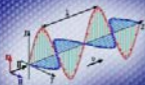


В.М. Шокало, В.А. Усін, Д.В. Грецьких,
В.О. Хорошко, Л.П. Крючкова

Поля і хвилі в системах технічного захисту інформації



Частина 1

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

В.М. Шокало, В.А. Усін, Д.В. Грецьких,
В.О. Хорошко, Л.П. Крючкова

**ПОЛЯ І ХВИЛІ В СИСТЕМАХ
ТЕХНІЧНОГО ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ**

Частина 1

Затверджено Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за напрямом
«Системи технічного захисту інформації»

Колегіум
Харків 2013

УДК 537.8
ББК 22.313
П 54

*Гриф надано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
(Лист від 26.02.13 р. № 1/11-4360)*

Рецензенти:

Г.В. Єрмаков, д-р техн. наук, професор, професор кафедри управління діями підрозділів і засобів військового зв'язку Харківської академії внутрішніх військ МВС України;

С.Г. Рассомахін, д-р. техн. наук, доцент, в.о. завідувача кафедри безпеки інформаційних систем та технологій Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна

П 54 **Поля і хвилі в системах технічного захисту інформації :**
підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.1. / В.М. Шокало, В.А.Усін, Д.В.Грецьких, В.О. Хорошко, Л.П. Крючкова ; за заг. ред. В.М. Шокало. – Харків : ХНУРЕ ; Колегіум, 2013. – 456 с.
ISBN 978-966-8604-77-5

Викладено основи теорії електромагнітних полів і хвиль, теорія ліній передач і коливальних систем.

Для студентів вищих навчальних закладів усіх форм навчання напряму «Системи технічного захисту інформації», а також для студентів, які вивчають споріднені дисципліни за радіотехнічними та радіофізичними спеціальностями, аспірантів та наукових співробітників.

УДК 537.8
ББК 22.313

ISBN 978-966-8604-77-5

© В.М. Шокало, В.А. Усін, Д.В. Грецьких,
В.О. Хорошко, Л.П. Крючкова, 2013.

© Харківський національний
університет радіоелектроніки, 2013.

© Колегіум, 2013.

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ВВЧ – виключно високі частоти;

ВДР – відкритий діелектричний резонатор;

ВЧ – високі частоти;

ГВЧ – гіпервисокі частоти;

ДЛП – діелектрична лінія передачі;

ДР – діелектричний резонатор;

ЕМЕ – електромагнітна енергія

ЕМП – електромагнітне поле;

ЕМХ – електромагнітна хвиля;

ЕРС – електрорушійна сила;

ЕХ – еліптичний хвилевід;

ЕХГ – еліптичний хвилевід гнучкий;

ІЛП – інтегральна лінія передачі;

КДЛП – кругла діелектрична лінія передачі;

КЛП – компланарна лінія передачі;

ЛП – лінія передачі;

МДР – металодіелектричний резонатор;

МСЛ – мікροстрічкова лінія;

НВЧ – надвисокі частоти;

НСЛ – несиметрична стрічкова лінія;

ОР – об'ємний резонатор;

ПЕМХ – пласка електромагнітна хвиля;

ПР – прямокутний резонатор;

ССЛ – симетрична стрічкова лінія;

УВЧ – ультрависокі частоти;

ХДР – хвилевідно-діелектричний резонатор;

ХЦЛ – хвилевідно-щілинна лінія;

ЦКР – циліндричний круглий резонатор;

ЩЛП – щілинна лінія передачі;

j – уявна одиниця ($j^2 = -1$);

$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$, $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ – одиничні орти прямокутної, циліндричної та сферичної систем координат відповідно;

E – вектор напруженості електричного поля, V/m ;

D – вектор електричного зміщення (електричної індукції), $Kл/м^2$;

H – вектор напруженості магнітного поля, A/m ;

B – вектор магнітної індукції, $Вб/м^2$, $Tл$;

j – вектор густини струму, $A/м^2$;

P – вектор поляризації (поляризованості), $Kл/м^2$;

E – електрорушійна сила, V ;

q, Q – електричний заряд, $Kл$;

ρ – об'ємна густина електричного заряду, $Kл/м^3$;

ρ_s – поверхнева густина електричного заряду, $Kл/м^2$;

ρ_l – лінійна густина електричного заряду, $Kл/м$;

ϵ_a – абсолютна діелектрична проникність, $\Phi/м$;

ϵ – відносна діелектрична проникність;

ϵ_0 – абсолютна діелектрична проникність вакууму (електрична стала),

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \Phi/м;$$

$\dot{\epsilon}$ – комплексна діелектрична проникність;

μ_a – абсолютна магнітна проникність, $Гн/м$;

μ – відносна магнітна проникність;

μ_0 – абсолютна магнітна проникність вакууму (магнітна стала),

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Гн/м;$$

$\dot{\mu}$ – комплексна магнітна проникність;

σ – питома провідність, $См/м$;

П – вектор Пойнтінга, $Вт/м^2$;

P – потужність, $Вт$;

δ – кут діелектричних втрат;

I – сила постійного струму, A ;

\dot{k} – комплексне хвильове число, $1/м$;

γ – стала поширення, $1/м$;

β – коефіцієнт фази, $1/м$;

α – коефіцієнт загасання, $1/m$;

ω – колова частота, $1/c$;

λ – довжина хвилі, m ;

f – частота, $Гц$;

T – період коливань, c ;

c – швидкість світла у вакуумі, $c \approx 3 \cdot 10^8 m/c$;

$\dot{R}_{\perp}, \dot{R}_{\parallel}$ – коефіцієнти відбиття;

$\dot{T}_{\perp}, \dot{T}_{\parallel}$ – коефіцієнти проходження;

Δ – глибина проникнення поля у середовище, m .

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Амплітуди комплексні векторів поля 66
- Вектор електричного зміщення 31, 31
– магнітної індукції 25, 31
– намагніченості 35
– напруженості поля електричного 24
– – – – сторонніх сил 70
– – поля магнітного 35
– поляризації (поляризованості) 33
- Відбиття повне 241
- Гармоніки прямі 378
– зворотні 378
- Гаусса закон 51
- Герца вектор 125
- Глибина проникнення поля в середовище 199, 248
- Граничний радіус поля 366
- Гранична умова імпедансна 376
– – Леонтовича – Щукіна 249
- Густина заряду лінійна 29
– – об'ємна 29
– – поверхнева 29
– електричного струму 30
– струму зміщення 47
– – стороннього 70
- Джерела еквівалентні вторинні 119
- Дисперсія 196
- Діаграма типів коливань прямокутного хвилеводу 288
- – – коаксіального хвилеводу 328
– – – круглого хвилеводу 299
- Добротність об'ємних резонаторів 387
– – – власна 287
– – – зовнішня 388
– – – навантажена 388
– – – радіаційна 388
– – – часткова 388
- Довжина хвилі 187
– – власна 386
– – критична 267, 296
– – резонансна 386
- Електрична стала 24
- Елементи зв'язку 304
– – дифракційні 310
– – петльові 308
– – штирові 306
- Електрорушійна сила 27
- Ефект діамагнітний 38
– Доплера 255
- Ємність провідників власна 148
– – взаємна 148
- Задачі електродинаміки зворотні (синтезу) 101
– – прямі (аналізу) 101
– – внутрішні 101
– – зовнішні 101
- Закон електромагнітної індукції 27, 49
- Закон збереження

- електричного заряду 22, 59
- Біо – Савара – Лапласа 25
- Кулона 23
- Ома 27, 164
- Заряд електричний 28
- зв'язаний 32
- Загасання пласкої хвилі 192
- Захист електростатичний 151
- магнітостатичний 160
- Зоммерфельда умова (див. умова випромінювання)
- Індуктивність 175
- взаємна 176
- Інтерференція електромагнітних хвиль 252
- Калібрування потенціалів 123
- Коефіцієнт відбиття 234
- поширення 195
- проходження 234
- фази 192
- Коливання вироджені 387
- вимушені 380
- основні 387
- Конденсатор 148
- Концепція парціальних хвиль
- Бриллюена 276
- Кут Брюстера (повного заломлення) 240
- відбиття 233
- критичний 241
- діелектричних втрат 67
- заломлення 233
- падіння 233
- Лапласа оператор 183, 439
- Лінії силові 39,
- Лінія передачі 259
- багатозв'язна 259
- відкрита (закрита) 260
- гофрована 261
- Губо 368
- двозв'язна 259
- діелектрична пласка 353
- – – кругла 361
- жорстка 261
- з періодичними граничними умовами 372
- інтегральна (стрічкова) 342
- квазіоптична 261
- коаксіальна 324
- копланарна 350, 352
- – – однобічна 350
- – – двобічна 350
- мікροстрічкова 344
- нульової зв'язності 259
- однозв'язна 259
- однорідна (неоднорідна) 259
- стрічкова 261
- – – несиметрична 342
- – – екранована 342
- – – високо добротна 342
- регулярна (нерегулярна) 259
- хвилеводно-щілинна 352
- щілинна 350
- – – однобічна 350
- – – двобічна 350
- Лоренца лема 109, 110
- сила 27
- Магнітна стала 36
- Максвелла система рівнянь
- інтегральна форма 45
- – – диференційна форма 57
- – – для електростатики 132
- – – для комплексних амплітуд 67

- — — для магнітостатики 158
- — — для стаціонарних полів 162
- Момент диполя електричного 32, 142
- — магнітного 172
- Наближення одномодове 305
- Опір характеристичний 272
- Основний тип коливання 387
- Перехід плавний 303
- Плазма електронна 211
- Площина падіння хвилі 231
- Поверхневий імпеданс 250
- Повне внутрішнє відбиття 241
- Пойнтінга вектор 86
- — комплексний 96
- Показник заломлення 233
- Поле диполя електричного 143
- — магнітного 172
- безвихрове 134
- вихрове 164
- Поля статичні 61
- стаціонарні 62
- квазістаціонарні 63
- швидкозмінні 63
- Поляризація діелектрика 33
- електромагнітних хвиль 200
- — — нормальна 235
- — — паралельна 235
- еліптична 204
- колова 203
- лінійна 200
- Порядок зв'язності 259
- Потенціал векторний 122
- скалярний 122
- електростатичний 132
- запізнювальний 129
- магнітний 158
- магнітостатичний 159
- Потік магнітний 27
- Принцип Гюйгенса — Френеля 117
- еквівалентності 119
- суперпозиції 102
- переставної двоїстості 115
- Провідність питома 37
- Проникність діелектрична 33
- — абсолютна 33
- — — вакууму (електрична стала) 33
- — відносна 34
- — — комплексна 67
- магнітна 36
- — абсолютна 36
- — — вакууму (магнітна стала) 36
- — відносна 36
- Режим відсікання 268
- багатоходовий (багатохвильовий) 287
- одномодовий (однوخвильвий) 287
- Резонанс 380
- феромагнітний 223
- циклотронний 217
- Резонатор 380
- біжучої хвилі 381, 382
- відкритий 382
- гіромагнітний 414
- діелектричний відкритий 406
- закритий 382
- конфокальний 410
- металодіелектричний 407
- півхвильовий 401

- прохідний 396
- прямокутний 390
- стоячої хвилі 381
- стрічковий 403
- Фабрі – Перо 382
- ферит-діелектричний 412
- феритовий 411
- хвильоводно-діелектричний 407
- циліндричний 394
- чвертьхвильовий 402
- Рівняння неперервності ліній
 - Струму 59
 - Гельмгольца 124
 - Гельмгольца двовимірні векторні 266
 - дисперсійні 267
 - зв'язку 266
 - мембранні 266
 - Даламбера неоднорідне 120
 - – однорідне 121
 - диференційне силових ліній 40
 - Лапласа 133
 - матеріальні 36, 53
 - Пуассона 127, 132
 - хвильове векторне
 - Неоднорідне 120
 - – – однорідне 121
- Різниця потенціалів 135
- Розрідження спектра власних частот 409
- Світловод 367
 - волоконний 369
 - плівковий 369
- Середовище анізотропне 41
 - бі-анізотропне 228
 - бі-ізотропне 227
 - диспергуюче 42
 - ізотропне 40
 - нелінійне 42
 - неоднорідне 40
 - нестаціонарне 42
- Снелліуса закони 233
- Сприйнятливість діелектрична 33
 - магнітна 36
- Стокса формула 56
- Струм електричний 29
 - – поверхневий 30
 - – повний 47
 - – провідності 47
 - зміщення 47
 - магнітний 113
 - сторонній 70
- Тензор відносної діелектричної проникності 41
 - – комплексної діелектричної проникності
 - – комплексної магнітної проникності 217
- Теорема взаємності 111
 - єдиності 105, 107
 - Остроградського – Гаусса 54
 - Пойнтінга 86
 - Стокса 56
- Теорія близькодії 12
 - дальності 12
- Умова неспотвореної передачі сигналу 314
- Умови граничні (повна система) 76
 - випромінювання 109
 - макроскопічності 44
- Фарадея ефект 223

- Ферромагнетик 218
- Фільтр смуговий 397
 - верхніх частот 269
 - гребінчастий 376
 - режекторний 397
 - типів хвиль 322
 - – відбивного типу 323
 - – поглинального типу 323
- Функція Беселя 295

- Хвилевід 260
 - гнучкий гофрований 337
 - еліптичний 334
 - жолобковий 340
 - коаксіальний 324
 - круглий 295
 - надрозмірний 339
 - прямокутний 281
 - П-, Н-подібний 332
 - частково заповнений 338
- Хвильова поверхня (фронт хвилі) 180
- Хвиля біжуча 187, 252
 - вищого типу 287
 - гібридна (EH, HE) 275, 378
 - звичайна 225
 - незвичайна 225
 - основного типу 287
 - падаюча (відбита) 188, 264
 - повільна 353, 372
 - пласка 189
 - поверхнева 244
 - стояча 188
 - типу E 255, 271
 - типу H 253, 274
 - типу T 191, 270
 - швидка 275
- Хвильове число 183,
 - – поздовжнє 264
 - – поперечне 265

- Час релаксації 60
- Частота гранична 68
- Частота власна 383
 - вимушених коливань 380
 - відсікання хвильових процесів 279
 - критична 267, 279
 - резонансу 380

- Швидкість групова 313
 - переносу енергії 273
 - фазова 187, 272

*Хто володіє інформацією,
той володіє світом.
Уїнстон Черчіль*

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна «Поля і хвилі в системах технічного захисту інформації» (ПХСТЗІ) належить до числа базових дисциплін при підготовці фахівців за напрямом «Системи технічного захисту інформації».

Метою вивчення навчальної дисципліни ПХСТЗІ є оволодіння вмінням виконувати інженерні розрахунки важливих характеристик і параметрів фізичних полів і хвиль, що створюють канали витоку інформації, навчання студентів основним положенням теорії поля і принципам поширення хвиль (електромагнітних та акустичних) в різних діапазонах частот, пристроях і середовищах.

При вивченні дисципліни передбачається, що в курсі «Вища математика» студенти ознайомилися з розділами «Векторна алгебра» та «Математичний аналіз», а в курсі «Фізика» – «Електрика і магнетизм», «Фізика коливань і хвиль».

Підручник складено згідно з освітньо-професійною програмою за напрямом «Системи технічного захисту інформації» та відповідною робочою програмою дисципліни.

Наявність численного ілюстративного матеріалу, значної кількості прикладів, а також завдань для самостійного розв'язку та питань для самоперевірки, мають сприяти результативному засвоєнню дисципліни. Методика викладення матеріалу дозволить студентам різного рівня підготовки послідовно і порівняно просто не тільки освоювати теоретичні питання, але і на конкретних прикладах опанувати сучасні методи аналізу і розрахунку характеристик електромагнітних полів у різних елементах і вузлах систем технічного захисту інформації та вільному просторі. В основу підручника покладено матеріали лекцій, що автори читають студентам, які навчаються за вказаним та спорідненим напрямками. Раніше опубліковані підручники і оригінальні роботи авторів наведені в переліку рекомендованої літератури.

Автори щиро вдячні рецензентам підручника – доктору технічних наук, професору Г.В. Єрмакову (Харківська академія внутрішніх військ МВС України) та доктору технічних наук, доценту С.Г. Рассомахіну (Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна), конструктивні і критичні зауваження яких сприяли суттєвому удосконаленню рукопису.

ВСТУП

Сьогодні інформацію розглядають як важливий ресурс розвитку суспільства, що відіграє провідну роль в умовах обмеження енергетичних, матеріальних, економічних та інших ресурсів.

Переважає більшість сучасних технічних систем, зокрема інформаційних, змушена функціонувати в умовах різного роду конфліктних взаємодій (інформаційного протиборства), коли ведеться радіоелектронна розвідка, організовується радіопротидія, застосовується радіомаскування і захист від навмисно організованих завад та силових деструктивних впливів, спрямованих на функціональне ураження технічних засобів і персоналу.

У конфліктну взаємодію залучаються інформаційні системи всіх відомих класів: передачі й видобування інформації, радіокерування й руйнування інформації. Ці системи працюють у всіх освоєних на даний час діапазонах хвиль – від наддовгих радіохвиль і інфранизькочастотних коливань земної кори до хвиль ультрафіолетового випромінювання – і використовують всі відомі фізичні поля.

Концепція фізичного поля бере початок в роботах великого британського вченого XIX століття Майкла Фарадея. До XIX століття в науці панувала теорія «далекодії». Всі електромагнітні явища зводились до миттєвої взаємодії зарядів на відстані. Поняття поля відіграло допоміжну роль, і його, за бажанням, можна було не використовувати. Теорія далекодії базувалась на законі Кулона для електричних зарядів (1785) і виходила з припущення, що один заряд діє на інший миттєво без участі в цьому процесі будь-якого матеріального середовища.

На початку XIX ст. М. Фарадей висунув теорію «близькодії», згідно з якою всі електромагнітні явища полягають в змінах (збудженнях) поля, які, виникаючи на даній ділянці, безпосередньо впливають лише на суміжні з ним ділянки.

Будь-яке електромагнітне збудження поступово передається від точки до точки і поширюється з кінцевою швидкістю. Однак ця теорія пояснювала електромагнітні явища деформацією та вихровим рухом всепроникного середовища – ефіру.

Дослідження М. Фарадея поклали початок теорії електромагнітного поля і закінчились винайденням явища і формулюванням закону електромагнітної індукції (1831), який був перевірений Е.Х. Ленцем (1804 – 1865).

В другій половині XIX ст. теорія електромагнітного поля швидко розвивається, встановлюється єдність електромагнітних і магнітних явищ та з'ясовуються міцні зв'язки між електромагнітними і оптичними явищами.

В роботі «Трактат по електричеству и магнетизму» (1873) Дж. К. Максвелл надав математичну форму фізичним ідеям Фарадея, узагальнивши закони електромагнетизму в системі рівнянь (рівняння Максвелла). Це дозволило пояснити відомі на той час і передбачити ряд нових явищ. Теорія Максвелла до цього часу є основою теорії електромагнітного поля.

Згідно з сучасними уявленнями, матерія проявляє себе або у вигляді *речовини*, яка характеризується масою, або у вигляді *поля*, яке характеризується енергією.

Фізичним полем називають особливу форму матерії, яка зв'язує частинки речовини і забезпечує фізичну взаємодію матеріальних об'єктів та їх систем.

Існує принципова різниця між речовиною і полем. Речовина завжди має різку межу того об'єму, який вона займає, поле ж змінюється плавно від точки до точки. В одній точці простору може існувати нескінченна кількість фізичних полів, які не впливають одне на одне, чого не можна сказати про речовини. Поле і речовина можуть взаємно проникати одне в одну.

У сучасній фізиці виділяють два види *фундаментальних* фізичних полів – *електромагнітне* і *гравітаційне*. Особливістю цих полів є властивість обміну енергією між об'єктами незалежно від наявності речовини між ними. Для зручності розгляду явищ енергообміну в *речовині* введено поняття *акустичного* і *теплого* полів. За походженням фізичні поля можна розділити на *природні* і *антропогенні* (які виникають в результаті діяльності людей).

Електромагнітне поле – форма існування матерії, за допомогою якої здійснюється взаємодія електрично заряджених частинок.

Між частинками і їх полем, строго кажучи, точної межі немає. Однак вважається, що електричний заряд має лише частинка матерії, зосереджена в досить малій області простору, а поза нею матерія існує у вигляді електромагнітного поля і об'ємна густина заряду дорівнює нулю.

Згідно з концепцією поля, частинки створюють в кожній точці оточуючого їх простору особливий стан – поле сил, яке проявляється

ся в силовій дії на інші частинки, розташовані в цьому просторі.

Електрично заряджені частинки і їх електромагнітне поле, як і інші види матерії, мають масу, енергію, кількість руху, тобто характеризуються тими ж властивостями, які враховуються при розгляді механічної форми руху матерії. Разом з тим ці частинки і їх електромагнітне поле мають специфічні властивості, найважливішими з яких є електричний заряд, власний магнітний момент, силова дія електромагнітного поля на заряджені частинки. Остання властивість проявляється по-різному залежно від того, рухається чи ні заряджена частинка. Умовно приймається, що електромагнітне поле має дві складові (дві форми прояву) – електричну, яка характеризується дією поля як на рухомі, так і на нерухомі частинки, і магнітну, яка характеризується дією лише на рухомі заряджені частинки.

Електромагнітні поля не лише здійснюють взаємодію між частинками; можуть існувати *вільні поля*, незалежні від джерел, що їх створили. Процес утворення *вільного електромагнітного поля* називають *випромінюванням*.

Поширення вільного електромагнітного поля забезпечується тим, що змінне електричне поле породжує вихрове магнітне поле, яке, в свою чергу, породжує вихрове електричне поле. Даний процес можна ініціювати за допомогою випромінювача електричного або магнітного полів, що забезпечує збудження відповідного поля в області простору протяжністю порядку і більше довжини хвилі.

Фізичний процес, який несе інформацію або призначений для її передачі, називають *сигналом*.

Сигнали несуть повідомлення і самі переносяться фізичними полями, які породжують хвильовий процес у просторі.

З відомих полів як носії застосовуються акустичні, електричні, магнітні, електромагнітні, сейсмічні поля. Всі ці типи хвиль можуть бути інформативними, тобто переносити сигнали, з якими працюють радіоелектронні системи. Для передачі інформації за допомогою електромагнітних хвиль радіо- або оптичних діапазонів здійснюється *модуляція коливань* – зміна амплітуди, частоти або фази коливань за певним законом (відповідно амплітудна, частотна і фазова модуляція).

Акустичне поле можна розглядати як сукупність *пружних хвиль*.

Пружність називають властивість твердих тіл відновлювати свої форму й об'єм, а рідин і газів – об'єм, після припинення дії зов-

нішніх сил. Середовище, що має пружні властивості, називають *пружним середовищем*.

Пружні коливання – це коливання механічних систем, пружного середовища або його частини, що виникають під дією механічного збурювання. Пружні, або акустичні, хвилі – механічні збурювання, що поширюються в пружному середовищі. Окремий випадок акустичних хвиль – *звукові хвилі*, які ми можемо чути. Звідси походить термін *акустика* (від грецького *akustikos* – слуховий) – область фізики, що досліджує пружні коливання й хвилі від найнижчих до найвищих частот, в тому числі звукових.

Залежно від частоти акустичні хвилі підрозділяються на інфразвукові, звукові, ультразвукові й гіперзвукові. Межі між першими трьома діапазонами визначаються властивостями людського слуху. Межа четвертого діапазону визначається граничною частотою акустичних хвиль, що поширюються в повітрі.

Основною властивістю будь-якої хвилі є перенесення енергії без перенесення речовини, яка заповнює середовище поширення. Густина потоку енергії в кожній точці хвилі визначається величиною збурення в цій точці. Пружна (наприклад, звукова) хвиля переносить енергію двояким чином: у формі енергії пружної деформації речовини середовища і кінетичної енергії руху частинок цієї речовини. Електромагнітна хвиля несе в собі енергію електричного і магнітного полів. Наявність у хвилі двох форм енергії тісно пов'язана з переносом енергії хвилі.

Енергія пружної хвилі передається від одного прошарку до іншого, з одного боку, тому що прошарки деформуються і діють один на одного з певною силою, а з іншого, – тому що частинки рухаються, і діюча при цьому сила виконує роботу. За рахунок цієї роботи деформується й рухається наступний прошарок і т.д. Так, з переходом однієї форми енергії (кінетичної) до іншої (потенціальної) відбувається перенесення енергії хвилі.

Енергія електромагнітної хвилі переноситься у просторі внаслідок безперервного перетворення одна в одну енергій електричного і магнітного полів. В процесі цього перетворення зберігається баланс енергії в обмеженому об'ємі V .

Всі хвильові явища (випромінювання, дифракція, інтерференція та ін.) підпорядковуються загальним для хвильових процесів законам. Існує аналогія між акустичними (механічними) і електромагніт-

ними системами, тому викладення теорії цих систем ведеться на основі спільних математичних моделей. Зрозуміло, є й розходження в поданні електромагнітних і акустичних процесів, головним з яких є незастосовність повної системи рівнянь Максвелла при описі поведінки акустичних хвиль.

Спільна закономірність полягає в тому, що передача взаємодії матерії (наприклад, енергії електромагнітних хвиль або звукового тиску) відбувається не миттєво, а з деякою кінцевою швидкістю.

Електромагнітні хвилі завдяки своїм властивостям знайшли своє застосування при передаванні та вилученні інформації, а саме в радіо, локації, навігації, мобільному зв'язку.

Передавальна антена, що випромінює електромагнітні хвилі у вільний простір, частина простору, суттєва для поширення радіохвиль, і приймальна антена, що приймає ці хвилі, дозволяють здійснити передавання інформації між двома об'єктами і становлять радіолінію (рис. В.1).

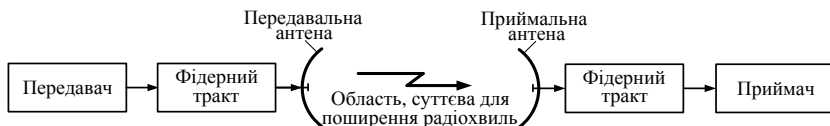


Рис. В.1

При цьому, вектори, які описують електромагнітне поле, змінюються згідно з передаваним сигналом. Наприклад, у випадку амплітудної модуляції, амплітуда струму у випромінювачі змінюється за законом повідомлення, що передається. Тоді всі складові векторів електромагнітного поля виявляються амплітудно-модульованими.

Одержувач інформації, аналізуючи характеристики електромагнітної хвилі в будь-якій точці зони впевненого прийому, може відновити повідомлення шляхом вимірювання змін потужності, частоти або фазового зсуву прийнятої хвилі.

До **радіолокаційної лінії** додатково входить радіолокаційна ціль (рис. В.2).

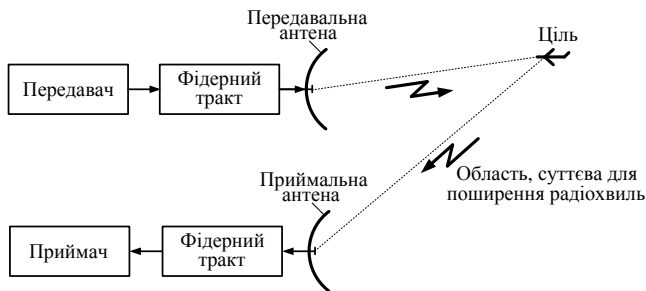


Рис. В.2

Сучасні засоби несанкціонованого добування інформації – *технічні засоби розвідки* – використовують для досягнення своїх цілей всі технологічні можливості.

В основу розвідки із застосуванням технічних засобів (радіо- і оптико-електронних, акустичних, оптичних та ін.) покладені *демаскуючі ознаки об'єктів* розвідки. До зазначених ознак об'єктів відносять зовнішній вигляд, форму, колір, геометричні розміри і фізичні (електромагнітні, електричні, магнітні, теплові, сейсмічні, акустичні) поля, створювані ними. На підставі аналізу демаскуючих ознак об'єктів можливе розпізнавання об'єктів, визначення їх призначення і типів. Однією з суттєвих демаскуючих ознак, притаманних усім без винятку об'єктам, є їх електромагнітні випромінювання. Природа їх виникнення різна. Вони можуть бути *природного* або *штучного* походження, *первинними (власними)* або *вторинними (відбитими)*.

До власних належать теплові (температурні) випромінювання об'єктів і випромінювання радіо- та оптико-електронних засобів (РЕЗ та ОЕЗ). Теплове випромінювання – електромагнітне випромінювання, що випускається об'єктами, температура яких відмінна від абсолютного нуля. Теплове випромінювання відрізняється від випромінювань, що штучно генеруються тим, що за своєю часовою структурою має випадковий, шумоподібний характер і займає дуже широкий діапазон довжин хвиль (від ультрафіолетового до НВЧ). Спектр даного випромінювання суцільний, але розподіл енергії по спектру нерівномірний. Спектральна щільність випромінювання залежить від частоти і температури. Вона досягає максимальних значень на певних частотах, зменшуючись з підвищенням і зниженням частоти. З підвищенням температури випромінюючої поверхні спектральна щільність випромінювання на всіх частотах зростає, а зна-

чить, збільшується і загальна енергія випромінювання об'єкта. Максимум спектральної щільності зміщується при цьому в область більш коротких хвиль.

Випромінювання РЕЗ та ОЕЗ – це перш за все їх основні (навмисні) випромінювання з метою забезпечення функціонування за призначенням – випромінювання засобів розвідки, зв'язку, управління, локації, навігації, радіоелектронного придушення. Особливість основних випромінювань – наявність закономірностей в їх просторовій, часовій та спектральній структурі: діаграма спрямованості випромінювання, тривалість і період проходження випромінюваних імпульсів, несуча частота, вид амплітудного і фазочастотних спектрів, ширина спектра та ін.

Поряд з основними при роботі передавачів радіо- і оптикоелектронних засобів мають місце і неосновні випромінювання, тобто випромінювання поза межами смуги частот, необхідної для передачі інформації або створення завад. Вторинні електромагнітні випромінювання – випромінювання, що виникають за рахунок відбиття (розсіювання) електромагнітних хвиль, що опромінюють об'єкт. Падаючі на об'єкт електромагнітні хвилі розсіюються ним у всіх напрямках, у тому числі і в напрямку джерела випромінювання. Для вторинного випромінювання реальних об'єктів (літак, автомобіль та ін.) характерна залежність його параметрів (інтенсивності, спектра, поляризації, нахилу фазового фронту) від відбивної здатності, геометричної форми і розмірів об'єкта, поляризації падаючої хвилі, взаємної орієнтації джерела опромінення і об'єкта і, нарешті, від параметрів їх відносного руху.

Первинні та вторинні електромагнітні випромінювання можуть бути виявлені і проаналізовані. За результатами аналізу робляться висновки про об'єкт розвідки або наміри. Іншими словами, електромагнітні випромінювання дозволяють вести розвідку об'єктів і їх розпізнавання.

Електромагнітні випромінювання різної частоти можуть містити інформативні сигнали від об'єкта, що захищається при його функціонуванні. Джерелом електромагнітного випромінювання в більшості випадків є кабельні і дротяні лінії каналів передачі інформації. Вже хрестоматійним став приклад ефектної демонстрації в 1985 році можливостей радіоперехоплення зображень з комп'ютерного дисплея. Учасники Міжнародного конгресу з питань безпеки ЕОМ, що про-

ходив у Каннах, були буквально приголомшені тим, що за допомогою досить простого пристрою, розміщеного у припаркованому автомобілі, була знята інформація з дисплея, розташованого на восьмому поверсі будинку, віддаленого від пункту перехоплення на відстань близько ста метрів. Тому особливо небезпечні є також побічні електромагнітні випромінювання і наводки – вони і є джерелами утворення електромагнітних каналів витоку інформації (*технічним каналом витоку інформації* (ТКВІ) називають сукупність носія інформації, середовища його поширення та засобу технічної розвідки). Небезпечними є також допоміжні засоби і системи, що представляють собою зосереджені і розподілені випадкові антени.

У разі коли джерелом інформації є голосовий апарат людини, інформація називається мовною. Мовний сигнал – складний акустичний сигнал, основна енергія якого зосереджена в діапазоні частот від 300 до 4000 Гц. Голосовий апарат людини є первинним джерелом акустичних коливань. Під дією акустичних коливань в огорожувальних будівельних конструкціях і інженерних комунікаціях приміщення, в якому знаходиться мовне джерело, виникають вібраційні коливання. Таким чином, у своєму первісному стані мовний сигнал в приміщенні присутній у вигляді акустичних та вібраційних коливань. Різного роду перетворювачі акустичних та вібраційних коливань є вторинними джерелами. До останніх відносяться: гучномовці, телефони, мікрофони, акселерометри та інші пристрої. Залежно від середовища поширення мовних сигналів і способів їх перехоплення технічні канали витоку інформації можна розділити на акустичні, вібраційні, акустоелектричні, оптоелектронні і параметричні.

Можливою причиною утворення каналів витоку мовної інформації з виділених приміщень, в яких встановлено допоміжні технічні засоби й системи, є прямі й модуляційні *акустоелектричні перетворювання*. Фізичною основою *прямих акустоелектричних перетворювань* є зворотний ефект Фарадея, ємнісні ефекти, п'єзоэффект. *Модуляційними акустоелектричними перетворюваннями* називають високочастотні паразитні коливання, промодульовані інформативними (небезпечними) сигналами акустоелектричних перетворювань.

Вважається, що на частку технічної розвідки припадає більше 50 % всієї видобутої інформації. Тому проблема захисту від технічної розвідки набуває особливої актуальності.

Слід зазначити, що і електромагнітні, і акустичні поля широко застосовуються для вирішення задач технічного захисту інформації:

радіомоніторингу, радіопротидії, просторового акустичного зашумлення.

Викладене обумовило широке коло базових питань, які розглядаються в даному підручнику.

У першій частині підручника, яка містить вісім розділів, детально викладено фундаментальні положення макроскопічної електродинаміки: рівняння електромагнітного поля; теореми та принципи електродинаміки; розглянуто властивості статичних, стаціонарних і квазістаціонарних полів. Особливу увагу приділено поширенню плоских електромагнітних хвиль в ізотропних та анізотропних середовищах. Викладені питання поширення електромагнітних хвиль в спрямовуючих системах різного типу, розглянуто коливальні системи мікрохвильового діапазону.

У другій частині підручника розглянуто випромінювання електромагнітних хвиль; дифракція електромагнітних хвиль; антенні системи різних діапазонів частот; фізичні основи екранування; поширення радіохвиль різних діапазонів частот; електромагнітна сумісність технічних засобів; основи акустики і фізики теплових полів.

1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

У даному розділі за допомогою індуктивного методу дослідження розглянуто основні експериментальні факти, що лежать в основі законів електродинаміки, сформульовано і проаналізовано основні рівняння теорії електромагнітного поля.

1.1. Електромагнітне поле і його основні характеристики. Електромагнітні властивості середовищ

Дамо декілька визначень.

Електромагнітне поле – це особлива форма (вид) матерії, що відрізняється неперервним розподілом в просторі (електромагнітні хвилі) і виявляє дискретність структури (фотони). ЕМП характеризується здатністю поширюватися у вакуумі (за відсутності сильних гравітаційних полів) із швидкістю $2,99792458 \cdot 10^8$ м/с і справляє на заряджені частинки силову дію, залежну від їх швидкості.

Електричне поле – одна з двох сторін електромагнітного поля, зумовлена електричними зарядами і зміною магнітного поля, яка проявляє силову дію на заряджені тіла і частинки.

Магнітне поле – інша сторона електромагнітного поля, зумовлена рухомими електричними зарядами і зміною електричного поля. Магнітне поле проявляє себе за силовою дією на рухомі заряджені частинки, спрямованою нормально щодо напрямку руху цих частинок. Разом з тим уявлення про електромагнітне поле як про просте поєднання в деякій просторовій області електричного і магнітного поля невірне.

Об'єктивно існуючою фізичною реальністю є єдине електромагнітне поле як нерозривна сукупність електричного і магнітного полів. Та чи інша сторона ЕМП проявляється залежно від умов експерименту. Так, якщо електричний заряд щодо точки спостереження нерухомий, то він збуджує електричне поле. Спостерігач, який знаходиться в рухомій системі координат щодо нерухомого заряду, фіксуватиме наявність електричного струму, а отже, і наявність магнітного поля. Можна дійти аналогічних міркувань, якщо замість нерухомого заряду розглядати поле нерухомого постійного магніту.

ЕМП, як і інші види матерії, має масу і енергію. Наявність інертної маси в електромагнітному полі експериментально довів російський

фізик П.Н. Лебедєв¹, який в 1899 р. виміряв тиск світла (електромагнітних хвиль) на тверді тіла. Маса ЕМП m пов'язана з його енергією W законом А. Ейнштейна $m = W/c^2$. Оскільки швидкість світла c досить велика, то маса m мала, проте не рівна нулю. ЕМП має гравітаційну масу, і траєкторія хвилі скривлюється в гравітаційному полі, що довів в 1919 р. англійський астроном А. Еддінгтон.

Наявність маси, густини енергії і імпульсу, здатність перетворюватися в інші види енергії свідчать про матеріальність електромагнітного поля.

Електродинаміка – теорія електромагнітного поля – виникла на основі аналізу і узагальнення багатьох експериментальних фактів. Наведемо відомі експериментальні результати, що лежать в основі законів електродинаміки.

1.1.1. Аналіз основних дослідних фактів

Закон збереження електричного заряду. Сукупність дослідних даних про електричні заряди дозволяє сформулювати наступні основні положення.

1. Заряди бувають двох видів. Одні заряди умовилися називати позитивними, інші – негативними.

2. Однойменні заряди відштовхуються, різнойменні – притягуються.

3. Найменший в природі елементарний заряд $e = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл (кулон), носієм якого є частинки, з яких складаються тіла, – електрони (негативний заряд) і протони (позитивний заряд).

4. Тіла, які не беруть участь в електричній взаємодії, називаються нейтральними і мають однакове число позитивних і негативних частинок.

5. Справедливий один з фундаментальних законів фізики – **закон збереження електричного заряду**. На підставі експериментів встановлено, що повний заряд Q , розміщений в деякому об'ємі V , охопленому поверхнею S , може змінитися лише в тому випадку, якщо заряди q_i перетинають поверхню S . Позначивши повний заряд системи

¹ Короткі біографічні дані щодо вчених, які внесли істотний внесок у розвиток теорії електромагнітного поля, наведені в додатку А.

$Q = \sum_{i \in V} q_i$ і вводячи силу електричного струму I , рівну кількості електрики, що виходить з об'єму V в одиницю часу, закон збереження заряду можна записати у вигляді

$$\frac{dQ}{dt} = -I. \quad (1.1)$$

Розмірність струму відповідно до (1.1) $[I] = Кл/с = А$ (ампер).

Закон Кулона для електричних зарядів. Цей закон був встановлений в 1785 р. французьким вченим *Ш. Кулоном* в результаті прямих дослідів.

Закон Кулона визначає силу \mathbf{F}_{12} взаємодії двох точкових нерухомих електричних зарядів q_1 і q_2 , що знаходяться на деякій відстані r один від одного в точках \mathbf{r}_1 і \mathbf{r}_2 відповідно. Сила, що діє на перший заряд з боку другого, має вигляд

$$\mathbf{F}_{12} = k_1 q_1 q_2 \mathbf{r} / r^3, \quad (1.2)$$

де $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $r \equiv |\mathbf{r}|$; k_1 – коефіцієнт, залежний від вибору системи одиниць і середовища, в якому розглядається взаємодія зарядів.

З (1.2) виходить, що сила взаємодії спрямована по прямій, яка сполучає заряди (рис. 1.1), тобто є центральною.

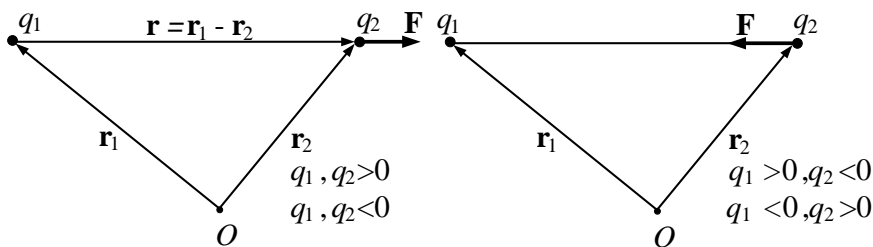


Рис. 1.1

У системі СІ (SI – System International), основні одиниці якої метр, кілограм, секунда, ампер, коефіцієнт k_1 для повітря (яке за своїми електричними властивостями близьке до вакууму) дорівнює

$$k_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \text{ де } \epsilon_0 - \text{ електрична стала, } \epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \approx \\ \approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ Ф/м (фарада на метр).}$$

Закон Кулона (1.2) дозволяє ввести поняття **напруженості електричного поля \mathbf{E}** . Це – **векторна фізична величина, що чисельно дорівнює силі, з якою електричне поле діє на точковий одиничний позитивний заряд**. Відповідно до визначення (1.2) між напруженістю поля \mathbf{E} і силою \mathbf{F}_{12} , з якою електричне поле діє на заряд довільної величини q , існує простий зв'язок

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{q}. \quad (1.3)$$

Розмірність напруженості електричного поля $[E] = H/Кл = В/м$ (вольт на метр).

Взаємодія магнітів і струмів. Основні властивості магнітів були досліджені в XVII столітті англійським вченим *В. Гільбертом*, який зазначив, зокрема, дві основні властивості магнітів.

1. Кожен магніт має два полюси – позитивний (північний) і негативний (південний), причому однойменні полюси відштовхуються, а різнойменні притягуються.

2. Неможливо одержати магніт з одним полюсом.

Кількісний ступінь взаємодії магнітних полюсів встановив Кулон (1785) одночасно із законом (1.2). За формою ці закони однакові. Так, якщо розглянути дві довгі намагнічені спиці (рис. 1.2) і знехтувати впливом дальніх полюсів ($-m_1$ і $-m_2$ на рис. 1.2), то сила взаємодії полюсів m_1 і m_2 описується співвідношенням

$$\mathbf{F}_{12}^M = k_2 m_1 m_2 \mathbf{r}/r^3, \quad (1.4)$$

де m_1 , m_2 – магнітні маси (заряди) полюсів; k_2 – коефіцієнт, що залежить від системи одиниць і середовища, в якому взаємодіють маси m_1 і m_2 .

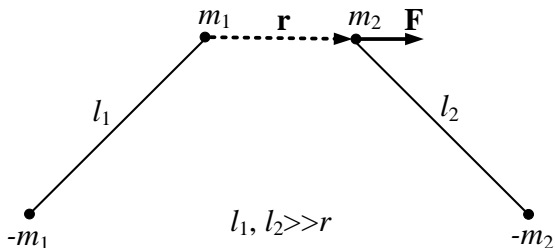


Рис. 1.2

За аналогією із законом (1.2) можна ввести векторне поле, яке характеризує силову дію магнітних мас. Це – **поле магнітної індукції \mathbf{B}** . Назва «магнітна індукція» склалася історично, доцільно було б (для повної аналогії) силову дію магнітного поля також характеризувати полем напруженості. Проте співвідношеннями (1.2) і (1.4) аналогія між електричними і магнітними взаємодіями закінчується. Істотна відмінність між ними, відмічена Гільбертом, полягає в тому, що позитивні і негативні магнітні «заряди» не можна відокремити один від одного – на відміну від електричних. Так, при розподілі магніту на дві частини в кожній з них з'являються полюси різних знаків (рис. 1.3). Цю властивість можна пояснити, якщо вважати, що кожна молекула речовини є елементарним магнітом з магнітними зарядами полюсів $\pm m_i$, тому сумарний магнітний заряд речовини в будь-якому об'ємі V дорівнює нулю $\sum_{i \in V} m_i = 0$, а самі молекули речовини орієнтовані в магніті в певному порядку.

Г. Ерстед в 1820 році відкрив магнітну дію електричних струмів (рис. 1.4). У дослідях Ерстеда магнітна стрілка встановлюється перпендикулярно проводу із струмом. Це дозволило в 1820 році сформулювати закон *Біо – Савара – Лапласа*, який визначає магнітну індукцію елемента струму $I d\mathbf{l}$ (рис. 1.5)

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_a}{4\pi} I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}] \frac{1}{r^3}.$$

При цьому всі дослідники виходили з невірної уявлення про те, що провідник із струмом сам стає магнітом і проявляє магнітну дію.

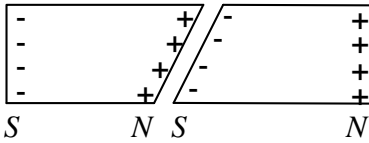


Рис. 1.3

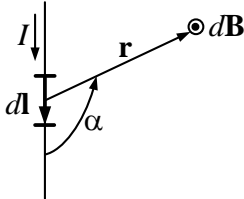


Рис. 1.5

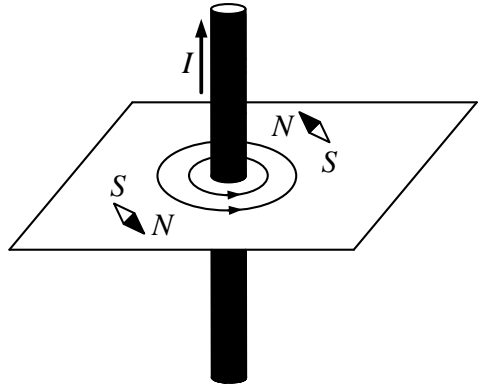


Рис. 1.4

Досліди *М. Фарадея* (1821), *Х. Ерстеда* і *А. Ампера* виявили силу дію магнітного поля на струм. Так, сила, що діє в магнітному полі \mathbf{B} на елемент $d\mathbf{l}$ проводу зі струмом I , визначається як

$$\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (1.5)$$

Співвідношення (1.5) не можна пояснити, використовуючи поняття магнітних зарядів, розподілених вздовж $d\mathbf{l}$, оскільки сила \mathbf{F} , що діє на них, відповідно до (1.4), має бути спрямована вздовж \mathbf{B} , що суперечить співвідношенню (1.5).

Ампер припустив, що магніт еквівалентний системі замкнених струмів (гіпотеза молекулярних струмів Ампера). На його думку, магнітні заряди не існують, а єдиним джерелом магнітного поля є електричний струм.

Знайдемо силу, що діє на один заряд. Струм I в (1.5) $I = qn\upsilon S = JS$. Тут q – величина заряду; n – число зарядів в одиниці об'єму (розмірність m^{-3}), що перетинають одиницю площі за одиницю часу; υ – швидкість зарядів; J – густина струму (розмірність A/m^2); S – площа поперечного перетину провідника. Величина $S \cdot dl \cdot n = N$ – число зарядів, що рухаються у всьому об'ємі провідника завдовжки dl . На один заряд, відповідно до (1.5), діє сила

$$\mathbf{F}_m = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (1.6)$$

У системі СІ величину \mathbf{B} виражають в теслах ($Tл$) і відповідно до (1.6) $[B] = H \cdot c / (Кл \cdot м) = Tл$.

Для заряду масою m , що рухається одночасно в електричному і магнітному полі, рівняння руху з урахуванням (1.3), (1.6) можна записати у вигляді

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]). \quad (1.7)$$

Сила \mathbf{F} називається силою *Лоренца*, \mathbf{a} – прискорення заряду.

Закон електромагнітної індукції Фарадея. У 1831 р. *М. Фарадей* сформулював закон електромагнітної індукції, який полягає в тому, що при будь-якому перетині провідником магнітних силових ліній в провіднику виникає індукційний струм, пропорційний кількості пересічених силових ліній і обернено пропорційний електричному опору провідника. *Д.К. Максвелл* скористався відкритим в 1827 р. законом *Г. Ома*, відповідно до якого опір R контура виражається через силу струму I і електрорушійну силу (ЕРС) \mathcal{E} , яка дорівнює роботі, що здійснюється над одиничним зарядом при обході ним замкненого контура,

$$R = \mathcal{E} / I. \quad (1.8)$$

Д. К. Максвелл ввів пов'язаний із замкненим контуром L магнітний потік

$$\Phi = \int_S (\mathbf{B} \mathbf{e}_n) dS, \quad (1.9)$$

що дозволило записати закон електромагнітної індукції у вигляді

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.10)$$

У співвідношеннях (1.9), (1.10); S – поверхня, що спирається на контур L ; \mathbf{e}_n – орт нормалі до елемента поверхні dS (рис. 1.6); \mathcal{E} – ЕРС, що виникає в контурі L .

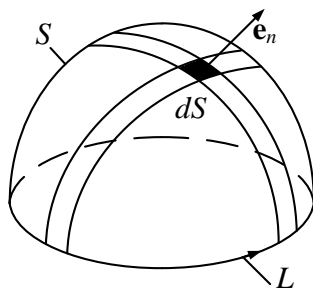


Рис. 1.6

Знак мінус у співвідношенні (1.10) відображає правило *Ленца*, яке визначає напрям індукційного струму або ЕРС індукції \mathcal{E} . Відповідно до (1.10) індукційний струм спрямований так, що протидіє причині, яка викликала його. Інакше кажучи, магнітний потік індукційного струму спрямований таким чином, що прагне компенсувати зміну потоку зовнішнього магнітного поля.

Викладені експериментальні результати лежать в основі електродинаміки, закони якої узагальнив і сформулював Д.К. Максвелл в роботі «Трактат по електричеству и магнетизму» (1873).

Перейдемо до систематичного викладу макроскопічної теорії електромагнітного поля.

1.1.2. Джерела і вектори електромагнітного поля

Джерелами електромагнітного поля є заряди. Нерухомі заряди збуджують в середовищі електричне поле, рухомі заряди (струми) збуджують як електричне, так і магнітне поле. У свою чергу електричне поле, що змінюється в часі, збуджує магнітне поле і навпаки.

Для кількісної характеристики джерел ЕМП вводяться наступні величини:

- електричний заряд $q(Q)$;
- електричний струм I .

Електричний заряд – це скалярна фізична величина, що дорівнює кількості елементарних зарядів в деякому об'ємі, або перенесених через деякий перетин провідника.

Електричний заряд q в тілах або по їх поверхні може розподілятися нерівномірно, і для опису законів розподілу заряду вводяться наступні поняття:

- об'ємної густини заряду ρ в точці $M(x, y, z)$

$$\rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}, \text{ Кл/м}^3, \quad (1.11)$$

де dq – заряд елементарного об'єму dV в точці M ;

- поверхневої густини заряду ρ_s на поверхні S

$$\rho_s = \frac{dq}{dS}, \text{ Кл/м}^2, \quad (1.12)$$

- лінійної густини заряду ρ_l , розподіленого уздовж лінії (тонкої нитки) l ,

$$\rho_l = \frac{dq}{dl}, \text{ Кл/м}. \quad (1.13)$$

Повний заряд об'єму V , поверхні S і нитки l відповідно становить:

$$q = \int_V dq = \int_V \rho dV; \quad q = \int_S \rho_s dS; \quad q = \int_l \rho_l dl.$$

Відзначимо, що поверхневі і лінійні заряди реально не існують, а їх введення полегшує розрахунок полів у випадку розподілу зарядів в тонкому шарі поблизу поверхні або в тонкому провіднику (наприклад, проводової антени).

Крім того, в п. 1.1.1 були введені поняття **точкового заряду** – довільного заряду з розмірами, набагато меншими відстаней, на яких розглядається збуджуване поле, і пробного заряду. Під останнім розуміють точковий заряд, що не збурює досліджуване поле. Зазначимо, що поняття точкового заряду еквівалентне поняттю матеріальної точки в механіці і є зручною ідеалізацією при розв'язанні електродинамічних задач.

Струм I або сила струму – скалярна величина, яка характеризує кількість електрики, що переноситься за одиницю часу через поперечний перетин провідника. Наведемо визначення одиниці струму.

1 А (ампер) – сила постійного струму, що підтримується в двох паралельних прямолінійних провідниках нескінченної довжини і нехтовно малого кругового перетину, розміщених на відстані **1 м** один від одного у вакуумі, який викликав би між цими провідниками силу, що дорівнює $2 \cdot 10^{-7}$ одиниці сили **1 Н** на **1 м** довжини.

Ця величина прийнята (окрім метра, кілограма і секунди) четвертою основною одиницею в системі одиниць СІ (або МКСА).

Вектор густини електричного струму \mathbf{J} описує рух зарядів в кожній точці перетину S провідника:

$$\mathbf{J}(M,t) = \rho(M,t) \mathbf{v}(M,t), \quad \text{Кл/м}^2 \cdot \text{с} = \text{А/м}^2, \quad (1.14)$$

де \mathbf{v} – швидкість руху зарядів в об'ємі dV .

Вектор густини струму \mathbf{J} дотичний до лінії струму, тобто до вектора \mathbf{v} в кожній точці M , і спрямований у бік руху позитивних зарядів, а його величина дорівнює кількості електрики, що проходить за одиницю часу через одиничну площину, орієнтовану нормально до вектора \mathbf{J} . Сила струму, що проходить через перетин S провідника, очевидно дорівнює потоку вектора \mathbf{J} через S :

$$I(t) = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \mathbf{e}_n dS, \quad (1.15)$$

де \mathbf{e}_n – орт нормалі до одиничної площини dS (рис. 1.6), пов'язаний з правилом обходу елемента dS правилом правого гвинта.

В деяких випадках струм зосереджений в тонкому шарі на поверхні тіла (наприклад, змінний струм надвисоких частот в стінках металевих хвилеводів, поверхневий струм витoku в діелектриках і ін.). Тоді можна вважати (для ідеалізованої ситуації), що струм проходить в нескінченно тонкому поверхневому шарі – поверхневий струм I_s . Аналогічно вектору \mathbf{J} можна ввести **вектор лінійної густини поверхневих струмів – \mathbf{J}_s** . Це – фізична векторна величина, вектор якої спрямований у бік руху позитивних зарядів, а його величина рівна кількості електрики, що переноситься за одиницю часу через відрізок лінії одиничної довжини, перпендикулярний вектору \mathbf{J}_s :

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{e}_\tau \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l}, \quad A/m, \quad (1.16)$$

де \mathbf{e}_τ – одиничний вектор, який вказує напрям руху позитивних зарядів; Δl – відрізок лінії, перпендикулярної вектору \mathbf{e}_τ ; ΔI – величина струму, що проходить через відрізок Δl .

Поверхневий струм, що проходить через довільний відрізок лінії l , можна обчислити за формулою

$$I_s = \int_l (\mathbf{J}_s \mathbf{e}_l) dl, \quad (1.17)$$

де \mathbf{e}_l – орт, перпендикулярний до dl , лежить на поверхні тіла (рис. 1.7).

Отже, заряди і струми збуджують у просторі електромагнітне поле. Воно виявляється в силевій дії на матеріальні об'єкти, яку можна зареєструвати. Для опису електромагнітного поля вводять чотири векторні величини:

- **напруженості електричного поля – \mathbf{E} ;**
- **магнітної індукції – \mathbf{B} ;**
- **електричного зміщення – \mathbf{D} ;**
- **напруженості магнітного поля – \mathbf{H} .**

Вектор напруженості електричного поля \mathbf{E} кількісно описує силову дію на заряди з боку електричного поля.

Як зазначено в п. 1.1.1, величина вектора \mathbf{E} в кожній точці M збігається з питомою електричною силою \mathbf{F}_e , тобто силою, що падає на одиничний позитивний пробний заряд, розміщений в точці M : $\mathbf{E} = \mathbf{F}_e/q$. Це диференційна характеристика поля.

Магнітна індукція \mathbf{B} описує силову дію магнітного поля на рухомі електричні заряди. Відповідно до (1.6) цей вектор чисельно дорівнює силі, з якою магнітне поле діє на одиничний точковий позитивний заряд, що рухається з одиничною швидкістю в напрямку, перпендикулярному напрямку магнітного поля: $\mathbf{F}_m = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ (рис. 1.8).

У вакуумі вектори \mathbf{E} і \mathbf{B} повністю визначають електромагнітне поле. Для опису ЕМП в реальних середовищах вводять два додаткових вектори \mathbf{D} і \mathbf{H} . Це зумовлено тим, що сила електричної взаємодії одних і тих самих зарядів у вакуумі і в реальних середовищах різна, отже, різна і напруженість поля, яку збуджують однакові заряди в різних речовинах.

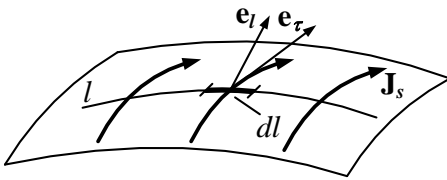


Рис. 1.7

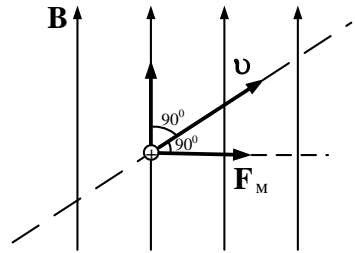


Рис. 1.8

Для опису ЕМП в реальних середовищах необхідно враховувати молекулярну структуру речовини. Заряди, що входять до складу речовини, можуть бути або **зв'язаними** (тобто можуть переміщуватися в межах однієї молекули), або вільними, тобто переходити від однієї молекули до іншої. Вільними є електрони в металах і іони в електролітах та іонізованих газах. Ці заряди вносять найбільший внесок в струм провідності. Властивості діелектриків в ЕМП визначаються в основному зв'язаними зарядами. Зв'язані заряди під впливом зовнішнього поля \mathbf{E} зміщуються в межах молекул і приводять до електричної **поляризації** речовини. При цьому на первинне збуджуюче поле накладається додаткове поле. Спрощено можна вважати, що під дією первинного електричного поля молекули речовини стають подібними до **електричних диполів** з дипольним моментом

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{e}_i q l,$$

де \mathbf{e}_i – орт вектора, що сполучає негативний і позитивний заряди q ; l – відстань між зарядами (рис. 1.9).

Відхиляючись від детальної характеристики процесу поляризації і зводячи його до еквівалентної картини виникнення електричних диполів в речовині, можна вважати, що під дією зовнішнього електричного поля диполі повертаються і займають положення, яке відповідає орієнтації уздовж силових ліній (рис. 1.10). При цьому крайні ліві і праві заряди діелектрика збуджують додаткове електричне поле $\mathbf{E}_{\text{дод}}$, частково компенсуючи первинне поле.

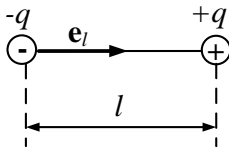


Рис. 1.9

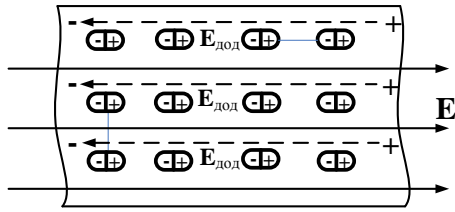


Рис. 1.10

Вектор поляризації (поляризованості) \mathbf{P} кількісно описує поляризацію діелектриків і є об'ємною густиною зорієнтованих за напрямком поля електричних моментів речовини:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{p}_i \right), \text{ Кл/м}^2. \quad (1.18)$$

Вектор електричного зміщення (або електричної індукції) \mathbf{D} вводить для опису електричного поля в речовині і визначається виразом

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.19)$$

де ϵ_0 – електрична стала (див. п. 1.1.1).

Зазвичай можна вважати, що вектор поляризації лінійно зв'язаний з вектором \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^e \mathbf{E}. \quad (1.20)$$

У останньому співвідношенні коефіцієнт χ^e характеризує здатність середовища поляризуватися і називається **діелектричною сприйнятливістю**. Співвідношення (1.19) і (1.20) дозволяють представити вектор електричного зміщення у вигляді

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}, \quad (1.21)$$

де $\epsilon_a = \epsilon_0 (1 + \chi^e)$ – **абсолютна діелектрична проникність середовища**. Співвідношення (1.21) можна записати у вигляді

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \quad (1.22)$$

де $\varepsilon = 1 + \chi^e$ – відносна діелектрична проникність середовища. Наприклад, для вакууму $\varepsilon = 1$; для повітря $\varepsilon = 1,00058$; для води $\varepsilon = 80$. Значення відносної діелектричної проникності для деяких речовин наведені у додатку Б.

Із співвідношень (1.19) – (1.22) видно, що напруженість електричного поля, збуджувана одним і тим же зарядом, буде різною в різних середовищах.

Відповідно до закону Кулона, сила, з якою точковий заряд q діє на інший заряд Q , $\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_a r^3} \mathbf{r}$. За визначенням напруженості електричного поля (1.3) цей заряд в середовищі з параметрами ε_a збуджує поле

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a r^3} \mathbf{r}. \quad (1.23)$$

Вектор $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}$ відповідно до (1.23) $\mathbf{D} = q\mathbf{r}/4\pi r^3$ не залежить від середовища і визначається тільки джерелами поля (зарядом q). Тому вектор електричного зміщення \mathbf{D} характеризує здатність зарядів збуджувати електричне поле.

Один і той же заряд q у реальному середовищі і у вакуумі збуджує різні поля \mathbf{E} і \mathbf{E}_0 відповідно, які відрізняються множителем ε , $\mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}_0$. Таким чином, відносна діелектрична проникність ε показує, у скільки разів напруженість електричного поля в даному середовищі відрізняється від її значення у вакуумі при однакових джерелах.

Вектор магнітної індукції \mathbf{B} , який описує силову дію магнітного поля на рухомі заряди, залежить від властивостей середовища, в якому розглядаються електромагнітні взаємодії. Це відбувається внаслідок намагнічення середовища.

Більшість атомів і молекул речовини можна представити у вигляді маленьких рамок із струмом, кожна з яких збуджує магнітне поле з магнітним моментом $\mathbf{m}_i = \mathbf{e}_n IS$, де S – площа рамки; \mathbf{e}_n – орт нормалі до площини рамки. Струм в рамці I і орт \mathbf{e}_n утворюють правоґвинтову систему (рис. 1.11).

При відсутності зовнішнього магнітного поля всі магнітні моменти \mathbf{m}_i орієнтовані хаотично (рис. 1.12, *a*) і вектор намагніченості рівний нулю. Під дією зовнішнього магнітного поля відбувається орієнтація моментів \mathbf{m}_i і виникає додаткове магнітне поле, яке може як підсилити, так і частково компенсувати первинне магнітне поле (рис. 1.12, *б*).

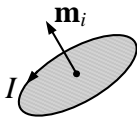


Рис. 1.11

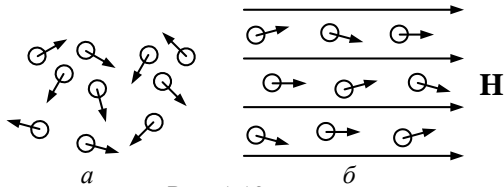


Рис. 1.12

Для опису магнітних властивостей речовини вводиться **вектор намагніченості \mathbf{M}** , рівний магнітному моменту одиниці об'єму речовини,

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{m}_i \right), \text{ А/м.} \quad (1.24)$$

Здатність джерел збуджувати магнітне поле характеризують напруженістю магнітного поля \mathbf{H} . Ця векторна фізична величина однозначно пов'язана із струмами, має розмірність А/м і визначається співвідношенням

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (1.25)$$

звідки

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (1.26)$$

У співвідношеннях (1.25), (1.26) μ_0 – магнітна стала – розмірна величина, яка у вакуумі становить $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$.

У ряді випадків можна вважати, що вектор намагніченості \mathbf{M} пропорційний напруженості магнітного поля \mathbf{H} :

$$\mathbf{M} = \chi^m \mathbf{H}, \quad (1.27)$$

де χ^m – магнітна сприйнятливість середовища.

Підставляючи (1.27) в (1.26), одержимо

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}, \quad \mu_a = \mu_0 \mu, \quad \mu = 1 + \chi^m. \quad (1.28)$$

У співвідношеннях (1.28) μ_a – абсолютна магнітна проникність середовища; μ – відносна магнітна проникність; μ_0 – абсолютна магнітна проникність вакууму (магнітна стала).

Вектор напруженості магнітного поля \mathbf{H} визначається тільки струмами збудження і при однакових джерелах має одне і те ж значення в різних середовищах. Магнітна індукція у вакуумі \mathbf{B}_0 і в даному середовищі \mathbf{B} з магнітною проникністю μ_a , зумовлена одними і тими ж джерелами, відрізняється в μ разів $\mathbf{B} = \mu \mathbf{B}_0$. Тому відносна магнітна проникність μ показує, в скільки разів величина магнітної індукції \mathbf{B} в даному матеріалі більша або менша значення цього вектора \mathbf{B}_0 у вакуумі.

Значення відносної магнітної проникності для деяких речовин наведені у додатку В.

1.1.3. Електромагнітні властивості середовищ

Вектори електромагнітного поля в матеріальних середовищах зв'язані **матеріальними рівняннями**. Два рівняння, що описують дію електричного і магнітного полів на зв'язані заряди (що входять до складу атомів і молекул речовини), наведені в п. 1.1.2. Це рівняння (1.21), що відображає властивість поляризації середовища $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$, і рівняння (1.28), що характеризує явище намагніченості $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$.

На відміну від зв'язаних, вільні заряди речовини під дією електричного поля набувають орієнтованого руху, тобто в речовині виникає електричний струм (струм **провідності**). Закон Ома для електричного кола наведений вище (див. п. 1.1.1). З нього нескладно одержати вираз для густини струму провідності \mathbf{J} (**закон Ома в диференційній формі**):

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.29)$$

де σ – питома провідність середовища, См/м (сіменс на метр).

Значення питомої провідності деяких речовин наведені у додатку Г. Так, за законом Ома (1.8) струм

$$I = U/R. \quad (1.30)$$

Напруга на прямолінійному провіднику незмінного перетину S завдовжки l , що знаходиться в однорідному електричному полі \mathbf{E} , силові лінії якого паралельні його осі, дорівнює $U = \int_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = El$.

Опір провідника $R = l/(\sigma S)$, струм $I = JS$, що при підстановці в (1.30) приводить до співвідношення (1.29).

Приклад 1.1. По круглому мідному провіднику ($\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$) діаметром $d = 0,6 \text{ мм}$ проходить постійний струм $I = 1,5 \text{ А}$. Знайти напруженість електричного поля усередині провідника і спад напруги на ділянці $l = 10 \text{ м}$.

Розв'язок. Переріз провідника $S = \pi d^2/4 = 2,83 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2$; густина струму $J = I/S = 5,3 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2$. Модуль вектора напруженості електричного поля $E = J/\sigma = 0,093 \text{ В/м}$. З фізичних міркувань ясно, що вектор \mathbf{E} спрямований уздовж осі провідника. Спад напруги на ділянці завдовжки $l = 10 \text{ м}$ становить $\Delta U = El = J \frac{l}{\sigma} = 0,93 \text{ В}$. До такого ж результату при-

водить і закон Ома (1.30) в інтегральній формі: $\Delta U = IR = JS \frac{l}{\sigma S} = J \frac{l}{\sigma}$.

Отже, будь-яке середовище характеризується трьома електромагнітними параметрами: діелектричною ϵ_a і магнітною μ_a проникністю і питомою провідністю σ .

Для більшості середовищ відносна діелектрична проникність $\epsilon > 1$. Так, для газоподібних середовищ ϵ дещо перевищує одиницю $(\epsilon - 1) \sim 10^{-4} \dots 10^{-3}$. У рідинах і кристалах величина ϵ може бути істотно більше одиниці ($\epsilon \sim 10 \dots 10^2$). Особливий інтерес для практики

представляють **сегнетоелектрики**, для яких $\varepsilon \sim 10^4$. Для таких середовищ характерна наявність областей з досить високим рівнем внутрішніх полів – доменів. Разом з тим існують середовища (наприклад іонізований газ), для яких відносна діелектрична проникність $\varepsilon < 1$ і може набувати значення $\varepsilon = 0$ і навіть $\varepsilon < 0$.

Якщо джерела збуджують в середовищах електричне поле з напруженістю, що перевищує деяке критичне значення, може відбутися пробій діелектрика, внаслідок чого він перетворюється в провідник (різко зростає значення σ). Для повітря величина $E_{кр} = 3 \cdot 10^4$ В/см.

За магнітними властивостями середовища поділяють на **діамагнетики** (відносна магнітна проникність $\mu < 1$), **парамагнетики** ($\mu > 1$) і **ферромагнетики** ($\mu \gg 1$).

Всім речовинам властивий **діамагнітний ефект** (ефект ослаблення поля). Індукційні струми, які наводяться в середовищі під дією зовнішнього магнітного поля, за правилом Ленца завжди ослаблюють поле. У діамагнетиків цей ефект слабкий $(1 - \mu) \sim 10^{-6} \dots 10^{-4}$. У парамагнетиків на поле, викликане діамагнітним ефектом, накладається поле, зумовлене молекулярними струмами (**парамагнетизм**). Цей ефект також слабкий і у більшості парамагнетиків $(\mu - 1) \sim 10^{-6} \dots 10^{-4}$. У ферромагнетиків, які мають різко виражену доменну структуру, відносна магнітна проникність $\mu \sim 10^2 \dots 10^4$.

Залежно від електропровідності, яка визначається кількістю вільних заряджених частинок, речовини поділяють на **провідники** і **діелектрики**, а також **напівпровідники** (які займають проміжну область між першими і другими). При розв'язанні ряду задач електродинаміки реальні середовища часто замінюють ідеалізованими і використовують поняття **ідеальний провідник** ($\sigma \rightarrow \infty$) і **ідеальний діелектрик** ($\sigma \rightarrow 0$). Докладнішу класифікацію провідників наведемо нижче.

Числові значення параметрів ε , μ , σ для деяких середовищ наведені в додатках Б, В, Г.

1.1.4. Силкові лінії поля

М. Фарадей для наочності запропонував вектори електромагнітного поля зображувати графічно у вигляді так званих векторних ліній. Густина цих ліній характеризує інтенсивність даного вектора поля в даний момент часу, дотичні до ліній показують напрям відповідного вектора. Лінії векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} прийнято називати **силовими лініями**. Для прикладу на рис. 1.13 наведені графіки електричних силових ліній одиночного позитивного заряду q (рис. 1.13, *а*), негативного заряду $Q = -2q$ (рис. 1.13, *б*), силові лінії двох різнойменних зарядів (рис. 1.13, *в*), сліди ліній густини постійного струму в провіднику (див. приклад 1.1) і магнітні силові лінії (див. рис. 1.4) в площині, перпендикулярній прямолінійному струму (рис. 1.13, *г*).

Кожному вектору поля в деякій області на даний момент часу ставиться у відповідність сімейство ліній. Нехай крива L одна з силових ліній поля \mathbf{R} (рис.1.14). Проведемо з початку декартової системи координат O два радіуси-вектори \mathbf{r} і $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ в дві довколишні точки A_1 і A_2 , розміщені поряд.

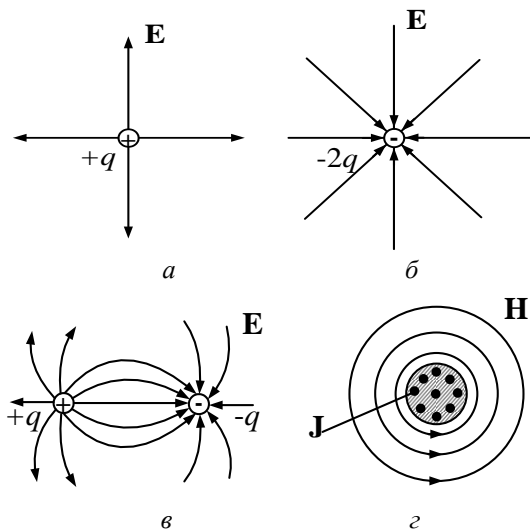


Рис. 1.13

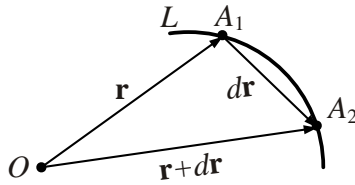


Рис. 1.14

Тоді приріст вектора $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$. Для близько розташованих точок A_1 і A_2 вектор поля \mathbf{R} в точці A_1 паралельний $d\mathbf{r}$, звідки виходить пропорційність проєкцій \mathbf{R} і $d\mathbf{r}$:

$$\frac{dx}{R_x} = \frac{dy}{R_y} = \frac{dz}{R_z}.$$

Одержане співвідношення описує рівняння ліній вектора \mathbf{R} .

1.1.5. Класифікація середовищ

Електромагнітні характеристики різних речовин (параметри ϵ_a , μ_a , σ) в загальному випадку є не сталими величинами, а є функціями багатьох змінних. Вони можуть залежати від координат, часу, величини і напрямку прикладених векторів електромагнітного поля та ін. Ці залежності покладені в основу класифікації різних середовищ.

1. Якщо властивості середовища не залежать від координат, то середовище є однорідним, в противному разі середовище вважається неоднорідним. Розрізняють також кусочно-неоднорідні середовища, для яких при переході з однієї однорідної області в іншу параметри середовища (ϵ_a , μ_a або σ) змінюються стрибком.

2. Середовища можуть бути ізотропними і анізотропними. Якщо властивості середовища в точці спостереження однакові на всіх напрямках, то середовище ізотропне. Для таких середовищ параметри ϵ_a , μ_a , σ є скалярними величинами і справедливі матеріальні рівняння (1.21), (1.28), (1.29). Наприклад, із співвідношення (1.28)

виходить пропорційність проєкцій векторів \mathbf{B} і \mathbf{H} : $B_x = \mu_a H_x$, $B_y = \mu_a H_y$, $B_z = \mu_a H_z$. Інакше кажучи, вектори \mathbf{D} і \mathbf{E} , \mathbf{B} і \mathbf{H} , \mathbf{J} і \mathbf{E} в ізотропних середовищах паралельні. В анізотропних середовищах властивості середовища в різних напрямках неоднакові і параметри, ε_a , μ_a , σ є тензорами. В цьому випадку матеріальні рівняння записуються у вигляді

$$\mathbf{D} = \vec{\varepsilon}_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \vec{\mu}_a \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \vec{\sigma} \mathbf{E}, \quad (1.31)$$

де $\vec{\varepsilon}_a = \varepsilon_0 \vec{\varepsilon}$, $\vec{\mu}_a = \mu_0 \vec{\mu}$.

У декартовій системі координат тензори $\vec{\varepsilon}$, $\vec{\mu}$, $\vec{\sigma}$ можна представити у вигляді матриць розмірності 3×3 . Наприклад, тензор відносної діелектричної проникності

$$\vec{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}.$$

При цьому вектори \mathbf{D} і \mathbf{E} , \mathbf{B} і \mathbf{H} , \mathbf{J} і \mathbf{E} в загальному випадку непаралельні.

Приклад 1.2. Визначити вектор \mathbf{D} в анізотропному середовищі, якщо діагональні елементи тензора $\vec{\varepsilon}$ рівні, $\varepsilon_{11} = 1$, $\varepsilon_{22} = 3$, $\varepsilon_{33} = 4$, а інші $\varepsilon_{ij} = 0$ ($i \neq j$). Вектор \mathbf{E} заданий проєкціями $E_x = 1 \text{ В/м}$, $E_y = 2 \text{ В/м}$, $E_z = 0$.

Розв'язок. Для анізотропного середовища $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \vec{\varepsilon} \mathbf{E}$, тому

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Кл/м}^2.$$

Зіставляючи проєкції векторів \mathbf{D} і \mathbf{E} , бачимо, що вони непропорційні, отже, вектори \mathbf{E} і \mathbf{D} неколінеарні.

Причина анізотропії полягає в наявності фізично виділених напрямків в просторі, зумовлених різними факторами (наприклад, дією на середовище магнітного поля в деякому напрямі та ін.).

3. Якщо хоча б один з параметрів середовища ε_a , μ_a , σ залежить від величини прикладеного поля (значень \mathbf{E} і \mathbf{B}), то таке середовище нелінійне, якщо такої залежності не спостерігається, то воно лінійне.

4. Середовища можуть бути стаціонарними (параметри ε_a , μ_a , σ не залежать від часу) і нестаціонарними (параметри середовища змінюються в часі).

5. Розрізняють диспергуючі середовища (характеристики середовища залежать від частоти) і недиспергуючі (така залежність відсутня).

Більшість реальних середовищ неоднорідні, нелінійні, анізотропні, нестаціонарні і диспергуючі. Проте у ряді випадків область простору, в якій нас цікавлять електромагнітні процеси, можна вважати заповненою однорідним, ізотропним, лінійним, стаціонарним і недиспергуючим середовищем. Аналіз електромагнітних процесів в таких ідеалізованих середовищах істотно простіший.

Задачі для самостійного розв'язку

1. Порівняти сили гравітаційного та електричного тяжіння між електроном і протоном. Нагадаємо, що заряд електрона $-1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, маса $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг; маса протона $m_p = 1836m_e$; стала γ в законі тяжіння Ньютона $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м²/кг².

2. Використовуючи основні закони електромагнетизму, отримайте розмірність величин \mathbf{E} і \mathbf{B} .

3. Чи має заряджене тіло, поміщене в електричне поле, рухатися по силових лініях? Ніякі інші сили, окрім електричних, на нього не діють.

4. Чи можуть силові лінії електричного поля торкатися одна одної в якійсь точці?

5. Заряджена металева куля радіусом 5 см знаходиться в повітрі. Електричний пробій повітря відбувається при напруженості

поля $E = 30 \text{ кВ/см}$. Знайти гранично допустимий заряд кулі, що забезпечує відсутність пробою.

6. Нескінченна металева площина рівномірно заряджена з поверхневою густиною $\rho_s = 10^{-5} \text{ Кл/м}^2$. Визначити вектори \mathbf{E} і \mathbf{D} у всьому просторі, якщо $\epsilon = 1$.

7. Об'ємний заряд з густиною $\rho = 30 \text{ мКл/м}^3$ рівномірно розподілений в області, обмеженій циліндричною поверхнею радіусом $r = 10 \text{ см}$. Діелектрична проникність внутрішньої області $\epsilon_1 = 4$, зовнішньої – $\epsilon_2 = 1$. Визначити залежність $\mathbf{E}(r)$.

8. По провідниках нескінченно довгого коаксіального кабелю проходить струм $I = 3 \text{ мА}$. Діаметр внутрішнього провідника кабелю: $2r_1 = 7 \text{ мм}$, діаметр внутрішнього перетину зовнішнього провідника $2r_2 = 18 \text{ мм}$, діаметр кабелю $2r_3 = 20 \text{ мм}$. Магнітна проникність провідників і ізоляції $\mu = 1$. Визначити залежність $\mathbf{H}(r)$ і $\mathbf{B}(r)$, якщо струми I у внутрішньому і зовнішньому провіднику проходять у протилежних напрямках.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення і перелічіть основні властивості електромагнітного поля.

2. Дайте визначення магнітного і електричного полів і охарактеризуйте їх об'єктивний взаємозв'язок.

3. Назвіть вектори, що характеризують електромагнітне поле.

4. Отримайте вираз для вектора напруженості електричного поля, виходячи із закону Кулона.

5. Опишіть явища поляризації і намагнічення речовини. Що характеризують вектори поляризованості і намагніченості середовища?

6. Дайте визначення і вкажіть одиниці вимірювання наступних величин: об'ємна, поверхнева і лінійна густина заряду, густина струму та поверхневого струму.

7. Наведіть визначення векторів електричного зміщення, напруженості та індукції магнітного поля.

8. Назвіть основні одиниці системи СІ.

9. Назвіть одиниці вимірювання основних електричних і магнітних величин.

10. Розкажіть про критерії поділу середовищ на феромагнітні, парамагнітні і діамагнітні.

11. Сформулюйте поняття електричних і магнітних силових ліній.

12. Назвіть параметри, що характеризують електромагнітні властивості будь-якого середовища.

13. Запишіть матеріальні рівняння для векторів електромагнітного поля.

14. Викладіть принцип класифікації середовищ за виглядом функційної залежності електромагнітних параметрів від величини векторів поля, координат, часу і напрямку.

15. Чи завжди вектори напруженості і індукції електричних або магнітних полів паралельні?

1.2. Система рівнянь Максвелла.

Класифікація електромагнітних явищ

Основу електродинаміки складають рівняння Дж. К. Максвелла, які він сформулював на підставі аналізу і узагальнення експериментальних фактів у 1864 р. Ці рівняння в найбільш загальному вигляді описують зв'язок між джерелами і векторами поля, а також між електричними і магнітними явищами. У теорії електромагнетизму рівняння Максвелла відіграють таку ж саму роль, як закони Ньютона в механіці.

1.2.1. Умова макроскопічності

Значимо, що всі досліди у області електромагнетизму проводилися з **макроскопічними тілами**, тобто з тілами, що містять значну кількість заряджених частинок. Тому рівняння, які описують результати цих дослідів, також мають бути макроскопічними. Щоб використовувати відомий математичний апарат для інтерпретації електромагнітних явищ, в його основу необхідно покласти **поняття фізично нескінченно малого об'єму ΔV і фізично нескінченно малого інтервалу часу Δt** .

Під елементом ΔV розуміють об'єм, досить малий порівняно з об'ємом V , який займає макроскопічний об'єкт, що дозволяє в межах ΔV вважати фізичну величину розподіленою рівномірно, але досить великий, щоб можна було не враховувати дискретність заряду.

Останнє означає, що в об'ємі ΔV має міститися досить багато частинок, щоб відношення типу $\Delta q/\Delta V$ (де Δq – повний заряд всередині ΔV) мало змінювалися при зміні ΔV . Інакше кажучи, характерний розмір $\Delta V^{1/3}$ повинен набагато перевищувати середню відстань l між частинками речовини, але бути істотно менше за характерні розміри макроскопічного об'єкта $L \sim V^{1/3}$, тобто $l \ll \Delta V^{1/3} \ll L$. Сказане про об'єми повністю стосується площі і довжин.

У макроскопічній електродинаміці введений масштаб $\Delta V^{1/3}$ є мінімально можливим, тобто всі дані відстані Δx повинні перевищувати його: $\Delta x \geq \Delta V^{1/3}$.

Фізичний нескінченно малий інтервал часу Δt має бути настільки малий, щоб протягом нього макроскопічні величини можна було вважати сталими, і досить великий, щоб хаотичні зміни, викликані тепловим рухом частинок, усереднювалися до нуля.

Саме у вказаному сенсі фізично нескінченно малих величин слід розглядати введені раніше диференційні характеристики – густина заряду (1.11), струму (1.14) та інші. Так, наприклад, під густиною заряду в точці r , визначуваній співвідношенням (1.11), слід розуміти

$$\rho(r) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} q_i, \text{ а точку } r \text{ природно вважати центром області } \Delta V.$$

Вивченням електромагнітних явищ на рівні атомів і молекул (випромінюванням квантів електромагнітного поля (фотонів), поглинанням і розсіюванням випромінювання речовиною, електромагнітною взаємодією між зарядженими частинками і ін.) займається **квантова електродинаміка, яка в даному курсі не розглядається.**

1.2.2. Рівняння Максвелла в інтегральній формі

У основі рівнянь електродинаміки лежать закони повного струму і електромагнітної індукції, які Максвелл узагальнив на випадок змінних полів у довільних середовищах і постулював в наступному вигляді:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = I_{\text{пр}} + I_{\text{зм}}. \quad (1.32)$$

$$\text{II} \quad \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (1.33)$$

$$\text{III} \quad \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV. \quad (1.34)$$

$$\text{IV} \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (1.35)$$

У перших двох рівняннях L – довільний замкнений контур, S – довільна поверхня, що спирається на цей контур. У рівняннях (III) і (IV) величина V – довільний об'єм, а S – поверхня, яка його охоплює.

Перше рівняння Максвелла зв'язує струм і збуджувану струмом напруженість магнітного поля. Рівняння узагальнює експериментальні закони Ерстеда, Біо – Савара – Лапласа і Ампера. Відповідно до закону Ампера, циркуляція вектора напруженості магнітного поля по довільному замкнутому контуру L дорівнює потоку вектора густини струму через будь-яку поверхню S , обмежену цим контуром:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = I. \quad (1.36)$$

У такому формулюванні закон Ампера не може бути застосований для змінного струму, в коло якого включений, наприклад, конденсатор (рис. 1.15).

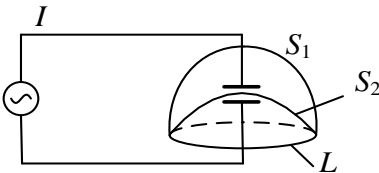


Рис. 1.15

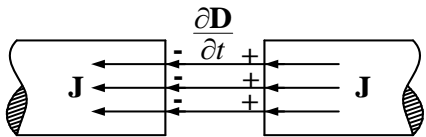


Рис. 1.16

Так, якщо один і той же контур охоплюватиме дві поверхні S_1 і S_2 , перша з яких перетинає струм у колі I , а друга ні, то, відповід-

но до (1.36), у першому випадку циркуляція вектора напруженості магнітного поля не дорівнює нулю, а в другому – дорівнює. Цю суперечність Дж. К. Максвелл подолав, висунувши гіпотезу про існування **струму зміщення** між обкладками конденсатора, котрий, як і струм провідності, здатний збуджувати магнітне поле. Цей струм рівний швидкості зміни потоку вектора електричного зміщення через поверхню S :

$$I_{\text{зм}} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}. \quad (1.37)$$

Густина струму зміщення, як видно з (1.37), визначається як

$$\mathbf{J}_{\text{зм}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.38)$$

Інакше кажучи, магнітне поле збуджує повний струм – струм провідності $I_{\text{пр}}$ і струм зміщення $I_{\text{зм}}$ (електричне поле, що змінюється в часі). Повний струм завжди є замкненим струмом. Так, у просторі між обкладками конденсатора (рис. 1.16) струм провідності \mathbf{J} замикається струмом зміщення $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

Сформулюємо перший закон електродинаміки:

Циркуляція вектора напруженості магнітного поля $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l}$

по будь-якому замкненому контуру L дорівнює сумі струму провідності $I_{\text{пр}} = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S}$ і струму зміщення

I $I_{\text{зм}} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}$ (повному струму), що проходить через

поверхню S , обмежену цим контуром (рис. 1.17):

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}.$$

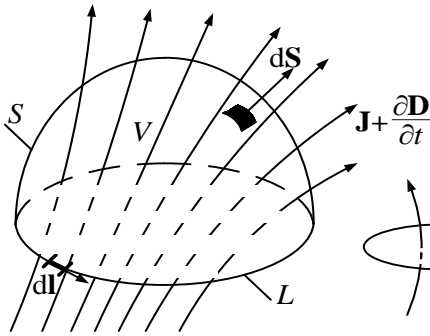


Рис. 1.17

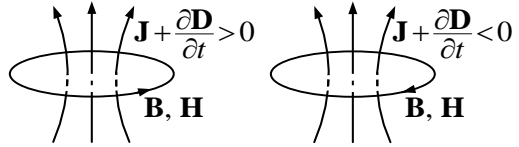


Рис. 1.18

Напряг ліній вектора напруженості магнітного поля \mathbf{H} зв'язаний правилом правого гвинта з напрямом струму або **приростом** потоку вектора \mathbf{D} (рис. 1.18).

У разі змінного поля в діелектрику густина струму зміщення складається з двох доданків:

$$\mathbf{J}_{\text{зм}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (1.39)$$

Перший доданок в (1.39) описує зміну електричного поля у вакуумі і не пов'язаний з рухом зарядів. Другий доданок визначає частину струмів зміщення, зумовлену рухом зарядів, зв'язаних з атомами і молекулами речовини під дією змінного поля. Ця складова струмів зміщення подібна до струму провідності як упорядкованому переміщенню (в цьому випадку «зв'язаних») зарядів.

Приклад 1.3. По нескінченному циліндру радіусом a проходить постійний струм I_0 . Визначити напруженість магнітного поля всередині і поза провідником.

Розв'язок. У циліндричній системі координат (див. додаток Д), вісь Z якої збігається з віссю провідника, вектор \mathbf{H} має лише азимутну складову H_ϕ . В точках уявного кола радіусом r , центр якого лежить на осі провідника, значення H_ϕ постійне через повну симетрію поля. Тому у формулі (1.32) інтегрування можна замінити множенням H_ϕ на довжину кола.

Якщо $r > a$, то весь струм пронизує поверхню, обмежену уявним контуром, і тому $H_{\varphi}(r) \cdot 2\pi r = I_0$, звідки $H_{\varphi}(r) = I_0 / (2\pi r)$.

А якщо $r < a$, то усередині контуру проходить струм $I = I_0 r^2 / a^2$, циркуляція вектора \mathbf{H} становить $H_{\varphi}(r) \cdot 2\pi r = I_0 r^2 / a^2$ і $H_{\varphi}(r) = I_0 r / (2\pi a^2)$.

Друге рівняння Максвелла узагальнює закон електромагнітної індукції Фарадея (1.10). Цей закон описує збудження **вихрового** електричного поля магнітним полем, що змінюється в часі і формулюється таким чином:

II	<p>Циркуляція вектора напруженості електричного поля $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l}$ по будь-якому замкненому контуру L в довільному середовищі дорівнює взятій із зворотним знаком швидкості зміни магнітного потоку $\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$ через довільну поверхню S, що спирається на цей контур</p> $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$
----	---

Узагальнення закону електромагнітної індукції полягає в тому, що на відміну від закону Фарадея, який сформулював рівняння (1.10) для реальних електричних контурів (виконаних з певного матеріалу, який має певний опір і ін.), Дж. К. Максвелл припустив, що електрорушійна сила $\mathcal{E} = \int_L \mathbf{E} d\mathbf{l}$ виникає завжди в будь-якому сере-

довищі. Контур в дослідах Фарадея служить лише індикатором збудження вихрового електричного поля магнітним полем, що змінюється в часі. Знак «мінус» в рівнянні (II) (правило Ленца) вказує, що зв'язок електричного поля із збуджуючим його магнітним полем підпорядкований правилу лівого гвинта (рис. 1.19).

Перший і другий закони Максвелла показують, що в діелектрику може існувати електромагнітний процес, що самопідтримується – електромагнітні хвилі. Змінне електричне поле відповідно до першо-

го рівняння збуджує вихрове магнітне поле ($\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l}$), а змінне магнітне поле збуджує вихрове електричне поле ($\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l}$) і т.д.

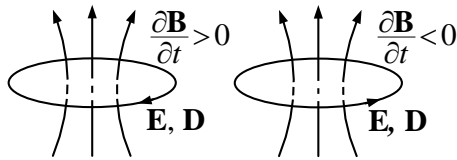


Рис. 1.19

Приклад 1.4. У однорідному магнітному полі напруженістю \mathbf{H} перпендикулярно до його силових ліній з кутовою швидкістю ω обертається металевий стрижень завдовжки l (рис 1.20).

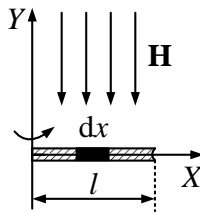


Рис. 1.20

Визначити ЕРС, індуковану між його кінцями.

Розв'язок. При прямолінійному русі провідника завдовжки l із швидкістю v перпендикулярно силовим лініям магнітного поля в ньому індукується ЕРС, величина якої визначається законом електромагнітної індукції:

$$\mathcal{E} = \mu_0 H \frac{d}{dt} \int_S dS = \mu_0 H l v.$$

При круговому обертанні стрижня щодо осі OY (рис. 1.20) елемент довжини стрижня dx , що знаходиться на відстані x , рухається з швидкістю $v = \omega x$. Тому в елементі dx індукується ЕРС

$$d\mathcal{E} = \mu_0 H v dx = \mu_0 H \omega x dx.$$

$$\text{Повна ЕРС у стрижні } \mathcal{E} = \mu_0 H \omega \int_0^l x dx = \frac{1}{2} \mu_0 H \omega l^2.$$

Третє рівняння Максвелла описує закон збудження електричного поля зарядами і узагальнює закон Кулона та еквівалентний йому закон Гаусса.

III	<p>Повний потік вектора електричного зміщення $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S}$ через довільну замкнену поверхню S у певний момент часу дорівнює повному електричному заряду $Q = \int_V \rho dV$, що знаходиться в об'ємі V, охопленому цією поверхнею в цей самий момент часу незалежно від того, чи змінюють заряди своє положення і величину з часом:</p> $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV.$
-----	--

Закон Гаусса

$$\oint_S \mathbf{D}(x, y, z) d\mathbf{S} = \int_V \rho(x, y, z) dV \quad (1.40)$$

по суті еквівалентний третьому рівнянню Максвелла (1.34), але припускає, що вектор електричного зміщення \mathbf{D} і густина заряду ρ не залежать від часу, а є тільки функціями координат. Максвелл розширив трактування закону Гаусса і припустив, що співвідношення (1.34) справедливе і для рухомих зарядів, і при зміні величини зарядів.

Третє рівняння Максвелла свідчить про те, що джерелом електричного поля є електричні заряди (рис. 1.21, а). Якщо усередині об'єму V зарядів немає (або сумарний заряд дорівнює нулю), то кількість ліній вектора \mathbf{D} , що виходять з об'єму V , дорівнює числу вхідних ліній (рис. 1.21, б). Лінії вектора \mathbf{D} починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних.

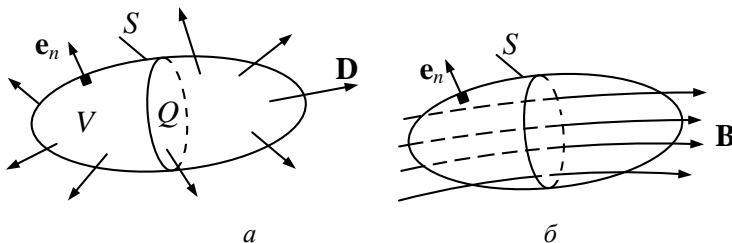


Рис. 1.21

Приклад 1.5. Позитивний заряд Q рівномірно розподілений у об'ємі кулі радіусом a . Знайти напруженість електричного поля \mathbf{E} і вектор електричного зміщення \mathbf{D} в точках, розташованих всередині і поза кулею. Діелектрична проникність матеріалу кулі ϵ_a , навколишнього середовища – ϵ_0 .

Розв'язок. Початок сферичної системи координат (див. додаток D) вміщуємо в центр кулі. Оскільки заряд розподілений симетрично щодо центра кулі, то вектори \mathbf{E} і \mathbf{D} у сферичній системі координат мають тільки радіальні складові E_r і D_r , залежні від однієї координати r .

Проведемо на відстані $r_1 > a$ від центра кулі сферичну поверхню S_1 і застосуємо формулу Гаусса (1.40). Оскільки для всіх точок поверхні S_1 числове значення вектора \mathbf{D} однакове, а напрям збігається з напрямом позитивної нормалі до поверхні S_1 , то

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 4\pi r_1^2 = Q.$$

Тоді вектор електричного зміщення поза кулею

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r_1^2} \cdot \mathbf{e}_r.$$

Напруженість електричного поля поза кулею

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \cdot \mathbf{e}_r.$$

Знайдемо поле усередині кулі ($r < a$). Проведемо сферичну поверхню S_2 радіусом $r_2 < a$. За теоремою Гаусса

$$\oint_{S_2} D \cdot dS = D \cdot 4\pi r_2^2 = Q_{\text{вс}}.$$

Знайдемо об'ємну густину заряду $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$.

Тоді заряд усередині поверхні S_2 дорівнює $Q_{\text{вс}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3 = Q \frac{r_2^3}{a^3}$.

Вектори \mathbf{D} і \mathbf{E} усередині кулі становитимуть:

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_r \cdot \frac{Q_{\text{вс}}}{4\pi r_2^2} = \mathbf{e}_r \cdot \frac{Q \cdot r_2}{4\pi a^3} = \mathbf{e}_r \cdot \frac{\rho \cdot r_2}{3},$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_a} = \mathbf{e}_r \cdot \frac{\rho \cdot r_2}{3\varepsilon_a}$$

Четверте рівняння Максвелла є наслідком другого рівняння і формулюється таким чином.

IV	<p>Повний потік вектора магнітної індукції $\oint_S \mathbf{B}d\mathbf{S}$ через будь-яку замкнену поверхню S у будь-який момент часу дорівнює нулю: $\oint_S \mathbf{B}d\mathbf{S} = 0$.</p>
----	--

Це означає, що лінії вектора \mathbf{B} завжди замкнені або починаються і закінчуються на нескінченності (рис. 1.21,б). З цього рівняння виходить, що магнітних зарядів у природі не існує. Четверте рівняння робить систему рівнянь симетричною і не порушує її загальності, оскільки завжди виконується.

У систему рівнянь Максвелла включають також **матеріальні рівняння**, які характеризують вплив середовища на електромагнітні процеси, що проходять у ньому:

V	$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E},$	(1.41)
VI	$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_a ,$	(1.42)
VII	$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$	(1.43)

Рівняння (I) – (VII) представляють повну систему рівнянь Максвелла в інтегральній формі.

1.2.3. Рівняння Максвелла в диференційній формі

Вище описано інтегральні характеристики поля (потік вектора, циркуляція), які дають зв'язок векторів поля в даній області із струмами і зарядами, що в ній знаходяться (п. 1.2.2, вирази (1.32) – (1.35)). На практиці при розв'язанні електродинамічних задач найчастіше рівняння Максвелла використовують в диференційній формі. Ці рівняння визначають зв'язок векторів поля з джерелами (струмами і густиною зарядів) в одній точці.

Одержати рівняння Максвелла в диференційній формі найпростіше за допомогою теорем Остроградського – Гаусса і Стокса (див. додаток E).

Пояснимо якісно суть цих теорем.

Розглянемо потік довільної векторної функції \mathbf{R} через замкнену поверхню S , яка охоплює об'єм V (рис. 1.22, *a*). Розіб'ємо об'єм V на дві частини V_1 і V_2 , що охоплюються поверхнями $S_1 = \Delta S_1 + F$, $S_2 = \Delta S_2 + F$, де F – загальна частина поверхонь, що обмежують об'єми V_1 і V_2 (рис. 1.22, *б*). Очевидно, що потік вектора \mathbf{R} через S дорівнює сумі потоків через $S_1 = \Delta S_1 + F$ і $S_2 = \Delta S_2 + F$:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{R} d\mathbf{S} = \oint_{\Delta S_1 + F} \mathbf{R} d\mathbf{S}_1 + \oint_{\Delta S_2 + F} \mathbf{R} d\mathbf{S}_2. \quad (1.44)$$

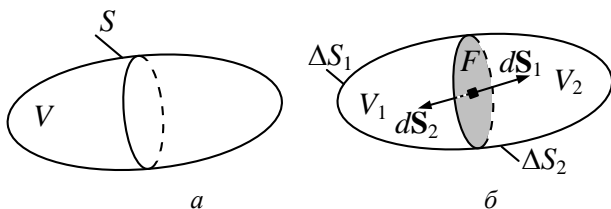


Рис. 1.22

Це пов'язано з тим, що інтеграли по поверхні F для першого і другого доданків в (1.44) мають протилежні знаки. Продовжуючи розподіл об'ємів ΔV_1 і ΔV_2 , далі одержимо:

$$\Phi = \sum_i \Delta V_i \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{R} d\mathbf{S}_i. \quad (1.45)$$

Введемо **дивергенцію** вектора \mathbf{R} : $\text{div} \mathbf{R} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{R} d\mathbf{S}_i$, що

при $\Delta V_i \rightarrow 0$ з урахуванням (1.45) приведе до рівності

$$\Phi = \oint_S \mathbf{R} d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \mathbf{R} dV. \quad (1.46)$$

Вираз (1.46) є теоремою Остроградського – Гауса. Дивергенція вектора $\text{div} \mathbf{R}$ визначає потік вектора \mathbf{R} з нескінченно малого об'єму dV , а увесь потік Φ дорівнює сумі всіх потоків елементів, тобто інтеграл за об'ємом V від дивергенції $\text{div} \mathbf{R}$.

Розглянемо циркуляцію T вектора \mathbf{R} по замкнутому контуру L , на який спирається довільна поверхня S (рис. 1.23, *a*).

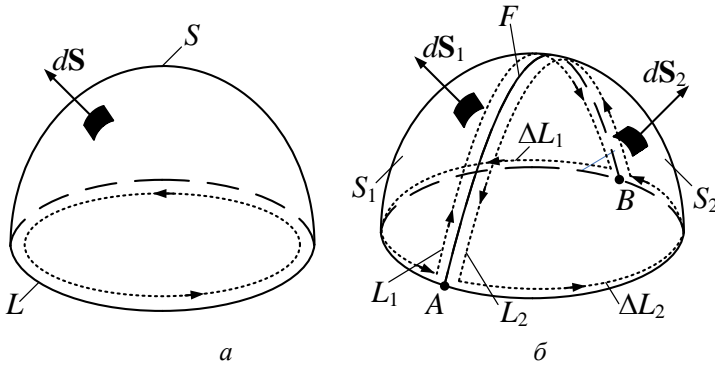


Рис. 1.23

Розіб'ємо контур L на два контури $L_1 = \Delta L_1 + F$, $L_2 = \Delta L_2 + F$, де F – загальна частина контурів L_1 і L_2 (лінія AB на рис. 1.23, *б*). Поверхня $S = S_1 + S_2$ відповідно розбивається на дві частини, кожна з яких спирається на контури L_1 і L_2 . Циркуляція вектора \mathbf{R} очевидно становить:

$$T = \oint_L \mathbf{R} d\mathbf{l} = \oint_{L_1} \mathbf{R} d\mathbf{l}_1 + \oint_{L_2} \mathbf{R} d\mathbf{l}_2, \quad (1.47)$$

оскільки циркуляція по відрітку F , спільному для контурів L_1 і L_2 , в першому і другому доданку в (1.47) має різні знаки (природно, при обході контурів L , L_1 і L_2 в одному напрямі). Напрямок обходу контура і напрям нормалі до елементів поверхні dS зв'язані правилом правого гвинта. Розіб'ємо далі контури $L_{1,2}$ на дрібніші і введемо поняття **ротора** векторної функції \mathbf{R} :

$$(\text{rot } \mathbf{R}) \mathbf{e}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{R} d\mathbf{l}}{\Delta S}, \quad (1.48)$$

де \mathbf{e}_n – нормаль до елемента поверхні ΔS (рис. 1.24).

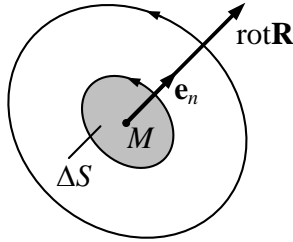


Рис. 1.24

Відповідно до (1.48), ротор векторної функції \mathbf{R} є вектором, величина якого визначає циркуляцію поля в даній точці M , а напрям – орієнтацію площинки ΔS , де циркуляція максимальна. Циркуляцію T представимо у вигляді

$$T = \oint_L \mathbf{R} d\mathbf{l} = \sum_i \Delta S_i \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{\Delta S_i} \mathbf{R} d\mathbf{l}.$$

При $\Delta S_i \rightarrow 0$ з урахуванням (1.48) одержимо:

$$\oint_L \mathbf{R} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{R} d\mathbf{S}. \quad (1.49)$$

Вираз (1.49) є теоремою Стокса.

У декартовій системі координат ротор і дивергенцію функції \mathbf{R} обчислюють за співвідношеннями:

$$\text{rot } \mathbf{R} = \left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z, \quad (1.50)$$

$$\text{div } \mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}. \quad (1.51)$$

Якщо ввести векторний диференціальний оператор Гамільтона ∇ (оператор набла),

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

то ротор і дивергенцію векторної функції \mathbf{R} можна записати у вигляді векторного і скалярного добутку:

$$\text{rot } \mathbf{R} = [\nabla, \mathbf{R}], \quad \text{div } \mathbf{R} = (\nabla \mathbf{R}).$$

Порівняння перших двох рівнянь Максвелла (1.32), (1.33) з формулюванням теореми Стокса (1.49), третього і четвертого – з теоремою Остроградського – Гаусса (1.46) дозволяє записати **рівняння Максвелла в диференційній формі**:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad [\nabla, \mathbf{H}] = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.52)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad [\nabla, \mathbf{E}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.53)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.54)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.55)$$

Сформулюємо закони Максвелла.

Перший закон

I, a	<p>Вихрове магнітне поле збуджують струми провідності і електричне поле, що змінюється в часі: $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.</p>
--------	--

Напрямок замкнених силових ліній вектора напруженості магнітного поля \mathbf{H} зв'язаний правилом правого гвинта з напрямком вектора \mathbf{J} або приростом вектора електричного зміщення \mathbf{D} (див. рис. 1.18).

Другий закон

II, a	<p>Вихрове електричне поле збуджується магнітним полем, що змінюється в часі: $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.</p>
---------	---

Напрямок замкнених силових ліній вектора напруженості електричного поля \mathbf{E} зв'язаний правилом лівого гвинта з приростом вектора магнітної індукції \mathbf{B} (рис. 1.19).

Третій закон

III, а	Джерелами електричного поля є електричні заряди, причому лінії електричного зміщення починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$.
--------	--

Четвертий закон

IV, а	Джерела магнітного поля (магнітних зарядів) в природі не існують, тому лінії магнітної індукції \mathbf{B} або замкнені, або нескінченні $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.
-------	--

Для повноти системи до рівнянь (I, а) – (IV, а) додають матеріальні рівняння (V) – (VII).

Система рівнянь Максвелла – це система диференціальних векторних рівнянь другого порядку. Для її розв'язання треба записати дванадцять скалярних рівнянь, в яких, в свою чергу, проекції векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} залежать від чотирьох змінних (трьох координат і часу). Отже, ясно, що розв'язання системи (1.52) – (1.55) – складна задача.

Приклад 1.6. Вектор напруженості електричного поля в повітрі змінюється згідно із законом $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E \sin(\omega t - \beta z)$. Визначити вектор напруженості магнітного поля, якщо $E = 100 \text{ мкВ/м}$, $\beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$, $f = 1 \text{ МГц}$.

Розв'язок. Скористаємося другим рівнянням Максвелла в диференціальній формі (для повітря $\mu_a = \mu_0$):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Обчислимо $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ в прямокутній системі координат. За умовою $E_y = E_z = 0$, тому

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - \mathbf{e}_z \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Вектор \mathbf{E} не залежить від координати y , тобто

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad \text{і} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mathbf{e}_y \beta E \cos(\omega t - \beta z).$$

Підставляючи вираз для $\text{rot } \mathbf{E}$ в друге рівняння Максвелла, одержимо:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{e}_y \frac{\beta}{\mu_0} E(\omega t - \beta z).$$

Знаходимо вектор \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \int \mathbf{e}_y \frac{\beta}{\mu_0} E \cos(\omega t - \beta z) dt = \mathbf{e}_y \left[\frac{\beta}{\omega \mu_0} E \sin(\omega t - \beta z) + C \right],$$

де C – стала інтегрування.

З фізичних міркувань слід прийняти $C = 0$, оскільки постійне магнітне поле не може збуджувати змінне електричне поле. Підстановка початкових даних приводить до наступного результату:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{e}_y \frac{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\omega \mu_0} E \sin(\omega t - \beta z) = \mathbf{e}_y \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E \sin(\omega t - \beta z) = \\ &= \mathbf{e}_y 2,74 \cdot 10^{-7} \sin(2\pi \cdot 10^6 t - 13,1 \cdot 10^4 z), \text{ A/m.} \end{aligned}$$

1.2.4. Висновки з рівнянь Максвелла

Неперервність ліній повного струму. Одержимо рівняння неперервності ліній електричного струму. Застосуємо операцію дивергенції до обох частин рівняння (1.52) і врахуємо, що $\text{div rot } \mathbf{R} \equiv 0$. Тоді одержимо:

$$\text{div} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right) = 0$$

або

$$\text{div } \mathbf{J} = -\text{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.56)$$

Вектор $\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_{\text{повн}}$ представляє вектор густини **повного струму**.

Співвідношення (1.56) свідчить про те, що **лінії повного струму завжди неперервні**. Там, де обриваються лінії струму провідності \mathbf{J} , починаються лінії струмів зміщення $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ і навпаки (див. рис. 1.16).

Закон збереження заряду. Закон збереження заряду, сформульований в п. 1.1.1 як дослідний закон, може бути одержаний з рівнянь Максвелла. З рівнянь (1.54) і (1.56) виходить рівність

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(рівняння неперервності в диференційній формі). Проінтегрувавши останній вираз за довільним об'ємом і виходячи з теореми Остроградського – Гаусса, одержимо:

$$\oint_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\frac{dQ}{dt}. \quad (1.57)$$

Знак «мінус» у виразі (1.57) свідчить про зменшення заряду в області V , якщо потік вектора густини струму позитивний (заряди «залишають» об'єм V), а якщо потік вектора \mathbf{J} через S негативний, то заряд в області V збільшується.

Релаксація зарядів в провідному середовищі. Розглянемо однорідне ізотропне середовище з параметрами ϵ_a , μ_a , σ . Якщо в такому середовищі розміщений деякий об'ємний заряд, то заряди взаємно відштовхуватимуться і концентрація зарядів з плином часу зменшуватиметься.

Для даного середовища $\operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div} \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_a} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\sigma}{\epsilon_a} \rho$. З рів-

няння неперервності в диференційній формі $\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ одержимо

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_a} \rho = 0$. Розв'язком цього диференційного рівняння є функція

$$\rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{t}{\tau_p}}, \quad (1.58)$$

де $\rho(0) = \rho(M, 0)$ – об'ємна густина заряду в довільній точці M у

початковий момент часу $t = 0$; $\tau_p = \frac{\epsilon_a}{\sigma}$ – **час релаксації середо-**

вища (час, протягом якого густина заряду в точці M зменшується в e раз). Для добре провідних середовищ час релаксації дуже малий.

Для металів $\tau_p \approx 10^{-18} \text{ с}$, для морської води $\tau_p \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ с}$, для

дистильованої води ($\sigma = 2 \cdot 10^{-4} \text{ См/м}$) $\tau_p \approx 10^{-6} \text{ с}$, для янтарю τ_p складає декілька годин. Тому час релаксації може служити основою для класифікації середовищ. Якщо $\tau_p \gg T$ (де T – характерний інтервал часу даного електромагнітного процесу, наприклад період коливання для гармонічного сигналу), то середовище є діелектриком, якщо $\tau_p \ll T$, то середовище – провідник. Для ідеального діелектрика $\tau_p = \infty$, для ідеального провідника $\tau_p = 0$.

Зменшення густини зарядів у середовищі не означає зникнення зарядів. Вони перерозподіляються в середовищі, і якщо, наприклад, дана область оточена непровідним середовищем, то заряди розподіляються тонким шаром на межі поділу середовищ.

1.2.5. Класифікація електромагнітних явищ

Системи рівнянь Максвелла (1.32) – (1.35), (1.41) – (1.43), (1.52) – (1.55) описують всю різноманітність електромагнітних явищ макроскопічної електродинаміки.

За характером часової залежності електромагнітних процесів можна виділити класи задач, для яких система рівнянь Максвелла записується простіше і допускає аналітичний розв'язок.

Статичні поля. Ці поля характеризуються тим, що **вектори поля, заряди, положення заряджених і намагнічених тіл з часом не змінюються**. Це означає, що густина струму $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = 0$ і похід-

на $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. При цьому система рівнянь Максвелла розбивається на

дві незалежні підсистеми:

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= 0, \\ \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= q, \\ \mathbf{D} &= \epsilon_a \mathbf{E}, \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= 0, \\ \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0, \\ \mathbf{B} &= \mu_a \mathbf{H}, \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

або в диференційній формі:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_a \mathbf{E}, \end{aligned} \right\}, \quad (1.61)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{B} &= \mu_a \mathbf{H}, \end{aligned} \right\}. \quad (1.62)$$

Рівняння (1.59), (1.61) описують явища **електростатики** і містять тільки вектори електричного поля, рівняння (1.60), (1.62) описують явища **магнітостатики**.

У статичних полях фізичний зв'язок між електричним і магнітним полями відсутній. Системи рівнянь електростатики і магнітостатики подібні, що дозволяє знаходити розв'язок задач магнітостатики, використовуючи методи розв'язання електростатичних задач, виконуючи формальну заміну $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$, $\rho \rightarrow 0$, $\varepsilon_a \rightarrow \mu_a$.

Стаціонарні поля характеризуються тим, що значення всіх величин, що описують електромагнітні процеси, незмінні. Умови стаціонарності записуються у вигляді

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\mathbf{J} = \text{const} \neq 0$. **Стаціонарні поля** – це поля постійних струмів. Рівняння Максвелла записуються у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= I, \\ \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= 0, \\ \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= q, \\ \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0, \end{aligned} \right\}, \quad (1.63)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \right\}. \quad (1.64)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

На відміну від статичних полів електричні і магнітні поля зв'язані між собою за законом Ома $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$.

Квазістаціонарні поля. Це поля порівняно повільних електричних процесів, коли струмом зміщення порівняно із струмом провідності можна знехтувати. Умова квазістаціонарності $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \approx 0$,

$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$. При цьому враховується явище електромагнітної індукції

Фарадея і вважається, що магнітне поле збуджується тільки струмами провідності. Системи рівнянь Максвелла в інтегральній і диференціальній формі аналогічні системам (1.63), (1.64), в яких другі

рівняння записуються у вигляді $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$ і $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

відповідно.

Швидкозмінні поля збуджуються в загальному випадку **змінними струмами і зарядами високої частоти**. Для опису електромагнітних явищ в цьому разі необхідно використовувати повні системи рівнянь Максвелла.

Задачі для самостійного розв'язку

1. Записати рівняння Максвелла для векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} у разі однорідного ізотропного середовища.

2. Одержати рівняння Максвелла в диференційній формі з рівнянь в інтегральній формі.

3. Показати, що четверте рівняння Максвелла є наслідком другого.

4. Визначити вектор напруженості електричного поля за умови, що $H = 10^{-4} \text{ А/м}$, $f = 10^5 \text{ Гц}$, $\beta = \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$, якщо вектор напруженості магнітного поля в повітрі змінюється згідно із законом $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y H \cos(\omega t - \beta z)$.

5. Визначити вектор напруженості магнітного поля за умови, що $E = 1 \text{ мВ/м}$, $\alpha = 10^{-3} \text{ 1/м}$, $\beta = 30 \text{ 1/м}$, $f = 2 \text{ МГц}$, $\mu = 1$, вектор напруженості електричного поля $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$.

6. Визначити $\text{div } \mathbf{D}$ у середовищі з проникністю $\epsilon = 6$ і встановити, чи є заряди в області, де вектор напруженості електричного поля в сферичних координатах змінюється згідно із законом $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r 0,25r \text{ В/м}$.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте умову макроскопічності електромагнітних явищ.

2. Назвіть і запишіть закони, що лежать в основі рівнянь електромагнітного поля.

3. Напишіть перше і друге рівняння Максвелла в інтегральній формі і поясніть їх фізичний зміст.

4. Запишіть третє і четверте рівняння Максвелла в інтегральній формі і поясніть їх фізичний зміст.

5. Назвіть можливі шляхи переходу від інтегральної до диференційної форми запису рівнянь Максвелла.

6. Отримайте перше рівняння Максвелла в диференційній формі. Поясніть його фізичний зміст.

7. Одержіть друге рівняння Максвелла в диференційній формі і поясніть його фізичний зміст.

8. Одержіть рівняння неперервності електричного струму, а

також третє і четверте рівняння Максвелла в диференційній формі та поясніть їх фізичний зміст.

9. Сформулюйте закон збереження заряду. Поясніть зміст релаксації зарядів в провідному середовищі.

10. Викладіть принцип класифікації електромагнітних явищ за характером часової залежності.

1.3. Система рівнянь Максвелла для монохроматичних полів

1.3.1. Метод комплексних амплітуд

Всі вектори і джерела електромагнітного поля в загальному випадку є функціями трьох просторових змінних і часу. До системи рівнянь Максвелла входять, відповідно, часткові похідні по цих змінних. Істотно спростити аналіз електромагнітних полів можна у разі гармонічних в часі коливань. Реальні електромагнітні поля завжди можна представити у вигляді суми монохроматичних коливань різних частот або неперервного спектра гармонічних коливань, представляючи функцію інтегралом Фур'є.

Відповідно до методу комплексних амплітуд кожній скалярній гармонічній функції

$$a(t) = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.65)$$

ставиться у відповідність комплексна функція

$$\dot{a}(t) = ae^{j(\omega t + \varphi)} = \dot{a}e^{j\omega t}. \quad (1.66)$$

У виразах (1.65), (1.66) a – амплітуда коливання; ω – кругова частота; φ – початкова фаза; $\dot{a} = ae^{j\varphi} = a(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ – комплексна амплітуда.

Початкове коливання представляє реальну частину $\dot{a}(t)$:

$$a(t) = \operatorname{Re} \{ \dot{a}(t) \} = \operatorname{Re} \{ \dot{a}e^{j\omega t} \}.$$

Векторна гармонічна функція $\mathbf{R}(t)$ може бути записана так:

$$\mathbf{R}(t) = R_x \cos(\omega t + \varphi_1) \mathbf{e}_x + R_y \cos(\omega t + \varphi_2) \mathbf{e}_y + R_z \cos(\omega t + \varphi_3) \mathbf{e}_z. \quad (1.67)$$

У комплексній формі функцію $\mathbf{R}(t)$ подамо як

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \dot{\mathbf{R}} e^{j\omega t} = (\dot{R}_x \mathbf{e}_x + \dot{R}_y \mathbf{e}_y + \dot{R}_z \mathbf{e}_z) e^{j\omega t}, \quad (1.68)$$

де $\dot{\mathbf{R}}$ – комплексна амплітуда вектора $\mathbf{R} = \text{Re}\{\dot{\mathbf{R}}(t)\}$; $\dot{R}_x = R_x e^{j\varphi_1}$, $\dot{R}_y = R_y e^{j\varphi_2}$, $\dot{R}_z = R_z e^{j\varphi_3}$ – комплексні амплітуди складових $\dot{\mathbf{R}}$.

Розкладання в (1.67) проведено по ортах декартової системи координат, хоча принципово нічого не зміниться при використанні будь-якої іншої ортогональної системи координат.

В тому випадку, коли гармонічні функції $a(t)$ і $\mathbf{R}(t)$ задовольняють лінійним рівнянням, то таким самим рівнянням задовольнятимуть і комплексні амплітуди \dot{a} і $\dot{\mathbf{R}}$. Якщо в результаті розв'язання рівнянь невідома комплексна амплітуда буде визначена, то для отримання функції, що описує реальну фізичну величину, треба помножити комплексну амплітуду на $e^{j\omega t}$ і виділити реальну частину.

Приклад 1.7. Записати комплексне значення, комплексну і комплексно-спряжену амплітуди вектора $\mathbf{H}(t) = \mathbf{e}_x 25 \sin(\omega t - \beta z + \pi/4)$.

Розв'язок. Зводимо дійсний вектор \mathbf{H} до вигляду:

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{e}_x 25 \cos(\pi/2 - \omega t + \beta z - \pi/4) = \mathbf{e}_x 25 \cos(\omega t - \beta z - \pi/4).$$

Записуємо комплексний вектор $\dot{\mathbf{H}}$:

$$\dot{\mathbf{H}}(t) = \mathbf{e}_x 25 e^{j(\omega t - \beta z - \pi/4)}.$$

Записуємо комплексну амплітуду $\dot{\mathbf{H}}$: $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{e}_x 25 e^{-j(\beta z - \pi/4)}$ і комплексно-спряжену амплітуду $\dot{\mathbf{H}}^* = \mathbf{e}_x 25 e^{j(\beta z - \pi/4)}$.

1.3.2. Рівняння Максвелла в комплексній формі

Рівняння Максвелла є лінійними диференціальними рівняннями, тому при вивченні монохроматичних полів можна використовувати метод комплексних амплітуд. Це дає змогу спростити розв'язання

системи рівнянь Максвелла, адже в цьому разі вектор поля залежатиме тільки від координат і не залежатиме від частоти.

Одержимо рівняння Максвелла в комплексній формі. Для цього запишемо всі скалярні і векторні функції, що входять в систему (1.52) – (1.55), у вигляді (1.66), (1.68). Врахуємо при цьому, що диференціювання комплексної функції $\dot{a}(t)$ за часом еквівалентне множенню функції на $j\omega$.

Запишемо для монохроматичних процесів вектори ЕМП \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{V} , \mathbf{H} , \mathbf{J} і скалярні змінні в комплексному вигляді відповідно до (1.66), (1.68): $\dot{\mathbf{E}}(t) = \dot{\mathbf{E}}e^{j\omega t}$, ..., $\dot{\mathbf{H}}(t) = \dot{\mathbf{H}}e^{j\omega t}$, $\dot{\rho}(t) = \dot{\rho}e^{j\omega t}$ і підставимо їх у співвідношення (1.41) – (1.43), (1.52) – (1.55). Тоді **рівняння Максвелла в комплексній формі** матимуть наступний вигляд:

I, δ	$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega\dot{\mathbf{D}} = \sigma\dot{\mathbf{E}} + j\omega\epsilon_a\dot{\mathbf{E}} = j\omega\dot{\epsilon}_a\dot{\mathbf{E}},$	(1.69)
II, δ	$\text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\dot{\mu}_a\dot{\mathbf{H}},$	(1.70)
III, δ	$\text{div } \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho},$	(1.71)
IV, δ	$\text{div } \dot{\mathbf{B}} = 0,$	(1.72)
V, δ	$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\epsilon}_a\dot{\mathbf{E}},$	(1.73)
VI, δ	$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{B}}/\mu_a,$	(1.74)
VII, δ	$\dot{\mathbf{J}} = \sigma\dot{\mathbf{E}}.$	(1.75)

Рівняння (1.69) – (1.75) простіші, ніж (1.52) – (1.55), оскільки в них відсутні похідні за часом.

У співвідношенні (1.69)

$$\dot{\epsilon}_a = \epsilon_a \left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon_a} \right) \quad (1.76)$$

– **комплексна діелектрична проникність середовища**. Величина $\sigma/\omega\epsilon_a$, яка входить до виразу (1.76), залежить від частоти, а її значення дорівнює відношенню амплітуди струму провідності до амплітуди струму зміщення $|\dot{\mathbf{J}}_{\text{пр}}|/|\dot{\mathbf{J}}_{\text{зм}}| = |\dot{\mathbf{J}}|/|j\omega\dot{\mathbf{D}}| = \sigma/\omega\epsilon_a$ і називається **тангенсом кута діелектричних втрат** ($\sigma/\omega\epsilon_a = \text{tg } \delta$) (рис. 1.25).

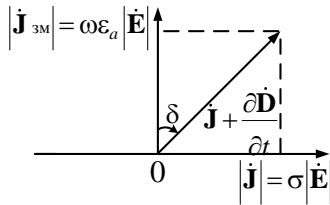


Рис. 1.25

Для кожного середовища можна ввести **поняття граничної частоти** $\omega_{\text{гр}}$, при якій амплітуди струмів провідності і зміщення однакові, $|\dot{J}_{\text{пр}}|/|\dot{J}_{\text{зм}}| = \sigma/\omega_{\text{кр}}\epsilon_a = \text{tg } \delta = 1$, звідки $\omega_{\text{кр}} = \sigma/\epsilon_a$.

Відзначимо, що, якщо не можна знехтувати поляризаційними втратами (втратами на періодичну зміну поляризації середовища) і магнітними втратами (втратами енергії на перемінну намагніченість середовища), то діелектрична і магнітна проникність середовища є комплексною і в рівняннях (1.69) – (1.75) величини ϵ_a , μ_a також комплексні. У рівняннях Максвелла в цьому випадку необхідно зробити заміну $\epsilon_a \rightarrow \dot{\epsilon}_a$, $\mu_a \rightarrow \dot{\mu}_a$: $\dot{\epsilon}_a = \epsilon_0(\epsilon' - j\epsilon'')$, $\dot{\mu}_a = \mu_0(\mu' - j\mu'')$.

Дійсні величини ϵ' і μ' визначають фазовий зсув між векторами $\dot{\mathbf{D}}$, $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{H}}$ відповідно, а величини ϵ'' , μ'' враховують втрати у середовищі.

Підкреслимо, що з рівнянь (1.69), (1.70) одержуємо важливу властивість векторів ЕМП: **в ізотропному лінійному середовищі вектори $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{H}}$ взаємно перпендикулярні**. Це виходить з того, що ротор вектора перпендикулярний самому вектору (п. 1.2.3). Так, з (1.70) виходить, що $\dot{\mathbf{H}} \parallel \text{rot } \dot{\mathbf{E}}$, але, оскільки $\text{rot } \dot{\mathbf{E}} \perp \dot{\mathbf{E}}$, то і $\dot{\mathbf{H}} \perp \dot{\mathbf{E}}$.

1.3.3. Класифікація середовищ за електричною провідністю

У попередньому пункті введено поняття комплексної діелектричної проникності $\dot{\epsilon}_a$ і рівняння Максвелла записані в узагальненій формі, придатній для опису ЕМП як в провідному, так і в непровідному середовищі. Критерієм, що визначає **провідні** властивості речовини, є співвідношення між струмом провідності і струмом зміщення або, що рівнозначно, між дійсною та уявною частинами $\dot{\epsilon}_a$.

У радіотехніці прийнято вважати середовище **провідником**, якщо $(\sigma/\varepsilon_a \omega) > 5$, **хорошим провідником**, якщо $(\sigma/\varepsilon_a \omega) > 100$, **діелектриком** – при $(\sigma/\varepsilon_a \omega) < 0,2$ і **хорошим діелектриком** – при $\sigma/\varepsilon_a \omega < 0,01$. У інтервалі значень $0,2 < (\sigma/\varepsilon_a \omega) < 5$ середовище вважається **напівпровідним** (рис. 1.26).

Оскільки у співвідношення (1.76) входить частота, то деякі середовища на одних частотах можуть мати властивості провідників, на інших – діелектриків. Як видно з (1.76) і рис. 1.26, на високих частотах діелектричні властивості середовища виявляються сильнішими.

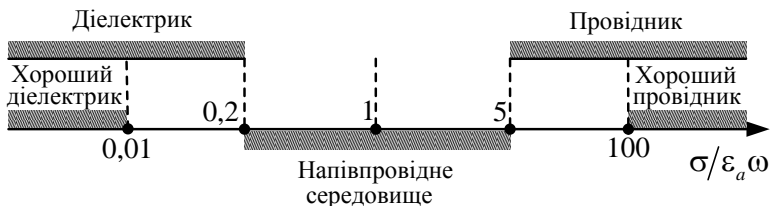


Рис. 1.26

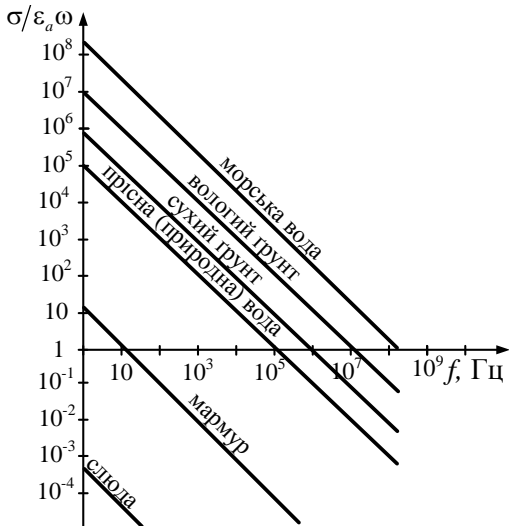


Рис. 1.27

На рис. 1.27 показано, як змінюється величина $\sigma/\varepsilon_a \omega = 60\sigma\lambda/\varepsilon$ для деяких поширених середовищ залежно від частоти. Як видно з рис. 1.27, вологий ґрунт, наприклад на частотах $f < 1$ МГц, поводить ся як провідник, при $f > 100$ МГц – як діелектрик.

Приклад 1.8. Визначити, на якій частоті амплітуда струму зміщення в морській воді ($\sigma = 4 \text{ См/м}$, $\varepsilon = 80$) буде дорівнювати струму провідності.

Розв'язок. Струм провідності $J_{\text{пр}} = \sigma E$ рівний струму зміщення

$$J_{\text{зм}} = \omega \varepsilon_a E \text{ при } \sigma = \omega \varepsilon_a, \text{ звідки } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sigma}{2\pi \varepsilon \varepsilon_0}.$$

Для заданих значень

$$\sigma = 4 \text{ См/м}, \quad \varepsilon = 80, \quad (\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Ф/м}) \text{ одержимо } f = 9 \cdot 10^8 \text{ Гц}.$$

При частоті $f = 10^8 \text{ Гц}$ (метрові хвилі) величина $\frac{\sigma}{\varepsilon_a \omega} = 9 \gg 1$ (за радіотехнічною термінологією середовище поводить як провідник), при $f = 10^{10} \text{ Гц}$ (сантиметрові хвилі) $\frac{\sigma}{\varepsilon_a \omega} = 0,09 \ll 1$ – середовище розглядається як діелектрик.

1.3.4. Сторонні струми і заряди.

Повна система рівнянь Максвелла

Досить часто струм (рух зарядів) створюється неелектромагнітним «стороннім» процесом – механічним, хімічним, тепловим та ін. Подібні сили неелектричного походження, що діють на електричні заряди, одержали назву **сторонніх сил**. Цим силам можна поставити у відповідність **напруженість електричного поля сторонніх сил** $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ – таке поле, під дією якого заряди рухатимуться так само, як і під дією сторонніх сил. В більшості випадків наявність сторонніх сил враховують в записі закону Ома (1.43):

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}}), \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}^{\text{ст}}. \quad (1.77)$$

З (1.77) видно, що при розв'язанні електродинамічних задач може бути задана напруженість сторонніх сил $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ або сторонній струм $\mathbf{J}^{\text{ст}}$. При цьому природа виникнення $\mathbf{E}^{\text{ст}}$, $\mathbf{J}^{\text{ст}}$ не розглядається, а самі значення $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ або $\mathbf{J}^{\text{ст}}$ вважаються заданими. Наприклад, при аналізі випромінювання вібратора (рис. 1.28) вважають, що струм у вібраторі відомий (заданий), і не розглядають процеси, що відбуваються в генераторі, лінії передач і ін. У вібраторі і навколишньому середовищі, включаючи розрив провідника (об'єм ΔV), збуджується електричне поле \mathbf{E} . При аналізі поля випромінювання вібратора можна умовно усунути розрив Δ у вібраторі (рис. 1.28, а) і вважати,

що в об'ємі ΔV неперервного провідника прикладена стороння напруженість електричного поля \mathbf{E}^{ct} , відмінна від нуля в області ΔV (рис. 1.28, б). Напруженість стороннього поля \mathbf{E}^{ct} вважається заданою функцією координат і часу. Така модель істотно спрощує розв'язання електродинамічних задач.

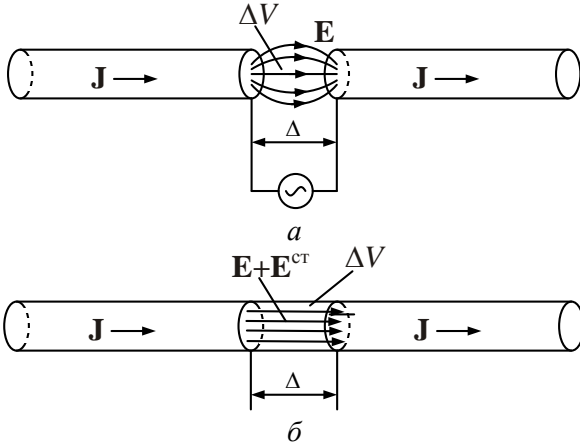


Рис. 1.28

Врахування сторонніх струмів приводить до зміни запису першого рівняння Максвелла (1.52):

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}^{ct}, \quad (1.78)$$

де \mathbf{J} – густина струмів провідності, викликана електричним полем \mathbf{E} : $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$; $\mathbf{J}^{ct} = \sigma \mathbf{E}^{ct}$ – густина сторонніх струмів.

Аналогічно вводиться поняття сторонніх зарядів. При цьому рівняння (1.54) набуває вигляду

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho + \rho^{ct}, \quad (1.79)$$

де ρ^{ct} – об'ємна густина сторонніх зарядів.

У разі змінного поля сторонні струми і заряди зв'язані рівнянням неперервності:

$$\operatorname{div} \mathbf{J}^{\text{ст}} = -\frac{\partial \rho^{\text{ст}}}{\partial t}. \quad (1.80)$$

У разі монохроматичних полів рівняння Максвелла можуть бути записані у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= \dot{\mathbf{J}} + j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}, \\ \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} &= \dot{\rho} + \dot{\rho}^{\text{ст}}, \\ \operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.81)$$

Повна система рівнянь Максвелла формулюється з урахуванням наявності сторонніх струмів і зарядів, рівняння (1.52), (1.54) мають бути змінені згідно з (1.78), (1.79), а рівняння (1.69) – (1.72) – системою (1.81).

Задачі для самостійного розв'язку

1. Записати комплексний вираз для вектора і комплексну амплітуду вектора $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 50 \cos(\omega t - \beta z - \pi/4) + \mathbf{e}_y 20 \sin(\omega t - \beta z)$.

2. Записати вираз для миттєвого значення вектора, якщо його комплексна амплітуда $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{e}_r 40 e^{-j(\beta z + \pi/2)} - \mathbf{e}_\phi 30 e^{-j(\beta z + \pi/2)}$.

3. Вектор напруженості електричного поля задовольняє рівнянню $\mathbf{E}(M, t) = (5\mathbf{e}_x + 2x^2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) \sin \omega t$. Визначити $\mathbf{H}(M, t)$.

4. Визначити частоту f_0 , при якій амплітуди густини струму зміщення і густини струму провідності будуть рівні в заданому середовищі:

а) морська вода: $\varepsilon = 80$; $\sigma = 4 \text{ См/м}$;

б) прісна вода: $\varepsilon = 80$; $\sigma = 2 \cdot 10^{-3} \text{ См/м}$;

в) вологий ґрунт: $\varepsilon = 10$; $\sigma = 10^{-1} \text{ См/м}$.

5. Обчислити на частотах $f_1 = 2 \text{ МГц}$; $f_2 = 200 \text{ МГц}$ тангенс кута діелектричних втрат заданого середовища і зробити висновок щодо характеру середовища:

а) гетинакс: $\varepsilon = 6$; $\sigma = 10^{-9} \text{ См/м}$;

б) слюда: $\varepsilon = 5,5$; $\sigma = 10^{-13} \text{ См/м}$;

в) парафін: $\varepsilon = 2,2$; $\sigma = 10^{-15}$ См/м;

г) кварц: $\varepsilon = 4,5$; $\sigma = 2 \cdot 10^{-17}$ См/м.

Питання для самоперевірки

1. Напишіть вирази гармонічних коливань в комплексній формі.
2. Запишіть систему рівнянь Максвелла в комплексній формі.
3. Поясніть принцип класифікації середовищ за їх електричною провідністю.
4. Наведіть поняття сторонніх електричних струмів, зарядів і полів.
5. Запишіть повну систему рівнянь Максвелла в диференційній формі для монохроматичних полів.

1.4. Граничні умови для векторів електромагнітного поля

Властивості електромагнітного поля, які описуються рівняннями Максвелла, сформульовані в інтегральній (1.32) – (1.35) і в диференційній (1.52) – (1.55) формах. Реально електромагнітні явища відбуваються в областях простору, які мають певні межі, що розділяють середовища з різними електромагнітними властивостями. На цих межах (межах поділу середовищ) параметри середовищ змінюються стрибками. Зазначимо, що в природі миттєвих змін немає, є вельми швидкий і плавний перехід від одних значень параметрів середовища до інших. Але в наближенні **макроскопічної електродинаміки** можна припустити, що різкі межі поділу середовищ існують. При цьому рівняння Максвелла в інтегральній формі залишаються справедливими, а в диференційній формі, де рівняння включають похідні векторів поля по координатах, вони втрачають зміст у точках, де параметри середовища (і вектори ЕМП) терплять розрив. Тому систему рівнянь Максвелла необхідно доповнити співвідношеннями для векторів ЕМП на межах поділу середовищ там, де параметри $\varepsilon_a, \mu_a, \sigma$ змінюються стрибкоподібно. Граничні умови можна знайти, записуючи рівняння Максвелла в інтегральній формі в областях, що включають межі поділу середовищ, і виконуючи граничний перехід у відповідних рівняннях.

1.4.1. Граничні умови для нормальних складових ЕМП

Розглянемо поверхню S , що поділяє перше середовище з параметрами $\varepsilon_{a1}, \mu_{a1}, \sigma_1$ і друге середовище $\varepsilon_{a2}, \mu_{a2}, \sigma_2$ (рис. 1.29).

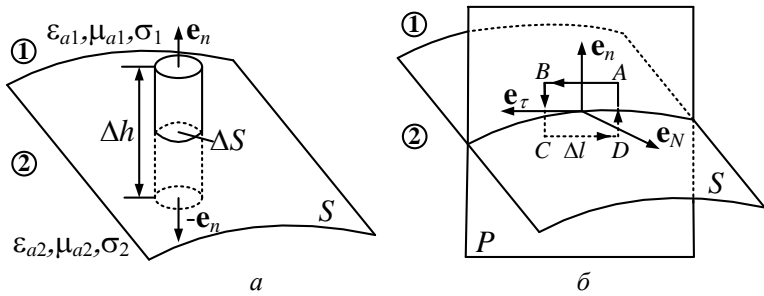


Рис. 1.29

Вектори поля в першому середовищі $\mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{B}_1$, в другому – $\mathbf{E}_2, \mathbf{D}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{B}_2$. Запишемо третє рівняння Максвелла в інтегральній формі:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV. \quad (1.82)$$

Як поверхню S виберемо поверхню малого циліндра заввишки Δh , що перетинає межу поділу двох середовищ перпендикулярно до межі (рис. 1.29, *a*). Через малізну циліндра можна вважати, що поле на основах циліндра ΔS є однорідним, і рівняння (1.34) запишемо у вигляді

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{e}_n \Delta S - \mathbf{D}_2 \mathbf{e}_n \Delta S + \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D} d\mathbf{S} = \Delta q,$$

де $\int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D} d\mathbf{S}$ – потік вектора \mathbf{D} через бічну поверхню циліндра; Δq – заряд усередині циліндра. Необмежено зменшуючи висоту циліндра так, щоб основи ΔS залишалися в різних середовищах, при $\Delta h \rightarrow 0$ одержимо, що основи циліндра збігаються з елементом ΔS межі середовищ, $\int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D} d\mathbf{S} \rightarrow 0$, $\frac{\Delta q}{\Delta S} \rightarrow \rho_s$, звідки

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \mathbf{e}_n = \rho_s \quad \text{або} \quad D_{1n} - D_{2n} = \rho_s. \quad (1.83)$$

У виразі (1.83) ρ_s – поверхнева густина зарядів. Таким чином, при переході з одного середовища в інше нормальна складова вектора електричної індукції \mathbf{D} змінюється стрибком на величину поверхневої густини вільних зарядів, розподілених уздовж межі поділу середовищ. Якщо заряди ρ_s на поверхні поділу відсутні ($\rho_s = 0$), то нормальна складова D_n під час переходу межі середовищ залишається неперервною.

Використовуючи четверте рівняння Максвелла в інтегральній формі і виконуючи аналогічні перетворення, одержимо:

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \mathbf{e}_n = 0 \quad \text{або} \quad B_{1n} - B_{2n} = 0. \quad (1.84)$$

Отже, нормальна складова вектора магнітної індукції \mathbf{B} завжди неперервна.

1.4.2. Граничні умови для тангенційних складових ЕМП

Перетнемо межу поділу S двох середовищ площиною P , яка містить нормаль \mathbf{e}_n до S , і побудуємо прямокутний контур $ABCD$, що лежить в обох середовищах (рис. 1.29, б). Вважатимемо, що сторони AB і CD паралельні пересіченій ділянці межі і позначимо $AB = CD = \Delta l$, $BC = AD = \Delta h$. Введемо орт дотичної до межі поділу \mathbf{e}_τ і орт нормалі \mathbf{e}_N до площини P так, що $\mathbf{e}_N = [\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_\tau]$. Запишемо друге рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Як контур L виберемо контур $ABCD$, напрям обходу котрого показаний на рис. 1.29, б. Приймемо, що контур досить малий, тому поле в його межах можна вважати однорідним. Тоді одержимо

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{e}_\tau \Delta l - \mathbf{E}_2 \mathbf{e}_\tau \Delta l + \int_{BC} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{DA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_{\Delta P} \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (1.85)$$

де ΔP – площа контура $ABCD$. Спрямуємо тепер Δh до нуля так, щоб сторони AB і CD збіглися на межі поділу середовищ. Тоді з (1.85) одержимо:

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{e}_\tau - \mathbf{E}_2 \mathbf{e}_\tau = 0, \quad \text{або} \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (1.86)$$

Співвідношення (1.86) показують, що **при переході з одного середовища в інше тангенційна складова вектора \mathbf{E} завжди неперервна**. Умову (1.86) часто записують у вигляді $[\mathbf{e}_n, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] = 0$.

Виконуючи аналогічні записаним вище перетворення з першим рівнянням Максвелла в інтегральній формі, одержимо граничні умови для тангенційної складової вектора \mathbf{H} у вигляді

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \mathbf{J}_s \mathbf{e}_N = J_{SN} \quad \text{або} \quad [\mathbf{e}_n, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \mathbf{J}_s, \quad (1.87)$$

де $J_{SN} = \mathbf{J}_s \mathbf{e}_N$ – проекція вектора лінійної густини поверхневого струму \mathbf{J}_s на орт \mathbf{e}_N .

Співвідношення (1.87) означають, що **під час переходу межі поділу двох середовищ тангенційна складова вектора \mathbf{H} може зазнавати розриву**, величина якого дорівнює проекції вектора густини поверхневого струму на напрям вектора \mathbf{e}_N , що створює праву трійку з векторами $\mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n$ (рис. 1.29, б).

1.4.3. Повна система граничних умов.

Граничні умови на поверхні ідеального провідника

Запишемо **повну систему граничних умов** на поверхні поділу двох середовищ в скалярній і векторній формі:

Скалярна форма запису

Векторна форма запису

$$\left. \begin{aligned} D_{1n} - D_{2n} &= \rho_s \\ E_{1\tau} &= E_{2\tau} \\ B_{1n} &= B_{2n} \\ H_{1\tau} - H_{2\tau} &= J_{SN} \end{aligned} \right\}, \quad (1.88)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \mathbf{e}_n &= \rho_s \\ [\mathbf{e}_n, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] &= 0 \\ (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \mathbf{e}_n &= 0 \\ [\mathbf{e}_n, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] &= \mathbf{J}_s \end{aligned} \right\}. \quad (1.89)$$

Зазначимо, що системи (1.88), (1.89) включають тільки чотири компоненти векторів $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ – D_n, E_τ, B_n, H_τ . Решту

складових векторів (D_τ, E_n, B_τ, H_n) можна знайти, використовуючи матеріальні рівняння (1.41), (1.42).

Приклад 1.9. Поблизу межі двох діелектриків вектор електричного поля в першому середовищі ($\epsilon_1 = 3$) спрямований під кутом $\theta_1 = 30^\circ$ до нормалі (рис. 1.30). Знайти кут θ_2 , який складає вектор \mathbf{E}_2 з нормаллю в другому середовищі ($\epsilon_2 = 6$). Поверхневі заряди на межі поділу середовищ відсутні.

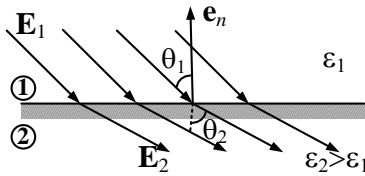


Рис. 1.30

Розв'язок. Відповідно до формули (1.88) $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, $D_{1n} = D_{2n}$ або $E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$, $\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$. Поділивши почленно праві і ліві частини двох останніх рівностей, одержимо $\frac{1}{\epsilon_1} \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1}{\epsilon_2} \operatorname{tg} \theta_2$, звідки

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \operatorname{tg} \theta_1 \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{6}{3} \operatorname{tg} 30^\circ \right) \approx 49^\circ \text{ (рис. 1.30).}$$

Отже, під час переходу через межу поділу середовищ вектори електромагнітного поля заломлюються. Відзначимо, що, якщо $\epsilon_2 \rightarrow \infty$, то кут $\theta_2 \rightarrow \pi/2$ незалежно від орієнтації вектора \mathbf{E} в першому середовищі.

Важливим для практики є випадок, коли друге середовище є ідеальним провідником ($\sigma_2 \rightarrow \infty$). До цього випадку можна наближено віднести тіла, виконані з добрепровідних металів. При цьому граничні умови спрощуються, оскільки поле в другому середовищі відсутнє $\mathbf{E}_2 = 0$, $\mathbf{B}_2 = 0$ (інакше, відповідно до закону Ома (1.43), густина струму $\mathbf{J}_2 \rightarrow \infty$). Для випадку змінних полів струм проходить усередині вельми тонкого поверхневого шару (поверхневий струм). При $\sigma_2 \rightarrow \infty$ граничні умови (1.88), (1.89) приймають вигляд

$$\left. \begin{aligned} D_{1n} &= \rho_s \\ E_{1\tau} &= 0 \\ B_{1n} &= 0 \\ H_{1\tau} &= J_{sv} \end{aligned} \right\}, \quad (1.90)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{D}_1 \mathbf{e}_n) &= \rho_s \\ [\mathbf{e}_n, \mathbf{E}_1] &= 0 \\ (\mathbf{B}_1, \mathbf{e}_n) &= 0 \\ [\mathbf{e}_n, \mathbf{H}_1] &= \mathbf{J}_s \end{aligned} \right\}. \quad (1.91)$$

Із співвідношень (1.90) виходить, що **вектори електричного поля \mathbf{D} і \mathbf{E} на межі поділу з ідеально провідним середовищем перпендикулярні провідній поверхні, а вектори магнітного поля \mathbf{B} , \mathbf{H} – паралельні** (рис. 1.31).

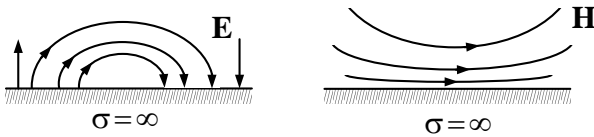


Рис. 1.31

Використовуючи перше рівняння Максвелла і граничні умови, можна встановити важливі властивості поля біля межі провідника. Запишемо перше рівняння Максвелла (1.52) з урахуванням (1.90)

$$[\nabla, \mathbf{H}_{1\tau}] = \left(\frac{\partial D_{1n}}{\partial t} + \sigma E_{1n} \right) \mathbf{e}_n. \quad (1.92)$$

Представимо оператор ∇ у вигляді $\nabla = \nabla_{\perp} + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial n}$, де оператор ∇_{\perp} означає диференціювання по координатах площини поділу середовищ, а $\mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial n}$ – диференціювання по нормалі до межі поділу.

Тоді з (1.92) одержимо

$$[\nabla_{\perp}, \mathbf{H}_{1\tau}] + \left[\mathbf{e}_n, \frac{\partial \mathbf{H}_{1\tau}}{\partial n} \right] = \left(\frac{\partial D_{1n}}{\partial t} + \sigma E_{1n} \right) \mathbf{e}_n. \quad (1.93)$$

Ліва частина рівності (1.93) є сумою нормального $[\nabla_{\perp}, \mathbf{H}_{1\tau}]$ і

тангенційного $\left[\mathbf{e}_n, \frac{\partial \mathbf{H}_{1\tau}}{\partial n} \right]$ вектора, права – тільки нормальний век-

тор. Для виконання рівності необхідне виконання $\left[\mathbf{e}_n, \frac{\partial \mathbf{H}_{1\tau}}{\partial n} \right] = 0$,

звідки

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{1\tau}}{\partial n} = 0. \quad (1.94)$$

Так само з другого рівняння (1.53) можна одержати, що

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{1n}}{\partial n} = 0. \quad (1.95)$$

Отже, структура електромагнітного поля біля межі ідеального провідника така, що тангенційна складова магнітного поля H_τ і нормальна складова електричного поля E_n досягають екстремальних значень (рис. 1.31).

Приклад 1.10. Два середовища поділені пласкою межею (площиною XOY), що несе поверхневий струм. Поле в другому середовищі відсутнє. Показати, що в другому середовищі магнітне поле паралельне межі.

Розв'язок. За умовою задачі друге середовище є ідеальним провідником, в якому відсутнє поле, а по поверхні проходить поверхневий струм.

Граничні умови для вектора \mathbf{H} в цьому випадку мають вигляд:

$$H_{1n} = 0, \quad H_{1\tau} = J_s.$$

Повний вектор $\mathbf{H}_1 = \mathbf{e}_n H_{1n} + \mathbf{e}_\tau H_{1\tau} = \mathbf{e}_\tau J_s$, що і потрібно було довести.

1.4.4. Фізична суть граничних умов

Як виходить з наведених вище результатів, під час переходу через межу поділу двох середовищ тангенційні і нормальні (по відношенню до поверхні) компоненти векторів поля поведуться по-різному. Наприклад, тангенційна компонента вектора \mathbf{E} завжди неперервна, а нормальна – змінюється стрибком; нормальна складова вектора \mathbf{B} неперервна, а тангенційна – зазнає розриву. Фізична

причина цих відмінностей полягає в залежності процесів поляризації і намагнічування в граничних середовищах від орієнтації векторів поля щодо межі поділу.

Проілюструємо це на прикладі граничних умов для векторів електричного поля.

Нехай є два ізотропні середовища з діелектричними проникностями ϵ_1 і ϵ_2 і $\epsilon_2 > \epsilon_1$. Для простоти вважатимемо, що на межі поділу цих середовищ вільні поверхневі заряди відсутні ($\rho_s = 0$).

Під дією зовнішнього електричного поля обидва середовища поляризуються, причому, оскільки $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$, то вектор поляризації \mathbf{P} в цих середовищах матиме різні значення.

Якщо вектор \mathbf{E} перпендикулярний поверхні поділу (рис. 1.32, *a*), то внаслідок поляризації на ній з'являться некомпенсовані поверхневі заряди, зв'язані з молекулами речовини. Це умовно показано на рис. 1.32, *б* (у другому середовищі виникає більше диполів, ніж в першому, оскільки $\epsilon_2 > \epsilon_1$), і для даного випадку некомпенсовані заряди будуть позитивними.

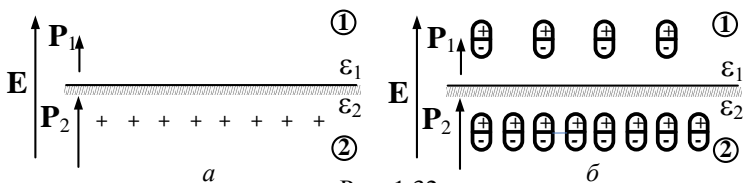


Рис. 1.32

Якщо вектор \mathbf{E} паралельний поверхні поділу, то, як видно з рис. 1.33, в результаті поляризації некомпенсовані поверхневі заряди не виникають через іншу орієнтацію диполів.

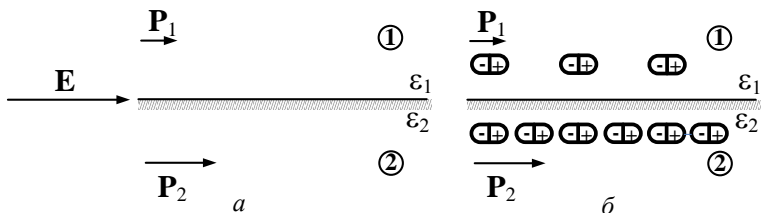


Рис. 1.33

При довільній орієнтації вектора \mathbf{E} у поверхні поділу величина некомпенсованих поверхневих зарядів визначається зміною значень нормальної складової вектора \mathbf{P} під час переходу через межу поділу.

Напруженість поля в кожному з середовищ складатиметься з напруженості \mathbf{E} первинного електричного поля (вона неперервна, оскільки джерел зовнішнього електричного поля на межі немає) і напруженості додаткового електричного поля $\mathbf{E}^{\text{доп}}$, що створюється некомпенсованими "зв'язаними" поверхневими зарядами. Вектор $\mathbf{E}^{\text{доп}}$ в кожній точці перпендикулярний поверхні поділу в першому і другому середовищах, рівний за величиною і протилежний за напрямком.

Отже, **нормальна складова напруженості повного електричного поля**, яке складається з первинного поля і поля "зв'язаних зарядів", що виникають внаслідок поляризації, **матиме розрив** на межі поділу ($E_{1n} \neq E_{2n}$), тангенційна складова (дотична) буде неперервна ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$).

Вектор \mathbf{D} був введений співвідношенням $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$. У випадку, що розглядається, за відсутності вільних поверхневих зарядів на межі ($\rho_s = 0$) розриви нормальних складових векторів $\epsilon_0 \mathbf{E}$ і \mathbf{P} будуть однакові за величиною і протилежні за напрямком. Тому за відсутності вільних поверхневих зарядів на межі поділу нормальна складова вектора \mathbf{D} неперервна ($\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n}$). Дотична складова вектора \mathbf{E} , як показано вище, неперервна, а дотична складова вектора \mathbf{P} має різні значення в середовищах I і II, оскільки $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$. Отже, дотична (тангенційна) складова вектора \mathbf{D} зазнає розриву ($\mathbf{D}_{1\tau} \neq \mathbf{D}_{2\tau}$).

Якщо на межі поділу двох середовищ існують вільні поверхневі заряди, то це не змінює характер граничних умов для тангенційних складових. Як і раніше, $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ і $\mathbf{D}_{1\tau} \neq \mathbf{D}_{2\tau}$. А для нормальних складових граничні умови змінюються ($\mathbf{D}_{1n} \neq \mathbf{D}_{2n}$), оскільки розрив P_n залишається таким самим, а розрив $\epsilon_0 E_n$ змінюється на величину ρ_s .

Аналогічно, використовуючи уявлення про **молекулярні струми**, що наводяться біля межі поділу під дією зовнішнього магнітного поля, можна пояснити особливості поведінки векторів магнітного поля під час переходу через межу поділу двох середовищ. Зокрема

рис. 1.34 пояснює стрибок тангенційної компоненти вектора \mathbf{H} за наявності поверхневого струму \mathbf{J}_s .

На рисунку показано **сліди ліній поверхневого струму** на межі двох середовищ (лінії струму будуть перпендикулярні площині креслення).

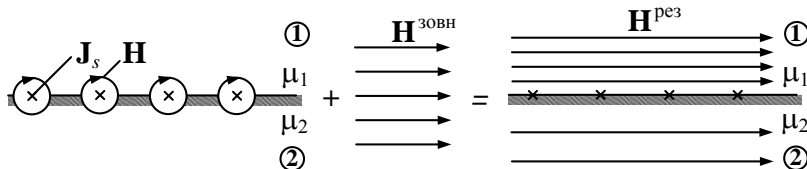


Рис. 1.34

З рис. 1.34 видно, що, якщо $\mathbf{J}_s \neq 0$, то при переході з одного середовища в інше компонента \mathbf{H}_t має розрив.

Задачі для самостійного розв'язку

1. Два ідеальні діелектрики, що мають відносні діелектричні проникності $\epsilon_1 = 2,5$ і $\epsilon_2 = 6$, розділяє нескінченна площина XOY . У першому діелектрику на межі поділу вектор $\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_x E_x \sin \omega t + \mathbf{e}_z E_z \sin \omega t$, де $E_x = 10 \text{ мВ/м}$, $E_z = 5 \text{ мВ/м}$, $f = 10 \text{ кГц}$. Вісь OZ спрямована по нормалі до межі поділу. Визначити:

а) вектор напруженості електричного поля \mathbf{E}_2 в другому середовищі;

б) кут нахилу \mathbf{E}_2 до межі поділу;

в) вектори електричного зміщення \mathbf{D}_1 і \mathbf{D}_2 в обох середовищах.

2. Два середовища, що мають параметри $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 16$, розділяє нескінченна площина XOY . У другому середовищі вектор напруженості магнітного поля $\mathbf{H}_2 = \mathbf{e}_y H_y \cos \omega t + \mathbf{e}_z H_z \cos \omega t$, де $H_y = 0,01 \text{ А/м}$, $H_z = 0,2 \text{ А/м}$, $f = 1 \text{ МГц}$. Вісь OZ спрямована по нормалі до межі поділу. Визначити:

а) вектор напруженості магнітного поля \mathbf{H}_1 в першому середовищі;

б) кут нахилу вектора \mathbf{H}_1 до межі поділу;

в) вектори магнітної індукції \mathbf{B}_1 і \mathbf{B}_2 в обох середовищах.

3. Два ідеальні діелектрики розділяє нескінченна площина XOY . Вектори напруженостей електричного поля спрямовані щодо осі OZ нормальної межі поділу під кутами $\theta_1 = \pi/6$ в першому діелектрику і $\theta_2 = \pi/3$ в другому. Визначити:

а) діелектричну проникність другого діелектрика, якщо $\varepsilon_1 = 6$;

б) вектор напруженості електричного поля \mathbf{E}_2 в другому діелектрику, якщо модуль вектора в першому середовищі $E_1 = 7 \text{ мкВ/м}$.

4. Нескінченна пласка межа розділяє два середовища. Параметри першого середовища: $\mu_1 = 5$, $\sigma_1 = 0$. Площина межі поділу збігається з площиною XOY декартової системи координат, вісь OZ нормальна до межі поділу. У першому середовищі вектор напруженості магнітного поля \mathbf{H}_1 спрямований під кутом $\theta_1 = \pi/4$ щодо осі, в другому середовищі $\theta_2 = \pi/3$. Визначити:

а) магнітну проникність другого середовища;

б) вектор напруженості магнітного поля \mathbf{H}_2 в другому середовищі, якщо модуль вектора в першому середовищі $H_1 = 30 \text{ мА/м}$.

5. Вектор напруженості електричного поля в повітрі ($\varepsilon_1 = 1$) над поверхнею діелектрика ($\varepsilon_2 = 2,5$) спрямований під кутом $\pi/3$ до зовнішньої нормалі, спрямованої в перше середовище. Визначити:

а) кут між вектором напруженості електричного поля в другому середовищі і нормаллю;

б) вектор електричного зміщення в діелектрику, якщо модуль вектора напруженості електричного поля в повітрі $E_1 = 40 \text{ мкВ/м}$.

Питання для самоперевірки

1. Поясніть необхідність введення граничних умов для векторів поля.

2. Запишіть вирази граничних умов для нормальних і тангенційних складових векторів електричного і магнітного полів. Поясніть фізичний зміст граничних умов.

3. Запишіть граничні умови на межі ідеального провідника і поясніть їх фізичний зміст.

4. Запишіть повну систему граничних умов в скалярній і векторній формах.

5. Поясніть характер структури електромагнітного поля біля межі ідеального провідника.

1.5. Енергія електромагнітного поля.

Теорема Пойнтінга

Електромагнітне поле є однією з форм матерії і як будь-яка форма матерії **ЕМП має енергію**. Вона передається електромагнітному полю сторонніми джерелами, може накопичуватися, переноситися, перетворюватися в інші види енергії. Розглянемо енергетичні співвідношення в електромагнітному полі.

1.5.1. Рівняння балансу миттєвих значень потужності

Виділимо в просторі деякий об'єм V , обмежений поверхнею S , в якому існує електромагнітне поле, і складемо рівняння балансу енергії W в об'ємі V (рис. 1.35).

Виходитимемо з **фундаментального закону фізики – закону збереження енергії**. З фізичних уявлень очевидно, що енергія сторонніх джерел в об'ємі V змінює в ньому запас енергії, витрачається на джоулеві втрати і може частково випромінюватися в навколишнє середовище V через поверхню S .

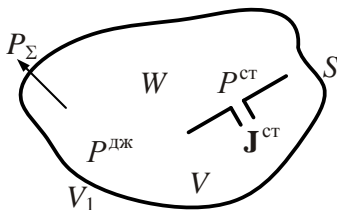


Рис. 1.35

При цьому для області V має виконуватися рівність

$$P^{\text{ст}} = \frac{dW}{dt} + P^{\text{джк}} + P_{\Sigma}, \quad (1.96)$$

де $P^{\text{ст}}$ – потужність сторонніх джерел; $\frac{dW}{dt}$ – потужність, що витрачається на зміну енергії в об'ємі V ; $P^{\text{джк}}$ – потужність втрат; P_{Σ} – потужність, що проходить через поверхню S .

Знак перед похідною вибраний з фізичних міркувань: якщо потужність сторонніх джерел більше потужності втрат $P^{\text{ст}} > (P^{\text{джк}} + P_{\Sigma})$, то запас енергії в області V збільшується ($\frac{dW}{dt} > 0$), якщо втрати і потужність, що проходить через S , переважають $(P^{\text{джк}} + P_{\Sigma}) > P^{\text{ст}}$, запас енергії зменшується ($\frac{dW}{dt} < 0$).

Враховуватимемо тільки джоулеві втрати, зумовлені струмом провідності. Втрати енергії на поляризацію і намагніченість середовища враховувати не будемо.

Знайдемо величини, що входять в рівняння балансу енергії (1.96), використовуючи рівняння Максвелла. При цьому вважатимемо, що об'єм V заповнений однорідним і ізотропним діелектриком.

Помножимо перше рівняння Максвелла (1.78) скалярно на \mathbf{E} , а друге (1.53) на \mathbf{H} і віднімемо від першого друге. Одержимо

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{E} \mathbf{J} + \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \mathbf{E} \mathbf{J}^{\text{ст}}. \quad (1.97)$$

Враховуючи тотожність $\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ (див. додаток E) і вираз (1.77), перетворимо (1.97) до вигляду

$$\mathbf{E} \mathbf{J} + \operatorname{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{E} \mathbf{J}^{\text{ст}}. \quad (1.98)$$

Вираз (1.98) подібно до (1.96) описує **баланс потужності електромагнітного поля і називається теоремою Пойнтінга в диференційній формі**.

Проінтегруємо рівняння (1.98) почленно за об'ємом V . Об'ємний інтеграл $\int_V \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}]dV$ перетворимо, використовуючи теорему

Остроградського – Гаусса і позначаючи $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$. Тоді одержимо:

$$\int_V \mathbf{E}\mathbf{J}dV + \oint_S \mathbf{\Pi}d\mathbf{S} + \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV = - \int_V \mathbf{E}\mathbf{J}^{\text{ct}} dV. \quad (1.99)$$

Вектор $\mathbf{\Pi}$ зветься **вектором Пойнтінга**, має розмірність Bm/m^2 і **визначає густину потоку потужності в кожній точці області, де існує ЕМП**. Його величина визначає кількість енергії, що переносить ЕМП в одиничний час крізь одиничну площу, яка перпендикулярна $\mathbf{\Pi}$.

Перетворимо в (1.99) вираз в круглих дужках:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \epsilon_a \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_a \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} + \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}^2}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (\epsilon_a \mathbf{E}^2 + \mu_a \mathbf{H}^2) \right]. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Підставляючи (1.100) в (1.99) і змінюючи порядок інтегрування та диференціювання, остаточно одержимо

$$\int_V \mathbf{E}\mathbf{J}dV + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_V (\epsilon_a \mathbf{E}^2 + \mu_a \mathbf{H}^2) dV \right] + \oint_S \mathbf{\Pi}d\mathbf{S} = - \int_V \mathbf{E}\mathbf{J}^{\text{ct}} dV. \quad (1.101)$$

Дане співвідношення описує **баланс потужності електромагнітного поля в об'ємі V і називається теоремою Пойнтінга в інтегральній формі (закон збереження енергії в ЕМП)**.

Проаналізуємо отриманий вираз.

Перший доданок в лівій частині (1.101) відмінний від нуля, якщо провідність середовища σ не дорівнює нулю. Цей доданок характеризує потужність, яка розсіюється в даному об'ємі. Так, вважатимемо, що елемент dV нескінченно малий куб із стороною a , перпендикулярною вектору струму \mathbf{J} .

Тоді

$$\mathbf{E}\mathbf{J}dV = (Ea)(Ja^2) = dU \cdot dI = dP^{\text{дж}},$$

де $dU = Ea$ – зміна потенціалу на довжині a ; $dI = Ja^2$ – струм, що проходить по елементу dV ; $dP^{\text{дж}}$ – потужність джоулевих втрат в об'ємі dV . Таким чином, перший доданок $P^{\text{дж}} = \int_V \mathbf{E}\mathbf{J}dV$ можна роз-

глядати як узагальнений закон Джоуля – Ленца для провідного середовища, а величину $P^{\text{дж}}$ – як потужність джоулевих втрат в об'ємі V .

Права частина рівності (1.101) формально збігається з розглянутим доданком і описує потужність сторонніх джерел. Цю потужність вважатимемо позитивною, якщо стороннє джерело віддає свою енергію полю. Якщо позитивний заряд помістити в полі, то він почне рухатися і енергія поля витратиться на цей рух. Щоб енергія поля збільшувалася, напрям $\mathbf{J}^{\text{ст}}$ має бути протилежним вектору \mathbf{E} . Тоді при гальмуванні заряджених частинок струм віддаватиме енергію електромагнітному полю. Позначимо миттєве значення потужності, що віддається сторонніми джерелами $P^{\text{ст}} = -\int_V \mathbf{E}\mathbf{J}^{\text{ст}} dV$.

Для з'ясування фізичного змісту **третього доданку** в лівій частині виразу (1.101) припустимо, що поверхня S є ідеально провідною. Тоді цей доданок рівний нулю, оскільки поле \mathbf{E} на поверхні S внаслідок (1.90) має тільки нормальну компоненту, а вектор $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}_n, \mathbf{H}]$ – тангенційну. Вектори $\mathbf{\Pi}$ і $d\mathbf{S}$ ортогональні, і їх скалярний добуток дорівнює нулю. Одержимо ізольовану від зовнішнього середовища область V , для якої рівняння (1.101) набуває вигляду

$$P = -\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_V (\epsilon_a \mathbf{E}^2 + \mu_a \mathbf{H}^2) dV \right]. \quad (1.102)$$

Тут

$$P = P^{\text{дж}} - P^{\text{ст}} = -\frac{dW}{dt} \quad (1.103)$$

– швидкість зміни енергії W , зосередженої в об'ємі V .

Порівнюючи (1.102) і (1.103), можна зробити висновок, що вираз в квадратних дужках є енергією електромагнітного поля, що міститься в об'ємі V :

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_a \mathbf{E}^2 + \mu_a \mathbf{H}^2) dV = W^e + W^m, \quad (1.104)$$

де $W^e = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_a \mathbf{E}^2 dV$, $W^m = \frac{1}{2} \int_V \mu_a \mathbf{H}^2 dV$ – енергія електричного і магнітного поля в області V відповідно.

У співвідношенні (1.104) $\frac{1}{2} \varepsilon_a \mathbf{E}^2 = w^e$ і $\frac{1}{2} \mu_a \mathbf{H}^2 = w^m$ – миттєве значення об'ємної густини енергії електричного і магнітного поля відповідно; $w = w^e + w^m$ – об'ємна густина повної енергії електромагнітного поля.

Приклад 1.11. У поліетиленовому заповненні коаксіального кабелю напруженість електричного поля дорівнює $E = 10^{-5}/r$, В/м. Визначити густину енергії електричного поля і обчислити енергію, зосереджену на ділянці кабелю завдовжки $l = 1$ м. Діаметр внутрішнього провідника $2r_1 = 2,5$ мм, зовнішнього – $2r_2 = 6,8$ мм. Для поліетилену значення $\varepsilon = 2,25$.

Розв'язок. Енергія електричного поля

$$W^e = \int_V \frac{\varepsilon_a E^2}{2} dV, \quad (1.105)$$

де $w^e = \frac{\varepsilon_a E^2}{2}$ – об'ємна густина енергії.

Знаходимо густину електричної енергії

$$w^e = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{2,25 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}{2} \cdot \frac{10^{-10}}{r^2} = \frac{10^{-21}}{r^2}, \text{ Дж/м}^3.$$

Для визначення W^e за формулою (1.105) необхідно виразити елементарний об'єм dV в циліндричній системі координат: $dV = r dr d\varphi dz$. Тоді

$$\begin{aligned} W^e &= 10^{-21} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz = 10^{-21} \ln \frac{r_2}{r_1} 2\pi l = 6,28 \cdot 10^{-21} \ln \frac{6,8}{2,5} = \\ &= 6,28 \cdot 10^{-21} \ln 2,72 = 6,28 \cdot 10^{-21}, \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Розглянемо поверхневий інтеграл (1.101). З урахуванням (1.103) перепишемо співвідношення (1.101) у вигляді

$$\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} + \frac{dW}{dt} + P^{\text{дж}} = P^{\text{ст}}. \quad (1.106)$$

Припустимо, що в області V втрат немає ($P^{\text{дж}} = 0$), енергія постійна $\frac{dW}{dt} = 0$. Тоді $\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} = P^{\text{ст}}$, тобто **потік вектора $\mathbf{\Pi}$ дорівнює**

енергії, що проходить через межу S області V за секунду (тобто рівний **потужності випромінювання**), вся потужність сторонніх джерел йде в навколишній простір V_1 , $P^{\text{ст}} = P_\Sigma = \oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S}$. Отже,

потік вектора $\mathbf{\Pi}$ – вектора Пойнтінга – має смисл потоку енергії через S . Якщо потік $P_\Sigma = \oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} > 0$, то енергія в області V зменшується, це (позитивний) вихідний потік; якщо $P_\Sigma = \oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} < 0$, то

це **вхідний** (негативний) потік, енергія надходить з області V_1 в V .

Напрямок вектора $\mathbf{\Pi}$ показує напрямок руху енергії ЕМП. Вектори $\mathbf{\Pi}$, \mathbf{E} та \mathbf{H} утворюють праву трійку векторів.

Таким чином, співвідношення (1.101) аналогічне виразу (1.96) і описує баланс миттєвих значень потужності електромагнітного поля.

Теорема Пойнтінга дає змогу знайти **швидкість перенесення енергії**. Так, за відсутності джоулевих втрат і сторонніх джерел в даній області з рівняння (1.98) одержимо:

$$\text{div } \mathbf{\Pi} = -\frac{\partial w}{\partial t}. \quad (1.107)$$

Співвідношення (1.107) аналогічне рівнянню збереження заряду в диференційній формі $\text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$. При розгляді руху електромагнітної енергії за аналогією з рухом заряджених частинок $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$

(\mathbf{v} – швидкість) можна записати $\mathbf{\Pi} = w \mathbf{v}^e$, звідки $\mathbf{v}^e = \mathbf{\Pi}/w$. Тут \mathbf{v}^e – швидкість перенесення ЕМЕ. Отже, знання вектора Пойнтінга і

густини енергії як функції координат дозволяє знайти швидкість перенесення енергії в будь-якій точці.

Приклад 1.12. Плаский повітряний конденсатор, що складається з двох круглих металевих пластин радіусом $r_1 = 2 \text{ см}$, віддалених одна від одної на відстань $d = 0,5 \text{ см}$, є частиною коливального контура. Напряга на обкладках конденсатора змінюється за законом: $U(t) = U \sin \omega t$, де амплітуда $U = 500 \text{ В}$ і $f = 10^6 \text{ Гц}$. Вважаючи величину вектора електричного зміщення \mathbf{D} постійною по всій площі пластин, визначити струм зміщення і потім знайти вектор магнітної індукції та вектор Пойнтінга при $r = r_1$. Розрахувати повний потік потужності через оточуючу діелектрик конденсатора циліндричну поверхню з радіусом r_1 і висотою d .

Розв'язок. Для вирішення застосуємо циліндричну систему координат з віссю Z , що проходить по нормалі до пластин через їх центри. Вектор напруженості електричного поля матиме тільки компоненту по осі Z :

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z,$$

$$E_z(t) = \frac{U(t)}{d} = \frac{U \sin \omega t}{d} = E_z \cdot \sin \omega t = 10^5 \cdot \sin(2\pi \cdot 10^6 t), \text{ В/м.}$$

Густина струму зміщення $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}(t)}{\partial t}$. Для повітря $\varepsilon = 1$ і

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{3\text{M}} &= J_{3\text{M}z} \cdot \mathbf{e}_z = \varepsilon_0 \frac{\partial E(t)}{\partial t} \cdot \mathbf{e}_z = \omega \varepsilon_0 \cdot E_z \cdot \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_z = \\ &= 5,55 \cdot \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_z, \text{ А/м}^2. \end{aligned}$$

Повний струм зміщення

$$I_{3\text{M}} = J_{3\text{M}z} \cdot \pi r_1^2 = 5,55 \cdot \pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \cos \omega t = 0,0069 \cdot \cos \omega t, \text{ А.}$$

Вектор напруженості магнітного поля \mathbf{H} можна знайти з першого рівняння Максвелла у диференційній (1.64) або інтегральній формі (1.32). Скористаємося рівнянням (1.32) і врахуємо, що внаслідок симетрії задачі щодо осі Z силові лінії вектора \mathbf{H} будуть колами, а вектор \mathbf{H} матиме тільки одну складову \mathbf{H}_ϕ , залежну від координати r . Тому одержимо:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_\phi \cdot 2\pi r_1 = \int_S \mathbf{J}_{3\text{M}z} d\mathbf{S} = J_{3\text{M}z} \pi r_1^2 \text{ або } H_\phi = \frac{J_{3\text{M}z}}{2} r_1.$$

Розрахуємо значення векторів магнітної індукції і Пойнтінга при $r = r_1$:

$$H_{\varphi}(t) = \frac{1}{2} \cdot 5,55 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cos \omega t = 0,0555 \cdot \cos \omega t, \quad A/m;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{r=r_1}(t) &= \mathbf{e}_{\varphi} \cdot \mu_0 \cdot H_{\varphi}(t) = \mathbf{e}_{\varphi} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,0555 \cdot \cos \omega t = \\ &= \mathbf{e}_{\varphi} \cdot 6,96 \cdot 10^{-8} \cos \omega t, \quad Tл; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{r=r_1}(t) &= [\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\varphi}] \cdot E_z(t) \cdot H_{\varphi}(t) = -\mathbf{e}_r \cdot E_z(t) \cdot H_{\varphi}(t) = \\ &= -\mathbf{e}_r \cdot 10^5 \cdot \sin \omega t \cdot 0,0555 \cdot \cos \omega t = -\mathbf{e}_r \cdot \frac{10^5}{2} \cdot 0,0555 \cdot \sin 2\omega t, \quad Bm/m^2; \end{aligned}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot 0,0555 \cdot 10^5 = 0,2775 \cdot 10^4, \quad Bm/m^2.$$

Амплітуда потоку вектора Пойнтінга крізь циліндричну поверхню радіусом r_1 і висотою d

$$P = \int_{S_s} \Pi d\mathbf{S} = \Pi \cdot 2\pi r_1 d = 0,1745, \quad Bm.$$

Потік потужності буде реактивним, оскільки відсутні втрати і випромінювання електромагнітної енергії. Це видно із виразу для миттєвого значення вектора Пойнтінга $\Pi(t)$. Величина $\Pi(t)$ змінюється за гармонічним законом з подвоєною частотою.

1.5.2. Перенесення енергії по лінії передачі

За допомогою теореми Пойнтінга проілюструємо процес передачі електромагнітної енергії по двопроводовій лінії (рис. 1.36). Процес вважатимемо квазістаціонарним. Всі співвідношення розглядатимемо для миттєвих значень. Припустимо, що відстань між проводами набагато більша за їх радіуси і тому електромагнітне поле біля поверхні проводу має циліндричну симетрію.

Виділимо відрізок проводу завдовжки l на зовнішній ділянці кола, тобто поза джерелом (рис. 1.37). Густина струму в проводі $J = I/\pi r^2$, де I – струм у проводі; r – його радіус.

У точці, яка лежить на поверхні провідника, напруженість магнітного поля визначимо за законом повного струму (1.32): $H = \frac{I}{2\pi r}$. Густина

струму в провіднику (у тій самій точці) $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ і, отже, $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}$ (див. приклад 1.1). Напрями векторів \mathbf{H} і \mathbf{E} вказані на рис. 1.37.

Вектор Пойнтінга $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ спрямований за радіусом від поверхні провідника до його осі і чисельно рівний $\Pi = \frac{J}{\sigma} \frac{I}{2\pi r} = \frac{I^2}{\sigma \pi r^2 2\pi r}$. Потік енергії крізь поверхню даної ділянки провідника (за абсолютним значенням)

$$\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} = \frac{I^2 2\pi r l}{\sigma \pi r^2 2\pi r} = \frac{l}{\sigma \pi r^2} I^2 = RI^2, \quad (1.108)$$

де R – опір провідника, завдовжки l .

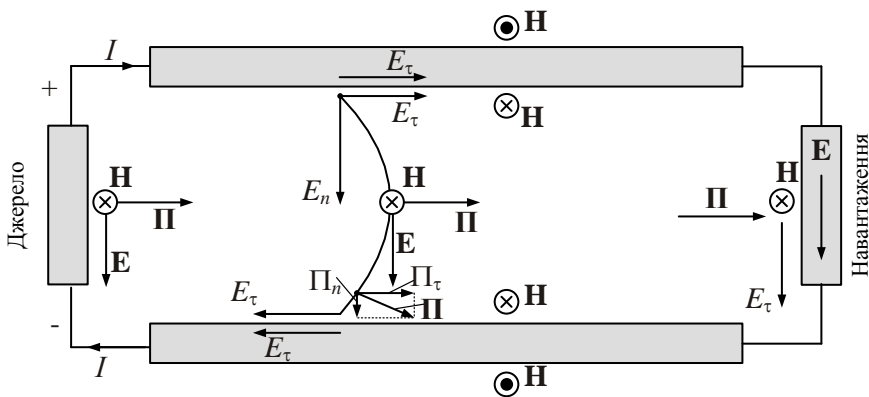


Рис. 1.36

Співвідношення (1.108) показує, що енергія електромагнітного поля, що витрачається на теплові втрати, надходить у провідник ззовні – з оточуючого провідник простору, в якому існує електромагнітне поле.

Усередині провідника рух енергії електромагнітного поля уздовж проводу відсутній, електромагнітна енергія (поле) не переміщується по проводах, а лише надходить в них з оточуючого простору в кількості, необхідній для покриття теплових втрат.

У простір, що оточує провід, електромагнітна енергія (електромагнітне поле) надходить з ділянки, яка містить стороннє поле, тобто із джерела.

Розглянемо тепер ділянку джерела, вважаючи для спрощення аналізу, що вона також має циліндричну форму (рис. 1.38).

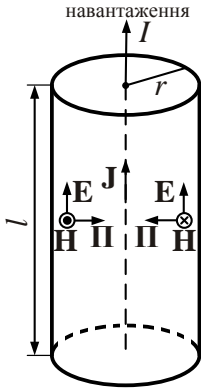


Рис. 1.37

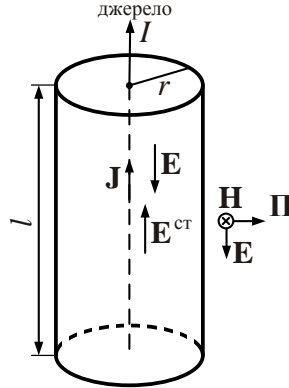


Рис. 1.38

Як видно з рисунка, вектор Пойнтінга в точці, що лежить на поверхні провідника, спрямований від провідника по радіусу назовні. Знайдемо потік цього вектора крізь поверхню провідника. Усередині джерела $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \mathbf{E})$, звідки $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{E}^{\text{ст}}$. Напруженість магніт-

ного поля $H = \frac{I}{2\pi r}$ і вектор Пойнтінга

$$\mathbf{\Pi} = \frac{[\mathbf{J}, \mathbf{H}]}{\sigma} + [(-\mathbf{E}^{\text{ст}}), \mathbf{H}]. \quad (1.109)$$

Перший вектор спрямований по радіусу всередину від поверхні до осі провідника (джерела), другий (з урахуванням знаку) – по радіусу назовні. Потік вектора Пойнтінга крізь поверхню джерела

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} &= -\frac{I \cdot I}{\sigma \pi r^2 2\pi r} 2\pi r l + E^{\text{ст}} \frac{I}{2\pi r} 2\pi r l = \\ &= E^{\text{ст}} I - I^2 \frac{l}{\sigma \pi r^2} = (\mathcal{E}^{\text{ст}} I - I^2 R_0), \end{aligned}$$

оскільки $E^{\text{ст}} l = \mathcal{E}^{\text{ст}}$ – сторона ЕРС джерела на ділянці завдовжки l , а $\frac{l}{\sigma \pi r^2} = R_0$ – внутрішній опір джерела на цій самій ділянці.

Отже, електромагнітна енергія, одержана за рахунок стороннього поля джерела з будь-якого іншого виду енергії, надходить, за винятком внутрішніх теплових втрат, в оточуюче джерело середовище і передається споживачу електромагнітним полем, збудженим в цьому середовищі.

Електромагнітна енергія, яка надходить у проводи, повністю поглинається (теплові втрати) згідно з законом Джоуля – Ленца.

Електромагнітне поле двопроводової лінії (лінії векторів \mathbf{E} , \mathbf{H} , $\mathbf{\Pi}$) схематично представлено на рис. 1.36.

Вектор напруженості електричного поля поза проводом має незначну складову, паралельну осям проводів, – тангенційну складову \mathbf{E}_τ . Тангенційна складова вектора напруженості електричного поля в точці, що лежить на зовнішній поверхні проводу, зумовлює спад напруги на одиницю довжини проводу.

Нормальна складова \mathbf{E}_n , що лежить у площині, нормальній до осей проводів, усередині проводу відсутня (вектор \mathbf{J} колінеарний осі проводу), поза проводом – відмінна від нуля.

Відповідно вектор Пойнтінга також має дві складові: паралельну проводам $\mathbf{\Pi}_\tau = [\mathbf{E}_n, \mathbf{H}]$ і нормальну $\mathbf{\Pi}_n = [\mathbf{E}_\tau, \mathbf{H}]$. Вектор $\mathbf{\Pi}_\tau$ спрямований від джерела до споживача, вектор $\mathbf{\Pi}_n$ – до поверхні найближчого проводу (у точках, які лежать в площині симетрії проводів, \mathbf{E}_τ і $\mathbf{\Pi}_n$, рівні нулю).

У лініях передачі з високим коефіцієнтом корисної дії повинна виконуватися умова $\mathbf{\Pi}_\tau \gg \mathbf{\Pi}_n$, оскільки складова $\mathbf{\Pi}_\tau$ зумовлює передачу енергії від джерела до навантаження, а складова $\mathbf{\Pi}_n$ визначає надходження в проводи електромагнітної енергії, необхідної для покриття теплових втрат.

Чим більша провідність проводів, тим менша складова $\mathbf{\Pi}_n$. Якщо втрати відсутні, то вектор Пойнтінга в будь-якій точці, що лежить поза проводами (усередині проводу він дорівнює нулю), паралельний їх осям. Структура силових ліній ЕМП в поперечному перерізі лінії передачі наведена на рис. 1.39.

Ця структура залежить від взаємного розміщення проводів в просторі і зумовлює напрямки векторів \mathbf{E} , \mathbf{H} і $\mathbf{\Pi}$, тобто і потоку енергії, що поширюється вздовж проводів.

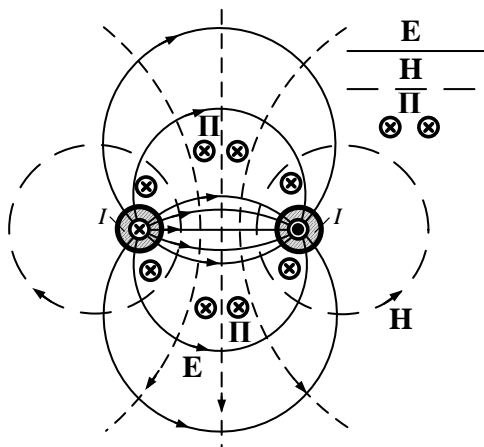


Рис. 1.39

Проводи як граничні поверхні формують електромагнітне поле: самі є споживачами електромагнітної енергії, що переходить в них у теплову енергію, а також є спрямовуючою системою, що транспортує енергію від джерела до навантаження.

1.5.3. Рівняння балансу комплексної потужності

Вище ми розглядали рівняння балансу електромагнітної енергії для миттєвих значень потужності. Великий практичний інтерес викликає вивчення монохроматичних полів, для опису яких широко використовують метод комплексних амплітуд. Безпосередня заміна дійсних функцій комплексними можлива лише для лінійних співвідношень, але у вирази (1.97) – (1.104) входять добутки змінних. Для використання комплексних функцій в нелінійних співвідношеннях слід застосовувати очевидну рівність

$$a(t) = a \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} [\dot{a}(t) + \dot{a}^*(t)].$$

Наприклад, вектор Пойнтінга може бути представлений у вигляді

$$\begin{aligned} \Pi &= [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{1}{4} [(\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t} + \dot{\mathbf{E}}^* e^{-j\omega t}), (\dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t} + \dot{\mathbf{H}}^* e^{-j\omega t})] = \\ &= \frac{1}{4} \{ [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}] e^{j2\omega t} + [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] + [\dot{\mathbf{E}}^*, \dot{\mathbf{H}}] + [\dot{\mathbf{E}}^*, \dot{\mathbf{H}}^*] e^{-j2\omega t} \}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $\dot{a} + \dot{a}^* = 2 \operatorname{Re}\{\dot{a}\}$, одержимо:

$$\mathbf{\Pi}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] + \frac{1}{4} \left\{ [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}] e^{j2\omega t} + [\dot{\mathbf{E}}^*, \dot{\mathbf{H}}^*] e^{-j2\omega t} \right\}. \quad (1.110)$$

Найчастіше цікавляться середнім за період T значенням потужності процесу. Як видно з (1.110), другий і третій доданки при інтегруванні за часом дають нуль, оскільки вони змінюються з подвоєною частотою. Перший доданок від часу не залежить, тому середнє за період значення вектора

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{\Pi}(t) dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*]. \quad (1.111)$$

Величина

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] \quad (1.112)$$

називається **комплексним вектором Пойнтінга**.

Середній за період потік енергії через поверхню S , що обмежує об'єм V (тобто потужність випромінювання з області V),

$$\bar{P}_S = \operatorname{Re} \oint_S \dot{\mathbf{\Pi}} d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_S [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] d\mathbf{S}. \quad (1.113)$$

Аналогічно знаходимо решту доданків, що входять до (1.96):

- середня потужність джоулевих втрат

$$\bar{P}_{дж} = \frac{1}{2} \int_V \sigma \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}^* dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV, \quad (1.114)$$

- середня потужність сторонніх джерел, яка виділяється в об'ємі V ,

$$\overline{P^{ст}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V \mathbf{J}^{ст} \dot{\mathbf{E}}^* dV \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V \dot{\mathbf{E}}^{ст} \mathbf{J}^* dV \right\}, \quad (1.115)$$

- середнє значення електричної і магнітної енергії

$$\left. \begin{aligned} \overline{W^e} &= \frac{1}{4} \int_V \varepsilon_a \dot{E} \dot{E}^* dV = \frac{1}{4} \int_V \varepsilon_a |\dot{E}|^2 dV \\ \overline{W^m} &= \frac{1}{4} \int_V \mu_a \dot{H} \dot{H}^* dV = \frac{1}{4} \int_V \mu_a |\dot{H}|^2 dV \end{aligned} \right\}, \quad (1.116)$$

а середнє значення за період зміни електромагнітної енергії

$$\frac{d\overline{W}}{dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{dt} dt = \frac{1}{T} (W|_{t=T} - W|_{t=0}) = 0,$$

тобто запас енергії W в об'ємі V в середньому за період постійний.

Отже, рівняння для середньої за період потужності можна записати у вигляді

$$\overline{P_\Sigma} + \overline{P^{\text{дж}}} = \overline{P^{\text{ст}}}. \quad (1.117)$$

З виразу (1.117) видно, що потужність сторонніх джерел в об'ємі V витрачається на джоулеві втрати $\overline{P^{\text{дж}}}$ і на випромінювання електромагнітної енергії через поверхню S . Якщо $\overline{P^{\text{ст}}} > \overline{P^{\text{дж}}}$, потік енергії в середньому виходить з об'єму V , якщо $\overline{P^{\text{ст}}} < \overline{P^{\text{дж}}}$ – енергія надходить в об'єм V .

Рівняння балансу для комплексної потужності виводиться аналогічно теоремі Пойнтінга для миттєвих значень (п. 1.5.1). Після виконання перетворень одержимо

$$\oint_S \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S} + j2\omega (\overline{W^m} - \overline{W^e}) + \overline{P^{\text{дж}}} = \overline{\dot{P}^{\text{ст}}}, \quad (1.118)$$

$$\text{де } \dot{P}^{\text{ст}} = \int_V \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^{\text{ст}} \mathbf{J}^* dV.$$

Виділяючи в (1.118) реальну та уявну частину, одержимо два незалежні рівняння:

$$\operatorname{Re} \oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV = \operatorname{Re} \int_V \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^{\text{ct}} \mathbf{J}^* dV, \quad (1.119)$$

$$\operatorname{Im} \oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} + 2\omega (\overline{W^m} - \overline{W^e}) = \operatorname{Im} \int_V \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^{\text{ct}} \mathbf{J}^* dV, \quad (1.120)$$

які відображують відповідно баланс активної і реактивної потужності в об'ємі V .

Активна потужність сторонніх джерел витрачається на втрати і на випромінювання через поверхню S , що збігається з (1.101).

Величини $\operatorname{Im} \oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S}$ і $\operatorname{Im} \int_V \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^{\text{ct}} \mathbf{J}^* dV$, що входять у (1.120),

рівні відповідно амплітуді реактивного потоку енергії через S і амплітуді реактивної потужності сторонніх джерел.

Реактивний потік енергії змінюється з подвоєною частотою 2ω , і половину періоду енергія надходить через поверхню S в об'єм V (потік позитивний), половину періоду (потік негативний) – з навколишнього простору в об'єм V .

Якщо об'єм V **ізолюваний** від навколишнього простору, то потік вектора Пойнтінга рівний нулю і виконуються співвідношення:

$$\operatorname{Re} \int_V \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^{\text{ct}} \mathbf{J}^* dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV, \quad (1.121)$$

$$\operatorname{Im} \int_V \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^{\text{ct}} \mathbf{J}^* dV = 2\omega (\overline{W^m} - \overline{W^e}). \quad (1.122)$$

У об'ємі V енергія електричного поля періодично перетворюється в енергію магнітного поля і навпаки. Якщо $W^m = W^e$, то ліва частина (1.122) рівна нулю, тобто потужність сторонніх джерел активна. В цьому випадку в системі (об'ємі V) спостерігається **резонанс**.

Відношення

$$Q = \frac{\overline{\omega W}}{P_{\text{дж}}} = 2\pi \frac{\overline{W}}{\Delta W} \quad (1.123)$$

називають **добротністю** системи. У співвідношенні $\overline{W} = \overline{W^m} + \overline{W^e}$ –

запас енергії в системі, $\Delta W = \overline{P^{дж}} = \frac{1}{2} \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV$ – зміна енергії

системи за період за рахунок теплових втрат.

Наявність поляризаційних втрат і втрат на намагнічення можна врахувати введенням комплексних відносних діелектричної і магнітної проникностей середовища $\dot{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon''$, $\dot{\mu} = \mu' - j\mu''$. Величини, що входять у (1.118), приймають вигляд

$$\overline{P^{дж}} = \int_V \left[\frac{\omega \epsilon_0 \epsilon''}{2} \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}^* + \frac{\omega \mu_0 \mu''}{2} \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}^* \right] dV,$$

$$\overline{W^e} = \frac{\epsilon_0}{4} \int_V \epsilon' \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}^* dV, \quad \overline{W^m} = \frac{\mu_0}{4} \int_V \mu' \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}^* dV.$$

Введення комплексних проникностей $\dot{\epsilon}_a$, $\dot{\mu}_a$ відображує інерційність процесів поляризації і намагнічення та пов'язані з цим втрати.

Зазначимо, що виконані в даному підрозділі перетворення справедливі для ізотропного середовища. У разі анізотропії висновки справедливі, якщо тензори $\vec{\epsilon}_a$ і $\vec{\mu}_a$ симетричні: $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$, $\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}$, ..., $\mu_{xy} = \mu_{yx}$, $\mu_{xz} = \mu_{zx}$, ...

Задачі для самостійного розв'язку

1. Визначити вектор Пойнтінга електромагнітного поля, вектори якого дорівнюють

а) $\mathbf{D} = \mathbf{e}_y D_y$, $\mathbf{B} = \mathbf{e}_x B_x + \mathbf{e}_z B_z$,

б) $\mathbf{D} = \mathbf{e}_\varphi D_\varphi$, $\mathbf{B} = \mathbf{e}_r B_r + \mathbf{e}_z B_z$.

2. По провідниках коаксіального кабелю пропущено змінний струм з частотою $f = 1 \text{ МГц}$. Визначити:

а) густину потоку енергії, якщо

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r 10^{-2} \cos(\omega t - 50z)/r, \quad B/m,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi 4 \cdot 10^{-5} \cos(\omega t - 50z)/r, \quad A/m;$$

б) середню потужність, передавану по кабелю, якщо радіуси внутрішнього і зовнішнього провідників відповідно $r_1 = 1 \text{ мм}$, $r_2 = 4 \text{ мм}$ і

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r 25 \cos(\omega t - \beta z) / r, \quad B/m,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi 80 \cos(\omega t - \beta z) / r, \quad A/m.$$

3. Визначити густину потужності теплових втрат в циліндричному мідному провіднику радіусом $r = 4 \text{ мм}$ з постійним струмом $I = 2 \text{ МА}$.

4. На висоті 2 км від поверхні Землі знаходиться грозова хмара, що займає площу 3 км^2 . Утворене між Землею і хмарою електричне поле має однакову в усіх точках напруженість $E = 1 \text{ МВ/м}$. Визначити енергію електричного поля.

5. Джерело, що знаходиться в центрі сферичної системи координат, збуджує в навколишньому просторі електромагнітне поле, вектори якого

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_\theta \frac{4 \cdot 10^{-3}}{r} \sin \theta \sin(\omega t - kr), \quad B/m,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \frac{1,06 \cdot 10^{-5}}{r} \sin \theta \sin(\omega t - kr), \quad A/m.$$

Визначити середню потужність випромінювання джерела.

Питання для самоперевірки

1. Отримайте вираз для балансу енергії електромагнітного поля в інтегральній формі і поясніть фізичний зміст доданків, що входять в цей вираз.

2. Використовуючи рівняння Максвелла, отримайте вираз для балансу енергії електромагнітного поля в диференційній формі.

3. Запишіть вираз для вектора Пойнтінга і поясніть його фізичний зміст.

4. Вектори ЕМП задані в комплексній формі:

а) поясніть, в чому полягає особливість виразу квадратичних величин;

б) запишіть середнє значення вектора Пойнтінга.

2. ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ І ТЕОРЕМИ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

2.1. Класифікація задач електродинаміки

Рішення багатьох науково-технічних проблем, які виникають при розробці радіотехнічних систем різного типу, систем передачі електромагнітної енергії та ін., потребує знання структури ЕМП в певних областях простору. Для цього необхідно вміти розв'язувати відповідні електродинамічні задачі. Ці задачі можна розділити на **прямі** і **зворотні**.

Прямі задачі – це задачі **аналізу**, коли за заданими джерелами поля (електричними і, в загальному випадку, магнітними) необхідно знайти структуру поля в заданій області простору.

Зворотні задачі – задачі **синтезу** – коли за відомими вимогами до структури ЕМП в певній частині простору необхідно знайти розподіл джерел, які її (структуру ЕМП) забезпечують.

Прямі і зворотні задачі електродинаміки можна, в свою чергу, розділити на **внутрішні** і **зовнішні**.

Внутрішні задачі полягають в знаходженні електромагнітного поля в довільній точці M усередині об'єму V , обмеженого поверхнею S (рис. 2.1, *a*). Відповідно **зовнішні** задачі зводяться до вивчення ЕМП в області V , що знаходиться поза V' (рис. 2.1, *б*).

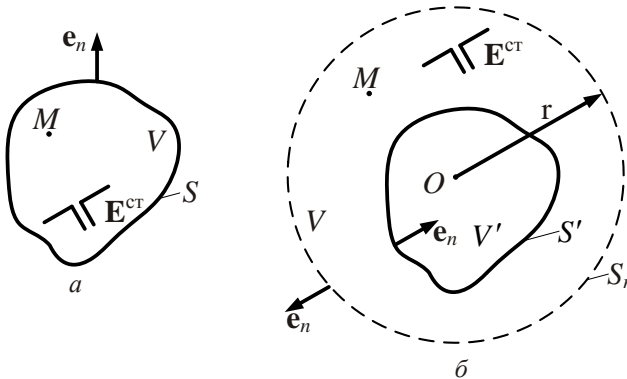


Рис. 2.1

Внутрішні і зовнішні задачі часто формулюються як **граничні**, коли шукані (задані) ЕМП мають задовольняти певним граничним умовам на поверхні S . Через складність структури реальних об'єктів і середовищ

для їх опису застосовують різні електродинамічні моделі. Ці моделі як правило, спрощені, що дозволяє полегшити розв'язання рівнянь електродинаміки.

Розв'язання задач електродинаміки у ряді випадків можна істотно прискорити, якщо скористатися властивостями рівнянь Максвелла. Ці властивості виявляються в принципах і теоремах, яким підпорядковуються рівняння електродинаміки.

2.2. Принцип суперпозиції

Розглянемо спочатку принцип суперпозиції (накладання).

У системі рівнянь Максвелла можна виділити перші два (1.32), (1.33), які описують закон повного струму і закон електромагнітної індукції, рівняння (1.34), (1.35), що описують властивості джерел ЕМП, і матеріальні рівняння (1.41) – (1.43), які характеризують електродинамічні властивості середовища.

Перші чотири рівняння Максвелла є диференційними рівняннями в часткових похідних. У більшості практичних цікавих випадків можна обгрунтовано вважати, що матеріальні середовища, в яких розглядають електромагнітні явища, є **лінійними**. Для таких середовищ справедливий фундаментальний **принцип суперпозиції електромагнітних полів**.

Як виходить з курсу математичного аналізу, сума часткових розв'язків будь-якого лінійного диференційного рівняння є його розв'язком. Якщо в даній області простору розподілено N сторонніх джерел у вигляді струмів з густиною \mathbf{J}_i^{ct} ($i = \overline{1, N}$), кожний з яких збуджує поле $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$, то відповідно до принципу суперпозиції результуюче поле N джерел при їх одночасній дії дорівнює сумі полів, збуджуваних окремими джерелами:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{H} = \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_i. \quad (2.1)$$

При цьому вважають, що джерела \mathbf{J}_i^{ct} не впливають одне на одного, тобто розподіли \mathbf{J}_i^{ct} не змінюються при одночасній дії всіх джерел (джерела „не впливають” одне на одного).

Принцип суперпозиції безпосередньо виходить з лінійності операцій диференціювання за часом і координатами в рівняннях (1.32) – (1.35).

З рівнянь (2.1) виходить, що електромагнітні поля в просторі, які збуджуються різними джерелами, не взаємодіють, „не заважають” один одному і результуюче поле дорівнює векторній сумі полів $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$, збуджуваних всіма джерелами.

Принцип суперпозиції (властивість лінійності) істотно спрощує вирішення багатьох електродинамічних задач. Проте цей принцип не можна застосовувати до нелінійних операцій, зокрема до визначення потужності. Так, наприклад, результуючий вектор Пойнтінга

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i, \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_i \right] \neq \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^N [\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i] \quad (2.2)$$

не дорівнює сумі векторів Пойнтінга окремих джерел.

2.3. Теорема єдиності розв'язання рівнянь Максвелла

2.3.1. Фізичний аналіз умов єдиності розв'язання рівнянь Максвелла

Для знаходження векторів поля необхідно розв'язати систему рівнянь Максвелла. Оскільки вона є системою диференційних рівнянь в часткових похідних, то шукані вектори електромагнітного поля визначатимуться не однозначно, а з точністю до довільних функцій. Останні утворюють нескінченну низку лінійних незалежних часткових розв'язків. Розглянемо питання про те, які додаткові умови потрібно задати, щоб система рівнянь Максвелла мала єдиний розв'язок. Відповідь на це питання дає теорема єдиності. Вона стверджує, що, якщо знайдено електромагнітне поле, що є розв'язанням даної задачі і задовольняє теорему єдиності, то ми можемо бути упевнені в тому, що тільки воно реальне, а інші поля за даних умов існувати не можуть.

Щоб ясніше зрозуміти сутність вимог теореми єдиності, звернемося спочатку до фізичного аналізу проблеми. З цією метою з'ясуємо, чим зумовлені поля в точці M усередині об'єму, в якому ми хочемо однозначно визначити поле (рис. 2.1).

1. Ці поля створюються джерелами сторонніх сил $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ (або $\mathbf{J}^{\text{ст}}$), розташованими в межах об'єму V . Нехай з моменту часу t_0 відомо

як працюють джерела (генератори) сторонніх сил. Тоді ми можемо визначити збуджувані ними поля усередині об'єму V .

2. Вони можуть збуджуватися тими полями, які існували до включення генераторів, наприклад генераторами, вимкненими раніше моменту t_0 .

3. Поля в точці спостереження можуть створюватися і тими джерелами сторонніх сил, які лежать поза даним об'ємом. Ці джерела можуть знаходитися в будь-якій точці області V' .

Якщо задати розподіл всіх сторонніх сил як внутрішніх для V , так і зовнішніх, то можна однозначно визначити поле, коли відомі залишкові поля. Проте опис розподілу полів в усіх точках поза V – завдання нереальне, і прямим шляхом однозначно визначити поля неможливо.

Вихід з цього положення підказує теорія близькодії та встановлений факт про хвильовий характер розподілу поля. Дійсно, всі зовнішні поля поширюватимуться від точки до точки і, отже, обов'язково перетинатимуть межу, що відокремлює даний об'єм від зовнішнього простору. Тому дані про весь простір зовні можна замінити умовами на поверхні S – межі області V , які враховуватимуть проникнення полів в об'єм ззовні ($S = S' + S_r$, для рис. 2.1, б).

Таким чином, з фізичних міркувань можна зробити висновки, що для однозначного розрахунку полів необхідно знати:

- 1) розподіл сторонніх сил усередині даного об'єму;
- 2) значення внутрішніх полів у момент початку дії сторонніх сил;
- 3) значення полів на межі поділу в кожен момент часу.

Оскільки остання умова має відобразити прихід полів в об'єм V ззовні, а проникнення енергії всередину об'єму характеризується лише нормальною складовою вектора Пойнтінга Π , то, мабуть, досить знати не всі складові векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} на межі, а лише тангенційні \mathbf{E}_τ і \mathbf{H}_τ , через те, що Π_n зв'язана лише з цими складовими.

Оскільки між векторами напруженості електричного і магнітного полів існує певний зв'язок, то дані про явища на межі можуть бути ще більш обмеженими.

Такі попередні зауваження.

2.3.2. Теорема єдиності розв'язання внутрішньої задачі електродинаміки

Рівняння Максвелла дозволяють знайти єдині значення електромагнітних величин для кожної внутрішньої точки M об'єму V у будь-який момент $t > t_0$, якщо задані:

- 1) всі сторонні ЕРС усередині об'єму для моменту часу $t > t_0$;
- 2) значення тангенційних складових: або вектора \mathbf{E} , або вектора \mathbf{H} для кожної точки поверхні S (рис. 2.1, a), що відокремлює даний об'єм V від зовнішнього при $t > t_0$;
- 3) значення векторів \mathbf{E} , \mathbf{H} у всіх внутрішніх точках в момент t_0 .

Доведемо теорему єдиності.

Припустимо, що, всупереч твердженням теореми, рівняння Максвелла дають не один, а два розв'язки: \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 і \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 .

Доведемо, що обидва розв'язки мають збігатися. З цією метою введемо до розгляду різницеве поле, яке описується векторами:

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \quad (2.3)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2. \quad (2.4)$$

Звернемо увагу на те, що рівняння Максвелла і додаткові співвідношення лінійні і, отже, виконується принцип суперпозиції: якщо вектори полів 1 і 2 є розв'язками рівнянь Максвелла, то їх різниці $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{H}}$ також є розв'язками.

Розглянемо, чим різницеве поле відрізняється від початкових полів.

1. Перш за все, в різницевому полі відсутні сторонні сили. Оскільки за умовою (1) $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ задані, то $\mathbf{E}_1^{\text{ст}} = \mathbf{E}_2^{\text{ст}}$, тому

$$\hat{\mathbf{E}}^{\text{ст}} = \mathbf{E}_1^{\text{ст}} - \mathbf{E}_2^{\text{ст}} = 0. \quad (2.5)$$

2. Нормальна складова вектора $\hat{\mathbf{P}}$ в різницевому полі рівна нулю в усіх точках граничної поверхні. Дійсно, $\mathbf{\Pi}_n = [\mathbf{E}_\tau, \mathbf{H}_\tau]$, тому

$$\hat{\mathbf{P}}_n = [(\mathbf{E}_{\tau 1} - \mathbf{E}_{\tau 2}), (\mathbf{H}_{\tau 1} - \mathbf{H}_{\tau 2})].$$

Але за умовою (2) або \mathbf{E}_τ , або \mathbf{H}_τ задано для будь-якої граничної точки. У тих точках, де задано \mathbf{E}_τ , завжди $\mathbf{E}_{\tau_1} - \mathbf{E}_{\tau_2} = \hat{\mathbf{E}}_\tau = 0$, і, відповідно, $\hat{\mathbf{P}}_n = 0$. У точках, де задано \mathbf{H}_τ , завжди $\hat{\mathbf{H}}_\tau = 0$ і $\hat{\mathbf{P}}_n = 0$. Таким чином, в різницевому полі в усіх точках граничної поверхні

$$\hat{\mathbf{P}}_n = 0. \quad (2.6)$$

Це означає, що різницеве поле не обмінюється енергією із зовнішньою областю (рис. 2.1, а).

3. Початкові значення різницевих векторів $\hat{\mathbf{E}}$ і $\hat{\mathbf{H}}$ у всіх внутрішніх точках об'єму дорівнюють нулю.

Дійсно, оскільки початкові значення $\mathbf{E}(M, t_0)$ і $\mathbf{H}(M, t_0)$ за умовою (3) задані, то

$$\mathbf{E}_1(M, t_0) = \mathbf{E}_2(M, t_0),$$

і у довільній внутрішній точці

$$\mathbf{E}_1(M, t_0) - \mathbf{E}_2(M, t_0) = \hat{\mathbf{E}}(M, t_0) = 0.$$

Аналогічно і $\hat{\mathbf{H}}(M, t_0) = 0$ в усіх точках об'єму V .

Отже, різницеве поле характеризується такими властивостями:

- у ньому відсутні сторонні сили;
- у цьому полі відсутній потік енергії через границю об'єму;
- початкові значення всіх векторів поля у всіх внутрішніх точках об'єму нульові, тобто при $t = t_0$ різницеве поле відсутнє.

Запишемо тепер теорему Пойнтінга для різницевого поля в області V . Відповідно до виразу (1.106) маємо

$$\frac{d\hat{W}}{dt} = - \int_V \frac{\hat{\mathbf{J}}^2}{\sigma} dV + \int_V \hat{\mathbf{J}} \hat{\mathbf{E}}^{\text{ct}} dV - \oint_S \hat{\mathbf{P}} dS.$$

З огляду на умови (2.5) і (2.6) останні два інтеграли в правій частині дорівнюють нулю. Тоді

$$\frac{d\hat{W}}{dt} = -\int_V \frac{\hat{\mathbf{J}}^2}{\sigma} dV. \quad (2.7)$$

Але сам інтеграл в правій частині як сума невід'ємних доданків J^2 або позитивний, або рівний нулю, якщо скрізь $J^2 = 0$. Тому

$$\frac{d\hat{W}}{dt} \leq 0.$$

Це означає, що енергія \hat{W} може або спадати, або бути постійною. Але в початковий момент $\hat{W} = 0$, оскільки початкові значення $\mathbf{E}(M, t_0)$ і $\mathbf{H}(M, t_0)$ нульові.

Енергія – величина істотно позитивна, в крайньому разі, вона може дорівнювати нулю. Отже, енергія від нуля спадати не може і залишається єдина можливість $\hat{W} = \text{const}$. Але при $t = t_0$ $\hat{W} = 0$, а значить, завжди $\hat{W} = 0$. Разом з тим

$$\hat{W} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_{i \in V} \left(\frac{\varepsilon \hat{\mathbf{E}}^2}{2} + \frac{\mu \hat{\mathbf{H}}^2}{2} \right) \Delta V_i. \quad (2.8)$$

Рівність нулю співвідношення (2.8) означає, що кожен доданок рівний нулю, тобто в кожній точці об'єму завжди виконується умова $\hat{\mathbf{E}}^2 = 0, \hat{\mathbf{H}}^2 = 0$. Отже, різниця між рішеннями \mathbf{E}_1 і \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_1 і \mathbf{H}_2 дорівнює нулю в усіх точках, і вони завжди збігаються в усіх точках об'єму, що і треба було довести.

2.3.3. Умови єдиності розв'язання зовнішньої задачі електродинаміки

Розглянемо доведення **теорема єдиності для зовнішньої задачі**. Як і у випадку внутрішньої задачі, вектори різницевого поля $\hat{\mathbf{E}}$ і $\hat{\mathbf{H}}$ характеризуються вказаними у п.2.3.2 властивостями і для них теорема Пойнтінга запишеться у вигляді

$$\frac{d\hat{W}}{dt} = -\int_{V'} \frac{\hat{\mathbf{J}}^2}{\sigma} dV + \int_V \hat{\mathbf{J}} \hat{\mathbf{E}}^{\text{ст}} dV - \oint_{S=S'+S_r} (\hat{\mathbf{n}} \mathbf{e}_n) dS. \quad (2.9)$$

Тут S_r – поверхня сфери нескінченно великого радіуса ($r \rightarrow \infty$), що обмежує область V зовні (рис. 2.1, б). Наведені вище міркування повністю застосовні і до співвідношення (2.9) за умови, що

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} [\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}] d\mathbf{S} = 0. \quad (2.10)$$

При збільшенні r площа поверхні S_r зростає пропорційно r^2 , отже, для виконання умови (2.10) необхідно, щоб абсолютна величина $\mathbf{\Pi} = [\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}]$ при $r \rightarrow \infty$ спадала б швидше, ніж $1/r^2$, тобто щоб амплітуди векторів $\hat{\mathbf{E}}$ і $\hat{\mathbf{H}}$ спадали б швидше, ніж $1/r$.

Таким чином, зовнішня задача електродинаміки має єдиний розв'язок, якщо крім розглянутих початкових і граничних умов виконуватиметься умова спадання амплітуд векторів поля із зростанням відстані не повільніше, ніж $1/r$. В усталеному режимі амплітуди полів, енергія якого поширюється від джерел, спадають в радіальних напрямках за законом $1/r$, а за наявності втрат в реальних середовищах як $1/r \cdot e^{-\alpha r}$ (α – деяка стала, що визначає швидкість ослаблення хвиль за наявності втрат). Тому підінтегральний вираз у (2.10) при $r \rightarrow \infty$ прямуватиме до нуля як $1/r^2 \cdot e^{-2\alpha r}$ і інтеграл (2.10) (у припущенні кінцевої, хоча б і дуже малої провідності простору) дає нуль. Тоді із співвідношення (2.9) виходить, що, як і для внутрішньої задачі, $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{H}} = 0$.

Отже, з викладеного вище видно, що складність і строгість доведення теореми єдиності для зовнішньої задачі пов'язані з вимогою, яка пред'являється до поведінки поля на нескінченності.

У середовищі без втрат теорема єдиності розв'язання зовнішньої задачі забезпечується при виконанні умов (для монохроматичного поля):

$$\left. \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\dot{\mathbf{E}} + \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} [\mathbf{e}_r, \dot{\mathbf{H}}] \right) \right] &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\dot{\mathbf{H}} - \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} [\mathbf{e}_r, \dot{\mathbf{E}}] \right) \right] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.11)$$

Ці вимоги в електродинаміці відомі як **умови випромінювання (умови Зоммерфельда)**. Умови випромінювання еквівалентні вимозі, щоб при $r \rightarrow \infty$ поле мало характер поперечної хвилі, що поширюється уздовж напрямку \mathbf{e}_r .

Зазначимо також, що, коли поля не відомі у момент часу t_0 (не виконується умова (3)), то за відсутності втрат в області V розв'язання внутрішньої задачі може бути неоднозначним. Цьому відповідають, наприклад, незагасаючі поля (збуджені раніше) в ідеальному об'ємному резонаторі.

2.4. Лема Лоренца. Теорема взаємності

Вирішення ряду задач електродинаміки, зокрема задач антенної техніки, можна істотно спростити, якщо застосувати теорему взаємності. Теорема взаємності заснована на лемі Лоренца, яка встановлює зв'язок між сторонніми струмами в двох різних областях простору і збуджуваними ними полями.

Нехай в ізотропному лінійному стаціонарному середовищі з параметрами $\epsilon_a, \mu_a, \sigma$ задані два розподіли сторонніх струмів з комплексними амплітудами $\mathbf{J}_1^{\text{ст}}$ і $\mathbf{J}_2^{\text{ст}}$, що змінюються гармонічно з частотою ω .

Перша система сторонніх струмів розподілена в об'ємі V_1 і збуджує електромагнітне поле з векторами комплексних амплітуд $\dot{\mathbf{E}}_1$ і $\dot{\mathbf{H}}_1$, друга розподілена в об'ємі V_2 і збуджує електромагнітне поле з векторами комплексних амплітуд $\dot{\mathbf{E}}_2$ і $\dot{\mathbf{H}}_2$ (рис. 2.2).

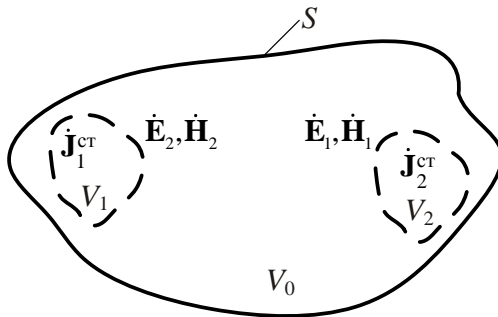


Рис. 2.2

Запишемо перше і друге рівняння Максвелла для цих полів:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_1 = \dot{\mathbf{J}}_1^{\text{ct}} + j\omega \dot{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_1 \quad (1^*) \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_2 = \dot{\mathbf{J}}_2^{\text{ct}} + j\omega \dot{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_2, \quad (3^*)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_1 = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_1 \quad (2^*) \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_2 = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_2. \quad (4^*)$$

Помножимо скалярно вираз (1*) на $\dot{\mathbf{E}}_2$, вираз (4*) на $\dot{\mathbf{H}}_1$, після чого віднімемо від першого добутку другий:

$$\dot{\mathbf{E}}_2 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\mathbf{H}}_1 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_2 = \dot{\mathbf{J}}_1^{\text{ct}} \dot{\mathbf{E}}_2 + j\omega \dot{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{E}}_2 + j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1. \quad (2.12)$$

Так само помножимо (2*) на $\dot{\mathbf{H}}_2$, а (3*) на $\dot{\mathbf{E}}_1$ і віднімемо від другого добутку перший:

$$\dot{\mathbf{E}}_1 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{H}}_2 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathbf{J}}_2^{\text{ct}} \dot{\mathbf{E}}_1 + j\omega \dot{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{E}}_1 + j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2. \quad (2.13)$$

Врахуємо, що справедлива тотожність $\operatorname{div} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}$ і віднімемо вираз (2.13) від (2.12). Тоді одержимо

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_2] - \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_1] = \dot{\mathbf{J}}_1^{\text{ct}} \dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_2^{\text{ct}} \dot{\mathbf{E}}_1. \quad (2.14)$$

Співвідношення (2.14), що встановлює зв'язок між сторонніми струмами і збуджуваними ними полями в двох різних точках простору, називається **лемою Лоренца в диференційній формі**.

Одержимо лему Лоренца в інтегральній формі.

Розглянемо область V_0 простору, обмежену поверхнею S . Ця поверхня може бути поверхнею поділу середовищ або будь-якою допоміжною поверхнею, що охоплює повністю або частково сторонні струми.

Вважаючи, що область V_0 включає об'єми V_1 і V_2 , проінтегруємо вираз (2.14) по області V_0 . Застосуємо теорему Остроградського – Гаусса і врахуємо, що сторонні струми відмінні від нуля тільки в областях V_1, V_2 . Тоді одержимо **лему Лоренца в інтегральній формі**:

$$\oint_S \{ [\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_2] - [\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_1] \} dS = \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_1^{\text{ct}} \dot{\mathbf{E}}_2 dV - \int_{V_2} \dot{\mathbf{J}}_2^{\text{ct}} \dot{\mathbf{E}}_1 dV. \quad (2.15)$$

Лема Лоренца (2.15) встановлює зв'язок між полями і струмами, що збуджують їх, при цьому враховується вплив на електромагнітне поле форми і просторового розміщення поверхні S .

Нехай сторонні струми задані в необмеженому просторі. В цьому випадку поверхня S знаходиться на нескінченності і відповідно до умов випромінювання ліва частина виразу (2.15) дорівнює нулю. Тоді одержимо

$$\int_V \mathbf{J}_1^{\text{ст}} \dot{\mathbf{E}}_2 dV = \int_V \mathbf{J}_2^{\text{ст}} \dot{\mathbf{E}}_1 dV. \quad (2.16)$$

Дане співвідношення називається **теоремою взаємності для необмеженого простору**.

Теорема взаємності справедлива також у тому випадку, якщо поряд із сторонніми джерелами електричного струму існують магнітні джерела.

Фізичний зміст теореми взаємності розглянемо на прикладі.

Приклад 2.1. Нехай об'єми V_1 і V_2 займають дві прямолінійні антени з довжинами l_1 і l_2 і перетинами ΔS_1 і ΔS_2 , розташовані на відстані, що значно перевищує лінійні розміри їх перетинів (рис. 2.3). Доведемо, що ЕРС, збуджувана в другій антені змінним струмом першої антени, рівна ЕРС, збуджуваній у першій антені таким же струмом другої антени. При цьому будемо вважати, що довжина електромагнітної хвилі значно більша, ніж розміри антен.

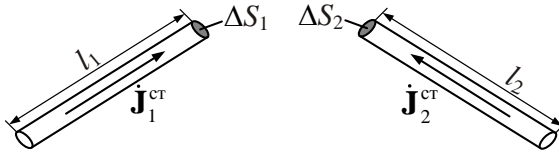


Рис. 2.3

Розв'язок. Припустимо, що в першій антені діє сторонній струм з вектором комплексної амплітуди $\mathbf{J}_1^{\text{ст}}$, а в другій – $\mathbf{J}_2^{\text{ст}}$.

Застосуємо до цих антен теорему взаємності, вважаючи, що $V_1 = l_1 \Delta S_1$ (об'єм першої антени), а $V_2 = l_2 \Delta S_2$ – об'єм другої антени. Тоді відповідно до (2.16) запишемо

$$\int_{l_1 \Delta S_1} \mathbf{J}_1^{\text{ст}} \dot{\mathbf{E}}_2 d\mathbf{S}_1 d\mathbf{l}_1 = \int_{l_2 \Delta S_2} \mathbf{J}_2^{\text{ст}} \dot{\mathbf{E}}_1 d\mathbf{S}_2 d\mathbf{l}_2.$$

Оскільки лінійні розміри перетинів антен значно менші від відстаней між ними, можна вважати, що по всьому перетину ΔS_1 вектор комплексної амплітуди $\dot{\mathbf{E}}_2$ постійний і, відповідно, по всьому перетину ΔS_2 вектор $\dot{\mathbf{E}}_1$ постійний. Це дозволяє в лівій частині винести за знак першого (по порядку дії) інтегрування $\dot{\mathbf{E}}_2$, а в правій частині – $\dot{\mathbf{E}}_1$:

$$\int_{l_1} \dot{\mathbf{E}}_2 \left(\int_{\Delta S_1} \mathbf{J}_1^{\text{ct}} d\mathbf{S}_1 \right) d\mathbf{l}_1 = \int_{l_2} \dot{\mathbf{E}}_1 \left(\int_{\Delta S_2} \mathbf{J}_2^{\text{ct}} d\mathbf{S}_2 \right) d\mathbf{l}_2. \quad (2.17)$$

Внутрішні інтеграли в (2.17) відповідно до (1.15) представляють комплексні амплітуди повних струменів антен:

$$\int_{\Delta S_1} \mathbf{J}_1^{\text{ct}} d\mathbf{S}_1 = \dot{I}_1^{\text{ct}}, \quad \int_{\Delta S_2} \mathbf{J}_2^{\text{ct}} d\mathbf{S}_2 = \dot{I}_2^{\text{ct}}.$$

З урахуванням цього можна записати

$$\int_{l_1} \dot{\mathbf{E}}_2 \dot{I}_1^{\text{ct}} d\mathbf{l}_1 = \int_{l_2} \dot{\mathbf{E}}_1 \dot{I}_2^{\text{ct}} d\mathbf{l}_2.$$

Довжини антен значно менші за довжини електромагнітної хвилі, що дозволяє вважати комплексну амплітуду струму даної антени однаковою в усіх її перетинах (по всій довжині). За цієї умови \dot{I}_1^{ct} і \dot{I}_2^{ct} можуть бути винесені за знак інтегрування і рівняння (2.17) прийме вигляд

$$\dot{I}_1^{\text{ct}} \dot{\mathcal{E}}_{12} = \dot{I}_2^{\text{ct}} \dot{\mathcal{E}}_{21}, \quad (2.18)$$

де $\dot{\mathcal{E}}_{12} = \int_{l_1} \dot{\mathbf{E}}_2 d\mathbf{l}_1$ – комплексна амплітуда ЕРС, що наводиться в першій

антені струмом другої антени; $\dot{\mathcal{E}}_{21} = \int_{l_2} \dot{\mathbf{E}}_1 d\mathbf{l}_2$ – комплексна амплітуда ЕРС,

що наводиться в другій антені струмом першої антени.

Остаточно вираз (2.15) можна записати у вигляді

$$\frac{\dot{I}_1^{\text{ct}}}{\dot{\mathcal{E}}_{21}} = \frac{\dot{I}_2^{\text{ct}}}{\dot{\mathcal{E}}_{12}}. \quad (2.19)$$

Якщо $\dot{I}_1^{\text{ct}} = \dot{I}_2^{\text{ct}}$, то $\dot{\mathcal{E}}_{12} = \dot{\mathcal{E}}_{21}$, що й потрібно було довести.

Таким чином, з (2.19) виходить, що **відношення струму в першій антені до ЕРС в ній, зумовленої струмом другої антени, рівне відношенню струму в другій антені до ЕРС в ній, зумовленої струмом першої антени.** Принцип взаємності (2.19) використовується в теорії антен для доведення ідентичності характеристик однієї і тієї ж антени в режимі передавання і приймання.

2.5. Принцип переставної двоїстості

2.5.1. Симетрична система рівнянь електромагнітного поля

Джерелами електромагнітного поля є струми \mathbf{J} і заряди q , а також сторонні струми \mathbf{J}^{ct} і заряди q^{ct} , які відображають дію неелектричних сил на електромагнітні процеси. Дія електричних струмів і зарядів враховується в правих частинах системи рівнянь Максвелла (1.81).

Як відомо, магнітних струмів і зарядів в природі не існує. Разом з тим, у ряді випадків при дослідженні збудження електромагнітних полів зручно ввести в розгляд густину магнітних струмів \mathbf{J}_m^{ct} і густину магнітних зарядів ρ_m^{ct} .

При цьому друге рівняння Максвелла запишеться у вигляді

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_m^{\text{ct}}, \quad (2.20)$$

де \mathbf{J}_m^{ct} – вектор об'ємної густини сторонніх магнітних струмів, збуджувачих змінне електричне поле \mathbf{E} , а четверте – у вигляді

$$\text{div } \mathbf{B} = \rho_m^{\text{ct}}, \quad (2.21)$$

де ρ_m^{ct} – об'ємна густина сторонніх магнітних зарядів.

Розмірність густини магнітного струму $[\mathbf{J}_m^{\text{ct}}] = B/m^2$ (густина електричного струму A/m^2), **розмірність густини магнітних зарядів** $[\rho_m^{\text{ct}}] = B \cdot c/m^3$ (розмірність густини електричного заряду $[\rho] = Кл/m^3 = A \cdot c/m^3$).

Ще раз підкреслимо, що в природі немає «магнітних зарядів» одного знака як у позитивних або негативних електричних зарядів:

навіть у дуже малому об'ємі магнітної речовини завжди присутні два полюси. Разом з тим між електричними зарядженими і намагніченими тілами вбачається і пряма аналогія: намагнічені тіла нагадують тіла, що несуть електричні заряди, об'єднані в систему диполів з переважною орієнтацією осей. Вказана аналогія і дала підставу для введення в рівняння Максвелла магнітних сил.

Система рівнянь Максвелла із введеними магнітними струмами і зарядами записується так:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}_e + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mathbf{J}_m - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

У рівняннях (2.19) $\mathbf{J}_e = \mathbf{J} + \mathbf{J}^{\text{ct}}$, $\mathbf{J}_m = \mathbf{J}_m^{\text{ct}}$.

Рівняння Максвелла із введеними сторонніми магнітними та електричними струмами і зарядами утворюють симетричну систему рівнянь електромагнітного поля з однаковим видом лівих і правих частин. В цьому випадку істотно полегшується розв'язання ряду електродинамічних задач, оскільки можливо знайти магнітні вектори на основі обчислень, виконаних для випадку електричних векторів.

За необхідності відповідно до постановки задачі величини \mathbf{J}_m , ρ_m^{ct} на будь-якому етапі обчислень або в остаточних результатах можна покласти рівними нулю.

Зазначимо, що за аналогією з (1.56) для стороннього магнітного струму можна написати рівняння неперервності:

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_m^{\text{ct}} = -\frac{\partial \rho_m^{\text{ct}}}{\partial t}.$$

2.5.2. Суть принципу переставної двоїстості

Перейдемо до розгляду принципу переставної двоїстості рівнянь електромагнітного поля, який виходить із симетрії рівнянь Максвелла і дозволяє суттєво скоротити розрахунки при розв'язанні ряду конкретних задач.

Відзначимо, що за відсутності джерел ($\mathbf{J}_e = 0, \mathbf{J}_m = 0$), рівняння Максвелла можна записати наступним чином:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (2.23)$$

З рівнянь (2.23) виходить, що можна перейти від одного рівняння до іншого і, навпаки, простою заміною вектора \mathbf{H} на \mathbf{E} , вектора \mathbf{E} на \mathbf{H} , величини ε_a на $-\mu_a$ і величини μ_a на $-\varepsilon_a$:

$$\mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{E}, \quad \varepsilon_a \leftrightarrow -\mu_a. \quad (2.24)$$

Ця властивість дає можливість сформулювати принцип переставної двоїстості рівнянь електромагнітного поля: **якщо при розв'язанні електродинамічної задачі знайдено вираз для будь-якого вектора поля (\mathbf{E} або \mathbf{H}) і при цьому постійні інтегрування визначені з початкових і граничних умов для цього вектора, то з вказаного виразу можна одержати розв'язок іншої задачі електромагнітного поля перестановкою в ньому виразу (2.24) за умови збереження попередніх (старих) граничних і початкових умов для переставленого вектора.**

Так, наприклад, якщо знайдено вираз для вектора \mathbf{H} і постійні інтегрування визначені з умови, що нормальна складова цього вектора дорівнює нулю в межах деякої площини, то, виконавши в цьому виразі вказану перестановку, одержимо розв'язок для вектора \mathbf{E} , нормальна складова якого в межах відміченої площини також буде дорівнювати нулю.

У загальному випадку внаслідок перестановки одержуємо розв'язок електродинамічної задачі, для якої граничні умови знаходимо з попередніх, виконавши таку ж саму перестановку.

Принцип переставної двоїстості, сформульований А.А. Пістолькорсом, може бути поширений і на випадок наявності в даній області сторонніх сил.

В цьому разі перехід від розв'язання системи рівнянь Максвелла (2.22) для одного вектора (наприклад, \mathbf{E}) до розв'язання для іншого вектора (наприклад, \mathbf{H}) здійснюється виконанням наступних перестановок:

$$\mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{E}, \quad \varepsilon_a \leftrightarrow -\mu_a, \quad \mathbf{J}^{\text{CT}} \leftrightarrow -\mathbf{J}_m^{\text{CT}}, \quad \rho \leftrightarrow -\rho^m. \quad (2.25)$$

У разі монохроматичних коливань принцип двоїстості може бути поширений і на випадок провідного середовища.

Таким чином, принцип переставної двоїстості у ряді складних задач, наприклад в теорії щільних і рамкових антен, дає можливість істотно спростити їх розв'язання. Якщо відомий розв'язок конкретної задачі, в якій поле збуджується сторонніми електричними джерелами, то немає необхідності шукати розв'язок для векторів поля, що збуджуються магнітними струмами і зарядами. Досить застосувати принцип переставної двоїстості.

Розглянемо, наприклад, картину магнітних силових ліній, що виникає поблизу тонкої провідної смужки завширшки Δ , по якій проходить електричний струм I (рис. 2.4, *a*).

У безпосередній близькості від провідника магнітні силові лінії вектора \mathbf{H} значною мірою повторюють його контур. На поверхні провідника магнітний вектор дотичний до площини смужки. З віддаленням від смужки силові лінії, поступово деформуючись, перетворюються на кола. На решті нескінченної площини (показаної на рис. 2.4, *a* пунктиром) тангенційна складова $\mathbf{H}_\tau = 0$.

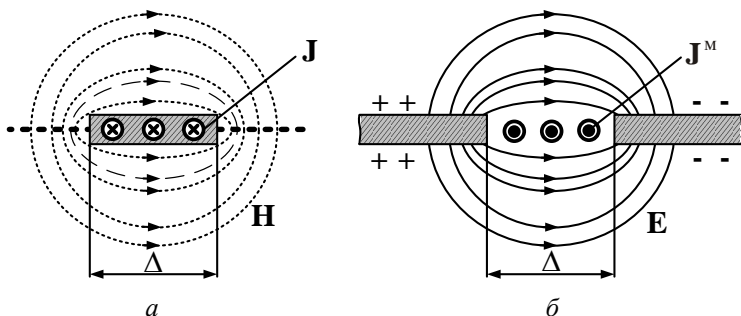


Рис. 2.4

На рис. 2.4, *б* зображено картину силових ліній вектора \mathbf{E} в системі з двох заряджених металевих напівплощин, розділених щільною завширшки Δ . З точністю до напрямку стрілок у верхньому і нижньому напівпросторах ця картина повторює рис. 2.4, *a*.

Схожість картин даних полів дозволяє чисто формально припустити, що в щільні паралельно до країв проходить деякий гіпотетичний струм \mathbf{J}^M , який називається магнітним струмом.

Тому, якщо знайдено розв'язок для векторів поля в першій задачі, його можна використати і в другій задачі, зробивши заміну (2.25).

2.6. Еквівалентні джерела електромагнітного поля

Як джерела ЕМП було розглянуто системи струмів і зарядів. У деяких випадках для розрахунку зручно замінити реальні джерела системою еквівалентних (фіктивних) струмів і зарядів, які збуджують в просторі такі самі поля, як і реальні.

Теорема еквівалентності дозволяє з електродинамічної точки зору обґрунтувати **принцип Гюйгенса – Френеля**, який полягає в тому, що кожную точку фронту хвилі S_1 , що розходить від джерела O (рис. 2.5), можна вважати джерелом вторинних сферичних хвиль. Хвильову поверхню S_2 в будь-який інший момент часу можна знайти як обвідну хвильових поверхонь вторинних сферичних хвиль. Принцип Гюйгенса – Френеля широко використовується при розв'язанні ряду задач електродинаміки.

Розглянемо характеристики еквівалентних джерел.

Припустимо, що в об'ємі, обмеженому поверхнею S , є джерела ЕМП (рис. 2.6).

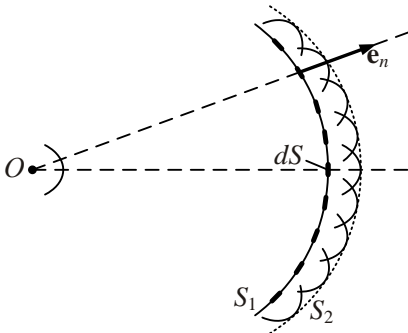


Рис. 2.5

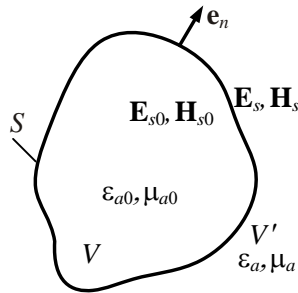


Рис. 2.6

Нехай відомі поля $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$, які збуджують джерела на зовнішній по відношенню до області V поверхні S . Потрібно знайти поле в довільній точці спостереження області V' , вільної від джерел. Згідно з теоремою єдиності задача має єдиний розв'язок. Вважатимемо, що на поверхні S відсутні поверхневі струми і заряди. Тоді на S повинні виконуватися граничні умови:

$$\varepsilon_a (\mathbf{e}_n \mathbf{E}_s) = \varepsilon_{a0} (\mathbf{e}_n \mathbf{E}_{s0}), \quad [\mathbf{e}_n, \mathbf{E}_s] = [\mathbf{e}_n, \mathbf{E}_{s0}], \quad (2.26)$$

$$\mu_a(\mathbf{e}_n \mathbf{H}_S) = \mu_{a0}(\mathbf{e}_n \mathbf{H}_{S0}), \quad [\mathbf{e}_n, \mathbf{H}_S] = [\mathbf{e}_n, \mathbf{H}_{S0}]. \quad (2.27)$$

У рівняннях (2.26), (2.27) величини \mathbf{E}_{S0} , \mathbf{H}_{S0} – вектори \mathbf{E} , \mathbf{H} на внутрішній стороні поверхні S ; параметри ε_{a0} , μ_{a0} і ε_a , μ_a – електричні параметри середовищ в областях V і V' ; \mathbf{e}_n – зовнішня нормаль до поверхні S .

Припустимо тепер, що джерела поля в області V відсутні, але поля \mathbf{E}_S , \mathbf{H}_S на зовнішній стороні S залишилися незмінними. В цьому випадку поле в точці спостереження не зміниться (через теорему єдиності), а на поверхні S граничні умови порушуються. Для того, щоб вектори \mathbf{E}_S , \mathbf{H}_S не змінилися і одночасно виконувалися граничні умови, на поверхні S необхідно задати додаткові джерела (струми і заряди), які б компенсували розриви векторів поля.

Відповідно до (1.83), (1.87), розриви нормальної компоненти вектора \mathbf{E} і тангенційної компоненти вектора \mathbf{H} можна компенсувати заданням на S поверхневих зарядів ρ_s і густини поверхні струмів \mathbf{J}_s :

$$(\varepsilon_a \mathbf{e}_n \mathbf{E}_S) = \rho_s, \quad (2.28)$$

$$[\mathbf{e}_n, \mathbf{H}_S] = \mathbf{J}_s. \quad (2.29)$$

За аналогією з виразами (1.83), (1.87) розрив тангенційної складової вектора \mathbf{E} і нормальної складової вектора \mathbf{H} компенсують введенням поверхневої густини магнітних зарядів ρ_s^M і магнітних струмів \mathbf{J}_s^M :

$$-[\mathbf{e}_n, \mathbf{E}_S] = \mathbf{J}_s^M, \quad (2.30)$$

$$(\mu_a \mathbf{e}_n \mathbf{H}_S) = \rho_s^M. \quad (2.31)$$

Реально в природі не існують магнітні струми і заряди, а їх введення до співвідношень (2.30), (2.31) є формальним і має спростити розв'язання задач електродинаміки. У даному випадку на поверхні S відсутні і електричні струми, і заряди, тобто на S джерела відсутні. На поверхні S задані вектори поля \mathbf{E}_S , \mathbf{H}_S , що дозволило за

співвідношеннями (2.28) – (2.31) визначити електричні і магнітні струми і заряди на S і знайти поле в точці спостереження. Такий підхід до розрахунку поля одержав назву **принципу еквівалентності**.

На відміну від реальних першоджерел електромагнітного поля – електричних струмів, введені вище фіктивні еквівалентні струми і заряди називають **еквівалентними вторинними джерелами**. Вони широко застосовуються при розрахунку антен з випромінюючим розкривом.

Зазначимо, що еквівалентні струми і заряди пов'язані рівняннями неперервності, що дозволяє визначати поле в точці спостереження тільки за електричними і магнітними струмами, тобто за тангенційними складовими векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} на поверхні, що охоплює об'єм V (наприклад, антену).

2.7. Хвильові рівняння і електродинамічні потенціали

Прямі задачі електродинаміки полягають у визначенні структури ЕМП за заданими джерелами \mathbf{J}^{ct} і ρ^{ct} , відомими як функції координат і часу (п. 2.1). З цією метою рівняння Максвелла зводять до виду диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку – хвильових рівняннях.

Розглянемо основні види хвильових рівнянь, до яких зводяться рівняння Максвелла у випадку лінійного однорідного ізотропного середовища.

2.7.1. Хвильові рівняння для векторів поля

Розглянемо систему рівнянь Максвелла (1.52) – (1.55) за наявності сторонніх електричних струмів і зарядів. Для отримання рівнянь щодо одного невідомого вектора (\mathbf{E} або \mathbf{H}) необхідно виключити з системи рівнянь другий вектор.

Виключимо спочатку вектор \mathbf{H} . З цією метою візьмемо похідну за часом від рівняння (1.78) і помножимо на μ_a :

$$\mu_a \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H} = \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{J}^{\text{ct}} + \sigma \mathbf{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right).$$

Для однорідного ізотропного середовища поміняємо місцями операції диференціювання за часом і координатами:

$$\mu_a \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{ct}}}{\partial t} + \mu_a \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.32)$$

Застосуємо до рівняння (1.53) операцію rot і використаємо співвідношення $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$ (дивись додаток E):

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_a \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right). \quad (2.33)$$

Враховуючи третє рівняння Максвелла (1.79) за умови відсутності накопичення зарядів ($\rho = 0$), перетворимо вираз (2.32) до вигляду

$$-\mu_a \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\varepsilon_a} \operatorname{grad} \rho^{\text{ct}} - \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (2.34)$$

Додаючи рівняння (2.32) і (2.34), одержимо:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_a} \operatorname{grad} \rho^{\text{ct}} + \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{ct}}}{\partial t}. \quad (2.35)$$

Виключимо тепер з рівнянь Максвелла вектор \mathbf{E} . Виконаємо наступні операції: продиференціюємо друге рівняння за часом і помножимо його на ε_a ; до першого рівняння застосуємо операцію rot , додамо отримані результати і врахуємо четверте рівняння Максвелла. У результаті одержимо:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{J}^{\text{ct}}. \quad (2.36)$$

Рівняння (2.35) і (2.36) мають однакову структуру і є **узагальненими неоднорідними векторними хвильовими рівняннями**.

Далі вважатимемо, що середовище є ідеальним діелектриком ($\sigma = 0$). В цьому випадку рівняння (2.35), (2.36) є **неоднорідними векторними хвильовими рівняннями або неоднорідними рівняннями Даламбера**:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_a} \operatorname{grad} \rho^{\text{ct}} + \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{ct}}}{\partial t}, \quad (2.37)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \mathbf{J}^{\text{ct}}. \quad (2.38)$$

Якщо, крім того, в даному середовищі ($\sigma = 0$) відсутні сторонні струми і заряди ($\rho^{\text{ct}} = 0$, $\mathbf{J}^{\text{ct}} = 0$), то рівняння набувають вигляду **однорідних векторних хвильових рівнянь** (права частина рівнянь дорівнює нулю) або **однорідних векторних рівнянь Даламбера**:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.39)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.40)$$

Кожне з векторних рівнянь (2.35) – (2.40) еквівалентне трьом скалярним рівнянням вигляду

$$\nabla^2 R_i - \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 R_i}{\partial t^2} = f_i, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2.41)$$

де R_i – відповідні проекції векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} ; f_i – відомі функції просторових координат і часу (визначувані сторонніми струмами і зарядами \mathbf{J}^{ct} , ρ^{ct}).

Рівняння вигляду (2.41) описують хвильові процеси, де υ – швидкість цих процесів. Відповідно до виразів (2.37) – (2.40) швид-

кість хвиль $\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$. Для вакууму $\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$ – швидкість

світла (швидкість поширення енергії електромагнітного поля).

2.7.2. Хвильові рівняння для електродинамічних потенціалів

Диференційні рівняння (2.35) – (2.40) дозволяють за заданими сторонніми джерелами знайти шукані вектори ЕМП \mathbf{E} і \mathbf{H} . Певна незручність використання виразів (2.35) і (2.38) полягає в тому, що права частина цих рівнянь містить не самі сторонні джерела, а функції від них – $\text{grad } \rho^{\text{ct}}$ і $\text{rot } \mathbf{J}^{\text{ct}}$. При розв'язанні ряду задач це утруднює отримання зручних розрахункових співвідношень. Тому розрахунок характеристик ЕМП в областях, де відсутні сторонні джерела, прова-

дять з використанням **однорідних** векторних хвильових рівнянь (2.39), (2.40), а для розв'язання **неоднорідних** хвильових рівнянь вводять допоміжні функції – **електродинамічні потенціали**, які спрощують формулювання і розв'язання задач.

Четверте рівняння Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ дозволяє записати вектор \mathbf{B} у вигляді $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, оскільки для довільного вектора \mathbf{a} справедлива тотожність $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0$. При цьому

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (2.42)$$

де \mathbf{A} – **векторний потенціал**.

Запишемо друге рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad \text{або} \quad \operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Використовуючи тотожність $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \mathbf{a} \equiv 0$, покладемо, що

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (2.43)$$

де φ – деяка скалярна функція, що зветься **скалярним потенціалом**.

Знак «мінус» у співвідношенні (2.43) вибраний для зручності, і в разі електростатичного поля функція φ збігається з електростатичним потенціалом.

З урахуванням введених потенціалів \mathbf{A} і φ перепишемо перше рівняння Максвелла:

$$\frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J}^{\text{ст}} - \varepsilon_a \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}.$$

Розкриваючи в останньому виразі оператор $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$, одержимо:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_a \mathbf{J}^{\text{ст}}.$$

Векторний потенціал \mathbf{A} визначений з точністю до градієнта довільної функції. Тому доцільно на потенціали \mathbf{A} і φ накласти додатко-

ву умову:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (2.44)$$

Вираз (2.44) є умовою калібрування і називається калібруванням за Лоренцем.

З урахуванням виразу (2.44) диференціальне рівняння для векторного потенціалу \mathbf{A} прийме вигляд:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \mathbf{J}^{\text{ст}}. \quad (2.45)$$

Підставивши в третє рівняння Максвелла ($\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}$) значення

\mathbf{E} з (2.43) і враховуючи, що $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi$, одержимо

$$-\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\rho^{\text{ст}}}{\varepsilon_a}.$$

Використовуючи в останньому співвідношенні вираз для $\operatorname{div} \mathbf{A}$ з умови калібрування (2.44), остаточно отримаємо:

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho^{\text{ст}}}{\varepsilon_a}. \quad (2.46)$$

Отже, для введених електродинамічних потенціалів \mathbf{A} і φ одержані неоднорідні хвильові рівняння – векторне (2.45) і скалярне (2.46), які аналогічні виразам (2.37), (2.38).

На відміну від співвідношень (2.37), (2.38) в правих частинах рівнянь (2.45), (2.46) стоять функції, які описують сторонні струми $\mathbf{J}^{\text{ст}}$ і заряди $\rho^{\text{ст}}$. Для визначення векторів поля потрібно розв'язати чотири скалярних рівняння (три для проєкцій \mathbf{A} і для φ) і за співвідношеннями (2.42), (2.43) знайти \mathbf{E} і \mathbf{H} .

2.7.3. Хвильові рівняння в комплексній формі

При гармонічних збуджуючих джерелах хвильові рівняння спрощуються. Введемо, як це вказано в п. 1.3.1, комплексні амплітуди векторного потенціалу $\dot{\mathbf{A}}$, скалярного потенціалу $\dot{\varphi}$ і підставимо в одержані

ржані хвильові рівняння $\dot{\mathbf{A}}(t) = \dot{\mathbf{A}}e^{j\omega t}$, $\dot{\phi}(t) = \dot{\phi}e^{j\omega t}$. Тоді одержимо хвильові рівняння для векторів електромагнітного поля – векторні неоднорідні рівняння Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = \frac{\text{grad } \dot{\rho}^{\text{ct}}}{\varepsilon_a} + j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{J}}^{\text{ct}}, \quad (2.47)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = -\text{rot } \dot{\mathbf{J}}, \quad (2.48)$$

де $k^2 = \omega^2 \mu_a \varepsilon_a$.

У просторі, де відсутні сторонні струми і заряди, рівняння (2.47), (2.48) набувають вигляду однорідних векторних хвильових рівнянь (однорідних векторних рівнянь Гельмгольца):

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0, \quad (2.49)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = 0. \quad (2.50)$$

Хвильові рівняння для електродинамічних потенціалів у комплексній формі матимуть вигляд:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} = -\mu_a \dot{\mathbf{J}}^{\text{ct}}, \quad (2.51)$$

$$\nabla^2 \dot{\phi} + k^2 \dot{\phi} = -\frac{\dot{\rho}^{\text{ct}}}{\varepsilon_a}. \quad (2.52)$$

Вектори поля $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{H}}$ знаходимо за співвідношеннями:

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}, \quad \dot{\mathbf{E}} = -\text{grad } \dot{\phi} - j\omega \dot{\mathbf{A}}. \quad (2.53)$$

Враховуючи, що відповідно до умови калібрування

$\text{div } \mathbf{A} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \phi}{\partial t}$, для гармонічних полів $\text{div } \dot{\mathbf{A}} = -j\omega \varepsilon_a \mu_a \dot{\phi}$, вектори поля знаходимо з виразів:

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}, \quad \dot{\mathbf{E}} = -\text{grad} \left(j \frac{1}{\omega \varepsilon_a \mu_a} \text{div } \dot{\mathbf{A}} \right) - j\omega \dot{\mathbf{A}}. \quad (2.54)$$

Як бачимо із співвідношень (2.54), у разі гармонічно змінюваних полів для визначення векторів $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{H}}$ досить розв'язати одне векторне хвильове рівняння (2.45) щодо векторного потенціалу $\dot{\mathbf{A}}$.

Вище було введено електродинамічні потенціали та одержано для них диференційні рівняння. Векторний \mathbf{A} і скалярний φ потенціали зв'язані умовою калібрування, тому їх можна визначити через одну векторну функцію – вектор Герца $\mathbf{\Gamma}$, зв'язаний з потенціалами співвідношеннями:

$$\mathbf{A} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t}, \quad \varphi = -\operatorname{div} \mathbf{\Gamma}. \quad (2.55)$$

Для монохроматичних полів вектор Герца $\dot{\mathbf{\Gamma}}$ відрізняється від векторного потенціалу $\dot{\mathbf{A}}$ постійним множником $\dot{\mathbf{A}} = j\omega \varepsilon_a \mu_a \dot{\mathbf{\Gamma}}$ і відповідно до (2.51) вектор Герца також задовольняє неоднорідному векторному хвильовому рівнянню

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{\Gamma}} + k^2 \dot{\mathbf{\Gamma}} = -\frac{\mathbf{j}_{\text{ст}}}{j\omega \varepsilon_a}. \quad (2.56)$$

Таким чином, систему рівнянь Максвелла звели до одного неоднорідного векторного хвильового рівняння.

2.7.4. Запізнювальні потенціали

Один з методів розв'язання прямих задач електродинаміки полягає у визначенні електродинамічних потенціалів з рівнянь Даламбера (2.45), (2.46) за заданими функціями $\mathbf{J}(x, y, z, t)$ і $\rho(x, y, z, t)$.

Розглянемо порядок обчислення електродинамічних потенціалів за заданим довільним розподілом зарядів і струмів у певній області простору. Ми одержимо кінцеві формули без строгого їх виведення, розглянувши послідовно ряд прикладів, що мають як наводжувачий характер, так і самостійний інтерес.

Приклад 2.2. Нехай електричне поле збуджується нерухомим постійним точковим зарядом q . Визначимо зв'язок між величиною заряду і скалярним електродинамічним потенціалом φ .

Розв'язок. Введемо сферичну систему координат з центром у точці розміщення заряду. Вектор \mathbf{E} в цьому випадку визначається, як відомо, співвідношенням

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2}, \quad (2.57)$$

де r – відстань до точки спостереження; \mathbf{e}_r – орт вектора, проведеного від заряду q до точки спостереження.

Заряд постійний, поле не залежить від часу, не залежать від часу і потенціали \mathbf{A} і φ . Тому співвідношення (2.43) приймає вигляд $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$.

Розписуючи градієнт φ у сферичній системі координат та враховуючи, що \mathbf{E} залежить тільки від відстані, маємо:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi = -\mathbf{e}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r}. \quad (2.58)$$

Підставляючи (2.57) в (2.58) і виконуючи інтегрування за змінною r , знаходимо шуканий скалярний потенціал

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r}. \quad (2.59)$$

Формула (2.59) повністю збігається з відомим з курсу фізики виразом для електростатичного потенціалу точкового заряду. Постійну інтегрування у (2.59) прийняли рівною нулю, щоб при $r \rightarrow \infty$ функція φ стала нулем.

Приклад 2.3. Нехай електричне поле збуджується постійними зарядами, неперервно розподіленими в об'ємі V за законом, описуваним функцією $\rho(x, y, z)$. Знайдемо вираз для скалярного потенціалу в цьому випадку.

Розв'язок. Якщо заряд зосереджений в малому елементі об'єму dV з густиною ρ , то очевидно, що формулу (2.59) слід переписати у вигляді

$$d\varphi = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_a R} dV, \quad (2.60)$$

де $R = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2}$ – відстань від елемента dV з координатами (x', y', z') до точки спостереження $M(x, y, z)$ (рис. 2.7).

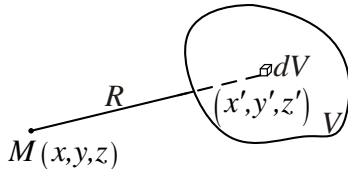


Рис. 2.7

Від формули (2.60), користуючись принципом суперпозиції (пункт 2.2), легко перейти до виразу для скалярного потенціалу, що створюється довільним розподілом зарядів в об'ємі, V :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho}{R} dV. \quad (2.61)$$

Величину φ , що визначається формулою (2.61), можна розглядати як розв'язок рівняння

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}, \quad (2.62)$$

яке випливає з рівняння Даламбера (2.46), якщо покласти $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$. Рівняння (2.62) називається **рівнянням Пуассона**. Це основне рівняння електростатики, до якого звичайно зводиться більшість електростатичних задач.

Приклад 2.4. Нехай поле збуджується точковим зарядом, як і в прикладі 2.2, розміщеним на початку координат, але величина його змінюється в часі згідно із законом $q = q(t)$. Знайдемо вираз для скалярного потенціалу.

Розв'язок. У будь-якій точці, окрім початку координат, потенціал φ задовольняє однорідному хвильовому рівнянню, яке виходить з виразу

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.63)$$

З курсу математики відомо, що у сферичній системі координат, зв'язаній із зарядом, розв'язання рівняння (2.63) має вигляд

$$\varphi = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} + \frac{f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)}{r}, \quad (2.64)$$

де $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$; $f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$, $f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$ – довільні двічі диференційовані функції

аргументів $t - \frac{r}{v}$ і $t + \frac{r}{v}$ відповідно.

У справедливості розв'язання (2.63) можна переконатися безпосередньо, підставивши вираз (2.64) в рівняння (2.63).

Перший доданок в (2.64) описує сферичну хвилю, що розходить від джерела і поширюється з початку координат уздовж радіусів r із швид-

кістю $\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$. Відповідно другий доданок є сферичною хвилею, що поширюється з нескінченності і сходиться на початку координат.

З цих двох окремих розв'язків ми виберемо перший, який найбільше відповідає фізичній постановці задачі. Таким чином, для точкового заряду $q(t)$ в усіх точках поля, віддалених на відстань r , розв'язання рівняння (2.63) має вигляд

$$\varphi = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}, \quad (2.65)$$

де f_1 – невідома функція.

Вид функції f_1 можна встановити з наступних міркувань. Очевидно, що значення потенціалу φ має бути пов'язане з величиною заряду. Оскільки в статичному випадку (див. приклад 2.2) потенціал визначався формулою

$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r}$, то природно припустити, що $f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} q\left(t - \frac{r}{v}\right)$. Тоді

остаточно маємо вираз для потенціалу

$$\varphi = \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\epsilon_a r}. \quad (2.66)$$

Приклад 2.5. Одержимо вираз для скалярного потенціалу, зумовленого довільним розподілом змінних зарядів в об'ємі V , що характеризується функцією $\rho(x, y, z, t)$.

Розв'язок. Якщо заряд зосереджений в малому елементі об'єму dV з густиною $\rho = \rho(t)$, то за аналогією з формулою (2.66) можемо представити скалярний потенціал у вигляді

$$\varphi = \frac{\rho\left(t - \frac{R}{v}\right) dV}{4\pi\epsilon_a R}, \quad (2.67)$$

де R – відстань від елемента dV до точки спостереження.

Тоді для скалярного потенціалу, зумовленого довільним розподілом зарядів в об'ємі V , маємо (порівняйте із (2.61)):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho\left(x', y', z', t - \frac{R}{v}\right) dV}{R}. \quad (2.68)$$

Вираз (2.68) є частинним розв'язком неоднорідного рівняння Даламбера. Аналогічний розв'язок можна записати і для рівняння Даламбера щодо проєкцій векторного потенціалу \mathbf{A} і самого потенціалу:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}\left(x', y', z', t - \frac{R}{v}\right) dV}{R}. \quad (2.69)$$

З формул (2.68) і (2.69) виходить, що для обчислення електродинамічних потенціалів \mathbf{A} і φ в довільній точці простору у момент часу t потрібно брати значення струмів і зарядів в кожному елементі dV у більш ранній порівнянно з t момент часу $t' = t - \frac{R}{v}$, що визначається відстанню R від елемента dV до точки спостереження $M(x, y, z)$. Це відповідає властивій рівнянням Максвелла концепції "близькодії" і хвильовому характеру електромагнітного поля: вплив джерел електромагнітного поля виявляється не миттєво, а із запізненням, потрібен деякий час $\Delta t = t - \frac{R}{v}$, за який електромагнітні коливання, викликані зміною струмів і зарядів в елементі dV , встигнуть поширитися від елемента dV до точки спостереження M .

Якщо покласти $v \rightarrow \infty$, тобто знехтувати часом запізнення $t_3 = \frac{R}{v}$, то рівняння (2.68), (2.69) переходять у співвідношення, які належать до області квазістаціонарних явищ.

Функції \mathbf{A} і φ , записані у вигляді співвідношень (2.68) і (2.69), називають **запізнювальними потенціалами**.

Можна тепер виписати вираз для комплексного векторного потенціалу $\dot{\mathbf{A}}$ монохроматичного поля, користуючись схожістю структури рівняння Даламбера (2.45) і рівняння Гельмгольца (2.51):

$$\dot{\mathbf{A}}(x, y, z, t) = \frac{\mu_a}{4\pi v} \int \frac{\mathbf{J}^{\text{ct}} \left(x', y', z', t - \frac{R}{v} \right) dV}{R}. \quad (2.70)$$

Відповідно для комплексної амплітуди вектора $\dot{\mathbf{A}}$ ($\dot{\mathbf{A}}(t) = \dot{\mathbf{A}}(x, y, z) e^{j\omega t}$) можна записати

$$\dot{\mathbf{A}}(x, y, z) = \frac{\mu_a}{4\pi v} \int \frac{\mathbf{J}^{\text{ct}}(x', y', z') e^{-jkR}}{R} dV, \quad (2.71)$$

де $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ – параметр, який називається **хвильовим числом**. У середовищі без втрат довжина хвилі і хвильове число зв'язані співвідношенням $\lambda = 2\pi/k$.

У загальному випадку параметр k – комплексна величина. Співвідношення (2.70), (2.71) придатні і для середовища з втратами, при заміні $\mu_a \rightarrow \dot{\mu}_a$, $\varepsilon_a \rightarrow \dot{\varepsilon}_a$, $k \rightarrow \dot{k}$.

Питання для самоперевірки

1. Назвіть основні різновиди задач електродинаміки.
2. Сформулюйте принцип суперпозиції для ЕМП в лінійних ізотропних середовищах.
3. Сформулюйте теорему єдиності розв'язання рівнянь електродинаміки і викладіть порядок її доведення для внутрішньої і зовнішньої задачі.
4. Запишіть математичні вирази умови випромінювання і поясніть їх фізичний зміст.
5. Поясніть фізичну сутність теореми взаємності.
6. Запишіть симетричну систему рівнянь для векторів ЕМП.
7. Сформулюйте принцип переставної двоїстості рівнянь електромагнітного поля.
8. Розкажіть про постановку задачі визначення поля усередині замкнутого об'єму за відомим розподілом джерел на поверхні, що обмежує цей об'єм.
9. Поясніть фізичний зміст принципу еквівалентності.
10. Викладіть послідовність операцій при отриманні узагальненого векторного рівняння Даламбера.

11. Якими співвідношеннями вводяться електродинамічні потенціали і вектор Герца?

12. Напишіть хвильові рівняння щодо комплексних векторів поля, електродинамічних потенціалів і вектора Герца.

13. Поясніть фізичний зміст поняття електродинамічних потенціалів запізнення.

14. Запишіть розв'язання хвильового рівняння в безмежному середовищі для випадку монохроматичних хвиль.

3. СТАТИЧНІ, СТАЦІОНАРНІ ТА КВАЗИСТАЦІОНАРНІ ПОЛЯ

3.1. Електростатика

3.1.1. Основні рівняння електростатики

Електростатичне поле описується наступною системою рівнянь (див. п. 1.2):

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0, \quad (3.1, a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (3.1, б)$$

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV, \quad (3.2, a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (3.2, б)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}. \quad (3.3)$$

Незважаючи на те, що рівняння (3.1) – (3.3) досить прості, їх безпосереднє розв'язання пов'язане з громіздкими розрахунками.

Так, наприклад, диференціальні рівняння (3.1, б), (3.2, б) у декартовій системі координат еквівалентні системі:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho; \\ D_x = \varepsilon_a E_x, \quad D_y = \varepsilon_a E_y, \quad D_z = \varepsilon_a E_z. \end{aligned} \right\} (3.4)$$

Одержати невідомі функції E_x , E_y і E_z з (3.4) досить складно. Введення скалярного потенціалу (п. 2.7) дозволяє перетворити рівняння (3.1, б) до вигляду

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi. \quad (3.5)$$

У даному випадку **функцію φ називають електростатичним потенціалом**. Зміст знака «мінус» з'ясується нижче.

Для стаціонарних полів рівняння для електростатичного потенціалу (2.46) набуває вигляду **рівняння Пуассона**:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}, \quad (3.6)$$

яке в точках, де заряд відсутній ($\rho = 0$), переходить у **рівняння Лапласа**:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (3.7)$$

Знаходження вектора **E** простим диференціюванням скалярної функції φ (3.5) свідчить про значне спрощення задачі.

Зазначимо, що при розрахунку поля системи зарядів дуже часто користуються принципом суперпозиції (п. 2.2). Застосування методу суперпозиції для скалярних величин простіше, ніж для векторних.

Відзначимо властивості електростатичного потенціалу:

1. Потенціал має бути неперервною функцією. У противному разі в точках порушення неперервності потенціалу напруженість поля приймала б нескінченне значення, що неможливо.

2. Відповідно до граничних умов для E_τ і D_n (1.88) потенціал задовольняє наступним граничним умовам:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \quad (3.8)$$

і

$$\varepsilon_{a1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_{a2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \rho_s. \quad (3.9)$$

3. Оскільки потенціал електростатичного поля визначається з точністю до довільної постійної C ($\text{grad } \varphi = \text{grad}(\varphi + C) = -\mathbf{E}$), то для кожної задачі можна вибрати найбільш зручне значення C .

Поверхні $\varphi = \text{const}$ називаються еквіпотенційними. **Вектор E у кожній точці нормальний до еквіпотенційної поверхні і спрямований у бік зменшення потенціалу.** Вектор $\text{grad } \varphi$ за змістом збігається з напрямком максимального росту потенціалу (рис. 3.1, а), тобто протилежний вектору **E**. Звідси знак «мінус» у (2.43) і (3.5).

Виразимо потенціал у довільній точці M_2 через потенціал поля в деякій іншій точці M_1 (рис. 3.1, б).

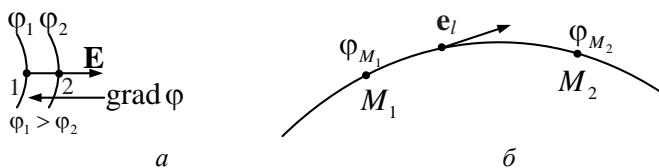


Рис. 3.1

З'єднаємо точки M_1 і M_2 довільною кривою і знайдемо зміну потенціалу на елементарній ділянці кривої $d\mathbf{l}$:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial l} dl = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{e}_l \cdot d\mathbf{l} = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l}.$$

Тепер потенціал φ_{M_2} може бути розрахований так:

$$\varphi_{M_2} = \varphi_{M_1} + \int_{M_1}^{M_2} d\varphi = \varphi_{M_1} + \int_{M_1}^{M_2} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l},$$

де φ_{M_1} – потенціал точки M_1 .

З врахуванням (3.5) одержимо

$$\varphi_{M_2} = \varphi_{M_1} - \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \varphi_{M_1} + \int_{M_2}^{M_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (3.10)$$

Оскільки **електростатичне поле безвихрове** ($\text{rot } \mathbf{E} = 0$), то інтеграл по будь-якому замкненому контуру $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$. Тому потенціал φ_{M_2} залежить тільки від положення точки M_2 і не залежить від шляху, за яким обчислюється інтеграл у (3.10).

Використовуючи властивість неоднозначності потенціалу, покладемо потенціал φ_{M_1} точки M_1 рівним нулю, тоді формула (3.10) матиме вигляд

$$\varphi_{M_2} = \int_{M_2}^{M_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (3.11)$$

4. Оскільки сила, що діє на точковий заряд q , дорівнює $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$, то робота з переміщення заряду q на шляху $d\mathbf{l}$

$$dA = \mathbf{F}_e d\mathbf{l} = q\mathbf{E}d\mathbf{l} = -qd\varphi,$$

а робота на шляху $M_1 M_2$ визначиться співвідношенням

$$A = - \int_{M_1}^{M_2} qd\varphi = q(\varphi_{M_1} - \varphi_{M_2}). \quad (3.12)$$

Таким чином, робота сил електростатичного поля з переміщення зарядів з одних точок в інші визначається тільки положенням цих точок у просторі.

Поклавши $q = 1$, одержимо

$$A = \varphi_{M_1} - \varphi_{M_2} = U.$$

Отже, електростатичний потенціал – енергетична характеристика поля. **Різниця потенціалів (напруга U) між двома точками визначає роботу, затрачувану при переміщенні одиничного заряду з однієї точки в іншу.**

Електричне поле часто збуджується зарядженими провідними тілами. Оскільки в електростатиці заряди нерухомі, то в провіднику струм дорівнює нулю:

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = 0.$$

Отже, скрізь усередині провідника $\mathbf{E} = 0$ (оскільки $\sigma \neq 0$) і провідник є екіпотенційною областю, через те що рівність $\mathbf{E} = -\nabla\varphi = 0$ можлива тільки при $\varphi = \text{const}$. Крім того, у внутрішніх точках провідника відсутні вільні заряди (оскільки при $\mathbf{E} = 0$ і $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E} = 0$, тому $\rho = 0$). При цьому поверхнева густина заряду ρ_s , виходячи з граничної умови (3.9), визначається виразом

$$\rho_s = -\varepsilon_{a2} \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}. \quad (3.13)$$

Тут φ_2 – потенціал поблизу поверхні провідника. У (3.13) враховано, що в самому провіднику $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$.

Повний заряд на провіднику Q може бути обчислений як

$$Q = \oint_S \rho_s dS = -\varepsilon_{a2} \oint_S \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} dS. \quad (3.14)$$

Вектор напруженості електричного поля \mathbf{E}_2 перпендикулярний до поверхні провідника, тому що $E_{2\tau} = E_{1\tau \text{ пров}} = 0$. Остання умова була відзначена раніше (п. 1.4).

3.1.2. Приклади розрахунку електростатичних полів

Розрахунок електростатичного поля, збуджуваного довільним розподілом зарядів, у загальному випадку досить складний. Однак задача значно спрощується, якщо розподіл зарядів має симетрію. У цьому разі доцільно скористатися рівнянням (3.2, а), а поверхню інтегрування підібрати таку, у всіх точках якої величина поля була б однаковою. Завдяки цьому вдається винести D_n з-під знака інтеграла і спростити розрахунок поля.

У випадку асиметричного розподілу зарядів шукана функція входить під знак інтеграла, і для отримання розв'язку доцільно скористатися диференційними рівняннями (3.1, б), (3.2, б). При цьому розв'язують рівняння Пуассона і Лапласа (3.6), (3.7) і знаходять шукані вектори \mathbf{E} , \mathbf{D} .

Інтегральний метод розв'язання задач електродинаміки був розглянутий на прикладі визначення електростатичного поля найпростішого об'єкта – рівномірно зарядженої кулі (приклад 1.5, п. 1.2.2).

Розв'яжемо аналогічну задачу, використовуючи диференційні рівняння.

3.1.3. Електричне поле рівномірно зарядженої кулі

Приклад 3.1 Нехай в однорідному безмежному діелектрику з діелектричною проникністю ε_a в межах кулі радіусом a (рис. 3.2) рівномірно розподілений заряд із густиною $\rho = \text{const}$. Потрібно розрахувати поле як усередині кулі, так і поза нею.

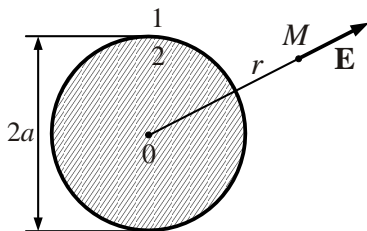


Рис. 3.2

Розв'язок. Розіб'ємо весь простір на дві області: область 1 – поза кулею; область 2 – усередині кулі. У першій області має виконуватися рівняння Лапласа $\nabla^2\varphi_1 = 0$, а в другій – рівняння Пуассона $\nabla^2\varphi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$.

Оскільки останнє з них більш загальне, тому досить знайти потенціал тільки в другій області φ_2 , а потенціал першої області φ_1 можна визначити підстановкою $\rho = 0$ в попередній розв'язок.

Через те що заряд розподілений рівномірно, фізичні умови в точках, рівновіддалених від центра кулі, будуть однаковими. Тому для розв'язання рівняння Пуассона виберемо сферичну систему координат з початком у центрі кулі. При заданому r фізичні умови у всіх точках з кутовими координатами φ й θ однакові. Це означає, що поле від координат φ і θ залежати не повинне, тобто $\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$. Тоді рівняння Пуассона приймає вигляд звичайного диференційного рівняння (див. додаток Е)

Тоді рівняння Пуассона приймає вигляд звичайного диференційного рівняння (див. додаток Е)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

Помноживши обидві частини рівняння на r^2 , матимемо наступний вираз

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = -\frac{\rho r^2}{\epsilon_a}.$$

Після першого інтегрування знаходимо:

$$r^2 \frac{d\varphi_2}{dr} = -\frac{\rho r^3}{3\epsilon_a} + C_1 \text{ і } \frac{d\varphi_2}{dr} = -\frac{\rho r}{3\epsilon_a} + \frac{C_1}{r^2}.$$

Після другого інтегрування одержуємо загальний розв'язок для потенціалу φ_2 усередині кулі:

$$\varphi_2 = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_a} - \frac{C_1}{r} + C_2, \quad r \leq a.$$

Для області 1, де виконується рівняння Лапласа ($\rho = 0$), загальне рішення буде мати вигляд

$$\varphi_1 = -\frac{C_3}{r} + C_4, \quad r \geq a.$$

Знайдемо постійні інтегрування.

На нескінченному віддаленні від заряду поле відсутнє, і природно прийняти, що потенціал дорівнює нулю. Якщо в розв'язку для φ_1 покласти $r = \infty$, то $\varphi_1 = C_4 = 0$.

Потенціал скрізь має бути обмеженим. Щоб ця умова не порушувалася в центрі кулі ($r = 0$), варто прийняти $C_1 = 0$.

Константи, що залишилися, слід визначити з граничних умов для потенціалу (3.9). Оскільки поверхневого заряду на кулі немає ($\rho_s = 0$), то

$$\epsilon_a \left. \frac{d\varphi_1}{dr} \right|_{r=a} = \epsilon_a \left. \frac{d\varphi_2}{dr} \right|_{r=a}; \quad \epsilon_a \frac{C_3}{a^2} = -\frac{\rho a}{3} \quad \text{і} \quad C_3 = -\frac{\rho a^3}{3\epsilon_a}.$$

Константу C_2 визначимо з умови неперервності потенціалу:

$$\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a} \quad \text{чи} \quad -\frac{\rho a^2}{6\epsilon_a} + C_2 = \frac{\rho a^2}{3\epsilon_a}, \quad \text{звідки} \quad C_2 = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_a}.$$

Для одержання вектора \mathbf{E} застосуємо формулу $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. У випадку задачі зі сферичною симетрією ($\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$) ця формула набуває вигляду

$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_r \frac{d\varphi}{dr}$. Остаточні вирази для потенціалу поля і векторів \mathbf{E} і $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$ мають вигляд

$$\varphi_1 = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_a r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r}; \quad (r > a), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r^2}; \quad \mathbf{D}_1 = \mathbf{e}_r \frac{Q}{4\pi r^2}; \quad (r > a), \quad (3.16)$$

$$\varphi_2 = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_a} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_a}; \quad (0 < r \leq a), \quad (3.17)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_r \frac{\rho r}{3\epsilon_a}; \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{e}_r \frac{\rho r}{3}; \quad (0 < r \leq a), \quad (3.18)$$

де $Q = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$ – заряд кулі.

На рис. 3.3 наведені відповідні графіки. При $r = a$ на кривій $E(r)$ має місце злам, а на кривій $\phi(r)$ – гладкий перехід, що свідчить про неперервність похідної потенціалу $\frac{d\phi}{dr}$.

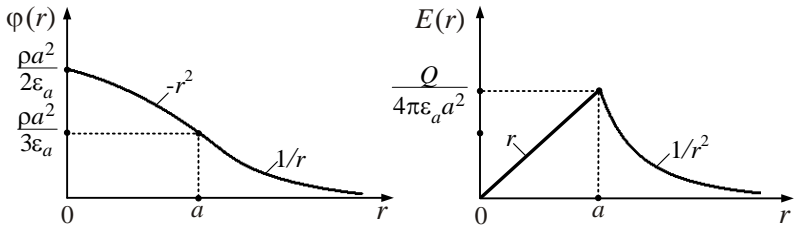


Рис. 3.3

Усередині рівномірно зарядженої кулі поле лінійно зростає з відстанню від центра, а поза ним виявляється таким, ніби заряд Q зосереджений у центрі кулі. Таким чином, для області поза кулю ($r > a$) електростатичне поле (3.16) збігається з полем, зумовленим законом Кулона, сформульованим для точкових зарядів, якщо вважати, що весь заряд сконцентрований у центрі кулі.

3.1.4. Розкладання поля на мультиполі. Поле електростатичного диполя

Приклад 3.2. Знайти поле системи куль із зарядами q_1, q_2, \dots, q_n (рис. 3.4), розташованими в обмеженій області V .

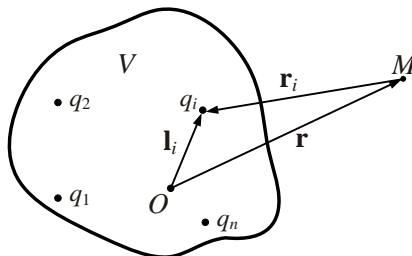


Рис. 3.4

Розв'язок. Початок сферичної системи координат розташуємо в точці O області V . Положення точки спостереження M будемо характеризувати радіусом-вектором \mathbf{r} , а положення центра i -ї кулі вектором \mathbf{l}_i . Як виходить з рис. 3.4,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{l}_i - \mathbf{r}. \quad (3.19)$$

Через те, що за принципом суперпозиції потенціал у точці M дорівнює сумі потенціалів кожного заряду окремо,

$$\varphi(M) = \sum_i \varphi_i(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_a r_i}. \quad (3.20)$$

Відповідно до (3.19)

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{|\mathbf{r}_i|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \mathbf{l}_i^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{l}_i}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\mathbf{e}_r \mathbf{l}_i}{r} + \frac{l_i^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.21)$$

Розкладаючи (3.21) у ряд

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{e}_r \mathbf{l}_i}{r} - \frac{l_i^2}{r^2} + \dots \right),$$

вираз для $\varphi(M)$ представимо у вигляді

$$\varphi(M) = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_a r} + \frac{\mathbf{e}_r \sum_i q_i \mathbf{l}_i}{4\pi\epsilon_a r^2} + \frac{\sum_i q_i l_i^2}{4\pi\epsilon_a r^3} + \dots \quad (3.22)$$

З (3.21) виходить, що з віддаленням точки спостереження M від області V потенціал спадає. Коли $r \rightarrow \infty$, $\varphi(M) \rightarrow 0$. Тобто в точках, нескінченно віддалених від зарядів, що займають обмежений об'єм, потенціал збуджуваного ними поля дорівнює нулю. Якщо сумарний заряд $Q_\Sigma = \sum q_i$ в області V відмінний від нуля, то на великих порівняно з розмірами області V відстанях потенціал визначається першим доданком ряду (3.22):

$$\varphi(M) \approx \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_a r} = \frac{Q_\Sigma}{4\pi\epsilon_a r}. \quad (3.23)$$

Інакше кажучи, на великих відстанях від системи шуканий потенціал збігається з потенціалом точкового заряду, який дорівнює Q_Σ .

Із співвідношення (3.23) виходить, що закон Кулона точно виконується лише в граничному випадку, коли заряди розташовані у нескінченно малій

області $\frac{l_i}{r} \rightarrow 0$. У реальних ситуаціях закон Кулона виконується приблизно, причому похибка визначається сумою всіх доданків у (3.22), крім першого.

Приклад 3.3. Знайти поле системи зарядів, коли сумарний заряд області V дорівнює нулю $Q_\Sigma = 0$, а інші доданки у розкладі (3.22) відмінні від нуля.

Розв'язок. У цьому випадку (приклад 3.2) потенціал у віддалених точках визначається в основному другим доданком ряду (3.22), який пропорційний $1/r^2$, бо інші мають порядок $1/r^3$, $1/r^4$... Таким чином,

$$\varphi(M) \approx \frac{\mathbf{e}_r \sum_i q_i \mathbf{l}_i}{4\pi\epsilon_a r^2}. \quad (3.24)$$

Поле нейтральної системи зарядів ($Q_\Sigma = 0$) зведене до поля **електричного диполя**, під яким розуміють систему двох різнойменних, але рівних за абсолютною величиною точкових зарядів, зміщених один відносно другого на відстань l (рис. 3.5).

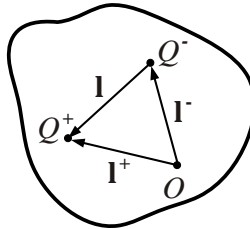


Рис. 3.5

У формулі (3.24) величина

$$\sum_i q_i \mathbf{l}_i = \mathbf{p} \quad (3.25)$$

є **електричним моментом** системи зарядів. Якщо сумарний заряд області дорівнює нулю, то електричний момент не залежить від вибору початку координат.

Згрупуємо позитивні і негативні заряди в області V :

$$\sum_i q_i = \sum_\kappa q_\kappa^+ + \sum_j q_j^- = Q^+ + Q^-.$$

Тоді можна записати

$$\mathbf{p} = \sum_\kappa q_\kappa^+ \mathbf{l}_\kappa^+ + \sum_j q_j^- \mathbf{l}_j^-.$$

Введемо до розгляду центр «ваги» позитивних q_k^+ зарядів і визначимо його координати:

$$\mathbf{l}^+ = \frac{\sum_{\kappa} q_{\kappa}^+ \mathbf{l}_{\kappa}^+}{\sum_{\kappa} q_{\kappa}^+} = \frac{\sum_{\kappa} q_{\kappa}^+ \mathbf{l}_{\kappa}^+}{Q^+}.$$

Аналогічно визначається центр «ваги» негативних зарядів. Електричний момент системи зарядів запишемо у вигляді

$$\mathbf{p} = Q^+ \mathbf{l}^+ + Q^- \mathbf{l}^- = Q^+ (\mathbf{l}^+ - \mathbf{l}^-) = Q \mathbf{l}. \quad (3.26)$$

У співвідношенні (3.26) $Q = Q^+ = -Q^-$ – сумарна величина заряду одного знака; \mathbf{l} – вектор, спрямований від центра «ваги» негативних зарядів до центра «ваги» позитивних (рис. 3.6).

З урахуванням (3.26) потенціал диполя (3.24) можна записати у вигляді

$$\varphi(M) = \frac{\mathbf{e}_r Q \mathbf{l}}{4\pi\epsilon_a r^2} = \frac{\mathbf{e}_r \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_a r^2}, \quad (3.27)$$

де $\mathbf{p} = Q \mathbf{l}$ – електричний момент диполя.

Введемо сферичну систему координат. Вісь OZ спрямуємо уздовж вектора \mathbf{l} , а початок системи координат розмістимо в точці $\frac{\mathbf{l}}{2}$ (рис. 3.6).

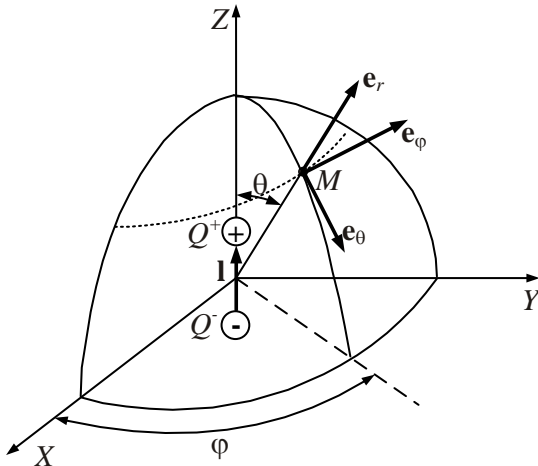


Рис. 3.6

Тоді відповідно до (3.27) та рис. 3.6

$$\varphi(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_a r^2}. \quad (3.28)$$

Для визначення напруженості електричного поля скористаємося співвідношенням $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$ і виразом $\text{grad}\varphi$ у сферичній системі координат (додаток Е). При цьому врахуємо, що через осьову симетрію поля диполя похідна за кутовою координатою φ дорівнює нулю. Після диференціювання одержимо

$$\mathbf{E} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_a r^3} (\mathbf{e}_r, 2\cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta). \quad (3.29)$$

Напруженість електричного поля диполя з відстанню дуже швидко спадає ($E \sim \frac{1}{r^3}$). Поле диполя зображене на рис. 3.7.

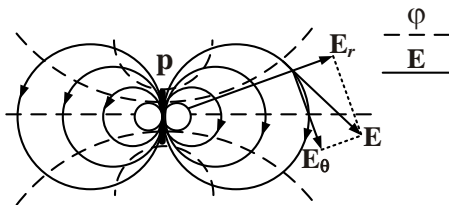


Рис. 3.7

Третій доданок розкладання (3.22) має вигляд

$$\varphi(M) = \frac{\sum_i q_i l_i^2}{4\pi\epsilon_a r^3}.$$

Воно буде основним, якщо $\sum_i q_i = 0$ і $\sum_i q_i \mathbf{l}_i = 0$. Така система може бути зведена до двох диполів і має назву квадруполь (рис. 3.8). На цьому рисунку зображена також нейтральна система зарядів з ще більш високим моментом – октуполем.

З наведених прикладів виходить, що будь-яку систему зарядів можна звести до системи: точковий заряд + диполь + квадруполь + октуполь + ... Кожен доданок у (3.22) дає потенціал, створюваний

одним із членів цього розкладання: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots$, внаслідок чого вираз (3.22) називається **розкладанням поля на мультиполі**.

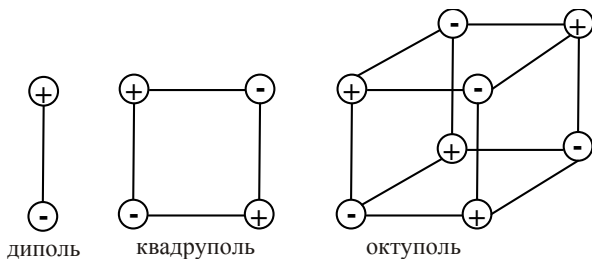


Рис. 3.8

Члени ряду (3.22) характеризують ступінь неоднорідності розподілу зарядів у системі. Чим сильніше відділені позитивні заряди від негативних, тим вище внесок у потенціал $\varphi(M)$ доданків з меншими номерами i . Подібний розгляд справедливий не тільки для дискретних зарядів, але і для зарядів, що безперервно заповнюють деяку область простору. Це виходить із загального розв'язання рівнянь Лапласа і Пуассона, наведеного в п. 2.7.3 (співвідношення (2.61)).

На заряди диполя, який знаходиться у електричному полі, згідно з співвідношенням (1.2), діють механічні сили. Діє обертальний момент, який намагається «розвернути» момент диполя \mathbf{p} уздовж силовій лінії \mathbf{E} , у неоднорідному полі також діє сила \mathbf{F} , яка втягує діелектрик в електричне поле у напрямку \mathbf{F} . Дія пондемоторних сил призводить до ряду ефектів.

Визначимо ефект **електрострикції** – зміну об'єму діелектрика залежно від величини прикладеного поля. Ефект розтягання або стиснення діелектрика використовується у техніці.

Властивість диполів «втягуватися» в неоднорідне поле використовують у квантовій радіофізиці для сортування молекул, які мають різні дипольні моменти. Для цього сильне неоднорідне поле збуджують квадрупольним конденсатором, поперечний перетин якого наведено на рис. 3.9. Сортувальні молекули направляють вздовж осі конденсатора перпендикулярно рисунку. У процесі руху частинки поділяються на пучки різних речовин.

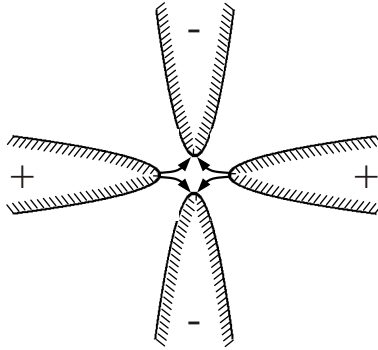


Рис. 3.9

3.1.5. Енергія електростатичного поля

Енергія електростатичного поля в об'ємі V може бути обчислена за формулою (1.104). Для електростатичного поля $E = \text{const}$ і

$$W = W^e = \int_V \frac{\varepsilon_a E^2}{2} dV = \text{const}. \quad (3.30)$$

Енергія ЕМП визначається розподілом електричного поля \mathbf{E} в об'ємі V , а сам розподіл \mathbf{E} однозначно зв'язаний з потенціалом φ . Одержимо вираз для обчислення енергії за відомим розподілом зарядів і потенціалу в об'ємі V . Перетворимо підінтегральний вираз (3.30) до вигляду

$$\varepsilon_a E^2 = \varepsilon_a \mathbf{E}^2 = \varepsilon_a \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{D} \cdot \text{grad } \varphi.$$

Скористаємося тим, що

$$\text{div}(\varphi \mathbf{D}) = \mathbf{D} \text{grad } \varphi + \varphi \text{div } \mathbf{D}, \text{ а } \text{div } \mathbf{D} = \rho.$$

Тоді

$$\varepsilon_a E^2 = -\text{div}(\varphi \mathbf{D}) + \varphi \text{div } \mathbf{D} = -\text{div}(\varphi \mathbf{D}) + \varphi \rho. \quad (3.31)$$

Підставивши (3.31) в (3.30), одержимо:

$$W^e = \int_V \frac{\varphi \rho}{2} dV - \int_V \frac{\text{div}(\varphi \mathbf{D})}{2} dV. \quad (3.32)$$

Застосувавши до другого інтеграла в (3.32) теорему Остроградського – Гаусса, отримаємо

$$W^e = \int_V \frac{\varphi \rho}{2} dV - \oint_S \frac{\varphi D_n}{2} dS. \quad (3.33)$$

Тут S – замкнена поверхня, що обмежує об'єм V .

Припустимо, що заряди, які збуджують поле, зосереджені в обмеженій області, та поширимо інтегрування на весь навколишній простір. За поверхню S візьмемо сферу з центром в області серед зарядів. При досить великому радіусі весь заряд можна вважати точковим. Тоді φ і модуль \mathbf{D} зменшуються з відстанню не повільніше, ніж $1/r$ і $1/r^2$ відповідно, а поверхня сфери S зростає пропорційно r^2 .

Таким чином, інтеграл $\oint_S \frac{\varphi D_n}{2} dS$ спадає як $1/r$ і при $r \rightarrow \infty$ дорівнює нулю.

Енергія електростатичного поля розподілу зарядів із густиною ρ

$$W^e = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV = \frac{1}{2} \int_V \varphi dq. \quad (3.34)$$

Інтегрування поширюється на область V , що містить заряд ($\rho \neq 0$). Повна енергія електростатичного поля виражена, таким чином, через джерела поля – заряди.

Якщо електростатичне поле збуджується поверхневими зарядами, розподіленими по поверхні S з густиною ρ_s , то вираз для електростатичної енергії набуває вигляду

$$W^e = \frac{1}{2} \oint_S \varphi \rho_s dS. \quad (3.35)$$

Для зарядженого провідника $\varphi = \text{const}$, а $\oint_S \rho_s dS = Q$ і

$$W^e = \frac{1}{2} \varphi Q. \quad (3.36)$$

Приклад 3.4. Знайти енергію провідної кулі радіусом a з повним зарядом Q .

Розв'язок. Розподіл потенціалу провідної кулі з повним зарядом Q збігається з потенціалом рівномірно зарядженої кулі з тим же зарядом Q (співвідношення (3.15) при $r = a$). Відповідно до виразу (3.36) енергія провідної кулі

$$W^e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

Для визначення енергії рівномірно зарядженої кулі (приклад 3.1) вирази (3.17) необхідно проінтегрувати за співвідношенням (3.34).

3.1.6. Ємність (конденсатори)

Потенціал ϕ відокремленого провідника однозначно зв'язаний з величиною наявного на ньому заряду Q , а також залежить від його розмірів і форми. **Відношення заряду до потенціалу залишається постійним при будь-якому значенні Q і називається ємністю відокремленого провідника:**

$$C = \frac{Q}{\phi}, \quad \frac{K\ell}{B} = \Phi \text{ (фарада)}. \quad (3.37)$$

З урахуванням (3.37) співвідношення (3.36) прийме вигляд

$$W^e = \frac{1}{2} C \phi^2. \quad (3.38)$$

Якщо система містить кілька провідних тіл, то вони впливають один на одного внаслідок явища **електростатичної індукції**. Воно полягає в тому, що розподіл заряду на кожному із провідників зумовлений всіма іншими. При цьому заряд i -го провідника лінійно пов'язаний з потенціалами всіх провідників системи:

$$Q_i = C_{i1}(\phi_i - \phi_1) + C_{i2}(\phi_i - \phi_2) + \dots + C_{ii}\phi_i + \dots + C_{iN}(\phi_i - \phi_N), \quad (3.39)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N).$$

Коефіцієнт C_{ii} називається *власною ємністю провідника i* , а C_{ik} – *взаємною ємністю провідників i і k* . При цьому $C_{ik} = C_{ki}$, а власні ємності провідників у системі відрізняються від ємностей таких самих відокремлених провідників.

На енергію електростатичного поля не поширюється принцип суперпозиції, і сума енергій відокремлених провідників не дорівнює енергії системи цих самих провідників. Це видно із співвідношення (3.39).

Відзначимо, що заряди у заданій системі провідників розподіляються так, що енергія системи мінімальна (теорема Томпсона).

Систему з двох провідників, захищену від впливу інших провідників, називають конденсатором. В ідеальному конденсаторі електричне поле локалізоване між його обкладинками (рис. 3.10).

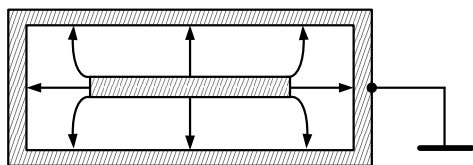


Рис. 3.10

Взаємна ємність C_{12} провідників системи називається **ємністю конденсатора C** , а власні ємності C_{11} і C_{22} – **ємностями розсіювання**. Якщо заземлити (рис. 3.10) зовнішню обкладинку конденсатора ($\varphi_1 = 0$), то з урахуванням рівності за абсолютною величиною зарядів, які знаходяться на обкладинках конденсатора, з (3.39) можна одержати, що $C_{22} = 0$. Тоді ємність конденсатора визначиться як відношення заряду одного з провідників до абсолютної різниці потенціалів між провідниками:

$$C = \left| \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} \right| = \frac{Q}{U}. \quad (3.40)$$

У цьому випадку енергію конденсатора можна визначити за співвідношенням

$$W^e = \frac{1}{2} CU^2. \quad (3.41)$$

Розглянемо приклади розрахунку ємності деяких систем.

Приклад 3.5. Знайти ємність відокремленої кулі радіусом a .

Розв'язок. Потенціал і поле рівномірно зарядженої сфери з повним зарядом Q збігаються з потенціалом та полем точкового заряду на відстані a (співвідношення (3.15) при $r = a$).

Ємність кулі, відповідно до (3.37),

$$C = \frac{Q}{\phi} = 4\pi\epsilon_a a. \quad (3.42)$$

Приклад 3.6. Знайти ємність плаского конденсатора (рис. 3.11), вважаючи, що поверхня пластин S значно більша, ніж відстань d між ними.

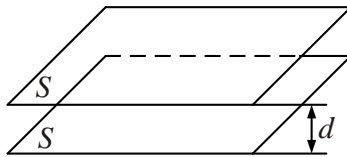


Рис. 3.11

Розв'язок. Згідно з умовами можна вважати, що поле між пластинами конденсатора збігається з полем між двома паралельними протилежно зарядженими площинами з поверхневою густиною заряду $\rho_s = \pm \frac{Q}{\epsilon_a S}$:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{e}_n Q}{\epsilon_a S}, \quad (3.43)$$

де \mathbf{e}_n – одиничний орт, спрямований від позитивно зарядженої площини до негативно зарядженої. Співвідношення (3.43) легко отримати за допомогою теореми Гаусса (п. 1.2.2).

Різниця потенціалів між обкладинками конденсатора

$$U = |\phi_1 - \phi_2| = \int_0^d \mathbf{E} d\mathbf{l} = \frac{Qd}{\epsilon_a S},$$

звідки ємність плаского конденсатора

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_a S}{d}. \quad (3.44)$$

Приклад 3.7. Знайти погонну ємність коаксіального кабелю (рис. 3.12). Радіус внутрішнього провідника R_1 , внутрішній радіус зовнішнього провідника R_2 .

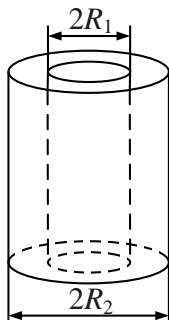


Рис. 3.12

Розв'язок. Введемо циліндричну систему координат Z, r, φ з віссю Z , яка збігається з віссю внутрішнього провідника. Нехай заряд внутрішнього провідника на одиницю довжини дорівнює $q_1 > 0$. Тоді за теоремою Гаусса поле між провідниками

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{q_1}{2\pi\epsilon_a r},$$

де ϵ_a – діелектрична проникність середовища між провідниками.

Різниця потенціалів між обкладками

$$U = |\varphi_1 - \varphi_2| = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Ємність на одиницю довжини нескінченного циліндричного конденсатора згідно з (3.40)

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad [\Phi/M]. \quad (3.45)$$

Формулою (3.45) можна користуватися і в діапазоні НВЧ (у випадку $(R_2 - R_1) \ll \lambda$), оскільки поле у поперечному перерізі кабелю має квазістационарний характер.

3.1.7. Електростатичний захист

На практиці часто необхідно виключити вплив зовнішніх електростатичних полів, що збуджуються зарядами $Q_{\text{зовн}}$, на електростатичне поле, яке існує в деякій області V_1 . З цією метою можна використовувати замкнений металевий екран, який повністю охоплює область V_1 і відокремлює її від навколишнього простору (рис. 3.13) – аналог ідеального конденсатора (рис. 3.9).

Якщо в об'ємі V_1 знаходиться провідник з зарядом Q , він наводить на внутрішній поверхні S_1 заряд $-Q$. Потік вектора \mathbf{D} через замкнену поверхню S_2 , яка знаходиться у середині екрана (рис. 3.13, пунктир), дорівнює згідно з (3.2, а) нулю, оскільки поле в екрані відсутнє. Зовнішні поля збуджують такий розподіл зарядів на поверхні S_3 , які компенсують внутрішні (в об'ємі V_1) поля. Об'єкти в області V_1 електростатично захищені – зовнішні поля на них не діють. При цьому область V_2 за межами V_1 не екранована від дії зарядів в області V_1 . Поява заряду $-Q$ на поверхні S_1 викликає наведення заряду $+Q$ на поверхні S_3 . Втім цей вплив можна зменшити, якщо «відвести» поверхневі заряди на землю за допомогою заземлення (рис. 3.10).

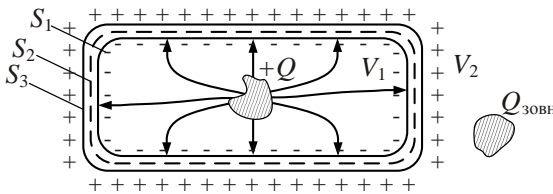


Рис. 3.13

У реальних конструкціях суцільні металеві екрани замінюють металевими сітками, область V_1 при цьому достатньо екранована, однак електростатичний зв'язок між зовнішніми та внутрішніми полями таки є.

Екранування здійснюється у фізичних експериментах, коли разом з досліджуваними зарядами екранується і сам дослідник («клітка Фарадея»), а також у прискорювачах (прискорювачах Ван-де-Граафа). В останньому усередині суцільної порожнистої металевої кулі збуджуються заряди, які подаються на екран (поверхню S_1). Зібрані заря-

ди переходять на поверхню S_3 і заряджають її, внаслідок чого потенціал кулі зростає. Однак експериментатор і електростатична машина повністю захищені від дії зовнішнього поля. Це дозволяє підвищити потенціал кулі до величини порядку декількох мільйонів вольт.

3.1.8. Провідна і діелектрична кулі в однорідному електростатичному полі

Якщо в однорідне поле (рис. 3.14) внести металеве або діелектричне тіло, первинне поле буде спотворене і відрізнятись від однорідного.

Важливими з практичної точки зору є задачі розрахунку ЕМП при внесенні в однорідне поле металевих або діелектричних куль.

Якщо куля металева (провідна), то внаслідок електростатичної індукції на її поверхні повинні наводитися заряди (рис. 3.15). За законом збереження заряду сумарний індукований заряд має дорівнювати нулю. Тому можна припустити, що його приблизний розподіл у діаметральних площинах, паралельних вектору \mathbf{E}_0 , буде таким, як показано на рис. 3.15.

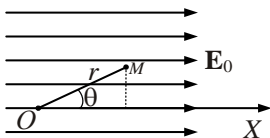


Рис. 3.14

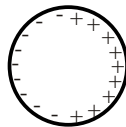


Рис. 3.15

Силкові лінії електричного поля \mathbf{E} будуть починатися або закінчуватися на цих зарядах і мають бути перпендикулярними до поверхні кулі. Якщо куля діелектрична, то під дією зовнішнього поля діелектрик поляризується, внаслідок чого первинне поле спотворюється. На поверхні кулі і в першому, і в другому випадку повинні використовуватися граничні умови для вектора \mathbf{E} і потенціалу ϕ (п. 3.1).

Наведемо розв'язання сформульованих задач.

Приклад 3.8. В однорідне електричне поле напруженістю E_0 вноситься провідна куля радіусом a . Потрібно знайти спотворене поле.

Розв'язок. Відповідно до принципу суперпозиції спотворене поле буде розглядати як накладення вихідного однорідного поля і поля, збудженого додатковими поверхневими зарядами кулі. З приводу додаткового поля висунемо гіпотезу, що воно зводиться до поля диполя (див. рис. 3.15). Виразимо потенціал вихідного однорідного поля φ_0 через \mathbf{E}_0 . З цією метою спрямуємо вісь X (рис. 3.14) уздовж силових ліній вектора \mathbf{E}_0 .

Оскільки $\mathbf{E}_0 = -\nabla\varphi_0$, то в прямокутній системі координат $E_0 = -\frac{d\varphi_0}{dx}$, звідки $\varphi_0 = C - xE_0$. Поклавши константу $C = \varphi_0|_{x=0} = 0$, будемо мати $\varphi_0 = -xE_0$, або в сферичній системі координат

$$\varphi_0 = -r \cos \theta E_0. \quad (3.46)$$

Внесемо в поле провідну кулю, сполучимо її центр із початком координат. Тоді шуканий потенціал спотвореного поля визначиться рівністю

$$\varphi(M) = \varphi_0 + \varphi_k,$$

де φ_k – потенціал додаткового поля кулі.

Виразимо потенціал цього поля як потенціал диполя (див. формулу (3.28)):

$$\varphi_k = \varphi_{\text{дип}} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_a r^2}; \quad r \geq a, \quad (3.47)$$

де p – невідомий дипольний момент кулі.

Результуючий потенціал у довільній точці M

$$\varphi(M) = \varphi_0 + \varphi_k = -r \cos \theta E_0 + \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_a r^2}. \quad (3.48)$$

Для визначення p врахуємо, що потенціал усієї провідної кулі однаковий і що внаслідок невизначеності потенціалу можна прийняти на поверхні кулі

$$\varphi(M)|_{r=a} = 0. \quad \text{Тоді з (3.48) отримаємо } -a \cos \theta E_0 + \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_a a^2} = 0, \quad \text{звідки}$$

$$p = 4\pi a^3 \epsilon_a E_0. \quad (3.49)$$

Підставивши (3.49) у (3.48), одержимо розв'язання у вигляді

$$\varphi(M) = r \cos \theta E_0 \left(\frac{a}{r^3} - 1 \right).$$

Напруженість поля знайдемо за формулою

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi(M) = -\mathbf{e}_r \frac{\partial\varphi(M)}{\partial r} - \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial\varphi(M)}{\partial\theta}.$$

Після диференціювання знайдемо

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r E_0 \cos\theta \left(\frac{2a^3}{r^3} + 1 \right) + \mathbf{e}_\theta E_0 \sin\theta \left(\frac{a^3}{r^3} - 1 \right). \quad (3.50)$$

У правильності прийнятої гіпотези й отриманого результату (3.50) переконує теорема єдиності (п. 2.3). Структура шуканого поля представлена на рис. 3.16. Суцільні лінії показують вектор \mathbf{E} , пунктирні – лінії рівного потенціалу φ .

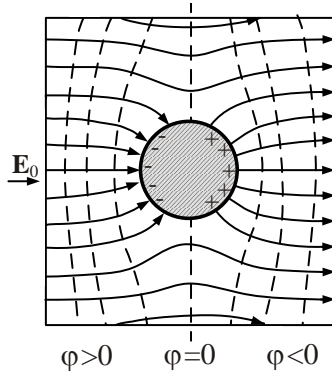


Рис. 3.16

Вкрапленням металевих куль у діелектричне середовище з $\epsilon \approx 1$ створюють «штучні діелектрики» з відносною проникністю ϵ_{ef} . Знайдемо величину ϵ_{ef} . Перепишемо співвідношення (3.49) у вигляді

$$p = \frac{4}{3} \pi \epsilon_a 3a^3 E_0 = 3\epsilon_a V_k E_0, \quad (3.51)$$

де V_k – об'єм кулі.

Якщо у деякій області об'єму V міститься m куль, то цій області буде відповідати сумарний дипольний момент $P_\Sigma = \epsilon_a 3\epsilon_a E_0 \sum_{i=1}^n V_{ki}$, пропорційний E_0 . Отже, модуль ефективного вектора поляризації, величина якого визначається як питомий дипольний момент

$$P_{\text{эф}} = \frac{P_{\Sigma}}{V} = 3\varepsilon_a \frac{\sum_{i=1}^n V_{ki}}{V} E_0. \quad (3.52)$$

Зіставляючи (3.52) з (1.19), одержимо

$$\varepsilon_{\text{эф}} = 1 + 3 \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} \frac{\sum_{i=1}^n V_{ki}}{V}. \quad (3.53)$$

З виразу (3.53) видно, що, змінюючи число і розміри куль, а також їх положення в діелектричному середовищі, можна в широких межах змінювати $\varepsilon_{\text{эф}}$, зокрема створювати неоднорідні діелектричні середовища з бажаним законом змінювання $\varepsilon_{\text{эф}}$ від просторових координат. Штучні діелектрики знаходять широке застосування, наприклад при побудові лінзових антен.

Приклад 3.9. В однорідне електричне поле напруженістю E_0 у середовищі з діелектричною проникністю ε_{a2} вноситься діелектрична куля радіусом a з діелектричною проникністю ε_{a1} . Потрібно знайти результуюче поле.

Розв'язок. У цьому випадку, на відміну від попереднього прикладу 3.8, повинні виконуватися граничні умови:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1|_{r=a} &= \Phi_2|_{r=a}, \\ \varepsilon_{a1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \varepsilon_{a2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Тут ε_{a1} і ε_{a2} – діелектричні проникності кулі і середовища відповідно.

У випадку діелектричної кулі прийемо, що поле E_1 усередині її відмінне від нуля, а вектори E_1 і E_0 – паралельні. Тоді потенціал усередині кулі $\Phi_1 = -r \cos \theta E_1$.

Поза кулею поле являє собою суму вихідного однорідного поля і поля диполя, якому еквівалентна поляризована куля:

$$\Phi_2 = \Phi_0 + \Phi_{\text{дип}} = -r \cos \theta E_0 + \frac{p \cos \theta}{4\pi \varepsilon_{a2} r^2}.$$

Підставляючи ці вирази в граничні умови (3.54), знаходимо невідомі – дипольний момент кулі p , внутрішнє \mathbf{E}_1 та зовнішнє \mathbf{E}_2 поля:

$$p = 4\pi\epsilon_{a2}a^3 \frac{\epsilon_{a1} - \epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1} + 2\epsilon_{a2}} E_0; \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 \frac{3\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1} + 2\epsilon_{a2}};$$

$$\mathbf{E}_2 = E_0 \left[\mathbf{e}_r \left(1 + \frac{a^3}{r^3} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) \sin \theta \right].$$

Отже, дипольний момент поляризованої діелектричної кулі, як і провідної кулі, пропорційний об'єму кулі і, крім того, залежить від співвідношення діелектричних проникностей кулі і навколишнього середовища. Усередині кулі напруженість може бути як більшою, так і меншою напруженості зовнішнього поля залежно від співвідношення ϵ_{a1} та ϵ_{a2} . Структура поля для двох випадків наведена на рис 3.17 а, б. Наведені графіки ліній електричного зміщення \mathbf{D} , які неперервні, оскільки вільні заряди на межі куля-діелектрик відсутні ($\rho_s = 0$). Лінії потенціалу зображені пунктиром.

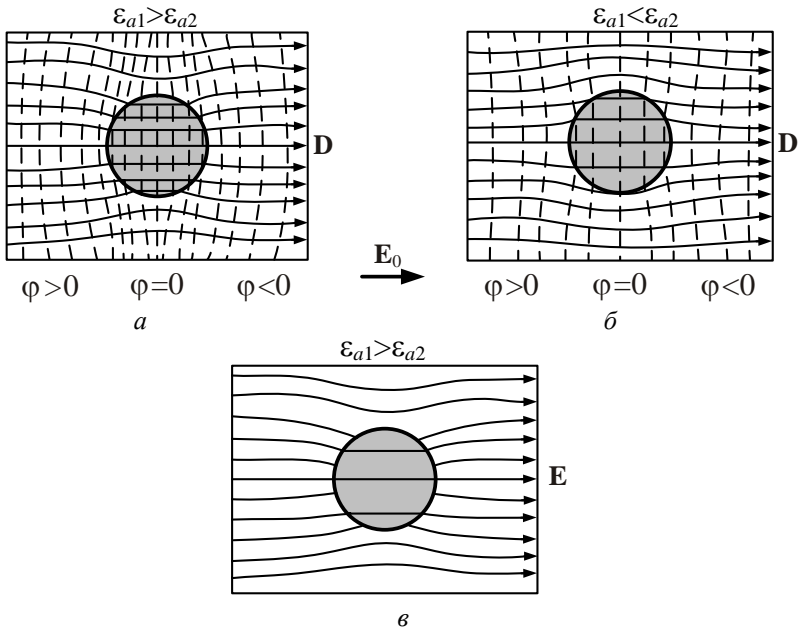


Рис. 3.17

Якщо зобразити лінії напруженості електричного поля, то можна побачити, що вони мають розрив на поверхні кулі (рис. 3.17, в).

Розглянуте розв'язання задачі про кулю використовується при вивченні розсіювання електромагнітних хвиль в атмосфері й в інших середовищах.

Завдання для самостійного розв'язку

1. Знайти поле рівномірно зарядженої нескінченної нитки; площини; сфери радіусом R .
2. Знайти поле рівномірно зарядженої шарової оболонки. Внутрішній радіус оболонки – a , зовнішній – b .
3. Знайти ємність відокремленої кулі радіусом R .
4. Знайти діаметр кулі, ємність якої у вакуумі дорівнює 2Φ .
5. Знайти відстань між пластинами плаского конденсатора ($S = 25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$), заповненого діелектриком ($\epsilon = 10$), ємність якого $C = 20 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$.

Питання для самоперевірки

1. Отримайте рівняння електростатики із загальних рівнянь Максвелла.
2. Поясніть властивості електростатичного потенціалу.
3. У чому полягає сутність розкладання поля системи зарядів на мультиполі?
4. Що таке ємність відокремленого провідника? Системи провідників?
5. Як можна здійснити електростатичний захист визначеної області простору?
6. Поясніть властивості металевих та діелектричних куль, які знаходяться в однорідному електричному полі.
7. Як можна виконати штучний діелектрик із заданим значенням відносної діелектричної проникності?

3.2. Магнітостатика

Магнітостатика вивчає магнітні поля, які збуджуються постійними магнітами (електричний струм \mathbf{J} вважається відсутнім $\mathbf{J}=0$). Вивчення властивостей таких полів досить важливе з практичної

точки зору, оскільки постійні магніти широко застосовують у різній радіоелектронній апаратурі.

Підкреслимо, що магнітне поле стаціонарних струмів за властивостями подібне до поля постійних магнітів, різниця полягає лише у тому, що виступає джерелом поля.

3.2.1. Аналогія між магніто- та електростатикою

Розглянемо системи рівнянь, які описують статичні поля:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_a \mathbf{E}, \end{aligned} \right\} \quad (3.55) \qquad \left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{B} &= \mu_a \mathbf{H} \end{aligned} \right\}. \quad (3.56)$$

Рівняння (3.56) повністю збігається з системою (3.55), якщо в останній покласти $\rho=0$ та зробити заміну $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ і $\varepsilon_a \rightarrow \mu_a$.

Відсутність у системі (3.56) змінної, аналогічної ρ , свідчить про те, **що вільних магнітних зарядів (мас) у природі не існує** $\rho^m=0$.

За повною аналогією з електростатикою можна ввести (оскільки магнітостатичне поле потенційне) **магнітний потенціал** у точці M :

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi^m. \quad (3.57)$$

і для однорідного середовища отримати рівняння Лапласа

$$\nabla^2 \varphi^m = 0. \quad (3.58)$$

Граничні умови для напруженості магнітного поля \mathbf{H} в умовах магнітостатики ($\mathbf{J}=0$) такі, як і для вектора \mathbf{E} :

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}, \quad (3.59)$$

а граничні умови для вектора магнітної індукції \mathbf{B} однакові, як і для вектора \mathbf{D} у разі відсутності вільних зарядів. Тому граничні умови для магнітостатичного потенціалу φ^m збігатимуться з граничними умовами для електростатичного потенціалу φ .

Розв'язання рівняння Лапласа отримане в загальному випадку (п. 2.7) для електростатичного потенціалу, який залежить від розпо-

ділу електричних зарядів у деякому об'ємі чи на деякій поверхні. Оскільки магнітні заряди не існують, отримаємо вираз для магнітного потенціалу φ^M іншим шляхом.

Згадаємо, що $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$, та запишемо друге рівняння з (3.56) у вигляді $\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} (\mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}) = 0$. Звідси

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{M} = \rho_{\text{зв}}^M, \quad (3.60)$$

де $\rho_{\text{зв}}^M$ – об'ємна густина зв'язаних магнітних зарядів.

У цьому випадку маємо $\operatorname{div} \mathbf{H} = \rho_{\text{зв}}^M$. На межі поділу середовищ

$$H_{1n} - H_{2n} = -\rho_{s\text{зв}}^M, \quad (3.61)$$

де $\rho_{s\text{зв}}^M$ – поверхнева густина зв'язаних магнітних зарядів. Замість (3.58) рівняння для **магнітостатичного потенціалу** запишемо у вигляді

$$\nabla^2 \varphi^M = -\rho_{\text{зв}}^M. \quad (3.62)$$

Розв'язок цього рівняння має наступний вигляд (порівняйте з (2.61)):

$$\varphi^M = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_{\text{зв}}^M}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\rho_{s\text{зв}}^M}{R} dS. \quad (3.63)$$

З (3.63) видно, що магнітостатичне поле збуджується **зв'язаними** магнітними зарядами – магнітними диполями, а речовину можна розглядати як сукупність не тільки електричних, але й магнітних диполів.

Це чітко можна визначити, якщо перетворити співвідношення (2.46) до вигляду

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\rho_{\text{зв}}}{\epsilon_0}, \quad (3.64)$$

де $\rho_{\text{зв}} = \operatorname{div} \mathbf{P}$ (оскільки $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$).

З виразу (3.64) виходить, що поле у діелектрику збуджується зарядами ρ (як і у вакуумі), а також зв'язаними зарядами, густина яких залежить від властивостей діелектрика.

Таким чином, для переходу від задач електростатики до аналогічних задач магнітостатики при розв'язанні електростатичних задач необхідно зробити заміну $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M}$, і, оскільки в (3.62) стоїть величина $\rho_{зв}^M$, а не $\frac{\rho_{зв}^M}{\mu_0}$, слід покласти $\mu_0 = 1$ (замінити ϵ_a на μ).

3.2.2. Приклади розрахунків магнітостатичних полів

Приклад 3.10. У середовище з відносною магнітною проникністю $\mu_1 = 1$, де збуджено однорідне магнітне поле напруженістю \mathbf{H}_0 , вноситься циліндричний екран, внутрішнім радіусом a , зовнішнім b з відносною магнітною проникністю μ_2 (рис. 3.18). Необхідно знайти напруженість магнітного поля всередині та ззовні екрану.

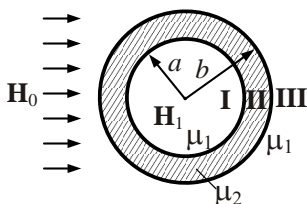


Рис. 3.18

Розв'язок. Покладемо, що в рівномірному магнітному полі напруженістю \mathbf{H}_0 треба провести екранування деякої області простору, наприклад циліндричної, так, щоб напруженість поля в ній була набагато меншою, ніж напруженість зовнішнього поля. Екран будемо вважати досить протяжним уздовж осі Z (перпендикулярної рисунку).

Оскільки в усіх областях струм відсутній то магнітне поле описується рівнянням Лапласа (3.58), яке у циліндричній системі координат має вигляд

$$\nabla^2 \varphi^M = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi^M}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi^M}{r^2 \partial \varphi^2} = 0. \quad (3.65)$$

Розв'язок цього рівняння для областей I, II та III дає

$$\varphi_I^M = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \varphi,$$

$$\varphi_{II}^M = \left(C_3 r + \frac{C_4}{r} \right) \cos \varphi,$$

$$\varphi_{III}^M = \left(C_5 r + \frac{C_6}{r} \right) \cos \varphi.$$

Тут C_i – постійні інтегрування.

З урахуванням граничних умов ($r = a, r = b$), поведінки потенціалу при $r \rightarrow 0$ та $r \rightarrow \infty$ отримаємо

$$\varphi_I^M = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} r \cos \varphi, \quad q = \frac{2\mu_2}{(1 + \mu_2)^2}, \quad \Delta = b^2 - \left(\frac{\mu_2 - 1}{\mu_2 + 1} \right)^2 a^2. \quad (3.66)$$

В декартовій системі координат

$$\varphi_I^M = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} x, \quad \text{або} \quad H_1 = \frac{\partial \varphi_I^M}{\partial x} = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta}. \quad (3.67)$$

Відношення напруженості поля H_1 , що всередині екрана, до зовнішнього H_0 за умов $\mu_2 \gg 1$: $\left(\frac{H_1}{H_0} \right) \approx \frac{4}{\mu_2} \frac{b^2}{b^2 - a^2}$.

Для розглянутого прикладу видно, що при зростанні μ_2 та товщини екрана внутрішнє поле H_1 всередині екрана значно послаблюється. Цей факт використовують для статичного магнітного екранування. На рис. 3.19 якісно показаний хід силових ліній магнітного поля.

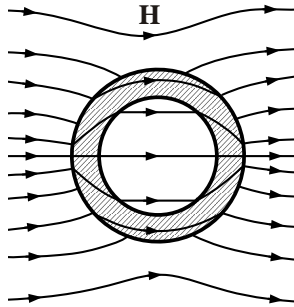


Рис. 3.19

Із рисунка видно, що більшість силових ліній \mathbf{H} проходить по стінках екрана і мала частина ліній проходить у середині.

Приклад 3.11. Магнітний екран являє собою циліндричну оболонку з параметрами $a = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $b = 6,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $\mu_2 = 10^4$; $\mu_1 = 1$. Знайти відношення H_1/H_0 .

Розв'язок. Із співвідношень (3.66), (3.67) отримаємо:

$$\frac{H_1}{H_0} \approx \frac{4}{10^4} \frac{6,5^2}{6,5^2 - 6^2} = 0,0027.$$

Таким чином, напруженість поля всередині екранованої області складає лише 0,27 % від поля H_0 ззовні.

Питання для самоперевірки

1. Отримайте рівняння магнітостатики із загальних рівнянь Максвелла.

2. У чому полягає аналогія між магніто- та електростатикою?

3. Як можна здійснити статичне магнітне екранування визначеної області простору?

3.3. Стационарні поля

3.3.1. Основні положення

Стационарне поле $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0, \mathbf{J} \neq 0 \right)$ задовольняє системі рівнянь

(див. 1.2.5):

у диференційній формі

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

в інтегральній формі

$$\left. \begin{aligned} \oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} &= 0; \\ \oint_s \mathbf{D} d\mathbf{S} &= q; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} &= I; \\ \oint_s \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{cr}}). \quad (3.70)$$

Відзначимо, що у стаціонарному випадку електричне і магнітне поля зв'язані між собою за допомогою (3.70).

Умова існування стаціонарного поля виходить із закону збереження заряду (п. 1.2.4). За умови стаціонарності ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) одержимо

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (3.71)$$

Отже, у стаціонарному полі лінії струму провідності мають бути неперервними. Розглянемо струми, що проходять в обмеженій області (рис. 3.20), і виділимо замкнену трубку струму з нескінченно малим поперечним перетином dS .

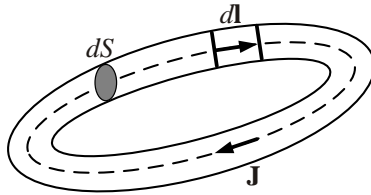


Рис. 3.20

Для такої трубки струм $dI = \mathbf{J}d\mathbf{S} = J_n dS$ через усі перетини однаковий. Запишемо (3.70) у вигляді

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{cr}} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}, \quad (3.72)$$

помножимо обидві частини (3.72) на елемент $d\mathbf{l}$, спрямований як \mathbf{J} :

$$\mathbf{E}d\mathbf{l} + \mathbf{E}^{\text{cr}}d\mathbf{l} = \mathbf{J} \frac{d\mathbf{l}}{\sigma} = J \frac{d\mathbf{l}}{\sigma}.$$

Введемо замість густини струму \mathbf{J} струм трубки $dI = \mathbf{J}d\mathbf{S}$. Тоді

$$\mathbf{E}d\mathbf{l} + \mathbf{E}^{\text{cr}}d\mathbf{l} = \frac{dI}{dS} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{\sigma}.$$

Проінтегруємо останнє співвідношення по замкненій лінії струму:

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} + \oint_l \mathbf{E}^{\text{ст}} d\mathbf{l} = dI \oint_l \frac{dl}{\sigma dS}.$$

Оскільки стаціонарне поле вектора \mathbf{E} безвихрове, то перший інтеграл дорівнює нулю. Тоді

$$\oint_l \mathbf{E}^{\text{ст}} d\mathbf{l} = dIR, \quad (3.73)$$

де $R = \oint_l \frac{dl}{\sigma dS}$.

Таким чином, **постійний струм і його поле існують лише за наявності стороннього джерела**. Інтеграл $\oint_l \mathbf{E}^{\text{ст}} d\mathbf{l} = \mathcal{E}$ називають електрорушійною силою, що діє в замкненому контурі, а величину R – опором контура. Рівняння (3.73) у цьому випадку записується у формі $dI = \frac{\mathcal{E}}{R}$ і представляє **закон Ома для кола постійного струму**.

Отже, для існування постійного струму в провідному середовищі недостатньо дії одного потенційного електричного поля. У колі з постійним струмом неодмінно повинно діяти джерело сторонньої ЕРС. Оскільки $\oint_l \mathbf{E}^{\text{ст}} d\mathbf{l} \neq 0$, **поле $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ має вихровий характер**.

3.3.2. Порівняння стаціонарного електричного та електростатичного полів

1. У стаціонарному полі усередині провідника, по якому проходить струм ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$), напруженість $\mathbf{E} \neq 0$, в електростатичному полі усередині провідника $\mathbf{J} = 0$, $\mathbf{E} = 0$.

2. Оскільки усередині провідника $\mathbf{E} \neq 0$, то у стаціонарному полі у різних точках провідника потенціал ϕ має різні значення, тобто провідник не є екіпотенційною областю. Тому вектор \mathbf{E} вже не буде перпендикулярним до поверхні провідника зі струмом.

3. У електростатичному полі заряд може існувати лише на поверхні провідника. У стаціонарному полі в області, де діють сторонні

сили ($E^{ct} \neq 0$), об'ємний заряд існує й усередині провідника. Застосуємо оператор дивергенції до (3.72), вважаючи, що провідник ізотропний ($\text{grad } \sigma = 0$):

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{J} &= \text{div } \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ct}) = \sigma \text{div} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ct}) + (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ct}) \text{grad } \sigma = \\ &= \sigma \frac{\rho}{\varepsilon_a} + \sigma \text{div } \mathbf{E}^{ct} = 0. \end{aligned}$$

Для стаціонарного поля $\text{div } \mathbf{J} = 0$. Звідси виходить, що у провідному середовищі

$$\rho = -\varepsilon_a \text{div } \mathbf{E}^{ct} \neq 0.$$

Якісні відмінності стаціонарного електричного поля від електростатичного завжди існують. Однак кількісні розходження можуть бути дуже незначними. Це особливо стосується поля в діелектрику, що оточує провідники з високою провідністю.

Приклад 3.12. Розглянемо дві паралельні пласкі мідні ($\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$) шини (рис. 3.21), що з'єднують джерело електричної енергії з навантаженням. Нехай густина постійного струму $J = 2 \text{ А/мм}^2$, відстань між шинами $d = 4 \text{ см}$. Знайти відношення нормальної E_n до тангенційної складової E_τ , якщо напруга між шинами дорівнює 220 В .

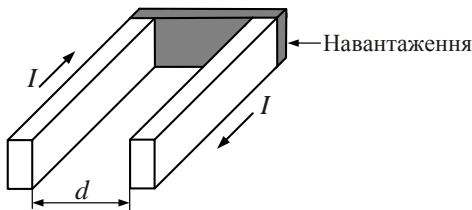


Рис. 3.21

Розв'язок. Усередині шини $E = E_\tau = \frac{J}{\sigma} = \frac{2 \cdot 10^6 \text{ В}}{5,7 \cdot 10^7 \text{ м}} = 0,035 \text{ В/м}$.

Через неперервність E_τ таке саме значення E_τ буде й у діелектрику поблизу поверхні провідників. Складовою напруженості E_n на межі з металом може бути приблизно оцінена за формулою плаского конденсатора:

$$E_n = \frac{U}{d} = \frac{220}{4 \cdot 10^{-2}} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ В/м.}$$

Звідси $(E_n/E_\tau) = 1,6 \cdot 10^5$.

На межі з добрим провідником складові вектора $\mathbf{E} = \mathbf{e}_\tau E_\tau + \mathbf{e}_n E_n$ задовольняють дуже строгій нерівності $E_\tau \ll E_n$, що дає право вважати граничну умову для вектора \mathbf{E} такою самою, як і в електростатиці.

3.3.3. Магнітне поле постійного струму. Лінійний струм

На відміну від електростатичного поля магнітне поле постійного струму в точках, де $\mathbf{J} \neq 0$, є вихровим. Тому для визначення векторів поля доцільно ввести векторний потенціал \mathbf{A} :

$$\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Для векторного потенціалу \mathbf{A} рівняння для стаціонарних полів $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ має вигляд (див. співвідношення (2. 45)):

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_a \mathbf{J}. \quad (3.74)$$

Це векторне рівняння Пуассона.

У декартовій системі координат вектори рівняння еквівалентні трьом скалярним рівнянням:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_a J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_a J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_a J_z \end{aligned} \right\}. \quad (3.75)$$

Розв'язання кожного з рівнянь можна записати у вигляді (див. (2.61), (2.62))

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{J_x}{R} dV \\ A_y &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{J_y}{R} dV \\ A_z &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{J_z}{R} dV \end{aligned} \right\} \quad (3.76)$$

Остаточно маємо

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{R} dV. \quad (3.77)$$

Тут R – відстань від елемента dV з розподіленням по ньому струмом \mathbf{J} до точки спостереження, у якій обчислюється потенціал.

Співвідношення (3.77) вірне для будь-якої системи координат, і задача розрахунку \mathbf{A} зведена до інтегрування. Після обчислення векторного потенціалу \mathbf{A} розраховують магнітну індукцію $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

У випадку тонких провідників вводиться поняття лінійного струму (рис. 3.22). Виділимо малий відрізок провідника dl , який будемо вважати циліндричним, а провідник тонким, так що відстані від точки M до точок 1, 2, 3 практично збігаються. У цьому разі можна говорити про відстань r від точки M до поперечного перерізу S , оскільки

$$r_1 \approx r_2 \approx r_3 \approx r. \quad (3.78)$$

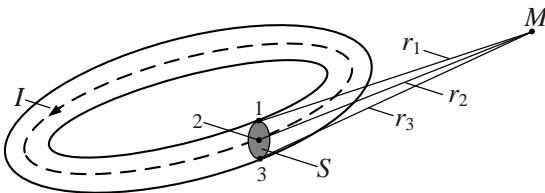


Рис. 3.22

Визначимо векторний потенціал $d\mathbf{A}$, створюваний лінійним струмом елемента $d\mathbf{l}$. З огляду на співвідношення (3.78), значення $d\mathbf{A}$ знаходимо за співвідношенням

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_{dl} \int_S \frac{\mathbf{J}}{r} d\mathbf{l} dS = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_{dl} \frac{d\mathbf{l}}{r} \int_S \mathbf{J} dS. \quad (3.79)$$

Оскільки $\int_S \mathbf{J} dS = I$ – для будь-якого перетину провідника S , то формула (3.79) набуває вигляду

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_a I d\mathbf{l}}{4\pi r}. \quad (3.80)$$

Векторний потенціал, зумовлений лінійним струмом, обчислюється за формулою

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l}}{r}, \quad (3.81)$$

а потенціал, створюваний лінійним струмом замкненого провідника,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l}}{r}. \quad (3.82)$$

Магнітне поле, створюване елементом $d\mathbf{l}$,

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \operatorname{rot} \frac{d\mathbf{l}}{r}. \quad (3.83)$$

Через тотожність (додаток Е) $\operatorname{rot} \varphi \mathbf{a} = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{a}]$, якщо $\varphi = \frac{1}{r}$, $\mathbf{a} = d\mathbf{l}$, вираз (3.83) перетвориться до вигляду

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \left(\left[\operatorname{grad} \frac{1}{r}, d\mathbf{l} \right] d\mathbf{l} + \frac{1}{r} \operatorname{rot} d\mathbf{l} \right),$$

де r – відстань від елемента $d\mathbf{l}$, в якому розміщений початок декартової системи координат, до точки спостереження M .

Вектор $d\mathbf{l}$ – постійний і не залежить від положення точки M . При цьому $\text{rot } d\mathbf{l} = 0$, а $\text{grad } \frac{1}{r} = -\mathbf{e}_r \frac{1}{r^2}$. Крім того, помінявши місцями співмножники векторних добутків, одержимо

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi r^2} [d\mathbf{l}, \mathbf{e}_r].$$

У сферичних координатах з початком на елементі $d\mathbf{l}$ і полярній осі, спрямованій по $d\mathbf{l}$, матимемо $[d\mathbf{l}, \mathbf{e}_r] = \mathbf{e}_\phi dl \sin \theta$. Тому

$$d\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{I dl \sin \theta}{4\pi r^2}. \quad (3.84)$$

Співвідношення (3.84) виражає відомий закон Біо – Савара – Лапласа, що зв'язує напруженість магнітного поля з лінійним струмом елемента $d\mathbf{l}$. Цей закон одержаний теоретично як наслідок з рівнянь Максвелла.

Відрізок зі струмом завдовжки l збуджує магнітне поле з напруженістю

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \int_l \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{e}_r]}{r^2}. \quad (3.85)$$

У виразі (3.85) r – відстань від елемента $d\mathbf{l}$ до точки спостереження.

3.3.4. Приклади розрахунку магнітних полів лінійних струмів

Приклад 3.13. Знайти поле нескінченного прямого проводу зі струмом I , орієнтованим вздовж осі Z .

Розв'язок. Усі елементи довгого проводу спрямовані однаково, вздовж осі OZ (рис. 3.23), тому векторний потенціал \mathbf{A} має тільки z -складову.

Згідно з (3.80) векторний потенціал прямого проводу завдовжки $2L$

$$A_z = \frac{\mu_a}{4\pi} I \int_{-L}^L \frac{dl}{R} = \frac{\mu_a}{4\pi} I \int_{-L}^L \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (3.86)$$

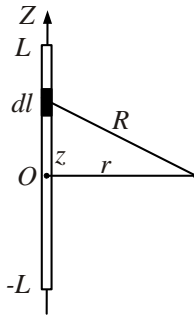


Рис. 3.23

Відповідно до визначення потенціалу $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A}$ напруженість магнітного поля має єдину складову:

$$H_\varphi = -\frac{1}{\mu_a} \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{Ir}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Якщо L нескінченно велике ($L \rightarrow \infty$), то

$$H_\varphi = \frac{Ir}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{I}{2\pi r}. \quad (3.87)$$

Цей результат ми отримали, використовуючи закон Біо – Савара – Лапласа. Раніше (див. приклад 1.3) цей вираз був отриманий із закону Ампера.

Приклад 3.14. Визначити напруженість магнітного поля, яке збуджує струм кругового витка радіусом a на відстані $r \gg a$ (рис. 3.24, а).

Розв'язок. Будемо вважати, що виток лежить у площині XOY , а центр витка знаходиться на початку системи координат.

Вираз для векторного потенціалу $d\mathbf{A}$, створюваного елементом струму завдовжки $d\mathbf{l}$, визначається формулою (3.80). Звідси виходить, що вектор $d\mathbf{A}$ лежить у площині витка, і, оскільки $d\mathbf{A}$ паралельний $d\mathbf{l}$, то векторний потенціал не має складових уздовж осі Z .

Векторний потенціал колового струму має тільки φ -складову, з огляду на симетрію A_φ не залежить від кута φ , і досить знайти значення A_φ в одній площині, наприклад площині $\varphi = 0$ у точці M з координатами $(r, \theta, 0)$.

Розглянемо орієнтацію векторів $d\mathbf{A}$ для чотирьох симетрично розташованих по периметру витка елементів струму (рис. 3.24, б).

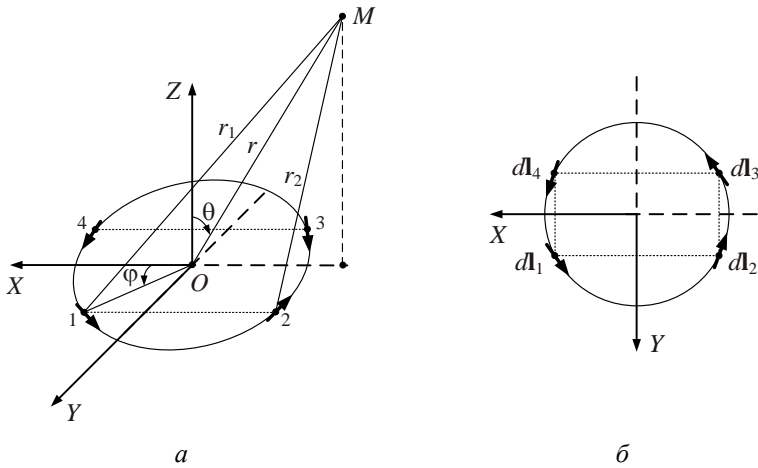


Рис. 3.24

Як видно з рисунка, проєкції $d\mathbf{A}$ на вісь X дають нульову суму

$$\sum_{i=1}^4 dA_{xi} = 0.$$

Результуючий векторний потенціал, створений виділеними елементами струму, матиме вигляд

$$d\mathbf{A} = \sum_{i=1}^4 dA_{yi} = 2 \frac{\mu_a}{4\pi} Idl \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \cos \varphi. \quad (3.88)$$

Якщо $r \gg a$, можна прийняти (рис. 3.24) $r_2 - r_1 \approx 2a \cos \varphi \sin \theta$, $r_2 r_1 \approx r^2$. Остаточо векторний потенціал

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{e}_\varphi \int d\mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi \int_0^{2\pi} 2 \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{I}{r^2} \sin \theta \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_a I \pi a^2 \sin \theta}{4\pi r^2} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_a IS \sin \theta}{4\pi r^2}, \end{aligned} \quad (3.89)$$

де $S = \pi a^2$ – площа витка.

Вираз (3.89) свідчить, що векторні лінії \mathbf{A} являють собою кола з центрами, які лежать на осі Z . Максимальне значення \mathbf{A} має при $\theta = \pi/2$ (у площині витка).

Після обчислення $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A}$ у сферичній системі координат отримаємо

$$\mathbf{H} = \frac{IS}{4\pi r^3} (\mathbf{e}_r 2 \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta). \quad (3.90)$$

Порівняння виразу (3.90) з (3.29) свідчить, що **магнітне поле витка за формою запису збігається з електричним полем диполя.**

На рис. 3.25 зображена структура полів електричного та магнітного диполів. Підкреслимо, що аналогія між полями цих диполів діє і у змінних електромагнітних процесах.

Позначивши $m = \mu_a IS$, перепишемо формулу (3.90) у вигляді

$$\mathbf{H} = \frac{m}{4\pi\mu_a r^3} (\mathbf{e}_r 2 \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta). \quad (3.91)$$

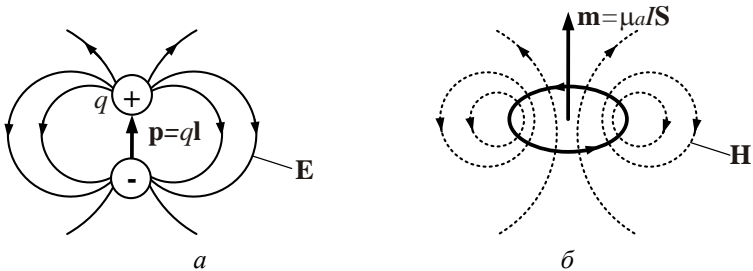


Рис. 3.25

Величина m одержала назву **магнітного моменту**. У векторній формі магнітний момент варто записувати так:

$$\mathbf{m} = \mu_a IS. \quad (3.92)$$

Тут вектор \mathbf{m} створює правоґвинтову систему з напрямком струму (рис. 3.26, а). Якщо ввести умовні магнітні заряди, зображені на рис. 3.26, б, то

$$\mathbf{m} = q^M \mathbf{l}.$$

Таким чином, малий виток зі струмом еквівалентний магнітному диполю. Це твердження справедливе для будь-якого замкненого струму на великій відстані ($r \gg \sqrt{S}$).

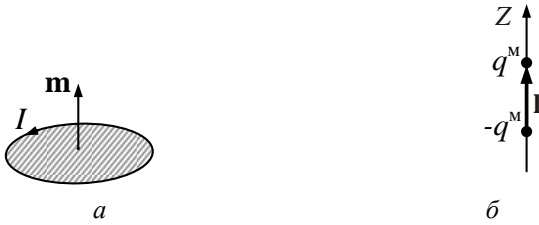


Рис. 3.26

Наведені результати дають підставу вважати, що магнітне поле постійних магнітів створюється замкненими елементарними струмами (гіпотеза Ампера).

3.3.5. Енергія стаціонарного магнітного поля

Енергію магнітного поля, яка зосереджена у межах об'єму V , можна знайти за співвідношенням (див. п. 1.5.1)

$$W^M = \int_V \frac{\mu_a \mathbf{H}^2}{2} dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \mathbf{B} dV. \quad (3.93)$$

Але ця формула незручна, тому що для знаходження W^M необхідно знати \mathbf{H} у кожній точці об'єму. Перетворимо її таким чином, щоб енергія магнітного поля була виражена через струми, які проходять в об'ємі V , обмеженому поверхнею S . Для цього скористаємося тим, що $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Використовуючи тотожність $\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b}$ і співвідношення $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$, одержимо

$$W^M = \frac{1}{2} \int_V \text{div}[\mathbf{A}, \mathbf{H}] dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \mathbf{J} dV.$$

Застосувавши теорему Остроградського – Гаусса до першого доданку, знайдемо

$$W^M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \mathbf{J} dV + \frac{1}{2} \oint_S [\mathbf{A}, \mathbf{H}] d\mathbf{S}. \quad (3.94)$$

Нехай S буде поверхнею сфери радіусом r . Спрямуємо r до нескінченності.

Якщо $r \rightarrow \infty$, кожен замкнений провідник являтиме собою магнітний диполь, векторний потенціал його буде змінюватися як $\sim \frac{1}{r^2}$ відповідно до (3.89), а напруженість на поверхні S як $H \sim \frac{1}{r^3}$. При цьому площа елемента $dS \sim r^2$. Тому поверхневий інтеграл у (3.94) матиме порядок $\frac{1}{r^3}$ та буде нехтовно малим при $r \rightarrow \infty$. У результаті одержимо

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \mathbf{J} dV. \quad (3.95)$$

Якщо провідник лінійний, то

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \mathbf{J} dV = \oint_l \int_s \frac{\mathbf{A} d\mathbf{l}}{2} J_n dS = \frac{1}{2} \oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l} \int_s J_n dS = \frac{I}{2} \oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l},$$

через те, що в межах інтегрування по поперечному перетину потенціал \mathbf{A} можна вважати постійним. Згідно з теоремою Стокса, контурний інтеграл дорівнює

$$\oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_s \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_s \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi, \quad (3.96)$$

де Φ – магнітний потік, що пронизує будь-яку поверхню S , яка спирається на контур провідника.

З формул (3.94) – (3.96) знаходимо

$$W^m = \frac{I\Phi}{2}. \quad (3.97)$$

Потік, що пронизує контур, через лінійність рівнянь поля пропорційний струму:

$$\Phi = LI. \quad (3.98)$$

Коефіцієнт L називають **індуктивністю лінійного провідника**, одиниця вимірювання якої генрі $[Гн]$. Використовуючи (3.97), магнітну енергію можна також представити як

$$W^M = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}. \quad (3.99)$$

Формули (3.98), (3.99) часто застосовують для розрахунку індуктивності провідника.

Приклад 3.15. Знайти погонну індуктивність коаксіального кабелю. Кабель являє собою систему двох нескінченно тонких коаксіальних циліндрів діаметром $2R_1$ та $2R_2$ (рис. 3.12).

Розв'язок. В обох провідниках існують рівні та протилежні струми I та $-I$. Індуктивність кабелю будемо знаходити за співвідношенням (3.99), а розрахунки магнітної енергії за (3.95). Оскільки задача має осьову симетрію, то доцільно застосувати інтегральний метод.

Розглянемо три концентричні кола, центри яких збігаються з віссю кабелю і мають радіуси $r_1 < R_1$, $R_1 < r_2 < R_2$, $r_3 > R_2$ і відповідно довжину l_1 , l_2 , l_3 .

Відповідно до (1.36) $\oint_{l_1} H_\varphi dl_1 = 0$, тому що контур l_1 не охоплює струм;

$$\oint_{l_2} H_\varphi dl_2 = 2\pi r_2 H_\varphi = I; \quad (3.100)$$

і, нарешті, $\oint_{l_3} H_\varphi dl_3 = 2\pi r_3 H_\varphi = I + (-I) = 0$, тому що струми у внутрішньому та зовнішньому провідниках протилежні за напрямками та рівні за значеннями.

Таким чином, магнітне поле кабелю існує лише у просторі між провідниками. Із співвідношення (3.100) $H_\varphi = I/2\pi r_2$, магнітна енергія кабелю одиничної довжини:

$$W^M = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_2} \int_{R_1}^{\mu_a H^2}{2} r dr d\varphi dz = \frac{\mu_a I^2}{4\pi} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_a I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

звідси, згідно з (3.99), погонна індуктивність коаксіального кабелю

$$L_1 = \frac{\mu_a}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad [Гн/М]. \quad (3.101)$$

Якщо в області V існують різні системи струмів, то вони впливають одна на одну, що можна характеризувати **взаємними індук-**

тивностями. Їх можна розрахувати, якщо відомий розподіл струмів у системах та їх геометрія.

Завдання для самостійного розв'язку

1. Знайти напруженість магнітного поля, збуджуваного постійним струмом I , який проходить циліндричною трубою. Внутрішній радіус труби R_1 , зовнішній R_2 .

2. Знайти напруженість магнітного поля на осі плаского витка зі струмом. Радіус витка $a = 10^{-2}$ м, відстань до точки спостереження $r = 10^{-1}$ м, струм $I = 5$ А.

3. Визначити магнітну енергію всередині провідника одиничної довжини, в якому протікає струм I .

4. Знайти індуктивність циліндричного провідника одиничної довжини радіусом a зі струмом I .

Питання для самоперевірки

1. Отримайте систему рівнянь для стаціонарних полів із загальної системи рівнянь Максвелла.

2. Порівняйте властивості стаціонарного електричного та електростатичного полів.

3. Сформулюйте закон Біо – Савара – Лапласа та одержіть його з рівнянь Максвелла.

4. Сформулюйте особливості поля магнітного диполя.

5. Як обчислити енергію магнітного поля?

6. Що таке індуктивність провідника?

3.4. Квазістаціонарне наближення

Досі, розглядаючи статичні та стаціонарні поля, ми вважали, що в усіх точках простору значення векторів ЕМП завжди постійні. Це певна ідеалізація, тому що кожне електромагнітне явище має свій початок та кінець, що спричинює виникнення в системах перехідних процесів, які характеризуються часом релаксації τ_p . Через це описувати ЕМП системами рівнянь (3.55), (3.66), (3.68) можна лише для тих моментів часу t , для яких виконується умова $\tau_p \ll t - t_0$, де t_0 – момент збудження ЕМП у системі. Для повного опису ЕМП

слід відмовитись від обмежень $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\mathbf{J} = \text{const}$, як це зроблено у повній системі рівнянь Максвелла.

Розглянемо ще одне наближення до системи рівнянь Максвелла, «квазістаціонарне», яке дозволяє вивчати змінні поля.

Квазістаціонарні явища характеризуються тим, що в них струмами зміщення можна знехтувати:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0, \quad (3.102)$$

але наявність змінного магнітного поля є суттєвою:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0. \quad (3.103)$$

Змінними можуть бути інші вектори поля – \mathbf{J} , \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} та заряд ρ .

Наближення (3.103) свідчить про існування електромагнітної індукції, але магнітні силові лінії пов'язані тільки зі струмом провідності. Таким чином, самопідтримуючий електромагнітний процес у діелектрику неможливий. Квазістаціонарне наближення (яке існувало до Максвелла) суперечить повній системі рівнянь. Так, перше рівняння Максвелла у цьому випадку має бути записаним у вигляді

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (3.104)$$

звідки $\text{div } \mathbf{J} = 0$. Це заперечує експериментально встановленому факту збереження заряду $\text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (див. п. 1.2.4). Але дане протиріччя для об'єктів, які можна розглядати на основі квазістаціонарної теорії, не принципове.

Як і раніше, введемо векторний \mathbf{A} і скалярний ϕ потенціали.

Для скалярного потенціалу ϕ отримаємо рівняння Пуассона: $\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_a$, розв'язок якого (див. приклад 2.3) має вигляд

$$d\varphi(M, t) = \frac{\rho(M', t)}{4\pi\epsilon_a R} dV. \quad (3.105)$$

На відміну від (2.60) заряд ρ і потенціал φ є функціями часу, але у вираз (3.105) час t входить як параметр. Будь-яка зміна заряду ρ у ту саму мить змінює потенціал φ у довільній точці M простору. Це притаманне теорії дальності, на відміну від теорії близькодії, коли збудження поля від точки до точки поширюється із запізненням $t_{\text{зап}} = R/v$, де v – швидкість поширення ЕМП.

Встановимо **межі застосування квазістаціонарного наближення**.

Розглянемо **провідники**. У провідниках гот $\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cong \mathbf{J}$, що мо-

жливо тоді, коли $J \gg \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t}$. Оскільки $J = \sigma E$, то умова

$\frac{\partial D}{\partial t} \approx 0$ означає, що $\sigma E \gg \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t}$,

$$|E| \gg \left| \tau_p \frac{\partial E}{\partial t} \right| = \Delta E, \quad (3.106)$$

де $\tau_p = \epsilon_a / \sigma$ – час релаксації (п. 1.2.4).

Отже, усередині провідника квазістаціонарне наближення чинне, якщо за час релаксації приріст електричного поля $\Delta E \ll E$. Якщо ЕМП гармонічне, то з (3.106) маємо $E \ll \tau_p \omega E$, або

$$\tau_p \ll \frac{T}{2\pi}. \quad (3.107)$$

Згідно з класифікацією середовищ умова (3.107) характеризує добрий провідник, отже квазістаціонарне наближення прийнятне для таких провідників практично у всьому діапазоні радіочастот.

Для **діелектрика** $\mathbf{J} = 0$ і нехтування струмом зміщення означає відмову від кінцевої швидкості поширення збурень ЕМП. Згідно з (3.105) зміна потенціалу в точці M настає не у час $t - t_{\text{зап}}$, а в той

самий момент. Отже, ми припускаємо, що $\rho(t - t_{\text{зап}}) \approx \rho(t)$. Розкладаючи $\rho(t - t_{\text{зап}})$ у ряд Тейлора, отримаємо

$$\rho(t) - t_{\text{зап}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \dots \approx \rho(t). \quad (3.108)$$

Для виконання (3.108) необхідно, щоб $t_{\text{зап}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \ll \rho(t)$. Для гармонічних процесів $t_{\text{зап}} \omega \ll 1$, звідки

$$t_{\text{зап}} \ll \frac{T}{2\pi} \text{ або } r \ll \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (3.109)$$

Отже, **квазістаціонарним є поле поблизу змінного заряду.**

Подібні твердження можна зробити і відносно векторного потенціалу \mathbf{A} . Роль заряду ρ буде виконувати густина струму \mathbf{J} .

Квазістаціонарним наближенням можна користуватися в усіх точках провідників та діелектриків, які задовольняють умовам (3.107), (3.109). Чим повільніше відбуваються електромагнітні процеси, тим більш вірним є таке наближення. Можна вважати, що **квазістатична теорія – це теорія полів, які повільно змінюються.** Особливо придатна квазістатична теорія для опису електромагнітних явищ в електро- та радіосистемах (приймачах, електромережах, силових електричних мережах та ін.). Суттєвою особливістю цих систем є різке зменшення ЕМП при незначному віддаленні від них.

При вивченні і аналізі поширення радіохвиль, процесу випромінювання, швидкоплинних електромагнітних процесів для опису ЕМП необхідно використовувати повну систему рівнянь Максвелла.

Питання для самоперевірки

1. Який вигляд має система рівнянь Максвелла у разі квазістаціонарного наближення?
2. Які електромагнітні явища враховує і які не враховує квазістаціонарне наближення?
3. В яких випадках доцільно застосовувати квазістаціонарне наближення і які існують обмеження щодо його використання?

4. ПЛАСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ В НЕСКІНЧЕННОМУ ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

У цьому розділі розглянуто дуже важливі для практики питання, які пов'язані з коливаннями електромагнітного поля – електромагнітними хвилями.

Доказ існування ЕМХ є одним з найважливіших результатів, одержаних Дж. К. Максвеллом теоретично і підтверджених експериментально Г. Герцом.

На відміну від коливань струмів і напруг в електричних мережах коливання в фізичних системах (механічні коливання у твердих, рідких та газових середовищах, **електромагнітні коливання** та ін.) **проходять у розподіленому фізичному середовищі**. Для опису таких коливань необхідно знати характеристику процесів в усіх точках простору, що набагато складніше, ніж аналізувати коливання в електричних мережах.

Розглянемо спочатку деякі поняття, які є загальними для теорії будь-яких хвиль.

4.1. Основні поняття теорії хвильових процесів

Хвильова поверхня (фронт хвилі). Якщо є джерело хвиль, то завжди можна вказати поверхню, до всіх точок якої хвилі поширюються за однаковий час. Сукупність цих точок утворить поверхню, що називається хвильовою поверхнею або фронтом хвилі. Для гармонічних хвиль фаза коливань на хвильовій поверхні однакова (час запізнення до всіх точок поверхні $t_3 = \text{const}$), і, отже, фронт хвилі являє собою поверхню рівних фаз (рис. 4.1).

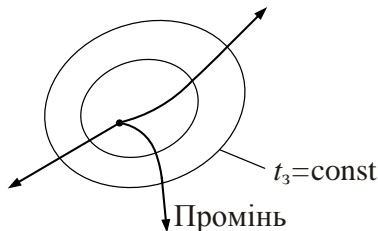


Рис. 4.1

Із часом хвильова поверхня розширюється, захоплюючи все більшу частину простору. Тобто можна говорити про поширення фронту хвилі й про швидкість поширення фронту.

Поширення хвиль в однорідних середовищах відбувається вздовж нормалей до хвильових поверхонь, які називаються променями (рис. 4.1).

Для гармонічних хвиль хвильова поверхня – це поверхня однакових фаз:

$$\omega(t - t_3) = \text{const}.$$

Промінь – лінія, вздовж якої коливання поширюються в середовищі. Промінь завжди спрямований по нормалі до фронту хвилі.

Класифікація хвиль. Класифікація хвиль провадиться за різними незалежними ознаками. Розглянемо основні з них.

1. Форма хвильового фронту. За формою фронту розрізняють хвилі сферичні, циліндричні, пласкі та ін.

Наприклад, точковий випромінювач збуджує сферичні хвилі, випромінювач у вигляді нескінченної нитки струму НВЧ збуджує циліндричні хвилі. Строго кажучи, електромагнітні хвилі ніколи не бувають пласкими. Однак у багатьох випадках частину фронту електромагнітні хвилі на великій віддалі від джерела можна розглядати як пласку.

Якщо розміри області ΔS , де нас цікавить структура ЕМП, малі (коли, наприклад, ΔS являє собою розкриття антени), то можна вважати, що у межах цієї області фронт хвилі плаский (рис. 4.2). Це справедливо у тому разі, коли всі промені, які приходять на площину ΔS від джерела випромінювання, можна вважати паралельними.

2. Значення коливальної величини на хвильовому фронті. За цією ознакою розрізняють хвилі однорідні й неоднорідні. **Однорідними називають такі хвилі, у яких на хвильовому фронті коливальна величина (наприклад, напруженість електричного або магнітного поля) однакова.** У протилежному випадку хвилі називають неоднорідними.

3. Природа коливальної величини. За природою коливальної величини розрізняють скалярні й векторні хвилі. Прикладом скалярних хвиль є хвилі напруги й струму, звукові коливання та ін. Прикладом векторних хвиль є електромагнітні хвилі. Останні можуть бу-

ти поздовжніми або поперечними залежно від того, як орієнтовані вектори \mathbf{E} та \mathbf{H} відносно променя.

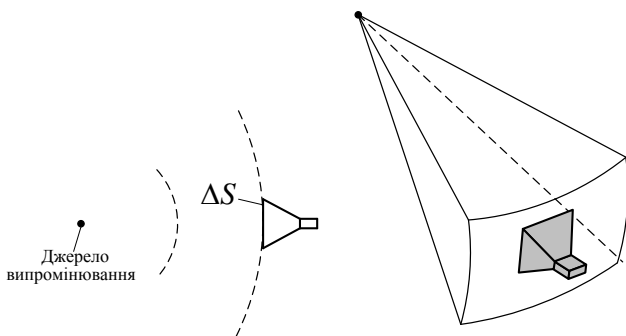


Рис. 4.2

4. Поляризація. Хвилі називаються поляризованими, якщо уздовж усього променя коливальний вектор змінюється певним чином. Розрізняють лінійну, кругову і еліптичну поляризацію. Поняття поляризації стосується тільки поперечних хвиль.

5. Гармонічні й негармонічні хвилі. У випадку гармонічних монохроматичних хвиль коливальна величина змінюється в часі за гармонічним законом, а графік розподілу в просторі, наприклад напруженості електричного (магнітного) поля, має форму синусоїди.

Гармонічні хвилі відіграють важливу роль при розгляді різних хвильових процесів. Це пов'язано з тим, що усякий негармонічний хвильовий процес у лінійному середовищі на основі перетворення Фур'є можна представити як суму гармонічних хвильових процесів.

4.2. Однорідні хвильові рівняння.

Хвильовий характер електромагнітного поля

З метою дослідження хвильового характеру електромагнітного поля зведемо, насамперед, рівняння Максвелла, до інших рівнянь, що описують хвильовий процес. Нагадаємо шлях отримання хвильових рівнянь (розд. 2).

Розглянемо рівняння, які описують електромагнітне поле в безмежному однорідному ізотропному середовищі без джерел:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega \dot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega \dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Виконаємо операцію rot для обох частин рівняння (4.1):

$$\left. \begin{aligned} \text{rot rot } \dot{\mathbf{H}} &= j\omega \dot{\epsilon}_a \text{rot } \dot{\mathbf{E}}, \\ \text{rot rot } \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega \epsilon_a \dot{\mu}_a \text{rot } \dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Скористаємося векторною тотожністю (див. додаток E)

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Оператор ∇^2 – лапласіан, який часто позначається як

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Враховуючи рівність нулю $\text{div } \dot{\mathbf{H}}$ і $\text{div } \dot{\mathbf{E}}$, запишемо (4.2) в такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + j\omega \dot{\epsilon}_a \text{rot } \dot{\mathbf{E}} &= 0, \\ \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} - j\omega \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \text{rot } \dot{\mathbf{H}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Підставивши в (4.3) співвідношення (4.1), одержимо

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\mathbf{H}} &= 0, \\ \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\mathbf{E}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Введемо комплексну величину $\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a}$, яка отримала назву **хвильового числа в середовищі**. Тоді (4.4) спрощується:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \dot{k}^2 \dot{\mathbf{H}} &= 0, \\ \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \dot{k}^2 \dot{\mathbf{E}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Співвідношення (4.5) є однорідними векторними хвильовими рівняннями (див. п. 2.7.3).

Зробимо декілька зауважень.

1. Рівняння (4.5) записані лише для комплексних векторних амплітуд, і їх розв'язки будуть тільки функціями координат.

2. Рівняння для $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{H}}$ в (4.5) однакові, тому загальні розв'язки для $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{H}}$ у нескінченному середовищі також будуть однаковими. Досить розв'язати одне з них. Відмінність виявляється після застосування граничних умов, необхідних для визначення постійних величин, що входять до загального розв'язку.

3. Хвильові рівняння еквівалентні системі рівнянь Максвелла.

4. Вживання хвильових рівнянь (4.5) замість системи рівнянь Максвелла дозволяє значно спростити і скоротити процес знаходження напруженості полів. Дійсно, система рівнянь Максвелла – це система чотирьох векторних диференціальних рівнянь першого порядку, що еквівалентна системі 12 скалярних рівнянь. Розв'язання її надто громіздке, якщо воно взагалі можливе. Хвильові рівняння (4.5) мають цілком однаковий вигляд. Отже, досить отримати розв'язок тільки одного з них. Це набагато простіше, бо доведеться в крайньому разі розв'язати систему всього трьох скалярних диференціальних рівнянь, але при цьому другого порядку.

Перед розв'язанням хвильових рівнянь доцільно нагадати термінологію, яка стосується хвильових процесів.

Під поширенням хвилі ми розуміємо поступове втягнення середовища в деякий фізичний процес, що веде до передачі енергії в просторі. Тобто, за сучасним поглядом, хвильовий процес – вияв вельми загальної закономірності, яка полягає в тому, що не існує миттєвої передачі взаємодії. Зміна процесу в точці А за законом $f(t)$ у найпростішому випадку буде помічена в точці В на відстані z у вигляді $f\left(t - \frac{z}{v}\right)$, де v – швидкість поширення процесу; час запізнювання

відносно випадку $v \rightarrow \infty$, $t_3 = \frac{z}{v}$. Вважають, що функція $f\left(t - \frac{z}{v}\right)$ описує хвилю.

Дослідження хвильових електромагнітних процесів пов'язане, як правило, з розв'язанням хвильових рівнянь.

Розглянемо розв'язання хвильових рівнянь (4.5), які є диференціальними рівняннями другого порядку. З курсу вищої математики відомо, що в декартовій системі координат розв'язання другого рівняння системи (4.5) являє собою такий вираз:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}^+ e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{E}^- e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (4.6)$$

де $\dot{\mathbf{k}}$ – хвильовий вектор; \mathbf{r} – радіус-вектор точки спостереження P .
Представимо комплексний вектор $\dot{\mathbf{k}}$ у вигляді

$$\dot{\mathbf{k}} = \text{Re} \dot{\mathbf{k}} + j \text{Im} \dot{\mathbf{k}}. \quad (4.7)$$

При цьому вектор $\text{Re} \dot{\mathbf{k}}$, перпендикулярний до поверхні рівних фаз, називається **фазовою сталою** (коефіцієнтом фази) і збігається з напрямком орта променя \mathbf{e}_n (рис. 4.3, а), а вектор $\text{Im} \dot{\mathbf{k}}$ – перпендикулярний до поверхні рівних амплітуд і називається сталою загасання.

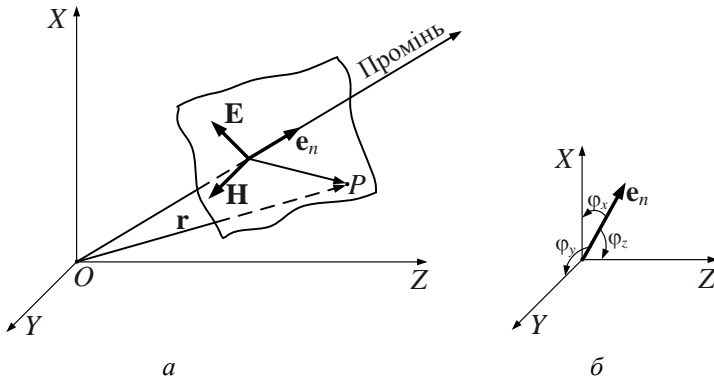


Рис. 4.3

Запис хвильового вектора у вигляді (4.7) застосовується у загальному випадку, наприклад, коли є границі поділу різних середовищ. В безмежному ізотропному однорідному середовищі вектори $\text{Re} \dot{\mathbf{k}}$ і $\text{Im} \dot{\mathbf{k}}$ паралельні орту \mathbf{e}_n

$$\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{e}_n \dot{k} = \mathbf{e}_n (\text{Re} \dot{k} + j \text{Im} \dot{k}).$$

Визначимо у явному вигляді величини $\text{Re} \dot{k}$ і $\text{Im} \dot{k}$, вважаючи, що втрати у середовищі зумовлені лише кінцевою провідністю, тобто $\dot{\mu}_a = \mu_a$, а $\dot{\epsilon}_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a = \epsilon_a (1 - j \text{tg} \delta)$, звідки

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a (1 - j \text{tg} \delta)}, \quad \text{tg} \delta = \sigma / (\omega \epsilon_a). \quad (4.8)$$

Виконаємо над (4.8) дві операції. По-перше, прирівняємо квадрати модулів ліворуч і праворуч і, по-друге, піднесемо вихідну рівність до квадрата та прирівняємо дійсні частини ліворуч і праворуч:

$$\begin{cases} (\operatorname{Re} \dot{k})^2 - (\operatorname{Im} \dot{k})^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a; \\ (\operatorname{Re} \dot{k})^2 + (\operatorname{Im} \dot{k})^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Розв'язавши систему (4.9), одержимо:

$$\operatorname{Re} \dot{k} = \pm \beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)}, \quad (4.10)$$

$$\operatorname{Im} \dot{k} = \pm \alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1)}. \quad (4.11)$$

З фізичних міркувань для хвилі, яка поширюється у напрямку \mathbf{r} , значення \dot{k} дорівнює $\dot{k} = \beta - j\alpha$.

Кожне з двох частинних розв'язків, що входять до (4.6), являє собою хвилю. Доведемо це, записавши миттєве значення вектора \mathbf{E} для першого частинного розв'язку:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}^+ e^{-\alpha r} \cos(\omega t - \beta r). \quad (4.12)$$

Як бачимо, амплітуда E зменшується із збільшенням координати r за рахунок загасань у середовищі, тому що ε_a і μ_a комплексні. Для простоти дослідимо розв'язок (4.12) за відсутності втрат ($\alpha = 0$).

У деякий момент t_1 – електричне поле, згідно з (4.12), розподілене вздовж r за законом $\mathbf{E}^+ \cos(\omega t - \beta r)$, а коли мине час Δt , в момент $t_2 = t_1 + \Delta t$ цей розподіл матиме вигляд

$$\mathbf{E}^+ \cos(\omega t_1 + \omega \Delta t - \beta r),$$

тобто виявиться зміщеним у позитивному напрямку (рис. 4.4) на відстані Δr , яку можна визначити з умови $\omega \Delta t - \beta \Delta r = 0$. Звідси з

урахуванням $k = \beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ знаходимо швидкість виявленого переміщення $\frac{\Delta r}{\Delta t}$:

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (4.13)$$

Це швидкість переміщення поверхні рівних фаз – **фазова швидкість**. Як видно, ця величина залежить лише від властивостей середовища.

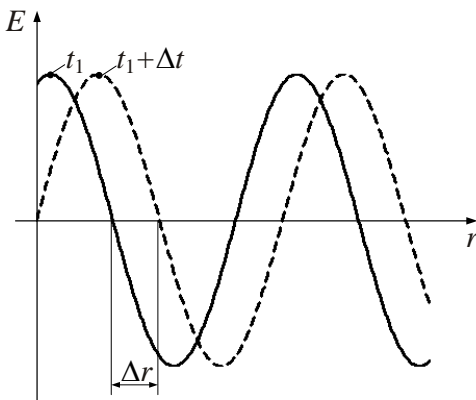


Рис. 4.4

Отже, гармонічний розподіл поля безперервно переміщується в напрямку \mathbf{r} з постійною швидкістю v_ϕ . Очевидно є точки, де значення фази в даний момент часу відрізняються на 2π . Відстань між цими точками (просторовий період) називається **довжиною хвилі**:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_\phi}{f}. \quad (4.14)$$

Слід зауважити, що множник e^{-jkr} часто називають **множником біжучої хвилі** і наявність його свідчить про перенесення енергії у просторі.

Переходячи до розгляду другого частинного розв'язку в (4.6), бачимо, що він відрізняється від першого лише знаком показника множника біжучої хвилі, тобто другий доданок у (4.6) являє собою

також електромагнітну хвилю, але таку, що рухається із швидкістю v_ϕ у негативному напрямку. Вважають, що **перший доданок** у (4.6) **описує пряму хвилю**, а **другий – зворотну**. В багатьох випадках спостерігається лише пряма хвиля, що рухається від джерела. Зворотна хвиля може існувати, наприклад, тоді, коли середовище, в якому знаходиться джерело поля, обмежене. Поява зворотної хвилі в цьому випадку викликана відбиттям від межі поділу середовища.

Часто замість визначень «пряма» і «зворотна» застосовують визначення «падаюча» і «відбита» хвилі. При накладанні падаючої і відбитої хвилі з однаковими амплітудами виникає стояча хвиля. Поклавши $E^+ = E^- = E$ і враховуючи, що $\alpha = 0$, з (4.6) одержимо миттєве значення для \mathbf{E} :

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E} [\cos(\omega t - \beta r) + \cos(\omega t + \beta r)] = 2\mathbf{E} \cos \beta r \cos \omega t. \quad (4.15)$$

Як видно з рівняння (4.15), при стоячій хвилі фаза залежить тільки від t , а від r залежить лише амплітуда (рис. 4.5). Косинусоїдний розподіл \mathbf{E} не рухається вздовж r на відміну від біжучої хвилі, тобто при стоячій хвилі рух енергії у просторі відсутній.

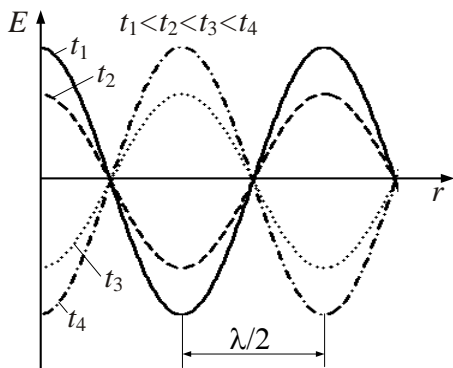


Рис. 4.5

У висновку наголосимо на двох обставинах.

1. Для вільного простору швидкість поширення

$$v_\phi = v_0 = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

збігається із швидкістю світла у вакуумі. Саме цей факт навів Максвелла на думку, що світло – це ЕМХ.

2. Одержимо вираз для біжучої хвилі в довільному напрямку поширення в декартовій системі координат, виходячи із скалярного множника біжучої хвилі (див. рис. 4.3).

Радіус-вектор, проведений до довільної точки хвильової поверхні, має вигляд

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z.$$

Одиничний орт променя \mathbf{e}_n можна представити у вигляді

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_x \cos \varphi_x + \mathbf{e}_y \cos \varphi_y + \mathbf{e}_z \cos \varphi_z,$$

де величини $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ – кути між ортом \mathbf{e}_n та осями X, Y, Z (рис. 4.3, б), а $\cos \varphi_x, \cos \varphi_y, \cos \varphi_z$ – напрямні косинуси орта \mathbf{e}_n .

Тоді

$$i\mathbf{k}\mathbf{r} = \dot{k} (x \cos \varphi_x + y \cos \varphi_y + z \cos \varphi_z) = \dot{k}_x x + \dot{k}_y y + \dot{k}_z z, \quad (4.16)$$

де $\dot{k}_x, \dot{k}_y, \dot{k}_z$ – проекції хвильового вектора.

Комплексна амплітуда ЕМХ, що поширюється в довільному напрямку, може бути записана так:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E} e^{-jk(x \cos \varphi_x + y \cos \varphi_y + z \cos \varphi_z)}. \quad (4.17)$$

Вираз (4.17) передбачає, що початкова фаза вектора $\dot{\mathbf{E}}$ на початку системи координат дорівнює нулю.

4.3. Основні властивості пласкої однорідної електромагнітної хвилі в нескінченному середовищі

Перейдемо до розгляду найпростішого розв'язання хвильових рівнянь, яке має характер пласкої однорідної хвилі. Поле такого типу є деякою ідеалізацією, бо уявне лише в нескінченному ізотропному просторі. Однак поняття пласкої однорідної хвилі вельми корисне і широко використовується. Розглядатимемо пласкі однорідні ЕМХ, що поширюються вздовж осі Z прямокутної системи координат. Умова однорідності хвилі аналітично формулюється так:

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0. \quad (4.18)$$

При цьому хвильове рівняння (4.5) переписеться у вигляді

$$\frac{d^2 \dot{E}}{dz^2} + k^2 \dot{E} = 0. \quad (4.19)$$

Розв'язання цього рівняння, що має фізичний смисл у нескінченному середовищі, записується таким чином:

$$\dot{E}(z) = E e^{-jkz} = E e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}. \quad (4.20)$$

Миттєві значення E можна представити у вигляді

$$E(z, t) = E e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z). \quad (4.21)$$

Визначимо тепер складові поля досліджуваної ЕМХ.

Знайдемо напрямок вектора \mathbf{E} , використовуючи умови (4.18) і співвідношення $\text{div } \dot{\mathbf{E}} = 0$. Останній вираз в декартових координатах має вигляд

$$\text{div } \dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} = 0. \quad (4.22)$$

З (4.22) виходить, що $\frac{\partial \dot{E}}{\partial z} = 0$, тобто $\dot{E}_z = \text{const}$. З (4.20) виходить, що $\dot{E} = \dot{E}_z = \text{const}$ лише за умови $\dot{E} = \dot{E}_z = 0$. Таким чином, у досліджуваній ЕМХ немає позовжньої складової електричного поля. Вектор \mathbf{E} перпендикулярний до променя, а отже, і до осі Z .

Магнітну складову поля \mathbf{H} знайдемо за допомогою другого рівняння Максвелла, поклавши, що вектор \mathbf{E} спрямований вздовж орта $\mathbf{e}_x \perp \mathbf{e}_z$, тобто

$$\dot{\mathbf{E}}(z) = E_x \cdot e^{-jkz} \mathbf{e}_x \quad (4.23, a)$$

Обчислимо ротор вектора \mathbf{E} :

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}(z) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial z} \dot{E}_x(z) = -jk \dot{E}_x e^{-jkz} \mathbf{e}_y. \quad (4.24)$$

З другого рівняння Максвелла виходить, що

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{-j\mu_a \omega} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = \frac{k}{\omega \mu_a} \dot{E}_x(z) \mathbf{e}_y = \dot{H}_y(z) \mathbf{e}_y. \quad (4.23, б)$$

Очевидно, що $\mathbf{H} \perp \mathbf{E}$ і $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$. ЕМХ, у якій вектори \mathbf{H} і \mathbf{E} взаємно перпендикулярні і перпендикулярні до напрямку поширення, називається **поперечною або хвилею типу Т** (інша назва таких хвиль – **хвилі типу TEM**).

Поздовжні складові цієї хвилі $E_z = 0$, $H_z = 0$. Розглядувана хвиля, як бачимо, належить до цього класу.

Представимо (4.23, б) у вигляді

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{E}_x(z)}{Z_c} \mathbf{e}_y = \frac{E_x e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}}{Z_c} \mathbf{e}_y, \quad (4.25)$$

де

$$Z_c = |Z_c| e^{j\psi_c} = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{\omega \dot{\mu}_a}{\omega \sqrt{\dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a}} = \sqrt{\frac{\dot{\mu}_a}{\dot{\epsilon}_a}}. \quad (4.26)$$

Величина Z_c називається характеристичним опором середовища.

Структура плоскої хвилі зображена на рис. 4.6 на підставі виразів (4.23, а) і (4.23, б). Магнітний вектор у біжучій хвилі пропорційний електричному і відстає від нього за фазою на кут ψ_c (при

$z = \text{const}$), що відповідає $\Delta z = \frac{\psi_c}{\beta}$.

За відсутності втрат ($\dot{\mu}_a = \mu_a$, $\dot{\epsilon}_a = \epsilon_a$) \mathbf{E} і \mathbf{H} синфазні.

4.4. Пласкі хвилі в діелектриках і провідниках

Розглянемо основні характеристики пласкої ЕМХ при поширенні її в діелектриках і провідниках.

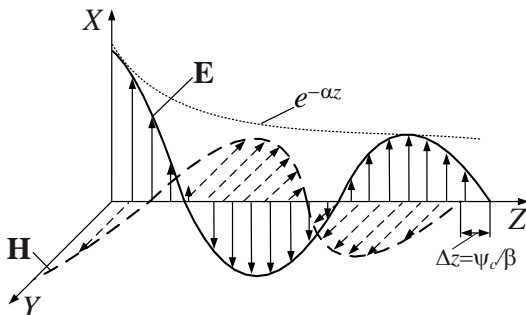


Рис. 4.6

Для більшості використовуваних на практиці діелектриків $\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a} \ll 1$, тоді з (4.10) і (4.11) з урахуванням розкладу

$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ при $x \ll 1$ одержимо:

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (4.27)$$

$$\alpha = \frac{\omega}{2} \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2} k \operatorname{tg} \delta. \quad (4.28)$$

Таким чином, **коефіцієнт фази реального діелектрика з малими втратами дорівнює хвильовому числу і від втрат не залежить, а коефіцієнт загасання пропорційний $\operatorname{tg} \delta$.**

Розглянемо деякі окремі випадки.

ЕМХ у вакуумі. Це ідеальне середовище з параметрами $\varepsilon_a = \varepsilon_0, \mu_a = \mu_0, \sigma = 0$ є свого роду еталоном. Основні характеристики ЕМХ у вакуумі:

- хвильове число

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = k_0; \quad (4.29)$$

- фазова швидкість

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c; \quad (4.30)$$

- довжина хвилі

$$\lambda = \frac{v_\phi}{f} = \frac{c}{f} = \lambda_0; \quad (4.31)$$

- характеристичний опір

$$Z_c = \frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0 = 120\pi = 376,7 \text{ Ом}; \quad (4.32)$$

- середнє за період значення вектора Пойнтінга

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \left[\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^* \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \dot{E}_x \dot{H}_y^* \right\} [\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y] = \mathbf{e}_z \frac{E_x^2}{2Z_0} = \mathbf{e}_z \frac{H_y^2 Z_0}{2}. \quad (4.33)$$

Приклад 4.1. Амплітудне значення вектора \mathbf{E} пласкій ЕМХ у вакуумі дорівнює 10 В/м . Знайти амплітуду вектора \mathbf{H} та середнє значення вектора Пойнтінга.

Розв'язок. З рівностей (4.32), (4.33) знаходимо:

$$H = \frac{E}{Z_0} = \frac{10}{120\pi} = 0,0265 \text{ А/м},$$

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} EH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2,65 \cdot 10^{-2} = 0,133 \text{ Вт/м}^2.$$

ЕМХ в магнітодіелектричному середовищі без втрат. В такому середовищі в загальному випадку $\varepsilon \geq 1$, $\mu \geq 1$, $\sigma = 0$. Параметри ЕМХ:

$$\beta = k_0 \sqrt{\varepsilon \mu}; \quad (4.29, a)$$

$$v_\phi = c / \sqrt{\varepsilon \mu}; \quad (4.30, a)$$

$$\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon \mu}; \quad (4.31, a)$$

$$Z_c = Z_0 \sqrt{\mu/\epsilon}. \quad (4.32, a)$$

Як видно з рівностей (4.30,a), (4.31,a), фазова швидкість та довжина хвилі зменшуються у $\sqrt{\epsilon\mu}$ разів у порівнянні з вакуумом, хвильовий опір збільшується зі зростанням μ та зменшується, якщо діелектрична проникність зростає.

Нагадаємо, що ЕМХ поширюється у напрямку осі Z .

Відзначимо деякі особливості ЕМХ у середовищах без втрат.

1. У будь-якій точці простору $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ і $\mathbf{E}, \mathbf{H} \perp \mathbf{e}_z$ (рис. 4.7).

2. Зміна \mathbf{E} і \mathbf{H} відбувається синфазно. На рис. 4.8 зображено графік розподілу у просторі напруженості електричного і магнітного полів у пласкій гармонічній хвилі.

3. Фазова швидкість хвилі при $\sigma = 0$ не залежить від частоти. Як наслідок, у вакуумі та ідеальному діелектрику явище дисперсії не виникає.

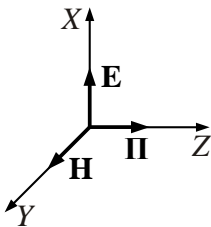


Рис. 4.7

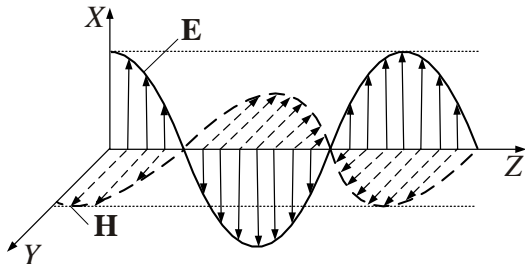


Рис. 4.8

4. Густина електричної та магнітної енергії ЕМХ в середовищах без втрат

$$w_e = \frac{\epsilon_a E_x^2}{2} = \frac{\epsilon_a}{2} Z_c^2 H_y^2 = \frac{\mu_a H_y^2}{2} = w_m.$$

Як наслідок, густина електричної і магнітної енергій однакова у будь-якому місці і у будь-який момент часу.

5. Електромагнітне поле має енергію, тому можна говорити про швидкість перенесення енергії

$$\mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{\Pi}}{\omega} = \mathbf{e}_z Z \frac{H_y^2}{2\omega} = \mathbf{e}_z \frac{Z_c}{\mu_a} = \mathbf{e}_z \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}}.$$

Швидкість перенесення енергії за величиною та напрямом дорівнює фазовій швидкості хвилі.

Приклад 4.2. У площині XOZ напруженість електричного поля плоскої електромагнітної хвилі (ПЕМХ), що поширюється в напрямку осі Z , задано виразом

$$E_x = 0,2 \cos(\omega t + \varphi),$$

де $\omega = 10^6$ рад/с, $\varphi = 30^\circ$. Записати вираз напруженості електричного поля на відстані 500 м, якщо відомо, що хвиля поширюється у повітрі.

Розв'язок. У повітрі $\text{tg}\delta = 0$, бо можна вважати у повітрі $\sigma = 0$. Тому амплітуда ПЕМХ при поширенні не змінюється. При проходженні ПЕМХ на відстані $z = 500$ м відбувається фазовий набіг

$$\beta z = \omega z \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 10^6 \cdot 500 \cdot \sqrt{\frac{1}{36\pi} 10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{5}{3}.$$

Враховуючи початкову фазу ПЕМХ, отримуємо

$$E_x = 0,2 \cos\left(10^6 t - \frac{5}{3} + \frac{\pi}{6}\right).$$

ЕМХ у реальному діелектрику. Будемо вважати, що діелектрик немагнітний ($\mu = 1$), а втрати малі (кут втрат $\text{tg}\delta \sim 10^{-3} \dots 10^{-5}$). Стала поширення \dot{k} у цьому випадку є комплексною $\dot{k} = \beta - j\alpha$, загальні вирази для коефіцієнта фази β і коефіцієнта згасання α наведені вище (співвідношення (4.27), (4.28)). У випадку, що розглядається, вони приймають вигляд

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = k_0 \sqrt{\varepsilon}; \quad \alpha = \frac{\beta \delta}{2}. \quad (4.29, б)$$

Фазова швидкість, довжина хвилі і характеристичний опір діелектрика у разі малих втрат відповідно дорівнюють:

$$v_{\phi} = c/\sqrt{\varepsilon}; \quad (4.30, \delta)$$

$$\lambda = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon}. \quad (4.31, \delta)$$

$$Z_c = \frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a(1-j\operatorname{tg}\delta)}} \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}(1+j\delta)} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} e^{j\frac{\delta}{2}}. \quad (4.32, \delta)$$

Оскільки $\operatorname{tg}\delta \ll 1$, то фазовий зсув δ дуже малий. Модуль Z_c не залежить від втрат.

Особливості поширення ЕМХ у середовищі з втратами наступні:

1. **Вектори поля \mathbf{E}_x і \mathbf{H}_y взаємно перпендикулярні.**

2. Амплітуди напруженостей електричного й магнітного полів зменшуються в міру поширення хвилі, причому вектори \mathbf{E}_x і \mathbf{H}_y зміщені за фазою на кут ψ_c (див. (4.26)).

3. **Фазова швидкість і довжина хвилі при малих втратах збігаються зі значеннями v_{ϕ} і λ за відсутності втрат.** Разом з тим у середовищі з втратами величини v_{ϕ} , λ та хвильовий опір Z_c , як виходить із співвідношень (4.26), (4.10), залежать не тільки від параметрів середовища μ_a , ε_a , σ , але й від частоти ω . Ця залежність називається дисперсією, а середовище, у якому має місце ця залежність, називається диспергуючим.

4. Миттєве значення вектора Пойнтінга визначиться співвідношенням

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}_x, \mathbf{H}_y] = \mathbf{e}_z \frac{E_x^2}{|Z_c|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \psi_c).$$

Вектор \mathbf{P} завжди спрямований уздовж осі Z , але через наявність зсуву за фазою ψ_c між векторами \mathbf{E}_x та \mathbf{H}_y є перерізи, де добуток $\cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \psi_c)$ негативний й енергія в цих місцях спрямована протилежно поширенню хвилі ($\mathbf{P} = -\mathbf{e}_z P$).

Середнє значення вектора Пойнтінга визначимо зі співвідношення

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{T} \int_0^T [\mathbf{E}_x, \mathbf{H}_y] dt.$$

Підставляючи в нього вирази $\mathbf{E}_x = \mathbf{e}_x E_x e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$ й $\mathbf{H}_y = \mathbf{e}_y H_y e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \psi_c)$, остаточно одержимо

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{e}_z \frac{E_x H_y}{2} e^{-2\alpha z} \cos \psi_c.$$

5. Густина енергії магнітного поля більша, ніж густина енергії електричного поля. Дійсно,

$$W_{\max}^m = \frac{\mu_a H_y^2}{2} = \frac{\mu_a E_x^2}{2|Z_c|^2} = \frac{|\dot{\epsilon}_a| E_x^2}{2} \geq \frac{\epsilon_a E_x^2}{2} = W_{\max}^e,$$

тому що

$$|\dot{\epsilon}_a| = \left| \epsilon_a \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_a} \right) \right| \geq \epsilon_a.$$

Приклад 4.3. Знайти амплітуду напруженості електричного поля E на глибині 100 м у сухому ґрунті ($\epsilon_a = 4\epsilon_0, \sigma = 0,001 \text{ См/м}$) на частотах 100 кГц і 10 МГц, якщо біля поверхні амплітуда напруженості електричного поля дорівнює 100 мкВ/м.

Розв'язок. На різних частотах амплітуди поля на глибині 100 м будуть різні.

а) Нехай $f = 10^5 \text{ Гц}$. Знайдемо на цій частоті $\text{tg } \delta$:

$$\text{tg } \delta = \frac{10^{-3}}{2\pi \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{36\pi} 10^{-9}} = 45 \gg 1.$$

Тепер знайдемо коефіцієнт загасання α . Через те що $\text{tg } \delta \gg 1$, то

$$\alpha = \sqrt{\pi \cdot 10^5 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}.$$

На глибині 100 м амплітуда напруженості електричного поля

$$E_1 = Ee^{-\alpha z} = 13,53 (\text{мкВ} / \text{м}).$$

Нехай $f = 10^7$ Гц, тоді $\text{tg} \delta = 0,45 \sim 1$, тому

$$\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{4\epsilon_0\mu_0}{2} (\sqrt{\text{tg}^2 \delta + 1} - 1)} = 0,092 \text{ м}^{-1},$$

$$E_2 = Ee^{-\alpha z} = 10^{-2} (\text{мкВ} / \text{м}).$$

Розглянемо ЕМХ в добре провідному середовищі. Для провід-

ника $\text{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ і з виразів (4.10), (4.11) маємо:

$$\alpha = \beta \approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} \text{tg} \delta} = \sqrt{\frac{\mu_a \sigma \omega}{2}} = \sqrt{\pi f \mu_a \sigma} = \frac{1}{\Delta}, \Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_a \sigma}}; \quad (4.34)$$

$$\nu_\phi = \frac{1}{\sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} \text{tg} \delta}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a \sigma}} = \omega \Delta; \quad (4.35)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\epsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{-j\sigma}} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}} (1 + j). \quad (4.36)$$

Зробимо деякі висновки.

1. З наведених формул виходить, що при $\text{tg} \delta \gg 1$ коефіцієнти загасання і фази чисельно рівні, приймають дуже великі значення і зростають із збільшенням ω і σ ; а значення ν_ϕ і $|Z_c|$ виявляються надто малими.

2. Оскільки $Z_c = \frac{\dot{E}}{\dot{H}}$, то з виразу (4.36) видно, що зсув за фазою між векторами \mathbf{E} і \mathbf{H} дорівнює $\pi/4$.

3. Амплітуда ЕМХ зменшується за законом $-e^{\alpha z} = -e^{\frac{z}{\Delta}}$. Тому Δ – це така відстань, при проходженні якої амплітуда хвилі зменшується у e разів.

На відстані Δ відбувається значне загасання ЕМХ. Потужність хвилі пропорційна $|E|^2$, тому лише невелика частина вихідної потужності, яка дорівнює $e^{-2} = 0,135$ (13,5 %), долає межу Δ . Отже, основна частина енергії ЕМХ (86,5 %) зосереджується в шарі завтовшки Δ , який отримав назву **поверхневого або скін-шару** (інакше – **глибина проникнення**).

4. **Максимальна густина енергії магнітного поля в провіднику значно перевищує густину енергії електричного поля**, оскільки

$$\frac{w^m}{w^e} = \frac{|\dot{\epsilon}_a|}{|\epsilon_a|} \approx \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \gg 1.$$

Приклад 4.4. Плaska хвиля поширюється у міді $\sigma = 5,7 \cdot 10^7$ См/м на частоті $f = 10$ ГГц. Знайти фазову швидкість, глибину проникнення, довжину хвилі та хвильовий опір.

Розв'язок. Розрахунки проведемо за формулами (4.34) – (4.36).

Глибина проникнення

$$\Delta = (\pi f \mu_a \sigma)^{-\frac{1}{2}} = (3,14 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 5,7 \cdot 10^7)^{-\frac{1}{2}} = 6,7 \cdot 10^{-7} \text{ м};$$

довжина хвилі

$$\lambda = 2\pi/\beta = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

характеристичний опір

$$Z_c = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^{10}}{5,7 \cdot 10^7}} = 3,7 \cdot 10^{-2} e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ Ом};$$

фазова швидкість

$$v_\phi = 2\pi \cdot 10^{10} \cdot 6,67 \cdot 10^{-7} = 4,2 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$

З наведеного прикладу можна зробити два важливі висновки.

1. Не слід використовувати металопоподібні середовища для передачі ЕМХ (амплітуда хвилі суттєво зменшується при поширенні).

2. В практичних конструкціях НВЧ для досягнення незначних загасань достатньо нанести тонкий шар добрепровідного металу на поверхню, по якій проходить НВЧ струм.

4.5. Поляризація плоских електромагнітних хвиль

Поляризація – це просторово-часова характеристика ЕМХ.

В кожній точці простору за період коливань кінець вектора \mathbf{E} (або \mathbf{H}) описує деяку криву (годограф), яка лежить у площині, перпендикулярній хвильовому вектору \mathbf{k} . Характер цієї кривої визначає поляризацію ЕМХ. **В радіотехніці поляризацію визначають за годографом вектора \mathbf{E}** (в оптиці – вектора \mathbf{H}). Розглянуті у п. 4.3, 4.4 ЕМХ мають **лінійну поляризацію** – годограф \mathbf{E} являє собою відрізок прямої, паралельної осі X (рис. 4.9).

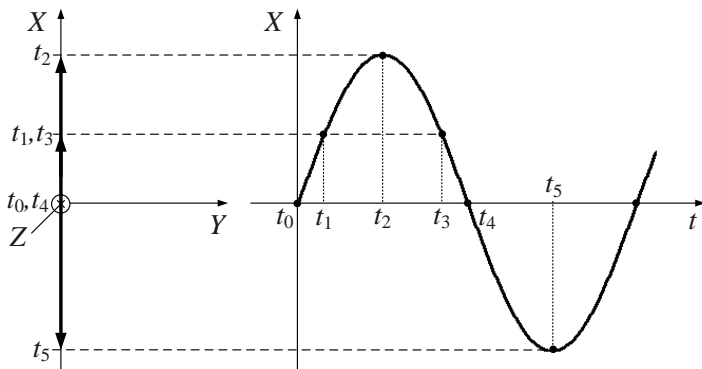


Рис. 4.9

У загальному випадку амплітуда вектора $\dot{\mathbf{E}}$ падаючої хвилі у середовищі без втрат може бути представлена у вигляді

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{e}_x \dot{E}_x + \mathbf{e}_y \dot{E}_y = \mathbf{e}_x \dot{E}_x e^{-jkz} + \mathbf{e}_y \dot{E}_y e^{-jkz}.$$

Виходячи з цього уявлення, запишемо миттєве значення напруженості електричного поля

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{e}_x E_x \cos(\omega t - kz + \varphi_x) + \mathbf{e}_y E_y (\omega t - kz + \varphi_y).$$

Залежно від величини амплітуд E_x, E_y і фаз φ_x, φ_y кінець вектора $\mathbf{E}(z, t)$ описує у площині $z = \text{const}$ різні криві, які визначають поляризацію хвилі. Перетворимо вираз для $\dot{\mathbf{E}}$:

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}_x + \dot{p}\mathbf{e}_y) \dot{E}_x e^{-jkz}, \quad (4.37)$$

де параметр поляризації \dot{p} визначається співвідношенням

$$\dot{p} = p e^{j\varphi} = \frac{\dot{E}_y}{\dot{E}_x} = \frac{E_y}{E_x} e^{j(\varphi_y - \varphi_x)}. \quad (4.38)$$

Побудуємо в площині $Z = 0$ вектор $\dot{\mathbf{E}}$ (рис. 4.10).

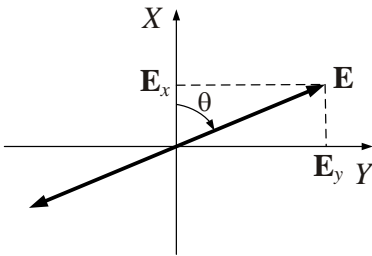


Рис. 4.10

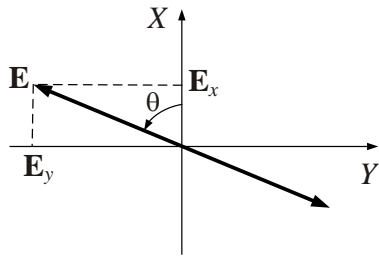


Рис. 4.11

Тангенс кута нахилу вектора $\dot{\mathbf{E}}$ до осі X

$$\text{tg } \theta = \frac{E_y(t)}{E_x(t)} = \frac{E_y \cos(\omega t + \varphi_y)}{E_x \cos(\omega t + \varphi_x)}. \quad (4.39)$$

Амплітуда вектора \mathbf{E} визначається співвідношенням

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_x^2 \cos^2(\omega t + \varphi_x) + E_y^2 \cos^2(\omega t + \varphi_y)}.$$

Розглянемо деякі окремі випадки.

1. Нехай початкові фази хвиль E_x і E_y однакові й рівні $\varphi_x = \varphi_y$.

Тоді зміна векторів E_x і E_y відбувається у фазі. Орієнтування вектора

\mathbf{E} в просторі залишається незмінним, тобто $\operatorname{tg} \theta = \frac{E_y}{E_x} = \operatorname{const}$ і від

часу не залежить. Довжина вектора \mathbf{E} змінюється в такт із E_x і E_y , і його годограф викреслює відрізок прямої. Це значить, що сумарне поле поляризоване лінійно, а площина поляризації утворює кут $\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{E_y}{E_x}$ із площиною XOZ (рис. 4.10).

Комплексна амплітуда (4.37) результуючого поля має вигляд

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}_x + p\mathbf{e}_y) E_x e^{-j\varphi_x}, \text{ тут } p = \frac{E_y}{E_x}.$$

2. Нехай тепер між \dot{E}_x і \dot{E}_y є зсув фази на $\pm\pi$: $\varphi_x = \varphi_y \pm \pi$.

Тоді $\operatorname{tg} \theta = -\frac{E_y}{E_x} = \operatorname{const}$. Поляризація знову лінійна, але кут θ негативний (рис. 4.11), тобто площина поляризації проходить через 2- і 4-й квадранти. Комплексна амплітуда

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}_x - p\mathbf{e}_y) E_x e^{j\varphi_x}.$$

3. Нехай коливання складових поля відбувається у квадратурі, тобто $\varphi_y = \varphi_x \pm \frac{\pi}{2}$, а їх амплітуди рівні: $E_x = E_y = E_0$. Тоді

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{E_y}{E_x} \cdot \frac{\cos\left(\omega t + \varphi_x \pm \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\omega t + \varphi_x)} = \mp \operatorname{tg}(\omega t + \varphi_x),$$

тобто

$$\theta = \mp(\omega t + \varphi_x).$$

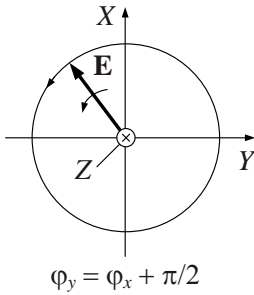
Довжина вектора

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_0 \sqrt{\cos^2(\omega t + \varphi_x) + \sin^2(\omega t + \varphi_x)} = E_0.$$

Отже, довжина результуючого вектора із часом не змінюється, а сам вектор рівномірно обертається навколо осі Z з кутовою частотою ω – така **поляризація** називається **коловою**.

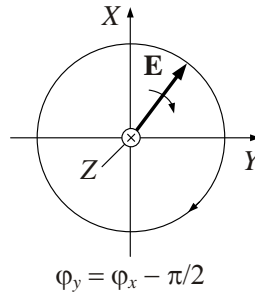
Напрямок обертання результуючого вектора визначається зсувом фаз $+\frac{\pi}{2}$ або $-\frac{\pi}{2}$.

При $\varphi_y = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$ обертання вектора \mathbf{E} в просторі відбувається проти годинникової стрілки (якщо дивитися уздовж напрямку поширення хвилі) – **ліва колова поляризація** (рис. 4.12), при $\varphi_y = \varphi_x - \frac{\pi}{2}$ – **права колова поляризація** (рис. 4.13).



$$\varphi_y = \varphi_x + \pi/2$$

Рис. 4.12



$$\varphi_y = \varphi_x - \pi/2$$

Рис. 4.13

У першому випадку комплексна амплітуда результуючого поля має вигляд

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y) E_x e^{j\varphi_x}, \quad (4.40)$$

у другому

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) E_x e^{j\varphi_x}. \quad (4.41)$$

При фіксованому t кінець вектора $\mathbf{E}(z)$ описує у просторі гвинтову лінію на круглому циліндрі (рис. 4.14). Така хвиля називається **хвилею з коловою поляризацією** правого обертання.

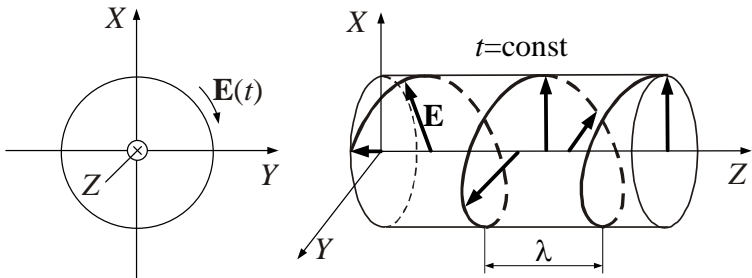


Рис. 4.14

4. У загальному випадку довільних фаз і амплітуд, коли $E_x \neq E_y$ й $\varphi_y = \varphi_x + \varphi$, $\varphi \neq n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), годограф вектора результуючого поля \mathbf{E} являє собою еліпс (рис. 4.15), а **поляризація називається еліптичною**.

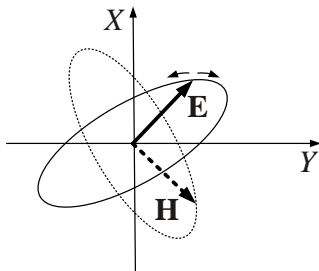


Рис. 4.15

При еліптичній поляризації комплексна амплітуда результуючого поля відповідно до (4.37) на початку координат має вигляд

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}_x + |\dot{p}| e^{j\varphi} \mathbf{e}_y) E_x e^{j\varphi_x},$$

причому $|\dot{p}| \neq 1$.

Годограф вектора \mathbf{H} орієнтований нормально до годографа \mathbf{E} (рис. 4.15).

Як підсумок, наведемо таблицю значень параметра \dot{p} для різних випадків поляризації (табл. 4.1).







Якщо скласти вирази (4.40) та (4.41), інакше кажучи, скласти поля двох колових поляризацій, то отримаємо

$$2\dot{\mathbf{E}} = 2\mathbf{e}_x E_x e^{j\varphi_x},$$

звідки виходить, що **лінійно поляризована хвиля завжди може бути представлена у вигляді суми двох хвиль, поляризованих по колу в протилежних напрямках**. Це розкладання пояснюється на рис. 4.16.

Підкреслимо також наступне. У п. 4.4. було показано, що вектори поля **Е** і **Н** взаємно перпендикулярні. Разом з тим можна показати, що в провідному середовищі у загальному випадку, коли пласка хвиля еліптично поляризована, вектори **Е** й **Н** не є взаємно перпендикулярними.

Таблиця. 4.1

$\dot{p} = \dot{E}_y / \dot{E}_x$	$\mathbf{e}_x + p\mathbf{e}_y$	Поляризація	
$\dot{p} = p > 0$	$\mathbf{e}_x + p\mathbf{e}_y$		лінійна
$\dot{p} = p < 0$	$\mathbf{e}_x - p\mathbf{e}_y$		лінійна
$\dot{p} = j$	$\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y$		колова лівого обертання
$\dot{p} = -j$	$\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y$		колова правого обертання
\dot{p} – довільна величина	$\mathbf{e}_x + \dot{p} e^{j\varphi} \mathbf{e}_y$, де $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$		еліптична лівого обертання
			еліптична правого обертання

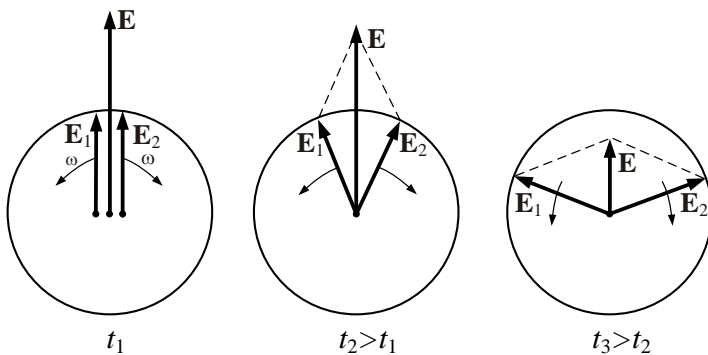


Рис. 4.16

Задачі для самостійного розв'язку

1. Плоска електромагнітна хвиля, частота якої $f = 1,59 \text{ МГц}$, поширюється в нескінченному просторі з параметрами $\epsilon_a = 4\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$. В момент часу $t = 0$ в точці, яка прийнята за початок координат, миттєве значення напруженості електричного поля $E = 70,7 \text{ мВ/м}$. Записати вираз для миттєвого значення електричного поля у точці, яка знаходиться на відстані 1500 м від початку координат, якщо амплітуда поля дорівнює 100 мВ/м .

2. Нескінченне середовище має параметри: $\epsilon_a = 4\epsilon_0$, $\mu_0 = \mu_a$, $\sigma = 1 \text{ См/м}$. Наскільки значною буде помилка, якщо довжину хвилі, що поширюється у цьому середовищі, визначити за формулою

$$\lambda = \frac{1}{f \sqrt{\epsilon_a \mu_a}}, \text{ справедливою для ідеальних діелектриків? Частота}$$

хвилі $f = 10^8 \text{ ГГц}$.

3. Кераміка – титанат барію (BaTiO_3) на частоті $f = 10 \text{ ГГц}$ має параметри: $\epsilon_a = 144\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\text{tg}\delta = 0,6$. Визначити довжину хвилі, коефіцієнт загасання і характеристичний опір середовища.

4. Плоска ЕМХ, що поширюється у повітрі, має довжину $\lambda = 30$ м. Якою буде довжина хвилі, якщо ця хвиля поширюватиметься у морській воді при $\epsilon_a = 81\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 4$ СМ/м?

5. Плоска ЕМХ поширюється у вологому ґрунті ($\epsilon_a = 9\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 5 \cdot 10^{-3}$ СМ/м) в напрямку нормалі до поверхні. Записати вираз для напруженості електричного поля у точці, що знаходиться на відстані 3,5 м від поверхні, якщо напруженість електричного поля біля поверхні $E = 106 \cos(2\pi \cdot 10^7)$ МВ/м.

6. У середовищі з параметрами $\epsilon_a = 4\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$ поширюється плоска ЕМХ, комплексна амплітуда вектора напруженості електричного поля якої у площині $z = 0$ $\vec{E} = 0,5\mathbf{e}_x + 0,2\mathbf{e}_y$ (В/м). Визначити комплексну амплітуду вектора напруженості магнітного поля, якщо хвиля поширюється в напрямку збільшення координати z .

7. Визначити комплексну амплітуду вектора напруженості електричного поля плоскої ЕМХ у металі з параметрами $\sigma = 6 \cdot 10^7$ СМ/м, $\mu_a = \mu_0$ на частоті $f = 10$ кГц, якщо у заданій точці простору вектор напруженості магнітного поля $\vec{H} = 25\mathbf{e}_y$ А/м.

8. У скільки разів зменшиться амплітуда плоскої ЕМХ з частотою $f = 2$ МГц при поширенні в середовищі з параметрами $\sigma = 10^{-3}$ СМ/м, $\epsilon_a = 2\epsilon_0$ на шляху в 1 м?

Питання для самоперевірки

1. Що називають фронтом хвилі? Як класифікують електромагнітні хвилі за формою фронту?

2. Що таке поляризація електромагнітних хвиль? Які види поляризації вам відомі?

3. Напишіть вирази для напруженості електричного і магнітного полів плоскої хвилі, яка поширюється в ідеальному діелектрику. Поясніть основні властивості поля цієї хвилі.

4. Запишіть вирази для напруженості електричного і магнітного полів плоскої хвилі, яка поширюється у провідному середовищі. Які особливості таких хвиль?

5. Як розрахувати довжину хвилі у провідному середовищі, якщо відомі параметри середовища і частота?

6. Виведіть формулу для розрахунку коефіцієнта фази і коефіцієнта загасання. Як спростити ці формули у випадку добре провідного середовища і реального діелектрика?

7. Що називають глибиною проникнення поля у середовище? Як її розрахувати?

8. Напишіть вираз для напруженості поля плоскої хвилі, яка поширюється у довільному напрямку, який не збігається з напрямком осей координат.

5. ПОШИРЕННЯ ПЛАСКИХ ОДНОРІДНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ В АНІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Поширення електромагнітних хвиль в нескінченному ізотропному середовищі розглядалось в розд. 4. Електромагнітна хвиля, яка поширюється в ізотропному середовищі, змінює вздовж напрямку поширення амплітуду за законом експоненти (в загальному випадку), фазу за лінійним законом і не змінює поляризацію. При поширенні в анізотропному середовищі разом з амплітудою і фазою може змінюватись і поляризація електромагнітних хвиль.

5.1. Анізотропні середовища

Нагадаємо, що в анізотропному середовищі параметри ϵ , μ , σ , залежать від напрямку складових електромагнітного поля, тобто вектори \mathbf{D} і \mathbf{E} , \mathbf{B} і \mathbf{H} , \mathbf{J} і \mathbf{E} в загальному випадку не збігаються за напрямком в просторі. В матеріальних рівняннях зв'язок між векторами електромагнітного поля встановлюється через тензори другого рангу (див. п. 1.1.5). Для комплексних амплітуд тензори діелектричної проникності і провідності об'єднують в один тензор комплексної діелектричної проникності.

Анізотропні середовища можуть бути природного і штучного походження. До природних анізотропних середовищ належать в першу чергу монокристали діелектриків, напівпровідників та провідників.

При поляризації монокристалічних діелектриків в зовнішньому електричному полі \mathbf{E} електрична сприйнятливість χ^e залежить від напрямку електричного поля відносно кристалографічних осей. Величина вектора поляризації \mathbf{P} буде різною за різними напрямками і сумарний вектор поляризації не збігається за напрямком з сумарним вектором електричного поля (рис. 5.1)

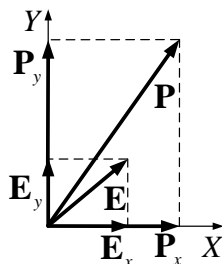


Рис. 5.1

В загальному випадку кожна складова вектора \mathbf{P} залежить від всіх складових вектора \mathbf{E} . В декартовій системі координат система рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} P_x &= \chi_{xx}^e E_x + \chi_{xy}^e E_y + \chi_{xz}^e E_z \\ P_y &= \chi_{yx}^e E_x + \chi_{yy}^e E_y + \chi_{yz}^e E_z \\ P_z &= \chi_{zx}^e E_x + \chi_{zy}^e E_y + \chi_{zz}^e E_z \end{aligned} \quad (5.1)$$

Ці рівняння в матричній та тензорній формі мають вигляд

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{xx}^e & \chi_{xy}^e & \chi_{xz}^e \\ \chi_{yx}^e & \chi_{yy}^e & \chi_{yz}^e \\ \chi_{zx}^e & \chi_{zy}^e & \chi_{zz}^e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \tilde{\chi}^e \mathbf{E}.$$

Вектор електричного зміщення

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \tilde{\chi}^e \mathbf{E} = \varepsilon_0 \left(\vec{e} + \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\chi}^e \right) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \vec{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad (5.2)$$

де $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одиничний тензор, $\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$ – тензор

відносної діелектричної проникності.

Для ізотропного діелектрика **тензор відносної діелектричної проникності** діагональний з однаковими компонентами

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \varepsilon \vec{e}.$$

Для більшості монокристалічних діелектриків тензор відносної діелектричної проникності поворотом системи координат може бути приведений до діагонального виду з різними компонентами. Наприклад, для монокристалічного кварцу, якщо його оптична вісь паралельна осі Z,

$$\vec{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{vmatrix}, \quad (5.3)$$

де ε_{\perp} – діелектрична проникність в напрямку, перпендикулярному осі Z; ε_{\parallel} – діелектрична проникність в напрямку, паралельному осі Z.

Існують анізотропні діелектрики, для яких ніяким поворотом системи координат не можна привести до діагонального виду тензор відносної діелектричної проникності. Прикладом таких діелектриків є плазма іоносфери в присутності магнітного поля Землі та ферити у сталому магнітному полі.

5.2. Плазма в магнітному полі

Плазмою називають квазінейтральну систему відносно рухомих позитивних і негативних зарядів. Є два види плазми: газова і твердого тіла. Наприклад, плазма зірок – це високотемпературна газова плазма. Плазма твердого тіла визначається як сукупність рухомих електронів (або дірок), які існують в кристалічній ґратці іонів протилежного знака.

На поширення радіохвиль найбільше впливає плазма іоносфери Землі, яка утворюється за рахунок іонізації газу атмосфери в основному під дією сонячного випромінювання.

При іонізації атмосфери утворюються негативно заряджені частинки – електрони і позитивно заряджені іони. Оскільки маса іонів набагато більша, ніж маса електронів, можна вважати, що електрони рухаються відносно нерухомих іонів. Таку **плазму** називатимемо **електронною**. В цілому в плазмі виконується умова квазінейтральності, тобто число позитивних і негативних зарядів в одиниці об'єму однакове (рис. 5.2).

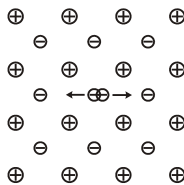


Рис. 5.2

Вважатимемо, що довжина електромагнітної хвилі набагато більша, ніж відстань між зарядженими частинками. Якщо електрон вивести із положення рівноваги, то він за рахунок сили Кулона коливатиметься навколо положення рівноваги з **плазмовою (ленгмюрівською) частотою** ω_p :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0 \varepsilon_L}}, \quad (5.4)$$

де n – концентрація електронів; e – заряд електрона; m_e – маса електрона; ε_L – відносна діелектрична проникність іонів.

Для розрідженої газової плазми іоносфери можна прийняти $\varepsilon_L = 1$. В плазмі твердого тіла для більшості напівпровідників $\varepsilon_L = 10 \dots 20$, для напівметалів, наприклад для вісмута, ε_L досягає значення 100. Коливання електронів в плазмі загасає за рахунок зіткнення з іонами або нейтральними молекулами в газовій плазмі, або за рахунок розсіювання на квантах пружних коливань середовища (фононах) в плазмі твердого тіла. **Частота розсіювання електронів** ν_e залежить від густини плазми та її температури.

За відсутності зовнішнього сталого магнітного поля рівняння руху електронів під дією електромагнітного поля можна записати у вигляді

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + m_e \mathbf{v} \nu_e = e \mathbf{E}, \quad (5.5)$$

де $\mathbf{v}(t)$ – вектор швидкості електронів; $m_e \mathbf{v} \nu_e$ – сила тертя при розсіюванні електронів у плазмі.

Розв'язком рівняння (5.5) для гармонічного електромагнітного поля $\mathbf{E}(t) = \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}$ є $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}} e^{j\omega t}$, де $\dot{\mathbf{v}}$ – комплексна амплітуда швидкості електронів. Похідна від вектора швидкості $\partial \mathbf{v} / \partial t = j\omega \dot{\mathbf{v}} e^{j\omega t}$. Підставивши ці значення в рівняння (5.5), маємо

$$m_e (j\omega + \nu_e) \dot{\mathbf{v}} e^{j\omega t} = e \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t},$$

звідки амплітуда вектора швидкості електронів

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e\dot{\mathbf{E}}}{m_e(j\omega + \nu_e)}. \quad (5.6)$$

Комплексна амплітуда густини електронного струму в плазмі $\dot{\mathbf{J}}_e = ne\dot{\mathbf{v}}$. Крім електронного струму в плазмі існує струм зміщення $\dot{\mathbf{J}}_{\text{зм}} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_L\dot{\mathbf{E}}$. Густина сумарного струму в плазмі

$$\dot{\mathbf{J}} = \dot{\mathbf{J}}_e + \dot{\mathbf{J}}_{\text{зм}} = ne\dot{\mathbf{v}} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_L\dot{\mathbf{E}}. \quad (5.7)$$

Підставивши в (5.7) значення $\dot{\mathbf{v}}$ із (5.6), маємо

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{J}} &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_L \left(1 - \frac{ne^2}{m_e\omega\varepsilon_0\varepsilon_L(\omega - j\nu_e)} \right) \dot{\mathbf{E}} = \\ &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_L \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu_e)} \right) \dot{\mathbf{E}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Як видно із формули (5.8), відносна діелектрична проникність плазми за відсутності зовнішнього магнітного поля є скалярною комплексною величиною

$$\varepsilon = \varepsilon_L \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu_e)} \right). \quad (5.9)$$

На рис. 5.3 наведено графік залежності ε від відношення $(\omega_p/\omega)^2$ за відсутності втрат ($\nu_e=0$) для плазми іоносфери ($\varepsilon_L=1$).

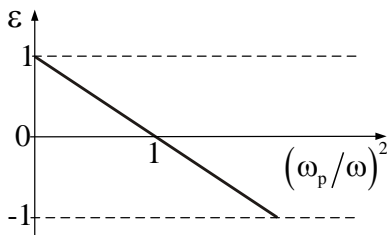


Рис. 5.3

Якщо частота сигналу менше плазмової ($\omega < \omega_p$), то відносна діелектрична проникність плазми менша нуля, фазова стала і фазова швидкість стають уявними і електромагнітні хвилі в плазмі не поширюються. Електромагнітні поля загасають за законом експоненти (без втрат електромагнітної енергії) не за рахунок поглинання енергії ЕМХ у плазмі, а через відсутність умов поширення хвилі у середовищі. При $\omega > \omega_p$ відносна діелектрична проникність плазми більша нуля, фазова стала і фазова швидкість стають дійсними величинами і електромагнітні хвилі в плазмі поширюються. Таким чином, плазмова частота обмежує знизу граничну частоту проникнення електромагнітних хвиль в плазму.

Приклад 5.1. Знайти плазмову частоту:

- 1) для іоносфери Землі ($n = 2 \cdot 10^{11} \text{ ел/м}^3$);
- 2) плазми твердого тіла (чистого антимоніда індія при температурах рідкого азоту ($n = 10^{20} \text{ ел/м}^3$));
- 3) провідників ($n = 2 \cdot 10^{28} \text{ ел/м}^3$).

Розв'язок. За виразом (5.4) при $\epsilon_L = 1$ отримуємо відповідно:

- 1) $f_p = \omega_p / 2\pi = 4 \cdot 10^6 \text{ Гц}$;
- 2) $f_p = \omega_p / 2\pi = 2 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$;
- 3) $f_p = \omega_p / 2\pi = 3 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$.

В присутності сталого магнітного поля \mathbf{H}_0 на рух електронів накладається додаткова сила Лоренца $\mathbf{F}_L = \mu_0 e [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0]$. В цьому випадку траєкторія руху електронів ускладнюється. Якщо вектор $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{v}$, то $\mathbf{F}_L = 0$ і електрон рухається вздовж лінії зовнішнього магнітного поля, начебто не помічаючи його. Якщо вектор $\mathbf{H}_0 \perp \mathbf{v}$, то \mathbf{F}_L максимальна і перпендикулярна площині, в якій розташовані вектори \mathbf{H}_0 і \mathbf{v} . Електрон рухається по колу (рис. 5.4) в площині, перпендикулярній лінії зовнішнього магнітного поля з **циклотронною частотою**

$$\omega_H = \mu_0 \frac{|e|}{m_e} H_0 = \mu_0 \gamma H_0, \quad (5.10)$$

де $\gamma = |e|/m_e = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$ – гіромагнітне відношення (відношення заряду електрона до його маси).

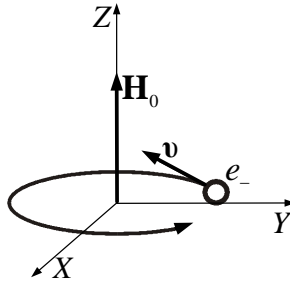


Рис. 5.4

При довільному напрямку вектора швидкості електрона \mathbf{v} відносно \mathbf{H}_0 вектор \mathbf{v} можливо розкласти на два вектори $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$. Складова вектора \mathbf{v}_{\parallel} паралельна полю \mathbf{H}_0 і відповідає за поступальний рух електрона вздовж поля \mathbf{H}_0 , а складова \mathbf{v}_{\perp} перпендикулярна полю \mathbf{H}_0 і відповідає за коловий рух електрона в площині, перпендикулярній полю \mathbf{H}_0 . Таким чином, траєкторія руху електрона має вид гвинтової лінії, вісь якої паралельна полю \mathbf{H}_0 .

5.3. Параметри намагніченої плазми

Рівняння руху електронів під дією змінного електромагнітного поля і сталого магнітного поля можливо записати у вигляді

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + m_e \mathbf{v} \nu_e = e \mathbf{E} + \mu_0 e [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0]. \quad (5.11)$$

Як і в попередньому випадку, для гармонічного електромагнітного поля $\dot{\mathbf{E}}(t) = \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}$ вважаємо, що $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}} e^{j\omega t}$ і $\partial \mathbf{v} / \partial t = j\omega \dot{\mathbf{v}} e^{j\omega t}$. Із рівняння (5.11) знаходимо складові вектора швидкості в декартовій системі координат при $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{e}_z$:

$$\dot{v}_x = \gamma \frac{(j\omega + \nu_e) \dot{E}_x + \omega_H \dot{E}_y}{[(j\omega + \nu_e)^2 + \omega_H^2]}, \quad \dot{v}_y = \gamma \frac{(j\omega + \nu_e) \dot{E}_y - \omega_H \dot{E}_x}{[(j\omega + \nu_e)^2 + \omega_H^2]}, \quad (5.12)$$

$$\dot{v}_z = \gamma \frac{\dot{E}_z}{(j\omega + \nu_e)}.$$

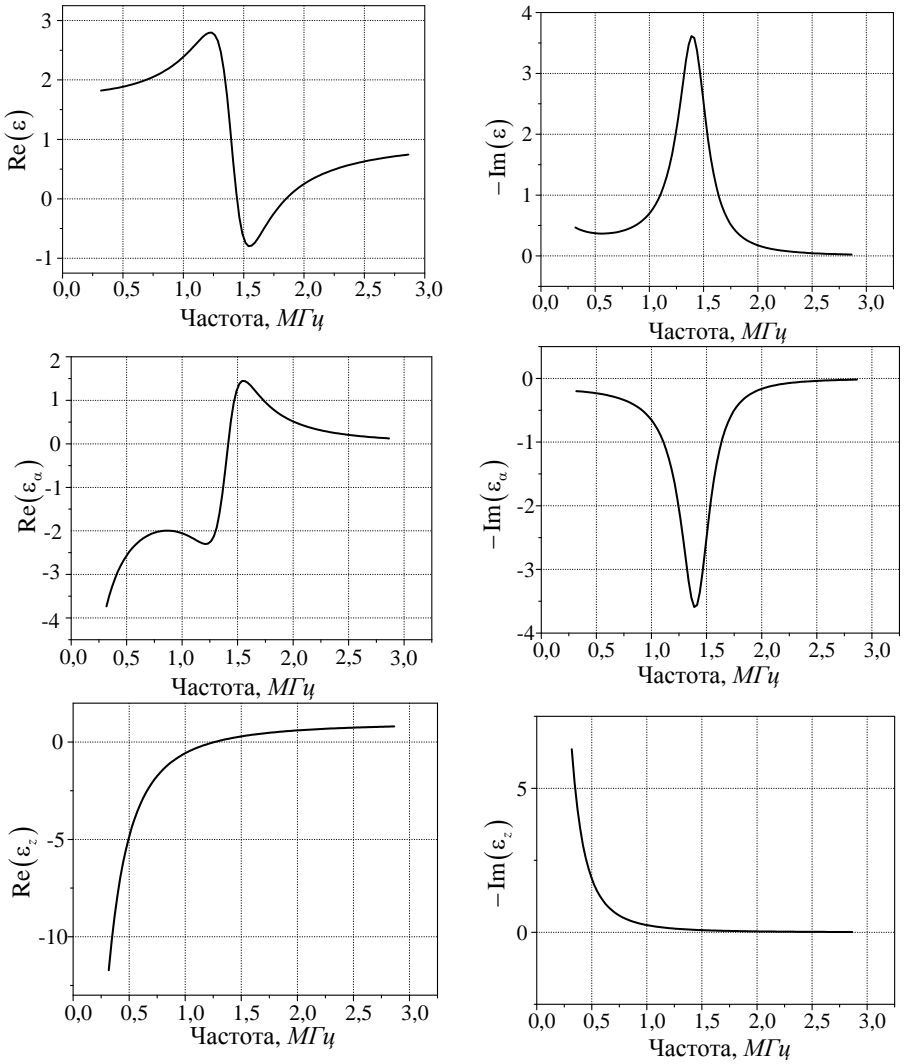


Рис. 5.5

Підставивши значення складових вектора швидкості із виразу (5.12) в рівняння густини струму (5.7), маємо

$$\mathbf{J} = j\omega\epsilon_0\mathbf{\ddot{E}}, \quad (5.13)$$

де $\vec{\epsilon}$ – тензор комплексної відносної діелектричної проникності плазми в присутності сталого магнітного поля,

$$\vec{\epsilon} = \epsilon_L \begin{vmatrix} \epsilon & -j\epsilon_\alpha & 0 \\ j\epsilon_\alpha & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{vmatrix}. \quad (5.14)$$

Тензор такого виду називають ермітовим, його компоненти:

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega - j\nu_e)}{\omega \left[(\omega - j\nu_e)^2 - \omega_H^2 \right]}, \quad \epsilon_\alpha = \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega \left[(\omega - j\nu_e)^2 - \omega_H^2 \right]}, \quad (5.15)$$

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega - j\nu_e)}.$$

На рис. 5.5 як приклад наведені частотні характеристики компонентів тензора діелектричної проникності плазми іоносфери з параметрами $n=2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}$, $\nu_e=10^{-6} \text{ с}^{-1}$, в присутності магнітного поля Землі $H_0=40 \text{ А/м}$.

Як видно із рисунка, при $\omega=\omega_H$ спостерігається явище **циклотронного резонансу** електронів в присутності магнітного поля Землі. Частота циклотронного резонансу в наших широтах $\sim 1,4 \text{ МГц}$.

5.4. Феромагнетики в магнітному полі

До штучних анізотропних середовищ належать магнітні середовища в присутності зовнішнього магнітного поля.

Вектор намагніченості магнітного середовища \mathbf{M} складається із суми магнітних моментів атомів \mathbf{m}_i одиниці об'єму середовища

$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i$. Магнітний момент атома (рис.5.6) в свою чергу утворю-

ється як сума орбітального магнітного моменту \mathbf{m}_o за рахунок руху електронів навколо ядра і власного спінового магнітного моменту електрона \mathbf{m}_c . Крім спінового, електрон має механічний момент \mathbf{L} . Ці моменти зв'язані між собою залежністю

$$\mathbf{m}_c = -\gamma \mathbf{L}. \quad (5.16)$$

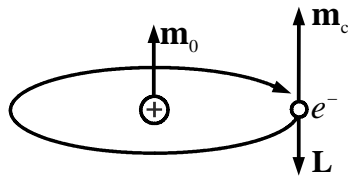


Рис. 5.6

Для більшості магнітних матеріалів спіновий магнітний момент набагато більший орбітального і магнітного моменту ядра. Основний вклад в вектор намагніченості вносить саме спіновий магнітний момент. Магнітні середовища, в яких за рахунок квантової обмінної взаємодії сусідні магнітні моменти виставляються паралельно один одному, називаються **феромагнетиками**. До них належать в першу чергу метали перехідної групи (*Fe, Co, Ni...*) та рідкісноземельної групи (*Sm, Eu, Gd...*).

Магнітні середовища, в яких сусідні магнітні моменти виставляються антипаралельно один одному, називаються **антиферомагнетиками**. Намагніченість антиферомагнетиків дорівнює нулю. Якщо сусідні атоми антиферомагнетика різні і мають різні магнітні моменти, то сумарна намагніченість не дорівнює нулю. Такі некомпенсовані антиферомагнетики називаються **феримагнетиками**, або феритами. В провідникових феромагнітних матеріалах електромагнітні хвилі поширюються на дуже малу відстань (скін-ефект). Тому в мікрохвильових пристроях, як правило, застосовують магнітні діелектрики. Ферити, які за спеціальною технологією виготовляють із суміші іонів двовалентних металів і окислів заліза, мають магнітні властивості феромагнетика і електричні властивості діелектрика. В діапазоні НВЧ вони мають параметри $\epsilon = 10 \dots 16$, $\text{tg} \delta = 10^{-3} \dots 10^{-4}$, $\sigma = 10^{-6} \dots 10^{-12} \text{ См/м}$. Намагнічені ферити широко застосовуються в техніці надвисоких частот для створення невзаємних і електрично керованих пристроїв.

5.5. Основні властивості феритів у сталому магнітному полі

5.5.1. Електромагнітні поля у феритах

Ферити – магнітодіелектричні матеріали, що мають надто малу питому провідність, і тому називаються магнітодіелектриками. Ферити можуть бути полікристалічними і монокристалічними. Виробництво полікристалічних феритів здійснюють за технологією, харак-

терною для кераміки, – суміш оксидів із пластифікатором формують у напівфабрикати, які потім випалюють при температурі 1000 – 1400 °С. Феритові монокристали вирощують за технологією, подібною до технології напівпровідникових матеріалів.

Ферити мають доменну структуру, що передбачає наявність електронів із некомпенсованим магнітним моментом. У різних доменах вектори сумарної намагніченості орієнтовані хаотично, тому в цілому сумарний магнітний момент зразка фериту дорівнює нулю.

Магнітний стан фериту в магнітному полі описується вектором намагніченості \mathbf{M} , який є геометричною сумою магнітних моментів в одиниці об'єму, вектором магнітної сприйнятливості $\chi = \mathbf{M}/\mathbf{H}$, вектором магнітної індукції $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu\mathbf{H}$ і магнітною проникністю μ . Під дією сталого магнітного поля із напруженістю H_0 ферит намагнічується і магнітна індукція змінюється по петлі гістерезису. Ферити НВЧ звичайно намагнічують до насичення. Намагніченість насичення $M_{\text{нас}}$ відповідає однаковій орієнтації усіх доменів.

Тепловий рух дезорієнтує магнітні моменти електронів, тому із зростанням температури намагніченість доменів зменшується. При температурі Кюрі феритів $T_k = 100 \div 600^\circ$ намагніченість зникає.

Магнітні властивості феритів, як вже вказувалося, пов'язані з наявністю некомпенсованих спінів електронів. Ці електрони, обертаючись

навколо своєї осі, крім магнітного моменту (дія заряду) створюють і механічний момент \mathbf{L} (дія маси), спрямований у протилежний бік (рис. 5.7). При відсутності зовнішніх полів обидва моменти стали в часі. Під дією сталого магнітного поля H_0 спіни прагнуть орієнтуватися в напрямку прикладеного поля. Однак наявність механічного моменту перешкоджає цьому, виникає обертальний момент і система починає прецесувати навколо напрямку поля. Кутова швидкість прецесії визначається формулою $\omega_0 = 2\pi\gamma H_0$,

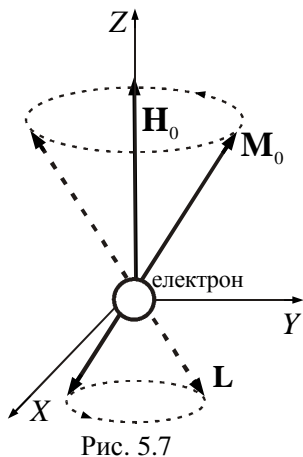


Рис. 5.7

де γ – гіромагнітне відношення ($\gamma \approx 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ МГц} \cdot \text{м/А}$). Очевидно, що вектор намагніченості усього зразка \mathbf{M}_0 теж прецесіюватиме з тією самою частотою ω_0 . Напрямок прецесії вектора \mathbf{M}_0 співпадає з напрямком руху часової стрілки, якщо дивитися в напрямку \mathbf{H}_0 . А якщо б у фериті не було втрат, то прецесія здійснювалася б нескінченно довго. Однак через втрати вектор \mathbf{M}_0 рухається по спіралі, і через час порядку $0,01 \text{ мкс}$ встановлюється по напрямку \mathbf{H}_0 . Час загасання прецесії є нижня теоретична межа часу намагнічування фериту. Вектор \mathbf{M}_0 рухається як дзига (гіроскоп), тому ефекти, обумовлені цим явищем, називають **гіромагнітними**.

5.5.2. Феромагнітний резонанс

Припустимо тепер, що на ферит впливає сумарне поле

$$\mathbf{H}_\Sigma = \mathbf{e}_z H_0 + \mathbf{H}(H_x, H_y, H_z), \quad (5.17)$$

де \mathbf{H} – поле НВЧ із частотою ω і лінійною поляризацією. Тоді й вектор сумарної намагніченості

$$\mathbf{M}_\Sigma = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}. \quad (5.18)$$

Кількість руху вектора \mathbf{M}_Σ так само, як і у дзиги, описується рівнянням

$$\frac{d\mathbf{M}_\Sigma}{dt} = -\gamma[\mathbf{M}_\Sigma, \mathbf{H}_\Sigma] + \mathbf{D}, \quad (5.19)$$

де \mathbf{H}_Σ , \mathbf{M}_Σ – сумарні вектори напруженості поля і намагніченості, \mathbf{D} – член, визначуваний дисипативними втратами у фериті.

Якщо в (5.17), (5.18) припустити, що змінні складові поля і намагніченості менші їх сталих складових ($|\mathbf{H}| \ll |\mathbf{H}_0|$, $|\mathbf{M}| \ll |\mathbf{M}_0|$), то розв'язання рівняння (5.19) при відсутності втрат дає результат

$$\mathbf{B} = \tilde{\mu}\mathbf{H}, \quad (5.20)$$

де \mathbf{B} – змінна складова індукції магнітного поля,

$$\ddot{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & -jk & 0 \\ jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{vmatrix} \quad (5.21)$$

– кососиметричний тензор другого рангу магнітної проникності фериту.

У (5.21) компоненти тензора визначаються з виразів:

$$\mu = \mu_0 - \frac{\gamma M \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad k = \frac{\gamma M \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu_3 \approx \mu_0, \quad (5.22)$$

де $\omega_0 = \gamma H_\Sigma$ – частота власної прецесії.

Визначимо з (5.20) складові вектора **B**

$$B_x = \mu H_x - jk H_y, \quad B_y = jk H_x + \mu H_y, \quad B_z = \mu_0 H_z. \quad (5.23)$$

Таким чином, з (5.23) видно, що ферит є анізотропним середовищем, бо, наприклад, при наявності лише компоненти H_x вектор **B** має не лише компоненту B_x , але й компоненту B_y .

З іншого боку, наявність усередині фериту навіть малого вектора $\mathbf{H} \perp \mathbf{H}_0$ веде до прецесії вектора \mathbf{M}_0 (вимушена прецесія із частотою ω).

Для дослідження цього явища представимо лінійно поляризоване поле \mathbf{H} у вигляді двох полів колової поляризації \mathbf{H}^+ (праве обертання) і \mathbf{H}^- (ліве обертання). При правому обертанні напрямки руху векторів \mathbf{H}^+ і \mathbf{M}_0 співпадають, а при лівому – протилежні.

Для випадку правого обертання $H_y^+ = -jH_x^+$, при цьому з виразу (5.23) одержимо

$$B_x^+ = (\mu - k) H_x^+ = \mu_+ H_x^+, \quad B_y^+ = -j(\mu - k) H_x^+ = -j\mu_+ H_x^+.$$

Тобто вектор **B** має також колову поляризацію з правим обертанням, через те що $B_y^+ = -jB_x^+$. Аналогічно для випадку лівого

обертання поля при $H_y^- = jH_x^-$ одержимо

$$B_x^- = (\mu + k)H_x^- = \mu_- H_x^-, B_y^- = j(\mu + k)H_x^- = j\mu_- H_x^-, B_y^- = jB_x^-.$$

Тобто вектор \mathbf{B} також лівообертотвий.

Таким чином, для полів із правою і лівою коловою поляризацією магнітні проникності суттєво відмінні і визначаються виразами

$$\mu_+ = \mu_0 - \frac{\gamma M}{\omega_0 - \omega}, \quad \mu_- = \mu_0 - \frac{\gamma M}{\omega_0 + \omega}. \quad (5.24)$$

З формул (5.24) видно, що при $\omega = \omega_0$ і відсутності втрат μ_+ перетворюється в нескінченність. Якщо врахувати при розв'язанні рівняння (5.23) втрати, то магнітні проникності будуть комплексними величинами

$$\mu_+ = \mu'_+ - j\mu''_+, \quad \mu_- = \mu'_- - i\mu''_-,$$

де складові μ''_+ і μ''_- враховують втрати.

Залежності від H_0 складових магнітних проникностей фериту μ_+ і μ_- наведені на рис. 5.8.

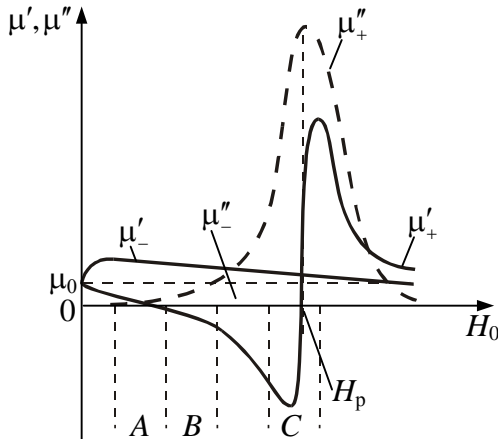


Рис. 5.8

Внаслідок рівняння $\omega_0 = \gamma H_0$ аналогічні залежності будуть і при зміні частоти. З рис. 5.8 видно, що в області $H_0 = H_p$ ($\omega = \omega_0$) різко зростає складова μ''_+ , що свідчить про істотне збільшення втрат у фериті. Пояснимо це. При $H_0 = H_p$ частота ω співпадає з частотою ω_0 і поле \mathbf{H} прагне неперервно збільшити відхилення вектора \mathbf{M}_0 від напрямку \mathbf{H}_0 . З іншого боку, збільшення цього відхилення супроводжується зростанням теплових втрат у фериті. В результаті відхилення \mathbf{M}_0 встановлюється такої величини, при якій існує рівність між енергією, що розсіюється у фериті, та енергією, яку віддає хвиля. **Явище найбільш інтенсивного поглинання феритом енергії НВЧ хвиль з правою коловою поляризацією, що виникає при $\omega = \omega_0$, називають феромагнітним резонансом.**

Для хвиль з лівою коловою поляризацією напрямки обертання \mathbf{H}^- і \mathbf{M}_0 протилежні. При цьому вектор \mathbf{H}^- в середньому за період майже не впливає на намагніченість \mathbf{M} і ферит являє собою середовище із дуже малими втратами ($\mu'' \approx 0$, $\mu_- \approx \mu'_-$) і слабкою залежністю магнітної проникності від значень H_0 і частоти.

5.5.3. Поздовжньо намагнічений ферит

Припустимо, що ферит намагнічений до насичення сталим полем $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_z H_0$, а вздовж осі Z поширюється лінійно поляризована хвиля. Розв'язання рівнянь Максвелла для даного випадку дає такий результат. Лінійно поляризована хвиля розпадається на дві поляризовані по колу хвилі, одна з яких має праве обертання і стала поширення $k^+ = \beta^+ - j\alpha^+$, друга – ліве обертання і стала поширення $k^- = \beta^- - j\alpha^-$.

В області A (див. рис.5.8) поширення обох хвиль відбувається без помітного ослаблення і $\beta^+ < \beta^-$, при цьому відбувається **поворот площини поляризації (ефект Фарадея)**. В області B існує ефект зміщення поля. В області C (при $H_0 \approx H_p$) $\mu''_+ \gg 1$, внаслідок чого α^+ набуває великих значень. **Інтенсивне загасання хвиль із**

α^+ , що виникає в поздовжньо намагніченому фериті при $\omega = \omega_0$, називають поздовжнім феромагнітним резонансом.

Розглянемо більш детально суть ефектів Фарадея і зміщення поля.

Ефект Фарадея. Припустимо, що $H_0 < H_p$ і уявимо, що вздовж зразка поздовжньо намагніченого фериту завдовжки l поширюється лінійно поляризована хвиля (рис. 5.9).

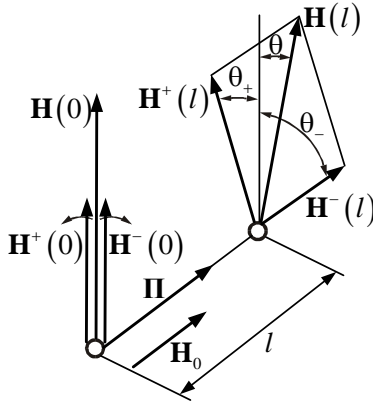


Рис. 5.9

Розкладемо її на дві поляризовані по колу хвилі, що характеризуються величинами β^+ і β^- . Для даного випадку, як було зазначено, $\beta^+ < \beta^-$. Тобто фазові набіги β^+l і β^-l в кінці зразка будуть відмінні. Внаслідок цього сумарний вектор поля на виході зразка виявиться повернутим на кут θ . Через те що $\beta^+ < \beta^-$, то кут повороту завжди буде спрямований за часовою стрілкою.

$$\theta = \theta_- - \frac{\theta_- + \theta_+}{2} = \frac{\theta_- - \theta_+}{2} = \frac{\beta^- + \beta^+}{2} l.$$

Ефект повороту площини поляризації називається ефектом Фарадея, а середовище, в якому він спостерігається, називається гіротропним (обертовим).

Ефект зміщення поля. Якщо H_0 знаходиться в області B (див.

рис. 5.8), то $\mu'_+ < 0$, отже, коефіцієнт фази стає чисто уявною величиною, бо

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu'_+}$$

і поширення хвилі з поляризацією H^+ у поздовжньо намагніченому середовищі стає неможливим. Якщо феритове середовище має кінцеві розміри у поперечному перерізі (циліндр, квадрат), то хвиля з поляризацією H^+ з фериту витискується і поширюється поза феритовим середовищем. У той же час хвиля з поляризацією H^- нормально поширюється у фериті, оскільки $\mu'_- \approx \mu_0$. Розгляньте явище отримало назву **ефекту зміщення поля**.

5.5.4. Поперечно намагнічений ферит

Розглянемо випадок, коли хвиля поширюється в напрямку, перпендикулярному сталому підмагнічувальному полю H_0 . Розв'язок системи рівнянь Максвелла показує, що в даному випадку можливе незалежне існування двох хвиль – **звичайної** і **незвичайної** (рис. 5.10).

Звичайна хвиля має складові H_z і E_y . За своїми властивостями ця хвиля не відрізняється від пласкої хвилі, що поширюється в діелектрику з параметрами ϵ , $\mu_z \approx \mu_0$. Це пояснюється тим, що для складової H_z насичений ферит подібний до вакууму.

Незвичайна хвиля має три складових – E_z , H_y , H_x та її магнітне поле еліптично поляризоване в площині, перпендикулярній осі Z , тобто в площині прецесії. Отже, при збігові напрямків обертання незвичайної хвилі і прецесії, а також їх частот можлива поява ефекту поперечного феромагнітного резонансу.

Фізична причина поперечного резонансу така сама, що й для поздовжнього. Однак є деякі особливості: більш точні дослідження показують, що поглинання при поперечному резонансі дещо менше, ніж при поздовжньому; резонансна частота дещо вища від частоти вільної прецесії електронних спінів.

Для незвичайної хвилі ферит поводить себе як ізотропне середо-

вище, що характеризується магнітною проникністю $\dot{\mu}_{\perp} = \mu'_{\perp} - j\mu''_{\perp}$. Хід кривих складових μ'_{\perp} і μ''_{\perp} від величин H_0 нагадує аналогічні залежності μ'_+ і μ''_+ (див. рис. 5.8). Тобто в області, де $\mu'_+ < 0$, існує ефект зміщення поля.

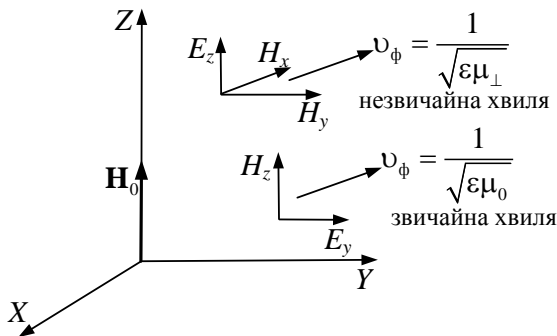


Рис. 5.10

Вивчені явища у підмагнічених феритах широко використовуються в техніці НВЧ. Анізотропність фериту передбачає можливість створення **невзаємних пристроїв**, параметри яких залежать від напрямку руху електромагнітної хвилі, а залежність компонент тензора $\dot{\mu}$ від підмагнічувального поля H_0 дає змогу створити на основі феритів **електрично керовані пристрої**.

Пристрої з феритами можуть поділятися на дві групи. У першу виділяють **невзаємні пристрої** – **вентилі, гіратори, циркулятори**. У другу групу феритових пристроїв виділяють **керувальні пристрої** – **фазообертачі, вимикачі, комутатори, змінні подільники потужності, плавні і ступінчасті атенюатори, перестроювані фільтри**.

5.6. Бі-ізотропні та бі-анізотропні середовища

Ефект повороту площини поляризації спостерігається також в деяких середовищах і за відсутності зовнішнього магнітного поля (**оптично активні середовища**). Прикладом застосування цього ефекту може служити визначення концентрації розчину цукру у воді. На відміну від ефекту Фарадея в магнітно гіротропному середовищі **ефект повороту площини поляризації в оптично активному середовищі є взаємним**. Для пояснення оптичної активності необхідно

враховувати взаємодію електричних і магнітних моментів молекул в електромагнітному полі. Наслідком такої взаємодії є те, що вектори електричної і магнітної індукції одночасно залежать від векторів електричного і магнітного поля. Такі середовища називають **бі-ізотропними**.

В мікрохвильовому діапазоні **бі-ізотропним** є **штучний діелектрик з малими порівняно з довжиною хвилі кіральними частинками, хаотично вкрапленими в ізотропний діелектрик**. Назва об'єкта кіральний (або хіральний) походить від грецького слова рука і означає властивість об'єкта не збігатися зі своїм дзеркальним відбиттям за будь-яких переміщень і поворотів. Згідно з цим визначенням кіральність (chirality) – це геометрична властивість тривимірних об'єктів. Кіральними є руки (права і ліва), гвинти та спіральки (праві та ліві) та інші об'єкти (рис. 5.11 (+ праві, – ліві)).

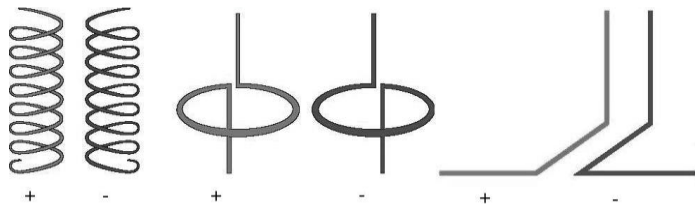


Рис. 5.11

Розглянемо параметри кірального середовища на базі спіралей. Для звичайного ізотропного або анізотропного середовища дипольний електричний момент \mathbf{p} і відповідно вектор поляризації \mathbf{P} залежать виключно від електричного поля \mathbf{E} , а магнітний момент \mathbf{m} і відповідно вектор намагніченості \mathbf{M} залежать виключно від магнітного поля \mathbf{H} . Для спірального кірального елемента при похилій щодо осі спіралі поляризації падаючої електромагнітної хвилі (рис. 5.12) поздовжня складова дипольного електричного моменту утворюється як поздовжньою складовою електричного поля, так і поздовжньою складовою магнітного поля (струм витка має поздовжню складову).

Аналогічно поздовжня складова магнітного дипольного моменту спіралі утворюється кільцевим електричним струмом, створюваним пронизуючим спіраль магнітним полем, до якого додається кільцевий струм, що створюється електричним полем, тому що струм уздовж осі спіралі може проходити тільки по кільцях спіралі.

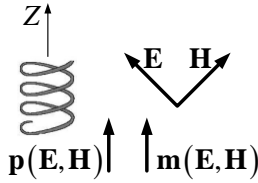


Рис. 5.12

При хаотичному розміщенні кіральних частинок в ізотропному середовищі з відносними діелектричною та магнітною проникностями ϵ_c, μ_c отримаємо бі-ізотропне середовище. Якщо кіральні частинки розміщені впорядковано, наприклад осі всіх спіральок спрямовані вздовж осі Z , середовище буде бі-анізотропним.

Для бі-ізотропного середовища можна записати матеріальні рівняння для комплексних амплітуд:

$$\dot{\mathbf{D}} = \epsilon'_a \dot{\mathbf{E}} \mp j\chi_k \dot{\mathbf{H}}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \mu'_a \dot{\mathbf{H}} \pm j\chi_k \dot{\mathbf{E}}, \quad (5.25)$$

де верхній знак характеризує середовище з правими кіральними об'єктами, нижній знак характеризує середовище з лівими кіральними об'єктами, $\epsilon'_a = \epsilon_0 \epsilon_c + \chi_k^e$, $\mu'_a = \mu_0 \mu_c + \chi_k^m$, χ_k^e – електрична сприйнятливість кірального середовища; χ_k^m – магнітна сприйнятливість кірального середовища; χ_k – параметр кіральності, який характеризує електромагнітну та магнітоелектричну сприйнятливості кірального середовища.

Ці параметри знаходять із розв'язку відповідних електродинамічних задач для системи кіральних елементів, розташованих в ізотропному середовищі, або експериментально. Для бі-анізотропного середовища параметри кіральності залежать від напрямку векторів електромагнітного поля. Існують і інші форми запису матеріальних рівнянь для кіральних бі-ізотропних та бі-анізотропних середовищ.

Штучний діелектрик на основі кіральних частинок має частотну та просторову дисперсію параметрів так само, як і оптично активне середовище. Основними електромагнітними властивостями кірального середовища є **біфуркація** нормальних хвиль і **кросполяризація** поля. Перша властивість полягає в неможливості поширення в кіраль-

ному середовищі лінійно-поляризованої хвилі. В ній завжди існують дві хвилі із право- і лівоколовими поляризаціями, що мають різні фазові швидкості, чим і пояснюється ефект повороту площини поляризації електромагнітної хвилі. Друга властивість – кросполяризація – полягає у зміні поляризації відбитого поля при падінні хвилі на кіральне середовище. Наприклад, при падінні на кіральне середовище хвилі з перпендикулярною поляризацією у структурі поля відбитої хвилі будуть присутні складові, що належать до ортогональної (паралельної) поляризації. Кіральне середовище по-різному реагує на падаючі хвилі правої і лівої колової поляризації і можливі їх взаємні перетворення.

Головні можливості застосування кіральних середовищ ґрунтуються на явищі кросполяризації поля в кіральному середовищі. На основі кіральних матеріалів можливе створення частотно- і поляризаційно-селективних фільтрів, перетворювачів поляризації, частотно-селективних захисних екранів і маловідбиваючих покриттів.

Задачі для самостійного розв'язку

1. Головні коефіцієнти заломлення для кварцу в оптичному діапазоні на частоті $5 \cdot 10^{14}$ Гц $n_o = 1,544$ і $n_{a0} = 1,553$. Записати тензор діелектричної проникності кварцу. Знайти товщину пластинки кварцу, яка перетворює лінійно поляризовану електромагнітну хвилю у хвилю з коловою поляризацією.

2. Головні коефіцієнти заломлення для вапняного шпату CaCO_2 в оптичному діапазоні на частоті $5 \cdot 10^{14}$ Гц $n_o = 1,658$ і $n_{a0} = 1,486$. Записати тензор діелектричної проникності вапняного шпату. Знайти товщину пластинки вапняного шпату, яка перетворює лінійно поляризовану електромагнітну хвилю у хвилю з коловою поляризацією. Порівняти результати розв'язку з попередньою задачею.

3. Ферит з параметрами $\epsilon = 13$, $M_0 = 1,4 \cdot 10^5$ А/м, $\Delta H = 5,6 \cdot 10^3$ А/м на частоті $f = 10^{10}$ Гц при напруженості магнітного поля $H_0 = 10^5$ А/м, має компоненти тензора магнітної проникності для право- і ліво-поляризованих електромагнітних хвиль $\mu_+ = 0,24 - j0,023$ і $\mu_- = 1,36 - j0,0053$. Знайти товщину феритової пластини, необхідної для повороту площини поляризації на 90° .

4. Ферит з параметрами $\epsilon = 13$, $M_0 = 1,4 \cdot 10^5$ А/м, $\Delta H = 5,6 \cdot 10^3$ А/м на частоті $f = 10^{10}$ Гц при напруженості магнітного поля $H_0 = 10^5$ А/м має компоненти тензора магнітної проникності для лінійно поляризованих електромагнітних хвиль $\mu = 0,802 - j0,014$ і $\mu_a = 0,562 - j0,009$. Знайти сталі поширення для звичайної і незвичайної електромагнітних хвиль і кути заломлення при похилому падінні хвилі на межу поділу вакуум–ферит під кутом 60° до нормалі до межі поділу.

Питання для самоперевірки

1. Які середовища називаються анізотропними?
2. Які середовища називаються гіротропними?
3. В чому полягає ефект Фарадея у гіротропному середовищі?
4. Від чого залежать величина і напрямок повороту площини поляризації при поширенні електромагнітних хвиль в гіротропному середовищі?
5. Які основні властивості кірального середовища?

6. ЯВИЩА ВІДБИТТЯ ТА ЗАЛОМЛЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА МЕЖІ ПОДІЛУ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ

6.1. Закони Снелліуса

Розглянемо задачу про падіння плоскої ЕМХ на плоску межу поділу, що ділить увесь простір на дві частини (рис. 6.1). Нехай верхній півпростір заповнений середовищем 1 з параметрами $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$, а нижній – середовищем 2 з параметрами $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$. Із загальної фізики відомо, що в цьому разі відбуваються явища відбиття променя під кутом φ' і його заломлення під кутом θ (рис. 6.1).

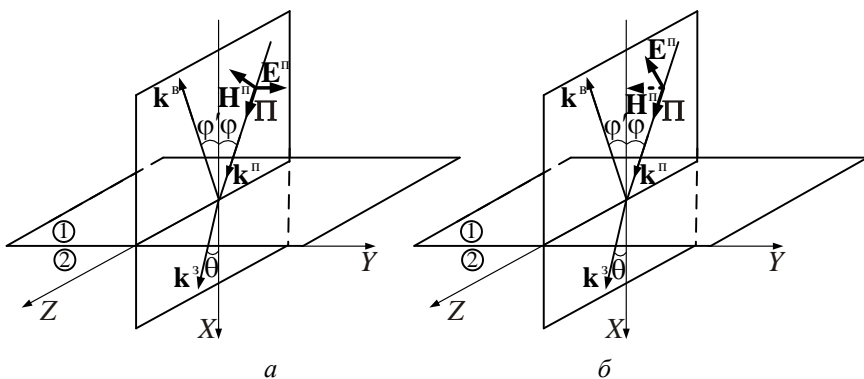


Рис. 6.1

Назвемо **площиною падіння** площину, яка проходить через промінь і нормаль до поверхні розподілу. Комплексні амплітуди напруженості електричного $\dot{\mathbf{E}}^n$ і магнітного $\dot{\mathbf{H}}^n$ полів падаючої хвилі можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^n &= \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-j\mathbf{k}^n \cdot \mathbf{r}} = \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-jk_1(x \cos \varphi_x^n + y \cos \varphi_y^n + z \cos \varphi_z^n)}, \\ \dot{\mathbf{H}}^n &= \dot{\mathbf{H}}_0^n e^{-j\mathbf{k}^n \cdot \mathbf{r}} = \dot{\mathbf{H}}_0^n e^{-jk_1(x \cos \varphi_x^n + y \cos \varphi_y^n + z \cos \varphi_z^n)}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

при цьому $\dot{\mathbf{H}}^n = \frac{1}{Z_{c1}} [\mathbf{e}^n, \dot{\mathbf{E}}^n]$, де $\mathbf{k}^n = k_1 \mathbf{e}^n$, \mathbf{e}^n – орт променя падаючої хвилі, $\cos \varphi_{x,y,z}^n$ – напрямні косинуси вектора \mathbf{e}^n у прямокутній системі координат.

Природно припустити, що вектори напруженості поля відбитої ($\dot{\mathbf{E}}^B, \dot{\mathbf{H}}^B$) і заломленої ($\dot{\mathbf{E}}^3, \dot{\mathbf{H}}^3$) хвиль також є пласкими хвилями і виражаються аналогічними співвідношеннями:

$$\dot{\mathbf{E}}^B = \dot{\mathbf{E}}_0^- e^{-jk^B \mathbf{r}} = \dot{\mathbf{E}}_0^B e^{-jk_1(x \cos \varphi_x^B + y \cos \varphi_y^B + z \cos \varphi_z^B)}, \quad \dot{\mathbf{H}}^B = \frac{1}{Z_{c1}} [\mathbf{e}^B, \dot{\mathbf{E}}^B], \quad (6.2)$$

$$\dot{\mathbf{E}}^3 = \dot{\mathbf{E}}_0^3 e^{-jk^3 \mathbf{r}} = \dot{\mathbf{E}}_0^3 e^{-jk_1(x \cos \varphi_x^3 + y \cos \varphi_y^3 + z \cos \varphi_z^3)}, \quad \dot{\mathbf{H}}^3 = \frac{1}{Z_{c2}} [\mathbf{e}^3, \dot{\mathbf{E}}^3], \quad (6.3)$$

де $\mathbf{k}^B = k_1 \mathbf{e}^B$, $\mathbf{k}^3 = k_2 \mathbf{e}^3$, \mathbf{e}^B і \mathbf{e}^3 – орти променів відбитої і заломленої хвиль відповідно, а $\cos \varphi_{x,y,z}^B$ і $\cos \varphi_{x,y,z}^3$ – їх напрямні косинуси.

Знайдемо напрямок променів відбитої та заломленої хвиль, припускаючи, що напрямок променя падаючої хвилі заданий: $\varphi_x^n = \varphi$, $\varphi_y^n = \pi/2$, $\varphi_z^n = \pi/2 - \varphi$. Для цього використаємо граничні умови для тангенційних компонент векторів $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{H}}$ на площині поділу ($x = 0$) двох середовищ:

$$\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} = \dot{\mathbf{E}}_{2\tau}, \quad \dot{\mathbf{H}}_{1\tau} = \dot{\mathbf{H}}_{2\tau}. \quad (6.4)$$

На підставі граничних умов можна записати:

$$\dot{\mathbf{E}}_{0\tau}^n e^{-jk_1 z \cos \varphi_z^n} + \dot{\mathbf{E}}_{0\tau}^B e^{-jk_1(y \cos \varphi_y^B + z \cos \varphi_z^B)} = \dot{\mathbf{E}}_{0\tau}^3 e^{-jk_2(y \cos \varphi_y^3 + z \cos \varphi_z^3)}. \quad (6.5)$$

Щоб рівність (6.5) дотримувалась при всіх y , необхідно покласти $\cos \varphi_y^B = 0$ і $\cos \varphi_y^3 = 0$, тобто $\varphi_y^B = \varphi_y^3 = \pi/2$.

Звідси виходить, що **падаючий, відбитий та заломлений промені лежать в одній площині** ($y = \text{const}$). Щоб рівність (6.5) дотримувалась при всіх z , необхідно, щоб виконувались співвідношення:

$$k_1 \cos \varphi_z^{\text{п}} = k_1 \cos \varphi_z^{\text{в}} = k_2 \cos \varphi_z^{\text{з}}.$$

Підставляючи в цей вираз $\varphi_z^{\text{п}} = \pi/2 - \varphi$, $\varphi_z^{\text{в}} = \pi/2 - \varphi'$ і $\varphi_z^{\text{з}} = \pi/2 - \theta$, приходимо до наступних співвідношень:

$$\varphi' = \varphi \quad (6.6)$$

і

$$k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \theta. \quad (6.7)$$

Вираз (6.6) встановлює співвідношення між кутом падіння плоскої хвилі та кутом її відбиття і є математичним формулюванням відомого з оптики **першого закону Снелліуса: кут відбиття дорівнює куту падіння**.

Формула (6.7), яку можна привести до такого вигляду за відсутності втрат:

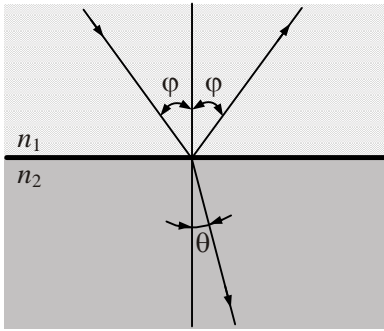
$$\frac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (6.8)$$

встановлює співвідношення між кутом падіння і кутом заломлення плоскої хвилі й носить назву **закону синусів** або **другого закону Снелліуса**. В (6.8) використані позначення:

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \quad \text{чи} \quad n_{1,2} = c/v_{1,2}, \quad (6.9)$$

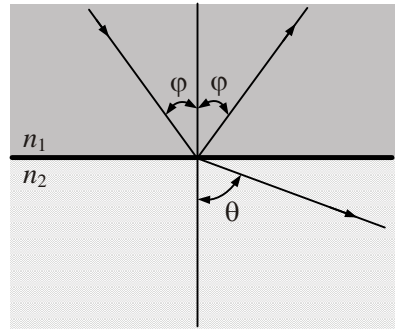
де n_1 і n_2 – коефіцієнти, що мають назву **показників заломлення** першого і другого середовищ; $v_{1,2}$ – швидкість поширення ЕМХ у середовищах.

Якщо $n_1 > n_2$, кажуть, що перше середовище **оптично густіше**, ніж друге. В цьому випадку кут заломлення θ завжди буде більший за кут падіння φ . А якщо має місце обернене співвідношення $n_2 > n_1$, то друге середовище вважається **оптично густішим**, ніж перше, і кут заломлення θ в даному випадку буде менший за кут падіння φ . Хід променів для цих ситуацій показаний на рис. 6.2, а, б.



$$n_2 > n_1$$

a



$$n_1 > n_2$$

б

Рис. 6.2

Приклад 6.1. З вільного простору на немагнітний ідеальний діелектрик з відносною діелектричною проникністю $\epsilon = 3,2$ падає плоска хвиля під кутом $\varphi = 30^\circ$. Знайти кути відбиття φ та заломлення θ .

Розв'язок. Користуючись першим (6.6) та другим (6.8) законами Снелліуса, знаходимо:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi = 30^\circ; \\ \theta &= \arcsin \left[\sin \varphi \frac{n_1}{n_2} \right] = \arcsin \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3,2}} \right] = 16,2^\circ. \end{aligned}$$

Резюмуючи викладене, можна зробити такі висновки:

- 1) промені падаючої, відбитої і заломленої хвиль розміщені в одній площині – площині падіння;
- 2) кут плоскої хвилі, відбитої від поверхні поділу двох середовищ, дорівнює куту падіння;
- 3) кути падіння і заломлення плоскої хвилі на межі поділу двох середовищ пов'язані між собою законом синусів.

6.2. Формули Френеля

Для повноти опису явищ, що супроводжують падіння плоскої хвилі на плоску поверхню поділу двох середовищ, необхідно знайти вирази, які встановлюють числові співвідношення між комплексними амплітудами падаючої, відбитої і заломленої хвиль. Для цього вводять так звані **комплексні коефіцієнти відбиття** \hat{R} і **прохо-**

дження \dot{T} , визначувані як відношення комплексних амплітуд відповідних хвиль на межі поділу двох середовищ:

$$\dot{R} = \frac{\dot{E}^B}{\dot{E}^n} \Big|_{x=0} = \frac{\dot{H}^B}{\dot{H}^n} \Big|_{x=0} \quad \text{і} \quad \dot{T} = \frac{\dot{E}^3}{\dot{E}^n} \Big|_{x=0} = \frac{\dot{Z}_{c2}\dot{H}^3}{\dot{Z}_{c1}\dot{H}^n} \Big|_{x=0}. \quad (6.10)$$

Коефіцієнти відбиття і проходження є комплексними величинами, модулі яких $R = |\dot{R}| = \frac{E^B}{E^n}$, $T = |\dot{T}| = \frac{E^3}{E^n}$ встановлюють співвідношення між амплітудами падаючої, відбитої й заломленої хвиль на межі поділу двох середовищ, а їх аргументи

$$\begin{aligned} \psi_R &= \arg \{ \dot{R} \} = \arg \{ \dot{E}^B \} - \arg \{ \dot{E}^n \}, \\ \psi_T &= \arg \{ \dot{T} \} = \arg \{ \dot{E}^3 \} - \arg \{ \dot{E}^n \} \end{aligned}$$

– різницю фаз цих хвиль.

Встановлено, що значення коефіцієнтів відбиття і проходження залежать від орієнтації вектора \mathbf{E}^n пласкої хвилі по відношенню до її площини падіння, інакше кажучи, – від поляризації падаючої хвилі. Відомо, що хвилю будь-якої поляризації можна представити у вигляді суми двох ортогональних хвиль з лінійною поляризацією. Тому для повного опису явища є сенс визначити коефіцієнти \dot{R} і \dot{T} для обох цих хвиль, що падають на поверхню поділу. Як такі виберемо дві хвилі, в одній з яких вектор \mathbf{E}^n лежить у площині падіння, а у другій – перпендикулярний цій площині. Першу з них прийнято називати **хвилею з паралельною** (площині падіння) поляризацією, а другу – **хвилею з нормальною** (тобто перпендикулярною до площини падіння) поляризацією. В літературі **хвилі з паралельною поляризацією** звать також **вертикально поляризованими**, а з **нормальною поляризацією** – **горизонтально поляризованими**.

Розглянемо коефіцієнти відбиття та проходження окремо для хвиль з нормальною та паралельною поляризацією.

6.2.1. Коефіцієнти відбиття і проходження хвиль з нормальною поляризацією

Нехай на плоску межу поділу двох середовищ падає хвиля з нормальною поляризацією (рис. 6.3).

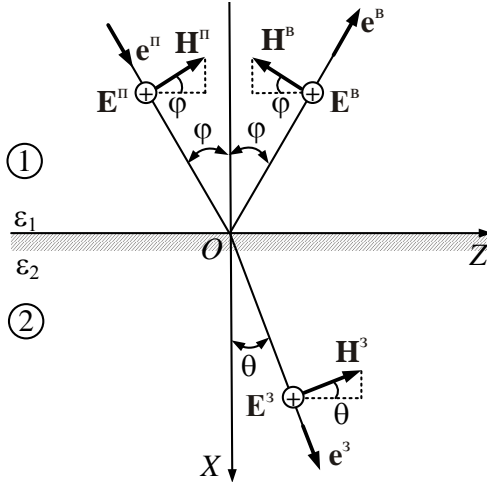


Рис. 6.3

В цьому випадку в площині падіння будуть розміщені вектори напруженості магнітного поля \mathbf{H} падаючої, відбитої і заломленої хвиль, а вектори \mathbf{E} всіх хвиль будуть орієнтовані паралельно поверхні поділу. Тому тут граничні умови для тангенційних компонент напруженості електричного і магнітного полів на площині $X = 0$ можна сформулювати у вигляді наступних рівностей:

$$\dot{E}_0^i + \dot{E}_0^B = \dot{E}_0^3, \quad (6.11)$$

$$\dot{H}_0^i \cos \varphi - \dot{H}_0^B \cos \varphi = \dot{H}_0^3 \cos \theta. \quad (6.12)$$

Останню рівність можна переписати як

$$\frac{\dot{E}_0^i}{\dot{Z}_{c1}} \cos \varphi - \frac{\dot{E}_0^B}{\dot{Z}_{c1}} \cos \varphi = \frac{\dot{E}_0^3}{\dot{Z}_{c2}} \cos \theta. \quad (6.13)$$

Поділивши ліві і праві частини виразів (6.11) та (6.13) на \dot{E}_0^n , одержимо

$$1 + \dot{R}_\perp = \dot{T}_\perp, \quad (1 - \dot{R}_\perp) \dot{Z}_{c2} \cos \varphi = \dot{T}_\perp \dot{Z}_{c1} \cos \theta,$$

де \dot{R}_\perp і \dot{T}_\perp – коефіцієнти відбиття й проходження хвилі з нормальною поляризацією. Розв'язуючи одержану систему рівнянь стосовно невідомих \dot{R}_\perp і \dot{T}_\perp , знаходимо:

$$\dot{R}_\perp = \frac{\dot{Z}_{c2} \cos \varphi - \dot{Z}_{c1} \cos \theta}{\dot{Z}_{c2} \cos \varphi + \dot{Z}_{c1} \cos \theta}, \quad (6.14)$$

$$\dot{T}_\perp = \frac{2\dot{Z}_{c2} \cos \varphi}{\dot{Z}_{c2} \cos \varphi + \dot{Z}_{c1} \cos \theta}. \quad (6.15)$$

Для немагнітних діелектриків ($\mu_1 = \mu_2$, $Z_{c1}/Z_{c2} = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$) ці формули з урахуванням 2-го закону Снелліуса помітно спрощуються та набувають такого вигляду:

$$\dot{R}_\perp = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\theta + \varphi)}, \quad \dot{T}_\perp = \frac{2 \sin \theta \cos \varphi}{\sin(\theta + \varphi)}. \quad (6.16)$$

Вирази (6.14) – (6.16) називаються **формулами Френеля для хвиль з нормальною поляризацією**.

Приклад 6.2. Для умов прикладу 6.1 знайти амплітуди векторів напруженості магнітного поля відбитої та заломленої хвиль. Вважати, що амплітуда падаючої хвилі $E^n = 1 \text{ В/м}$, поляризація хвилі нормальна.

Розв'язок. З урахуванням прикладу 6.1 маємо $\theta = 16,2^\circ$, із формули (6.16) $\dot{R}_\perp = -0,33$, $\dot{T}_\perp = 0,67$. Характеристичний опір другого середовища $\dot{Z}_{c2} = 120\pi/\sqrt{\varepsilon_2} = 211 \text{ Ом}$. Тоді

$$H^B = |\dot{R}_\perp| E^n / \dot{Z}_{c1} = 8,8 \cdot 10^{-4} \text{ А/м},$$

$$H^3 = \dot{T}_\perp E^n / \dot{Z}_{c2} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ А/м}.$$

6.2.2. Коефіцієнти відбиття і проходження хвиль з паралельною поляризацією

Хід променів поблизу межі поділу показаний для хвиль з паралельною поляризацією на рис. 6.4.

В цьому випадку в площині падіння лежать вектори $\dot{\mathbf{E}}$, а вектори $\dot{\mathbf{H}}$ спрямовані паралельно межі поділу. Тому граничні умови для цих векторів на поверхні поділу виглядатимуть так:

$$\dot{E}_0^{\text{п}} \cos \varphi + \dot{E}_0^{\text{в}} \cos \varphi = \dot{E}_0^3 \cos \theta, \quad (6.17)$$

$$\dot{H}_0^{\text{п}} - \dot{H}_0^{\text{в}} = \dot{H}_0^3. \quad (6.18)$$

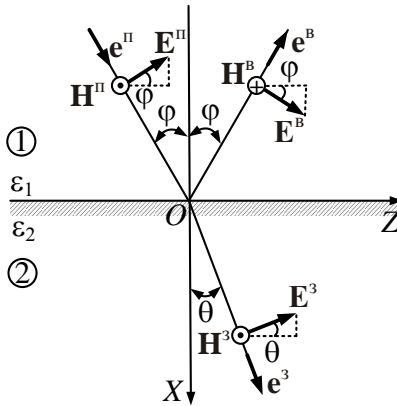


Рис. 6.4

Перетворимо другу рівність до вигляду

$$\frac{\dot{E}_0^{\text{п}}}{\dot{Z}_{c1}} - \frac{\dot{E}_0^{\text{в}}}{\dot{Z}_{c1}} = \frac{\dot{E}_0^3}{\dot{Z}_{c2}}, \quad (6.19)$$

а потім поділимо рівності (6.17) та (6.19) на $\dot{E}_0^{\text{п}}$, внаслідок чого одержимо систему рівнянь:

$$\cos \varphi + \dot{R}_{\parallel} \cos \varphi = \dot{T}_{\parallel} \cos \theta, \quad (6.20)$$

$$\dot{Z}_{c2} (1 - \dot{R}_{\parallel}) = \dot{Z}_{c1} \dot{T}_{\parallel}, \quad (6.21)$$

Розв'язуючи ці рівняння щодо \dot{R}_{\parallel} і \dot{T}_{\parallel} , одержимо **формули Френеля для хвиль паралельної поляризації**:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\dot{Z}_{c2} \cos \theta - \dot{Z}_{c1} \cos \varphi}{\dot{Z}_{c2} \cos \theta + \dot{Z}_{c1} \cos \varphi}, \quad (6.22)$$

$$\dot{T}_{\parallel} = \frac{2\dot{Z}_{c2} \cos \varphi}{\dot{Z}_{c2} \cos \theta + \dot{Z}_{c1} \cos \varphi}. \quad (6.23)$$

Для немагнітних діелектриків при $\mu_1 = \mu_2$ останні вирази перетворюються до вигляду:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \varphi)}{\operatorname{tg}(\theta + \varphi)}, \quad (6.24)$$

$$\dot{T}_{\parallel} = \frac{2 \sin \varphi \sin \theta}{\sin(\theta + \varphi) \cos(\theta - \varphi)}. \quad (6.25)$$

Легко показати, що у випадку нормального падіння лінійно поляризованої хвилі на поверхню поділу двох середовищ ($\varphi = \pi/2$) коефіцієнти відбиття та проходження визначаються наступними виразами:

$$\dot{R}_{\perp} = \dot{R}_{\parallel} = \frac{\dot{Z}_{c2} - \dot{Z}_{c1}}{\dot{Z}_{c2} + \dot{Z}_{c1}} \quad \text{і} \quad \dot{T}_{\parallel} = \dot{T}_{\perp} = \frac{2\dot{Z}_{c2}}{\dot{Z}_{c1} + \dot{Z}_{c2}}. \quad (6.26)$$

Звідси виходить, що коефіцієнти відбиття і проходження для хвиль з різною поляризацією виявляються однаковими, що цілком природно, оскільки в даному випадку площа падіння виявляється невизначеною.

Приклад 6.3. Амплітуда напруженості електричного поля пласкої хвилі, яка падає по нормалі з першого середовища на друге, дорівнює $E^{\text{п}} = 20 \text{ В/м}$. Параметри середовищ наступні: $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 3,2$, $\mu_2 = 1$. Знайти середнє значення вектора Пойнтінга падаючої, відбитої та заломленої хвиль.

Розв'язок. З формули (6.26) маємо:

$$\dot{R} = R = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_2}}{1 + \sqrt{\varepsilon_2}} = 0,283; \quad \dot{T} = T = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon_2}} = 0,717.$$

Характеристичний опір другого середовища (див. приклад 6.2) $\dot{Z}_{c2} = 211 \text{ Ом}$.
Середнє значення векторів Пойнтінга

$$\Pi^n = \frac{1}{2} \frac{(E^n)^2}{Z_{c1}} = 0,53 \text{ Вт/м}^2; \quad \Pi^b = \frac{1}{2} \frac{(RE^n)^2}{Z_{c1}} = 0,0425 \text{ Вт/м}^2;$$

$$\Pi^3 = \frac{1}{2} \frac{(TE^n)^2}{Z_{c2}} = 0,487 \text{ Вт/м}^2.$$

З фізичних міркувань і розрахунків видно, що для середовищ без втрат виконується рівність $\Pi^n = \Pi^b + \Pi^3$, тобто середнє значення вектора Пойнтінга падаючої хвилі дорівнює сумі значень векторів Пойнтінга відбитої та заломленої хвилі.

6.3. Відбиття та заломлення плоских хвиль на межі ідеальних діелектриків

Вважатимемо, що середовища по обидві сторони від межі поділу є ідеальними немагнітними діелектриками, в яких $\mu_2 = \mu_1$, $\sigma = 0$. Покажемо, що існує такий кут падіння, який називається **кутом Брюстера** $\varphi = \varphi_{\text{Бр}}$, при якому падаюча паралельно поляризована хвиля не відбивається від межі поділу (коефіцієнт відбиття $R_{\parallel} = 0$).

Можна встановити, що у випадку $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1$ (тобто $\theta \neq \varphi$) ця умова виконуватиметься тільки в тому разі, коли знаменник виразу (6.24) прямує до нескінченності, тобто $\text{tg}(\varphi + \theta) \rightarrow \infty$, звідки виходить $\varphi + \theta = \pi/2$. Підставляючи $\theta = \pi/2 - \varphi$ у 2-й закон Снелліуса, знаходимо шуканий кут Брюстера:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\pi/2 - \varphi)} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \text{tg} \varphi = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \quad (6.27)$$

або

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{Бр}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (6.28)$$

З (6.28) виходить, що кут Брюстера існує для будь-яких співвідношень між ε_1 і ε_2 , тобто й для $n_2 > n_1$, і для $n_2 < n_1$.

Розглянемо докладніше другий випадок, коли електромагнітна хвиля проходить з більш оптично густого середовища в середовище менш оптично густе ($n_1 > n_2$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$) і має місце таке співвідношення між кутами падіння і заломлення:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{або} \quad \sin \varphi = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta. \quad (6.29)$$

Оскільки $n_2/n_1 < 1$, то $\sin \theta > \sin \varphi$ і $\theta > \varphi$ (рис. 6.5, а). Звідси можна знайти такий кут падіння $\varphi_{\text{кр}}$, що називається критичним кутом (кутом повного внутрішнього відбиття), при якому заломлена хвиля починає ковзати по поверхні поділу ($\theta = \pi/2$) (рис. 6.5, б):

$$\varphi_{\text{кр}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (6.30)$$

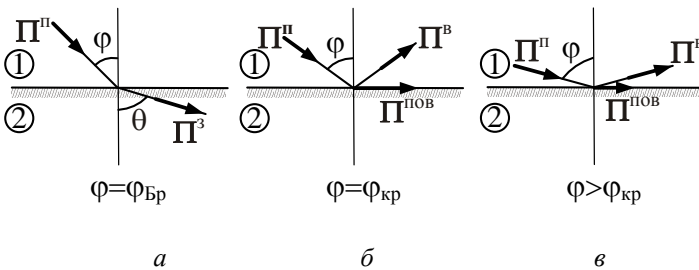


Рис. 6.5

На рис 6.5 б, в $\Pi^{\text{пов}}$ означає вектор Пойнтінга поверхневої хвилі.

При $\varphi \geq \varphi_{\text{кр}}$ спостерігається явище повного відбиття $|R_{\perp}| = |R_{\parallel}| = 1$ для хвиль обох поляризацій (рис. 6.5, в). Типові графіки залежностей

модуля і фази коефіцієнта відбиття показані на рис. 6.6 для двох характерних випадків: $n_2 > n_1$ (рис. 6.6, а, в) і $n_1 > n_2$ (рис. 6.6, б, г).

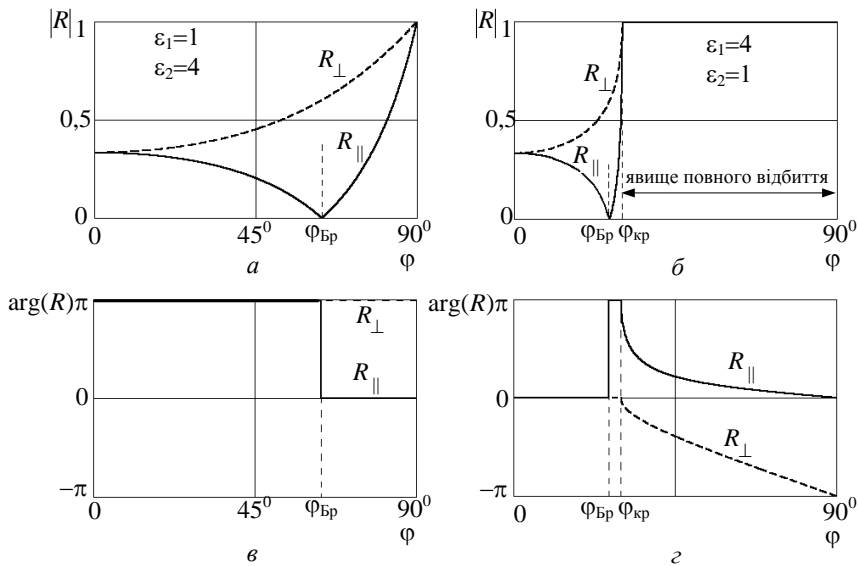


Рис. 6.6

При розрахунках згаданих графіків вважалося, що середовища 1 і 2 немагнітні і непоглинаючі ($\mu_1 = \mu_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$).

Явище повного внутрішнього відбиття широко використовується в техніці. Прикладом такого використання може служити світловід (сучасна лінія передачі оптичного діапазону хвиль), що являє собою гнучкий діелектричний стрижень, в середині якого поширюється електромагнітна хвиля, утримувана всередині діелектрика за рахунок використання саме цього ефекту – ефекту повного внутрішнього відбиття.

6.4. Поверхневі хвилі біля межі поділу двох середовищ

Неважко показати, що при падінні плоскої хвилі на межу поділу під кутом $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$, коли спостерігається явище повного внутрішнього відбиття, модулі коефіцієнтів відбиття для хвиль обох поляризацій рівні одиниці $|R_{\perp}| = |R_{\parallel}| = 1$. Це означає, що падаюча хвиля повністю

відбивається від межі поділу, а потужність, яка переноситься з нею, повністю відбивається назад в перше середовище і зовсім не проходить у друге середовище. Разом з тим, з формул (6.23) і (6.25) виходить, що при $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$ коефіцієнти проходження T_{\perp} і T_{\parallel} не дорівнюють нулю ($T_{\perp} \neq 0$ та $T_{\parallel} \neq 0$), тобто поле в середовищі 2 все-таки існує. Тому є сенс розглянути структуру цього поля докладніше, вважаючи, що воно описується виразом (6.3), яке з урахуванням позначень, прийнятих на рис. 6.3 ($\varphi_x^3 = \theta$, $\varphi_y^3 = \pi/2$, $\varphi_z^3 = \pi/2 - \theta$), записується у вигляді

$$\dot{\mathbf{E}}^3 = \dot{\mathbf{E}}_0^3 e^{-j\mathbf{k}_2(x\cos\theta + z\sin\theta)}. \quad (6.31)$$

Із закону синусів виходить, що за наявності повного внутрішнього відбиття, тобто коли $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$, $\sin\theta$ має бути більше одиниці:

$$\sin\theta = \frac{n_1}{n_2} \sin\varphi > \frac{n_1}{n_2} \sin\varphi_{\text{кр}} = 1, \quad (6.32)$$

що в принципі неможливо, якщо під θ розуміти реальний просторовий кут заломлення. Проте, якщо припустити, що величина $\theta = \dot{\theta}$ є комплексною, то значення $\sin\dot{\theta}$ може перевищувати 1. Тому прийємо це припущення і представимо $\dot{\theta}$ у вигляді

$$\dot{\theta} = \theta' + j\theta'', \quad (6.33)$$

де θ' дійсна частина $\dot{\theta}$, що відповідає реальному просторовому куту θ , а θ'' – уявна частина $\dot{\theta}$, фізичний смисл якої ще належить вяснити. Враховуючи, що при кутах падіння $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$ заломлена хвиля ковзає вздовж поверхні розподілу (є **поверхневою хвилею**) і реальний кут заломлення $\theta = \pi/2$, знайдемо значення $\sin\dot{\theta}$ та $\cos\dot{\theta}$:

$$\sin\dot{\theta} = \sin(\theta' + j\theta'') = \sin\theta' \operatorname{ch}\theta'' + j\cos\theta' \operatorname{sh}\theta'' = \operatorname{ch}\theta'', \quad (6.34)$$

$$\cos\dot{\theta} = \cos(\theta' + j\theta'') = \cos\theta' \operatorname{ch}\theta'' - j\sin\theta' \operatorname{sh}\theta'' = -j\operatorname{sh}\theta''. \quad (6.35)$$

З урахуванням рівнянь (6.34), (6.35) формула (6.31) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^3 &= \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-jk_2(x \cos \dot{\theta} + z \sin \dot{\theta})} = \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-jk_2(-jx \operatorname{sh} \theta'' + z \operatorname{ch} \theta'')} = \\ &= \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-(k_2 \operatorname{sh} \theta'')x} \cdot e^{-j(k_2 \operatorname{ch} \theta'')z} = \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-\alpha_{2,x}x} \cdot e^{-j\beta_{2,z}z}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

де

$$\beta_{2,z} = k_2 \operatorname{ch} \theta'', \quad \alpha_{2,x} = k_2 \operatorname{sh} \theta''. \quad (6.37)$$

Вираз (6.36) описує пласку електромагнітну хвилю, яка поширюється вздовж осі Z у позитивному напрямку. Фазовий коефіцієнт цієї хвилі дорівнює $\beta_{2,z} = k_2 \operatorname{ch} \theta'' > k_2$. Множник $e^{-\alpha_{2,x}x}$ у (6.36) свідчить про експоненційне спадання амплітуди хвилі при віддаленні точки спостереження від поверхні поділу. Таким чином, вираз (6.36) дає підставу стверджувати, що у другому середовищі існує пласка неоднорідна електромагнітна хвиля, яка поширюється вздовж поверхні розподілу $X = 0$. Оскільки **основна частина енергії, яка переноситься цією хвилею, зосереджена також поблизу поверхні, то таку хвилю прийнято називати поверхневою**. Виникнення цієї хвилі можна розглядати як прояв деякої «інерційності» електромагнітного поля при повному відбитті хвилі від поверхні поділу.

Розглянемо докладніше фазовий коефіцієнт $\beta_{2,z}$ і сталу ослаблення $\alpha_{2,x}$ поверхневої хвилі. Використовуючи закон синусів (6.7), рівності (6.37) легко перетворити до такого вигляду:

$$\begin{aligned} \beta_{2,z} &= k_2 \operatorname{ch} \theta'' = k_2 \sin \dot{\theta} = k_1 \sin \varphi, \quad (6.38) \\ \alpha_{2,x} &= k_2 \operatorname{sh} \theta'' = jk_2 \cos \dot{\theta} = \sqrt{k_2^2 \sin^2 \dot{\theta} - k_2^2} = \sqrt{k_1^2 \sin^2 \varphi - k_2^2} = \\ &= k_1 \sqrt{\sin^2 \varphi - (k_2/k_1)^2} = k_1 \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi_{\text{кр}}}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

а також одержати формулу для визначення швидкості поширення поверхневої хвилі:

$$v_{2,z} = \frac{\omega}{\beta_{2,z}} = \frac{\omega}{k_2 \operatorname{ch} \theta''} = \frac{v_2}{\operatorname{ch} \theta''} = \frac{\omega}{k_1 \sin \varphi} = \frac{v_1}{\sin \varphi}. \quad (6.40)$$

З одержаних виразів видно, що параметри α_{2x} , β_{2z} і ν_{2z} залежать від кута падіння φ . Чим сильніша нерівність $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$, тим більші величини фазового коефіцієнта β_{2z} та сталої загасання α_{2x} і тим менша швидкість хвилі ν_{2z} . Остання, до речі, має цілком визначені межі зміни: $\nu_2 > \nu_{2z} > \nu_1$ – від $\nu_z = \nu_2$ при $\varphi = \varphi_{\text{кр}}$ до $\nu_z = \nu_1$ при $\varphi = 90^\circ$. Тут, як і раніше, ν_1 і ν_2 – швидкості поширення електромагнітної хвилі у першому та другому середовищах відповідно ($\nu_1 < \nu_2$, оскільки тут $n_1 > n_2$).

6.5. Побудова електромагнітного поля над межею поділу двох середовищ за наявності повного відбиття

Тепер знайдемо поле в першому середовищі для випадку повного внутрішнього відбиття, яке утворюється накладанням двох хвиль – падаючої та відбитої. Беручи до уваги, що в цьому випадку коефіцієнт відбиття можна представити як $\dot{R} = e^{i\psi_R}$, шукане поле запишемо в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_1 &= \dot{\mathbf{E}}^{\text{п}} + \dot{\mathbf{E}}^{\text{в}} = \dot{\mathbf{E}}_0^{\text{п}} e^{-j\mathbf{k}_1(x \cos \varphi + z \sin \varphi)} + \dot{R} \dot{\mathbf{E}}_0^{\text{п}} e^{-j\mathbf{k}_1(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)} = \\ &= \dot{\mathbf{E}}_0^{\text{п}} e^{-j\mathbf{k}_1 z \sin \varphi} \left(e^{-j\mathbf{k}_1 x \cos \varphi} + \dot{R} e^{j\mathbf{k}_1 x \cos \varphi} \right) = \dot{\mathbf{E}}_0^{\text{п}} e^{-j\mathbf{k}_1 z \sin \varphi} \left(e^{-j\mathbf{k}_1 x \cos \varphi} + \right. \\ &\quad \left. + e^{j\psi_R} e^{j\mathbf{k}_1 x \cos \varphi} \right) = \dot{\mathbf{E}}_0^{\text{п}} e^{j0,5\psi_R} e^{-j\mathbf{k}_1 z \sin \varphi} \left(e^{-j(\mathbf{k}_1 x \cos \varphi + 0,5\psi_R)} + e^{j(\mathbf{k}_1 x \cos \varphi + 0,5\psi_R)} \right) = \\ &= 2\dot{\mathbf{E}}_0^{\text{п}} \cos(\mathbf{k}_1 x \cos \varphi + 0,5\psi_R) \cdot e^{-j(\mathbf{k}_1 z \sin \varphi - 0,5\psi_R)} = \\ &= 2\dot{\mathbf{E}}_0^{\text{п}} \cos(\beta_{1x} x + 0,5\psi_R) \cdot e^{-j(\beta_{1z} z - 0,5\psi_R)} = \dot{\mathbf{E}}_x \cdot e^{-j(\beta_{1z} z - 0,5\psi_R)}, \quad (6.41) \end{aligned}$$

де $\dot{\mathbf{E}}_x = 2\dot{\mathbf{E}}_0^{\text{п}} \cos(\beta_{1x} x + 0,5\psi_R)$.

Поле в першому середовищі, представлене виразом (6.41), являє собою електромагнітну хвилю, біжучу вздовж осі Z . Амплітуда цієї хвилі $\dot{\mathbf{E}}_x$ залежить від поперечної координати x і сама є стоячою хвилею вздовж осі X . Фазові сталі β_{1z} біжучої вздовж осі Z хвилі і β_{1x} стоячої вздовж осі X хвилі є проєкціями хвильового числа \mathbf{k}_1 на відповідні осі координат.

$$\beta_{1x} = k_1 \cos \varphi, \beta_{1z} = k_1 \sin \varphi, \sqrt{\beta_{1x}^2 + \beta_{1z}^2} = k_1.$$

Довжина стоячої хвилі вздовж осі X , визначувана із співвідношення

$$\lambda_{1x} = \frac{2\pi}{\beta_{1x}} = \frac{2\pi}{k_1 \cos \varphi} = \frac{\lambda_1}{\cos \varphi}, \quad (6.42)$$

і швидкість поширення біжучої хвилі

$$v_{1z} = \frac{\omega}{\beta_{1z}} = \frac{\omega}{k_1 \sin \varphi} = \frac{v_1}{\sin \varphi} \quad (6.43)$$

є залежними від кута падіння φ , а їх величини виявляються більшими порівняно з аналогічними у просторі з такими самими параметрами, як і перше середовище.

Підбиваючи підсумок даному параграфу, слід зазначити, що плоска межа поділу двох середовищ за наявності явища повного відбиття перетворює пласку однорідну електромагнітну хвилю, що падає на неї з довільного напрямку ($\varphi_{\text{кр}} < \varphi < 90^\circ$), в неоднорідні електромагнітні хвилі й спрямовує їх рух вздовж поверхні розподілу. Таким чином, можна вважати, що **межа поділу** в даному випадку **служить деякою спрямовуючою системою для поширення електромагнітних хвиль в обох середовищах**. При цьому швидкість поширення хвилі в першому середовищі v_{1z} цілком збігається із швидкістю руху поверхневої хвилі у другому середовищі v_{2z} , що чітко видно при порівнянні формул (6.40) і (6.43).

На рис. 6.7 показані типові розподіли амплітуд хвиль, що існують в обох середовищах за наявності явища повного внутрішнього відбиття.

Координата x тут нормована до довжини хвилі в першому середовищі. При побудові графіків вважалось, що перше середовище (оптично більш густе) займає півпростір $x < 0$, а друге середовище – півпростір $x > 0$. Самі середовища мають ті самі параметри, що і у випадку рис. 6.6. На наведених графіках добре видно, що в першому середовищі розподіл амплітуди має вигляд стоячої хвилі, довжина якої зростає із збільшенням кута падіння φ . Амплітуди поверхневої

хвилі у другому середовищі аперіодично спадає з віддаленням від поверхні поділу ($x = 0$) за експоненціальним законом, причому швидкість цього спадання зростає із збільшенням кута φ .

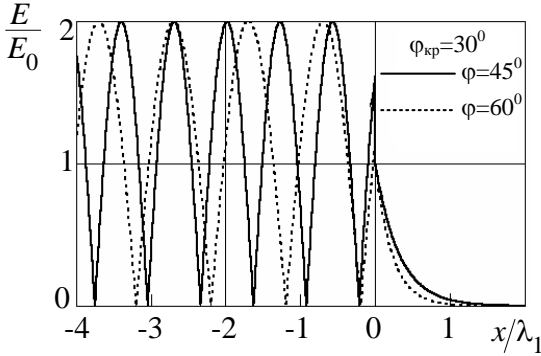


Рис. 6.7

6.6. Падіння плоскої хвилі на межу поглинального середовища. Поверхневий ефект

Вище було детально розглянуто характер явищ, що супроводжують падіння плоскої електромагнітної хвилі на плоску поверхню поділу двох ідеальних діелектриків. Тепер прослідкуємо, як впливає провідність другого середовища на характеристики відбитої і заломленої хвиль. Вважатимемо, що перше середовище, в якому поширюється падаюча хвиля, є ідеальний діелектрик з параметрами ε_1 та μ_1 , а друге середовище – провідне з параметрами ε_2 , μ_2 і σ_2 . Хвильове число першого середовища буде дійсним $k_1 = \beta_1$, а хвильове число другого середовища – комплексним $\dot{k}_2 = \beta_2 - j\alpha_2$. В такому випадку із закону синусів виходить, що $\sin \dot{\theta} = (k_1 / \dot{k}_2) \sin \varphi$, так само, як і кут θ , також є комплексною величиною. Позначаючи $\dot{k}_2 \cos \dot{\theta} = \beta_{2x} - j\alpha_{2x}$ і враховуючи, що $\dot{k}_2 \sin \dot{\theta} = k_1 \sin \varphi$, запишемо поле заломленої хвилі у другому середовищі:

$$\begin{aligned} \dot{E}^z &= \dot{E}_0^z e^{-j(\dot{k}_2 \cos \dot{\theta} \cdot x + \dot{k}_2 \sin \dot{\theta} \cdot z)} = \dot{E}_0^z e^{-j(\beta_{2x} - j\alpha_{2x})x - j(k_1 \sin \varphi)z} = \\ &= \dot{E}_0^z e^{-\alpha_{2x}x} e^{-j(\beta_{2x}x + \beta_{2z}z)}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Таким чином, поле в поглинальному середовищі являє собою біжучу хвилю. Фронт (поверхня рівних фаз) хвилі $\beta_{2x}x + \beta_{2z}z = \text{const}$ являє собою площину, що нахилена до осі Z під кутом

$$\gamma = \arctg(\beta_{2z}/\beta_{2x}), \quad (6.45)$$

яка одночасно є й кутом заломлення хвилі, оскільки напрямок її руху збігається з нормаллю до її фронту. Поверхня рівної амплітуди $x = \text{const}$ являє собою площину, паралельну поверхні розподілу. Отже, дану хвилю можна класифікувати як пласку і неоднорідну, через те що поверхні рівних фаз та амплітуд не збігаються.

Амплітуда заломленої хвилі із заглибленням останньої у провідне середовище спадає за експоненційним законом $E^3/E_0^3 = e^{-\alpha_{2x}x}$ і на глибині

$$x = \Delta = \frac{1}{\alpha_{2x}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_{a2}\sigma_2}}$$

вона спадає в $e \approx 2,71$ рази. При цьому хвиля втрачає значну частину потужності (близько 86,5 %). Чим вища частота коливань ω і чим більша провідність середовища, тим менша глибина проникнення Δ . Отже, високочастотне електромагнітне поле у провіднику зосереджується головним чином біля його поверхні. Дане явище одержало назву **поверхневого ефекту**. Глибину проникнення Δ в літературі часто ще називають **товщиною скін-шару** (від англійського слова *skin* – шкіра). Щоб оцінити реальні величини глибини проникнення, наведемо приклад.

Приклад 6.4. Знайти глибину проникнення хвилі у мідь на частотах $f = 1 \text{ МГц}$, $f = 100 \text{ МГц}$, $f = 10 \text{ ГГц}$, питома провідність $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$, $\mu = 1$.

Розв'язок. За формулою, яка наведена вище, маємо:

$$\Delta \Big|_{f=1 \text{ МГц}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,7 \cdot 10^7}} \approx 66,7 \text{ мкм};$$

$$\Delta \Big|_{f=100 \text{ МГц}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,7 \cdot 10^7}} \approx 6,67 \text{ мкм};$$

$$\Delta \Big|_{f=10 \text{ ГГц}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,7 \cdot 10^7}} \approx 0,667 \text{ мкм.}$$

6.7. Відбиття і заломлення електромагнітних хвиль на межі поділу діелектрик–провідник

Тепер припустимо, що перше середовище, як і раніше, є ідеальним діелектриком, а друге – гарним провідником (наприклад, металом), для якого $\text{tg } \delta_2 = \sigma_2 / \omega \epsilon_{a2} \gg 1$, і при цьому виконуються умови $|\dot{k}_2| \gg k_1$ та $|\dot{Z}_{c2}| \ll Z_{c1}$. Скориставшись другим законом

Снелліуса, неважко показати, що $\sin \theta = k_1 \sin \varphi / k_2 \ll 1$ і, отже, $\cos \theta \approx 1$. Крім того, очевидно, що в цьому випадку $\beta_2 \approx \text{Re}(\dot{k}_2) \approx \beta_{2x} \gg \beta_{2z}$, звідки виходить $\gamma \ll 1$. Це свідчить про те, що напрямок руху заломленої хвилі в металі мало відрізняється від нормалі \mathbf{e}_n до поверхні поділу. Оскільки це так, то вектори $\dot{\mathbf{E}}^3$ і $\dot{\mathbf{H}}^3$, розміщені в площині, перпендикулярній напрямку поширення, і на межі поділу є тангенційними компонентами по відношенню до межі поділу. Для них можна записати наступне співвідношення:

$$\dot{\mathbf{E}}_\tau = \dot{Z}_{c2} [\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}, \mathbf{e}_x] = \dot{Z}_{c2} [\mathbf{e}_n, \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}], \quad (6.46)$$

яке називається **наближеною граничною умовою Леонтовича – Щукіна**. З нього виходить, що на поверхні реального металу тангенційна компонента електричного поля вельми мала, оскільки характеристичний опір $\dot{Z}_{c2} = (1 + j) / (\Delta \sigma)$ гарного провідника є дуже малою величиною. Однак у ряді випадків цією компонентою поля нехтувати не можна, особливо коли йдеться про розрахунок потужності теплових втрат електромагнітного поля. Річ у тім, що саме тангенційні компоненти полів визначають величину густини потоку потужності, яка проникає через поверхню всередину провідника і розсіюється в ньому. Дійсно, комплексний вектор Пойнтінга, спрямований всередину провідника, в даному випадку має вигляд

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}, \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}^*] = \frac{1}{2} Z_{c2} [[\mathbf{e}_n, \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}], \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}^*] = \mathbf{e}_y \frac{1+j}{2\sigma\Delta} |\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}|^2.$$

Знаючи вектор Пойнтінга, легко знайти потужність втрат у провіднику на ділянці площиною s

$$P_{\text{втр}} = \text{Re} \left\{ \int_s \dot{\mathbf{P}} ds \right\} = \frac{1}{2\sigma\Delta} \int_s |\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}|^2 ds.$$

Тепер покажемо, що характеристичний опір провідника Z_{c2} є одночасно й його **поверхневим імпедансом** Z_s . Для цього необхідно припустити, що провідник є ідеальним і всередині нього відсутні електричні та магнітні поля, а по його поверхні проходить струм провідності, поверхнева густина якого дорівнює $\dot{\mathbf{J}}_s$. Цей струм провідності викликаний наявністю тангенційної компоненти електричного поля $\dot{\mathbf{E}}_\tau$ і зв'язаний з нею законом Ома, який у даному випадку можна записати у вигляді $\dot{\mathbf{E}}_\tau = Z_s \dot{\mathbf{J}}_s$. Підставляючи сюди $\dot{\mathbf{E}}_\tau$ та враховуючи граничні умови для тангенційної компоненти магнітного поля $\dot{\mathbf{J}}_s = [\mathbf{e}_x, \mathbf{H}_\tau]$, маємо:

$$\dot{Z}_{c2} [\mathbf{e}_x, \mathbf{H}] = \dot{\mathbf{J}}_s \dot{Z}_s,$$

звідки виходить рівність

$$\dot{Z}_s \approx \dot{Z}_{c2} \approx (1+j)/\sigma\Delta, \quad (6.47)$$

яка свідчить про те, що поверхневий опір провідника збігається з його характеристичним опором.

Приклад 6.5. Плaska хвиля з частотою 10 ГГц має амплітуду електричного вектора $E^n = 300 \text{ В/м}$ і падає у напрямку нормалі на метал (мідь) з параметрами $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$, $\mu = 1$. Знайти середнє значення вектора Пойнтінга, який проходить у друге середовище.

Розв'язок. Амплітуда вектора H падаючої хвилі

$$H^n = E^n / Z_{c1} = 0,796 \text{ А/м}.$$

Характеристичний опір середовища згідно з (6.47) і прикладом (6.4)

$$Z_{c2} = 0,026(1 + j) \text{ Ом.}$$

У силу виконання граничних умов на поверхні добре провідного середовища тангенційна компонента H подвоюється і становить

$$\dot{H}_\tau = 2H^n = 1,59 \text{ А/м.}$$

$$\text{Звідси } \dot{E}_\tau = Z_{c2} \dot{H}_\tau = 0,0413(1 + j) \text{ В/м.}$$

Середнє значення вектора Пойнтінга хвилі, що пройшла,

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \dot{E}_\tau \dot{H}_\tau^* \} = 3,29 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/м}^2.$$

Середній потік вектора Пойнтінга падаючої хвилі

$$\bar{\Pi}^n = (E^n)^2 / 2Z_{c1} = 119,4 \text{ Вт/м}^2.$$

Таким чином, на втрати у металі йде лише $(\bar{\Pi} / \bar{\Pi}^n) = 2,8 \cdot 10^{-4}$ частки енергії первинної хвилі.

Оцінимо тепер коефіцієнти відбиття від металу хвиль з різною поляризацією, вважаючи, що кут їх падіння φ помітно відрізняється від 90° :

$$\begin{aligned} \dot{R}_\perp &= \frac{\dot{Z}_{c2} \cos \varphi - \dot{Z}_{c1} \cos \theta}{\dot{Z}_{c2} \cos \varphi + \dot{Z}_{c1} \cos \theta} = \frac{(\dot{Z}_{c2} / \dot{Z}_{c1}) \cos \varphi - \cos \theta}{(\dot{Z}_{c2} / \dot{Z}_{c1}) \cos \varphi + \cos \theta} \approx \\ &\approx -1 + 2 \frac{\dot{Z}_{c2}}{\dot{Z}_{c1}} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_\parallel &= \frac{\dot{Z}_{c2} \cos \dot{\theta} - \dot{Z}_{c1} \cos \varphi}{\dot{Z}_{c2} \cos \dot{\theta} + \dot{Z}_{c1} \cos \varphi} = \frac{(\dot{Z}_{c2} / \dot{Z}_{c1}) \cos \dot{\theta} - \cos \varphi}{(\dot{Z}_{c2} / \dot{Z}_{c1}) \cos \dot{\theta} + \cos \varphi} \approx \\ &\approx -1 + 2 \frac{\dot{Z}_{c2}}{\dot{Z}_{c1}} \frac{1}{\cos \varphi}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Чим кращий провідник, тим менше відношення $\dot{Z}_{c2} / \dot{Z}_{c1}$ і тим ближче коефіцієнти відбиття до -1 . Легко показати, що в граничному випадку друге середовище стане ідеальним провідником, у

якого $\sigma_2 \rightarrow \infty$ і $\dot{Z}_{c2} = 0$ коефіцієнти відбиття й проходження не залежатимуть від кутів падіння φ :

$$\dot{R}_\perp = \dot{R}_\parallel = -1, \quad \dot{T}_\perp = \dot{T}_\parallel = 0.$$

Отримані вище співвідношення дозволяють проаналізувати структуру ЕМП при відбитті хвиль від ідеально провідної нескінченної площини.

У першому середовищі відбувається **інтерференція** падаючої хвилі з відбитою, у другому – поле відсутнє ($\sigma_2 = \infty$).

Наведемо у дійсній формі кінцеві записи для миттєвих значень векторів поля у першому середовищі.

Розглянемо випадок **нормальної поляризації** (рис. 6.1, а), для якого отримаємо:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{e}_y 2E^n(0) \sin(\beta_{1x}x) \cos\left(\omega t - \beta_{1z}z + \frac{\pi}{2}\right) = \quad (6.50)$$

$$= \mathbf{e}_y E_y(x) \sin(\omega t - \beta_{1z}z), \quad E_y(x) = 2E^n(0) \sin(\beta_{1x}x),$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = -\mathbf{e}_x H_x(x) \sin(\omega t - \beta_{1z}z) + \mathbf{e}_z H_z(x) \cos(\omega t - \beta_{1z}z),$$

$$H_x(x) = \frac{2E^n(0)}{Z_{c1}} \sin(\beta_{1x}x) \sin \varphi, \quad (6.51)$$

$$H_z(x) = \frac{2E^n(0)}{Z_{c1}} \cos(\beta_{1x}x) \cos \varphi.$$

У виразах (6.50), (6.51) $E^n(0)$ – напруженість електричного поля на межі поділу ($x = 0$).

Як видно з наведених формул, ЕМП являє собою **пласку біжучу хвилю** (множник $\sin(\omega t - \beta_{1z}z)$), яка поширюється у напрямку осі Z . Хвиля є **неоднорідною**, оскільки амплітуди складових векторів ЕМП залежать від координати x . Електричне поле має одну складову E_y і поляризоване лінійно. Магнітне поле має дві складові: H_x

та H_z . Складова H_x синфазна з E_y і лежить у поперечній до напрямку поширення ЕМХ площині. Складова H_z лежить у напрямку осі Z , зміщена за фазою з H_x та E_y на $\pi/2$. Магнітне поле поляризоване еліптично. **ЕМХ такої структури зветься Н-хвилями** ($E_z = 0, H_z \neq 0$), **або поперечно-електричними хвилями**. Вздовж осі X поле розподілене за законом стоячої хвилі.

Основні характеристики результуючого поля при відбитті хвилі на межі поділу діелектрик – ідеальний провідник:

- коефіцієнт фази

$$\beta_{1z} = k \sin \varphi < k;$$

- фазова швидкість

$$v_z = \frac{\omega}{\beta_{1z}} = \frac{\omega}{k \sin \varphi} = \frac{v_1}{\sin \varphi} > v_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{a1} \mu_{a1}}};$$

- довжина хвилі

$$\lambda_{1z} = \frac{2\pi}{\beta_{1z}} = \frac{2\pi}{k_1 \sin \varphi} = \frac{\lambda_1}{\sin \varphi} > \lambda_1;$$

- довжина стоячої хвилі

$$\lambda_{1x} = \frac{2\pi}{\beta_{1x}} = \frac{\lambda_1}{\cos \varphi} > \lambda_1.$$

Інтерференційна картина поля хвилі типа H та графіки розподілу складових поля для фіксованого моменту часу наведені на рис. 6.8.

Магнітні силові лінії **H** замкнені і лежать у площині XOZ , силові лінії **E** нескінченні і перпендикулярні площині $Y = \text{const}$.

У площинах $A1 - A1, A2 - A2 \dots$, рівняння яких $x_n = -n \frac{\lambda_{1x}}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ тангенційна складова електричного поля E_y і нормальна складова магнітного поля дорівнюють нулю (рис. 6.8).

Тому у ці **вузлові площини** можна помістити ідеально провідні пластини, не порушуючи структуру ЕМП. Таким чином отримали спрямовуючу систему, яка складається із двох ідеально провідних паралельних пластин з **мінімальною** відстанню a між ними (при $n = 1$):

$$a = \left| \frac{\lambda_{1x}}{2} \right| = \frac{\lambda_1}{2 \cos \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\lambda_1}{2}.$$

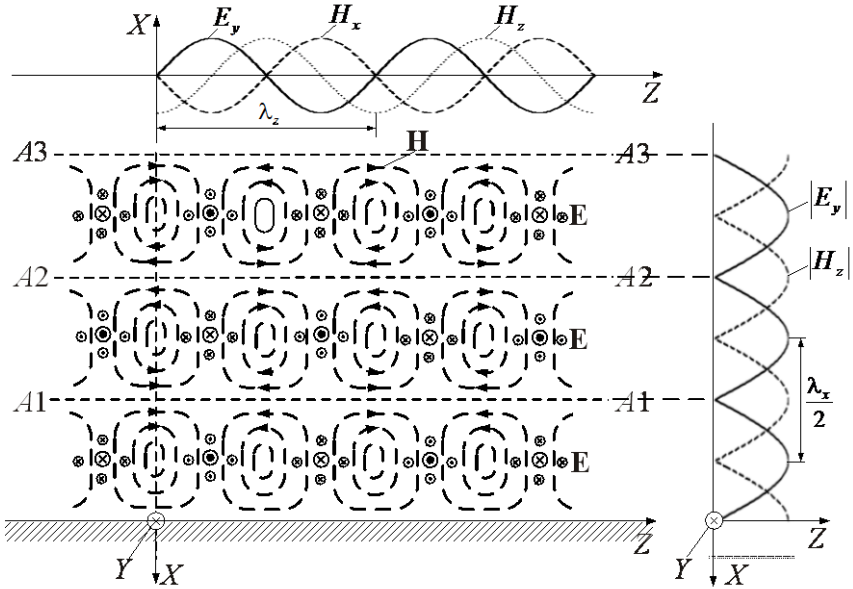


Рис. 6.8

Граничні умови на будь-якій ідеально провідній площині, рівняння якої $Y = \text{const}$, також задовольняють рівнянням ЕМП. Обмеживши область поширення поля додатково двома стінками $y_1 = 0$, $y_2 = b$, отримаємо прямокутний хвилевід розмірами $a \times b$. Як правило, у прямокутних хвилеводах використовують хвилі типу Н, а розміри хвилеводу вибирають з умови $a \approx 0,7\lambda_1$, $b \approx a/2$.

Аналогічно можна проаналізувати структуру ЕМХ при падінні на межу поділу ідеальних середовищ діелектрик–провідник хвилі з паралельною поляризацією (див. рис. 6.1, б).

З фізичних міркувань зрозуміло, що у результаті інтерференції падаючої та відбитої хвилі уздовж осі X буде структура стоячої хвилі, уздовж осі Z – біжучої. У напрямку осі Z поширюється неоднорідна біжуча хвиля. Структура силових ліній результуючого поля у цьому випадку для фіксованого моменту часу наведена на рис. 6.9.

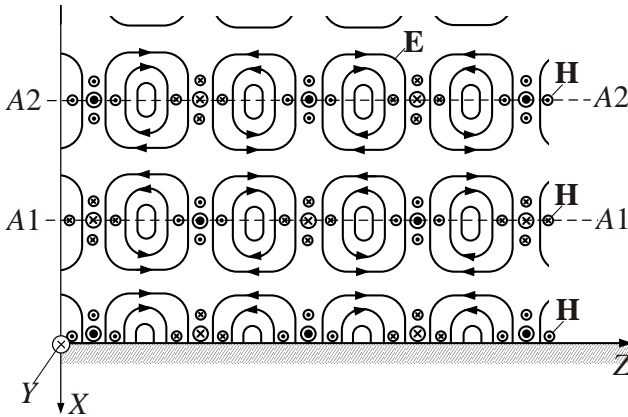


Рис. 6.9

Із порівняння рис. 6.8 і 6.9 видно, що лінії електричного та магнітного полів помінялися місцями. Лінії магнітного поля лежать у поперечній площині ($Z = \text{const}$), лінії електричного поля мають дві складові: E_z та E_x . Такі хвилі ($H_z = 0, E_z \neq 0$) зуть **Е-хвилями – поперечно-магнітними хвилями**.

У площинах $A1 - A1, A2 - A2\dots$ також можна розмістити ідеально провідні пластини без збурення ЕМП і реалізувати плаский хвилевід.

6.8. Відбиття пласких хвиль від рухомої межі поділу двох середовищ. Ефект Доплера

Розглянемо падіння пласкої ЕМХ на межу поділу двох середовищ, яка лежить у площині $x = x_0$. Вважатимемо, що перше середовище є ідеальним діелектриком, а падаюча хвиля спрямована по нормалі до поверхні поділу, тобто кут падіння $\varphi = 0$. Тоді поля падаючої і відбитої хвиль можна записати як

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{п}}(x) = \dot{\mathbf{E}}^{\text{п}} e^{-jk_1 x}, \quad \dot{\mathbf{E}}^{\text{в}}(x) = \dot{\mathbf{E}}^{\text{в}} e^{jk_1 x}. \quad (6.52)$$

Знайдемо комплексну амплітуду відбитої хвилі $\dot{\mathbf{E}}^{\text{в}}$, вважаючи, що амплітуда падаючої хвилі $\dot{\mathbf{E}}^{\text{п}}$ і коефіцієнт її відбиття \dot{R} від поверхні розподілу $x = x_0$ нам відомі:

$$\dot{E}^B(x_0) = \dot{R}\dot{E}^n(x_0).$$

Підставляючи у вираз значення напруженості полів падаючої і відбитої хвиль, маємо

$$\dot{E}^B e^{jk_1 x_0} = \dot{R}\dot{E}^n e^{-jk_1 x_0},$$

звідки знаходимо

$$\dot{E}^B = \dot{R}\dot{E}^n e^{-j2k_1 x_0}. \quad (6.53)$$

Знаючи \dot{E}^B , вираз (6.52) можна записати у вигляді

$$\dot{E}^B(x) = \dot{R}\dot{E}^n e^{jk_1(x-2x_0)}. \quad (6.54)$$

Залежність напруженості електричного поля відбитої хвилі від часу

$$\mathbf{E}^B(x, t) = \mathbf{E}_0^B \cos[\omega t + \beta_1 \cdot (x - 2x_0) + \varphi^B], \quad (6.55)$$

де $\varphi^B = \arg\{E^n\} + \arg\{\dot{R}\}$, $E_0^B = RE^n$.

Тепер припустимо, що площина $x = x_0$, яка ділить два різних середовища, рухається вздовж X із швидкістю v_0 , значно меншою від швидкості руху хвилі у першому середовищі $v_1 = 1/\sqrt{\epsilon_{a1}\mu_{a1}}$. Тоді положення площини поділу змінюватиметься в часі за лінійним законом $x_0 = v_0 t$, а залежність напруженості поля від часу набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^B(x, t) &= \mathbf{E}_0^B \cos[\omega t + \beta_1 x - 2\beta_1 v_0 t + \varphi^B] = \\ &= \mathbf{E}_0^B \cos[(\omega - 2\beta_1 v_0)t + \beta_1 x + \varphi^B] = \\ &= \mathbf{E}_0^B \cos[(\omega - \Omega)t + \beta_1 x + \varphi^B] = \mathbf{E}_0^B \cos(\omega_1 t + \beta_1 x + \varphi^B) \end{aligned} \quad (6.56)$$

де $\Omega = 2\beta_1 v_0 = \omega \frac{2v_0\beta_1}{\omega} = 2\omega \frac{v_0}{v_1}$, $\omega_1 = \omega - \Omega$.

Якщо межа поділу рухається вздовж осі X в позитивному напрямку, тобто віддаляється від джерела ЕМХ $\mathbf{v}_0 = \mathbf{e}_x v_0$, то $\Omega > 0$ і $\omega_1 = \omega - \Omega < \omega$. В тому разі, коли межа поділу рухається в напрямку до джерела хвиль, тобто наближається до нього, то $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{e}_x v_0$, звідки $\Omega < 0$ і $\omega_1 = \omega - \Omega > \omega$.

Явище зміни частоти електромагнітної хвилі при відбитті її від межі поділу двох середовищ, що рухається вздовж напрямку поширення хвилі, називається ефектом Допплера, а величина Ω , на яку частота відбитої хвилі відрізняється від частоти падаючої, називається частотою Допплера.

Пласка межа поділу двох середовищ в задачі, яка розглядається, відігравала роль деякого відбивача, від якого відбивалась первинна падаюча хвиля. Таку саму роль може відігравати будь-яке рухоме тіло або поверхня, здатна відбивати електромагнітні хвилі, наприклад літак, автомобіль чи людина. Тому ефект Допплера широко використовується в техніці, зокрема радіолокації, для виявлення та селекції рухомих цілей, а також визначення швидкості їх руху.

Завдання для самостійного розв'язку

1. Пласка ЕМХ падає нормально на межу поділу між вакуумом і металом з питомою електричною провідністю $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ См/м}$. Визначити коефіцієнт відбиття по електричному полю на частоті 10 ГГц , якщо $\mu_a = \mu_0$.

2. Пласка ЕМХ з частотою 10 МГц і середнім значенням густини потоку потужності 1 Вт/м^2 падає нормально з вакууму на поверхню металу з питомою електричною провідністю $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ См/м}$. Визначити напруженість електричного поля у металі безпосередньо біля межі поділу.

3. Пласка ЕМХ падає нормально на межу поділу між вакуумом і діелектриком з параметрами $\epsilon_a = 4\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$. Визначити середнє значення густини потоку потужності в діелектрику, якщо середнє значення густини потоку падаючої хвилі 1 Вт/м^2 .

4. Пласка ЕМХ, вектор напруженості електричного поля якої лежить у площині падіння, падає з діелектрика з параметрами $\epsilon_{a1} = 9\epsilon_0$, $\mu_{a1} = \mu_0$, $\sigma_1 = 0$ на поверхню діелектрика з параметрами $\epsilon_{a2} = \epsilon_0$,

$\mu_{a2} = \mu_0, \sigma_2 = 0$. При яких кутах падіння: а) вся енергія падаючої хвилі переходить у друге середовище; б) вся енергія падаючої хвилі відбивається від межі поділу?

5. Плaska EMX з коловою поляризацією падає з вакууму на поверхню плавленого кварцу ($\epsilon_a = 3,8\epsilon_0, \mu_a = \mu_0, \sigma = 0$). Визначити кут падіння, при якому колова поляризація перетворюється в лінійну.

6. Плaska EMX з коловою поляризацією падає з вакууму під кутом φ на межу поділу із середовищем, показник заломлення якої дорівнює 1,531. Знайти вид поляризації відбитої хвилі для кутів падіння $0^\circ, 45^\circ, 51'$.

7. Паралельно поляризована хвиля, що поширюється у повітрі, падає під кутом ковзання на пласку межу поділу з діелектриком, параметри якого $\epsilon_a = 3\epsilon_0, \mu_a = \mu_0, \sigma = 0$. Визначити амплітуду вектора \mathbf{E} відбитої хвилі, якщо амплітуда падаючої хвилі дорівнює 100 мВ/м.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення поняття площини падіння EMX на межу розподілу двох середовищ.

2. Дайте визначення поняття падаючої EMX з нормальною та паралельною поляризацією.

3. Визначіть граничні умови на межі поділу двох діелектриків (діелектрик-ідеальний провідник).

4. Дайте визначення поняття комплексного коефіцієнта відбиття та проходження.

5. Сформулюйте методику розрахунку коефіцієнтів Френеля.

6. Сформулюйте особливості хвильових явищ на межі поділу двох діелектриків без втрат.

7. Дайте визначення кута Брюстера та критичного кута падіння.

8. Дайте визначення явища повного відбиття EMX на межі розподілу двох немагнітних діелектриків.

9. Сформулюйте властивості спрямованої хвилі у першому середовищі і поверхневої хвилі у другому середовищі при повному відбитті EMX.

10. Дайте визначення поняття глибини проникнення поля EMX у середовище. Як глибина проникнення залежить від частоти?

11. Дайте визначення ефекту Допплера. Від яких факторів залежить частота Допплера?

7. ПОШИРЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ У СПРЯМОВУЮЧИХ СИСТЕМАХ

7.1. Класифікація ліній передачі електромагнітної енергії

Терміни і визначення основних понять в області ліній передачі електромагнітної енергії, які наведені нижче, вперше встановлені ДЕСТ 18238-72.

Лінія передачі – це пристрій, який обмежує область поширення електромагнітних коливань і спрямовує потік електромагнітної енергії в заданому напрямку, в загальному випадку від джерела в навантаження.

В основному властивості хвиль, що вільно поширюються, розглянуті в розд. 4. На відміну від вільних хвиль амплітуда поля спрямованої хвилі при поширенні в середовищі без втрат залишається незмінною, що визначає практичну важливість застосування спрямованих хвиль для передачі електромагнітної енергії. Для передачі енергії **спрямованими хвилями** використовують лінії передачі, які являють собою діелектричні канали, обмежені бічними поверхнями довільної форми. Ці поверхні є поверхнями розділу між двома середовищами, при переході через границі хоча б один з електричних параметрів середовища (а саме, питома провідність σ , абсолютна діелектрична ϵ_a або магнітна μ_a проникності) різко змінюється.

Розрізняють регулярні і нерегулярні лінії передачі (ЛП). **Регулярна лінія передачі** – це прямолінійна лінія, в якій у поздовжньому напрямку незмінні поперечний переріз і електромагнітні властивості середовища, що її заповнюють. А коли хоч одна з цих умов не виконується, така лінія називається **нерегулярною**.

Якщо в поперечному перерізі ЛП властивості середовища, що її заповнює незмінні, то така ЛП зветься **однорідною**, якщо ні – то **неоднорідною**.

Залежно від кількості провідних поверхонь лінії передачі підрозділяються на **однозв'язні, двозв'язні, багатозв'язні і нульової зв'язності** (за відсутності провідних поверхонь).

Порядок зв'язності – це геометрична характеристика поперечного перерізу лінії передачі, яка визначається числом провідних поверхонь.

Основні типи регулярних ліній передачі можна поділити на дві групи – **відкриті лінії** і **закриті** (хвильоводи).

Хвильовід – це лінія передачі, що має одну або декілька провідних поверхонь із поперечним перерізом у вигляді замкненого провідного контура, що охоплює область поширення електромагнітної енергії (рис. 7.1, *а – л*).

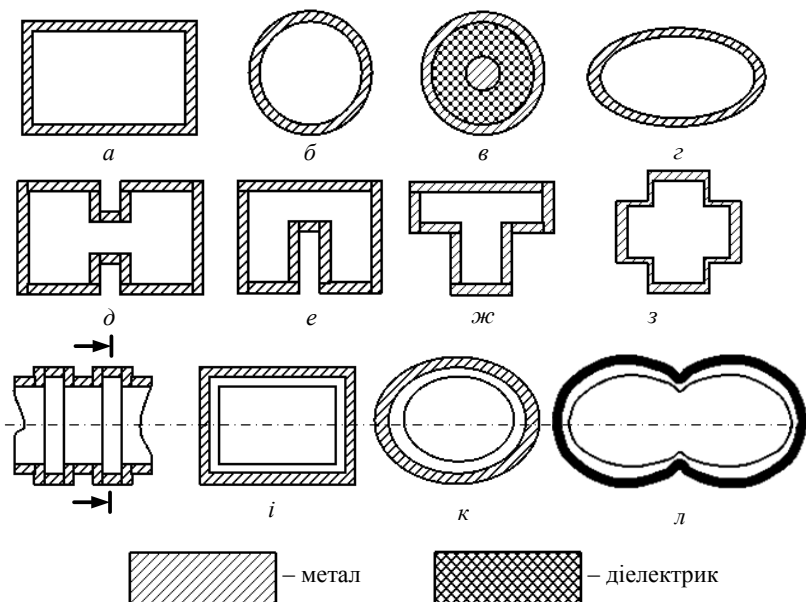


Рис. 7.1

Основні типи хвильоводів зображені на рис. 7.1. До них належать: прямокутний (*а*), круглий (*б*), коаксіальний круглий хвильовід (*в*), який складається з співвісних круглих проводу та екрана, еліптичний (*г*), Н-подібний (*д*), П-подібний (*е*), Т-подібний (*ж*) та хресто-подібний (*з*) хвильоводи, гофровані хвильоводи – прямокутний (*і*), еліптичний (*к*), коконоподібний (*л*). У хвильоводах поле спрямованої хвилі екрановане і не існує у просторі, що оточує лінію передачі.

У відкритій лінії передачі поперечний переріз не має замкненого контура, який охоплює область поширення електромагнітної енергії. Отже, в цих лініях поле спрямованої хвилі не екрановане й існує у просторі, що оточує лінію. До відкритих ЛПП (рис. 7.2) можна віднес-

ти: симетричну двопроводову лінію, виконану з круглих проводів (*a*); **діелектричну лінію**, яка являє собою стрижень із діелектрика тієї чи іншої форми поперечного перерізу (*б, в, з, д*).

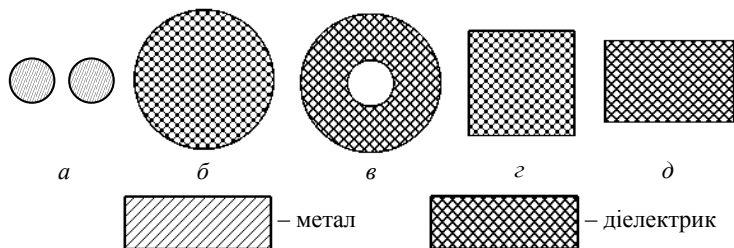


Рис. 7.2

Останнім часом широко використовують **стрічкові ЛП**, які дозволяють зменшити габарити та вагу ЛП. Стрічкові лінії можуть бути також відкриті (рис. 7.3, *a – e*) та екрановані (рис. 7.3, *ж, з*).

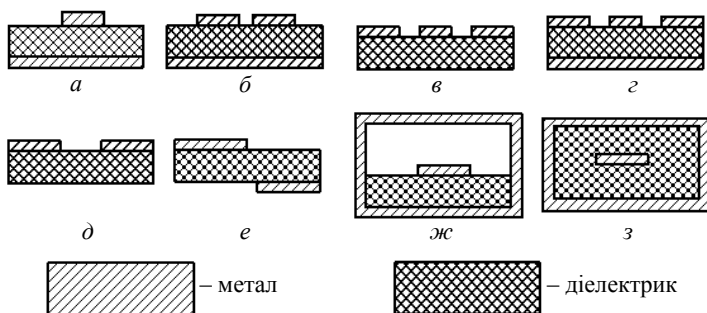


Рис. 7.3

Розрізняють **жорсткі лінії передачі**, конструкції яких не допускають пружного або пластичного згину, і **гнучкі лінії передачі**, що допускають їх (гнучкий коаксіальний кабель (рис. 7.1, *в*), **гофровані лінії передачі**, поперечний переріз яких зображений на рис. 7.1, *і, л*).

Існують також **квaziоптичні ЛП**, які являють собою нерегулярні лінії. Принципи роботи таких ЛП (відкритого та лінзового типу) зрозумілі з рис. 7.4. Квaziоптичні лінії використовують у діапазоні ВВЧ та ГВЧ (міліметрові та дециміліметрові хвилі).

Загальні вимоги, які пред'являються до ліній передачі, такі: ККД лінії має бути високим; лінія передачі повинна передавати зада-

ну потужність без електричного пробоя; електричні характеристики лінії передачі мають забезпечувати передачу сигналів з мінімальними спотвореннями в заданій смузі частот; лінія передачі не повинна випромінювати або приймати ЕМХ; конструкція лінії передачі має забезпечувати механічну міцність при якомога малих габаритних розмірах і масі, а її електричні параметри повинні якомога менше залежати від зміни зовнішніх умов (температури, тиску, вологості т. ін.).

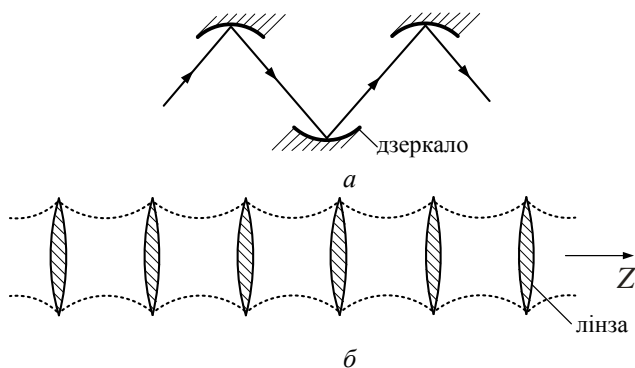


Рис. 7.4

Для багатьох ліній передачі розроблена стандартна номенклатура розмірів. Дані щодо електричних і механічних характеристик стандартних ліній містяться в довідковій літературі.

Велика різноманітність ліній передач зумовлена тим, що діапазон частот, в яких використовують ЛП, дуже великий ($f = 0 \dots 10^{13}$ Гц), і не існує універсальних ЛП, які задовольняють всі поставлені вимоги. Основне протиріччя полягає в тому, що коефіцієнт загасання ЛП здебільшого зростає із частотою. Створення нових типів ЛП дозволяє просунутися за шкалою частот, не підіймаючись надто високо за величиною коефіцієнтів загасання.

Частотні діапазони, в яких використовують найбільш поширені типи ЛП, показані на рис. 7.5.

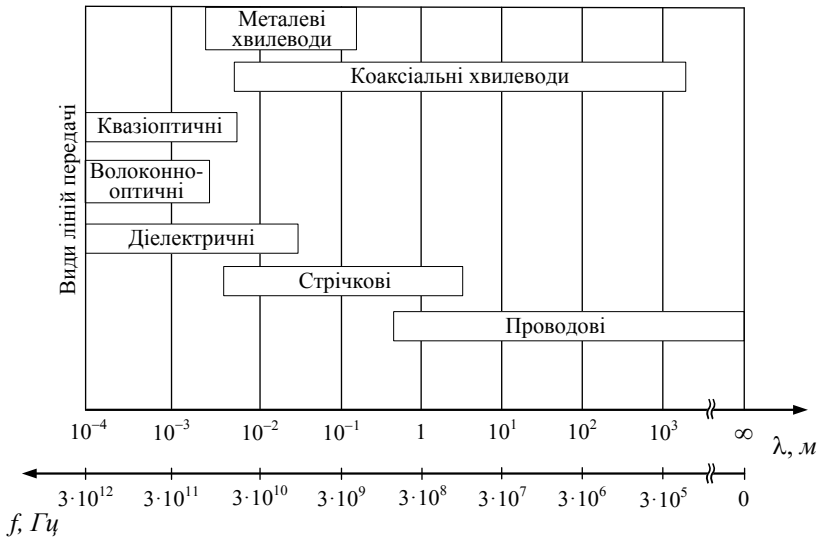


Рис. 7.5

7.2. Методика розв'язання рівнянь електромагнітного поля для регулярних ліній передачі

Розглянемо алгоритм визначення полів в регулярних лініях передачі з довільною формою поперечного перерізу. Для опису полів у таких лініях доцільно використати узагальнену ортогональну циліндричну систему координат (Q_1, Q_2, Z) , де q_1, q_2 – довільні поперечні координати (рис. 7.6).

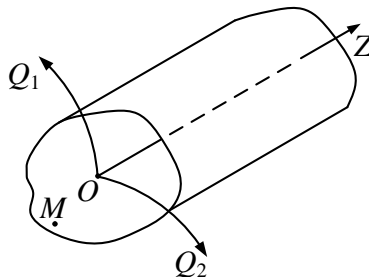


Рис. 7.6

Вважатимемо, що ЛП заповнює ізотропне, однорідне, лінійне, стаціонарне середовище без втрат з параметрами ϵ_a, μ_a , які не зале-

жать від частоти. ЛП, що розглядається, є нескінченною. Сторонні джерела знаходяться поза нею і змінюються за гармонічним законом. Необхідно визначити вектори поля $\mathbf{E}(M, t)$, $\mathbf{H}(M, t)$ у будь-якій точці M ЛП і в будь-який момент часу, які задовольняли б граничним умовам на поверхні ЛП.

Через те що ЛП заповнена ізотропним діелектриком, то відомо (п. 2.7.3), що вектори \mathbf{E} і \mathbf{H} задовольняють однорідним хвильовим рівнянням, які в загальному випадку мають такий вид:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0, \quad \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}.$$

Розв'язками хвильових рівнянь, які нас цікавлять, є біжучі вздовж осі Z хвилі. Вони можуть бути представлені у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \dot{\mathbf{E}}_s \cdot e^{j(\omega t \pm \Gamma z)}, \\ \dot{\mathbf{H}} &= \dot{\mathbf{H}}_s \cdot e^{j(\omega t \pm \Gamma z)}, \end{aligned}$$

де $\dot{\mathbf{E}}_s = \dot{\mathbf{E}}(q_1, q_2, 0)$ і $\dot{\mathbf{H}}_s = \dot{\mathbf{H}}(q_1, q_2, 0)$ – невідомі функції координат площини поперечного перерізу при $z = 0$; Γ – невідома стала поширення, яку називають також **поздовжнім хвильовим числом** і яка визначає характер розподілу поля вздовж осі Z .

У загальному випадку (з урахуванням втрат в ЛП) величина $\dot{\Gamma} = \beta_{\text{л}} - j\alpha_{\text{л}}$, де $\beta_{\text{л}}$ – коефіцієнт фази, а $\alpha_{\text{л}}$ – стала загасання в лінії передачі, яка враховує втрати енергії при поширенні ЕМХ в спрямовуючій системі. В даній задачі, оскільки втрати відсутні, $\alpha_{\text{л}} = 0$.

Множник $e^{j(\omega t \pm \beta_{\text{л}} z)}$ описує біжучу хвилю в тому разі, якщо $\beta_{\text{л}}$ – дійсне число. При цьому знак “–” відповідає хвилі, що поширюється в позитивному напрямку осі Z (**падаюча хвиля**), а знак “+” – хвилі, що поширюється в зворотному напрямку (**відбита хвиля**). Обмежимося поки що розглядом окремого розв'язання хвильового рівняння

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_s \cdot e^{j(\omega t - \beta_{\text{л}} z)}, \quad (7.1)$$

припускаючи, що в кінці ЛП, яка розглядається, відсутні відбиття.

Знайдемо, якому хвильовому рівнянню має задовольняти функція $\dot{\mathbf{E}}_s$. З цією метою розкладемо оператор Лапласа на дві складові

$$\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

де оператор ∇_{\perp}^2 – діє тільки по поперечних координатах q_1, q_2 . У декартовій системі координат оператор ∇_{\perp}^2 дорівнює

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Хвильове рівняння для вектора $\dot{\mathbf{E}}$ має вигляд

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0. \quad (7.2)$$

Підставляючи розв'язок (7.1) в рівняння (7.2), одержимо

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_s e^{-j\beta_n z} e^{j\omega t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dot{\mathbf{E}}_s e^{-j\beta_n z} e^{j\omega t} + k^2 \dot{\mathbf{E}}_s e^{-j\beta_n z} e^{j\omega t} &= 0, \\ \nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_s e^{-j\beta_n z} - \beta_n^2 \dot{\mathbf{E}}_s e^{-j\beta_n z} + k^2 \dot{\mathbf{E}}_s e^{-j\beta_n z} &= 0, \\ \nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_s + (k^2 - \beta_n^2) \dot{\mathbf{E}}_s &= 0. \end{aligned}$$

Позначимо $k_{\perp}^2 = k^2 - \beta_n^2$, де k_{\perp} – **поперечне хвильове число**, яке знаходимо для ЛП заданої конфігурації з розв'язку граничної задачі. Тоді

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_s + k_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_s = 0. \quad (7.3)$$

Певна річ, аналогічному рівнянню задовольняє і вектор $\dot{\mathbf{H}}_s$

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{H}}_s + k_{\perp}^2 \dot{\mathbf{H}}_s = 0. \quad (7.4)$$

Рівняння (7.3), (7.4) являють собою **двовимірні векторні рівняння Гельмгольца** з власним значенням k_{\perp}^2 , які можна спростити, якщо скористатися наступним прийомом. Розкладемо вектор $\dot{\mathbf{E}}_s$ на складові

$$\dot{\mathbf{E}}_s = \dot{\mathbf{E}}_{\perp} + \mathbf{e}_z \dot{E}_z.$$

Тоді рівняння (7.3), (7.4) розбиваються на чотири: векторні

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_{\perp} + k_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_{\perp} = 0, \quad \nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{H}}_{\perp} + k_{\perp}^2 \dot{\mathbf{H}}_{\perp} = 0 \quad (7.5)$$

і скалярні (**мембранні рівняння**):

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{E}_z + k_{\perp}^2 \dot{E}_z = 0, \quad \nabla_{\perp}^2 \dot{H}_z + k_{\perp}^2 \dot{H}_z = 0, \quad (7.6)$$

які розв'язуються якнайпростіше.

Векторні рівняння (7.5) розв'язуються значно складніше, ніж скалярні. Проте їх можна не вирішувати, а за знайденими величинами \dot{E}_z , \dot{H}_z , k_{\perp} визначити поперечні компоненти поля, використовуючи **рівняння зв'язку**. Їх одержують з рівнянь Максвелла з урахуванням знайденої залежності від координати z у вигляді $e^{j(\omega t - \beta_{\perp} z)}$:

$$-k_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_{\perp} = j\beta_{\perp} \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z - j\omega\mu_a \left[\mathbf{e}_z, \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z \right], \quad (7.7)$$

$$-k_{\perp}^2 \dot{\mathbf{H}}_{\perp} = j\beta_{\perp} \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z + j\omega\epsilon_a \left[\mathbf{e}_z, \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z \right]. \quad (7.8)$$

Отже, загальний алгоритм розрахунку полів \mathbf{E} і \mathbf{H} в регулярних однорідних ЛП полягає ось у чому.

Використовуючи граничні умови для конкретного типу ЛП, знаходимо розв'язок скалярних рівнянь для поздовжніх складових полів. При цьому рівнянням (7.6) задовольняє нескінченний набір власних функцій \dot{E}_z , \dot{H}_z і власних значень k_{\perp} , які визначають типи полів у лінії передачі. Звідси виходить можливість існування полів в ЛП з різноманітними структурами.

Далі з рівнянь зв'язку (7.7, 7.8) визначаються поперечні компоненти поля \vec{E}_\perp , \vec{H}_\perp і з дисперсійного рівняння стала поширення

$$\beta_\perp = \sqrt{k^2 - k_\perp^2}. \quad (7.9)$$

7.3. Основні властивості електромагнітних хвиль у лініях передачі

Визначимо, за яких умов вздовж осі регулярних ЛП існують біжучі ЕМХ. Очевидно, що в даному випадку стала поширення β_\perp (**поздовжнє хвильове число**) має бути дійсною величиною. З виразу (7.9) одержимо умову

$$\beta_\perp^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a - k_\perp^2 > 0. \quad (7.10)$$

Частота, при якій стала поширення стає рівною нулю, називається критичною частотою $\omega_{\text{кр}}$. Прирівнявши праву частину (7.10) до нуля, одержимо

$$\beta_\perp^2 = \omega_{\text{кр}}^2 \varepsilon_a \mu_a - k_\perp^2 = 0,$$

тоді

$$f_{\text{кр}} = \frac{k_\perp}{2\pi\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}, \quad (7.11)$$

або **критична довжини хвилі**

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{v}{f_{\text{кр}}} = \frac{2\pi}{k_\perp}. \quad (7.12)$$

Використовуючи (7.11) і (7.12), вираз для β_\perp можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \beta_\perp &= \sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - \omega_{\text{кр}}^2 \varepsilon_a \mu_a} = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{кр}}}{\omega}\right)^2} = \\ &= k \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{кр}}}{\omega}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Отже, величина $\beta_{\text{л}}$ залежить від співвідношення $\omega_{\text{кр}} / \omega$.

1. Розглянемо випадок $\omega > \omega_{\text{кр}}$. При цьому, як виходить з (7.13), стала поширення виявляється дійсною. Хвильовий множник має вигляд $e^{j(\omega t - \beta_{\text{л}} z)}$, тобто вздовж осі Z поширюється **біжуча хвиля** (рис. 7.7).

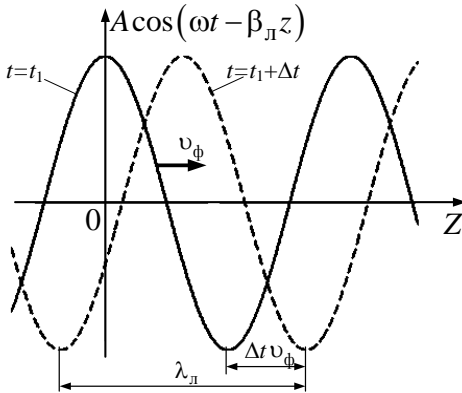


Рис. 7.7

2. Якщо частота дорівнює критичній $\omega = \omega_{\text{кр}}$, то $\beta_{\text{л}} = 0$. При цьому хвильовий множник дорівнює $e^{j\omega t}$. Тобто в кожному перерізі ЛП поле є однаковим і змінюється у часі за гармонічним законом. Отже, процес передачі енергії закінчується, настає режим відсікання (рис. 7.8, а).

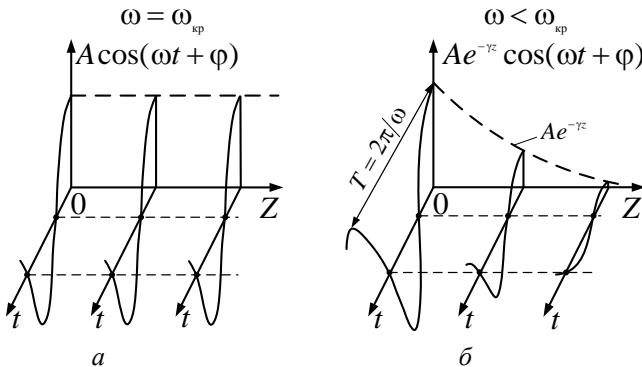


Рис. 7.8

3. Якщо частота менша за критичну $\omega < \omega_{\text{кр}}$, величина $\beta_{\text{л}}$ стає уявною. Виконаємо такі перетворення над (7.13), враховуючи, що $\omega_{\text{кр}} > \omega$:

$$\begin{aligned} \beta_{\text{л}} &= \pm \sqrt{-(\omega_{\text{кр}}^2 \varepsilon_a \mu_a - \omega^2 \varepsilon_a \mu_a)} = \pm j \omega_{\text{кр}} \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{кр}}}\right)^2} = \\ &= \pm j \frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda}\right)^2} = \pm j \alpha. \end{aligned} \quad (7.14)$$

З фізичних міркувань виберемо $\beta_{\text{л}} = -j\alpha$. В даному випадку хвильовий множник має вигляд

$$e^{j(\omega t - \beta_{\text{л}} z)} = e^{j(\omega t + j\alpha z)} = e^{j\omega t} e^{-\alpha z},$$

тобто в ЛП існує реактивне поле з експоненційно спадаючою вздовж осі Z амплітудою (рис. 7.8, б). Зазначимо, що експоненційне згасання амплітуди відбувається не за рахунок втрат (вони відсутні), а тому, що відсутні умови для існування хвильового процесу.

З розглянутого виходить, що хвильовий процес спостерігається тільки при виконанні умови $\omega > \omega_{\text{кр}}$. Таким чином, загалом регулярна ЛП аналогічна фільтрові верхніх частот. Під граничною областю (областю відсікання) розуміємо область частот $\omega < \omega_{\text{кр}}$. Причому, чим менше ω від $\omega_{\text{кр}}$, тим швидше зменшується амплітуда поля вздовж осі Z .

Приклад 7.1. Знайти коефіцієнти загасання ЕМП у лінії передачі на частотах $f_1 = 0,9f_{\text{кр}}$; $f_2 = 0,5f_{\text{кр}}$; $f_3 = 0,3f_{\text{кр}}$; $f_4 = 0,1f_{\text{кр}}$. Частота генератора $f = 5 \text{ ГГц}$, параметри діелектрика у ЛП $\varepsilon = 2,25$; $\mu = 1$.

Розв'язок. Перетворимо вираз (7.14) до вигляду:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2} - 1.$$

Довжина хвилі у діелектрику $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, де λ_0 – довжина хвилі у вільному просторі.

$$\text{Тоді отримаємо } \lambda = \frac{c}{f\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^9 \sqrt{2,25}} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Для умов прикладу маємо:

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{f_{\text{кр}}}{f_1}\right)^2} - 1 = \frac{2 \cdot 3,14}{4 \cdot 10^{-2}} \sqrt{\left(\frac{f_{\text{кр}}}{0,9 \cdot f_{\text{кр}}}\right)^2} - 1 = 76 \frac{1}{\text{м}};$$

$$\alpha_2 = 272 \frac{1}{\text{м}}; \quad \alpha_3 = 499 \frac{1}{\text{м}}; \quad \alpha_4 = 1563 \frac{1}{\text{м}}.$$

Розглянемо тепер класифікацію ЕМХ.

Клас хвилі визначається присутністю або відсутністю поздовжніх складових поля E_z і H_z , паралельних напрямку її поширення.

Клас Т – поперечні ЕМХ. Ці хвилі мають лише поперечні складові поля \dot{E} і \dot{H} , тобто $E_z = 0, H_z = 0$. Через це з рівнянь зв'язку виходить, що для хвиль класу Т виконуються співвідношення

$$-k_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_{\perp} = 0, \quad -k_{\perp}^2 \dot{\mathbf{H}}_{\perp} = 0. \quad (7.15)$$

Через те що E_{\perp} і H_{\perp} відмінні від нуля, то з (7.15) знаходимо, що $k_{\perp} = 0$. Отже стала поширення хвилі типу Т

$$\beta_{\perp} = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a},$$

а її фазова швидкість

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = v.$$

Таким чином, величини β_{\perp} і υ_{ϕ} – такі самі, як у пласкої хвилі, що поширюється в нескінченному середовищі з параметрами ϵ_a, μ_a .

Аналогічно описується і **характеристичний опір цієї хвилі (відношення поперечних компонент поля)**:

$$Z^T = \frac{\dot{E}_{\perp}}{\dot{H}_{\perp}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = Z_c.$$

Визначимо тепер критичну частоту. З (7.11) і (7.12) виходить, що для хвилі класу Т $f_{\text{кр}} = 0, \lambda_{\text{кр}} = \infty$. Одержаний результат свідчить про те, що **хвиля типу Т поширюється тільки в тих ЛП, в яких можлива передача постійного струму**. До них належать, наприклад, двопроводова і коаксіальна ЛП (рис. 7.2, а, рис. 7.1, в). Хвилі типу Т інколи звуть хвилями ТЕМ (аббревіатура від англійського *transverse electromagnetic*).

Хвилі класу Е (інша назва ТМ) мають поперечні і поздовжні компоненти, причому поздовжня компонента $\dot{E}_z \neq 0$, а $\dot{H}_z = 0$. З рівнянь зв'язку одержимо наступні співвідношення:

$$-k_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_{\perp} = j\beta_{\perp} \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z; \quad (7.16)$$

$$-k_{\perp}^2 \dot{\mathbf{H}}_{\perp} = j\omega\epsilon_a [\mathbf{e}_z, \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z]. \quad (7.17)$$

Рівняння (7.17) перетворюємо, враховуючи, що з (7.16)

$$\text{grad}_{\perp} \dot{E}_z = -\frac{k_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_{\perp}}{j\beta_{\perp}}. \quad (7.18)$$

Тоді, підставивши (7.18) у (7.17), одержимо

$$-k_{\perp}^2 \dot{\mathbf{H}}_{\perp} = j\omega\epsilon_a \left[\mathbf{e}_z, -\frac{k_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_{\perp}}{j\beta_{\perp}} \right],$$

або

$$\dot{\mathbf{H}}_{\perp} = \frac{\omega\epsilon_a}{\beta_{\perp}} [\mathbf{e}_z, \dot{\mathbf{E}}_{\perp}]. \quad (7.19)$$

Відношення \dot{E}_\perp до \dot{H}_\perp визначає **характеристичний опір ЛП** Z^E , при поширенні в ній хвилі типу Е. З (7.19) одержимо

$$\begin{aligned}
 Z^E &= \frac{\dot{E}_\perp}{\dot{H}_\perp} = \frac{\beta_\perp}{\omega \varepsilon_a} = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_a} \mu_a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}{\omega \varepsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = \\
 &= Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}.
 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Графіки залежностей Z^E від частоти та довжини хвилі зображені на рис. 7.9, а, б. Величина $\text{Re}(Z^E)$ завжди менша, ніж характеристичний опір Z_c нескінченного середовища.

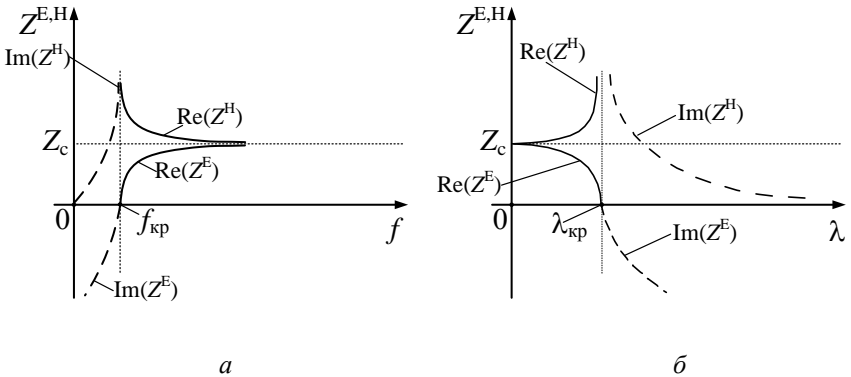


Рис. 7.9

Фазова швидкість хвилі типу Е обчислюється із співвідношення

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta_{\perp}} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}. \quad (7.21)$$

Графіки залежностей $v_{\phi} = F(f, \lambda)$ наведені на рис. 7.10, а, б.

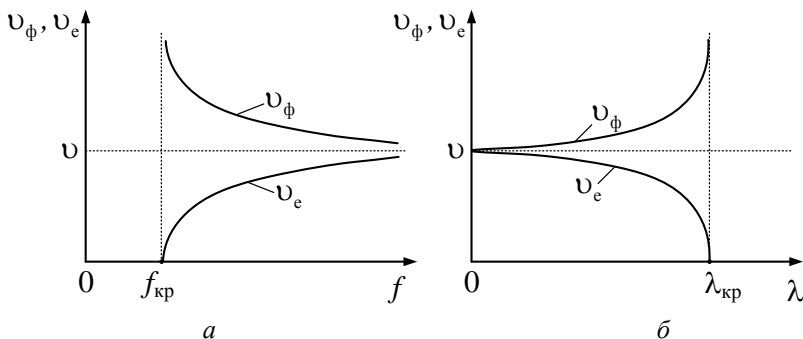


Рис. 7.10

Фазова швидкість хвилі типу Е завжди більша від швидкості поширення хвилі типу Т у середовищі з параметрами ϵ_a, μ_a :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \text{ Важливо підкреслити, що фазова швидкість хвилі ти-}$$

пу Е в ЛПП більша за швидкість світла в середовищі.

Розглянемо тепер **швидкість переносу енергії** вздовж лінії передачі. В кожній точці ЛПП швидкість поширення енергії однакова і визначається за відомою тотожністю

$$\mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{\Pi}}{w},$$

інтегруючи яку на поверхні поперечного перерізу ЛПП, одержуємо

$$\mathbf{v}_e = \frac{P}{w} \mathbf{e}_z, \quad (7.22)$$

де w – середнє значення енергії ЛПП, запасеної на одиницю довжини; P – потужність, що проходить по поперечному перерізу лінії передачі.

В теорії поля доводиться, що для ЛП вираз (7.22) перетворюється до вигляду

$$v_e = v \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{\text{кр}})^2}. \quad (7.23)$$

Графік цієї залежності також показаний на рис. 7.10. Швидкість поширення енергії менша швидкості світла і прямує до неї при $f \rightarrow \infty$.

Розглядаючи криві $v_\phi = F(f, \lambda)$ і $v_e = F(f, \lambda)$, необхідно вказати на сильну залежність v_ϕ , v_e від частоти. **Це явище називається дисперсією.**

Хвилі класу Н (хвилі ТЕ) мають місце при виконанні умови $H_z \neq 0$, $E_z = 0$. Використовуючи її, з рівнянь зв'язку одержимо наступні співвідношення:

$$k_\perp^2 \dot{\mathbf{E}}_\perp = j\omega\mu_a [\mathbf{e}_z, \text{grad}_\perp \dot{H}_z], \quad (7.24)$$

$$-k_\perp^2 \dot{\mathbf{H}}_\perp = j\beta_\perp \text{grad}_\perp \dot{H}_z. \quad (7.25)$$

З (7.25) виходить, що

$$\text{grad}_\perp \dot{H}_z = \frac{-k_\perp^2 \dot{\mathbf{H}}_\perp}{j\beta_\perp}. \quad (7.26)$$

Підставивши (7.26) у (7.24), одержимо

$$\dot{\mathbf{E}}_\perp = -\frac{\omega\mu_a}{\beta_\perp} [\mathbf{e}_z, \dot{\mathbf{H}}_\perp],$$

звідки характеристичний опір хвилі типу Н

$$Z^H = \frac{\omega\mu_a}{\beta_\perp} = Z_c / \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}. \quad (7.27)$$

Таким чином, $Z^H > Z^E$ і прямує до значення Z_c при $f_{\text{кр}} / f \rightarrow 0$.

Фазова швидкість і швидкість переносу енергії хвилею типу Н, як це легко перевірити, описуються (7.21) і (7.23). Отже, хвилі Н, як і Е, – диспергуючі.

Хвилі Е та Н у лініях передачі звать „швидкими”, оскільки для них виконується умова $v_\phi > v$.

Із співвідношень (7.21), (7.23) легко отримати, що

$$v_\phi \cdot v_e = v^2. \quad (7.28)$$

Такий зв'язок між v_ϕ та v_e характерний для дисперсних спрямовуючих систем.

Довжина хвилі в лініях передачі з хвилями Е або Н

$$\lambda_{\text{л}} = \frac{2\pi}{\beta_{\text{л}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2}}. \quad (7.29)$$

Основні формули для розрахунку характеристик Т-, Е- та Н-хвиль у лініях передачі наведені у табл. 7.1. У цій таблиці позначено: $\beta_0 = 2\pi/\lambda_0$ – коефіцієнт фази у вакуумі; $\lambda'_{\text{кр}} = \lambda_{\text{кр}}/\sqrt{\epsilon\mu}$.

Хвилі класів HE, EH, які мають обидві поздовжні складові $E_z \neq 0$ і $H_z \neq 0$, називаються гібридними і позначаються EH або HE; хвилі виникають, наприклад, у діелектричній ЛП (рис. 7.2, б – д).

Слід вказати на одну універсальну властивість усіх спрямованих хвиль – наявність поперечних складових \mathbf{E}_\perp і \mathbf{H}_\perp . Це необхідна умова для існування поздовжньої компоненти вектора Пойнтінга \mathbf{P}_z , що зумовлює передачу енергії вздовж лінії передачі.

Зазначимо також, що з (7.26) впливає гранична умова для складової \dot{H}_z на добре провідних металевих поверхнях. Перепишемо (7.26) у вигляді

$$k_\perp^2 \dot{H} = -j\beta_{\text{л}} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial n}.$$

Таблиця 7.1

Характеристика	T-хвилі	E-і H-хвилі
Довжина хвилі $\lambda_{\text{л}}, [м]$	$2\pi/\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon\mu}$	$\lambda_0/\sqrt{\varepsilon\mu - (\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2}$
Фазова швидкість $v_{\text{ф}}, [м/с]$	$1/\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} = 3 \cdot 10^8/\sqrt{\varepsilon\mu}$	$3 \cdot 10^8/\sqrt{\varepsilon\mu - (\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2}$
Характеристичний опір $Z_{\text{T,E,H}}, [Ом]$	$Z_c = Z_T = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a} =$ $= 120\pi\sqrt{\mu/\varepsilon} \approx 377\sqrt{\mu/\varepsilon}$	$Z_E = Z_c\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda'_{\text{кр}})^2}$ $Z_H = Z_c\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda'_{\text{кр}})^2}$
Групова швидкість $v_{\text{гр}}, [м/с]$	$1/\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} = 3 \cdot 10^8/\sqrt{\varepsilon\mu}$	$3 \cdot 10^8\sqrt{\varepsilon\mu - (\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2}/\varepsilon\mu$
Коефіцієнт фази $\beta_{\text{л}}, [1/м]$	$\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} = \beta_0\sqrt{\varepsilon\mu}$	$\beta_0\sqrt{\varepsilon\mu - (\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2}$
Коефіцієнт загасання за рахунок діелектричних втраг $\alpha, [дБ/м]$	$27,3\sqrt{\varepsilon} \text{tg} \delta / \lambda_0$	$\frac{27,3\varepsilon\sqrt{\mu} \text{tg} \delta}{\lambda_0\sqrt{\varepsilon\mu - (\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2}}$

Оскільки з граничної умови $\dot{B}_{1n} = \dot{B}_{2n}$ при $\sigma_2 = \infty$ виходить, що $\dot{H}_n = 0$ (див. розд. 1), остаточно одержимо

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial n} = 0, \quad (7.30)$$

що збігається з виразом (1.94), отриманим у п. 1.4.3.

Характер частотних залежностей v_ϕ , v_e у хвилеводі можна пояснити за допомогою **концепції парціальних хвиль Бриллюена**.

Відповідно до неї поширення хвиль по хвилеводу відбувається шляхом послідовних відбиттів плоских (тих же, що у вільному просторі) хвиль від стінок хвилеводу (рис.7.11).

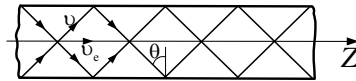


Рис.7.11

Плоскі хвилі відбиваються від стінок під кутом θ , що визначається взаємним узгодженням відбиттів від протилежних стінок, при якому можлива стаціонарна картина інтерференції в поперечному перерізі хвилеводу (при відповідному виконанні граничних умов на стінках хвилеводу). З рис.7.11, виходить, що групова швидкість $v_e = v \sin \theta$, де v – швидкість поширення хвиль у вільному просторі з характеристиками ϵ_a , μ_a . Порівнюючи цей результат з формулою (7.23), доходимо висновку, що $\sin \theta = \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}$.

Фазова швидкість у ЛП відповідно до формули (7.21), визначається як $v_\phi = v / \sin \theta$. Цю обставину пояснює рис.7.12, на якому пунктиром зображені положення рівних фаз плоскої хвилі, відстань між ними дорівнює λ – довжині хвилі у вільному просторі.

Відстань між тими ж положеннями рівних фаз λ_{\parallel} уздовж осі хвилеводу обчислюється як $\lambda_{\parallel} = \lambda / \sin \theta$, що відповідає отриманим раніше результатам (див. співвідношення (7.29)). Як і в загальному аналізі, з концепції Бриллюена виходить $v_\phi \cdot v_e = v^2$.

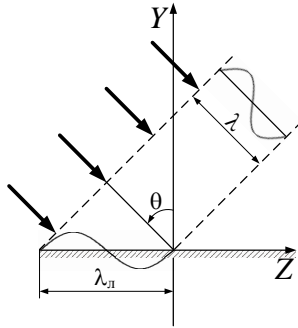


Рис. 7.12

Розглядаючи поширення ЕМХ у хвилеводі як відбиття плоских хвиль від ідеально провідної поверхні (див. п. 4.4), можна пояснити вирази (7.20), (7.27) для характеристичних опорів Z^E, Z^H для Е- та Н-хвиль. Так, при поширенні Е-хвиль (рис. 7.13, а) при відбитті значення амплітуди H у поперечній площині не змінюється $H_{\perp} = H$, а складова амплітуди електричного поля $E_{\perp} = E \sin \theta$. Відношення

$$\frac{E_{\perp}}{H_{\perp}} = \frac{E \sin \theta}{H} = Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = Z^E, \text{ що збігається з (7.20).}$$

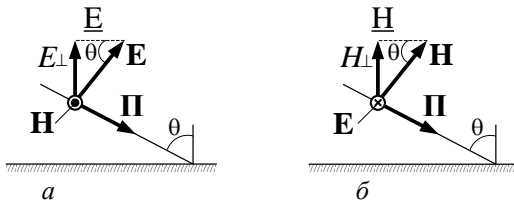


Рис. 7.13

При поширенні Н-хвиль (рис. 7.13, б) $H_{\perp} = H \sin \theta$:

$$Z^H = \frac{E_{\perp}}{H_{\perp}} = \frac{E}{H \sin \theta} = Z_c / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}.$$

Розглянемо енергетичні співвідношення у ЛП. Поздовжня складова вектора Пойнтінга в ЛП

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}_{\perp}, \dot{\mathbf{H}}_{\perp}^*].$$

1. Розглянемо випадок, коли частота більше, ніж критична ($f > f_{\text{кр}}, \lambda < \lambda_{\text{кр}}$).

Для хвиль типу E: $\dot{H}_z = 0$, а $\dot{E}_{\perp} = Z^E \dot{H}_{\perp}$. Отже, маємо

$$\dot{\Pi}_z = \frac{1}{2} Z^E H_{\perp}^2 = \frac{1}{2} Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} \cdot H_{\perp}^2. \quad (7.31)$$

Таким чином, **за відсутності втрат**, як виходить з (7.31) (за умови $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$), **потік енергії уздовж осі хвилеводу має дійсне значення, тобто носить чисто активний характер.**

Для H-хвиль аналогічно маємо

$$\dot{\Pi}_z = \frac{1}{2} \frac{E_{\perp}^2}{Z^H} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}{Z_c} \cdot E_{\perp}^2.$$

Для обох класів хвиль при $\lambda \rightarrow \lambda_{\text{кр}}$ $\dot{\Pi}_z \rightarrow 0$ перенесення енергії уздовж хвилеводу припиняється. **Критичну частоту $f_{\text{кр}} = \frac{1}{\lambda_{\text{кр}} \sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$**

часто називають частотою відсікання хвильових процесів.

2. Нехай частота менша за критичну ($f < f_{\text{кр}}$).

У цьому випадку відповідно до (7.14) $\dot{\Gamma} = \beta_{\text{л}} = -j\alpha_{\text{л}}$. Оскільки дійсна частина $\text{Re}\{\dot{\Gamma}\} = 0$, то $\nu_{\text{ф}} \rightarrow \infty$ і ЕМП в ЛП має квазістатичний, а не хвильовий характер. Характеристичний опір для E- та H-хвиль у цьому разі

$$Z^E = -jZ_c \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2 - 1}, \quad Z^H = \frac{jZ_c}{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2 - 1}}. \quad (7.32)$$

З (7.32) виходить, що при $f < f_{кр}$ ($\lambda > \lambda_{кр}$) Е-хвилі мають ємнісний тип характеристичного опору, Н-хвилі – індуктивний, що варто враховувати при узгодженні елементів збудження з хвилеводним трактом.

Графіки залежностей $\text{Im}(Z^{E,H})$ від λ при $f < f_{кр}$ ($\lambda > \lambda_{кр}$) наведені на рис. 7.9 пунктиром.

Потік вектора Пойнтінга у напрямку Z для Е- та Н-хвиль:

$$\dot{\Pi}^E = \frac{1}{2} Z^E H_{\perp}^2 = \frac{-jZ_c \cdot H_{\perp}^2}{2} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2 - 1},$$

$$\dot{\Pi}^H = \frac{1}{2} \frac{E_{\perp}^2}{Z^H} = \frac{j}{2Z_c} E_{\perp}^2 = \frac{j \cdot H_{\perp}^2}{2Z_c} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2 - 1},$$

і при $f < f_{кр}$ ($\lambda > \lambda_{кр}$) має чисто реактивний характер.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення однорідної регулярної лінії передачі.
2. Визначіть поняття зв'язності ЛП.
3. Наведіть приклади квазіоптичних ЛП.
4. Сформулюйте основні вимоги, яким повинні задовольняти ЛП.
5. Сформулюйте алгоритм розрахунку полів у регулярних однорідних ЛП.
6. Дайте визначення хвиль класів Т, Е, Н, ЕН, НЕ.
7. Що таке критична довжина хвилі в ЛП?
8. Поясніть, що таке режим відсікання хвильового процесу?

9. Що таке фазова та групова швидкість ЕМХ у ЛП?
10. Поясніть явище дисперсії у ЛП.
11. Сформулюйте концепцію парціальних хвиль Бриллюена.
12. Дайте визначення характеристичного опору хвилі у ЛП.
13. Як залежить характеристичний опір хвиль E та H у однозв'язних хвилеводах від частоти (довжини) хвилі?

7.4. Е- і Н-хвилі у прямокутному хвилеводі

7.4.1. Розрахунок полів у прямокутному хвилеводі

Розглянемо регулярний прямокутний хвилевід без втрат (рис. 7.14). Визначимо структуру поля Е-хвиль. Розв'язання цієї задачі повинне задовольняти хвильовому рівнянню для складової E_z і граничним умовам на стінках хвилеводу (вважаємо їх ідеально провідними).

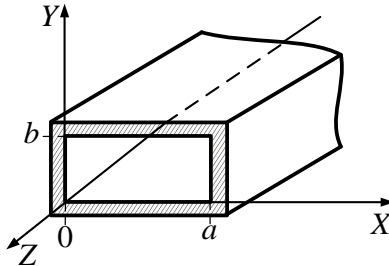


Рис. 7.14

Рівняння для поздовжньої складової в декартовій системі координат для прямокутного хвилеводу (**мембранне рівняння**) має вигляд

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + k_{\perp}^2 \dot{E}_z = 0. \quad (7.33)$$

Складова E_z – дотична до поверхні стінок хвилеводу S і для неї, як відомо, повинна виконуватися умова

$$E_z|_S = 0 \{x \in [0, a], y \in [0, b]\}.$$

Шукана функція в (7.33) залежить від двох аргументів – x і y . Рівняння цього типу розв'язується **методом розділення змінних**:

шукана функція уявляється у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить від одного аргументу. Запишемо

$$E_z(x, y) = X(x)Y(y). \quad (7.34)$$

Підставимо (7.34) в (7.33), позначивши похідні однієї змінної штрихами:

$$X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) + k_{\perp}^2 X(x)Y(y) = 0. \quad (7.35)$$

Поділимо (7.35) на добуток $X(x)Y(y)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k_{\perp}^2 = 0. \quad (7.36)$$

Рівняння (7.36) складається з трьох складових, перша з яких залежить лише від змінної x , друга – лише від змінної y , а третя від цих змінних не залежить. Отже, дане рівняння задовольняється тільки в тому разі, коли всі його складові стали (як функції координат x та y). Тоді можна записати

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -p^2 = \text{const}; \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -q^2 = \text{const} \quad (7.37)$$

і (7.36) перетворюється в рівняння для поперечних коефіцієнтів:

$$p^2 + q^2 = k_{\perp}^2,$$

де p, q – поперечний коефіцієнт відповідно по осі X і по осі Y .

Диференціальні рівняння (7.37) – лінійні рівняння другого порядку, розв'язання яких добре відоме:

$$\left. \begin{aligned} X(x) &= A \sin px + B \cos px, \\ Y(y) &= C \sin qy + D \cos qy. \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

Визначимо константи A, B, C, D , виходячи з граничних умов. Оскільки $E_z = 0$ при $x = 0$ і $y = 0$, то $B = D = 0$. Отже,

$$\dot{E}_z = X(x)Y(y) = AC \sin px \sin qy = \dot{E}_0 \sin px \sin qy. \quad (7.39)$$

Аналогічно з умови $E_z = 0$ при $x = a$ і $y = b$ знайдемо з (7.39)

$$\begin{aligned} \sin pa = 0, \quad p &= \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \\ \sin qb = 0, \quad q &= \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7.40)$$

Умови (7.40) означають, що **вздовж осей X і Y повинне вкладатися ціле число півхвиль синусоїд відповідних аргументів, а m і n – цілі числа, що не дорівнюють нулю**, бо в протилежному разі $E_z = 0$.

Увівши залежність поля від координати z , остаточно одержимо вираз для поздовжньої складової:

$$\dot{E}_z = E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-j\beta_n z}. \quad (7.41)$$

Підставляючи (7.41) в рівняння зв'язку і використовуючи умову $H_z = 0$, знаходимо поперечні складові поля:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{\perp} &= -\frac{j\beta_n}{k_{\perp}^2} \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z = -\frac{j\beta_n}{k_{\perp}^2} \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} \right) = -\frac{j\beta_n}{k_{\perp}^2} E_0 \times \\ &\times \left(\mathbf{e}_x \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y + \mathbf{e}_y \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta_n z}; \end{aligned} \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{\perp} &= -\frac{j\omega\varepsilon_a}{k_{\perp}^2} [\mathbf{e}_z, \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z] = -\frac{j\omega\varepsilon_a}{k_{\perp}^2} \left[\left(-\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \mathbf{e}_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{e}_y \right] = \\ &= \frac{j\omega\varepsilon_a}{k_{\perp}^2} E_0 \times \end{aligned} \quad (7.43)$$

$$\times \left[\mathbf{e}_x \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y - \mathbf{e}_y \frac{m\pi}{a} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \right] e^{-j\beta_n z}.$$

У виразах (7.42) і (7.43)

$$k_{\perp} = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}. \quad (7.44)$$

З одержаного розв'язку задачі можна зробити такі висновки.

1. Структура поля в поздовжньому перерізі відповідає структурі біжучих хвиль, а в площині поперечного перерізу – стоячих хвиль.

2. Індеси m і n за змістом визначають число стоячих півхвиль, що вкладаються відповідно вздовж осей X і Y . Графіки розподілу складової поля $E_z(x, y)$ для деяких типів хвиль E_{mn} наведені на рис. 7.15, а.

3. Кожній парі чисел m і n відповідає певна структура поля, що позначається як E_{mn} . Наприклад, E_{11} – це хвиля E , в якій $m=1$ і $n=1$.

4. Нульові значення чисел m і n неможливі, тому що при цьому $E_z = 0$.

Розглянемо тепер Н-хвилі у прямокутному хвилеводі.

Рівняння для H_z має вигляд

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + k_{\perp}^2 \dot{H}_z = 0. \quad (7.45)$$

Воно розв'язується методом розділення змінних. Загальний розв'язок відповідає (7.38):

$$\dot{H}_z = X(x)Y(y) = (A \sin px + B \cos px)(C \sin qy + D \cos qy).$$

Оскільки на стінках хвильоводу виконується умова (7.30), то

$$X'(x) = Ap \cos px - Bp \sin px = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ і } a;$$

$$Y'(y) = Cq \cos qy - Dq \sin qy = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ і } b;$$

при цьому $A = 0, C = 0$ і $p = \frac{m\pi}{a}; q = \frac{n\pi}{b}$.

Тоді

$$\dot{H}_z = \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-j\beta_n z}. \quad (7.46)$$

Поперечні складові визначаються з рівнянь зв'язку:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -\frac{j\omega\mu_a \frac{n\pi}{b}}{k_{\perp}^2} H_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-j\beta_n z}; \\ \dot{E}_y &= -\frac{j\omega\mu_a \frac{m\pi}{a}}{k_{\perp}^2} H_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-j\beta_n z}; \\ \dot{H}_x &= \frac{j\beta_n \frac{m\pi}{a}}{k_{\perp}^2} H_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-j\beta_n z}; \\ \dot{H}_y &= \frac{j\beta_n \frac{n\pi}{b}}{k_{\perp}^2} H_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-j\beta_n z}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Проаналізуємо одержані вирази. Спочатку припустимо, що m або n дорівнює нулю. Тоді поле не змінюється всього по одній з координат і хвильовий процес існує. Однак, якщо покласти одночасно $m = 0$ і $n = 0$, то це, згідно з (7.46) і (7.47), приводить до $H_z = H_0 = \text{const}$ і відсутності поперечних складових, тобто й до відсутності ЕМХ. Отже, найпростіші хвилі цього класу – це H_{10} і H_{01} .

Графіки розподілу складової поля $H_z(x, y)$ для деяких полів типу H_{mn} наведені на рис. 7.15, б.

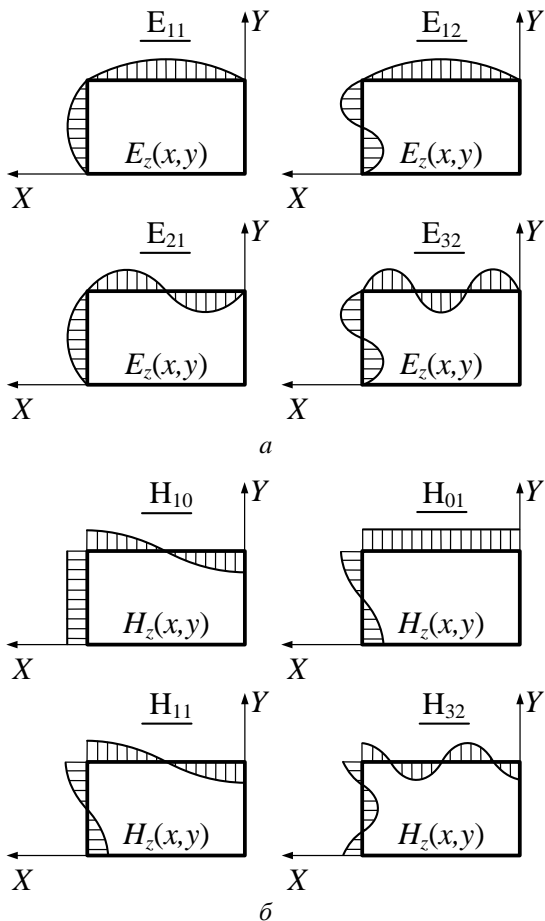


Рис. 7.15

7.4.2. Хвилі основного і вищих типів у прямокутному хвилеводі та методика графічної побудови структури полів

У прямокутному хвилеводі можуть існувати електричні E_{mn} і магнітні H_{mn} хвилі, які визначаються припустимою парою індексів m і n . Кожен тип коливань поширюється тільки при довжині хвилі $\lambda < \lambda_{\text{кр}}^{mn}$, де

$$\lambda_{\text{кр}}^{mn} = \frac{2\pi}{k_{\perp}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \quad (7.48)$$

Ця формула при заданих розмірах прямокутного хвилеводу a і b визначає послідовність критичних довжин хвиль коливань різних типів. При більших числах m і n значення $\lambda_{\text{кр}}$ зменшуються. **Хвилею основного типу називається ЕМХ, яка має найбільшу величину $\lambda_{\text{кр}}$.** Хвилі інших типів називають **вищими**.

Для існування при заданих значеннях λ тільки хвилі основного типу, необхідно вибрати розміри прямокутного хвилеводу так, щоб виконувалась умова

$$\lambda_{\text{кр1}} > \lambda < \lambda_{\text{кр2}}, \quad (7.49)$$

де $\lambda_{\text{кр1}}, \lambda_{\text{кр2}}$ – критична довжина хвилі відповідно основного і першого вищого типу.

Якщо умова (7.49) виконується, то спостерігається **однохвильовий (одномодовий) режим**. Коефіцієнт перекриття по частоті k_f , при якому зберігається однохвильовий режим,

$$k_f = \frac{f_{\text{кр2}}}{f_{\text{кр1}}} = \frac{\lambda_{\text{кр1}}}{\lambda_{\text{кр2}}}.$$

Якщо в ЛП передається декілька типів хвиль, то такий режим роботи називається багатохвильовим (багатомодовим).

Для визначення режимів хвилеводів зручно розмістити на числові осі λ значення $\lambda_{\text{кр}}^{mn}$ в порядку їх зменшення. Хвилі, які мають однакові $\lambda_{\text{кр}}$, називаються **виродженими**, тобто хвилі E_{mn} і H_{mn} з однаковими індексами вироджені. У табл. 7.2 наведені значення критичних довжин деяких типів хвиль у прямокутному хвилеводі

Таблиця 7.2

Тип хвилі	H_{10}	H_{20}	H_{01}	H_{11}, E_{11}	H_{30}	H_{21}, E_{21}
$\lambda_{кр}$	$2a$	a	$2b$	$\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	$\frac{2a}{3}$	$\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + 4b^2}}$

На рис. 7.16, який називається **діаграмою типів коливань (хвиль)**, відмічена послідовність $\lambda_{кр}$ (при $a > 2b$) на числовій осі λ .

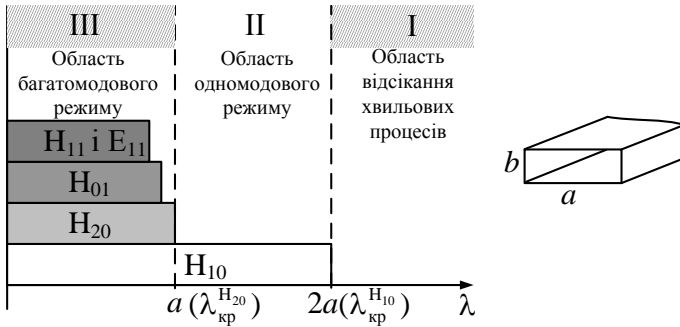


Рис. 7.16

Кожен тип коливань виділяється смугою $0 < \lambda < \lambda_{кр}$, в межах якої він є хвильовим. Крім того, показано три області: I – неробоча (область відсікання хвильових процесів), $\lambda > \lambda_{кр}^{H_{10}}$; II – робоча (область одномодового режиму) $a < \lambda < 2a$; III – область вищих типів коливань $\lambda < a$. **Основний тип хвилі у прямокутному хвилеводі – хвиля H_{10} .**

Приклад 7.2. Знайти частотні межі одномодового (однохвильового) режиму роботи металевого хвилеводу розмірами $a \times b = 23 \times 10 \text{ мм}^2$. Хвилевід заповнений повітрям.

Розв'язок. Одномодовий режим роботи забезпечується при роботі на основній хвилі H_{10} , при цьому необхідно, щоб виконувалась умова $\lambda_{кр}^{bl} < \lambda < \lambda_{кр}^{H_{10}}$, де $\lambda_{кр}^{bl}$ – критична довжина хвилі, найближчої до критичної хвилі $\lambda_{кр}^{H_{10}}$. Діаграма типів коливань за умови $b < a/2$ зображена на рис. 7.16.

З неї видно, що одномодовий режим роботи забезпечується, коли $\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{20}} < \lambda < \lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}}$, або $a < \lambda < 2a$.

З останньої нерівності виходить

$$f_{\text{кр}}^{\text{H}_{20}} = c/\lambda = 3 \cdot 10^8 / 2,3 \cdot 10^{-2} = 1,3 \cdot 10^{10}, \text{ Гц};$$

$$f_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}} = 3 \cdot 10^8 / 2 \cdot 2,3 \cdot 10^{-2} = 6,5 \cdot 10^9, \text{ Гц}.$$

Таким чином, одномодовий режим роботи забезпечується для частот $6,5 \text{ ГГц} < f < 13 \text{ ГГц}$.

Приклад 7.3. Хвилевід 3-см діапазону ($a \times b = 23 \times 10 \text{ мм}^2$), заповнений повітрям, передає потужність на частоті $f = 10 \text{ ГГц}$. Знайти координати точок на широкій стінці хвилеводу, де магнітне поле має колову поляризацію.

Розв'язок. На частоті $f = 10 \text{ ГГц}$ ($\lambda = 3 \text{ см}$) по хвилеводу поширюється тільки хвиля основного типу H_{10} (див. приклад 7.2). Координати точок x_1 , x_2 , де вектор $\dot{\mathbf{H}}$ має колову поляризацію, задовольняють рівнянню $|\dot{H}_x(x_1, x_2)| = |\dot{H}_z(x_1, x_2)|$ (рис. 7.17).

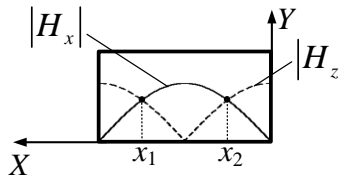


Рис. 7.17

З рівнянь (7.46), (7.47) отримаємо

$$\frac{\beta^{\text{H}_{10}} a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x_{1,2}}{a}\right) = \pm \cos\left(\frac{\pi x_{1,2}}{a}\right);$$

$$\beta^{\text{H}_{10}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{л}}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}, \quad \lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}} = 2a;$$

$$\beta = \frac{2 \cdot 3,14}{0,03} \sqrt{1 - \left(\frac{0,03}{0,046}\right)^2} = 136,5 \text{ 1/м}.$$

З наведених рівнянь отримаємо

$$x_1 = \frac{a}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\beta a} = \frac{0,023}{3,14} \operatorname{arctg} \frac{3,14}{0,023 \cdot 136,5} = 5,75 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$x_2 = a - x_1 = 17,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Точки x_1 та x_2 розташовані симетрично відносно центра широкої стінки хвилеводу приблизно на відстані $a/4$ від вузьких стінок, а напрямки обертання вектора $\dot{\mathbf{H}}$ в точках x_1, x_2 протилежні. Ці властивості поведінки вектора $\dot{\mathbf{H}}$ використовують у НВЧ-техніці.

Якщо довжина хвилі λ знаходиться в третій області, то з'являються втрати потужності за рахунок перерозподілу енергії між основним і вищими типами коливань, що в решті-решт призводить до спотворення спектра сигналу внаслідок його поширення за рахунок кількох типів хвиль із різними фазовими швидкостями.

Тепер викладемо міркування щодо методики графічного зображення полів у прямокутному хвилеводі. На практиці часто цікавляться структурою поля і струмів у хвилеводі, які зображуються за допомогою силових ліній. Для побудови картини поля у хвилеводі можна скористатися рівняннями, наведеними в підрозд. 7.4.1. Проте це складна процедура. Якісно структуру поля можна зобразити, скориставшись такими правилами:

1. Індеси m і n вказують на число стоячих півхвиль полів вздовж осей X і Y .

2. У хвиль E_{mn} поздовжня складова $\dot{H}_z = 0$, а у хвиль типу H_{mn} складова $\dot{E}_z = 0$.

3. Поперечні складові \dot{E}_\perp і \dot{H}_\perp завжди перпендикулярні і синфазні.

4. Силові лінії вектора $\dot{\mathbf{H}}$ завжди замкнені і замикаються навколо ліній струму зміщення.

5. Силові лінії струму зміщення повторюють картину поля вектора електричного поля $\dot{\mathbf{E}}$ і зсунуті відносно неї на $\lambda_\perp/4$ в бік напрямку руху енергії (λ_\perp – довжина хвилі у лінії передачі – хвилеводі).

6. Силові лінії вектора $\dot{\mathbf{E}}$ перпендикулярні до металевих стінок хвилеводу.

7. Силві лінії поверхневих струмів провідності будуються за допомогою граничної умови $\dot{\mathbf{J}}_s = [\mathbf{e}_n, \dot{\mathbf{H}}_\tau]$.

Так, на рис. 7.18 зображені етапи побудови структури хвилі основного типу H_{10} у трьох проекціях.

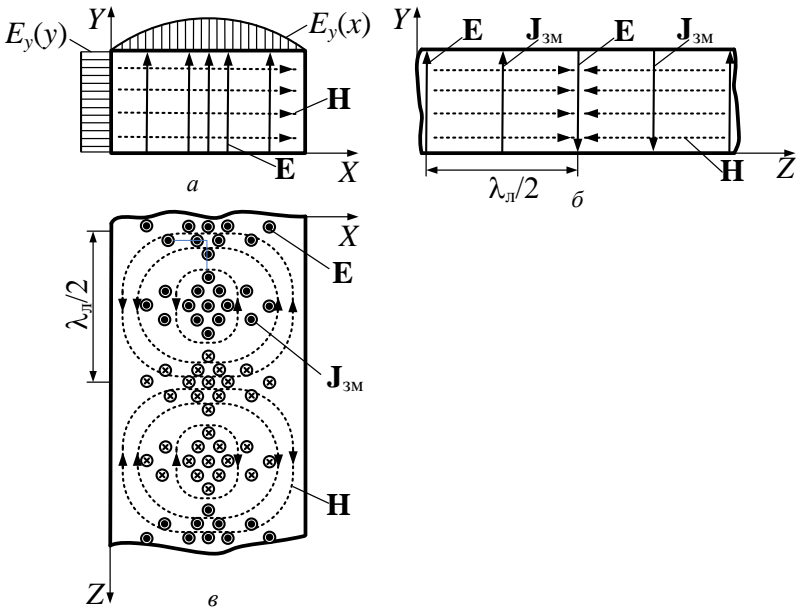


Рис. 7.18

На рис. 7.18, *a* зображені сліди ліній \mathbf{E} та \mathbf{H} у поперечному перерізі хвилеводу; на рис. 7.18, *б, в* – структури ліній \mathbf{H} у хвилеводі та сліди струмів зміщення, навколо яких замкнені лінії \mathbf{H} . Зазначимо, що лінії струмів зміщення $\mathbf{J}_{3M} = j\omega\epsilon_a \mathbf{E}$ повторюють структуру ліній \mathbf{E} і випереджають їх у хвилеводі на $\lambda_d/4$ (рис. 7.18, *б, в*).

На рис. 7.19 зображені лінії поверхневих струмів $\dot{\mathbf{J}}_s = [\mathbf{e}_n, \dot{\mathbf{H}}_\tau]$ (рис. 7.19, *a, б*), які замкнені струмами зміщення (рис. 7.19, *в*).

Структуру поля вищих типів хвиль $H_{20}, H_{30}, \dots, H_{m0}$ одержують повторенням картини хвилі H_{10} по осі X m разів, якщо кожного разу змінювати напрямком ліній напруженості поля. Структури

поля хвиль H_{01} , H_{02} , ... утворюються простим поворотом попередніх зображень на 90° , тобто зміною осей X і Y .

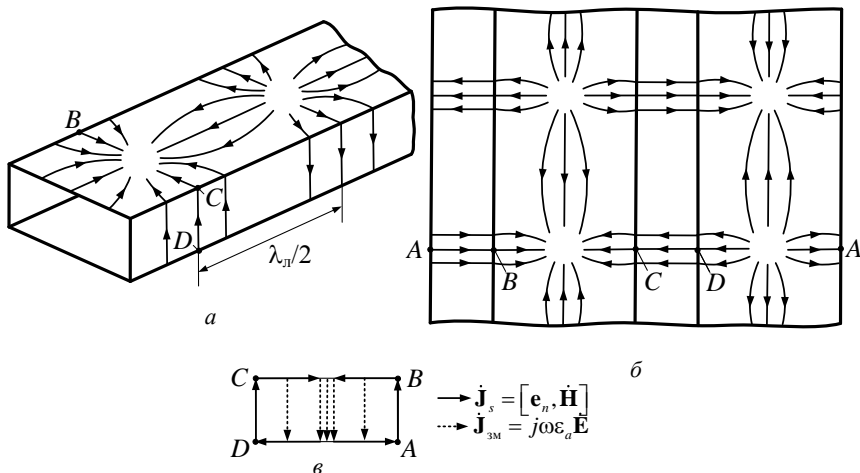


Рис. 7.19

Для зображення вищих типів хвиль класів H або E вихідними є хвилі H_{11} (рис. 7.20, *a*) та E_{11} (рис. 7.20, *б*). Повторюючи ці структури по горизонталі і вертикалі із зміною в шаховому порядку напрямків ліній поля, можна отримати поле будь-якої H або E хвилі.

Приклад 7.4. У прямокутному хвилеводі, заповненому повітрям ($a \times b = 50 \times 25 \text{ мм}^2$), на частоті $f = 5 \text{ ГГц}$ амплітуда напруженості електричного поля хвилі дорівнює 300 В/м . Знайти тип хвилі, що поширюється у хвилеводі, амплітуду напруженості магнітного поля та амплітуду поверхневого струму у площині XY .

Розв'язок. Довжина хвилі $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 5 \cdot 10^9 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Оскільки $a < \lambda < 2a$, то у хвилеводі поширюється хвиля основного типу H_{10} , у якій є компоненти E_y , H_x , H_z . Амплітуди компонент E_y та H_x зв'язані співвідношенням (7.27): $E_y / H_x = Z^{H_{10}}$, де

$$Z^{H_{10}} = Z_c / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}.$$

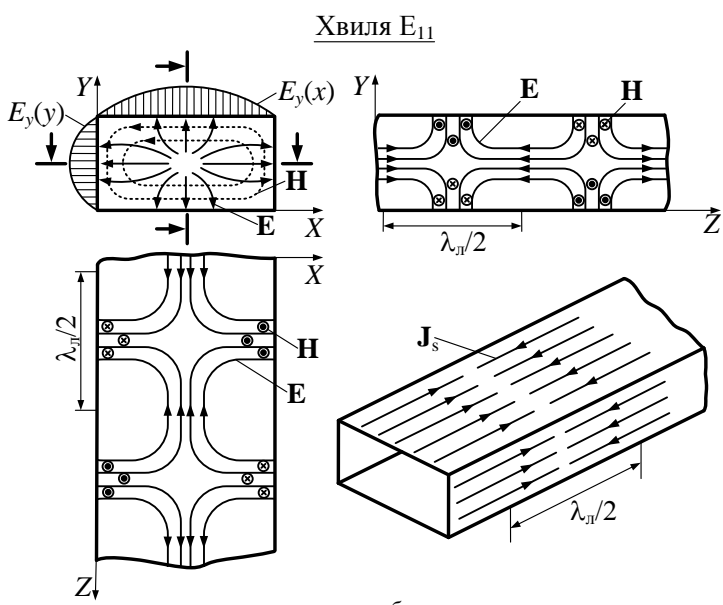
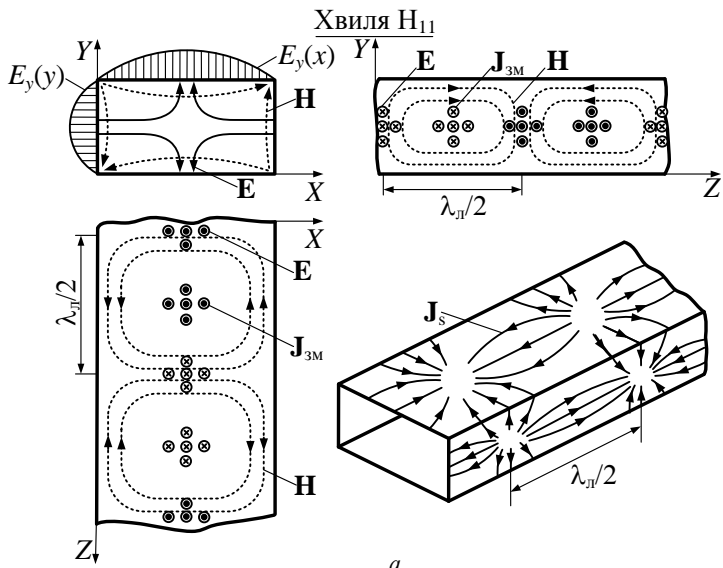


Рис. 7.20

З останнього виразу отримаємо

$$Z^{H_{10}} = 120\pi / \sqrt{1 - (6 \cdot 10^{-2} / 10 \cdot 10^{-2})^2} = 471 [Ом],$$

$$H_x = E_y / Z^{H_{10}} = (300 / 471) = 0,637 [А/м].$$

Оскільки амплітуда поверхневого струму $|\mathbf{J}_s| = |[\mathbf{e}_n, \mathbf{H}]|$, то $J_{sx} = H_x$, звідки $J_{sx} = 0,637 А/м$.

Приклад 7.5. Використовуючи дані з прикладу 7.4, знайти коефіцієнт відбиття від відкритого кінця прямокутного хвилеводу та коефіцієнт стоячої хвилі $K_{стУ}$.

Розв'язок. З прикладу 7.4 характеристичний опір хвилі $Z^{H_{10}} = 471 Ом$, тоді коефіцієнт відбиття від відкритого кінця хвилеводу (вважаємо, що у повітрі $Z_c \approx Z_0$)

$$\rho = \frac{Z_c - Z^{H_{10}}}{Z_c + Z^{H_{10}}} = \frac{120\pi - 471}{120\pi + 471} = -0,111.$$

Коефіцієнт стоячої хвилі

$$K_{стУ} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = 1,25.$$

Наведений орієнтовний розрахунок свідчить, що коефіцієнт відбиття від відкритого кінця хвилеводу порівняно невеликий, тому такий елемент може виявитися достатньо ефективною антеною в НВЧ-діапазоні.

Задачі для самостійного розв'язку

1. Визначіть критичну довжину хвилі, критичну частоту і довжину хвилі в прямокутному хвилеводі, що працює на хвилі типу H_{11} . Хвилевід має перетин 4×3 см і заповнений повітрям; частота коливань $10 ГГц$.

2. Визначіть, які типи хвиль можуть поширюватись в прямокутному хвилеводі перетином 10×5 см, якщо частота коливань $f = 5 ГГц$. Хвилевід має повітряне заповнення.

3. Обчисліть розміри поперечного перетину квадратного хвилеводу з повітряним заповненням, якщо відомо, що фазова швидкість хвилі типу E_{11} рівна $6 \cdot 10^8$ м/с. Частота передаваних коливань 3 ГГц.

4. Амплітуда поздовжньої проекції вектора напруженості електричного поля на осі прямокутного хвилеводу перетином 50×25 мм складає 10^5 В/м. Частота поля $7,5$ ГГц. Діелектрик – повітря, тип хвилі – E_{11} . Обчисліть максимальні значення амплітуд густини поверхневого струму на стінках і густини струму зсуву у внутрішній області.

Питання для самоперевірки

1. Що означають індекси m та n для полів типу E та H у прямокутних хвилеводах?

2. Які значення можуть приймати індекси m та n для полів E та H у прямокутних хвилеводах?

3. Що означає поняття хвиля основного типу? Який тип хвилі основний для прямокутного хвилеводу?

4. Нарисуйте структуру поля хвилі основного типу в прямокутному хвилеводі.

5. Нарисуйте діаграму типів коливань для прямокутного хвилеводу.

6. Нарисуйте графіки залежності поздовжніх компонент полів типу E_{32} , E_{23} , H_{20} та H_{02} від змінних x , y .

7.5. Хвилі у круглому хвилеводі

Круглі хвилеводи – найбільш прості й технологічні. Задача про знаходження полів у круглому хвилеводі розв'язується в циліндричній системі координат (рис. 7.21). Із розв'язання хвильового рівняння для поздовжніх складових виходить, що сімейство хвиль круглого хвилеводу радіуса a описується співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \dot{E}_z &= E_0 J_m(k_{\perp} r) \cos m \varphi e^{-j\beta_a z}, \\ \dot{H}_z &= H_0 J_m(k_{\perp} r) \cos m \varphi e^{-j\beta_a z}, \end{aligned} \quad (7.50)$$

де J_m – функція Бесселя першого роду порядку m , змінні r , φ , z – циліндричні координати. Графіки функції Бесселя від змінної $x = k_{\perp} r$ зображені на рис. 7.22.

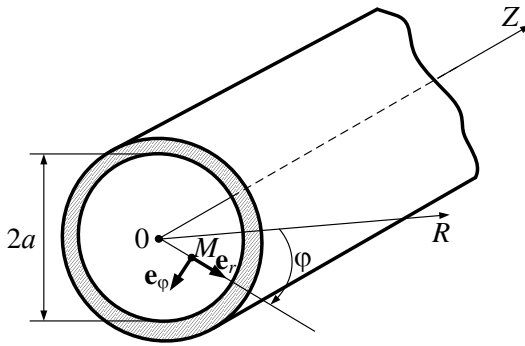


Рис. 7.21

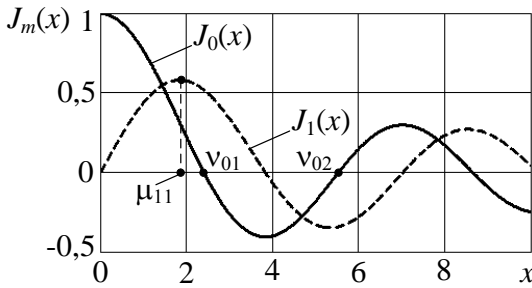


Рис. 7.22

З (7.50) можна визначити типи хвиль, які поширюються в круглому хвилеводі.

Хвилі типу Е. З граничних умов виходить, що при $r = a$ повинні виконуватися рівності $\dot{E}_\varphi = 0$, $\dot{E}_z = 0$. Для цього функція Бесселя повинна приймати нульові значення $J_m(k_\perp r) = 0$ при $r = a$. Тобто для існування хвилі E_{mn} необхідно, щоб $k_\perp a = v_{mn}$, де v_{mn} — n -й корінь функції Бесселя m -го порядку. Через те що $\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{k_\perp}$, **критична дов-**

жина хвилі типу Е визначається із співвідношення $\lambda_{\text{кр}}^{\text{Е}} = \frac{2\pi a}{\nu_{mn}}$.

Значення перших коренів ν_{mn} функції Бесселя J_m наведені в табл. 7.3.

Таблиця 7.3

n	$m=0$	$m=1$	$m=2$
1	2,405	3,832	5,135
2	5,520	7,016	8,417
3	8,654	10,714	11,620

Хвилі типу Н. З граничних умов виходить, що у випадку Н-хвиль має виконуватися співвідношення $\left. \frac{\partial H_z}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$. Таким чином, при $r=a$ похідна функції Бесселя має дорівнювати нулю:

$$J_m'(k_{\perp} a) = 0,$$

звідки

$$k_{\perp} a = \mu_{mn},$$

де μ_{mn} – n -й корінь функції $J_m'(x)$, або n -й екстремум функції $J_m(x)$ (див. рис. 7.22). При цьому для хвиль H_{mn}

$$\lambda_{\text{кр}}^{\text{Н}} = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}}.$$

Корені першої похідної μ_{mn} функції Бесселя наведені у табл. 7.4.

Таблиця 7.4

n	$m=0$	$m=1$	$m=2$
1	3,832	1,841	3,052
2	7,016	5,335	6,705
3	10,174	8,536	9,965

Таким чином, в регулярному хвилеводі можуть поширюватися хвилі класів Е і Н різних типів, які характеризуються парою цілочислових індексів m і n . Кожен з цих типів хвиль має свою сталу

поширення k_{\perp} , критичну довжину хвилі $\lambda_{\text{кр}}$, характеристичний опір, розподіл амплітуд складових поля в поперечному перерізі і є такою неоднорідною хвилею, що має дисперсію.

На відміну від прямокутного хвилеводу, де компоненти полів розподілені в поперечній площині відповідно до добутку функцій синуса і косинуса, в круглому хвилеводі їх розподіл вздовж радіуса підпорядковується або функціям Бесселя $J_m(k_{\perp}r)$ (для складових полів E_{φ} , H_r хвиль типу E_{mn} та складових H_{φ} , E_r полів типу H_{mn}), або похідної функції Бесселя $J'_m(k_{\perp}r)$ (для складових полів E_r і H_{φ} хвиль типу E_{mn} і H_r , E_{φ} типу H_{mn}). Тільки по кутовій координаті φ розподіл підпорядковується тригонометричним функціям синуса або косинуса.

Індекси m і n в позначенні типів хвиль E_{mn} і H_{mn} також відрізняються за змістом. **Індекс $m = 0, 1, 2, \dots$, з одного боку, вказує на порядок функції Бесселя першого роду, або її похідної, відповідно до яких компоненти поля і змінюються вздовж радіуса r . З іншого боку, індекс m визначає число повних варіацій (повних періодів зміни) поля при переміщенні точки спостереження M (рис. 7.23, а) навколо осі хвилеводу. Приклади розподілу поздовжньої складової полів у круглому хвилеводі по кутовій координаті і уздовж радіуса наведені на рис. 7.23. Другий індекс $n = 1, 2, \dots$, визначає порядковий номер кореня функції Бесселя для хвиль E_{mn} і порядковий номер кореня її похідної для хвиль H_{mn} (при цьому до переліку n не входить нуль або екстремум при $r = 0$). Таким чином, номер n визначає номер збіжного із стінкою хвилеводу нуля E_z компоненти хвилі E_{mn} (рис. 7.23, б), або номер збіжного з стінкою хвилеводу максимуму H_z компоненти хвилі H_{mn} (рис. 7.23, в), що знаходиться в повній відповідності з граничними умовами для цих компонентів поля.**

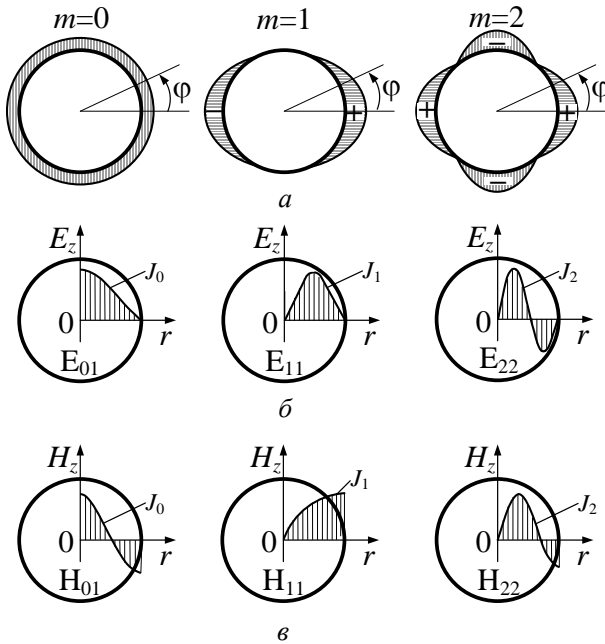


Рис. 7.23

В табл. 7.5 наведені значення $\lambda_{\text{кр}}$ різних типів хвиль.

Таблиця 7.5

Типи хвиль	H_{11}	E_{01}	H_{21}	E_{11}, H_{01}	H_{31}
$\lambda_{\text{кр}}$	$3,41a$	$2,61a$	$2,06a$	$1,64a$	$1,5a$

Діаграма типів коливань для круглого хвильоводу наведена на рис. 7.24.

З табл. 7.5 та рис. 7.24 виходить, що **основним типом хвилі в круглому хвильоводі є хвиля типу H_{11}** , причому коефіцієнт перекриття $k_f = \lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} / \lambda_{\text{кр}}^{E_{01}} = 1,3$ менший, ніж у прямокутному хвильоводі.

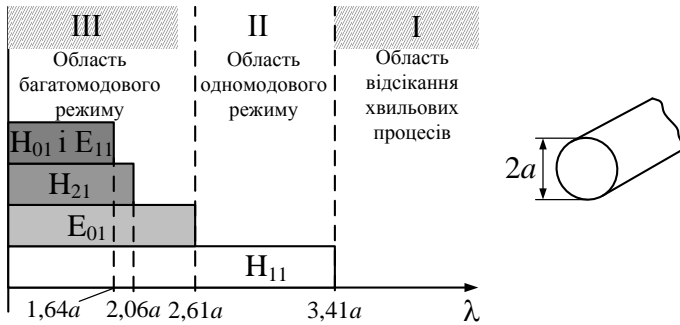


Рис. 7.24

Приклад 7.6. Круглий хвилевід, заповнений діелектриком з параметрами $\varepsilon = 1,5$, $\mu = 1$, має радіус $a = 20$ мм. Знайти типи хвиль, які можуть поширюватись на частоті $f = 8$ ГГц.

Розв'язок. Діаграма типів коливань для круглого хвилеводу зображена на рис.7.24. (див. також табл. 7.3, 7.4).

Знайдемо послідовність критичних довжин хвиль:

$$\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{11}} = 3,41a = 6,82 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad \lambda_{\text{кр}}^{\text{E}_{01}} = 2,613a = 5,23 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{21}} = 2,06a = 4,12 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad \lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{01}, \text{E}_{11}} = 1,64a = 3,28 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{31}} = 1,5a = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Довжина хвилі у середовищі, яке заповнює хвилевід,

$$\lambda = c / (\sqrt{\varepsilon} \cdot f) = 3 \cdot 10^8 / (\sqrt{1,5} \cdot 8 \cdot 10^9) = 3,06 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Таким чином, умова поширення $\lambda < \lambda_{\text{кр}}^{mn}$ виконується для хвиль типу

H_{11} , E_{01} , H_{21} , H_{01} , E_{11} . Для хвилі H_{31} та інших вищих типів хвилевід на частоті $f = 8$ ГГц знаходиться у режимі відсікання хвильового процесу.

У прямокутному хвилеводі довжини $\lambda_{\text{кр}}$ для хвиль типів E_{mn} і H_{mn} з однаковою парою індексів збігаються. А в круглому хвилеводі хвилі E_{mn} і H_{mn} з однаковою парою індексів m і n мають різні значення $\lambda_{\text{кр}}$ (за винятком хвиль E_{1n} і H_{0n} , тому що положення коренів функції $J_1(k_{\perp} r)$ збігаються з положенням екстремумів функції $J_0(k_{\perp} r)$). Хвилі з індексом $m = 0$ не змінюються за кутовою координатою, тобто мають осьову симетрію.

При графічному зображенні полів у круглому хвилеводі використовуються ті самі рекомендації, що й при побудові силових ліній у прямокутному хвилеводі. Порядок побудови полів E_{01}, H_{11}, H_{01} можна зрозуміти з рис. 7.25, 7.26.

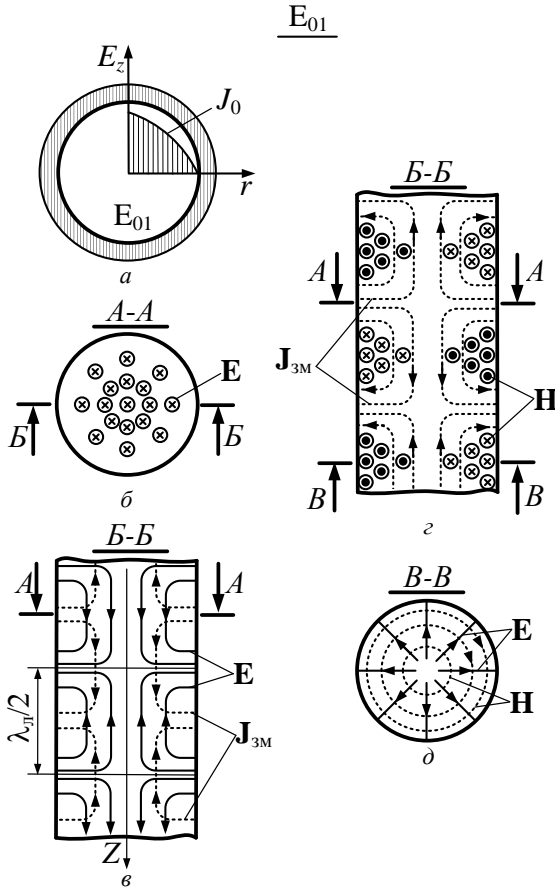


Рис. 7.25

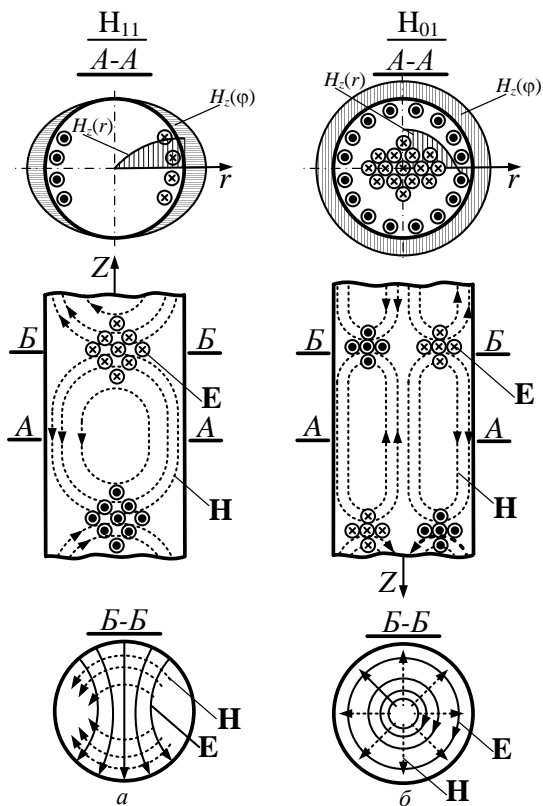


Рис. 7.26

На практиці також знаходять застосування осесиметричні хвилі E_{01} і H_{01} . Вартими уваги властивостями осесиметричних хвиль є створення лише поздовжніх поверхневих струмів хвиль типу E_{01} і лише поперечних струмів хвиль типу H_{01} (рис. 7.27).

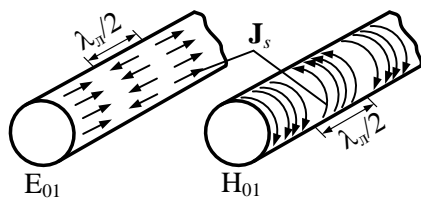


Рис. 7.27

Підкреслимо також, що структура хвиль основного типу в прямокутному та круглому хвилеводі достатньо близька. Це дозволяє трансформувати її в одну у так званому **плавному переході** з прямокутного на круглий хвилевід (рис. 7.28)

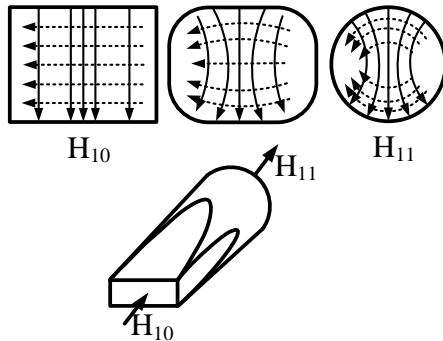


Рис. 7.28

Задачі для самостійного розв'язку

1. Визначіть, які типи хвиль є такими, що поширюються в круглому хвилеводі з повітряним заповненням; хвилевід має радіус 15 мм і працює на частоті $7,5 \text{ ГГц}$.

2. Визначіть діапазон частот, в межах якого в круглому хвилеводі діаметром 5 см може поширюватися тільки хвиля основного типу.

3. У круглому хвилеводі з діаметром $2,5 \text{ см}$ і заповненому діелектриком, поширюється хвиля типу H_{11} . Відомо, що частота коливань поля рівна 10 ГГц . Знайдіть діелектричну проникність заповнюючого діелектрика, якщо відомо, що фазова швидкість хвилі в точності рівна швидкості світла у вільному просторі.

4. Хвиля типу H_{01} поширюється в круглому хвилеводі з деяким радіусом a . Визначіть, на якій відстані від осі хвилеводу напруженість електричного поля максимальна.

5. Круглий хвилевід заповнений діелектриком з $\epsilon = 1$ і має діаметр $7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. ЕМХ поширюється у хвилеводі на частоті $f = 10 \text{ ГГц}$. Яку відносну магнітну проникність має діелектрик, якщо частота сигналу відповідає середині діапазону одномодовості.

Питання для самоперевірки

1. Що означають індекси m та n для полів типу E та H для круглого хвилеводу?
2. Які значення можуть приймати індекси m та n для EMX у круглому хвилеводі?
3. Який тип хвилі для круглого хвилеводу є основним?
4. Нарисуйте структуру поля хвилі основного типу в круглому хвилеводі.
5. Нарисуйте діаграму типів коливань для круглого хвилеводу.
6. Нарисуйте графіки поздовжніх складових полів типів E_{01} , E_{22} , H_{01} , H_{11} , H_{12} у круглому хвилеводі від змінних r , φ .

7.6. Збудження хвилеводів

З метою збудження або відбору енергії ЛП зв'язують із джерелом або приймачем енергії за допомогою елементів зв'язку. В ролі цих елементів використовуються занурені у хвилевід штир, рамка, а також вузькі щілини або отвори, прорізані на стінках хвилеводу. Конструктивно штир або петля звичайно виконуються як продовження внутрішнього проводу коаксіальної лінії, при цьому зовнішній провід припаюється до стінки хвилеводу.

При збудженні полів у хвилеводах елементи зв'язку відіграють роль передавальних антен, при відборі енергії з хвилеводу – приймальних антен.

У електронних приладах НВЧ збудження хвилеводів, резонаторів та уповільнюючих систем проводиться електронним потоком, а відбір енергії за допомогою згаданих вище елементів зв'язку.

Для практичних цілей у хвилеводах бажано збуджувати коливання певного типу (наприклад, хвилю основного типу для забезпечення однохвильового режиму роботи лінії передачі). Тому елементи зв'язку повинні збуджувати електромагнітне поле, структура якого близька до структури хвилі бажаного типу. Це необхідна умова, яка визначає конструкцію елементів зв'язку.

Строге математичне розв'язання задачі збудження, що дає точний розподіл сторонніх джерел в лінії передачі, представляє великі труднощі навіть в простих випадках. Тому ми оцінюватимемо ефективність пристроїв зв'язку, виходячи з фізичних міркувань, перш за все, з відомої структури поля хвилі бажаного типу.

Усі конструкції елементів зв'язку повинні задовольняти наступним загальним вимогам:

- забезпечувати ефективну взаємодію з полем бажаного типу і по можливості, утруднювати збудження хвиль інших типів;
- бути узгодженими в необхідній смузі частот;
- мати достатню електричну міцність.

Визначимо, що елементи зв'язку збуджують крім бажаного типу коливань хвилі вищих типів. Тому ЕМП в хвилеводах розглядають у **одномодовому наближенні** – на таких відстанях від місця неоднорідності (у тому числі й елементів зв'язку), де хвилями вищих типів можна знехтувати.

Приклад 7.7. ЕМП у прямокутному хвилеводі з розмірами $a \times b = 60 \times 25 \text{ мм}^2$ збуджує генератор на частоті $f = 3 \text{ ГГц}$. На якій відстані від місця збуджувального пристрою потужність вищих типів хвиль зменшується у 100 разів? Хвилевід заповнений повітрям.

Розв'язок. Електромагнітне поле у хвилеводі на частоті 3 ГГц поширюється на хвилі основного типу, оскільки $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^9} = 0,1 \text{ м}$ і виконується умова $a < \lambda < 2a$. Усі інші типи хвиль не поширюються (знаходяться в області відсікання). Найменший коефіцієнт загасання має найближчий за частотою тип коливань до коливання типу H_{10} . З рис.7.16 видно, що це поле типу H_{20} , для якого $\lambda_{\text{кр}}^{H_{20}} = a$. Із співвідношення (7.14) маємо

$$\begin{aligned} \alpha^{H_{20}} &= \frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda}\right)^2} = \frac{2\pi}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2} = \\ &= \frac{2\pi}{0,06} \sqrt{1 - \left(\frac{0,06}{0,1}\right)^2} = 83,8 \frac{1}{\text{м}}. \end{aligned}$$

Оскільки залежність потужності ЕМП від координати z пропорційна квадрату амплітуди поля, то потужність зменшиться у 100 разів на відстані l , яку знайдемо з рівняння $P(l) = P_0 e^{-2\alpha l} = 10^{-2} P_0$, де P_0 – потужність ЕМП коливань у місці збудження. Звідси

$$e^{-2\alpha l} = 10^{-2}, \quad l = \ln(10^{-2}) / (-2\alpha) = 2,75 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Таким чином, потужність поля першої хвилі вищого типу дуже швидко загасає з віддаленням від місця неоднорідностей (місця збудження). Поля інших типів загасають ще швидше (дивись приклад 7.1).

Сформулюємо правила збудження хвиль у хвилеводах.

7.6.1. Штирові елементи зв'язку

Ефективність взаємодії **штирового елемента зв'язку** завдовжки $l_{\text{шт}}$ (рис. 7.29 *a*) з полем хвилі оцінюється величиною амплітуди ЕРС, що наводиться в ньому,

$$\dot{\mathcal{E}} = \int_{l_{\text{шт}}} \dot{E} dl. \quad (7.51)$$

З цієї формули видно, що, наприклад, для збудження поля бажаного типу штир слід розташовувати далеко від вузлових площин вектора \mathbf{E} , (де $E \neq 0$), і орієнтувати штир паралельно силовим лініям цього вектора.

Для найбільш ефективного збудження основної хвилі H_{10} в прямокутному хвилеводі штир (несиметричний вібратор) слід розміщувати поблизу пучності електричного поля збуджуваної хвилі паралельно електричним силовим лініям (рис. 7.29, *б*).

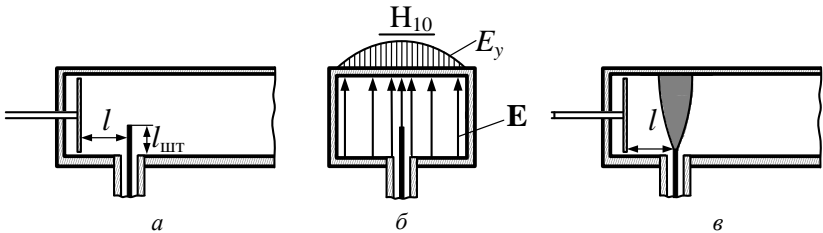


Рис. 7.29

У зв'язку з цим для збудження хвилі H_{10} штир треба помістити по центру широкої стінки хвилеводу (рис. 7.29, *б*).

Вібратор збуджує в обидві сторони від точки свого розміщення синфазні електричні поля однакової амплітуди, поляризовані паралельно відносно своєї осі. Тому поблизу штиря розміщують пересувний короткозамикаючий поршень, що відбиває одну з хвиль в потріб-

ний бік. Відстань l (рис. 7.29, *a*) до поршня підбирають так, щоб обидві хвилі виявилися синфазними в поперечному перетині, де розташований штир. З урахуванням зміни фази відбитої хвилі від поршня на π , умова синфазності набуває вигляду

$$2\beta_{\pi}l + \pi = 2n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.52)$$

звідки

$$l = (2n - 1) \frac{\lambda_{\pi}}{4}. \quad (7.52, a)$$

Коли вимоги до широкосмуговості і електричної міцності пристрою збудження стають жорсткими, слід застосовувати штирові елементи зв'язку складнішої форми, наприклад гудзикового типу (рис. 7.29, *в*).

На рис. 7.30, 7.31 показано ескізи штирових елементів зв'язку хвиль в різних лініях передач. На рис. 7.30 наведено приклади елементів зв'язку у круглому хвилеводі (рис. 7.30, *a*), коаксіальному (рис. 7.30, *б*), несиметричній стрічковій лінії (рис. 7.30, *в*).

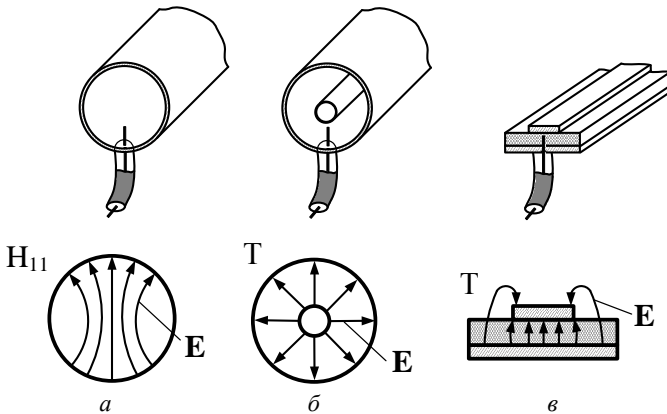


Рис. 7.30

Приклади збудження вищих типів хвиль наведені на рис. 7.31.

Для збудження хвиль H_{20} у прямокутному хвилеводі (рис. 7.31, *a*), хвиль H_{21} , E_{11} у круглому хвилеводі (рис. 7.31, *в*, *г*), штирові

елементи зв'язку повинні мати протифазне живлення. Цього можна досягти за рахунок різних довжин ліній передачі до відповідних елементів зв'язку.

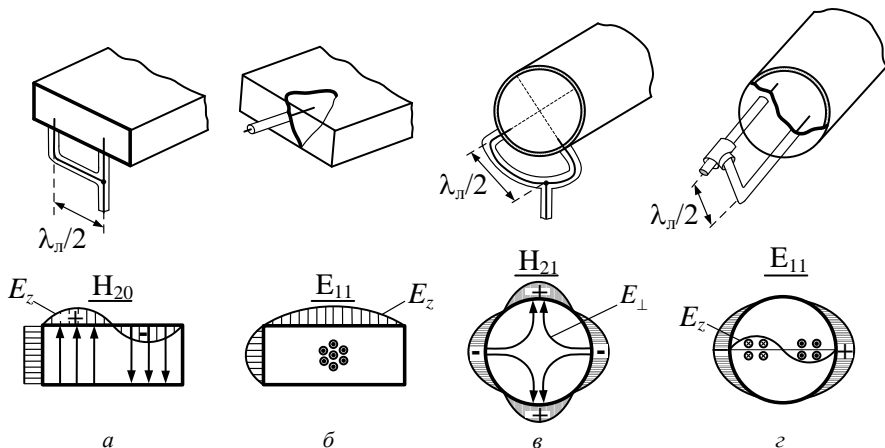


Рис. 7.31

7.6.2. Петльові пристрої зв'язку

Ефективність взаємодії **петльового елемента зв'язку** (рамки) з полем хвилі може бути оцінена за величиною амплітуди електрорушійної сили, що наводиться у рамці. ЕРС в цьому випадку визначається формулою

$$\dot{\mathcal{E}} = \omega \mu_a \int_{S_n} \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S} = \omega \mu_a \int_{S_n} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{e}_n dS, \quad (7.53)$$

де $\dot{\mathbf{H}}$ – напруженість магнітного поля у відповідному місці хвилеводу; \mathbf{e}_n – нормаль до елемента площини dS (рис. 7.32, а).

З формули видно, що для збудження заданої хвилі рамкою (петлею) її слід розміщувати в пучності вектора $\dot{\mathbf{H}}$ збуджуваної хвилі і перпендикулярно до магнітних силових ліній.

Два варіанти збудження хвилі \mathbf{H}_{10} за допомогою рамки показані на рис. 7.32, а та 7.32, б, в.

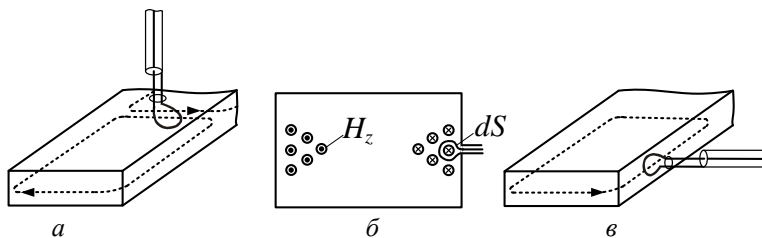


Рис. 7.32

У першому випадку (7.32, *a*) рамка збуджує поперечну складову поля H , у другому (7.32, *б, в*) – рамка збуджує переважно поздовжню складову H . Вектори електричного поля \mathbf{E} у хвиль, що поширюються у протилежних напрямках, для цих випадків відрізняються за фазою на величину π .

Петлю, так само як і штир, розташовують на певній відстані від короткозамикаючої перемички, що забезпечує передачу потужності в потрібному напрямі. Відстань від петлі до короткозамикаючої перемички повинна бути різною залежно від того, чи є вона джерелом поперечної (рис. 7.32, *a*) або поздовжньої (рис. 7.32, *б, в*) складової магнітного поля. У першому випадку вектори електричного поля, що поширюються в протилежні сторони, виявляються протифазними, і відстань l треба вибирати з умови

$$2\beta_{\perp}l + \pi + \pi = 2n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.54)$$

звідки

$$l = (n-1) \frac{\lambda_{\perp}}{2}. \quad (7.54, a)$$

У другому випадку відстань до рухомого короткозамикача визначається співвідношенням (7.52, *a*).

Принцип використання петльових елементів зв'язку для збудження вищих типів коливань не відрізняється від показаного для штирьових.

7.6.3. Дифракційні елементи зв'язку

Дифракційні елементи зв'язку являють собою одне або декілька отворів (щілин) зв'язку, які певним чином прорізані в стінках хвилеводу (резонатора). При падінні електромагнітної хвилі на металеву поверхню на останній наводяться поверхневі струми провідності. Якщо лінії струмів провідності (див. рис. 7.33) перерізають отвір, то на його краях утворюється змінний в часі електричний заряд, що зумовлює існування змінного електричного поля. Навколо змінного електричного поля з'являється змінне магнітне поле і виникає електромагнітна хвиля, вектор Пойнтінга якої спрямований перпендикулярно щілині (рис. 7.33).

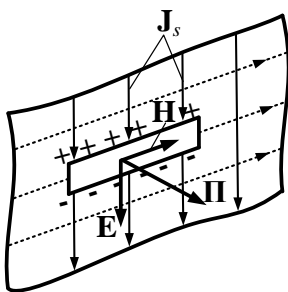


Рис. 7.33

При падінні хвилі ззовні на хвилевід або резонатор енергія вводиться в останні, а при падінні зсередини – виводиться з хвилеводу або резонатора. Таким чином, при визначенні розташування отвору зв'язку обов'язково потрібно знати структуру поверхневих струмів у хвилеводі (резонаторі).

На рис. 7.19 показані лінії поверхневих струмів провідності коливальних основного типу в прямокутному хвилеводі, а на рис. 7.34, 7.35 можливі форми отворів зв'язку при поширенні хвиль H_{10} та H_{11} у прямокутному та круглому хвилеводах. Відзначимо, що щілини зв'язку слід розміщувати в пучності поверхневих струмів і перпендикулярно до їх ліній.

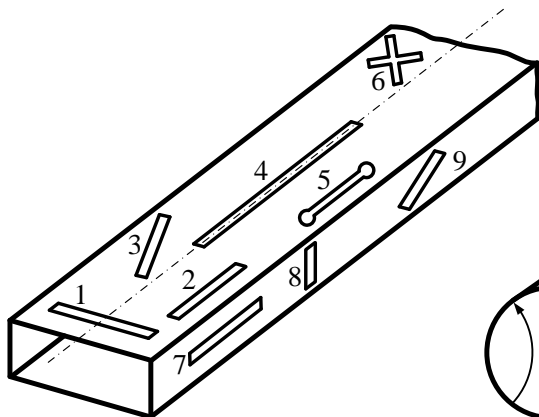


Рис. 7.34

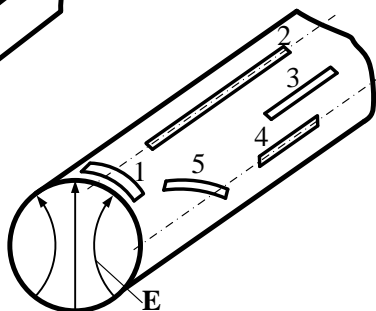


Рис. 7.35

Поздовжня щілина на широкій стінці еквівалентна за властивостями рамці, яка збуджує поздовжню складову H_z , а поперечна – рамці, яка збуджує поперечну складову H_x .

При цьому щілини 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 на рис. 7.34 і 1, 3, 4, 5 на рис. 7.35 для хвиль основного типу є випромінюючими, а щілини 4, 8 на рис. 7.34 і 2 на рис. 7.35 – невипромінюючими. Тому останні можуть бути використані для введення в хвилевід зонда вимірювальної лінії і визначення параметрів хвилі, що поширюється.

Стисло пояснимо особливості побудови і розміщення деяких дифракційних елементів зв'язку.

Щілина 5 (рис. 7.34) гантельного типу більш ширококутова, ніж щілини 1, 2. Похилі щілини 3, 9 (рис. 7.34) краще узгоджені з хвилеводом, ніж щілини 1, 2, 7. Крім того, зміною кута нахилу щілин можна регулювати амплітуди збуджуваних в них полів. Для цього також можна змінювати положення щілин типу 2, 5 щодо осі широкої стінки хвилеводу. Щілина типу 6, центр якої розташовано на відстані $x_0 = \frac{a}{\pi} \arctg \frac{\lambda_{дл}}{2a}$ від вузької стінки, забезпечує випромінювання коливань кругової поляризації (див. приклад 7.3).

У круглому хвилеводі (рис. 7.35) щілина 2 не збуджується, всі інші щілини випромінюють. При цьому щілина 4 випромінює інтен-

сивніше, ніж щілина 3. «Похила» щілина 5 працює так само, як описані вище щілини 3, 9 в стінках прямокутного хвилеводу.

Отвори зв'язку розміщують як на вузькій, так і на широкій стінці хвилеводу (рис. 7.36).

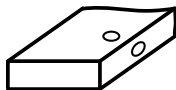


Рис. 7.36

В першому випадку зв'язок чисто магнітний і через отвір відгалужується поздовжня складова вектора магнітного поля. Такий отвір еквівалентний рамці із струмом. При розміщенні отвору на широкій стінці виникає змішаний зв'язок (електричний і магнітний), що еквівалентно одночасному збудженню хвилеводу вібратором і рамкою.

Питання для самоперевірки

1. Яким вимогам мають задовольняти елементи зв'язку ліній передачі?
2. Які типи елементів зв'язку ЛП ви знаєте?
3. Які основні умови розміщення штирових (петльових, дифракційних) елементів зв'язку?
4. Нарисуйте приклади розміщення елементів збудження хвилі основного типу у прямокутному (круглому, коаксіальному) хвилеводі, у несиметричній стрічковій лінії.
5. Нарисуйте приклади збудження хвиль вищих типів у прямокутному (круглому) хвилеводі.

7.7. Основні параметри та застосування прямокутних і круглих хвилеводів

7.7.1. Групова швидкість. Умови неспотвореної передачі сигналів

Передати інформацію за допомогою монохроматичної (гармонічної) хвилі неможливо (через її однорідність у часі і просторі). Тому для передачі інформації застосовують немонохроматичні хвилі, які являють собою суперпозицію монохроматичних хвиль з різними частотами. У випадку немонохроматичного поля, наприклад, при передачі сигналу, що завжди складається із спектра частот, енергія

поля розподіляється між хвилями, які входять до групи хвиль, що відповідають даному спектру частот.

Оскільки у хвилеводах фазова швидкість, швидкість поширення енергії, а також загасання залежать від частоти (тобто хвилеводам притаманне явище дисперсії), то амплітудний і фазовий спектри сигналу при його поширенні змінюються. Отже, відбувається спотворення сигналу. В зв'язку з цим поняття “швидкість поширення немонохроматичного поля” змінюється поняттям «**групова швидкість**» $v_{гр}$, яка є швидкістю руху максимуму енергії групи хвиль, що складають спектр передаваного сигналу.

Уявимо немонохроматичне поле у вигляді суми гармонік:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \sum_{k=1}^n \dot{\mathbf{E}}_k e^{j(\omega_k t - \beta_{lk} z)} = e^{j(\omega_n t - \beta_{ln} z)} \sum_{k=1}^n \dot{\mathbf{E}}_k e^{j[(\omega_k - \omega_n)t - z(\beta_{lk} - \beta_{ln})]} = \\ &= e^{j(\omega_n t - \beta_{ln} z)} \sum_{k=1}^n \dot{\mathbf{E}}_k e^{j(t-z/v_{гр})(\omega_k - \omega_n)}. \end{aligned} \quad (7.55)$$

При записуванні (7.55) прийнято, що β_{ln} – фазова стала на несучій частоті ω_n , а спектр радіосигналу вузький, тобто вираз для групової швидкості матиме вигляд

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{d\beta_l} \simeq \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta_l} \simeq \frac{\omega_1 - \omega_n}{\beta_{l1} - \beta_{ln}} \simeq \dots \frac{\omega_k - \omega_n}{\beta_{lk} - \beta_{ln}} \simeq \dots \frac{\omega_n - \omega_n}{\beta_{ln} - \beta_{ln}}. \quad (7.56)$$

Вираз (7.55) можна інтерпретувати як пласку хвилю частоти ω_n , амплітуда якої змінюється за законом другого співмножника. У (7.55) другий співмножник змінюється значно повільніше, ніж перший, тобто являє собою обвідну сигналу. **Швидкість переміщення обвідної сигналу** за умови $2 \Delta\omega \ll \omega_n$ – це і є **групова швидкість**, бо передавана групою хвиль інформація міститься саме в обвідній амплітуд високочастотних коливань. Виразимо групову швидкість через фазову, замінивши $\beta_l = \omega/v_\phi$:

$$v_{гр} = \frac{1}{\frac{d\beta_{л}}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{1}{v_{\phi}} - \frac{\omega dv_{\phi}}{d\omega}} = \frac{v_{\phi}}{1 - \beta_{л} \frac{dv_{\phi}}{d\omega}}, \quad (7.57)$$

тобто при

$$\frac{dv_{\phi}}{d\omega} = 0 \quad v_{гр} = v_{\phi}.$$

Через те, що

$$\beta_{л} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\right)^2} = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}, \quad (7.58)$$

то

$$v_{зр} = \frac{d\omega}{d\beta_{л}} = \frac{1}{\frac{d\beta_{л}}{d\omega}} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}.$$

Таким чином, у випадку вузькосмугових сигналів **групова швидкість збігається за значенням з енергетичною.**

При поширенні складного сигналу дисперсія призводить до нерівномірності часу поширення окремих складових сигналу, тобто в результаті – до спотворення передаваної інформації. Яка ж умова неспотвореної передачі сигналу? Складний сигнал, що має широкий спектр частот, можна розбити на вузькі частотні смуги. Кожен вузькосмуговий сигнал поширюється з груповою швидкістю, властивою даній частоті. Якщо групова швидкість постійна в межах усього спектру сигналу

групу сигналу $\frac{d\beta_{л}}{d\omega} = \text{const}$, то сума цих вузькосмугових сигналів дає

на приймальному кінці неспотворений складний сигнал. Похідна $\frac{d\beta_{л}}{d\omega} = \text{const}$, якщо постійна поширення залежить від частоти ліній-

но: $\beta_{л} = a + b\omega$, що й є **умовою неспотвореної передачі.** Дана умова забезпечується на практиці відповідним вибором розмірів хвилеводів.

7.7.2. Потужність, яка переноситься по хвилеводу.

Електрична міцність і загасання хвиль у хвилеводах

Потужність, передавана по лінії передачі будь-якого типу, визначається на основі теореми Пойнтінга:

$$P = \int_{S_{\perp}} \Pi_z dS, \quad (7.59)$$

де Π_z – поздовжня складова густини потоку активної потужності.

Рівняння (7.59) зводиться до вигляду

$$P = \frac{1}{2} \int_{S_{\perp}} E_{\perp} H_{\perp} dS = \frac{Z_{\perp}}{2} \int_{S_{\perp}} H_{\perp}^2 dS = \frac{1}{2Z_{\perp}} \int_{S_{\perp}} E_{\perp}^2 dS, \quad (7.60)$$

де Z_{\perp} – характеристичний опір лінії для типу хвилі, що поширюється (Т, Е або Н); H_{\perp}, E_{\perp} – амплітуди поперечних складових поля.

Стосовно хвилі H_{10} у прямокутному хвилеводі, в якій поперечна складова – E_y , з (7.60) одержимо

$$P = \frac{ab}{4} E_y^2 \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}. \quad (7.61)$$

З (7.61) видно, що збільшення потужності, яка переноситься по ЛП, супроводжується збільшенням напруженості електричного поля. Її зростання обмежує граничне значення $E_{\text{гран}}$, яке характеризує електричну міцність діелектрика, що заповнює хвилевід. Якщо $E_y > E_{\text{гран}}$, то настає високочастотний пробій у вигляді іскрового або тліючого розряду залежно від тиску. Розрядний проміжок має велику провідність і шунтує собою хвилевід, що викликає великі відбиття потужності до генератора і може вивести його з ладу.

Вважаючи в (7.61) $E_y = E_{\text{гран}}$, $P = P_{\text{гран}}$, можна обчислити **граничну потужність**, при якій в разі біжучої хвилі типу H_{10} починається НВЧ розряд:

$$P_{\text{гран}}^{H_{10}} = \frac{ab}{4} E_{\text{гран}}^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}. \quad (7.62)$$

Враховуючи, що в основному використовуються хвилеводи з повітряним заповненням ($E_{\text{гран}} = 30 \text{ кВ/см}$), з (7.62) одержуємо

$$P_{\text{гран}}^{H_{10}} \approx 597 ab \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2},$$

де потужність має розмірність [кВт]; сторони хвилеводу $a \times b$ [см^2].

Аналогічно можуть бути одержані формули для хвилеводів будь-якого перерізу. Наприклад, для круглого хвилеводу радіуса a при хвилі H_{01}

$$P_{\text{гран}}^{H_{01}} \approx 1805 a^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}.$$

З (7.62) виходить, що при стандартних розмірах прямокутних хвилеводів ($a \approx 0,75\lambda$, $b \approx a/2$) $P_{\text{гран}}^{H_{10}} < 125\lambda^2$ [кВт], де λ взято в сантиметрах. Так, при $\lambda = 30 \text{ см}$ $P_{\text{гран}}^{H_{10}} = 112 \text{ МВт}$. Але при $\lambda = 1 \text{ см}$

$P_{\text{гран}}^{H_{10}} \leq 125 \text{ кВт}$, тобто при зменшенні довжини хвилі зменшується й $P_{\text{гран}}$. В реальному хвилеводі у загальному випадку існує відбита хвиля, при цьому амплітуда напруженості поля на окремих ділянках зростає порівняно з регулярним хвилеводом. Отже, в реальному хвилеводі найбільша **допустима потужність** $P_{\text{доп}}$ має бути меншою $P_{\text{гран}}$. Звичайно приймають $P_{\text{гран}} = (3 \dots 5) P_{\text{доп}}$.

Напруженість поля пробою залежить від температури, тиску і складу газу, що заповнює хвилевід. Мінімум $E_{\text{гран}}$ відповідає тиску $10^{-2} \dots 10^{-3}$ атмосфер. Для підвищення рівня переданої потужності працюють або при дуже низькому тиску, або при високому. На практиці хвилеводи **компресують**, якщо апаратура працює на великій висоті. Можна також збільшити $E_{\text{гран}}$ додаванням газів, які вміщують галоїди – арктон, фреон, елегаз.

Розглянемо питання про втрати у лініях передач. У випадку будь-якої лінії передачі загасання хвиль викликається втратами в діелектриках, провідниках та втратами на випромінювання (у відкритих ЛП). За наявності втрат поле в лінії змінюється за законом

$$\dot{E} = E_0 e^{-\alpha_n z} e^{j(\omega t - \beta_n z)}, \quad (7.63)$$

де E_0 – амплітуда поля на початку ЛП.

Сталу загасання α_n можна обчислити з таких міркувань. Згідно з (7.63) при довжині хвилеводу, що дорівнює одиниці довжини ($z = 1$), амплітуда поля зменшується в $e^{-\alpha_n}$ разів, тобто потужність зменшується в $e^{-2\alpha_n}$ разів. Отже, потужність втрат, яка поглинається у хвилеводі на одиниці довжини,

$$P_{z1} = P(1 - e^{-2\alpha_n}),$$

де P – потужність, що надходить на вхід хвилеводу, тобто

$$e^{-2\alpha_n} = 1 - \frac{P_{z1}}{P}.$$

Звичайно втрати малі і можна покласти $\frac{P_{z1}}{P} \ll 1$. Розкладаючи вираз $e^{-2\alpha_n}$ в ряд по малому параметру і використовуючи перші два члени розкладу, одержимо

$$\alpha_n \approx \frac{P_{z1}}{2P}; \quad \alpha_n = \alpha_d + \alpha_{\text{пр}} + \alpha_{\Sigma} \left[\frac{\text{Hen}}{M} \right], \quad (7.64)$$

де $\alpha_d, \alpha_{\text{пр}}, \alpha_{\Sigma}$ – постійні загасання відповідно в діелектрику, провіднику та за рахунок випромінювання. Втрати на випромінювання у металевих хвилеводах відсутні $\alpha_{\Sigma} = 0$.

Величина α_d залежить від $\text{tg} \delta$ і частоти: $\alpha_d = \frac{\omega \text{tg} \delta}{2\nu_{\text{пр}}}$.

Звичайно $\alpha_d \ll \alpha_{np}$, тому надалі покладемо, що $\alpha_n = \alpha_{np}$. Втрати потужності в стінках хвилеводу на одиницю його довжини

$$P_{z1} = \frac{R_s}{2} \oint_{L_{\perp}} H_{\tau}^2 dl,$$

де $R_s = \frac{1}{\Delta\sigma}$ – поверхневий опір металу з провідністю σ ; L_{\perp} – контур поперечного перерізу хвилеводу.

Потужність P була визначена раніше (див. (7.60)), тому можна записати

$$\alpha_n = \frac{R_s \oint_{L_{\perp}} H_{\tau}^2 dl}{2Z_n \int_{S_{\perp}} H_{\perp}^2 dS}. \quad (7.65)$$

У логарифмічному масштабі загасання L у хвилеводі завдовжки $z = l$ визначається як

$$L = 8,69\alpha_n l, \quad [\partial B],$$

а ККД хвилеводу

$$\eta = \frac{P - P_{z1} l}{P} = 1 - 2\alpha_n l.$$

У випадку поширення хвилі H_{10} , яка має найменше загасання у прямокутному хвилеводі,

$$\alpha_n = \frac{R_s}{b \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}} \frac{1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}. \quad (7.66)$$

Коефіцієнт загасання α_n хвилі основного типу у прямокутному хвилеводі H_{10} залежить від розмірів хвилеводу $a \times b$, довжини хвилі

λ та поверхневого опору металу R_s . На графіках рис. 7.37, *a* наведені залежності $\alpha_{H_{10}}$ від відношення b/a (графіки побудовані для мідного хвилеводу, $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ См/м).

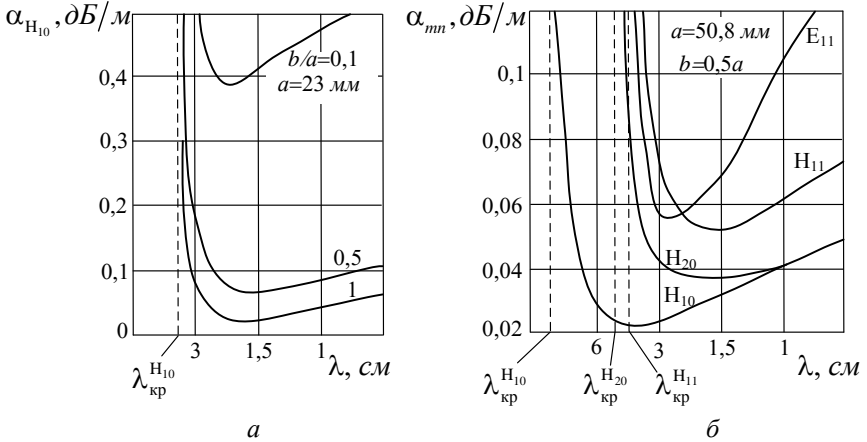


Рис. 7.37

Як видно з графіків, якщо довжина хвилі λ близька до критичної ($\lambda \rightarrow \lambda_{кр}$), величина $\alpha_{H_{10}} \rightarrow \infty$, що є наслідком припущень, які зроблені при виведенні співвідношення (7.65). Зі зменшенням λ коефіцієнт згасання спочатку зменшується, а потім зростає пропорційно $\sim \lambda^{-1/2}$, що є наслідком залежності поверхневого опору R_s від частоти. З формули (7.66) видно, що значення $\alpha_{H_{10}}$ залежать від відношення b/a , хоча ця залежність не є суттєвою (якщо відношення b/a змінюється у межах від 0,5 до 2, величина $\alpha_{H_{10}}$ змінюється у малих межах).

Коефіцієнт загасання вищих типів хвиль значно більший порівняно з основним типом (рис. 7.37, *б*, хвилевід мідний $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ См/м).

В табл. 7.6 наведені довжини стандартних прямокутних хвилеводів різного діапазону, при яких теплові втрати дорівнюють 3 дБ.

З табл. 7.6 виходить, що застосування хвилеводів прямокутного перерізу в міліметровому діапазоні і квазіоптиці недоцільне.

Таблиця 7.6

$f, ГГц$	0,5	2	5	10	20	50	100	200
$l, м$	2000	250	60	20	7	2	0,6	0,2

Особливості коефіцієнтів загасання у круглому хвилеводі від довжини хвилі такі самі, як у прямокутному (рис. 7.38, хвилевід мідний, діаметр $2a = 30 \text{ мм}$).

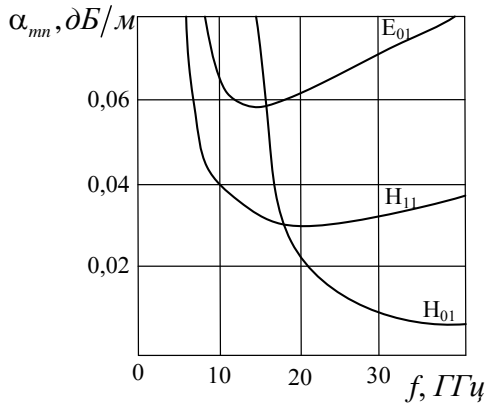


Рис. 7.38

Разом з тим, **хвилі типу H_{0n} мають аномально мале загасання.**

Це пояснюється тим, що хвилі типу H_{0n} збуджують у стінках хвилеводу тільки поперечні струми, інтенсивність яких зменшується зі зростанням частоти, тому втрати зі зростанням частоти меншають. Практичне застосування хвиль H_{0n} (зокрема хвилі H_{01}) для передачі енергії ЕМП на великі відстані недоцільне. Це пов'язано з тим, що при незначних деформаціях хвилеводу збуджуються інші типи хвиль, у яких коефіцієнти загасання досить великі і ККД лінії передачі зменшується.

З метою зменшення втрат для хвилеводів застосовують метали з високою провідністю: алюміній, мідь, латунь; поверхні сріблюють, а подекуди і золотять. Втрати залежать від якості обробки поверхні хвилеводу. Чим більша висота мікронерівностей, тим довшим буде шлях струмів НВЧ по стінках хвилеводу і інтенсивнішим загасання. У зв'язку з цим вимоги до класу чистоти поверхні хвилеводів дуже

жорсткі (8 – 10-й клас, що відповідає середній висоті мікронерівностей 3,2 – 0,8 мкм).

7.7.3. Вибір розмірів хвилеводів та їх застосування

Розміри прямокутного однохвильового хвилеводу (і, отже, робочу смугу частот $f_{\text{н}} \dots f_{\text{в}}$) вибирають з умов забезпечення:

- а) однохвильового режиму і максимальної електроміцності;
- б) малого загасання;
- в) малої дисперсії.

Це дозволяє забезпечити достатній ККД при малих спотвореннях передаваного сигналу.

Звичайно хвилевід конструюють так, щоб найближчою хвилею вищого типу була хвиля H_{20} ($\lambda_{\text{кр}}^{H_{20}} = a$). При цьому необхідно, щоб

$b \leq \frac{a}{2}$. Виходячи з вимог максимальної електроміцності, приймають

$b = \frac{a}{2}$. Тоді з першої вимоги отримаємо, що $a < \lambda < 2a$. Друга умова

забезпечується при $\lambda < 1,6a$ (мала дисперсія, мале загасання). Одночасне задоволення обох нерівностей дає такий результат – $a \approx 0,75\lambda_c$, де λ_c – середня довжина хвилі заданого діапазону.

Тоді перекриття по діапазону $k_f = \frac{f_{\text{в}}}{f_{\text{н}}} = 1,6$, тобто

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_{\text{в}} - f_{\text{н}}}{(f_{\text{в}} + f_{\text{н}})/2} = 0,46 (46 \%).$$

У деяких випадках для зменшення маси і габаритів вимогами збільшення $P_{\text{гран}}$ і зменшення $\alpha_{\text{л}}$ нехтують. В цих умовах вибирають $b = (0,1 \dots 0,2)a$, наприклад в НВЧ апаратурі радіорелейних станцій.

Прямокутні однохвильові хвилеводи знайшли широке застосування в сантиметровому діапазоні хвиль. У дециметровому діапазоні вони використовуються лише в разі передачі значних потужностей за необхідності забезпечення високих ККД даних НВЧ трактів. Обмеження на

застосування пов'язане з великою масою і габаритами дециметрових хвилеводів. Так, при $\lambda = 60$ см застосовують хвилеводи з розмірами $a \times b = 457 \times 228,5$ мм² зі стінками завтовшки 3 мм. Якщо хвилевід виготовити з алюмінію чи міді, то маса 1 м його складе відповідно 11 і 36 кг.

У міліметровому діапазоні однохвильові хвилеводи застосовувати недоцільно, оскільки їх загасання і гранична потужність не відповідають вимогам, які до них пред'являються. Для поліпшення вказаних параметрів збільшують поперечний переріз, тобто неминуче переходять до багатомодового режиму. Однак з метою недопущення збудження хвиль вищих типів доводиться вживати ряд заходів: ретельну обробку поверхні, точне з'єднання хвилеводних секцій, введення фільтрів і поглиначів хвиль вищих типів. Усе це сприяє збільшенню вартості багатохвильових трактів. Багатохвильові хвилеводи застосовуються переважно у приймальних трактах систем космічного зв'язку, РЛС далекого виявлення, протяжних лініях РРЛ і в пристроях міліметрового діапазону.

В круглих хвилеводах звичайно використовуються хвилі типу H_{11} , E_{01} , H_{01} . Однохвильовий режим практично не використовується, тому що при поширенні тільки хвилі H_{11} ($a \approx \lambda_c / 3$) коефіцієнт перекриття малий – $k_f = 1,3$. Тому розміри вибирають так, щоб існували дві хвилі – H_{11} і E_{01} і не поширювалась хвиля H_{21} . При цьому $a \approx \lambda_c / 2,33$ і $f_{кр}^{H_{11}} / f_{кр}^{H_{20}} = 1,6$, $f_n = 1,25 f_{кр}^{H_{11}}$ і $\frac{\Delta f}{f_0} \approx 28\%$. Для вибіркового приглушення хвиль вищого типу E_{01} , H_{01} вживаються **фільтри типів хвиль**. Приклади таких фільтрів наведені на рис. 7.39.

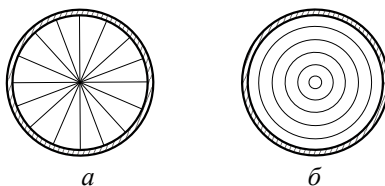


Рис. 7.39

Найпростіший фільтр **відбивного типу** являє собою решітку з провідників або пластин, орієнтованих паралельно лініям електричного поля у хвилеводі. Радіальний фільтр (рис. 7.39, *a*) відбиває хвилю E_{01} і пропускає хвилю H_{01} . Кільцевий фільтр (рис. 7.39, *б*) на ці типи хвиль діє протилежно – відбиває хвилі H_{01} і пропускає E_{01} (див. рис. 7.25, *д*, 7.26, *б*). Підкреслимо, що більш ефективні не відбивні, а **поглинальні фільтри**.

Хвиля типу E_{01} , яка не є основною, також знайшла технічне застосування. Позитивна властивість її – повна кругова симетрія поля, завдяки чому вона застосовується в обертових з'єднаннях антенних пристроїв НВЧ. Крім того, ця хвиля застосовується в прискорювачах елементарних частинок, де суттєву роль відіграє позовжня складова електричного поля.

Як зазначалось раніше, хвиля H_{01} має низьке загасання на частотах, які в декілька разів перевищують критичну частоту, що дозволяє використати її в системах дальнього зв'язку.

Основний недолік хвилеводів дальнього зв'язку полягає в тому, що вони принципово багатохвильові. В таких хвилеводах збуджуються хвилі вищих типів і створюється так званий “попутний потік” хвиль. “Перекачування” енергії особливо інтенсивно відбувається між виродженими хвилями H_{01} і E_{11} . Цей недолік усувається зміною v_ϕ і збільшенням загасання хвилі E_{11} у хвилеводах спеціальних конструкцій. Одна з них – хвилевід з діелектричним шаром, який наноситься зсередини на металеву стінку. Оскільки у хвилі E_{11} напруженість електричного поля максимальна біля стінок, а в H_{01} мала, то хвиля E_{11} ефективно взаємодіє з діелектриком – уповільнюється і поглинається.

Широко вживаються також хвилеводи із спіральними і кільцевими стінками. Вони збираються з ізольованих металевих кілець або із спіралі, намотаної виток до витка з ізольованого проводу. Ізоляція порушує позовжні струми всіх типів хвиль, крім H_{01} , у якій струми кільцеві. Штучно створена анізотропна провідність приводить до самофільтрації паразитних хвиль.

Питання для самоперевірки

1. Що являє собою енергетична (групова) швидкість поширення сигналу у ЛП?
2. Сформулюйте умову неспотвореної передачі сигналу у ЛП.
3. Чим зумовлена і від чого залежить потужність, яка переноситься по хвилеводу?
4. Що таке гранична потужність у ЛП? Від чого вона залежить?
5. Якими чинниками зумовлені втрати у ЛП?
6. Від яких чинників залежить коефіцієнт загасання хвилі основного типу у прямокутному хвилеводі?
7. Які типи хвиль у круглому хвилеводі мають аномально мале загасання? Чому?
8. За якими умовами вибирають розміри хвилеводів?
9. Порівняйте перекриття по діапазону частот прямокутного та круглого хвилеводів.
10. Назвіть особливості поширення хвиль H_{11} (E_{01}) у круглому хвилеводі.

7.8. Коаксіальна лінія (хвилевід)

У дециметровому і метровому діапазонах хвиль масогабаритні показники металевих хвилеводів стають незадовільними. Тому в цих діапазонах хвиль і при довших хвилях для передачі енергії застосовують **коаксіальні лінії**, що мають невеликі поперечні розміри.

Коаксіальна лінія є лінією передачі закритого типу і складається з ізольованих один від одного металевих провідників (рис. 7.1, в, рис. 7.40). В такій системі можливе існування хвиль класів Т, Е, Н.

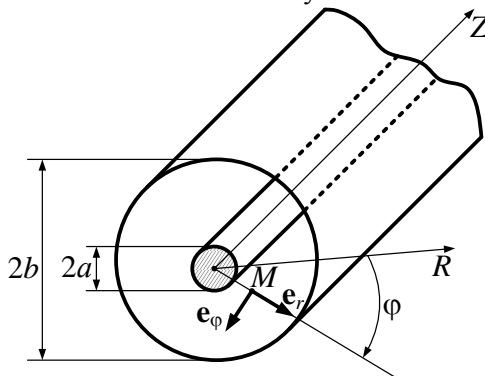


Рис. 7.40

Вважатимемо, що параметри однорідного та ізотропного діелектрика у коаксіальній лінії ϵ_a, μ_a , втрати відсутні $\sigma_d = 0$, провідники ідеальні ($\sigma_m \rightarrow \infty$).

Для розрахунку ЕМП скористаємося циліндричною системою координат (r, φ, z) . У разі хвильового процесу поле хвилі типу Т будемо шукати у вигляді

$$\mathbf{E}(r, \varphi, z) = \mathbf{E}_\perp(r, \varphi) \cdot e^{-jkz}. \quad (7.67)$$

Методика розрахунку поля викладена у п. 7.2. Оскільки у хвиль типу Т поздовжні компоненти поля відсутні ($E_z = 0, H_z = 0$), то з рівностей (7.5), (7.15) виходить, що вектори $\mathbf{E}_\perp, \mathbf{H}_\perp$ задовольняють рівнянням Лапласа:

$$\nabla_\perp^2 \mathbf{E}_\perp = 0, \quad \nabla_\perp^2 \mathbf{H}_\perp = 0. \quad (7.68)$$

Рівняння Лапласа (7.68) можна не розв'язувати, а скористатися тим, що розподіл поля у поперечній площині збігається з розподілом відповідних статичних полів. Для коаксіального хвильоводу електростатичне поле є радіальним і змінюється як $1/r$, тому можна записати

$$\mathbf{E}_\perp(r, \varphi) = \mathbf{e}_r \frac{A}{r},$$

де A – постійний коефіцієнт, залежний від потужності.

Напруженість електричного поля максимальна у поверхні центрального провідника

$$\left. \frac{A}{r} \right|_{r=a} = \frac{A}{a} = E_0, \quad A = aE_0.$$

Тоді напруженість електричного поля у коаксіальному хвильоводі можна записати у вигляді

$$\mathbf{E}(r, \varphi, z) = \mathbf{e}_r \frac{a}{r} E_0 e^{-j(\omega t - kz)}. \quad (7.69, a)$$

При записі (7.69, а) прийнято, що фаза поля у початку координат дорівнює нулю, а залежність поля від координати φ відсутня через симетрію задачі.

Вираз для вектора \mathbf{H} напруженості магнітного поля можна отримати із формул зв'язку між поперечними компонентами хвилі типу Т:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp = \frac{1}{Z_T} [\mathbf{e}_z, \mathbf{E}_\perp] = \mathbf{e}_\varphi \frac{a}{r} \cdot \frac{E_0}{Z_T} e^{-j(\omega t - kz)}. \quad (7.69, б)$$

Як і для статичних полів, магнітне поле є азимутальним.

Оскільки Т-хвилі можуть поширюватися при будь-якій частоті, то ця хвиля є основною, а Е і Н-хвилі виключаються відповідним вибором розмірів поперечного перетину лінії.

Структура поля Т-хвилі показана на рис. 7.41.

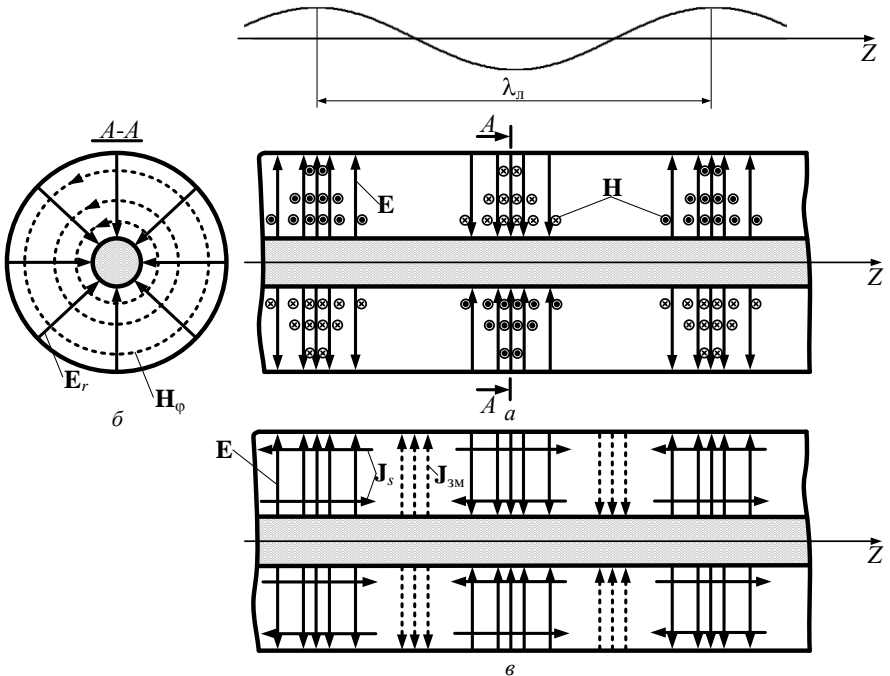


Рис. 7.41

Густина поверхневого струму на поверхні провідників містить тільки поздовжні складові, що протікають в протилежних напрямках на зовнішньому і внутрішньому провідниках (рис. 7.41). Величина густини струму внутрішнього провідника в стільки разів перевершує густину струму провідності зовнішнього провідника, в скільки разів внутрішній радіус зовнішнього провідника більше внутрішнього. Струм зміщення випереджає за фазою електричне поле на $\pi/2$. У просторі лінії $\mathbf{J}_{\text{зм}}$ випереджають лінії \mathbf{E} на $\lambda_{\text{л}}/4$ (рис. 7.41, в)

Потужність, яка передається по коаксіальному хвилеводу хвилею Т,

$$P = \frac{1}{2Z_{\text{T}}} \int_a^b \int_0^{2\pi} \left| E_0 \frac{a}{r} \right|^2 d\varphi r dr = \frac{\pi}{Z_{\text{T}}} E_0^2 a^2 \ln \frac{b}{a}, \quad (7.70)$$

і при фіксованому радіусі b зовнішнього провідника максимальна при $\ln \frac{b}{a} = 0,5$, тобто при $b = a\sqrt{e} = 1,649a$.

Коефіцієнт загасання хвилі за рахунок втрат в металі і діелектрику

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{2,3R_{\text{s}}(1+b/a)}{2b[\text{см}]\ln(b/a)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \quad \partial\text{Б/м}, \quad (7.71)$$

$$\alpha_{\text{д}} = 27,3\sqrt{\varepsilon} \text{tg } \delta / \lambda_0 [\text{м}], \quad \partial\text{Б/м}, \quad (7.72)$$

де R_{s} – поверхневий опір металу внутрішнього і зовнішнього провідників в омах.

Як правило, $\alpha_{\text{д}} \ll \alpha_{\text{м}}$ і значення $\alpha_{\text{м}}$ при фіксованому радіусі досягає мінімального значення при $b/a = 3,591$. Таким чином, умови передачі максимальної потужності і мінімуму втрат не збігаються, тому розміри поперечного перетину лінії слід вибирати залежно від того, яка вимога до лінії є домінуючою. При виборі розмірів лінії необхідно також враховувати умову єдиності основної хвилі. Аналіз

показує, що із всіх хвиль класу Е найбільшу критичну довжину хвилі має хвиля типу E_{01} , в якій

$$\lambda_{\text{кр}}^{E_{01}} \approx 2(b-a), \quad (7.73)$$

а з хвиль класу Н – хвиля H_{11}

$$\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} \approx \pi(b+a). \quad (7.74)$$

Обидві ці хвилі будуть відсутні, якщо вибрати поперечні розміри з умови $\lambda > \pi(a+b)$. При $b/a = 1,649$ значення $a < 0,12\lambda$.

Діаграма типів коливань коаксіального хвилеводу наведена на рис. 7.42.

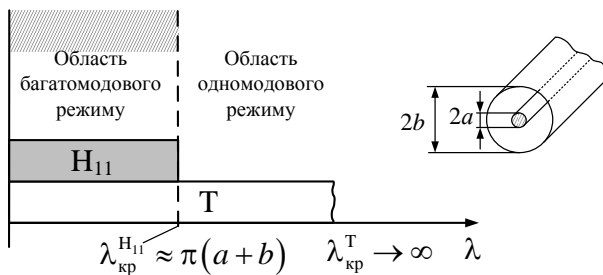


Рис. 7.42

Приклад 7.8. Знайти частотні межі роботи коаксіального кабелю у одномодовому режимі. Розміри кабелю $a = 1 \text{ мм}$, $b = 15 \text{ мм}$, параметри діелектрика, який заповнює кабель, $\varepsilon = 2$, $\mu = 1$.

Розв'язок. Основна хвиля, яка поширюється у коаксіальному хвилеводі, Т-хвиля, для якої $f_{\text{кр}}^T = 0$, $\lambda_{\text{кр}}^T = \infty$.

Критична довжина хвилі першого вищого типу H_{11} знаходиться з виразу (7.74)

$$\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} \approx \pi(a+b) = 3,14 \cdot 16 \cdot 10^{-3} = 5,02 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Звідси

$$f_{\text{кр}}^{H_{11}} = c / (\sqrt{\varepsilon} \cdot \lambda_{\text{кр}}^{H_{11}}) = 3 \cdot 10^8 / (\sqrt{1,5} \cdot 5,02 \cdot 10^{-2}) = 4,9 \text{ ГГц.}$$

Таким чином, частотні межі одномодового режиму $0 < f < 4,9 \text{ ГГц}$.

У інженерній практиці часто зручніше використовувати замість диференціальних (у точці) характеристик поля (напруженості полів, характеристичного опору) їх інтегральні аналоги: напругу $U = \int \mathbf{E}d\mathbf{l}$, струми $I = \oint \mathbf{H}d\mathbf{l}$ падаючих хвиль і хвильовий опір $Z_{\text{хв}} = U/I$. Напруга визначається між провідниками лінії, а струм – в кожному провіднику лінії.

Враховуючи, що стосовно коаксіальної лінії для знаходження напруги U інтегрування проводиться уздовж радіуса, тобто $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_r dr$, а для струму I – по замкнутому контуру на поверхні внутрішнього (або зовнішнього) провідника, тобто $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_\varphi r d\varphi$, де $r = a$ (або b), отримаємо:

$$U(z) = E_0 a \ln \frac{b}{a} e^{-jkz}, \quad I(z) = E_0 2\pi a \frac{e^{-jkz}}{Z_T}. \quad (7.75)$$

Струми, що протікають по внутрішньому і зовнішньому провідниках, однакові (хоча густина струмів різна). Хвильовий опір

$$Z_{\text{хв}} = \frac{Z_0}{2\pi\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{b}{a} \approx \frac{138}{\sqrt{\epsilon}} \lg \frac{b}{a} \quad (7.76)$$

відрізняється від характеристичного опору і залежить від розмірів поперечного перерізу і електричних параметрів середовища, що заповнює хвилевід. Лінія з повітряним заповненням має мінімальне загасання при $Z_{\text{хв}} = 76,7 \text{ Ом}$, а максимальну потужність передає при $Z_{\text{хв}} = 30 \text{ Ом}$.

Приклад 7.9. Коаксіальний хвилевід має розміри $a = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $b = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ і заповнений діелектриком з параметрами $\epsilon = 2,25$. Знайти амплітуду струму у хвилі, якщо амплітуда напруги дорівнює 40 В .

Розв'язок. З формули (7.76) знайдемо хвильовий опір

$$Z_{\text{хв}} = \frac{Z_0}{2\pi\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{b}{a} = \frac{120\pi}{2\pi\sqrt{2,25}} \ln 3 = 43,9 \text{ Ом}.$$

Звідси

$$I = U/Z_{\text{хв}} = 40/43,9 = 0,91 \text{ A.}$$

Напруга і струми (7.75) змінюються уздовж лінії передачі за таким же законом, як і напруженості полів (7.69). Проте в них втрачена інформація про тонку структуру поля в поперечній площині. Разом з тим знання напруги та струму дозволяє розрахувати потужність, що переноситься по лінії передачі (7.70), за простою формулою теорії кіл

$$P = \frac{1}{2} \dot{U} \dot{I}^* = \frac{U^2}{2Z_{\text{хв}}} = \frac{I^2 Z_{\text{хв}}}{2}. \quad (7.77)$$

Знання хвильового опору $Z_{\text{хв}}$ необхідне для узгодження лінії передачі з навантаженням і генератором.

При виборі поперечних розмірів коаксіальної лінії виходять з вимог забезпечення роботи лише на одній хвилі; забезпечення мінімальних загасань; забезпечення передачі максимальної потужності за відсутністю електричного пробую.

Граничну потужність $P_{\text{гр}}$ можна знайти з (7.70), зробивши заміну $E_0 \rightarrow E_{\text{гр}}$, звідки

$$P_{\text{гр}} = \frac{\pi}{Z_{\text{т}}} E_{\text{гр}}^2 a^2 \ln \frac{b}{a}. \quad (7.78)$$

Напруга електричного пробую з останнього виразу

$$U_{\text{пр}} = \sqrt{2Z_{\text{хв}} P_{\text{гр}}} = E_{\text{гр}} a \ln \frac{b}{a}. \quad (7.79)$$

Коаксіальні лінії бувають жорсткими і гнучкими.

У жорстких конструкціях коаксіального хвильоводу точно центрування внутрішнього провідника здійснюється або за допомогою чвертьхвильових металевих ізоляторів, або за допомогою діелектричних опорних шайб. У гнучкій коаксіальній лінії зовнішній провідник виконується у вигляді облєтєння з мідного дроту або стрічки, а внутрішній – зазвичай у вигляді джгута з декількох тонких провідників.

Використовується гнучкий діелектрик. Зовні застосовується покриття для захисту від метеофакторів і механічних пошкоджень. Гнучкі лінії мають більші втрати і меншу електричну міцність порівняно з жорсткими лініями. На гнучкі радіочастотні кабелі розроблені стандарти. Стандартні коаксіальні кабелі мають різні хвильові опори, зокрема, 50 і 75 Ом.

Протяжні коаксіальні лінії застосовуються в основному до частот в декілька сотень мегагерц. На частотах понад 3 ГГц загасання в коаксіальній лінії стає таким значним порівняно із загасанням в порожнистих металевих хвилеводах, що до частот приблизно 10 ГГц застосовують лише короткі відрізки гнучких коаксіальних ліній для міжблокових і внутрішньоблокових з'єднань у приймальній і вимірвальній апаратурі.

Задачі для самостійного розв'язку

1. Коаксіальний хвилевід має параметри: $a = 1$ мм, $b = 4$ мм, $\epsilon = 2$, $\mu = 1$. Між провідниками створена різниця потенціалів $U = 800$ В. Знайдіть напруженість електричного поля на колі радіусом $r_0 = 1,75$ мм.

2. Діелектриком коаксіального кабелю служить поліетилен ($\epsilon = 2,25$, $\mu = 1$). Розміри поперечного перетину: $a = 1$ мм, $b = 3,5$ мм. Електромагнітна хвиля переносить уздовж кабелю потужність $P = 1,5$ кВт. Визначіть амплітуду напруги U між провідниками кабелю.

3. Коаксіальний хвилевід має повітряне заповнення і провідники радіусами $a = 5$ мм, $b = 15$ мм. Амплітуда напруженості електричного поля електромагнітної хвилі на поверхні внутрішнього провідника рівна $6 \cdot 10^4$ В/м. Обчисліть амплітудні значення густини поверхневого електричного струму $J_s(a)$ і $J_s(b)$ на внутрішньому і зовнішньому провідниках.

Питання для самоперевірки

1. Які типи хвиль можуть існувати у коаксіальному хвилеводі?
2. Які типи хвиль є основними у коаксіальному хвилеводі?
3. Нарисуйте діаграму типів коливань для коаксіального хвилеводу.
4. Дайте визначення характеристичного та хвильового опору у лініях передач.

5. Якими чинниками зумовлені втрати потужності у коаксіальній лінії?

6. За якими критеріями вибирають поперечні розміри коаксіальних хвилеводів?

7.9. Хвилеводи складних перерізів

В попередніх розділах ми розглянули хвилеводи найпростіших перерізів – прямокутного, круглого та коаксіального. Разом з тим в елементній базі сучасних НВЧ технологій помітне місце займають хвилеводи складних перерізів (див. рис. 7.1, $z - z$), що пояснюється рядом їх переваг перед іншими типами хвилеводів. Порівняно із стандартними хвилеводами прямокутного і круглого перерізів вони мають більшу робочу смугу частот на хвилі основного типу, менші габарити і масу, нижчий характеристичний опір при малій дисперсії. Проте технологічно (при виробництві) вони дуже трудомісткі. Велику увагу приділяють частково заповненим хвилеводам, діелектричним, стрічковим лініям передачі та іншим.

У цьому та наступних підрозділах стисло розглянемо деякі особливості характеристик та побудови таких ЛП.

7.9.1. П- та Н-подібні хвилеводи

Іноді виникає необхідність у передачі енергії заданої частоти по порожнистому хвилеводу зі зменшеними поперечними розмірами, тобто треба збільшити частотний діапазон роботи хвилеводу. Перший шлях цього – збільшити діелектричну проникність діелектрика, який заповнює хвилевід, $\epsilon > 1$. При цьому довжина хвилі генератора в середовищі зменшується в $\sqrt{\epsilon}$ разів і умова $\lambda < \lambda_{кр}$ виконуватиметься при зменшених поперечних розмірах хвилеводу, однак при цьому збільшуються теплові втрати в діелектрику.

Частотний діапазон одноמודового прямокутного хвилеводу, як відзначено у п. 7.7.3, складає $k_f = 1,6$. Другий варіант збільшення коефіцієнта перекриття k_f полягає у тому, щоб знизити частоту $f_{кр}$ основної хвилі, не змінюючи $f_{кр}$ найближчої хвилі вищого типу. Така можливість реалізується в П- і Н-подібних хвилеводах (рис.

7.43), які являють собою видозмінену конструкцію прямокутного хвилеводу.

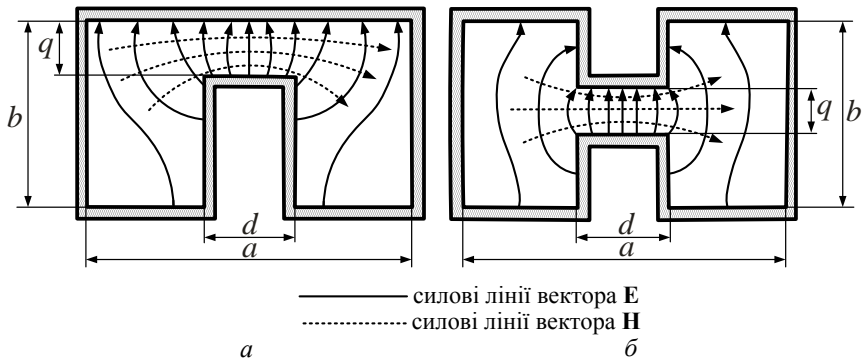


Рис. 7.43

Зменшення відстані між широкими стінками в центральній частині хвилеводу (у зазорі), де напруженість електричного поля хвилі типу H_{10} максимальна, еквівалентне збільшенню ємності, що призводить до зменшення критичної частоти. Електричне поле хвилі H_{20} в області виступу близьке до нуля, тому зменшення її критичної частоти незначне.

Робочий діапазон П-подібного хвилеводу може бути у декілька разів більше, ніж прямокутного. Відповідно зменшується і дисперсія. При однаковій критичній довжині хвилі поперечні розміри П-подібного хвилеводу значно менші, ніж прямокутного.

Критичну довжину хвилі основного типу, аналогічного H_{10} прямокутного хвилеводу, приблизно можна розрахувати за формулою

$$\lambda_{\text{кр}} \approx \pi \sqrt{(a-d) \frac{db}{q}}.$$

Звідси видно, що, чим менший зазор q у хвилеводі, тим більше значення критичної довжини хвилі.

Залежність $\lambda_{\text{кр}}$ від величини зазору між виступами або виступом і верхньою стінкою хвилеводу q зумовлена наявністю концентрації електричного поля основної хвилі в зазорі, що підсилює її подібність до хвилі T , для якої $\lambda_{\text{кр}} \rightarrow \infty$. Металеві ребра (виступи) істотно спотворюють електромагнітне поле основної хвилі, але слабо впливають на поле найближчої до

неї хвилі вищого типу H_{20} , тому що ребра знаходяться в місцях мінімального електричного поля цієї хвилі. Таким чином, з одного боку, зберігаючи габаритні розміри хвилеводу $a \times b$, можна шляхом зміни зазору q розширити робочий діапазон частот одномодового режиму, що може бути в кілька разів більше, ніж у прямокутного хвилеводу. З іншого боку, зберігаючи значення $\lambda_{кр}$ основної хвилі, можна зменшити габаритні розміри П- і Н-подібних хвилеводів порівняно зі стандартними прямокутними хвилеводами, розрахованими на ту ж середню частоту. Найбільш доцільно вибирати відношення d/a у межах $(d/a) \approx 0,2 \div 0,3$.

Разом з зазначеними перевагами П-подібні хвилеводи мають і недоліки – менша максимальна потужність, що передається, і більше загасання, ніж у прямокутних хвилеводів з такими ж поперечними розмірами. Це пояснюється концентрацією електричного поля в області зазору і збільшенням периметра стінок при тій же площі поперечного перерізу.

Н-подібний хвилевід можна розглядати як два П-подібних хвилеводи, що мають загальну широку стінку. Якщо її прибрати, картина поля основного типу хвилі в кожному з П-подібних хвилеводів не зміниться. Тому критична частота і дисперсія основного типу хвилі в цьому хвилеводі такі ж, як і у відповідному П-подібному, проте максимальна потужність, що передається, зростає приблизно вдвічі, а загасання зменшується за рахунок виключення втрат в загальній стінці.

7.9.2. Еліптичні хвилеводи

Основний недолік хвилі типу H_{11} в круглому хвилеводі – нестійкість її площини поляризації. При поширенні в регулярному хвилеводі хвилі з лінійною поляризацією її можна представити у вигляді суми двох лінійно поляризованих хвиль відносно двох взаємно перпендикулярних напрямків (рис. 7.44). Коли хвилевід регулярний, то обидві хвилі мають однакові сталі поширення, тобто є виродженими. Фазові швидкості хвиль однакові, тому положення площини поляризації залишається незмінним. Проте при невеликій еліптичності хвилеводу дві хвилі мають різні $v_{ф}$.

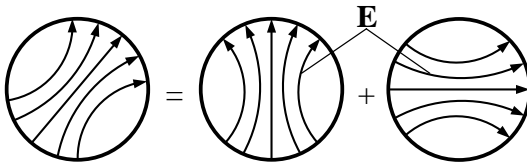


Рис. 7.44

Таким чином, площина поляризації сумарної хвилі може самовільно повертатись. У загальному випадку поляризація буде еліптичною, тобто виникає крос-поляризація, що призводить до втрат енергії сигналу, який передається ЛП, через те що конструкція приймальних пристроїв розрахована на роботу з лінійно поляризованими сигналами.

Для оцінювання втрат при поляризаційному виродженні вводиться коефіцієнт крос-поляризації

$$T_{\text{кп}} = 20 \lg(E_{2\text{min}} / E_{2\text{max}}),$$

де $E_{2\text{min}}, E_{2\text{max}}$ – відповідно мінімальне і максимальне значення радіальної складової поля на виході хвилеводу.

У хвилеводних трактах коефіцієнт крос-поляризації не повинен перевищувати величину $T_{\text{кп}} = (30 \dots 40 \text{ дБ})$, що пред'являє жорсткі вимоги до однорідності хвилеводів. На практиці це забезпечується застосуванням високоточних біметалевих труб із малим допуском на внутрішній діаметр, високою точністю стикування секцій, прямолінійним трасуванням круглого хвилеводу.

Недоліки застосування хвилі основного типу H_{11} у круглому хвилеводі відсутні при застосуванні **еліптичних хвилеводів** (рис. 7.45).

Використання еліптичного хвилеводу (ЕХ) дозволяє зберегти положення площини поляризації незалежно від трасування хвилеводу. Хвилевід із півосями a і b характеризується ексцентриситетом

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad (b < a).$$

В ЕХ можуть поширюватися дві групи хвиль: парні магнітного H_{mn}^c та електричного E_{mn}^c типів і непарні – відповідно H_{mn}^s і E_{mn}^s . Картини полів (рис. 7.45) збігаються. Збігаються також назви хвиль, однак відсутнє поляризаційне виродження, тому що критичні частоти для H_{11}^c і H_{11}^s різні.

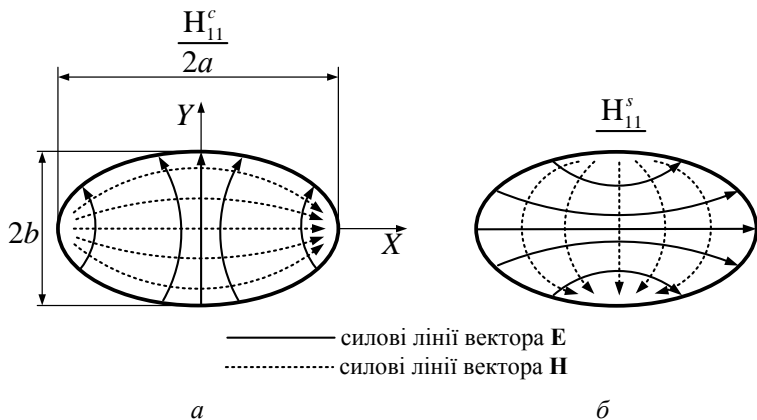


Рис. 7.45

При малій еліптичності $f_{кр}^{H_{11}^c} / f_{кр}^{H_{11}^s} = \frac{b}{a}$. Стійкість поляризації в ЕХ приблизно така сама, як і в прямокутному. Критична частота основної хвилі H_{11}^c розраховується з точністю до 1% за наближеною формулою

$$f_{кр}^{H_{11}^c} = \frac{8,7849}{a} (1 + 0,0236e^2).$$

Оптимальне співвідношення розмірів еліптичного хвилеводу $(b/a) \approx (0,5 \dots 0,6)$ вибирається з тих самих міркувань, що й прямокутного. При $(b/a) = 0,5$ найближча хвиля вищого типу H_{21}^c має критичну частоту в 1,82 раза більшу, ніж H_{11}^c , при цьому $\Delta f / f_0 = 37\%$. Розрахунки показують, що при однакових периметрах загасання хвиль ЕХ менше, ніж у прямокутного хвилеводу приблизно

на 10 – 30 %, що й зумовило його застосування в радіотехнічних системах (РТС).

Широкого поширення набули **гнучкі еліптичні хвилеводи** (ЕХГ). За допомогою ЕХГ можна значно спростити монтаж і експлуатацію трактів НВЧ РТС через те, що вони дозволяють усувати використання секціонованих жорстких хвилеводів, тобто зменшити кількість з'єднань і поліпшити однорідність тракту та його герметичність.

7.9.3. Гнучкі гофровані хвилеводи

Гофровані хвилеводи знаходять широке застосування в рухомих і стаціонарних радіосистемах. Суттєвою перевагою перед звичайними металевими хвилеводами є гнучкість і можливість використання в пристроях, на габарити яких накладаються жорсткі обмеження. Намотування гофрованих хвилеводів на барабани дозволяє створювати протяжні (до 100 м) безфланцеві ЛП. Гофрування оберігає хвилеводи від розтягування і розриву, що важливо при згортанні і розгортанні фідерів.

Гнучкі гофровані хвилеводи випускаються з еліптичною, прямокутною і коконоподібною формою поперечного перерізу.

Гофровані еліптичні хвилеводи (див. рис. 7.1, *к*) широко застосовуються у фідерних трактах стаціонарних і рухомих радіотехнічних засобів.

Гофровані хвилеводи прямокутного перерізу (див. рис. 7.1, *і*) виконують у вигляді коротких секцій для з'єднання різних елементів НВЧ-трактів з жорсткими хвилеводами.

Коконоподібні хвилеводи (див. рис. 7.1, *л*) застосовують для з'єднання Н-подібних хвилеводів гнучкими елементами.

Основне призначення гофрованих хвилеводів – забезпечення механічного розв'язку елементів НВЧ-апаратури рухомих радіотехнічних систем та спрощення НВЧ-трактів апаратури.

Головна відмінність гофрованих хвилеводів від звичайних – гофрована поверхня (див. рис. 7.1, *і – л*), яка забезпечує гнучкість таких хвилеводів.

Дослідження показують, що параметри гофри можуть бути вибрані так, щоб необхідна гнучкість хвилеводу досягалася при мінімальному зростанні рівня втрат. Щоб уникнути резонансних явищ період гофри не повинен досягати чверті довжини хвилі.

Наявність гофри ускладнює розрахунок гофрованих хвильоводів. На відміну від стандартних гладких хвильоводів, гофрована поверхня додає хвильоводам нові частотні властивості. Це особливо актуально при переході в сантиметровий та міліметровий діапазони, де відношення розмірів гофри до поперечних розмірів хвильоводу реально витримати досить великим дуже складно.

7.9.4. Частково заповнені хвильоводи

Лінії передачі різних типів є основою для створення різноманітних пристроїв – НВЧ-вентилів, атенуаторів, фазообертачів, змішувачів, фільтрів і т.п. Для цього часто переріз ЛП змінюють – у хвильоводі, наприклад, розміщують вставки із матеріалу, параметри якого ϵ , μ , σ відмінні від характеристик основної частини діелектричного каналу хвильоводу (рис. 7.46). Це стало доцільним з появою нових високоякісних (з $\text{tg } \delta \ll 1$) діелектриків та феритів.

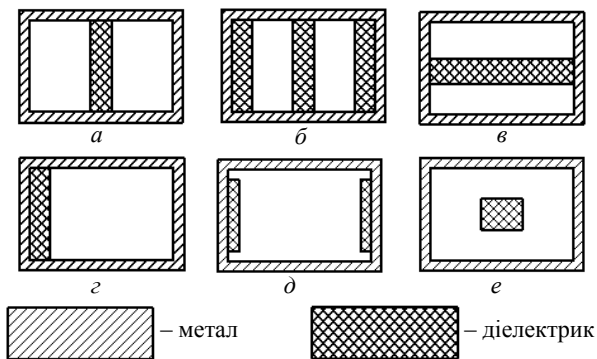


Рис. 7.46

Частково заповнені хвильоводи мають певні переваги порівняно з однорідними. Так, змінюючи вид матеріалу заповнення (діелектричну та магнітну проникність ϵ , μ та значення σ), можна змінювати сталу поширення і коефіцієнт загасання у широких межах і виконувати фазообертачі та атенуатори. Від положення вставки у хвильоводі залежить ступінь взаємодії ЕМП хвилі з матеріалом і результуючий зсув фази хвилі та зміна її амплітуди.

Застосування частково заповнених хвилеводів дозволяє змінювати критичні довжини хвиль, змінювати розподіл потоку потужності в поперечному перерізі, положення областей колової поляризації магнітного поля і інші характеристики.

З'являються додаткові можливості по збільшенню граничної потужності, що пропускається хвилеводом, приглушенню небажаних типів хвиль і створенню сприятливіших умов для поширення вибраних типів хвиль. Поліпшення характеристик прямокутних хвилеводів при частковому заповненні їх діелектриком супроводжується, як правило, зменшенням їх поперечних розмірів і більшою стабільністю цих характеристик в діапазоні частот. Це є принциповою основою для створення інтегральних (стрічкових) ліній передач НВЧ-діапазону. Недоліком хвилеводів, заповнених діелектриком, є підвищений рівень загасання за рахунок втрат в діелектрику.

Даний тип хвилеводів можна вважати перехідним типом між по-
рожнистими металевими хвилеводами і екранованими стрічковими лініями передач (рис. 7.3, ж, з), а також як основу для створення цілого класу хвилеводно-діелектричних фільтруючих структур.

7.9.5. Надрозмірні хвилеводи

Застосування міліметрових хвиль ($f = 30 - 300 \text{ ГГц}$) призводить до того, що розміри хвилеводів для роботи в одномодовому режимі стають дуже малими. Так, наприклад, для робочого діапазону $140 - 220 \text{ ГГц}$ Міжнародна електротехнічна комісія рекомендує хвилевід типу R1800 перерізом $a \times b = 1,3 \times 0,65 \text{ мм}^2$.

Технологія виготовлення хвилеводів таких перерізів ускладнена, вартість апаратури з такими ЛП збільшується. Крім того, зі збільшенням частоти зростають втрати (за рахунок зростання поверхневого опору R_s , а також за рахунок збільшення відношення L/S_{\perp} , де L – периметр ЛП, S_{\perp} – площа поперечного перерізу), зменшується величина передаваної потужності.

У цьому разі доцільно використовувати **надрозмірні хвилеводи**, у яких розміри поперечного перерізу перевищують довжину хвилі λ .

Одномодовий режим роботи хвилеводу при цьому забезпечується шляхом зміни умов поширення неробочих типів хвиль так, щоб вони або не могли поширюватися, або мали високі критичні частоти.

Розрідження спектру частот досягається двома способами: розміщенням поглинаючих плівок на поверхні хвилеводу та відведенням енергії небажаних типів хвиль шляхом прорізання поздовжніх щілин в оболонці хвилеводу. Структура поля хвиль деяких типів при цьому сильно спотворюється, а енергія випромінюється через щілини, що подавляє поширення. Спотворення поля і випромінювання через щілини для основного типу хвилі виявляються незначними, внаслідок чого умови для її поширення зберігаються. Прикладом такої надрозмірної ЛП може служити **жолобковий хвилевід** (рис. 7.47, а), який можна розглядати як прямокутний, розмірами $a \times b$, з щілинами завширшки a_1 , що прорізани в широких стінках.

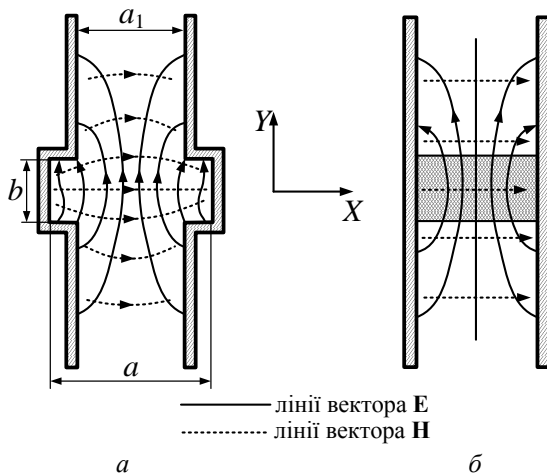


Рис. 7.47

На робочій хвилі типу H_{10} випромінювання енергії в щілині практично не відбувається тому, що поздовжні струми хвилі H_{10} практично не збуджують щілину і хвиля поширюється з малим загасанням.

Хвилі з антисиметричним розподілом поля, наприклад H_{20} , збуджують в щілинах Т-хвилю, енергія якої випромінюється в простір. В результаті спектр хвилеводу розріджується і збільшується частотний діапазон одномодового режиму. Загасання в жолобковому хвилеводі істотно менше, ніж в прямокутному тих же розмірів.

Так, жолобковий хвилевід з розмірами $a \times b = 7,6 \times 3,4 \text{ мм}^2$, $a_1 = 4,8 \text{ мм}$ має робочий діапазон $37 \dots 150 \text{ ГГц}$ (у прямокутному $26,5 \dots 40 \text{ ГГц}$), а загасання у жолобковому хвилеводі значно менше.

Іншим різновидом надрозмірного хвилеводу служить Н-подібний (рис. 7.47, б). Він складається з двох паралельних металевих площин, між якими перпендикулярно закріплена перемичка у вигляді прямокутної пластини з діелектрика. Діелектрик служить для концентрації енергії хвилі, що поширюється.

У Н-подібному хвилеводі можуть поширюватися гібридні хвилі і хвиля Н (хвиля Е не поширюється). Хвиля Н, маючи критичну частоту, рівну нулю, є основним типом коливання. Гібридні хвилі діляться на два типи: H_x ($E_y = 0$) і E_s ($H_y = 0$). Хвиля E_s не створює поздовжніх струмів, тому втрати в металі зменшуються із зростанням частоти. Основна складова електричного поля **Е** паралельна стінкам Н-подібного хвилеводу, причому інтенсивність поля в напрямі осі *Y* спадає по експоненті і при достатній довжині стінок випромінювання не відбувається. Структура поля хвилі E_s показана на рис. 7.47, б. Загасання хвилі H_x значно вище через збудження поздовжніх струмів.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте переваги та недоліки П- та Н-подібних хвилеводів.
2. Назвіть області застосування еліптичних хвилеводів.
3. Сформулюйте особливості конструкцій гофрованих хвилеводів.
4. Які типи ЛП доцільно використовувати у діапазоні міліметрових хвиль?

7.10. Інтегральні лінії передачі (стрічкові ЛП)

З розвитком радіоелектроніки постійно розширюються області застосування різних пристроїв техніки НВЧ. Це привело до необхідності розробки малогабаритних та технологічних ЛП, які найбільш зручні для розробки інтегральних схем НВЧ та монтажу активних та пасивних елементів НВЧ-схем.

Інтегральні лінії передачі (ІЛП), які також називають **стрічковими**, являють собою спрямовуючі системи, які включають декілька провідних смуг, розділених діелектриком.

Стрічкові ІЛП включають багато варіантів конструктивного виконання: вони можуть бути відкритими та екранованими, симетричними та несиметричними, копланарними, щільними, мікροстрічковими та ін.

Найбільш поширена ІЛП – **несиметрична стрічкова лінія** (рис. 7.48, а).

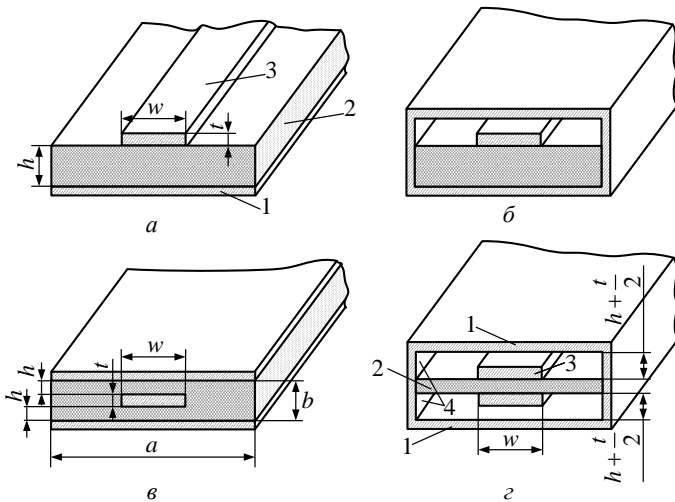


Рис. 7.48

Вона конструктивно виконана з металевої площини (екрана) 1, підкладки (діелектрика) 2 та стрічкового провідника 3. Ця лінія конструктивно найбільш проста, але ЕМП існує у діелектрику та вільному просторі, що призводить до небажаного зв'язку з іншими ІЛП. Для усунення цього ефекту ІЛП екранують і отримують **екрановану несиметричну стрічкову лінію** (рис. 7.48, б).

Симетрична стрічкова лінія наведена на рис. (рис. 7.48, в). Зменшення втрат в діелектрику ІЛП досягають у **високооборотній екранованій стрічковій лінії** (рис. 7.48, з). ІЛП можна вважати конструктивними варіантами двопроводових та коаксіальних ліній передачі з Т-хвилями.

Трансформація цих ЛПП до інтегральних показана на рис. 7.49.

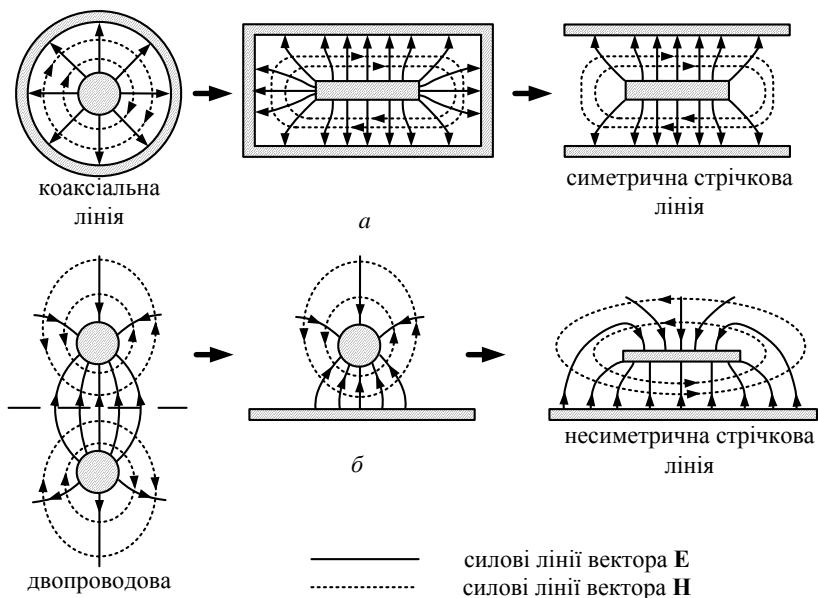


Рис. 7.49

За діелектрик у ЛПП використовують матеріали з малими втратами у діапазоні НВЧ: фторопласт, кераміку, полікор, сапфір, кварц, ферити та ін.

Останнім часом переважно застосовують алюмокераміку Al_2O_3 , діелектрична проникність якої $\epsilon = 7 \dots 10$, тангенс кута втрат $\text{tg } \delta = (1 \dots 6) \cdot 10^{-4}$. Застосування твердих діелектриків дозволяє спростити і здешевити технологію виготовлення стрічкових пристроїв, зменшити приблизно в $\sqrt{\epsilon}$ раз розміри конструкцій порівняно з лініями, заповненими повітрям. Для виготовлення ліній використовуються діелектричні пластини завтовшки 1,5...5 мм, покриті з двох боків металеву фольгою завтовшки до 100 мкм. Один шар фольги в несиметричних лініях є екраном, а другий шар використовується для утворення рисунка стрічкової плати, що визначає топологію пристрою НВЧ. Непотрібна частина фольги вилучається зазвичай хімічним способом.

Мікροстрічкові лінії (МСЛ) передачі виготовляють на основі тонких діелектричних пластин з кераміки або спеціальних кристалічних матеріалів з високою діелектричною проникністю ($\epsilon \geq 10 \dots 15$), завтовшки $0,5 \dots 1$ мм і малими втратами $\text{tg } \delta = (1 \dots 5) \cdot 10^{-4}$.

Аналіз ЛПП досить складний і зазвичай проводиться числовими методами. Втратами на випромінювання для відкритих ЛПП нехтують, тому що поперечні розміри ЛПП малі порівняно з довжиною хвилі.

У стрічкових лініях можуть поширюватися хвилі класів Т, Е, Н, а також гібридні хвилі.

Основною хвилею в ЛПП є Т-хвиля або квазі-Т, яка за структурою і властивостями близька до Т-хвилі. Аналіз таких хвиль проводять на основі квазістатичного наближення. У літературі наведені наближені формули, застосовані при тих або інших допущеннях, і побудовані численні графіки, що дозволяють оцінити параметри інтегральних ліній передач. Розглянемо характеристики основних типів інтегральних ліній передач.

7.10.1. Симетрична стрічкова лінія (ССЛ)

Конструкція ССЛ зображена на рис. 7.48, в. У симетричній стрічкової лінії при достатньо протяжному екрані ($a \rightarrow \infty$) поле практично повністю локалізоване в діелектрику. Тому, незважаючи на існування межі розділу діелектрик-повітря, в лінії поширюється Т-хвиля, для якої $\omega_{\text{кр}} = 0$, хвильове число $\beta = k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = 2\pi/\lambda$. Щоб запобігти можливості поширення хвиль вищих типів і зменшити випромінювання в навколишній простір зазвичай приймають $w < 0,5\lambda$, $b < 0,5\lambda$, $t \ll h$ (рис. 7.48, в). При виборі розмірів враховують необхідне значення хвильового опору $Z_{\text{хв}} = \dot{U}/\dot{I}$, де \dot{U} , \dot{I} – комплексні амплітуди напруги та струму в ССЛ.

Розрахунок $Z_{\text{хв}}$ можна зробити за наближеною формулою (з відносною похибкою не більше 1,24 %):

$$\text{при } \frac{w}{b} > 0,35 \left(1 - \frac{t}{b} \right)$$

$$Z_{\text{XB}} \sqrt{\varepsilon} = \frac{30\pi}{\left(\frac{a_1 w}{b} + A\right)}, \quad (7.80, a)$$

$$\text{де } a_1 = \frac{1}{1 - \frac{t}{b}}; A = \frac{2a_1 \ln(a_1 + 1) - (a_1 - 1) \ln(a_1^2 - 1)}{\pi};$$

$$\text{при } \frac{w}{b} \leq 0,35 \left(1 - \frac{t}{b}\right) \text{ та } w \geq t$$

$$Z_{\text{XB}} \sqrt{\varepsilon} = 60 \ln \left(\frac{4b}{\pi d} \right), \quad (7.80, б)$$

$$\text{де } \frac{d}{w} = 0,5 + 0,8 \frac{t}{w} - 0,12 \left(\frac{t}{w} \right)^2.$$

Як виходить з (7.80), хвильовий опір ССЛ зменшується при збільшенні ε діелектрика, що її заповнює, збільшенні w й t стрічки та зменшенні величини b .

Хвильовий опір збільшується із зменшенням ширини і товщини стрічки.

Втрати в діелектрику стрічкової лінії визначаються за формулою

$$\alpha_d = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}{2} \operatorname{tg} \delta \left[\frac{Hn}{M} \right] = 27,3 \sqrt{\varepsilon} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\lambda_0} \left[\frac{\partial B}{M} \right], \quad (7.81)$$

де λ_0 – довжина хвилі у вакуумі.

Втрати в провідниках, що характеризуються величиною $\alpha_{\text{пр}}$, пропорційні відношенню R_s / Z_{XB} .

На НВЧ втрати в діелектрику α_d , як правило, малі порівняно з втратами в провідниках. Проте в міліметровому діапазоні хвиль втрати α_d стають порівнянними з втратами в провідниках $\alpha_{\text{пр}}$, оскільки втрати в діелектрику із зростанням частоти зростають за лінійним

законом (при незмінному $\operatorname{tg} \delta$), в той час як в провідниках вони пропорційні квадратному кореню з частоти. Розрахунки показують, що навіть у найсприятливішому випадку (при використанні високочастотних діелектриків з малим $\operatorname{tg} \delta$ і добре провідних металів, наприклад міді) стала загасання $\alpha_{\text{д}}$ в ССЛ на частотах вище 1 ГГц має величину від декількох десятих до декількох одиниць децибелів на метр. Причому $\alpha_{\text{д}}$ зростає як зі збільшенням частоти, так і зі збільшенням ϵ . На тих самих частотах коефіцієнт загасання в ССЛ у кілька разів більше коефіцієнта загасання в металевих хвилеводах і коаксіальній лінії, що пояснюється досить малими поперечними розмірами ССЛ і повним діелектричним заповненням лінії.

Для зменшення втрат у діелектрику конструкцію ССЛ змінюють (рис. 7.50). Провідну стрічку між екранами виконують у вигляді двох стрічок 1, нанесених по різні сторони тонкої діелектричної пластини 2. Обидві стрічки перебувають під однаковим потенціалом. Простір між стрічками і екранами заповнено повітрям. Тонка діелектрична пластина забезпечує кріплення й центрування стрічок між екранами. При цьому загасання хвилі в діелектричній пластині досить мале, оскільки через однакові потенціали стрічок концентрація електромагнітного поля в діелектрику невелика. Симетричне розташування пластини 2 між пластинами 3, що екранують, забезпечується спеціальними діелектричними опорами 4.

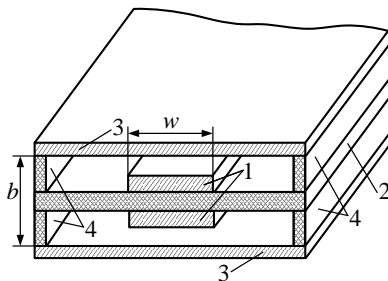


Рис. 7.50

Діапазон робочих частот визначається з умови єдиності Т-хвилі обмежений критичною частотою хвилі $H^{(1)}$ нижчого типу:

$$\omega_{\text{кр}}^{\text{H}^{(1)}} = \frac{30\pi}{b\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{\frac{w}{b} + \frac{\pi}{4}},$$

де w та b виражені в сантиметрах, $\omega_{\text{кр}}$ – в ГГц. Діапазон частот $0 \leq \omega \leq \omega_{\text{кр}}^{\text{H}^{(1)}}$ зменшується при збільшенні відстані b між заземленими пластинами і відносної діелектричної проникності діелектрика, що заповнює лінію.

7.10.2. Несиметрична стрічкова лінія (НСЛ). Мікрострічкова лінія (МСЛ)

Конструкція НСЛ наведена на рис. 7.48, *a*. Вона являє собою двопроводову стрічкову лінію, що складається зі стрічки завширшки w і завтовшки t , поміщеної на відстані h від екрануючої пластини, що має ширину a . Простір між провідниками та над стрічкою заповнено діелектриком з параметрами $\varepsilon, \mu = 1, \sigma_{\text{д}}$. Струмнесучі елементи (стрічка і екран) виконані з металу з питомою провідністю $\sigma_{\text{м}}$. Якщо заповнення НСЛ повітряне ($\varepsilon = 1, \mu = 1$), за відсутністю втрат ($\sigma_{\text{д}} = 0$), при ідеальному провіднику ($\sigma_{\text{м}} = \infty$) і нескінченному екрані ($a \rightarrow \infty$) основною хвилею у НСЛ є Т-хвиля, для якої $\lambda_{\text{кр}} \rightarrow \infty$.

Хвильовий опір НСЛ знаходять за наближеними формулами (похибка $\sim 0,6\%$):

$$Z_{\text{хв}} \sqrt{\varepsilon} = \frac{120\pi}{\frac{w}{h} + \frac{2}{\pi} \ln \left(17,08 \left(\frac{w}{2h} + 0,92 \right) \right)} \text{ при } \frac{w}{h} > 2, \quad (7.82, a)$$

$$Z_{\text{хв}} \sqrt{\varepsilon} = 60 \left(\ln \left(\frac{8h}{w} \right) + \frac{w^2}{32h^2} \right) \text{ при } \frac{w}{h} \leq 2. \quad (7.82, б)$$

При кінцевій товщині стрічки, у випадку $0 < \frac{t}{h} < 0,1$, опір $Z_{\text{хв}}$ для НСЛ можна визначати за (7.82), якщо замість $\frac{w}{h}$ підставити $\frac{w'}{h}$,

$$\text{де } \frac{w'}{h} = \begin{cases} \frac{w}{h} + t \frac{1 + \ln\left(\frac{2h}{t}\right)}{\pi h} & \text{при } \frac{w}{h} > 0,16, \\ \frac{w}{h} + t \frac{1 + \ln\left(\frac{4\pi w}{t}\right)}{\pi h} & \text{при } \frac{w}{h} \leq 0,16. \end{cases} \quad (7.83)$$

Як і у випадку ССЛ, хвильовий опір НСЛ зменшується при збільшенні ε , збільшенні w і t та зменшенні h .

Як показує аналіз, характеристики НСЛ із кінцевою шириною екрануючої пластини за умови $a > (8...12)w$ практично повністю збігаються з аналогічними для НСЛ з $a \rightarrow \infty$.

Однохвильовий режим роботи НСЛ на Т-хвилі і відсутність випромінювання з лінії забезпечуються відповідним вибором поперечних розмірів лінії:

$$w < \frac{\lambda_{\text{л}}}{2} \quad \text{і} \quad h < \frac{\lambda_{\text{л}}}{2}, \quad (7.84)$$

де $\lambda_{\text{л}}$ – довжина Т-хвилі в НСЛ.

Якщо простір між екраном та провідною стрічкою заповнено діелектриком з параметрами $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$, а над стрічкою – повітряне заповнення ($\varepsilon_1 = 1, \mu_1 = 1, \sigma_1 = 0$), то таку лінію передачі називають **мікροстрічковою лінією**.

При поширенні хвилі в МСЛ електромагнітне поле існує як у повітрі, так і у діелектрику. При цьому $E_z \neq 0, H_z \neq 0$, і хвилі в МСЛ є гібридними. Проте, якщо поперечний розмір ЛП значно менше λ , то значення поздовжніх компонент поля значно менше, ніж поперечних, і тому можна вважати, що поле МСЛ збігається з полем Т-хвилі і зветься квазі Т-хвилею, у якої $\lambda_{\text{кр}} = \infty$. Структура ліній еле-

ктромагнітного поля в мікροстрічковій лінії схематично зображена на рис. 7.51 (*a* – поперечний розподіл, *б* – поздовжній розподіл).

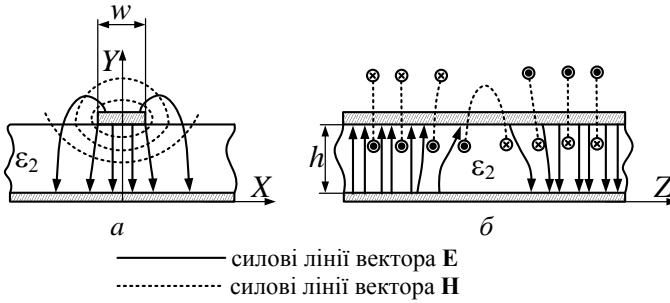


Рис. 7.51

Фазова швидкість хвилі v_ϕ лежить у межах

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{a_2} \mu_{a_2}}} < v_\phi < \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Оскільки мікροстрічкові лінії неоднорідні, то для знаходження основних характеристик такої лінії передачі вводять ефективну діелектричну проникність середовища МСЛ: $\epsilon_{a\text{ef}} = \epsilon_0 \epsilon_{\text{ef}}$ (при цьому $\epsilon_2 > \epsilon_{\text{ef}} > \epsilon_1$).

Для квазі Т-хвилі (якщо товщина провідної стрічки $t \rightarrow 0$ та $\epsilon_1 = 1$) маємо

$$\epsilon_{\text{ef}} = \frac{\epsilon_2 + 1}{2} + \frac{\epsilon_2 - 1}{2 \left(1 + \frac{10h}{w} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (7.85)$$

Фазова швидкість квазі Т-хвилі та довжина хвилі становлять:

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\text{ef}}}}, \quad \lambda_{\text{л}} = \frac{1}{f \sqrt{\epsilon_{\text{ef}} \mu_0}}.$$

Хвильовий опір та умова одномодового режиму знаходяться із співвідношень (7.82), (7.84) при заміні ϵ_2 на $\epsilon_{\text{еф}}$. Квазі Т-хвиля є гібридною, і її характеристики залежать від частоти. Дисперсію хвилі необхідно враховувати, якщо частота більше 1 ГГц.

Втрати у НСЛ знаходять за загальною формулою (7.64) із заміною ϵ_2 на $\epsilon_{\text{еф}}$.

Несиметричні стрічкові лінії є конструктивною основою для створення інтегральних схем НВЧ. Для того щоб можна було знехтувати небажаним електромагнітним зв'язком між сусідніми провідниками схем, відстань між ними повинна перевищувати $(2...3)w$. Відзначимо також, що гранична потужність МСЛ значно менша, ніж така ж потужність у хвилеводів.

Частотний діапазон застосування НСЛ і МСЛ становить 3 – 15 ГГц.

7.10.3. Щілинні та копланарні ЛП

Конструкції **щілинних** та **копланарних** ЛП показані на рис. 7.52, 7.53 – **однобічних** (рис. 7.52, а, 7.53, а) та **двобічних** (рис. 7.52, б, 7.53, б). У вказаних лініях передач ЕМХ поширюється уздовж однієї або двох щілин між провідними стрічками, які розміщені на одній (або двох) поверхнях шару діелектрика, у якого $\epsilon_2 \gg 1$.

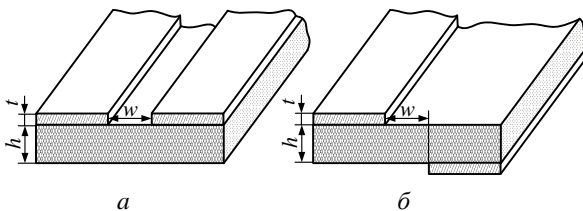


Рис. 7.52

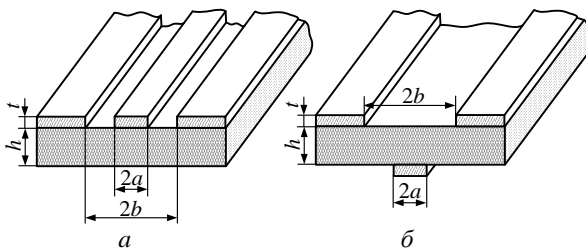


Рис. 7.53

Основним типом хвилі у щільній лінії передачі (ЩЛП) є хвиля, близька до хвилі типу Н. Електричне поле має переважно складові E_x, E_y , а магнітне – усі три складові H_x, H_y, H_z . Структура ЕМП схематично зображена на рис. 7.54.

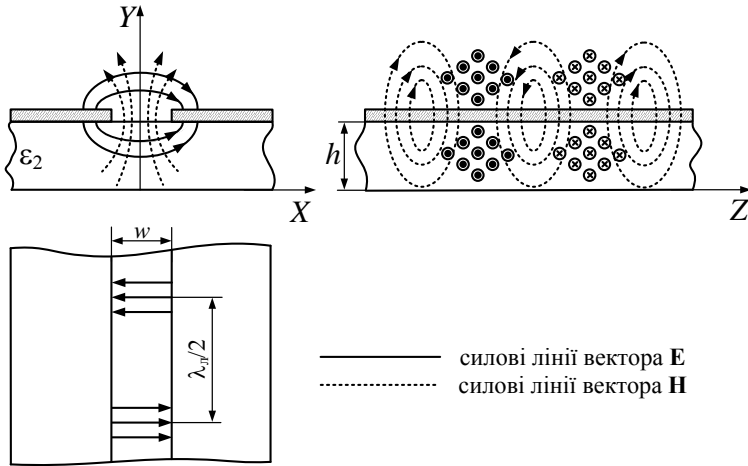


Рис. 7.54

Оскільки вектор \mathbf{E} майже поперечний, можна ввести поняття напруги між провідниками \dot{U} та хвильового опору $Z_{\text{хв}}$ за формулою $Z_{\text{хв}} = |\dot{U}|^2 / 2P$, де P – передавана потужність.

Характеристики ЩЛП ($\lambda_{\text{л}}$, $\nu_{\text{ф}}$) можна оцінити приблизно за формулами:

$$\nu_{\text{ф}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\text{еф}}}}, \quad \lambda_{\text{л}} = \frac{\nu_{\text{ф}}}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_{\text{еф}}}}, \quad \epsilon_{\text{еф}} = \frac{\epsilon_2 + 1}{2}.$$

Одномодовий режим роботи, а також практична відсутність випромінювання забезпечуються, якщо $w < \frac{\lambda_{\text{л}}}{2}$, $h < \frac{\lambda_{\text{л}}}{2}$.

Відзначимо деякі особливості щільних ЛП порівняно з мікстрічковими.

По-перше, у ЩЛП більш різко виявляються дисперсійні властивості; по-друге, при рівних відношеннях $\frac{w}{h}$ і значеннях ϵ_2 хвильовий опір щілинної ЛП більший, ніж у МСЛ; втрати у ЩЛП менші.

Підкреслимо також, що конфігурація електричного поля у ЩЛП дозволяє просто підключати навісні елементи інтегральних мікросхем НВЧ, а наявність областей магнітного поля з коловою поляризацією – створювати невзаємні стрічкові пристрої НВЧ з намагніченими феритами.

Особливу увагою при виготовленні мікросхем НВЧ користуються **хвильовідно-щілинні лінії** (ХЩЛ), – які являють собою екрановані ЩЛП (рис. 7.55). Такі лінії відрізняють від звичайних ЩЛП широкосмужність, малі втрати, зменшені вимоги до допусків, можливість

досить просто переходити від ЛП до хвильоводів. ХЩЛ використовують до частот 150 ГГц.

Копланарні лінії передачі (КЛП) можна розглядати як різновид ЩЛП. ЕМП у копланарній ЛП має такі самі особливості, як і у щілинній.

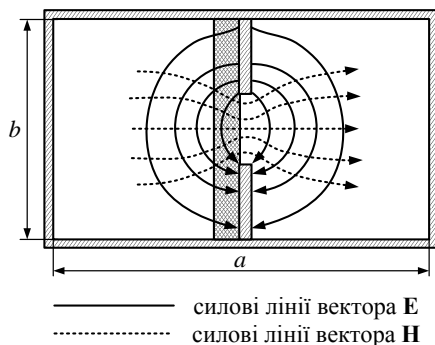


Рис. 7.55

Можна виділити два типи основних хвиль у КЛП – парні та непарні, структура поля яких зображена на рис. 7.56. Для парної хвилі потенціали крайніх провідних стрічок однакові (рис. 7.56, а), а для непарних різні (рис. 7.56, б).

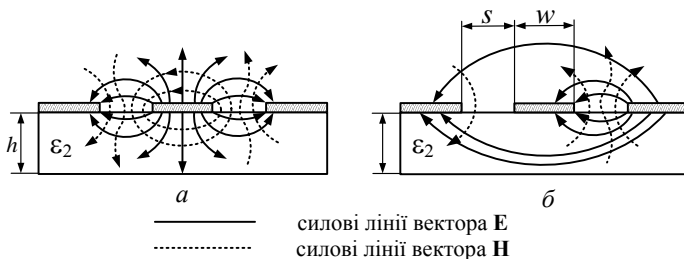


Рис. 7.56

У копланарних лініях передачі використовують високоякісні діелектрики з діелектричною проникністю $\epsilon_2 \gg 1$, що призводить до суттєвого зменшення довжини хвилі і концентрації ЕМП на межі розділу діелектрик-повітря. Це використовують при розробленні інтегральних планарних та об'ємних мікросхем НВЧ.

Щілинні і копланарні ЛП використовують для виготовлення різних пристроїв НВЧ у діапазоні до 100...120 ГГц.

Питання для самоперевірки

1. Назвіть типи інтегральних ліній передачі та особливості їх застосування.
2. Який тип хвилі є основним у симетричній, несиметричній та мікрострічковій ЛП, у щілинних та копланарних лініях?
3. В яких діапазонах частот доцільно застосування ЛП?
4. Назвіть переваги та недоліки ЛП порівняно з хвилевідними.

7.11. Лінії поверхневих хвиль. Сповільнюючі системи

У діапазоні НВЧ поряд з лініями передачі зі швидкими хвилями (для яких $v_\phi > c$), використовують **повільні хвилі**, у яких $v_\phi < c$. Лінії передачі, у яких виконується умова $v_\phi < c$, зовуть **сповільнюючими системами**. Розглянемо деякі з них.

7.11.1. Пласкі діелектричні лінії передачі

Діелектрична лінія передачі (ДЛП) являє собою пластину, стрижень або трубу, які зроблені з матеріалу з малими втратами і діелектричною проникністю, більшою, ніж навколишнє середовище.

Розглянемо поширення ЕМХ у пласкій ДЛП нескінченної ширини (рис. 7.57, а).

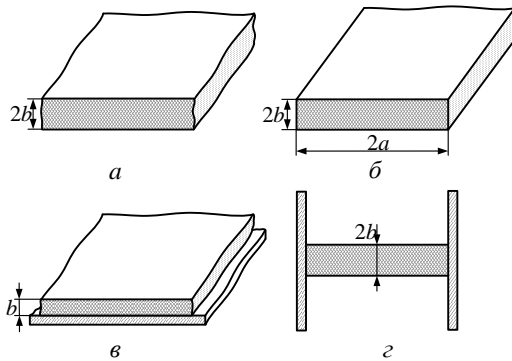


Рис. 7.57

Знання поля у таких ЛП можна використовувати при аналізі поля у ДЛП скінченних розмірів, коли ширина пластини $2a \gg \lambda$ (рис. 7.57, б). Окремим випадком пласкої ДЛП є діелектрична пластинка товщиною b , розміщена на провідній поверхні (рис. 7.57, в). Для Е-хвиль поле \mathbf{E} у площині металу має нормальну складову, і така ЛП поводить себе як пласка ДЛП завтовшки $2b$ без металу.

Практична реалізація пласкої ДЛП нескінченної ширини зображена на рис. 7.57, г. Хвилі класу Н, у яких електрична складова перпендикулярна провідним поверхням, ведуть себе так само, як у пласкої ДЛП нескінченної ширини.

Нехай маємо діелектричну пластину нескінченної ширини, з параметрами $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1 = 0$, розміщену у середовищі з $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2 = 0$ (рис. 7.58). Будемо вважати, що перше середовище оптично більш густе ($\varepsilon_1 \mu_1 > \varepsilon_2 \mu_2$), а ЕМХ поширюються у напрямку осі Z . Необхідно визначити структуру поля в такій системі.

Методика розв'язання такої задачі викладена вище (п. 7.2, 7.3). Але ми скористаємося знаннями структури ЕМП при падінні пласкої хвилі на межу поділу двох діелектриків за наявності явища повного відбиття (див. п. 6.5). Як і в розд. 6 будемо вважати, що площина падіння збігається з площиною XOZ .

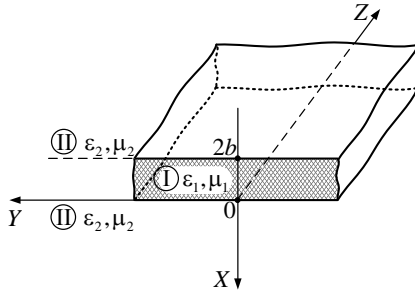


Рис. 7.58

Користуючись співвідношеннями (6.36), (6.41), побудуємо структуру полів у першому і другому середовищі за умов нормальної та паралельної поляризації і повного внутрішнього відбиття.

Відповідні графіки наведені на рис. 7.59. Як і при відбитті від ідеально провідної поверхні (див. п. 6.7), при повному відбитті від межі діелектриків існують площини, на яких $E_{\tau} = 0$, $H_{\tau} = \max$. Кожну таку поверхню ($A - A1$, $B - B1$ рис. 7.59) можна замінити ідеально провідною поверхнею, при цьому поле в діелектричному шарі не зміниться.

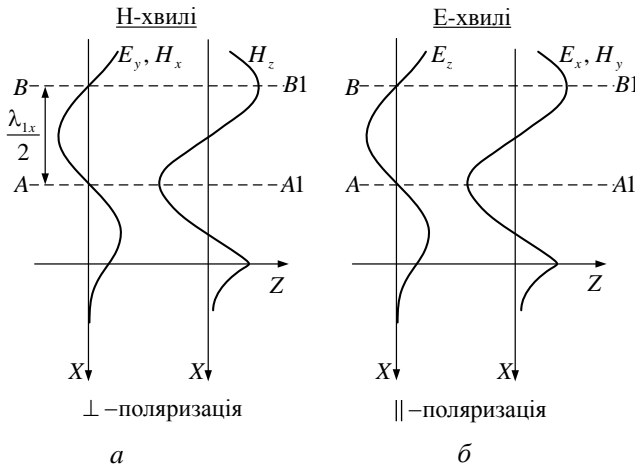


Рис. 7.59

Таким чином, діелектричний шар завтовшки D , обмежений з однієї сторони провідними поверхнями $A-A1, B-B1$, є спрямованою лінією передачі (рис. 7.60).

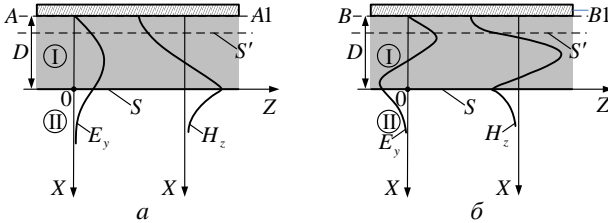


Рис. 7.60

Розподіл компонент поля в діелектрику I за змінною x підпорядковується гармонічним законам, зовні діелектрика (середовище II) маємо поверхневу хвилю (амплітуда змінюється за експоненціальним законом).

Підкреслимо, що на межі діелектрик–повітря (поверхня S) і на симетричній, відносно екстремумів $E_y(x), H_z(x)$, поверхні S' (рис. 7.60) співвідношення тангенційних компонент E_t, H_t однакові, тому частину структури ззовні поверхні S' можна відкинути.

При цьому у діелектрику на межах S та S' існують умови повного відбиття для однорідної хвилі і перше середовище завтовшки $2b$ являє собою **діелектричну лінію передачі**. Ззовні діелектричної пластини існують поверхневі хвилі. Розподіл компонент поля E_y, H_z для перших двох типів Н-хвиль ($H^{(1)}$ та $H^{(2)}$) наведений на рис. 7.61.

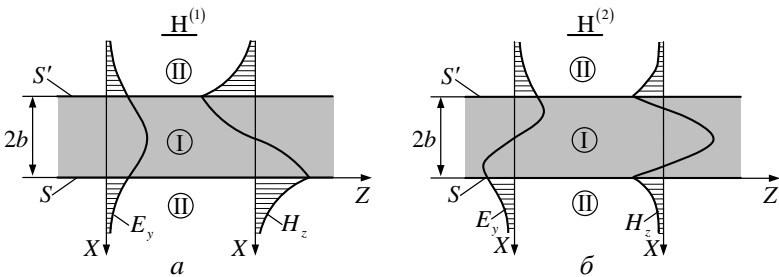


Рис. 7.61

Довжина стоячої хвилі уздовж осі X і швидкість поширення біжучої хвилі уздовж осі Z у діелектрику I визначаються співвідношеннями (6.42), (6.43) і дорівнюють $\lambda_{1x} = \lambda_1 / \cos \varphi$, $v_{1z} = v_1 / \sin \varphi$. Швидкість поширення поверхневої хвилі у другому середовищі $v_{2z} = v_{1z}$. Це умова виконання граничних умов на межі поділу (поверхні S). Таким чином, $v_2 > v_{2z} = v_{1z} > v_1$, і у діелектричному каналі (середовище I) відносно оточуючого простору (середовище II) поширюється повільна хвиля.

Отримаємо вираз для критичних частот Е- та Н-хвиль у пласкої ДПП:

$$f_{\text{кр}}^{(n)} = \frac{c}{\lambda_{\text{кр}}} = \frac{c(n-1)}{4b\sqrt{\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.86)$$

Як видно з (7.86), поля $E^{(1)}$ та $H^{(1)}$ є основними, мають нульову критичну частоту і нескінченну критичну довжину хвилі. При збільшенні частоти кількість можливих типів хвиль Е та Н зростає. Якщо частота значно перевищує $f_{\text{кр}}^{(n)}$ будь-якого типу хвилі, то поле переважно зосереджене у діелектрику, якщо частота незначно перевищує $f_{\text{кр}}^{(n)}$, ЕМП переважно знаходиться у другому середовищі.

Для того щоб у ЛПП поширювався тільки один тип хвилі, необхідно виконати умову $\lambda_{\text{кр}}^{(2)} < \lambda < \lambda_{\text{кр}}^{(1)}$, звідки

$$\lambda > 4b\sqrt{\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2}, \quad \frac{2b}{\lambda} < \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2}}. \quad (7.87)$$

З виразів (7.86), (7.87) виходить, що критичні частоти та товщина ДПП для однохвильового режиму залежать від різниці коефіцієнтів заломлення першого та другого середовищ: $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$.

Зміна характеру розподілу компонент векторів \mathbf{E} , \mathbf{H} у Н-хвилі за променевою трактовкою при зміні частоти показана на рис. 7.62. Як видно з рисунку, при $f > f_{\text{кр}}^{(1)}$ і зменшенні частоти ($f_2 < f_1$) поверхнева хвиля зменшується більш повільно (див. рис. 7.62, а, б). Коли частота $f = f_{\text{кр}}^{(1)} = 0$, хвильовий процес відсутній.

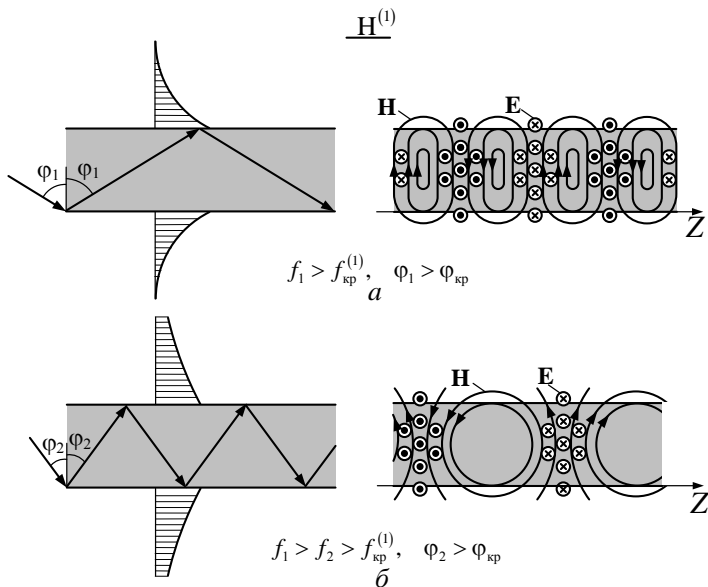


Рис. 7.62

На рис. 7.63 зображені аналогічні графіки для хвилі $\mathbf{H}^{(2)}$.

При $f = f_{\text{кр}}^{(2)}$ поле у другому середовищі має характер не поверхневої хвилі, а звичайної однорідної хвилі, яка поширюється уздовж осі Z (рис. 7.63, в). Заломлений промінь паралельний осі Z . На відміну від рис. 7.63, а, б при $f > f_{\text{кр}}^{(2)}$ спрямована хвиля „руйнується”, хвиля „витікає” у зовнішній простір (рис. 7.63, з).

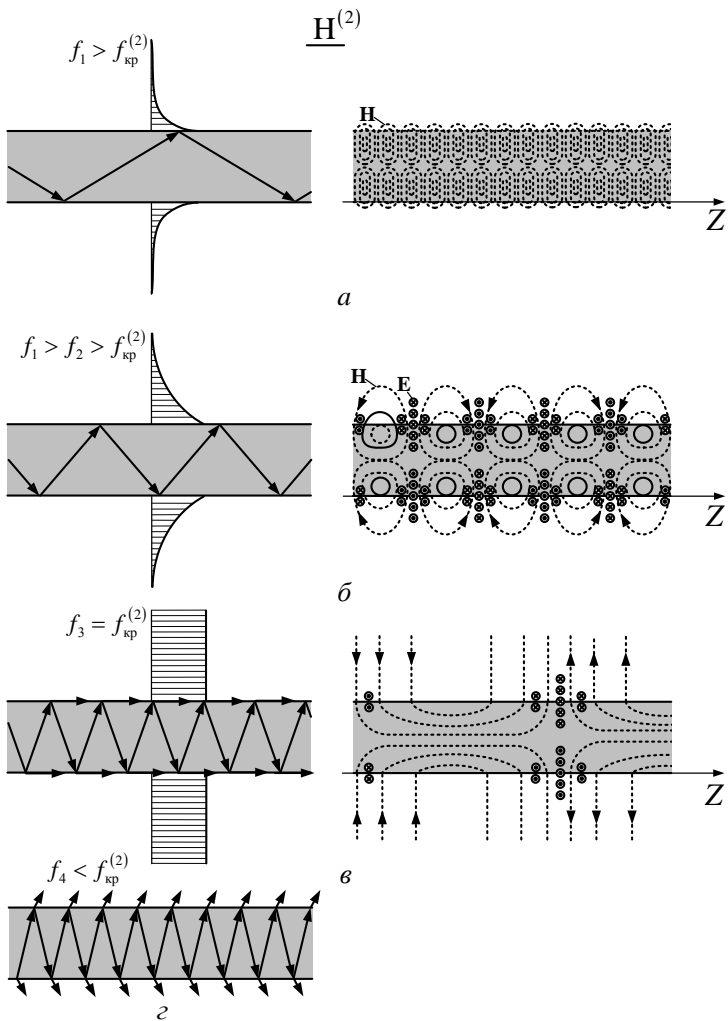


Рис. 7.63

Залежність $H_y(x)$ для хвиль $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ та $E^{(3)}$ зображена на рис. 7.64.

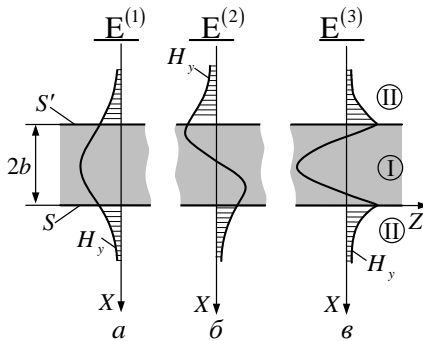


Рис. 7.64

Структура ЕМП хвиль $E^{(1)}$ та $E^{(2)}$ наведена на рис. 7.65.

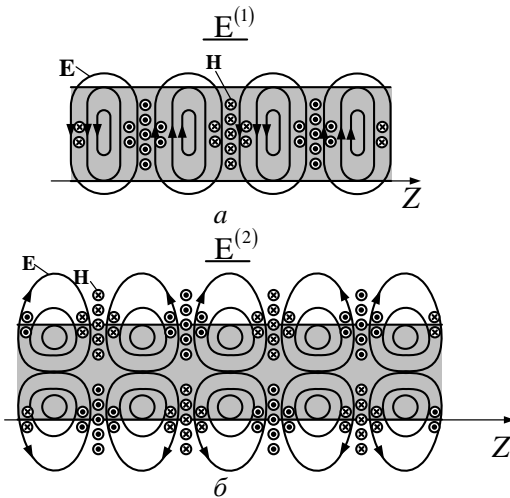


Рис. 7.65

Зазначимо, що кількість кілець ліній \mathbf{E} у діелектричному шарі у поперечному перерізі відповідає номеру хвилі.

Порівнюючи рис. 7.62, 7.63 та 7.65, можна сказати, що силові лінії \mathbf{E} та \mathbf{H} поля Н-хвилі (рис. 7.62, а, б, 7.63, а, б) подібні до ліній \mathbf{H} та \mathbf{E} поля Е-хвиль (рис. 7.65).

Як видно з рис. 7.61, 7.64, відносно середини діелектричного шару ($x = -b$) можуть існувати парні та непарні Н- та Е-хвилі різних

номерів. Тому, якщо при $x = -b$ розмістити ідеально провідну поверхню, то граничні умови для парних хвиль E та непарних хвиль H у цьому перетині не порушуються і структура хвиль при $x > -b$ залишається незмінною для всіх парних хвиль E та непарних H -хвиль.

7.11.2. Кругла діелектрична лінія передачі

Розглянемо поширення ЕМХ у круглій діелектричній лінії передачі (КДЛП), зображеній на рис. 7.66.

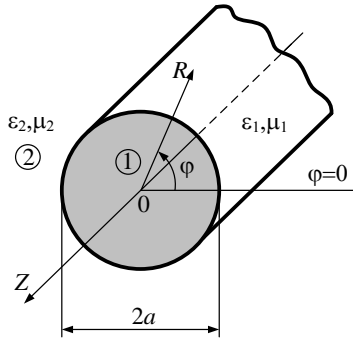


Рис. 7.66

Як і для круглого металевого хвилеводу, у таких структурах можуть поширюватися хвилі типу E та H . Але різниця граничних умов на поверхнях хвилеводів призводить до того, що у КДЛП можуть існувати хвилі E та H тільки з симетричною (відповідно кутової координати) структурою поля E_{0n} , H_{0n} . Несиметричні хвилі є гібридними HE_{mn} , EH_{mn} . Наявність гібридних хвиль можна пояснити, користуючись аналогією з порожнистим хвилеводом. Так, наприклад, структура поверхневих струмів несиметричної хвилі H_{11} у металевих хвилеводах наведена на рис. 7.67.

При збудженні хвилі H_{11} у КДЛП струми зміщення \dot{J}_{zm} на поверхні мають таку саму структуру і мають φ -у та z -у компоненти.

Оскільки $\dot{J}_{z3M} = \frac{\epsilon_a \partial \dot{E}_z}{\partial t}$, то $\dot{E}_z \neq 0$, і хвиля у ДЛП стає гібридною.

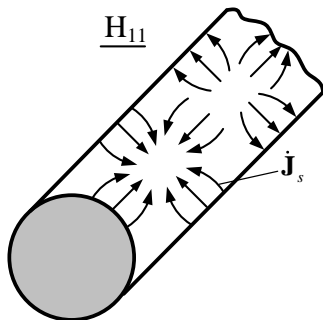


Рис. 7.67

Розв'язання рівняння Гельмгольца для поздовжніх компонент \dot{E}_z , \dot{H}_z ЕМХ для першого і другого середовища мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_z^{(1)}(r, \varphi, z) &= A_1 J_m(k_{\perp 1} r) \cos(m\varphi) e^{-j\beta z}, \\
 \dot{H}_z^{(1)}(r, \varphi, z) &= B_1 J_m(k_{\perp 1} r) \sin(m\varphi) e^{-j\beta z}, \\
 \dot{E}_z^{(2)}(r, \varphi, z) &= A_2 H_m^{(2)}(k_{\perp 2} r) \cos(m\varphi) e^{-j\beta z}, \\
 \dot{H}_z^{(2)}(r, \varphi, z) &= B_2 H_m^{(2)}(k_{\perp 2} r) \sin(m\varphi) e^{-j\beta z}.
 \end{aligned} \tag{7.88}$$

В розв'язках (7.88) $k_{\perp 1,2} = \omega^2 \varepsilon_{a1,2} \mu_{a1,2} - \beta^2$ – поперечні хвильові числа у першому та другому середовищах; β – стала поширення; $A_{1,2}$, $B_{1,2}$ – невизначені коефіцієнти; $m = 0, 1, 2, \dots$; $H_m^{(2)}(x)$ – функції Ханкеля другого роду.

Визначимо, що вирази $\dot{E}_z^{(1)}$, $\dot{H}_z^{(1)}$ мають таку саму структуру, як для круглого металевго хвилеводу.

Запис ЕМХ у зовнішньому середовищі за допомогою функцій Ханкеля дозволяє описати структуру поверхневих хвиль на значній відстані від КДЛП. Коли $k_{\perp 2} r \gg 1$, функція Ханкеля асимптотично дорівнює

$$H_m^{(2)}(k_{\perp 2} r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_{\perp 2} r}} e^{-j \left[k_{\perp 2} r - \frac{\pi}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]}.$$

Експоненційне загасання поверхневої хвилі має місце за умови

$$k_{\perp 2} = -j\alpha \quad (\alpha > 0).$$

Інші складові поля $E_\varphi, E_r, H_\varphi, H_r$ у КДПП і зовні знаходять з рівнянь зв'язку.

Коефіцієнти $A_{1,2}, B_{1,2}$ знаходять з умов неперервності векторів \mathbf{E} та \mathbf{H} на межі поділу середовищ:

$$\dot{E}_z^{(1)} = \dot{E}_z^{(2)}, \dot{H}_z^{(1)} = \dot{H}_z^{(2)}, \dot{E}_\varphi^{(1)} = \dot{E}_\varphi^{(2)}, \dot{H}_\varphi^{(1)} = \dot{H}_\varphi^{(2)} \quad \text{при } r = a. \quad (7.89)$$

Дисперсійне рівняння для хвиль $\mathbf{HE}_{mn}, \mathbf{EH}_{mn}$ має вигляд:

$$m^2 \frac{\beta^2}{k_{\perp 1}^2 k_{\perp 2}^2} (k_1^2 - k_2^2) = \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} k_{\perp 2} a f - k_{\perp 1} a d \right] \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} k_{\perp 2} a f - k_{\perp 1} a d \right], \quad (7.90)$$

де $f = \frac{J'_m(k_{\perp 1} a)}{J_m(k_{\perp 1} a)}$; $d = \frac{H'_m{}^{(2)}(k_{\perp 1} a)}{H_m^{(2)}(k_{\perp 1} a)}$; штрих означає похідну циліндричних функцій за r .

Рівняння (7.90) розв'язується разом з рівнянням

$$k_{\perp 1}^2 - k_{\perp 2}^2 = k_1^2 - k_2^2 \quad (7.91)$$

відносно $\beta, k_{\perp 1}, k_{\perp 2}$.

Якщо $m = 0$, рівняння (7.90) розпадається на два, які відповідають азимутально-однорідним хвилям класів \mathbf{E} та \mathbf{H} . Після ряду перетворень отримаємо:

для хвиль \mathbf{E}

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} k_{\perp 1} a \frac{J_0(k_{\perp 1} a)}{J_1(k_{\perp 1} a)} = k_{\perp 2} a \frac{H_0^{(2)}(k_{\perp 2} a)}{H_1^{(2)}(k_{\perp 2} a)}, \quad (7.92, a)$$

для хвиль \mathbf{H}

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} k_{\perp 1} a \frac{J_0(k_{\perp 1} a)}{J_1(k_{\perp 1} a)} = k_{\perp 2} a \frac{H_0^{(2)}(k_{\perp 2} a)}{H_1^{(2)}(k_{\perp 2} a)}. \quad (7.92, б)$$

Наведені результати дозволяють аналізувати поля у круглих діелектричних ЛП.

Характер поширення хвиль у КДЛП якісно збігається з характером поширення хвиль у пласкої діелектричної ЛП.

Розглянемо азимутально-однорідні Е-хвилі. Для спрямованих хвиль $k_{\perp 2} = -j\alpha$ ($\alpha > 0$), де

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_{a2} \mu_{a2}}. \quad (7.93)$$

Оскільки $k_{\perp 2}^2 < 0$ і $k_{\perp 1}^2 > 0$, то $\beta^2 > k_2^2$, $\beta^2 < k_1^2$. Звідки виходить, що **хвилі є швидкими у діелектричному стрижні і повільними у другому середовищі.**

Корені дисперсійних рівнянь (7.92), (7.93) знаходять числовими методами.

Фізично зрозуміло, що, коли частота дорівнює критичній $f = f_{\text{кр}}$, $k_{\perp 2} = 0$, поздовжня компонента електричного (магнітного) поля зникає, хвиля перетворюється в Т-хвилю, для якої $\beta = k_2$ (як і у випадку з пласким хвилеводом). У цьому разі спрямована хвиля руйнується, енергія поширюється у зовнішньому просторі.

З виразів (7.92) видно, що при $k_{\perp 2} = 0$ значення функції $J_0(k_{\perp 1}a) = 0$, звідки $k_{\perp 1}a = v_{0n}$ (v_{0n} – n -й корінь функції Бесселя нульового порядку). Таким чином, критичні частоти симетричних хвиль E_{0n} та H_{0n}

$$f_{\text{кр}}^{(0n)} = \frac{v_{0n}}{2\pi a} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2}}. \quad (7.94)$$

Критичні частоти гібридних хвиль $f_{\text{кр}}^{(mn)}$ знаходяться числовими методами з рівнянь (7.90), (7.91). Підкреслимо, що **перший** індекс m означає, як і в круглому металевому хвилеводі, число повних варіацій поля за кутовою координатою φ , **другий** індекс n – номер кореня дисперсійного рівняння (7.90).

Приклади розрахунку критичних частот симетричних E_{0n} , H_{0n} та гібридних HE_{mn} хвиль та залежність фазової швидкості v_ϕ спрямованої хвилі від частоти наведені на рис. 7.68, 7.69.

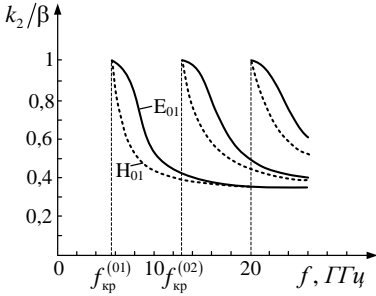


Рис. 7.68

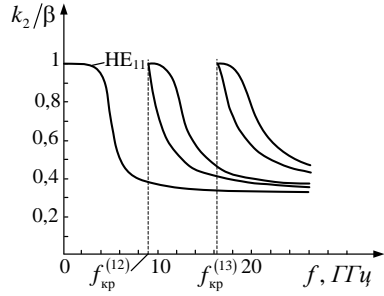


Рис. 7.69

Графіки побудовані для діелектричного стрижня радіуса $a = 7 \text{ мм}$ з параметрами $\epsilon_1 = 9, \mu_1 = 1$, який знаходиться у повітрі ($\epsilon_2 = 1, \mu_2 = 1$). По осі ординат відкладена величина $\frac{k_2}{\beta} = \frac{\lambda_{cn}}{\lambda_2} = \frac{v_\phi}{v_2}$ ($v_2 = c, \lambda_{cn} = \frac{2\pi}{\beta}$ – довжина сповільненої хвилі).

З графіків видно, що коли $f \rightarrow f_{\text{кр}}$ (при відсіканні хвильового процесу) $v_2 \rightarrow c$ хвиля за структурою наближається до Т-хвилі. Основним типом хвилі КДЛП є гібридна хвиля HE_{11} , для якої $f_{\text{кр}}^{(11)} = 0$. Мінімальна критична частота усіх інших хвиль у КДЛП визначається співвідношенням (7.94), в якому $n = 1$.

Таким чином, тільки один основний тип коливань – HE_{11} існує в смузі частот

$$0 < f < f_{\text{кр}}^{(01)} = \frac{v_{01}}{2\pi a} \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2}}. \quad (7.95)$$

Смуга частот одномодового режиму тим більша, чим ближчі коефіцієнти заломлення n_1 та n_2 .

Структура хвилі HE_{11} показана на рис. 7.70. Магнітні лінії в горизонтальній площині мають таку саму структуру, як електричні у вертикальній. В самому стрижні структура поля нагадує структуру поля хвилі H_{11} у круглому металевому хвилеводі.

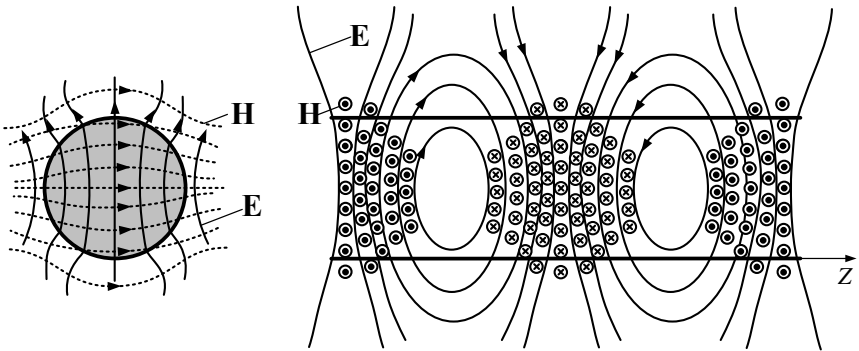


Рис. 7.70

Хоча критична частота хвилі HE_{11} дорівнює нулю, це не означає, що за допомогою діелектричного хвилеводу можна передавати енергію на скільки завгодно низькій частоті.

Оскільки електромагнітна хвиля в діелектричній ЛП переносить енергію не тільки усередині стрижня, але і в оточуючому його просторі, то вводять так званий **граничний радіус поля** $r_0 = 1/\alpha$, який характеризує протяжність поля хвилі в поперечному напрямі. Величина α визначається співвідношенням (7.93). Розрахунки показують, що через площу, обмежену колом радіуса r_0 , переноситься 80 – 90 % потужності хвилі. Тому для поширення хвилі по діелектричному хвилеводу необхідно мати навколо нього вільний простір в радіусі $(2 - 3)r_0$. При зменшенні частоти збільшується r_0 , тобто все менша частина енергії поширюється усередині стрижня і все більша – в оточуючому його просторі. Нижня межа робочого діапазону при використанні хвилі HE_{11} , визначена допустимим значенням граничного

радіуса, тобто повинна виконуватися умова $r_0 < r_{0\text{доп}}$. З боку верхніх частот робочий діапазон обмежений критичною частотою хвилі E_{01} . Одномодовий режим роботи для заданої робочої частоти f ($f < f_{\text{кр}}$) можна забезпечити як вибором (зменшенням) радіуса стрижня a , так і зменшенням різниці між відносними діелектричними проникностями матеріалу стрижня і навколишнього простору: вибравши ϵ_1 , що мало відрізняється від ϵ_2 , можна забезпечити одномодовий режим, навіть якщо $a \gg \lambda$. Цю властивість і використовують при конструюванні діелектричних ЛП в оптичному діапазоні хвиль, де робочі частоти досить великі. Зазвичай діелектричні ЛП, призначені для роботи в оптичному діапазоні хвиль, називають **світловодами**.

Діелектричні ЛП застосовують як лінії передачі в міліметровому, субміліметровому і оптичному діапазонах хвиль, де вони забезпечують передачу більшої потужності з меншими втратами, ніж металеві хвилеводи.

За наявності неоднорідностей у лінії передачі площина поляризації ЕМХ стає нестійкою. Цю нестійкість можна усунути, якщо взяти ЛП еліптичного або прямокутного перерізу або використовувати так звані дзеркальні діелектричні ЛП (рис. 7.71)

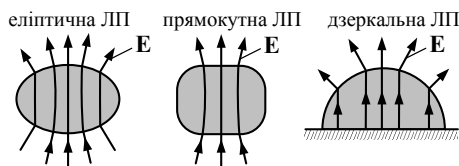


Рис. 7.71

Структура полів в цих лініях з урахуванням дзеркального зображення в екрані відповідає звичайним діелектричним ЛП, проте екран забезпечує стійку поляризацію поля. На частотах близько 70 ГГц дзеркальні діелектричні лінії передачі мають коефіцієнти загасання $0,02 \dots 0,2 \text{ дБ/м}$.

На закінчення відзначимо, що властивості спрямовувати електромагнітні хвилі зберігаються при циліндричному викривленні поверхні спрямовуючої системи.

Таким чином можна пояснити спрямовуючі властивості діелектричної трубки та розглянутої вище КДЛП (рис. 7.72), проводу вкритого діелектриком. Остання ЛП зветься **лінією Губо** (рис. 7.73).

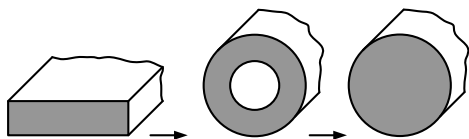


Рис. 7.72

В сантиметровому діапазоні хвиль при значеннях $a \geq 0,5 \text{ мм}$, $(b - a) \sim 0,05 \dots 0,1 \text{ мм}$ (рис. 7.73) втрати у лінії Губо у кілька разів менші, ніж втрати у прямокутному хвилеводі.

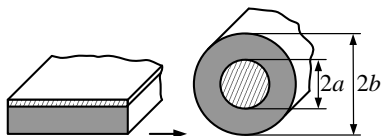


Рис. 7.73

Основною хвилею у лінії Губо є хвиля типу **E**, структура якої наведена на рис. 7.74.

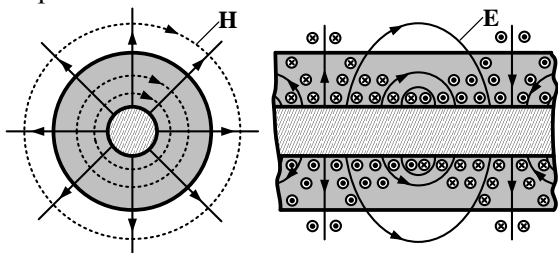


Рис. 7.74

7.11.3. Світловоди

Розглянуті вище діелектричні ЛП є основою створення світловодів – ліній передач оптичного діапазону.

Найбільш поширені **плівкові** (рис. 7.75) та **волоконні** (рис. 7.76) світловоди.

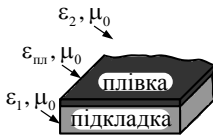


Рис. 7.75

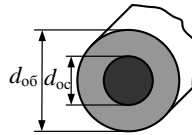


Рис. 7.76

Плівковий світловод складається з діелектричної плівки з параметрами $\epsilon_{\text{пл}}, \mu_0$, діелектричної підкладки (ϵ_1, μ_0), а середовище над плівкою має параметри ϵ_2, μ_0 . Поширення оптичних хвиль можна розглянути як поширення ЕМХ у діелектричній пласкій ЛПІ (п. 7.11.1) за наявності явища повного відбиття. Для цього необхідно, щоб коефіцієнт заломлення плівки задовольняв умовам:

$$n_{\text{пл}} = \sqrt{\epsilon_{\text{пл}}} > n_1 = \sqrt{\epsilon_1}, \quad n_{\text{пл}} > n_2 = \sqrt{\epsilon_2}.$$

Такі світловоди (рис. 7.75) використовують у інтегральних схемах оптичного діапазону.

Структура волоконного світловоду зображена на рис. 7.76. Він складається з діелектричного осердя і оболонки, причому $n_{\text{ос}} > n_{\text{об}}$. Світловід може бути захищений спеціальним покриттям.

Повне внутрішнє відбиття відбувається від межі середовищ осердя та оболонки, в оболонці поширюється поверхнева хвиля.

Типова залежність коефіцієнта загасання волоконного світловода (якщо осердя виконане на основі кварцового скла) наведена на рис. 7.77. З нього видно, що існують вікна прозорості (на довжині хвилі $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$), де загасання мінімальні.

Із попереднього пункту (7.11.2) видно, що критичні частоти Е-, Н- та гібридних хвиль, які можуть поширюватися у світловоді, залежать від значення $d_{\text{ос}}$, а також від різниці коефіцієнтів заломлення $\sqrt{n_{\text{ос}}^2 - n_{\text{об}}^2}$. Тому для близьких значень $n_{\text{ос}}$ та $n_{\text{об}}$ одномодовий режим світловода можна забезпечити, коли, $d_{\text{ос}}$ значно перевищує довжину хвилі.

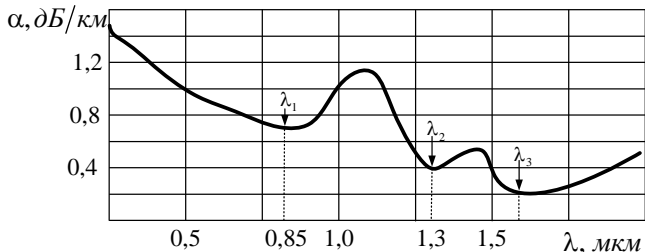


Рис. 7.77

Так, при $\lambda = 1 \text{ мкм}$ одномодові світловоди (рис. 7.78) мають розміри $d_{\text{ос}} \sim 3 \dots 5 \text{ мкм}$, $d_{\text{об}} \sim 50 \text{ мкм}$, величини $n_{\text{ос}}$ та $n_{\text{об}}$ відрізняються на 3%. Такі світловоди використовують при передаванні великих об'ємів інформації на великі відстані (сотні та тисячі кілометрів).

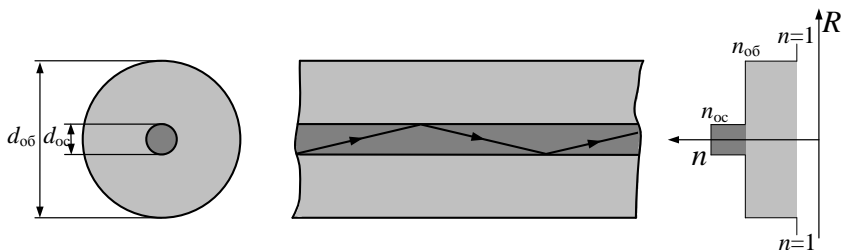


Рис. 7.78

При зменшенні вимог до лінії передачі використовують багатомодові світловоди ($d_{\text{ос}} \sim 50 \text{ мкм}$, $d_{\text{об}} \sim 120 \text{ мкм}$), що значно спрощує конструктивне виконання таких ЛП. Кількість типів коливань може перевищити 10^3 . Кожен з типів коливань можна уявити парціальним променем, який відбивається під своїм кутом ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$) від межі осердя–оболонка (рис. 7.79). На рисунку зображені також графіки змінення коефіцієнта заломлення в залежності від змінної r .

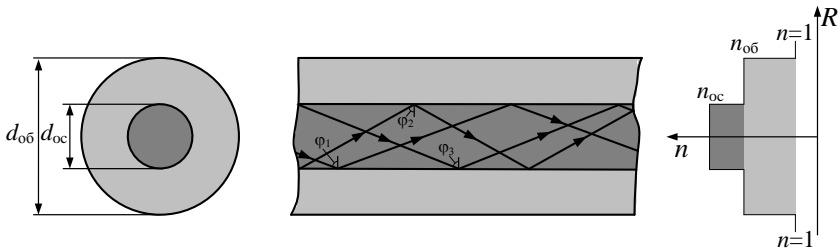


Рис. 7.79

Для зменшення дисперсійних явищ застосовують градієнтні світловоди ($d_{oc} \sim 50 \text{ мкм}$, $d_{об} \sim 80 \text{ мкм}$), у яких осердя має коефіцієнт заломлення, що змінюється за законом

$$n(r) = n_0 \left[1 - \Delta \left(\frac{2r}{d_{oc}} \right)^q \right], \quad \Delta = \frac{n_0 - n_{об}}{n_0}. \quad (7.96)$$

У (7.96) n_0 – коефіцієнт заломлення на осі ЛП; q – ціле позитивне число. Величина $n(r)$ змінюється від $n(r)|_{r=0} = n_0$ до $n(r)|_{r=\frac{d_{oc}}{2}} = n_{об}$ (рис. 7.80).

Такий характер поведінки $n(r)$ призводить до викривлення променів, зміни довжини їх траєкторії і вирівнювання фазового шляху різних типів коливань. Найбільш часто використовують параболічні градієнтні волокна ($q = 2$). Такі волокна порівняно з багатомодовими мають значно меншу величину модової дисперсії і близькі до одномодових.

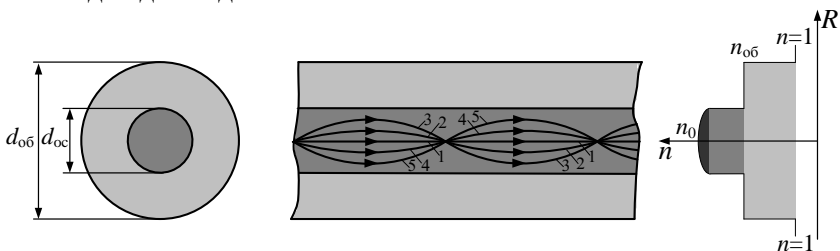


Рис. 7.80

До переваг світловодів можна віднести малі розміри та вагу, зручність експлуатації, малий рівень взаємних завад між волокнами, високу стабільність параметрів у діапазоні температур, нечутливість до впливу зовнішнього електромагнітного поля. Світловоди дозволяють передавати інформацію у широкій смузі частот (смуга частот одномодового світловоду 1 ПГц) і, нарешті, мають низьку вартість.

7.11.4. Сповільнюючі системи з періодичними граничними умовами

У п. 7.11.2 були розглянуті діелектричні хвилеводи, в яких поширюються **повільні хвилі**. Такі самі властивості мають хвилі у лініях передачі з **періодичними граничними умовами**. Ці лінії передачі можна поділити на відкриті (рис. 7.81 *а, б*) та закриті (рис. 7.81 *в*), коли ЛП екранована (наприклад, розміщена у хвилеводі).

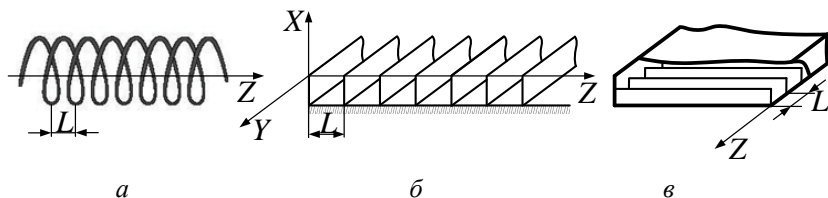


Рис. 7.81

Залежно від відношення просторового періоду L ЛП до довжини сповільненої хвилі $\lambda_{\text{сп}}$ розрізняють **однорідні** $\frac{L}{\lambda_{\text{сп}}} \ll 1$ та **неод-**

норідні $\frac{L}{\lambda_{\text{сп}}} \sim 1$ **сповільнюючі системи.**

Методика розрахунку таких ЛП викладена у п. 7.2, а властивості хвиль – у п. 7.3.

Розглянемо однорідну сповільнюючу систему, в якій виконання умови $\frac{L}{\lambda_{\text{сп}}} \ll 1$ дозволяє вважати ЛП **квазігладкою системою**. Розмір системи уздовж осі Y приймаємо нескінченним (рис. 7.81, *б*).

Будемо вивчати поширення хвилі типу E , у якій вектор $\dot{\mathbf{E}}_s$ має представлення (див. п. 7.2) $\dot{\mathbf{E}}_s = \dot{\mathbf{E}}_{\perp} + \mathbf{e}_z \dot{E}_z$. Вектор $\dot{\mathbf{E}}_s$ та його складові задовольняють однорідним хвильовим рівнянням Гельмгольца. Так, рівняння для \dot{E}_z має вигляд (через однорідність поля уздовж осі Y похідна $\frac{\partial}{\partial y} = 0$)

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_z = 0. \quad (7.97)$$

Для хвильового процесу

$$\dot{E}_z(x, z) = \dot{E}_z(x) e^{-j\beta_{\text{сп}} z}, \quad (7.98)$$

де $\beta_{\text{сп}} = 2\pi/\lambda_{\text{сп}}$ – коефіцієнт фази сповільнюючої системи.

Тоді з (7.97) маємо

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z(x)}{\partial x^2} - \chi^2 \dot{E}_z(x) = 0, \quad \chi^2 = \beta_{\text{сп}}^2 - k^2. \quad (7.99)$$

Розв'язок рівняння (7.99) має вигляд

$$\dot{E}_z(x) = A_1(x) e^{-\chi x} + A_2(x) e^{\chi x}.$$

З цього розв'язку фізичний смисл має лише перший доданок, оскільки при $x \rightarrow \infty$ другий доданок $A_2(x) e^{\chi x} \rightarrow \infty$. Тоді вираз для поздовжньої компоненти поля має вигляд

$$\dot{E}_z(x, z) = \dot{E}_z(x) e^{-j\beta_{\text{сп}} z} = A_1 e^{-\chi x} e^{-j\beta_{\text{сп}} z}. \quad (7.100)$$

Введемо поняття **коефіцієнт сповільнення** $v_{\text{сп}}$ як відношення швидкості світла до фазової швидкості **сповільненої хвилі**

$$v_{\text{сп}} = \frac{c}{v_{\text{ф}}} = \frac{\lambda}{\lambda_{\text{сп}}} > 1. \quad (7.101)$$

Співвідношення (7.100) легко можна перетворити до вигляду:

$$\dot{E}_z(x, z) = E_0(x) e^{-j\beta_{\text{сн}} z} = E_0 e^{-kx \sqrt{v_{\text{сн}}^2 - 1}} e^{-j\beta_{\text{сн}} z}, \quad (7.102)$$

де E_0 – амплітуда поля на межі сповільнюючої системи.

Як видно з формули (7.102), при збільшенні $x > 0$ амплітуда поля E_z експоненційно зменшується. Поле „прилипає” до поверхні структури і тим більше, чим більше коефіцієнт сповільнення. Як і у діелектричній лінії передачі (п. 7.11.1, 7.11.2) **хвиля у такій лінії передачі поверхнева**.

Розглянемо декілька конкретних типів сповільнюючих систем:

1. **Спіральна сповільнююча система** (рис. 7.82). Вона являє собою тонкий провідник, навитий спіраллю на круглий циліндр радіусом a з постійним кроком L . Уздовж спіралі зі швидкістю c поширюється хвиля струму, а ЕМП поширюється уздовж ЛП з фазовою швидкістю $v_{\text{ф}}$.

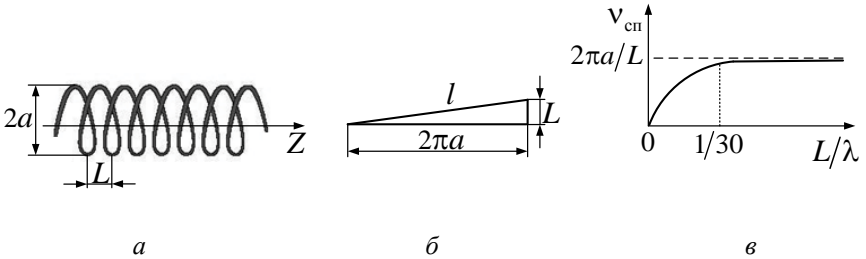


Рис. 7.82

Як видно з розгортки одного витка (рис. 7.82, б), коефіцієнт сповільнення дорівнює $v_{\text{сн}} = l/L = \sqrt{(2\pi a)^2 + L^2} / L$. Для квазігладкої системи $(2\pi a) \gg L$, звідки $v_{\text{сн}} = 2\pi a/L$. При $(L/\lambda) > 1/30$ можна вважати, що коефіцієнт сповільнення не залежить від частоти (відсутня частотна дисперсія). Це забезпечує роботу таких систем у широкій смузі частот, наприклад, у лампах біжучої хвилі та інших пристроях НВЧ. Коефіцієнт сповільнення при $(L/\lambda) < 1/30$ залежить від довжини хвилі (рис. 7.82, в).

2. **Гребінчаста сповільнююча система** (рис. 7.81, б, рис. 7.83).
 Ця система складається з ідеально провідних пластин заввишки h , які розміщені з кроком L на ідеально провідній підкладці. Будемо вважати систему квазігладкою ($L \ll \lambda$) і нескінченною уздовж осі Y . Прийmemo також, що область 1 (рис. 7.83, а) та металеві канавки (область 2) заповнені повітрям.

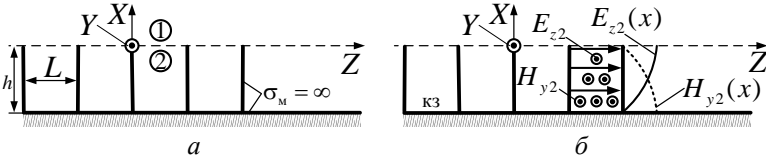


Рис. 7.83

Тоді для хвиль класу Е запишемо вираз для єдиної відмінної від нуля компоненти вектора \mathbf{H} у першій області (аналогічно запису (7.100)):

$$\dot{H}_{y1}(x, z) = B e^{-\chi x} e^{-j\beta_{\text{ен}} z}, \quad \chi^2 = \beta_{\text{ен}}^2 - k^2. \quad (7.103)$$

Значення електричного поля $\dot{\mathbf{E}}_1$ знайдемо з першого рівняння Максвелла $\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_1 = j\omega\epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_1$, звідки отримаємо

$$\dot{E}_{z1} = j \frac{\chi}{\omega\epsilon_0} B e^{-\chi x} e^{-j\beta_{\text{ен}} z}, \quad \dot{E}_{x1} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \left(-\frac{\partial \dot{H}_{y1}}{\partial z} \right). \quad (7.104)$$

Всередині гребінки вектор \mathbf{E} орієнтований перпендикулярно ребрам і спрямований уздовж осі Z .

В області 2 існує хвиля типу Т і відповідає режиму стоячих хвиль у довгій лінії при короткому замиканні (рис. 7.83, б). При цьому

$$\dot{E}_{z2} = \dot{E}_0 \sin k(x+h), \quad \dot{E}_{x2} = \dot{E}_{y2} = 0. \quad (1.105)$$

З другого рівняння Максвелла $\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_2 = -j\omega\mu_0 \dot{\mathbf{H}}_2$ знайдемо вектор $\dot{\mathbf{H}}_2$

$$\dot{H}_{y2} = j\dot{H}_0 \cos k(x+h), \quad \dot{H}_0 = \frac{\dot{E}_0}{Z_T}. \quad (7.106)$$

На межі поділу областей 1 та 2 мають виконуватись граничні умови, тобто повинні бути неперервними тангенційні компоненти векторів

$$\dot{E}_{z1} = \dot{E}_{z2} \Big|_{x=0}, \quad \dot{H}_{y1} = \dot{H}_{y2} \Big|_{x=0}. \quad (7.107)$$

Введемо додаткові величини $Z_{n1} = \frac{\dot{E}_{z1}}{\dot{H}_{y1}} \Big|_{x=0}$, $Z_{n2} = \frac{\dot{E}_{z2}}{\dot{H}_{y2}} \Big|_{x=0}$, які

звуть **поверхневими імпедансами** відповідних областей. Тоді граничні умови (7.107) можна замінити **імпедансними граничними умовами**

$$Z_{n1} = Z_{n2}. \quad (7.108)$$

Для першої та другої областей з урахуванням (7.102) – (7.106) отримаємо

$$Z_{n1} = j \frac{\chi}{\omega \epsilon_0}, \quad Z_{n2} = j Z_T \operatorname{tg} [k(x+h)]. \quad (7.109)$$

Поверхневий імпеданс є реактивним (тому що для ЛП фазовий зсув між поздовжніми та поперечними складовими дорівнює $\pi/2$) і має індуктивний характер, оскільки для повільної хвилі $\chi > 0$.

Порівнюючи два імпеданси (7.108), (7.109) при $x = 0$, отримаємо дисперсійне рівняння

$$\chi = k \operatorname{tg} kh. \quad (7.110)$$

З останньої рівності виходить, що повинна виконуватись нерівність $\operatorname{tg} kh > 0$, звідки

$$m \frac{\lambda}{2} < h < (2m+1) \frac{\lambda}{4}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.111)$$

Таким чином, є області значень h , де є поширення ЕМХ уздовж ЛП, та **області непрозорості** (рис. 7.84). Інакше кажучи, розглянута структура може використовуватися як **гребінчастий фільтр**.

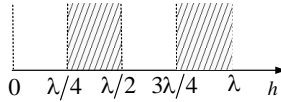


Рис. 7.84

Коефіцієнт сповільнення гребінчастої структури

$$v_{\text{сп}} = \frac{1}{|\cos(kh)|}. \quad (7.112)$$

Якщо глибина канавки $h \rightarrow \frac{\lambda}{4}$, то $v_{\text{сп}} \rightarrow \infty$. Це означає, що фазова швидкість поверхневої хвилі $v_{\text{ф}} \rightarrow 0$. Насправді це не виконується, тому що не враховується реальна конструкція гребінчастої структури. В розрахунках ми вважали, що товщина ребра $(L - a) \rightarrow 0$ (рис. 7.85).

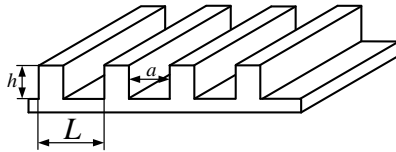


Рис. 7.85

Розглянемо особливості поверхневих хвиль, коли $(L - a) > 0$.

Вихідним рівнянням для знаходження поля ребристої структури є рівняння Гельмгольца (7.97). Оскільки поле вздовж координати z є періодичною функцією, її можна розкласти у ряд Фур'є, і поле $\dot{E}_z(x, z)$ представити у вигляді нескінченної суми гармонічних хвиль типу (7.100) зі своїми амплітудами, значенням χ та $\beta_{\text{сп}}^n$:

$$\dot{E}_z(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n x} e^{-j\beta_{\text{сп}}^n z}. \quad (7.113)$$

Кожний доданок суми (7.113) являє собою **просторову гармоніку** та має різні за напрямком фазові швидкості при однаковій частоті генератора ω .

У основної гармоніки ($n = 0$) найбільша фазова швидкість

$v_{\phi}^0 = \frac{\omega}{\beta_{\text{сп}}^0}$. Фазові швидкості вищих просторових гармонік менші:

$$v_{\phi}^{\pm n} = \frac{\omega}{\beta_{\text{сп}}^0 + \frac{2\pi}{L}n}$$

Коефіцієнт сповільнення просторових гармонік дорівнює

$$v_{\text{сп}}^{\pm n} = \frac{c}{v_{\phi}^{\pm n}}, v_{\text{сп}}^{\pm n} > v_{\text{сп}}^{\pm(n-1)}$$

На практиці звичайно використовують властивості гармонік з номерами $n = 0, n = \pm 1$ тому, що при віддаленні від сповільнюючої структури (уздовж осі X) інші просторові гармоніки несуть незначну енергію.

Групова швидкість усіх просторових хвиль однакова:

$$v_{\text{гр}}^{\pm n} = \left(\frac{d\beta_{\text{сп}}^0}{d\omega} \right)^{-1}$$

Розрізняють **прямі гармоніки** (фазова та групова швидкості збігаються за напрямком) та **зворотні**.

Дисперсійні властивості гребінки з $(L - a) > 0$ близькі до властивостей гребінки з нескінченно тонкими ребрами. Максимальний коефіцієнт сповільнення гребінчастих структур складає $v_{\text{сп}} \approx 10 \dots 30$.

Структура поля в гребінчастій структурі наведена на рис. 7.86. Як видно з рис. 7.86, у реальній гребінчастій структурі поширюється **гібридна хвиля**, у якої $E_z \neq 0, H_z \neq 0$.

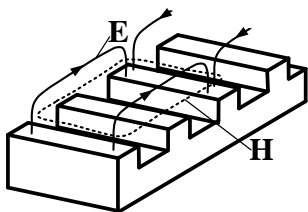


Рис. 7.86

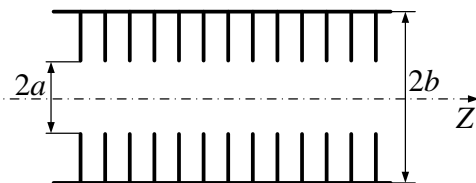


Рис. 7.87

Наприкінці зазначимо, що сповільнюючі системи широко використовують в техніці НВЧ-електронних приладів (лампах біжучої та зворотної хвилі), антенній техніці (діелектричні антени, гребінчасті структури в фазованих антенних решітках з частотним скануванням), в прискорювачах заряджених частинок. В прискорювачах застосовують діафрагмовані хвилеводи (рис. 7.87), які можна розглядати як згорнуту у кільце гребінчасту структуру.

Питання для самоперевірки

1. Назвіть основні типи плоских діелектричних ЛП.
2. Які типи хвиль є основними для плоскої ДЛП? Для круглої ДЛП?
3. Назвіть особливості розподілу поля хвиль типу Е та Н у плоскій ДЛП при зміні частоти генератора.
4. Як можна усунути нестійкість положення площини поляризації у круглої ДЛП?
5. Поясніть конструкцію лінії Губо.
6. Назвіть основні типи ЛП оптичного діапазону.
7. Які переваги та недоліки притаманні світловодам?
8. Назвіть основні типи ЛП з періодичними граничними умовами.
9. Які ЛП мають властивості гребінчастих фільтрів?
10. В яких пристроях НВЧ використовують сповільнюючі системи?

8. КОЛИВАЛЬНІ СИСТЕМИ НВЧ. ОБ'ЄМНІ РЕЗОНАТОРИ

8.1. Різновиди об'ємних резонаторів

На низьких частотах як коливальні системи широко застосовуються LC -контури, що мають резонансну частоту $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Електрична енергія у них запасається в конденсаторі, а магнітна – в індуктивності. Для збільшення ω_0 слід зменшувати індуктивність L і ємність C контуру. При цьому зростають втрати, обумовлені сильним поверхневим ефектом і випромінюванням. Умовою відсутності випромінювання є малі порівняно з довжиною хвилі розміри контуру. Ця умова виконується автоматично аж до метрового діапазону.

При подальшому збільшенні частоти для запобігання втрат застосовують інші коливальні системи, в яких змінне електромагнітне поле знаходиться всередині обмеженого об'єму. Тому ці системи отримали назву об'ємні резонатори (ОР).

Резонатором називається електромагнітна система, в якій при стрибкоподібній зміні будь-якого її параметра або значення стороннього поля виникають коливання з власною частотою. При цьому відбувається періодичний обмін енергією магнітного й електричного полів системи, в процесі якого енергія витрачається системою (якщо вона має втрати). Власна частота системи визначається її параметрами, а амплітуда за наявності втрат зменшується за експоненціальним законом.

Незагасальні коливання в реальному ОР існують в режимі **вимушених коливань**, при якому в резонатор вводять енергію від стороннього джерела (генератора). Якщо частота генератора збігається з однією з власних частот резонатора, то відбувається резонанс.

Резонанс – це явище, яке виникає при вимушених коливаннях. В цьому разі обмін енергією між об'ємним резонатором і джерелом вимушених коливань відсутній і поле в ОР досягає **максимальних значень**; витрачувана системою енергія відновлюється джерелом, внаслідок чого амплітуда вимушених коливань залишається незмінною (незагасальні коливання). **Частота вимушених коливань при резонансі називається резонансною.**

Для досягнення резонансу необхідно, щоб рух енергії носив циклічний або коливальний характер. Обидва види руху легко реалізувати, наприклад, на основі спрямовуючої системи, яка утворює замкнене кільце (рис. 8.1, *a*), або обмежена двома повністю відбиваючими площинами (рис. 8.1, *б*). Саме за цим принципом і будують ОР. При циклічному рухові накопичення енергії відбувається за рахунок синфазного складення хвиль, які збуджуються джерелом і які поширюються у ОР. Такі резонатори називаються **резонаторами біжучої хвилі**. При коливальному рухові накопичення енергії відбувається за рахунок багаторазового перевідбиття ЕМХ від площин (**резонатори стоячої хвилі**).

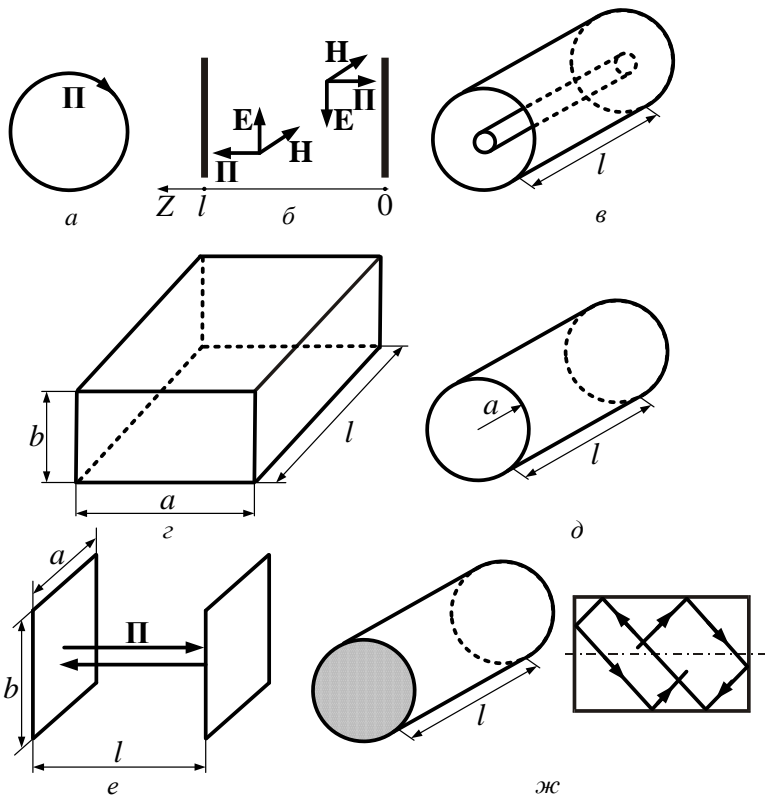


Рис. 8.1

На рис. 8.1, *в* – *д* схематично показані декілька таких пристроїв, виконаних на відрізках коаксialьної лінії (*в*), прямокутного (*з*) і круглого (*д*) хвилеводів. Вони знаходять застосування в генераторах, підсилювачах, фільтрах коливань НВЧ, використовуються у вимірювачах частоти (хвилемірах) та інших пристроях.

Описані резонатори мають замкнену поверхню і називаються **закритими** або **порожністими**. Вони використовуються головним чином на сантиметрових хвилях. Із збільшенням частоти омичні втрати зростають, і з цієї причини в міліметровому, квазіоптичному та оптичному діапазонах хвиль застосовуються **відкриті резонатори**, електромагнітне поле яких необмежене в просторі, але швидко зменшується при віддаленні від поверхні тіл, які утворюють резонатори. Найпростішим таким резонатором є система з двох прямокутних дзеркал – **резонатор Фабрі – Перо** (рис. 8.1, *е*), який можна розглядати як наслідок вилучення бокових стінок у прямокутному резонаторі (рис. 8.1, *з*), за рахунок чого втрати зменшуються. Дзеркальні резонатори застосовуються у квантових генераторах.

Резонатором може служити також відрізок діелектричної лінії передачі, в якій реалізовані умови накопичення енергії за рахунок повного внутрішнього відбиття (рис. 8.1, *ж*). Найчастіше діелектричні резонатори застосовуються в мініатюрних НВЧ пристроях.

8.2. Резонатори біжучої хвилі

Будемо вважати, що в деякій площині $z = 0$ згорнутого у кільце хвилеводу (рис. 8.2, *а*) з середньою довжиною l поширюється хвиля у напрямку осі Z .

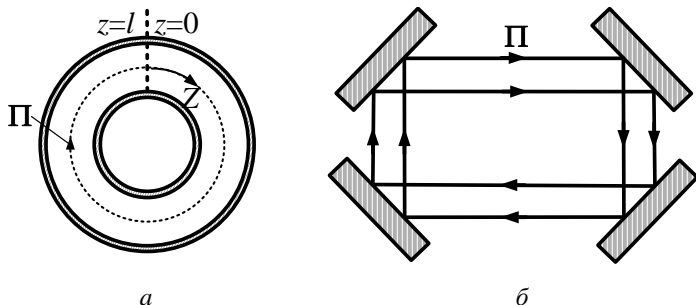


Рис. 8.2

Поле резонатора буде посилюватися за рахунок джерела (яке розміщене у площині $z = 0$), якщо хвиля прийде у цей перетин резонатора із запізненням на ціле число періодів, тобто на довжині кільця l повинне укластися ціле число довжин хвиль у хвилеводі:

$$l = p\lambda_{\text{л}}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (8.1, a)$$

Довжина хвилі в ЛП

$$\lambda_{\text{л}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}.$$

Із (8.1, a) можна знайти **власну довжину хвилі** λ_0 і **власну частоту** f_0 резонатора біжучої хвилі

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (8.1, б)$$

Відзначимо, що на відміну від коливальних LC -контурів низьких частот **об'ємні резонатори біжучих хвиль мають багато власних частот та власних довжин хвиль**. Це пов'язано з тим, що, поперше, уздовж резонатора може укладатися декілька хвиль ($p = 1, 2, \dots$), а, по-друге, у хвилеводі можуть поширюватися хвилі H_{mn} , E_{mn} з різними індексами m, n . Тому поля у резонаторах біжучої хвилі позначаються як H_{mnp} , E_{mnp} , де перші два індекси (m та n) позначають структуру поля відповідної хвилі у хвилеводі, а **третій індекс (p)** **указує число повних довжин хвиль типу (mn), які укладаються на довжині резонатора**. Кожній резонансній частоті f_{mnp} відповідає свій розподіл поля.

Хвилевід розглянутого резонатора біжучої хвилі неможливо вважати регулярним (див. п. 1.1), проте, коли радіус резонатора

складає декілька довжин хвиль, структуру поля у ньому можна описувати тими ж виразами, як і у регулярному хвилеводі (п.1.4...1.6).

Резонатори біжучої хвилі можуть бути також відкритими. Так, на рис. 8.2, б показана схема чотиризеркального резонатора – генераторного пристрою (гіротрона) з Т-хвилею.

Питання для самоперевірки

1. Чому в діапазонах виключно високих, гіпервисоких частот та у оптичному діапазоні ($\lambda < 10$ мм) неможливо реалізувати коливальні системи з зосередженими індуктивністю і ємністю?
2. Дайте визначення об'ємного резонатора.
3. Які типи резонаторів можна реалізувати на основі відрізків ліній передачі?
4. Які типи резонаторів вам відомі?
5. Що являє собою резонатор біжучої хвилі?
6. Що означають індекси m, n, p в позначенні типів коливань в резонаторі біжучої хвилі?

8.3. Власна частота та типи коливань об'ємних резонаторів стоячої хвилі

Розглянемо відрізок довільної спрямовуючої системи без втрат 1, яка з торців закінчується площинами з ідеального провідника 2, 3 (рис. 8.3, а). В даному випадку електромагнітне поле падаючої $\dot{\mathbf{E}}^+$, $\dot{\mathbf{H}}^+$ та відбитої $\dot{\mathbf{E}}^-$, $\dot{\mathbf{H}}^-$ хвиль формують стоячу хвилю у резонаторі (рис. 8.3, б).

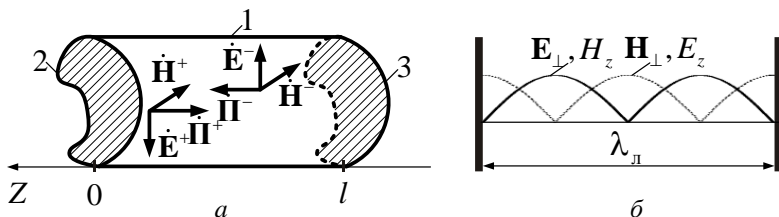


Рис. 8.3

Результуюче поле $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^+ + \dot{\mathbf{E}}^-$, $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}^+ + \dot{\mathbf{H}}^-$ з урахуванням вибору початку координати Z (рис. 8.3, *a*) можна записати у вигляді (для хвиль типу H):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}^+(z, t) &= \left[\dot{\mathbf{H}}_{\perp}^+ + j e_z \dot{H}_z^+ \right] e^{j(\omega t + \beta_n z)}, \\ \dot{\mathbf{E}}^+(z, t) &= \dot{\mathbf{E}}_{\perp}^+ e^{j(\omega t + \beta_n z)}, \\ \dot{\mathbf{H}}^-(z, t) &= \left[\dot{\mathbf{H}}_{\perp}^- + j e_z \dot{H}_z^- \right] e^{j(\omega t - \beta_n z)}, \\ \dot{\mathbf{E}}^-(z, t) &= \dot{\mathbf{E}}_{\perp}^- e^{j(\omega t - \beta_n z)}.\end{aligned}\tag{8.2}$$

Для хвиль типу E записи будуть такими ж самими, як і (8.2), треба лише зробити заміни $\dot{\mathbf{H}}^{\pm}(z, t) \leftrightarrow \dot{\mathbf{E}}^{\pm}(z, t)$, $\dot{\mathbf{H}}_{\perp}^{\pm} \leftrightarrow \dot{\mathbf{E}}_{\perp}^{\pm}$, $\dot{H}_z^{\pm} \leftrightarrow \dot{E}_z^{\pm}$.

Повне поле $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_{\perp} + j e_z \dot{E}_z$, $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_{\perp} + j e_z \dot{H}_z$ на торцях резонатора повинне задовольняти граничним умовам

$$\dot{\mathbf{E}}_{\perp} \Big|_{z=0, l} = 0; \dot{H}_z \Big|_{z=0, l} = 0; \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}_{\perp}}{\partial z} \Big|_{z=0, l} = 0; \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} \Big|_{z=0, l} = 0, \tag{8.3}$$

звідки отримаємо

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_{\perp}^- &= -\dot{\mathbf{E}}_{\perp}^+, & \dot{H}_z^- &= -\dot{H}_z^+, \\ \dot{\mathbf{H}}_{\perp}^- &= \dot{\mathbf{H}}_{\perp}^+, & \dot{E}_z^- &= \dot{E}_z^+, \end{aligned}$$

а також

$$\sin \beta_n l = 0 \text{ або } \beta_n = \frac{p\pi}{l}, \quad p = 1, 2, 3 \dots, \tag{8.4}$$

де p – це кількість стоячих півхвиль, які укладаються вздовж резонатора.

Оскільки $\beta_n = 2\pi/\lambda_n$, знаходимо, що умова резонансу (8.4) виконується при

$$l = p \frac{\lambda_{\text{л}}}{2}, \quad (8.5)$$

тобто резонансна довжина закороченого з двох боків резонатора кратна половині довжини хвилі в лінії передачі.

Таким чином, в резонаторах стоячої хвилі, як і в ОР біжучої хвилі, може бути збуджено безліч коливань, позначуваних \mathbf{H}_{mnp} , \mathbf{E}_{mnp} або T_p , кожне з яких характеризується власною резонансною довжиною хвилі λ_0 (резонансною частотою f_0).

Враховуючи формулу (8.5), знайдемо наступні вирази для резонансної довжини хвилі і частоти ОР стоячої хвилі:

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{p}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}, \quad f_0 = \frac{c}{\lambda_0}. \quad (8.6)$$

Повне поле $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ у резонаторах з урахуванням співвідношень (8.2) має вигляд:

- поле типу \mathbf{H}

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}} = j\dot{\mathbf{E}}_{\perp\text{л}} \sin \frac{p\pi}{l} z e^{j\omega_0 t}, \\ \dot{\mathbf{H}} = \left(\dot{\mathbf{H}}_{\perp\text{л}} \cos \frac{p\pi}{l} z - \mathbf{e}_z \dot{H}_{\text{zn}} \sin \frac{p\pi}{l} z \right) e^{j\omega_0 t}, \end{cases} \quad (8.7, a)$$

- поле типу \mathbf{E}

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}} = j \left(\dot{\mathbf{E}}_{\perp\text{л}} \sin \frac{p\pi}{l} z + \mathbf{e}_z \dot{E}_{\text{zn}} \cos \frac{p\pi}{l} z \right) e^{j\omega_0 t}, \\ \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_{\perp\text{л}} \cos \frac{p\pi}{l} z e^{j\omega_0 t}. \end{cases} \quad (8.7, б)$$

Індекс „л” у виразах (8.7) означає значення відповідних компонент поля у максимумах розподілу поля (у пучностях поля). З наведених виразів (8.7) видно, що вектори $\dot{\mathbf{E}}$ та $\dot{\mathbf{H}}$ у об'ємних резонато-

рах змінюються у часі зі зсувом на чверть періоду ($T/4$), тому енергія ЕМП в окремі моменти часу зосереджена тільки в електричному полі, а через $T/4$ – тільки у магнітному, в інші – у електричному і у магнітному.

Розподіл амплітуд компонентів поля за координатою z змінюється за законами $\begin{cases} \sin \frac{p\pi}{l} z, \\ \cos \frac{p\pi}{l} z, \end{cases}$ що зумовлено виконанням граничних умов на торцевих стінках резонатора (рис. 8.3, б).

В ОР тип коливань з найбільшим значенням λ_0 називається основним (найнижчим). Типи коливань, які мають однакові значення λ_0 , але різну структуру, називаються виродженими.

8.4. Добротність об'ємних резонаторів

За наявності втрат у резонаторах з часом амплітуда коливань зменшується за експоненційним законом. Швидкість зміни накопиченої енергії в ОР характеризують **власною добротністю**, яку знаходять за звичайною формулою

$$Q_0 = \omega_0 \frac{W_{\text{нак}}}{P_{\text{втр}}} = 2\pi \frac{W_{\text{нак}}}{\Delta W}, \quad (8.8)$$

де $W_{\text{нак}}$ – енергія накопичена у резонаторі; $P_{\text{втр}}$ – потужність втрат енергії в резонаторі; $\Delta W = TP_{\text{втр}}$ – зміна енергії ЕМП в ОР за один період коливань T .

У часі закон зміни енергії в ОР можна записати у вигляді

$$W_{\text{нак}}(t) = W_{\text{нак}}(0) e^{-\frac{\omega_0 t}{Q_0}}, \quad (8.9, a)$$

де $W_{\text{нак}}(0)$ – енергія в ОР в початковий момент часу ($t = 0$).

Оскільки амплітуди векторів $\dot{\mathbf{E}}$ та $\dot{\mathbf{H}}$ пропорційні \sqrt{W} в будь-якій точці M резонатора, то комплексні амплітуди змінюються у часі за однаковими законами:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}(M, t) &= \dot{\mathbf{E}}(M, 0)e^{-\frac{\omega_0}{2Q_0}t} = \dot{\mathbf{E}}(M, 0)e^{-\frac{\pi}{Q_0 T}t}, \\ \dot{\mathbf{H}}(M, t) &= \dot{\mathbf{H}}(M, 0)e^{-\frac{\omega_0}{2Q_0}t} = \dot{\mathbf{H}}(M, 0)e^{-\frac{\pi}{Q_0 T}t}.\end{aligned}\quad (8.9, \bar{b})$$

З виразів (8.9, \bar{b}) видно, що за час $t = Q_0 T$ амплітуди напруженостей ЕМП у об'ємному резонаторі зменшуються у $e^\pi \approx 23$ рази. Таким чином, добротність Q_0 ОР дорівнює числу періодів, за яке амплітуда напруженості поля зменшується в $e^\pi \approx 23$ рази.

Власна добротність об'ємних резонаторів Q_0 зумовлює частотну вибірковість резонаторів $2\Delta f = f_0/Q_0$ і залежить від втрат у ОР. Як і у лініях передач (п. 1.7.2), втрати енергії ΔW зумовлені втратами у провідних (металевих) стінках резонатора $\Delta W_{\text{пр}}$, діелектрику $\Delta W_{\text{д}}$, втратами на випромінювання (у порожнистих ОР) ΔW_{Σ} . В загальному випадку втрати залежать від енергії, яку ОР віддає у зовнішні пристрої $\Delta W_{\text{зовн}}$, і повні втрати дорівнюють

$$\Delta W = \Delta W_{\text{пр}} + \Delta W_{\text{д}} + \Delta W_{\Sigma} + \Delta W_{\text{зовн}}.$$

Тоді вираз (8.8) можна представити як

$$\frac{1}{Q} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{Q_i} = \frac{1}{Q_{\text{пр}}} + \frac{1}{Q_{\text{д}}} + \frac{1}{Q_{\Sigma}} + \frac{1}{Q_{\text{зовн}}}, \quad (8.10)$$

де $Q_i = 2\pi \frac{W_{\text{нак}}}{\Delta W_i}$ – часткові добротності, зумовлені усіма причинами втрат енергії у ОР.

Повну добротність Q називають **навантаженою**, величину Q_{Σ} – **радіаційною** (дифракційною), а $Q_{\text{зовн}}$ – **зовнішньою добротністю**. Якщо зв'язок ОР із зовнішніми пристроями відсутній, тоді $Q_{\text{зовн}} \rightarrow \infty$ і

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_{\text{пр}}} + \frac{1}{Q_{\text{л}}} + \frac{1}{Q_{\Sigma}}. \quad (8.11)$$

З виразів (8.10) та (8.11) маємо

$$Q = \frac{Q_0 Q_{\text{зовн}}}{Q_0 + Q_{\text{зовн}}}. \quad (8.12)$$

Повне врахування усіх складових добротності (8.10) дуже складне. Для ОР на відрізках металевих хвильоводів можна вважати, що за умов малих втрат у діелектрику ($\text{tg } \delta \rightarrow 0$) власна добротність зумовлена лише втратами у провідних стінках. Енергію у резонаторі та потужність втрат знайдемо за формулами

$$W_{\text{нак}} = \int_V \frac{\mu_a}{2} |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV, \quad P_{\text{втр}} = \frac{1}{2\sigma\Delta} \oint_S |\dot{\mathbf{H}}_{\tau}|^2 dS, \quad (8.13)$$

де $\dot{\mathbf{H}}$ – розподіл амплітуди вектора $\dot{\mathbf{H}}$ в усіх точках ОР; $\dot{\mathbf{H}}_{\tau}$ – розподіл амплітуди тангенційної компоненти вектора $\dot{\mathbf{H}}$ на стінках ОР;

$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f_0 \mu_{a\sigma} \sigma}}$ – **глибина проникнення поля** у металеві стінки ОР;

$\mu_a, \mu_{a\sigma}$ – абсолютні магнітні проникності середовища усередині резонатора та його стінок. Далі будемо вважати, що $\mu_a = \mu_{a\sigma} = \mu_0$.

Із співвідношень (8.8) та (8.13) отримаємо

$$Q_0 = \frac{2 \int_V |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV}{\Delta \oint_S |\dot{\mathbf{H}}_{\tau}|^2 dS} = \frac{2 \overline{H^2} V}{\Delta \overline{H_{\tau}^2} S}, \quad (8.14)$$

де $\overline{H^2}$ та $\overline{H_\tau^2}$ – середні значення квадрата амплітуди магнітного поля в об'ємному резонаторі; $\overline{H_\tau^2}$ – середні значення квадрата тангенційної компоненти на стінках ОР.

Таким чином, власна добротність Q_0 залежить від якості матеріалу ОР (глибини проникнення Δ), структури поля збудженого коливання (відношення $\overline{H^2} / \overline{H_\tau^2}$) та геометрії резонатора (відношення V/S).

Для діапазону НВЧ $\Delta \sim 10^{-5}$ м; $\frac{H}{H_\tau} \sim 1$; $\frac{V}{S} \sim 0,1$ м, звідки $Q_0 \sim 10^4$.

Питання для самоперевірки

1. Чим відрізняються ЕМП в резонаторі від характеру хвиль в нескінченному хвилеводі?
2. Запишіть вирази для власної частоти і власної довжини хвилі в резонаторі стоячої хвилі.
3. Що означають індекси m, n, p в позначенні типів коливань в резонаторі стоячої хвилі?
4. Що означає поняття основне (найнижче) коливання?
5. Дайте визначення добротності ОР.
6. Від яких факторів залежить добротність об'ємних резонаторів?
7. Поясніть поняття власної добротності ОР, зовнішньої, навантаженої, радіаційної.

8.5. Резонатори на відрізках регулярних ліній передачі

Наведемо основні характеристики для резонаторів стоячої хвилі, які реалізовані на відрізках регулярних ЛП.

8.5.1. Прямокутний резонатор

Підставивши вирази для $\lambda_{кр}$ в (8.6), одержимо такий вираз для власних довжин хвиль **прямокутного резонатора**

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (8.15, a)$$

Для коливань E_{mnp} у прямокутному ОР індекси $m \neq 0, n \neq 0$, для коливань H_{mnp} один з індексів m, n може дорівнювати нулю. Третій індекс для коливань E_{mnp} у прямокутному резонаторі може приймати значення $p = 0, 1, 2, \dots$, для коливань H_{mnp} $p = 1, 2, \dots$. Таким чином, лише один з індексів m, n, p у формулі (8.15, a) може дорівнювати нулю.

Приклад 8.1. Прямокутний мідний об'ємний резонатор, заповнений повітрям, має такі розміри: $a = 25$ мм, $b = 20$ мм, $l = 25$ мм. Визначити резонансну довжину хвилі трьох нижчих типів коливань. Як вони позначаються?

Розв'язок. У прямокутному резонаторі нижчими можуть бути коливання типів $H_{101}, H_{011}, E_{110}$, у яких один з індексів рівний нулю, а два інших – одиниці. З виразу

$$\lambda_{mnp} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}},$$

отримаємо $\lambda_{mnp} = 3,535$ см для хвилі H_{101} ; $\lambda_{mnp} = 3,123$ см для хвилі H_{011} ; $\lambda_{mnp} = 3,123$ см для хвилі E_{110} .

Отже, основне коливання з найбільшим значенням λ_{mnp} – це коливання H_{101} , наступним за ним по порядку є коливання H_{011} .

Оскільки всі три осі координат прямокутного резонатора (ПР) декартові і цілком рівноправні, то розподіл коливань ПР на типи H_{mnp} і E_{mnp} виявляється умовним. Так, наприклад (див. рис. 8.4, a), якщо спрямувати вздовж найменшого ребра вісь Y ($a > b, l > b$), то основним коливанням є H_{101} і $\lambda_0 = 2al/\sqrt{a^2 + l^2}$, а якщо вздовж

найменшого ребра спрямувати вісь Z , то основним типом буде E_{110} (рис. 8.4, б).

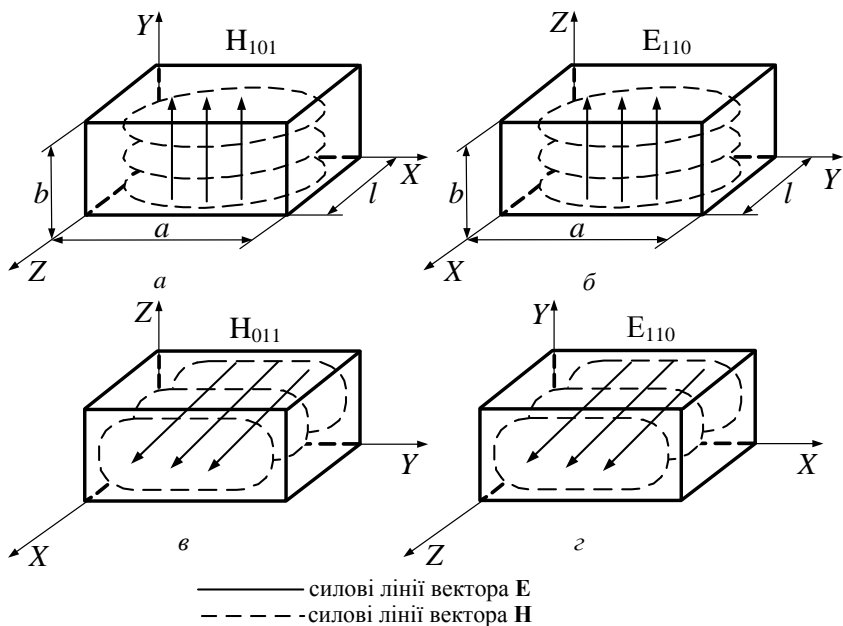


Рис. 8.4

На рис. 8.4, в, г поля також мають однакову структуру, але залежно від орієнтації системи координат поля мають позначення: H_{011} та E_{110} відповідно різні.

Через те що в прямокутних хвильоводах поля типів H_{mn} і E_{mn} з однаковими індексами мають однакові $\lambda_{кр}$, то згідно з (8.6) у ПР типи коливань з трьома відмінними від нуля індексами у крайньому разі двократно вироджені. Тому доцільно працювати на типах полів з одним нульовим індексом H_{101} , H_{011} , E_{110} і не застосовувати кубічних резонаторів, в яких ці типи хвиль трикратно вироджені.

На рис. 8.5 схематично наведені ЕМП коливання H_{101} у фіксований момент часу та відповідні розподіли електричного поля у прямокутному резонаторі.

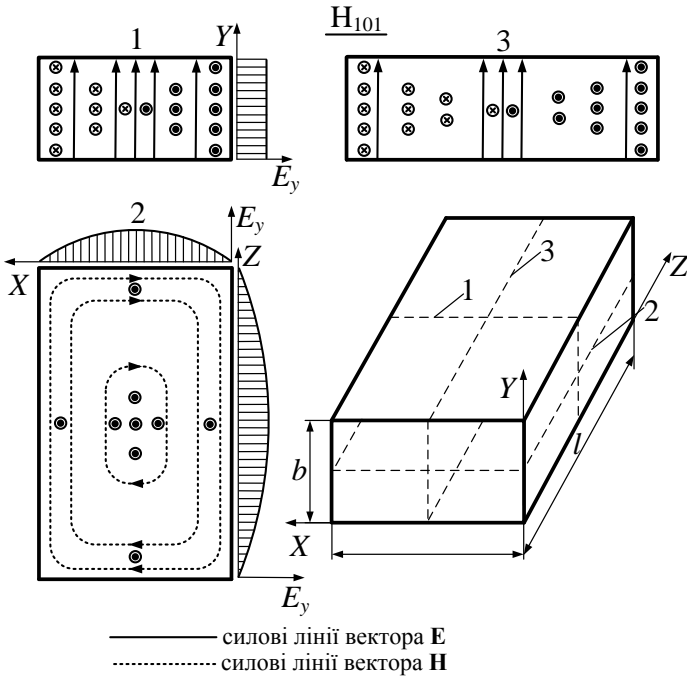


Рис. 8.5

Власну добротність резонатора на коливанні типу H_{101} можна знайти з загальних співвідношень (8.12), (8.13). Для коливання H_{101} після перетворень отримаємо

$$Q_0 = \frac{1}{\Delta} \frac{\mu a b l (l^2 + a^2)}{l a (l^2 + a^2) + 2b (l^3 + a^3)}. \quad (8.15, б)$$

Приклад 8.2. Для умов прикладу 8.1 знайти власну добротність резонатора на коливанні типу H_{101} .

Розв'язок. Власна довжина хвилі $\lambda_{mnp} = 3,535 \text{ см}$ (див. приклад 8.1), власна частота $f_0 = c/\lambda_{101}^H = 8,49 \text{ ГГц}$.

Глибина проникнення $\Delta = 1/\sqrt{\pi f_0 \mu_a \sigma}$. Для міді $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$, $\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^7 \text{ Гн/м}$, глибина проникнення $\Delta = 0,72 \cdot 10^{-6} \text{ м}$. Згідно з виразом (8.15, б) для значень $a = l = 25 \text{ мм}$, $b = 20 \text{ мм}$, $\mu = 1$ добротність $Q_0 = 10700$.

8.5.2. Циліндричний круглий резонатор

Циліндричний круглий резонатор (ЦКР) знайшов на практиці ширше застосування, ніж ПР, через більшу добротність. Підставивши вирази для $\lambda_{кр}$, одержимо для власних довжин хвиль ЦКР такий вираз

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\delta_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}, \quad (8.16, a)$$

в якому для коливань типу H_{mnp} ($p = 1, 2, \dots$) $\delta_{mn} = \mu_{mn}$ (μ_{mn} – n -й корінь похідної функції Бесселя порядку m), а для коливань типу E_{mnp} ($p = 0, 1, 2, \dots$) $\delta_{mn} = \nu_{mn}$ (ν_{mn} – n -й корінь функції Бесселя порядку m).

Основним типом коливань у ЦКР залежно від відношення l/a є коливання E_{010} або H_{111} .

Для коливання E_{010} поле однорідне уздовж осі Z ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$) і резонансна довжина хвилі не залежить від l ($\lambda_0^{E_{010}} = \lambda_{кр}^{E_{01}} = 2,61a$).

Оскільки $\mu_{0n} = \nu_{1n}$, то в ЦКР пари типів коливань H_{0np} і E_{1np} завжди вироджені. Структури деяких типів коливань ЦКР зображені на рис. 8.6.

Найбільш широкого застосування набули резонатори на коливаннях типу H_{01p} , які забезпечують на зразок хвилі H_{01} у круглому хвилеводі найменші втрати, тобто **найбільші значення власної добротності**. Тому коливання типів H_{01p} використовуються у хвилемірах високої точності і для стабілізації частоти у передавачах і гетеродинах.

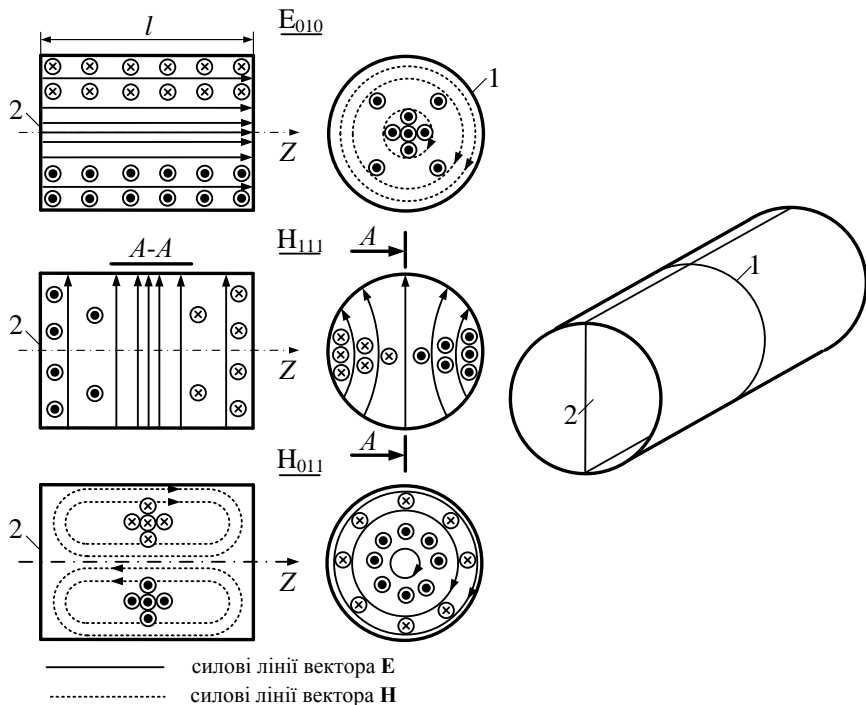


Рис. 8.6

Розрахунки показують, що власна добротність резонатора на коливанні H_{011}

$$Q_0 = \frac{1}{\Delta} la \left[(2a-l) \left(\frac{\lambda_0}{2l} \right)^2 + l \right]^{-1}. \quad (8.16, б)$$

Приклад 8.3. Знайти власну добротність порожнистого циліндричного резонатора з розмірами: $a = 2 \text{ см}$, $l = 5 \text{ см}$. В резонаторі існує коливання H_{011} , і він виконаний з міді.

Розв'язок. Власна добротність визначається із співвідношення (8.16, б). Виконуємо розрахунки:

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{p}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{01}}{\pi a}\right)^2}}.$$

З табл. 1.4 $\mu_{01} = 3,83$, тому

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{0,05}\right)^2 + \left(\frac{3,83}{3,14 \cdot 0,02}\right)^2}} = 0,0312 \text{ м},$$

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,0312} = 9,62 \cdot 10^9 \text{ Гц}, \quad \sigma = 5,7 \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}};$$

$$\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}};$$

$$\begin{aligned} Q_0 &= \sqrt{3,14 \cdot 9,62 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 5,7 \cdot 10^7} \times \\ &\times \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{(4-5) \cdot 10^{-2} \left(\frac{3,12 \cdot 10^{-2}}{10^{-1}}\right)^2 + 5 \cdot 10^{-2}} = \\ &= 14,8 \cdot 10^5 \cdot 2,04 \cdot 10^{-2} = 30200. \end{aligned}$$

8.6. Прохідний резонатор. Збудження і перестроювання частоти об'ємних резонаторів

Об'ємні резонатори на практиці завжди тим або іншим способом зв'язані із зовнішніми пристроями. Методи збудження коливань у хвилеводних ОР і виведення енергії з них такі самі, як і в хвилеводній техніці. При цьому як елементи зв'язку використовуються штирі, петлі, щілини й отвори. Виділимо два типових способи з'єднання об'ємних резонаторів 3 (рис. 8.7) із зовнішніми НВЧ колами – з одним 1 (рис. 8.7, а) і двома 1, 2 (рис. 8.7, в) елементами зв'язку.

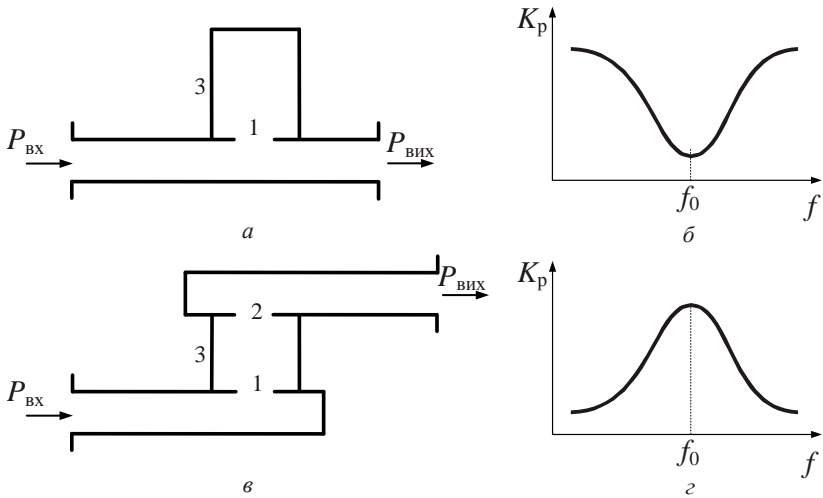


Рис. 8.7

Якщо елемент зв'язку виконаний, наприклад, на широкій стінці прямокутного хвильоводу, то еквівалентна схема пристрою, зображеного на рис. 8.7, *а*, являє собою паралельний контур, увімкнений в лінію послідовно. Як наслідок, на резонансній частоті коефіцієнт передавання потужності $K_p(f) = P_{\text{вих}}/P_{\text{вх}}$ має чітко виражений мінімум (рис. 8.7, *б*), тобто розглянутий пристрій може виконувати функцію **режекторного фільтра**.

Резонатор з двома елементами зв'язку називають **прохідним**. Еквівалентна схема такого пристрою – паралельний контур, увімкнений в лінію паралельно. На резонансній частоті коефіцієнт передачі прохідного резонатора максимальний (рис. 8.7, *г*) і він виконує функцію **смугового фільтра**.

Еквівалентна схема прохідного резонатора зображена на рис. 8.8.

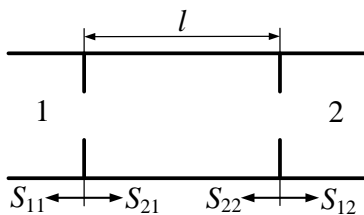


Рис. 8.8

Будемо вважати, що елементи зв'язку 1, 2 об'ємного резонатора однакові. Комплексні коефіцієнти відбиття від них S_{11}, S_{22} і проходження S_{21}, S_{12} також однакові: $S_{11} = S_{22}$, $S_{21} = S_{12}$. Якщо теплові втрати відсутні, то виконується рівність

$$|S_{21}|^2 = 1 - |S_{11}|^2.$$

Комплексна амплітуда падаючої хвилі $\dot{E}^{\text{пад}}$ після першого проходження ОР завдовжки l становить у плечі 2: $\dot{E}_1^{\text{пр}} = S_{21}^2 \dot{E}^{\text{пад}} e^{-j\beta l}$, де βl – фазове запізнення при проходженні хвилі від плеча 1 до плеча 2.

Амплітуда другої хвилі, яка відбилась від плечей 2, 1 та прийшла у плече 2, становить

$$\dot{E}_2^{\text{пр}} = S_{21}^2 \dot{E}^{\text{пад}} e^{-j\beta l} S_{11}^2 e^{-j2\beta l}. \quad (8.17)$$

Повне електричне поле у перерізі плеча 2

$$\dot{E}^{\text{пр}} = S_{21}^2 \dot{E}^{\text{пад}} e^{-j\beta l} \sum_{n=0}^{\infty} (S_{22} e^{-j\beta l})^{2n}. \quad (8.18)$$

Модуль коефіцієнта передачі τ прохідного резонатора

$$|\tau| = \left| \frac{\dot{E}^{\text{пр}}}{\dot{E}^{\text{пад}}} \right| = \frac{1 - |S_{11}|^2}{|1 - S_{11}^2 e^{-j2(\beta l - \phi_0)}|}. \quad (8.19)$$

У співвідношенні (8.19) ϕ_0 – фаза коефіцієнта відбиття, $\phi_0 = \arg S_{11}$.

Формулу (8.19) можна отримати, якщо взяти до уваги, що сума у (8.18) являє собою суму нескінченно спадної геометричної прогресії.

З виразу (8.19) видно, що у разі $\beta l - \phi_0 = p\pi$, $p = 1, 2, 3, \dots$ коефіцієнт передачі $|\tau| = 1$, настає **резонанс**. Для режиму резонансу довжина резонатора

$$l = p \frac{\lambda_{\text{л}}}{2} + \varphi_0 \frac{\lambda_{\text{л}}}{2\pi}. \quad (8.20)$$

Як видно з виразу (8.20), довжина резонатора кратна $\frac{\lambda_{\text{л}}}{2}$ тільки для випадку $\varphi_0 = 0$.

Коефіцієнт передачі залежить від частоти (від частоти залежать β та φ_0).

Елементами зв'язку в об'ємних резонаторах можуть бути різні неоднорідності. Наприклад, ємнісні діафрагми ($\varphi_0 > 0$, рис. 8.9, а), індуктивні діафрагми ($\varphi_0 < 0$, рис. 8.9, б), резонансні діафрагми (рис. 8.9, в), системи штирів (рис. 8.10, а), зазори (щілини) у стрічкових або коаксіальних ЛП (рис. 8.10, б).

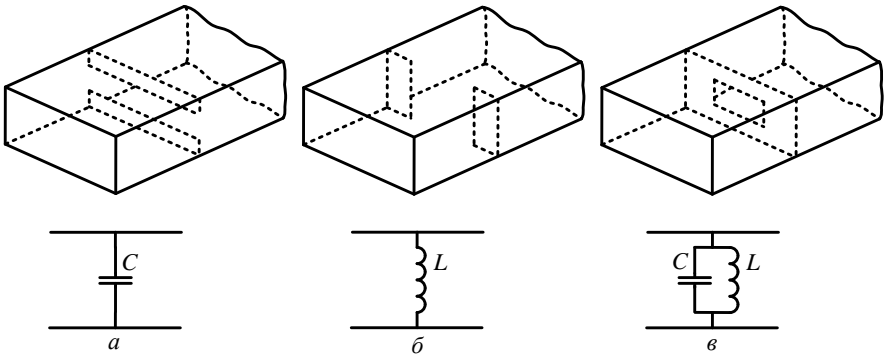


Рис. 8.9

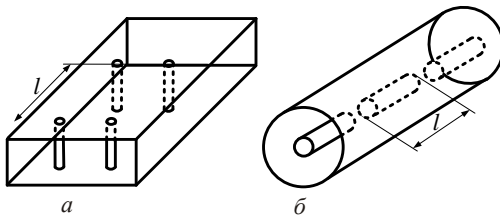


Рис. 8.10

Підібравши геометричні характеристики неоднорідностей, їх кількість, відстань між ними, можна отримати бажані характеристики прохідних резонаторів.

Практично важливим питанням є перестроювання частоти резонатора. Зміну частоти коливань, як виходить із виразу (8.6), для коливань H_{mnp} і E_{mnp} при $p \neq 0$ найбільш просто здійснити зміною довжини l . Для цього одну з торцевих стінок виконують у вигляді рухомого поршня. При збудженні в циліндричному резонаторі типів коливань H_{0np} у стінках ОР виникають лише поперечні струми, що припускає застосування безконтактних поршнів (рис. 8.11, а).

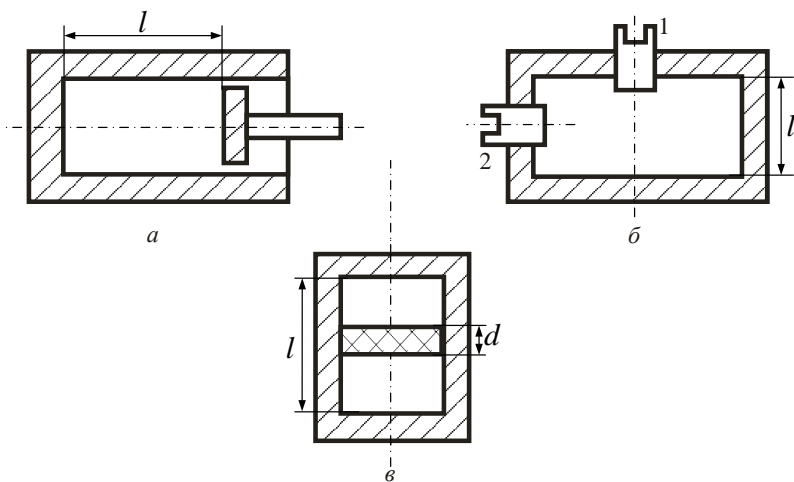


Рис. 8.11

Власні частоти типів E_{mnp} взагалі не залежать від довжини l , тому невелике перестроювання ОР з типом коливань E_{mnp} здійснюють не поршнем, а зміною об'єму: прогинанням стінки; введенням металевого або діелектричного тіла в порожнину ОР.

Якщо через середину торцевої стінки ЦКР з типом коливань E_{010} вводити штир 1 (див. рис. 8.11, б), то зростає електрична енергія $\Delta W_e > 0$ і частота знижується, а якщо через бічну стінку цього

резонатора вводити вздовж радіуса штир 2, то частота збільшується, через те що $\Delta W_e \approx 0$, а $\Delta W_m > 0$.

Нехай у циліндричному круглому резонаторі з повітряним заповненням ($\epsilon_a \approx \epsilon_0$) і довільним типом коливань класу Н у пучності електричного поля розміщений тонкий діелектричний диск завтовшки $d \ll \lambda$ (рис. 8.11, в) і $\epsilon_{a1} > \epsilon_0$. Через те що $\epsilon_{a1} > \epsilon_0$, то $\Delta W_e > 0$ і частота f_0 зменшується.

Питання для самоперевірки

1. Нарисуйте структуру поля коливань H_{101} у ОР на відрізку прямокутного хвилеводу. Поясніть, чому структура поля цього коливання подібна структурам полів H_{011} та E_{110} ?

2. Які найпростіші типи коливань можуть існувати у ОР на відрізку циліндричного хвилеводу?

3. Який смисл величин, що входять до виразу для власних частот в циліндричному ОР?

4. Назвіть методи збудження хвилеводних ОР і виведення енергії з них.

5. Перелічіть типові способи з'єднання ОР з зовнішніми НВЧ колами.

6. Назвіть способи перестроювання частоти в резонаторах.

8.7. Резонатори інших типів

8.7.1. Резонатори на відрізках ЛП з хвилею Т

Розглянемо стисло резонатори на відрізках ліній із хвилею типу Т. В закорочених з двох боків резонаторах найчастіше використовують коливання типів T_p при малих значеннях індексу p . Через те що $\lambda_{кр}^T = \infty$, то згідно з (8.6) $\lambda_0 = 2l/p$. При $p = 1$ резонатори називають **півхвильовими** (довжина $l = \lambda_0/2$).

Структура поля коаксiального резонатора для хвилі Т наведена на рис. 8.12.

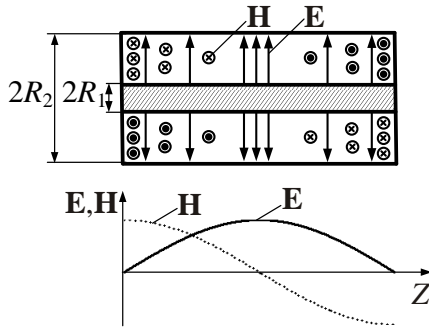


Рис. 8.12

Власна добротність при $p = 1$ знаходиться за співвідношенням

$$Q_0 = \frac{1}{\Delta} \frac{2l \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{4 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + l \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}, \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f_0 \mu_a \sigma}}.$$

Якщо один кінець резонатора з хвилею типу Т розімкнений, то умовою резонансу, записаною як результат синфазного складання дворазово відбитих від замкнутого і відкритого кінця хвиль, є

$$2\pi p = \pi + 2\beta l, \quad l = (2p - 1) \frac{\lambda_{\text{л}}}{4}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

тобто **найменша довжина розімкненого з одного кінця резонатора дорівнює $\lambda_{\text{л}}/4$ і їх називають чвертьхвильовими.**

Для зменшення довжини l коаксіальних резонаторів використовують розімкнені резонатори (рис. 8.13). Це призводить до підвищення концентрації електричного поля між центральними провідником і відбивною стінкою резонатора (рис. 8.13, а), що еквівалентно включенню ємності в коаксіальну лінію завдовжки h (рис. 8.13, б). Резонанс можливий, коли вхідний опір ЛП має індуктивний характер, тобто при $h < \lambda_0/2$ (рис. 8.13, в).

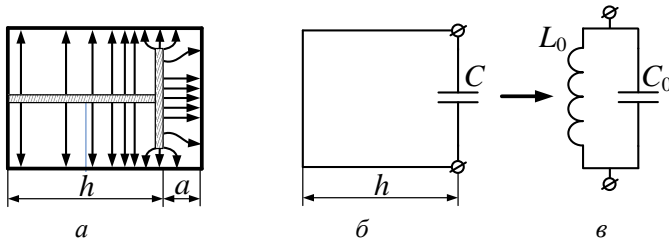


Рис. 8.13

Іншим прикладом ОР з хвилею Т є **стрічковий резонатор**, що являє собою відрізок стрічкової ЛП довжиною l , на обох кінцях якого реалізований режим холостого ходу (рис. 8.14).

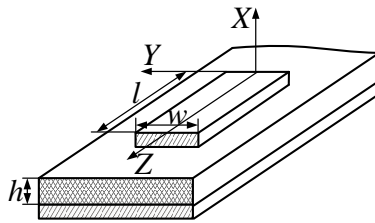


Рис. 8.14

Структура ЕМП стрічкового резонатора зображена на рис. 8.15.

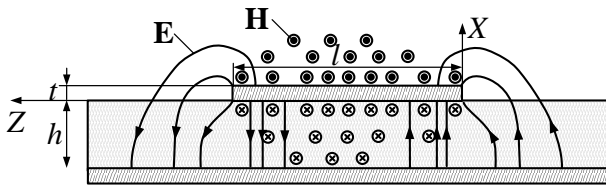


Рис. 8.15

Резонансна довжина хвилі коливань типу T_p дорівнює $\lambda_0^{T_p} = 2l/p$, $p = 1, 2, \dots$, а довжина резонатора $l = p\lambda_0^{T_p}/2$. Це зумовлено тим, що критична довжина хвилі типу Т та квазі-Т $\lambda_{кр} = \infty$.

8.7.2. Резонатори з рознесеними областями концентрації електричного та магнітного поля

В приладах НВЧ потрібно, щоб час взаємодії електронів з полем коливальної системи був малим порівняно з періодом коливань. Тоді електрони, які попадають у електричне поле в сприятливій фазі, збуджують резонатор і підтримують у ньому незагасаючі коливання. Для цього необхідно, щоб резонатор мав вузький просторовий зазор, де сконцентроване електричне поле. На рис. 8.16 зображені можливі конструкції таких резонаторів – тороїдних резонаторів клістронного генератора. Зображені також силові лінії векторів \mathbf{E} та \mathbf{H} .

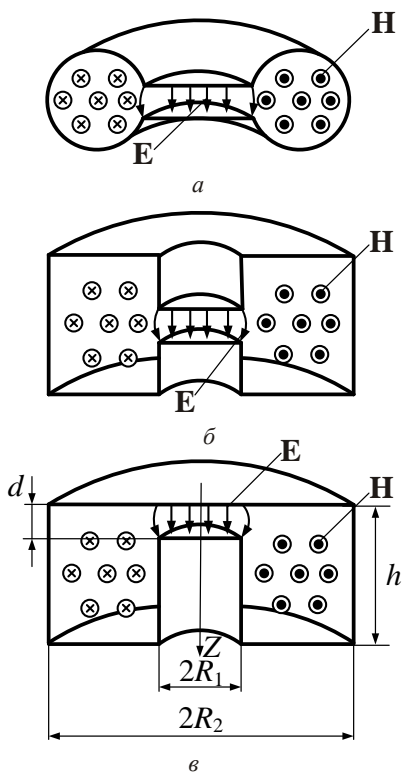


Рис. 8.16

З рисунка видно, що **електричне та магнітне поля просторово рознесені**, і такий резонатор можна розглядати як систему з квазі-зосередженими параметрами $C_{\text{екв}}, L_{\text{екв}}$.

Зазор завширшки d (рис. 8.16, в) можна вважати ємністю з еквівалентною величиною

$$C_{\text{екв}} = \varepsilon_a \frac{S}{d} = \varepsilon_a \frac{\pi R_1^2}{d}, \quad (8.21)$$

а об'єм, який знаходиться поряд із зазором, індуктивністю

$$L_{\text{екв}} = \frac{\dot{\Phi}}{I}. \quad (8.22)$$

Вважаючи, що магнітне поле однорідне уздовж осі Z , маємо

$$\dot{\Phi} = \int_0^L dz \int_{R_1}^{R_2} \dot{B}_\varphi(r) dr, \quad \dot{B}_\varphi = \mu_a \dot{H}_\varphi, \quad \dot{H}_\varphi = \frac{\dot{I}}{2\pi r}, \quad R_1 \leq r \leq R_2. \quad (8.23)$$

В співвідношеннях (8.22), (8.23) \dot{I} – комплексна амплітуда струму зміщення у зазорі. Власна частота коливань може бути знайдена

за формулою $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{\text{екв}}C_{\text{екв}}}}$, де $L_{\text{екв}} = \frac{\mu_a h}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$. Після обчислень отримаємо

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\frac{2d}{R_1^2 h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}. \quad (8.24)$$

Приклад 8.4. Знайти резонансну частоту тороїдного резонатора з розмірами $R_1 = 7,5$ мм, $R_2 = 20$ мм, $d = 1$ мм, $h = 15$ мм. Резонатор заповнений повітрям.

Розв'язок. Зі співвідношення (8.21) отримаємо:

$$C_{\text{екв}} = \frac{10^{-9} \pi \cdot (7,5 \cdot 10^{-3})^2}{36\pi \cdot 10^{-3}} = 1,55 \cdot 10^{-12} \text{ Ф},$$

$$L_{\text{екв}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 15 \cdot 10^{-3}}{2\pi} \ln 2,66 = 3 \cdot 10^{-9} \text{ Гн},$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{3 \cdot 10^{-9} \cdot 1,55 \cdot 10^{-12}}} = 2,34 \text{ ГГц}.$$

У згаданих резонаторах можуть існувати і вищі типи коливань, але розглянутий тип коливань є основним. При достатньо малому значенні d довжина хвилі основного типу може значно перевищувати розміри резонатора. Вищі типи коливань існують при довжинах хвиль, порівнянних з розмірами резонатора.

8.7.3. Діелектричні резонатори

Діелектричні резонатори (ДР) можна поділити на відкриті та металодіелектричні.

Робота **відкритих діелектричних резонаторів (ВДР)** заснована на явищі повного внутрішнього відбиття на межі поділу діелектричних середовищ. У ВДР використовують діелектрики з великими значеннями відносної діелектричної проникності ($\epsilon \sim 40 \dots 80$). При цьому електричне та магнітне поля коливань зосереджені головним чином у діелектрику і зовні ДР дуже швидко зменшуються.

Оскільки $\epsilon \gg 1$, то розміри ДР значно менші, ніж у порожнистих резонаторів. Найбільш поширені циліндричні та прямокутні ВДР (рис. 8.17, а, б).

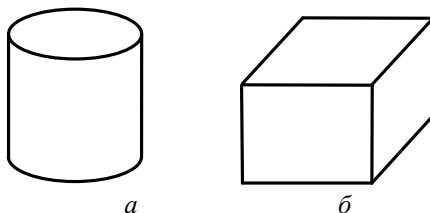


Рис. 8.17

Для екранування ЕМП відкритих резонаторів і зменшення впливу зовнішніх елементів НВЧ поблизу ВДР розміщують металеві поверхні. Такі резонатори отримали назву **металодіелектричних (МДР)**. До них належать також **хвилевідно-діелектричні резонатори (ХДР)** (рис. 8.18), які виконують на основі круглих і прямокутних хвилеводів (1) та діелектричних вставок (2) з $\epsilon = 2 \dots 20$, що повністю (рис. 8.18, а, б), або частково (рис. 8.18, в, г) заповнюють хвилевід.

Нижчими типами коливань у ХДР (рис. 8.18, г) є коливання H_{10p} , H_{20p} , де p – індекс, який показує число півхвиль на довжині діелектричного елемента. Більшу добротність має коливання H_{20p} .

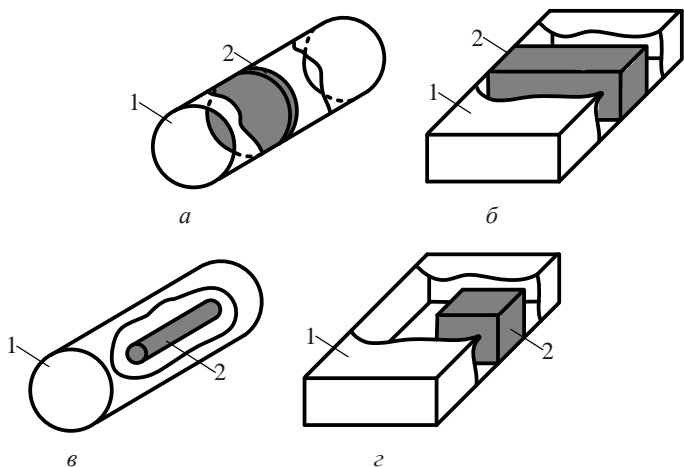


Рис. 8.18

Іншим типом хвилевідно-діелектричного резонатора є резонатор на основі поза межних хвилеводів з розміщенням діелектричної вставки (рис. 8.19).

Параметри діелектричної вставки вибирають таким чином, щоб в області діелектрика в хвилеводі могла існувати хвиля нижчого типу. Ця хвиля буде відбиватися від границь „діелектрик-поза межний хвилевід”. В діелектричній вставці при накладанні двох хвиль, відбитих від протилежних границь поза межного хвилеводу, буде стояча хвиля. Збудження таких резонаторів здійснюється через відрізки

поза межних хвильоводів, які в свою чергу з'єднані з коаксіальною лінією (рис. 8.19, а), або з основним хвильоводом (рис. 8.19, б).

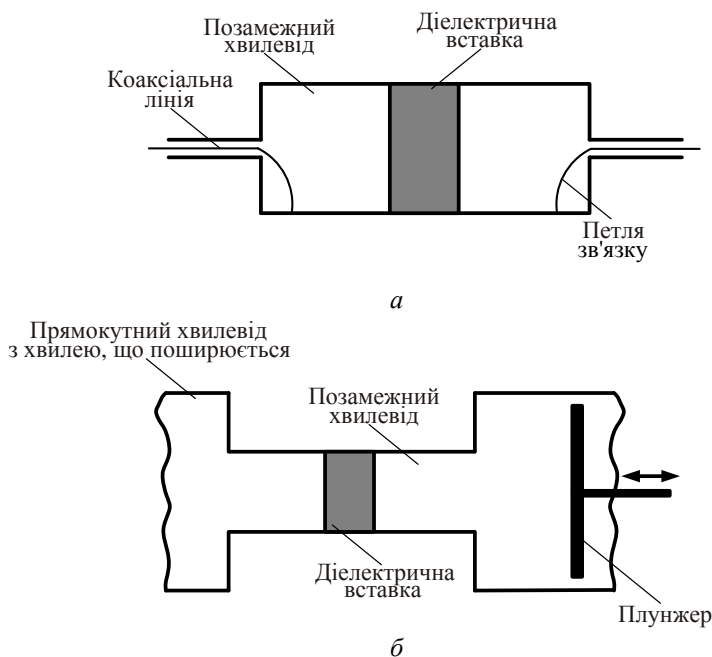


Рис. 8.19

Змінюють резонансну частоту в деяких межах переміщенням короткозамкненого плунжера (рис. 8.19, б).

8.7.4. Відкриті резонатори

Фізичні розміри об'ємних резонаторів на коливаннях низьких типів, як вказано у п. 8.5, мають значення порядку довжини хвилі. Тому, коли $\lambda < 1$ см (на міліметрових, дециміліметрових і хвилях оптичного діапазону) об'ємні резонатори будують за іншим принципом.

Найбільш поширені в цих діапазонах **відкриті резонатори**. Це системи дзеркал, де внаслідок перевідбиття між дзеркалами відбувається коливальний (див. рис. 8.1, е), або циклічний процес перенесення енергії (див. рис. 8.2, б).

Довжина l резонаторів у цих випадках $l \gg \lambda$, тому використовують коливання вищих типів.

Власні довжини хвиль, як видно із співвідношень (8.15), (8.16), за умов ($l/\lambda \gg 1$) зменшуються, а резонансна частота зростає. Будемо вважати, що $p \gg t, n$. При цьому резонансні частоти хвиль з близькими індексами t, n розміщені на осі частот дуже близько одна від одної.

Введемо поняття „розрідження спектра власних частот” $N_{\text{розр}}$, як кількість власних частот ОР, що знаходяться у смузі частот $\Delta\omega$. Відповідно до формули Релея – Джинса розрідження спектра власних частот можна знайти як

$$N_{\text{розр}} = \frac{\Delta N}{\Delta\omega} = \frac{V}{2\pi^2 c^3} \omega^2, \quad (8.25)$$

де V – об’єм резонатора.

Отже, з ростом частоти в одиниці смуги частот знаходиться більше типів власних коливань. Резонансні криві перетинаються, і ОР не можна використовувати як вибіркву систему.

Приклад. 8.5. Знайти кількість власних частот циліндричного ОР діаметром $0,15\text{ м}$, довжиною $l = 0,25\text{ м}$ в діапазоні $\Delta f = 0,5\text{ ГГц}$ на центральній частоті $f = 10\text{ ГГц}$.

Розв’язок. Скористаємося формулою Релея – Джинса (8.25). Отримаємо:

$$\Delta N = \Delta\omega N_{\text{розр}} = \frac{V}{2\pi^2 c^3} \omega^2 \Delta\omega = \frac{\pi \cdot 0,15^2 \cdot 0,25 \cdot 4\pi^2 \cdot 10^{20} \cdot 2\pi \cdot 500 \cdot 10^6}{4 \cdot 2\pi^2 \cdot 27 \cdot 10^{24}} \approx 103.$$

Середній частотний інтервал між сусідніми резонансними частотами становить $\Delta f = (500\text{ МГц}/\Delta N) \approx 5\text{ МГц}$. Це дуже ускладнює використання таких резонаторів у якості частотно-вибіркових систем.

Коливання з малими значеннями t, n і $p \gg 1$ мають малу поздовжню компоненту вектора Пойнтінга, поле таких коливань близьке до поля неоднорідної Т-хвилі, наявність бічних стінок для таких

хвиль несуттєва. Поля з індексами $m, n \gg 1$, із порівняно малим індексом p мають суттєві значення поздовжніх компонент векторів \mathbf{E} та \mathbf{H} . Згідно з концепцією Бриллюена (п. 1.3) кут між вектором Пойнтінга та віссю ОР буде у цьому випадку більшим і відсутність бічних стінок сприятиме загасанню таких типів коливань.

Спектр власних частот відкритого ОР буде розрідженим порівняно з закритим резонатором.

Власну добротність відкритих резонаторів можна оцінити за формулою

$$Q_0 = \frac{2\pi l}{\lambda_0} \frac{1}{1 - |s|^2}, \quad (8.26)$$

де $|s|^2$ – коефіцієнт відбиття від дзеркал за потужністю.

Приклад. 8.6. Знайти добротність відкритого резонатора довжиною $l = 20 \text{ см}$ на довжині хвилі $\lambda = 10^{-6} \text{ м}$, якщо коефіцієнт відбиття за потужністю $|s|^2 = 0,96$.

Розв'язок. Розрахунок проведемо за формулою (8.26). Отримаємо

$$Q_0 = \frac{2\pi \cdot 0,2}{10^{-6}} \frac{1}{1 - 0,96} = \pi \cdot 10^7.$$

Співвідношення (8.26) не враховує дифракційні втрати у відкритих ОР. Менші втрати на випромінювання мають **конфокальні резонатори** (рис. 8.20).

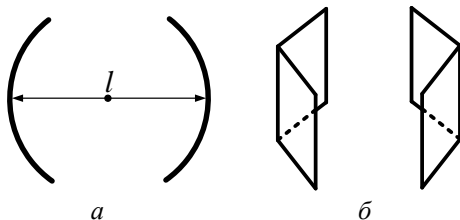


Рис. 8.20

Це ОР створений парою відбивних поверхонь зі сферичною формою з фокусом, який лежить в одній точці (рис. 8.20, а), або двома

двогранними поверхнями (рис. 8.20, б). Підбираючи відстань між дзеркалами при виконанні умови $l = p \frac{\lambda_0}{2}$, отримаємо відкритий резонатор на квазі Т-хвилі. Ці типи коливань позначають $T_{(m-1)(n-1)}$, де m, n показують кількість змін фази уздовж дзеркала. Розподіл струму на дзеркалах для деяких типів коливань наведений на рис. 8.21.

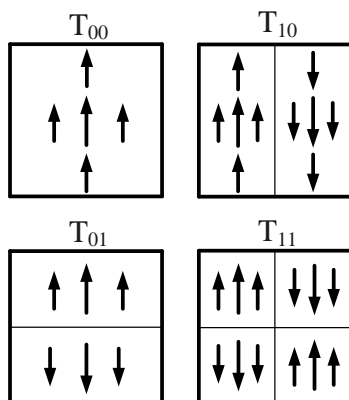


Рис. 8.21

Основним типом коливань є коливання типу T_{00} , інші – вищі моди резонатора.

Ще раз підкреслимо, що індексам $m = n = 0$ відповідає не рівномірний розподіл поля уздовж відповідного напрямку, а число варіацій фази струму на дзеркалах.

8.7.5. Феритові резонатори

Розглянуті об'ємні резонатори можуть міняти свою резонансну частоту за рахунок зміни геометричних розмірів, або введенням в порожнину резонатора збуджуючих тіл (рис.8.11). Резонансна частота діелектричних резонаторів залежить також від відстані до металевих поверхонь екранів. Така механічна перестройка резонансних частот суттєво обмежує швидкість перестройки частоти. До резонаторів з електричною перестройкою резонансної частоти зовнішнім магніт-

ним полем відносяться **феритові резонатори**. Основою для перестройки частоти феритових резонаторів є залежність магнітної проникності феритів від величини зовнішнього магнітного поля. Крім того, ферити мають відносну діелектричну проникність в межах 10...16. Це дозволяє конструювати ферит-діелектричні резонатори з магнітною перестройкою частоти.

Ферит-діелектричний резонатор представляє собою діелектричний резонатор з повним або частковим заміщенням діелектрика намагніченим феритом. При повному заміщенні ферит-діелектричний резонатор називають феритовим. Зміною напруженості зовнішнього магнітного поля магнітна проникність міняється в деяких межах менше одиниці в дорезонансній області і в деяких межах більше одиниці в зарезонансній області. Найбільш поширений дисковий феритовий резонатор (рис. 8.22) має ідеальну електричну стінку на торцях ($\sigma^e = \infty$) і ідеальну магнітну стінку ($\sigma^m = \infty$) на поверхні циліндра. Зовнішнє магнітне поле \mathbf{H}_0 направлене перпендикулярно площини диску. Якщо радіус диска R набагато більший висоти h , то поля для нижчих видів коливань від координати z не залежать.

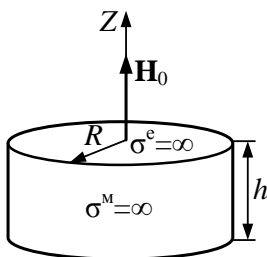


Рис. 8.22

Дисперсійне рівняння для феритового резонатора з граничними умовами $E_{\tau} = 0$ на електричній стінці і $H_{\tau} = 0$ на магнітній стінці має вигляд

$$J'_m(k_{\perp}R) + \frac{m}{k_{\perp}R} \frac{\mu_{\alpha}}{\mu} J_m(k_{\perp}R) = 0, \quad (8.27)$$

де $J_m(k_{\perp}R)$ – функція Бесселя m -го порядку; $J'_m(k_{\perp}R)$ – похідна функції Бесселя; $k_{\perp} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu_{\perp}}$ поперечне хвильове число; $\mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - \mu_{\alpha}^2}{\mu}$; μ і μ_{α} – відповідно діагональна і недіагональна компоненти тензора магнітної проникності. Корні цього рівняння ($k_{\perp}R$) визначають резонансні частоти коливань видів E_{mn0} .

Власні коливання феритового резонатора E_{mn0} мають кругову поляризацію. Число $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ визначає число варіацій поля за азимутом. Якщо $m > 0$, електричне поле в резонаторі обертається проти часової стрілки, якщо $m < 0$ – за часовою стрілкою. При $m = 0$ поле в резонаторі азимутально однорідне. Число $n = 1, 2, 3, \dots$ визначає розподіл поля за радіусом. При відсутності зовнішнього магнітного поля резонансні умови для обох напрямків обертання однакові і коливання з однаковими індексами $|m|$ вироджені, тобто мають однакову резонансну частоту.

Структура поля декількох нижчих видів коливань E_{mn0} показана на рис.8.23.

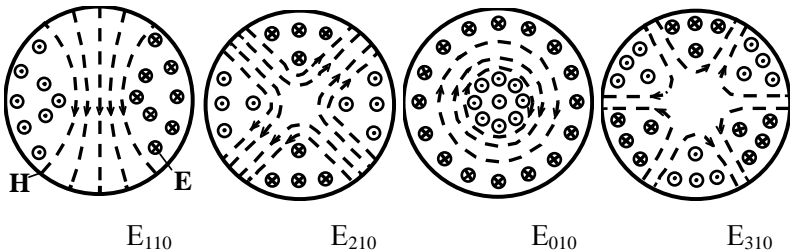


Рис. 8.23

Електричні поля від координати z не залежать і замикаються на металізовані торці резонатора. Магнітні поля замикаються за межами резонатора.

Присутність зовнішнього магнітного поля знімає виродження і резонансні частоти право і лівополяризованих видів коли-

вань будуть різні (розщеплюються) і залежатимуть від величини зовнішнього магнітного поля.

На рис.8.24 представлений результат розв'язку рівняння (8.27) у вигляді залежності $k_{\perp}R$ від відношення μ_{α}/μ . При збільшенні μ_{α}/μ розщеплення резонансних частот ліво- і правополяризованих видів коливань збільшується. Види коливань з $m=0$ від μ_{α}/μ не залежать. На рис.8.25 представлена залежність резонансних частот феритового резонатора від величини зовнішнього магнітного поля. Прямая лінія відповідає частоті феромагнітного резонансу з урахуванням розмагнічуючих факторів і відділяє дорезонансну область підмагнічуючого поля від зарезонансної.

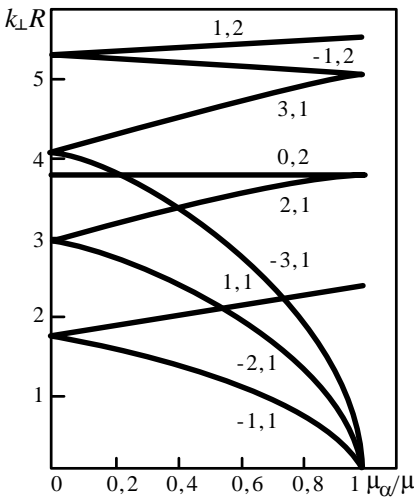


Рис. 8.24

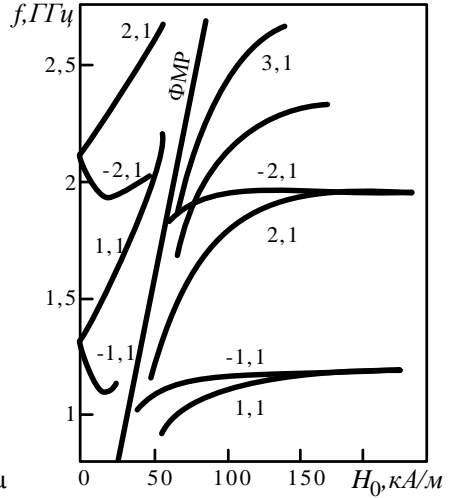


Рис.8.25

Розглянуті ферит-діелектричні резонатори застосовують в циркуляторах, перемикачах каналів та в інших приладах.

Феритові (гіромагнітні) резонатори, в яких використовується явище феромагнітного (гіромагнітного) резонансу, мають розміри набагато менші довжини хвилі в фериті. Частіше всього **гіромагнітні резонатори** виготовляють у формі кульки діаметром 0,5...5 мм із монокристалів фериту, наприклад залізо-ітрієвого гранату $Y_3Fe_5O_{12}$

з параметрами: намагніченість насичення $M_0=1,4 \cdot 10^5$ А/м, ширина лінії феромагнітного резонансу $\Delta H=20 \dots 40$ А/м, $\epsilon=16$. Поверхню кульки для підвищення добротності резонатора полірують за найвищим класом чистоти.

Основним видом коливань намагніченого до насичення зовнішнім магнітним полем H_0 гіромагнітного резонатора є однорідна прецесія спінових магнітних моментів. **Власні коливання змінної частини намагніченості гіромагнітного резонатора мають кругову поляризацію правого обертання відносно вектора H_0 .** Частота основного виду коливань гіромагнітного резонатора сферичної форми $\omega_0 = \gamma \mu_0 H_0$ збігається з частотою феромагнітного резонансу в нескінченному однорідному гіромагнітному середовищі $\omega_H = \gamma \mu_0 H_0$. Наведена формула для резонансної частоти $f_0, \text{ МГц} = 35 H_0, \text{ кА/м}$ показує, що в першому наближенні **резонансна частота гіромагнітного резонатора не залежить від його діаметра, а залежить від величини зовнішнього магнітного поля.** Зміною величини зовнішнього магнітного поля резонансну частоту гіромагнітного резонатора можна лінійно перестроювати в межах декількох октав і навіть до декади (для залізо-ітрієвого гранату $f_0 \approx (2 \dots 20) \text{ ГГц}$). Власна добротність гіромагнітного резонатора має величину декілька тисяч і може бути більше десяти тисяч. Гіромагнітний резонатор є відкритим і зовнішні металеві і діелектричні тіла впливають на його резонансну частоту вже на відстані $2 \dots 3$ радіуса резонатора.

Задачі для самостійного розв'язку

1. Визначіть, якою повинна бути довжина l закороченого з обох кінців відрізка прямокутного хвилеводу перерізом $23 \times 10 \text{ мм}^2$, якщо відомо, що при резонансній довжині хвилі $\lambda_0=3,4 \text{ см}$ уздовж його осі укладаються три стоячі півхвилі, тобто $p = 3$.

2. Прямокутний об'ємний резонатор, заповнений повітрям, має наступні розміри: $a=36 \text{ мм}$, $b=22 \text{ мм}$, $l=65 \text{ мм}$. Визначіть резонансну довжину хвилі для коливання типу E_{112} .

3. Прямокутний об'ємний резонатор, заповнений повітрям, має розміри: $a=40 \text{ мм}$, $b=25 \text{ мм}$, $l=15 \text{ мм}$. Визначіть, яка мода є основною, і обчисліть відповідну резонансну довжину хвилі.

4. Кубічний об'ємний резонатор має повітряне заповнення і ідеально провідні стінки розміром 20 мм. Обчисліть резонансну довжину хвилі для основної моди.

5. Прямокутний об'ємний резонатор, заповнений повітрям, має розміри $a=2$ см, $b=4$ см, $l=3$ см. Визначіть, який тип коливань в даному резонаторі є основним; яка його резонансна частота.

6. Круглий резонатор з коливанням типу E_{010} виконаний з міді, заповнений повітрям і має розміри $a=38,4$ мм, $l=40$ мм. Обчисліть ширину смуги пропускання по рівню 0,707 від максимального значення АЧХ.

7. Круглий об'ємний резонатор з повітряним заповненням має діаметр 5 см і довжину 7,5 см. Визначіть резонансні довжини хвиль для мод E_{010} і E_{011} в даному резонаторі.

8. Круглий об'ємний резонатор має ідеально провідні стінки і повітряне заповнення. Вимірювання показали, що коливання типу E_{010} має резонансну частоту 3,5 ГГц, а коливання типу H_{111} – резонансну частоту 5,8 ГГц. Визначіть радіус резонатора і його довжину.

9. Визначіть добротність коаксіального об'ємного резонатора, що працює на основному коливанні типу Т. Радіус зовнішнього провідника $R_2=20$ мм, радіус внутрішнього провідника $R_1=10$ мм, довжина резонатора $l=80$ мм. Стінки резонатора виконані з латуні.

10. Знайти резонансну частоту тороїдального резонатора з розмірами $R_1=8$ мм, $R_2=18$ мм, $d=2$ мм, $h=12$ мм. Резонатор заповнений повітрям.

Питання для самоперевірки

1. На яких типах хвиль можуть існувати коливання у коаксіальних резонаторах?

2. Поясніть, що являють собою півхвильові та чвертьхвильові коаксіальні ОР?

3. Які ОР називають квазістаціонарними? Наведіть приклади таких резонаторів.

4. На яких принципах функціонують ОР, побудовані на відрізках діелектричних ЛП?

5. В яких частотних діапазонах доцільно використовувати відкриті ОР?

6. Поясніть поняття „розрідження” спектра власних частот.

7. Поясніть фізичну сутність застосування конфокальних резонаторів.
8. Назвіть власні типи полів у відкритих ОР. Який тип хвиль в них існує?
9. Чим обумовлена можливість електричного перестроювання резонансної частоти феритового резонатора ?
10. Яку поляризацію мають власні коливання гіромагнітного резонатора?
11. Від чого залежить резонансна частота гіромагнітного резонатора?

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Основна література

1. Шокало В.М., Правда В.І., Усін В.А., Вунтесмері В.С., Грецьких Д.В. Електродинаміка та поширення радіохвиль. Ч.1. Основи теорії електромагнітного поля: підручник для студентів ВНЗ. – Харків: ХНУРЕ; Колегіум, 2009. – 286 с.

2. Шокало В.М., Правда В.І., Усін В.А., Вунтесмері В.С., Грецьких Д.В. Електродинаміка та поширення радіохвиль. Ч.2. Випромінювання та поширення електромагнітних хвиль: підручник для студентів ВНЗ. – Харків: ХНУРЕ; Колегіум, 2010. – 435 с.

3. Бузов Г.А., Калинин С.В., Кондратьев А.В. Защита от утечки информации по техническим каналам: учеб. пособие. – М.: Горячая линия – Телеком. 2005. – 416 с.

4. Куприянов А.И., Сахаров А.В. Теоретические основы радиоэлектронной борьбы: учеб. пособие. – М.: Вузовская книга. 2007. – 356 с.

5. Ленков С.В. Методы и средства защиты информации. В 2-х томах / Ленков С.В., Перегудов Д.А., Хорошко В.А.; под ред. В.А. Хорошко. – К.: Арий, 2008. – Том I. Несанкционированное получение информации. – 464 с.

6. Ленков С.В. Методы и средства защиты информации. В 2-х томах / Ленков С.В., Перегудов Д.А., Хорошко В.А.; под ред. В.А. Хорошко. – К.: Арий, 2008. – Том II. Информационная безопасность. – 344 с.

7. Максименко Г.А., Хорошко В.А. Методы выявления, обработки и идентификации сигналов радиозакладных устройств. – К.: ООО «ПолиграфКонсалтинг», 2004. – 317 с.

8. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Высш. шк., 1992. – 416 с.

9. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика: учеб. пособие / Под ред. И.Н. Топтыгина. – СПб.: Лань, 2003. – 400 с.

10. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.

11. Вольман В.И., Пименов Ю.В. Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1971. – 487 с.

12. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. – М.: Сов. радио, 1971. – 664 с.

13. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. – М.:

Наука, 1966. – 240 с.

14. Ковалев И.С. Прикладная электродинамика. – Минск: Наука и техника, 1978. – 344 с.

15. Кугушев А.М., Голубева Н.С, Митрохин В.Н. Основы радиоэлектроники. Электродинамика и распространение радиоволн: учеб. пособие для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 368 с.

16. Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Сов. радио, 1979. – 374 с.

17. Матвеев А.Н. Электродинамика: учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1980. – 383 с.

18. Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика / Под ред. В.А. Неганова. – М.: Радио и связь, 2000. – Т.1. – 509 с.

19. Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика / Под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. – М.: Радио и связь, 2001. – Т.2. – 575 с.

20. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн: учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 544 с.

21. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн: учеб. для вузов. – М.: Радио и связь, 2000. – 559 с.

22. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика: учеб. пособие для вузов / Под ред. Ю.В. Пименова. – М.: Радио и связь, 2000. – 536 с.

23. Стреттон Дж. А. Теория электромагнетизма: пер с англ. / Под ред. С.М. Рытова. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. – 540 с.

24. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.

25. Терлецкий. Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика: учеб. пособие для студентов физ. спец. университетов. – М.: Высш. шк. 1990. – 352 с.

26. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм / Пер. с англ.; под ред. Я.А. Смородинского. – М.: Мир, 1966. – Т. 5.

27. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика / Пер. с англ.; под ред. Я.А. Смородинского. – М.: Мир, 1966. – Т. 6.

28. Чернишов П.М., Самсонов В.П., Чернишов М.П. Технічна електродинаміка: навч. посібник / Нац. техн. ун-т "ХПІ". – Хар-

ків: Прапор, 2006. – 295 с.

До розділу 1

1. Голин Г.М., Филонович С.Р. Классики физической науки. – М.: Высш. шк., 1989. – 576 с.
2. Григорьян А.Т., Вяльцев А.Н. Генрих Герц. – М.: Наука, 1968. – 308 с.
3. Карцев В. Приключения великих уравнений. – М.: Знание, 1986. – 288 с.
4. Туров Е.Л. Материальные уравнения электродинамики. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 160 с.
5. Шимони К. Теоретическая электродинамика / Пер. с нем.; под ред. К.М. Поливанова. – М.: Мир, 1964. – 775 с.

До розділу 2

1. Красюк Н.П. Электродинамика и распространение радиоволн. – Л.: СЗПИ, 1968. Ч.1. Техническая электродинамика. – 272 с.
2. Федоров Н.Н. Основы электродинамики. – М.: Высш. шк., 1980. – 399 с.

До розділу 3

1. Боровой А.А., Финкельштейн Э.Б., Херувимов А.Н. Законы электромагнетизма. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 168 с.
2. Миролюбов Н.Н., Костенко М.В. Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н. Методы расчета электростатических полей. – М.: Высш. шк., 1963. – 415 с.
3. Бессонов В.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высш. шк., 1964. – 750 с.

До розділу 4

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики / Пер. с англ.; под ред. Г.П. Матулевич. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1979. – 383 с.
3. Кравченко И.Т. Теория волновых процессов. – Минск: Вышейш. шк., 1985. – 237 с.

До розділу 5

1. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Наука, 1967. – 683 с.
2. Микаэлян Ф.Л. Теория и применение ферритов на СВЧ. – М.;

Л.: Госэнергоиздат., 1963. – 664 с.

3. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. – М.: Наука, 1973. – 502 с.

4. Долуханов М.П. Распространение радиоволн. – М.: Связь, 1972. – 336 с.

5. Бокринская А.А., Вунтесмери В.С., Красилич Г.П. Радиотехнические устройства на основе геликоновых волн. – Киев: Вища шк., 1984. – 88 с.

6. Ильченко М.Е., Кудинов Е.В. Ферритовые и диэлектрические резонаторы СВЧ. – К.: КГУ, 1973. – 175 с.

7. Бокринська О.Я., Вунтесмері В.С., Кисляковський А.В. Ферромагнітний резонанс у техніці сантиметрових хвиль. – К.: Техніка, 1966. – 106 с.

8. Ландсберг Г.С. Оптика. Изд.5. – М.: Наука, 1976. – 928 с.

9. Шевченко В.В. Киральные электромагнитные объекты и среды // Соросовский образовательный журнал. – 1999. – №2. Физика. – С. 109 – 114.

10. Третьяков С.А. Электродинамика сложных сред: киральные, би-изотропные и некоторые би-анизотропные материалы (обзор) // Радиотехника и электроника. – 1994. – Т. 39. Вып. 10. – С. 1457 – 1470.

11. Туров Е.А. Материальные уравнения электродинамики. – М.: Наука, 1983. – 158 с.

До розділу 6

1. Матвеев А.Н. Оптика: учеб. пособие для физ. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1985. – 351 с.

2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики / Пер. с англ.; под ред. Г.П. Матулевич. – М.: Наука, 1973. – 720 с.

До розділів 7, 8

1. Галаев Ю.М., Кивва Ф.В. Широкополосная линия связи миллиметрового диапазона радиоволн. Эксперимент. Модель // Материалы 7-й Международ. Крымской микроволновой конференции КрыМиКо'97 "СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии", 15 – 18 сентября 1997 г. – Севастополь. Т. 2. – С. 670-673.

2. Григорьев А.Д. Электродинамика и техника СВЧ. – М.: Высш. шк., 1990. – 335 с.

3. Диэлектрические интегральные схемы КВЧ. Ч. 1 / В.Ф. Взятыхшев, Т.Н. Нарытник, Б.А. Рябов и др. // Обзоры по электронной технике. Сер. 1. Электроника СВЧ. – 1985. – Вып. 13 (1140). – 62 с.
4. Фельдштейн А.Л., Явич Л.Р., Смирнов В.П. Справочник по элементам волноводной техники. – М.: Сов. радио, 1967. – 652 с.
5. Смирнов Н.А. Техническая электродинамика. – М.: Связь. 1973. – 480 с.
6. Силин Р.А. Расчет характеристик линий передачи СВЧ // Электронная техника. Сер. СВЧ. – 1992. – Вып. 4 (448). – С.41–60.
7. Волноводы сложных сечений / Г.Ф. Заргано, В.П. Ляпин, В.С. Михалевский и др. – М.: Радио и связь, 1986. – 124 с.
8. Егоров Ю.В. Частично заполненные прямоугольные волноводы. – М.: Сов. радио, 1967. – 216 с.
9. Бергер М.Н., Капилевич Б.Ю. Прямоугольные волноводы с диэлектриками (Справочные таблицы, графики, формулы). – М.: Сов. радио, 1973. – 256 с.
10. Гибкие волноводы в технике СВЧ / Под ред. Э.А. Альховского. – М.: Радио и связь, 1986. – 128 с.
11. Вапнэ Г.М, Глаголев Б.С. Перспективные линии передачи КВЧ-диапазона // Обзоры по электронной технике. Сер. 1. Электроника СВЧ / ЦНИИ "Электроника". – М., 1986. – Вып. 11. – 136 с.
12. Взятыхшев В.Ф. Диэлектрические волноводы. – М.: Сов. радио, 1970. – 216 с.
13. Оокоси Т. Оптоэлектроника и оптическая связь. – М.: Мир, 1988. – 96 с.
14. Основы оптоэлектроники / Я. Суэмацу, С. Катаока, К. Кисино и др. – М.: Мир, 1988. – 288 с.
15. Линии передачи сложных сечений Г.Ф. Заргано, А.М. Лерер. В.Л. Ляпин и др. – Ростов : Изд-во Ростов. ун-та, 1983. – 320 с.
16. Книшевская Л., Шугуров В. Анализ микрополосковых линий. – Вильнюс: Мокслас, 1985. – 166 с.
17. Дмитриев В.А., Алехин Р.В. Исследование пассивных элементов интегральных схем СВЧ- и КВЧ-диапазонов методом преобразования в спектральную область // Зарубежная радиоэлектроника. 1992. – № 7. – С. 117 – 134.
18. Содха М.С, Гхатак А.К. Неоднородные оптические волноводы. – М.: Связь, 1980.

19. Малорацкий Л.Г. Микроминиатюризация элементов и устройств СВЧ. – М.: Сов. радио, 1976. – 216 с.
20. Вендлин Г.Д. Факторы, ограничивающие добротность полосковых линий // Зарубежная радиоэлектроника. – 1971. – № 9. – С.79–91.
21. Схемотехнические и конструкторско-технологические аспекты создания ОИС СВЧ / Д. В. Быков, Е. М. Воробьевский, В. И. Гвоздев и др. // Зарубежная радиоэлектроника. – 1992. – № 11. – С. 49–65.
22. Современные методы и результаты квазистатического анализа полосковых линий и устройств // Обзоры по электронной технике. Сер. 1. Электроника СВЧ; А.И. Гипсман, В.М. Красноперкин, Г.С. Саюхи и др. / ЦНИИ "Электроника". – М., 1991. – Вып. 1. – 102 с.
23. Нефедов Е.И., Фиалковский А.Т. Полосковые линии передачи. – М.: Наука, 1980. – 312 с.
24. Ширман Я.Д. Радиоволны и объемные резонаторы. – М.: Связьиздат, 1959. – 380 с.
25. Капилевич Б.Ю., Трубехин Е.Р. Волноводно-диэлектрические фильтрующие структуры: Справочник. – М.: Радио и связь, 1990. – 272 с.
26. Капилевич Б.Ю. Волноводные диэлектрические фильтры. – М.: Связь, 1980. – 136 с.
27. Кравчук С.А., Нарытник Т.Н., Якименко Ю.И. Частотно-перестраиваемые резонаторы для функциональных устройств СВЧ // Обзоры по электронной технике. Сер. 1. Электроника СВЧ / ЦНИИ "Электроника". – М., 1987. – Вып. 3.
28. Микроэлектронные устройства СВЧ / Под ред. Г.И. Веселова. – М.: Высш. шк., 1988. – 280 с.
29. Справочник по расчету и конструированию СВЧ полосковых устройств / Под ред. В.И. Вольмана. – М.: Радио и связь, 1984. – 288 с.
30. Метрикин А.А. Антенны и волноводы РРЛ. – М.: Связь, 1977. – 184 с.
31. Справочник по элементам полосковой техники / Под. ред. А.Д. Федьштейна. – М.: Связь, 1979. – 336 с.
32. Андрушко Л.М., Вознесенский В.А., Каток В.Б. и др. Справочник по волоконно-оптическим линиям связи. – К.: Техника. 1988.– 240 с.
33. Кисунько Г.В. Электродинамика полых систем. – Л.: ВКАС,

1949. – 426 с.

34. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. – М.: Сов. радио, 1966. – 475 с.

35. Левин Л. Теория волноводов. – М.: Радио и связь, 1981. – 312 с.

36. Сушкевич В.И. Нерегулярные линейные волноводные системы. – М.: Сов. радио, 1967. – 295 с.

37. Колесников П.М. Теория неоднородных световодов и резонаторов. – Минск: Наука и техника, 1982. – 296 с.

38. Илларионов Ю.А., Раевский С.Б., Сморгонский В.Я. Расчет гофрированных и частично заполненных волноводов. – М.: Сов. радио, 1980. – 200 с.

39. Завадский В. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. – М.: Наука, 1972. – 558 с.

40. Калитеевский Н.И. Волновая оптика: учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1995. – 463 с.

41. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.Л. Современные методы проектирования линий передачи и резонаторов сверх- и крайневысоких частот: учеб. пособие для вузов. – М.: Педагогика-Пресс, 1998. – 328 с.

42. Взятышев В.Ф. Диэлектрические волноводы. – М.: Сов. радио, 1970. – 216 с.

43. Гуревич А.Г. Полые резонаторы и волноводы. – М.: Сов. радио, 1952. – 632 с.

44. Ефимов И.Е., Шермина Г.Л. Волноводные линии передачи. – М.: Связь, 1979. – 232 с.

45. Маркузе Д. Оптические волноводы. – М.: Мир, 1974. – 576 с.

46. Нефёдов Е.И., Фиалковский А.Т. Полосковые линии передачи. – М.: Наука, 1974. – 127 с.

47. Силин Р.А., Сазонов В.П. Замедляющие системы. – М.: Сов. радио, 1966. – 632 с.

48. Чео П.К. Волоконная оптика. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 279 с.

49. Абрамов В.П., Дмитриев В.А., Шелухин С.А. Невзаимные устройства на ферритовых резонаторах. – М.: Радио и связь, 1989. – 200 с.

50. Вамберский М.В., Абрамов В.П., Казанцев В.И. Конструирование ферритовых развязывающих приборов СВЧ / Под ред. М.В. Вамберского. – М.: Радио и связь, 1982. – 136 с.

СКОРОЧЕНИЙ БІОГРАФІЧНИЙ СЛОВНИК

АМПЕР (Ampère) АНДРЕ МАРІ (1775 – 1836) – французький



фізик, математик і хімік. Основні праці присвячені електродинаміці. У 1820 р. сформулював правило для визначення дії магнітного поля струму на магнітну стрілку (правило Ампера). Відкрив механічну взаємодію електричних струмів та встановив його закон (закон Ампера). Відкрив (1822) магнітний ефект катушки з струмом – соленоїда. Винайшов комутатор, електромагнітний телеграф.

БІО (Biot) ЖАН БАТИСТ (1774 – 1862) – французький фізик.



Праці присвячені оптиці, історії науки. У 1815 р. відкрив поляризацію при заломленні (незалежно від Малюса), у 1815 р. – колову поляризацію (незалежно від Араго і Брюстера). Відкрив закон обертання площини поляризації (закон Біо). У 1820 р. разом із Саваром відкрив закон, який визначає напруженість магнітного поля прямого струму (закон Біо – Савара).

БРЮСТЕР (Brewster) ДЕЙВИД (1781 – 1868) – шотландський



фізик. Основні праці присвячені дослідженню поляризації світла. Встановив закон, названий його ім'ям (1815).

ВЕБЕР (Weber) ВЛЬГЕЛЬМ ЕДУАРД (1804 –



1891) – німецький фізик. Основні роботи присвячені електромагнетизму. Разом із Гауссом розробив абсолютну систему електричних і магнітних одиниць. Розробив теорію електродинамічних явищ та встановив закон

взаємодії рухомих частин. У 1856 р. визначив швидкість світла. Автор теорії магнітних диполів (1854). Побудував першу електронну модель атома.

ВОЛЬТА (Volta) АЛЕСАНДРО (1745 – 1827) – італійський фізик, хімік та фізіолог, винахідник джерела постійного електричного струму.



У 1799 р. сконструював перше хімічне джерело електричного струму – вольтів стовп. Відкрив у 1795 р. взаємну електризацію різнорідних металів при їх контакті (контактний струм) та розмістив метали у так званий ряд напруг (1801).

ГАУСС (Gauss) КАРЛ ФРІДРІХ (1777 – 1855) – німецький математик, астроном, фізик. Досліди присвячені багатьом розділам фізики. У 1832 р. створив абсолютну систему мір. У 1839 р. виклав ряд положень та теорем, наприклад основну теорему електростатики (теорема Гаусса – Остроградського). Ще в 1845 р. дійшов думки щодо кінцевої швидкості поширення електромагнітних взаємодій.



ГЕЛЬМГОЛЬЦ (Helmholtz) ГЕРМАН ЛЮДВИГ ФЕРДИНАНД (1821 – 1894) – німецький вчений. Фізичні дослідження належать до оптики, електродинаміки, акустики, теплоти, гідродинаміки. У 1847 р. сформулював та математично обґрунтував закон збереження енергії.



У 1881 р. висунув теорію атомарної будови струму.

ГЕНРІ (Henry) ДЖОЗЕФ (1797 – 1878) – американський фізик. Праці присвячені електромагнетизму. Першим сконструював потужні підковоподібні електромагніти у 1828 р. У 1831 р. відкрив принцип електромагнітної індукції, збудував електричний двигун. У 1832 р. відкрив



явище самоіндукції, у 1842 р. встановив коливальний характер розряду конденсатора.

ГЕРЦ (Hertz) ГЕНРИХ РУДОЛЬФ (1857 – 1894) – німецький фізик.



Основні праці належать до електродинаміки та механіки. У 1887 р. вперше розробив теорію відкритого вібратора, випромінюючого електромагнітні хвилі у просторі. Користуючись вібратором і резонатором, створеним у 1887 р., 1888 р. експериментально довів існування електромагнітних хвиль. Розвиваючи теорію Максвелла, він надав рівнянням електродинаміки симетричної форми. Експериментально довів тотожність осно-

вних властивостей електромагнітних хвиль і світових хвиль.

ГІЛЬБЕРТ (Gilbert) УІЛЬЯМ (1544 – 1603) – англійський



фізик та лікар. В роботі «Про магніт, магнітні тіла та великий магніт-Земля» (1600) послідовно дослідив магнітні та електричні явища.



ГРІН (Green) ДЖОРДЖ

(1793 – 1841) – англійський математик і фізик. Дослідження належать до інтегрального обчислення, теорії електрики та магнетизму. Заклав основу теорії потенціалу.

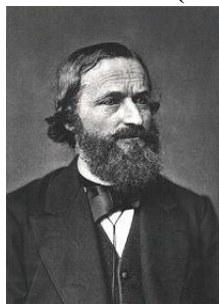
ГЮЙГЕНС (Huygens) ХРИСТІАН (1629 – 1695) – нідерландський



вчений. Фізичні дослідження в області механіки, оптики, молекулярної фізики. Сконструював перший маятниковий годинник із спусковим механізмом (1656). Досліджував зіткнення твердих тіл та встановив у 1669 р. їх закони. У 1678 р. розробив хвильову теорію світла, відкрив його поляризацію. Для пояснення механізму поширення світла висунув принцип, названий на його честь (принцип Гюйгенса).



ЕРСТЕД (Ørsted) ХАНС КРИСТІАН (1777 – 1851) – датський фізик. Праці присвячені струму, акустиці, молекулярній фізиці. У 1820 р. помітив дію електричного струму на магнітну стрілку, що привело до виникнення нової галузі фізики – електромагнетизму. У 1822 – 1823 рр. незалежно від Фур'є переоткрив термоелектричний ефект та побудував перший термоелемент.



КІРХГОФ (Kirchhof) ГУСТАВ РОБЕРТ (1824 – 1887) – німецький фізик. Праці присвячені струму, механіці, оптиці, математичній фізиці, теорії пружності, гідродинаміці. У 1845 – 1857 рр. відкрив закономірності в проходженні електричного струму у розгалужених електричних колах (правила Кірхгофа). Встановив у 1859 р. один із основних законів теплового випромінювання (закон Кірхгофа).



КУЛОН (Coulomb) ШАРЛЬ ОГЮСТЕН (1736 – 1806) – французький вчений. Праці належать до струму, магнетизму, прикладної механіки. Засновник електростатики. У 1781 р. сформулював закон тертя, ковзання та ковзання. Встановив закони пружного крутіння. У 1785 р. встановив основний закон електродинаміки (закон Кулона).



ЛЕБЕДЕВ ПЕТРО МИКОЛАЙОВИЧ (1866 – 1912) – російський фізик. Уперше одержав (1895) і дослідив міліметрові хвилі.

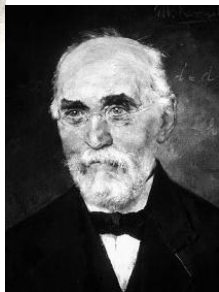
Відкрив і дослідив тиск світла на тверді тіла (1899) і газу (1907), кількісно підтвердивши електромагнітну теорію світла.

ЛЕНЦ ЕМІЛІЙ ХРИСТИАНОВИЧ (1804 – 1865) – російський фізик і електротехнік. Установив (1833) правило, назване його ім'ям, експериментально обґрунтував закон Джоуля – Ленца (1842), розвив методи розрахунку електромагнітів, відкрив явища обратимості електричних машин.



ЛОРЕНЦ (Lorentz) ХЕНДРІК АНТОН

(1853 – 1928) – нідерландський фізик-теоретик. Праці в області електродинаміки, термодинаміки, оптики, статистичної механіки, атомної фізики. У 1880 – 1909 рр. створив класичну електронну теорію, виходячи з електромагнітної теорії Максвелла – Герца (рівняння Лоренца – Максвелла).



Розробив теорію рухомих середовищ. Дав вираз для сили, що діє на рухомий заряд в електромагнітному полі (сила Лоренца). У 1892 р. незалежно від Фітцджеральда висунув гіпотезу про скорочення розмірів тіл у напрямку їх руху (скорочення Лоренца – Фітцджеральда).

МАКСВЕЛЛ (Maxwell) ДЖЕЙМС КЛЕРК (1831 – 1879) – англійський фізик. Праці присвячені електродинаміці, молекулярній фізиці, загальній статистиці, оптиці, механіці, теорії пружності. У 1859 р. встановив статистичний закон, що описує поділ молекул газу за швидкостями (розподіл Максвелла). У 1867 р. першим показав статистичну природу другого початку термодинаміки (закон Максвелла). У 1860 – 1865 рр. створив теорію електромагнітного поля, яку він сформулював у вигляді системи декількох рівнянь (рівняння Максвелла). Увів поняття струму зміщення та передбачив важливий ефект: існування у вільному просторі електромагнітних хвиль. Вирахував тиск світла (1873). Встановив співвідношення між основними теплофізичними параметрами (термодинамічні співвідношення Максвелла).



ОМ (Ohm) ГЕОРГ СИМОН (1787 – 1854) – німецький фізик. Дослідження в області струму, акустики, оптики, кристалооптики. У 1826 р. відкрив основний закон електричного кола, що зв'язує між



собою сили струму, напруги та опору (закон Ома).

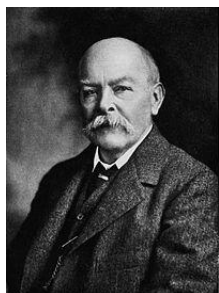
ОСТРОГРАДСЬКИЙ **МИХАЙЛО**



ВАСИЛЬОВИЧ (1801 – 1862) – російський математик та механік. Основні праці в області математичного аналізу, математичної фізики, теоретичної механіки. У 1826 р. вирішив найважливіше завдання поширення тепла в

твердих тілах та рідинах, ввів диференційне рівняння. У 1828 р. довів теорему про перетворення інтегралів. Відомий теоремою Гаусса – Остроградського в електростатиці.

ПОЙНТІНГ (Poynting) ДЖОН ГЕНРІ (1852 – 1914) – англійський фізик. Праці присвячені вивченню електричних явищ, перенесення енергії, теорії випромінювання та тиску світла, радіації. У 1884 р. ввів поняття потоку електромагнітної енергії (вектор Умова – Пойнтінга). У 1903 р. висловив ідею про гальмування сонячним світлом геліоцентричного руху космічних тіл (ефект Пойнтінга – Робертсона).



ПОПОВ ОЛЕКСАНДР СТЕПАНОВИЧ (1859 – 1906) – російський фізик, винахідник радіо. Дослідження належать до різноманітних проблем електротехніки і радіотехніки. У 1894 р. сконструював генератор електромагнітних коливань та когерер – елемент приймача, чутливий до електромагнітних хвиль. Створив пристрій для реєстрації розрядів на значних відстанях – грозопозначник. 7 травня 1895 р. продемонстрував свій грозопозначник на засіданні фізичного відділення Російського фізико-хімічного товариства. У 1897 р. вперше побачив явище відбиття хвиль, яке було покладено в основу радіолокації.



РЕЛЕЙ (Rayleigh) ДЖОН УІЛЬЯМ (1842 – 1919) – англійський фізик, один із засновників теорії коливань. Фундаментальні праці з теорії акустики, розсіювання світла, електродинаміки (закон розсіювання світла, закон намагнічення, випромінювання абсолютно чорного тіла та ін.)



САВАР (Savart) ФЕЛІКС (1791 – 1841) –

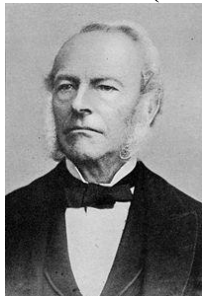


французький фізик. Праці належать до акустики, електромагнетизму, оптики. Разом із Біо у 1820 р. встановив закон, що визначає напруженість магнітного поля, яке створює електричний струм (закон Біо – Савара – Лапласа).

СНЕЛЛІУС (Snellius) ВІЛЛЕБРОРД (1580 – 1626) – нідерландський астроном і математик. Встановив закон заломлення світла.

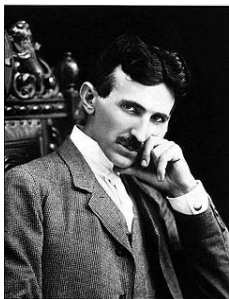


СТОКС (Stokes) ДЖОРДЖ ГАБРИЄЛЬ



(1819 – 1903) – англійський фізик і математик. Праці належать до гідродинаміки, оптики, спектроскопії, математичної фізики.

ТЕСЛА (Tesla) НІКОЛА (1856 – 1943) – сербський вчений в області електротехніки і радіотехніки. З 1884 р. працював у США. У 1886 р. (незалежно від Ферраріса) відкрив явище обертового магнітного поля, на основі якого побудував електричні генератори. У 1891 р. винайшов високочастотний трансформатор (трансформатор Тесли). Сконструював ряд радіокерованих механізмів. Досліджував можливості безпроводової передачі енергії.

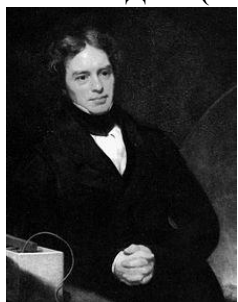


УМОВ МИКОЛА ОЛЕКСІЙОВИЧ (1846 – 1915) – російський



фізик. Праці присвячені теорії коливальних процесів, струму, оптиці, земному магнетизму, молекулярній фізиці. Створив вчення про рух енергії. Стосовно електромагнітного поля вперше ввів поняття про потік електромагнітної енергії за допомогою спеціального вектора (вектор Умова – Пойнтінга).

ФАРАДЕЙ (Faraday) МАЙКЛ (1791 – 1867) – англійський фізик,



один із засновників теорії електромагнетизму. Дослідження в галузі струму, магнетизму, магнітооптики, електрохімії. У 1821 р. першим забезпечив обертання магніту навколо провідника зі струмом та провідника зі струмом навколо магніту, створивши тим самим модель електродвигуна. У 1831 р. відкрив явище електромагнітної індукції та встановив її закони. У 1833 р. відкрив закони електролізу (закон Фарадея).

Ввів поняття поля. У 1843 р. довів закон збереження електричного заряду.

ФРЕНЕЛЬ (Fresnel) ОГЮСТЕН ЖАН (1788 – 1827) – французький



фізик. Праці присвячені фізичній оптиці. У 1815 р. перевірив принцип інтерференції, доповнив відомий принцип Гюйгенса, ввів у 1816 р. уявлення про когерентні елементарні хвилі (принцип Гюйгенса – Френеля). У 1818 р. розробив теорію дифракції світла. У 1821 р. довів поперечність світлових хвиль. У 1823 р. встановив закони відбиття та заломлення на плоскій нерухомій поверхні двох речовин (формули

Френеля).

ФРАУНГОФЕР (Fraunhofer) ЙОЗЕФ (1787 – 1826) – німецький фізик. Крім удосконалень, введених Фраунгофером у виготовлення оптичного скла і особливо великих ахроматичних об'єктивів, крім винайдених ним геліометра і окулярних мікрометрів, Фраун-



гофер залишив два класичних наукових дослідження. В мемуарах «Bestimmung d. Brechungs und d. Farbenzerstreuungs-Vermögens verschiedener Glasarten, in Bezug auf d. Vervollkommung achromatischer Fernröhre» («Denkschrif. München. Acad.», Т. V, 1814—1815) Фраунгофер згадує вперше про постійні лінії сонячного спектра (згодом названих фраунгоферовими лініями, дає докладний малюнок сонячного спектра і вказує на

використання цих ліній при визначенні показників заломлення оптичних середовищ. В іншому творі «Neue Modification d. Lichts durch gegenseitig e Einwirkung und Beugung d. Strahlen und Gesetze derselben» («Denksch. München. Acad.», т. VIII, 1821—1822) Фраунгофер описав явища в оптичній дифракційній решітці і її застосування до визначення довжини світлових хвиль.

ЗНАЧЕННЯ ВІДНОСНОЇ ДІЕЛЕКТРИЧНОЇ ПРОНИКНОСТІ ДЕЯКИХ РЕЧОВИН ПРИ $t = 20^{\circ}\text{C}$

Речовина	ϵ	Речовина	ϵ
Повітря (сухе)	1,00058	Слюда	5,7...7
Фторопласт ФФ-4	2	Склотекстоліт СФ-1-35	6
Нафта	2,1	Стеатит (кераміка)	6,25
Папір	2...2,5	Полікор (кераміка)	9,6
Дерево	2,2...3,7	Сапфір	9,4...11,7
Поліетилен	2,25	Грунт (піщаний)	10
Полістирол	2,55	Грунт (скелястий)	14
Ебоніт	2,5...2,8	Кремній (високоомний)	11,7
Лід	3,2	Арсенід галію	13,3
Плавлений кварц	3,8	Ферити	5...16
Скло (боросилікатне)	4	Вода (дистильована)	80,4
Полістирол, наповнений оксидом титану ПТ-5	5	Конденсаторна кераміка ТЛ/750	100
Фарфор	5...6,8	Титанат барію (BaTiO_3)	300...1500

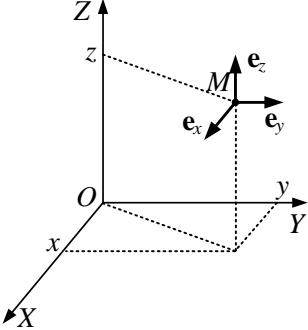
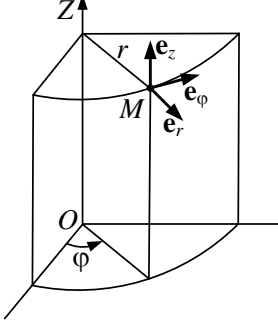
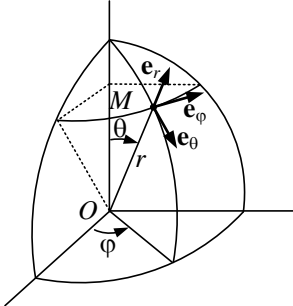
ЗНАЧЕННЯ ВІДНОСНОЇ МАГНІТНОЇ ПРОНИКНОСТІ ДЕЯКИХ РЕЧОВИН ПРИ $t = 20^{\circ}\text{C}$

Речовина	μ	Речовина	μ
<i>Парамагнетики</i>		<i>Феромагнетики</i>	
Повітря	1,0000004	НЧ ферити	До 10^5
Ебоніт	1,000014	Залізо (трансформаторне)	10^4
Алюміній	1,000023	Пермалой (78% <i>Ni</i> , 22% <i>Fe</i>)	$8 \cdot 10^4$
Кисень (рідкий)	1,0034	Чисте залізо (відпалене)	$2,8 \cdot 10^5$
<i>Діамагнетики</i>			
Вода	0,999991		
Мідь	0,9999904		
Скло	0,999987		

**ЗНАЧЕННЯ ПИТОМОЇ ПРОВІДНОСТІ
ДЕЯКИХ РЕЧОВИН ПРИ $t = 20^0 C$**

Речовина	$\sigma / 10^7, \text{См/м}$	Речовина	$\sigma, \text{См/м}$
Срібло	6,1	Вода (морська)	3,3
Мідь	5,8	Германій	2,13
Золото	4,13	Грунт (вологий)	10^{-2}
Алюміній	3,54	Вода (дистильована)	10^{-4}
Латунь (90% <i>Сu</i>)	2,41	Кварц	10^{-9}
Цинк	1,69	Суха деревина	$10^{-9} \dots 10^{-10}$
Латунь (70% <i>Сu</i>)	1,45	Скло	$10^{-9} \dots 10^{-13}$
Нікель	1,37	Слюда	$10^{-11} \dots 10^{-13}$
Графіт	1,25	Пінопласт	10^{-11}
Платина	1,0	Склотекстоліт	$10^{-11} \dots 10^{-12}$
Залізо	1,0	Гума	$10^{-11} \dots 10^{-12}$
Олово	0,88	Полістирол	$10^{-13} \dots 10^{-15}$
Сталь (вилита)	0,77	Поліетилен	10^{-15}
Свинець	0,48	Ебоніт	$10^{-12} \dots 10^{-14}$
Чавун (сірий)	0,1	Фарфор	$3 \cdot 10^{-13}$
Кремній	$1,7 \cdot 10^{-3}$	Повітря	$10^{-15} \dots 10^{-18}$

ОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Системи координат. Позначення координат і ортів	Рисунок системи координат	Визначення координатних поверхонь
<p>Декартова x, y, z $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$</p>		<ol style="list-style-type: none"> 1. Площина $x = \text{const}$ 2. Площина $y = \text{const}$ 3. Площина $z = \text{const}$
<p>Циліндрична r, φ, z $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$</p>		<ol style="list-style-type: none"> 1. Коловий циліндр $r = \text{const}$ 2. Площина $\varphi = \text{const}$ 3. Площина $z = \text{const}$
<p>Сферична r, θ, φ $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$</p>		<ol style="list-style-type: none"> 1. Сфера $r = \text{const}$ 2. Конічна поверхня $\theta = \text{const}$ з вершиною на початку координат 3. Площина $\varphi = \text{const}$

ФОРМУЛИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ ВИЗНАЧЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

1. Запис векторів у декартових координатах:
 \mathbf{a} і \mathbf{b} – вектори; $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – координатні орти;

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_x a_x + \mathbf{e}_y a_y + \mathbf{e}_z a_z, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}_x b_x + \mathbf{e}_y b_y + \mathbf{e}_z b_z, \quad (\text{E.1})$$

де a_x, a_y, a_z та b_x, b_y, b_z – проєкції векторів на осі координат.

$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ – модуль (довжина) вектора.

2. Скалярний добуток двох векторів

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) = ab \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (\text{E.2})$$

3. Векторний добуток двох векторів

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{e}_n ab \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (\text{E.3})$$

де \mathbf{e}_n – орт нормалі до площини, у якій лежать обидва вектори.

Напрямок \mathbf{e}_n визначається за правилом правого гвинта.

4. Подвійний векторний добуток

$$[\mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}). \quad (\text{E.4})$$

5. Потік векторного поля \mathbf{R} через поверхню S :

$$\Phi = \oint_S \mathbf{R} d\mathbf{S} = \oint_S R_n dS, \quad (\text{E.5})$$

де $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_n dS$; \mathbf{e}_n – орт зовнішньої нормалі до елемента $d\mathbf{S}$ замкненої поверхні S .

6. Циркуляція вектора \mathbf{R} по контуру L

$$T = \oint_L \mathbf{R} d\mathbf{l} = \oint_L R_t dl, \quad (\text{E.6})$$

де dl – елемент замкненого контура L ; R_t – дотична до контура складова вектора \mathbf{R} .

7. Градієнт скалярної функції u

$$\text{grad } u = \mathbf{e}_n \frac{\partial u}{\partial n}, \quad (\text{E.7})$$

де \mathbf{e}_n – орт нормалі до поверхні $u = \text{const}$.

8. Дивергенція вектора \mathbf{R}

$$\text{div } \mathbf{R} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{R} d\mathbf{S}}{\Delta V}, \quad (\text{E.8})$$

де S – поверхня, що обмежує об'єм ΔV .

9. Ротор (вихор) вектора \mathbf{R} .

Ротор векторного поля \mathbf{R} в точці M – це вектор, проєкція якого на нормаль до площадки ΔS

$$\mathbf{e}_n \text{rot} \mathbf{R} = \text{rot}_n \mathbf{R} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{R} d\mathbf{l}}{\Delta S}, \quad (\text{E.9})$$

де ΔS – пласка площадка, обмежена контуром L ; $\text{rot}_n \mathbf{R}$ – проєкція вектора $\text{rot} \mathbf{R}$ на нормаль \mathbf{e}_n до площадки ΔS .

Точка M належить ΔS .

ОПЕРАЦІЇ В ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ

Векторний оператор Гамільтона (набла)

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{E.10})$$

$$\text{grad } u = \nabla u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (\text{E.11})$$

$$\text{div } \mathbf{R} = \nabla \mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}. \quad (\text{E.12})$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{R} &= [\nabla, \mathbf{R}] = \\ &= \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Оператор Лапласа (лапласіан)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{E.14})$$

ОПЕРАЦІЇ В ЦИЛІНДРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{E.15})$$

$$\text{grad } u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (\text{E.16})$$

$$\text{div } \mathbf{R} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rR_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial R_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial R_z}{\partial z}. \quad (\text{E.17})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{R} = \mathbf{e}_r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial R_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial R_\varphi}{\partial z} \right] + \mathbf{e}_\varphi \left[\frac{\partial R_r}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial r} \right] + \mathbf{e}_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r R_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial R_r}{\partial \varphi} \right]. \quad (\text{E.18})$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{E.19})$$

ОПЕРАЦІЇ В СФЕРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (\text{E.20})$$

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad (\text{E.21})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 R_r) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta R_\theta) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial R_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (\text{E.22})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{R} = \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta R_\varphi) - \frac{\partial R_\theta}{\partial \varphi} \right] + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial R_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r R_\varphi)}{\partial r} \right] + \\ + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r R_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial R_r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{E.24})$$

ОПЕРАЦІЇ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ В КРИВОЛІНІЙНИХ ОРТОГОНАЛЬНИХ КООРДИНАТАХ

$$\text{grad } u = \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3},$$

$$\text{div } \mathbf{R} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial (h_2 h_3 R_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 R_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 R_3)}{\partial q_3} \right\},$$

$$\text{rot } \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1/h_2 h_3 & \mathbf{e}_2/h_3 h_1 & \mathbf{e}_3/h_1 h_2 \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & \partial/\partial q_3 \\ h_1 R_1 & h_2 R_2 & h_3 R_3 \end{vmatrix}.$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right\}.$$

У наведених формулах:

\mathbf{e}_i – орти відповідної криволінійної системи координат;

q_i – координати;

h_i – метричні коефіцієнти, що пов'язують диференціал довжини по i -й координаті з диференціалом координати ($dl = h_i dq_i$).

Для двох найбільш часто застосовуваних систем координат (сферичної та циліндричної) формули легко конкретизуються за допомогою табл. Е.1.

Таблиця Е.1

Сферичні координати				Циліндричні координати		
i	1	2	3	1	2	3
q_i	r	θ	φ	r	φ	z
\mathbf{e}_i	\mathbf{e}_r	\mathbf{e}_θ	\mathbf{e}_φ	\mathbf{e}_r	\mathbf{e}_φ	\mathbf{e}_z
h_i	1	r	$r \sin \theta$	1	r	1

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ

Теорема Остроградського – Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{R} dV = \oint_S \mathbf{R} d\mathbf{S}. \quad (\text{E.25})$$

Теорема Стокса:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{R} d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{R} d\mathbf{l}. \quad (\text{E.26})$$

Теорема Гріна:

$$\int_V (\nabla\psi \nabla\varphi + \psi \nabla^2\varphi) dV = \oint_S \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS, \quad (\text{E.27})$$

$$\int_V (\psi \nabla^2\varphi - \varphi \nabla^2\psi) = \oint_S \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{E.28})$$

ДЕЯКІ ТОТОЖНОСТІ

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi \operatorname{grad}\varphi + \varphi \operatorname{grad}\psi, \quad (\text{E.29})$$

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{R}) = (\mathbf{R} \operatorname{grad}\varphi) + \varphi \operatorname{div} \mathbf{R}, \quad (\text{E.30})$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{R}, \mathbf{B}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{R} - \mathbf{R} \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (\text{E.31})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{R} = 0, \quad (\text{E.32})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0, \quad (\text{E.33})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{R} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{R} - \nabla^2 \mathbf{R}, \quad (\text{E.34})$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{R}) = [\operatorname{grad}\varphi, \mathbf{R}] + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{R}, \quad (\text{E.35})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla^2 u, \quad (\text{E.36})$$

$$\operatorname{rot} [\mathbf{R}, \mathbf{B}] = \mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{R} + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{R} - (\mathbf{R} \nabla) \mathbf{B}. \quad (\text{E.37})$$

ЗМІСТ

Перелік скорочень та умовних позначень	3
Предметний покажчик	6
ПЕРЕДМОВА	11
ВСТУП	12
1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ	21
1.1. Електромагнітне поле і його основні характеристики. Електромагнітні властивості середовищ	21
1.1.1. Аналіз основних дослідних фактів	22
1.1.2. Джерела і вектори електромагнітного поля	28
1.1.3. Електромагнітні властивості середовищ	36
1.1.4. Силові лінії поля	39
1.1.5. Класифікація середовищ	40
1.2. Система рівнянь Максвелла. Класифікація електромагнітних явищ	44
1.2.1. Умова макроскопічності	44
1.2.2. Рівняння Максвелла в інтегральній формі	45
1.2.3. Рівняння Максвелла в диференційній формі	53
1.2.4. Висновки з рівнянь Максвелла	59
1.2.5. Класифікація електромагнітних явищ	61
1.3. Система рівнянь Максвелла для монохроматичних полів	65
1.3.1. Метод комплексних амплітуд	65
1.3.2. Рівняння Максвелла в комплексній формі	66
1.3.3. Класифікація середовищ за електричною провідністю	68
1.3.4. Сторонні струми і заряди. Повна система рівнянь Максвелла	70
1.4. Граничні умови для векторів електромагнітного поля	73
1.4.1. Граничні умови для нормальних складових ЕМП	73
1.4.2. Граничні умови для тангенційних складових ЕМП	75
1.4.3. Повна система граничних умов. Граничні умови на поверхні ідеального провідника	76

1.4.4. Фізична суть граничних умов	79
1.5. Енергія електромагнітного поля. Теорема Пойнтінга	84
1.5.1. Рівняння балансу миттєвих значень потужності	84
1.5.2. Перенесення енергії по лінії передачі	91
1.5.3. Рівняння балансу комплексної потужності	95
2. ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ І ТЕОРЕМИ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ	101
2.1. Класифікація задач електродинаміки	101
2.2. Принцип суперпозиції	102
2.3. Теорема єдиності розв'язання рівнянь Максвелла	103
2.3.1. Фізичний аналіз умов єдиності розв'язання рівнянь Максвелла	103
2.3.2. Теорема єдиності розв'язання внутрішньої задачі електродинаміки	105
2.3.3. Умови єдиності розв'язання зовнішньої задачі електродинаміки	107
2.4. Лема Лоренца. Теорема взаємності	109
2.5. Принцип переставної двоїстості	113
2.5.1. Симетрична система рівнянь електромагнітного поля	113
2.5.2. Суть принципу переставної двоїстості	114
2.6. Еквівалентні джерела електромагнітного поля	117
2.7. Хвильові рівняння і електродинамічні потенціали	119
2.7.1. Хвильові рівняння для векторів поля	119
2.7.2. Хвильові рівняння для електродинамічних потенціалів	121
2.7.3. Хвильові рівняння в комплексній формі	123
2.7.4. Запізнювальні потенціали	125
3. СТАТИЧНІ, СТАЦІОНАРНІ ТА КВАЗІСТАЦІОНАРНІ ПОЛЯ	132
3.1. Електростатика	132
3.1.1. Основні рівняння електростатики	132
3.1.2. Приклади розрахунку електростатичних полів	136
3.1.3. Електричне поле рівномірно зарядженої кулі	136

3.1.4. Розкладання поля на мультиполі. Поле електростатичного диполя	139
3.1.5. Енергія електростатичного поля	145
3.1.6. Ємність (конденсатори)	147
3.1.7. Електростатичний захист	151
3.1.8. Провідна і діелектрична кулі в однорідному електростатичному полі	152
3.2. Магнітостатика	157
3.2.1. Аналогія між магніто- та електростатикою	158
3.2.2. Приклади розрахунків магнітостатичних полів	160
3.3. Стаціонарні поля	162
3.3.1. Основні положення	162
3.3.2. Порівняння стаціонарного електричного та електростатичного полів	165
3.3.3. Магнітне поле постійного струму. Лінійний струм	166
3.3.4. Приклади розрахунку магнітних полів лінійних струмів	169
3.3.5. Енергія стаціонарного магнітного поля	173
3.4. Квазістаціонарне наближення	176
4. ПЛАСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ В НЕСКІНЧЕННОМУ ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ	180
4.1. Основні поняття теорії хвильових процесів	180
4.2. Однорідні хвильові рівняння. Хвильовий характер електромагнітного поля	182
4.3. Основні властивості плоскої однорідної електромагнітної хвилі в нескінченному середовищі	189
4.4. Пласкі хвилі в діелектриках і провідниках	192
4.5. Поляризація плоских електромагнітних хвиль	200

5. ПОШИРЕННЯ ПЛАСКИХ ОДНОРІДНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ В АНІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ	209
5.1. Анізотропні середовища	209
5.2. Плазма в магнітному полі	211
5.3. Параметри намагніченої плазми	215
5.4. Феромагнетики в магнітному полі	217
5.5. Основні властивості феритів у сталому магнітному полі	218
5.5.1. Електромагнітні поля у феритах	218
5.5.2. Феромагнітний резонанс	220
5.5.3. Поздовжньо намагнічений ферит	223
5.5.4. Поперечно намагнічений ферит	225
5.6. Бі-ізотропні та бі-анізотропні середовища	226
6. ЯВИЩА ВІДБИТТЯ І ЗАЛОМЛЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА МЕЖІ ПОДІЛУ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ	231
6.1. Закони Снелліуса	231
6.2. Формули Френеля	234
6.2.1. Коефіцієнти відбиття і проходження хвиль з нормальною поляризацією	236
6.2.2. Коефіцієнти відбиття і проходження хвиль з паралельною поляризацією	238
6.3. Відбиття та заломлення плоских хвиль на межі ідеальних діелектриків	240
6.4. Поверхневі хвилі біля межі поділу двох середовищ	242
6.5. Побудова електромагнітного поля над межею поділу двох середовищ за наявності явища повного відбиття	245
6.6. Падіння плоскої хвилі на межу поглинального середовища. Поверхневий ефект	247
6.7. Відбиття і заломлення електромагнітних хвиль на межі поділу діелектрик - провідник	248
6.8. Відбиття плоских хвиль від рухомої межі поділу двох середовищ. Ефект Допплера	255

7. ПОШИРЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ У СПРЯМОВУЮЧИХ СИСТЕМАХ	259
7.1. Класифікація ліній передачі електромагнітної енергії	259
7.2. Методика розв'язання рівнянь електромагнітного поля для регулярних ліній передачі	263
7.3. Основні властивості електромагнітних хвиль у лініях передач	267
7.4. Е- і Н-хвилі у прямокутному хвилеводі	281
7.4.1. Розрахунок полів у прямокутному хвилеводі	281
7.4.2. Хвилі основного і вищих типів у прямокутному хвилеводі та методика графічної побудови структури полів	286
7.5. Хвилі у круглому хвилеводі	295
7.6. Збудження хвилеводів	304
7.6.1. Штирові елементи зв'язку	306
7.6.2. Петльові пристрої зв'язку	308
7.6.3. Дифракційні елементи зв'язку	310
7.7. Основні параметри та застосування прямокутних і круглих хвилеводів	312
7.7.1. Групова швидкість. Умови неспотвореної передачі сигналів	312
7.7.2. Потужність, яка переноситься по хвилеводу. Електрична міцність і загасання хвиль у хвилеводах	315
7.7.3. Вибір розмірів хвилеводів та їх застосування	321
7.8. Коаксіальна лінія (хвилевід)	324
7.9. Хвилеводи складних перерізів	332
7.9.1. П- та Н-подібні хвилеводи	332
7.9.2. Еліптичні хвилеводи	334
7.9.3. Гнучкі гофровані хвилеводи	337
7.9.4. Частково заповнені хвилеводи	338
7.9.5. Надрозмірні хвилеводи	339
7.10. Інтегральні лінії передачі (стрічкові ЛПП)	341
7.10.1. Симетрична стрічкова лінія (ССЛ)	344

7.10.2. Несиметрична стрічкова лінія (НСЛ). Мікрострічкова лінія (МСЛ)	347
7.10.3. Щілинні та копланарні ЛП	350
7.11. Лінії поверхневих хвиль. Сповільнюючі системи	353
7.11.1. Плaskі діелектричні лінії передачі	353
7.11.2. Кругла діелектрична лінія передачі	361
7.11.3. Світловоди	368
7.11.4. Сповільнюючі системи з періодичними граничними умовами	372
8. КОЛИВАЛЬНІ СИСТЕМИ НВЧ. ОБ'ЄМНІ РЕЗОНАТОРИ	380
8.1. Різновиди об'ємних резонаторів	380
8.2. Резонатори біжучої хвилі	382
8.3. Власна частота та типи коливань об'ємних резонаторів стоячої хвилі	384
8.4. Добротність об'ємних резонаторів	387
8.5. Резонатори на відрізках регулярних ліній передачі	390
8.5.1. Прямокутний резонатор	390
8.5.2. Циліндричний круглий резонатор	394
8.6. Прокідний резонатор. Збудження і перестроювання частоти об'ємних резонаторів	396
8.7. Резонатори інших типів	401
8.7.1. Резонатори на відрізках ЛП з хвилею Т	401
8.7.2. Резонатори з рознесеними областями концентрації електричного та магнітного поля	404
8.7.3. Діелектричні резонатори	406
8.7.4. Відкриті резонатори	408
8.7.5. Феритові резонатори	411
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК	418
ДОДАТКИ	425
СЛОВНИК ТЕРМІНІВ	443

Навчальне видання

ШОКАЛО Володимир Михайлович
УСІН Володимир Ананійович
ГРЕЦЬКИХ Дмитро Вячеславович
ХОРОШКО Володимир Олексійович
КРЮЧКОВА Лариса Петрівна

**ПОЛЯ І ХВИЛІ В СИСТЕМАХ
ТЕХНІЧНОГО ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ**

Частина 1

Підручник для студентів
вищих навчальних закладів

За загальною редакцією проф. В.М. Шокало

Редактор Д.В. Грецьких
Виконавець комп'ютерної верстки Д.В. Грецьких
Коректор Л.І.Сашенко

Підп. до друку. 01.09.2012. Формат 60x84 1/16. Гарнітура Таймс.
Умов. друк. арк.19, 79. Облік.-вид. арк. 17,27. Тираж 500 прим. Зам. №123.

Харківський національний університет радіоелектроніки
Україна, 61166, м. Харків, просп. Леніна 14

Видавництво «Колегіум»
тел. (057) 703-53-74

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої діяльності
до державного реєстра видавців.
Сер.ДК №1722 від 23.03.2004 р.



Шевкин
Вячеслав Михайлович

Занимается вопросами реализации. Долгое время занимался вопросами реализации в области строительства.



Юлия
Владимировна

Занимается вопросами реализации. Долгое время занимался вопросами реализации в области строительства.



Григорьев
Дмитрий Владимирович

Занимается вопросами реализации. Долгое время занимался вопросами реализации в области строительства.



Хорошилов
Вячеслав Олегович

Занимается вопросами реализации. Долгое время занимался вопросами реализации в области строительства.



Кривцова
Лариса Петровна

Занимается вопросами реализации. Долгое время занимался вопросами реализации в области строительства.