

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Шакері Мобаракє Пуйан

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

Аналітичні методи розв’язку задач теорії коливань для пружних пластин неканонічної форми

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

Шакері Мобаракє Пуйан

Науковий керівник
Грінченко Віктор Тимофійович
академік НАН України
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2019

АНОТАЦІЯ

Шакері Мобаракє Пуїан. Аналітичні методи розв'язку задач теорії коливань для пружних пластин неканонічної форми. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – Механіка деформівного твердого тіла. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2019.

Дисертацію присвячено розробці підходу до побудови аналітичних розв'язків крайових задач математичної фізики для областей неканонічних форм. Розглядаються крайові задачі для рівнянь Лапласа, Гельмгольца і рівнянь електропружності для п'єзокерамічних пластин.

В основі підходу до побудови аналітичних розв'язків лежить нетрадиційна для класичної математичної фізики ідея загального розв'язку крайової задачі для даної області. В роботі дається опис змісту цього поняття. Крайові задачі для рівнянь Лапласа і Гельмгольца використовуються для ілюстрації можливостей методу і ідентифікації можливих труднощів при його практичній реалізації.

Потенційно на основі ідеї методу загального розв'язку крайової задачі може бути розглянуто широке коло задач механіки. Конкретна реалізація, яка ілюструє його можливості, виконана для областей, межі яких утворені відрізками прямих ліній. Загальний розв'язок будується у вигляді набору нескінченних рядів, кожен член яких задовольняє основне рівняння, і які мають достатню довільність для задоволення крайових умов на одній зі сторін межі. Розглянуто різні варіанти чисельних процедур для визначення коефіцієнтів цих рядів.

Можливості методу повністю використані при аналізі планарних коливань паралелограмних п'єзокерамічних пластин і згинальних коливань паралелограмних п'єзокерамічних біморфів. Визначено спектральні

характеристики пластин при їх коливанні і геометричні особливості власних форм цих пластин.

Проведено експериментальні дослідження, що дозволили підтвердити достатню надійність аналітичних методів визначення динамічних характеристик двох типів пластин в досить широкому діапазоні частот.

Ключові слова: рівняння Лапласа, рівняння Гельмгольца, коливання мембран неканонічної форми, планарні коливання п'єзокерамічних пластин неканонічної форми, згинні коливання п'єзокерамічних біморфних пластин неканонічної форми, амплітудно-частотна характеристика, метод частинних областей, метод суперпозиції, метод мінімізації середньо-кваратичного відхилення, метод колокації, метод редукції.

ABSTRACT

Shakeri Mobarakeh Pouyan. Analytical methods for solving problems of the theory of vibrations for elastic plates of non-canonical form. – Manuscript.

Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.02.04 – Mechanics of deformable solids. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, MES of Ukraine, Kyiv, 2019.

The dissertation work is devoted to development of the approach to construction of analytical solutions of boundary problems of mathematical physics for areas of noncanonical forms. The boundary problems for the Laplace, Helmholtz, and electroelastic equations for piezoceramic plates are specifically considered. The approach to the construction of analytical solutions is based on the unconventional for classical mathematical physics idea of a general solution of the boundary problem for a given region. The detail description of the content of this concept is presented. The boundary problems for the Laplace and Helmholtz equations are used to illustrate the possibilities of the method and to identify possible difficulties in its practical implementation. Potentially, a wide range of mechanical problems can be considered on the basis of the idea of the general solution of the boundary problem

method. A specific implementation illustrating its possibilities is given for the areas whose boundaries are formed by straight line segments. The general solution is constructed in the form of a set of infinite series, each term of which satisfies the basic equation. Such series contains enough arbitrariness to satisfy the boundary conditions on one side of the boundary. Different variants of numerical procedures for determining the coefficients of these series are considered. The possibilities of the method are fully used in the analysis of planar oscillations of parallelogram piezoceramic plates and bending oscillations of parallelogram piezoceramic bimorphs. Spectral characteristics of oscillating plates and geometrical features of their own shapes are determined. Experimental studies have been carried out, which allowed to confirm the reliability of analytical methods for determining the dynamic characteristics of both types of plates in a wide enough range of frequencies.

Keywords: Laplace equation, Helmholtz equation, non-canonical membrane vibrations, planar vibrations of non-canonical piezoceramic plates, bending vibrations of non-canonical piezoceramic bimorphic plates, amplitude-frequency characteristic, partial domain method, superposition method, standard deviation minimization method, collocation method, reduction method.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях

1. Shakeri Mobarakeh P. Construction method of analytical solutions to the mathematical physics boundary problems for non-canonical domains / P. Shakeri Mobarakeh, V.T. Grinchenko // Reports on Mathematical Physics. – 2015. – Vol. 75, № 3. – P. 417–434.
2. Shakeri Mobarakeh P. A numerical-analytical method for solving boundary value problem of elliptical type for a parallelogram shaped plate / P. Shakeri Mobarakeh, V.T. Grinchenko, G.M. Zrazhevsky // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics-Mathematics. – 2015. –Special issue. – P. 297–304.

3. Shakeri Mobarakeh P. Directional characteristics of cylindrical radiators with an arc-shaped acoustic screen / P. Shakeri Mobarakeh, V. Grinchenko, B. Soltannia // J. Eng. Math.–2017. – Vol. 103, N 1. – P. 97–110.
4. Шакері Мобаракє П. Алгоритм Гальоркіна в методі частинних областей розв'язання граничних задач / П. Шакері Мобаракє, Г.М. Зражевський // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2014. – Вип. 1. – С. 75–82.
5. Шакері Мобаракє П. Современные методы численно-аналитического решения краевых задач для неканонических областей / П. Шакері Мобаракє, В.Т. Гринченко, В.В. Попов, Б. Солтанниа, Г.М. Зражевский // Математические методы и физико-механические поля. – 2017. – Т. 60, № 4. – С. 75 – 89.
6. Shakeri Mobarakeh P. Effect of boundary form disturbances on the frequency response of planar vibrations of piezoceramic plates. Analytical solution / P. Shakeri Mobarakeh V.T. Grinchenko, B. Soltannia B. // Strength of Materials. – 2018. – Vol. 50, N 3. – P. 376–386.
7. Борисейко О.В. Поздовжні коливання п'єзокерамічного стержня змінного поперечного перерізу / О.В. Борисейко, П. Шакері Мобаракє, І.А. Улітко // Вісник КНУ. – 2016. – Вип. 3. – С. 31–34.
8. Шакері Мобаракє П. Амплитудно-частотные характеристики пьезокерамических пластин в зависимости от формы границ / П. Шакері Мобаракє, В.Т. Гринченко, В.А. Андрущенко, В.Н. Никитенко // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2017. – Вип. 3. – С. 253–256.

Тези наукових доповідей

1. Шакері Мобаракє П. Апроксимація розривних розв'язків крайових задач математичної фізики / П. Шакері Мобаракє, А.В. Попов // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Кравчука, 15–17 травня 2014 р.: Матеріали конф. І. Диференціальні рівняння, їх застосування. – Київ, 2014. – С. 338.

2. Гринченко В.Т. Особенности частотных спектров планарных колебаний пьезокерамических пластин в форме параллелограмма / В.Т. Гринченко, П. Шакери Мобараке // Акустичний симпозиум “Консонанс–2015”, 29–30 вересня 2015 р.: Тези доповідей. – Київ, 2015. – С. 15–16.
3. Гринченко В.Т. Численно-аналитический метод решения краевой задачи эллиптического типа для пластины в форме параллелограмма / В.Т. Гринченко, Г.М. Зражевский, П. Шакери Мобараке // III Міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми механіки”, 27–29 серпня 2015 р.: Матеріали конф. – Київ, 2015. – С. 22.
4. Shakeri Mobarakeh P. Influence of acoustic screen on directional characteristics of cylindrical radiator / P. Shakeri Mobarakeh, V.T. Grinchenko, S. Iranpour Mobarakeh, B. Soltannia // Proc. of 5th Int. Conf. on Acoustics and Vibration (ISAV2015, Tehran, Iran, 2015). – P. 46.
5. Шакери Мобараке П. Аналитическое исследование влияния формы границ на частотные характеристики планарных колебаний пьезокерамических пластин / П. Шакери Мобараке, В.Т. Гринченко, И.А. Улитко // XVIII International Conference “Dynamical system modelling and stability investigation”, May 24–26, 2017: Abstr. conf. reports. – Kiev, Ukraine, 2017. – P. 144.
6. Шакери Мобараке П. Сравнительный анализ резонансных спектров планарных колебаний пьезопластин в форме прямоугольника и параллелограмма / П. Шакери Мобараке, В.Т. Гринченко, В.А. Андрущенко, В.Н. Никитенко Мобараке // IV Міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми механіки”, 28–30 серпня 2017 р.: Матеріали конф. – Київ, 2017. – С. 103.
7. Shakeri Mobarakeh P. The amplitude-frequency characteristics of piezoceramic plates depending on the shape of the boundaries / P. Shakeri Mobarakeh, V.T. Grinchenko, H. Ahmadi, B. Soltannia // Proc. of 7th Int. Conf. on Acoustics and Vibration (ISAV2017, Tehran, Iran, 2017). – P. 12.

ЗМІСТ

ВСТУП		10
Розділ 1	ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	23
Розділ 2	МЕТОД ПОБУДОВИ АНАЛІТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ДЛЯ НЕКАНОНІЧНИХ ОБЛАСТЕЙ	35
2.1	Основні особливості методу часткових областей	36
2.2	Розв'язок задачі в області, що обмежена трикутником	39
2.3	Області, які обмежені координатними поверхнями різних сімейств	42
2.4	Доповнення граничних умов в задачі теорії потенціалу	48
2.5	Задача про випромінювання звуку циліндрами, що перетинаються	51
2.6	Частково екранований циліндричний акустичний випромінювач	54
2.7	Висновки до розділу	55
Розділ 3	СУЧАСНІ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКАНОНІЧНИХ ОБЛАСТЕЙ НА ПРИКЛАДІ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА	57
3.1	Задача Діріхле для паралелограмної області	58
3.1.1	Розв'язування методом часткових областей	59
3.2	Розв'язування методом граничних інтегральних рівнянь	67
3.2.1	Приклад розрахунків методом граничних інтегральних рівнянь	74
3.3	Метод коллокації	76

	8
3.4 Висновки до розділу	84
Розділ 4 КОЛИВАННЯ МЕМБРАНИ ПАРАЛЕЛОГРАМНОЇ ФОРМИ	85
4.1 Постановки задач про коливання паралелограмної мембрани	85
4.2 Розв'язання методом часткових областей	87
4.3 Метод мінімізації середньоквадратичних відхилень	92
4.4 Метод колокації	97
4.5 Коливання мембрани при динамічному збудженні. Метод мінімізації середньоквадратичного відхилення	102
4.6 Коливання мембрани при динамічному збудженні. Метод колокації	103
4.7 Висновки до розділу	107
Розділ 5 ВПЛИВ ЗБУРЕНЬ ФОРМИ ГРАНИЦІ НА ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАНАРНИХ КОЛИВАНЬ П'ЕЗОКЕРАМІЧНИХ ПЛАСТИН	108
5.1 Основні співвідношення теорії планарних коливань тонких електродованих п'єзопластин з товщинною поляризацією при збудженні електричним полем	109
5.2 Представлення розв'язку в потенціалах	111
5.3 Постановка задачі та побудова аналітичного розв'язку	114
5.4 Комп'ютерне моделювання коливань пластин	122
5.5 Експериментальні дослідження впливу збурень форми границі на частотні характеристики планарних коливань п'єзокерамічних пластин	138

5.5.1	Оцінка ефективності енергоперетворення пластини на резонансних коливаннях	141
5.5.2	Методика проведення експериментальних досліджень.....	143
5.5.3	Амплітудно-частотні характеристики і коефіцієнт електромеханічного зв'язку квадратної пластини розміром 45x45x2,8 мм та похідних від неї паралелограмів з різними кутами зрізу протилежних граней.	145
5.6	Дослідження змін у резонансних властивостях при зміні форми п'єзокерамічного стержня з прямокутної на трапецієвидну	152
5.7	Висновки до розділу	155
Розділ 6	ЗГИННІ КОЛИВАННЯ БІМОРФНИХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ПЛАСТИН НЕКАНОНІЧНОЇ ФОРМИ	157
6.1	Основні співвідношення теорії коливань біморфних п'єзокерамічних пластин	159
6.2	Постановка задачі та побудова аналітичного розв'язку	162
6.3	Комп'ютерне моделювання коливань пластини з використанням двох підходів.....	169
6.4	Висновки до розділу	189
	ВИСНОВКИ	191
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	193

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена вивченню коливань пружних та електропружних пластин складної неканонічної форми. Для отримання спектру власних частот та характеристик власних форм коливань в роботі розвинутий аналітичний метод розв'язування відповідних крайових задач. Наявність аналітичних представлень шуканих характеристик коливальних процесів дозволила спростити процедуру отримання кількісних оцінок і провести якісний аналіз спектру та властивостей власних форм коливань.

Основна ідея пропонованого підходу до побудови аналітичних розв'язків, які описують хвильові поля в областях складної форми, полягає в тому, щоб максимально використовувати великий набір аналітичних розв'язків для канонічних областей. Така постановка задачі природно призводить до певних обмежень, що накладаються на геометрію розглянутих об'єктів. Їх граничні поверхні повинні бути частинами координатних поверхонь різних координатних систем, в яких рівняння теорії коливань допускають розділення змінних і використання фундаментальних властивостей функцій, які є власними функціями задачі Штурма-Ліувілля.

Ідея розбиття початкової області на підобласті при розв'язанні крайових задач для випадків областей складної геометрії досить широко використовується. По суті ця ідея використовується у різних чисельних методах типу методу скінченних елементів або скінченних різниць. Тут вся область існування шуканого поля розбивається на відносно малі підобласті, всередині яких задається просторова апроксимація шуканих величин. Вивченню можливостей такого підходу присвячена величезна кількість робіт в різних розділах механіки. У цих роботах досліджується можливість ефективного використання чисельних методів для розв'язання складних крайових задач.

Наш підхід принципово відрізняється від підходу, що використовується при дискретизації рівнянь математичної фізики. Область розбивається не на елементи, в яких можна припустити певний тип зміни шуканих величин (лінійний, квадратичний тощо), а на підобласті, в яких можна побудувати спільний розв'язок крайової задачі для відповідної системи рівнянь.

Запропонований підхід застосовується при розв'язанні крайових задач для рівнянь Лапласа, Гельмгольца, рівнянь Ламе і рівнянь згину для двовимірних задач теорії коливань пружних і електропружних пластин неканонічної форми. Два перші типи рівнянь використані для того, щоб на прикладах задач, розв'язки яких мають відносно прості аналітичні вирази, проілюструвати особливості підходу, протестувати методи отримання числових значень шуканих коефіцієнтів у загальних розв'язках. В якості області неканонічної форми розглядається паралелограм. Така область цікава тим, що при зміні кутів скосу, можна вивчити поведінку деяких специфічних властивостей власних форм і власних частот коливань пружних пластин такої форми.

Коло технічних застосувань електропружності в даний час настільки широке, що навіть фахівцеві не завжди під силу уявити весь спектр виробів, заснованих на використанні п'єзоефекту. Так, наприклад, якщо звернутися до третього тому праць міжнародної конференції "П'єзотехніка-95", в ньому можна знайти кілька десятків найменувань. Наведемо тільки ті назви, які вказують на їхні функціональні призначення. За кожним з них може ховатися ряд конкретних модифікацій: п'єзоелектричні двигуни, п'єзогенератори і п'єзотрансформатори, дзеркала з електрично керованою геометрією світловідбиваючої поверхні і її фокусної відстані, датчики прискорення, тиску, маси рідини, в'язкості, магнітного поля, рівня рідини, швидкості течії рідких середовищ, рівня вібрації та ін., перетворювачі для медичної діагностики і медичного інструменту, ультразвукові випромінювачі і антени, лінії затримки, фільтри, резонатори в п'єзоелектроніці, інструменти для реставраторів.

Створення кожного конкретного пристрою спирається на фізичний експеримент (від визначення фізико-механічних властивостей матеріалу, з якого виготовляється п'єзоелемент, до дослідження якостей перетворювача в цілому), конструкторський досвід і розрахунки на основі обраної математичної моделі. Правильно обрана модель дозволяє, зокрема, звузити область експериментальних досліджень і оптимізувати конструкцію за її параметрами.

Тому один з напрямків в математичному моделюванні в області електропружності пов'язано з розвитком методів розрахунку п'єзоперетворювачів.

При цьому, як правило, виникає ряд супутніх проблем теоретичного і прикладного характеру.

Цей напрямок є досить традиційним. Він спирається на методи математичної фізики, теорії диференціальних рівнянь і інші розділи математики. Починаючи з 60-х років минулого століття в цьому напрямку стали широко використовувати специфічні методи математичної теорії пружності.

У зв'язку з цим представляють інтерес проблеми паразитних коливань в резонаторах при порушенні їх канонічної форми, що виникають в частотних фільтрах або чутливих елементах MEMS-датчиків. Залежно від вимог і призначення цих приладів використовуються резонатори різних форм і з різних матеріалів. Широко застосовуються п'єзоелектричні матеріали, зокрема п'єзокераміка.

Актуальність теми. Аналітичні методи розв'язання крайових задач для математичних моделей в різних розділах механіки мають певну перевагу перед чисельними методами. З використанням аналітичних розв'язків, перед усім, враховується загальний об'єм обчислень і спрощується задача контролю якості отриманого розв'язку. Перевага аналітичних методів може проявитись також у процесі узагальнення результатів конкретних обчислень при визначенні загальних закономірностей для певного класу задач.

Але для аналітичних методів характерний той недолік, що їх використання в традиційній інтерпретації можливо лише для дуже вузького кола задач. Тому розвиток методів, що дозволяють розширити області використання аналітичних методів при розв'язанні крайових задач для неканонічних областей є актуальною задачею сучасної механіки і математичної фізики.

При побудові аналітичних розв'язків для неканонічних областей важливо мати впевненість у тому, що ці розв'язки будуть ефективними в широкому діапазоні зміни геометричних параметрів, що характеризують розглянуті області.

В роботі досягнення такої впевненості базується на використанні поняття загального розв'язку крайової задачі і розробці методів побудови таких загальних розв'язків.

Мета і задачі дослідження. Ціллю роботи є розробка аналітичних методів розв'язування крайових задач теорії коливань для пружних пластин паралелограмної форми.

Задачами наукового дослідження є:

- аналіз впливу геометричних характеристик пластин на спектри власних частот і на форми коливань.
- визначення ефективних методів отримання систем алгебраїчних рівнянь для невідомих коефіцієнтів запропонованих розв'язків на відносно простих прикладах задачі теорії потенціалу.
- порівняння результатів експериментальних даних, отриманих при розгляді вимушених коливань п'єзокерамічних пружних пластин.

Об'єктом дослідження є закономірності динамічних процесів в механіці деформівних твердих тіл, які мають п'єзоелектричні властивості. Дослідження таких закономірностей проводиться з використанням математичного моделювання процесів і проведення експериментальних досліджень вимушених коливань.

Предметом дослідження є тонкі п'єзокерамічні пластини у формі паралелограма, які здійснюють планарні коливання та коливання згину. Для визначення спектрів власних частот і форм таких пластинок розроблені спеціальні аналітичні методи розв'язання граничних задач, сформульованих у рамках відповідних математичних моделей. Проведено експериментальне дослідження вимушених коливань пластин, що збуджуються зовнішнім електричним полем. Результати порівняння теоретичних і експериментальних результатів підтверджують обґрунтованість використаних математичних моделей.

Методи дослідження. У роботі розвиваються аналітичні методи для побудови розв'язків задач коливань паралелограмних пластин. Загальні розв'язки крайових задач представлені у вигляді нескінченних рядів по відомим тригонометричним функціям. Використовуються два методи (колокації і середньоквадратичного наближення) отримання нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення шуканих коефіцієнтів рядів в обох розв'язках.

Порівняння аналітичних і експериментальних даних використовується для підтвердження достовірності кількісних оцінок.

Отримані аналітичні розв'язки для динамічних характеристик пружних пластин доповнені результатами експериментальних досліджень спектрів власних частот п'єзокерамічних паралелограмних пластин.

Порівняння аналітичних результатів з експериментальними дозволяє визначати ефективність збудження коливань в п'єзопластинах при зміні їх форми і наявності суцільних електродів на їх поверхнях.

Достовірність результатів і висновків дисертаційної роботи. Постановка конкретних задач в дисертації базується на використанні глибоко і всебічно обґрунтованих математичних моделей, широко використовуваних у сучасній механіці суцільних середовищ і в математичній фізиці. При цьому отримання нових результатів базується на аналізі розв'язків відповідних крайових задач для різних типів граничних умов. При цьому особливу цінність представляють аналітичні розв'язки, які є тестовими при розробці та оцінці різних наближених підходів. Незважаючи на те, що до теперішнього часу накопичений великий досвід в побудові аналітичних розв'язків крайових задач для таких рівнянь, як рівняння Лапласа, Гельмгольца, рівнянь теорії пружності і електропружності, для рівнянь електродинаміки отримані результати відносяться, в основному, до досить простих геометрично об'єктів, що об'єднуються поняттям канонічної області. Основна ідея дисертаційної роботи полягає в тому, щоб значно розширити коло задач механіки, для яких можлива побудова аналітичних розв'язків. Характерною особливістю підходу в дисертації є те, що такі розв'язки (загальні розв'язки граничних задач) будуються у вигляді спеціальних наборів частинних розв'язків розглянутих рівнянь. У цьому випадку задача оцінки достовірності істотно спрощується і зводиться до оцінки точності виконання граничних умов. При цьому сама оцінка має ясний фізичний зміст. У всіх розглянутих в дисертації заках ретельно аналізується якість виконання граничних умов і показується, що використані алгоритми обчислень дають можливість легко підвищувати точність розв'язків при розумних витратах часу на розрахунки. При розгляді задач теорії коливань п'єзокерамічних пластин в дисертації наведені також результати експериментальних досліджень. Ці дослідження виконані в лабораторії, що має великий багаторічний досвід аналізу коливань елементів з п'єзокераміки. Саме це забезпечує достовірність отриманих експериментальних оцінок. Порівняння результатів теорії і експерименту в цьому випадку не несе

функції перевірки того чи іншого результату. Розбіжність між оцінками теорії і експерименту в цьому випадку є вказівкою на невідповідність фізичних властивостей розглянутих експериментальних зразків, які закладаються в розрахунок, паспортними даними на матеріал. Чим визначається цінність отриманих аналітичних розв'язків, які можуть служити основою для уточнення значень фізичних параметрів зразків у кожному конкретному експерименті.

Наукова новизна результатів. Наукова новизна результатів, що отримані в роботі, полягає в наступному:

- Показана можливість побудови аналітичних розв'язків теорії потенціалу для паралелограмних областей.
- Показана можливість побудови аналітичних розв'язків теорії коливань пластин для паралелограмних областей.
- Проведено порівняльний аналіз методів отримання нескінченних систем алгебраїчних рівнянь.
- Встановлено залежності спектральних характеристик паралелограмних пластин, що коливаються, від кута скосу цих пластин.
- Розроблено методи експериментального аналізу коливальних характеристик паралелограмних п'єзокерамічних пластин.

Практичне значення отриманих результатів. Знання динамічних характеристик пружних пластин неканонічної форми необхідно при розв'язанні широкого кола інженерних задач, в яких конструкції піддаються динамічному навантаженню. Важливими є не тільки дані про власні частоти, але і про форми коливань пластин. Важливе значення такі дані мають при створенні сучасних електромеханічних перетворювачів з використанням п'єзоактивних або магнітоактивних матеріалів.

Особистий внесок здобувача. Аналітичні і експериментальні результати дисертації належать здобувачу особисто, що відображено в роботах, опублікованих з науковим керівником академіком НАН України, д.ф.-м.н. В.Т.Грінченком, а також к.ф.-м.н., доц. Г.М.Зражевським, к.ф.-м.н. В.В.Поповим, к.ф.-м.н. А.В.Поповим, к.ф.-м.н., доц. О.В.Борисейком, к.ф.-м.н., доц. І.А.Улітком, В.О.Андрущенко, В.М.Нікітенком, Б.Солтанніа, С.Іранпур Мобараке, Х.Ахмаді. В.Т.Грінченку належить участь у постановці задач на основі методу частинних областей та методу суперпозиції і в обговоренні

отриманих результатів. Г.М.Зражевський брав участь в обговоренні алгоритмів розв'язання задач та отриманих результатів. В.О.Андрущенко і В.М.Нікітенко допомагали у постановці експериментів та обговоренні їх результатів. Решта співавторів брала участь в обговоренні результатів досліджень.

Автору належить:

1. Самостійна побудова загальних розв'язків рівнянь Лапласа, Гельмгольца для паралелограмних областей, і рівнянь теорії планарних та згинних коливань паралелограмних п'єзокерамічних пластин.

2. Розробка програм для тестування методів отримання нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. Визначення вимог до числа рівнянь в системах при їх редукції.

3. Участь в аналізі результатів тестування методів розв'язування крайових задач для рівнянь Лапласа, Гельмгольца і рівнянь планарних та згинних коливань електропружних пластин.

4. Написання наукових статей для представлення результатів до публікації.

5. Участь у підготовці і проведенні експериментів з пьезопластинками. Аналіз результатів вимірювань та їх порівняння з аналітичними розв'язками.

6. Формулювання висновків за результатами проведених досліджень.

Апробація результатів дисертації. Окремі результати дисертаційної роботи доповідалися на міжнародних наукових конференціях:

- 15th International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, (Kyiv, NTUU KPI, 15-17 May, 2014).
- 5th International Conference on "Acoustics and Vibration ", (ISAV 2015, Tehran, Iran, University of Tehran, School of Mechanical Engineering, 25-26 November, 2015).
- 3th International Scientific Conference "MODERN PROBLEMS OF MECHANICS", (Kyiv, Ukraine, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Theoretical and Applied Mechanics, 27-29 August, 2015).
- Консонанс-2015, Акустичний симпозіум, (Київ, Інститут гідромеханіки НАН України, 29-30 вересня 2015).
- 7th International Conference on "Acoustics and Vibration", (ISAV 2017, Tehran, Iran, Sharif University of Technology, Mechanical Engineering Department, 28-29 November, 2017).

- 4th International Scientific Conference "Modern problems of mechanics", (Kyiv, Ukraine, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Theoretical and Applied Mechanics, 28-30 August, 2017).
- 18th International Conference "Dynamical system modelling and stability investigation", (Kiev, Ukraine 24-26 May, 2017).

Публікації. За результатами дисертаційного дослідження опубліковано 15 наукових праць. З них

- 8 статей [1–8] у фахових виданнях, серед яких 6 статей [1–6] – у фахових виданнях України, дві статті [7,8] – в іноземних журналах, включених до наукометричної бази Scopus;
- 7 тез доповідей на наукових конференціях [9–15].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, що проведені в дисертаційній роботі, виконано в рамках державних бюджетних науково-дослідних тем № 11БФ038-05 "Крайові задачі динаміки пружних тіл зі спряженими польовими фізико-механічними властивостями та їх застосування в неруйнівному контролі, сенсорних мікроелектромеханічних системах та хвильових гіроскопах" (номер державної реєстрації 0101U0024777), № 14БП038-02 "Математичні та експериментальні методи механіки спряжених коливальних процесів і хвильових полів та їх застосування в гіроскопічних геонавігаційних та мікроелектромеханічних системах" (номер державної реєстрації 0114U003474) № 16БП038-03 "Вирішення прикладних проблем енергетичного комплексу і транспорту на основі сучасних теоретико-експериментальних підходів" (номер державної реєстрації 0116U004754), № 18БП038-01 "Моделі і засоби підвищення експлуатаційної надійності і ресурсу технічних систем енергетики і транспорту" (номер державної реєстрації 0118U001123) Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 120 найменувань. У роботі наведено 7 таблиць та 110 рисунків. Повний обсяг роботи – 197 сторінок.

У вступі дана загальна характеристика дисертації, розкрито стан наукової проблеми, обґрунтовано актуальність обраної теми дисертації, її зв'язок з науковими темами; сформульовані мета роботи і завдання дослідження;

визначено наукову новизну та практичну цінність отриманих результатів; наведено дані про апробацію результатів дисертації та публікації результатів роботи, а також дано короткий опис структури дисертації.

У **першому розділі** наведено огляд літератури за тематикою дисертаційного дослідження. Розглядаються основні підходи до побудови аналітичних і чисельних методів розв'язку задач про коливання об'єктів як канонічної, так і неканонічної форми.

Значний внесок у розвиток теорії як планарних, так і згинних коливань пластин зробили С.П.Тимошенко, А.Ф.Улитко, В.Т.Гринченко, В.В.Мелешко, В.Г.Карнаухов, І.К.Сенченков, Я.М.Григоренко, Ю.М.Шевченко, С.О.Папков, С.О.Амбарцумян, R.D.Mindlin, A.W.Leissa, D.J.Gorman, M.D.Waller та інші дослідники.

Аналіз всієї сукупності отриманих протягом тривалого часу результатів показує, що прогрес забезпечується паралельним розвитком аналітичних і чисельних підходів. Коротко викладається зміст робіт, в яких розв'язуються задачі, схожі за математичною постановкою з задачами дисертаційного дослідження.

Сучасні проблеми механіки суцільного середовища знаходяться в центрі уваги механіків. Точний опис характеристик коливання об'єктів складної форми являє собою досить складну задачу. Виникаючі при цьому труднощі стимулювали створення багатьох аналітичних і чисельних методів розв'язування відповідних крайових задач. Іноді процес розробки нових методів розв'язання задач механіки сприймається як незалежне створення аналітичних і чисельних методів. Однак така точка зору істотно спрощує реальну ситуацію. Аналіз всієї сукупності отриманих результатів показує, що прогрес забезпечується паралельним розвитком аналітичних і чисельних підходів.

Серед великої кількості різних методів розв'язання крайових задач математичної фізики, мабуть, лише метод скінченних різниць може трактуватися як чисто чисельний. Тут диференціальне формулювання задачі використовується лише на етапі запису основних рівнянь. Надалі частинні похідні замінюються їх аналогами за допомогою скінчених різниць, а вихідний континуум – системою зі скінченим числом ступенів вільності. Інші методи в тій чи іншій формі використовують деякі аналітичні розв'язки для побудови

загальної процедури методу. Загальна ідея при цьому досить проста. Використання деяких аналітичних розв'язків, як правило, дозволяє отримати формулювання проблеми у вигляді співвідношень, що мають меншу в порівнянні з вихідною розмірність. Як правило, вихідна крайова задача приводиться до деякої системи співвідношень, що формулюються на границі області. Типовим прикладом є метод граничних інтегральних рівнянь в різних його формах. Як аналітичний розв'язок при побудові співвідношень методу використовується представлення для функції Гріна в нескінченному просторі. Цікава ідея покладена в основу методу Т-матриць. Тут в якості аналітичного базису для побудови розв'язку крайових задач розсіювання на скінчених тілах різної форми використовується нескінченний набір часткових розв'язків хвильового рівняння у вигляді сферичних гармонік. Хоча використання методу розширює коло задач, що мають аналітичний розв'язок, практичне його застосування досить обмежено.

Дана дисертаційна робота присвячена розвитку одного з аналітичних підходів до розв'язання задач механіки. Ідейні основи для пропонованого підходу формувалися в математичній фізиці давно. Доцільно вказати на його тісний зв'язок з методами частинних областей, зчленування, методом задачі Рімана-Гільберта, методом Неймана-Шварца. Використання наборів часткових розв'язків хвильових та інших типів рівнянь у канонічних координатних системах для побудови аналітичних розв'язків у неканонічних областях найбільш послідовно поводить в рамках методу частинних областей.

У **другому розділі** розглядаються загальні математичні принципи методів суперпозиції і частинних областей і можливості їх застосування для розв'язання широкого кола задач для неканонічних областей.

У **третьому розділі** розглядається крайова задача Діріхле теорії потенціалу в області, що обмежена паралелограмом. Розв'язок задачі будується за методом частинних областей; особливістю його реалізації в даному випадку є те, що аналітичний розв'язок в області, що розглядається, розшукується у вигляді суми більш простих розв'язків, представлених у вигляді рядів Фур'є, для прямокутних областей, перетином яких є паралелограм. Однак дуже важливим питанням при реалізації даного підходу є те, які способи повинні бути використані для ефективного визначення довільних коефіцієнтів рядів, що входять в загальний розв'язок. У даній роботі ці невідомі коефіцієнти

знаходяться методом редукції з нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що одержані в результаті застосування методів мінімізації середньоквадратичних відхилень і колокації для задоволення умов на границях області. Обчислювальні експерименти продемонстрували досить швидку збіжність чисельних рішень для обох зазначених методів.

У **четвертому розділі** розглянуто питання про побудову розв'язків крайової задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца, що описує коливання мембрани, в області, яка обмежена паралелограмом. Запропоновано підхід, що заснований на використанні методу часткових областей. Його суть полягає в тому, що повна область існування шуканого розв'язку крайової задачі представляється у вигляді перетину частинних підобластей, у кожній з яких можна побудувати загальний (в певному сенсі) розв'язок рівняння Гельмгольца. Таким чином, в рамках методу частинних областей послідовно здійснюється конструктивне використання нескінченної сім'ї часткових розв'язків рівняння Гельмгольца в канонічних областях для побудови відповідних аналітичних розв'язків у неканонічних областях. При цьому основна увага була приділена внутрішній крайовій задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца для паралелограмної області. Розв'язок задачі представляється сумою двох розв'язків у вигляді рядів Фур'є для прямокутних областей, перетином яких є паралелограм. Невідомі коефіцієнти рядів знаходяться методом редукції з нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які будуються в результаті застосування методу мінімізації середньоквадратичних відхилень та методу колокації для задоволення умов на межах області. Досліджені розв'язки задачі у достатньо широкому діапазоні зміни хвильового числа $k = \frac{\omega}{c}$ ($\omega = 2\pi f$ – кругова частота, а c – швидкість поширення хвиль у мембрані) та побудовано амплітудно-частотну характеристику, знайдено резонансні частоти і показані форми власних коливань.

У **п'ятому розділі** на основі методу суперпозиції отримано розв'язок крайової задачі про планарні коливання поляризованої по товщині п'єзокерамічної пластини у формі паралелограма, яка покрита суцільними електродами, при електричному збудженні за умови вільних від механічних напружень її країв.

Поля пружних переміщень виражаються через скалярний та векторний (у випадку плоскої задачі він має тільки одну ненульову компоненту) потенціали Гельмгольца. Розв'язки для цих потенціалів представляються у вигляді суми (суперпозиції) потенціалів, які є розв'язками рівнянь Гельмгольца, кожен з яких виражається у формі нескінченних рядів. Форма цих рядів вибирається так, щоб на сторонах паралелограма дані потенціали представляли собою ряди за повними тригонометричними базисами.

При розв'язанні плоскої задачі електропружності використовувалося представлення переміщень через скалярний і векторний потенціали, які задовольняють відповідним рівнянням Гельмгольца. Загальний розв'язок задачі побудовано у вигляді суперпозиції часткових розв'язків для потенціалів, що представлені у формі нескінченних рядів, які дозволяють задовольняти умовам на окремих прямолінійних ділянках границі паралелограма. Невідомі коефіцієнти рядів тут також знаходяться шляхом застосування методу редукції нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь і методів мінімізації середньоквадратичних відхилень та колокації для задоволення умов на границі області. Побудовано розрахункові амплітудно-частотні характеристики для паралелограмних пластин і проведено порівняння з результатами натурних експериментів, яке показало високу точність результатів моделювання і дозволило прогнозувати появу нових резонансів при переході від квадратної і прямокутної до паралелограмної форми пластини. Наявність аналітичного розв'язку створює передумови для більш глибокого якісного аналізу властивостей коливальної системи.

У даному розділі також наведені результати експериментальних досліджень власних частот і форм коливань п'єзопластин різної геометрії. В якості базової була обрана п'єзопластина квадратної форми розміром 45,0 мм x 45,0 мм, товщиною 2,8 мм, з суцільними електродами на бічних гранях з п'єзоскладу типу PZT-4, виготовлена фірмою STEMiNC (США). З квадратних пластин виготовлялися пластини у вигляді паралелограмів з кутами скосу 2 і 10 градусів. Амплітудно-частотні характеристики визначалися експериментально, за допомогою характеріографу типу X1-46 і виводилися на графічний пристрій. Форми коливань візуалізувалися за методом Хладні. Було показано, що навіть незначна зміна геометрії істотно збагачує спектр власних частот – кількість резонансів, наприклад, збільшується з 5 до 20 в частотному діапазоні до

130 кГц. В роботі особливу увагу приділено визначенню та аналізу коефіцієнта електромеханічного зв'язку як характеристики п'єзоматеріалу і як характеристики інтенсивності збудження тієї чи іншої форми коливань.

У **шостому розділі** за такою ж схемою побудовано розв'язок крайової задачі про згинні коливання біморфної п'єзокерамічної паралелограмної пластини із суцільним електродуванням при електричному збудженні у випадку вільних країв. При розв'язанні задачі використовувалося представлення поперечних переміщень через суму функцій, які є розв'язками звичайного і модифікованого рівнянь Гельмгольца. Загальний розв'язок задачі побудовано у вигляді суперпозиції часткових розв'язків для цих функцій, що представлені у формі нескінченних рядів, які дозволяють задовольняти умовам на окремих прямолінійних ділянках границі паралелограма. Тут також використовуються метод редукції нескінченних систем і метод мінімізації середньоквадратичних відхилень та метод колокації для задоволення умов на границі. Побудовано розрахункові амплітудно-частотні характеристики для згинних коливань паралелограмних пластин і проведено порівняння з результатами натурних експериментів, яке також показало високу точність результатів моделювання і дозволило прогнозувати появу нових резонансів при переході від квадратної і прямокутної до паралелограмної форми пластини. Побудовано розрахункові форми резонансних коливань.

У висновках сформульовані основні результати, отримані в дисертаційній роботі.

Автор висловлює глибоку подяку науковому керівнику академіку НАН України, д.ф.-м.н., професору Грінченку В.Т. за постійні консультації, увагу до роботи, цінні поради та корисні зауваження під час обговорення результатів дослідження, а також к.ф.-м.н., доценту Зражевському Г.М. за консультації з чисельної реалізації розглянутих задач.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Проблема розширення можливостей аналітичних методів розв'язання граничних задач, що формулюються при математичному моделюванні різних процесів у механіці і фізиці, була предметом досліджень багатьох вчених. По суті вже в роботі Ламе [16], присвяченій аналізу напруженого стану пружного паралелепіпеда, було зроблено важливий крок у вирішенні цієї проблеми. Більш загальний підхід до використання розв'язків в областях складної форми відомий у сучасній літературі як метод Шварца-Неймана [17].

Значну увагу дослідження в різних областях механіки було приділено розвитку методів збурення форми границі, що базувалися на припущенні про можливість використання розв'язку для неканонічної області для виконання граничних умов на границі, що має відхилення від канонічної форми. Тут, перш за все, слід вказати на роботу Релея по розсіюванню звуку на періодично збуреній границі [18]. Він увів принципове обмеження на граничну величину збурення, при якій має місце достовірність оцінок розсіяного поля. У класичній роботі [19] також встановлено обмеження на величину збурення форми границі при аналізі крайової задачі для рівняння Гельмгольца. Значна кількість задач з використанням методу збурення форми границі розв'язана в роботах [20, 21].

Специфічний підхід до розв'язання задач акустики і електродинаміки в неканонічних областях запропоновано Ватерманом [22]. Метод, відомий як метод Т-матриць, широко використовувався різними дослідниками. І в методі Т-матриць, і в різних варіантах методу збурення форми границі принципним є питання про встановлення граничних величин збурень форми області, до яких одержані кількісні оцінки фізичних характеристик є достовірними.

Метод власних функцій.

Метод власних функцій – один з найважливіших класичних методів розв'язку крайових задач математичної фізики. Даний метод заснований на спектральній теорії Штурма-Ліувілля й дозволяє одержати розв'язки крайових

задач електродинаміки, механіки, просторової теорії потенціалу, теплопровідності, акустики і т.д. Цей метод має обмеження на застосування. Так, наприклад, для векторних крайових задач математичної фізики, і зокрема, для просторових задач теорії пружності, процедури даного методу можуть бути повністю реалізовані тільки для сфери й необмеженого шару. Для цих конкретних випадків були отримані формули векторних перетворень, які є узагальненнями класичних розвинень Лапласа й Фур'є-Ханкеля.

За останній час вивчення методу власних функцій були значно розширені, так, наприклад, були побудовані векторні гармоніки для областей, які обмежені різними координатними поверхнями другого порядку, доведена ортогональність і повнота знайдених власних вектор-функцій і, як результат, установлені формули векторних перетворень Фур'є, Фур'є-Ханкеля, Черрі, Ламе, Мелліна, Мелера-Фока, Вебера й ін. Надалі векторні перетворення були успішно використані для розв'язку просторових задач теорії пружності й схожих до них задач повільних течій в'язкої рідини (наближення Стокса). Є перспективи його використання й у задачах динамічного й статичного деформування твердих тіл з електромеханічно активних матеріалів (ферромагнетиків, сегнетоелектриків, п'єзоелектриків), а також у задачах деформування електропровідних тіл імпульсними потоками електромагнітного поля високої інтенсивності.

Останнім часом незважаючи на значні математичні труднощі спостерігається збільшення інтересу до просторових задач теорії пружності. Така тенденція пов'язана з розвитком таких галузей науки як, наприклад, фізична акустика [23–28]. У багатьох роботах [29–38] використовувався метод розкладання шуканих розв'язків у ряди й інтеграли по власних функціях скалярних задач у криволінійних координатах, що розділяються, для побудови точних розв'язків окремих основних задач просторової теорії пружності. Багатьма авторами були застосовані загальні форми представлення розв'язків рівнянь рівноваги й руху пружних тел. Для задач статички розв'язок виражався через гармонійні функції, а для задач динаміки - хвильові функції. Тепер у задачах статички найчастіше застосовується представлення розв'язку у формі Папковича-Нейбера [39, 34, 40, 41], а в задачах динаміки – розв'язок Стокса-

Гельмгольца [42, 35, 36].

Становить інтерес узагальнення методу власних функцій на векторні крайові задачі, яке полягає в тому, що для побудови поверхневих векторних гармонік необхідно використати не тільки власні функції скалярних задач, але й певні комбінації їхніх перших похідних. А якщо ні, то необхідно щораз шукати потрібні алгебраїчні, а іноді й диференціальні, комбінації компонентів поля в граничних умовах. Ламе [43] уперше звернув на це увагу. Це підтверджується і ретельним аналізом власних вектор-функцій на поверхні сфери для задач електродинаміки й теорії пружності [44, 19, 45–49].

Практично перші результати розв'язку динамічних задач за допомогою цього методу були отримані Бернуллі при аналізі коливань струни. В основі методу лежить той факт, що вимушені коливання будь-якого об'єкта, поведінка якого описується деякою системою лінійних рівнянь, можна описати суперпозицією так званих власних або нормальних коливань. Цей метод дуже широко використовується в математичній фізиці [19], при розгляді задач щодо динамічних полів різної природи. Істотним узагальненням методу власних функцій, які особливо широко використовувалися в скалярних задачах, є результати, отримані в роботах А.Ф.Улітка [50], який розвинув цей метод у застосуванні до векторних граничних задач теорії пружності й електропружності.

Одним з важливих понять, які сформувалися в математичній фізиці при узагальненні досвіду використання методу власних функцій є поняття загального розв'язку граничної задачі. Загальну ідею можна проілюструвати на прикладі рівняння Лапласа для кола. Якщо, наприклад, у двомірній області $(0 < r < r_0, 0 < \theta < 2\pi)$ задана деяка функція $\varphi(\theta)$, то розв'язок відповідної граничної задачі має вигляд:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta] r^n \quad (1.1)$$

Важливо, що зміна виду функції $\varphi(\theta)$ не впливає на форму загального розв'язку (1.1), а виражається лише у зміні значень коефіцієнтів A_n і B_n . Саме ця обставина дозволяє називати вираз (1.1) загальним розв'язком граничної задачі для рівняння Лапласа. Конструктивність і важливість цього поняття для

істотного розширення кола задач математичної фізики, які допускають побудову аналітичних розв'язків, обговорюється нижче при розгляді суті методу часткових областей.

Метод збурення форми границі.

Побудова ефективних розв'язків граничних задач для канонічних областей природно стимулювала прагнення використовувати отримані розв'язки для аналізу різних фізичних полів у неканонічних областях. Перше важливе дослідження можливостей такого підходу було проведено Релеєм, який розглянув задачу розсіювання світла на хвилястій поверхні. Він встановив величини збурення форми границі, для яких припустимо використання класичних розв'язків для півпростору. Чітка вказівка на наявність обмежень у величині збурення канонічної області при використанні класичних розв'язків дана у відомій книзі Морса і Фешбаха [19].

У механіці суцільних середовищ часто використовується один з методів послідовних наближень, пов'язаний зі зміною області розв'язку задачі. Такий підхід обумовлений тим, що спочатку можна розв'язати крайову задачу для канонічних областей (наприклад, для кола). Потім по певних алгоритмах канонічна область підлягає зміні до того виду, який має початкова область. На кожному кроці ітерацій ці зміни, як правило, малі, і розв'язки набувають відповідно малі зміни. Детальний огляд досліджень з використанням методу збурення форми границь у механіці суцільних середовищ наведено в [20]. Зокрема, в огляді вказуються найперші роботи [51–56], пов'язані з аналітичними розв'язками задач концентрації напружень поблизу криволінійних отворів у тонких оболонках, нелінійних задач теорії згину пластин і оболонок, просторових задач для неканонічних областей. Причому, методи в зазначених роботах можна умовно розбити на два варіанти залежно від наявності (варіант 1) або відсутності (варіант 2) співпадіння границі області з координатними лініями (або поверхнями). Суть методу збурення форми границь за варіантом 1 полягає у приведенні крайових задач для неканонічних областей до послідовності крайових задач для канонічних областей з поправками лише в граничних умовах (граничні умови переносяться на

границю канонічної області, близької до початкової). Метод збурення форми границь за варіантом 2 розвинувся при дослідженні просторових (зокрема, осесимметричних) задач теорії пружності, механіки кусково-однорідних тіл з неканонічними розділяючими поверхнями [57, 58], механіки композитних матеріалів із дрібномасштабними викривленнями у їхній структурі [59, 60], просторових задач теплопровідності й термопружності [61], механіки просторових тіл скінченних розмірів із дрібними виточками. В останніх задачах нерідко застосовуються одночасно метод збурення форми границь і принцип суперпозиції Г.Ламе [62], який допускає співпадання граничної поверхні з координатною поверхнею різних сімейств.

Широке практичне використання методу збурення форми границі було здійснено в роботах співробітників Інституту механіки НАН України В.Г. Карнаухова, О.М. Гузя і Ю.Н. Неміша і їхніх учнів.

Метод Шварца.

Декомпозиція області іноді може зменшити обчислювальну складність базового методу розв'язування крайових задач. Метод декомпозиції розрахункової області – це певна техніка розв'язку диференціальних рівнянь у частинних похідних, заснована на розкладанні вихідної області задачі на декілька підобластей. Часто таке переформулювання приводить до трудомістких ітераційних процесів з необхідністю створення паралельних обчислювальних систем.

Метод Шварца, найбільш ранній з відомих методів декомпозиції області, був викладений в оригінальній публікації Германа Шварца в 1870 році [63]. Для розробки знаменитого алгоритму, який має його ім'я, мотивація Шварца носила теоретичний характер: він прагнув довести існування гармонійних функцій у нерегулярних областях, виразивши їх як об'єднання областей канонічної форми (наприклад, прямокутників і кіл). Але тільки лише після появи комп'ютерів, цей метод до деякої міри почав використовуватися в якості чисельного методу розв'язування рівнянь із частинними похідними. Зокрема, цей метод став переважати в дослідженнях, де він зазвичай використовується попередньо перед застосуванням ітераційних чисельних методів [64–67]. Хоча, здавалосьь

би природнім використовувати метод Шварца для того, щоб зв'язати дві задачі в області, яка є об'єднанням двох, що перекриваються, підобластей, але на диво у літературі зовсім мало робіт, у яких використовується даний метод для досягнення одночасного зв'язування в такий спосіб. В останні роки кілька авторів використовували метод одночасного багатомасштабного зв'язування областей різної розмірності, наприклад, Хаджиконстантиноу й Патера [68], Вердер, Валтер і Коумоутсакос [69], Паркс, Бочев, Лехук [70] і Пандуранган, Чи й Нг [71]. У цих роботах, у різних областях застосовуються різні числові схеми, а передача інформації з однієї області в іншу відбувається в області їх перекриття. Також пропонувалися методи подібні методу Шварца для того, щоб зв'язати різну фізику в різних підобластях, наприклад, взаємодія рідини й структури (Енгель і Грієбель [72]), а також обчислювальну гідродинаміку з аероакустиком (Боррель, Хальперн, Раян [73]). У цих роботах визначальні рівняння розв'язуються окремо в кожній підобласті, і необхідна інформація, така як структурно-рідинне навантаження, передається через граничні умови на границі розділу на підобласті.

Для ітераційних процесів методу Шварца досліджена їхня збіжність. Оригінальне доведення Шварца було подано для лінійних еліптичних рівнянь другого порядку й опиралося на принцип максимуму [63]. Наступні автори розробили інші підходи до доведення збіжності.

Метод граничних інтегральних рівнянь у задачах механіки.

Серед сучасних чисельних методів розв'язання крайових задач завдань механіки суцільних середовищ необхідно виділити три:

- метод скінченних різниць (МСР),
- метод скінченних елементів (МСЕ),
- метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР).

Кожен з цих методів має теоретичне обґрунтування і вже не один десяток років використовується на практиці. Особливо стрімко в 50-х роках минулого століття розвивалися перші два з наведених вище методів – цьому сприяв прогрес обчислювальної техніки і нові науково-технічні завдання суспільства в розвідці надр Землі і дослідженні космосу. Саме на основі МСР і МСЕ були

розраховані важливі завдання механіки суцільного середовища (аерогідродинаміка і пружність космічних апаратів, фільтрація і т.п.), завдання будівельної механіки (роторні екскаватори, вежі і т.д.). Метод граничних інтегральних рівнянь досяг зрілості і почав своє самостійне життя в 70-х роках минулого століття після відомого наукового симпозіуму [74], який був присвячений саме використанню методу граничних інтегральних рівнянь.

Сучасні чисельні методи мають як переваги, так і недоліки. Метод скінченних різниць реалізується найшвидше в сенсі побудови розв'язуючої системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Істотні недоліки методу полягають в обмеженнях виду області шуканої функції, величин кроків дискретизації, проблемах стійкості.

Певні обмеження методу скінченних різниць були зняті методом скінченних елементів. Головне досягнення МСЕ – зняття багатьох обмежень, які накладались на область шуканої функції: області шуканого розв'язку можуть бути і неканонічними. Крім цього, великим досягненням МСЕ є спеціальний вид матриці розв'язуючої СЛАР - блоковий. Для таких СЛАР були розроблені відповідні схеми методу Гаусса, які враховували розрідженість матриці. Недоліки методу – обмеження щодо скінченності області шуканої функції і певна громіздкість при обчисленні елементів розв'язуючої СЛАР.

Метод граничних інтегральних рівнянь знімає всі обмеження МСР і МСЕ по області шуканої функції і ще знижує розмірність завдання на одиницю. Недолік методу – складність обчислення елементів розв'язуючої СЛАР.

Джерелом становлення МГІР в деякій мірі можна назвати метод інтегральних рівнянь, заснований на представленні шуканої функції $U(x)$ у вигляді потенціалу простого

$$U(x) = \iint_{\partial D} \frac{\rho(\xi)}{r(x, \xi)} d\sigma \quad (1.2)$$

або подвійного шару

$$U(x) = \iint_{\partial D} \rho(\xi) \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r(x, \xi)} \right) d\sigma. \quad (1.3)$$

Тут позначено: ∂D – межа області D крайової задачі, $\rho(\xi)$ – щільність потенціалу, n – зовнішня нормаль межі ∂D , $r(x, \xi)$ – відстань між точками $x \in D$ та $\xi \in \partial D$.

Основні властивості потенціалу простого шару. Якщо використовувати достатню ознаку неперервності невластних інтегралів від параметра, то можна [75] прийти до висновку: потенціал простого шару у всіх точках межі, а значить, і у всій області є функцією неперервною. Нормальна похідна потенціалу простого шару має наступні властивості [76]:

1. Нормальна похідна потенціалу простого шару на поверхні межі ∂D є функцією неперервною.

2. Нормальна похідна потенціалу простого шару при перетині межі ∂D змінює своє значення за рахунок наявності розриву. Ці розриви збігаються з розривами потенціалу подвійного шару при $\rho(\xi) \equiv 1$:

$$\iint_{\partial D} \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r(x, \xi)} \right) d\sigma = \begin{cases} -4\pi, x \in D, \\ -2, x \in \partial D, \\ 0, x \notin D \cup \partial D. \end{cases} \quad (1.4)$$

Основні властивості потенціалу подвійного шару. Потенціал подвійного шару $U(x)$ при наближенні до будь-якої точки $x_0 \in \partial D$ зсередини або ззовні наближається до значень $\pm U(x_0)$:

$$U^\pm(x_0) = U_0(x_0) \pm 2\pi\rho(x_0) \quad (1.5)$$

де позначено

$$U_0(x_0) = \iint_{\partial D} \rho(\xi) \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r(x, \xi)} \right) d\sigma \Big|_{x=x_0} \quad (1.6)$$

значення потенціалу подвійного шару $U(x)$ в точці x_0 . Обчислення значення потенціалу подвійного шару в будь-якій точці $x_0 \in \partial D$ відбувається в граничному розумінні: точка x_0 обмежується ε -околом ω_ε радіусу r_ε і за значення $U(x_0)$ приймається границя

$$U_0(x_0) = \lim_{r_\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\partial D - \omega_\varepsilon} \rho(\xi) \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r(x, \xi)} \right) d\sigma \quad (1.7)$$

У двовимірному випадку потенціали простого і подвійного шару ще називають логарифмічними. Ця назва походить від наявності певної логарифмічної функції. Справді, логарифмічним потенціалом простого шару називається функція

$$U(x) = \int_{\partial D} \rho(\xi) \ln \frac{1}{r(x, \xi)} d\sigma, \quad (1.8)$$

де ∂D – крива Ляпунова. Аналогічно визначається логарифмічний потенціал подвійного шару

$$U(x) = \int_{\partial D} \rho(\xi) \frac{d}{dn} \ln \frac{1}{r(x, \xi)} d\sigma \quad (1.9)$$

Ці функції успадкують властивості гармонічності від функції $\ln \frac{1}{r(x, \xi)}$ – фундаментального розв'язку двовимірного рівняння Лапласа. Крім того, відомі такі властивості потенціали простого і подвійного шару [77]: дійсна частина інтеграла типу Коші є логарифмічний потенціал подвійного шару з щільністю $-\frac{\varphi}{2\pi}$, а уявна частина – логарифмічний потенціал простого шару з щільністю $-\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{ds}$.

Застосування методу інтегральних рівнянь до крайових задач призводить (в результаті граничного переходу в крайових умовах) до інтегральних рівнянь щодо щільності потенціалів. Причому, вибір потенціалів при застосуванні методу інтегральних рівнянь пов'язаний з видом крайових умов. Наприклад, для задач Діріхле доречно шукану функцію представляти у вигляді потенціалу подвійного шару, а в разі задачі Неймана - у вигляді потенціалу простого шару. Це пов'язано з простою метою: уникнути отримання інтегрального рівняння Фредгольма I роду, отримуючи значно стійкіше в числовий реалізації інтегральне рівняння Фредгольма II роду. Такий підхід в інтегральних методах не випадковий: використовується відома властивість сингулярності потенціалу подвійного шару і похідної потенціалу простого шару при їх граничному переході на межу області. Вибір головного значення сингулярних інтегралів і призводить до позаінтегрального члена інтегрального рівняння. Слід сказати,

що спроба вирішувати за допомогою інтегрального методу більш складні крайові задачі, ніж задачі Діріхле або Неймана, призводить до нестійких для числової реалізації інтегральних рівнянь. В цьому випадку користуються різними методами регуляризації нестійких задач.

Метод граничних інтегральних рівнянь для тривимірних областей заснований на використанні варіанту формули Гріна [76]

$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v)dD = \int_{\partial D} (v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn})d\sigma, \quad (1.10)$$

де через Δ позначений оператор Лапласа: $\sum_{i=1}^v \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, v – розмірність задачі.

Важливо, що тут зв'язуються функція і її похідна по нормалі на межі області з деякими квадратурами в самій області. Якщо в (1.10) за функцію v вибрати фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа L , то в залежності від місця розташування поза інтегральної точки $x = (x_1; x_2; \dots; x_v)$ можна отримати:

$$\int_{\partial D} (L\frac{du}{dn} - u\frac{dL}{dn})d\sigma = \int_D L\Delta u dD + \begin{cases} 0, x \notin D \cup \partial D \\ \frac{1}{2}u(x), x \in \partial D \\ u(x), x \in D \end{cases} \quad (1.11)$$

Звідси один крок до загальної формули теорії гармонічних функцій (тотожність Гріна, [76]) у тривимірному випадку ($L = \frac{1}{4\pi r}$):

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} (\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d}{dn}\frac{1}{r})d\sigma = \begin{cases} 0, x \notin D \cup \partial D \\ \frac{1}{2}u(x), x \in \partial D \\ u(x), x \in D \end{cases} \quad (1.12)$$

або у двовимірному випадку ($L = \frac{1}{2\pi} \ln(\frac{1}{r})$):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} (\ln\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d}{dn}\ln\frac{1}{r})d\sigma = \begin{cases} 0, x \notin D \cup \partial D \\ \frac{1}{2}u(x), x \in \partial D, \\ u(x), x \in D \end{cases} \quad (1.13)$$

де область ∂D і її межа ∂D – відповідно поверхня і лінія. Знову важливо, що в (1.11) зв'язуються функція і її похідна по нормалі на межі області з деякими

квадратурами в самій області, а в (1.12) або (1.13) – безпосередньо з самою функцією. Тепер, наприклад, розв'язуючи крайові задачі для рівнянь Пуассона, можна прийти до інтегральних співвідношень виходячи з (1.11), а розв'язуючи крайові задачі для рівнянь Лапласа - до інтегральних співвідношень виходячи з (1.12) або (1.13). У всіх випадках зменшується розмірність вихідної крайової задачі на одиницю: замість розв'язання крайової задачі в області достатньо розв'язати відповідне інтегральне рівняння на межі області. В результаті такого розв'язку будуть відомі шукана функція і її похідна по нормалі на межі області. Обчислення шуканої функції в самій області проводиться в залежності від задачі однією з квадратур: (1.11), (1.12) або (1.13).

Задачі, які не приводять до рівнянь Лапласа, можуть бути розв'язані шляхом МГІР, якщо скористатися відповідним фундаментальним розв'язком диференціального рівняння (аналог функцій $\frac{1}{r(x, \xi)}$, $\ln \frac{1}{r(x, \xi)}$) і формулою Гріна (1.10). Однак тут виникають проблеми в знаходженні саме фундаментальних розв'язків.

При розв'язанні нестационарних крайових задач механіки твердого тіла (перенесення тепла, квазістатична в'язкопружність, поширення хвиль і т.п.) використання МГІР здійснюється в основному за допомогою перетворення Лапласа. Перетворення Лапласа дозволяє диференціальні рівняння параболічного, гіперболічного типу звести до рівнянь еліптичного типу, які, в свою чергу, розв'язуються шляхом МГІР. У результаті розмірність вихідної задачі знижується двічі: за часом і простором. Розрахунки виконуються для кожного елемента списку параметра перетворення Лапласа.

МГІР має свої витoki в класичній теорії пружності [78], але в останні десятиліття став відігравати значну роль. Так, в [79] на прикладі задач про кручення та згин стержня квадратного перетину основне диференціальне рівняння (а далі відповідне граничне інтегральне рівняння) записується для функції напружень Прандтля, для функції депланації, для функції напруги Ері і для функції переміщень. Результати чисельного розв'язання такої задачі вказують на високий ступінь ефективності методу граничних інтегральних рівнянь у порівнянні з методом скінчених різниць: висока точність шуканого

розв'язку отримана при значному скороченні машинного часу комп'ютера. При цьому слід зазначити, що інтегральні рівняння розв'язувалися з використанням найпростішої кусково-постійної апроксимації шуканих функцій на ділянках розбиття межі інтегрування (метод колокацій).

МГПР знайшов своє застосування і в задачах коливання пластин. Так, в роботі Федотова В.П. [80] наведені розроблені спеціально для таких задач алгоритми на основі методу граничних елементів (модифікація МГПР). В основі таких алгоритмів – так звана «слабке формулювання» задачі і розпаралелювання обчислювального процесу. Іншою відмінною рисою запропонованої модифікації МГПР є аналітичне обчислення інтегралів по граничним елементам від компонентів функції впливу, зведене до інтегрування по одному фіксованому елементу, що дозволяє мінімізувати час обчислень.

Метод часткових областей.

Піонером формування ідеї методу часткових областей був відомий французький учений Ламе, що розглянув у своїй книзі по теорії пружності задачу про рівновагу паралелепіпеда. Практичне застосування ідеї Ламе було здійснено в роботі Матьє по рівновазі прямокутної пластинки. Подальший розвиток методу вже пов'язаний з роботами Б.Л. Абрамяна і його учнів. Надалі в найпростіших випадках використання методу приводило до необхідності розв'язку нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Тому особливо активно почали використовувати метод з появою можливості використання комп'ютерів. Були розроблені ефективні алгоритми розв'язку таких систем і отримані кількісні оцінки фізичних характеристик у теорії пружності, електродинаміці, акустиці в роботах А.Ф Улітка, В.Т. Грінченко, В.В. Мелешка, І.В. Вовка, В.Т Маципури та інших авторів.

РОЗДІЛ 2

МЕТОД ПОБУДОВИ АНАЛІТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ДЛЯ НЕКАНОНІЧНИХ ОБЛАСТЕЙ

Аналітичні розв'язки задач математичної фізики при різних крайових умовах зіграли важливу роль у розвитку механіки деформівного твердого тіла. Зараз найбільш повний опис доступних процедур отримання таких розв'язків і систематизація накопичених результатів подані в монографії Ф.М. Морса і Г.Фешбаха [19].

З точки зору розв'язування прикладних задач аналітичні розв'язки мають тільки один недолік – невелика кількість знайдених розв'язків. Через це останнім часом з впровадженням обчислювальної техніки розроблялися підходи, що розширили набір областей, для яких з метою кількісної оцінки характеристик фізичного поля можуть бути побудовані ефективні інструментальні розв'язки. Такі розробки включають, наприклад, так званий алгоритм Шварца [63], метод Т-матриці [22], метод Шестопалова [81] розв'язування задачі Рімана-Гільберта та ін. Такі підходи засновані на розбитті областей складної форми на відносно прості підобласті, для яких аналітичні вирази використовуваних функцій можуть привести до алгебраїчних рівнянь, властивості яких дозволяють застосовувати метод редукції. У деяких випадках, таких як застосування методу Т-матриці, отримані розв'язки дійсні тільки в обмеженому діапазоні зміни геометрії області.

Аналіз наявних у цій галузі робіт показує, що потенційні можливості методу розбиття областей [65, 82, 66, 67] поки не використовуються в максимально можливому обсязі. У цьому дослідженні [7] представлені кілька задач, при розв'язуванні яких використані можливості методу розбиття для побудови аналітичних розв'язків для областей складної форми. Зокрема, розглядаються деякі задачі, пов'язані з рівняннями Лапласа і Гельмгольца. Застосування альтернативної концепції побудови спільного розв'язку

розширює коло задач математичної фізики, які можуть бути вирішені аналітично.

2.1 Основні особливості методу часткових областей

Розглянемо елементарну задачу про поширення звуку в складному хвилеводі, заповненому ідеальною рідиною з щільністю ρ_0 і швидкістю звуку c_0 (Рис.2.1). Прийmemo для визначеності, що стінки хвилеводу є акустично жорсткими. Всі характеристики гармонійного звукового поля в цій області можуть бути виражені через функцію потенціалу швидкостей Φ , яка задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 \Phi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c_0}. \quad (2.1)$$

Тут ω – частота гармонійної хвилі, а фактор часу враховується в формі $\exp(-i\omega t)$.

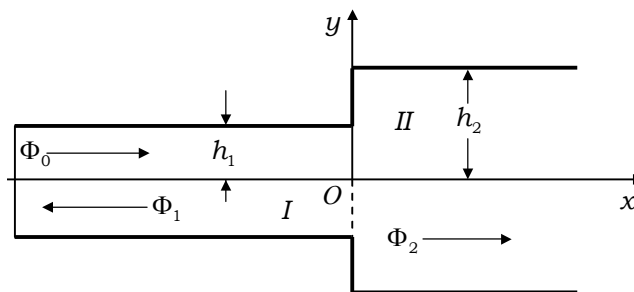


Рис. 2.1. Геометрія складеного хвилеводу

Будемо вважати, що падаюча хвиля поширюється в лівій частині хвилеводу і описується наступним потенціалом

$$\Phi_0 = A_0 \exp(ikx). \quad (2.2)$$

Той факт, що тут розглядається нижня мода поширення, не є критичним. Область, в якій існує звукове поле, може бути розділена на дві частини (підобласті) I і II відрізком прямої $x = 0$, $|y| \leq h_1$ (див. рис. 2.1), і таке розбиття цілком природне з чисто геометричної точки зору. Більш важливим є

міркування, що таке розбиття вигідно для побудови розв'язку задачі в цілому. Справа в тому, що вираз для потенціальної функції в підобласті II має вигляд

$$\Phi_{II}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp(i\xi_n x) \cos\left(\frac{n\pi y}{h_2}\right), \quad (2.3)$$

$$\text{де } \xi_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{h_2}\right)^2}, & k^2 \geq \left(\frac{n\pi}{h_2}\right)^2, \\ i\sqrt{\left(\frac{n\pi}{h_2}\right)^2 - k^2}, & k^2 < \left(\frac{n\pi}{h_2}\right)^2, \end{cases} \quad (2.4)$$

(2.3) є загальним представленням звукового поля в напівнескінченному хвилеводі при $x \geq 0$. Концепція спільності має на увазі, що форма подання потенціалу залишається незмінною незалежно від граничних умов на межі $x = 0$. Потенціальна функція для лівої частини хвилеводу (підобласть I) має аналогічний вигляд. Вважається, що падаюча хвиля заздалегідь відома, а загальне представлення для відбитого поля тоді має вигляд

$$\Phi_I(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m \exp(i\eta_m x) \cos\left(\frac{m\pi y}{h_1}\right), \quad (2.5)$$

$$\text{де } \eta_m = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{h_1}\right)^2}, & k^2 \geq \left(\frac{m\pi}{h_1}\right)^2, \\ i\sqrt{\left(\frac{m\pi}{h_1}\right)^2 - k^2}, & k^2 < \left(\frac{m\pi}{h_1}\right)^2. \end{cases} \quad (2.6)$$

Таким чином, отримано загальне представлення звукового поля у всій області хвилеводу. Вищевказані вирази містять дві послідовності довільних величин B_n і D_m . Вибравши їх значення, можна точно виконати умову спряження на межі $x = 0$ у хвилеводі. Справедливість цього твердження впливає із загальних властивостей ряду Фур'є.

Наведений вище приклад наочно ілюструє суть одного з понять, яке має вирішальне значення для методу часткових областей, тобто поняття загального розв'язку крайової задачі. Це поняття досить просте: заданий набір розв'язків для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних називається

загальним розв'язком крайової задачі для даної області, за умови, що форма цього розв'язку дозволяє задовольнити довільні крайові умови на його межі.

Як правило, висновок про розв'язок може бути заснований на властивостях функціональних систем Штурма - Ліувілля. Вирази (2.3) і (2.5) є загальними розв'язками крайових задач для напівнескінченних хвилеводів з жорсткими стінками.

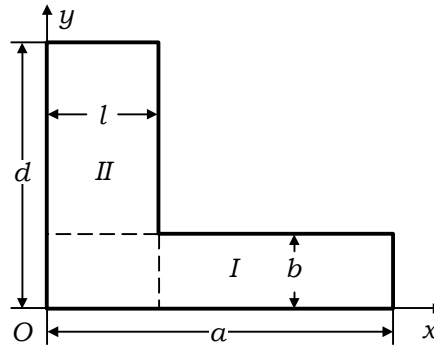


Рис. 2.2. Багатокутна область

В рамках такого підходу легко побудувати загальний розв'язок, наприклад, для області, що обмежена відрізками прямих (частинами координатних поверхонь декартової системи координат). На рис. 2.2 зображений багатокутник з граничними поверхнями, заданими в одній і тій же системі координат. Для простоти будемо вважати, що ненульові значення швидкості звуку (нормальні похідні потенціалу) задаються тільки на сторонах багатокутника $y=0$, $y=b$ і $y=d$. Вибір часткових областей тут вельми неоднозначний, оскільки в якості межі між ними може бути використана і вертикальна і горизонтальна пунктирні лінії. У другому випадку загальні розв'язки в областях I ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) і II ($0 \leq x \leq l$, $d-b \leq y \leq d$) зводяться до наступних форм

$$\Phi_I(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos(\alpha_m x) [a_m f_1^{(m)}(y) + b_m f_2^{(m)}(y)],$$

$$\Phi_{II}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\beta_n x) [c_n g_1^{(n)}(y) + d_n g_2^{(n)}(y)]. \quad (2.7)$$

$$\text{Тут } \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \beta_n = \frac{n\pi}{l},$$

$$f_1^{(m)}(y) = \begin{cases} \cos(\sqrt{k^2 - \alpha_m^2} y), & k^2 \geq \alpha_m^2, \\ \exp(-\sqrt{\alpha_m^2 - k^2} y), & k^2 < \alpha_m^2, \end{cases}$$

$$f_2^{(m)}(y) = \begin{cases} \sin(\sqrt{k^2 - \alpha_m^2} y), & k^2 \geq \alpha_m^2, \\ \exp(-\sqrt{\alpha_m^2 - k^2} (y - b)), & k^2 < \alpha_m^2, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$g_1^{(n)}(y) = \begin{cases} \cos(\sqrt{k^2 - \beta_n^2} y), & k^2 \geq \beta_n^2, \\ \exp(-\sqrt{\beta_n^2 - k^2} (y - d)), & k^2 < \beta_n^2, \end{cases}$$

$$g_2^{(n)}(y) = \begin{cases} \sin(\sqrt{k^2 - \beta_n^2} y), & k^2 \geq \beta_n^2, \\ \exp(-\sqrt{\beta_n^2 - k^2} (b - y)), & k^2 < \beta_n^2. \end{cases}$$

Проблема повноти цих розв'язків вирішується досить просто. Кожен з виразів для потенціалів містить два ряди Фур'є з довільними коефіцієнтами, які дозволяють задовольнити довільні крайові умови на горизонтальному відрізку межі, а також умову спряження всередині прямої $y = b$. Нульові крайові умови для швидкості звуку ідентично виконуються на вертикальних відрізках межі.

2.2 Розв'язок задачі в області, що обмежена трикутником

Наведене вище обговорення ілюструє процедуру побудови загального розв'язку крайової задачі в частинних похідних. Узагальнення побудованого розв'язку представлено загальним розв'язком для внутрішньої області, наприклад, прямокутного трикутника з жорсткими сторонами.

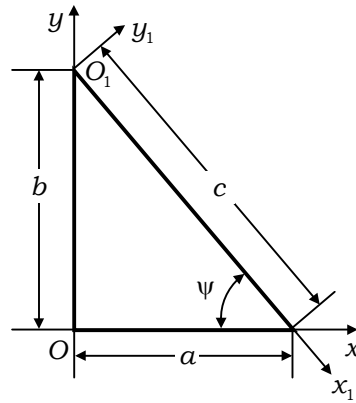


Рис. 2.3. Трикутна область

Прямокутний тип трикутника обраний з метою спрощення відповідних розрахунків. Як правило, на форму трикутника ніяких обмежень не накладається. Межі досліджуваного трикутника є частинами поверхні координат двох декартових систем координат xOy і $x_1O_1y_1$. Загальний розв'язок крайової задачі по власним значенням має вигляд

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(\alpha_m x) f_m^{(1)}(y) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\beta_n y) f_n^{(2)}(x) + \\ & + \sum_{l=0}^{\infty} D_l \cos(\gamma_l x_1) f_l^{(3)}(y_1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

де $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$, $\gamma_l = \frac{l\pi}{c}$.

Тут ряди Фур'є, які відповідають кожній зі сторін трикутника, виражені явно, а їх наявність в поданні функції Φ забезпечує загальність розв'язку крайової задачі. Що стосується функцій $f_i^{(j)}$, то, згідно геометрії області, їх можна представити таким чином:

$$\begin{aligned} f_m^{(1)}(y) = & \begin{cases} \cos(\sqrt{k^2 - \alpha_m^2} y), & k^2 \geq \alpha_m^2, \\ \exp(-\sqrt{\alpha_m^2 - k^2} y), & k^2 < \alpha_m^2, \end{cases} \\ f_n^{(2)}(x) = & \begin{cases} \cos(\sqrt{k^2 - \beta_n^2} x), & k^2 \geq \beta_n^2, \\ \exp(-\sqrt{\beta_n^2 - k^2} x), & k^2 < \beta_n^2, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$f_l^{(3)}(y_1) = \begin{cases} \cos(\sqrt{k^2 - \gamma_l^2} y_1), & k^2 \geq \gamma_l^2, \\ \exp(\sqrt{\gamma_l^2 - k^2} y_1), & k^2 < \gamma_l^2. \end{cases}$$

Припущення цього розв'язку засноване на властивостях ряду Фур'є і не вимагає додаткового розгляду. Структуру співвідношень, що зв'язують значення довільних констант A_m , B_n і D_l у вигляді потенціалу (2.9), можна описати, розглядаючи випадок нульової граничної умови на жорсткій стороні, тобто, $x = 0$. Ця умова приводить до функціонального рівняння:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\beta_n y) \frac{df_n^{(2)}(0)}{dx} + \sum_{l=0}^{\infty} D_l \{ \sin \psi \cos[\gamma_l (y - b) \sin \psi] \times \\ & \times \frac{df_l^{(3)}[-(y_1 - b) \cos \psi]}{dy_1} - \gamma_l \cos \psi \sin[\gamma_l (y_1 - b) \sin \psi] \times \\ & \times f_l^{(3)}[-(y_1 - b) \cos \psi] \} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

З огляду на властивості системи функцій $\cos(\beta_n y)$, $n = 0, 1, \dots$, на відріжку $0 \leq y \leq b$, це функціональне рівняння перетворюється в наступну нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$B_n = \sum_{l=0}^{\infty} b_{nl} D_l, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.12)$$

Слід зазначити, що коефіцієнти цієї системи можуть бути отримані в явному вигляді.

Рівняння типу (2.12) справедливо і для граничних умов на стороні $y = 0$. Якщо крайові умови виконуються на гіпотенузі трикутника, це відповідає нескінченній системі, що містить всі невідомі A_m і B_n в кожному рівнянні. Набір з трьох однорідних пов'язаних нескінченних систем визначає необхідні умови, що накладаються граничними умовами на коефіцієнти рядів Фур'є в (2.9). Прирівнюючи визначник цієї системи до нуля, отримаємо рівняння, що визначає власні частоти кінцевої області, заповненої акустичним середовищем.

Вищевказана побудова дозволяє вивчити ще один аспект розглянутого методу. Аргументація, яка веде до представлення шуканого потенціалу звукового поля у вигляді (2.9), має на увазі неоднозначну форму розв'язку.

Зокрема, якщо $\cos(\alpha_m x)$ в першому члені рівняння (2.9) замінити на $\sin(\alpha_m x)$, властивість повноти цього члена буде як і раніше зберігатися. Обидві системи функцій повні/загальні і ортогональні в сегменті $0 \leq x \leq a$. Легко бачити, що перша система дає більш прості співвідношення, якщо крайові умови задані на жорстких сторонах, тоді як у разі м'яких сторін (з нульовим тиском в них) перевагу слід віддавати другій системі.

Можливість варіювання розв'язку зі збереженням його повноти буде розглядатися далі в пункті 2.4. Зараз заслуговує на особливу увагу важлива відмінність між задачами, сформульованими для хвилеводу у вигляді складеного прямокутника, з одного боку, і для трикутної області, з іншого боку. Якщо в перших двох задачах гранична поверхня області існування поля описується частинами координатних поверхонь однієї системи, то це не так в задачі для трикутної області. Можливість одночасної роботи в різних координатних системах істотно розширює коло задач математичної фізики, для яких можлива побудова аналітичного розв'язку.

2.3 Області, які обмежені координатними поверхнями різних сімейств

Очевидно, що немає загального підходу до розглянутого класу задач. Тому проілюструємо характерні особливості підходу на конкретному прикладі. В деякій мірі це пов'язано з узагальненням задачі про звукове поле в складених плоских хвилеводах (див. рис. 2.1). Розглянемо задачу про випромінювання звуку в хвилеводі, показаному на рис. 2.4. Плоский напівнескінченний хвилевід $x \leq 0$, $|y| \leq h$ пов'язаний з клиноподібним хвилеводом з кутом розкриття $2\theta_0$. Для визначеності, межі цього хвилеводу вважаються жорсткими. Хвиля, яка падає з боку негативної нескінченності, може бути описана будь-яким набором поширюваних мод. Для визначеності ми розглянемо випадок окремої нормальної хвилі

$$\Phi_0 = Q_n \cos(\alpha_n y) \exp(i\sqrt{k^2 - \alpha_n^2} x) \quad (2.13)$$

Невідомими величинами тут є характеристики звукового поля, що минув, і відбитого звукового поля.

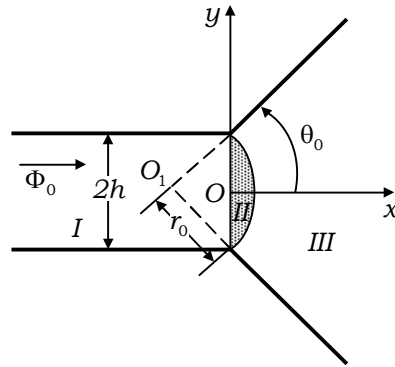


Рис. 2.4. Геометрія складного хвилеводу у вигляді сполучених плоских і клиноподібних хвилеводів

Для побудови загального розв'язку задачі загальна область існування звукового поля природним чином розбивається на три підобласті, як показано на рис. 2.4. Для кожної з них можна побудувати загальний вираз для потенціалу швидкостей, що дозволяє задовольнити крайові умови на стінках плоских і клиноподібних хвилеводів, а також умови спряження між цими підобластями. Для підобласті I цей вираз легко виводиться і включає в себе падаючу хвилю і повний набір однорідних і неоднорідних відбитих хвиль

$$\Phi_I = \Phi_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n y) \begin{cases} \exp(-i\sqrt{k^2 - \alpha_n^2} x), & k^2 \geq \alpha_n^2, \\ \exp(\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} x), & k^2 < \alpha_n^2. \end{cases} \quad (2.14)$$

Якщо врахувати, що $\alpha_n = \frac{n\pi}{h}$, то вираз (2.14) буде задовольняти крайовим умовам на сторонах хвилеводу. Сукупність довільних коефіцієнтів A_n дозволяє задовольнити умови спряження на границі з підобластю II.

Вираз потенціалу поля швидкості звуку в підобласті III також має досить просту форму. Доцільно подати його в полярних координатах

$$\Phi_{III} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos(\beta_m \theta) H_{\beta_m}^{(1)}(kr) \quad (2.15)$$

Тут $\beta_m = \frac{m\pi}{\theta_0}$. Вибір кутових функцій у розв'язку гарантує, що крайові

умови виконуються на стінках клиновидного хвилеводу, а радіальні функції вибираються відповідно до умов випромінювання. Послідовність довільних коефіцієнтів повинна бути визначена з умов спряження з підобластю Π .

Для побудови загального розв'язку крайової задачі в області Π , беручи до уваги характер її межі, необхідно використовувати розв'язок рівняння Гельмгольца в декартовій та полярній системах координат. На межі підобласті Π при $x = 0$ повна та ортогональна система функцій представлена як $\cos(\alpha_n y)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. На другій межі $r = r_0$, $|\theta| \leq \theta_0$, система функцій $\cos(\beta_m \theta)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ має ті ж властивості. Зважаючи на це потенціал звукового поля в підобласті Π може бути приведений до виду

$$\begin{aligned} \Phi_{\Pi} = & \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\alpha_n y) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\sqrt{k^2 - \alpha_n^2} x), \quad k^2 \geq \alpha_n^2 \\ \exp(-\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} x), \quad k^2 < \alpha_n^2 \end{array} \right\} + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos(\beta_m \theta) J_{\beta_m}(kr) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Структура цього розв'язку збігається зі структурою розв'язку внутрішньої задачі для трикутної області. Однак фізична сутність проблеми в цьому випадку дещо інша. Якщо в першому випадку це була задача отримання характеристики форм коливань в кінцевому обсязі, то в другому випадку підобласть Π – проміжна ланка для передачі енергії від плоского хвилеводу до клиноподібного. Потік енергії через цю область не повинен дорівнювати нулю. Це абсолютно природні фізичні вимоги, які мають той же характер, що і умови випромінювання. На перший погляд, розв'язок у вигляді (2.16) не задовольняє вказану вимогу до потоку енергії. В першій сумі по n розв'язок містить стоячі хвилі по координаті x , які не дозволяють передачу енергії. Подібні стоячі хвилі по радіальній координаті описуються функцією $J_{\beta_m}(kr)$.

Таким чином, кожен окремо взятий член виразу (2.16) не переносить енергію. Однак, використовуючи вищезгадану неоднозначність вибору

конкретних розв'язків в рамках розглянутого методу можна усунути відмічені формальні труднощі шляхом заміни розв'язків по радіальній координаті x . Тобто, замість функцій Бесселя $J_{\beta m}(kr)$ можна застосувати розв'язок у вигляді функцій Ханкеля $H_{\beta m}^{(2)}(kr)$, які описують хвилі, що йдуть до початку координат в полярній системі координат. Такі хвилі повинні представляти збурення, що відбиті від неоднорідності. Однак така заміна навіть не потрібна. Аналіз показує, що повний розв'язок у вигляді (2.16) управляє ненульовим потоком енергії через підобласть II . Фізично ситуація тут ідентична тій, яка має місце при проходженні збурення через шар/пласт скінченної товщини, коли кут ковзання падаючої хвилі нижче критичної позначки. Тут перенесення енергії є результатом взаємодії неоднорідних хвиль, які «прилипли» до протилежних кордонів. Конкретні розрахунки, зроблені для різних форм представлення потенціалу в підобласті II підтверджують, що енергетичні міркування також не вимагають ніяких змін у формулі (2.16).

Для характеристики методу слід відзначити деякі обчислювальні особливості. Зрозуміло, що в даному випадку і інших подібних випадках коефіцієнти нескінченної системи не можуть бути знайдені в явному вигляді і, отже, потрібно чисельне визначення інтегралів. Однак число членів рядів, отриманих після редукції нескінченних систем, залежить від багатьох факторів.

Так, для розміру хвилі в хвилеводі $\frac{2h}{\lambda} \leq 1.5$ було б достатньо зменшити число членів в кожному ряді в (2.14) - (2.16) до п'яти, що дасть помилку розв'язку, заснованого на енергетичному підході, в декілька часток відсотка.

На додаток до енергетичної оцінки впливу нелінійності хвилеводу на процес випромінювання звуку, побудований розв'язок також дозволяє вивчити просторову структуру звукового поля. Інтерес представляє зміна структури поля уздовж поперечного перерізу при його проходженні через геометричну неоднорідність. На рис. 2.5 зображено розподіл щільності потужності потоку (яка є енергетичною характеристикою напрямку випромінювання) в клиновидному хвилеводі, де падаюче поле визначається першою симетричною

нормальною хвилею з $n = 1$ в рівнянні (2.13). Зроблено оцінки для трьох різних значень розкриття кута клина, і побудовані відповідні діаграми напрямку випромінювання. Для невеликих значень кутів розкриття клину ($\theta_0 = 15^\circ$) результуючий розподіл поля вздовж розтину практично такий же, як у падаючої хвилі. Зі збільшенням значення кута розкриття клину спостерігається значне спотворення вихідної діаграми. Випромінювання звуку в напрямку осі хвилеводу практично відсутнє. Головна частина енергії падаючого збурення локалізована в околі межі хвилеводу. Ці результати важливі для глибшого розуміння особливостей випромінювання звуку клиноподібним кутом у відкрите середовище.

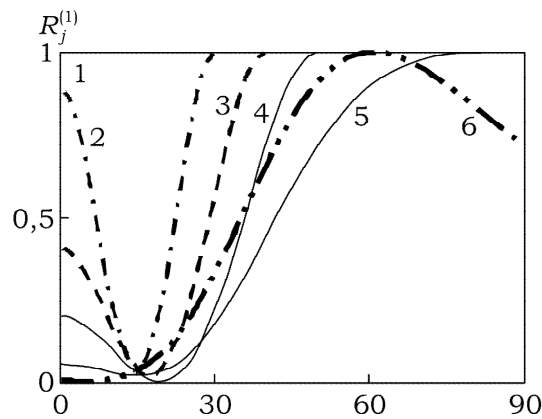


Рис. 2.5. Діаграма направленості $R_j^{(1)}(\theta)$ при різних кутах апертури θ_0 ($\frac{2h}{\lambda} = 1.1$): 1 – $\theta_0 = 15^\circ$; 2 – $\theta_0 = 30^\circ$; 3 – $\theta_0 = 40^\circ$; 4 – $\theta_0 = 50^\circ$; 5 – $\theta_0 = 90^\circ$; 6 – $\theta_0 = 130^\circ$.

Запропонований загальний підхід до побудови розв'язків крайових задач з використанням окремих розв'язків в різних системах координат виявляється корисним навіть у тих випадках, коли, використовуються розв'язки в однокоординатній системі. Проілюструємо це на прикладі класичної задачі випромінювання звуку скінченним циліндром. Зосередимося тільки на проблемі розбиття досліджуваної області на часткові області (підобласті).

Геометрія циліндричного випромінювача (поперечний переріз) і його основні геометричні параметри показані на рис. 2.6. Вважається, що на

поверхні емітера відома швидкість коливань. Побудова загального розв'язку для поля поза скінченим циліндром може бути виконано з використанням різних систем підобластей. Таким чином, в якості одного з варіантів у загальній області існування поля можна виділити зовнішню частину циліндричної угнутої $R \geq R_0$ і двох напівнескінчених циліндрів $z \geq h$, $R \leq R_0$ і $z \leq -h$, $R \leq R_0$. Як альтернативу можна використовувати в якості підобластей два півпростори $z \leq -h$, $z \geq h$ і шар з циліндричної увігнутістю $|z| \leq h$, $R \geq R_0$. Для кожної з таких підобластей можна побудувати загальний розв'язок крайової задачі. Однак практичне застосування таких розв'язків проблематично через певні труднощі цілком очевидного фізичного характеру. Вони пов'язані з тим, що дуже важко задовольнити умови випромінювання на межах часткових підобластей (зображені пунктирними лініями на рис. 2.6) за допомогою розв'язків, що побудовані для них. Проблема врахування умов випромінювання не виникає, якщо використовувати іншу систему часткових підобластей. Межі цих підобластей є частинами сферичної поверхні $r = r_0$ і поверхні циліндра. Ці області (I–IV) показані на рис. 2.6. Загальний розв'язок для зовнішньої сферичної поверхні $r = r_0$ як частина загального розв'язку задачі автоматично враховує умови випромінювання. Розв'язок в областях I – III легко будується з використанням частинних розв'язків рівняння Гельмгольца в циліндричній і сферичній системах координат. В рамках такого підходу знайдено розв'язки ряду нових задач випромінювання [83].

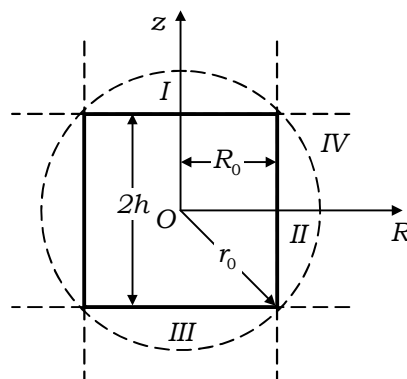


Рис. 2.6. Поперечний переріз циліндричного емітера

2.4 Доповнення граничних умов в задачі теорії потенціалу

У деяких випадках навіть застосування повних розв'язків крайової задачі не виключає деяких труднощів, що виникають при перетворенні функціональних рівнянь граничних умов в алгебраїчну форму [84]. Мається на увазі складність розширення граничних умов від фізично встановлених меж до деякої неіснуючої підобласті. Щоб обійти цю складність, спочатку треба спростити наші обчислення. З цією метою, розглянемо елементарну задачу теорії потенціалу.

Розглянемо внутрішню задачу для гармонічної функції $\varphi(x, y)$ в прямокутнику $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, що зображений суцільними лініями на рис. 2.7. Нехай задані наступні граничні умови на межах прямокутника

$$\varphi(\pm a, y) = 0, \quad \varphi(x, \pm b) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right). \quad (2.17)$$

Дана задача настільки проста, що необхідний розв'язок може бути поданий без додаткових коментарів. Цей розв'язок має вигляд:

$$\varphi(\pm a, y) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \frac{\cosh\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi b}{2a}\right)} \quad (2.18)$$

Розглянемо тепер такі набори часткових розв'язків рівняння Лапласа,

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos(\gamma_m y) \frac{\cosh(\gamma_m x)}{\cosh(\gamma_m a)} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\delta_k x) \frac{\cosh(\delta_k y)}{\cosh(\delta_k b)} \quad (2.19)$$

Тут використані наступні позначення

$$\gamma_m = \frac{(2m+1)\pi}{2b}, \quad \delta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}. \quad (2.20)$$

Введені величини містять новий геометричний параметр l . Цей параметр характеризує прямокутник, зображений пунктирними лініями на рис. 2.7.

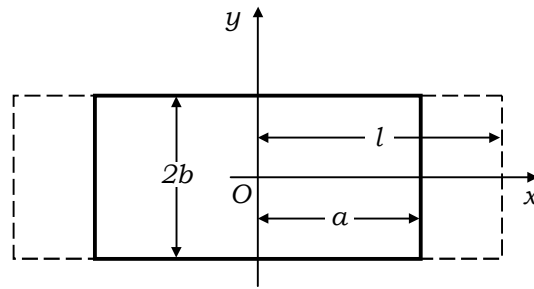


Рис. 2.7. Прямокутна область

Має сенс розглянути вираз (2.19) тільки всередині області $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Для $|x| > a$ перші ряди будуть розходитися, якщо не будуть спеціальним чином підібрані коефіцієнти B_m , тоді як в межах зазначеної області цей вираз для φ можна розглядати як загальний розв'язок задачі для прямокутника. Таке твердження засноване на тому, що рівняння (2.19) містить два ряди Фур'є, і, вибираючи необхідні значення коефіцієнтів A_k і B_m , можна задовольнити довільні граничні умови на сторонах прямокутника.

Звичайно, вираз (2.19), який описує розв'язок початкової крайової задачі (2.17), набагато складніший, ніж розв'язок у вигляді (2.18), і застосування такого складного уявлення доцільно тільки з точки зору отримання загальних висновків про використаний метод. Тому такий висновок є нашою головною метою.

Використовуючи вирази (2.19) для виконання граничних умов на поверхнях $x = \pm a$, отримуємо співвідношення, що зв'язують константи A_k і B_m . Тому спочатку розглянемо граничні умови. Ці умови породжують наступне функціональне рівняння

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\delta_k x) = \cos(\alpha_0 x), \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2a}, \quad |x| \leq a. \quad (2.21)$$

Система тригонометричних функцій $\cos(\delta_k x)$ неортогональна в інтервалі $|x| \leq a$, хоча можна вказати різні способи отримання констант A_k з цього рівняння. Найпростіший спосіб базується на заміні рівняння (2.21) наступним співвідношенням

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\delta_k x) = \begin{cases} \cos(\alpha_0 x), & |x| \leq a, \\ \xi(x), & a < |x| \leq l. \end{cases} \quad (2.22)$$

Функція $\xi(x)$ – довільна. На підставі властивості повноти і ортогональності системи функцій $\cos(\delta_k x)$ в інтервалі $|x| \leq l$, можна легко отримати коефіцієнти

$$A_k = \frac{2\alpha_0 \cos(\delta_k a)}{l(\alpha_0^2 - \delta_k^2)} + \xi_k, \quad (2.23)$$

$$\text{де } \xi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \xi(x) \cos(\delta_k x) dx. \quad (2.24)$$

Використовуючи розкладання гіперболічних функцій в ряд Фур'є

$$\frac{\cosh(\delta_k y)}{\cosh(\delta_k b)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^m \gamma_m}{b(\gamma_m^2 + \delta_k^2)} \cos(\gamma_m y), \quad (2.25)$$

і граничні умови на межі $x = \pm a$ і t , отримаємо

$$B_m = - \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{2(-1)^m \gamma_m}{b(\gamma_m^2 + \delta_k^2)} \cos(\delta_k a). \quad (2.26)$$

Таким чином, для шуканої потенціальної функції $\varphi(x, y)$ існують два різних представлення: (2.18) і (2.19). Обидва вони задовольняють гармонічному рівнянню і граничним умовам (2.17). Отже, ці вирази повинні бути тотожно рівні в кожній точці всередині розглянутого прямокутника і на його межах. Це строго доведено розкладанням обох виразів в подвійний ряд Фур'є в прямокутнику. Більш того, ця тотожність дійсна для будь-якої функції $\xi(x)$, яка задовольняє додатковим граничним умовам.

Наведений вище висновок можна взяти за основу при подальшому розгляді спеціального класу задач, для яких може бути застосована побудова загальних розв'язків в рамках методу часткових областей за відсутності фізично встановлених граничних умов на всіх координатних поверхнях, пов'язаних з повним набором функцій. Далі розглянемо конкретний приклад такої задачі.

2.5 Задача про випромінювання звуку циліндрами, що перетинаються

Задачу про випромінювання або розсіюванні звуку системою не з'єднаних кругових циліндрів з паралельними осями добре відома [85]. Формування нескінченних систем для розкладання в ряди по хвильовим функціям здійснюється на основі теореми додавання [86]. Відповідні формули повторного перерозкладу також доступні для випадку, коли відстань між центрами цих циліндрів менше суми їх радіусів. Відповідна межа області, за межами якої розглядається звукове поле, показана на рис. 2.8. Випромінююча поверхня утворена дугами кіл $r_1 = a_1$, $\theta_0^{(1)} \leq \theta_1 \leq -\theta_0^{(1)}$ и $r_2 = a_2$, $\theta_0^{(2)} \leq \theta_2 \leq 2\pi - \theta_0^{(2)}$. На цих поверхнях задана нормальна складова швидкості для частинок ідеального стисливого середовища

$$v_r(a_1, \theta_1) = F_1(\theta_1), \quad v_r(a_2, \theta_2) = F_2(\theta_2). \quad (2.27)$$

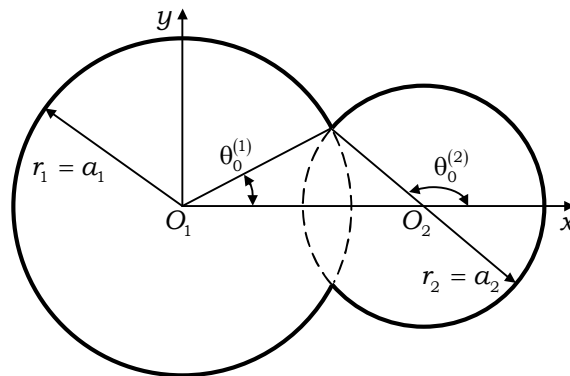


Рис. 2.8. Система кругових циліндрів, що пересікаються

Загальне представлення потенціальної функції, що задовольняє рівняння Гельмгольца, для розглянутого випадку абсолютно очевидно і для часової характеристики типу $\exp(-i\omega t)$ має такий вигляд

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(kr_1) \cos(m\theta_1) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(kr_2) \cos(m\theta_2). \quad (2.28)$$

Кожен член цього виразу задовольняє рівняння Гельмгольца, умовам випромінювання і умовам періодичності поля поза випромінюючим тілом.

Граничні умови (2.27) повинні бути виконані шляхом вибору певних значень довільних коефіцієнтів A_m і B_n .

У разі циліндрів, які не пересікаються, коли граничні умови задаються на повних колах, процедура задоволення граничних умов проста і дає нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Тим часом, застосування виразу (2.28) для даного випадку створює ситуацію, аналогічну тій, яка обговорювалася раніше для прямокутної області. Граничні умови на дугах кола, зображених пунктирними лініями на рис. 2.8, не вказані, оскільки ці дуги не є фізичними межами області. Результати, що отримані для задачі теорії потенціалу в пункті 2.4, дозволяють припустити, що на цих нефізичних ділянках межі умови (2.27) можуть бути доповнені довільними функціями. Тут кількісні характеристики звукового поля повинні бути незалежними від виду цих функцій..

Такий загальний висновок цілком закономірний. Однак, оскільки практичне застосування цього підходу пов'язано з розв'язуванням нескінченних систем рівнянь, доцільно отримати деякі конкретні кількісні оцінки для задач цього типу. Деякі результати, що отримані для випромінюючих систем, які утворені двома однаковими циліндрами з розмірами $\frac{a_1}{\lambda} = \frac{a_2}{\lambda} = 1.2$, наведені нижче. Хвильова відстань між осями циліндрів (Рис. 2.8) дорівнює $\frac{O_1 O_2}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} = 1.8$, отже, $\theta_0^{(1)} = \theta_0^{(2)} = 41.4^\circ$. На випромінюючих поверхнях задано рівномірний розподіл швидкості коливань ($F_1(\theta_1) = F_2(\theta_2) = F_0$). Далі символи N і M вказують число утримуваних в нескінченних рядах при обчисленні коефіцієнтів. Результати отримані для двох граничних випадків: 1) швидкість, задана на пунктирних ділянках циліндричних поверхонь дорівнює нулю; 2) швидкість така ж, як на активній частині межі, тобто дорівнює F_0 .

Неперервне продовження граничних умов на загальну поверхню значно покращує збіжність методу редукції при розв'язуванні нескінченних систем і оцінці характеристик поля. У цьому випадку отриманий при $N = M = 20$ розв'язок задачі є практично точним. Якщо нульові значення швидкості

коливань задані на розширених межах, то збіжність погіршується, так само, як завжди відбувається при підсумовуванні рядів Фур'є. Однак кількісні оцінки, отримані явно, вказують на те, що до уваги треба брати більше коефіцієнтів, що призводить до збіжності оціночних характеристик близького і далекого поля, і підтверджує можливість узагальнення висновку, зробленого в попередньому розділі для загального випадку.

На Рис. 2.9 і 2.10 зображені результати розрахунків швидкості коливань і тиску на поверхнях емітера, пронормованих відповідно на F_0 і $\rho c F_0$, для двох вище згаданих способів доповнення граничних умов. Відмінності між цими кривими спостерігаються тільки у вузькій зоні, близькій до точок перетину циліндрів при $\theta_0 = 41.4^\circ$. Тут спостерігається ефект Гіббса, який властивий ряду розривних функцій Фур'є.

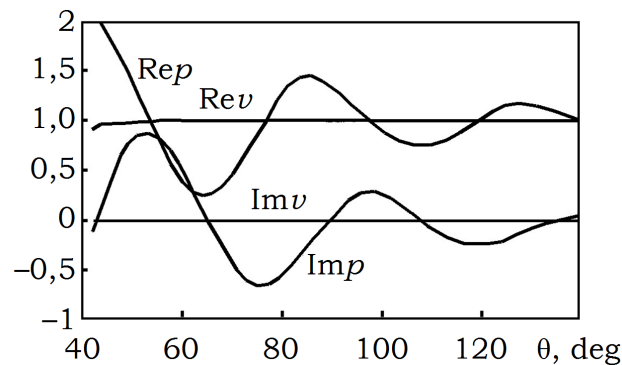


Рис. 2.9. Результати чисельного аналізу швидкості коливань і тиску на поверхнях випромінювача, що нормовані на F_0 .

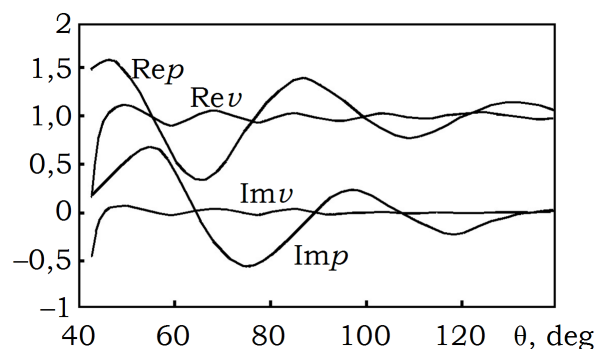


Рис. 2.10. Результати чисельного аналізу швидкості коливань і тиску на поверхнях випромінювача, нормовані на $\rho c F_0$.

Додаткові дані про вплив типів граничних умов можна отримати, розглядаючи кількісні оцінки сумарної випромінюваної енергії. Значення повної випромінюваної енергії, що розраховані за характеристиками поля на відстані, зручно нормувати за величиною. Оскільки в практичних розрахунках нескінченні ряди в загальному розв'язку обрізаються, випромінювана енергія є деякою функцією від числа членів, що залишилися в ряду. Незначна зміна цієї величини зі збільшенням кількості членів може бути використана як одна з ознак, що характеризують точність розв'язку крайової задачі.

У разі неперервного продовження граничних умов отримуємо наступні значення випромінюваної енергії, якщо число членів укороченого ряду, що залишилися в (2.28), становить 15 і 20 відповідно: $W(15,15) = 115.3$ і $W(20,20) = 115.4$. Ці значення практично збігаються. Якщо на розширених межах задані нульові значення швидкості, то отримуємо $W(10,10) = 109.2$, $W(15,15) = 111.1$, і $W(20,20) = 112.0$. При порівняльному аналізі результатів інтерес представляє не тільки відмінність між двома типами граничних умов, а й динаміка зміни оцінки зі збільшенням числа членів укорочених рядів. Очевидно, що в граничному випадку розв'язки для двох різних ситуацій будуть практично збігатися.

2.6 Частково екранований циліндричний акустичний випромінювач

Метод часткових областей дає можливість отримувати загальний розв'язок граничних задач для областей достатньо складної форми. Зокрема, граничні поверхні таких областей можуть містити кутові точки, що зумовлює наявність сингулярностей в досліджуваних хвильових полях. Такі типи граничних задач викликають значний інтерес дослідників не тільки в механіці, але і в акустиці і в електродинаміці. Практично у всіх цих областях процедури побудови загальних розв'язків і знаходження кількісних оцінок для характеристик хвильових полів мають загальні риси. Сутність труднощів, які виникають при розгляді таких задач, ілюструються в роботі [8], присвяченій

аналізу поля випромінювання в ідеальній рідині частково екранованого циліндра. Ця, відносно проста, задача для рівняння Гельмгольца дозволяє обговорити питання про характер поведінки коефіцієнтів нескінченних рядів в загальних розв'язках і дати відповідь на питання про єдиність фізично виправданого рішення. Геометрія цієї задачі показана на рис. 2.11.

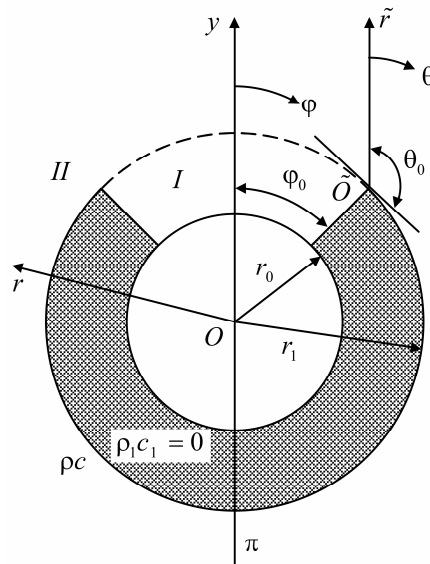


Рис. 2.11. Екранований циліндричний випромінювач

2.7 Висновки до розділу

Розглянуто напрямки розробки аналітичних методів розв'язання крайових задач в неканонічних областях. Хоча аргументація заснована на прикладах крайових задач для рівнянь Гельмгольца та Лапласа, розроблені підходи цілком можна застосувати і для інших типів рівнянь, в тому числі пов'язаних з розв'язанням електродинамічних задач.

У деяких випадках розрахунки, що необхідні для побудови розв'язків і подальшого перетворення функціональних рівнянь в алгебраїчну форму здаються досить громіздкими. Однак при оцінці можливостей вищевказаного методу необхідно зосередитися на його перевагах. Перш за все, найбільш важливим є те, що кожний розв'язок є дійсно загальним, і, отже, ця форма розв'язку є найбільш підходящою. Загальні властивості розв'язку передбачають,

що збільшення числа часткових рішень, що беруть участь в аналізі, завжди призведе до підвищення точності обчислюваних результатів. Функції, застосування яких забезпечує повноту рішення, є найбільш продуктивними для задоволення граничних умов з точки зору середньоквадратичного підходу. Такий спосіб задоволення граничних умов є найбільш адекватним і сумісним з фізичним змістом більшості задач математичної фізики.

Слід зазначити, що застосування простого методу редукції до базових нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь забезпечує висновок про правильні кількісні оцінки розглянутих полів з використанням невеликого числа частинних розв'язків, що беруть участь в аналізі. Більш того, системи, що містять кілька десятків рівнянь, гарантують, що точність обчислених результатів перевищить практичні потреби. В рамках запропонованого підходу проблема точності необхідних результатів вирішується досить просто. Для цього достатньо перевірити, чи виконуються умови спряження полів на межах часткових підобластей.

Така пряма перевірка точності розв'язку може привести до певних труднощів, якщо межа області існування поля має виступаючі або кутові точки, аналогічні точкам в плоских і клинових хвилеводах (див. Рис. 2.5). У цьому випадку поле швидкостей має особливість поблизу цих кутових точок, що виключає можливість прямої перевірки збіжності швидкостей в околі цих точок. Певна додаткова інформація про якість рішення може бути отримана шляхом перевірки закону збереження енергії.

Виникнення особливостей поля характерно для областей з різкою зміною форми межі. В акустиці особливості поведінки поля швидкостей поблизу таких точок відомі заздалегідь, і це може бути використано для істотного поліпшення ефективності алгоритмів отримання кількісних оцінок [85]. При застосуванні методу зустрічаються також деякі інші проблеми. Перш за все, це проблема однозначності розв'язку. Наявність декількох варіантів вибору форми розв'язку звичайно дозволяє досягти деякого спрощення процедур розрахунку, але ніяких конкретних рекомендацій щодо оптимізації цього вибору поки немає.

РОЗДІЛ 3

**СУЧАСНІ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКАНОНІЧНИХ
ОБЛАСТЕЙ НА ПРИКЛАДІ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА**

Чисельно-аналітичні розв'язки граничних задач математичної фізики зіграли важливу роль у розвитку цього розділу математики [8, 87, 88]. Процедура одержання таких розв'язків і систематизація накопичених результатів найбільш повно представлені в енциклопедичному виданні Морса і Фешбаха [19].

З точки зору розв'язування прикладних задач аналітичні розв'язки мають лише один недолік – кількість таких розв'язків суттєво обмежена. У зв'язку із цим уже досить давно формувалися підходи, що дозволяють розширити кількість областей, для яких можна побудувати ефективні й корисні з погляду кількісної оцінки характеристик фізичних полів розв'язки. У якості прикладів тут можна вказати на розвиток так званого алгоритму Шварца [63–66], розробку методу Т-матриць [22], метод задачі Рімана – Гільберта [81]. Такі підходи засновані на розбитті складних областей на простіші підобласті, для яких вдається побудувати аналітичні вирази шуканих функцій. Подальше виконання граничних умов, як правило, приводить до нескінченних систем алгебраїчних рівнянь [19, 65, 66], властивості яких дозволяють використовувати метод редукції. У деяких випадках, наприклад, у випадку використання методу Т-матриць, отримані розв'язки є слухними лише в обмеженому діапазоні зміни геометрії області. Аналіз існуючих робіт у цій області показує, що потенційні можливості методу декомпозиції областей недостатньо повно використовуються. У багатьох практичних випадках вдається представити неканонічну область у вигляді об'єднання декількох канонічних підобластей, наприклад, прямокутників, для яких розв'язок відомий. Такий чисельно-аналітичний підхід відомий як метод часткових областей [65,

22, 2, 7, 8]. Особливістю реалізації методу часткових областей у цьому випадку є те, що аналітичний розв'язок у розглянутій області розшукується у вигляді суми більш простих розв'язків, представлених у вигляді рядів Фур'є для прямокутних областей, перетином яких може бути й задана область. Ефективне знаходження довільних коефіцієнтів рядів, що входять у загальний розв'язок, базується на застосуванні різних методів (мінімізації середньоквадратичних відхилень, коллокації і ін.) для якомога більш точного виконання крайових умов.

Для чисельного розв'язку задач теорії потенціалу існує досить багато розвинених методів, кожний з яких використовується в залежності від конкретних властивостей цих задач. У даній роботі при розв'язку задачі Діріхле для неканонічної області продемонстроване успішне використання такого сучасного чисельно-аналітичного методу, як метод граничних інтегральних рівнянь [17]. Цей метод активно використовується при розв'язуванні задач механіки, зокрема, у задачах про удар, занурення тіл у рідину, про штамп та ін. Як правило, реалізація методу граничних інтегральних рівнянь приводить до інтегрального рівняння Фредгольма. Для задач Діріхле реалізація методу граничних інтегральних рівнянь ускладнюється відомими проблемами чисельного розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма I-го роду й, крім того, наявністю слабкої особливості ядра цього рівняння.

3.1 Задача Діріхле для паралелограмної області

Нехай дана область Ω , обмежена паралелограмом (рис. 3.1). Необхідно знайти гармонічну функцію $\varphi(x, y)$ в області Ω , яка набуває на її границі Γ задані значення $\Phi(x, y)$ (задача Діріхле):

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, & (x, y) \in \Omega; \\ \varphi(x, y) = \Phi(x, y), & (x, y) \in \Gamma, \end{cases} \quad (3.1)$$

де Δ – оператор Лапласа.

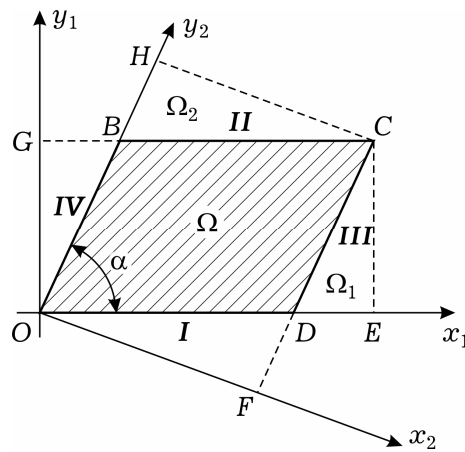


Рис. 3.1. Область крайової задачі та системи координат

Введемо далі позначення для заданої функції $\Phi(x, y)$ у відповідності до того, на якій стороні паралелограма знаходиться гранична точка (x, y) . Нехай

$\Gamma = \bigcup_{i=I}^{IV} \Gamma_i$, де $\Gamma_I, \Gamma_{II}, \Gamma_{III}, \Gamma_{IV}$ – сторони паралелограма відповідно OD, BC, DC, OB (рис. 3.1). Тоді позначимо $\varphi_i(x, y) = \Phi(x, y), (x, y) \in \Gamma_i, i = I, II, III, IV$

Далі, для прикладу, розглянемо гармонічну функцію :

$$U(x, y) = x^2 - y^2 - a'x + \frac{h}{\sin \alpha} + \cos \alpha y - 2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} xy, \quad (3.2)$$

де введено позначення $a' = OD, h = OG, \alpha = \angle BOD$ (рис. 3.1). Тут функція $U(x, y)$ підібрана так, щоб вона набувала нульових значень у вершинах паралелограма.

3.1.1 Розв'язування методом часткових областей

Ідейні основи методу часткових областей та методу суперпозиції [87, 88, 65, 22, 2, 7] тісно пов'язані з методом задачі Рімана – Гільберта [81] і альтернативним методом Неймана – Шварца [63, 17, 82]. Використання наборів частинних розв'язків для канонічних областей при побудові аналітичних розв'язків у неканонічних областях найбільш послідовно проводиться в рамках методу часткових областей. Для того щоб зробити більш ясним зміст

пропонованих узагальнень, розглянемо цей метод більш докладно. Розглянемо дві системи координат (рис. 3.1): $(x_1, y_1) \equiv (x, y)$ і (x_2, y_2) , які пов'язані такими співвідношеннями:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, \\ y_1 = -x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha; \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha, \\ y_2 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha. \end{cases} \quad (3.4)$$

Уведемо позначення (рис. 3.1): Ω_1 – область, обмежена прямокутником OGCE; Ω_2 – область обмежена прямокутником ОНСF. Таким чином, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Нехай a, b, a', b', h, L – довжини відрізків OF, ОН, OD, OB, OG, OE відповідно. Очевидно, що $a = a' \sin \alpha$, $b = b' + DF = b' + a' \cos \alpha$, $h = b' \sin \alpha$ і множину точок компонент границі Γ можна описати так :

$$\Gamma_I : y_1 = 0; x_1 \in [0; a']; \quad (3.5)$$

$$\Gamma_{II} : y_1 = h; x_1 \in [b' \cos \alpha; a' + b' \cos \alpha]; \quad (3.6)$$

$$\Gamma_{III} : x_2 = a; y_2 \in [a' \cos \alpha; b' + a' \cos \alpha]; \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{IV} : x_2 = 0; y_2 \in [0; b']. \quad (3.8)$$

Тестова функція (3.2) у системах координат (3.3), (3.4) набуває вигляду :

$$U(x(x_1, y_1), y(x_1, y_1)) = U_1(x_1, y_1) = x_1^2 - y_1^2 + c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 x_1 y_1, \quad (3.9)$$

$$\text{Де } c_1 = -a', c_2 = \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{(b' + a' \cos \alpha)}{\sin \alpha}, c_3 = -2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$U(x(x_2, y_2), y(x_2, y_2)) = U_2(x_2, y_2) = x_2^2 - y_2^2 + c'_1 x_2 + c'_2 y_2 + c'_3 x_2 y_2, \quad (3.10)$$

$$\text{де } c'_1 = \frac{-(a' + b' \cos \alpha)}{\sin \alpha}, c'_2 = -b', c'_3 = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Запишемо попутно граничні значення тестової функції в системах координат (3.3), (3.4) :

$$\varphi_I(x_1) \equiv U_1(x_1, y_1) \Big|_{y_1=0} = x_1^2 - a' x_1, \quad x_1 \in [0; a']; \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{II}(x_1) \equiv U_1(x_1, y_1) \Big|_{y_1=h} &= x_1^2 - (a' + 2b' \cos \alpha)x_1 + \\ &+ b' \cos \alpha (a' + b' \cos \alpha), \quad x_1 \in [b' \cos \alpha; a' + b' \cos \alpha]; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{III}(y_2) \equiv U_2(x_2, y_2) \Big|_{x_2=a} &= -y_2^2 + (2a' \cos \alpha + b')y_2 - \\ &- (a' \cos \alpha + b')a' \cos \alpha, \quad y_2 \in [a' \cos \alpha; b' + a' \cos \alpha]; \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\varphi_{IV}(y_2) \equiv U_2(x_2, y_2) \Big|_{x_2=0} = y_2^2 + b'y_2, \quad y_2 \in [0; b']. \quad (3.14)$$

Відповідно до методу часткових областей, шукану функцію $\varphi(x, y)$ представимо сумою розв'язків задач Діріхле $\varphi_1(x_1, y_1)$ в прямокутній області Ω_1 й $\varphi_2(x_2, y_2)$ – у прямокутній області Ω_2 :

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x_1, y_1) + \varphi_2(x_2, y_2), \quad (3.15)$$

$$\text{де} \quad \begin{cases} x_1 = x, & x_2 = x \sin \alpha - y \cos \alpha, \\ y_1 = y; & y_2 = x \cos \alpha + y \sin \alpha. \end{cases} \quad (3.16)$$

При цьому будемо використовувати довільність при виборі граничних умов для функцій φ_1 і φ_2 на окремих границях областей Ω_1 і Ω_2 . Таке ж припущення допускається і в методі Шварца-Неймана [17]. Далі, будемо вважати, що функції φ_1 й φ_2 на відрізках DE, GB, BH і DF дорівнюють нулю.

Позначаючи

$$\bar{\varphi}_1(x_2, y_2) = \varphi_1(x_1(x_2, y_2), y_1(x_2, y_2)), \quad (3.17)$$

$$\bar{\varphi}_2(x_1, y_1) = \varphi_2(x_2(x_1, y_1), y_2(x_1, y_1)), \quad (3.18)$$

сформулюємо граничні умови для суми функцій (3.15):

$$\varphi_1(x_1, 0) + \bar{\varphi}_2(x_1, 0) = \begin{cases} \varphi_I(x_1), & 0 < x_1 < a', \\ 0 & , \quad a' < x_1 < L; \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\varphi_1(x_1, h) + \bar{\varphi}_2(x_1, h) = \begin{cases} \varphi_{II}(x_1), & b' \cos \alpha < x_1 < a' + b' \cos \alpha, \\ 0 & , \quad 0 < x_1 < b' \cos \alpha; \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\bar{\varphi}_1(a, y_2) + \varphi_2(a, y_2) = \begin{cases} \varphi_{III}(y_2), & a' \cos \alpha < y_2 < b' + a' \cos \alpha, \\ 0 & , \quad 0 < y_2 < a' \cos \alpha; \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\bar{\varphi}_1(0, y_2) + \varphi_2(0, y_2) = \begin{cases} \varphi_{IV}(y_2), & 0 < y_2 < b', \\ 0 & , \quad b' < y_2 < b. \end{cases} \quad (3.22)$$

Вид областей Ω_1 і Ω_2 дозволяє представити розв'язки нескінченними рядами:

$$\varphi_1(x_1, y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y_1) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right), \quad (3.23)$$

$$\varphi_2(x_2, y_2) = \sum_{p=1}^{\infty} D_p(x_2) \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_2\right) \quad (3.24)$$

Вимоги гармонічності функцій $\varphi_1(x_1, y_1)$ приводять до наступної системи рівнянь щодо функцій $A_n(y_1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 A_n(y_1)}{dy_1^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n(y_1) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right) = 0. \quad (3.25)$$

Оскільки $\sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right) \neq 0$, то із (3.23) для визначення $A_n(y_1)$ одержуємо таку систему звичайних однорідних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d^2 A_n(y_1)}{dy_1^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n(y_1) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

Розв'язок системи (3.26) запишемо як

$$A_n(y_1) = A_n^{(1)} e^{-\frac{n\pi}{L} y_1} + A_n^{(2)} e^{\frac{n\pi}{L} (y_1 - h)}. \quad (3.27)$$

Тепер розв'язок (3.23) набуває вигляду

$$\varphi_1(x_1, y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^{(1)} e^{-\frac{n\pi}{L} y_1} + A_n^{(2)} e^{\frac{n\pi}{L} (y_1 - h)} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right). \quad (3.28)$$

Аналогічним способом знаходимо $\varphi_2(x_2, y_2)$:

$$\varphi_2(x_2, y_2) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(D_p^{(1)} e^{-\frac{p\pi}{b} x_2} + D_p^{(2)} e^{\frac{p\pi}{b} (x_2 - a)} \right) \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_2\right). \quad (3.29)$$

Враховуючи (3.28) і (3.29) шуканий розв'язок (3.15) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(1)} e^{\frac{-n\pi}{L} y_1} + A_n^{(2)} e^{\frac{n\pi}{L} (y_1 - h)}) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right) + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} (D_p^{(1)} e^{\frac{-p\pi}{b} x_2} + D_p^{(2)} e^{\frac{p\pi}{b} (x_2 - a)}) \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_2\right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

де координати пов'язані залежностями (3.16).

Визначення констант $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $D_p^{(1)}$, $D_p^{(2)}$ в (3.30) здійснюємо методом мінімізації середньоквадратичних відхилень [89]. У якості проєкційних систем функцій на границях Γ_I і Γ_{II} вибираємо систему $\left\{ \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L} x_1\right) \right\}$, $\tilde{n} = 1, 2, \dots$, а на границях Γ_{III} і Γ_{IV} систему $\left\{ \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b} y_2\right) \right\}$, $\tilde{p} = 1, 2, \dots$

Граничні умови задаємо на границях областей Ω_1 і Ω_2 , які містять у собі сторони паралелограма. З урахуванням редуkcії нескінченних рядів (3.23) і (3.24) до скінчених з кількістю їх членів N і P відповідно, а також відповідним вибором кількості проєкційних функцій, одержимо систему $(2N+2P)$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $n = \overline{1, N}$ і $D_p^{(1)}$, $D_p^{(2)}$, $p = \overline{1, P}$:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left\{ A_n^{(1)} a_{1n\tilde{n}}^I + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{n}}^I \right\} + \sum_{p=1}^P \left\{ D_p^{(1)} d_{1p\tilde{n}}^I \right. \\ & \left. + D_p^{(2)} d_{2p\tilde{n}}^I \right\} = \varphi_{\tilde{n}}^I, \quad \tilde{n} = \overline{1, N} \\ & \sum_{n=1}^N \left\{ A_n^{(1)} a_{1n\tilde{n}}^{II} + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{n}}^{II} \right\} + \sum_{p=1}^P \left\{ D_p^{(1)} d_{1p\tilde{n}}^{II} \right. \\ & \left. + D_p^{(2)} d_{2p\tilde{n}}^{II} \right\} = \varphi_{\tilde{n}}^{II}, \quad \tilde{n} = \overline{1, N} \\ & \sum_{n=1}^N \left\{ A_n^{(1)} a_{1n\tilde{p}}^{III} + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{p}}^{III} \right\} + \sum_{p=1}^P \left\{ D_p^{(1)} d_{1p\tilde{p}}^{III} \right. \\ & \left. + D_p^{(2)} d_{2p\tilde{p}}^{III} \right\} = \varphi_{\tilde{p}}^{III}, \quad \tilde{p} = \overline{1, P} \\ & \sum_{n=1}^N \left\{ A_n^{(1)} a_{1n\tilde{p}}^{IV} + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{p}}^{IV} \right\} + \sum_{p=1}^P \left\{ D_p^{(1)} d_{1p\tilde{p}}^{IV} \right. \\ & \left. + D_p^{(2)} d_{2p\tilde{p}}^{IV} \right\} = \varphi_{\tilde{p}}^{IV}, \quad \tilde{p} = \overline{1, P} \end{aligned} \right. \quad (3.31)$$

де введено наступні позначення

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1n\tilde{n}}^I = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right) \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L}x_1\right) dx_1, \\ a_{2n\tilde{n}}^I = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right) \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L}x_1\right) e^{\frac{n\pi}{L}(-h)} dx_1, \\ d_{1p\tilde{n}}^I = \int_0^{a'} \sin\left(\frac{p\pi}{b}x_1 \cdot \cos\alpha\right) \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L}x_1\right) e^{\frac{-p\pi}{b}x_1 \sin\alpha} dx_1, \\ d_{2p\tilde{n}}^I = \int_0^{a'} \sin\left(\frac{p\pi}{b}x_1 \cdot \cos\alpha\right) \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L}x_1\right) e^{\frac{p\pi}{b}(x_1 \sin\alpha - a)} dx_1, \\ \varphi_{\tilde{n}}^I = \int_0^{a'} (x_1^2 - a'x_1) \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L}x_1\right) dx_1. \end{array} \right. \quad (3.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1n\tilde{n}}^{II} = \int_0^{a'+b'\cos\alpha} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right) \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L}x_1\right) e^{\frac{-n\pi}{L}h} dx_1 = \frac{L}{2} e^{\frac{-n\pi}{L}h} \cdot \delta_{n\tilde{n}}, \\ a_{2n\tilde{n}}^{II} = \int_0^{a'+b'\cos\alpha} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right) \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L}x_1\right) dx_1 = \frac{L}{2} \delta_{n\tilde{n}}, \\ d_{1p\tilde{n}}^{II} = \int_{b'\cos\alpha}^{a'+b'\cos\alpha} \sin\left(\frac{p\pi}{b}(x_1 \cdot \cos\alpha + h \sin\alpha)\right) e^{\frac{-p\pi}{b}(x_1 \sin\alpha - h \cos\alpha)} \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L}x_1\right) dx_1, \\ d_{2p\tilde{n}}^{II} = \int_{b'\cos\alpha}^{a'+b'\cos\alpha} \sin\left(\frac{p\pi}{b}(x_1 \cdot \cos\alpha + h \sin\alpha)\right) e^{\frac{p\pi}{b}(x_1 \sin\alpha - h \cos\alpha - a)} \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L}x_1\right) dx_1, \\ \varphi_{\tilde{n}}^{II} = \int_{b'\cos\alpha}^{a'+b'\cos\alpha} (x_1^2 - (a' + 2b'\cos\alpha)x_1 + b'\cos\alpha(a' + b'\cos\alpha)) \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L}x_1\right) dx_1. \end{array} \right. \quad (3.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
a_{1n\tilde{p}}^{III} = \int_{a' \cos \alpha}^{b'+a' \cos \alpha} \sin\left(\frac{n\pi}{L}(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha)\right) e^{\frac{-n\pi}{L}(-a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)} \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b}y_2\right) dy_2, \\
a_{2n\tilde{p}}^{III} = \int_{a' \cos \alpha}^{b'+a' \cos \alpha} \sin\left(\frac{n\pi}{L}(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha)\right) e^{\frac{n\pi}{L}(-a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha - h)} \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b}y_2\right) dy_2, \\
d_{1p\tilde{p}}^{III} = \int_0^{b'+a' \cos \alpha} \sin\left(\frac{p\pi}{b}y_2\right) e^{\frac{-p\pi}{b}x_2} \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b}y_2\right) dy_2, \\
d_{2p\tilde{p}}^{III} = \int_0^{b'+a' \cos \alpha} \sin\left(\frac{p\pi}{b}y_2\right) e^{\frac{p\pi}{b}(x_2 - a)} \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b}y_2\right) dy_2, \\
\varphi_{\tilde{p}}^{III} = \int_{a' \cos \alpha}^{b'+a' \cos \alpha} (-y_2^2 + (2a' \cos \alpha + b')y_2 - (a' \cos \alpha + b')a' \cos \alpha) \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b}y_2\right) dy_2.
\end{array} \right. \quad (3.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
a_{1n\tilde{p}}^{IV} = \int_0^{b'} \sin\left(\frac{n\pi}{L}y_2 \cos \alpha\right) e^{\frac{-n\pi}{L}y_2 \sin \alpha} \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b}y_2\right) dy_2, \\
a_{2n\tilde{p}}^{IV} = \int_0^{b'} \sin\left(\frac{n\pi}{L}y_2 \cos \alpha\right) e^{\frac{n\pi}{L}(y_2 \sin \alpha - h)} \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b}y_2\right) dy_2, \\
d_{1p\tilde{p}}^{IV} = \int_0^b \sin\left(\frac{p\pi}{b}y_2\right) \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b}y_2\right) dy_2, \\
d_{2p\tilde{p}}^{IV} = \int_0^b \sin\left(\frac{p\pi}{b}y_2\right) e^{\frac{-p\pi}{b}a} \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b}y_2\right) dy_2, \\
\varphi_{\tilde{p}}^{IV} = \int_0^{b'} (y_2^2 - b'y_2) \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b}y_2\right) dy_2.
\end{array} \right. \quad (3.35)$$

Чисельна реалізація запропонованого методу зроблена в системі Wolfram Mathematica. Обчислення проводилися при $N=P=60$ і при $N=P=120$. Погрішності методу наведені на рис. 3.2–3.9. Бачимо, що отриманий розв'язок в околі кутових точок паралелограма має найбільшу осцилюючу похибку.

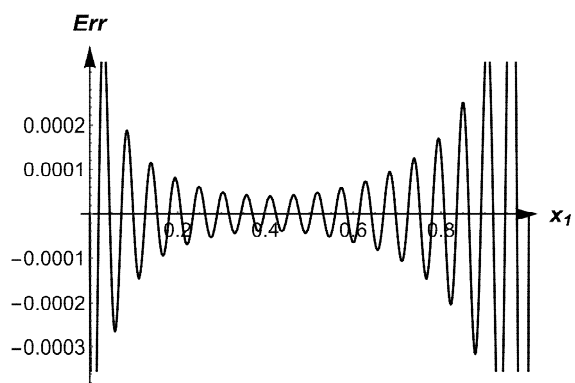


Рис. 3.2. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_I по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=60$.

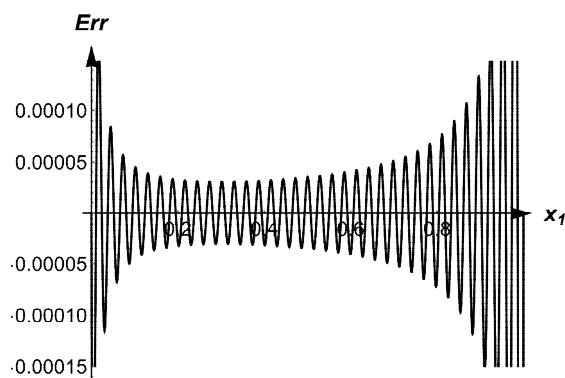


Рис. 3.3. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_I по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=120$.

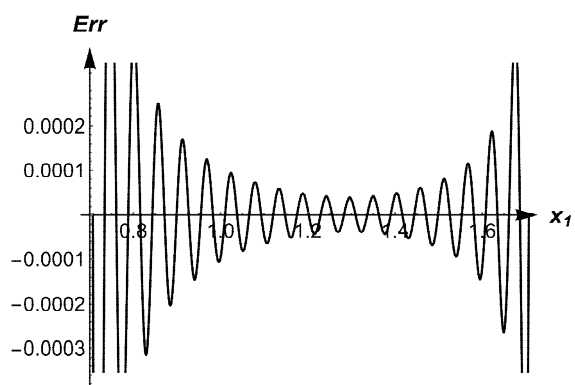


Рис. 3.4. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{II} по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=60$.

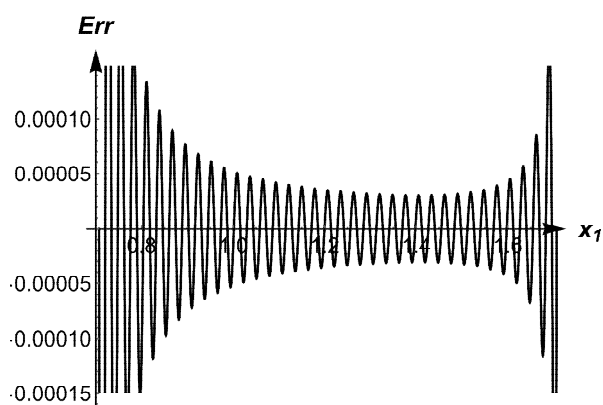


Рис. 3.5. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{II} по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=120$.

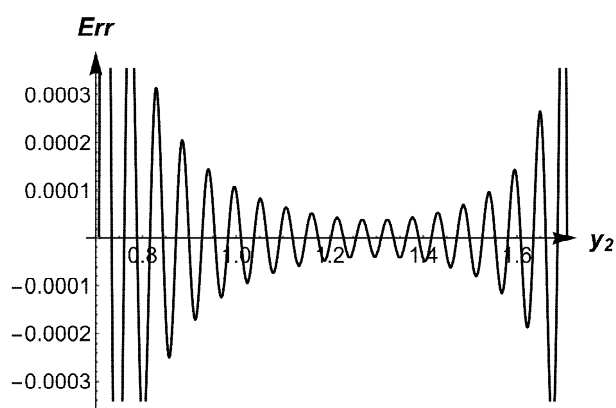


Рис. 3.6. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{III} по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=60$.

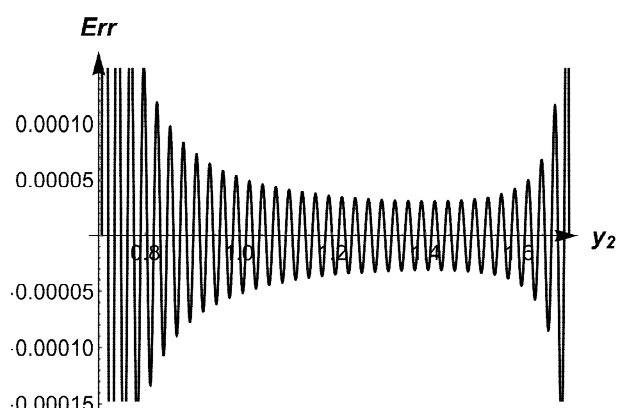


Рис. 3.7. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{III} по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=120$.

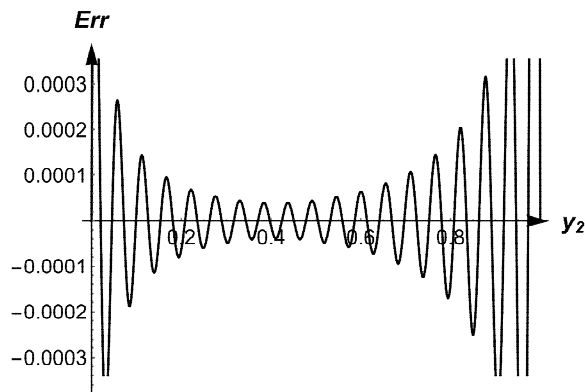


Рис. 3.8. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{IV} по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=60$.

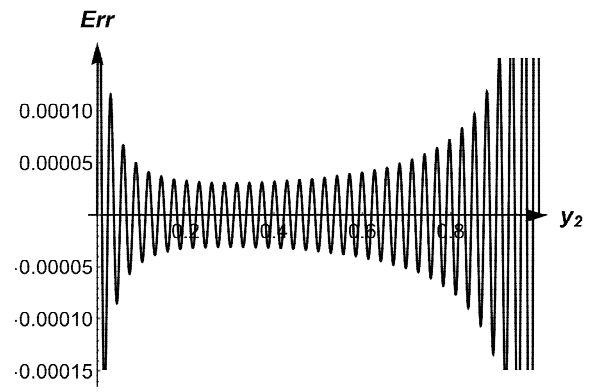


Рис. 3.9. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{IV} по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=120$.

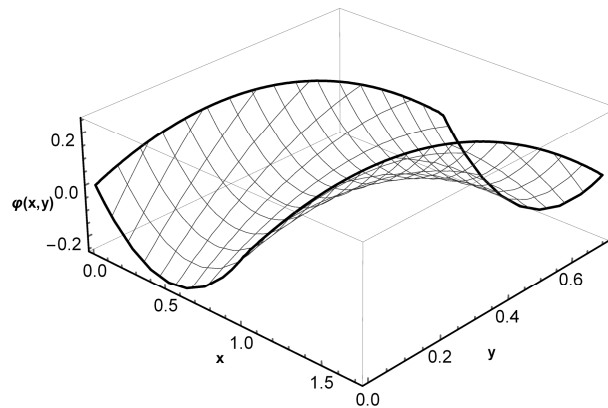


Рис. 3.10. Розв'язок, отриманий методом мінімізації середньоквадратичного відхилення у досліджуваній області .

Розв'язок крайової задачі Діріхле для гармонічної функції показано на рис. 3.10. Як видно з рисунку, максимальні й мінімальні значення розв'язку розташовані на границях області. Цей факт відповідає граничній теоремі про поведінку гармонічних функцій.

3.2 Розв'язування методом граничних інтегральних рівнянь

Згідно з методом граничних інтегральних рівнянь спочатку одержують і чисельно розв'язують граничні інтегральні рівняння на границі Γ області, а потім, коли на Γ стають відомі функції φ й $\frac{d\varphi}{dn}$, в області Ω квадратурами

здійснюється остаточне відновлення гармонічної функції $\varphi(x, y)$ (\vec{n} – зовнішня нормаль границі Γ).

Насамперед, задамо границю області у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = p(t), \\ y = q(t), \end{cases} \quad t \in [0, T]. \quad (3.36)$$

Позначимо похідні правих частин в (3.36) через символ «.» над іменем функції. Уведемо функцію $\lambda(t) = \sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)}$. У якості параметра t можемо вибрати довжину дуги границі Γ . Як відомо з диференціальної геометрії, у цьому випадку $\lambda(t) = 1$. У всякому разі – $\lambda(t) \neq 0$.

Вважатимемо, що обхід області Ω здійснюється проти годинникової стрілки, тобто так, щоб область Ω залишалася ліворуч. Позначимо через \vec{s} – одиничний вектор дуги в напрямку обходу області Ω по границі Γ . Відомо з диференціальної геометрії, що координати цієї нормалі можна обчислити за правилом:

$$\vec{n} = (\dot{q}(t), -\dot{p}(t)) / \lambda(t). \quad (3.37)$$

Параметричне завдання (3.36) границі Γ дозволяє знайти на ній $\frac{d\varphi}{dn}$ – похідну функції $\varphi(x, y)$ по нормалі \vec{n} , а саме: з визначення похідній маємо

$$\frac{d\varphi}{dn} = \vec{n} \cdot \text{grad}(\varphi), \quad \text{і з врахуванням (3.37), а також визначення оператора}$$

$$\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ одержимо}$$

$$\frac{d\varphi}{dn} = (\dot{q}(t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \dot{p}(t) \frac{\partial \varphi}{\partial y}) / \lambda(t), \quad (x, y) \in \partial D \quad (3.38)$$

Граничні інтегральні рівняння для задачі Діріхле можемо одержати шляхом використання тотожності Гріна щодо функції $\varphi(x, y)$ – **варіант А**, або щодо додатково введеної гармонічної функції $\psi(x, y)$, спряженої до $\varphi(x, y)$ – **варіант Б**.

Варіант А

Запишемо тотожність Гріна для функції $\varphi(x, y)$:

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{d\varphi(Q)}{dn_Q} \chi(P, Q) - \varphi(Q) \rho(P, Q) \right] d\sigma = \omega(P) \varphi(P), \quad P \in \Gamma, \quad (3.39)$$

де $\chi(P, Q) = \ln \frac{1}{r(P, Q)}$, $\rho(P, Q) = \frac{d}{dn} \ln \frac{1}{r(P, Q)}$, а $d\sigma$ – елемент дуги границі інтегрування, $r(P, Q)$ – відстань між точками P і Q , $\omega(P)$ – тілесний кут, під яким видна область Ω із точки $P(x, y)$ (для гладких кривих $\omega(P) = \pi$). Використовуючи крайову умову (3.1), замінимо в (3.39) значення функції $\varphi(x, y)$ заданими значеннями $\Phi(x, y)$. Маємо:

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{d\varphi(Q)}{dn_Q} \chi(P, Q) - \Phi(Q) \rho(P, Q) \right] d\sigma = \omega(P) \Phi(P), \quad P \in \Gamma \quad (3.40)$$

Звідси, збираючи члени рівнянь із шуканими функціями в лівій частині, а інші – у правій, одержимо інтегральне рівняння Фредгольма I-го роду відносно похідної $\frac{d\varphi}{dn}$:

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{d\varphi(Q)}{dn_Q} \chi(P, Q) \right] \lambda(\tau) d\tau = F(P), \quad P \in \Gamma, \quad (3.41)$$

де $F(P) = \omega(P) \Phi(P) + \int_{\Gamma} [\Phi(Q) \rho(P, Q)] d\sigma$, $P \in \Gamma$.

Розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма I-го роду (3.41) здійснюється шляхом зведення його до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАУ) з перед- або пострегуляризацією. Знайдені на Γ числові значення похідної $\frac{d\varphi}{dn}$ разом із заданою функцією $\varphi(x, y) = \Phi(x, y)$ надають можливість відновлення гармонічної функції $\varphi(x, y)$ в області Ω квадратурами тотожності Гріна:

$$\varphi(x, y) = 2\pi \int_{\Gamma} \left[\frac{d\varphi(Q)}{dn_Q} \chi(P, Q) - \Phi(Q) \rho(P, Q) \right] d\sigma, \quad P \in \Omega. \quad (3.42)$$

Варіант Б

Запишемо тотожність Гріна для додатково введеної функції $\psi(x, y)$, яка спряжена з шуканою:

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{d\psi(Q)}{dn_Q} \chi(P, Q) - \psi(Q) \rho(P, Q) \right] d\sigma = \omega(P) \psi(P), \quad P \in \Gamma, \quad (3.43)$$

де використані позначення тотожності (3.36). Використовуючи умови Коші-Рімана $\frac{d\psi}{dn} = -\frac{d\varphi}{ds}$ й крайову умову (3.1), маємо $\frac{d\psi}{dn} = -\frac{d\Phi}{ds}$. Тепер (3.43)

запишеться так:

$$\int_{\Gamma} \left[-\frac{d\Phi(Q)}{ds_Q} \chi(P, Q) - \psi(Q) \rho(P, Q) \right] d\sigma = \omega(P) \psi(P), \quad P \in \Gamma,$$

Звідси, збираючи члени рівнянь із шуканими функціями в лівій частині, а інші – у правій, одержимо інтегральне рівняння Фредгольма I-го роду щодо функції $\psi(x, y)$:

$$\omega(P) \psi(P) + \int_{\Gamma} \psi(Q) \rho(P, Q) d\sigma = G(P), \quad P \in \Gamma, \quad (3.44)$$

де $G(P) = -\int_{\Gamma} \frac{d\Phi(Q)}{ds_Q} \chi(P, Q) d\sigma$.

Розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма I-го роду (3.44) здійснюється шляхом зведення його до СЛАУ без регуляризації. Знайдені на Γ числові значення функції $\psi(x, y)$ дають можливість спочатку знайти на Γ чисельним диференціюванням $\frac{d\psi}{ds}$, а потім через умови Коші-Рімана знайти на ∂D похідну по нормалі $\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\psi}{ds}$. Далі відновлення в області Ω гармонічної функції $\varphi(x, y)$ здійснюється квадратурами (3.42).

Побудуємо алгоритм чисельного розв'язку рівнянь (3.41) – **варіант А** ((3.44) – **варіант Б**) на основі кусково-постійної апроксимації шуканих функцій – метод коллокацій. Розбивка границі інтегрування здійснюється або рівномірно заданою кількістю n проміжків, або певним чином нерівномірно.

Згідно методу коллокацій розшукуємо наближені значення шуканих функцій у серединних точках (точках коллокації) кожного відрізка розбивок $\Delta_i = [s_{i-1}, s_i]$, $i = \overline{1, n}$, де n – кількість проміжків розбивки границі на ділянки. Позначимо значення дуги точки колокації через $\bar{s}_i = (s_{i-1} + s_i)/2$, $i = \overline{1, n}$, а наближені значення шуканих функцій $\frac{d\varphi}{dn}$ (*варіант А*) або ψ (*варіант Б*) у цих точках – через y_i або z_i . Згідно з методом коллокацій ці значення шукані функції набувають у кожній точці відрізка розбивок Δ_i .

Таким чином, рівняння (3.41) *варіанта А* перетвориться в СЛАУ:

$$A\vec{y} = \vec{f}, \quad (3.45)$$

де елементи $a_{i,j}$ матриці A , і f_i вільного вектора \vec{f} обчислюються так:

$$a_{i,j} = \int_{\Delta_j} \chi(P, Q) d\sigma, \quad f_i = F(P), \quad (3.46)$$

$$P = P(\bar{s}_i), Q = Q(\sigma).$$

Аналогічно перетвориться в СЛАУ рівняння (3.44) *варіанта Б*:

$$B\vec{y} = \vec{g}, \quad (3.47)$$

де елементи $b_{i,j}$ матриці B , g_i вільного вектора \vec{g} обчислюються так

$$b_{i,j} = \delta_{i,j} \omega(\bar{\sigma}_i) + \int_{\Delta_j} \rho(P, Q) d\sigma, \quad g_i = G(P), \quad (3.48)$$

де $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Обчислення інтегралів в (3.46), (3.47) можна здійснювати за допомогою найпростіших квадратурних формул, наприклад, середніх прямокутників. Так, для $i \neq j$ маємо

$$a_{i,j} \approx (\sigma_i - \sigma_{i-1}) \chi(\bar{\sigma}_i, \bar{\sigma}_j), \quad (3.49)$$

$$b_{i,j} = \delta_{i,j} \omega(\bar{\sigma}_i) + (\sigma_i - \sigma_{i-1}) \rho(\bar{\sigma}_i, \bar{\sigma}_j). \quad (3.50)$$

У випадку $i = j$ функція $\chi(P, Q)$ має логарифмічну особливість і тому при обчисленні $a_{i,j}$ це необхідно враховувати. Очевидно

$$a_{i,i} = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \ln \frac{1}{r(P,Q)} d\sigma \approx - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \ln |\bar{s}_i - \sigma| d\sigma. \quad (3.51)$$

А далі, скориставшись значенням інтеграла $\int \ln x dx = x \ln x - x$, ($x > 0$), з (3.51)

одержуємо:

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= - \int_{s_{i-1}}^{\bar{s}_i} \ln(\bar{s}_i - \sigma) d\sigma - \int_{\bar{s}_i}^{s_i} \ln(\sigma - \bar{s}_i) d\sigma = \int_{s_{i-1}}^{\bar{s}_i} \ln(\bar{s}_i - \sigma) d(\bar{s}_i - \sigma) - \int_{\bar{s}_i}^{s_i} \ln(\sigma - \bar{s}_i) d(\sigma - \bar{s}_i) = \\ &= ((\bar{s}_i - \sigma) \ln((\bar{s}_i - \sigma) - (\bar{s}_i - \sigma)) \Big|_{s_{i-1}}^{\bar{s}_i} - ((\sigma - \bar{s}_i) \ln(\sigma - \bar{s}_i) - (\sigma - \bar{s}_i)) \Big|_{\bar{s}_i}^{s_i}, \end{aligned}$$

або, після обчислень

$$a_{i,i} = -((\bar{s}_i - s_{i-1}) \ln((\bar{s}_i - s_{i-1}) - (\bar{s}_i - s_{i-1})) - ((s_i - \bar{s}_i) \ln(s_i - \bar{s}_i) - (s_i - \bar{s}_i))) \quad (3.52)$$

У випадку $i = j$ функція $\rho(P, Q) = \frac{d}{dn} \ln \frac{1}{r(P, Q)}$ має особливість типу $0/0$,

яка усувається граничним переходом за допомогою відомого правила Лопітала.

Дійсно, з визначення похідної по нормалі й координат (3.37) нормалі \vec{n} маємо:

$$\rho(P, Q) = \left[\dot{q}(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \frac{1}{r(P, Q)} - \dot{p}(\tau) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r(P, Q)} \right] / \lambda(t), \quad (3.53)$$

де (ξ, η) – декартові координати точки Q .

Враховуючи, що $r(P, Q) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, маємо:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \ln \frac{1}{r(P, Q)} = \frac{(x - \xi)}{r^2(P, Q)} = \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = \frac{p(t) - p(\tau)}{(p(t) - p(\tau))^2 + (q(t) - q(\tau))^2}$$

Аналогічно

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r(P, Q)} = \frac{q(t) - q(\tau)}{(p(t) - p(\tau))^2 + (q(t) - q(\tau))^2}.$$

Тепер (3.53) з урахуванням двох останніх співвідношень запишемо у вигляді:

$$\rho(P, Q) = \frac{\dot{q}(\tau)(p(t) - p(\tau)) - \dot{p}(\tau)(q(t) - q(\tau))}{((p(t) - p(\tau))^2 + (q(t) - q(\tau))^2) \lambda(t)}. \quad (3.54)$$

З аналізу формули (3.54) можна зробити важливий висновок: на прямих лініях $\rho(P, Q) = 0$. Дійсно, у тому випадку, коли точки P, Q належать одній і тій же прямій, можна записати $p(t) = k_p t$, $q(t) = k_q t$ (k_p, k_q – константи). Підставляючи ці рівності в (3.54), одержимо

$$\rho(P, Q) = \frac{k_q k_p (t - \tau) - k_p k_q (t - \tau)}{(k_p^2 (t - \tau)^2 + k_q^2 (t - \tau)^2) \lambda(t)}$$

і після скорочення на $(t - \tau)$ прийдемо до зробленого вище висновку.

Необхідно підкреслити, що обчислювати по формулі (3.54) можна безпосередньо для $Q \neq P$, або, інакше, для $\tau \neq t$. При $Q \rightarrow P$, або, інакше, при $\tau \rightarrow t$ в (3.54) виникає невизначеність типу $0/0$. Для розкриття цієї невизначеності застосуємо правило Лопіталя:

$$\begin{aligned} \lim_{Q \rightarrow P} \rho(P, Q) &= \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\partial(\dot{q}(\tau)(p(t) - p(\tau)) - \dot{p}(\tau)(q(t) - q(\tau)))/\partial\tau}{\partial((p(t) - p(\tau))^2 + (q(t) - q(\tau))^2)/\partial\tau} \frac{1}{\lambda(t)} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\ddot{q}(\tau)(p(t) - p(\tau)) - \dot{q}(\tau)\dot{p}(\tau) - \ddot{p}(\tau)(q(t) - q(\tau)) + \dot{p}(\tau)\dot{q}(\tau)}{2(\dot{p}(\tau)(p(\tau) - p(t)) + \dot{q}(\tau)(q(\tau) - q(t)))} \frac{1}{\lambda(t)} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\ddot{q}(\tau)(p(t) - p(\tau)) - \ddot{p}(\tau)(q(t) - q(\tau))}{2(\dot{p}(\tau)(p(\tau) - p(t)) + \dot{q}(\tau)(q(\tau) - q(t)))} \frac{1}{\lambda(t)}. \end{aligned}$$

Очевидно, що необхідно застосувати правило Лопіталя ще раз:

$$\begin{aligned} \lim_{Q \rightarrow P} \rho(P, Q) &= \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\partial(\ddot{q}(\tau)(p(t) - p(\tau)) - \ddot{p}(\tau)(q(t) - q(\tau)))/\partial\tau}{\partial((\dot{p}(\tau)(p(\tau) - p(t)) + \dot{q}(\tau)(q(\tau) - q(t))))/\partial\tau} \frac{1}{\lambda(t)} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\ddot{q}(\tau)(p(t) - p(\tau)) - \ddot{q}(\tau)\dot{p}(\tau) - \ddot{p}(\tau)(q(t) - q(\tau)) + \ddot{p}(\tau)\dot{q}(\tau)}{\ddot{p}(\tau)(p(\tau) - p(t)) - \dot{p}^2(\tau) + \ddot{q}(\tau)(q(\tau) - q(t)) - \dot{q}(\tau)^2} \frac{1}{\lambda(t)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\ddot{p}(t)\dot{q}(t) - \ddot{q}(t)\dot{p}(t)}{\dot{p}^2(t) + \dot{q}(t)^2} \frac{1}{\lambda(t)}. \end{aligned}$$

Таким чином, прийшли до шуканої формули:

$$\rho(P, P) = \frac{1}{2\lambda^3(t)} (\ddot{p}(t)\dot{q}(t) - \ddot{q}(t)\dot{p}(t)). \quad (3.55)$$

З розв'язком СЛАР (3.42) (або (3.44)) стають відомими всі шукані функції на границі Γ області Ω . Остаточне відновлення гармонічної функції $\varphi(x, y)$ в області Ω здійснюється квадратурами.

3.2.1 Приклад розрахунків методом граничних інтегральних рівнянь

Виберемо внутрішню область паралелограма за область Ω (рис. 3.1). За параметр t границі Γ виберемо довжину дуги s , яка відраховується від точки O уздовж границі Γ так, щоб область Ω залишалася ліворуч. Кут між сторонами OD і OB будемо вважати гострим і позначимо його через α . Висоту CE паралелограма позначимо через h . Не втрачаючи загальності, будемо вважати довжини сторін OD і BC рівними одиниці. Довжину бічної сторони DC позначимо через $c = h / \sin \alpha$. Довжину границі Γ позначимо через $S = 2 + 2c$. У цьому випадку границя Γ у параметричному виді запишеться так:

$$\begin{aligned} \text{сторона } OD: & \begin{cases} p = s, \\ q = 0 \end{cases} & s \in [0, 1] \\ \text{сторона } DC: & \begin{cases} p = (s - 1) \cos \alpha + 1, \\ q = (s - 1) \sin \alpha \end{cases} & s \in [1, 1 + c] \\ \text{сторона } BC: & \begin{cases} p = 2 + c(1 + \cos \alpha) - s, \\ q = h \end{cases} & s \in [1 + c, 2 + c] \\ \text{сторона } OB & \begin{cases} p = (2 + 2c - s) \cos \alpha, \\ q = (2 + 2c - s) \sin \alpha \end{cases} & s \in [2 + c, S] \end{aligned}$$

Виберемо гармонічну функцію (3.36) за тестову функцію:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - x + \frac{c + \cos \alpha}{\sin \alpha} y - 2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} xy.$$

Скориставшись (3.4) для $\varphi = u$, отримаємо наступний вираз для похідної від тестової функції по нормалі:

$$\frac{du}{dn} = \dot{q}(s)(2p(s) - 1 - 2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} q(s)) + \dot{p}(s)(2q(s) - \frac{c + \cos \alpha}{\sin \alpha} + 2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} p(s)),$$

де $s \in [0, S]$.

Регуляризація СЛАР (3.45) *варіанта А* приводить до системи рівнянь

$$(A^T A + \varepsilon E) \vec{y} = A^T \vec{f} \quad (3.56)$$

где A^T – трансформована матриця, ε – параметр регуляризації.

Розрахунки проводилися для різної кількості n ділянок рівномірної розбивки границі з вибором оптимального значення параметра регуляризації (при $\varepsilon = 0$ – розрахунки без регуляризації безпосередньо СЛАР (3.45)). Похибка розрахунків суттєво залежить від вибору параметра ε регуляризації СЛАР. Так,

для паралелограма $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $h = \sqrt{2}$ при $n = 16$ (розбивка по 4 ділянки на кожній

стороні паралелограма) розрахунки нормальної похідної $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ без регуляризації

приводять до 50% відносної погрішності δ у рівномірній нормі. Результати розрахунків суттєво поліпшуються при регуляризації СЛАР. Так, при $\varepsilon = 0,01$ відносна погрішність δ зменшується до 14%. Слід зазначити, що цей відносно високий рівень похибки – локальний, а саме, в околі вершин паралелограма. Зі зміною найпростішої моделі розрахунків у бік її ускладнення (збільшення ділянок розбивки, нерівномірність розбивки, нелінійна апроксимація шуканої функції й т.п.) погрішність суттєво знижується до необхідних значень. У таблицях 3.1 і 3.2 наведені результати обчислень нормальної похідної на границі паралелограма і значень тестової функції у внутрішній області паралелограма.

Таблиця 3.1 – Розрахунок $d\varphi/dn$ на границі паралелограма

s	$d\varphi/dn$	$\approx d\varphi/dn$	
		$\varepsilon=0$ $\delta=47\%$	$\varepsilon=0,01$ $\delta=14\%$
0,125	-2,1642	-3,1841	-2,4737
0,375	-1,6642	-1,6823	-1,7048
0,625	-1,1642	-1,2017	-1,2022
0,875	-0,6642	-0,6811	-0,6623
1,125	0,6642	0,6811	0,6623
1,375	1,1642	1,2017	1,2022
1,625	1,6642	1,6823	1,7048
1,875	2,1642	3,1841	2,4737

2,125	-2,1642	-3,1841	-2,4737
2,375	-1,6642	-1,6823	-1,7048
2,625	-1,1642	-1,2017	-1,2022
2,875	-0,6642	-0,6811	-0,6623
3,125	0,6642	0,6811	0,6623
3,375	1,1642	1,2017	1,2022
3,625	1,6642	1,6823	1,7048
3,875	2,1642	3,1841	2,4737

Таблиця 3.2 Расчет φ в области параллелограмма

x	y	$\approx\varphi$	φ
0,2134	0,0884	0,0000	0,0000
0,4634	0,0884	-0,1064	-0,1250
0,7134	0,0884	-0,1140	-0,1250
0,9634	0,0884	0,0000	0,0000
0,3902	0,2652	0,1064	0,1250
0,6402	0,2652	0,0000	0,0000
0,8902	0,2652	0,0000	0,0000
1,1402	0,2652	0,1140	0,1250
0,5669	0,4419	0,1140	0,1250
0,8169	0,4419	0,0000	0,0000
1,0669	0,4419	0,0000	0,0000
1,3169	0,4419	0,1064	0,1250
0,7437	0,6187	0,0000	0,0000
0,9937	0,6187	-0,1140	-0,1250
1,2437	0,6187	-0,1064	-0,1250
1,4937	0,6187	0,0000	0,0000

3.3 Метод коллокації

Визначення констант $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $D_p^{(1)}$, $D_p^{(2)}$ у (3.30) здійснюємо методом коллокації, який полягає в поточковому задоволенні граничних умов в окремих точках границі (точках коллокації). Система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\sum_{n=1}^N \{ A_n^{(1)} a_{1n\tilde{n}}^I + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{n}}^I \} + \sum_{p=1}^P \{ D_p^{(1)} d_{1p\tilde{n}}^I \\
+ D_p^{(2)} d_{2p\tilde{n}}^I \} = \varphi_{\tilde{n}}^I, \quad \tilde{n} = \overline{1, N_{main}^I} \\
\sum_{n=1}^N \{ A_n^{(1)} a_{1n\tilde{n}}^{II} + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{n}}^{II} \} + \sum_{p=1}^P \{ D_p^{(1)} d_{1p\tilde{n}}^{II} \\
+ D_p^{(2)} d_{2p\tilde{n}}^{II} \} = \varphi_{\tilde{n}}^{II}, \quad \tilde{n} = \overline{N_{add}^{II} + 1, N} \\
\sum_{n=1}^N \{ A_n^{(1)} a_{1n\tilde{p}}^{III} + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{p}}^{III} \} + \sum_{p=1}^P \{ D_p^{(1)} d_{1p\tilde{p}}^{III} \\
+ D_p^{(2)} d_{2p\tilde{p}}^{III} \} = \varphi_{\tilde{p}}^{III}, \quad \tilde{p} = \overline{P_{add}^{III} + 1, P} \\
\sum_{n=1}^N \{ A_n^{(1)} a_{1n\tilde{p}}^{IV} + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{p}}^{IV} \} + \sum_{p=1}^P \{ D_p^{(1)} d_{1p\tilde{p}}^{IV} \\
+ D_p^{(2)} d_{2p\tilde{p}}^{IV} \} = \varphi_{\tilde{p}}^{IV}, \quad \tilde{p} = \overline{1, P_{main}^{IV}} \\
\sum_{n=1}^N \{ A_n^{(1)} a_{1n\tilde{n}}^{Iadd} + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{n}}^{Iadd} \} + \sum_{p=1}^P \{ D_p^{(1)} d_{1p\tilde{n}}^{Iadd} \\
+ D_p^{(2)} d_{2p\tilde{n}}^{Iadd} \} = \varphi_{\tilde{n}}^{Iadd}, \quad \tilde{n} = \overline{N_{main}^I + 1, N} \\
\sum_{n=1}^N \{ A_n^{(1)} a_{1n\tilde{n}}^{IIadd} + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{n}}^{IIadd} \} + \sum_{p=1}^P \{ D_p^{(1)} d_{1p\tilde{n}}^{IIadd} \\
+ D_p^{(2)} d_{2p\tilde{n}}^{IIadd} \} = \varphi_{\tilde{n}}^{IIadd}, \quad \tilde{n} = \overline{1, N_{add}^{II}} \\
\sum_{n=1}^N \{ A_n^{(1)} a_{1n\tilde{p}}^{IIIadd} + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{p}}^{IIIadd} \} + \sum_{p=1}^P \{ D_p^{(1)} d_{1p\tilde{p}}^{IIIadd} \\
+ D_p^{(2)} d_{2p\tilde{p}}^{IIIadd} \} = \varphi_{\tilde{p}}^{IIIadd}, \quad \tilde{p} = \overline{1, P_{add}^{III}} \\
\sum_{n=1}^N \{ A_n^{(1)} a_{1n\tilde{p}}^{IVadd} + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{p}}^{IVadd} \} + \sum_{p=1}^P \{ D_p^{(1)} d_{1p\tilde{p}}^{IVadd} \\
+ D_p^{(2)} d_{2p\tilde{p}}^{IVadd} \} = \varphi_{\tilde{p}}^{IVadd}, \quad \tilde{p} = \overline{P_{main}^{IV} + 1, P}
\end{array} \right. \quad (3.57)$$

$N_{main}^{(I/II)}$ визначаються так, щоб $\{x_{1n}, (0, h)\} \in (I/II)$.

$P_{main}^{(III/IV)}$ визначаються так, щоб $\{(a, 0), y_{2n}\} \in (III/IV)$.

$N_{add}^{(I/II)}$ – доповнення до $N_{main}^{(I/II)}$.

$P_{add}^{(III/IV)}$ – доповнення до $P_{main}^{(III/IV)}$.

$$\text{Таким чином, } \begin{cases} N_{main}^{(I/II)} + N_{add}^{(I/II)} = N \\ P_{main}^{(III/IV)} + P_{add}^{(III/IV)} = P \end{cases}$$

Порядок системи рівнянь $2N + 2P$ відносно коефіцієнтів рядів (3.28) і (3.29) є $2N + 2P$ невідомими.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1n\tilde{n}}^I = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_{1\tilde{n}}\right), \\ a_{2n\tilde{n}}^I = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_{1\tilde{n}}\right) e^{\frac{n\pi}{L}(-h)}, \\ d_{1p\tilde{n}}^I = \sin\left(\frac{p\pi}{b} x_{1\tilde{n}} \cdot \cos \alpha\right) e^{\frac{-p\pi}{b} x_{1\tilde{n}} \sin \alpha}, \\ d_{2p\tilde{n}}^I = \sin\left(\frac{p\pi}{b} x_{1\tilde{n}} \cdot \cos \alpha\right) e^{\frac{p\pi}{b}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - a)}, \\ \varphi_{\tilde{n}}^I = (x_{1\tilde{n}}^2 - a'x_{1\tilde{n}}), \\ a_{1n\tilde{n}}^{Iadd} = a_{1n\tilde{n}}^I, \\ a_{2n\tilde{n}}^{Iadd} = a_{2n\tilde{n}}^I, \\ d_{1p\tilde{n}}^{Iadd} = 0, \\ d_{2p\tilde{n}}^{Iadd} = 0, \\ \varphi_{\tilde{n}}^{Iadd} = 0 \\ N_{main}^I + N_{add}^I = N \\ stepI = \frac{L}{(N+1)} \\ x_{1\tilde{n}} = 0 + \tilde{n}stepI \end{array} \right. \quad (3.58)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
a_{1n\tilde{n}}^{II} = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_{1\tilde{n}}\right) e^{\frac{-n\pi}{L} h}, \\
a_{2n\tilde{n}}^{II} = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_{1\tilde{n}}\right), \\
d_{1p\tilde{n}}^{II} = \sin\left(\frac{p\pi}{b} (x_{1\tilde{n}} \cdot \cos \alpha + h \sin \alpha)\right) e^{\frac{-p\pi}{b} (x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha)}, \\
d_{2p\tilde{n}}^{II} = \sin\left(\frac{p\pi}{b} (x_{1\tilde{n}} \cdot \cos \alpha + h \sin \alpha)\right) e^{\frac{p\pi}{b} (x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha - a)}, \\
\varphi_{\tilde{n}}^{II} = (x_{1\tilde{n}}^2 - (a' + 2b' \cos \alpha)x_{1\tilde{n}} + b' \cos \alpha (a' + b' \cos \alpha)), \\
a_{1n\tilde{n}}^{IIadd} = a_{1n\tilde{n}}^{II}, \\
a_{2n\tilde{n}}^{IIadd} = a_{2n\tilde{n}}^{II}, \\
d_{1p\tilde{n}}^{IIadd} = 0, \\
d_{2p\tilde{n}}^{IIadd} = 0, \\
\varphi_{\tilde{n}}^{IIadd} = 0.
\end{array} \right. \quad (3.59)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
a_{1n\tilde{p}}^{III} = \sin\left(\frac{n\pi}{L} (a \sin \alpha + y_{2\tilde{p}} \cos \alpha)\right) e^{\frac{-n\pi}{L} (-a \cos \alpha + y_{2\tilde{p}} \sin \alpha)}, \\
a_{2n\tilde{p}}^{III} = \sin\left(\frac{n\pi}{L} (a \sin \alpha + y_{2\tilde{p}} \cos \alpha)\right) e^{\frac{n\pi}{L} (-a \cos \alpha + y_{2\tilde{p}} \sin \alpha - h)}, \\
d_{1p\tilde{p}}^{III} = \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_{2\tilde{p}}\right) e^{\frac{-p\pi}{b} x_{2\tilde{p}}}, \\
d_{2p\tilde{p}}^{III} = \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_{2\tilde{p}}\right) e^{\frac{p\pi}{b} (x_{2\tilde{p}} - a)}, \\
\varphi_{\tilde{p}}^{III} = (-y_{2\tilde{p}}^2 + (2a' \cos \alpha + b')y_{2\tilde{p}} - (a' \cos \alpha + b')a' \cos \alpha), \\
a_{1n\tilde{p}}^{IIIadd} = 0, \\
a_{2n\tilde{p}}^{IIIadd} = 0, \\
d_{1p\tilde{p}}^{IIIadd} = d_{1p\tilde{p}}^{III}, \\
d_{2p\tilde{p}}^{IIIadd} = d_{2p\tilde{p}}^{III}, \\
\varphi_{\tilde{p}}^{IIIadd} = 0.
\end{array} \right. \quad (3.60)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_{1n\tilde{p}}^{IV} = \sin\left(\frac{n\pi}{L} y_{2\tilde{p}} \cos \alpha\right) e^{\frac{-n\pi}{L} y_{2\tilde{p}} \sin \alpha}, \\
 a_{2n\tilde{p}}^{IV} = \sin\left(\frac{n\pi}{L} y_{2\tilde{p}} \cos \alpha\right) e^{\frac{n\pi}{L} (y_{2\tilde{p}} \sin \alpha - h)}, \\
 d_{1p\tilde{p}}^{IV} = \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_{2\tilde{p}}\right), \\
 d_{2p\tilde{p}}^{IV} = \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_{2\tilde{p}}\right) e^{\frac{-p\pi}{b} a}, \\
 \varphi_{\tilde{p}}^{IV} = (y_{2\tilde{p}}^2 - b' y_{2\tilde{p}}), \\
 a_{1n\tilde{p}}^{IVadd} = 0, \\
 a_{2n\tilde{p}}^{IVadd} = 0, \\
 d_{1p\tilde{p}}^{IVadd} = d_{1p\tilde{p}}^{IV}, \\
 d_{2p\tilde{p}}^{IVadd} = d_{2p\tilde{p}}^{IV}, \\
 \varphi_{\tilde{p}}^{IVadd} = 0.
 \end{array} \right. \quad (3.61)$$

У таблиці 3.3 наведено розрахункові дані значень потенціалу: тестової функції φ^* , результатів розрахунків методом мінімізації середньо-квадратичного відхилення φ_1 , методом коллокації φ_2 , методом граничних інтегральних рівнянь φ_3 . У цій же таблиці подано відповідні відносні похибки отриманих результатів. Слід зазначити, що похибки розрахунків методами мінімізації середньо-квадратичного відхилення й коллокації при однаковому параметрі – числі ($n = 20$) розбивки границі області – виявилися суттєво кращими (~4%), ніж погрішності розрахунків методом граничних інтегральних рівнянь (~16%). Причому, з подальшим збільшенням числа ($n = 40, 60, 80, 120$) розбивки границі області похибка розрахунків методами мінімізації середньо-квадратичного відхилення й коллокації швидко зменшується, чого не скажеш про протилежну тенденцію похибки розрахунків методом граничних інтегральних рівнянь. Остання обставина багато в чому пояснюється проблемами некоректності граничних інтегральних рівнянь: для задачі Діріхле ці рівняння – інтегральні рівняння Фредгольма першого роду.

Таблиця 3.3 – Порівняння обчислених значень потенціалу φ при використанні методів мінімізації середньо-квадратичного відхилення, коллокації і методу граничних інтегральних рівнянь

x	y	φ^*	Метод мінімізації середньоквадратичних відхилень		Метод коллокації		Метод граничних інтегральних рівнянь	
			φ_1	$\varepsilon_1, \%$	φ_2	$\varepsilon_2, \%$	φ_3	$\varepsilon_3, \%$
0,1707	0,0707	-0,0000	-0,0000	0,00	-0,0000	0,00	-0,0000	0,00
0,3707	0,0707	-0,1200	-0,1244	3,67	-0,1171	2,42	-0,1010	15,83
0,5707	0,0707	-0,1600	-0,1599	0,06	-0,1606	0,37	-0,1442	9,88
0,7707	0,0707	-0,1200	-0,1148	4,33	-0,1249	4,08	-0,1108	7,67
0,9707	0,0707	-0,0000	-0,0000	0,00	-0,0000	0,00	-0,0000	0,00
0,3121	0,2121	0,1200	0,1244	3,67	0,1171	2,42	0,1010	15,83
0,5121	0,2121	0,0000	0,0000	0,00	0,0000	0,00	0,0000	0,00
0,7121	0,2121	-0,0400	-0,0389	2,75	-0,0412	3,00	-0,0409	2,25
0,9121	0,2121	0,0000	0,0000	0,00	0,0000	0,00	0,0000	0,00
1,1121	0,2121	0,1200	0,1148	4,33	0,1249	4,08	0,1108	7,67
0,4536	0,3536	0,1600	0,1599	0,06	0,1606	0,37	0,1442	9,88
0,6536	0,3536	0,0400	0,0389	2,75	0,0412	3,00	0,0409	2,25
0,8536	0,3536	0,0000	0,0000	0,00	0,0000	0,00	0,0000	0,00
1,0536	0,3536	0,0400	0,0389	2,75	0,0412	3,00	0,0409	2,25
1,2536	0,3536	0,1600	0,1599	0,06	0,1606	0,37	0,1442	9,88
0,595	0,4950	0,1200	0,1148	4,33	0,1249	4,08	0,1108	7,67
0,795	0,4950	0,0000	0,0000	0,00	0,0000	0,00	0,0000	0,00
0,995	0,4950	-0,0400	-0,0388	3,00	-0,0412	3,00	-0,0409	2,25
1,195	0,4950	0,0000	0,0000	0,00	0,0000	0,00	0,0000	0,00
1,395	0,4950	0,1200	0,1244	3,67	0,1171	2,42	0,1010	15,83
0,7364	0,6364	0,0000	0,0000	0,00	0,0000	0,00	0,0000	0,00
0,9364	0,6364	-0,1200	-0,1148	4,33	-0,1248	4,00	-0,1108	7,67
1,1364	0,6364	-0,1600	-0,1599	0,06	-0,1606	0,37	-0,1442	9,88
1,3364	0,6364	-0,1200	-0,1244	3,67	-0,1171	2,42	-0,1010	15,83
1,5364	0,6364	0,0000	0,0000	0,00	0,0000	0,00	0,0000	0,00

Зрозуміло, що необхідна регуляризація рівняння. Саме про такі регуляризовані розрахунки і йде мова. Виявляється, що застосування методу граничних рівнянь може не привести до бажаної точності наближених результатів навіть при всіляких «хитруваннях» регуляризації. Отримані результати розрахунків задач Діріхле для гармонійних функцій методами мінімізації середньо-квадратичного відхилення й колокації відкривають шлях до більш складних задач, наприклад крайових задач для рівняння Гельмгольца.

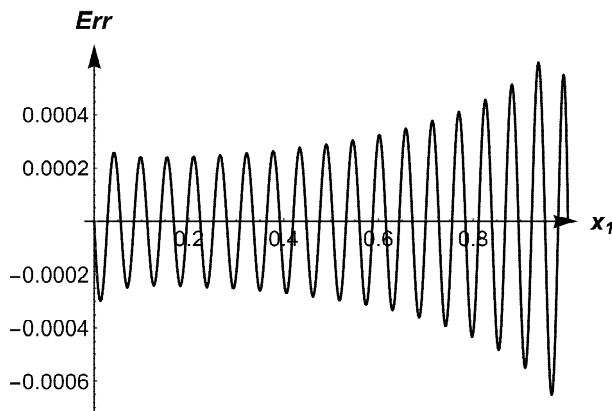


Рис. 3.11. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_I за методом колокації при $N=P=60$.

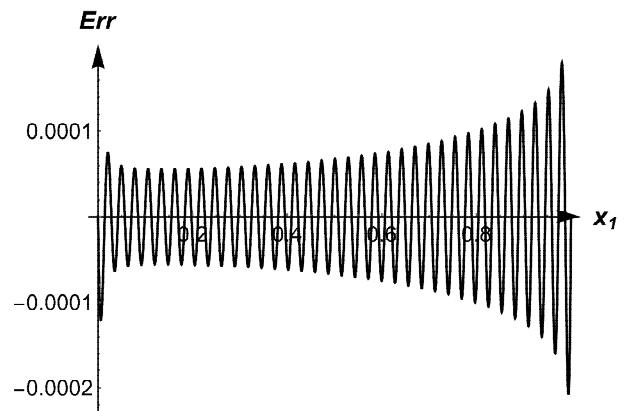


Рис. 3.12. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_I за методом колокації при $N=P=120$.

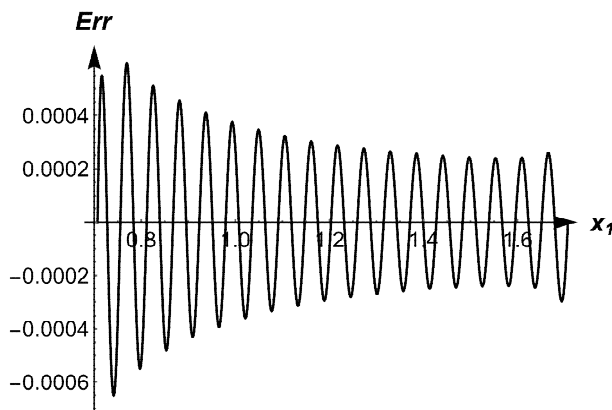


Рис. 3.13. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{II} за методом колокації при $N=P=60$.

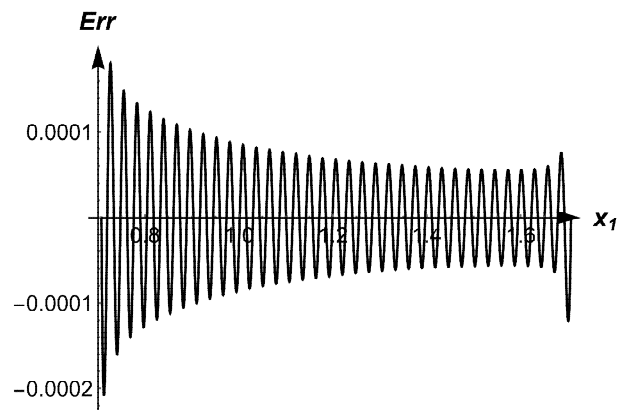


Рис. 3.14. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{II} за методом колокації при $N=P=120$.

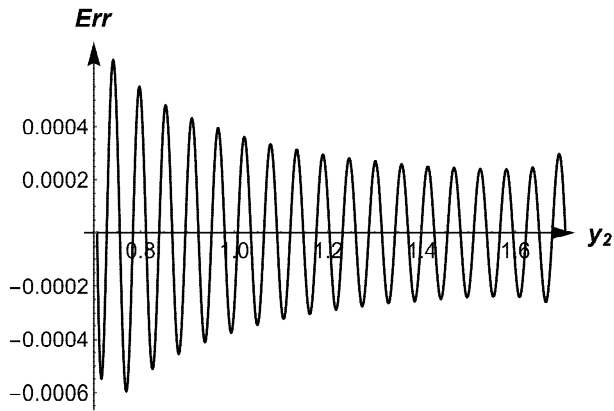


Рис. 3.15. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{III} за методом колокації при $N=P=60$.

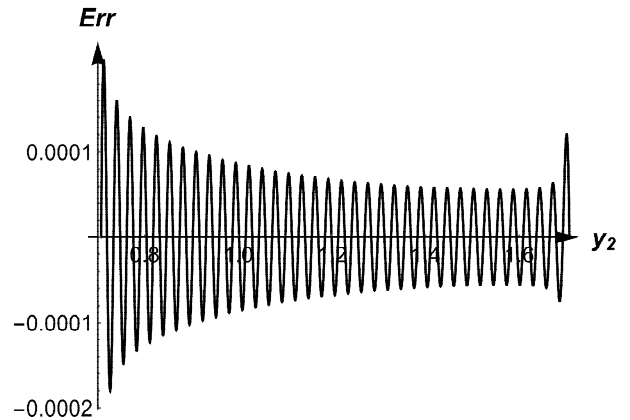


Рис. 3.16. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{III} за методом колокації при $N=P=120$.

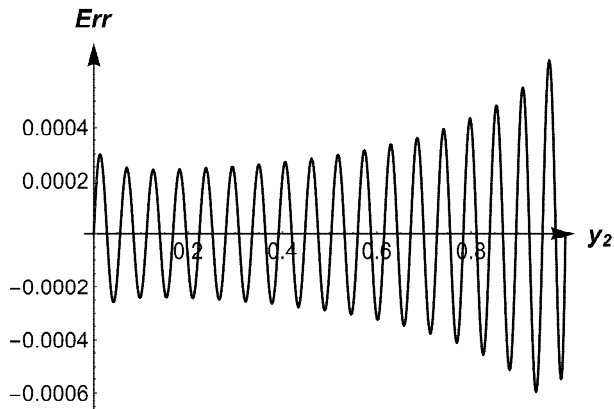


Рис. 3.17. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{IV} за методом колокації при $N=P=60$.

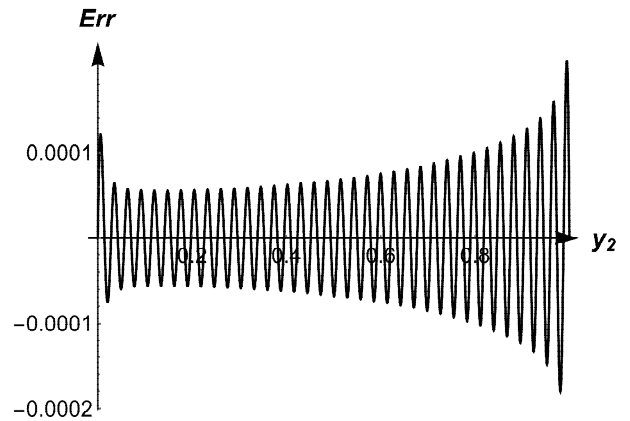


Рис. 3.18. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{IV} за методом колокації при $N=P=120$.

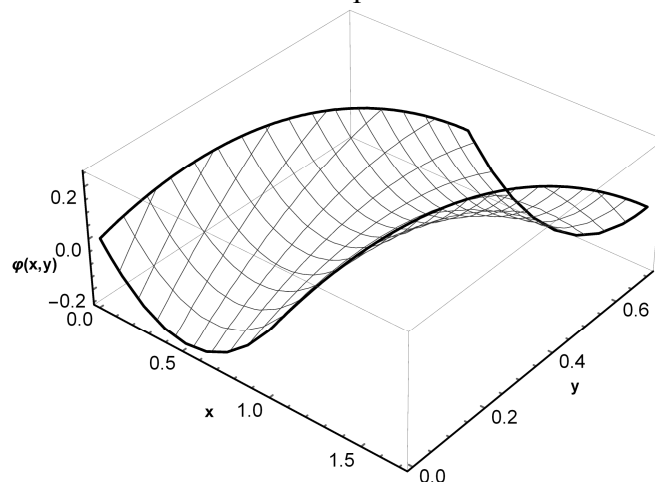


Рис. 3.19. Розв'язок у досліджуваній області, отриманий методом колокації.

3.4 Висновки до розділу

У розділі 3 порівнюються різні методи розв'язку задачі Діріхле для області, обмеженої паралелограмом: метод часткових областей і метод граничних інтегральних рівнянь. При розв'язку методом часткових областей використано метод мінімізації середньоквадратичного відхилення й метод колокації.

Метод мінімізації середньоквадратичного відхилення має істотні переваги в силу того, що для лінійних задач рівняння зважених нев'язок має симетричну або блочно-діагональну матрицю з переважаючою діагоналлю. Крім того, він ґрунтується на мінімізації середньоквадратичної інтегральної нев'язки. У розглянутому прикладі інтегрування вдалося виконати аналітично й помилка, по суті, визначалася погрішністю розв'язку системи лінійних рівнянь.

Результати роботи можуть бути застосовані при реалізації методу часткових областей для розв'язку лінійних граничних задач математичної фізики в складних областях.

Обчислювальні експерименти продемонстрували досить швидку збіжність чисельно-аналітичного розв'язку до точного. Наприклад, розв'язок методом часткових областей при кількості членів ряду $N=P=5$ приводить до похибки розв'язку, рівної 0.5%, а при $N=P=40$ – 0.01%. Чисельні розрахунки задачі Діріхле для гармонічної функції зроблені для найпростіших алгоритмів методу граничних інтегральних рівнянь. Результати обчислень порівнювалися з тестовим розв'язком. Розроблена програма була використана для здійснення числового експерименту щодо таких параметрів: n – кількість проміжків розбивки і ε – параметр регуляризації СЛАР.

Так, для $n = 16$ й $\varepsilon = 0.01$, досягнута погрішність розв'язку, рівна 14%. При порівнянні двох методів розрахунків задачі Діріхле для складної області виявилось, що метод часткових областей дає результати точніші, ніж метод граничних інтегральних рівнянь у найпростішій його реалізації.

РОЗДІЛ 4

КОЛИВАННЯ МЕМБРАНИ ПАРАЛЕЛОГРАМНОЇ ФОРМИ

У даному розділі в якості прикладу розглядається крайова задача Діріхле про коливання мембрани в області паралелограмної форми. Простота і прозорість процедур побудови розв'язку цієї задачі дозволяє достатньо наглядно проілюструвати певні особливості деяких сучасних підходів до розв'язання задач математичної фізики. Для багатьох типів областей, включаючи широке коло неканонічних областей, використання поняття про загальний розв'язок граничної задачі дає можливість побудувати чисельно-аналітичний розв'язок задачі. При цьому застосовуються добре відомі набори часткових розв'язків основних рівнянь математичної фізики. Головне питання полягає в тому, щоб вказати ефективні способи визначення довільних коефіцієнтів і функцій, котрі входять до загального розв'язку. Використовується традиційний підхід для отримання чисельно-аналітичних розв'язків, оснований на методі мінімізації середньоквадратичного відхилення, і методі колокації.

4.1 Постановки задач про коливання паралелограмної мембрани

Розглянемо задачу про гармонічні коливання мембрани, яка має форму паралелограма. Розрахункова область задачі представлена на рис. 4.1.

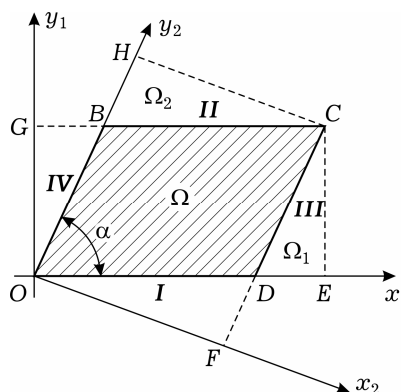


Рис. 4.1. Розрахункова область

При відсутності силового навантаження всередині області, яку займає мембрана, коливальний процес описується задачею Діріхле для рівняння Гельмгольца [90, 91], що має вигляд

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \varphi(x, y) = \Phi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (4.1)$$

Тут φ – поперечні переміщення мембрани, Ω – область, яку вона займає,

$\Gamma = \bigcup_{i=I}^{IV} \Gamma_i$ – границя цієї області, $\Gamma_I, \Gamma_{II}, \Gamma_{III}, \Gamma_{IV}$ – сторони паралелограма

відповідно OD, BC, DC, OB . З механічної точки зору дана задача описує кінематичне збудження коливань мембрани. Для її розв'язання може успішно бути застосований метод часткових областей у формі, використаний раніше у розділі 3.

На основі використання метода розв'язання задачі (4.1) може бути також розв'язана задача про коливання мембран з закріпленими краями, які збуджуються силовим навантаженням зі щільністю $F(x, y)$, розподіленим по її поверхні (динамічне збудження). Ця задача має вид

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = F(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ \varphi(x, y) = 0, & (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (4.2)$$

Для отримання розв'язку цієї задачі скористаємося математичним апаратом фундаментальних розв'язків, тобто таких розв'язків, котрі задовольняють рівняння

$$\nabla^2 \varphi^* + k^2 \varphi^* = \delta(x, y). \quad (4.3)$$

З механічної точки зору фундаментальний розв'язок являє собою функцію, яка задовольняє рівняння коливань мембрани (рівняння Гельмгольца) при дії зосередженої осцилюючої сили.

У випадку, що розглядається, від фундаментального розв'язку не вимагається виконання тих чи інших граничних умов, і ми можемо скористатися фундаментальним розв'язком виду

$$\varphi^*(x, y) = -\frac{1}{4} Y_0(\sqrt{x^2 + y^2}). \quad (4.4)$$

При цьому амплітуда переміщень у довільній точці мембрани, викликаних дією розподіленого по її поверхні Ω навантаження зі щільністю $F(x, y)$, обчислюється у вигляді його згортки з фундаментальним розв'язком (4.4):

$$\hat{\varphi}(x, y) = -\frac{1}{4} \int_{\Omega} F(\xi, \eta) Y_0(\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}) d\xi d\eta. \quad (4.5)$$

Задамо тепер в якості функції Φ в граничних умовах задачі (4.1) функцію $\hat{\varphi}$ з оберненим знаком:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} F(\xi, \eta) Y_0(\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}) d\xi d\eta \Big|_{\Gamma}. \quad (4.6)$$

Розв'язавши задачу (4.1) з даними граничними умовами і беручи суму отриманого розв'язку, який ми позначимо $\tilde{\varphi}$, з вимушеним (неоднорідним) розв'язком $\hat{\varphi}$ (4.5), ми отримуємо шуканий розв'язок задачі про вимушені коливання мембрани з закріпленням краєм:

$$\varphi(x, y) = \tilde{\varphi}(x, y) + \hat{\varphi}(x, y). \quad (4.7)$$

4.2 Розв'язання методом часткових областей

Основною метою при математичному моделюванні фізичних коливань є отримання їх кількісних характеристик в залежності від геометричних параметрів області їх існування і граничних умов. Як правило, досягнення цієї мети здійснюється з використанням деяких ітераційних процесів. Це може бути, наприклад, процес збільшення кількості членів в ряду Фур'є, який використовується для представлення шуканої функції. Для ефективної реалізації таких ітераційних процесів дуже важливо мати впевненість у тому, що вибором характеристик самого процесу забезпечується його стійкість і отриманням в результаті достовірних кількісних оцінок. У цьому сенсі метод часткових областей, який використовується в роботі, що приводить до

побудови загальних розв'язків граничних задач, має незаперечну перевагу. Стійкість і збіжність обчислювальних процедур при його реалізації забезпечується фундаментальними властивостями повноти систем функцій, які використовуються для представлення розв'язків.

Подібно до того, як це було зроблено у попередньому розділі при розв'язанні задачі Діріхле для рівняння Лапласа, розглянемо дві системи координат (рис. 4.1): $(x_1, y_1) \equiv (x, y)$ і (x_2, y_2) , котрі зв'язані такими співвідношеннями:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, \\ y_1 = -x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha; \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha, \\ y_2 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha. \end{cases} \quad (4.9)$$

Введемо позначення (рис. 4.1): Ω_1 – область, обмежена прямокутником $OGCE$; Ω_2 – область, обмежена прямокутником $OHCF$. Таким чином, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Нехай a, b, a', b', h, L – довжини відрізків OF, OH, OD, OB, OG, OE відповідно. Очевидно, що $a = a' \sin \alpha$, $b = b' + DF = b' + a' \cos \alpha$, $h = b' \sin \alpha$, і множину точок компонент границі Γ можна описати так:

$$\Gamma_I : y_1 = 0; x_1 \in [0; a']; \quad (4.10)$$

$$\Gamma_{II} : y_1 = h; x_1 \in [b' \cos \alpha; a' + b' \cos \alpha]; \quad (4.11)$$

$$\Gamma_{III} : x_2 = a; y_2 \in [a' \cos \alpha; b' + a' \cos \alpha]; \quad (4.12)$$

$$\Gamma_{IV} : x_2 = 0; y_2 \in [0; b']. \quad (4.13)$$

Запишемо граничні умови для рівняння (4.1):

$$\varphi_{\Gamma_I}(x_1) = -\frac{\cosh \frac{\pi \left(x_1 - \frac{a'}{2} \right)}{a'}}{\cosh \frac{\pi}{2}} + 1, \quad (4.14)$$

$$\varphi_{\Gamma_{II}}(x_1) = -\frac{\cosh\left(\frac{\pi\left(-\frac{a'}{2} - b'\cos(\alpha) + x_1\right)}{2}\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}} + 1, \quad (4.15)$$

$$\varphi_{\Gamma_{III}}(y_2) = \cos\frac{2\pi\left(-a'\cos\alpha - \frac{b'}{2} + y_2\right)}{b'} + 1, \quad (4.16)$$

$$\varphi_{\Gamma_{IV}}(y_2) = \cos\frac{2\pi\left(y_2 - \frac{b'}{2}\right)}{b'} + 1, \quad (4.17)$$

Згідно з методом часткових областей, шукаємо функцію $\varphi(x, y)$ представимо сумою розв'язків задач Діріхле $\varphi_1(x_1, y_1)$ в прямокутній області Ω_1 і $\varphi_2(x_2, y_2)$ – в прямокутній області Ω_2 :

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x_1, y_1) + \varphi_2(x_2, y_2), \quad (4.18)$$

де

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = y; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x\sin\alpha - y\cos\alpha, \\ y_2 = x\cos\alpha + y\sin\alpha. \end{cases} \quad (4.19)$$

При цьому будемо використовувати довільність при виборі граничних умов для функцій φ_1 і φ_2 на окремих ділянках границь областей Ω_1 і Ω_2 . Таким прийомом відомий і метод Шварца-Неймана [17]. Так, будемо вимагати нульових значень для функцій φ_1 і φ_2 на відрізках DE, GB, BH і DF.

Позначивши

$$\bar{\varphi}_1(x_2, y_2) = \varphi_1(x_1(x_2, y_2), y_1(x_2, y_2)), \quad (4.20)$$

$$\bar{\varphi}_2(x_1, y_1) = \varphi_2(x_2(x_1, y_1), y_2(x_1, y_1)) \quad (4.21)$$

сформулюємо граничні умови для суми функцій (4.18):

$$\varphi_1(x_1, 0) + \bar{\varphi}_2(x_1, 0) = \begin{cases} \varphi_I(x_1), & 0 < x_1 < a', \\ \bar{\psi}_I(x_1), & a' < x_1 < L; \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\varphi_1(x_1, h) + \bar{\varphi}_2(x_1, h) = \begin{cases} \varphi_{II}(x_1), & b' \cos \alpha < x_1 < a' + b' \cos \alpha, \\ \bar{\psi}_{II}(x_1), & 0 < x_1 < b' \cos \alpha; \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\bar{\varphi}_1(a, y_2) + \varphi_2(a, y_2) = \begin{cases} \varphi_{III}(y_2), & a' \cos \alpha < y_2 < b' + a' \cos \alpha, \\ \bar{\psi}_{III}(y_2), & 0 < y_2 < a' \cos \alpha; \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\bar{\varphi}_1(0, y_2) + \varphi_2(0, y_2) = \begin{cases} \varphi_{IV}(y_2), & 0 < y_2 < b', \\ \bar{\psi}_{IV}(y_2), & b' < y_2 < b. \end{cases} \quad (4.25)$$

В якості $\bar{\psi}_I(x_1)$, $\bar{\psi}_{II}(x_1)$, $\bar{\psi}_{III}(y_2)$, $\bar{\psi}_{IV}(y_2)$ можна вибрати довільні функції.

Без втрати загальності їх можна в подальшому покласти рівними нулю.

Вид областей Ω_1 і Ω_2 дозволяє представити розв'язки в них нескінченними рядами:

$$\varphi_1(x_1, y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y_1) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right), \quad (4.26)$$

$$\varphi_2(x_2, y_2) = \sum_{p=1}^{\infty} D_p(x_2) \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_2\right) \quad (4.27)$$

Оскільки $\varphi_1(x_1, y_1)$ має бути розв'язком рівняння Гельмгольца, ми приходимо до наступної системи рівнянь відносно функцій $A_n(y_1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 A_n(y_1)}{dy_1^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n(y_1) + k^2 A_n(y_1) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right) = 0. \quad (4.28)$$

Оскільки $\sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right) \neq 0$, то з (4.28) для визначення $A_n(y_1)$ отримуємо таку

систему звичайних однорідних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d^2 A_n(y_1)}{dy_1^2} - \left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - k^2 \right) A_n(y_1) = 0, \quad n=1, 2, \dots \quad (4.29)$$

Позначаючи $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$, $\mu_p = \frac{p\pi}{b}$, розв'язок системи (4.29) запишемо у вигляді

$$A_n(y_1) = A_n^{(1)} \begin{cases} e^{-\sqrt{\lambda_n^2 - k^2} y_1}, & \lambda_n^2 \geq k^2 \\ \cos \sqrt{k^2 - \lambda_n^2} y_1, & \lambda_n^2 < k^2 \end{cases} + A_n^{(2)} \begin{cases} e^{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2} (y_1 - h)}, & \lambda_n^2 \geq k^2 \\ \cos \sqrt{k^2 - \lambda_n^2} (y_1 - h), & \lambda_n^2 < k^2 \end{cases} \quad (4.30)$$

Позначимо

$$F_n^{(1)}(y_1) = \begin{cases} e^{-\sqrt{\lambda_n^2 - k^2} y_1}, & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \cos \sqrt{k^2 - \lambda_n^2} y_1, & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases}$$

$$F_n^{(2)}(y_1) = \begin{cases} e^{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2} (y_1 - h)}, & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \cos \sqrt{k^2 - \lambda_n^2} (y_1 - h), & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases}$$

Тепер ряд (4.26) набуває вигляду

$$\varphi_1(x_1, y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \sin(\lambda_n x_1) F_n^{(1)}(y_1) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \sin(\lambda_n x_1) F_n^{(2)}(y_1). \quad (4.31)$$

Аналогічним чином знаходимо $\varphi_2(x_2, y_2)$:

$$D_p(x_2) = D_p^{(1)} \begin{cases} e^{-\sqrt{\mu_p^2 - k^2} x_2}, & \mu_p^2 \geq k^2 \\ \cos \sqrt{k^2 - \mu_p^2} x_2, & \mu_p^2 < k^2 \end{cases} + D_p^{(2)} \begin{cases} e^{\sqrt{\mu_p^2 - k^2} (x_2 - a)}, & \mu_p^2 \geq k^2 \\ \cos \sqrt{k^2 - \mu_p^2} (x_2 - a), & \mu_p^2 < k^2 \end{cases} \quad (4.32)$$

Позначимо

$$G_p^{(1)}(x_2) = \begin{cases} e^{-\sqrt{\mu_p^2 - k^2} x_2}, & \mu_p^2 \geq k^2, \\ \cos \sqrt{k^2 - \mu_p^2} x_2, & \mu_p^2 < k^2, \end{cases}$$

$$G_p^{(2)}(x_2) = \begin{cases} e^{\sqrt{\mu_p^2 - k^2} (x_2 - a)}, & \mu_p^2 \geq k^2, \\ \cos \sqrt{k^2 - \mu_p^2} (x_2 - a), & \mu_p^2 < k^2, \end{cases}$$

Тепер ряд (4.27) набуває вигляду

$$\varphi_2(x_2, y_2) = \sum_{p=1}^{\infty} D_p^{(1)} \sin(\mu_p y_2) G_p^{(1)}(x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} D_p^{(2)} \sin(\mu_p y_2) G_p^{(2)}(x_2). \quad (4.33)$$

З урахуванням (4.31) і (4.33) шуканий загальний розв'язок (4.18) приймає вигляд

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \sin(\lambda_n x_1) F_n^{(1)}(y_1) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \sin(\lambda_n x_1) F_n^{(2)}(y_1) + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} D_p^{(1)} \sin(\mu_p y_2) G_p^{(1)}(x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} D_p^{(2)} \sin(\mu_p y_2) G_p^{(2)}(x_2), \end{aligned} \quad (4.34)$$

де координати зв'язані залежностями (4.19).

4.3 Метод мінімізації середньоквадратичних відхилень

Визначення констант $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $D_p^{(1)}$, $D_p^{(2)}$ в (4.34) здійснюється методом мінімізації середньоквадратичних відхилень [89]. В якості проєкційних систем функцій на границях Γ_I і Γ_{II} вибираємо систему $\left\{ \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L}x_1\right) \right\}$, $\tilde{n} = 1, 2, \dots$, а на границях Γ_{III} і Γ_{IV} систему $\left\{ \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b}y_2\right) \right\}$, $\tilde{p} = 1, 2, \dots$

Граничні умови задаємо на границях областей Ω_1 і Ω_2 , котрі включають в себе сторони паралелограма. З урахуванням редукції нескінченних рядів у представленні загального розв'язку (4.34) до скінченних з кількістю їх членів N і P відповідно, а також відповідним вибором кількості проєкційних функцій, отримаємо систему $2N + 2P$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $n = \overline{1, N}$ і $D_p^{(1)}$, $D_p^{(2)}$, $p = \overline{1, P}$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N A_n^{(1)} a_{1n\tilde{n}}^I + \sum_{n=1}^N A_n^{(2)} a_{2n\tilde{n}}^I + \sum_{p=1}^P D_p^{(1)} d_{1p\tilde{n}}^I + \sum_{p=1}^P D_p^{(2)} d_{2p\tilde{n}}^I &= \varphi_{\tilde{n}}^I, \\
 \sum_{n=1}^N A_n^{(1)} a_{1n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=1}^N A_n^{(2)} a_{2n\tilde{n}}^{II} + \sum_{p=1}^P D_p^{(1)} d_{1p\tilde{n}}^{II} + \sum_{p=1}^P D_p^{(2)} d_{2p\tilde{n}}^{II} &= \varphi_{\tilde{n}}^{II}, \\
 \sum_{n=1}^N A_n^{(1)} a_{1n\tilde{p}}^{III} + \sum_{n=1}^N A_n^{(2)} a_{2n\tilde{p}}^{III} + \sum_{p=1}^P D_p^{(1)} d_{1p\tilde{p}}^{III} + \sum_{p=1}^P D_p^{(2)} d_{2p\tilde{p}}^{III} &= \varphi_{\tilde{p}}^{III}, \\
 \sum_{n=1}^N A_n^{(1)} a_{1n\tilde{p}}^{IV} + \sum_{n=1}^N A_n^{(2)} a_{2n\tilde{p}}^{IV} + \sum_{p=1}^P D_p^{(1)} d_{1p\tilde{p}}^{IV} + \sum_{p=1}^P D_p^{(2)} d_{2p\tilde{p}}^{IV} &= \varphi_{\tilde{p}}^{IV},
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

де позначено

$$a_{1n\tilde{n}}^I = \int_0^L \sin(\lambda_n x_1) \sin(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1 = \frac{1}{2} L \delta_{n,\tilde{n}},$$

$$a_{2n\tilde{n}}^I = \int_0^L \sin(\lambda_n x_1) \sin(\lambda_{\tilde{n}} x_1) \begin{cases} e^{-h\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}}, & \lambda_n^2 \geq k^2 \\ \cos(-h\sqrt{k^2 - \lambda_n^2}), & \lambda_n^2 < k^2 \end{cases} dx_1 =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} L \delta_{n,\tilde{n}} e^{-h\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}}, & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \frac{1}{2} L \delta_{n,\tilde{n}} \cos(-h\sqrt{k^2 - \lambda_n^2}), & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases}$$

$$x_2 = x_1 \sin \alpha,$$

$$y_2 = x_1 \cos \alpha,$$

$$d_{1p\tilde{n}}^I = \begin{cases} \int_0^{a'} \sin(\lambda_{\tilde{n}} x_1) \sin(\mu_p x_1 \cos \alpha) e^{-x_1 \sin \alpha \sqrt{\mu_p^2 - k^2}} dx_1, & \mu_p^2 \geq k^2, \\ \int_0^{a'} \sin(\lambda_{\tilde{n}} x_1) \sin(\mu_p x_1 \cos \alpha) \cos(x_1 \sin \alpha \sqrt{k^2 - \mu_p^2}) dx_1, & \mu_p^2 < k^2, \end{cases}$$

$$d_{2p\tilde{n}}^I = \begin{cases} \int_0^{a'} \sin(\lambda_{\tilde{n}} x_1) \sin(\mu_p x_1 \cos \alpha) e^{-(x_1 \sin \alpha - a) \sqrt{\mu_p^2 - k^2}} dx_1, & \mu_p^2 \geq k^2, \\ \int_0^{a'} \sin(\lambda_{\tilde{n}} x_1) \sin(\mu_p x_1 \cos \alpha) \cos((x_1 \sin \alpha - a) \sqrt{k^2 - \mu_p^2}) dx_1, & \mu_p^2 < k^2, \end{cases}$$

$$\varphi_{\tilde{n}}^I = \int_0^{a'} \varphi_{\Gamma_I}(x_1) \sin(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1 + \int_{a'}^L \bar{\psi}_{\Gamma_I}(x_1) \sin(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1 =$$

$$= \int_0^{a'} \left(1 - \frac{\cosh \frac{\pi \left(x_1 - \frac{a'}{2} \right)}{a'}}{\cosh \frac{\pi}{2}} \right) \sin(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1 + 0,$$

(4.36)

$$a_{1n\tilde{n}}^{II} = \begin{cases} \frac{1}{2} L \delta_{n,\tilde{n}} e^{-h\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}}, & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \frac{1}{2} L \delta_{n,\tilde{n}} \cos(h\sqrt{k^2 - \lambda_n^2}), & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases}$$

$$a_{2n\tilde{n}}^{II} = \frac{1}{2} L \delta_{n,\tilde{n}},$$

$$\begin{aligned}
d_{1p\tilde{n}}^{II} &= \begin{cases} \int_{b'\cos\alpha}^L \sin(\lambda_{\tilde{n}}x_1) \sin(\mu_p(h\sin\alpha + x_1\cos\alpha)) e^{(-h\cos\alpha + x_1\sin\alpha)\sqrt{\mu_p^2 - k^2}} dx_1, & \mu_p^2 \geq k^2, \\ \int_{b'\cos\alpha}^L \sin(\lambda_{\tilde{n}}x_1) \sin(\mu_p(h\sin\alpha + x_1\cos\alpha)) \cos((-h\cos\alpha + x_1\sin\alpha)\sqrt{k^2 - \mu_p^2}) dx_1, & \mu_p^2 < k^2, \end{cases} \\
d_{2p\tilde{n}}^{II} &= \begin{cases} \int_{b'\cos\alpha}^L \sin(\lambda_{\tilde{n}}x_1) \sin(\mu_p(h\sin\alpha + x_1\cos\alpha)) e^{(-h\cos\alpha + x_1\sin\alpha - a)\sqrt{\mu_p^2 - k^2}} dx_1, & \mu_p^2 \geq k^2, \\ \int_{b'\cos\alpha}^L \sin(\lambda_{\tilde{n}}x_1) \sin(\mu_p(h\sin\alpha + x_1\cos\alpha)) \cos((-h\cos\alpha + x_1\sin\alpha - a)\sqrt{k^2 - \mu_p^2}) dx_1, & \mu_p^2 < k^2, \end{cases} \\
\varphi_{\tilde{n}}^{II} &= \int_{b'\cos\alpha}^L \varphi_{\Gamma_{II}}(x_1) \sin(\lambda_{\tilde{n}}x_1) dx_1 + \int_0^{b'\cos\alpha} \bar{\psi}_{\Gamma_{II}}(x_1) \sin(\lambda_{\tilde{n}}x_1) dx_1 = \\
&= \int_{b'\cos\alpha}^L \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{\pi\left(x_1 - \frac{a'}{2} - b'\cos\alpha\right)}{a'}\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}} \right) \sin(\lambda_{\tilde{n}}x_1) dx_1 + 0, \tag{4.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1n\tilde{p}}^{III} &= \begin{cases} \int_{a'\cos\alpha}^b \sin(\mu_{\tilde{p}}y_2) \sin(\lambda_n(asin\alpha + y_2\cos\alpha)) e^{-(y_2\sin\alpha - a\cos\alpha)\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} dy_2, & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \int_{a'\cos\alpha}^b \sin(\mu_{\tilde{p}}y_2) \sin(\lambda_n(asin\alpha + y_2\cos\alpha)) \cos((y_2\sin\alpha - a\cos\alpha)\sqrt{k^2 - \lambda_n^2}) dy_2, & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases} \\
a_{2n\tilde{p}}^{III} &= \begin{cases} \int_{a'\cos\alpha}^b \sin(\mu_{\tilde{p}}y_2) \sin(\lambda_n(asin\alpha + y_2\cos\alpha)) e^{(y_2\sin\alpha - a\cos\alpha - h)\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} dy_2, & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \int_{a'\cos\alpha}^b \sin(\mu_{\tilde{p}}y_2) \sin(\lambda_n(asin\alpha + y_2\cos\alpha)) \cos((y_2\sin\alpha - a\cos\alpha - h)\sqrt{k^2 - \lambda_n^2}) dy_2, & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$d_{1p\tilde{p}}^{III} = \begin{cases} \frac{1}{2} b \delta_{p,\tilde{p}} e^{-a\sqrt{\mu_p^2 - k^2}}, & \mu_p^2 \geq k^2, \\ \frac{1}{2} b \delta_{p,\tilde{p}} \cos(a\sqrt{k^2 - \mu_p^2}), & \mu_p^2 < k^2, \end{cases}$$

$$d_{2p\tilde{p}}^{III} = \frac{1}{2} b \delta_{p,\tilde{p}},$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{p}}^{III} &= \int_{a' \cos \alpha}^b \varphi_{\Gamma_{III}}(y_2) \sin(\mu_{\tilde{p}} y_2) dy_2 + \int_0^{a' \cos \alpha} \bar{\psi}_{\Gamma_{III}}(y_2) \sin(\mu_{\tilde{p}} y_2) dy_2 = \\ &= \int_{a' \cos \alpha}^b \left(\cos \frac{2\pi \left(y_2 - a' \cos \alpha - \frac{b'}{2} \right)}{b'} + 1 \right) \sin(\mu_{\tilde{p}} y_2) dy_2 + 0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$a_{1n\tilde{p}}^{IV} = \begin{cases} \int_0^{b'} \sin(\mu_{\tilde{p}} y_2) \sin(\lambda_n y_2 \cos \alpha) e^{-y_2 \sin \alpha \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} dy_2, & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \int_0^{b'} \sin(\mu_{\tilde{p}} y_2) \sin(\lambda_n y_2 \cos \alpha) \cos(y_2 \sin \alpha \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}) dy_2, & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases}$$

$$a_{2n\tilde{p}}^{IV} = \begin{cases} \int_{a' \cos \alpha}^b \sin(\mu_{\tilde{p}} y_2) \sin(\lambda_n y_2 \cos \alpha) e^{(y_2 \sin \alpha - h) \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} dy_2, & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \int_{a' \cos \alpha}^b \sin(\mu_{\tilde{p}} y_2) \sin(\lambda_n y_2 \cos \alpha) \cos((y_2 \sin \alpha - h) \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}) dy_2, & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases}$$

$$d_{1p\tilde{p}}^{IV} = \frac{1}{2} b \delta_{p, \tilde{p}},$$

$$d_{2p\tilde{p}}^{IV} = \begin{cases} \frac{1}{2} b \delta_{p, \tilde{p}} e^{-a \sqrt{\mu_p^2 - k^2}}, & \mu_p^2 \geq k^2, \\ \frac{1}{2} b \delta_{p, \tilde{p}} \cos(-a \sqrt{k^2 - \mu_p^2}), & \mu_p^2 < k^2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{p}}^{IV} &= \int_0^{b'} \varphi_{\Gamma_{IV}}(y_2) \sin(\mu_{\tilde{p}} y_2) dy_2 + \int_{b'}^b \bar{\psi}_{\Gamma_{IV}}(y_2) \sin(\mu_{\tilde{p}} y_2) dy_2 = \\ &= \int_0^{b'} \left(\cos \frac{2\pi \left(y_2 - \frac{b'}{2} \right)}{b'} + 1 \right) \sin(\mu_{\tilde{p}} y_2) dy_2 + 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

Чисельна реалізація запропонованого метода проведена в системі Wolfram Mathematica. Обчислення проводились при $N = P = 60$ і при $N = P = 120$. Похибки метода наведені на рис. 4.2–4.9 Видно, що отримані розв'язки в околах кутових точок паралелограма мають найбільшу осцилюючу похибку.

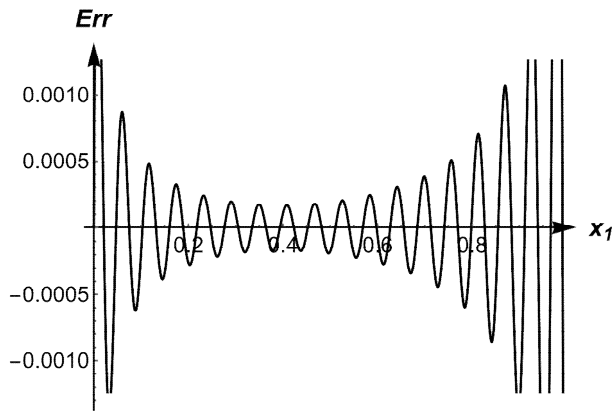


Рис 4.2. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_I по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=60$ при $k=8$.

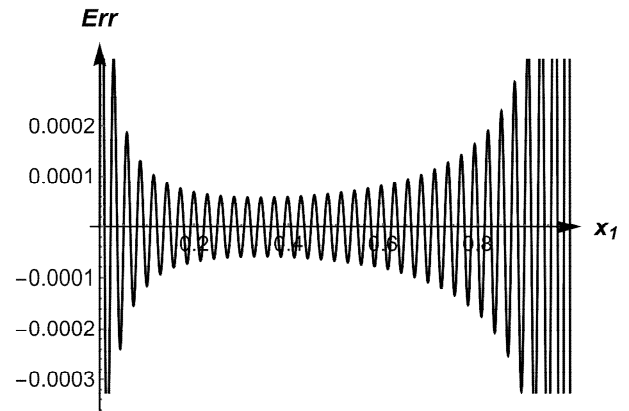


Рис 4.3. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_I по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=120$ при $k=8$.

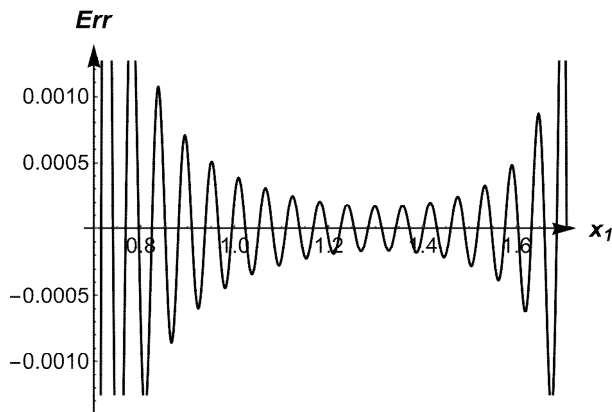


Рис 4.4. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{II} по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=60$ при $k=8$.

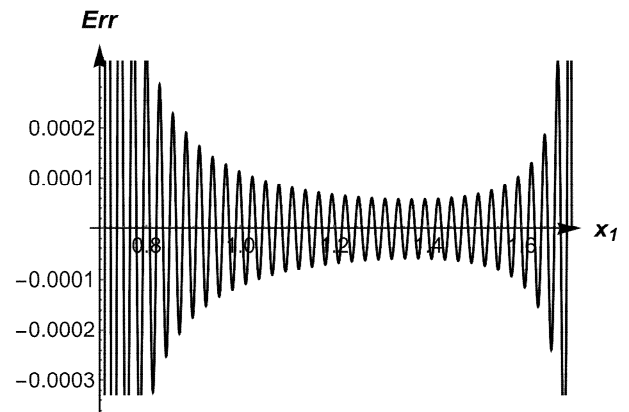


Рис 4.5. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{II} по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=120$ при $k=8$.

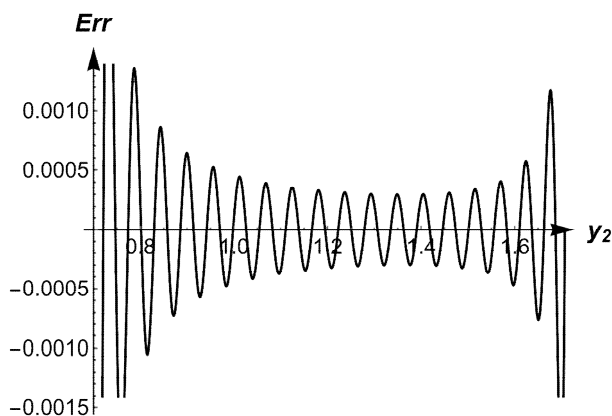


Рис 4.6. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{III} по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=60$ при $k=8$.

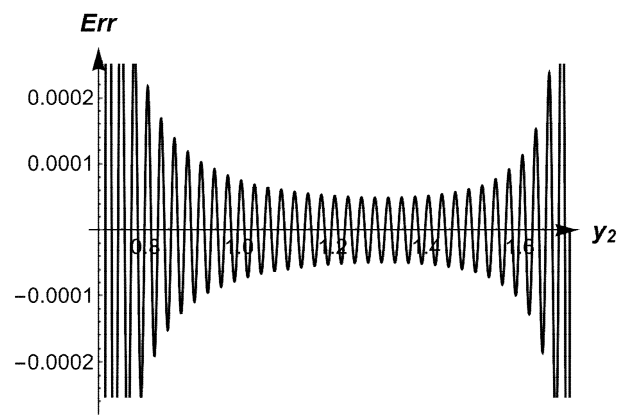


Рис 4.7. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{III} по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=120$ при $k=8$.

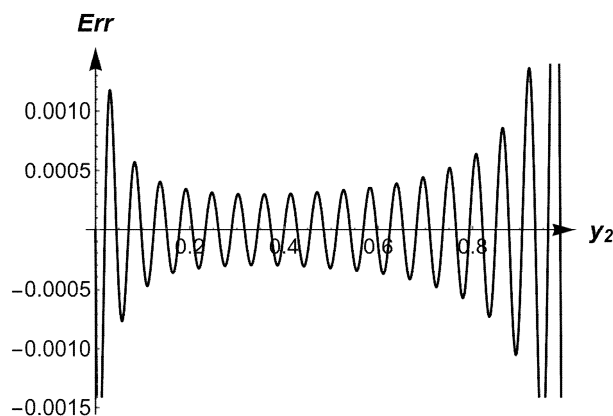


Рис 4.8. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{IV} по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=60$ при $k=8$.

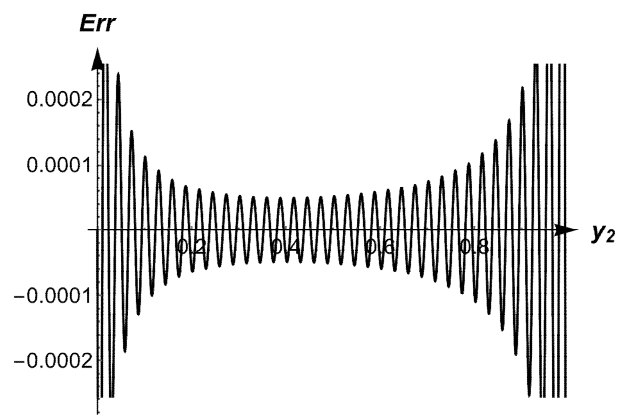


Рис 4.9. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{IV} по методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N=P=120$ при $k=8$.

4.4 Метод колокації

Визначення констант $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $D_p^{(1)}$, $D_p^{(2)}$ в (4.34) може бути також здійснено методом колокації, який полягає у поточковому задоволенні граничних умов в окремих точках границі (точках колокації). Система лінійних алгебраїчних рівнянь при цьому має форму:

$$\Gamma_I^{main} : \sum_{n=1}^N A_n^{(1)} a_{1n\tilde{n}}^I + \sum_{n=1}^N A_n^{(2)} a_{2n\tilde{n}}^I + \sum_{p=1}^P D_p^{(1)} d_{1p\tilde{n}}^I + \sum_{p=1}^P D_p^{(2)} d_{2p\tilde{n}}^I = \varphi_{\tilde{n}}^I,$$

$$\Gamma_I^{add} : \sum_{n=1}^N A_n^{(1)} a_{1n\tilde{n}}^{Iadd} + \sum_{n=1}^N A_n^{(2)} a_{2n\tilde{n}}^{Iadd} + \sum_{p=1}^P D_p^{(1)} d_{1p\tilde{n}}^{Iadd} + \sum_{p=1}^P D_p^{(2)} d_{2p\tilde{n}}^{Iadd} = \varphi_{\tilde{n}}^{Iadd},$$

$$\Gamma_{II}^{main} : \sum_{n=1}^N A_n^{(1)} a_{1n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=1}^N A_n^{(2)} a_{2n\tilde{n}}^{II} + \sum_{p=1}^P D_p^{(1)} d_{1p\tilde{n}}^{II} + \sum_{p=1}^P D_p^{(2)} d_{2p\tilde{n}}^{II} = \varphi_{\tilde{n}}^{II},$$

$$\Gamma_{II}^{add} : \sum_{n=1}^N A_n^1 a_{1n\tilde{n}}^{IIadd} + \sum_{n=1}^N A_n^2 a_{2n\tilde{n}}^{IIadd} + \sum_{p=1}^P D_p^1 d_{1p\tilde{n}}^{IIadd} + \sum_{p=1}^P D_p^2 d_{2p\tilde{n}}^{IIadd} = \varphi_{\tilde{n}}^{IIadd},$$

$$\Gamma_{III}^{main} : \sum_{n=1}^N A_n^{(1)} a_{1n\tilde{p}}^{III} + \sum_{n=1}^N A_n^{(2)} a_{2n\tilde{p}}^{III} + \sum_{p=1}^P D_p^{(1)} d_{1p\tilde{p}}^{III} + \sum_{p=1}^P D_p^{(2)} d_{2p\tilde{p}}^{III} = \varphi_{\tilde{p}}^{III},$$

$$\Gamma_{III}^{add} : \sum_{n=1}^N A_n^1 a_{1n\tilde{p}}^{IIIadd} + \sum_{n=1}^N A_n^2 a_{2n\tilde{p}}^{IIIadd} + \sum_{p=1}^P D_p^1 d_{1p\tilde{p}}^{IIIadd} + \sum_{p=1}^P D_p^2 d_{2p\tilde{p}}^{IIIadd} = \varphi_{\tilde{p}}^{IIIadd},$$

$$\Gamma_{IV}^{main} : \sum_{n=1}^N A_n^{(1)} a_{1n\tilde{p}}^{IV} + \sum_{n=1}^N A_n^{(2)} a_{2n\tilde{p}}^{IV} + \sum_{p=1}^P D_p^{(1)} d_{1p\tilde{p}}^{IV} + \sum_{p=1}^P D_p^{(2)} d_{2p\tilde{p}}^{IV} = \varphi_{\tilde{p}}^{IV},$$

$$\Gamma_{IV}^{add} : \sum_{n=1}^N A_n^{(1)} a_{1n\tilde{p}}^{IVadd} + \sum_{n=1}^N A_n^{(2)} a_{2n\tilde{p}}^{IVadd} + \sum_{p=1}^P D_p^{(1)} d_{1p\tilde{p}}^{IVadd} + \sum_{p=1}^P D_p^{(2)} d_{2p\tilde{p}}^{IVadd} = \varphi_{\tilde{p}}^{IVadd},$$

(4.40)

$N_{main}^{(I/II)}$ визначається так, щоб $\{x_{1n}, (0, h)\} \in (I/II)$.

$P_{main}^{(III/IV)}$ визначається так, щоб $\{(a, 0), y_{2n}\} \in (III/IV)$.

$N_{add}^{(I/II)}$ – доповнення до $N_{main}^{(I/II)}$.

$P_{add}^{(III/IV)}$ – доповнення до $P_{main}^{(III/IV)}$.

Таким чином,
$$\begin{cases} N_{main}^{(I/II)} + N_{add}^{(I/II)} = N \\ P_{main}^{(III/IV)} + P_{add}^{(III/IV)} = P \end{cases}$$

Порядок системи $2N + 2P$ рівнянь відносно коефіцієнтів рядів у (4.34) з $2N + 2P$ невідомими.

$$\begin{aligned} a_{1n\tilde{n}}^I &= \sin(\lambda_n x_{1\tilde{n}}), \\ a_{2n\tilde{n}}^I &= \begin{cases} \sin(\lambda_n x_{1\tilde{n}}) e^{-h\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}}, & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \sin(\lambda_n x_{1\tilde{n}}) \cos(-h\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}), & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases} \\ d_{1p\tilde{n}}^I &= \begin{cases} \sin(\mu_p x_{1\tilde{n}} \cos \alpha) e^{-x_{1\tilde{n}} \sin \alpha \sqrt{\mu_p^2 - k^2}}, & \mu_p^2 \geq k^2, \\ \sin(\mu_p x_{1\tilde{n}} \cos \alpha) \cos(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha \sqrt{k^2 - \mu_p^2}), & \mu_p^2 < k^2, \end{cases} \\ d_{2p\tilde{n}}^I &= \begin{cases} \sin(\mu_p x_{1\tilde{n}} \cos \alpha) e^{-(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - a) \sqrt{\mu_p^2 - k^2}}, & \mu_p^2 \geq k^2, \\ \sin(\mu_p x_{1\tilde{n}} \cos \alpha) \cos((x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - a) \sqrt{k^2 - \mu_p^2}), & \mu_p^2 < k^2, \end{cases} \\ \varphi_{\tilde{n}}^I &= \varphi_{\Gamma_I}(x_{1\tilde{n}}), x_{1\tilde{n}} = 0 + \tilde{n} \frac{L}{(N+1)}, \tilde{n} = \overline{1, N_{main}^I}; N = N_{main}^I + N_{add}^I, \end{aligned}$$

$$a_{1n\tilde{n}}^{Iadd} = a_{1n\tilde{n}}^I, a_{2n\tilde{n}}^{Iadd} = a_{2n\tilde{n}}^I, d_{1p\tilde{n}}^{Iadd} = 0, d_{2p\tilde{n}}^{Iadd} = 0, \varphi_{\tilde{n}}^{Iadd} = \overline{\psi_{\Gamma_I}(x_{1\tilde{n}})}, \tilde{n} = \overline{N_{main}^I + 1, N},$$

(4.41)

$$a_{1n\tilde{n}}^{II} = \begin{cases} \sin(\lambda_n x_{1\tilde{n}}) e^{-h\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}}, & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \sin(\lambda_n x_{1\tilde{n}}) \cos(h\sqrt{k^2 - \lambda_n^2}), & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
a_{2n\tilde{n}}^{II} &= \sin(\lambda_n x_{1\tilde{n}}), \\
d_{1p\tilde{n}}^{II} &= \begin{cases} \sin(\mu_p (h \sin \alpha + x_{1\tilde{n}} \cos \alpha)) e^{-(-h \cos \alpha + x_{1\tilde{n}} \sin \alpha) \sqrt{\mu_p^2 - k^2}}, & \mu_p^2 \geq k^2, \\ \sin(\mu_p (h \sin \alpha + x_{1\tilde{n}} \cos \alpha)) \cos((-h \cos \alpha + x_{1\tilde{n}} \sin \alpha) \sqrt{k^2 - \mu_p^2}), & \mu_p^2 < k^2, \end{cases} \\
d_{2p\tilde{n}}^{II} &= \begin{cases} \sin(\mu_p (h \sin \alpha + x_{1\tilde{n}} \cos \alpha)) e^{(-h \cos \alpha + x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - a) \sqrt{\mu_p^2 - k^2}}, & \mu_p^2 \geq k^2, \\ \sin(\mu_p (h \sin \alpha + x_{1\tilde{n}} \cos \alpha)) \cos((-h \cos \alpha + x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - a) \sqrt{k^2 - \mu_p^2}), & \mu_p^2 < k^2, \end{cases} \\
\varphi_{\tilde{n}}^{II} &= \varphi_{\Gamma_{II}}(x_{1\tilde{n}}), \quad \tilde{n} = \overline{N_{add}^{II} + 1, N}, \\
a_{1n\tilde{n}}^{IIadd} &= a_{1n\tilde{n}}^{II}, a_{2n\tilde{n}}^{IIadd} = a_{2n\tilde{n}}^{II}, d_{1p\tilde{n}}^{IIadd} = 0, d_{2p\tilde{n}}^{IIadd} = 0, \varphi_{\tilde{n}}^{IIadd} = \overline{\psi_{\Gamma_{II}}(x_{1\tilde{n}})}, \tilde{n} = \overline{1, N_{add}^{II}},
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
a_{1n\tilde{p}}^{III} &= \begin{cases} \sin(\lambda_n (a \sin \alpha + y_{2\tilde{p}} \cos \alpha)) e^{-(y_{2\tilde{p}} \sin \alpha - a \cos \alpha) \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}}, & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \sin(\lambda_n (a \sin \alpha + y_{2\tilde{p}} \cos \alpha)) \cos((y_{2\tilde{p}} \sin \alpha - a \cos \alpha) \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}), & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases} \\
a_{2n\tilde{p}}^{III} &= \begin{cases} \sin(\lambda_n (a \sin \alpha + y_{2\tilde{p}} \cos \alpha)) e^{(y_{2\tilde{p}} \sin \alpha - a \cos \alpha - h) \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}}, & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \sin(\lambda_n (a \sin \alpha + y_{2\tilde{p}} \cos \alpha)) \cos((y_{2\tilde{p}} \sin \alpha - a \cos \alpha - h) \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}), & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases} \\
d_{1p\tilde{p}}^{III} &= \begin{cases} \sin(\mu_p y_{2\tilde{p}}) e^{-a \sqrt{\mu_p^2 - k^2}}, & \mu_p^2 \geq k^2, \\ \sin(\mu_p y_{2\tilde{p}}) \cos(a \sqrt{k^2 - \mu_p^2}), & \mu_p^2 < k^2, \end{cases} \\
d_{2p\tilde{p}}^{III} &= \sin(\mu_p y_{2\tilde{p}}), \\
\varphi_{\tilde{p}}^{III} &= \varphi_{\Gamma_{III}}(y_{2\tilde{p}}), \quad \tilde{p} = \overline{P_{add}^{III} + 1, P}, \\
a_{1n\tilde{p}}^{IIIadd} &= 0, \quad a_{2n\tilde{p}}^{IIIadd} = 0, \quad d_{1p\tilde{p}}^{IIIadd} = d_{1p\tilde{p}}^{III}, \quad d_{2p\tilde{p}}^{IIIadd} = d_{2p\tilde{p}}^{III}, \\
\varphi_{\tilde{p}}^{IIIadd} &= \overline{\psi_{\Gamma_{III}}(y_{2\tilde{p}})}, \quad \tilde{p} = \overline{1, P_{add}^{III}},
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
a_{1n\tilde{p}}^{IV} &= \begin{cases} \sin(\lambda_n y_{2\tilde{p}} \cos \alpha) e^{-y_{2\tilde{p}} \sin \alpha \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}}, & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \sin(\lambda_n y_{2\tilde{p}} \cos \alpha) \cos(y_{2\tilde{p}} \sin \alpha \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}), & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases} \\
a_{2n\tilde{p}}^{IV} &= \begin{cases} \sin(\lambda_n y_{2\tilde{p}} \cos \alpha) e^{(y_{2\tilde{p}} \sin \alpha - h) \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}}, & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \sin(\lambda_n y_{2\tilde{p}} \cos \alpha) \cos((y_{2\tilde{p}} \sin \alpha - h) \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}), & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases} \\
d_{1p\tilde{p}}^{IV} &= \sin(\mu_p y_{2\tilde{p}}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{2p\tilde{p}}^{IV} &= \begin{cases} \sin(\mu_{\tilde{p}} y_{2\tilde{p}}) e^{-a\sqrt{\mu_{\tilde{p}}^2 - k^2}}, & \mu_{\tilde{p}}^2 \geq k^2, \\ \sin(\mu_{\tilde{p}} y_{2\tilde{p}}) \cos(-a\sqrt{k^2 - \mu_{\tilde{p}}^2}), & \mu_{\tilde{p}}^2 < k^2, \end{cases} \\
 \varphi_{\tilde{p}}^{IV} &= \varphi_{\Gamma_{IV}}(y_{2\tilde{p}}), \tilde{p} = 1, P_{main}^{IV}, \\
 a_{1n\tilde{p}}^{IVadd} &= 0, \quad a_{2n\tilde{p}}^{IVadd} = 0, \quad d_{1p\tilde{p}}^{IVadd} = d_{1p\tilde{p}}^{IV}, \quad d_{2p\tilde{p}}^{IVadd} = d_{2p\tilde{p}}^{IV}, \\
 \varphi_{\tilde{p}}^{IVadd} &= \bar{\psi}_{\Gamma_{IV}}(y_{2\tilde{p}}), \quad \tilde{p} = P_{main}^{IV} + 1, P,
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

На рис 4.10 – 4.17 показані похибки задоволення граничних умов на границях паралелограма по методу колокації при $N = P = 60$ і $N = P = 120$.

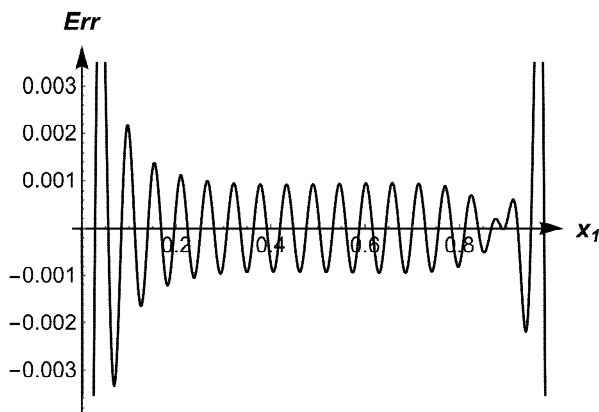


Рис 4.10. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_I по методу колокації при $N=P=60$ при $k=8$.

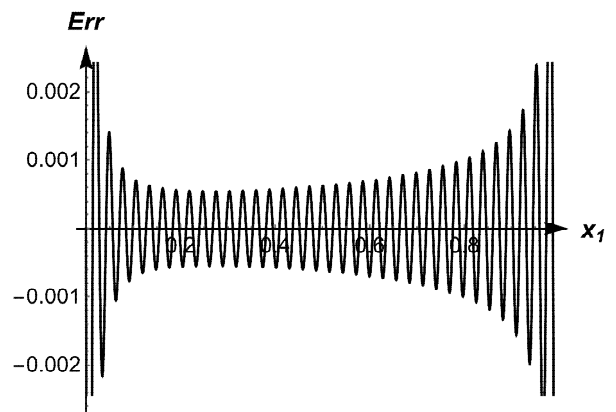


Рис 4.11. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_I по методу колокації при $N=P=120$ при $k=8$.

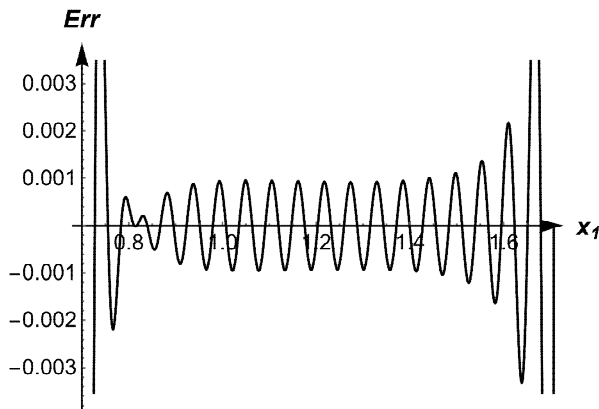


Рис 4.12. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{II} по методу колокації при $N=P=60$ при $k=8$.

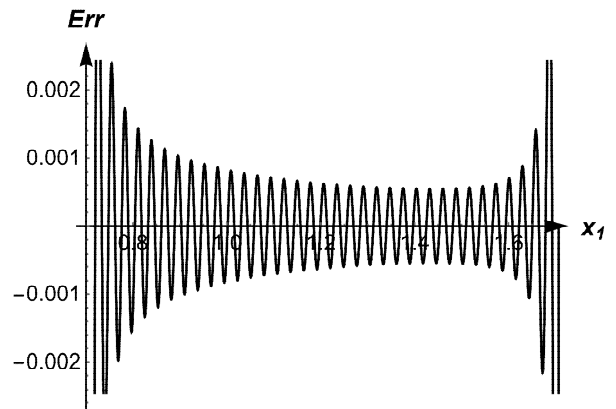


Рис 4.13. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{II} по методу колокації при $N=P=120$ при $k=8$.

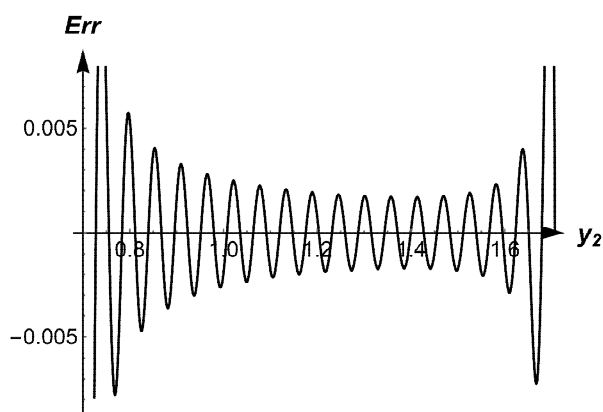


Рис 4.14. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{III} по методу колокації при $N=P=60$ при $k=8$.

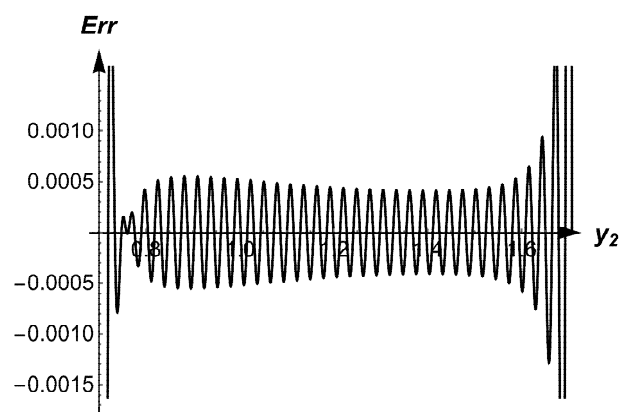


Рис 4.15. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{III} по методу колокації при $N=P=120$ при $k=8$.

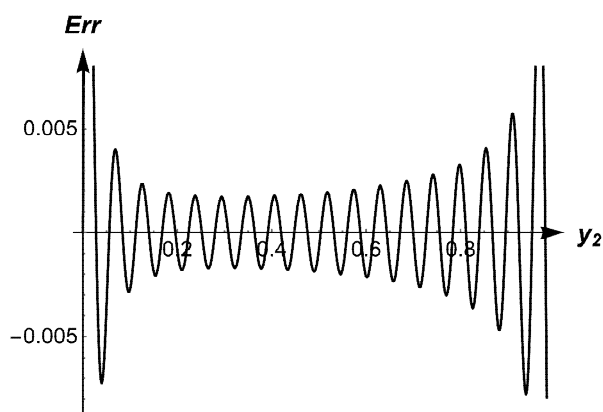


Рис 4.16. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{IV} по методу колокації при $N=P=60$ при $k=8$.

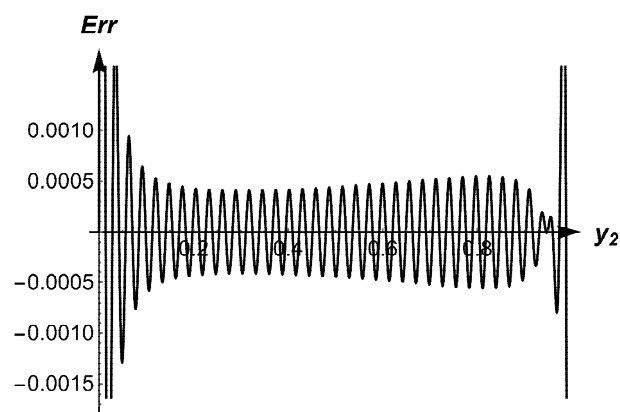


Рис 4.17. Похибка задоволення граничних умов на границі Γ_{IV} по методу колокації при $N=P=120$ при $k=8$.

Порівняння результатів для двох систем точок колокації (60 і 120 точок) чітко показує, що збільшення кількості точок колокації приводить до підвищення якості виконання граничних умов. Цікавим є факт наявності відносно високої похибки в дуже вузьких областях поблизу кінців граничних відрізків. Можливо, це є специфічною особливістю методу колокації, а при використанні, наприклад, методу мінімізації середньоквадратичного відхилення, цей недолік буде відсутній. Однак для визначення спектра власних частот методом колокації локальні відхилення в граничних умовах не мають істотного впливу. Крім того, порівняння даних для 60 і 120 точок колокації

показує, що збільшення числа точок колокації приводить до підвищення точності і, при необхідності, число таких точок може бути значно збільшено.

4.5 Коливання мембрани при динамічному збудженні. Метод мінімізації середньоквадратичного відхилення

Нехай на паралелограмну мембрану діє розподілене навантаження, що має щільність

$$F(x, y) = \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi(x - y \cot \alpha)}{a'}\right). \quad (4.45)$$

При цьому відповідний такому навантаженню неоднорідний розв'язок (4.5) має вигляд

$$\hat{\phi}(x_1, y_1) = -\frac{1}{4} \int_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi \eta}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi(\xi - \eta \cot \alpha)}{a'}\right) Y_0(\sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2}) d\xi d\eta. \quad (4.46)$$

Вирази для коефіцієнтів лінійної алгебраїчної системи (4.35) у даному випадку залишаються такими ж, як і в розглянутій раніше задачі про кінематичне збудження коливань мембрани, а зміни торкаються лише правих частин, котрі відображають граничні умови задачі. При використанні метода мінімізації середньоквадратичного відхилення (функції $\bar{\psi}_I(x_1)$, $\bar{\psi}_{II}(x_1)$, $\bar{\psi}_{III}(y_2)$, $\bar{\psi}_{IV}(y_2)$ покладаються рівними нулю) для правих частин системи ми маємо:

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{n}}^I &= \frac{1}{4} \int_0^{a'} \sin(\lambda_{\tilde{n}} x_1) \left(\int_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi \eta}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi(\xi - \eta \cot \alpha)}{a'}\right) Y_0(k\sqrt{\eta^2 + (x_1 - \xi)^2}) d\eta d\xi \right) dx_1, \\ \varphi_{\tilde{n}}^{II} &= \frac{1}{4} \int_{b' \cos \alpha}^L \sin(\lambda_{\tilde{n}} x_1) \left(\int_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi \eta}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi(\xi - \eta \cot \alpha)}{a'}\right) Y_0(k\sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (h - \eta)^2}) d\eta d\xi \right) dx_1, \\ \varphi_{\tilde{p}}^{III} &= \frac{1}{4} \int_{a' \cos \alpha}^b \sin(\mu_{\tilde{p}} y_2) \left(\int_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi \eta}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi(\xi - \eta \cot \alpha)}{a'}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times Y_0\left(k\sqrt{((-a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha) - \eta)^2 + ((a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha) - \xi)^2}\right) d\eta d\xi \right) dy_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{p}}^{IV} = & \frac{1}{4} \int_0^{b'} \sin(\mu_{\tilde{p}} y_2) \left(\int_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi\eta}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi(\xi - \eta \cot \alpha)}{a'}\right) \times \right. \\ & \left. \times Y_0 \left(k \sqrt{(y_2 \sin \alpha - \eta)^2 + (y_2 \cos \alpha - \xi)^2} \right) d\eta d\xi \right) dy_2, \end{aligned} \quad (4.47)$$

Розв'язуючи отриману лінійну алгебраїчну систему, ми знаходимо коефіцієнти редукованих рядів. Потім для знаходження амплітуди переміщень у довільній точці мембрани нам потрібно скласти даний однорідний розв'язок з неоднорідним розв'язком (4.46).

4.6 Коливання мембрани при динамічному збудженні. Метод колокації

Вирази для коефіцієнтів лінійної алгебраїчної системи (4.40) залишаються такими ж, як і в розглянутій раніше з використанням метода колокації задачі про кінематичне збудження коливань мембрани. Для правих частин системи ми маємо:

$$\begin{aligned} \varphi_{\Gamma_I}(x_{1\tilde{n}}) &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi\eta}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi(\xi - \eta \cot \alpha)}{\tilde{a}}\right) Y_0 \left(k \sqrt{\eta^2 + (x_{1\tilde{n}} - \xi)^2} \right) d\eta d\xi, \\ \varphi_{\Gamma_{II}}(x_{1\tilde{n}}) &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi\eta}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi(\xi - \eta \cot \alpha)}{\tilde{a}}\right) Y_0 \left(k \sqrt{(x_{1\tilde{n}} - \xi)^2 + (h - \eta)^2} \right) d\eta d\xi, \\ \varphi_{\Gamma_{III}}(y_{2\tilde{p}}) &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi\eta}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi(\xi - \eta \cot \alpha)}{\tilde{a}}\right) \times \\ & \quad \times Y_0 \left(k \sqrt{((-a \cos \alpha + y_{2\tilde{p}} \sin \alpha) - \eta)^2 + ((a \sin \alpha + y_{2\tilde{p}} \cos \alpha) - \xi)^2} \right) d\eta d\xi, \\ \varphi_{\Gamma_{IV}}(y_{2\tilde{p}}) &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi\eta}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi(\xi - \eta \cot \alpha)}{\tilde{a}}\right) \times \\ & \quad \times Y_0 \left(k \sqrt{(y_{2\tilde{p}} \sin \alpha - \eta)^2 + (y_{2\tilde{p}} \cos \alpha - \xi)^2} \right) d\eta d\xi, \end{aligned} \quad (4.48)$$

Поведінка похибок розв'язків задачі про динамічне збудження коливань мембрани при використанні метода мінімізації середньоквадратичного

відхилення і метода колокації аналогічна похибкам, які мають місце у випадку задачі про кінематичне збудження.

Форми коливань мембрани при кінематичному збудженні.

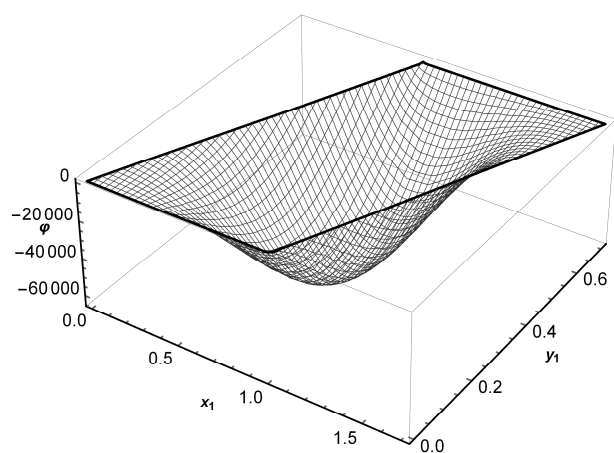


Рис.4.18. Форма коливань мембрани при $k=5,895$.

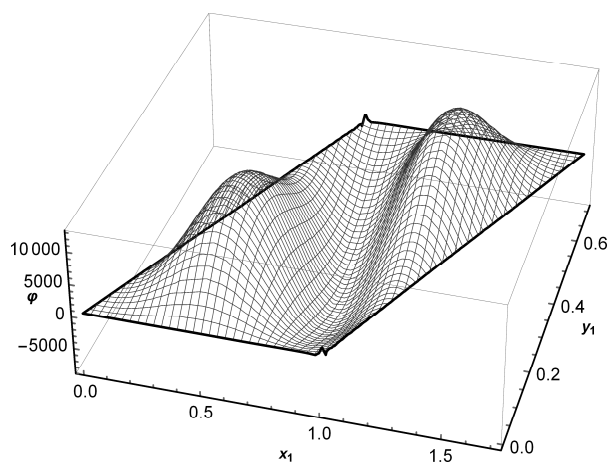


Рис.4.19. Форма коливань мембрани при $k=10,013$.

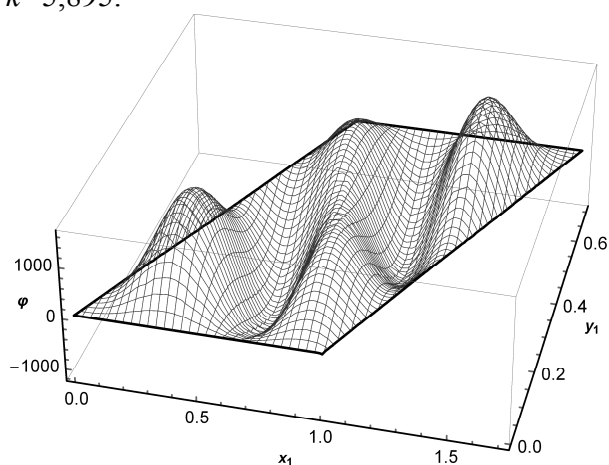


Рис.4.20. Форма коливань мембрани при $k=13,6$.

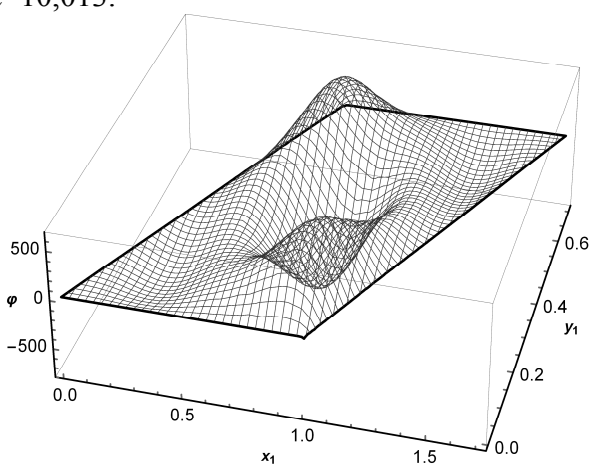


Рис.4.21. Форма коливань мембрани при $k=14,77$.

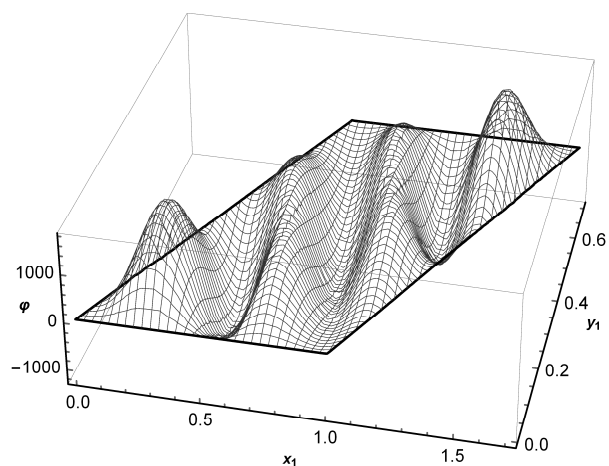


Рис.4.22. Форма коливань мембрани при $k=17,15$.

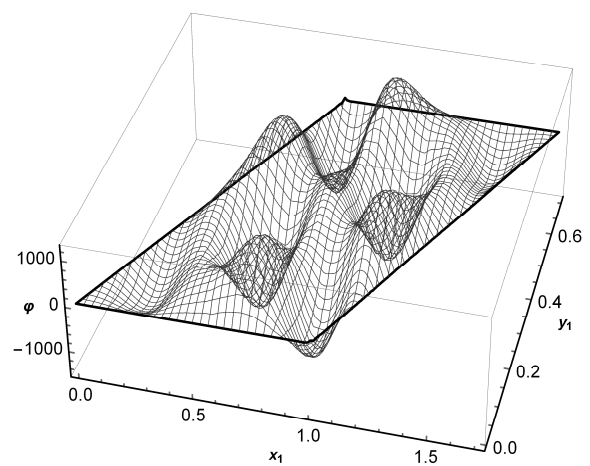


Рис.4.23. Форма коливань мембрани при $k=19,75$.

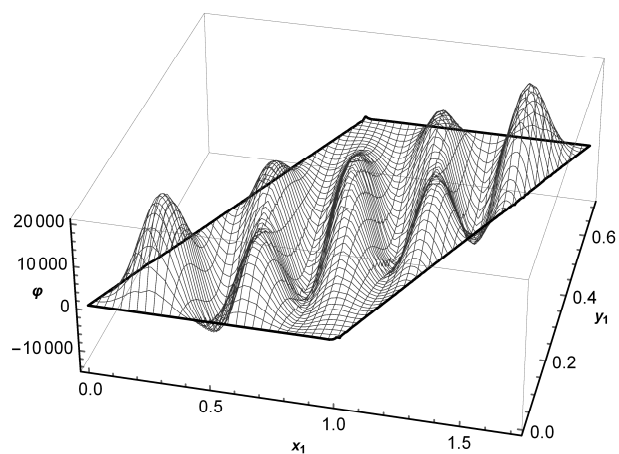


Рис.4.24. Форма колебаний мембраны при $k=20,67$.

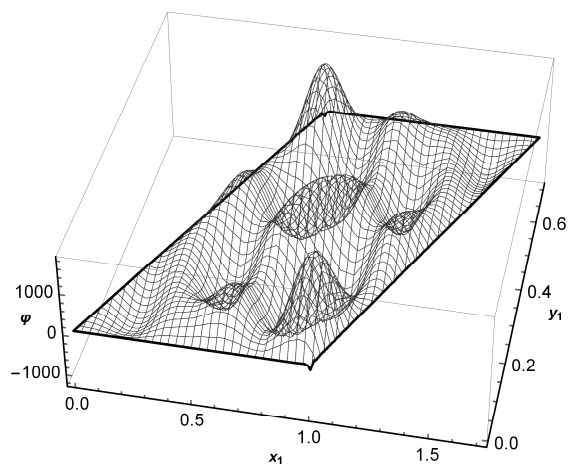


Рис.4.25. Форма колебаний мембраны при $k=23,17$.

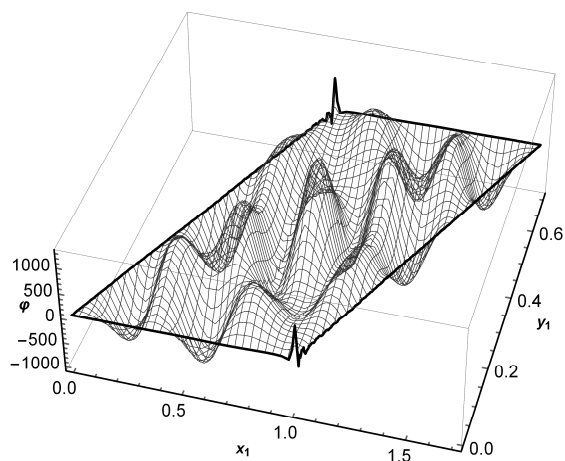


Рис.4.26. Форма колебаний мембраны при $k=24,354$.

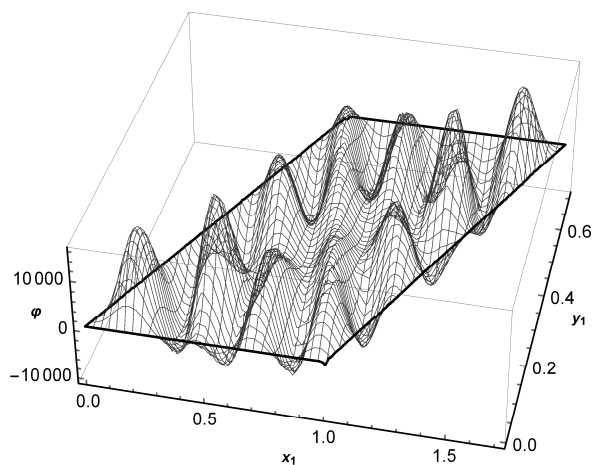


Рис.4.27. Форма колебаний мембраны при $k=27,224$.

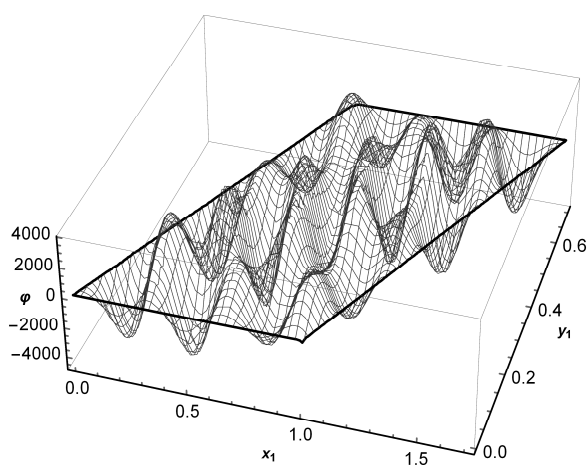


Рис.4.28. Форма колебаний мембраны при $k=27,877$.

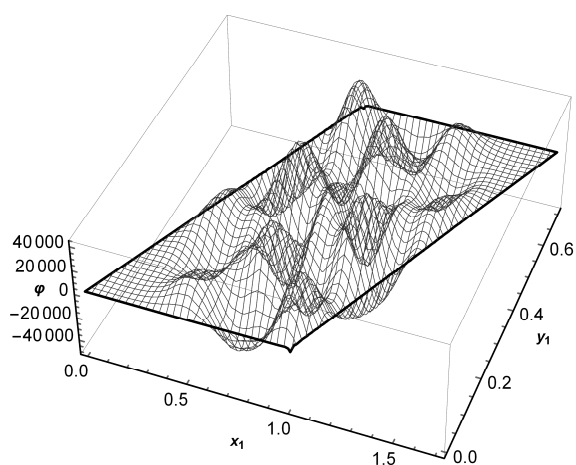


Рис.4.29. Форма колебаний мембраны при $k=29,22$.

Формы колебаний мембраны при динамическом возбуждении.

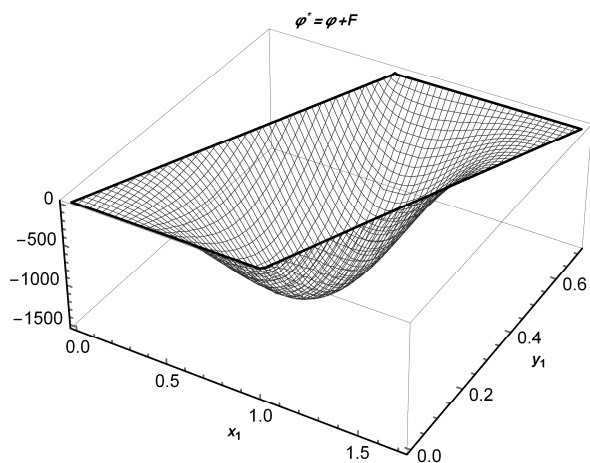


Рис.4.30. Форма колебаний мембраны при $k=5,895$.

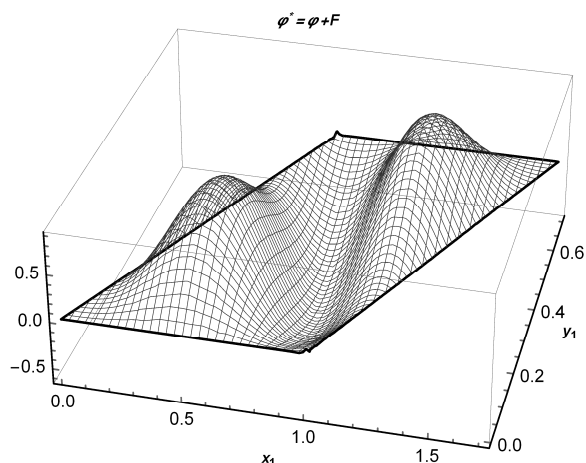


Рис.4.31. Форма колебаний мембраны при $k=10,013$

Нижче на рис. 4.32 також наведена розрахункова амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) мембраны.

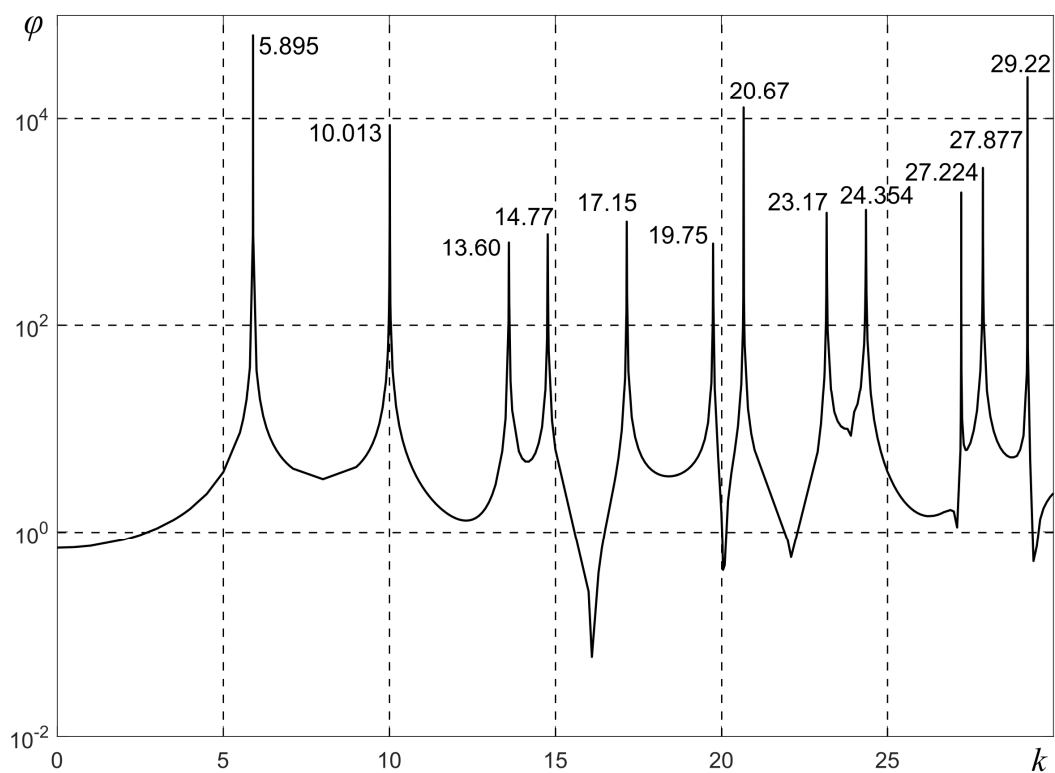


Рис.4.32. Амплітудно-частотна характеристика коливань паралелограмної мембраны.

4.7 Висновки до розділу

Основною метою цього розділу роботи є постановка и розв'язання задач про коливання мембрани складної форми за допомогою запропонованого метода, що дає основу для підтвердження про можливості метода при розв'язанні динамічних задач для скінченних областей. Основною особливістю динамічних процесів у таких областях є наявність резонансних явищ. Отримані результати показують, що аналіз вимушених коливань у широкому діапазоні частот збуджуючи впливів дає можливість достатньо точно визначити власні частоти і власні форми коливань. Амплітудно-частотна характеристика для центральної точки мембрани представлена на рис. 4.32, показує вплив складності форми мембрани на спектр її власних частот. Тут відсутня регулярність в їх розподілі, характерна для прямокутної мембрани. Деяка різниця в величинах амплітуд коливань для частот, близьких до резонансних, зумовлено незначною відмінністю значень різних частот від власних частот мембрани. Однак факт зростання на 2–3 порядки відхилень від положення статичної рівноваги дозволяє вважати отримані оцінки достатньо точними. Всі представлені результати розрахунків отримані при використанні 120 точок колокації при задоволенні граничних умов. Певним підтвердженням достатньої точності розрахунків є також той факт, що величина амплітуд коливань збуджуючих кінематичних збурень контурів з графічною точністю близька до нуля. Декілька характерних власних форм коливань показані на рисунках рис. 4.18 – 4.31 з вказанням значень хвильового числа і кількості використаних точок колокації. Природно, що зі зростанням значення хвильового числа зростає кількість вузлових ліній у власних формах коливань. Аналіз форм коливань дозволяє зробити і корисний висновок про те, що вибрана кількість точок колокації достатньо для визначення динамічних характеристик системи для високих номерів власних форм з порядка десятка локальними максимумами на всій площі мембрани.

РОЗДІЛ 5

**ВПЛИВ ЗБУРЕНЬ ФОРМИ ГРАНИЦІ НА ЧАСТОТНІ
ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАНАРНИХ КОЛИВАНЬ
П'ЕЗОКЕРАМІЧНИХ ПЛАСТИН**

У даному розділі побудовано загальний розв'язок граничної задачі про планарні коливання п'єзокерамічних пластин у формі паралелограма. Розв'язок подано через нескінченні ряди, кожний доданок яких задовольняє рівнянням руху елемента п'єзопластини. Для визначення коефіцієнтів рядів використовуються функціональні рівняння, які породжуються граничними умовами задачі. Для розв'язку цих рівнянь можна використати два підходи: підхід, пов'язаний з мінімізацією середньоквадратичного відхилення, і підхід, який базується на методі колокації. При практичному застосуванні скінченних сум обидва методи зводяться до пошуку розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Отримані якісні оцінки динамічних характеристик п'єзопластин, аналіз яких дозволяє оцінити вплив геометрії пластини. Метод розв'язку дає можливість отримати надійні оцінки точності розв'язку.

Використання матеріалів з п'єзоефектом дозволяє достатньо легко збурювати коливання у твердих пружних тілах. Вивчення таких коливань становить інтерес як для розуміння загальних закономірностей поведінки пружних хвиль в обмежених областях, так і для вироблення рекомендацій для вирішення інженерних завдань при розробці електромеханічних перетворювачів [92, 87]. Особлива увага в даний час приділяється розробкам численних типів мікроперетворювачів, які об'єднуються терміном MEMS (Micro-ElectroMechanical Systems) [93]. Однією з можливостей управління динамічними характеристиками активних елементів MEMS є зміна форми п'єзоелемента. Цим обумовлена актуальність роботи з розвитку методів розв'язання динамічних задач електропружності для елементів різної геометрії. У даному розділі представлено аналітичний метод розв'язання граничних задач

електропружності для п'єзопластин, зміна форми яких може розглядатися як збурення форми прямокутних пластин. Це пластини у формі паралелограма.

Основна увага приділяється розробці аналітичного методу розв'язання граничних задач. Наявність аналітичного розв'язку створює передумови для більш глибокого якісного аналізу властивостей коливальної системи. В якості ілюстрації таких можливостей можна послатися на результати дослідження явища крайового резонансу у пружних (в тому числі і п'єзокерамічних) пластинах. Саме той факт, що на частоті крайового резонансу максимального значення набувають всі амплітуди неоднорідних хвиль, важливий для правильного розуміння сутності самого явища.

При побудові аналітичного розв'язку задачі для пластини у формі паралелограма використовується метод, заснований на суперпозиції розв'язків рівнянь руху, представлених у вигляді нескінченних рядів і побудованих таким чином, щоб задовольнялися довільні граничні умови на границях паралелограма. Обґрунтування і ефективність такого підходу містяться в [7, 94–96].

Визначення коефіцієнтів рядів, що входять у вирази загальних розв'язків граничних задач, призводить до нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. Крім природного способу оцінки точності виконання граничних умов у роботі використана можливість отримання чисельного розв'язку і наведено порівняння результатів двох розрахунків. Таке порівняння корисне, як для додаткової перевірки достовірності аналітичних оцінок, так і для вироблення рекомендацій для вибору необхідних кроків дискретизації у чисельному розрахунку.

5.1 Основні співвідношення теорії планарних коливань тонких електродованих п'єзопластин з товщинною поляризацією при збудженні електричним полем

Планарні коливання тонких п'єзокерамічних пластин з товщинною поляризацією описуються векторним рівнянням руху в переміщеннях

(рівнянням Ламе), що має у разі суцільних електродів, які покривають лицьові плоскі поверхні пластини, такий вигляд [92]:

$$\frac{2}{1-\nu} \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} = 2\rho s_{11}^E (1+\nu) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (5.1)$$

Тут $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t)$ – двовимірний вектор переміщення, що має у декартовій системі координат компоненти u_x, u_y (осі Ox, Oy лежать в площині пластини, вісь Oz перпендикулярна до неї), ρ — густина, s_{11}^E, s_{12}^E – пружні податливості п'єзоматеріалу, що вимірюються при нульовому електричному полі, $\nu = -s_{12}^E / s_{11}^E$ – коефіцієнт Пуасона в площині, перпендикулярній до напрямку поляризації матеріалу (в площині ізотропії),

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (\text{rot } \mathbf{u})_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (\text{rot } \mathbf{u})_x = (\text{rot } \mathbf{u})_y \equiv 0. \quad (5.2)$$

Компоненти двовимірного тензора напружень для тонких п'єзокерамічних пластин мають вигляд [92]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - (1-\nu)\varepsilon_y - d_{31}(1+\nu)E_z \right], \\ \sigma_y &= \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - (1-\nu)\varepsilon_x - d_{31}(1+\nu)E_z \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2s_{11}^E (1+\nu)} \varepsilon_{xy}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

де

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (5.4)$$

– деформації [97], d_{31} – п'єзоелектрична константа, $E_z = E_z(t)$ – складова вектора напруженості електричного поля \mathbf{E} , що має тільки одну ненульову компоненту у напрямку осі Oz , нормальну до електродних покриттів пластини.

У випадку збудження коливань пластини, яка має товщину $2h$, від генератора напружень з вихідною різницею потенціалів $2V_0(t)$, прикладеної до електродних покриттів на її лицьових поверхнях,

$$E_z = -\frac{V_0(t)}{h}. \quad (5.5)$$

Відповідно, компоненти вектора напружень \mathbf{F}_n на елементарній площадці з одиничною нормаллю \mathbf{n} виражаються у вигляді [97]:

$$\begin{aligned} F_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y, \\ F_{ny} &= \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y. \end{aligned} \quad (5.6)$$

При заданні умов у напруженнях на границі зазвичай розглядаються нормальні і дотичні компоненти вектора напружень:

$$\begin{aligned} F_n &= F_{nx} n_x + F_{ny} n_y, \\ F_\tau &= -F_{nx} n_y + F_{ny} n_x. \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.2 Представлення розв'язку в потенціалах

Рівняння руху в переміщеннях (5.1) є достатньо складним, і у багатьох випадках, у тому числі і при аналітичних дослідженнях, зручно перейти для поля пружних переміщень $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t)$ до представлення Гельмгольца через скалярний $\varphi(x, y, t)$ та векторний $\boldsymbol{\psi}(x, y, t)$ потенціали [87]:

$$\mathbf{u} = \text{grad} \varphi + \text{rot} \boldsymbol{\psi}, \quad \text{div} \boldsymbol{\psi} = 0. \quad (5.8)$$

У даному двовимірному випадку векторний потенціал $\boldsymbol{\psi}$ має єдину ненульову компоненту $\psi_z = \psi$ у напрямку осі Oz . Підставляючи (5.8) в (5.1) та враховуючи, що $\text{div grad} \varphi = \nabla^2 \varphi$, $\text{rot rot} \boldsymbol{\psi} = \text{grad div} \boldsymbol{\psi} - \nabla^2 \boldsymbol{\psi}$, а також тотожності $\text{rot grad} \varphi \equiv 0$ і $\text{div rot} \boldsymbol{\psi} \equiv 0$, отримуємо такі хвильові рівняння відносно скалярного потенціалу φ і ненульової складової векторного потенціалу ψ :

$$\nabla^2 \varphi - \rho s_{11}^E (1 - \nu^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \psi - 2\rho s_{11}^E (1 + \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (5.9)$$

Перше з них описує поширення в площині пластини поздовжніх, а друге – поперечних хвиль зі швидкостями відповідно:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \nu^2)}}, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{2\rho s_{11}^E (1 + \nu)}}. \quad (5.10)$$

З урахуванням (5.10) рівняння (5.9) приймає вигляд:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (5.11)$$

Враховуючи правила обчислення векторних величин $\text{grad}(\cdot)$ та $\text{rot}(\cdot)$ і те, що у плоскій задачі, маємо: $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{k}\psi(x, y)$, де $\psi(x, y) = \psi_z$ – скалярна функція, $\psi_x = 0$, $\psi_y = 0$, а для компонент вихідного векторного поля переміщень $\mathbf{u} = iu_x + ju_y$, згідно (5.8), отримуємо вирази для компонент переміщень:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.12)$$

При збудженні гармонічних коливань п'єзопластини змінним електричним полем від генератора напружень будемо припускати гармонічну залежність досліджуваних величин від часу:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) \exp(i\omega t), \quad \varphi = \varphi(x, y) \exp(i\omega t), \quad \psi = \psi(x, y) \exp(i\omega t) \quad (5.13)$$

Тут $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, $\omega = 2\pi f$ [рад./с] – кругова, а f [Гц] – натуральна (герцівська) частота. Надалі гармонічний співмножник $\exp(i\omega t)$ будемо опускати, а під величинами \mathbf{u} , φ , ψ і т.д. будемо мати на увазі їх амплітудні значення. Так, підставляючи (5.13) в (5.11) отримуємо скалярні рівняння Гельмгольца:

$$\nabla^2 \varphi + k_1^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \psi + k_2^2 \psi = 0, \quad (5.14)$$

де

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1} = \sqrt{\omega^2 \rho s_{11}^E (1 - \nu^2)}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2} = \sqrt{2\omega^2 \rho s_{11}^E (1 + \nu)} \quad (5.15)$$

– хвильові числа поздовжніх та поперечних хвиль у пластині.

Перетворення складових тензора напружень плоскої задачі (5.3) відповідно до представлення компонент вектора переміщень через потенціали Гельмгольца (5.12), з урахуванням формул Коші для деформацій (5.4) та виразу для електричного поля (5.5), приводить до рівностей:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu)} \left(d_{31} \frac{V_0}{h} \right), \\ \sigma_y &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} \left[\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu)} \left(d_{31} \frac{V_0}{h} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2s_{11}^E (1 + \nu)} \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

При заданні на контурі пластини нормальних \bar{F}_n і дотичних \bar{F}_τ напружень граничні умови приймають вигляд:

$$\begin{aligned} 2G \left[\left(\frac{1}{1 - \nu} - n_y^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{1 - \nu} - n_x^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} (n_x^2 - n_y^2) + \right. \\ \left. + \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) n_x n_y \right] = -2G \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} d_{31} \frac{V_0}{h} + \bar{F}_n, \quad (5.17) \\ 2G \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) (n_x^2 - n_y^2) - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) n_x n_y \right] = \bar{F}_\tau, \end{aligned}$$

де $G = \frac{1}{2s_{11}^E (1 + \nu)}$ – модуль зсуву. Величина $-2G \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} d_{31} \frac{V_0}{h}$ у правій частині першої рівності в (5.17) виникає внаслідок наявності зв'язку електричних та механічних полів і пропорційна п'єзоконстанті d_{31} та амплітуді напруженості зовнішнього електричного поля. Надалі будемо позначати цю величину як \bar{F}_n^{Veq} . Зауважимо також, що зліва в (5.17) стоять члени, що представляють

собою частини нормальної та дотичної складових вектора напружень, пов'язані з пружною деформацією, які можна позначити σ_n^{def} і σ_τ^{def} . При цьому (5.17) можна у короткій формі переписати у вигляді:

$$\begin{aligned}\sigma_n^{def} &= \bar{F}_n^{Veq} + \bar{F}_n, \\ \sigma_\tau^{def} &= \bar{F}_\tau.\end{aligned}\quad (5.18)$$

5.3 Постановка задачі та побудова аналітичного розв'язку

В рамках представленої вище моделі розглянемо задачу про гармонічні коливання тонкої п'єзокерамічної пластини з вільними від механічних напружень краями, яка має форму паралелограма $OBCD$ з кутами α у вершинах O і C та розмірами сторін $OD=BC=a$, $OB=CD=b$, як показано на рис. 1. Відповідно, граничні умови для напружень на границі паралелограма мають вигляд (5.17) при

$$\bar{F}_n = 0, \quad \bar{F}_\tau = 0. \quad (5.19)$$

Введемо дві прямокутні декартові системи координат Ox_1y_1 і Ox_2y_2 з початком у точці O , орієнтовані як показано на рисунку:

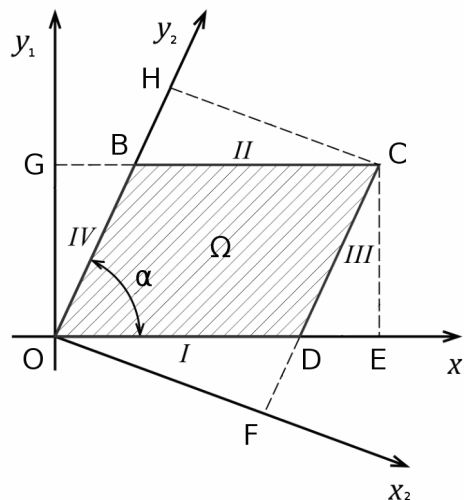


Рис. 5.1. П'єзоелектрична пластинка у формі паралелограма

Залежність між координатами в цих системах має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, \\ y_1 = -x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha, \\ y_2 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha. \end{cases} \quad (5.20)$$

Розв'язки для потенціалів φ і ψ можуть бути представлені у вигляді суми (суперпозиції) потенціалів, які є розв'язками рівнянь Гельмгольца (5.14):

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1(x_1, y_1) + \varphi_2(x_1, y_1) + \varphi_3(x_2, y_2) + \varphi_4(x_2, y_2), \\ \psi &= \psi_1(x_1, y_1) + \psi_2(x_1, y_1) + \psi_3(x_2, y_2) + \psi_4(x_2, y_2). \end{aligned} \quad (5.21)$$

При цьому кожний з потенціалів φ_i, ψ_i представляється у вигляді ряду

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} x_1, & \varphi_2(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} (x_1 - \delta_1), \\ \varphi_3(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(3)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} (y_2 - \delta_2), & \varphi_4(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(4)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} y_2, \\ \psi_1(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} x_1, & \psi_2(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} (x_1 - \delta_1), \\ \psi_3(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(3)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} (y_2 - \delta_2), & \psi_4(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(4)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} y_2, \end{aligned} \quad (5.22)$$

де $\delta_1 = GB$, $\delta_2 = FD$ (див. рис.5.1). Форма рядів (5.22) була вибрана таким чином, щоб на i -х сторонах паралелограма φ_i, ψ_i представляли собою ряди по повним тригонометричним базисам.

Підставляючи φ_j, ψ_j ($j = \overline{1,4}$) у рівняння Гельмгольца (5.14), приходимо до сукупності незалежних однорідних звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) другого порядку з постійними коефіцієнтами відносно функцій $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}$, що входять у представлення (5.21). Розв'язуючи ці рівняння і вибираючи розв'язки ЗДР з міркувань незалежності отриманих базисних функцій та спадання експонент від сторін в середину паралелограма, отримуємо явні вирази для $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}$ в залежності від співвідношень $\lambda_n = \frac{n\pi}{a}$, $\mu_m = \frac{m\pi}{b}$ і хвильових чисел k_1, k_2 (5.15) для кожного номера n і m :

$$A_n^{(1)}(y_1) = A_{1n} \begin{cases} \cos \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2} y_1, & \lambda_n^2 < k_1^2, \\ \exp(-\sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2} y_1), & \lambda_n^2 \geq k_1^2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A_n^{(2)}(y_1) &= A_{2n} \begin{cases} \sin \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2} y_1, & \lambda_n^2 < k_1^2, \\ \exp(\sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2} (y_1 - h)), & \lambda_n^2 \geq k_1^2, \end{cases} \\
A_m^{(3)}(x_2) &= A_{3m} \begin{cases} \sin \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2} x_2, & \mu_m^2 < k_1^2, \\ \exp(\sqrt{\mu_m^2 - k_1^2} (x_2 - a)), & \mu_m^2 \geq k_1^2, \end{cases} \\
A_m^{(4)}(x_2) &= A_{4m} \begin{cases} \cos \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2} x_2, & \mu_m^2 < k_1^2, \\ \exp(-\sqrt{\mu_m^2 - k_1^2} x_2), & \mu_m^2 \geq k_1^2, \end{cases} \\
B_n^{(1)}(y_1) &= B_{1n} \begin{cases} \cos \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2} y_1, & \lambda_n^2 < k_2^2, \\ \exp(-\sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2} y_1), & \lambda_n^2 \geq k_2^2, \end{cases} \\
B_n^{(2)}(y_1) &= B_{2n} \begin{cases} \sin \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2} y_1, & \lambda_n^2 < k_2^2, \\ \exp(\sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2} (y_1 - h)), & \lambda_n^2 \geq k_2^2, \end{cases} \\
B_m^{(3)}(x_2) &= B_{3m} \begin{cases} \sin \sqrt{k_2^2 - \mu_m^2} x_2, & \mu_m^2 < k_2^2, \\ \exp(\sqrt{\mu_m^2 - k_2^2} (x_2 - a)), & \mu_m^2 \geq k_2^2. \end{cases} \\
B_m^{(4)}(x_2) &= B_{4m} \begin{cases} \cos \sqrt{k_2^2 - \mu_m^2} x_2, & \mu_m^2 < k_2^2, \\ \exp(-\sqrt{\mu_m^2 - k_2^2} x_2), & \mu_m^2 \geq k_2^2. \end{cases} \tag{5.23}
\end{aligned}$$

Таким чином, з урахуванням виразів (5.23) ряди (5.22) для φ_i, ψ_i є рядами по двовимірних базисних функціях, які ми для стислості позначимо відповідно $\Phi_{ij}(x_k, y_k), \Psi_{ij}(x_k, y_k)$, з коефіцієнтами A_{ij}, B_{ij} ($i = \overline{1,4}, k = \overline{1,2}, j = 1,2, \dots$):

$$\begin{aligned}
\Phi_{1n}(x_1, y_1) &= \cos(\lambda_n x_1) \begin{cases} e^{-y_1 \sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2}} & \lambda_n^2 \geq k_1^2, \\ \cos(y_1 \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2}) & \lambda_n^2 < k_1^2, \end{cases} \\
\Phi_{2n}(x_1, y_1) &= \cos(\lambda_n (x - \delta_1)) \begin{cases} e^{(y_1 - h) \sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2}} & \lambda_n^2 \geq k_1^2, \\ \sin(y_1 \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2}) & \lambda_n^2 < k_1^2, \end{cases} \\
\Phi_{3m}(x_2, y_2) &= \cos(\mu_m (y_2 - \delta_2)) \begin{cases} e^{(x_2 - a) \sqrt{\mu_m^2 - k_1^2}} & \mu_m^2 \geq k_1^2, \\ \sin(x_2 \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2}) & \mu_m^2 < k_1^2, \end{cases} \\
\Phi_{4m}(x_2, y_2) &= \cos(\mu_m y_2) \begin{cases} e^{-x_2 \sqrt{\mu_m^2 - k_1^2}} & \mu_m^2 \geq k_1^2, \\ \cos(x_2 \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2}) & \mu_m^2 < k_1^2, \end{cases} \\
\Psi_{1n}(x_1, y_1) &= \cos(\lambda_n x_1) \begin{cases} e^{-y_1 \sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2}} & \lambda_n^2 \geq k_2^2, \\ \cos(y_1 \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2}) & \lambda_n^2 < k_2^2, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{2n}(x_1, y_1) &= \cos(\lambda_n(x - \delta_1)) \begin{cases} e^{(y_1-h)\sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2}} & \lambda_n^2 \geq k_2^2, \\ \sin(y_1\sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2}) & \lambda_n^2 < k_2^2, \end{cases} \\
\Psi_{3m}(x_2, y_2) &= \cos(\mu_m(y_2 - \delta_2)) \begin{cases} e^{(x_2-a)\sqrt{\mu_m^2 - k_2^2}} & \mu_m^2 \geq k_2^2, \\ \sin(x_2\sqrt{k_2^2 - \mu_m^2}) & \mu_m^2 < k_2^2, \end{cases} \\
\Psi_{4m}(x_2, y_2) &= \cos(\mu_m y_2) \begin{cases} e^{-x_2\sqrt{\mu_m^2 - k_2^2}} & \mu_m^2 \geq k_2^2, \\ \cos(x_2\sqrt{k_2^2 - \mu_m^2}) & \mu_m^2 < k_2^2, \end{cases} \quad (5.24)
\end{aligned}$$

З урахуванням цих представлень ряди для функцій потенціалів (5.22) можуть бути переписані у більш компактній формі, що дає певні вигоди при подальшій побудові програмної реалізації:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{1n} \Phi_{1n}(x_1, y_1), & \varphi_2(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \Phi_{2n}(x_1, y_1), \\
\varphi_3(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{3m} \Phi_{3m}(x_2, y_2), & \varphi_4(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{4m} \Phi_{4m}(x_2, y_2), \\
\psi_1(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{1n} \Psi_{1n}(x_1, y_1), & \psi_2(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \Psi_{2n}(x_1, y_1), \\
\psi_3(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{3m} \Psi_{3m}(x_2, y_2), & \psi_4(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{4m} \Psi_{4m}(x_2, y_2). \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Наведемо вирази для елементарних нормальних і дотичних напружень, які породжуються базисними функціями $\Phi_{ij}(x_k, y_k)$, $\Psi_{ij}(x_k, y_k)$. Ці вирази безпосередньо застосовуються при побудові матриць лінійної алгебраїчної системи у випадку використання як методу колокації (вони складають компоненти її рядків), так і в проінтегрованому разом з проєкційними функціями вигляді – у методі мінімізації середньоквадратичного відхилення.

$$\begin{aligned}
& \sigma_n[\Phi_{1n}(x_1, y_1)] = \\
& = \begin{cases} \left(4\lambda_n n_{x_1} n_{y_1} \sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2} \sin(\lambda_n x_1) - \left(k_1^2 \left(\left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) n_{x_1}^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2} n_{y_1}^2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\lambda_n^2 (n_{x_1}^2 - n_{y_1}^2) \right) \cos(\lambda_n x_1) \right) e^{-y_1 \sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2}}, & \lambda_n^2 \geq k_1^2, \\ - \left(k_1^2 \left(\left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) n_{x_1}^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2} n_{y_1}^2 \right) + 2\lambda_n^2 (n_{y_1}^2 - n_{x_1}^2) \right) \cos(\lambda_n x_1) \cos(y_1 \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2}) + \\ + 4\lambda_n n_{x_1} n_{y_1} \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2} \sin(\lambda_n x_1) \sin(y_1 \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2}), & \lambda_n^2 < k_1^2, \end{cases} \\
& \sigma_n[\Phi_{2n}(x_1, y_1)] = \\
& = \begin{cases} \left(- \left(k_1^2 \left(\left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) n_{x_1}^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2} n_{y_1}^2 \right) + 2\lambda_n^2 (n_{x_1}^2 - n_{y_1}^2) \right) \cos(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) + \right. \\ \left. + 4\lambda_n n_{x_1} n_{y_1} \sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2} \sin(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) \right) e^{(y_1 - h) \sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2}}, & \lambda_n^2 \geq k_1^2, \\ - \left(k_1^2 \left(\left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) n_{x_1}^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2} n_{y_1}^2 \right) + 2\lambda_n^2 (n_{y_1}^2 - n_{x_1}^2) \right) \cos(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) \times \\ \times \sin(y_1 \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2}) + 4\lambda_n n_{x_1} n_{y_1} \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2} \sin(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) \cos(y_1 \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2}), & \lambda_n^2 < k_1^2, \end{cases} \\
& \sigma_n[\Phi_{3m}(x_2, y_2)] = \\
& = \begin{cases} \left(2\mu_m^2 (n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) - k_1^2 \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} n_{x_2}^2 + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) n_{y_2}^2 \right) \right) e^{(x_2 - a) \sqrt{\mu_m^2 - k_1^2}} \times \\ \times \cos(\mu_m (\delta_2 - y_2)) + 4\mu_m n_{x_2} n_{y_2} \sqrt{\mu_m^2 - k_1^2} e^{(x_2 - a) \sqrt{\mu_m^2 - k_1^2}} \sin(\mu_m (\delta_2 - y_2)), & \mu_m^2 \geq k_1^2, \\ \left(2\mu_m^2 (n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) - k_1^2 \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} n_{x_2}^2 + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) n_{y_2}^2 \right) \right) \sin(x_2 \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2}) \times \\ \times \cos(\mu_m (\delta_2 - y_2)) + 4\mu_m n_{x_2} n_{y_2} \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2} \cos(x_2 \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2}) \sin(\mu_m (\delta_2 - y_2)), & \mu_m^2 < k_1^2, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\sigma_n[\Phi_{4m}(x_2, y_2)] = \begin{cases} \left(2\mu_m^2(n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) - k_1^2 \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} n_{x_2}^2 + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) n_{y_2}^2 \right) \right) e^{-x_2 \sqrt{\mu_m^2 - k_1^2}} \times \\ \quad \times \cos(\mu_m y_2) + 4\mu_m n_{x_2} n_{y_2} \sqrt{\mu_m^2 - k_1^2} e^{-x_2 \sqrt{\mu_m^2 - k_1^2}} \sin(\mu_m y_2), & \mu_m^2 \geq k_1^2, \\ \left(2\mu_m^2(n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) - k_1^2 \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} n_{x_2}^2 + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) n_{y_2}^2 \right) \right) \cos(x_2 \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2}) \times \\ \quad \times \cos(\mu_m y_2) + 4\mu_m n_{x_2} n_{y_2} \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2} \sin(x_2 \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2}) \sin(\mu_m y_2), & \mu_m^2 < k_1^2, \end{cases}$$

$$\sigma_n[\Psi_{1n}(x_1, y_1)] = \begin{cases} 2(n_{x_1} n_{y_1} (2\lambda_n^2 - k_2^2) \cos(\lambda_n x_1) + \lambda_n \sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2} (n_{x_1}^2 - n_{y_1}^2) \sin(\lambda_n x_1)) \times \\ \quad \times e^{-y_1 \sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2}}, & \lambda_n^2 \geq k_2^2, \\ 2(\lambda_n \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2} (n_{x_1}^2 - n_{y_1}^2) \sin(\lambda_n x_1) \sin(y_1 \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2}) + \\ \quad + n_{x_1} n_{y_1} (2\lambda_n^2 - k_2^2) \cos(\lambda_n x_1) \cos(y_1 \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2})), & \lambda_n^2 < k_2^2, \end{cases}$$

$$\sigma_n[\Psi_{2n}(x_1, y_1)] = \begin{cases} 2(n_{x_1} n_{y_1} (2\lambda_n^2 - k_2^2) \cos(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) + \\ \quad + \lambda_n \sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2} (n_{x_1}^2 - n_{y_1}^2) \sin(\lambda_n (\delta_1 - x_1))) e^{(y_1 - h) \sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2}}, & \lambda_n^2 \geq k_2^2, \\ 2(n_{x_1} n_{y_1} (2\lambda_n^2 - k_2^2) \cos(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) \sin(y_1 \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2}) + \\ \quad + \lambda_n \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2} (n_{x_1}^2 - n_{y_1}^2) \sin(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) \cos(y_1 \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2})), & \lambda_n^2 < k_2^2, \end{cases}$$

$$\sigma_n[\Psi_{3m}(x_2, y_2)] = \begin{cases} 2n_{x_2} n_{y_2} (k_2^2 - 2\mu_m^2) e^{(x_2 - a) \sqrt{\mu_m^2 - k_2^2}} \cos(\mu_m (\delta_2 - y_2)) + \\ \quad + 2\mu_m \sqrt{\mu_m^2 - k_2^2} (n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) e^{(x_2 - a) \sqrt{\mu_m^2 - k_2^2}} \sin(\mu_m (\delta_2 - y_2)), & \mu_m^2 \geq k_2^2, \\ 2n_{x_2} n_{y_2} (k_2^2 - 2\mu_m^2) \sin(x_2 \sqrt{k_2^2 - \mu_m^2}) \cos(\mu_m (\delta_2 - y_2)) + \\ \quad + 2\mu_m \sqrt{k_2^2 - \mu_m^2} (n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) \cos(x_2 \sqrt{k_2^2 - \mu_m^2}) \sin(\mu_m (\delta_2 - y_2)), & \mu_m^2 < k_2^2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n[\Psi_{4m}(x_2, y_2)] &= \\ &= \begin{cases} 2\mu_m \sqrt{\mu_m^2 - k_2^2} (n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) e^{-x_2 \sqrt{\mu_m^2 - k_2^2}} \sin(\mu_m y_2) + \\ \quad + 2n_{x_2} n_{y_2} (k_2^2 - 2\mu_m^2) e^{-x_2 \sqrt{\mu_m^2 - k_2^2}} \cos(\mu_m y_2), & \mu_m^2 \geq k_2^2, \\ 2\mu_m \sqrt{k_2^2 - \mu_m^2} (n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) \sin(x_2 \sqrt{k_2^2 - \mu_m^2}) \sin(\mu_m y_2) + \\ \quad + 2n_{x_2} n_{y_2} (k_2^2 - 2\mu_m^2) \cos(x_2 \sqrt{k_2^2 - \mu_m^2}) \cos(\mu_m y_2), & \mu_m^2 < k_2^2, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\tau[\Phi_{1n}(x_1, y_1)] &= \\ &= \begin{cases} 2\lambda_n \sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2} (n_{x_1}^2 - n_{y_1}^2) \sin(\lambda_n x_1) e^{-y_1 \sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2}} - \\ \quad - 2n_{x_1} n_{y_1} (k_1^2 - 2\lambda_n^2) \cos(\lambda_n x_1) e^{-y_1 \sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2}}, & \lambda_n^2 \geq k_1^2, \\ 2\lambda_n \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2} (n_{x_1}^2 - n_{y_1}^2) \sin(\lambda_n x_1) \sin(y_1 \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2}) - \\ \quad - 2n_{x_1} n_{y_1} (k_1^2 - 2\lambda_n^2) \cos(\lambda_n x_1) \cos(y_1 \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2}), & \lambda_n^2 < k_1^2, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\tau[\Phi_{2n}(x_1, y_1)] &= \\ &= \begin{cases} 2\lambda_n \sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2} (n_{x_1}^2 - n_{y_1}^2) \sin(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) e^{(y_1 - h) \sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2}} - \\ \quad - 2n_{x_1} n_{y_1} (k_1^2 - 2\lambda_n^2) \cos(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) e^{(y_1 - h) \sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2}}, & \lambda_n^2 \geq k_1^2, \\ 2\lambda_n \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2} (n_{x_1}^2 - n_{y_1}^2) \sin(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) \cos(y_1 \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2}) - \\ \quad - 2n_{x_1} n_{y_1} (k_1^2 - 2\lambda_n^2) \cos(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) \sin(y_1 \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2}), & \lambda_n^2 < k_1^2, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\tau[\Phi_{3m}(x_2, y_2)] &= \\ &= \begin{cases} 2\mu_m \sqrt{\mu_m^2 - k_1^2} (n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) e^{(x_2 - a) \sqrt{\mu_m^2 - k_1^2}} \sin(\mu_m (\delta_2 - y_2)) + \\ \quad + 2n_{x_2} n_{y_2} (k_1^2 - 2\mu_m^2) e^{(x_2 - a) \sqrt{\mu_m^2 - k_1^2}} \cos(\mu_m (\delta_2 - y_2)), & \mu_m^2 \geq k_1^2, \\ 2\mu_m \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2} (n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) \cos(x_2 \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2}) \sin(\mu_m (\delta_2 - y_2)) + \\ \quad + 2n_{x_2} n_{y_2} (k_1^2 - 2\mu_m^2) \sin(x_2 \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2}) \cos(\mu_m (\delta_2 - y_2)), & \mu_m^2 < k_1^2, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma_\tau [\Phi_{4m}(x_2, y_2)] = \\ & = \begin{cases} 2\mu_m \sqrt{\mu_m^2 - k_1^2} (n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) e^{-x_2 \sqrt{\mu_m^2 - k_1^2}} \sin(\mu_m y_2) + \\ \quad + 2n_{x_2} n_{y_2} (k_1^2 - 2\mu_m^2) e^{-x_2 \sqrt{\mu_m^2 - k_1^2}} \cos(\mu_m y_2), & \mu_m^2 \geq k_1^2, \\ 2\mu_m \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2} (n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) \sin(x_2 \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2}) \sin(\mu_m y_2) + \\ \quad + 2n_{x_2} n_{y_2} (k_1^2 - 2\mu_m^2) \cos(x_2 \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2}) \cos(\mu_m y_2), & \mu_m^2 < k_1^2, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma_\tau [\Psi_{1n}(x_1, y_1)] = \\ & = \begin{cases} (2\lambda_n^2 - k_2^2)(n_{x_1}^2 - n_{y_1}^2) \cos(\lambda_n x_1) e^{-y_1 \sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2}} - \\ \quad - 4\lambda_n n_{x_1} n_{y_1} \sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2} \sin(\lambda_n x_1) e^{-y_1 \sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2}}, & \lambda_n^2 \geq k_2^2, \\ (2\lambda_n^2 - k_2^2)(n_{x_1}^2 - n_{y_1}^2) \cos(\lambda_n x_1) \cos(y_1 \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2}) - \\ \quad - 4\lambda_n n_{x_1} n_{y_1} \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2} \sin(\lambda_n x_1) \sin(y_1 \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2}), & \lambda_n^2 < k_2^2, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma_\tau [\Psi_{2n}(x_1, y_1)] = \\ & = \begin{cases} (2\lambda_n^2 - k_2^2)(n_{x_1}^2 - n_{y_1}^2) \cos(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) e^{(y_1 - h) \sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2}} - \\ \quad - 4\lambda_n n_{x_1} n_{y_1} \sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2} \sin(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) e^{(y_1 - h) \sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2}}, & \lambda_n^2 \geq k_2^2, \\ (2\lambda_n^2 - k_2^2)(n_{x_1}^2 - n_{y_1}^2) \cos(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) \sin(y_1 \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2}) - \\ \quad - 4\lambda_n n_{x_1} n_{y_1} \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2} \sin(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) \cos(y_1 \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2}), & \lambda_n^2 < k_2^2, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma_\tau [\Psi_{3m}(x_2, y_2)] = \\ & = \begin{cases} -4\mu_m n_{x_2} n_{y_2} \sqrt{\mu_m^2 - k_2^2} e^{(x_2 - a) \sqrt{\mu_m^2 - k_2^2}} \sin(\mu_m (\delta_2 - y_2)) + \\ \quad + (k_2^2 - 2\mu_m^2)(n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) e^{(x_2 - a) \sqrt{\mu_m^2 - k_2^2}} \cos(\mu_m (\delta_2 - y_2)), & \mu_m^2 \geq k_2^2, \\ 4\mu_m n_{x_2} n_{y_2} \sqrt{k_2^2 - \mu_m^2} \cos(x_2 \sqrt{k_2^2 - \mu_m^2}) \sin(\mu_m (\delta_2 - y_2)) + \\ \quad + (k_2^2 - 2\mu_m^2)(n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) \sin(x_2 \sqrt{k_2^2 - \mu_m^2}) \cos(\mu_m (\delta_2 - y_2)), & \mu_m^2 < k_2^2, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sigma_\tau[\Psi_{4m}(x_2, y_2)] = \begin{cases} (k_2^2 - 2\mu_m^2)(n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) e^{-x_2\sqrt{\mu_m^2 - k_2^2}} \cos(\mu_m y_2) - \\ - 4\mu_m n_{x_2} n_{y_2} \sqrt{\mu_m^2 - k_2^2} e^{-x_2\sqrt{\mu_m^2 - k_2^2}} \sin(\mu_m y_2), & \mu_m^2 \geq k_2^2, \\ (k_2^2 - 2\mu_m^2)(n_{x_2}^2 - n_{y_2}^2) \cos(x_2\sqrt{k_2^2 - \mu_m^2}) \cos(\mu_m y_2) - \\ - 4\mu_m n_{x_2} n_{y_2} \sqrt{k_2^2 - \mu_m^2} \sin(x_2\sqrt{k_2^2 - \mu_m^2}) \sin(\mu_m y_2), & \mu_m^2 < k_2^2, \end{cases} \quad (5.26)$$

5.4 Комп'ютерне моделювання коливань пластин

Для отримання кількісних оцінок напружень та переміщень пластин перейдемо у представленнях (5.22) від нескінченних рядів до скінченних сум по n і m до $N-1$ і $M-1$ відповідно (метод редукції) [8]. Далі розв'язок задачі зводиться до визначення $4(N+M)$ невідомих коефіцієнтів у спрощених функціональних представленнях (5.22), виходячи з наближеного задоволення в окремих точках колокації або в сенсі проекційного методу граничних умов на сторонах паралелограма OD (I), BC (II), CD (III) і OB (IV) (див. рис.5.1).

Метод колокації. Застосовуючи до розглянутої задачі про планарні коливання паралелограмної п'єзоелектричної пластини з вільним краєм метод колокації, вимагаємо виконання заданих граничних умов для нормальних і дотичних напружень (5.17), (5.19) в окремих точках границі (точках колокації) [98], в якості яких [1, 2] можна вибрати середини відрізків рівномірного розбиття на N частин границь I і II (відрізки OD і BC), та на M частин границь III і IV (відрізки CD і OB). Таким чином, маємо $2(N+M)$ точок колокації з координатами (x_i^c, y_i^c) , у кожній з яких задано вектор зовнішньої нормалі з компонентами n_x, n_y . У результаті для кожної точки колокації формуються два лінійні алгебраїчні рівняння відносно коефіцієнтів A_{ij}, B_{ij} редукованих рядів:

$$\sigma_n[\varphi_1(x_1, y_1)] + \sigma_n[\varphi_2(x_1, y_1)] + \sigma_n[\psi_1(x_1, y_1)] + \sigma_n[\psi_2(x_1, y_1)] + \\ + \sigma_n[\varphi_3(x_2, y_2)] + \sigma_n[\varphi_4(x_2, y_2)] + \sigma_n[\psi_3(x_2, y_2)] + \sigma_n[\psi_4(x_2, y_2)] = \overline{F}_n + \overline{F}_n^{Veq},$$

$$\begin{aligned} & \sigma_\tau[\varphi_1(x_1, y_1)] + \sigma_\tau[\varphi_2(x_1, y_1)] + \sigma_\tau[\psi_1(x_1, y_1)] + \sigma_\tau[\psi_2(x_1, y_1)] + \\ & + \sigma_\tau[\varphi_3(x_2, y_2)] + \sigma_\tau[\varphi_4(x_2, y_2)] + \sigma_\tau[\psi_3(x_2, y_2)] + \sigma_\tau[\psi_4(x_2, y_2)] = \overline{F}_\tau, \end{aligned} \quad (5.27)$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_n[\varphi_1(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \sigma_n[\Phi_{1n}(x_1, y_1)] \\ \sigma_n[\varphi_2(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \sigma_n[\Phi_{2n}(x_1, y_1)] \\ \sigma_n[\varphi_3(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \sigma_n[\Phi_{3m}(x_2, y_2)] \\ \sigma_n[\varphi_4(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \sigma_n[\Phi_{4m}(x_2, y_2)] \\ \sigma_n[\psi_1(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \sigma_n[\Psi_{1n}(x_1, y_1)] \\ \sigma_n[\psi_2(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \sigma_n[\Psi_{2n}(x_1, y_1)] \\ \sigma_n[\psi_3(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \sigma_n[\Psi_{3m}(x_2, y_2)] \\ \sigma_n[\psi_4(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \sigma_n[\Psi_{4m}(x_2, y_2)] \\ \sigma_\tau[\varphi_1(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \sigma_\tau[\Phi_{1n}(x_1, y_1)] \\ \sigma_\tau[\varphi_2(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \sigma_\tau[\Phi_{2n}(x_1, y_1)] \\ \sigma_\tau[\varphi_3(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \sigma_\tau[\Phi_{3m}(x_2, y_2)] \\ \sigma_\tau[\varphi_4(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \sigma_\tau[\Phi_{4m}(x_2, y_2)] \\ \sigma_\tau[\psi_1(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \sigma_\tau[\Psi_{1n}(x_1, y_1)] \\ \sigma_\tau[\psi_2(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \sigma_\tau[\Psi_{2n}(x_1, y_1)] \\ \sigma_\tau[\psi_3(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \sigma_\tau[\Psi_{3m}(x_2, y_2)] \\ \sigma_\tau[\psi_4(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \sigma_\tau[\Psi_{4m}(x_2, y_2)] \end{aligned} \quad (5.28)$$

Таким чином, рівняння для нормальної компоненти напружень мають вигляд

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{n}}^I + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{m}}^I = \varphi_{\tilde{n}}^I, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{n}}^{II} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{m}}^{II} = \varphi_{\tilde{n}}^{II}, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{m}}^{III} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{m}}^{III} = \varphi_{\tilde{m}}^{III}, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{m}}^{IV} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{m}}^{IV} = \varphi_{\tilde{m}}^{IV},
\end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a}, \mu_m = \frac{\pi m}{b}, \lambda_{\tilde{n}} = \frac{\pi \tilde{n}}{a}, \mu_{\tilde{m}} = \frac{\pi \tilde{m}}{b},$$

$$\Gamma_I(x_{1\tilde{n}}) = (0, a),$$

$$a_{1n\tilde{n}}^I = \sigma_n [\Phi_{1n}(x_{1\tilde{n}}, 0)],$$

$$a_{2n\tilde{n}}^I = \sigma_n [\Phi_{2n}(x_{1\tilde{n}}, 0)],$$

$$b_{1n\tilde{n}}^I = \sigma_n [\Psi_{1n}(x_{1\tilde{n}}, 0)],$$

$$b_{2n\tilde{n}}^I = \sigma_n [\Psi_{2n}(x_{1\tilde{n}}, 0)],$$

$$a_{3m\tilde{m}}^I = \sigma_n [\Phi_{3m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha)],$$

$$a_{4m\tilde{m}}^I = \sigma_n [\Phi_{4m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha)],$$

$$b_{3m\tilde{m}}^I = \sigma_n [\Psi_{3m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha)],$$

$$b_{4m\tilde{m}}^I = \sigma_n [\Psi_{4m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha)],$$

$$\varphi_{\tilde{n}}^I = \overline{F}_n(x_{1\tilde{n}}) + \overline{F}_n^{Veq}(x_{1\tilde{n}}),$$

$$\Gamma_{II}(x_{1\tilde{n}}) = (\delta_1, \delta_1 + a)$$

$$a_{1n\tilde{n}}^{II} = \sigma_n [\Phi_{1n}(x_{1\tilde{n}}, h)],$$

$$a_{2n\tilde{n}}^{II} = \sigma_n [\Phi_{2n}(x_{1\tilde{n}}, h)],$$

$$b_{1n\tilde{n}}^{II} = \sigma_n [\Psi_{1n}(x_{1\tilde{n}}, h)],$$

$$b_{2n\tilde{n}}^{II} = \sigma_n [\Psi_{2n}(x_{1\tilde{n}}, h)],$$

$$\begin{aligned}
a_{3m\tilde{n}}^{II} &= \sigma_n [\Phi_{3m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha)], \\
a_{4m\tilde{n}}^{II} &= \sigma_n [\Phi_{4m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha)], \\
b_{3m\tilde{n}}^{II} &= \sigma_n [\Psi_{3m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha)], \\
b_{4m\tilde{n}}^{II} &= \sigma_n [\Psi_{4m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha)], \\
\varphi_{\tilde{n}}^{II} &= \overline{F}_n(x_{1\tilde{n}}) + \overline{F}_n^{Veq}(x_{1\tilde{n}}), \\
\Gamma_{III}(y_{2\tilde{m}}) &= (\delta_2, \delta_2 + b), \\
a_{1n\tilde{m}}^{III} &= \sigma_n [\Phi_{1n}(a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)], \\
a_{2n\tilde{m}}^{III} &= \sigma_n [\Phi_{2n}(a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)], \\
b_{1n\tilde{m}}^{III} &= \sigma_n [\Psi_{1n}(a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)], \\
b_{2n\tilde{m}}^{III} &= \sigma_n [\Psi_{2n}(a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)], \\
a_{3m\tilde{m}}^{III} &= \sigma_n [\Phi_{3m}(a, y_{2\tilde{m}})], \\
a_{4m\tilde{m}}^{III} &= \sigma_n [\Phi_{4m}(a, y_{2\tilde{m}})], \\
b_{3m\tilde{m}}^{III} &= \sigma_n [\Psi_{3m}(a, y_{2\tilde{m}})], \\
b_{4m\tilde{m}}^{III} &= \sigma_n [\Psi_{4m}(a, y_{2\tilde{m}})], \\
\varphi_{\tilde{m}}^{III} &= \overline{F}_n(y_{2\tilde{m}}) + \overline{F}_n^{Veq}(y_{2\tilde{m}}), \\
\Gamma_{IV}(y_{2\tilde{m}}) &= (0, b), \\
a_{1n\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_n [\Phi_{1n}(y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)], \\
a_{2n\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_n [\Phi_{2n}(y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)], \\
b_{1n\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_n [\Psi_{1n}(y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)], \\
b_{2n\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_n [\Psi_{2n}(y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)], \\
a_{3m\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_n [\Phi_{3m}(0, y_{2\tilde{m}})], \\
a_{4m\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_n [\Phi_{4m}(0, y_{2\tilde{m}})], \\
b_{3m\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_n [\Psi_{3m}(0, y_{2\tilde{m}})], \\
b_{4m\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_n [\Psi_{4m}(0, y_{2\tilde{m}})], \\
\varphi_{\tilde{m}}^{IV} &= \overline{F}_n(y_{2\tilde{m}}) + \overline{F}_n^{Veq}(y_{2\tilde{m}}),
\end{aligned}$$

Для дотичної компоненти непружень рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{n}}^I + \\
&+ \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^I = \varphi_{\tau}^I, \\
&\sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{n}}^{II} + \\
&+ \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{II} = \varphi_{\tau}^{II},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{III} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{III} = \varphi_{\tau}^{III}, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{IV} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{IV} = \varphi_{\tau}^{IV},
\end{aligned} \tag{5.30}$$

де

$$\Gamma_I(x_{1\tilde{n}}) = (0, a),$$

$$\tilde{a}_{1n\tilde{m}}^I = \sigma_{\tau} [\Phi_{1n}(x_{1\tilde{n}}, 0)],$$

$$\tilde{a}_{2n\tilde{m}}^I = \sigma_{\tau} [\Phi_{2n}(x_{1\tilde{n}}, 0)],$$

$$\tilde{b}_{1n\tilde{m}}^I = \sigma_{\tau} [\Psi_{1n}(x_{1\tilde{n}}, 0)],$$

$$\tilde{b}_{2n\tilde{m}}^I = \sigma_{\tau} [\Psi_{2n}(x_{1\tilde{n}}, 0)],$$

$$\tilde{a}_{3m\tilde{m}}^I = \sigma_{\tau} [\Phi_{3m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha)],$$

$$\tilde{a}_{4m\tilde{m}}^I = \sigma_{\tau} [\Phi_{4m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha)],$$

$$\tilde{b}_{3m\tilde{m}}^I = \sigma_{\tau} [\Psi_{3m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha)],$$

$$\tilde{b}_{4m\tilde{m}}^I = \sigma_{\tau} [\Psi_{4m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha)],$$

$$\varphi_{\tau}^I = \overline{F_{\tau}}(x_{1\tilde{n}}),$$

$$\Gamma_{II}(x_{1\tilde{n}}) = (\delta_1, \delta_1 + a)$$

$$\tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{II} = \sigma_{\tau} [\Phi_{1n}(x_{1\tilde{n}}, h)],$$

$$\tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{II} = \sigma_{\tau} [\Phi_{2n}(x_{1\tilde{n}}, h)],$$

$$\tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{II} = \sigma_{\tau} [\Psi_{1n}(x_{1\tilde{n}}, h)],$$

$$\tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{II} = \sigma_{\tau} [\Psi_{2n}(x_{1\tilde{n}}, h)],$$

$$\tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{II} = \sigma_{\tau} [\Phi_{3m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha)],$$

$$\tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{II} = \sigma_{\tau} [\Phi_{4m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha)],$$

$$\tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{II} = \sigma_{\tau} [\Psi_{3m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha)],$$

$$\tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{II} = \sigma_{\tau} [\Psi_{4m}(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha)],$$

$$\varphi_{\tau}^{II} = \overline{F_{\tau}}(x_{1\tilde{n}}),$$

$$\Gamma_{III}(y_{2\tilde{m}}) = (\delta_2, \delta_2 + b),$$

$$\tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{III} = \sigma_{\tau} [\Phi_{1n}(a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)],$$

$$\tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{III} = \sigma_{\tau} [\Phi_{2n}(a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)],$$

$$\tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{III} = \sigma_{\tau} [\Psi_{1n}(a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)],$$

$$\tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{III} = \sigma_{\tau} [\Psi_{2n}(a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)],$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{III} &= \sigma_\tau [\Phi_{3m}(a, y_{2\tilde{m}})], \\
\tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{III} &= \sigma_\tau [\Phi_{4m}(a, y_{2\tilde{m}})], \\
\tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{III} &= \sigma_\tau [\Psi_{3m}(a, y_{2\tilde{m}})], \\
\tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{III} &= \sigma_\tau [\Psi_{4m}(a, y_{2\tilde{m}})], \\
\varphi_\tau^{III} &= \overline{F}_\tau(y_{2\tilde{m}}), \\
\Gamma_{IV}(y_{2\tilde{m}}) &= (0, b), \\
\tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_\tau [\Phi_{1n}(y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)], \\
\tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_\tau [\Phi_{2n}(y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)], \\
\tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_\tau [\Psi_{1n}(y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)], \\
\tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_\tau [\Psi_{2n}(y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha)], \\
\tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_\tau [\Phi_{3m}(0, y_{2\tilde{m}})], \\
\tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_\tau [\Phi_{4m}(0, y_{2\tilde{m}})], \\
\tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_\tau [\Psi_{3m}(0, y_{2\tilde{m}})], \\
\tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{IV} &= \sigma_\tau [\Psi_{4m}(0, y_{2\tilde{m}})], \\
\varphi_\tau^{IV} &= \overline{F}_\tau(y_{2\tilde{m}}),
\end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему і підставляючи знайдені значення коефіцієнтів у відповідні представлення для φ_i, ψ_i (5.22), і, обчислюючи їх суперпозицію по формулам (5.21), ми отримуємо необхідний наближений розв'язок досліджуваної крайової задачі в потенціалах. Після цього необхідні складові переміщень та напружень обчислюються згідно (5.12) і (5.16).

Метод мінімізації середньоквадратичного відхилення. Другий спосіб наближеного задоволення граничних умов при розв'язуванні досліджуваної крайової задачі полягає у послідовному множенні нев'язок граничних умов на границях *I*, *II* і *III*, *IV* (див. вище) на незалежні між собою функції з функціональних базисів, які використовуються для представлення розв'язку, та інтегрування отриманих добутків по відповідним граничним контурам *I–IV*, тобто обчислюються скалярні добутки (проекції) нев'язок на базисні функції, які прирівнюються до нуля [98]. У результаті маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів рядових розкладів A_{ij}, B_{ij} . У даному випадку в якості функцій, на які здійснюється проектування, вибираються тригонометричні функції, що входять як співмножники у двовимірні базисні

функції $\Phi_{ij}(x_k, y_k), \Psi_{ij}(x_k, y_k)$: $\cos \frac{\tilde{n}\pi}{a} x_1$ на стороні I , $\cos \frac{\tilde{n}\pi}{a} (x_1 - \delta_1)$ на стороні II , $\tilde{n} = \overline{0, N-1}$, $\cos \frac{\tilde{m}\pi}{b} (y_2 - \delta_2)$ на стороні III і $\cos \frac{\tilde{m}\pi}{b} y_2$ на стороні IV , $\tilde{m} = \overline{0, M-1}$.

Для нормальних напружень рівняння має вигляд

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{n}}^I + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{m}}^I = \varphi_{\tilde{n}}^I, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{n}}^{II} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{m}}^{II} = \varphi_{\tilde{n}}^{II}, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{m}}^{III} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{m}}^{III} = \varphi_{\tilde{m}}^{III}, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{m}}^{IV} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{m}}^{IV} = \varphi_{\tilde{m}}^{IV},
\end{aligned} \tag{5.31}$$

де

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a}, \mu_m = \frac{\pi m}{b}, \lambda_{\tilde{n}} = \frac{\pi \tilde{n}}{a}, \mu_{\tilde{m}} = \frac{\pi \tilde{m}}{b},$$

$$\Gamma_I(x_1) = (0, a),$$

$$a_{1n\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_n [\Phi_{1n}(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$a_{2n\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_n [\Phi_{2n}(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$b_{1n\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_n [\Psi_{1n}(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$b_{2n\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_n [\Psi_{2n}(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$a_{3m\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_n [\Phi_{3m}(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$a_{4m\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_n [\Phi_{4m}(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$b_{3m\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_n [\Psi_{3m}(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$b_{4m\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_n [\Psi_{4m}(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\varphi_{\tilde{n}}^I = \int_0^a (\overline{F}_n(x_1) + \overline{F}_n^{Veq}(x_1)) \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\Gamma_{II}(x_1) = (\delta_1, \delta_1 + a)$$

$$a_{1n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_n [\Phi_{1n}(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$a_{2n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_n [\Phi_{2n}(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$b_{1n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_n [\Psi_{1n}(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$b_{2n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_n [\Psi_{2n}(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$a_{3m\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_n [\Phi_{3m}(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$a_{4m\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_n [\Phi_{4m}(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$b_{3m\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_n [\Psi_{3m}(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$b_{4m\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_n [\Psi_{4m}(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\varphi_{\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} (\overline{F}_n(x_1) + \overline{F}_n^{Veq}(x_1)) \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\Gamma_{III}(y_2) = (\delta_2, \delta_2 + b),$$

$$a_{1n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_n [\Phi_{1n}(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$a_{2n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_n [\Phi_{2n}(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$b_{1n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_n [\Psi_{1n}(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$b_{2n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_n [\Psi_{2n}(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$a_{3m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_n [\Phi_{3m}(a, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$a_{4m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_n [\Phi_{4m}(a, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$b_{3m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_n [\Psi_{3m}(a, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$b_{4m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_n [\Psi_{4m}(a, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\varphi_{\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} (\overline{F}_n(y_2) + \overline{F}_n^{Veq}(y_2)) \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\Gamma_{IV}(y_2) = (0, b),$$

$$a_{1n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b \sigma_n [\Phi_{1n}(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$a_{2n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b \sigma_n [\Phi_{2n}(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$b_{1n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b \sigma_n [\Psi_{1n}(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\begin{aligned}
b_{2n\tilde{m}}^{IV} &= \int_0^b \sigma_n [\Psi_{2n}(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2, \\
a_{3m\tilde{m}}^{IV} &= \int_0^b \sigma_n [\Phi_{3m}(0, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2, \\
a_{4m\tilde{m}}^{IV} &= \int_0^b \sigma_n [\Phi_{4m}(0, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2, \\
b_{3m\tilde{m}}^{IV} &= \int_0^b \sigma_n [\Psi_{3m}(0, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2, \\
b_{4m\tilde{m}}^{IV} &= \int_0^b \sigma_n [\Psi_{4m}(0, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2, \\
\varphi_{\tilde{m}}^{IV} &= \int_0^b (\overline{F}_n(y_2) + \overline{F}_n^{Veq}(y_2)) \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2.
\end{aligned}$$

Для дотичних напружень система набуває вигляду

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{m}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{m}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{m}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{m}}^I + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^I = \varphi_{\tau}^I, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{II} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{II} = \varphi_{\tau}^{II}, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{III} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{III} = \varphi_{\tau}^{III}, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{IV} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{IV} = \varphi_{\tau}^{IV},
\end{aligned} \tag{5.32}$$

де

$$\Gamma_I(x_1) = (0, a),$$

$$\tilde{a}_{1n\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_\tau [\Phi_{1n}(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\tilde{a}_{2n\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_\tau [\Phi_{2n}(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{1n\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_\tau [\Psi_{1n}(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{2n\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_\tau [\Psi_{2n}(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\tilde{a}_{3m\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_\tau [\Phi_{3m}(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\tilde{a}_{4m\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_\tau [\Phi_{4m}(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{3m\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_\tau [\Psi_{3m}(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{4m\tilde{n}}^I = \int_0^a \sigma_\tau [\Psi_{4m}(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\varphi_\tau^I = \int_0^a \overline{F}_\tau(x_1) \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\Gamma_{II}(x_1) = (\delta_1, \delta_1 + a)$$

$$\tilde{a}_{1n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_\tau [\Phi_{1n}(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\tilde{a}_{2n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_\tau [\Phi_{2n}(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{1n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_\tau [\Psi_{1n}(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{2n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_\tau [\Psi_{2n}(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\tilde{a}_{3m\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_\tau [\Phi_{3m}(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_\tau [\Phi_{4m}(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{m}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_\tau [\Psi_{3m}(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{m}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \sigma_\tau [\Psi_{4m}(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{m}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\varphi_\tau^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \overline{F_\tau}(x_1) \cos(\lambda_{\tilde{m}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\Gamma_{III}(y_2) = (\delta_2, \delta_2 + b),$$

$$\tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_\tau [\Phi_{1n}(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_\tau [\Phi_{2n}(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_\tau [\Psi_{1n}(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_\tau [\Psi_{2n}(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_\tau [\Phi_{3m}(a, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_\tau [\Phi_{4m}(a, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_\tau [\Psi_{3m}(a, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \sigma_\tau [\Psi_{4m}(a, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\varphi_\tau^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \overline{F_\tau}(y_2) \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\Gamma_{IV}(y_2) = (0, b),$$

$$\tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b \sigma_\tau [\Phi_{1n}(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b \sigma_\tau [\Phi_{2n}(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b \sigma_\tau [\Psi_{1n}(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b \sigma_\tau [\Psi_{2n}(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b \sigma_\tau [\Phi_{3m}(0, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b \sigma_\tau [\Phi_{4m}(0, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b \sigma_\tau [\Psi_{3m}(0, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b \sigma_\tau [\Psi_{4m}(0, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2, s$$

$$\varphi_\tau^{IV} = \int_0^b \overline{F}_\tau(y_2) \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

У більшості випадків точність наближених розв'язків, одержаних при застосуванні даного методу, виявляється значно вищою, ніж при застосуванні розглянутого вище методу колокації.

На основі побудованих теоретичних моделей розроблено програмні засоби для чисельного моделювання планарних коливань пластин, що реалізують при наближеному задоволенні граничних умов як метод колокації, так і метод мінімізації середньоквадратичного відхилення, описані вище. При цьому, виходячи з міркувань, пов'язаних із збереженням помірних значень коефіцієнтів матриць систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладів A_{ij} , B_{ij} , виявляється зручним перейти до безрозмірних граничних умов для напружень, пронормувавши напруження, що входять в (5.17), до модуля зсуву G .

Чисельне моделювання проводилось для п'єзокерамічних пластин, виготовлених з матеріалу PZT-4, параметри якого наведено в [92]:

$$s_{11}^E = 12.3 \times 10^{-12} \frac{\text{М}^2}{\text{Н}}, \quad s_{12}^E = -4.05 \times 10^{-12} \frac{\text{М}^2}{\text{Н}}, \quad \nu = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E} = 0.329268... \approx 0.33,$$

$$\rho = 7500 \frac{\text{кг}}{\text{М}^3}.$$

При проведенні обчислень для отримання амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) досліджуваних п'єзокерамічних пластин із суцільним двохстороннім електродним покриттям безрозмірна величина еквівалентного вимушеного навантаження \bar{F}_n^{Veq} покладалась рівною -1 .

На рис. 5.2 представлені результати розрахунків амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) для паралелограмної пластини з розмірами $a = 34.54$ мм і $b = 45.69$ мм з кутом $\alpha = 80^\circ$ згідно методу колокації для значень $N = M = 60$ (горизонтальна вісь – частота, кГц; вертикальна вісь – модуль суми безрозмірних головних напружень $\sigma_\Sigma = |\sigma_x + \sigma_y|$ у центрі пластини):

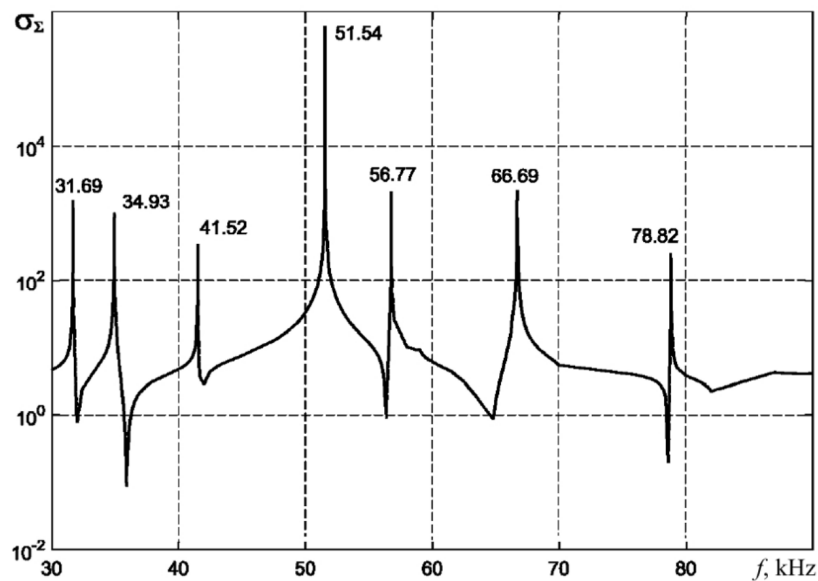


Рис. 5.2. АЧХ паралелограмної пластини.

Графіки АЧХ, отримані у результаті чисельного моделювання при застосуванні методу колокацій при $N = M = 90$, а також методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N = M = 60$ і $N = M = 90$, а також значення резонансних частот практично не відрізняються від даних, наведених на рис. 5.2.

У таблиці 5.1 для порівняння результатів розрахунків з даними, отриманими при експериментальному дослідженні коливань паралелограмної п'єзокерамічної пластини, наведені значення резонансних частот. Близькість цих значень підтверджує високу точність використовуваного аналітичного методу та його ефективність при розв'язуванні практичних задач дослідження динаміки п'єзокерамічних пластин неканонічної форми.

Таблиця 5.1 Чисельні та експериментальні значення резонансних частот (кГц)

	1	2	3	4	5	6	7
f_{comp}	31.69	34.93	41.52	51.54	56.77	66.69	78.82
f_{exp}	31.05	34.35	40.40	49.55	55.72	65.14	77.33

При порівнянні даних теорії та експерименту відносно спектрів власних частот пластини потрібно мати на увазі наступну важливу обставину. В теорії результати одержані для моделі ідеально пружного матеріалу. В експерименті природно проявляються реальні властивості матеріалу, зокрема наявність внутрішнього демпфування. Відносно власних частот наявність демпфування приводить до зміщення значень резонансної частоти, більш того, для такого випадку слід враховувати різницю значень власних частот за швидкостями і по зміщенням. Це два різні резонанси. Ситуація ускладнюється також тим, що саме демпфування істотно залежить від частоти, що також слід врахувати при порівнянні результатів. Не менш важливою є та обставина, що в експерименті неможливо реалізувати точно задані у розрахунковій схемі граничні умови.

Для оцінки точності результатів обчислених розв'язків на рис. 5.3–5.6 також представлені графіки похибок задоволення граничних умов

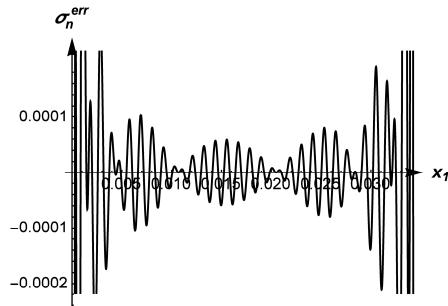
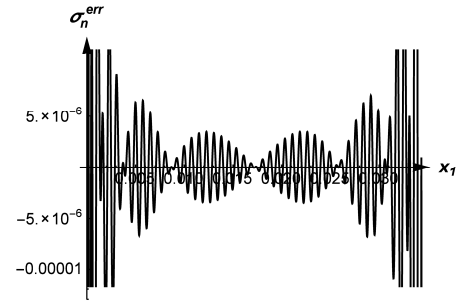
$$\begin{aligned}\sigma_n^{err} &= \sigma_n^{def(comp)} - \bar{F}_n^{Veq}, \\ \sigma_\tau^{err} &= \sigma_\tau^{def(comp)},\end{aligned}\tag{5.33}$$

де *comp* означає величини, одержані у результаті обчислень, а *err* – величини похибок.

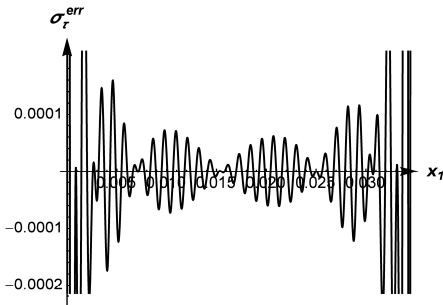
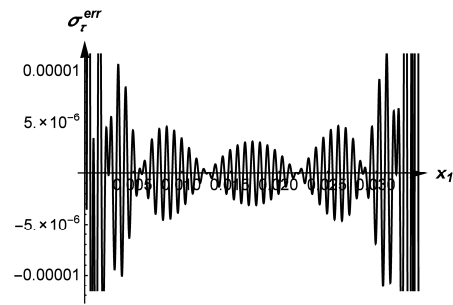
При побудові графіків похибок для випадку застосування методу колокацій на рис. 5.3–5.6 дані в околі кутових точок представлені не повністю, оскільки похибка тут зростає, однак не перевищує величину 10^{-3} від значення навантаження, заданого на границі. Дані, представлені на рисунках, дозволяють зробити якісний висновок про точність отриманих результатів. Оскільки обидва

методи при задоволенні граничних умов пов'язані з нехтуванням внеску гармонік з високими номерами, така поведінка нев'язки – висока змінність по координаті – є природною.

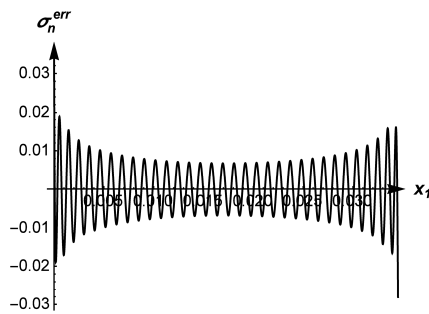
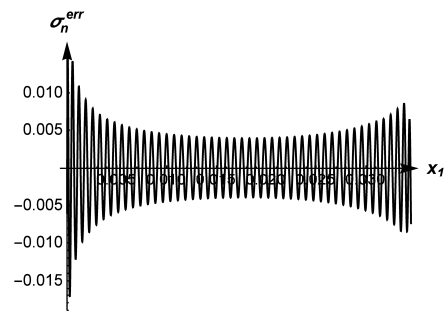
Порівняння похибок задоволення граничних умов для нормальних напружень σ_n^{err} на стороні I паралелограма для методу колокації:

Рис. 5.3. $N = M = 60$ Рис. 5.4. $N = M = 90$

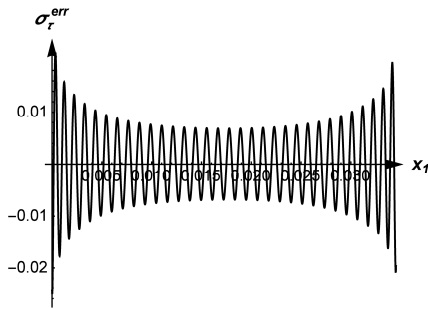
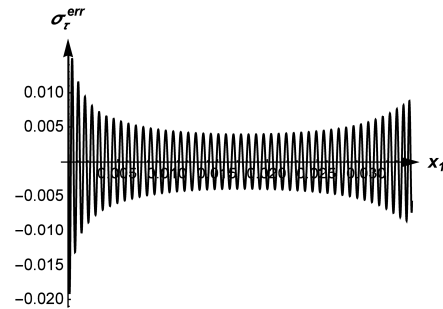
Порівняння похибок задоволення граничних умов для дотичних напружень σ_τ^{err} на стороні I паралелограма для методу колокації:

Рис. 5.5. $N = M = 60$ Рис. 5.6. $N = M = 90$

Порівняння похибок задоволення граничних умов для нормальних напружень σ_n^{err} на стороні I паралелограма для методу мінімізації середньоквадратичного відхилення:

Рис. 5.7. $N = M = 60$ Рис. 5.8. $N = M = 90$

Порівняння похибок задоволення граничних умов для дотичних напружень σ_n^{err} на стороні I паралелограма для методу мінімізації середньоквадратичного відхилення:

Рис. 5.9. $N = M = 60$ Рис. 5.10. $N = M = 90$.

Порівняння результатів для двох систем точок колокації (60 і 90 точок) чітко показує, що збільшення кількості точок колокації приводить до підвищення якості виконання граничних умов. Те ж саме справедливо і при збільшенні кількості проєкційних функцій у випадку методу мінімізації середньоквадратичного відхилення. Однак при застосуванні методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при однаковій кількості доданків отримуємо вищу точність.

Цікавим є факт наявності відносно високої похибки у дуже вузьких областях поблизу кінців граничних відрізків. Мабуть, це є специфічною особливістю методу колокації, але при застосуванні, наприклад, проєкційного методу (методу мінімізації середньоквадратичного відхилення), цей недолік, як видно з графіків, усувається. Однак при визначенні таких інтегральних характеристик коливальної системи як власні частоти обидва методи забезпечують практично одну і ту ж точність при однаковій кількості утримуваних доданків у нескінченних рядах.

5.5 Експериментальні дослідження впливу збурень форми границі на частотні характеристики планарних коливань п'єзокерамічних пластин

Наведемо результати експериментальних досліджень вимушених планарних коливань п'єзокерамічних пластин, що мають форму паралелограма. Основна ідея тут також полягає у тому, щоб дослідити можливість керування спектром власних частот і величиною коефіцієнта електромеханічного зв'язку

пластин шляхом зміни їх форми. Крім того, результати проведених експериментів потрібні для підтвердження даних, отриманих при аналітичному і чисельному дослідженні динаміки п'єзокерамічних пластин при розв'язанні практичних задач у випадку виникнення питань щодо відповідності фізичних властивостей реальної пластини припущенням, які закладені в ідеальну розрахункову модель. Відповідь на це питання може бути отримана при порівнянні розрахункових і експериментальних даних для набору власних частот пластини у достатньо широкому частотному діапазоні. Методику проведення експерименту апробовано при вивченні властивостей коливань квадратних і паралелограмних пластин з кераміки SM111 (модифікована PZT-4, що виробляється STEMiNC) з різними кутами нахилу сторін. Експерименти проводилися на пластинах. Частотний діапазон досліджень обмежувався згори значенням 140 кГц, що забезпечило можливість ефективного збудження достатньої для аналізу кількості власних форм коливань. Структура експериментального комплексу та спосіб збудження коливань при фактичних значеннях коефіцієнтів добротності пластин дозволяють розглядати зовнішнє джерело напруги як джерело необмеженої потужності. Збудження несиметричних форм коливань при зміні геометрії прямокутної пластини є природним. Однак дослідження показало, що моди високого порядку в паралелограмних пластинах (які звичайно мають дуже низький коефіцієнт електромеханічного зв'язку в прямокутних пластинах) можуть ефективно збуджуватися при збереженні рівномірного електродного покриття, що свідчить про необхідність уточнення традиційних оцінок коефіцієнта електромеханічного зв'язку в п'єзoeлектричних пластинах з урахуванням неоднорідних полів напружень та деформацій.

П'єзокерамічні матеріали широко використовуються при створенні електромеханічних перетворювачів [94, 99–103]. Найбільш важливими характеристиками таких перетворювачів є спектр власних частот, форми власних коливань та коефіцієнти електромеханічного зв'язку. Для забезпечення характеристик, що відповідають технічним вимогам, можна використовувати варіацію форми елемента, який коливається, вибором спеціальної форми

електродного покриття [101]. Необхідність експериментального дослідження амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) п'єзокерамічних пластин неканонічної форми обумовлена потребою підтвердження вихідних положень математичної моделі, отриманої із застосуванням методу суперпозиції [87, 88, 1–8], для побудови розв'язків задачі про їх планарні коливання (коливання в площині). Крім того, експеримент дає можливість отримати наочне уявлення про власні форми коливань цих пластин у широкому діапазоні частот. Численні проблеми, пов'язані з різними режимами коливальних процесів, мають місце в прикладних науках, наприклад, в акустиці. Проблеми паразитних коливань в резонаторах у формі паралелограма, що виникають у частотних фільтрах або чутливих елементах MEMS (MicroElectroMechanical Systems), в широко-смугових датчиках акустичної емісії [93], є актуальними. Залежно від вимог і призначення цих приладів використовуються резонатори різної форми та із різних матеріалів.

Вище на основі аналітичного підходу було запропоновано метод, що дозволяє вивчити динамічні характеристики паралелограмної п'єзопластини при планарних коливаннях. Як показує аналіз розрахункових даних для різних рівнів збурення форми границі (кут паралелограма) запропоновані алгоритми забезпечують одержання кількісних оцінок з високою точністю. Наявність таких алгоритмів дозволяє ефективно використовувати їх при розв'язанні прикладних задач створення приладів механотроніки. Зокрема, запропоновані алгоритми можуть бути використані при пошуку оптимальних форм електродів для одержання високих значень коефіцієнтів електромеханічного зв'язку на певних формах коливань.

Однак при розв'язуванні практичних задач завжди виникає питання про відповідність фізичних властивостей реальної пластини тим припущенням, які закладені в ідеальну розрахункову модель. У даному випадку відповідь на дане запитання можна отримати при порівнянні теоретичних даних з експериментальними для набору власних частот пластини у достатньо широкому діапазоні частот. Таке порівняння, проведене нижче, показує, що властивості матеріалів і якість електродного покриття реальних пластин

достатньо добре відповідають припущенням розрахункової моделі.

Важливим є також висновок про те, що запропонована техніка експерименту дозволяє знаходити потрібні динамічні характеристики пластин з необхідною точністю.

У даному розділі представлено результати експериментального дослідження планарних коливань п'єзокерамічних пластин, що ілюструють можливості управління вказаними вище характеристиками за рахунок збурення форми квадратної пластини, яка шляхом видалення частини матеріалу перетворюється в паралелограми з різними кутами нахилу сторін. При цьому електродне покриття зберігається по всій поверхні пластини.

Об'єктом для трансформації геометричної форми вибрана квадратна пластина. Досліджувалась еволюція її частотного спектру і нормальних мод при послідовному перетворенні її в паралелограми з кутами зрізу 2° і 10° . Важливою метою при дослідженні таких геометрій також був пошук форм коливань з максимально інтенсивною двокомпонентною кінематикою руху гострих кутів пластин для використання їх у п'єзоелектричних фрикційних ультразвукових двигунах.

5.5.1 Оцінка ефективності енергоперетворення пластини на резонансних коливаннях. У роботі [104] виконано порівняльний аналіз найбільш поширених методів визначення коефіцієнтів електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) п'єзо-елементів, зокрема, резонансного методу Мезона [105] і точного енергетичного критерію Улітко [106], справедливого як для динамічної, так і для статичної неоднорідної деформації п'єзоелектричних перетворювачів.

Нехай $k_{d,n}^2$ означає квадрат «динамічного» КЕМЗ згідно Мезону, а k_e^2 – квадрат відповідної величини за енергетичним критерієм Улітко, так званий «енергетичний» КЕМЗ:

$$k_{d,n}^2 = \frac{f_{A,n}^2 - f_{R,n}^2}{f_{A,n}^2}, \quad k_e^2 = \frac{U^{(P)} - U^{(K)}}{U^{(P)}}. \quad (5.34)$$

Тут $f_{R,n}^2, f_{A,n}^2$ – n -і резонансна та антирезонансна частоти коливань, $U^{(P)}$, $U^{(K)}$ – інтеграли від функції внутрішньої енергії деформування заданого об'єму V п'єзоелектрика

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \varepsilon_{xy}) + \frac{1}{2} E_z D_z, \quad U = \iiint_V u dV, \quad (5.35)$$

розраховані відповідно при електричних граничних умовах на розімкнутих (верхній індекс (P)) та на коротко-замкнених (верхній індекс (K)) електродах, які відповідно мають вигляд [92]

$$\frac{d}{dt} \iint_{S_1^+} D_z dS = 0, \quad \psi^+ - \psi^- = 0, \quad z = \pm h, \quad (5.36)$$

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – складові напружень, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ – складові деформацій, E_z, D_z – z -компоненти векторів напруженості електричного поля і електричної індукції.

Відмітимо, що висновки у [104] проілюстровані розрахунком КЕМЗ $k_{d,n}^2$ і k_e^2 для радіальних коливань диску та кільцевої пластини як частинних випадків реалізації розглянутого нами плоского електропружного стану пластини. Виявилось, що на резонансних частотах цих п'єзопластин результати розрахунку вказаних коефіцієнтів теоретично співпадають, але тільки якщо припустити, що квадрат статичного планарного КЕМЗ матеріалу $k_p^2 = 2d_{31}^2 / [(1-\nu)s_{11}^E \varepsilon_{33}^T]$ дорівнює $k_p^2 = 0.6$. Для реальних матеріалів цей коефіцієнт значно нижчий. Наприклад, для досліджуваних зразків він дорівнює $k_p^2 \approx 0.31$ і точне значення k_e^2 на резонансах завжди принаймі на 10% нижче $k_{d,n}^2$.

Здійснити на практиці енергетичний аналіз КЕМЗ k_e^2 , який потребує повного аналітичного опису усіх без виключення характеристик спряженого електропружного поля, не завжди представляється можливим. Слід, однак, звернути увагу на те, що обчислені в [104] динамічні КЕМЗ узгоджуються з енергетичними. З ростом номера моди коливань розбіжність між цими коефіцієнтами принаймі не збільшується, що в принципі дозволяє

використовувати визначення динамічного КЕМЗ $k_{d,n}^2$ в якості «локальної» оціночної характеристики ефективності збудження нормальних мод планарних коливань пластини при послідовній зміні її геометричної форми. З фізичної точки зору для точного розрахунку реального коефіцієнта енергоперетворення як відношення здатної до обернення енергії до повної накопиченої енергії п'єзоперетворювача при неоднорідній динамічній деформації така «локальна» оціночна характеристика не має ніякого змісту.

5.5.2 Методика проведення експериментальних досліджень. Об'єктами досліджень служили зразки паралелограмних пластин, сформовані на основі п'єзокерамічних квадратних пластин складу SM111 (модифікована PZT-4) фірми STEMiNC з товщинною поляризацією (фізичні властивості п'єзо-матеріалу подані в табл. 5.2) з розмірами $45,0 \times 45,0 \times 2,8$ мм шляхом вирізання за допомогою тонкого алмазного круга з контролем температур нагріву вирізання (нагрів не більше 65°C).

Таблиця 5.2. Фізичні властивості п'єзокераміки SM111

Характеристика		Числове значення
Модулі пружності при постійному електричному полі, Н/м ²	c_{11}^E	$13,2 \cdot 10^{10}$
	c_{12}^E	$7,1 \cdot 10^{10}$
	c_{13}^E	$7,3 \cdot 10^{10}$
	c_{33}^E	$11,5 \cdot 10^{10}$
	c_{44}^E	$3 \cdot 10^{10}$
П'єзоелектричні сталі, Н/В·м	e_{31}	-4,1
	e_{33}	14,1
	e_{15}	10,5
Відносні діелектричні проникності при постійній деформації ($\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$), Ф/м	$\epsilon_{11}^S / \epsilon_0$	804,6
	$\epsilon_{33}^S / \epsilon_0$	659,7
Густина матеріалу, кг/м ³	ρ	7900
Механічна добротність	Q_m	1800

Амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) досліджувались з використанням експериментального стенду, який включає в себе аналоговий характериограф типу Х1-46, що складається з генератора коливальної частоти та індикаторного блоку, широкосмуговий підсилювач У7-3, генератори звукових частот ГЗ-33 (високовольтний вихід) і ГЗ-117 (спектрально чистий), вібродемпфувальний предметний столик з досліджуваним зразком та екранованими дротами з'єднань, вольтметри для вимірювання ефективного значення амплітуд вхідних і вихідних сигналів, осцилографи для спостереження за формою сигналів, двохкоординатний самописець Н-306 для запису АЧХ.

На рис. 5.11. приведена схема підключення п'єзопластини, а також резисторів R_1 – R_3 номінальними опорами 0.1, 1.0, 10.0 Ом для вимірювання струму в ланцюзі на резонансних частотах і R_4 опором 1 МОм для вимірювання антирезонансних частот. Тут $R_{\text{ввх}}$ – вихідний опір використовуваного генератора або підсилювача (як правило, $R_{\text{ввх}} \leq 5$ Ом); $R_{\text{вх}}$ – вхідний опір вимірювального приладу ($R_{\text{вх}} \geq 1$ МОм).

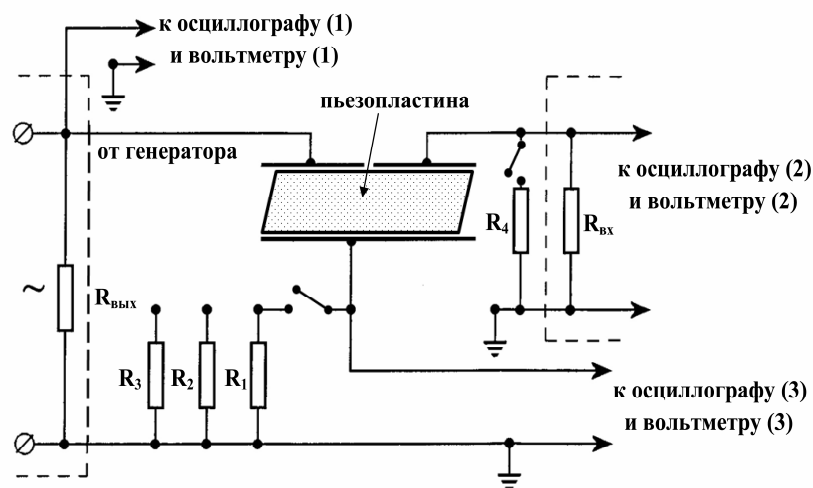


Рис. 5.11. Спрощена схема підключення п'єзопластини.

Оскільки заявлена добротність використовуваних п'єзокерамічних пластин $Q_m = 1800$ од., то їх імпеданс Z на резонансних частотах може досягати декількох десятків Ом. Тому, щоб зареєструвати резонансний стан за

величиною струму, достатньо підключити п'єзопластину через резистор опором в декілька Ом. При такій реалізації експериментального дослідження, по суті, немає необхідності враховувати обмеження зовнішнього джерела енергії.

Для візуалізації форм коливань використовувався метод фігур Хладні. Досягнення чіткості зображення форм можливо лише у разі достатньо інтенсивних коливань пластини. При малих коефіцієнтах електромеханічного зв'язку це може привести до небажаного перегріву пластини, що вимагає підвищеної уваги до контролю температур пластини при збудженні коливань на резонансних частотах.

Резонансні частоти зразків вимірювались при кімнатній температурі $\sim 20^\circ\text{C}$. Амплітуда напруження, яка подається на електроди, не перевищувала 0,1 В, а величина струму – 10 мА, що дозволило уникнути дисипативного розігріву пластин. П'єзопластини кріпилися на тонких дротах діаметром 0,07 мм, припаяних до електродів з використанням мінімальної кількості паяльного матеріалу з метою уникнення ефекту «приєднаної маси».

Частотний діапазон вимірювань обмежувався $f \leq 140$ кГц, оскільки для квадратної пластини (враховуючи розмір) у цьому діапазоні спостерігається шість основних резонансних частот, а для пластин, вирізаних з неї у вигляді паралелограмів, їх кількість значно зростає. Наприклад, для паралелограма із зрізом кута 10° , спостерігається вже біля 20 резонансних частот, що обумовлено ефективним збудженням несиметричних форм.

5.5.3 Амплітудно-частотні характеристики і коефіцієнт електромеханічного зв'язку квадратної пластини розміром 45x45x2,8 мм та похідних від неї паралелограмів з різними кутами зрізу протилежних граней.

Амплітудно-частотна характеристика і КЕМЗ квадратної пластини розміром 45x45x2,8 мм. На рис. 5.12 показана отримана експериментально АЧХ квадратної п'єзопластини (45x45x2,8 мм). Числа біля резонансних піків показують виміряні значення резонансних частот, а A_{rel} означає відносну

амплітуду напруження, що спостерігається на виході (3) (див. рис. 5.11).

Частоти резонансів $f_{R,n}$, антирезонансів $f_{A,n}$ і обчислені за ними по формулі Мезона [105] (перша формула (5.34)) значення коефіцієнта електромеханічного зв'язку $k_{d,n}^2$, який є важливою характеристикою коливальних систем з п'єзокерамічними елементами [104–106], а також розраховані по методу, запропонованому в [4] значення резонансних частот $f_{R,n}^{comp}$ наведені в табл. 5.3.

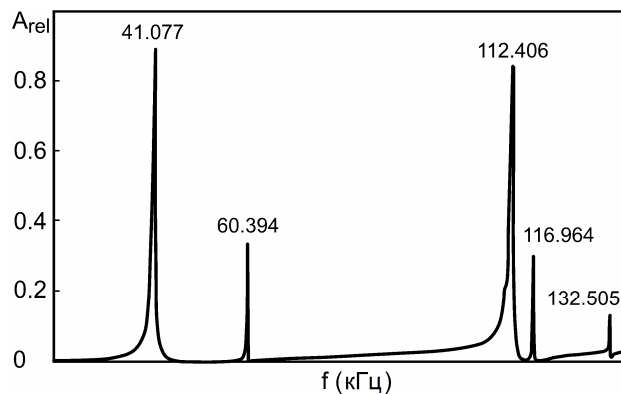


Рис. 5.12. Амплітудно-частотна характеристика квадратної п'єзопластини розміром 45x45x2,8 мм.

Таблиця 5.3. Експериментальні значення резонансних, антирезонансних частот, КЕМЗ і розраховані резонансні частоти квадратної п'єзопластини.

№ резонансу	Експеримент			Розрахунок
	$f_{R,n}$, кГц	$f_{A,n}$, кГц	$k_{d,n}^2$	$f_{R,n}^{comp}$, кГц
1	41.077	48.066	0.2696	42.83
2	60.394	60.916	0.01706	61.25
3	112.406	115.216	0.04818	116.27
4	116.964	117.664	0.01186	119.60
5	132.505	132.625	0.00180	133.67

Перший, основний резонанс пластини збуджується на частоті $f_{R,1} = 41.077$ кГц; при цьому замкнута вузлова лінія знаходиться в центрі пластини, що може відповідати «квазірадіальній» моді коливань, властивій радіальним коливанням кругового диску. Друга інтенсивна мода коливань

реалізується на частоті $f_{R,2} = 60.394$ кГц, при цьому розподіл вузлових ліній має діагональний характер. Третя мода коливань на частоті $f_{R,3} = 112.406$ кГц має п'ять вузлових ліній та є обертоном першої основної моди, четверта на частоті $f_{R,4} = 116.964$ кГц має діагональну симетрію при наявності дев'яти вузлових ліній, а п'ята при $f_{R,5} = 132.505$ кГц має центральну симетрію. Для квадратної пластини цілком очікувано, що інтенсивність переміщень u_x і u_y її серединної площини є рівноцінною для всіх мод коливань, що й породжує цю послідовність форм з осовою та діагональною симетрією.

Енергетичні характеристики цих мод коливань можна описати наступним чином. Найбільше значення $k_{d,1}^2 \approx 0.27$ досягається на першому, основному резонансі; при цьому ширина резонансної кривої і обидва переміщення будуть u_x та u_y максимальними. Потім значення $k_{d,n}^2$ для старших мод істотно зменшуються, за винятком третьої моди коливань з $f_{R,3}$, для якої $k_{d,3}^2 \approx 0,05$. У цілому ця поведінка КЕМЗ відповідає результатам, описаним раніше в [18], а відмінності в інтенсивності амплітуд коливань на різних частотах корелюють з шириною резонансної кривої і величиною $k_{d,n}^2$ для кожної нормальної моди.

Амплітудно-частотна характеристика і КЕМЗ паралелограмної пластини, отриманої із квадратної пластини 45x45x2,8 мм шляхом зрізу прямого кута на 2°. На рис. 5.13 приведена АЧХ паралелограмної пластини з гострим кутом 88°, тобто зі зрізом прямого кута на 2°. Експериментально точно визначити деякі значення антирезонансних частот не вдалося, що у цілому не суттєво вплинуло на проведений аналіз. Порівняння даних, наведених на рис. 5.12 і рис. 5.13 показує, що загальна структура спектру резонансних частот пластини збереглась, тобто найбільш інтенсивні резонанси спостерігаються поблизу 40 і 60 кГц, а також в інтервалі 110...120 кГц. Однак у порівнянні з квадратною пластиною у спектрі частот з'явилися нові резонанси. Частоти резонансів, антирезонансів та обчислені за ними значення КЕМЗ, а також розрахункові значення резонансних частот наведені в табл. 5.4.

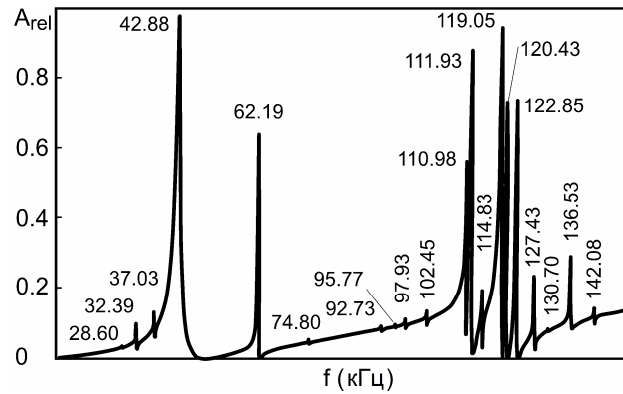


Рис. 5.13. Амплітудно-частотні характеристики паралелограмної пластини зі зрізом прямого кута на 2° .

Таблиця 5.4. Експериментальні значення резонансних, антирезонансних частот, КЕМЗ і розрахункові резонансні частоти паралелограмної п'єзопластини, одержаної із квадратної шляхом зрізу прямого кута на 2° .

№ резонансу	Експеримент			Розрахунок
	$f_{R,n}$, кГц	$f_{A,n}$, кГц	$k_{d,n}^2$	$f_{R,n}^{comp}$, кГц
1	28.60	28.78	0.012469	29.03
2	32.39	32.52	0.007979	32.76
3	37.03	37.09	0.004843	37.75
4	42.88	49.86	0.262163	44.57
5	62.19	62.88	0.024310	63.28
6	74.80	75.04	0.006386	75.87
7	92.73	—	—	93.90
8	95.77	—	—	97.23
9	97.93	—	—	98.86
10	102.45	—	—	105.15
11	110.98	111.26	0.005026	115.81
12	111.93	112.97	0.018327	117.03
13	114.83	115.09	0.0045130	122.58
14	119.05	120.02	0.016098	125.50
15	120.43	121.47	0.017050	130.21

Нижче самого інтенсивного резонансу на частоті $f_{R,4} = 42.88$ кГц, який відповідає першому резонансу квадратної пластини $f_{R,1} = 41.077$ кГц, з'явилися три резонансні піки незначної інтенсивності на частотах $f_{R,1} = 28.60$ кГц,

$f_{R,2} = 32.39$ кГц, $f_{R,3} = 37.03$ кГц з КЕМЗ $k_{d,1}^2 \approx 0.01$, $k_{d,2}^2 \approx 0.007$, $k_{d,3}^2 \approx 0.005$. При цьому резонанс на нижчій частоті $f_{R,1} = 28.60$ кГц відповідає діагональній формі коливань.

Важливо відмітити, що три виявлених низькочастотних резонанси паралелограмної пластини мають, швидше за все, метрологічне значення, пов'язане, наприклад, з експериментальним визначенням пружних модулів п'єзоматеріалу. Однак їх використання на практиці як скільки-небудь інтенсивних мод, наприклад, в актуаторах або частотних фільтрах є досить складним.

Дещо вище по частоті відносно другого резонансу квадратної пластини ($f_{R,2} = 60.394$ кГц) спостерігається відповідний йому резонанс на частоті $f_{R,5} = 62.19$ кГц з дуже близьким значенням $k_{d,5}^2 \approx 0.024$. Ще вище фіксується слабкий резонанс на частоті $f_{R,6} = 74.80$ кГц з достатньо незначним $k_{d,6}^2 \approx 0.006$.

У діапазоні частот $\sim 90 \dots 100$ кГц також проявляється серія досить слабких резонансів $f_{R,7} = 92.73$ кГц, $f_{R,8} = 95.77$ кГц, $f_{R,9} = 97.93$ кГц, $f_{R,10} = 102.45$ кГц, для яких, на жаль, не вдалося достовірно визначити антирезонансні частоти і КЕМЗ. Крім того, для паралелограмної пластини виявлено резонанси на частотах $f_{R,11} = 110.98$ кГц та $f_{R,13} = 114.83$ кГц з дуже малими значеннями $k_{d,11}^2 \approx 0.005$ і $k_{d,13}^2 \approx 0.004$, а також резонанс на частоті $f_{R,12} = 111.93$ кГц з істотно великим $k_{d,12}^2 \approx 0.02$.

Третьому резонансу квадратної пластини на частоті $f_{R,3} = 112.406$ кГц відповідає мода коливань з $f_{R,14} = 119.05$ кГц і $k_{d,14}^2 \approx 0.016$. Близько до нього розташований резонанс на частоті $f_{R,15} = 120.43$ кГц і практично з таким же $k_{d,15}^2 \approx 0.017$.

Аналіз планарних коливань паралелограмної пластини, одержаної з квадратної пластини шляхом зрізу прямого кута на 2° , та порівняння

результатів з такими для квадратної пластини показує, що для паралелограмної пластини кількість збуджених резонансів для всього розглянутого частотного діапазону значно збільшується.

Амплітудно-частотна характеристика і КЕМЗ паралелограмної пластини, одержаної із квадратної пластини 45x45x2,8 мм шляхом зрізу прямого кута на 10°. На рис. 5.14 наведена АЧХ паралелограмної пластини зі зрізом прямого кута на 10°, тобто з гострим кутом 80°. Порівняння отриманих даних з такими на рис. 5.13 показує, що із збільшенням кута зрізу всі резонансні частоти ще трохи підвищуються. Відповідні частоти резонансів, антирезонансів і обчислені по ним значення КЕМЗ, а також розрахункові значення резонансних частот наведені в табл. 5.5.

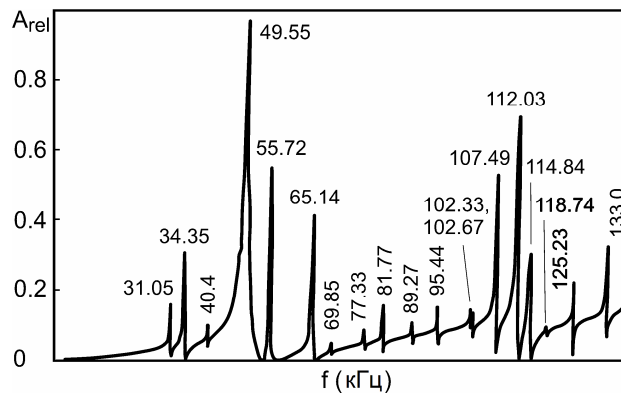


Рис. 5.14. Амплітудно-частотні характеристики паралелограмної пластини зі зрізом прямого кута на 10°.

Таблиця 5.5. Експериментальні значення резонансних, антирезонансних частот, КЕМЗ і розрахункові резонансні частоти паралелограмної п'єзопластини, одержаної із квадратної шляхом зрізу прямого кута на 10°.

№ резонансу	Експеримент			Розрахунок
	$f_{R,n}$, кГц	$f_{A,n}$, кГц	$k_{d,n}^2$	$f_{R,n}^{comp}$, кГц
1	31.05	31.32	0.017167	31.69
2	34.35	35.01	0.037348	34.93
3	40.4	40.63	0.011289	41.52
4	49.55	54.32	0.167914	51.54

5	55.72	57.67	0.066482	56.77
6	65.14	66.22	0.032352	66.69
7	69.85	69.87	0.000572	70.92
8	77.33	77.68	0.008991	78.82
9	81.77	82.06	0.007055	83.41
10	89.27	89.57	0.006687	91.76
11	95.44	95.78	0.007087	97.46
12	102.33	102.67	0.006612	104.30
13	102.67	103.03	0.006976	105.07
14	107.49	108.12	0.011619	109.54
15	112.03	112.94	0.016049	115.78
16	114.84	115.65	0.013958	118.59

Частота основної моди, що відповідає першому резонансу квадратної пластини з $f_{R,1} = 41.077$ кГц, збільшується до $f_{R,4} = 49.55$ кГц і має найбільше значення КЕМЗ $k_{d,4}^2 \approx 0.168$, у той час як другому резонансу квадратної пластини з $f_{R,2} = 60.394$ кГц відповідає мода з частотою $f_{R,6} = 65.14$ кГц і $k_{d,6}^2 \approx 0.032$. Крім того, в сукупності збуджуваних форм коливань з'являється мода з резонансною частотою $f_{R,5} = 55.72$ кГц, яка раніше не спостерігалась. Вона має вельми значний КЕМЗ $k_{d,5}^2 \approx 0.067$.

При порівнянні даних для трьох перших резонансів для паралелограмної пластини з кутом зрізу 10° з даними для пластини з кутом зрізу 2° (рис. 5.14 та рис. 5.13 відповідно) спостерігається їх зміщення по частоті вгору: при куті зрізу 10° маємо $f_{R,1} = 31.05$ кГц, $f_{R,2} = 34.35$ кГц, $f_{R,3} = 40.4$ кГц і відповідно $k_{d,1}^2 \approx 0.017$, $k_{d,2}^2 \approx 0.037$, $k_{d,3}^2 \approx 0.011$, тобто інтенсивність другого резонансу стала більш значною у порівнянні із сусідніми. Характер розподілу переміщень на цих перших трьох модах у цілому відповідає характеру переміщень для пластин з кутом зрізу 2° .

У середній області частот в інтервалі $f_{R,7} = 69.85$ кГц ... $f_{R,13} = 102.67$ кГц спостерігається збудження більшої кількості резонансів з відносно низькою ефективністю: коефіцієнти з $k_{d,7}^2$... $k_{d,13}^2$ не перевищують декількох тисячних.

У високочастотній області спектру моди коливань будь-яких особливостей не мають, найбільш інтенсивними із них є моди з резонансними частотами $f_{R,14} = 107.49$ кГц, $f_{R,15} = 112.03$ кГц, $f_{R,16} = 114.84$ кГц и $k_{d,14}^2 \approx 0.012$, $k_{d,15}^2 \approx 0.016$, $k_{d,16}^2 \approx 0.013$. При цьому коливання здійснюються переважно вдовж більшої діагоналі паралелограмної пластини.

Таким чином, для паралелограмної пластини з кутом зрізу 10° має місце тенденція збереження складу мод коливань, які збуджуються у випадку пластини з кутом зрізу 2° . При цьому для багатьох мод спостерігається достатньо помітна стійкість з точки зору їх форми.

5.6 Дослідження змін у резонансних властивостях при зміні форми п'єзокерамічного стержня з прямокутної на трапецієвидну

При практичній розробці п'єзоелектричних резонаторів значний інтерес становить питання про зміни у резонансних властивостях зразків, які наступають внаслідок трансформації канонічної геометричної форми довгого призматичного п'єзокерамічного стержня на трапецієвидний у плані стержень тієї ж довжини і товщини. Слабка зміна геометрії у випадку стержневої моделі, котра виражається в змінному поперечному перерізі по довжині: $|x| \leq l$, $|y| \leq b + a \cdot x/l$; $|z| \leq h$ ($b, h, a \ll l$), приводить до рівняння коливань зі змінними коефіцієнтами не лише відносно функції переміщень, а також і відносно навантажуючого електричного поля [5]

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{1 + \alpha x} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\alpha}{1 + \alpha x} d_{31} \frac{V_0}{h} e^{i\omega t} = \rho s_{11}^E \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad (5.37)$$

де $\alpha = a/(b \cdot l)$ – геометричний параметр (див. рис. 5.15 та рис. 5.16).

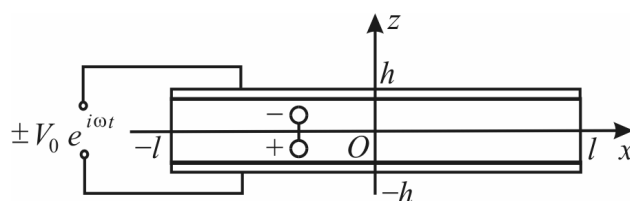
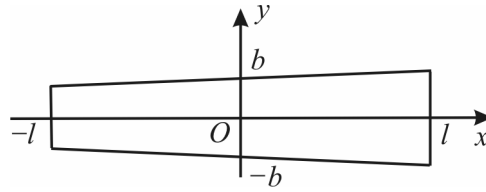


Рис. 5.15. П'єзокерамічний стержень (переріз $y=0$)

Рис. 5.16. Осьовий переріз стержня ($z = 0$)

Важливо відмітити, що загальний розв'язок цього рівняння можна представити в аналітичному вигляді через функції Бесселя [107]

$$\begin{aligned}
 u(x) = & C_1 J_0\left(\lambda \frac{1+\alpha x}{\alpha}\right) + C_2 Y_0\left(\lambda \frac{1+\alpha x}{\alpha}\right) - \\
 & - \frac{\pi(1+\alpha x)}{2} d_{31} \frac{V_0}{h} \left[-Y_0\left(\lambda \frac{1+\alpha x}{\alpha}\right) \int_1^p e^{\alpha \xi} J_0\left(\lambda \frac{e^{\alpha \xi}}{\alpha}\right) d\xi + \right. \\
 & \left. + J_0\left(\lambda \frac{1+\alpha x}{\alpha}\right) \int_1^p e^{\alpha \xi} Y_0\left(\lambda \frac{e^{\alpha \xi}}{\alpha}\right) d\xi \right]. \quad p = \frac{1}{\alpha} \ln(1+\alpha x), \quad (5.38)
 \end{aligned}$$

що допускає відтворення та аналіз всіх компонентів поля: напружень, деформацій, функції електричного зміщення і струму провідності в аналітичному вигляді. Зокрема, з'ясовано, що в резонансних коливаннях трапецієвидного стержня збуджуються не лише частоти вільного призматичного стержня $(\lambda l)_n = (2n+1)\pi/2$, т.е. $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ і т.д. ($\cos \lambda l = 0$), але й частоти $(\lambda l)_n = \frac{n\pi}{2}$, тобто π , 2π , $3\pi \dots$ ($\sin \lambda l = 0$). Це підтверджується і даними експериментів при співставленні АЧХ стержнів канонічної форми $100\text{мм} \times 15\text{мм} \times 5\text{мм}$ (рис. 5.17) и трапецієвидної форми $100\text{мм} \times (9 \times 5) \times 6\text{мм}$ (рис. 5.18) з матеріалу ЦТС-19.



Рис. 5.17. Прямокутний зразок



Рис. 5.18. Трапецієвидний зразок

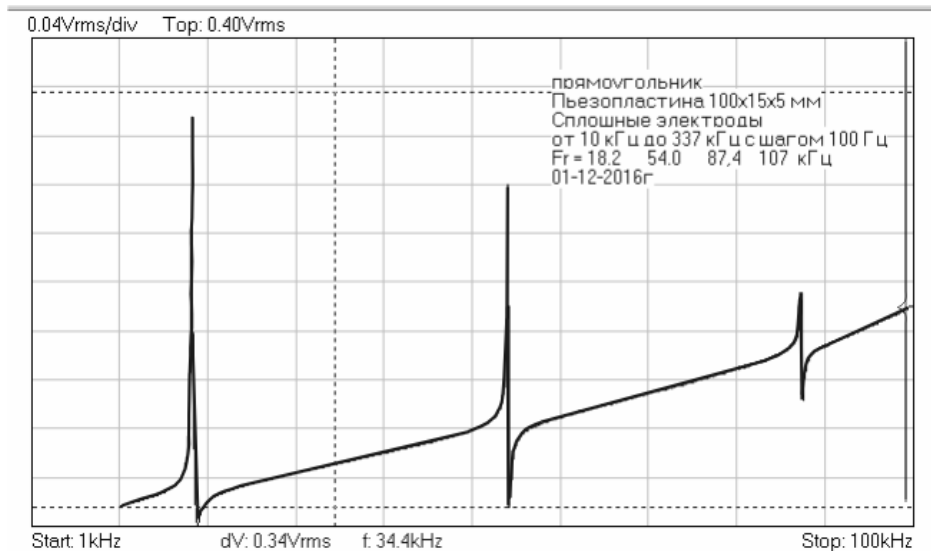


Рис. 5.19. АЧХ прямокутного стержня.

Область збудження гармонічних частот складала 100кГц. На АЧХ рис 5.19 чітко виражені три резонансні частоти: 18,7; 54; 88,6 кГц., що відповідає безрозмірним частотам $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$.

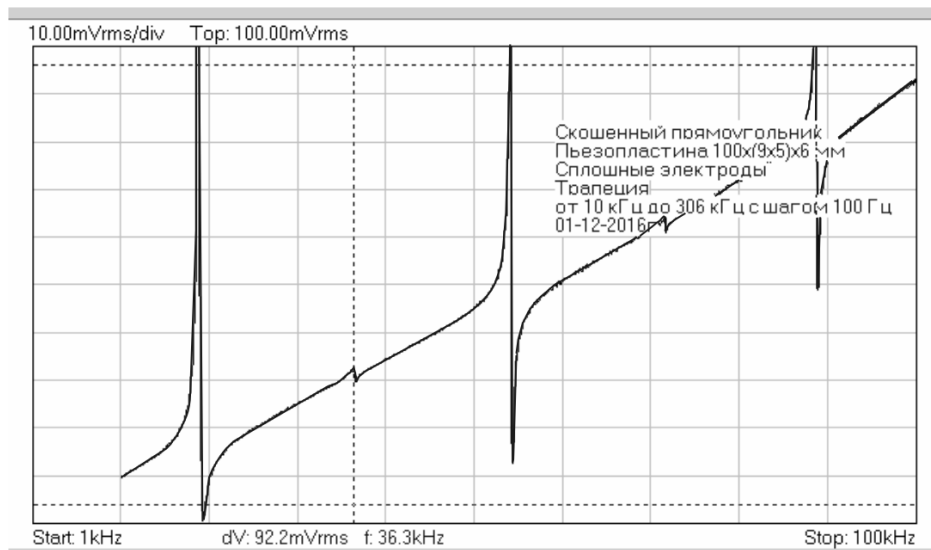


Рис.5.20. АЧХ трапецієвидного стержня

На рис. 5.20 показана АЧХ для трапецієвидного стержня в тому ж діапазоні. Крім названих з'явилися додаткові резонансні частоти 36,2 и 74,5 кГц, що відповідає безрозмірним частотам π и 2π .

5.7 Висновки до розділу

Представлені результати розрахунку динамічних характеристик паралелограмних п'єзопластин показують, що розвинений метод аналітичного розв'язку задачі електропружності для неканонічної області забезпечує отримання достовірних значень їх якісних оцінок. Показано, що обидва запропоновані алгоритми отримання кількісних оцінок характеристик коливань пластини мають практично однакову ефективність. При цьому метод колокації потребує меншого об'єму аналітичних перетворень.

Таким чином, вирази (5.22) дають точний загальний розв'язок граничної задачі про планарні коливання п'єзокерамічної пластини у формі нескінченних рядів. Для отримання кількісних оцінок фізичних величин істотною є кількість утримуваних доданків від необхідної степені точності оцінок. Для визначення необхідних коефіцієнтів використовувались граничні умови задачі. Відповідні функціональні рівняння для скінченного числа (N та M) утримуваних доданків можуть бути перетворені в алгебраїчні співвідношення двома принципово різними методами. Запропоновано два підходи до розв'язання функціональних рівнянь, які виражають граничні умови задачі. Один из них відомий у прикладній механіці як метод колокації [89, 98], коли функціональне рівняння перетворюється в алгебраїчні рівності для деякої системи точок на границі. Це досить простий з обчислювальної точки зору спосіб одержання алгебраїчних співвідношень. Другий, з нашої точки зору, більш адекватний традиційній постановці граничних задач у механіці, спосіб одержання алгебраїчних співвідношень, заснований на принципі мінімізації середньоквадратичного відхилення при виконанні граничних умов. При отриманні кількісних оцінок були застосовані обидва методи та проведено порівняння результатів.

Результати експериментального дослідження вимушених коливань п'єзокерамічних пластин із суцільним електродним покриттям квадратної та паралелограмної форми показують, що навіть незначна зміна геометрії

п'єзокерамічної пластини від квадратної форми різко змінює спектр збуджуваних планарних резонансних коливань.

Встановлено, що моди високого порядку в паралелограмних пластинах можуть ефективно збуджуватися при збереженні рівномірного електродного покриття.

Для оцінки ефективності енергоперетворення при резонансних коливаннях розглянутих пластин за даними вимірювань резонансних і антирезонансних частот були розраховані значення динамічного коефіцієнта електромеханічного зв'язку.

Порівняння експериментальних результатів для резонансних частот коливань розглянутих квадратної і паралелограмних пластин з розрахунками, отриманими із застосуванням аналітичного методу [4], свідчить про їх добру узгодженість. Це підтверджує ефективність аналітичного підходу до моделювання планарних коливань п'єзокерамічних пластин, що мають як прямокутну, так і неканонічну паралелограмну форму.

РОЗДІЛ 6

**ЗГИННІ КОЛИВАННЯ БІМОРФНИХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ
ПЛАСТИН НЕКАНОНІЧНОЇ ФОРМИ**

У даному розділі розвинуто метод розв'язання граничних задач для неканонічних областей, який застосовується при дослідженні спектра власних частот і форм коливань електропружних пластин при згинних деформаціях. При побудові основних рівнянь використовується гіпотеза Кірхгофа-Лява, що істотно спрощує постановку задачі, але вносить певні обмеження на діапазон частот, котрі можуть розглядатися в рамках моделі. У розділі представлені результати розв'язання граничних задач і дані експериментальних досліджень. В якості об'єкта експериментальних досліджень використовується біморфна паралелограмна п'єзокерамічна пластина з різними кутами скосу. Техніка експерименту описана в попередньому розділі. Біморфна пластина утворена такими ж пластинами, як і у випадку планарних коливань, що мають зустрічну орієнтацію вектора попередньої поляризації, з'єднаних з використанням спеціального електропровідного клею.

Традиційно п'єзокерамічні елементи використовуються в технічних застосуваннях у вигляді відносно простих геометричних об'єктів – циліндрична, кругла або прямокутна пластина, подовжений призматичний стержень. Використання суцільного електродного покриття в таких елементах призводить до відносного збіднення спектра реально збуджуваних частот за рахунок симетрії форм коливань і частотної залежності ефективного коефіцієнта електромеханічного зв'язку. Завдання підвищення насиченості вибраного інтервалу частот ефективно збуджуваними коливаннями без збільшення розмірів елемента можна вирішити за допомогою зміни його форми. В цьому випадку при тому ж однорідному електродуванні в елементі можуть збуджуватися форми з різними типами симетрії. У даній роботі така можливість ілюструється на прикладі паралелограмних біморфних пластин. Для такого типу пластин на основі загальної ідеї про побудову загального розв'язку граничних задач [7, 87] отримано представлення для розв'язку, яке

забезпечує можливість кількісної оцінки динамічних властивостей паралелограмних біморфних пластин в широкому діапазоні частот. Розглядається два підходи до отримання кількісних оцінок на основі побудованих аналітичних виразів. Дається порівняння ефективності цих підходів. Показана можливість отримання досить точних значень власних частот при помірних обсягах обчислень. Самі власні частоти знаходяться при аналізі вимушених коливань пластини за оцінками амплітуд характерних фізичних параметрів.

Питанню дослідження згинних коливань пластин, яке представляє значний інтерес в різних областях, присвячена дуже велика кількість робіт, в яких застосовуються як наближені чисельні методи, так і методи, засновані на використанні аналітичних розв'язків. Достатньо великий огляд стану питання можна знайти в роботах [108–120].

У даній розділі на основі підходу, аналогічного тому, що використовувався в попередньому розділі 5 стосовно планарних коливань [4], побудовано розв'язок крайової задачі про згинні коливання біморфних п'єзокерамічних пластин, що мають форму паралелограма. При цьому розв'язок для поперечного прогину представляється у вигляді суперпозиції функцій, які подаються у формі нескінченних рядів, кожен член в яких задовольняє рівняння гармонічних згинних коливань п'єзопластини. Ці функції будуються так, щоб на сторонах паралелограма вони представляли собою ряди по повних тригонометричних базисах. Для визначення коефіцієнтів цих рядів використовуються функціональні рівняння, що породжуються граничними умовами задачі. Для розв'язання цих рівнянь можливе використання двох підходів – підходу, пов'язаного з мінімізацією середньоквадратичного відхилення, і підходу, заснованого на методі колокації. При практичному використанні обидва метода призводять до пошуку розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Отримано кількісні оцінки динамічних характеристик п'єзопластин, аналіз яких дозволяє оцінити вплив геометрії пластини. Метод розв'язку дає можливість отримати надійні оцінки його точності.

6.1 Основні співвідношення теорії коливань біморфних п'єзокерамічних пластин

Згинні коливання тонких біморфних п'єзокерамічних пластин із зустрічною поляризацією шарів по товщині, повністю електродованих у площині їх з'єднання і на лицьових поверхнях, в наближенні Кірхгофа описуються рівнянням руху щодо поперечних переміщень середньої поверхні $w(x, y, t)$, що має при відсутності навантаження на поверхнях пластини вид [92], та за формою збігається з чисто пружним випадком:

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{\bar{D}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (6.1)$$

Тут ρ – густина матеріалу; h – товщина пластини, а ефективна згинна жорсткість біморфної пластини обчислюється за формулою

$$\bar{D} = \frac{h^3}{12s_{11}^E(1-\nu^2)} \left(1 + \frac{1+\nu}{8} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right),$$

де s_{11}^E і s_{12}^E – пружні податливості п'єзоелектричного матеріалу; $\nu = -s_{12}^E / s_{11}^E$ – коефіцієнт Пуассона в площині ізотропії пластини; k_p^2 – статичний планарний коефіцієнт електромеханічного зв'язку. Моменти при цьому виражаються через прогин w і підведена до пластини різниця електричних потенціалів V_0 у вигляді

$$M_x = -\bar{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)} \left(\frac{V_0}{h} \right),$$

$$M_y = -\bar{D} \left(\bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)} \left(\frac{V_0}{h} \right),$$

$$M_{xy} = \bar{D}(1-\bar{\nu}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad M_{yx} = -M_{xy}, \quad (6.2)$$

де

$$\bar{\nu} = \left(\nu + \frac{1+\nu}{8} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) / \left(1 + \frac{1+\nu}{8} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right)$$

– ефективний коефіцієнт Пуассона; d_{31} – п'єзоелектричний постійна. Відповідно перерізуючі сили представляються у формі

$$Q_x = -\bar{D} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w), \quad Q_y = -\bar{D} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w). \quad (6.3)$$

Далі, в точці контуру пластини з нормаллю \mathbf{n} згинальний і крутний моменти виражаються через (6.2) у вигляді [109, 118, 120]

$$M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 - 2M_{xy} n_x n_y, \quad (6.4)$$

$$M_{nt} = M_{xy} (n_x^2 - n_y^2) + (M_x - M_y) n_x n_y, \quad (6.5)$$

а для перерізуючих сил маємо

$$Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y. \quad (6.6)$$

Як відомо [109, 120], при постановці на контурі пластини граничних умов замість двох функцій (6.5), (6.6) використовується узагальнена за Кірхгофом перерізуюча сила

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s}, \quad (6.7)$$

де s – контурна (натуральна) координата границі пластинки. Тут у разі прямолінійної ділянки границі з одиничним дотичним вектором $\tau = (-n_y, n_x)$

$$\frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = \frac{\partial M_{nt}}{\partial \tau} = -\frac{\partial M_{nt}}{\partial x} n_y + \frac{\partial M_{nt}}{\partial y} n_x. \quad (6.8)$$

При заданні на границі пластини згинального моменту \bar{M}_n розгорнутий вираз для граничної умови представляється так

$$-\bar{D} \left[\bar{\nu} \nabla^2 w + (1 - \bar{\nu}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} n_x^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} n_y^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} n_x n_y \right) \right] = -\frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu)} \left(\frac{V_0}{h} \right) + \bar{M}_n. \quad (6.9)$$

Величина в правій частині (6.9), яка залежить від різниці потенціалів на електродах пластини, виникає в результаті наявності зв'язку електричних і механічних полів і може розглядатися як певний ефективний момент \bar{M}_n^{Veff} , прикладений до краю біморфної пластини.

При заданні на прямолінійній ділянці границі пластини узагальненої перерізуючої сили \bar{V}_n гранична умова з урахуванням виразу (6.8) записується у вигляді

$$-\bar{D} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) n_x + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) n_y \right] + \bar{D} (1 - \bar{\nu}) \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} n_y - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} n_x \right) (n_x^2 - n_y^2) - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) n_x n_y^2 + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) n_x^2 n_y \right] = \bar{V}_n. \quad (6.10)$$

Слід зауважити, що зліва в (6.9) і (6.10) стоять члени, що представляють собою частини згинального моменту і узагальненої перерізуючої сили, пов'язані з пружною деформацією, які можна позначити M_n^{def} і V_n^{def} . При цьому (6.9) і (6.10) можна переписати у скороченому вигляді

$$M_n^{def} = \bar{M}_n^{Veff} + \bar{M}_n, \quad V_n^{def} = \bar{V}_n. \quad (6.11)$$

У випадку збудження гармонічних коливань п'єзопластини змінним електричним полем з різницею потенціалів $V_0(t) = V_0 \exp(i\omega t)$ від генератора напруги будемо покладати гармонічну залежність всіх величин від часу. При цьому

$$w = w(x, y) \exp(i\omega t) \quad (6.12)$$

Надалі гармонічний співмножник $\exp(i\omega t)$ будемо опускати, а під величинами прогину w , а також моментів і перерізуючих сил і т.д. будемо мати на увазі їх амплітудне значення. Відповідно, підставляючи (6.12) в рівняння руху (6.1), отримуємо наступне рівняння:

$$\nabla^2 \nabla^2 w - k^4 w = 0, \quad \text{де} \quad k^4 = \frac{\rho h \omega^2}{\bar{D}}. \quad (6.13)$$

В подальшому буде зручно використовувати представлення диференціального оператора четвертого порядку в рівнянні (6.13) у вигляді

добутку операторів другого порядку [118]: $\nabla^2 \nabla^2 - k^4 = (\nabla^2 + k^2)(\nabla^2 - k^2)$. При цьому довільний розв'язок рівняння (6.13) може бути представлено у формі

$$w = w^- + w^+, \quad (6.14)$$

де функції w^- і w^+ є розв'язками звичайного і модифікованого рівнянь Гельмгольца

$$\nabla^2 w^- + k^2 w^- = 0 \quad \text{і} \quad \nabla^2 w^+ - k^2 w^+ = 0. \quad (6.15)$$

6.2 Постановка задачі та побудова аналітичного розв'язку

В рамках представленої вище моделі розглянемо задачу про гармонічні коливання тонкої біморфної п'єзокерамічної пластини з вільними від механічних згинальних моментів і узагальнених за Кірхгофом перерізуючих сил краями, що має форму паралелограма $OBCD$ з кутами α в вершинах O і C і розмірами сторін $OD = BC = a$, $OB = CD = b$, як показано на рис. 6.1. Відповідно, граничні умови на границі паралелограма мають вигляд (6.9) і (6.10) при

$$\bar{M}_n = 0, \quad \bar{V}_n = 0. \quad (6.16)$$

Введемо дві прямокутні декартові системи координат Ox_1y_1 і Ox_2y_2 з початком в точці O , орієнтовані як показано на рис. 6.1.

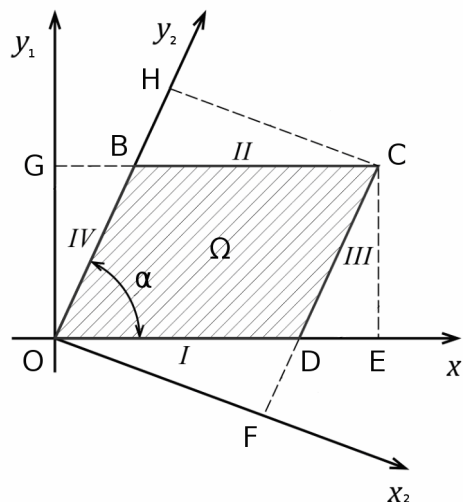


Рис. 6.1. Розрахунково область

Залежність між координатами в цих системах має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, \\ y_1 = -x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha, \\ y_2 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha. \end{cases} \quad (6.17)$$

Загальна схема розв'язання даної задачі будується аналогічно підходу, який був використаний у попередньому розділі 5 [4], в якому були розглянуті планарні коливання п'єзоелектричних паралелограмних пластин. Розв'язки для функцій w^- і w^+ при цьому представляються у вигляді суперпозиції функцій, які є розв'язками рівнянь (6.15):

$$\begin{aligned} w^- &= w_1^-(x_1, y_1) + w_2^-(x_1, y_1) + w_3^-(x_2, y_2) + w_4^-(x_2, y_2), \\ w^+ &= w_1^+(x_1, y_1) + w_2^+(x_1, y_1) + w_3^+(x_2, y_2) + w_4^+(x_2, y_2). \end{aligned} \quad (6.18)$$

При цьому функції w_i^- і w_i^+ представляються у вигляді рядів, побудованих таким чином, щоб на i -х сторонах паралелограма вони являли собою ряди по повних тригонометричних базисах:

$$\begin{aligned} w_1^-(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} x_1, & w_2^-(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} (x_1 - \delta_1), \\ w_3^-(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(3)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} (y_2 - \delta_2), & w_4^-(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(4)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} y_2, \\ w_1^+(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} x_1, & w_2^+(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} (x_1 - \delta_1), \\ w_3^+(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(3)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} (y_2 - \delta_2), & w_4^+(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(4)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} y_2. \end{aligned} \quad (6.19)$$

де $\delta_1 = GB$, $\delta_2 = FD$ (див. рис. 6.1.).

Підставляючи w_i^- , w_i^+ ($i = \overline{1,4}$) у відповідне рівняння (6.15), ми приходимо до сукупності незалежних однорідних звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) другого порядку з постійними коефіцієнтами відносно функцій $A_i^{(j)}$, $B_i^{(j)}$, які входять до представлення (6.19). Розв'язуючи ці рівняння і вибираючи розв'язки ЗДР з міркувань незалежності одержуваних базисних функцій і спадання експонент від сторін всередину паралелограма, отримуємо явні

вирази для $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}$ у залежності від співвідношень $\lambda_n = n\pi/a$, $\mu_m = m\pi/b$ для кожного значення n і m :

$$A_n^{(1)}(y_1) = A_{1n} \begin{cases} \cos \sqrt{k^2 - \lambda_n^2} y_1, & \lambda_n^2 < k^2, \\ \exp(-\sqrt{\lambda_n^2 - k^2} y_1), & \lambda_n^2 \geq k^2, \end{cases}$$

$$A_n^{(2)}(y_1) = A_{2n} \begin{cases} \sin \sqrt{k^2 - \lambda_n^2} y_1, & \lambda_n^2 < k^2, \\ \exp(\sqrt{\lambda_n^2 - k^2} (y_1 - h)), & \lambda_n^2 \geq k^2, \end{cases}$$

$$A_m^{(3)}(x_2) = A_{3m} \begin{cases} \sin \sqrt{k^2 - \mu_m^2} x_2, & \mu_m^2 < k^2, \\ \exp(\sqrt{\mu_m^2 - k^2} (x_2 - a)), & \mu_m^2 \geq k^2, \end{cases}$$

$$A_m^{(4)}(x_2) = A_{4m} \begin{cases} \cos \sqrt{k^2 - \mu_m^2} x_2, & \mu_m^2 < k^2, \\ \exp(-\sqrt{\mu_m^2 - k^2} x_2), & \mu_m^2 \geq k^2, \end{cases}$$

$$B_n^{(1)}(y_1) = B_{1n} \exp(-\sqrt{\lambda_n^2 + k^2} y_1), \quad B_n^{(2)}(y_1) = B_{2n} \exp(\sqrt{\lambda_n^2 + k^2} (y_1 - h)),$$

$$B_m^{(3)}(x_2) = B_{3m} \exp(\sqrt{\mu_m^2 + k^2} (x_2 - a)), \quad B_m^{(4)}(x_2) = B_{4m} \exp(-\sqrt{\mu_m^2 + k^2} x_2). \quad (6.20)$$

Ряди (6.19) для w_i^-, w_i^+ є рядами по двовимірних базисних функціях, які ми для стислості позначимо відповідно $W_{ij}^-(x_k, y_k), W_{ij}^+(x_k, y_k)$, з коефіцієнтами A_{ij}, B_{ij} ($i = \overline{1,4}, j = 1,2, \dots$):

$$W_{1n}^-(x_1, y_1) = \cos(\lambda_n x_1) \begin{cases} e^{-y_1 \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \cos(y_1 \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}) & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases}$$

$$W_{2n}^-(x_1, y_1) = \cos(\lambda_n (x_1 - \delta_1)) \begin{cases} e^{(y_1 - h) \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \sin(y_1 \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}) & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases}$$

$$W_{3m}^-(x_2, y_2) = \cos(\mu_m (y_2 - \delta_2)) \begin{cases} e^{(x_2 - a) \sqrt{\mu_m^2 - k^2}} & \mu_m^2 \geq k^2, \\ \sin(x_2 \sqrt{k^2 - \mu_m^2}) & \mu_m^2 < k^2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
W_{4m}^-(x_2, y_2) &= \cos(\mu_m y_2) \begin{cases} e^{-x_2 \sqrt{\mu_m^2 - k^2}} & \mu_m^2 \geq k^2, \\ \cos(x_2 \sqrt{k^2 - \mu_m^2}) & \mu_m^2 < k^2, \end{cases} \\
W_{1n}^+(x_1, y_1) &= \cos(\lambda_n x_1) e^{-y_1 \sqrt{k^2 + \lambda_n^2}}, \\
W_{2n}^+(x_1, y_1) &= \cos(\lambda_n (x_1 - \delta_1)) e^{(y_1 - h) \sqrt{k^2 + \lambda_n^2}}, \\
W_{3m}^+(x_2, y_2) &= \cos(\mu_m (y_2 - \delta_2)) e^{(x_2 - a) \sqrt{k^2 + \mu_m^2}}, \\
W_{4m}^+(x_2, y_2) &= \cos(\mu_m y_2) e^{-x_2 \sqrt{k^2 + \mu_m^2}}, \tag{6.21}
\end{aligned}$$

З урахуванням цих представлень ряди для функцій w^- , w^+ (6.19) можуть бути переписані у більш компактній формі, що дає певні вигоди при подальшій побудові програмної реалізації:

$$\begin{aligned}
w_1^-(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{1n} W_{1n}^-(x_1, y_1), & w_2^-(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} W_{2n}^-(x_1, y_1), \\
w_3^-(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{3m} W_{3m}^-(x_2, y_2), & w_4^-(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{4m} W_{4m}^-(x_2, y_2), \\
w_1^+(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{1n} W_{1n}^+(x_1, y_1), & w_2^+(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} W_{2n}^+(x_1, y_1), \\
w_3^+(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{3m} W_{3m}^+(x_2, y_2), & w_4^+(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{4m} W_{4m}^+(x_2, y_2). \tag{6.22}
\end{aligned}$$

Наведемо вирази для елементарних згинальних моментів і узагальнених переріжуючих сил, які породжуються базисними функціями $W_{ij}^-(x_k, y_k)$, $W_{ij}^+(x_k, y_k)$. Ці вирази безпосередньо застосовуються при побудові матриць лінійної алгебраїчної системи у випадку використання як методу колокації (вони складають компоненти її рядків), так і в проінтегрованому разом з проєкційними функціями вигляді – у методі мінімізації середньоквадратичного відхилення.

$$M_n[W_{1n}^-(x_1, y_1)] = \begin{cases} \overline{D}e^{-y_1\sqrt{\lambda_n^2-k^2}} (2(v-1)\lambda_n n_{x_1} n_{y_1} \sqrt{\lambda_n^2-k^2} \sin(x_1\lambda_n) + \\ + \cos(x_1\lambda_n)(n_{x_1}^2(k^2v-(v-1)\lambda_n^2) + n_{y_1}^2(k^2+(v-1)\lambda_n^2))), & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \overline{D}(2(v-1)\lambda_n n_{x_1} n_{y_1} \sqrt{k^2-\lambda_n^2} \sin(x_1\lambda_n) \sin(y_1\sqrt{k^2-\lambda_n^2}) + \\ + \cos(x_1\lambda_n) \cos(y_1\sqrt{k^2-\lambda_n^2})(n_{x_1}^2(k^2v-(v-1)\lambda_n^2) + n_{y_1}^2(k^2+(v-1)\lambda_n^2))), & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases}$$

$$M_n[W_{2n}^-(x_1, y_1)] = \begin{cases} -\overline{D}e^{(y_1-h)\sqrt{\lambda_n^2-k^2}} (2(v-1)\lambda_n n_{x_1} n_{y_1} \sqrt{\lambda_n^2-k^2} \sin(\lambda_n(x_1-\delta_1)) - \\ - \cos(\lambda_n(x_1-\delta_1))(n_{x_1}^2(k^2v-(v-1)\lambda_n^2) + n_{y_1}^2(k^2+(v-1)\lambda_n^2))), & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \overline{D}(\sin(y_1\sqrt{k^2-\lambda_n^2}) \cos(\lambda_n(x_1-\delta_1))(n_{x_1}^2(k^2v-(v-1)\lambda_n^2) + \\ + n_{y_1}^2(k^2+(v-1)\lambda_n^2)) - 2(v-1)\lambda_n n_{x_1} n_{y_1} \sqrt{k^2-\lambda_n^2} \times \\ \times \cos(y_1\sqrt{k^2-\lambda_n^2}) \sin(\lambda_n(x_1-\delta_1))), & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases}$$

$$M_n[W_{3m}^-(x_2, y_2)] = \begin{cases} \overline{D}e^{(x_2-a)\sqrt{\mu_m^2-k^2}} (\cos(\mu_m(y_2-\delta_2))(n_{x_2}^2(k^2+(v-1)\mu_m^2) + \\ + n_{y_2}^2(k^2v-(v-1)\mu_m^2)) - 2(v-1)\mu_m n_{x_2} n_{y_2} \sqrt{\mu_m^2-k^2} \sin(\mu_m(y_2-\delta_2))), & \mu_m^2 \geq k^2, \\ \overline{D}(\sin(x_2\sqrt{k^2-\mu_m^2}) \cos(\mu_m(y_2-\delta_2))(n_{x_2}^2(k^2+(v-1)\mu_m^2) + \\ + n_{y_2}^2(k^2v-(v-1)\mu_m^2)) - 2(v-1)\mu_m n_{x_2} n_{y_2} \sqrt{k^2-\mu_m^2} \times \\ \times \cos(x_2\sqrt{k^2-\mu_m^2}) \sin(\mu_m(y_2-\delta_2))), & \mu_m^2 < k^2, \end{cases}$$

$$M_n[W_{4m}^-(x_2, y_2)] = \begin{cases} \overline{D}e^{-x_2\sqrt{\mu_m^2-k^2}} (2(v-1)\mu_m n_{x_2} n_{y_2} \sqrt{\mu_m^2-k^2} \sin(y_2\mu_m) + \\ + \cos(y_2\mu_m)(n_{x_2}^2(k^2+(v-1)\mu_m^2) + n_{y_2}^2(k^2v-(v-1)\mu_m^2))), & \mu_m^2 \geq k^2, \\ \overline{D}(2(v-1)\mu_m n_{x_2} n_{y_2} \sqrt{k^2-\mu_m^2} \sin(y_2\mu_m) \sin(x_2\sqrt{k^2-\mu_m^2}) + \\ + \cos(y_2\mu_m) \cos(x_2\sqrt{k^2-\mu_m^2}) \times (n_{x_2}^2(k^2+(v-1)\mu_m^2) + \\ + n_{y_2}^2(k^2v-(v-1)\mu_m^2))), & \mu_m^2 < k^2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
M_n [W_{1n}^+(x_1, y_1)] &= \\
&= -\overline{De}^{-y_1 \sqrt{k^2 + \lambda_n^2}} (2(1-\nu)\lambda_n n_{x_1} n_{y_1} \sqrt{k^2 + \lambda_n^2} \sin(x_1 \lambda_n) + \\
&+ \cos(x_1 \lambda_n) (n_{x_1}^2 (k^2 \nu + (\nu - 1)\lambda_n^2) + n_{y_1}^2 (k^2 - (\nu - 1)\lambda_n^2))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_n [W_{2n}^+(x_1, y_1)] &= \\
&= -\overline{De}^{(y_1 - h) \sqrt{k^2 + \lambda_n^2}} (\cos(\lambda_n (x_1 - \delta_1)) (n_{x_1}^2 (k^2 \nu + (\nu - 1)\lambda_n^2) + n_{y_1}^2 (k^2 - (\nu - 1)\lambda_n^2)) - \\
&- 2(1-\nu)\lambda_n n_{x_1} n_{y_1} \sqrt{k^2 + \lambda_n^2} \sin(\lambda_n (x_1 - \delta_1))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_n [W_{3m}^+(x_2, y_2)] &= \\
&= -\overline{De}^{(x_2 - a) \sqrt{k^2 + \mu_m^2}} (2(\nu - 1)\mu_m n_{x_2} n_{y_2} \sqrt{k^2 + \mu_m^2} \sin(\mu_m (y_2 - \delta_2)) + \\
&+ \cos(\mu_m (y_2 - \delta_2)) (n_{x_2}^2 (k^2 - (\nu - 1)\mu_m^2) + n_{y_2}^2 (k^2 \nu + (\nu - 1)\mu_m^2))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_n [W_{4m}^+(x_2, y_2)] &= \\
&= -\overline{De}^{-x_2 \sqrt{k^2 + \mu_m^2}} (\cos(y_2 \mu_m) (n_{x_2}^2 (k^2 - (\nu - 1)\mu_m^2) + n_{y_2}^2 (k^2 \nu + (\nu - 1)\mu_m^2)) - \\
&- 2(\nu - 1)\mu_m n_{x_2} n_{y_2} \sqrt{k^2 + \mu_m^2} \sin(y_2 \mu_m)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_n [W_{1n}^-(x_1, y_1)] &= \\
&= \begin{cases} \overline{De}^{-y_1 \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} (n_{y_1} \sqrt{\lambda_n^2 - k^2} \cos(x_1 \lambda_n) ((\nu - 1)(n_{x_1}^2 (k^2 - 3\lambda_n^2) + \lambda_n^2 n_{y_1}^2) - k^2) - \\ - \lambda_n n_{x_1} \sin(x_1 \lambda_n) ((\nu - 1)(n_{x_1}^2 (\lambda_n^2 - k^2) + n_{y_1}^2 (2k^2 - 3\lambda_n^2)) + k^2)), & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \overline{D} (n_{y_1} \sqrt{k^2 - \lambda_n^2} \cos(x_1 \lambda_n) \sin(y_1 \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}) \times \\ \times ((\nu - 1)(n_{x_1}^2 (k^2 - 3\lambda_n^2) + \lambda_n^2 n_{y_1}^2) - k^2) - \\ - \lambda_n n_{x_1} \sin(x_1 \lambda_n) \cos(y_1 \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}) \times \\ \times ((\nu - 1)(n_{x_1}^2 (\lambda_n^2 - k^2) + n_{y_1}^2 (2k^2 - 3\lambda_n^2)) + k^2)), & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_n [W_{2n}^-(x_1, y_1)] &= \\
&= \begin{cases} \overline{De}^{(y_1-h)\sqrt{\lambda_n^2-k^2}} (\lambda_n n_{x_1} \sin(\lambda_n(\delta_1-x_1)) \times \\ \times (-(v-1)n_{x_1}^2(k^2-\lambda_n^2) + (v-1)n_{y_1}^2(2k^2-3\lambda_n^2) + k^2) + \\ + n_{y_1}\sqrt{\lambda_n^2-k^2} \cos(\lambda_n(\delta_1-x_1)) \times \\ \times (-(v-1)n_{x_1}^2(k^2-3\lambda_n^2) + k^2 - (v-1)\lambda_n^2 n_{y_1}^2)), & \lambda_n^2 \geq k^2, \\ \overline{D}(\lambda_n n_{x_1} \sin(y_1\sqrt{k^2-\lambda_n^2}) \sin(\lambda_n(\delta_1-x_1)) \times \\ \times (-(v-1)n_{x_1}^2(k^2-\lambda_n^2) + (v-1)n_{y_1}^2(2k^2-3\lambda_n^2) + k^2) + \\ + n_{y_1}\sqrt{k^2-\lambda_n^2} \cos(y_1\sqrt{k^2-\lambda_n^2}) \cos(\lambda_n(\delta_1-x_1)) \times \\ \times (-(v-1)n_{x_1}^2(k^2-3\lambda_n^2) + k^2 - (v-1)\lambda_n^2 n_{y_1}^2)), & \lambda_n^2 < k^2, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_n [W_{3m}^-(x_2, y_2)] &= \\
&= \begin{cases} \overline{De}^{(x_2-a)\sqrt{\mu_m^2-k^2}} (\mu_m n_{y_2} \sin(\mu_m(\delta_2-y_2)) \times \\ \times ((v-1)n_{x_2}^2(2k^2-3\mu_m^2) - (v-1)n_{y_2}^2(k^2-\mu_m^2) + k^2) - \\ - n_{x_2}\sqrt{\mu_m^2-k^2} \cos(\mu_m(\delta_2-y_2))((v-1)n_{y_2}^2(k^2-3\mu_m^2) - k^2 + (v-1)\mu_m^2 n_{x_2}^2)) & \mu_m^2 \geq k^2, \\ \overline{D}(\mu_m n_{y_2} \sin(x_2\sqrt{k^2-\mu_m^2}) \sin(\mu_m(\delta_2-y_2)) \times \\ \times ((v-1)n_{x_2}^2(2k^2-3\mu_m^2) - (v-1)n_{y_2}^2(k^2-\mu_m^2) + k^2) - \\ - n_{x_2}\sqrt{k^2-\mu_m^2} \cos(x_2\sqrt{k^2-\mu_m^2}) \cos(\mu_m(\delta_2-y_2)) \times \\ \times ((v-1)n_{y_2}^2(k^2-3\mu_m^2) - k^2 + (v-1)\mu_m^2 n_{x_2}^2)) & \mu_m^2 < k^2, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_n [W_{4m}^-(x_2, y_2)] &= \\
&= \begin{cases} \overline{De}^{-x_2\sqrt{\mu_m^2-k^2}} (n_{x_2}\sqrt{\mu_m^2-k^2} \cos(y_2\mu_m) \times \\ \times ((v-1)n_{y_2}^2(k^2-3\mu_m^2) - k^2 + (v-1)\mu_m^2 n_{x_2}^2) - \\ - \mu_m n_{y_2} \sin(y_2\mu_m)((v-1)n_{x_2}^2(2k^2-3\mu_m^2) - \\ - (v-1)n_{y_2}^2(k^2-\mu_m^2) + k^2)), & \mu_m^2 \geq k^2, \\ \overline{D}(n_{x_2}\sqrt{k^2-\mu_m^2} \cos(y_2\mu_m) \sin(x_2\sqrt{k^2-\mu_m^2}) \times \\ \times ((v-1)n_{y_2}^2(k^2-3\mu_m^2) - k^2 + (v-1)\mu_m^2 n_{x_2}^2) - \\ - \mu_m n_{y_2} \sin(y_2\mu_m) \cos(x_2\sqrt{k^2-\mu_m^2}) \times \\ \times ((v-1)n_{x_2}^2(2k^2-3\mu_m^2) - (v-1)n_{y_2}^2(k^2-\mu_m^2) + k^2)) & \mu_m^2 < k^2, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_n [W_{1n}^+(x_1, y_1)] = \\
& = -\overline{De}^{-y_1 \sqrt{k^2 + \lambda_n^2}} (\lambda_n n_{x_1} \sin(x_1 \lambda_n) ((v-1)n_{x_1}^2 (k^2 + \lambda_n^2) - (v-1)n_{y_1}^2 (2k^2 + 3\lambda_n^2) - k^2) + \\
& + n_{y_1} \sqrt{k^2 + \lambda_n^2} \cos(x_1 \lambda_n) ((v-1)n_{x_1}^2 (k^2 + 3\lambda_n^2) - k^2 - (v-1)\lambda_n^2 n_{y_1}^2)), \\
& V_n [W_{2n}^+(x_1, y_1)] \\
& = \overline{De}^{(y_1-h) \sqrt{k^2 + \lambda_n^2}} (\lambda_n n_{x_1} \sin(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) \times \\
& \times ((v-1)n_{x_1}^2 (k^2 + \lambda_n^2) - (v-1)n_{y_1}^2 (2k^2 + 3\lambda_n^2) - k^2) + \\
& + n_{y_1} \sqrt{k^2 + \lambda_n^2} \cos(\lambda_n (\delta_1 - x_1)) ((v-1)n_{x_1}^2 (k^2 + 3\lambda_n^2) - k^2 - (v-1)\lambda_n^2 n_{y_1}^2)), \\
& V_n [W_{3m}^+(x_2, y_2)] = \\
& = \begin{cases} \overline{De}^{(x_2-a) \sqrt{k^2 + \mu_m^2}} (\mu_m n_{y_2} \sin(\mu_m (y_2 - \delta_2)) ((v-1)n_{x_2}^2 (2k^2 + 3\mu_m^2) - \\ - (v-1)n_{y_2}^2 (k^2 + \mu_m^2) + k^2) + n_{x_2} \sqrt{k^2 + \mu_m^2} \cos(\mu_m (y_2 - \delta_2)) \times \\ \times ((v-1)n_{y_2}^2 (k^2 + 3\mu_m^2) - k^2 - (v-1)\mu_m^2 n_{x_2}^2)) \end{cases} \quad (6.23) \\
& V_n [W_{4m}^+(x_2, y_2)] = \\
& = \begin{cases} -\overline{De}^{-x_2 \sqrt{k^2 + \mu_m^2}} (\mu_m n_{y_2} \sin(y_2 \mu_m) (-(v-1)n_{x_2}^2 (2k^2 + 3\mu_m^2) + \\ + (v-1)n_{y_2}^2 (k^2 + \mu_m^2) - k^2) + n_{x_2} \sqrt{k^2 + \mu_m^2} \cos(y_2 \mu_m) ((v-1)n_{y_2}^2 (k^2 + 3\mu_m^2) - \\ - k^2 - (v-1)\mu_m^2 n_{x_2}^2)), \end{cases}
\end{aligned}$$

6.3 Комп'ютерне моделювання коливань пластини з використанням двох підходів

Для отримання кількісних оцінок поперечних переміщень, а також похідних від них кутів повороту, моментів і перерізуючих сил перейдемо в (6.19) від нескінченних рядів до скінченних сум по n і m до $N-1$ і $M-1$ відповідно (метод редуції) [8]. Далі розв'язання задачі зводиться до визначення $4(N+M)$ невідомих коефіцієнтів в редукованих функціональних представленнях (6.19), виходячи з наближеного задоволення граничних умов на сторонах паралелограма OD (*I*), BC (*II*), CD (*III*) і OB (*IV*) (див. рис. 6.1.) в

окремих точках колокації або за методом мінімізації середньоквадратичного відхилення.

Метод колокації. Застосовуючи до розглянутої задачі про згинні коливання паралелограмної біморфної п'єзоелектричної пластини з вільним краєм метод колокації, вимагатимемо виконання заданих на границі умов для згинальних моментів (6.9) і узагальнених по Кірхгофу перерізуючих сил (6.10) в окремих точках границі (точках колокації) [89], в якості яких можна вибрати середини відрізків рівномірного розбиття на N частин ділянок границі I і II (відрізки OD і BC), і на M частин ділянок границі III і IV (відрізки CD та OB). Таким чином, ми маємо $2(N + M)$ точок колокації з координатами (x_i^c, y_i^c) , в кожній з яких задано вектор зовнішньої нормалі з компонентами n_x, n_y . В результаті для кожної точки колокації формуються два лінійних алгебраїчних рівняння щодо коефіцієнтів A_{ij}, B_{ij} редукованих рядів, що представляють собою наближені вирази умов (6.9), (6.10).

$$\begin{aligned}
 & M_n [w^-_1(x_1, y_1)] + M_n [w^-_2(x_1, y_1)] + M_n [w^+_1(x_1, y_1)] + M_n [w^+_2(x_1, y_1)] + \\
 & M_n [w^-_3(x_2, y_2)] + M_n [w^-_4(x_2, y_2)] + M_n [w^+_3(x_2, y_2)] + M_n [w^+_4(x_2, y_2)] = \bar{M}_n + \bar{M}_n^{Veff}, \\
 & V_n [w^-_1(x_1, y_1)] + V_n [w^-_2(x_1, y_1)] + V_n [w^+_1(x_1, y_1)] + V_n [w^+_2(x_1, y_1)] + \\
 & V_n [w^-_3(x_2, y_2)] + V_n [w^-_4(x_2, y_2)] + V_n [w^+_3(x_2, y_2)] + V_n [w^+_4(x_2, y_2)] = \bar{V}_n,
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

де

$$\begin{aligned}
 M_n [w^-_1(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} M_n [W^-_{1n}(x_1, y_1)], \\
 M_n [w^-_2(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} M_n [W^-_{2n}(x_1, y_1)], \\
 M_n [w^-_3(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} M_n [W^-_{3m}(x_2, y_2)], \\
 M_n [w^-_4(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} M_n [W^-_{4m}(x_2, y_2)], \\
 M_n [w^+_1(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} M_n [W^+_{1n}(x_1, y_1)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_n[w_2^+(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} M_n[W_{2n}^+(x_1, y_1)], \\
M_n[w_3^+(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} M_n[W_{3m}^+(x_2, y_2)], \\
M_n[w_4^+(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} M_n[W_{4m}^+(x_2, y_2)], \\
V_n[w_1^-(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} V_n[W_{1n}^-(x_1, y_1)], \\
V_n[w_2^-(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} V_n[W_{2n}^-(x_1, y_1)], \\
V_n[w_3^-(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} V_n[W_{3m}^-(x_2, y_2)], \\
V_n[w_4^-(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} V_n[W_{4m}^-(x_2, y_2)], \\
V_n[w_1^+(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} V_n[W_{1n}^+(x_1, y_1)], \\
V_n[w_2^+(x_1, y_1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} V_n[W_{2n}^+(x_1, y_1)], \\
V_n[w_3^+(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} V_n[W_{3m}^+(x_2, y_2)], \\
V_n[w_4^+(x_2, y_2)] &= \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} V_n[W_{4m}^+(x_2, y_2)],
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Таким чином, рівняння для згигального моменту мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{n}}^I + \\
&+ \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{n}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{n}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{n}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{n}}^I = \varphi_{\tilde{n}}^I, \\
&\sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{n}}^{II} + \\
&+ \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{n}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{n}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{n}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{n}}^{II} = \varphi_{\tilde{n}}^{II},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{m}}^{III} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{m}}^{III} = \varphi_{\tilde{m}}^{III}, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{m}}^{IV} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{m}}^{IV} = \varphi_{\tilde{m}}^{IV}, \tag{6.26} \\
& \lambda_n = \frac{\pi n}{a}, \mu_m = \frac{\pi m}{b}, \lambda_{\tilde{n}} = \frac{\pi \tilde{n}}{a}, \mu_{\tilde{m}} = \frac{\pi \tilde{m}}{b},
\end{aligned}$$

де

$$\Gamma_I(x_{1\tilde{n}}) = (0, a),$$

$$a_{1n\tilde{m}}^I = M_n \left[W_{1n}^-(x_{1\tilde{n}}, 0) \right],$$

$$a_{2n\tilde{m}}^I = M_n \left[W_{2n}^-(x_{1\tilde{n}}, 0) \right],$$

$$b_{1n\tilde{m}}^I = M_n \left[W_{1n}^+(x_{1\tilde{n}}, 0) \right],$$

$$b_{2n\tilde{m}}^I = M_n \left[W_{2n}^+(x_{1\tilde{n}}, 0) \right],$$

$$a_{3m\tilde{m}}^I = M_n \left[W_{3m}^-(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha) \right],$$

$$a_{4m\tilde{m}}^I = M_n \left[W_{4m}^-(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha) \right],$$

$$b_{3m\tilde{m}}^I = M_n \left[W_{3m}^+(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha) \right],$$

$$b_{4m\tilde{m}}^I = M_n \left[W_{4m}^+(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha) \right],$$

$$\varphi_{\tilde{n}}^I = \bar{M}_n + \bar{M}_n^{Veff},$$

$$\Gamma_{II}(x_{1\tilde{n}}) = (\delta_1, \delta_1 + a)$$

$$a_{1n\tilde{m}}^{II} = M_n \left[W_{1n}^-(x_{1\tilde{n}}, h) \right],$$

$$a_{2n\tilde{m}}^{II} = M_n \left[W_{2n}^-(x_{1\tilde{n}}, h) \right],$$

$$b_{1n\tilde{m}}^{II} = M_n \left[W_{1n}^+(x_{1\tilde{n}}, h) \right],$$

$$b_{2n\tilde{m}}^{II} = M_n \left[W_{2n}^+(x_{1\tilde{n}}, h) \right],$$

$$a_{3m\tilde{m}}^{II} = M_n \left[W_{3m}^-(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha) \right],$$

$$a_{4m\tilde{m}}^{II} = M_n \left[W_{4m}^-(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha) \right],$$

$$b_{3m\tilde{m}}^{II} = M_n \left[W_{3m}^+(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha) \right],$$

$$b_{4m\tilde{m}}^{II} = M_n \left[W_{4m}^+(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha) \right],$$

$$\varphi_{\tilde{n}}^{II} = \bar{M}_n + \bar{M}_n^{Veff},$$

$$\Gamma_{III}(y_{2\tilde{m}}) = (\delta_2, \delta_2 + b),$$

$$\begin{aligned}
a_{1n\tilde{m}}^{III} &= M_n \left[W_{1n}^- (a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
a_{2n\tilde{m}}^{III} &= M_n \left[W_{2n}^- (a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
b_{1n\tilde{m}}^{III} &= M_n \left[W_{1n}^+ (a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
b_{2n\tilde{m}}^{III} &= M_n \left[W_{2n}^+ (a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
a_{3m\tilde{m}}^{III} &= M_n \left[W_{3m}^- (a, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
a_{4m\tilde{m}}^{III} &= M_n \left[W_{4m}^- (a, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
b_{3m\tilde{m}}^{III} &= M_n \left[W_{3m}^+ (a, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
b_{4m\tilde{m}}^{III} &= M_n \left[W_{4m}^+ (a, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
\varphi_{\tilde{m}}^{III} &= \bar{M}_n + \bar{M}_n^{Veff}, \\
\Gamma_{IV}(y_{2\tilde{m}}) &= (0, b), \\
a_{1n\tilde{m}}^{IV} &= M_n \left[W_{1n}^- (y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
a_{2n\tilde{m}}^{IV} &= M_n \left[W_{2n}^- (y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
b_{1n\tilde{m}}^{IV} &= M_n \left[W_{1n}^+ (y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
b_{2n\tilde{m}}^{IV} &= M_n \left[W_{2n}^+ (y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
a_{3m\tilde{m}}^{IV} &= M_n \left[W_{3m}^- (0, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
a_{4m\tilde{m}}^{IV} &= M_n \left[W_{4m}^- (0, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
b_{3m\tilde{m}}^{IV} &= M_n \left[W_{3m}^+ (0, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
b_{4m\tilde{m}}^{IV} &= M_n \left[W_{4m}^+ (0, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
\varphi_{\tilde{m}}^{IV} &= \bar{M}_n + \bar{M}_n^{Veff},
\end{aligned}$$

Для узагальненої перерізуючої сили рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{m}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{m}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{m}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{m}}^I + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^I = \varphi_{\tau}^I, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{II} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{II} = \varphi_{\tau}^{II},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{III} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{III} = \varphi_{\tau}^{III}, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{IV} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{IV} = \varphi_{\tau}^{IV},
\end{aligned} \tag{6.27}$$

де

$$\Gamma_I(x_{1\tilde{n}}) = (0, a),$$

$$\tilde{a}_{1n\tilde{m}}^I = V_n \left[W_{1n}^-(x_{1\tilde{n}}, 0) \right],$$

$$\tilde{a}_{2n\tilde{m}}^I = V_n \left[W_{2n}^-(x_{1\tilde{n}}, 0) \right],$$

$$\tilde{b}_{1n\tilde{m}}^I = V_n \left[W_{1n}^+(x_{1\tilde{n}}, 0) \right],$$

$$\tilde{b}_{2n\tilde{m}}^I = V_n \left[W_{2n}^+(x_{1\tilde{n}}, 0) \right],$$

$$\tilde{a}_{3m\tilde{m}}^I = V_n \left[W_{3m}^-(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha) \right],$$

$$\tilde{a}_{4m\tilde{m}}^I = V_n \left[W_{4m}^-(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha) \right],$$

$$\tilde{b}_{3m\tilde{m}}^I = V_n \left[W_{3m}^+(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha) \right],$$

$$\tilde{b}_{4m\tilde{m}}^I = V_n \left[W_{4m}^+(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha) \right],$$

$$\varphi_{\tau}^I = \bar{V}_n,$$

$$\Gamma_{II}(x_{1\tilde{n}}) = (\delta_1, \delta_1 + a)$$

$$\tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{II} = V_n \left[W_{1n}^-(x_{1\tilde{n}}, h) \right],$$

$$\tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{II} = V_n \left[W_{2n}^-(x_{1\tilde{n}}, h) \right],$$

$$\tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{II} = V_n \left[W_{1n}^+(x_{1\tilde{n}}, h) \right],$$

$$\tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{II} = V_n \left[W_{2n}^+(x_{1\tilde{n}}, h) \right],$$

$$\tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{II} = V_n \left[W_{3m}^-(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha) \right],$$

$$\tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{II} = V_n \left[W_{4m}^-(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha) \right],$$

$$\tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{II} = V_n \left[W_{3m}^+(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha) \right],$$

$$\tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{II} = V_n \left[W_{4m}^+(x_{1\tilde{n}} \sin \alpha - h \cos \alpha, x_{1\tilde{n}} \cos \alpha + h \sin \alpha) \right],$$

$$\varphi_{\tau}^{II} = \bar{V}_n,$$

$$\Gamma_{III}(y_{2\tilde{m}}) = (\delta_2, \delta_2 + b),$$

$$\tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{III} = V_n \left[W_{1n}^-(a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right],$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{III} &= V_n \left[W_{2n}^- (a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
\tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{III} &= V_n \left[W_{1n}^+ (a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
\tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{III} &= V_n \left[W_{2n}^+ (a \sin \alpha + y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
\tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{III} &= V_n \left[W_{3m}^- (a, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
\tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{III} &= V_n \left[W_{4m}^- (a, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
\tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{III} &= V_n \left[W_{3m}^+ (a, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
\tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{III} &= V_n \left[W_{4m}^+ (a, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
\varphi_\tau^{III} &= \bar{V}_n, \\
\Gamma_{IV}(y_{2\tilde{m}}) &= (0, b), \\
\tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{IV} &= V_n \left[W_{1n}^- (y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
\tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{IV} &= V_n \left[W_{2n}^- (y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
\tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{IV} &= V_n \left[W_{1n}^+ (y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
\tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{IV} &= V_n \left[W_{2n}^+ (y_{2\tilde{m}} \cos \alpha, y_{2\tilde{m}} \sin \alpha) \right], \\
\tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{IV} &= V_n \left[W_{3m}^- (0, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
\tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{IV} &= V_n \left[W_{4m}^- (0, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
\tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{IV} &= V_n \left[W_{3m}^+ (0, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
\tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{IV} &= V_n \left[W_{4m}^+ (0, y_{2\tilde{m}}) \right], \\
\varphi_\tau^{IV} &= \bar{V}_n,
\end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему і підставляючи знайдені значення коефіцієнтів у відповідні представлення для w_i^- , w_i^+ (6.19), обчислюючи їх суперпозицію за формулами (6.18), і, нарешті, додаючи w^- і w^+ згідно (6.13), отримуємо необхідний наближений розв'язок w досліджуваної крайової задачі.

Метод мінімізації середньоквадратичного відхилення. Інший спосіб наближеного задоволення граничних умов при розв'язанні даної крайової задачі полягає в послідовному множенні нев'язок граничних умов на ділянках границі I , II і III , IV на незалежні між собою функції з функціональних базисів, які використовуються для побудови розв'язку, і інтегрування отриманих результатів по відповідних граничних контурах $I-IV$, тобто обчислюються скалярні проекції нев'язок на базисні функції, які прирівнюються нулю [89]. В результаті виходить система лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів

рядових розкладів A_{ij}, B_{ij} . В даному випадку в якості функцій, на які здійснюється проектування, вибираються тригонометричні функції, що входять як співмножники в двовимірні базисні функції: $\cos \lambda_n x_1$ на стороні I , $\cos \lambda_n (x_1 - \delta_1)$ на стороні II , $n = \overline{0, N-1}$, $\cos \mu_m (y_2 - \delta_2)$ на стороні III і $\cos \mu_m y_2$ на стороні IV , $m = \overline{0, M-1}$.

Таким чином, рівняння для проекцій згинального моменту мають вигляд

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{n}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{n}}^I + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{m}}^I = \varphi_{\tilde{n}}^I, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{n}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{n}}^{II} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{m}}^{II} = \varphi_{\tilde{n}}^{II}, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{m}}^{III} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{m}}^{III} = \varphi_{\tilde{m}}^{III}, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} a_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} a_{2n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} b_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} b_{2n\tilde{m}}^{IV} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} a_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} a_{4m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} b_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} b_{4m\tilde{m}}^{IV} = \varphi_{\tilde{m}}^{IV}, \\
& \lambda_n = \frac{\pi n}{a}, \mu_m = \frac{\pi m}{b}, \lambda_{\tilde{n}} = \frac{\pi \tilde{n}}{a}, \mu_{\tilde{m}} = \frac{\pi \tilde{m}}{b},
\end{aligned} \tag{6.28}$$

де

$$\Gamma_I(x_{1\tilde{n}}) = (0, a),$$

$$a_{1n\tilde{n}}^I = \int_0^a M_n [W_{1n}^-(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$a_{2n\tilde{n}}^I = \int_0^a M_n [W_{2n}^-(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$b_{1n\tilde{n}}^I = \int_0^a M_n [W_{1n}^+(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$b_{2n\tilde{n}}^I = \int_0^a M_n [W_{2n}^+(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$a_{3m\tilde{n}}^I = \int_0^a M_n [W_{3m}^-(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$a_{4m\tilde{n}}^I = \int_0^a M_n [W_{4m}^-(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$b_{3m\tilde{n}}^I = \int_0^a M_n [W_{3m}^+(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$b_{4m\tilde{n}}^I = \int_0^a M_n [W_{4m}^+(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\varphi_{\tilde{n}}^I = \int_0^a (\bar{M}_n + \bar{M}_n^{Veff}) \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\Gamma_{II}(x_{1\tilde{n}}) = (\delta_1, \delta_1 + a)$$

$$a_{1n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} M_n [W_{1n}^-(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} (x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$a_{2n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} M_n [W_{2n}^-(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} (x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$b_{1n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} M_n [W_{1n}^+(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} (x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$b_{2n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} M_n [W_{2n}^+(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} (x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$a_{3m\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} M_n [W_{3m}^-(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} (x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$a_{4m\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} M_n [W_{4m}^-(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} (x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$b_{3m\tilde{m}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} M_n \left[W_{3m}^+ (x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha) \right] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$b_{4m\tilde{m}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} M_n \left[W_{4m}^+ (x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha) \right] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\varphi_{\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} (\overline{M}_n + \overline{M}_n^{Veff}) \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\Gamma_{III}(y_{2\tilde{m}}) = (\delta_2, \delta_2 + b),$$

$$a_{1n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} M_n \left[W_{1n}^- (a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$a_{2n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} M_n \left[W_{2n}^- (a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$b_{1n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} M_n \left[W_{1n}^+ (a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$b_{2n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} M_n \left[W_{2n}^+ (a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$a_{3m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} M_n \left[W_{3m}^- (a, y_2) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$a_{4m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} M_n \left[W_{4m}^- (a, y_2) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$b_{3m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} M_n \left[W_{3m}^+ (a, y_2) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$b_{4m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} M_n \left[W_{4m}^+ (a, y_2) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\varphi_{\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} (\overline{M}_n + \overline{M}_n^{Veff}) \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\Gamma_{IV}(y_{2\tilde{m}}) = (0, b),$$

$$a_{1n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b M_n [W_{1n}^-(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$a_{2n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b M_n [W_{2n}^-(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$b_{1n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b M_n [W_{1n}^+(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$b_{2n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b M_n [W_{2n}^+(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$a_{3m\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b M_n [W_{3m}^-(0, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$a_{4m\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b M_n [W_{4m}^-(0, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$b_{3m\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b M_n [W_{3m}^+(0, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$b_{4m\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b M_n [W_{4m}^+(0, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\varphi_{\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b (\bar{M}_n + \bar{M}_n^{Veff}) \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

Для проєкцій узагальненої перерізуючої сили рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{m}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{m}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{m}}^I + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{m}}^I + \\ & + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^I + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^I = \varphi_{\tau}^I, \\ & \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{II} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{II} + \\ & + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{II} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{II} = \varphi_{\tau}^{II}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{III} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{III} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{III} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{III} = \varphi_{\tau}^{III}, \\
& \sum_{n=0}^{N-1} A_{1n} \tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} A_{2n} \tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{1n} \tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{IV} + \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n} \tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{IV} + \\
& + \sum_{m=0}^{M-1} A_{3m} \tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} A_{4m} \tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{3m} \tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{IV} + \sum_{m=0}^{M-1} B_{4m} \tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{IV} = \varphi_{\tau}^{IV},
\end{aligned} \tag{6.29}$$

де

$$\Gamma_I(x_{1\tilde{n}}) = (0, a),$$

$$\tilde{a}_{1n\tilde{m}}^I = \int_0^a V_n [W_{1n}^-(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\tilde{a}_{2n\tilde{m}}^I = \int_0^a V_n [W_{2n}^-(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{1n\tilde{m}}^I = \int_0^a V_n [W_{1n}^+(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{2n\tilde{m}}^I = \int_0^a V_n [W_{2n}^+(x_1, 0)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\tilde{a}_{3m\tilde{m}}^I = \int_0^a V_n [W_{3m}^-(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\tilde{a}_{4m\tilde{m}}^I = \int_0^a V_n [W_{4m}^-(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{3m\tilde{m}}^I = \int_0^a V_n [W_{3m}^+(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{4m\tilde{m}}^I = \int_0^a V_n [W_{4m}^+(x_1 \sin \alpha, x_1 \cos \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\varphi_{\tau}^I = \int_0^a \bar{V}_n \cos(\lambda_{\tilde{n}} x_1) dx_1,$$

$$\Gamma_{II}(x_{1\tilde{n}}) = (\delta_1, \delta_1 + a)$$

$$\tilde{a}_{1n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} V_n [W_{1n}^-(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\tilde{a}_{2n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} V_n [W_{2n}^-(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{1n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} V_n [W_{1n}^+(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{2n\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} V_n [W_{2n}^+(x_1, h)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\tilde{a}_{3m\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} V_n [W_{3m}^-(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\tilde{a}_{4m\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} V_n [W_{4m}^-(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{3m\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} V_n [W_{3m}^+(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\tilde{b}_{4m\tilde{n}}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} V_n [W_{4m}^+(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha, x_1 \cos \alpha + h \sin \alpha)] \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\varphi_{\tau}^{II} = \int_{\delta_1}^{\delta_1+a} \bar{V}_n \cos(\lambda_{\tilde{n}}(x_1 - \delta_1)) dx_1,$$

$$\Gamma_{III}(y_{2\tilde{m}}) = (\delta_2, \delta_2 + b),$$

$$\tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} V_n [W_{1n}^-(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} V_n [W_{2n}^-(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} V_n [W_{1n}^+(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} V_n \left[W_{2n}^+(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, -a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} V_n \left[W_{3m}^-(a, y_2) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} V_n \left[W_{4m}^-(a, y_2) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} V_n \left[W_{3m}^+(a, y_2) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} V_n \left[W_{4m}^+(a, y_2) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\varphi_{\tau}^{III} = \int_{\delta_2}^{\delta_2+b} \bar{V}_n \cos(\mu_{\tilde{m}}(y_2 - \delta_2)) dy_2,$$

$$\Gamma_{IV}(y_{2\tilde{m}}) = (0, b),$$

$$\tilde{a}_{1n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b V_n \left[W_{1n}^-(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\tilde{a}_{2n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b V_n \left[W_{2n}^-(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{1n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b V_n \left[W_{1n}^+(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{2n\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b V_n \left[W_{2n}^+(y_2 \cos \alpha, y_2 \sin \alpha) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\tilde{a}_{3m\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b V_n \left[W_{3m}^-(0, y_2) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\tilde{a}_{4m\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b V_n \left[W_{4m}^-(0, y_2) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{3m\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b V_n \left[W_{3m}^+(0, y_2) \right] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\tilde{b}_{4m\tilde{m}}^{IV} = \int_0^b V_n [W_{4m}^+(0, y_2)] \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

$$\varphi_{\tau}^{IV} = \int_0^b \bar{V}_n \cos(\mu_{\tilde{m}} y_2) dy_2,$$

У більшості випадків точність наближених розв'язків, одержуваних при застосуванні даного методу, виявляється трохи вищою, ніж при використанні методу колокації.

На основі побудованих теоретичних моделей розроблено програмні засоби для чисельного моделювання згинних коливань біморфних п'єзокерамічних пластин, які реалізують при наближеному задоволенні граничних умов як метод колокації, так і метод мінімізації середньоквадратичного відхилення, які були описані вище.

Комп'ютерне моделювання проводилося для біморфних п'єзокерамічних пластин товщиною $h = 2.9$ мм, що виготовлені з матеріалу PZT-4, параметри якого наведені в [92]: $s_{11}^E = 12.3 \times 10^{-12}$ м²/Н, $s_{12}^E = -4.05 \times 10^{-12}$ м²/Н, $\nu = -s_{12}^E / s_{11}^E = 0.329268... \approx 0.33$, $\rho = 7500$ кг/м³.

При обчисленні амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) розглянутих п'єзокерамічних пластин величина ефективного моментного навантаження \bar{M}_n^{Veff} в граничній умові (6.9) покладалася рівною 1.

На рис. 6.2 представлені результати розрахунків амплітудно-частотної характеристики для біморфної паралелограмної пластини з розмірами $a = 39,7$ мм і $b = 29,5$ мм з кутом $\alpha = 85^\circ$ за методом колокації для значень $N = M = 90$ (горизонтальна вісь – частота, кГц; вертикальна вісь – прогин в центрі пластини w_C).

Графіки АЧХ, отримані в результаті комп'ютерного моделювання при використанні методу колокації при $N = M = 120$, а також методу мінімізації середньоквадратичного відхилення при $N = M = 90$ и $N = M = 120$, а також значення резонансних частот практично не відрізняються від даних, наведених на рис. 6.2.

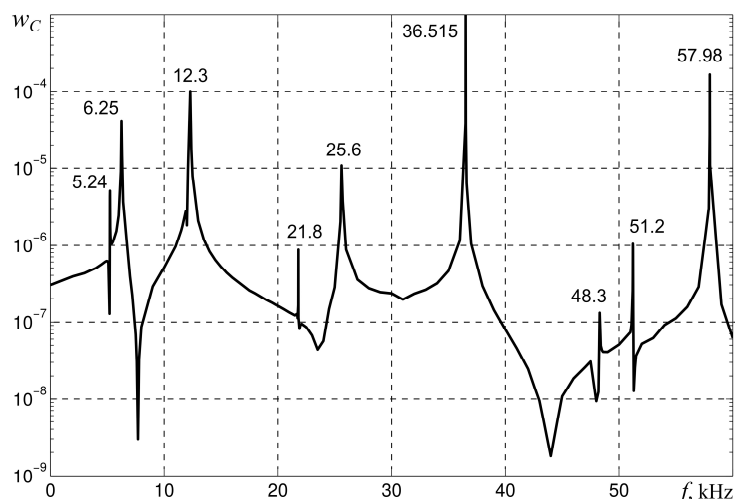


Рис. 6.2. Амплітудно-частотна характеристика біморфної пластини

При аналізі даних рис. 6.2 слід мати на увазі, що різниця в амплітудах вимушених коливань на частотах, які визначаються як власні, пов'язана лише з вибором кроку розрахунків по частоті і положенням значення реальних власних частот всередині обраного інтервалу.

Нижче на рис. 6.3–6.10 показані форми коливань, розраховані при використанні даної аналітичної методики, для різних обчислених резонансних частот f_{comp} : 5,24 кГц, 6,25 кГц, 12,3 кГц, 21,8 кГц, 25,6 кГц, 36,515 кГц, 48,3 кГц, 57,98 кГц, які відповідають експериментально визначеним значенням резонансних частот f_{exp} : 4,67 кГц, 6,03 кГц, 11,4 кГц, 22,18 кГц, 22,27 кГц, 30,77 кГц, 40,2 кГц, 44,38 кГц.

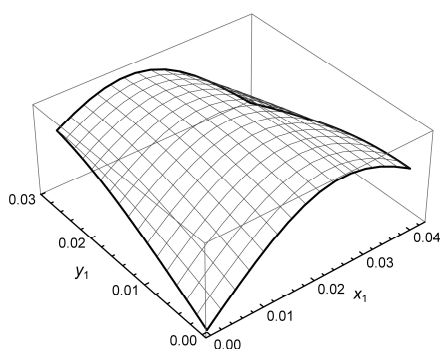


Рис. 6.3. $f_{comp}=5,24$ кГц

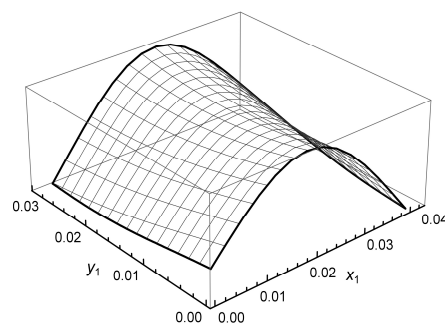
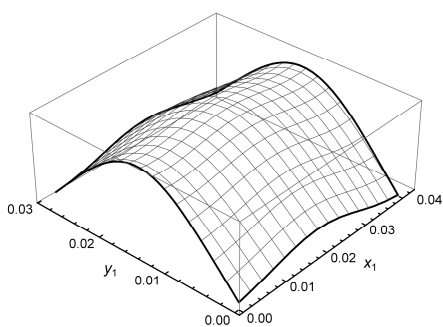
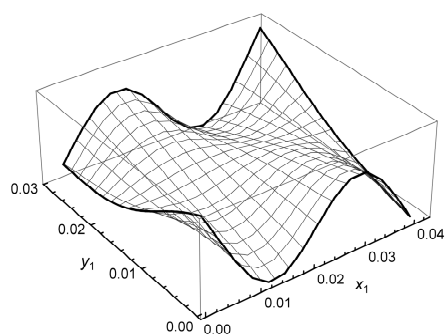
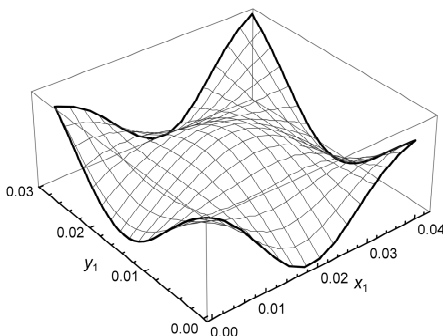
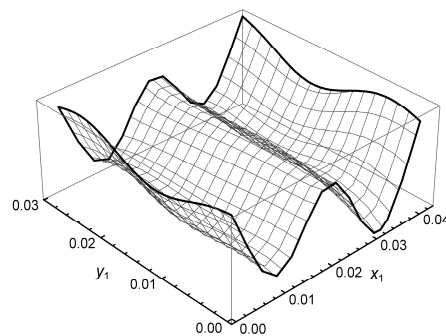
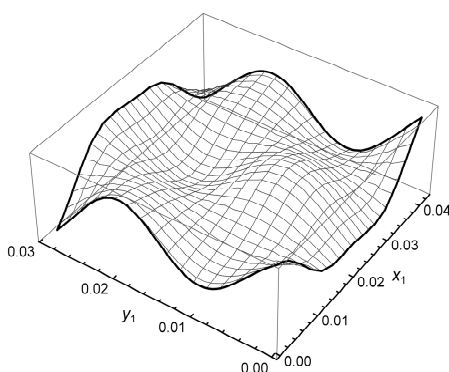
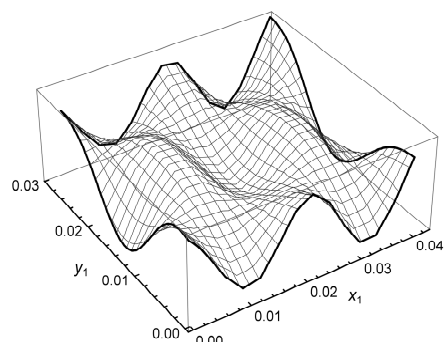
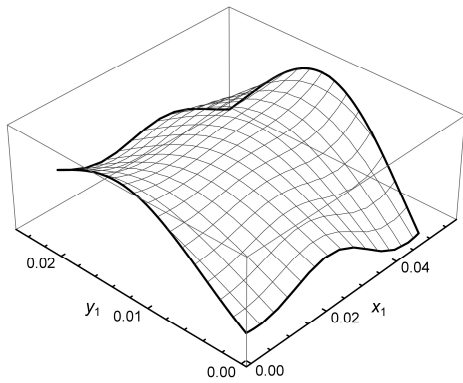
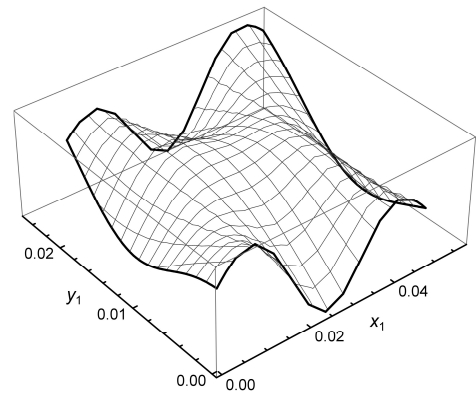


Рис. 6.4. $f_{comp}=6,25$ кГц

Рис. 6.5. $f_{comp}=12,3$ кГцРис. 6.6. $f_{comp}=21,8$ кГцРис. 6.7. $f_{comp}=25,6$ кГцРис. 6.8. $f_{comp}=36,515$ Рис. 6.9. $f_{comp}=48,3$ кГцРис. 6.10. $f_{comp}=57,98$ кГц

Крім того, для дослідження ефективності розробленого аналітичного підходу були проведені розрахунки для паралелограмної пластини з більш гострим кутом $\alpha = 70^\circ$ з розмірами $a = 45,1$ мм і $b = 25,0$ мм. Для прикладу на рис. 6.11 і 6.12 наведені форми коливань на резонансних частотах f_{comp} , що дорівнюють 16,4 кГц і 25,25 кГц, які відповідають експериментальним частотам f_{exp} 14,0 кГц і 21,58 кГц відповідно.

Рис. 6.11. $f_{comp}=16,4$ кГцРис. 6.12. $f_{comp}=25,25$ кГц

Різниця в розрахункових і експериментальних значеннях резонансних частот пояснюється тим відомим фактом, що математична модель пластини, заснована на гіпотезах Кірхгофа, є більш жорсткою в порівнянні з реальною пластиною, причому ступінь цієї додаткової жорсткості підвищується при зменшенні відношення довжини хвилі деформації до товщини пластини.

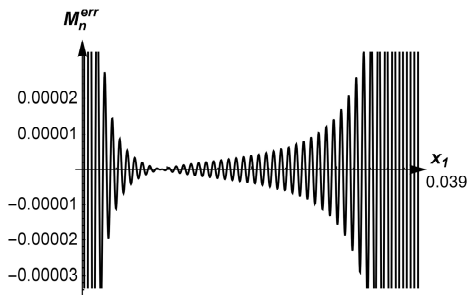
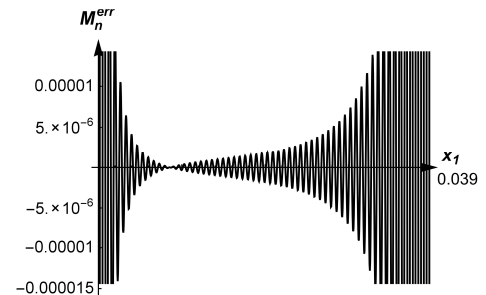
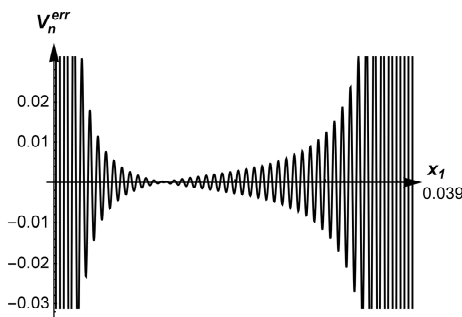
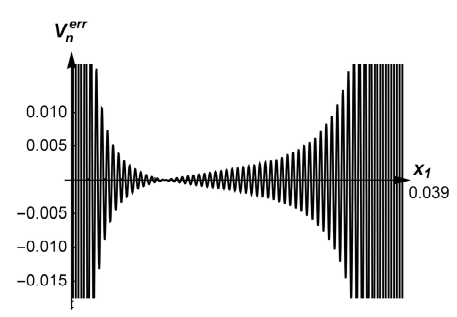
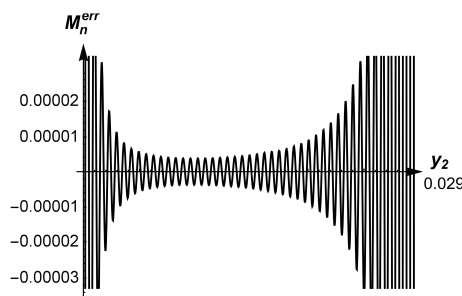
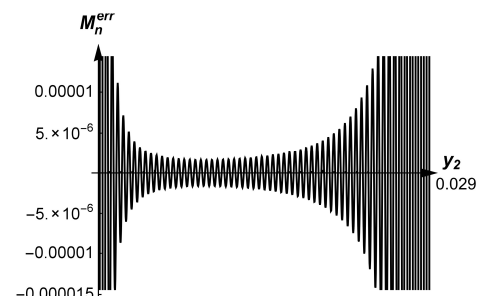
Крім того, при порівнянні даних теорії і експерименту щодо спектрів власних частот пластинки слід мати на увазі наступну важливу обставину. В теорії результати отримані для моделі ідеально пружного матеріалу. В експерименті природно проявляються реальні властивості матеріалу, зокрема наявність внутрішнього демпфування. Щодо власних частот наявність демпфування призводить до зміщення значень резонансної частоти, більш того, для такого випадку слід враховувати різницю значень власних частот за швидкостями і за переміщеннями. Це два різних резонанси. Різниця між обчисленими та виміряними резонансними частотами може також дещо збільшуватися за рахунок наявного клейового шару, який має місце при виготовленні біморфа.

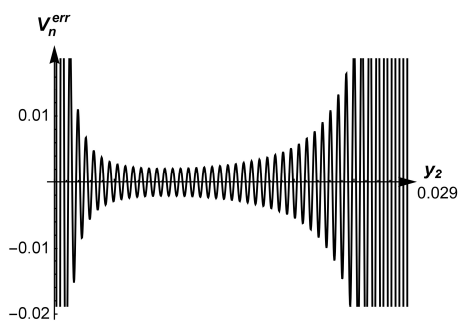
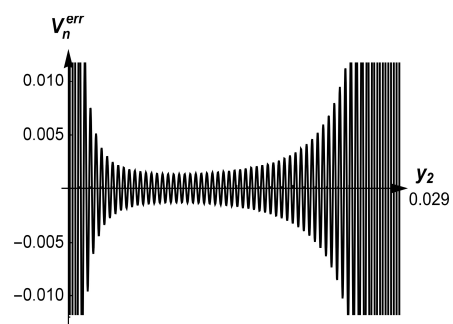
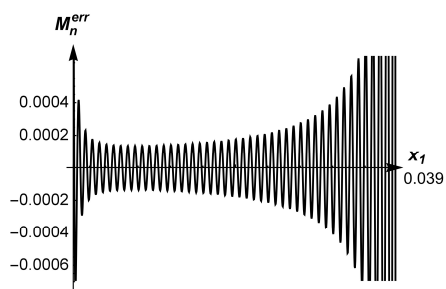
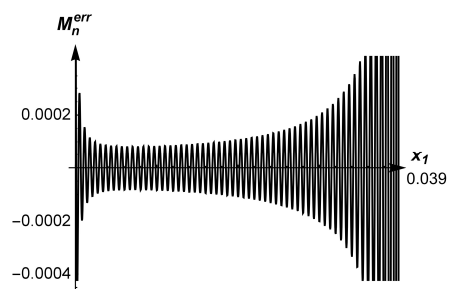
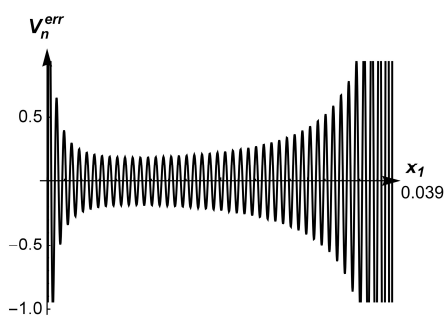
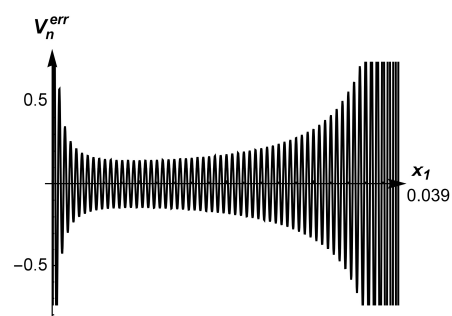
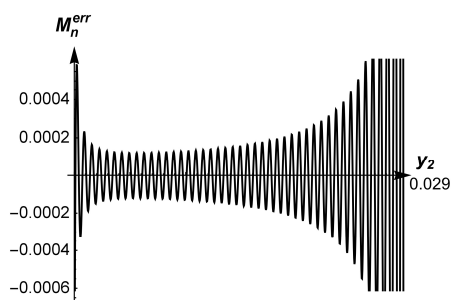
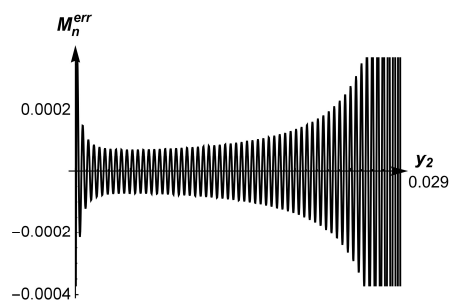
Ситуація ускладнюється також тим, що саме демпфування істотно залежить від частоти, що також слід врахувати при порівнянні результатів. Не менш важливим є та обставина, що в експерименті неможливо реалізувати точно задані в розрахунковій схемі граничні умови.

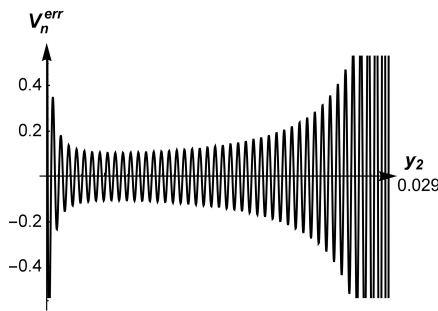
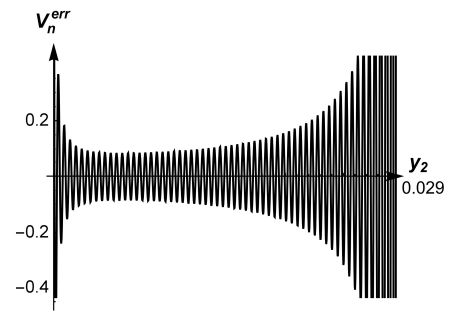
Для оцінки точності результатів розв'язків на рис. 6.13–6.26 також представлені графіки похибок задоволення граничних умов при частоті коливань 5 кГц

$$M_n^{err} = M_n^{def(comp)} - \overline{M}_n^{Veff}, \quad V_n^{err} = V_n^{def(comp)}, \quad (6.30)$$

де *comp* позначає величини, отримані в результаті обчислень, а *err* – величини похибок. При цьому графіки зліва відповідають випадку $N = M = 90$, а зправа – $N = M = 120$. На рис. 6.13–6.16 і рис. 6.17–6.20 показані похибки для випадку застосування методу колокації відповідно на ділянках границі *I* і *IV* (див. рис. 6.1), тоді як на рис. 6.21–6.24 і рис. 6.25–6.28 – похибки для випадку використання методу мінімізації середньоквадратичного відхилення на тих же ділянках границі.

Рис 6.13. $N = M = 90$ Рис 6.14. $N = M = 120$ Рис 6.15. $N = M = 90$ Рис 6.16. $N = M = 120$ Рис 6.17. $N = M = 90$ Рис 6.18. $N = M = 120$

Рис 6.19. $N = M = 90$ Рис 6.20. $N = M = 120$ Рис 6.21. $N = M = 90$ Рис 6.22. $N = M = 120$ Рис 6.23. $N = M = 90$ Рис 6.24. $N = M = 120$ Рис 6.25. $N = M = 90$ Рис 6.26. $N = M = 120$

Рис 6.27. $N = M = 90$ Рис 6.28. $N = M = 120$

При побудові графіків похибок для випадку використання методу колокації на рис. 6.13–6.20 дані в околі кутових точок представлені не повністю, оскільки похибка тут дещо зростає. Дані, представлені на рисунках, дозволяють зробити якісний висновок про точність отриманих результатів. Оскільки обидва методи при задоволенні крайових умов пов'язані з нехтуванням вкладу гармонік з високими номерами, така поведінка нев'язки – висока змінність по координаті – є природною.

6.4 Висновки до розділу

Таким чином, у даному розділі запропоновано метод розв'язування граничних задач теорії згинних коливань паралелограмних п'єзокерамічних біморфних пластин, вільний від недоліків класичного підходу збурення форми границі. Аналітичні представлення функції прогину можуть бути використані при будь-яких кутах скосу паралелограмних пластин.

Практичні обчислення виконані з використанням двох підходів до формування систем алгебраїчних рівнянь відповідно до заданих граничних умов, заснованих на методі колокації і методі мінімізації середньо-квадратичного відхилення при виконанні граничних умов. Обидва підходи реалізовані в ефективних алгоритмах для отримання кількісних оцінок механічних характеристик коливальних систем.

Алгоритми розрахунків дозволяють легко проводити оцінку точності отриманих результатів і відповідно визначати необхідну кількість доданків в

рядах, що представляють загальний розв'язок граничної задачі. Результати конкретних розрахунків ілюструють вплив збурень в формі пластини на спектр резонансних частот і характер руху у власних формах коливань. Обидва запропонованих алгоритми отримання кількісних оцінок характеристик коливання пластини мають практично однакову ефективність. При цьому метод колокації вимагає меншого обсягу аналітичних перетворень.

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертаційної роботи є такими:

1. Запропоновано нову процедуру формування загальних розв'язків граничних задач математичної фізики для неканонічних областей. Новий підхід дозволяє формувати загальний розв'язок без введення штучних (не фізичних) обмежень при виборі часткових областей.

2. Результати аналізу розв'язків конкретних граничних задач для рівнянь Лапласа і Гельмгольца дозволили запропонувати суттєве спрощення чисельних процедур виконання граничних умов. Поточкове виконання граничних умов і умов контакту на границях часткових областей істотно зменшує обсяг обчислень і процедуру формування алгебраїчних систем для визначення невідомих коефіцієнтів.

3. Ефективність обчислювальних процедур і показана можливість досягнення високої точності виконання граничних умов дозволила поширити метод на задачі дослідження коливань п'єзокерамічних паралелограмних пластин.

4. При аналізі планарних коливань паралелограмних п'єзокерамічних пластин показано вплив кута скосу на спектральні характеристики пластини і характеристики власних форм. Встановлено суттєве збагачення резонансного спектру пластин в порівнянні зі спектром відносно близької по геометрії прямокутної пластини.

5. Встановлено практично ідентична ефективність різних процедур (методу колокації і методу мінімізації середньо-квадратичного відхилення) при визначенні чисельних значень коефіцієнтів рядів, що представляють характеристики фізичних величин в загальному розв'язку граничної задачі.

6. Отримано розв'язок задачі про вимушені згинні коливання біморфних паралелограмних пластин при збудженні коливань електричним полем в широкому діапазоні частот.

7. Проведено аналіз власних форм коливань біморфних пластин з оцінкою кінематичних характеристик точок в околиці точки резонансу.

8. Проведено експериментальне дослідження динамічних характеристик паралелограмних пластин з різними кутами скосу. Встановлено високу ступінь узгодження з аналітичними результатами, яка свідчить про адекватність прийнятої математичної моделі біморфних пластини і можливості експериментально реалізувати граничні умови, близькі до умов вільного краю. Визначено особливості власних форм коливань, що пов'язані з неканонічністю геометрії пластини.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Shakeri Mobarakeh P. A numerical-analytical method for solving boundary value problem of elliptical type for a parallelogram shaped plate / P. Shakeri Mobarakeh, V.T. Grinchenko, G.M. Zrazhevsky // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics-Mathematics. – 2015. –Special issue. – P. 297–304.
2. Шакері Мобаракє П. Алгоритм Гальоркіна в методі частинних областей розв'язання граничних задач / П. Шакері Мобаракє, Г.М. Зражевський // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2014. – Вип. 1. – С. 75–82.
3. Шакері Мобаракє П. Современные методы численно-аналитического решения краевых задач для неканонических областей / П. Шакері Мобаракє, В.Т. Гринченко, В.В. Попов, Б. Солтанниа, Г.М. Зражевський // Математические методы и физико-механические поля. – 2017. – Т. 60, № 4. – С. 75 – 89.
4. Shakeri Mobarakeh P. Effect of boundary form disturbances on the frequency response of planar vibrations of piezoceramic plates. Analytical solution / P. Shakeri Mobarakeh V.T. Grinchenko, B. Soltannia B. // Strength of Materials. – 2018. – Vol. 50, N 3. – P. 376–386.
5. Борисейко О.В. Поздовжні коливання п'єзокерамічного стержня змінного поперечного перерізу / О.В. Борисейко, П. Шакері Мобаракє, І.А. Улітко // Вісник КНУ. – 2016. – Вип. 3. – С. 31–34.
6. Шакері Мобаракє П. Амплитудно-частотные характеристики пьезокерамических пластин в зависимости от формы границ / П. Шакері Мобаракє, В.Т. Гринченко, В.А. Андрущенко, В.Н. Никитенко // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2017. – Вип. 3. – С. 253–256.
7. Shakeri Mobarakeh P. Construction method of analytical solutions to the mathematical physics boundary problems for non–canonical domains / P. Shakeri Mobarakeh, V.T. Grinchenko // Reports on Mathematical Physics. – 2015. – Vol. 75, № 3. – P. 417– 434.

8. Shakeri Mobarakeh P. Directional characteristics of cylindrical radiators with an arc-shaped acoustic screen / P. Shakeri Mobarakeh, V. Grinchenko, B. Soltannia // *J. Eng. Math.*–2017. – Vol. 103, N 1. – P. 97–110.
9. Шакері Мобаракє П. Апроксимація розривних розв'язків крайових задач математичної фізики / П. Шакері Мобаракє, А.В. Попов // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Кравчука, 15–17 травня 2014 р.: Матеріали конф. I. Диференціальні рівняння, їх застосування. – Київ, 2014. – С. 338.
10. Гринченко В.Т. Особенности частотных спектров планарных колебаний пьезокерамических пластин в форме параллелограмма / В.Т. Гринченко, П. Шакери Мобаракє // Акустичний симпозіум “Консонанс–2015”, 29–30 вересня 2015 р.: Тези доповідей. – Київ, 2015. – С. 15–16.
11. Гринченко В.Т. Численно-аналитический метод решения краевой задачи эллиптического типа для пластины в форме параллелограмма / В.Т. Гринченко, Г.М. Зражевский, П. Шакери Мобаракє // III Міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми механіки”, 27–29 серпня 2015 р.: Матеріали конф. – Київ, 2015. – С. 22.
12. Shakeri Mobarakeh P. Influence of acoustic screen on directional characteristics of cylindrical radiator / P. Shakeri Mobarakeh, V.T. Grinchenko, S. Iranpour Mobarakeh, B. Soltannia // *Proc. of 5th Int. Conf. on Acoustics and Vibration (ISAV2015, Tehran, Iran, 2015)*. – P. 46.
13. Шакері Мобаракє П. Аналитическое исследование влияния формы границ на частотные характеристики планарных колебаний пьезокерамических пластин / П. Шакери Мобаракє, В.Т. Гринченко, И.А. Улитко // XVIII International Conference “Dynamical system modelling and stability investigation”, May 24–26, 2017: *Abstr. conf. reports*. – Kiev, Ukraine, 2017. – P. 144.
14. Шакері Мобаракє П. Сравнительный анализ резонансных спектров планарных колебаний пьезопластин в форме прямоугольника и параллелограмма / П. Шакери Мобаракє, В.Т. Гринченко, В.А. Андрущенко, В.Н. Никитенко

- Мобараке // IV Міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми механіки”, 28–30 серпня 2017 р.: Матеріали конф. – Київ, 2017. – С. 103..
15. Shakeri Mobarakeh P. The amplitude-frequency characteristics of piezoceramic plates depending on the shape of the boundaries / P. Shakeri Mobarakeh, V.T. Grinchenko, H. Ahmadi, B. Soltannia // Proc. of 7th Int. Conf. on Acoustics and Vibration (ISAV2017, Tehran, Iran, 2017). – P. 12.
 16. Гомилко А.М. Отражение волны Рэлея-Лемба от криволинейного торца волновода / А.М. Гомилко, Н.С. Городецкая // Прикладная механика. – 1997. – **33**, № 10. – С. 78–82.
 17. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – Государственное издательство технико-теоретической литературы. – Л., М.: ГИТТЛ, 1949. – 695 с.
 18. Рэлей. Теория звука. – М.: Гостехиздат, 1955. – Т. 1, 2. – 503 с., 475 с.
 19. Morse P.M. Methods of theoretical physics / P.M.Morse, H. Feshbach. – Boston: McGraw-Hill, 1999. – Vol. 1 and 2.
 20. Гузь А.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред (обзор) / А.Н. Гузь, Ю.Н. Немиш // Прикл. механика. – 1987. – **23**. № 9. – С. 3–29.
 21. Гузь А.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред / А.Н. Гузь, Ю.Н. Немиш. – К.: Выща школа, 1989. – 352 с.
 22. Waterman P.C. Matrix theory of elastic wave scattering / P.C. Waterman // J. Acoust. Soc. Amer. – 1976. – **60**. – P. 567–580.
 23. Берлинкур Д.А. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д.А. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / Под. ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А.
 24. Кикучи Е. Ультразвуковые преобразователи / Е. Кикучи. – М.: Мир, 1972.
 25. Улитко А.Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел / А.Ф. Улитко // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1975. – вып. 15.

26. Улитко А.Ф. К теории электромеханического преобразования энергии в неравномерно деформируемых пьезокерамических телах / А.Ф. Улитко // Прикл. механика. – 1977. – **13**, № 10.
27. Holland R. Design of resonant piezoelectric devices / R. Holland, E. Eer Nisse. – Cambridge: M. I. T, 1969.
28. Tiersten H.F. Linear theory of piezoelectric plate vibrations / H.F. Tiersten. – New York: Plenum Press, 1969.
29. Абрамян Б.Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра / Б.Л. Абрамян // Докл. АН АрмССР. – 1954. – **19**, № 1.
30. Абрамян Б.Л. Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра / Б.Л. Абрамян // Докл. АН АрмССР. – 1958. – **26**, №2.
31. Абрамян Б.Л. Пространственные задачи теории упругости / Б.Л. Абрамян. – Ереван: изд-во НАН Армении, 1998.
32. Абрамян Б.Л., Александров А.Я. Осесимметричные задачи теории упругости / Б.Л. Абрамян, А.Я. Александров // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике: Механика твердого тела. – М.: Наука, 1966.
33. Абрамян Б.Л. К изгибу толстых круглых плит осесимметричной нагрузкой / Б.Л. Абрамян, А.А. Баблоян // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1958. – **11**, № 4.
34. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости / А.И. Лурье. – М.: Гостехиздат, 1955.
35. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975.
36. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
37. Miyamoto H. Three-dimensional problems in the theory of elasticity / H. Miyamoto. – Tokyo: Syokabo, 1967.
38. Sternberg E. Three-dimensional stress concentrations in the theory of elasticity / E. Sternberg // Appl. Mech. Rev. – 1958. – **11**, N 1.
39. Крутков Ю.А. Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости / Ю.А. Крутков. – М.: Изд-во АН СССР, 1949.

40. Папкович П.Ф. Выражение общего интеграла уравнений теории упругости через гармонические функции / П.Ф. Папкович // Изв АН СССР. Сер. мат и естеств наук. –1932. – **32**, № 10.
41. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Losung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie / H. Neuber // Z. angew. Math. Mech. – 1934. –**14**, N 4.
42. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах / Г. Кольский. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
43. Lamé G. Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications / G. Lamé. – Paris: Bachelier, 1859.
44. Зоммерфельд А. Электродинамика / А. Зоммерфельд. – М. : Изд-во иностр. лит., 1958.
45. Петрашень Г.И. Решение векторных предельных задач математической физики в случае шара / Г.И. Петрашень // Докл. АН СССР. – 1945. – **46**, № 7.
46. Петрашень Г.И. Колебания изотропного упругого шара / Г.И. Петрашень // Докл. АН СССР. – 1945. – **47**, № 3.
47. Петрашень Г.И. Методы исследования волновых процессов в средах, содержащих сферические и цилиндрические границы раздела / Г.И. Петрашень // Учен. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук. – 1953. – **27**, № 170.
48. Смайт В. Электростатика и электродинамика / В. Смайт. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
49. Улітко А.Т. Розв'язання деяких задач теорії пружності методом власних вектор-функцій / А.Т. Улітко. – Прикл. механіка. – 1960. – **6**, № 4.
50. Улитко А.Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости / А.Ф. Улитко. – К.: Академперіодика, 2002. – 342 с.
51. Гузь О.М. Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках / О.М. Гузь // Прикл. механіка. – 1962. – **8**, № 6. – С. 605–612.

52. Гузь А.Н. Про один метод розв'язування тривимірних лінійних задач механіки суцільного середовища для неканонічних областей / А.Н. Гузь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 4. – С. 352–355.
53. Гузь А.Н. О дифракции волн на конечных телах вращения / А.Н. Гузь // Прикл. механика. – 1973. – 9, № 7. – С. 10–18.
54. Гузь А.Н. О распространении и дифракции волн в телах с некруговыми цилиндрическими границами / А.Н. Гузь // Прикл. механика. – 1973. – 9, № 9. – С. 3–11.
55. Немиш Ю.Н. Метод «возмущения формы границы» в пространственных задачах механики деформируемых сред / Ю.Н. Немиш // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1975. – № 1. – С. 17–26.
56. Кубенко В.Д. Метод возмущений в краевых задачах механики деформируемых тел / В.Д. Кубенко, Ю.Н. Немиш, К.И. Шнеренко, Н.А. Шульга // Прикл. механика. – 1982. – 18, № 11. – С. 3–20.
57. Немиш Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости для многослойных цилиндров с неканоническими поверхностями раздела / Ю.Н. Немиш // Прикл. механика. – 1981. – 17, № 5. – С. 19–26.
58. Немиш Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости для многослойных оболочек с поверхностями раздела, близкими к сферическим / Ю.Н. Немиш // Прикл. механика. – 1981. – 17, № 7. – С. 23–29.
59. Акбаров С.Д. Об одном методе решения задач в механике волокнистых материалов с искривленными структурами / С.Д. Акбаров, А.Н. Гузь // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 9. – С. 3–12.
60. Акбаров С.Д. Модель кусочно-однородного тела в механике слоистых композитных материалов с мелкомасштабными искривлениями / С.Д. Акбаров, А.Н. Гузь // Прикл. механика. – 1985. – 21, № 4. – С. 5–12.
61. Немиш Ю.Н. О краевых задачах теплопроводности и термоупругости для деформируемых тел, близких к сферическим / Ю.Н. Немиш // Прикл. механика. – 1981. – 17, № 10. – С. 42–50.

62. Немиш Ю.Н. К исследованию упругого равновесия гофрированных цилиндров конечных размеров / Ю.Н. Немиш, Н.М. Блошко // Прикл. механика. – 1983. – **19**, № 5. – С. 16–23.
63. Schwarz H. Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren. In: Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft / H. Schwarz // Zurich 15. – 1870. – P. 272–286.
64. Smith B. Domain Decomposition: parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations / B. Smith, P. Bjorstad, W. Gropp. – Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
65. Toselli A. Domain decomposition methods algorithms and theory / A. Toselli, O. Widlund. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2005.
66. Tarek P.A. Mathew. Domain decomposition methods for the numerical solution of partial differential equations. – Berlin: Springer, 2008.
67. A. Quarteroni. Numerical Methods for Differential Problems. Milan: Springer, 2009.
68. Hadjiconstantinou N. Heterogeneous atomistic-continuum representations for dense fluid systems / N. Hadjiconstantinou, A. Patera // International Journal of Modern Physics C. – 1997. – **8**, N 4. – P. 967–976.
69. Werder T. Hybrid atomistic-continuum method for the simulation of dense fluid flows / T. Werder, J. Walther, P. Koumoutsakos // Journal of Computational Physics. – 2005. – **205**. – P. 373–390.
70. Parks M. Connecting atomistic-to-continuum coupling and domain decomposition / M. Parks, P. Bochev, R. Lehoucq // Multiscale Modeling and Simulation. – 2008. – **7**, N 1. – P. 362–380.
71. Pandurangan V. A concurrent multiscale method based on the alternating Schwarz scheme for coupling atomic and continuum scaled with first-order compatibility / V. Pandurangan, H. Li, T. Ng // Computational Mechanics. – 2011. – **47**. – pp. 1–16.

72. Engel M. Flow simulation on moving boundary-fitted grids and application to fluidstructure interaction problems / M. Engel, M. Griebel // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 2005. – **50**, N4. – P. 437–468.
73. Ryan J. Domain decomposition vs. overset Chimera grid approaches for coupling CFD and CAA / J. Ryan, L. Halpern, M. Borrel // *7th International Conference on Computational Fluid Dynamics, Big Island, Hawaii ICCFD7–1205 (July 2012)*.
74. Метод граничных интегральных уравнений. Сб. научн. тр. под редакцией Т.Круз, Ф.Риццо. – М.: Мир, 1978. – 210 с.
75. Березин И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – т. 1. 1962.
76. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
77. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
78. Rizzo F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics / F.J. Rizzo // *Quart. Appl. Math.* – 1967. – **25**. – P. 83–95.
79. Мендельсон А. Применение метода граничных интегральных уравнений для решения упругопластических задач / А. Мендельсон, Л. Алберг // Сб. *Механика, сер. Новое в зарубежной науке, вып.15, Метод граничных интегральных уравнений*. – М.: Мир. 1973. – с. 68–110.
80. Федотов В.П. Модифицированный метод граничных элементов для решения задач колебания пластин / В.П. Федотов // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. – 2011. – **3**, № 2. – С. 18–32.
81. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн / В.П. Шестопалов. – Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1971. – 400 с.
82. Митра Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Митра, С. Ли. – М.: Мир, 1974. – 327 с.

83. Вовк И.В. Излучение звука конечным набором соосных пьезокерамических оболочек / И.В. Вовк, В.Т. Гринченко // Акуст. журнал. – 1991. – **37**, вып. 6. – С. 259–269.
84. Вовк И.В. О расширении возможностей метода частичных областей применительно к задачам излучения и рассеяния звука / И.В. Вовк, В.Т. Гринченко // Акуст. журнал. – 1989. – **35**, вып. 1. – С. 29–36.
85. Гринченко В.Т. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк. – Киев : Наук. думка, 1986. – 240 с.
86. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи: В 2 т. – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 295 с.
87. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наукова думка, 1981. – 284 с.
88. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т. Гринченко. – К.: Наукова думка, 1978. – 264 с.
89. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 312 с.
90. Морз Ф. Колебания и звук / Ф. Морз. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – 496 с.
91. Лэмб Г. Динамическая теория звука / Г. Лэмб. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 372 с.
92. Механика связанных полей в элементах конструкций [ред. акад. НАН Украины А.Н.Гузь]: в 5 т. Т. 5. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – Киев : Наук. думка, 1989. – 280 с.
93. Ghodssi R. MEMS Materials and Processes Handbook / R. Ghodssi, P. Lin. – Springer Verlag, 2011. – 1187 p.
94. Krushynska A. Mode excitation efficiency for contour vibrations of piezoelectric resonators / A. Krushynska, V. Meleshko, Chien-Ching Ma, Yu-His Huang // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. – 2011. – Vol. 58. – No 10. – P.2222– 2238.
95. Karlash V.L. Evolution of the planar vibrations of a rectangular piezoceramic plate as its aspect ratio is changed / V.L. Karlash // Int Appl Mech. – 2007. – **43**, N 7. – P. 786–793.

96. Андрианов И.В. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин / И.В. Андрианов, В.В. Данишевский, А.О. Иванков. – Днепропетровск: ПДАБА. – 2010. – 216 с.
97. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука. – 1979. – 560 с.
98. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, D. Fox. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2014. – 657 p.
99. Qin Q.-H. Advanced Mechanics of Piezoelectricity / Q.-H. Qin. – Heidelberg: Springer, 2013. – 332 p.
100. Yang J. An Introduction to the Theory of Piezoelectricity / J. Yang. – Springer, 2018. – 296 p.
101. Улитко А.Ф. Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин / А.Ф. Улитко, В.Т. Гринченко, В.Л. Карлаш, В.В. Мелешко // Прикл. механика. – 1976. – 12, Вып. 5. – С. 71–78.
102. Андрущенко В. А., Бондаренко А. В., Мелешко В. В., Никитенко В. Н. Определение упругих постоянных квадратных пьезокерамических пластин резонансным методом / В.А. Андрущенко, А.В. Бондаренко, В.В. Мелешко, В.Н. Никитенко // Акуст. вісник. – 2006. – 9, № 4. – С.3–11.
103. Lin H.-Y. The influence of electrode designs on the resonant vibrations for square piezoceramic plates / H.-Y. Lin, C.-C. Ma // IEEE T. Ultrason. – 2006. – 53, N 5. – P. 825–837.
104. Chang S.H. Analysis of methods for determining electromechanical coupling coefficients of piezoelectric elements / S.H. Chang, N.N. Rogacheva, C.C. Chou // IEEE T. Ultrason. – 1995. – 42, N 4. – P. 630–640.
105. Мэзон У.П. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвукике / У.П. Мэзон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 447с.
106. Улитко А.Ф. К теории электромеханического преобразования энергии в неравномерно деформируемых пьезокерамических телах. // А.Ф. Улітко. Вибрані праці. – Київ: ВПЦ Київ. ун-т, 2004. – С. 174-183.

107. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
108. Мелешко В.В. Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1909) до наших дней / В.В. Мелешко, С.О. Папков // Акустичний вісник. – 2009. – **12**, № 4. – С. 34– 51.
109. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П.Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
110. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки / Л.Г. Доннелл. – М.: Наука, 1982. – 568 с.
111. Перцев А.К. Динамика оболочек и пластин / А.К. Перцев, Э.Г. Платонов. – Л.: Судостроение, 1987. – 316 с.
112. Gorman D.J. Vibration analysis of plates by the superposition method / D.J. Gorman. – Singapore, London: World Scientific, 1999. – 384 p.
113. Gorman D.J. Free vibrational analysis of rectangular plates / D.J. Gorman. – New York: Elsevier, 1982.
114. Gorman D.J. Free vibration of cantilever plates by the method of superposition / D.J. Gorman // J. Sound and Vibration. – 1976 – **49**. – P. 453-467.
115. Gorman D.J. Accurate free vibration analysis of clamped orthotropic plates by the method of superposition / D.J. Gorman // J. Sound and Vibration. – 1990 – **140**, N 3. – P. 391–411.
116. Gorman D.J. Accurate free vibration analysis of the completely free orthotropic rectangular plate by the method of superposition / D.J. Gorman // J. Sound and Vibration. – 1993 – **165**, N 3. – 409-420.
117. Leissa A. Vibration of plates / A. Leissa. – NASA, 1969. – 360 p.
118. Leissa A.W. Vibrations of continuous systems / A.W. Leissa, M.S. Qatu. – New York: McGraw-Hill, 2011. – 524 p.
119. Papkov S.O. A new method for free vibration and buckling analysis of rectangular orthotropic plates / S.O. Papkov, J.R.Banerjee // Journal of Sound and Vibration. – 2015. – **339**. – P. 342 – 358.
120. Ventsel E. Thin plates and shells: Theory, analysis, and applications / E. Ventsel, T. Krauthammer. – New York: Marcel Dekker, 2001. – 688 p.