В. Г. КОВАЛЕНКО,
І. Ф. СЛЄДЗІНСЬКИЙ

МАТЕМАТИЧНА СИМВОЛІКА

В. Г. КОВАЛЕНКО,
І. Ф. СЛЄДЗІНСЬКИЙ

МАТЕМАТИЧНА СИМВОЛІКА

Посібник
для самоосвіти
вчителів

За редакцією
професора
І. Ф. Тесленка

КИЇВ
«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»
1981

ББК 74.262
51(07)
К56

Коваленко В. Г., Следзинский И. Ф. Математическая символика. Пособие для самообразования учителей. Под редакцией доктора педагогических наук профессора Тесленко И. Ф.— К.: Радянська школа, 1981. —2,5 л. — 10 к. 34 000 экз. 60501. 4306010000

В пособии рассматривается система важнейших логико-математических символов и обозначений, применяемых в школьном курсе математики или тесно с ним связанных. Значительное внимание уделяется содержанию и происхождению каждого из символов, а также методике их применения при решении задач и доказательстве теорем на различных этапах обучения.

Предназначается учителям математики общеобразовательной школы.

Рукопис рецензували: завідуючий кафедрою геометрії та методики викладання математики Ворошиловградського педагогічного інституту професор *Л. М. Лоповок*, кафедра математики Тернопільського педагогічного інституту, вчитель математики з міста Хмельницького *Я. Є. Гольдберг*, зав. кабінетом математики Вінницького ОІУВ *В. М. Ракуніна* та вчителька математики СШ № 5 м. Вінниці *І. І. Учень*.

ВЛАДИМИР ГАВРИЛОВИЧ КОВАЛЕНКО
ИГОРЬ ФЕДОРОВИЧ СЛЕДЗИНСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СИМВОЛИКА

Пособие для самообразования учителей

Под редакцией профессора Ивана Федоровича Тесленко
(на украинском языке)

Издательство «Радянська школа» Государственного комитета Украинской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли

Зав. редакцією математики *О. П. Бондаренко*. Редактор *Л. М. Шут*. Літредактор *К. М. Лашко*. Художній редактор *В. Ф. Монжеран*. Обкладинка художника *О. І. Петрушко*. Технічний редактор *Л. Б. Ланцман*. Коректор *А. Н. Кривошея*

Інформ. бланк № 2663

Здано до набору 01.10.80. Підписано до друку 09.04.81. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Папір друк. № 2. Гарнітура літературна. Спосіб друку високий. Умовн. арк. 4,2. Обл.-вид. арк. 3,60. Тираж 34 000. Видавн. № 26417. Зам. № 2459. Ціна 10 к.
Видавництво «Радянська школа» Державного комітету Української РСР у справах видавництв, поліграфії і книжкової торгівлі, 252053. Київ, вул. Юрія Коцюбинського, 5. Темплан 1981 р.

Головне підприємство республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига» Держкомвидаву УРСР, 252057, Київ-57, Довженка, 3.

$К\frac{60501-325}{М210(04)-81}$ 260—81 4306010000

ВСТУП

Постійне прискорення науково-технічного прогресу, на особливій необхідності якого наголосив у Звітній доповіді ЦК КПРС XXVI з'їздові Комуністичної партії Радянського Союзу Генеральний секретар ЦК КПРС товариш Л. І. Брежнєв, неможливе без застосування математичного апарату і дальшого розвитку всієї математичної науки. У зв'язку з цим потрібно досягти якомога більшого проникнення ідей сучасної математики в шкільний її курс. Наближення змісту шкільної математики до рівня сучасної науки спричинює значне збільшення кількості знаків у шкільному курсі математики та підвищує їх роль у структурі математичної освіти школярів. Постає нове дидактичне завдання — навчити учнів свідомо використовувати логіко-математичну символічну мову, оскільки, як підкреслював ще М. І. Лобачевський, формальне запам'ятовування символічних позначень призводить до помилок у судженнях і висновках [1].

Які ж особливості мають математичні знаки і як вони впливають на процес засвоєння певних понять і математичних знань в цілому? Щоб відповісти на поставлене запитання, з'ясуємо, як виникли і розвивалися знакові форми в геометрії.

Геометричні малюнки виникли і використовувалися разом з числом (як результатом операції вимірювання) для обчислення площ земельних ділянок і відновлення цих ділянок у разі руйнування їх під час повені Зафіксовані в малюнках просторові відношення між сторонами й кутами ділянок відображали й одночасно задавали послідовність і види числових операцій (алгоритм), які треба було виконати для відтворення правильної величини площі й конфігурації кожної ділянки. Отже, малюнок був знаком-моделлю, яка

---

[1] Лобачевский Н. И. Наставление учителям математики в гимназиях.— Труды Института истории естествознания. М., Физматгиз, 1943.

забезпечувала вибір потрібного алгоритму. А це означає, що вже на першому етапі розвитку наукових знань знаки-моделі взяли на себе роль предметних об'єктів. Згодом малюнки як знаки-моделі використовуються для розподілу й перерозподілу ділянок, що приводить до фактичного розв'язання задач на порівняння фігур, поділ їх на частини і складання з цих частин нових фігур, задач на обчислення тощо.

Перетворення, виконувані з малюнками земельних ділянок як знаками-символами, стають основою для словесного і символічного опису досвідних знань про форми й розміри ділянок та співвідношення між ними. У свідомості людей з'являється найважливіший принцип **інваріантності** розмірів фігур щодо їх розміщення у просторі: **інваріантності довжини, площі, об'єму,** формуються поняття «більше», «менше», «дорівнює», які для чисел ще не мали змісту. З'являються нові (геометричні) терміни для позначення таких фігур, як «трикутник», «прямокутник», «квадрат», «трапеція», «чотирикутник», «сектор» та ін., а також терміни для позначення елементів фігур — «довжина», «ширина», «висота», «січна» тощо. Схеми і формули для обчислення периметрів і площ ділянок-малюнків стають новими об'єктами, використання яких вимагає все нових пізнавальних операцій зіставлення і перетворення. Поєднання кількісних характеристик, виражених у термінах «більше», «менше», «дорівнює», з малюнками фігур та їх елементами, а також зв'язки словесних алгоритмів обчислень площ ділянок із словесними формулами підносять досвідні знання на вищий етап, внаслідок чого утворюється певна система геометричних знань.

У цій системі геометричних знань малюнки геометричних фігур відіграють провідну роль як у процесі розв'язування практичних задач, так і при обгрунтуванні теоретичних положень. Продовжується процес абстрагування, відрив знаків-малюнків від позначуваних ними предметних об'єктів. Знаковими об'єктами починають оперувати при доведеннях геометричних тверджень, зокрема про рівність суміжних і вертикальних кутів, рівновеликість площ. Поступово створюється геометрична символіка, найважливіша функція якої — бути засобом формалізації, тобто засобом реалізації таких способів руху думки, коли результат досягається тимчасовим відходом від конкретного змісту задачі, що розв'язується. Цю функцію математичної символіки підкреслював К. Маркс, називаючи знаки диференціального числення **оперативними символами.**

Істотні особливості сучасних математичних знань відображено в діючих шкільних програмах. Цим значною мірою обумовлюється той факт, що майже вся математична навчальна діяльність учнів VI—IX класів відбувається в умовах використання логіко-математичної символіки. Усе частіше математичні твердження подаються в знаковій формі. Для прикладу порівняємо словесний і символічний (знаковий) запис теореми: «У рівнобедреному трикутнику кути при основі конгруентні».

Словесний запис	**Знаковий запис**
I. (Умова теореми): нехай дано будь-який рівнобедрений трикутник ABC, у якому сторони AB и CB конгруентні. Тоді має бути правильним висновок теореми.	$(\forall \triangle ABC)([AB] \cong [CB])$ $\Downarrow$
II. (Висновок теореми): кути при основі даного трикутника конгруентні.	$(\angle BAC \cong \angle BCA)$

Зауважимо, що в процесі використання логіко-математичної символіки в школі постає дуже важлива проблема: як правильно поєднати семантичний (змістовний) підхід до вивчення математичної мови із синтаксичним (формалізованим).

Процес доведення теореми можна схематично записати так:

$$P_1P_2P_3 \ \ldots \ P_{n-1}P_n, \qquad (1)$$

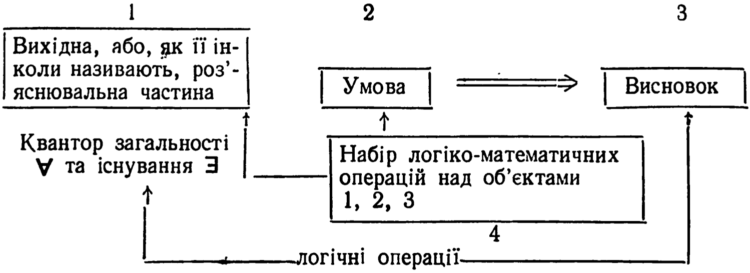
де P_1 — істинне висловлення (теорема або аксіома), а кожне з P_i ($i = 2, 3, \ldots, n$) є висловлення, істинність якого встановлюється на основі застосування логічних операцій (правил виведення, які в шкільному курсі математики строго не формалізуються) до висловлень, що передують йому в послідовності (1). Побудова послідовності (1) з погляду логіки й називається доведенням теореми P_n[1].

Розуміння логічної структури (1) доведення теорем має особливе значення для розвитку мислення учнів. Вони

[1] Докладніше див.: Тесленко И. Ф. Формирование диалектико-материалистического мировоззрения учащихся при изучении математики. М., Просвещение, 1979.

починають краще розуміти відмінності між логічними й математичними операціями і сміливіше розв'язують задачі чи доводять теореми.

До сталих компонентів структури теореми належать такі:



Структурна сталість компонентів 1, 2, 3 обумовлюється тим, що питання про істинність теореми (висловлення) всіма учнями розв'язується однозначно. Що ж до компонента 4, то вимога однозначного набору логіко-математичних операцій над об'єктами 1, 2 для встановлення істинності теореми не тільки не потрібна, а й просто шкідлива. Саме вдалий набір операцій та їх послідовне використання дають змогу краще довести теорему чи розв'язати задачу. Тут найбільші й найсприятливіші можливості для творчої розумової діяльності учня. Його вміння доводити теореми формуються як система операцій, як внутрішня система дій не над реально-предметними об'єктами, а над їх образами, символами, знаками. Такі вміння і є інтелектуальними вміннями учня.

Значну роль у наборі операцій відіграє оперування математичними поняттями. Вважається, що учень засвоїв поняття, коли він уміє: точно відтворити означення даного поняття; виділити його істотні ознаки та їх логічну структуру; порівняти близькі поняття одне з одним; побудувати заперечення до даного поняття; підвести той чи інший об'єкт під поняття; включити поняття в систему понять.

Діюча програма передбачає співвіднесення знаків поняттям, що вимагає введення спеціальних навчальних прийомів, а саме:

встановлення взаємовідповідності між звичайним словом і символом, між символом і терміном, між символом і поняттям; мотивування (при активній участі класу) введення знаків чи символів; введення знака-символу одночасно з відповідним йому поняттям, правильне читання і грамотне розміщення учнями символічних записів на дошці й у зошитах.

Як показує досвід роботи вчителів, цього можна досягти, розкриваючи зміст математичного поняття у вигляді структури, елементами якої є певні розумові чи інструментальні дії або операції. Покажемо це на прикладах. У V класі вивчається досить важливе математичне поняття «модуль числа». Нерідко на уроці, де вивчається тема «Модуль числа», дослівно відтворюється матеріал посібника і не акцентується увага необхідності введення поняття «модуль» і відповідного йому знака.

Відомо, що кожний урок належить до системи уроків, а кожне поняття, яке вивчається на уроці — до системи понять, принаймні тих, які входять до одного параграфа посібника. У нашому випадку таким параграфом є «§ 1 Напрями і числа». На попередніх уроках з цієї теми учні навчилися за допомогою чисел визначати місце знаходження предметів, людей, точок і ін. відносно фіксованих орієнтирів — як початку відліку (на дереві — білка вище, нижче від дупла; на землі — поїзд далеко, близько від станції; на прямій — різні точки вправо, вліво від точки 0; на координатній прямій — положення точки визначається додатними, від'ємними числами і ін.)

У зв'язку з переміщенням точок по координатній прямій учні засвоїли таке дуже важливе поняття, як «протилежні числа» Було встановлено, що рівновіддалені (або симетричні) точки прямої від точки 0 — початку відліку — визначаються протилежними числами. Учні ознайомилися з поняттям «множина цілих чисел», із символічними позначеннями і записами множин натуральних та цілих чисел. Вони навчилися «будувати» на прямій протилежні числа, записувати їх і читати «двома способами» такі, наприклад, записи, як «(—3)» і «—(—3)» тощо. У цій системі взаємозв'язаних понять і виникає потреба давати числову характеристику **відстаней** будь-яких точок прямої від точки 0 як початку відліку. А **відстань і довжина** відрізка — величини невід'ємні. Як же бути? Учні пригадують з курсу IV класу поняття «довжина відрізка» і його символічне позначення в формі $|AB|$. Вони приходять до висновку, що доцільно зберегти цей знак і для чисел, які характеризують однакові відстані протилежних точок на прямій. Тепер усе підготовлено до введення терміна «модуль числа» (від латинського *modulus* — міра) і знака $|a|$ для позначення цього поняття.

Таким чином, нове поняття вводиться не ізольовано, а в зв'язку з уже відомою учням системою понять. Розкриття його змісту пов'язане з конкретною діяльністю учнів, а саме: вони знаходять модуль числа, вимірюючи в одиничних відрізках відстань від початку відліку до точки, якій відповідає це число.

Модуль числа і його знак вводяться одночасно із самим поняттям: знак модуля числа такий самий, як і для позначення довжини відрізка, бо модуль числа і є довжиною відповідного відрізка. А це означає, що модуль числа не може бути від'ємним. Отже, зміст нового поняття «модуль числа» має таку структуру: Модуль будь-якого раціонального числа a є: а) відстань від початку відліку до точки, якій відповідає число a; б) невід'ємне число; в) число, яке при a додатному дорівнює a або 0, при a від'ємному дорівнює $-a$.

Подана структура поняття модуля числа і відповідного йому знака допомагають учням правильно виконувати розумові операції над різними виразами і задачами, наприклад: «Знайдіть $|a|$, якщо $a = -3$», «Розв'яжіть рівняння $|x| = 5$».

З наведених прикладів видно, що в оволодінні знаннями математичні знаки відіграють подвійну роль: вони є знаряддям абстрагування і узагальнення, засобом розумових операцій під час аналізу реальних ситуацій, формулювання висновків і доведення тверджень, і водночас вони є математичними об'єктами вивчення; кожний знак має певну структуру, графічне зображення і конкретний зміст, який учень повинен запам'ятати. Вимога запам'ятовування змісту кожного знака і системи математичних знаків — обов'язкова передумова їх доцільного і мотивованого вживання. За допомогою запам'ятовуваної системи знаків в учня створюється досконалий апарат здобування математичних знань із своєї пам'яті і в такий спосіб формуються автоматизми мислення, які діють і без опори на логічні зв'язки.

Кожний математичний знак має певну навчальну інформацію. Знакова конкретна предметність його стає неодмінною умовою і наслідком теоретичного мислення.

Однозначний смисл, чіткі, компактні, економні й прості графічні зображення математичних знаків дають змогу створити методи, що спрямовують людське пізнання до істинних знань і повніше та виразніше розкривають їх правду

Математична наука мовою знаків-символів говорить тільки правду, вона не терпить суб'єктивізму, це правда встановлених математичними методами об'єктивних закономірностей і суспільно-людського досвіду.

Підсумовуючи сказане, слід виділити такі особливості системи математичних знаків: а) вони є оперативним знаряддям формування математичних понять і одночасно їх фіксатором для дальшого використання; б) є новим самостійним абстрактним об'єктом процесу мислення учня; в) служать оперативним засобом перетворення навчальних математичних об'єктів, розкриття різних сторін відношень між ними та їх структур; г) допомагають переходити до нових узагальнень математичних понять і тверджень; д) дають змогу більш адекватно фіксувати процеси аналізу і розв'язування математичних задач, краще відображати хід думки учня і, отже, впливати на раціональність процесу його мислення; е) допомагають доцільному використанню математичних методів в усіх галузях знань і в практиці.

Таким чином, математичні знаки за своєю роллю в математичній науці й у навчальному процесі є елементами структури знань, об'єктами операцій і елементами розумової діяльності. Тому їх вивченню і використанню на уроках математики слід приділяти постійну й неослабну увагу.

Досвід роботи кращих учителів показує, що учням значно легше засвоїти й запам'ятати систему математичних знаків, коли при їх введенні подається змістовно-генетичний і етимологічний аналіз кожного знака. На уроці такий аналіз дуже потрібний. Але він відсутній у навчальних посібниках і підручниках. У цьому посібнику, крім такого аналізу, даються методичні поради вчителям щодо вивчення логіко-математичної символіки в школі, наводиться багато зразків оформлення запису означень математичних понять, математичних теорем та доведення їх, розв'язання рівнянь, задач на обчислення і побудову.

Доктор педагогічних наук,
професор І. Ф. ТЕСЛЕНКО

Розділ I
ПОНЯТТЯ ПРО МАТЕМАТИЧНУ МОВУ

§ 1. ПОНЯТТЯ ПРО МАТЕМАТИЧНУ СИМВОЛІКУ. СЕМАНТИКА І СИНТАКСИС МАТЕМАТИЧНОЇ МОВИ

Математична мова є штучною мовою, яка будується за певними правилами з математичних знаків, що становлять її алфавіт.

Знаки належать до наукових понять, які не означуються. Ці поняття є основними в семіотиці — науці про знакові системи. Під **математичними знаками** розуміють умовні позначення, якими скорочено записують математичні поняття і твердження, а також операції над математичними об'єктами.

Математичні знаки традиційно називають «символами». Однак терміни «знак» і «символ» не рівнозначні. Символ (від грецького слова συμβολον — знак, прикмета, ознака) — умовне позначення будь-якого предмета, поняття або явища. Символ не байдужий до того, що він зображає. Нерідко його зовнішня форма наочно-образно передає зміст відповідного об'єкта. Наприклад, серп і молот на гербі Країни Рад символізують непорушну єдність робітничого класу і колгоспного селянства. Тому в деяких працях, що стосуються знаків і знакових систем, розрізняють символи і мовні знаки (які в свою чергу поділяються на знаки природних і штучних мов). Математичні й логічні знаки в цій класифікації відносять до знаків штучних мов.

Систему або сукупність логіко-математичних знаків у сучасному шкільному курсі називають його **символікою**.

Символіка шкільної математики — це підмножина множини тих знаків, які становлять зміст сучасної математичної мови. Знаки є вихідним «матеріалом», з якого будуються за певними правилами мовні вирази — аналоги слів і тверджень звичайної (наприклад, російської чи української) мови. **Математичний вираз** — це скінченна послідовність знаків з алфавіту математичної мови. Правила його побудови розглядаються в **синтаксисі** — граматиці математичної мови. Зауважимо, що не кожна послідовність знаків є математичним виразом аналогічно до того, як не кожна послідовність букв українського алфавіту утворює слово. Наприклад, послідовність математичних символів $a + \perp b$ або послідовність букв українського алфавіту БУВЬМ не є словом, оскільки вона позбавлена будь-якого змісту. Тому в процесі вивчення математичної мови важливу роль відіграє семантичний (змістовний) підхід, який дає змогу виділяти серед різноманітних скінченних послідовностей математичних знаків ті, що мають певний зміст. Наприклад, скінченна послідовність знаків $a \cdot b = b \cdot a$ виражає переставний закон множення чисел з певної множини.

Вивчаючи математичну мову в школі, слід приділяти велику увагу **семантиці** — розумінню учнями змісту математичних виразів — і **синтаксису** — вмінню користуватися формальним математичним апаратом (правильно виконувати тотожні перетворення математичних виразів).

Математичні вирази можна з'єднувати знаком певного відношення. У результаті вийде речення із змінною або **висловлення.** Наприклад, з'єднавши вирази $3 + 1$ і 7 знаком $<$, дістанемо висловлення: $3 + 1 < 7$.

Висловлення — поняття логічне, а не математичне. Отже, математичні вирази можуть задавати не тільки математичні, а й логічні об'єкти. Через це в шкільній математиці поряд з математичними об'єктами вивчають і логічні. Нехтувати логічними об'єктами не можна, бо це приведе до нерозуміння математичних виразів.

У використанні символів звичайної і математичної мов є істотні відмінності. Так, у математичній мові один символ означає те, що у звичайній виражається словом, тобто певною скінченною послідовністю знаків — букв алфавіту цієї мови. Це дає змогу скорочувати в математиці записи мовних висловів. Наприклад, математичний запис формули розв'язування квадратного рівняння $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ займає мало місця, тоді як її словесний запис досить громіздкий і важкий для сприймання.

Перевага символічного запису над словесним і в тому, що математичні знаки вільні від смислової багатозначності й обмеженості, які характерні для слів будь-якої звичайної мови.

У математиці до появи букевої символіки можна було говорити лише про індивідуальні вирази. І тільки створення алгебраїчної символіки (у 1591 р. французький математик Ф. Вієт ввів символи змінних і почав будувати алгебраїчні формули, яким Р. Декарт надав, починаючи з 1637 року, сучасного вигляду) дало змогу абстрагуватися від конкретного змісту об'єктів будь-якої розв'язуваної задачі й перейти до широких узагальнень.

Математичні формули багаті на інформацію. Наприклад, формула $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ охоплює різні випадки заломлення світла, формула $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ дає змогу знайти числове значення об'єму кулі в кожній конкретній ситуації Отже, використання математичних знаків полегшує і робить економнішим процес наукового дослідження.

Економія запису і заміна мовних висловів однозначними символами важлива, але не основна перевага символічної мови над звичайною.

Основна перевага символічної мови над звичайною полягає в тому, що над логіко-математичними знаками можна виконувати операції і внаслідок цього перетворювати одні формули в інші.

На велику роль символів у математичному природознавстві вказували всі видатні математики. Наприклад М. І. Лобачевський успіхи фізичних і математичних наук пов'язував з використанням символіки.

Так, знаки в математиці часто є засобом випереджаючого відображення об'єктивної дійсності.

Прикладом такого відображення дійсності може бути відкриття у 1846 році планети Нептун, зроблене на основі математичного аналізу руху планети Уран.

Зазначимо також, що використання логіко-математичної символіки дає змогу автоматизувати багато етапів математичних міркувань, широко використовуючи для цього сучасну обчислювальну техніку (ЕОМ). Це знову ж таки обумовлюється тим, що одні логіко-математичні формули можна перетворювати в інші на основі алгоритмів, які можна реалізувати за допомогою електроннообчислювальних машин.

Отже, найважливішою функцією логіко-математичної символіки є функція формалізувати такий рух математичної думки, коли шуканий результат досягається внаслідок тимчасового абстрагування від конкретного змісту розглядуваної задачі. Іноді в практиці шкільного викладання цю функцію чітко не виділяють, що веде до формалізму в знаннях учнів.

§ 2. КЛАСИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАКІВ (СИМВОЛІВ)

Математична символіка пройшла довгий шлях розвитку. Минали десятки років і навіть століття, аж поки той чи інший знак остаточно набув прав громадянства в математичній мові. Розвиваючись разом з математичною наукою, система математичних знаків настільки розширилась, що виникла потреба їх класифікувати.

Класифікацію **математичних знаків** з погляду математичної логіки подано у «Великій радянській енциклопедії».

Будемо розглядати п'ять класів знаків:

1) знаки об'єктів; 2) знаки операцій; 3) знаки відношень; 4) знаки відображень; 5) допоміжні знаки.

До знаків об'єктів слід віднести символи цифр десяткової системи числення, римської нумерації, знаки чисел π, e (основа натуральних логарифмів), знаки для позначення довільних (загальних) об'єктів, точок, прямих, площин тощо.

Для позначення довільних об'єктів певної множини часто використовують букви латинського або грецького алфавіту. Наприклад, геометричну фігуру позначають буквою Ф, пряму — буквою a, площину — буквою α і т. д.

Зауважимо, що буквами, як правило, позначають змінні.

За допомогою змінних математична мова виражає загальні закономірності, оскільки замість змінних можна підставляти назви (імена) довільних об'єктів тих чи інших множин. Роль змінних у математичній мові було чітко з'ясовано лише після того, як німецький математик Фреге ввів поняття квантора (1879 р.). Квантори — це логічні операції, які речення із змінними перетворюють у висловлення з певним значенням істинності.

Вираз «для всіх x» позначають через «$\forall x$», де знак «$\forall$» (перевернута буква A від англійського слова All — «усі») називається квантором загальності.

Вираз «існує таке x» позначають через «$\exists x$», де знак $\exists$ (перевернута буква E від англійського слова Exist — існує) називається квантором існування (термінологію для кванторів увів американський математик Мітчел). У математичної логіки ще немає єдиної системи позначень. Наприклад, для позначення квантора загальності використовують ще знаки (x), $\bigwedge_x$, $\prod_x$, а для квантора існування — $\bigvee_x$, $\sum_x$, Ex.

Без кванторів не можна було б застосовувати змінні для побудови математичних тверджень. Адже кожна математична теорема є висловлення. А речення, що містить змінну, не є висловленням. Наприклад, речення «x — ціле число» не можна вважати висловленням, оскільки ми не знаємо числового значення x. Та якщо застосувати до нього квантор загальності, то дістанемо вже висловлення «довільне x — ціле число». Це висловлення істинне на множині цілих чисел і хибне на множині раціональних (дійсних) чисел.

Твердження $x \in Q \Rightarrow x^2 = 2$ не є висловленням, але якщо ми «зв'яжемо» його квантором існування $(\exists x)$, то дістанемо висловлення $(\exists x)(x \in Q \Rightarrow x^2 = 2)$ — «Існує таке раціональне число, квадрат якого дорівнює двом». Заперечивши це твердження, матимемо відому теорему про існування ірраціональних чисел: $\neg (\exists x)(x \in Q \Rightarrow x^2 = 2)$.

Речення «$a \dot{-} b$» не є висловленням, але якщо ми зв'яжемо змінну a квантором загальності, а змінну b — квантором існування, то дістанемо математичне висловлення: $\forall a \exists b\, (a \dot{-} b)$ «Для будь-якої прямої a існує мимобіжна щодо неї пряма b». Зауважимо, що в шкільних підручниках і посібниках з математики символи кванторів здебільшого не пишуть, але мають їх на увазі. Наприклад, формула $x(y + z) = xy + xz$ виражає закон дистрибутивності множення відносно додавання.

У записі цього висловлення опущено слова «для довільних (чисел)...». Повний символічний запис твердження має вигляд

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\, (x(y + z) = xy + xz).$$

Особливо не можна опускати (словесно) кванторів існування, бо це призводить до неправильних висловлень. Наприклад, висловлення $\forall x\, (x \in N)$ і $\exists x\, (x \in N)$ мають різний зміст: перше стверджує, що всі числа x натуральні, а друге,— що лише деякі числа x натуральні.

Зауважимо також, що потрібно розрізняти букву-ім'я і букву-змінну: перша є ім'ям довільного елемента даної множини, а друга відіграє роль порожнього місця, на яке можна поставити ім'я будь-якого елемента тієї чи іншої множини.

Розглянемо знаки **математичних операцій.** Нехай дано деяку множину M. Говорять, що в множині M визначено **алгебраїчну операцію,** якщо будь-яким двом елементам її a і b, взятим із M у певному порядку, ставиться у відповідність єдиний елемент c множини M. Коли не кожним двом елементам із множини M можна поставити у відповідність елемент c цієї множини, то алгебраїчну операцію називають **частковою** (віднімання і ділення на множині натуральних чисел, ділення на множині цілих чисел).

Традиційним у шкільному курсі математики є застосування операцій додавання, віднімання, ділення, множення, добування квадратного кореня і використання знаків цих операцій. Новими для школи є деякі операції над множинами та **композиція перетворень** (починаючи з VII класу).

У традиційних шкільних підручниках відношення як одне з основних понять теорії множин лишалося поза увагою. У зв'язку з теоретико-множинною основою побудови сучасного шкільного курсу математики набули першорядного значення поняття відповідності, відображення, функції, операції. Тому цим поняттям слід приділити особливу увагу в процесі шкільного викладання.

До складу допоміжних знаків відносять круглі, квадратні та фігурні дужки, кому, крапку з комою тощо. Ці знаки вказують на послідовність виконання арифметичних дій, відокремлюють цілу частину числа від дробової, один вираз від другого тощо.

Розділ II

МАТЕМАТИЧНІ ЗНАКИ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ. ПОХОДЖЕННЯ І ЗМІСТ

§ 1. СИСТЕМА ПОЗНАЧЕНЬ, ЩО ЗУСТРІЧАЮТЬСЯ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

Наводимо список символів, що використовуються в шкільному курсі математики. Його складено відповідно до розглянутої в попередньому розділі класифікації так, що для кожного наступного класу вводяться лише ті знаки, які тут зустрічаються вперше. До списку, крім математичних знаків, включено і два логічних знаки: логічного слідування та еквівалентності, які застосовуються, починаючи з VII класу.

IV КЛАС

1. *Знаки математичних об'єктів.*

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — десяткові цифри
x, y, z — змінні
M, A, B, X — множини
$\varnothing$ — порожня множина
% — процент
° — градус

A, B, C, O — точки
(AB) — пряма AB
$[AB]$ — відрізок AB
$|AB|$ — довжина відрізка AB
$\angle AOB$ — кут AOB
$A\widehat{O}B$ — величина кута AOB

2. *Знаки операцій.*

$(+)$ — додавання
$(-)$ — віднімання
$(\cdot, \times)$ — множення
$(:)$ — ділення

3. *Знаки відношень.*

$=$ — рівності	$\leqslant$ — менше або дорівнює, не більше
$\neq$ — нерівності	$\geqslant$ — більше або дорівнює, не менше
$<$ — менше	$\in$ — належить
$>$ — більше	$\notin$ — не належить (не є елементом множини)
$\parallel$ — паралельні	$\perp$ — перпендикулярні

4. *Допоміжні знаки.*

( ) — круглі дужки	, — кома
[ ] — квадратні дужки	; — крапка з комою
{ } — фігурні дужки	. — крапка

V КЛАС

1. *Знаки математичних об'єктів.*

N — множина натуральних чисел

Z — множина цілих чисел

Q — множина раціональних чисел

π — довжина кола з діаметром 1.

$A(x)$, $A(x; y)$ — точки на числовій прямій (числовій площині) із зазначенням координат

2. *Знаки операцій.*

$\cup$ — об'єднання множин $\cap$ — переріз множин

3. *Знаки відношень*

$\subset$ — включення однієї множини до другої.

VI КЛАС

1. *Знаки математичних об'єктів.*

Ф — фігура	a, b, c — прямі (або відрізки)
$[AB)$ — промінь з початком у точці A	α, β, γ — кути
ΔABC — трикутник ABC	К (o, r) — коло з центром у точці O і радіуса r
∞ — нескінченність	$[a, b[$ — напіввідкритий проміжок

$[a; b]$ — замкнений проміжок (відрізок)
$]a; b[$ — відкритий проміжок (інтервал)

$[p, A)$ — півплощина

2. *Знаки операцій.*
a^n — піднесення до натурального степеня
3. *Знаки відношень.*
$\cong$ — конгруентні
$\nparallel$ — непаралельні
$\not\subset$ — не є підмножиною
4. *Знаки відображень*
f, φ — загальне позначення будь-якої функції
$\rightarrow$ — відображення
$S_{(AB)}$ — симетрія відносно прямої AB
F — переміщення

VII КЛАС

1. *Знаки математичних об'єктів.*
R — множина дійсних чисел
$\smile AB$ — дуга як геометрична фігура
$\overset{\frown}{AB}$ — величина дуги AB
S — площа як величина
$'$ — мінута
$''$ — секунда
$|\overrightarrow{AB}|$ — довжина вектора $\overrightarrow{AB}$
2. *Знаки операцій.*
$\sqrt{\ }$ — корінь квадратний
3. *Знаки відношень*
$\Rightarrow$ слідування
$\Leftrightarrow$ рівносильність
$\sim$ подібність
4. *Знаки відображень*
H_O^k — гомотетія з центром O і коефіцієнтом k
Z_0 — центральна симетрія з центром O
E — тотожне перетворення,
$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ вектор

Зауважимо, що в експериментальному посібнику з геометрії для 7-го класу за редакцією Болтянського В. Г.[1]

[1] Болтянский В. Г., Волович М. Б., Семушин А. Д. Геометрия. Экспериментальное учебное пособие для VII класса. М., Педагогика, 1974.

вводяться і широко використовуються знаки кванторів загальності $\forall$ та існування $\exists$, а також заперечення $\urcorner$.

VIII КЛАС

1. *Знаки математичних об'єктів*

V — об'єм

(x_n) — послідовність

2. *Знаки операцій*

lg, log — логарифми

sin, cos, tg, ctg — знаки тригонометричних функцій

$a^x, \sqrt[n]{a}$ — піднесення до степеня і добування кореня

$[x]$ — ціла частина числа

$\{x\}$ — дробова частина числа

3. *Знаки відображень*

R_O^α — поворот навколо точки O на кут α

$F_1 \circ F_2$ — композиція переміщень

IX КЛАС

1. *Знаки матемстичних об'єктів.*

$(a; b; c)$ — упорядкована трійка

R^2 — числова площина

$(\Phi_1 \widehat{,} \Phi_2)$ — кут між плоскими геометричними фігурами Φ_1 і Φ_2.

(ABC) — площина, що проходить через точки A, B, C

$S_{\triangle ABC}$ — площа трикутника

$D(f)$ — область визначення функції

$E(f)$ — множина значень функції

A_n^m — число розміщеңь з n по m

P_n — число перестановок з n елементів

C_n^m — число комбінацій з n по m

$\min\limits_{[a;\,b]} f$ — найменше значення функції на відрізку $[a;\,b]$

$\max\limits_{[a;\,b]} f$ — найбільше значення функції на відрізку $[a;\,b]$

2. *Знаки операцій.*

lim — границя

! — факторіал

Δx — приріст аргументу

Δf — приріст функції

f' — похідна функції

$\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ — скалярний добуток векторів

3. *Знаки відношень*

$\uparrow\uparrow$ — співнапрямлені (промені або вектори)

$\downarrow\uparrow$ — протилежно напрямлені промені

$\dot{-}$ — мимобіжні прямі

4. *Знаки відображень.*

S_α — симетрія відносно площини α

X КЛАС

1. *Знаки математичних об'єктів.*

число e

$(\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$ — трійка взаємноперпендикулярних одиничних векторів

2. *Знаки операцій.*

ln — логарифм натуральний

$\int$ — інтеграл

$\left.\begin{array}{l}\text{arcsin}\\ \text{arccos}\\ \text{arctg}\\ \text{arcctg}\end{array}\right\}$ — обернені тригонометричні функції

exp — показникова функція

§ 2. МАТЕМАТИЧНА СИМВОЛІКА В IV—V КЛАСАХ

IV КЛАС

1. ЗНАКИ МАТЕМАТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Походження і зміст десяткових цифр розглянуто в підручнику з математики для IV класу (розділ «Додаткові питання»), тому не будемо спинятися на цьому питанні.

Знаки змінних і множин

$x,\ k,\ m,\ y$ $M,\ A,\ B,\ X$ $\varnothing$

Перші відомості з алгебри, зокрема ті, що стосуються розв'язування рівнянь, сягають у глибоку давнину. Але алгебра як наука розвивалася дуже повільно, бо всі записи в ній робили словами (алгебра була риторичною). І тільки в XIV—XVII ст. виникає алгебраїчна символіка. Великий вклад у її створення вніс французький математик Ф. Вієт (1540—1603), якого справедливо вважають «батьком алгебри». Вієт першим почав систематично використовувати букви для позначення відомих і невідомих величин в алгебраїчних рівняннях. Невідомі він позначав великими голосними буквами, а відомі — приголосними. Наприклад, рівняння $x^3 + 5bx = d$ Вієт записував так: *Acubus* + *Bplanum* in *A*5 *aeguatur Dsolido*. Символіка Вієта була неповною, але на її основі він побудував свою алгебру як науку про розв'язування рівнянь. Символіку Вієта значно вдосконалив видатний французький математик і філософ Р. Декарт (1596—1650). Саме він увів у 1637 р. позначення для невідомих («невизначених») x, y, z. Вище наведене рівняння Декарт записував так: $x^3 + 5bx - d \propto 0$ ($\propto$ — знак рівності).

Застосування символіки зумовило бурхливий розвиток алгебри та інших розділів математичної науки.

На розвиток алгебри (як і математики в цілому) вплинула теорія множин, створена німецьким математиком Г. Кантором (1845—1918). Ця теорія великою мірою обумовила сучасну структуру математики. Для позначення множини Кантор, зокрема, використовував букву M (скорочення німецького слова *Menge* — множина) Пізніше почали вживати, особливо французькі математики, букву E (скорочення французького слова *Ensemble* — множина). Крім того, множини позначали великими буквами латинського алфавіту A, B, C, X, Y тощо. Для позначення елемента множини використовували малі букви, найчастіше x або y.

Розвиток і застосування теорії множин зумовили введення поняття порожньої множини, яка не містить жодного елемента. Для її позначення використовували 0, але оскільки це могло привести до двозначності в математичних виразах, то нуль почали перекреслювати. Так утворився знак $\varnothing$ порожньої множини.

Знак процента

%

Слово «процент» походить від латинського слова «*pro centum*» — сота частина. У середньовіччі, наслідуючи італійців, говорили «*pro cento*». Близько 1650 р. скорочення «*procento*» набрало вигляду $\frac{o}{o}$. Знак $\frac{o}{o}$ почали широко застосовувати з 1799 р. У середині XIX ст., виходячи з міркувань зручності друкування, цей знак почали писати з косою рискою %.

Знак градуса

O

Поняття градуса походить від давньогрецького вченого Птолемея (близько 178—100 до н. е.), який ділив коло на 360 частин. Для позначення $\frac{1}{360}$ кола Птолемей використовував слово μοῖρα — частина кола. Скорочений запис цього слова — μ^0, звідки походить знак °. Цей знак застосував у 1558 р. французький математик Ж. Пелетьє (1517—1582). Термін «градус» — від латинського слова *gradus* — крок, сходинка. Запис $\widehat{AOB} = 36°$ означає, що величина кута AOB дорівнює 36 градусів.

Знаки прямої, відрізка і довжини відрізка

(AB); $[AB]$;
$|AB|$; $[AB)$

Букви для позначення геометричних точок, прямих і відрізків використовували ще давньогрецькі вчені.

Термін «пряма» в російській математичній літературі почали застосовувати з 1708 р. (автор терміна невідомий). Він є перекладом давньогрецького слова «εὐθείου» — пряме, спрямлення. Зауважимо, що вперше чітко розмежував поняття прямої, променя і відрізка у XIX ст. швейцарський математик Я. Штейнер (1796—1863). На основі цього французькі математики ввели (у XX ст.) різні знаки для прямої, відрізка і променя. У 1970 р. академік А. М. Колмогоров запропонував використати ці позначення в нових посібниках з геометрії для радянської школи. Пряму почали позначати (AB), а відрізок $[AB]$. Колмогоров увів позначення довжини відрізка, або відстані від точки A до точки B — $|AB|$.

У IV класі розглядається і поняття променя $[AB)$ з початком у точці A, означення якого вводиться лише в VI класі.

«Промінь» (латинський *radius*) середньовічний термін. Математики давнини не користувалися поняттям променя. Російське слово «луч» походить від латинського *lux* — «світло». Тому часто промінь позначають буквою l.

Знаки кута і величини кута

$<$ $\wedge$

Кут, як відомо, є одна з основних геометричних фігур. У різні часи для позначення кута використовувались неоднакові знаки. Сучасний символ $\angle$, яким позначають кут, ввів у 1634 р. французький математик П. Ерігон. У 1971 р. академік А. М. Колмогоров запропонував чітко розрізняти в школі кут як геометричну фігуру і величину кута. Ідея позначати величину кута знаком $\frown$ належить також Колмогорову. Отже, записи $\angle ABC$ і $\widehat{ABC}$ мають тепер різний зміст: кут ABC і величина кута ABC.

2. ЗНАКИ АРИФМЕТИЧНИХ ОПЕРАЦІЙ

$+$ $-$ $\cdot$ $\times$ $:$

Спеціальними знаками арифметичні дії позначали ще в давнину. Стародавні египтяни як знак додавання використовували малюнок двох ніг людини, що рухалася вперед, а як віднімання — малюнок двох ніг людини, що рухалася назад. Сучасні друковані знаки додавання і віднімання зустрічаються в «Арифметиці» німецького вченого Й. Відмана (1489 р.)[1].

[1] Нещодавно в Дрезденській бібліотеці знайдено рукопис 1481 р., в якому вживаються знаки $+$ і $-$.

Загальне визнання ці знаки дістали, починаючи з XVII ст.

Є різні думки щодо походження знаків «плюс» (від латинського слова *plus* — більше) і «мінус» (від латинського слова *minus* — менше). Досить вірогідною серед них є думка про походження цих знаків з торговельної практики. Кількість проданого товару купець позначав горизонтальними рисками. Поновлюючи товари цього ж виду, він перекреслював стільки горизонтальних рисочок, скільки проданого товару поповнювалося (———++).

Заслуговує на увагу також припущення, що знак + утворився з останньої букви латинського слова ***et*** (сполучник «і»). Адже діти дошкільного і молодшого віку й тепер суму 1 + 2 читають так: «Один і два». Символ × як знак дії множення ввів англійський математик В. Оутред (1574—1660) у 1631 р. Цей знак вказував і на порядок дій. Наприклад, щоб помножити 35 на 42, обчислювали чотири добутки (30 × 2; 40 × 5; 5 × 2; 30 × 40), з яких у записі $\begin{matrix}35\\ \times\\ 42\end{matrix}$ два брали навхрест і два вертикально, а результати додавали. Такий спосіб множення називали «хіазом», оскільки знак × схожий на грецьку букву χ.

Знак множення · (крапку) запропонував у 1698 р. видатний німецький математик, фізик і філософ Г. Лейбніц (1646—1716). Він також ввів і сучасний знак ділення : (двокрапку) у 1684 р. Загальноприйнятими знаки · і : стали починаючи з XVIII ст., завдяки праці німецького математика і педагога X. Вольфа «Основи усіх математичних наук» (1710 р.). Знак множення тепер використовують при перенесенні частини виразу, наприклад: $\frac{(3+5)}{4}\,\frac{1}{4} =$ $= \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$. Зауважимо, що знак ділення — риска зустрічається приблизно в 1202 р. в Італійського математика Леонардо Пізанського (Фібоначчі) (приблизно 1170—1228). Існує вірогідна думка, що він запозичив цей знак в арабських учених.

Риска для позначення дробів стала загальновживаною у XIV ст. Для полегшення друкування шотландський математик і логік де Морган (1806—1871) запропонував косу риску (солідус), яка знайшла широке застосування. Знак ділення : набув останнім часом більшого поширення, ніж знак ділення — (риска), оскільки він займає менше місця. Наприклад, вираз $(a + b) : (a^3 + b^3)$ займає лише один рядок при друкуванні тексту, тоді як той самий вираз у вигляді дробу займає два рядки.

3. ЗНАКИ ВІДНОШЕНЬ

$$\boxed{\begin{matrix} = \neq \\ < \leqslant \\ > \geqslant \end{matrix}}$$

Знак рівності = ввів у 1557 р. англійський математик і лікар Р. Рекорд (1510—1558). Він уперше написав англійською мовою підручники з арифметики й алгебри. У цих підручниках Р. Рекорд систематично застосовував знаки + і —. У підручнику з алгебри він ввів сучасний знак рівності =, мотивуючи його тим, що ніщо не може так дорівнювати одне одному, як довжини двох паралельних конгруентних відрізків. Зауважимо, що знак рівності в різних випадках має неоднакові значення.

1. Виражає тотожність, збіг. Наприклад, запис $[AB] = [CD]$ означає, що $[AB]$ і $[CD]$ різні позначення одного відрізка.

2. Використовується для введення нового символу. Так, у записі $C = 2\pi r$ символ = визначає новий символ C за відомими: 2, π, r.

3. Застосовується як знак еквівалентності: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Учитель повинен звертати увагу учнів на те, в якому значенні використовується знак рівності в кожній конкретній ситуації.

Знак $\neq$ ввів англійський математик і географ Т. Гарріот (1560—1621) у праці, яку було опубліковано в 1631 р. Він багато зробив для розвитку алгебраїчної символіки, зокрема користувався для позначення чисел малими буквами латинського алфавіту і записував рівняння у вигляді, близькому до сучасного. Т. Гарріоту належать знаки $>$ — більше, $<$ — менше (опубліковано також у 1631 р.). Ці знаки походять від знака рівності, який виник як прообраз важільних терезів. Порушення рівноваги терезів міняло положення верхнього коромисла. Вістря добутого знака нерівності $>$ направили в бік меншого числа, бо в цьому напрямі зменшується відстань між коромислом терезів і їх основою (схематично — зменшується відстань між двома відрізками, які в стані рівноваги були паралельними). Усі інші знаки нерівності виникли на основі потреби скорочено записувати відношення між двома числами, величинами, виразами. Вони є творчим доробком різних математиків. Так, англійський математик Дж. Валліс (1616—1703) у 1670 р. ввів знаки $\geqslant$ (дорівнює або більше), $\leqslant$ (дорівнює або менше) і $\lesseqgtr$ (дорівнює, більше або менше). Знаки $\geqq$ (більше або дорівнює) і $\leqq$ (менше або дорівнює) ввів дещо пізніше французький фізик і математик П. Буге (1698—1758). У сучасній математиці ці знаки було модернізовано (відкинуто по одній нижній рисці). Часто вживають тепер знаки $\ll$ — значно менше, $\gg$ — значно більше. Наприклад, якщо позначимо через $|KM|$ відстань від Києва до Москви, а $|ЗС|$ — відстань від Землі до Сонця, то запис $|KM| \ll |ЗС|$ означатиме, що відстань від Києва до Москви значно менша, ніж відстань від Землі до Сонця.

Знаки належності і неналежності елемента до множини

$\boxed{\in \; \notin}$

Знак належності елемента множині є скороченням (першою буквою) грецького слова εδτι — бути (елементом множини). Цей знак запровадив італійський математик Дж. Пеано (1858—1932), який разом із своїми учнями виклав математику точною символічною мовою. Відношення $\in$ — «бути елементом множини» і поняття «множина» належать до первісних понять теорії множин. Замість «x є елемент множини M» записують $x \in M$. У шкільному курсі геометрії множини і точки позначають великими буквами. Тому тут тільки за знаком відношення в символічному записі можна сказати, чи ми маємо справу з множиною точок, які є підмножиною даної множини M, чи точкою, яка належить цій множині. Так, запис «$A \in M$» означає, що точка A — елемент множини M, а вираз «$A \subset M$» має зовсім інший зміст: множина A є підмножиною M. Пеано також запропонував знак $\notin$ для заперечення виразу $x \in M$. Вираз $x \notin M$ читається так: «x не є елементом множини M».

Знаки паралельності й перпендикулярності

$\parallel$; $\perp$

Термін «паралельний» античного походження (від давньогрецького παραλληλος — рівнобіжний, той, що не перетинається з чим-небудь при необмеженому продовженні). Його використовував вже Евклід. Знак $\parallel$ цього відношення введено значно пізніше. Його вперше знайдено в одній з праць В. Оутреда. Цей символ використовується для позначення паралельності двох прямих $a \parallel b$, прямої і площини $a \parallel \alpha$, двох площин $\alpha \parallel \beta$. Відношення паралельності рефлексивне, симетричне і транзитивне, тобто є відношення еквівалентності. Отже, відношення паралельності можна покласти в основу класифікації прямих (площин). Для заперечення виразу $a \parallel b$ ($a \parallel \alpha$ або $\alpha \parallel \beta$) пізніше почали застосовувати знак $\nparallel$. Наприклад, вираз $a \nparallel b$ читається так: «прямі a і b не паралельні». Відношення «не паралельний» симетричне, але не рефлексивне і не транзитивне.

Термін «перпендикулярний (від латинського *perpendiculum* — прямовисний) було введено в епоху середньовіччя для назви прямої лінії, що утворює прямий кут з даною прямою або площиною. Знак $\perp$ ввів у 1634 р. П.Ерігон. Цей знак використовується для позначення перпендикулярності двох прямих $a \perp b$, прямої і площини $a \perp \alpha$, двох площин $\alpha \perp \beta$. Відношення перпендикулярності симетричне, але не рефлексивне і не транзитивне.

4. ДОПОМІЖНІ ЗНАКИ

Знаки дужок

( ); [ ]
{ }

Термін «дужки» (німецьке слово — *klammer*) ввів у математичну мову Л. Ейлер (1707—1783) у 1770 р. Самі ж знаки дужок було введено раніше. Квадратні дужки [ ] запропонував у 1550 р. італійський математик та інженер Р. Бомбеллі [1] (бл. 1526—1572), який удосконалив правила дій над раціональними числами. Круглі дужки ввів у 1556 р. італійський математик Н. Тарталья (бл. 1500—1557). Фігурні дужки запровадив у 1593 р. Ф. Вієт.

---

[1] Бомбеллі використав для цього велику латинську букву *L*. Дужки він записував так: L ˥.

Тривалий час ці види дужок (круглі, квадратні, фігурні) використовували при побудові громіздких арифметичних виразів і для визначення порядку виконання арифметичних дій. Але з'ясувалося, що для регулювання послідовності дій цілком досить лише одного виду дужок, наприклад круглих. Так, вираз:

$$\left\{\left[17{,}8 : \left(5\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right)\right] : \left[13{,}5 \cdot \left(4{,}2 - 1\frac{1}{7}\right)\right]\right\} \cdot 12{,}4,$$

записаний за допомогою трьох видів дужок, можна записати, користуючись тільки круглими дужками:

$$\left(\left(\left(17{,}8 : \left(5\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right)\right) : \left(13{,}5 \cdot \left(4{,}2 - 1\frac{1}{7}\right)\right)\right)\right) \cdot 12{,}4.$$

Загальний підрахунок дужок і врахування балансу дужок, що відкриваються і закриваються, допомагає зрозуміти структуру виразу і виявити помилки в процесі виконання дій.

Круглі дужки використовуються не тільки в арифметичних виразах. Про застосування круглих та інших дужок йтиметься в наступних параграфах. Зазначимо лише, що за допомогою квадратних дужок записують відрізок, а фігурних — множину елементів. Наприклад, запис $A = \{1, 2, 3\}$ означає, що A — множина чисел 1, 2, 3. Одна квадратна дужка [використовується також як сполучник «або». Про це йтиметься в розділі III.

V КЛАС

1. ЗНАКИ МАТЕМАТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Знаки числових множин

$\boxed{N, Z, Q}$

Першоосновою математики є множина натуральних чисел. Термін «натуральний» походить від латинського слова *Natura* — природа (латинська назва натурального числа *numerus naturalis*). Першу букву N цього слова прийнято використовувати для позначення множини натуральних чисел. Вираз $n \in N$ означає, що число n є натуральним (належить до множини натуральних чисел).

Множина цілих чисел позначається першою буквою німецького слова *Zählen* — цілий. Запис $x \in Z$ означає, що x — ціле число (належить до множини цілих чисел).

Назва «раціональний» походить від латинського *Ratio* — розум, відношення. Раціональний — пов'язаний з відношенням. Тому множину раціональних чисел позначали раніше буквою *R*. Але цією ж буквою починається латинською мовою слово «дійсний», «реальний» — *Realis* (французькою мовою — *Reel*). Тому зручніше буквою $\boldsymbol{R}$ позначати множину дійсних чисел, а множину раціональних чисел — буквою $\boldsymbol{Q}$ — першою буквою французького слова *Quotite* — частка.

Отже, вираз $x \in \boldsymbol{Q}$ означає, що x — раціональне число, а вираз $y \in \boldsymbol{R}$ — що y належить множині дійсних чисел

Знак π

$\boxed{\pi}$ π — перша буква грецького слова περιφερεια край, обвід круглого тіла або πιερο — круг. Англійський математик І. Джонсон використав символ π у 1706 р. для позначення відношення довжини кола до його діаметра (довжина кола радіуса 1). Символ став загальновизнаним з 40-х років XVIII ст. завдяки Л. Ейлеру. Пізніше, у 1766 р. німецьким математиком Й. Ламбертом (і незалежно від нього французьким математиком А. Лежандртом) було встановлено, що π — ірраціональне число, тобто його можна подати нескінченним неперіодичним десятковим дробом. У шкільній практиці обчислень користуються наближеним значенням цього числа з недостачею, покладаючи $\pi \approx 3{,}14$ або $\pi \approx 3{,}1416$.

Координати точки

Термін «координата» (від латинського слова *coordinatus* — упорядкований) ввів Г. Лейбніц. Йому ж належить ідея використання в сучасному значенні термінів «абсциса» і «ордината» (від латинських слів *abscissus* — відрізок і *ordinatus* упорядкований). Ці терміни і позначення $A\ (x)$, $A\ (x;\ y)$ увійшли в практику математиків з XVIII ст. Запис $(x;\ y)$ ще називають упорядкованою парою.

2. ЗНАКИ ОПЕРАЦІЙ

Знак модуля

$|x|$

Знак модуля числа $|x|$ ввів у 1841 р. німецький математик К. Вейєрштрасс (1815—1897). Термін «модуль» (від латинського *modulus* — міра) ввів значно раніше англійський математик Р. Котес (1682—1716). Цей термін має різні значення (модуль переходу від системи логарифмів з основою a, до системи логарифмів з основою b, модуль числа, модуль вектора тощо).

У V класі знаком модуля $|\quad|$ позначають модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Наприклад, запис $|-12| = 12$ означає, що модуль від'ємного числа -12 є число 12. Символом модуля позначають довжину відрізка. Це пояснюється тим, що модуль числа є числове значення довжини відповідного відрізка (згідно з означенням). Зв'язок між модулем числа і довжиною відрізка на координатній прямій доцільно використати для розв'язування рівнянь і нерівностей виду: $|x| = a$, $|x| < a$, $|x-a| = b$, $|x-a| < b$. Наприклад, розв'язування рівняння $|x-2| = 5$ можна звести до знаходження на координатній прямій чисел x, віддалених на п'ять одиничних відрізків від точки A (2); $|AX| = 5$. Отже, $x_1 = -3$; $x_2 = 7$. Аналогічно, якщо $|x| < 5$, то $-5 < x$ і $x < 5$, або $-5 < x < 5$.

Знаки операцій над множинами

$\cup$
$\cap$

Знаки $\frown$ і $\smile$ ввів у 1888 р. Пеано (як дуги півкіл) для позначення операцій перерізу і об'єднання множини. На початку XX ст. вони набули сучасного вигляду $\cap$ і $\cup$.

Вираз $A \cup B$ читається: «об'єднання множин A і B». Вираз $A \cap B$ читається: «переріз множин A і B».

Знаки $\cap$ і $\cup$ часто використовуються в шкільному курсі математики, зокрема, в геометрії.

П р и к л а д 1. Якщо кут ABD є сумою двох кутів ABC і CBD, то це можна записати так: $\angle ABC \cup \angle CBD = \angle ABD$.

П р и к л а д 2. Символічний запис $K(O, r) \cap (AB) =$

$= \{K; L\}$ або $(O, |OM|) \cap (AB) = \{K; L\}$ означає, що переріз кола (з центром у точці O і радіусом r або радіусом $|OM|$) з прямою AB є фігура, яка складається з двох точок K і L. Спостереження показують, що учні, особливо V класу, плутають символи $\cup$ і $\cap$. Щоб допомогти їм запам'ятати зміст цих символів, варто звернути їхню увагу на те, що символ $\cap$ дещо подібний до першої букви слова «переріз», а символ $\cup$ — до першої латинської букви слова *Union* — об'єднання.

3. ЗНАКИ ВІДНОШЕНЬ

$\boxed{\subset}$ Знак $\subset$ належить німецькому математику Е. Шредеру (1841—1902). Для позначення строгого включення його використав у 1895 р. Дж. Пеано. Вираз $A \subset B$ означає, що множина A є підмножиною множини B, тобто що кожний елемент множини A належить множині B. Знак $\subset$ є безпосереднім узагальненням знака $\in$, який виражає відношення належності елемента множині. Крім знака строгого включення, використовується і знак нестрогого включення $\subseteq$. Вираз $A \subseteq B$ означає, що можливий випадок, коли множини A і B рівні. Наприклад, кожна множина M нестрого включається (є підмножиною) сама в себе. Це записується так: $M \subseteq M$. У шкільній математиці використовується в обох згаданих значеннях тільки один знак $\subset$.

§ 3. МАТЕМАТИЧНА СИМВОЛІКА В VI—VIII КЛАСАХ

VI КЛАС

1. ЗНАКИ МАТЕМАТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Знак фігури

$\boxed{\Phi}$ Поняття «фігура» використовувалось ще в античному світі. Це слово походить від латинського *Figura* — образ, зовнішній вигляд, який у свою чергу є перекладом давньогрецького слова σχημα (схема). Тому для позначення фігури почали використовувати грецьку букву Ф, що відповідає латинській *F*.

a, b, c
α, β, γ

Найпростішими геометричними фігурами є точка, пряма, відрізок, промінь, кут. Ці фігури позначали буквами ще давньогрецькі математики. Саме від них походить позначення кутів грецькими буквами α, β, γ. Латинські букви a, b, c для позначення відомих відрізків (прямих) вперше використав французький математик Р. Декарт. Як уже зазначалося, французькі математики запровадили спеціальні позначення для прямої — (AB), відрізка — $[AB]$, променя — $[AB)$, які за пропозицією академіка А. М. Колмогорова було введено в підручники і посібники з геометрії (де ці об'єкти тлумачаться як множини точок).

Позначення трикутника і кола

ΔABC
$K(O;\ r)$
$K(O;\ |OM|)$

Слово «трикутник» античного походження (від грецького τριπλευρος — тристоронній). Ще в I ст. н. е. символ ∇ для позначення трикутника застосував давньогрецький учений Герон. З IV ст. н. е. почали застосовувати знак $\triangle$. Наприклад, трикутник з вершинами в в точках A, B, C позначають $\triangle ABC$. «Коло» також походить від давньогрецького слова περιφερεφ — обвід. У перекладі з грецької на латинську мову *circumferentia* означає кругом несу. Саме тому довжину кола позначають буквою C. Коло з центром у точці O і радіусом r позначають так: $K(O;\ r)$. Часто коло позначають і так: $K(O,\ |OA|)$, де A — точка, що належить даному колу.

Знак нескінченності

∞

Цей символ використовували ще стародавні римляни для позначення числа 1000. Англійський математик Дж. Валліс (1616—1703) запровадив у 1655 р. символ ∞ для позначення математичного поняття нескінченності. Цим символом позначають числову вісь $]-\infty;\ +\infty[$, а також нескінченний відкритий проміжок $]-\infty;\ a$ [або] $a;\ +\infty[$ тощо.

Наприклад, множину розв'язків нерівності $x \geqslant 1$ позначають $[1;\ +\infty[$ і читають: «числовий проміжок від 1 до плюс нескінченності».

2. ЗНАКИ ОПЕРАЦІЙ

Піднесення до степеня

$\boxed{a^n}$

Дію піднесення до степеня виконували досить давно. Уже в XV ст. середньоазіатський математик Джемшід ал-Каші (рік народження невідомий — помер у 1430 р.) застосовував рівність $a^0 = 1$. Символічними записами піднесення до степеня користувалися Ф. Вієт, І. Гарріот та інші математики. Але сучасну форму запису цілих степенів запровадив у 1637 р. Р. Декарт.

Наприклад, рівняння четвертого степеня він записував так: $+ x^4 \dots px^3 \dots gx \dots$ ∞ 0 (∞ — знак рівності).

Декартова форма запису піднесення до степеня широко використовується в сучасній школі. Наприклад, запис $3^4 = 81$ означає, що внаслідок піднесення числа 3 (основи степеня) до натурального показника степеня 4 дістаємо число 81. Тобто a^n означає результат n-кратного виконання однієї операції — множення. З часом декартові позначення застосовували і для від'ємних та дробових показників англійські математики Дж. Валліс і І. Ньютон. Про це йтиметься далі.

3. ЗНАКИ ВІДНОШЕНЬ

$\boxed{\cong;}$

Термін «конгруентний» (від латинського *congruentis* — той, що суміщається) запровадив у 1882 р. німецький математик М. Паш (1843—1930) для позначення геометричної рівності фігур. Німецький математик Гільберт (1862—1943) ввів у 1899 р. символ «$\equiv$» [1].

У 1971 році академік А. М. Колгоморов запропонував ввести цей термін у шкільний курс геометрії і позначати відношення конгруентності знаком $\cong$, враховуючи його теоретико-множинний зміст: вираз $\Phi_1 \cong \Phi_2$ означає, що фігури Φ_1 і Φ_2 є множинами різних точок, але існує переміщення, яке переводить фігуру Φ_2 у фігуру Φ_1. Якщо ж фігури Φ_1 і Φ_2 збігаються, то це символічно записують так: $\Phi_1 = \Phi_2$ Наприклад, запис $\triangle ABC \cong A_1B_1C_1$ означає, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ конгруентні, а запис $[AB] =$

[1] Знак $\equiv$ ввів у 1857 р. німецький математик Б. Ріман (1826—1866) як знак тотожності.

$= [A_1B_1]$,— що відрізки AB і A_1B_1 збігаються. Отже, в даному випадку два конгруентні трикутники мають одну спільну сторону.

Зауважимо, що відношення конгруентності є рефлексивним ($\Phi \cong \Phi$), симетричним ($\Phi_1 \cong \Phi_2) \Rightarrow (\Phi_2 \cong \Phi_1$) і транзитивним ($\Phi_1 \cong \Phi_2$ і $\Phi_2 \cong \Phi_3) \Rightarrow (\Phi_3 \cong \Phi_1$), тобто є відношенням еквівалентності. Тому відношення конгруентності розбиває множину всіх фігур на класи еквівалентності так, що до одного класу належать усі ті й тільки ті фігури, які є конгруентними. Це дає змогу вивчити всі властивості класу конгруентних фігур на основі розгляду властивостей одного представника цього класу.

4. ЗНАКИ ВІДОБРАЖЕНЬ

f, φ, $f(x)$
$\to$, $S_{(AB)}$, F

Позначення $\varphi(x)$ уперше використав у 1718 р. швейцарський математик Й. Бернуллі (1667—1748). Символ $f(x)$ запровадив у 1734 р. Л. Ейлер як скорочення латинського слова *functio* — звершення, виконання (очевидно, з цих міркувань виходив і Й. Бернуллі). Зауважимо, що треба розрізняти функцію f і її значення $f(x)$, що відповідає x. Проте із суто практичних міркувань цю відмінність не завжди беруть до уваги. Наприклад, неправильно говорити «функція $\lg x$». Слід говорити «функція lg», бо $\lg x$ є значенням цієї функції в точці x.

Після створення теорії множин функцію почали розглядати як відображення однієї множини на другу [1]. З'явився запис $E \xrightarrow{f} F$. Він має такий зміст: f задає відображення множини E на множину F, тобто кожному елементові x з E ставиться у відповідність деякий елемент з F, який позначають через $f(x)$. У 1970 р. академік А. М. Колмогоров запропонував і в шкільному курсі математики використовувати позначення: $x \to f(x)$. Найчастіше функцію задають формулою. Запис $y = f(x)$ означає, що встановлено відповідність f, при якій кожному елементу множини X (значенню змінної x) відповідає єдиний елемент множини Y (значення змінної y). Наприклад, функція $y = 2x$, де $x \in N$ задає відповідність між множиною натуральних чисел і

[1] Перше чітке означення функції як відображення однієї множини на іншу дав у 1911 р. Д. Пеано.

множиною всіх парних натуральних чисел. Символ відображення введено в шкільні посібники з геометрії за редакцією А. М. Колмогорова. Запис $X \to X_1$ має такий зміст: задано відображення, при якому кожна точка X фігури Ф відображається у точку X_1 фігури Φ_1. Якщо кожна точка X_1 фігури Φ_1 є образом лише однієї точки X фігури Ф, то таке відображення називають оборотним: для відображення $f : X \to X_1$ існує обернене відображення $X_1 \to X$, яке позначають f^{-1}.

Особливу роль у шкільній геометрії відіграють відображення, які зберігають відстані між парами відповідних точок. Їх раніше називали рухами. А. М. Колмогоров у 1970 р. запропонував замінити термін «рух» словом «переміщення», оскільки в термін «рух» вкладається у фізиці й геометрії різний зміст (у фізиці це процес, що відбувається в часі, у геометрії — відповідність між точками фігури — прообразу і фігури-образу). Для позначення переміщення взяли символ F, яким користувався ще Л. Ейлер (поряд із символом f) для позначення функції.

До переміщень належать паралельне перенесення, поворот і симетрія. Термін «симетрія» походить від грецького συμμετρια — правильне відношення, співрозмірність. Його запропонував у математику в 1794 р. французький математик А. Лежандр (1752—1833), який уперше розглянув елементи вчення про симетрію. Для позначення відображення симетрії взято першу букву латинського слова *symmetria* — симетрія. Запис $X_1 = S_l(X)$ означає, що точка X_1 є симетричною точці X відносно прямої l, тобто що симетрія відносно прямої l відображає точку X у точку X_1. Наприклад, запис $\triangle A_1B_1C_1 = S_l(\triangle ABC)$ означає, що трикутник ABC симетричний трикутнику $A_1B_1C_1$, оскільки кожна точка трикутника ABC відображається відносно прямої l у симетричну точку трикутника $A_1B_1C_1$.

1. ЗНАКИ МАТЕМАТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Знак множини дійсних чисел

$\boxed{R}$

Знак R є скороченням латинського слова *Reales* — дійсний. Символ R позначає універсальну для шкільного курсу математики множину дійсних чисел. Всі інші множини, що тут розглядаються, є підмножинами множини дійсних чисел. Маємо співвідношення $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

Знак дуги і величини дуги

$\boxed{\breve{AB}; \smile AB}$

Термін «дуга» з'явився в російській математичній літературі в 1739 р. Цей термін походить від латинського слова *arcus* — лук, дуга, арка. Давньогрецькі вчені не розрізняли в позначеннях і термінах дуги і кола. Знак дуги $\frown$ або $\smile$ з'явився ще в XII ст. Але систематично його почали застосовувати у XVII ст. (першим його використавЕрігон). Радянський математик А. М. Колмогоров у 1971 р. запропонував чітко розрізняти в шкільному курсі геометрії дугу як геометричну фігуру і величину дуги ($\smile AB$ і $\breve{AB}$). Наприклад, символічний запис $\smile AB \cong \smile A_1B_1$ означає, що дуги AB і A_1B_1 конгруентні як геометричні фігури, а запис $\breve{AB} = \breve{A_1B_1} = 35°$ означає, що ці дуги мають величину 35°.

Знак мінути і секунди

$\boxed{'; \ ''}$

«Мінута» походить від латинського слова *minuta* — зменшена (частка). А це слово є перекладом слова λεπτον — дрібнота, яке запровадив у II ст. до н. е. давньогрецький учений К. Птолемей для позначення $\frac{1}{60}$ градуса. У творі Птолемея «Альмагест» вміщено перші тригонометричні таблиці. Зауважимо, що термін «секунда» походить від латинського *secunda* — друга й означає повторний поділ градуса, тобто поділ мінути ще на 60 частин $\left(\frac{1}{3600}\text{ градуса}\right)$. Знаки $'$, $''$ ввів у 1558 р. Ж. Пелетьє.

Знак площі

$\boxed{S}$ Походить від латинського слова *superficils* — поверхня. Знак S використовується для позначення площі плоскої фігури і для площі поверхні неплоскої фігури. Наприклад, символічний запис $S_{\triangle ABC} = 20$ см^2 означає, що площа трикутника (як величина) дорівнює 20 см^2.

2. ЗНАКИ ОПЕРАЦІЙ

Знак кореня

$\boxed{\sqrt{\ }}$ Знак $\sqrt{\ }$ добування кореня називають ще радикалом (від латинського *radix* — корінь). У різних країнах у різні часи застосовувались найрізноманітніші позначення кореня. Символ $\sqrt{\ }$, подібний до сучасного знака кореня, вперше застосував у 1525 р. чеський математик К. Рудольф (бл. 1500—1545). Пізніше цей символ записували так: $\sqrt{\ }\overline{}$ (ставили риску окремо від знака кореня). Сучасний знак кореня запропонував у 1637 р. Р. Декарт. Проте загальне визнання знак $\sqrt{\ }$ дістав лише у XVIII ст.

3. ЗНАКИ ВІДНОШЕНЬ

Знак логічного слідування

$\boxed{\Rightarrow}$ Знак $\Rightarrow$ запровадив наприкінці XIX ст. радянський математик І. І. Жегалкін (1869—1947) для позначення логічної операції імплікації. Імплікація (від латинського *implicite* тісно зв'язую) є таке висловлення виду $A \Rightarrow B$ (читають: якщо A, то B», «з A випливає B»), де не враховується зв'язок за змістом між підставою і наслідком, а враховується лише зв'язок між значеннями їх істинності. Цей зв'язок можна подати таблицею:

A	B	$A \Rightarrow B$
І	І	І
І	Х	Х
Х	І	І
Х	Х	І

У цій таблиці буква І означає істинне, буква Х — хибне висловлення.

З погляду імплікації є істинним, наприклад, висловлення: «якщо $2^3 = 8$, то птахи літають». У математичній літературі як знак імплікації застосовують символ $\supset$, запропонований Е. Шредером. Цей символ виражає зв'язок між імплікацією і відношенням включення: якщо $A \supset B$, то кожний елемент множини B є елементом множини A, то отже, якщо кожний елемент множини A має певну властивість P, то з цього випливає, що властивість P має і кожний елемент множини B (бо він належить і множині A). Пізніше цим знаком користувалися, при символічному записі в шкільному курсі математики умовних суджень, кожне з яких складається з логічної підстави, логічного наслідку та зв'язку «якщо ..., то». Логічна підстава починається в умовному судженні словом «якщо» і закінчується словом «то». Вона виражає умови, від яких залежить наявність чи відсутність певного логічного наслідку. Логічний наслідок починається в умовному судженні після слова «то», виражає знання про наявність чи відсутність певного явища у зв'язку з умовами, про які йшлося в підставі. Наприклад: «якщо учень сумлінно готувався до екзаменів з математики, то він успішно складе його». Тут підставою є знання про потребу сумлінної підготовки учня до екзамену і наслідком — знання про те, що він успішно його складе (екзамен). Зв'язка «якщо..., то» показує, що між цими положеннями існує відношення підстави і наслідку. Позначивши підставу символом A, а наслідок — символом B, можна записати це умовне судження так: $A \Rightarrow B$. Отже, знак $\Rightarrow$ показує, що з A випливає B. Висловлення «якщо A, то B», тобто висловлення про слідування B з A характеризується двома умовами: а) воно є хибним тоді і тільки тоді, коли підстава A істинна, а наслідок B хибний; б) A і B зв'язані за змістом.

У підручнику «Алгебра, 7» відношення слідування означено тільки для предикатів. Його слід розуміти так: з предиката (речення із змінною) $P(x)$ випливає предикат (речення із змінною) $Q(x)$ (позначають: $P(x) \Rightarrow Q(x)$), якщо $Q(x)$ перетворюється в істинне висловлення принаймні при всіх тих значеннях змінної x, що й $P(x)$, тобто якщо імплікація $\forall x\, (P(x) \supset Q(x))$ є істинним висловленням.

В шкільній практиці знак $\Rightarrow$ вживається як для позначення відношення логічного слідування, так і для символічного записування логічної зв'язки «якщо-то» (імплікації). Ці два випадки вживання знака $\Rightarrow$ слід чітко розрізняти, оскільки використовувати квантори для перетворення предикатів у висловлення можна тільки тоді, коли знак $\Rightarrow$ набуває змісту логічної зв'язки (наприклад, у записах теорем).

З логічним слідуванням тісно пов'язане відношення рівносильності. Якщо з $P(x)$ випливає $Q(x)$, а з $Q(x)$ випливає $P(x)$, то кажуть, що $P(x)$ рівносильне $Q(x)$ і записують: $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$.

Знак $\Leftrightarrow$ також ввів І. І. Жегалкін для позначення еквіваленції (від латинського *aequivalens* — рівноцінний). Еквівалентністю називають висловлення $A \Leftrightarrow B$, яке є істинним тоді і тільки тоді, коли висловлення A і B набувають одного і того самого значення істинності. У сучасній шкільній математиці знак $\Leftrightarrow$ використовується як для позначення відношення рівносильності (при розв'язуванні рівнянь і нерівностей та їх систем), так і для символічного позначення логічної зв'язки «тоді і тільки тоді» (у записах означень математичних понять та теорем).

«Число ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума цифр цього числа ділиться на 3», можна записати символічно так:

$$(\forall \overline{a_1a_2 \ldots a_n} \in N)\ (\overline{a_1a_2 \ldots a_n} \vdots 3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) \vdots 3)$$

(тут символом $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ позначено n-цифрове число). У цьому записі об'єднано два твердження: 1) з подільності числа на 3 випливає подільність суми цифр його на 3;

2) з подільності суми цифр числа на 3 випливає подільність його на 3.

Отже, твердження $A \Leftrightarrow B$ можна подати так: $(A \Rightarrow B) \wedge$ $\wedge\ (B \Rightarrow A)$. Знак відношення рівносильності широко використовується в процесі розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем. Наприклад:

$$\frac{x-3}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \neq 0, \\ (x-3)\cdot(x-2) > 0. \end{cases}$$

Крім відношень логічного слідування і рівносильності, в шкільному курсі математики широко використовуються кон'юнкція, диз'юнкція і заперечення. Але тут не означуються і навіть не називаються ці операції, не вживаються символи $\wedge$, $\vee$, $\urcorner$, прийняті в математичній логіці для їх позначення.

У шкільному курсі математики знакові $\wedge$ відповідає фігурна дужка, а знакові $\vee$ — квадратна дужка. Наприклад, запис

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

означає, що ми шукаємо розв'язки, спільні для рівняння $2x + y = 5$ і для рівняння $x^2 + y^2 = 10$, тобто шукаємо переріз множин розв'язків рівнянь даної системи. А запис $\left[\begin{array}{l} x < 5, \\ x > 7 \end{array}\right.$ означає, що множиною розв'язків нерівності є $x \in]-\infty; 5[$ або $x \in]7; +\infty[$, тобто $x \in]-\infty; 5[\cup]7; +\infty[$.

Знак подібності

$\boxed{\backsim}$

Учення про подібні фігури виникло ще в Стародавній Греції. У «Началах» Евкліда (III ст. до н. е.) вже вживається слово σμοιός — схожий для вираження подібності фігур. Російський термін «подобие» зустрічається у вітчизняній математичній літературі з 1739 р. Символ $\backsim$ для позначення подібних фігур запровадив у 1679 р. німецький математик Г. Лейбніц. Вираз $\Phi_1 \backsim \Phi_2$ означає, що фігури Φ_1 і Φ_2 подібні.

У шкільному курсі геометрії той факт, що фігура Φ_1 подібна фігурі Φ_2 з коефіцієнтом k записують так: $\Phi_1 \overset{k}{\backsim} \Phi_2 \Rightarrow \Phi_2 \overset{\frac{1}{k}}{\backsim} \Phi_1$. Коефіцієнт подібності k корисно використовувати в процесі розв'язування задач і доведення теорем. Наприклад, запис $\triangle ABC \overset{2}{\backsim} \triangle A_1B_1C_1$ дає можливість зразу ж встановити співвідношення між довжинами відповідних сторін цих трикутників:

$$|A_1B_1| : |AB| = 2; \quad |B_1C_1| : |BC| = 2; \quad |A_1C_1| : |AC| = 2.$$

$$|A_1B_1| = 2|AB|; \quad |B_1C_1| = 2|BC|; \quad |A_1C_1| = 2|AC|.$$

4. ЗНАКИ ВІДОБРАЖЕНЬ

Знак гомотетії

$\boxed{H_O^K}$

Термін гомотетія (від грецьких слів δμός — однаковий, подібний і θεῖός — розміщений у певному порядку) латинською мовою записується словом *Homotetia*. Отже, першу букву цього слова і взято для позначення гомотетії. Запис $X_1 = H_0^k(X)$ означає, що гомотетія з центром O і коефіцієнтом k відображає точку X у точку X_1, тобто $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$. Якщо $H_0^3(\triangle ABC) = \triangle A_1B_1C_1$, то $\overrightarrow{OA_1} = 3\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB_1} = 3\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC_1} = 3\overrightarrow{OC}$. У свою чергу, $\overrightarrow{A_1B_1} = 3\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{B_1C_1} = 3\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{A_1C_1} = 3\overrightarrow{AC}$, а $\triangle ABC = H_0^{\frac{1}{3}}(\triangle A_1B_1C_1)$.

Знак вектора

$\boxed{\vec{a},\ \overrightarrow{AB}}$

Термін «вектор» (від латинського *vector* — той, що несе) запровадив у 1846 р. англійський математик У. Гамільтон (1805—1865). У 1853 р. французький математик О. Коші (1789—1857) запропонував позначати вектор однією буквою $\vec{r}$. Ще в 1806 р. швейцарський математик Ж. Арган (1768—1822) ввів позначення $\overline{AB}$ для напрямленого відрізка. Починаючи з XX ст вектор почали позначати ще й символом $\overrightarrow{AB}$ Символами $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{a}$ в курсі математики середньої школи позначають вектор, що тлумачиться як паралельне перенесення. Запис $X_1 = \vec{a}(X)$ означає, що вектор $\vec{a}$ відображає точку X у точку X_1. Отже, $\vec{a} = \overrightarrow{XX_1}$. Знак вектора широко застосовують записуючи розв'язування і доведення теорем.

Знак центральної симетрії

$\boxed{Z_O}$

Знак Z_o походить від латинського слова *Zentrum* — центр. Індекс O показує, що симетрія здійснюється відносно точки O. Центральна симетрія є одним з видів перетворення площини або простору. Запис $M_1 = Z_0(M)$ означає таке відображення точки M у точку M_1, що: 1) $O \in (MM_1)$;

2) $|OM| = |OM_1|$. Наприклад, якщо $ABCD$ — паралелограм і O — центр симетрії паралелограма ($[AC] \cap \cap [BD] = 0$), то можна записати, що

$$Z_0(A) = C; \quad Z_0(B) = D; \quad Z_0(ABCD) = CDAB.$$

VIII КЛАС

1. ЗНАКИ МАТЕМАТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Знак об'єму

$\boxed{V}$ Поняттям об'єму як геометричною величиною користувалися ще давньогрецькі вчені. Латинською мовою об'єм — *Volumeni*, тому для позначення його користуються символом V. Слід чітко розрізняти величину об'єму і числове значення цієї величини. Зв'язок між цими поняттями виражається рівністю $V = ve^3$, де e^3 величина об'єму, яка береться за одиницю вимірювання, а v — числове значення об'єму V. Наприклад, запис $V = 200$ см^3 — величина, а числове значення об'єму — 200.

Знак послідовності

$\boxed{(x_n)}$ Як і будь-яку функцію, послідовність можна позначати довільною буквою, наприклад f. Тоді $f(1)$ перший член послідовності, $f(2)$ — другий, ..., $f(n)$-енний член послідовності. Проте звичайно члени послідовності позначають буквами з індексами: f_1; f_2; f_3; ...; f_n; ... Послідовність з n-м членом f_n часто записують коротко у вигляді (f_n). Послідовність задану формулою $x_n = 2^n$ позначають (x_n).

2. ЗНАКИ ОПЕРАЦІЙ

Знак логарифма

$\boxed{\begin{matrix}\log \\ \lg\end{matrix}}$ Практична потреба вдосконалення способів обчислень привела в XVI ст. до логарифмічних обчислень. Логарифми відкрили і ввели в практику обчислень майже одночасно шотландський математик Д. Непер (1550—1617) і швейцарський математик та механік І. Бюргі (1552—1632). Термін «логарифм» походить від латинського *logaritmus,* утвореного від грецьких слів

$\lambda o\gamma o\tau$ (logos) — відношення і $\alpha\rho\grave{\iota}\theta\mu\acute{o}\tau$ (arithmos) — число. Він дослівно означає відношення чисел. Це слово запровадив у 1614 р. Д. Непер, який писав його повністю. У 1624 р. німецький астроном і математик Й. Кеплер ввів знак Log. Італійський математик Б. Кавальєрі (1598—1647) у 1632 р. запропонував позначати логарифм знаком log. Отже, знак log є знаком відношення між числами a і b. Пізніше почали користуватися символом lg b для позначення десяткового логарифма числа b. Запис $\lg 100 = 2$ означає, що число 10 треба піднести до степеня 2, щоб дістати число 100. Логарифм як показник степеня означив у 1665 р. Валліс.

Знаки цілої та дробової частин числа

$[x]$ $\{x\}$

Символ $[x]$ ввів К. Гаусс (1777—1855) у 1808 р. для позначення цілої частини числа x, тобто найбільшого цілого числа, яке не перевищує x. Наприклад $[2,5] = 2$; $[-4,7] = -5$. Відображення $x \to [x]$ називають функцією антьє (від французького entier — цілий) позначають $E(x)$. Цей знак запропонував у 1798 р. А. Лежандр.

Символ $\{x\}$ застосовували для позначення дробової частини числа x, тобто $\{x\} = x - [x]$. Наприклад, $\{7,6\} = 7,6 - [7,6] = 7,6 - 7 = 0,6$. Відображення $x \to \{x\}$, як і функція антьє, є прикладом розривної функції.

Знаки піднесення до степеня та добування кореня

a^x $\sqrt[n]{\ }$

У VIII класі узагальнюються поняття піднесення до степеня і добування кореня: показник степеня може бути довільним дійсним числом, а показник кореня — довільним натуральним числом. У зв'язку з цим зауважимо, що англійські математики Джон Валліс і Ісаак Ньютон поширили декартові позначення степенів на випадки, коли показник — дробове або від'ємне число. У 1629 р. голландський математик А. Жірар (1595—1632) першим використав символи $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, ... для позначення коренів. Однак ці символи стали загальноприйнятими лише у XVIII ст. Зміст поняття піднесення до степеня, коли показник від'ємне або дробове число, можна з'ясувати на основі співвідношень:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a^{\frac{p}{g}} = \sqrt[g]{a^p}.$$

Знаки тригонометричних функцій

sin; cos tg; ctg

Тригонометричні функції запровадили в науку стародавні математики на основі запитів практики, яка вимагала нових способів обчислень, особливо при розв'язуванні астрономічних задач, пов'язаних з визначенням курсу корабля. Назви тригонометричних функцій в латинському перекладі зберегли початковий зміст. Наприклад, термін «синус» (від латинського «*sinus*» — вигнутість, кривизна) є перекладом арабського слова «джайб», «джіва» — пазуха, затока. А останнє є трансформацією індійського терміна «ardhagiva» — половина хорди (арха означало половину, а джіва — тетиву лука або хорди). Косинусом називали «синус доповнення», тобто доповнення до величини прямого кута (*complmenti* — доповнення),

$$\alpha + \beta = 90°; \beta = 90° - \alpha; \frac{y}{|\vec{r}|} = \sin\alpha; \frac{y}{|\vec{r}|} = \cos(90° - \alpha).$$

Від латинської назви *complementi sinus* утворено *cosinus*, а від нього — знак косинуса cos. Термін «тангенс» походить від латинського *tangens* — дотичний. Для тангенса також введено доповнення до 90° — *complementi tangens*, яке скорочено стали записувати *cotangens*, а від нього утворили знак ctg.

Термін «косинус» і «тангенс» запровадив на початку XVII ст. англійський астроном і математик Едмонд Гюнтер (1581—1626). Слова «синус», «тангенс» першим почав регулярно застосовувати німецький математик Томас Фінке в книзі «Геометрія круглого» (1583) р.). Символ sin уперше використав у 1739 р. швейцарський математик І. Бернулі (1667—1748), а символ cos ввів У. Оутред. Починаючи з 1748 р., систематично символами sin і cos користувався Л. Ейлер. З того часу ці символи закріпилися в математичній мові.

При розв'язуванні задач корисними є співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника ABC з катетами $[AC]$ і $[CB]$ та гіпотенузою $[AB]$:

$$\sin \hat{A} = \frac{|BC|}{|AB|}; \quad \cos \hat{A} = \frac{|AC|}{|AB|}; \quad \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{|BC|}{|AC|};$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

3. ЗНАКИ ВІДОБРАЖЕНЬ

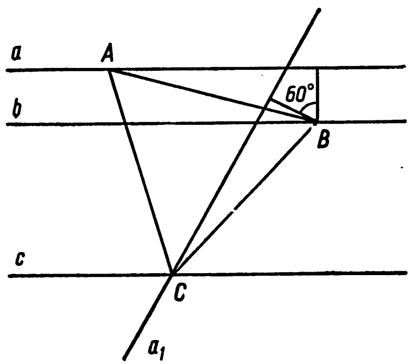
Знак повороту

$$\boxed{R_O^{\alpha}; \quad R_O^{-\alpha}}$$

Символ R_O^{α} запропонував академік А. М. Колмогоров. Запис $A_1 = R_O^{\alpha}(A)$ означає відображення точки A в точку A_1 внаслідок повороту з центром O на кут α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Поворот визначається заданням його центра O, кута повороту α і напряму повороту. Напрям повороту залежить від знака при α: додатним вважають напрям повороту проти руху годинникової стрілки, від'ємним — за годинниковою стрілкою. Наприклад, запис $A_1 = R_O^{+30°}(A)$ означає, що точка A внаслідок повороту навколо центра O проти руху годинникової стрілки на кут 30° відображається у точку A. Запис $A_2 = R_O^{-60°}(A)$ означає, що точка A внаслідок повороту навколо центра O за годинниковою стрілкою на кут 60° відображається у точку A_2. Поворот на 0° — тотожне відображення площини: $E(X) = X$.

Символічними позначеннями поворотів широко користуються, записуючи математичною мовою розв'язання задач, доведення теорем.

П р и к л а д. Побудувати рівносторонній трикутник, вершини якого лежать на трьох даних параллельних прямих.



Мал. 1

Аналіз розв'язування цієї задачі можна скорочено записати так:

Нехай (мал. 1) $\triangle ABC$ — шуканий.

$$R_B^{+60^\circ}(A) = C; \quad A \in a \Rightarrow C \in a_1,$$

де $a_1 = R_B^{+60^\circ}(a)$, $C \in c$, отже $C \in c \cap a_1$.
Таким чином, довільно вибравши на прямій b вершину B, можна знайти вершину C як точку перетину прямої c з прямою a_1, здобутою в результаті повороту прямої a навколо центра B на кут 60° проти руху годинникової стрілки. Далі побудова очевидна.

Композиція переміщень

$\boxed{F_2 \bigcirc F_1}$

Поняття композиції перетворень (від латинського *compositio* — складання, створення) у 1870 р. ввів норвезький математик Софус Лі (1842—1899). Знак композиції перетворень $\bigcirc$ з'явився вже в XX ст. у працях французьких математиків Н. Бурбакі. Вираз $g \bigcirc f$ означає послідовне виконання перетворень f і g. Увівши поняття переміщення А. Н. Колмогоров запропонував композицію переміщень позначати так: $F_2 \bigcirc F_1$. Зокрема, у курсі геометрії VIII класу вводиться поняття про композицію двох поворотів, яка позначається $R_O^\beta \bigcirc R_O^\alpha$ або $R_O^\beta(R_O^\alpha(M))$. Так, запис $M_1 = R_O^{180^\circ} \times$ $\times (R_O^{90^\circ}(M))$ означає, що в результаті послідовного виконання двох поворотів $R_O^{90^\circ}$ і $R_O^{180^\circ}$ точка M відображається у точку M_1.

Приклад. Доведемо, використовуючи композицію поворотів, що при центральній симетрії $Z_O = R_O^{180^\circ}$ точка $P(x; y)$ відображається у точку P' з координатами $x' =$ $= -x$, $y' = -y$.

Дано: $P(x, y)$ і $P'(x', y')$.

Довести: $x' = -x$,
$y' = -y$.

Доведення.

1) $R_o^{180^\circ}(P) = R_o^{90^\circ}(R_o^{90^\circ}(P))$;

2) $R_o^{90^\circ}(P) = P_1(x_1, y_1) \Rightarrow (x_1 = -y, \; y_1 = x)$;

3) $R_o^{90^\circ}(P_1) = P'(x'; y') \Rightarrow (x' = -y_1, \; y' = x_1)$;

4) $x' = -x$,
$y' = -y$.

§ 4. МАТЕМАТИЧНА СИМВОЛІКА В IX—X КЛАСАХ

IX КЛАС

1. ЗНАКИ МАТЕМАТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Знак числової площини

$\boxed{R^2}$ Символ R^2 введено для позначення декартового квадрата множини дійсних чисел, тобто множини всіх упорядкованих пар дійсних чисел. Отже $R^2 = \{(x;\ y) \mid x \in R,\ y \in R\}$. Знак R^2 показує, що елементи множини R^2 утворено з дійсних чисел, а цифра 2 — що елементами цієї множини є впорядковані пари чисел. Цей символ уперше зустрічається у французьких математиків XX ст. Символом R^2 (читається: «ер два») позначають числову площину, яка єдина і може взаємно однозначно відображатись (при обраній системі координат і масштабній одиниці довжини) на будь-яку евклідову площину. Внаслідок такого відображення дістають модель числової площини — координатну площину (координатних площин безліч).

Знак площини

$\boxed{(ABC)}$ Символ (ABC) у шкільних посібниках означає площину, яка задається трьома різними точками A, B, C, що не належать одній прямій.

Знаком площини часто користуються в стереометрії. Наприклад, якщо площина грані ABA_1B_1 п'ятикутної призми перпендикулярна до площини, яка визначається основою призми — п'ятикутником $ABCDE$, то це записують так:

$$(ABA_1) \perp (ABC).$$

Знак величини кута

$\boxed{\frown}$ Символ $\frown$, запропонований А. М. Колмогоровим для позначення величини кута, значно раніше почали використовувати для позначення кута (як фігури) між двома променями. У сучасних шкільних підручниках з геометрії цим символом позначають величину кута (а не кут як фігуру) між:

а) прямими a і b — $(\widehat{a;\ b})$;

б) прямою a і площиною α — $(\widehat{a, \alpha})$;

в) двома площинами α і β — $(\widehat{\alpha, \beta})$;

г) двома променями l_1 і l_2 — $(\widehat{l_1, l_2})$;

д) двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

За кут між двома ненульовими векторами беруть кут між напрямами цих векторів:

$$\left.\begin{array}{l}[OA) \uparrow\uparrow \vec{a}, \\ [OB) \uparrow\uparrow \vec{b}\end{array}\right\} \Rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \widehat{AOB}.$$

Отже, величина кута між двома векторами (променями, прямими, похилою і площиною, площинами) належить проміжку [0°; 180°]

Маємо такі твердження:

1) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90° \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$;

2) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0° \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;

3) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180° \Leftrightarrow \vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$.

Знаки області визначення і множини значень функції

$\boxed{\begin{array}{c} D(f) \\ E(f) \end{array}}$

Символи $D(f)$ і $E(f)$ для позначення області визначення функції f і множини значень функції f почали застосовувати у XX ст. французькі математики. Академік А. М. Колмогоров запропонував ввести ці знаки в шкільний курс математики. Наприклад, якщо задано функцію $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, то можна записати: $D(f) =]-\infty; +\infty[$, $E(f) = [2; +\infty[$ (областю визначення функції f є множина всіх дійсних чисел, а множиною значень — числовий проміжок $[2; +\infty[$).

Комбінаторні знаки

$\boxed{P_n, \ A_n^m, \ C_n^m}$

Об'єктом дослідження в комбінаториці є сполучення довільних елементів. Зародилася ця галузь знань ще в давнину. Уже в китайських рукописах XII—XIII ст. зустрічаються питання, близькі до комбінаторних. Окремі комбінаторні задачі розв'язували давньогрецькі вчені й математики Сходу. Основоположниками комбінаторики як науки є французькі математики Б. Паскаль (1623—1662) і П. Ферма (1601—1665). Завдяки працям цих учених, а також працям Г. Лейбніца і Л. Ейлера комбінаторика у XVIII ст. стає самостійною галуззю знань, яка бурхливо розвивається в наступні роки і знаходить широке застосування в практичній діяльності людини. З розвитком комбінаторики зароджується і поширюється її символіка. Символи для позначення різних комбінаторних об'єктів (розміщень A_n^m, перестановок P_n і комбінацій C_n^m) мають таке походження: A є першою буквою французького слова *Arrangement* — розміщення, C — першою буквою латинського слова *Combinatio* — поєднання. Знак A_n^m зустрічається в французькій математичній літературі вже на початку XX ст. Символ P_n (від німецького *Permutationen* — перестановка) запровадив у 1904 р. німецький математик Е. Нетто. Зазначеними символами позначали такі вирази:

1) $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \cdots \ \cdot n;$

2) $A_n^m = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \cdots \ \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \cdots \ \cdot (n-m)};$

3) $C_n^m = \dfrac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \cdots \ \cdot m}.$

Найбільше і найменше значення функції

$\max f$ $\min f$

Знак $\max f$ утворено з латинського слова *maximum* — найбільше і знака функції f; знак $\min f$ — з латинського *minimum* — найменше і знака функції f. Символами $\max\limits_{[a;b]} f$ і $\min\limits_{[a;b]} f$ позначають відповідно найбільше і найменше значення функції на відрізку $[a; b]$.

Наприклад, запис $\max\limits_{[0;5]} f(x) = 36$, якщо $x = 3$, означає, що певна функція f набуває на відрізку [0; 5] найбільшого значення 36 при числовому значенні змінної $x = 3$. У курсі математики IX класу частіше трапляється такий запис: $\max\limits_{[a;b]} y(x) = c$ або $\min\limits_{[a;b]} y(x) = d$. Наприклад, якщо функція $y = x^2 + (10 - x)^2$ набуває на відрізку [0; 10] найменшого значення, яке дорівнює 50, то це записують так: $\min\limits_{[0;10]} y(x) = 50$.

2. ЗНАКИ ОПЕРАЦІЙ

Знак границі

$\boxed{\lim}$

Знак lim походить від латинського слова *limes* — межа. Саме цей знак запровадив у 1786 р. швейцарський математик С. Люільє (1750 — 1840) для позначення границі. Символ $\lim\limits_{n=\infty}$ для позначення границі нескінченної послідовності ввів у 1853 р. англійський математик У. Гамільтон, а починаючи з XX ст. математики почали користуватися знаком $\lim\limits_{n\to\infty}$. У курсі математики середньої школи символом $\lim\limits_{n\to\infty}$ позначають:

1) границю послідовності. Вираз $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ означає, що число a є границею послідовності (x_n); наприклад: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-25} = \frac{1}{2}$;

2) границю функції. Вираз $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ означає, що число b є границею функції f при x, що прямує до a

Наприклад, $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Знак факторіала

$\boxed{!}$

Символ факторіала !, яким позначають добуток n перших чисел натурального ряду, запропонував у 1808 р. німецький математик X. Крамп (1760—1826).

Наприклад, $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Знаки приросту аргументу і функції

$\boxed{\Delta x;\ \Delta f}$

Знак Δx запровадив у 1755 р. Л. Ейлер. Цей знак утворено з грецької букви Δ (дельта), бо латинською мовою слово *differentia* — різниця, відмінність починається з букви d. У шкільному курсі математики символ приросту позначають:

1) приріст незалежної змінної в точці $x_0 : x - x_0 = \Delta x$. Наприклад, якщо змінна в точці x_0 набуває значення 1,5, а в точці x — 1,75, то $\Delta x = 1{,}75 - 1{,}5 = 0{,}25$;

2) приріст функції f в точці x_0:

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x)=\Delta f(x_0),$$

або $f(x)-f(x_0)=\Delta y$. Запишемо, як приклад, прирости Δx і Δy для функції $y=x^2$, якщо $x=2{,}75$ і $x_0=2{,}5$.

$$\Delta x=2{,}75-2{,}5=0{,}25;\quad \Delta y=2{,}75^2-2{,}5^2=$$
$$=7{,}5625-7{,}0225=0{,}54.$$

Різницю $\Delta x=x_{i+1}-x_i$, де $i=0, 1, 2, 3$, називають скінченною. Поняттям скінченної різниці широко користуються при побудові математичних таблиць, в обчислювальній математиці.

Знак похідної

$\boxed{f'}$

Термін «похідна» (французьке — *derivée*) увів у 1797 р. французький математик Ж. Лагранж (1736—1813). Він запровадив і символ $f'(x)$. Інше позначення для похідної dx запропонував у 1675 р. Г. Лейбніц, якого справедливо вважають творцем сучасної символіки математичного аналізу. Вираз $f'(x_0)$ означає похідну функції f в точці x_0, тобто $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
Наприклад, процес обчислення похідної функції $f(x)=x^2+2x+5$ в точці $x_0=2$ можна символічно записати так:

$$\Delta f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2+2(x_0+\Delta x)+5-(x_0^2+2x_0+5)=$$
$$=2x_0\Delta x+2\Delta x+\Delta x^2,\quad \frac{\Delta f}{\Delta x}=2x_0+2+\Delta x,$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+2+\Delta x)=2x_0+2,$$
$$f'(2)=2\cdot 2+2=6.$$

Символ скалярного добутку двох векторів

$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b};\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}$

Термін «скалярний добуток» запровадив у 1853 р. У. Гамільтон, але він дещо відмінний від сучасного. Слово «скалярний» Гамільтон утворив від латинського слова *scalaris* — східчастий, маючи на увазі ідею впорядкування множини дійсних чисел, які завжди можна зіставити з певною шкалою. Термін скалярний добуток двох векторів — це число, яке обчислюється за формулою $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$, де $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Скалярний добуток широко використовують при розв'язуванні геометричних задач завдяки таким його властивостям:

1) $(\vec{a} \perp \vec{b}) \Leftrightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$;

2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Наприклад, доведення теореми:

$$(a \perp b,\ a \perp c,\ b \cap c = 0,\ b \subset \alpha,\ c \subset \alpha) \Rightarrow a \perp \alpha,$$

що виражає ознаку перпендикулярності прямої і площини, грунтується на використанні першої властивості.

Нехай $\{O, B\} \subset b$, $\{O, C\} \subset C$

$\{A, A_1\} \subset a$, $\{D, D_1\} \subset d$.

Тоді

1) $(\overrightarrow{DD_1} = x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}) \Rightarrow (\overrightarrow{DD_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} = x\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + y\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AA_1})$;

2) $(\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{OB}) \Rightarrow (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0)$; $(\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{OC}) \Rightarrow (\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0)$;

3) $(\overrightarrow{DD} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0) \Rightarrow (\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{DD_1})$;

4) $\left.\begin{matrix} a \perp d \\ d \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha$ (d — довільна пряма площини α).

3. ЗНАКИ ВІДНОШЕНЬ

Знаки співнапрямлених і протилежно напрямлених променів

$\uparrow\uparrow$; $\downarrow\uparrow$

Символи співнапрямлених $\uparrow\uparrow$ і протилежно напрямлених $\downarrow\uparrow$ променів утворено із знака паралельності. Вони показують, що промені паралельні й лежать в одній або різних півплощинах відносно прямої, що проходить через їх початки. У першому випадку промені співнапрямлені

($l_1 \uparrow\uparrow l_2$; $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$), а в другому — протилежно напрямлені ($h_1 \downarrow\uparrow h_2$; $[MN) \downarrow\uparrow [PQ)$).

Символічними позначеннями широко користуються, записуючи розв'язання геометричних задач і доведення теорем, пов'язаних з використанням поняття вектора.

Наприклад, доведення теореми «композиція двох векторів є вектор» символічно можна записати так:

$$1)\ \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \vec{a}(M) = M_1, \\ \vec{a}(N) = N_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \\ \left.\begin{array}{l} \vec{b}(M_1) = M_2 \\ \vec{b}(N_1) = N_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \end{array}\right\} \Rightarrow |MN| = |M_2N_2|.$$

$$2)\ \left.\begin{array}{l} [MN) \uparrow\uparrow [M_1N_1) \\ [M_1N_1) \uparrow\uparrow [M_2N_2) \end{array}\right\} \Rightarrow [MN) \uparrow\uparrow [M_2N_2).$$

$$3)\ \left.\begin{array}{l} [MN) \uparrow\uparrow [M_2N_2) \\ |MN| = |M_2N_2| \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_2N_2} \Rightarrow \vec{b} \circ \vec{a} = \vec{c}.$$

Знак мимобіжності прямих

$\boxed{\dot{-}}$ Символ $\dot{-}$ введено недавно для позначення відношення між прямими, які не перетинаються і не паралельні. Його запозичено з нарисної геометрії, де запис $a \dot{-} b$ показує, що прямі a і b не визначають одну площину (в окремому випадку одна з цих прямих належить площині, а друга — перпендикулярна до площини і тому проектується на цю площину точкою). Зауважимо, що відношення мимобіжності симетричне, але не рефлексивне і не транзитивне.

$$(a \dot{-} b) \Leftrightarrow (b \dot{-} a)$$

$$(a \dot{-} b) \Rightarrow \text{(невірно, що } a \parallel b \text{ або } a \cap b = M\text{)}.$$

Знак $\dot{-}$ використовують, записуючи теореми і їх доведення, а також розв'язання задач. Наприклад, теорему про існування мимобіжних прямих символічно записують так: $(a \subset \alpha,\ b \cap \alpha = B,\ B \notin a) \Rightarrow (a \dot{-} b)$.

4. ЗНАКИ ВІДОБРАЖЕНЬ

Симетрія відносно площини

$\boxed{S_\alpha}$

У курсі геометрії VI класу введено символ $S_{(AB)}$. Ним позначають симетрію відносно прямої AB на площині. У IX класі розглядається осьова симетрія простору і симетрія відносно площини як перетворення простору, при якому кожна точка відображається на симетричну їй точку відносно заданої площини. Наприклад, запис $S_\alpha(\Phi) = \Phi_1$ означає, що симетрія відносно площини α перетворює фігуру Φ у фігуру Φ_1. Отже, $\Phi_1 \cong \Phi$. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Тоді запис $S_\alpha(\Phi) = \Phi$ означає, що при симетрії відносно площини цей паралелепіпед відображається на себе, тобто α є площиною симетрії цього паралелепіпеда.

X КЛАС

1. ЗНАКИ МАТЕМАТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Число e

$\boxed{e;\ \exp}$

Це ірраціональне число можна подати формулою $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, а наближене значення з десятьма десятковими знаками записати так: $e = 2{,}7182818284\ldots$ Знак e запровадив у 1736 р. Л. Ейлер як скорочення латинського слова *exponentius* — показник. Саме це слово ввів у 1553 р. німецький математик М. Штіфель (1487—1567). Показникова функція з основою e широко застосовується в математиці, бо вона має дуже цікаву і корисну властивість: $(e^x)' = e^x$. Для цієї функції введено спеціальне позначення exp. Наприклад, запис $\exp(0) = 1$ означає, що $e^0 = 1$. Враховуючи, що дотична до графіка функції $y = \exp(x)$ в точці його перетину з віссю ординат має рівняння $y_1 = 1 + x$, можна для малих за модулем x знаходити значення цієї функції за наближеною формулою:

$$e^x \approx 1 + x.$$

Покладаючи $x = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\frac{1}{n}\ \ldots,$ запишемо цю формулу так: $e^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n}$ або $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ і $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Отже, число e є границя послідовності $a_1 = (1 + 1)^1 = 2$; $a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$; $a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2{,}37$; ... $a_{1000} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2{,}717$.

Позначення прямокутного базису

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Прямокутним базисом, як відомо, називають трійку попарно перпендикулярних одиничних векторів. Позначення $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ для одиничних векторів прямокутного базису запровадив у 1853 р. У. Гамільтон. Використання прямокутного базису дає змогу виражати будь-який вектор $\vec{a}$ через його координати x, y, z : $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$. А це допоможе широко застосовувати елементи векторної алгебри у процесі розв'язування просторових геометричних задач методом координат. Зокрема, скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ обчислюється в цьому випадку досить просто: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

2. ЗНАКИ ОПЕРАЦІЙ

Знак натурального логарифма

ln

Знак ln ввів у 1893 р. німецький математик Прінгсхейм для позначення логарифма з основою e, що дістав назву натурального (*logaritmus naturalis*). Натуральні логарифми широко використовуються у записах математичних обчислень. Логарифм натуральний має цікаву властивість: $\ln' x = \frac{1}{x}$.

[1] Існування цієї границі встановив швейцарський математик Даніїл Бернуллі (1700—1782).

Знак інтеграла

$\boxed{\int}$ Термін «інтеграл» (від латинського *integer* — цілий, відновлений) ввів у 1690 р. швейцарський математик Я Бернуллі (1654—1705). Інтеграл — одне з найважливіших математичних понять. Символ $\int$ позначає операцію, обернену до диференціювання, яка полягає в тому, щоб за даною похідною $F'(x) = f(x)$ знайти (відновити) функцію $F(x)$. Ця операція називається інтегруванням (від латинського *integratio* — відновлення), а її результат первісною функцією. Площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю абсцис і двома ординатами $f(a)$, $f(b)$, є функцією від x, яку позначають $S(x)$. Крім того, $S'(x) = f(x)$, тобто функція $S(x)$ є первісною (інтегралом) функції $f(x)$.

Знак $\int$ є видозміненою латинською буквою S, першою буквою латинського слова *Summa* — сума. Інтеграл — це також границя суми нескінченно великої кількості нескінченно малих величин, знайдених певним способом з відповідної функції f:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n(a;\ b).$$

Тому інтеграл також позв'язують з поняттям границі суми. Знак $\int$ запровадив у 1675 р. (опубліковано у 1684 р.) Г. Лейбніц, який позначав невизначений інтеграл символом $\int y\,dx$. Символ визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ ввів у 1819 р. французький математик Ж. Фур'є (1768—1830), який користувався також і символом $\int_a^b y\,dx$. Термін «визначений інтеграл» ввів у 1818 р. французький математик і фізик Лаплас (1749—1827).

Знаки обернених тригонометричних функцій

arcsin arccos arctg arcctg

Знаки обернених тригонометричних функцій філологічного походження: їх утворено внаслідок поєднання латинського слова arcus — дуга і назв прямих тригонометричних функцій sin, cos, tg і ctg. Це поєднання пояснюється тим, що в геометричній формі кожна з обернених тригонометричних функцій розглядається як дуга, значення якої відповідає певному значенню прямої функції, наприклад $\arcsin \frac{1}{2} = 30°$.

Слово «дуга» і назви прямих функцій у різних формах було поєднано вже в першій половині XVIII ст. (Д. Бернуллі, Л. Ейлер та інші математики). Знак функції арксинус у формі arcsin запровадив у 1772 р. французький математик Ж. Лагранж. Згодом цей символ почали записувати без крапки.

Зауважимо, що є й інша форма запису обернених тригонометричних функцій, яку запропонував у 1913 р. англійський математик Дж. Гершель: обернені тригонометричні функції записують символами прямих тригонометричних функцій, але з показником — 1.

Символи обернених тригонометричних функцій використовують, записуючи розв'язання тригонометричних рівнянь.

Наприклад: 1. $\left(\cos x = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k\right) \Leftrightarrow \left(x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in Z.$

2. $(\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0, x \neq \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \left(x = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z\right) (\cos x \neq 0).$

Розділ III

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СИМВОЛІКИ В ШКІЛЬНОМУ НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

Мова, за допомогою якої вивчається математика в школі, складається з двох частин — символічної мови логіко-математичних формул і звичайної розмовної мови. Ці частини мають істотні відмінності. Мова логіко-математичних символів, як уже зазначалося у вступі, характеризується лаконічністю, точністю й однозначністю. Звичайна розмовна мова неоднозначна й досить громіздка для записування математичних викладок. Звичайно, ці недоліки не знижують якостей мови як наймогутнішого засобу спілкування в людському суспільстві. Але в процесі викладання математики треба звертати увагу учнів на неточності словесних формулювань, словесного оформлення думки при обгрунтуванні математичних тверджень, на логіку міркувань. Слід наполегливо утверджувати в свідомості учнів те, що символічна мова математики — могутній засіб удосконалення логіки міркувань, оперативний засіб виведення нових математичних тверджень.

Бажано, щоб паралельно із засвоєнням нових термінів і символів учні вели спеціальний словник, у який би записували зміст терміна, символу, коротку історію їх походження.

Значну увагу вчитель повинен приділити символіці бінарних відношень [1].

Розв'язати ці важливі завдання допоможе відповідний розгляд логіко-математичних символів на уроках математики.

Запроваджувати нові символи на уроках математики можна в такій послідовності: а) виділити на уроці нове для

---

[1] Детально з цим питанням читач зможе ознайомитись у книжці В. А. Вишенського «Відношення і функції» (К., Вища школа, 1972).

учнів математичне поняття або відношення; б) ввести новий термін для назви математичного об'єкта, на якому було зосереджено увагу учнів, пояснити його походження; в) ввести символ для позначення нового поняття або відношення, з'ясувати його зміст, значення та походження; г) активно використовувати запроваджений знак (разом з раніше введеними) для записування математичних висловлень, оперативних перетворень над ними.

§ 1. СИМВОЛІЧНИЙ ЗАПИС ОЗНАЧЕНЬ МАТЕМАТИЧНИХ ПОНЯТЬ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ТВЕРДЖЕНЬ

У шкільному курсі математики широко застосовуються такі означення поняття:

1) означення через найближчий рід і видові ознаки;
2) генетичне означення;
3) аксіоматичне означення.

1) Означення через рід і видові ознаки логічно складається з 3-х компонентів:

а) квантора загальності$(\forall x \in M)$, який показує найближчий рід M означуваного поняття;

б) речення із змінною (предикат) $P(x)$, яке вводить нове поняття;

в) речення із змінною (предикат) $Q(x)$, яке показує видові ознаки поняття, що вводиться.

Отже, в загальному випадку означення математичного поняття можна записати рівносильністю

$$(\forall x \in M)\, P(x) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} Q(x)\text{[1]}.$$

Звичайно, в загальноосвітній школі символами кванторів, як правило, не користуються, їх тільки мають на увазі. Тому, наприклад, означення прямокутника може мати такий вигляд:

(паралелограм $ABCD$ є прямокутник) $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $(\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°)$. Слід підкреслювати, що тут мають на увазі довільний паралелограм.

[1] Символ Def, що пишеться над (або під) знаком рівносильності, походить від латинського *definio* — означаю. Отже, символ *Def* означає «рівносильно за означенням», тобто дана рівносильність не підлягає доведенню. В школі цей символ опускають. Іноді пишуть Df.

Паралельні прямі у VI класі означають так: «Прямі a і b, що належать одній площині, називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок або збігаються».

Це означення без знаків кванторів можна записати так:

$$(a \| b) \Leftrightarrow (a \subset \alpha,\ b \subset \alpha,\ a \cap b = \varnothing \text{ або } a = b).$$

Розглядаючи в VIII—IX класах монотонно зростаючі й монотонно спадні послідовності, доцільно користуватися такими записами:

$((a_n)$ — монотонно зростаюча послідовність$) \Leftrightarrow (a_n < a_{n+1})$;

$((a_n)$ — монотонно спадна послідовність$) \Leftrightarrow (a_n > a_{n+1})$.

У правій частині кожної рівносильності за означенням розуміємо квантор загальності $(\forall n \in N)$, але не записуємо його. Отже, символічний запис означення через найближчий рід і видові ознаки має таку форму: $P(x) \Leftrightarrow (Q(x), R(x))$. Кома в правій частині рівносильності відіграє роль логічної зв'язки «і» ($\wedge$). Кожна з видових ознак Q і R є тільки необхідною умовою, а кон'юнкція —їх достатньою і необхідною умовою для означуваної властивості P. Звичайно, видових ознак може бути не тільки одна або дві, а будь-яке скінченне число. Наприклад, в означенні періодичної функції («Алгебра і початки аналізу, 9», п. 69).

$$\forall f\,(f(x) \text{ — періодична функція}) \Leftrightarrow (\exists\, l \neq 0)\,(\forall\, x \in D(f))$$
$$(x - l) \in D(f)),$$
$$x + l \in D(f),\ f(x - l) = f(x) = f(x + l)).$$

Маємо три видові ознаки, кон'юнкція яких і становить зміст поняття «періодична функція». Зауважимо, що символічно записати це означення без використання кванторів важко. Тому в аналогічних випадках можна обмежитися лише схематичним записом, у якому чітко перелічуються видові ознаки. Для означення періодичної функції це можна зробити так:

$$\text{Ознаки періодичної функції з періодом } l \neq 0 \begin{cases} 1.\ (x - l) \in D(f); \\ 2.\ (x + l) \in D(f); \\ 3.\ f(x - l) = f(x) = f(x + l). \end{cases}$$

Такі схематичні записи корисні тим, що фіксують усі видові ознаки, кон'юнкція яких є необхідною і достатньою умовою для означуваної властивості. Тому вони значно полегшують розв'язування важких задач на підведення математичного об'єкта під поняття.

Нехай, наприклад, треба перевірити, чи буде функція $f(x) = \sqrt{\frac{|\sin x|}{x}}$ періодичною. Для цього слід встановити, чи виконується кожна з ознак 1—3. Легко бачити, що перша ознака не виконується. Справді, якщо $l > 0$ період, то для $x = \frac{l}{2}$:

$$x - l \notin D(f), \left(x - l = -\frac{l}{2};\quad D(f) = \left]0;\ +\infty\right[;\right.$$
$$\left.-\frac{l}{2} \notin \left]0;\ +\infty\right[\right).$$

Оскільки не виконується одна з необхідних умов, то не може виконуватися достатня умова. Отже, дана функція не періодична. Запишемо ще для прикладу означення первісної функції на деякому проміжку.

$$(F(x) \text{ — первісна для } f(x)) \Leftrightarrow (F'(x) = f(x)).$$

2) Генетичне означення — це таке означення, в якому видова ознака показує спосіб походження, утворення чи побудови означуваного поняття. Наприклад:

1. Перерізом двох множин називають множину, яка складається з їхніх спільних елементів (V клас).

2. Колом називають множину точок площини, які лежать на даній додатній відстані від даної точки, що лежить у цій площині (VI клас).

3. Фігуру, утворену обертанням прямокутного трикутника навколо осі, що містить його катет, називають конусом (X клас).

Спосіб утворення означуваного поняття (наприклад, конуса) не завжди доцільно описувати символами. Тому в школі не слід прагнути до того, щоб усі генетичні означення понять записувалися математичною мовою. Проте в окремих випадках це доцільно робити. Наприклад, означення перерізу двох множин можна записати у вигляді такої рівносильності:

$$A \cap B \Leftrightarrow \{x \mid x \in A,\ x \in B\}.$$

Означення кола і круга символічно записують так:

$$K(O, r) \Leftrightarrow \{X \mid |OX| = r,\ \ O \in \alpha,\ \ X \in \alpha\}.$$

$$K_p(O,\ r) \Leftrightarrow \{X \mid |OX| \leqslant r,\ \ O \in \alpha,\ \ X \in \alpha\}.$$

3) Аксіоматичне означення. Прикладом аксіоматичного означення є поняття відстані в шкільному курсі геометрії. Відомі з VI класу «властивості відстаней» є аксіомами відстані, які символічно можна записати так:

а) $(|AB| > 0) \Leftrightarrow (A \neq B)$, $(|AB| = 0) \Leftrightarrow (A = B)$;

б) $|AB| = |BA|$;

в) $|AC| \leqslant |AB| + |BC|$.

Запис символічною мовою аксіоматичного означення прямої і площини, яке дається в системі аксіом академіка А. М. Колмогорова, приводить до складних виразів, побудова яких вимагає напруження логічної думки. Тому такі записи в школі недоцільні.

ЗАПИС СИМВОЛІЧНОЮ МОВОЮ ФОРМУЛЮВАНЬ МАТЕМАТИЧНИХ ТЕОРЕМ

Математичні теореми (теорема — завжди істинне висловлення, для якого існує доведення) можна логічно поділити на два великі класи: а) теореми, які можна подати в імплікативній формі (використовуючи знак $\Rightarrow$); б) теореми, які підтверджують існування певного математичного об'єкта.

Логічна структура теорем першого класу має три компоненти:

1) квантор загальності, який показує область дії теореми $(\forall x \in M)$;

2) предикат, який виражає умову теореми $P(x)$;

3) предикат, який виражає наслідок теореми $Q(x)$.

Отже, структуру таких теорем за допомогою логіко-математичних символів записують так:

$$(\forall x \in M)\ (P(x) \Rightarrow Q(x)).$$

Опускаючи (але враховуючи) квантор загальності, у шкільному курсі використовують таку логічну схему запису теорем:

$$P(x) \Rightarrow Q(x).$$

Звичайно, це найпростіша схема. В умові й висновку теорем може бути не по одному, а по кілька предикатів. Якщо маємо пряму теорему $P(x) \Rightarrow Q(x)$ (P є достатньою умовою для Q) і обернену теорему $Q(x) \Rightarrow P(x)$ (P є необхідною умовою для Q), то обидва формулювання об'єднують в одне знаком відношення рівносильності:

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x).$$

У цьому випадку читають так: «P є необхідною і достатньою умовою для Q».

Отже, знаки $\overset{\mathrm{Def}}{\Leftrightarrow}$ і $\Leftrightarrow$ мають різний логічний зміст. Символ $\overset{\mathrm{Def}}{\Leftrightarrow}$ читають «рівносильно за означенням», а символ $\Leftrightarrow$ читають «рівносильно» і вживають для запису рівносильності висловлень, яку слід довести або спростувати як математичне твердження. В практиці шкільного викладання в обох цих випадках використовують один знак $\Leftrightarrow$.

Наведемо кілька прикладів символічного запису формулювань теорем.

1. Якщо дві прямі центрально-симетричні, то вони паралельні: $(a = Z_0(b)) \Rightarrow (a \parallel b)$.

Такий запис доцільно використовувати в VII класі після введення знака центральної симетрії.

2. Для конгруентності двох дуг кола необхідно і достатньо, щоб вони відповідали конгруентним центральним кутам

$$(\angle AOB \cong \angle COD) \Leftrightarrow (\smile AB \cong \smile CD).$$

3. Щоб переміщення було паралельним перенесенням (вектором), необхідно і достатньо, щоб воно кожний промінь відображало на співнапрямлений йому промінь

$$(F([XY)) = [X_1 Y_1),\ [XY) \uparrow\uparrow [X_1 Y_1)) \Leftrightarrow (F = T,\ \text{де } T(XY) = [X_1 Y_1)).$$

4. Якщо пряма паралельна якій-небудь прямій, яка лежить у площині, то дані пряма і площина паралельні

$$(a \parallel b,\ b \subset \alpha) \Rightarrow (a \parallel \alpha).$$

5. Якщо точка O — середина діагоналі паралелепіпеда, то вона є його центром симетрії

$$\begin{pmatrix} O \in [AC_1],\ |AO| = |OC_1|, \\ ABCDA_1B_1C_1D_1 = \Phi \end{pmatrix} \Rightarrow (Z_0(\Phi) = \Phi).$$

6. Якщо послідовність збігається, то вона має тільки одну границю.

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b) \Rightarrow (a = b).$$

7. Коли довжина дуги прямує до нуля, то границя відношення довжини хорди кола до довжини дуги, яку вона стягує, дорівнює 1.

$$(\breve{AB} \to 0) \Rightarrow \left(\lim \frac{|AB|}{\breve{AB}} = 1\right).$$

Загальна логічна схема теореми існування така:

$$(\forall x)(\exists y) R(x, y).$$

Наприклад, теорема про існування мимобіжних прямих може мати такий вигляд:

$$(\forall a)(\exists b)(a \cap b = \varnothing, a \nparallel b).$$

Цей запис означає, що для довільної прямої a існує така пряма b, що вони не перетинаються і не паралельні.

Якщо в знайденому виразі поміняти місцями квантор загальності й квантор існування, то дістанемо хибне висловлення

$$(\exists b)(\forall A)(a \cap b = \varnothing, a \nparallel b),$$

яке підтверджує, що існує пряма b, мимобіжна до будь-якої прямої a.

§ 2. СИМВОЛІЧНИЙ ЗАПИС ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ

Використання логіко-математичної символіки допомагає учням засвоїти логічний процес доведень. Наведемо приклади запису доведення теорем і розв'язання задач на доведення, оскільки ці задачі за своєю логічною структурою не відрізняються від теорем.

Розглянемо приклади запису і доведення теорем імплікативного типу.

П р и к л а д 1

Звичайний запис.

Якщо $a > b$ і $c > d$, де a, b, c, d — додатні числа, то $ac > bd$.

Запис мовою символів.

$$(a > b \land c > d) \Rightarrow (ac > bd)^{1},\ a \in R_1,\ b \in R_1\ c \in R_1,\ d \in R_1.$$

Там, де це очевидно, слово «якщо» мовою логіки не пишеться, але завжди мається на увазі і говориться.

Д о в е д е н н я.

Оскільки $a > b$ і c — додатне число, то $ac > bc$. Оскільки $c > d$ і b — додатне число, то $bc > bd$. За властивістю транзитивності з нерівностей $ac > bc$ і $bc > bd$ випливає нерівність $ac > bd$.

Д о в е д е н н я.

$$\left.\begin{array}{l}(a > b,\ c > 0) \Rightarrow ac > bc\\ (c > d,\ b > 0) \Rightarrow bc > bd\end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ac > bd.$$

П р и к л а д 2. Якщо площина проходить через перпендикуляр до другої площини, то вона перпендикулярна до цієї площини.

$$(a \perp \beta,\ \ a \subset \alpha) \Rightarrow (\alpha \perp \beta)$$

Д а н о: $a \perp \beta$, $a \subset \alpha$.
Д о в е с т и: $\alpha \perp \beta$.
Д о в е д е н н я. Нехай $\alpha \cap \beta = M$ і $\alpha \cap \beta = c$. Через точку M у площині β проводимо пряму b, перпендикулярну до c; $(\widehat{a; b})$ — лінійний кут двогранного кута $\alpha\ c\ \beta$. З умови $a \perp \beta$ випливає, що $a \perp b$, тоді $(\widehat{a, b}) = 90°$, тобто $\alpha \perp \beta$.

$$(a \perp \beta,\ a \subset \alpha) \Rightarrow (a \cap \beta = M,\ \alpha \cap \beta = c);\ (\text{існує } b)\ (b \subset \beta,\ b \perp c) \Rightarrow (b \cap c = M).$$

$$\left.\begin{array}{l}(\widehat{\alpha, \beta}) = (\widehat{a, b}),\\ (a \perp \beta) \Rightarrow (a \perp b)\end{array}\right\} \Rightarrow (\widehat{a, b}) = 90° \Rightarrow (\alpha \perp \beta).$$

---

[1] Записуючи рівняння слід ставити розділові знаки: кома ставиться між двома однорідними висловленнями (реченнями); крапка з комою — коли наступне речення розкриває зміст попереднього. Крапка ставиться після закінчення розв'язання.

П р и к л а д 3. Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то ці прямі мимобіжні.

Д а н о: $a \subset \alpha$, $b \cap \alpha = M$, $M \notin a$.

Д о в е с т и: $a \dotdiv b$.

Д о в е д е н н я. 1) $b \not\subset \alpha \Rightarrow$ (існує N) $(N \in b \wedge N \notin \alpha)$;
2) припустимо, що $a \cap b$ або $a \parallel b$; $a \cap b$ або $a \parallel b \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (існує β) $(a \subset \beta)$, $(b \subset \beta)$;

3) $\left.\begin{matrix} a \subset \beta, & M \in \beta, \\ a \subset \alpha, & M \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta = \alpha;$

4) $\left.\begin{matrix} \beta = \alpha \\ N \in \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow N \in \alpha,$ що суперечить 1).

Отже, припущення неправильне і відповідно до закону виключеного третього правильний висновок теореми: $a \dotdiv b$.
Періодично слід давати учням VI — X класів домашні завдання на використання символіки.

П р и к л а д 4. Для конгруентності двох дуг кола необхідно і достатньо, щоб вони відповідали конгруентним центральним кутам.

Необхідність. Д а н о: $\smile AB \cong \smile CD$.

Д о в е с т и: $\angle AOB \cong \angle COD$.

Д о в е д е н н я.

1) $(\smile AB \cong \smile CD) \Rightarrow (F(\smile AB) = \smile CD)$;

2) $(F(A) = C,\ F(B) = D) \Rightarrow (|AB| = |CD|)$;

3) $(|AB| = |CD|,\ |OA| = |OB| = |OC| = |OD| = r) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\triangle AOB \cong \triangle COD)$;

4) $(\triangle AOB \cong \triangle COD) \Rightarrow (\angle AOB \cong \angle COD)$.

Аналогічно можна записати процес доведення достатності.

П р и к л а д 5. Площа правильного многокутника дорівнює половині добутку його периметра на радіус вписаного кола.

Д а н о: Ф — правильний n-кутник, вписаний у коло: $K\ (O, r)$.

Д о в е с т и: $S_n = \frac{1}{2} r^2 n \sin \frac{360^\circ}{n}$.

Доведення

Нехай AB — сторона n-кутника, вписаного в дане коло $K(O, r)$. Тоді:

1) $S_{AOB} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin \widehat{AOB} \Leftrightarrow S_{AOB} = \frac{1}{2}r^2 \sin\frac{360°}{n}$;

2) $\left(S_{AOB} = \frac{1}{2} r^2 \sin\frac{360°}{n}, \quad S_n = nS_{AOB}\right) \Rightarrow S_n = \frac{1}{2} \times$
$\times\ r^2 n\cdot\sin\frac{360°}{n}$.

Приклад 6. В описаному чотирикутнику суми довжин протилежних сторін рівні між собою.

Дано: $ABCD$ — описаний навколо кола (O, r) чотирикутник.

Довести: $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$.

Доведення

$$([AB] \cap K(O, r) = M, \ [AD) \cap K(O, r) = N) \Rightarrow$$

$$\text{Аналогічно}\quad \left.\begin{aligned} \Rightarrow |AM| &= |AN|,\\ |BM| &= |BP|,\\ |CQ| &= |CP|,\\ |DQ| &= |DN|,\end{aligned}\right\} \Rightarrow |AB| + |CD| =$$

$= |AD| + |BC|$.

Приклад 7. Середина діагоналі паралелепіпеда є його центром симетрії.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1 = \Phi$ — паралелепіпед,
$O \in [BD_1]$, $|BO| = |OD_1|$.

Довести: $Z_0(\Phi) = \Phi$.

Доведення.

1) $(|BO| = |OD_1|, \ O \in [BD_1)] \Rightarrow (Z_0(B) = D_1)$;

2) $([BA) \uparrow\downarrow [D_1C_1)) \Rightarrow (Z_0[BA) = [D_1C_1))$;
$(|BA| = |DC|, \ |DC| = |D_1C_1|) \Rightarrow (|BA| = |D_1C_1|)$;
$Z_0(A) = C_1$;

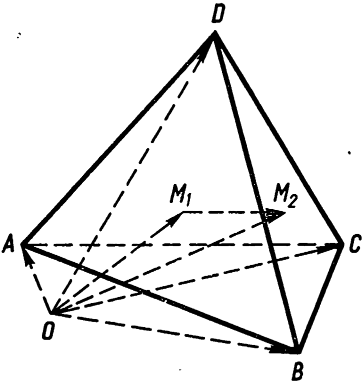
3) аналогічно $Z_0(C) = A_1$, $Z_0(D) = B_1$.

Отже, $Z_0(\Phi) = \Phi$.

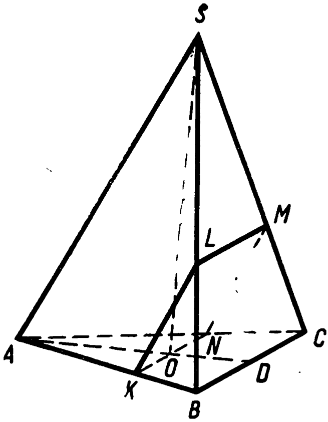
Приклад 8. Показати, що композиція двох гомотетій H^{k_1} і H^{k_2} із спільним центром є гомотетія з тим самим центром і коефіцієнтом $k = k_1k_2$.

Дано: $H_0^{k_1}$, $H_0^{k_2}$.

Довести: $H_0^{k_2} \circ H_0^{k_1} = H_0^{k_2k_1}$.



Мал. 2



Мал. 3

Доведення

Нехай X довільна точка, $X \neq O$.

1) $(H_0^{k_1}(X) = X_1)) \Rightarrow (\overrightarrow{OX_1} = k_1\overrightarrow{OX})$;

2) $(\vec{H}_0^{k_2}(X_1) = X_2) \Rightarrow (\overrightarrow{OX_2} = k_2\overrightarrow{OX_1})$;

3) $(OX_2 = k_2(k_1\overrightarrow{OX})) \Rightarrow (H_0^{k_2} \circ H_0^{k_1} = H_0^{k_2k_1})$.

Приклад 9. У тетраедрі $ABCD$ точки M_1 M_2 є відповідно точками перетину медіан граней ADB і BDC. Довести, що вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні.

1) $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$ (мал. 2) — за формулою для точки перетину медіан трикутника;

2) $\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$;

3) $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$;

4) $\left(\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$.

Приклад 10. Через основу висоти правильної трикутної піраміди провести переріз, паралельний двом мимобіжним ребрам. Довести, що цей переріз — прямокутник.

Д а н о : $SABC = \Phi$ — правильна піраміда, $[SO]$ — висота.

I. Побудувати $\Phi \cap \alpha$, де $\alpha \parallel [SA]$, $\alpha \parallel [BC]$, $O \in \alpha$ (мал. 3).

П о б у д о в а

1) Будуємо $[KN]$; $O \in [KN]$, $[KN] \parallel [BC]$;
2) $[KL) \parallel [AS]$, $[KL) \cap [SB] = L$;
3) $[MN) \parallel [AS]$, $[NM) \cap [SC] = M$;
4) $[LM]$; $KLMN$ — шуканий переріз.

II. Довести: $KLMN$ — прямокутник.

Д о в е д е н н я

1) $([KN] \parallel [LM],\ [KL] \parallel [NM]) \Rightarrow KLMN$ — паралелограм;
2) $([KN] \parallel [BC],\ [BC] \perp AS]) \Rightarrow ([KN] \perp [AS])$;
3) $([KN] \perp [AS],\ [AS] \parallel [KL]) \Rightarrow ([KN] \perp [KL])$;
4) $KLMN$ — прямокутник

П р и к л а д 11. Довести, що при гомотетії кожний кут відображається на конгруентний йому кут.

Д а н о: $H_0^k (\angle ABC) = \angle A_1B_1C_1$.
Д о в е с т и: $\angle A_1B_1C_1 \cong \angle ABC$ при $k > 0$.

Д о в е д е н н я

1) $H_0^k ([BA)) = [B_1A_1) \Rightarrow [BA) \uparrow\uparrow [B_1 A_1)$;
2) $H_0^k ([BC)) = [B_1C_1) \Rightarrow [BC) \uparrow\uparrow [B_1C_1)$;
3) $([BA) \uparrow\uparrow [B_1A_1),\ [BC) \uparrow\uparrow [B_1C_1)) \Rightarrow \angle A_1B_1C_1 \cong \angle ABC$.

Аналогічно можна записати доведення, якщо $k < 0$.

§ 3. СИМВОЛІЧНИЙ ЗАПИС РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. ЗАПИС РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

Властивість транзитивності логічних відношень слідування і рівносильності доцільно використати для запису у вигляді певних «логічних ланцюжків» розв'язування рівнянь та нерівностей, доведення нерівностей тощо. Доцільно робити такі записи за допомогою символів $\Rightarrow$ і $\Leftrightarrow$, бо вони дають змогу компактно і досить чітко відобразити хід міркувань, сприяють формуванню логічного мислення учнів.

На перших порах доцільно давати учням повний запис. Надалі його можна скорочувати, опустивши деякі проміжні ланки. Однак учні повинні вміти відновлювати їх.

Розглянемо кілька прикладів на повні й скорочені записи розв'язування рівнянь, нерівностей і їх систем.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $|x+2|+|1-x|=3$ у множині R. Це рівняння розв'язується на основі означення модуля. Ліва частина рівняння є сумою відстаней точки x від -2 і від 1. Ця сума дорівнює 3 для всіх тих і тільки тих x (на числовій осі), які задовольняють умову $-2 \leqslant x \leqslant 1$, тобто $(|x+2|+|1-x|=3) \Leftrightarrow (x \in [-2;\ 1])$. Але здебільшого, це рівняння розв'язують методом інтервалів. Тоді міркують так:

$$(|x+2|+|1-x|=3) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \leqslant -2, \\ -x-2+1-x=3; \end{cases} \text{або} \right.$$

$$\left. \begin{cases} -2 < x < 1, \\ x+2+1-x=3; \end{cases} \text{або} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x+2+1+x=3; \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \leqslant -2, \\ x=-2; \end{cases} \text{або} \quad -2 < x < 1 \quad \text{або} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x=1; \end{cases}\right) \Rightarrow (x =$$

$$= -2 \text{ або } -2 < x < 1 \text{ або } x = 1) \Leftrightarrow (-2 \leqslant x \leqslant 1).$$

Відповідь: $x \in [-2;\ 1]$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\frac{x-5}{2x-3} > 1$.

$$\left(\frac{x-5}{2x-3} > 1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{2x-3} < 0\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x+2 > 0, \\ 2x-3 < 0; \end{cases} \text{або} \right.$$

$$\left. \begin{cases} x+2 < 0, \\ 2x-3 > 0; \end{cases} \right) \Rightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x < 1{,}5; \end{cases} \Rightarrow -2 < x < 1{,}5.$$

Відповідь: $x \in\ ]-2;\ 1{,}5[$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^3-7x^2+16x-12=0$.

$$(x^3-7x^2+16x-12=0) \Leftrightarrow (x^3-3x^2-4x^2+12x+4x-$$

$$-12=0) \Leftrightarrow (x^2(x-3)-4x(x-3)+4(x-3)=0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((x-3)(x^2-4x+4)=0) \Leftrightarrow ((x-3)(x-2)^2 =$$

$$= 0 \Leftrightarrow (x=3 \text{ або } x=2).$$

Відповідь: $\{2;\ 3\}$.

Компактніше розв'язок цього рівняння можна записати так:

$$(x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0) \Leftrightarrow ((x-3)(x-2)^2 = 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x = 3 \text{ або } x = 2).$$

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\lg(2x+6) - \lg(15-x) < 1$.

$$(\lg(2x+6) - \lg(15-x) < 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6 > 0, \\ 15x - x > 0, \\ \dfrac{2x+6}{15-x} < 10; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 < x < 15, \\ x < 12; \end{cases} \Rightarrow -3 < x < 12 \Leftrightarrow x \in \left]-3;\ 12\right[.$$

Відповідь: $]-3;\ 12[$.

Приклад 5. Знайти область визначення функції

$$f(x) = \sqrt{(1-x)(1+5x)}\ .$$

$$(1-x)(1+5x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 1-x \geqslant 0, \\ 1+5x \geqslant 0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 1-x \leqslant 0, \\ 1+5x \leqslant 0; \end{cases} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{matrix} x \leqslant 1, \\ x \geqslant -0{,}2; \end{matrix} \text{ або } \varnothing \right) \Leftrightarrow (-0{,}2 \leqslant x \leqslant 1) \Leftrightarrow x \in [-0{,}2;\ 1].$$

Відповідь: $D(f) = [-0{,}2;\ 1]$.

Приклад 6. Розв'язати логарифмічне рівняння

$$\lg\sqrt{x-5} + \lg\sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30.$$

$$(\lg\sqrt{x-5} + \lg\sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30) \Leftrightarrow (\lg(\sqrt{x-5} \times$$
$$\times \sqrt{2x-3} \cdot 10) = \lg 30) \Leftrightarrow (\sqrt{x-5} \cdot \sqrt{2x-3} = 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(2x-3) = 9, \\ x - 5 > 0, \\ 2x - 3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 13x + 6 = 0, \\ x > 5, \\ x > 1,\ 5; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{matrix} x = \dfrac{1}{2}, \\ x = 6, \end{matrix} \right. \\ x > 5, \\ x > 1{,}5; \end{cases} \Rightarrow x = 6.$$

Відповідь: $\{6\}$.

Приклад 7. Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} (x+y)(x-3y)=0, \\ x^2+y^2=18. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)(x-3y)=0, \\ x^2+y^2=18; \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=18, \end{cases}\right.$$

$$\text{або} \left.\begin{cases} x-3y=0, \\ x^2+y^2=18; \end{cases}\right) \Rightarrow \left(\begin{cases} x=3, \\ y=-3; \end{cases} \text{або} \begin{cases} x=-3, \\ y=3; \end{cases}\right.$$

$$\text{або} \begin{cases} x=3\sqrt{1,8}, \\ y=\sqrt{1,8}; \end{cases} \text{або} \left.\begin{cases} x=-3\sqrt{1,8}, \\ y=-\sqrt{1,8}. \end{cases}\right)$$

Відповідь: $\{(3; -3), (-3; 3), (3\sqrt{1,8}; \sqrt{1,8}),$
$(-3\sqrt{1,8}; -\sqrt{1,8})\}$.

Приклад 8. Розв'язати показникову нерівність $2^{x^2+5} \geqslant 4^{x+1}$.

$$(2^{x^2+5} \geqslant 4^{x+1}) \Leftrightarrow (2^{x^2+5} \geqslant 2^{2(x+1)}) \Leftrightarrow (x^2+5 \geqslant 2x+2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2+5-2x-2 \geqslant 0) \Leftrightarrow (x^2-2x+3 \geqslant 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((x-1)^2+2 \geqslant 0) \Leftrightarrow ((x-1)^2 \geqslant -2) \Leftrightarrow x \in R.$$

Відповідь: $]-\infty; +\infty[$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння: $\sin 2x + \sin 3x = 0$.

$$(\sin 2x + \sin 3x = 0) \Leftrightarrow \left(2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{5x}{2} = 0 \text{ або } \cos\frac{x}{2} = 0\right) \Rightarrow \left(x = \frac{2\pi k}{5} \quad k \in Z,\right.$$
$\left. \text{або } x = \pi + 2\pi k, \quad k \in Z\right)$.

Відповідь: $\left\{\frac{2\pi k}{5}; (1+2k)\pi \mid k \in Z\right\}$.

Розв'язання цього рівняння можна записати, використавши символ [:

$$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{5x}{2} = 0, \\ \cos\frac{x}{2} = 0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi k}{5} \quad k \in Z, \\ x = \pi + 2\pi k, \; k \in Z. \end{array}\right.$$

П р и к л а д 10. Розв'язати рівняння $8^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$.

$$(8^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ 2^{3\sqrt{x+1}} = 2^{6+\sqrt{x+1}}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ 2\sqrt{x+1} = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ x+1 = 9; \end{cases} \Rightarrow x = 8.$$

В і д п о в і д ь: $\{8\}$.

П р и к л а д 11 Розв'язати рівняння $\cos^2 x - 3\sin x \times \times \cos x = -1$.

$$(\cos^2 x - 3\sin x \cdot \cos x = -1) \Leftrightarrow (\cos^2 x - 3\sin x \cos x = = -(\sin^2 x + \cos^2 x)) \Leftrightarrow (\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \operatorname{tg} x = 1, \text{ або } \operatorname{tg} x = 2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}(4k \pm 1), \quad k \in Z, \\ \left(x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z \text{ або } (x \approx 1{,}25 + \pi k, \ k \in Z)\right. \end{cases}$$

В і д п о в і д ь: $\left\{x = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad x \approx 1{,}25 + \pi k \mid k \in Z\right\}$

Наводимо приклад творчих самостійних робіт, які варто давати учням, починаючи з V класу. Спочатку пропонують розв'язати рівняння або нерівність з детальним обгрунтуванням і записати його в зазначеній формі. Після цього учні вільно справляються з оберненою задачею — скласти рівняння або нерівність.

VII клас. Алгебра. Скласти нерівність.

Ствердження операцій.	**Символічний запис.**	**Аргументація.**
Умова.	$x \in]-\infty; 5[$ $\Updownarrow$	Множина розв'язків нерівності.
Подамо дані розв'язку у вигляді нерівності.	$x < 5$ $\Updownarrow$	Найпростіша нерівність.
Обидві частини нерівності множимо на 4.	$4x > 20$ $\Updownarrow$	Властивість нерівності $a > b$, $c > 0$, $ac > bc$.

Додано до обох частин нерівності 7.	$4x+7<27$	Властивість нерівності $a>b$, $a+c>b+c$.
	$\Updownarrow$	
Тотожно перетворимо суму в лівій частині.	$(3x+3)+(x+4)<27$	Сполучний закон суми $a+b+c=(a+b)+c$
	$\Updownarrow$	
Поділимо обидві частини правильної нерівності на 3.	$x+1+\dfrac{x+4}{3}<9$	Властивість нерівності $a>b$, $c>0$, $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$.
	$\Updownarrow$	
Додамо до обох частин нерівності вираз, що містить змінну: $2x+6$.	$3x+7+\dfrac{x+4}{3}<9+2(x+3)$.	Знайдена нерівність.

Оскільки послідовність виконання перетворень у кожного учня може бути своя, то нерівностей, як правило, виходить стільки, скільки учнів у класі.

2. СИМВОЛІЧНИЙ ЗАПИС РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ І ОБЧИСЛЕННЯ

Вправи на переклад умов задач із звичайної мови на математичну і навпаки, запис розв'язання задач за допомогою логіко-математичних знаків допомагають учням засвоювати на оперативному рівні логіко-математичну символіку.

Задачі на побудову перерізів многогранників

Розв'язування цих задач сприяє розвитку в учнів конструктивних навичок, більш глибокому засвоєнню і застосуванню теоретичних знань (ідеї аксіоматичної побудови геометрії, ідеї геометричних перетворень тощо).

Ці задачі традиційні для середньої школи. Новою є методика їх розв'язування, яка грунтується на широкому використанні геометричних перетворень, відповідного оформлення розв'язання задачі за допомогою логіко-математичної символіки.

Наведемо приклади оформлення розв'язань таких задач.

Приклад 1. Площини α і β перетинаються по прямій p. У площині β дано точки M і N. Побудувати точку перетину прямої MN з площиною α.

Дано: $\alpha \cap \beta = p$; $\{M, N\} \subset \beta$.
Побудувати: $K = (MN) \cap \alpha$.

I. Аналіз. Нехай точку K побудовано.

1) $K = (MN) \cap \alpha \Rightarrow (K \in (MN),\ K \in \alpha)$;
2) $\{M, N\} \subset \beta \Rightarrow (MN) \subset \beta$;
3) $(K \in (MN),\ (MN) \subset \beta) \Rightarrow K \in \beta$;
4) $(K \in \alpha,\ (K \in \beta) \Rightarrow K \in p = \alpha \cap \beta$;

5) $(K \in (MN),\ k \in p) \Rightarrow K = (MN) \cap p$.

II. Побудова. 1) Будуємо (MN);

2) $K = (MN) \cap p$.

III. Доведення. Доцільно провести усно, записуючи аналіз.

IV. Дослідження.

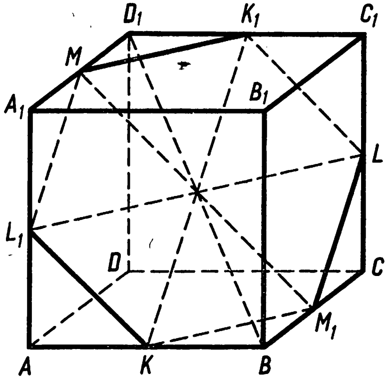
$$((MN) \subset \beta,\ p \subset \beta) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{або } (MN) \nparallel p;\quad (MN) \cap P = K, \\ \text{або } (MN) \parallel p;\quad (MN) \cap P = \varnothing. \end{array}\right.$$

Звичайно, недоцільно так детально оформляти розв'язання кожної задачі. Це слід робити лише для основних задач на побудову перерізів (до основних, зокрема, належить і розглянута задача). Для решти задач можна записувати символічно лише окремі етапи розв'язання.

Приклад 2. Побудувати переріз куба площиною, заданою трьома точками K, L, M на серединах його попарно мимобіжних ребер.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1 = \Phi$ — куб,

$K \in [AB]$, $L \in [CC_1]$, $M \in [A_1D_1]$, $|AK| = |KB|$, $|CL| = |LC_1|$, $|A_1M| = |MD_1|$.



Мал. 4

П о б у д у в а т и: $\Phi \cap (KLM)$ (мал. 4).

I. Аналіз. Площина (KLM) проходить через центр симетрії куба. Центром симетрії куба є середина O його діагоналі. Маючи центр симетрії куба, можна знайти ще точки перетину площини KLM з трьома ребрами куба, побудувавши точки, центрально-симетричні до точок K, L, M.

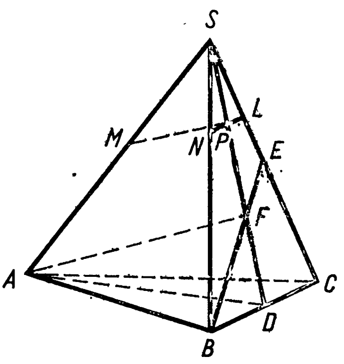
$O \in [BD_1]\ |BO| = |OD_1|,\ Z_0(\Phi) = \Phi.$

$Z_0(K) = K_1,\ Z_0(L) = L_1\ Z_0(M) = M_1.$

II. Побудова.

1) $[AC_1] \cap [BD_1] = 0;$
2) $[KO) \cap [D_1C_1] = K_1;$
3) $[LO) \cap [AA_1] = L_1;$
4) $[MO) \cap [BC] = M_1;$
5) $KM_1LK_1ML_1$ — шуканий переріз.

П р и к л а д 3. Побудувати переріз правильного тетраедра площиною, яка проходить через середину ребра SA, перпендикулярна до грані SBC і паралельна (BC).



Мал. 5

Д а н о: $SABC = \Phi$ — правильний тетраедр (мал. 5).

П о б у д у в а т и: $\Phi \cap \alpha$ (де $M \in \alpha$, $|AM| = |MS|$, $\alpha \perp (SBC)$, $\alpha \parallel (BC)$).

I. Аналіз.

1) $((MNL) \parallel (BC),\ (MNL) \cap \triangle SBC = [NL]) \Rightarrow ([NL] \parallel (BC));$

2) $((MNL) \perp \triangle SBC,\ \triangle SBC \perp \triangle SAD \cap (MNL) = [MP]) \Rightarrow ([MP] \perp [SD]);$

3) (AF — висота тетраедра) $\Rightarrow ([AF] \perp \triangle SBC) \Rightarrow ([AF] \perp [SD]);$

4) $([MP] \perp [SD],\ [SD] \perp [AF]) \Rightarrow [MP] \parallel [AF].$

II. Побудова.

1) Будуємо D, $E : |BD| = |DC|,\ |CE| = |ES|;$

2) $[SD] \cap [BE] = F;\quad [AF];$

3) $M : |AM| = |MS|;\quad [MP) \cap [SD] = P;$

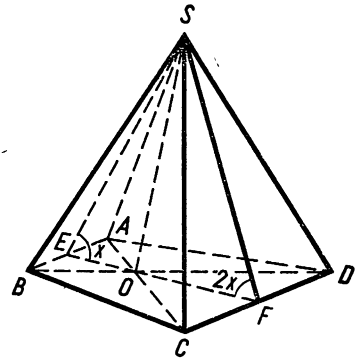
4) $(PL) \parallel (BC);\quad (PL) \cap [SB] = N;\quad (PL) \cap [SC] = L.$

5) MNL — шуканий переріз.

Побудову і дослідження розв'язку можна обгрунтувати усно, використавши кодоскоп.

Задачі на обчислення

Приклад 1. Основа піраміди — рівнобедрена трапеція, паралельні сторони якої a і b ($a > b$), а кут між конгруентними відрізками діагоналей α. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи; двогранні кути, прилеглі до паралельних сторін основ, відносяться, як 1 : 2. Знайти об'єм піраміди.



Мал. 6

Дано: $SABCD$ — піраміда, $ABCD$ — рівнобедрена трапеція (мал. 6).

$|AB| = a$; $|CD| = b$;

$\widehat{AOB} = \widehat{COD} = \alpha$;

$\widehat{SEO} : \widehat{SFO} = 1 : 2$.

Знайти об'єм піраміди.

Як і в попередньому випадку, розглянемо тільки оформлення обчислень:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |EF| \cdot |SO|;$$

$$|EF| = |EO| + |OF|.$$

1) ($\triangle AOE$ — прямокутний) $\Rightarrow |EO| = \frac{|AB|}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$;

2) ($\triangle DOF$ — прямокутний) $\Rightarrow |OF| = \frac{|CD|}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$;

3) $|EF| = \frac{a+b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$;

4) Позначимо $\widehat{SEO} = x$; $(\widehat{SEO} : \widehat{SFO} = 1 : 2) \Rightarrow \widehat{SFO} = 2x$;

5) $\left.\begin{array}{l}(\triangle SEO \text{ — прямокутний}) \Rightarrow |SO| = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} x; \\ (\triangle SFO \text{ — прямокутний}) \Rightarrow |SO| = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} 2x;\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} 2x.$

6) $\left.\begin{array}{l} a \operatorname{tg} x = \dfrac{2b \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \\ \operatorname{tg} x \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{a - 2b}{a} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{\dfrac{a - 2b}{a}}$;

7) $(\triangle SEO$ — прямокутний$) \Rightarrow |SO| = |OE| \operatorname{tg} x.$

$$|SO| = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{a - 2b}{a}};$$

8) $V = \dfrac{(a + b)^2}{24} \sqrt{a^2 - 2ab} \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\alpha}{2}$.

Дослідження. $\sqrt{a^2 - 2ab} > 0 \Rightarrow a > 2b$.

Приклад 2. Дано сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 200$ і точку S (3; 4; 5). Знайти координати точки перетину цієї сфери з прямою SO (O — початок координат).

Дано: $\omega = (x^2 + y^2 + z^2 = 200)$; $S = (3;\ 4;\ 5)$.

Знайти $M\ (p;\ g;\ r) = \omega \cap (OS)$.

Розв'язання:

1) $(OM) = (OS) \Rightarrow \overrightarrow{OM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OS}$;

2) $\overrightarrow{OM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OS} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OS} \Rightarrow (OM = (p = 3k;\quad q = 4k;\ r = 5k))$;

3) $M \in \omega \Rightarrow 9k^2 + 16k^2 + 25k^2 = 0 \Leftrightarrow 50k^2 = 200 \Rightarrow \Rightarrow (k = 2$ або $k = -2)$;

4) $M_1\ (6;\ 8;\ 10)$, $M_2\ (-6;\ -8;\ -10)$.

ВИКОРИСТАНА ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Александрова Н. В. Математические термины. Справочник. М., Высшая школа, 1978.

Антипов И. Н., Шварцбурд Л. С. Символы, обозначения, понятие школьного курса математики. М., Просвещение, 1978.

Бобровник М. П. Математична термінологія і символіка, їх зародження і розвиток.— У кн.: Методика викладання математики. К., Радянська школа, с. 164—172, вып. 4.

Болтянский В. Г., Волович М. Б., Семушин А. Л. Геометрия. Экспериментальное учебное пособие для VII класса. М., Педагогика, 1974.

Болтянский В. Г. Использование логической символики при работе с определениями.— Математика в школе, 1973, № 5.

Бородін О. І. Історія розвитку поняття про число і системи числення. К., Радянська школа, 1968.

Бугай А. С. Короткий тлумачний математичний словник. К., Радянська школа, 1964.

Вейц Б. Е. Язык школьного курса математики.— Математика в школе, 1977, № 3.

Вишенський В. А. Відношення і функції К., Вища школа, 1972.

Глейзер Г. И. История математики в школе. М., Просвещение, 1964.

Данцинг Т. Символы. Математики о математике. М., Знание, 1967, с. 16—23.

Столяр А. А. Применение современного математического языка в школьном курсе математики.— В кн.: Линейная алгебра и геометрия. М., Просвещение, 1967.

Хромой Я. В. Про елементи математичної логіки у викладанні математики в середній школі у світлі нових програм.— У кн.: Методика викладання математики. К., Радянська школа, 1972, вип. 8, с. 11—21.

ЗМІСТ

Коваленко В. Г., Слєдзінський І. Ф.

К56 Математична символіка: Посібник для самоосвіти вчителів / За ред. І. Ф. Тесленка.— К. : Рад. школа, 1981.— 80 с., іл.— Бібліограф.: с. 79.
В обкл.: 10 к. 34 000 пр.

У посібнику розглядається система логіко-математичних символів та позначень, які вживаються в шкільному курсі математики. Велика увага приділяється змісту й походженню кожного із символів, а також методиці їх застосування під час розв'язування задач і доведення теорем на різних етапах навчання. Призначається для вчителів математики загальноосвітньої школи.

$К\frac{60501-325}{М210(04)-81}$ 260—81 4306010000

ББК 74.262
51(07)

10 к.