\ n\in\mathbb{Z}, n\le -1. \qquad (*)$$

Порівняємо число $-\sqrt{-n}$ із числами $\frac{n}{2}$ і $\frac{n+1}{2}$.

Розв'яжемо нерівність $\frac{n}{2}\le-\sqrt{-n}$. Маємо:

$$-\frac{n}{2}\ge\sqrt{-n}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}n^2+4n\ge 0\\ n<0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad n\le -4.$$

Отже, система $(*)$ сумісна лише при $n\le -4$.

Розв'яжемо тепер нерівність $-\sqrt{-n}\le\frac{n+1}{2}$:

$$-\frac{n+1}{2}\le\sqrt{-n}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}n^2+6n+1\le 0\\ n<0\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad n\in\left[-3-2\sqrt{2};-3+2\sqrt{2}\right],$$

оскільки n — ціле число, то $-5\le n\le -1$. Враховуючи, що $n\le -4$, маємо:

$$n\in\{-5;-4\}\ \text{ і }\ x\in\left[-2{,}5;-\sqrt{5}\right]\cup\{-2\},\ \text{бо}\ x\in\left[\frac{n}{2};-\sqrt{-n}\right].$$

У випадку $\frac{n+1}{2} \le -\sqrt{-n}$ маємо

$$n \in \mathbb{Z} \cap (-\infty; -6], \quad x \in \left[\frac{n}{2}; \frac{n+1}{2}\right), \text{ тому } x \in (-\infty; -2{,}5).$$

Відповідь. $x \in \left(-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup \{-2\} \cup [0; \infty)$.

99. $[x] \le 2\{x\} + 4$.

Розв'язання.

Спираючись на (2.6), перепишемо дану нерівність у вигляді

$$[x-4] \le 2\{x\}.$$

За властивістю (2.2) $\{x\} \in [0; 1)$, тобто $2\{x\} \in [0; 2)$. Тоді шукані значення x повинні задовольняти умові $[x-4] \le 1$.

Очевидно, що всі значення x, при яких $[x-4] \le 0$ є розв'язками нашої нерівності. Тоді

$$x - 4 < 1, \quad x < 5.$$

Роглянемо випадок, коли $[x-4] = 1$. Маємо

$$1 \le x - 4 < 2, \quad 5 \le x < 6.$$

При цьому

$$2\{x\} \ge 1, \quad \{x\} \in [0{,}5; 1).$$

Тоді $x = (5 + \{x\}) \in [5{,}5; 6)$.

Відповідь. $x \in (-\infty; 5) \cup [5{,}5; 6)$.

100. $[x] > 2\{x\} + 4$.

Вказівка.

Розв'язання аналогічне розв'язанню задачі 99.

Відповідь. $x \in [5; 5{,}5) \cup [6; \infty)$.

101. $\left[x^2\right]-[2x]+1\le 0.$

Розв'язання.

Використовуючи властивість (2.5), маємо:

$$x^2-1<\left[x^2\right]\le x^2; \qquad (1)$$

$$2x-1<[2x]\le 2x \quad \Leftrightarrow \quad -2x\le-[2x]<1-2x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x+1\le-[2x]+1<2-2x. \qquad (2)$$

Після додавання (1) і (2) отримаємо:

$$x^2-1-2x+1<\left[x^2\right]-[2x]+1<x^2+2-2x.$$

Звідки (беручи до уваги умову задачі й невід'ємність виразу x^2-2x+2) маємо

$$x^2-2x<0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(0;2).$$

Тобто розв'язки даної нерівності треба шукати лише серед чисел інтервалу $(0;2)$.

Замість даної за умовою нерівності будемо розв'язувати рівносильну їй нерівність: $\left[x^2\right]\le[2x]-1$. Розглянемо проміжки сталості $[2x]$ на інтервалі $(0;2)$.

1) При $x\in(0;0{,}5)$, $[2x]=0$, $\left[x^2\right]\le 0-1=-1$, $x\in\varnothing$.

2) При $x\in[0{,}5;1)$, $[2x]=1$, $\left[x^2\right]\le 1-1=0$, $x^2<1$ і, враховуючи вказаний проміжок, $x\in[0{,}5;1)$.

3) При $x\in[1;1{,}5)$, $[2x]=2$, $\left[x^2\right]\le 2-1=1$, $x^2<2$ і, враховуючи вказаний проміжок, $x\in\left[1;\sqrt{2}\right)$.

4) При $x\in[1{,}5;2)$, $[2x]=3$, $\left[x^2\right]\le 3-1=2$, $x^2<3$ і, враховуючи вказаний проміжок, $x\in\left[1{,}5;\sqrt{3}\right)$.

Відповідь. $x\in\left[0{,}5;\sqrt{2}\right)\cup\left[1{,}5;\sqrt{3}\right)$.

102. $\left[x^2\right]-3[2x]+4\le 0.$

Розв'язання.

Після використання (2.5) і перетворень, аналогічних тим, що були здійснені при розв'язанні задачі 101, отримаємо

$$x^2-1-6x+4<\left[x^2\right]-3[2x]+4<x^2+3-6x+4.$$

Тоді (див. 101) розв'язки заданої нерівності слід шукати серед розв'язків нерівності $x^2-6x+3<0$, тобто на проміжку $\left(3-\sqrt{6};\,3+\sqrt{6}\right)$. Зауважимо, що $\left(3-\sqrt{6};\,3+\sqrt{6}\right)\in(0{,}5;\,5{,}5)$.

Розглянемо проміжки $\left(3-\sqrt{6};\,1\right)$; $[1;\,1{,}5)$; $[1{,}5;\,2)$; ...; $[4{,}5;\,5)$; $\left[5;\,3+\sqrt{6}\right)$. На кожному з них $[2x]$ має стале значення. Для зручності будемо розв'язувати нерівність $\left[x^2\right]\le 3[2x]-4$, рівносильну заданій.

При $x\in\left(3-\sqrt{6};\,1\right)$

$$[2x]=1;\quad \left[x^2\right]\le 3\cdot 1-4=-1.$$

Розв'язків немає.

При $x\in[1;\,1{,}5)$

$$[2x]=2;\quad \left[x^2\right]\le 3\cdot 2-4=2.$$

Тоді $x^2<3$, $|x|<\sqrt{3}$ і всі x з проміжка, що розглядається, є розв'язками.

Аналогічно попередньому пункту можна показати, що задана нерівність виконується для всіх x з усіх наступних вибраних проміжків, крім передостаннього й останнього.

При $x\in[4{,}5;\,5)$

$$[2x]=9;\quad \left[x^2\right]\le 3\cdot 9-4=23,$$

тоді $x^2<24$, $|x|<\sqrt{24}$. На проміжку, що розглядається, маємо $x\in\left[4{,}5;\,\sqrt{24}\right)$.

При $x \in [5; 3+\sqrt{6})$

$$[2x]=10; \quad [x^2] \le 3\cdot 10-4=26,$$

тоді $x^2<27$, $|x|<\sqrt{27}$, отже, враховуючи проміжок, що розглядається, маємо: $x \in [5; \sqrt{27})$.

Отже, $x \in [1; \sqrt{24}) \cup [5; \sqrt{27})$.

Відповідь. $x \in [1; \sqrt{24}) \cup [5; \sqrt{27})$.

103. $[x^2]+4[x]<0$.

Відповідь. $x \in (-4; 0)$.

104. $\left[\dfrac{x}{2}\right] < \left[\dfrac{2x+1}{8}\right]$.

Розв'язання.

Ліва і права частини нерівності — цілі числа, тоді вони відрізняються не менше ніж на 1. Маємо:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+1}{8}-\dfrac{x}{2} \ge 1 \\ \begin{cases} \dfrac{2x+1}{8}-\dfrac{x}{2}<1 \\ \left[\dfrac{2x+1}{8}\right]-\left[\dfrac{x}{2}\right]=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -3{,}5 \\ \begin{cases} x>-3{,}5 \\ \left[\dfrac{2x+1}{8}\right]-\left[\dfrac{x}{2}\right]=1. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (*)$$

Розв'яжемо останню рівність системи при $x>-3{,}5$. За властивістю (2.5) отримаємо умову на x :

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{8}-1<\left[\dfrac{2x+1}{8}\right] \le \dfrac{2x+1}{8} \\ \dfrac{x}{2}-1<\left[\dfrac{x}{2}\right] \le \dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+1}{8}-1<\left[\dfrac{2x+1}{8}\right] \le \dfrac{2x+1}{8} \\ -\dfrac{x}{2} \le -\left[\dfrac{x}{2}\right] < -\dfrac{x}{2}+1 \end{cases}.$$

Додамо нерівності останньої системи:

$$-\frac{x}{4}-\frac{7}{8}<\underbrace{\left[\frac{2x+1}{8}\right]-\left[\frac{x}{2}\right]}_{1}<-\frac{x}{4}+1\frac{1}{8};\quad \begin{cases} x>-\dfrac{15}{2}. \\ x<2 \end{cases}$$

За умови $x>-3{,}5$ маємо, що $x\in(-3{,}5;2)$. На цьому інтервалі числа $\frac{x}{2}$ і $\frac{2x+1}{8}$ приймають цілі значення при $x\in\{-2;0;2\}$ і $x=-\frac{1}{2}$, відповідно. Тоді треба розглядати такі проміжки.

При $x\in(-3{,}5;-2)$

$$\left[\frac{x}{2}\right]=-2,\quad \left[\frac{2x+1}{8}\right]=-1,\ \text{рівність } (*) \text{ виконується.}$$

При $x\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right)$

$$\left[\frac{x}{2}\right]=-1,\quad \left[\frac{2x+1}{8}\right]=-1,\ \text{рівність } (*) \text{ не виконується.}$$

При $x\in\left[-\frac{1}{2};0\right)$

$$\left[\frac{x}{2}\right]=-1,\quad \left[\frac{2x+1}{8}\right]=0,\ \text{рівність } (*) \text{ виконується.}$$

При $x\in[0;2)$

$$\left[\frac{x}{2}\right]=0,\quad \left[\frac{2x+1}{8}\right]=0,\ \text{рівність } (*) \text{ не виконується.}$$

Відповідь. $x\in(-\infty;-2)\cup\left[-\frac{1}{2};0\right)$.

105. Довести, що для довільного значення $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\left\{n\sqrt{2}\right\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}.$$

Розв'язання.

Позначимо $m = \left[n\sqrt{2}\right]$. Очевидно, що $m \neq n\sqrt{2}$, бо $n \neq 0$ і число $\frac{m}{n}$ раціональне. Тоді

$$n\sqrt{2} = m + \alpha, \text{ де } \alpha = \left\{n\sqrt{2}\right\} \in (0;1).$$

За умовою $m > 0$. Тоді

$$2n\sqrt{2} = 2(m+\alpha) > \alpha$$

і нерівність

$$\alpha > \frac{1}{2(m+\alpha)}$$

виконується для всіх $m \in \mathbb{Z}, m \geq 0, \alpha \in (0;1)$.

Твердження доведено.

106. Для довільного натурального числа n, що не є квадратом натурального числа, довести нерівність

$$\left\{\sqrt{n}\right\} > \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Вказівка.

Дивись завдання 105.

§ 5. АНТЬЄ ТА МАНТИСА НА КООРДИНАТНІЙ ПЛОЩИНІ

При виконанні графічних завдань нам, як і раніше, необхідно спиратися на основні властивості цілої та дробової частин числа, а також на графіки функцій $y=[x]$ і $y=\{x\}$ (див. § 2) та на правила перетворення графіків функцій і геометричного місця точок (ГМТ) алгебраїчних виразів.

У задачах 107—125 зобразити на координатній площині (XOY) задану множину точок.

107. а) $y=[\{x\}]$; б) $y=\{[x]\}$.

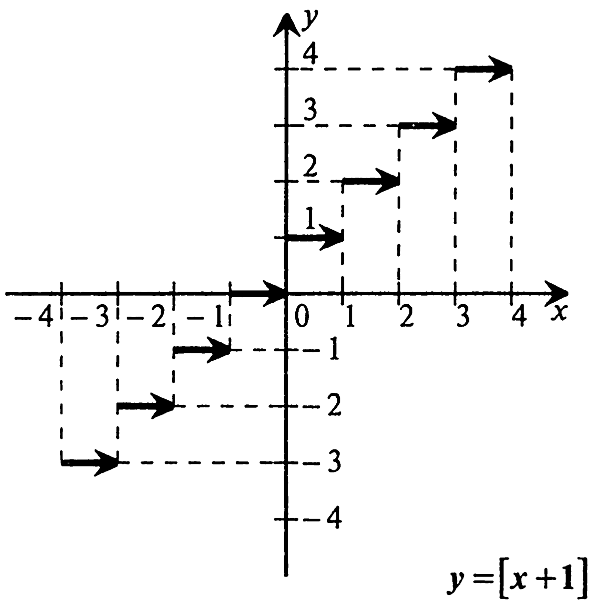
Розв'язання.

Спираючись на (2.1) та на означення цілої і дробової частин числа отримаємо, що обидва вирази рівносильні виразу $y=0$. Тобто відповідними графіками буде пряма, що співпадає з віссю (OX).

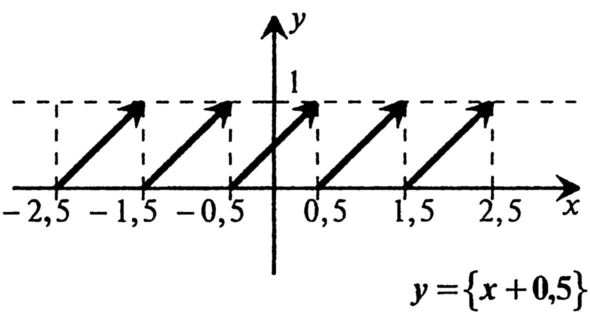
108. а) $y=[x+1]$; б) $y=\{x+0,5\}$.

Розв'язання.

Шукані графіки отримаємо переміщенням графіків $y=[x]$ і $y=\{x\}$ уздовж осі (OX) ліворуч відповідно на 1 та 0,5 одиниць масштабу (мал. 6 та мал. 7)



Мал. 6



Мал. 7

109. а) $y=[x]+1$; б) $y=\{x+1\}$.

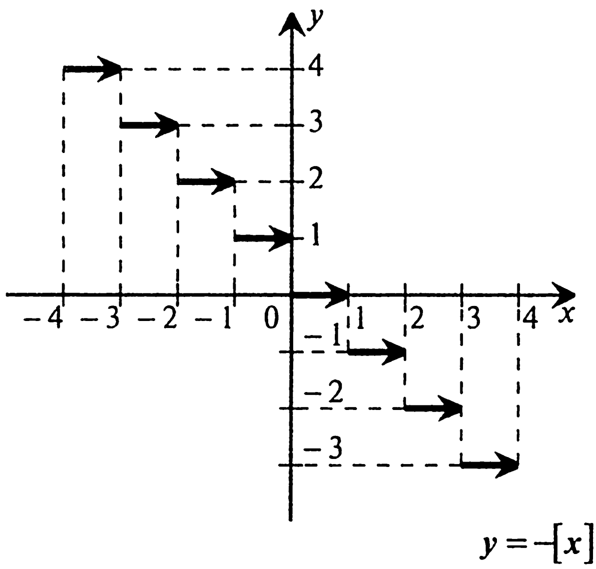
Розв'язання.

Спираючись на властивості (2.6) та (2.7), маємо, що дані графіки співпадають відповідно з графіком $y=[x+1]$ (мал. 6) та з графіком $y=\{x\}$ (мал. 2).

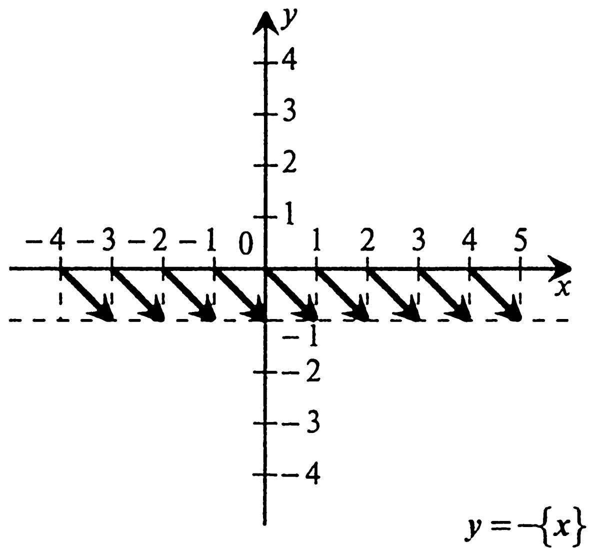
110. а) $y=-[x]$; б) $y=-\{x\}$.

Розв'язання.

Побудова очевидно випливає з перетворення графіків $y=[x]$ і $y=\{x\}$ відповідно (див. мал. 8, 9).



Мал. 8

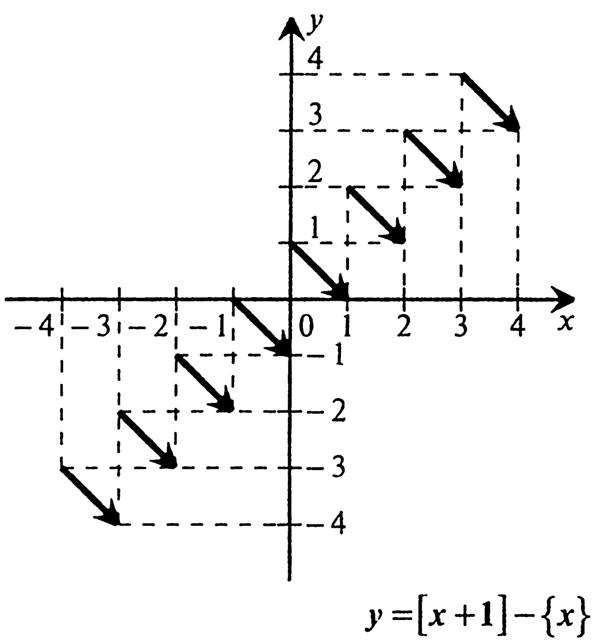


Мал. 9

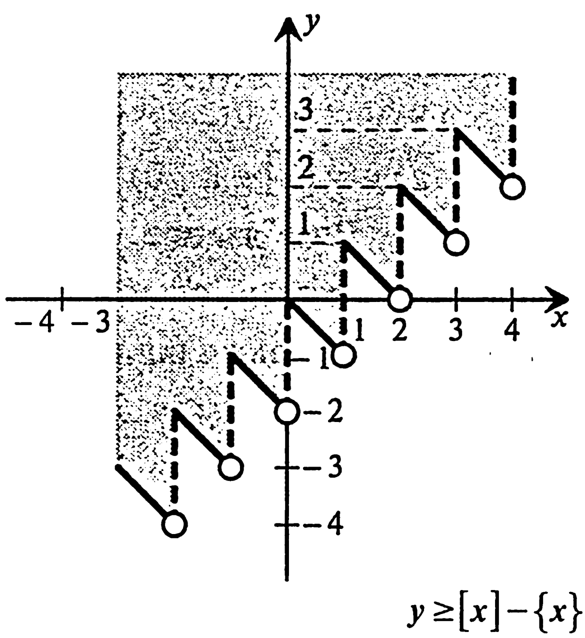
111. а) $y=[x+1]-\{x\}$; б) $y\geq[x]-\{x\}$.

Розв'язання.

Використовуємо графіки, зображені на малюнках 1, 6 та 9, і побудуємо задані графіки додаванням. Маємо:



Мал. 10



Мал. 11

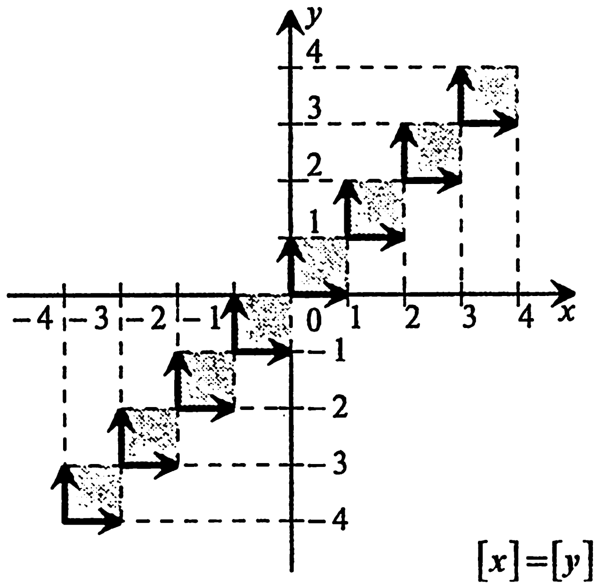
112. $[x]=[y]$.

Розв'язання.

Якщо позначити $n=[x]$, $n \in \mathbb{Z}$, то на координатній площині треба зобразити точки, координати яких задовольняють умові

$$\begin{cases} n \le x < n+1 \\ n \le y < n+1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь на малюнку 12.

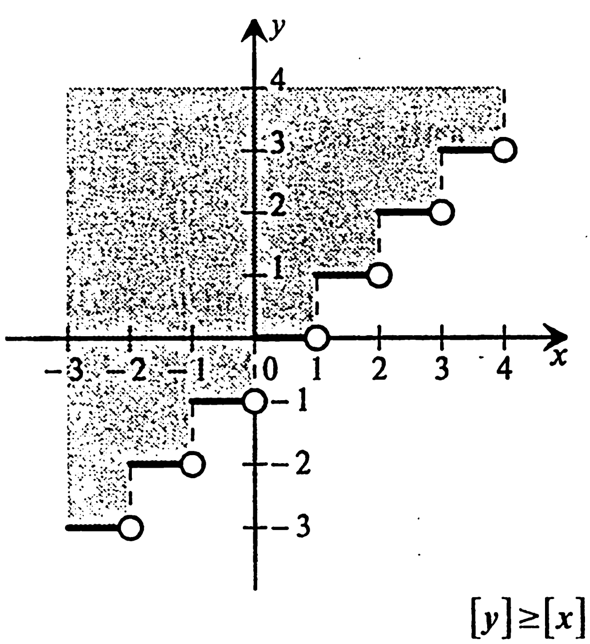


Мал. 12

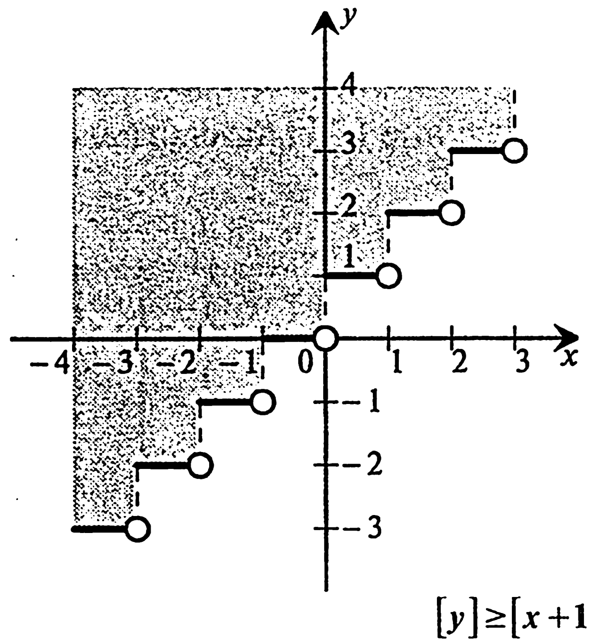
113. $[y]-[x] \ge 1$.

Розв'язання.

Задана нерівність рівносильна нерівності $[y] \ge [x+1]$. Побудуємо спочатку ГМТ $[y] \ge [x]$, яке неважко отримати, скориставшись задачею 112 (див. мал. 13). А після того зробимо переміщення ГМТ уздовж осі (OX) ліворуч на 1. Відповідь на малюнку 14.



Мал. 13



Мал. 14

114. $[x]+\{y\}\geq 0$.

Розв'язання.

Задана нерівність рівносильна нерівності

$$\{y\}\geq -[x].$$

Врахуємо, що $\{y\}\in[0;1)$, а $[x]\in\mathbb{Z}$. Тоді маємо

$$-[x]\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad [x]\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq 0,$$

і розв'язком задачі будуть усі точки першої чверті координатної площини.

115. $\{x\}+[y]\leq 0$.

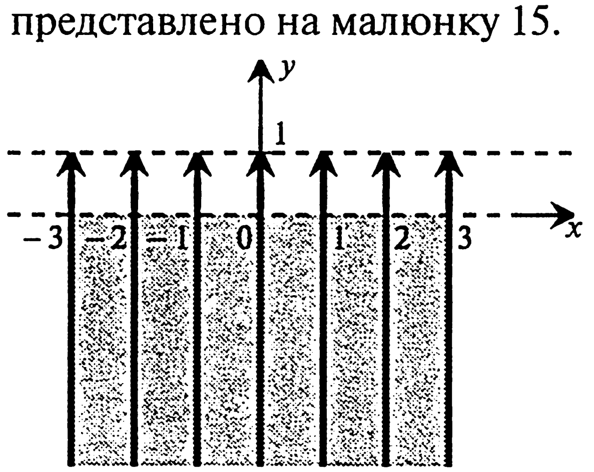
Розв'язання.

Аналогічно попередньому маємо:

$$\begin{cases}\{x\}\in[0;1)\\ \{x\}\leq -[y]\end{cases}.$$

Тоді
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\{x\}=0\\ -[y]\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\{x\}\neq 0\\ -[y]\geq 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\ [y]\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\notin\mathbb{Z}\\ [y]\leq -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\ y<1\end{cases}\\ \begin{cases}x\notin\mathbb{Z}\\ y<0\end{cases}\end{array}\right..$$

Шукане ГМТ представлено на малюнку 15.



Мал. 15

116. $\{x\}+\{y\}\le 1.$

Розв'язання.

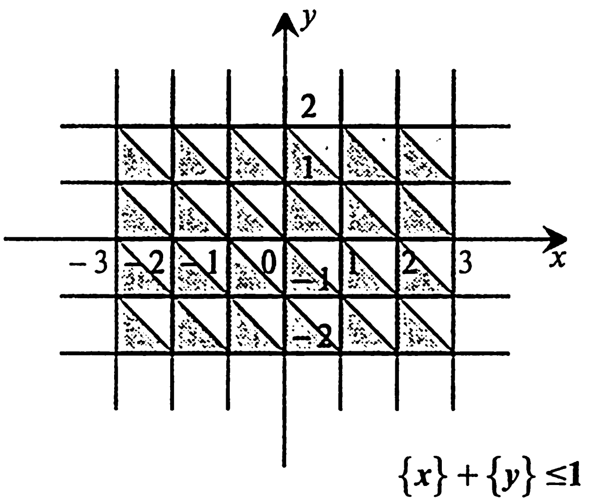
При $x\in[0;1)$ і $y\in[0;1)$ маємо

$$x+y\le 1 \quad \Leftrightarrow \quad y\le 1-x.$$

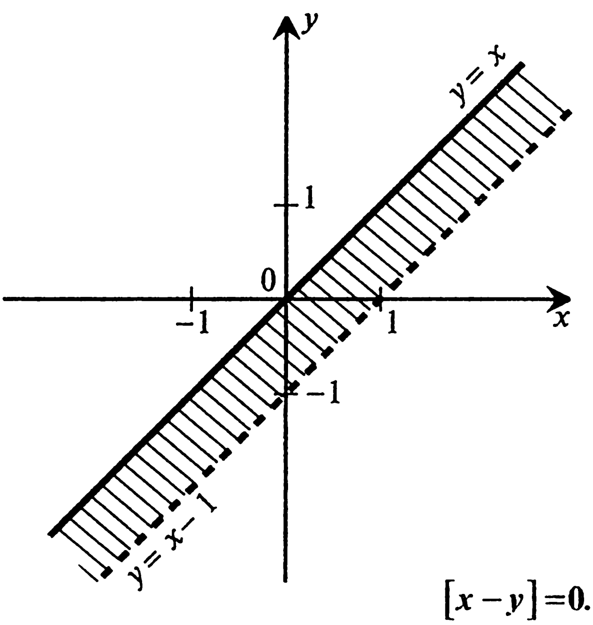
Перевіркою переконуємося, що точки $(0;1)$ і $(1;0)$ задовольняють умові. За властивістю (2.8) для всіх $n\in\mathbb{Z}$

$$\{x+n\}=\{x\} \quad \text{і} \quad \{y+n\}=\{y\}.$$

Тоді шукане ГМТ отримаємо переміщенням побудованого вздовж осей (OX) і (OY) на n одиниць (мал. 16).



Мал. 16



Мал. 17

117. $[x-y]=0.$

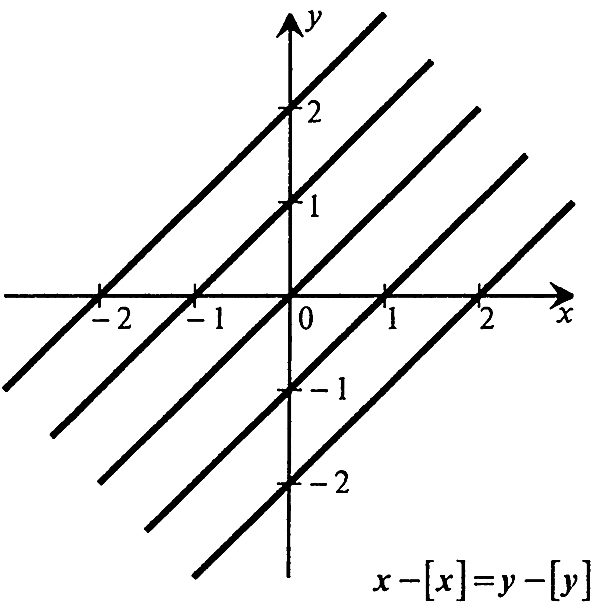
Розв'язання.

Дана рівність означає, що координати точок площини (XOY) задовольняють умові $0\le x-y<1$, тобто

$$\begin{cases} y>x-1 \\ y\le x \end{cases}.$$

Шукане ГМТ зображено на малюнку 17.

118. $x-[x]=y-[y]$.



Мал. 18

Розв'язання.

Згідно з означенням дробової частини числа, задане співвідношення рівносильне умові

$$\{y\}=\{x\},$$

або, враховуючи властивість (2.8),

$$y=x+n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

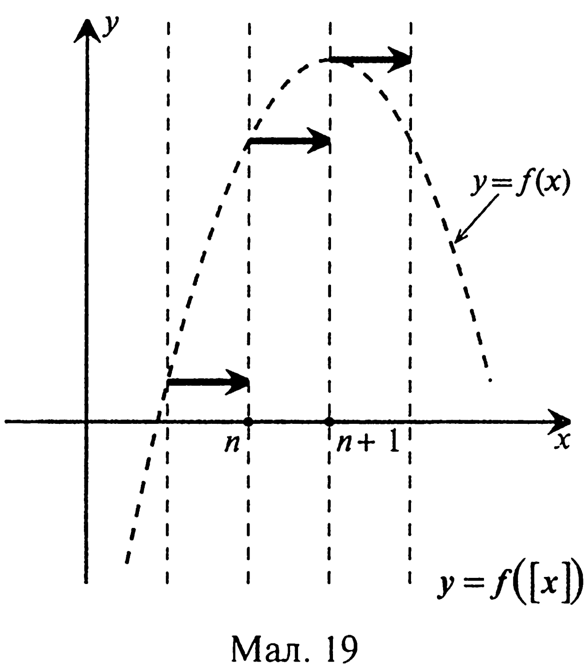
Шукане ГМТ зображене на малюнку 18.

Для того, щоб побудувати графік функції $y=f([x])$, **треба** (див. мал. 19):

1) *побудувати графік функції* $y=f(x)$;

2) *провести прямі* $x=n,\ n\in\mathbb{Z}$;

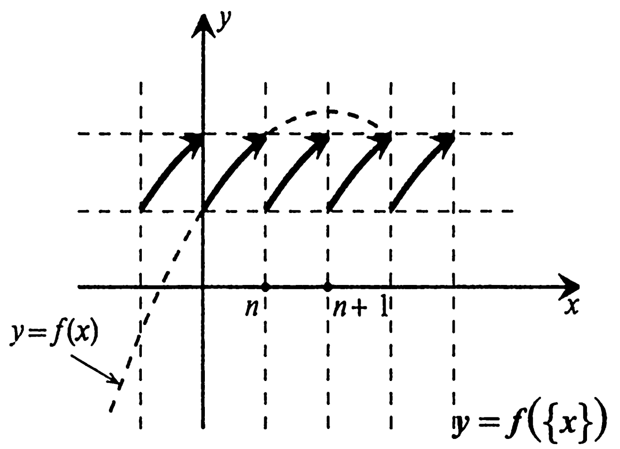
3) *на проміжках* $x\in[n;n+1)$ $y=f([x])=f(n)$.



Мал. 19

Функція $y=f(\{x\})$ — періодична з періодом $T_0=1$; при $x\in[0;1)$ $f(\{x\})=f(x)$. Тоді **для того, щоб побудувати графік функції** $y=f(\{x\})$, **треба** (див. мал. 20):

1) *побудувати графік функції* $y=f(x)$ *на проміжку* $x\in[0;1)$;
2) *скористатися періодичністю* $y=f(\{x\})$.

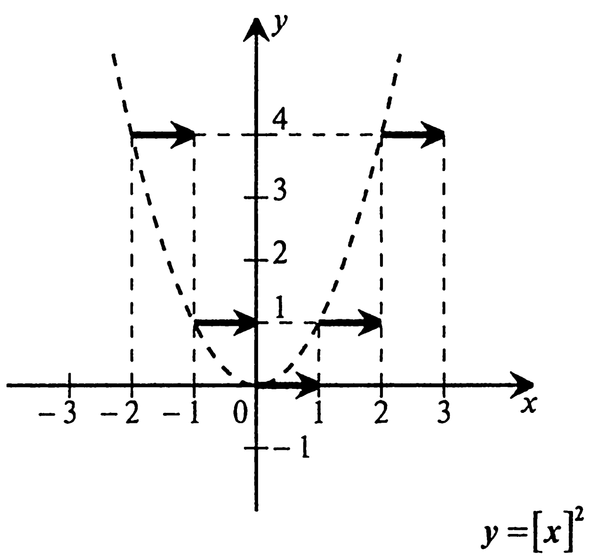


Мал. 20

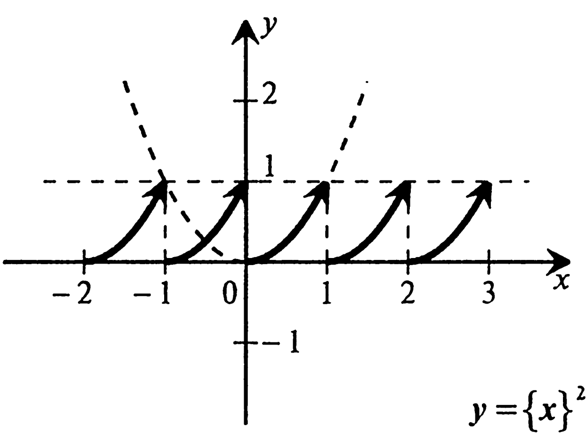
119. а) $y=[x]^2$; б) $y=\{x\}^2$.

Розв'язання.

Графіки функцій будуємо за алгоритмом, вказаним вище:

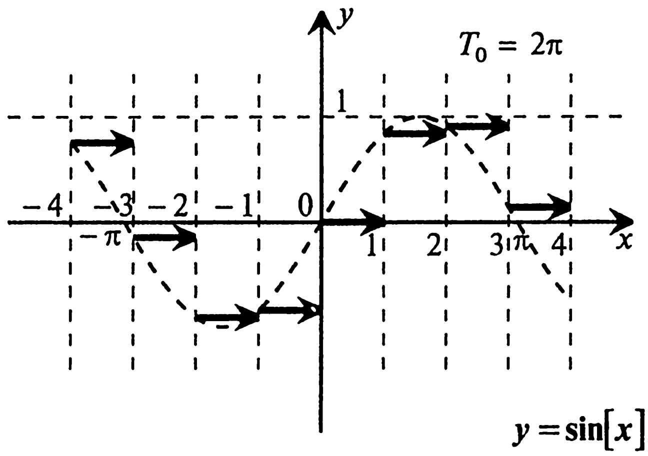


Мал. 21



Мал. 22

120. $y = \sin[x]$, $y = \sin\{x\}$.



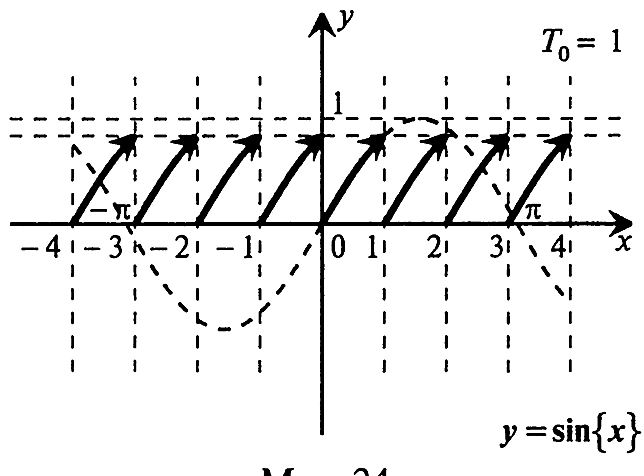
Мал. 23

Вказівка.

Побудуйте графік функції

$$y = \sin x$$

і здійсніть побудову за відповідним алгоритмом, пропонованим перед завданням 119.



Мал. 24

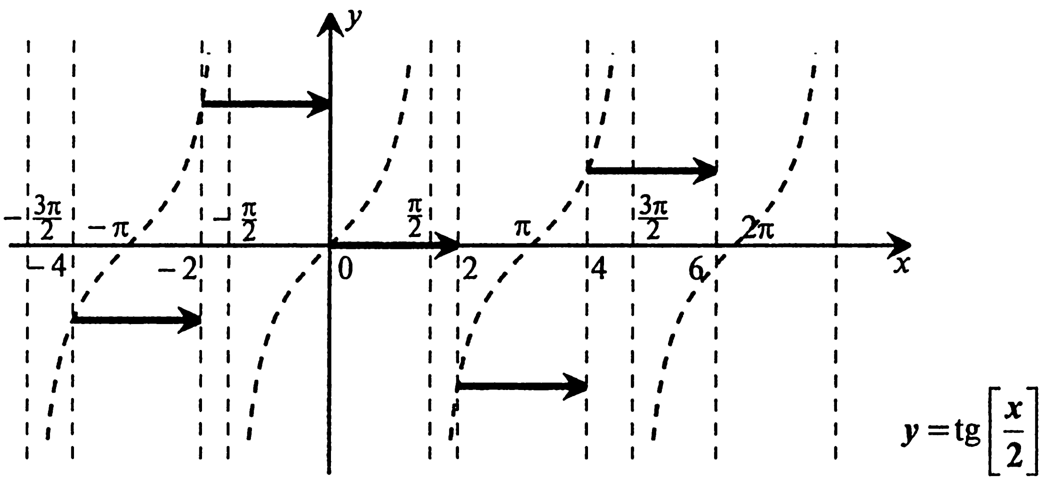
121. а) $y = \mathrm{tg}\left[\dfrac{x}{2}\right]$; б) $y = \mathrm{tg}\left\{\dfrac{x}{2}\right\}$.

Розв'язання.

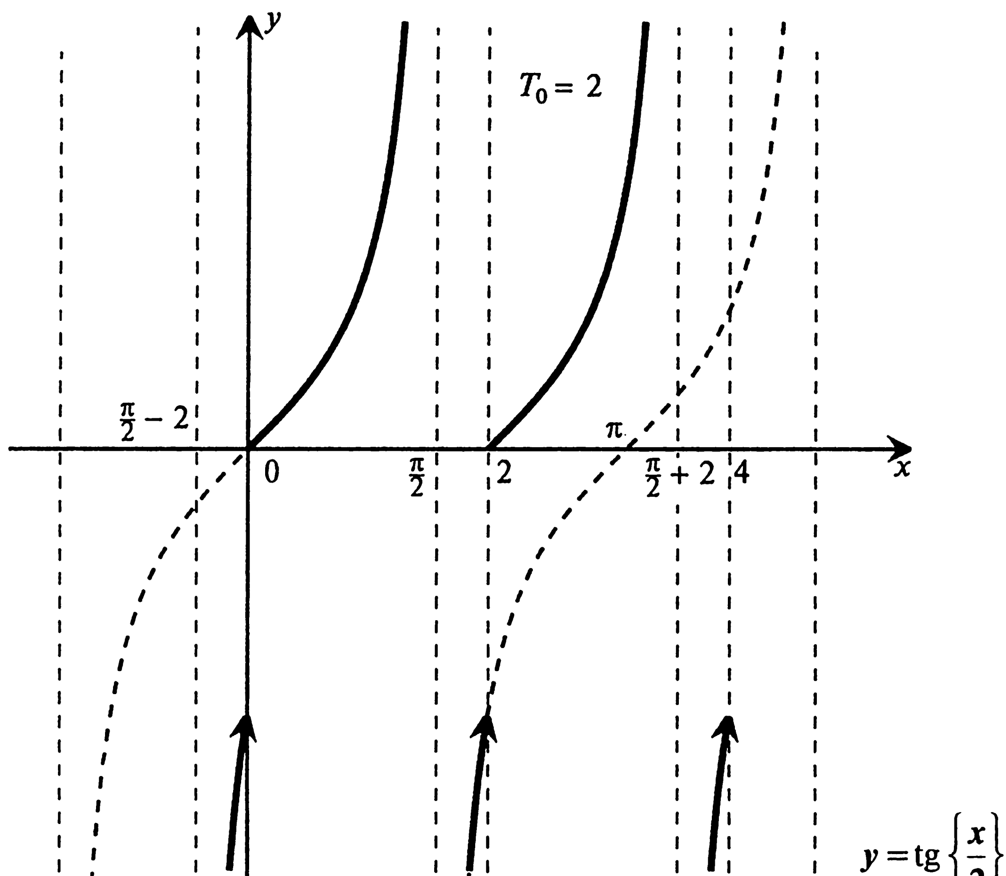
Для побудови графіка функції $y = \mathrm{tg}\left[\dfrac{x}{2}\right]$ проведемо прямі $x = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$. На проміжках $x \in [2n; 2(n+1))$ (див. мал. 25)

$$y = \mathrm{tg}\left[\frac{x}{2}\right] = \mathrm{tg}\, n\,.$$

Для побудови графіка функції $y = \operatorname{tg}\left\{\frac{x}{2}\right\}$ побудуємо $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ на проміжку $x \in [0;2)$ і врахуємо, що основний період функції $y = \operatorname{tg}\left\{\frac{x}{2}\right\}$ $T_0 = 2$ (див. мал. 26).



Мал. 25

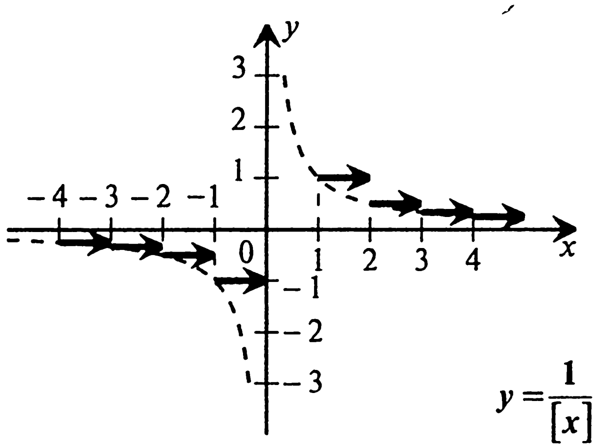


Мал. 26

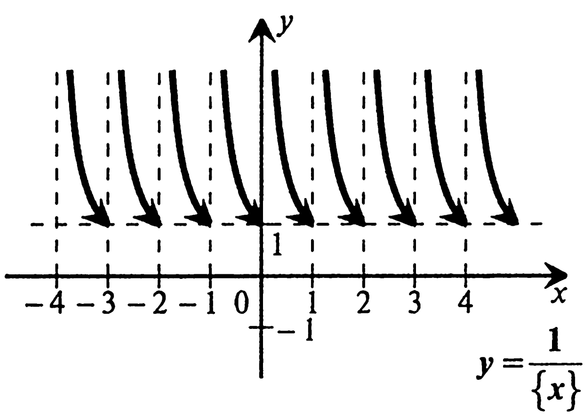
122. а) $y=\dfrac{1}{[x]}$; б) $y=\dfrac{1}{\{x\}}$.

Розв'язання.

Можна використати алгоритми побудови графіків функцій від антьє та мантиси числа (відповідно), а можна скористатися графіками $y=[x]$ та $y=\{x\}$ і здійснити їх перетворення за планом $y=f(x)\to y=\dfrac{1}{f(x)}$.



Мал. 27



Мал. 28

Для того, щоб побудувати графік функції $y=[f(x)]$ **треба** (див. мал. 29):

1) *побудувати графік функції* $y=f(x)$;

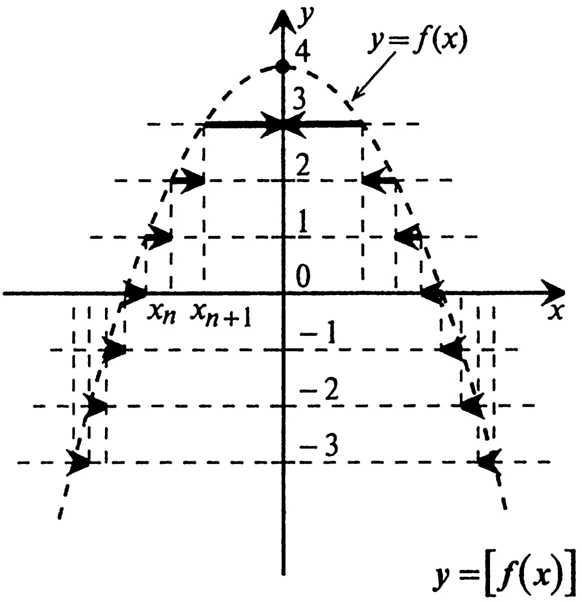
2) *провести прямі* $y=n,\ n\in\mathbb{Z}$;

3) *з точок* $(x_n;n)$ *перетину прямих* $y=n$ *з кривою* $y=f(x)$ *провести прямі паралельно осі* (OY);

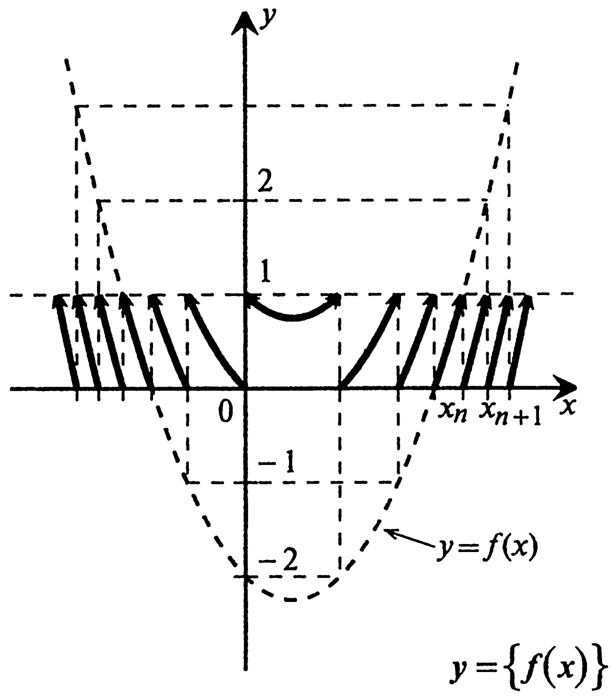
4) $f(x)=n$ *на проміжку* $[x_n;x_{n+1})$, *якщо* $f(x)$ *на цьому проміжку зростає*;

$f(x)=n+1$ *на проміжку* $(x_n;x_{n+1}]$, *якщо* $f(x)$ *на цьому проміжку спадає*;

5) *якщо* x_n *— точка екстремуму* $f(x)$, *то значення* $y=[f(x_n)]$ *обчислюємо окремо.*



Мал. 29



Мал. 30

Графік функції $y=\{f(x)\}$ **будуємо як різницю** $f(x)-[f(x)]$.

Для того треба (див. мал. 30):

1) *побудувати графік функції* $y=f(x)$;

2) *провести прямі* $y=n,\ n\in\mathbb{Z}$;

3) *з точок перетину прямих* $y=n$ *з кривою* $y=f(x)$ *провести прямі паралельно осі* (OY);

4) *використати, що*

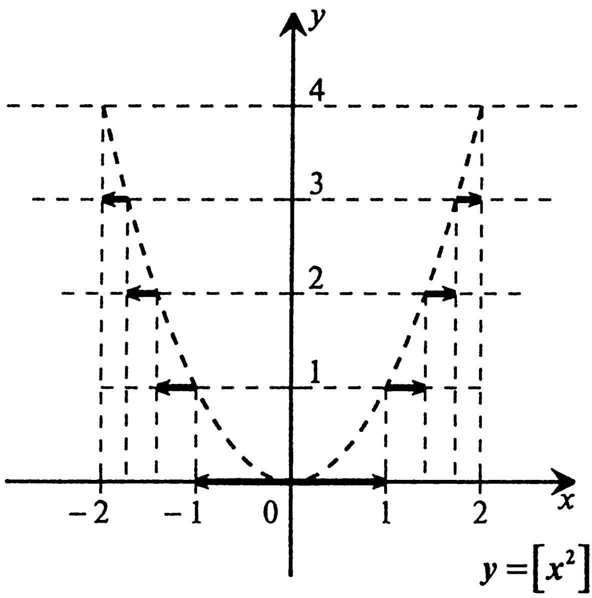
- $\{f(x)\}=f(x)-n$ *на проміжку* $[x_n;x_{n+1})$, *якщо* $f(x)$ *на цьому проміжку зростає*;
- $\{f(x)\}=f(x)-(n+1)$ *на проміжку* $(x_n;x_{n+1}]$, *якщо* $f(x)$ *на цьому проміжку спадає*;

5) *якщо* x_n *— точка екстремуму* $f(x)$, *то значення* $y=\{f(x_n)\}$ *обчислюємо окремо.*

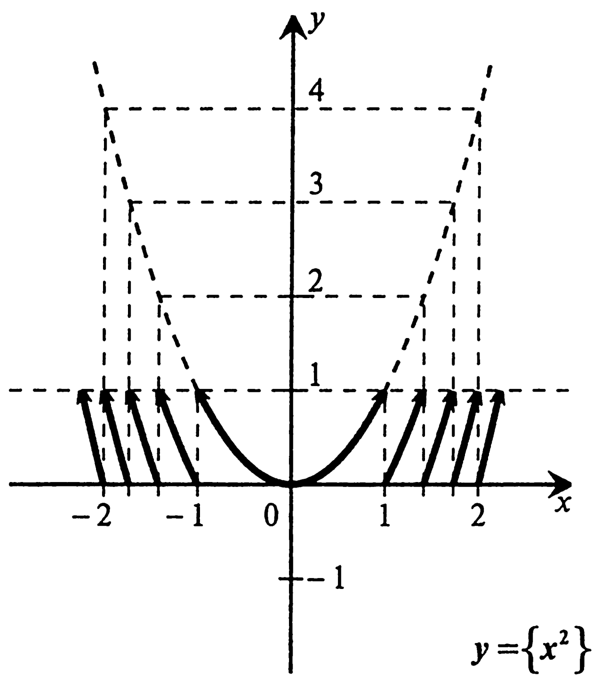
123. а) $y=\left[x^2\right]$; б) $y=\left\{x^2\right\}$.

Розв'язання.

Спираємося на відповідний алгоритм побудови, зазначений вище. Відповідь на малюнках 31 і 32.



Мал. 31

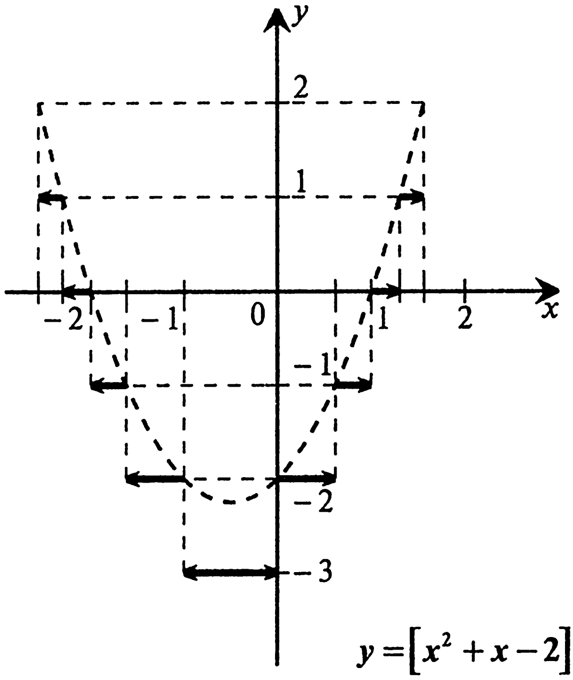


Мал. 32

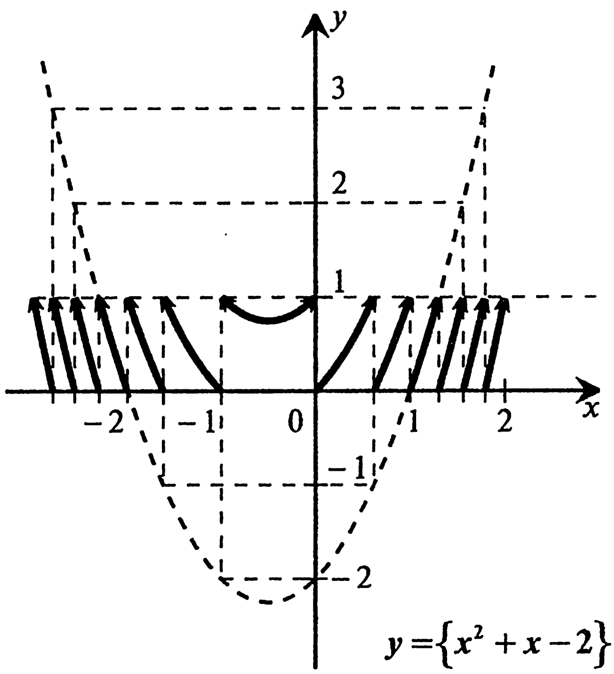
124. а) $y=\left[x^2+x-2\right]$; б) $y=\left\{x^2+x-2\right\}$.

Розв'язання.

З графіка функції $y=x^2+x-2$, спираючись на алгоритми побудови $y=\left[f(x)\right]$ і $y=\left\{f(x)\right\}$, наведені перед завданням 123, маємо шукані ГМТ (мал. 33, 34).



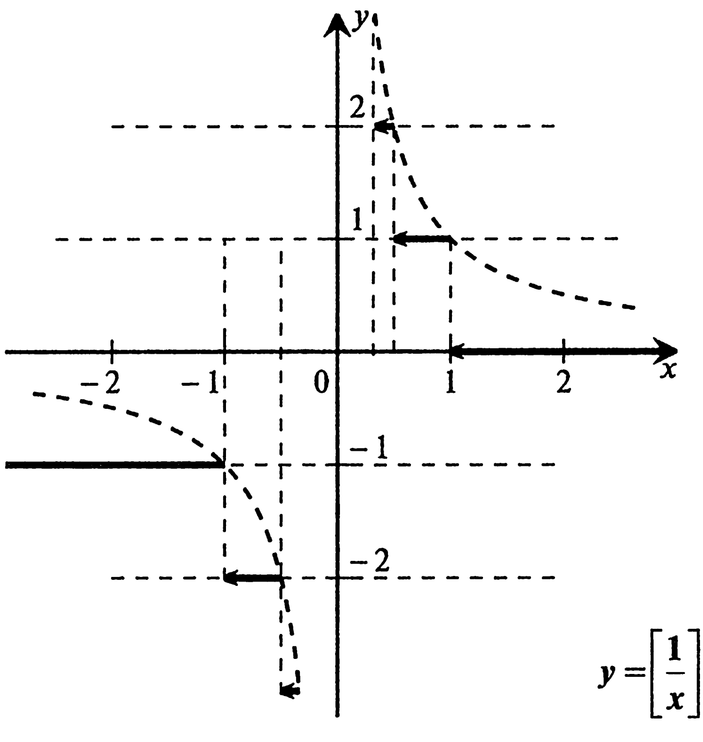
Мал. 33



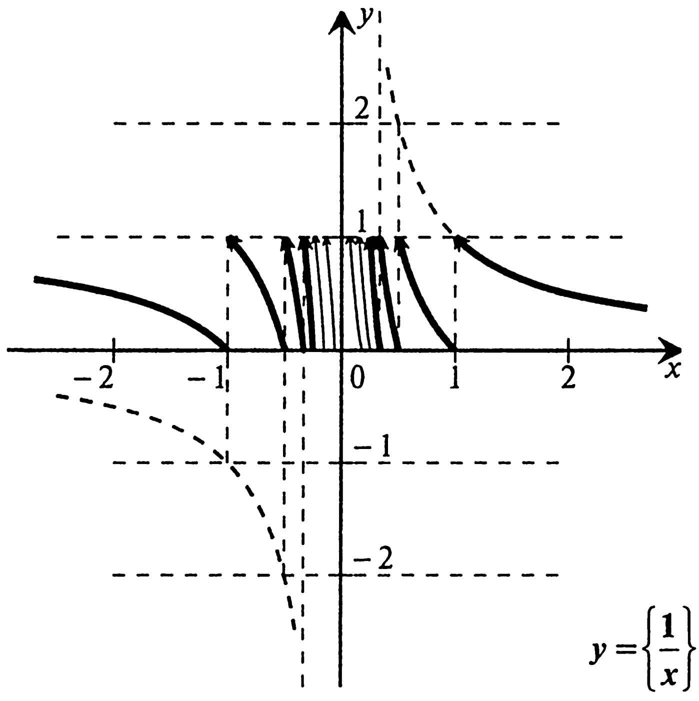
Мал. 34

125. а) $y=\left[\dfrac{1}{x}\right]$; б) $y=\left\{\dfrac{1}{x}\right\}$.

Відповідь на малюнках 35 і 36, відповідно.



Мал. 35



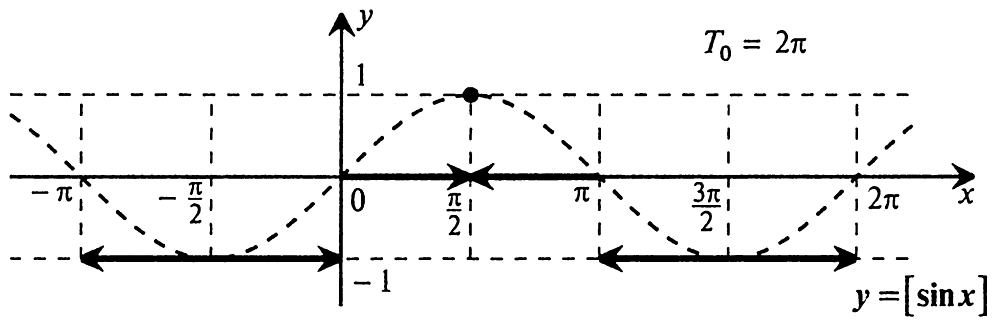
Мал. 36

Примітка.

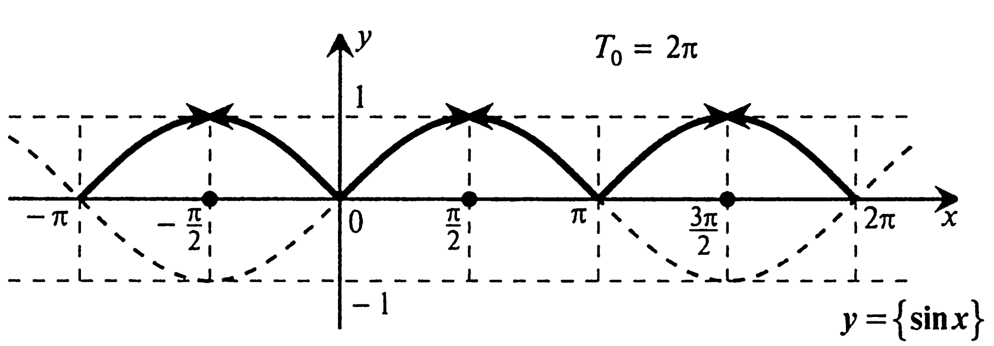
Зверніть увагу, що частини гіпербол асимптотично наближаються до осі (OY) зліва та справа.

126. а) $y = [\sin x]$; б) $y = \{\sin x\}$.

Відповідь на малюнках 37 і 38, відповідно.



Мал. 37



Мал. 38

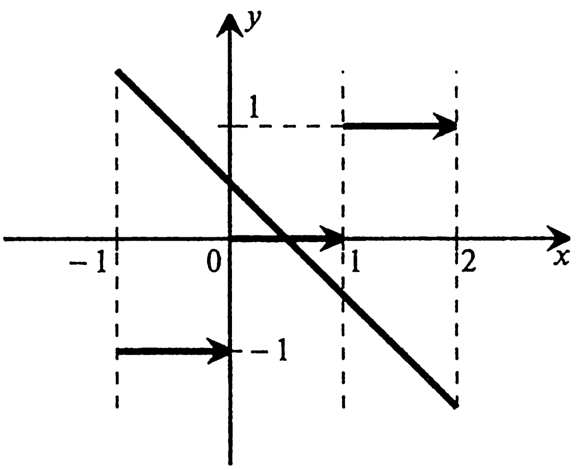
Наведемо декілька прикладів графічного розв'язування задач.

127. Розв'язати рівняння

$$2[x]+2x-1=0.$$

Розв'язання.

Запишемо задане рівняння у вигляді $[x]=\frac{1}{2}-x$ і побудуємо графіки функцій $y=[x]$ і $y=\frac{1}{2}-x$ (мал. 39).



Мал. 39

Маємо одну точку перетину графіків, у якій $[x]=0$. Тоді

$$\frac{1}{2}-x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $x=\frac{1}{2}$.

128. Розв'язати рівняння

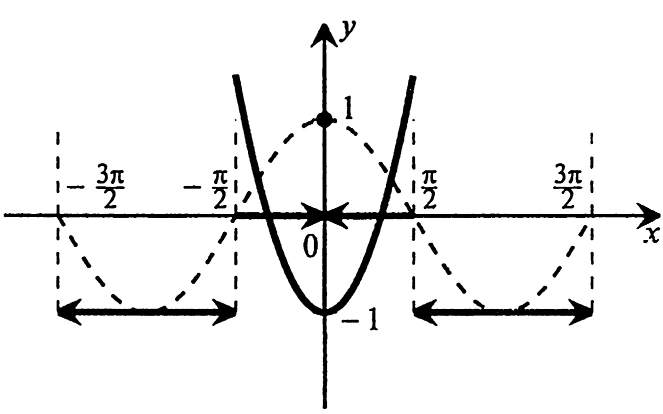
$$x^2-1-[\cos x]=0.$$

Розв'язання.

Запишемо задане рівняння у вигляді

$$[\cos x]=x^2-1$$

і побудуємо графіки функцій $y=[\cos x]$ і $y=x^2-1$ в одній координатній площині (мал. 40).



Мал. 40

Графіки перетинаються у двох точках, де $[\cos x]=0$. Тоді

$$x^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad |x|=1.$$

Відповідь. $x=\pm 1$.

129. Знайти площу геометричних фігур, які утворені точками з координатами, що задовольняють співвідношенням:

$$\text{а)}\begin{cases}[x]+[y]=0\\(x-1)^2+y^2\le 1\end{cases}; \quad \text{б)}\begin{cases}[x+y]=0\\x(x-1)\le 0\end{cases}.$$

Вказівка.

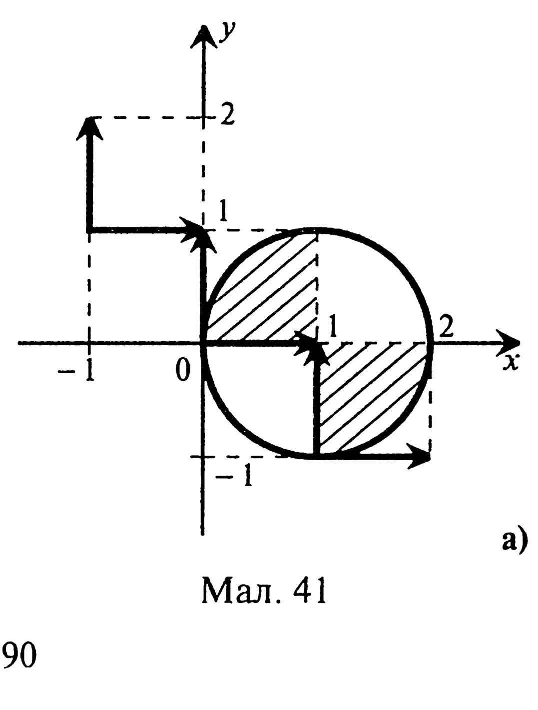
Побудови ГМТ, що відповідають виразам із знаком антьє аналогічні задачам 112 і 117. Побудову ГМТ нерівностей радимо розпочинати з побудови відповідних рівностей. Врахуйте, що

$$[x+y]=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0\le x+y<1; \qquad x(x-1)\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in[0;1].$$

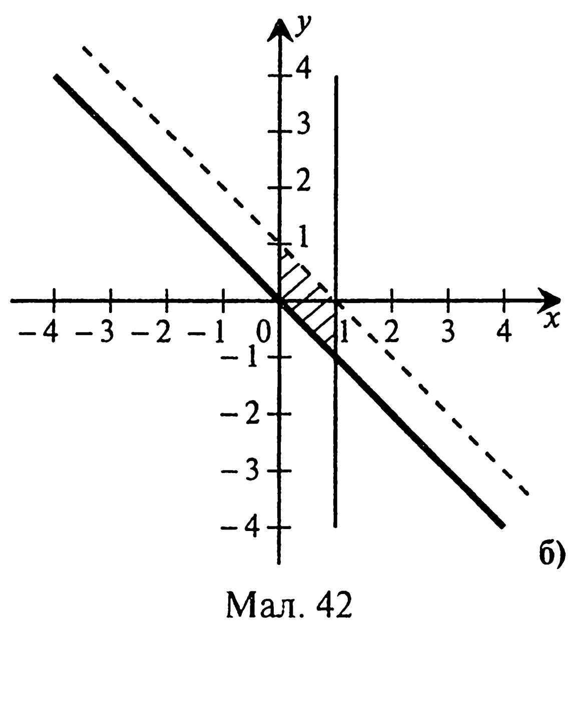
Отримайте ГМТ, представлені на малюнках 41 і 42.

Відповідь. а) $\frac{\pi}{2}$ кв. одиниць;

б) 1 кв. одиниця.



Мал. 41



Мал. 42

130. Розв'язати відносно x рівняння:

$$[x-1]=\left[\frac{x+2}{2}\right].$$

Розв'язання.

Дане рівняння може бути розв'язане аналітично способами, аналогічними способам розв'язування рівнянь § 3[1]. Розглянемо графічний спосіб розв'язання.

Врахуємо, що

$$\left[\frac{x+2}{2}\right]=\left[\frac{x}{2}+1\right]=\left[\frac{x}{2}\right]+1,$$

і побудуємо на площині (XOY) графіки функцій

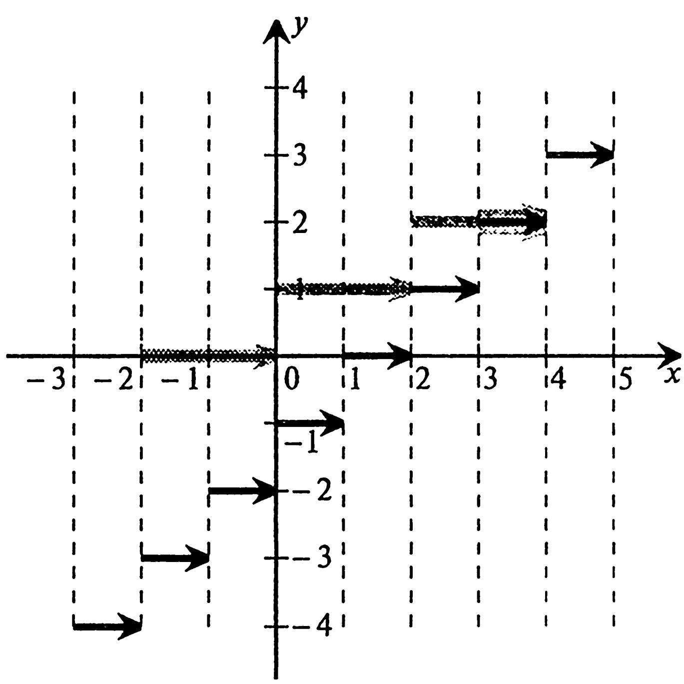
$$y=[x-1] \quad \text{і} \quad y=\left[\frac{x}{2}\right]+1 \text{ (див. мал. 43).}$$

Перший графік отримаємо переміщенням графіка функції $y=[x]$ уздовж осі (OX) праворуч на 1.

Другий графік — розтягненням графіка функції $y=[x]$ уздовж осі (OX) у 2 рази і переміщенням уздовж осі (OY) угору на 1.

Спільні точки отриманих графіків і є розв'язками заданого рівняння.

Відповідь. $x\in[3;4)$.



Мал. 43

[1] Наприклад, задач 69 і 81.

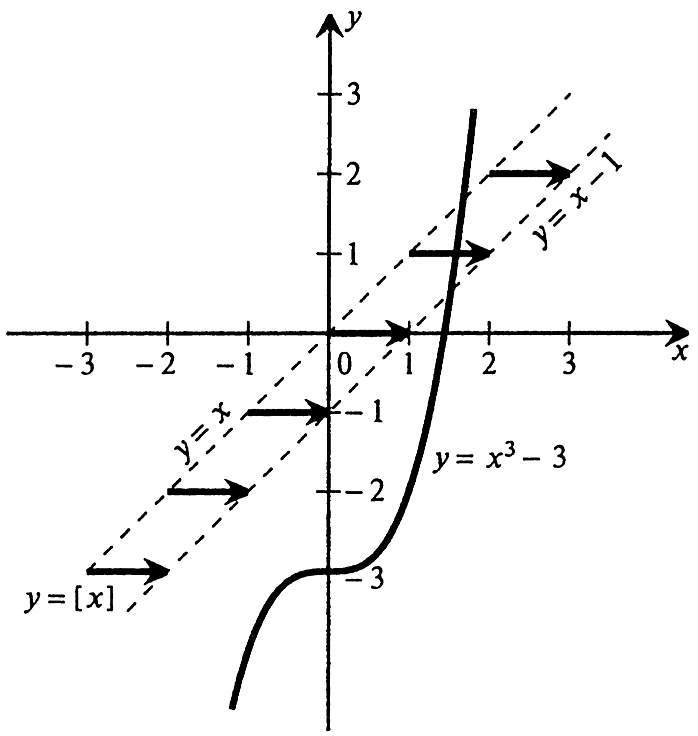
131. Розв'язати відносно x рівняння:

$$x^3 - [x] = 3.$$

Розв'язання.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій

$$y = x^3 - 3 \text{ і } y = [x].$$



Мал. 44

З графіків (мал. 44) видно, що корінь заданого в умові рівняння збігається з коренем рівняння $x^3 - 3 = 1$, тобто $x = \sqrt[3]{4}$. Цей корінь — єдиний, бо функція $y = x^3$ має тільки по одній спільній точці з прямими $y = x$ та $y = x - 1$, причому ці спільні точки належать інтервалу $[1; 2)$.

Примітка. Неважко довести[1], що

$$x^3 < x - 1 \text{ при } x \le 0, \text{ і } x^3 > x \text{ при } x \ge 2.$$

Відповідь. $x = \sqrt[3]{4}$.

Графічним способом можуть бути розв'язані також деякі нетривіальні нерівності з антьє та мантисою. Для порівняння розглянемо нерівність, яка була розв'язана у § 4 (задача 101).

[1] Наприклад, застосовуючи похідну, аналогічно тому, як ми це робили при розв'язуванні задачі 33.

132. Розв'язати нерівність

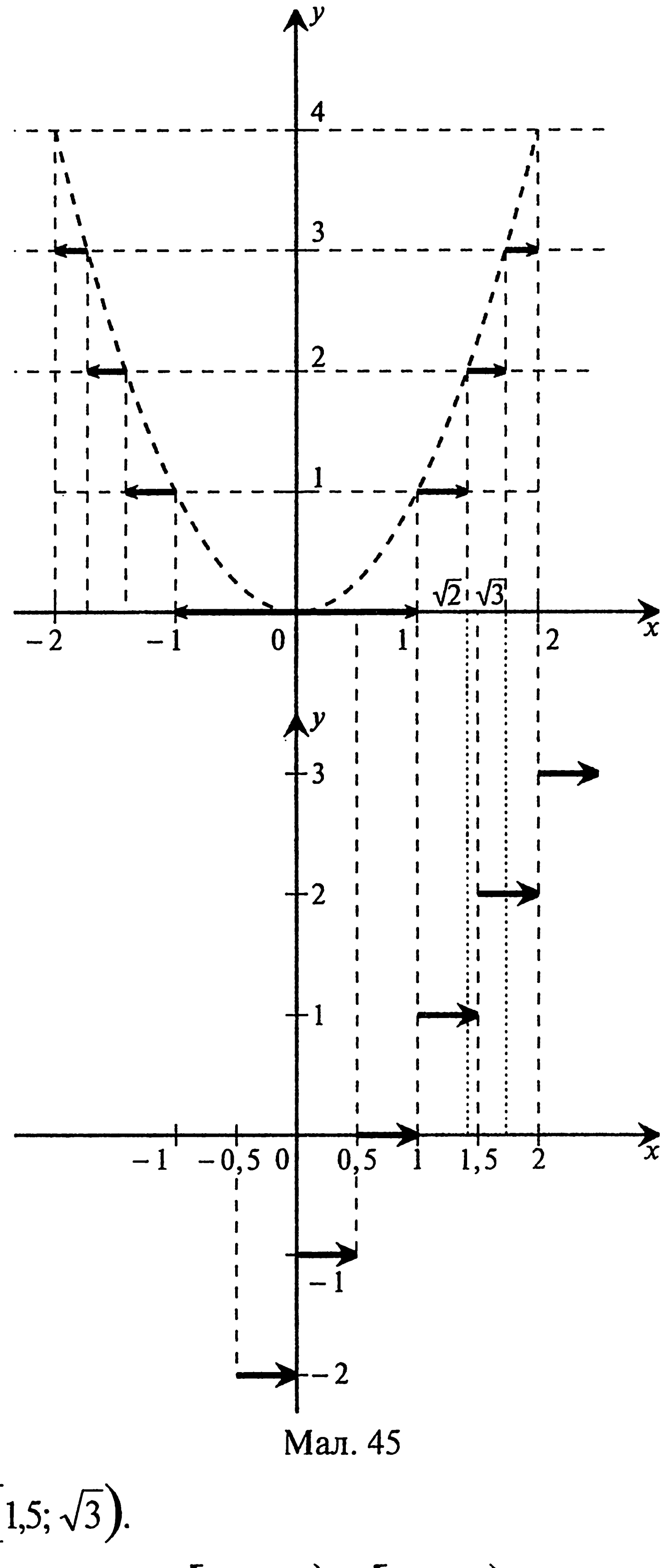
$$\left[x^2\right]-[2x]+1\le 0.$$

Розв'язання.

Перепишемо задану нерівність у вигляді

$$\left[x^2\right]\le[2x]-1$$

і побудуємо графіки $y=\left[x^2\right]$ (див. задачу 123) і $y=[2x]-1$ (мал. 45).



Мал. 45

Останній графік ми отримаємо стисненням графіка $y=[x]$ уздовж осі (OX) у 2 рази та переміщенням уздовж осі (OY) на 1 вниз.

Розв'язком нерівності буде множина точок, для яких графік $y=[2x]-1$ збігається з графіком $y=\left[x^2\right]$ або розташований вище за останній.

Проектуючи відповідні інтервали на вісь (OX), отримаємо:

$$x\in[0{,}5;1)\cup\left[1;\sqrt{2}\right)\cup\left[1{,}5;\sqrt{3}\right).$$

Відповідь. $x\in\left[0{,}5;\sqrt{2}\right)\cup\left[1{,}5;\sqrt{3}\right)$.

§ 6. АНТЬЄ В ЗАДАЧАХ НА ПОДІЛЬНІСТЬ

Задачі, які ми зараз будемо розглядати, цікаві тим, що в них антьє, як правило, не присутнє в умові, а допомагає розв'язанню.

Розмову про використання цілої частини числа в задачах на подільність почнемо з того, що **з'ясуємо, скільки у послідовності 1,2, 3, ..., n чисел, що кратні p.**

Нехай таких чисел буде k. Тоді найбільшим з них буде число kp, і тому $kp \le n < (k+1)p$, тобто $k \le \frac{n}{p} < k+1$ і

$$k = \left[\frac{n}{p}\right]. \tag{6.1}$$

133. Скільки чисел послідовності 1, 2, 3, ..., 1000 діляться на 3?

Розв'язання.

Використовуючи (6.1), отримуємо $k = \left[\frac{1000}{3}\right] = 333.$

Відповідь. 333 числа.

134. Скільки чисел послідовності 1, 2, 3, ..., 1000 кратні 5?

Відповідь. 200 чисел.

135. Скільки чисел послідовності 1, 2, 3, ..., 1000 діляться на 3 і на 7 ?

Розв'язання.

Шукані числа повинні бути кратними числу $3 \cdot 7 = 21$. Тоді таких чисел, за (6.1), буде

$$k = \left[\frac{1000}{21}\right] = 47.$$

Відповідь. 47 чисел.

136. Скільки чисел послідовності 1, 2, 3, ..., 1000 діляться на 3 або на 7 ?

Розв'язання.

Чисел, що кратні числу 3, буде $\left[\frac{1000}{3}\right]$, чисел, що кратні числу 7, буде $\left[\frac{1000}{7}\right]$. Серед цих чисел двічі враховані числа, що діляться і на 3, і на 7. Цих чисел — 47 (див. задачу 135). Отже, шукана кількість чисел дорівнює

$$\left[\frac{1000}{3}\right] + \left[\frac{1000}{7}\right] - \left[\frac{1000}{21}\right] = 333 + 142 - 47 = 428.$$

Відповідь. 428 чисел.

137. Скільки чисел послідовності 1, 2, 3, ..., 1000 діляться на 10 або на 14 ?

Розв'язання.

Чисел, що кратні 10, маємо $\left[\frac{1000}{10}\right] = 100$, чисел, що кратні 14 — $\left[\frac{1000}{14}\right] = 71$. Серед цих чисел двічі враховані числа, що кратні НСК $(10;14)$[1] тобто $2\cdot5\cdot7=70$, їх кількість дорівнює $\left[\frac{1000}{70}\right]=14$. Отже, шукана кількість буде $100+71-14=157$ чисел.

Відповідь. 157 чисел.

138. Числа a і b взаємно прості. Скільки чисел від 1 до c $(c>a>b)$ діляться хоча б на одне з чисел a або b?

Відповідь. $\left[\frac{c}{a}\right]+\left[\frac{c}{b}\right]-\left[\frac{c}{ab}\right]$.

139. В урні знаходиться 500 кульок, кожна з яких має номер від 1 до 500. Яка ймовірність того, що витягнута навмання кулька буде мати номер, який кратний одному з чисел: 5, 14, 21?

Розв'язання.

Шукана ймовірність дорівнює $\frac{m}{500}$, де m — кількість кульок, номери яких діляться на 5 або на 14, або на 21. Знайдемо значення m.

Серед чисел 1, 2, 3, ..., 500 маємо:

$$\left[\frac{500}{5}\right]=100 \text{ чисел, що кратні } 5,$$

позначимо їх множину через **A**;

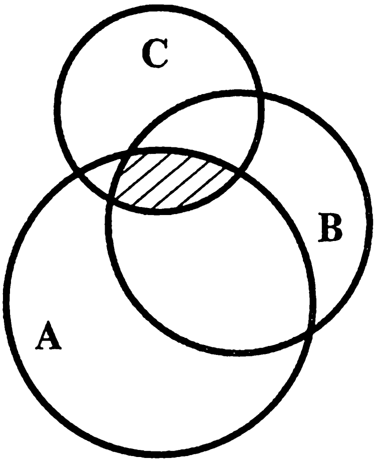
$$\left[\frac{500}{14}\right]=35 \text{ чисел, що кратні } 14,$$

позначимо їх множину через **B**;

$$\left[\frac{500}{21}\right]=23 \text{ чисел, що кратні } 21,$$

позначимо їх множину через **C**.

[1] НСК (x,y) — це найменше спільне кратне чисел x і y.



Мал. 46

Разом це буде

$$100+35+23=158 \text{ чисел.}$$

Перетини **A** і **B**, **B** і **C**, **A** і **C** (див. мал. 46) містять числа, що діляться

на НСК $(5;14)=5\cdot 2\cdot 7=70$,

на НСК $(14;21)=2\cdot 3\cdot 7=42$,

на НСК $(5;21)=5\cdot 21=105$,

відповідно.

Такі числа враховано двічі, віднімімо їх. Маємо:

$$108-\left[\frac{500}{70}\right]-\left[\frac{500}{42}\right]-\left[\frac{500}{105}\right].$$

Але числа, що діляться на НСК $(5;14;21)=210$ належать і **A**, і **B**, і **C** (зафарбовані на малюнку 46). При попередньому відніманні вони зникли зовсім, отже, цю кількість треба додати. Маємо:

$$m=\left[\frac{500}{5}\right]+\left[\frac{500}{14}\right]+\left[\frac{500}{21}\right]-$$

$$-\left[\frac{500}{70}\right]-\left[\frac{500}{42}\right]-\left[\frac{500}{105}\right]+\left[\frac{500}{210}\right]=$$

$$=100+35+23-7-11-4+2=138.$$

Шукана ймовірність дорівнює $\frac{138}{500}=0{,}276$.

Відповідь. 0,276.

140. Знайти всі натуральні числа n такі, що число n^3+3 ділиться на $n+3$.

Вказівка.

Виділіть цілу частину дробу $\dfrac{n^3+3}{n+3}$.

Відповідь. $n \in \{1; 3; 5; 9; 21\}$.

141. Знайти всі цілі числа n такі, що число n^5+3 ділиться на n^2+1.

Вказівка.

Виділіть цілу частину дробу $\dfrac{n^5+3}{n^2+1}$.

Відповідь. $n \in \{-3; -1; 0; 1; 2\}$.

142. На який максимальний степінь простого числа p ділиться число $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$?[1]

Розв'язання.

Позначимо шуканий степінь через α. Серед чисел 1, 2, 3, ..., n, за (6.1), маємо $\left[\dfrac{n}{p}\right]$ чисел, що кратні p. Тобто

$$n! = p \cdot 2p \cdot 3p \cdot \ldots \cdot \left(\left[\frac{n}{p}\right]p\right) \cdot M_1 = p^{\left[\frac{n}{p}\right]}\left[\frac{n}{p}\right]! \cdot M_1,$$

де M_1 — число, що не ділиться на p.

Якщо $\left[\dfrac{n}{p}\right] < p$, то

$$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right].$$

[1] Нагаадємо, що число $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ називається *факторіалом* числа n.

Якщо $\left[\frac{n}{p}\right] > p$, то серед чисел 1, 2, 3, ..., $\left[\frac{n}{p}\right]$, за (6.1), маємо

$$\left[\frac{1}{p}\left[\frac{n}{p}\right]\right]=\left[\frac{n}{p^2}\right]$$

(див. властивість 2.13) чисел, що кратні p. Тобто

$$\left[\frac{n}{p}\right]! = p\cdot 2p\cdot\ldots\cdot\left(\left[\frac{n}{p^2}\right]p\right)M_2 = p^{\left[\frac{n}{p^2}\right]}\left[\frac{n}{p^2}\right]!\cdot M_2,$$

де M_2 — число, що не ділиться на p.

Якщо $\left[\frac{n}{p^2}\right] < p$, то

$$\alpha=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right].$$

Якщо $\left[\frac{n}{p^2}\right] > p$, то після міркувань, аналогічних попереднім, отримаємо

$$\alpha=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^{s-1}}\right], \tag{6.2}$$

де $\left[\frac{n}{p^{s-1}}\right]\neq 0$, а $\left[\frac{n}{p^s}\right]=0$, тобто $p^{s-1}\leq n < p^s$, або $\begin{cases}\frac{n}{p^s}<1\\ \frac{n}{p^{s-1}}\geq 1\end{cases}$.

Відповідь. $\alpha=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^{s-1}}\right]$, де $\begin{cases}\frac{n}{p^s}<1\\ \frac{n}{p^{s-1}}\geq 1\end{cases}$.

143. На який максимальний степінь трійки ділиться число 100! ?

Розв'язання.

За (6.2), маємо

$$\alpha=\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{9}\right]+\left[\frac{100}{27}\right]+\left[\frac{100}{81}\right]=33+11+3+1=48.$$

Відповідь. 48.

144. Скількома нулями закінчується число 2006! ?

Розв'язання.

Неважко зрозуміти, що відповіддю буде максимальний степінь числа 10, на який ділиться число 2006!. Але $10=2\cdot 5$. Число 2 входить множником у 2006! більшу кількість разів, ніж 5. Тому розв'язком буде максимальний степінь числа 5, на який ділиться 2006! Використавши (6.2), отримаємо, що

$$\alpha=\left[\frac{2006}{5}\right]+\left[\frac{2006}{25}\right]+\left[\frac{2006}{125}\right]+\left[\frac{2006}{625}\right]=$$

$$=401+80+16+3=500.$$

Відповідь. Число 2006! закінчується 500 нулями.

145. З яким показником просте число p входить у розклад числа а) $(2n)!!$; б) $(2n+1)!!$?[1]

Розв'язання.

а) Запишемо $(2n)!!$ у вигляді:

$$(2n)!!=2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n=2^n\cdot n!$$

Тоді при $p=2$ можна знайти шуканий степінь α :

$$\alpha=n+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{2^{s-1}}\right],\ \text{де}\ \frac{n}{2^s}<1\le\frac{n}{2^{s-1}}.$$

[1] Нагадаємо, що $(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n$, $(2n+1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)$.

Якщо $p \neq 2$, то

$$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^{k-1}}\right], \text{ де } \frac{n}{p^k} < 1 \leq \frac{n}{p^{k-1}}.$$

б) Розглянемо добуток

$$(2n)!! \cdot (2n+1)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1) =$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1) = (2n+1)!$$

Тоді шуканий степінь β дорівнює:

$$\beta = \left[\frac{2n+1}{p}\right] + \left[\frac{2n+1}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{2n+1}{p^{k-1}}\right] - \alpha,$$

$$\text{де } \frac{2n+1}{p^k} < 1 \leq \frac{2n+1}{p^{k-1}},$$

а значення α ми знайшли у завданні 145, а.

Відповідь. *а*) при $p = 2$

$$\alpha = n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^{s-1}}\right],$$

$$\text{де } \frac{n}{2^s} < 1 \leq \frac{n}{2^{s-1}};$$

при $p \neq 2$

$$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^{k-1}}\right],$$

$$\text{де } \frac{n}{p^k} < 1 \leq \frac{n}{p^{k-1}}.$$

б) $$\beta = \left[\frac{2n+1}{p}\right] + \left[\frac{2n+1}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{2n+1}{p^{k-1}}\right] - \alpha,$$

$$\text{де } \frac{2n+1}{p^k} < 1 \leq \frac{2n+1}{p^{k-1}}.$$

146. Довести, що число C_{1996}^{996} ділиться на 160.

Розв'язання.

Оскільки $160 = 2^5 \cdot 5$, то для подільності числа C_{1996}^{996} на 160 необхідно й достатньо, щоб C_{1996}^{996} ділилося на 2^5 і на 5.

Маємо

$$C_{1996}^{996} = \frac{1996!}{1000! \cdot 996!}.$$

Знайдемо показники степенів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, з якими числа 2 і 5 входять у розклади на прості множники чисел 1996!, 1000! і 966!, відповідно. Маємо:

$$\alpha_1 = \left[\frac{1996}{2}\right] + \left[\frac{1996}{2^2}\right] + \left[\frac{1996}{2^3}\right] + \ldots + \left[\frac{1996}{2^{10}}\right] = 1989;$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{2^2}\right] + \left[\frac{1000}{2^3}\right] + \ldots + \left[\frac{1000}{2^9}\right] = 994;$$

$$\alpha_3 = \left[\frac{996}{2}\right] + \left[\frac{996}{2^2}\right] + \left[\frac{996}{2^3}\right] + \ldots + \left[\frac{996}{2^9}\right] = 990$$

і $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 5$, а це значить, що C_{1996}^{996} ділиться на 2^5.

Аналогічно:

$$\beta_1 = \left[\frac{1996}{5}\right] + \left[\frac{1996}{5^2}\right] + \left[\frac{1996}{5^3}\right] +. \left[\frac{1996}{5^4}\right] = 496;$$

$$\beta_2 = \left[\frac{1000}{5}\right] + \left[\frac{1000}{5^2}\right] + \left[\frac{1000}{5^3}\right] + \left[\frac{1000}{5^4}\right] = 249;$$

$$\beta_3 = \left[\frac{996}{5}\right] + \left[\frac{996}{5^2}\right] + \left[\frac{996}{5^3}\right] + \left[\frac{996}{5^4}\right] = 246$$

і $\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = 1$, а це значить, що C_{1996}^{996} ділиться на 5.

Таким чином, C_{1996}^{996} ділиться на 160. Що і вимагалося довести.

Будемо називати **цілими точками** координатної площини точки, координати яких є цілими числами.

Далі розглянемо, як можна підрахувати кількість цілих точок, що знаходяться всередині плоскої фігури.

147. Скільки цілих точок розташовано всередині та на сторонах трикутника, утвореного прямими $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$, $x=10$ та віссю абсцис?

Розв'язання.

Знайдемо значення функції $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$ при цілих значеннях $x=1,2,3,\ldots,10$ (зауважимо, що $y=0$ при $x=\frac{3}{4}$). Отримаємо ординати:

$$\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{3}{2}, \frac{13}{6}, \frac{17}{6}, \frac{7}{2}, \frac{25}{6}, \frac{29}{6}, \frac{11}{2}, \frac{37}{6}.$$

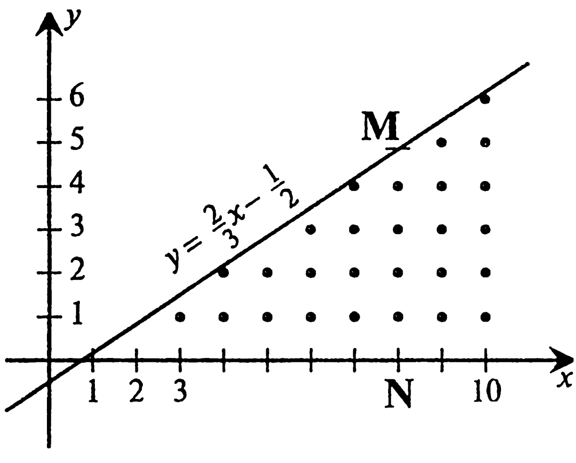
Усередині відрізка MN довжини a цілих точок буде $[a]$ (див. мал. 47). Тоді кількість цілих точок, які лежать усередині та на сторонах трикутника, буде дорівнювати сумі цілих частин знайдених ординат плюс 10 точок, що лежать на осі OX. Отже:

$$\left[\frac{1}{6}\right]+\left[\frac{5}{6}\right]+\ldots+\left[\frac{37}{6}\right]+10=$$

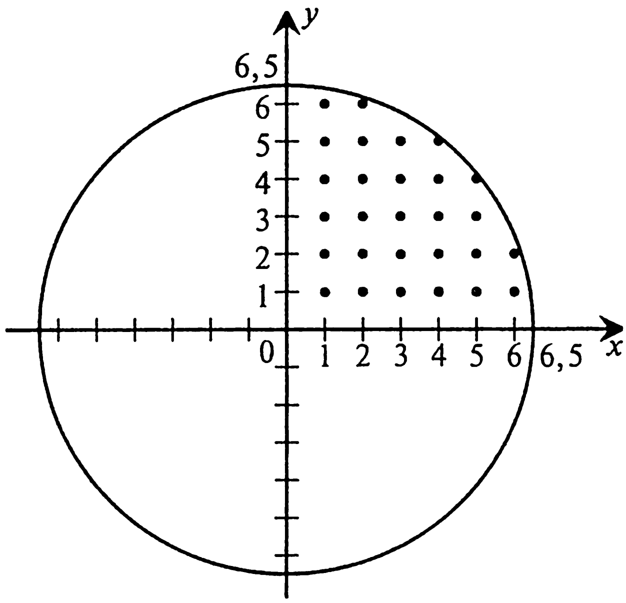
$$=1+2+2+3+4+$$

$$+4+5+6+10=37.$$

Відповідь. 37 цілих точок.



Мал. 47



Мал. 48

148. Скільки цілих точок лежить усередині круга радіуса 6,5 з центром у початку координат?

Розв'язання.

Шукана кількість цілих точок дорівнює кількості точок на координатних осях плюс кількість точок у координатних чвертях, обмежених колом.

За малюнком 48 маємо, що на осях лежать 25 точок.

Запишемо рівняння даного кола: $x^2+y^2=6{,}5^2$. Для першої кординатної чверті це рівняння можна представити у вигляді:

$$y=\sqrt{6{,}5^2-x^2}.$$

Визначимо кількість точок, що належить цій чверті круга (без точок на координатних осях). Маємо:

$$\left[\sqrt{6{,}5^2-1^2}\right]+\left[\sqrt{6{,}5^2-2^2}\right]+\left[\sqrt{6{,}5^2-3^2}\right]+$$

$$+\left[\sqrt{6{,}5^2-4^2}\right]+\left[\sqrt{6{,}5^2-5^2}\right]+\left[\sqrt{6{,}5^2-6^2}\right]=$$

$$=\left[\sqrt{41{,}25}\right]+\left[\sqrt{38{,}25}\right]+\left[\sqrt{33{,}25}\right]+$$

$$+\left[\sqrt{26{,}25}\right]+\left[\sqrt{17{,}25}\right]+\left[\sqrt{6{,}25}\right]=$$

$$=6+6+5+5+4+2=28.$$

Отже, загальна кількість цілих точок буде дорівнювати:

$$28\cdot 4+25=137.$$

Відповідь. 137 цілих точок.

Введене нами поняття цілої точки може бути корисним при доведенні начебто не пов'язаних із цією темою тотожностей.

149. Довести, що

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\left[\frac{3q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2},$$

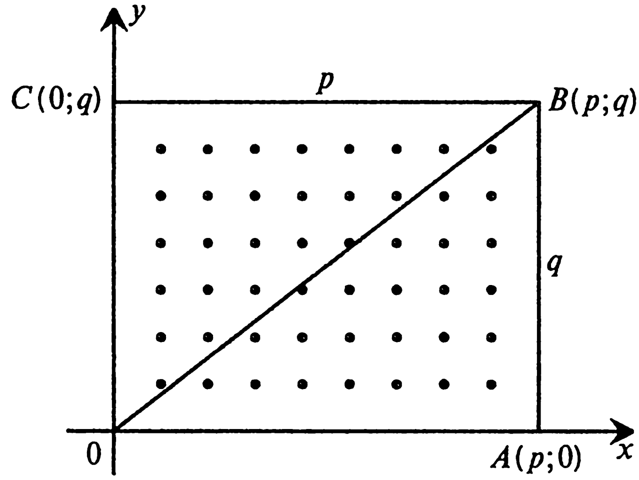
де p та q — взаємно прості натуральні числа.

Розв'язання.

Розглянемо прямокутник з вершинами

$$O(0;0),\ A(p;0),$$
$$B(p;q),\ C(0;q)$$

(див. мал. 49). Всередині його (не на сторонах!) лежать $(p-1)(q-1)$ цілих точок.



Мал. 49

Рівняння діагоналі OB прямокутника $OABC$ має вигляд:

$$y=\frac{q}{p}x.$$

Числа p і q — взаємно прості, а $x\in\{1;2;\ \ldots;\ p-1\}$, тоді $\frac{q}{p}x$ — не ціле число. Це означає, що на діагоналі OB немає цілих точок і в трикутнику OAB знаходиться $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ цілих точок. Але, з іншого боку, кількість цілих точок усередині трикутника OAB можна обчислити як $\left[\frac{q}{p}\cdot 1\right]+\left[\frac{q}{p}\cdot 2\right]+\ldots+\left[\frac{q}{p}(p-1)\right]$, що і доводить тотожність.

150. Довести тотожності:

$$\text{а) } \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right],$$

де τ_k — кількість натуральних дільників числа k;

$$\text{б) } \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n = 1 \cdot \left[\frac{n}{1}\right] + 2 \cdot \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + n\left[\frac{n}{n}\right],$$

де σ_k — сума всіх натуральних дільників числа k.

Розв'язання.

Перший спосіб

а) Зрозуміло, що коли натуральне число d є дільником натурального числа m, де $1 \le m \le n$, то $1 \le d \le n$, і d враховується в числі τ_m. Тоді m — число, що ділиться на d, тобто m враховано в числі $\left[\frac{n}{d}\right]$ — кількості чисел від 1 до n, що діляться на d.

Якщо ми тепер розглянемо всі дільники чисел 1, 2, 3, ..., n, то цим дільникам відповідають числа від 1 до n, що діляться на 1, 2, 3, ..., n. Саме це і доводить тотожність а).

б) Якщо дільник k входить в σ_m то m ділиться на k, причому це k зустрічається в сумі $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$ стільки разів, скільки існує чисел від 1 до n, кратних k, тобто $\left[\frac{n}{k}\right]$ разів. Значить, сума $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$ всіх дільників збігається з

$$1 \cdot \left[\frac{n}{1}\right] + 2 \cdot \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + n\left[\frac{n}{n}\right].$$

Що й вимагалося довести.

Приклад. Для $n = 10$ маємо:

Число 1 має один натуральний дільник — 1, тоді

$$\tau_1 = 1, \quad \sigma_1 = 1.$$

Числа 2, 3, 5, 7 — прості й мають по два дільники, тоді

$$\tau_2 = \tau_3 = \tau_5 = \tau_7 = 2,$$

$$\sigma_2 = 1+2 = 3, \quad \sigma_3 = 1+3 = 4,$$

$$\sigma_5 = 1+5 = 6, \quad \sigma_7 = 1+7 = 8.$$

Числа 4 і 9 мають по три дільники: $1, 2, 4$ і $1, 3, 9$, відповідно. Тоді

$$\tau_4 = 3, \quad \tau_9 = 3; \quad \sigma_4 = 7, \quad \sigma_9 = 13.$$

Числа 6, 8, 10 мають по чотири дільники: 1, 2, 3, 6; 1, 2, 4, 8 і 1, 2, 5, 10, відповідно. Тоді

$$\tau_6 = \tau_8 = \tau_{10} = 4, \quad \sigma_6 = 1+2+3+6 = 12,$$

$$\sigma_8 = 1+2+4+8 = 15, \quad \sigma_{10} = 1+2+5+10 = 18.$$

Тепер неважко переконатися в тому, що доведені вище формули є правильними для даного прикладу.

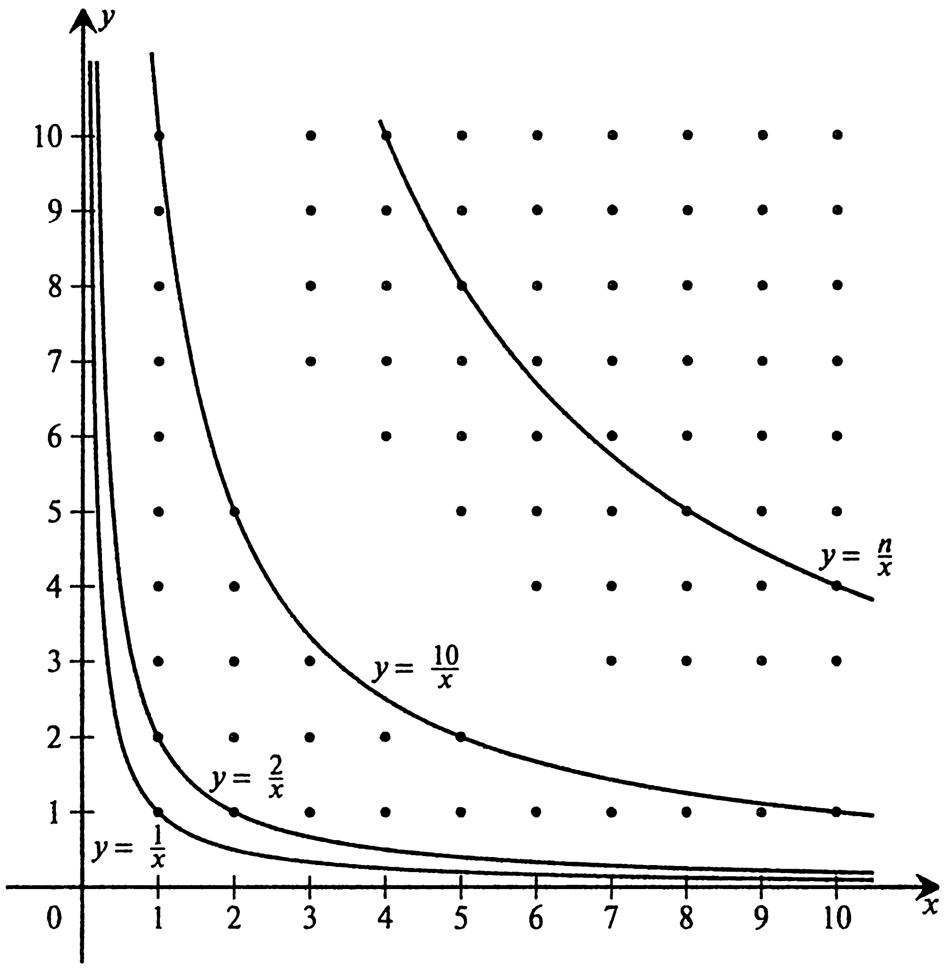
Другий спосіб

а) Розглянемо гілку гіперболи

$$y = \frac{k}{x}, \ k \in \mathbb{N},$$

що розташована в першій координатній чверті. Якщо x — дільник числа k, то (x, y) — ціла точка. І, навпаки, якщо гіпербола $y = \frac{k}{x}$ проходить через цілу точку з абсцисою x, то x — дільник числа k. Таким чином, кількість τ_k дільників числа k дорівнює числу цілих точок на гіперболі $y = \frac{k}{x}$. Сума $\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$ дорівнює кількості всіх цілих точок на гіперболах

$$y = \frac{1}{x}; \quad y = \frac{2}{x}; \quad y = \frac{3}{x}; \quad \ldots; \quad y = \frac{n}{x} \text{ (див. мал. 50).}$$



Мал. 50

Зауважимо, що всі такі цілі точки мають абсциси x від одиниці до n. Крім того, всі гіперболи

$$y=\frac{1}{x};\quad y=\frac{2}{x};\quad y=\frac{3}{x};\quad \ldots;\quad y=\frac{n-1}{x}$$

лежать під гіперболою $y=\frac{n}{x}\left(\frac{1}{x}<\frac{2}{x}<\ldots<\frac{n}{x}\right)$.

Далі, через будь-яку цілу точку $(x_0;y_0)$ під гіперболою $y=\frac{n}{x}$ $(x\in[1;n])$ обов'язково пройде гіпербола

$$y=\frac{k_0}{x}\ \ (k_0=x_0y_0),\ \ k_0<n.$$

Отже, кількість усіх цілих точок $\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$ на гіперболах дорівнює кількості всіх цілих точок, що лежать під гіперболою $y = \frac{n}{x}$ $(x \in [1; n])$ або на ній вище осі OX, і дорівнює

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right].$$

Що й вимагалося довести.

б) Знайдемо суму абсцис усіх цілих точок, що лежать під гіперболою $y = \frac{n}{x}$ $(x \in [1; n])$ або на ній.

Ясно, що з абсцисою 1 маємо $\left[\frac{n}{1}\right]$ точок, отже, сума їх абсцис дорівнює $1 \cdot \left[\frac{n}{1}\right]$.

Аналогічно:

для точок з абсцисою 2 сума дорівнює $2 \cdot \left[\frac{n}{2}\right]$;

...

...

...

для точок з абсцисою n сума дорівнює $n \cdot \left[\frac{n}{n}\right]$.

З іншого боку, коли ми будемо знаходити суму всіх абсцис цілих точок на гіперболі $y = \frac{k}{x}$, то ми маємо σ_k — суму всіх дільників числа k. Тоді, якщо рухатись уздовж гіпербол,

$$y = \frac{1}{x}; \quad \ldots; \quad y = \frac{n}{x},$$

ми отримаємо шукану суму, як $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$.

Що і вимагалося довести.

§ 7. АНТЬЄ ТА МАНТИСА НА ОЛІМПІАДАХ

Задачі з цілою та дробовою частинами числа досить часто зустрічаються на математичних олімпіадах різного рівня. І хоча такі задачі не можна назвати легкими, при їх розв'язанні прийдуть на допомогу прийоми, способи та навички, що, як ми сподіваємось, з'явилися у вас під час роботи з цією книгою.

Як прийнято у книгах, де друкуються олімпіадні задачі, після порядкового номера в дужках буде вказано країну чи місто, де проводилася відповідна олімпіада, а також рік її проведення.

151. (Росія, 1980). Скільки різних чисел зустрічаються серед чисел

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right], \left[\frac{2^2}{1980}\right], \ldots, \left[\frac{n^2}{1980}\right], \ldots, \left[\frac{1980^2}{1980}\right]?$$

Розв'язання.

Маємо дві сукупності чисел:

$$y_n = \frac{n^2}{1980} \text{ та } x_n = [y_n], \text{ де } n \in \{1; 2; \ldots; 1980\}.$$

Умова

$$y_{n+1} \geq y_n + 1$$

є достатньою, бо

$$y_{n+1} - y_n > 0, \quad x_{n+1} = [y_{n+1}] > [y_n] = x_n.$$

Знайдемо всі n, що задовольняють даній умові:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{2n+1}{1980} \geq 1,$$

тобто $2n > 1979$, $n \geq 990$; таким чином

$$495 = x_{990} < x_{991} < \ldots < x_{1980}.$$

Серед чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{989}$ зустрічаються всі цілі числа, починаючи з 0 до 494 (доведіть це самостійно), тобто 495 чисел.

Тоді всього різних значень x_n буде

$$495 + (1980 - 989) = 495 + 991 = 1486.$$

Відповідь. 1486.

152. (Англія, 1975). Розв'язати у натуральних числах рівняння

$$\left[\sqrt[3]{1}\right] + \left[\sqrt[3]{2}\right] + \ldots + \left[\sqrt[3]{x^3 - 1}\right] = 400.$$

Розв'язання.

За властивістю (2.3), рівність $\left[\sqrt[3]{m}\right] = k$, де $\{m, k\} \subset \mathbb{N}$, означає, що

$$k \leq \sqrt[3]{m} < k+1, \text{ або } k^3 \leq m \leq (k+1)^3 - 1.$$

Кількість натуральних чисел m, що задовольняють цій умові при фіксованому k, дорівнює різниці

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Тоді ліва частина даного рівняння дорівнює

$$\sum_{k=1}^{x-1} S_k, \text{ де } S_k = k(3k^2 + 3k + 1) > 0.$$

$$\begin{array}{ll} \text{При } k=1 & S_1 = 1\cdot 7 = 7; \\ \text{при } k=2 & S_2 = 2\cdot 19 = 38; \\ \text{при } k=3 & S_3 = 3\cdot 37 = 111; \\ \text{при } k=4 & S_4 = 4\cdot 61 = 244. \end{array}$$

Тоді $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 400$, $x-1=4, x=5$.

Відповідь. $x=5$.

153. (Канада, 1981). Довести, що рівняння

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$$

не має розв'язків.

Доведення.

Позначимо:

$$S=[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345.$$

За властивістю (2.18), маємо $63[x] \le [S] \le 63[x]+57$, тобто

$$63[x] \le [S] = 12345 = 63\cdot 195 + 60 \le 63[x]+57,$$

що неможливо.

154. (Бельгія, 1979). Які натуральні числа неможливо представити у вигляді $\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right], n \in \mathbb{Z}$?

Розв'язання.

Позначимо $f(n)=\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ і розглянемо різницю

$$f(n+1)-f(n)=\left[n+1+\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]-\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=$$

$$=1+\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$$

(останнє має місце за властивістю (2.6)).

Зрозуміло, що $f(n+1)-f(n)>0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]>\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right].$$

Тобто існує $m\in\mathbb{N}$ таке, що

$$\sqrt{n}+\frac{1}{2}<m\le\sqrt{n+1}+\frac{1}{2},\ \text{або}\ \ n<m^2-m+\frac{1}{4}\le n+1,$$

а тому $n=m^2-m$.

З іншого боку для будь-якого $n\in\mathbb{N}$ маємо:

$$f(n+1)=n+2+\left[\sqrt{n+1}-\frac{1}{2}\right]\le n+\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]+2=f(n)+2.$$

Таким чином

$$f(n+1)-f(n)=\begin{cases}2,\text{при } n=m^2-m,\ \ m=2,3,\dots\\ 1,\text{при інших } n\in\mathbb{N}\end{cases}.$$

Тобто величина $f(n)$ приймає всі натуральні значення, окрім чисел вигляду

$$f\left(m^2-m\right)+1=m^2+\left[\sqrt{m^2-m}+\frac{1}{2}\right]-m+1=m^2$$

(останнє випливає з оцінки $m-1<\sqrt{m^2-m}+\frac{1}{2}<m$, якщо $m\ge 2$)

та чисел, менших $f(1)=2$. Таким чином доведено таке.

Відповідь. Натуральне число не можна представити у вигляді

$$\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right],n\in\mathbb{Z}$$

в тому і тільки в тому випадку, коли воно є квадратом якогонебудь натурального числа.

155. (Україна, 1996). Знайти всі $n \in \mathbb{N}$, при яких число $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ є простим.

Розв'язання.

Можливі три випадки:

1) $n = 5k,\ \ k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = 5k^2$$

і буде простим, якщо $k = 1, n = 5$.

2) $n = 5k \pm 2,\ \ k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2 \pm 4\cdot 5k + 4}{5}\right] = 5k^2 \pm 4k = k(5k \pm 4),$$

при $k = 15k \pm 4 \in \{1; 9\}$, при $5k - 4 = 1, k = 1$, не може бути простим числом.

3) $n = 5k \pm 1,\ \ k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2 \pm 2\cdot 5k + 1}{5}\right] = 5k^2 \pm 2k = k(5k \pm 2),$$

при $k = 1$ маємо $5k \pm 2 \in \{3; 7\}$ — прості числа, тобто $n \in \{4; 6\}$ (зауважимо, що $5k \pm 2 \neq 1$, бо $k \in \mathbb{N}$).

Відповідь. $n \in \{4; 5; 6\}$.

156. (Швеція, 1974). Довести, що числа вигляду $\left\{10^n \sqrt{2}\right\}$, де $n \in \{0; 1; 2; \ \dots\ \}$ всі (попарно) різні.

Розв'язання.

Позначимо: $a_n = \left\{10^n \sqrt{2}\right\}$. Число $\sqrt{2}$ — ірраціональне, його можна представити у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$\sqrt{2} = 1,d_1 d_2 \ldots d_k \ldots . \qquad (*)$$

Тобто маємо:

$$a_0 = \left\{\sqrt{2}\right\} = 0,d_1 d_2 \ldots d_k \ldots ,$$

....

$$a_n = \left\{10^n \sqrt{2}\right\} = 0,d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{n+k} \ldots .$$

Нехай $a_p = a_q$. Тоді

$$0,d_{p+1} d_{p+2} \ldots d_{p+k} \ldots = 0,d_{q+1} d_{q+2} \ldots d_{q+k} \ldots ,$$

і, в силу того, що представлення $(*)$ єдине можливе, отримаємо:

$$d_{p+k} = d_{q+k}, k \in \{1,2, \ldots \}.$$

Звідки випливає, що $\sqrt{2}$ є мішаним періодичним дробом з періодом $|p-q|$. Останнє твердження протирічить ірраціональності числа $\sqrt{2}$, тобто наше припущення хибне, отже, всі числа $\left\{10^n \sqrt{2}\right\}$ — різні. Що й вимагалося довести.

157. (СФРЮ, 1983). Довести, що серед членів послідовності $\{a_n\}$, заданої співвідношенням

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \left[\frac{3}{2} a_n\right], n \in \mathbb{N},$$

міститься нескінченна кількість парних та непарних чисел.

Розв'язання.

Нехай серед членів послідовності $\{a_n\}$ міститься кінцева кількість непарних чисел. Позначимо відповідний найбільший номер через m. Тоді всі числа a_{m+n} — парні ($n \in \mathbb{N}$). Представимо парне число a_{m+1} у вигляді $a_{m+1} = 2^p g$, де g — непарне число, $p \in \mathbb{N}$ ($a_{m+1} \neq 0$, бо $a_1 > 0$ і послідовність неспадна).

Тоді

$$a_{m+2} = \left[\frac{3}{2} a_{m+1}\right] = 3 \cdot 2^{p-1} g,\ a_{m+3} = 3^2 \cdot 2^{p-2} g,$$

а $a_{m+p+1} = 3^p g$ і є числом непарним. Це протирічить припущенню, отже, **кількість непарних чисел необмежена.**

Нехай серед членів $\{a_n\}$ міститься кінцева кількість парних чисел. Позначимо відповідний найбільший номер через m. Тоді число $(a_{m+1} - 1)$ — парне і його можна представити у вигляді $a_{m+1} - 1 = 2^p g$, де g — непарне, $p \in \mathbb{N}$. Розглянемо

$$a_{m+2} = \left[\frac{3}{2} a_{m+1}\right] = \left[\frac{3}{2}(a_{m+1} - 1) + \frac{3}{2}\right] = 3 \cdot 2^{p-1} g + 1,$$

$$a_{m+3} = 3 \cdot 2^{p-2} g + 1, \text{а}\ a_{m+p+1} = 3^p g + 1$$

і є числом парним. Це протирічить припущенню, отже, **кількість парних чисел також необмежена.**

Твердження доведено.

158. (Австрія, 1974; Україна, 1978). Довести, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right].$$

Розв'язання.

1) Позначимо: $k = \left[\sqrt{4n+2}\right]$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$k \le \sqrt{4n+2} < k+1 \quad \text{і} \quad k^2 \le 4n+2 < (k+1)^2.$$

Число $4n+2$ не може бути повним квадратом, бо ділиться на 2 і не ділиться на 4. Тоді

$$k^2 < 4n+2 < (k+1)^2, \quad \text{або} \quad k^2 + 1 \le 4n+2 < (k+1)^2.$$

2) Розглянемо

$$\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 = 2n+1+2\sqrt{n^2+n}.$$

Враховуючи очевидну нерівність

$$n<\sqrt{n^2+n}<n+\frac{1}{2},$$

маємо, що

$$k^2 \le 4n+1<\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2<4n+2<(k+1)^2.$$

Тоді

$$k<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<k+1 \quad \text{і} \quad \left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=k.$$

Що й вимагалося довести.

159. (США, 1975). Довести, що для будь-яких невід'ємних чисел x та y виконується нерівність

$$[5x]+[5y]\ge[3x+y]+[3y+x].$$

Розв'язання.

Позначимо:

$$f(x,y)=[5x]+[5y]-[3x+y]-[3y+x]$$

і доведемо, що $f(x,y)\ge 0$ для будь-яких x та y.

Нехай існують такі x та y, що $f(x,y)<0$, тобто $f(x,y)\le -1$, бо $f(x,y)$ — ціле. Згідно (2.5) маємо

$$[5x]+[5y]>5x+5y-2; \quad [3x+y]+[3y+x]\le 4x+4y,$$

тоді $-1\ge f(x,y)>x+y-2$. Звідки $x+y<1$.

Без обмеження загальності можна припустити, що $x\ge y$. Тоді

$$f(x,y)\ge[5x]+[5y]-[4x]-[3y+x]\ge[5y]-[3y+x],$$

бо $[5x]-[4x]\ge 0$ (x — невід'ємне).

Далі, враховуючи, що $x+y<1$, маємо

$$-1\geq f(x,\ y)>[5y]-[2y+1]=[5y]-[2y]-1,$$

тобто $[5y]-[2y]\leq 0$, що неможливо, оскільки y — невід'ємне число. Тоді $f(x,y)\geq 0$ для всіх x та y.

Що й вимагалося довести.

160. (Київ, 1996). Послідовність x_n визначається правилом:

$$x_1=1,\ x_{n+1}=[ax_n]-[bx_n^2] \text{ для } n\in\mathbb{N},$$

де a і b — фіксовані додатні числа. Відомо, що послідовність $\{x_n\}$ набуває лише невід'ємних значень. Довести, що вона періодична.

Розв'язання.

За властивістю (2.5) маємо

$$[bx_n^2]>bx_n^2-1 \quad \text{і} \quad [ax_n]\leq ax_n.$$

Тоді з умови $x_{n+1}\geq 0$ випливає, що

$$0\leq [ax_n]-[bx_n^2]<ax_n-(bx_n^2-1)=-(bx_n^2-ax_n-1),$$

або

$$bx_n^2-ax_n-1<0.$$

За умовою $b>0$, отже,

$$x_n\in\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2b};\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2b}\right). \qquad (*)$$

За умовою $x_n\in\mathbb{N}$. Тоді з $(*)$ випливає обмеженість послідовності. Кількість значень, що приймає x_n, скінченна, і знайдеться таке $t\in\mathbb{N}$, що $x_{n+t}=x_n$, тобто послідовність x_n — періодична.

Що й вимагалося довести.

161. (Друга Соросівська Олімпіада). Розв'язати рівняння

$$[x]+\left[\frac{3}{2}x\right]+[2x]=1995.$$

Розв'язання.

Перший спосіб

Позначимо $x=2y$. Тоді маємо

$$[2y]+[3y]+[4y]=1995. \qquad (*)$$

За властивістю (2.18)

$$9[y]\le 1995\le 9[y]+6,$$

$$\text{або } 221\le [y]\le 221,(6), \text{ тобто } [y]=221.$$

Звідки випливає, що розв'язки треба шукати серед чисел

$$y=221+\alpha, \text{ де } \alpha\in[0;1).$$

Враховуючи властивість (2.6), маємо достатню умову:

$$[2\alpha]+[3\alpha]+[4\alpha]=6,$$

а оскільки

$$0\le 2\alpha<2, \quad 0\le 3\alpha<3, \quad 0\le 4\alpha<4,$$

$$\text{то} \quad 0\le[2\alpha]\le 1, \quad 0\le[3\alpha]\le 2, \quad 0\le[4\alpha]\le 3$$

і розв'язок можливий лише при виконанні умови

$$\begin{cases}[2\alpha]=1\\ [3\alpha]=2,\\ [4\alpha]=3\end{cases} \text{ або } \begin{cases}1\le 2\alpha<2\\ 2\le 3\alpha<3,\\ 3\le 4\alpha<4\end{cases} \text{ тоді } \alpha\in\left[\frac{3}{4};1\right).$$

Отже, отримали, що

$$y\in\left[221\frac{3}{4};222\right), \text{ тоді } x\in\left[443\frac{1}{2};444\right).$$

Другий спосіб

З властивості (2.5) маємо

$$x-1<[x]\le x,\quad 2x-1<[2x]\le 2x,\quad \frac{3}{2}x-1<\left[\frac{3}{2}x\right]\le\frac{3}{2}x,$$

$$\text{тоді}\quad x+\frac{3}{2}x+2x-3<[x]+\left[\frac{3}{2}x\right]+[2x]\le x+\frac{3}{2}x+2x,$$

або $\frac{9}{2}x-3<1995\le\frac{9}{2}x.$

Таким чином,

$$\begin{cases}\frac{9}{2}x\ge 1995\\ \frac{9}{2}x<1998\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 443\frac{1}{3}.\\ x<444\end{cases}$$

Отже, $x\in\left[443\frac{1}{3};444\right)$, тоді

$$[x]=443;\quad \frac{3}{2}x\in[665;666);\quad \left[\frac{3}{2}x\right]=665.$$

Ми отримали необхідну умову виконання рівняння $(*)$. Проаналізуємо $(*)$ на достатність.

Із заданого в умові рівняння знайдемо $[2x]$:

$$[2x]=1995-[x]-\left[\frac{3}{2}x\right]=1995-443-665=887.$$

Таким чином, $887\le 2x<888$, отже,

$$x\in\left[443\frac{1}{2};444\right).$$

Відповідь. $x\in\left[443\frac{1}{2};444\right).$

162. (Третя Соросівська Олімпіада). Нехай для всіх натуральних $na_n = \left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$ і $b_n = a_n - \left[\sqrt{a_n}\right]$. Обчислити суму

$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \ldots + nb_n.$$

Розв'язання.

Знайдемо перші чотири члени послідовності b_n :

$$a_1 = \left[1+\sqrt{1}+\frac{1}{2}\right] = 2, \quad b_1 = 2 - \left[\sqrt{2}\right] = 1;$$

$$a_2 = \left[2+\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right] = 2, \quad b_2 = 3 - \left[\sqrt{3}\right] = 2;$$

$$a_3 = \left[3+\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right] = 5, \quad b_3 = 5 - \left[\sqrt{5}\right] = 3;$$

$$a_4 = \left[4+\sqrt{4}+\frac{1}{2}\right] = 6, \quad b_4 = 6 - \left[\sqrt{6}\right] = 4.$$

Доведемо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ $b_n = n$. Маємо (див. (2.6):

$$b_n = \left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] - \left[\sqrt{\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]}\right] =$$

$$= n + \left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] - \left[\sqrt{\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]}\right].$$

Позначимо $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] = k$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді за властивістю (2.4) маємо:

$$k \le \sqrt{n} + \frac{1}{2} < k+1, \qquad (*)$$

або $k - \frac{1}{2} \le \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$.

Останню нерівність підносимо до квадрата:

$$k^2 - k + \frac{1}{4} \le n < k^2 + k + \frac{1}{4}. \qquad (**)$$

Додамо $(*)$ і $(**)$. Отримаємо:

$$k^2 + \frac{1}{4} \le n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} < k^2 + 2k + \frac{5}{4},$$

тобто

$$k^2 = \left[k^2 + \frac{1}{4}\right] \le \left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] \le \left[k^2 + 2k + 1\frac{1}{4}\right] =$$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Таким чином,

$$k \le \sqrt{\left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]} \le k + 1.$$

Отже, вираз $\left[\sqrt{\left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]}\right]$ може приймати два значення: k або $k+1$.

Припустимо, що

$$\left[\sqrt{\left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]}\right] = k + 1.$$

Тоді

$$\sqrt{\left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]} \ge k + 1, \quad \left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] \ge k^2 + 2k + 1,$$

$$n + k = n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] \ge k^2 + 2k + 1, n \ge k^2 + k + 1,$$

що неможливо (див. $(**)$).

Отже,

$$\left[\sqrt{\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]}\right]=k$$

$$\text{і } b_n=n+\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]}\right]=n+k-k=n.$$

Тоді шукана сума може бути легко знайдена:

$$b_1+2b_2+3b_3+\ldots+nb_n=1+2\cdot2+3\cdot3+\ldots+n\cdot n=$$
$$=1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Відповідь. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

163. (Друга Соросівська Олімпіада). Розв'язати рівняння

$$[x]+[2x]+\ldots+[1995x]=1995.$$

Розв'язання.

За властивістю (2.5), $kx-1<[kx]\le kx,\ k\in\mathbb{N}$, і

$$\sum_{k=1}^{1995}kx-1995<\sum_{k=1}^{1995}[kx]=1995\le\sum_{k=1}^{1995}kx.$$

Тобто

$$\begin{cases}\frac{x+1995x}{2}\cdot1995<2\cdot1995\\ \frac{x+1995x}{2}\cdot1995\ge1995\end{cases}\Leftrightarrow\quad x\in\left[\frac{1}{998};\frac{1}{499}\right).\qquad(*)$$

Тоді

$$1\frac{997}{998}\le1995x<3\frac{498}{499}\ \text{ і }\ [1995x]\in\{1;2;3\}.$$

Розглянемо всі ці три випадки окремо.

1) Нехай $[1995x]=1$. З умови $(*)$ випливає, що хоча б 499 перших доданків лівої частини рівняння дорівнюють нулю, а інші доданки не перевищують одиниці. Тоді $\sum_{k=1}^{1995}[kx]<1995$ і задане в умові рівняння не буде мати розв'язків.

2) Нехай $[1995x]=2$, тобто $x\in\left[\frac{2}{1995};\frac{3}{1995}\right)$, або

$$x\in\left[\frac{2}{1995};\frac{1}{665}\right). \qquad (**)$$

Позначимо через k_0 таке ціле число, що

$$[k_0x]=1,\ \text{а}\ \left[(k_0-1)x\right]=0.$$

Тоді

$$\begin{cases}k_0x\ge 1\\(k_0-1)x<1\end{cases};\quad \begin{cases}2k_0x\ge 2\\(2k_0-2)x<2\end{cases};$$

$$\text{і}\quad \sum_{k=1}^{1995}[kx]=\sum_{k=1}^{k_0-1}[kx]+\sum_{k=k_0}^{2k_0-2}[kx]+\left[(2k_0-1)x\right]+\sum_{k=2k_0}^{1995}[kx]=$$

$$=0+1\cdot(2k_0-2-k_0+1)+\left[(2k_0-1)x\right]+$$

$$+2(1995-2k_0+1)=1995,$$

звідки $\left[(2k_0-1)x\right]=3k_0-1996$.

Враховуючи, що вираз $\left[(2k_0-1)x\right]$ може приймати лише значення 1 або 2, маємо

$$1\le 3k_0-1996\le 2,\quad 665\frac{2}{3}\le k_0\le 666,$$

і отже, $k_0=666$ (бо $k_0\in\mathbb{N}$).

Тоді

$$[(2k_0-1)x]=[1331x]=2, \quad \frac{2}{1331}\le x<\frac{3}{1331}.$$

Враховуючи (**), отримаємо, що

$$x\in\left[\frac{2}{1331};\frac{1}{665}\right).$$

3) Нехай $[1995x]=3$. Тоді очевидно, що $\sum_{k=1}^{1995}[kx]$ буде більше за значення цієї суми в попередньому випадку (див. пункт 2 цієї ж задачі), тобто більша за 1995, і цей випадок можна не розглядати.

Відповідь. $x\in\left[\frac{2}{1331};\frac{1}{665}\right)$.

164. (Україна, 1995). Довести, якщо для деякого числа x виконується рівність $\{8x\}=\{15x\}$, то $\{26x\}=\{75x\}$.

Розв'язання.

За означенням дробової частини числа маємо:

$$\{8x\}=8x-[8x], \quad \{15x\}=15x-[15x].$$

Тоді

$$8x-[8x]=15x-[15x], \text{ звідки } [15x]-[8x]=7x.$$

Але вираз у лівій частині є числом цілим, отже, і число $7x$ — ціле. Тоді

$$\{26x\}=\{7x\cdot 3+5x\}=\{5x\},$$

$$\{75x\}=\{7x\cdot 10+5x\}=\{5x\}.$$

Таким чином, $\{26x\}=\{75x\}$.

Що й вимагалося довести.

165. (Україна, 1995). Знайти найбільше можливе значення виразу $\dfrac{\left[\dfrac{x}{3}\right]}{\left[\dfrac{x}{4}\right]}$ при всіх дійсних $x \geq 4$.

Розв'язання.

Нехай $\left[\dfrac{x}{4}\right] = k,\ k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$ при $x \geq 4$. Тоді $\dfrac{x}{4} < k+1$ (див. 2.3) і

$$\frac{x}{3} < \frac{4}{3}k + \frac{4}{3} = k+1+\frac{k+1}{3}.$$

Якщо $k=1$, то $k+1+\dfrac{k+1}{3} = 2+\dfrac{2}{3}$ і $\dfrac{x}{3} < 2\dfrac{2}{3}$. Тоді

$$\left[\frac{x}{3}\right] \leq \left[2\frac{2}{3}\right] = 2,\ \text{отже,}\ \frac{\left[\frac{x}{3}\right]}{\left[\frac{x}{4}\right]} \leq \frac{2}{1} = 2.$$

Якщо $k \geq 2$, то $\dfrac{k+1}{3} \leq k-1$ (бо $2k \geq 4$), тоді

$$\frac{x}{3} < k+1+\frac{k+1}{3} \leq k+1+k-1 = 2k \quad \text{і} \quad \left[\frac{x}{3}\right] < 2k.$$

Таким чином, $\dfrac{\left[\dfrac{x}{3}\right]}{\left[\dfrac{x}{4}\right]} < \dfrac{2k}{k} = 2.$

Отже, найбільше значення даного в умові виразу при всіх дійсних $x \geq 4$ дорівнює 2 (воно досягається, наприклад, при $x = 6$).

Відповідь. 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мордкович А., Смышляев В. Антье // Квант. — 1976. — № 5. — С. 43–48.

2. Лобанова Л., Фінкельштейн Л. Вибрані задачі елементарної математики. — К.: Вища школа, 1989. — 94 с.

3. Вышенский В., Карташов Н., Михайловский В., Ядренко М. Сборник задач киевских математических олимпиад. — К.: Вища школа,1984. — 233 с.

4. Вишенський В., Ганюшкін О., Карташов М., Михайловський В., Призва Г., Ядренко М. Українські математичні олімпіади. — К.: Вища школа, 1993. — 415 с.

5. Яковлев Г., Купцов Л., Резниченко С., Гусятников П. Всероссийские математические олимпиады школьников. — Москва: Просвещение, 1992. — 382 с.

6. Конягин С., Тоноян Г., Шарыгин И. и др. Зарубежные математические олимпиады. — Москва: Наука, 1987. — 413 с.

7. Друга Соросівська олімпіада з математики / Під ред. Т. Байдик, О. Лукович, В. Лукович — К., 1996. — 21 с.

8. Шклярский Д., Ченцов Н., Яглом И. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. — Москва: Наука, 1976. — 383 с.

9. Апостолова Г. В., Панкратова І. Є. Фінкельштейн Л. П. Ціла і дробова частина числа. — К.: Факт, 1996. — 97 с.

10. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. — Житомир: ЖДПУ, 2002. — 298 с.

11. Сарана О. А., Ясінський В. В. Конкурсні задачі підвищеної складності з математики. — К.: НТУУ «КПІ», 2005. — 260 с.

12. Ясінський В. В. Математика. — К.: НТУУ «КПІ», 2005. — 372 с.

Апостолова Г. В., Ясінський В. В.

А76 Антьє і мантиса числа: Навчальний посібник — К.: Факт, 2006. — 128 с.; іл.

ISBN 966-359-092-0

Посібник містить близько 160 задач із розв'язаннями або вказівками і відповідями. Він має на меті ознайомити учнів і абітурієнтів із властивостями цілої та дробової частини числа, методами розв'язування задач на використання цих понять.

УДК 511.235(075.4)
ББК 22.132я7

Навчальне видання

АПОСТОЛОВА Г. В., ЯСІНСЬКИЙ В. В.

АНТЬЄ І МАНТИСА ЧИСЛА

Навчальний посібник

Технічний редактор *Оксана Кравцова*
Коректор *Інна Кисельова*
Макетування обкладинки *Інокентія Вирового*
Верстка та макетування *Дмитра Фінкельштейна*

Схвалено Міністерством освіти і науки України
(лист МОН України № 1/11—2430 від 29.05.06)

Здано до виробництва 14.02.2006. Підписано до друку 07.06.2006. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний № 1. Гарнітура «Ньютон». Друк офсетний. Ум. друк. арк. 7,47. Обл.-вид. арк. 10,7. Зам. № 6-966

ТОВ «Видавництво „Факт“»
04080, Україна, Київ-80, а/с 76
Реєстраційне свідоцтво
ДК № 1284 від 19.03.2003
Тел./факс: (044) 287 1886, 287 1882
E-mail: office@fact.kiev.ua
Відділ збуту: (044) 463 6887
E-mail: sbyt@fact.kiev.ua
www.fact.kiev.ua

Віддруковано на ЗАТ «ВІПОЛ».
03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК № 752 від 27. 12. 2001 р.

Галина Вадимівна Апостолова — вчитель-методист, кандидат фізико-математичних наук, професор Київського обласного інституту післядипломної освіти педагогічних кадрів

Василь Васильович Ясінський — заслужений працівник народної освіти України, професор, директор Інституту моніторингу якості освіти Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»