В. А. Вишенський, М. О. Перестюк, А. М. Самойленко

ЗАДАЧІ З МАТЕМАТИКИ

В. А. ВИШЕНСЬКИЙ
М. О. ПЕРЕСТЮК
А. М. САМОЙЛЕНКО

ЗАДАЧІ З МАТЕМАТИКИ

Допущено Міністерством вищої і середньої спеціальної освіти УРСР як навчальний посібник для підготовчих відділень вузів

КИЇВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ КИЇВСЬКОМУ ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1985

22.1я729
В 55

УДК 51 (079.1)

Задачи по математике. *В. А. Вышенский, Н. А. Перестюк, А. М. Самойленко.*— Киев : Вища школа. Изд-во при Киев. ун-те, 1985. 264 с.

Пособие составлено по материалам вступительных экзаменов по математике в Киевский университет. Приведены сравнительно простые задачи и упражнения, которые дают возможность оценить тот минимум знаний, который необходим для успешного обучения на подготовительном отделении вуза. Представлены также варианты письменных работ и образцы билетов устных экзаменов, которые предлагались абитуриентам на вступительных экзаменах по математике в университет на протяжении нескольких последних лет. Собрано почти 800 задач для самостоятельной подготовки, которые сопровождаются решениями, указаниями и ответами.

Для преподавателей и слушателей подготовительных отделений вузов. Может быть использовано учителями средних школ для внеклассной работы с учениками.

Ил. 124.

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук Н. І. Глова (Харк. ун-т), кандидати фіз.-мат. наук Л. М. Лісевич, В. М. Косарчик, В. Я. Янчак (Львів. ун-т)

Редакція природничої літератури
Зав. редакцією Б. Н. Фляшников

В $\frac{1702030000-038}{М224(04)-85}$ 147-85

ПЕРЕДМОВА

Вже протягом кількох років діє нова програма вступних екзаменів з математики до вузів. Вона містить, зокрема, такі нові порівняно з попередньою програмою питання, як застосування апарату диференціального числення до дослідження функцій, обчислення площ криволінійних фігур за допомогою інтегралів, використання векторного числення в геометрії. За цей час у приймальних предметних комісіях з математики склались певні традиції щодо конкретного тлумачення програмних вимог залежно від об'єму та рівня математичних курсів, які доведеться вивчати майбутнім студентам.

Хоча програма вступних екзаменів з математики для всіх одна, цілком зрозуміло, що вимоги на вступному екзамені не можуть бути однакові в усіх вузах і на всіх факультетах. Цей диференційований підхід стосується не об'єму знань, а їх якості, глибини, уміння застосувати відомі факти і методи до розв'язання конкретних задач. Якщо на геологічному чи біологічному факультетах можна успішно вчитись, старанно, хоча, може, й без ентузіазму, опанувавши мінімальний математичний апарат, то для майбутніх математиків чи фізиків цього замало. Звичайно, й тут на першому місці працелюбність і старанність, але, крім того, також смак до специфічних математичних умовиводів, схильність у складній задачі бачити не неприємний тягар, а джерело насолоди. В ідеалі диференційований підхід до екзаменаційних завдань з математики на факультети різних фахів повинен відігравати, крім селективної, також профорієнтаційну роль.

Ця книга адресована в першу чергу майбутнім абітурієнтам — слухачам підготовчих відділень, курсів.

У першому розділі вміщені запитання, вправи і задачі, згруповані тематично. Ми рекомендуємо регулярно звертатись до цього розділу при систематичному вивченні або повторенні відповідних тем. Сподіваємось, що принаймні якась частина вміщеного тут матеріалу стане в пригоді вчителям у їх повсякденній роботі.

Подальші три розділи (II—IV) складені із задач вступних екзаменів на різні факультети Київського державного університету протягом останніх кількох років. Тут задачі впорядковані за варіантами або білетами. Це дасть можливість майбутнім абітурієнтам заздалегідь мати об'єктивну інформацію про рівень вимог і характер завдань на вступних екзаменах з математики. Нарешті, розділ V містить добірку задач різної тематики, більшість із яких також пропонувались на вступних екзаменах.

Розділ I

ВПРАВИ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ З МАТЕМАТИКИ

ЧИСЛА

У цьому параграфі N означає множину натуральних чисел, тобто множину $\{1, 2, 3, \ldots\}$, Z — множину всіх цілих чисел, Q — множину всіх раціональних чисел, R — множину всіх дійсних чисел.

1. Кажуть, що число $a \in Z$ ділиться на число $b \in Z$ $(b \neq 0)$, якщо існує таке число $c \in Z$, що $a = bc$. Фразу «a ділиться на b» записують символічно так: $a \vdots b$.

Довести такі твердження:

1) $(a \vdots b) \Rightarrow (a \vdots (-b))$; $(a \vdots b) \Rightarrow ((-a) \vdots b)$; $(a \vdots b) \Rightarrow ((-a) \vdots (-b))$;
2) $(a \vdots b$ і $b \vdots c) \Rightarrow (a \vdots c)$;
3) $(a \vdots b$ і $b \vdots a) \Rightarrow (a = b$ або $a = -b)$;
4) $(a \vdots p$ і $b \vdots p) \Rightarrow ((a + b) \vdots p)$;
5) $(a \vdots p) \Rightarrow (ax \vdots p$ для будь-якого $x \in Z)$;
6) $(a \vdots p$ і $b \vdots p) \Rightarrow ((ax + by) \vdots p$ для будь-яких $x, y \in Z)$.

2. Коли $a = bq + r$, де $a, b, q, r \in Z$ і $0 \leqslant r < |b|$, то r називається остачею від ділення числа a на число b, а q — часткою. Знайдіть остачу r і частку q від ділення a на b, якщо:

1) $a = 77$, $b = 13$; 2) $a = -134$, $b = 11$; 3) $a = 141$, $b = -6$; 4) $a = 137$, $b = -13$; 5) $a = -92$, $b = -7$; 6) $a = -144$, $b = -12$; 7) $a = 0$, $b = -3$; 8) $a = 1$, $b = 4$; 9) $a = 0$, $b = 7$; 10) $a = -2$, $b = -5$; 11) $a = -1$, $b = 4$.

3. Цілі числа a і b тоді й тільки тоді дають однакові остачі при діленні на $p \in Z$, коли $(a - b) \vdots p$. Довести це.

4. Нехай $a = pq_1 + r_1$, $b = pq_2 + r_2$. Довести, що:

1) числа $a + b$ і $r_1 + r_2$ дають однакову остачу при діленні на p;
2) числа $a - b$ і $r_1 - r_2$ дають однакову остачу при діленні на p;
3) числа ab і $r_1 r_2$ дають однакову остачу при діленні на p.

5. Спираючись на результат задачі 3 (або 4), довести відомі ознаки подільності натуральних чисел на 2, 3, 4, 5, 9, 10.

6. Скільки натуральних чисел у межах першої тисячі діляться на 13?

7. Натуральне число n називається простим, якщо воно має рівно 2 різні натуральні дільники: n і 1. Випишіть за зростанням перші 20 простих чисел.

8. Розкладіть на прості множники такі числа:

1) 3969; 2) 3157; 3) 2366; 4) 5203; 5) 871.

9. Добути корені, розклавши попередньо числа, що стоять під радикалом, на прості множники:

1) $\sqrt{10\,816}$; 2) $\sqrt{39\,204}$; 3) $\sqrt{8281}$; 4) $\sqrt{131\,769}$.

10. Нехай p — просте число. Скільки додатних дільників має число: 1) p^2; 2) p^k $(k \in N)$?

11*. Нехай $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$ — розклад натурального числа a на прості множники p_i. При цьому $p_i \neq p_j$, якщо $i \neq j$. Скільки різних натуральних дільників має число a?

12. Виписати всі натуральні дільники числа:

1) 225; 2) 48; 3) 243.

13. Нехай $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}$ і $b = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}$ — розклади натуральних чисел a і b на прості множники ($p_i \neq p_j$, якщо $i \neq j$). Коли якесь із чисел a або b насправді не має множника p_k, то відповідний показник степеня (n_k або m_k) дорівнює нулю.

1) Які натуральні числа є спільними дільниками a і b?

2) Яке число d є найбільшим спільним дільником чисел a і b?

3) Яке число q є найменшим спільним кратним чисел a і b?

4) Упевнитися в тому, що $ab = dq$.

5) Переконатись, що найбільший спільний дільник чисел a і b ділиться на будь-який спільний дільник цих чисел.

6) У якому випадку найменше спільне кратне двох натуральних чисел a і b дорівнює добуткові цих чисел?

7) Упевнитись, що найменше спільне кратне чисел a і b є дільником будь-якого спільного кратного цих чисел.

14. Знайти найбільший спільний дільник d і найменше спільне кратне q таких пар чисел:

1) 20 328 і 5148; 2) 189 189 і 231 231.

15. Для яких натуральних чисел c правильне таке твердження: якщо цілі числа a і b не діляться на c, то їх добуток ab також не ділиться на c?

16. Для яких цілих чисел c правильне таке твердження: кожне ціле число ділиться на c?

17. 1) Як дізнатись, яке з двох додатних раціональних чисел $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ $(m, n, p, q \in N)$ більше?

2) Як дізнатись, яке з двох від'ємних раціональних чисел $-\frac{m}{n}$ і $-\frac{p}{q}$ $(m, n, p, q \in N)$ більше?

18. Як зміниться додатній дріб m/n, якщо до його чисельника й знаменника додати по одиниці?

19. Перетворити в десяткові такі дроби:

1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{3}{13}$; 3) $\frac{5}{32}$; 4) $\frac{3}{40}$; 5) $\frac{1}{6}$; 6) $\frac{1}{12}$.

20. Чому при перетворенні звичайного дробу p/q в десятковий завжди виходить або скінченний десятковий дріб, або періодичний?

21. Які звичайні нескоротні дроби p/q перетворюються в скінченні десяткові дроби?

22. Вивести правило перетворення у звичайний дріб:

1) чистого періодичного десяткового дробу (у якого період починається відразу після коми);

2) мішаного періодичного десяткового дробу.

23. Перетворити в звичайні нескоротні дроби такі десяткові періодичні:

1) 0, (27); 2) 0, (309); 3) 0, (3520); 4) 0,0 (42); 5) 0,7 (25); 6) 0,10 (69).

24. Навести приклад нескінченного і не періодичного десяткового дробу.

25. Довести, що $\sqrt{2}$ і $\sqrt{3}$ не раціональні числа.

26*. Довести, що $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ не раціональне число.

27. З'ясувати, яке число більше: 1) $\sqrt[3]{3}$ чи $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{6}+\sqrt{7}$ чи $\sqrt{26}$; 3) $\sqrt{10}+\sqrt{13}$ чи $\sqrt{11}+2\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{a}+\sqrt{a+3b}$ чи $\sqrt{a+b}+$ $+\sqrt{a+2b}$ $(a>0$ і $b>0)$; 5) $\sqrt{5}$ чи $\sqrt[3]{11}$; 6) $\sqrt{22}-\sqrt{6}$ чи $\sqrt{5}$.

28. Які з поданих далі тверджень правильні, а які ні?

1) Якщо $a,\ b \in Q$, то $a+b,\ a-b,\ ab \in Q$.

2) Якщо $a,\ b \in Q$ і $b \neq 0$, то $\frac{a}{b} \in Q$.

3) Сума раціонального числа з ірраціональним є ірраціональне число.

4) Сума двох ірраціональних чисел є ірраціональне число.

5) Добуток раціонального числа на ірраціональне є ірраціональне число.

6) Добуток двох ірраціональних чисел є ірраціональне число.

29. Навести приклад таких двох різних між собою ірраціональних чисел a і b, щоб числа $a+b$ і ab були раціональними.

30. Довести, що lg 5 ірраціональне число.

31. Які з поданих далі рівностей правильні, а які ні?

1) $\sqrt{4}=2$; 2) $\sqrt{4}=-2$; 3) $\sqrt{4}=\pm 2$; 4) $\sqrt{(-2)^2}=-2$; 5) $\sqrt{a^2}=|a|$.

32. Для яких чисел $x \in R$ справджуються рівності:

1) $\sqrt{x^2}=-x$; 2) $\sqrt{x^2}=x$; 3) $\sqrt{x^2}=|x|$?

33. Які з наведених далі тверджень про дійсні числа $x,\ y$ правильні, а які ні?

1) $(x=y) \Rightarrow (|x|=|y|)$; 2) $(|x|=|y|) \Rightarrow (x=y)$;

3) $(x+y=0) \Rightarrow (|x|=|y|)$; 4) $(x^2=y^2) \Rightarrow (x=y)$;

5) $(x^2=y^2) \Rightarrow (x=-y)$; 6) $(x^2=y^2) \Leftrightarrow (x=y$ або $x=-y)$;

7) $(x^2=y^2) \Leftrightarrow (|x|=|y|)$.

34. Для яких дійсних чисел $x,\ y$ правильні твердження:

1) $(x=y) \Leftrightarrow (x^2=y^2)$; 2) $(x>y) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}<\frac{1}{y}\right)$;

3) $(x>y) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}>\frac{1}{y}\right)$?

35. Яку числову множину дістанемо, якщо до всіх чисел інтервала $[a,\ b]$ додамо число c?

36. Яку числову множину дістанемо, якщо всі числа інтервала $[a,\ b]$ помножимо на число c?

37. За визначенням

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geqslant b; \\ b, & \text{якщо } b \geqslant a. \end{cases} \quad \min\{a, b\} = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \leqslant b; \\ b, & \text{якщо } b \leqslant a. \end{cases}$$

1) Чому дорівнює число $\max\{a, b\} + \min\{a, b\}$?

2) Довести, що

$$\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}, \quad \min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

38. Нехай a і b — довільні дійсні числа. Які з поданих далі нерівностей правильні, а які ні?

1) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$; 2) $|a-b| \leqslant |a| - |b|$;

3) $|a-b| \leqslant |a| + |b|$; 4) $|a-b| \geqslant |a| - |b|$;

5) $|a-b| \geqslant ||a| - |b||$; 6) $|a+b| \geqslant ||a| - |b||$.

39. Множина чисел D називається обмеженою, якщо всі її числа лежать на якомусь скінченному інтервалі.

1) Чи в кожній обмеженій множині є найбільше число? найменше число? Навести приклади.

2) Чи в кожній обмеженій множині цілих чисел є найменше і найбільше число?

3) Чи в кожній скінченній числовій множині є найменше і найбільше число?

4) Чи є найменше і найбільше число в множині правильних додатних звичайних дробів?

40. 1) Довести, що для будь-яких двох дійсних невід'ємних чисел a і b справджується нерівність (нерівність Коші) $(a + b)/2 \geqslant \sqrt{ab}$ (середнє арифметичне чисел не менше від їх середнього геометричного). Коли тут буде знак рівності?

2) Чи можете ви придумати геометричне тлумачення нерівності Коші?

ПОСЛІДОВНОСТІ

1. Написати загальний член (формулу n-го члена) таких послідовностей:

1) $-1, 1, -1, 1, \ldots$ (числа -1 і 1 чергуються через одне);

2) $2, 0, 2, 0, \ldots$ (числа 2 і 0 чергуються через одне);

3) $3, 7, 3, 7, \ldots$ (числа 3 і 7 чергуються через одне);

4) $1, x, x^2, x^3, \ldots$;

5) $a^7, a^8, a^9, a^{10}, \ldots$;

6) $x^4, x^6, x^8, x^{10}, \ldots$;

7) $\frac{\sin 3\alpha}{2^2}, \frac{\sin 5\alpha}{2^3}, \frac{\sin 7\alpha}{2^4}, \frac{\sin 9\alpha}{2^5}, \ldots$;

8) $\frac{(x+1)^2}{3!}$, $\frac{(x+2)^3}{5!}$, $\frac{(x+3)^4}{7!}$, $\frac{(x+4)^5}{9!}$, ...;

9) $\frac{4}{7}$, $-\frac{6}{9}$, $\frac{8}{11}$, $-\frac{10}{13}$, $\frac{12}{15}$, $-\frac{14}{17}$, ...;

10) $\cos\beta$, $\frac{\cos 3\beta}{4}$, $\frac{\cos 5\beta}{7}$, $\frac{\cos 7\beta}{10}$, $\frac{\cos 9\beta}{13}$, ...

2. Послідовність (a_n) називається обмеженою, якщо всі її члени лежать на скінченному інтервалі. У протилежному випадку послідовність називається необмеженою. Член a_k послідовності (a_n) називається найбільшим, якщо жодний член цієї послідовності не перевищує a_k (найбільший член у послідовності може бути не один). Аналогічно, член a_s послідовності (a_n) називається найменшим, якщо він не перевищує жодного члена цієї послідовності.

Які з наведених далі тверджень правильні, а які ні?

1) Якщо послідовність необмежена, то вона не має найбільшого члена.

2) Якщо послідовність обмежена, то вона має як найбільший, так і найменший члени.

3) Якщо послідовність не має найбільшого члена, то вона необмежена.

4) Якщо послідовність має найменший і найбільший члени, то вона обмежена.

5) Якщо послідовність монотонна, то вона має найменший або найбільший член.

6) Якщо всі члени послідовності (a_n) цілі числа і ця послідовність обмежена, то вона має як найбільший, так і найменший члени.

7) Якщо послідовність (a_n) необмежена, то на інтервалі $[0, 1]$ може лежати лише скінченна кількість її членів.

3. Які з наведених далі тверджень правильні, а які ні?

1) Кожна арифметична прогресія (різниця прогресії $d \neq 0$) є необмеженою послідовністю.

2) Жодна арифметична прогресія ($d \neq 0$) не має границі.

3) Кожна геометрична прогресія (aq^{n-1}) ($a \neq 0$, $q \neq 1$) є необмеженою послідовністю.

4) Кожна геометрична прогресія має границю.

5) Кожна арифметична прогресія — монотонна послідовність.

6) Кожна геометрична прогресія — монотонна послідовність.

4. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — арифметична прогресія з різницею d.

1) Чи буде арифметичною прогресією послідовність

$$a_k,\ a_{2k},\ a_{3k},\ \ldots,\ a_{nk},\ \ldots ?$$

2) Якщо так, то чому дорівнює різниця цієї прогресії?

5. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — геометрична прогресія із знаменником q.

1) Чи буде геометричною прогресією послідовність $a_k, a_{2k}, a_{3k}, \ldots, a_{nk}, \ldots$?

2) Якщо так, то чому дорівнює знаменник цієї прогресії?

6. Сума дев'ятнадцяти початкових членів арифметичної прогресії дорівнює 76. 1) Чому дорівнює десятий член цієї прогресії?

2) Чи можна визначити ще який-небудь її член?

7. Чи правильне таке твердження: якщо десятий член арифметичної прогресії дорівнює c, то сума її дев'ятнадцяти початкових членів дорівнює $19c$?

8. Добуток дев'яти початкових членів геометричної прогресії дорівнює $16\sqrt{2}$. 1) Чи досить цієї інформації, щоб визначити який-небудь член прогресії? Який саме? 2) Чому дорівнює цей член?

9. Чи може мати арифметична прогресія безліч додатних і безліч від'ємних членів одночасно?

10. Чи може мати геометрична прогресія безліч додатних і безліч від'ємних членів одночасно?

11. Якщо (a_n) — арифметична прогресія, то $(|a_n|)$ — також арифметична прогресія. Чи правильно це?

12. Якщо (b_n) — геометрична прогресія, то $(|b_n|)$ — також геометрична прогресія. Чи правильно це?

13. Чи завжди сума двох послідовностей, кожна з яких є арифметичною прогресією, буде арифметичною прогресією?

14. За якої умови сума двох геометричних прогресій буде геометричною прогресією?

15. Які з наведених тверджень правильні, а які ні?

1) Якщо послідовність має границю, то вона обмежена.

2) Якщо послідовність не має границі, то вона необмежена.

3) Якщо послідовність обмежена і монотонна, то вона має границю.

4) Якщо послідовність обмежена, але не монотонна, то вона не має границі.

5) Якщо в кожному околі точки c лежить безліч членів послідовності (a_n), то точка c є границею цієї послідовності. (Околом точки c називається будь-який інтервал $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$, де $\varepsilon > 0$).

6) Якщо в кожному околі точки c лежать усі члени послідовності (a_n), за винятком скінченної їх кількості, то точка c є границею цієї послідовності.

16. Що означає для послідовності (a_n) кожна з таких властивостей:

1) У кожному околі точки c лежать усі члени послідовності (a_n).

2) Існує такий окіл точки c, в якому лежать усі члени послідовності (a_n).

3) У жодному околі точки c немає членів послідовності (a_n).

4) Є такі околи точки c, в які потрапляють (не обов'язково всі) члени послідовності (a_n).

17. Придумайте яку-небудь послідовність, яка збігається до числа c і: 1) монотонно зростає; 2) монотонно спадає; 3) має безліч членів, більших від c, і безліч членів, менших від c.

18. Чи правильні такі твердження?

1) Сума і різниця двох обмежених послідовностей є обмежена послідовність.

2) Добуток двох обмежених послідовностей є обмежена послідовність.

3) Частка a_n/b_n двох обмежених послідовностей (a_n) і (b_n) ($b_n \neq 0$ для всіх $n \in N$) є обмежена послідовність.

4) Сума двох необмежених послідовностей є необмежена послідовність.

5) Добуток двох необмежених послідовностей є необмежена послідовність.

6) Частка a_n/b_n двох необмежених послідовностей (a_n) і (b_n) ($b_n \neq 0$ для всіх $n \in N$) є необмежена послідовність.

19. Чи може збігатись послідовність $(a_n + b_n)$, якщо послідовність (a_n) збігається, а послідовність (b_n) — ні.

20. Чи може збігатись послідовність $(a_n b_n)$, якщо послідовність (a_n) збігається, а послідовність (b_n) — ні.

21. Наведіть приклади двох розбіжних послідовностей, сума яких збігається.

22. Наведіть приклади двох розбіжних послідовностей, добуток яких збігається.

23. Наведіть приклади двох розбіжних послідовностей, частка яких збігається.

24. Чи правильне таке твердження: якщо послідовність (a_n) збігається, то послідовність $(|a_n|)$ також збігається?

25. Чи правильне таке твердження: якщо послідовність $(|a_n|)$ збігається, то послідовність (a_n) також збігається?

26. Спираючись тільки на визначення границі, довести, що послідовність $a_n = 1/(n^2 + 1)$ має границю 0.

27. Спираючись тільки на визначення границі, довести, що послідовність $a_n = \sin n/n$ має границю 0.

28. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, а послідовність b_n обмежена, то послідовність $c_n = a_n b_n$ має границю 0. Довести це.

29. Спираючись тільки на визначення границі, довести, що послідовність $a_n = (n^2 + 1)/(n^2 + 2)$ має границю 1.

30. Які з наведених далі тверджень правильні, а які ні?

1) Якщо в збіжній послідовності (a_n) змінити скінченну кількість її членів, то нова послідовність матиме ту саму границю.

2) Якщо в розбіжній послідовності змінити скінченну кількість її членів, то нова послідовність також буде розбіжною.

3) Якщо послідовності (a_n) і (b_n) мають однакові границі, то послідовність $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ має ту саму границю.

4) Якщо послідовність (a_n) має границю a, то послідовність $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}, \ldots$ також має границю a.

31. Що можна сказати про збіжність послідовності $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$?

32. Якщо $a, b \in R$ і $a \neq 0$, то послідовність $x_n = an + b$ є арифметичною прогресією. Довести це. Чому дорівнює перший член і різниця цієї прогресії?

33. Якщо $a, b \in R$, $a \neq 1$, $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то послідовність $x_n = a^n b$ є геометричною прогресією. Довести це. Чому дорівнює знаменник і перший член цієї прогресії?

34. Кожні два сусідні промені, що виходять з точки O, утворюють кут 45° (рис. 1); $|OA_1| = 1$. Ламана $A_1A_2A_3 \ldots$ побудована так, що $[A_1A_2] \perp [OA_2]$, $[A_2A_3] \perp [OA_3]$, $[A_3A_4] \perp [OA_4]$, ...

1) Яку послідовність утворюють довжини ланок цієї ламаної: $|A_1A_2|$, $|A_2A_3|$, $|A_3A_4|$, ...?

2) Знайти довжину нескінченної ламаної $A_1A_2A_3A_4 \ldots$.

35. В кут, що дорівнює α, вписано безліч кіл l_1, l_2, ... так, що кожне з них, починаючи з другого, дотикається до двох сусідніх (рис. 2).

1) Яку послідовність утворюють радіуси цих кіл, якщо радіус першого кола l_1 дорівнює r_1?

2) Знайти радіус r_n і площу S_n кола l_n.

3) Яку послідовність утворюють площі S_n кіл l_n?

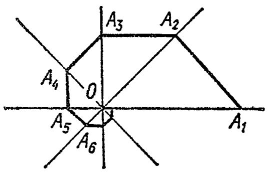


Рис. 1

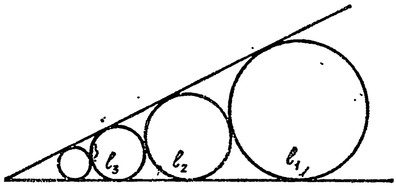


Рис. 2

36. Всі три плоскі кути тригранного кута дорівнюють 90°. У тригранний кут вписано безліч куль K_1, K_2, K_3, ... Найбільша з них K_1 має радіус 1. Кожна наступна куля K_i дотикається, крім граней кута, до двох сусідніх куль K_{i-1} і K_{i+1}. Нехай r_n — радіус кулі K_n.

1) Яку послідовність утворюють числа r_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$)?

2) Чому дорівнює r_n?

37. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник. У конус вміщено безліч куль K_1, K_2, K_3, ..., кожна з яких дотикається до всіх твірних конуса. Найбільша з них K_1 вписана в конус, а кожна наступна K_i дотикається до двох сусідніх K_{i-1} і K_{i+1}. Радіус кулі K_1 дорівнює r_1.

1) Яку послідовність утворюють радіуси r_n ($n = 1, 2, \ldots$) куль K_n?

2) Яку послідовність утворюють об'єми цих куль?

3) Яку частину об'єму конуса становить об'єм усіх куль разом?

38. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — арифметична прогресія. Розглянемо послідовність $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$,

де $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n^2}$ $\left(\text{отже, } b_1 = a_1, \quad b_2 = \dfrac{a_1 + a_2}{4}, \quad b_3 = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{9} \text{ і т. д.}\right)$. Знайти $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

39. Знайти найменший член послідовності $a_n = n^2 - 19n + 88$.

40. Знайти найменший член послідовності $a_n = \dfrac{n^2 + 3n + 101}{n + 3}$.

41. Довести, що послідовність $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ монотонно спадає.

42. Послідовність (a_n) задано такими умовами:
$a_1 = 1$; $a_n = 2a_{n-1} + 1$ для всіх $n \geqslant 2$.
Знайти формулу n-го члена цієї послідовності.

43. Послідовність a_n задано такими умовами: $a_1 = c$; $a_n = pa_{n-1} + q$ для всіх $n \geqslant 2$ ($p \neq 1$). Знайти формулу n-го члена цієї послідовності.

44. 1) Послідовність (x_n) — геометрична прогресія з додатними членами. Що ви можете сказати про послідовність $(\log_a x_n)$, $a \neq 1$, $a > 0$?

2) Послідовність (y_n) — арифметична прогресія. Що ви можете сказати про послідовність (a^{y_n}), $a > 0$, $a \neq 1$?

45*. Послідовність задано такими умовами: $a_1 = x$, $a_2 = y$; $a_n = \dfrac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$ для всіх $n \geqslant 3$.

1) Знайти формулу загального члена цієї послідовності.

2) Знайти границю послідовності (a_n).

ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІКИ

1. 1) Назвіть області визначення і області значень кожної з таких елементарних функцій:

а) $f(x) = x^n$ $(n \in N)$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in N)$; в) $f(x) = \sqrt{x}$;

г) $f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$; д) $f(x) = \log_a x$;

е) $f(x) = \sin x$; є) $f(x) = \cos x$;

ж) $f(x) = \operatorname{tg} x$; з) $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

2) Вкажіть проміжки монотонності кожної з цих функцій.

3) Які з цих функцій парні або непарні?

2. Чи правильне таке твердження: якщо функція $g(x)$ монотонна на певному проміжку $[a, b]$ і відображає його на проміжок $[c, d]$, а функція $f(x)$ монотонна на проміжку $[c, d]$, то складена функція $t(x) = f(g(x))$ монотонна на проміжку $[a, b]$.

3. Що можна сказати про парність чи непарність функції $t(x) = f(g(x))$, якщо $E(g) \subset D(f)$ і:

а) $f(x)$ — парна функція, а $g(x)$ — непарна;

б) $f(x)$ і $g(x)$ — непарні функції;

в) $f(x)$ — довільна функція, а $g(x)$ — парна?

4. Чи правильне таке твердження: якщо функція, визначена на певному проміжку, не має точок екстремуму, то вона монотонна на цьому проміжку.

5. Функція $f(x)$ називається обмеженою на множині $A \subset D(f)$, коли існує такий проміжок $[c, d]$, що $f(x) \in [c, d]$ для всіх $x \in A$.

1) Які з функцій $f(x)$ обмежені на $D(f)$, а які ні:

а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

в) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; г) $f(x) = \sin 5x + 2\cos 7x$;

д) $f(x) = \cos \frac{1}{x}$; е) $f(x) = \ln \sin x$;

є) $f(x) = \operatorname{tg} \cos x$; ж) $f(x) = \operatorname{ctg} \sin x$.

2) Чи правильно, що функція $f(x)$, визначена на замкненому інтервалі $[a, b]$, обов'язково обмежена на цьому інтервалі?

3) Чи правильне таке твердження: якщо функція $f(x)$ обмежена на замкненому інтервалі $[a, b]$, то вона досягає на цьому інтервалі найбільшого і найменшого значень.

6. За якої умови для функції $f(x)$ існує на інтервалі $[a, b] \subset D(f)$ обернена функція?

7. Знайти обернені функції для названих далі функцій $f(x)$ на вказаних інтервалах I:

1) $f(x) = x^2$, $I = [0, \infty[$; 2) $f(x) = x^2$, $I =]-\infty, 0]$;

3) $f(x) = 2x + 1$, $I =]-\infty, \infty[$; 4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = [0, \infty[$;

5) $f(x) = \sin x$, $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; 6) $f(x) = \sin x$, $I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$;

7) $f(x) = \cos x$, $I = [0, \pi]$; 8) $y = \cos x$, $I = [-\pi, 0]$;

9) $y = \operatorname{tg} x$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; 10) $y = \operatorname{tg} x$, $I = \left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[$;

11) $y = \operatorname{ctg} x$, $I =]0, \pi[$; 12) $y = \operatorname{ctg} x$, $I =]-2\pi, -\pi[$;

13) $y = 1 - x^2$, $I = [0, \infty[$.

8. Нехай $D(f)$ — область визначення, а $E(f)$ — область значень функції $y = f(x)$.

1) Якими є область визначення і область значень функції $y = -f(x)$?

2) Як дістати графік функції $y = -f(x)$, маючи графік функції $y = f(x)$?

9. Як дістати графік функції $y = |f(x)|$, якщо відомий графік c функції $y = f(x)$?

10. Нехай a — додатне число. Як дістати графік функції $y = af(x)$, якщо відомий графік c функції $y = f(x)$?

11. Як дістати графік функції $y = f(x) + b$, де $b \in R$, якщо відомий графік c функції $y = f(x)$?

12. Як дістати графік функції $y = f(x - c)$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$?

13. Порівняти форму і взаємне розміщення на координатній площині графіків функцій $y = f(x)$ і $y = f(x - c) + b$.

14. Порівняти форму і взаємне розміщення на площині графіків функцій $y = f(x)$ і $y = f(-x)$.

15. Як дістати графік функції $y = f(|x|)$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$?

16. Нехай k — додатне число. Як дістати графік функції $y = f(kx)$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$?

17. Спираючись на результати задач 8, 11, 12, довести, що графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ конгруентний графіку функції $y = |a| x^2$.

18. Якщо $ad \neq bc$ і $c \neq 0$, то функція $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ називається дробово-лінійною. Спираючись на результати задач 11 і 12 (або задачі 13), довести, що графіком дробово-лінійної функції є гіпербола, конгруентна одній з гіпербол $y = \frac{k}{x}$. З'ясувати, як від коефіцієнтів a, b, c, d залежить форма гіперболи $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; написати рівняння асимптот цієї гіперболи.

19. Число $T > 0$ називається періодом функції $f(x)$, коли справджується таке: якщо функція визначена в точці x, то вона визначена також у точках $x + T$ і $x - T$, причому $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$. Функція, що має який-небудь період, називається періодичною.

1) Якщо T — період функції $f(x)$, а n — натуральне число, то nT — також період функції $f(x)$. Довести це.

2) Що можна сказати про функцію $f(x)$, якщо відомо, що кожне число $T > 0$ є її періодом?

3)* Придумайте несталу функцію $f(x)$, для якої кожне додатне раціональне число було б періодом.

4) Довести, що коли T — період функції $f(x)$, то T/α — період функції $f(\alpha x)$, де α — додатне дійсне число.

5) Якщо $g(x)$ — періодична, а $f(x)$ — довільна функція, то $\varphi(x) = f(g(x))$ — періодична функція. Довести це.

6) Якщо функція $f(x)$ має період h_1, а функція $g(x)$ — період h_2, причому відношення h_1/h_2 — раціональне число, то функції $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)\,g(x)$ і $f(x)/g(x)$ періодичні. Довести це.

7) Як можна використати періодичність функції $y = f(x)$: а) при побудові її графіка; б) при розв'язуванні рівняння $f(x) = c$; в) при розв'язуванні нерівності $f(x) > c$ $(f(x) < c)$?

20. Знайти найменший період T_0 функції $f(x)$ (тобто найменше додатне число, яке є періодом цієї функції):

1) $f(x) = |\sin x|$; 2) $f(x) = \sin \pi x$;

3) $f(x) = \cos \frac{2\pi x}{3}$; 4) $y = \operatorname{tg} 2x$;

5) $y = \operatorname{ctg} 2\pi x$; 6) $y = \sin 3\pi x$;

7) $y = \ln \sin 2x$; 8) $y = e^{\operatorname{tg} \pi x}$.

21*. 1) Цілою частиною числа x називається найбільше ціле число, яке не перевищує x. Це число позначають $[x]$.

Наприклад, $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$, $[2] = 2$, $\left[-\frac{3}{2}\right] = -2$, $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$.

Побудуйте графік функції $y = [x]$.

2) Доведіть, що функція $y = x - [x]$ (дробова частина x) має період 1. Побудуйте графік цієї функції.

3) Спираючись безпосередньо на визначення функції $y = [x]$, побудуйте графіки таких функцій:

а) $y = [\sin x]$; б) $y = \sin \frac{\pi [x]}{2}$;

в) $y = 2^{[x]}$; г) $y = 2^{x-[x]}$;

д) $y = \cos x - [\cos x]$.

22. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа, серед яких немає нуля, а $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — різні числа, впорядковані за зростанням, тобто $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$. Довести, що графіком функції

$$f(x) = a_1|x - c_1| + a_2|x - c_2| + \cdots + a_n|x - c_n| + bx + d$$

є ламана лінія з прямолінійними ланками, вершини якої (точки злому) мають абсциси $c_1, c_2, \ldots, c_n$. У скількох і яких саме точках слід обчислити значення цієї функції, щоб побудувати її графік?

23. Побудувати графік функції

$$y = |x + 1| - \frac{1}{2}|x| - 2|x - 1| + 2|x - 2| + \frac{1}{2}x - 2.$$

24. З'ясувати, які з поданих далі функцій парні або непарні:

1) $f(x) = |x - 1| + |x + 1| + 2x^2$; 2) $f(x) = x^3 - 5x$;

3) $f(x) = 3x + \operatorname{tg} x$; 4) $y = \operatorname{tg} x + \cos x$;

5) $f(x) = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$; 6) $f(x) = x|x| + 2\sin 3x$;

7) $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$; 8) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$;

9) $f(x) = \arcsin x$; 10) $f(x) = \arccos x$;

11) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; 12) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$;

13) $f(x) = \operatorname{arcctg} x - \frac{\pi}{2}$; 14) $f(x) = \arccos x - \frac{\pi}{2}$;

15) $f(x) = x \sin x$.

25. Для кожної з поданих далі пар функцій $f(x)$ і $g(x)$ з'ясувати, чи це та сама функція, чи ні. В разі негативної відповіді встановити, на яких інтервалах функції $f(x)$ і $g(x)$ мають однакові значення.

1) $f(x) = \lg x^2$; $g(x) = 2\lg x$;

2) $f(x) = \lg x + \lg(x - 2)$; $g(x) = \lg(x^2 - 2x)$;

3) $f(x) = 2^{\log_2 x}$; $g(x) = x$;

4) $f(x) = \log_2 2^x$; $g(x) = x$;

5) $f(x) = \lg x^2$; $g(x) = 2\lg|x|$;

6) $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = x$;

7) $f(x)=\sqrt{x^2}$; $g(x)=|x|$;

8) $f(x)=\operatorname{tg} x$; $g(x)=\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$;

9) $f(x)=\cos x$; $g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$;

10) $f(x)=|\sin x|$; $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$.

26. При яких значеннях параметра c графік функції $f(x)$ проходить через точку $(x_0; y_0)$, якщо:

1) $f(x)=2x^2-3x+c$, $x_0=1$, $y_0=7$;

2) $f(x)=\sin 2x+\cos c$, $x_0=\frac{\pi}{12}$, $y_0=1$;

3) $f(x)=\frac{x-c}{x+c}$, $x_0=1$, $y_0=2$;

4) $f(x)=2^{x+c}$, $x_0=2$, $y_0=8$?

27. Для функції $f(x)$ знайти первісну $F(x)$, графік якої проходить через точку $(x_0; y_0)$, якщо:

1) $f(x)=3x^2-6x+2$, $x_0=1$, $y_0=9$;

2) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x_0=9$, $y_0=0$;

3) $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$, $x_0=y_0=0$;

4) $f(x)=\cos^2 2x$, $x_0=y_0=\pi$.

28. З'ясувати, при якому значенні параметра c функція $f(x)$ буде неперервна в усіх точках своєї області визначення:

1) $f(x)=\begin{cases}\sin \pi x, & \text{якщо } x\leqslant\frac{5}{6};\\ \frac{1}{6}(6x^2-23x+2c), & \text{якщо } x>\frac{5}{6}.\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+x^2}, & \text{якщо } x\leqslant 1;\\ \lg x+c, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{25-x^2}, & \text{якщо } x<4;\\ \frac{c}{x}, & \text{якщо } x\geqslant 4.\end{cases}$

29. Відомо, що $\sin\alpha=a$. 1) Чи досить цієї інформації для того, щоб обчислити $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$?

2) Чи можна обчислити $|\cos\alpha|$, $|\operatorname{tg}\alpha|$, $|\operatorname{ctg}\alpha|$?

3) Обчислити $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо додатково відомо, що $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

30. Чи можна, знаючи $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, обчислити:

1) $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$? 2) $\sin\frac{\alpha}{2}$ і $\cos\frac{\alpha}{2}$?

31. Обчислити:

1) $\sin(\arcsin x)$; 2) $\cos(\arcsin x)$;
3) $\operatorname{tg}(\arcsin x)$; 4) $\operatorname{ctg}(\arcsin x)$;
5) $\cos(\arccos x)$; 6) $\sin(\arccos x)$;
7) $\operatorname{tg}(\arccos x)$; 8) $\operatorname{ctg}(\arccos x)$;
9) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$; 10) $\cos(\operatorname{arctg} x)$;
11) $\sin(\operatorname{arctg} x)$; 12) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$;
13) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$; 14) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$;
15) $\sin(\operatorname{arcctg} x)$; 16) $\cos(\operatorname{arcctg} x)$.

32. Довести, що справджуються такі тотожності:

1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ для всіх $x \in [-1;\ 1]$;

2) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in R$.

33. Які криві є графіками функцій:

1) $y = \sqrt{1 - x^2}$; 2) $y = \sqrt{-x^2 - 4x}$; 3) $y = -\sqrt{2x - x^2}$?

34. Як доцільно перетворити вирази, якими задано функції, якщо треба побудувати графіки цих функцій?

1) $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$; 2) $f(x) = \sin^2 x$;

3) $f(x) = \arcsin x + 2\arccos x$; 4) $f(x) = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$.

35. Які елементарні перетворення графіка функції $y = \log_2 x$ і в якому порядку слід виконати, щоб дістати графік функції $f(x) = \log_2(1 - 2x)$?

36. Побудувати ланцюг елементарних перетворень, в якому першою є функція $y = \sqrt{x}$, а останньою — функція $f(x) = \sqrt{4 - |x|}$.

37. Побудувати ланцюг елементарних перетворень, в якому першою є функція $y = \sqrt{x}$, а останньою — функція $f(x) = \sqrt{|4 - x|}$.

38. Як дістати графік функції $y = \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$, маючи графік функції $y = \sin \pi x$?

39. Знайти найменше і найбільше значення функції

$$f(x) = \frac{\log_2 x - 1}{\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 2}.$$

В яких точках функція досягає цих значень?

40. Побудувати графіки функцій:

$$1)\ f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}};$$

$$2)\ f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}.$$

РІВНЯННЯ

1. Що можна сказати про множину розв'язків рівняння $f(x) = c$, якщо функція $f(x)$ монотонна (тобто спадає або зростає в своїй області визначення)?

2. Що можна сказати про кількість розв'язків рівняння $f(x) = c$, якщо функція $f(x)$ періодична?

3. Скільки розв'язків має рівняння $a^x = c$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ залежно від параметра c? Записати ці розв'язки.

4. Скільки розв'язків має рівняння $\log_a x = c$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ залежно від параметра c? Записати ці розв'язки.

5. Скільки розв'язків має рівняння $\sqrt{x} = c$ залежно від параметра c? Знайти ці розв'язки?

6*. З'ясувати, скільки розв'язків мають рівняння залежно від параметра c? Записати ці розв'язки.

1) $\arcsin x = c$; 2) $\arccos x = c$;

3) $\mathrm{arctg}\, x = c$; 4) $\mathrm{arcctg}\, x = c$.

7. Чи рівносильні рівняння $f(g(x)) = f(h(x))$ і $g(x) = h(x)$, якщо функція $f(x)$ монотонна?

8. Чи рівносильні рівняння $a^{g(x)} = a^{h(x)}$ і $g(x) = h(x)$ $(a > 0,\ a \neq 1)$?

9. Яку умову слід приєднати до рівняння $g(x) = h(x)$, щоб дістати систему, рівносильну рівнянню $\log_a g(x) = \log_a h(x)$?

10. Розв'язати рівняння:

1) $2^{x^2+5x} = 2^{3-x^2}$; 2) $\log_2(x^2 + 5x) = \log_2(3 - x^2)$.

11. Нехай функція $f(x)$ періодична з періодом h. Як використати цю властивість функції при розв'язуванні рівняння $f(x) = c$?

12. Позначимо через $\{x\}$ дробову частину числа x, тобто різницю $x - [x]$, де $[x]$ — ціла частина числа x.

Розв'язати рівняння $\{x\} = c$, де c — дане число.

13. Дослідити, при яких значеннях параметра c рівняння мають розв'язки, і записати ці розв'язки:

1) $\mathrm{tg}\, x = c$; 2) $\mathrm{ctg}\, x = c$;

3) $\sin x = c$; 4) $\cos x = c$.

14. Чи можете ви чітко сформулювати рекомендації щодо розв'язування рівняння $f(g(x)) = c$, де $f(x)$ і $g(x)$ — дані функції, а c — дане число?

15. Розв'язати рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \log_{\frac{1}{2}} \log_{16} \log_3 x = 0$;

2) $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \log_3 \operatorname{tg} x = 0$;

3) $\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x) = 1$;

4) $\log_5 \log_{\frac{1}{2}} \cos x = 0$;

5) $\operatorname{tg}(\cos x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

6) $\sqrt{4\sin x - 1} = 1$;

7) $\operatorname{ctg}|2x - 1| = 1$.

16. Яку умову слід приєднати до рівняння $f(x) = g^2(x)$, щоб дістати систему, рівносильну рівнянню $\sqrt{f(x)} = g(x)$?

17. Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{2}\sin x$; 2) $\sqrt{3x^2 - x + 2} = -2x - 8$;

3) $\sqrt{5 - x} = -x - 7$; 4) $\sqrt{\sin x} = \cos x$;

5) $\sqrt{\cos x} = -\sin x$; 6) $\sqrt{\sin x} = -\cos x$;

7) $\sqrt{\operatorname{tg} x} = -2\sin x$.

18. Чи рівносильне рівняння $|f(x)| = g(x)$ сукупності рівнянь: $f(x) = g(x)$, $f(x) = -g(x)$?

19. Розв'язати рівняння:

1) $|\sin 2x| = \sin x$; 2) $|x - 3| = x^2 - 6x + 7$;

3) $|\sin x| = \cos^2 x$; 4) $|\sin x| = \cos x$;

5) $2|\operatorname{tg} x| = 1 - \operatorname{tg} x$; 6) $|\operatorname{ctg} x| = 4 + \operatorname{ctg} x$;

7) $|\lg x - 1| = 1 - \lg x$.

20. 1) Чи завжди рівносильні рівняння $f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$ і $f(x) = g(x)$?

2) Чи завжди одне з цих рівнянь буде наслідком другого? Яке саме?

21. 1) За яких умов рівняння $f(x)\,g(x) = 0$ і $f(x) = 0$ рівносильні?

2) Коли $[f(x)\,g(x) = 0] \Rightarrow [f(x) = 0]$?

3) Коли $[f(x) = 0] \Rightarrow [f(x)\,g(x) = 0]$?

22. Чи завжди рівняння $f(x)\,g(x) = 0$ рівносильне сукупності рівнянь: $f(x) = 0$, $g(x) = 0$?

23. Розв'язати рівняння: 1) $\lg(2x^2 + 7x + 4)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = 0$;

2) $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{6} = 0$; 3) $(x^2 - 3x - 4)\log_2(3 - x) = 0$.

24. Розв'язати рівняння: $a \sin x + b \cos x = c$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

25. Чи рівносильні рівняння $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ і $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$?

26. Розв'язати рівняння: $3 \sin 2x + 4 \cos 2x + 4 \cos^2 x = 5$.

27. Чи завжди одне з рівнянь $\lg (f(x)\, g(x)) = \varphi(x)$ і $\lg f(x) + \lg g(x) = \varphi(x)$ є наслідком другого? Яке саме? Чи рівносильні ці рівняння?

28. Яку умову слід приєднати до рівняння $\lg (f(x)\, g(x)) = \varphi(x)$, щоб дістати систему, рівносильну рівнянню $\lg f(x) + \lg g(x) = \varphi(x)$?

29. Розв'язати рівняння: $\log_2 (4 - 2^x) + \log_2 (6 - 2^x) = x$.

30. Скільки розв'язків може мати рівняння $ax = b$ залежно від параметрів a і b?

31. Розв'язати рівняння:

1) $x^2 + 4x + |x + 2| - 16 = 0$;

2) $x^2 - 3x - 5|x + 1| - 5|x - 4| + 25 = 0$;

3) $2 \sin^2 x + |\sin x| = 1$;

4) $x^2 - 4x + |x^2 - 5| - 1 = 0$;

5) $|\sin x| + |\cos x| = \sin x - \cos x$.

32. Що таке розв'язок рівняння або системи рівнянь з двома невідомими x і y?

33. Скільки розв'язків має рівняння $ax + by = c$ з невідомими x, y залежно від коефіцієнтів a, b, c? Якими формулами можна подати ці розв'язки?

34. Придумайте яке-небудь рівняння з двома невідомими, яке має єдиний розв'язок (1; 2).

35. Розв'язати рівняння з двома невідомими x і y:

1) $(x - 1)(y - 2) = 0$; 2) $\sin^2 \pi x + \cos^2 \frac{\pi y}{2} = 0$;

3) $\arccos (x - y) + |x + y| = 0$; 4) $\operatorname{tg}^2 x + y^2 + 4y + 4 = 0$;

5) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 0$.

36. Розв'язати рівняння:

1) $\sin^2 \pi x + \arccos (2x^2 - 5x - 2) = 0$;

2) $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + \sqrt{2x^2 - 7x + 3} = 0$;

3) $|x^3 - 9x| + \sqrt{x^3 - 4x^2 + 3x} = 0$.

37. Трактуючи розв'язки рівняння $f(x) = g(x)$ як абсциси точок перетину графіків функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$, встановити, скільки розв'язків мають такі рівняння:

1) $\sqrt{4 - x^2} = -3x$; 2) $\sin \pi x = \frac{x}{4}$;

3) $\operatorname{tg} x = -10x$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} x = 7^x$;

5) $\log_2 |x| = -x^2 + 4$.

38*. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}2x+2y=11,\\ \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}=5.\end{cases}$$

39. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(x+y)=0;\\ \operatorname{ctg}(x-y)=-1.\end{cases}$$

40. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}2xz+3yz+z^2=11z,\\ 3xz+yz-z^2=2z,\\ xz-2yz+2z^2=3z.\end{cases}$$

НЕРІВНОСТІ

1. Записати розв'язки таких нерівностей, з'ясувавши попередньо, як залежить множина розв'язків від параметра $c \in R$:

1) $2^x > c$; 2) $2^x < c$;
3) $\log_2 x < c$; 4) $\log_2 x > c$;
5) $\log_{\frac{1}{2}} x < c$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} x > c$;
7) $\arcsin x > c$; 8) $\arccos x < c$;
9) $\operatorname{arctg} x < c$; 10) $\operatorname{arcctg} x > c$;
11) $|x| < c$; 12) $|x| > c$.

2. Що ви можете сказати про характер множини розв'язків нерівностей $f(x) > c$, $f(x) < c$, $a < f(x) < b$, якщо функція $f(x)$ визначена і монотонна на певному (скінченному чи нескінченному) інтервалі?

3. Записати розв'язки таких нерівностей:

1) $1 \leqslant 2^x < 3$; 2) $\frac{1}{9} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 9$;
3) $\left(\frac{3}{\pi}\right)^x \geqslant \frac{\pi}{3}$; 4) $-3 \leqslant 3^x < 4$;
5) $-1 < \log_{\frac{1}{3}} x \leqslant 2$; 6) $\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant 2$;
7) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 2$; 8) $-2 < \log_\pi x \leqslant -1$;
9) $-\frac{\pi}{4} \leqslant \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{3}$; 10) $-\frac{\pi}{6} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{4}$;
11) $\arccos x \geqslant \frac{\pi}{4}$; 12) $-\pi \leqslant \operatorname{arcctg} x \leqslant \frac{\pi}{2}$;
13) $-\frac{\pi}{3} \leqslant \arcsin x \leqslant \pi$; 14) $\arccos x \leqslant 0$.

4. Розв'язати нерівності:

1) $|x| \leqslant 0$; 2) $1 < |x| \leqslant 2$;

3) $|x| \geqslant 3$; 4) $-5 \leqslant |x| \leqslant 6$.

5. Використавши графік функції $y = \sqrt{x}$, з'ясувати, якою буде множина розв'язків нерівності:

1) $\sqrt{x} > c$; 2) $\sqrt{x} < c$; 3) $a < \sqrt{x} < b \, (0 \leqslant a < b)$.

6. Розв'язати нерівності:

1) $\sqrt{1 - 5x - 6x^2} \geqslant -2$;

2) $\sqrt{-x^2 + 8x - 7} \leqslant 2\sqrt{2}$;

3) $\sqrt{12 + x - x^2} < \sqrt{x^2 + 2x + 6}$;

4) $\sqrt{x + 2} \leqslant \sqrt{6 - x}$.

7. Розв'язати нерівності:

1) $\sqrt{-3x^2 + 25x - 22} > 12 - 4x$;

2) $\sqrt{x^2 - 4x - 12} > 2x + 9$;

3) $\sqrt{x^2 - x - 2} \leqslant 3x + 8$.

8. Використавши графіки функцій $y = \sqrt{x - a}$ та $y = \sqrt{b - x}$, з'ясуйте, за якої умови нерівність $\sqrt{x - a} > \sqrt{b - x}$ матиме розв'язки. При яких значеннях параметрів a і b множина розв'язків цієї нерівності збігатиметься з інтервалом $]3, 7]$?

9. Як повинні бути пов'язані між собою параметри a і b, щоб нерівність $\sqrt{x - a} > \sqrt{2x - b}$ мала розв'язки? В разі, коли розв'язки існують, яку множину вони утворюють? При яких значеннях параметрів a і b множина розв'язків збігатиметься з інтервалом $[1, 5[$?

10. 1) Чи є такі значення параметра b, при яких нерівність $x^2 + bx - 1 < 0$ не має розв'язків?

2) При яких значеннях параметра b множина розв'язків цієї нерівності буде інтервалом завдовжки 5?

11. При яких значеннях параметра b нерівність $x^2 + bx + 1 < 0$ не має розв'язків?

12. З'ясувати, при яких значеннях параметра a розв'язки нерівності $\frac{1}{4} ax^2 - x - 1 \leqslant 0$ утворюють:

1) скінченний інтервал;

2) множину, що є об'єднанням двох нескінченних інтервалів виду $]-\infty, c_1]$ і $[c_2, \infty[$, де $c_1 < c_2$;

3) один нескінченний інтервал, відмінний від $]-\infty, \infty[$;

4) інтервал $]-\infty, \infty[$;

5) порожню множину;

6) скінченний інтервал завдовжки 3/2.

13. Розв'язати нерівності:

1) $x^2 - 7|x| + 10 \leqslant 0$;

2) $x^2-3|x|-4\leqslant 0$;
3) $x^2-7|x|+12>0$;
4) $x^2-2x-5|x-1|+7\leqslant 0$;
5) $|x^2+6x-1|\leqslant 6$;
6) $|x^2-10|x|+15|<6$;
7) $6x^2+15|x+2|-20|x|-17x-18\geqslant 0$.

14. Дослідити, якою буде множина розв'язків нерівності $\{x\}\leqslant c$ залежно від параметра c ($\{x\}$ означає дробову частину числа x, тобто $x-[x]$).

15. Спираючись на визначення функцій $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$ і використавши їх графіки, з'ясувати, якою буде множина розв'язків кожної з поданих далі нерівностей залежно від параметра c:

1) $\operatorname{tg} x<c$; 2) $\operatorname{tg} x>c$; 3) $\operatorname{ctg} x\leqslant c$;
4) $\operatorname{ctg} x\geqslant c$; 5) $\sin x\leqslant c$; 6) $\sin x>c$;
7) $\cos x<c$; 8) $\cos x\geqslant c$.

16. Розв'язати нерівності:

1) $-1\leqslant \operatorname{tg} x<\sqrt{3}$; 2) $1<\operatorname{ctg} 2x\leqslant\sqrt{3}$;
3) $\frac{1}{2}\leqslant \sin\frac{\pi x}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos\pi x\leqslant\frac{1}{2}$;
5) $\frac{1}{\sqrt{3}}<\operatorname{tg}(2x+3)\leqslant 1$; 6) $\frac{1}{2}\leqslant\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

17. Розв'язати нерівності:

1) $\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_2 x\geqslant -1$; 2) $\log_3\log_{\frac{1}{3}}\log_3\log_{\frac{1}{3}} x\geqslant 0$;
3) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\log_{\frac{1}{2}} x\geqslant\log_{\frac{1}{3}} 2$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}\sin x\leqslant 1$;
5) $\sqrt{\cos x}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$; 6) $\cos(\sin x)\geqslant 0$;
7) $\sin(\cos x)\geqslant 0$; 8) $2^{|\operatorname{tg} x|}<4$;
9) $\cos 2x+5\sin x+2\geqslant 0$; 10) $||x|-5|>3$.

18. Чи для кожної функції $f(x)$ одна з нерівностей $f(x)<1$ і $1/f(x)>1$ буде наслідком другої? Яка саме? Для яких функцій $f(x)$ ці дві нерівності рівносильні?

19. Чи завжди одна з нерівностей $f(x)>1$ і $1/f(x)<1$ буде наслідком другої? Яка саме? Для яких функцій $f(x)$ ці дві нерівності рівносильні?

20. Яку нерівність слід приєднати до нерівності $f(x)<g(x)$, щоб вийшла система, рівносильна нерівності $\lg f(x)<\lg g(x)$?

21. Розв'язати нерівності:

1) $\lg\sin x\geqslant\lg\cos x$; 2) $\sqrt{\sin x}\geqslant\sqrt{\cos x}$.

22. Використавши графіки функцій $y = \sqrt{25 - x^2}$ та $y = \frac{12}{x}$, розв'язати нерівність: $\sqrt{25 - x^2} \leqslant \frac{12}{x}$.

23. Встановіть, у яких точках перетинаються графіки функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$, і запишіть після цього розв'язки нерівності $f(x) \geqslant g(x)$, якщо:

1) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \frac{24}{x}$;

2) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \frac{24}{x}$;

3) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \frac{\pi}{4x}$;

4) $f(x) = \arccos x$, $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$.

24. Використавши графіки функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$, розв'язати нерівність $f(x) \geqslant g(x)$, якщо:

1) $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = \arccos x$;

2) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$;

3) $f(x) = \arccos x$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$;

4) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $g(x) = \arcsin x$;

5) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = x^2$.

25. Знайти область визначення функцій:

1) $f(x) = \lg(x^2 - x - 12) + \sqrt{20 + x - x^2}$;

2) $f(x) = \sqrt{\sin \pi x} + \sqrt{12 + 5x - 2x^2}$;

3) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{-2x^2 + 11x - 12}$;

4) $f(x) = \arccos(|x| - 2) + \frac{1}{x^2 - x - 2}$.

26. Розв'язати нерівність: $x^2 - 10^{\lg(-x)} \leqslant 20$.

27. Розв'язати нерівності:

1) $(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9) \leqslant 0$;

2) $\frac{(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6)\ln x}{x^2 - 4x - 21} \leqslant 0$;

3) $\frac{(x^4 - 16)(|x| - 5)(2^x - 16)}{x^2 + 8x + 15} \geqslant 0$;

4) $\frac{1}{x^2 - 7x + 12} \geqslant \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$.

28. При яких значеннях параметра a функція $y = 2x^2 - ax + 3a$ має тільки додатні значення?

29. При яких значеннях параметра a розв'язки нерівності $x^2 - ax + 6a < 0$ утворюють інтервал, довжина якого перевищує 5?

30. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 - 2(a-2)x + a^2 - 2a - 3 = 0$ має два різні додатні корені?

31. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 + (a+1)x + a^3 - 6a^2 + 5a = 0$ має корені різних знаків?

32. При яких значеннях параметра a система нерівностей

$$\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a < 0, \\ x^2 + (a+3)x + 3a < 0 \end{cases}$$

має розв'язки?

33. Як відомо, $|a - b|$ означає геометрично відстань між точками a і b числової осі. Спираючись тільки на цей факт, з'ясувати, при яких значеннях параметра a нерівність $|x - a| + |x - 6a| < 10$ має розв'язки.

34. Відомо, що розв'язки нерівності $f(x) \leqslant 0$ утворюють інтервал $[a, b]$ $(a < b < \infty)$. Вказати множину розв'язків нерівностей:

1) $f(x-c) \leqslant 0$; 2) $f(\alpha x) \leqslant 0$; $(\alpha \neq 0)$; 3) $f(1/x) \leqslant 0$.

35. Розв'язати нерівності:

1) $\max\{2 - x, x^2 - 15\} \geqslant 1$;

2) $\max\{2^x, \log_2(x+1)\} \leqslant 2$;

3) $\min\{x^2 - 3, 10 - |x|\} \geqslant 1$;

4) $\min\left\{4x, \frac{1}{x}\right\} \leqslant 1$.

36. Бічні сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 2. Для яких значень кута φ між цими сторонами площа трикутника не перевищуватиме 1?

37. Відомо, що $\alpha \in [-\pi, 0]$, $\beta \in [0, \pi]$. Як повинні бути пов'язані між собою α і β, щоб справджувалась нерівність $\cos\alpha < \cos\beta$?

38. Відомо, що $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Як повинні бути пов'язані між собою α і β, щоб справджувалась нерівність $\sin\alpha < \sin\beta$?

39. Відомо, що $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\beta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Як повинні бути пов'язані між собою α і β, щоб справджувалась нерівність $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$?

40. Розв'язати нерівність

$$\log_{\frac{x}{2}} \frac{x^2 - 6x + 8}{6} \geqslant 1.$$

КООРДИНАТИ НА ПРЯМІЙ, ПЛОЩИНІ І В ПРОСТОРІ

1. Чому дорівнює відстань між точками a і b числової осі?

2. Визначити середню точку відрізка $[a, b]$.

3. a і b — точки числової осі. Знайти симетричний образ точки a відносно b.

4. Які точки числової осі лежать на відстані d від точки a?

5. Побудувати на числовій осі такі множини:

1) $\{x \mid |x-c|<\varepsilon, \varepsilon>0\}$;

2) $\{x \mid 0<|x-c|<\varepsilon, \varepsilon>0\}$;

3) $\{x \mid a\leqslant|x|<b, 0<a<b\}$;

4) $\{x \mid |x-c|>1\}$.

6. Знайти на координатній площині такі множини точок $(x;\ y)$:

1) $\{(x;\ y) \mid 1<x\leqslant 2\}$;

2) $\{(x;\ y) \mid |y|\leqslant 1\}$;

3) $\{(x;\ y) \mid |x-1|=2\}$;

4) $\{(x;\ y) \mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2\}$;

5) $\{(x;\ y) \mid |x|=1,\ 1\leqslant|y|\leqslant 2\}$;

6) $\{(x;\ y) \mid 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\}$;

7) $\{(x;\ y) \mid |x+1|\geqslant 2,\ -1<y\leqslant 2\}$;

8) $\{(x;\ y) \mid \max\{x, y\}=1\}$;

9) $\{(x;\ y) \mid \min\{x, y\}\geqslant -1\}$.

7. Знайти на координатній площині симетричний образ точки $(x_0;\ y_0)$ відносно:

1) осі абсцис; 2) осі ординат; 3) початку координат; 4) прямої $x=a$; 5) прямої $y=b$; 6) прямої $y=x$.

8. Знайти координати середньої точки M відрізка PQ, якщо його кінці мають координати: $P\ (x_1;\ y_1)$, $Q\ (x_2;\ y_2)$.

9. C — симетричний образ точки $A\ (x_0;\ y_0)$ відносно точки $B\ (a;\ b)$. Обчислити координати точки C.

10. Знайти координати образу точки $A\ (x_0;\ y_0)$ при паралельному перенесенні $\vec{r}\ (a;\ b)$.

11. Написати рівняння кола з радіусом 2 і центром у точці O (—1; 2). В яких точках це коло перетинає координатні осі?

12. Написати рівняння кола, яке проходить через точки A (2; 1), B (10; 5), C (9; 2).

13. Написати рівняння кола, яке дотикається до осі ординат у точці A (0; 2) і проходить через точку B (—9; 5).

14. Для яких точок $(x;\ y)$ координатної площини справджується рівність:

1) $x^2+4x+y^2+8y=0$;

2) $x^2-4x+y^2-2y+4=0$;

3) $x^2-4|x|+y^2-2y+4=0$;

4) $x^2-4x+y^2-2|y|+4=0$;

5) $x^2-4|x|+y^2-2|y|+4=0$;

6) $x^2-4|x|+y^2+2|y|=0$.

15. Написати рівняння образу кола $(x-1)^2+(y+2)^2=2$ при:

1) паралельному перенесенні $\vec{r}\,(1;\ 2)$; 2) симетрії відносно осі ординат; 3) симетрії відносно початку координат; 4) симетрії відносно прямої $y=-1$; 5) симетрії відносно точки $M\,(-2;\ 1)$.

16. Знайти множину всіх тих точок $M\,(x;\ y)$ координатної площини, для яких:

1) $x^2+y^2\leqslant 1$;
2) $0<x^2+y^2<1$;
3) $1\leqslant(x-2)^2+(y+2)^2\leqslant 4$.

17. Знайти координати точок перетину прямої $2x+y+1=0$ з колом $(x-3)^2+(y+2)^2=25$.

18. Написати рівняння кола, яке дотикається до кола $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ і має центр у точці $O\,(-1;\ 5)$.

19. Написати рівняння прямої, яка:

1) проходить через початок координат і утворює кут $2\pi/3$ з додатним напрямом осі абсцис;

2) проходить через точки $A\,(-1;\ 2)$ і $B\,(5;\ -3)$;

3) проходить через точку $(3;\ -2)$ і паралельна до прямої $2x-3y+5=0$;

4) є образом прямої $x+3y-1=0$ при паралельному перенесенні $\vec{r}\,(3;\ 1)$;

5) є симетричним образом прямої $2x-y+1=0$ відносно осі ординат;

6) є симетричним образом прямої $2x-y+1=0$ відносно осі абсцис;

7) є симетричним образом прямої $2x-y+1=0$ відносно початку координат;

8) є симетричним образом прямої $2x-y+1=0$ відносно прямої $y=x$.

20. Обчислити координати вершин трикутника, якщо відомо, що його сторони лежать на прямих $x-7y+9=0$, $3x+y+5=0$ і $2x-3y-4=0$.

21. Що відбувається з прямою $y=kx+p$, якщо:

1) змінювати коефіцієнт k, не змінюючи p;

2) змінювати коефіцієнт p, лишаючи незмінним k?

22. Що відбувається з прямою $y=k\,(x-x_0)+y_0$, якщо змінювати коефіцієнт k, лишаючи незмінними x_0 і y_0?

23. Чи завжди рівняння $ax+by+c=0$ є рівнянням прямої? За яких умов воно буде рівнянням прямої?

24. Як можна з'ясувати, чи лежать три точки $A\,(x_1;\ y_1)$, $B\,(x_2;\ y_2)$, $C\,(x_3;\ y_3)$ на одній прямій? (Вкажіть 2—3 способи).

25. Як з'ясувати, чи точки $A\,(x_1;\ y_1)$ і $B\,(x_2;\ y_2)$, які не лежать на прямій $ax+by+c=0$, лежать по один бік від цієї прямої, чи по різні?

26. Знайти всі точки $(x;\ y)$ координатної площини, для яких справджується рівність:

1) $x^2=y^2$; 2) $x^2-1=0$;

3) $y^2 - 5y + 4 = 0$; 4) $(2x - y)(x + y + 1) = 0$;

5) $|x| + |y| = 1$; 6) $||x| - |y|| = 1$;

7) $x = |y| - 1$.

27. Знайти всі точки $(x; y)$ координатної площини, для яких справджується нерівність:

1) $x \leqslant y$; 2) $x + y \leqslant 1$;

3) $|x| + y \leqslant 1$; 4) $|x| + |y| \leqslant 1$;

5) $2x - 3y < 6$.

28. Вивести рівняння серединного перпендикуляра до відрізка з кінцями A (3; —2) і B (—5; 1).

29. Точки A (2; —1), B (3; 1), C (7; 4) — послідовні вершини паралелограма $ABCD$. Знайти координати вершини D.

30. Знайти на координатній площині множину всіх точок $(x; y)$, для яких справджується система нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x - y + 4 \geqslant 0, \\ 3x + 2y - 8 \leqslant 0, \\ x + 3y + 2 \geqslant 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y \leqslant 0, \\ x + y + 4 \geqslant 0, \\ x + 4 \geqslant 0. \end{cases}$

31. Знайти точку перетину площин $2x - y + z = 1$, $x + 3y - 4z = 3$ та $3x - y + 2z = 3$.

32. Написати рівняння симетричного образу площини $x + y + z = 1$ відносно:

1) початку координат; 2) координатної площини $z = 0$; 3) координатної осі $0x$.

33. Обчислити об'єм трикутної піраміди, обмеженої координатними площинами та площиною $2x - 2y - 3z = 6$.

34. Визначити радіус кола, уздовж якого координатна площина $x0z$ перетинає сферу $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 20$. У якій точці лежить центр цього кола?

35. Написати рівняння сфери, яка дотикається до координатної площини $y0z$ і має центр у точці P (—3; 2; —1).

36. Написати рівняння сфери, яка дотикається до координатної осі $0y$ і має центр у точці P (—4; —1; 3).

37. Написати рівняння площини, яка перпендикулярна до відрізка $[AB]$ і проходить через його середину, якщо кінці відрізка мають координати: A (—1; 2; —3), B (3; 4; 1).

38. Яку фігуру утворюють у просторі точки $(x; y; z)$, координати яких задовольняють таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2, \\ z_1 \leqslant z \leqslant z_2 \end{cases}$$

(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 — дані числа, причому $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, $z_1 < z_2$)? Обчислити об'єм V цієї фігури.

39. Яку фігуру утворюють у просторі точки $(x;\ y;\ z)$, координати яких задовольняють нерівність $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leqslant r^2\ (r>0)$?

40. Написати рівняння сфери, яка має центр у точці $O\ (a;\ b;\ c)$ і проходить через початок координат.

ВЕКТОРИ

Під вектором розуміють відрізок, на якому обрано один з двох можливих напрямів. Якщо на відрізку AB обрати напрям від A до B, то дістанемо вектор, який позначається $\overrightarrow{AB}$. Точка A називається його початком, а точка B — кінцем. Довжина відрізка AB називається також довжиною вектора $\overrightarrow{AB}$. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються рівними, якщо вони співнапрямлені і мають однакову довжину. Нульовим називається вектор, початок і кінець якого — та сама точка. Це єдиний вектор, що має довжину 0 і не має напряму.

1. В яких межах лежить довжина вектора $\vec{a}+\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$. Для яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ довжина $|\vec{a}+\vec{b}|$ найменша і для яких найбільша?

2. Точки A, B, C — вершини правильного трикутника. Чому дорівнює кут між векторами:

1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$? 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$? 3) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{CA}$?

3. Чому дорівнює кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$? 2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$?

4. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ. Чому дорівнює кут між векторами: 1) $\vec{a}$ і $-\vec{b}$? 2) $-\vec{a}$ і $-\vec{b}$?

5. $|\vec{a}|=a,\ \lambda \in R$. Чому дорівнює довжина вектора $\lambda\vec{a}$?

6. Чому дорівнює кут між векторами $\lambda\vec{a}$ і $\mu\vec{b}$ $(\lambda,\ \mu \in R,\ \lambda \neq 0,\ \mu \neq 0)$, якщо $\widehat{(\vec{a},\ \vec{b})}=\varphi$?

7. Чи правильно це: 1) Якщо $|\vec{b}|=\lambda|\vec{a}|$, то $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. 2) Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні і $|\vec{b}|=\lambda|\vec{a}|$, то $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. 3 Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнапрямлені і $|\vec{b}|=\lambda|\vec{a}|$, то $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

8. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то існує таке число λ, що $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. Чи правильно це?

9. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, причому $\vec{a}\neq\vec{0}$. Для якого λ справджується рівність: $\vec{b}=\lambda\vec{a}$?

10. $\vec{a}\neq\vec{0}$. Як записати одиничний вектор, співнапрямлений з $\vec{a}$?

11. Дано два ненульові вектори: $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Написати який-небудь компланарний з ними вектор, який утворює з $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однакові кути.

12. Дано два вектори: $\vec{0A} = \vec{a}$, $\vec{0B} = \vec{b}$. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $m : n$ ($|AM| : |MB| = m : n$). Виразити вектор $\vec{OM}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

13. Точка D — середина медіани AM трикутника ABC, а Q — точка перетину його медіан. Виразити вектори $\vec{OM}$, $\vec{OD}$ і $\vec{OQ}$ через вектори $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ (O — довільна точка простору).

14. $ABCD$ — паралелограм, P — його центр, а Q — середина сторони CD. Виразити вектори $\vec{OD}$, $\vec{OQ}$, $\vec{OP}$, $\vec{DP}$, $\vec{QD}$, $\vec{QP}$, $\vec{PC}$ через вектори $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ (O — довільна точка простору).

15. S — довільна точка простору, $ABCDEF$ — правильний шестикутник, Q — його центр. Виразити вектори $\vec{BQ}$, $\vec{SQ}$, $\vec{SD}$, $\vec{SE}$, $\vec{SF}$, $\vec{DF}$, $\vec{DA}$ через вектори $\vec{SA} = \vec{a}$, $\vec{SB} = \vec{b}$, $\vec{SC} = \vec{c}$.

16. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні і утворюють попарно один з одним кути $2\pi/3$. Розкласти вектор $\vec{a}$ за векторами $\vec{b}, \vec{c}$, якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 1$.

17. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \pi/2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = (\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 3\pi/4$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 3$. Розкласти вектор $\vec{a}$ за векторами $\vec{b}$, $\vec{c}$.

18. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = \frac{5\pi}{6}$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = \frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$. Розкласти вектор $\vec{a}$ за векторами $\vec{b}$, $\vec{c}$.

19. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, $(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = \varphi$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \psi$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = \varphi - \psi$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$, $0 < \varphi < \pi$. Розкласти вектор $\vec{a}$ за векторами $\vec{b}$, $\vec{c}$.

20. Розкласти вектор $\vec{c} = (4; -5)$ за векторами $\vec{a} = (2; -3)$ і $\vec{b} = (-1; 2)$.

21. Розкласти вектор $\vec{f} = (1; -8; 2)$ за векторами $\vec{a} = (1; -2; 2)$, $\vec{b} = (2; 3; -1)$; $\vec{c} = (-1; 1; 3)$.

22. Яке найбільше і найменше значення може мати скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$? Для яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ досягаються ці екстремальні значення скалярного добутку?

23. Коли скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$ дорівнює нулю?

24. Спираючись на властивості скалярного множення векторів, вивести теорему косинусів для трикутника.

25. Спираючись на властивості скалярного множення векторів, вивести теорему Піфагора.

26. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ та $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

27. Перевірити, що для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується така рівність:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2).$$

Який геометричний факт вона виражає?

28. Перевірити, що для будь-яких трьох векторів простору $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справджується така рівність:

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|^2+|\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}|^2+|\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}|^2=$$
$$=4(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2).$$

Який геометричний факт вона виражає?

29. Знайти одиничні вектори, перпендикулярні до вектора $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$ і компланарні з векторами $\vec{i}$ і $\vec{j}$.

30. Знайти одиничні вектори, перпендикулярні до векторів $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ і $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

31. A і B — дві протилежні вершини паралелепіпеда. Ребра $[AE]$, $[AF]$ і $[AG]$ цього паралелепіпеда мають довжину 1 і утворюють між собою однакові кути, що дорівнюють α.

1) Визначити довжину діагоналі $[AB]$.

2) Який кут утворює діагональ $[AB]$ з ребром $[AE]$?

32. $\overrightarrow{AB}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$.

Обчислити площу ΔABC.

33. Нехай $\vec{a}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$ і $|\vec{a}|=1$. Що являють собою числа α і β?

34. Якими повинні бути вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектори $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ були взаємно перпендикулярні? Яку геометричну властивість виражає одержаний результат?

35*. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, причому $\vec{b}\neq 0$. Розглядаємо множину векторів $M=\{\vec{a}+\lambda\vec{b}\mid\lambda\in R\}$.

1) Який із векторів цієї множини має найменшу довжину (вказати відповідне значення λ)?

2) Чому дорівнює довжина цього найкоротшого вектора?

3) Якщо вектори $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ відкладати від однієї точки, то яку лінію утворять їх кінці?

36. Знайти одиничний вектор $\vec{c}$, який утворює тупий кут з додатним напрямом осі абсцис і перпендикулярний до векторів $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ та $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k}$. Який кут утворює цей вектор $\vec{c}$ з додатним напрямом осі ординат?

37. Скалярний добуток вектора $\vec{c}$ з кожним вектором простору дорівнює нулю. Що ви можете сказати про вектор $\vec{c}$?

38. При якому значенні λ вектори $\vec{a}=\lambda\cdot\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}+2\lambda\vec{k}$ взаємно перпендикулярні?

39. Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ і $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{2\pi}{3}$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = (\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = \frac{\pi}{2}$.

40. Дано точки $M_1 (x_1; y_1)$, $M_2 (x_2; y_2)$, ..., $M_n (x_n; y_n)$. Для якої точки $M (x; y)$ справджується рівність:

$$\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \cdots + \overrightarrow{MM_n} = \vec{0}?$$

ПЛАНІМЕТРІЯ

1. Скільки осей симетрії має кожна з таких плоских фігур:

1) смуга, обмежена двома паралельними прямими; 2) круг; 3) правильний n-кутник; 4) півплощина; 5) півкруг; 6) прямокутник; 7) ромб?

2. Якщо плоска фігура має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії, то вона має також центр симетрії. Довести це. Чи правильне обернене твердження?

3. Довести, що композиція двох центральних симетрій — спочатку відносно точки A, а потім відносно B — є паралельне перенесення $2\overrightarrow{AB}$.

4. 1) Чи може плоска фігура мати більше одного центра симетрії? Наведіть приклади таких фігур.

2) Доведіть, що обмежена фігура не може мати більше одного центра симетрії. (Плоска фігура називається обмеженою, якщо вся вона міститься всередині певного кола).

3) Якщо плоска фігура має два центри симетрії, то вона має безліч центрів симетрії. Доведіть це.

5. 1) Придумайте фігуру, яка має безліч осей симетрії, але не має жодного центра симетрії.

2) Придумайте фігуру, яка має безліч центрів симетрії, але не має жодної осі симетрії.

6. В яких межах може змінюватись площа S трикутника, дві сторони якого дорівнюють a і b?

7. В яких межах може змінюватись периметр p трикутника, дві сторони якого дорівнюють a і b $(a \geqslant b)$?

8. В яких межах може змінюватись площа s трикутника, який має основу a й кут при вершині α?

9. Якщо у двох трикутників є по дві однакові сторони, а сума кутів, що лежать між цими сторонами, дорівнює π, то площі трикутників однакові. Чому?

10. В яких межах може змінюватись радіус R кола, описаного навколо трикутника, дві сторони якого дорівнюють a і b $(a > b)$?

11. Із двох трикутників з однаковим периметром p більшу площу S має той, у якого більший радіус вписаного кола r. Чому?

12. Площі двох трикутників відносяться як їх основи. Що можна сказати про висоти цих трикутників?

13. Площі двох трикутників відносяться як квадрати їх основ. Чи означає це, що трикутники подібні?

14. Знайти катети прямокутного трикутника, коли відомо, що його сторони утворюють арифметичну прогресію, а гіпотенуза дорівнює c.

15. Знайти катети прямокутного трикутника, якщо відомо, що його сторони утворюють геометричну прогресію, а гіпотенуза дорівнює c.

16. Відрізок PQ, кінці якого лежать на сторонах AB і AC трикутника ABC, паралельний до сторони BC і ділить площу $\triangle\ ABC$ навпіл. У якому відношенні точка P ділить відрізок AB?

17. Середини сторін опуклого чотирикутника послідовно сполучені відрізками.

1) Довести, що утворений чотирикутник завжди буде паралелограмом.

2) Знайти відношення площі цього паралелограма до площі початкового чотирикутника.

18. Основи трапеції дорівнюють a і b $(a < b)$. Діагоналі трапеції розбивають її на чотири трикутники. Найменший серед них (за площею) має площу S. Який це трикутник? Яку площу мають інші трикутники?

19. Чому дорівнює відношення радіуса кола, вписаного в правильний n-кутник, до радіуса кола, описаного навколо цього n-кутника?

20. Нехай A — одна з вершин правильного n-кутника. Довести, що діагоналі n-кутника, проведені з цієї вершини, ділять внутрішній кут A на рівні частини.

21. Скільки всього діагоналей можна провести в опуклому n-кутнику?

22. Знайти відношення діагоналі правильного п'ятикутника до його сторони.

23. Опуклий чотирикутник симетричний відносно однієї із своїх діагоналей. За якої умови навколо такого чотирикутника можна описати коло?

24. Два конгруентні квадрати мають спільний центр. Сторони одного з них паралельні відповідним діагоналям другого. Обчислити площу спільної частини цих квадратів, якщо площа кожного з них дорівнює S.

25. У кут, що дорівнює α, вписано два кола, які дотикаються між собою.

1) Знайти відношення їх радіусів.

2) Для якого α це відношення дорівнює $\frac{1}{3}$?

26. Як відносяться радіуси півкруга і круга, якщо лінії, що обмежують ці дві фігури, мають однакову довжину?

27. У кут, що дорівнює φ, вписано коло з радіусом r. Обчислити площу фігури, обмеженої сторонами кута і меншою дугою кола, кінцями якої є точки дотику кола до сторін кута.

28. Три кола однакового радіуса r попарно дотикаються одне до одного. Знайти радіуси двох кіл, кожне з яких дотикається до всіх трьох даних кіл.

29. Коло, описане на висоті рівнобедреного трикутника, як на діаметрі, перетинає бічну сторону трикутника в точці, яка ділить цю сторону в відношенні 9 : 1, рахуючи від вершини трикутника. Чому дорівнює кут при основі трикутника?

30. Відрізки AB і CD розміщені в площині так, що серединний перпендикуляр, проведений до одного з них, є також серединним перпендикуляром до другого. Обчислити площу спільної частини трикутників ABM і CDN, де M — середина $[CD]$, а N — середина $[AB]$, якщо $|AB| = p$, $|CD| = q$, $|MN| = h$.

31. Точка A на горизонтальній площині лежить на відстані d від основи вертикальної вежі. Із цієї точки вежу видно під кутом α. На якій відстані від основи вежі треба взяти на цій же площині точку B, щоб із неї вежу було видно під удвічі меншим кутом?

32. Коло l_1 має радіус r. Чи існує таке концентричне з ним коло l_2, щоб у кільце, утворене цими двома колами, можна було вписати n кіл, кожне з яких дотикалось би до двох сусідніх (n — дане натуральне число, $n \geqslant 3$). Чому дорівнює радіус кола l_2?

33. Що можна сказати про переміщення площини, якщо відомо, що при цьому переміщенні певний правильний n-кутник відображається сам на себе. Скільки є таких переміщень?

34. Скільки є переміщень площини, які даний ромб, відмінний від квадрата, відображає сам на себе. Назвіть усі ці переміщення.

35. Скільки є переміщень площини, які даний трикутник відображають сам на себе?

36. У трикутнику ABC проведено бісектрису BD. Застосувавши теорему синусів до трикутників ABD і DBC, довести, що $|AD| : |DC| = |AB| : |BC|$.

37. У півкруг вписано два однакових кола, що дотикаються між собою. Який вони мають радіус, якщо радіус півкруга дорівнює r?

38. Якщо всі сторони опуклого n-кутника мають однакову довжину, то сума відстаней d від будь-якої точки M, що лежить всередині цього n-кутника, до прямих, які є продовженнями його сторін, однакова (тобто не залежить від точки M). Чому?

39. Припустимо, що в n-кутник можна вписати коло. Нехай r — радіус цього кола, а p — периметр n-кутника. Довести, що площа n-кутника $S = \frac{1}{2} pr$.

40. Нехай A, B, C — довільні три точки кола, що має радіус r. Довести, що $|AB| / \sin \widehat{ACB} = 2r$.

СТЕРЕОМЕТРІЯ

1. Які з наведених далі тверджень правильні, а які ні?

1) Якщо дві прямі паралельні якій-небудь третій прямій, то вони паралельні між собою.

2) Якщо дві прямі перпендикулярні до якоїсь третьої прямої, то вони паралельні між собою.

3) Якщо пряма паралельна лінії перетину двох площин, то вона паралельна кожній з цих площин.

4) На будь-якій площині γ є прямі, паралельні даній прямій l.

5) На будь-якій площині γ є прямі, перпендикулярні до даної прямої l.

6) На будь-якій площині γ є прямі, паралельні даній площині β.

7) На будь-якій площині γ є прямі, перпендикулярні до даної площини β.

2. Скільки площин, перпендикулярних до даної площини β, можна провести через дану пряму l?

3. Скільки площин симетрії має куб?

4. Скільки площин симетрії має правильний тетраедр?

5. Скільки площин симетрії має правильна n-кутна піраміда ($n > 3$)?

6. Як відноситься об'єм правильної n-кутної піраміди до об'єму вписаного в неї конуса?

7. Як відноситься об'єм правильної n-кутної піраміди до об'єму описаного навколо неї конуса?

8. Якщо в многогранник можна вписати кулю, то його об'єм V і площа його поверхні S зв'язані такою рівністю: $V = \frac{1}{3} Sr$ (r — радіус вписаної кулі). Довести це.

9. Якщо в кожний з многогранників T_1 і T_2 можна вписати кулю, причому радіуси обох цих куль однакові, то об'єми многогранників відносяться так само, як площі їх поверхонь. Чому?

10. Нехай r — радіус кулі, вписаної в правильний тетраедр, а R — радіус кулі, описаної навколо цього тетраедра. Знайти відношення $r : R$.

11. Що являє собою множина точок простору, рівновіддалених від двох даних точок A і B?

12. Що являє собою множина точок простору, рівновіддалених від точок даного кола?

13. Які з наведених далі тверджень правильні, а які ні?

1) Якщо навколо опуклого многокутника, що лежить в основі піраміди, можна описати коло, то навкруг самої піраміди можна описати сферу.

2) Якщо в основі піраміди лежить опуклий многокутник, а бічні ребра піраміди нахилені до площини її основи під однаковими кутами, то навколо піраміди можна описати сферу.

3) Якщо навколо піраміди можна описати сферу, то її бічні ребра нахилені до площини основи під однаковими кутами.

4) Якщо в основі піраміди лежить опуклий многокутник, а її бічні грані нахилені до площини основи під однаковими кутами, то в піраміду можна вписати сферу.

5) Якщо в піраміду можна вписати сферу, то її бічні грані нахилені до площини основи під однаковими кутами.

14. У многогранний кут вписано сферу. Довести, що точки дотику цієї сфери до граней кута лежать на однакових відстанях від вершини кута.

15. Розглядаємо перерізи правильного тетраедра площинами, паралельними двом мимобіжним ребрам цього тетраедра.

1) Якими фігурами є ці перерізи?

2) Упевнитись, що всі перерізи мають однаковий периметр. Чому він дорівнює, якщо ребро тетраедра дорівнює a?

3) У яких межах змінюється площа перерізів? Який переріз має найбільшу площу?

16. Через центр куба проведено площину, перпендикулярну до однієї з діагоналей цього куба.

1) Яка фігура утвориться в перерізі куба площиною?

2) Чому дорівнює периметр p і площа S перерізу, якщо ребро куба дорівнює a?

17. Усі ребра правильної чотирикутної піраміди дорівнюють a. Через середину висоти цієї піраміди проведено площину, паралельну бічному ребру піраміди й тій діагоналі основи, яка не має з цим ребром спільних точок.

1) Яка фігура утвориться в перерізі піраміди площиною?

2) Знайти площу цієї фігури.

18. У сферу з радіусом R вписано конус, осьовий переріз якого має кут φ при вершині. Визначити висоту конуса.

19. Навколо сфери з радіусом R описано конус, осьовий переріз якого має кут φ при вершині. Визначити висоту конуса.

20. У сферу з радіусом R вписано циліндр, висота якого у два рази менша від радіуса основи. Обчислити площу бічної поверхні циліндра.

21. Плоский кут при вершині правильної n-кутної піраміди дорівнює α. Під яким кутом нахилені до площини основи бічні грані піраміди?

22. Двогранний кут при основі правильної n-кутної піраміди дорівнює β. Під яким кутом нахилені до площини основи бічні ребра піраміди?

23. Бічні ребра правильної n-кутної піраміди нахилені до площини її основи під кутом γ. Чому дорівнює двогранний кут при бічному ребрі піраміди?

24. Всі плоскі кути при вершині тригранного кута дорівнюють α. У тригранний кут вписано сферу з радіусом R. На якій відстані від вершини кута лежить центр сфери?

25. На висоті конуса як на діаметрі описано сферу. Ця сфера перетинає бічну поверхню конуса вздовж кола, довжина якого становить $\frac{4}{5}$ довжини кола, що обмежує основу конуса. Під яким кутом твірні конуса нахилені до площини його основи?

26. Дві кулі з радіусами r_1 і r_2 $(r_1 < r_2)$ дотикаються між собою і до всіх твірних конуса. Знайти кут при вершині осьового перерізу конуса.

27. Скільки площин, паралельних даній прямій, можна провести через дану точку простору?

28. Скільки площин, паралельних даній прямій, можна провести через іншу дану пряму?

29. У просторі дано дві мимобіжні прямі l_1 і l_2. Чи можна через дану точку P простору провести пряму, яка перетинає кожну з прямих l_1 і l_2? Скільки таких прямих можна провести через точку P? Відповідь на ці питання залежить від положення точки P. Як саме?

30. Центри восьми однакових сфер, радіус яких дорівнює R, є вершинами куба з ребром завдовжки $2R$. Знайти радіуси двох сфер, кожна з яких дотикається до всіх цих восьми сфер.

31. Навколо кулі описано правильну n-кутну призму. Яку частину об'єму призми становить об'єм кулі?

32. Площина, паралельна основі піраміди, ділить об'єм піраміди на дві рівні частини. У якому відношенні ця площина ділить висоту піраміди, рахуючи від її вершини?

33*. Конус має таку форму й розміри, що в нього можна вмістити чотири кулі однакового радіуса R так, що кожна з них дотикається до трьох інших і до бічної поверхні конуса; три з цих куль дотикаються до площини основи конуса. Обчислити об'єм конуса.

34. Два конуси мають спільну вісь, причому вершина кожного з них лежить в центрі основи другого. Радіуси основ конусів дорівнюють r_1 і r_2, а їх висота — h. Знайти об'єм спільної частини цих конусів.

35. В основі прямої призми, в яку можна вписати сферу, лежить ромб з гострим кутом $\pi/6$. Знайти відношення площі поверхні вписаної сфери до площі бічної поверхні призми.

36. Які властивості повинні мати основа і висота прямої призми, щоб у неї можна було вписати сферу?

37. Навколо яких призм можна описати сферу?

38. Якщо всі грані опуклого многогранника мають однакову площу, то сума відстаней d від будь-якої точки P, що лежить всередині многогранника, до площин, в яких лежать його грані, є сталою величиною, яка не залежить від положення точки P. Довести це. Чому дорівнює d?

39. У конус, радіус основи якого дорівнює 1, вписано циліндр, осьовим перерізом якого є квадрат, а навколо конуса описано сферу. Виявилось, що радіус циліндра r і радіус сфери R зв'язані рівністю $r = 1/R$. Чому дорівнює кут між твірною конуса і площиною його основи?

40. Вершини одного правильного тетраедра є центрами граней другого. Як відносяться об'єми цих тетраедрів?

Розділ II

ЗРАЗКИ ВАРІАНТІВ ПИСЬМОВИХ РОБІТ З РОЗВ'ЯЗКАМИ

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ВАРІАНТ 1

Задача 1. Основою піраміди $SABCD$ є прямокутник $ABCD$, у якого $|AB| = a$, $|BC| = b$. Бічне ребро SB має довжину a і утворює з кожним із ребер BA і BC кут α. Визначити площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через ребро SB і ділить ребро AD у відношенні $1 : 3$, починаючи від точки A.

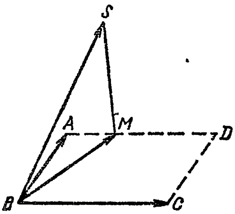


Рис. 3

Розв'язок. Позначимо через M ту точку відрізка AD, яка ділить його в потрібному відношенні. Отже, $|AM| : |MD| = 1 : 3$. Завдання полягає в тому, щоб визначити площу $\triangle BSM$ (рис. 3). Оскільки $|BS| = a$ і $|BM| = \sqrt{|BA|^2 + |AM|^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{16}b^2}$, то мети буде досягнуто, якщо ми знайдемо $\sin \widehat{SBM}$. Обчислимо спочатку косинус цього кута. Маємо:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BC} =$$

$$= a^2\cos\alpha + \frac{1}{4}ab\cos\alpha = a\left(a + \frac{1}{4}b\right)\cos\alpha.$$

У той же час, за визначенням скалярного добутку векторів

$$\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BM} = |BS|\cdot|BM|\cos\widehat{SBM} = a\sqrt{a^2 + \frac{1}{16}b^2}\cos\widehat{SBM},$$

тому

$$a\left(a + \frac{1}{4}b\right)\cos\alpha = a\sqrt{a^2 + \frac{1}{16}b^2}\cos\widehat{SBM},$$

звідки

$$\cos\widehat{SBM} = \frac{4a + b}{\sqrt{16a^2 + b^2}}\cos\alpha.$$

Оскільки за змістом задачі $0 < \widehat{SBM} < \pi$, то $\sin\widehat{SBM} > 0$, а тому

$$\sin\widehat{SBM} = \sqrt{1 - \cos^2\widehat{SBM}} = \sqrt{\frac{(16a^2 + b^2)\sin^2\alpha - 8ab\cos^2\alpha}{16a^2 + b^2}}.$$

Тепер обчислюємо площу σ трикутника SBM:

$$\sigma = \frac{1}{2}|BS||BM|\sin\widehat{SBM} =$$

$$= \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + \frac{1}{16}b^2}\sqrt{\frac{(16a^2 + b^2)\sin^2\alpha - 8ab\cos^2\alpha}{16a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{1}{8}a\sqrt{(16a^2 + b^2)\sin^2\alpha - 8ab\cos^2\alpha}.$$

Відповідь. Площа перерізу дорівнює $\frac{1}{8}a\times$ $\times\sqrt{(16a^2+b^2)\sin^2\alpha-8ab\cos^2\alpha}$.

Задача 2. Побудувати графік функції

$$y=\log_{\frac{1}{3}}\left|\frac{1-3x}{x+1}\right|.$$

Для кожного дійсного числа p визначити, скільки розв'язків має рівняння

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(9^p\frac{1-3x}{x+1}\right)=0.$$

Розв'язок. Будуємо спочатку графік функції

$$y=(3x-1)/(x+1).$$

Оскільки

$$\frac{3x-1}{x+1}=\frac{(3x+3)-4}{x+1}=3-\frac{4}{x+1},$$

то цей графік дістаємо паралельним перенесенням $\vec{r}\,(-1{,}3)$ графіка функції $y=-\frac{4}{x}$ (рис. 4). Після цього будуємо графік функції $y=\left|\frac{3x-1}{x+1}\right|$ (рис. 5). Нарешті, «логарифмуємо» за основою $\frac{1}{3}$ графік

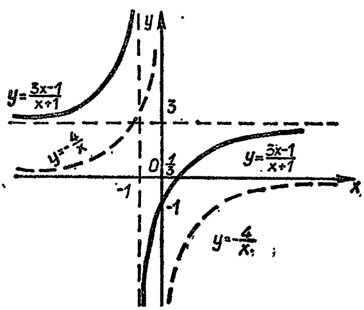


Рис. 4

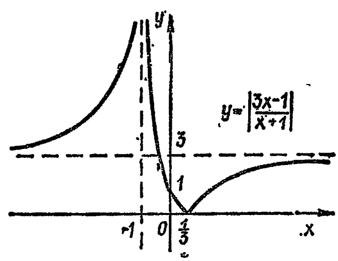


Рис. 5

функції $f(x)=\left|\frac{3x-1}{x+1}\right|$. На інтервалі $\left]\frac{1}{3},\infty\right[$ функція $f(x)$ зростає від 0 до 3, тому функція $\log_{\frac{1}{3}}f(x)$ спадатиме на цьому інтервалі від $+\infty$ до -1. На інтервалі $\left]-1,\frac{1}{3}\right[$ функція $f(x)$ спадає від $+\infty$ до 0, тому функція $\log_{\frac{1}{3}}f(x)$ зростатиме на цьому інтервалі від $-\infty$ до $+\infty$. Нарешті, на інтервалі $]-\infty,-1[$ функція $f(x)$ зростає від 3 до $+\infty$, тому функція $\log_{\frac{1}{3}}f(x)$ спадатиме на цьому інтервалі від -1 до $-\infty$.

Знайдемо ще точки перетину графіка функції $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ з віссю абсцис:

$$\left[\log_{\frac{1}{3}}\left|\frac{3x-1}{x+1}\right| = 0\right] \Leftrightarrow \left[\left|\frac{3x-1}{x+1}\right| = 1\right] \Leftrightarrow \left[\frac{3x-1}{x+1} = \pm 1\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x \in \{0,\ 1\}].$$

Графік функції $y = \log_{\frac{1}{3}}\left|\frac{3x-1}{x+1}\right|$ зображено на рис. 6.

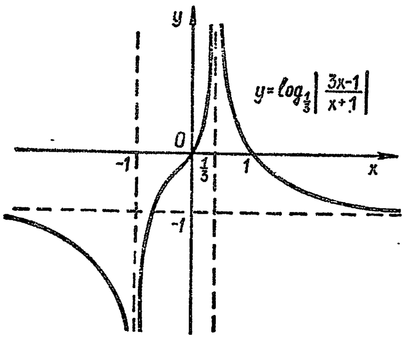


Рис. 6

Перейдемо тепер до другого питання задачі. Оскільки

$$\left[\log_{\frac{1}{3}}\left(9^p\,\frac{1-3x}{x+1}\right) = 0\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\log_{\frac{1}{3}}\frac{1-3x}{x+1} = 2p\right],$$

то відповідь на це питання легко дати, маючи графік функції $y = \log_{\frac{1}{3}}\frac{1-3x}{x+1}$. Ця функція визначена лише на інтервалі $\left]-1, \frac{1}{3}\right[$ і збігається на ньому з функцією $y = \log_{\frac{1}{3}}\left|\frac{3x-1}{x+1}\right|$. Отже, функція $y = \log_{\frac{1}{3}}\frac{1-3x}{x+1}$ монотонна, причому множиною її значень є множина R всіх дійсних чисел. Звідси випливає, що рівняння

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1-3x}{x+1}\right) = 2p$$

має єдиний розв'язок при будь-якому $p \in R$.

Зауваження. Відповідь на друге питання задачі можна дістати й безпосередньо. Справді,

$$\left[\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1-3x}{x+1}\right) = 2p\right] \Leftrightarrow \left[\frac{1-3x}{x+1} = 3^{-2p}\right] \Leftrightarrow [(3+3^{-2p})\,x = 1-3^{-2p}].$$

Оскільки для кожного $p \in R$ $3 + 3^{-2p} \neq 0$, то останнє рівняння має єдиний розв'язок:

$$x = \frac{1-3^{-2p}}{3+3^{-2p}}.$$

Задача 3. Розв'язати рівняння

$$6 \cdot 3^{-\cos 2\pi x} + 3 = 7 \cdot 3^{\sin^2 \pi x}.$$

Р о з в ' я з о к. Використавши тотожність $\cos 2\pi x = 1 - 2\sin^2\pi x$ і позначивши $3^{\sin^2\pi x}$ через z, дістанемо квадратне рівняння $2z^2 - 7z +$

$+ 3 = 0$. Воно має корені 3 і $\frac{1}{2}$. Оскільки для всіх x $3^{\sin^2 \pi x} \geqslant 1$, то рівняння

$$3^{\sin^2 \pi x} = \frac{1}{2}$$

розв'язків не має. Тому початкове рівняння рівносильне такому:

$$3^{\sin^2 \pi x} = 3.$$

Розв'язуємо його:

$$[3^{\sin^2 \pi x} = 3] \Leftrightarrow [\sin^2 \pi x = 1] \Leftrightarrow [\sin \pi x = \pm 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right] \Leftrightarrow \left[x = \frac{1}{2} + k,\ k \in Z\right].$$

Відповідь. $x = \frac{1}{2} + k,\ k \in Z.$

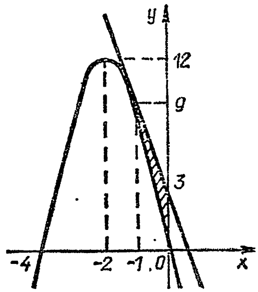


Рис. 7

Задача 4. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю ординат, параболою $y = -3x^2 - 12x$ і дотичною до цієї параболи, проведеною в точці з абсцисою $x_0 = -1$.

Розв'язок. Дотична проходить через точку $(-1; 9)$ і має кутовий коефіцієнт $y'(-1) = -6x - 12\,|_{x=-1} = -6$. Її рівняння: $y = -6(x + 1) + 9$, або $y = -6x + 3$.
Шукана площа фігури (на рис. 7 ця фігура заштрихована) дорівнює

$$S = \int_{-1}^{0} (-6x + 3)\,dx - \int_{-1}^{0} (-3x^2 - 12x)\,dx = \int_{-1}^{0} (3x^2 + 6x + 3)\,dx =$$

$$= 3\int_{-1}^{0} (x + 1)^2\,dx = (x + 1)^3\Big|_{-1}^{0} = 1.$$

ВАРІАНТ 2

Задача 1. Розв'язати нерівність

$$|2^x - 4| - 4^x + 2 > 0.$$

Розв'язок. Функція $f(x) = |2^x - 4| - 4^x + 2$ визначена і неперервна для всіх $x \in R$. Розв'яжемо рівняння $f(x) = 0$. Це рівняння еквівалентне сукупності двох систем:

$$\begin{cases} 2^x \geqslant 4, \\ 2^x - 4 - 4^x + 2 = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 2^x \leqslant 4, \\ 4 - 2^x - 4^x + 2 = 0. \end{cases}$$

Перша з цих двох систем розв'язків не має, а друга має єдиний розв'язок $x = 1$. Тому на кожному з проміжків $]-\infty; 1[$ і $]1; \infty[$ функція $f(x)$ набуває значень одного знаку. Визначимо знак функції на кожному з цих проміжків:

$$0 \in]-\infty;\ 1[;\quad f(0) = 3 - 1 + 2 > 0,$$
$$2 \in]1;\ \infty[;\quad f(2) = 0 - 16 + 2 < 0.$$

Отже, додатних значень функція $f(x)$ набуває при $x \in]-\infty;\ 1[$.

Відповідь. Наведена нерівність справджується для $x \in]-\infty;\ 1[$.

Задача 2. В кулю, що має об'єм V, вписано такий конус, що площа його бічної поверхні найбільша з усіх можливих. Знайти об'єм конуса.

Розв'язок. Позначимо через R радіус даної кулі. Впишемо в кулю конус, у якого твірна нахилена до основи під кутом $\varphi \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Розглянемо переріз обох фігур площиною, яка проходить через висоту AM конуса (рис. 8).

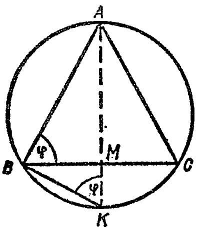


Рис. 8

Оскільки $\widehat{ABK} = \pi/2$, то $\widehat{AKB} = \varphi$. Позначимо $|BM| = r$, $|AM| = h$, $|AB| = l$. Із трикутників ABK та ABM дістанемо: $l = 2R\sin\varphi$, $r = l\cos\varphi = R\sin 2\varphi$, $h = l\sin\varphi = 2R\sin^2\varphi$. Обчислимо площу бічної поверхні конуса $S(\varphi)$: $S(\varphi) = \pi r l = 2\pi R^2 \sin\varphi \sin 2\varphi$. З'ясуємо, при якому значенні φ ця площа найбільша:

$$S'(\varphi) = 4\pi R^2 \sin\varphi\,(\cos^2\varphi + \cos 2\varphi).$$

Оскільки $\sin\varphi \neq 0$ для $\varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, то можливі точки екстремуму функції $S(\varphi)$ на інтервалі $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ є коренями рівняння $\cos^2\varphi + \cos 2\varphi = 0$. Звідси дістаємо $\cos\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Отже, на інтервалі $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ функція $S(\varphi)$ має єдину точку екстремуму, а саме: $\varphi_0 = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. Вона є точкою максимуму, бо $S(\varphi_0) > 0$, $S(0) = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Таким чином, найбільшу площу бічної поверхні має конус, у якого твірні нахилені до площини основи під кутом $\varphi_0 = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. Обчислюємо об'єм цього конуса:

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 \sin^2 2\varphi_0 \cdot 2R\sin^2\varphi_0 =$$
$$= \frac{8}{3}\pi R^3 \sin^4\varphi_0 \cdot \cos^2\varphi_0 = \frac{8}{3}\pi R^3 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{32}{81}\pi R^3.$$

Взявши тепер до уваги, що $R^3 = \frac{3V}{4\pi}$, де V — об'єм кулі, дістанемо остаточно $V_{\text{кон}} = \frac{8}{27}V$.

Задача 3. При якому значенні a пряма $y = a$ ділить площу фігури, обмеженої лініями $y = 0$ і $y = 3 - x^2 - 2x$, навпіл?

Розв'язок. Графік функції $y = 3 - x^2 - 2x = 4 - (x + 1)^2$ є образом графіка функції $y = 4 - x^2$ при паралельному перенесенні $\vec{p} = (-1; 0)$ (рис. 9). Тому задача рівносильна такій: при якому значенні a пряма $y = a$ ділить площу фігури, обмеженої лініями $y = 0$, $x = 0$ і $y = 4 - x^2$, навпіл? З рис. 9 видно, що

$$S_{OBD} = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3};$$

$$S_{ABC} = \int_0^{\sqrt{4-a}} (4 - a - x^2)\,dx = \left((4-a)\,x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\sqrt{4-a}} = \frac{2}{3}(4-a)^{3/2}.$$

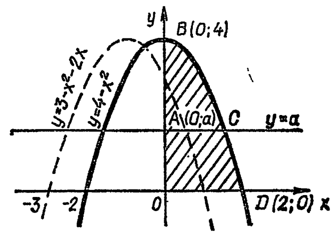


Рис. 9

Шукане значення a визначаємо з рівняння

$$2 \cdot \frac{2}{3}(4-a)^{3/2} = \frac{16}{3}.$$

Отже, пряма $y = a$ ділить навпіл площу фігури, про яку йдеться в задачі, при $a = 4 - 2\sqrt[3]{2}$.

Задача 4. Розв'язати рівняння

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = 4y - y^2 - 5.$$

Розв'язок. Оскільки при $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = -\cos 2x,$$

то це рівняння еквівалентне такому: $-\cos 2x = 4y - y^2 - 5$ або $\cos 2x = (y - 2)^2 + 1$. Остання рівність можлива лише тоді, коли $\cos 2x = 1$ і $y = 2$. Отже, розв'язками початкового рівняння є пари чисел $(x; y)$, у яких $x = n\pi$ $(n \in Z)$, $y = 2$ і тільки вони.

ВАРІАНТ 3

Задача 1. Знайти переріз $A \cap B$ множин

$$A = \left\{x \mid 2\cos x \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x\right\}$$

та

$$B = \{x \mid |1 - \log_3 x| < 1\}.$$

Р о з в ' я з о к. А — це множина розв'язків рівняння

$$2 \cos x \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x.$$

Розв'язуємо його:

$$\left[2 \cos x \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x\right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 2\cos^2 x = 1 - \cos x, \\ \sin x \neq 0 \end{cases}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \\ \cos x \neq \pm 1 \end{cases}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0, \\ \cos x \neq \pm 1 \end{cases}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos x = \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow \left[x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in Z\right].$$

Множину B утворюють розв'язки нерівності $|1 - \log_3 x| < 1$. Розв'яжемо цю нерівність:

$$[|1 - \log_3 x| < 1] \Leftrightarrow [-1 < 1 - \log_3 x < 1] \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow [0 < \log_3 x < 2] \Leftrightarrow x \in]1;\ 9[.$

Перерізові $A \cap B$ належать ті з точок $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in Z$, що лежать у проміжку $]1;\ 9[$. Отже, $A \cap B = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right\}$.

Задача 2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 2\sqrt{x}$ і дотичною, проведеною до графіка функції $y = 1 + \ln x$ у точці з абсцисою $x = 1$.

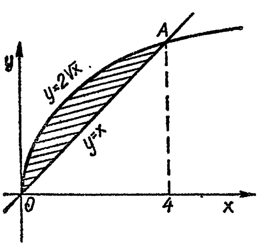


Рис. 10

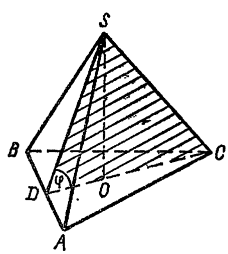


Рис. 11

Р о з в ' я з о к. Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x = x_0$ таке:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Тому рівняння дотичної, про яку йдеться в задачі, буде $y - 1 = x - 1$ або $y = x$. Фігура, площу якої належить визначити, заштрихована на рис. 10. Абсцису точки A перетину графіків функцій $y = 2\sqrt{x}$ і $y = x$ знаходимо з рівняння $x = 2\sqrt{x}$. Його розв'язки: $x = 0$ і $x = 4$. Отже, точка A має координати (4; 4). Шукана площа

$$S = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)\,dx = \left(2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}.$$

Задача 3. У правильній трикутній піраміді через її висоту і бічне ребро проведено площину. Площа одержаного перерізу в чотири рази менша від площі повної поверхні піраміди. Обчислити двогранний кут при основі піраміди.

Р о з в' я з о к. Нехай $SABC$ — така піраміда (рис. 11), SDC — її переріз вказаною в умові задачі площиною, $[SO]$ — висота піраміди.

Позначимо через a і φ відповідно довжину сторони основи піраміди і шуканий кут: $|AB| = a$, $\widehat{SDC} = \varphi$. Тоді

$$|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \ |DO| = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \ |SO| = |DO|\operatorname{tg}\varphi =$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\varphi, \quad |SD| = \frac{|DO|}{\cos\varphi} = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\varphi}.$$

Площа перерізу

$$Q_{SDC} = \frac{1}{2}|DC|\cdot|SO| = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2}{8}\operatorname{tg}\varphi.$$

Площа повної поверхні піраміди

$$Q = 3Q_{ABS} + Q_{ABC};$$

$$Q_{ABS} = \frac{1}{2}|AB|\cdot|DS| = \frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\varphi} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\varphi};$$

$$Q_{ABC} = \frac{1}{2}|AB|\cdot|DC| = \frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Отже,

$$Q = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + 1\right).$$

За умовою задачі $Q = 4Q_{SDC}$, тобто

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + 1\right) = \frac{a^2}{2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Звідси знаходимо кут φ:

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + 1\right) = \operatorname{tg}\varphi\right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos\varphi) = \sin\varphi\\ \cos\varphi \neq 0\end{cases}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases}\sqrt{3}\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 0\\ \cos\varphi \neq 0\end{cases}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases}\cos\frac{\varphi}{2} = 0 \quad \text{або} \quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos\varphi \neq 0\end{cases}\right].$$

Оскільки за змістом задачі $\varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, то дістаємо

$$\varphi = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 4. При яких a система рівнянь

$$\begin{cases}x - y = a(1 + xy),\\ 2 + x + y + xy = 0\end{cases}$$

має один розв'язок?

Розв'язок. У другому рівнянні системи виразимо x через y $\left(x = -\frac{2+y}{1+y}\right)$ і підставимо це значення в перше рівняння (зауважимо при цьому, що пари (x, —1) не будуть розв'язками системи при жодному a). Після спрощень маємо

$$(1-a)y^2 + (2-a)y + 2 + a = 0. \quad (1)$$

Початкова система рівнянь має один розв'язок, коли один розв'язок, відмінний від —1, має рівняння (1), або коли воно має два розв'язки, але один з них дорівнює —1.

Рівняння (1) має один розв'язок, коли $a = 1$ або коли дискримінант його дорівнює нулю, тобто коли $(2-a)^2 + 4(a-1)(a+2) = 0$. Звідси маємо $5a^2 = 4$, $a = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Підставивши $y = -1$ у рівняння (1), переконуємось, що —1 є одним з коренів при $a = -1$.

Отже, дана система рівнянь має один розв'язок при чотирьох значеннях параметра a : $a = \pm 1$ і $a = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

ВАРІАНТ 4

Задача 1. У правильну чотирикутну піраміду, бічні грані якої нахилені до площини основи під кутом φ, вписано циліндр (одна основа циліндра лежить у площині основи піраміди, а коло другої його основи має по одній спільній точці з кожною бічною гранню піраміди). Радіус основи циліндра і його висота дорівнюють r. Обчислити об'єм піраміди. При якому значенні кута φ об'єм піраміди найменший?

Розв'язок. Нехай $SABCD$ — дана піраміда (рис. 12). Оскільки площина верхньої основи циліндра паралельна до площини основи піраміди, то вона відтинає від даної піраміди гомотетичну їй піраміду $SA'B'C'D'$. Тому для об'ємів цих пірамід маємо

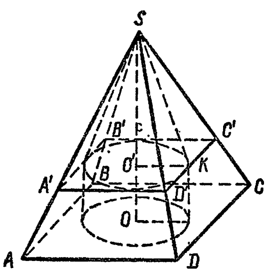


Рис. 12

$$\frac{V_{SABCD}}{V_{SA'B'C'D'}} = \frac{|SO|^3}{|SO'|^3},$$

звідки

$$V_{SABCD} = \frac{|SO|^3}{|SO'|^3} V_{SA'B'C'D'}.$$

Лишається обчислити висоти обох пірамід і об'єм піраміди $SA'B'C'D'$. Коло верхньої основи циліндра вписане в квадрат $A'B'C'D'$. Отже, сторона цього квадрата дорівнює $2r$. Із прямокутного трикутника $SO'K$, де $[SK]$ — апофема піраміди $SA'B'C'D'$, дістаємо

$$|SO'| = |O'K| \operatorname{tg} \varphi = r \operatorname{tg} \varphi.$$

За умовою задачі $|O'O| = r$, а тому

$$|SO| = |SO'| + |O'O| = r(\operatorname{tg} \varphi + 1).$$

Тепер маємо

$$V_{SA'B'C'D'} = \frac{1}{3}(2r)^2 r \operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3} r^3 \operatorname{tg}\varphi;$$

$$V_{SABCD} = \frac{|SO|^3}{|SO'|^3} V_{SA'B'C'D'} = \frac{r^3(\operatorname{tg}\varphi + 1)^3}{r^3 \operatorname{tg}^3\varphi} \frac{4}{3} r^3 \operatorname{tg}\varphi =$$

$$= \frac{4}{3} r^3 \frac{(\operatorname{tg}\varphi + 1)^3}{\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

З'ясуємо, при якому значенні кута φ об'єм піраміди $SABCD$ найменший. Із геометричних міркувань випливає, що кут φ може змінюватись у відкритому проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Оскільки величина $\frac{4}{3} r^3$ стала, то наше завдання полягає в дослідженні функції

$$f(\varphi) = \frac{(\operatorname{tg}\varphi + 1)^3}{\operatorname{tg}^2\varphi}$$

на цьому проміжку. Коли φ, лишаючись в проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, прямує до 0 або до $\pi/2$, то функція $f(\varphi)$ необмежено зростає. Зауваживши, що ця функція має похідну в усіх точках проміжку $]0; \pi/2[$, робимо висновок, що вона досягає на цьому проміжку свого найменшого значення в одній із точок мінімуму, причому похідна функції в точках її екстремумів дорівнює нулю. Обчислюємо похідну:

$$f'(\varphi) = \frac{3(\operatorname{tg}\varphi + 1)^2 \frac{1}{\cos^2\varphi} \operatorname{tg}^2\varphi - 2\operatorname{tg}\varphi \frac{1}{\cos^2\varphi}(\operatorname{tg}\varphi + 1)^3}{\operatorname{tg}^4\varphi} =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg}\varphi + 1)^2(\operatorname{tg}\varphi - 2)}{\operatorname{tg}^3\varphi \cos^2\varphi}.$$

На проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ $\operatorname{tg}\varphi + 1 \neq 0$, тому рівняння $f'(\varphi) = 0$ рівносильне на цьому проміжку рівнянню $\operatorname{tg}\varphi = 2$.

Це рівняння на проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ має єдиний розв'язок $\varphi = \operatorname{arctg} 2$. З попереднього аналізу випливає, що $\operatorname{arctg} 2$ — єдина точка мінімуму функції $f(\varphi)$ на проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Отже, це й є та точка, де функція досягає свого найменшого значення.

Відповідь. Об'єм піраміди дорівнює

$$\frac{4}{3} r^3 \frac{(\operatorname{tg}\varphi + 1)^3}{\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Об'єм найменший, коли $\varphi = \operatorname{arctg} 2$.

Задача 2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = \frac{|4 - x^2|}{2} \text{ та } y = 7 - |x|.$$

Р о з в' я з о к. Будуємо графіки даних функцій (рис. 13), враховуючи, що вони парні і

$$\frac{|4-x^2|}{4}=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{4}, & \text{якщо } x\geqslant 2;\\[2mm] \dfrac{4-x^2}{4}, & \text{якщо } 0\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$$

$$7-|x|=7-x, \quad \text{якщо } x\geqslant 0.$$

Оскільки фігура, обмежена графіками даних функцій, симетрична відносно осі $0y$, то досить обчислити площу її частини, що лежить праворуч від цієї осі.

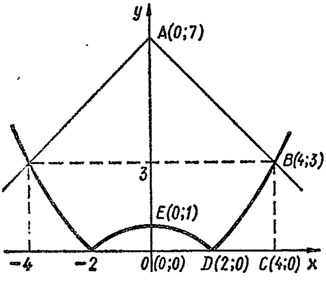


Рис. 13

Із системи рівнянь

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2-4}{4},\\ y=7-x\end{cases}$$

знаходимо координати точки B. Система має два розв'язки: (4; 3) та (—8; 15). Зрозуміло, що точка B має координати (4; 3). Другий розв'язок системи — це друга точка перетину прямої $y=7-x$ з параболою $y=\dfrac{x^2-4}{4}$.

Площу фігури $ABDE$ знаходимо тепер як різницю площі трапеції $ABCO$ та суми площ двох криволінійних трикутників OED і DBC. Маємо

$$S_{ABCO}=\frac{7+3}{2}\cdot 4=20;$$

$$S_{OED}=\int\limits_0^2\frac{4-x^2}{4}\,dx=x-\frac{x^3}{12}\Bigg|_0^2=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3};$$

$$S_{DBC}=\int\limits_2^4\frac{x^2-4}{4}\,dx=\frac{x^3}{12}-x\Bigg|_2^4=\left(\frac{16}{3}-4\right)-\left(\frac{2}{3}-2\right)=\frac{8}{3};$$

$$S_{ABDE}=S_{ABCO}-S_{OED}-S_{DBC}=20-\frac{4}{3}-\frac{8}{3}=16.$$

В і д п о в і д ь. Шукана площа дорівнює 32.

Задача 3. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}}x^2-3}>\sqrt{5}\,(\log_4 x^2-3).$$

Р о з в' я з о к. Дана нерівність еквівалентна такій:

$$\sqrt{\log_2^2 x-2\log_2 x-3}>\sqrt{5}\,(\log_2 x-3).$$

Позначимо для зручності $\log_2 x=z$ і розв'яжемо нерівність

$$\sqrt{z^2-2z-3}>\sqrt{5}\,(z-3) \qquad (1)$$

відносно z. Функція, що стоїть у лівій частині нерівності, невід'ємна, а тому дана нерівність рівносильна сукупності таких двох систем:

$$\text{A)} \begin{cases} z^2 - 2z - 3 \geqslant 0, \\ z - 3 < 0; \end{cases} \qquad \text{B)} \begin{cases} z^2 - 2z - 3 \geqslant 0, \\ z - 3 \geqslant 0, \\ z^2 - 2z - 3 > 5(z-3)^2. \end{cases}$$

Рівняння $z^2 - 2z - 3 = 0$ має корені -1 і 3. Отже, $z^2 - 2z - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow z \in]-\infty; -1] \cup [3; \infty[$. Таким чином, система A) справджується тоді й тільки тоді, коли $z \in]-\infty; -1]$. Остання нерівність системи B) еквівалентна такій нерівності: $z^2 - 7z + 12 < 0$. Її розв'язки $z \in]3; 4[$. Отже, розв'язки системи B) $z \in]3; 4[$. Остаточно: нерівність (1) справджується тоді й тільки тоді, коли $z \in]-\infty; -1] \cup]3; 4[$. Тепер лишається розв'язати нерівності

$$\log_2 x \leqslant -1 \quad \text{і} \quad 3 < \log_2 x < 4.$$

Маємо

$$\log_2 x \leqslant -1 \Leftrightarrow x \in \left]0; \frac{1}{2}\right], \quad 3 < \log_2 x < 4 \Leftrightarrow x \in]8, 16[.$$

В і д п о в і д ь. Дана нерівність справджується тоді й тільки тоді, коли $x \in \left]0; \frac{1}{2}\right] \cup]8; 16[$.

Задача 4. Розв'язати рівняння:

$$\frac{4\sin x}{(x-3)^2} + |\sin x| = 0.$$

Р о з в' я з о к. Оскільки другий доданок і знаменник першого доданку лівої частини рівняння невід'ємні, то його розв'язки повинні задовольняти умову $\sin x \leqslant 0$. При цій умові $|\sin x| = -\sin x$, тому вихідне рівняння еквівалентне такій системі:

$$\begin{cases} \sin x \leqslant 0, \\ \dfrac{4\sin x}{(x-3)^2} - \sin x = 0. \end{cases}$$

Рівняння цієї системи еквівалентне сукупності таких двох рівнянь:

$$\sin x = 0 \quad \text{і} \quad \frac{4}{(x-3)^2} - 1 = 0.$$

Розв'язки першого з цих рівнянь $x = k\pi$, $k \in Z$, а розв'язки другого: $x = 1$ і $x = 5$. Числа $x = k\pi$, $k \in Z$ умову $\sin x \leqslant 0$ задовольняють, а отже й є розв'язками вихідного рівняння. Оскільки $0 < 1 < \pi$, а $\pi < 5 < 2\pi$, то $\sin 1 > 0$, а $\sin 5 < 0$. Тому $x = 5$ є розв'язком вихідного рівняння, а $x = 1$ не буде його розв'язком.

В і д п о в і д ь. $x = 5$ і $x = k\pi$, $k \in Z$.

ВАРІАНТ 1

Задача 1. Точки O_1 и O_2 — центри кіл K_1 і K_2, які дотикаються зовні. Радіуси цих кіл дорівнюють відповідно r_1 і r_2. На відрізку $[O_1O_2]$ як на діаметрі побудовано третє коло K_3. Обчислити радіус кола, яке дотикається зовні до кіл K_1 і K_2 і зсередини — до кола K_3.

Р о з в' я з о к. Позначимо через O_3 центр кола K_3, через O — центр шуканого кола (рис. 14), а через ρ — його радіус. Згідно з умовою задачі матимемо: $[OO_3]$ — медіана ΔO_1OO_2;

$$|O_1O_2| = r_1 + r_2;$$
$$|OO_1| = r_1 + \rho;$$
$$|OO_2| = r_2 + \rho;$$
$$|OO_3| = \frac{r_1 + r_2}{2} - \rho.$$

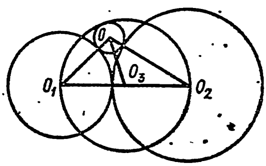


Рис. 14

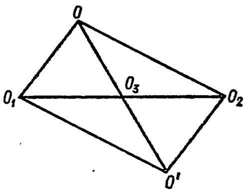


Рис. 15

Розглянемо паралелограм O_1OO_2O', що є об'єднанням ΔO_1OO_3 з його симетричним образом відносно точки O_3 (рис. 15). Сума квадратів діагоналей будь-якого паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін. Записавши цю рівність для нашого паралелограма, дістанемо рівняння для ρ:

$$(r_1 + r_2)^2 + (r_1 + r_2 - 2\rho)^2 = 2(r_1 + \rho)^2 + 2(r_2 + \rho)^2.$$

Після перетворень матимемо рівняння $2(r_1 + r_2)\rho = r_1r_2$, звідки

$$\rho = \frac{r_1r_2}{2(r_1 + r_2)}.$$

В і д п о в і д ь. Радіус шуканого кола дорівнює $\frac{r_1r_2}{2(r_1 + r_2)}$.

Примітка. Ця задача є типовою геометричною задачею на складання рівнянь. Звичайно, її можна розв'язати й без теореми про суму квадратів діагоналей паралелограма, проте обраний шлях найпростіший.

Задача 2. Дослідити функцію

$$y = \frac{8(x^3 + x)}{(2x - 1)^3}$$

і побудувати її графік. Скільки коренів має рівняння

$$\frac{8(x^3 + x)}{(2x - 1)^3} = c?$$

Р о з в' я з о к. 1) Область визначення функції — множина всіх дійсних чисел без числа 0,5.

2) З'ясуємо, як поводить себе функція поблизу точки 0,5, а також при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$. Коли $x \to 0{,}5$, то чисельник виразу

$$8(x^3 + x)/(2x - 1)^3$$

наближається до числа 5, а знаменник — до 0. Отже, значення функції за модулем при цьому необмежено зростає. Оскільки знаменник додатний для $x > 0{,}5$ і від'ємний для $x < 0{,}5$, то значення функції прямуватимуть до $+\infty$, коли $x \to 0{,}5$, лишаючись більшим ніж 0,5 і до $-\infty$, коли $x \to 0{,}5$, лишаючись меншим ніж 0,5. Таким чином, графік даної функції поблизу від точки $x = 0{,}5$ має такий вигляд, як на рис. 16.

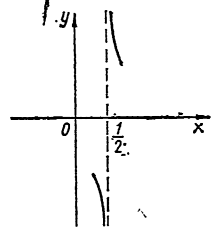


Рис. 16

Дослідимо тепер поведінку функції, коли $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8(x^3+x)}{(2x-1)^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{x}\right)^3} = 1;$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8(x^3+x)}{(2x-1)^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8(-x^3-x)}{(-2x-1)^3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{8(x^3+x)}{(2x+1)^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^3} = 1.$$

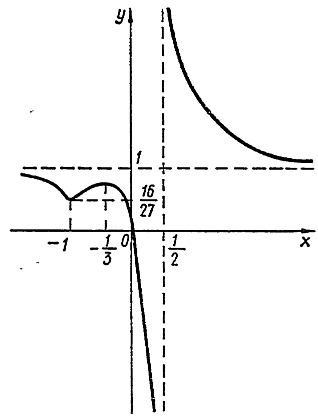


Рис. 17

Отже, в обох випадках значення функції прямують до числа 1, а це означає, що графік функції наближається до прямої $y = 1$.

3) Графік функції перетинає вісь Ox лише в одній точці $x = 0$.

4) В усіх точках із області визначення дана функція, як дробово-раціональна, має похідну, а отже й неперервна. Тому для повного уявлення про її графік досить знайти ще точки її екстремумів:

$$y' = 8\,\frac{(3x^2+1)(2x-1)^3 - 2\cdot 3(2x-1)^2(x^3+x)}{(2x-1)^6} = -8\,\frac{3x^2+4x+1}{(2x-1)^4}.$$

Похідна дорівнює нулю у двох точках: -1 і $-\frac{1}{3}$. При $x < -1$ і $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ (наприклад, в точках -2 і 0) похідна від'ємна. Отже, на проміжку $]-\infty; -1]$ і $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right[$ функція спадає. При $-1 < x < -\frac{1}{3}$ похідна додатна. Отже, на проміжку $\left[-1; -\frac{1}{3}\right]$ функція зростає. Таким чином, $x = -1$ — точка мінімуму, $x = -\frac{1}{3}$ — точка максимуму. Значення функції в цих точках $y(-1) = \frac{16}{27}$; $y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{25}$. На проміжку $\left]\frac{1}{2}; \infty\right[$ функція спадає від $+\infty$ до 1, оскільки на цьому проміжку немає точок екстремуму.

Скориставшись здобутою інформацією про дану функцію, будуємо її графік (рис. 17).

Маючи графік функції, легко відповісти на останнє питання задачі. Рівняння $8(x^3+x)/(2x-1)^3=c$ має: один розв'язок, якщо $c\in\left]-\infty;\ \frac{16}{27}\right[\cup\left]\frac{16}{25};\ 1\right[\cup\left]1;\ \infty\right[$; два розв'язки, якщо $c\in\left\{\frac{16}{27};\ \frac{16}{25}\right\}$; три розв'язки, якщо $c\in\left]\frac{16}{27};\ \frac{16}{25}\right[$; не має розв'язків, якщо $c=1$.

Задача 3. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{ctg} 3x-\sqrt{2}\cos 3x+1=\frac{\sqrt{2}}{2\sin 3x}.$$

Розв'язок. Дане рівняння рівносильне такій системі:

$$\text{а)}\ \begin{cases}2\cos 3x-2\sqrt{2}\sin 3x\cos 3x+2\sin 3x=\sqrt{2},\\ \sin 3x\neq 0.\end{cases}$$

Оскільки $2\sin 3x\cos 3x=(\sin 3x+\cos 3x)^2-1$, то перше рівняння системи (а) є квадратним рівнянням відносно величини $z=\sin 3x+\cos 3x$:

$$2z-\sqrt{2}(z^2-1)=\sqrt{2}.$$

Корені цього рівняння: 0 і $\sqrt{2}$. Тому система (а) рівносильна сукупності двох систем:

$$\text{б)}\ \begin{cases}\sin 3x+\cos 3x=0,\\ \sin 3x\neq 0;\end{cases}\qquad \text{в)}\ \begin{cases}\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2},\\ \sin 3x\neq 0.\end{cases}$$

Система (б) рівносильна рівнянню $\operatorname{tg} 3x=-1$, звідки

$$3x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in Z)\quad \text{і}\quad x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3},\quad k\in Z.$$

Розв'язуємо другу систему:

$$\begin{cases}\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2},\\ \sin 3x\neq 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2},\\ \sin 3x\neq 0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1,\\ \sin 3x\neq 0,\end{cases}\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in Z)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\quad k\in Z.$$

Відповідь. $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3},\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in Z.$

Задача 4. Знайти множину всіх точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases}\log_{1/3}(2x+y-2)>\log_{1/3}(y+1),\\ \sqrt{y-2x-3}<\sqrt{3-2x}.\end{cases}$$

Розв'язок.

$$\begin{cases}\log_{1/3}(2x+y-2)>\log_{1/3}(y+1),\\ \sqrt{y-2x-3}<\sqrt{3-2x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<2x+y-2<y+1,\\ 0\leqslant y-2x-3<3-2x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-2\geqslant 0,\\ y+1>2x+y-2,\\ y-2x-3\geqslant 0,\\ 3-2x\geqslant y-2x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-2>0,\\ x<\frac{3}{2},\\ y-2x-3\geqslant 0,\\ y<6.\end{cases}$$

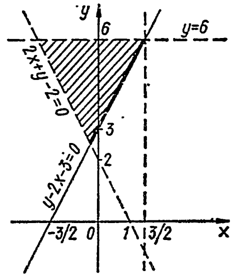


Рис. 18

Кожна нерівність останньої системи визначає в площині $x0y$ півплощину, обмежену відповідною прямою, причому третій нерівності відповідає замкнена півплощина, а решті нерівностей — відкриті півплощини. Точки перетину цих чотирьох півплощин задовольняють систему нерівностей. Вони утворюють трикутник, який показано штриховкою на рис. 18.

ВАРІАНТ 2

Задача 1. Обчислити об'єм просторової фігури, утвореної обертанням навколо осі $0x$ плоскої фігури, обмеженої лініями $y=2-\sin^2 x$, $y=0$, $x=0$, $x=2\pi$.

Розв'язок. Об'єм просторової фігури, утвореної обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції (рис. 19) обчислюється за формулою

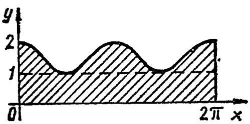


Рис. 19

$$V=\pi\int_0^{2\pi}(2-\sin^2 x)^2\,dx=\pi\int_0^{2\pi}\times$$

$$\times(1+2\cos^2 x+\cos^4 x)\,dx=\pi\int_0^{2\pi}\Big[2+\cos 2x+$$

$$+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\Big]dx=\pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\cos 2x+\right.$$

$$\left.+\frac{1+\cos 4x}{8}\right)dx=\pi\left(\frac{19}{8}x+\frac{3}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right)\Big|_{x=0}^{x=2\pi}=\frac{19\pi^2}{4}.$$

Відповідь. $V=19\pi^2/4$.

Задача 2. Нехай x_1 і x_2 — точки екстремумів функції

$$f(x)=-x^3+3mx^2-6(2m^2-3m-1)x-5.$$

При якому m вираз $x_1^2+x_2^2$ має найбільше значення?

Розв'язок. Функція $f(x)$ диференційовна, а тому точки x_1 і x_2 є розв'язками рівняння $f'(x)=0$, тобто рівняння

$$-3x^2+6mx-6(2m^2-3m-1)=0$$

або

$$x^2-2mx+2(2m^2-3m-1)=0.$$

За формулами Вієта

$$x_1+x_2=2m \quad \text{і} \quad x_1x_2=2(2m^2-3m-1),$$

а тому

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4m^2-4(2m^2-3m-1)=$$
$$=-4m^2+12m+4=13-4\left(m-\frac{3}{2}\right)^2.$$

Отже, $x_1^2+x_2^2=13-4\left(m-\frac{3}{2}\right)^2$. З цієї рівності видно, що вираз $x_1^2+x_2^2$ найбільший, коли $m=\frac{3}{2}$. Безпосередньою перевіркою можна переконатись в тому, що коли $m=\frac{3}{2}$, то рівняння $f'(x)=0$ має два різні корені x_1 і x_2, причому x_1 $(x_1<x_2)$ є точкою мінімуму, а x_2 — точкою максимуму функції $f(x)$.

Відповідь. Вираз $x_1^2+x_2^2$ найбільший, коли $m=\frac{3}{2}$.

Задача 3. Розв'язати нерівність

$$(x^2-8x+15)^{x-6}<1.$$

Розв'язок. Перепишемо нерівність так:

$$(x^2-8x+15)^{x-6}<(x^2-8x+15)^0.$$

Ця нерівність еквівалентна двом системам нерівностей:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x^2-8x+15>1, \\ x-6<0, \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 0<x^2-8x+15<1, \\ x-6>0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему нерівностей а):

$$\begin{cases} x^2-8x+15>1, \\ x-6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2>2, \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-4|>\sqrt{2}, \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4>\sqrt{2},\ x-4<-\sqrt{2}, \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\,]-\infty;\ 4-\sqrt{2}\,[\,\cup\,]\,4+\sqrt{2};\ 6[.$$

З системи нерівностей б) маємо

$$\begin{cases} 1<(x-4)^2<2, \\ x>6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<|x-4|<\sqrt{2}, \\ x>6. \end{cases}$$

Якщо $x>6$, то $|x-4|>2$, звідки видно, що система нерівностей б) несумісна.

Відповідь. $x\in\,]-\infty;\ 4-\sqrt{2}\,[\,\cup\,]\,4+\sqrt{2};\ 6[$.

Задача 4. В прямий круговий конус вписано кулю, об'єм якої в два рази менший, ніж об'єм конуса. Знайти відношення площі повної поверхні конуса до площі поверхні кулі.

Р о з в' я з о к. На рис. 20 зображено осьовий переріз конуса і вписаної в нього кулі.

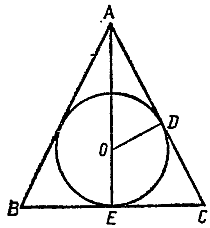


Рис. 20

Нехай $r = |OE| = |OD|$ — радіус кулі, $R = |EC|$ — радіус основи конуса, $h = |AE|$ — його висота і $l = |AC|$ — твірна конуса. Тоді

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h, \quad V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

За умовою $\dfrac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{кулі}}} = \dfrac{3\pi R^2 h}{3 \cdot 4\pi r^3} = 2,$

звідки $R^2 h = 8r^3$. Площа повної поверхні конуса $S_{\text{кон}} = \pi R (l + R)$, а $S_{\text{кулі}} = 4\pi r^2$, звідки

$$\frac{S_{\text{кон}}}{S_{\text{кулі}}} = \frac{R(l+R)}{4r^2}. \quad \Delta ADO \sim \Delta AEC,$$

тому $\dfrac{r}{R} = \dfrac{h-r}{l}$, звідки $l + R = \dfrac{Rh}{r}$. Остаточно

$$\frac{S_{\text{кон}}}{S_{\text{кулі}}} = \frac{R^2 h}{4r^3} = \frac{8r^3}{4r^3} = 2.$$

В і д п о в і д ь. $\dfrac{S_{\text{кон}}}{S_{\text{кулі}}} = 2.$

ВАРІАНТ 3

Задача 1. Нехай

$$\max(a, b) = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geqslant b, \\ b, & \text{якщо } b \geqslant a. \end{cases}$$

Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої частинами ліній $\max(x, y) = 1$ і $x^2 + y^2 = 1$, які лежать в першому квадранті.

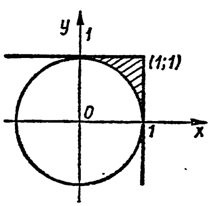


Рис. 21

Р о з в' я з о к. Рівність $\max(x, y) = 1$ еквівалентна сукупності таких двох систем:

$$\begin{cases} x \geqslant y, \\ x = 1 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} y \geqslant x, \\ y = 1. \end{cases}$$

Перша з цих систем визначає промінь $x = 1$ з початком в точці (1; 1), який лежить нижче прямої $y = x$, а друга система визначає промінь $y = 1$ з початком в тій же точці (1; 1), який лежить вище прямої $y = x$.

Рівняння $x^2 + y^2 = 1$ є рівнянням кола з центром в початку координат і з радіусом 1. Плоска фігура, про яку йде мова в задачі, заштрихована на рис. 21. Її площа дорівнює різниці площі квадрата з стороною, рівною 1, і одній четвертій площі круга з радіусом 1, тобто $S = 1 - \pi/4$.

В і д п о в і д ь. Шукана площа дорівнює $1 - \pi/4$.

Задача 2. Радіус основи конуса дорівнює R. У конусі проведено паралельний до основи переріз, який поділяє об'єм конуса навпіл. Визначити радіус перерізу.

Р о з в' я з о к. Позначимо через R, H і V відповідно радіус основи, висоту і об'єм поданого конуса, а через r, h і V_1 відповідно радіус основи, висоту і об'єм конуса, який відтинає переріз від даного конуса. За умовою задачі

$$\frac{V}{V_1} = \frac{R^2H}{r^2h} = 2.$$

Оскільки

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h},$$

то з цих двох рівностей маємо $R^3/r^3 = 2$. Звідси знаходимо $r = R/\sqrt[3]{2}$.

В і д п о в і д ь. Радіус перерізу дорівнює $R/\sqrt[3]{2}$.

Задача 3. Розв'язати рівняння

$$2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x = -2.$$

Р о з в' я з о к.

$$[2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x = -2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x + 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [4\,\mathrm{tg}^2 x - 5\,\mathrm{tg}\, x - 6 = 0] \Leftrightarrow \left[\mathrm{tg}\, x = -\frac{3}{4} \text{ або } \mathrm{tg}\, x = 2\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[x = -\mathrm{arctg}\frac{3}{4} + k\pi,\ k \in Z \text{ або } x = \mathrm{arctg}\, 2 + k\pi,\ k \in Z\right].$$

В і д п о в і д ь. $x = -\mathrm{arctg}\frac{3}{4} + k\pi$, $k \in Z$ і $x = \mathrm{arctg}\, 2 + k\pi$, $k \in Z$.

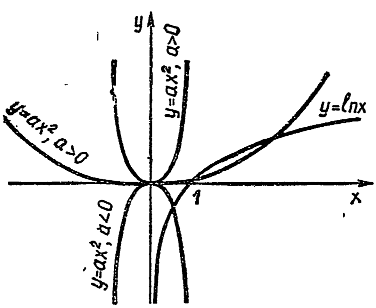


Рис. 22

Задача 4. При яких значеннях параметра a рівняння

$$ax^2 = \ln x$$

має лише один корінь?

Р о з в' я з о к. Якщо $a = 0$, то рівняння набуває вигляду $\ln x = 0$. Останнє рівняння має один корінь $x = 1$. Нехай тепер $a \neq 0$. Побудуємо графік функції $y = \ln x$ і параболи $y = ax^2$ (для різних значень параметра a) (рис. 22). Бачимо тепер, що парабола $y = ax^2$ при $a < 0$ перетинає графік функції лише в одній точці, отже при таких a вихідне рівняння має лише один розв'язок. Якщо ж $a > 0$, то парабола $y = ax^2$ може перетинати криву $y = \ln x$ у двох точках, в одній точці (дотикатися до неї) і може не мати з нею жодної спільної точки. З'ясуємо, коли вказані криві при $a > 0$ мають одну спільну точку — точку їх дотику. В точці дотику кривих збігаються не тільки функції, що задають ці криві, але й їх похідні. З цієї умови і запишемо систему для знаходження шуканого значення a і абсциси точки дотику:

$$\begin{cases} ax^2 = \ln x, \\ 2ax = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

З другого рівняння системи маємо $ax^2 = \frac{1}{2}$, тому

$$\ln x = \frac{1}{2}, \quad x = \sqrt{e}, \quad ae = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2e}.$$

Отже, криві $y = ax^2$ і $y = \ln x$ дотикаються при $a = \frac{1}{2e}$.

Відповідь. Рівняння має лише один розв'язок, якщо $a = \frac{1}{2e}$ або $a \leqslant 0$.

ВАРІАНТ 4

Задача 1. Площа повної поверхні зрізаного конуса в λ разів більша від площі поверхні вписаної в цей конус сфери. Знайти радіуси основ конуса, якщо радіус сфери дорівнює r.

Розв'язок. Позначимо шукані радіуси через x і y, а твірну зрізаного конуса — через l. Площа повної поверхні зрізаного конуса

$$S_{\text{кон}} = \pi x^2 + \pi y^2 + \pi l (x + y).$$

За умовою задачі в конус можна вписати сферу. Тому $l = x + y$ і

$$S_{\text{кон}} = \pi x^2 + \pi y^2 + \pi (x + y)^2 = 2\pi (x^2 + y^2 + xy).$$

Площа поверхні вписаної сфери

$$S_{\text{сф}} = 4\pi r^2.$$

За умовою задачі $S_{\text{кон}} = \lambda S_{\text{сф}}$, тобто

$$x^2 + y^2 + xy = 2\lambda r^2. \qquad (1)$$

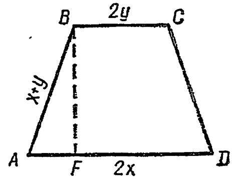


Рис. 23

Для невідомих x і y маємо одне рівняння. Щоб дістати друге рівняння, розглянемо осьовий переріз конуса (рис. 23). Проведемо $[BF] \perp [AD]$. Оскільки $|BF| = 2r$ і $|AF| = |x - y|$, то з прямокутного трикутника ABF дістанемо

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4r^2.$$

Звідси $xy = r^2$. Пам'ятаючи, що $x > 0$ і $y > 0$, запишемо це рівняння так: $x^2y^2 = r^4$.

Замінивши, крім того, в рівнянні (1) xy на r^2, дістанемо таку систему рівнянь для невідомих x, y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (2\lambda - 1) r^2, \\ x^2y^2 = r^4. \end{cases}$$

Згідно з формулами Вієта x^2 і y^2 є коренями рівняння

$$z^2 - (2\lambda - 1) r^2 z + r^4 = 0.$$

Отже,

$$x^2=\frac{2\lambda-1+\sqrt{4\lambda^2-4\lambda-3}}{2}r^2,\quad y^2=\frac{2\lambda-1-\sqrt{4\lambda^2-4\lambda-3}}{2}r^2.$$

Задача має розв'язок, якщо $4\lambda^2-4\lambda-3\geqslant 0$.
Оскільки за змістом задачі $\lambda>0$, то $\lambda\geqslant {}^3/_2$. Проте при $\lambda={}^3/_2$ матимемо не зрізаний конус, а циліндр, бо в цьому разі $x=y$. Таким чином, зрізаний конус, що про нього йдеться в задачі, існує, якщо $\lambda>{}^3/_2$. Радіуси його основ такі:

$$x=r\sqrt{\frac{2\lambda-1+\sqrt{4\lambda^2-4\lambda-3}}{2}},\quad y=r\sqrt{\frac{2\lambda-1-\sqrt{4\lambda^2-4\lambda-3}}{2}}.$$

Задача 2. Розв'язати нерівність $\sqrt{(x+8)(2x+1)}>x+6$.

Розв'язок. Ця нерівність еквівалентна сукупності таких двох систем нерівностей:

$$\begin{cases}x+6\geqslant 0,\\(x+8)(2x+1)>(x+6)^2\end{cases}\quad \text{і}\quad \begin{cases}x+6<0,\\(x+8)(2x+1)\geqslant 0.\end{cases}$$

Розв'язуємо першу з цих систем:

$$\begin{cases}x+6\geqslant 0,\\(x+8)(2x+1)>(x+6)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+6\geqslant 0\\x^2+5x-28>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+6\geqslant 0\\\left(x+\frac{5+\sqrt{137}}{2}\right)\left(x-\frac{-5+\sqrt{137}}{2}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{-5+\sqrt{137}}{2}.$$

Розв'язки другої системи нерівностей — $x\leqslant -8$.
Отже, подана нерівність справджується тоді й тільки тоді, коли

$$x\in\,]-\infty;\ -8]\cup\left]\frac{\sqrt{137}-5}{2};\ \infty\right[.$$

Задача 3. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$y=2e^x+e^{-x}$$

на проміжку $[0;\ 1]$.

Розв'язок. Похідна даної функції

$$y'(x)=2e^x-e^{-x}=e^{-x}(2e^{2x}-1)$$

додатна для $x>0$, тому дана функція на проміжку $[0;\ 1]$ зростає. Отже, найменшого значення на проміжку $[0;\ 1]$ функція набуває в точці $x=0$, а найбільшого — в точці $x=1$:

$$y_{\text{найм}}=y(0)=3,\quad y_{\text{найб}}=y(1)=2e+\frac{1}{e}.$$

Відповідь: $y_{\text{найм}}=3$, $y_{\text{найб}}=2e+\frac{1}{e}$.

Задача 4. Розв'язати рівняння

$$\int\limits_{-\pi/4}^{x}(2\cos 2t+5\cos t-5\sin t)\,dt=0.$$

Р о з в' я з о к. Подамо дане рівняння у вигляді

$$(\sin 2t + 5\sin t + 5\cos t)\,|_{-\pi/4}^{x} = 0$$

або ж

$$\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) + 1 = 0.$$

Позначимо $\sin x + \cos x = y$. Тоді $(\sin x + \cos x)^2 = y^2$, $2\sin x\cos x = y^2 - 1$ і останнє рівняння набуває вигляду $y^2 - 1 + 5y + 1 = 0$. Звідси $y = 0$ або $y = -5$.

Рівняння $\sin x + \cos x = -5$ розв'язків не має, тому вихідне рівняння еквівалентне такому: $\sin x + \cos x = 0$ або $\operatorname{tg} x = -1$. Розв язки цього рівняння: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$.

В і д п о в і д ь. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$.

ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ВАРІАНТ 1

Задача 1. Розв'язати нерівність

$$|\log_{\sqrt{3}} x - 2| - |\log_3 x - 2| \geqslant 2.$$

Р о з в' я з о к. Позначимо $z = \log_3 x$. Відносно z дістанемо нерівність $2|z-1| - |z-2| \geqslant 2$. Далі маємо

$$[2|z-1| - |z-2| \geqslant 2]$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{cases} z \leqslant 1, \\ 2(1-z)-(2-z) \geqslant 2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 1 \leqslant z \leqslant 2, \\ 2(z-1)-(2-z) \geqslant 2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} z \geqslant 2, \\ 2(z-1)-(z-2) \geqslant 2 \end{cases}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{cases} z \leqslant 1, \\ z \leqslant -2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 1 \leqslant z \leqslant 2, \\ z \geqslant 2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} z \geqslant 2 \\ z \geqslant 2 \end{cases}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$[z \leqslant -2 \quad \text{або} \quad z \geqslant 2].$$

Врахувавши тепер, що $z = \log_3 x$, дістаємо розв'язки початкової нерівності:

$$x \in \left]0,\ \frac{1}{9}\right] \cup [9,\ \infty[.$$

Задача 2. Розв'язати рівняння

$$\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0.$$

Р о з в' я з о к.

$$\left[\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[1 + \frac{1}{4}\sin^2 2x - 2\sin 2x = 0\right] \Leftrightarrow [\sin^2 2x - 8\sin 2x + 4 = 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\sin 2x = 4 + 2\sqrt{3} \ \text{ або } \ \sin 2x = 4 - 2\sqrt{3}].$$

Перше з двох останніх рівнянь не має розв'язків, бо $4 + 2\sqrt{3} > 1$. Розв'язки другого —

$$x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin(4 - 2\sqrt{3}) + \frac{1}{2}k\pi, \quad k \in Z.$$

Задача 3. У точці M (1; 8) до кривої $y = \sqrt{(5 - x^{2/3})^3}$ проведено дотичну. Знайти довжину відрізка цієї дотичної, кінці якого лежать на координатних осях.

Р о з в' я з о к. Напишемо спочатку рівняння дотичної:

$$y' = ((5 - x^{2/3})^{3/2})' = \frac{3}{2}(5 - x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = -x^{-1/3}\sqrt{5 - x^{2/3}}.$$

Кутовий коефіцієнт дотичної $y'(1) = -2$. Рівняння дотичної: $y = -2(x - 1) + 8$ або $y = -2x + 10$. Координатні осі дотична перетинає в точках A (0; 10) і B (5; 0). Тому $|AB| = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$.

Задача 4. Посудина, що має форму правильної трикутної призми, висота якої дорівнює стороні основи, вщерть наповнена водою. На який кут треба повернути цю призму навколо сторони основи, щоб половина води вилилась?

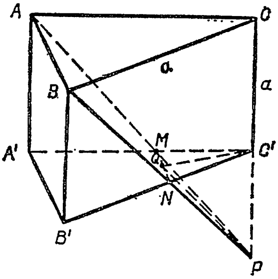


Рис. 24

Р о з в' я з о к. Нехай $ABCA'B'C'$ — дана призма (рис. 24). Якщо її повернути навколо ребра $A'B'$ так, щоб переріз (ABC') став горизонтальним, то з посудини виллється лише $\frac{1}{3}$ води. Тому призму треба повернути навколо $[A'B']$ так, щоб горизонтальним став деякий переріз $ABNM$, що перетинає основу призми $A'B'C'$ вздовж відрізка MN. Оскільки $[A'B'] \parallel (ABNM)$, то $[MN] \parallel [A'B']$. Тому $\Delta MNC'$ рівносторонній. Позначимо його сторону через x. Нехай P — точка перетину площини $(ABNM)$ з прямою CC'. Позначимо $|PC'| = y$. Із подібності трикутників BCP і $NC'P$ одержуємо

$$\frac{a + y}{a} = \frac{y}{x},$$

звідки $y = ax/(a - x)$.

Обчислюємо об'єм зрізаної піраміди $ABCMNC'$:

$$V = V_{PABC} - V_{PMNC'} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}(a+y) - \frac{1}{3}\frac{x^2\sqrt{3}}{4}y =$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{12(a-x)}(a^3 - x^3).$$

Об'єм даної призми $V_0 = a^3\sqrt{3}/4$.

За умовою задачі мусить бути $V_0 = 2V$. Звідси дістаємо

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a.$$

Відповідне значення

$$y = \frac{ax}{a-x} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+3}a.$$

Шуканий кут φ — це кут між перпендикулярами до площин $(A'B'C')$ і (ABP). Проте він дорівнює куту між самими цими площинами, тобто куту $\widehat{C'QP}$, де $[C'Q]$ — висота $\Delta MNC'$. Тому з прямокутного $\Delta PQC'$ дістаємо

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{|QC'|} = \frac{2}{3}(\sqrt{3}-1).$$

За змістом задачі кут φ гострий, тому

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3}.$$

Відповідь. Шуканий кут дорівнює $\operatorname{arctg}\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3}$.

ВАРІАНТ 2

Задача 1. Навколо кулі з радіусом r описано правильну трикутну піраміду, довжина висоти якої дорівнює H. Обчислити площу бічної поверхні піраміди. При якому H ця площа найменша? Знайти найменше значення площі.

Розв'язок. Нехай P — центр кулі, вписаної в піраміду $SABC$ (рис. 25), $[SD] \perp [AB]$, $[PM] \perp [SD]$. Тоді $|PM| = |PO| = r$, $|SP| = H - r$. Із прямокутного трикутника SPM маємо

$$|SM| = \sqrt{(H-r)^2 - r^2} = \sqrt{H(H-2r)}.$$

Оскільки $\Delta SDO \sim \Delta SPM$, то

$$\frac{|SD|}{|SP|} = \frac{|DO|}{|MP|} = \frac{|SO|}{|SM|}.$$

Звідси $|SD| = \frac{|SP|\cdot|SO|}{|SM|} = \frac{(H-r)H}{\sqrt{H(H-2r)}};$

$$|DO| = \frac{|MP|\cdot|SO|}{|SM|} = \frac{rH}{\sqrt{H(H-2r)}}.$$

Враховуючи, що висота ΔABC

$$|DC| = 3|DO| = \frac{3rH}{\sqrt{H(H-2r)}},$$

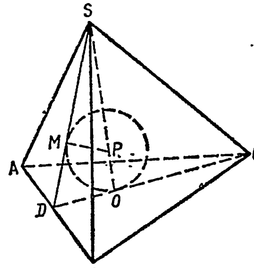


Рис. 25

дістаємо

$$|AB| = \frac{2\sqrt{3}\, rH}{\sqrt{H\,(H-2r)}}.$$

Отже, площа бічної поверхні піраміди дорівнює

$$Q = \frac{1}{2}\cdot 3\,|AB|\cdot|SD| = 3\sqrt{3}\,\frac{rH\,(H-r)}{H-2r}.$$

За умовою задачі висота піраміди H може змінюватись у межах $2r < < H < \infty$. Отже, для відповіді на друге питання задачі треба функцію

$$z\,(H) = H\,(H-r)/(H-2r)$$

дослідити на проміжку $]2r;\ \infty[$. Коли $H \to 2r$, лишаючись більшим ніж $2r$, або $H \to \infty$, то значення функції $z\,(H)$ необмежено зростають. Оскільки функція $z\,(H)$ неперервна на проміжку $]2r;\ \infty[$, то в певній точці цього проміжку функція досягає свого найменшого значення. Оскільки функція $z\,(H)$ в усіх точках проміжку $]2r;\ \infty[$ має похідну, то найменшого значення вона досягає в одній з точок, де її похідна дорівнює нулю. Знаходимо такі точки.

$$z'\,(H) = \frac{(2H-r)\,(H-2r)-(H^2-Hr)}{(H-2r)^2} = \frac{H^2-4Hr+2r^2}{(H-2r)^2};$$

$$z'\,(H) = 0 \Leftrightarrow H = r\,(2\pm\sqrt{2}).$$

Отже, на проміжку $]2r;\ \infty[$ похідна функції $z\,(H)$ дорівнює нулю лише в одній точці $H = r\,(2+\sqrt{2})$. Із попередніх міркувань випливає, що це й буде та точка, де функція $z\,(H)$ досягає найменшого значення.

Обчислюємо тепер найменше значення площі бічної поверхні піраміди

$$Q_{\text{найм}} = \frac{3\sqrt{3}\,rr\,(2+\sqrt{2})\,r\,(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}\,r} = 3\sqrt{3}\,(2\sqrt{2}+3)\,r^2.$$

В і д п о в і д ь. Площа бічної поверхні піраміди дорівнює

$$\frac{3\sqrt{3}\,rH\,(H-r)}{H-2r}.$$

Вона буде найменша, а саме $3\sqrt{3}\,(2\sqrt{2}+3)\,r^2$, коли $H = r\,(2+\sqrt{2})$.

Задача 2. При яких значеннях x похідна функції $y = \sin 2x + + 10\cos x - 6x$ дорівнює нулю?

Р о з в' я з о к. Обчислюємо похідну $y' = 2\cos 2x - 10\sin x - - 6$ і розв'язуємо рівняння $2\cos 2x - 10\sin x - 6 = 0$. Оскільки $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то це рівняння рівносильне такому: $2\sin^2 x + + 5\sin x + 2 = 0$. Звідси $\sin x = 2$ або $\sin x = -0{,}5$. Перше рівняння не має розв'язків. Розв'язки другого —

$$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi,\quad k\in Z.$$

В і д п о в і д ь. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi,\quad k\in Z.$

Задача 3. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right).$$

Р о з в' я з о к.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)/2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

В і д п о в і д ь. Шукана границя дорівнює $^1/_2$.

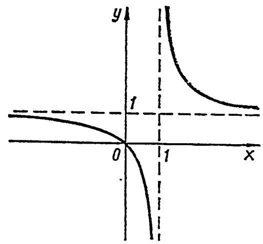


Рис. 26

Задача 4. На площині дано дві взаємно перпендикулярні прямі. Знайти множину всіх тих точок площини, добуток відстаней від яких до прямих дорівнює сумі цих відстаней.

Р о з в' я з о к. Приймемо подані прямі за осі прямокутної системи координат. Точка $(x; y)$ належатиме шуканій множині тоді й тільки тоді, коли $|x|\cdot|y|=|x|+|y|$. Це рівняння рівносильне такому: $(|x|-1)(|y|-1)=1$. Шукана множина точок симетрична відносно обох координатних осей (це видно як з рівняння, так і безпосередньо з умови задачі). Знайдемо ті точки шуканої множини, які мають невід'ємні координати. Вони задовольняють таку систему:

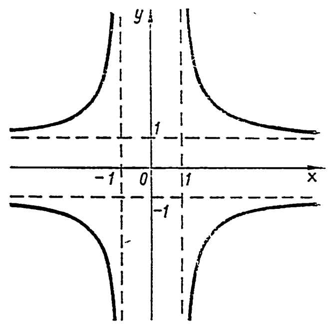


Рис. 27

$$\begin{cases}(x-1)(y-1)=1,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

Множину точок, які задовольняють рівняння $(x-1)(y-1)=1$, дістанемо, змінивши на вектор $\vec{r}\,(1;\ 1)$ гіперболу $xy=1$ (рис. 26).

Отже, шукана множина точок складається з чотирьох віток гіпербол і точки (0; 0) (рис. 27).

ВАРІАНТ 3

Задача 1. Знайти об'єм правильної трикутної піраміди, якщо плоский кут при вершині піраміди дорівнює α, а радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює R.

Р о з в' я з о к. Для знаходження об'єму піраміди досить обчислити $|SH|$ і сторону основи піраміди (рис. 28). Ребра піраміди можна знайти з трикутника CSB (рис. 29). Справді, за теоремою

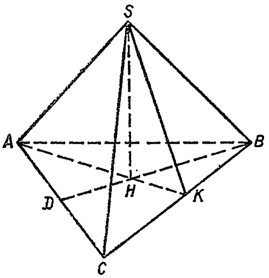


Рис. 28

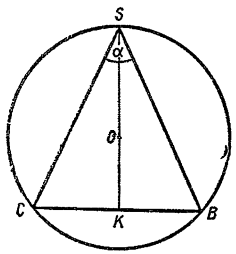


Рис. 29

синусів маємо

$$\frac{|CB|}{\sin\alpha}=\frac{|SB|}{\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}=2R.$$

Звідси

$$|CB|=2R\sin\alpha,\quad |SB|=2R\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Трикутник ABC рівносторонній, а тому площа його дорівнює

$$Q=\frac{|CB|^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\,R^2\sin^2\alpha.$$

Висоту піраміди $|SH|$ визначаємо з прямокутного трикутника SHB:

$$|HB|=\frac{2}{3}|BD|=$$

$$=\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}|BC|=\frac{\sqrt{3}}{3}\,2R\sin\alpha.$$

Отже,

$$|SH|=\sqrt{4R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{4}{3}R^2\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}R\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Таким чином,

$$V=\frac{1}{3}Q\cdot|SH|=\frac{\sqrt{3}}{3}R^2\sin^2\alpha\,\frac{2\sqrt{3}}{3}R\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2}{3}R^3\sin^2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Зазначимо, що вираз, який стоїть під радикалом, додатний, бо плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди змінюється в межах $0<\alpha<\frac{2\pi}{3}$, тому $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{3}$.

Отже, $0<\sin\frac{\alpha}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}>0$.

Відповідь. $V=\frac{2}{3}R^3\sin^2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 2. Розв'язати нерівність

$$\log_{(x^2+1)}\frac{|x+1|}{3}<0.$$

Розв'язок. Ліва частина нерівності визначена для всіх x, крім $x=0$ і $x=-1$. Якщо $x\neq 0$, то основа логарифма більша ніж 1, а тому нерівність справджується тоді й тільки тоді, коли

$$0<\frac{|x+1|}{3}<1,\ \text{тобто}\ 0<|x+1|<3.$$

Розв'язками останньої нерівності є $-4 < x < -1$ та $-1 < x < 2$. Отже, маємо розв'язки початкової нерівності: $-4 < x < -1$; $-1 < x < 0$; $0 < x < 2$.

Відповідь. $x \in]-4; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 2[$.

Задача 3. Розв'язати рівняння

$$\frac{11}{2} + \cos \pi x = |x - 3| + |x + 3|.$$

Розв'язок. Обидві частини даного рівняння — парні функції, а тому, якщо x_0 є розв'язком цього рівняння, то й число $-x_0$ буде його розв'язком. Отже, щоб знайти всі його розв'язки, досить знайти невід'ємні розв'язки рівняння.

Для $x \geqslant 0$ рівняння еквівалентне такому:

$$\frac{11}{2} + \cos \pi x = |x - 3| + x + 3.$$

Щоб перейти до рівняння, яке не містить невідомої під знаком модуля, розглянемо окремо два випадки: $x \in [0; 3]$ і $x \in]3; \infty[$.

Якщо $x \in [0; 3]$, то рівняння набуває вигляду

$$\frac{11}{2} + \cos \pi x = -x + 3 + x + 3$$

або ж $\cos \pi x = \frac{1}{2}$, звідки $\pi x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ $(n \in Z)$, $x = \pm \frac{1}{3} + 2n\pi$ $(n \in Z)$. Серед цих чисел проміжкові $[0; 3]$ належать лише такі: $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$.

Якщо $x > 3$, то початкове рівняння можна записати у вигляді

$$\cos \pi x = 2x - \frac{11}{2}.$$

Графічно легко встановити, що на множині $x > 3$ це рівняння розв'язків не має. В цьому можна переконатися й без застосування графічного методу. Справді, права частина цього рівняння монотонно зростає при зростанні x і стає більшою ніж 1, коли $x > \frac{13}{4}$. Ліва частина ніколи не перевищує 1, а тому на множині $x > \frac{13}{4}$ рівняння розв'язків не має. Якщо ж $x \in \left]3; \frac{13}{4}\right]$, то $2x - \frac{11}{2} > \frac{1}{2}$, а $\cos \pi x < 0$, тому й на цьому проміжку рівняння розв'язків не має.

Таким чином, початкове рівняння на множині $x \geqslant 0$ має три розв'язки: $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$.

Відповідь: $x \in \left\{-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right\}$.

Задача 4. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y^2 = -x - 16$ і дотичними до цієї параболи, проведеними з початку координат.

Розв'язок. Нехай $M_1(x_0;\ y_0)$ і $M_2(x_0;\ -y_0)$ — точки дотику дотичних до параболи $y^2 = -x - 16$, проведених з початку координат (рис. 30). Знайдемо рівняння цих дотичних. Рівняння дотичної до заданої параболи має такий загальний вигляд:

$$x - x_0 = -2y_0(y - y_0).$$

Оскільки дотична проходить через початок координат і має спільну точку з параболою, то для координат точок дотику маємо систему рівнянь

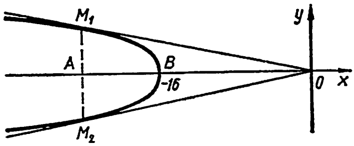


Рис. 30

$$\begin{cases} -x_0 = 2y_0^2, \\ x_0 = -y_0^2 - 16. \end{cases}$$

Вона має два розв'язки: $x_0 = -32$, $y_0 = 4$ і $x_0 = -32$, $y_0 = -4$. Отже, координатами точок дотику є $M_1(-32;\ 4)$ і $M_2(-32;\ -4)$, а рівняння дотичних $x = 8y$ і $x = -8y$. Шукана площа дорівнює $S = 2(S_{AM_1O} - S_{AM_1B})$. Площу трикутника AM_1O легко знайти, бо $|AO| = 32$, а $|AM_1| = 4$:

$$S_{AM_1O} = \frac{1}{2}|AO| \cdot |AM_1| = 64.$$

Площу криволінійного трикутника AM_1B знаходимо інтегруванням:

$$S_{AM_1B} = \int\limits_{-32}^{-16} \sqrt{-x-16}\,dx = -\frac{2}{3}(-x-16)^{3/2}\Big|_{-32}^{-16} = \frac{128}{3}.$$

Отже, шукана площа

$$S = 2\left(64 - \frac{128}{3}\right) = \frac{128}{3}.$$

Відповідь. $S = 42\frac{2}{3}$.

РАДІОФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ВАРІАНТ 1

Задача 1. У кулю з радіусом r вписано правильну трикутну призму, довжина сторони основи якої дорівнює a. Знайти об'єм призми.

Розв'язок. Нехай $ABCA'B'C'$ — дана призма (рис. 31), $|AB| = |BC| = |CA| = a$. Зрозуміло, що центр O описаної навколо цієї призми кулі лежить на середині відрізка DD', що сполучає центри основ призми. Тому $|OB| = |OB'| = r$. Оскільки $|BF| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, то $|DB| = \frac{2}{3}|BF| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. З прямокутного трикутника ODB маємо

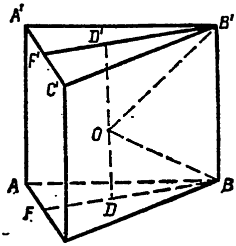


Рис. 31

$$|OD| = \sqrt{|OB|^2 - |DB|^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

Об'єм призми

$$V = S_{\Delta ABC}|DD'| = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BF| \cdot 2|OD| = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

Задача 2. Розв'язати рівняння

$$\cos x - 2\int_{\pi/4}^{x} \sin 2t dt = 0.$$

Р о з в' я з о к.

$$\left[\cos x - 2\int_{\pi/4}^{x} \sin 2t dt = 0\right] \Leftrightarrow [\cos x + \cos 2t\,|_{\pi/4}^{x} = 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\cos x + \cos 2x = 0] \Leftrightarrow [2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0] \Leftrightarrow \left[\cos x = -\frac{1}{2} \text{ або } \cos x = 1\right].$$

Звідси дістаємо $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi,\ x = 2k\pi;\ n,\ k \in Z.$

Задача 3. При якому $a > 0$ графіки функцій

$$y = \frac{x + |x|}{2} \quad \text{і} \quad y = ax - x^2$$

обмежують фігуру з площею $\frac{9}{2}$?

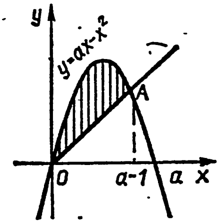


Рис. 32

Р о з в' я з о к. Побудуємо графіки даних функцій (рис. 32). Оскільки при $x \geqslant 0$ $\frac{x + |x|}{2} = x$, то абсцису точки A перетину графіків даних функцій знаходимо з рівняння $ax - x^2 = x$, розв'язки якого $x = 0$ і $x = a - 1$. Зрозуміло, що абсциса точки A дорівнює $a - 1$. Графіки даних функцій обмежують фігуру (заштрихована на рис. 32), площа якої

$$S = \int_0^{a-1} (ax - x^2 - x)\,dx = \left(\frac{(a-1)x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{a-1} =$$

$$= \frac{(a-1)^3}{2} - \frac{(a-1)^3}{3} = \frac{(a-1)^3}{6}.$$

Ця площа дорівнює $\frac{9}{2}$, коли

$$\frac{(a-1)^3}{6} = \frac{9}{2},$$

тобто при $a = 4$.

Задача 4. Розв'язати нерівність

$$\left|\log_2 \frac{x}{3}\right|^{x^2-5x-6} \leqslant 1.$$

Розв'язок. Дослідимо на знак неперервну в своїй області визначення функцію

$$f(x) = \left|\log_2 \frac{x}{3}\right|^{x^2-5x-6} - 1.$$

Область визначення функції

$$D(f) =]0;\ 3[\ \cup\ ]3;\ \infty[.$$

Функція $f(x)$ дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли

$$\left|\log_2 \frac{x}{3}\right| = 1 \text{ або } x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Перше з цих рівнянь має два розв'язки: $x = \frac{3}{2}$ і $x = 6$. Розв'язки другого рівняння — $x = -1$ і $x = 6$. Проте розв'язок $x = -1$ другого рівняння не лежить в області визначення функції $f(x)$. Отже, на кожному з проміжків $\left]0; \frac{3}{2}\right[$, $\left]\frac{3}{2}; 3\right[$, $]3;\ 6[$, $]6;\ \infty[$ функція $f(x)$ зберігає знак. Визначаємо знаки функції на кожному з них:

1) $\frac{3}{4} \in \left]0; \frac{3}{2}\right[$; $f\left(\frac{3}{4}\right) = 2^{-147/16} - 1 < 0$;

2) $2 \in \left]\frac{3}{2}; 3\right[$; $f(2) = \left|\log_2 \frac{2}{3}\right|^{-12} - 1 > 0$;

3) $5 \in]3;\ 6[$; $f(5) = \left|\log_2 \frac{5}{3}\right|^{-6} - 1 < 0$;

4) $12 \in]6;\ \infty[$; $f(12) = 2^{78} - 1 > 0$.

Отже, дана нерівність справджується тоді й тільки тоді, коли

$$x \in \left]0; \frac{3}{2}\right] \cup\ ]3;\ 6].$$

ВАРІАНТ 2

Задача 1. Піраміда розітнута площиною, паралельною її основі. В якому відношенні ділиться об'єм піраміди, якщо площа перерізу втричі менша, ніж площа основи?

Розв'язок. Нехай П — подана піраміда, а $П_1$ — піраміда, яку відтинає від П вказана площина. Позначимо через h, Q і V відповідно висоту, площу основи й об'єм піраміди П, а через h_1, Q_1 і V_1 — висоту, площу основи й об'єм піраміди $П_1$.

Згідно з умовою задачі, піраміди П і $П_1$ гомотетичні, а тому

$$\frac{V}{V_1} = \frac{h^3}{h_1^3}, \quad \frac{Q}{Q_1} = \frac{h^2}{h_1^2}.$$

Оскільки $\frac{Q}{Q_1} = 3$, то $\frac{h}{h_1} = \sqrt{3}$. Отже, $\frac{V}{V_1} = 3\sqrt{3}$. Звідси

$$\frac{V - V_1}{V_1} = \frac{V}{V_1} - 1 = 3\sqrt{3} - 1.$$

Відповідь. Об'єм нижньої частини піраміди відноситься до об'єму її верхньої частини, як $(3\sqrt{3} - 1) : 1$.

Задача 2. Знайти найбільше значення функції

$$f(x) = 7 + 2x \ln 25 - 5^{x-1} - 5^{2-x}.$$

Розв'язок. Дана функція диференційовна в кожній точці $x \in R$. Знайдемо точки, в яких похідна цієї функції дорівнює нулю:

$$f'(x) = 2 \ln 25 - 5^{x-1} \ln 5 + 5^{2-x} \ln 5,$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (4 - 5^{x-1} + 5^{2-x}) \ln 5 = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{5^x}{5} + \frac{25}{5^x} =$$

$$= 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 20 \cdot 5^x + 125 = 0.$$

Це — квадратне рівняння відносно 5^x. Розв'язавши його, дістанемо $5^x = 25$, або $5^x = -5$. Друге з цих рівнянь розв'язків не має, а перше має єдиний розв'язок $x = 2$.

Оскільки похідна

$$f'(x) = -\frac{\ln 5}{5^{x+1}}(5^x + 5)(5^x - 25)$$

додатна, коли $x < 2$, і від'ємна, коли $x > 2$, то на проміжку $]-\infty; 2[$ функція $f(x)$ монотонно зростає, а на проміжку $]2; \infty[$ — монотонно спадає. Отже, в точці $x = 2$ дана функція досягає найбільшого значення $f(2) = 1 + 8 \ln 5$.

Відповідь. $1 + 8 \ln 5$.

Задача 3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції

$$f(x) = 2 \cos^2 x (1 + \sin^2 x),$$

прямими $x = 0$ і $x = 2\pi$ та віссю абсцис.

Розв'язок. Для обчислення шуканої площі не обов'язково будувати графік функції $f(x)$. Оскільки ця функція невід'ємна, то шукана площа дорівнює

$$S = \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 x (1 + \sin^2 x)\, dx = \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 x + 2 \cos^2 x \sin^2 x)\, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2} \sin^2 2x\right] dx = \int_0^{2\pi} \left[1 + \cos 2x +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)\right] dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{4} + \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x\right) dx =$$

$$= \left[\frac{5}{4} x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 4x\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{5}{2}\pi.$$

Відповідь. $S = \frac{5}{2}\pi$.

Задача 4. Сума перших трьох членів геометричної прогресії дорівнює 6, а сума перших трьох її членів, які стоять на непарних місцях, дорівнює $10\frac{1}{2}$. Знайти знаменник і перший член прогресії.

Розв'язок. Позначимо через a перший член прогресії, а через q — її знаменник. За умовою задачі

$$\begin{cases} a\dfrac{1-q^3}{1-q} = 6, \\ a\dfrac{1-q^6}{1-q^2} = \dfrac{21}{2}, \quad q \neq -1. \end{cases} \qquad (1)$$

Поділивши почленно друге рівняння на перше, дістанемо

$$\frac{(1-q^6)(1-q)}{(1-q^2)(1-q^3)} = \frac{7}{4}.$$

Спрощуємо ліву частину рівняння:

$$\frac{(1-q)^6(1-q)}{(1-q^2)(1-q^3)} = \frac{(1-q^3)(1+q^3)(1-q)}{(1-q)(1+q)(1-q^3)} = \frac{1+q^3}{1+q} = 1-q+q^2.$$

Рівняння

$$q^2-q+1 = \frac{7}{4}$$

має розв'язки $q = -\frac{1}{2}$ і $q = \frac{3}{2}$.

Згідно з першим рівнянням системи (1),

$$a = \frac{6}{1+q+q^2}.$$

Отже, $a = 8$, якщо $q = -\frac{1}{2}$, і $a = \frac{24}{19}$, якщо $q = \frac{3}{2}$. Безпосередньо переконуємося, що немає геометричної прогресії із знаменником $q = -1$, яка задовольняє умови задачі $\left(\text{із першої умови випливає, що } a = 6, \text{ а з другої — } a = \frac{7}{2}\right)$.

Відповідь. Є дві геометричні прогресії, що мають вказані в умові задачі властивості: 1) $a = 8, q = -\frac{1}{2}$; 2) $a = \frac{24}{19}, q = \frac{3}{2}$.

ХІМІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Задача 1. У рівнобедрений трикутник, величина кута при основі якого дорівнює φ, вписано рівнобічну трапецію (менша основа трапеції лежить на основі трикутника), а кінці більшої основи — на конгруентних сторонах трикутника). Більша основа трапеції дорівнює $2a$, а менша основа і бічні сторони дорівнюють a. Обчислити площу трикутника. При якому значенні кута φ площа трикутника найменша?

Розв'язок. Проведемо $[MN] \perp [AC]$ і $[BH] \perp [AC]$ (рис. 33). Із прямокутного трикутника MNK, в якому $|MK| = a$, $|NK| = \frac{a}{2}$, знаходимо висоту трапеції

$$|MN| = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Із трикутника MNA маємо $|AN| = \frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\varphi$, а тому

$$|AH| = \frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\varphi + a = a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\varphi\right).$$

Висоту ΔABC знаходимо з прямокутного трикутника AHB:

$$|BH| = a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\varphi\right)\operatorname{tg}\varphi.$$

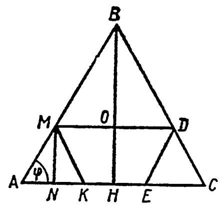


Рис. 33

Площа ΔABC дорівнює

$$S_{ABC} = |AH| \cdot |BH| = a^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\varphi\right)^2 \operatorname{tg}\varphi =$$

$$= a^2\left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}\varphi + \sqrt{3}\right).$$

Площа трикутника найменша, коли вираз $\operatorname{tg}\varphi + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}\varphi$ найменший. Щоб знайти значення кута φ, при якому площа трикутника найменша, треба дослідити функцію $f(\varphi) = \operatorname{tg}\varphi + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}\varphi$ на проміжку $\varphi \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, бо саме в цих межах змінюється величина кута φ. Для значень $\varphi \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ функція $f(\varphi)$ диференційовна.

Отже, якщо на проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ є точка екстремуму функції $f(\varphi)$, то похідна $f'(\varphi)$ у цій точці дорівнює нулю. Обчислимо похідну функції $f(\varphi)$:

$$f'(\varphi) = \frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{3}{4}\frac{1}{\sin^2\varphi},$$

$$f'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким чином, на проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ рівняння $f'(\varphi) = 0$ має єдиний розв'язок

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Коли φ, лишаючись на проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, прямує до 0 або до $\frac{\pi}{2}$, то значення функції

$$f(\varphi) = \operatorname{tg}\varphi + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}\varphi$$

в обох випадках необмежено зростають. Це означає, що $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$ — точка мінімуму функції $f(\varphi)$. Отже, функція $f(\varphi)$ досягає найменшого значення в точці $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь. Площа трикутника дорівнює

$$a^2\left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}\varphi + \sqrt{3}\right).$$

Вона найменша, коли $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 2. Розв'язати рівняння

$$\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2.$$

Розв'язок.

$$\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) = \log_{\sqrt{5}} 5(2^x - 2)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 4^x - 6 = 5(2^x - 2), \\ 2^x > 2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2^{2x} - 5\cdot 2^x + 4 = 0, \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2^x = 4 \text{ або } 2^x = 1, \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 2.$$

Відповідь. $x = 2$.

Задача 3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = 2\sin^2\frac{x}{2} \text{ і } y = \frac{2}{\pi}|x - \pi|.$$

Розв'язок. Побудуємо графіки обох функцій. Записавши першу з них у вигляді $y = 1 - \cos x$, помічаємо, що її графік можна дістати, змістивши на вектор $\vec{r}(0; 1)$ графік функції $y = -\cos x$, а цей останній є симетричним образом графіка функції $y = \cos x$ відносно осі абсцис. Графік функції $y = \frac{2}{\pi}|x - \pi|$ дістанемо, змістивши графік

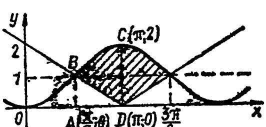


Рис. 34

функції $y = \frac{2}{\pi} | x |$ на вектор $\vec{p}$ (π; 0) (рис. 34). Легко помітити, що ці графіки перетинаються в точках з координатами $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ і $\left(\frac{3\pi}{2}; 1\right)$.

При обчисленні площі фігури (на рис. 34 вона заштрихована) доцільно скористатись тим, що ця фігура симетрична відносно прямої $x = \pi$. Отже, шукана площа дорівнює подвоєній різниці площ криволінійної трапеції $ABCD$ і площі прямокутного трикутника BAD:

$$S_{ABCD} = \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos x)\, dx = (x - \sin x) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{2} + 1,$$

$$S_{BAD} = \frac{1}{2} |BA| \cdot |AD| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Шукана площа

$$S = 2 (S_{ABCD} - S_{BAD}) = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь. $S = 2 + \frac{\pi}{2}$.

Задача 4. Обчислити границю послідовності

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}}{4^n - 1}.$$

Розв'язок.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}}{4^n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n - 1}{(2 - 1)(4^n - 1)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2^n - 1}{(2^n - 1)(2^n + 1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n + 1} = 0.$$

Відповідь. 0.

ЕКОНОМІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ВАРІАНТ 1

Задача 1. Обчислити об'єм правильної трикутної піраміди, висота якої дорівнює h, а всі плоскі кути при вершині прямі.

Розв'язок. Об'єм піраміди обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{3} QH,$$

де Q — площа основи, а H — висота піраміди. За умовою задачі висота піраміди відома, а тому для відшукання її об'єму досить знайти площу трикутника ABC (рис. 35). Оскільки цей трикутник рівносторонній, то $Q = a^2 \sqrt{3/4}$, де a — його сторона. З умови задачі випливає, що $| SD | = | DC | = a/2$, де $[SD]$ — апофема піраміди. Далі, $| BD | =$

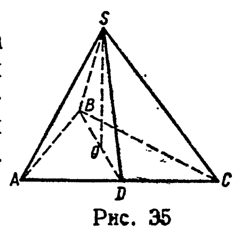


Рис. 35

$= a\sqrt{3}/2$, як медіана рівностороннього трикутника, а тому $|OD| = a\sqrt{3}/6$. З прямокутного трикутника SOD тепер маємо

$$|SD|^2 = |OD|^2 + |OS|^2,$$

або ж $\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12} + h^2$. Звідси $a^2 = 6h^2$.

Отже, площа основи піраміди $Q = \frac{3\sqrt{3}}{2} h^2$, а тому шуканий об'єм $V = \frac{\sqrt{3}}{2} h^3$.

Відповідь. Об'єм піраміди дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2} h^3$.

Задача 2. Розв'язати рівняння

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^{2x} + 2^{2x+3} = 144.$$

Розв'язок. Перший доданок лівої частини рівняння можна перетворити так:

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^{2x} =$$

$$= \left(4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} + 4 - 2\sqrt{3}\right)^x = 4^x.$$

Тому початкове рівняння набирає вигляду $4^x + 8 \cdot 4^x = 144$. Звідси послідовно дістаємо $9 \cdot 4^x = 144$, $4^x = 16$, $x = 2$.

Відповідь. $x = 2$.

Задача 3. Знайти найменше та найбільше значення функції

$$f(x) = (5 + \cos x)\sin x - 2x$$

на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Розв'язок. Щоб знайти найменше і найбільше значення функції, диференційної в поданому замкненому проміжку, треба знайти всі критичні точки функції, які належать цьому проміжку, обчислити значення функції в цих точках і на кінцях проміжку, а потім з усіх знайдених чисел вибрати найменше і найбільше:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5\cos x + \cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 5\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0.$$

Із останнього рівняння маємо $\cos x = -3$ або $\cos x = 0{,}5$. Перше з цих рівнянь розв'язків не має, а розв'язки другого

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in Z.$$

З усіх цих точок в проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ лежить лише одна: $x = -\frac{\pi}{3}$. Оскільки $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 5$, $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{11\sqrt{3}}{4}$,

$f(0) = 0$, то найменше значення даної функції на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ дорівнює $\frac{2\pi}{3} - \frac{11\sqrt{3}}{4}$, а найбільше — 0.

Відповідь. $\frac{2\pi}{2} - \frac{11\sqrt{3}}{4}$ — найменше значення, 0 — найбільше значення.

Задача 4. Зобразити в прямокутній системі координат переріз таких двох множин точок:

$$A = \{(x, y) \mid y \leqslant \sqrt{4 - x^2}\}, \quad B = \{(x, y) \mid y + 2 \geqslant |x|\}.$$

Розв'язок. Зобразимо кожну з цих множин окремо. Для цього побудуємо спочатку графік функції

$$y = \sqrt{4 - x^2}.$$

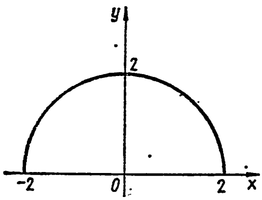


Рис. 36

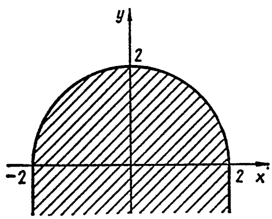


Рис. 37

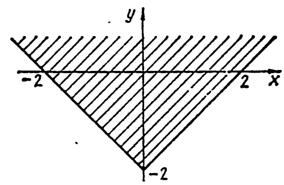


Рис. 38

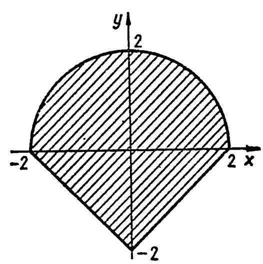


Рис. 39

Ця функція визначена для $x \in [-2; 2]$ і має невід'ємні значення, тобто $y \geqslant 0$. Тому

$$\begin{cases} y \geqslant 0 \\ y^2 = 4 - x^2. \end{cases}$$

Оскільки $x^2 + y^2 = 4$ є рівняння кола з центром у початку координат і радіусом 2, то графіком функції $y = \sqrt{4 - x^2}$ є верхнє півколо цього кола (рис. 36).

Отже, нерівність $y \leqslant \sqrt{4 - x^2}$ справджується для всіх точок, що лежать на цьому півколі і під ним у смузі $-2 \leqslant x \leqslant 2$ (рис. 37).

Щоб зобразити множину точок B, побудуємо спочатку графік функції $y = |x| - 2$. Нерівність $y + 2 \geqslant |x|$ справджується для всіх точок, які лежать не нижче цього графіка (рис. 38).

Множину $A \cap B$ зображено на рис. 39.

ВАРІАНТ 2

Задача 1. Дослідити функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ та побудувати її графік.

Розв'язок. Область визначення функції — множина всіх дійсних чисел. В кожній точці $x \in R$ функція диференційовна і її похідна $y'(x) = x^2 - 4$. Похідна додатна при $|x| > 2$ і від'ємна при $|x| <$

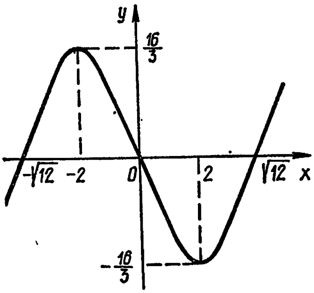


Рис. 40

< 2. Тому на проміжках $]-\infty; -2[$ і $]2; \infty[$ функція зростає, а на проміжку $]-2; 2[$ — спадає. Точка $x = -2$ є точкою максимуму даної функції, а $x = 2$ — точка її мінімуму; $y(-2) = \frac{16}{3}$; $y(2) = -\frac{16}{3}$. Коли $x \to +\infty$, то $y(x) \to +\infty$, а коли $x \to -\infty$, то $y(x) \to -\infty$. Графік перетинає вісь абсцис у точках $x = 0$ і $x = \pm\sqrt{12}$.

Добутої інформації досить для побудови графіка даної функції (рис. 40).

Зауваження. При побудові графіка даної функції можна скористатись також тим, що ця функція непарна.

Задача 2. У конус вписано кулю. Твірна конуса нахилена до площини його основи під кутом α. Довжина твірної дорівнює l. Обчислити об'єм кулі.

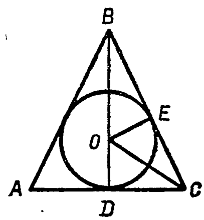


Рис. 41

Р о з в' я з о к. Нехай ABC — осьовий переріз конуса (рис. 41), O — центр кулі, $|OD| = |OE| = r$ — радіус кулі, $\widehat{DCB} = \alpha$. Оскільки $\widehat{OCD} = \frac{\alpha}{2}$ і $|BC| = l$, то з прямокутних трикутників BDC і ODC послідовно знаходимо:

$$|DC| = l\cos\alpha,$$

$$r = |OD| = |DC|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = l\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Шуканий об'єм

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi l^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

Задача 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}, \\ \cos^2\pi x - \sin^2\pi y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Р о з в' я з о к. Підставимо з першого рівняння $y = x + \frac{1}{3}$ в друге; дістанемо

$$\cos^2\pi x - \left(\frac{1}{2}\sin\pi x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\pi x\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Після спрощень матимемо

$$\cos^2\pi x - \sin^2\pi x - 2\sqrt{3}\sin\pi x\cos\pi x = 2.$$

Використавши тотожну рівність $2 = 2(\sin^2\pi x + \cos^2\pi x)$, одержимо рівняння

$$3\sin^2\pi x + 2\sqrt{3}\sin\pi x\cos\pi x + \cos^2\pi x = 0.$$

Розв'язуємо його:

$$[(\sqrt{3}\sin\pi x+\cos\pi x)^2=0]\Leftrightarrow[\sqrt{3}\sin\pi x+\cos\pi x=0]\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\operatorname{tg}\pi x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\Leftrightarrow\left[x=-\frac{1}{6}+n,\ n\in Z\right].$$

Отже, розв'язки початкової системи — усі пари чисел $(x;\ y)$, у яких $x=-\frac{1}{6}+n,\ y=\frac{1}{6}+n,\ n\in Z$, і тільки вони.

Задача 4. Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{x}{100}\right)^{1+2\lg x}>1.$$

Розв'язок.

$$\left[\left(\frac{x}{100}\right)^{1+2\lg x}>1\right]\Leftrightarrow\left[(1+2\lg x)\lg\frac{x}{100}>0\right]\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow[(1+2\lg x)(\lg x-2)>0]\Leftrightarrow\left[\lg x<-\frac{1}{2}\ \text{або}\ \lg x>2\right]\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[x\in\left]0;\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right[\ \cup\ ]100;\ \infty[\right].$$

Відповідь.

$$x\in\left]0;\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right[\ \cup\ ]100;\ \infty[.$$

ГЕОЛОГІЧНИЙ І ГЕОГРАФІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТИ

ВАРІАНТ 1

Задача 1. Довжина бічного ребра правильної трикутної піраміди дорівнює b, а її бічні грані нахилені до площини основи під кутом φ. Обчислити об'єм піраміди.

Розв'язок. Нехай $SABC$ — дана піраміда (рис. 42), $|SA|=|SB|=|SC|=b$, $\angle\widehat{SDB}=\varphi$. Позначимо через a довжину сторони основи піраміди: $|AC|=a$. Тоді площа основи піраміди $Q=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

З прямокутних трикутників ADS і SOD маємо

$$|SD|=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}},\ |SO|=\sqrt{|SD|^2-|DO|^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}},$$

бо
$$|DO|=\frac{1}{3}|DB|=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

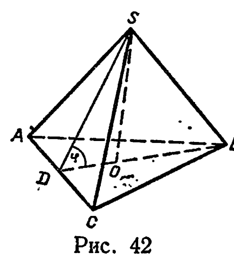


Рис. 42

Крім того, з ΔSOD дістаємо

$$|SO|=|SD|\sin\varphi=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}\sin\varphi.$$

З рівняння

$$\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}\sin\varphi$$

знаходимо довжину сторони основи піраміди

$$a = \frac{2\sqrt{3}\, b \cos\varphi}{\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}}.$$

Тепер обчислюємо об'єм піраміди:

$$V = \frac{1}{3} Q\,|SO| = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{12b^2\cos^2\varphi}{(1 + 3\cos^2\varphi)}\sqrt{b^2 - \frac{3b^2\cos^2\varphi}{1 + 3\cos^2\varphi}}\sin\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\, b^3 \cos^2\varphi \sin\varphi}{(1 + 3\cos^2\varphi)^{3/2}}.$$

Відповідь. Об'єм піраміди дорівнює

$$\frac{\sqrt{3}\, b^3 \cos^2\varphi \sin\varphi}{(1 + 3\cos^2\varphi)^{3/2}}.$$

Задача 2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{8\cos^2 x - 7\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{9}{2}} + 3\cos x = 0.$$

Розв'язок.

$$\sqrt{8\cos^2 x - 7\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{9}{2}} + 3\cos x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 8\cos^2 x - 7\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{9}{2} = 9\cos^2 x, \\ \cos x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 8(1 - \sin^2 x) - 7\sin x - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + \frac{9}{2} - 9(1 - \sin^2 x) = 0, \\ \cos x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0, \\ \cos x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \ \text{ або } \ \sin x = 3, \\ \cos x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Відповідь. $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in Z.$

Задача 3. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 6$$

на проміжку $[-1; 0]$. В яких точках проміжку функція досягає цих значень?

Р о з в' я з о к. Дана функція диференційовна в кожній точці вказаного проміжку і її похідна

$$f'(x) = 12x^2 + 6x.$$

Похідна дорівнює нулю в двох точках: $x = -\frac{1}{2}$ і $x = 0$. Отже, найбільшим і найменшим значенням функції $f(x)$ на вказаному проміжку є відповідно найбільше і найменше з таких чисел:

$$f(-1),\ f\left(-\frac{1}{2}\right),\ f(0).$$

Маємо:

$$f(-1) = 5,\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{4},\ f(0) = 6.$$

Таким чином, функц я $f(x)$ набуває найбільшого значення, рівного $\frac{25}{4}$, при $x = -\frac{1}{2}$, а найменшого, рівного 5, при $x = -1$.

Задача 4. Розв'язати нерівність

$$\log_{1/2}(x^2 + x) + 1 < 0.$$

Р о з в' я з о к.

$$[\log_{1/2}(x^2 + x) + 1 < 0] \Leftrightarrow \left[\log_{1/2} \frac{1}{2}(x^2 + x) < 0\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}(x^2 + x) > 1\right] \Leftrightarrow [(x - 1)(x + 2) > 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty;\ -2[\ \cup\ ]1;\ \infty[.$$

В і д п о в і д ь. Дана нерівність справджується тоді й тільки тоді, коли $x \in]-\infty; -2[\ \cup\ ]1; \infty[$.

ВАРІАНТ 2

Задача 1. Обчислити $\log_{70} 32$, якщо

$$\log_{70} 5 = a \text{ і } \log_{70} 7 = b.$$

Р о з в' я з о к. Маємо:

$$a + b = \log_{70} 5 + \log_{70} 7 = \log_{70} 35 = \log_{70} \frac{70}{2}.$$

Тому

$$1 - \log_{70} 2 = a + b,\ \log_{70} 2 = 1 - a - b.$$

Таким чином,

$$\log_{70} 32 = 5 \log_{70} 2 = 5(1 - a - b).$$

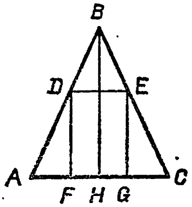


Рис. 43

Задача 2. В правильну чотирикутну піраміду вписано прямокутний паралелепіпед, основою якого є квадрат (нижня основа паралелепіпеда лежить у площині основи піраміди, а сторони його верхньої основи — на бічних гранях піраміди). Площа основи паралелепіпеда в дев'ять разів менша від площі основи піраміди. Знайти відношення об'єму піраміди до об'єму паралелепіпеда.

Р о з в' я з о к. На рис. 43 зображено переріз піраміди і вписаного в неї паралелепіпеда площиною, що проходить через висоту піраміди і середину сторони її основи. Об'єм піраміди

$$V_п = \frac{1}{3} |AC|^2 |BH|,$$

а об'єм паралелепіпеда $V = |FG|^2 \, |GE|$.
Тому

$$\frac{V_п}{V} = \frac{|AC|^2 \cdot |BH|}{3|FG|^2 \cdot |GE|}.$$

Оскільки $\Delta\, BHC \sim \Delta EGC$, то

$$\frac{|BH|}{|EG|} = \frac{|HC|}{|HC| - |HG|}.$$

Отже,

$$\frac{V_п}{V} = \frac{|AC|^2}{3\,|FG|^2} \frac{\frac{|AC|}{2}}{\frac{|AC|}{2} - \frac{|FG|}{2}} = \frac{|AC|^3}{3|FG|^2(|AC| - |FG|)} = \frac{\left(\frac{|AC|}{|FG|}\right)^3}{3\left(\left|\frac{AC}{FG}\right| - 1\right)}.$$

За умовою

$$\frac{|AC|}{|FG|} = 3,$$

тому остаточно маємо:

$$\frac{V_п}{V} = \frac{27}{3(3-1)} = \frac{9}{2}.$$

Задача 3. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$y = e^{\sqrt{3}x} \cos x$$

на проміжку $[0; \pi]$.

Р о з в' я з о к. Дана функція диференційовна в усіх точках проміжку $[0; \pi]$, тому найбільшого і найменшого значення вона досягає в точках екстремуму або на кінцях проміжку. Похідна даної функції

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow [e^{\sqrt{3}x} (\sqrt{3} \cos x - \sin x) = 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\operatorname{tg} x = \sqrt{3}] \Leftrightarrow \left[x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \ k \in Z\right].$$

Проміжку $[0, \pi]$ належить лише одна точка, в якій $y'(x) = 0$, а саме $x = \pi/3$.

Оскільки

$$f(0) = 1,\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{3}\,\pi/3},$$

$$f(\pi) = -e^{\sqrt{3}\pi},$$

то найменше значення даної функції на проміжку $[0;\ \pi]$ дорівнює $-e^{\sqrt{3}\pi}$, а найбільше $\frac{1}{2} e^{\sqrt{3}/3\pi}$.

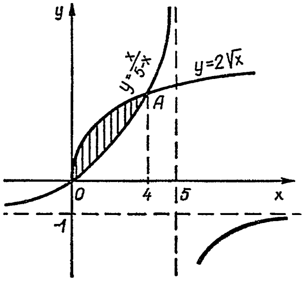


Рис. 44

Задача 4. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = 2\sqrt{x} \text{ і } y = \frac{x}{5-x}.$$

Р о з в ' я з о к. Побудуємо графіки даних функцій (рис. 44). Абсцису точки A знаходимо з рівняння

$$2\sqrt{x} = \frac{x}{5-x}.$$

Маємо:

$$\left[\sqrt{x}\left(2 - \frac{\sqrt{x}}{5-x}\right) = 0\right] \Leftrightarrow \left[\sqrt{x}\,\frac{10-2x-\sqrt{x}}{5-x} = 0\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\sqrt{x}\,(2\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-2)}{x-5} = 0\right] \Leftrightarrow [x = 0 \text{ або } x = 4].$$

Шукана площа

$$S = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x}{5-x}\right) dx = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} + 1 + \frac{5}{x-5}\right) dx =$$

$$= \left[2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + x + 5\ln|x-5|\right]_0^4 =$$

$$= \frac{32}{3} + 4 - 5\ln 5 = \frac{44}{3} - 5\ln 5.$$

Розділ III

ВАРІАНТИ ПИСЬМОВИХ РОБІТ

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ І ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ

ВАРІАНТ 1

1. Основою піраміди $ABCDS$ є квадрат $ABCD$ із стороною a. Бічне ребро DS також рівне a і утворює з ребром DA кут α, а з ребром DC кут β. Визначити площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через ребро DS і ділить ребро AB у відношенні $1:2$, починаючи від точки A.

2. Побудувати графік функції

$$y = \log_{1/2}\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|.$$

Для кожного дійсного числа p визначити кількість коренів рівняння

$$\log_{1/2}\left(4^p\,\frac{2x-1}{x+1}\right) = 0.$$

3. Розв'язати рівняння

$$5^{-\cos 2\pi x} + 6 = 11\cdot 5^{-\cos^2 \pi x}.$$

4. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю абсцис, параболою $y = -3x^2 + 12x$ і дотичною до цієї параболи, проведеною в точці з абсцисою $x_0 = 3$.

ВАРІАНТ 2

1. Основою піраміди $ABCS$ є трикутник ABC, у якого $|AB| = a$, $|BC| = 3a$, $\widehat{ABC} = \alpha$. Бічне ребро BS дорівнює a і утворює з ребром BA кут α, а з ребром BC кут β. Визначити площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через ребро BS і ділить ребро AC у відношенні $1:3$, починаючи від точки A.

2. Побудувати графік функції

$$y = \log_{1/3}\left|\frac{1-x}{3x+1}\right|.$$

Для кожного дійсного числа p визначити кількість коренів рівняння

$$\log_{1/3}\left(27^p\,\frac{1-x}{3x+1}\right) = 0.$$

3. Розв'язати рівняння

$$2^{3+2\cos 2\pi x} + 4 = 9\cdot 4^{\cos^2 \pi x}.$$

4. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю ординат, параболою $y = -2x^2 + 8x$ і дотичною до цієї параболи, проведеною в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

ВАРІАНТ 3

1. Основою піраміди $ABCDS$ є ромб $ABCD$ із стороною a. Бічне ребро CS дорівнює a і утворює з ребрами CD і CB кути α. Визначити площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через ребро CS і ділить ребро AB у відношенні 1 : 2, починаючи від точки A, якщо $\widehat{BCD} = \beta$.

2. Побудувати графік функції

$$y = \log_{1/4}\left|\frac{x-1}{4x+1}\right|.$$

Для кожного дійсного числа p визначити кількість коренів рівняння

$$\log_{1/4}\left(2^p\,\frac{x-1}{4x+1}\right) = 0.$$

3. Розв'язати рівняння

$$3\cdot 2^{-\sin^2\pi x} - 1 = 2^{\cos 2\pi x}.$$

4. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю абсцис, параболою $y = -4x^2 - 16x$ і дотичною до цієї параболи, проведеною в точці з абсцисою $x_0 = -3$.

ВАРІАНТ 4

1. Розв'язати нерівність

$$|4^x - 2| + 2^x - 4 > 0.$$

2. Навколо кулі, що має об'єм V, описано такий конус, що його об'єм — найменший з усіх можливих. Знайти об'єм конуса.

3. При якому значенні a пряма $y = a$ ділить площу фігури, обмеженої лініями $y = 0$ і $y = 2 + x - x^2$, навпіл?

4. Розв'язати рівняння

$$2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} \,/\, \left(1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}\right) = y^2 - 4y + 5.$$

ВАРІАНТ 5

1. Розв'язати нерівність

$$|3^x - 3| + 9^x - 3 < 0.$$

2. В кулю, що має об'єм V, вписано такий циліндр, що бічна поверхня його — найбільша з усіх можливих. Знайти об'єм циліндра.

3. При якому значенні a пряма $y = a$ ділить площу фігури, обмеженої лініями $y = 0$ і $y = -x^2 + 4x - 3$, навпіл?

4. Розв'язати рівняння

$$\left(1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}\right) / \left(1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}\right) = y^2 - 2y + 2.$$

ВАРІАНТ 6

1. Розв'язати нерівність

$$|2^x - 2| + 4^x - 4 < 0.$$

2. В конус, що має об'єм V, вписано такий циліндр, що об'єм його — найбільший з усіх можливих. Знайти об'єм циліндра, якщо відомо, що основи конуса і циліндра лежать в одній площині.

3. При якому значенні a пряма $y = a$ ділить площу фігури, обмеженої лініями $y = 0$ і $y = 2 - x - x^2$, навпіл?

4. Розв'язати рівняння

$$2\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2} \Big/ \left(1 + \mathrm{ctg}^2\frac{x}{2}\right) = -y^2 + 2y - 2.$$

ВАРІАНТ 7

1. Розв'язати нерівність

$$|9^x - 3| + 3^x - 9 > 0.$$

2. В кулю, що має об'єм V, вписано такий циліндр, що об'єм його — найбільший з усіх можливих. Знайти об'єм циліндра.

3. При якому значенні a пряма $y = a$ ділить площу фігури, обмеженої лініями $y = 0$ і $y = -x^2 - 5x - 4$, навпіл?

4. Розв'язати рівняння

$$\left(1 - \mathrm{ctg}^2\frac{x}{2}\right) \Big/ \left(1 + \mathrm{ctg}^2\frac{x}{2}\right) = y^2 - 4y + 5.$$

ВАРІАНТ 8

1. Знайти переріз $A \cap B$ множин

$$A = \left\{x \,\middle|\, \sqrt{\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x - 1} + \sin x = 0\right\}$$

та

$$B = \{x \,|\, |1 + \log_{1/4} x| < 1\}.$$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^2$ і дотичною, проведеною до графіка функції $y = 1 + e^{-x}$ в точці з абсцисою $x = 0$.

3. У правильній чотирикутній піраміді через бічне ребро і висоту піраміди проведено площину. Площа бічної поверхні піраміди в три рази більша від площі одержаного перерізу. Знайти кут між двома суміжними бічними гранями піраміди.

4. При яких a система рівнянь

$$\begin{cases} x - y = 1 + xy, \\ (y - a)x + (2a - 3)y = a \end{cases}$$

має лише один розв'язок.

ВАРІАНТ 9

1. Знайти переріз $A \cap B$ множин

$$A = \left\{x \mid 2\,\mathrm{tg}\,x \sin x = \frac{1}{\cos x} + \mathrm{tg}\,x\right\}$$

та

$$B = \{x / \mid \log_2 x - 1 \mid < 2\}.$$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 2\sqrt{2-x}$ і дотичною, проведеною до графіка функції $y = 1 + e^{-x}$ у точці з абсцисою $x = 0$.

3. У правильній трикутній піраміді через сторону основи перпендикулярно до протилежного бічного ребра проведено площину. Площа одержаного перерізу в $\sqrt{10}$ разів менша від площі бічної поверхні піраміди. Обчислити кут між площиною основи і бічним ребром піраміди.

4. При яких a система рівнянь

$$\begin{cases} a(x+y) - xy + 1 = 0, \\ xy - x + y = 2 \end{cases}$$

має лише один розв'язок?

ВАРІАНТ 10

1. Знайти переріз $A \cap B$ множин

$$A = \{x \mid \sqrt{\sin^2 x + 3\sin x - 1} + \cos x = 0\}$$

та

$$B = \{x \mid \mid 1 + \log_{1/2} x \mid < 3\}.$$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^2 - x + 2$ і дотичною, проведеною до графіка функції $y = 3 + \ln x$ у точці з абсцисою $x = 1$.

3. Кут між бічним ребром правильної чотирикутної піраміди і площиною основи дорівнює плоскому куту при вершині піраміди. Знайти кут між бічною гранню і площиною основи.

4. При яких a система рівнянь

$$\begin{cases} x + y + xy + 1 = 0 \\ (a+1)x + (2a - 1 - x)y = a + 1 \end{cases}$$

має лише один розв'язок?

ВАРІАНТ 11

1. Знайти переріз $A \cap B$ множин

$$A = \left\{x \mid (2\sin x\,\mathrm{ctg}\,x) - \frac{1}{\sin x} + 2 = \mathrm{ctg}\,x\right\}$$

та

$$B = \{x \mid \mid 1 - \log_2 x \mid < 1\}.$$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 4x - x^2$ і дотичною, проведеною до графіка функції $y = 1 + \ln x$ у точці з абсцисою $x = 1$.

3. У правильній чотирикутній піраміді через сторону основи перпендикулярно до протилежної грані проведено площину. Площа одержаного перерізу становить $^{26}/_{27}$ площі основи піраміди. Обчислити двогранний кут при основі піраміди.

4. При яких a система рівнянь

$$\begin{cases} x + y = a(1 - xy), \\ 2 + x = y(x + 1) \end{cases}$$

має лише один розв'язок?

ВАРІАНТ 12

1. У правильну трикутну піраміду, бічні грані якої нахилені до площини основи під кутом φ, вписано циліндр (одна основа циліндра лежить у площині основи піраміди, а коло другої його основи має по одній спільній точці з кожною бічною гранню піраміди). Радіус основи циліндра дорівнює r, а висота циліндра $2r$. Обчислити об'єм піраміди. При якому значенні кута φ об'єм піраміди найменший?

2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = 2 - |2 - x| \quad \text{та} \quad y = \frac{3}{|x|}.$$

3. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{\log^2_{\sqrt{2}} x + \log_2 x^4 - 8} > \log_{\sqrt{2}} \frac{x^2}{4}.$$

4. Розв'язати рівняння

$$\frac{2 \sin x}{|x| + 1} = |\sin x|.$$

ВАРІАНТ 13

1. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди нахилене до площини її основи під кутом φ. У піраміду вписано куб, довжина ребра якого дорівнює a, так, що одна його грань лежить у площині основи піраміди, а чотири вершини протилежної грані — на бічних ребрах піраміди. Обчислити об'єм піраміди. При якому значенні φ об'єм піраміди найменший?

2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = |x^2 - 6x + 8| \quad \text{та} \quad y = 5 - |x - 3|.$$

3. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{\log^2_2 x - 5 \log_{1/\sqrt{2}} \sqrt{x} + 4} < 12 - \log_{1/2} x^2.$$

4. Розв'язати рівняння

$$(x + 2)^2 |\cos x| = \cos x.$$

ВАРІАНТ 14

1. Основою трикутної піраміди, бічні грані якої нахилені до площини основи під кутом φ, є рівнобедрений прямокутний трикутник. У піраміду вписано циліндр (одна основа циліндра лежить у площині основи піраміди, а коло другої його основи має по одній спільній точці з кожною бічною гранню піраміди). Радіус основи циліндра дорівнює r, а висота циліндра $3r$. Обчислити об'єм піраміди. При якому значенні φ об'єм піраміди найменший?

2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = 3 - |3 - x| \quad \text{та} \quad y = \frac{6}{|x + 1|}.$$

3. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{\log^2_{1/\sqrt{2}} x + \log_2 \frac{x^8}{8} - 9} > 3 (\log_{1/\sqrt{2}} x - 6).$$

4. Розв'язати рівняння

$$\frac{\cos x}{|x - 4|} + |\cos x| = 0.$$

ВАРІАНТ 15

1. Бічне ребро правильної трикутної піраміди нахилене до площини її основи під кутом φ. У піраміду вписано правильну трикутну призму так, що одна її основа лежить у площині основи піраміди, а вершини другої основи — на бічних ребрах піраміди. Довжини всіх ребер призми дорівнюють a. Обчислити об'єм піраміди. При якому значенні φ об'єм піраміди найменший?

2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = |-x^2 + 8x - 15| \quad \text{та} \quad y = 5 - |4 - x|.$$

3. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{\log^2_{1/3} x + \log_3 x - 2} < 8 + \log_9 x^4.$$

4. Розв'язати рівняння

$$(x - 1)^2 |\sin x| + \sin x = 0.$$

ВАРІАНТ 16

1. Основою трикутної піраміди, бічні ребра якої нахилені до площини основи під кутом φ, є рівнобедрений прямокутний трикутник. У піраміду вписано пряму трикутну призму так, що одна її основа лежить у площині основи піраміди, а вершини другої основи — на бічних ребрах піраміди. Довжина ребра основи призми, яке лежить на гіпотенузі основи піраміди, дорівнює a, висота призми $2a$. Обчислити об'єм піраміди. При якому значенні φ об'єм піраміди найменший?

2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = 4 - \frac{6}{|x + 1|} \quad \text{та} \quad y = |2 - x|.$$

3. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{\log^2_{1/2} x + 4\log_2 \sqrt{x}} < \sqrt{2}\,(4 - \log_{16} x^4).$$

4. Розв'язати рівняння

$$|x - 1|\cos x = 2|\cos x|.$$

ВАРІАНТ 17

1. Два кола з радіусами R і r дотикаються зовні в точці C. До них проведено спільну зовнішню дотичну AB, де A і B — точки дотику. Обчислити сторони трикутника ABC.

2. Дослідити функцію

$$y = (x^4 - 8)/(x + 1)^4$$

і побудувати її графік. Скільки коренів має рівняння

$$(x^4 - 8)/(x + 1)^4 = c?$$

3. Розв'язати рівняння

$$2\sin x - \operatorname{tg} x + 1 = \frac{1}{\cos x}.$$

4. Знайти множину всіх точок площини, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} \log_2(2y - x^2 + 1) \geqslant \log_2 y, \\ \sqrt{y - 2x + 3} \leqslant \sqrt{8 - x}. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 18

1. Два кола, радіуси яких дорівнюють R і r ($R \neq r$), дотикаються зовні. Знайти радіус меншого з кіл, яке дотикається до двох даних кіл і до їх спільної зовнішньої дотичної.

2. Дослідити функцію

$$y = 8(x^3 + x)/(2x + 1)^3$$

і побудувати її графік. Скільки коренів має рівняння

$$8(x^3 + x)/(2x + 1)^3 = c?$$

3. Розв'язати рівняння

$$2\cos\frac{x}{2} + 1 + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{\sin x/2} = 0.$$

4. Знайти множину всіх точок площини, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} \log_3(2y + x^2 - 2) \leqslant \log_3 y, \\ \sqrt{y + 1} > \sqrt{1 + |x|}. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 19

1. У кут вписано три кола так, що два крайні проходять через центр середнього. Радіуси крайніх кіл дорівнюють R і r. Знайти радіус середнього кола.

2. Дослідити функцію

$$y = (x^4 - 8)/(x - 1)^4$$

і побудувати її графік. Скільки розв'язків має рівняння

$$(x^4 - 8)/(x - 1)^4 = c?$$

3. Розв'язати рівняння

$$4\sin x + \operatorname{tg} x + 1 = \frac{1}{\cos x}.$$

4. Знайти множину всіх точок площини, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\sqrt{x} \leqslant \sqrt{2x - 2y + 2},$$
$$\log_{1/3}(3y - 2x + 6) \geqslant \log_{1/3}(2y - 3x + 9).$$

ВАРІАНТ 20

1. Два кола з радіусами R і r дотикаються зовні в точці A. На колі з радіусом r взято точку B, діаметрально протилежну точці A, і в цій точці побудовано дотичну l. Знайти радіус кола, яке дотикається до двох даних кіл і до прямої l.

2. Дослідити функцію

$$y = (x^3 + 4)/(x + 1)^3$$

і побудувати її графік. Скільки розв'язків має рівняння

$$\frac{(x^3 + 4)}{(x + 1)^3} = c?$$

3. Розв'язати рівняння

$$4\cos x - \operatorname{ctg} x - 1 = 1/\sin x.$$

4. Знайти множину всіх точок площини, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} \log_{1/2}(x + y - 1) \geqslant \log_{1/2} y, \\ \sqrt{y - x - 1} \leqslant \sqrt{2 - x}. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 21

1. Два кола, радіуси яких дорівнюють R і r ($R > r$), дотикаються зовні. Знайти радіус більшого з кіл, яке дотикається до обох даних кіл і до їх спільної зовнішньої дотичної.

2. Дослідити функцію

$$y = (x^3 - 4)/(x - 1)^3$$

і побудувати її графік. Скільки коренів має рівняння

$$(x^3 - 4)/(x - 1)^3 = c?$$

3. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2}\sin 2x + 1 - \operatorname{tg} 2x = \sqrt{2}/(2\cos 2x).$$

4. Знайти множину всіх точок площини, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} |x|+|y|<4, \\ \log_2(2y-x^2+4)\geqslant\log_2(y+1). \end{cases}$$

ВАРІАНТ 22

1. Обчислити об'єм просторової фігури, утвореної обертанням навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої графіком функції $y=\frac{\sqrt{8}}{\pi}(2+\sin^2 x)$, прямими $x=-\pi$ та $x=0$ і віссю абсцис.

2. Нехай x_1 — точка мінімуму, а x_2 — точка максимуму функції $f(x)=-3x^5+5(a-4)x^3+60ax-1$. При якому значенні a $x_1^2=x_2$?

3. Розв'язати нерівність

$$\log_{x^2}(2+x)<1.$$

4. В кулю з радіусом r вписано конус. Площа бічної поверхні конуса в два рази більша від площі його основи. Обчислити об'єм конуса.

ВАРІАНТ 23

1. Обчислити об'єм просторової фігури, утвореної обертанням навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої лініями

$$y=1+\sin^2 x,\quad y=0,\quad x=0,\quad x=\pi.$$

2. Нехай x_1 і x_2 — точки екстремумів функції

$$f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-6(a+1)x+2.$$

При якому a вираз $x_1^2+x_2^2$ матиме найменше значення?

3. Розв'язати нерівність

$$|x|^{x^2-x-2}<1.$$

4. В конус, твірна якого дорівнює l, вписано кулю. Радіус кулі в чотири рази менший від висоти конуса. Обчислити площу бічної поверхні конуса.

ВАРІАНТ 24

1. Обчислити об'єм просторової фігури, утвореної обертанням навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої графіком функції $y=1+\sin x$ та дотичними до цього графіка, проведеними в точках з абсцисами $x=0$ і $x=\pi$.

2. Нехай x_1 і x_2 відповідно точка максимуму і точка мінімуму функції

$$f(x)=2x^3-9mx^2+12m^2x+1.$$

При якому значенні m $x_2^2=x_1$?

3. Розв'язати нерівність

$$\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1.$$

4. Висота конуса в два рази менша від радіуса описаної навколо цього конуса кулі. Знайти відношення об'єму конуса до об'єму кулі.

ВАРІАНТ 25

1. Обчислити об'єм просторової фігури, утвореної обертанням навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої лініями

$$y = 2 - \cos^2 x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2\pi.$$

2. Нехай x_1 і x_2 — точки, в яких похідна функції

$$f(x) = x^3 - 3bx^2 + 3(2b - 1)x + 1$$

дорівнює нулю. Знайти значення b, при якому величина виразу $x_1^2 + x_2^2$ найменша.

3. Розв'язати нерівність

$$(x-2)^{x^2-6x+8} > 1.$$

4. В правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a, вписано конус. Обчислити об'єм конуса, якщо площа бічної поверхні піраміди в п'ять разів більша від площі її основи.

ВАРІАНТ 26

1. Обчислити об'єм просторової фігури, утвореної при обертанні навколо прямої $y = 1$ плоскої фігури, обмеженої графіком функції $y = 2 + \frac{1}{2}\sin 2x$, прямими $x = 0$ та $x = \frac{\pi}{2}$ і цією прямою.

2. Нехай x_1 і x_2 відповідно точка мінімуму і точка максимуму функції

$$f(x) = -2x^3 + 3(1 - 2a)x^2 + 12ax - 1.$$

При якому значенні a $x_1^2 = x_2$?

3. Розв'язати нерівність

$$\log_{(x-2)}(x^2 - 8x + 15) > 0.$$

4. В правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a, вписано кулю. Площа бічної грані піраміди дорівнює площі її основи. Обчислити площу поверхні кулі.

ВАРІАНТ 27

1. Нехай

$$\max(A, B) = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \geqslant B, \\ B, & \text{якщо } B \geqslant A. \end{cases}$$

Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої частинами ліній

$$\max(x^2, y) = 1 \quad \text{і} \quad y = |x|.$$

2. Знайти об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює l, а кут нахилу бічних граней до площини основи дорівнює α.

3. Розв'язати рівняння

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$$

4. При якому значенні a рівняння $x^2 = ae^x$ має один додатний корінь?

ВАРІАНТ 28

1. Нехай

$$\min(A,\ B) = \begin{cases} A, \text{ якщо } A \leqslant B, \\ B, \text{ якщо } B \leqslant A. \end{cases}$$

Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої частинами ліній

$$\min(x,\ y) = 1 \quad \text{і} \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4,$$

які лежать у першому квадранті.

2. Висота правильної чотирикутної піраміди і радіус описаної сфери дорівнюють відповідно h і r $(r \leqslant h)$.

Знайти площу бічної поверхні піраміди.

3. Розв'язати рівняння

$$5\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0.$$

4. При яких значеннях q рівняння $x^3 - 27x + q = 0$ має один додатний корінь?

ВАРІАНТ 29

1. Нехай

$$\min(A,\ B) = \begin{cases} A, \text{ якщо } A \leqslant B, \\ B, \text{ якщо } B \leqslant A. \end{cases}$$

Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої частинами ліній $\min(x^2, y) = 1$ і $x + y = 4$, які лежать у першому квадранті.

2. Знайти об'єм і бічну поверхню конуса, вписаного в правильний тетраедр, ребро якого дорівнює a.

3. Розв'язати рівняння

$$\sin 3x \sin 9x = \sin 5x \sin 7x.$$

4. При яких значеннях a рівняння $x = ae^x$ не має дійсних коренів?

ВАРІАНТ 30

1. Нехай

$$\min(A,\ B) = \begin{cases} A, \text{ якщо } A \leqslant B, \\ B, \text{ якщо } B \leqslant A. \end{cases}$$

Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої частинами ліній

$$\min(x+1,\ y) = 2 \quad \text{і} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4,$$

які лежать у першому квадранті.

2. Площа основи конуса дорівнює Q, а площа осьового перерізу S. Знайти об'єм і площу бічної поверхні конуса.

3. Розв'язати рівняння

$$\sin 7x - \cos 4x = \sin x.$$

4. При яких значеннях k рівняння $\ln x = kx$ має два дійсних корені?

ВАРІАНТ 31

1. Визначити кут φ між твірною і площиною основи конуса, об'єм якого в λ разів більший від об'єму вписаної в нього кулі. Яке найменше можливе значення λ?

2. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 1} < 1.$$

3. Визначити найбільше і найменше значення функції

$$y = xe^{-x}$$

на множині R усіх дійсних чисел.

4. Розв'язати рівняння

$$\int\limits_{-\pi/2}^{x} (-2\cos 2t + \sin t + \cos t)\,dt = 0.$$

ВАРІАНТ 32

1. Площа повної поверхні прямого кругового конуса в λ разів більша від площі поверхні вписаної в цей конус сфери. Визначити кут між твірною конуса та площиною його основи. Яке найменше можливе значення λ?

2. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{6x - x^2} > 3.$$

3. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$y = \sin x + \cos 2x$$

на проміжку $[0, \pi[$.

4. Розв'язати нерівність

$$\left(\int\limits_{3}^{x} (2t - 8)\,dt\right)^{x-6} < 1.$$

ВАРІАНТ 33

1. Навколо кулі з радіусом r описано зрізаний конус, об'єм якого в λ разів більший від об'єму кулі. Знайти радіуси основ конуса.

2. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{(x + 2)(x - 7)} > x + 1.$$

3. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$y = \cos 2x + 8 \cos x + 2 \sin x + 4x$$

на проміжку $\left[-\frac{3}{2}\pi,\ 0\right]$.

4. Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\left[\log_{1/5}\left(\int\limits_{\sqrt{4/5}}^{x} 2t\,dt\right)\right]} < 1.$$

ФІЗИЧНИЙ І РАДІОФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТИ

ВАРІАНТ 34

1. Розв'язати нерівність

$$\log_2 \sqrt{4 + x} + 3 \log_4 (4 - x) - \frac{1}{2} \log_4 (16 - x^2)^2 < 2.$$

2. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 8 \cos^2 x.$$

3. Знайти точку екстремуму функції $y = x - \ln(1 + x)$ і точку на графіку даної функції, в якій дотична до графіка паралельна прямій, що проходить через точки A (2; 3) і B (—1; 4).

4. Циліндричну посудину, яка наповнена рідиною, поставили так, що діагональ осьового перерізу прийняла вертикальне положення. Яка кількість рідини витече при цьому, якщо висота посудини в 3 рази більша радіуса основи?

ВАРІАНТ 35

1. Розв'язати нерівність

$$2^{\log_8 x} + 3^{\log_8 x - 1} \geqslant 3^{\log_8 x} - 2^{(\log_2 x - 3)/3}.$$

2. Розв'язати рівняння

$$3 \operatorname{tg} x (7 + \cos 2x) = 2 (\cos 2x - 1).$$

3. Знайти площу трикутника, утвореного бісектрисами координатних кутів і дотичною до кривої $y = \sqrt{x^2 - 5}$ в точці M (3; 2).

4. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює $2p$. Якої довжини повинні бути його сторони, щоб об'єм тіла, утвореного обертанням цього трикутника навколо бічної сторони, був найбільшим?

ВАРІАНТ 36

1. Розв'язати нерівність

$$|\log_{\sqrt{7}} x + 6| - |\log_7 x + 6| \geqslant 1.$$

2. Розв'язати рівняння

$$\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}.$$

3. В яких точках дотичні до кривої $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 1$ паралельні прямій $y = 2x - 1$?

4. Треба виготовити повітряного змія в формі прямої призми, що має основою прямокутний трикутник з гіпотенузою, рівною 0,5 м. Бічна поверхня цієї призми має площу 0,96 м^2. Якими повинні бути сторони трикутника основи, щоб сума всіх ребер призми була найменшою?

ВАРІАНТ 37

1. Розв'язати нерівність

$$|\log_{\sqrt{5}} x - 3| + |\log_5 x - 3| \geqslant 3.$$

2. Розв'язати рівняння

$$3^{\lg \operatorname{tg} x} + 3^{\lg \operatorname{ctg} x} = 2.$$

3. Записати рівняння дотичних до кривих $y = 2x^2 - 5$ і $y = x^2 - 3x + 5$, проведених через точку перетину цих кривих.

4. В конус з висотою H й радіусом основи R вписати циліндр так, щоб його повна поверхня була найбільшою, і обчислити її.

ВАРІАНТ 38

1. В кулю з радіусом R вписано прямокутний паралелепіпед, основою якого є квадрат зі стороною a. Знайти об'єм паралелепіпеда.

2. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{2}\sin x - \int_0^x \cos 2t\,dt = 0.$$

3. При якому a графіки функцій $y = a\,\frac{x - |x|}{2}$ і $y = 2x^2$ обмежують фігуру з площею $\frac{1}{3}$?

4. Розв'язати нерівність

$$\left|\log_2 \frac{x}{6}\right|^{x^2 - 18x + 56} > 1.$$

ВАРІАНТ 39

1. В кулю з радіусом R вписано прямий круговий конус з висотою h. Знайти площу бічної поверхні конуса.

2. Розв'язати рівняння

$$-\sin^2 x + \int_x^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\,dt = 0.$$

3. При якому a графіки функцій $y = \frac{x + |x|}{2}$ і $y = ax^3$ обмежують фігуру з площею $\frac{1}{16}$?

4. Розв'язати нерівність

$$\log_{2/3|x-2|} 2^{1-x^2} \geqslant 0.$$

ВАРІАНТ 40

1. Навколо кулі з радіусом r описано прямий круговий конус з радіусом основи a. Знайти об'єм конуса.

2. Розв'язати рівняння

$$1+\int_0^x (\cos t-\sin t)\,dt=0.$$

3. При якому a графіки функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=ax^2$ обмежують фігуру з площею 9?

4. Розв'язати нерівність

$$|\log_{x/2} 2|^{x^2-7x+10}<1.$$

ВАРІАНТ 41

1. У правильну чотирикутну піраміду з висотою h вписано кулю з радіусом r. Знайти об'єм піраміди.

2. Розв'язати рівняння

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\operatorname{tg} x=\int_0^x \cos^2 t\,dt.$$

3. При якому a графіки функцій $y=-\sqrt{x}$ і $y=ax^3$ обмежують фігуру з площею $\frac{5}{96}$?

4. Розв'язати нерівність

$$\log_{32-x^2}\left(\frac{3}{2}-|x-1|\right)\leqslant 0.$$

ВАРІАНТ 42

1. Обчислити об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо кут при основі її бічної грані дорівнює α, а радіус кола, вписаного в цю грань, дорівнює R.

2. Розв'язати нерівність

$$\log_{1/2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2>0.$$

3. Розв'язати рівняння

$$\cos\pi x=\left|x+\frac{1}{4}\right|-\left|x-\frac{1}{4}\right|.$$

4. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю ординат, параболою $y=2x^2-8x$ і дотичною до цієї параболи в її вершині.

ВАРІАНТ 43

1. Обчислити площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, якщо кут нахилу бічного ребра до площини її основи дорівнює α, а радіус кола, описаного навколо перерізу піраміди площиною, яка проходить через висоту піраміди і діагональ основи, дорівнює R.

2. Розв'язати нерівність

$$\log_{|x-1|} \frac{1}{2} \geqslant 1.$$

3. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x = \frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

4. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 10$ і дотичними до цієї параболи, проведеними з точки (0; 1).

ВАРІАНТ 44

1. Обчислити об'єм правильної трикутної піраміди, якщо плоский кут при вершині піраміди дорівнює α, а радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює R.

2. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{|\sin x|}.$$

3. Розв'язати нерівність

$$\log_{(x^2-3x+3)} 3 \geqslant 1.$$

4. Обчислити площу фігури, яка обмежена параболою $y^2 = x - 4$ і дотичними до цієї параболи, проведеними з початку координат.

ВАРІАНТ 45

1. Знайти площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, якщо кут нахилу бічного ребра до площини її основи дорівнює α, а радіус кола, вписаного в переріз піраміди площиною, яка проходить через висоту піраміди і діагональ основи, дорівнює R.

2. Розв'язати нерівність

$$\log_{1/3} (5 - 4x - x^2) \geqslant -1.$$

3. Розв'язати рівняння

$$\pi \sin x = \left| x - \frac{\pi}{4} \right| - \left| x - \frac{3\pi}{4} \right|.$$

4. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю ординат, параболою $y = -x^2 - 4x$ і дотичною до цієї параболи у її вершині.

ВАРІАНТ 46

1. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Радіус кола, описаного навколо основи піраміди, дорівнює R, а вершина піраміди проектується в центр описаного навколо основи кола. Бічна грань піраміди, яка не конгруентна двом іншим її бічним граням, нахилена до площини основи під кутом β. Обчислити об'єм піраміди.

2. Розв'язати нерівність

$$\log_2(x^2 - 8x + 15) \leqslant 1.$$

3. Розв'язати рівняння

$$-2\sqrt{3}\pi \sin x = |x + \pi| + |x - 2\pi|.$$

4. Обчислити площу фігури, яка обмежена параболою $y = -x^2 - 8$ і дотичними до цієї параболи, проведеними з точки (0; 1).

ВАРІАНТ 47

1. Довжина сторони основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Площина, що проходить через сторону основи піраміди і середню лінію протилежної бічної грані, утворює з площиною основи кут 60°. Обчислити об'єм піраміди.

2. Знайти найменше значення функції

$$y = 2^{x+1} + 2^{1-x} - x \ln 8 + 1.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції

$$y = 8 \sin^4 x$$

на проміжку $[0; \pi]$ та віссю абсцис.

4. Сума другого, четвертого та шостого членів геометричної прогресії дорівнює 7, а сума другого, третього і четвертого членів цієї прогресії дорівнює $3 + \sqrt{2}$. Знайти знаменник і перший член прогресії.

ВАРІАНТ 48

1. Площина, паралельна основі піраміди, ділить її бічну поверхню на рівновеликі частини, тобто на частини однакової площі. В якому відношенні ділить ця площина висоту піраміди?

2. Знайти найбільше значення функції

$$y = 10 + 4x \ln 9 - 3^{x-1} - 3^{3-x}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції

$$y = 4 \sin^2 x (1 + \cos^2 x)$$

на проміжку $[-\pi; \pi]$ та віссю абсцис.

4. Сума трьох чисел, які утворюють геометричну прогресію, дорівнює 13, а сума їх квадратів дорівнює 91. Знайти ці числа.

ВАРІАНТ 49

1. Правильна трикутна піраміда має висоту h, а довжина бічного ребра дорівнює l. Обчислити площу перерізу цієї піраміди площиною, яка паралельна площині основи піраміди і лежить на відстані a від неї.

2. Знайти найменше значення функції

$$y = e^x + 5e^{-x} - 4x + 2.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції

$$y = 4\cos^4 x$$

на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ та віссю абсцис.

4. Сума трьох додатних чисел, які утворюють геометричну прогресію, дорівнює $8\frac{2}{3}$, а сума обернених чисел дорівнює $2\frac{1}{6}$. Знайти ці числа.

ВАРІАНТ 50

1. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює h і утворює з бічною гранню кут 30°. Через сторону основи піраміди проведено площину, перпендикулярну до протилежної грані. Обчислити об'єм піраміди, що відтинається цією площиною від даної піраміди.

2. Знайти найменше значення функції

$$x = 3^x + 2 \cdot 3^{3-x} - x\ln 27 - 9.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції

$$y = 8\sin^4 x + 4\cos 2x,$$

прямими $x = 0$ і $x = \pi$ та віссю абсцис.

4. Знайти суму нескінченної спадної геометричної прогресії, якщо сума перших трьох її членів дорівнює 3, а сума першого, третього та п'ятого членів дорівнює $5\frac{1}{4}$.

ВАРІАНТ 51

1. Площина, паралельна основі піраміди, ділить піраміду на дві частини, що мають рівні об'єми. Знайти відношення площ частин, на які ділить ця площина бічну поверхню піраміди.

2. Знайти найбільше значення функції

$$y = 2(1 - x) - e^{x+1} - 3e^{-(x+1)}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції

$$y = 8\cos^4 x - 2\cos 2x,$$

прямими $x = -\pi$ і $x = \pi$ та віссю абсцис.

4. Знайти три натуральних числа, які утворюють геометричну прогресію, якщо сума їх дорівнює 21, а сума обернених чисел дорівнює $\frac{7}{12}$.

ВАРІАНТ 52

1. У кулю з радіусом R вписано прямий круговий циліндр із радіусом основи r. Знайти площу бічної поверхні циліндра. При якому r ця площа найбільша? Обчислити найбільше значення площі бічної поверхні.

2. При яких значеннях x похідна функції

$$y = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos\left(\frac{3\pi + x}{2}\right)$$

дорівнює нулю?

3. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+100} - \sqrt{n}).$$

4. На площині дано дві взаємно перпендикулярні прямі. Знайти множину всіх тих точок площини, сума відстаней від яких до даних прямих дорівнює сумі величин, обернених до цих відстаней.

ВАРІАНТ 53

1. Навколо кулі з радіусом r описано правильну трикутну піраміду висоти H. Знайти об'єм піраміди. При якому значенні H цей об'єм найменший? Обчислити найменший об'єм.

2. При яких значеннях x похідна функції

$$y = 20\cos 3x + 12\cos 5x - 15\cos 4x$$

дорівнює нулю?

3. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2+1}}{n+1}.$$

4. На площині дано дві взаємно перпендикулярні прямі. Знайти множину всіх тих точок площини, добуток відстаней від яких до даних прямих дорівнює модулеві різниці цих відстаней.

ВАРІАНТ 54

1. У кулю з радіусом r вписано прямий круговий циліндр висоти H. Знайти об'єм циліндра. При якому H цей об'єм найбільший? Обчислити найбільший об'єм.

2. При яких значеннях x похідна функції

$$y = \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x + 3(\cos x - \sqrt{3}\sin x)$$

дорівнює нулю?

3. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \cdots + \frac{n-1}{n^2+1}\right).$$

4. На площині дано дві взаємно перпендикулярні прямі. Знайти множину всіх тих точок площини, модуль різниці відстаней від яких до даних прямих дорівнює модулеві різниці величин, обернених до цих відстаней.

ВАРІАНТ 55

1. У кулю з радіусом r вписано правильну трикутну піраміду висоти H. Знайти об'єм піраміди. При якому H цей об'єм найбільший? Обчислити найбільший об'єм.

2. При яких значеннях x похідна функції

$$y = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x) - \sin 3x$$

дорівнює нулю?

3. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+\frac{1}{n}} - \sqrt{2n+1}\right).$$

4. На площині дано дві взаємно перпендикулярні прямі. Знайти множину всіх тих точок площини, добуток відстаней від яких до даних прямих дорівнює подвоєній сумі цих відстаней.

ВАРІАНТ 56

1. У кулю з радіусом r вписано правильну трикутну піраміду висоти H. Знайти площу бічної поверхні піраміди. При якому H ця площа найбільша? Обчислити найбільше значення площі.

2. При яких значеннях x похідна функції

$$y = \sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)$$

дорівнює нулю?

3. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{2n^3-1}}{n+3}.$$

4. На площині дано дві взаємно перпендикулярні прямі. Знайти множину всіх тих точок площини, добуток відстаней від яких до даних прямих дорівнює добутку квадратів цих відстаней.

ХІМІЧНИЙ І ЕКОНОМІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТИ

ВАРІАНТ 57

1. У рівнобедрений трикутник, кут при основі якого дорівнює φ, вписано квадрат (одна сторона квадрата лежить на основі трикутника, а кінці протилежної сторони — на конгруентних сторонах трикутника). Довжина діагоналі квадрата дорівнює $a\sqrt{2}$. Обчислити площу трикутника. При якому значенні кута φ площа трикутника найменша?

2. Розв'язати рівняння

$$\log_3(28 - 3^{-x}) = 3 + x.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = 2 + \frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{3}{2}\pi\right| \quad \text{і} \quad y = 2 + \sin x.$$

4. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-1}{1+2+3+\cdots+n}.$$

ВАРІАНТ 58

1. У прямокутний трикутник з гострим кутом φ вписано прямокутник (дві сторони прямокутника лежать на катетах, а одна з його вершин — на гіпотенузі). Довжина однієї із сторін прямокутника дорівнює a, а його діагоналі — $a\sqrt{5}$. Обчислити площу круга, радіус якого дорівнює радіусу описаного навколо трикутника кола. При якому значенні кута φ площа круга найменша?

2. Розв'язати рівняння

$$2x - \lg(5^{2x} + 4^x - 16) = x \lg 4.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = 1 + \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| \quad \text{і} \quad y = 1 - \sin x.$$

4. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)}{1 - 2n - n^2}.$$

ВАРІАНТ 59

1. У рівнобедрений трикутник, кут при основі якого дорівнює φ, вписано прямокутник (одна із сторін прямокутника лежить на основі трикутника, її довжина b, а кінці протилежної сторони лежать на рівних сторонах трикутника). Довжина діагоналі прямокутника дорівнює $b\sqrt{5}$. Обчислити площу трикутника. При якому значенні кута φ площа трикутника найменша?

2. Розв'язати рівняння

$$\log_3(3^x - 8) = 2 - x.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = 1 - \cos x \quad \text{і} \quad y = \frac{1}{4}\left[\,|x - 5| + |x - 1|\,\right].$$

4. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}}{9^n - 1}.$$

ВАРІАНТ 60

1. У рівнобедрений трикутник, кут при основі якого дорівнює φ, вписано коло з радіусом r. Обчислити площу трикутника. При якому значенні кута φ площа трикутника найменша?

2. Розв'язати рівняння

$$\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3).$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = \frac{2}{\pi}\left| x - \frac{\pi}{2} \right| \quad \text{і} \quad y = 1 + \sin x.$$

4. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n + 1}{2 + 4 + 6 + \cdots + 2n}.$$

ВАРІАНТ 61

1. У прямокутний трикутник з гострим кутом φ вписано трапецію (менша основа трапеції лежить на одному з катетів, а кінці другої основи — на другому катеті та гіпотенузі). Довжина більшої основи трапеції дорівнює $2a$, а менша основа й бічні сторони дорівнюють a. Обчислити площу трикутника. При якому значенні кута φ площа трикутника найменша?

2. Розв'язати рівняння

$$\log_2(4\cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = 1 + \sin x \quad \text{і} \quad y = 2 - \frac{1}{4}[\,|x-7| + |x-3|\,].$$

4. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{n}{2}}{\frac{n^2}{4} + n + 3}.$$

ВАРІАНТ 62

1. В основі піраміди лежить трикутник, довжини сторін якого дорівнюють 6; $3\sqrt{10}$ і $3\sqrt{10}$ см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Обчислити об'єм піраміди.

2. Розв'язати рівняння

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 8.$$

3. Знайти найменше та найбільше значення функції

$$y = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}$$

на проміжку $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$.

4. Зобразити в прямокутній системі координат переріз $A \cap B$ таких множин точок:

$$A = \{(x,\ y)\,|\,y \geqslant x^2 - 4\},\quad B = \{(x,\ y)/y - 2 \leqslant -|x|\}.$$

ВАРІАНТ 63

1. Довжина кожного з бічних ребер піраміди дорівнює b. Її основою є прямокутний трикутник, катети якого відносяться як $m : n$, а гіпотенуза дорівнює c. Обчислити об'єм піраміди.

2. Розв'язати рівняння

$$\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^{4x} + 2\cdot 16^x = 192.$$

3. Знайти найменше та найбільше значення функції

$$y = (5 + \sin x)\cos x + 2x$$

на проміжку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Зобразити в прямокутній системі координат переріз $A \cap B$ таких множин точок:

$$A = \{(x,\ y)\,|\,y \geqslant \sqrt{1-x^2}\},\quad B = \{(x,\ y)\,|\,y + |x| \leqslant 4\}.$$

ВАРІАНТ 64

1. В основі піраміди лежить квадрат. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом 45°. Середнє за величиною бічне ребро дорівнює l. Обчислити об'єм піраміди.

2. Розв'язати рівняння

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 6.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \cos 3x - 15\cos x + 8$$

на проміжку $\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{3}{2}\pi\right]$.

4. Зобразити в прямокутній системі координат переріз $A \cap B$ таких множин точок:

$$A = \{(x,\ y)\,|\,y \geqslant x^2 - 2x\},\quad B = \{(x,\ y)\,|\,y + |x-1| \leqslant 1\}.$$

ВАРІАНТ 65

1. Основа піраміди — трикутник, довжини сторін якого 6; 5 і 5 см. Бічні грані піраміди нахилені до площини її основи під кутом 45°. Обчислити об'єм піраміди.

2. Розв'язати рівняння

$$\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^{2x} + 2^{2(x+1)} = 320.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = 2\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x + 2\sqrt{3}$$

на проміжку $\left[\frac{2}{3}\pi;\ \frac{5}{6}\pi\right]$.

4. Зобразити в прямокутній системі координат переріз $A \cap B$ таких множин точок:

$$A = \{(x,\ y)\,|\,y + 3x + x^2 \leqslant 0\},\ B = \left\{(x, y)\,|\,y + \frac{3}{2} \geqslant \left|x + \frac{3}{2}\right|\right\}.$$

ВАРІАНТ 66

1. Основа піраміди — прямокутник, довжина діагоналі якого дорівнює b, а кут між діагоналями — 60°. Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут 45°. Обчислити об'єм піраміди.

2. Розв'язати рівняння

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \sqrt{5-2\sqrt{6}}\Big)^x = 10.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = 9\sin x - \sin 3x + 3$$

на проміжку $[-\pi;\ 0]$.

4. Зобразити в прямокутній системі координат переріз $A \cap B$ таких множин точок:

$$A = \{(x,\ y) \mid y + \sqrt{9 - x^2} \geqslant 0\}, \quad B = \{(x,\ y)/y + |x| \leqslant 3\}.$$

ВАРІАНТ 67

1. Дослідити функцію

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

та побудувати її графік.

2. Кулю з радіусом R вписано в конус. Із центра кулі твірну конуса «видно» під кутом α. Знайти об'єм конуса.

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

4. Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2} < 100.$$

ВАРІАНТ 68

1. Дослідити функцію

$$y = 3x^4 - 3x^2 + 5$$

та побудувати її графік.

2. Відомо, що площа повної поверхні конуса в 2 рази більша за площу поверхні вписаної в нього кулі. Знайти кут нахилу твірної конуса до площини основи.

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

4. Розв'язати нерівність

$$x^{\lg x - 1} > 100.$$

ВАРІАНТ 69

1. Дослідити функцію

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 5$$

та побудувати її графік.

2. Площа поверхні кулі, вписаної в конус, дорівнює площі основи конуса. Знайти кут між твірною конуса і площиною основи.

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}25, \\ \cos x \sin y = 0{,}75. \end{cases}$$

4. Розв'язати нерівність

$$x^{2-\lg x} < \frac{100}{x}.$$

ВАРІАНТ 70

1. Дослідити функцію

$$y = 4 + x^2 - \frac{1}{2} x^4$$

та побудувати її графік.

2. Відомо, що в пряму призму, основою якої є прямокутний трикутник з кутом α і гіпотенузою c, можна вписати сферу. Знайти об'єм призми.

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

4. Розв'язати нерівність

$$x^{2-\lg x} < \frac{100}{\sqrt{x}}.$$

ГЕОЛОГІЧНИЙ І ГЕОГРАФІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТИ

ВАРІАНТ 71

1. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює h, а плоский кут при вершині піраміди дорівнює φ. Обчислити об'єм піраміди.

2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{\cos 2x - 5 \sin x} + 2 \cos x = 0.$$

3. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 36x - 34$$

на інтервалі $[-2; 0]$. В яких точках інтервалу функція досягає цих значень?

4. Розв'язати нерівність

$$\log_{1/2}(x^2 - x) + 1 < 0.$$

ВАРІАНТ 72

1. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює h, а плоский кут при вершині піраміди дорівнює φ. Обчислити об'єм піраміди.

2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2 - \cos^2 x - 4 \cos 2x - 6 \cos x} + 3 \sin x = 0.$$

3. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 36x - 14$$

на проміжку [1; 2]. В яких точках проміжку функція досягає цих значень?

4. Розв'язати нерівність

$$\log_{1/2}(x^2 - 3x + 2) + 1 < 0$$

ВАРІАНТ 73

1. Довжина бічного ребра правильної чотирикутної піраміди дорівнює b, а її бічні грані нахилені до площини основи під кутом φ. Обчислити об'єм піраміди.

2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos^2 x - 4\cos x} + 2\sin x = 0.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$f(x) = 4x^3 - 27x^2 + 24x - 6$$

на інтервалі [0; 2]. В яких точках інтервалу функція досягає цих значень?

4. Розв'язати нерівність

$$\log_2(x^2 - x) - 1 > 0.$$

ВАРІАНТ 74

1. Висота правильної шестикутної піраміди дорівнює h, а плоский кут при вершині піраміди дорівнює φ. Обчислити об'єм піраміди.

2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{5\cos^2 x - 5\sin x + \cos 2x} - 3\cos x = 0.$$

3. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = 4x^3 - 15x^2 - 18x - 5$$

на проміжку [—1; 1]. В яких точках проміжку функція досягає цих значень?

4. Розв'язати нерівність

$$\log_2(x^2 + x) - 1 > 0.$$

ВАРІАНТ 75

1. Бічне ребро правильної шестикутної піраміди дорівнює b, а її бічні грані нахилені до площини основи під кутом φ. Обчислити об'єм піраміди.

2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2} - \cos 2x - 4\cos x - 1} - 2\sin x = 0.$$

3. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 5$$

на інтервалі [0; 1]. В яких точках інтервалу функція досягає цих значень?

4. Розв'язати нерівність

$$\log_2 (x^2 - 3x + 2) - 1 > 0.$$

ВАРІАНТ 76

1. Обчислити об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо радіус описаного навколо її основи кола дорівнює R, а протилежні бічні ребра утворюють кут 2α.

2. Розв'язати рівняння

$$\ln (5^{2x+1} - 4) = \ln (\ln e).$$

3. Дослідити функцію $y = 3x^2 - 4x + 5$ і побудувати її графік. Яке найбільше та найменше значення цієї функції на проміжку [0; 1]?

4. Знайти переріз $A \cap B$ множин

$$A = \{x \mid \sin 2x = 3 \cos x\} \quad \text{та} \quad B = \{x \mid |x + 1{,}5| < 3{,}5\}.$$

ВАРІАНТ 77

1. Обчислити об'єм конуса, якщо довжина сторони вписаного в його основу квадрата дорівнює a, а твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α.

2. Розв'язати рівняння

$$\lg (3^{x-1} + 9) = \lg 9 + 2 \lg 2.$$

3. Дослідити функцію $y = x^2 - x - 6$ і побудувати її графік. Яке найбільше та найменше значення цієї функції на проміжку [—1; 2]?

4. Знайти переріз $A \cap B$ множин

$$A = \{x \mid \cos 2x = \sin x\} \quad \text{та} \quad B = \{x \mid |x - 2| < 4\}.$$

ВАРІАНТ 78

1. Обчислити об'єм правильної чотирикутної піраміди, довжина сторони основи якої дорівнює a і бічне ребро нахилене до площини основи під кутом α.

2. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{2} \lg (4^{2x} + 4) = \lg 2 + \lg 3.$$

3. Дослідити функцію $y = 5 + 4x - x^2$ і побудувати її графік. Яке найбільше та найменше значення цієї функції на проміжку [—1; 5]?

4. Знайти переріз $A \cap B$ множин

$$A = \{x \mid \sin^2 x + \cos x + 1 = 0\} \quad \text{та} \quad B = \{x \mid |3 - x| < 7\}.$$

ВАРІАНТ 79

1. Обчислити об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо довжина діагоналі її основи дорівнює a і утворює з бічним ребром кут α.

2. Розв'язати рівняння

$$\ln(2\cdot 2^x - 1) = \ln(3\ln e).$$

3. Дослідити функцію $y = x^2 - 7x + 12$ і побудувати її графік. Яке найбільше та найменше значення цієї функції на проміжку $[0;\ 4]$?

4. Знайти переріз $A \cap B$ множин

$$A = \left\{x \,|\, \sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}\right\} \quad \text{та} \quad B = \{x \,|\, |x - 1| < 5\}.$$

ВАРІАНТ 80

1. Обчислити об'єм конуса, довжина твірної якого дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α.

2. Розв'язати рівняння

$$\ln(3^{2x} - 19) = 3\ln 2.$$

3. Дослідити функцію $y = 2x - 3 - x^2$ і побудувати її графік. Яке найбільше та найменше значення цієї функції на проміжку $[-1;\ 2]$?

4. Знайти переріз $A \cap B$ множин

$$A = \{x \,|\, 3\sin x = 2\cos^2 x\} \quad \text{та} \quad B = \{x \,|\, |x - 2| < 2\}.$$

ВАРІАНТ 81

1. Обчислити об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо довжина сторони її основи дорівнює a і утворює з бічним ребром кут α.

2. Розв'язати рівняння

$$\lg(7^{x-1} + 15) = 6\lg 2.$$

3. Дослідити функцію $y = 3x^2 - 6x + 5$ і побудувати її графік. Яке найбільше та найменше значення цієї функції на проміжку $[0;\ 2]$?

4. Знайти переріз $A \cap B$ множин

$$A = \{x \,|\, \cos x - \sin^2 x = -1\} \quad \text{та} \quad B = \{x \,|\, |x - 1| < 4\}.$$

ВАРІАНТ 82

1. Обчислити lg 56, якщо

$$\lg 2 = a \quad \text{і} \quad \log_2 7 = b.$$

2. В правильній трикутній піраміді кут між бічним ребром і площиною основи дорівнює $\frac{\pi}{4}$. В піраміду вписаний рівносторонній циліндр (нижня основа циліндра лежить в площині основи піраміди, а коло верхньої його основи дотикається бічних граней піраміди). Знайти відношення об'єму піраміди до об'єму циліндра.

3. Знайти найменше і найбільше значення функції

$$y = e^{-2\sqrt{3}x} \sin 2x$$

на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = \sqrt{x} \quad \text{і} \quad y = x/(2 - x).$$

ВАРІАНТ 83

1. Обчислити $\log_{15} 49$, якщо

$$\log_7 9 = a \quad \text{і} \quad \log_7 45 = b.$$

2. В конус вписана пряма трикутна призма так, що нижня її основа лежить у площині основи конуса. Всі ребра призми конгруентні. Обчислити відношення площ повних поверхонь конуса і призми, якщо осьовий переріз конуса є правильний трикутник.

3. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$y = 2e^{-x/3} \sin \frac{x}{3}$$

на проміжку $[0; 3\pi]$.

4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y = \sqrt{x}, \quad x = 2x/(x - 3) \quad \text{і} \quad x = 16.$$

ВАРІАНТ 84

1. Обчислити $\log_9 20$, якщо

$$\lg 2 = a \quad \text{і} \quad \lg 3 = b.$$

2. В конус вписано циліндр, діагоналі осьового перерізу якого паралельні твірним конуса, а нижня основа циліндра лежить у площині основи конуса. Обчислити відношення об'єму конуса до об'єму циліндра.

3. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$y = \frac{1}{3} e^{-2x} \cos 2x$$

на проміжку $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.

4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y = \sqrt{x}, \quad y = x/(x - 2) \quad \text{і} \quad x = 9.$$

ВАРІАНТ 85

1. Обчислити $\log_{12} 90$, якщо

$$\log_{24} 3 = a \quad \text{і} \quad \log_{24} 5 = b.$$

2. В правильній чотирикутній піраміді кут між бічним ребром і площиною основи дорівнює $\pi/4$. В піраміду вписано циліндр (нижня основа

циліндра лежить у площині основи піраміди, а коло верхньої його основи дотикається до бічних граней піраміди). Осьовим перерізом циліндра є квадрат. Знайти відношення площ бічних поверхонь піраміди і циліндра.

3. Знайти найменше і найбільше значення функції:

$$y = e^{-\frac{x}{2\sqrt{3}}} \sin\frac{x}{2}$$

на проміжку $[0;\ 2\pi]$.

4. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = \sqrt{x} \quad \text{і} \quad y = 2x/(3 - x).$$

Розділ IV

ЗРАЗКИ ЕКЗАМЕНАЦІЙНИХ БІЛЕТІВ УСНИХ ЕКЗАМЕНІВ

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ ТА ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ
(спеціальність — прикладна математика)

Білет 1

1. Формула коренів квадратного рівняння.

2. Якщо $\sin\alpha + \cos\alpha = a$ і $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = b$, то $2b + a^3 - 3a = 0$. Довести це.

3. Написати систему трьох лінійних нерівностей, геометричним образом якої є множина всіх внутрішніх точок трикутника з вершинами $A\ (2;\ 5)$, $B\ (-1;\ -2)$, $C\ (-3;\ 4)$.

Білет 2

1. Теорема Вієта (пряма й обернена).

2. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює φ. Знайти двогранний кут між бічною гранню й основою піраміди.

3. При яких значеннях параметра a рівняння $\ln x = ax$ має два розв'язки?

Білет 3

1. Формула n-го члена і суми перших n членів геометричної прогресії.

2. Двогранний кут при бічному ребрі правильної трикутної піраміди дорівнює α. Знайти кут між бічним ребром і площиною основи піраміди.

3. Скільки коренів має рівняння $x^5 = 5x + 2a$ залежно від параметра a?

Білет 4

1. Властивості показникової функції.

2. Куля радіуса R дотикається до всіх граней правильної шестикутної призми. Обчислити площу повної поверхні призми.

3. Довести, що для будь-якого натурального числа n справджується рівність

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Білет 5

1. Властивості функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ та їх графіки.

2. Довести, що композиція двох осьових симетрій відносно взаємно перпендикулярних прямих є центральна симетрія відносно точки перетину цих прямих.

3. При яких a рівняння

$$3x \lg x = 1 + a \lg x$$

має а) один розв'язок; б) два розв'язки?

Білет 6

1. Розв'язання рівнянь $\sin x = a$, $\cos x = a$.

2. Для яких значень параметра a функція

$$y = \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

непарна?

3. Нехай $ABCD$ — будь-який чотирикутник, O — точка перетину відрізків, які сполучають середини протилежних сторін цього чотирикутника. Довести, що

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{O}.$$

Білет 7

1. Формули зведення для тригонометричних функцій.

2. Знайти проміжки монотонності і точки екстремумів функції

$$y = ||x^2 - 1| - 2|.$$

3. Знайти образ трикутника з вершинами A (0; 2), B (2; 2), C (2; 0) при симетрії відносно прямої $x - y + 2 = 0$.

Білет 8

1. Тригонометричні функції подвійного аргументу.

2. Знайти найменше значення функції $y = e^x + 5e^{-x} - 4x + 2$.

3. Точка $(x;\ y;\ z)$ лежить на площині $x + y + z = 6$. Довести, що $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 12$.

Білет 9

1. Теорема про границю суми двох збіжних послідовностей.

2. Якщо $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = a$, то $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = a - 1$. Довести це.

3. Фігура обмежена графіком функції $y = \sqrt{x}$, прямою $y = 2$ і віссю ординат. В якій точці графіка функції $y = \sqrt{x}$ треба провести до нього дотичну, щоб вона відтинала від указаної фігури трикутник найбільшої площі?

Білет 10

1. Теорема про неперервність дробово-раціональної функції.

2. Числа, що виражають довжини сторін прямокутного трикутника, утворюють арифметичну прогресію. Менший катет цього трикутника дорівнює a. Обчислити площу трикутника.

3. Знайти всі значення a, при яких множина

$$\{(x,\ y)\,|\,x^2 + y^2 + 2x \leqslant 1\} \cap \{(x,\ y)\,|\,x - y + a \geqslant 0\}$$

містить лише одну точку. Знайти цю точку.

Білет 11

1. Похідна добутку двох функцій.
2. Довести нерівність

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8 \geqslant 64ab(a+b)^2.$$

3. Дано вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Знайти одиничний вектор $\vec{c}$ ($|\vec{c}|=1$) бісектриси кута AOB.

Білет 12

1. Похідна частки двох функцій.
2. Встановити графічно, скільки розв'язків має рівняння

$$(x-1)\ln(|x|-1)-x=1.$$

3. Довести, що в будь-якому трикутнику

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c},$$

де h_a, h_b, h_c — довжини висот трикутника, r — радіус вписаного кола.

Білет 13

1. Похідна функцій $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$.
2. Точка O — центр ваги трикутника ABC. Довести, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.
3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y=x^2+1$ та дотичними, проведеними до цього графіка в точках з абсцисами $x=-1$ та $x=1$.

Білет 14

1. Достатні умови екстремума функції.
2. Коло K_1 дотикається зсередини до кола K_2 в точці A. $[BC]$ — хорда кола K_2, яка дотикається до кола K_1 в точці D. Довести, що $B\hat{A}D=D\hat{A}C$.
3. З'ясувати, чи монотонна послідовність

$$a_n=(n^2-n+1)/(n^2+n+1).$$

Білет 15

1. Теорема про загальний вигляд усіх первісних даної функції.
2. У трикутнику ABC $|AB|=c$, $|AC|=b$. На відрізку BC взято точку D і навколо трикутників ABD і ADC описано кола. Знайти відношення довжин цих кіл.
3. Побудувати графік функції

$$y=\begin{cases} x/(x+1), & \text{якщо } x\leqslant 0;\\ \log_{1/2}(x+1), & \text{якщо } x>0.\end{cases}$$

Білет 16

1. Необхідна умова збіжності послідовності.

2. У трикутнику ABC $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$. Обчислити довжину бісектриси трикутника ABC, проведеної до сторони $[AB]$.

3. Побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} \sin \pi x + |\sin \pi x|, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ x^2 - 3x, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Білет 17

1. Властивості точок, рівновіддалених від кінців відрізка.

2. Побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{якщо } |x| < 1; \\ \sqrt{x^2 - 1}, & \text{якщо } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

3. Якщо довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію з різницею d, то $b^2 - 4d^2 = 12r^2$, де b — довжина середньої за величиною сторони трикутника, а r — радіус вписаного в нього кола. Довести це.

Білет 18

1. Центр симетрії паралелограма.

2. Якщо для всіх $x \in R$ і деякого $T > 0$ справджується рівність $f(x + T) = \frac{1 - f(x)}{1 + f(x)}$, то функція $y = f(x)$ періодична з періодом $2T$. Довести це.

3. При якому a сума кубів коренів рівняння

$$6x^2 + 6(a - 1)x - 5a + 2a^2 = 0$$

найбільша?

Білет 19

1. Існування кола, вписаного в трикутник.

2. Графік функції $y = f(x)$ симетричний відносно прямих $x = -1$ і $x = 1$. Довести, що функція $y = f(x)$ періодична.

3. Знайти ті значення параметра a, при яких один з коренів рівняння $(2a + 1)x^2 - ax + a - 2 = 0$ менший від 1, а другий більший від 1.

Білет 20

1. Ознаки подібності трикутників.

2. Знайти проміжки монотонності і точки екстремумів функції $y = x/\ln x$.

3. Послідовність задано формулами: $a_1 = 2$, $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\right)$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Довести, що ця послідовність збігається, і обчислити її границю.

Білет 21

1. Теорема Піфагора.
2. Розв'язати рівняння

$$\log_2 x^2 + \log_{|x|} 4 = 5.$$

3. Для яких значень параметра m найменше на проміжку $[0; 1]$ значення функції $y = x^3 - mx^2 + 2$ досягається на правому кінці проміжка?

Білет 22

1. Теорема косинусів.
2. Розв'язати рівняння

$$\log_2 (\sin x) + \log_{1/2} (-\cos x) = 0.$$

3. Обчислити об'єм просторової фігури, утвореної обертанням навколо осі OX плоскої фігури, обмеженої графіком функції $y = \sqrt{x}$, дотичною, проведеною до цього графіка в точці з абсцисою $x = 1$, та прямою $y = 0$.

Білет 23

1. Розклад вектора за трьома некомпланарними векторами.
2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^2 + 1$ та дотичними, проведеними до цього графіка в точках з абсцисами $x = 2$ і $x = 0$.
3. Обчислити границю послідовності

$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - n}).$$

Білет 24

1. Формули площі паралелограма, трикутника і трапеції.
2. Довести, що для всіх дійсних значень x справджується нерівність

$$\frac{1}{4} \leqslant \sin^6 x + \cos^6 x \leqslant 1.$$

3. Графік функції $y = x^2 + bx + c$ дотикається до прямої $y = 3x - 5$ у точці з абсцисою $x = 2$. Визначити b і c.

Білет 25

1. Теорема про три перпендикуляри.
2. Якщо числа ab, b^2 і c^2 утворюють арифметичну прогресію, то числа b, c і $2b - a$ утворюють геометричну прогресію. Довести це.
3. Скільки розв'язків, що належать проміжкові $[-\pi; \pi]$, має рівняння

$$3 \sin x + \sin 3x = 2a$$

залежно від параметра a?

Білет 26

1. Властивість середини діагоналі паралелепіпеда.
2. Знайти множину точок

$$\{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0\}.$$

Записати рівняння образу цієї множини при паралельному перенесенні $\vec{p} = (0; -1)$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 2 - \sin x$ і $y = 2 + \sin^2 x$ на проміжку $[0; \pi]$.

Білет 27

1. Формула площі поверхні і об'єму піраміди.
2. З'ясувати, чи монотонна послідовність $a_n = 3^n + (-2)^n$.
3. Зобразити в прямокутній системі координат таку множину точок:

$$A = \{(x,\ y) \mid \log_{(|x| - 1/2)} (x^2 + y^2) \leqslant \log_{(|x| - 1/2)} 4\}.$$

Білет 28

1. Формули площі поверхні і об'єму циліндра.
2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \sqrt{x}$, дотичною, проведеною до цього графіка в точці з абсцисою $x = 1$, та прямою $y = 0$.
3. Якщо для кожного натурального числа n сума перших n членів послідовності (a_n) дорівнює $5^n - 1$, то ця послідовність є геометричною прогресією. Довести це. Знайти цю прогресію.

Білет 29

1. Формули площі поверхні і об'єму конуса.
2. В якій точці проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ функція

$$y = \operatorname{tg} x + \frac{3}{4} \operatorname{ctg} x$$

досягає найменшого значення?

3. При яких a рівняння

$$\ln \sqrt{x} / \ln (x - a - a^2) = 1$$

має розв'язки? Знайти ці розв'язки.

Білет 30

1. Формула об'єму кулі.
2. Знайти абсцису точки, в якій дотична до графіка функції $y = 5x^5 - 3x^3 + x + 1$ паралельна прямій $y = x$.
3. Довести, що для будь-якого натурального n справджується рівність

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = n - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n}\right).$$

ФІЗИЧНИЙ І РАДІОФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТИ

Білет 31

1. Властивості функції $y = k/x$ та її графік.
2. Нехай $\log_{12}18 = a, \log_{24}54 = b$. Довести, що $5(a - b) + ab = 1$.
3. В коло радіуса R вписано рівнобедрений трикутник, довжина бічної сторони якого вдвічі більша за довжину основи. В цей трикутник вписано коло. Знайти його радіус.

Білет 32

1. Розклад квадратного тричлена на лінійні множники.
2. У прямокутному трикутнику ABC $[BD]$ — висота, опущена з вершини прямого кута на гіпотенузу AC. Довести, що $\frac{1}{|BD|^2} = \frac{1}{|AB|^2} + \frac{1}{|BC|^2}$.
3. Якщо точка $(x; y)$ з додатними координатами лежить на прямій $x + y - 1 = 0$, то

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

Довести це.

Білет 33

1. Формула n-го члена та суми перших n членів арифметичної прогресії.
2. Довести, що в кожну опуклу піраміду, яка має рівні двогранні кути при сторонах основи, можна вписати сферу.
3. Знайти найменше і найбільше значення функції

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$$

на проміжку $[-2; 2]$.

Білет 34

1. Сума нескінченної спадної геометричної прогресії.
2. Якою фігурою є множина середин всіх конгруентних хорд даного кола?
3. Знайти найбільше значення похідної функції

$$y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 3x \text{ на проміжку } [-1; 1].$$

Білет 35

1. Властивості логарифмічної функції.
2. Точка $(x; y)$ лежить у крузі $x^2 + y^2 \leqslant 2$. Довести, що $|x| + |y| \leqslant 2$. Для яких точок круга $|x| + |y| = 2$?
3. Площа бічної поверхні конуса дорівнює сумі площ основи і осьового перерізу конуса. Визначити кут нахилу твірної до основи конуса.

Білет 36

1. Властивості функції $y = \operatorname{tg} x$ та її графік.

2. Побудувати образ даного ΔABC при гомотетії з центром O і парою відповідних точок M і M_1.

3. Зобразити в прямокутній системі координат множину точок

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\} \cap \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x \leqslant 8\}.$$

Білет 37

1. Залежність між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу.

2. Знайти найменше і найбільше значення функції $y = |x^2 - 4x + 3|$ на проміжку $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$.

3. Відомо, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ і $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.
Довести, що

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{3}{2}.$$

Білет 38

1. Формула тангенса суми двох аргументів.

2. Якщо числа a, b і c задовольняють рівність $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, то $a = b = c$. Довести це.

3. Відстань між центрами двох кіл, що перетинаються, дорівнює d. Радіуси кіл — R і r. Визначити відстань між точками перетину кіл.

Білет 39

1. Тригонометричні функції половинного аргументу.

2. Знайти площу рівнобедреної трапеції, якщо її висота дорівнює h, а бічну сторону видно з центра описаного кола під кутом α.

3. Розв'язати рівняння

$$10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20.$$

Білет 40

1. Теорема про єдиність границі збіжної послідовності.

2. Обчислити площу поверхні кулі, вписаної в трикутну піраміду, всі ребра якої дорівнюють a.

3. Знайти ту первісну функції

$$y = (\sin x + \cos x)^2,$$

графік якої проходить через точку (0; 1).

Білет 41

1. Теорема про границю суми двох збіжних послідовностей.

2. Чи можна з відрізків, конгруентних і паралельних медіанам трикутника, побудувати трикутник?

3. Побудувати графік функції $y = x^3 - x$. На яку множину відображає ця функція проміжок $]-1; 2]$?

Білет 42

1. Необхідна умова збіжності послідовності.

2. Знайти множину значень функції $f(x) = \sin x \cos 2x$.

3. Знайти образ точки M (8; —9) при симетрії відносно прямої, що проходить через точки A (3; —4), B (—1; —2).

Білет 43

1. Похідна суми двох функцій.

2. Знайти розв'язки рівняння

$$|\cos 2x| = |\sin^2 x - a|,$$

які належать проміжкові $[0; 2\pi]$.

3. Нехай a і b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза, h — висота, опущена із вершини прямого кута на гіпотенузу. Довести, що трикутник із сторонами h, $c + h$, $a + b$ — прямокутний.

Білет 44

1. Похідні функцій $y = a^x$ і $y = \log_a x$.

2. Якщо n і m — непарні числа, то $n^2 - m^2$ ділиться на 8. Довести це.

3. Трикутник, в який можна вписати два конгруентні, але різні квадрати (одна сторона квадрата лежить на одній із сторін трикутника, а кінці протилежної сторони — на двох інших сторонах трикутника), рівнобедрений. Довести це.

Білет 45

1. Достатня умова екстремуму функції.

2. Зобразити на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють нерівність $\log_{xy}|y| > 1$.

3. Розв'язати рівняння

$$2\sin 2x = \sqrt{2(1 - \cos 2x)}.$$

Білет 46

1. Похідна добутку двох функцій.

2. Знайти вектор $\vec{a}$, колінеарний з вектором $\vec{b} = (1; -1; 2)$, якщо $|\vec{a}| = 3\sqrt{6}$, а кут між вектором $\vec{a}$ і віссю абсцис тупий.

3. Яким повинен бути кут при вершині рівнобедреного трикутника даної площі, щоб радіус вписаного в цей трикутник кола був найбільший?

Білет 47

1. Ознаки паралельності прямих.

2. Дослідити функцію

$$y = x/(1 - x^2)$$

і побудувати її графік.

3. Послідовність (a_n) задана формулами: $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + n(n-1)/2$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Написати загальний член цієї послідовності і обчислити

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6a_n}{n^3+n+1}.$$

Білет 48

1. Сума кутів трикутника. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника.
2. Довести, що для будь-якого $n \in Z$ число $n^3 - 7n$ ділиться на 6.
3. При яких a рівняння

$$\sqrt{x^2 - \sqrt{x^2 - a}} = a$$

має два розв'язки? Знайти ці розв'язки.

Білет 49

1. Властивості середніх ліній трикутника і трапеції.
2. Довести, що коли $\cos\alpha + \cos\beta = a$ і $\sin\alpha + \sin\beta = b$, то

$$\cos(\alpha + \beta) = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2).$$

3. В якій точці графіка функції $y = x^2$ треба провести до нього дотичну, щоб вона утворила з віссю абсцис кут 45°?

Білет 50

1. Ознаки паралелограма.
2. Знаючи різницю d арифметичної прогресії $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ і число N, обчислити

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{N-1}a_N},$$

якщо $a_1 = d$.

3. Обчислити відстань від точки A $(-1; 3; 0)$ до площини $x - 3y - 2z + 5 = 0$.

Білет 51

1. Існування кола, описаного навколо трикутника.
2. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = 3x - x^2 - \frac{3}{2} \quad \text{і} \quad y = \left|\frac{2x-3}{2}\right|.$$

3. Послідовність (u_n) задано рекурентно:

$$u_1 = 2, \quad u_{n+1} = (2 + u_n^2)/(2u_n).$$

Довести, що ця послідовність спадна. Чому дорівнює $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$?

Білет 52

1. Властивість дотичної до кола.
2. Якщо n — непарне число, то $n^2 - 1$ ділиться на 8. Довести це.
3. Скільки розв'язків залежно від параметра a має рівняння

$$x^2 e^{2-|x|} = 4a?$$

Білет 53

1. Вимірювання кута, вписаного в коло.
2. При якому значенні параметра a функція

$$y = \frac{a^2+1}{x^2+4ax+5a^2+1}$$

має максимум в точці $x = 2$?

3. Довести, що вектори $\vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c}) - \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c})$ та $\vec{c}$ перпендикулярні ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — довільні вектори).

Білет 54

1. Теорема синусів.
2. Довести, що для будь-якого $a \neq 0$ рівняння $ax^3 + x^2 + x + 1 - a = 0$ і $ax^2 + x + 1 - a = 0$ мають спільний корінь, причому тільки один. Знайти його.
3. Розв'язати рівняння

$$\log_{3x}\frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1.$$

Білет 55

1. Ознаки паралельності площин.
2. Для будь-якої хорди AB даного кола відношення $|AB|^2 : |AC|$, де $|AC|$ — відстань точки A від дотичної до кола в точці B, є величина стала. Довести це.
3. Знайти найбільше значення функції $f(x) = \sin x\sqrt{\cos x}$ на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Білет 56

1. Ознака перпендикулярності прямої і площини.
2. Знайти модуль різниці екстремумів функції

$$y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1.$$

3. Дано дві послідовності (a_n) і (b_n). Відомо, що послідовності (a_n) і $(a_n b_n)$ збігаються, а послідовність (b_n) розбігається. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Білет 57

1. Ознака перпендикулярності двох площин.
2. Розв'язати нерівність

$$|x+2|^{1/(x^2-x-6)} \geqslant |x+2|^{2/(x-3)}.$$

3. Довести, що дотичні, проведені до графіка функції $y = (x-4)/(x-2)$ в точках перетину його з осями координат, паралельні між собою.

Білет 58

3. Теорема про три перпендикуляри.
2. Довести, що кути, під якими графіки функцій

$$y = a \sin \frac{x}{a}, \quad y = a \operatorname{tg} \frac{x}{a}, \quad y = a \ln \frac{x}{a}$$

перетинають вісь абсцис, не залежать від величини a.

3. Розв'язати рівняння

$$|x^2-4|+|x^2-5|=1.$$

Білет 59

1. Властивість діагоналі прямокутного паралелепіпеда.
2. Знайти проміжки монотонності та точки екстремумів функції $y = 2^{x^2-4x}$.
3. Скласти рівняння образу сфери $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-5)^2 = 9$: а) при симетрії відносно площини $z = 0$; б) при гомотетії H_M^3, де M — точка з координатами $(-1; 2; 5)$.

Білет 60

1. Формула площі поверхні кулі.
2. З'ясувати графічно, скільки розв'язків має рівняння $11\pi \sin 2x = 4x$.
3. Як пряма $x+y=0$ розміщена відносно кола $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$? Написати рівняння образу даного кола при симетрії відносно прямої $x+y=0$.

ГЕОЛОГІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ; ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ

(спеціальності — економічна кібернетика, математична лінгвістика);

ФАКУЛЬТЕТ МІЖНАРОДНИХ ВІДНОСИН І МІЖНАРОДНОГО ПРАВА

(спеціальність — економічні міжнародні відносини)

Білет 61

1. Властивості функції $y = ax^2+bx+c$ та її графік.
2. Розв'язати нерівність

$$\lg x^2 < \lg^2 x.$$

3. Якщо $3 \sin \alpha = \sin(\alpha + 2\beta)$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 2 \operatorname{tg} \beta$. Довести це.

Білет 62

1. Властивості числових нерівностей.

2. Знайти об'єднання всіх прямих, кожна з яких перетинає дві дані мимобіжні прямі.

3. Обчислити

$$\int_0^\pi \sin x \cos 3x dx.$$

Білет 63

1. Формула коренів квадратного рівняння.

2. Побудувати чотирикутник за трьома кутами й радіусом вписаного кола.

3. Розв'язати нерівність $\sqrt{x-2} > x - 3$.

Білет 64

1. Формула n-го члена і суми перших n членів арифметичної прогресії.

2. На сторонах прямокутного трикутника зовні нього побудовано квадрати і їхні вільні вершини послідовно сполучено відрізками. Знайти площу здобутого шестикутника, якщо гіпотенуза початкового трикутника дорівнює c, а його площа S.

3. Розв'язати рівняння $\sin|x| = |\sin x|$.

Білет 65

1. Сума нескінченної спадної геометричної прогресії.

2. Розв'язати нерівність

$$\frac{|2x-3|-x}{x-2} > 0.$$

3. Написати рівняння дотичних, проведених до кола $(x+1)^2 + y^2 = 9$ із точки $(4; 0)$.

Білет 66

1. Логарифм добутку, степеня і частки.

2. Довести, що для будь-якого натурального числа n справджується рівність

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{n}{2n+1}.$$

3. В якій точці графіка функції $y = \frac{2}{1+x^2}$ дотична до нього паралельна осі абсцис?

Білет 67

1. Властивості функції $y = \operatorname{tg} x$ та її графік.

2. Зобразити на площині таку множину точок:

$$A = \{(x, y) \mid \log_{|y|}(y - x^2 + 4) \leqslant \log_{|y|} 2\}.$$

3. Знайти проміжки монотонності функції

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 - 30x^2.$$

Білет 68

1. Формули зведення.

2. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y = \sqrt{x+1}$ в точці з абсцисою $x = 3$.

3. Обчислити $\log_{30} 8$, якщо $\log_{30} 3 = a$ і $\log_{30} 5 = b$.

Білет 69

1. Теорема про неперервність дробово-раціональної функції.

2. Обчислити границю послідовності

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2^n + 7^n}.$$

3. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} |x|$.

Білет 70

1. Теорема про границю суми двох збіжних послідовностей.

2. Довжини суміжних сторін паралелограма дорівнюють a і b, а кут між його діагоналями дорівнює α. Знайти площу паралелограма.

3. Довести, що графіки функцій $y = x^2 - x$ і $y = x - x^2$ перетинаються під прямим кутом.

Білет 71

1. Похідна добутку двох функцій.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \sqrt[3]{x}$ і $y = x^2$.

3. Зобразити на координатній площині множину розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x - y + 4 \geqslant 0 \\ 3x + y - 1 \leqslant 0 \\ x - 5y \leqslant 0. \end{cases}$$

Білет 72

1. Теорема про загальний вигляд усіх первісних даної функції.

2. Обчислити $\log_{35} 28$, якщо $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.

3. В якій точці дотична до графіка функції $y = x^2$ паралельна прямій $y - 4x + 1 = 0$? Написати рівняння цієї дотичної.

Білет 73

1. Властивості рівнобедреного трикутника.

2. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{|\sin x|}.$$

3. Зобразити на координатній площині множину розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} y > x^2 - x, \\ 2x + y < 2. \end{cases}$$

Білет 74

1. Існування кола, описаного навколо трикутника.
2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} |x| - |y| = \frac{1}{2} \\ xy = -5. \end{cases}$$

3. При яких a і b графіки функцій

$$y = a \cdot 2^{x} + b \quad \text{і} \quad y = b \cdot 2^{-x} + a$$

мають лише одну спільну точку? Знайти цю точку.

Білет 75

1. Теорема Піфагора.
2. Розв'язати рівняння

$$4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 3^{-\cos 2x} = 9.$$

3. Довести, що коли $|x| \leqslant 2$, то

$$3x^5 - 5x^3 - 30x < 40.$$

Білет 76

1. Теорема синусів.
2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y + |x| = 2, \\ y - |x - 1| = 1. \end{cases}$$

3. Якщо $a^2 + b^2 = 11ab$ і $ab \neq 0$, то $\lg \frac{|a-b|}{3} = \frac{1}{2}(\lg|a| + \lg|b|)$. Довести це.

Білет 77

1. Розклад вектора за трьома некомпланарними векторами.
2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0.$$

3. Знайти проміжки монотонності і точки екстремумів функції $y = x^2 e^{-x}$.

Білет 78

1. Властивість діагоналі прямокутного паралелепіпеда.
2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $3x - y^2 = 0$ і $3y - x^2 = 0$.
3. Розв'язати нерівність

$$\frac{1}{\lg x} + \frac{1}{1 - \lg x} > 1.$$

Білет 79

1. Формули площі поверхні і об'єму призми.
2. Знайти вектор $\vec{a}$, для якого $|\vec{a}|\ \vec{i} - \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
3. При якому a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (a-1)x + a - 2 = 0$ найменша?

Білет 80

1. Формули площі поверхні і об'єму конуса.
2. Довести, що для будь-якого $n \in Z$ число $n^3 + 11n + 6$ ділиться на шість.
3. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x - \sin 2x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

БІОЛОГІЧНИЙ, ХІМІЧНИЙ І ФІЛОСОФСЬКИЙ ФАКУЛЬТЕТИ

Білет 81

1. Властивості функції $y = ax + b$ та її графік.
2. Відомо, що $\lg 5 = a$ і $\lg 3 = b$. Обчислити $\log_{30} 8$.
3. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V. Якою повинна бути сторона основи, щоб площа повної поверхні призми була найменша?

Білет 82

1. Формула коренів квадратного рівняння.
2. Обчислити $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$, якщо $\sin\alpha - \cos\alpha = a$.
3. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. На відрізку AB взято таку точку P, що $|AP| : |PB| = m : n$. Виразити $\overrightarrow{OP}$ через $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Білет 83

1. Формула n-го члена і суми перших n членів геометричної прогресії.
2. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + ay = 1. \end{cases}$$
3. Навколо кулі описано циліндр. Знайти відношення площ їх поверхонь і відношення об'ємів.

Білет 84

1. Властивості показникової функції.
2. Побудувати графік функції
$$y = x + 1 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 8x + 16}.$$
3. Довести, що коли $a \operatorname{tg}\alpha = m$ і $b\sin 2\alpha = n$, то
$$\frac{2am}{a^2 + m^2} = \frac{n}{b}.$$

Білет 85

1. Логарифм добутку, степеня і частки.
2. Розв'язати рівняння

$$x^2 - 3|x - 1| = 1.$$

3. Побудувати графіки функцій

$$\text{а) } y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \quad \text{б) } y = 2\sin\left(|x| - \frac{\pi}{4}\right).$$

Білет 86

1. Залежність між тригонометричними функціями того самого аргументу.
2. Обчислити

$$\log_a b + \log_{a^2} b + \log_{a^3} b,$$

якщо $\log_b a = 6$.

3. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику кола до гіпотенузи ділить її на відрізки a і b. Обчислити площу трикутника.

Білет 87

1. Формула тангенса суми двох аргументів.
2. Довести, що сума дробів

$$\frac{a-b}{1+ab}, \quad \frac{b-c}{1+bc}, \quad \frac{c-a}{1+ac}$$

дорівнює їх добутку.

3. Побудувати графік функції $y = \frac{x}{4 - x^2}$.

Білет 88

1. Необхідна умова збіжності послідовності.
2. Розв'язати рівняння $x^2 + 2|x| = a$.
3. Спростити вираз

$$\cos^4 2\alpha - 6\cos^2 2\alpha \sin^2 2\alpha + \sin^4 2\alpha.$$

Білет 89

1. Похідна суми двох функцій.
2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{x - 1}.$$

3. Серед усіх циліндрів, площа повної поверхні яких дорівнює 48π см^2, знайти той, який має найбільший об'єм.

Білет 90

1. Похідна частки двох функцій.
2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} |x| + 2y = 5, \\ 2x + |y - 1| = 3. \end{cases}$$

3. Довести тотожність

$$\frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1} = \frac{2}{3}.$$

Білет 91

1. Достатня умова екстремуму функції.

2. Через точку проведено три прямі, кожна з яких перпендикулярна до даної прямої. Довести, що проведені прямі належать одній площині.

3. Знайти площу фігури, обмеженої лініями

$$y = \sin|x| \quad \text{і} \quad y = 0 \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

Білет 92

1. Теорема про загальний вигляд усіх первісних даної функції.

2. Розв'язати рівняння

$$(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x.$$

3. Довжина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC дорівнює c. Обчислити суму

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{CB}.$$

Білет 93

1. Ознаки паралелограма.

2. Знайти проміжки монотонності і точки екстремумів функції $y = 4|x| - x^2$.

3. Написати рівняння площини, яка проходить через точку A $(-1; 2; 0)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}$ $(2; 3; -1)$.

Білет 94

1. Існування кола, вписаного в трикутник.

2. Нехай $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$. Довести, що

$$f(a) = f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

3. Знайти переріз множин

$A = \{x \mid \sin x \cos x + 3\sin x - \cos x = 3\}$ і $B = \{x \mid |x+1| < 4\}$.

Білет 95

1. Ознаки паралельності прямої і площини.

2. Дано функцію $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$. Знайти $f(\alpha)$, якщо відомо, що $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 4e^{-x}$ і $y = 5 - e^x$.

Білет 96

1. Теорема про три перпендикуляри.

2. Обчислити суму $2^x + 2^{-x}$, знаючи, що $4^x + 4^{-x} = 23$.

3. Довести, що функція $y = 2x + \cos x$ зростає на всій числовій осі.

Білет 97

1. Ознаки паралельності двох площин.

2. При яких m нерівність $x^2 - mx > 2/m$ виконується для всіх $x \in R$?

3. В коло $x^2 + y^2 = 20$ вписано квадрат, одна із вершин якого має координати (2; 4). Знайти інші вершини квадрата.

Білет 98

1. Формула площі поверхні і об'єму піраміди.

2. Побудувати графіки функцій

$$y = \sqrt{2-x} \text{ і } y = \sqrt{2-|x|}.$$

3. Довести, що

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b.$$

Білет 99

1. Формула площі поверхні і об'єму циліндра.

2. Зобразити на площині множину точок

$$\{(x;\ y) \mid y - \sqrt{1-x^2} \leqslant 0\} \cap \{(x;\ y) \mid y + 2 > |x|\}.$$

3. Довести, що трикутник з вершинами A (2; 1), B (3; 0), C (1; 5) тупокутний. Обчислити косинус тупого кута.

Білет 100

1. Формула площі поверхні сфери.

2. З'ясувати, чи монотонна послідовність $a_n = \frac{n-(-1)^n}{n+1}$. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{x^3+1}{3}$ у точці перетину його з віссю абсцис.

Розділ V

ЗАДАЧІ

Спростити вирази:

1. $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

2. $\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^3+b^3+c^3-3abc}$.

3. $\frac{a+b}{ax+by}+\frac{a-b}{ax-by}+\frac{2(a^2x+b^2y)}{a^2x^2+b^2y^2}-\frac{4(a^4x^3-b^4y^3)}{a^4x^4-b^4y^4}$.

4. $\frac{ab(x-c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{bc(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{ca(x-b)^2}{(c-b)(b-a)}$.

5. $\frac{(x+a)(x+b)}{(a-c)(b-c)}+\frac{(x+b)(x+c)}{(b-a)(c-a)}+\frac{(x+c)(x+a)}{(c-b)(a-b)}$.

6. $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)\ldots\left(a^{2^{n-1}}+\frac{1}{a^{2^{n-1}}}\right)$.

7. Обчислити

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{b}{c-a}+\frac{a}{b-c}\right),$$

знаючи, що $a+b+c=0$.

8*. Обчислити вираз

$$\frac{(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)}{(a+b+c+d)^2}.$$

при умові, що $ab=cd$.

9*. Довести, що коли $a+b=1$, то

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

10*. Довести, що коли $x^2+y^2=(x+y-z)^2$, то

$$\frac{x^2+(x-z)^2}{y^2+(y-z)^2}=\frac{x-z}{y-z}.$$

Довести тотожності:

11. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(ay-bx)^2$.
12. $2(2x-y)^3-27y^2x=(x-2y)(4x+y)^2$.
13. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3-3(b-c)(c-a)(a-b)=0$.
14. $4(x^2+x+1)^3-27x^2(x+1)^2=(x-1)^2(2x+1)^2(x+2)^2$.
15. $(a+b)^4+a^4+b^4=2(a^2+ab+b^2)^2$.
16. $(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$.
17. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$.

18. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-1)=x^6-1.$

19. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)+(a-b)(b-c)(c-a)\times$ $\times(ab+bc+ca)=0.$

20. $\dfrac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}=x+y+z.$

Розкласти на множники:

21. $a^3-3a^2+3a-2.$

22. $a^4+a^3-3a^2+7a-6.$

23. $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12.$

24. $(x^2-x-1)^2-6(x^2-x)+11.$

25. $x^3+9x^2+11x-21.$

26. $x^4+2x^3-16x^2-2x+15.$

27. $x^4+x^2+1.$

28. $(1+a^2)b^2+2(a-b)(1+ab)+1.$

29. $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2).$

30. $(x-y)(x+y)^2+(y-z)(y+z)^2+(z-x)(z+x)^2.$

Довести, що для допустимих значень x і y виконуються рівності:

31. $|x+\sqrt{x^2-y^2}|+|x-\sqrt{x^2-y^2}|=|x+y|+|x-y|,$

32. $\left|\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right|+\left|\dfrac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|=|x|+|y|.$

Спростити вирази:

33. $\dfrac{a^3-3a+(a^2-1)\sqrt{a^2-4}-2}{a^3-3a+(a^2-1)\sqrt{a^2-4}+2},\quad a\geqslant 2.$

34. $\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}},\quad x=\dfrac{2a}{b+\dfrac{1}{b}},\quad a>0.$

35. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right),\quad x=\dfrac{a^2+b^2}{2ab},$ $b>a>0.$

36. $\left(\dfrac{1-x^2}{\left(\dfrac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)}+1\right)^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2x+x^2}},\quad x>1.$

37. $\dfrac{m+n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}:\left(\dfrac{m+n}{\sqrt{mn}}+\dfrac{n}{m-\sqrt{mn}}-\dfrac{m}{n+\sqrt{mn}}\right)+\sqrt{(1-\sqrt{n})^2},$ $m>0,\ n>1.$

38. $\left(1-\dfrac{1+xy}{1+\sqrt[3]{xy}}\right):\left(\dfrac{1-\sqrt[3]{xy}}{(\sqrt{xy})^{-1}}-\dfrac{\sqrt[3]{xy}-1}{(1+\sqrt{xy})(1-2xy+x^2y^2)^{-1/2}}\right),$ $0<xy<1.$

39. $\left(\sqrt{a}+\frac{c-\sqrt{ac}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}\right):\left(\frac{a}{\sqrt{ac}+c}+\frac{c}{\sqrt{ac}-a}-\frac{a+c}{\sqrt{ac}}\right)+$
$+\sqrt{(1-\sqrt{a})^2}, \quad a>1, \quad c>0.$

40. $\left(\sqrt{a^3-2a^2+a}+\frac{4a\sqrt{a}}{\sqrt{(1-a)^2}}\right):\left(\frac{a^{3/2}}{a-1}-\left(\frac{1-a}{\sqrt{a}}\right)^{-1}\right), \quad a>1.$

41. $\frac{a-b}{\sqrt{b}}x^2-2ax+a\sqrt{b}, \quad x=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}, \quad a>0, \quad b>0.$

42. $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3+\frac{2a^2}{\sqrt{a}}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}+\sqrt{(3-\sqrt{a})^2}, \quad a>9.$

43. Обчислити 2^x+2^{-x}, знаючи, що $4^x+4^{-x}=47$.

44. Нехай a — додатне число, відмінне від 1. Покладемо

$$s(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}, \quad c(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}.$$

Довести, що:

а) $c^2(x)-s^2(x)=1$; б) $s(2x)=2s(x)c(x)$;

в) $c(2x)=c^2(x)+s^2(x)$;

г) $s(x+y)=s(x)c(y)+s(y)c(x)$;

д) $c(x-y)=c(x)c(y)-s(x)c(y)$.

Спростити вирази:

45. $\frac{\lg^2(x^3)}{\lg^3(x^2)}\lg\sqrt{x}.$

46. $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}.$

47. Нехай $\lg 2=a$ і $\log_2 7=b$; обчислити $\lg 56$.

48. Обчислити $\log_6 16$, якщо $\log_{12}27=a$.

49. Спростивши вираз

$$\log_4\frac{x^2}{4}-2\log_4 4x^4,$$

обчислити його значення при $x=-2$.

50. Відомо, що $\log_2 14=a$. Обчислити $\log_{49}32$.

51. Обчислити $\log_{15}49$, якщо: $\log_7 9=a$, $\log_7 45=b$.

52. Довести, що коли $\log_{14}2=a$ і $\log_{14}5=b$, то $\log_7 50=\frac{a+2b}{1-a}$.

53. Довести, що коли $a^2+b^2=11ab$ і $ab\neq 0$, то

$$\ln\frac{|a-b|}{3}=\frac{1}{2}(\ln|a|+\ln|b|).$$

54. Довести, що коли a і b — довжини катетів прямокутного трикутника, а c — довжина його гіпотенузи, причому $c-b\neq 1$ і $c+b\neq 1$, то

$$\log_{(c+b)} a+\log_{(c-b)} a=2\log_{(c+b)} a \log_{(c-b)} a.$$

55. Якщо $y=10^{\frac{1}{1-\lg x}}$ і $z=10^{\frac{1}{1-\lg y}}$, то $x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$. Довести це.

56. Якщо $\frac{x(y+z-x)}{\lg x}=\frac{y(z+x-y)}{\lg y}=\frac{z(x+y-z)}{\lg z}$, то

$$x^y y^x=z^x x^z=y^z z^y.$$

Довести це.

Спростити вирази:

57. $\frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos 2\alpha+\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(2\alpha+\pi)}\,\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

58. $\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}$, $\alpha\neq\frac{k\pi}{4}$, $k\in Z$.

59. $[1-\sin(2\pi-\alpha)+\cos(3\pi+\alpha)]\left[1-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\right.$ $\left.+\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)\right]$.

60. $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$.

61. $1-4(\sin^4 x-\sin^6 x+\cos^4 x-\cos^6 x)$.

62. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)$.

Довести тотожності:

63. $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)=1+\sin 2\alpha\sin 2\beta$.

64. $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$.

65. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$.

66. $3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha=128\sin^4\alpha\cos^4\alpha$.

67. $4\sin^3\alpha\cos 3\alpha+4\cos^3\alpha\sin 3\alpha=3\sin 4\alpha$.

68. $\cos 9x+3\cos 7x+3\cos 5x+\cos 3x=8\cos 6x\cos^3 x$.

69. $32\sin^2 x\cos^4 x+2\cos 4x+\cos 6x=2+\cos 2x$.

70. $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\cos^2 2\alpha+\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$.

71. $\operatorname{tg} 3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

72. $\dfrac{(1+\operatorname{tg} x)^2-2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\sin 2x+\cos 2x.$

73. $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x=3\sin 4x.$

74. $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{ctg}8\alpha=\operatorname{ctg}\alpha.$

75. $8\sin^4 x+4\cos 2x=3+\cos 4x.$

76. $16\sin^5 x+5\sin 3x=\sin 5x+10\sin x.$

77. $32\cos^6\alpha-\cos 6\alpha=10+15\cos 2\alpha+6\cos 4\alpha.$

78. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{4}+4\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{4}+\operatorname{tg}\alpha=6\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}+4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$

79. $\cos^6\alpha=\frac{5}{16}+\frac{15}{32}\cos 2\alpha+\frac{3}{16}\cos 4\alpha+\frac{1}{32}\cos 6\alpha.$

80. $\sin^4\alpha\cos^2\alpha=\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\cos 2\alpha-\frac{1}{16}\cos 4\alpha+\frac{1}{32}\cos 6\alpha.$

81. $\sin^2\alpha\cos^4\alpha=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos 2\alpha-\frac{1}{16}\cos 4\alpha-\frac{1}{32}\cos 6\alpha.$

82. $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2},\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$

83. $\cos 9x+3\cos 7x+3\cos 5x+\cos 3x=8\cos 6x\cos^3 x.$

84. $3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha=128\sin^4\alpha\cos^4\alpha.$

85. $\sin 9x+3\sin 7x+3\sin 5x+\sin 3x=8\sin 6x\cos^3 x.$

86. $4\sin^3\alpha\cos 3\alpha+4\cos^3\alpha\sin 3\alpha=3\sin 4\alpha.$

87. $\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$

88. $\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)=\dfrac{2(\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta)}{(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)^2}.$

89. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{4}+4\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{4}-6\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}-4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}+\operatorname{tg}\alpha=0.$

90. Довести, що коли $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, то

$$1+\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

91. Якщо $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Довести це.

92. Якщо $\cos(2\alpha+\beta)=1$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Довести це.

93. Довести, що коли $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то:

а) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+1.$

б) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

в) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$

94. Якщо $\sin(2\alpha + \beta) = 3\sin\beta$, то $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2\operatorname{tg}\alpha$. Довести це.

95. Довести, що коли $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 3\operatorname{tg}\alpha$, то

$$\sin 2(\alpha + \beta) + \sin 2\alpha = 2\sin\beta.$$

Довести нерівності:

96. $ab + ac + bc \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

97. $(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc,\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0$.

98. $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc,\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0$.

99. $2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b), a \geqslant 0, b \geqslant 0,\ c \geqslant 0$.

100. $(a^2 + 2)/\sqrt{a^2 + 1} \geqslant 2$.

101. $\frac{1}{3} \leqslant \frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a + 1} \leqslant 3$.

102. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geqslant 64ab(a + b)^2,\ \ a \geqslant 0, b \geqslant 0$.

103. $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

104. Якщо точка $(x;\ y)$ лежить на прямій $2x + 4y = 1$, то $x^2 + y^2 \geqslant 1/20$. Довести це.

105. Якщо точка $(x;\ y)$ належить прямій $y = 2 - x$, то $x^4 + y^4 \geqslant 2$. Довести це.

106. Якщо точка $(x;\ y)$ належить колу $x^2 + y^2 = 1$, то $|x + y| \leqslant \sqrt{2}$. Довести це.

107. Якщо точка $(x;\ y;\ z)$ належить площині $x + y + z = 0$, то $xy + yz + zx \leqslant 0$. Довести це.

108. Точка $(x;\ y;\ z)$ з додатними координатами лежить на площині $x + y + z = 1$. Довести, що $(1 - x)(1 - y)(1 - z) \geqslant 8xyz$.

109. Якщо точка $(x;\ y;\ z)$ належить площині $x + y + z = 3$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 3$. Довести це.

110. Довести, що коли точка $(x;\ y;\ z)$ лежить на сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то

$$-\frac{1}{2} \leqslant xy + yz + zx \leqslant 1.$$

111. Довести, що для будь-якого натурального n справедлива нерівність

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}.$$

112. Довести, що для будь-якого натурального n справедлива нерівність

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < 1/\sqrt{n}.$$

113. Довести, що для будь-якого натурального n справедлива нерівність

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2.$$

114. Довести, що для будь-якого натурального $n \geqslant 2$ справедлива нерівність

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

115. Добуток додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дорівнює 1. Довести, що

$$(1+a_1)(1+a_2)\ \ldots\ (1+a_n) \geqslant 2^n.$$

Довести нерівності:

116. $\sin^4 x + \cos^2 x - \sin x \sin 2x \geqslant 0$.

117. $\cos^4 x + 4\sin^2 x \geqslant 2\cos x \sin 2x$.

118. $\frac{1-|\sin x|}{1+|\sin x|} \leqslant \cos^2 x$.

119. Довести, що коли $\alpha \in]0; \pi[$, то

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg}\alpha.$$

120. Довести, що коли $\operatorname{tg}\alpha = n \operatorname{tg}\varphi$, $n > 0$, то

$$\operatorname{tg}^2(\alpha - \varphi) \leqslant \frac{(n-1)^2}{4n}.$$

121. Довести, що для будь-якого $n \in Z$ число

$$\frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$$

ціле.

122. Якщо n не ділиться на 3, то $n^2 - 1$ ділиться на 3. Довести це.

123. Довести, що для будь-якого $n \in Z$ число $n^3 + 5n$ ділиться на 6.

124. Якщо p — просте число, більше від 3, то принаймні одне з чисел $p + 10$ або $p + 14$ не просте. Довести це.

125. Довести, що при будь-якому $n \in Z$ число $n^5 - n$ ділиться на 30.

126. Які натуральні числа можна, а які не можна подати в вигляді добутку двох цілих додатних множників, менших за саме число?

127. Довести, що будь-яке просте число $p > 2$ можна подати як різницю квадратів двох натуральних чисел.

128. Довести, що для будь-якого натурального числа n вираз $10^n + 18n - 28$ ділиться на 27 без остачі.

129. Довести, що для будь-якого натурального числа n вираз $9^{n+1} - 8n - 9$ ділиться на 16 без остачі.

130. Довести, що для будь-якого натурального числа n число $a_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ ділиться на 8.

131. Знайти арифметичну прогресію, якщо для кожного n сума її перших членів дорівнює $2n^2 - n$.

132. Знайти геометричну прогресію, якщо сума трьох її перших членів дорівнює 21, а добуток цих членів дорівнює 64.

133. Знайти знаменник нескінченно спадної геометричної прогресії, якщо сума перших шести її членів у 7 разів більше від суми решти членів.

134. Знайти чотири числа, з яких перші три утворюють арифметичну прогресію, а останні три — геометричну, якщо сума двох крайніх чисел дорівнює 14, а сума середніх становить 12.

135. Цифри трицифрового числа a утворюють арифметичну прогресію. Якщо до цього числа додати 990, то вийде число, цифри якого утворюють геометричну прогресію. Знайти число a.

136. Сума перших шести членів геометричної прогресії дорівнює 10, а сума наступних шести її членів дорівнює 20. Знайти суму перших вісімнадцяти членів цієї прогресії.

137. Перший, двадцятий і п'ятдесят восьмий член арифметичної прогресії утворюють геометричну прогресію. Знайти знаменник цієї геометричної прогресії.

138. Числа, що виражають довжини сторін прямокутного трикутника, утворюють арифметичну прогресію. Менший катет цього трикутника дорівнює a. Знайти площу трикутника.

139. Чи існує прямокутний трикутник, синуси кутів якого утворюють геометричну прогресію?

140. Знайти таке ціле число x, для якого $1 + 2 + 3 + \ldots + x$ є трицифровим числом, всі цифри якого однакові.

141. Чому дорівнює x, якщо числа $\ln 2$, $\ln(2^x - 1)$ і $\ln(2^x + 1)$ утворюють арифметичну прогресію?

142. Чотири числа утворюють геометричну прогресію. Сума цих чисел дорівнює 15, а сума їх квадратів дорівнює 85. Знайти ці числа.

143. Числа 3, $3 \log_y x$, $3 \log_z y$, $7 \log_x x$ утворюють арифметичну прогресію. Довести, що $x^{18} = y^{21} = z^{28}$.

144. Якщо $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$, то числа a, b, c або всі рівні, або утворюють геометричну прогресію (в написаному порядку). Довести це.

145. Числа xy, x^x, $\frac{1}{y}$ — послідовні члени геометричної, а $\log_x(y + 1)$, $-\frac{1}{2}$, $\log_x(2 - y)$ — послідовні члени арифметичної прогресії. Знайти x і y.

146. Сума S нескінченної спадної геометричної прогресії на 2 більша від суми перших трьох її членів. Сума перших шести членів цієї прогресії дорівнює 3. Обчислити S.

147. Довести, що числа 49, 4489, 444 889, ..., які утворюються, коли вставляти 48 всередину попереднього числа, є квадратами цілих чисел.

Обчислити суми:

148. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$.

149. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n - 1)^2 + n^2$.

150. $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + \ldots + (n - 1)(2^{n-1} - 1) + n(2^n - 1)$.

151. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}$.

152. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

153. $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)^2 + \cdots + \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)^2$.

154. Довести, що для будь-якого натурального числа $n \geqslant 2$ справджується рівність

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

155. Довести, що для будь-якого натурального числа n справджується рівність

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=-\frac{2n+1}{2n-1}.$$

156. Які з поданих далі послідовностей (a_n) обмежені:

а) $a_n=\sin\frac{\pi n}{8}$; б) $a_n=\frac{n^2-1}{n+100}$;

в) $a_n=\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+2}$; г) $a_n=|100-n|-n$.

157. Знайти найменший член послідовності

а) $a_n=n^2-7n+2$; б) $a_n=n^2+\frac{100}{n^2}$.

158. Знайти найбільший член послідовності

а) $a_n=\frac{n}{100+n^2}$; б) $a_n=\frac{n^2}{2^n}$.

159. Обчислити суму n перших членів послідовності (a_n), якщо $a_n=a^n(a^n-1)$.

160. Обчислити суму n перших членів послідовності (a_n), якщо $a_n=na^{n-1}$.

161. Обчислити суму n перших членів послідовності (a_n), якщо $a_n=3n^2-6n+4$.

Обчислити границі послідовностей:

162. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+9}{2n+3}$.

163. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1}$.

164. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+100}-\sqrt{n+10})$.

165. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{n^2+1}}{n+2}$.

166. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$.

167. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$.

168. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}}{1-(25)^n}$.

169. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{\sqrt{n^4+2n+3}}$.

170. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{\sqrt{4n^4-2n+5}}$.

171. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+5^n}$.

172. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+4^n+6^n}{3^n+5^n+7^n}$.

173. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n+1})$.

174. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

175. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

176. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{k(k+1)}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}+\cdots+\dfrac{1}{(k+n-1)(k+n)}\right)$.

177. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

178. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}\right)$.

179. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2-2n}{4^{n+1}+1}$.

180. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\pi+\pi^{-1})^2+(\pi^2+\pi^{-2})^2+\cdots+(\pi^n+\pi^{-n})^2-2n}{\pi^{2n+1}}$.

181. Послідовність (y_n) задано формулами

$$y_1=1, \quad y_{n+1}=\frac{1}{n^2}y_n \quad (n=2, 3, \ldots).$$

Знайти y_n як функцію n. Чому дорівнює $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$?

182. Послідовність (a_n) задано формулами

$$a_1=0, \quad a_2=1, \quad a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \quad (n=3, 4, \ldots).$$

Написати формулу загального члена цієї послідовності і обчислити

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n^2-n+2}}.$$

183. Послідовність (a_n) задано формулами $a_1=2$,

$$a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}\right) \quad (n=2, 3, \ldots).$$

Довести, що вона збігається, і обчислити її границю.

184. Послідовність (a_n) задано формулами

$$a_1 = \sqrt{3}, \quad a_n = \sqrt{6 - \frac{5}{a_{n-1}^2}} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Довести, що ця послідовність збігається, і обчислити її границю.

Розв'язати рівняння:

185. $\frac{3}{ax+2} - \frac{2}{3x+a} = 0.$

186. $|x-2| + |x+2| = 4.$
187. $||x-1| - x + 2| = |x-3|.$
188. $|x^2-4| + x^2 = 4.$
189. $x^2 - 6|x| - 7 = 0.$
190. $x|x| + |2x-3| = 4.$
191. $|x^2-9| + |x-2| = 5.$
192. $|x^2-4| + |x^2-5| = 1.$
193. $x^3 + 5x - 6 = 0.$

194. $x^2 + \frac{4}{x^2} = x - \frac{2}{x} + 4.$

195. При яких a рівняння

$$x^2 + x - a = 0 \quad \text{і} \quad x^2 - ax + 1 = 0$$

мають спільний корінь?

196. При яких a рівняння

$$(1-2a)x^2 - 6ax - 1 = 0 \quad \text{і} \quad ax^2 - x + 1 = 0$$

мають спільний корінь?

Розв'язати рівняння:

197. $\sqrt{x - 1 + \sqrt{x+2}} = 3.$

198. $\sqrt{2x^2+5x-3} = x + 1.$

199. $\sqrt{x + 6 - 4\sqrt{x+2}} + \sqrt{11 + x - 6\sqrt{x+2}} = 1.$

200. $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} = 1.$

201. $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{2x+1}.$

202. $\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x} = 0.$

203. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$

204. $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1.$

205. $\sqrt{a-x^2} = x - 1.$

206. $|1 - 2\sqrt{a-x^2}| = 2x - 1.$

Розв'язати рівняння:

207. $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.

208. $2 \cdot 7^x - 3 \cdot 2^x = \frac{43}{7} \cdot 14^{\frac{x}{2}}$.

209. $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 5 \cdot 6^{\frac{x}{2}}$.

210. $5^{3x} + 9 \cdot 5^x + 27(5^{-3x} + 5^{-x}) = 64$.

211. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

212. $4^x - 2^{x+2} = 4a$.

213. $\log_3(4 \cdot 3^x - 1) = 2x + 1$.

214. $\log_4(x + 12)\log_x 2 = 1$.

215. $\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7$.

216. $\log_2|x| + \log_{|x|} 2 = \frac{5}{2}$.

217. $x^{2+\log_2 x} = 8$.

218. $x^{\lg x} = 100x$.

219. $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14$.

220. $|\log_2|x|| = 4 - \frac{1}{2}(|x+3| + |x-3|)$.

221. $4 \cdot 2^{1-|x|} = |x+4| + |x-4| - 6$.

222. $\sin x\sqrt{8\cos^2 x} = 1$.

223. $\sqrt{\sin x} + \cos x = 0$.

224. $2\sin 2x = 3(\sin x + \cos x)$.

225. $\sin 2x - \cos 2x = 1 - 2(\cos x - \sin x)$.

226. $(\cos x - \sin x)^2 = \sin x + \cos x$.

227. $\sin 7x + \cos 2x = -2$.

228. $\sin^2 x + \cos^4 2x = 2$.

229. $\cos 3x \cdot \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = 0$.

230. $\sin 2x - 2\cos 2x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$.

231. $\sin^2 x\cos x - 3\cos^3 x = \sin x - 2\cos x$.

232. $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x} + 2 = 0$.

233. $\frac{1-\sin x}{|1-\sin x|}\sin 2x + \sqrt{2}\cos x = 0$.

234. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x.$

235. $\operatorname{tg}|x|=|\operatorname{tg} x|.$

236. $\frac{\pi}{2\sin x}=\left|x-\frac{\pi}{2}\right|-\left|x+\frac{\pi}{2}\right|.$

237. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}\operatorname{tg} x=|x|-|x-\pi|.$

238. $4^{\operatorname{tg}^2 x}+2^{\frac{1}{\cos^2 x}}=80.$

239. $9^{\cos^2 x}+3^{\cos 2x}=12\cdot 9^{\sin x\cos x}.$

240. $(\sin x)^{-\sin x}-1=\operatorname{ctg}^2 x.$

241. $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x)=2.$

242. $\log_2(\cos x)+\log_{1/2}(-\sin x)=0.$

243. $\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x).$

244. З'ясувати, при яких a рівняння

$$(a^2+2)\sin^2 x+4a\sin x\cos x=a^2+3$$

має розв'язки, і знайти їх.

245. При яких a рівняння

$$2a\cos^2 x+(a^2-2)\cos x-a=0$$

має розв'язки? Знайти їх.

246. При яких a рівняння

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{a}{2}$$

має розв'язки? Знайти їх.

Розв'язати системи рівнянь:

247. $\begin{cases}|2x-1|-y=2,\\ x+1=|4-y|.\end{cases}$

248. $\begin{cases}x+2|y|=3,\\ |x|-y=3.\end{cases}$

249. $\begin{cases}ax+|y|=1+a,\\ x+ay=1-a.\end{cases}$

250. $\begin{cases}x-|y+1|=1,\\ x^2+y=10.\end{cases}$

251. $\begin{cases}x+y=2,\\ xy-z^2=1.\end{cases}$

252. $\begin{cases}x+y+z=2,\\ 2xy-z^2=4.\end{cases}$

253. $\begin{cases}|xy|-y^2=0,\\ (x+2y)^2=4-x^2.\end{cases}$

254. $\begin{cases}x^2+y^2+xy=a^2,\\ x+y+\sqrt{xy}=a,\\ a\neq 0.\end{cases}$

255. $\begin{cases}x^3+y^3=1,\\ x^2y+2xy^2+y^3=2.\end{cases}$

256. $\begin{cases}(x+y)(x^2-y^2)=9,\\ (x-y)(x^2+y^2)=5.\end{cases}$

257. $\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+1} = 2y-1, \\ |x|+y^2=1. \end{cases}$ 258. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ x+xy+y=9. \end{cases}$

259. $\begin{cases} x+y-\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{6}{x-y}, \\ x^2+y^2=41. \end{cases}$ 260. $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases}$

261. $\begin{cases} x^{x+y}-y^{12}=0, \\ y^{x+y}-x^3=0, \quad x>0, \quad y>0. \end{cases}$

262. $\begin{cases} \log_3 x + 4^{\log_2 \sqrt{y}} = 5, \\ x^y = 81. \end{cases}$ 263. $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$

264. $\begin{cases} \log_y x + \log_y x = 2, \\ x^2 + y = 6y^{\log_y 2}. \end{cases}$ 265. $\begin{cases} x^{2y} = 16 + 6x^y, \\ x^{2y} + 5 = yx^y + 5y^2. \end{cases}$

266. $\begin{cases} yx^{\log_y x} = x^{5/2}, \\ \log_4 y \log_y (y-3x) = 1. \end{cases}$

267. $\begin{cases} 2\log_{y^2} x - \log_{1/x} y = \frac{10}{3}, \\ xy = 81. \end{cases}$ 268. $\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y. \end{cases}$

269. $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1. \end{cases}$ 270. $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -2\sqrt{3}, \\ x-y=\frac{\pi}{3}. \end{cases}$

271. $\begin{cases} 2\cos x + 3\operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}, \\ 3\cos x - 2\operatorname{tg} y = \frac{5\sqrt{3}}{6}, \end{cases}$ 272. $\begin{cases} 2\operatorname{tg} x + \cos y = \frac{1}{2}, \\ 9^{\cos y} - 81^{\operatorname{tg} x} = 2. \end{cases}$

273. При яких a система рівнянь

$$\begin{cases} x-y=a(1+xy), \\ 2+x+y+xy=0 \end{cases}$$

має лише один розв'язок?

274. Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a. \end{cases}$$

в залежності від параметра a?

275. При яких a система рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=a \end{cases}$$

має лише один розв'язок? Знайти його.

276. Довести, що коли система

$$\begin{cases} a(x^2+y^2)+x+y=\lambda, \\ x-y=-\lambda \end{cases}$$

має розв'язки для будь-якого λ, то $a=0$.

277. При яких a будь-який розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} ax+y=\frac{1}{2}(a-1)^2, \\ |x|y-ax|y|+y=1 \end{cases}$$

задовольняє умові $x+y=0$?

278. При яких a система рівнянь

$$\begin{cases} \sin x\cos 2y=a^2+1, \\ \cos x\sin 2y=a \end{cases}$$

має розв'язки? Знайти розв'язки системи.

279. При яких a система рівнянь

$$\begin{cases} \cos x-\cos y=2a, \\ \cos x\cos y=a^2+1 \end{cases}$$

має розв'язки? Знайти розв'язки системи.

Розв'язати нерівності:

280. $\frac{(x+4)(x^2-5x+4)}{x(x-2)}>0.$

281. $x+5-\frac{5}{x+4}<\frac{x}{x+4}.$

282. $\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}<\frac{6}{x-1}.$

283. $\frac{1}{x+1}+\frac{2x-1}{x^3+1}<\frac{2}{x^2-x+1}.$

284. $|x+1|-|x-2|<|x-3|.$

285. $|x-3|+|x+3|\leqslant 14.$

286. $x+|1-|x||<2.$

287. $x^2-3|x-1|>1.$

288. $x^2+4x+3<3|x+1|.$

289. $x+|x|>x^2-3.$

290. $-2<\frac{x-3}{2x+5}<3.$

Розв'язати системи нерівностей:

291. $\begin{cases} x^2-64<0, \\ x^2-3|x|+2>0. \end{cases}$ **292.** $\begin{cases} \frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}<\frac{8}{x^2-1}, \\ \frac{1}{4-x^2}>0. \end{cases}$

293. При яких a рівняння

$$(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$$

має розв'язки? Дослідити знаки розв'язків в залежності від параметра a.

294. При яких a нерівність

$$(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2>0$$

справедлива для будь-яких $x \in R$?

295. При яких a нерівність

$$(a+1)x^2+ax+a<0$$

справедлива для будь-якого $x \in R$?

296. При яких a всі корені рівняння

$$(1-a)x^2+3ax-4a=0$$

більші від 1?

297. При яких a рівняння

$$x^2+x+a(1-|a|)=0$$

має розв'язки різних знаків?

298. При яких a всі корені рівняння

$$2ax^2+(a+2)x+1=0$$

належать проміжку $]-2; 0]$?

299. При яких a всі корені рівняння

$$a^2x^2-ax-2=0$$

лежать поза проміжком $[-1; 1]$?

300. При яких a проміжок $[-1; 1]$ належить множині розв'язків нерівності

$$a^4+a(a^2-x)-x^2>0?$$

301. При яких a проміжок $[-2; 0]$ належить множині розв'язків нерівності

$$x^2+a(1-a)x-a^3<0?$$

Розв'язати нерівності:

302. $\sqrt{2x-1}>\sqrt{2x+15}-\frac{10}{\sqrt{2x-1}}$.

303. $\sqrt{3-x}>x-1$.

304. $\sqrt{4-x^2}\leqslant x+1$.

305. $\sqrt{x^2+x-6}>x-3$.

306. $\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x}\geqslant 0$.

307. $\sqrt{4-x^2}\geqslant\frac{1}{x}$.

308. $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1$.

309. $\frac{\sqrt{16-x^4}}{x}<1.$

310. $2x+\sqrt{a^2-x^2}>0.$

311. $\sqrt{1-x^2}>a-x.$

312. $2^x-7>2^{3-x}.$

313. $\frac{64}{9-3^x}-3^x>7.$

314. $\sqrt{4^x-2^{x+2}+4}+4^x+2>4\cdot 2^x.$

315. $(x^2-8x+13)^{x-6}>1.$

316. $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}}<1.$

317. $|x+1|^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\geqslant|x+1|^{\frac{2}{x-4}}.$

318. $\frac{\lg^2 x+\lg x-6}{\lg x}>0.$

319. $\frac{\lg^2 x-4\lg x+5}{2\lg x-3}<1.$

320. $\frac{1}{\log_2 x}\leqslant\frac{1}{\log_2\sqrt{x+2}}.$

321. $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{1-\log_2 x}<1.$

322. $\log_{|x+5|}2\log_2(x^2-3x)\geqslant 1.$

323. $\log_{x^3}\frac{|x-5|}{6x}+\frac{1}{3}\geqslant 0.$

324. $\log_2\left(\log_3\frac{x+1}{x-1}\right)<\log_{1/2}\left(\log_{1/3}\frac{x-1}{x+1}\right).$

325. $\log_2(9-4^x)>3-2x.$

326. $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\frac{24-2x-x^2}{14}>1.$

327. $\log_{4/x}2>\log_2 x.$

328. $\left(\frac{1}{2}\right)^{(\log_{1/2}x)^2}\leqslant x^3.$

329. $\log_{\frac{2x}{1+x^2}}(2-x)+1>0.$

330. $\log_{\frac{1+x^2}{2x}}(2-x^2)<2.$

331. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3(x^2-2x-3)}>1.$

332. $\log_{(x^2-6x+8)}(x-2)>0.$

333. $\sqrt{\log_6(x^2-3x+2)}<1.$

334. $x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2}>\frac{1}{x}.$

335. $\log_2(2^x-1)\log_{1/2}(2^{x+1}-2)>-2.$

336. $\dfrac{1+\log_a^2 x}{1+\log_a x} > 1.$ 337. $\log_{(1-a^2)}(1-x^2) \geqslant 1.$

338. $\log_{1/x}(a-x) < 1.$ 339. $\log_{(x+a)} a(x-a) < \log_{(x+a)} a^2.$

Знайти проміжки спадання функцій:

340. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 21x^2 + 72x - 3.$

341. $f(x) = \frac{6}{5}x^5 + 9x^4 + 10x^3 - 66x^2 - 240x + 1.$

342. $f(x) = x^2 - 8x - 24\ln x + 2.$

343. $f(x) = 3\ln(x+1) + 7\ln(x+2) - 6\ln(x-1) + 2.$

344. $f(x) = 4^{x+1} - 6\cdot 2^x - x\ln 4 + 2.$

Знайти проміжки зростання функцій:

345. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 33x - 18\ln x - 1.$

346. $f(x) = \frac{2}{3}\ln(3x+1) + \ln\frac{x-1}{x+1} + 3.$

347. $f(x) = 2\ln(x-1) - \ln(x+1) - 3x + 2.$

348. $f(x) = 4^x - 6\cdot 2^x + x\ln 16 - 1.$

Знайти проміжки монотонності і точки екстремумів функцій:

349. $f(x) = 12|x| - x^3.$

350. $f(x) = |||x| - 1| - 2|.$

351. $f(x) = ||x^2 - 4| - 5|.$

352. $f(x) = xe^{-5x}.$

353. $f(x) = e^x\sqrt{\left|x - \frac{3}{2}\right|}.$

При яких значеннях x дорівнюють нулю похідні таких функцій:

354. $f(x) = 5(\sin x - \cos x) + \sqrt{2}\cos 5x.$

355. $f(x) = 6\ln\cos x + 3\ln\cos 2x - 2\ln\cos 3x.$

356. $f(x) = 1 - 5\cos 2x + 2(\sin x - \cos x) - 2x.$

357. $f(x) = \sqrt{2}(1 + \sin x - \cos x) + \ln\operatorname{ctg} x.$

358. $f(x) = \cos^3 x - \sin^3 x + 3(\sin x - \cos x) - 3x + 1.$

Знайти найменше значення функцій:

359. $f(x) = ||x - 1| - 2|.$

360. $f(x) = ||x^2 - 3x| - 1|.$

361. $f(x) = 2 - 2x^2 + x^4.$ 362. $f(x) = 2e^x + 5e^{-x} - 3x - 6.$

Знайти найбільше значення функцій:

363. $f(x) = 2 - |x^2 - 4x + 3|.$

364. $f(x) = 1 + 4x^2 - x^8.$

365. $f(x) = 6 + 2x\ln 2 - 2^x - 2^{3-x}.$

Знайти найменші і найбільші значення функцій на вказаних проміжках:

366. $f(x) = |4 - |x||,\quad x \in [-3;\ 4].$

367. $f(x)=|x^2-5x+4|, \quad x\in\left[\frac{1}{2};\ 5\right].$

368. $f(x)=x+\frac{4}{x}, \quad x\in\left[\frac{1}{4};\ 4\right].$

369. $f(x)=\sqrt{7-2x}, \quad x\in[-1;\ 3].$

370. $f(x)=\frac{4x}{1+x^2}, \quad x\in[-2;\ 4].$

371. $f(x)=\sin^2 x+\cos 2x, \quad x\in R.$

372. $f(x)=-\cos x\sin^2 x, \quad x\in R.$

373. $f(x)=\cos 2x+8\cos x+2\sin x+4x, \quad x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right].$

374. При яких значеннях x функція

$$f(x)=\mathrm{tg}^3 x-\mathrm{tg}\, x-4x+1$$

набуває екстремальних значень?

375. Знайти найбільше значення функції

$$f(x)=\sin^4 x+2\cos^4 x-1$$

на проміжку $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

376. Знайти найменше значення функції

$$f(x)=\sin^3 x+2\cos^3 x$$

на проміжку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

377. Знайти найбільше значення функції

$$f(x)=\log_2^4 x+12\log_2^2 x\log_2\frac{8}{x}$$

на проміжку $[1;\ 64]$.

378. При якому значенні x похідна функції

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+4x\left(1+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{16}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}-1\right)$$

має найменше значення?

379. В якій точці проміжку $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ функція

$$f(x)=\mathrm{tg}\, x+\frac{3}{4}\mathrm{ctg}\, x$$

досягає найменшого значення?

380. При яких a функція

$$f(x)=(\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\, x+a^2)^3\,\mathrm{tg}\, x$$

досягає найменшого значення на проміжку $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ в точці $x=\frac{\pi}{3}$?

381. Знайти всі значення параметра a, при яких функція

$$f(x)=\frac{a^2-1}{3}x^2+(a-1)x^2+2x+1$$

зростає для всіх $x \in R$.

382. Знайти всі значення параметра a, при яких функція

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-(a-1)x^2+(2a+1)x-2$$

не є монотонною.

383. Знайти всі значення параметра a, при яких функції

$$f_1(x)=2x^3+3ax^2+6x+1 \quad \text{і} \quad f_2(x)=2x^3+3x^2+6ax-1$$

мають принаймні одну спільну стаціонарну точку (стаціонарна точка функції — це точка, в якій похідна від функції дорівнює нулю).

384. Нехай x_1 і x_2 — точки, в яких похідна функції

$$f(x)=2x^3-cx^2-2cx+3$$

дорівнює нулю. Довести, що $x_1^3+x_2^3+x_1^3x_2^3>0$.

385. При яких значеннях параметра a функція

$$f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x-2$$

не має точок екстремумів поза проміжком [—2; 4]?

386. Знайти всі значення a, при яких функція

$$f(x)=3(a-1)x^5-20x^3+15(a+2)x-4$$

монотонна для всіх $x \in R$.

387. Нехай x_1 і x_2 — відповідно точки максимуму і мінімуму функції

$$f(x)=\frac{5}{3}x^3-kx^2+x-3.$$

При яких значеннях k $x_2-x_1=1$?

388. Нехай x_1 і x_2 — відповідно точки максимуму і мінімуму функції

$$f(x)=2x^3-9mx^2+12m^2x+1.$$

При якому значенні m $x_1^3=x_2$?

389. При яких значеннях параметра m точки екстремумів функції

$$f(x)=8x^3-3(3m+1)x^2+6(m-2)x+5$$

лежать у проміжку $]0;\ \infty[$?

390. При яких значеннях параметра m точки екстремумів функції

$$f(x)=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-4$$

лежать у проміжку $]-2;\ 4[$?

391. Довести, що на проміжку $x \in\ ]1;\ +\infty[$ функція

$$f(x)=15x^2-x^6-24x+1$$

спадає.

392. При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = (a+2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$$

монотонно спадає на $]-\infty; \infty[$?

393. При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = (3-a)x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3(a+5)x - 1$$

монотонно зростає на $]-\infty; \infty[$?

394. При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = x^3 + 3(a-7)x^2 + 3(a^2-9)x + 1$$

має додатну точку максимуму?

395. При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = \frac{a}{3}x^3 + (a+2)x^2 + (a-1)x + 2$$

має від'ємну точку мінімуму?

396. При яких значеннях параметра m похідна функції

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 2(m^2 - 3m)x^2 + 64x - 1$$

дорівнює нулю лише в одній точці?

397. Довести, що на проміжку $[1; \infty[$ функція

$$f(x) = \frac{2}{3}x^6 - x^5 + x - 2$$

зростає.

398. Довести, що функція

$$f(x) = \frac{2}{3}x^9 - x^6 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$$

монотонно зростає на R.

399. Для яких значень m функція

$$f(x) = 2e^x - me^{-x} + (1+2m)x - 3$$

монотонно зростає на всій числовій осі?

400. Для яких значень m функція

$$f(x) = 1 - 2e^x + (1-m)e^{-x} - e^{2x} + (m-1)x$$

монотонно спадає на всій числовій осі?

401. При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = \sin x - a\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + 2ax$$

зростає для всіх $x \in R$?

402. При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x(a + \cos x) + (1-2a)x - 2$$

спадає на всій числовій осі?

403. Довести, що функція

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - e^x$$

монотонно спадає на всій числовій осі.

404. Довести, що функція

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

монотонно зростає на всій числовій осі.

Побудувати графіки функцій:

405. а) $y = 1 - |x|$; б) $y = |1 - x|$;
в) $y = |1 - |x||$.

406. а) $y = x^2 - 6|x| + 8$; б) $y = |x^2 - 6x + 8|$;
в) $y = |x^2 - 6|x| + 8|$.

407. а) $y = \frac{2+x}{2-x}$; б) $y = \frac{2+x}{2-|x|}$;
в) $y = \frac{|2+x|}{2-|x|}$.

408. а) $y = \sqrt{4-x}$; б) $y = \sqrt{|4-x|}$;
в) $y = \sqrt{4-|x|}$.

409. а) $y = 2^{1-x}$; б) $y = 2^{-|1-x|}$;
в) $y = 2^{1-|x|}$.

410. $y = \log_{1/2}(1-2x)$; б) $y = \log_{1/2}(1-2|x|)$;
в) $y = \log_{1/2}|1-2x|$.

411. а) $y = 2\sin|x|$; б) $y = |\sin 2x|$;
в) $y = 2\sin\frac{|x|}{2}$.

412. а) $y = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \operatorname{tg}\left(\pi|x| - \frac{\pi}{4}\right)$;
в) $y = \operatorname{tg}\left|\pi x - \frac{\pi}{4}\right|$.

413. $y = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{якщо } x \leqslant 0; \\ \frac{x}{x-1}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

414. $y = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{якщо } |x| < 1; \\ \sqrt{x^2 - 1}, & \text{якщо } |x| \geqslant 1. \end{cases}$

415. $y = \begin{cases} 2^x, & \text{якщо } x \leqslant 0; \\ \frac{1}{2}(\cos x + |\cos x|), & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

416. $y=\begin{cases} 1-\sqrt{1-x^2}, & \text{якщо} \quad x\leqslant 1; \\ 1+\log_{1/2} x, & \text{якщо} \quad x>1. \end{cases}$

417. $y=\begin{cases} \ln(1-x), & \text{якщо} \quad x\leqslant 0; \\ \dfrac{2x}{1-x}, & \text{якщо} \quad x>0. \end{cases}$

418. $y=\begin{cases} |x^2+3x|, & \text{якщо} \quad x<0; \\ |\sin\pi x|-\sin\pi x, & \text{якщо} \quad x\geqslant 0. \end{cases}$

419. $y=\begin{cases} e^{-x}-1, & \text{якщо} \quad x<0; \\ \sqrt{4x-x^2}, & \text{якщо} \quad x\geqslant 0. \end{cases}$

420. $|||x|-2|-1|$.

421. $y=(2+x)(2-|x|)$ 422. $y=2x^2-x^4+1$.

423. $y=\left|\dfrac{|x|-2}{|x|-1}\right|$. 424. $y=x+\dfrac{4}{x}$.

425. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$. 426. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

427. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$. 428. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.

429. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. 430. $y=\dfrac{x}{(2x+1)(1-x)}$.

431. $y=\dfrac{3x^2-1}{3|x|-2}$. 432. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

433. $y=1-2^{-|x|}$. 434. $y=e^{\frac{2x}{1-x^2}}$.

435. а) $y=2^{\frac{1-x}{1+x}}$; б) $y=2^{\frac{1-x}{1+|x|}}$; в) $y=2^{\frac{1+|x|}{1-|x|}}$.

436. $y=x\ln x$; б) $y=x\ln|x|$, в) $y=|x|\ln|x|$.

437. $y=\left|\dfrac{1}{2}-\sin x\right|$. 438. $y=\dfrac{\sin x}{|\sin x|}$.

439. $y=|\cos x|\operatorname{tg} x$. 440. $y=\sin x|\operatorname{ctg} x|$.

441. $y=|\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}|x||$. 442. $y=|1-\operatorname{tg}|x||$.

443. $y=2\cos^3 x-\cos 3x$. 444. $y=x\sin x$.

Дослідити, скільки коренів мають рівняння:

445. $x^2+e^{-|x|}=1$.

446. $(x-1)\ln(|x|-1)-x=1$.

447. $15\cdot 2^{1-|x|}\sin\pi x=2$.

448. $x^2-\log_2|1-x|=3+2x$.

449. $|\operatorname{tg} x|+\operatorname{tg}|x|=\sqrt{4-x^2}$.

Дослідити, скільки коренів залежно від параметра a мають рівняння:

450. $x^4 - 4ax^3 - 2 = 0$.

451. $x^5 + x = a + 2x^3$.

452. $|\ln x| - ax = 0$.

453. $|x| e^x = a$.

454. $x^2 e^{2-|x|} = 4a$.

455. $x \lg x = 2 + a \lg x$.

456. Скільки коренів, що належать проміжку $[-\pi; \pi]$, має рівняння

$$3\cos x - \cos^3 x = a$$

залежно від параметра a?

457. Скільки коренів, що належать проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ має рівняння

$$(\operatorname{tg} x + 4)^3 = a \operatorname{tg}^2 x$$

залежно від параметра a?

Зобразити у прямокутній системі координат такі множини точок:

458. $\{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2\} \cap \{(x;\ y) \mid x^2 - |y| \geqslant 0\}$.

459. $\{(x;\ y) \mid y > |x^2 - 2x|\} \cap \{(x;\ y) \mid y + |x - 1| < 2\}$.

460. $\{(x;\ y) \mid y + \sqrt{4x - x^2} > 0\} \cap \{(x;\ y) \mid y - \sqrt{|x - 2|} < 0\}$,

461. $\{(x;\ y) \mid x^2 - 2|y| + y^2 \geqslant 0\} \cap \{(x;\ y) \mid |x| + |y| < 4\}$.

462. $\{(x;\ y) \mid |y| > ||x^2 - 1| - 2|\} \cap \{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 < 9\}$.

463. $\left\{(x;\ y) \mid \left(|x| + \frac{1}{2}\right)^{x^2+y^2} \leqslant x^2 + |x| + \frac{1}{4}\right\}$.

464. $\{(x;\ y) \mid |xy|^{x^2+y^2-4} \leqslant 1\}$.

465. $\left\{(x;\ y) \mid \log_{(|x|+|y|)} \left(|y| + \frac{1}{2}\right) > 0\right\}$.

466. $\{(x;\ y) \mid \log_{2|x|} (x^2 + y^2) \leqslant 0\}$.

467. $\{(x;\ y) \mid \log_{(|y|-x^2)} (x^2 + y^2) \geqslant \log_{(|y|-x^2)} 4\}$.

468. $\{(x;\ y) \mid \log_{|x|} (y - x^2 + 4) \geqslant \log_{|x|} 3\}$.

469. $\{(x;\ y) \mid \log_{(|x|+|y|)} 2(y - x^2 + 1) \geqslant 0\}$.

470. $\{(x;\ y) \mid 2^{\sin x} \leqslant y \leqslant 2\}$.

471. $\{(x;\ y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 3^{\cos x}\}$.

472. $\{(x;\ y) \mid |\sin x| \leqslant y \leqslant |\cos x|\}$.

473. Знайти всі значення a, при яких множина

$$\{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 + 2x \leqslant 1\} \cap \{(x;\ y) \mid x - y + a = 0\}$$

містить лише одну точку. Знайти цю точку.

474. Знайти всі значення параметра a, при яких множина

$$\{(x;\ y)\,|\,2x^2 - y^2 + a^2 + 2 \leqslant a\} \cap \{(x;\ y)\,|\,x + y + a = 1\}$$

містить лише одну точку. Знайти цю точку.

475. Знайти всі значення параметра a, при яких множина

$$\{(x;\ y)\,|\,x^2 + y^2 = a^2\} \cap \{(x;\ y)\,|\,\sin(x + y) = 0\}$$

містить не більше чотирьох точок.

476. Для кожного a серед множини точок площини

$$\{(x;\ y)\,|\,y - 2x \geqslant 0\} \cap \{(x;\ y)\,|\,y + x^2 - 2ax + a^2 - a - 1 \leqslant 0\}$$

знайти точки з найбільшою ординатою.

Знайти первісні для поданих далі функцій:

477. $f(x) = (3x + 4)^7$, **478.** $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$.

479. $f(x) = \sqrt{3 - 4x}$. **480.** $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$.

481. $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$. **482.** $f(x) = \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1}$.

483. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$. **484.** $\sin^2 x$. **485.** $\cos^2 x$.

486. $\sin x \cos^3 x$. **487.** $\cos x \sin^3 x$. **488.** $\sin^3 x \cos^3 x$.

489. $\sin 2x \cos x$. **490.** $\sin x \cos 2x$. **491.** $\sin 4x \cos 3x$.

492. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin 3x$. **493.** $\sin 3x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

494. $6\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

495. $8\sin^2 x\,(1 - \sin^2 x)$. **496.** $12\cos x\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right)$.

497. $8\cos^2 x\,(1 - \sin^2 x)$.

Знайти для поданих далі функцій $f(x)$ первісні, графіки яких проходять через дану точку M:

498. $f(x) = (1 - x^2)(1 + x)$, $M(0;\ -1)$.

499. $f(x) = \left(\frac{x - 1}{x}\right)^2$, $M(1;\ 0)$.

500. $f(x) = \sqrt[3]{1 - 3x}$, $M(0;\ 0)$.

501. $f(x) = (\sin x - \cos x)^2$, $M\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.

502. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $M(0;\ 0)$.

503. При якому значенні x перетворюється в нуль та з первісних функції

$$f(x) = \pi \sin \pi x + 2x - 4,$$

яка при $x = 1$ дорівнює 3?

Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій:

504. $y = 3x - x^2 - \frac{3}{2}$ та $y = \left|\frac{2x-3}{2}\right|$.

505. $y = \sqrt{2-x}$ та $y = \frac{x^2-4x+4}{8}$.

506. $y = \sqrt{1+x}$ та $y = \sqrt{7-x}$.

507. $f(x) = 4e^{-x}$ та $f(x) = 5 - e^x$.

508. $f(x) = 2^x$ та $f(x) = 9 - 2^{3-x}$.

509. $f(x) = 2 + 3^{|x|}$ та $f(x) = 9 + 2 \cdot 3^{2-|x|}$.

510. $f(x) = \ln(x-2)$ та $f(x) = \ln\frac{6}{9-x}$.

511. $y = \frac{2}{\pi}|x - \pi|$ та $y = 2\sin^2\frac{x}{2}$.

512. $y = \cos x$ та $y = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$.

513. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \frac{x^2}{2} - 3x + 4{,}5$ і дотичними до нього, проведеними в точках з абсцисами $x = 1$ і $x = 4$.

514. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^2 - x + 2$ і дотичною, проведеною до кривої $y = 3 + \ln x$ в точці з абсцисою $x = 1$.

515. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \frac{1}{2} + \sin^2 x$, прямими $x = 0$, $x = \pi$ та віссю абсцис.

516. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 3\cos^3 x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, і віссю абсцис.

517. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = (1 + \sin x)\cos^2 x$, прямими $x = 0$, $x = \pi$ та віссю абсцис.

518. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = (2 + \cos x)\sin^2 x$, прямими $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ та віссю абсцис.

519. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 2 + \sin x$ і $y = 1 + \cos^2 x$ на проміжку $[0; \pi]$.

520. Фігура, обмежена графіком функції $y = \sin x$ на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, прямою $x = \frac{\pi}{2}$ і віссю абсцис. Записати рівняння прямої, що проходить через початок координат і поділяє дану фігуру на дві рівновеликі частини.

521. Обчислити об'єм просторової фігури, утвореної обертанням навколо осі абсцис плоскої фігури, обмеженої графіком функції $y = 1 - e^{-|x|}$ і прямою $y = \frac{2}{3}$.

522. Обчислити об'єм фігури, утвореної при обертанні навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times (1 + \cos x)$, прямими $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ та віссю абсцис.

523. Обчислити об'єм просторової фігури, утвореної обертанням навколо осі $0x$ плоскої фігури, обмеженої лініями:

$$y = 2 + \sin x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi.$$

524. Обчислити об'єм фігури, утвореної при обертанні навколо прямої $y = 1$ плоскої фігури, обмеженої графіком функції $y = 1 + \cos^2 x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і цією прямою.

525. Обчислити об'єм просторової фігури, утвореної обертанням навколо осі $0x$ плоскої фігури, обмеженої графіком функції $y = \sin x$ та дотичними до цього графіка, проведеними в точках з абсцисами $x = 0$ і $x = \pi$.

526. Обчислити об'єм фігури, утвореної при обертанні навколо осі абсцис області, обмеженої графіками функцій

$$y = 2\cos^2 \frac{x}{2} \quad \text{і} \quad y = \sin |x|$$

на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

527. Обчислити об'єм фігури, утвореної при обертанні навколо осі абсцис області, обмеженої графіками функцій

$$y = \pi - |x| \quad \text{і} \quad y = |\sin x|$$

на проміжку $[-\pi; \pi]$.

528. Композиція двох осьових симетрій відносно паралельних прямих є паралельним перенесенням. Довести це.

529. Довести, що композиція двох центральних симетрій є паралельним перенесенням.

530. Довести, що композиція трьох центральних симетрій відносно точок A_1 $(a_1; b_1)$, A_2 $(a_2; b_2)$, A_3 $(a_3; b_3)$ є центральна симетрія. Знайти її центр.

531. Якщо принаймні одне з чисел a і b не дорівнює нулю, то $ax + by + c = 0$ є рівняння певної прямої, перпендикулярної до вектора $\vec{n} = (a; b)$. Довести це.

532. Написати рівняння прямої, яка перпендикулярна до прямої $3x + 4y + 5 = 0$ і проходить: а) через початок координат; б) через точку $(-1; 2)$.

533. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку A $(3; -1)$ і відтинає від одного з координатних кутів трикутник з площею 6,25.

534. Знайти образ множини $\{(x; y) \mid f(x, y) = 0\}$ при центральній симетрії відносно точки A $(a; b)$.

535. Довести, що при гомотетії пряма переходить у паралельну пряму.

536. Знайти образ точки $(x; y)$ при гомотетії H_A^k з центром у точці A $(a; b)$.

537. Чи перетинає пряма $7x + 11y = 3$ відрізок $[AB]$, якщо: а) A $(11; -7)$, B $(-6; 4)$; б) A $(2; -1)$, B $(-3; 2)$; в) A $(5; -3)$, B $(-4; 3)$.

538. Дві сторони квадрата лежать на прямих $x - 2y + 2 = 0$ і $x - 2y - 5 = 0$. Обчислити площу квадрата.

539. Знайти образ прямої $2x - 3y + 5 = 0$ при гомотетії H_A^2 з центром у точці A $(1; 2)$.

540. Написати систему трьох лінійних нерівностей, геометричним образом якої є множина всіх внутрішніх точок трикутника ABC з вершинами A $(2; 5)$, B $(-1; -2)$, C $(-3; 4)$.

541. Написати рівняння дотичної до кола $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, яка проходить через точку $(x_0; y_0)$, що лежить на цьому колі.

542. Написати рівняння дотичних до параболи $y = x^2$, які проходять через точку A $(5; -11)$.

543. На параболі $y = \frac{1}{2} x^2$ знайти всі пари точок, в яких дотичні до параболи взаємно перпендикулярні.

544. Знайти центр кола, описаного навколо трикутника ABC з вершинами A $(0; a)$, B $(b; 0)$, C $(0; 0)$.

545. Знайти образ множини $\{(x; y) \mid y - \sqrt{6x - x^2 - 8} = 0\}$ при симетрії відносно точки $(1; 0)$.

546. Знайти гомотетію, яка криву $y = x^2$ відображає на криву $y = 4x^2 + 1$.

547. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$ в точці з абсцисою $x = \pi$.

548. Знайти множину всіх тих точок площини $x0y$, добуток відстаней від яких до координатних осей дорівнює 1.

549. Знайти образ точки M $(x_0; y_0; z_0)$ при центральній симетрії відносно точки P $(a; b; c)$.

550. З'ясувати, що являє собою множина точок $(x; y; z)$ простору, для яких справджується рівність: 1) $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$; 2) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ $(r > 0)$; 3) $(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ $(r > 0)$.

551. На осі аплікат знайти точку, рівновіддалену від точок A $(3; 5; -2)$ і B $(-4; 1; 7)$.

552. Написати рівняння сфери, описаної навколо тетраедра з вершинами S $(0; 0; 0)$, A $(a; 0; 0)$, B $(0; b; 0)$, C $(0; 0; c)$.

553. Точки A (1; —2; 0) і B (3; 2; 6) симетричні відносно площини α. Написати рівняння площини α.

554. Дві грані куба лежать у площинах $2x - 2y + z = 0$ і $2x - 2y + z + 6 = 0$. Обчислити об'єм куба.

555. Довести, що паралелепіпед, три непаралельні грані якого лежать в площинах $x + 2y + 2z + 10 = 0$, $2x + y - 2z + 6 = 0$ і $2x - 2y + z + 8 = 0$ — прямокутний.

556. Знайти центр і радіус кулі, вписаної в трикутну піраміду, обмежену координатними площинами і площиною $11x - 10y - 2z - 57 = 0$.

557. При якому m площина $mx + y - 3z = 0$ перпендикулярна до площини $2x - y + z - 2 = 0$?

558. При яких a площина $x + y + z = 2a$ дотикається до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 12$?

559. Написати рівняння сфери з центром у початку координат, яка дотикається до площини $x + y + z + 3 = 0$.

560. Нехай ABC — трикутник, $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$. Позначимо через M основу медіани, K — бісектриси і D — висоти, проведених з вершини A. Виразити через $\vec{b}$ і $\vec{c}$ вектори $\vec{AM}$, $\vec{AK}$ і $\vec{AD}$.

561. У трикутнику ABC $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$, $[BD]$ — висота, проведена з вершини B. Виразити вектор $\vec{BD}$ через вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

562. Два вектори $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$ рівні тоді й тільки тоді, коли середини відрізків $[AD]$ і $[BC]$ збігаються. Довести це.

563. Довести, що сума векторів, початок яких міститься в центрі правильного многокутника, а кінці — в його вершинах, дорівнює нулю.

564. Нехай A, B, C, D — довільні чотири точки простору; довести, що

$$\vec{AB} \cdot \vec{DC} + \vec{BC} \cdot \vec{DA} + \vec{CA} \cdot \vec{DB} = \vec{0}.$$

565. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$, де $\vec{p}$ і $\vec{q}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

566. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{k} + \vec{m} - 2\vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{k} - 4\vec{m} - 5\vec{n}$, де $\vec{k}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

567. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ і $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{4}$.

568. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, де $\vec{p}$ і $\vec{q}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

569. Обчислити гострий кут між медіанами рівнобедреного прямокутного трикутника, проведеними із вершин гострих кутів.

570. Позначивши через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ сторони ромба, які виходять з однієї вершини, довести, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

571. Відомі три послідовні вершини паралелограма: $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ і $C(5, 0, 2)$. Знайти його четверту вершину D і кут між векторами $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

572. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (3, 2, 3)$ і $\vec{b} = (-1, -2, -5)$ і утворює з віссю ординат тупий кут. Знайти його координати, якщо $|\vec{c}| = \sqrt{11}$.

573. Знайти вектор $\vec{c}$, знаючи, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (2, 3, -1)$ і $\vec{b} = (1, -2, 3)$ і задовольняє умову $\vec{c}\,(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.

574. При якому значенні α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{p} + 17\vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$ взаємно перпендикулярні, якщо $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 5$ і $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{2\pi}{3}$?

575. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектори $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$ взаємно перпендикулярні?

576. Знаючи вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, на яких побудовано паралелограм, виразити через них вектор, який збігається з висотою паралелограма, проведеною до сторони $\vec{a}$.

577. Одиничні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ такі, що $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Обчислити $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

578. До вершини куба прикладено три сили, рівні за величиною 1, 2 і 3 і направлені вздовж діагоналей граней куба, які виходять з цієї вершини. Визначити величину рівнодійної цих сил і кути, які вона утворює з заданими силами.

579. Якщо A, B, C і D — будь-які чотири точки простору, то

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

Довести це. Скориставшись цією рівністю, довести, що: а) три висоти трикутника перетинаються в одній точці; б) якщо протилежні ребра AB і CD, AD і BC тетраедра $ABCD$ перпендикулярні, то $[CA] \perp [BD]$.

580. Якщо $ABCD$ — прямокутник, а M — довільна точка простору, то

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}.$$

Довести це.

581. Нехай O — центр правильного n-кутника $A_1 A_2 \ldots A_n$. Довести, що $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

582. Нехай $ABCDA'B'C'D'$ — довільний паралелепіпед. Довести, що діагональ $[AC']$ проходить через точку перетину медіан трикутника $A'BD$ й ділиться цією точкою в відношенні $1 : 2$.

583. Нехай $A_1A_2...A_n$ — правильний n-кутник; M — довільна точка кола, вписаного в цей n-кутник. Довести, що $|MA_1|^2 + |MA_2|^2 + ... + |MA_n|^2$ не залежить від вибору точки M.

584. Довести, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола, описаного біля правильного многокутника $A_1A_2...A_n$, до вершин цього многокутника не залежить від вибору точки на колі.

585. Обчислити довжини сторін прямокутного трикутника, периметр якого дорівнює 12 см, а площа становить 6 см^2.

586. Точка перетину висот рівнобедренного трикутника лежить на вписаному в цей трикутник колі. Знайти кути трикутника.

587. У трикутнику ABC $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$. Обчислити довжину медіани трикутника ABC, проведеної до сторони AB.

588. На гіпотенузі BC прямокутного трикутника ABC, поза ним, побудовано квадрат. Знайти відстань від вершини A до центра квадрата, якщо сума катетів трикутника дорівнює a.

589. В трикутнику радіус описаного кола дорівнює R, а вписаного —r. Знайти відношення площі цього трикутника до площі трикутника, утвореного точками дотику вписаного кола.

590. Довжина бісектриси середнього за величиною кута трикутника дорівнює довжині меншої його сторони і ділиться іншими бісектрисами у відношенні 1 : 2. Периметр трикутника дорівнює 21. Обчислити сторони трикутника.

591. Один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 108°. Знайти відношення довжини бісектрис двох неконгруентних внутрішніх кутів.

592. Дві висоти ромба, проведені з вершин його тупих кутів, перетинаючись, діляться у відношенні 1 : 2. Знайти величини кутів ромба.

593. В прямокутному трикутнику довжина гіпотенузи дорівнює a, а величина найменшого кута 15°. Обчислити площу даного трикутника.

594. Послідовно виконують повороти квадрата навколо його центра на 10, 20, 30°, ... Після якої кількості поворотів квадрат відобразиться сам на себе?

595. Довжини основ трапеції 9 і 36 см. Середину меншої основи трапеції сполучили з кінцями більшої основи. Обчислити відстань між точками перетину даних відрізків з діагоналями трапеції.

596. У рівносторонній трикутник вписано трикутник, сторони якого відповідно перпендикулярні до сторін даного трикутника. Обчислити відношення площ цих трикутників.

597. Точка дотику вписаного в прямокутний трикутник кола до гіпотенузи ділить її на відрізки a і b. Обчислити площу трикутника.

598. Обчислити площу ромба $ABCD$, якщо радіуси кіл, описаних навколо трикутників ABD і ACD, відповідно дорівнюють R і r.

599. В прямокутній трапеції, висота якої дорівнює $2h$, на стороні, не перпендикулярній до основи, як на діаметрі описано коло, що дотикається протилежної сторони трапеції. Обчислити площу прямокутного трикутника, у якого катети — основа трапеції.

600. Знайти відношення площі правильного п'ятикутника до площі трикутника, утвореного стороною п'ятикутника і двома його діагоналями, що виходять із кінців цієї сторони.

601. Коло радіуса $\frac{2}{3}$ дотикається зсередини до кола радіуса 2. Знайти радіус третього кола, яке дотикається даних кіл і діаметра, що проходить через їх центри.

602. Два круги радіусів R розташовані так, що центр кожного з них лежить на колі другого. Обчислити радіус кола, вписаного в спільну частину цих кругів і яке дотикається до лінії їх центрів.

603. Довжина сторони правильного п'ятикутника дорівнює a. Обчислити довжину його діагоналі.

604. Довжини двох висот трикутника не менші від довжини сторін, до яких вони проведені. Обчислити величини кутів цього трикутника.

605. Знайти величини гострих кутів прямокутного трикутника, в якого висота, проведена до гіпотенузи, в чотири рази менша від довжини гіпотенузи.

606. Довжини сторін прямокутника відносяться як 1 : 2. З точки A більшої сторони дві неконгруентні сторони його видно під однаковими кутами. Визначити величини цих кутів.

607. Довжина більшої основи рівнобедреної трапеції дорівнює 55 см. Бісектриса кута при цій основі ділить бічну сторону на відрізки довжиною 25 і 15 см. Обчислити площу трапеції.

608. Довжини основ трапеції a і b. Пряма, що проходить через точку перетину діагоналей трапеції паралельно основам, перетинає бічні сторони в точках A і B. Обчислити $|AB|$.

609. В ромб, діагональ якого поділяє його на два рівносторонні трикутники, вписано коло радіуса 1. Обчислити сторону ромба.

610. Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють 1 і 7, а бічна сторона 5. Знайти площу круга, описаного навколо цієї трапеції.

611. Яким повинен бути кут при вершині рівнобедреного трикутника даної площі, щоб радіус вписаного в цей трикутник кола був найбільшим?

612. Довжини бічних сторін і меншої основи трапеції рівні і дорівнюють 10 см. Якою повинна бути більша основа, щоб площа трапеції була найбільша?

613. В рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 20 см, а висота — 8 см, вписано прямокутник, одна із сторін якого лежить на основі трикутника. Якою повинна бути висота прямокутника, щоб його площа була найбільша?

614. В середині прямокутного трикутника ABC (C — вершина прямого кута) дана точка O, яка є вершиною трикутників OAB, OBC і OCA, що мають рівні площі. Довести, що

$$|OA|^2 + |OB|^2 = 5|OC|^2.$$

615. Якщо довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію, то радіус вписаного в цей трикутник кола дорівнює третині висоти, опущеної на середню за довжиною сторону. Довести це.

616. Якщо довжини сторін трикутника ABC такі, що $b^2 + c^2 = 5a^2$, то медіани, які виходять із вершини B і C, взаємно перпендикулярні. Довести це.

617. Із всіх чотирикутників з даними сторонами найбільшу площу має чотирикутник, навколо якого можна описати коло. Довести це.

618. Сума квадратів сторін чотирикутника дорівнює сумі квадратів його діагоналей і почетвереному квадрату віддалі між серединами діагоналей. Довести це.

619. Якщо різниця довжин двох сторін трикутника дорівнює різниці довжин висот, проведених до цих сторін, то обидві ці сторони лежать проти гострих кутів. Довести це.

620. Кут між хордою і дотичною, проведеними через точку кола, вимірюється половиною дуги, яку стягує ця хорда. Довести це.

621. Довести, що можна побудувати п'ятикутник, сторони якого відповідно конгруентні діагоналям даного п'ятикутника.

622. Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.

623. Довести, що з усіх трикутників з даною основою a та кутом при вершині α найбільшу площу має рівнобедрений трикутник.

624. Довести, що сума віддалей будь-якої точки всередині правильного многокутника до всіх його сторін є величина стала.

625. Всередині паралелограма $ABCD$ взято точку O. Довести, що сума площ трикутників AOB і COD дорівнює сумі площ трикутників BOC і AOD.

626. Чотирикутник описано навколо кола. Довести, що його діагоналі і прямі, які проходять через точки дотику його протилежних сторін, перетинаються в одній точці.

627. Довести, що пряма, яка проходить через точку перетину продовжень бічних сторін трапеції і точку перетину її діагоналей, проходить через середини основ трапеції.

628. Довести, що продовження бічних сторін трапеції і пряма, яка проходить через середини її основ, перетинаються в одній точці.

629. Медіани, проведені до сторін AB і AC трикутника ABC, взаємно перпендикулярні. Довести, що кут між цими сторонами менший ніж 45°.

630. Якщо в трикутнику довжина медіани дорівнює половині довжини сторони, до якої вона проведена, то такий трикутник прямокутний. Довести це.

631. Якщо в крузі дві хорди, що перетинаються, взаємно перпендикулярні, то сума квадратів довжин відрізків цих хорд дорівнює квадрату довжини діаметра (теорема Архімеда). Довести це.

632. Довести, що коли в чотирикутнику суми квадратів довжин протилежних сторін рівні, то діагоналі його взаємно перпендикулярні.

633. У рівнобедреній трапеції квадрат довжини діагоналі дорівнює сумі квадрата довжини бічної сторони і добутку довжин основ. Довести це.

634. Довести, що сума квадратів довжин діагоналей чотирикутника в два рази більша від суми квадратів довжин відрізків, які сполучають середини його протилежних сторін.

635. Довести, що відношення суми квадратів довжин медіан трикутника до суми квадратів довжин його сторін дорівнює $\frac{2}{3}$.

636. Сума квадратів довжин діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів довжин її бічних сторін і подвоєному добутку довжин основ. Довести це.

637. Сума квадратів всіх сторін і всіх діагоналей правильного многокутника дорівнює n^2r^2, де n — число сторін многокутника, а r — радіус описаного навколо нього кола. Довести це.

638. В будь-якій трапеції два трикутники, утворені кожною з бічних сторін і відрізками двох діагоналей, мають однакову площу. Довести це.

639. Віддаль від будь-якої точки кола, описаного навколо правильного трикутника, до однієї з його вершин дорівнює сумі віддалей від цієї точки до двох інших вершин. Довести це.

640. Центр кола O сполучено з точкою C, яка лежить на даній хорді AB. Довести, що

$$|OC|^2 + |AC| \cdot |BC| = R^2.$$

641. В круг вписані трапеція, основою якої є діаметр круга, і рівнобедрений трикутник, сторони якого паралельні сторонам трапеції. Довести, що площі трапеції і трикутника рівні.

642. Радіус кола, описаного навколо трикутника, в два рази більший, ніж радіус кола, яке проходить через основи висот цього трикутника. Довести це.

643. У прямокутному трикутнику медіана і висота, проведені до гіпотенузи, утворюють кут, величина якого дорівнює різниці величин гострих кутів трикутника. Довести це.

644. Радіус описаного навколо будь-якого трикутника кола не менший від діаметра кола, вписаного в цей трикутник. Довести це.

645. У вписаному чотирикутнику добуток довжин діагоналей дорівнює сумі добутків довжин протилежних сторін (теорема Птолемея). Довести це.

646. Якщо з будь-якої точки описаного навколо даного трикутника кола опустити перпендикуляри на сторони трикутника, то їх основи лежатимуть на одній прямій (пряма Сімпсона). Довести це.

647. У рівносторонньому п'ятикутнику $ABCDE$ кут між діагоналями AC і AD становить половину кута BAE. Довести, що трикутник BAE рівносторонній.

648. Якщо діагоналі чотирикутника конгруентні, то його площа дорівнює добутку довжин відрізків, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника. Довести це.

649. Точки, симетричні ортоцентру даного трикутника відносно його сторін, лежать на описаному навколо цього трикутника колі. Довести це.

650. Два кола дотикаються зовні в точці A. До них проведено спільну дотичну BC (B і C — точки дотику). Довести, що кут BAC прямий.

651. Якщо у вписаному в коло чотирикутнику діагоналі взаємно перпендикулярні, то сума квадратів двох його протилежних сторін дорівнює квадрату діаметра кола. Довести це.

652. Якою фігурою є множина середин усіх хорд даного кола, що проходять через фіксовану точку, яка лежить всередині кола?

653. У площині даного трикутника OAB знайти множину всіх таких точок M, що площі трикутників OAM і OBM рівні.

654. Нехай ABC — рівносторонній трикутник. Знайти множину точок M, для яких

$$|MC|^2 = |MA|^2 + |MB|^2.$$

655. Знайти множину центрів кіл даного радіуса, які дотикаються до даного кола.

656. Знайти множину точок, сума квадратів відстаней яких від двох даних точок є величина стала.

657. Знайти множину точок, різниця квадратів відстаней яких від двох даних точок є величина стала.

658. Відрізок $[BC]$ рухається своїми кінцями по сторонах кута A. Знайти множину центрів кіл, описаних навколо трикутника ABC.

659. Побудувати трикутник за основою, кутом при основі і сумою двох інших сторін.

660. Побудувати трикутник за основою, кутом при основі і різницею двох інших сторін.

661. Побудувати трикутник за двома кутами та периметром.

662. Побудувати коло, яке дотикається до сторін даного кута і проходить через дану всередині цього кута точку.

663. Побудувати коло, яке дотикається до даної прямої і проходить через дві дані точки, що лежать по один бік від цієї прямої.

664. Побудувати рівносторонній трикутник, вершини якого лежать на трьох даних паралельних прямих.

665. На колі дано точку A. Провести хорду BC паралельно до дотичної у точці A так, щоб площа трикутника ABC була найбільша.

666. В дане коло вписати трикутник, сторони якого паралельні сторонам даного трикутника.

667. Побудувати рівнобедрений трикутник за периметром і висотою, проведеною до «нерівної» сторони.

668. Побудувати прямокутний трикутник, якщо відома його гіпотенуза і величина гострого кута.

669. Побудувати прямокутний трикутник за катетом та за сумою гіпотенузи і другого катета.

670. Побудувати ромб, у якого центром симетрії є дана точка, а три вершини лежать на трьох даних прямих.

671. Побудувати квадрат, у якого центр симетрії міститься в даній точці, а кінці однієї із сторін лежать на двох даних прямих.

672. Побудувати рівносторонній трикутник за його висотою.

673. Побудувати ромб за висотою і діагоналлю.

674. Побудувати ромб так, щоб дві протилежні вершини були в двох заданих точках, а третя вершина лежала на даному колі.

675. Побудувати коло, яке проходить через дві дані точки і дотикається до даного кола.

676. Побудувати рівносторонній трикутник з даною вершиною, дві інші вершини якого лежать на двох даних прямих.

677. Побудувати коло, яке проходить через дану точку і дотикається до двох даних кіл.

678. Вписати в даний круг трапецію, знаючи її висоту і різницю основ.

679. Побудувати трапецію за її основами і діагоналями.

680. Побудувати квадрат за різницею діагоналі і сторони.

681. Вписати у дане коло три конгруентні кола, які б дотикалися попарно між собою і до даного кола.

682. У дане коло вписати трапецію, у якої основи проходять через дані точки A і B, а середня лінія проходить через дану точку C.

683. Побудувати коло, яке дотикається до даного кола і до двох даних непаралельних прямих.

684. У даний трикутник вписати два конгруентні кола, які дотикаються одне до одного, до основи трикутника і до однієї з бічних сторін.

685. Побудувати трикутник за кутом при вершині, висотою і медіаною, проведеними до основи.

686. Побудувати паралелограм за діагоналями і одним кутом.

687. Побудувати ромб за стороною і радіусом вписаного кола.

688. Побудувати ромб, у якого дві сторони лежать на двох даних паралельних прямих, а дві інші або їх продовження проходять через дані дві точки.

689. Побудувати многокутник, конгруентний даному.

690. Побудувати чотирикутник за трьома його кутами і довжинами сторін, що утворюють четвертий кут.

691. Точки A і B розташовані по один бік від прямої l. Розмістити на цій прямій відрізок $[MN]$ довжини a так, щоб величина

$$|AM|+|MN|+|NB|$$

була найменшою.

692. Побудувати трикутник за основою, кутом при вершині і сумою двох інших сторін.

693. Побудувати трапецію, знаючи довжини всіх її сторін.

694. Побудувати трикутник за периметром, однією із висот і радіусом вписаного в цей трикутник кола.

695. Основою прямого паралелепіпеда є ромб з гострим кутом α. Під яким кутом до основи паралелепіпеда треба провести площину, щоб у перерізі дістати квадрат, вершини якого лежать на бічних ребрах?

696. У правильній трикутній призмі через одну із сторін нижньої основи і протилежну їй вершину верхньої основи проведено переріз. Обчислити площу перерізу, якщо довжина сторони основи призми дорівнює a, а січна площина утворює з площиною основи кут α.

697. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює половині площі повної поверхні призми. Знайти кут між діагоналями призми.

698. У правильній чотирикутній призмі кут нахилу її діагоналі до бічної грані в два рази менший кута нахилу цієї діагоналі до площини основи. Обчислити об'єм призми, якщо довжина сторони основи призми дорівнює a.

699. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює Q. Площі діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнюють S_1 і S_2. Обчислити об'єм паралелепіпеда.

700. Основою похилої трикутної призми є правильний трикутник, довжина сторони якого дорівнює a. Бічне ребро призми конгруентне стороні основи і нахилене до площини основи під кутом 60°. Обчислити об'єм призми.

701. В прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють a і b і утворюють кут 30°. Обчислити площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо його об'єм дорівнює V.

702. Найбільша діагональ правильної шестикутної призми дорівнює d і утворює з бічним ребром призми кут α. Обчислити об'єм призми.

703. Довжини ребер паралелепіпеда дорівнюють a, b і c. Ребра, довжини яких дорівнюють a і b, взаємно перпендикулярні, а ребро довжини c утворює з кожним з них кут 60°. Обчислити об'єм паралелепіпеда.

704. Основою призми є рівнобедрений прямокутний трикутник, довжина катета якого дорівнює a. Бічне ребро, що лежить проти гіпотенузи, дорівнює b і утворює з катетами кути α і β. Обчислити об'єм призми.

705. Основою трикутної призми є правильний трикутник, довжина сторони основи якого дорівнює a. Пряма, що сполучає одну із вершин верхньої основи з центром нижньої основи, перпендикулярна до площин основи. Обчислити довжину бічного ребра призми, якщо відомо, що в цю призму можна помістити кулю, яка дотикалася б до всіх граней призми.

706. Довжина кожного з трьох ребер паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, дорівнює a. Кут між будь-якими двома з них дорівнює α. Знайти довжину d діагоналі паралелепіпеда, яка виходить з тієї ж вершини.

707. У правильну трикутну призму вписана куля і навколо призми описана куля. Обчислити відношення площ поверхонь даних куль.

708. Площина, проведена через сторону основи правильної шестикутної призми і середину відрізка, що сполучає центри основ, утворює з площиною основи гострий кут α. Обчислити площу перерізу, утвореного цією площиною, якщо довжина сторони основи призми дорівнює a.

709. У правильній чотирикутній призмі кут між її діагоналлю і бічною гранню дорівнює α, а довжина сторони основи дорівнює a. Обчислити об'єм призми.

710. Основою прямої призми є ромб з гострим кутом α. Менша діагональ призми дорівнює d і утворює з площиною основи кут β. Обчислити об'єм призми.

711. У правильній трикутній призмі площина, проведена через центр основи і центри симетрії двох бічних граней, утворює з площиною основи гострий кут α, довжина сторони основи призми дорівнює a. Обчислити площу перерізу призми вказаною площиною.

712. У призму, основою якої є ромб з гострим кутом α, вписана куля. Знайти кут між більшою діагоналлю призми і площиною основи.

713. Основою прямої призми є правильний трикутник. Площина, що проведена через одну із його сторін під кутом α до основи призми, відтинає від призми трикутну піраміду об'єму V. Обчислити площу перерізу.

714. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V. Якою повинна бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою?

715. Якщо існує сфера, яка дотикається до всіх ребер паралелепіпеда, то цей паралелепіпед — куб. Довести це.

716. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди нахилене до площини основи під кутом 45°. Площа діагонального перерізу піраміди дорівнює S. Обчислити об'єм піраміди.

717. Плоскі кути при вершині правильної трикутної піраміди прямі. Висота піраміди дорівнює h. Обчислити об'єм піраміди.

718. Основою піраміди є трикутник, довжини сторін якого дорівнюють 12, 10 і 10 см. Кожна бічна грань нахилена до основи піраміди під кутом 45°. Обчислити об'єм піраміди.

719. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні. Площі бічних граней дорівнюють S_1, S_2, S_3. Обчислити об'єм піраміди.

720. У правильну чотирикутну піраміду вписано куб так, що чотири його вершини лежать на апофемах піраміди, а інші чотири — в площині основи. Всі ребра піраміди конгруентні і довжина кожного з них дорівнює a. Обчислити об'єм куба.

721. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює 90°. Відстань між бічним ребром піраміди і протилежною йому стороною основи дорівнює l. Обчислити об'єм піраміди.

722. Бічні грані правильної п'ятикутної піраміди — правильні трикутники з стороною, рівною a. Обчислити об'єм піраміди.

723. Всередині тригранного кута, всі плоскі кути якого дорівнюють α, проведена пряма, яка утворює рівні кути з його ребрами. Знайти кут нахилу цієї прямої до кожного ребра тригранного кута.

724. Із основи висоти правильної трикутної піраміди на її бічну грань опущений перпендикуляр, довжина якого дорівнює a. Знайти об'єм піраміди, якщо плоский кут при її вершині дорівнює α.

725. У трикутній піраміді $SABC$ ребро SA перпендикулярне до площини грані ABC, двогранний кут з ребром SC дорівнює $\frac{\pi}{4}$, $|SA| = |BC| = a$ і $\widehat{ABC} = 90°$. Знайти $|AB|$.

726. Мимобіжні ребра AB і CD трикутної піраміди $ABCD$ взаємно перпендикулярні, а мимобіжні ребра AC і BC взаємно перпендикулярні і конгруентні. Всі ребра цієї піраміди дотикаються до деякої кулі. Знайти радіус цієї кулі, якщо $|BC| = a$.

727. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α. Всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом β. Обчислити об'єм піраміди.

728. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α, а сторона основи дорівнює a. Обчислити об'єм піраміди.

729. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гострим кутом α. Кожне бічне ребро дорівнює b і нахилене до площини основи під кутом φ. Обчислити об'єм піраміди.

730. У правильній трикутній піраміді двогранний кут при ребрі основи дорівнює α. Знайти кут нахилу бічного ребра до площини основи піраміди.

731. Бічні грані правильної шестикутної піраміди нахилені до площини основи під кутом α. Який кут з площиною основи утворюють бічні ребра піраміди?

732. У правильній чотирикутній піраміді довжина сторони основи дорівнює a, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Через діагональ основи піраміди паралельно бічному ребру проведена площина. Обчислити площу перерізу піраміди цією площиною.

733. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, бічні сторони якого дорівнюють a, а кут між ними —$120°$. Бічне ребро піраміди, що проходить через вершину тупого кута, перпендикулярне до площини основи, а інші два ребра утворюють з площиною основи кут α. Знайти об'єм піраміди.

734. Довжина ребра правильної трикутної піраміди дорівнює a. Знайти довжину сторони основи піраміди, якщо кут між її бічними гранями дорівнює 2α.

735. Основа піраміди — рівнобедрена трапеція, паралельні сторони якої дорівнюють a і b. Кожна бічна грань утворює з основою двогранний кут φ. Обчислити об'єм піраміди.

736. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює φ. Знайти кут між бічним ребром і площиною основи піраміди.

737. Кут між бічним ребром і площиною основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює φ. Знайти двогранний кут при бічному ребрі піраміди.

738. Кут між бічним ребром і площиною основи правильної трикутної піраміди дорівнює α. Знайти плоский кут при вершині піраміди.

739. Бічна грань правильної трикутної піраміди нахилена до площини основи під кутом α. Знайти плоский кут при вершині піраміди.

740. Основою піраміди є ромб з гострим кутом α. Всі бічні грані піраміди нахилені до площини її основи під кутом β. Площа перерізу, проведеного через більшу діагональ основи і вершину піраміди, дорівнює S. Обчислити об'єм піраміди.

741. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює h, а бічні грані нахилені до площини основи піраміди під кутом α. Через сторону основи піраміди і середину протилежного бічного ребра проведено площину. Знайти площу перерізу, утвореного цією площиною.

742. Основою піраміди є рівнобічна трапеція з гострим кутом α і довжиною бічної сторони a. Всі бічні грані піраміди нахилені до площини її основи під кутом β. Обчислити площу повної поверхні піраміди.

743. Через вершину основи правильної трикутної піраміди проведена площина, перпендикулярна до протилежної бічної грані і пара-

лельна протилежній стороні основи. Ця площина утворює з площиною основи піраміди кут α. Знайти плоский кут при вершині піраміди.

744. Плоскі кути при вершині трикутної піраміди прямі. Довести, що висота піраміди, опущена з цієї вершини на протилежну грань ABC, проходить через точку перетину висот трикутника ABC.

745. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з його стороною кут φ. Обчислити площу повної поверхні циліндра, утвореного при обертанні прямокутника навколо осі, що проходить через цю сторону.

746. Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра утворює кут α з основою розгортки. Довжина діагоналі дорівнює d. Обчислити площу повної поверхні циліндра.

747. У циліндрі об'єму V паралельно осі циліндра проведено площину на відстані a від неї. Ця площина відтинає від кола основи дугу α. Знайти площу перерізу циліндра площиною.

748. Через дві твірні конуса, кут між якими α, проведено площину, яка утворює з площиною основи конуса кут β. Обчислити площу перерізу, якщо висота конуса дорівнює h.

749. Осьовим перерізом конуса є трикутник, площа якого дорівнює S. Твірна конуса утворює з площиною основи кут α. Знайти площу бічної поверхні та об'єм конуса.

750. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор з центральним кутом 120°. Висота конуса дорівнює h. Обчислити об'єм конуса.

751. Радіус основи конуса дорівнює r. Дві взаємно перпендикулярні твірні конуса поділяють площу бічної поверхні конуса на частини у відношенні $1:2$. Обчислити об'єм конуса.

752. В основу конуса вписано квадрат, довжина сторони якого дорівнює a. Площина, що проходить через вершину конуса і сторону квадрата, утворює з площиною основи кут α. Знайти об'єм конуса.

753. У зрізаному конусі твірна утворює кут α з площиною більшої його основи. Радіуси основ конуса відносяться як $2:1$, а довжина твірної дорівнює l. Знайти об'єм зрізаного конуса.

754. У кулі радіуса r з деякої точки її поверхні проведено три конгруентні хорди під кутом α одна до одної. Знайти довжину кожної хорди.

755. У циліндр вписаний прямокутний паралелепіпед, діагональ якого утворює з суміжними сторонами основи кути α і β. Знайти відношення об'єму циліндра до об'єму паралелепіпеда.

756. У конус вписаний циліндр (нижня основа циліндра лежить в основі конуса, а коло верхньої його основи дотикається до бічної поверхні циліндра). Пряма, що сполучає центр верхньої основи циліндра і точку на колі основи конуса, утворює з площиною основи кут α. Кут між твірною і висотою конуса дорівнює β. Знайти відношення об'єму циліндра до об'єму конуса.

757. В куб, довжина ребра якого дорівнює a, вписано кулю. Через середини двох суміжних ребер куба проведено площину, яка дотикається до кулі. Знайти площу перерізу куба цією площиною.

758. Основою піраміди є ромб з гострим кутом α і довжиною сторони a. Всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом α. Обчислити радіус кулі, вписаної в піраміду.

759. В куб, довжина сторони якого дорівнює a, вписано кулю. Знайти радіус іншої кулі, яка дотикається трьох граней куба і даної кулі.

760. Бічна грань правильної трикутної піраміди нахилена до площини основи під кутом α. Радіус кола, описаного навколо основи піраміди, дорівнює r. Знайти радіус кулі, описаної навколо піраміди.

761. У правильну чотирикутну піраміду вписано кулю радіуса r. Двогранний кут при ребрі основи піраміди дорівнює α. Знайти об'єм піраміди, вершина якої лежить в центрі кулі, а вершини основ — в точках дотику кулі до бічних граней даної піраміди.

762. Основою піраміди є прямокутник. Бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут α. Знайти кут між діагоналями основи піраміди, якщо об'єм піраміди дорівнює V, а радіус описаної навколо неї кулі — r.

763. Навколо циліндра описано кулю об'єму V. Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з площиною його основи кут α. Знайти об'єм циліндра.

764. Кут між бічним ребром і площиною основи правильної n-кутної піраміди дорівнює α. Знайти відношення об'єму піраміди до об'єму описаної навколо неї кулі.

765. Твірна конуса нахилена до площини його основи під кутом α. У конус вписано кулю і до кулі проведено дотичну площину, яка паралельна площині основи конуса. В якому відношенні ця площина поділяє бічну поверхню конуса?

766. У конус вписаний циліндр, висота якого конгруентна діаметрові основи конуса. Площа повної поверхні циліндра дорівнює площі основи конуса. Під яким кутом твірна конуса нахилена до площини його основи?

767. У правильну чотирикутну піраміду вписано конус, твірна якого нахилена до площини основи під кутом α. Відстань від середини висоти піраміди до її бічної грані дорівнює d. Знайти площу повної поверхні конуса.

768. Кут між висотою і твірною конуса дорівнює α. Висота конуса, рівна h, є діаметром кулі. Знайти об'єм тієї частини кулі, що лежить поза конусом.

769. Навколо двох зовні дотичних куль описано конус. Радіуси куль дорівнюють r і R. Знайти об'єм частини простору, обмеженого цими трьома поверхнями.

770. У конус вписано циліндр, діагоналі осьового перерізу якого паралельні твірним конуса. Радіус основи конуса дорівнює r, а твірна утворює з площиною основи кут α. Знайти об'єм циліндра.

771. Твірна конуса утворює з його віссю кут α. Знайти відношення об'єму цього конуса до об'єму описаної навколо нього кулі.

772. В кулю з радіусом r вписано циліндр, діагональ осьового перерізу якого нахилена до площини основи під кутом α. Обчислити об'єм циліндра.

773. У конус, висота якого дорівнює радіусові основи, вписано кулю. Обчислити відношення об'ємів кулі та конуса.

774. У зрізаний конус вписано кулю з радіусом r. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α. Обчислити об'єм зрізаного конуса.

775. Визначити, в якому відношенні ділить висоту правильного тетраедра точка, що є центром вписаної в цей тетраедр сфери.

776. Сторони рівнобічної трапеції дотикаються до кругової циліндричної поверхні, вісь якої перпендикулярна до паралельних сторін трапеції. Знайти кут між віссю циліндричної поверхні та площиною трапеції, якщо довжини основ трапеції дорівнюють a і b, а висота трапеції h.

777. Вершина конуса з основою радіуса r знаходиться в центрі кулі. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює 2α. Поверхня кулі поділяє об'єм конуса на дві рівні частини. Знайти об'єм кулі.

778. Шість конгруентних конусів мають спільну вершину, причому кожний конус має з чотирма з решти конусів по одній спільній твірній. Знайти відношення суми об'ємів конусів до об'єму кулі, що дотикається до площин їх основ.

779. Три конгруентні кулі радіуса r дотикаються до однієї площини і кожна з них дотикається до двох інших куль. Знайти радіус кулі, яка дотикається до площини і до трьох даних куль.

780. На площині навколо спільної вершини лежать шість конгруентних і послідовно дотичних один до одного конусів. На конусах лежить куля, яка дотикається до бічних поверхонь конусів у точках, які розміщені на колах основ. Знайти відношення об'єму кулі до суми об'ємів конусів.

781. На площині стоїть рівносторонній конус, висота якого дорівнює h. Навколо нього лежать n конгруентних куль, кожна з яких дотикається до площини, до бічної поверхні конуса, а також до двох сусідніх куль. Знайти радіус куль.

782. Твірні кругового конуса нахилені до його основи під кутом α. Безліч куль S_1, S_2, S_3, ... розташовані так, що перша з них (найбільшого радіуса) вписана в конус, а кожна наступна дотикається до двох сусідніх і до всіх твірних конуса. Яку частину об'єму конуса становить сума об'ємів цих куль?

Розділ VI

ВІДПОВІДІ, ВКАЗІВКИ, РОЗВ'ЯЗКИ

До розділу I

ЧИСЛА

1. 1) Якщо $a \vdots b$, то за визначенням $a = bc$, де $c \in Z$. Із рівності $a = bc$ випливають такі рівності: $a = (-b)(-c)$, $-a = b(-c)$, $-a = (-b)c$. Згідно з визначенням, вони показують, що $a \vdots (-b)$, $(-a) \vdots b$ і $(-a) \vdots (-b)$.

2) Якщо $a \vdots b$ і $b \vdots c$, то $a = bq$ і $b = cp$, де $q, p \in Z$. Підставивши в першу рівність на місце b рівне йому число cp, матимемо: $a = (cp)q = c(pq)$. Оскільки $pq \in Z$, то остання рівність означає, що $a \vdots c$.

3) Із умови випливає, що $a = bp$ і $b = aq$, де p, $q \in Z$. Звідси дістаємо, що $a = a(qp)$. Оскільки $a \neq 0$, то звідси випливає, що $qp = 1$. Є тільки дві пари цілих чисел, добуток яких дорівнює 1, а саме $(1, 1)$ и $(-1, -1)$. Отже, $q = p = 1$ або $q = p = -1$. У першому випадку $a = b$, а в другому $a = -b$.

4) Якщо $a = ps$, а $b = pt$, то $a + b = p(s + t)$.

5) Якщо $a = ps$, то $ax = p(sx)$.

6) Наслідок 4) і 5).

2. 1) $q = 5$, $r = 12$.

2) $134 = 11 \cdot 12 + 2$, тому $-134 = -11 \cdot 12 - 2 = 11 \cdot (-12) - 2 = [11 \times (-12) - 11] - 2 + 11 = 11 \cdot (-13) + 9$; отже, $q = -13$, $r = 9$.

3) $141 = 6 \cdot 23 + 3$, звідки: $141 = (-6) \cdot (-23) + 3$; отже, $q = -23$, $r = 3$.

4) $q = -10$, $r = 7$;

5) $92 = 7 \cdot 13 + 1$, звідки: $-92 = (-7) \cdot 13 - 1 = [(-7) \cdot 13 - 7] - 1 + 7 = (-7) \cdot 14 + 6$; отже, $q = 14$, $r = 6$.

6) $q = 12$, $r = 0$;	9) $q = 0$, $r = 0$;
7) $q = 0$. $r = 0$;	10) $q = 1$, $r = 3$;
8) $q = 0$, $r = 1$;	11) $q = -1$, $r = 3$.

3. Якщо $a = pq_1 + r$, а $b = pq_2 + r$, то $a - b = p(q_1 - q_2)$, тобто $(a - b) \vdots p$. Нехай тепер $(a - b) \vdots p$, тобто $a - b = pq$, $q \in Z$. Припустимо, що $a = pq_1 + r_1$, $b = pq_2 + r_2$, причому $r_1 \neq r_2$. Можна вважати, що $r_1 > r_2$. Із двох останніх рівностей дістаємо: $a - b = p(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$. Звідси: $r_1 - r_2 = (a - b) - p(q_1 - q_2) = p(q - q_1 + q_2)$. Виходить, що $(r_1 - r_2) \vdots p$, проте це неможливо, бо $0 \leqslant r_2 < r_1 < |p|$, а тому $0 < r_1 - r_2 < |p|$.

4. 1) $(a + b) - (r_1 + r_2) = p(q_1 + q_2)$. Отже, число $(a + b) - (r_1 + r_2)$ ділиться на p. Згідно з результатом попередньої задачі, це означає, що при діленні на p числа $a + b$ і $r_1 + r_2$ дають однакову остачу.

2) Вказівка. $(a - b) - (r_1 - r_2) = p(q_1 - q_2)$.

3) Вказівка. $ab - r_1r_2 = (pq_1 + r_1)(pq_2 + r_2) - r_1r_2 = p(pq_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1)$.

5. Нехай $a = \overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2\alpha_1\alpha_0}$, де α_k — цифри числа a в десятковому запису. Це означає, що

$$a = 10^n\alpha_n + 10^{n-1}\alpha_{n-1} + \cdots + 10^2\alpha_2 + 10\alpha_1 + \alpha_0.$$

Оскільки $a - \alpha_0 = 10(10^{n-1}\alpha_n + \ldots + 10\alpha_2 + \alpha_1)$, то $(a - \alpha_0) \vdots 10$, а тому числа a і α_0 дають однакові остачі при діленні на 10. Зокрема, a і α_0 одночасно діляться або не діляться на 10. Проте серед одноцифрових чисел на 10 ділиться тільки 0. Тому маємо таку ознаку подільності на 10: число ділиться на 10 тоді й тільки тоді, коли закінчується цифрою 0.

Ознаку подільності на 2 дістаємо аналогічно. Оскільки $(a - \alpha_0) \vdots 10$, а $10 \vdots 2$, то $(a - \alpha_0) \vdots 2$. Тому числа a і α_0 дають однакову остачу при діленні на 2. Зокрема, вони одночасно діляться або не діляться на 2. Серед одноцифрових чисел на 2 діляться 0, 2, 4, 6, 8. Цифри 0, 2, 4, 6, 8 звуться парними. Отже, маємо таку ознаку подітьності на 2: число a ділиться на 2 тоді й тільки тоді, коли його остання цифра парна. Подібними міркуваннями можна довести також ознаку подільності на 5.

Доведемо ознаку подільності на 3. Позначимо через b суму цифр числа a: $b = \alpha_n + \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$. Маємо: $a - b = (10^n - 1)\alpha_n + (10^{n-1} - 1) \times \alpha_{n-1} + \ldots + (10^2 - 1)\alpha_2 + 9\alpha_1$. При будь-якому натуральному k число $10^k - 1$ ділиться на 3, бо записується самими дев'ятками. Тому $(a - b) \vdots 3$. Отже, число a ділиться на 3 тоді й тільки тоді, коли на 3 ділиться сума цифр цього числа.

Ознака подільності на 9 така сама. Її доведення дістанемо, замінивши в попередніх міркуваннях число 3 числом 9.

Нарешті, щоб одержати відому ознаку подільності на 4, досить розглянути число $a - (10\alpha_1 + \alpha_0)$. Маємо: $a - (10\alpha_1 + \alpha_0) = 10^n\alpha_n + 10^{n-1}\alpha_{n-1} + \ldots + 10^2\alpha_2$. Якщо $k \geqslant 2$, то $10^k \vdots 4$; тому $a - (10\alpha_1 + \alpha_0)$ ділиться на 4. Отже, число a ділиться на 4 тоді й тільки тоді, коли на 4 ділиться двоцифрове число $\overline{\alpha_1\alpha_0}$, що ним закінчується десятковий запис числа a.

6. На 13 ділиться кожне тринадцяте натуральне число. Оскільки $1000 = 13 \times 76 + 12$, то шукана кількість дорівнює 76.

7. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71.

8. 1) $3^4 \cdot 7^2$; 2) $7 \cdot 11 \cdot 41$; 3) $2 \cdot 7 \cdot 13^2$; 4) $11^2 \cdot 43$; 5) $13 \cdot 67$.

9. 1) 104; 2) 198; 3) 91; 4) 363.

10. 1) 3; 2) $k + 1$.

11. Кожний додатний дільник числа a має вигляд $p_1^{t_1}p_2^{t_2}\ldots p_s^{t_s}$, причому $0 \leqslant t_1 \leqslant k_1$, $0 \leqslant t_2 \leqslant k_2$, ..., $0 \leqslant t_s \leqslant k_s$. Для показника степеня t_1 маємо $k_1 + 1$ можливих значень (а саме: 0, 1, 2, ..., k_1), для t_2 — $k_2 + 1$ можливих значень, ...; нарешті, для t_s — $k_s + 1$ можливих значень. При цьому значення $t_1, t_2, \ldots, t_s$ можна брати незалежно одне від одного. Тому число a має $(k_1 + 1)(k_2 + 1)\ldots(k_s + 1)$ додатних дільників. Наприклад, число $12 = 2^2 \cdot 3$ має $(2 + 1)(1 + 1) = 6$ натуральних дільників, а саме: $2^0 \cdot 3^0 = 1$, $2^1 \cdot 3^0 = 2$, $2^2 \cdot 3^0 = 4$, $2^0 \cdot 3^1 = 3$, $2^1 \cdot 3^1 = 6$, $2^2 \cdot 3^1 = 12$.

12. 1) $225 = 3^2 \cdot 5^2$. Кожний додатний дільник цього числа має вигляд $3^t \cdot 5^r$, де $t = 0, 1, 2$ і $r = 0, 1, 2$. Ось ці дільники: 1, 3, 9, 5, 15, 45, 25, 75, 225. 2) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48. 3) 1, 3, 9, 27, 81, 243.

13. 1) $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}$, де $0 \leqslant k_1 \leqslant \min(n_1, m_1)$, $0 \leqslant k_2 \leqslant \min(n_2, m_2)$, ..., $0 \leqslant k_r \leqslant \min(n_r, m_r)$.

2) $d = p_1^{\min(n_1,m_1)}p_2^{\min(n_2,m_2)}\ldots p_r^{\min(n_r,m_r)}$.

3) $q = p_1^{\max(n_1,m_1)}p_2^{\max(n_2,m_2)}\ldots p_r^{\max(n_r,m_r)}$.

4) $n_i + m_i = \min(n_i, m_i) + \max(n_i, m_i)$.

5) Наслідок 1) і 2).

6) Коли числа a і b взаємно прості, тобто їх найбільший спільний дільник дорівнює 1 (див. 4)).

7) Оскільки спільне кратне чисел a і b ділиться на кожне з них, то воно ділиться на $p_1^{\max(n_1,m_1)}, \ldots, p_r^{\max(n_r,m_r)}$, а отже, й на добуток $p_1^{\max(n_1,m_1)}\ldots p_r^{\max(n_r,m_r)}$.

14. 1) $d = 132$, $q = 792\,792$;

2) $d = 21\,021$, $q = 2\,081\,079$.

15. c — просте число.

16. $c = \pm 1$.

17. 1) Звести числа до спільного знаменника і порівняти чисельники.

2) Порівняти модулі чисел, тобто, числа $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$.

$$\left(-\frac{m}{n} > -\frac{p}{q}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{m}{n} < \frac{p}{q}\right).$$

18. $\frac{m+1}{n+1} - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n(n+1)} > 0$ тоді й тільки тоді, коли $n > m$. Висновок: дріб збільшиться, якщо він був правильний (менший за 1), і зменшиться, якщо він був більший від 1.

19. 1) 0, (285714) (число в дужках — період нескінченного десяткового дробу);
2) 0, (230769); 5) 0,1 (6);
3) 0,15625; 6) 0,08 (3).
4) 0,075;

20. При відповіді на питання можна вважати, що дріб p/q правильний ($p < q$), бо в іншому разі ми могли б відокремити спочатку його цілу частину (тобто записати неправильний дріб у вигляді мішаного числа з правильною дробовою частиною). Процес перетворення звичайного дробу p/q у десятковий дріб відбувається так. До числа p ми приписуємо цифру 0 (тобто збільшуємо це число в 10 разів) і ділимо одержане число на q. Частка від цього ділення буде першою десятковою цифрою шуканого числа, а остача відіграватиме при відшуканні другої десяткової цифри ту саму роль, що й число p при відшуканні першої. З кожною дальшою остачею діємо так само. Якщо на якомусь кроці в остачі вийде 0, то процес перетворення закінчиться. Його результатом буде скінченний десятковий дріб. Друга можливість — у процесі послідовного ділення остача 0 ніколи не з'явиться. Продовжуючи ділення, ми діставатимемо все нові й нові цифри нескінченного десяткового дробу. Проте дріб цей буде періодичним. Це пояснюється тим, що при діленні на q в остачі може вийти лише одне з чисел 1, 2, 3, ..., $q - 1$ (бо остача 0, за припущенням, відсутня). Оскільки процес послідовного ділення на q нескінченний, то остачі, які з'являтимуться одна за одною (починаючи з p), не можуть бути всі різними. Отже, на певному етапі з'явиться остача r, яка вже траплялась раніше. Але тоді з цього моменту повториться вся процедура ділення, яка була виконана між двома однаковими остачами r. У частці з'явиться група цифр, що точно повторюватиме попередню, і справа скінчиться новою появою остачі r. Зрозуміло, що дріб буде чистим періодичним тоді, коли повториться остача p. В іншому разі період почнеться не відразу після коми, і дріб буде мішаним періодичним.

21. Якщо $0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ — скінченний десятковий дріб, то $0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n = \frac{\overline{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n}}{10^n}$. Після скорочення цього звичайного дробу дістанемо дріб, у якого знаменник має лише ті прості множники, на які ділиться число 10, тобто 2 і 5. Навпаки, якщо $\frac{p}{q} = \frac{p}{2^k 5^s}$, то, домноживши чисельник і знаменник дробу на 2^{s-k}, якщо $s \geqslant k$, чи на 5^{k-s}, якщо $k \geqslant s$, одержимо дріб $\frac{m}{10^t}$, який можна подати, як скінченний десятковий.

22. 1) Якщо $\frac{p}{q} = 0, (\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)$, то $10^n \frac{p}{q} = \overline{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n} + \frac{p}{q}$, звідки $\frac{p}{q} = \frac{\overline{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n}}{10^n - 1}$. Отже, маємо таке правило: щоб перетворити правильний чистий періодичний дріб у звичайний, треба в чисельник написати число, яке стоїть у періоді, а в знаменник — n-цифрове число, записане самими дев'ятками (n — кількість цифр у періоді). Наприклад, $0, (021) = \frac{21}{999} = \frac{7}{333}$.

2) Якщо $\frac{p}{q} = 0, \beta_1 \ldots \beta_k (\gamma_1 \ldots \gamma_n)$, то $10^{k+n} \frac{p}{q} - 10^k \frac{p}{q} = \overline{\beta_1 \ldots \beta_k\gamma_1 \ldots \gamma_n} - \overline{\beta_1 \ldots \beta_k}$. Звідси: $\frac{p}{q} = \frac{a - b}{(10^n - 1)\, 10^k}$, де $a = \overline{\beta_1 \ldots \beta_k\gamma_1 \ldots \gamma_n}$, $b = \overline{\beta_1 \ldots \beta_k}$. Наприклад, $0, 12(6) = \frac{126 - 12}{900} = \frac{114}{900} = \frac{19}{150}$.

Зауваження. Правило перетворення періодичного десяткового дробу в звичайний можна вивести також, спираючись на формулу для суми членів нескінченної спадної геометричної прогресії. Нехай $\frac{p}{q} = 0, \beta_1 \ldots \beta_k (\gamma_1 \ldots \gamma_n)$. Позначивши

$a = \overline{\beta_1 \dots \beta_k \gamma_1 \dots \gamma_n}$, $b = \overline{\beta_1 \dots \beta_k}$, $c = \overline{\gamma_1 \dots \gamma_n}$, маємо

$$\frac{p}{q} = \frac{b}{10^k} + \frac{c}{10^{k+n}} + \frac{c}{10^{k+2n}} + \dots = \frac{b}{10^k} + \frac{c}{10^{k+n}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} =$$

$$= \frac{b}{10^k} + \frac{c}{10^k (10^n - 1)} = \frac{(10^n b + c) - b}{(10^n - 1)\, 10^k} = \frac{a - b}{(10^n - 1)\, 10^k}.$$

Формулу для перетворення чистого періодичного дробу звідси дістаємо при $b = 0$, $k = 0$ (у цьому випадку $a = c$).

23. 1) $\frac{3}{11}$; 2) $\frac{103}{333}$; 3) $\frac{320}{909}$;

4) $\frac{7}{165}$; 5) $\frac{359}{495}$; 6) $\frac{353}{3300}$.

24. 0,101001000100001... (після n-ї за чергою одиниці ставимо n нулів).

25. Доведемо, що $\sqrt{3}$ не раціональне число. Доводимо від супротивного. Припустимо, що $\sqrt{3} = p/q$, причому p/q — нескоротний дріб. Тоді $3 = p^2/q^2$, звідки $p^2 = 3q^2$, отже, $p^2 \,\vdots\, 3$, а тому $p \,\vdots\, 3$, тобто $p = 3s$, де s — ціле число. Підставивши значення $p = 3s$ у рівність $p^2 = 3q^2$, одержимо рівність $q^2 = 3s^2$, яка показує, що $q^2 \,\vdots\, 3$, а отже, і $q \,\vdots\, 3$. Виходить, що $p \,\vdots\, 3$ і $q \,\vdots\, 3$, а це суперечить тому, що дріб p/q нескоротний. Суперечність означає, що рівність $\sqrt{3} = p/q$ неможлива.

Так само можна довести, що числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ і подібні не раціональні.

26. Нехай $\sqrt{2} + \sqrt{3} = a$ — раціональне число. Після піднесення цієї рівності до квадрату дістанемо $\sqrt{6} = (a^2 - 5)/2$. Число $\frac{a^2 - 5}{2}$ — раціональне, отже, остання рівність суперечить тому, що $\sqrt{6}$ — ірраціональне число (див. розв'язок попередньої задачі).

27. 1) $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$, бо $(\sqrt[3]{3})^6 > (\sqrt{2})^6$.

2) Припустимо, що $\sqrt{6} + \sqrt{7} < \sqrt{26}$, тоді маємо $(\sqrt{6} + \sqrt{7} < \sqrt{26}) \Leftrightarrow (6 + 7 + 2\sqrt{42} < 26) \Leftrightarrow (2\sqrt{42} < 13) \Leftrightarrow (168 < 169)$. Остання рівність правильна, а тому початкова також правильна.

3) $\sqrt{10} + \sqrt{13} < \sqrt{11} + 2\sqrt{3}$.

4) Припустимо, що $\sqrt{a} + \sqrt{a + 3b} > \sqrt{a + b} + \sqrt{a + 2b}$. Маємо $(\sqrt{a} + \sqrt{a + 3b} > \sqrt{a + b} + \sqrt{a + 2b}) \Leftrightarrow (2a + 3b + 2\sqrt{a(a + 3b)} > 2a + 3b + 2\sqrt{(a + b)(a + 2b)}) \Leftrightarrow (\sqrt{a(a + 3b)} > \sqrt{(a + b)(a + 2b)}) \Leftrightarrow (a(a + 3b) > (a + b)(a + 2b)) \Leftrightarrow (a^2 + 3ab > a^2 + 3ab + 2b^2) \Leftrightarrow (0 > 2b^2)$. Остання рівність неправильна, отже неправильна й початкова нерівність. Тому насправді $\sqrt{a} + \sqrt{a + 3b} < \sqrt{a + b} + \sqrt{a + 2b}$.

5) $\sqrt{5} > \sqrt[3]{11}$. 6) $\sqrt{22} - \sqrt{6} > \sqrt{5}$.

28. 1) Правильне.

2) Правильне.

3) Правильне. Справді, нехай a — раціональне, а b — ірраціональне число. Припустимо, що число $c = a + b$ раціональне. Тоді $b = c - a$ також буде раціональне число. Дістали суперечність.

4) Неправильне. Наприклад, числа $\sqrt{2}$ і $1 - \sqrt{2}$ ірраціональні, а їх сума — раціональне число.

5) Неправильне. Добуток раціонального числа 0 на будь-яке ірраціональне число дорівнює 0, тобто є раціональним числом. Натомість правильне таке твердження: добуток відмінного від нуля раціонального числа на ірраціональне число є ірраціональне число. Доведення таке саме, що й у випадку 3).

6) Неправильне. Наприклад, числа $\sqrt{2}$ і $2\sqrt{2}$ ірраціональні, а їх добуток є раціональне число 4.

29. Наприклад, $a = \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{2}$.

30. Припустимо, що $\lg 5 = m/n$, де $m, n \in N$ $\left(\frac{m}{n} > 0\text{, бо } \lg 5 > 0\right)$. Тоді $10^{\frac{m}{n}} = 5$, звідки $10^m = 5^n$. Проте така рівність неможлива, бо в її лівій частині стоїть парне число, а в правій непарне.

31. 1) Правильна. 2) Неправильна. 3) Неправильна. 4) Неправильна. 5) Правильна.

32. 1) $x \leqslant 0$. 2) $x \geqslant 0$. 3) Для всіх $x \in R$.

33. 1) Правильне. 2) Неправильне. 3) Правильне. 4) Неправильне. 5) Неправильне. 6) Правильне. 7) Правильне.

34. 1) Для чисел одного знака. 2) Для чисел одного знака. 3) Для чисел різних знаків.

35. $[a + c, b + c]$.

36. $\{0\}$, якщо $c = 0$; $[bc, ac]$, якщо $c < 0$; $[ac, bc]$, якщо $c > 0$.

37. $a + b$. 2) Вказівка. Розглянути два випадки: $a \geqslant b$ і $a \leqslant b$.

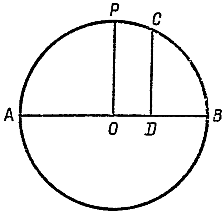


Рис. 45

38. Правильні всі крім 2).

39. 1) Ні. Прикладом може бути відкритий інтервал. 2) Так. 3) Так. 4) Ні.

40. 1) $\left[\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}\right] \Leftrightarrow [a + b - 2\sqrt{ab} \geqslant 0] \Leftrightarrow [(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0]$. Рівність буде тоді й тільки тоді, коли $a = b$. 2) Розглянемо коло з діаметром $a + b$ (рис. 45). Нехай $|AD| = a$, $|DB| = b$, $[PO] \perp [AB]$, $[CD] \perp [AB]$. Тоді $|PO| = \frac{a+b}{2}$, $|CD| = \sqrt{ab}$. Отже, геометрично нерівність Коші виражає простий факт: будь-яка хорда кола не перевищує його діаметра.

ПОСЛІДОВНОСТІ

1. 1) $a_n = (-1)^n$; 2) $a_n = 1 + (-1)^{n+1}$;

3) $a_n = 5 + (-1)^n 2$; 4) $a_n = x^{n-1}$;

5) $a_n = a^{n+6}$; 6) $a_n = x^{2(n+1)}$;

7) $a_n = \frac{\sin(2n+1)\alpha}{2^{n+1}}$; 8) $a_n = \frac{(x+n)^{n+1}}{(2n+1)!}$;

9) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{2(n+1)}{2n+5}$; 10) $a_n = \frac{\cos(2n-1)\beta}{3n-2}$.

2. 1) Твердження неправильне. Послідовність $a_n = -n$ необмежена, проте $a_1 = -1$ — її найбільший член.

2) Твердження неправильне. Обмежена послідовність може не мати навіть ні найбільшого, ні найменшого члена. Наприклад, усі члени послідовності $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n}$ лежать на інтервалі $]-1, 1[$, проте жодний з цих членів не є найбільшим чи найменшим.

3) Твердження неправильне, як це випливає з відповіді на попередній приклад.

4) Твердження правильне. Якщо $c = a_k$ — найбільший, а $b = a_s$ — найменший члени послідовності (a_n), то всі її члени лежать на інтервалі $[b, c]$.

5) Твердження правильне. Якщо послідовність зростає, то її перший член найменший, а якщо спадає, то перший член найбільший.

6) Твердження правильне. Нехай усі члени послідовності лежать на інтервалі $[a, b]$. Цей інтервал містить скінченну кількість цілих чисел. Отже, члени послідовності будуть мати лише скінченну кількість різних значень, а тому серед них обов'язково буде найменше значення і найбільше.

7) Твердження неправильне, про що свідчить приклад такої послідовності: $a_n = (1 + (-1)^n)\, n$. Усі її члени з непарними номерами дорівнюють нулеві, а серед членів з парними номерами є як завгодно великі.

3. 1) Правильне.

2) Правильне. Якщо послідовність має границю, то вона обмежена.

3) Неправильне. Якщо $|q| > 1$, то послідовність необмежена, а коли $|q| < 1$ або $q = -1$, то обмежена.

4) Неправильне. При $|q| < 1$ послідовність має границю 0, а при $q = -1$ або $|q| > 1$ — границі не має.

5) Правильне. Якщо $d > 0$, то послідовність зростає, а якщо $d < 0$, то спадає.

6) Неправильне. При $q > 0$ послідовність монотонна, а при $q < 0$ — ні.

4. 1) Так. 2) kd.

5. 1) Так. 2) q^k.

6. 1) 4. 2) Ні.

7. Так.

8. 1) П'ятий. 2) $\sqrt{2}$.

9. Ні.

10. Так буде, коли знаменник прогресії від'ємний.

11. Ні; послідовність $(|a_n|)$ не буде арифметичною прогресією, якщо не всі члени арифметичної прогресії (a_n) мали однаковий знак.

12. Так.

13. Так, за винятком того випадку, коли різниці прогресій — протилежні числа і сума прогресій буде сталою послідовністю.

14. Нехай (aq^n) і (bp^n) — геометричні прогресії ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $q \neq 0$, $p \neq 0$). Ненульова послідовність $(aq^n + bp^n)$ тоді й тільки тоді буде геометричною прогресією, коли для кожного $n > 1$ справджуватиметься рівність

$$(aq^{n-1} + bp^{n-1})(aq^{n+1} + bp^{n+1}) = (aq^n + bp^n)^2.$$

Після зрозумілих спрощень одержимо еквівалентну їй рівність $q^2 + p^2 = 2qp$, звідки $(q - p)^2 = 0$, тобто $q = p$. При $q = p$ послідовність $(aq^n + bp^n)$ буде нульовою, якщо $a + b = 0$. Отже, щоб сума двох геометричних прогресій була також геометричною прогресією, треба, щоб $a + b \neq 0$ і $q = p$.

15. 1) Правильне. Це — відома необхідна умова збіжності послідовності.

2) Неправильне. Клас обмежених послідовностей ширший, ніж клас збіжних послідовностей. Наприклад, послідовність $a_n = (-1)^n$ обмежена, але не має границі.

3) Правильне. Це — надзвичайно важлива достатня умова збіжності послідовності.

4) Неправильне. Збіжна послідовність не обов'язково монотонна. Наприклад, послідовність $a_n = (-1)^n/n$ не монотонна, проте вона має границю 0.

5) Неправильне. Наприклад, у кожному околі точки 1 лежить безліч членів послідовності $a_n = (-1)^n$, проте ця послідовність не має границі.

6) Правильне. Це твердження рівносильне визначенню границі послідовності.

16. 1) Всі члени послідовності (a_n) дорівнюють c.

2) Послідовність (a_n) обмежена.

3) Така послідовність (a_n) не існує.

4) Цю властивість має кожна послідовність (a_n).

17. Наприклад: 1) $a_n = c - 1/n$;

2) $a_n = c + 1/n$;

3) $a_n = c + (-1)^n/n$.

18. 1) Правильне. Якщо для всіх $n \in N$ $|a_n| < K_1$ і $|b_n| < K_2$, то $|a_n \pm b_n| \leqslant |a_n| + |b_n| < K_1 + K_2$.

2) Правильне. Якщо для всіх $n \in N$ $|a_n| < K_1$ і $|b_n| < K_2$, то $|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < K_1 K_2$.

3) Ні. Частка двох обмежених послідовностей не обов'язково обмежена послідовність. Наприклад, послідовності $a_n = 1/n$ і $b_n = 1/n^2$ обмежені, а послідовність $a_n/b_n = n$ — ні.

4) Ні. Сума двох необмежених послідовностей може бути й обмеженою послідовністю. Наприклад, послідовності $a_n = n$ і $b_n = -n$ необмежені, а їх сума $a_n + b_n$ — нульова послідовність.

5) Ні. Наприклад, послідовності $a_n = (1 + (-1)^n)\, n$ і $b_n = (1 + (-1)^{n+1})\, n$ необмежені, а їх добуток $a_n b_n$ — нульова послідовність.

6) Ні. Наприклад, послідовності $a_n = n$ і $b_n = n^2$ необмежені, а їх частка $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n}$ — обмежена послідовність.

19. Не може. Справді, $b_n = (a_n + b_n) - a_n$. Якби послідовність $a_n + b_n$ збігалась, то послідовність b_n, як різниця збіжних послідовностей, також збігалась би.

20. Може. Наприклад, послідовність $a_n = \frac{1}{n}$ збігається, послідовність $b_n = (-1)^n$ розбігається, а їх добуток $a_n b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ — збіжна послідовність.

21. Наприклад, $a_n = n + \frac{1}{n}$, $b_n = -n$.

22. Наприклад, $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$.

23. Наприклад, $a_n = n$, $b_n = n^2$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

24. Так. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число n_0, що $|a_n - a| < \varepsilon$ для всіх $n > n_0$. Але $\| a_n | - | a \| \leqslant | a_n - a |$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} | a_n | = | a |$.

25. Ні. Наприклад, послідовність $a_n = (-1)^n$ розбігається, а послідовність $| a_n | = 1$ збігається.

26. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Маємо: $|a_n - 0| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, якщо $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Отже, для всіх $n > n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ($[x]$ — ціла частина x) справджується нерівність $|a_n - 0| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

27. $|a_n - 0| = \frac{|\sin n|}{n} \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$, якщо $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

28. Нехай $|b_n| < b$ для всіх $n \in N$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Маємо $|c_n - 0| = |c_n| = |a_n||b_n| \leqslant b|a_n| < \varepsilon$, якщо $|a_n| < \frac{\varepsilon}{b}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то існує таке натуральне n_0, що $|a_n| < \frac{\varepsilon}{b}$ для всіх $n > n_0$. Для цих самих n матимемо $|c_n| < \varepsilon$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

29. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Маємо:

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n^2+1}{n^2+2} - 1 \right| = \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

якщо $n > n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

30. Усі твердження правильні.

31. Якщо $a = b$, то послідовність збігається до a; якщо $a \neq b$, то послідовність розбігається.

32. Для будь-якого $n \in N$ маємо $x_{n+1} - x_n = (a(n+1) + b) - (an + b) = a$. Отже, (x_n) — арифметична прогресія з різницею a; $x_1 = a + b$.

33. Для будь-якого $n \in N$ маємо

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}b}{a^n b} = a.$$

Отже, (x_n) — геометрична прогресія із знаменником a; $x_1 = ab$.

34. 1) Геометричну прогресію з першим членом $\sqrt{2}/2$ і знаменником $\sqrt{2}/2$.
2) $\sqrt{2}+1$.

35. 1) Геометричну прогресію із знаменником $q = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}$.

2) $r_n = r_1 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi-\alpha}{4}\right)^{2(n-1)}$; $s_n = \pi r_1^2 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{4}\right)^{4(n-1)}$.

3) Геометричну прогресію з першим членом πr_1^2 і знаменником $\operatorname{tg}^4 \frac{\pi - \alpha}{4}$.

36. 1) Геометричну прогресію із знаменником $q = 2 - \sqrt{3}$.
2) $r_n = (2-\sqrt{3})^{n-1}$.

37. 1) Геометричну прогресію із знаменником $\frac{1}{3}$.

2) Геометричну прогресію із знаменником $\frac{1}{27}$ і першим членом $\frac{4}{3}\pi r_1^3$.

3) $\frac{6}{13}$.

38. $\frac{d}{2}$, де d — різниця прогресії (a_n). Вказівка. $b_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2n}$.

39. $a_9 = a_{10} = -2$.

40. $a_7 = 17{,}1$.

41. I спосіб. $[a_{n+1} < a_n] \Leftrightarrow [\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow [\sqrt{n+2} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}] \Leftrightarrow [(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})^2 < 4(n+1)] \Leftrightarrow [\sqrt{n(n+2)} <$ $< n+1] \Leftrightarrow [n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1] \Leftrightarrow [0 < 1]$. II спосіб. Члени даної послідовності — це значення в цілих додатних точках функції $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$. Оскільки для всіх $x > 0$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$, то ця функція монотонно спадає на $[0, \infty[$, а тому дана послідовність також монотонно спадає.

42. Рівність $a_n = 2a_{n-1} + 1$ рівносильна такій: $a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$. Це означає, що послідовність $b_n = a_n + 1$ — геометрична прогресія із знаменником 2. Взявши до уваги, що $b_1 = a_1 + 1 = 2$, маємо $b_n = b_1 2^{n-1} = 2^n$. Отже, $a_n = 2^n - 1$.

43. Підберемо таке β, щоб співвідношення $a_n = pa_{n-1} + q$ набрало вигляду $a_n + \beta = p(a_{n-1} + \beta)$. Маємо $p\beta - \beta = q$, звідки $\beta = q/(p-1)$. Із рівності $a_n + \beta = p(a_{n-1} + \beta)$ випливає, що послідовність $b_n = a_n + \beta$ є геометричною прогресією із знаменником p. Крім того, $b_1 = a_1 + \beta = c + \beta$. Тому $b_n = (c + \beta)p^{n-1}$, звідки

$$a_n = \left(c + \frac{q}{p-1}\right)p^{n-1} - \frac{q}{p-1}.$$

44. 1) Арифметична прогресія з різницею $\log_a q$, де q — знаменник геометричної прогресії (x_n). 2) Геометрична прогресія із знаменником a^d, де d — різниця арифметичної прогресії (y_n).

45. Додавши рівності $a_k = \frac{a_{k-2}}{2} + \frac{a_{k-1}}{2}$ для $k = 3, 4, \ldots, n$, дістанемо $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{x+2y}{2}$.

Використавши тепер результат задачі 43, матимемо

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{x-y}{3\cdot 2^{n-2}} + \frac{x+2y}{3}.$$

Звідси: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{x+2y}{3}$.

ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІКИ

1. 1) а) $D(f) = R$; $E(f) = R$, якщо n непарне число: $E(f) = [0, \infty[$, якщо n парне число.

б) $D(f) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$; $E(f) =]0, +\infty[$, якщо n — парне число; $E(f) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, якщо n — непарне число.

в) $D(f) = [0, +\infty[$; $E(f) = [0, +\infty[$.

г) $D(f) = R$; $E(f) =]0, +\infty[$.

д) $D(f) =]0, +\infty[$; $E(f) = R$.

е) $D(f) = R$; $E(f) = [-1, 1]$.

є) $D(f) = R$; $E(f) = [-1, 1]$.

ж) $D(f) = \bigcup\limits_{n\in Z}\left]-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$

(об'єднання всіх відкритих проміжків $\left]-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$, де n пробігає значення всіх цілих чисел); $E(f) = R$.

з) $D(f) = \bigcup\limits_{n\in Z}]\pi n, \pi + \pi n[$; $E(f) = R$.

2) а) R, якщо n непарне число; $]-\infty, 0]$ і $[0, +\infty[$, якщо n парне число.

б) $]-\infty, 0[$ і $]0, +\infty[$.

в) $[0, +\infty[$ (функція монотонна).

г) R (функція монотонна).

д) $]0, +\infty[$ (функція монотонна).

е) Проміжки зростання: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

проміжки спадання: $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

є) Проміжки зростання: $[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$, $n \in Z$;
проміжки спадання: $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.

ж) $\left]-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$, $n \in Z$. На кожному з проміжків функція зростає.

з) $]\pi n, \pi + \pi n[$, $n \in Z$; на кожному з проміжків функція спадає.

3) Функції е), ж) і з) непарні, а функція є) парна. Функції а) і б) парні, якщо n — парне число, і непарні, якщо n — непарне число.

2. Так. Якщо характер монотонності функцій $g(x)$ і $f(x)$ однаковий (тобто вони обидві зростають або обидві спадають), то функція $t(x)$ зростає на $[a, b]$. Якщо ж одна з даних функцій зростає, а друга спадає, то функція $t(x)$ спадає на $[a, b]$. Нехай, наприклад, $f(x)$ спадає на $[c, d]$, а $g(x)$ зростає на $[a, b]$. Візьмемо дві довільні точки $x_1, x_2 \in [a, b]$. Якщо $x_1 < x_2$, то $g(x_1) < g(x_2)$, а тому $t(x_1) = f(g(x_1)) > f(g(x_2)) = t(x_2)$. Отже, $t(x)$ спадає на $[a, b]$. Інші три випадки розгляньте самостійно.

3. У випадках а) і в) функція $t(x)$ парна, а у випадку б) — непарна. Доведення для випадку б): $t(-x) = f(g(-x)) = f(-(g(x))) = -f(g(x)) = -t(x)$.

4. Ні. Наприклад, функція

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \end{cases}$$

не має точок екстремуму на R і немонотонна. Дане твердження правильне для неперервних функцій.

5. 1) Функції а), в), г), д), є) обмежені, а функції б), е), ж) — ні.

2) Ні. Наприклад, функція

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \end{cases}$$

визначена в усіх точках інтервала $[0, 1]$, але не обмежена на цьому інтервалі.

3) Ні. Наприклад, функція

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \neq 0 \text{ і } x \neq 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } x = 0 \text{ або } x = 1 \end{cases}$$

визначена в усіх точках інтервалу $[0, 1]$, але не має на цьому інтервалі найбільшого чи найменшого значення.

6. В жодних двох різних точках інтервалу $[a, b]$ функція $f(x)$ не повинна мати однакове значення. Зокрема, обернена функція існує, якщо функція $f(x)$ строго монотонна на інтервалі $[a, b]$.

7. 1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = -\sqrt{x}$; 3) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$;

4) $y = \frac{1}{x}$; 5) $y = \arcsin x$;

6) $y = -\arcsin x + \pi$; 7) $y = \arccos x$;

8) $y = -\arccos x$; 9) $y = \operatorname{arctg} x$;

10) $y = \operatorname{arctg} x - \pi$; 11) $y = \operatorname{arcctg} x$;

12) $y = \operatorname{arcctg} x - 2\pi$; 13) $y = \sqrt{1 - x}$.

8. 1) $D(-f) = D(f)$; $E(-f) = \{y / -y \in E(f)\}$.

2) Графік функції $y = -f(x)$ є симетричним образом графіка функції $y = f(x)$ відносно осі абсцис.

9. Нехай c' — симетричний образ кривої c відносно осі абсцис. Графік функції $y = |f(x)|$ — це перетин множини точок $C \cup C'$ з півплощиною $y \geqslant 0$.

10. Кожну точку графіка C слід відтягнути в a разів від осі обсцис паралельно осі ординат.

11. Криву c слід змістити на $\vec{r}(0; b)$.

12. Позначимо $\varphi(x) = f(x - c)$. Якщо $x \in D(f)$, то $x + c \in D(\varphi)$, причому $\varphi(x + c) = f(x + c - c) = f(x)$. Навпаки, якщо $x \in D(\varphi)$, то $x - c \in D(f)$ і $\varphi(x) = f(x - c)$. Отже, щоб дістати графік функції $y = f(x - c)$, слід графік функції $y = f(x)$ змістити на $\vec{r}(c; 0)$.

13. Графіки конгруентні. Графік функції $y = f(x - c) + b$ є образом графіка функції $y = f(x)$ при паралельному перенесенні $\vec{r}(c; b)$ (див. 11 і 12).

14. Позначимо $\varphi(x) = f(-x)$. Оскільки $x \in D(\varphi)$ тоді й тільки тоді, коли $-x \in D(f)$, причому для будь-якого $x \in D(\varphi)$ справджується рівність $\varphi(x) = f(-x)$, то графіки функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ є симетричними образами один одного відносно осі ординат. Зокрема, ці графіки конгруентні.

15. Для $x \geqslant 0$ маємо: $|x| = x$. Отже, для $x \geqslant 0$ графіки обох функцій однакові. Графік функції $y = f(|x|)$ для $x \leqslant 0$ є симетричним образом графіка цієї функції для $x \geqslant 0$, бо функція $f(|x|)$ парна.

16. Якщо функція $f(x)$ визначена в точці x_0, то функція $\varphi(x) = f(kx)$ визначена в точці $\frac{x_0}{k}$, причому $\varphi\left(\frac{x_0}{k}\right) = f\left(k\frac{x_0}{k}\right) = f(x_0)$. Навпаки, якщо функція $\varphi(x)$ визначена в точці x_1, то функція $f(x)$ визначена в точці kx_1, причому $\varphi(x_1) = f(kx_1)$. Точка $\frac{x_0}{k}$ осі абсцис лежить в k разів ближче від початку координат, ніж точка x_0, причому обидві ці точки лежать по один бік від початку координат. Звідси випливає, що графік функції $y = f(kx)$ можна дістати, наблизивши в k разів до осі ординат кожну точку графіка функції $y = f(x)$, або, як це кажуть, рівномірно стиснувши до осі ординат в k разів графік функції $y = f(x)$.

17. $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=$ $=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Отже, графік функції $y=ax^2+bx+c$ є образом графіка функції $y=ax^2$ при паралельному перенесенні $\vec{r}\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Крім того, в разі, коли $a<0$, графіки функцій $y=ax^2$ і $y=|a|x^2$ симетричні одне одному відносно осі абсцис, а тому конгруентні. Результат цієї задачі показує, що форма графіка квадратної функції (тобто, форма параболи) визначається числом $|a|$.

18. $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{\frac{a}{c}\left(x+\frac{d}{c}\right)-\frac{ad}{c^2}+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}+$ $+\frac{a}{c}$. Отже, графік функції $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ є образом графіка функції $y=\frac{k}{x}$, де $k=\frac{bc-ad}{c^2}$, при паралельному перенесенні $\vec{r}\left(-\frac{d}{c};\ \frac{a}{c}\right)$. Форма гіперболи визначається числом $k=\frac{|bc-ad|}{c^2}$ (при зміні знака числа k форма гіперболи не змінюється). Горизонтальна асимптота має рівняння $y=\frac{a}{c}$, а вертикальна $x=$ $=-\frac{d}{c}$. *Зауваження.* З'ясуємо значення умов $ad\neq bc$ і $c\neq 0$. Якщо $ad=bc$, то чисельник $ax+b$ кратний знаменникові $cx+d$ і функція $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ буде сталою, визначеною в усіх точках, крім $x=-\frac{d}{c}$. Якщо ж $c=0$, то функція $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ лінійна.

19. 1) Нехай $x\in D(f)$. Тоді також $x+T\in D(f)$, причому $f(x+T)=f(x)$. Замінивши в цьому міркуванні x на $x+T$, дістанемо, що $x+2T\in D(f)$ і $f(x+$ $+2T)=f(x+T)=f(x)$. Взявши тепер за x число $x+2T$, матимемо: $x+3T\in$ $\in D(f)$ і $f(x+3T)=f(x)$. Через n кроків будемо мати: $x+nT\in D(f)$ і $f(x+nT)=$ $=f(x)$. Аналогічно дістаємо, що $x-nT\in D(f)$ і $f(x-nT)=f(x)$.

2) Позначимо через x_0 яку-небудь точку з області визначення функції $f(x)$. Нехай x — будь-яка інша точка. Позначимо $T=|x-x_0|$. Звідси $x=x_0+T$ або $x=x_0-T$. За умовою T — період функції, тому $x\in D(f)$ і $f(x)=f(x_0)$. Отже, в кожній точці x функція $f(x)$ має те саме значення, що й у точці x_0. Це означає, що функція стала.

3) Розглянемо, наприклад, таку функцію:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x \text{ — раціональне число;}\\ 1, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне число.}\end{cases}$$

Будь-яке раціональне число $h>0$ є періодом цієї функції. Справді, якщо x — раціональне число, то числа $x\pm h$ також раціональні; якщо ж x — ірраціональне число, то числа $x\pm h$ також ірраціональні. В обох випадках маємо $f(x\pm h)=f(x)$.

4) Позначимо $\varphi(x)=f(\alpha x)$. Нехай $x\in D(\varphi)$. Тоді $\varphi\left(x\pm\frac{T}{\alpha}\right)=$ $=f\left(\alpha\left(x\pm\frac{T}{\alpha}\right)\right)=f(\alpha x\pm T)=f(\alpha x)=\varphi(x)$. Отже, $\frac{T}{\alpha}$ — період функції $\varphi(x)$.

5) Нехай T — період функції $g(x)$ і $x \in D(\varphi)$, тоді $\varphi(x \pm T) = f(g(x \pm \pm T)) = f(g(x)) = \varphi(x)$. Отже, T — період функції $\varphi(x)$.

6) Припустимо, що $\frac{h_1}{h_2} = \frac{n}{m}$, де $n, m \in N$. Тоді $mh_1 = nh_2$. Позначимо $h = = mh_1 = nh_2$. Кожна з функцій $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\,g(x)$ і $\frac{f(x)}{g(x)}$ має період h. Доведемо це, наприклад, для функції $\varphi(x) = f(x)\,g(x)$. Маємо: $\varphi(x \pm h) = f(x \pm h) \times \times g(x \pm h) = f(x \pm mh_1)\,g(x \pm nh_2) = f(x)\,g(x) = \varphi(x)$.

7) а) Якщо функція $y = f(x)$ має період T, то її графік досить побудувати на якому-небудь інтервалі завдовжки T, наприклад, на інтервалі $[0, T[$. Інші ланки графіка можна дістати паралельними переміщеннями $\vec{r}(nT, 0)$, де $n \in Z$, побудованої частини графіка.

б) Рівняння $f(x) = c$ досить розв'язати на якому-небудь інтервалі $[a, a + T[$ завдовжки T. Якщо $x_1, x_2, \ldots, x_s$ — розв'язки рівняння на цьому інтервалі, то всі його розв'язки можна подати формулами: $x = x_i + nT$; $i = 1, 2, \ldots, s$; $n \in Z$.

20. 1) $T_0 = \pi$. Справді, π є періодом функції $f(x) = |\sin x|$, бо $f(x \pm \pi) = = |\sin(x \pm \pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$. З другого боку, жодне менше число не може бути періодом цієї функції, бо сусідні точки, де вона дорівнює нулю, лежать на відстані π одна від одної.

2) 2; 3) 3; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{2}{3}$; 7) π; 8) 1.

21. 1) Рис. 46.

2) Позначимо $f(x) = x - [x]$. Згідно з визначенням функції $[x]$ маємо: $[x + 1] = [x] + 1$. Тому $f(x + 1) = (x + 1) - [x + 1] = (x + 1) - ([x] + 1) = = x - [x] = f(x)$. Аналогічно, $f(x - 1) = f(x)$. Отже, функція $y = x - [x]$ має період 1. Будуємо її графік на інтервалі $[0, 1[$. Якщо $x \in [0, 1[$, то $[x] = 0$, а тому $x - [x] = x$, інші ланки графіка дістаємо зміщеннями $\vec{r}(n, 0)$, де $n \in Z$ (рис. 47).

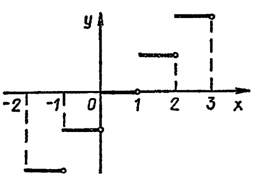


Рис. 46

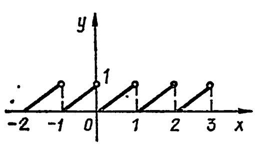


Рис. 47

3) Рис. 48.

22. Кожна з лінійних функцій $y = x - c_i$ змінює знак в одній точці, а саме в точці c_i. Тому для $x > c_i$ $|x - c_i| = x - c_i$, а для $x < c_i$ $|x - c_i| = -x + c_i$. Звідси випливає, що на кожному з проміжків $]-\infty, c_1]$, $[c_1, c_2]$, ..., $[c_{n-1}, c_n]$, $[c_n, +\infty[$ функція $f(x)$ лінійна (або стала). Наприклад, на проміжку $]-\infty, c_1]$ $f(x) = (b - a_1 - - a_2 - \ldots - a_n)\,x + (d + a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n)$, а на проміжку $[c_1, c_2]$ $f(x) = = (b + a_1 - a_2 - \ldots - a_n)\,x + (d - a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n)$. При цьому лінійним

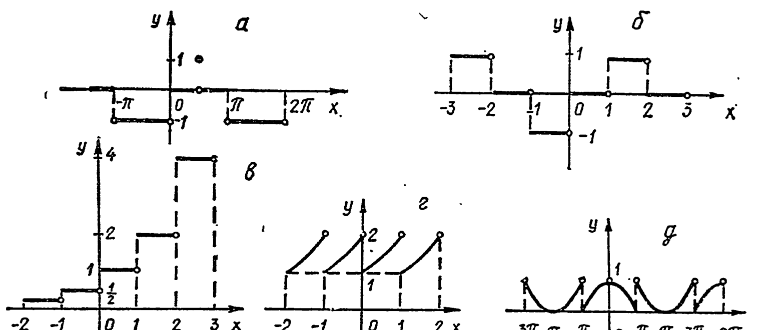


Рис. 48

ні функції, які зображають дану функцію $f(x)$ на двох сусідніх проміжках зі спільним кінцем c_i, не однакові. Вони мають різні коефіцієнти при x, бо один з цих коефіцієнтів $k_1 = b + a_1 + \ldots + a_{i-1} - a_i - a_{i+1} - \ldots - a_n$, а другий $k_2 = b + a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_i - a_{i+1} - \ldots - a_n$. Різниця між ними $k_2 - k_1 = 2a_i$, а за умовою $a_i \neq 0$. Отже, графіком функції $f(x)$ є ламана лінія, утворена двома прямолінійними променями (на інтервалах $]-\infty, c_1]$ і $[c_n, +\infty[$) і $n-1$ прямолінійними відрізками. Вершини цієї ламаної мають абсциси $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Для побудови графіка немає потреби знаходити для кожного окремого інтервалу відповідну лінійну функцію. Щоб побудувати ламану, досить знати її вершини, а також ще по одній точці на кожному з двох її променів. Для цього досить обчислити значення функції $f(x)$ у точках c_1, $c_2, \ldots, c_n$, а також у яких-небудь двох точках, одна з яких лежить ліворуч від c_1, а друга — праворуч від c_n.

23. Графік даної функції — ламана лінія з вершинами в точках, що мають абсциси: —1, 0, 1, 2 (див. задачу 22). Обчислюємо функцію в цих точках, а також в точках 3 і —2:

$$y(-1) = -1; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = 2; \quad y(2) = -1;$$
$$y(3) = 0; \quad y(-2) = -1.$$

Отже, вершинами ламаної є точки $M_1(-1; -1)$, $M_2(0; 1)$, $M_3(1; 2)$, $M_4(2; -1)$. На променях ламаної лежать точки $A(3; 0)$ і $B(-2; -1)$. Наносимо всі ці точки на рисунок і сполучаємо їх належним чином прямолінійними відрізками (рис. 49).

24. 1) Парна. 2) Непарна. 3) Непарна. 4) Ні парна, ні непарна. 5) Непарна. Справді,

$$f(-x) = \lg(-x + \sqrt{1 + (-x)^2}) = \lg(\sqrt{1 + x^2} - x) =$$
$$= \lg \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x} = -\lg(x + \sqrt{1 + x^2}) = -f(x).$$

6) Непарна. 7) Парна. 8) Непарна. 9) Непарна. 10) Ні парна, ні непарна. 11) Непарна. 12) Ні парна, ні непарна. 13) Непарна. В к а з і в к а. Нарисуйте графік функції. 14) Непарна. 15) Парна.

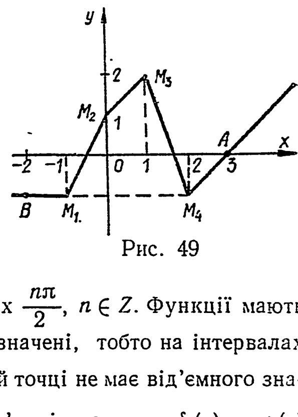


Рис. 49

25. 1) Ні. Функція $f(x)$ визначена на $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$, а функція $g(x)$ тільки на інтервалі $]0, \infty[$. Обидві функції мають однакові значення на $]0, \infty[$. 2) Ні. $D(f) =]2, \infty[$, $D(g) =]-\infty, 0[\cup]2, \infty[$; $f(x) = g(x)$ на інтервалі $]2, \infty[$. 3) Ні. $D(f) =]0, \infty[$, $D(g) = R$; $f(x) = g(x)$ на $]0, \infty[$. 4) Та сама. 6) Ні; $f(x) = g(x)$ на $[0, \infty[$. Якщо ж $x < 0$, то $f(x) = -g(x)$. 7) Та сама. 8) Ні. Функція $f(x)$ не визначена в точках $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, а функція $g(x)$ — у точках $\frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$. Функції мають однакові значення в усіх тих точках, де вони обидві визначені, тобто на інтервалах $\left]\frac{n\pi}{2}, \frac{(n+1)\pi}{2}\right[$, $n \in Z$. 9) Ні. Функція $g(x)$ в жодній точці не має від'ємного значення, в той час як функція $f(x)$ має як додатні, так і від'ємні значення; $f(x) = g(x)$ на тих інтервалах, де $\cos x \geqslant 0$, тобто на інтервалах $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in Z$. 10) Та сама.

26. 1) $c = 8$. 2) $c = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$. 3) $c = -\frac{1}{3}$. 4) $c = 1$.

27. 1) $F(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 9$.

2) $F(x) = \sqrt{x} - 3$.

3) $F(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$.

4) $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{\pi}{2}$.

28. 1) $c = 9$. 2) $c = \frac{1}{2}$. 3) $c = 12$.

29. 1) Ні. Зв'язок між $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, який виражається формулою $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, дає лише можливість обчислити $\cos^2\alpha$, а за квадратом числа не можна однозначно відновити саме число, якщо тільки воно не дорівнює нулю.

2) $|\cos\alpha| = \sqrt{1-a^2}$; $|\operatorname{tg}\alpha| = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$, якщо $a^2 \neq 1$, в іншому разі $\operatorname{tg}\alpha$ не існує; $|\operatorname{ctg}\alpha| = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$, якщо $a \neq 0$, а при $a = 0$ $\operatorname{ctg}\alpha$ не існує.

3) На інтервалі $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ функція $\cos x$ від'ємна, тому $\cos\alpha = -\sqrt{1-a^2}$. Далі маємо: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$, якщо $\alpha \neq \pi$; при $\alpha = \pi$ $\operatorname{ctg}\alpha$ не існує.

30. 1) Так; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Щоб обчислити $\cos 2\alpha$, досить знати лише одне з чисел $\sin\alpha$ або $\cos\alpha$. 2) Ні. Можна обчислити тільки квадрати (а отже, модулі) цих чисел: $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$, $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$. Для цього досить знати, як це видно з формул, тільки $\cos\alpha$.

31. 1) За визначенням, $g(x) = \arcsin x$ — це функція, обернена до $f(x) = \sin x$ на інтервалі $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тому функція $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ обернена до $g(x) = \arcsin x$. Звідси випливає, що $f(g(x)) = \sin(\arcsin x) = x$, де $x \in [-1, 1]$. 2) Позначимо $\arcsin x$ через $y: y = \arcsin x$. Маємо: $\sin y = x$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Оскільки на інтервалі $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функція $\cos y$ не від'ємна, то $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. Отже, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$. 3) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 4) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. 5) x, $x \in [-1, 1]$. 6) $\sqrt{1-x^2}$. 7) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. 8) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 9) x, $x \in R$. 10) Нехай $y = \operatorname{arctg} x$. Маємо: $\operatorname{tg} y = x$, $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Оскільки $\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$ і $\cos y > 0$ для $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, то $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Отже, $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 11) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. 12) $\frac{1}{x}$. 13) x. 14) $\frac{1}{x}$. 15) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 16) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

32. 1) Запишемо рівність так: $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Нехай $x \in [-1, 1]$. Позначимо $\arcsin x = \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \beta$. Маємо: $\sin\alpha = x$, $\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$. Крім того, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ і $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Отже, $\sin\alpha = \sin\beta$ і точки α, β лежать на одному інтервалі монотонності функції $\sin t$. Тому $\alpha = \beta$. *Зауваження.* У тому, що рівність $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ справджується для всіх $x \in [-1, 1]$, легко впевнитись також геометрично. Досить звернути увагу на те, що графіки функцій $y = \arcsin x$ і $y = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ — та сама крива.

33. 1) Півколо $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$ 2) Півколо $\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = 4, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

3) Півколо $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$

34. 1) $f(x) = -\cos 2x$.

2) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$.

3) $f(x) = \frac{\pi}{2} + \arccos x$ або $f(x) = \pi - \arcsin x$.

4) $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Після таких перетворень початкових формул графік кожної з функцій можна побудувати елементарними перетвореннями відомих графіків.

35. Доцільно спочатку записати функцію так: $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{2} - x\right) + 1$. Послідовність перетворень може бути такою:

1) $f_1(x) = \log_2 x$ (початковий графік); 2) $f_2(x) = f_1\left(x + \frac{1}{2}\right) = \log_2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ (зміщення попереднього графіка на $-1/_2$ вздовж осі абсцис); 3) $f_3(x) = f_2(-x) = \log_2\left(-x + \frac{1}{2}\right)$ (симетричне відображення графіка $f_2(x)$ відносно осі ординат); 4) $f_4(x) = f_3(x) + 1 = \log_2\left(-x + \frac{1}{2}\right) + 1 = f(x)$ (зміщення графіка функції $f_3(x)$ на 1 вздовж осі ординат; заключний графік). Можна діяти також по-іншому: 1) $\varphi_1(x) = \log_2 x$; 2) $\varphi_2(x) = \varphi_1(-x) = \log_2(-x)$ (симетричне відображення графіка функції $\varphi_1(x)$ відносно осі ординат); 3) $\varphi_3(x) = \varphi_2\left(x - \frac{1}{2}\right) = \log_2\left(-\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$ (зміщення графіка функції $\varphi_2(x)$ на $\frac{1}{2}$ вздовж осі абсцис); 4) $\varphi_4(x) = \varphi_3(x) + 1$ (заключний графік).

36. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = f_1(x+4) = \sqrt{x+4}$, $f_3(x) = f_2(-x) = \sqrt{-x+4}$, $f_4(x) = f_3(|x|) = \sqrt{-|x|+4} = f(x)$.

Або $\varphi_1(x) = \sqrt{x}$, $\varphi_2(x) = \varphi_1(-x) = \sqrt{-x}$, $\varphi_3(x) = \varphi_2(x-4) = \sqrt{-(x-4)}$,

$$\varphi_4(x) = \varphi_3(|x|) = \sqrt{4 - |x|} = f(x).$$

37. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = f_1(|x|) = \sqrt{|x|}$, $f_3(x) = f_2(x-4) = \sqrt{|x-4|} = f(x)$.

38. Зміщення на $\frac{1}{4}$ вздовж осі абсцис. Справді, якщо $f(x) = \sin \pi x$, то $\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = f\left(x - \frac{1}{4}\right)$.

39. $f_{\text{найм}} = f(1) = -\frac{1}{2}$; $f_{\text{найб}} = f(4) = \frac{1}{2}$.

Вказівка. Покласти спочатку $t = \log_2 x$ і розглянути функцію

$$\varphi(t) = \frac{t-1}{t^2 - 2t + 2}.$$

40. 1) $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } |x| = 1; \\ 1, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$$

2) $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |x| < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } x = 1; \\ -\frac{1}{2}, & \text{якщо } x = -1; \\ x, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$$

РІВНЯННЯ

1. Рівняння має один розв'язок (якщо $c \in E(f)$) або не має жодного.
2. Рівняння має безліч розв'язків (якщо $c \in E(f)$) або не має жодного.
3. Якщо $c \in]-\infty, 0]$, то рівняння не має розв'язків, а якщо $c \in]0, \infty[$, то один розв'язок $x = \log_a c$.
4. При будь-якому $c \in R$ рівняння має один розв'язок $x = a^c$.
5. При $c < 0$ рівняння не має розв'язків, а при $c \geqslant 0$ — єдиний розв'язок $x = c^2$.
6. 1) Якщо $c \in]-\infty, -\frac{\pi}{2}[\cup] \frac{\pi}{2}, \infty[$, то рівняння не має розв'язків; якщо $c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то воно має один розв'язок, а саме: $x = \sin c$.

2) Якщо $c \in [0, \pi]$, то рівняння має один розв'язок $x = \cos c$; якщо ж $c \in]-\infty, 0[\cup]\pi, \infty[$, то воно не має розв'зків.

3) Якщо $c \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, то рівняння має єдиний розв'язок $x = \operatorname{tg} c$; при інших значеннях c рівняння не має розв'язків.

4) Якщо $c \in]0, \pi[$, то рівняння має один розв'язок $x = \operatorname{ctg} c$; при інших значеннях параметра c воно не має розв'язків.

7. Не завжди. Для будь-якої монотонної функції $f(x)$ кожний розв'язок рівняння $f(g(x)) = f(h(x))$ буде розв'язком рівняння $g(x) = h(x)$. Проте не для кожної функції $f(x)$ буде правильне обернене твердження. Якщо функція $f(x)$ не скрізь визначена ($D(f) \neq R$), то може трапитись так, що в деякій точці x_0 $g(x_0) = h(x_0)$, проте функція $f(x)$ не визначена в точці $a = g(x_0)$, а тому x_0 не буде розв'язком рівняння $f(g(x)) = f(h(x))$. Наприклад, рівняння $\lg(\sin x) = \lg(\cos x)$ і $\sin x = \cos x$ не рівносильні. Перше з цих рівнянь рівносильне системі

$$\begin{cases} \sin x = \cos x, \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

8. Так, бо функція a^x монотонна і визначена для всіх x.
9. $g(x) > 0$.
10. 1) $\frac{1}{2}$, -3; 2) $\frac{1}{2}$.
11. Слід виділити спочатку який-небудь інтервал $[a, a + h[$ завдовжки h і знайти ті розв'язки рівняння, які лежать на цьому інтервалі. Якщо $x_1, \ldots, x_k$ — ці розв'язки, то всі розв'язки рівняння дають формули $x = x_1 + nh$, $x = x_2 + nh$, ..., $x = x_k + nh$, де $n \in Z$.
12. Коли $c < 0$ або $c \geqslant 1$, то рівняння не має розв'язків. Якщо ж $c \in [0, 1[$, то рівняння має безліч розв'язків, а саме: $x = c + n$ $(n \in Z)$. Вказівка. Функція $y = \{x\}$ має період 1, причому на інтервалі $[0, 1[$ вона збігається з функцією $y = x$.
13. 1) При будь-якому $c \in R$ рівняння має розв'язки

$$x = \operatorname{arctg} c + n\pi \ (n \in Z).$$

2) При будь-якому $c \in R$ рівняння має розв'язки

$$x = \operatorname{arcctg} c + n\pi \quad (n \in Z).$$

3) Якщо $c \in [-1, 1]$, то рівняння має розв'язки $x = \arcsin c + 2\pi n$ і $x = \pi - \arcsin c + 2\pi n$ $(n \in Z)$. Ці розв'язки можна подати також однією формулою: $x = (-1)^k \arcsin c + k\pi$ $(k \in Z)$. При інших значеннях c рівняння не має розв'язків.

4) Якщо $c \in [-1, 1]$, то рівняння має такі розв'язки:

$$x = \pm \arccos c + 2\pi n \quad (n \in Z).$$

При інших значеннях c рівняння не має розв'язків.

14. Спочатку не слід зважати на характер функції $g(x)$. Щоб підкреслити це, можна позначити $g(x)$ новим символом, наприклад y. Нехай $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — усі розв'язки рівняння $f(y) = c$. Тоді початкове рівняння рівносильне сукупності таких рівнянь: $g(x) = y_1$, $g(x) = y_2$, ..., $g(x) = y_k$.

15. 1) $[\log_{1/3} \log_2 \log_{1/2} \log_{16} \log_3 x = 0] \Leftrightarrow [\log_2 \log_{1/2} \log_{16} \log_3 x = 1] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [\log_{1/2} \log_{16} \log_3 x = 2] \Leftrightarrow \left[\log_{16} \log_3 x = \frac{1}{4}\right] \Leftrightarrow [\log_3 x = 2] \Leftrightarrow [x = 9].$$

2) $\dfrac{\pi}{3} + n\pi \quad (n \in Z)$.

3) $\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right) + k\pi \quad (n,\ k \in Z)$.

4) $\pm \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi \quad (n \in Z)$.

5) $\left[\operatorname{tg}(\cos x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right] \Leftrightarrow \left[\cos x = \dfrac{\pi}{6} + n\pi \quad (n \in Z)\right]$.

Тепер для кожного $n \in Z$ слід розв'язати рівняння $\cos x = \dfrac{\pi}{6} + n\pi$. Оскільки $\cos x \in [-1, 1]$, то розв'язки має лише одне з цих рівнянь, а саме: $\cos x = \dfrac{\pi}{6}$. Звідси дістаємо: $x = \pm \arccos \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in Z)$.

6) $[\sqrt{4 \sin x - 1} = 1] \Leftrightarrow [4 \sin x - 1 = 1] \Leftrightarrow \left[\sin x = \dfrac{1}{2}\right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \in Z\right].$$

7) $[\operatorname{ctg} |2x - 1| = 1] \Leftrightarrow \left[\ |2x - 1| = \dfrac{\pi}{4} + n\pi \ (n \in Z)\ \right]$.

Оскільки функція $y = |2x - 1|$ не від'ємна, то з-поміж сукупності останніх рівнянь розв'язки мають лише ті, в яких $n \geqslant 0$. Тому далі маємо

$$\left[|2x - 1| = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in Z\right] \Leftrightarrow \left[|2x - 1| = \frac{\pi}{4} + n\pi; \quad n = 0, 1, 2, \ldots\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[2x - 1 = \pm\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right); \quad n = 0, 1, 2, \ldots\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right); \quad n = 0, 1, 2, \ldots\right].$$

16. $g(x) \geqslant 0$.

17. 1) $[\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{2}\sin x] \Leftrightarrow \left[\begin{cases}\cos 2x = 2\sin^2 x, \\ \sin x \geqslant 0\end{cases}\right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases}\cos 2x = 1 - \cos 2x, \\ \sin x \geqslant 0\end{cases}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases}\cos 2x = \dfrac{1}{2}, \\ \sin x \geqslant 0\end{cases}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases}2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z \\ \sin x \geqslant 0\end{cases}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases}x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z \\ \sin x \geqslant 0\end{cases}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z\right].$$

2) $[\sqrt{3x^2 - x + 2} = -2x - 8] \Leftrightarrow \left[\begin{cases}3x^2 - x + 2 = 4x^2 + 32x + 64 \\ 2x + 8 \leqslant 0\end{cases}\right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases}x^2 + 33x + 62 = 0 \\ x + 4 \leqslant 0\end{cases}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases}x = -2 \text{ або } x = -31 \\ x + 4 \leqslant 0\end{cases}\right] \Leftrightarrow [x = -31].$$

3) $x = -11$; 4) $x = \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 2n\pi, \quad n \in Z$;

5) $x = -\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 2n\pi, \; n \in Z$;

6) $x = -\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + (2n+1)\pi, \quad n \in Z$;

7) $x = n\pi, \quad x = \dfrac{\pi}{12} + (2n+1)\pi, \quad x = \dfrac{5\pi}{12} + (2n+1)\pi, \quad n \in Z.$

18. Взагалі кажучи, ні. Кожне з рівнянь $f(x) = g(x)$ і $f(x) = -g(x)$ може мати своїми розв'язками точки, в яких функція $g(x)$ від'ємна. Рівняння ж $|f(x)| = g(x)$ таких розв'язків не має. Насправді рівняння $|f(x)| = g(x)$, рівносильне сукупності таких двох систем:

$$\begin{cases}g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x);\end{cases} \quad \begin{cases}g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = -g(x).\end{cases}$$

19. 1) $x = n\pi, \quad x = \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad x = \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in Z$;

2) $x = 1, \; x = 5$;

3) $x = \pm\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + n\pi, \; n \in Z$;

4) $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi, \quad n \in Z$;

5) $x = -\dfrac{\pi}{4} + n\pi, \quad x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + n\pi, \quad n \in Z$;

6) $x = \operatorname{arcctg}(-2) + n\pi, \quad n \in Z$;

7) $x \in]0, \; 10]$.

20. 1) Ні. Може трапитись так, що функція $\varphi(x)$ не визначена в точці, яка є розв'язком рівняння $f(x) = g(x)$. Така точка не буде розв'язком рівняння $f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$. Рівняння будуть рівносильні тоді й тільки тоді, коли область визначення функції $\varphi(x)$ містить усі розв'язки рівняння $f(x) = g(x)$. Зокрема, вони рівносильні, якщо $D_\varphi = R$.

2) Рівняння $f(x) = g(x)$ є наслідком рівняння $f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$ за будь-якої функції $\varphi(x)$.

21. 1) Функція $g(x)$ визначена в усіх точках, що є розв'язками рівняння $f(x) = 0$, і не дорівнює нулеві в жодній іншій точці з області визначення функції $f(x)$. Зокрема, ці рівняння рівносильні, якщо функція $g(x)$ скрізь визначена й ніде не дорівнює нулю.

2) В кожній точці, що є розв'язком рівняння $g(x) = 0$, функція $f(x)$ або не визначена, або дорівнює нулю.

3) Область визначення функції $g(x)$ містить усі розв'язки рівняння $f(x) = 0$.

22. Ні. Рівняння $f(x)\,g(x) = 0$ і сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$$

рівносильні тоді й тільки тоді, коли область визначення функції $f(x)$ містить усі розв'язки рівняння $g(x) = 0$, а область визначення функції $g(x)$ містить усі розв'язки рівняння $f(x) = 0$. Зокрема, рівносильність буде тоді, коли функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені для всіх x.

23. 1) $$\left[\lg(2x^2 + 7x + 4)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = 0\right] \Leftrightarrow \left[\left[\begin{cases} \lg(2x^2 + 7x + 4) = 0, \\ \dfrac{\pi x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in Z \end{cases}\right. \text{ або }\right.$$

$$\left.\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2} = 0, \\ 2x^2 + 7x + 4 > 0 \end{cases}\right] \Leftrightarrow \left[\left[\begin{cases} x = -3 \text{ або } x = -\dfrac{1}{2}, \\ x \neq 1 + 2k, \quad k \in Z \end{cases}\right. \text{ або }\right.$$

$$\left.\begin{cases} x = 2n, \quad n \in Z, \\ x \in \left]-\infty, \dfrac{-7-\sqrt{17}}{4}\right[\cup \left]\dfrac{-7+\sqrt{17}}{4}, \infty\right[\end{cases}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[x = -\frac{1}{2}, \; x = 2n, \; n \in \{\ldots, -5, -4, -3, -2, 0, 1, 2, \ldots\}\right].$$

3) $x = 4 + 12n, \quad x = 8 + 12n, \quad x = 3 + 6n, \quad n \in Z.$ 3) $x = -1, \quad x = 2.$

24. Перетворимо ліву частину рівняння так:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x\right).$$

Оскільки $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, то числа $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ і $\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ є координатами певного одиничного вектора. З другого боку, координати одиничного вектора дорівнюють $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$, де φ — кут між цим вектором і додатним напрямом осі абсцис. Кут φ можна вважати відомим, бо відомі значення синуса і косинуса цього кута. Правда, цими значеннями кут визначається не однозначно, а з точністю до доданка, кратного 2π. Ми можемо взяти одне з цих значень, байдуже яке саме. Після цього дане рівняння можна записати так: $\sin(x + \varphi) = c/\sqrt{a^2 + b^2}$. Якщо $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$, то воно не має розв'язків. Якщо ж $|c| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, то всі розв'язки рівняння можна подати формулою

$$x = -\varphi + (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + n\pi, \quad n \in Z.$$

25. Якщо $a = 0$, то рівняння не рівносильні: розв'язки рівняння $\cos x = 0$ будуть розв'язками першого з даних рівнянь, але не будуть розв'язками другого. Якщо ж $a \neq 0$, то дані рівняння рівносильні, бо в цьому випадку розв'язки рівняння $\cos x = 0$ не будуть розв'язками жодного з них.

26. $[3\sin 2x + 4\cos 2x + 4\cos^2 x = 5] \Leftrightarrow [3\sin 2x + 4\cos 2x + 4\cos^2 x = 5(\cos^2 x + \sin^2 x)] \Leftrightarrow [6\sin x\cos x + 4(\cos^2 x - \sin^2 x) + 4\cos^2 x = 5(\cos^2 x + \sin^2 x)] \Leftrightarrow [9\sin^2 x - 3\cos^2 x - 6\sin x\cos x = 0] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [3\,\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0] \Leftrightarrow \left[x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ x = -\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + n\pi,\ n \in Z\right].$

27. Перше рівняння є наслідком другого. Друге ж рівняння, взагалі кажучи, не є наслідком першого. Так буде тоді, коли перше рівняння має такий розв'язок x_0, що $f(x_0) < 0$ і $g(x_0) < 0$. Зрозуміло, що x_0 не буде розв'язком другого рівняння.

28. $[\lg f(x) + \lg g(x) = \varphi(x)] \Leftrightarrow \left[\begin{cases}\lg(f(x)\,g(x)) = \varphi(x),\\ f(x) > 0\end{cases}\right].$

Звичайно, умову $f(x) > 0$ можна замінити умовою $g(x) > 0$. Зокрема, якщо принаймні одна з функцій $f(x)$ або $g(x)$ не має від'ємних значень, то рівняння $\lg f(x) + \lg g(x) = \varphi(x)$ і $\lg(f(x)\,g(x)) = \varphi(x)$ рівносильні.

29. $[\log_2(4 - 2^x) + \log_2(6 - 2^x) = x] \Leftrightarrow \left[\begin{cases}\log_2(4 - 2^x)(6 - 2^x) = x,\\ 4 - 2^x > 0\end{cases}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}2^{2x} - 11\cdot 2^x + 24 = 0,\\ 2^x < 4\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2^x = 8 \text{ або } 2^x = 3,\\ 2^x < 4\end{bmatrix} \Leftrightarrow [x = \log_2 3].$

30. Один розв'язок b/a, якщо $a \neq 0$; безліч розв'язків, якщо $a = b = 0$ (у цьому випадку кожне число x буде розв'язком рівняння); жодного розв'язку, якщо $a = 0$, $b \neq 0$.

31. 1) Дане рівняння рівносильне сукупності таких двох систем:

а) $\begin{cases}x \leqslant -2,\\ x^2 + 3x - 18 = 0,\end{cases}$ б) $\begin{cases}x \geqslant -2,\\ x^2 + 5x - 14 = 0.\end{cases}$

Звідси дістаємо $x = -6$, $x = 2$.

2) $-5;\ -2;\ 0;\ 3;\ 5;\ 8.$

3) $\pm\frac{\pi}{4} + k\pi$. Вказівка. Найпростіше розглядати дане рівняння як квадратне відносно $t = |\sin x|$.

4) 1; 3. Вказівка. Розглянути окремо випадки $x^2 - 5 \geqslant 0$ і $x^2 - 5 \leqslant 0$.

5) $\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leqslant x \leqslant \pi + 2n\pi,\quad n \in Z.$

32. Розв'язок рівняння $f(x, y) = 0$ з двома невідомими — це впорядкована пара чисел $(a; b)$, яка має ту властивість, що коли в рівняння на місце x підставити число a, а на місце y — число b, то воно перетвориться в правильну числову рівність. Наприклад, пари $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(2; -1)$, $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ будуть розв'язками рівняння $x + y = 1$. Розв'язком системи рівнянь з двома невідомими називається пара чисел $(a; b)$, яка є розв'язком кожного рівняння цієї системи.

33. Якщо $a = b = 0$, а $c \neq 0$, то рівняння не має розв'язків. Якщо $a = b = c = 0$, то кожна пара чисел $(x; y)$ буде розв'язком рівняння. Нарешті, якщо $a \neq 0$ або $b \neq 0$, то рівняння має безліч розв'язків, проте вже не кожна пара $(x; y)$ буде його розв'язком. Геометрично множина розв'язків рівняння у цьому випадку зображається прямою лінією на координатній площині. Якщо $b \neq 0$, то всі розв'язки рівняння вичерпує формула $\left(x; \frac{c - ax}{b}\right)$, де x — довільне дійсне число. Аналогічно, якщо $a \neq 0$, то розв'язки можна подати формулою $\left(\frac{c - by}{a}; y\right)$, де $y \in R$.

34. Таких рівнянь можна придумати безліч. Наприклад:

1) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0;$
2) $|x - 1| + |y - 2| = 0;$
3) $\arccos x + (y - 2)^4 = 0.$

35. 1) $(1;\ y),\ (x;\ 2),\quad x\in R,\quad y\in R.$

2) $(n;\ 1+2k),\quad n\in Z,\quad k\in Z.$

3) $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right).$

4) $(n\pi;\ -2),\quad n\in Z.$

5) $(n\pi;\ y),\quad n\in Z,\quad y\in R,\quad y\neq k\pi,\quad k\in Z;$

$\left(x;\ \frac{\pi}{2}+n\pi\right),\quad n\in Z,\quad x\in R,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in Z.$

36. 1) 3. 2) 3. 3) 3; 0.

37. 1) Один розв'язок. 2) 7 розв'язків. 3) Безліч розв'язків. 4) Один розв'язок. 5) 2 розв'язки.

38. Доданки $\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$ і $\sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}$, що стоять у лівій частині другого рівняння системи, геометрично означають відповідно відстані від точки $A\ (x;\ y)$ до точок $M\ (3;\ -1)$ і $N\ (7;\ 2)$. Відстань між цими точками $|MN|=\sqrt{(3-7)^2+(-1-2)^2}=5$. Саме це число стоїть у правій частині рівняння. Отже, розв'язками другого рівняння є ті й тільки ті точки $A\ (x;\ y)$, для яких справджується рівність $|AM|+|AN|=|MN|$. Але таку властивість мають тільки точки відрізка MN. Тому розв'язок д ної системи — це точка перетину прямої $2x+2y=11$ з відрізком MN (якщо вказані пряма й відрізок не перетинаються, то система не має розв'язків). Щоб знайти цю точку, напишемо рівняння прямої, яка проходить через точки M і N: $3x-4y=13$. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases}2x+2y=11,\\3x-4y=13,\end{cases}$$

знаходимо точку перетину прямих $2x+2y=11$ і $3x-4y=13$. Це буде точка $(5;\ {}^1/_2)$. Оскільки на прямій $3x-4y=13$ вона лежить між точками M і N, то ця точка й буде єдиним розв'язком початкової системи.

39. $\left(-\frac{\pi}{8}+(n+k)\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{8}+(n-k)\frac{\pi}{2}\right),\quad n\in Z,\quad k\in Z.$

40. $(x;\ y;\ 0),\quad x\in R;\quad y\in R;\quad (1;\ 2;\ 3).$

НЕРІВНОСТІ

1. 1) $x\in\,]-\infty,\ \infty[$, якщо $c\leqslant 0$; $x\in\,]\log_2 c,\ \infty[$, якщо $c>0$.

2) $x\in\,]-\infty,\ \log_2 c[$, якщо $c>0$; нерівність не має розв'язків, якщо $c\leqslant 0$.

3) $x\in\,]0,\ 2^c[$. 4) $x\in\,]2^c,\ \infty[$.

5) $x\in\,]2^{-c},\ \infty[$. 6) $x\in\,]0,\ 2^{-c}[$.

7) $x\in[-1,\ 1]$, якщо $c<-\frac{\pi}{2}$; $x\in\,]\sin c,\ 1]$, якщо $-\frac{\pi}{2}\leqslant c<\frac{\pi}{2}$; нерівність не має розв'язків, якщо $c\geqslant\frac{\pi}{2}$.

8) Нерівність не має розв'язків, якщо $c\leqslant 0$; $x\in\,]\cos c,\ 1]$, якщо $0<c\leqslant\pi$; $x\in[-1,\ 1]$, якщо $c>\pi$.

9) Нерівність не має розв'язків, якщо $c\leqslant-\frac{\pi}{2}$; $x\in\,]-\infty,\ \operatorname{tg} c[$, якщо $-\frac{\pi}{2}<c<\frac{\pi}{2}$; $x\in\,]-\infty,\ \infty[$, якщо $c\geqslant\frac{\pi}{2}$.

10) $x\in\,]-\infty,\ \infty[$, якщо $c\leqslant 0$; $x\in\,]-\infty,\ \operatorname{ctg} c[$, якщо $0<c<\pi$; нерівність не має розв'язків, якщо $c\geqslant\pi$.

11) Нерівність не має розв'язків, якщо $c\leqslant 0$; $x\in\,]-c,\ c[$, якщо $c>0$.

12) $x\in\,]-\infty,\ \infty[$, якщо $c<0$; $x\in\,]-\infty,\ -c[\ \cup\ ]c,\ \infty[$, якщо $c\geqslant 0$.

2. Множина розв'язків або порожня, або складається з однієї точки, або є інтервалом.

3. 1) $x \in [0, \log_2 3[$. 2) $x \in [-2, 2]$.

3) $x \in]-\infty, -1]$. 4) $x \in]-\infty, \log_3 4[$.

5) $x \in \left[\frac{1}{9}, 3\right[$. 6) $x \in \left[\frac{1}{9}, \infty\right[$.

7) $x \in \left]0, \frac{1}{9}\right]$. 8) $x \in \left]\frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{\pi}\right]$.

9) $x \in [-1, \sqrt{3}[$. 10) $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

11) $x \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. 12) $x \in [0, \infty[$.

13) $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$. 14) $x = 1$.

4. 1) $x = 0$. 2) $x \in [-2, -1[\cup]1, 2]$.

3) $x \in]-\infty, -3] \cup [3, \infty[$. 4) $x \in [-6, 6]$.

5. 1) $x \in [0, \infty[$, якщо $c < 0$; $x \in]c^2, \infty[$, якщо $c \geqslant 0$.

2) Нерівність не має розв'язків, якщо $c \leqslant 0$; $x \in [0, c^2]$, якщо $c > 0$.

3) $x \in]a^2, b^2[$.

6. 1) $[\sqrt{1-5x-6x^2} \geqslant -2] \Leftrightarrow [1-5x-6x^2 \geqslant 0] \Leftrightarrow \left[x \in \left[-1, \frac{1}{6}\right]\right]$.

2) $[\sqrt{-x^2+8x-7} \leqslant 2\sqrt{2}] \Leftrightarrow [0 \leqslant -x^2+8x-7 \leqslant 8] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2-8x+7 \leqslant 0, \\ x^2-8x+15 \geqslant 0 \end{cases}\right] \Leftrightarrow [x \in [1, 3] \cup [5, 7]].$$

3) Оскільки функція $y = \sqrt{t}$ визначена на $[0, \infty[$ і зростає на . валі, то

$$[\sqrt{12+x-x^2} < \sqrt{x^2+2x+6}] \Leftrightarrow [0 \leqslant 12+x-x^2 < x^2+2x+6] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2-x-12 \leqslant 0, \\ 2x^2+x-6 > 0 \end{cases}\right] \Leftrightarrow x \in \left[-3, -2\left[\cup \right]\frac{3}{2}, 4\right]\right].$$

4) $x \in [-2, 2]$.

7. 1) І спосіб. У лівій частині нерівності стоїть функція, усі значення якої невід'ємні. Тому нерівність справджуватиметься в усіх тих точках, де функція $y = \sqrt{-3x^2+25x-22}$ визначена, а функція $y = 12-4x$ має від'ємні значення. Отже, множина розв'язків системи

$$\begin{cases} -3x^2+25x-22 \geqslant 0, \\ 12-4x < 0 \end{cases}$$

є підмножиною множини розв'язків даної нерівності. Крім того, нерівність справджуватиметься в тих точ ах x, де $12-4x \geqslant 0$ і $-3x^2+25x-22 > (12-4x)^2$. Таким чином, дана нерівність рівносильна сукупності таких двох систем:

$$\begin{cases} -3x^2+25x-22 \geqslant 0, \\ 12-4x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -3x^2+25x-22 > (12-4x)^2, \\ 12-4x \geqslant 0. \end{cases}$$

Перша з них справджується для $x \in \left]3,\ \frac{22}{3}\right]$, друга — для $x \in \left]2, 3\right]$. Тому початкова нерівність справджується тоді й тільки тоді, коли $x \in \left]2,\ \frac{22}{3}\right]$.

II спосіб. Можна міркувати так. Функція $\varphi(x) = \sqrt{-3x^2 + 25x - 22} - 12 + 4x$ неперервна в своїй області визначення, тобто на інтервалі $D_\varphi = \left[1,\ \frac{22}{3}\right]$, який знаходимо як множину розв'язків нерівності $-3x^2 + 25x - 22 \geqslant 0$. Неперервна функція може змінювати знак лише при переході x через точку, в якій ця функція дорівнює нулю. Якщо на проміжку неперервна функція не дорівнює нулю в жодній точці, то вона зберігає на такому проміжку знак. Знаходимо точки, де наша функція $\varphi(x)$ дорівнює нулю.

$$[\varphi(x) = 0] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} -3x^2 + 25x - 22 = (12 - 4x)^2, \\ 12 - 4x \geqslant 0 \end{cases}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = 2 \text{ або } x = \dfrac{83}{19}, \\ x \leqslant 3 \end{cases}\right] \Leftrightarrow [x = 2],$$

бо $\frac{83}{19} > 3$. Отже, на інтервалах $[1, 2[$ і $\left]2,\ \frac{22}{3}\right]$ функція $\varphi(x)$ зберігає знак. Обчисливши її значення, наприклад, у точках $1 \in [1, 2[$ і $3 \in \left]2, \frac{22}{3}\right]$, одержуємо $\varphi(1) < 0$, $\varphi(3) > 0$. Тому в усіх точках інтервалу $[1, 2[$ функція $\varphi(x)$ має від'ємні значення, а в усіх точках інтервалу $\left]2,\ \frac{22}{3}\right]$ — додатні. Таким чином, множина розв'язків початкової нерівності є інтервалом $\left]2,\ \frac{22}{3}\right]$. *Зауваження.* Цим способом зручно користуватись при розв'язуванні багатьох нерівностей.

2) $x \in]-\infty, -3[$.

[illegible] $-2, -1] \cup [2, \infty[$.

[illegible]сть має розв'язки, якщо $a < b$. Ці розв'язки утворюють інтервал $]3$, [illegible] $= -1$, $b = 7$.

9. Якщо $b \leqslant 2a$, то нерівність не має розв'язків. При $b > 2a$ розв'язки нерівності утворюють інтервал $\left[\frac{b}{2},\ b - a\right[$. Зокрема, це буде інтервал $[1, 5[$, якщо $a = -3$, $b = 2$.

10. 1) Немає, бо дискримінант тричлена $x^2 + bx - 1$ додатний при всіх значеннях параметра b, а тому парабола $y = x^2 + bx - 1$ завжди перетинає вісь абсцис у двох точках. На інтервалі, обмеженому цими точками, справджується нерівність $x^2 + bx - 1 < 0$.

2) $b = \pm\sqrt{21}$.

11. $b \in]-2, 2[$.

12. 1) $a > 0$. 2) $-1 < a < 0$. 3) $a = 0$. 4) $a \leqslant -1$. 5) Нерівність має розв'язки при будь-якому значенні параметра a. 6) $a = 8$.

13. 1) $x \in [-5, -2] \cup [2, 5]$.
2) $x \in [-4, 4]$.
3) $x \in]-\infty, -4[\cup]-3, 3[\cup]4, \infty[$.
4) $x \in [-2, -1] \cup [3, 4]$.
5) $x \in [-7, -5] \cup [-1, 1]$.
6) $x \in]-9, -7[\cup]-3, -1[\cup]1, 3[\cup]7, 9[$.
7) $x \in]-\infty, -2] \cup \left[-1,\ \frac{2}{3}\right] \cup [3, \infty[$.

В к а з і в к а. Дана нерівність рівносильна сукупності таких трьох систем нерівностей:

а) $\begin{cases} x \leqslant -2, \\ x^2 - 2x - 8 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ x^2 + 3x + 2 \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 3x^2 - 11x + 6 \geqslant 0. \end{cases}$

14. Нерівність не має розв'язків, якщо $c < 0$; $x \in Z$, якщо $c = 0$; $x \in [k, k + c]$, $k \in Z$, якщо $0 < c < 1$; $x \in R$, якщо $c \geqslant 1$.

15. 1) Оскільки число π є періодом функції $y = \operatorname{tg} x$, то досить знайти ті розв'язки нерівності, що лежать на інтервалі $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Додаючи до кожного з цих розв'язків числа $k\pi$ ($k \in Z$), дістанемо всі розв'язки нерівності. На інтервалі $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає, змінюючись неперервно від $-\infty$ до ∞. Звідси випливає, що ті розв'язки нерівності $\operatorname{tg} x < c$, які лежать на цьому інтервалі, утворюють інтервал $\left]-\frac{\pi}{2}, x_0\right[$, де x_0 — та точка проміжку $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, в якій функція $\operatorname{tg} x$ має значення c. Як відомо, цю точку позначають через $\operatorname{arctg} c$. Отже, $[\operatorname{tg} x < c] \Leftrightarrow [x \in]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \operatorname{arctg} c + k\pi[, k \in Z]$.

2) $x \in \left]\operatorname{arctg} c + k\pi, \quad \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \quad k \in Z.$

3) $x \in [\operatorname{arcctg} c + k\pi, \quad \pi + k\pi[, \quad k \in Z.$

4) $x \in \,]k\pi, \operatorname{arcctg} c + k\pi], \quad k \in Z.$

5) Нерівність не має розв'язків, якщо $c < -1$. При $c = -1$ множина розв'язків нерівності збігається з множиною розв'язків рівняння $\sin x = -1$; вона складається з точок $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$. Якщо $c \geqslant 1$, то нерівність справджується для всіх $x \in R$. Нехай, нарешті, $-1 < c < 1$. На інтервалі $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ нерівність справджується для точок $x \in [-\pi - \arcsin c, \arcsin c]$. Врахувавши, що функція $y = \sin x$ має період 2π, а інтервал $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ має довжину 2π, одержимо $[\sin x \leqslant c] \Leftrightarrow [x \in [-\pi - \arcsin c + 2k\pi, \arcsin c + 2k\pi], k \in Z]$.

6) $x \in]\arcsin c + 2k\pi, \pi - \arcsin c + 2k\pi[$, $k \in Z$, якщо $-1 \leqslant c < 1$; $x \in R$, якщо $c < -1$; нерівність не має розв'язків, якщо $c \geqslant 1$.

7) $x \in R$, якщо $c > 1$; $x \in] \arccos c + 2k\pi, 2\pi - \arccos c + 2k\pi[$, $k \in Z$, якщо $-1 < c \leqslant 1$; нерівність не має розв'язків, якщо $c \leqslant -1$.

8) $x \in R$, якщо $c \leqslant -1$; $x \in [-\arccos c + 2k\pi, \arccos c + 2k\pi]$, $k \in Z$, якщо $-1 < c < 1$; $x = 2k\pi$, $k \in Z$, якщо $c = 1$; нерівність не має розв'язків, якщо $c > 1$.

16. 1) $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \frac{\pi}{3} + k\pi\right[, \quad k \in Z.$

2) $$[1 < \operatorname{ctg} 2x \leqslant \sqrt{3}] \Leftrightarrow \left[\frac{\pi}{6} + k\pi \leqslant 2x < \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in Z\right] \Leftrightarrow \left[\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in Z\right] \Leftrightarrow \left[x \in \left[\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right[, \ k \in Z\right].$$

3) $$\left[\frac{1}{2} \leqslant \sin\frac{\pi x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant \frac{\pi x}{2} < \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in Z \text{ або } \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < \frac{\pi x}{2} \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in Z\right] \Leftrightarrow \left[\frac{1}{3} + 4k \leqslant x < \frac{2}{3} + 4k, \quad k \in Z \text{ або}\right.$$

$\frac{4}{3}+4k<x\leqslant\frac{5}{3}+4k,\ k\in Z\Big]\Leftrightarrow\Big[x\in\Big[\frac{1}{3}+4k,\ \frac{2}{3}+4k\Big[\ \cup\ \Big]\frac{4}{3}+4k,$

$\frac{5}{3}+4k\Big],\ k\in Z\Big].$

4) $x\in\Big]-\frac{3}{4}+2k,\ -\frac{1}{3}+2k\Big]\cup\Big[\frac{1}{3}+2k,\ \frac{3}{4}+2k\Big[,\quad k\in Z.$

5) $x\in\Big]\frac{\pi}{12}-\frac{3}{2}+\frac{k\pi}{2},\ \frac{\pi}{8}-\frac{3}{2}+\frac{k\pi}{2}\Big],\quad k\in Z.$

6) $x\in\Big[\frac{2k\pi}{3},\ \frac{\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\Big[\ \cup\ \Big]\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3},\ \frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\Big],\quad k\in Z$

17. 1) $x\in\,]2,\ 16]$.

2) $[\log_3\log_{1/3}\log_3\log_{1/3}x\geqslant 0]\Leftrightarrow[\log_{1/3}\log_3\log_{1/3}x\geqslant 1]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\Big[0<\log_3\log_{1/3}x\leqslant\frac{1}{3}\Big]\Leftrightarrow[1<\log_{1/3}x\leqslant\sqrt[3]{3}]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\Big[\Big(\frac{1}{3}\Big)^{\sqrt[3]{3}}\leqslant x<\frac{1}{3}\Big]\Leftrightarrow\Big[x\in\Big[\Big(\frac{1}{3}\Big)^{\sqrt[3]{3}},\ \frac{1}{3}\Big[\ \Big].$

3) $x\in\Big[\frac{1}{16},\ \frac{1}{2}\Big[.$

4) $x\in\Big[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\Big],\quad k\in Z.$

5) $x\in\Big[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ -\frac{\pi}{3}+2k\pi\Big]\cup\Big[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\Big],\ k\in Z$

6) $x\in R$. 7) $x\in\Big[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\Big],\quad k\in Z.$

8) $x\in\,]-\operatorname{arctg}2+k\pi,\ \operatorname{arctg}2+k\pi[,\quad k\in Z.$

9) $[\cos 2x+5\sin x+2\geqslant 0]\Leftrightarrow[-2\sin^2x+5\sin x+3\geqslant 0]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[2\sin^2x-5\sin x-3\leqslant 0]\Leftrightarrow\Big[-\frac{1}{2}\leqslant\sin x\leqslant 3\Big]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\Big[\sin x\geqslant-\frac{1}{2}\Big]\Leftrightarrow\Big[x\in\Big[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{7\pi}{6}+2k\pi\Big],\quad k\in Z\Big].$

10) $[\,||x|-5|>3]\Leftrightarrow[\,|x|-5>3$ або $|x|-5<-3]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[x\in\,]-\infty,\ -8[\ \cup\ ]-2,\ 2[\ \cup\ ]8,\ \infty[]$.

18. Так. $\Big[\frac{1}{f(x)}>1\Big]\Rightarrow[f(x)<1]$. Нерівності рівносильні, якщо всі значення функції $f(x)$ додатні.

19. Так, $[f(x)>1]\Rightarrow\Big[\frac{1}{f(x)}<1\Big]$. Нерівності рівносильні, якщо всі значення функції $f(x)$ не від'ємні.

20. $f(x)>0$.

21. 1) $x\in\Big[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\Big[,\quad k\in Z.$

2) $x\in\Big[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\Big],\quad k\in Z.$

22. Півколо $y = \sqrt{25 - x^2}$ та гіпербола $y = \frac{12}{x}$ перетинаються в двох точках з додатними абсцисами. Якщо x_1 і x_2 — абсциси точок перетину, причому $x_1 < x_2$, то розв'язки нерівності утворюють множину $]0, x_1] \cup [x_2, 5]$. Числа x_1 і x_2 знаходимо з рівняння $\sqrt{25 - x^2} = \frac{12}{x}$. Маємо

$$\left[\sqrt{25 - x^2} = \frac{12}{x}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 25 - x^2 = \dfrac{144}{x^2}, \\ x > 0 \end{cases}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \{3,\ -3,\ 4,\ -4\}, \\ x > 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow [x \in \{3,\ 4\}].$$

Отже, нерівність справджується тоді й тільки тоді, коли $x \in]0, 3] \cup [4, 5]$.

23. 1) $x \in [8, \infty[$. 2) $x \in]-\infty, 0[\cup [3, \infty[$.

3) $x \in [-1, 0[\cup [1, \infty[$. 4) $x \in [-1, 0]$.

24. 1) $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. 2) $x \in]-\infty, 1]$.

3) $x \in \left[-1, \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}\right]$. 4) $x \in \left[-1, \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}\right]$.

5) $x \in \left[-\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}\right]$.

25. 1) $D(f) = [-4, -3[\cup]4, 5]$.

2) $D(f) = \left[-\frac{3}{2}, -1\right] \cup [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{4\}$.

3) $D(f) = \left[\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup [\pi, 4]$.

4) $D(f) = [-3, -1[\cup [1, 2[\cup]2, 3]$.

26. $x \in [-5, 0[$.

27. 1) Функція $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$ визначена і неперервна на R, а тому може змінювати знак лише в тих точках, де вона дорівнює нулю, тобто в точках: -3, -2, -1, 1, 2, 3. У кожній з цих точок дана функція справді змінює знак. Це стає очевидним, якщо функцію записати так: $f(x) = (x + 3)(x + 2)(x + 1) \times \times (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. У кожній з виписаних точок змінює знак рівно один співмножник, а отже і весь добуток. При $x > 3$ значення функції $f(x)$ додатні. Тому на інтервалах $]2, 3[$, $]-1, 1[$, $]-3, -2[$ і тільки на цих інтервалах її значення від'ємні. Таким чином, $[f(x) \leqslant 0] \Leftrightarrow [x \in [-3, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, 3]]$.

2) Знаходимо область визначення функції

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6)\ln x}{x^2 - 4x - 21} = \frac{(x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)\ln x}{(x + 3)(x - 7)},$$

маємо: $D(f) =]0, 7[\cup]7, \infty[$.

В усіх точках $x \in D(f)$ функція $f(x)$ неперервна, а тому може змінювати знак лише в тих точках, де вона дорівнює нулю, тобто в точках: 1, 2, 3. Отже, на кожному з інтервалів $]0, 1[$, $]1, 2[$, $]2, 3[$, $]3, 7[$, $]7, \infty[$ функція $f(x)$ зберігає знак. Цей знак можна встановити, наприклад оцінивши (або обчисливши) значення функції $f(x)$ в якій-небудь одній точці кожного інтервала. В результаті дістанемо $[f(x) \leqslant 0] \Leftrightarrow \Leftrightarrow [x \in]0, 2] \cup [3, 7[\ ]$.

3) $x \in]-3, -2] \cup [2, 4] \cup [5, \infty[$.

4) $x \in]-2, -1[\cup [1, 3[\cup]4, \infty[$.

Вказівка. Дана нерівність рівносильна такій:

$$\frac{x-1}{(x+2)(x+1)(x-3)(x-4)} \geqslant 0.$$

28. $a \in]0,\ 24[$.

29. $a \in]-\infty,\ -1[\cup]25,\ \infty[$. Вказівка. Відстань між коренями рівняння $x^2 - ax + 6a = 0$ дорівнює $\sqrt{a^2 - 24a}$.

30. $a \in \left]3,\ \frac{7}{2}\right[$. Вказівка. Задачу можна розв'язати принаймні двома способами. I спосіб. Обидва корені будуть додатні, якщо дискримінант рівняння і менший з коренів додатні. Дістаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 7-2a > 0, \\ a-2-\sqrt{7-2a} > 0. \end{cases}$$

II спосіб. Обидва корені рівняння будуть додатні, якщо додатні їх сума й добуток. Крім того, повинен бути додатним дискримінант рівняння, бо інакше воно не матиме коренів або матиме лише один корінь. Використавши формули Вієта, дістаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} a-2 > 0, \\ a^2-2a-3 > 0, \\ 7-2a > 0. \end{cases}$$

31. $a \in]-\infty,\ 0[\cup]1,\ 5[$.

Вказівка. Рівняння матиме один від'ємний і один додатний корінь тоді й тільки тоді, коли добуток цих коренів від'ємний, тобто коли $a^3 - 6a^2 + 5a < 0$. Дискримінант рівняння у цьому випадку буде автоматично додатний, що гарантує існування коренів. Зокрема, коефіцієнт $a + 1$ ніяк не впливає на відповідь.

32. $a < 0$. Вказівка. $x^2 - (a+1)x + a = (x-1)(x-a)$, $x^2 + (a+3)x + 3a = (x+3)(x+a)$. Проаналізуйте тепер, як змінюються графіки обох функцій залежно від параметра a.

33. $|a| < 2$. Вказівка. Ліва частина нерівності означає суму відстаней від точки x до точок a і $6a$. Якщо відстань між точками a і $6a$, тобто $|6a - a| = 5|a|$, буде не менша від 10, то жодної точки x, яка б задовольняла нерівність, не знайдеться. Якщо ж $|a| < 2$, то такі точки на осі існують. Наприклад, у цьому випадку нерівність справджуватиметься для всіх точок x, які лежать між a і $6a$. Насправді при $|a| < 2$ розв'язки нерівності утворюють інтервал $\left]\frac{7}{2}a - 5,\ \frac{7}{2}a + 5\right[$. Упевніться в цьому.

34. 1) $[a+c,\ b+c]$.

2) $\left[\frac{a}{\alpha},\ \frac{b}{\alpha}\right]$, якщо $\alpha > 0$; $\left[\frac{b}{\alpha},\ \frac{a}{\alpha}\right]$, якщо $\alpha < 0$.

3) $\left[\frac{1}{b},\ \frac{1}{a}\right]$, якщо $ab > 0$; $\left]-\infty,\ \frac{1}{a}\right] \cup \left[\frac{1}{b},\ \infty\right[$, якщо $a < 0$, $b > 0$.

35. 1) $x \in]-\infty,\ 1] \cup [4,\ \infty[$. Вказівка. $[\max\{a, b\} \geqslant 1] \Leftrightarrow [a \geqslant 1$ або $b \geqslant 1]$.

2) $x \in]-1,\ 1]$. Вказівка. $[\max\{a,\ b\} \leqslant 2] \Leftrightarrow [a \leqslant 2$ і $b \leqslant 2]$.

3) $x \in [-9,\ -2] \cup [2,\ 9]$. Вказівка. $[\min\{a,\ b\} \geqslant 1] \Leftrightarrow [a \geqslant 1$ і $b \geqslant 1]$.

4) $x \in]-\infty,\ 0[\cup \left]0,\ \frac{1}{4}\right] \cup [1,\ \infty[$. Вказівка. $[\min\{a,\ b\} \leqslant 1] \Leftrightarrow [a \leqslant 1$ або $b \leqslant 1]$.

36. $\varphi \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right[$.

37. $\alpha + \beta < 0$.

38. $\alpha + \beta < \pi$. Вказівка. Якщо $\beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, то $\pi - \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; при цьому $\sin(\pi - \beta) = \sin\beta$. На інтервалі $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функція $\sin x$ зростає. Отже, нерівність $\sin\alpha < \sin(\pi - \beta)$ справджуватиметься тоді і тільки тоді, коли $\alpha < \pi - \beta$.

39. $\beta - \alpha < \pi$.

40. $x \in [1, 2[\cup [8, \infty]$. Вказівка. Дана нерівність рівносильна сукупності таких двох систем нерівностей:

$$\text{а)} \begin{cases} \frac{x}{2} > 1, \\ \frac{x^2 - 6x + 8}{6} \geqslant \frac{x}{2}; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} 0 < \frac{x}{2} < 1, \\ 0 < \frac{x^2 - 6x + 8}{6} \leqslant \frac{x}{2}. \end{cases}$$

КООРДИНАТИ НА ПРЯМІЙ, ПЛОЩИНІ І В ПРОСТОРІ

1. $|a - b|$.

2. Щоб одержати середню точку c відрізка $[a, b]$, можна до його лівого кінця додати половину довжини цього відрізка. Тому $c = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$.

3. Нехай x — шукана точка. Тоді $\frac{x+a}{2} = b$, звідки $x = 2b - a$.

4. $a - d$ і $a + d$.

5. 1) $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$. 2) $]c - \varepsilon, c[\cup]c, c + \varepsilon[$.
3) $]-b, -a] \cup [a, b[$. 4) $]-\infty, c - 1[\cup]c + 1, \infty[$.

6. Рис. 50.

7. 1) $(x_0; -y_0)$. 2) $(-x_0; y_0)$.
3) $(-x_0; -y_0)$. 4) $(2a - x_0; y_0)$ (див. задачу 3).
5) $(x_0; 2b - y_0)$. 6) $(y_0; x_0)$.

8. $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Вказівка. Спроектувати відрізок PQ на координатні осі і використати результат задачі 2.

9. $C(2a - x_0; 2b - y_0)$. Вказівка. Використати задачу 8 (див. також задачу 3).

10. $(x_0 + a; y_0 + b)$.

11. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Коло дотикається до осі абсцис у точці $(-1; 0)$, а вісь ординат перетинає в точках $(0; 2 - \sqrt{3})$ і $(0; 2 + \sqrt{3})$.

12. Знаходимо спочатку центр кола. Він лежить на перетині серединних перпендикулярів до відрізків AB і AC. Точки $(x; y)$ серединного перпендикуляра до $[AB]$ рівновіддалені від A і B, а тому задовольняють рівняння $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (x - 10)^2 + (y - 5)^2$, яке після спрощення перетворюється в таке: $2x + y = 15$. Аналогічно серединний перпендикуляр до $[AC]$ має рівняння $7x + y = 40$. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 15, \\ 7x + y = 40, \end{cases}$$

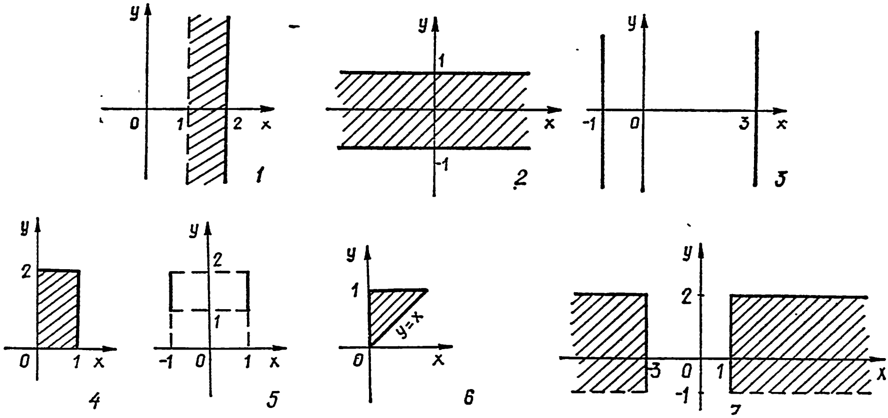
знайдемо центр кола: $O(5; 5)$. Тепер обчислюємо квадрат радіуса кола: $r^2 = |OA|^2 = (5 - 2)^2 + (5 - 1)^2 = 25$. Отже, шукане рівняння таке: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

13. $(x+5)^2+(y-2)^2=25$.

14. 1) Коло $(x+2)^2+(y+4)^2=20$. В к а з і в к а. Слід виділити повні квадрати з x і з y.

2) Коло $(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

3) Дане рівняння «парне» відносно змінної x: воно не змінюється, якщо x замінити на $-x$. Якщо таке рівняння справджується для певної точки $(a;\ b)$, то воно справджуватиметься також для точки $(-a;\ b)$. Це означає, що графік рівняння



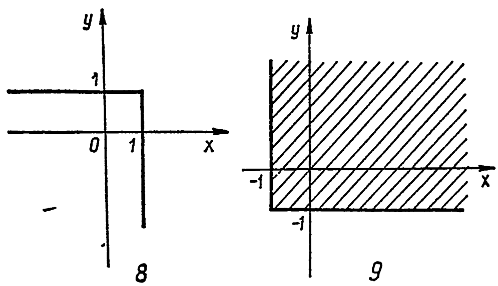


Рис. 50

(тобто множина всіх точок площини, для яких воно справджується) симетричний відносно осі ординат. Отже, ми знатимемо весь його графік, якщо зуміємо знайти ту його частину, що міститься праворуч від осі ординат. Але в цій частині площини всі точки мають додатні абсциси. Для них $|x|=x$ і дане рівняння перетворюється в $x^2-4x+y^2-2y+4=0$, тобто в рівняння кола $(x-2)^2+(y-1)^2=1$. Усе це коло лежить праворуч від осі ординат. Тому воно разом із своїм симетричним образом відносно цієї осі утворює шукану множину.

4) Коло $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ і його симетричний образ відносно осі абсцис.

5) Коло $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ разом з його симетричними образами відносно обох координатних осей та початку координат.

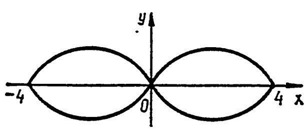


Рис. 51

6) Дуги чотирьох кіл (рис. 51). У першому квадранті лежить дуга кола $(x-2)^2+(y+1)^2=5$.

15. 1) $(x-2)^2+y^2=2$;
2) $(x+1)^2+(y+2)^2=2$;
3) $(x+1)^2+(y-2)^2=2$;
4) $(x-1)^2+y^2=2$;
5) $(x+5)^2+(y-4)^2=2$.

В к а з і в к а. В усіх випадках образом даного кола є коло такого самого радіуса. Тому досить знайти центр образу. Для цього скористатись результатами задач 7 і 9.

16. 1) Круг із радіусом 1 і центром у початку координат.

2) Одиничний круг із центром у початку координат без центральної точки і точок обмежуючого кола.

3) Кільце з центром у точці M (2; -2), обмежене колами з радіусами 1 і 2.

17. $(-1;\ 1)$ і $(3;\ -7)$.

18. $(x+1)^2+(y-5)^2=16$.

19. 1) $y=-\sqrt{3}\,x$; 2) $5x+6y-7=0$;
3) $2x-3y-12=0$; 4) $x+3y-7=0$;
5) $2x+y-1=0$; 6) $2x+y+1=0$;
7) $2x-y-1=0$; 8) $x-2y-1=0$.

20. $(-2;\ 1)$, $(-1;\ -2)$, $(5;\ 2)$.

21. 1) Обертається навколо точки $(0;\ p)$. 2) Переміщується паралельно сама собі.

22. Обертається навколо точки $(x_0;\ y_0)$.

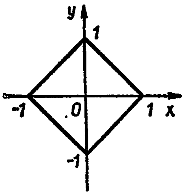


Рис. 52

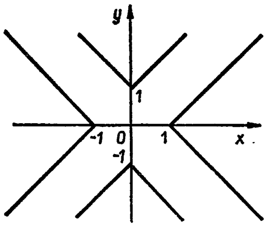


Рис. 53

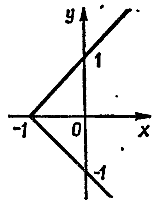


Рис. 54

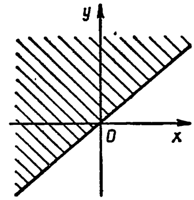


Рис. 55

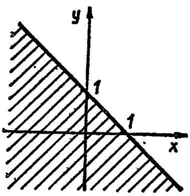


Рис. 56

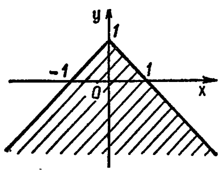


Рис. 57

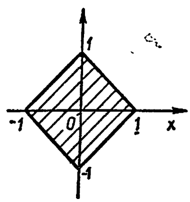


Рис. 58

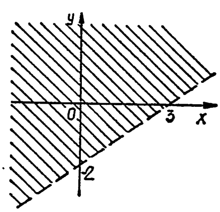


Рис. 59

23. Якщо $a=b=c=0$, то рівняння задовольняють усі точки площини. Якщо $a=b=0$, а $c\neq 0$, то рівняння не задовольняє жодна точка площини. Нарешті, коли $a\neq 0$ або $b\neq 0$, то воно буде рівнянням прямої.

24. Наприклад:

1) Перевірити, чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}\,(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ і $\overrightarrow{AC}\,(x_3-x_1;\ y_3-y_1)$.

2) Написати рівняння прямої, що проходить через дві з трьох даних точок, і перевірити, чи задовольняє його третя точка.

3) Обчислити відстані $|AB|$, $|AC|$, $|BC|$ і з'ясувати, чи є серед них така, що дорівнює сумі двох інших.

25. Обчислити для точок $A\,(x_1;\ y_1)$ і $B\,(x_2;\ y_2)$ значення виразу $ax+by+c$. Якщо це будуть числа одного знаку, то точки A і B лежать по один бік від прямої, а якщо різних знаків, то по різні боки.

26. 1) Дві прямі: $y=x$ та $y=-x$.
2) Дві прямі: $x=1$ та $x=-1$.
3) Дві прямі: $y=1$ та $y=4$.
4) Дві прямі: $y=2x$ та $y=-x-1$.
5) Рис. 52. 6) Рис. 53. 7) Рис. 54.

27. 1) Рис. 55. 2) Рис. 56. 3) Рис. 57. 4) Рис. 58. 5) Рис. 59.

28. $16x-6y+13=0$.

29. I спосіб. Відрізок DC є образом відрізка AB при паралельному перенесенні $\overrightarrow{BC}\,(4;\ 3)$. Оскільки $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, то шукана вершина має координати $(6;\ 2)$.

II спосіб. Середини відрізків AC і BD збігаються. Отже (див. задачу 8), якщо $(x;\ y)$ — координати точки D, то $2+7=3+x$ і $-1+4=1+y$, звідки $x=6$, $y=2$.

30. 1) Рис. 60. 2) Рис. 61.

31. $(1;\ 2;\ 1)$.

32. 1) $x+y+z=-1$; 2) $x+y-z=1$; 3) $x-y-z=1$.

33. 3.

34. 4; $(1;\ 0;\ 3)$.

35. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

36. $(x+4)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$.

37. $2x+y+2z=3$.

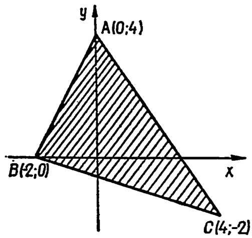


Рис. 60

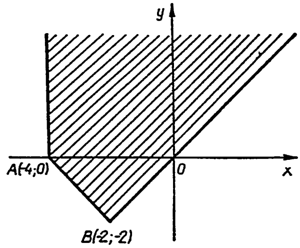


Рис. 61

38. Прямокутний паралелепіпед (брус), грані якого паралельні відповідним координатним площинам; $V=(x_2-x_1)(y_2-y_1)(z_2-z_1)$.

39. Кулю з радіусом r і центром $O\ (a;\ b;\ c)$.

40. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2$.

ВЕКТОРИ

1. $|a-b|\leqslant|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant a+b$. Довжина вектора $\vec{a}+\vec{b}$ найменша, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежно напрямлені, і найбільша, коли ці вектори співнапрямлені.

2. 1) 120°; 2) 60°; 3) 60°.

3. 1) 60°; 2) 120°.

4. 1) $180°-\varphi$; 2) φ.

5. $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot a$.

6. Якщо $\lambda\mu>0$, то $(\widehat{\lambda\vec{a},\ \mu\vec{b}})=\varphi$, а якщо $\lambda\mu<0$, то $(\widehat{\lambda\vec{a},\ \mu\vec{b}})=180°-\varphi$.

7. 1) Ні. 2) Ні. 3) Так.

8. Ні. Якщо $\vec{a}=\vec{0}$, а $\vec{b}\neq\vec{0}$, то рівність $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ не справджуватиметься для жодного λ.

9. $\lambda=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

10. $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$.

11. $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}+\dfrac{1}{|\vec{b}|}\cdot\vec{b}$.

12. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\dfrac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})=\dfrac{n}{m+n}\vec{a}+\dfrac{m}{m+n}\vec{b}$.

13. $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$; $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$.

14. $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$; $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{DP} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{QD} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{PC} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

15. $\overrightarrow{BQ} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{SQ} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{SD} = \vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$; $\overrightarrow{SE} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$; $\overrightarrow{SF} = 2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{DF} = \vec{a} - \vec{c}$; $\overrightarrow{DA} = 2\vec{b} - 2\vec{c}$.

16. $\vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{b} - 3\vec{c}$.

17. $\vec{a} = -2\vec{b} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{c}$.

18. $\vec{a} = -\sqrt{3}\,\vec{b} - \vec{c}$.

19. $\vec{a} = \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin\varphi}\vec{b} + \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}\vec{c}$. Вказівка. Можна скористатись теоремою синусів.

20. $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$. Вказівка. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ -3x + 2y = -5. \end{cases}$$

21. $\vec{f} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.

22. Найбільше значення $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, коли $\vec{a} = \vec{b}$; найменше значення $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, коли $\vec{a} = -\vec{b}$.

23. Один із векторів нульовий або вектори перпендикулярні.

24. Нехай ABC — довільний трикутник. Позначимо $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Тоді $|AB| = |\vec{b}|$, $|AC| = |\vec{c}|$, $|BC| = |\vec{b} - \vec{c}|$. Далі маємо $|\vec{b} - \vec{c}|^2 = (\vec{b} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\widehat{(\vec{b}, \vec{c})}$. Це й є теорема косинусів.

25. Нехай ABC — прямокутний трикутник, $\widehat{BAC} = \pi/2$. Діючи як у попередній задачі, дістанемо, що $|\vec{b} - \vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$, бо $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

26. $\pi/3$.

27. Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

28. Сума квадратів діагоналей довільного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів усіх його ребер.

29. $\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$ та $-\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$. Вказівка. Координати $(x;\ y)$ шуканого вектора $x\vec{i} + y\vec{j}$ повинні задовольняти систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

30. $\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$ та $-\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$.

31. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG}$. Тому $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AE}|^2 + |\overrightarrow{AF}|^2 + |\overrightarrow{AG}|^2 + 2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG} = 3 + 3 \cdot 2\cos\alpha = 3 + 6\cos\alpha$.

Отже, $|AB| = \sqrt{3 + 6\cos\alpha}$. 2) $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AE}|} =$

$$= \frac{(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AY}) \cdot \overrightarrow{AE}}{\sqrt{3 + 6\cos\alpha}} = \frac{1 + 2\cos\alpha}{\sqrt{3 + 6\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1 + 2\cos\alpha}{3}};$$

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}}) = \arccos\sqrt{\frac{1 + 2\cos\alpha}{3}}.$$

32. Природно скористатись формулою $S = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \sin\varphi$, де $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Маємо $|AB| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|AC| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$,

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}};$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Отже, $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$. Примітка. Оскільки $0 < \varphi < \pi$, то $\sin\varphi > 0$.

33. $\alpha = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}})$; $\beta = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) = \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{i}})$.

34. $[\vec{c} \cdot \vec{d} = 0] \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$. Діагоналі паралелограма взаємно перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли він є ромбом.

35. 1) $|\vec{a} + \lambda\vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 \cdot \lambda^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \lambda + |\vec{a}|^2$.

Отже, квадрат довжини вектора $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ є квадратною функцією від λ. Ця функція має найменше значення при $\lambda = -\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$. Тому серед векторів множини M найкоротшим є вектор $\vec{p} = \vec{a} - \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$.

2) Довжина цього вектора дорівнює $|\vec{p}| = \left|\vec{a} - \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}\right| =$ $= \sqrt{|\vec{a}|^2 - \dfrac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{b}|^2}}$. Через кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ одержаний результат можна подати так:

$$|\vec{p}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 - |\vec{a}|^2\cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})} = |\vec{a}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})} =$$
$$= |\vec{a}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

3) Пряму.

36. $\vec{c} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$; $\widehat{(\vec{c}, \vec{j})} = \arccos\frac{2}{3}$.

37. $\vec{c} = \vec{0}$.

38. $\lambda = 8$.

39. $\vec{p}\cdot\vec{q} = -24$.

40. $M\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n};\ \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}\right)$.

ПЛАНІМЕТРІЯ

1. 1) Безліч. 2) Безліч. 3) n. 4) Безліч. 5) 1. 6) Дві, якщо прямокутник не є квадратом; чотири, якщо прямокутник — квадрат. 7) Дві, якщо ромб не є квадратом; чотири, якщо ромб — квадрат.

2. Нехай l_1 і l_2 — взаємно перпендикулярні осі симетрії фігури Ф. Припустимо, що точка $A \in Ф$. Позначимо через A_1 симетричний образ точки A відносно прямої l_1. Тоді $A_1 \in Ф$. Нехай тепер A' — симетричний образ точки A_1 відносно l_2. Тоді $A' \in Ф$. Точки A і A' симетричні відносно точки O перетину прямих l_1 і l_2. Отже, для будь-якої точки $A \in Ф$ її симетричний образ A' відносно O також належить фігурі Ф. Тому ця фігура центрально-симетрична. Точка O — її центр симетрії. Обернене твердження неправильне. Паралелограм, що не є прямокутником і ромбом — центрально-симетрична фігура, яка не має осей симетрії.

3. Нехай M — довільна точка, M_1 — її образ при центральній симетрії відносно A, а M_2 — образ точки M_1 при центральній симетрії відносно B. Тоді $[AB]$ — середня лінія ΔMM_1M_2. Тому $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{AB}$.

4. 1) Так. Пряма, дві паралельні прямі, смуга між двома паралельними прямими — кожна з цих фігур має безліч центрів симетрії.

2) Нехай фігура Ф має два центри симетрії: A і B. При послідовному симетричному відображенні Ф відносно A, а потім B фігура Ф повинна перейти сама в себе. Проте композиція двох цих відображень є паралельним перенесенням $2\overrightarrow{AB}$ (див. задачу 3). Отже, при певному ненульовому паралельному перенесенні фігура Ф переходить в себе. Цього не може бути, якщо вона обмежена.

3) Нехай A і B — два різні центри симетрії фігури Ф. При симетрії відносно A фігура Ф самосуміщується. Тому точка B_1, яка є образом точки B при цій симетрії, також є центром симетрії Ф. Точка A_1, що є симетричним образом точки A відносно B_1, також буде центром симетрії фігури Ф. Цим способом можна дістати безліч центрів симетрії фігури Ф. Ними будуть усі ті точки прямої (AB), які лежать на відстанях $n \cdot |AB|$ від точки A, де $n \in N$.

5. 1) Наприклад, півплощина.

2) Наприклад, об'єднання відрізків прямих $y = x + n$, $n \in Z$ з кінцями на прямих $y = 0$ і $y = 1$ (нескінченна драбина з навскіс набитими щаблями на однакових відстанях один від одного).

6. $0 < s \leqslant \frac{1}{2}ab$.

7. $2a < p < 2(a + b)$.

8. $0 < s \leqslant \frac{a^2}{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. В к а з і в к а. Всі такі трикутники вписані в одне коло. Найбільшу площу серед них має рівнобедрений трикутник, бо в нього найбільша висота.

9. $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$. *Зауваження*. Твердження задачі по суті рівнозначне тому, що медіана трикутника ділить його на два трикутники з однаковими площами.

10. $\frac{a}{2} \leqslant R < \infty$.

11. $s = \frac{p}{2} r$.

12. Висоти однакові.

13. Ні. Це означає тільки, що їх висоти відносяться так само, як основи.

14. $\frac{3}{5} c$ і $\frac{4}{5} c$.

15. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} c$ і $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\, c$.

16. $|AP| : |PB| = (\sqrt{2}+1) : 1$.

17. В к а з і в к а. Сторони новоутвореного чотирикутника паралельні відповідним діагоналям початкового.

2) 1 : 2.

18. Найменшу площу має трикутник, що прилягає до меншої основи трапеції. Трикутник, який прилягає до більшої основи трапеції, має площу $\frac{b^2}{a^2} S$. Трикутники, що прилягають до бічних сторін трапеції, рівновеликі. Кожний з них має площу $\frac{b}{a} S$. В к а з і в к а. Трикутники, що прилягають до основ трапеції, подібні. Порівняйте тепер площу одного з них з площею кожного з трикутників, які прилягають до бічних сторін трапеції. Скористайтесь тим, що площі двох трикутників з однаковими висотами відносяться так, як їх основи.

19. $\cos \frac{\pi}{n}$.

20. В к а з і в к а. Кожний з утворених кутів вписаний у коло, описане навколо даного n-кутника.

21. $\frac{n(n-3)}{2}$. В к а з і в к а. Підрахуйте спочатку, скільки діагоналей можна провести з однієї вершини n-кутника.

22. $2 \sin \frac{3\pi}{10}$.

23. Тоді й тільки тоді, коли два кути чотирикутника, симетричні відносно його діагоналі, прямі.

24. $2(\sqrt{2}-1) S$.

25. 1) $\dfrac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$. 2) $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

26. $2\pi : (2+\pi)$.

27. $r^2 \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi-\varphi}{2}\right)$.

28. $r\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \pm 1\right)$. В к а з і в к а. Знайти спочатку радіус кола, яке проходить через центри трьох даних кіл.

29. $\operatorname{arctg} 3$.

30. $\dfrac{pqh}{2(p+q)}$.

31. $\dfrac{d \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$.

32. $r \dfrac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$; $r \dfrac{1-\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}$.

33. Симетрія відносно однієї з осей симетрії n-кутника або поворот площини навколо центра n-кутника на кут $\frac{2k\pi}{n}$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$). Існує n переміщень кожного з цих двох типів (див. задачу 1).

34. Тотожнє, поворот на кут π навколо центра ромба і дві симетрії відносно його діагоналей.

35. 6, якщо трикутник правильний; 2, якщо він рівнобедрений, тільки тотожнє відображення, якщо трикутник різносторонній.

36. Для трикутника ABD маємо:

$$\frac{|AD|}{\sin \widehat{ABD}} = \frac{|AB|}{\sin \widehat{ADB}}.$$

Аналогічно, для трикутника BDC маємо:

$$\frac{|DC|}{\sin \widehat{DBC}} = \frac{|BC|}{\sin \widehat{BDC}}.$$

Поділивши почленно першу рівність на другу і врахувавши, що $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ і $\sin \widehat{ADB} = \sin \widehat{BDC}$, дістанемо

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

37. $r(\sqrt{2}-1)$.

38. $d = 2S/a$, де S — площа n-кутника, a — довжина його сторони. Вказівка. Розгляньте трикутники, спільною вершиною яких є точка M, а основами — сторони даного n-кутника. Обчисліть площі цих трикутників.

39. Вказівка. Розбити даний n-кутник на n трикутників, спільною вершиною яких є центр вписаного кола, а основами — сторони n-кутника. Обчислити суму площ цих трикутників.

40. Дане твердження не що інше, як теорема синусів. Довести його можна так. Якщо $[AB]$ — діаметр кола, тобто $|AB| = 2r$, то $\widehat{ACB} = \pi/2$, а тому рівність справджується. Розглянемо тепер випадок, коли $[AB]$ — не діаметр. Проведемо діаметр AD. Із прямокутного трикутника ABD маємо:

$$\frac{|AB|}{\sin \widehat{ADB}} = 2r.$$

Після цього лишається зауважити, що для довільної точки C кола, відмінної від A і B, буде одне з двох: $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ або $\widehat{ACB} = \pi - \widehat{ADB}$. Це випливає із властивостей кутів, вписаних у коло. В обох випадках матимемо: $\sin \widehat{ACB} = \sin \widehat{ADB}$.

СТЕРЕОМЕТРІЯ

1. 1) Правильне. 2) Ні. 3) Правильне. 4) Ні. 5) Правильне. 6) Правильне. 7) Ні.

2. Одну, якщо пряма l не перпендикулярна до площини β; безліч, якщо $l \perp \beta$.

3. 9.

4. 6.

5. n.

6. $V_{\text{пір}} : V_{\text{кон}} = n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} : \pi$.

7. $V_{\text{пір}} : V_{\text{кон}} = n \sin \frac{2\pi}{n} : 2\pi$.

8. Вказівка. Розглянути піраміди, основами яких є грані даного многогранника, а спільною вершиною — центр вписаної у цей многогранник кулі. Додати об'єми цих пірамід, врахувавши, що висота кожної з них дорівнює r.

9. Наслідок твердження, що є змістом попередньої задачі.

10. Позначимо через V об'єм тетраедра, через S — площу його грані і через h — його висоту. З одного боку, $V = \frac{1}{3}Sh$, а з другого, $V = \frac{1}{3} \cdot 4S \cdot r$ (задача 8). Отже, $h = 4r$. Центр кулі, вписаної в правильний тетраедр, збігається з центром кулі, описаної навколо нього. Тому $R = 3r$. Таким чином, $r : R = 1 : 3$.

11. Площина, яка проходить через середину відрізка AB і перпендикулярна до цього відрізка.

12. Пряма, що проходить через центр кола і перпендикулярна до площини, в якій лежить це коло.

13. 1) Правильне. 2) Правильне. 3) Ні. 4) Правильне. 5) Ні.

14. Всі дотичні до сфери, проведені з однієї точки P, мають однакову довжину (коли кажуть «довжина дотичної», то мають на увазі довжину відрізка PM, де M — точка дотику відповідної прямої до сфери).

15. 1) Всі перерізи — прямокутники. Той з них, що проходить через центр тетраедра, є квадратом. Вказівка. Мимобіжні ребра правильного тетраедра взаємно перпендикулярні.

2) Периметр кожного перерізу дорівнює $2a$. Вказівка. Можна, наприклад, утворити розгортку тетраедра, на якій контур перерізу перетвориться в прямолінійний відрізок.

3) Серед прямокутників з однаковим периметром найбільшу площу має квадрат.

16. 1) Правильний шестикутник.

2) $p = 3a\sqrt{2}$; $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

17. 1) П'ятикутник, складений із прямокутника і рівнобедреного трикутника

2) $\frac{5\sqrt{2}}{16}a^2$.

18. $R(1 + \cos\varphi)$.

19. $R\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)$.

20. $\frac{16}{17}\pi R^2$.

21. Нехай S — вершина даної піраміди, A і B — сусідні вершини її основи, D — середина відрізка AB, O — центр правильного n-кутника, що лежить в основі піраміди. Плоским кутом SDO вимірюється двогранний кут при ребрі AB. Позначимо цей кут через φ. Із трикутників ASD та DSO маємо:

$$\frac{|AD|}{|DS|} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{|OD|}{|DS|} = \cos\varphi.$$

Врахувавши, що $|OD| = |AD| \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$, звідси дістаємо, що $\cos\varphi = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

За змістом задачі $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, тому $\varphi = \arccos\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

22. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\beta \cos\frac{\pi}{n}\right)$.

23. Нехай A, B, C — послідовні вершини основи піраміди, D — середина відрізка AC, S — вершина піраміди, M — точка перетину відрізка BS з перпендикулярною до нього площиною, яка проходить через $[AC]$. Шуканий двогранний кут вимірюється плоским кутом AMC. Позначимо його через φ. Із прямокутних трикутників BMD і MDC маємо:

$$\frac{|MD|}{|DB|} = \sin\gamma, \quad \frac{|MD|}{|DC|} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}. \tag{1}$$

Крім того, із прямокутного трикутника BDC знаходимо

$$|DC| = |BD| \operatorname{tg}\frac{(n-2)\pi}{2n} = |BD| \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Врахувавши це, із рівностей (1) дістанемо: $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \sin\gamma \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$. За змістом задачі $0 < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$, тому $\varphi = 2\operatorname{arcctg}\left(\sin\gamma \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)$.

24. $R\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

25. $\operatorname{arctg} 2$.

26. $2\arcsin\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$.

27. Безліч.

28. Одну, якщо дані прямі не паралельні між собою, і безліч, якщо ці прямі паралельні.

29. Нехай π_1 — площина, яка містить пряму l_1 і паралельна прямій l_2, а π_2 — площина, яка містить пряму l_2 і паралельна прямій l_1. Якщо $P \in \pi_1 \cup \pi_2$, але не лежить на жодній із прямих l_1 і l_2, то через цю точку не можна провести пряму, яка перетинала б як l_1, так і l_2. Якщо $P \in l_1 \cup l_2$, то таких прямих можна провести безліч. Нарешті, якщо $P \notin \pi_1 \cup \pi_2$, то через цю точку проходить єдина пряма, яка має спільні точки з кожною із прямих l_1 і l_2. Це буде пряма, вздовж якої перетинаються площини (P, l_1) і (P, l_2).

30. $R(\sqrt{3} \pm 1)$.

31. $\dfrac{2\pi}{3n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$.

32. $1 : (\sqrt[3]{2} - 1)$.

33. $\dfrac{(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3)^3 \pi R^3}{18\sqrt{3}}$. Вказівка. Розглянути спочатку конус, описаний навколо тетраедра, вершинами якого є центри куль, про які йдеться в задачі.

34. $\frac{1}{3}\pi h \dfrac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2}$.

35. $\pi : 8$.

36. В основі прямої призми повинен лежати многокутник, у який можна вписати коло, а висота призми повинна дорівнювати діаметру цього кола.

37. Сферу можна описати навколо призми тоді й тільки тоді, коли ця призма пряма і в її основі лежить многокутник, навколо якого можна описати коло.

38. $d = \frac{3V}{Q}$, де V — об'єм многогранника, а Q — площа його грані. Вказівка. Розбити многогранник на піраміди, спільною вершиною яких є точка P, а основами — грані многогранника. Обчислити суму об'ємів цих пірамід.

39. $\operatorname{arctg} 3$.

40. $1 : 27$. Вказівка. Див. задачу 10.

До разділу III

ВАРІАНТ 1

1. $S=\frac{a^2}{6}\sqrt{10-(3\cos\alpha+\cos\beta)^2}$.

2. Рис. 62.

Рівняння має один корінь $x=\frac{1-4^{-p}}{2-4^{-p}}$, якщо $p\neq-\frac{1}{2}$; якщо $p=-\frac{1}{2}$, то рівняння коренів не має.

3. $x=\frac{1}{2}+k,\quad k\in Z$ 4. $S=\frac{7}{4}$.

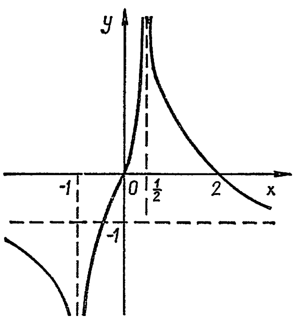


Рис. 62

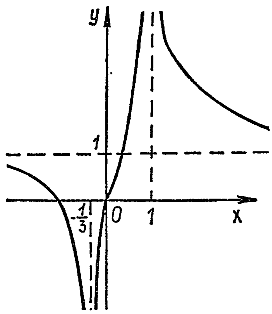


Рис. 63

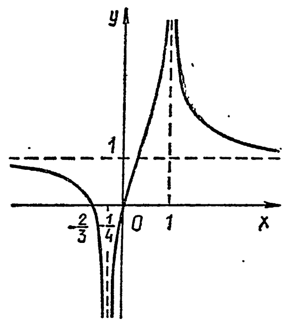


Рис. 64

ВАРІАНТ 2

1. $S=\frac{3a^2}{4}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}$. 2. Рис. 63. Рівняння має один корінь $x=\frac{1-27^{-p}}{1+3\cdot27^{-p}}$ для будь-якого $p\in]-\infty,\infty[$. 3. $x=k$, $k\in Z$ 4. $S=\frac{2}{3}$.

ВАРІАНТ 3

1. $S=\frac{a^2}{6}\sqrt{1+24\cos^2\frac{\beta}{2}-25\cos^2\alpha}$. 2. Рис. 64. Рівняння має один корінь $x=\frac{1+2^{-p}}{1-4\cdot2^{-p}}$, при $p\neq2$; Якщо $p=2$, то рівняння коренів не має. 3. $x=\frac{1}{2}+k,\quad x=n;\quad k,n\in Z$. 4. $S=\frac{7}{3}$.

ВАРІАНТ 4

1. $x>1$. 2. $2V$. 3. $\frac{9}{4}-\frac{9}{16^{2/3}}$. 4. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z,\ y=2$. Вказівка. При $x\neq\pi+2k\pi$, $k\in Z$ рівняння еквівалентне такому: $\sin x=(y-2)^2+1$.

ВАРІАНТ 5

1. $x<0$. 2. $\frac{3\sqrt{2}}{8}V$. 3. $a=1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. 4. $x=2k\pi,\ k\in Z,\ y=1$. Вказівка. При $x\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z$ рівняння еквівалентне такому: $\cos x=(y-1)^2+1$.

ВАРІАНТ 6

1. $x<1$. 2. $\frac{4}{9}V$. 3. $a=\frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$. 4. $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z,\ y=1$. Вказівка. При $x\neq 2k\pi,\ k\in Z$ рівняння еквівалентне такому: $\sin x=-(y-1)^2-1$.

ВАРІАНТ 7

1. $x>1$. 2. $\frac{V}{\sqrt{3}}$. 3. $\frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$. 4. $x=\pi+2k\pi,\ k\in Z,\ y=2$. Вказівка. При $x\neq 2k\pi,\ k\in Z$ рівняння еквівалентне такому: $-\cos x=(y-2)^2+1$.

ВАРІАНТ 8

1. $A\cap B=\left\{\frac{7\pi}{4},\ \frac{15\pi}{4}\right\}$. 2. $\frac{9}{2}$. 3. $\arccos\left(-\frac{1}{9}\right)$. 4. $a\in\left\{1,\ 2,\ 1\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$.

ВАРІАНТ 9

1. $A\cap B=\left\{\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}\right\}$. 2. $\frac{8}{3}$. 3. $\frac{\pi}{4}$. 4. $a\in\left\{-1,\ 1,\ -\frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

ВАРІАНТ 10

1. $A\cap B=\left\{\frac{5\pi}{6},\ \frac{17\pi}{6},\ \frac{29\pi}{6}\right\}$. 2. $\frac{4}{3}$. 3. $\arccos\sqrt{\sqrt{5}-2}$. 4. $a\in\left\{-2,\ -\frac{1}{2},\ 0\right\}$.

ВАРІАНТ 11

1. $A\cap B=\left\{\frac{5\pi}{6}\right\}$. 2. $\frac{7}{6}$. 3. $\arcsin\frac{\sqrt[3]{26}}{3}$. 4. $a\in\left\{\pm1,\ \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$.

ВАРІАНТ 12

1. $V=\sqrt{3}\,r^3\,\mathrm{tg}\,\varphi\,(1+2\,\mathrm{ctg}\,\varphi)^3$; об'єм найменший, коли $\varphi=\mathrm{arctg}\,4$. 2. $S=2-\frac{3}{2}\ln 3$. 3. $x\in\left]0;\ \frac{1}{4}\right]\cup\,]2;\ 4[$. 4. $x=1,\ x=k\pi,\ k\in Z$.

ВАРІАНТ 13

1. $V=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3(1+\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\,\varphi)^3\,\mathrm{tg}\,\varphi$; об'єм найменший, коли $\varphi=\mathrm{arctg}\,(2\sqrt{2})$. 2. $S=12$. 3. $x\in\left]\frac{1}{32};\ \frac{1}{16}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\ \infty\right[$. 4. $x=-1,\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

ВАРІАНТ 14

1. $V = 3r^3(1 + 3\operatorname{ctg}\varphi)^3 \operatorname{tg}\varphi$; об'єм найменший, коли $\varphi = \operatorname{arctg} 6$. 2. $S = \frac{13}{2} - 6\ln 2$. 3. $x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{16}; \frac{1}{8}\right[\cup [2; \infty[$. 4. $x = 3$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

ВАРІАНТ 15

1. Нехай $SABC$ — дана піраміда (рис. 65.). Площина верхньої основи призми відтинає від даної піраміди гомотетичну їй піраміду $SA'B'C'$, а тому $V_{SABC} = \frac{|SO|^3}{|SO'|^3} \cdot V_{SA'B'C'}$. Оскільки довжина сторони рівностороннього трикутника $A'B'C'$ за умовою дорівнює a, то $|O'A'| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; із прямокутного трикутника $SO'A'$ маємо $\frac{|SO'|}{|O'A'|} = \operatorname{tg}\varphi$, звідки $|SO'| = \frac{a\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\varphi$, а тому

$$V_{SA'B'C'} = \frac{1}{3}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,\frac{a\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^3}{12}\operatorname{tg}\varphi;$$

$$V_{SABC} = \frac{a^3\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\varphi\right)^3}{a^3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\varphi\right)^3}\,\frac{a^3}{12}\operatorname{tg}\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{12}(\sqrt{3}\operatorname{ctg}\varphi + 1)^3\operatorname{tg}\varphi.$$

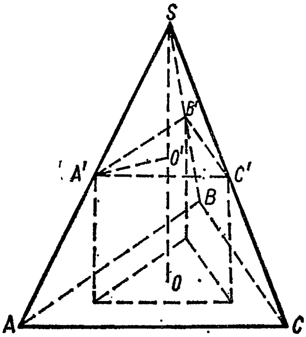


Рис. 65

Зрозуміло, що кут φ змінюється в проміжку $\varphi \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, а тому значення об'єму V_{SABC} найменше, коли функція

$$f(\varphi) = (\sqrt{3}\operatorname{ctg}\varphi + 1)^3\operatorname{tg}\varphi = \frac{(\sqrt{3} + \operatorname{tg}\varphi)^3}{\operatorname{tg}^2\varphi}$$

набуває найменшого значення на цьому проміжку. Коли φ, лишаючись у проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, прямує до 0 або до $\frac{\pi}{2}$, то функція $f(\varphi)$ необмежено зростає, отже вона досягає в цьому проміжку найменшого значення в одній із точок мінімума. Похідна даної функції дорівнює

$$f'(\varphi) = \frac{3(\sqrt{3} + \operatorname{tg}\varphi)^2\frac{1}{\cos^2\varphi}\operatorname{tg}^2\varphi - (\sqrt{3} + \operatorname{tg}\varphi)^3\, 2\operatorname{tg}\varphi\frac{1}{\cos^2\varphi}}{\operatorname{tg}^4\varphi} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + \operatorname{tg}\varphi)^2(\operatorname{tg}\varphi - 2\sqrt{3})}{\operatorname{tg}^3\varphi\cos^2\varphi}.$$

На проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ рівняння $f'(\varphi) = 0$ еквівалентне такому: $\operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{3}$. Звідси випливає, що $\operatorname{arctg}(2\sqrt{3})$ — єдина точка мінімуму функції $f(\varphi)$ на проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Отже, це та точка, де функція досягає свого найменшого значення. Таким чином, об'єм піраміди дорівнює

$$\frac{a^3}{12}(\sqrt{3}\operatorname{ctg}\varphi + 1)^3\operatorname{tg}\varphi.$$

Об'єм найменший, коли $\varphi = \operatorname{arctg}(2\sqrt{3})$. 2. $S = 12$. 3. $x \in \left]\frac{1}{27}; \frac{1}{9}\right[\cup [3; \infty[$.
4. $x = 4$, $x = k\pi$, $k \in Z$.

ВАРІАНТ 16

1. $V = \frac{a^3}{24}(1 + 4\operatorname{ctg}\varphi)^3 \operatorname{tg}\varphi$; об'єм найменший, коли $\varphi = \operatorname{arctg} 8$. 2. $S = 11 - 6\ln 3$. 3. $x \in \left]0; \frac{1}{4}\right] \cup [1; 4[$. 4. $x = -1$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

ВАРІАНТ 17

1. $|AB| = 2\sqrt{Rr}$, $|AC| = 2R\sqrt{\frac{r}{R+r}}$, $|BC| = 2r\sqrt{\frac{R}{R+r}}$. 2. 1) Область визначення даної функції — множина всіх дійсних чисел без числа —1. 2) З'ясуємо, як поводить себе функція поблизу точки $x = -1$, а також коли $x \to \infty$ і $x \to -\infty$. Коли $x \to -1$, то чисельник виразу $\frac{x^4-8}{(x+1)^4}$ наближається до числа —7, а знаменник — до нуля, причому знаменник залишається додатним, коли $x > -1$ і $x < -1$, тобто значення даної функції прямуватимуть до $-\infty$, коли $x \to -1$. Дослідимо поведінку функції, коли $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$,

$$\frac{x^4-8}{(x+1)^4} = \frac{1 - \frac{8}{x^4}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^4} \to 1,$$

коли x за абсолютною величиною необмежено зростає. Таким чином, в обох випадках значення функції прямують до 1, а це означає, що графік функції наближається до прямої $y = 1$. 3) Графік функції перетинає вісь абсцис у двох точках $x = -\sqrt[4]{8}$ і $x = \sqrt[4]{8}$. 4) У всіх точках із області визначення дана функція, як дробово-раціональна, має похідну, а отже, й неперервна. Тому для повного уявлення про графік її досить знайти ще точки екстремумів

$$y' = \frac{4x^3(x+1)^4 - 4(x+1)^3(x^4-8)}{(x+1)^8} = \frac{4(x^3+8)}{(x+1)^5}.$$

Похідна дорівнює нулю в одній точці $x = -2$. При $x < -2$ похідна додатна, тому на проміжку $]-\infty; -2]$ функція зростає. При $-2 < x < -1$ похідна від'ємна, тому функція на проміжку $[-2; -1[$ спадає. Таким чином, точка $x = -2$ є точкою максимума. Значення функцій в цій точці $y(-2) = 8$. На проміжку $]-1; \infty[$ функція зростає від $-\infty$ до 1, оскільки на цьому інтервалі немає точок екстремума. Ми маємо тепер всю інформацію про дану функцію, потрібну для побудови її графіка. Графік зображено на рис. 66. Тепер легко сказати, скільки коренів має рівняння $\frac{x^4-8}{(x+1)^4} = c$, а саме: один корінь, якщо $c = 1$ або $c = 8$; два корені, якщо $c \in]-\infty; 1[\cup]1; 8[$; не має коренів, якщо $c \in]8; \infty[$.

3. $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi;\ 2k\pi \mid k \in Z\right\}$

4. $\begin{cases} \log_2(2y - x^2 + 1) \geqslant \log_2 y, \\ \sqrt{y - 2x + 3} \leqslant \sqrt{8 - x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - x^2 + 1 \geqslant y > 0, \\ 0 \leqslant y - 2x + 3 \leqslant 8 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant x^2 - 1, \\ y > 0, \\ y \geqslant 2x - 3, \\ y \leqslant x + 5. \end{cases}$

Множину точок, які задовольняють цю систему нерівностей, зображено на рис. 67.

ВАРІАНТ 18

1. $\rho = \dfrac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$. 2. Рис. 68. Якщо $c \in \left]-\infty; \frac{16}{27}\right[\cup \left]\frac{16}{25}; 1\right[\cup]1;\infty[$, то дане рівняння має один корінь; якщо $c = \frac{16}{27}$ або $c = \frac{16}{25}$ — два корені; якщо $c \in \left]\frac{16}{27}; \frac{16}{25}\right[$ — три корені; якщо $c = 1$ — не має коренів. 3. $x \in \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ -\pi + 4k\pi / k \in Z\right\}$. 4. Рис. 69.

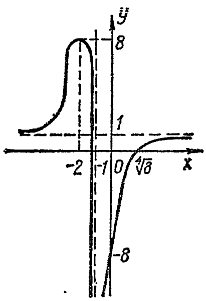


Рис. 66

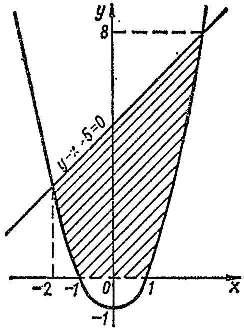


Рис. 67

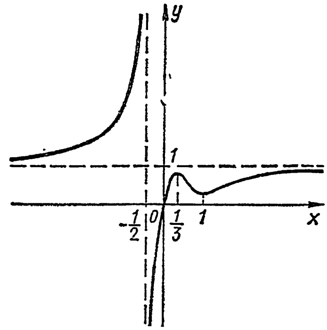


Рис. 68

ВАРІАНТ 19

1. $\rho = 2Rr/(R + r)$. 2. Рис. 70. Якщо $c = 1$ або $c = 8$, то дане рівняння має один розв'язок; якщо $c \in]-\infty; 1[\cup]1; 8[$ — два розв'язки; якщо $c \in]8; \infty[$ — не має розв'язків. 3. $x \in \{2k\pi / k \in Z\}$. 4. Рис. 71.

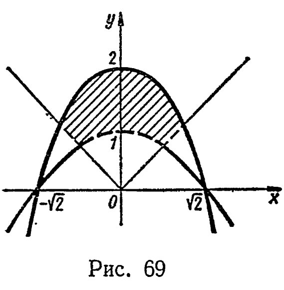


Рис. 69

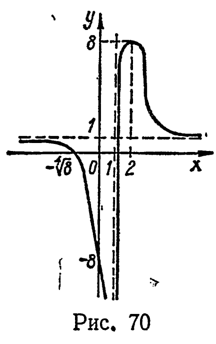


Рис. 70

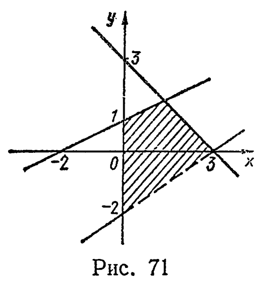


Рис. 71

ВАРІАНТ 20

1. $\rho = r(R + r)/R$. 2. Рис. 72. Якщо $c \in \left]-\infty; \frac{4}{9}\right[\cup \left]4; \infty\right[$, то рівняння має один розв'язок; якщо $c = \frac{4}{9}$, $c = 1$ або $c = 4$ — два розв'язки; якщо $c \in \left]\frac{4}{9}; 1\right[\cup \left]1; 4\right[$ — три розв'язки. 3. $x \in \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in Z\right\}$. 4. Рис. 73.

ВАРІАНТ 21

1. $\rho = Rr/(\sqrt{R} - \sqrt{r})^2$. 2. Рис. 74. Якщо $c \in \left]-\infty; \frac{4}{9}\right[\cup \left]4; \infty\right[$, то рівняння має один розв'язок; якщо $c = \frac{4}{9}$, $c = 1$ або $c = 4$ — два розв'язки; якщо $c \in \left]\frac{4}{9}; 1\right[\cup \left]1; 4\right[$ — три розв'язки.

3. $x \in \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2};\ -\frac{\pi}{8} + k\pi / k \in Z\right\}$. 4. Рис. 75.

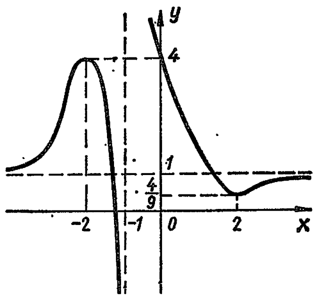


Рис. 72

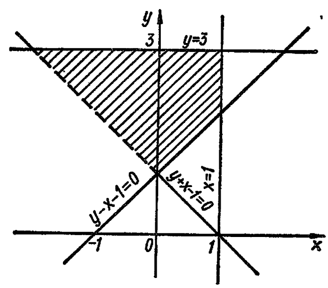


Рис. 73

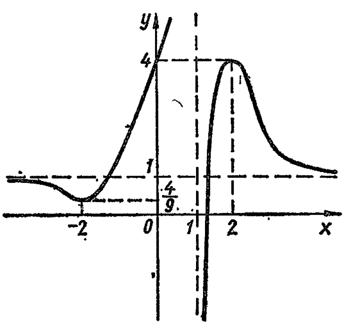


Рис. 74

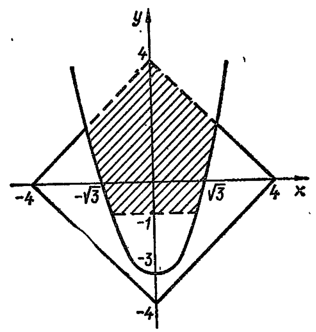


Рис. 75

ВАРІАНТ 22

1. $V = 51$; 2. Дана функція диференційована в кожній точці $x \in R$ і $f'(x) = -15[x^4 - (a-4)x^2 - 4a] = -15(x^2+4)(x^2-a)$. Звідси видно, що функція $f(x)$ має екстремальні значення лише при $a > 0$, причому $x = -\sqrt{a}$ — точка мінімуму, а $x = \sqrt{a}$ — точка максимуму даної функції. Отже, рівність $x_1^2 = x_2$ виконується, коли $a = 1$. 3. $x \in \left]-2; -1\right[\cup \left]-1; 0\right[\cup \left]0; 1\right[\cup \left]2; \infty\right[$. 4. $V = \frac{3\pi r^3}{8}$.

ВАРІАНТ 23

1. $V = \frac{19\pi^2}{8}$. 2. Похідна даної функції $f'(x) = 6[x^2 + (a-2)x - (a+1)]$. Дискримінант тричлена, що стоїть в квадратних дужках, дорівнює $a^2 + 8$, тому для будь-якого $a \in R$ корені рівняння $f'(x) = 0$ є екстремальними точками функції $f(x)$.

За формулами Вієта $x_1 + x_2 = 2 - a$, $x_1 x_2 = -(a + 1)$, тому

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2 - a)^2 + 2(a + 1) = a^2 - 2a + 6 = $$
$$= (a - 1)^2 + 5.$$

Отже, вираз $x_1^2 + x_2^2$ набуває найменшого значення, рівного 5, коли $a = 1$.
3. $x \in]1;\ 2[$. Вказівка. Нерівність еквівалентна сукупності двох систем нерівностей

$$\begin{cases} |x| > 1, \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 0 < |x| < 1, \\ x^2 - x - 2 > 0. \end{cases}$$

4. $S = \dfrac{\pi l^2}{3}$.

ВАРІАНТ 24

1. Рівняння дотичних $y = x + 1$ і $y - \pi - x + 1$, а тому

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} [(x + 1)^2 - (1 + \sin x)^2]\, dx =$$

$$= 2\pi \left[\frac{(x + 1)^3}{2} - x + 2\cos x - \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right] \Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi^4}{12} + \frac{\pi^4}{2} - \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

2. Екстремальні точки даної функції — це розв'язки рівняння $6(x^2 - 3mx + 2m^2) = 0$, тобто $x = m$ і $x = 2m$. Очевидно, рівність $x_2^2 = x_1$ неможлива, якщо $m < 0$ і $m = 0$ (в цьому випадку функція не має екстремальних точок). Для $m > 0$ з рівності $f'(x) = (x - m)(x - 2m)$ видно, що $x_1 = m$ є точка максимуму функції $f(x)$, а $x_2 = 2m$ — точка її мінімуму, тому рівність $x_2^2 = x_1$ справедлива при $m = \dfrac{1}{4}$.

3. $x \in]1;\ 3[$. 4. $\dfrac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{кулі}}} = \dfrac{3}{32}$.

ВАРІАНТ 25

1. $V = \dfrac{19\pi^2}{4}$. 2. $b = \dfrac{1}{2}$. 3. $x \in]2;\ 3[\cup]4;\ \infty[$. 4. $V = \dfrac{\sqrt{2}\,\pi a^3}{36}$.

ВАРІАНТ 26

1. $V = \pi\left(1 + \dfrac{9\pi}{16}\right)$. Вказівка. Шуканий об'єм дорівнює об'єму просторової фігури, утвореної при обертанні навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої графіком функції $y = 1 + 0{,}5 \sin 2x$, прямими $x = 0$ та $x = \dfrac{\pi}{2}$ і віссю абсцис. 2. Похідна даної функції $f'(x) = -6[x^2 - (1 - 2a)x - 2a] = -6(x - 1)(x + 2a)$. Звідси видно, що при $a \neq -0{,}5$ функція $f(x)$ набуває екстремальних значень в точках $x = 1$ і $x = -2a$ (при $a = -0{,}5$ функція $f(x)$ не має екстремальних значень: $f'(x) = -6(x - 1)^2 \leqslant 0$ для всіх $x \in R$). Рівність $x_1^2 = x_2$ можлива, коли точкою мінімуму є точка $x = -2a$, тобто $4a^2 = 1$, звідси $a = 0{,}5$, оскільки $a = -0{,}5$, як ми вже переконались, не підходить. Якщо точкою мінімуму є точка $x = 1$, то рівність $x_1^2 = x^2$ неможлива, оскільки в такому випадку мали б $1 = -2a \Leftarrow\Rightarrow a = -0{,}5$, але при $a = -0{,}5$ функція $f(x)$ монотонно спадає. Отже, $a = 0{,}5$. 3. Нерівність еквівалентна сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} x - 2 > 1, \\ x^2 - 8x + 15 > 1 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ 0 < x^2 - 8x + 15 < 1. \end{cases}$$

Розв'язки першої системи: $x \in]4+\sqrt{2}; \infty[$, а другої $x \in]4-\sqrt{2}; 3[$. Отже, розв'язками вихідної нерівності є $x \in]4-\sqrt{2}; 3[\cup]4+\sqrt{2}; \infty[$. 4. $S = \frac{3\pi}{5} a^2$.

ВАРІАНТ 27

1. $S = 1$. 2. $V = \frac{4}{3} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{(2+\operatorname{tg}^2 \alpha)^{3/2}} l^3$. 3. $x \in \left\{ \frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{5} \middle| k \in Z \right\}$. 4. $a = \frac{4}{e^2}$. Вказівка. Написати умови дотику графіків функцій $y = x^2$ і $y = ae^x$.

ВАРІАНТ 28

1. $S = \pi$. 2. $S = 2h\sqrt{4r^2 - h^2}$. 3. $x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi;\ \operatorname{arctg} 2 + k\pi / k \in Z \right\}$. 4. $q \leqslant 0$ і $q = 54$.

ВАРІАНТ 29

1. $S = 2$. 2. $V = \frac{\pi a^3}{18\sqrt{3}}$, $S = \frac{\pi a^2 \sqrt{17}}{12}$. 3. $x = \frac{k\pi}{4}$, $k \in Z$. 4. $a > e^{-1}$.
Вказівка. Переконатися, що при $a = e^{-1}$ пряма $y = x$ дотикається до графіка функції $y = ae^x$. Якщо ж $a > e^{-1}$, то крива $y = ae^x$ розташована над прямою $y = x$.

ВАРІАНТ 30

1. $S = \pi$. 2. $V = \frac{1}{3}\sqrt{\pi Q} \cdot S$, $S_{б_п} = \sqrt{Q^2 + (\pi S)^2}$. 4. $0 < k < e^{-1}$.

ВАРІАНТ 31

1. $\varphi = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda}}{2\lambda}}$; $\lambda_{найм} = 2$. 2. $x \in]-\infty; -2] \cup \left[-1; -\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right[\cup \left]-\frac{1+\sqrt{13}}{6}; \frac{\sqrt{13}-1}{6}\right[$. 3. Найбільшого значення e^{-1} функція досягає в точці $x = 1$; найменшого значення функція не має. 4. $x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi;\ 2k\pi;\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in Z \right\}$.

ВАРІАНТ 32

1. $\varphi = 2 \operatorname{arcctg} \sqrt{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda}}$; $\lambda_{найм} = 2$. 2. $x \in]0; 3[$. 3. Найбільшого значення $\frac{9}{8}$ функція досягає в точках $x = \arcsin \frac{1}{4}$ і $x = \pi - \arcsin \frac{1}{4}$; найменшого значення 0 функція досягає в точці $\frac{\pi}{2}$. 4. $x \in]-\infty; 4-\sqrt{2}[\cup]4+\sqrt{2}; 6[$.

ВАРІАНТ 33

1. $\sqrt{\frac{2\lambda - 1 \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda - 3}}{2}}\, r$, $\lambda > \frac{3}{2}$. 2. $x \in]-\infty; -2]$. 3. Найбільшого значення $y = 9$ функція досягає в точці $x = 0$, а найменшого значення $y = \frac{3}{2} - 4\sqrt{3} - \frac{14\pi}{3}$ — у точці $x = -\frac{7\pi}{6}$. 4. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\left[\log_{\frac{1}{5}}\left(\int\limits_{\sqrt{4/5}}^{x} 2t\,dt\right)\right]}\right] <$

$$< 1\Big] \Leftrightarrow \left[\log_3\left[\log_{\frac{1}{5}}\left(\int\limits_{\sqrt{\frac{4}{5}}}^{x} 2t\,dt\right)\right] > 0\right] \Leftrightarrow \left[\log_{\frac{1}{5}}\left(\int\limits_{\sqrt{\frac{4}{5}}}^{x} 2t\,dt\right) > 1\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[0 < \int\limits_{\sqrt{\frac{4}{5}}}^{x} 2t\,dt < \frac{1}{5}\right] \Leftrightarrow \left[0 < x^2 - \frac{4}{5} < \frac{1}{5}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{4}{5} < x^2 < 1\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[x \in \left]-1, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right[\cup \left]\frac{2}{\sqrt{5}}, 1\right[\right].$$

ВАРІАНТ 34

1. $x \in]0; 4[$. 2. $x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$. 3. $x = 0$; $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4} + \ln\frac{4}{3}\right)$. 4. З посудини витече $\frac{2}{9}$ всієї рідини.

ВАРІАНТ 35

1. $x \in]0; 64]$. 2. $x = k\pi$, $k \in Z$. 3. $S = 5$. Вказівка. Рівняння дотичної $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$. Шукана площа — це площа прямокутного трикутника, вершинами якого є точки (0; 0), (5; 5) і (1; —1). 4. Об'єм тіла обертання $V = \frac{\pi h^2}{3} x = \frac{4p\pi}{3}(p-x)^2\frac{2x-p}{x}$, де x — бічна сторона трикутника, h — висота, опущена на бічну сторону. Об'єм найбільший, коли рівні сторони трикутника дорівнюють $\frac{1+\sqrt{17}}{8}p$.

ВАРІАНТ 36

1. $x \in]0; 7^{-13/8}] \cup [7; \infty[$. 2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$. 3. В точках з абсцисами $x = -1$ і $x = 3$. 4. Катети трикутника повинні дорівнювати 30 і 40 см.

ВАРІАНТ 37

1. $x \in]0; 5] \cup [125; \infty[$. 2. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$. 3. Рівняння дотичних в точці (2; 3) : $y = 8x - 13$ і $y = x + 1$, а рівняння дотичних в точці (—5; 45) : $y = -20x + 55$ і $y = -13x - 20$.

4. Радіус основи циліндра повинен дорівнювати $\frac{HR}{2(H-R)}$. В цьому випадку об'єм циліндра $V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{H^2R}{H-R}$.

ВАРІАНТ 38

1. $V = a^2\sqrt{4R^2 - 2a^2}$. 2. $x \in \left\{k\pi; \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in Z\right\}$. 3. $a = -2$. 4. $x \in]0; 3[\cup]4; 6[\cup]6; 12[\cup]14; \infty[$.

ВАРІАНТ 39

1. $S=\pi h\sqrt{2R(2R-h)}$. 2. $x\in\left\{\pm\frac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in Z\right\}$. 3. $a=4$. 4. $x\in\left[-1;\ \frac{1}{2}\right[\ \cup\ [1;\ 2[\ \cup\ \left]2;\ \frac{7}{2}\right[$.

ВАРІАНТ 40

1. $V=\frac{2\pi a^4 r}{3(a^2-r^2)}$. 2. $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad k\in Z$. 3. $a=\frac{1}{27}$. 4. $x\in\,]0;\ 1[\ \cup\ ]2;\ 4[\ \cup\ ]5;\ \infty[$.

ВАРІАНТ 41

1. $V=\frac{4r^2h^2}{3(h-2r)}$. 2. $x\in\left\{k\pi;\quad \pm\frac{\pi}{3}+k\pi \mid k\in Z\right\}$. 3. $a=-32$. 4. $x\in\left]-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]\cup\left]\sqrt{2};\ \frac{3}{2}\right]$.

ВАРІАНТ 42

1. $V=\frac{4}{3}R^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$. 2. $x\in\left]-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right[$. 3. $x\in\left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \pm\frac{1}{3}+2k;\ \pm\frac{2}{3}-2k \mid k\in N\right\}$. Вказівка. Побудувавши графіки обох частин рівняння, слід переконатись, що воно не має розв'язків на проміжку $\left[-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right]$. 4. $S=\frac{16}{3}$.

ВАРІАНТ 43

1. $S=4R^2\sin^2 2\alpha\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}$. 2. $x\in\left]0;\ \frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};\ 2\right[$. 3. $x\in\left\{(-1)^k\times\frac{\pi}{3}+k\pi \mid k\in Z\right\}$. Вказівка. Рівняння еквівалентне таким двом системам:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x=-\sqrt{3},\\ \cos x<0\end{cases}\quad \text{і}\quad \begin{cases}\operatorname{tg}x=\sqrt{3},\\ \cos x>0.\end{cases}$$

4. Нехай $(x_0;\ y_0)$ — точка дотику дотичної до графіка даної функції, тоді рівняння дотичної має вигляд $y-y_0=2x_0(x-x_0)$. Оскільки точка $(x_0;\ y_0)$ лежить на графіку функції $y=x^2+10$ і дотична проходить через точку $(0;\ 1)$, то

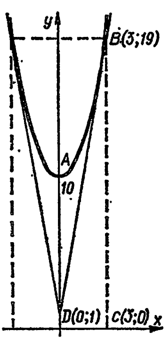


Рис. 76

$$\begin{cases}1-y_0=-2x_0^2,\\ y_0=x_0^2+10.\end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $(x_0=3;\ y_0=19)$ або $(x_0=-3;\ y_0=19)$, а тому рівняння дотичних $y=-6x+1$ і $y=6x+1$. Шукана площа (рис. 76) дорівнює подвоєній різниці площі криволінійної трапеції $OABC$ і площі трапеції $ODBC$:

$$S_{OABC}=\int_0^3(x^2+10)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+10x\right)\Big|_0^3=39,$$

$$S_{ODBC}=\frac{|OD|+|BC|}{2}\cdot|OC|=\frac{1+19}{2}\cdot 3=30.$$

Отже, $S=2(S_{OABC}-S_{ODBC})=18$.

ВАРІАНТ 44

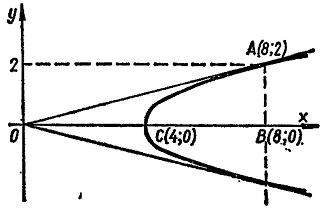


Рис. 77

1. $V = \frac{8}{3} R^3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{2 + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$.

2. $x \in \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in Z \right\}$.

Вказівка. Рівняння еквівалентне сукупності двох систем:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x = -1, \\ \sin x < 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \operatorname{ctg} x = 1, \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

3. $x \in [0;\ 1[\cup]2;\ 3]$. 4. Як і в четвертій задачі попереднього варіанту, знайдемо, що рівняння дотичних до даної параболи $y = \frac{x}{4}$ і $y = -\frac{x}{4}$, тому шукана площа (рис. 77) дорівнює $S = 2(S_{OAB} - S_{CAB})$, але $S_{OAB} = \frac{1}{2} |OB| \cdot |BA| = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8$, $S_{CAB} = \int\limits_4^8 \sqrt{x-4}\, dx = \frac{2}{3} (x-4)^{\frac{3}{2}} \Big|_4^8 = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$. Отже, $S = 2 \cdot \left(8 - \frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3}$.

ВАРІАНТ 45

1. $S = 2R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha}$. 2. $x \in]-5;\ -2-\sqrt{6}] \cup [-2+\sqrt{6};\ 1[$. 3. $x \in \left\{ -\frac{\pi}{6};\ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi;\ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} - k\pi \mid k \in N \right\}$.

Вказівка. Рівняння еквівалентне сукупності таких систем:

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ x < \frac{\pi}{4} \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ x > \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

4. $S = \frac{8}{3}$.

ВАРІАНТ 46

1. $V = \frac{2}{3} R^3 \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. 2. $x \in [-\sqrt{3};\ 3[\cup]5;\ 4+\sqrt{3}]$. 3. $x \in \left\{ -\frac{2}{3}\pi;\ -\frac{\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3} \right\}$. Вказівка. Рівняння еквівалентне такій системі:

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -\pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

4. $S = 18$.

ВАРІАНТ 47

1. $V = \frac{\sqrt{3}}{2} a^3$. 2. $3(2 - \ln 2)$. 3. $S = \int\limits_0^\pi 8 \sin^4 x dx = \int\limits_0^\pi 8 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx =$

$= \int\limits_0^\pi 2(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx = \int\limits_0^\pi 2\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx = \int\limits_0^\pi (3 -$
$- 4\cos 2x + \cos 4x)\,dx = \left(3x - 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^\pi = 3\pi$. **4.** $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $q =$
$= \sqrt{2}$; $a = -7 + 5\sqrt{2}$, $q = 1 - \sqrt{2}$.

ВАРІАНТ 48

1. $1 : (\sqrt{2}+1)$. **2.** $24\ln 3$. **3.** $S = 5\pi$. **4.** 1; 3; 9 або 9; 3; 1.

ВАРІАНТ 49

1. $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{h^2(l^2-h^2)}{(h-a)^2}$. **2.** $4(2-\ln 5)$. **3.** $S = \frac{3\pi}{2}$. **4.** $\frac{2}{3}$; 2; 6.

ВАРІАНТ 50

1. $V = \frac{h^3}{6}$. **2.** $6(1-\ln 3)$. **3.** $S = 3\pi$. **4.** $\frac{8}{3}$.

ВАРІАНТ 51

1. $1 : (\sqrt[3]{4}-1)$. **2.** 0. **3.** $S = 6\pi$. **4.** 3; 6; 12.

ВАРІАНТ 52

1. $S = 4\pi r\sqrt{R^2-r^2}$. Площа бічної поверхні найбільша, коли функція $f(r) = r\sqrt{R^2-r^2}$ набуває найбільшого значення на проміжку $r \in \,]0; R[$. Дана функція неперервна на замкненому проміжку $r \in [0; R]$ і на кінцях цього проміжку дорівнює нулю; отже, найбільше значення на $]0; R[$ ця функція набуває в одній з точок максимуму. Оскільки $f'(r) = \sqrt{R^2-r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}$, то $f'(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}R}{2}$. Із попередніх міркувань випливає, що це й буде та точка, де функція $f(r)$ досягає найбільшого значення. Отже, площа бічної поверхні циліндра найбільша, коли

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}R;$$

$$S_{\text{найб}} = 4\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot R\sqrt{R^2-\frac{R^2}{2}} = 2\pi R^2.$$

2. $x \in \left\{2\pi(1+2k);\ \pm\frac{2}{3}\pi + 4k\pi \mid k \in Z\right\}$.

3. 0. **4.** Рис. 78.

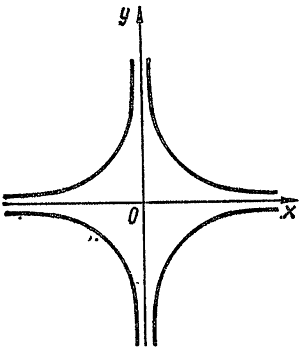


Рис. 78

ВАРІАНТ 53

1. $V = \frac{\sqrt{3}\,r^2H^2}{H-2r}$; об'єм найменший, коли $H = 4r$, $V_{\text{найм}} = 8\sqrt{3}\,r^3$. **2.** $x \in \left\{\frac{k\pi}{4};\ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in Z\right\}$. **3.** 1. **4.** Візьмемо дані прямі на осі прямокутної системи координат. Точка $(x; y)$ належатиме шуканій множині тоді й тільки тоді, коли $|x|\cdot|y| = ||x|-|y||$. Шукана множина симетрична відносно обох координатних осей, тому досить знайти ті точки шуканої множини, які мають невід'ємні ко-

ординати. Вони задовольняють систему

$$\begin{cases} xy = |x - y|, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Ця система еквівалентна сукупності таких двох систем:

$$\begin{cases} xy = x - y, \\ 0 \leqslant y \leqslant x \end{cases} \text{ і } \begin{cases} xy = y - x, \\ y > x \geqslant 0. \end{cases}$$

Побудувавши множини точок, які є розв'язками кожної з цих систем, легко знайти шукану множину (рис. 79).

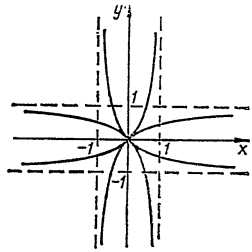


Рис. 79

ВАРІАНТ 54

1. $V = \pi H\left(r^2 - \frac{H^2}{4}\right)$; об'єм найбільший, коли $H = \frac{2\sqrt{3}\,r}{3}$, $V_{\text{найб}} = \frac{4\sqrt{3}\,\pi r^3}{9}$.
2. $x \in \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2};\ \frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in Z\right\}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \cdots + \frac{n-1}{n^2+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{2}}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}$. 4. Рис. 80.

Вказівка. Дані прямі слід взяти за осі прямокутної системи координат. Точка належатиме шуканій множині тоді й тільки тоді, коли $||x| - |y|| = \left|\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x|}\right|$.

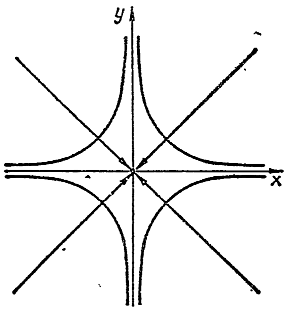


Рис. 80

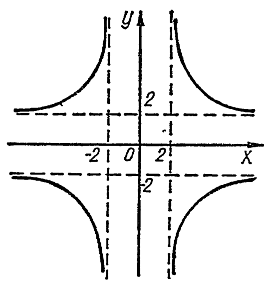


Рис. 81

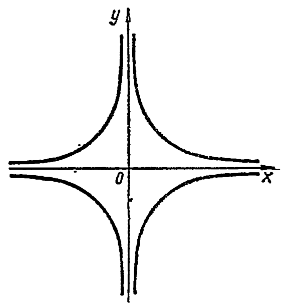


Рис. 82

ВАРІАНТ 55

1. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}(2rH^2 - H^3)$; об'єм найбільший, коли $H = \frac{4}{3}r$, $V_{\text{найб}} = \frac{18\sqrt{3}\,r^3}{27}$.
2. $x \in \left\{k\pi;\ (-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\}$. 3. 0. 4. Рис. 81.

ВАРІАНТ 56

1. $S = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot H\sqrt{(2r - H)(2r + 3H)}$; площа найбільша, коли $H = \frac{3 + \sqrt{33}}{6}r$, $S_{\text{найб}} = \frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{108 + 22\sqrt{33}}\,r^2$. 2. $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in Z\right\}$. 3. $1 - \sqrt[3]{2}$. 4. Чотири вітки гіперболи і самі прямі (рис. 82).

ВАРІАНТ 57

1. $S = a^2\left(\frac{1}{2} + \operatorname{ctg}\varphi\right)^2 \operatorname{tg}\varphi$; площа найменша, коли $\varphi = \operatorname{arctg} 2$. 2. $x \in \{0; -3\}$. 3. $S = \frac{\pi^2}{4} + 2$. 4. 2.

ВАРІАНТ 58

1. Якщо сторона прямокутника довжиною a лежить проти кута φ, то $S = \pi a^2\left(\frac{1}{2\sin\varphi} + \frac{1}{\cos\varphi}\right)^2$; найменше значення площі при $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Якщо проти кута φ лежить сторона прямокутника довжиною $2a$, то $S = \pi a^2\left(\frac{1}{2\cos\varphi} + \frac{1}{\sin\varphi}\right)^2$; найменше значення площі при $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{2}$. 2. $x = 2$. 3. $S = 2 + \frac{\pi^2}{4}$. 4. -1.

ВАРІАНТ 59

1. $S = \frac{b^2}{4}(4 + \operatorname{tg}\varphi)^2 \operatorname{ctg}\varphi$; площа найменша, коли $\varphi = \operatorname{arcctg} 4$. 2. $x = 2$. 3. $S = 2$. 4. 0.

ВАРІАНТ 60

1. $S = r^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}\varphi$; площа найменша, коли $\varphi = \frac{\pi}{3}$. 2. $x = 2$. 3. $S = 2 + \frac{\pi}{2}$. 4. 3.

ВАРІАНТ 61

1. Якщо більша основа трапеції лежить проти кута φ, то $S = \frac{a^2}{2}\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\varphi\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\operatorname{tg}\varphi\right)$; площа найменша, коли $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}$. Якщо ж проти кута φ лежить бічна сторона трапеції, то

$$S = \frac{a^2}{2}\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\varphi\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\operatorname{ctg}\varphi\right);$$

площа найменша, коли $\varphi = \operatorname{arctg} 4\frac{\sqrt{3}}{3}$. 2. $x = 1$. 3. $S = 2$. 4. 1.

ВАРІАНТ 62

1. $V = 108$ см^3. 2. $x \in \{-2; 2\}$. 3. $f_{\text{найб}} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $f_{\text{найм}} = f(\operatorname{arctg}\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} - 1)$. 4. Рис. 83.

ВАРІАНТ 63

1. $V = \frac{1}{12} \cdot \frac{mnc^2}{m^2 + n^2}\sqrt{4b^2 - c^2}$. 2. $x = \frac{3}{2}$. 3. $f_{\text{найб}} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{11\sqrt{3}}{4}$, $f_{\text{найм}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. 4. Рис. 84.

ВАРІАНТ 64

1. $V=\frac{l^3\sqrt{2}}{12}$. 2. $x\in\{-2;\ 2\}$. 3. $f_{\text{найб}}=f(\pi)=22$, $f_{\text{найм}}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$. 4. Рис 85.

ВАРІАНТ 65

1. $V=6$ см³. 2. $x=3$. 3. $f_{\text{найб}}=f\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, $f_{\text{найм}}=$ $=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4. Рис. 86.

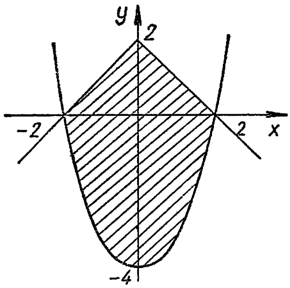


Рис. 83

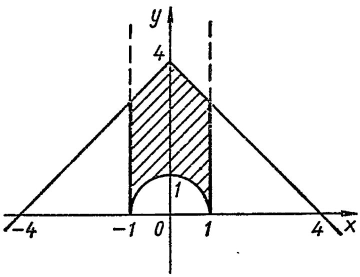


Рис. 84

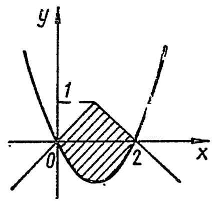


Рис. 85

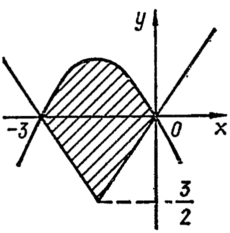


Рис. 86

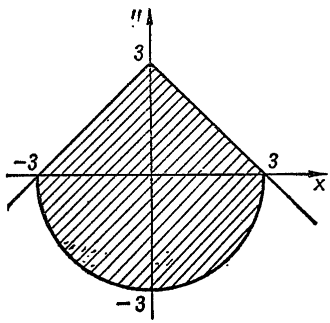


Рис. 87

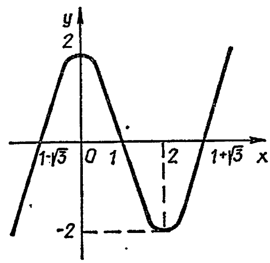


Рис. 88

ВАРІАНТ 66

1. $V=\frac{\sqrt{3}\,b^3}{24}$. 2. $x\in\{-2;\ 2\}$. 3. $f_{\text{найб}}=f(-\pi)=f(0)=3$, $f_{\text{найм}}=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=$ $=-7$. 4. Рис. 87.

ВАРІАНТ 67

1. Рис. 88. 2. $V=-\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}^3\alpha\operatorname{tg}2\alpha$.

3. $\begin{cases} x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi, \\ y=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi, \\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi, \quad n,\ k\in Z. \end{cases}$ 4. $x\in\,]1;\ 1000[$.

ВАРІАНТ 68

1. Рис. 89. 2. $\varphi = \arccos \frac{1}{3}$.

3. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi, \\ y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - k\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + k\pi, \\ y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - k\pi, \quad k \in Z. \end{cases}$

4. $x \in \left]0; \frac{1}{10}\right[\cup \,]100; \infty[$.

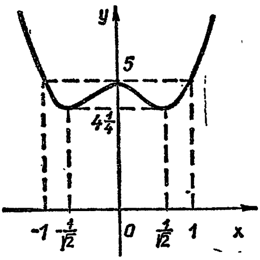


Рис. 89

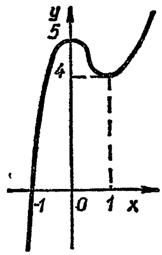


Рис. 90

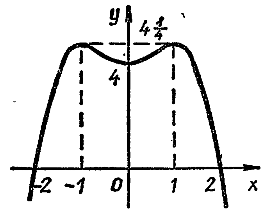


Рис. 91

ВАРІАНТ 69

1. Рис. 90. 2. $\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. 3. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{(k+n)\pi}{2}, \\ y = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{(k-n)\pi}{2}; \quad k, n \in Z. \end{cases}$

4. $x \in]0; 10[\cup]100; \infty[$.

ВАРІАНТ 70

1. Рис. 91. 2. $V = \frac{c^3 \sin 2\alpha}{4(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)}$. 3. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \\ y = -\frac{\pi}{6} + k\pi; \; k \in Z. \end{cases}$

4. $x \in]0; \infty[$.

ВАРІАНТ 71

1. $V = \frac{4}{3} h^3 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$. 2. $x \in \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in Z\right\}$. 3. $f_{\text{найб}} = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, $f_{\text{найм}} = f(0) = -34$. 4. $x \in]-\infty; -1[\cup]2; \infty[$.

ВАРІАНТ 72

1. $V = \frac{\sqrt{3}\, h^3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}$. 2. $x \in \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in Z\right\}$. 3. $f_{\text{найб}} = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4}$, $f_{\text{найм}} = f(1) = 5$. 4. $x \in]-\infty; 0[\cup]3; \infty[$.

ВАРІАНТ 73

1. $V=\frac{4b^3\sin\varphi\cos^2\varphi}{(1+\cos^2\varphi)^{3/2}}$. 2. $x\in\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \mid k\in Z\right\}$. 3. $f_{\text{найб}}=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$; $f_{\text{найм}}=f(2)=-34$. 4. $x\in\,]-\infty;\,-1[\,\cup\,]2;\,\infty[$.

ВАРІАНТ 74

1. $V=2\sqrt{3}\,h^3\,\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1-3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}$. 2. $x\in\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi \mid k\in Z\right\}$. 3. $f_{\text{найб}}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{41}{16}$, $f_{\text{найм}}=f(1)=-34$. 4. $x\in\,]-\infty;\,-2[\,\cup\,]1;\,\infty[$.

ВАРІАНТ 75

1. $V=6b^3\operatorname{tg}\varphi\sin^3\frac{\varphi}{2}$. 2. $x\in\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi \mid k\in Z\right\}$. 3. $f_{\text{найб}}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{4}$, $f_{\text{найм}}=f(0)=5$. 4. $x\in\,]-\infty;\,0[\,\cup\,]3;\,\infty[$.

ВАРІАНТ 76

1. $V=\frac{2}{3}R^3\operatorname{ctg}\alpha$. 2. $x=0$. 3. $f_{\text{найб}}=f(0)=5$, $f_{\text{найм}}=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{11}{3}$. 4. $A\cap B=\left\{-\frac{3\pi}{2},\,-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right\}$.

ВАРІАНТ 77

1. $V=\frac{\sqrt{2}}{12}\pi a^3\operatorname{tg}\alpha$. 2. $x=4$. 3. $f_{\text{найб}}=f(-1)=f(2)=-4$, $f_{\text{найм}}=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{25}{4}$. 4. $A\cap B=\left\{-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{6},\,\frac{5\pi}{6},\,\frac{3\pi}{2}\right\}$.

ВАРІАНТ 78

1. $V=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3\operatorname{tg}\alpha$. 2. $x=\frac{5}{4}$. 3. $f_{\text{найб}}=f(2)=9$; $f_{\text{найм}}=f(-1)=f(5)=0$.
4. $A\cap B=\{-\pi,\,\pi,\,3\pi\}$.

ВАРІАНТ 79

1. $V=\frac{d^3}{12}\operatorname{tg}\alpha$. 2. $x=1$. 3. $f_{\text{найб}}=f(0)=12$, $f_{\text{найм}}=f(3{,}5)=-12{,}25$.
4. $A\cap B=\left\{-\frac{5\pi}{6},\,-\frac{\pi}{6},\,\frac{7\pi}{6},\,\frac{11\pi}{6}\right\}$.

ВАРІАНТ 80

1. $V=\frac{\pi l^3}{3}\sin\alpha\cos^2\alpha$. 2. $x=\frac{3}{2}$. 3. $f_{\text{найб}}=f(1)=-2$; $f_{\text{найм}}=f(-1)=-6$.
4. $A\cap B=\left\{\frac{\pi}{6};\,\frac{5\pi}{6}\right\}$.

ВАРІАНТ 81

1. $V = \frac{a^3}{6}\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$. 2. $x = 3$. 3. $f_{\text{найб}} = f(0) = f(2) = 5$; $f_{\text{найм}} = f(1) = 2$.
4. $A \cap B = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

ВАРІАНТ 82

1. $a(b+3)$. 2. $\frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{ц}}} = \frac{8\sqrt{3}}{\pi}$. 3. $y_{\text{найм}} = 0$, $y_{\text{найб}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}}$. 4. $S = \frac{5}{2} - 2\ln 2$.

ВАРІАНТ 83

1. $\frac{4}{2b - a}$. 2. $\frac{S_{\text{к}}}{S_{\text{п}}} = \frac{8\pi}{6 + \sqrt{3}}$. 3. $y_{\text{найм}} = 0$, $y_{\text{найб}} = \sqrt{2}\, e^{-\pi/4}$. 4. $S = \frac{32}{3} - 6\ln\frac{13}{6}$.

ВАРІАНТ 84

1. $\frac{a+1}{2b}$. 2. $\frac{V_{\text{к}}}{V_{\text{ц}}} = \frac{9}{2}$. 3. $y_{\text{найм}} = -\frac{\sqrt{2}}{6} e^{-3\pi/4}$, $y_{\text{найб}} = \frac{1}{3}$. 4. $S = \frac{23}{3} + 2\ln\frac{2}{7}$.

ВАРІАНТ 85

1. $\frac{5a + 3b + 1}{a + 2}$. 2. $\frac{S_{\text{п}}}{S_{\text{ц}}} = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{\pi}$. 3. $y_{\text{найм}} = 0$, $y_{\text{найб}} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\pi/(3\sqrt{3})}$.
4. $S = \frac{8}{3} + 6\ln\frac{2}{3}$.

До розділу IV

Білет 1

2. Маємо $2b + a^3 - 3a = 2(\sin^3\alpha + \cos^3\alpha) + (\sin\alpha + \cos\alpha)^3 - 3(\sin\alpha + \cos\alpha) = 3(\sin^3\alpha + \cos^3\alpha) + 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) - 3(\sin\alpha + \cos\alpha) = 3(\sin^3\alpha + \cos^3\alpha) - 3(\sin\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin\alpha\cos\alpha) = 3(\sin^3\alpha + \cos^3\alpha) - 3(\sin\alpha + \cos\alpha) \times (\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) = 0$.

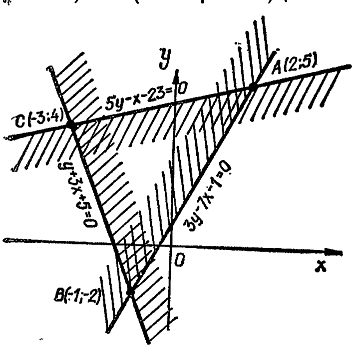


Рис. 92

3. Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$, має вигляд

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Тому рівняння прямих AB, BC і AC відповідно будуть $3y - 7x - 1 = 0$, $y + 3x + 5 = 0$ і $5y - x - 23 = 0$. Шукана система нерівностей (рис. 92) буде

$$\begin{cases} 3y - 7x - 1 > 0, \\ y + 3x + 5 > 0, \\ 5y - x - 23 < 0. \end{cases}$$

Білет 2

2. Позначимо шуканий кут $\widehat{SCO}$ (рис. 93) через α. З прямокутних трикутників SCA і SOC знаходимо

$$\frac{|AC|}{|SC|} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad \frac{|OC|}{|SC|} = \cos\alpha.$$

Але $|AC| = |OC|$, тому $\cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, звідки $\alpha = \arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$.

3. Шукані значення a — це ті, при яких графіки функцій $y = \ln x$ і $y = ax$ (рис. 94) перетинаються в двох точках. Тому $0 < a < a^*$, де a^* — таке значення a, при яко-

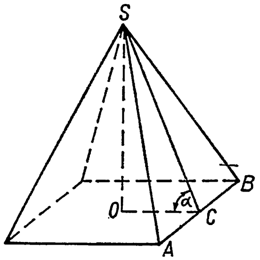


Рис. 93

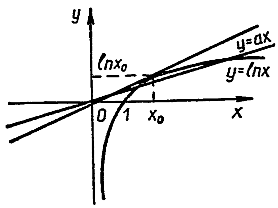


Рис. 94

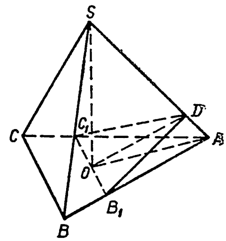


Рис. 95

му пряма $y = ax$ дотикається до графіка функції $y = \ln x$. Знайдемо a^*. Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = \ln x$, буде

$$y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0) \quad \text{або} \quad y = \frac{x}{x_0} + \ln x_0 - 1.$$

Через початок координат проходить та дотична, для якої $\ln x_0 = 1$, тобто та, що проведена в точці $(e;\ 1)$. Її рівняння $y = x/e$, тому $a^* = 1/e$. Отже, рівняння $\ln x = ax$ має два корені, якщо $0 < a < 1/e$.

Білет 3

2. Нехай $SABC$ (рис. 95) — дана піраміда, SO — її висота, C_1DB_1 — переріз піраміди площиною, перпендикулярною до ребра SA. Тоді $\widehat{C_1DB_1} = \alpha$, $\widehat{ODB_1} = \frac{\alpha}{2}$. Позначимо шуканий кут $\widehat{DAO}$ через φ. Із прямокутних трикутників DOB_1 і DOA дістанемо:

$$\frac{|OB_1|}{|DO|} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{|DO|}{|OA|} = \sin\varphi.$$

Звідси

$$\frac{|OB_1|}{|OA|} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi.$$

Але

$$\frac{|OB_1|}{|OA|} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отже,

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

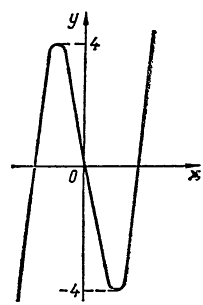


Рис. 96

3. Кількість коренів даного рівняння легко встановити графічно, побудувавши графік функції $y = x^5 - 5x$ (рис. 96). Якщо $a > 2$ або $a < -2$, то дане рівняння має один корінь; якщо $a = 2$ або $a = -2$ — два корені; якщо $-2 < a < 2$ — три корені.

Білет 4

2. $S = 12\sqrt{3}R^2$. 3. Використати рівність

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

яка справджується для будь-якого $k \in N$, або застосувати метод математичної індукції.

Білет 5

2. Взяти за осі координатної системи дані прямі. 3. При $a \leqslant 0$ рівняння має один розв'язок, а при $a > 0$ — два розв'язки. Вказівка. Побудувати графіки функцій $y = \lg x$ і $y = \frac{1}{3x - a}$.

Білет 6

2. $a = 1$ і $a = -1$. 3. Середини сторін будь-якого чотирикутника (навіть не плоского) є вершинами паралелограма, сторони якого паралельні діагоналям чотирикутника. Тому, якщо E — середина $[AB]$, а F — середина $[CD]$, то $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$. Тепер маємо: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA}$; $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OE}$, бо $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FC}$; $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OF}$, бо $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD} = \vec{0}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) = 0$.

Білет 7

2. На проміжках $]-\infty; -\sqrt{3}[$, $]-1; 0[$, $]1; \sqrt{3}[$ функція спадає, а на проміжках $]-\sqrt{3}; -1[$, $]0; 1[$, $]\sqrt{3}; +\infty[$ зростає; $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ і $x = \sqrt{3}$ — точки мінімуму функції, а $x = -1$ і $x = 1$ — її точки максимуму. 3. Трикутник з вершинами $A'(0; 2)$, $B'(0; 4)$, $C'(-2; 4)$.

Білет 8

2. Дана функція диференційовна в усіх точках $x \in R$ і її похідна

$$y'(x) = e^x - 5e^{-x} - 4 = e^{-x}(e^x - 5)(e^x + 1).$$

Похідна $y'(x) < 0$, якщо $x < \ln 5$, і $y'(x) > 0$, якщо $x > \ln 5$. Отже, найменшого значення функція $y(x)$ досягає в точці

$$x = \ln 5; \quad y = (\ln 5) = 5 + 5 \cdot \frac{1}{5} - 4\ln 5 + 2 = 4(2 - \ln 5).$$

3. Нехай $A(x; y; z)$ — будь-яка точка площини $x + y + z = 6$. Вектор $\vec{n}(1; 1; 1)$ перпендикулярний до даної площини, а пряма, яка проходить через точку $O(0; 0; 0)$ паралельно вектору $\vec{n}$, перетинає площину в точці $B(2; 2; 2)$. Оскільки $|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{BA}|^2$, то

$$x^2 + y^2 + z^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 \geqslant |\overrightarrow{OB}|^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12.$$

Білет 9

2. $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) =$

$$= \frac{1}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2\beta) = \frac{1}{2}(2\cos^2\alpha + 2\cos^2\beta - 2) = a - 1.$$

3. Рівняння дотичної до графіка функції $y = \sqrt{x}$ в точці $(a; \sqrt{a})$ $(a > 0)$ є $y = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x + a)$. Ця пряма перетинає прямолінійні межі даної фігури, тобто прямі

$x = 0$, $y = 2$, відповідно в точках $\left(0; \frac{\sqrt{a}}{2}\right)$ і $(4\sqrt{a} - a; 2)$. Тому площа трикутника, про який ідеться в умові задачі, дорівнює $S = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)(4\sqrt{a} - a) = \frac{1}{4}\sqrt{a}(\sqrt{a} - 4)^2$. Площа найбільша, коли $\sqrt{a} = 4/3$. Отже, дотичну треба провести в точці $\left(\frac{16}{9}; \frac{4}{3}\right)$.

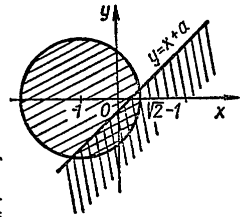


Рис. 97

Білет 10

2. $S = \frac{2}{3}a^2$. 3. Множина $\{(x; y) | x^2 + y^2 + 2x \leqslant 1\}$ — це круг радіуса $\sqrt{2}$ в центром у точці $(-1; 0)$, бо $[x^2 + y^2 + 2x \leqslant 1] \Leftrightarrow [(x+1)^2 + y^2 \leqslant 2]$ (рис. 97). Тому вказана в умові задачі множина містить лише одну точку, коли пряма $y = x + a$, $a < 0$ дотикається до кола $(x+1)^2 + y^2 = 2$, тобто коли рівняння $(x+1)^2 + (x+a)^2 = 2$ при $a < 0$ має лише один розв'язок. Це буде при $a = -1$. Шукана точка — $(0; -1)$.

Білет 11

2. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 = (a + b + 2\sqrt{ab})^4 \geqslant (2\sqrt{(a+b)\,2\sqrt{ab}})^4 = 64ab\,(a+b)^2$.

3. $$\vec{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)}{\sqrt{1 + \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}}.$$

Білет 12

2. Два розв'язки. Вказівка. Побудувати графіки функцій $y = \ln(|x| - 1)$ і $y = (x+1)/(x-1)$. 3. Позначимо через a, b і c довжини відповідних сторін даного трикутника, а через S — його площу. Оскільки

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,$$

то

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S},$$

звідки

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2S}.$$

З другого боку, $S = \frac{a+b+c}{2}r$, звідки $\frac{1}{r} = \frac{a+b+c}{2S}$. Отже, $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

Білет 13

2. Нехай O — точка перетину медіан трикутника ABC (рис. 98). Тоді $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{EO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{FO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. З трикутників ABD, BCE і CAF відповідно маємо

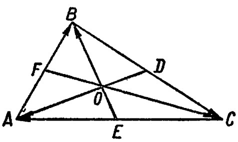


Рис. 98

$\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ і $\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ і $\frac{3}{2}\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. Додаючи почленно ці три рівності, дістаємо $\frac{3}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+$ $+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\vec{0}$. Але $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$, а тому й $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

3. Рівняння дотичних: $y=-2x$ і $y=2x$. Шукана площа дорівнює $\frac{2}{3}$.

Білет 14

2. Гомотетія з центром в точці A, при якій центр кола K_1 переходить в центр кола K_2, переводить точку D в точку D_1 на колі K_2, а дотичну (BC) до кола K_1 в паралельну їй дотичну (B_1C_1) до кола K_2 (рис. 99). Тепер з конгруентності дуг BbD_1 і CcD_1 випливає рівність вписаних в коло K_2 кутів $\widehat{BAD_1}=\widehat{CAD_1}$.

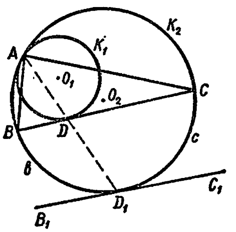


Рис. 99

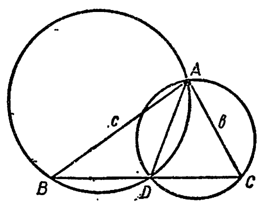


Рис. 100

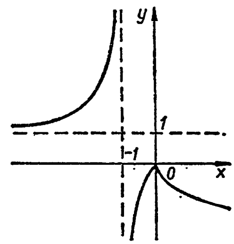


Рис. 101

3. $a_{n+1}-a_n=\frac{2n^2+2n-3}{(n^2+n+1)(n^2+3n+3)}$. Оскільки для всіх натуральних значень n всі три квадратні функції від n, які містить цей вираз, додатні, то завжди $a_{n+1}>$ $>a_n$. Отже, дана послідовність зростає.

Білет 15

2. Позначимо через d_1 діаметр кола, описаного навколо $\triangle ABD$, а через d_2 — діаметр кола, описаного навколо $\triangle ADC$ (рис. 100). За теоремою синусів $d_1=\frac{c}{\sin\widehat{ADB}}$, $d_2=\frac{b}{\sin\widehat{ADC}}$. Оскільки $\sin\widehat{ADB}=\sin\widehat{ADC}$, а довжини l_1 і l_2 кіл відносяться як їхні діаметри, то $\frac{l_1}{l_2}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{c}{b}$. 3. Рис. 101.

Білет 16

2. Із $\triangle DCB$ (рис. 102) за теоремою синусів маємо $\frac{x}{\sin\widehat{DCB}}=\frac{a}{\sin\widehat{CDB}}$. Аналогічно з $\triangle ACD$ дістаємо $\frac{y}{\sin\widehat{ACD}}=\frac{b}{\sin\widehat{ADC}}$. Врахувавши, що $\widehat{ACD}=\widehat{DCB}$ і $\sin\widehat{ADC}=\sin\widehat{CDB}$, із цих двох рівностей дістаємо $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$. (*Зауваження.*

Це відома властивість бісектриси трикутника, якою можна користуватись при розв'язанні задач і без її доведення). Із системи рівнянь

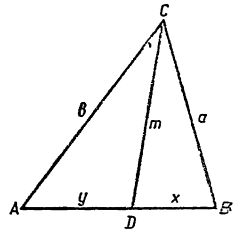


Рис. 102

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}, \\ x + y = c \end{cases}$$

знаходимо $x = \dfrac{ac}{a+b}$. За теоремою косинусів із $\triangle ABC$ дістаємо $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$, звідки $\cos\hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Нарешті, із $\triangle DCB$ за теоремою косинусів обчислюємо бісектрису m:

$$m^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\hat{B} = a^2 + \frac{a^2c^2}{(a+b)^2} - 2a\frac{ac}{a+b}\,\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} =$$

$$= a^2 + \frac{a^2c^2}{(a+b)^2} - \frac{a(a^2+c^2-b^2)}{a+b} = \frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2}.$$

Отже, $m = \dfrac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}$. 3. Рис. 103.

Білет 17

2. Рис. 104. 3. Якщо $b - d$, b, $b + d$ — довжини сторін трикутника, то його площа $S = \dfrac{b - d + b + b + d}{2} r = \dfrac{3}{2} br$. З другого боку, за формулою Герона

$$S = \sqrt{\frac{3}{2}b\left(\frac{3}{2}b - b + d\right)\left(\frac{3}{2}b - b\right)\left(\frac{3}{2}b - b - d\right)} = \frac{b}{4}\sqrt{3(b^2 - 4d^2)}.$$

Тому $\dfrac{3}{2}br = \dfrac{b}{4}\sqrt{3(b^2 - 4d^2)}$, звідки $b^2 - 4d^2 = 12r^2$.

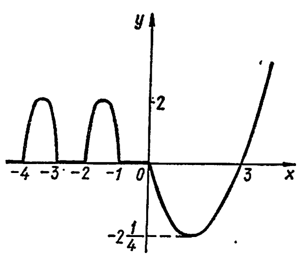


Рис. 103

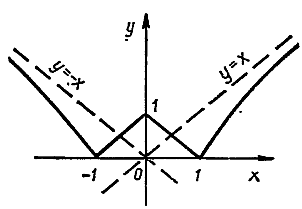


Рис. 104

Білет 18

2. $$f(x + 2T) = \frac{1 - f(x+T)}{1 + f(x+T)} = \frac{1 - \dfrac{1 - f(x)}{1 + f(x)}}{1 + \dfrac{1 - f(x)}{1 + f(x)}} = f(x).$$

3. Оскільки

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2],$$

то скориставшись теоремою Вієта, дістанемо:

$$x_1^3+x_2^3=-(a-1)\left[(a-1)^2+\frac{5}{2}a-a^2\right]=-\frac{1}{2}(a-1)(a+2)=$$

$$=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Тому сума кубів коренів рівняння найбільша при $a=-\frac{1}{2}$.

Білет 19

2. Нехай $x\in D(f)$. Тоді, згідно з умовою задачі, також $2-x\in D(f)$ і $-2-x\in D(f)$, причому $f(x)=f(2-x)=f(-2-x)$. Замінивши в цих рівностях x на $2-x$ і $-2-x$, дістанемо:

$$f(x)=f(x+4)=f(x-4).$$

Отже, число 4 є періодом функції $f(x)$. 3. $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$.

Білет 20

2. На проміжках $]0;\ 1[$ і $]1;\ e[$ функція спадає, а на проміжку $]e;\ \infty[$ зростає; $x=e$ — точка мінімуму функції.

3. Для будь-якого додатного числа x справджується нерівність $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$. Всі члени даної послідовності додатні, а тому

$$a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2=1,$$

тобто послідовність обмежена внизу числом 1. Звідси випливає, що

$$a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)\leqslant\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-1})=a_{n-1},\quad \text{бо}\quad \frac{1}{a_{n-1}}\leqslant a_{n-1}.$$

Отже, дана послідовність спадає. Границю послідовності знаходимо тепер із рівняння $a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$. Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

Білет 21

2. $[\log_2 x^2+\log_{|x|}4=5]\Leftrightarrow\left[2\log_2|x|+\frac{2}{\log_2|x|}=5\right]\Leftrightarrow\log_2|x|=2$ або $\log_2|x|=\frac{1}{2}$. Звідси $x=\pm 4$, $x=\pm\sqrt{2}$. 3. Дана функція диференційована в кожній точці $x\in R$ і її похідна $y'(x)=3x^2-2mx=x(3x-2m)$ дорівнює нулю в двох точках: $x=0$ і $x=2m/3$. Оскільки на проміжку $]0;\ 1[$ може лежати лише одна точка екстремуму даної функції, а саме $x=2m/3$, причому в такому разі це буде точка мінімуму, то умову задачі задовольняють тільки ті значення m, при яких дана функція спадає на проміжку $[0;\ 1]$. Отже, $2m/3\geqslant 1$, звідки $m\geqslant 3/2$.

Білет 22

2. $[\log_2(\sin x)+\log_{1/2}(-\cos x)=0]\Leftrightarrow[\log_2(\sin x)=\log_2(-\cos x)]\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=-\cos x,\\ \sin x>0\end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\operatorname{tg}x=-1,\\ \sin x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$ 3. Рівняння дотичної $y=\frac{1}{2}(x+1)$, а тому шуканий об'єм $V=\frac{2\pi}{3}-\pi\int\limits_0^1 x\,dx=\frac{\pi}{6}$.

Білет 23

2. Рівняння дотичних $y = 4x - 3$ і $y = 1$. Шуканою площею є площа криволінійного $\triangle AED$ (рис. 105). $S_{AED} = S_{OADC} - S_{EDB} - S_{OABC} = \int_0^2 (x^2 + 1)\,dx - 2 - 2 = \frac{2}{3}$.

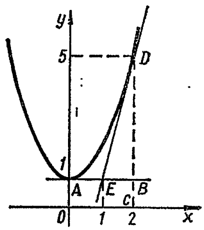


Рис. 105

3. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n - n^2 + n}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{3}{2}$.

Білет 24

2. Функція $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ диференційовна для всіх $x \in R$ і має період $\frac{\pi}{2}$, тому для доведення нерівності досить знайти найбільше і найменше значення цієї функції на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$f'(x) = 6\sin^5 x \cos x - 6\cos^5 x \sin x = 3\sin 2x(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\frac{3}{2}\sin 4x.$$

На проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $f'(x) = 0$ в трьох точках: $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ і $x = \frac{\pi}{2}$. $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$, тому $\frac{1}{4} \leqslant f(x) \leqslant 1$. 3. $b = c = -1$.

Білет 25

2. З рівності $b^2 - ab = c^2 - b^2$ випливає, що $b(2b - a) = c^2$. 3. Побудуємо графік функції $y = 3\sin x + \sin 3x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$. Ця функція непарна, тому досить дослідити її на проміжку $[0; \pi]$. Похідна функції $y'(x) = 3(\cos x + \cos 3x) = 6\cos x \cos 2x$ на проміжку $[0; \pi]$ перетворюється в нуль у трьох точках $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$ і $x = \frac{3\pi}{4}$. При переході через точки $x = \frac{\pi}{4}$ і $x = \frac{3\pi}{4}$ похідна змінює знак з плюса на мінус, тому ці точки є точками максимуму функції $y(x)$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$, а при переході через точку $x = \frac{\pi}{2}$ похідна $y'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, тому $x = \frac{\pi}{2}$ — точка мінімуму, функції $y(x)$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Оскільки

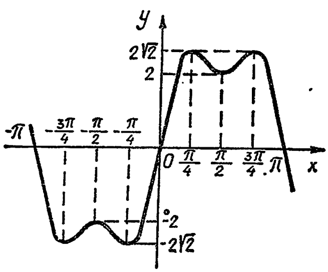


Рис. 106

$y(0) = y(\pi) = 0$ і на проміжках $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$, $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right[$ $y(x)$ зростає, а на проміжках $\left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ і $\left]\frac{3\pi}{4}; \pi\right[$ спадає, то тепер можна побудувати графік функції $y(x)$ (рис. 106), після чого легко відповісти на питання задачі. Рівняння $3\sin x + \sin 3x = 2a$ має на інтервалі $[-\pi, \pi]$ два розв'язки, якщо $a = \pm\sqrt{2}$ або $0 < |a| < 1$; три розв'язки, якщо $a = 0$, $a = \pm 1$; чотири розв'язки, якщо $1 < |a| < \sqrt{2}$; не має розв'язків, якщо $|a| > \sqrt{2}$.

Білет 26

2. Коло радіуса 1 з центром у точці (1; 1). Рівняння його образу при паралельному перенесенні $\vec{p} = (0; -1)$ є $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

3. $S = \int\limits_0^{\pi} (2 + \sin^2 x - 2 + \sin x)\, dx = \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2x}{2} + \sin x\right) dx =$

$= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x - \cos x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} + 2.$

Білет 27

2. Беручи до уваги, що члени даної послідовності додатні, оцінимо відношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Маємо:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{3^n + (-2)^n} = 2\,\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + (-1)^{n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + (-1)^n} \geqslant$$

$$\geqslant 2\,\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n - 2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} = 3 - \frac{5}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}.$$

Коли $n \geqslant 2$, то $3 - \frac{5}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} > 1$. Якщо ж $n = 1$, то безпосередньо переконуємось, що $\frac{a_2}{a_1} = 13 > 1$. Отже, для всіх $n \in N$ справджується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, а це означає, що дана послідовність зростає.

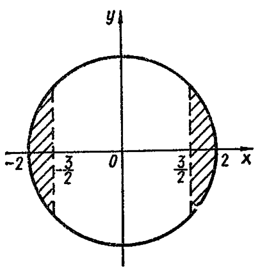


Рис. 107

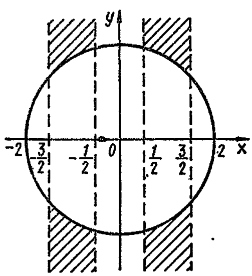


Рис. 108

3. $A = A_1 \cup A_2$, де

$$A_1 = \left\{(x;\, y) \,\middle|\, \begin{cases} |x| - \frac{1}{2} > 1, \\ 0 < x^2 + y^2 \leqslant 4 \end{cases}\right\}, \quad A_2 = \left\{(x;\, y) \,\middle|\, \begin{cases} 0 < |x| - \frac{1}{2} < 1. \\ x^2 + y^2 \geqslant 4 \end{cases}\right\}.$$

Множини A_1 і A_2 зображено відповідно на рис. 107 і 108.

Білет 28

2. Рівняння дотичної $y = \frac{1}{2}(x+1)$, а тому шукана площа дорівнює

$$S = 1 - \int\limits_0^1 \sqrt{x}\, dx = 1 - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

3. Сума перших $n+1$ членів послідовності (a_n) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = 5^{n+1} - 1$; але $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 5^n - 1$, тому $a_{n+1} = 5^{n+1} - 5^n = 4 \cdot 5^n$ для будь-якого натурального n, звідки $a_{n+1} = 5a_n$. Отже, дана послідовність є геометрична прогресія із знаменником $q = 5$. Її перший член $a_1 = 4$.

Білет 29

2. Коли x, лишаючись в проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ прямує до 0 або до $\frac{\pi}{2}$, то функція $y(x)$ необмежено зростає. Зауваживши, що ця функція має похідну в усіх точках проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, робимо висновок, що вона досягає на цьому проміжку найменшого значення в одній із точок мінімуму. Похідна даної функції

$$y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{4\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}\left(\operatorname{tg}^2 x - \frac{3}{4}\right)$$

на проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ дорівнює нулю лише в одній точці $x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. З попереднього аналізу випливає, що $x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$ є та точка, де функція досягає свого найменшого значення.

3. Якщо $a < -1$, то рівняння має один розв'язок $x = a^2$. Якщо $a > 0$, то рівняння має також один розв'язок $x = (1 + a)^2$. Якщо $-1 < a < 0$, то рівняння має два розв'язки $x = a^2$ і $x = (1 + a)^2$. Якщо $a = -1$ або $a = 0$, то рівняння розв'язків не має.

Білет 30

2. Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = 5x^5 - 3x^3 + x + 1$ в точці (x_0, y_0) є $y - y_0 = (25x_0^4 - 9x_0^2 + 1)(x - x_0)$. Серед цих дотичних паралельні прямій $y = x$ ті, для яких $25x_0^4 - 9x_0^2 + 1 = 1$, тобто ті, які проведені в точках з абсцисами $x_0 = 0$, $x_0 = \pm\frac{3}{5}$. 3.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = ((1 - 1) + 1) + \left(\left(\frac{1}{2} - 1\right) + 1\right) +$$
$$+ \left(\left(\frac{1}{3} - 1\right) + 1\right) + \cdots + \left(\left(\frac{1}{n} - 1\right) + 1\right) =$$
$$= n - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n}\right).$$

Білет 31

2. Нехай $x = \log_2 3$. Тоді

$$b = \log_{24} 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 24} = \frac{1 + 3x}{3 + x}, \quad a = \log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{1 + 2x}{2 + x},$$

а тому

$$5(a - b) + ab = 5\left(\frac{1 + 2x}{2 + x} - \frac{1 + 3x}{3 + x}\right) + \frac{1 + 2x}{2 + x}\,\frac{1 + 3x}{3 + x} =$$
$$= \frac{5(1 - x^2)}{(2 + x)(3 + x)} + \frac{6x^2 + 5x + 1}{(2 + x)(3 + x)} = \frac{x^2 + 5x + 6}{(2 + x)(3 + x)} = 1.$$

3. Якщо a, $2a$ і $2a$ — довжини сторін рівнобедреного трикутника, то його площа $S = \frac{1}{2}a\sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{4}a^2$. З другого боку, якщо R і r — відповідно радіуси описаного і вписаного кіл, то

$$S = \frac{a + 2a + 2a}{2}r \quad \text{і} \quad S = \frac{a2a2a}{4R}.$$

З цих рівнянь знаходимо, що $r = \frac{3}{8}R$.

Білет 32

2. Нехай S — площа трикутника. Оскільки

$$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC|,$$

то

$$\frac{1}{|BD|^2} = \frac{|AC|^2}{4S^2}, \quad \frac{1}{|AB|^2} = \frac{|BC|^2}{4S^2}, \quad \frac{1}{|BC|^2} = \frac{|AB|^2}{4S^2}.$$

Отже,

$$\frac{1}{|BD|^2} = \frac{|AC|^2}{4S^2} = \frac{|AB|^2 + |BC|^2}{4S^2} = \frac{1}{|BC|^2} + \frac{1}{|AB|^2}.$$

3. За умовою задачі x може змінюватись лише в проміжку $]0;\ 1[$. Тому задача рівносильна такій: довести, що найменше на проміжку $]0;\ 1[$ значення функції

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(1 - x + \frac{1}{1-x}\right)^2$$

не менше від $\frac{25}{2}$. Коли x, лишаючись в проміжку $]0;\ 1[$, наближається до 0 або до 1, то функція $f(x)$ необмежено зростає. Оскільки ця функція має похідну в усіх точках проміжку $]0;\ 1[$, то найменшого значення на цьому проміжку вона набуває в одній із точок мінімума. Похідна функції $f(x)$

$$f'(x) = 2\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \left(1 - x + \frac{1}{1-x}\right)\left(-1 + \frac{1}{(1-x)^2}\right)\right] =$$

$$= 2\left(2x - 1 + \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{x^3}\right) = 2(2x-1)\left(1 + \frac{x^2 + x(1-x) + (1-x)^2}{x^3(1-x)^3}\right)$$

на проміжку $]0;\ 1[$ перетворюється в нуль лише в одній точці $x = \frac{1}{2}$, причому при переході через точку $x = \frac{1}{2}$ $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс. Отже, в точці $x = \frac{1}{2}$ функція $f(x)$ набуває найменшого значення на проміжку $]0;\ 1[$. Безпосередньо переконуємося, що $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{2}$.

Білет 33

2. Твердження задачі випливає з того, що кожна точка висоти піраміди рівновіддалена від її бічних граней. 3. Найменшого значення 4 функція досягає в точках мінімуму —1 і 1, а найбільшого значення 13 — у кінцевих точках проміжку.

Білет 34

2. Коло з радіусом $r = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$, де R — радіус даного кола, а l — довжина хорди. 3. $y'(0) = 3$.

Білет 35

2. Точки $(x;\ y)$, для яких $|x| + |y| \leqslant 2$, утворюють квадрат з вершинами $(2;\ 0)$, $(0;\ 2)$, $(-2;\ 0)$, $(0;\ -2)$. Він описаний навколо круга $x^2 + y^2 \leqslant 2$. Рівність $|x| + |y| = 2$ справджується для таких точок кола $x^2 + y^2 = 2$: $(1;\ 1)$, $(1;\ -1)$, $(-1;\ 1)$ і $(-1;\ -1)$. 3. $2\,\mathrm{arcctg}\,\pi$.

Білет 36

2. Побудову видно з рис. 109. Проводимо промені OA, OB, OC. Потім проводимо послідовно $M_1A_1 \parallel MA$, $A_1B_1 \parallel AB$ і $B_1C_1 \parallel BC$. Трикутник $A_1B_1C_1$ — шуканий. 3. Множина A — спільна частина двох кругів, радіуси яких дорівнюють 3, а центрами є точки (0; 0) і (1; 0).

Білет 37

2. Найменшого значення, рівного нулю, функція набуває в точках $x = 1$ і $x = 3$, а найбільшого, рівного $\frac{5}{4}$, в точці $x = \frac{1}{2}$. 3. І спосіб. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють правильний трикутник. Тому $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \cos 120° = -\frac{1}{2}$.

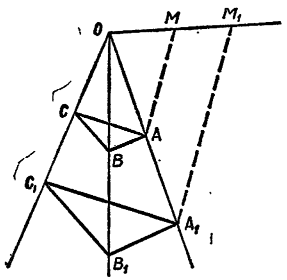


Рис. 109

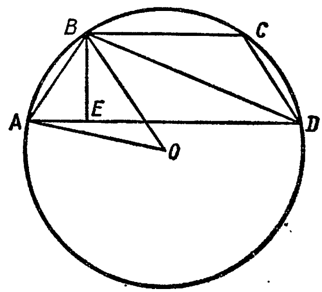


Рис. 110

II спосіб. $0 = \vec{0} \cdot \vec{0} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}) = 3 + 2(\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c})$, звідки $\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} = -\frac{3}{2}$.

Білет 38

2. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(b-c)^2}{2} + \frac{(a-c)^2}{2}$.

3. $\frac{\sqrt{4d^2r^2 - (d^2 + r^2 - R^2)^2}}{d}$.

Білет 39

2. Нехай $[BE] \perp [AD]$ (рис. 110). Оскільки трапеція $ABCD$ рівнобедрена за умовою задачі, то $\frac{|BC| + |AD|}{2} = |ED|$, а тому $S_{ABCD} = |BE| \cdot |ED| = h \cdot |ED| \times \times \widehat{BOA} = \alpha$, а тому $\widehat{BDA} = \frac{\alpha}{2}$, як вписаний в коло кут, що опирається на ту саму дугу, що й центральний кут α. З прямокутного трикутника BED маємо $|ED| = h \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Остаточно, $S_{ABCD} = h^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

3. $x = 10$ і $x = \frac{1}{10}$. Вказівка. Скористатися рівністю $10^{\lg^2 x} = x^{\lg x}$.

Білет 40

2. $\frac{\pi a^2}{6}$. 3. $x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}$.

Білет 41

2. Можна. Нехай AA_1, BB_1 і CC_1 — медіани $\triangle ABC$. Маємо: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Тому $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0}$.

3. Функція відображає проміжок $]-1; 2[$ на проміжок $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{9}; 6\right]$.

Білет 42

2. $E(f) = [-1; 1]$. Вказівка. Знайти найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на проміжку $[0; 2\pi]$.

3. Нехай $M'(a; b)$ — шукана точка. Тоді $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{AB}$ і середина $[MM']$ лежить на (AB). Для координат точки M' дістаємо звідси таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2a - b = 25, \\ a + 2b = 0. \end{cases}$$

Отже, $a = 10$, $b = -5$.

Білет 43

2. Рівняння справджується тоді й тільки тоді, коли $\cos 2x = \frac{1-2a}{3}$ або $\cos 2x = 2a - 1$. Якщо $-1 \leqslant a < 0$ або $1 < a \leqslant 2$, то проміжку $[0; 2\pi]$ належать розв'язки даного рівняння:

$$\frac{1}{2}\arccos\frac{1-2a}{3}, \quad \pi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1-2a}{3}; \quad 2\pi - \frac{1}{2}\arccos\frac{1-2a}{3}.$$

Якщо $0 \leqslant a \leqslant 1$, то, крім вказаних розв'язків, умову задачі задовольняють ще й такі розв'язки:

$$\frac{1}{2}\arccos(2a-1), \quad \pi \pm \frac{1}{2}\arccos(2a-1), \quad 2\pi - \frac{1}{2}\arccos(2a-1).$$

3. Довести, що $h^2 + (a+b)^2 = (c+h)^2$.

Білет 44

2. $n^2 - m^2 = (2p+1)^2 - (2q+1)^2 = 4(p-q)(p+q+1) \vdots 8$; бо $p - q$ або $p + q + 1$ парне число.

3. Нехай сторона одного із вписаних квадратів лежить на стороні трикутника, довжина якої a, а сторона другого квадрата лежить на стороні трикутника, довжина якої b.

Зрозуміло, що сторона вписаного в трикутник квадрата відтинає від даного трикутника подібний до нього трикутник. Тому маємо дві пари подібних трикутників, з яких дістаємо:

$$\frac{a}{x} = \frac{h_a}{h_a - x} \quad \text{і} \quad \frac{b}{x} = \frac{h_b}{h_b - x},$$

де x — довжина сторони квадрата, h_a і h_b — довжини висот трикутника, опущених відповідно на сторони a і b.

Із попередніх рівностей дістаємо $x = \frac{ah_a}{a + h_a} = \frac{bh_b}{b + h_b}$. Оскільки $ah_a = bh_b = 2S$, де S — площа трикутника, то $a + h_a = b + h_b$. Звідси знаходимо

$$b - a = h_a - h_b = \frac{2S}{a} - \frac{2S}{b}, \quad \text{або} \quad (b-a)\left(1 - \frac{2S}{ab}\right) = 0.$$

Остання рівність можлива, коли $b = a$, або коли площа трикутника $S = ab/2$, тобто коли даний трикутник рівнобедрений або прямокутний. Проте прямокутний трикутник не задовольняє умову задачі.

Білет 45

2. Рис. 111. Вказівка. Розглянути окремо випадки $0 < xy < 1$ і $xy > 1$.

3. $x = n\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in Z$. Вказівка. Рівняння еквівалентне системі

$$\begin{cases} 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0, \\ \sin 2x \geqslant 0. \end{cases}$$

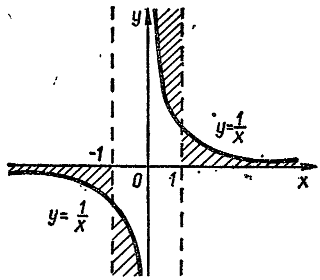


Рис. 111

Білет 46

2. $\vec{a} = \{-3; 3; -6\}$. 3. Нехай S — площа даного трикутника, a — довжина основи, φ — кут при вершині, r — радіус вписаного кола. Тоді

$$S = \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \quad \text{і} \quad r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right),$$

звідки

$$r^2 = S\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right).$$

Дослідивши функцію

$$f(\varphi) = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right)$$

на проміжку $]0; \pi[$, знаходимо, що найбільшого значення вона набуває при $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Отже, радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник з площею S, найбільший, коли трикутник правильний.

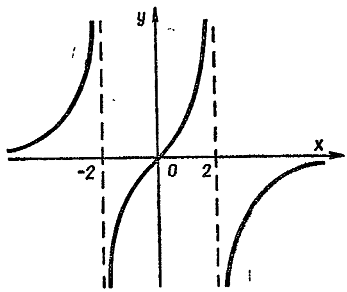


Рис. 112

Білет 47

2. Рис. 112. 3. $a_n = 1 + \frac{n(n^2-1)}{6}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6a_n}{n^3+n+1} = 1$.

Білет 48

2. $n^3 - 7n = n^3 - n - 6n = (n-1)n(n+1) - 6n$. Оскільки перший доданок ділиться на 6 як добуток трьох послідовних цілих чисел, то й усе число ділиться на 6.
3. Рівняння має два розв'язки при $a > 1$: $-\sqrt{a^2+a}$ і $\sqrt{a^2+a}$.

Білет 49

2. Маємо $\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = a^2$ і $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = b^2$. Додавши і віднявши почленно ці дві рівності, дістанемо:

$$2 + 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2;$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cos(\alpha+\beta) = a^2 - b^2.$$

Запишемо другу з цих рівностей так:

$$2\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta) + 1] = a^2 - b^2.$$

Отже,

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{2\cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta)+1)}{2+2\cos(\alpha-\beta)} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

3. $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$.

Білет 50

2. n-й член цієї прогресії $a_n = nd$, а тому

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{N-1}a_N} = \frac{1}{d^2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(N-1)N}\right);$$

але для будь-якого натурального $n \geqslant 2$ $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$; отже,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(N-1)N} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}\right) = 1-\frac{1}{N}.$$

Остаточно маємо:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{N-1}a_N} = \frac{1}{d^2}\,\frac{N-1}{N}.$$

3. $\frac{5\sqrt{14}}{14}$.

Білет 51

2. $S = \int\limits_1^2 \left(3x - x^2 - \frac{3}{2}\right) dx - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

3. $u_n - u_{n+1} = u_n - \frac{2+u_n^2}{2u_n} = \frac{u_n^2-2}{2u_n} > 0$, якщо $u_n > \sqrt{2}$. Лишається довести, що для всіх $n \in N$ справджується нерівність $u_n > \sqrt{2}$; $u_1 > \sqrt{2}$ за умовою. Доведемо тепер, що коли $u_n > \sqrt{2}$, то й $u_{n+1} > \sqrt{2}$. Використовуючи нерівність Коші $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$, якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a \neq b$, дістанемо:

$$u_{n+1} = \frac{2+u_n^2}{2}\,\frac{1}{u_n} > \sqrt{2u_n^2}\,\frac{1}{u_n} = \sqrt{2}.$$

Отже, дана послідовність спадає. Оскільки вона обмежена знизу (наприклад, числом $\sqrt{2}$), то вона має границю, причому не меншу, ніж $\sqrt{2}$. Позначивши границю послідовності через a, перейдемо до границі в рівності $u_{n+1} = (2+u_n^2)/(2u_n)$. Дістанемо $a = (2+a^2)/(2a)$, звідки $a = \sqrt{2}$.

Білет 52

2. Якщо $n = 2m+1$, то $n^2 - 1 = 4n(n+1)$. Одне з чисел n і $n+1$ обов'язково парне, тому $n^2 - 1 \vdots 8$.

3. Побудувавши графік функції $y = x^2e^{2-|x|}$ (рис. 113), легко відповісти на питання задачі. Дане рівняння має один розв'язок, якщо $a = 0$, два розв'язки, якщо $a = 1$; чотири розв'язки, якщо $0 < a < 1$; не має розв'язків, якщо $a < 0$ або $a > 1$.

Білет 53

2. $a = -1$. 3. Впевнитися, що скалярний добуток даних векторів дорівнює нулю.

Білет 54

2. Нехай x_0 — спільний корінь даних рівнянь. Віднімаючи почленно від рівності $ax_0^3 + x_0^2 + x_0 + 1 - a = 0$ рівність $ax_0^2 + x_0 + 1 - a = 0$, дістаємо $x_0^2(ax_0 - a + 1) = 0$, звідки $x_0 = 0$ або $x_0 = \frac{a-1}{a}$. Підставивши в дані рівняння $x = 0$, переконуємось, що $x = 0$ є їх спільним коренем при $a = 1$; але при $a = 1$ $x_0 = \frac{a-1}{a}$ також дорівнює нулю. Безпосередньо впевнюємось, що при будь-якому $a \neq 0$ число

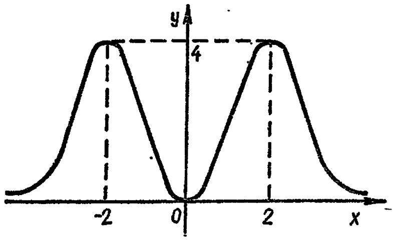


Рис. 113

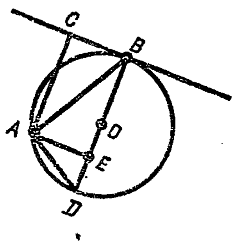


Рис. 114

$\frac{a-1}{a}$ задовольняє дані рівняння. Отже, при всіх $a \neq 0$ дані рівняння мають лише один спільний корінь $x_0 = \frac{a-1}{a}$.

3. $x \in \left\{\frac{1}{9}, 1, 3\right\}$. Вказівка. Перейти до логарифма з основою 3.

Білет 55

2. Нехай $[AB]$ — будь-яка хорда кола радіуса R, (CB) — дотична до кола в точці B і $[AC] \perp (BC)$ (рис. 114). Проведемо діаметр BD, і нехай $[AE] \perp [BD]$. Оскільки $\Delta ABE \sim \Delta ABD$, то

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BE|}{|AB|},$$

звідки $|AB|^2 = |BD| \cdot |BE| = |BD| \cdot |AC|$, тобто $|AB|^2 : |AC| = 2R$.

3. $f(x_0) = \frac{\sqrt[4]{12}}{3}$, де $x_0 = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

Білет 56

2. Екстремальних значень дана функція набуває в точках $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ і $x_2 = -1 + \sqrt{2}$, які є коренями рівняння $f'(x) = 3(x^2 + 2x - 1) = 0$. Оскільки $x_1 + x_2 = -2$ і $x_1x_2 = -1$, то шукана величина дорівнює

$$|x_1^3 - x_2^3 + 3(x_1^2 - x_2^2) - 3(x_1 - x_2)| = |x_1 - x_2|\,|(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) - 3| = 2\sqrt{2}\,|4 + 1 - 6 - 3| = 8\sqrt{2}.$$

3. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Якщо $a \neq 0$, то за теоремою про границю частки послідовність (b_n) має границю $\left(b_n = \frac{a_nb_n}{a_n}\right)$, а це суперечить умові. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Білет 57

2. $x \in]-\infty; -3] \cup \left]-2; -\frac{3}{2}\right] \cup [-1; 3[$. Вказівка. Дана нерівність рівносильна сукупності двох таких систем нерівностей:

$$\begin{cases} 0 < |x+2| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x^2 - x - 6} \leqslant \dfrac{2}{x-3}; \end{cases} \quad \begin{cases} |x+2| \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{x^2 - x - 6} \geqslant \dfrac{2}{x-3}. \end{cases}$$

3. Графік даної функції перетинає осі координат в точках (4; 0) і (0; 2). Рівняння дотичних, проведених у цих точках, є $y = \frac{x}{2} - 2$ і $y = \frac{x}{2} + 2$.

Білет 58

2. Переконатися, що похідна кожної з даних функцій у точці перетину графіка функції з віссю абсцис не залежить від a. 3. $x \in [-\sqrt{5}; -2] \cup [2; \sqrt{5}]$.

Білет 59

2. На проміжку $]-\infty; 2]$ функція спадає, а на проміжку $[2; +\infty[$ зростає. Точка $x = 2$ є точкою мінімуму функції.

3. а) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 9$, б) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 81$.

Вказівка. Центр гомотетії збігається з центром даної сфери.

Білет 60

2. 11.
3. Пряма дотикається до кола. Образом даного кола при симетрії відносно прямої $x + y = 0$ є коло $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$.

Білет 61

2. $x \in]0; 1[\cup]100; \infty[$. 3. За умовою задачі

$$2\sin\alpha = 3\sin\alpha - \sin\alpha = \sin(\alpha + 2\beta) - \sin\alpha = 2\cos(\alpha+\beta)\sin\beta,$$
$$4\sin\alpha = 3\sin\alpha + \sin\alpha = \sin(\alpha + 2\beta) + \sin\alpha = 2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta.$$

Поділивши почленно першу з цих рівностей на другу, дістаємо

$$\frac{1}{2} = \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\beta, \quad 2\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

Білет 62

2. Нехай l_1 і l_2 — дані прямі; α_1 — площина, яка містить пряму l_1 і паралельна до прямої l_2; α_2 — площина, яка містить пряму l_2 і паралельна до прямої l_1, а β — множина всіх точок простору. Тоді шукана множина — це $[\beta \setminus (\alpha_1 \cup \alpha_2)] \cup l_1 \cup l_2$. Вказівка. Довести, що через кожну точку простору, яка не лежить у жодній з площин α_1 і α_2, можна провести пряму, що перетинає дані прямі l_1 і l_2.

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \cos 3x dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)\, dx = 0.$

Білет 63

2. Ідея. Побудувати довільний чотирикутник з даними кутами, а потім перенести паралельно його сторони (кожну окремо) так, щоб їх образи дотикались до накресленого кола з даним радіусом. Іншими словами, задача рівносильна такій: навколо

даного кола описати чотирикутник, сторони якого паралельні до сторін даного чотирикутника.

3. $x \in \left[2; \frac{7+\sqrt{5}}{2}\right[$.

Білет 64

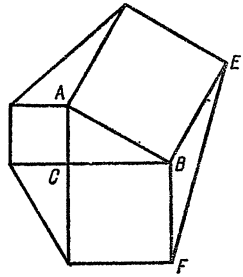


Рис. 115

2. Площа ΔFBE (рис. 115) дорівнює площі ΔABC, бо $|BF| = |BC|$, $|BE| = |BA|$ і $\sin \widehat{ABC} = \sin \widehat{FBE}$. З тієї ж причини однакову з ΔABC площу мають інші два трикутники. Отже, шукана площа $Q = 4S + 2c^2$.
3. Обидві частини рівняння — парні функції, а тому досить розглянути це рівняння для $x \geqslant 0$. Для невід'ємних x рівняння еквівалентне такому: $\sin x = |\sin x|$. Серед тих x, для яких $\sin x < 0$, розв'язків це рівняння не має. Для тих значень x, для яких $\sin x \geqslant 0$, маємо $\sin x = \sin x$, тобто кожне з таких значень x є розв'язком рівняння, а тому його розв'язки: $2k\pi \leqslant x \leqslant \pi + 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Отже, для початкового рівняння маємо: $2k\pi \leqslant x \leqslant \pi + 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$); $-\pi + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi$ ($k = 0, -1, -2, \ldots$).

Білет 65

2. $x \in]1; 2[\cup]3; \infty[$. 3. $3x + 4y - 12 = 0$, $3x - 4y - 12 = 0$.

Білет 66

2. Рівність можна довести методом математичної індукції. Ми наведемо інше доведення, засноване на використанні рівності

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right),$$

яка справджується для всіх натуральних k. Маємо

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}.$$

3. (0; 2).

Білет 67

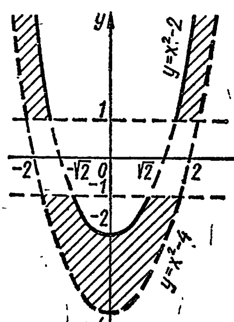


Рис. 116

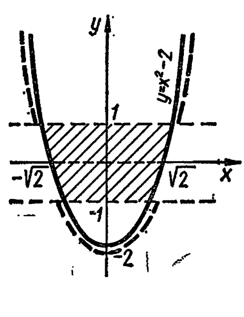


Рис. 117

2. $A = A_1 \cup A_2$, де

$$A_1 = \left\{(x; y) \,\middle|\, \begin{cases} |y| > 1, \\ 0 < y - x^2 + 4 \leqslant 2 \end{cases}\right\},$$

$$A_2 = \left\{(x; y) \,\middle|\, \begin{cases} 0 < |y| < 1, \\ y - x^2 + 4 \geqslant 2 \end{cases}\right\}.$$

Множини A_1 і A_2 зображено відповідно на рис. 116, 117.
3. На проміжках $]-\infty, -1]$ і $[0; 5]$ функція спадає, а на проміжках $[-1; 0]$ і $[5; \infty]$ зростає.

Білет 68

2. $x - 4y + 5 = 0.$ 3. $\log_{30} 8 = 3\log_{30} 2 = 3\log_{30}\frac{30}{15} = 3(\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5) = 3(1 - a - b).$

Білет 69

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n + 7^n}\ \lim\limits_{n\to\infty} 7\sqrt[n]{\left(\frac{2}{7}\right)^n + 1} = 7.$

3. $x \in \{k\pi \mid k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\} \cup \left\{\frac{k\pi}{3} \middle| k = -1,\ -2,\ \ldots\right\}.$

Білет 70

2. Нехай у паралелограмі $ABCD$ $|AB| = a$, $|AD| = b$ і $\widehat{AOB} = \alpha$ $(O = [AC] \cap [BD])$. За теоремою косинусів

$$|AB|^2 = |AO|^2 + |BO|^2 - 2|AO|\cdot|BO|\cos\alpha,$$
$$|AD|^2 = |AO|^2 + |DO|^2 + 2|AO|\cdot|DO|\cos\alpha.$$

Оскільки $|DO| = |BO|$, то

$$|AD|^2 - |AB|^2 = 4|AO|\cdot|OB|\cos\alpha = |AC|\,|BD|\cos\alpha,$$

звідки

$$|AC|\cdot|BD| = \frac{b^2 - a^2}{\cos\alpha}.$$

Тому шукана площа

$$S = \frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|\sin\alpha = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\operatorname{tg}\alpha.$$

3. Вказівка. Дотична, проведена до графіка функції $y = x^2 - x$ у точці (1; 0) перетинає вісь абсцис під кутом 45°.

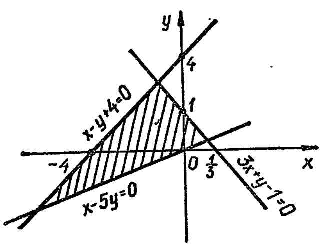


Рис. 118

Білет 71

2. $S = \int\limits_0^1 (x^{1/3} - x^2)\,dx = \left(\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{12}.$

3. Рис. 118.

Білет 72

2. $\log_{35} 28 = \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \frac{1 + \log_{14}\frac{14}{7}}{a + b} = \frac{2 - a}{a + b}.$

3. В точці (2; 4); рівняння дотичної $y = 4x - 4$.

Білет 73

2. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in Z.$ 3. Рис. 119.

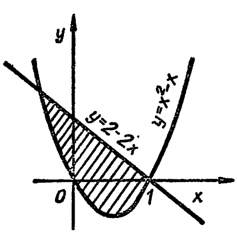


Рис. 119

Білет 74

2. $x_1 = -\frac{5}{2},\ y_1 = 2;\ x_2 = \frac{5}{2},\ y_2 = -2.$

3. Графіки даних функцій мають лише одну спільну точку тоді, коли рівняння $a \cdot 2^x + (b - a) - b \cdot 2^{-x} = 0$ має один розв'язок. Це буде тоді, коли рівняння $ay^2 + (b - a)y - b = 0$ має лише один додатний корінь. Якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то воно має один корінь $y = 1$. Нехай $a \neq 0$. Записавши рівняння в вигляді $y^2 - \left(1 - \frac{b}{a}\right) y - \frac{b}{a} = 0$ або $(y - 1)\left(y + \frac{b}{a}\right) = 0$, бачимо, що воно має лише один додатний корінь, коли $\frac{b}{a} \geqslant 0$ або ж $\frac{b}{a} = -1$. Отже, графіки даних в умові задачі функцій мають лише одну спільну точку, а саме (0; 1), в таких випадках: 1) $\frac{b}{a} \geqslant 0$; 2) $\frac{b}{a} = -1$; 3) $a = 0$, $b \neq 0$.

Білет 75

2. $[4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 3^{-\cos 2x} = 9] \Leftrightarrow [3^{2\sin^2 x - 1} - 4 \cdot 3^{\sin^2 x} + 9 = 0] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [(3^{\sin^2 x} - 3)(3^{\sin^2 x} - 9) = 0] \Leftrightarrow [\sin^2 x = 1] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z.$$

3. Вказівка. Знайти найбільше значення функції $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 30x - 40$ на проміжку $[-2; 2]$.

Білет 76

2. $x = t$, $y = 2 - t$, де t — будь-яке число з проміжку [0; 1].

3. $[a^2 + b^2 = 11ab] \Leftrightarrow \left[\left(\frac{a - b}{3}\right)^2 = ab\right]$.

Білет 77

2. $[\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0] \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin x = \cos^2 x, \\ \cos x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x (\sin x + 1) = 0, \\ \cos x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[x = \pi + 2k\pi, \ k \in Z \text{ або } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in Z\right].$$

3. На проміжку [0; 2] функція зростає, а на проміжках $]-\infty; 0]$ і $[2; \infty[$ спадає; $x = 0$ — точка мінімуму, а $x = 2$ — точка максимуму функції.

Білет 78

2. $S = \int\limits_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{x^2}{3}\right) dx = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{9}\right)\Big|_0^3 = 3.$

3. $\left[\frac{1}{\lg x} + \frac{1}{1 - \lg x} > 1\right] \Leftrightarrow \left[\frac{1}{\lg x (1 - \lg x)} > 1\right] \Leftrightarrow \left[\frac{1 - \lg x + \lg^2 x}{\lg x (1 - \lg x)} > 0\right] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [\lg x (\lg x - 1) < 0] \Leftrightarrow [0 < \lg x < 1] \Leftrightarrow x \in]1; 10[$.

Білет 79

2. $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{i} - 2\vec{j}$. Вказівка. Якщо $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, то координати x, y задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1, \\ -y = 2. \end{cases}$$

3. Легко переконатися, що дане рівняння має корені при будь-якому a. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 1 - a$ і $x_1 x_2 = a - 2$, тому $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (1-a)^2 - 2a + 4 = a^2 - 4a + 5 = (a-2)^2 + 1$. Отже, сума квадратів коренів даного рівняння найменша, коли $a = 2$.

Білет 80

2. $n^3 + 11n + 6 = n^3 - n + 6(2n+1) = (n-1)\,n\,(n+1) + 6(2n+1)$.

Оскільки обидва доданки діляться на 6, то й дане число ділиться на 6.

3. $\frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2}$.

Білет 81

2. $\log_{30} 8 = \dfrac{\lg 8}{\lg 30} = \dfrac{3 \lg \frac{10}{5}}{1 + \lg 3} = \dfrac{3(1-a)}{1+b}$.

3. $S = \sqrt{3}\left(\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{4V}{a}\right)$; площа найменша, коли $a = \sqrt[3]{4V}$.

Білет 82

2. $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)(1 - \sin\alpha\cos\alpha) = a\left(1 + \dfrac{a^2-1}{2}\right) = \dfrac{a(1+a^2)}{2}$.

3. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \dfrac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a}) = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$.

Білет 83

2. Якщо $a \neq \pm 1$, то система має один розв'язок $x = \dfrac{1}{a+1}$, $y = \dfrac{1}{a+1}$. Якщо $a = 1$, то система має безліч розв'язків: $x = t$, $y = 1 - t$, $t \in R$. Якщо $a = -1$, то система розв'язків не має.

3. $\dfrac{S_ц}{S_к} = \dfrac{V_ц}{V_к} = \dfrac{3}{2}$.

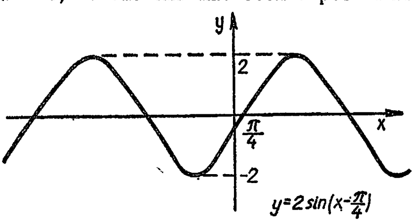


Рис. 120

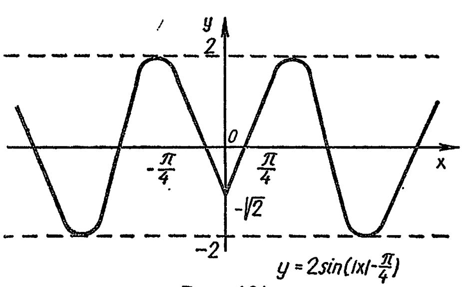


Рис. 121

Білет 84

2. Дана функція дорівнює: $-x$, якщо $x \leqslant -4$; $x + 8$, якщо $-4 \leqslant x \leqslant 3$; $3x + 2$, якщо $x \geqslant 3$.

3. Вказівка. Використати формулу $\sin 2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$.

Білет 85

2. -4; 1; 2. 3. Рис. 120, 121.

Білет 86

2. $\dfrac{11}{36}$. 3. $S = ab$.

Білет 87

2. Переконатися, що $(a-b)(1+bc)(1+ac)+(b-c)(1+ab)(1+ac)+(c-a)(1+ab)(1+bc)=(a-b)(b-c)(c-a)$.
3. Рис. 122.

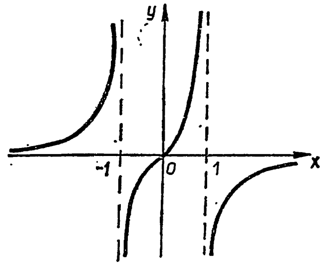


Рис. 122

Білет 88

2. Якщо $a \geqslant 0$, то дане рівняння має два розв'язки $x_1 = -1+\sqrt{1+a}$ і $x_2 = 1-\sqrt{1+a}$; якщо $a < 0$, то рівняння розв'язків не має.
3. $\cos^4 2\alpha - 6\cos^2 2\alpha \sin^2 2\alpha + \sin^4 2\alpha = (\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha)^2 - 8\cos^2 2\alpha \sin^2 2\alpha = 1 - 2\sin^2 4\alpha = \cos 8\alpha$.

Білет 89

2. $$[\sqrt{x^2-3}=\sqrt{x-1}] \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3=x-1, \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2)=0, \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

3. Якщо r — радіус основи циліндра, то об'єм циліндра $V = \pi r(24-r^2)$. Об'єм найбільший, коли $r = 2\sqrt{2}$. При цьому значенні r $V = 32\sqrt{2}\pi$ см^3.

Білет 90

2. $x=1$; $y=2$. 3. Скористатися рівностями $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = 1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ і $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = 1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Білет 91

2. Твердження задачі випливає з того, що через дану точку можна провести лише одну площину, перпендикулярну до даної прямої.

3. $$S = 2\int_0^{\pi} \sin x dx = 4.$$

Білет 92

2. $x \in \left\{k\pi; -\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k \in Z\right\}$. 3. Оскільки $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ і $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2=c^2$.

Білет 93

2. На проміжках $]-\infty, -2]$ і $[0, 2]$ функція зростає, а на проміжках $[-2; 0]$ і $[2, \infty[$ спадає; $x=-2$ і $x=2$ — точки максимуму функції, $x=0$ — точка мінімуму.
3. $2x+3y-z-4=0$.

Білет 94

2. $$f(a)+f(b)=\ln\frac{1-a}{1+a}+\ln\frac{1-b}{1+b}=\ln\frac{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}{1+\dfrac{a+b}{1+ab}}=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

3. $$A \cap B = \left\{-\frac{3\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Білет 95

2. $f(\alpha) = \cos^4\alpha + \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = \frac{7}{9}$.

3. $S = \int\limits_0^{\ln 4} (5 - e^x - 4e^{-x})\,dx = (5x - e^x + 4e^{-x})\Big|_0^{\ln 4} = 5\ln 4 - 6$.

Білет 96

2. $2^x + 2^{-x} = \sqrt{(2^x + 2^{-x})^2} = \sqrt{4^x + 4^{-x} + 2} = \sqrt{23 + 2} = 5$.

3. Похідна даної функції додатна для всіх $x \in R$.

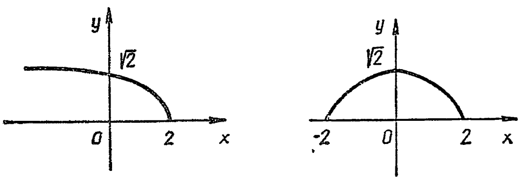


Рис. 123

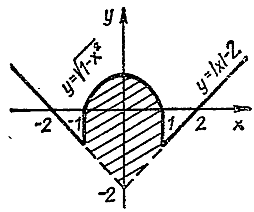


Рис. 124

Білет 97

2. $m \in \,]-2;\, 0[$. 3. Вершинами квадрата є такі точки: (2; 4), (4; —2), (—2; —4), (—4; 2).

Білет 98

2. Рис. 123. 3. Перейти до логарифма за основою a.

Білет 99

2. Рис. 124. 3. У даному трикутнику кут CAB тупий, бо $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1;\ 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = -5$. Оскільки $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \widehat{CAB}$, то $\cos \widehat{CAB} = \frac{-5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}} = -\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

Білет 100

2. Послідовність не монотонна; $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$.

3. $y = x + 1$.

До розділу V

1. 0. 2. $\frac{2}{a + b + c}$. 3. 0. 4. x^2. 5. 1. 6. $\frac{a^{2^n+1} - 1}{(a^2 - 1)\, a^{2^n - 1}}$, якщо $a \neq \pm 1$; 2^n, якщо $a = 1$; -2^n, якщо $a = -1$. 7. 9. 8. ab. 21. $(a - 2)(a^2 - a + 1)$. 22. $(a + 3) \times (a - 1)(a^2 - a + 2)$. 23. $(x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 6)$. 24. $(x + 2)(x + 1) \times (x - 2)(x - 3)$. 25. $(x - 1)(x + 3)(x + 7)$. 26. $(x - 1)(x + 1)(x - 3) \times (x + 5)$. 27. $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$. 28. $(ab + 2a - b + 1)(ab - b + 1)$. 29. $(x - y)(y - z)(z - x)$. 30. $-(x - y)(y - z)(z - x)$. 33. $\frac{a + 1}{a - 1}\sqrt{\frac{a - 2}{a + 2}}$.

34. b, якщо $|b| \leqslant 1$; $\frac{1}{b}$, якщо $|b| > 1$. 35. $\frac{b}{a}$. 36. $-\frac{1}{2}$. 37. $\sqrt{m}-1$. 38. $\sqrt[3]{xy}$. 39. $\sqrt{c}-1$. 40. $a+1$. 41. 0. 42. $\sqrt{a}$ 43. 7. 45. $\frac{9}{16}$. 46. $\lg a$ 47. $a(3+b)$. 48. $\frac{4(3-a)}{3+a}$. 49. -6. 50. $\frac{5}{2(a-1)}$. 51. $\frac{4}{2b-a}$. 52. $\frac{a+2b}{1-a}$. 53. 1. 57. -1. 58. $\operatorname{tg}\alpha$. 59. $-\sin 2\alpha$. 60. $\operatorname{tg}^4\alpha$. 61. $\cos^2 2x$. 62. $3\operatorname{ctg}3\alpha$. 114. Вказівка. Скористатися нерівністю $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, яка справедлива для будь-якого натурального $k \geqslant 2$. 124. Переконатися, що одне з двох даних чисел ділиться на 3. 126. Можна всі, крім 1, простих чисел і квадратів простих чисел. 131. 1; 5; 9; 13; ... . 132. Є дві геометричні прогресії, що задовольняють умову задачі 1; 4; 16; ... 1; 16; 4; 1; ... . 133. $q = \pm\sqrt{2}/2$. 134. 12; 8; 4; 2 або $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{15}{2}$; $\frac{25}{2}$. 135. 258. 136. 70. 137. 2. 138. $S=\frac{2}{3}a^2$. 139. Так, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\sin\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, де α і β — гострі кути трикутника. 140. $x=36$. 141. $x=\log_2(2+\sqrt{5})$. 142. 1; 2; 4; 8 або 8; 4; 2; 1. 145. $x=\frac{1}{2}$, $y=1$. 146. 4. 147. $\left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2$. 148. n^2. 149. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 150. $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2-\frac{n(n+1)}{2}$. 151. $\frac{n}{n+1}$. 152. $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. 153. $\frac{(a^{2(n+1)}+1)(a^{2n}-1)}{a^{2n}(a^2-1)}+2n$, якщо $a^2\neq 1$; $4n$, якщо $a^2=1$. 156. а) і г) обмежені; б) і в) необмежені. 157. а) a_3 і a_4; б) a_3. 158. а) a_{10}. Вказівка. Можна дослідити на екстремум функцію $y=\frac{x}{100+x^2}$. б) a_3. 159. $S_n = \frac{a(a^n-1)(a^{n+1}-1)}{a^2-1}$, при $a\neq 1$ і $S_n=0$ при $a=1$. 160. $S_n = \frac{1-a^n(n-1)+na^{n+1}}{(1-a)^2}$ при $a\neq 1$, $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$ при $a=1$. 161. $n^3-\frac{3}{2}n(n-1)$. Вказівка. $a_n=\frac{n^3-(n-2)^3}{2}$. 162. 2. 163. $\frac{3}{2}$. 164. 0. 165. $\sqrt{2}-1$. 166. $\frac{4}{3}$. 167. 1. 168. 0. 169. 1. 170. $\frac{1}{2}$. 171. 5. 172. 0. Вказівка. Поділити чисельник і знаменник на 7^n. 173. 1. 174. 1. Вказівка. Кожен доданок $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. 175. $\frac{1}{4}$. 176. $\frac{1}{k}$. 177. $\frac{1}{2}$. Вказівка. $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$. 178. $\frac{3}{4}$. Вказівка. $\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$. 179. $\frac{1}{3}$. 180. $\frac{\pi}{\pi^2-1}$. Вказівка. Див. попередню задачу. 181. $y_n = \frac{1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(n-1)^2}$, $n\geqslant 2$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$. 182. $a_n=n-1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n^2-n+2}}=1$. 183. Дана послідовність спадає; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$. 184. Послідовність зростає і обмежена; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{5}$. 185. Якщо $a\neq 4,5$, $a\neq\pm\sqrt{6}$, то рівняння має один розв'язок $x=\frac{3a-4}{2a-9}$. Якщо $a=4,5$ або $a=\pm\sqrt{6}$, то рівняння розв'язків не має. 186. $x\in[-2;2]$. 187. $x\in\{0;2;4\}$. 188. $x\in[-4;4]$. 189. $x\in\{-7;7\}$. 190. $x\in\{-1;\sqrt{8}-1\}$. 191. $x\in\left\{-3, 2, \frac{\sqrt{65}-1}{2}\right\}$. 192. $x\in[-\sqrt{5};$

$-2] \cup [2; \sqrt{5}]$. **193.** $x = 1$. **194.** $x \in \{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}, 2\}$. **195.** $a = 2$. **196.** $a \in \left\{0; -\frac{3}{4}; \frac{2}{9}\right\}$. **197.** $x = 7$. **198.** $x = 1$. **199.** $x \in [2; 7]$. **200.** $x \in [2; 5]$. Вказівка. Рівняння еквівалентне такому: $|\sqrt{x-1} - 1| + |\sqrt{x-1} - 2| = 1$. **201.** $x = \frac{2}{3}$.
202. $x \in \{-\sqrt{2-\sqrt{3}}, -\sqrt{2+\sqrt{3}}\}$. **203.** $x = -\sqrt{\sqrt{2}-1}$. **204.** $x = \frac{16}{25}$. **205.** $x = \frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$, $a \geqslant 1$. **206.** Якщо $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$, то вихідне рівняння має два розв'язки: $x = \sqrt{\frac{a}{2}}$ і $x = \frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$; якщо $a > 1$, то — один розв'язок: $x = \sqrt{\frac{a}{2}}$; при інших значеннях параметра a рівняння розв'язків не має. **207.** $x = 0$ і $x = 1$. Вказівка. Якщо обидві частини рівняння поділити на 9, то дістанемо квадратне рівняння щодо $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. **208.** $x = 2$. **209.** $x = 4$. **210.** $x = 0$ і $x = \log_5 3$. Вказівка. Записати рівняння у вигляді $(5^x + 3 \cdot 5^{-x})^3 = 4^3$. **211.** $x = -2$ і $x = 2$. Вказівка. Оскільки $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$, то позначивши $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = y$, матимемо рівняння $y + \frac{1}{y} = 4$. **212.** Якщо $a \in]-1; 0[$, то рівняння має два розв'язки: $x = 1 + \log_2(1 - \sqrt{1+a})$ і $x = 1 + \log_2(1 + \sqrt{1+a})$; якщо $a \in \{-1\} \cup [0; \infty[$, то рівняння має один розв'язок: $x = 1 + \log_2(1 + \sqrt{1+a})$. При $a < -1$ рівняння розв'язків не має. **213.** $x = -1$ і $x = 0$. **214.** $x = 4$. **215.** $x = 16$. **216.** $x \in \{-4, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\}$. Вказівка. Покласти $\log_2|x| = y$. Тоді рівняння набуде вигляду $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$. **217.** $x = \frac{1}{8}$ і $x = 2$. Вказівка. Прологарифмувавши обидві частини рівняння за основою 2, дістанемо: $(2 + \log_2 x)\log_2 x = 3$. **218.** $x = \frac{1}{10}$ і $x = 100$. Вказівка. Рівняння еквівалентне такому рівнянню: $\lg^2 x = 2 + \lg x$. **219.** $x = \frac{1}{7}$ і $x = 7$. Вказівка. Скористатися співвідношенням $7^{\log_7^2 x} = x^{\log_7 x}$. **220.** $x \in \left\{-2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right\}$. **221.** $x = 2$ і $x = -2$. **222.** $x \in \left\{(-1)^k \frac{\pi}{8} + k\pi;\ (-1)^k \frac{3\pi}{8} + k\pi k \in Z\right\}$. **223.** $x \in \left\{\pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2k\pi k \in Z\right\}$. Вказівка. Врахувати, що рівняння еквівалентне такій системі:

$$\begin{cases} \sin x = \cos^2 x, \\ \cos x \leqslant 0. \end{cases}$$

224. $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + k\pi$, $k \in Z$. Вказівка. Позначити $\sin x + \cos x = y$. **225.** $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\ 2n\pi k,\ n \in Z\right\}$. **226.** $x \in \left\{2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2n\pi k,\quad n \in Z\right\}$.
227. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$. Вказівка. Рівняння еквівалентне такій системі рівнянь:

$$\begin{cases} \sin 7x = -1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases}$$

228. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$. Вказівка. Рівняння еквівалентне такій системі рівнянь:

$$\begin{cases}\sin^2 x=1,\\ \cos^2 2x=1.\end{cases}$$

229. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z$. 230. $x\in\left\{k\pi;\ \frac{\pi}{4}+n\pi;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+m\pi\right\}$, де $k,\ n,\ m\in Z$.
231. $x\in\left\{\frac{\pi}{4}+n\pi;\quad \operatorname{arctg}(1+\sqrt{2})+k\pi;\quad \operatorname{arctg}(1-\sqrt{2})+m\pi\right\},\quad n,\ k,\ m\in Z$.
232. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z$. 233. $x\in\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+n\pi\mid k,\ n\in Z\right\}$.
234. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in Z$. Вказівка. Оскільки $|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|\geqslant 2$, то дане рівняння еквівалентне сукупності двох систем:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2,\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}\quad \text{і}\quad \begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=-2,\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1.\end{cases}$$

235. $x\in\left[k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad x\in\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\pi\right],\quad k=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$. 236. $x\in\left\{(-1)^n\frac{\pi}{6}-n\pi,\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi\mid n\in N\right\}$. Вказівка. Рівняння еквівалентне сукупності таких трьох систем:

$$\begin{cases}-\infty<x<-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2\sin x}=\pi;\end{cases}\quad \begin{cases}-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2\sin x}=-2x;\end{cases}\quad \begin{cases}x>-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2\sin x}=-\pi.\end{cases}$$

237. $x\in\left\{-\frac{\pi}{3}-n\pi,\ \frac{\pi}{3}+n\pi\mid n\in N\right\}$. Вказівка. Рівняння еквівалентне сукупності таких трьох систем:

$$\begin{cases}x<0,\\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}x=-\pi;\end{cases}\quad \begin{cases}0\leqslant x\leqslant\pi,\\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}x=2x-\pi;\end{cases}\quad \begin{cases}x>\pi,\\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}x=\pi.\end{cases}$$

238. $x\in\left\{\pm\frac{\pi}{4}+n\pi,\ \pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+k\pi\mid n,\ k\in Z\right\}$. Вказівка. Якщо покласти $2^{\operatorname{tg}^2 x}=y$, то рівняння можна записати у вигляді $y^2-6y+8=0$. 239. $x=\frac{\pi}{8}(1+(-1)^{n+1})+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z$. 240. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$. 241. $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$. 242. $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$. 243. $x\in\left\{-\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi,\ \frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi\mid k\in Z\right\}$. Вказівка. Переконатися, що дане рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\quad \text{і}\quad \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

244. $x = \operatorname{arctg}(2a + \sqrt{3(a^2-1)}) + k\pi$ і $x = \operatorname{arctg}(2a - \sqrt{3(a^2-1)}) + n\pi$, k, $n \in N$ при $|a| \geqslant 1$. **245.** Якщо $0 < a < 1$, то $x = \pm\arccos\left(-\frac{a}{2}\right) + 2k\pi$, $k \in Z$; якщо $1 \leqslant |a| \leqslant 2$, то $x = \pm\arccos\frac{1}{a} + 2k\pi$ і $x = \pm\arccos\left(-\frac{a}{2}\right) + 2n\pi$, k, $n \in Z$; якщо ж $|a| > 2$, то $x = \pm\arccos\left(\frac{1}{a}\right) + 2k\pi$, $k \in Z$. **246.** $x = (-1)^n \times \arcsin\left(\pm\frac{1+\sqrt{a-1}}{2}\right) + n\pi$, $x = (-1)^n \arcsin\left(\pm\frac{1-\sqrt{a-1}}{2}\right) + k\pi$, k, $n \in Z$. **247.** (2; 1), (8; 13). **248.** (—1; —2), (3; 0), (—9; 6). **249.** Якщо $|a| < 1$, то система має два розв'язки:

$$x = 1,\ y = -1 \quad \text{і} \quad x = \frac{a^2+2a-1}{a^2-1},\ y = \frac{a^2+1}{1-a^2};$$

якщо $|a| > 1$, то система має один розв'язок: $x = 1$, $y = -1$. При $|a| = 1$ система розв'язків не має. **250.** (3; 1), $\left(\frac{1+\sqrt{41}}{2}; -\frac{1+\sqrt{41}}{2}\right)$. **251.** (1; 1; 0). **252.** (2; 2; —2). **253.** $(\sqrt{2}; 0)$, $(-\sqrt{2}; 0)$, $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$, $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Вказівка. Розглянути два випадки: $xy \geqslant 0$ і $xy < 0$. **254.** $(a; 0)$, $(0; a)$. **255.** $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ і $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$. **256.** (2; 1), (—1; —2). **257.** (0; 1). **258.** (4; 1) і $\left(-9; -\frac{9}{4}\right)$. **259.** (5; 4), (5; —4). **260.** (1; 2). **261.** (1; 1), (4; 2). **262.** (3; 4), (81; 1). **263.** (8; 2), $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right)$. **264.** (3; 3). **265.** (2; 3), $\left(2^{-15/23}; -\frac{23}{5}\right)$. Вказівка. Перше рівняння системи є квадратним щодо x^y. **266.** $x = 4$, $y = 16$. **267.** (3; 27), (27; 3). Вказівка. В першому рівнянні системи перейти в логарифмах до однієї основи (y або x). **268.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $y = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi + \frac{k\pi}{2}$, k, $n \in Z$. **269.** $x = 2\pi + 4k\pi$; $y = \pm\frac{\pi}{2} + 4n\pi$, k, $n \in Z$ або $x = \pm\frac{\pi}{2} + 4k\pi$; $y = 2\pi + 4n\pi$, k, $n \in Z$. **270.** $\left(\frac{2\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, $k \in Z$. **271.** $\left(\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + n\pi\right)$, k, $n \in Z$. **272.** $\left(k\pi; \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$, k, $n \in Z$. **273.** $a = \pm 1$ і $a = \pm\frac{2\sqrt{5}}{2}$. **274.** Коли $a > 1$ або $a < \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, то система розв'язків не має; коли $a = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ і $a = 1$, то система має чотири розв'язки; коли $a \in \left]\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}; 1\right[$, то система має вісім розв'язків. **275.** Система має єдиний розв'язок $x = -0{,}5$; $y = -0{,}5$; $z = 0{,}5$ при $a = -0{,}5$. **277.** $a = -1$, $a = 1$. **278.** Система має розв'язки лише при $a = 0$. Її розв'язки $x = \frac{\pi}{2} + (k+n)\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + (k-n)\frac{\pi}{2}$; k, $n \in Z$. **279.** Система має розв'язки лише при $a = 0$. Її розв'язки $x = 2k\pi$, $y = 2l\pi$; k, $l \in Z$ і $x = \pi + 2m\pi$, $y = \pi + 2n\pi$; m, $n \in Z$. **280.** $x \in]-4, 0[\cup]1; 2[\cup]4; \infty[$. **281.** $x \in$

$\in]-\infty; -5[\cup]-4; -3[$. 282. $x \in]-\infty; -2[\cup \left]-\frac{5}{4}; -1\right[\cup]1; 5[$. 283. $x \in$ $\in]-\infty, -1[\cup]-1; 2[$. 284. $x \in \left]-\infty; \frac{4}{3}\right[\cup]6; \infty[$. Вказівка. Розглянути нерівність окремо на проміжках $]-\infty; -1[$, $[-1; +2]$, $]2; 3[$ і $[3; \infty[$. 285. $[-7; 7]$. 286. $x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$. Вказівка. Нерівність еквівалентна сукупності двох таких систем нерівностей:

$$\begin{cases} |x| < 1, \\ x - |x| < 1 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} |x| > 1, \\ x + |x| < 3. \end{cases}$$

287. $x \in]-\infty; -4[\cup]2; \infty[$. 288. $x \in]-6; 0[$. 289. $x \in]-\sqrt{3}; 3[$. 290. $x \in$ $\in \left]-\infty; -\frac{18}{5}\right[\cup \left]-\frac{7}{5}; \infty\right[$. 291. $x \in]-8; -2[\cup]-1; 1[\cup]2; 8[$. 292. $x \in]-2;$ $-1[\cup]1; 2[$. 293. Рівняння має розв'язки, якщо $a \in [1; 6]$. Якщо $a = 1$, то $x_1 =$ $= x_2 = -1$; якщо $1 < a < \frac{3}{2}$, то $x_1 < x_2 < 0$; якщо $a = \frac{3}{2}$, то $x_1 = -6$, $x_2 = 0$; якщо $\frac{2}{3} < a < 2$, то $x_1 < 0 < x_2$; якщо $a = 2$, то рівняння має один корінь $x = \frac{1}{4}$; якщо $2 < a < 6$, то $0 < x_1 < x_2$; якщо $a = 6$, то $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$. 294. $a \in]-\infty;$ $-3[\cup [1; \infty[$. Вказівка. Безпосередньо переконатися, що $a = 1$ задовольняє умову задачі, а $a = -1$ її не задовольняє. Шукані значення a, $|a| \neq 1$ є розв'язками системи нерівностей

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ 4(a-1)^2 - 4 \cdot 2(a^2 - 1) < 0. \end{cases}$$

295. $a \in \left]-\infty; -\frac{4}{3}\right[$. Вказівка. Шукані значення a є розв'язками системи нерівностей

$$\begin{cases} a + 1 < 0, \\ a^2 - 4(a+1)a < 0. \end{cases}$$

296. $a \in \left[1; \frac{16}{7}\right]$. Вказівка. Безпосередньо переконатися, що $a = 1$ задовольняє умову задачі. Для відшукання інших a, що задовольняють умову задачі, скористатися тим, що корені квадратного рівняння $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $(\alpha \neq 0)$ більші від 1, коли виконується хоч одна із систем

$$\begin{cases} \beta^2 - 4\alpha\gamma \geqslant 0, \\ \alpha \geqslant 0, \\ \alpha + \beta + \gamma > 0, \\ -\frac{\beta}{2\alpha} > 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta^2 - 4\alpha\gamma \geqslant 0, \\ \alpha < 0, \\ \alpha + \beta + \gamma < 0, \\ -\frac{\beta}{2\alpha} > 1. \end{cases}$$

297. $a \in]-1; 0[\cup]1; \infty[$. Вказівка. Умову задачі задовольняють розв'язки нерівності $a(1 - |a|) < 0$, бо за теоремою Вієта $x_1x_2 = a(1 - |a|)$. 298. $a \in \{0\} \cup$ $\cup \left]\frac{1}{2}; \infty\right[$. 299. $a \in]-1; 0[\cup]0; 1[$. Вказівка. Розв'язки рівняння $x_1 = \frac{2}{a}$ і $x_2 = -\frac{1}{a}$. Умову задачі задовольняють ті значення a, для яких виконуються такі дві нерівності:

$$\left|\frac{2}{a}\right| > 1, \quad \left|-\frac{1}{a}\right| > 1.$$

300. $a \in \left]-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[\cup]1; \infty[$. 301. $a \in]2; \infty[$. Вказівка. Шукані значення параметра a є розв'язками системи нерівностей

$$\begin{cases} 4 - 2a(1-a) - a^3 < 0; \\ -a^3 < 0. \end{cases}$$

302. $x \in \left]\frac{1}{2}; \infty\right[$. 303. $x \in]-\infty; 2[$. Вказівка. Нерівність еквівалентна сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ 3-x > (x-1)^2 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x-1 < 0, \\ 3-x \geqslant 0. \end{cases}$$

304. $x \in \left[\frac{\sqrt{7}-1}{2}; 2\right]$. 305. $x \in]-\infty; -3[\cup]2; \infty[$. Вказівка. Нерівність еквівалентна сукупності таких двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} 3-x \geqslant 0, \\ x^2+x-6 > (x-3)^2 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x-3 < 0, \\ x^2+x-6 \geqslant 0. \end{cases}$$

306. $x \in [-\sqrt{2+\sqrt{3}}; -\sqrt{2-\sqrt{3}}] \cup]0; 2]$. 307. $x \in [-2; 0[\cup [\sqrt{2-\sqrt{3}}; \sqrt{2+\sqrt{3}}]$. 308. $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right[\cup \left]0; \frac{1}{3}\right[$. 309. $x \in [-2; 0[\cup \left]\sqrt{\frac{\sqrt{65}-1}{2}}; 2\right]$.

310. $x \in \left]-\frac{\sqrt{5}}{5}|a|; |a|\right]$. 311. Якщо $a \in]-\infty; -1[$, то $x \in [-1; 1]$; якщо $a \in [-1; 1[$, то $x \in \left]\frac{1}{2}(a-\sqrt{2-a^2}); 1\right]$; якщо $a \in [1; \sqrt{2}[$, то $x \in \left]\frac{1}{2}(a-\sqrt{2-a^2}); \frac{1}{2}(a+\sqrt{2-a^2})\right[$. При $a > \sqrt{2}$ нерівність розв'язків не має. Вказівка. Побудувати графіки функцій $y=\sqrt{1-x^2}$ і $y=a-x$. 312. $x \in]3; \infty[$. 313. $x \in]-\infty; 0[\cup]0; 2[$. 314. $x \in]-\infty; 0[\cup]\log_2 3; \infty]$. 315. $x \in]2; 4-\sqrt{3}[\cup]4+\sqrt{3}; 6[\cup]6; \infty[$. Вказівка. Нерівність еквівалентна сукупності таких двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} x^2-8x+13 > 1, \\ x-6 > 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 0 < x^2-8x+13 < 1, \\ x-6 < 0. \end{cases}$$

316. $x \in \left]-\infty; \frac{5}{3}\right[\cup]2; 3[$. Вказівка. Див. попередню задачу. 317. $x \in]-\infty; -2] \cup \left]-1; -\frac{1}{2}\right] \cup [0; 4[$. Вказівка. Нерівність еквівалентна сукупності таких двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} |x+1| \geqslant 1, \\ \frac{1}{x^2-3x-4} \geqslant \frac{2}{x-4}; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < |x+1| < 1, \\ \frac{1}{x^2-3x-4} \leqslant \frac{2}{x-4}. \end{cases}$$

318. $x \in]0{,}001; 1[\cup]100; \infty[$. 319. $x \in]0; 10\sqrt{10}[\cup]100; \infty[$. 320. $x \in]0; 1[\cup]2; \infty[$. 321. $x \in]0; 1[\cup]2; \infty[$. 322. $x \in]-\infty; -6[\cup]-4; -1] \cup [5; \infty[$. Вказівка. Нерівність еквівалентна таким двом системам нерівностей:

$$\begin{cases} \log_2 \frac{x^2-3x}{|x+5|} \geqslant 0, \\ \log_2 |x+5| > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 \frac{x^2-3x}{|x+5|} \leqslant 0, \\ \log_2 |x+5| < 0. \end{cases}$$

323. $x \in]0;\ 1[\cup [11;\ \infty$. [В к а з і в к а. Нерівність еквівалентна такій нерівності:
$$\log_x \frac{|x-5|}{6} \geqslant 0.$$

324. $x \in]2;\ \infty[$. **325.** $x \in \left]0;\ \frac{3}{2}\right[$. **326.** $x \in]-3;\ 1[\cup]3;\ 4[$. **327.** $x \in]0;\ 2[\cup]2;\ 4[$. **328.** $x \in \left]0;\ \frac{1}{8}\right] \cup [1;\ \infty[$. **329.** $x \in \left]0;\ \frac{1}{3}\right[\cup]1;\ 2[$. В к а з і в к а. Врахувати, що $\frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$, причому рівність можлива лише при $x = 1$. **330.** $x \in \left]0;\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right[\cup]1;\ \sqrt{2}[$. В к а з і в к а. Врахувати, що $\frac{1+x^2}{2x} \geqslant 1$, причому рівність можлива лише при $x = 1$. **331.** $x \in]1-\sqrt{5};\ -1[\cup]3;\ \sqrt{5}+1[$. **332.** $x \in]3+\sqrt{2};\ \infty[$. **333.** $x \in \left]-1;\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ 4\right[$. **334.** $x \in \left]0;\ \frac{1}{8}\right[\cup]1;\ 2[$.
335. $x \in]\log_2 5 - 2;\ \log_2 3[$. **336.** Якщо $0 < a < 1$, то $x \in]0;\ a[\cup \left]1;\ \frac{1}{a}\right[$; якщо ж $a > 1$, то $x \in \left]\frac{1}{a};\ 1\right[\cup]a;\ \infty[$. **337.** Якщо $x \in]-1;\ -|a|[\cup]|a|;\ 1[$, $0 < |a| < 1$. В к а з і в к а. Нерівність еквівалентна такій системі:
$$\begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < 1 - x^2 \leqslant 1 - a^2. \end{cases}$$

338. Якщо $a \in]0;\ 1[$, то $x \in]0;\ a[$; якщо $a \in [1;\ 2]$, то $x \in]0;\ 1[$; якщо $a \in]2;\ \infty[$, то $x \in \left]0;\ \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right[\cup \left]1;\ \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right[$. **339.** Якщо $0 < a < \frac{1}{3}$, то $x \in]2a;\ 1-a[$; якщо $\frac{1}{3} < a \leqslant \frac{1}{2}$, то $x \in]1-a;\ 2a[$; якщо $a > \frac{1}{2}$, то $x \in]a;\ 2a[$.
340. $]-\infty;\ -4]$ і $[2;\ 3]$. В к а з і в к а. Похідну даної функції записати у вигляді $f'(x) = 3(x-2)(x+4)(x-3)$. **341.** $[-4;\ 2]$. В к а з і в к а. Записати похідну даної функції у вигляді $f'(x) = 6(x-2)(x+4)(x^2+4x+5)$.

342. $]0;\ 6]$. **343.** $]1;\ 5]$. **344.** $]-\infty;\ 0]$. **345.** $[1;\ 2]$ і $[3;\ \infty[$. **346.** $]1;\ \infty[$. **347.** $\left]1;\ \frac{1+\sqrt{73}}{6}\right]$. **348.** $]-\infty;\ 0]$ і $[1;\infty[$. **349.** На проміжках $]-\infty;\ 0[$ і $[2;\ \infty[$ функція спадає, а на проміжку $[0;\ 2]$ — зростає. Точка $x = 0$ є точкою мінімуму, а $x = 2$ — точкою максимуму функції. **350.** На проміжках $]-\infty;\ -3[$, $]-1;\ 0[$ і $]1;\ 3[$ функція спадає, а на проміжках $]-3;\ -1[$, $]0;\ 1[$ і $]3;\infty[$ — зростає. Точки $x = -3$, $x = 0$ і $x = 3$ є точками мінімуму функції, а $x = -1$ і $x = 1$ — точками максимуму функції.
351. На проміжках $]-\infty;\ -3[$, $]-2;\ 0[$ і $]2;\ 3[$ функція спадає, а на проміжках $]-3;\ -2[$, $]0;\ 2[$ і $]3;\ \infty[$ — зростає. Точки $x = -3$; $x = 0$ і $x = 3$ є точками мінімуму функції, а $x = -2$ і $x = 2$ — точками максимуму. В к а з і в к а. Побудувати графік даної функції. **352.** На проміжку $\left]-\infty;\ \frac{1}{5}\right[$ функція зростає, а на проміжку $\left]\frac{1}{5};\infty\right[$ — спадає. Точка $x = \frac{1}{5}$ є точкою максимуму функції. **354.** $x \in \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3};\ \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}\ \middle|\ k \in Z\right\}$. **355.** $x \in \{2k\pi \mid k \in Z\}$. **356.** $x \in \left\{2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k\pi + (-1)^{k+1} \times \arcsin\frac{3\sqrt{2}}{5} - \frac{\pi}{4}\ \middle|\ k \in Z\right\}$. **357.** $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z\right\}$. **358.** $x \in \left\{2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in Z\right\}$. **359.** $f_{\text{найм}} = f(-1) = f(3) = 0$. **360.** $f_{\text{найм}} = 0$. **361.** $f_{\text{найм}} =$

$= f(-1) = f(1) = 1$. **362.** $f_{\text{найм}} = f\left(\ln\frac{5}{2}\right) = 1 - 3\ln\frac{5}{2}$. **363.** $f_{\text{найб}} = f(1) = f(3) = 2$. **364.** $f_{\text{найб}} = f(-1) = f(1) = 4$. **365.** $f_{\text{найб}} = f(2) = 4\ln 2$. Вказівка. Похідна даної функції $f'(x) = -2^{1-x}(2^x - 4)(2^x + 2)\ln 2$. **366.** $f_{\text{найм}} = f(4) = 0$, $f_{\text{найб}} = f(0) = 4$. **367.** $f_{\text{найм}} = f(1) = f(4) = 0$, $f_{\text{найб}} = f(5) = 4$. **368.** $f_{\text{найм}} = f(2) = 4$, $f_{\text{найб}} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{65}{4}$. **369.** $f_{\text{найм}} = f(3) = 1$, $f_{\text{найб}} = f(-1) = 3$. **370.** $f_{\text{найм}} = f(-1) = -2$, $f_{\text{найб}} = f(1) = 2$. **371.** $f_{\text{найм}} = f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0, f_{\text{найб}} = f(k\pi) = 1, k \in Z$. **372.** $f_{\text{найм}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}, f_{\text{найб}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. **373.** $f_{\text{найм}} = f\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} - \frac{14\pi}{3} - 4\sqrt{3}, f_{\text{найб}} = f(0) = 9$. **374.** $x \in \left\{\pm\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in Z\right\}$. **375.** $f_{\text{найб}} = f(\pi) = 1$. **376.** $f_{\text{найм}} = f(\operatorname{arctg} 2) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. **377.** Найбільшого значення 81 функція досягає у точці $x = 8$. Вказівка. Треба записати функцію так: $f(x) = \log_2^2 x\,(6 - \log_2 x)^2$. **378.** $x = 2$. Вказівка. Похідна даної функції $f'(x) = x^2 + 4x\cos\frac{\pi x}{2} + 4 = \left(x + 2\cos\frac{\pi x}{2}\right)^2 + 4\left(1 - \cos^2\frac{\pi x}{2}\right)$. **379.** $x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **380.** $a = -\sqrt{2}, a = \sqrt{2}$. **381.** $a \in]-\infty; -3] \cup [1; \infty[$. **382.** $a \in]-\infty; 0[\cup]4; \infty[$. **383.** При $a = -2$ функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають одну спільну стаціонарну точку $x = 1$. **385.** $a \in [-1; 3]$. **386.** $a \in]-\infty; -2] \cup [2; \infty[$. **387.** $k = \pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$. **388.** $m = 2$. **389.** $m \in]2; \infty[$. **390.** $m \in]-1; 3[$. **391.** Вказівка. Записати похідну даної функції у вигляді $f'(x) = -6(x-1)(x(x+1)(x^2+1) - 4)$. **392.** $a \in]-\infty; -3]$. **393.** $a \in \left[-\frac{2+\sqrt{55}}{2}; \frac{-2+\sqrt{55}}{2}\right]$. **394.** $a \in]-\infty; -3[\cup \left]3; \frac{29}{7}\right[$. **395.** $a \in]1; \infty[$. Вказівка. Дослідити, при яких значеннях параметра a рівняння $f'(x) = ax^2 + 2(a+2)x + a - 1 = 0$ має різні корені, $x_1 < x_2$, такі, що $x_2 < 0$ (якщо $a > 0$) і $x_1 < 0$ (якщо $a < 0$). **396.** $m \in \{-1; 4\}$. **400.** $m \leqslant 1$. **401.** $a \in [1; \infty[$. **402.** $a \in [1; \infty[$. **403.** Функція спадає на всій числовій прямій. **404.** Монотонно зростає при всіх $x \in R$. **445.** Три. Вказівка. Побудувати графіки функцій $y = 1 - x^2$ і $y = e^{-|x|}$. **446.** Два. Вказівка. Побудувати графіки функцій $y = \ln(|x| - 1)$ і $y = \frac{x+1}{x-1}$. **447.** Вісім. Вказівка. Побудувати графіки функцій $y = 15\sin\pi x$ і $y = 2^{|x|}$. **448.** Чотири. Вказівка. Побудувати графіки функцій $y = \log_2|1 - x|$ і $y = x^2 - 2x + 3$. **449.** Чотири. **450.** Для будь-якого a рівняння має два розв'язки. Вказівка. Слід скористатись графіками функцій $y = x^4 - 2$ і $y = 4ax^3$. **451.** Один корінь, якщо $a < -\frac{16\sqrt{5}}{125}$ або $a > \frac{16\sqrt{5}}{125}$; два корені, якщо $a = \pm\frac{16\sqrt{5}}{125}$; три корені, якщо $-\frac{16\sqrt{5}}{125} < a < \frac{16\sqrt{5}}{125}$. Вказівка. Побудувати графік функції $y = x^5 - 2x^3 + x$. **452.** Один корінь, якщо $a = 0$ або $a > \frac{1}{e}$; два корені, якщо $a = \frac{1}{e}$; три корені, якщо $0 < a < \frac{1}{e}$. Якщо $a < 0$, то рівняння коренів не має. **453.** Один корінь, якщо $a = 0$, $a > \frac{1}{e}$; два корені, якщо $a = \frac{1}{e}$; три корені, якщо $0 < a < \frac{1}{e}$. Якщо $a < 0$, то рівняння коренів не має. **454.** Один корінь, якщо $a = 0$; два корені, якщо $a = 1$; чотири корені, якщо $0 < a < 1$. Рівняння не має коренів, якщо $a < 0$ або $a > 1$. **455.** Один розв'язок, якщо $a \leqslant 0$; два розв'язки, якщо $a > 0$. Вказівка. Побудувати графіки функцій

$y = \lg x$ і $y = \frac{2}{x-a}$. **456.** Один корінь, якщо $a = 2$; два корені, якщо $-2 \leqslant a < 2$. При інших a рівняння коренів не має. В к а з і в к а. Побудувати графік функції $y = 3\cos x - \cos^3 x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$. **457.** Один корінь, якщо $a = 27$; два корені, якщо $a > 27$. Якщо $a < 27$, то рівняння не має коренів, що належать проміжкові $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. В к а з і в к а. Дослідити на проміжку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ функцію $y = \frac{(\operatorname{tg} x + 4)^3}{\operatorname{tg}^2 x}$. Переконатися, що найменшого значення, рівного 27, на вказаному проміжку ця функція досягає, коли $\operatorname{tg} x = 8$. **460.** В к а з і в к а. Графік функції $y = -\sqrt{4x - x^2}$ — це нижнє півколо радіуса 2 з центром в точці (2; 0). **463.** В к а з і в к а. Шуканою множиною є множина $A_1 \cup A_2$, де

$$A_1 = \left\{ (x;\ y) \middle| \begin{cases} |x| + \frac{1}{2} > 1 \\ x^2 + y^2 \leqslant 2 \end{cases} \right\}, \qquad A_2 = \left\{ (x;\ y) \middle| \begin{cases} |x| + \frac{1}{2} < 1 \\ x^2 + y^2 \geqslant 2 \end{cases} \right\}.$$

469. В к а з і в к а. Шуканою множиною є множина $A_1 \cup A_2$, де

$$A_1 = \left\{ (x;\ y) \middle| \begin{cases} |x| + |y| > 1, \\ 2(y - x^2 + 1) \geqslant 1 \end{cases} \right\}, \quad A_2 = \left\{ (x;\ y) \middle| \begin{cases} 0 < |x| + |y| < 1, \\ 0 < 2(y - x^2 + 1) = 1 \end{cases} \right\}.$$

470. В к а з і в к а. Побудувати графік функції $y = 2^{\sin x}$. **471.** В к а з і в к а. Побудувати графік функції $y = 3^{\cos x}$. **472.** В к а з і в к а. Побудувати графіки функцій $y = |\sin x|$ і $y = |\cos x|$. **473.** Шуканою точкою є $(-2; 1)$, коли $a = 3$ і $(0; -1)$, коли $a = -1$. **474.** При $a = 3$ множина містить одну точку $(2; -4)$; при $a = 0$ множина містить лише точку $(-1; 2)$. В к а з і в к а. З'ясувати, коли множина розв'язків нерівності $2x^2 - (1 - a - x)^2 + a^2 - a + 2 \leqslant 0$ містить лише одну точку. **475.** $a \in \left[-\frac{\sqrt{2}\pi}{2};\ \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right]$. В к а з і в к а. Дана множина — це множина точок перетину прямих $y = -x + k\pi$ $(k \in Z)$ з колом радіуса $|a|$ і центром у точці (0; 0). **476.** Шукана точка є $(a;\ a + 1)$, якщо $a \in \left]-\infty; -1\right[$; $(a - 1 + \sqrt{2 - a};\ 2(a - 1) + 2\sqrt{2 - a}$, якщо $a \in [1; 2]$. Якщо $a > 2$, то дана множина є пустою. **477.** $\frac{1}{24}(3x + 4)^8 + c$. **478.** $2x - 3\ln|x + 1| + c$. **479.** $-\frac{1}{6}(3 - 4x)^{3/2} + c$. **480.** $\ln|x^2 - 1| + c$. В к а з і в к а. Скористатися рівністю: $\frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}$. **481.** $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + c$. **482.** $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + c$. **483.** $\frac{1}{3}\left((x + 1)^{3/2} - (x - 1)^{3/2}\right)$. В к а з і в к а. Подати дану функцію у вигляді $f(x) = \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}{2}$. **484.** $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$. **485.** $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$. **486.** $-\frac{\cos 4x}{4} + c$. В к а з і в к а. Скористатися рівністю $\sin x \cos^3 x = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x$. **487.** $\frac{1}{32}(\cos 4x - 4\cos 2x) + c$. **488.** $\frac{1}{192}(\cos 6x - 9\cos 2x) + c$. В к а з і в к а. Врахувати, що $\sin^3 x \cos^3 x = \frac{1}{32}(-\sin 6x + 3\sin 2x)$. **489.** $-\frac{1}{6}(\cos 3x + 3\cos x) + c$. **490.** $\frac{1}{6}(3\cos x - \cos 3x)$. **491.** $-\frac{1}{14}(\cos 7x + 7\cos x) + c$. **492.** $\frac{1}{10}\left[5\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)\right] + c$. **493.** $-\frac{1}{4}\left[\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)\right] + c$. **494.** $3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos 3x + c$. **495.** $\frac{1}{4}(4x - \sin 4x) + c$. **496.** $\sin 3x + c$.

497. $\frac{1}{4}(12x+8\sin 2x+\sin 4x)+c$. 498. $x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-1$. 499. $x-\frac{1}{x}-2\ln x$. 500. $\frac{1}{4}(1-(1-3x)^{4/3})$. 501. $x+\frac{1}{2}\cos 2x$. 502. $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$. 503. $x=2$. 504. $S=\frac{5}{12}$. Вказівка. Фігура, обмежена графіками даних функцій, симетрична відносно прямої $x=\frac{3}{2}$, тому

$$S=2\int_1^{3/2}\left(3x-x^2-\frac{3}{2}-\frac{3-2x}{2}\right)dx.$$

505. $S=\int\limits_{-2}^{2}\left(\sqrt{2-x}-\frac{x^2-4x+4}{8}\right)dx=\frac{8}{3}$.

506. $S=\int\limits_{-1}^{3}\sqrt{1+x}\,dx+\int\limits_{3}^{7}\sqrt{7-x}\,dx=\frac{32}{3}$.

507. $S=\int\limits_{0}^{\ln 4}(5-e^x-4e^{-x})\,dx=5\ln 4-6$.

508. $S=27-\frac{14}{\ln 2}$. 509. $S=28+\frac{16}{\ln 3}$. Вказівка. Оскільки дані функції парні, то шукана площа дорівнює подвоєній площі фігури, обмеженої графіками цих функцій при $x\geqslant 0$ і віссю ординат. 510. $S=7\ln 6-10$. Вказівка. Фігура, обмежена графіками даних функцій, конгруентна фігурі, обмеженій графіками функцій, обернених до даних. 511. $S=2+\frac{\pi}{2}$. 512. $S=2+\frac{\pi^3}{6}$. 513. Рівняння дотичних: $y=4-2x$ і $y=x-3{,}5$. Шукана площа $S=\frac{9}{8}$. 514. $S=\frac{4}{3}$. 515. $S=\pi$. 516. 4. Вказівка. При обчисленні інтеграла скористатися тотожністю $\cos^3 x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)$, яку рекомендуємо довести самостійно. 517. $S=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}$. 518. $S=\pi+\frac{2}{3}$. 519. $S=2+\frac{\pi}{2}$. 520. Рівняння прямої $y=\frac{4}{\pi^2}x$. 521. $V=\frac{2\pi}{9}(8-5\ln 3)$. 522. $S=\frac{3\pi}{2}+4$. 523. $V=\frac{9}{2}\pi^2+8\pi$. 524. $V=\frac{3}{8}\pi^2$. 525. $V=\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)$. 526. $V=\pi(\pi+4)$. Вказівка. Скористатись парністю обох функцій. 527. $V=\pi^2\left(\frac{2\pi^2}{3}-1\right)$. Вказівка. Скористатися парністю обох функцій. 528. Паралельне перенесення на відстань $2|b-a|$ в напрямку «від прямої $x=a$ до прямої $x=b$». 529. Паралельне перенесення. 530. Вказівка. Взяти за осі координатної системи дані прямі. 532. а) $4x-3y=0$; б) $4(x+1)-3(y-2)=0$. 533. $2x+y-5=0$, $x+18y+15=0$, $2x-9y-15=0$, $x-2y-5=0$. 534. $\{(x;y)\mid f(2a-x;\,2b-y)=0\}$. 536. $(a+k(x-a);\ b+k(y-b))$. 537. а) Ні. б) Пряма проходить через точку A. в) Так. Вказівка. Пряма $ax+by+c=0$ перетинає відрізок AB у внутрішній точці тоді і тільки тоді, коли вираз $ax+by+c$ в точках $A(x_1;\,y_1)$ і $B(x_2;\,y_2)$ має значення різних знаків. 538. $\frac{49}{5}$. Вказівка. Взяти на одній з прямих яку-

небудь точку і знайти відстань від неї до другої прямої. 539. $2x - 3y + 6 = 0$. 540. $\begin{cases} 7x - 3y + 1 < 0, \\ x - 5y + 23 > 0, \\ 3x + y + 5 > 0. \end{cases}$ Вказівка. Для кожних двох вершин трикутника написати рівняння прямої, що проходить через ці вершини, і замінити це рівняння нерівністю, яка справджується для третьої вершини трикутника. 541. Вектор $\vec{n} = (a - x_0;\ b - y_0)$ перпендикулярний до шуканої дотичної. Тому її рівняння: $(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0$. 542. $y = 22x - 121$ і $y = -2x - 1$. 543. $\left(x_0;\ \frac{1}{2}x_0^2\right)$ і $\left(-\frac{1}{x_0};\ \frac{1}{2x_0^2}\right)$, де x_0 — довільне відмінне від нуля число. 544. $\left(\frac{b}{a};\ \frac{a}{2}\right)$. 545. Півколо $y = -\sqrt{1-(x+1)^2}$. 546. $H^{1/4}_{(0;\,4/3)}$. 547. $2x - \sqrt{\pi}\,y - 2\pi = 0$. 548. Парабола $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$. 549. $(2a - x_0;\ 2b - y_0;\ 2c - z_0)$.

550. 1) Кругова циліндрична поверхня з радіусом r, вісь якої збігається з віссю Oz. 2) Кругова циліндрична поверхня з радіусом r і віссю, яка паралельна осі Oz і проходить через точку $(a;\ b)$ координатної площини xOy. 3) Кругова циліндрична поверхня з радіусом r, вісь якої паралельна координатній осі Ox і проходить через точку $(0;\ y_0;\ z_0)$. 551. Шукана точка $M\left(0;\ 0;\ \frac{14}{9}\right)$. 552. Рівняння сфери $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$. 553. $x + 2y + 3z - 11 = 0$. Вказівка. Площина проходить через середину відрізка AB і перпендикулярна до вектора $\overrightarrow{AB}$. 554. $V = 8$. Вказівка. Довжина ребра куба дорівнює відстані між даними паралельними площинами. 556. Центр кулі $O\left(\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$, її радіус дорівнює $\frac{3}{2}$.

557. $m = 2$. 558. $a = \pm 3$. 559. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. 560. 1) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$. 2) $\overrightarrow{AK} = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}| + |\vec{c}|}\vec{b} + \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}| + |\vec{c}|}\vec{c}$. 3) $\overrightarrow{AD} = \frac{\vec{c}(\vec{c} - \vec{b})}{(\vec{b} - \vec{c})^2}\vec{b} + \frac{\vec{b}(\vec{b} - \vec{c})}{(\vec{b} - \vec{c})^2}\vec{c}$. 561. $\overrightarrow{BD} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\vec{c}^2}\vec{c} - \vec{b}$. 564. Вказівка. Використати рівності $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$. 565. -5. 566. 9. 567. $|\vec{a} + \vec{b}| = 15$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{593}$. 568. $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{4}$. 569. $\frac{4}{5}$. 570. Вказівка. $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$. 571. $D(-1;\ 1;\ 1)$. $\widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})} = 120°$. 572. $\vec{c} = (1;\ -3;\ 1)$. 573. $\vec{c} = (-3;\ 3;\ 3)$. 574. $\alpha = 40$. 575. $\widehat{(\vec{p}, \vec{q})} = 60°$. 576. $\vec{h} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} - \vec{b}$. 577. $-\frac{3}{2}$. 578. $\vec{F} = \left\{\frac{5}{\sqrt{2}};\ \frac{4}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$, $|\vec{F}| = 5$; $\cos\widehat{(\vec{F_1}, \vec{F})} = \frac{7}{10}$, $\cos\widehat{(\vec{F_2}, \vec{F})} = \frac{4}{5}$, $\cos\widehat{(\vec{F_3}, \vec{F})} = \frac{9}{10}$. 585. 3 см, 4 см, 5 см. 586. Кути при основі дорівнюють $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$. 587. $m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. 588. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 589. $\frac{2R}{r}$. 590. 6; 7; 8. 591. 1 : 2. 592. 120° і 60°. 593. $\frac{a^2}{8}$. 594. 8. 595. 4 см. 596. 1 : 3. 597. ab. 598. $2rR$. 599. $\frac{h^2}{8}$. 600. $\sqrt{5}$. 601. 1. 602. $\frac{3}{8}R$. 603.

$a\dfrac{(1+\sqrt{5})}{2}$. **604.** Трикутник рівнобедрений прямокутний. **605.** 15° і 75°. **606.** 75°. **607.** 992 см². **608.** $|AB| = \dfrac{2ab}{a+b}$. **609.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **610.** $\dfrac{25\pi}{2}$. **611.** 60°. **612.** Площа трапеції найбільша, коли її більша основа дорівнює 20 см. **613.** 4. **652.** Коло, побудоване на відрізку KO як на діаметрі, де K — дана точка, O — центр даного кола. **653.** Об'єднання двох прямих: прямої, на якій лежить медіана ΔAOB, проведена з вершини O, і прямої, що проходить через O паралельно до (AB). **654.** Коло з радіусом $2a$ і центром у точці $(0; -a\sqrt{3})$. **655.** В к а з і в к а. Розгляньте окремо випадки, коли $\rho > r$, $\rho = r$ і $\rho < r$. **656.** Якщо $d < a$, то шукана множина порожня; якщо $d = a$, то вона містить тільки одну точку — середину відрізка AB; якщо $d > a$, то ця множина — коло з центром у початку координат і з радіусом $\sqrt{d^2 - a^2}$. **657.** Шукана множина складається з точок двох прямих: перпендикулярних до даного відрізка $[AB]$ і розміщених симетрично відносно його середини.

ЗМІСТ

Владимир Андреевич Вышенский,
Николай Алексеевич Перестюк,
Анатолий Михайлович Самойленко

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования УССР как учебное пособие для подготовительных отделений вузов

(На украинском языке)

Редактор *Т. В. Шмиговська*
Художній редактор *Т. М. Зябліцева*
Технічний редактор *Н. М. Бабюк*
Коректори *А. І. Бараз, А. В. Бабіч*

Інформ. бланк № 9268

Здано до набору 11.09.84. Підп. до друку 12.12.84. Формат 60×90/16. Папір друк. № 2. Літ. гарн. Вис. друк. Ум. друк. арк. 16,5. Ум. фарб.-відб. 16,88. Обл.-вид. арк. 17,32 Тираж 15 000 прим. Вид. № 2011-к. Зам. № 4—2765. Ціна 75 к.

Киев. Издательство при Киевском государственном университете, 252001, Киев-1, Крещатик, 10.

Надруковано з матриць Головного підприємства республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига», 252057, Київ, вул. Довженка, 3, у Київській книжковій друкарні наукової книги, 252004, Київ-4, вул. Репіна, 4. Зам. 4-960.

75 к.