МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ЗБІРНИК ЗАДАЧ ІЗ ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів
інженерно-технічних спеціальностей*

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Збірник задач із загальної фізики [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студентів інженерно-технічних спеціальностей./ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.П. Бригінець, І.М. Репалов, Л.П. Пономаренко, Н.О. Якуніна. – Електронні текстові дані (1 файл: 4.1Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 230 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 3 від 01.12.2022 .)
за поданням Вченої ради Фізико-математичного факультету (протокол № 8 від 9.11.2022.)

ЗБІРНИК ЗАДАЧ ІЗ ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ

Укладачі: *Бригінець Валентин Петрович*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Репалов Ігор Миколайович, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Пономаренко Лілія Петрівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Якуніна Наталія Олександрівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор: Решетняк С.О., зав.каф.ЗФ КПІ ім. Ігоря Сікорського, д-р фіз. - мат. наук, професор

Рецензент: Котовський В.Й., зав.каф. ЗФ МФП КПІ ім. Ігоря Сікорського, д-р тех. наук, професор

Навчальний посібник «Збірник задач із загальної фізики» складено на основі діючих освітніх програм інженерно-технічних спеціальностей КПІ ім. Ігоря Сікорського, зокрема спеціальностей 153 Мікро- та наносистемна техніка, 171 Електроніка, 172 Телекомунікації та радіотехніка, 126 Інформаційні системи та технології та інших.

При формуванні посібника враховано багаторічний досвід викладання фізики кафедрою загальної фізики студентам інженерно-технічних спеціальностей КПІ ім. Ігоря Сікорського. Більше 1200 задач різного рівня складності охоплюють всі розділи загальної фізики. Це дає можливість використовувати збірник під час вивчення загального курсу фізики з урахуванням специфіки освітніх програм різних інженерно-технічних спеціальностей.

Увесь матеріал курсу поділений на розділи, кожний з яких структурований відповідно до основних положень силабусів. На початку кожного розділу наведено основні формули, кожна задача має відповідь. Для зручності роботи з посібником представлено основні фізичні константи та стислі математичні відомості.

Призначено для студентів бакалаврського рівня вищої освіти, а також самостійної роботи студентів.

Зміст

Стор.

1.1. Кінематика

- Середня та миттєва швидкості:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}; \quad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

- Середнє та миттєве прискорення:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}; \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

- Миттєва швидкість і радіус-вектор точки при довільному русі (загальні рівняння кінематики точки):

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)\mathrm{d}t; \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}\mathrm{d}t$$

- Переміщення точки за проміжок часу $[t_1, t_2]$ та пройдений нею шлях:

$$\Delta \vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\mathrm{d}t; \quad S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t, \ v(t) = |\vec{v}(t)|$$

- Нормальне, тангенціальне та повне прискорення:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}; \quad \vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}; \quad \vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau,$$

де R – радіус кривизни траєкторії.

- Кутові швидкість ω та прискорення β:

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}; \quad \vec{\beta} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

- Зв’язок між лінійними та кутовими кінематичними величинами при обертанні навколо фіксованої осі:

$$L = \varphi R; \quad v = \omega R;$$

$$a_\tau = \beta R; \quad a_n = \omega^2 R; \quad a = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4},$$

R – відстань від осі обертання.

- Радіус-вектор, швидкість і прискорення точки в двох системах відліку, що рухаються поступально одна відносно одної:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{w} \end{cases} \quad \text{при } \vec{V} = const \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \\ \vec{a} = \vec{a}' \end{cases}$$

V – відносна швидкість систем відліку

Скалярні і векторні величини

1.1. Задано вектор $\vec{a}$, напрямлений уздовж осі OX.

1) показати на рисунку вектор $\vec{a}$ та вектори $\vec{b} = 2\vec{a}$ і $\vec{c} = -2\vec{a}$;

2) чи рівні вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$? їхні модулі? проекції?

3) записати значення модулів та проекцій векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

1.2. Визначити суму $\vec{b}$ та різницю $\vec{d}$ двох векторів $\vec{a}_1$ *і* $\vec{a}_2$, які мають однакові модулі a й напрямлені вздовж осі OX: а) однаково, б) протилежно.

1.3. Задані одиничні вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ (рис. 1.1). Визначити графічно та аналітично (обчисленням) вектор $\vec{S} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$, якщо вектори $\vec{b}$ і $\vec{d}$ нахилені до вертикалі під кутом 30°.

$$\left(\vec{S} = \vec{a}\right)$$

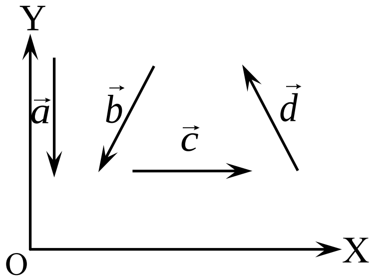


Рис. 1.1

1.4. Тіло із точки (–2; 4) (м) здійснило переміщення $\vec{S} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$ (м). Записати координати кінцевого положення тіла.

1.5. Тіло починає рух із початку координат у напрямку осі OX із точки і здійснює послідовно 4 переміщення по $S = 5{,}7$ м, повертаючи після кожного ліворуч у площині XOY на кут 30°. Записати (через орти $\vec{i}, \vec{j}$) вираз вектора результуючого переміщення $\vec{S}_0$ та обчислити його модуль S_0 і напрям (кут α до осі OX). Зробити рисунок.

$$(\vec{S}_0 = 13{,}5(\vec{i} + \vec{j})\ \text{м};\ S_0 = 19{,}1\ \text{м};\ \alpha = 45°)$$

1.6. До тіла прикладені в одній площині три сили $F_1 = 10$ Н, $F_2 = 20$ Н та $F_3 = 40$ Н під кутами 120° одна до одної (рис. 1.2). Визначити аналітично модуль і напрям вектора рівнодійної сили $\vec{F}$ та показати його на рисунку.

$$\left(F = 10\sqrt{7} \approx 26{,}5\ \text{Н},\quad \textit{під кутом}\ 19°\ \textit{до}\ \vec{F}_3\right)$$

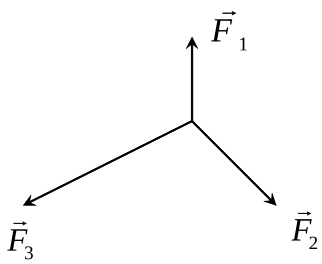


Рис. 1.2

1.7. Тіло тягнуть за дві нитки 1 і 2 з деякими силами $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ (рис. 1.3). Вектор рівнодійної $\vec{F}$ цих сил показаний на рисунку. Визначити графічно вектори $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$.

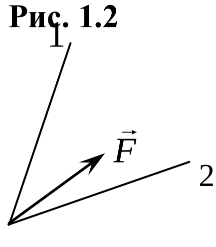


Рис. 1.3

1.8. Визначити графічно вектор рівнодійної $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ двох заданих паралельних сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ (рис. 1.4). *Вказівка. Скористатися розкладанням вектора на компоненти.*

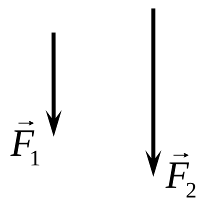


Рис. 1.4

1.9. Кулька рухається по дузі півкола (рис. 1.5). Показати на рисунку в точках 1, 2, 3 вектори швидкості $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, прискорення $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ та сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, що діє на кульку, якщо рух: а) рівномірний, б) рівноприскорений і в) рівносповільнений.

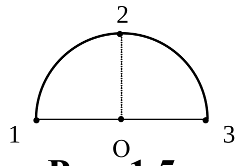


Рис. 1.5

1.10. Тіло кинуто з поверхні землі під кутом α = 30° до горизонту зі швидкістю $v_0 = 5$ м/с.

– зобразити траєкторію тіла і вказати вектори швидкості та прискорення кульки в початковій, кінцевій та найвищій точках траєкторії.
– знайти вираз вектора зміни швидкості тіла $\Delta\vec{v}$ за весь час руху та обчислити його модуль.

$$\left(\Delta\vec{v} = 2v_0 \sin\alpha \cdot \frac{\vec{g}}{g}, \quad 5\text{ м/с} \right)$$

1.11. Кулька пружно вдаряє в стіну і відскакує з тією самою швидкістю, як показано на рис. 1.6. Визначити модуль зміни вектора швидкості $|\Delta\vec{v}|$ та зміну модуля вектора швидкості Δv унаслідок удару в кожному випадку.

$$\left(a) \ |\Delta\vec{v}| = 2v, \ \Delta v = 0; \ б) \ |\Delta\vec{v}| = 2v\cos\alpha, \ \Delta v = 0 \right)$$

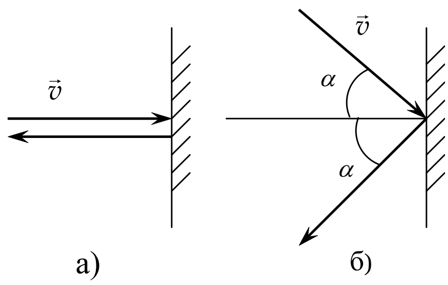


Рис. 1.6

1.12. Виконати завдання попередньої вправи для випадку непружного удару, коли кулька не відскакує.

$$\left(\Delta\vec{v} = -\vec{v}, \ \Delta v = -v \quad \textit{в обох випадках.} \right)$$

1.13. Як напрямлені один відносно одного два вектори, якщо їхній скалярний добуток дорівнює добутку модулів із знаком «–»?

1.14. Як напрямлені один відносно одного два вектори, якщо їх скалярний добуток дорівнює половині добутку модулів?

1.15. Знайти скалярний добуток векторів: $\vec{a}(1;\sqrt{3})$ і $\vec{b}(\sqrt{3};1)$.

$$\left(2\sqrt{3}. \right)$$

1.16. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ та $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

(16,26°)

1.17. На тіло, що рухається у від'ємному напрямку осі OX, діє постійна сила $\vec{F}(5;5)$ (Н). Визначити роботу цієї сили на шляху $L = 10$ см.

(– 0,5 Дж)

1.18. Тіло здійснює переміщення $S(8,66;5)$ м. При цьому одна із сил, яка діє на нього, $F = 10$ Н виконує роботу $A = 86,6$ Дж. Знайти, під яким кутом до осі OX є спрямована ця сила.

(0° *або* 60°)

Кінематичні характеристики руху точки

1.19. Дати обґрунтовані відповіді на наступні запитання:

1) чи може траєкторія руху точки: а) бути ламаною лінією; б) перетинатися сама із собою?
2) чи є рівномірним рух точки, якщо вона за рівні скінченні проміжки часу: а) здійснює однакові переміщення; б) проходить однакові шляхи?
3) чи може точка мати прискорення при рівномірному русі?
4) чи може змінюватися швидкість точка $\vec{v}$ при рівномірному русі?
5) чи можуть дві точки, що рівномірно рухаються з різними швидкостями, знаходитися на незмінній відстані одна від одної?
6) чи може прискорення точки $\vec{a}$ залишатися незмінним при криволінійному русі?
7) чи може прискорення точки $\vec{a}$ змінюватися при рівноприскореному русі? рівномірному русі?

1.20. Як рухається тіло, якщо його швидкість:

1) $\vec{v} = const$;
2) $v = const,\ \vec{v}/v \neq const$;
3) $v \neq const,\ \vec{v}/v = const$;
4) $v \neq const,\ \vec{v}/v \neq const$.

1.21. Який рух здійснює тіло, якщо кут φ між напрямком його швидкості $\vec{v}$ та прискорення $\vec{a}$ дорівнює: 0°; π; π/2; < π/2; > π/2.

1.22. Із якою середньою швидкістю рухався автомобіль між двома пунктами, якщо:

а) на першій половині шляху його швидкість була 60 км/год, а на другій – 120 км/год;
б) першу половину часу він рухався із швидкістю 60 км/год, а другу – 120 км/год.

(а) 80 км/год; б) 90 км/год)

1.23. Першу половину шляху тіло рухалось прямолінійно із швидкістю 10 м/с, а другу вдвічі швидше і під кутом 60° до початкового напрямку. Визначити напрям і модуль вектора середньої швидкості переміщення та середню шляхову швидкість (середнє значення модуля швидкості) тіла.

(30° *до початкового напрямку*, 11,55м/с; 13,3м/с)

1.24. На першій половині шляху тіло рухалося в n разів швидше, ніж на другій. При цьому середня швидкість на всьому шляху склала v. З якими швидкостями v_1 і v_2 рухалося тіло на кожній половині шляху.

$$\left(v_1 = \frac{n+1}{2}v, \quad v_2 = \frac{n+1}{2n}v.\right)$$

1.25. Велосипедист проїхав першу половину шляху між двома населеними пунктами зі швидкістю 12 км/год. На другій половині шляху він половину часу їхав із швидкістю 6 км/год, а потім до кінця йшов пішки зі швидкістю 4 км/год. Визначити середню швидкість руху велосипедиста на всьому шляху.

(7км/год)

1.26. На кваліфікаційних заїздах перед змаганнями мотогонщик протягом п'яти кругів дистанції повинен показати середню швидкість ≥120 км/год. На перших двох кругах його середня швидкість склала 160 км/год. Яку середню швидкість має показати гонщик на наступних трьох кругах?

(≥102,9 км/год)

1.27. Тіло, почавши рух із сталим прискоренням, на першій половині шляху розігналося до швидкості 15 м/с, а другу пройшло рівномірно з набутою швидкістю. З якою середньою швидкістю тіло подолало увесь шлях?

(10 м/с)

1.28. Тіло рухається вздовж осі OX так, що його координата змінюється за законом $x = 5 + 6t - t^3$ (м). Визначити:

– координату, швидкість і прискорення тіла через 2 с після початку руху;
– в який момент часу тіло знов опиниться у вихідній точці;
– на якій відстані від початкової точки тіло змінить напрям руху.

$$\left(9\text{ м},\ -6\text{ м/с},\ -12\text{ м/с}^2; \quad 1{,}41\text{ с}; \quad 5{,}66\text{ м.}\right)$$

1.29. Один мотоцикліст стартує з прискоренням 18 м/с^2, а другий – із затримкою 0,27 с і прискоренням 20 м/с^2. Через який час після початку руху і на якій відстані від точки старту другий мотоцикліст наздожене першого?

(5с; 250 м)

1.30. Дві матеріальні точки рухаються вздовж осі OX згідно з рівняннями: $x_1 = 6t + 2t^2 - t^3$(см), $x_2 = 2t - 4t^2 + 3t^3$(см).

1). Визначити:

– через який час t після початкового моменту одна точка (яка?) наздожене іншу та на якій відстані x від початку координат це станеться;

– проекції швидкостей υ_x та прискорень a_x точок на момент зустрічі.

2). Показати приблизний вигляд графіків координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ та швидкостей $\upsilon_{1x}(t), \upsilon_{2x}(t)$ точок.

$$\left(t = 2\text{ с}, x = 12\text{ см};\quad \upsilon_{1x} = 2\text{ см/с}, a_{1x} = -8\text{ см/с}^2;\quad \upsilon_{2x} = 22\text{ см/с}, a_{2x} = 28\text{ см/с}^2\right)$$

1.31. Рівняння руху матеріальної точки вздовж осі OX має вигляд $x = 5 + 4t - t^2$ (м). Визначити:

– проекцій швидкості $\upsilon_x(t)$, прискорення $a_x(t)$ і пройденого шляху $S(t)$; показати їхні графіки;

– середні значення проекції швидкості $\langle \upsilon_x \rangle$ та модуля швидкості $\langle \upsilon \rangle$ на проміжку часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 6$ с.

$$\left(\langle \upsilon_x \rangle = -3{,}0\text{м/с};\quad \langle \upsilon \rangle = 3{,}4\text{м/с}\right)$$

1.32. Рівняння руху точки має вигляд $x = 3t - 2t^2$(м). Визначити:

– залежності від часу проекцій швидкості $\upsilon_x(t)$ та прискорення $a_x(t)$, а також пройденого шляху $S(t)$ і показати графіки цих залежностей на проміжку часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 5$ с;

– в який момент часу точка змінює напрям руху та яке прискорення a_x вона має в цей момент?

$$(0{,}75\text{с};\quad -4\text{м/с}^2)$$

1.33. Тіло рухається прямолінійно з початковою швидкістю υ_0 та протилежно напрямленим прискоренням $a = \alpha t$. Знайти:

– відношення t_1/t_2 часів руху тіла до точки повороту та повернення у вихідне положення;

– швидкість υ точки в момент повернення.

$$(1{,}37;\quad -2\upsilon_0)$$

1.34. Від потяга, що рухався рівномірно, відчепили останній вагон, який, рухаючись рівносповільнено, пройшов до зупинки шлях S. Який шлях за цей час пройшов потяг, якщо його швидкість не змінилась? Задачу розв’язати аналітично та за допомогою графіків швидкості.

$$(2S)$$

1.35. В рівноприскореному русі $(v_0 \neq 0)$ тіло за проміжок часу τ від певного моменту пройшло шлях *S*, причому його швидкість зросла в *n* разів. Знайти прискорення тіла.

$$\left(\frac{(n-1)}{(n+1)}\frac{2S}{\tau^2}\right)$$

1.36. Радіус-вектор точки змінюється за законом $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \beta t^2\vec{j}$ (м), де α, β – задані сталі, а $\vec{i}, \vec{j}$ – орти осей OX, OY. Визначити рівняння траєкторії точки $y(x)$ та залежностей від часу швидкості $\vec{v}(t)$ і прискорення $\vec{a}\,(t)$ та кута $\varphi(t)$ між ними.

$$\left(y = \frac{\beta}{\alpha^2}x^2;\ \vec{v}(t) = \alpha\vec{i} + 2\beta t\vec{j};\ \vec{a} = 2\beta\,\vec{j};\ v(t) = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2};\ a(t) = 2\beta;\ tg\varphi = \frac{\alpha}{2\beta t}\right)$$

1.37. Точка рухається в площині XOY згідно з рівнянням $\vec{r} = A\left(\vec{i}\sin\omega t + \vec{j}(1-\cos\omega t)\right)$, A та ω – додатні сталі, $\vec{i}, \vec{j}$ – орти осей. Визначити:

– рівняння траєкторії точки $y(x)$;
– швидкість v, прискорення a та напрям руху точки по траєкторії;
– кут α між векторами швидкості та прискорення;
– шлях S, який проходить точка за час τ.

$$\left(x^2 + (y-A)^2 = A^2;\ v = A\omega;\ a = A\omega^2;\ \alpha = 90°;\ S = A\omega\tau\right)$$

1.38. Тіло кинуто з поверхні землі під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с. Отримати числове рівняння траєкторії руху тіла $y = f(x)$ та визначити з нього горизонтальну дальність польоту тіла *S* і максимальну висоту підйому *H*. Взяти $g = 10$ м/с^2.

$$\left(y = x(1 - 0{,}025x), \text{м};\quad 20\,\text{м};\ 10\,\text{м}\right)$$

1.39. На рис. 1.7 показані траєкторії двох тіл, які кинуті з однієї точки й рухаються в одній вертикальній площині. Чи можливе зіткнення тіл, якщо вони кинуті одночасно?

(*Ні*)

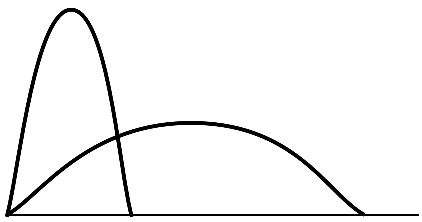


Рис. 1.7

1.40. Під яким кутом до горизонту треба кинути тіло з поверхні землі, щоби його дальність польоту була:

– найбільшою;

– рівною максимальній висоті підйому.

$(45°,\ \ 76°)$

1.41. З трьох труб, розташованих на землі, з однаковою швидкістю б'ють струмини води під кутом 30°, 45° і 60° до горизонту, відповідно. Знайти співвідношення між:

– найбільшими висотами підйому $H_1 : H_2 : H_3$ струмин; які витікають, відповідно, з кожної труби;

– відстанями $S_1 : S_2 : S_3$, на яких струмини падають на землю.

$(H_1 : H_2 : H_3 = 1 : 2 : 3; \qquad S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 1{,}155 : 1)$

1.42. Тіло, що кинуте зі швидкістю 25 м/с з поверхні землі під кутом до горизонту, перебувало в польоті 3 с. На якій відстані воно впало?

(60 м)

1.43. Під яким кутом α до горизонту було кинуто тіло, якщо його максимальна висота підйому виявилась у $\eta = 2$ рази більша, ніж дальність польоту?

$$\left(\alpha = \operatorname{arctg}(4\eta) \approx 83°\right)$$

1.44. Камінь, який кинуто горизонтально зі швидкістю 15 м/с, упав на землю під кутом 60° до горизонту. Знайти:

– з якої висоти було кинуто камінь?

– на якій відстані по горизонталі від точки кидання камінь впав на землю?

(34,4 м; 40 м)

1.45. Тіло, яке кинули з певної висоти під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту, впало на землю із швидкістю 10 м/с, перпендикулярною до початкової. Знайти час τ і горизонтальну дальність польоту S, а також висоту H, з якої було кинуто тіло.

$$\left(\tau = \frac{v}{g\cos\alpha} = 1{,}18\ \text{с};\quad S = \frac{v^2}{g}\operatorname{tg}\alpha = 5{,}9\ \text{м};\quad H = \frac{v^2}{2g}\left(1 - \operatorname{tg}^2\alpha\right) = 3{,}4\ \text{м}\right)$$

1.46. На довгу дошку, нахилену під кутом 30° до горизонту, з висоти 2 м над нею вільно падає і без утрати швидкості відлітає кулька. На якій відстані від точки падіння вона знов удариться об площину?

(8м)

Тангенціальне, нормальне та повне прискорення

1.47. Тіло кинуто під кутом 30° до горизонту із швидкістю 15 м/с. Знайти нормальне й тангенціальне прискорення та радіус кривизни траєкторії тіла у точці кидання та в найвищій точці підйому. Опором повітря знехтувати.

$(8{,}5\ \text{м/с}^2,\ 4{,}9\ \text{м/с}^2,\ 26{,}5\ \text{м}; \qquad 9{,}8\ \text{м/с}^2,\ 0,\ 17{,}2\ \text{м})$

1.48. Тіло кинуто горизонтально зі швидкістю v_0 з висоти h над поверхнею землі. Нехтуючи опором повітря, визначити:

– рівняння траєкторії руху тіла $y = f(x)$;
– залежність від часу модуля швидкості $v(t)$;
– залежність від часу нормального $a_n(t)$, тангенціального $a_\tau(t)$ та повного $a(t)$ прискорення;
– залежність від часу радіуса кривизни траєкторії тіла .

$$\left(y = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2; \quad v(t) = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}; \quad a_n = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}; \quad a_\tau = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}; \quad R = \frac{(v_0^2 + g^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{gv_0}. \right)$$

1.49. Байкер рухається по колу радіуса $R = 50$ м. Рівняння руху задано дуговою координатою $l(t) = 10 + 10t - 0{,}5t^2$ (м). Визначити швидкість байкера та його тангенціальне, нормальне і повне прискорення на момент t = 5 с.

$$\left(5\text{м/с}; \quad -1\text{м/с}^2; \quad 0{,}5\text{м/с}^2; \quad 1{,}1\text{м/с}^2\right)$$

1.50. Точка починає рухатися по колу з постійним тангенціальним прискоренням. Знайти кут φ між векторами швидкості та повного прискорення точки на моменти часу, коли вона пройшла 0,1, 0,25 і 0,9 довжини кола.

$$\left(51{,}5°; \approx 72{,}5°; \quad 85° \right)$$

1.51. Точка починає рівноприскорено рухатися по колу радіуса R. Який шлях вона пройде на момент, коли її повне прискорення складатиме кут $45°$ із напрямком руху?

$$\left(\frac{R}{2}\right)$$

1.52. Частинка рухається з початковою швидкістю v_0 = 2,0 м/с і постійним тангенціальним прискоренням a_τ = 4,0 м/с^2 по такій плоскій траєкторії, що кут між векторами швидкості та повного прискорення точки залишається незмінним і рівним $\varphi = 60°$. Знайти радіус кривизни траєкторії точки на момент t = 2,0 с від початку руху.

(14,4 м)

1.53. Частинка починає рухатися із сталим тангенціальним прискоренням по плоскій траєкторії такої форми, що її радіус кривизни в будь-якій точці дорівнює пройденому частинкою шляху. Знайти кут φ між векторами швидкості та повного прискорення частинки в довільній точці траєкторії. Який вигляд має траєкторія?

($\varphi = \text{arctg}2 \approx 63{,}4°$)

1.54. Частинка починає рухатися із сталим тангенціальним прискоренням 1,34 м/с^2 по плоскій кривій, радіус кривизни котрої в будь-якій точці дорівнює пройденому шляху. Визначити повне прискорення частинки в довільній точці траєкторії.

(3 м/с^2)

1.55. Кулька рухається по колу радіуса $R = 16$ м так, що залежність пройденого шляху від часу визначається рівнянням $l(t) = 2t^2$ (м). Знайти:

– момент часу, коли нормальне прискорення кульки зрівняється з тангенціальним;
– модуль і напрям її повного прискорення в цей момент.

$\left(2\text{с}; \quad 5{,}6\,\text{м/с}^2, 45°\textit{до напрямку руху}\right)$

1.56. Частинка рухається по дузі кола радіуса $R = 1{,}0$ м за законом $l = A\sin\omega t$, де l – дугова координата, A = 0,8 м, ω=2,0 с$^{-1}$. Визначити повне прискорення частинки в точках $l = \pm A$ та $l = 0$.

$(2{,}6\text{м/с}^2; \quad 3{,}2\text{м/с}^2)$

Рух із змінним прискоренням

1.57. Частинка починає рух уздовж осі OX з точки x = 0 так, що її швидкість $v = \alpha\sqrt{x}$, де $\alpha = 2\text{м}^{1/2}\cdot\text{с}^{-1}$. Визначити залежність швидкості та прискорення частинки від часу та її середню швидкість $\langle v \rangle$ на шляху 4 м.

$\left(v = 2t; \quad a = 2\ \text{м/с}^2; \quad \langle v \rangle = 2\text{м/с}\right)$

1.58. Точка рухається, сповільнюючись, по прямій з прискоренням, яке залежить від її швидкості за законом $a = \rho\sqrt{v}$, де $\rho = 2\ \text{м}^{1/2}/\text{с}^{3/2}$.
У момент t = 0 швидкість точки $v_0 = 4\text{м/с}$. Визначити:

– числові рівняння швидкості та прискорення точки;
– на якій відстані від початкового положення та через який час точка зупиниться;
– середню швидкість точки на цьому шляху.

$\left(v(t) = (2-t)^2\,\text{м/с};\ a(t) = 2(t-2)\,\text{м/с}^2; \quad 2{,}67\,\text{м};\ 2\text{с};\ 1{,}33\,\text{м/с}\right)$

1.59. Точка, що рухається по колу радіуса R із швидкістю v_0, в момент $t = 0$ починає сповільнюватися так, що її миттєві тангенціальне та нормальне прискорення лишаються однаковими. Визначити залежність швидкості та повного прискорення точки від часу *t* та від пройденого шляху *S*.

$$\left(v(t) = \frac{v_0 R}{v_0 t + R}, \quad a(t) = \frac{v_0^2 R\sqrt{2}}{(v_0 t + R)^2}; \quad v(s) = v_0 e^{-S/R}, \quad a(s) = \frac{v_0^2 R\sqrt{2}}{R} e^{-2S/R} \right)$$

1.60. Частинка починає рухатися з початку координат із прискоренням $\vec{a} = \alpha t\vec{i} + \beta t^2 \vec{j}$, де $\alpha = 3$ м/с^3, $\beta =$ 2,25 м/с^4, $\vec{i}, \vec{j}$ – орти. Знайти відстань частинки від початку координат на момент t = 2с.

(l = 5м)

1.61. Частинка рухається з прискоренням $\vec{a} = \alpha(\vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t)$, $\vec{i}, \vec{j}$ – орти. У момент t = 0 частинка перебувала в початку координат і мала швидкість $\vec{v}_0 = v_0 \vec{j}$. α, ω, v_0 – задані сталі. Знайти залежність від часу координат частинки $x(t)$, $y(t)$.

$$\left(x = \frac{\alpha}{\omega^2}(1 - \cos\omega t), \quad y = \left(v_0 + \frac{\alpha}{\omega} \right) t - \frac{\alpha}{\omega^2}\sin\omega t \right)$$

1.62. Катер в озері, що мав швидкість v_0, після зупинки двигуна починає уповільнюватися так, що проекція прискорення на напрям руху $a = -v_0 k e^{-kt}$, де k – задана стала. Який шлях пройде катер від початку вільного руху до зупинки?

$$\left(S = \frac{v_0}{k} \right)$$

Кінематика твердого тіла

1.63. Знайти відношення лінійних швидкостей та повних прискорень кінців хвилинної та годинної стрілок годинника, в якому хвилинна стрілка є в 1,5 раза довша за годинну.

(18; 216)

1.64. Визначити лінійну швидкістю екваторіальних точок Землі, прийнявши її радіус рівним 6380 км.

(464 м/с)

1.65. Стержень довжиною 50 см обертається з частотою 30 об/хв навколо перпендикулярної до нього осі, що лежить із стержнем в одній площині. Один з кінців стержня має лінійну швидкість 57 см/с. Чому дорівнює лінійна швидкість другого кінця стержня?

(1 м/с, *або* 2,14 м/с)

1.66. Швидкість точок колеса, що обертається, дорівнює на ободі 6 м/с, а на 15 см ближче до осі – 5,5 м/с. Знайти радіус колеса.

(1,8м)

1.67. Колесо обертається навколо нерухомої осі так, що кут повороту φ змінюється з часом t за законом $\varphi = kt^2$, $k = 0,2$ рад/с^2. Визначити повне прискорення точки на ободі колеса на момент $t = 2,5$ с, коли її лінійна швидкість складає $v = 0,65$м/с.

(0,7м/с^2)

1.68. Диск радіуса $R = 50$ см обертається навколо власної нерухомої осі за законом $\varphi = 3 - 2t + 0,01t^3$(рад). Визначити тангенціальне, нормальне та повне прискорення точок на ободі диска на момент $t = 10$ с.

(0,3м/с^2; 0,5м/с^2; 0,58м/с^2)

1.69. Ротор електродвигуна, що обертався з частотою 50 с$^{-1}$, після вимикання струму рівномірно гальмує й зупиняється, здійснивши 1680 обертів. Знайти кутове прискорення ротора.

(4,7 рад/с^2)

1.70. Маховик деякий час розкручують із стану спокою з деяким прискоренням, а після 100 обертів прискорення вдвічі зменшують і розганяють маховик ще такий самий час. Скільки всього обертів зробив маховик?

(350)

1.71. Маховик починає розкручуватись із сталим кутовим прискоренням 0,01 рад/с^2. Через який час кут між векторами повного прискорення та лінійної швидкості точок маховика досягне величини 80°? Скільки обертів зробить маховик на цей момент?

(23,8 с; 0,45)

1.72. Тверде тіло починає обертатися навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням $\beta = \alpha t$, де $\alpha = 2\cdot10^{-2}$ рад/с^3. Через який час τ кут між векторами повного прискорення та швидкості довільної точки тіла складе $\varphi = 60^o$?

$$\left(t = \sqrt[3]{\frac{4tg\varphi}{\alpha}} \approx 7 \text{ с} \right)$$

1.73. Маховик, який мав кутову швидкість 10 рад/с, почав гальмувати із прискоренням 0,25 рад/с^2. Знайти, кут повороту φ маховика та кількість здійснених ним обертів N на момент $t = 1{,}5$ хв .

$$\left(\varphi = -112{,}5 \text{ рад}, \quad N \approx 81{,}6\right)$$

1.74. Маховик, який обертається рівносповільнено, за час зменшення кутової швидкості від 300 рад/с до 100 рад/с здійснив 3000 обертів. Чому дорівнює кутове прискорення маховика?

(0,21 рад/с^2)

1.75. Диск обертається навколо власної осі з початковою кутовою швидкістю ω_0 = 10 рад/с і кутовим прискоренням $\beta = a - bt$, де a = 0,5 рад/с^2, b = 0,1 рад/с^3. Визначити, через який час t_0 він зупиниться і скільки обертів N здійснить.

(t_0 = 20 с; $N \approx 26$)

1.76. Розкручений маховик починає гальмувати так, що його кутова швидкість змінюється за законом $\omega = 100 - 10t + 0{,}25t^2$ (рад/с). Визначити початкову швидкість маховика ω_0 та швидкість ω на момент $t = 20$ с, а також середню швидкість $\langle\omega\rangle$ за цей проміжок часу.

$$\left(\omega_0 = 100 \text{ рад/с}, \quad \omega = 0, \quad \langle\omega\rangle = 33{,}3 \text{ рад/с}\right)$$

1.77. Тверде тіло обертається сповільнено навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням $\beta = k\sqrt{\omega}$, $k = 2\,\text{рад}^{1/2}\text{с}^{-3/2}$. У момент $t = 0$ кутова швидкість тіла $\omega_0 = 9\,\text{рад/с}$. Визначити середню кутову швидкість та середнє кутове прискорення тіла за весь час обертання.

(3 рад/с; 3 рад/с^2)

1.78. Точка обертається навколо нерухомої осі так, що її кутова швидкість залежить від кута повороту за законом $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$, де α – задана стала. В початковий момент часу кут $\varphi = 0$. Визначити залежність від часу:

– кута повороту $\varphi(t)$;
– кутової швидкості $\omega(t)$;
– кутового прискорення $\beta(t)$ тіла.

$$\left(\varphi(t) = \frac{\omega_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}); \quad \omega(t) = \omega_0 e^{-\alpha t}; \quad \beta = -\omega_0 \alpha e^{-\alpha t}\right)$$

1.79. Обруч (рис. 1.8) котиться горизонтальною площиною без ковзання із швидкістю v. Визначити миттєві швидкості точок А, В, С і D.

($2v$; $v\sqrt{2}$; 0; $v\sqrt{2}$)

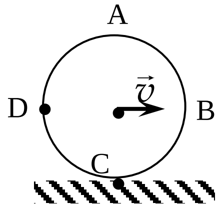


Рис.1.8

1.80. Обруч (рис. 1.9) рухається у власній площині так, що в даний момент швидкості його осі та точки С складають, відповідно, $v = 2$ м/с і $v_1 = 1$ м/с. Знайти швидкість верхньої точки (А) обруча .

(3 м/с, *або* 5 м/с)

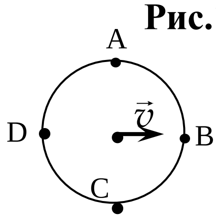


Рис.1.9

1.81. Обруч радіуса $R = 20$ см рухається в площині рис. 1.9 так, що в даний момент швидкості його осі та точки С збігаються за напрямом і складають, відповідно, $v = 1{,}5$ м/с і $v_c = 0{,}5$ м/с. Знайти:

– відстань $R_М$ від миттєвої осі до осі диска в цей момент;

– модуль $v_А$ швидкості точки А та її напрям (кут α між векторами $\vec{v}_А$ і $\vec{v}$).

$$\left(R_М = 30 \text{ см}; \quad v_А = 1{,}58 \text{ м/с}; \quad \alpha = 33{,}7°\right)$$

1.82. Обруч радіусом $R = 30$ см рухається в площині рис. 1.9 так, що в даний момент швидкості його осі О та точки С за величиною складають $v = 2$ м/с та $v_c = 1$ м/с і мають протилежні напрямки. Знайти:

– відстань $R_М$ від миттєвої осі до осі диска в цей момент;

– модуль вектора $\vec{v}_А$ швидкості точки А і його напрям (кут α із вектором $\vec{v}$).

$$\left(R_М = 20 \text{ см}; \quad v_А = 3{,}6 \text{ м/с}; \quad \alpha = 56{,}3°\right)$$

1.83. Трамвайне колесо котиться по рейці без ковзання (рис.1.10). Швидкості точок А і В відомі й дорівнюють $v_А$ і $v_В$. Знайти швидкість руху осі колеса.

$$\left(\frac{v_В^2 - v_А^2}{2v_В}\right)$$

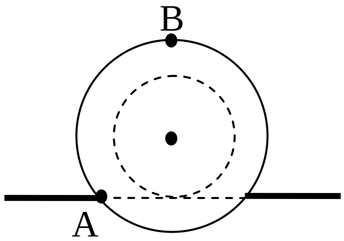


Рис. 1.10

1.84. Обруч радіуса $R = 0{,}50$ м котиться прямолінійно без ковзання по горизонтальній площині зі швидкістю $v = 1{,}0$ м/с. Визначити:

– модуль та напрям прискорення довільної точки на поверхні кулі;

– шлях, який проходить ця точка за час між двома послідовними дотиками до площини.

(2 м/с^2, *до центра колеса*; 4 м)

Рух у різних системах відліку

1.85. На передньому краї платформи, що проїжджає повз спостерігача на пероні, на невеликій висоті закріплено пружинний пістолет, з якого роблять "постріл" кулькою проти напрямку руху платформи. Проаналізувати, як буде рухатися кулька після спуску "курка" для стрільця та для спостерігача, якщо швидкість вильоту кульки з пістолета дорівнює швидкості платформи.

1.86. З однієї точки кинуто два тіла із заданими швидкостями $\vec{v}_{01}$ і $\vec{v}_{02}$. Записати у векторній формі рівняння руху $\vec{r}=\vec{r}\left(t\right)$ одного тіла відносно іншого. З яким прискоренням та по якій траєкторії відбувається цей рух?

1.87. Два тіла одночасно кинуто з однаковою початковою швидкістю v_0 = 10 м/с одне під кутом α_1 = 15°, а інше – під кутом α_2 = 75° до горизонту. Знайти відстань S між тілами через τ = 2,5 с після початку руху. Задачу розв'язати в системі відліку пов'язаній: а) із землею і б) з одним із тіл.

$$\left(S = 2v_0 \sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\cdot\tau = 25\text{м}\right)$$

1.88. Відстань між двома причалами моторний човен проходить за течією за 10 хв, а проти течії – за 30 хв. За який час цю відстань пропливе рятувальний круг, який випав із човна при відчалюванні.

(30хв)

1.89. Між двома пунктами, розташованими на річці на відстані 100 км один від одного курсує катер. Катер проходить цю відстань за течією за 4 год, а проти течії за 10 год. Визначити швидкість течії та швидкість катера відносно води.

$(7{,}5\,\text{км/год};\quad 17{,}5\,\text{км/год})$

1.90. При проходженні по річці повз бакен із катера випав рятівний круг. Пропажу виявили через 10 хв. і, повернувши назад, зустріли її на відстані 1,5 км від бакена. Знайти швидкість течії. Розглянути задачу в системі відліку бакена і в системі відліку круга.

(4,5 км/год)

1.91. Два авто рухаються по прямих дорогах під кутом 120° одне до одного із швидкостями 58 км/год і 80 км/год. З якою швидкістю одне авто рухається відносно іншого?

(120 км/год)

1.92. Від бакена одночасно відпливли два моторні човни – один за течією, а інший упоперек. Відійшовши на однакову відстань від бакена, човни повертають назад. Визначити відношення часів руху човнів t_1/t_2 від відплиття до повернення до бакена, якщо швидкість кожного в стоячій воді в η = 1,2 разів більша за швидкість течії.

$$\left(\frac{t_1}{t_2} = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} = 1{,}81\right)$$

1.93. Коли футболіст виконує штрафний удар, то швидкість його бутса лишається сталою й рівною v = 20 м/с. Нехтуючи тертям об газон і вважаючи м'яч абсолютно пружним, знайти, яку швидкість отримає м'яч при ударі. *Вказівка: розглянути задачу в системі відліку бутса.*

(40 м/с.)

Вказівка. *Задачі 1.91 – 1.96 розглянути в системі відліку плити.*

1.94. Кулька, що рухається із швидкістю $\vec{v}_1$, пружно вдаряє по нормалі у масивну плиту, що рухається вздовж тієї самої прямої із швидкістю $\vec{V}$. Знайти швидкість кульки $\vec{v}_2$ після удару.

$$\left(\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 + 2\vec{V}\right)$$

1.95. Кулька, котра без тертя рухається по горизонтальній поверхні із швидкістю v, наздоганяє і по нормалі вдаряє в масивну вертикальну плиту, що рухається у тому самому напрямі з незмінною швидкістю V. Удар абсолютно пружний. При якій величині v кулька після удару змінить напрям руху?

$$\left(v > 2V\right)$$

1.96. М'яч, який летить із швидкістю 5 м/с, пружно вдаряє по нормалі в масивну вертикальну плиту, що рухається у тому самому напрямі. Знайти швидкість плити, якщо після удару м'яч відскакує із швидкістю 1 м/с.

(1 м/с)

1.97. М'яч, який летить із швидкістю 5 м/с і пружно вдаряє по нормалі в рухому масивну вертикальну плиту, по тому продовжує рух без зміни напрямку із швидкістю 1 м/с. Знайти швидкість плити.

(3 м/с)

1.98. М'яч, який летить із швидкістю 5 м/с, пружно вдаряє по нормалі в масивну вертикальну плиту, що рухається у тому самому напрямку. Знайти швидкість плити, якщо після удару м'яч зупиняється (падає)?

(2,5 м/с)

1.99. На масивну плиту, що рухається вгору зі сталою швидкістю 1 м/с, падає й пружно відбивається м'яч, який на момент удару мав швидкість 3 м/с. Яку відстань до зупинки пролетить після удару м'яч: а) відносно плити і б) відносно землі. g = 10 м/с^2.

(0,8 м; 1,25 м)

1.2. Динаміка

- Другий закон Ньютона (основне рівняння динаміки):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}, \quad \text{або} \quad m\vec{a}=\vec{F} \quad (m=const).$$

- Диференціальне рівняння руху матеріальної точки в класичній механіці

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\vec{F}.$$

- Рівняння руху матеріальної точки в неінерціальній системі відліку:

$$ma=\vec{F}+\vec{F}_{ін}.$$

- Сили інерції:

$$\vec{F}_{пост}=-m\vec{a}_0; \quad \vec{F}_{відц}=m\omega^2\vec{r}; \quad \vec{F}_{кор}=2m\left[\vec{v}\,\vec{\omega}\right].$$

- Положення та рівняння руху центра мас системи:

$$\vec{r}_c=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}; \quad m\vec{a}_c=\vec{F}_{зов}.$$

- Зміна імпульсу системи:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_{зов}; \quad \Delta\vec{p}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{зов}\mathrm{d}t.$$

Закони Ньютона

1.100. Чи можливий рух тіла, коли

– на нього не діють ніякі сили?;
– сили, що діють на нього є компенсованими?

1.101. Укажіть всі ознаки того, що на тіло:

– діють якісь сили;

– не діють ніякі сили.

1.102. Що покаже динамометр, якщо до його кінців прикласти протилежні за напрямом сили $F_1 = 10$ Н і $F_2 = 15$ Н?

1.103. Гранична сила натягу, яку витримує нитка, дорівнює 150 Н. Чи розірветься вона, якщо:

– один кінець прикріпити до стіни, а за другий потягти із силою 150 Н?
– розтягати її за кінці із силами по 150 Н?

1.104. Два тягарці з масами m_1 і $m_2 = 2m_1$ з'єднані ниткою та підвішені до стелі на гумовому шнурі прикріпленому до першого тягарця. Визначити силу натягу шнура $\vec{F}$ та прискорення кожного із тягарців одразу після того, як нитку перерізали. Нитку та шнур вважати невагомими.

$$\left(\vec{F} = -3m\vec{g}, \quad \vec{a}_1 = -2\vec{g}, \quad \vec{a}_2 = \vec{g}\right).$$

1.105. Тіло падає з великої висоти й пружно (без утрати швидкості) відбивається від горизонтальної поверхні. Яким є вектор прискорення тіла відразу після відскоку а) без і б) з урахуванням опору повітря?

$$\left(\ a)\ \vec{g}; \quad б)\ 2\vec{g}\right)$$

1.106. До гладенької вертикальної стінки на нитці довжиною 4 см підвішено кулю масою 0,3 кг і радіусом 2,4 см, рис. 2.1. Знайти силу тиску кулі на стінку.

(1,25 Н)

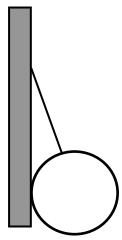


Рис. 2.1

1.107. Брусок маси m, який притиснутий до вертикальної стіни перпендикулярною до неї силою, перебуває в спокої. Потім брусок починають тягти по стіні у вертикальному напрямку. На скільки відрізняються сили, що необхідні для пересування бруска вгору та вниз?

($2mg$)

1.108. До накинутої на нерухомий блок нитяної петлі приєднана така сама нитка (рис. 2.2). Нитку починають тягти за вільний кінець із деякою силою F. Якщо величину F поступовому збільшувати, то що розірветься – нитка чи петля – при заданій величині кута α?

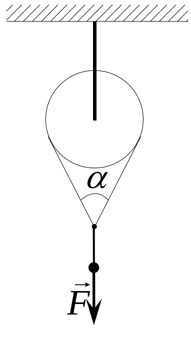


Рис. 2.2

1.109. Два бруски $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 4$ кг з'єднані невагомою пружиною. Якщо підвісити систему за перший брусок, то довжина пружини складе 10 см, а при підвішуванні за другий брусок вона дорівнює 7,5 см. Знайти довжину вільної пружини.

(5 см)

1.110. Два бруски m_1 = 2 кг і m_2 = 4 кг з'єднані невагомою пружиною. Якщо підвісити систему за перший брусок, то довжина пружини складає 10 см, а якщо систему поставити вертикально першим бруском догори, то довжина пружини дорівнює 2,5 см. Знайти довжину вільної пружини.

(5 см)

1.111. Дві пружини з коефіцієнтами жорсткості k_1 і k_2 з'єднані: а) послідовно, б) паралельно. Знайти жорсткість k однієї пружини, якою можна замінити з'єднання.

$$\left(a)\ k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \quad б)\ k = k_1 + k_2 \right)$$

1.112. Кулька прикріплена до планки двома нитками, як показано на рис. 2.3. Із яким максимальним прискоренням можна підіймати кульку за планку, якщо α = 60° і максимальний допустимий натяг кожної нитки дорівнює вазі кульки?

(≈ 7 м/с)

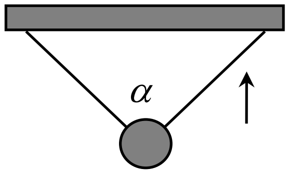


Рис. 2.3

1.113. Людина на баржі відштовхується від причалу за допомогою жердини, до якої прикладає постійне зусилля 400 Н. На яку відстань відійде від причалу баржа за 30 с, якщо її маса становить 300 т?

(0,6 м)

1.114. Брусок маси 5 кг ковзає по гладкій похилій площині з кутом нахилу до горизонту 30°. Знайти:

– з якою силою брусок тисне на площину;
– яку швидкість буде мати брусок через 2 секунди руху.

(≈ 42 Н; 9,8 м/с)

1.115. Два з'єднані ниткою бруски прискорено ковзають по гладкій горизонтальній поверхні під дією горизонтальної сили 30 Н, яка прикладена до одного з них. Яка сила діє на інший брусок, якщо їхні маси відрізняться удвічі?

(10 Н *або* 20 Н)

1.116. Із навантажених платформ різної маси складають потяг. У якій послідовності платформи слід приєднувати до локомотива, щоби потяг можна було розганяти з максимально можливим прискоренням?

1.117. Автомобіль завантажений двома контейнерами рушає з місця із прискоренням 0,5 м/с^2. Маса кожного контейнера дорівнює масі автомобіля, коефіцієнт опору складає 0,1. Яким було би прискоренням автомобіля при завантаженні лише одним контейнером і тій самій силі тяги?

(1,5 м/с^2)

1.118. При масі M_0 повітряна куля зависає в повітрі, а при масі M_1 – рівномірно підіймається вгору. При якій масі M_2 куля буде рівномірно спускатися вниз із такою самою швидкістю?

($M_2 = 2M_0 - M_1$)

1.119. Повітряна куля масою M = 420 кг опускається з певною сталою швидкістю. Яку масу баласту m має скинути аеронавт, аби куля почала підійматися з тією ж швидкістю, якщо сила опору повітря складає η = 5% від підіймальної сили?

$$\left(m = \frac{2\eta}{1+\eta} M = 40 \text{ кг} \right)$$

1.120. Знайти силу тертя, що діє на брусок маси 10 кг, покладений на дошку з коефіцієнтом тертя 0,5, яка розташована:

- горизонтально;
- під кутом 20° до горизонту;
- під кутом 30° до горизонту.

(0; ≈34 Н ≈43 Н)

1.121. До бруска маси 5 кг, який знаходиться на горизонтальній поверхні, прикладена горизонтальна сила 4 Н. Знайти прискорення бруска та силу тертя, що діє на нього при коефіцієнті тертя: а) 0,05 і б) 0,1. g = 10 м/с^2.

(а) 0,3 м/с^2, 2,5 Н; б) 0 м/с^2, 4 Н)

1.122. Чому дорівнює найменший час та шлях розгону з місця авто до швидкості 144 км/год при коефіцієнті тертя ковзання між колесами та дорогою 0,25? g = 10 м/с^2.

(16 с; 320 м)

1.123. Брусок під дією деякої горизонтальної сили рухається по горизонтальній поверхні з прискоренням 2,0 м/с^2. Потім, не змінюючи сили, на нього кладуть ще один такий самий брусок. З яким прискоренням рухатимуться бруски, якщо ковзання між ними відсутнє, і коефіцієнт тертя з поверхнею дорівнює 0,1? g = 10 м/с^2.

(0,5 м/с^2).

1.124. До бруска маси m, розташованого на дошці маси $M = \eta m$, що лежить на підлозі, прикладають

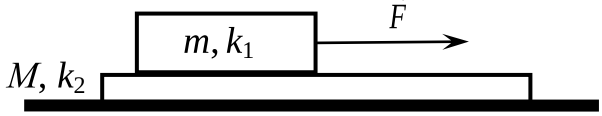


Рис. 2.4

горизонтальну силу F, рис. 2.4. Величини m, η і коефіцієнти тертя між бруском і дошкою k_1 та дошкою і поверхнею k_2 задано. Визначити, за яких умов брусок
буде ковзати по дошці, а дошка – по підлозі.

$$\left(\frac{F}{mg} > (k_1 - k_2)\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \text{ при } \frac{k_1}{k_2} > 1 + \eta\right)$$

1.125. Тіло тягнуть за нитку по горизонтальній площині, прикладаючи однакову силу один раз горизонтально, а другий – під кутом α = 23° до горизонту. Знайти коефіцієнт тертя між тілом і площиною, якщо прискорення тіла в обох випадках однакове.

$$\left(k = tg\frac{\alpha}{2} = 0,2\right)$$

1.126. Брусок маси m лежить на горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя k. Яку мінімальну силу треба прикласти до бруска, щоб він почав рухатись?

$$\left(\frac{kmg}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$

1.127. Брусок хочуть пересунути по горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя k, штовхаючи його під кутом α до горизонту. При яких значеннях α цього буде неможливо зробити?

$$\left(\alpha > \mathrm{arc\,tg}(1/k)\right)$$

1.128. Рівномірно пересувати завантажений ящик, штовхаючи його під кутом 30° до горизонту, вдвічі важче, ніж тягти за мотузку під таким самим кутом. Чому дорівнює коефіцієнт тертя між ящиком і підлогою?

$$\left(1/\sqrt{3}\right)$$

1.129. Коефіцієнт тертя між бруском маси m та похилою площиною, на якій він знаходиться, дорівнює k. Визначити та показати на графіку залежність $F(\alpha)$ сили тертя, що діє на брусок, від кута нахилу площини до горизонту.

1.130. Брусок масою 1 кг знаходиться на похилій площині з коефіцієнтом тертя 0,6. Чому дорівнює рівнодійна сил, які діють на брусок, при куті нахилу площини до горизонту: а) 45° і б) 30°? g = 10 м/с^2.

(а) 2,8 Н; б) 0)

1.131. Аби оцінити коефіцієнт тертя k дерева по дереву, дошку з покладеним на неї дерев’яним бруском підіймають за один кінець і визначають її кут нахилу α, при якому брусок починає ковзати. Чому дорівнює k при α = 14°?

(k = tgα = 0,25)

1.132. На клині, що рухається по горизонтальній поверхні праворуч з прискоренням *a*, знаходиться брусок маси *m* (рис. 2.5). При якій величині a брусок не буде ковзати

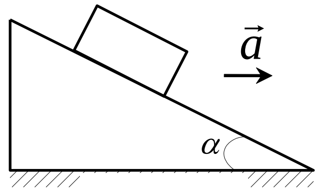


Рис. 2.5

по клину та з якою силою *F* він при цьому буде тиснути на клин? Тертя немає.

$$\left(a = g\,\mathrm{tg}\alpha; \quad F = \frac{mg}{\cos\alpha} \right)$$

1.133. Через нерухомий блок установлений на вершині площини з кутом нахилу α до горизонту перекинуто нитку з двома брусками однакової маси $m_1 = m_2 = m$, один з яких лежить на площині, а другий звисає і спирається на підставку. Визначити,

– при якому найменшому коефіцієнті тертя k між першим бруском і площиною система залишиться зрівноваженою, якщо підставку прибрати;
– яка сила тертя F діє в такому випадку на перший брусок.

$$\left(k = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad F = mg\left(1-\sin\alpha\right) \right)$$

1.134. Через нерухомий блок установлений на вершині площини з кутом нахилу α = 30ºдо горизонту перекинуто нитку з двома брусками так, що перший лежить на дошці, а другий звисає. Коефіцієнт тертя між першим бруском і дошкою складає 0,23, тертя в осі блока відсутнє. В якому напрямку та з яким прискоренням рухатимуться бруски, якщо їхні маси відносяться як а) $m_1 : m_2 = 6:5$ і б) $m_1 : m_2 = 5:1$?

$\left(\text{а) } 0{,}7;\ \text{б) } 0{,}8 \text{ м/с}^2\right)$

1.135. Тіло, яке спрямували вгору по похилій площині з кутом нахилу до горизонту α = 45°, досягло найвищої точки підйому за час t_1 = 1,3 с. За який час t_2 тіло повернеться у вихідну точку при коефіцієнті тертя k = 0,4?

$$\left(t_2 = t_1\sqrt{\frac{\mathrm{tg}\alpha + k}{\mathrm{tg}\alpha - k}} \approx 2\,\text{с} \right)$$

1.136. Тіло пустили із початковою швидкістю v угору по похилій площині з кутом нахилу α до горизонту. Через який час t швидкість тіла знову буде рівна v, при коефіцієнті тертя k (< tgα)?

$$\left(t = \frac{2v}{g}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha - k^2\cos^2\alpha} \right)$$

1.137. Тіло масою m = 50 кг притискають до похилої площини горизонтальною силою F = 300 Н. З яким прискорення і в якому напрямку рухається тіло та з якою силою воно діє на площину при куті її нахилу до горизонту $\alpha = 30°$. Тертя відсутнє, g = 10 м/с^2.

(0,2 м/с^2 *вгору*; 583 Н)

1.138. На тіло маси m, яке знаходиться на похилій площині з кутом нахилу до горизонту α, діє горизонтальна сила F, що притискає його до площини. При яких значеннях F тіло буде перебувати в спокої, якщо коефіцієнт тертя $k < \mathrm{tg}\alpha$?

$$\left(\frac{\mathrm{tg}\alpha - k}{1 + k\mathrm{tg}\alpha} mg \le F \le \frac{\mathrm{tg}\alpha + k}{1 - k\mathrm{tg}\alpha} mg\right)$$

1.139. На клині з кутом α, що закріплений на горизонтальній поверхні, лежить брусок маси m (рис. 2.6). Коефіцієнт тертя між бруском і клином k ($k > \mathrm{tg}\alpha$). Яку найменшу силу, паралельну до ребра клина, треба прикласти до бруска, щоб він почав рухатись? В якому напрямі почне рухатися брусок?

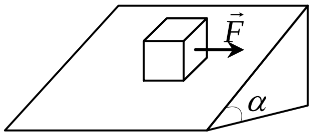


Рис. 2.6

$$\left(F = mg\sqrt{k^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}; \quad \textit{під кутом } \beta = \arcsin\left(\frac{\mathrm{tg}\alpha}{k}\right) \textit{ до } \vec{F}\right)$$

1.140. Тіло рухається по горизонтальній площині під дією сили F, що напрямлена вгору під кутом α до горизонту. Знайти прискорення тіла, якщо коефіцієнт тертя між ним і площиною дорівнює k. За яких умов рух тіла буде рівномірним?

$$\left(a = \frac{F}{m}(\cos\alpha + k\sin\alpha) - kg\,; \quad k = \frac{F\cos\alpha}{mg - F\sin\alpha}\right)$$

1.141. На краю горизонтальної платформи радіуса R = 4,85 м лежить маленька шайба. Платформа починає рівноприскорено обертатися навколо своєї осі так, що через t_0 = 2 хв. набуває кутової швидкості ω_0 = 1,2 рад/с. Через який час τ шайба зісковзне з платформи, якщо коефіцієнт тертя між тілами k= 0,02?

$$\left(\tau = \sqrt{\frac{t_0}{\omega_0}}\sqrt[4]{\left(\frac{kgt_0}{\omega_0 R}\right)^2 - 1} = 20\,\mathrm{c}\right)$$

1.142. Кулька, котра підвішена до стелі на нитці довжиною l = 4 м, обертається по колу в горизонтальній площині так, що нитка складає кут α = 30° із вертикаллю. З якою швидкістю v рухається кулька? g = 10 м/с^2.

$$\left(v = \sqrt{\frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} = 3{,}4 \text{ м/с}\right)$$

1.143. Із якою максимальною швидкістю може обертатися по колу в горизонтальній площині тягарець підвішений на нерозтяжній нитці довжиною l = 1,7 м, яка витримує подвоєну вагу тягарця?

$$\left(\sqrt{\frac{3gl}{2}} = 5\ \text{м/с}\right)$$

1.144. Кулька маси m = 200 г, яка підвішена до стелі на нитці довжиною l = 3,0 м, обертається в горизонтальній площині по колу радіуса r = 1,0 м. Знайти частоту обертання кульки та натяг нитки.

$$\left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)\sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2 - r^2}}} = 17{,}8\,\text{об/хв};\quad \frac{mg}{\sqrt{1-(r/l)^2}} = 2{,}1\text{Н}\right)$$

1.145. Зрівноважена кулька на гумовій нитці довжиною $l_0 = 1{,}25$ м розтягає її вдвічі. При якій швидкості v колового руху кульки в горизонтальній площині нитка буде відхилена від вертикалі на кут $\alpha = 45°$? g = 10 м/с^2.

$$\left(v = \text{tg}\,\alpha \cdot \cos(\alpha/2)\sqrt{2gl_0} = 4{,}6\ \text{м/с}\right)$$

1.146. На трасі кросу мотоцикліст натрапляє на пагорб із радіусом кривизни поверхні у вершині $R = 40$ м. При якій найменшій швидкості мотоцикліст, проходячи пагорб, відірветься від землі? g = 10 м/с^2.

$$\left(v = \sqrt{gR} = 72\ \text{км/год}\right)$$

1.147. При якій швидкості мотоцикліст зможе рухатися, не падаючи, по вертикальній циліндричній стіні радіуса $R = 10$ м при коефіцієнті тертя k = 0,25?

$$\left(v \ge \sqrt{\frac{gR}{k}} = 72\ \text{км/год}\right)$$

1.148. Літак робить “ мертву петлю ” радіуса R = 500 м із сталою швидкістю v = 360 км/год. Знайти, з якою силою пілот масою m = 70 кг тисне на сидіння в нижній, верхній та середніх точках петлі. g = 10 м/с^2.

(2,1 кН; 0,7 кН; ≈1,6 кН)

1.149. Координати тіла маси m, яке рухається в площині XOY, визначаються як $x = A\sin\omega t$ і $y = A\cos\omega t$, де A, ω – сталі. Знайти:

– траєкторію руху тіла;
– силу, що діє на тіло, та величину і напрям його прискорення;
– величину швидкості тіла та напрям руху по траєкторії.

Рух під дією змінної сили

1.150. Тіло маси 1 кг рухається уздовж осі OX згідно з рівнянням $x = 5 + 10t - 0{,}1t^3$, всі величини в основних одиницях СІ. Знайти величину сили, що діє на тіло в момент повернення у вихідне ($t = 0$) положення.

(6 Н)

1.151. Радіус-вектор точки маси m = 1,0 кг змінюється з часом за законом $\vec{r}(t) = a_1(t+\tau)^2\vec{i} + a_2(t-\tau)^3\vec{j}$, де a_1 = 30 м/с^2, a_2 = 1,0 м/с^3, τ = 10 с, $\vec{i}, \vec{j}$ – орти. Визначити:

– вектор діючої на точку сили $\vec{F}(t)$, його модуль F_0 і кут α_0, який він складає з віссю OX у початковий момент часу;
– проміжок часу, за який напрям сили зміниться на 90°.

$$\left(\vec{F}(t) = 2m\left(a_1\vec{i} + 3a_2(t-\tau)\vec{j}\right),\ F_0 \approx 85\,\text{Н},\ \alpha_0 = 45^\circ;\quad 20\ \text{с.}\right)$$

1.152. Тіло маси m починає рухатися під дією сили, що залежить від часу, як $\vec{F}(t) = \alpha_1 t\vec{i} + \alpha_2 t^2\vec{j}$, де α_1 і α_2 задані сталі, $\vec{i}, \vec{j}$ – орти. Визначити залежності від часу швидкості $\vec{v}(t)$ та переміщення $\vec{S}(t)$ тіла.

$$\left(\vec{v} = \frac{1}{6m}\left(3\alpha_1 t^2\vec{i} + 2\alpha_2 t^3\vec{j}\right);\quad \vec{S} = \frac{1}{12m}\left(2\alpha_1 t^3\vec{i} + \alpha_2 t^4\vec{j}\right)\right)$$

1.153. Тіло маси m = 1 кг починає рух під дією сили $\vec{F} = \vec{F}_0\left(1 - (t/\tau)\right)$, де $F_0 = 5\,\text{Н}$, $\tau = 10\,\text{с}$. Знайти швидкість тіла через t = 10 с після початку руху.

$$\left(\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}\left(t - \frac{t^2}{2\tau}\right);\quad v = 25\,\text{м/с}\right)$$

1.154. До тіла маси m, яке лежить на горизонтальній поверхні, прикладена вертикальна сила $F = \alpha t$, де α – задана стала. Знайти рівняння руху тіла $y = y(t)$.

$$\left(\begin{array}{l} t \le t_0:\quad y = 0;\quad t_0 = \dfrac{mg}{\alpha}; \\[2ex] t \ge t_0:\quad y = \dfrac{\left(\alpha(t-t_0) - mg\right)(t-t_0)^2}{2m}. \end{array}\right)$$

1.155. Частинка масою m почала рухатись під дією сили $F = F_0 \cdot \sin\omega t$, де F_0 та ω – сталі. Знайти та показати на графіку залежність від часу пройденого частинкою шляху $S(t)$.

$$\left(S(t) = \frac{F_0}{m\omega^2}\left(\omega t - \sin\omega t\right)\right)$$

1.156. Після встановлення рівномірного руху парашутист спускається із швидкістю 4 м/с. Яким було прискорення парашутиста на момент, коли швидкість спуску становила 3 м/с? Силу опору повітря вважати прямо пропорційною швидкості парашутиста.

$$\left(\frac{g}{4}\right)$$

1.157. Катер масою m рухається по озеру зі швидкістю v_0. В момент $t = 0$ його двигун вимкнули. Приймаючи, що сила опору є пропорційною швидкості катера $\vec{F} = -r\vec{v}$, знайти швидкість катера в залежності від часу $v(t)$ та від пройденого шляху $v(s)$, а також повний шлях до зупинки S_{max}.

$$\left(v(t) = v_0 e^{-\frac{r}{m}t}; \quad v(s) = v_0 - \frac{r}{m}s; \quad S_{\max} = \frac{mv_0}{r}\right)$$

1.158. Куля, що має швидкість v_0, пробиває дошку товщини h і вилітає з неї зі швидкістю v. Знайти час руху кулі в дошці, вважаючи силу опору пропорційною квадратові швидкості.

$$\left(t = \frac{h(v_0 - v)}{v_0 v \ln(v_0/v)}\right)$$

1.159. Тягарець, що висить на пружині, розтягує її на величину X_0. Потім тягарець піднімають до положення, в якому пружина не розтягнена, й без поштовху відпускають. Знайти максимальне видовження пружини та максимальну швидкість тягарця.

$$\left(2X_0; \quad \sqrt{gX_0}\right)$$

1.160. Маленька шайба починає зісковзувати вниз по площині, що нахилена під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту й має змінний коефіцієнт тертя $k = \eta x$, де η = 0,5 1/м, а x – відстань, яку пройшла шайба. Знайти максимальну швидкість шайби v_m та шлях S_m, який вона пройде до зупинки.

$$\left(v_m = \sin\alpha\sqrt{\frac{g}{\eta\cos\alpha}} \approx 3{,}7\text{м/с}; \quad S_m = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\eta} = 4{,}0\text{м}\right)$$

Неінерціальні системи відліку

1.161. З яким горизонтальним прискоренням повинна рухатися вертикальна стінка, щоб прикладена до неї гумова шайба не падала при коефіцієнті тертя між шайбою та стінкою k = 0,5. Задачу розглянути в системі відліку стінки.

$(2g)$

1.162. На гладкій горизонтальній поверхні лежить дошка маси M, а на ній – шайба маси m. Яку мінімальну горизонтальну силу треба прикласти до дошки, щоби шайба почала ковзати по ній при коефіцієнті тертя k? Задачу розглянути в системі відліку дошки.

$$\left(k(M+m)g\right)$$

1.163. На похилій площині із заданими кутом нахилу до горизонту α і коефіцієнтом тертя $k > \mathrm{tg}\alpha$ лежить брусок. Із якими значеннями прискорення a слід горизонтально рухати площину, аби брусок після вивільнення не ковзав по ній?

$$\left(a \le \frac{k-\mathrm{tg}\alpha}{1+k\,\mathrm{tg}\alpha}\right)$$

1.164. На похилій площині із заданими кутом нахилу до горизонту α і коефіцієнтом тертя $k < \mathrm{tg}\alpha$ утримують у рівновазі брусок. Із якими значеннями прискорення a слід горизонтально рухати площину, аби брусок після вивільнення не ковзав по ній?

$$\left(\frac{\mathrm{tg}\alpha-k}{1+k\,\mathrm{tg}\alpha}g \le a \le \frac{\mathrm{tg}\alpha+k}{1-k\,\mathrm{tg}\alpha}g\right)$$

1.165. Людина маси m = 60 кг іде рівномірно по краю горизонтальної круглої платформи радіуса R = 3,0 м, яку обертають із кутовою швидкістю ω = 1 рад/с навколо її власної вертикальної осі. Знайти горизонтальну складову сили, що діє на людину з боку платформи, якщо результуюча сил інерції, прикладених до неї у системі відліку платформи, дорівнює нулю.

$$\left(F = \frac{m\omega^2 R}{4} = 45\,\text{Н}\right)$$

1.166. По горизонтальному диску, що обертається навколо власної вертикальної осі з кутовою швидкістю $\omega = 6$ рад/с, рівномірно рухається тіло масою $m = 0{,}5$ кг із швидкістю v' = 50 см/с відносно диска. Знайти горизонтальну силу, з якою диск діє на тіло в момент, коли воно знаходиться на відстані r = 30 см від осі й рухається відносно диска:

а) вздовж діаметра;
б) по прямій перпендикулярно до діаметра.

(а) 6,2 Н; б) 8,4 Н, або 5,5 Н)

1.167. Тіло маси m = 1кг рухається уздовж меридіана зі швидкістю v' = 30 м/с. Визначити величину відцентрової $F_{вц}$ і коріолісової $F_к$ сил інерції, що діють на тіло внаслідок добового обертання Землі у випадку, коли воно знаходиться: а) на широті $\varphi = 60°$ і б) на екваторі. Показати на рисунку вектори цих сил.

(а) $F_{вц}$ =1,7 $\cdot 10^{-2}$ Н; $F_к$ = 3,8$\cdot 10^{-3}$Н; б) $F_{вц}$ =3,4 $\cdot 10^{-2}$ Н; $F_к$ = 0)

1.168. Поїзд маси m = 2000 т рухається на північній широті φ = 60°. Знайти:
– модуль і напрям сили бічного тиску поїзда на рейки, якщо він рухається уздовж меридіана зі швидкістю v = 54 км/год;
– у якому напрямі і з якою швидкістю мав був би рухатися поїзд, аби результуюча сил інерції, що діють на потяг в системі відліку «Земля», дорівнювала нулю.

$\left(F = 3780\,\text{Н}\right.$, *праворуч по ходу*; $\left. v \approx 420 \text{ км/год}, \textit{ на захід}\right)$

1.169. Гладкий горизонтальний диск обертають із кутовою швидкістю ω = 5,0 рад/с навколо власної вертикальної осі. В центрі диска помістили невелику шайбу масою m = 60 г і надали їй поштовхом горизонтальну швидкість v_0 = 2,6 м/с. Знайти модуль сили Коріоліса, що діє на шайбу в системі відліку диска через t = 0,5 с після початку її руху.

$$\left(F = 2m\omega v_0\sqrt{1+(\omega t)^2} = 4{,}2\text{ Н}\right)$$

1.170. Горизонтально розташований гладкий стержень обертають із кутовою швидкістю ω =2,0 рад/с навколо вертикальної осі, що проходить через його кінець. По стержню ковзає муфта маси m = 0,5 кг, швидкість якої при проходженні указаної осі має величину v_0 = 1 м/с. Знайти силу Коріоліса (у системі відліку стержня) що буде діяти на муфту, коли вона опиниться на відстані r = 50 см від осі.

$$\left(F = 2mr\omega^2\sqrt{1+\left(\frac{v_0}{\omega r}\right)^2} = 2{,}8\text{ Н}\right)$$

1.171. Рушницю навели на вертикальну лінію мішені, що знаходиться точно в північному напрямі, й вистрелили. Нехтуючи опором повітря, знайти, на яку відстань h і в який бік відхилиться куля від указаної лінії при влучанні в мішень. Постріл зроблено в горизонтальному напрямі на широті φ = 60°, швидкість кулі v = 900 м/с, відстань до мішені S = 1,0 км.

$$\left(h \approx \frac{2\pi S^2 \sin\varphi}{vT} = 7\text{см}, \quad T - \textit{тривалість доби}\right)$$

1.172. На екваторі з висоти h = 500 м на поверхню Землі вільно падає тіло. Нехтуючи опором повітря, знайти, на яку відстань S і в який бік відхилиться тіло від вертикалі при падінні.

$$\left(\textit{на схід}, \quad S \approx \frac{4\pi h}{3T}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 24\text{ см}, \quad T - \textit{тривалість доби}\right)$$

1.173. Знайти, який кут α із горизонтом складає поверхня води в річці на широті φ через дію сили Коріоліса, якщо річка тече з півночі на південь зі швидкістю v.

$$\left(\mathrm{tg}\alpha = \frac{2v\omega \sin\varphi}{g},\ \textit{де}\ \ \omega = \frac{2\pi}{T}\ \ (T - \textit{тривалість доби}) \right)$$

1.174. Знайти відносне зменшення ваги тіла на екваторі $\varepsilon = \Delta P / P_0$ (P_0 – вага на полюсі), зумовлене добовим обертанням Землі. Радіус Землі R = 6380 км, маса $M = 6\cdot10^{24}$ кг, гравітаційна стала .

$$\left(\varepsilon = \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma M T^2} \approx 0{,}34\%, \quad T - \textit{тривалість доби} \right)$$

1.175. Знайти, на скільки відсотків η сила тиску тіла на горизонтальну опору на широті $\varphi = 60°$ менша, ніж на полюсі, через добове обертання Землі. Радіус Землі R = 6380 км, маса $M = 6\cdot10^{24}$кг, гравітаційна стала.

$$\left(\varepsilon = \frac{4\pi^2 R^3 \cos^2\varphi}{\gamma M T^2} \approx 0{,}1\%, \quad T - \textit{тривалістьдоби} \right)$$

Імпульс і сила

1.176. Тіло масою m = 2 кг рухається за законом $x(t) = 5–8t+4t^2$ (м). Визначити модулі і напрямки імпульсу тіла та діючої на нього сили на моменти часу 2 с і 4 с.

(16 кг·м/с;   48 кг·м/с;   16 Н)

1.177. Тіло маси m кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Визначити зміну вектора імпульсу тіла $\Delta\vec{p}$ за проміжок часу τ під час польоту.

$$\left(\Delta\vec{p} = m\vec{g}\tau \right)$$

1.178. Тіло, маса якого m, кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Визначити модуль зміни вектора імпульсу та зміну його модуля за час польоту тіла.

($2mv_0 \sin\alpha$;   0)

1.179. Кулька маси 100 г, яка вільно падає на горизонтальну поверхню, безпосередньо перед ударом має швидкість 20 м/с. Знайти модуль зміни імпульсу $|\Delta\vec{p}|$ та зміну модуля імпульсу Δp кульки внаслідок удару, якщо він є:

а) абсолютно пружним (кулька не втрачає швидкості);
б) абсолютно непружним (кулька прилипає до поверхні).

(а) $|\Delta\vec{p}|$ = 4 кг·м/с, Δp = 0; б) $|\Delta\vec{p}|$ = 2 кг·м/с, Δp = – 2 кг·м/с)

1.180. Кулька для гри в пінг-понг, яка має масу 20 г та швидкість 20 м/с, ударяє перпендикулярно у вертикальну сталеву стінку й відскакує без зміни швидкості. Знайти середню силу, з якою кулька вдаряє в стінку, якщо тривалість удару 0,1 с.

(8 Н)

1.181. Металева кулька масою 10 г вільно падає на горизонтальну плиту з висоти 45 см і пружно (без утрати швидкості) відбивається від неї. Знайти середню силу, з якою кулька діє на плиту під час удару, якщо його тривалість 0,2 с. g = 10 м/с^2.

(0,3 Н)

1.182. Кинутий угору м'яч масою 100 г підлітає до стелі зі швидкістю 1 м/с і пружно (без утрати швидкості) відбивається вниз. З якою середньою силою м'яч діяв на стелю під час удару, якщо він тривав 0,1 с? g = 10 м/с^2.

(1 Н)

1.183. Знайти середню силу віддачі при стрільбі з автомата, якщо маса кулі 10 г, швидкість вильоту із ствола 400 м/с і щільність вогню 300 пострілів за хвилину.

(20 Н)

1.184. На тіло, що лежить на гладкій горизонтальній поверхні, починає діяти горизонтальна сила $\vec{F} = \vec{F}_0\left(1-(t/\tau)\right)$, де F_0 = 10 Н, τ = 5 с$^{-1}$. Знайти імпульс тіла через час 3τ після початку дії сили.

$\left(\vec{p} = -\vec{F}_0\tau;\quad p = 150\ \text{кг}\cdot\text{м/с}\right)$

1.185. Канат маси m і довжини l утримують за один кінець так, що інший торкається горизонтальної поверхні. В момент t = 0 канат відпускають. Знайти силу тиску каната на поверхню при падінні в залежності від часу $F(t)$ та повний імпульс p, який канат передасть поверхні за час падіння.

$$\left(F(t) = \frac{3mg^2}{2l}t^2;\quad p = \frac{2m}{3}\sqrt{2gl}\right)$$

Динаміка системи точок. Закон збереження імпульсу

1.186. Чотири кульки з масами 1, 2, 3, і 4 г закріплені в указаній послідовності на невагомому стержні на відстані 30 см одна від одної. Визначити положення центра мас системи.

(*Співпадає з центом кульки* 3 г)

1.187. Чотири кулі, маси яких 2 кг, 4 кг, 6 кг і 8 кг, розміщені у вершинах квадрата зі стороною 2 м. Знайти відстань між центром мас системи та центром найлегшої кулі.

(1,72 м)

1.188. Довести, що центр мас однорідної пластини у формі довільного трикутника знаходиться на перетині медіан.

.

1.189. Визначити, на якій відстані від основи знаходиться центр мас однорідного прямого конуса висотою *H*.

$$\left(\frac{H}{4}\right)$$

1.190. Три рухомі кулі масами 2 кг, 4 кг і 6 кг у певний момент часу знаходяться у вершинах правильного трикутника зі стороною 1 м і рухаються із швидкостями, відповідно, 6 м/с, 3 м/с і 2 м/с, які напрямлені вздовж сторін трикутника в один бік. Знайти швидкість центра мас системи в цей момент

(0)

1.191. Три кулі масами m_1 = 1 кг, m_2 = 3 кг і m_3 = 6 кг у певний момент часу знаходяться у вершинах правильного трикутника і розлітаються від його центра із швидкостями υ_1 = 6 м/с, υ_2 = 3 м/с і υ_3 = 1 м/с. Із якою швидкістю рухається центр мас системи в цей момент?

(0,3 м/с)

1.192. Однорідний диск маси m = 5 кг і радіуса 20 см обертається з кутовою швидкістю 2,5 рад/с навколо перпендикулярної до його площини осі, котра проходить: а) через центр диска; б) через його край. Знайти імпульс диска в обох випадках.

(а) 0; б) 2,5 кг·м/с)

1.193. Через невагомий блок, який прикріплений до стелі, перекинута невагома нерозтяжна нитка з тягарцями маси m_1 та m_2 на кінцях. Знайти прискорення центра мас системи.

$$\left(\vec{a} = \vec{g}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2\right)$$

1.194. Через невагомий блок прикріплений до стелі перекинута невагома нерозтяжна нитка з двома тягарцями на кінцях. Знайти відношення мас тягарців, якщо центр мас системи рухається з прискоренням $a = g/4$.

(3)

1.195. Система, що складається з двох з'єднаних між собою невагомою пружинкою кульок масами m_1 і m_2, знаходиться в однорідному полі сил тяжіння і в початковий момент часу має імпульс $\vec{P}_0$. Нехтуючи опором повітря, знайти залежності від часу імпульсу цієї системи $\vec{P}(t)$ та радіуса-вектора її центра мас $\vec{r}_c$
відносно його початкового положення.

$$\left(\vec{P} = \vec{P}_0 + (m_1 + m_2)\vec{g}t; \quad \vec{r}_c = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \text{ де } \vec{v}_0 = \frac{\vec{P}_0}{m_1 + m_2} \right)$$

1.196. Нерухома граната маси m розірвалася на два осколки, що розлетілися зі швидкостями v та $3v$. Знайти маси осколків і їхню кінетичну енергію K та імпульс $\vec{P}$.

($m_1 = 3m/4$, $m_2 = m/4$; $K = 3mv^2/2$; $\vec{P} = 0$)

1.197. У момент, коли швидкість гранати дорівнювала 10 м/с і була напрямлена під кутом 60° до горизонту, вона розірвалася на два осколки однакової маси, один із яких відлетів вертикально вгору, а другий – під кутом 45° до горизонту. Знайти швидкості осколків одразу після розриву.

(v_1 = 27,3 м/с або 7,3 м/с; v_2 = 14,1 м/с)

1.198. Частинка маси m_1, налітає із швидкістю v на нерухоме вільне тіло маси m_2 і відскакує під прямим кутом із швидкістю u. З якою швидкістю V почне рухатися друге тіло?

$$\left(V = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{v^2 + u^2} \right)$$

1.199. Кулька, що вільно рухається по гладкій горизонтальній поверхні, налітає ні іншу, нерухому кульку й відскакує під прямим кутом із удвічі меншою швидкістю. Під яким кутом до початкового напрямку руху першої кульки відлетить друга?

(26,6°)

1.200. Два човни рухаються по інерції паралельними курсами назустріч один одному. Коли човни порівнялися, з першого в другий переклали вантаж масою 25 кг. Відтак другий човен зупинився, а перший продовжив рух із швидкістю 8 м/с. З якими швидкостями рухалися човни до зустрічі, якщо маса другого човна 100 кг?

(8 м/с; 2 м/с)

1.201. Рибалка маси m знаходиться на кормі не заякореного човна масою M і довжиною L, який стоїть у ставку. На яку відстань S переміститься човен, якщо рибалка перейде на ніс?

$$\left(S = \frac{m}{M+m} L \right)$$

1.202. В човні, маса якого M, стоїть людина маси m. Човен пливе із швидкістю v. Людина стрибає з човна в горизонтальному напрямку зі швидкістю u відносно човна. Знайти швидкість човна після стрибка, якщо людина стрибає:

а) по ходу руху човна;

б) у протилежному напрямку.

$$\left(a)\, \frac{(m+M)v - mu}{m+M};\quad б)\, \frac{(m+M)v - mu}{m-M} \right)$$

1.203. Людина масою $m = 60$ кг стоїть на передньому краю візка маси $M = 120$ кг, який горизонтально котиться по прямій із швидкістю $v_0 = 1$ м/с. Людина стрибає вперед під кутом $\alpha = 60°$ до площини візка із швидкістю $u = 5$ м/с відносно візка.

– Чи зберігається імпульс системи під час стрибка? Чому?
– З якою швидкістю v і в якому напрямку стане рухатися візок після стрибка?

$$\left(Hi;\quad v = v_0 - \frac{m}{M+m} u \cos\alpha = -0{,}44 \text{ м/с} \right)$$

1.204. Із гармати роблять постріл під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту. При закріпленій гарматі швидкість вильоту снаряда v_0 = 180 м/с. Знайти, з якою швидкістю u почне відкочуватись після пострілу не закріплена гармата, якщо її маса в η = 50 разів більша за масу снаряда. Тертям знехтувати.

$$\left(u = \frac{v_0 \cos\alpha}{\eta + 1} \approx \frac{v_0 \cos\alpha}{\eta} = 1{,}8 \text{ м/с} \right)$$

1.205. Куля, що летить із швидкістю v вниз під кутом α до вертикалі, влучає та майже миттєво застряє в бруску, котрий лежить на горизонтальній поверхні. Маса бруска в η разів більша за масу кулі, коефіцієнт тертя між бруском і поверхнею k. Знайти:

– через який час t брусок зупиниться, якщо внаслідок удару він почне ковзати по поверхні;
– при яких значеннях кута α брусок не почне ковзати за будь-якої швидкості кулі.

$$\left(t = \frac{v \sin\alpha}{(1+\eta)kg}; \quad \alpha \le \text{arctg}\, k \right)$$

Рух у гравітаційному полі

1.206. Визначити масу Землі за її радіусом R = 6380 км та прискоренням вільного падіння на полюсі g = 9,83 м/с^2.

(6·10^{24} кг)

1.207. Визначити масу Землі за періодом обертання навколо неї Місяця (27,32 діб) та радіусом його орбіти (384,4 тис. км).

(5,98·10^{24} кг)

1.208. Визначити масу Сонця, знаючи середню відстань від Землі до Сонця (149,50 млн. км) і період обертання Землі навколо нього – 365,26 діб.

(1,99·10^{30} кг)

1.209. Знайти першу космічну швидкість v_1 для Землі, тобто – мінімальну швидкість, яку треба надати тілу, щоби вивести його на навколоземну орбіту.

$$\left(v_1 = \sqrt{gR} \approx 7{,}9 \text{ км/с} \right)$$

1.210. Знайти другу космічну швидкість v_2 для Землі, тобто – мінімальну швидкість, якої треба надати тілу, аби воно подолало земне тяжіння й почало рухатися по навколосонячній орбіті.

$$\left(v_2 = \sqrt{2gR} \approx 11{,}2 \quad \text{км/с} \right)$$

1.211. Визначити приблизну величину третьої космічної швидкості v_3 – найменшої швидкості тіла відносно Землі, необхідної для того, щоби воно змогло покинути Сонячну систему. Обертанням Землі навколо осі знехтувати. Маса і радіус Землі $M_З$ = 6·10^{24} кг, $R_З$ = 6380 км; маса Сонця M_C = 2·10^{30} кг; радіус земної орбіти R_0 = 1,5 млн. км; гравітаційна стала .

$$\left(v_3 \approx \sqrt{2v_1^2 + (\sqrt{2}-1)^2 V_1^2} \approx 17 \text{км/с}, \;\; v_1^2 = \frac{\gamma M_з}{R_з}, \;\; V_1^2 = \frac{\gamma M_с}{R_0} \right)$$

1.212. Порівняти сили, з якими Сонце та Земля діють на Місяць. Як пояснити той факт, що Місяць є супутником Землі?

$$\left(\frac{F_с}{F_з} = 2{,}1 \right)$$

1.213. Знайти відстань від Венери до Сонця в астрономічних одиницях, якщо тривалість року на Венері 227,70 діб, а на Землі 365,26 діб.

(1,08·10^8 км = 0,63 астр. од.)

1.214. На якій висоті h на планеті з радіусом R прискорення вільного падіння є вдвічі меншим, аніж біля поверхні?

$$\left(h = \left(\sqrt{2} - 1\right)R\right)$$

1.215. Уважаючи планету однорідною кулею, знайти, при якій тривалості доби тіла на її екваторі перебували б у невагомості. Розрахунок зробити для Землі, прийнявши її масу і радіус M = 6·10^{24} кг і R = 6380 км. Гравітаційна стала $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}} = 1\ \text{год}\ 25\ \text{хв}\right)$$

1.216. Комета, захоплена Сонцем на орбіту, має лінійну швидкість в афелії (точка максимального віддалення від Сонця) V_1 = 0,8 км/с. Її відстань від Сонця при цьому дорівнює r_1 = 6·10^{12} м. У перигелії (точка максимального наближення до Сонця) V_2 = 50 км/с. Знайти відстань r_2 комети від Сонця в перигелії. Маса Сонця M = 2·10^{30} кг; гравітаційна стала $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$.

$$\left(r_2 = \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2\gamma M} + \frac{1}{r_1}\right)^{-1} \approx 100\ \text{млн. км}\right)$$

1.217. Тіло починає вільно падати в наскрізну шахту, пробурену по діаметру одного із супутників Юпітера. Якої максимальної швидкості набуде тіло, якщо радіус супутника R і прискорення вільного падіння на його поверхні g? Супутник вважати однорідною кулею.

$$\left(v_{\max} = \sqrt{gR}\right)$$

1.218. Деяка планета маси M рухається навколо Сонця по еліпсу так, що мінімальна відстань між нею і Сонцем дорівнює r_1, а максимальна – r_2. Знайти період обертання планети навколо Сонця. Маса Сонця M = 2·10^{30} кг.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}, \quad \text{де} \quad a = \frac{(r_1 + r_2)}{2}\right)$$

1.219. Матеріальна точка маси m розташована на осі тонкого кільця радіуса R і маси M. Визначити:

1) силу притягання $F(z)$ точки до кільця в залежності від відстані z до його центра;
2) наближені вирази $F_1(z)$ і $F_2(z)$, відповідно, при малих та при великих відстанях z і показати якісно графік $F(z)$;
3) відстань z_m, на якій сила F є максимальною.

$$\left(1)\quad F = \frac{\gamma mMz}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}.\quad 2)\quad F_1 \approx \frac{\gamma mMz}{R^3};\quad F_2 \approx \frac{\gamma mM}{z^2}.\quad 3)\quad z_m = \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$$

1.220. Усередині однорідної кулі з густиною речовини ρ є сферична порожнина, положення центра котрої відносно центра кулі задається радіусом-вектором $\vec{a}$. Знайти напруженість поля тяжіння $\vec{G}$ в порожнині.

$$\left(\vec{G} = -\frac{4\pi\rho\gamma}{3}\vec{a}\right)$$

1.221. Знайти період обертання супутника, який рухається навколо планети поблизу її поверхні, якщо середня густина планети ρ = 3,3 г/см^3. Гравітаційна стала $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)$.

$$\left(T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho\gamma}} = 1{,}8\ \text{год}\right)\left(T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho\gamma}} = 1{,}8\ \text{год}\right)$$

1.222. Супутник вивели на колову орбіту навколо планети радіусом R. Знайти висоту h орбіти супутника, якщо його швидкість дорівнює V.

$$\left(h = R\left(\frac{V^2}{gR} - 1\right)\right)$$

1.223. Обчислити радіус R колової орбіти стаціонарного супутника Землі, який залишається нерухомим відносно її поверхні. Яка його швидкість в інерціальній системі відліку, пов'язаній з центром Землі? Маса Землі $M_З = 6\cdot 10^{24}$ кг; тривалість доби T = 24 год. Гравітаційна стала $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)$.

$$\left(R = \sqrt[3]{\gamma M_З\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = 4{,}2\cdot 10^4\,\text{км};\quad v = 3{,}1\,\text{км/с}\right)$$

1.224. Знайти початкову швидкість, яку треба надати ракеті, щоб вона змогла вийти за межі сонячної системи. Ракета стартує так, що напрям її швидкості утворює кут $\varphi = 45°$ з напрямом орбітального руху Землі навколо Сонця. Маса і радіус Землі $M_З = 6\cdot 10^{24}$ кг, $R_З$ = 6380 км; маса Сонця $M_C = 2\cdot 10^{30}$ кг; радіус земної орбіти R_0 = 1,5 млн. км. Гравітаційна стала $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)$.

$$\left(v = \sqrt{\frac{\gamma M_С}{R_0}} \left(\sqrt{2\left(1 + \frac{M_З R_0}{M_С R_З}\right)} - \sin^2\varphi - \cos\varphi \approx 17\text{км/с} \right) \right)$$

2.225. На полюсі планети з радіусом R вертикально запускають ракету зі швидкістю $v = \eta V_1$, де V_1 – перша космічна швидкість. Визначити:

– максимальну висоту h підйому ракети та її значення h_1 при $\eta = 1$;

– орбітальну швидкість v_0, яку треба надати ракеті у найвищій точці підйому, аби вона стала штучним супутником планети;

– відношення другої та першої космічних швидкостей $\varkappa = (V_2/V_1)$.

$$\left(h = \frac{R}{\left(2/\eta^2\right) - 1},\ h_1 = R;\quad v_0 = \frac{V_1}{\sqrt{2}};\quad \varkappa = \sqrt{2} \right)$$

1.3. Робота та енергія

- Робота та потужність сили:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}; \quad \langle P \rangle = \frac{A}{t}; \quad P = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{v}.$$

- Зміна повної механічної енергії системи:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = A_{дис} + A_{зов}$$

- Зв'язок між консервативною силою та потенціальною енергією:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad} U; \quad \Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = -\int_1^2 F_l \, \mathrm{d} l$$

Робота і потужність сили

1.226. Тіло рухається по прямій за законом $x = 10 + 2t + t^2$ під дією сили 10 Н, що напрямлена під кутом 60° до напрямку руху. Обчислити роботу і середню потужність сили за перші 10 с руху, а також миттєву потужність укінці цього проміжку часу.

(600 Дж, 60 Вт; 110 Вт)

1.227. На частинку, що по якійсь траєкторії здійснила переміщення з точки $\vec{r}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$ в точку $\vec{r}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, серед інших, діяла сила $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ (Н). Знайти роботу цієї сили на вказаному переміщенні. Показати на рисунку радіуси-вектори точок і вектор переміщення частинки, а також вектор сили $\vec{F}$.

($A = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -17$ Дж)

1.228. На точку, що рухається по ділянці траєкторії у формі півкола радіуса 5 м із сталою швидкістю 1 м/с, серед інших діє постійна сила 2 Н, спрямована вздовж діаметра півкола. Знайти:

– роботу цієї сили на всьому шляху;
– миттєву потужність сили в початковій, середній та кінцевій точках траєкторії;
– середню потужність сили на всьому шляху.

(20 Дж; 0; 2 Вт; 0; 1,27 Вт)

1.229. На кінці вигнутої в горизонтальній площині спиці у формі третини кола радіуса 50 см, розташовано нанизану на неї кульку масою 50 г. На кульку починає діяти горизонтальна сила 0,8 Н незмінного напрямку, що збігається з дотичною до спиці у початковій точці. Нехтуючи тертям, знайти:

– роботу сили на всьому шляху та швидкість кульки на кінці спиці;
– миттєву потужність сили на початку, посередні та на кінці спиці;
– середню потужність сили на всьому шляху.

(0,4 Дж, 4 м/с; 0, 2,98 Вт, –1,6 Вт; 0,8 Вт)

1.230. Тіло маси m = 1 кг кинуто під кутом α = 30° до горизонту зі швидкістю v_0 = 20 м/с. Визначити та показати на графіку з дотриманням масштабу залежність $p(t)$ потужності сили тяжіння, що діяла на тіло, від часу. g = 10 м/с^2.

1.231. Тіло на мотузці довжиною 1 м рівномірно обертається по колу радіуса 20 см при силі натягу мотузки 10 Н. Знайти потужність сили натягу і її роботу за один оберт.

1.232. Людина маси 60 кг долає один марш сходів висотою 3,5 м за 2,8 с. Визначити середню потужність у кінських силах (1 к.с. = 735 Вт), яку розвиває людина при цьому.

(1 к.с.)

1.233. На тіло в напрямку руху діє сила $F = kx$, де x – відстань, пройдена уздовж траєкторії, k = 0,1 Н/м. Знайти роботу сили на шляху 10 м.

(5 Дж)

1.234. Хлопець маси 45 кг на санках масою 5 кг і довжиною 1 м виїжджає на шорстку горизонтальну ділянку з коефіцієнтом тертя 0,9 і зупиняється, проїхавши відстань 5 м. Яку роботу виконала сила тертя? $g = 10$ м/с^2.

(–2475 Дж)

1.235. На горизонтальному столі, що складається з двох половин із різного матеріалу, лежить дошка довжини l і маси m, яка одним кінцем торкається лінії розмежування тих половин. Яку роботу треба виконати, аби перетягти дошку за кінець із однієї половини стола на іншу, якщо коефіцієнти тертя на половинах стола складають k_1 і k_2, відповідно.

$$\left(A = \frac{1}{2} mgl \left(k_1 + k_2 \right) \right)$$

1.236. Тіло рухається під дією сили, проекція F_S котрої на переміщення в залежності від пройденого шляху S на графіку має вигляд дуги кола радіуса R, рис. 3.1.

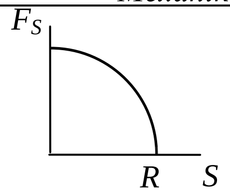


Рис. 3.1.

– записати рівняння цього кола;

– визначити роботу заданої сили на шляху $S = R$, якщо її початкова величина дорівнює F_0.

$$A = \pi F_0 R/4$$

1.237. На тіло маси m = 1 кг, яке знаходиться на гладкій горизонтальній поверхні, починає діяти горизонтальна сила $F = kt$ незмінного напрямку, де t – час,

k = 0,1 Н/с. Знайти роботу сили за перші τ = 10 с дії.

$$\left(A = \frac{k^2\tau^4}{8m} = 12{,}5\ \text{Дж} \right)$$

1.238. Яку роботу треба виконати, аби невеликий брусок маси m повільно витягти на вершину гірки не плоского профілю, прикладаючи силу весь час у напрямку руху? Довжина основи гірки l, висота h, коефіцієнт тертя між бруском і гіркою на всьому шляху k.

$$\left(A = mg(h + kl) \right)$$

Робота і кінетична енергія

1.239. На платформі, що проїжджає зі швидкістю v повз спостерігача на пероні, роблять "постріл" з пружинного пістолета проти напрямку руху платформи так, що швидкість вильоту кульки масою m дорівнює швидкості платформи. Яку швидкість для спостерігача має кулька після пострілу та "куди дівається" її кінетична енергія? Тертя відсутнє.

1.240. Брусок m = 500 г починають тягти за нитку по гладкій горизонтальній поверхні, прикладаючи сталу за величиною й напрямом силу F = 3,6 Н. Який кут α із горизонтом складає нитка, якщо на шляху l = 5 м брусок набрав швидкість v = 6 м/с?

$$\left(\cos\alpha = \frac{mv^2}{2Fl} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60° \right)$$

1.241. Авто при сталій ефективній силі тяги двигуна на заданій горизонтальній ділянці шляху розганяється з місця до швидкості 100 км/год. До якої швидкості розженеться авто на цій ділянці при вдвічі більшій силі тяги?

(141,4 км/год)

1.242. При розгоні з місця до швидкості v на горизонтальній ділянці шляху двигун автомобіля виконує роботу A. Яку додаткову роботу A' має виконати двигун, аби подвоїти швидкість авто без зміни сили тяги?

$$\left(A' = 3A \right)$$

1.243. Авто, що рухається зі швидкістю v, після вимикання двигуна проходить до зупинки відстань S. Яку відстань S_1 пройде авто до зупинки при початковій швидкості $v_1 = 2v$? Силу опору в обох випадках вважати однаковою.

($S_1 = 4S$)

1.244. В одного автомобіля маса вдвічі більша, а кінетична енергія вдвічі менша, ніж у другого. А коли кожен з автомобілів збільшив швидкість на 30 км/год, їхні кінетичні енергії зрівнялися. Знайти початкові швидкості автомобілів.

(21,2 км/год;   42,4 км/год)

1.245. Куля налітає перпендикулярно на стос покладених одна на одну однакових дощок. У якій за ліком дошці N застрягне куля, якщо в першій вона втрачає η = 10% швидкості. Силу тертя в дошках вважати незалежною від швидкості кулі.

$$\left(n = \frac{1}{1-(1-\eta)^2} = 5{,}26 \quad \Rightarrow \quad N = 6 \right)$$

1.246. На невеличку муфточку m = 100 г, нанизану на горизонтальне гладке дротяне кільце радіуса R = 50 см, починає діяти в площині кільця стала за величиною й напрямком сила F = 22,5 Н. Якої максимальної швидкості набуде муфточка, якщо в початковому положенні сила напрямлена по дотичній до кільця?

$$\left(v = \sqrt{\frac{2FR}{m}} = 15\ \text{м/с} \right)$$

1.247. Частинка рухається по колу радіуса R так, що її кінетична енергія залежить від пройденого шляху за законом $K = \alpha S^2$, де α – задана стала. Визначити залежність від шляху сили, що діє на частинку $F(S)$.

$$\left(F(S) = 2\alpha S\sqrt{1+\left(\frac{S}{R}\right)^2} \right)$$

Робота і потенціальна енергія

1.248. Довести (вивести формулу), що в полі сил тяжіння потенціальна енергія тіла довільної форми і розмірів визначається формулою $U = mgh_c$, де m – маса тіла і h_c – висота його центра мас над нульовим рівнем.

1.249. Канат довжини l і маси m лежить на підлозі. Яку мінімальну роботу треба виконати, аби перевести канат у вертикальне положення, підіймаючи його: а) за кінець; б) за середину.

$$\left(а)\ \frac{1}{2}mgl; \quad б)\ \frac{1}{4}mgl \right)$$

1.250. Яку роботу треба виконати, аби поставити вертикально стовп, який лежить на землі. Маса стовпа m = 200 кг, висота h = 5 м. Прийняти g = 10 м/с^2.

(A = 5 кДж)

1.251. Довгу еластичну трубку довжиною l із закріпленим кінцем, зігнуту, як на рис. 3.2, наполовину заповнили ідеальною рідиною маси m і утримують за інший кінець. Нехтуючи масою трубки та радіусом закруглення, визначити роботу необхідну, аби вилити з трубки всю рідину через закріплений кінець.

$$\left(A = \frac{3}{8} mgl \right)$$

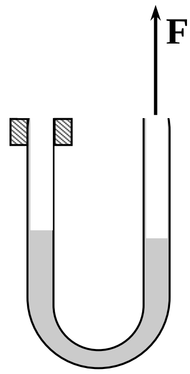


Рис. 3.2

1.252. Горизонтальна посудина у формі прямокутного паралелепіпеда заповнена до рівня H водою маси m (рис. 3.3). Посудина розділена рухомою тонкою перегородкою розташованою посередині посудини. Яку роботу треба виконати, не враховуючи тертя, аби перегородку повільно пересунути на чверть відстані між стінками?

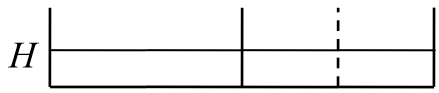


Рис. 3.3

$$\left(A = \frac{1}{6} mgH \right)$$

1.253. Розгорнуте горизонтальне жалюзі масою 1 кг і довжиною 2 м збирають у тонку смужку над вікном. Яку роботу при цьому виконують. Тертям знехтувати, g = 10 м/с^2.

(10 Дж)

1.254. Знайти роботу необхідну для стискання пружини на 10 см, якщо для її стискання на 1 см потрібна сила 100 Н.

(50 Дж)

1.255. Для розтягу гумового шнура на 1 см потрібна робота 5 Дж. Яку роботу треба виконати, щоби розтягти цей шнур ще на 1 см?

(15 Дж)

1.256. Брусок маси m = 1 кг, який з'єднаний з гумовою ниткою жорсткості k = 20 Н/м, лежить на шорсткій горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя μ = 0,2. Яку роботу треба виконати, аби зрушити брусок, горизонтально тягнучи за нитку?

$$\left(A = \frac{(\mu mg)^2}{2k} = 0{,}1 \text{ Дж} \right)$$

1.257. Чому дорівнює потенціальна енергія невагомої пружини, до якої підвішене тіло маси 10 кг, якщо розтяг пружини становить 5 см? g = 10 м/с^2.

(2,5 Дж)

1.258. До центра диска маси 1 кг, який лежить на горизонтальній поверхні прикріплена невагома пружина жорсткості 0,1 Н/см. Яку роботу треба виконати, аби за вільний кінець пружини підняти диск на висоту 50 см над поверхнею? g = 10 м/с^2.

(10 Дж)

Повна механічна енергія

1.259. Тіло кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 = 20 м/с. Знайти максимальну висоту підйому тіла та його швидкість на середині підйому. Опором повітря знехтувати. g = 10 м/с^2.

$\left(20\text{ м};\ \approx 14\text{ м/с}\right)$

1.260. З якою початковою швидкістю було кинуто вертикально вгору тіло, якщо, на висоті підйому $h = 40$ м його швидкість дорівнювала половині початкової. Опором повітря знехтувати.

$$\left(v = \sqrt{\frac{8gh}{3}} \approx 32\text{ м/с}\right)$$

1.261. Підвішений на невагомій пружині жорсткості k тягарець маси m утримують в положенні не деформованої пружини. Потім тягарець повільно опускають аж поки він повисне. Тертя відсутнє. Знайти зміну потенціальної енергії пружини $\Delta U_{\text{пр}}$, тягарця $\Delta U_{\text{т}}$ та системи в цілому ΔU. Пояснити причину зміни механічної енергії системи пружина-тягарець?

1.262. Тіло маси m = 5 кг, що вільно падає з висоти h = 20 м, досягає землі при швидкості 16 м/с. Яка середня сила опору повітря діяла на тіло?

(18 Н)

1.263. М'яч, який вільно падає на горизонтальну поверхню з висоти H, після абсолютно пружного (без утрати швидкості) відскоку підіймається на висоту $h = \eta H$ ($\eta < 1$). Знайти, яку частку ε від ваги м'яча складає сила опору повітря,
вважаючи її сталою.

$$\left(\varepsilon = \frac{(1-\eta)}{(1+\eta)}\right)$$

1.264. М'яч маси 0,5 кг кинуто вниз з висоти 2,25 м із швидкістю 3 м/с. Знайти середню силу опору повітря, якщо після пружного (без утрати швидкості) відскоку від землі м'яч піднявся до точки кидання.

(0,5 Н)

1.265. Частинка маси m = 20 г перебуває в спокої в точці O(0;0) потенціального поля $U = \alpha(x^2 + xy + y^2)$, де α = 0,1 Дж/м^2. Потім під дією деякої сторонньої сили частинка перемістилась у точку P(5;10) (м). Знайти швидкість частинки в точці P, якщо стороння сила виконала роботу A = 26,5 Дж.

(30 м/с)

1.266. Вагон маси m = 20 т, який рухається на сортувальній гірці зі швидкістю 1 м/с, стрічає упор. Знайти максимальне стиснення двох буферних пружин вагона, кожна з яких має жорсткість k = 10 кН/см.

(10 см)

1.267. Шайба зісковзує без тертя з вершини похилої площини довжиною l = 3,6 м і кутом нахилу до горизонту 30°. Знайти швидкість шайби біля основи площини, g = 10 м/с^2.

$$\left(v = \sqrt{gl} = 6 \text{ м/с}\right)$$

1.268. Перекинутий через горизонтальний штир канат довжини l, який висів нерухомо, внаслідок незначного поштовху починає зісковзувати. Нехтуючи тертям, визначити швидкість каната в момент сходу зі штиря.

$$\left(v = \sqrt{\frac{gl}{2}}\right)$$

1.269. Невелика шайба починає зісковзувати без тертя з вершини гірки висотою H, яка має горизонтальний трамплін (рис. 3.4). Знайти висоту трампліна h, при якій шайба пролетить максимальну відстань S_m, і величину S_m.

$$\left(h = \frac{1}{2}H; \quad S_m = H\right)$$

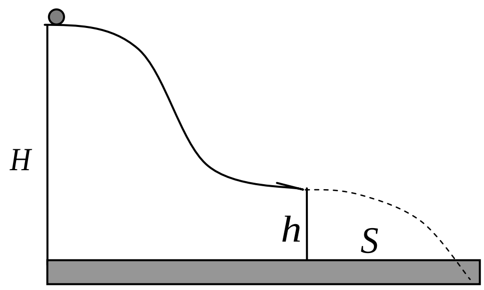


Рис. 3.4

1.270. Розв'язати задачу **2.60**, використовуючи зв'язок між енергією та роботою.

1.271. Розпрямлену мотузку довжини l = 1,35 м, яка лежить скраю на шорсткому столі, починають повільно стягати за кінець. З якою швидкістю мотузка зійде зі стола, якщо вона починає зісковзувати самостійно, коли звисає η = 1/3 її довжини?

$$\left(v = \sqrt{(1-\eta)gl} = 3 \text{ м/с}\right)$$

1.272. На дошці, поставленій під кутом 30° до горизонту, лежить вантаж масою m = 30 кг. Аби протягти вантаж по дошці на відстань l = 3 м униз, виконали роботу A = 100 Дж. Яку роботу доведеться виконати, щоби повернути вантаж у вихідне положення? g = 10 м/с^2.

(1000 Дж)

1.273. Шайба зісковзує без початкової швидкості з вершини похилої площини на горизонтальну поверхню, і проходить по ній до зупинки відстань, рівну довжині площини. Знайти кут нахилу площини до горизонту, якщо коефіцієнт тертя на всьому шляху дорівнює k.

($\alpha = 2\mathrm{arctg}\, k$)

1.274. Брусок маси m зісковзує з вершини гірки довільного (не плоского) профілю висотою h і, пройшовши певний шлях по горизонталі, зупиняється. Яку роботу треба виконати, щоби повільно витягти брусок на вершину по шляху спуску, прикладаючи силу вздовж напрямку руху?

($A = 2mgh$)

1.275. Розв'язати задачу 1**.160**, використовуючи зв'язок між енергією та роботою.

1.276. При падінні торби з піском маси m = 10 кг на горизонтальну чашку пружинних терезів із висоти h = 40 см максимальне стиснення пружини X_m = 10 см. Яким було би стиснення пружини X_0, коли б торбу поклали на чашку терезів обережно? Масою чашки з пружиною та тертям знехтувати.

$$\left(X_0 = \frac{X_{\mathrm{m}}^2}{2(h + X_{\mathrm{m}})} = 1\,\text{см} \right)$$

1.277. Дві однакові пластини маси m кожна скріплені між собою пружиною жорсткості k і поставлені на горизонтальну опору так, що одна пластина знаходиться над іншою. Стискаючи пружину, верхню пластину переміщують униз на
відстань X і відпускають. Нехтуючи тертям і масою пружини, знайти, при якій величині X нижня пластина відірветься від опори.

$$\left(X > \frac{2mg}{k} \right)$$

1.278. Невелика шайба розміщена на кінці дошки довжиною l = 7 м, яка лежить на гладкій горизонтальній поверхні. Коефіцієнт тертя між шайбою та дошкою k = 0,1. Унаслідок горизонтального поштовху шайба починає ковзати по дошці й зупиняється на її протилежному кінці.
Знайти швидкість дошки v на момент припинення ковзання шайби, якщо маса дошки в η = 7 разів більша за масу шайби. Прийняти g = 10 м/с^2.

$$\left(v = \sqrt{\frac{2kgl}{\eta(\eta + 1)}} = 0{,}5\,\text{м/с} \right)$$

Взаємодія двох тіл. Зіткнення

1.279. Дві частинки масами m_1 і m_2, що рухаються зі швидкостями $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$, непружно стикаються. Знайти зміну кінетичної енергії системи ΔK. Проаналізувати залежність величини ΔK від напрямків руху частинок.

$$\left(\Delta K = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \right)$$

1.280. Дві кулі масами $m_1 = 4$ кг і $m_2 = 10$ кг, які рухаються зі швидкостями $v_1 = 12$ м/с і $v_2 = 4$ м/с, непружно стикаються. Знайти кількість тепла Q, що виділяється при зіткненні, якщо:

– кулі рухаються назустріч одна одній;
– перша куля наздоганяє другу.

(365,7 Дж; 91,7 Дж)

1.281. Тіло маси $m_1 = 4$ кг абсолютно непружно стикається з нерухомим тілом маси $m_2 = 2$ кг. Кінетична енергія системи після зіткнення $K = 6$ Дж. Знайти кінетичну енергію першого тіла до зіткнення K_1.

$$\left(K_1 = K\frac{m_1 + m_2}{m_1} = 9 \text{ Дж} \right)$$

1.282. Нерухома граната масою 900 г розривається на два осколки, які розлітаються в горизонтальній площині із сумарною кінетичною енергією 9 кДж. Чому дорівнюють швидкості осколків, якщо їхні маси відрізняються в 2 рази

(100 м/с і 200 м/с)

1.283. Два тіла, що рухаються назустріч одне одному зі швидкостями $v_1 = 2$ м/с і $v_2 = 4$ м/с, непружно стикаються. Знайти відношення кінетичних енергій тіл до зіткнення K_1/K_2, якщо після нього тіла рухаються із швидкістю $v = 1$ м/с у напрямку початкового руху першого тіла.

$$\left(\frac{K_1}{K_2} = \frac{5}{4} \right)$$

1.284. Дві кулі масами m_1 і m_2 рухаються назустріч одна одній і непружно стикаються. При якому відношенні мас куль перша після зіткнення змінить напрям руху, якщо до зіткнення її кінетична енергія була в η разів більшою, ніж у другої?

$$\left(\frac{m_2}{m_1} > \eta \right)$$

1.285. Дві маленькі кульки масами m_1 і m_2 = 1,5 m_1 підвішені на нитках довжиною l = 1 м так, що дотикаються. Першу кульку відхилили на кут α = 60° і відпустили.
Визначити, на яку висоту h піднімуться обидві кульки після непружного удару.

$$\left(h = \frac{l(1-\cos\alpha)}{(1+m_2/m_1)^2} = 8\,\text{см} \right)$$

1.286. Довести, що відносна швидкість двох частинок після абсолютно пружного зіткнення є завжди рівною за модулем і протилежною за напрямком їхній відносній швидкості до зіткнення.

1.287. Більярдна куля, що рухається зі швидкістю v, влучає в нерухому кулю. Знайти швидкості куль після зіткнення? Удар пружний, лобовий.

($v_1 = 0$, $v_2 = v$)

1.288. Частинка маси m_1 стикається з нерухомою частинкою. Після пружного лобового удару частинки розлітаються в протилежних напрямах з однаковими швидкостями. Знайти масу другої частинки m_2.

($m_2 = 3m_1$)

1.289. Куля маси m_1 відбуває пружне лобове зіткнення з нерухомою кулею маси m_2. При якому співвідношенні мас перша куля після удару полетить у зворотний бік?

($m_2 > m_1$)

1.290. Куля масою m_1 рухається із швидкістю v_1 = 3 м/с і наздоганяє іншу кулю масою m_2, що рухається уздовж тієї ж прямої із швидкістю v_2 = 1 м/с. Унаслідок пружного лобового зіткнення між кулями перша з них зупиняється. Знайти відношення мас куль m_1/m_2.

$$\left(\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_1 - 2v_2}{v_1} = \frac{1}{3} \right)$$

1.291. Тіло масою m_1 = 2 кг відбуває пружний лобовий удар із нерухомим тілом масою m_2 = 6 кг. Знайти, яку частку K_2/K_0 кінетичної енергії перше тіло передає при ударі другому.

$$\left(\frac{K_2}{K_0} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{3}{4} \right)$$

1.292. Тіло масою m_1 стикається з нерухомим тілом масою m_2. Удар пружний лобовий. Знайти відношення мас тіл m_1/m_2, якщо швидкість першого тіла зменшилася в η = 3 рази: а) без зміни напрямку руху і б) із зміною напрямку руху.

$$\left(а)\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{\eta+1}{\eta-1} = 2; \qquad б)\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{\eta-1}{\eta+1} = \frac{1}{2} \right)$$

1.293. Тіло масою m_1 = 5 кг стикається з нерухомим тілом масою m_2 = 2,5 кг. Удар пружний лобовий. Знайти кінетичну енергію першого тіла до удару K_0 і після удару K_1, якщо кінетична енергія другого тіла після удару K_2 = 5 Дж.

(K_0 = 5,62 Дж, K_1= 0,62 Дж)

1.294. Між двома кулями масами m_1 = 1 кг і m_2 = 2 кг, які лежать на гладкій горизонтальній поверхні, вставили зв'язану ниткою стиснену невагому пружину, що має потенціальну енергію U = 3 Дж. З якими швидкостями розлетяться кулі, якщо нитку перепалити?

$$\left(v_1 = \sqrt{\frac{2m_2U}{m_1(m_1+m_2)}} = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{2m_1U}{m_2(m_1+m_2)}} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$$

1.295. Граната масою 900 г, яка лежить на гладкій горизонтальній поверхні, розривається на два осколки з масами, що відрізняються в 2 рази. Чому дорівнюють швидкості та загальний імпульс осколків, якщо їхня сумарна кінетична енергія дорівнює 9 кДж?

(100 м/с; 200 м/с; 0)

1.296. Дві частинки з однаковими масами пружно стикаються. Модулі швидкостей частинок до удару v_1 і v_2, кут між їх напрямками α. Після удару модулі швидкостей часток v_1' і v_2'. Знайти кут β, під яким розлетяться частинки після удару.

$$\left(\beta = \arccos\left(\frac{v_1 v_2}{v_1' v_2'} \cos\alpha \right) \right)$$

1.297. Рухома куля стикається з такою самою нерухомою. Під яким кутом α розлетяться кулі, якщо зіткнення є пружним і не центральним?

$$\left(\alpha = \frac{\pi}{2} \right)$$

1.298. Частинка маси m_1 зіткнулася пружно з нерухомою частинкою маси m_2 і відскочила під кутом $\alpha = 90°$ до початкового напряму руху. Знайти, яку частку кінетичної енергії втратила перша куля при ударі.

$$\left(\frac{K_0 - K_1}{K_0} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)$$

1.299. Після пружного зіткнення частинки 1 із нерухомою частинкою 2 вони розлітаються під кутом α = 60° симетрично до початкового напрямку руху першої частинки. Знайти відношення мас частинок.

$$\left(\frac{m_1}{m_2}=1+2\cos\alpha=2\right)$$

1.300. Куля, що рухається із швидкістю v_0 = 2 м/с, пружно стикається з нерухомою кулею такої ж маси й відлітає під кутом α = 30° до початкового напрямку руху. Знайти модулі швидкостей куль після удару v_1 і v_2 і кут β між векторами швидкостей $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_2$.

$$\left(v_1\approx 1{,}73\text{ м/с},\ v_2=1\text{ м/с},\ \beta=60°\right)$$

1.301. Між рухомою кулею маси m_1 = 2 кг із кінетичною енергією K_1 = 100 Дж і нерухомою кулею маси m_2 = 3 кг відбувається пружне не центральне зіткнення. Знайти кут α, на який відхилилася перша куля при зіткненні, якщо друга отримала кінетичну енергію K_2 = 50 Дж.

$$\left(\cos\alpha=\frac{2m_1K_1-(m_1+m_2)K_2}{2m_1\sqrt{K_1(K_1-K_2)}}=0{,}53\Rightarrow\alpha=58°\right)$$

1.302. Дві шайбочки масами m_1 і m_2 одночасно починають зісковзувати назустріч одна одній з двох однакових гладких гірок висоти H. Швидкості шайбочок біля основи гірок напрямлені горизонтально уздовж однієї прямої. Зісковзнувши на гладку горизонтальну поверхню, шайбочки непружно стикаються. На яку висоту h й на яку гірку шайбочки піднімуться після зіткнення?

$$\left(h=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2 H\right)$$

1.303. З вершини нерухомого не плоского клина масою M, який може без тертя ковзати по горизонтальній поверхні, починає зісковзувати без тертя невеликий брусок маси m. Кут нахилу клина плавно зменшується й біля основи складає 0°. Знайти висоту клина h, якщо швидкість бруска біля його основи дорівнює v.

$$\left(h=\frac{v^2}{2g}\left(1+\frac{m}{M}\right)\right)$$

1.304. На гладкій горизонтальній поверхні перебувають у спокої невелика шайба маси m та гладка гірка маси M і висоти h, що може вільно ковзати по поверхні. Яку мінімальну швидкість v необхідно надати шайбі, аби вона змогла подолати цю гірку?

$$\left(v=\sqrt{2gh\left(1+\frac{m}{M}\right)}\right)$$

1.305. Тілу масою m = 10 кг, що лежить на нерухомій горизонтальній платформі маси M = 100 кг, поштовхом надають горизонтальної швидкості

v = 5 м/с. Коефіцієнт тертя між тілом і платформою k = 0,2. Тертя ковзання між колесами платформи й рейками відсутнє. Знайти роботу сил тертя A на момент, коли тіло перестане ковзати по платформі.
Визначити шлях S, який пройде платформа на цей момент.

$$\left(A = -\frac{mMv^2}{2(M+m)} = -114\,Дж; \quad S = \frac{Mmv^2}{2kg(M+m)^2} \approx 0{,}53\text{м} \right)$$

1.306. На горизонтальних рейках стоїть нерухома платформа маси M_1, а на ній – не закріплена гармата маси M_2. Тертя ковзання між колесами платформи й рейками відсутнє. З гармати в горизонтальному напрямі вздовж рейок вилітає снаряд маси m із швидкістю v відносно землі. Унаслідок цього гармата зміщується на певну відстань відносно платформи й зупиняється. Знайти роботу сил тертя A за час руху гармати по платформі.

$$\left(A = -\frac{M_1 m^2}{2M_2(M_1+M_2)} v^2 \right)$$

1.307. Кулька маси m, що горизонтально летить із швидкістю v_1, потрапляє в дерев'яну кулю маси M, яка лежить на гладкій горизонтальній підлозі. Кулька пробиває дерев'яну кулю, пройшовши крізь її центр, і вилітає із швидкістю v_2. Знайти кількість тепла Q, що виділяється при цьому.

$$\left(Q = \frac{m}{2M}\left(M\left(v_1^2 - v_2^2\right) - m\left(v_1 - v_2\right)^2 \right) \right)$$

1.308. На гладкій горизонтальній площині лежать дві однакові пластикові кулі маси m = 100 г. Маленька металева кулька тієї ж маси, що горизонтально летить із початковою швидкістю v = 100 м/с, пробиває першу кулю і застряє в другій. Знайти кількість теплоти Q_1, що виділилася в першій кулі, якщо в другій виділилася кількість теплоти Q_2 = 90 Дж.

$$\left(Q_1 = 2v\sqrt{mQ_2} - 4Q_2 = 240\text{ Дж} \right)$$

1.4. Динаміка твердого тіла

- Рівняння моментів відносно осі:

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z .$$

- Рівняння динаміки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

$$I\beta_z = M_z$$

- Момент інерції протяжного тіла:

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int_V r^2 \rho \mathrm{d}V .$$

- Теорема Гюйгенса – Штайнера:

$$I = I_c + ma^2$$

- Моменти інерції I_c деяких однорідних тіл:

Тіло	Вісь	Момент інерції I_c
Тонкий стержень довжини l	Проходить перпендикулярно через середину стержня	$ml^2/12$
Суцільний циліндр (диск) радіуса R	Співпадає з віссю циліндра (диска)	$mR^2/2$
Суцільна куля радіуса R	Проходить через центр кулі	$2mR^2/5$

- Робота моменту сил при обертанні тіла навколо фіксованої осі:

$$A = \int M_z \mathrm{d}\varphi .$$

- Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

$$K = \frac{I\omega^2}{2} .$$

- Кінетична енергія твердого тіла при плоскому русі:

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} .$$

- Закон збереження моменту імпульсу відносно осі Z:

$$\sum I_i \omega_{iz} = const .$$

Моменти імпульсу та сили. Рівняння моментів

1.309. Частинка має імпульс $\vec{p}$ і момент імпульсу $\vec{L}_0$ відносно певної точки O. Знайти вираз моменту імпульсу $\vec{L}$ цієї частинки відносно іншої точки O′, положення котрої відносно O визначається радіусом-вектором $\vec{r}_0$.

$$\left(\vec{L} = \vec{L}_0 - \left[\vec{r}_0, \vec{p}\right]\right)$$

1.310. Маленька кулька маси *m* рівномірно рухається зі швидкістю v в площині XOY по колу радіуса *R* із центром O в початку координат. Визначити:

– модуль моменту імпульсу кульки L_0 відносно початку координат та $L_{0'}$ відносно точки O′ на осі OZ на відстані *h* від початку координат.
– чи можна на основі отриманих результатів сказати, що в обох випадках рух кульки відбувається із сталим моментом імпульсу $\vec{L}$.
– момент імпульсу кульки L_z відносно вказаної осі OZ.

$$\left(L = mv\sqrt{h^2 + R^2}; \quad ні; \quad L_z = mvR.\right)$$

1.311. На частинку, що розташована в точці з координатами (4, 3, 0) см, діє сила $\vec{F} = (3\vec{i} - 6\vec{j})$ Н. Знайти вектор $\vec{M}$ моменту цієї сили та її плече *d* відносно початку координат.

$$\left(\vec{M} = -0{,}33\vec{k}\ \text{Н}\cdot\text{м}; \quad d = 4{,}91\,\text{см}\right)$$

1.312. Дві антипаралельні сили однакової величини $F_1 = F_2 = F$ називаються *парою сил*, а відстань *d* між лініями їхньої дії – *плечем пари*. Довести (вивести формулу), що момент $\vec{M}$ пари не залежить від положення початку відліку та точок прикладання сил, і його модуль у всіх випадках визначається формулою $M = Fd$.

1.313. До гладенької вертикальної стінки на нитці довжиною 4 см підвісили кулю масою 0,3 кг і радіусом 2,5 см.

– довести, що при рівновазі напрям нитки буде обов'язково проходити через центр кулі, як показано на рис 4.1;
– знайти силу, з якою куля тисне на стінку.

(1,225 Н)

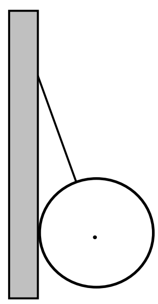


Рис. 4.1

1.314. Куля масою *m* = 0,5 кг підвішена на нитці до вертикальної шорсткої стінки так, що нитка є дотичною до кулі (рис. 4.2), і перебуває в рівновазі. Знайти найменшу можливу величину коефіцієнта тертя *k* між стінкою і кулею та силу натягу нитки *T*, якщо кут

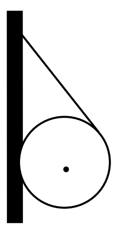


Рис.4.2

між ниткою та стінкою α = 45°.

$$\left(k = \frac{1}{\sin\alpha} \approx 1{,}4; \quad T = \frac{mg}{1+\cos\alpha} \approx 2{,}9 \text{ Н} \right)$$

1.315. На горизонтальній підлозі лежить куб масою m.

1) якою найменшою силою F його можна кантувати (переміщувати, перекидаючи через ребро)?
2) при якому коефіцієнті тертя k між кубом і підлогою кантування є неможливим?

$$\left(F = \frac{mg}{2\sqrt{2}}; \quad k \le \frac{1}{3} \right)$$

1.316. В якому випадку для переміщення важкого куба по горизонтальній підлозі його легше кантувати (перекидати через ребро), аніж перетягати, прикладаючи горизонтальну силу?

$$\left(\textit{при коефіцієнті тертя } k > \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

1.317. Тонкий однорідний стержень маси m = 1 кг знаходиться на гладкій горизонтальній поверхні. До кінця стержня перпендикулярно прикладена деяка горизонтальна сила $\vec{F}_1$, а на відстані l = 20 см від цього кінця – антипаралельна до $\vec{F}_1$ сила $\vec{F}_2$ величиною 5 Н. Знайти довжину стержня L, якщо він рухається поступально з прискоренням a = 2 м/с^2.

$$\left(L = \frac{2F_2}{ma} l = 1 \text{ м} \right)$$

1.318. На бобіну у вигляді двох закріплених на стержні дисків радіуса R, яка лежить на шорсткій горизонтальній поверхні (рис. 4.3), намотано m =1 кг м'якого тонкого дроту із радіусом шару $r = \eta R$. Із яким прискоренням почне котитися бобіна при $\eta = 0{,}6$, якщо за кінець дротини потягнути із силою F = 1,5 Н під кутом α до поверхні? Маса котушки є неістотна, ковзання відсутнє. Розглянути випадки: 1) α = 30°; 2) α = 60°; 3) α = arccosη.

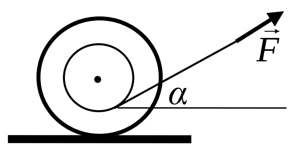


Рис. 4. 3

$$\left(a = \frac{2(\cos\alpha - \eta)}{2+\eta^2}\frac{F}{m}. \quad 1) \approx -6{,}4 \text{ см/с}^2; \quad 2) \approx 17 \text{ см/с}^2; \quad 3) 0 \right)$$

1.319. При якій величині сили F і кута α котушка з попередньої задачі буде перебувати в спокої, якщо її маса m і коефіцієнт тертя об поверхню k ?

$$\left(\alpha = \alpha_0,\ F < \frac{kmg}{\cos\alpha_0 + k\sin\alpha_0},\ \textit{де}\ \alpha_0 = \arccos\frac{1}{\eta} \right)$$

Момент інерції

1.320. Знайти вираз моменту інерції тонкого однорідного стержня довжини *l* і маси *m* відносно перпендикулярної осі, що проходить:

а) через центр мас стержня;
б) через його кінець.

$$\left(a)\ \frac{1}{12}ml^2; \qquad б)\ \frac{1}{3}ml^2 \right)$$

1.321. Квадратна рамка з тонкого дроту має масу *m* і сторону *a*. Визначити момент інерції рамки відносно осі, що проходить:

а) через її центр перпендикулярно до площини;
б) через її вершину перпендикулярно до площини;
в) через середини її протилежних сторін;
г) через суміжні вершини.

$$\left(a)\ \frac{1}{3}ma^2; \quad б)\ \frac{5}{6}ma^2; \quad в)\ \frac{1}{6}ma^2; \quad г)\ \frac{5}{12}ma^2 \right)$$

1.322. Знайти вираз моменту інерції тонкої квадратної пластинки із масою *m* і стороною *a* відносно осі, що проходить:

а) через її центр перпендикулярно до площини;
б) через вершину перпендикулярно до площини;
в) через середини протилежних сторін;
г) через суміжні вершини.

$$\left(a)\frac{1}{6}ma^2\ ; \quad б)\frac{2}{3}ma^2 \quad в)\frac{1}{12}ma^2; \quad г)\frac{1}{3}ma^2 \right)$$

1.323. Знайти вираз моменту інерції тонкого однорідного кільця маси *m* і радіуса *R* відносно осі, що:

а) проходить через центр кільця перпендикулярно до його площини;
б) співпадає з діаметром;

в) дотикається до кільця і є перпендикулярною до його площини;
г) є дотичною до кільця і лежить у його площині.

$$\left(a)\, mR^2; \quad б)\, \frac{1}{2}mR^2; \quad в)\, 2mR^2 \quad г)\, \frac{3}{2}mR^2 \right)$$

1.324. Знайти вираз моменту інерції тонкого однорідного диска маси m і радіуса R відносно осі, що:

а) проходить через центр диска перпендикулярно до його площини;
б) співпадає з діаметром диска;
в) перпендикулярна до площини диска дотикається до нього;
г) є дотичною до диска і лежить у його площині.

$$\left(a)\, \frac{1}{2}mR^2; \quad б)\, \frac{1}{4}mR^2; \quad в)\, \frac{3}{2}mR^2; \quad г)\, \frac{5}{4}mR^2 \right)$$

1.325. Знайти вираз моменту інерції тонкого сферичного шару радіуса R і маси m відносно осі, котра:

а) проходить через центр шару;
б) дотикається до нього.

$$\left(a)\, \frac{2}{3}mR^2; \quad б)\, \frac{5}{3}mR^2 \right)$$

1.326. Знайти вираз моменту інерції однорідної кулі радіуса R і маси m відносно осі, що:

а) проходить через центр кулі;
б) дотикається до неї.

$$\left(a)\, \frac{2}{5}mR^2; \quad б)\, \frac{7}{5}mR^2 \right)$$

1.327. Тонка пластинка у формі диска радіуса R із концентричним отвором радіуса r має масу m. Визначити момент інерції пластинки I відносно її осі, перпендикулярної до площини.

$$\left(I = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2) \right)$$

1.328. Тонка пластинка у формі трьох четвертинок квадрата зі стороною a (рис. 4.4) має масу m. Визначити момент інерції пластинки I відносно перпендикулярної до неї осі О. *<u>Вказівка</u>. Скористатися результатами задачі 4.14.*

$$\left(\frac{1}{6}ma^2 \right)$$

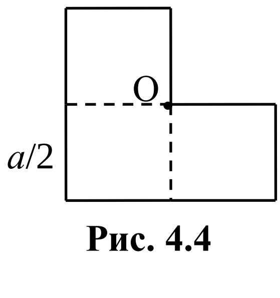


Рис. 4.4

1.329. Тонкий стержень має масу 1,4 кг. Відносно перпендикулярної осі, що перетинає його лінію на відстані у чверть довжини від кінця, момент інерції стержня дорівнює 0,9 кгм^2. Знайти довжину стержня.

(1,0 м *або* 2,1 м)

1.330. Фізичний маятник являє собою диск маси 5 кг і радіуса 20 см з'єднаний із тонким стержнем довжини 1 м і маси 1 кг орієнтованим уздовж діаметра диска. Обчислити момент інерції маятника відносно осі, що проходить через вільний кінець стержня перпендикулярно до площини диска.

(7,6 кг·м^2)

Обертання навколо нерухомої осі

1.331. Циліндр маси m_1 = 10 кг може обертатися без тертя навколо нерухомої горизонтальної власної осі. На циліндр намотано тонкий шнур із підвішеною до нього гирею маси m_2 = 2 кг. З яким прискоренням a буде опускатися гиря, якщо її відпустити?

$$\left(a = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} g = 2{,}8 \text{ м/с}^2 \right)$$

1.332. Через нерухомий блок маси m = 200 г перекинута тонка нитка, до кінців якої підвішено тягарці масами m_1 = 150 г та m_2 = 250 г. З яким прискоренням будуть рухатися тягарці, якщо їх відпустити? Блок уважати однорідним диском, тертям знехтувати.

$$\left(a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + m/2} g = 1{,}96 \text{ м/с}^2 \right)$$

1.333. Два бруски масами m_1 = 1,0 кг і m_2 = 0,5 кг з'єднані ниткою, перекинутою через закріплений на краю горизонтального стола блок, як показано на рис. 4.5. Знайти прискорення a тіл та сили натягу нитки T_1 і T_2 по обидва боки блока. Коефіцієнт тертя бруска m_1 об стіл k = 0,2. Блок вважати однорідним диском маси m = 3,0 кг, тертям в осі знехтувати.

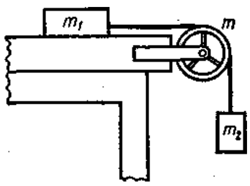


Рис. 4.5

$$\left(a = \frac{m_2 - km_1}{m/2 + m_1 + m_2} g = 0{,}98 \text{ м/с}^2; \quad T_1 = 2{,}94 \text{ Н}; \quad T_2 = 4{,}41 \text{ Н} \right)$$

1.334. Маховик із радіусом R = 1,0 м розкручують протягом певного часу τ за допомогою двигуна, що створює на валу маховика момент сил M = 400 Н·м. Потім двигун вимикають, і притискають до обода маховика дві гальмівні колодки з однаковою силою F. Знайти величину F, якщо маховик зупинився через час $\tau_1 = 2\tau$, і коефіцієнті тертя між маховиком і колодками k = 0,5. Тертям у підшипниках знехтувати.

(F = 200 Н)

1.335. Маховик у вигляді диска маси m = 50 кг із радіусом R = 20 см обертається навколо нерухомої осі з частотою n = 480 об/хв. Який гальмівний момент сил M треба створити, щоби маховик:

– зупинився через t = 50 с;
– зробив до повної зупинки N = 200 обертів.

(M = 1,0 Н·м *в обох випадках*)

1.336. На невагомий циліндр, який може обертатися без тертя навколо власної нерухомої горизонтальної осі, намотано в один шар тонкий трос довжини l і маси m. Унаслідок незначного поштовху трос починає розкручуватися під дією
сили тяжіння. Знайти залежність $a(x)$ прискорення частини троса, що звисає, від її довжини x.

$$\left(a = \frac{x}{l}g\right)$$

1.337. На циліндр маси M, який може обертатися без тертя навколо власної нерухомої осі, намотано в один шар не закріплений тонкий трос довжини l і маси m. Унаслідок незначного поштовху трос починає розмотуватися без ковзання під дією сили тяжіння. Знайти:

– залежність прискорення a троса від довжини x його частини, що звисає;
– величину прискорення троса a_1 за мить до та a_2 після відриву троса від циліндра;
– пояснити причину раптової зміни прискорення в момент відриву троса.

$$\left(a = g\frac{2m}{M+2m}\cdot\frac{x}{l}\right)$$

1.338. Змотана в щільний рулон тонка поліетиленова стрічка довжини l насаджена на горизонтальну вісь, яка може обертатися без тертя. Внаслідок незначного поштовху рулон починає розкручуватися під дією сили тяжіння. Визначити прискорення звисаючого кінця плівки a як функцію його довжини x.

$$\left(a = \frac{2x}{x+l}g\right)$$

1.339. Однорідний диск маси m і радіуса R розкрутили до кутової швидкості ω і обережно поклали на шорстку горизонтальну поверхню. Визначити момент сил тертя M, що діють на диск, та час руху диска до зупинки τ. Коефіцієнт тертя між диском та поверхнею дорівнює k.

$$\left(M = \frac{2kmgR}{3};\quad \tau = \frac{3\omega R}{4kg}\right)$$

1.340. Однорідний циліндр маси *m* і радіуса *R*, що обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю *ω*, поклали бічною поверхнею на горизонтальну площину і надали самому собі. Через який час по тому циліндр почне рухатися без ковзання, якщо коефіцієнт тертя між ним і площиною дорівнює *k*? Чому дорів-
нює повна робота сил тертя?

$$\left(t = \frac{\omega R}{3kg}; \quad A = -\frac{m\omega^2 R^2}{6} \right)$$

Кочення

1.341. Довести, що при коченні без ковзання циліндра чи кулі по довільній поверхні лінійні швидкість $v(t)$ та прискорення $a(t)$ точок на поверхні тіл в будь-яку мить збігаються із швидкістю та прискоренням їхніх осей $v_0(t)$ і $a_0(t)$, відповідно.

1.342. З вершини півсфери радіуса *R* скочується без ковзання однорідна кулька, що має масу *m* і радіус *r*. Знайти:

– висоту *h* від основи, на якій кулька відірветься від півсфери;
– кутову швидкість кульки *ω* на момент відриву.

$$\left(h = \frac{10}{17}(R+r); \quad \omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10g(R+r)}{17}} \right)$$

1.343. Обруч скочується без ковзання з вершини похилої площини. Визначити:

– час скочування τ обруча до основи площини, якщо її висота $h = 10$ см і довжина $l = 2$ м;
– мінімальний коефіцієнт тертя *k* між площиною та обручем, при якому не буде ковзання.

$$\left(\tau = \frac{2l}{\sqrt{gh}} \approx 4 \text{ с}; \quad k = \frac{h}{2\sqrt{l^2 - h^2}} \approx \frac{h}{2l} = 0{,}025 \right)$$

1.344. Однорідний циліндр скочується без ковзання з вершини похилої площини. Визначити:

– час скочування τ циліндра до основи площини, якщо її висота $h = 1{,}25$ м і кут нахилу до горизонту $\alpha = 30°$;
– мінімальний коефіцієнт тертя *k* між площиною та циліндром, при якому не буде ковзання.

$$\left(\tau = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{3h}{g}} = 1{,}24 \text{ с}, \quad k = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha = 0{,}19. \right)$$

1.345. Однорідна куля скочується без ковзання з вершини похилої площини. Визначити:

– час τ, за який куля скотиться до основи площини, якщо її висота h = 1,75 м і кут нахилу до горизонту α = 30°;
– мінімальний коефіцієнт тертя k між площиною та кулею, при якому вона не буде ковзати.

$$\left(\tau = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{14h}{5g}} = 1{,}41\,\text{с}, \quad k = \frac{2}{7}\operatorname{tg}\alpha = 0{,}165\right)$$

1.346. По похилій площині з кутом нахилу до горизонту α скочується без ковзання обруч, однорідний циліндр або куля. Знайти прискорення a кожного з указаних тіл.

$$\left(a = \frac{g\sin\alpha}{1+\gamma}, \quad \textit{де}\ \gamma = 1\ \textit{для обруча},\ \gamma = \frac{1}{2}\ \textit{для циліндра}\ \ \textit{і}\ \ \gamma = \frac{2}{5}\ \textit{для кулі}\right)$$

1.347. По похилій площині з кутом нахилу до горизонту α скочується обруч, однорідний циліндр або куля. Визначити, при якій величині коефіцієнта тертя k тіла не будуть ковзати.

$$\left(k \geq \frac{\gamma}{1+\gamma}\operatorname{tg}\alpha, \quad \textit{де}\ \gamma = 1\ \textit{для обруча},\ \gamma = \frac{1}{2}\ \textit{для циліндра}\ \ \textit{і}\ \ \gamma = \frac{2}{5}\ \textit{для кулі}\right)$$

1.348. Суцільний та закритий тонкостінний циліндри мають однакові розміри і масу. Пояснити, як можна розпізнати циліндри?

1.349. Суцільний і тонкостінний порожнистий циліндри однакового розміру та маси одночасно починають скочуватися без ковзання з вершини похилої площини. Знайти співвідношення швидкостей суцільного v_1 та порожнистого v_2 циліндрів біля основи площини. Пояснити причину відміни у швидкостях.

$$\left(v_1 = 1{,}225 v_2\right)$$

1.350. Котушка ниток маси m = 60 г лежить на горизонтальній шорсткій поверхні з коефіцієнтом тертя k = 1,0. Відношення зовнішнього радіуса котушки R до радіуса r шару ниток η = 2, момент інерції відносно власної осі $I = \gamma m R^2$, де γ = 0,7. Котушка починає рухатися без ковзання під дією сили F = 0,3 Н, прикладеної до вільного кінця нитки під кутом α = 45° до горизонту (див. рис. 4.3, задача 4.10). Знайти прискорення a осі та кутове прискорення β котушки, якщо радіус шару ниток r = 1,5 см.

$$\left(a = \frac{F(\eta\cos\alpha - 1)}{\eta(1+\gamma)m} \approx 0{,}6\ \text{м/с}^2, \quad \beta = \frac{a}{R} \approx 20\ \text{рад/с}^2\right)$$

Енергія обертального руху та робота моменту сил. Кінетична енергія плоского руху

1.351. Маховик, який обертається навколо власної осі з кінетичною енергією 1,0 кДж починає гальмувати й, зробивши 80 обертів, зупиняється. Знайти момент гальмівних сил, вважаючи його сталим.

(2,0 Нм)

1.352. Ротор двигуна робить 1500 об/хв. Визначити обертовий момент, який діє на ротор, якщо потужність на валу дорівнює 500 Вт.

(3,18 Нм)

1.353. Маховик із моментом інерції I = 50 кгм^2 обертається за законом $\varphi = \alpha - \beta t + \gamma t^2$, де α = 2 рад, β = 16 рад/с, γ = 2 рад/с^2. Знайти залежність від часу потужності $P(t)$ на валу маховика та її величину на моменти $t_1 = 0$, $t_2 = 4$ с, і $t_3 = 8$ с.

$\left(P(t) = 2I\gamma(2\gamma t - \beta), \quad P_1 = -3{,}2 \text{ кВт}, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 3{,}2 \text{ кВт} \right)$

1.354. На маховик із власним моментом інерції 40 кгм^2 починає діяти обертовий момент 20 Нм. Обчислити кінетичну енергію маховика через 10 с по тому.

(500 Дж)

1.355. Маховик у вигляді диска з масою 80 кг і радіусом 30 см розкручують із стану спокою до частоти n = 10 об/с. Уважаючи маховик однорідним диском, знайти:

– роботу розкручування;

– величину цієї роботи за умови, що радіус маховика удвічі більший при тій самій масі.

(7,1 кДж; 28,4 кДж)

1.356. Куля маси m = 10 г летить із швидкістю v = 800 м/с, обертаючись навколо своєї поздовжньої осі з частотою n = 3000 об/с. Приймаючи кулю за циліндрик із діаметром d = 8 мм, знайти кінетичну енергію K кулі.

$\left(K = (m/4)(2v^2 + \pi^2 n^2 d^2) = 3{,}21 \text{кДж} \right)$

1.357. Обчислити кінетичну енергію циліндра маси m = 4 кг, який котиться без ковзання по горизонтальній поверхні із швидкістю v = 1 м/с.

(3 Дж)

1.358. Однорідна куля маси 800 г, яка котиться без ковзання по горизонтальній поверхні, має кінетичну енергію 14 Дж. Знайти швидкість руху центра кулі.

(5 м/с)

1.359. Визначити кінетичну енергію K візка, що котиться без ковзання по горизонтальній площині зі швидкістю v. Маса візка без коліс m. Візок має чотири колеса у вигляді дисків однакової маси m_0.

$$\left(K = \frac{1}{2} v^2 (m + 6m_0) = 12 \text{ Дж} \right)$$

1.360. Куля маси m починає скочуватися без ковзання по площині, яка утворює кут α з горизонтом. Знайти кінетичну енергію кулі як функцію часу.

$$\left(K = \frac{5}{14} m g^2 \sin^2 \alpha \cdot t^2 \right)$$

1.361. Тонкостінний порожнистий циліндр в першому випадку зісковзує без кочення, а в другому – скочується без ковзання з вершини похилої площини ви-
сотою h = 1 м. Визначити швидкість циліндра в кінці спуску в обох випадках. Чому в другому випадку швидкість менша?

$$\left(v_1 = \sqrt{2gh} = 4{,}43 \text{ м/с}; \quad v_2 = \sqrt{gh} = 3{,}13 \text{ м/с} \right)$$

1.362. Однорідний циліндр в першому випадку зісковзує без кочення, а в другому – скочується без ковзання з вершини похилої площини висотою h = 1 м. Визначити швидкість циліндра в кінці спуску в обох випадках. Чому в другому випадку швидкість менша?

$$\left(v_1 = \sqrt{2gh} = 4{,}43 \text{ м/с}; \quad v_2 = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} = 3{,}61 \text{ м/с} \right)$$

1.363. Однорідна куля в першому випадку зісковзує без кочення, а в другому – скочується без ковзання з вершини похилої площини висотою h = 1 м. Визначити швидкість кулі в кінці спуску в обох випадках. Чому в другому випад-ку швидкість менша?

$$\left(v_1 = \sqrt{2gh} = 4{,}43 \text{ м/с}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = 3{,}74 \text{ м/с} \right)$$

1.364. Циліндр починає котитися без ковзання вгору по похилій площині з кутом нахилу до горизонту α. Знайти:

– висоту, на яку підніметься циліндр при початковій швидкості v_0;
– умову руху циліндра без ковзання.

$$\left(H = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{g}; \ \textit{коефіцієнт тертя } k > \frac{1}{3} \operatorname{tg}\alpha \right)$$

Збереження моменту імпульсу відносно осі

1.365. Олівець довжини l = 15 см, поставлений вертикально, падає на стіл. Уважаючи що нижній кінець олівця не ковзає, знайти кутову ω та лінійну v швидкості на момент падіння для:

– середини олівця;
– його верхнього кінця.

(14 рад/с, 1,05 м/с; 14 рад/с, 2,1 м/с)

1.366. Легкий стержень довжини $2R$ радіально прикріплений до масивної кулі радіуса R шарнірно підвішено за вільний кінець до горизонтальної осі (фізичний маятник). Стержень відхиляють на кут 60° від вертикалі й відпускають. Визначити максимальну швидкість центра кулі. Тертя відсутнє.

$$\left(v = 3\sqrt{\frac{15gR}{47}} \approx \sqrt{3gR} \right)$$

1.367. Горизонтальний диск радіуса r, який обертається навколо власної вертикальної осі, розташований над нерухомим диском радіуса $R = 2r$, який може обертатися навколо власної осі. Матеріал і товщина дисків однакові, осі співпадають. Верхній диск падає на нижній, відтак диски згодом починають обертатися як одне ціле. Знайти відношення ω_1/ω початкової кутової швидкості верхнього диска до спільної кінцевої швидкості та відношення початкової і кінцевої кінетичної енергії системи K_1/K.

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{K_1}{K} = 1 + \frac{R^4}{r^4} \right)$$

1.368. Платформа маси M = 480 кг у вигляді однорідного диска обертається навколо своєї осі з частотою n_1 = 1 об/хв. На краю платформи стоїть людина масою m = 60 кг. З якою частотою n_2 стане обертатися платформа, коли людина перейде в її центр? Людину прийняти за матеріальну точку, тертя в осі платформи не враховувати.

$$\left(n_2 = \left(1 + \frac{2m}{M} \right) n_1 = 1{,}25 \text{ об/хв} \right)$$

1.369. Платформа у вигляді однорідного диска радіуса R = 1,5 м і маси M = 180 кг обертається без тертя навколо власної вертикальної осі з частотою n = 10 об/хв. У центрі платформи стоїть людина маси m = 60 кг. З якою швидкістю v буде обертатися людина відносно підлоги, якщо вона перейде на край платформи? Людину вважати матеріальною точкою.

$$\left(v = \frac{2\pi nMR}{M + 2m} = 0{,}94 \text{ м/с} \right)$$

1.370. На краю горизонтальної платформи маси m_2 = 240 кг у формі однорідного диска радіуса R = 2 м стоїть людина маси m_1 = 80 кг. Платформа може обертатися без тертя навколо своєї вертикальної осі. Знайти, з якою кутовою швидкістю ω почне обертатися платформа, якщо людина піде по краю зі швидкістю v = 2 м/с відносно платформи. Людину вважати матеріальною точкою. Тертя в осі немає.

$$\left(\omega = \frac{2m_2 v}{(2m_1 + m_2)R} = 0{,}4 \text{ рад/с}\right)$$

1.371. Людина починає йти по краю круглої горизонтальної платформи, що може без тертя обертатися навколо власної вертикальної осі. Маса людини в η = 4 рази менша за масу платформи. На який кут φ повернеться платформа, коли людина повністю обійде її? Платформу вважати однорідним диском, людину – матеріальною точкою. Тертя в осі немає.

$$\left(\varphi = \frac{4\pi}{\eta + 2} = 120^\circ\right)$$

1.372. У нижній кінець стержня маси M і довжини l, що підвішений шарнірно за верхній кінець, влучає та застряє куля маси m << M, яка летіла горизонтально. Визначити швидкість кулі, якщо після удару стержень відхилився від вертикалі на кут α.

$$\left(v = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{2gl}{3}}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

1.373. У середину стержня довжини l = 1,5 м і маси M = 10 кг, що підвішений шарнірно за верхній кінець, влучає та застряє куля маси m = 10 г, яка летіла горизонтально зі швидкістю v_0 = 500 м/с. На який кут φ від вертикалі відхилиться стержень після удару

$$\left(\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{mv_0}{2M}\sqrt{\frac{3}{2gl}}; \quad \varphi = 9{,}16^\circ\right)$$

1.374. Тонка однорідна квадратна пластинка M може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що співпадає з однією з її сторін. У центр пластинки по нормалі пружно вдаряє кулька маси m, що летіла із швидкістю $\vec{v}$. Знайти:

– швидкість кульки $\vec{u}$ та швидкість центра мас пластинки $\vec{V}$ після удару, якщо $(M/m) = \eta$;
– при якому значенні η напрям руху кульки після зіткнення не зміниться?

$$\left(а)\ \vec{u} = \frac{3 - 4\eta}{3 + 4\eta}\vec{v},\ \vec{V} = \frac{6}{3 + 4\eta}\vec{v}; \quad б)\ \eta < \frac{3}{4}\right)$$

1.375. Знайти вектори $\vec{u}$ і $\vec{V}$ в умовах попередньої задачі при абсолютно непружному зіткнення кульки з пластинкою.

$$\left(\vec{u} = \vec{V} = \frac{3\vec{v}}{3 + 4\eta}\right)$$

1.5. Спеціальна теорія відносності

- Перетворення Лоренца:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \left(Vx/c^2\right)}{\sqrt{1-(V/c)^2}}.$$

- Скорочення довжин й уповільнення часу:

$$l = l_0\sqrt{1-(v/c)^2}; \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

- Релятивістський закон перетворення швидкостей:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1-\left(Vv_x/c^2\right)}; \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-(V/c)^2}}{1-\left(Vv_x/c^2\right)}.$$

- Релятивістський інтервал:

$$s^2 = c^2\tau^2 - l^2 = inv$$

- Імпульс релятивістської частинки з масою спокою (власною масою) m_0:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}} = m\vec{v}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}} - \text{релятивістська маса}.$$

- Рівняння динаміки релятивістської частинки:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}\right) = \vec{F}$$

- Повна енергія та енергія спокою релятивістської частинки:

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}; \quad E_0 = m_0c^2.$$

- Кінетична енергія релятивістської частинки:

$$K = E - E_0 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}} - 1\right).$$

- Зв'язок між енергією та імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2 - p^2c^2 = E_0^2; \quad p^2c^2 = K(K + 2E_0).$$

Перетворення Лоренца

1.376. Стрижень власної довжини l_0 рухається в поздовжньому напрямі зі швидкістю v, рівною: 0,1c; 0,5c; 0,9c. Знайти відносну зміну (%) довжини стрижня $\Delta l / l_0$.

(0,5%; 13%; 56%)

1.377. При якій мінімальній швидкості поздовжнього руху можна виявити релятивістське скорочення довжини стержня при точності вимірювання 0,1 мкм і власній довжині стержня 1 м?

($1{,}35 \cdot 10^5$ м/с)

1.378. Нерухомий стержень довжини l_0 = 1 м розташований в площині XOY під кутом α_0 = 45° до осі X К-системи відліку. Знайти довжину стержня l і кут α, який він складає з віссю X′ K′-системи, що рухається відносно К із швидкістю $v = 0{,}6c$.

$\left(0{,}9\ \text{м};\quad 51{,}34°\right)$

1.379. Стержень власної довжини l_0 = 1 м рухається із швидкістю v = 0,5c відносно лабораторної системи відліку, в якій кут між стрижнем і напрямом його руху α = 45°. Знайти довжину стержня в лабораторній системі відліку l і кут β між стержнем і напрямом руху у власній системі відліку, тобто системі відліку, відносно якої тіло не рухається.

$$\left(l = l_0\sqrt{\frac{2(1 - v^2/c^2)}{2 - v^2/c^2}} = 0{,}925\ \text{м};\quad \beta = \operatorname{arctg}\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 41° \right)$$

1.380. Власна довжина катетів рівнобедреного прямокутного трикутника складає 1 м. Знайти площу трикутника в системі відліку, де він рухається уздовж одного з катетів із швидкістю 0,8c.

(0,3 м^2)

1.381. Рівнобедрений прямокутний трикутник починає рухатись уздовж одного з катетів. При якій швидкості руху протилежний кут становитиме 30°?

($\approx$ 0,82c)

1.382. Деякий трикутник у лабораторній системі відліку є рівнобедреним прямокутним, а у власній системі відліку – правильним. Чому дорівнює відносна швидкість v систем відліку?

$$\left(v = c\sqrt{2/3} = 2{,}45 \cdot 10^8\ \text{м/с} \right)$$

1.383. Дві системи відліку рухаються з різними швидкостями уздовж стрижня. Швидкість першої системи відліку відносно стрижня v_1 = 0,1c, а довжина стрижня в ній l_1 = 1,1 м. Знайти швидкість v_2 руху другої системи від ліку відносно стрижня, якщо довжина стрижня в ній l_2 = 1 м.

$$\left(v_2 = c\sqrt{1 - (l_2/l_1)^2(1 - v_1^2/c^2)} = 0{,}43c \right)$$

1.384. Нерухоме тіло довільної форми має власний об'єм V_0. Знайти його об'єм V в системі відліку, відносно якої воно рухається із швидкістю $v = 0{,}9c$.

$(V = 0{,}436\ V_0)$

1.385. Стержень рухається вздовж лінійки. Коли в системі відліку лінійки одночасно відмітили положення кінців стержня то отримали відстань між мітками $l_1 = 1{,}00$ м. А коли положення кінців стержня відмітили на ті самій лінійці одночасно в системі відліку стержня, то вийшло $l_2 = 1{,}44$ м. Знайти власну довжину стержня l_0 і швидкість його руху v відносно лінійки

$$\left(l_0 = \sqrt{l_1 l_2} = 1{,}2 \text{ м}; \quad v = \left(\sqrt{1 - (l_1/l_2)}\right)c \approx 0{,}55c\right)$$

1.386. У лабораторній системі відліку нестабільна частинка при швидкості руху 0,99c за час життя проходить відстань 3 км. Знайти власний час життя частки .

$$\left(\tau_0 \approx 1{,}4 \text{ мкс}\right)$$

1.387. Власний час життя мюона τ_0 = 2 мкс. Знайти швидкість мюона в лабораторної системи відліку, в якій за час життя він пролітає відстань 6 км.

(0,995c)

1.388. Система відліку K' рухається відносно системи K із швидкістю v уздовж осі X. Два спостерігачі K - системи, що знаходяться відповідно в точках $x_1 = 0$ і $x_2 = l$, в момент $t_1 = t_2 = 0$ за своїми годинниками фіксують покази годинників $K'-$системи, що саме пролітають повз них. Яке значення t_2' зафіксував другий спостерігач, якщо перший отримав $t_1' = 0$?

$$\left(t_2' = -\frac{vl}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

1.389. Фантастичний експрес, який складається із N = 100 вагонів однакової довжини l_0 = 20 м, рухається зі швидкістю v = 0,5c. Коли перший вагон порівнявся із світлофором, у ньому ввімкнули імпульсний лазер. А коли повз світлофор саме пройшов останній вагон, лазер випустив другий імпульс. Яку частоту ν_0 повторення лазерних імпульсів зафіксує пасажир першого вагона?

$$\left(\nu_0 = \frac{v}{Nl_0\left(1 - (v/c)^2\right)} = 10^5\ \frac{1}{c}\right)$$

1.390. Спортсмен на стрільбищі робить постріл (подія 1) у горизонтальному напрямку. Відтак куля через заданий час Δt влучає в мішень (подія 2) розміщену на заданій відстані l. Визначити:

– на якій відстані одна від одної та з яким інтервалом часу відбуваються ці події для спостерігача, що рухається із швидкістю V паралельно до лінії пострілу?

– в якій системі відліку ці події відбуваються в одній точці?

– чи існує система відліку, в якій ці події відбуваються одночасно?

1.391. У певній інерціальній системі відліку в момент часу, для якого ct_1 = 1 м (c – гранична швидкість) в точці $\{2;0;0\}$(м) сталася подія A, а в момент часу ct_2 = 4 м в точці $\{7;0;0\}$(м) відбулася подія B.

а) знайти відстань $\Delta l'$ між точками, в яких відбулися ці події у системі відліку, де вони були одночасними.

б) чи існує система відліку, в якій указані події відбулися в одній точці?

(а) $\Delta l'$= 4 м; б) *ні*)

1.392. На осі OX інерціальної K-системи відліку в момент часу, для якого $ct_1 = 3\cdot10^5$ м (c – гранична швидкість) в точці $x_1 = 2\cdot10^5$ м сталася подія 1, а в момент часу $ct_2 = 8\cdot10^5$ м в точці $x_2 = 6\cdot10^5$ м – подія 2.

а) знайти проміжок часу $\Delta t'$ між цими подіями в системі відліку, де вони відбулися в одній точці.

б) чи існує система відліку, в якій указані події відбулися одночасно?

(а) $\Delta t'$ = 1 мс; б) *ні*)

1.393. У лабораторній системі відліку нестабільна частинка за час життя $\tau = 2\cdot10^{-6}$ с перемістилася з точки $\{100;100;300\}$ (м) у точку $\{300;400;100\}$(м). Знайти власний час життя частинки τ_0.

(τ_0 =1,45·10^{-6} с)

Перетворення швидкостей

1.394. Фотон рухається уздовж осі OX системи відліку K. Використовуючи формули перетворення швидкостей, обчислити швидкість фотона відносно системи відліку K', що рухається із швидкістю $v = c/2$ у від'ємному напрямі осі OX K-системи відліку.

1.395. Частинка рухається із швидкістю v_1 в напрямку осі OX K-системи відліку. Знайти швидкість частинки $\vec{v}'$ в K'-системі відліку, що рухається відносно K назустріч частинці з такою самою швидкістю .

$$\left(\vec{v}' = \frac{2c^2}{c^2 + v_1^2}\cdot\vec{v}_1\right)$$

1.396. У нерухомій K-системі відліку частинка має швидкість $v = 0{,}8c$ спрямовану під кутом 30° до осі OX. Який кут складає швидкість частинки $\vec{v}'$ із віссю OX$'$ системи відліку, що рухається відносно K у додатному напрямку осі OX із швидкістю $V = 0{,}6c$?

(73,8°)

1.397. Дві частинки рухаються назустріч одна одній із швидкостями $v_1 = 0{,}5c$ і $v_2 = 0{,}75c$ уздовж осі OX деякої *K*-системи відліку. Знайти, з якою швидкістю:

– рухаються частинки одна відносно іншої;
– змінюється відстань між ними в *K*-системі відліку.

(0,91*c*; 1,25*c*)

1.398. Дві частинки рухаються з однаковою швидкістю v у взаємно перпендикулярних напрямках. Знайти модуль відносної швидкості частинок $v_в$.

$$\left(v_в = v\sqrt{2-(v/c)^2}\right)$$

Релятивістський імпульс. Кінетична і повна енергія релятивістської частинки

1.399. Знайти різницю $\Delta v = c - v$ між граничною швидкістю і швидкістю руху частинки, релятивістська маса котрої в 40000 разів перевищує її власну масу (масу спокою).

(Δv = 9,4 см/с)

1.400. Швидкість релятивістської частинки v_0. У скільки разів $\eta = v/v_0$ треба збільшити швидкість частинки, аби її релятивістська маса збільшилась удвічі?

$$\left(\eta = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{3c^2}{v_0^2}}\right)$$

1.401. Швидкість релятивістської частинки v_0. У скільки разів $\eta = v/v_0$ треба збільшити швидкість частинки, аби її імпульс збільшився в 2 рази?

$$\left(\eta = \frac{2}{\sqrt{1+\left(3v_0^2/c^2\right)}}\right)$$

1.402. Знайти швидкість руху частинки, імпульс якої складає $p = mc$.

$$\left(v = \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$$

1.403. Частинка з масою спокою m_0 у момент $t = 0$ починає рухатися під дією сталої сили $\vec{F}$.

– знайти залежність $v(t)$ швидкості частки від часу;

– отримати наближені вирази $v(t)$ при малих $(v \ll c)$ та великих $(v \sim c)$ швидкостях і показати приблизний графік залежності $v(t)$.

$$\left(v = \frac{c}{\sqrt{1+\left(m_0 c/Ft\right)^2}} \right)$$

1.404. Релятивістська частинка з масою спокою m_0 рухається уздовж осі x згідно із законом $x = \alpha t^2/2$, де $\alpha = const$. Визначити залежність від часу $F(t)$ сили, що діє на частинку.

$$\left(F = \frac{\alpha m_0}{\left(1-(\alpha^2 t^2 / c^2)\right)^{3/2}} \right)$$

1.405. Частинка з масою спокою m_0 рухається уздовж осі OX згідно із законом $x = \sqrt{a^2 + c^2 t^2}$, де a – стала. Знайти силу F, що діє на частинку.

$$\left(F = \frac{m_0 c^2}{a} \right)$$

1.406. На нерухому частинку маси m_0 у момент $t = 0$ починає діяти незмінна за напрямком сила $F = F_0 v_0 / v$, де v – швидкість частинки, F_0 і $v_0 \ll c$ – задані сталі.

1) визначити залежність швидкості частинки від часу $v(t)$;
2) отримати наближені вирази $v(t)$ при малих та великих швидкостях;
3) показати приблизний графік $v(t)$.

Порада. Для зручності викладок перейти до величини $\beta = (v / c)$.

$$\left(1)\ v = c\frac{\sqrt{\alpha t\left(2+\alpha t\right)}}{1+\alpha t};\quad 2а)\ v = c\sqrt{2\alpha t};\quad 2б)\ v = c\sqrt{\frac{1+\left(2/\alpha t\right)}{1+\left(2/\alpha t\right)+\left(1/\alpha t\right)^2}};\quad \alpha = \frac{F_0 v_0}{m_0 c^2} \right)$$

1.407. При якій швидкості частинки v її повна енергія в два рази перевищує енергію спокою?

$$\left(v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0{,}867c \right)$$

1.408. З якою швидкістю рухається частинка із власною масою m_0, якщо її кінетична енергія $K = (m_0 c^2/2)$?

$$\left(v = \frac{\sqrt{5}}{3}c \approx 2{,}24 \cdot 10^8 \text{ м/с} \right)$$

1.409. З якою швидкістю рухається частинка, якщо її кінетична енергія $K=(mc^2/2)$, де m – релятивістська маса?

$$\left(v=\frac{c}{2}\right)$$

1.410. При якій швидкості частинки v її кінетична енергія в два рази перевищує енергію спокою?

$$\left(v=\frac{2\sqrt{2}}{3}c=0{,}94c\right)$$

1.411. При якій швидкості частинки v її кінетична енергія складає 25% від повної енергії?

$$\left(v=0{,}6c\right)$$

1.412. Знайти прискорюючу напругу U, яку має пройти електрон, аби розігнатися із стану спокою до швидкості $0{,}95c$?

$(U = 1{,}1\cdot10^6$ В)

1.413. Яку роботу A потрібно виконати, щоби збільшити швидкість частинки з масою спокою m_0 від $v_1 = 0{,}6c$ до $v_2 = 0{,}8c$? На скільки відсотків $\eta=\left(A-A'\right)/A$ величина A відрізняється від значення A' обчисленого за класичною (нерелятивістською) формулою?

$(A = 0{,}42\ m_0c^2;\ \ \eta = 67\%)$

1.414. Вивести формулу, що виражає імпульс p релятивістської частинки з масою спокою m_0, через кінетичну енергією K.

$$\left(p=\frac{1}{c}\sqrt{K\left(K+2m_0c^2\right)}\right)$$

1.415. Дві не взаємодіючі частинки з масою спокою m_0 і імпульсом p рухаються назустріч одна одній і після непружного зіткнення утворюють складену частинку. Чому дорівнює маса спокою M_0 створеної частинки?

$$\left(M_0=\frac{2\sqrt{p^2+m_0{}^2c^2}}{c}\right)$$

1.416. Частинка з масою спокою m_0, що рухається зі швидкістю $v = (4/5)c$, непружно стикається з нерухомою часткою тієї ж маси. Знайти масу спокою M_0 складеної частки, що утворилася.

$$\left(M_0=\frac{4m_0}{\sqrt{3}}\right)$$

1.417. Частинка з масою спокою m_0 і кінетичною енергією K непружно стикається із нерухомою частинкою такої самої маси. Знайти масу спокою M_0 і швидкість v складеної частинки, що утворилася.

$$\left(M_0 = \frac{1}{c}\sqrt{2m_0(K + 2m_0c^2)}\,, \qquad v = c\sqrt{\frac{K}{2m_0c^2 + K}} \right)$$

1.418. На нагрівання тіла витрачена енергія Q = 1 Дж. На скільки збільшилася маса тіла?

($\Delta m_0 = 1{,}1\cdot 10^{-17}$ кг)

1.419. Густина потоку енергії електромагнітного випромінювання Сонця поблизу Землі складає 1,4 кВт/м^2. Яку масу Δm через це втрачає Сонце за 1 с і за який час τ воно втратить 1% маси. Прийняти відстань між Сонцем і Землею $R = 1{,}5\cdot 10^{11}$ м і масу Сонця $m = 2\cdot 10^{30}$ кг

(Δm = 4,4 млн. т; τ = 1,43 млрд. років)

1.420. При поділі ядер урану та деяких інших елементів сумарна маса спокою «дочірніх» ядер виявляється меншою за масу «материнських» ядер, тож виділяється енергія. На цьому ґрунтується робота АЕС. Оцінити, скільки мазуту треба спалити на тепловій електростанції, аби отримати стільки ж енергії, як і при “згорянні” 1 г урану, якщо при поділі одного ядра в середньому виділяється біля $1{,}6\cdot 10^{-13}$ Дж енергії. Прийняти масу ядра урану $4\cdot 10^{-25}$ кг і теплотворність мазуту 40 кДж/кг.

(10 т)

1.6. Механічні коливання

- Зв'язок між параметрами гармонічних коливань:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

- Частота коливань матеріальної точки маси m під дією сили $F = -kx$:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- Період гармонічних коливань і власна частота фізичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}.$$

- Зведена довжина фізичного маятника:

$$l_{зв} = \frac{I}{ml}.$$

- Частота вільних загасаючих коливань за наявності гальмівної сили $\vec{F} = -r\vec{v}$:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{r}{2m} - \text{коефіцієнт загасання.}$$

- Амплітуда загасаючих коливань:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}.$$

- Характеристики загасання:

час релаксації $\tau = \dfrac{1}{\beta}$;

логарифмічний декремент загасання $\lambda = \ln\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$;

добротність коливальної системи $Q = \dfrac{\pi}{\lambda}$.

- Енергія загасаючих коливань при слабкому загасанні $(\beta << \omega_0)$:

$$W = W_0 e^{-2\beta t}.$$

- Відносна втрата енергії коливань за один період при слабкому загасанні:

$$\frac{\delta W}{W} = \frac{2\pi}{Q}.$$

Характеристики гармонічних коливань

1.421. Матеріальна точка масою m = 0,2 кг здійснює коливання вздовж осі ОХ за законом x = 0,08 cos($20\pi t + \pi/4$) м. Знайти залежності від часу швидкості, прискорення та сили, що діє на точку, а також амплітудні значення цих величин.

316 і 63? $\begin{pmatrix} \upsilon_x = -5{,}03\sin(20\pi t + \pi/4);\ a_x = 315{,}83\cos(20\pi t + \pi/4);\ F_x = ma_x; \\ \upsilon_m = 5 \text{ м/с};\ a_m = 316 \text{ м/с}^2;\ F_m = 63 \text{ Н}. \end{pmatrix}$

1.422. За умовою попередньої задачі визначити кінетичну, потенціальну та повну енергію точки

$$\left(K = 2{,}5\cos^2(20\pi t + 3\pi/4)\text{Дж};\quad U = 2{,}5\cos^2(20\pi t + 5\pi/4)\text{Дж};\quad W = 2{,}5\text{Дж}\right)$$

1.423. За умовою попередньої задачі визначити лінійну частоту та період зміни кінетичної енергії.

(20 Гц; 50 мс)

1.424. Частинка здійснює гармонічні коливання з амплітудою A і періодом T. Знайти:

– час t_1, за який зміщення частинки змінюється від 0 до $A/2$;
– час t_2, за який зміщення змінюється від $A/2$ до A.

$$\left(t_1 = \frac{1}{12}T;\quad t_2 = \frac{1}{6}T\right)$$

1.425. Коливання матеріальної точки відбуваються за законом $x = 4\cdot\cos^2(0{,}5t)\cdot\sin(1000\cdot t)$. Розкласти коливання на гармоніки й зобразити їхній спектр.

($x = 2\sin 1000t + \sin 1001t + \sin 999t$)

Динаміка гармонічних коливань

1.426. Точка здійснює гармонічні коливання з амплітудою X під дією пружної сили $F = -kx$. Знайти роботу цієї сили за один період коливань.

(0)

1.427. Вантаж масою m, що підвішений на пружині, розтягає її на Δl. З якою частотою почне коливатися вантаж, якщо його трохи відтягнути вниз і відпустити?

$$\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}\right)$$

1.428. Знайти період малих власних коливань стовпчика рідини довжини l в U – подібній трубці. В'язкістю знехтувати.

$$\left(T = \pi\sqrt{\frac{2l}{g}} \right)$$

1.429. Визначити період малих вільних вертикальних коливань вміщеної в рідину тонкостінної сферичної оболонки радіуса *R*, якщо у стані рівноваги вона є зануреною рівно наполовину.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{3g}} \right)$$

1.430. Знайти період малих вільних вертикальних коливань зануреного у воду циліндричного поплавця довжини l = 10 см, густина матеріалу якого ρ = 0,8 г/см^3.

$$\left(T = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}\frac{l}{g}} \approx 0{,}5\ \text{c} \right)$$

1.431. Вивести формулу періоду коливань пружинного маятника (кулі маси *m*, що підвішена на невагомій пружині жорсткістю *k*).

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \right)$$

1.432. Вивести формулу періоду T малих коливань математичного маятника довжиною l у повітрі, нехтуючи тертям у підвісі та дією середовища.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \right)$$

1.433. Знайти період малих коливань математичного маятника довжиною l = 20 см, що занурений у рідину з густиною в η = 3,0 рази меншою за густину речовини маятника. Опором рухові в рідині знехтувати.

$$\left(T = T_0\sqrt{\frac{\eta}{\eta-1}} = 1{,}1\text{c}, \quad \text{де } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \right)$$

1.434. Знайти залежність від часу сили натягу нитки $F(t)$ математичного маятника масою m і довжиною l при максимальному куті відхилення нитки від вертикалі φ_0. Коливання вважати гармонічними.

$$\left(F(t) = mg(\varphi_0^2\sin^2(\omega_0 t) + \cos\varphi(t)),\ \textit{де}\ \varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega_0 t),\ \omega_0 = \sqrt{g/l} \right)$$

1.435. Тонкий поршень масою m і площею S ділить закритий горизонтальний циліндр із газом навпіл. Уважаючи процес ізотермічним, визначити частоту малих вільних коливань поршня. Довжина циліндра l, тиск газу P, тертя відсутнє.

$$\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{4PS}{ml}} \right)$$

1.436. Фізичний маятник у вигляді однорідного стрижня довжиною l, що підвішений за кінець, здійснює малі вільні коливання. Знайти період коливань T і зведену довжину $l_{зв}$ маятника за відсутності сил тертя та опору.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}; \quad l_{зв} = \frac{2}{3}l \right)$$

1.437. На якій відстані x_m від центра мас потрібно закріпити на горизонтальній осі тонкий стрижень заданої довжини l, аби він мав максимальну можливу частоту ω_m малих вільних коливань? Знайти величину ω_m.

$$\left(x_m = \frac{l}{2\sqrt{3}}, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{l}} \right)$$

1.438. Фізичний маятник, який має власну частоту ω_0, відхилили до положення нестійкої рівноваги й відпустили з незначним поштовхом. Знайти максимальну кутову швидкість маятника. Тертя відсутнє.

$$(\omega = 2\omega_0)$$

1.439. Тонка однорідна пластинка у формі правильного трикутника з висотою h здійснює малі коливання навколо горизонтальної осі, що співпадає з однією зі сторін трикутника. Знайти період коливань і зведену довжину такого маятника.

$$\left(T = \pi\sqrt{\frac{2h}{g}}, \qquad l_{зв} = \frac{1}{2}h \right)$$

1.440. Горизонтальна дошка, на якій лежить брусок, здійснює поздовжні гармонічні коливання з амплітудою A = 10 см. Знайти коефіцієнт тертя між дошкою й бруском, якщо він починає ковзати при періоді коливань дошки меншому за
T_0 = 1,0 с.

$$\left(k = \frac{4\pi^2 A}{gT_0^2} = 0,4 \right)$$

1.441. Горизонтальну дошку довжини l кладуть на два котки (роли) так, що її центр мас є трохи зміщений в бік одного з котків, рис. 6.1. Показати, що при обертанні котків у зустрічних напрямах дошка буде здійснювати поздовжні гармонічні коливання, та визначити їхній період.

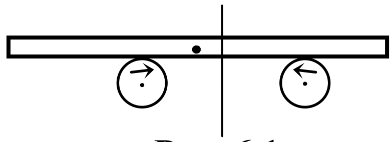


Рис. 6.1.

$$\left(T = \pi\sqrt{\frac{2l}{g}} \right)$$

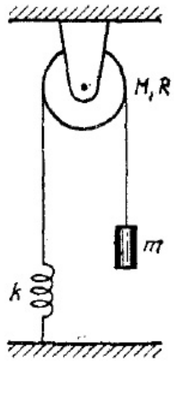
1.442. Маленьку муфту маси m, яка може рухатися з невеликим тертям по довгому горизонтальному стержню, з'єднали з прикріпленою до стержня невагомою пружиною довжини l_0 і жорсткості k, що навита з нерозтяжної дротини довжини L. Стержень починають обертати з кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, що проходить через точку кріплення пружини. Визначити характер і параметри руху муфти відносно стержня в процесі встановлення руху.

$$\left(\begin{array}{l} \textit{При } k > \omega^2 m - \textit{загасаючі коливання з частотою } \Omega \approx \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \textit{ і початковою амплітудою} \\ A_0 = (\omega/\omega_0) l_0 \textit{ навколо точки на відстані } l = l_0 \Big/ \left(1 - (\omega_0/\omega)^2\right) \textit{ від осі; } \omega_0 = \sqrt{k/m}. \\ \textit{При } k \le \omega^2 m - \textit{монотонне віддалення від осі на відстань } l = L \textit{ (до повнго розтягу пружини).} \end{array} \right)$$

1.443. Горизонтальна платформа здійснює вертикальні коливання за законом $x = A\cdot\cos\omega t$. На платформі лежить шайба з непружного матеріалу. За якої умови шайба відриватиметься від платформи?

$$(A\omega^2 \ge g)$$

1.444. Знайти частоту ω_0 малих крутильних коливань суцільного однорідного циліндра масою M, до якого підвішено на шнурі з пружиною тягарець маси m, як показано на рис. 6.2. Жорсткість пружини k, ковзання шнура по циліндру відсутнє. Масою пружини й шнура, а також тертям в осі знехтувати**.**



$$\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + (M/2)}}\right)$$

Рис. 6.2.

1.445. До не розтягненої вертикальної пружини із закріпленим верхнім кінцем підвісили і без поштовху відпустили тіло масою *m*. Жорсткість пружини дорівнює *k*. Нехтуючи масою пружини та тертям і опором, знайти:

– закон руху тіла $y(t)$, де y – його зміщення із початкового положення.
– максимальний і мінімальний розтяг пружини.

$$\left(y = \frac{mg}{k}(1 - \cos\omega_0 t),\ де\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};\quad \frac{2mg}{k},\ 0\right)$$

1.446. Кулька маси m = 50 г і радіуса r = 1,0 см, що підвішена на невагомій пружині жорсткості k = 2,0 Н/м і занурена в рідину із в'язкістю η = 10 Н/(м·с), здійснює вільні коливання. Визначити власну частоту ν_0, час релаксації τ і добротність Q такого механічного осцилятора.

$$\left(\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1{,}0\ \text{Гц};\quad \tau = \frac{1}{3\pi r\eta} = 1{,}1\ \text{с};\quad Q = \pi\nu_0\tau \approx 3{,}5\right)$$

2.1. Молекулярна фізика

Ідеальний газ

- Кількість речовини (моль)

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \nu = \frac{m}{M}, N_{\text{A}} = 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль} = 6{,}02 \cdot 10^{26} \text{ 1/кмоль.}$$

- Середня кінетична енергія поступального теплового руху частинки

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT$$

- Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів

$$P = \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n \langle E \rangle$$

- Тиск ідеального газу

$$P = nkT$$

- Тиск суміші газів (закон Дальтона)

$$P = \sum_i P_i$$

- Рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона)

$$PV = \nu RT = \frac{m}{M} RT$$

2.1. Де більше міститься атомів: в 1 м^3 води чи в 1 м^3 ртуті?

(в 1 м^3 ртуті більше майже в 1,2 раза)

2.2. Поверхневий шар Сонця (фотосфера) складається, з атомів водню і має температуру близько 6000 $^\circ$С. Чому в такому разі Сонце не втрачає речовину шляхом подолання легкими атомами сил тяжіння за рахунок великої кінетичної енергії тепловий руху? Відповідь обґрунтувати розрахунками.

2.3. Протягом місячного дня поверхня Місяця нагрівається до досить високої температури (вище 100°С). Порівнявши газокінетичну і гравітаційну енергії молекул довести, що Місяць не може мати атмосфери.

2.4. Довести закон Дальтона (10.4), який трактує, що тиск суміші ідеальних газів дорівнює сумі їхніх парціальних тисків. *Примітка. Парціальним називається тиск даної компоненти суміші за умови, що інші компонент відсутні.*

2.5. У балоні ємністю 20 літрів міститься суміш із 10 г водню й 48 г кисню. Коли суміш підпалили іскрою, то утворилася пара з температурою 300 °С. Визначити тиск у балоні відразу після реакції.

($1{,}2\cdot10^6$ Па = 12 ат)

2.6. Припустивши, що повітря (M = 29 г/моль) складається, в основному, з кисню та азоту, оцінити масовий вміст η % цих газів в атмосфері.

$$\left(\eta_{\mathrm{O}} = \frac{(M_{\mathrm{N}}/M)-1}{(M_{\mathrm{N}}/M_{\mathrm{O}})-1} = 27{,}5\%;\quad \eta_{\mathrm{N}} = 1-\eta_{\mathrm{O}} = 72{,}5\%\right)$$

2.7. Визначити кількість речовини та кількість молекул, які містяться в 500 г кисню.

(15,625 моль; $9{,}41\cdot10^{24}$)

2.8. Визначити кількість речовини і кількість молекул, які містяться в 200 г азоту.

(7,14 моль; $4{,}3\cdot10^{24}$)

2.9. Скільки атомів міститься в: а) v = 0,2 моль і б) m = 1 г ртуті?

(а) $1{,}2\cdot10^{24}$; б) $3{,}01\cdot10^{21}$)

2.10. Визначити кількість речовини і кількість молекул в 1см^3 води при 4 °С.

(0,056 моль; $3{,}35\cdot10^{22}$)

2.11. Через скільки часу склянка з водою стане порожньою, якщо з неї щосекунди випромінюються 100 млрд. молекул?

(10^6 років)

2.12. Визначити масу m_0 молекули води та оцінити її діаметр d, узявши до уваги, що в рідинах молекули щільно прилягають одна до одної.

$$\left(m_0 = 2{,}99\cdot10^{-26}\ \text{кг},\ d \approx \sqrt[3]{M/\rho N_{\mathrm{A}}} \approx 0{,}3\ \text{нм}\right)$$

2.13. Обчислити молярну масу вуглекислого газу CO_2.

($44\cdot 10^{-3}$ кг/моль)

2.14. Обчислити масу m_0 однієї молекули харчової солі.

($8{,}9\cdot 10^{-26}$ кг)

2.15. Обчислити молярну масу M суміші, що складається з m_1 = 25 г кисню і m_2 = 75 г азоту (спрощена «модель» повітря).

$$\left(M = \frac{m_1 + m_2}{(m_1/M_1) + (m_2/M_2)} = 28{,}9 \text{ г/моль} \right)$$

2.16. Визначити концентрацію молекул n кисню в кількості ν = 0,2 моль, який міститься в посудині об'ємом V = 2л.

($6\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$)

2.17. В однакових посудинах знаходиться однакова маси в першій – водню, а в другій – кисню при одній температурі. Знайти відношення (n_1/n_2) концентрацій газів.

(16)

2.18. Балон об’ємом V = 12 л містить вуглекислий газ. Тиск газу 1 МПа, температура 300 К. Визначити масу газу в балоні.

(212 г)

2.19. Який об’єм займає 1 кмоль ідеального газу при тиску 1 МПа і температурі 400 К?

(3,32м^3)

2.20. У балоні об’ємом 10 л міститься гелій під тиском 1 МПа при температурі 300 К. Яким став тиск у балоні у балоні після того, як його перенесли в приміщення з температурою 280 К і витратили 10 г газу?

(352 кПа)

2.21. У балоні об'ємом 10 л знаходиться гелій під тиском $p_1 = 1$ МПа і при температурі $T_1 = 300\,K$. Після того, як з балона було узято $m = 10$ г гелію, температура у балоні знизилася до $T_2 = 290\,K$. Визначити тиск p_2 гелію, що залишився у балоні.

(0,364 МПа)

2.22. Балон об'ємом V = 20 л заповнений азотом при температурі t = 400 °С. Коли частину газу випустили, тиск у балоні знизився на Δp = 200 кПа при незмінній температурі. Визначити масу Δm випущеного газу.

$$\left(\Delta m = \frac{mV}{RT} \Delta p = 20 \text{ г} \right)$$

2.23. У балоні об'ємом V = 15 л міститься аргон (M = 40 г/моль) при тиску p_1 = 600 кПа й температурі T_1 = 300 К. Коли з балона взяли деяку масу газу Δm й температуру понизили до T_2 = 250 К, тиск у балоні впав до p_2 = 200 кПа. Визначити величину Δm.

$$\left(\Delta m = \frac{MV}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right) \approx 29 \text{ г}\right)$$

2.24. До якої температури Т потрібно нагріти ідеальний газ при постійному тиску, щоб його густина зменшилась у 2 рази порівняно з густиною цього газу при температурі 273 К?

(546 К)

2.25. Дві однакові посудини містять кисень. В одній тиск p_1 = 2 МПа і температура t_1 = 800° С, а в іншій p_2 = 2,5 МПа і t_2 = 200 °С. Визначити тиск у системі після того, як посудини з'єднали тонкою трубкою й охолодили газ до температури t = 200°С.

$$\left(p = \frac{T}{2}\left(\frac{p_1}{T_1} + \frac{p_2}{T_2}\right) = 1{,}7 \text{ МПа}\right)$$

2.26. Обчислити густину азоту при температурі 400 °С і тиску 2 МПа.

(10 кг/м^3)

2.27. Визначити молярну масу M газу, що при температурі 154°С і тиску 1,07 МПа має густину 6,1 кг/м^3. Який це газ?

(20,2 г/моль, неон)

2.28. Який об'єм V займає суміш із m_1=1кг азоту та m_2 = 1кг гелію за нормальних умов?

$$\left(V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{p} = 6{,}42 \text{ м}^3\right)$$

2.29. Балон об'ємом V = 30 л містить суміш водню та гелію при температурі T = 300 К і тиску p = 828 кПа. Маса суміші m = 24 г. Визначити масу m_1 водню та масу m_2 гелію в суміші.

$$\left(m_1 = \left(\frac{M_1}{M_2 - M_1}\right)\left(M_2\frac{pV}{RT} - m\right) = 16 \text{ г}; \quad m_2 = \left(\frac{M_2}{M_2 - M_1} - M_1\frac{pV}{RT}\right) = 8 \text{ г}\right)$$

2.30. Один балон об'ємом V_1 = 10 л містить кисень під тиском p_1=1,5 МПа, а інший об'ємом V_2 = 22 л – азот під тиском p_2 = 0,6 МПа при тій самій температурі. Після сполучення балонів утворилася однорідна суміш тієї ж температури. Знайти парціальні тиски компонент і тиск суміші.

(0,88 МПа; 0,47 МПа; 0,41 МПа.)

2.31. Маса деякої планети $m = 6{,}6 \cdot 10^{23}$ кг, а її радіус $r = 3{,}2 \cdot 10^{6}$ м. Оцінити температуру атмосфери на поверхні планети, якщо припустити, що планета оточена оболонкою сталої густини, висота якої $H = 5 \cdot 10^{4}$ м, а середня молярна маса газу $\mathrm{M} = 10^{-2}$ кг/моль

(259 К)

2.2. *Термодинаміка*

- Середня енергія теплового руху молекули

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT ,$$

i – кількість ступенів вільності молекули

- Середня квадратична швидкість

$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2\langle E \rangle}{m}}$$

- Внутрішня енергія ідеального газу

$$U = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} RT.$$

- Перше начало термодинаміки

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A, \qquad Q = \Delta U + A.$$

- Робота газу

$$\delta A = P\mathrm{d}V \qquad A = \int P\mathrm{d}V$$

- Ізохорна C_V та ізобарна C_P молярні теплоємності ідеального газу

$$C_V = \frac{i}{2} R, \qquad C_P = \frac{i+2}{2} R.$$

- Рівняння Майєра

$$C_P - C_V = R$$

- Показник адіабати

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}.$$

- Рівняння Пуассона

$$PV^{\gamma} = \mathrm{const}.$$

- Термодинамічний коефіцієнт корисної дії η теплового двигуна

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

- Коефіцієнт корисної дії η циклу Карно

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad \text{або} \quad \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

2.27. Визначити внутрішню енергію U 0,5 моль озону O_3 та середню кінетичну енергію $\langle \varepsilon \rangle$ його однієї молекули при температурі 300°С.

$$\left(U = 6{,}56 \text{ кДж}; \ \ \langle \varepsilon \rangle = 2{,}18 \cdot 10^{-20} \text{Дж}\right)$$

2.28. Кількість гелію ν = 1,5 моль, температура t = 120 °С. Визначити сумарну кінетичну енергію E_n його молекул.

$$(E_n = 7{,}35 \text{ кДж})$$

2.29. Внутрішня енергія одного моля деякого ідеального двохатомного газу із жорсткими молекулами дорівнює U_m = 6,02 кДж. Визначити середню кінетичну енергію обертального руху $\langle \varepsilon_{об} \rangle$ однієї молекули цього газу.

$$\left(\langle \varepsilon_{об} \rangle = \frac{2}{5}\frac{U_m}{\nu N_a} = 4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}\right)$$

2.30. У посудині об'ємом V = 2 л міститься m = 0,3 г газу при тиску p = 200кПа. Визначити середню квадратичну швидкість $v_{кв}$ молекул газу.

$$\left(v_{кв} = \sqrt{3pV/m} = 2000 \text{ м/с}\right)$$

2.31. При якій температурі земна атмосфера втратила би гелій (M = 4 г/моль), якщо друга космічна швидкість для Землі складає 11,2 км/с?

(20,2кК)

2.32. У скільки, разів середня квадратична швидкість молекул кисню перевищує середню квадратичну швидкість порошинок масою 10^{-8} г, які перебувають із ним у термодинамічній рівновазі ?

($1{,}37 \cdot 10^7$)

2.33. Знайти показник адіабати γ для одноатомних газів і обчислити питомі теплоємності c_P і c_V гелію та неону

(γ = 1,67)

(*гелій*: c_V= 3,1 кДж/(кг·К); c_P = 5,17 кДж/(кг·К))

(*неон*: c_V= 614 Дж/(кг·К); c_P = 1,03 кДж/(кг·К))

2.34. Для більшості двохатомних газів при кімнатних температурах показник адіабати γ =1,40 ± 0,01. Обчислити, в яких інтервалах лежать значення питомих теплоємностей c_P і c_V азоту за цих умов.

(c_V = 721 ÷ 760 Дж/(кг·К); c_P= 1,02 ÷ 1,06 кДж/(кг·К))

2.35. Визначити показник адіабати γ ідеального газу із загальною теплоємністю C = 857 Дж/К, який міститься в балоні V = 300 л при температурі T = 350 К і тиску p = 0,4 МПа.

$$\left(\gamma = 1 + \frac{pV}{TC} = 1,4\right)$$

2.36. Визначити молярну масу M газу, різниця питомих теплоємкостей котрого складає $c_P - c_V$= 2,08 кДж/(кг·К).

$$\left(M = \frac{R}{c_P - c_V} = 4 \text{ г/моль.}\right)$$

2.37. У посудині об'ємом V = 6 л міститься двохатомний газ при нормальних умовах. Визначити теплоємність C цього газу при сталому об'ємі.

$$\left(C = \frac{5}{2}\frac{pV}{T} \approx 5,5 \text{ Дж/К}\right)$$

2.38. Трьохатомний газ при тиску p = 240 кПа і температурі t = 20° С займає об'єм V = 10 л. Визначити теплоємність C цього газу при сталому тиску.

$$\left(C = \frac{4pV}{T} \approx 32,8 \text{ Дж/К}\right)$$

2.39. До якої температури Т потрібно нагріти ідеальний газ при постійному тиску, щоб його густина зменшилась у 2 рази порівняно з густиною цього газу при температурі 273 К?

(546 К)

2.40. Маса деякої планети $m = 6,6 \cdot 10^{23}$ кг, а її радіус $r = 3,2 \cdot 10^6$ м. Оцінити температуру атмосфери на поверхні планети, якщо припустити, що планета оточена оболонкою сталої густини, висота якої $H = 5 \cdot 10^4$ м, а середня молярна маса газу $\text{M} = 10^{-2}$ кг/моль

(259 К)

2.41. В одній половині розділеною тонкою перегородкою теплоізольованої посудині, об'ємом 10 л, міститься багатоатомний газ при температурі $t_1 = 27°\text{C}$ та тиску $\text{p}_1 = 152,0$ кПа , а в іншій двохатомний газ при температурі $t_2 = 77°\text{C}$ та тиску $\text{p}_2 = 202,6$ кПа. Визначити температуру суміші.

(324,4 К)

2.42. Знайти середню кінетичну енергію $< \varepsilon_{\text{об}} >$ обертального руху однієї молекули кисню при температурі $T = 350$ К, а також кінетичну енергію $E_\text{к}$ обертального руху усіх молекул кисню масою $m = 4$ г.

($< \varepsilon_{\text{об}} > = 4,83 \cdot 10^{-21}$ Дж, $E_\text{к} = 364$ Дж)

2.43. Вичислити питомі теплоємності c_V і c_p суміші неону і водню, якщо масові долі неону і водню складають $\omega_1 = 80\%$ і $\omega_2 = 20\%$.

(Для неону $c_V = 6{,}24 \cdot 10^2$ Дж/(кг · К), $c_p = 1{,}04 \cdot 3$ Дж/(кг · К).

Для водню $c_V = 1{,}04 \cdot 10^4$ Дж/(кг · К), $c_p = 1{,}46 \cdot 10^4$ Дж/(кг · К))

2.44. Знайти вираз показника адіабати $\gamma = (C_P/C_V)$ для суміші газів. Обчислити величину γ для суміші з $m_1 = 5$ г гелію та $m_2 = 2$ г водню.

$$\left(\gamma = \frac{\sum (i_k + 2)\nu_k}{\sum i_k \nu_k}, \textit{ де } \nu_k - \textit{кількості молів, а } i_k - \textit{кількості ступенів вільності молекул компонентів суміші}; \quad \gamma = 1{,}49. \right)$$

2.45. Визначити кількість теплоти, що поглинається воднем масою 0,2 кг, при нагріванні від 0°С до 100 С при сталому тиску. Знайти також зміну внутрішній енергії газу і роботу, що виконується ним.

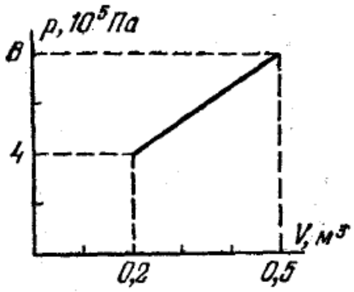
(Q = 291 кДж, ΔU = 208 кДж, A = 83 кДж)

2.46. Гелій в посудині ізобарно розширюється внаслідок підведення до нього 15 кДж теплоти. Знайти зміну внутрішньої енергії газу та виконану ним роботу.

(9кДж; 6 кДж)

2.47. При розширенні одноатомного газу його тиск зростав лінійно, як показано на рисунку. Чому дорівнює виконана газом робота? На скільки зросла його внутрішня енергія? Яка кількість теплоти до нього була підведена? Чому дорівнює середня молярна теплоємність газу в цьому процесі?

(180 кДж; 480 кДж; 660 кДж; 17 Дж/(моль·К))



2.48. Кисень займає об'єм $V_1 = 1$ м^3 і перебуває під тиском p_1 = 200 кПа. Газ ізобарно розширили до об'єму V_2 =3 м^3, а потім ізохорно стиснули до тиску p_2 = 500 кПа. Знайти зміну внутрішньої енергії газу ΔU, виконану ним роботу A та кількість тепла Q, що була передана газу. Побудувати графік процесу.

$$\left(\Delta U = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = 3{,}25 \text{ МДж}; \quad A = p_1(V_2 - V_1) = 0{,}4 \text{ МДж}; \quad Q = 3{,}65 \text{ МДж} \right)$$

2.49. При адіабатному розширенні об'єм водню з масою m = 20 г і початковою температурою t_1 = 300 °С збільшився в n_1 = 5 разів. Потім газ ізотермічно стиснули до початкового об'єму. Визначити повну роботу A, виконану газом, і його кінцеву температуру T_2.

$$\left(T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} = 158 \text{ К}; \quad A = R\frac{m}{M}\left(\frac{i}{2}\left(T_1 - T_2 \right) + T_2 \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = 8{,}8 \text{ кДж} \right)$$

2.50. Кисень із масою m = 250 г і початковою температурою t_0 = 200 °С адіабатно стиснули. Визначити кінцеву температуру T газу, якщо при стисканні була виконана робота A = 25 кДж.

$$\left(T = T_0 + \frac{2MA}{imR} = 627 \text{ К} \right)$$

2.51. Кисень масою $m = 2$ кг займає об'єм $V_1 = 1\text{м}^3$ і знаходиться під тиском $p_1 = 0{,}2$ МПа. Газ був нагрітий спочатку при постійному тиску до об'єму $V_2 = 3\text{ м}^3$, а потім при постійному об'ємі до тиску $p_2 = 0{,}5$ МПа. Знайти зміну ΔU внутрішньої енергії газу, здійснену ним роботу A і теплоту Q, передану газу. Побудувати графік процесу.

(ΔU =3,24 МДж, $A = 0{,}4$ МДж, $Q =$ 3,64 МДж)

2.52. У циліндрі під поршнем знаходиться водень масою $m = 0{,}02$ кг при температурі $T_1 = 300$ К. Водень спочатку розширився адіабатно, збільшивши свій об'єм в $n_1 = 5$ разів, а потім був стиснутий ізотермічно, причому обсяг газу зменшився в $n_2 = 5$ разів. Знайти температуру в кінці адіабатичного розширення та роботи, які здійснюються газом при адіабатичному (A_1) та ізотермічному (A_2) процесах. Зобразити процес графічно.

($T_2 = 157$ К, $A_1 = 29{,}8$ кДж, $A_2 = -21$ кДж)

2.53. Теплова машина працює за оборотним циклом Карно. Температура теплопередавача $T_1 = 500$ К. Визначити термічний ККД η циклу та температуру T_2 теплоприймача теплової машини, якщо за рахунок кожного кілоджоуля теплоти, отриманої від тепловіддавача, машина виконує роботу $A = 350$ Дж.

($\eta = 0{,}35$, $T_2 = 325$ К)

2.54. Стан ідеального газу змінюється за законом $\text{p} = \alpha V$. Визначити роботу А, яку виконує один моль газу, якщо його температура підвищилась на ΔТ.

($\text{A} = \frac{1}{2}R\Delta T$)

2.55. Інертний газ у посудині об'ємом 1 м^3 при тиску 10^5 Па отримує теплоту 30 кДж. Яке буде відносне збільшення температури?

(0,2)

2.56. Коли ККД циклу Карно збільшиться помітніше: під час підвищення температури нагрівника на ΔТ , чи у разі зниження температури холодильника на таку ж температуру?

2.57. Обчислити приріст ентропії ΔS, маса якого $m = 0{,}8$ кг , під час його стиснення від тиску 0,1 МПа при температури $27°\text{C}$ до 1,5 МПа при температурі $127°\text{C}$

(- 5, 65 кДж/К)

2.58. Визначити роботу A_2 ізотермічного стискання газу, що виконується у циклі Карно із ККД η = 40%, якщо робота ізотермічного розширення дорівнює A_1 = 8 Дж.

($A_2 = (1 - \eta)A_1$ = 4,8 Дж)

2.59. Газ, з яким здійснюється цикл Карно, віддав холодильнику 67% теплоти, отриманої від нагрівача. Визначити температуру холодильника, якщо температура нагрівача 430 °C.

(198 °C)

Розділ 3. Електрика і магнетизм.

3.1. Електричне поле зарядів у вакуумі

- Напруженість електричного поля точкового заряду:

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\vec{e}_r, \quad \text{де} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}; \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9 \text{ м/Ф}.$$

- Потенціал поля точкового заряду:

$$\varphi = k\frac{q}{r}.$$

- Напруженість і потенціал електричного поля системи зарядів:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i; \quad \varphi = \sum \varphi_i.$$

- Зв'язок між напруженістю і потенціалом електричного поля:

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}, \ \vec{E} = -\text{grad}\,\varphi; \qquad \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) \equiv U = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}d\vec{l}.$$

- Циркуляція поля зарядів по довільному контуру:

$$\oint_L \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = 0.$$

- Потенціальна енергія заряду в електричному полі та робота поля:

$$W = q\varphi; \qquad A = -q\Delta\varphi \equiv q(\varphi_1 - \varphi_2) \equiv qU.$$

- Електростатична теорема Гаусса:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV.$$

Поле точкових зарядів

3.1. Два точкові заряди q_1 та q_2 знаходяться в точках із радіусами-векторами $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$. Записати вирази для векторів сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, що діють на кожен заряд із боку іншого.

3.2. Дві кулі, що мають заряди по 1 Кл і маси по 1 кг, розміщені у вакуумі на відстані 1 км одна від одної. Обчислити сили кулонівського відштовхування F_k та гравітаційного притягання F_g між кулями. Електрична та гравітаційна сталі $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2). Про що свідчить результат?

(9 кН.)

3.3. Три точкові заряди Q, $-Q$ та q розташовані у вершинах рівностороннього трикутника зі стороною a. Знайти силу F, що діє на заряд q, якщо $Q = 2\cdot10^{-7}$ Кл, $q = 10^{-7}$ Кл, a = 10 см. $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

($F = 1{,}8\cdot10^{-2}$ Н.)

3.4. Тонке півкільце радіуса R =10 см рівномірно заряджене з густиною заряду λ = 1 мкКл/м. У центрі кривизни півкільця знаходиться точковий заряд Q = 20 нКл. Визначити силу F, що діє на точковий заряд. $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

$\left(F = Q\lambda/2\pi\varepsilon_0 R = 3{,}6\text{ мН}\right)$

3.5. В елементарній теорії атома гідрогену приймають, що у не збудженому стані атома електрон рухається навколо ядра по коловій орбіті радіуса $r = 5{,}3\cdot10^{-11}$ м. Знайти силу, яка діє на електрон з боку ядра та яке прискорення вона надає електрону. $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

$\left(8{,}2\cdot10^{-8}\text{ Н},\quad 9{,}0\cdot10^{22}\text{ м/с}^2\right)$

3.6. В елементарній теорії атома гідрогену приймають, що у не збудженому стані атома електрон рухається навколо ядра по коловій орбіті радіуса $r = 5{,}3\cdot10^{-11}$ м. Чому дорівнює величина орбітальної швидкості електрона? $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(\upsilon = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mr}} = 2{,}2\cdot10^{6}\text{ м/с.}\right)$$

3.7. Точковий заряд q = 50 мкКл знаходиться у точці з радіус-вектором $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ (всі величини задані в СІ). Знайти вектор $\vec{E}$ та модуль E напруженості, а також потенціал φ електричного поля заряду в точці з радіус-вектором $\vec{r} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$.

($\vec{E} = (2{,}7\vec{i} - 3{,}6\vec{j})$ кВ/м, E = 4,5 кВ/м; φ = 45 кВ.)

3.8. Два заряди однакової величини 10 нКл розташовані на відстані 3 м один від одного. Обчислити величину напруженості та потенціалу електричного поля системи посередині між зарядами, якщо вони а) однойменні і б) різнойменні.

(а) E = 0, φ = 120 В; б) E = 80 В/м, φ = 0)

3.9. Два додатні та два від’ємні заряди однакової величини розташовані у вершинах квадрата. Знайти напруженість $\vec{E}$ і потенціал φ електричного поля системи в центрі квадрата, якщо для поля одного заряду модулі цих величин дорівнюють 100 В/м і 100 В, відповідно.

(E = 283 В/м, або 0; φ = 0)

3.10. Точка, в якій напруженості поля кожного з двох зарядів однакові, ділить відстань між ними у відношенні $r_1 : r_2 = 1 : \eta$ В якому відношенні знаходяться:

– величини зарядів $q_1 : q_2$;
– потенціали полів $\varphi_1 : \varphi_2$, які створюють заряди в цій точці.

$\left(1 : \eta^2; \quad 1 : \eta\right)$

3.11. У двох точках на лінії, що проходить через точковий заряд, напруженість електричного поля дорівнює E_1 = 36 В/м і E_2 = 9 В/м. Знайти напруженість поля посередині між указаними точками.

(16 В/м *або* 144 В/м)

3.12. У двох точках 1 і 2 на лінії, що проходить через точковий заряд, потенціал електричного поля дорівнює φ_1 = 50 В і φ_2 = 30 В. Знайти потенціал поля посередині між указаними точками.

(37,5 В *або* 150 В)

3.13. У точці, що ділить відстань між двома зарядами як 1 : 2, кожен із них створює поле з модулем напруженості 100 В/м. Чому дорівнює модуль потенціалу поля системи в цій точці, якщо відстань між зарядами 1,5 м?

(100 В *або* 300 В)

3.14. Два точкові заряди q_1 і $q_2 = 4q_1$ закріплені на відстані 1,2 м один від одного. На якій відстані від заряду q_1 на лінії розташування зарядів знаходиться точка з нульовим значенням: а) напруженості і б) потенціалу поля системи?

(а) 40 см, б) такої точки не існує)

3.15. Два точкові заряди q_1 і $q_2 = -4q_1$ закріплені на відстані 1,2 м один від одного. На якій відстані від заряду q_1 на лінії розташування зарядів знаходиться точка з нульовим значенням: а) напруженості і б) потенціалу поля системи?

(а) 1,2 м; б) 24 см і 40 см)

3.16. Два точкові заряди по 1 нКл розміщені у вершинах правильного трикутника зі стороною 30 см. Визначити величину і напрям напруженості та потенціал електричного поля в третій вершині трикутника, коли заряди:
а) однойменні, б) різнойменні. $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

(а) 173 В/м, 60 В; б) 100 В/м, 0)

3.17. Два заряди, що розміщені у вершинах правильного трикутника зі стороною 10 см, створюють у третій вершині поле із загальною напруженістю 100 В/м і напрямлене паралельно до протилежної сторони трикутника. Знайти потенціал у третій вершині трикутника, якщо в ній напруженість поля кожного із зарядів теж дорівнює 100 В/м.

(0)

3.18. Два однакові однойменні заряди що розміщені у вершинах правильного трикутника зі стороною 10 см створюють у третій вершині поле із напруженістю 173 В/м. Знайти потенціал у цій вершині.

(20 В)

3.19. Два однакові однойменні заряди, що розміщені у вершинах правильного трикутника зі стороною 10 см, створюють у третій вершині поле із напруженістю 173 В/м. Знайти потенціал у центрі трикутника.

(30 В)

3.20. Два додатні й один від'ємний заряди однакової величини розміщені у вершинах правильного трикутника. Знайти напруженість і потенціал електричного поля в центрі трикутника, якщо кожен заряд створює в цій точці поле з напруженістю 100 В/м і потенціалом 50 В.

(200 В/м; 50 В)

3.21. Заряди Q_1 і $Q_2 = -Q_1/2$ розташовані у двох вершинах в основі правильного трикутника. Визначити величину і напрям напруженості $\vec{E}$ електричного поля системи в третій вершині трикутника, якщо заряд Q_1 створює ній поле з напруженістю E_1 = 200 В/м.

(173 В/м, 30° *до основи*)

3.22. Точкові заряди $q_1 = 40$ нКл і $q_2 = -\eta q_1, \eta = 2,$ розміщені перший в початку координат, а другий – у додатному напрямку осі ОХ на відстані $l = 3$м. Визначити за величиною й напрямом напруженість $\vec{E}$ електричного поля системи на лінії розташування зарядів у точках, де потенціал $\varphi = 0$. $k = (1/4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

$$\left(E_x = \frac{kq}{l^2} \frac{(\eta + 1)^3}{\eta} = 540 \text{ В/м} \right)$$

3.23. Точкові заряди $q_1 = 10$ нКл і $q_2 = \eta q_1, \eta = 4,$ розміщені перший в початку координат, а другий – у додатному напрямку осі ОХ на відстані $l = 1{,}5$ м. Визначити потенціал φ електричного поля системи в точці, де напруженість $E = 0$

$$\left(\varphi = \frac{kq_1}{l} \left(\sqrt{\eta} + 1 \right)^2 = 540 \text{ В} \right)$$

3.24. Три точкові заряди, розташовані у вершинах рівностороннього трикутника, створюють у його центрі поле з потенціалом φ_0. Якими будуть потенціали у вершинах, якщо всі заряди перенести в центр трикутника?

(φ_0)

3.25. Три точкові заряди по 2 мкКл розташовані у вершинах рівностороннього трикутника із стороною 4 м. Знайти модуль напруженості E

та потенціал φ електричного поля в точці, що розташована над центром трикутника на відстані 4 м від його площини. $k = (1/4\pi\varepsilon_0) = 9\cdot10^9$ м/Ф.

(E = 2,2 кВ/м; φ = 11,7 кВ)

3.26. Вивести формулу потенціалу $\varphi(\vec{r})$ поля точкового диполя з електричним моментом $\vec{p}$ у довільній точці з радіусом-вектором $\vec{r}$ відносно центра диполя.

$$\left(\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right)$$

Поле неперервного розподілу заряду

3.27. Заряд q рівномірно розподілений по тонкій дротині у вигляді дуги кола радіуса r із кутом розкриття 2ϑ $(0 \le \vartheta \le \pi)$.

– визначити напруженість E і потенціал φ електричного поля в центрі кривизни дротини.
– записати вирази $E(\vartheta)$ при $\vartheta = 0$ і $\vartheta = \pi$ та пояснити результат; показати графік залежності $E(\vartheta)$.

$$\left(E = \frac{kq}{r^2}\frac{\sin\vartheta}{\vartheta},\quad \varphi = \frac{kq}{r};\quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)$$

3.28. Електричне поле створюється в одному випадку тонким рівномірно зарядженим кільцем, а в іншому – півкільцем того ж радіуса і з таким самим зарядом. Знайти, як співвідносяться потенціали $\varphi_1 : \varphi_2$ у центрах кривизни тіл.

(1 : 1)

3.29. Електричне поле створюється рівномірно зарядженою дротиною, котра в першому випадку має форму кільця, а в другому – півкільця. Знайти відношення потенціалів $\varphi_1 : \varphi_2$ у центрах кривизни дротини при однаковій її довжини і величині заряду.

(2 : 1)

3.30. По тонкому кільцю радіуса R рівномірно розподілений заряд q.

– Визначити напруженість електричного поля $E(z)$ на осі кільця залежно від відстані z до його центра.
– Отримати наближені вирази $E(z)$ при малих ($z \ll R$) та великих ($z \gg R$) відстанях від центра та показати вигляд графіка $E(z)$.
– Визначити відстань z_m, на якій напруженість поля є найбільшою.

$$\left(E(z) = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}};\quad z_m = \frac{R}{\sqrt{2}}.\right)$$

3.31. По тонкому кільцю радіуса R рівномірно розподілено заряд q.

- Визначити потенціал електричного поля $\varphi(z)$ на осі кільця залежно від відстані z до його центра.
- Отримати наближені вирази $\varphi(z)$ при малих ($z << R$) та великих ($z >> R$) відстанях від центра та показати вигляд графіка $\varphi(z)$.

$$\left(\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}\right)$$

3.32. Електричне поле створюється диском радіуса R, який рівномірно заряджений із поверхневою густиною заряду σ. Використавши результат задачі **1.30**, визначити:

а) напруженість електричного поля на осі диска $E(z)$ в залежності від відстані z до його центра . Проаналізувати цю залежність при $z << R$ та $z >> R$ і показати вигляд графіка $E(z)$;

б) напруженість електричного поля нескінченної площини, зарядженої з поверхневою густиною заряду σ, розглядаючи її як диск із радіусом $R \to \infty$.

$$\left(\text{а) } E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(R/z)^2}}\right); \quad \text{б) } E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)$$

3.33. По тонкому кільцю радіуса R із вузьким прорізом ширини $h << R$ рівномірно розподілений заряд $q > 0$. Знайти величину та напрям напруженості електричного поля в центрі кільця.

$$\left(E = \frac{qh}{8\pi^2\varepsilon_0 R^3},\ \textit{до прорізу}\right)$$

3.34. Заряд рівномірно розподілений по тонкому стержню довжини $2a$ з лінійною густиною λ (Кл/м). Визначити:

а) потенціал електричного поля $\varphi(r)$ на продовженні стержня на відстані $r > a$ від його середини;

б) наближений вираз $\varphi(r)$ на великих відстанях r через величину заряду стержня q.

$$\left(a)\ \varphi(r) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r+a}{r-a}; \quad б)\ \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.\right)$$

3.35. Тонкий стержень довжини $2a$ рівномірно заряджений з лінійною густиною λ (Кл/м). Знайти:

а) вираз напруженості електричного поля $E(r)$ на перпендикулярі до середини стержня в залежності від відстані r до нього;

б) наближений вираз $E(r)$ через заряд стержня q на великих відстанях.

$$\left(a)\ E = \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{a^2 + r^2}}, \quad б)\ E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)$$

3.36. Використовуючи результат попередньої задачі, визначити напруженість електричного поля нескінченної нитки (тонкого стержня) рівномірно зарядженої з лінійною густиною λ в залежності від відстані r до неї.

$$\left(E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \right)$$

3.37. За результатами попередніх двох задач знайти довжину l центральної частини нескінченної зарядженої нитки, яка на відстані r = 10 см створює $\eta = 99\%$ всієї напруженості поля.

$$\left(l = \frac{2\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} r \approx 1{,}4 \text{ м} \right)$$

Зв'язок між напруженістю та потенціалом

3.38. З означення потенціалу φ випливає, що у випадку електричного поля системи з двох різнойменних точкових зарядів однакової величини в будь-якій рівновіддаленій від них точці φ = 0. Чи означає це відсутність в цих точках електричного поля? Чому? За якої умови при φ = 0 також і E =0?

3.39. Визначити вектор напруженості електричного поля, потенціал якого залежить від координат як: а) $\varphi = -\alpha(x^2 - y^2)$; б) $\varphi = -\alpha xy$; в) $\varphi = -\alpha(xy - z^2)$, де α – задана стала.

$$\left(\begin{aligned} &a)\ \vec{E} = 2\alpha\left(x\vec{i} - y\vec{j}\right) \\ &б)\ \vec{E} = \alpha\left(y\vec{i} + x\vec{j}\right) \\ &в)\ \vec{E} = \alpha\left(y\vec{i} + x\vec{j} - 2z\vec{k}\right) \end{aligned} \right)$$

3.40. Потенціал електричного поля залежить від координат як $\varphi = \alpha \big/ \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$, $\alpha = const$. Визначити вектор напруженості $\vec{E}(\vec{r})$ у довільній точці цього поля в залежності від її радіуса-вектора $\vec{r}$. Як розподілений у просторі та яку величину має заряд, який створює це поле?

$$\left(\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\alpha\vec{r}}{r^3} \right)$$

3.41. Прийнявши потенціал у початку координат $\varphi_0 = 0$, визначити залежність від координат потенціалу $\varphi(x,y,z)$ наступних електростатичних полів:

а) $\vec{E} = a(y\vec{i} + x\vec{j})$;

б) $\vec{E} = 2axy\vec{i} + a(x^2 - y^2)\vec{j}$, $a = const$.

$$\left(\text{а) } \varphi = -axy; \quad \text{б) } \varphi = ay\left(\frac{y^2}{3} - x^2\right)\right)$$

3.42. Визначити напруженість $E(z)$ електричного поля на осі рівномірно зарядженого зарядом q тонкого кільця радіуса r як функцію відстані z від центра за допомогою виразу $\varphi(z)$ із задачі **1.31**.

$$\left(E(z) = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + z^2)^{3/2}}\right)$$

3.43. Визначити потенціал $\varphi(z)$ електричного поля на осі рівномірно зарядженого зарядом q тонкого кільця радіуса r як функцію відстані z від центра за допомогою виразу $E(z)$ із попередньої задачі.

$$\left(\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2 + r^2}}\right)$$

3.44. За умовами та результатом задачі **1.34** визначити напруженість електричного поля на продовженні стержня $E(r)$ при $r > a$ і $E_\infty(r)$ при $r >> a$.

$$\left(E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 - a^2\right)}, \quad E_\infty(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \qquad q = 2a\lambda.\right)$$

3.45. Напруженість електричного поля рівномірно зарядженої з лінійною густиною заряду λ нитки визначається формулою $E = \lambda/2\pi\varepsilon_0 r$. Визначити різницю потенціалів між двома довільними точками на відстанях r_1 і r_2 від нитки.

$$\left(\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}\right)$$

3.46. Потенціал поля точкового електричного диполя з моментом $\vec{p}$ в довільній точці $\vec{r}$ (рис. 1.1) дорівнює

$$\varphi(\vec{r}) = k\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = k\frac{p\cos\vartheta}{r^2}.$$

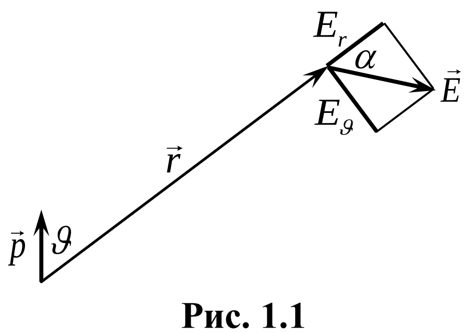


Рис. 1.1

Визначити:

– модуль напруженості $E(r,\vartheta)$ в залежності від відстані r до диполя та кута ϑ між векторами $\vec{p}$ і $\vec{r}$;

– кут α між векторами $\vec{E}$ і $\vec{r}$).

<u>Вказівка.</u> Знайти проекції E_r на напрям $\vec{r}$ та E_ϑ на дотичну до кола радіуса r .

$$\left(E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\vartheta \right)$$

3.47. Для точкового електричного диполя з моментом $\vec{p}$ радіальна E_r і дотична E_ϑ складові вектора напруженості поля $\vec{E}$ (рис 1.1.) визначаються як

$$E_r = -k\frac{2p\cos\vartheta}{r^3} \text{ і } E_\vartheta = -k\frac{p\sin\vartheta}{r^3}, \text{ де } k = 1/4\pi\varepsilon_0 .$$

Виходячи з цього, знайти функцію потенціалу поля диполя $\varphi(\vec{r})$.

<u>Вказівка</u>. Траєкторію інтегрування вибрати у вигляді дуги кола радіуса r і радіального променя, напрям якого проходить через центр диполя перпендикулярно до осі.

$$\left(\varphi(\vec{r}) = k\frac{p\cos\vartheta}{r^2} = k\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} \right)$$

Теорема Гаусса. Рівняння Пуассона

3.48. Незамкнена півсфера радіуса 1,0 м розташована в однорідному електричному полі з напруженістю 318,3 В/м, яке напрямлене від центра основи до
полюса півсфери. Знайти потік напруженості крізь поверхню півсфери.

(1000 В·м)

3.49. Незамкнена півсфера радіуса 1,0 м розташована в однорідному електричному полі з напруженістю 318,3 В/м, яке напрямлене паралельно до основи півсфери. Знайти потік напруженості крізь поверхню півсфери.

(0)

3.50. Незамкнена півсфера радіуса 1,0 м розташована в однорідному електричному полі з напруженістю 318,3 В/м, яке напрямлене під кутом 30° до площини основи півсфери. Знайти потік напруженості крізь поверхню півсфери.

(500 В·м)

3.51. Неплоска поверхня, що обмежена контуром у формі квадрата зі стороною 1 м, знаходиться в однорідному електричному полі з напруженістю 250 В/м, напрямленому під кутом 60° до площини квадрата. Обчислити потік напруженості крізь поверхню.

(216,5 В·м)

3.52. Точковий заряд 10 нКл розташований в центрі куба із ребром 1 м. Знайти потік напруженості електричного поля крізь поверхню куба. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(1130 В·м)

3.53. Точковий заряд розташований над центром квадрата зі стороною a на відстані $a/2$ створює крізь нього потік напруженості поля Ф = 1000 В·м. Знайти напруженість *E* електричного поля у вершині квадрата.

$$\left(E = \frac{2\Phi}{\pi a^2} = 318 \text{ В/м} \right)$$

3.54. У всіх вершинах куба з ребром a = 20 см розміщені однакові додатні заряди величини q_1 = 10 нКл кожен, а в центрах усіх граней – такі самі від'ємні заряди. Знайти напруженість електричного поля в центрі куба та потік напруженості крізь поверхню сфери радіуса $R = a\big/\sqrt{2}$ із центром у центрі куба. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(0; – 6,78 кВ·м)

3.55. Усередині сфери радіуса *R* = 20 см на відстані *r* = *R*/2 від центра розміщений точковий заряд. Знайти напруженість електричного поля в центрі сфери, якщо потік поля крізь неї Ф = 62,83 В·м. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(500 В/м)

3.56. Уявімо, що напруженість деякого поля визначається виразом $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{A}{r^4}\vec{r}$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки, *A* – задана стала. Знайти потік Ф, який таке поле створювало би крізь сферу радіуса *r* з центром у початку координат. Чи була би чинною для такого поля теорема Гаусса?

(Ф = $4\pi A/r$; *ні*)

3.57. Потенціал поля в деякій області простору залежить лише від координати *x* як $\varphi = -ax^3 + b$, де *a* і *b* – сталі. Знайти розподіл об'ємного заряду $\rho(x)$.

($\rho = 6\varepsilon_0 ax$)

3.58. Потенціал поля всередині зарядженої кулі залежить лише від відстані *r* до її центра, як $\varphi = ar^3 + b$, де *a* і *b* – сталі. Знайти розподіл об'ємного заряду $\rho(r)$ усередині кулі.

($\rho = -6\varepsilon_0 ar$)

3.59. Сферична поверхня радіуса *R* = 10 см рівномірно заряджена з густиною заряду $\sigma = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2. Знайти:

– залежність напруженості поля від відстані *r* до центра сфери та величину напруженості при r_1 = 5 см і r_2 =15 см;

– залежність від r потенціалу поля (при $\varphi(\infty) = 0$) та різницю потенціалів між точками r_1 і r_2. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

($E_1 = 0$, $E_2 = 10^3$ В/м; $\varphi_1 - \varphi_2 = 75{,}3$ В).

3.60. Дві провідні концентричні сфери радіусами 10 см і 15 см (сферичний конденсатор) несуть заряди $2 \cdot 10^{-7}$ Кл і $-2 \cdot 10^{-7}$ Кл, відповідно. Знайти різницю потенціалів між обкладками конденсатора. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(6 кВ)

3.61. На двох провідних концентричних сферичних оболонках розміщені заряди $3 \cdot 10^{-8}$ Кл і $-2 \cdot 10^{-8}$ Кл. Радіуси оболонок 10 см і 20 см, відповідно. Знайти різницю потенціалів між точками, одна з яких віддалена на відстань 5 см, а друга – на 25 см від центра сфер. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(1,44 кВ).

3.62. Дві концентричні сферичні оболонки радіусами R_1 = 8 см і R_2 = 10 см різнойменно заряджені з поверхневою густиною заряду σ =1,6 нКл/м^2. Від позитивної внутрішньої оболонки до зовнішньої уздовж радіуса починає рухатись електрон. При якій найменшій початковій швидкості він дістанеться зовнішньої оболонки? $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$v = \sqrt{\frac{2e\sigma R_1(R_2 - R_1)}{\varepsilon_0 m}} = 1{,}0 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

3.63. Довести, що електричне поле сферично-симетрично зарядженої кулі або рівномірно зарядженої сфери назовні цих тіл збігається з полем точкового заряду такої самої величини, що розміщений у центрі тіла.

3.64. Куля радіуса R заряджена з об'ємною густиною заряду ρ. Знайти:

а) залежність модуля напруженості електричного поля $E(r)$ від відстані r до центра кулі;

б) залежність потенціалу поля $\varphi(r)$, прийнявши $\varphi(\infty) = 0$;

в) різницю потенціалів U між центром та поверхнею кулі.

$$\left(\begin{array}{l} а)\ r > R: E = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}, \quad r < R: E = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}; \\ б)\ r > R: \varphi = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}, \quad r < R: \varphi = \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2); \\ в)\ U = \dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}. \end{array} \right)$$

3.65. Заряд кулі радіуса R розподілений з об'ємною густиною $\rho = \alpha r$, де r – відстань від центра кулі, α – стала. Знайти різницю потенціалів U між центром кулі та її поверхнею.

$$\left(U = \frac{\alpha R^3}{12\varepsilon_0}\right)$$

3.66. Куля радіусом 2 см, яка заряджена з об'ємною густиною заряду $3\cdot10^{-8}$ Кл/м^3, оточена концентричною зарядженою сферою радіуса 4 см. Знайти поверхневу густину заряду сфери, якщо назовні сфери електричне поле відсутнє.

(– $5\cdot10^{-11}$ Кл/м^2).

3.67. Сфера радіуса R з малим круглим отвором радіусом r ($r << R$) рівномірно заряджена з густиною заряду $\sigma < 0$. Знайти величину та напрям напруженості електричного поля в центрі сфери.

$$\left(E = \frac{\sigma r^2}{4\varepsilon_0 R^2},\ \textit{від отвору}\right)$$

3.68. Усередині кулі рівномірно зарядженої з об'ємною густиною ρ є сферична порожнина. Центр порожнини зміщений відносно центра кулі на відстань, що визначається вектором $\vec{a}$. Визначити напруженість $\vec{E}$ поля усередині порожнини.

$$\left(\vec{E} = \frac{\rho\vec{a}}{3\varepsilon_0}\right)$$

3.69. Напруженість електричного поля всередині зарядженої кулі $\vec{E} = \alpha r\vec{r}$, де $\vec{r}$ – радіус вектор даної точки поля відносно центра кулі, α – задана стала. Визначити об’ємну густину заряду кулі в залежності від відстані до центра $\rho(r)$.

$$\left(\rho(r) = 4\varepsilon_0\alpha r\right)$$

3.70. Електрон починає рухатися з відстані r_0 = 1м в електричному полі нескінченної нитки, зарядженої з лінійною густиною заряду $\lambda = 2\cdot10^{-11}$ Кл/м. Знайти його швидкість v на відстані r = 0,5 см від нитки. Заряд і маса електрона $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

$$\left(v = \sqrt{\frac{e\lambda\ln(r_0 / r)}{\pi\varepsilon_0 m}} \approx 7{,}6\cdot10^5\ \text{м/с}\right)$$

3.71. Дві нескінченні ізольовані нитки, різнойменно заряджені з лінійною густиною заряду $2\cdot10^{-6}$ Кл/м, перетинаються під прямим кутом. Знайти силу, що діє на заряд $2\cdot10^{-8}$ Кл, розташований симетрично на відстані 5 см від точки перетину ниток. $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

(29 мН)

3.72. Нескінченна циліндрична поверхня радіуса R рівномірно заряджена з поверхневою густиною заряду σ. Визначити залежність напруженості електричного поля E (r) від відстані r до осі циліндра.

$$\left(r < R : E = 0; \quad r > R : E(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}. \right)$$

3.73. Дві нескінченні коаксіальні циліндричні поверхні різнойменно заряджені з поверхневою густиною заряду $\sigma > 0$. Радіуси поверхонь R_1 і R_2 ($R_2 > R_1$). Знайти:

а) залежність напруженості поля E від відстані r до осі системи;

б) різницю потенціалів U між поверхнями.

$$\left(a)\, r < R_1 : E = 0, \quad R_1 < r < R_2 : E = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r}, \quad r > R_2 : E = \frac{\sigma (R_2 - R_1)}{\varepsilon_0 r}; \quad б)\, U = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

3.74. Показати, що електричне поле рівномірно зарядженого по об’єму з густиною ρ або по поверхні з густиною σ нескінченного циліндра поза ним збігається з полем зарядженої з відповідною густиною заряду λ нитки, що розташована на осі циліндра. Записати вирази λ через ρ і σ та радіус циліндра R.

$$\left(\lambda = \pi R^2 \rho; \quad \lambda = 2\pi R \sigma \right)$$

3.75. Нескінченний циліндр радіуса R = 5 см рівномірно заряджений з об'ємною густиною заряду $\rho = 10^{-8}$ Кл/м^3. Знайти:

а) залежність напруженості електричного поля від відстані до осі циліндра $E(r)$ і її значення $E(R)$ на поверхні циліндра;

б) різницю потенціалів U між віссю циліндра та його поверхнею.

$$\left(a)\, r < R : E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}, \; r > R : E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}, \; E(R) = 50\,\text{В/м}; \quad б)\, U = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} = 1{,}25\,\text{В} \right)$$

3.76. Нескінченний циліндр радіуса R заряджений з об'ємною густиною заряду $\rho = \alpha r$, де r – відстань від осі, α – стала. Знайти різницю потенціалів U між віссю та поверхнею циліндра.

$$\left(U = \frac{\alpha R^3}{9\varepsilon_0} \right)$$

3.77. Нескінченна площина, заряджена з поверхневою густиною заряду σ, розташована перпендикулярно до осі x і перетинає її в точці x = 0. Визначити:

– величину та напрям напруженості електричного поля $\vec{E}$;

– залежність потенціалу від координати $\varphi(x)$ при $x > 0$ та $x < 0$, прийнявши потенціал площини $\varphi = 0$;

– показати графіки залежностей $E_x(x)$ і $\varphi(x)$ для $\sigma > 0$ і $\sigma < 0$.

$$\left(E_x(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|}, \quad \varphi(x) = -\frac{\sigma|x|}{2\varepsilon_0} \right)$$

3.78. Дві паралельні нескінченні площини, що рівномірно заряджені з густиною заряду 1,0 нКл/м^2 і −1,0 нКл/м^2, розташовані на відстані 1,0 см одна від одної. Знайти напруженість електричного поля між пластинами E_1 та поза ними E_2, а також різницю потенціалів між пластинами U. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(E_1 = 113 В/м, E_2 = 0; U = 1,13 В)

3.79. Напруженість електричного поля поза двома паралельними нескінченними рівномірно зарядженими площинами $E_0 = kE$, де E – напруженість між пластинами, а k – задане число. Знайти відношення поверхневих густин заряду на пластинах $\eta = \sigma_1/\sigma_2$. Окремо проаналізувати випадки $k > 1$, $k < 1$ і $k = 0$.

$$\left(\eta = \frac{k+1}{k-1} \right)$$

3.80. Дві взаємно перпендикулярні нескінченні площини рівномірно заряджені з однаковою поверхневою густиною заряду σ. Показати на рисунку лінії поля вектора $\vec{E}$ в кожній з областей, на які площини ділять простір. Знайти модуль напруженості поля.

$$\left(E = \frac{\sigma}{\sqrt{2}\,\varepsilon_0} \right)$$

3.81. Нескінченна пластина товщини $2d$ рівномірно заряджена з об'ємною густиною заряду ρ. Спрямувавши вісь x перпендикулярно до пластини й розмістивши початок координат на половині її товщини, визначити напруженість поля $E_x(x)$ у залежності від координати x та різницю потенціалів U між поверхнями пластини.

$$\left(|x| \le d : E_x(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}, \; |x| \ge d : |E_x| = \frac{\rho d}{\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|}; \quad U = \frac{\rho d^2}{\varepsilon_0} \right)$$

3.2. Діелектрики і провідники

- Зв'язок між поляризованістю та поляризаційними (зв'язаними) зарядами:

$$P_n = \sigma'; \quad \oint_S \vec{P}\,\mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \rho'\,\mathrm{d}V.$$

- В ізотропному діелектрику:

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}\,.$$

- Вектор електричного зміщення (вектор $\vec{D}$):

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\,;$$

в ізотропному діелектрику:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}\,.$$

- Поле в ізотропному однорідному діелектрику, що є безмежний, або обмежений поверхнями, на яких поле має нормальний чи дотичний напрям:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon}.$$

- Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$:

$$\oint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V\,.$$

- Умови на межі поділу ізотропних діелектриків за відсутності на ній сторонніх зарядів:

$$D_{1n} = D_{2n},\ \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}; \qquad \varepsilon_2 D_{1\tau} = \varepsilon_1 D_{2\tau},\ E_{1\tau} = E_{2\tau}.$$

- Електрична ємність відокремленого провідника та конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi}; \quad C = \frac{q}{U}.$$

- Еквівалентна ємність сполучених конденсаторів:

при паралельному з'єднанні $\quad C = \sum C_i\,;$

при послідовному з'єднанні $\quad \dfrac{1}{C} = \sum \dfrac{1}{C_i}\,.$

- Енергія взаємодії системи точкових зарядів

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i \ .$$

- Енергія зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}.$$

- Об'ємна густина енергії електричного поля в ізотропному діелектрику:

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{ED}{2}.$$

Електричне поле в діелектриках

3.82. Легеньку незаряджену кульку з діелектрика вносять в електричне поле, показане на рис. 2.1, і вивільняють. Що буде відбуватися з кулькою далі в кожному випадку?

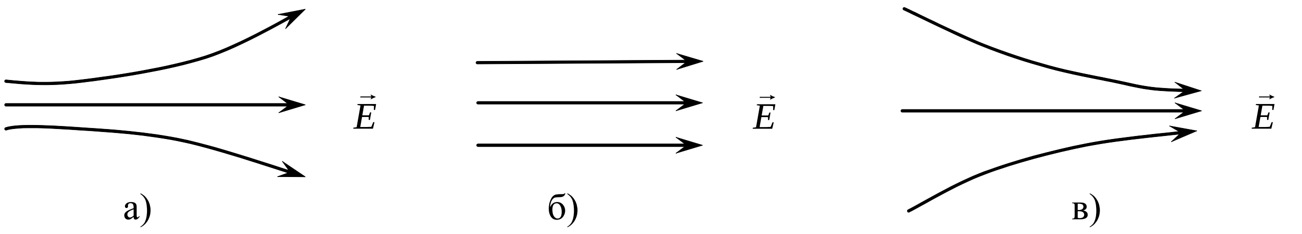


Рис. 2.1.

3.83. Між двома паралельними площинами зарядженими з однаковою густиною заряду σ і $-\sigma$ знаходиться паралельна плоска пластина діелектрика з проникністю ε. Знайти поляризованість пластини P та густину зв'язаних зарядів σ' на її поверхнях.

$$\left(P = \sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma \right)$$

3.84. Точковий заряд q знаходиться в діелектричному середовищі з проникністю ε. Визначити:

– поляризованість діелектрика $P(r)$ як функцію відстані r від заряду q;

– величину зв'язаного (поляризаційного) заряду q' всередині сфери довільного радіуса r.

$$\left(P = \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon r^2}; \quad q' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q \right)$$

3.85. Куля радіуса R із діелектрика з проникністю ε_1, яка рівномірно заряджена по об'єму стороннім зарядом Q, знаходиться в діелектричному середовищі з проникністю ε_2. Визначити електричне зміщення $D(r)$ і напруженість поля $E(r)$ у всьому просторі як функцію відстані r від центра кулі. Зобразити графіки $D(r)$ і $E(r)$ при $\varepsilon_1 = 2$ і $\varepsilon_2 = 3$.

$$\left(r < R: \quad D(r) = \frac{Qr}{4\pi R^3}, \; E(r) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 R^3}; \quad r \geq R: \quad D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}, \; E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r^2} \right)$$

3.86. Куля радіуса R = 6 см із діелектрика з проникністю $\varepsilon = 2$ рівномірно заряджена з о об'ємною густиною заряду ρ = 17,7 нКл/м^3. Знайти напруженість електричного поля на відстані r = 3 см від поверхні кулі.

$$\left(10\,\text{В/м}; \quad 17{,}8\,\text{В/м} \right)$$

3.87. Нескінченний металевий циліндр радіуса R, який заряджений з поверхневою густиною заряду σ, оточений коаксіальним циліндричним шаром діелектрика з радіусами $R_1 = 2R$ і $R_2 = 3R$ та проникністю $\varepsilon = 2$. Для всього простору розрахувати та показати на графіку залежність від відстані r до осі циліндра:
а) зміщення $D(r)$; і б) напруженості поля $E(r)$.

$$\left(\begin{array}{lll} r \leq R: & D(r) = 0, & E(r) = 0; \\ R < r < 2R, r > 3R: & D(r) = \dfrac{\sigma R}{r}, & E(r) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}; \\ 2R \leq r \leq 3R: & D(r) = \dfrac{\sigma R}{r}, & E(r) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 \varepsilon r}. \end{array} \right)$$

3.88. Нескінченний діелектричний циліндр із проникністю ε, що має наскрізну поздовжню циліндричну порожнину, зарядили з об'ємною густиною заряду ρ. Знайти вектор напруженості $\vec{E}$ електричного поля в порожнині, якщо її вісь є зміщена відносно осі циліндра на заданий вектор $\vec{a}$
Електричний заряд розподілений з густиною ρ по об'єму нескінченного циліндра із діелектрика з відомою проникністю ε. Циліндр має поздовжню циліндричну порожнину, положення котрої відносно осі циліндра визначається заданим вектором $\vec{a}$. Знайти вектор напруженості електричного поля в порожнині.

$$\left(\vec{E} = \frac{\rho \vec{a}}{2\varepsilon_0 \varepsilon} \right)$$

3.89. Між двома паралельними плоскими металевими пластинами (плоский повітряний конденсатор), приєднаними до джерела, напруженість електричного поля дорівнює E_0. Половину зазору між пластинами заповнюють діелектриком із проникністю ε так, що він прилягає тільки до однієї пластини. Знайти напруженості E_1, E_2 та зміщення D_1, D_2 поля між пластинами в повітрі та в діелектрику, якщо при введенні діелектрика пластини:

а) лишалися приєднаними до джерела напруги;
б) були відімкнені від джерела.

$$\left(a)\, D_1 = D_2 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon + 1};\, E_1 = \frac{2\varepsilon E_0}{\varepsilon + 1},\, E_2 = \frac{2E_0}{\varepsilon + 1}; б)\, D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_0;\, E_1 = E_0,\, E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon} \right)$$

3.90. Розв'язати попередню задачу за умови, що діелектрик прилягає до обох пластин.

$$\left(\begin{array}{l} a)\, D_1 = \varepsilon_0 E_0, \quad D_2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_0, \quad E_1 = E_2 = E_0; \\ б)\, D_1 = \dfrac{2\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon + 1},\, D_2 = \dfrac{2\varepsilon\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon + 1};\, E_1 = E_2 = \dfrac{2E_0}{\varepsilon + 1} \end{array} \right)$$

3.91. В однорідне електричне поле з напруженістю E_0 = 173,2 В/м у вакуумі вмістили плоску пластину діелектрика з проникністю ε = 3 так, що вектор $\vec{E}_0$ напрямлений під кутом α_0 = 60° до поверхонь пластини. Знайти величину та напрям векторів $\vec{D}$ і $\vec{E}$ у пластині. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(E =100 В/м, D = 2,65 нКл/м^2; *під кутом* α = 30° *до поверхонь пластини*)

Провідники

3.92. Дві закріплені на невеликій відстані металеві кулі заряджені один раз однойменними, а інший – такими самими, але різнойменними зарядами. Порівняти сили взаємодії між кулями F_1 і F_2 в обох випадках і пояснити результат.

($F_1 < F_2$)

3.93. Напруженість електричного поля біля поверхні великого квадратного зарядженого листа жерсті у центрі дорівнює 50 В/м. Якою стане напруженість в цьому місці, якщо лист згорнути в циліндр?

(0; 100 В/м)

3.94. Металева куля радіуса 5 см має заряд 1 нКл. Знайти напруженість E і потенціал φ поля кулі на відстані 1 см від поверхні. $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

(E = 2500 В/м, φ = 150 В, або E = 0, φ = 180 В)

3.95. Металеву кульку радіуса R_1 = 1,0 см, яка має заряд 0,12 нКл, з'єднують довгою тонкою дротиною з металевою кулькою радіуса R_2 = 2,0 мм. Знайти поверхневі густини заряду на кульках та напруженості електричного поля біля їх поверхонь після з'єднання. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(σ_1 = 80 нКл/м^2, σ_2 = 0,4 мкКл/м^2; E_1 = 90 В/см, E_2 = 450 В/см)

3.96. Металева кулька радіуса 3,0 мм із зарядом 0,02 нКл розташована всередині незарядженої металевої сферичної оболонки радіуса 10 см так, що не торкається неї. Знайти поверхневу густину заряду та напруженість електричного поля біля поверхні для кульки (σ_1, E_1) та оболонки (σ_2, E_2) після того, як тіла з'єднали дротиною. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(σ_1 = 0, E_1 = 0; σ_2 = 0,16 нКл/м^2, E_2 = 18 В/м *назовні й* E_2 = 0 *всередині*)

3.97. Металеву кульку радіуса R_1 = 5 мм, яка заряджена до потенціалу φ_0 = 90 В, з'єднують довгою тонкою дротиною з незарядженою металевою сферичною оболонкою радіуса R_2 = 4,5 см. Знайти потенціал кульки φ після з'єднання.

$$\left(\varphi = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\varphi_0 = 9\,\text{В.}\right)$$

3.98. Розв'язати попередню задачу за умови, що кулька знаходиться всередині оболонки й спочатку не контактує з нею.

$$\left(\varphi = \frac{R_1}{R_2}\varphi_0 = 10\,\text{В.}\right)$$

3.99. N = 27 однакових заряджених крапельок ртуті злилися в одну краплю. Знайти її потенціал φ, якщо потенціал кожної крапельки до злиття дорівнював φ_1 = 10 В. Краплі вважати кульками.

$$\left(\varphi = N^{2/3}\varphi_1 = 90\,\text{В.}\right)$$

3.100. Заряджена крапля ртуті при падінні на поверхню діелектрика розбилася на N = 8 однакових крапельок. Знайти їх потенціал φ, якщо потенціал великої краплі до розбивання дорівнював φ_0 = 10 В. Краплі вважати кулями, поляризацію діелектрика не враховувати.

$$\left(\varphi = N^{-2/3}\varphi_0 = 2{,}5\,\text{В}\right)$$

Електрична ємність. Конденсатори

3.101. Уважаючи Землю провідною кулею радіуса R = 6400 км, знайти її ємність. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(711 мкФ)

3.102. Нехтуючи крайовим ефектом, вивести формулу ємності плоского конденсатора з площею обкладки S і відстанню між обкладками d, якщо конденсатор заповнений:

1) однорідним діелектриком із проникністю ε;
2) двома шарами діелектрика з проникностями ε_1 і ε_2, товщини котрих відносяться, як 1: 2;
3) діелектриком, проникність якого лінійно збільшується у перпендикулярному до пластин напрямку від значення ε_1 до ε_2.

$$\left(1)\ C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d};\quad 2)\ C=\frac{3\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)d};\quad 3)\ C=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)S}{d\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}\right)$$

3.103. Вивести формулу ємності сферичного конденсатора з радіусами обкладок R_1 та R_2 (R_2 > R_1), заповненого однорідним діелектриком із проникністю ε.

$$\left(C=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1R_2}{(R_2-R_1)}\right)$$

3.104. Вивести формулу ємності сферичного конденсатора з радіусами обкладок R_1 та R_2, заповненого неоднорідним діелектриком із проникністю $\varepsilon=\alpha/r$, де $\alpha=const$ і r – відстань до центра конденсатора.

$$\left(C=\frac{4\pi\varepsilon_0\alpha}{\ln(R_2/R_1)}\right)$$

3.105. Визначити ємність сферичного конденсатора з радіусами обкладок R_1 = R та R_2 = $2R$, заповненого неоднорідним діелектриком із проникністю $\varepsilon=\alpha/r^2$, де r – відстань до центра конденсатора, $\alpha=const$.

$$\left(C=\frac{4\pi\varepsilon_0\alpha}{R_2-R_1}\right)$$

3.106. Нехтуючи крайовим ефектом, отримати формулу ємності циліндричного конденсатора з радіусами обкладок R_1 і R_2 та довжиною l, що заповнений однорідним діелектриком із проникністю ε.

$$\left(C=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(R_2/R_1)}\right)$$

3.107. Нехтуючи крайовим ефектом, отримати формулу ємності циліндричного конденсатора з радіусами обкладок R_1 і R_2 та довжиною l, що заповнений неоднорідним діелектриком із проникністю $\varepsilon=1+(x/l)$, де x – відстань від краю обкладки.

$$\left(C=\frac{3\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(R_2/R_1)}\right)$$

3.108. Нехтуючи крайовим ефектом, отримати формулу ємності циліндричного конденсатора з радіусами обкладок R_1 і R_2 та довжиною l, що заповнений неоднорідним діелектриком із проникністю $\varepsilon = \alpha/r$, де $\alpha = const$ і r – відстань до осі конденсатора.

$$\left(C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \alpha l}{R_2 - R_1} \right)$$

3.109. Визначити ємність циліндричного конденсатора з радіусами обкладок R і $4R$ та довжиною l = 12 см заповненого двома шарами діелектрика однакової товщини із проникностями ε_1 = 2 і ε_2 = 6.

$$\left(C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln 2} \cdot \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}; \quad C = 10\ \text{пФ} \right)$$

3.110. Плоский конденсатор ємності C = 10000 пФ має заряд Q = 10 мкКл.

– який вигляд мають лінії електричного поля зарядженого плоского конденсатора?
– чому дорівнює робота, яку треба виконати, щоби перенести кульку із зарядом q = 100 мкКл з точки 1 в точку 2, якщо вони розташовані назовні по різні боки від пластин конденсатора.

$$\left(A = \pm\frac{qQ}{C} = \pm 0{,}1\text{Дж} \right)$$

3.111. На пластини плоского конденсатора ємності C = 30 мкФ помістили заряди q_1 = 2 мКл і q_2 = 4 q_1, відповідно. Чому дорівнює напруга на конденсаторі?

$$\left(U = \frac{3q_1}{2C} = 100\,\text{В} \right)$$

3.112. Сферичний повітряний конденсатор із радіусами обкладок R_1 = 3 см і R_2 = 9 см пробивається при напрузі U_0 = 40 кВ. Визначити електричну міцність повітря за таких умов, тобто напруженість поля E_0, при якій настає електричний пробій діелектрика.

$$\left(E_0 = \frac{R_2 U_0}{R_1 (R_2 - R_1)} = 20\,\text{кВ/см} \right)$$

3.113. Радіус зовнішньої обкладки повітряного сферичного конденсатора R = 8 см, а радіус внутрішньої r підібрано так, що пробивна напруга конденсатора U_0 є максимально можливою. Знайти величину U_0, якщо електрична міцність повітря (напруженість поля при якій настає електричний пробій) E_0 = 25 кВ/см?

$$\left(U_0 = \frac{E_0 R}{4} = 50\,\text{кВ} \right)$$

3.114. Між обкладками плоского повітряного конденсатора ємності C_0 паралельно до них розмістили металеву пластину, товщина котрої в n разів менша за відстань між обкладками. Якою стала ємність конденсатора C? Чи залежить вона від положення пластини?

$$\left(C = \frac{n}{n-1} C_0 \right)$$

3.115. Між обкладками плоского повітряного конденсатора ємності $C_0 = 60$ пФ паралельно до них розмістили пластину діелектрика з проникністю $\varepsilon = 4$, товщина котрої складає третину відстані між обкладками. Якою стала ємність конденсатора C? Чи залежить вона від положення пластини?

$$\left(C = \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon} C_0 = 80 \text{ пФ} \right)$$

3.116. Між обкладинками плоского повітряного конденсатора ємності C_0 розмістили пластину речовини, що має проникність ε і займає η частину простору між ними. Якою стала ємність конденсатора C? Окремо розглянути випадки при крайніх теоретично можливих значеннях ε і η.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0}\left(1 - \eta\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

З'єднання конденсаторів

3.117. Два паралельно з'єднані однакові плоскі повітряні конденсатори мають загальну ємність C_0. Якою стане ємність з'єднання C, якщо в одному конденсаторі відстань між пластинами збільшити в n разів, а в іншому – зменшити в n разів?

$$\left(C = \frac{n^2+1}{2n} C_0 \right)$$

3.118. Розв'язати попередню задачу для випадку послідовного з'єднання конденсаторів.

$$\left(C = \frac{2n}{n^2+1} C_0 \right)$$

3.119. Ємність послідовного з'єднання двох конденсаторів дорівнює 15 мкФ, а паралельного – 80 мкФ. Знайти ємність кожного конденсатора.

(20 мкФ і 60 мкФ)

3.120. Скільки всього різних ємностей можна отримати, маючи в своєму розпорядженні три однакових конденсатори з ємністю 30 мкФ кожен? Показати схеми з'єднань обчислити всі ємності.

(7 *різних ємностей*)

3.121. Простір між обкладками повітряного конденсатора ємності C_0 заповнили діелектриком з проникністю ε. Знайти, якої ємності конденсатор треба приєднати до нього, щоб ємність системи була рівною C_0.

$$\left(C = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} C_0 \right)$$

3.122. Горизонтальний повітряний плоский конденсатор наполовину занурюють у гас ($\varepsilon = 2$), відтак його ємність стає рівною C. На скільки треба занурити в гас цей конденсатор, поставлений вертикально, щоб його ємність теж становила C?

(*на третину*)

3.123. Якщо до конденсатора ємності C послідовно приєднати конденсатор невідомої ємності C_x, то ємність з'єднання буде $C_0 = C/n$. Знайти величину C_x.

$$\left(C_x = \frac{C}{n - 1} \right)$$

3.124. До послідовного ланцюжка із двох конденсаторів із ємністю $C = 30$ мкФ і невідомою ємністю C_x приєднали паралельно конденсатор ємністю C. Знайти величину C_x, якщо ємність усього з'єднання $C_0 = 50$ мкФ.

(60 мкФ)

3.125. До ланцюжка із двох паралельно сполучених конденсаторів із ємністю $C = 40$ мкФ і невідомою ємністю C_x приєднали послідовно конденсатор ємності C. Знайти величину C_x, якщо ємність усього з'єднання $C_0 = 24$ мкФ.

(20 мкФ)

3.126. До конденсатора ємності $C = 25$ мкФ зарядженого до напруги $U = 100$ В приєднали невідомий незаряджений конденсатор. Відтак напруга впала до величини $U_1 = 20$ В. Знайти ємність C_x невідомого конденсатора.

$$\left(C_x = \frac{U - U_1}{U_1} C = 100\ \text{мкФ} \right)$$

3.127. Два з'єднані між собою конденсатори ємності $C_1 = 20$ мкФ і $C_2 = 30$ мкФ підключили до джерела з напругою $U = 150$ В. Знайти напругу та заряд кожного конденсатора, якщо вони з'єднані: а) паралельно і б) послідовно.

$$\left(\begin{array}{l} \text{а)}\, U_1 = U_2 = 150\,\text{В}, \quad q_1 = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{Кл}, \quad q_2 = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{Кл}; \\ \text{б)}\, U_1 = 90\,\text{В}, \quad U_2 = 60\,\text{В}, \quad q_1 = q_2 = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\,\text{Кл}. \end{array} \right)$$

3.128. Два повітряні конденсатори $C_1 = 100$ пФ і $C_2 = 200$ пФ з'єднали послідовно й підключили до джерела з напругою $U = 300$ В. Потім другий конденсатор заповнили діелектриком із проникністю $\varepsilon = 2$. Знайти заряд і напругу на кожному конденсаторі: а) до і б) після введення діелектрика.

$$\begin{pmatrix} \text{а) } q_1 = q_2 = 20\,\text{нКл}, \quad U_1 = 200\,\text{В}, \quad U_2 = 100\,\text{В}; \\ \text{б) } q_1 = q_2 = 24\,\text{нКл}, \quad U_1 = 240\,\text{В}, \quad U_2 = 60\,\text{В}. \end{pmatrix}$$

Енергія електричного поля

3.129. Є довільна система закріплених точкових зарядів. Що буде відбуватися з електростатичною енергією системи, якщо заряди вивільнити? Чому?

3.130. На деякій відстані від закріпленого заряду розташований заряд протилежного знаку, який може рухатись. Яку роботу треба виконати, аби збільшити відстань між зарядами в чотири рази, коли для її збільшення вдвічі довелося виконати роботу 20 Дж.

(30 Дж)

3.131. Три точкові заряди однакової величини q розташовані у вершинах правильного трикутника із стороною a. Яку роботу A треба виконати, щоби розмістити один із зарядів посередині між двома іншими.

$$\left(A = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a} \right)$$

3.132. Два додатні й один від'ємний заряди однакової величини q розташовані у вершинах правильного трикутника із стороною a. Яку роботу A треба виконати, аби від'ємний заряд розмістити посередині між додатними?

$$\left(A = -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a} \right)$$

3.133. Електростатична енергія системи з трьох однакових точкових зарядів, які розміщені на одній прямій на відстані a один від одного, дорівнює $W = 0{,}5$ Дж. Яку роботу треба виконати, щоб розмістити заряди у вершинах правильного трикутника зі стороною a?

(0,1 Дж)

3.134. Електростатична енергія системи, що складається із закріплених у двох вершинах правильного трикутника додатних зарядів однакової величини і такого самого від'ємного заряду посередині між ними, дорівнює $W = -1{,}5$ Дж. Яку роботу треба виконати, щоби перемістити від'ємний заряд у третю вершину трикутника?

(1 Дж)

3.135. Електростатична енергія системи з двох додатних і одного від'ємного точкових зарядів однакової величини, які розміщені на одній прямій на відстані

a один від одного, дорівнює $W = -1{,}5$ Дж. Яку роботу треба виконати, щоб розмістити заряди у вершинах правильного трикутника зі стороною a?

(0,5 Дж)

3.136. Довести, що енергію поля, створюваного зарядженою металевою кулею у всьому просторі, можна визначити за формулою $W = q^2/2C$, де q – заряд, а C – ємність кулі.

3.137. Куля радіуса R = 10 см із діелектрика з проникністю $\varepsilon = 4$ однорідно заряджена з об’ємною густиною заряду ρ = 1,0 мКл/м^3. Знайти енергію W електричного поля всередині кулі. $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(W = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{45\varepsilon_0\varepsilon} \approx 39\,\text{мДж} \right)$$

3.138. Куля із діелектрика з проникністю ε = 4 однорідно заряджена по об’єму. Знайти, яку частку η (%) складає енергія електричного поля в кулі по відношенню до енергії поля в навколишньому просторі.

$$\left(\eta = \frac{1}{5\varepsilon} = 5\% \right)$$

3.139. Металева куля радіуса R = 2 см, яка має заряд q = 6 мкКл, розташована в центрі діелектричного кульового шару з радіусами R_1 = 2R і R_2 = 3R і проникністю ε = 3. Знайти енергію електричного поля в діелектрику W. $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(W = \frac{q^2}{48\pi\varepsilon_0\varepsilon R} \approx 0{,}46\,\text{Дж} \right)$$

3.140. Металева заряджена куля радіуса R оточена концентричним шаром діелектрика з радіусами R_1 = 2R і R_2 = 3R і проникністю ε = 2. Знайти енергію електричного поля кулі в повітрі W_0, якщо енергія поля в діелектрику W = 1 Дж.

(10 Дж)

3.141. Конденсатор заряджають від джерела напруги. Знайти ККД заряджання η, тобто відношення енергії, отриманої конденсатором при заряджанні до напруги джерела, до енергії, що при цьому витрачає джерело.

(η = 50%)

3.142. Конденсатор заряджають від джерела напруги U_0. Яку частку η затраченої джерелом енергії отримує конденсатор за час заряджання до напруги $U = 0{,}5U_0$?

(η = 25%)

3.143. До конденсатора C_1 = 25 мкФ, який заряджений до напруги U_0 = 100 В, приєднали незаряджений конденсатор C_2 = 100 мкФ. Знайти, яку енергію W_2

при цьому отримав конденсатор C_2, та яку енергію ΔW_1 втратив конденсатор C_1. Відповідь пояснити.

(W_2 = 20 мДж; ΔW_1 = 120 мДж)

3.144. Знайти відношення кінцевої та початкової енергії $W_2 : W_1$ та кінцевої і початкової об'ємної густини енергії $w_2 : w_1$ поля зарядженого плоского повітряного конденсатора при збільшенні відстані між пластинами в 2 рази, коли конденсатор: а) був попередньо відключений від джерела напруги і б) лишався приєднаним до джерела. Відповіді пояснити.

$\left(\text{а)}\, W_2 : W_1 = 2{:}1,\ w_2 : w_1 = 1{:}1; \qquad \text{б)}\, W_2 : W_1 = 1:2, w_2 : w_1 = 1:4\right)$

3.145. У зазор між обкладками зарядженого плоского повітряного конденсатора вміщують пластину діелектрика з проникністю $\varepsilon = 4$ і товщиною, рівною відстані між обкладками. Знайти відношення кінцевої та початкової енергій W_2/W_1 та об'ємних густин енергії w_2/w_1 електричного поля в конденсаторі. Розглянути випадки:

а) конденсатор був попередньо відімкнений від джерела;
б) конденсатор лишався приєднаним до джерела.

Пояснити отримані відповіді.

$\left(\text{а)}\, W_2 : W_1 = w_2 : w_1 = 1{:}4;\ \text{б)}\, W_2 : W_1 = w_2 : w_1 = 4:1\right)$

3.146. У плоскому повітряному конденсаторі ємності C = 20 мкФ, зарядженому до напруги U = 100 В, відстань між пластинами збільшують удвічі. Знайти роботу A, яку при цьому виконують, а також зміну енергії конденсатора ΔW. Відповіді пояснити. Розглянути випадки:

а) конденсатор був попередньо відімкнений від джерела;
б) конденсатор лишався приєднаним до джерела.

$$\begin{pmatrix} \text{а)}\ A = \Delta W = \dfrac{CU^2}{2} = 100\,\text{мДж}; \\ \text{б)}\ A = \dfrac{CU^2}{4} = 50\,\text{мДж}, \quad \Delta W = -\dfrac{CU^2}{4} = -50\,\text{мДж} \end{pmatrix}$$

3.147. Обкладки зарядженого ідеального плоского конденсатора щільно прилягають до пластини однорідного ізотропного діелектрика. Знайти тиск P, який створюють обкладки на діелектрик при об'ємній густині енергії електричного поля в конденсаторі w.

$(P = w)$

3.148. Обкладки ідеального плоского конденсатора щільно прилягають до пластини діелектрика з проникністю ε = 6 і товщиною d = 1 мм. Який тиск будуть створювати обкладки Визначити тиск обкладок на поверхні діелектрика при напрузі на конденсаторі U = 1 кВ? $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(P = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 U^2}{2d^2} \approx 25{,}6\ \text{Па}\right)$$

3.3. Електричний струм

- Густина струму $\vec{j}$ в провіднику з одним типом носіїв та її зв'язок із величиною струму I:

$$\vec{j} = en\vec{v}; \qquad I = \int_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{s}$$

- Закон Ома в локальній (диференціальній) формі:

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_{стор}\right) = \frac{\vec{E} + \vec{E}_{стор}}{\rho}$$

- Електрорушійна сила (ЕРС):

$$\varepsilon = \int \vec{E}_{стор}\mathrm{d}\vec{l}.$$

- Спад напруги на довільній ділянці кола:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}.$$

- Закон Ома:

узагальнений (для довільної ділянки)

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R};$$

для однорідної ділянки

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R};$$

для замкненого контуру

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0} = \frac{\varepsilon}{R + r}.$$

- Електричний опір:

однорідного провідника сталого перерізу

$$R = \rho\frac{l}{s};$$

провідника з осьовою симетрією, в якому питомий опір ρ і переріз S змінюються по довжині

$$R = \int_0^l \rho\frac{\mathrm{d}l}{s};$$

провідника з осьовою симетрією, в якому питомий опір ρ залежить тільки від відстані *r* до осі

$$\frac{1}{R} = \frac{2\pi}{l}\int \frac{r\mathrm{d}r}{\rho}.$$

- Еквівалентний опір з’єднання резисторів:

при послідовному сполученні

$$R_{пос} = \sum R_i;$$

при паралельному сполученні

$$\frac{1}{R_{пар}} = \sum \frac{1}{R_i}.$$

- Правила Кірхґофа для розгалужених кіл:

$$\sum I_i = 0;$$
$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_i I_i R_i.$$

- Зарядка і розрядка конденсатора ємності *C* через опір *R*:

напруга при заряджанні

$$U = U_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right);$$

напруга при розряджанні

$$U = U_0 e^{-t/\tau};$$

струм

$$I = I_0 e^{-t/\tau}, \qquad \tau = RC.$$

- Повна P та питома w потужність струму на довільній ділянці ко- ла:

$$P = \frac{\delta A}{\mathrm{d}t} = UI,\ U - спад\ напруги; \quad w = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = \vec{j}\vec{E}.$$

- Повна P_q та питома w_q теплова потужність струму (закон Джоуля):

$$P_q = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = I^2 R; \quad w_q = \frac{\mathrm{d}P_q}{\mathrm{d}V} = j^2\rho.$$

Електричний опір

3.149. Дротину круглого перерізу з пластичного металу протягли крізь калібрований круглий отвір так, що її довжина збільшилась удвічі, і відтак отримали провідник з опором *R*. Яким був початковий опір R_0 дротини?

$$\left(R_0 = \frac{R}{4}\right)$$

3.150. Моток ізольованого мідного дроту має масу $m = 40$ г і опір $R = 8{,}9$ Ом. Чому дорівнюють довжина l та площа S перерізу дроту? Питомий опір міді $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом$\cdot$м, густина $8{,}9$ г/см^3.

(50 м, 0,09 мм^2)

3.151. Вивести формули (3.7) опору послідовного та паралельного з’єднання провідників (резисторів).

3.152. Як і в скільки разів зміниться опір дротини, якщо її скласти навпіл і з’єднати кінцями?

(*зменшиться в* 4 *рази*)

3.153. Довгу дротину опором R_0 розрізали на n однакових кусків і з’єднали їх кінці так, що утворився багатожильний провідник. Знайти опір утвореного провідника *R*.

$$\left(R = \frac{R_0}{n^2}\right)$$

3.154. Багатожильний провідник, який складається з n окремих дротин (жил) і має опір R_0, розібрали на окремі жили та з’єднали їх так, що утворилася одна довга дротина. Знайти її опір *R*.

($R = n^2 R_0$)

3.155. Опір послідовного з’єднання двох резисторів $R_1 = 50$ Ом, а паралельного $R_2 = 8$ Ом. Знайти опір кожного резистора.

(10 Ом і 40 Ом)

3.156. Коли до резистора опором 10 Ом паралельно приєднали невідомий резистор, то опір з’єднання виявився рівним 2 Ом. Чому дорівнює опір невідомого резистора?

(2,5 Ом)

3.157. Опір паралельного з’єднання двох резисторів $R_0 = 2R/3$, де R – опір одного з них. Чому дорівнює опір іншого резистора?

($2R$)

3.158. Три резистори $R_1 = 2{,}0$ Ом, $R_2 = 4{,}0$ Ом і $R_3 = 6{,}0$ Ом з’єднали так, що загальний опір R_0 дорівнює: а) 4,4 Ом; б) 3,0 Ом. Показати схеми з’єднання.

3.159. Студент має тільки два резистори, але використовуючи їх окремо, або з'єднуючи між собою, може одержати опори 3 Ом, 4 Ом, 12 Ом та 16 Ом. Які опори мають ці резистори?

(4 Ом, 12 Ом)

3.160. Скільки всього різних опорів можна отримати, маючи в своєму розпорядженні три резистори із опором 300 Ом кожен? Показати схеми з'єднань і обчислити всі опори.

(7 *різних опорів*)

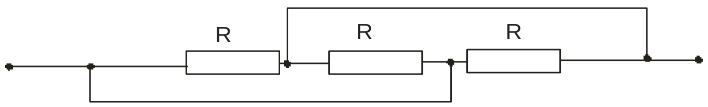


Рис. 3.1

3.161. Чому дорівнює еквівалентний опір R_0 ланцюжка зображеного на рис. 3.1?

$$\left(R_0 = \frac{R}{3}\right)$$

3.162. П'ять однакових резисторів опором 10 Ом кожен з'єднані в «міст», як показано на рис. 3.2. Знайти опір з'єднання між т. т. 1 і 2.

(10 Ом)

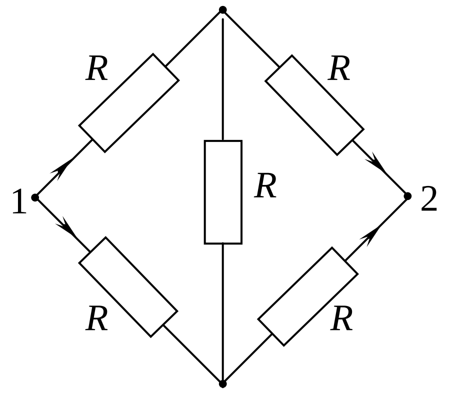


Рис. 3.2

3.163. Простір між двома концентричними металевими сферами з радіусами a та $b > a$ заповнений однорідним ізотропним середовищем із питомим опором ρ. Знайти опір R цього середовища.

$$\left(R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right)$$

3.164. Простір між двома тонкими коаксіальними металевими циліндрами з радіусами a та $b > a$ і довжиною l заповнений однорідним ізотропним середовищем із питомим опором ρ. Знайти опір R цього середовища.

$$\left(R = \frac{\rho}{2\pi l}\ln\frac{b}{a}\right)$$

3.165. Визначити опір провідника з діаметром d і довжиною l, якщо його питомий опір:

а) змінюється вздовж провідника за лінійним законом від $\rho_1 = \rho_0$ на одному кінці провідника до $\rho_2 = 3\rho_0$ на іншому, де величина ρ_0 відома;

б) залежить тільки від відстані r до осі провідника за законом $\rho = \alpha r$, α – задана стала.

<u>*Вказівка*</u>. *Розглядати провідник як сукупність: а) тонких дисків; б) тонких трубок.*

$$\left(a)\ \frac{8\rho_0 l}{\pi d^2};\quad б)\ \frac{\alpha l}{\pi d} \right)$$

3.166. Плоский конденсатор ємністю C = 0,1 мкФ заповнено діелектриком із проникністю ε = 2 і питомим опором ρ = 10^{10} Ом·м. Чому дорівнює опір R конденсатора?

$$\left(R = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \rho}{C} = 1{,}77\ \text{ГОм} \right)$$

Сила і густина струму

3.167. Пучок електронів, що має поперечний переріз 5 мм^2, налітає по нормалі на заземлену металеву пластину без відбивання. Швидкість електронів у пучку 10^5 м/с, їх концентрація $2 \cdot 10^{22}$ м$^{-3}$. Знайти силу струму у шині, якою заземлено пластину. $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

(1600 А)

3.168. Густина струму в циліндричному стержні радіуса R = 10 мм залежить від відстані r до осі стержня, як $j = 20r$ (усі величини в основних одиницях СІ). Визначити силу струму у стержні.

(42 мкА)

3.169. Оцінити дрейфову швидкість (швидкість упорядкованого руху) електронів у мідному провіднику перерізом 1 мм^2 при силі струму 100 А, прийнявши концентрацію вільних електронів 10^{23} см$^{-3}$. Зважаючи на отриманий результат,
пояснити, чому лампи в кімнаті загоряються практично миттєво після вмикання, хоча вони розташовані далеко від джерела напруги. $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

(6,25 мм/с)

3.170. Дві паралельні вертикальні квадратні пластини зі стороною a = 300 мм закріплені на відстані d = 2 мм одна від одної та підключені до джерела постійної напруги U = 250 В. Який струм I потече через джерело, коли пластини почнуть занурювати у дистильовану воду зі сталою швидкістю v = 5,0 мм/с? Воду вважати ідеальним діелектриком із проникністю ε = 81.

$$\left(I = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)avU}{d} \approx 0{,}13\text{мкА} \right)$$

3.171. Знайти напруженість електричного поля у мідній дротині з діаметром 1,5 мм при силі струму 10 А. Питомий опір міді $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м

(96,2 мВ/м)

3.172. Електричний струм тече по двох провідниках довжини l_1 і l_2 та діаметра d_1 і d_2, що виготовлені з одного металу. Визначити відношення напруженостей електричного поля в провідниках E_1/E_2, якщо вони з'єднані: а) послідовно; б) паралельно.

$$\left(a)\ \frac{E_1}{E_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2};\quad б)\ \frac{E_1}{E_2} = \frac{l_2}{l_1} \right)$$

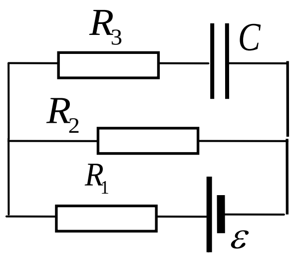


Рис. 3.4

3.173. Електричний струм тече по з'єднаних мідному та алюмінієвому провідниках однакового перерізу й маси. Знайти відношення напруженостей електричного поля E_1/E_2 та напруг U_1/U_2 у провідниках, якщо вони з'єднані: а) послідовно; б) паралельно. Густини міді та алюмінію, відповідно, 8,9 г/см^3 і 2,7 г/см^3, питомі опори $1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м і $2{,}8\cdot10^{-8}$ Ом·м.

$$\left(a)\ \frac{E_1}{E_2} = 0{,}61,\quad \frac{U_1}{U_2} = 0{,}18;\quad б)\ \frac{E_1}{E_2} = 3{,}3,\quad \frac{U_1}{U_2} = 1 \right)$$

Закон Ома

3.174. Максимальний струм, який можна виміряти амперметром із власним опором R_0, дорівнює I_0. Що треба зробити, аби цим амперметром можна було вимірювати струми до nI_0? Показати електричну схему і зробити розрахунок.

3.175. Що треба зробити, щоби мілівольтметром, який має власний опір R_0 і розрахований на вимірювання напруг $U \le U_0$, можна було вимірювати напруги $U \le nU_0$? Показати електричну схему і зробити розрахунок.

3.176. Міліамперметр із власним опором 0,9 Ом розрахований на вимірювання струмів до 100 мА. Які струми можна буде вимірювати цим приладом, якщо приєднати до його клем резистор опором 100 мОм?

(≤ 1,0 А)

3.177. Міліамперметр із власним опором 1 Ом розрахований на вимірювання струмів до 100 мА. Що треба зробити, щоб цим приладом можна було вимірювати напруги до 100 В? Зробити розрахунок.

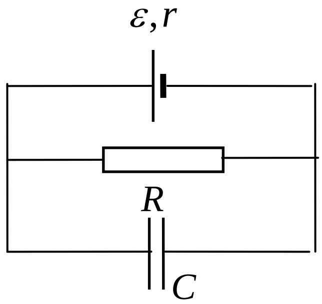


Рис. 3.3

3.178. Якою має бути ЕРС джерела у схемі на рис. 3.3, аби напруженість електричного поля у плоскому конденсаторі становила 5,4 кВ/м? Внутрішній опір джерела 0,5 Ом, опір резистора 4,5 Ом, відстань між пластинами конденсатора 1,0 мм.

(6 В)

3.179. У схемі (рис. 3.4) R_1 = 1 Ом, R_2 = 2 Ом, R_3 = 3 Ом, C = 100 мкФ, Е = 12 В. Чому дорівнює заряд на конденсаторі ?

(800 мкКл)

3.180. У схемі рис. 3.5 $\varepsilon = 6{,}0$ В, $r = 0{,}8$ Ом, $R_1 = 1{,}0$ Ом, $R_2 = 2{,}0$ Ом, $R_3 = 3{,}0$ Ом. Знайти силу струму в кожному резисторі та напругу на полюсах джерела

$$\left(I_1 = 2{,}0 \text{ А}, I_2 = 1{,}2 \text{ А}, I_3 = 0{,}8 \text{ А}; \quad U = 4{,}4 \text{ В}\right)$$

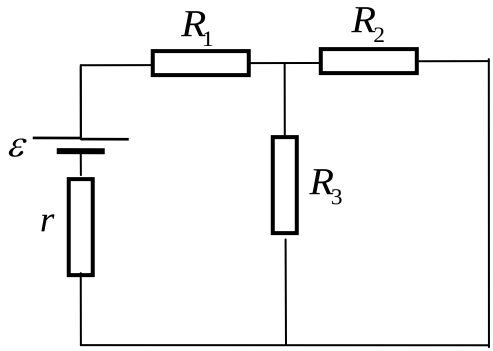


Рис. 3.5

3.181. Напруга на резисторі опором 5,0 Ом, який підключений до клем джерела, складає 80% від ЕРС джерела. Знайти внутрішній опір джерела.

(1,25 Ом)

3.182. Якщо до джерела з ЕРС 36 В приєднати резистор 17 Ом, то струм у колі дорівнює 2 А. Знайти струм короткого замикання джерела.

(36 А)

3.183. При повністю уведеному реостаті, що підключений до джерела з ЕРС 12 В (рис. 3.6), струм у колі дорівнює 100 мА. Знайти опір реостата та внутрішній опір джерела, якщо при виведенні реостата струм через джерело збільшується в 10 разів.

(108 Ом, 12 Ом)

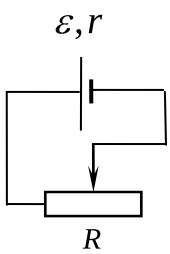


Рис. 3.6

3.184. Коло складається з джерела та підключеного до нього резистора. При опорі резистора R_1 струм у колі дорівнює I_1, а при опорі R_2 струм дорівнює I_2. Визначити ЕРС ε та внутрішній опір r джерела.

$$\left(\varepsilon = \frac{I_1 I_2 (R_1 - R_2)}{I_2 - I_1}, \quad r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}\right)$$

3.185. "Чорний ящик" містить невідомі джерела струму та резистори, якось з'єднані між собою. Коли до виводів «ящика» підключили опір R_1 = 10 Ом, то по ньому пішов струм 1,0 А, а коли R_1 замінили на опір R_2 = 13 Ом, струм став рівним 0,8 А. Який опір R_3 треба поставити замість R_2, щоб струм дорівнював 0,5 А?

(22 Ом)

3.186. Два джерела з ЕРС $\varepsilon_1 = 4{,}5$В, $\varepsilon_2 = 1{,}5$В і внутрішніми опорами $r_1 = 0{,}9$ Ом і $r_2 = 0{,}3$ Ом з'єднані однойменними полюсами. Який струм протікає по джерелах?

(2,5 А)

3.187. Знайти різницю потенціалів між точками *a*-*b*, *b*-*c* і *c*-*a* у схемі на рис. 3.7 при силі струму 1 А, якщо ε = 5 В, R_1 = 3,7 Ом, R_2 = 5,6 Ом. Внутрішнім опором джерела знехтувати. Розглянути випадки, коли струм йде в напрямку: а) $a \to c$ і б) $c \to a$.

(а): U_{ab} = 3,7 В, U_{bc} = 0,6 В, U_{ca} = – 4,3 В;
б): U_{ab} = – 3,7 В, U_{bc} = – 10,6 В, U_{ca} = 14,3 В)

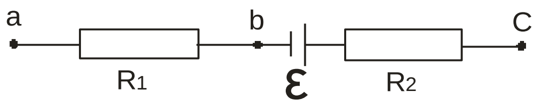


Рис. 3.7

3.188. Знайти різницю потенціалів між точками a і b у схемі на рис. 3.8. ε_1 = 20 В, ε_2 = 5,0 В, ε_3 = 2,0 В, R_1 = 1,0 Ом, R_2 = 2 Ом, R_3 = 3 Ом.
(U_{ab} = – 11,5 В.)

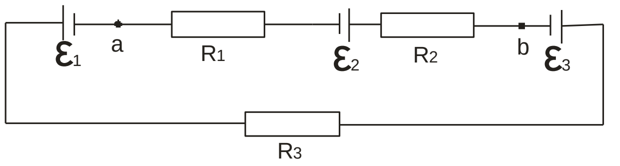


Рис. 3.8

Розгалужені кола

3.189. Визначити силу струму в гілці ab показаної на рис. 3.9 частини розгалуженого кола. (1,7 А)

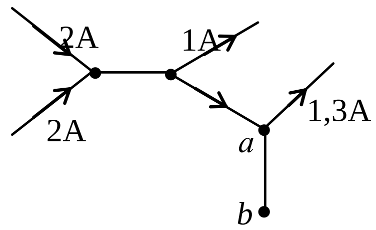


Рис. 3.9

3.190. Три акумулятори з ЕРС $\varepsilon_1 = 4{,}5$ В, $\varepsilon_2 = 4{,}5$ В та $\varepsilon_3 = 9{,}0$ В і внутрішніми опорами $r_1 = 1{,}0$ Ом, $r_2 = 1{,}5$ Ом, $r_3 = 3{,}0$ Ом паралельно з'єднані в батарею. Вивести формули і обчислити внутрішній опір r_0 та ЕРС ε_0 цієї батареї.

$$\left(\frac{1}{r_0} = \sum\frac{1}{r_i} = 2\ \text{Ом}^{-1};\quad \varepsilon_0 = r_0\sum\frac{\varepsilon_i}{r_i} = 3{,}75\,\text{В}\right)$$

3.191. Три джерела з ЕРС $\varepsilon_1 = 8$В, $\varepsilon_2 = 3$В і $\varepsilon_3 = 4$В та однаковими внутрішніми опорами по $r = 2$ Ом з'єднані однойменними полюсами. Знайти силу струму в кожному джерелі.

(I_1 = 1,5 А; I_2 = 1,0 А; I_3 = 0,5 А)

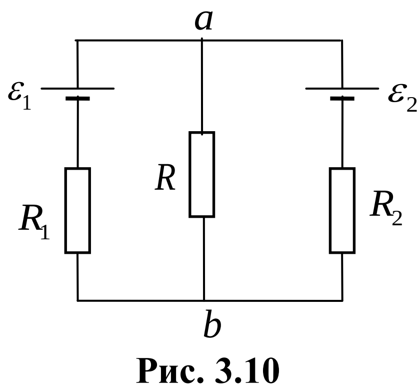


Рис. 3.10

3.192. Знайти різницю потенціалів між точками a–b схеми рис. 3.10 і струм у резисторі R, якщо ε_1 = 1,5 В,
ε_2 = 2 В, R_1 = 0,5 Ом, R_2 = 0,3 Ом, R= 2 Ом.

(U_{ab} = 1,66 В; I = 0,83 А.)

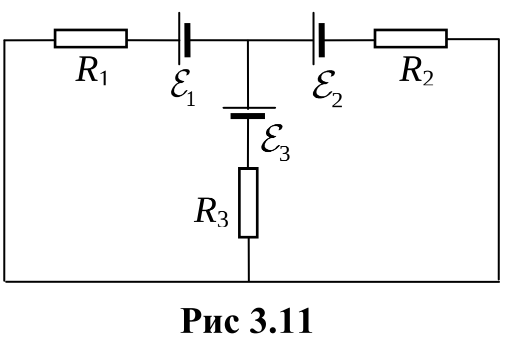


Рис 3.11

3.193. У схемі рис. 3.10 полярність одного з джерел змінили на протилежну. При якому відношенні ЕРС $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ струм у резисторі R буде відсутнім, якщо $R_1 = 6{,}0$ Ом і $R_2 = 3{,}0$ Ом?

(2).

3.194. Параметри кола, схема якого зображена на рис. 3.11, мають значення: $\varepsilon_1 = 2$ В; $\varepsilon_2 = 4$ В; $\varepsilon_3 = 8$ В. $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 1$ Ом; $R_3 = 4$ Ом. Знайти струми у всіх гілках кола.

(I_1 = 2,43 А, I_2 = 1,14 А, I_3 = 1,29 А)

3.195. У схемі рис. 3.12 R = 0,8 Ом, R_1 = 0,6 Ом, R_2 = 2,0 Ом, R_3 = 3,0 Ом; $\varepsilon_1 = 6$ В, $\varepsilon_2 = 20$ В, $\varepsilon_3 = 30$ В. Розрахувати величини та напрямки (показати на схемі) струмів у всіх резисторах.

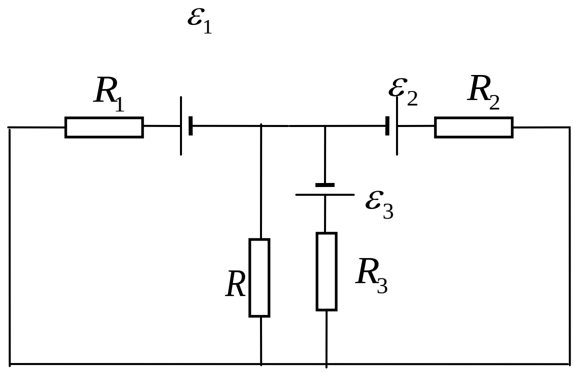


Рис. 3.12

$$\begin{pmatrix} I = 10{,}00\,\text{А}, & I_1 = 3{,}33\,\text{А}, \\ I_2 = 6{,}00\,\text{А}, & I_3 = 7{,}33\,\text{А} \end{pmatrix}$$

3.196. Чотири різні опори $R_1 - R_4$ з'єднані у «квадрат», в одну діагональ якого ввімкнений амперметр А, а на іншу подано напругу U, як показано на рис. 3.13. Знайти, при якому співвідношенні між величинами опорів амперметр не буде показувати струму.

$(R_1R_3 = R_2R_4)$

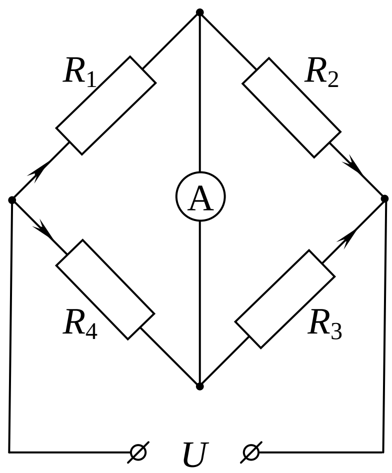


Рис. 3.13

Квазістаціонарні струми

3.197. Сила струму у провіднику протягом перших 3 с рівномірно зростає від 0 до 0,5 А, а за наступні 5 с – ще на 0,5 А. Знайти середню силу струму у провіднику за весь час.

(0,56 А)

3.198. Струм у провіднику спадає від I_0 до 0 за законом $I(t) = I_0(1 - (t/\tau)^2)$, де τ – стала. Визначити середнє значення сили струму $\langle I \rangle$ у провіднику.

$$\left(\langle I\rangle = \frac{2I_0}{3}\right)$$

3.199. Струм у провіднику змінюється з часом за законом $I(t) = I_0\left|\sin\omega t\right|$, де I_0 та ω – задані. Визначити середнє значення сили струму $\langle I\rangle$.

$$\left(\langle I\rangle = \frac{2I_0}{\pi}\right)$$

3.200. Конденсатор ємності C, що має заряд q_0, розряджають через опір R. Знайти:

а) закон $I = I(t)$, за яким змінюється з часом сила струму в опорі R;

б) час t_1, за який конденсатор утратить половину заряду, та час t_2, за який він утратить половину своєї енергії.

$$\left(\text{а) } I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}},\ де\ I_0 = \frac{q_0}{\tau}\quad і\quad \tau = RC;\quad \text{б) } t_1 = \tau\ln 2,\ \ t_2 = \frac{t_1}{2}\right)$$

3.201. Використовуючи результати попередньої задачі, обчислити час розряджання t_0 конденсатора ємності C = 2,1 мкФ через резистор опором R = 50 кОм. Уважати конденсатор практично розрядженим, якщо він утратив η = 99% початкової енергії.

$$\left(t_0 = -\frac{\tau\ln(1-\eta)}{2} = RC\ln 10 \approx 0{,}24\ \text{c}\right)$$

3.202. Конденсатор ємності C = 30000 пФ підключили через резистор опором R = 500 Ом до джерела постійної напруги U_0 За який час t_0 напруга на конденсаторі досягне значення η = 99% від U_0?

$$\left(t_0 = -\tau\ln(1-\eta) = 2RC\ln 10 = 69{,}0\ \text{мкс}\right)$$

3.203. Заряджений плоский конденсатор, заповнений парафіном (ε = 2), через недосконалість діелектрика за час t = 5 хв утрачає половину свого заряду. Вважаючи, що розряджання конденсатора ("витік заряду") йде тільки через парафін, визначити його питомий опір ρ.

$$\left(\rho = \frac{t}{\varepsilon_0\varepsilon\ln 2} \approx 2{,}45\cdot 10^{13}\ \text{Ом}\cdot\text{м}\right)$$

3.204. Через недосконалість реальних діелектриків всередині зарядженого конденсатора існує так званий "струм витоку", що призводить до саморозрядження конденсатора відповідно до законів (3.9). Показати, що для будь-якого конденсатора (плоского, сферичного чи циліндричного) з ізотропним однорідним діелектриком власна стала часу $\tau_0 = \varepsilon_0\varepsilon\rho$, де ε і ρ – діелектрична проникність і питомий опір діелектрика. Обчислити величину τ_0 для конденсатора заповненого парафіном ($\varepsilon = 2{,}1$ і $\rho = 10^{14}$ Ом$\cdot$м).

(31 хв)

Робота і потужність струму. ККД джерела

3.205. Плоский конденсатор ємності C = 100 мкФ заповнений діелектриком із проникністю ε = 10 і питомим опором ρ = 10^{14} Ом·м. Визначити теплову потужність, яка буде виділятися в конденсаторі при напрузі U = 200 В.

$$\left(P = \frac{CU^2}{\varepsilon_0 \varepsilon \rho} \approx 0{,}46\,\text{мВт} \right)$$

3.206. Нагрівник конфорки електричної плити складається з двох секцій. Якщо ввімкнути в мережу тільки першу секцію, вода в каструлі закипає за час τ_1 = 12 хв, а якщо увімкнути тільки другу секцію, то час закипання буде τ_2 = 20 хв. Знайти час закипання τ води при вмиканні в мережу обох секцій з'єднаних: а) послідовно; б) паралельно. Кількість і початкова температура води, а також напруга в мережі в усіх випадках однакові; утратами тепла знехтувати.

$$\left(a)\ \tau = \tau_1 + \tau_2 = 32\ \text{хв}; \quad \text{б})\ \tau = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 7{,}5\ \text{хв} \right)$$

3.207. До джерела з ЕРС ε та внутрішнім опором r, підключили реостат (навантаження), опір якого R можна плавно змінювати в широких межах. Визначити та показати на одному графіку залежності від опору навантаження R потужності P (корисна потужність), та ККД джерела η (відношення корисної потужності до повної потужності джерела).

3.208. До джерела з ЕРС ε та внутрішнім опором r, підключили реостат (навантаження), опір якого R можна плавно змінювати в широких межах. Визначити та показати на одному графіку залежності від сили струму I потужності P, що виділяється на опорі R (корисна потужність), та ККД джерела η (відношення корисної потужності до повної потужності джерела).

3.209. Визначити максимальну корисну потужність (потужність струму у зовнішній ділянці кола), яку можна отримати від джерела з ЕРС ε і внутрішнім опором r .

$$\left(P_m = \frac{\varepsilon^2}{4r} \right)$$

3.210. При підключенні до джерела з ЕРС ε = 6 В резистора з опором R_1 = 250 мОм, або R_2 = 4 Ом, на ньому виділяється однакова потужність. Знайти внутрішній опір r джерела, величину потужності P, що виділяється на резисторі (корисну потужність), а також її максимальну величину P_m, яку можна отримати від даного джерела.

$$\left(r = \sqrt{R_1 R_2} = 1{,}0\ \text{Ом};\ P = 5{,}76\ \text{Вт};\ P_m = 9\ \text{Вт} \right)$$

3.211. Яку найбільшу потужність струму можна отримати на кожному з трьох однакових резисторів, з’єднаних за схемою рис. 3.1 (с. 35), якщо ланцюжок підключений до джерела з ЕРС 12 В і внутрішнім опором 1 Ом?

(12 Вт)

3.212. Джерело віддає у зовнішнє коло максимальну можливу потужність при силі ступу 10 А. Знайти струм короткого замикання джерела.

(20 А)

3.213. По резистору з опором R = 100 Ом починають пропускати струм, який змінюється з часом за законом $I = k\sqrt{t}$, де k = 1 $\text{А}\cdot\text{с}^{-1/2}$. За який час τ в резисторі виділиться Q = 1,8 кДж тепла?

$$\left(\tau = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2Q}{R}} = 6\ \text{с}\right)$$

3.214. Напруга на резисторі з опором R = 100 Ом змінюється з часом за законом $U = k\sqrt{t}$, де k = 2 $\text{В}\cdot\text{с}^{-1/2}$. Яка кількість теплоти виділиться в резисторі за проміжок часу τ = 100 с від початкового моменту?

$$\left(Q = \frac{k^2\tau^2}{2R} = 200\ \text{Дж}\right)$$

3.215. Конденсатор заряджений до напруги U_0 розряджають через резистор опором R. Визначити середню теплову потужність струму розряджання конденсатора за проміжок часу $n\tau, \tau$ – час релаксації. Зробити розрахунки для n = 2 і n = 5.

$$\left(\langle P\rangle = \frac{1-e^{-2n}}{2n}P_0,\ \textit{де}\ P_0 = \frac{U_0^2}{R};\quad \langle P\rangle_1 = 0{,}43P_0,\ \ \langle P\rangle_2 = 0{,}10P_0\right)$$

3.216. Визначити середню теплову потужність P нагрівника електричного чайника з опором $R = 48{,}5\ \text{Ом}$, на який подано змінну напругу $U = U_0\sin\omega t$, де $U_0 = 311\ \text{В}$.

$$\left(P = \frac{U_0^2}{2R} = 1000\ \text{Вт}\right)$$

3.4. Магнітне поле

- Магнітне поле системи струмів (принцип суперпозиції):

$$\vec{B}=\sum\vec{B}_i.$$

- Магнітне поле струму у вакуумі (закон Біо – Савара):

лінійний струм $$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\left[I\mathrm{d}\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3},\quad \vec{B}=\int\limits_L \mathrm{d}\vec{B};$$

об'ємний струм $$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\left[\vec{j}\mathrm{d}V,\vec{r}\right]}{r^3},\quad \vec{B}=\int\limits_V \mathrm{d}\vec{B};$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi}=10^{-7}\text{ Гн/м.}$$

- Магнітне поле відрізка прямого струму:

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\right)$$

- Магнітне поле на осі круглого витка із струмом:

$$B=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{r^2}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

- Магнітний момент плоского контуру із струмом і магнітного дипо- ля:

$$\vec{p}_m=IS\vec{n}.$$

- Магнітне поле на осі $\vec{B}_\parallel$ та на перпендикулярі до осі $\vec{B}_\perp$ магнітного диполя:

$$\vec{B}_\parallel=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\vec{p}}{r^3}\qquad\qquad \vec{B}_\perp=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{p}}{r^3}.$$

- Циркуляція стаціонарного магнітного поля у вакуумі:

$$\oint\limits_L \vec{B}\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I_\Sigma,\qquad I_\Sigma=\sum I_i\quad \textit{або}\quad I_\Sigma=\int\limits_S \vec{j}\mathrm{d}\vec{s}.$$

- Потік магнітного поля (теорема Гаусса):

$$\oint\limits_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{S}=0.$$

- Магнітна сила, що діє на рухомий заряд :

$$\vec{F}_m = q\left[\vec{v}\vec{B}\right].$$

- Магнітна сила, що діє на провідник із струмом (закон Ампера):

$$\mathrm{d}\vec{F}_A = I\left[\mathrm{d}\vec{l},\vec{B}\right], \quad \vec{F}_A = \int_L \mathrm{d}\vec{F}_A .$$

- Момент сил, що діють на контур із струмом в однорідному магнітному полі:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right].$$

- Енергія магнітного диполя в довільному магнітному полі та довільного контуру зі струмом в однорідному полі ($\vec{B} = const$):

$$W_m = -\vec{p}_m\vec{B}.$$

- Робота при переміщенні провідника та контуру із струмом у магнітному полі:

$$\delta A = I\mathrm{d}\Phi, \quad A = I(\Phi_2 - \Phi_1).$$

- Циркуляція вектора напруженості магнітного поля (вектора $\vec{H}$):

$$I_\Sigma = \sum_i I_i \text{ або } I_\Sigma = \int_S \vec{j}\mathrm{d}\vec{s} I_\Sigma = \sum_i I_i \text{ або } I_\Sigma = \int_S \vec{j}\mathrm{d}\vec{s} \quad .$$

- Зв’язок між векторами $\vec{B}$ і $\vec{H}$ в ізотропному магнетику:

$$\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H} .$$

- Об’ємна густина енергії магнітного поля в ізотропному магнетику:

$$w = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{BH}{2}$$

Вектор $\vec{B}$. Закон Біо-Савара

3.217. Довгий прямий провідник зі струмом, уздовж якого заряд носіїв переноситься зі швидкістю $\vec{u}$, починає рухатись із такою самою за величиною й напрямом швидкістю. Як це вплине на магнітного поле провідника? Чому?

3.218. Два однакові круглі витки радіуса R = 15 см з ізольованого дроту мають спільний центр і розміщені у взаємно перпендикулярних площинах. По витках ідуть однакові струми I = 60 А. Обчислити індукцію магнітного поля в центрі витків. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

(355мкТл)

3.219. Магнітне поле створюється трьома довгими паралельними прямими провідниками із струмом, які в поперечному перерізі утворюють правильний трикутник. Знайти індукцію B_0 магнітного поля в центрі вказаного трикутника, якщо кожен провідник створює в цій точці поле з індукцією B, і всі струми мають однаковий напрям.

$(B_0 = 0)$

3.220. Магнітне поле створюється трьома довгими паралельними прямими провідниками із струмом, які в поперечному перерізі утворюють правильний трикутник. Знайти індукцію B_0 магнітного поля в центрі вказаного трикутника, якщо кожен провідник створює в цій точці поле з індукцією B, і один із струмів напрямлений протилежно до двох інших.

$(B_0 = 2B)$

3.221. Магнітне поле створюється двома довгими паралельними прямими провідниками з однаковими струмами, причому кожен провідник у місці розташування іншого створює поле із заданою індукцією B. Визначити величину та напрям індукції поля $\vec{B}_0$ посередині між провідниками, та $\vec{B}_1$ у точках, які віддалені від провідників на відстань, рівну відстані між ними, якщо струми напрямлені: а) однаково і б) протилежно.

$$\left(a)\ B_0 = 0,\ B_1 = B;\quad б)\ B_0 = 4B,\ B_1 = B\sqrt{3}\right)$$

3.222. Струм I = 5 А тече по плоскому контуру, рис. 4.1. Визначити індукцію B магнітного поля в центрі кривизни, якщо R = 31,4 см.

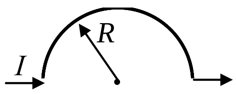


Рис. 4.1.

$$\left(B = \frac{\mu_0 I}{4R} = 5\ \text{мкТл}\right)$$

3.223. Струм I = 50 А тече по показаному плоскому контуру рис. 4.2. Визначити індукцію B магнітного поля в центрі кривизни, якщо R = 10 см.

$$\left(B = \frac{\mu_0 I}{8\pi R}(3\pi + 2) = 286\ \text{мкТл}\right)$$

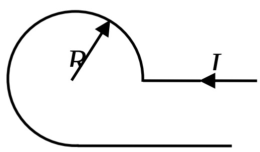


Рис. 4.2.

3.224. Струм 40 А тече по дуже довгому провіднику з петлею радіуса 41,4 см, рис. 4.3. Визначити індукцію B магнітного поля в центрі петлі.

$$\left(B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(\pi + 1) = 80\ \text{мкТл}\right)$$

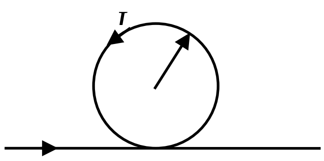
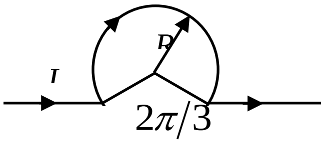


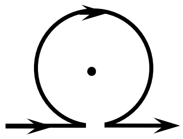
Рис. 4.3.

3.225. Струм I = 50 А тече по дуже довгому провіднику із кільцевим згином, як на рис. 4.4. Визначити індукцію B магнітного поля в центрі кільця, якщо його радіус R = 21,4 см.



$$\left(B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(\pi - 1) = 100\,\text{мкТл}\right).$$ **Рис.4.4.**

3.226. Дуже довгий плоский провідник із струмом I = 60 А має круглий згин радіусом R=20 см, як показано на Визначити індукцію B магнітного поля в його центрі. **Рис. 4.5**



$$\left(B = \frac{\mu_0 I}{\pi R}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \approx 110\,\text{мкТл}\right)$$

3.227. Струм I =100 А тече по плоскому контуру, рис. 4.6. Визначити індукцію B магнітного поля в центрі колової частини контуру, якщо R = 20 см. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(B = \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{I}{R}\left(3\pi + \sqrt{2}\right) = 271\,\text{мкТл}\right)$$

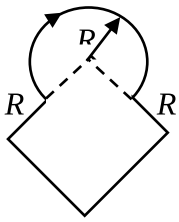


Рис. 4.6.

3.228. Дротина довжини l, по якій іде струм I, зігнута навпіл під кутом α. Визначити індукцію B магнітного поля дротини посередині між її кінцями. Обчислити величину B при l = 1 м, I = 100 А і α = 90°.

$$\left(B = \frac{4\mu_0 I}{l}\left(\sec\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}\right);\quad B \approx 113\ \text{мкТл}\right)$$

3.229. По нескінченному прямому провіднику зігнутому під кутом $\alpha = 120^\circ$ тече струм I = 50 А. Визначити магнітну індукцію в точках на бісектрисі кута на відстані a = 5 см по обидва боки від його вершини. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$(346\,\text{мкТл};\quad 116\,\text{мкТл})$$

3.230. Прямий провідник довжини l = 1 м, по якому йде струм 100 А, зігнутий навпіл під кутом 120°. Знайти індукцію магнітного поля цього провідника в точці, що розташована на бісектрисі зовнішнього кута на відстані l/2 від вершини. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

(≈ 63 мкТл)

3.231. Знайти індукцію магнітного поля B відрізка прямого провідника із струмом довжини a в точці віддаленій від його кінців на таку саму відстань, якщо індукція поля нескінченного прямого струму на відстані a дорівнює B_0.

$$\left(B = \frac{B_0}{\sqrt{3}} \right)$$

3.232. На деякій відстані R (не заданій) від нескінченного прямого провідника із струмом індукція магнітного поля складає B_0. Чому дорівнює індукція поля B в центрі рівностороннього трикутника зі таким самим струмом і такою самою відстанню R від центра до вершини?

$$\left(3\sqrt{3}B_0 \right)$$

3.233. Струм I тече контуром у формі правильного трикутника зі стороною a. Знайти індукцію магнітного поля B_0 у точці рівновіддаленій від вершин трикутника на відстань a.

$$\left(B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{3}\pi a} \right)$$

3.234. Довгий провідник із струмом I = 5,0 А зігнуто під прямим кутом. Визначити індукцію магнітного поля прямо над точкою згину на відстані l = 35 см від площини провідника. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

(2 мкТл)

3.235. Індукція магнітного поля в центрі квадратної дротяної рамки із струмом дорівнює B_0. Знайти індукцію B у цій точці після того, як рамку без зміни величини струму зігнути під кутом $90°$ навколо осі, що проходить через середини протилежних сторін.

$$\left(B = \frac{B_0}{\sqrt{2}} \right)$$

3.236. Визначити у скільки разів η індукція магнітного поля в центрі квадрата зі струмом більша, ніж у вершинах.

$$(\eta = 8)$$

3.237. Знайти співвідношення між індукцією B_0 магнітного поля на деякій відстані від нескінченного прямого провідника зі струмом та індукцією B поля в центрі квадратної рамки з такими самими струмом і відстанню від центра до сторони.

$$\left(B = 2\sqrt{2}\, B_0 \right)$$

3.238. Визначити (вивести формулу) індукцію магнітного поля B_0 в центрі круглого витка радіуса R із струмом I.

$$\left(B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \right)$$

3.239. Два однакові шматки дроту зігнули перший у кругле кільце, а другий у квадрат. Знайти відношення $\eta = B_1/B_2$ індукцій магнітного поля у центрах утворених контурів при пропусканні по них струму однакової величини.

$$\left(\eta = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}} = 0{,}87 \right)$$

3.240. У центрі контуру із струмом, який має форму правильного трикутника, індукція магнітного поля складає 1,0 мкТл. Чому дорівнює індукція в центрі контуру у формі описаного навколо трикутника кола із таким самим струмом?

(0,6 мкТл)

3.241. Струм I = 31,4 А тече уздовж довгого прямого провідника, що являє собою половину тонкостінного циліндра радіуса $R = 5{,}0\text{ см}$, рис. 4.7. Визначити індукцію магнітного поля на осі О провідника.

$$\left(B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = 80\text{ мкТл} \right)$$

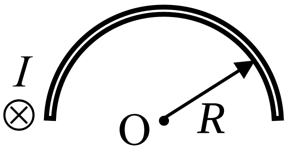


Рис. 4.7

3.242. По круглому тонкому кільцю радіуса R йде струм I. Визначити індукцію магнітного поля $B(z)$ на осі кільця в залежності від відстані z до його центра.

$$\left(B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

3.243. Соленоїд довжин l і радіуса R містить n витків на одиницю довжини. Використовуючи результат попередньої задачі, визначити індукцію магнітного поля в центрі соленоїда при силі струму I. Окремо розглянути випадок не-

скінченно довгого соленоїда.

$$\left(B = \frac{\mu_0 n I}{\sqrt{1 + (2R/l)^2}}; \quad B_\infty = \mu_0 n I \right)$$

Теорема про циркуляцію $\vec{B}$

3.244. По ідеальному соленоїду, який має n витків на одиницю довжини, тече струм I. Використовуючи теорему про циркуляцію, визначити (вивести формулу) індукцію магнітного поля B всередині та B_0 назовні соленоїда.

$$\left(B = \mu_0 nI, \quad B_0 = 0\right)$$

3.245. Магнітне поле створюється струмом I, який протікає по ідеальному тороїду із середнім радіусом R_0 і щільністю намотки n. (Середнім радіусом тороїда називається радіус кола, на якому лежать центри витків тороїда; щільність намотки n – кількість витків на одиницю довжини середньої лінії тороїда).

1) визначити індукцію поля $B(r)$ у залежності від відстані r до осі тороїда;
2) отримати формулу індукції поля ідеального соленоїда як граничний випадок формули поля тороїда.

$$\left(1)\ \textit{усередині тороїда}\ B = \mu_0 nI\frac{R_0}{r}, \quad \textit{назовні}\ B = 0; \quad 2)\ B = \mu_0 nI\right)$$

3.246. У реальному тороїді струм створює магнітне поле не лише всередині, а й назовні обмотки. Знайти відношення $\eta = (B/B_0)$ індукції поля всередині та назовні в центрі тороїда з малим поперечним перерізом, який містить $N = 3000$ витків.

$$(\eta \approx N/\pi = 955)$$

3.247. Визначити індукцію магнітного поля $\vec{B}$, що створюється:

1) нескінченною площиною зі струмом, який розподілений по ній зі сталою лінійною густиною $\vec{i}$ (А/м);
2) двома паралельними нескінченними площинами зі струмами, що розподілені по них із сталими лінійними густинами $\vec{i}_1$ та $\vec{i}_2$; окремо розглянути випадки: *а)* $\vec{i}_1 = \vec{i}_2 = \vec{i}$ та б) $\vec{i}_1 = \vec{i}, \vec{i}_2 = -\vec{i}$.

$$\left(\begin{array}{l}
1)\ \vec{B} = \dfrac{\mu_0\left[\vec{i}\vec{n}\right]}{2},\ \vec{n} - \textit{орт нормалі до площини;} \\
2)\ \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{2}\left[(\vec{i}_1 - \vec{i}_2), \vec{n}\right] \textit{між площинами,}\ \vec{B} = \pm\dfrac{\mu_0}{2}\left[(\vec{i}_1 + \vec{i}_2), \vec{n}\right] \textit{поза ними;} \\
\quad a)\ B = 0\ \textit{між площинами,}\ B = \pm\,\mu_0\left[\vec{i}\vec{n}\right] \textit{поза ними;} \\
\quad б)\ B = \mu_0\left[\vec{i}\vec{n}\right] \textit{між площинами,}\ B = 0\ \textit{поза ними;} \\
\quad \vec{n} - \textit{орт нормалі напрямлений від площини 1 до 2.}
\end{array}\right)$$

3.248. Магнітне поле створюється однорідним струмом густини j, що тече по нескінченній немагнітній пластині товщини $2d$. Визначити індукцію поля $B(x)$ як функцію відстані x до площини симетрії пластини.

(*Усередині* $B = \mu_0 jx$; *назовні* $B = \mu_0 jd$)

3.249. Магнітне поле створюється однорідним струмом величини I, що тече вздовж довгої тонкостінної циліндричної труби радіуса R. Визначити індукцію поля $B(r)$ як функцію відстані r до осі труби.

$$\left(\textit{Усередині } B = 0; \quad \textit{назовні } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)$$

3.250. Магнітне поле створюється однорідним струмом густини j, що тече вздовж нескінченного немагнітного суцільного циліндра радіуса R. Визначити вектор індукції поля $\vec{B}(\vec{r})$ у всьому просторі як функцію радіуса-вектора $\vec{r}$ точки відносно осі циліндра.

$$\left(\textit{Усередині } \vec{B} = \frac{\mu_0 \left[\vec{j}\vec{r} \right]}{2}, \quad \textit{назовні } \vec{B} = \frac{\mu_0 \left[\vec{j}\vec{r} \right] R^2}{2r^2} \right)$$

3.251. Уздовж нескінченного немагнітного циліндра радіуса R тече струм, густина котрого $\vec{j}$ залежить від відстані r до осі циліндра, як $\vec{j} = \vec{j}_0 r/R$, де величина j_0 задана. Визначити вектор індукції магнітного поля струму $\vec{B}(\vec{r})$ у всьому просторі як функцію радіуса-вектора $\vec{r}$ точки відносно осі циліндра.

$$\left(\textit{Усередині } \vec{B} = \frac{\mu_0 \left[\vec{j}_0 \vec{r} \right] r}{3R}, \ \textit{назовні } \vec{B} = \frac{\mu_0 \left[\vec{j}_0 \vec{r} \right] R^2}{3r^2} \right)$$

3.252. Магнітне поле створюється однорідним струмом величини I, що тече вздовж довгої тонкостінної циліндричної труби радіуса R із вузьким поздовжнім прорізом заданої ширини $h << R$. Визначити індукцію поля $B(r)$ всередині труби як функцію відстані r від прорізу

$$\left(B = \frac{\mu_0 I h}{4\pi^2 R} \frac{1}{r} \right)$$

3.253. Довгий циліндричний провідник із струмом густини $\vec{j}$ має поздовжню циліндричну порожнину, положення якої відносно осі провідника визначається вектором $\vec{l}$. Визначити вектор індукції магнітного поля $\vec{B}$ у порожнині. Окремо розглянути випадок $\vec{l} = 0$.

$$\left(\vec{B} = \frac{\mu_0 \left[\vec{j}\,\vec{l} \right]}{2} \right)$$

Сила Ампера

3.254. Металевий стержень маси 100 г і довжини 20 см підвішений горизонтально на двох нитках в однорідному горизонтальному магнітному полі з індукцією 100 мТл перпендикулярно до напрямку поля. Який найменший струм I треба пропустити по стержню, щоби він став невагомим. Узяти g = 10 м/с^2.

(50 А)

3.255. Металевий стержень маси 100 г і довжини 20 см підвішений горизонтально на двох нитках в однорідному горизонтальному магнітному полі з індукцією 100 мТл під кутом 30° до напрямку поля. Який найменший струм треба пропустити по стержню, щоб одна з ниток розірвалася, якщо кожна з них витримує навантаження, рівне вазі стержня. Взяти g = 10 м/с^2.

(100 А)

3.256. Металевий стержень маси 100 г і довжини 20 см підвішений горизонтально на двох нитках в однорідному вертикальному магнітному полі. Знайти індукцію поля, якщо при пропусканні по стержню струму 50 А нитки відхилилися від вертикалі на кут α = 45°. Узяти g = 10 м/с^2.

(0,1 Тл)

3.257. Дротяний каркас масою m = 45 г у формі трьох сторін квадрата довжиною a = 20 см кожна підвішено за кінці у вертикальному магнітному полі так, що нижня сторона розташована горизонтально і перпендикулярно до напрямку поля. Чому дорівнює індукція магнітного поля B, якщо при пропусканні по каркасу струму I = 100 А він відхилився від вертикалі на кут α = 45°. Узяти g = 10 м/с^2.

$$\left(B = \frac{2mg\,\mathrm{tg}\,\alpha}{3Ia} = 30\,\text{мТл} \right)$$

3.258. По двох паралельних довгих прямих провідниках, розміщених на відстані 1 см один від одного, течуть однакові струми. Визначити силу струму в провідниках, якщо на кожен метр їх довжини припадає сила взаємодії 0,2 Н. $\left(\mu_0/4\pi\right) = 10^{-7}$ Гн/м.

(100 А)

3.259. Квадратна дротяна рамка і довгий прямий провідник розташовані в одній площині так, що провідник є паралельним до сторони рамки. По рамці та провіднику течуть однакові струми I = 100 А. Знайти силу, що діє на рамку з боку провідника, якщо ближча до нього сторона рамки a знаходиться на відстані l = a. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

($F = 1\,$мН)

3.260. Тонкий металевий стержень із струмом I = 10 А розміщений перпендикулярно до довгого прямого провідника зі струмом I_0 = 100 А в одній

площині. Знайти силу Ампера, що діє на стержень, якщо його ближній кінець зна-
ходиться від провідника на відстані рівній довжині стержня.

$$\left(F = \frac{\mu_0 I_0 I}{4\pi} 2\ln 2 = 0{,}14 \text{ мН} \right)$$

3.261. По дротині у формі тонкого півкільця радіуса R = 10 см, яка знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 50$ мТл, тече струм I = 10 А. Визначити амперову силу, що діє на дротину, якщо напрям магнітного поля: а) перпендикулярний до площини півкільця і б) паралельний до площини півкільця та перпендикулярний до його діаметра.

(*в обох випадках* $F = 2IRB = 0{,}1$ Н.)

3.262. Дротина у формі півкільця радіуса R = 50 см із струмом I = 100 А знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 200$ мТл, напрямленому паралельно до діаметра півкільця. Визначити амперову силу F та момент сил M, які діють на дротину.

$$\left(F = 0, \quad M = \frac{\pi R^2 IB}{2} \approx 7{,}85 \text{ Н} \cdot \text{м} \right)$$

3.263. Дротина у формі півкільця радіуса R = 50 см із струмом I = 100 А знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 200$ мТл, напрямленому під кутом 30° до діаметра півкільця. Визначити амперову силу F, що діє на дротину.

(10 Н)

3.264. Тонке кільце радіуса R = 20 см із струмом I = 100 А знаходиться в перпендикулярному до його площини однорідному магнітному полі з індукцією B = 20 мТл. Знайти силу натягу кільця.

($F = IRB = 0{,}4$ Н)

3.265. Струм I тече вздовж довгого прямого провідника, що являє собою половину тонкостінного циліндра радіуса R. Такий самий струм тече по довгій прямій дротині, що розташована на осі півциліндра. Визначити силу магнітної взаємодії, що припадає на одиницю довжини провідників.

$$\left(F = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R} \right)$$

3.266. Два довгих паралельних провідники, по яких протікають струми однакового напрямку та величини $I = 6{,}0$ А, віддалили один від одного так, що відстань між ними подвоїлась. Визначити роботу сил Ампера на одиницю довжини провідників.

$$\left(A = -5 \text{ мкДж} \right)$$

Магнітний момент контуру

3.267. Обчислити магнітний момент кільцевого провідника радіуса 10 см, по якому йде струм 0,5 А.

$(15{,}7\cdot10^{-3}\ \text{А}\cdot\text{м}^2)$

3.268. Дуже коротка (практично плоска) котушка містить $N = 1000$ витків тонкого дроту. Переріз котушки має форму квадрата зі стороною 10 см. Визначити магнітний момент котушки, якщо сила струму в ній 1 А.

$(10\ \text{А}\cdot\text{м}^2)$

3.269. Використавши результат задачі 4.23, отримати формулу індукції магнітного поля на осі довільного кільця із струмом та магнітного диполя (малого кільця) через магнітний момент $\vec{p}_m$.

3.270. Одна сторона діелектричного диска радіуса R заряджена з поверхневою густиною заряду σ. Диск обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω. Визначити:

– магнітний момент диска p_m;
– індукцію магнітного поля B_0 у його центрі.

$$\left(p_m = \frac{\pi\sigma\omega R^4}{4}; \quad B_0 = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2} \right)$$

3.271. Швидкий коловий рух зарядженої частинки створює певний ефективний кільцевий струм. Виходячи з цього, визначити магнітний момент p_m частинки із зарядом q та масою m що обертається по колу і має відносно його центра момент імпульсу L.

$$\left(p_m = \frac{q}{2m} L \right)$$

3.272. Дротяний виток із струмом радіуса $R = 5\,\text{см}$ знаходиться в однорідному магнітному полі $B = 2\,\text{мТл}$ паралельному до площини витка. Визначити момент сил, що діють на виток при струмі $I = 2\ \text{А}$.

$(31{,}4\,\text{мкН}\cdot\text{м})$

3.273. Круглий виток радіуса 10 см із струмом 20 А знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією 0,5 Тл. Контур утримують у рівновазі, прикладаючи до діаметральних точок витка пару сил так, що площина витка складає кут 60° із напрямом поля. Знайти найменшу можливу величину сил пари.

$(\approx 0{,}8\ \text{Н})$

3.274. Вільний квадратний контур із стороною 10 см і струмом 100 А перебуває в рівновазі в однорідному зовнішньому магнітному полі з індукцією 0,2 Тл. Яку роботу треба виконати, аби повільно повернути контур на кут 60° навколо осі, що лежить у площині контуру?

(0,1 Дж)

3.275. Квадратна рамка зі стороною a = 8 см і струмом I = 0,9 А розташована в одній площині з довгим прямим провідником так, що її сторона паралельна до провідника. По провіднику йде струм I_0 = 5,0 А. Яку механічну роботу треба виконати, щоби повернути рамку на 180° навколо осі, котра проходить через середини її протилежних сторін паралельно до провідника і на відстані r = 1,5a від нього?

$$\left(A = \frac{\mu_0 I I_0 a}{\pi} \ln 2 = 0{,}1\,\text{мкДж} \right)$$

Магнітне поле в речовині

3.276. Індукція магнітного поля у вакуумі поблизу плоскої поверхні магнетика з проникністю μ дорівнює B_0. Вектор $\vec{B}_0$ складає кут α із нормаллю до поверхні. Знайти індукцію магнітного поля B в магнетику поблизу поверхні.

$$\left(B = B_0 \sqrt{\mu^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \right)$$

3.277. На залізний сердечник малого перерізу довжиною 20 см намотано 200 витків дроту. За допомогою кривої намагнічування рис. 4.8, знайти магнітну проникність заліза при струмі 0,4 А.

($\mu \approx 2000$)

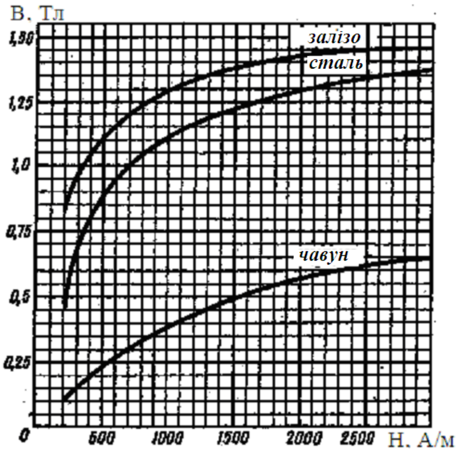


Рис. 4.8

3.278. По осі тонкого залізного кільця радіуса r = 2 см проходить довгий прямий провідник із струмом. За допомогою кривої намагнічування рис. 4.8, знайти магнітні проникності заліза μ_1 і μ_2 при силі струму в провіднику I_1 = 26 А та I_2 = 88 А, відповідно. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

($\mu_1 \approx 3300$; $\mu_2 \approx 1400$)

3.279. По довгому прямому соленоїду з кількістю витків на одиницю довжини $n = 500\ \text{м}^{-1}$, який намотано на сталевий сердечник, тече струм $I = 1{,}0$ А. За допомогою кривої намагнічування рис. 4.8 знайти індукцію магнітного поля B усередині соленоїда та магнітну проникність сердечника μ при заданому струмі. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. ($B \approx 0{,}9$ Тл; $\mu \approx 1400$)

3.280. На чавунний сердечник у формі тора з радіусом середньої лінії 32 см намотано в один шар 1000 витків дроту. Використовуючи криву намагнічування рис. 4.8, знайти магнітну проникність чавуну μ на середній лінії сердечника при силі струму в обмотці 1,0 А. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

($\mu \approx 400$)

3.281. По тороїду із залізним сердечником, який має 1000 витків, тече струм. Довжина середньої лінії тороїда 20 см є набагато більшою за діаметр витка. Який струм I_0 потрібно пропустити по такому самому тороїду без сердечника, щоб індукція магнітного поля в ньому дорівнювала індукції у тороїді із сердечником при струмі I = 0,34 А? Скористатися кривою намагнічування заліза (рис. 4.7). $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

($I_0 \approx 220$ А)

3.282. По тороїду, що складається з N = 1000 витків, намотаних на феромагнітний сердечник із середнім радіусом R = 25 см, тече струм I = 0,85 А. У сердечнику зроблено поперечний проріз шириною b = 1,0 мм. Нехтуючи розсіюванням магнітного потоку на краях зазору, знайти магнітну проникність феромагнетика μ на середній лінії сердечника, якщо індукція магнітного поля в зазорі B = 0,75 Тл.

$$\left(\mu = \frac{(2\pi R - b)B}{IN\mu_0 - bB} \approx \frac{2\pi RB}{\mu_0 NI - bB} = 3700 \right)$$

3.283. Постійний магніт має вигляд кільця (тора) із вузьким зазором між полюсами. Середній діаметр кільця d = 20 см. Ширина зазору b = 2 мм, індукція магнітного поля в зазорі B = 40 мТл. Знайти модуль напруженості H магнітного поля всередині магніту, вважаючи поле сталим по перерізу. Проаналізувати напрям $\vec{H}$ усередині магніту та в зазорі. Розсіюванням потоку на краях зазору знехтувати.

$$\left(H = \frac{Bb}{\mu_0(\pi d - b)} \approx \frac{Bb}{\mu_0 \pi d} \approx 100\,\text{А/м.} \right)$$

3.5. Електромагнітна індукція. Рівняння Максвелла

- Основний закон електромагнітної індукції (закон Фарадея):

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

- Повний потік (потокозчеплення) в соленоїді та тороїді з кількістю витків N:

$$\Phi = N\Phi_1.$$

- Власний потік контуру (потік самоіндукції):

$$\Phi_c = LI .$$

- Потоки взаємоіндукції двох контурів:

$$\Phi_1 = L_{12}I_2, \quad \Phi_2 = L_{21}I_1; \quad L_{12} = L_{21}.$$

- ЕРС самоіндукції в контурі з $L = const$:

$$\mathcal{E}_c = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

- Магнітна енергія струму в контурі з $L = const$:

$$W_m = \frac{LI^2}{2}.$$

- Об'ємна густина енергії магнітного поля в не феромагнітному середовищі:

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

- Об'ємна густина енергії електромагнітного поля в не феромагнітному середовищі:

$$w = \frac{ED}{2} + \frac{BH}{2}.$$

- Густина струму зміщення:

$$\vec{j}_{зм} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

- Рівняння Максвелла:

$$\oint_L \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{S}, \qquad \oint_S \vec{D}\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho\mathrm{d}V;$$

$$\oint_L \vec{H}\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\vec{S}, \qquad \oint_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Магнітний потік

3.284. Плоский контур площею 25 см^2 знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією 4 мТл. Визначити магнітний потік, що пронизує цей контур, якщо його площина складає кут 30° із лініями індукції магнітного поля.

(5 мкВб)

3.285. Сфера радіуса 10 см знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією 100 мТл. Знайти магнітний потік крізь усю сферу та крізь півсферу, основа котрої перпендикулярна до напрямку поля.

(0; 3,14 мВб)

3.286. Магнітне поле створюється довгим провідником із струмом. Чому дорівнює потік поля крізь поверхню квадрата, показаного на рис. 5.1, якщо потік крізь його виділену половину дорівнює Ф?

3.287. Квадратний контур і довгий прямий провідник із струмом розташовані, як показано на рис. 5.1. При цьому потік індукції магнітного поля крізь виділену половину квадрата дорівнює 10 мВб. Чому дорівнює потік крізь другу половину квадрата?

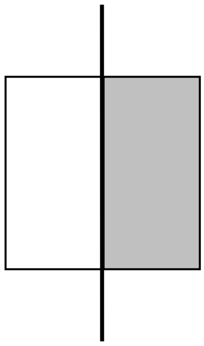


Рис. 5.1

3.288. Магнітний потік крізь плоский контур, який знаходиться в однорідному магнітному полі, складає Φ_0. Знайти зміну потоку $\Delta\Phi$ крізь контур при його повороті на 180° навколо осі, що лежить у площині контуру і є перпендикулярною до напрямку поля.

($\Delta\Phi = -2\Phi_0$)

3.289. Прямокутна рамка площею *S* знаходиться в неоднорідному магнітному полі ($B \neq const$), яке скрізь напрямлене перпендикулярно до її площини, рис. 5.2. Рамку переміщують із положення 1 у положення 2: а) поступально, б) поворотом навколо сторони АВ. Порівняти зміну магнітного потоку крізь рамку при повороті $\Delta\Phi_2$ та при поступальному переміщенні $\Delta\Phi_1$, якщо в кінцевому положенні середня величина модуля індукції поля є вдвічі більшою, ніж у початковому.

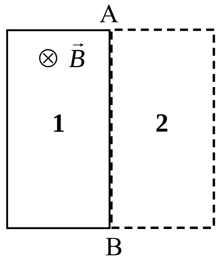


Рис. 5.2

$\left(\Delta\Phi_2 = -3\Delta\Phi_1\right)$

3.290. В одній площині з довгим прямим провідником із струмом $I = 50$ А розміщена прямокутна рамка так, що її поздовжні сторони розміром $a = 65$ см є паралельними до провідника. Знайти магнітний потік крізь рамку, якщо відстань від провідника до ближньої сторони рамки дорівнює її ширині.

$$\left(\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln 2 = 4{,}5 \text{ мкВб.}\right)$$

3.291. Тороїд квадратного перерізу має $N = 1000$ витків. Зовнішній діаметр тороїда $d_2 = 20$ см, внутрішній – $d_1 = 10$ см. Чому дорівнює магнітний потік Φ_1 через переріз тороїда та повний магнітний потік Φ у тороїді, якщо по його обмотці протікає струм $I = 10$ А?

$$\left(\Phi_1 = \frac{\mu_0 IN}{4\pi}(d_2 - d_1)\ln\frac{d_2}{d_1} \approx 35\,\text{мкВб}; \quad \Phi = N\Phi_1.\right)$$

Основний закон ЕМІ

3.292. Дротяне кільце діаметром d, що вільно падає, пролітає смугу перпендикулярного до його площини магнітного поля шириною $l = 4d$. Показати приблизний графік залежності ЕРС індукції в кільці від його положення в просторі.

3.293. Квадратна рамка зі стороною a, що рухається поступально із швидкістю $\vec{v}_0$, проходить крізь смугу перпендикулярного до її площини магнітного поля $\vec{B} = const$ (рис. 5.3) без зміни швидкості. Ширина смуги поля $l = 3a$. Визначити величину та показати на графіку залежність ЕРС індукції в рамці від координати x її передньої сторони. Вказати напрям індукційного струму в усіх характерних положеннях рамки.

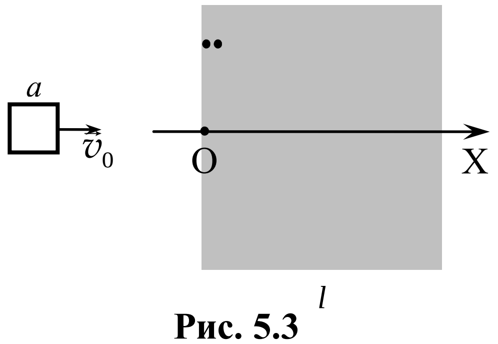


Рис. 5.3

3.294. Мідна квадратна рамка зі стороною a, що вільно ковзає без тертя по горизонтальній площині із швидкістю $\vec{v}_0$, в момент $t = 0$ натрапляє на смугу однорідного вертикального магнітного поля шириною $l = 3a$, як показано на рис. 5.3. Густина міді $d = 8{,}9\ \text{г/см}^3$, питомий опір $\rho = 16\ \text{нОм}\cdot\text{м}$. Визначити:

1) залежність швидкості рамки від часу $v(t)$ та від координати $v(x)$ передньої сторони рамки і показати графіки цих залежностей;
2) найменшу величину v_0, при якій рамка повністю вийде з поля; розрахувати значення v_0 при $a = 20$ см і $B = 200$ мТл.

$$\left(\begin{array}{l} 1)\ v(t) = v_m e^{-\gamma t},\ v(x) = v_m - \gamma S,\ де\ \gamma = \dfrac{B^2}{16 d\rho}\ та \\ S = x\ при\ 0 < x \le a\ і\ S = x - 3a\ при\ 3a < x \le 4a; \\ 2)\ v_{0\min} = 2\gamma a \approx 7\ \text{м/с} \end{array}\right)$$

3.295. Прямокутна дротяна рамка площею $S = 0{,}5\ \text{м}^2$ обертається із частотою $\nu = 3000$ об/хв в однорідному магнітному полі з індукцією 0,2 Тл навколо осі, що перпендикулярна до напрямку поля й проходить через середини протилежних сторін рамки. Знайти:

– максимальну ЕРС індукції ε_m у рамці та потік Φ_m крізь неї в момент максимуму ЕРС;
– роботу (не враховуючи тертя), яку треба виконувати за кожен оберт, аби рамка оберталася із заданою частотою, якщо її опір R = 0,5 Ом.

$$\left(\varepsilon_m = \frac{\pi B S \nu}{30} = 31{,}4\ \text{В},\ \Phi_m = 0; \quad A = \frac{2\pi^2 B^2 S^2 \nu}{R} = 19{,}7\ \text{Дж} \right)$$

3.296. Пряма дротина завдовжки 20 см, паралельна до осі OY, починає рухатись уздовж осі OX із сталим прискоренням 2 м/с^2 в однорідному магнітному полі, що, напрямлене по осі OZ. Індукція поля 100 мТл. Знайти миттєву ЕРС індукції у дротині через 2 с після початку руху та середню ЕРС за цей час.

$$(80\ \text{мВ}; \quad 40\ \text{мВ})$$

3.297. Пряма горизонтальна дротина довжиною 20 см, паралельна до осі OY, рухається вздовж осі OX в однорідному магнітному полі так, що її координата x змінюється з часом за законом $x = 5 - 2t + t^2$ (усі величини в СІ). Індукція поля напрямлена уздовж осі OZ і дорівнює 100 мТл. Знайти ЕРС у дротині на момент коли $x = 29$ м.

(0,2 В)

3.298. По П-подібному металевому каркасу, розміщеному в горизонтальній площині, рухається зі швидкістю 5 м/с перетинка довжиною 40 см і опором 100 мОм. Уся конструкція знаходиться у вертикальному магнітному полі з індукцією 0,2 Тл. Нехтуючи опором каркаса, знайти силу струму в перетинці та силу, яку треба прикладати до перетинки для забезпечення руху.

(4 А; 0,32 Н)

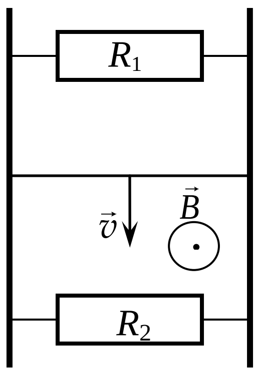


Рис. 5.4

3.299. Дротяна перетинка рухається зі швидкістю v = 20 см/с у вертикальному магнітному полі з індукцією B = 0,1 Тл по двох паралельних горизонтальних рейках (рис. 5.4), які розміщені на відстані l = 1,0 м одна від одної. Кінці рейок замкнені на опори R_1 = 1,0 Ом та R_2 = 2,0 Ом. Знайти силу струму I в перетинці. Опором рейок і перетинки знехтувати.

$$\left(I = \frac{Blv(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = 0{,}03\ \text{А} \right)$$

3.300. На двох довгих мідних стержнях квадратного перерізу зі стороною a = 4,0 мм, які зіставлені в горизонтальній площині під кутом α = 30°, лежить поперечка – такий самий стержень, перпендикулярний до бісектриси кута α.

Уся конструкція вміщена у вертикальне магнітне поле з індукцією B = 0,2 Тл. Знайти силу струму I в стержнях, якщо поперечка почне ковзати уздовж бісектриси кута зі швидкістю v = 20 см/с. Питомий опір міді ρ = 1,6·10^{-8} Ом·м.

$$\left(I = \frac{Ba^2 \upsilon \sin(\alpha/2)}{\rho\left(1+\sin(\alpha/2)\right)} \approx 8{,}2 \text{ А} \right)$$

3.301. В одній площині з нескінченним прямим провідником, по якому йде постійний струм I, розміщена квадратна рамка так, що її сторона a є паралельною до провідника. Рамка поступально рухається перпендикулярно до провідника із сталою швидкістю υ. Визначити ЕРС індукції в рамці $\varepsilon(x)$ як функцію відстані x від провідника до центра рамки.

$$\left(\varepsilon(x) = \frac{2\mu_0 I \upsilon}{\pi} \frac{1}{(2x/a)^2 - 1} \right)$$

3.302. В одній площині з нескінченним прямим провідником із струмом розміщена квадратна рамка так, що її сторона a = 0,2 м є паралельною до провідника. Опір рамки R = 69 мОм, відстань від її ближньої сторони до провідника дорівнює a. Струм у провіднику змінюється з часом за законом $I = \gamma t^3$, де γ = 2 А/с^3. Визначити силу струму у рамці I на момент t = 10 с.

$$\left(I = \frac{3\mu_0 \gamma a \ln 2}{2\pi R} t^2 = 240 \text{ мкА.} \right)$$

Перенесення заряду при зміні магнітного потоку

3.303. Циліндричну котушку з'єднали кінцями і вмістили в однорідне осьове магнітне поле, що змінюється з часом зі швидкістю $\left(\partial B/\partial t\right)$ = 10 мТл/с. Котушка має опір R = 9 Ом і складається з N = 1000 витків діаметром d = 10 см. Знайти теплову потужність P, що виділяється в котушці.

$$\left(P = \frac{\left((\partial B/\partial t) N \pi d^2\right)^2}{16R} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ Вт} \right)$$

3.304. Магнітний потік крізь дротяний контур рівномірно змінюється із швидкістю 1,0 Вб/с. Визначити заряд на конденсаторі ємності 0,2 мкФ, який включений у цей контур.

(2·10^{-7} Кл)

3.305. Циліндричну котушку з'єднану з конденсатором ємності C = 100 мкФ вмістили в паралельне до її осі магнітне поле, індукція котрого змінюється з часом із швидкістю $\dot{B}$ = 10 мТл/с. Знайти заряд конденсатора, якщо котушка складається з N = 1000 витків діаметром D = 10 см.

$$\left(q = \frac{N \pi D^2 \dot{B} C}{4} = 7{,}85 \cdot 10^{-5} \text{ Кл} \right)$$

3.306. Виток з опором 0,1 Ом і площею 100 см^2 розміщений в однорідному магнітному полі з індукцією 0,25 Тл напрямленому під кутом 30° до площини витка. Визначити кількість тепла, що виділиться у витку, та кількість електрики, що пройде по ньому при рівномірному зменшенні індукції поля до нуля за час 0,5 с.

(Q = 31,25 мкДж; q = 12,5 мКл)

3.307. Магнітний потік Φ крізь контур з опором R змінюється за законом:

а) $\Phi = \tau(\alpha + \beta t)$

б) $\Phi = \alpha t^3$

в) $\Phi = \alpha t(\tau - t)$

г) $\Phi = \alpha B_0 \cos \omega t$

д) $\Phi = \alpha B_0 \sin \omega t$,

де t – час, усі інші величини – задані сталі. Визначити кількість теплоти Q, яка виділяється в контурі за час $t = \tau$. Індуктивністю контуру знехтувати.

$$\left(\text{а) } Q = \frac{\beta^2\tau^3}{R}, \quad \text{б) } Q = \frac{9\alpha^2\tau^5}{5R}, \quad \text{в) } Q = \frac{\alpha^2\tau^3}{3R}, \right.$$

$$\left. \text{г) } Q = \frac{\alpha^2 B_0^2 \omega}{2R}\left(\omega\tau - \frac{\sin 2\omega\tau}{2}\right), \text{ д) } Q = \frac{\alpha^2 B_0^2 \omega}{2R}\left(\omega\tau + \frac{\sin 2\omega\tau}{2}\right) \right)$$

3.308. Кругле мідне кільце масою m = 5 г знаходиться в однорідному магнітному полі B = 0,2 Тл, перпендикулярному до його площини. Визначити заряд q, який пройде по кільцю, якщо його розтягнути в лінію за діаметральні точки.

$$\left(q = \frac{Bm}{4\pi\rho d} \approx 0{,}56\,\text{Кл}, \quad \rho, d - \textit{питомий опір і густина міді} \right)$$

3.309. Квадратну рамку опором R = 0,02 Ом розмістили в одній площині з нескінченним прямим провідником із струмом I = 1000 А так, що дві її сторони розташовані паралельно до провідника на відстанях, a_1 = 0,1 м і a_2 = 0,2 м. Яка кількість електрики пройде по рамці при вимиканні струму в провіднику?

$$\left(q = \frac{\mu_0 I (a_2 - a_1)}{2\pi R} \ln\frac{a_2}{a_1} = 6{,}93 \cdot 10^{-4}\,\text{Кл} \right)$$

3.310. Плоска рамка площею 10 мм^2 і опором 10 Ом, яка складається з 500 витків тонкого дроту, вміщена в магнітне поле перпендикулярно до його напрямку. Рамку повертають на 180° навколо осі, що перпендикулярна до напрямку поля й лежить у площині рамки, через що по ній проходить заряд 25 мкКл. Чому дорівнює індукція поля?

(25 мТл)

Вплив ЕМІ на рух провідників

3.311. Два довгі паралельні металеві стержні, що замкнені згори, встановлені під кутом $\theta = 30°$ до горизонту в перпендикулярному до їхньої площини магнітному поле $B = 0,05$ Тл. По стержнях починає ковзати поперечка масою $m = 10$ г та опором $R = 10$ мОм. Довжина поперечки дорівнює відстані між стержнями $l = 20$ см. Знайти швидкість усталеного руху поперечки. Опором стержнів і тертям знехтувати.

$$\left(v_m = \frac{mgR\sin\theta}{B^2 l^2} = 0,49\,\text{м/с} \right)$$

3.312. Два довгі паралельні вертикальні металеві стержні, що замкнені згори, знаходяться в горизонтальному магнітному полі B = 0,2 Тл, перпендикулярному до їх площини. По стержнях може ковзати без тертя й утрати контакту мідна поперечка, довжина котрої дорівнює відстані між стержнями. Якої найбільшої величини v_m може досягти швидкість поперечки при вільному зісковзуванні по стержнях

$$\left(v_m = \frac{\rho d g}{B^2} = 3,5\,\text{см/с} \right)$$

3.313. По двох паралельних горизонтальних рейках, уміщених у вертикальне магнітне поле B = 0,15 Тл, може ковзати поперечка масою m = 10 г, довжина якої дорівнює відстані між рейками l = 20 см. Рейки замкнені з одного боку через опір R = 30 мОм. Поперечці поштовхом надають початкової швидкості v_0 = 1,8 м/с. Нехтуючи опором рейок і поперечки та тертям, знайти шлях S, який пройде поперечка до зупинки.

$$\left(S = \frac{m v_0 R}{B^2 l^2} = 60\,\text{см} \right)$$

3.314. По двох довгих паралельних і замкнених з одного боку горизонтальних рейках, уміщених у вертикальне магнітне поле B = 0,1 Тл, може ковзати без тертя поперечка масою m = 100 г і опором R = 40 мОм. Довжина поперечки дорівнює відстані між рейками l = 20 см. Яке прискорення a буде мати поперечка через час τ =10 с після початку дії на неї сили F = 0,1 Н, напрямленої вздовж рейок? Опором рейок знехтувати.

$$\left(a = \frac{F}{m} e^{-\alpha\tau},\ \text{де}\ \alpha = \frac{B^2 l^2}{mR};\quad a \approx 0,37\,\text{м/с}^2 \right)$$

3.315. Найпростіший магнітогідродинамічний генератор (МГД-генератор) являє собою плоский конденсатор уміщений в паралельне до обкладок магнітне поле, крізь який прокачується провідна рідина. Знайти ЕРС такого генератора, якщо крізь конденсатор із квадратними пластинами зі стороною 1 м щосекунди перпендикулярно до напрямку поля 0,5 Тл прокачується 3 м^3 рідини.

(1,5 В)

3.316. Електромагнітний насос для перекачування розплавленого металу являє собою ділянку труби прямокутного перерізу, яка вміщена в перпендикулярне до однієї пари поверхонь магнітне поле B. До іншої прикладають напругу, створюючи в розплавленому металі однорідний струм I перпендикулярний як до цих поверхонь, так і до магнітного поля. Знайти надлишковий тиск p на метал у насосі, якщо B = 0,2 Тл, I = 200 А, і ширина труби в напрямку магнітного поля a = 4,0 см.

$$\left(p = \frac{IB}{a} = 1{,}0\,\text{кПа} \right)$$

Індуктивність. Самоіндукція

3.317. Соленоїд з індуктивністю 0,5 Гн має 500 витків. Обчислити повний магнітний потік у соленоїді та потік через його поперечний переріз при силі струму 10 А.

(5 Вб; 10 мВб)

3.318. Індуктивність довгого соленоїда достатньо точно визначається формулою $L = \mu_0 n^2 V$, де n – кількість витків на одиницю довжини, $V = lS$ – об'єм соленоїда. Виходячи з цього і вважаючи магнітне поле соленоїда однорідним, знайти залежність індукції B від сили струму I в соленоїді.

($B = \mu_0 nI$)

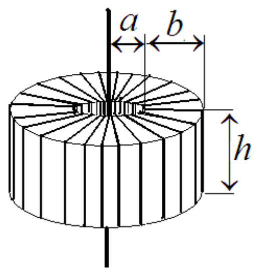


Рис. 5.5

3.319. Визначити індуктивність соленоїда з довжиною l і діаметром d ($d << l$), який містить n витків на одиницю довжини.

$$\left(L = \frac{\pi\mu_0 n^2 l d^2}{4} = \mu_0 n^2 V \right)$$

3.320. Соленоїд довжини 1 м, намотаний в один шар на немагнітний каркас, має індуктивність 1,6 мГн. Площа поперечного перерізу соленоїда 20 см^2. Визначити число витків на один сантиметр довжини соленоїда.

(8 см$^{-1}$)

3.321. Соленоїд із кількістю витків 1000 має індуктивність 78,5·мГн. Знайти діаметр витка, якщо при силі струму в соленоїді 50 мА індукція магнітного поля дорівнює 50 мТл.

(1,0 см)

3.322. На сердечник у формі тора із внутрішнім радіусом a і прямокутним перерізом зі сторонами b і h (рис. 5.5), щільно намотано котушку з N витків дроту. Визначити індуктивність котушки, якщо проникність сердечника μ.

$$\left(L = \frac{\mu_0 \mu N^2 h}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \right)$$

3.323. По обмотці тороїда з кількістю витків N тече струм I. Тороїд має прямокутний переріз висоти h, із відношенням зовнішнього радіуса до внутрішнього $(R_2/R_1) = \eta$. Тороїд заповнено парамагнетиком із магнітною проникністю μ. Знайти магнітний потік Ф через переріз тороїда при струмі в тороїді I та його індуктивність L.

$$\left(\Phi = \frac{\mu_0 \mu I N h}{2\pi} \ln \eta; \qquad L = \frac{\mu_0 \mu N^2 h}{2\pi} \ln \eta \right)$$

3.324. Довгий прямий соленоїд із круглим перерізом радіуса R і кількістю витків на одиницю довжини n заповнений неоднорідним магнетиком, проникність якого залежить тільки від відстані до осі соленоїда r за законом $\mu = 1 + (r / R)$. Знайти магнітний потік через поперечний переріз соленоїда при силі струму I.

$$\left(\Phi = \frac{5\pi\mu_0 n I R^2}{3} \right)$$

3.325. Обчислити взаємну індуктивність нескінченного прямого провідника та прямокутної рамки зі сторонами a і b, розташованої в одній площині з провідником на відстані h, як показано на рис. 5.6.

$$\left(L_{12} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{h+a}{h} \right)$$

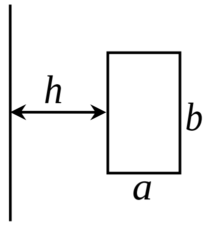


Рис. 5.6

3.326. Визначити взаємну індуктивність тороїда із задачі 5.39 та прямого нескінченного провідника, розташованого по осі тороїда.

$$\left(L_{12} = \frac{\mu_0 \mu N h}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \right)$$

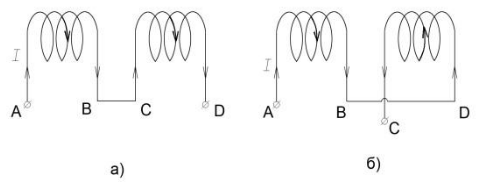


Рис.5.7

3.327. Дві котушки із власними індуктивностями 3 мГн і 5 мГн з'єднані, як показано на рис. 5.7а та підключені до джерела в точках A, D. При цьому індуктивність системи дорівнює 11 мГн. Якою стане індуктивність системи, якщо котушки при незмінному розташуванні з'єднати, як показано на рис. 5.7б, і підключити до джерела в точках A, C?

(5 мГн)

3.328. У соленоїді, намотаному в один шар мідним дротом із діаметром d = 0,2 мм на циліндр із немагнітного матеріалу діаметра D = 5 см, проходить струм $I = 1$ А. Визначити, яка кількість електрики q пройде по соленоїду, якщо його закоротити. Товщиною ізоляції знехтувати.

$$\left(q = \frac{\pi \mu_0 d D}{16\rho} I = 154 \text{ мкКл} \right)$$

3.329. На картонний тор квадратного перерізу із стороною a = 5 см і середнім радіусом r = 7,5 см намотана обмотка з N = 100 витків. По обмотці тече струм I = 3А. Яка кількість електрики q пройде по надітому на тор мідному кіль
цю з опором R = 69 мОм при вимиканні струму в обмотці?

$$\left(q = \frac{\mu_0 I a N^2}{2\pi R} \ln\frac{2r+a}{2r-a} = 3\cdot 10^{-3}\,\text{Кл} \right)$$

Енергія магнітного поля

3.330. На кожен сантиметр стержня довжини l =50 см із немагнітного матеріалу намотано в один шар n = 20 витків дроту. Обчислити енергію W магнітного поля всередині такого соленоїда, якщо сила струму в обмотці I = 0,5 А. Площа перерізу стержня S = 2 см^2. $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$(W = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 S l \; = 62{,}8 \text{ мкДж})$$

3.331. Енергія магнітного поля соленоїда, що дорівнює 90 мДж, змінюється в 9 разів при зміні струму в соленоїді на 6 А. Знайти початковий струм та індуктивність соленоїда.

(3 А *або* 9 А; 20 мГн)

3.332. На скільки η (%) змінюється магнітна енергія котушки при зміні сили струму в ній удвічі?

(на 75%, *або* на 200%)

3.333. Соленоїд містить N = 1000 витків дроту. Сила струму в його обмотці I = 1 А, а магнітний потік крізь переріз соленоїда Φ = 0,1 мВб. Визначити енергію W магнітного поля в соленоїді.

$$(W = \frac{1}{2} N I \Phi = 50\,\text{мДж})$$

3.334. На сердечник у формі тора намотано в один шар 200 витків дроту. Знайти енергію магнітного поля в тороїді при силі струму в обмотці 2,5 А, якщо магнітний потік у сердечнику складає 0,5 мВб.

(125 мДж)

3.335. Соленоїд довжиною l = 0,5 м і площею поперечного перерізу $S = 2\,\text{см}^2$ має індуктивність $L = 2\,\text{мГн}$. Знайти силу струму I, при якій об'ємна густина енергії магнітного поля в соленоїді $w\ = 1\,\text{мДж/м}^3$?

$$\left(I = \sqrt{\frac{2wlS}{L}} = 10\,\text{мА} \right)$$

3.336. По обмотці соленоїда опором 0,1 Ом та індуктивністю 20 мГн проходить струм. Яку частку η (%) від початкової складає енергія магнітного поля соленоїда через час t_1 = 0,05 с та t_2 = 0,5 с після того, як його від'єднали від джерела та замкнули кінці.

($\eta_1 \approx 61$ %; $\eta_2 \approx 0{,}67$ %)

3.337. Два соленоїди намотали на немагнітний каркас один поверх одного. Кількість витків соленоїдів $N_1 = 1200$ і $N_2 = 750$, площа поперечного перерізу $S = 20\,\text{см}^2$, довжина $l = 1\,\text{м}$. По обмотках соленоїдів проходять струми $I_1 = 5\,\text{А}$ і $I_2 = 8\,\text{А}$, відповідно. Обчислити енергію W магнітного поля системи, коли напрямки струму у витках: а) однакові і б) протилежні.

(а) ≈ 18 мкДж; б) 0)

3.338. По довгому циліндричному немагнітному провіднику тече струм I = 100А. Знайти енергію магнітного поля всередині ділянки провідника довжиною l = 1 м.

$$\left(W = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{Дж} \right)$$

3.339. По обмотці тороїда із задачі 5.39 тече струм I. Визначити:

– залежність $w(r)$ об'ємної густини енергії магнітного поля в тороїді від відстані r до його осі;
– повну енергію W магнітного поля всередині тороїда;
– магнітну енергію обмотки тороїда W' через індуктивність та струм, використавши відповідь задачі 5.39.

$$\left(w(r) = \frac{\mu_0 \mu N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}; \quad W = W' = \frac{\mu_0 \mu N^2 I^2 h}{4\pi} \ln\frac{a+b}{a}. \right)$$

Вихрове електричне поле. Струм зміщення

3.340. Індукція магнітного поля всередині довгого соленоїда радіуса R = 10 см зростає з часом за законом $B = \alpha t$, $\alpha = 10^{-3}$ Тл/с. Знайти напруженість вихрового електричного поля E у залежності від відстані r до осі соленоїда. Обчислити напруженість $E(R)$ на поверхні соленоїда та показати вид графіка $E(r)$.

$$\left(E(r) = \frac{\alpha r}{2}\ \textit{у соленоїді та}\ E(r) = \frac{\alpha R^2}{2r}\ \textit{назовні};\ E(R) = 50\ \text{мкВ/м} \right)$$

3.341. Індукція магнітного поля довгого соленоїда радіуса R = 8 см змінюється з часом за законом $B = B_0(1 - t^2/\tau^2)$, де B_0 = 25 мТл, τ = 0,4 с. Знайти напруженість вихрового електричного поля на поверхні соленоїда $E(R)$ у момент часу $t = \tau$.

($E = B_0 R/\tau = 5$ мВ/м)

3.342. По соленоїду довжиною l = 2 см із кількістю витків N = 200 тече змінний струм $I = I_0 \sin(2\pi\nu t)$, де ν = 50 Гц, I_0 = 10 А. 1. Визначити залежність амплітуди напруженості вихрового електричного поля E_0 в соленоїді від відстані r до його осі. 2. Амплітуду U_0 напруги, що створюється цим полем у намотаній в один шар котушці з кількістю витків N_0=100 і радіусом витка R_0 = 1 см, яка співвісно розміщена всередині соленоїда? Соленоїд уважати довгим. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(E_0(r) = \frac{\mu_0 \pi \nu N I_0}{l} r; \quad U_0 = 2\pi N_0 R_0 E_0 = 12{,}4\,\text{В} \right)$$

3.343. Напруженість однорідного електричного поля всередині плоского повітряного конденсатора з обкладками у формі дисків лінійно зростає з часом за законом $E = \alpha t$, де $\alpha = 9 \cdot 10^{10}\ \frac{\text{В/м}}{\text{с}}$. Знайти індукцію магнітного поля всередині конденсатора на відстані r = 5 см від його осі. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(B = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \alpha}{2} r = \frac{\alpha}{2c^2} r, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}; \quad B = 25\,\text{нТл} \right)$$

3.344. Плоский конденсатор із обкладками у формі дисків, відстань між якими d, заповнений однорідним слабко провідним середовищем із питомою провідністю σ та діелектричною проникністю ε і підключений до джерела постійної напруги U. У момент t = 0 джерело відключають. Визначити:

– густину струму j_0 та напруженість магнітного поля $H(r)$ усередині конденсатора як функцію відстані від осі до відключення джерела напруги;

– густину струму $j(t)$ у залежності від часу та напруженість магнітного поля H усередині конденсатора після відключення джерела напруги.

$$\left(j_0 = \frac{U\sigma}{d}, \quad H(r) = \frac{j_0}{2} r; \qquad j = j_0 e^{-\frac{t}{\tau}},\ \text{де}\ \tau = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma},\ H = 0 \right)$$

3.345. Плоский конденсатор з обкладками у формі дисків і відстанню між ними d, який заповнений однорідним слабко провідним середовищем із питомою провідністю σ і діелектричною проникністю ε, підключений до джерела змінної напруги $U = U_m \cos\omega t$ Визначити напруженість магнітного поля $H(r)$ у конденсаторі в залежності від відстані r до його осі.

$$\left(H = H_m \cos(\omega t + \alpha),\ \text{де}\ H_m = \frac{rU_m}{2d} \sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon\varepsilon_0\omega)^2},\ і\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\omega}{\sigma} \right)$$

3.6. Рух зарядів у електричному та магнітному полях

- Сила Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}\vec{B}\right].$$

- Рівняння руху релятивістської частинки з масою спокою m і зарядом q

у поздовжньому електричному полі $\vec{E}$ незмінного напрямку:

$$\frac{m\vec{a}}{\left(1-\left(v^2/c^2\right)\right)^{3/2}} = q\vec{E}$$

у поперечному магнітному полі $\vec{B}$:

$$\frac{m\vec{a}}{\sqrt{1-\left(v^2/c^2\right)}} = q\left[\vec{v}\vec{B}\right]$$

Рух в електричному полі

3.346. Кулька з масою 50 г і зарядом 100 мкКл висить на нитці між двома паралельними плоскими металевими пластинами (плоский конденсатор), не торкаючись їх. На який кут від вертикалі відхилена нитка, якщо пластини заряджені до напруги 500 В і відстань між ними 10 см? $g = 10$ м/с^2.

(45°)

3.347. Кулька масою 0,1 мг із зарядом 10 нКл починає падати в однорідному горизонтальному електричному полі з напруженістю 100 В/м. Якою буде траєкторія руху кульки та яку швидкість вона матиме через 1 с після початку руху?

(*Прямою в напрямку* 45° *до горизонту;* 14 м/с)

3.348. При опромінюванні золотої фольги α-частинками (ядрами атомів гелію) з енергією 10 МеВ у дослідах Резерфорда[1] спостерігалися поодинокі відбивання частинок від атомів фольги у зворотному напрямку. Заряд α-частинки $q_\alpha = 2e$, заряд ядра атома золота $q_я = 79e$. Оцінити за цими даними порядок величини радіуса атомного ядра. $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $\left(1/4\pi\varepsilon_0\right) = 9\cdot10^{9}$ м/Ф.

$\left(\sim 10^{-14}\text{ м}\right)$

3.349. Підвішену на нитці та відхилену від вертикалі на кут 45° кульку із масою 10 г і зарядом 1 мКл відпустили й у момент проходження найнижчого положення увімкнули горизонтальне гальмівне електричне поле з напруженістю 100 В/м. На який кут відхилиться нитка після цього?

(15°)

[1] У цих дослідах було відкрито існування атомного ядра.

3.350. Підвішену на нитці й уміщену в однорідне напрямлене донизу електричне поле кульку із масою 10 г і зарядом 1 мКл утримують у відхиленому на кут 60° від вертикалі положенні. Потім кульку відпускають і в момент проходження найнижчої точки вимикають поле. Відтак кулька відхиляється на кут 90°. Знайти напруженість електричного поля.

(100 В/м)

3.351. Знайти питомий заряд (відношення заряду до маси) кульки, що обертається з частотою 0,8 об/хв по колу радіусом 3 см, навколо точкового заряду 5 нКл.

(≈ 4,2 нКл/кг)

3.352. Куля з масою 1 кг і зарядом 60 мКл, що підвішена у вертикальному електричному полі на нерозтяжному невагомому шнурі довжиною 2 м, рухається по колу в горизонтальній площині. Знайти період обертання кулі, якщо напруженість поля 100 В/м і кут відхилення шнура від вертикалі 30°.

(≈ 2 с або ≈ 4 с)

3.353. Електрон влітає із швидкістю $5\cdot10^6$ м/с в однорідне електричне поле в напрямку поля. На яку максимальну відстань заглибиться електрон у поле, якщо його напруженість 400 В/м? Питомий заряд електрона $(e/m)=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

(≈ 18 см)

3.354. Релятивістський електрон влітає із швидкістю $2{,}4\cdot10^8$ м/с в однорідне електричне поле в його напрямку. На яку максимальну відстань заглибиться електрон у поле з напруженістю 400 В/см? Якою була би відповідь, якби електрон рухався в полі за законами класичної механіки? Маса електрона $9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, заряд $-1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

(8,5 м; 4,1 м)

3.355. Частинка з питомим зарядом Q починає рухатися в додатному напрямі осі OX під дією електричного поля, напруженість якого на траєкторії руху $E = E_0 - kx$, де x – координата частинки, E_0 і k – задані сталі. Знайти шлях S, який пройде частинка від початку координат до зупинки, а також її прискорення a_0 в момент зупинки та максимальну швидкість v_m на цій ділянці траєкторії.

(Питомим зарядом називають відношення електричного заряду частинки до її маси: $Q = q/m$).

$$\left(S=\frac{2E_0}{k};\quad a_0=-QE_0;\quad v_m=E_0\sqrt{\frac{Q}{k}} \right)$$

3.356. Електрон, який пройшов прискорюючу напругу U_0, влітає у простір між двома паралельними плоскими зарядженими до напруги U пластинами (плоский конденсатор) біля краю однієї пластини, а вилітає біля краю іншої. Під яким кутом α влітає електрон в конденсатор, якщо він вилітає паралельно до пластин? Уважати, що електричне поле існує тільки між пластинами і є скрізь однорідним.

$$\left(\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{U}{U_0}}, \quad U < U_0\right)$$

3.357. Електрон, що пройшов прискорюючу напругу U_0 = 1000 В, влітає у заряджений плоский конденсатор із квадратними пластинами паралельно до них. Відстань між пластинами d =1 см і напруга них U = 10 В. Знайти площу пластин S та ємність конденсатора C, якщо точка вльоту електрона розташована біля краю однієї пластини, а вильоту – біля краю іншої.

$$\left(S = 4d^2\frac{U_0}{U} = 400\ \text{см}^2, \quad C \approx 9\ \text{пФ}\right)$$

3.358. Електрон, який має швидкість v_0 = $3{\cdot}10^6$ м/с, влітає посередині в простір між пластинами плоского конденсатора під кутом α = 30° у напрямку однієї пластини, як показано на рис. 6.1, а вилітає біля краю іншої пластини. З якою швидкістю та під яким кутом до пластин електрон вилетить із конденсатора, якщо напруга на ньому U =100 В?

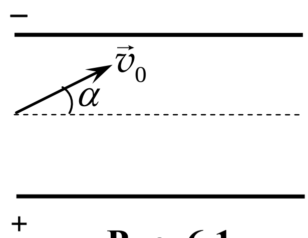


Рис. 6.1

($5{,}16{\cdot}10^6$ м/с, 60°)

3.359. Плоский конденсатор має довжину пластин l = 5 см і відстань між ними d = 1 см. У конденсатор уздовж пластин під кутом α = 15° до них влітає електрон з енергією W = 1,5 кеВ. При якій напрузі на конденсаторі електрон вилетить із нього паралельно до пластин? $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл.

$$\left(U = \frac{Wd\sin 2\alpha}{el} = 150\,\text{В}\right)$$

3.360. На плоский конденсатор із відстанню між пластинами l = 5,0 см подають напругу, що змінюється з часом за законом $U = \alpha t$, де α = 100 В/с. У момент часу t = 0 від однієї з пластин починає рухатись електрон. З якою швидкістю v він досягне іншої пластини? $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

$$\left(v = \sqrt[3]{\frac{9ael}{2m}} = 1{,}6\cdot 10^4\ \text{м/с}\right)$$

3.361. Протон, прискорений різницею потенціалів U, в момент t = 0 влітає в електричне поле плоского конденсатора паралельно до пластин, довжина яких у напрямку руху дорівнює l. Напруженість поля змінюється в часі, як $E = \alpha t$, де α – стала. Вважаючи протон нерелятивістським, знайти кут між напрямками вльоту та вильоту протона з конденсатора. Крайовими ефектами знехтувати.

$$\left(\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\alpha l^2}{\sqrt{32(e/m)U^3}} \right)$$

3.362. Заряджена частинка з питомим зарядом $(q/m) = 6{,}0 \cdot 10^6$ Кл/кг розташована у вакуумі в центрі рівномірно зарядженого кільця радіуса r = 10 см із зарядом Q = 40 мкКл. До якої максимальної швидкості розженеться частинка після незначного поштовху?

(6,6·10^6 м/с)

3.363. При опроміненні металів ультрафіолетовим світлом вони втрачають електрони (фотоефект). Яку кількість N електронів утратить під дією світла у вакуумі металева кулька радіусом R = 5 мм, якщо електрони вилітають з неї із швидкістю v = 2·10^6 м/с? Маса і заряд електрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

$$\left(N = \frac{2\pi\varepsilon_0 m v^2 R}{e^2} \approx 4 \cdot 10^7 \right)$$

3.364. Елементарна частинка із масою m і зарядом q починає рух в однорідному нестаціонарному електричному полі. Розглядаючи її як релятивістську, визначити залежність $E(t)$ напруженості поля від часу, при якій частинка буде рухатися за законом $x = at^2/2$, де $a = const$.

$$\left(E(t) = \frac{ma}{q\left(1 - (at/c)^2\right)^{3/2}} \right)$$

3.365. Електрон починає рухатися в однорідному електричному полі з напруженістю $E = 3 \cdot 10^6$ В/м. Маса електрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Визначити:

1) залежність швидкості електрона від часу $v(t)$;

2) знайти наближені вирази $v(t)$ а) на початковому етапі $(at << c)$ та б) при субсвітлових $(at >> c)$ швидкостях руху електрона і показати приблизний вигляд графіка залежності $v(t)$;

3) величину v через 1 нс після початку руху та величину $v_{кл}$ розраховану за законами класичної механіки.

$$\left(\begin{array}{l} 1)\ v=\dfrac{at}{\sqrt{1+(at/c)^2}}=\dfrac{c}{\sqrt{1+(c/at)^2}},\ \ де\ a=\dfrac{eE}{m_0}; \\ 2)\ а)\ v=at,\quad б)\ v=c\left(1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{at}\right)^2\right); \\ 3)\ v=2,6\cdot10^8\,\text{м/с},\ v_{кл}=5,3\cdot10^8\,\text{м/с} \end{array}\right)$$

3.366. Релятивістський електрон із швидкістю $2{,}4\cdot10^8$ м/с влітає в напрямку однорідного електричного поля з напруженістю 400 В/см. Яку відстань S пройде електрон до зупинки? Яку величину $S_{кл}$ мала би ця відстань, коли б електрон рухався за законами класичної механіки?

$$\left(S=8{,}5\,\text{м};\quad S_{кл}=4{,}1\,\text{м}\right)$$

3.367. Релятивістський електрон із швидкістю $2{,}4\cdot10^8$ м/с влітає в напрямку однорідного електричного поля з напруженістю 400 В/см. Через який час електрон вилетить із поля?

$$\left(\tau=11{,}4\,\text{мкс}\right)$$

Рух у магнітному полі

3.368. Електрон з масою m і зарядом e рухається в однорідному магнітному полі з індукцією 1,0 мТл по колу радіуса 5 см. Визначити швидкість v і кінетичну енергію електрона. Питомий заряд електрона $(e/m)=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

$$\left(v=(e/m)BR=8{,}8\cdot10^6\ \text{м/с};\quad K=3{,}5\cdot10^{-17}\ \text{Дж}=220\ \text{еВ}\right)$$

3.369. Електрон, прискорений електричним полем, рухається по колу радіуса 1 см у магнітному полі з індукцією 1 мТл. Знайти прискорюючу різницю потенціалів. $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $m_e=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

(8,8 В)

3.370. Перпендикулярно до напрямку магнітного поля з індукцією 10 мТл влітає електрон з кінетичною енергією 30 кеВ. Визначити форму та радіус кривизни траєкторії електрона. $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $m_e=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, $1\,\text{еВ}=1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж.

(*дуга кола радіуса* 5,8 см)

3.371. Електрон, який пройшов прискорюючу напругу U = 5 кВ, влітає в перпендикулярне до напрямку його руху протяжне однорідне магнітне поле з плоскою передньою межею й вилітає з поля в зворотньому напрямку на відстані d=30 см від точки вльоту. Знайти індукцію поля B.

$$\left(B=\frac{2}{d}\sqrt{\frac{2mU}{e}}=1{,}6\,\text{мТл}\right)$$

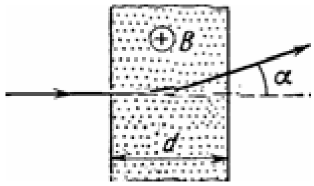


Рис. 6.2

3.372. Електрон, прискорений різницею потенціалів U = 1,0 кВ, рухається в однорідному магнітному полі з індукцією B = 29 мТл під кутом α = 30° до напрямку поля. Знайти радіус кривизни та крок гвинтової лінії – траєкторії електрона. $m_e=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

$$\left(R=\frac{\sin\alpha}{B}\sqrt{2mU/e}\approx1{,}8\text{ мм};\quad h=\frac{2\pi\cos\alpha}{B}\sqrt{2mU/e}=2\text{ см}\right)$$

3.373. Електрон влітає із швидкістю $v=8{,}85\cdot10^{6}$ м/с в однорідне магнітне поле із плоскою межею під кутом α = 60° до напрямку поля. На якій відстані d від точки вльоту електрон вилетить з поля, якщо його індукція дорівнює B = 1,0 мТл? $m_e=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

$$\left(d=\frac{m_e v}{eB}\sqrt{4\sin^2\alpha+\pi^2\cos^2\alpha}=18\,\text{см}\right)$$

3.374. Електрон, який пройшов прискорюючу різницю потенціалів 4,5 кВ, потрапляє в однорідне магнітне поле і рухається в ньому по гвинтовій лінії з радіусом 1 см і кроком 8 см. Знайти індукцію магнітного поля. $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $m_e=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

$$(14\text{ мТл})$$

3.375. У певній області простору створено взаємно перпендикулярні однорідне електричне поле з напруженістю 1 МВ/м та однорідне магнітне поле з індукцією 10 мТл. В цю область влітає перпендикулярно до напрямку обох полів і рухається далі прямолінійно пучок мюонів. Знайти швидкість мюонів у пучку. Чи можна за вказаних умов визначити величину та знак заряду мюона? А як було б можна?

(10^8 м/с)

3.376. Нерелятивістські протони рухаються прямолінійно в області, де створені однорідні взаємно перпендикулярні електричне поле E = 4,0 кВ/м і магнітне поле B = 50 мТл. Напрям руху є перпендикулярним до напрямків обох полів. Знайти радіус кривизни траєкторії, по якій рухатимуться протони після вимикання електричного поля.

$$(R=1{,}67\text{ см})$$

3.377. Протон, прискорений різницею потенціалів U = 500 кВ, пролітає крізь поперечне однорідне магнітне поле з індукцією B = 0,51 Тл. Товщина області з полем d = 10 см, рис. 6.2. Під яким кутом α протон вилетить із поля? $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

$$\left(\sin\alpha = dB\sqrt{\frac{e}{2m_pU}}; \quad \alpha = 30^\circ \right)$$

3.378. Релятивістський електрон, прискорений різницею потенціалів U = 511 кВ, пролітає крізь смугу поперечного магнітного поля (рис. 6.2) з індукцією B = 20 мТл і заданою товщиною смуги d. Під яким кутом α до початкового напрямку руху електрон вилетить із поля? $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Розглянути випадки 1) d = 7,4 см і 2) d = 15 см.

$$\left(\sin\alpha = \frac{dBc}{U\sqrt{1+\left(2m_ec^2/eU\right)}}; \quad \alpha_1 = 30^\circ, \quad \alpha_2 = 180^\circ \right)$$

3.379. Релятивістський електрон, прискорений різницею потенціалів U = 511 кВ, влітає в смугу поперечного однорідного магнітного поля (рис. 6.2) з індукцією B = 0,05 Тл. При якій найменшій ширині d смуги поля електрон не зможе пройти крізь неї? $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

$$\left(d = \frac{U}{cB}\sqrt{1+\left(2m_ec^2/eU\right)} = 59 \text{ мм} \right)$$

3.380. Знайти питомий заряд (q/m) релятивістської частинки, яка при швидкості $v = 0{,}8c$ в поперечному однорідному магнітному полі з індукцією 25 мТл описує коло радіуса 9,1 см.

($1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг)

3.381. Визначити період обертання T електрона в поперечному магнітному полі з індукцією B = 0,02 Тл, якщо його кінетична енергія $K = \eta E_0$, де $E_0 = mc^2$ енергія спокою і $\eta = 3$. Питомий заряд електрона (q/m) = $1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

$$\left(T = \frac{2\pi}{(e/m)B}(1+\eta) \approx 7 \text{ нс} \right)$$

3.382. Пучок швидких заряджених елементарних частинок рухається в поперечному магнітному полі по коловій орбіті, на якій за класичними (нерелятивістськими) розрахунками вони мали би мати кінетичну енергію $K_{кл}$ = $4E_0$, де E_0 –
енергія спокою частинки. Якою насправді є кінетична енергія частинок K?

$$\left(K = \left(\sqrt{1+2(K_{кл}/E_0)} - 1\right)E_0 \quad \Rightarrow \quad K = 2E_0 \right)$$

3.7. Електричні коливання. Змінний струм

- Власна частота LC-контура:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

- Частота вільних загасаючих коливань у послідовному контурі:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \qquad \beta = \frac{R}{2L}.$$

- Логарифмічний декремент загасання та добротність контуру:

$$\lambda = \beta T, \quad Q = \frac{\pi}{\lambda}.$$

- Амплітуда та резонансна частота вимушених коливань напруги на ємності послідовного контуру:

$$U_{0C} = \frac{U_{\text{ã}}\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

- Амплітуда та резонансна частота вимушених коливань струму в послідовному контурі:

$$I_0 = \frac{U_{\text{ã}}\omega}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \qquad \omega_{рез} = \omega_0.$$

- Зсув фаз між вимушеними коливаннями струму та напруги генератора в послідовному контурі:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

- Реактивні опори та повний опір (імпеданс) Z послідовного кола змінного струму:

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad X = X_L - X_C, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

- Закон Ома для змінного струму:

$$I_m = \frac{U_m}{Z}.$$

- Діючі (ефективні) значення струму та напруги для синусоїдального струму:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

- Потужність, яка виділяється в колі синусоїдального змінного струму:

$$P = UI\cos\varphi.$$

- Зсув фаз між струмом та напругою в колі синусоїдального змінного струму:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}.$$

Вільні коливання в контурі

3.383. Коливання струму в контурі, що складається з конденсатора C = 0,4 мкФ і котушки індуктивності L = 1,0 мГн, здійснюються за законом $I = I_0 \cos\omega t$, де I_0 = 50 мА. Скласти числове рівняння коливань напруги на конденсаторі контуру.

$\left(U(t) = 2{,}5\sin(5\cdot 10^4 t).\right)$

3.384. Коливальний контур складається з котушки та конденсатора ємністю 0,025 мкФ. Напруга на пластинах конденсатора змінюється за законом $U = U_0\cos(10^4\pi\cdot t)$ В. Визначити індуктивність котушки, період коливань та довжину хвилі, на якій резонує контур. Чому дорівнює амплітуда напруги на конденсаторі, якщо амплітуда струму становить 40 мА?

(40 мГн; 0,2·мс; $6\cdot 10^4$ м; ≈ 51 В.)

3.385. У коливальному контурі з конденсатором ємності 0,2 мкФ та котушкою індуктивності 1,0 мГн сила струму змінюється за законом $I(t) = 0{,}02\sin\omega t$. Визначити миттєві значення сили струму та напруги на конденсаторі через третину періоду після початкового моменту.

(0,017А; 0,7 В.)

3.386. У коливальному контурі з конденсатором ємності C_1 власна частота складала 30 кГц, а після заміни цього конденсатора на інший з ємністю C_2 вона стала рівною 40 кГц. Знайти лінійну частоту власних коливань у контурі з двома цими конденсаторами, якщо вони з'єднані: а) паралельно і б) послідовно.

(а) 24 кГц;   б) 50 кГц.)

3.387. Конденсатор ємністю 50 пФ приєднали до джерела струму з ЕРС 3 В, а потім перемкнули на котушку з індуктивністю 5,1 мкГн. Знайти лінійну частоту вільних коливань у контурі та максимальну силу струму в котушці.

(10^7 Гц;   9,4 мА)

3.388. У контурі з котушкою індуктивності 5 мкГн і конденсатором ємності 1,33 мкФ амплітуда напруги на конденсаторі дорівнює 1,2 В. Знайти амплітуду магнітного потоку через поперечний переріз котушки, якщо вона має 28 витків.

(111 нВб.)

3.389. Два конденсатори однакової ємності, що з'єднані між собою один раз послідовно, а інший – паралельно, заряджають від одного джерела напруги та перемикають на котушку індуктивності. Знайти максимальну силу струму в котушці у другому випадку, якщо в першому вона була 10 мА.

(20 мА)

3.390. У контурі з котушкою індуктивності 0,4 мГн і конденсатором ємності 1 мкФ амплітуда напруги на конденсаторі дорівнює 1,0 В. Знайти струм у контурі на момент, коли напруга на конденсаторі складає 60% амплітудного значення.

(40 мА)

3.391. В ідеальному коливальному контурі амплітуда заряду на конденсаторі дорівнює 0,5 мкКл. Визначити власну циклічну частоту контуру, якщо в момент, коли заряд конденсатора складав 80% від максимального, струм у контурі дорівнював 0,6 мА.

($2\cdot10^3$ рад/с).

3.392. Як і в скільки разів зміниться частота коливань у контурі з повітряним конденсатором, якщо між його обкладками розмістити діелектричну пластинку з проникністю $\varepsilon = 4$ і товщиною вдвічі меншою за відстань між обкладками?

(*зменшиться у* 1,3 рази.)

3.393. Коливальний контур, який складається з котушки індуктивності та повітряного конденсатора, має власну частоту 41,405 кГц. Після того, як контур умістили під вакуумний ковпак і відкачали повітря, власна частота стала рівною 41,418 кГц. Визначити за результатами цих вимірів діелектричну проникність повітря.

(1,00063)

3.394. При зміні ємності контура на $\Delta C = 50$ пФ власна частота змінилася від $\nu_1 = 100$ кГц до $\nu_2 = 120$ кГц. Знайти індуктивність контура.

$$\left(L = \frac{\nu_2^2 - \nu_1^2}{4\pi^2 \nu_1^2 \nu_2^2 \Delta C} = 15{,}8 \text{ мГн} \right)$$

3.395. У коливальному контурі радіопередавача максимальний заряд на конденсаторі дорівнює 10 мкКл, а максимальна сила струму – 10 А. Визначити довжину хвилі, яку генерує передавач.

(1885 м)

3.396. Визначити період вільних коливань у контурі, який складається з двох послідовно з'єднаних конденсаторів ємністю по 10 мкФ і двох послідовно з'єднаних котушок з індуктивністю 0,2 мГн і 0,4 мГн.

(0,34 мс.)

3.397. Заряджений конденсатор ємністю C приєднано через розімкнений ключ до двох паралельно сполучених котушок з індуктивностями L_1 і L_2. Визначити початковий заряд на конденсаторі, якщо після замикання ключа амплітуда струму в котушці L_1 дорівнює I_1.

$$\left(q = I_1\sqrt{CL_1\left(L_1 + L_2\right)/L_2}.\right)$$

3.398. У коливальному контурі, що складається з конденсатора ємності C і котушки індуктивності L, відбуваються вільні незгасаючі коливання з амплітудою напруги на конденсаторі U_m. Знайти зв'язок між струмом I в контурі та напругою U на конденсаторі в довільний момент часу. Відповідь знайти як за допомогою закону Ома, так і через енергетичні співвідношення в контурі.

$$\left(U^2 + \frac{LI^2}{C} = U_m^2\right)$$

3.399. Коливальний контур складається з конденсатора ємності C, котушки індуктивності L із не істотним опором і ключа. При розімкненому ключі конденсатор зарядили до напруги U_m і потім, у момент $t = 0$, замкнули ключ. Знайти:

– струм в контурі як функцію часу $I(t)$;

– ЕРС самоіндукції $\mathcal{E}_c$ в котушці в моменти, коли електрична енергія конденсатора дорівнює магнітній енергії котушки.

$$\left(I = I_m\cos(\omega_0 t + (\pi/2)),\quad де \quad I_m = U_m\sqrt{\frac{C}{L}},\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};\ \mathcal{E}_c = \frac{U_m}{\sqrt{2}}\right)$$

3.400. Визначити на скільки відсотків η змінюється амплітуда коливань за один період у контурі, що складається з котушки індуктивністю L = 40 мГн і опором R = 4 Ом та конденсатора ємністю C = 0,25 мкФ.

($\eta \approx 3$ %.)

3.401. У коливальному контурі з індуктивністю L, опором R і ємністю C здійснюються вільні коливання. Знайти, через який час амплітуда сили струму зменшиться в η разів та скільки коливань відбудеться за цей час.

$$\left(t = \frac{\ln\eta}{\beta} = \frac{2L\ln\eta}{R};\ N = \frac{t}{T} = \frac{\ln\eta}{2\pi}\sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1}.\right)$$

3.402. Визначити добротність Q послідовного контура з параметрами L, R, C у випадку а) сильного та б) слабкого загасання.

$$\left(\text{а) } Q = \sqrt{\frac{L}{R^2C} - \frac{1}{4}};\quad \text{б) } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.\right)$$

3.403. У скільки разів η частота вільних коливань ω у контурі з добротністю Q = 1,0 відрізняється від власної частоти контура ω_0?

$$\left(\eta = \sqrt{1+\left(1/4Q^2\right)} \approx 1{,}1.\right)$$

3.404. Частота вільних коливань у контурі $\nu = 10$ МГц, добротність Q = 5000. Знайти час t, за який амплітуда коливань зменшиться в η = 10 разів, і кількість коливань N у контурі за цей час.

$$\left(t = \frac{Q}{\pi\nu}\ln\eta \approx 0{,}37 \text{ мс};\ \ N \approx 3700.\right)$$

3.405. Батарея, яка складається з двох однакових конденсаторів ємністю по 2 мкФ, розряджається через котушку з індуктивністю 1 мГн і опором 50 Ом. Чи виникають при цьому коливання, якщо конденсатори з'єднані а) паралельно, б) послідовно?

(а) *ні*; б) *так*.)

3.406. Активний опір контура дорівнює R. Знайти критичний опір цього контура R_k, якщо частота вільних коливань у ньому відрізняється від власної частоти на ε = 0,5 %.

$$\left(R_k \approx \frac{R}{\sqrt{2\varepsilon}} = 10R\right)$$

3.407. Знайти добротність контура Q, критичний опір якого $R_k = \eta R$, де R – власний активний опір контура, і $\eta >> 1$.

($Q = \eta/2$)

Вимушені коливання в контурі. Змінний струм

3.408. Активний опір коливального контура R = 0,33 Ом. Яку потужність споживає контур, якщо в ньому відбуваються незгасаючі коливання з амплітудою сили струму I_m = 30 мА.

(0,15 мВт.)

3.409. Коливальний контур складається з конденсатора ємності 100 пФ і котушки з індуктивністю 80 мкГн та активним опором 0,5 Ом. Визначити потужність, яку споживає контур, якщо в ньому підтримуються власні незгасаючі коливання з амплітудою напруги на конденсаторі U_m = 4 В.

(5 мкВт)

3.410. В коливальний контур послідовно включена змінна ЕРС. Обчислити добротність контура, якщо при резонансі напруга на конденсаторі в η разів більша, ніж на джерелі.

$$\left(Q = \sqrt{\eta^2 - \frac{1}{4}}\right)$$

3.411. Показати, що при резонансі в контура з малим загасанням амплітуда напруги на конденсаторі дорівнює $U_m = QU_0$, де Q – добротність контуру і U_0 – амплітуда напруги генератора підключеного до контура.

$(U_{cm} = QU_0)$

3.412. Коливальний контур з малим опором складається з котушки індуктивності L і конденсатора C. Для підтримання в ньому незгасаючих коливань з амплітудою напруги на конденсаторі U_m витрачається потужність P. Знайти добротність контуру.

$$\left(Q = \frac{U_m^2}{2P}\sqrt{\frac{C}{L}} \right)$$

3.413. Коливальний контур з малим загасанням має індуктивність L і ємність C. Для підтримання в ньому незгасаючих коливань з амплітудою струму I_m витрачається потужність P. Знайти добротність контуру.

$$\left(Q = \frac{I_m^2}{2P}\sqrt{\frac{L}{C}} \right)$$

3.414. Яку потужність треба підводити до контура з опором $R = 10$ мОм і добротністю $Q = 1000$, щоб підтримувати в ньому незгасаючі коливання з амплітудою напруги на конденсаторі $U_0 = 100$ мВ?

$$\left(P = \frac{U_0^2}{2RQ^2} = 5 \cdot 10^{-7}\ \text{Вт} = 0{,}5\ \text{мкВт} \right)$$

3.415. Контур, що складається з послідовно сполучених конденсатора ємності C = 22 мкФ і котушки з активним опором R = 20 Ом та індуктивністю L = 0,35 Гн, підключено до мережі змінної напруги з амплітудою U_m = 180 В і частотою ω = 314 рад/с. Знайти:

– амплітуду струму в контурі I_m;
– різницю фаз φ між струмом і зовнішньою напругою;
– амплітуди напруги на конденсаторі U_C і котушці U_L.

$$\left(\begin{array}{l} I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = 4{,}5\ \text{А}; \quad \varphi = \text{arctg}\dfrac{(\omega L - 1/\omega C)}{R} = -\dfrac{\pi}{3}; \\ U_C = \dfrac{I_m}{\omega C} = 0{,}65\,\text{кВ}; \quad U_L = I_m\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 0{,}5\,\text{кВ}. \end{array} \right)$$

3.416. Послідовний RLC - контур підключено до генератора синусоїдальної напруги, частоту якої можна змінювати при незмінній амплітуді. Знайти частоту ω, при якій амплітуда сили струму в контурі буде максимальною.

3.417. Чи може в послідовному RLC - контурі бути більшою за амплітуду генератора напруга на: а) активному опорі; б) індуктивності; в) ємності?

3.418. Довести, що при слабкому загасанні добротність контура визначається, як $Q = \omega/\Delta\omega$, де ω – резонансна частота струму, а $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$ – ширина резонансної кривої амплітуди струму $\mathrm{I_m}(\omega)$; ω_1 і ω_2 – частоти, при яких у контурі виділяється половина максимальної (резонансної) потужності.

3.419. Послідовний контур, який складається з резистора R, котушки індуктивності L і конденсатора C, підключено до генератора синусоїдальної напруги, частоту якої можна змінювати при незмінній амплітуді. Знайти частоту ω, при якій в контурі буде максимальною амплітуда напруги:

а) на конденсаторі;
б) на котушці;
в) на резисторі.

$$\left(\text{а) } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}; \quad \text{б) } \omega = \omega_0^2 \Big/ \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\text{, в) } \omega = \omega_0,\ де\ \omega_0 = 1\big/\sqrt{LC},\ і\ \ \beta = R/2L\right)$$

3.420. Конденсатор 30 мкФ, заповнений ідеальним діелектриком, увімкнено в освітлювальну мережу з діючою напругою 220 В і частотою 50 Гц. Знайти діюче значення сили струму в конденсаторі та споживану ним потужність. Діелектрик ідеальний – то про який струм ідеться?

(2,07 А, 0 Вт)

3.421. Ідеальна котушка з індуктивністю 1,0 Гн увімкнена в мережу з діючою напругою 220 В і частотою 50 Гц. Знайти діючу силу струму в котушці та споживану нею теплову потужність

(0,7 А; 0 Вт)

3.422. Конденсатор 100 мкФ і резистор 30 Ом з’єднані послідовно й увімкнені в освітлювальну мережу. Знайти імпеданс кола Z та зсув фаз φ між струмом у колі та напругою мережі. Випереджає чи відстає за фазою струм від напруги в мережі? Зобразити приблизну векторну діаграму кола і показати на ній фазовий кут φ

(Z = 43,74 Ом, φ = 46,7°, *випереджає*)

3.423. На з'єднані послідовно конденсатор 200 мкФ та резистор 15,2 Ом подано діючу напругу 220 В промислової частоти 50 Гц. Знайти діюче значення струму в колі та споживану ним потужність.

(10 А, 1,52 кВт.)

3.424. Котушка з індуктивністю 100 мГн та активним опором 25 Ом увімкнена в мережу з діючою напругою 220 В і частотою 50 Гц. Визначити діюче значення струму I та потужність P, що їх споживає котушка, а також зсув фаз φ між коливаннями струму в котушці та напруги в мережі. Випереджає чи відстає за фазою струм від напруги в мережі? Зобразити приблизну векторну діаграму кола і показати на ній фазовий кут φ.

(≈5,5 А, 756 Вт, 51,5°, *відстає*.)

3.425. Сполучені послідовно котушка з індуктивністю 100 мГн і резистор R_0 = 20 Ом підключені до генератора з напругою 100 В і частотою 400 рад/с. Знайти активний опір котушки, якщо діюча сила струму в колі дорівнює 2 А.

(10 Ом.)

3.426. Знайти потужність, яку споживає коло з активним опором 50 Ом та імпедансом (повним опором) 110 Ом від мережі з діючою напругою 220 В і частотою 50 Гц. Чому дорівнює зсув фаз між коливаннями струму в колі та напруги в мережі?

(200 Вт, 63°.)

3.427. На послідовне коло, що складається з конденсатора 40 мкФ, котушки індуктивності 1,0 мГн та резистора 25 Ом, подано від генератора змінну напругу із діючим значенням 2,0 В і коловою частотою $5{\cdot}10^3$ $с^{-1}$. Знайти амплітуду струму, споживану колом потужність, і зсув фаз між коливаннями струму та напруги генератора.

(113 мА, 160 мВт, 0°.)

3.428. На з'єднані послідовно резистор R = 0,5 Ом, котушку індуктивності L = 4,0 мГн і конденсатор C = 200 мкФ подано змінну напругу з діючим значенням 11,2 В і частотою 1000 рад/с. Знайти діючу напругу на кожному елементі кола.

(U_R = 5 В, U_L = 40 В, U_C = 50 В)

3.429. З'єднані послідовно котушку з індуктивністю $L = 0{,}70\,\text{Гн}$ і активним опором $r = 20\,\text{Ом}$ та резистор з опором R увімкнули в мережу з діючою напругою 220 В і частотою 50 Гц. Знайти величину R, при якій коло буде споживати від мережі максимальну потужність P та її величину.

$$\left(R = 2\pi\nu L - r = 200\ \text{Ом}, \quad P = \frac{U^2}{4\pi\nu L} = 110\ \text{Вт.} \right)$$

3.430. До генератора з амплітудою синусоїдальної напруги 1,1 В і частотою 10^5 рад/с паралельно приєднали конденсатор C = 1,0 мкФ і резистор R = 4,4 Ом. Знайти імпеданс кола Z та амплітуду струму генератора I_0.

$$\left(Z = \frac{R}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} = 3{,}67 \text{ Ом}; \quad I_0 = 0{,}3 \text{ А} \right)$$

3.431. В освітлювальну мережу з діючою напругою 220 В і частотою 50 Гц паралельно увімкнули котушку з індуктивністю 95,5 мГн і резистор 40 Ом. Побудувати векторну діаграму та знайти імпеданс кола.

(24 Ом)

3.432. До джерела синусоїдальної напруги з частотою ω підключили паралельно конденсатор ємності C і котушку з активним опором R та індуктивністю L. Знайти різницю фаз між струмом джерела та його напругою.

$$\left(\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega C(R^2 + \omega^2 L^2)}{R}. \right)$$

3.433. Для заряджання акумулятора постійним струмом I_0 потрібний час t_0. Скільки часу знадобиться для заряджання цього акумулятора від мережі змінного струму через однопівперіодний випрямляч, якщо діюче значення струму заряджання теж рівне I_0?

$$\left(t = \frac{\pi}{2} t_0 \right)$$

3.434. На однопівперіодний випрямляч подано синусоїдальну напругу з амплітудою U_m = 220 В. Знайти діюче значення струму в резисторі R = 100 Ом, підключеному до цього випрямляча.

$$\left(I = \frac{U_m}{2R} = 1{,}1 \text{ А} \right)$$

3.435. Знайти діюче значення змінного струму, якщо його середнє значення дорівнює $\langle I \rangle$, а миттєве значення визначається законом:

а) який показано на рис. 7.1; б) $I \sim |\sin \omega t|$

$$\left(а)\ I_д = \frac{2\langle I \rangle}{\sqrt{3}}; \quad б)\ I_д = \frac{\pi \langle I \rangle}{\sqrt{8}} \right)$$

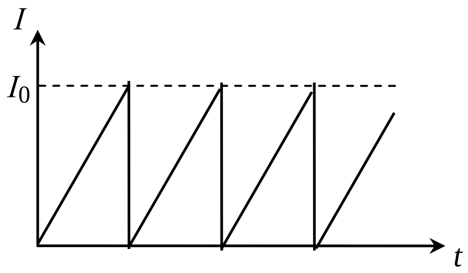


Рис. 7.1

3.436. Який відсоток часу горить газорозрядна лампа при вмиканні в освітлювальну мережу з діючою напругою 220 В, якщо лампа загоряється і гасне при однаковій напрузі 155,6 В?

(66,7%)

Розділ 4. Оптика

4.1. *Електромагнітні хвилі*

- Швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі c та в речовині v:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \qquad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

- Зв'язок між полями в електромагнітній хвилі у безмежному просторі:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}\, E(\vec{r}, t) = \sqrt{\mu_0 \mu}\, H(\vec{r}, t)$$

- Об'ємна густина енергії w електромагнітної хвилі та вектор Пойнтінґа $\vec{S}$:

$$w = \frac{EH}{v}, \qquad \vec{S} = \left[\vec{E}\vec{H}\right].$$

- Інтенсивність електромагнітної хвилі:

$$I = \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle = \frac{1}{2} E_m H_m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_m^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} H_m^2.$$

- Хвильовий вектор:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n},$$

$\vec{n}$ – орт нормалі до хвильової поверхні, спрямований у напрямку поширення хвилі.

4.1 У деякому середовищі електромагнітна хвиля з частотою 1 МГц поширюється зі швидкістю 200 Мм/с. Чому дорівнює довжина хвилі та її колова частота в даному середовищі та у вакуумі?

$\left(200 \text{ м};\ \ 300 \text{ м};\ \ 6{,}28\cdot 10^6 \text{ рад/с} \right)$

4.2 Електромагнітна хвиля поширюється в однорідному ізотропному діелектричному немагнітному середовищі із проникністю $\varepsilon = 3{,}00$. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі E_m=10,0 В/м. Знайти амплітуду напруженості магнітного поля H_m і фазову швидкість хвилі v.

(H_m = 46 мА/м; v = $1{,}7\cdot 10^8$ м/с .)

4.3 Електромагнітна хвиля поширюється у вакуумі в напрямку однієї з координатних осей. Записати можливі вирази хвильового вектора $\vec{k}$ у випадку, якщо хвиля має:

а) частоту ω і електричний вектор $\vec{E} = \pm E\vec{e}_y$, ($\vec{e}_y$ – орт осі Y);

б) довжину хвилі λ і магнітний вектор $\vec{H} = \pm H\vec{e}_z$, ($\vec{e}_z$ – орт осі Z).

$$\left(\text{а) } \vec{k} = \pm\frac{\omega}{c}\vec{e}_x \text{ або } \vec{k} = \pm\frac{\omega}{c}\vec{e}_z; \quad \text{б) } \vec{k} = \pm\frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_x \text{ або } \vec{k} = \pm\frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_y. \right)$$

4.4 В електромагнітній хвилі в однорідному ізотропному середовищі з проникностями ε, μ магнітний вектор задається рівнянням: $\vec{H} = H_0\vec{e}_y\cos(\omega t + kx + \delta)$ (H_0, ω, k, δ – задані). Записати рівняння для електричного вектора хвилі $\vec{E}$ та зобразити орти $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ і вектори $\vec{H}_0, \vec{E}_0, \vec{k}$.

4.5 В електромагнітній хвилі в однорідному ізотропному середовищі з проникностями ε, μ електричний вектор задається рівнянням $\vec{E} = E_0\vec{e}_z\cos(\omega t + ky + \delta)$, де H_0, ω, k, δ – задані. Записати рівняння для магнітного вектора хвилі $\vec{H}$ та зобразити орти $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ і вектори $\vec{H}_0, \vec{E}_0, \vec{k}$.

4.6 Плоска електромагнітна хвиля з електричним вектором $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ поширюється у вакуумі. Визначити магнітний вектор хвилі $\vec{H}(t)$ в точці $\vec{r}$ = 0.

$$\left(\vec{H}(t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[\left(\vec{k}/k\right), \vec{E}_m\right]\cos\omega t \right)$$

4.7 У вакуумі поширюється плоска електромагнітна хвиля з електричним вектором $\vec{E}(x,t) = \vec{e}_y E_m\cos(\omega t - kx)$, де $\vec{e}_y$ – орт осі Y, E_m = 160 мВ/м, $k = 0{,}51$ м$^{-1}$. Знайти магнітний вектор $\vec{H}$ у точці з координатою x = 7,7 м на моменти: а) t = 0 і б) t = 32,51 нс.

$$\left(\text{а) } \vec{H} = -\frac{E_m\vec{e}_z}{120\pi}\cos\frac{\pi}{4} = -0{,}3\vec{e}_z \text{ (мА/м)}; \quad \text{б) } \vec{H} = \frac{E_m\vec{e}_z}{120\pi}\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}21\vec{e}_z \text{ (мА/м)} \right)$$

4.8 Плоска електромагнітна хвиля довжини λ = 10 см поширюється в однорідному ізотропному немагнітному середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$. Амплітудні вектори полів хвилі $\vec{E}_m = 164{,}5\vec{e}_x - 95{,}1\vec{e}_y$ (мВ/м) та $\vec{H}_m = -H_m\vec{e}_z$. Знайти:

– лінійну частоту хвилі ν;
– амплітуду магнітного вектора хвилі H_m;
– амплітуду вектора Пойнтінґа S_m;
– інтенсивність хвилі I;
– швидкість і напрям поширення хвилі.

$$\left(\begin{array}{l} \nu = 1{,}5 \text{ ГГц; } H_m = 1{,}0 \text{ мА/м; } \vec{S} = H_m(E_y\vec{e}_x + E_x\vec{e}_y); \ I = 95 \text{ мкВт/м}^2; \\ \upsilon = 1{,}5\cdot 10^8 \text{ м/с; } \textit{напрям} \perp \textit{до осі } Z \textit{ і під кутом } 60^\circ \textit{ до осі } X. \end{array} \right)$$

4.9 Знайти зміну $\Delta\lambda$ довжини електромагнітної хвилі з частотою $\nu = 3$ МГц при переході з вакууму в немагнітне середовище з проникністю $\varepsilon = 4{,}0$.

$$\left(\Delta\lambda = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 \right) \frac{c}{\nu} = -50 \text{ м} \right)$$

4.10 Плоска електромагнітна хвиля падає нормально на поверхню плоскопаралельного шару діелектрика товщини l, діелектрична проникність якого лінійно спадає від ε_1 на передній поверхні до ε_2 на задній. Знайти час τ проходження хвилі крізь шар.

$$\left(\tau = \frac{2\left(\varepsilon_1^{3/2} - \varepsilon_2^{3/2}\right)}{3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \frac{l}{c} \right)$$

4.11 Потужність випромінювання антени радіостанції дорівнює 100 кВт. Обчислити на відстанях від радіостанції 1 км і 100 км:
а) амплітуду вектора Пойнтінґа та інтенсивність випромінювання;
б) амплітуду напруженості електричного поля хвилі;
в) тиск електромагнітних хвиль при нормальному падінні на ідеально відбиваючу поверхню.

$$\left(\begin{array}{l} \text{а) } 16 \text{ мВт/м}^2, \ 8 \text{ мВт/м}^2; \quad 1{,}6 \text{ мкВт/м}^2, \ 0{,}8 \text{ мкВт/м}^2 \\ \text{б) } 2{,}45 \text{ В/м}, \ 24{,}5 \text{ мВ/м} \\ \text{в) } 5{,}3\cdot 10^{-11} \text{Па}, \ 5{,}3\cdot 10^{-15} \text{Па} \end{array} \right)$$

4.12 У вакуумі вздовж осі X поширюється плоска електромагнітна хвиля. Амплітуда напруженості магнітного поля H_m = 0,05 А/м. Знайти:

– амплітуду напруженості електричного поля E_m;
– середню за часом об’ємну густину енергії хвилі $\langle w \rangle$;
– інтенсивність хвилі I;
– середню за часом об’ємну густину імпульсу хвилі $\langle \kappa \rangle$;

– тиск P, який створює хвиля на повністю поглинаючу поверхню при нормальному падінні

$$\left(\begin{array}{ll} E_m = 18{,}8 \text{ В/м}; & \langle w\rangle = 1{,}57 \text{ нДж/м}^3 \\ I = 0{,}47 \text{ Вт/м}^2; & \langle \kappa\rangle = 5{,}2\cdot 10^{-18} \text{ кг/м}^2\text{с} \\ P = 1{,}57 \text{ нПа} & \end{array}\right)$$

4.13 Визначити середній вектор Пойнтінґа $\left\langle \vec{S}\right\rangle$ плоскої електромагнітної хвилі $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$, яка поширюється у вакуумі.

$$\left(\left\langle \vec{S}\right\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_m^2 c}{2}\frac{\vec{k}}{k}\right)$$

4.14 У вакуумі поширюється плоска електромагнітна хвиля з частотою $\nu = 10$ МГц та інтенсивністю I = 20 мВт/м^2. Знайти амплітуду густини струму зміщення j_m у цій хвилі.

$$\left(j_m = 2\pi\nu\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 I}{c}} = 2{,}2 \text{ мА/м}^2\right)$$

4.15 Плоский конденсатор із круглими пластинами заповнили діелектриком із проникністю ε та заряджали протягом часу τ до напруги U. Відстань між пластинами d, радіус пластин a. Прийнявши, що напруга на конденсаторі змінюється з часом лінійно, визначити:

– модуль та напрямок вектора Пойнтінґа $\vec{S}(t)$ у точках бічної поверхні діелектрика;

– кількість енергії W, яка пройшла крізь бічну поверхню за час τ, і порівняти її з енергією електричного поля W_E, що утворилося при заряджанні конденсатора.

$$\left(S(t) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U^2 a}{2d^2\tau^2}t, \textit{напрям} - \textit{до осі конденсатора}; \quad W = \frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon U^2 a^2}{2d} = W_E\right)$$

4.16 У соленоїді великої довжини l без осердя сила струму за час τ рівномірно збільшується від 0 до I. Кількість витків соленоїда на одиницю довжини дорівнює n, радіус витка – a. Знайти:

– модуль $S(t)$ та напрям вектора Пойнтінґа на бічній поверхні соленоїда як функцію часу ;

– енергію W, яка пройшла крізь бічну поверхню за час τ, і порівняти її з енергією магнітного поля W_m, що утворилося в соленоїді.

$$\left(S(t) = \frac{\mu_0 n^2 I^2 a}{2\tau^2}t, \textit{напрям} - \textit{до осі соленоїда}; \quad W = \frac{\pi\mu_0 I^2 a^2 l}{2} = W_m.\right)$$

4.17 По прямому провіднику круглого перерізу протікає постійний струм величиною I. Визначити напрям перенесення енергії та потік вектора Пойнтінґа Φ_s крізь поверхню ділянки провідника з опором R.

$$(\Phi_s = I^2 R)$$

4.2. *Геометрична оптика*

- Показник заломлення (оптична густина) прозорого діелектрика:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon}$$

- Закон заломлення світла та граничний кут повного відбивання:

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta; \qquad \alpha_{гр} = \arcsin(n_2/n_1), \quad n_1 > n_2.$$

- Оптична сила тонкої сферичної лінзи:

$$\Phi = \left(\frac{n}{n_0} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

радіус кривизни опуклої поверхні $R > 0$, угнутої $R < 0$.

- Формула тонкої лінзи:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

знак відстаней від лінзи до дійсних точок “+”, а до уявних “–”, .

4.18. Довжина світлової хвилі у вакуумі становить λ_0 = 0,6 мкм. Якою є довжина хвилі λ та частота ω цього світла у склі (n = 1,5)?

($\lambda = 4\cdot10^{-7}$ м, $\omega = 3{,}14\cdot10^{15}$ с$^{-1}$)

4.19. Світло проходить крізь шар речовини з показником заломлення 1,2 за час 20 нс. За який час світло пройде шар такої самої товщини в речовині з показником заломлення 1,8? В обох випадках світло падає на речовину нормально.

(30 нс)

4.20. Світловий промінь падає по нормалі на прозору пластину товщини h. За який час τ він пройде крізь пластину, якщо її показник заломлення лінійно зростає у напрямку променя від n_1 на передній поверхні до n_2 на задній?

$$\left(\tau = \frac{n_1 + n_2}{2} \cdot \frac{h}{c}\right)$$

4.21. Промінь світла падає по нормалі на неоднорідну прозору пластину товщини h, оптична густина котрої в напрямку променя змінюється як $n = 2n_0h/(2h - x)$, де x – глибина проникнення променя в пластину, n_0 – задана стала. За який час τ світло пройде крізь пластину?

$$\left(\tau = \frac{2n_0h}{c}\ln 2\right)$$

4.22. Промінь світла падає з повітря під кутом 60° на стос із трьох покладених одна на одну прозорих пластин однакової товщини. Під яким кутом промінь вийде з останньої пластини, якщо показник заломлення першої пластини 1,45, а кожної наступної – на 10% більший, ніж у попередньої? Як залежить відповідь від кількості пластин?

(60°; *не залежить*)

4.23. Чи може промінь світла бути криволінійним? Показати приблизний хід променя, що падає під певним кутом із повітря на передню поверхню товстої прозорої пластини, показник заломлення якої зменшується у напрямку задньої поверхні.

4.24. Світловий промінь проходить крізь плоско-паралельну пластину, показник заломлення котрої на шляху променя поступово змінюється від n_1 = 1,36 до n_2 = 1,92. Під яким кутом ϑ_2 промінь *падає* на поверхню на виході з пластини, якщо на вході він *заломлюється* під кутом ϑ_1 = 45°?

(ϑ_2 = 30°)

4.25. Промінь світла поширюється у воді (n = 1,33). При якому найменшому куті падіння на поверхню води він не вийде назовні?

(48,8°)

4.26. Промінь світла падає на межу поділу двох середовищ під кутом 30°. Показник заломлення першого середовища становить 2,4. Чому дорівнює показник заломлення другого середовища, якщо відбитий та заломлений промені є взаємно перпендикулярними?

(1,38)

4.27. Знайти кут падіння променя на поверхню пластини з показником заломлення 1,732, якщо кут заломлення вдвічі відрізняється від кута падіння

(60° *або* 30°)

4.28. При падінні променя на поверхню прозорої пластинки під кутом 59,1° відбитий та заломлений промені виявилися взаємно перпендикулярними. Чому дорівнюватиме кут між відбитим та заломленим променями при куті падіння 45°?

(110°)

4.29. При падінні світла на прозору пластинку з показником заломлення 1,732 виявилося, що кути падіння та заломлення пов'язані співвідношенням $\text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta = 1$. Знайти кути α і β.

(60°; 30°)

4.30. При падінні променя світла з повітря на прозору пластинку виявилося, що відбитий та заломлений промені є взаємно перпендикулярні, а довжина світлової хвилі при переході в пластинку змінилася на 30%. Знайти кут падіння променя на пластинку.

(55°)

4.31. Промінь, який падає на білий аркуш паперу під кутом α = 45°, утворює на ньому світну цятку. На яку відстань l вона переміститься, якщо на папір покласти скляну пластину товщиною h = 10 см? Показник заломлення скла n = 1,41.

$$\left(l = h\left(\text{tg}\,\alpha - 1\Big/\sqrt{(n/\sin\alpha)^2 - 1}\right) = 4{,}2 \text{ см}\right)$$

4.32. Промінь падає під кутом α = 45° на скляну пластину товщиною h = 10 см із показником заломлення n = 1,41. Знайти зміщення d променя на виході з пластинки.

$$\left(d = h\sin\alpha\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right) = 3{,}0\,\text{см}\right)$$

4.33. Аквалангіст, який стоїть на дні водойми, бачить відбитими від гладкої поверхні води, як у дзеркалі, предмети розташовані на дні на відстані $\geq 8{,}2$ м від нього. Оцінити зріст аквалангіста при глибині водойми 4,5 м. Для води n = 1,33.

(181 см)

4.34. Рибалка, розглядаючи прямо під собою камінець на дні озера, оцінює його глибину в 3 м. Яку глибину має озеро насправді? Показник заломлення води 1,33.

(4 м)

4.35. Людина розглядає з кімнати предмет, який знаходиться за вікном на відстані $l = 1$ м від нього. Якої відносної похибки $\varepsilon(\%)$ припускається людина при окомірній оцінці розташування предмета, якщо товщина шибки $d =$ 3 мм і показник заломлення $n = 1{,}5$? Як буде змінюватися ця похибка при віддаленні предмета від вікна?

$$\left(\varepsilon = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{d}{l} = 0{,}1\%\right)$$

4.36. Між двома складеними прозорими круглими пластинами товщиною по 6,5 мм і діаметром 10 см точно по центру розміщений круглий чорний папірець із радіусом рівним товщині пластини. На поверхні однієї з пластин у центрі знаходиться точкове джерело світла. Знайти радіус тіні, яку відкидає папірець на поверхню іншої пластини, якщо показник заломлення першої $n_1 = 1{,}41$, а другої $n_2 = 2{,}1$. Розглянути випадки, коли джерело знаходиться на: а) першій і б) другій пластині.

(a) 10 мм; б) 10 см)

4.37. Довести, що при невеликих кутах падіння променя на призму з малим заломлюючим кутом ϑ кут його відхилення на виході не залежить від кута падіння і складає $\delta = (n-1)\vartheta$, де n – показник заломлення призми.

4.38. Промінь, який падає на бічну грань трикутної призми під кутом, рівним заломлюючому кутові призми φ, виходить через другу бічну грань теж під кутом φ. Чому дорівнює показник заломлення призми n?

$$\left(n = 2\cos\frac{\varphi}{2} \right)$$

4.39. Промінь, що падає на бічну грань трикутної призми під кутом $\alpha =$ 40°, виходить через другу бічну грань під таким самим кутом. Чому дорівнює заломлюючий кут призми φ, якщо показник заломлення призми n = 1,68?

$$\left(\varphi = 2\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) = 45^\circ \right)$$

4.40. Світло падає на бічну грань скляної (n = 1,5) прямокутної (заломлюючий кут 90°) призми. Довести, що жоден промінь, який після заломлення потрапляє теж на бічну грань, не пройде крізь неї.

4.41. Предмет знаходиться між лінзою та її фокусом. Відстань між зображенням предмета й лінзою дорівнює 30 см, а відношення висоти зображення до висоти предмета дорівнює 0,4. Знайти оптичну силу лінзи.

(–2 дптр)

4.42. Хлопчик читає книжку, тримаючи її на відстані 16 см від очей. Якої оптичної сили окуляри він має носити, якщо відстань найкращого зору для людини з нормальним зором складає 25 см?

(– 2,25 дптр)

4.43. Зображення предмета, який знаходиться між лінзою та її фокусом, є збільшеним у 3 рази. Чому дорівнює відношення відстані f між зображенням та лінзою до фокусної відстані лінзи F?

(2)

4.44. При збільшенні відстані між предметом та угнутою лінзою від d до $2d$ відстань між лінзою та зображенням змінюється від f_1 = 20 см до f_2 = 25 см. Чому дорівнює величина d?

(0,5 м)

4.45. Паралельний пучок променів падає на тонку збірну лінзу з оптичною силою D = 5 дптр під кутом $\alpha =$ 61° до головної оптичної осі. На якій відстані від лінзи треба розмістити екран, аби побачити на ньому сфокусовану світну цятку? На якій відстані від головної осі вона буде розташована?

(20 см; 36 см)

4.3. *Інтерференція*

- Зв’язок між різницею фаз δ і різницею ходу променів Δ:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$$

- Ширина інтерференційної смуги при двопроменевій інтерференції:

$$\Delta x = \frac{\lambda l}{d} = \frac{\lambda}{\varphi},$$

φ – кутова відстань між джерелами.

- Оптична різниця ходу променів при відбиванні від пластини:

$$\Delta = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2}$$

- Радіуси кілець Ньютона за відсутності речовини між лінзою та пластинкою:

темні кільця $\quad r_k = \sqrt{kR\lambda},\ k = 0, 1, 2, \ldots$

світлі кільця $\quad r_k = \sqrt{(2k+1)R\lambda/2},\ k = 0, 1, 2, \ldots$

- Час τ і довжина l когерентності світла

$$\tau \approx \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}, \quad l = c\tau \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}.$$

4.46. На шляху променя, що поширюється в повітрі, розміщують скляну (n = 1,5) пластинку завтовшки 20 мкм. Як і на скільки при цьому змінюється оптична довжина шляху (оптичний хід) променя, якщо він падає на пластинку: а) нормально і б) під кутом 60°?

(10 мкм; 14,4 мкм)

4.47. Різниця ходу двох когерентних монохроматичних хвиль у деякій точці простору дорівнює 1,5λ. Чому дорівнює різниця фаз коливань, що збуджуються хвилями в цій точці.

(3π)

4.48. Два паралельні промені, відстань між якими складає d, падають на скляну призму, як показано на рис. 1. Визначити оптичну різницю ходу Δ цих променів після заломлення у призмі, якщо її заломлюючий кут дорівнює θ.
(0)

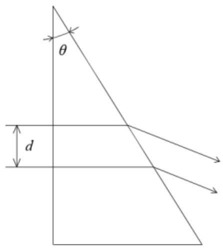


Рис. 1

4.49. Відносна спектральна ширина випромінювання гелій-неонового лазера $(\Delta\omega/\omega) \approx 10^{-10}$, довжина хвилі 632,8 нм. Оцінити час та довжину когерентності цього випромінювання.

(≈ 20·мкс; ≈ 6 км)

4.50. У випромінюванні криптонової лампи, що використовується в еталоні одиниці довжини, помаранчева лінія λ = 605,78 нм має довжину когерентності 0,8 м. Оцінити для цієї лінії час когерентності та спектральну ширину, тобто інтервал довжин хвилі $\Delta\lambda$, що випромінюються.

(≈ 3 нс; $\approx 0{,}5$ пм)

4.51. У досліді з біпризмою Френеля на шляху пучка білого світла один раз установлюється синій світлофільтр (λ_1 = 450 нм), а інший – червоний (λ_2 = 630 нм). Як співвідносяться (Δx_2:Δx_1) ширини інтерференційних смуг, що спостерігаються?

(7:5)

4.52. Знайти ширину інтерференційних смуг, що спостерігаються на екрані при опроміненні двох вузьких щілин (дослід Юнга), якщо відстань між ними 1 мм, відстань до екрана 1,54 м і довжина світлової хвилі 650 нм. Як зміниться ширина смуг, якщо подвоїти: а) відстань між джерелами; б) відстань до екрана?

(1,0 мм; а) *удвічі зменшиться*; б) *удвічі збільшиться*)

4.53. В умовах попередньої задачі одну із щілин накрили тонкою скляною ($n = 1{,}5$) пластинкою, через що інтерференційна картина на екрані змістилася на 10 смуг. Знайти товщину пластинки.

(13 мкм)

4.54. Дві паралельні вузькі щілини опромінюють світлом $\lambda = 582$ нм і спостерігають інтерференцію на віддаленому від щілин екрані (дослід Юнга). Визначити ширину інтерференційної смуги Δx на екрані, якщо з його центра щілини видно під кутом $\varphi = 2'$.

$$\left(\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi} = 1{,}0 \text{ мм} \right)$$

4.55. Інтерференцію від двох когерентних точкових джерел світла із відстанню між ними 0,5 мм спостерігають на екрані, що віддалений від джерел на відстань 2,5 м. Знайти довжину хвилі використаного світла, якщо в центральній зоні шириною 2 см уміщується 8 темних смуг.

(500 нм)

4.56. Визначити довжину світлової хвилі λ в досліді з біпризмою Френеля, якщо відстань від центральної до третьої світлої інтерференційної смуги на екрані $x = 1{,}65$ мм, відстань від джерел до екрана $l = 1$ м і кутова відстань між уявними джерелами $\varphi = 3{,}5'$.

$(\lambda = 560 \text{ нм})$

4.57 У схемі Ллойда (рис. 2) промені, які потрапляють на екран від джерела S прямо, інтерферують із відбитими від дзеркала D. Що (максимум чи мінімум) спостерігається на лінії дотику дзеркала та екрана? Відповідь обґрунтувати аналізом різниці ходу променів.

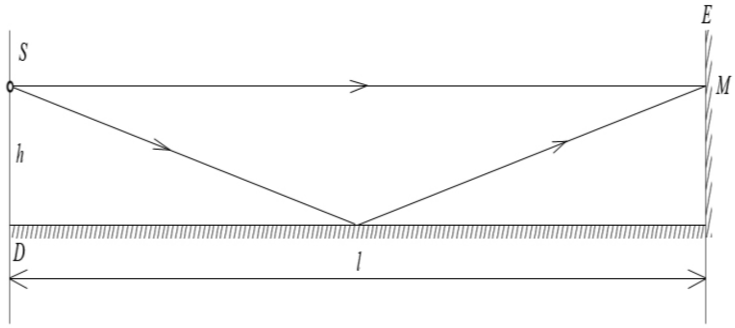


Рис. 2.

4.58 У схемі Ллойда (рис. 2) промені, які потрапляють на екран від джерела S прямо, інтерферують із відбитими від дзеркала D. Відстань від джерела до площини дзеркала $h = 1{,}0$ мм, відстань до екрана $l = 1$ м, довжина світлової хвилі $\lambda = 0{,}5$ мкм. Визначити вид (максимум чи мінімум) та порядок m інтерференційної смуги в точці M екрана: а) за вказаних умов і б) якщо на шляху променя SM поставити скляну $(n = 1{,}5)$ пластинку товщиною d = 3,75 мкм?

(а) *мінімум* m = 8; б) *максимум* m = 1)

4.59 Червоні промені 660 нм, які потрапляють на екран від джерела S прямо (схема Ллойда, рис. 2), інтерферують із відбитими від дзеркала D. При цьому в деякій точці екрана утворюється максимум п'ятого порядку. Знайти товщину скляної (n = 1,5) пластинки, яку треба поставити на шляху променя (якого?), аби в указаній точці утворився максимум десятого порядку?

(2,2 мкм)

4.60 У схемі Ллойда (рис. 2) промені, що безпосередньо потрапляють на екран від джерела S, інтерферують із відбитими від дзеркала D. Відстань від джерела до площини дзеркала $h = 1{,}0$ мм, відстань до екрана $l = 1$ м, довжина світлової хвилі $\lambda = 600$ нм. Визначити ширину інтерференційних смуг Δx на екрані.

$$\left(\Delta x = \frac{\lambda l}{2h} = 0{,}3 \text{ мм} \right)$$

4.61 При якій найменшій товщині $b_{\min}$ мильна плівка (n = 1,33) при опроміненні білим світлом і спостереженні у відбитих променях буде забарвленою в зелений колір (λ = 550 нм)? Світло падає на плівку під кутом α = 60°.

$$\left(b_{\min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} = 0{,}14 \text{ мкм} \right)$$

4.62 Якщо вкриту водяною (n = 1,33) плівкою скляну пластинку опромінити по нормалі білим світлом, то вона виглядає забарвленою в червоний колір (λ_1= 650 нм). Який колір (довжину хвилі λ_2, нм) матиме поверхня пластинки при опроміненні під кутом $\alpha = 45°$?

(551 нм, *зелений*)

4.63 При опроміненні білим світлом мильної плівки, що затягує вертикально розташований каркас, у відбитих променях спостерігаються кольорові інтерференційні смуги рівної товщини. Чому безпосередньо перед тим, як луснути, плівка стає чорною?

4.64 Якщо на поверхні лінзи з показником заломлення n нанести тонкий шар (плівку) прозорої речовини із показником заломлення $n_{пл} = \sqrt{n}$, то світлові промені, що відбиваються від поверхонь плівки, мають майже однакову інтенсивність. Тому при певній товщині плівки монохроматичне світло, що падає на лінзу, практично не відбивається від неї через інтерференцію (просвітлення оптики). Визначити, яку товщину h має мати для цього плівка при заданій довжині хвилі λ і нормальному падінні світла.

$$\left(h = \frac{(2m+1)\lambda}{4\sqrt{n}}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \right)$$

4.65 На поверхню скляної пластинки (n = 1,45) нанесли прозору плівку із показником заломлення $n_{пл}$ = 1,22. При якій найменшій товщині плівки і нормальному падінні променів на пластинку вона не буде відбивати зеленого світла (λ = 550 нм)?

($\approx$ 0,1 мкм)

4.66 Тонкий скляний (n = 1,55) клин із кутом між гранями $\vartheta = 2'$ опромінюється по нормалі монохроматичним світлом. Визначити довжину світлової хвилі λ, якщо у відбитих променях відстань між першою та одинадцятою інтерференційними темними смугами l = 3 мм.

$$\left(\lambda = \frac{1}{5} n l \vartheta = 541 \text{ нм} \right)$$

4.67 На скляний (n = 1,5) клин із кутом $\vartheta = 1'$ нормально падає пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі λ = 0,55 мкм. Визначити ширину Δx інтерференційних смуг, що спостерігаються біля поверхні клина у відбитих променях.

$$\left(\Delta x = \frac{\lambda}{2n\vartheta} = 0{,}63 \text{ мм} \right)$$

4.68 Між двома прозорими плоско-паралельними пластинками поклали волосину, внаслідок чого утворився тонкий повітряний клин. Визначити кут клина, якщо при його опроміненні по нормалі світлом λ = 582 нм у відбитих променях утворюються інтерференційні смуги з шириною Δx = 1,0 мм.

$$\left(1{,}0' \right)$$

4.69 На тонкий клин нормально падає світло із ступенем монохроматичності $(\lambda/\Delta\lambda) = 100$. При цьому кількість інтерференційних смуг на поверхні клина, що припадає на одиницю довжини, n = 40 см$^{-1}$. На якій відстані l від вершини клина зникають інтерференційні смуги?

(2,5 см)

4.70 При опроміненні по нормалі тонкого скляного (n = 1,5) клина пучком червоного світла із довжиною хвилі 630 нм у відбитих променях утворюються інтерференційні смуги шириною 0,5 мм. Знайти кут клина.

$(1{,}44')$

4.71 Тонкий скляний (n = 1,5) клин з кутом $\vartheta = 1{,}5'$ і довжиною l = 5 см опромінюють по нормалі через червоний світлофільтр λ = 650 нм і спостерігають інтерференційні смуги у відбитих променях. Знайти ширину полоси пропускання фільтра $\Delta\lambda$, якщо смуги займають половину поверхні клина.

(13 нм)

4.72 Плоско-опукла лінза, що лежить на плоскій скляній пластині опуклою стороною донизу, освітлюється нормально світлом із довжиною хвилі λ = 600 нм. При цьому відстань між 4-м і 25-м темними кільцями Ньютона у відбитому світлі Δr = 3 мм. Визначити радіус кривизни R лінзи.

(2 м)

4.73 При спостереженні кілець Ньютона у відбитих променях відстань між другим і третім темним кільцем Δr_1 = 1 мм. Чому дорівнює відстань Δr_2 між 20-м і 21-м темними кільцями?

(0,35 мм)

4.74 При спостереженні кілець Ньютона в лінзі з радіусом кривизни R = 5 м у відбитих променях радіус одного з кілець виявився рівним r = 5,0 мм, а його ширина Δr = 0,25 мм. Визначити довжину хвилі λ опромінюючого світла.

(500 нм)

4.75 При візуальному спостереженні кілець Ньютона у відбитих монохроматичних променях із довжиною хвилі $\lambda = 600$ нм видно всього $m = 9$ темних кілець. Знайти радіус кривизни лінзи R, якщо роздільна спроможність ока людини $\Delta r = 0{,}2$ мм.

(R = 2,27 м)

4.76 Спектр натрію містить дві близькі лінії ("жовтий дублет") з довжиною хвилі 589,0 нм і λ_2 = 589,6 нм. Визначити порядок (номер) m темного кільця Ньютона для однієї з них, яке співпадає з m+1 кільцем для іншої. Спостереження проводять у відбитих променях.

(982)

4.77 Коли в установці для спостереження кілець Ньютона простір між лінзою та пластинкою заповнили прозорою рідиною, радіуси темних кілець у відбитому світлі зменшились у k = 1,2 рази. Визначити показник заломлення n рідини.

($n = k^2$ = 1,44)

4.4. Дифракція

- Зовнішній радіус зони Френеля

$$r_k = \sqrt{k\lambda \frac{ab}{a+b}}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots \text{ – номер зони}$$

- Умова мінімумів при дифракції Фраунгофера на щілині

$$b\sin\varphi = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Умова головних максимумів при дифракції Фраунгофера на ґратці

$$d\sin\varphi = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Умова мінімумів при дифракції Фраунгофера на ґратці

$$d\sin\varphi = \pm\frac{k'}{N}\lambda, \quad k' = 1, 2, 3, \ldots, \text{ крім } k' = 0, N, 2N, \ldots$$

- Формула Бреґґа

$$2d\sin\vartheta = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Кутова дисперсія ґратки

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{k}{d\cos\varphi}$$

- Роздільна здатність ґратки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN,$$

N – кількість щілин ґратки

- Роздільна здатність об’єктива

$$R = \frac{d}{1{,}22\lambda}, \ R = \frac{1}{\delta\varphi}$$

d – діаметр об’єктива.

Зони Френеля

4.78. На відстані 1 м від точкового джерела світла з довжиною хвилі 540 нм розміщено непрозорий екран із круглим отвором діаметром 5 мм. Визначити зовнішній радіус третьої зони Френеля в отворі для точки спостереження, що знаходиться на осі системи на відстані 1 м від отвору по інший бік від джерела.

(0,9 мм)

4.79. На круглий отвір у непрозорому екрані нормально падає плоска монохроматична хвиля λ = 600 нм. Обчислити сумарну площу перших трьох зон Френеля в отворі для точки спостереження розташованої напроти центра отвору на відстані b = 5 м від нього.

(28, 3 мм^2)

4.80. Паралельний пучок світлових променів із довжиною хвилі 625 нм нормально падає на круглий отвір діаметра 5 мм у непрозорій площині. Яка кількість зон Френеля буде повністю відкритою при спостереженні дифракції пучка з точки, розташованої на відстані 2,5 м від отвору в напрямку падаючих променів? Максимум, чи мінімум інтенсивності спостерігатиметься в цій точці?

(4; *мінімум*)

4.81. Плоска монохроматична хвиля інтенсивністю I_0 падає нормально на непрозору площину з круглим отвором. Визначити інтенсивність I світла за площиною в точці, для котрої в отворі вміщується:

– одна зона Френеля;
– зовнішня або внутрішня половина першої зони Френеля;
– половина першої зони Френеля, якщо зона перекрита вздовж діаметра.

($4I_0$; $2I_0$; I_0)

4.82. На екрані спостерігається дифракційна картина від круглого отвору в непрозорій пластині, що освітлюється монохроматичним точковим джерелом. В отворі вміщується одна зона Френеля. Як зміниться освітленість у центрі картини, якщо пластину прибрати?

(*зменшиться в 4 рази*)

4.83. На круглий отвір у непрозорій площині радіуса r = 1 мм падає нормально паралельний пучок світла із довжиною хвилі λ = 500 нм. На якій максимальній відстані $b_{\max}$ від отвору в центрі дифракційної картини на екрані спостерігатиметься темна пляма?

$$\left(b_{\max} = \frac{r^2}{2\lambda} = 1{,}0 \text{ м} \right)$$

4.84. Точкове джерело світла з довжиною хвилі λ = 500 нм розміщено на відстані a = 2 м перед діафрагмою з отвором радіуса r = 1 мм. Що спостерігається в центрі дифракційної картини на екрані, розміщеному від діафрагми на відстані: а) $b = \infty$; б) b = 50 см; в) b = 22 см?

(а, б – *світла цятка*; в) – *темна цятка*)

4.85. Між точковим джерелом світла та екраном переміщується діафрагма з круглим отвором радіуса r = 1 мм так, що відстань між нею та джерелом змінюється від a_1 = 1 м до a_2 = 1,75 м. Скільки разів спостерігатиметься затемнення в центрі дифракційної картини на екрані, якщо довжина світлової хвилі λ = 500 нм і відстань між джерелом та екраном l = 2 м?

(3)

Дифракція Фраунгофера

4.86. Паралельний пучок променів із довжиною хвилі λ падає нормально на щілину шириною b = 4λ. Під яким кутом дифракції φ спостерігається мінімум другого порядку? Яким буде цей кут при спостереженні у воді (n = 1,33)?

(30°; 22,08°)

4.87. Якого найбільшого порядку дифракційний максимум можна спостерігати при нормальному опроміненні щілини шириною $1{,}5\,\text{мкм}$ світлом із довжиною хвилі $500\,\text{нм}$?

(*Другого*)

4.88. Знайти ширину щілини, якщо при опроміненні її по нормалі світлом із довжиною хвилі 700 нм другий дифракційний максимум спостерігається під кутом 1°.

(80 мкм)

4.89. Довжину хвилі λ випромінювання лазера визначають за допомогою дифракції на щілині ширини b = 20 мкм. Дифракційні смуги спостерігають на екрані, розміщеному у фокальній площині лінзи з фокусною відстанню F = 10 см. Визначити λ, якщо відстань між першими темними дифракційними смугами складає Δx = 6,3 мм.

$$\left(\lambda \approx \frac{b\Delta x}{2F} = 630\text{ нм}\right)$$

4.90. На щілину ширини b = 40 мкм падає нормально плоска світлова хвиля λ = 0,5 мкм. Визначити ширину Δx центрального дифракційного максимуму на екрані, що розміщений за щілиною на відстані L = 0,8 м від неї.

$$\left(\Delta x = \frac{2\lambda L}{b} = 2\text{ см}\right)$$

4.91. Показати графік кутового розподілу $I(\sin\varphi)$ інтенсивності світла на екрані при нормальному опроміненні дифракційної ґратки з кількістю штрихів N = 4 і відношенням періоду до ширини щілини $(d/b) = 3$ паралельним пучком променів із довжиною хвилі λ. Яка кількість m головних максимумів міститься у межах центрального максимуму дифракції від однієї щілини ґратки? Які головні максимуми m' не можуть спостерігатися?

(m = 5; m' = 3, 6, 9)

4.92. Показати вигляд кутового розподілу $I(\sin\varphi)$ інтенсивності на екрані при фраунгоферовій дифракції на ґратці з трьох щілин і з відношенням періоду ґратки до ширини щілини: а) 2; б) 3.

4.93. Світло падає нормально на дифракційну ґратку з великою кількістю штрихів. Як зміниться відстань між дифракційними максимумами на екрані, якщо: а) в проміжках між штрихами нанести додаткові штрихи; б) перекрити щілини через одну; в) перекрити непрозорою перешкодою половину робочої частини ґратки?

4.94. У дифракційній ґратці, що опромінюється по нормалі монохроматичним світлом, головний максимум першого порядку спостерігається під кутом дифракції 2,5°. Знайти кут дифракції для головного максимуму третього порядку.

(7,5°)

4.95. У дифракційній ґратці, що по нормалі опромінюється монохроматичним світлом, головний максимум першого порядку спостерігається під кутом 23°. Знайти кут дифракції для максимуму третього порядку.

(*Не спостерігається*)

4.96. У дифракційній ґратці, що по нормалі опромінюється монохроматичним світлом, головний максимум третього порядку спостерігається під кутом дифракції 25°. Під яким кутом утворюється останній головний дифракційний максимум? Скільки всього головних дифракційних максимумів утворюється на екрані?

(80°26′; 15)

4.97. Визначити довжину хвилі λ світла, що падає нормально на дифракційну ґратку з періодом $d = 20$ мкм, якщо кутова відстань між головними фраунгоферовими максимумами порядків $m_1 = 1$ і $m_2 = 3$ складає $\delta =$ 3°.

$\left(\lambda = d\delta/(m_2 - m_1) \approx 524 \text{ нм}\right)$

4.98. Визначити довжину хвилі λ світла, що падає нормально на дифракційну ґратку з періодом $d = 10$ мкм, якщо кутова відстань між головними фраунгоферовими максимумами першого та другого порядку складає $\delta =$ 30°.

$$\left(\lambda = \frac{d\sin\delta}{\sqrt{5 - 4\cos\delta}} \approx 403 \text{ нм}\right)$$

4.99. На дифракційну ґратку з кількістю штрихів f = 500 1/мм падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі λ = 540 нм. Скільки головних максимумів дифракції можна одержати на екрані за допомогою цієї ґратки?

(7)

4.100. При нормальному опроміненні ґратки світлом із довжиною хвилі 535 нм один із головних максимумів дифракції спостерігається під кутом 35°, а всього на екрані спостерігається 11 головних максимумів. Знайти період ґратки.

(2,8 мкм)

4.101. При якій максимальній довжині світлової хвилі λ можна спостерігати дифракцію на ґратці з періодом d, якщо промені падають: а) нормально; б) похило?

(а) $\lambda = d$; б) $\lambda = 2d$)

4.102. Відомо, що спектральні параметри ґратки покращуються із збільшенням порядку дифракційного спектра m (див. ф-ли 4.6, 4.7). Але використанню спектрів високих порядків заважає їхнє перекривання. Знайти:

– величину m, при якій спектри порядку m і $m+1$ вже перекриваються при опроміненні ґратки світлом в інтервалі довжин хвилі $\left(\lambda \div (\lambda + \Delta\lambda)\right)$;

– не перекритий інтервал довжин хвилі $\Delta\lambda_0$ у спектрі порядку m;

– обчислити m і $\Delta\lambda_0$ для білого світла $\left(\lambda = (400 \div 750)\text{нм}\right)$.

$$\left(m > \frac{\lambda}{\Delta\lambda}; \quad \Delta\lambda_0 = \frac{\lambda}{m}; \quad m = 2,\ \Delta\lambda_0 = 200 \text{ нм.} \right)$$

4.103. На дифракційну ґратку з періодом 4 мкм по нормалі падає випромінювання від водневої газорозрядної трубки. За ґраткою встановлено лінзу з екраном у її фокальній площині. Знайти відстань на екрані між лініями, що відповідають довжинам хвилі випромінювання трубки λ_1 = 656 нм і λ_2 = 486 нм у спектрі третього порядку, якщо фокусна відстань лінзи f = 0,4 м.

(7 см)

4.104. На дифракційну ґратку падає по нормалі випромінювання від криптонової газорозрядної трубки. При цьому п'ятий дифракційний максимум для зеленої (λ_1 = 566 нм) лінії спостерігається під кутом φ_1 = 34°30′. Визначити кутову відстань $\Delta\varphi$ між цією лінією та фіолетовою лінією (λ_2 = 404 нм) у спектрі третього порядку.

(5°54′)

4.105. Визначити кутову дисперсію D_φ дифракційної ґратки для довжини хвилі λ = 589 нм у спектрі першого порядку, якщо для неї кут дифракції складає φ = 10°.

($3{\cdot}10^{-4}$ рад/нм)

4.106. Період дифракційної ґратки d = 2,5 мкм. Визначити кутову дисперсію D_φ (рад/нм) ґратки для довжини хвилі λ = 461 нм у спектрі першого порядку. Обчислити також лінійну дисперсію D_l (мм/нм), якщо спектр проектується на екран лінзою з фокусною відстанню F = 1,6 м.

$$\left(D_\varphi = \frac{1}{d\sqrt{1-(\lambda/d)^2}} = 4{,}07\cdot 10^{-4}\ \text{рад/нм};\ D_l = 0{,}65\ \text{мм/нм} \right)$$

4.107. На дифракційну ґратку довжини l = 2 см по нормалі падає червоне світло $\lambda = 0{,}65$ мкм. Дифракцію спостерігають на екрані, що розміщений у фокальній площині лінзи із фокусною відстанню F = 50 см. При цьому кут дифракції для максимуму третього порядку складає φ = 30°. Обчислити період ґратки d та її роздільну здатність R і лінійну дисперсію D_l (мм/нм) у спектрі третього порядку для вказаного світла.

$$\left(d = \frac{3\lambda}{\sin\varphi} = 3{,}9\ \text{мкм};\quad R = \frac{3l}{d} = 1{,}54\cdot 10^4;\quad D_l = \frac{F\,\mathrm{tg}\varphi}{\lambda} = 0{,}44\ \text{мм/нм} \right)$$

4.108. Період дифракційної ґратки d = 0,01 мм. Яку найменшу кількість штрихів N та робочу довжину l вона має мати, аби розділяти компоненти жовтого дублета натрію λ_1 = 589,0 нм і λ_2 = 589,6 нм у спектрі: а) першого та б) другого порядку?

(а) N = 982; l = 9,8 мм; б) N = 491; l = 4,9 мм)

4.109. Якою має бути мінімальна довжина l робочої частини дифракційної ґратки, аби вона в спектрі другого порядку розділяла компоненти дублета λ_1 = 313,156 нм і λ_2 = 313,184 нм у спектрі атомів ртуті? Період ґратки d = 2 мкм.

(1,12 см)

4.110. Довжина робочої частини дифракційної ґратки l = 2 см, період ґратки d = 2,5 мкм. Визначити її роздільну здатність R у спектрі третього порядку. Чому дорівнює найменша різниця довжин хвиль $\delta\lambda$ двох ліній, що розділяються у зеленій ділянці спектра (λ = 550 нм)?

(24000; 0,02 нм)

4.111. Чому мають дорівнювати мінімальна кількість штрихів N і робоча довжина l дифракційної ґратки з періодом 10 мкм, аби вона в спектрі другого порядку розділяла лінії λ_1 = 500,0 нм і λ_2 = 500,1 нм?

(N = 2500; l = 2,5 см)

4.112. Визначити роздільну здатність R об'єктива діаметром D = 5 см та мінімальну відстань Δh між двома точками, віддаленими на l = 3 км від об'єктива, які він може розділити. Довжину світлової хвилі прийняти λ = 0,55 мкм

($R = 7{,}45\cdot 10^4$; Δh = 4 см)

4.113. При відбиванні рентгенівських променів від природньої грані монокристала NaCl дифракційний максимум другого порядку спостерігається під кутом ковзання 11°30′. Обчислити довжину хвилі рентгенівського випромінювання, якщо період кристалічної ґратки в NaCl складає 280 пм.

(55,8 пм)

4.114. Чи будуть спостерігатися дифракційні максимуми при відбиванні від кристала рентгенівських променів із довжинами хвилі в інтервалі 95÷130 пм, якщо відстань між атомними площинами кристала дорівнює d = 275 пм?

(*так*)

4.115. На поверхню монокристала гіпсу, відстань між атомними площинами котрого складає 0,303 нм, падає рентгенівське випромінювання. При куті *падіння* 75°31′ у відбитих променях спостерігається дифракційний максимум першого порядку. Обчислити довжину хвилі λ рентгенівського випромінювання.

(151,7 пм)

4.5. *Поляризація та дисперсія*

- Ступінь поляризації світла

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

- Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \varphi$$

- Формули Френеля

$$\frac{E_{\perp\text{В}}}{E_{\perp\text{П}}} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}, \frac{E_{\perp\text{З}}}{E_{\perp\text{П}}} = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)};$$

$$\frac{E_{\|\text{В}}}{E_{\|\text{П}}} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}, \quad \frac{E_{\|\text{З}}}{E_{\|\text{П}}} = \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} = \frac{4\cos\alpha\sin\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$$

- Кут Брюстера

$$\vartheta_Б = \operatorname{arctg}\frac{n_2}{n_1}$$

- Фазова v та групова u швидкості

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}.$$

- Формули Релея

$$u = v + k\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}k}, \quad u = v - \lambda\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}.$$

4.116. Природнє світло після проходження крізь два ідеальні поляризатори втрачає 75% інтенсивності. Визначити кут між площинами пропускання поляризаторів.

($45°$)

4.117. Природнє світло інтенсивності I_0 падає на систему з N = 6 ідеальних поляризаторів, площина пропускання кожного з яких повернута на кут φ = 30° відносно площини пропускання попереднього. Знайти інтенсивність світла I на виході системи.

$$\left(I = \frac{I_0}{2}(\cos\varphi)^{2(N-1)} \approx 0{,}12 I_0\right)$$

4.118. Крізь один поляризатор проходить η_1 = 30% інтенсивності падаючого природного світла, а крізь два таких поляризатори – η_2 = 13,5 %. Знайти кут між площинами пропускання поляризаторів.

$$\left(\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{\eta_2/2}}{\eta_1} = 30^\circ\right)\right)$$

4.119. Природне світло падає на систему з n = 5 недосконалих поляризаторів, площина пропускання кожного з яких складає кут φ = 60° із площиною пропускання попереднього. У скільки разів η інтенсивність світла на виході системи буде менша, ніж на вході, якщо в кожному поляризаторі через відбивання та поглинання втрачається k = 10% інтенсивності падаючого на нього світла?

$$\left(\eta = 2(1-k)^{-n}(\cos\varphi)^{-2(n-1)} = 867\right)$$

4.120. Пучок природного світла падає зі скла (n_1 = 1,5) на воду (n_2 = 1,33) під кутом Брюстера. Знайти кут між напрямками падаючого та заломленого променів.

($6°53'$)

4.121. Промінь світла, що є лінійно поляризований в площині падіння, падає з води (n_1 = 1,33) на поверхню скляної (n_2 = 1,5) пластини. При якому куті падіння промінь не буде відбиватися від пластини?

($48°26'$)

4.122. При якій висоті φ Сонця над горизонтом відбиті від поверхні води (n = 1,33) промені будуть максимально поляризовані?

$$\left(\varphi = \operatorname{arcctg} n \approx 37^\circ\right)$$

4.123. Граничний кут повного відбивання на межі скло-повітря дорівнює 45°. Знайти кут Брюстера для скла.

($54°44'$)

4.124. При падінні природного світла на товсту скляну пластинку під кутом Брюстера від верхньої поверхні відбивається ρ = 7,5% падаючого світлового потоку. Нехтуючи повторними відбиваннями, визначити ступінь поляризації світла P на виході з пластинки.

$$P = \frac{2\rho(1-\rho)}{1-2\rho(1-\rho)} = 0{,}16$$

4.125. Ступінь поляризації світлового пучка P = 0,25. Знайти відношення $\eta = I_{пр}/I$ інтенсивностей природньої $I_{пр}$ та поляризованої I компонент у пучку.

$$\left(\eta = \frac{1}{P} - 1 = 3\right)$$

4.126. Знайти ступінь поляризації P частково поляризованого світла, в якому інтенсивність поляризованої компоненти складає $\eta = 75\%$ від інтенсивності природньої.

$$\left(P = \eta/(1+\eta) = 43\%\right)$$

4.127. Промінь світла зі ступенем поляризації 75% падає на досконалий поляризатор. Знайти відношення максимальної та мінімальної інтенсивності світла на виході з поляризатора при його обертанні навколо променя.

(7)

4.128. Пучок світла зі ступенем поляризації 60% падає на ідеальний поляризатор, площина котрого є розташована під кутом 60° до площини поляризації падаючого світла. Який відсоток інтенсивності падаючого світла пройде крізь поляризатор?

(35%)

4.129. Пучок світла із ступенем поляризації P = 0,4 проходить крізь ідеальний поляризатор. Чому дорівнює кут φ між площиною поляризатора та площиною коливань світлового вектора у поляризованій компоненті пучка, якщо інтенсивність світла на виході з поляризатора складає η = 40% інтенсивності на вході?

$$\left(\cos\varphi = \sqrt{\frac{P+2\eta-1}{2P}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 60°\right)$$

4.130. Пучок світла зі ступенем поляризації P = 40% падає на досконалий поляризатор так, що кут між площиною поляризатора та площиною поляризації світла дорівнює $\varphi_1 = 60°$. При цьому інтенсивність світла на виході з поляризатора складає I_1. Знайти інтенсивність світла на виході I_2 при величині вказаного кута $\varphi_2 = 30°$.

$$\left(I_2 = I_1 \frac{1 + P\cos 2\varphi_2}{1 + P\cos 2\varphi_1} = 1{,}5 I_1 \right)$$

4.131. Природнє світло падає під кутом Брюстера на скляну (n = 1,5) пластину. Визначити за допомогою формул Френеля коефіцієнт відбивання пластини R та ступінь поляризації P заломленого світла.

$$\left(R = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2 = 7{,}4\%; \quad P = \frac{(n^2+1)^2 - 4n^2}{(n^2+1)^2 + 4n^2} = 8\% \right)$$

4.132. На поверхню скла під кутом 45° падає природне світло. За допомогою формул Френеля визначити ступінь поляризації відбитого та заломленого світла.

(83%; 4,4%)

4.133. На одноосний кристал нормально падає плоскополяризоване світло. Кут між площиною поляризації та головним перерізом кристала дорівнює α. Знайти відношення $\eta = (I_з/I_н)$ інтенсивностей звичайного та незвичайного променів.

($\eta = \mathrm{tg}^2\alpha$)

4.134. Природне світло падає перпендикулярно на пластинку кварцу товщиною d = 0,02 мм, яку вирізано паралельно до оптичної осі. Обчислити оптичну різницю ходу звичайного та незвичайного променів на виході з пластинки, якщо показники заломлення звичайного та незвичайного променів складають $n_з$ = 1,544 і $n_н$ = 1,553.

(0,18 мкм)

4.135. Лінійно поляризоване світло (λ = 585 нм) падає нормально на пластинку, вирізану з одноосного кристала паралельно до оптичної осі. При якій найменшій товщині пластинки різниця фаз між звичайним і незвичайним променями на виході дорівнюватиме ($\pi/2$), якщо показники заломлення звичайного та незвичайного променів дорівнюють $n_з$ = 1,658 і $n_н$ = 1,486?

$$\left(d = \lambda / 4(n_з - n_н) = 0{,}85 \text{ мкм} \right)$$

4.136. Визначити зв’язок між груповою швидкістю світла u та показником заломлення n для середовища з відомим законом дисперсії – залежністю показника заломлення від довжини світлової хвилі $n = n(\lambda)$.

$$\left(u = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right) \right)$$

4.137. Визначити зв’язок між груповою швидкістю світла u та показником заломлення n для середовища з відомою залежністю показника заломлення від частоти світла $n = n(\omega)$.

$$\left(u = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\omega}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} \right)$$

4.138. Довести, що дотична до графіка залежності фазової швидкості від довжини хвилі $v = v(\lambda)$ відсікає на осі ординат величину групової швидкості u при заданій довжин хвилі λ.

4.139. Знайти зв'язок між груповою u та фазовою v швидкостями хвилі, якщо закон дисперсії має вигляд: а) $v = \alpha/\sqrt{\lambda}$; б) $\omega = \alpha k^2$; в) $v = \alpha/\omega^2$; г) $\omega = \alpha k$, де λ, k, ω – довжина хвилі, хвильове число та частота, відповідно, і α = const.

$$\left(\text{а) } u = \frac{3}{2}v; \quad \text{б) } u = 2v; \quad \text{в) } u = \frac{v}{3} \quad \text{г) } v = u \right)$$

5. Квантова фізика

5.1 Корпускулярні властивості випромінювання

- Енергія та імпульс фотона

$$\varepsilon = \hbar\omega = h\nu, \quad p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

- Формула Планка

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

- Закон Стефана-Больцмана

$$R = \sigma T^4, \quad \sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт/(м}^2\text{К}^4\text{)}.$$

- Закон зміщення Віна

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{м} \cdot \text{К}.$$

- Рівняння Ейнштейна для фотоефекту

$$\hbar\omega = A + \frac{mv^2}{2}.$$

- Короткохвильова межа суцільного рентгенівського спектра

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{eU}.$$

- Комптонівський зсув

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\vartheta) = 2\lambda_c \sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

- Комптонівська довжина хвилі частинки

$$\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$

Фотони

5.1 Обчислити енергію (еВ) та імпульс фотона ультрафіолетового світла з довжиною хвилі 380 нм.

$\left(3{,}27 \text{ еВ}; \quad 1{,}7 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м/с}\right)$

5.2 Обчислити довжину хвилі та імпульс фотона з енергією 1 МеВ. У скільки разів відрізняється імпульс цього фотона від імпульсу електрона із такою самою кінетичною енергією?

$(1{,}24 \text{ пм}; \; 5{,}3 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}; \; \approx 1{,}4)$

5.3 Енергія фотона дорівнює 3,0 еВ. З якою швидкістю має рухатись електрон,аби його імпульс дорівнював імпульсу цього фотона?

$(1{,}76 \cdot 10^3$ м/с)

5.4 У воді $(n = 1{,}33)$ поширюється світловий пучок з довжиною хвилі λ = 450 нм. Знайти енергію фотонів цього світла.

(2,1 еВ)

5.5 У пучку монохроматичного світла енергія фотона складає 2,76 еВ. Чому дорівнює довжина хвилі цього світла у склі з показником заломлення 1,5?

(300 нм).

5.6 На якій довжині хвилі працює імпульсний рубіновий лазер, якщо тривалість імпульсу 4 мс, його потужність 1,43 кВт, і в імпульсі випускається $2 \cdot 10^{19}$ фотонів?

(694 нм)

5.7 Чутливість сітківки ока людини на довжині хвилі 600 нм (жовте світло) становить $3{,}3 \cdot 10^{-18}$ Вт. Яка мінімальна кількість фотонів має щосекунди падати на сітківку, аби людина відчувала це світло ?

(10)

5.8 На поверхню падає пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі 662 нм. Скільки фотонів потрапляє на цю поверхню за 4 с, якщо потік енергії в пучку дорівнює 0,3 Вт?

$(4 \cdot 10^{18})$

5.9 Пучок світла падає нормально на плоску дзеркальну поверхню. З якою силою тисне світло на цю поверхню, якщо потік енергії в пучку складає 0,6 Вт?

(4 нН)

5.10 На плоске дзеркало нормально до його поверхні падає випромінювання від CO_2-лазера ($\lambda = 10.6\,нм$), яке тисне на поверхню з силою 0,1 нН. Визначити кількість фотонів, що падають на дзеркало щосекунди.

$(8 \cdot 10^{14} c^{-1})$

5.11 Коротковхвильова межа суцільного рентгенівського спектра у випадку, коли до рентгенівської трубки прикладена різниця потенціалів 40 кВ, дорівнює $3{,}1 \cdot 10^{-11}$м. За цими даними визначити сталу Планка.

$(6{,}61 \cdot 10^{-31}$ Дж с)

5.12 Пучок світла з довжиною хвилі λ = 500 нм, який падає нормально на чорну поверхню, створює тиск P = 10 мкПа. Знайти концентрацію n фотонів в пучку.

$$\left(n = \frac{p\lambda}{hc} = 2{,}5 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3} \right)$$

5.13 Потік світла з довжиною хвилі $\lambda = 490$ нм, який падає нормально на поверхню з коефіцієнтом відбивання $\rho = 0{,}25$, створює тиск $p = 4{,}9$ мкПа. Визначити концентрацію n фотонів в потоці.

$$\left(n = \frac{p\lambda}{(1+\rho)hc} = 9{,}7 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3} \right)$$

5.14 Світло з довжиною хвилі λ = 662 нм, яке падає нормально на поверхню з коефіцієнтом відбивання ρ = 0,8, створює тиск p = 1,0 мкПа. Яку кількість фотонів N поглинає ділянка поверхні площею S = 1 см^2 за час t = 1 с?

$$\left(N = \frac{p\lambda St}{h} \cdot \frac{1-\rho}{1+\rho} = 10^{21} \frac{1}{c} \right)$$

5.15 Паралельний пучок світла, падає під кутом $\vartheta = 60^{\circ}$ на плоску поверхню з коефіцієнтом відбивання $\rho = 0{,}6$. Визначити тиск світла на поверхню, якщо об'ємна густина енергії в пучку $w = 10$ мкДж/м^3.

$(p = w(1+\rho)\cos^2\vartheta = 4 \text{ мкПа})$

5.16 Під яким кутом падають промені світла з інтенсивністю 0,3 Вт/см^2 на плоску поверхню з коефіцієнтом відбивання 0,6, якщо вони створюють тиск 4 мкПа?

(60°)

5.17 Лазерний імпульс з енергією E = 7,5 Дж падає під кутом $\theta = 30^0$ на пластинку з коефіцієнтом відбивання $\rho = 0{,}6$. Який імпульс передається пластинці?

$$\left(\left|\Delta\vec{p}\right| = \frac{E}{c}\sqrt{1+\rho^2+2\rho\cos 2\theta} = 3{,}5\cdot 10^{-8}\ \text{кг}\cdot\text{м/с} \right)$$

5.18 Лазерний імпульс з енергією 10 мкДж і тривалістю 0,1 мкс сфокусовано на дзеркальну поверхню в цятку діаметром 1 мкм. Який тиск на поверхню він створює?

($8{,}5\cdot 10^5$ Па)

Теплове випромінювання

5.19 Відомо, що максимум інтенсивності у спектрі випромінювання Сонця припадає на довжину хвилі 500 нм. Уважаючи Сонце абсолютно чорним тілом, визначити його енергетичну світність.

(64 МВт/м^2)

5.20 Відомо, що максимум інтенсивності у спектрі випромінювання Сонця припадає на довжину хвилі 500 нм. Уважаючи Сонце абсолютно чорним тілом, визначити потік енергії, що його випромінює Сонце. Радіус Сонця прийняти $7\cdot 10^8$ м.

($\approx 4\cdot 10^{26}$ Вт)

5.21 Виходячи з того, що максимум інтенсивності у спектрі випромінювання Сонця припадає на довжину хвилі 500 нм, оцінити: яку масу внаслідок випромінювання втрачає Сонце за 1 с і за який час Сонце втратило би 1% маси за незмінних умов випромінювання. Сонце вважати абсолютно чорним тілом, прийняти радіус Сонця $R = 7\cdot 10^8$ м і масу $M = 2\cdot 10^{30}$ кг.

($\approx$ 4 млн. т; $\approx$ 160 млрд. років)

5.22 Потік енергії випромінювання з оглядового віконця плавильної печі площею 6 см^2 дорівнює 34 Вт. Яка температура в печі?

(1000 К)

5.23 Температура верхніх шарів зірки дорівнює 10^4 К. Який потік енергії випромінює 1 м^2 її поверхні? Зірку вважати абсолютно чорним тілом.

($\approx$ 570 МВт)

5.24 Розплавлена платина має температуру 1773 °С На якій довжині хвилі інтенсивність випромінювання платини є максимальною? Платину вважати абсолютно чорним тілом.

(1,4 мкм)

5.25 Температура нитки розжарювання електричної лампи складає приблизно 2000°C. Якій довжині хвилі відповідає максимум інтенсивності у спектрі випромінювання лампи? Нитку розжарювання електричної лампи вважати абсолютно чорним тілом.

(1,27 мкм)

5.26 Максимум спектральної випромінювальної здатності залізної кулі діаметром D = 10 см, яка вважається абсолютно чорним тілом, припадає на довжину хвилі $\lambda_{max} = 1.6$ мкм. Визначити температуру T тіла через t = 2 с з початку охолодження.

(1790 K)

5.27 Якій довжині хвилі відповідає максимум інтенсивності у спектрі випромінювання чорної пластинки, нагрітої до температури 100°C?

(≈ 7,7 мкм)

5.28 Куля радіуса 10 см при температурі T = 200 K випускає випромінювання потужністю P = 10 Вт. Чи є ця куля абсолютно чорним тілом?

(Ні)

5.29 Визначити довжину хвилі λ max , яка відповідає максимуму спектральної випромінювальної здатності волоска лампи розжарювання, площа поверхні якого 0,25 $см^2$. Потужність, яка споживається лампою, P = 25 Вт . Вважати, що волосок лампи є сірим тілом, поглинальна здатність якого a = 0,3; внаслідок теплопровідності іншим тілам передається частка η = 0,2 від енергії, яка споживається лампою.

($1{,}12 \cdot 10^{-6}$ м)

5.30 Знайти діаметр сферичної космічної частинки із заліза, якщо сили світлового тиску і сила тяжіння до Сонця, що діють на неї, взаємно зрівноважуються. Сонце вважати абсолютно чорним тілом, яке знаходиться при температурі 6000 K, а частинку - чорною.

($1.73 \cdot 10^{-7}$ м)

Фотоефект

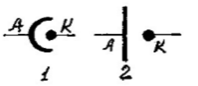
5.31 Фотоелемент опромінюють світлом заданої частоти один раз з інтенсивністю I_1, а інший – $I_2 = 2I_1$, і в кожному випадку вимірюють вольт-амперну характеристику (ВАХ). Показати на одному рисунку отримані ВАХ.

5.32 Два фотоелементи з катодами із роботами виходу $A_2 > A_1$ опромінюють світлом однієї частоти так, що струми насичення однакові. Зобразити на одному рисунку вольт-амперні характеристики фотоелементів.

5.33 Фотоелемент опромінюють світлом червоної межі. Показати вольт-амперну характеристику фотоелемента.

5.34 Фотоелемент опромінюють світлом один раз із частотою $\omega_1 = 2\omega_0$, а другий раз – із частотою $\omega_2 = 4\omega_0$ (ω_0 – червона межа фотоефекту) і в кожному випадку вимірюють вольт-амперну характеристику (ВАХ). Показати отримані ВАХ на одному рисунку за умови, що струми насичення були однакові.

5.35 Два фотоелементи, мають катоди у формі однакових кульок з одного матеріалу й однакові за площею аноди: перший півсферичний, а другий квадратний. Катоди опромінюють світлом однієї частоти та інтенсивності. Показати на одному рисунку вольт-амперні характеристики фотоелементів.



5.36 До якого максимального потенціалу зарядиться відокремлена мідна кулька (A = 4,47 еВ) при її опроміненні ультрафіолетовим світлом із довжиною хвилі 140 нм?

(4,4 В)

5.37 Визначити максимальну швидкість електронів, які вилітають із металу при його опромінюванні γ-квантами з енергією 1,53 МеВ.

($\approx 2{,}8\cdot10^8$ м/с)

5.38 У разі опромінювання металу $\gamma -$ квантами з нього вилітають фотоелектрони з максимальною швидкістю $v_{max} = 290\ Мм/с$. Визначити енергію квантів, їх імпульс та масу.

(1, 49 МеВ; $7{,}92 \cdot 10^{-22}\ кг \cdot м/с$; $2{,}64\ \cdot 10^{-30}$ кг)

5.39 Визначити червону межу фотоефекту та максимальну швидкість фотоелектронів при опроміненні цинку (A = 3,74 еВ) світлом λ = 250 нм.

(332 нм; $6{,}6\cdot10^5$ м/с)

5.40 Чи буде спостерігатися фотоефект при опроміненні цинку (A = 3,74 еВ) видимим світлом ($400 \leq \lambda \leq 750$) нм?

5.41 Яка частина (%) енергії фотона витрачається на роботу виходу електрона з металу з червоною межею фотоефекту 414 нм, якщо затримуюча напруга складає 2 В?

(60%)

5.42 При опроміненні металу максимальна швидкість фотоелектронів дорівнює $2{,}0\cdot10^5$ м/с На скільки зміниться швидкість фотоелектронів при опроміненні цього металу світлом із частотою більшою на $2\cdot10^{13}$ Гц?

($6\cdot10^4$ м/с)

5.43 Фотоелемент, на який подано пряму напругу 2,0 В, опромінюють світлом червоної межі фотоефекту. З якою швидкістю будуть потрапляти фотоелектрони на анод?

($8{,}39\cdot10^5$ м/с)

5.44 Фотоелемент, на який подано зворотню напругу 2,0 В, опромінюють світлом із довжиною хвилі 400 нм. З якою максимальною швидкістю будуть потрапляти фотоелектрони на анод, якщо робота виходу електронів з катоду дорівнює 1,0 еВ?

($6{,}2\cdot10^5$ м/с)

5.45 Якщо на фотоелемент подати зворотню напругу 2,49 В, то фотоелектрони підлітають до анода зі швидкістю $1{,}5\cdot10^6$ м/с. З якою швидкістю вони будуть потрапляти на анод, якщо до фотоелемента прикласти таку саму пряму напругу?

($2\cdot10^6$ м/с)

5.46 У скільки разів зміниться затримуюча напруга фотоелемента при збільшенні швидкості вильоту електронів із катода вдвічі?

(4)

5.47 Фотоелемент опромінюють світлом з енергією фотонів 2,0 еВ.

Знайти роботу виходу електронів із катода, якщо при збільшенні енергії фотонів у 2 рази затримуюча напруга фотоелемента зростає в 5 разів.

(1,5 еВ)

5.48 При опроміненні світлом металу з роботою виходу електрона 4,0 еВ затримуюча напруга становить 1,0 В. Якою вона стане при опроміненні світлом удвічі меншої довжини хвилі?

(6,0 В)

5.49 У лабораторній роботі по визначенню сталої Планка h вимірюють затримуючу напругу U фотоелемента при опроміненні світлом різної частоти ν. Знайти величину h за результатами досліду та її похибку (%), якщо при частотах $\nu_1 = 0{,}75$ ПГц і $\nu_2 = 0{,}37$ ПГц отримали, відповідно, $U_1 = 2{,}0$ В і $U_2 = 0{,}5$ В.

($6{,}3 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; 5%)

5.50 Фотоелемент спочатку опромінюють фотонами з утричі більшою за роботу виходу енергією, а потім – із удвічі більшою, ніж спочатку, довжиною хвилі. Знайти відношення $\left(v_1/v_2\right)$ швидкостей вильоту електронів із катода.

(2)

5.51 Фотоелемент почергово опромінюють світлом із частотою $\nu_1 = 3\nu_0$ та $\nu_2 = 4\nu_0$ (ν_0 – частота червоної межі фотоефекту). Як співвідносяться кінетичні енергії вирваних електронів ($K_1 : K_2$)?

(2 : 3)

5.52 При почерговому опроміненні фотоелемента світлом із довжиною хвилі 355 нм та 460 нм виявили, що кінетичні енергії фотоелектронів відрізняються в 2 рази. Знайти роботу виходу електронів із катода.

(1,9 еВ)

5.53 При почерговому опроміненні металу світлом довжиною хвилі λ та $n\lambda$, виявили, що швидкості фотоелектронів відрізняються теж у n разів. Знайти червону межу λ_0 фотоефекту для цього металу.

($\lambda_0 = (n + 1)\,\lambda$)

5.54 Скільки фотонів падає на катод фотоелемента за 1 с, якщо струм фотоелемента дорівнює 0,32 мкА? Прийняти, що на кожні п'ять падаючих фотонів припадає один вибитий електрон і фотоелемент працює в режимі насичення.

(10^{13})

5.55 Знайти максимальний можливий струм фотоелемента з площею катода 0,5 см^2 при опромінюванні його світлом з інтенсивністю 2,0 Вт/м^2 і частотою 4,76·10^{15} рад/с, якщо на кожні 100 фотонів, які падають на катод, припадає 5 фотоелектронів.

(1,6 мкА)

5.56 Фотоелемент у режимі насичення опромінюють світлом довжини хвилі $\lambda = 300$ нм, на якій його спектральна чутливість (відношення фотоструму до енергії світлового потоку, що падає на катод) складає $j = 4{,}8$ мА/Вт. Знайти квантовий вихід фотоефекту η%, тобто кількість фотоелектронів, яка припадає на кожні 100 падаючих фотонів.

$$\left(\eta = \frac{hcj}{e\lambda} = 2\,\%\right)$$

5.57 На поверхню літію (A = 2,39 еВ) падає світло, в якому напруженість електричного поля змінюється за законом $E = E_0(1+\cos\omega t)\cos\omega_0 t$, де E_0 = const, ω = 6,0·10^{14} 1/с, ω_0 = 3,6·10^{15} 1/с. Чи буде спостерігається фотоефект і, коли так, то з якою максимальною швидкістю виходитимуть фотоелектрони?

(*так*; ≈ 3,7·10^5 м/с)

Гальмівне рентгенівське випромінювання

5.58 На скільки відсотків треба збільшити напругу на рентгенівській трубці, аби довжина хвилі короткохвильової межі гальмівного випромінювання трубки зменшилася на 20%?

(25%)

5.59 При збільшенні напруги на рентгенівській трубці у 1,5 рази довжина хвилі короткохвильової межі суцільного рентгенівського спектра змінюється на 26 пм. Знайти початкову напругу на рентгенівській трубці.

(16 кВ)

5.60 Визначити короткохвильову межу λ_0 гальмівного випромінювання рентгенівської трубки, якщо електрони налітають на анод із швидкістю v = 0,85c, c – гранична швидкість.

$$\left(\lambda_0 = \frac{h}{(\gamma-1)mc},\ \text{де}\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ m\text{ - маса електрона};\quad \lambda_0 = 2{,}7\ \text{пм}\right)$$

5.61 З якою швидкістю v налітають електрони на анод рентгенівської трубки, якщо короткохвильова межа спектра її гальмівного випромінювання $\lambda_0 = (h / mc)$, де m – маса електрона?

$$\left(v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с} \right)$$

5.62 Вузький пучок рентгенівських променів від рентгенівської трубки падає на монокристал NaCl. Мінімальний кут ковзання, при якому ще спостерігається дзеркальне відбивання від системи кристалічних площин із відстанню між ними d = 0,28 нм, дорівнює α = 4,1°. Чому дорівнює напруга U на рентгенівській трубці?

$$\left(U = \frac{hc}{4ed \sin\alpha} = 31 \text{ кВ} \right)$$

Ефект Комптона

5.63 В ефекті Комптона довжини хвилі зміщеної компоненти при розсіюванні випромінювання на кути 60° та 120° відрізняються вдвічі. Знайти довжину хвилі λ випромінювання, що падає на мішень.

$$\left(\lambda = \frac{1}{2} \lambda_c = 1,21 \text{ пм} \right)$$

5.64 Визначити зміщену довжину хвилі розсіяного випромінювання в ефекті Комптона, якщо фотони, що налітають на мішень, мають енергію 1,0 МеВ.

(6 пм)

5.65 Порівняти найбільші комптонівські зміни $\Delta\lambda_{max}$ довжини хвили при розсіянні фотонів на вільних електронах та на протонах.

(4, 85 пм; 2,64 пм)

5.66 В ефекті Комптона розсіюються фотони з енергією ε = 1,0 МеВ. Визначити кінетичну енергію електронів віддачі, якщо внаслідок розсіювання довжина хвилі фотона змінюється на η = 25%.

$$(K = \frac{\eta\varepsilon}{1+\eta} = 0,2 \text{ МеВ})$$

5.67 Мішень опромінюють фотонами, що мають енергію, рівну енергії спокою електрона. Визначити імпульс електронів віддачі при куті розсіяння фотонів 180°.

$$\left(p = \frac{4mc}{3} = 3{,}64 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с} \right)$$

5.68 Фотон з довжиною хвилі $\lambda = \lambda_c$ (λ_c – комптонівська довжина хвилі електрона) розсіявся на вільному електроні під прямим кутом. Визначити, під яким кутом до напрямку руху падаючого фотона відлетів електрон віддачі.

(33,7)

5.69 Фотон довжини хвилі $\lambda = 6{,}0$ пм розсіявся під прямим кутом на вільному нерухомому електроні. Визначити частоту ω' розсіяного фотона та кінетичну енергію електрона віддачі K. Комптонівська довжина хвилі електрона $\lambda_c = 2{,}43$ пм.

$$\left(\omega' = \frac{2\pi c}{\lambda + \lambda_c} = 2{,}2 \cdot 10^{20} \text{ рад/с}; \quad K = \frac{hc}{\lambda(1 + \lambda / \lambda_c)} = 60 \text{ кеВ} \right)$$

5.70 Фотон розсіявся під кутом θ =120° на вільному електроні, через що він отримав кінетичну енергію K = 0,45 МеВ. Визначити енергію фотона ε до розсіювання.

$$\left(\varepsilon = \frac{K}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 2mc^2 / K \sin^2(\theta / 2)}\right) = 0{,}68 \text{ МеВ} \right)$$

5.71 Фотон з енергією ε = 0,75 МеВ розсіявся під кутом θ = 60° на вільному нерухомому електроні. Визначити енергію ε' розсіяного фотона.

$$(\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + (\varepsilon(1 + cos\theta)/mc^2)} \approx 0{,}43 \text{ MeB})$$

5.72 Фотон з енергією ε = 0,75 МеВ розсіявся під кутом θ = 60° на вільному нерухомому електроні. Визначити кінетичну енергію K електрона віддачі.

$$(K = \frac{\varepsilon}{1 + (mc^2/\varepsilon(1 - cos\theta)} \approx 0{,}32 \text{ MeB})$$

5.73 Фотон з енергією ε = 0,75 МеВ розсіявся під кутом θ = 60° на вільному нерухомому електроні. Під яким кутом φ до напрямку руху падаючого фотона відлетів електрон віддачі?

$$\left(tg\varphi = \frac{ctg\left({}^{\theta}/_{2}\right)}{1 + (\varepsilon/m\,c^2)} = 0{,}7;\ \varphi \approx 35°\right)$$

5.2. Хвильові властивості частинок

- Співвідношення де-Бройля

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

- Співвідношення невизначеностей (нерівності Гайзенберґа)

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar;$$
$$\Delta E \Delta t \geq \hbar.$$

\

Хвилі де-Бройля

5.74 Знайти довжину хвилі де Бройля для:

а) електрона при швидкості 10^6 м/с;
б) молекули водню при швидкості 200 м/с;
в) кульки масою m = 1 г при швидкості 1 см/с.

$$\left(\text{а) } 7{,}3\cdot 10^{-10}\,\text{м};\ \text{ б) } 9{,}9\cdot 10^{-10}\,\text{м};\ \text{ в) } 6{,}6\cdot 10^{-29}\,\text{м}\right)$$

5.75 Показати, що довжина хвилі електромагнітного випромінювання дорівнює дебройлівській довжині хвилі фотона.

5.76 При якій швидкості електрона його довжина хвилі де Бройля дорівнюватиме 500 нм (видиме світло) та 0,1 нм (рентгенівське випромінювання)?

$$\left(1{,}46\cdot 10^3\,\text{м/с};\ 0{,}73\cdot 10^7\,\text{м/с}\right)$$

5.77 Визначити швидкість релятивістської частинки із власною масою m_0, якщо її дебройлівська довжина хвилі дорівнює $\lambda_Б$.

$$\left(\upsilon = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\lambda_Б/\lambda_C\right)^2}},\ \text{ де }\ \lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c} \right)$$

5.78 Знайти довжину хвилі де Бройля а) електрона та б) протона, які прискорено напругою U = 1 кВ.

(а) 39 пм; б) 0,91 пм)

5.79 Яку прискорюючу різницю потенціалів U має пройти електрон, аби його довжина хвилі де Бройля дорівнювала 0,1 нм?

(150 В)

5.80 Визначити довжину хвилі де Бройля електрона з кінетичною енергією 5 кеВ.

(17,4 пм)

5.81 На шляху пучка електронів із кінетичною енергією 80 еВ трапляється смуга однорідного електричного поля з напруженістю 60 В/см і шириною 1,0 см, яке є спрямоване в напрямку руху електронів. Як і в скільки разів зміниться дебройлівська довжина хвилі електронів на виході з поля?

(*збільшиться в* 2 *рази*)

5.82 Протон рухається по колу радіуса 0,5 см в однорідному магнітному полі з індукцією B = 8 мТл. Визначити довжину хвилі де Бройля протона.

(0,1 н)

5.83 Отримати вираз для довжини хвилі де Бройля $\lambda_Б$ релятивістської частинки із власною масою m_0 і кінетичною енергією K.

$$\left(\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0K\left(1+K/2m_0c^2\right)}}\right)$$

5.84 Знайти кінетичну енергію K електрона, якщо його дебройлівська $\lambda_Б$ та комптонівська λ_C довжини хвилі збігаються. $\left(\lambda_C = 2\pi\hbar/m_0c\right)$.

$$\left(K = \left(\sqrt{2}-1\right)m_0c^2 = 0,21\ \text{MeB}\right)$$

5.85 Обчислити довжину хвилі де Бройля $\lambda_Б$ релятивістських електронів, якими бомбардують анод рентгенівської трубки, якщо короткохвильова межа її гальмівного спектра λ = 10 пм.

$$\left(\lambda_Б = \frac{\lambda}{\sqrt{1+m_0c\lambda/\pi\hbar}} = 3,3\ \text{пм}\right)$$

5.86 Паралельний пучок електронів, які рухаються із швидкістю 10^6 м/с, падає нормально на діафрагму з довгою щілиною ширини 1 мкм. Знайти ширину центрального дифракційного максимуму (відстань між першими мінімумами) на екрані, розташованому на відстані l = 50 см від щілини.

(0,72 мм)

5.87 З якою швидкістю повинні рухатися електрони в умовах попереднього завдання, аби відстань на екрані між другими дифракційними мінімумами дорівнювала 2,9 мм?

($5,0\cdot10^5$ м/с)

5.88 Паралельний пучок електронів прискорених різницею потенціалів 25 В падає нормально на діафрагму з двома вузькими щілинами, відстань між якими d = 50 мкм. Визначити відстань між сусідніми інтерференційними максимумами на екрані, розташованому на відстані l = 100 см від щілин.

(4,9 мкм)

5.89 Паралельний пучок монохроматичних електронів, які пройшли прискорюючу напругу U, падає нормально на діафрагму з двома вузькими щілинами, за якою на відстані 75 см розміщений екран. Відстань між щілинами $d = 25$ мкм. Знайти величину U, якщо відстань між сусідніми максимумами інтерференційної картини на екрані дорівнює 7,5 мкм.

(24 В)

5.90 Вузький пучок електронів з кінетичною енергією K = 180 еВ падає на певну грань монокристала нікелю. Відстань між кристалічними площинами, паралельними до даної грані, складає d = 0,21 нм. При якому куті ковзання θ електронів, що падають, буде спостерігатися максимум відбивання четвертого порядку?

$$\left(\theta = \arcsin\left(\frac{2h}{d\sqrt{2mK}}\right) \approx 60^\circ\right)$$

5.91 Пучок електронів з кінетичною енергією K = 180 еВ падає нормально на поверхню монокристала нікелю. У напрямі, що становить кут α = 55° з нормаллю до цієї поверхні, спостерігається дифракційний максимум 4-го порядку. Знайти відстань d між кристалічними площинами, що є відповідальні за нього.

$$\left(d = \frac{2h}{\sqrt{2mK}}\cos\frac{\alpha}{2} \approx 0{,}21 \text{ нм}\right)$$

5.92 При падінні електронів, прискорених напругою U_0, на природну грань монокристала алюмінію під кутом ковзання $\theta = 30°$ у відбитих променях спостерігається дифракційний максимум. Якщо ж напругу збільшити в $\eta = 2{,}25$ разів, то під тим самим кутом спостерігається максимум наступного порядку. Визначити величину U_0, якщо відстань між відповідними кристалічними площинами складає d = 0,20 нм.

$$\left(U_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2med^2\left(\sqrt{\eta}-1\right)^2\sin^2\theta} = 150 \text{ В}\right)$$

5.93 Частинка маси m знаходиться в одновимірній прямокутній потенційній ямі ширини l із нескінченно високими стінками. Знайти дозволені значення E_n енергії частинки, виходячи з того, що можливі лише такі її стани, коли в межах ями укладається ціла кількість дебройлівських півхвиль частинки.

$$\left(\frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ml^2}, \quad n = 1, 2, \ldots\right)$$

Співвідношення невизначеностей

5.94 Оцінити невизначеність координати Δx для: а) електрона, б) атома водню, в) дробинки $m = 0{,}1$ г, якщо швидкість кожної частинки відома з точністю $\Delta v_x = 1$ см/с.

(а) ~ 1 см; б) ~ 10^{-3} см; в) ~10^{-26} см)

5.95 Оцінити невизначеність швидкості: а) електрона, б) протона, в) порошинки маси $m = 1$ мкг, якщо їх координати встановлені з невизначеністю $\Delta x \sim 1$ мкм.

(а) ~ 10^{2} м/с; б) ~ 10^{-1} м/с; в) ~ 10^{-19}м/с)

5.96 Оцінити невизначеність швидкості Δv електрона в атомі водню, прийнявши розмір атома d = 0,1 нм. Порівняти результат із швидкістю v_1 електрона на першій борівській орбіті.

($\Delta v \approx 1 \cdot 10^6$ м/с; $\Delta v = 0{,}5 v_1$)

5.97 Якщо уявити, що положення вільного електрона в початковий момент часу відоме із невизначеністю Δx_0 = 0,1 нм, то якою Δx за порядком величини вона стане через 1 мс?

($\Delta x \sim 1$ км)

5.98 Показати, що при невизначеності координати частинки $\Delta x \approx \lambda_Б / 2\pi$, ($\lambda_Б$ – довжина хвилі де Бройля), невизначеність її швидкості Δv_x за порядком величини дорівнює самій швидкості.

5.99 В одній із перших моделей атомного ядра вважалося, що воно складається з протонів та електронів. Показати за допомогою співвідношення невизначеностей, що електрони не можуть входити до складу ядра. Лінійні розміри ядра прийняти $\sim 5 \cdot 10^{-15}$ м.

5.100 Електрон із кінетичною енергією $K \approx 4$ еВ є локалізований в області розміром l = 1 мкм. Оцінити відносну невизначеність його швидкості $\Delta v / v$.

$$\left(\frac{\Delta v}{v} \sim \frac{\hbar}{l\sqrt{2mK}} \approx 1 \cdot 10^{-4} \right)$$

5.101 При переході атома із збудженого в основний стан випромінюється фотон із середньою довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм. За допомогою співвідношення невизначеностей оцінити ширину $\Delta\lambda$ спектральної лінії, що при цьому випромінюється, прийнявши середній час життя атома у збудженому стані $\Delta t \sim 10^{-8}$ с.

$$\left(\Delta\lambda \sim \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t} \sim 10^{-5} \text{ нм} \right)$$

5.102 Паралельний пучок електронів нормально падає на щілину ширини b = 1 мкм із швидкістю v = 10^6 м/с. За допомогою співвідношення невизначеностей оцінити ширину смуги, в яку потрапляють електрони на екрані, віддаленому від щілини на відстань l = 1 м.

$$\left(\Delta x \sim \frac{2l\hbar}{bmv} \sim 0,2 \text{ мм} \right)$$

5.103 В електронно-променевій трубці дуже вузький пучок електронів, що вилітають із електронної гармати, створює світну цятку діаметром $d \approx 0,5$мм на віддаленому на відстань l = 20 см екрані. Оцінити невизначеність координати Δx точки потрапляння електрона на екран при прискорюючій напрузі в трубці U = 10 кВ.

$$\left(\Delta x \approx \frac{2\hbar l}{d\sqrt{2meU}} \sim 10^{-9} \text{ м} \right)$$

5.104 В електронному мікроскопі об’єкти досліджуються за допомогою пучка прискорених швидких (релятивістських) електронів. За допомогою співвідношення невизначеностей оцінити, при якій напрузі U має працювати мікроскоп, аби було можна розрізняти об’єкти із лінійними розмірами $l \sim \lambda_C$, де $\lambda_C = 2\pi\hbar / m_0 c$ – комптонівська довжина хвилі електрона.

$$\left(U \geq \frac{m_0 c^2}{e} \left(\sqrt{2} - 1 \right) \approx 210 \text{ кВ} \right)$$

5.105 За допомогою співвідношення невизначеностей оцінити мінімальну енергію E_{min} квантового лінійного гармонічного осцилятора – частинки маси m, яка рухається в одновимірному потенціальному полі $U(x) = \left(\kappa x^2 / 2 \right)$.

$$\left(E_{\min} \approx \hbar \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \hbar\omega, \ \text{де} \ \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} - \text{класична частота осцилятора} \right)$$

5.106 За допомогою співвідношення невизначеностей оцінити мінімальну енергію E_0 електрона в атомі водню та відповідну відстань електрона від ядра r_0 (розміри атома).

$$\left(E_0 \approx \frac{k^2 m e^4}{2\hbar^2} = 13{,}6 \text{ еВ}, \quad r_0 \approx \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0{,}053 \text{ нм}; \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right)$$

5.3. Рівняння Шрьодінгера

- Рівняння Шрьодінгера для стаціонарних станів

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - U\right)\psi = 0$$

- Оператор Лапласа в сферичних координатах для сферично-симетричних функцій

$$\nabla_r^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}$$

- Енергетичний спектр частинки в одновимірній потенціальній ямі

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

- Хвильові функції частинки в одновимірній потенціальній ямі

$$\psi_n\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

- Енергетичний спектр квантового лінійного гармонічного осцилятора

$$E_\nu = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- Прозорість прямокутного потенціального бар’єра

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m\left(U_0 - E\right)}\cdot d\right)$$

- Прозорість потенціального бар’єра заданої форми $U(x)$

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m\left(U(x) - E\right)}\cdot \mathrm{d}x\right)$$

- Середнє значення характеристики мікрочастинки $F(x)$, залежної від координати

$$\left\langle F(x)\right\rangle = \int F(x)\left|\psi(x)\right|^2 \mathrm{d}x$$

Частинка в потенціальній ямі. Хвильова функція

5.107 Обчислити мінімальну енергію частинки маси m в одновимірному потенціальному “ящику” (прямокутній нескінченно глибокій ямі) ширини l для: а) електрона при $l = 0,1$ нм (порядок розмірів атома) і б) атома гелію ($m \approx 7 \cdot 10^{-27}$ кг)при $l = 1$ мм.

(а) ≈ 37 еВ; б) $\approx 5 \cdot 10^{-17}$ еВ)

5.108 Частинка маси m знаходиться в одновимірній прямокутній потенціальній ямі ширини l з нескінченно високими стінками. Визначити енергетичний спектр частинки, виходячи з того, що дозволеними є лише такі квантові стани при яких на ширині ями укладається ціла кількість дебройлівських півхвиль частинки.

$$\left(E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \cdot n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \right)$$

5.109 За допомогою співвідношень невизначеностей оцінити енергію основного стану E_0 частинки маси m в одновимірній прямокутній потенціальній ямі ширини l з нескінченно високими стінками. Порівняти результат із точним виразом, що випливає з рівняння Шрьодінґера.

5.110 Електрон знаходиться в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками. Знайти ширину ями l, якщо різниця енергій рівнів із квантовими числами $n_1 = 2$ і $n_2 = 3$ складає $\Delta E = 0,30$ еВ.

(2,5 нм)

5.111 Мікрочастинка знаходиться в одновимірній прямокутній потенціальній ямі ширини $l = 5,0$ нм із нескінченно високими стінками. Визначити масу частинки, якщо різниця енергій рівнів $n_2 = 3$ і $n_1 = 2$ дорівнює $\Delta E = 7,47$ еВ.

$$\left(m = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2l^2 \Delta E}(n_2^2 - n_1^2) = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \right)$$

5.112 Частинка знаходиться в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками. При якому значенні квантового числа n відношення η проміжків ΔE між двома заданими парами енергетичних рівнів складає $\eta = \left(\Delta E_{n+1,n} / \Delta E_{n,n-1} \right) = 1,4$?

$$\left(n = \frac{\eta + 1}{2(\eta - 1)} = 3 \right)$$

5.113 Частинка маси m знаходиться в одновимірній прямокутній потенціальній ямі ширини l з нескінченно високими стінками. Застосовуючи формулу для хвильових функцій частинки, записати вираз густини імовірності $\rho_n(x) = \mathrm{d}P_n / \mathrm{d}x$ перебування частинки в точці з координатою x для стану з квантовим числом n та показати графіки функції $\rho_n(x)$ для n = 1, 2, 3. Яку кількість вузлів (нульових точок) має функція $\rho_n(x)$?

(n + 1)

5.114 Частинка в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками перебуває в основному стані (n = 1). Визначити імовірність P перебування частинки в області: а) $0 \le x \le l/3$, б) $l/3 \le x \le 2l/3$.

(а) 0,195; б) 0,609)

5.115 Частинка знаходиться в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками. Визначити імовірність P перебування частинки посередині ями в області розміром 1/4 її ширини, якщо частинка знаходиться в стані: а) n = 1, б) n = 2.

(а) 0,475; б) 0,091)

5.116 Якщо частинка маси m знаходиться в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі великої ширини l, енергетичні рівні частинки є дуже близькими. В такому випадку густину рівнів (кількість рівнів в одиничному інтервалі енергій) можна обчислювати як dN/dE. Виходячи з цього, оцініть густину рівнів для вільних електронів у металі, прийнявши l = 1,0 см і E = 6,0 еВ.

$$\left(\frac{dN}{dE} = \frac{l}{\pi\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}} \approx 2\cdot 10^{25}\ 1/\text{Дж} \approx 3\cdot 10^{6}\ 1/\text{еВ} \right)$$

5.117 Частинка маси m знаходиться у двовимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками. Розміри ями (l_1, l_2). Визначити енергії стаціонарних станів і нормовані ψ-функції частинки.

$$\left(E_{n_1 n_2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2}\right); \quad \psi_{n_1 n_2} = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}}\sin\frac{n_1\pi x}{l_1}\sin\frac{n_2\pi y}{l_2}; \qquad n_1 = 1, 2, \dots; \quad n_2 = 1, 2, \dots . \right)$$

5.118 Використавши результатами попередньої задачі, визначити енергію E та кратність виродження K (кількість квантових станів із заданою енергією) четвертого енергетичного рівня частинки, що знаходиться в квадратній ямі $l_1 = l_2 = a$. Записати хвильові функції цих вироджених станів.

$$\left(E = 5\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}; \quad K = 2 \right)$$

5.119 Частинка маси m знаходиться у тривимірній прямокутній потенціальній ямі з абсолютно непроникними стінками. Розміри ями (l_1, l_2, l_3). Визначити енергії стаціонарних станів частинки та нормовані ψ - функції цих станів.

$$\left(\begin{array}{l} E_{n_1 n_2 n_3} = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{n_1^2}{l_1^2} + \dfrac{n_2^2}{l_2^2} + \dfrac{n_3^2}{l_3^2}\right); \quad \psi_{n_1 n_2 n_3} = \sqrt{\dfrac{8}{l_1 l_2 l_3}}\sin\dfrac{n_1\pi x}{l_1}\sin\dfrac{n_2\pi y}{l_2}\sin\dfrac{n_3\pi z}{l_3}; \\ n_1 = 1, 2, \dots; \quad n_2 = 1, 2, \dots, n_3 = 1, 2, \dots . \end{array} \right)$$

5.120 Використавши результатами попередньої задачі, визначити енергію E та кратність виродження K (кількість квантових станів з заданою енергією) шостого рівня частинки в кубічній ямі $l_1=l_2 = l_3= a$.

$$\left(E = 7\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}; \quad K = 6 \right)$$

5.121 Хвильова функція основного стану одновимірного квантового гармонічного осцилятора має вигляд $\psi(x) = Ae^{-\alpha^2x^2}$, де α – стала, що залежить від параметрів осцилятора. Визначити значення константи A, скориставшись виразом табличного інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\pi/\alpha}$.

$$\left(A = \sqrt[4]{\frac{2\alpha^2}{\pi}} \right)$$

5.122 Частинка знаходиться в одновимірному полі, де координатна частина її хвильової функції має вигляд $\psi(x) = A\exp(-x^2/a^2 + ikx)$. A та a – задані сталі, $i = \sqrt{-1}$. Визначити середнє значення координати частинки $\langle x \rangle$.

$$\left(\langle x \rangle = 0 \right)$$

5.123 Координатна частина Ψ – функції частинки, що знаходиться в центральному полі, має вигляд $\psi(r) = (A/r)e^{-r/a}$, де r – відстань від центра, a – задана стала. Знайти: а) константу A, б) середнє значення відстані частинки від силового центра $\langle r \rangle$.

$$\left(A = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}; \quad \langle r \rangle = \frac{a}{2} \right)$$

5.124 Координатна частина Ψ – функції частинки, що знаходиться в центральному полі, має вигляд $\psi(r) = (A/r)e^{-r^2/a^2}$, де r – відстань від силового центра, a – задана константа. Визначити константу A та середню відстань $\langle r \rangle$. *Указівка*: скористатися табличним виразом $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

$$\left(A = \frac{1}{\sqrt{\pi a\sqrt{2\pi}}}; \quad \langle r \rangle = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

Потенціальні бар'єри

5.125 Потік вільних частинок із масою m та енергією E, що рухаються уздовж осі OX (рис. 3), у точці $x = 0$ падає на абсолютно непроникну $U = \infty$ стінку (при $x \geq 0$ $U = \infty$). Із рівняння Шрьодінгера, враховуючи умову на межі $x = 0$, отримати вираз хвильової функції частинок, визначити

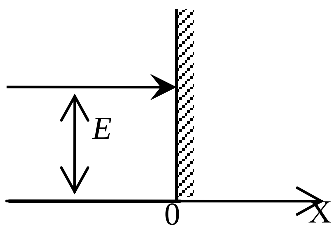


Рис. 3

функцію розподілу імовірності $\rho(x)$ та показати її графік. Пояснити отриманий результат, виходячи із хвильових властивостей частинок.

$$\left(\rho(x) = A\sin^2\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)\right)$$

5.126 Потік вільних частинок маси m та енергії E, що рухаються в напрямку осі X, у точці $x = 0$ падає на прямокутний бар'єр висотою $U_0 > E$ нескінченної протяжності (рис. 4). За допомогою рівняння Шрьодінгера, враховуючи умову на межі ($x = 0$), визначити ψ - функції частинок в обох областях і оцінити:

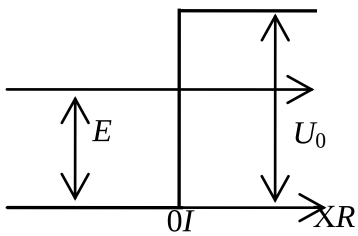


Рис.4.

а) густину імовірності $\rho(x)$ знаходження частинки в області $x \geq 0$ та показати вид графіка $\rho(x)$;

б) ефективну глибину проникнення частинок в область бар'єра x_e, тобто відстань, на якій густина імовірності зменшується e разів відносно її величини на стінці;

в) коефіцієнт відбивання R частинок від бар'єра (за допомогою ψ - функції в області $x \leq 0$).

$$\left(а)\ \rho(x) \approx e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\,x};\quad б)\ x_e \approx \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0-E)}};\quad в)\ R = 1\right)$$

5.127 Потік вільних частинок із масою m та енергією E, які рухаються в напрямі осі X, у точці $x = 0$ налітає на прямокутний потенціальний бар'єр висотою $U_0 < E$ нескінченної протяжності (рис. 5). Із рівняння Шрьодінгера і з урахуванням умов на межі $x = 0$ отримати ψ - функції частинок в обох областях і визначити коефіцієнт відбивання R частинок від бар'єра.

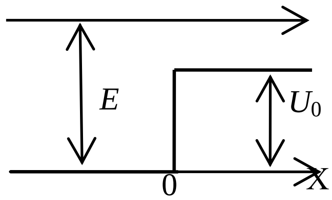


Рис. 5

$$\left(R = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - U_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - U_0}}\right)^2\right)$$

5.128 Частинка з масою m та енергією E рухається уздовж осі X у напрямі прямокутного потенціального бар'єра ширини l і висоти U_0 такої, що $U_0 - E = W > 0$. (рис. 6). Використовуючи формулу для хвильових функцій частинки та приймаючи l = 0,1 нм і W = 1,0 еВ, знайти прозорість бар'єра для електрона D_1 та протона D_2.

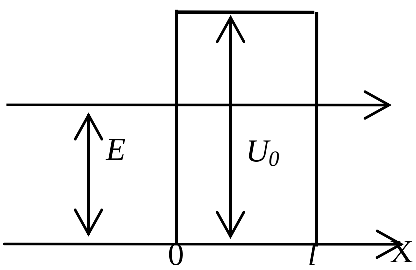


Рис. 6

$(D_1 \approx 0{,}35,\ D_2 \approx 10^{-19})$

5.129 Знайти у скільки разів η зменшиться прозорість D_1 бар'єра з попередньої задачі для електрона, якщо:

а) ширина бар'єра збільшиться в n = 9 разів;

б) різниця енергій W зросте в n = 9 разів;

$$\left(а)\ \eta = D_1^{(1-n)} \approx 4{,}4 \cdot 10^3; \quad б)\ \eta = D_1^{\left(1-\sqrt{n}\right)} \approx 8{,}2 \right)$$

5.130 На ступінчастий прямокутний потенціальний бар'єр (рис. 7) налітає паралельний пучок електронів з енергією E = 1,0 еВ і густиною потоку частинок $\varphi_0 = 10^{21}$ см$^{-2}$·с$^{-1}$. Визначити імовірність D тунельного проходження електрона крізь цей бар'єр і густину тунельного струму j (А/см^2), який створюють електрони після подолання бар'єра, якщо U_1 = 1,09 еВ, U_2 = 1,16 еВ і ширина кожної сходинки $d_1 = d_2$ = 2,0 нм.

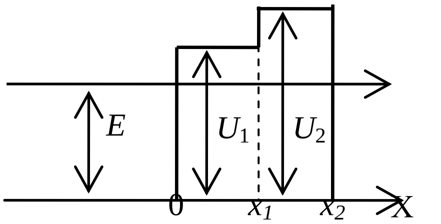


Рис. 7

($D = 5{,}63 \cdot 10^{-7}$; j = 90 мкА/см^2)

5.131 Використовуючи формулу для прямокутного бар'єра, отримати вираз для прозорості бар'єра довільної форми $U(x)$ за умови, що $U_0 > E$.
Для частинки з масою m та енергією $E < U_0$ визначити прозорість D потенціального бар'єра, форма та параметри якого показані на рис. 8.

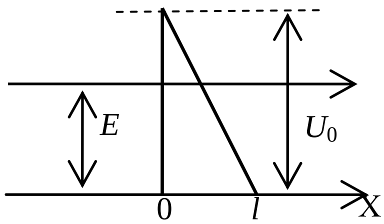


Рис. 8

$$\left(D \approx e^{-\frac{4}{3\hbar U_0}\sqrt{2m(U_0-E)^3}\, l} \right)$$

5.132 Визначити прозорість D потенціального бар'єра $U(x) = U_0(1 - x^2/l^2)$ (рис. 9) Для частинки з масою m та енергією $E < U_0$.

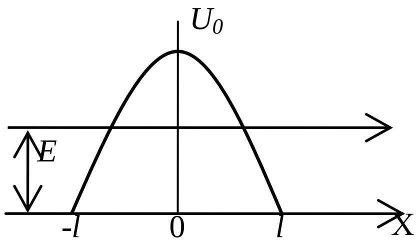


Рис. 9

$$\left(D \approx \exp\left(-\pi l (U_0 - E)\sqrt{2m/U_0} \big/ \hbar \right) \right)$$

5.4. Будова атома

- Радіуси електронних орбіт (борівські радіуси) атома водню в теорії Бора

$$r_n = \frac{\hbar^2}{kme^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

- Енергетичний спектр атома водню та воднеподібних іонів:

$$E_n = -\frac{k^2 m Z^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

- Узагальнена формула Бальмера:

$$\omega = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \;\; R = 2,07 \cdot 10^{16}\,\text{с}^{-1}.$$

- Умови квантування орбітального моменту імпульсу електрона:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}; \quad L_z = \hbar m_l.$$

- Орбітальне гіромагнітне співвідношення g та магнетон Бора $\mu_Б$:

$$g = \frac{e}{2m}; \qquad \mu_Б = \frac{e\hbar}{2m}.$$

- Умови квантування орбітального магнітного моменту електрона:

$$p = \mu_Б\sqrt{l(l+1)}; \quad p_z = \mu_Б m_l.$$

- Величина нормального зеєманівського розщеплення енергетичного рівня електрона в зовнішньому магнітному полі:

$$\Delta E = \mu_Б B m_l$$

- Закон Мозлі:

  загальний:

$$\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma)$$

  для K_α-ліній легких елементів:

$$\omega = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}R(Z-1)^2$$

  для L_α-ліній:

$$\omega = R(Z-5{,}5)^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36}R(Z-5{,}5)^2.$$

5.133 Згідно з класичною електродинамікою, частинка із зарядом q, що рухається з прискоренням $\vec{a}$, неодмінно випускає електромагнітне випромінювання. При цьому швидкість втрати енергії частинки на випромінювання визначається законом

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{2kq^2a^2}{3c^3},$$ де c – гранична швидкість, $k = 1/4\pi\varepsilon_0$.

Виходячи з цього, оцінити час τ, за який електрон в атомі водню, що знаходиться на коловій орбіті радіуса r_0 = 0,05 нм, мав би впасти на ядро.

$$\left(\tau = \frac{m^2c^3r_0^{\,3}}{4k^2e^4} \approx 10^{-11} c\right)$$

5.134 У теорії Бора вважається, що під дією кулонівської сили електрон в атомі водню рухається навколо ядра за законами механіки Ньютона по стаціонарних колових орбітах, але лише таких, які задовольняють умову $m\upsilon r = n\hbar$, n =1,2, ... , (m, υ – маса та швидкість електрона). Виходячи з цього,

– вивести формулу для радіусів r_n електронних орбіт у атомі водню;
– обчислити швидкість V_1 і частоту обертання ν_1 електрона на першій борівській орбіті.

(V_1 = 2,2·10^6 м/с, ν_1 = 6,6·10^{15} об/с)

5.135 У теорії Бора вважається, що під дією кулонівської сили електрон в атомі водню рухається навколо ядра по стаціонарних колових орбітах, на яких момент імпульсу електрона задовольняє умову $m\upsilon r = n\hbar$. Виходячи з цього та формули для радіусів r_n електронних орбіт у атомі водню, знайти кількість дебройлівських довжин хвилі електрона, що вкладається на n-й орбіті.

(n)

5.136 Згідно із законами класичної електродинаміки, електрон, який рухається в атомі водню по n-й борівській орбіті, обов'язково випускає електромагнітне випромінювання з циклічною частотою ω_n, рівною кутовій швидкості обертання по орбіті. Показати, що при $n \to \infty$ ця частота наближається до частоти фотона, що випромінюється при переході електрона з n-ї на (n–1)-у орбіту.

5.137 У теорії Бора вважається, що під дією кулонівської сили електрон в атомі водню рухається навколо ядра по стаціонарних колових орбітах, на яких момент імпульсу електрона задовольняє умову $mvr = n\hbar$. Виходячи з цього,:

a. знайти вирази кінетичної K_n, потенціальної U_n та повної E_n енергії електрона в залежності від номера орбіти n;
b. обчислити значення K_1, U_1 і E_1 цих енергій для першої орбіти та енергії іонізації атома гідрогену.

$$\left(\begin{array}{l} K_n = \dfrac{me^4}{2k^2\hbar^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}; \quad U_n = -\dfrac{me^4}{k^2\hbar^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}; \quad E_n = -\dfrac{me^4}{2k^2\hbar^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}. \quad k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}. \\ K_1 = \ 13{,}6 \text{ еВ}; \quad U_1 = -27{,}2 \text{ еВ}; \quad E_1 = -13{,}6 \text{ еВ}; \quad E_i = \ 13{,}6 \text{ еВ}. \end{array} \right)$$

5.138 Радіус першої борівської орбіти електрона в атомі водню r = 0,53 Å. (1 Å = 10^{-10} м). Чому дорівнює період обертання T електрона навколо ядра по першій орбіті та індукція магнітного поля B, яке створює цей рух у центрі атома?

($T = 1{,}53\cdot10^{-16}$ с; $B \approx 12{,}4$ Тл.)

5.139 У скільки разів зменшується радіус електронної орбіти в борівській теорії атома водню при переході електрона з п’ятого енергетичного рівня на другий?

(6,25)

5.140 Хвильова функція (ψ - функція) електрона в основному стані атома водню має вигляд $\psi = A\exp(-r/r_1)$, де r_1 – перший борівський радіус. Визначити константу A.

$$\left(A = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} \right)$$

5.141 Для атома водню в основному стані (див. попередню задачу), визначити:

– густину імовірності $\mathrm{d}P/\mathrm{d}r$ просторової локалізації електрона в залежності від відстані r до ядра;
– найбільш імовірну відстань r_i електрона від ядра;
– середню відстань $\langle r \rangle$ електрона від ядра;
– середнє значення потенціальної енергії електрона $\langle U \rangle$.

$$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = \frac{4r^2}{r_1^3}\mathrm{e}^{-2r/r_1}; \quad r_i = r_1; \quad \langle r \rangle = \frac{3}{2}r_1; \quad \langle U \rangle = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \right)$$

5.142 Нормована хвильова функція електрона в основному стані атома водню має вигляд $\psi(r) = \left(1\big/\sqrt{\pi r_i^3}\right)e^{-r/r_i}$, де r_i – найбільш імовірна відстань електрона від ядра. Знайти:

– величину r_i і порівняти її з першим борівським радіусом;
– енергію E атома водню в основному стані.
Вказівка. *Записати рівняння Шрьодінгера для атома водню в сферичних координатах.*

5.143 При свіченні газорозрядної трубки з воднем електрони в збуджених атомах перебувають на всіх енергетичних рівнях включно з n-м. Підрахувати кількість ліній (частот) у спектрі випромінювання трубки.

$$\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

5.144 При переході електрона в атомі водню з одного енергетичного рівня на інший енергія атома зменшується на 1,89 еВ. Чому дорівнює довжина хвилі світла, що його випромінює атом?

(0,66 мкм)

5.145 Визначити частоту світла, що випромінює атом водню, при переході електрона на рівень з головним квантовим числом n = 2 , якщо радіус орбіти електрона змінився у дев’ять разів.

($7{,}31\cdot 10^{14}$ Гц)

5.146 Визначити номер спектральної серії атомарного водню n_1, усі лінії котрої лежать в інфрачервоній частині спектра $(\lambda \geq 0{,}8$ мкм$)$.

(≥ 3)

5.147 Вирахувати номер спектральної серії атомарного водню n_1, усі лінії котрої лежать в ультрафіолетовій частині спектра $(\lambda \leq 0{,}4$ мкм$)$.

(1)

5.148 Визначити довжину хвилі короткохвильовій межі та спектральну область випромінювання атомарного водню для серії Лаймана (n_1 = 1), Бальмера (n_1 = 2) і Пашена (n_1 = 3).

(λ_1 = 91 нм, *далека ультрафіолетова*;
λ_2 = 364 нм, *близька ультрафіолетова*;
λ_3 = 820 нм, *близька інфрачервона.)*

5.149 Найбільша довжина хвилі випромінювання атомарного водню у видимій частині спектра (0,4 ÷ 0,8 мкм) становить λ_1 = 0,66 мкм. Визначити довжини хвилі всіх інших спектральних ліній, що потрапляють у видиму область спектра.

(λ_2 = 0,49 мкм; λ_3 = 0,43 мкм; λ_4 = 0,41 мкм.)

5.150 Довжини хвиль у спектрі воднеподібних іонів деякого хімічного елемента в 4 рази коротші, ніж в атомарного водню. Який це елемент?

(*гелій*)

5.151 Визначити, в якого з воднеподібних іонів різниця довжин хвилі головних ліній в перших двох серіях дорівнює 133,6 нм.

($Z = 2$, *іон* He^+)

5.152 Яку довжину хвилі має мати світло, що є здатне іонізувати атом водню?

($\lambda \leq 91$нм)

5.153 У деякому атомі енергія валентного електрона в незбудженому (основному) стані $E_1 = -3{,}8$ еВ. Чому дорівнює потенціал іонізації φ_i цього атома?

$\left(\varphi_i = -(E_1/e) = 3{,}8 \text{ В} \right)$

5.154 Виходячи з того, що перший потенціал збудження атома водню $\varphi_1 = 10{,}2$ В, знайти довжину хвилі головної лінії H_α в серії Бальмера.

($\lambda_\alpha = 656$ нм)

5.155 Енергія зв'язку електрона в основному стані атома гелію ($Z = 2$) $E_0 = 24{,}6$ еВ. Знайти енергію, що є необхідна для послідовного видалення з нього обох електронів.

(79 еВ)

5.156 Знайти швидкість електронів, що вириваються електромагнітним випромінюванням з довжиною хвилі $\lambda = 18$ нм з нерухомих іонів He^+ в основному стані.

($v = 2{,}3 \cdot 10^6$ м/с)

5.157 Атом водню, що перебуває в спокої, випромінює фотон, який відповідає головній лінії серії Лаймана ($n_1 = 1$). Знайти:

– швидкість "віддачі", яку при цьому отримує атом;
– похибку (%), якої ми припускаємося при розрахунку довжини хвилі випромінювання, не враховуючи ефекту віддачі.

(≈ 3 м/с; $\approx 5 \cdot 10^{-6}$ %)

5.158 Електрон, який пройшов прискорюючи різницю потенціалів 18 В, влучає в нерухомий незбуджений атом водню й відлітає у зворотньому напрямку зі швидкістю $1{,}66 \cdot 10^6$ м/с. Знайти довжину хвилі фотона, що його випромінює атом унаслідок зіткнення. Кінетичну енергію, яку отримує атом при зіткненні, не брати до уваги.

(122нм)

5.159 При опроміненні атомарного водню ультрафіолетовим світлом $\lambda =$ 85 нм спостерігається фотоіонізація (виривання електронів з атомів). Яку швидкість мають вирвані електрони?

($6 \cdot 10^5$ м/с)

5.160 Випромінювання атомарного водню падає нормально на дифракційну ґратку з періодом 5 мкм. При цьому одна із спектральних ліній в дифракційному спектрі п'ятого порядку спостерігається під кутом дифракції 41°. Електронні переходи між якими енергетичними рівнями n_1 і n_2 атома відповідають за цю лінію?

$$\left(n_1 = 3, \quad n_2 = 2\right)$$

5.161 Визначити абсолютну $\Delta\lambda$ та відносну $\eta = \Delta\lambda/\lambda$ величину нормального зеєманівського розщеплення лінії λ_α = 656 нм у спектрі атомарного водню, при вміщенні в магнітне поле *B* = 0,5 Тл.

$$\left(\Delta\lambda = eB\lambda^2/4\pi mc = 10^{-11}\text{м}, \quad \eta \approx 1{,}5\cdot 10^{-5}\right)$$

5.162 Яку максимальну кількість електронів можуть містити *K*-, *L*- та *M*-оболонка атома?

(2; 8; 18)

5.163 Атом якого хімічного елемента містить тільки повністю заповнені *K*- і *L*-оболонки?

(*Z* = 10, *неон*)

5.164 В атомі якого хімічного елемента в зовнішній *M*-оболонці присутня лише повністю заповнена *S*-підоболонка?

(12, *магній*).

5.165 За допомогою закону Мозлі обчислити довжину хвилі K_α-лінії в характеристичному рентгенівському спектрі наступних легких елементів: алюміній (*Z* = 13), ванадій (*Z* = 23), кобальт (*Z* = 27).

(843 пм, 251 пм, 180 пм.)

5.166 В якого легкого елемента довжина хвилі K_α- лінії характеристичного випромінювання $\lambda_{K_\alpha} = 1{,}21$ нм?

(*Z* =11, *натрій*)

5.167 У деякого легкого елемента довжина хвилі перших двох ліній *K*-серії дорівнює $\lambda_{K_\alpha} = 275$ пм і $\lambda_{K_\beta} = 251$ пм. Знайти довжину хвилі λ_{L_α} першої лінії *L*-серії. Який це елемент?

$$\left(\lambda_{L_\alpha} = \frac{\lambda_{K_\alpha}\lambda_{K_\beta}}{\lambda_{K_\alpha} - \lambda_{K_\beta}} = 0{,}29\ \text{нм}; \quad Z = 1 + \sqrt{\frac{8\pi c}{3R\lambda_{K_\alpha}}} = 22,\ \textit{титан}\right)$$

5.168 В якого легкого елемента різниця енергій зв'язку електрона в *K*- і *L*-оболонках складає $\Delta E = 6{,}9$ кеВ?

$$\left(Z = 1 + \sqrt{\frac{4\Delta E}{3\hbar R}} = 27,\ \textit{кобальт}\ \text{Co}\right)$$

5.169 Довжина хвилі короткохвильової межі *K*-серії характеристичного спектра для титану $\lambda = 249$ пм. Знайти енергію зв'язку електронів у *L*-оболонці атома титану ($Z = 22$).

(0,46 кеВ)

5.170 Рентгенівська трубка з мідним (Z = 29) антикатодом працює при напрузі U = 10 кВ. Визначити:

– а) довжину хвилі коротковхвильової межі спектра гальмівного рентгенівського випромінювання;
– б) чи спостерігатимуться лінії K-серії в характеристичному спектрі міді, якщо довжина хвилі коротковхвильової межі K- серії λ = 138 пм?
– в) на якій відстані $\Delta\lambda$ від межі суцільного спектра знаходитиметься лінія K_α?

(а) 123 пм, б) *так*, в) $\Delta\lambda = 32$ пм)

5.171 Антикатод рентгенівської трубки вкритий ванадієм (Z = 23), для якого довжина хвилі коротковхвильової межі K-серії дорівнює 227 пм. Яку найменшу напругу потрібно прикласти до цієї трубки, аби в її характеристичному рентгенівському спектрі спостерігалися лінії K- і L- серій?

(5,46 кВ; 0,52 кВ)

5.172 У характеристичному спектрі рентгенівської трубки з мідним антикатодом (Z = 29) лінії L-серії починають з'являтися при напрузі U_1 = 1,05 кВ. При якій найменшій напрузі U_2 у спектрі з'являться лінії K-серії?

(≈ 8кеВ)

Фізичні константи

Швидкість світла у вакуумі	$c = 3\cdot10^{8}$ м/с
Стала Планка	$h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с
	$\hbar = h/2\pi = 1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с
Елементарний заряд	$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
Маса електрона	$m_e = \begin{cases} 9{,}11\cdot10^{-31}\text{ кг} \\ 0{,}511\text{ Мев} \end{cases}$
Маса протона	$m_p = \begin{cases} 1{,}67\cdot10^{-27}\text{ кг} \\ 938{,}26\text{ Мев} \end{cases}$
Магнетон Бора	$\mu_Б = 9{,}27\cdot10^{-24}$ Дж/Тл
Комптонівська довжина хвилі електрона	$\lambda_c = 2{,}43\cdot10^{-12}$ м
Стала Рідберга	$R = 2{,}07\cdot10^{16}$ с$^{-1}$
Електрична стала	$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м
	$1/4\pi\varepsilon_0 = 9\cdot10^{9}$ м/Ф
Магнітна стала	$\mu_0 = 1{,}257\cdot10^{-6}$ Гн/м
	$\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ Гн/м
Електрон-вольт	1 еВ = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж
Стала Авогадро	$N_А = 6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Стала Больцмана	$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К
Універсальна газова стала	$R = 8{,}31$ Дж/(моль·К)

Відомості з диференціювання та інтегрування

1. Скалярну a або векторну $\vec{k}$ сталу можна виносити з-під знаку похідної та інтеграла:

$$f(x) = a\vec{k}\varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} = a\vec{k}\frac{d\varphi(x)}{dx}; \qquad \int f(x)dx = a\vec{k}\int \varphi(x)dx.$$

2. Похідна (інтеграл) від суми функцій дорівнює сумі похідних (інтегралів) цих функцій:

$$f(x) = \varphi(x) + \phi(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\phi}{dx}; \qquad \int f(x)dx = \int \varphi(x)dx + \int \phi(x)dx.$$

3. Невизначений інтеграл функції $f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де C – довільної стала і $F(x)$ – первісна, тобто функція, для якої $f(x)$ є похідною:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

4. Визначений інтеграл функції $f(x)$ на заданому інтервалі $[x_1, x_2]$ дорівнює різниці значень первісної $F(x)$ на його межах (формула Ньютона-Лейбніца):

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1).$$

5. Визначений інтеграл геометрично відображається площею криволінійної трапеції, що утворена ділянкою графіка функції $f(x)$ на відрізку $[x_1, x_2]$.

6. Похідна функції $f(x) = \varphi(x)\cdot\phi(x)$:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}\cdot\phi + \varphi\cdot\frac{d\phi}{dx}$$

7. Похідна функції $f(x) = \varphi(x)/\phi(x)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\phi^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\cdot\phi - \varphi\cdot\frac{d\phi}{dx}\right)$$

8. Похідна складної функції (функції від функції) $f = f\left(\varphi(x)\right)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

9. Середнє значення функції $\left\langle f\left(x\right)\right\rangle$ на відрізку $X = x_2 - x_1$:

$$\left\langle f\left(x\right)\right\rangle = \frac{1}{X}\int_{x_1}^{x_2} f\left(x\right)dx$$

10. Похідні та первісні (інтеграли) деяких функцій

$f\left(x\right)$	$\left(df/dx\right)$	$\int f\left(x\right)dx$
$a = const$	0	ax
x^n $(n \neq -1)$	nx^{n-1}	$x^{n+1}/\left(n+1\right)$
$1/x$	$-1/x^2$	$\ln\lvert x\rvert$
e^{ax}	$a\,e^{x}$	e^{ax}/a
$\ln x$	$1/x$	$x\ln x - x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$1/\cos^2 x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-1/\sin^2 x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$