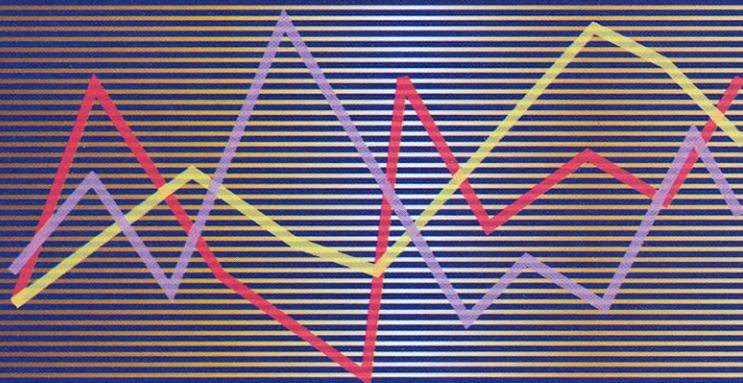


Г. В. Присенко, Є. І. Равікович

Прогнозування соціально- економічних процесів



1906-2006



До 100-річчя
Київського
національного
економічного
університету

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Г. В. Присенко, Є. І. Равікович

Прогнозування соціально- економічних процесів

Навчальний посібник

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Рецензенти:

О. П. Суслів, д-р екон. наук, проф.

(Український фінансово-економічний інститут)

О. А. Корольов, д-р екон. наук, проф.

(Київський національний торгово-економічний університет)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
лист № 14/18.2-2226 від 15.10.04*

Редакційна колегія факультету інформаційних систем і технологій

Голова редакційної колегії

Секретар редакційної колегії

Члени редакційної колегії

О. Д. Шарапов, канд. техн. наук, проф.

Д. Е. Семенов, асистент

В. В. Вітлінський, д-р екон. наук, проф.

В. К. Галіцин, д-р екон. наук, проф.

А. В. Головач, д-р екон. наук, проф.

А. М. Єріна, д-р екон. наук, проф.

С. Ф. Лазарева, канд. екон. наук, проф.

Р. М. Моторін, д-р екон. наук, проф.

С. І. Наконечний, канд. екон. наук, проф.

В. Ф. Ситник, д-р екон. наук, проф.

П. І. Верченко, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Ю. В. Коляда, канд. фіз.-мат. наук, доц.

В. В. Дем'яненко, канд. екон. наук, доц.

В. Д. Дербенцев, канд. екон. наук, доц.

О. О. Денісова, канд. екон. наук, доц.

О. Ф. Клименко, канд. екон. наук, доц.

Н. С. Орленко, канд. екон. наук, доц.

Присенко Г. В., Равікович Є. І.

П 75 Прогнозування соціально-економічних процесів: Навч. посіб. — К.: КНЕУ, 2005. — 378 с.

ISBN 966-574-739-8

Навчальний посібник розкриває суть, завдання та значення прогнозування соціально-економічних процесів. Розглянуто основні методи прогнозування: експертні, аналізу динаміки часових рядів, економіметричні. Проаналізовано теоретичні та впроваджені в практику моделі соціально-економічного прогнозування в Україні.

Призначено для студентів економічних спеціальностей вищих закладів освіти, аспірантів, слухачів системи підвищення кваліфікації. Буде корисним усім, хто матиме намір застосувати методи макроекономічного прогнозування на практиці.

ББК 65.012.2

*Розповсюджувати та тиражувати
без офіційного дозволу КНЕУ забороняється*

© Присенко Г. В.,
Равікович Є. І., 2005

© КНЕУ, 2005



МОДЕЛІ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ

ВСТУП

1 Соціально-економічні процеси країни як об'єкт прогнозування

1.1. Основні поняття, цілі та завдання прогнозування соціально-економічних процесів

Головною проблемою життєдіяльності будь-якої країни є успішний розвиток національної економіки з одночасною соціальною захищеністю населення. Рішення, які приймають керівні органи країн для управління економікою, незрідка зумовлюють негативні наслідки, тому передбачення цих наслідків і вибір найкращого шляху розв'язання в конкретній ситуації є головним завданням управління. З огляду на це підвищується роль науково обґрунтованих прогнозів.

Прогнози необхідні за двома основними причинами: майбутнє невизначене, і повний ефект від багатьох рішень, що приймаються зараз, не відчуватиметься впродовж певного часу.

Здатність передбачати перебіг подій у всіх народів здавна вважалася ознакою розуму та обдарованості — досить вдуматися у зміст слів «далекоглядний» і «недалекий», щоб переконатися в цьому. Кожна людина, незалежно від бажання, підсвідомо або свідомо прогнозує наслідки своїх дій, щоб запобігти негативним виявам їх і максимально використати позитивні умови майбутнього, а також мірою можливості змінити на краще передбачуване майбутнє. Наприклад, інвестор, який прийшов на фондову біржу, купує акції, сподіваючись на прибуток у вигляді дивідендів і підвищення вартості акцій у майбутньому, банкір купує на ф'ючерсному ринку іноземну валюту, щоб зменшити ризик збитків від коливання обмінного курсу. Прогнозу-

вання здійснюють уряд, державні підрозділи різного рівня, приватні організації та підприємства. Вони розв'язують однакові проблеми, а саме: аналізують темпи зростання внутрішньої та світової економіки, рівень інфляції, ціни й доступність праці та капіталу, рівень курсу обміну валюти тощо, адже точне передбачення майбутнього підвищує ефективність процесу прийняття рішення.

Джерело передбачення, його механізм завжди був надто загадковим, тож прашури без вагань відносили його до низки надприродних. На ранніх стадіях розвитку людського суспільства до **проорокувань** вдавалися окремі особи, які втілювали еліту (жерці, шамани тощо). Найвідомішою в історії стародавнього світу є група жерців із храму у Дельфах, так званий «дельфійський оракул». Із часом до процесу передбачення подій залучалося дедалі більше людей. Відмінність **прогнозу** від **проорокування** (віщування) полягає в тому, що прогноз має властивості наукового результату, тобто його можна обґрунтувати й повторити без автора. Пророцтво сприймають на віру — як данину. Між прогнозом і пророцтвом перебуває **експертна оцінка**, тобто прогноз фахівця в певній галузі, складений на підставі його уявлень стосовно аргументованого ймовірного розвитку прогнозованого процесу. Зазвичай, такий прогноз ураховує багато чинників, які слабо формалізуються або не підлягають вимірюванню, але більш-менш увиразнюються завдяки поясненням експерта.

Церква не визнає за наукою права на передбачення з принципових міркувань: передбачати майбутнє можна лише шляхом *«прозоріння через творця»*, але ніяк не емпірико-дедуктивним шляхом. Навпаки, класична наука в особі П. Лапласа проголосила цілковиту передбачуваність світу. *«Дайте нам миттєві координати і швидкість усіх молекул Всесвіту і ми передбачимо його долю»*. Класична механіка й справді змогла б усе це здійснити, якби діяла в класичному світі. Скажімо, в інженерно-технічних розробках майже завжди можна змодельовати результат, користуючись відомими законами. В економіці усе значно складніше, хоча й тут можна моделювати майбутнє, якщо нам відомі способи економіко-математичного прогнозування.

Закономірності прогнозування почали з'ясувати лише впродовж останніх десятиліть. Цей факт пояснюється слабкою потребою в минулому практичної економіки в прогнозах, які б відображали реакцію об'єкта на управління. Постійний соціально-економічний розвиток суспільства потребує невпинного ускладнення процедури управління. За ринкових умов прогнозування стає одним із вирішальних наукових чинників формулювання стратегії й тактики суспільного розвитку. Соціально-економічні прогнози необхідні для визначення можливих цілей розвитку су-

спільства, забезпечення досягнення їх, сприяють зростанню економічних ресурсів для здійснення найімовірніших та економічно ефективних варіантів довготермінових, середньотермінових і поточних програм, обґрунтуванню основних напрямів економічної й технічної політики, вможливають передбачення наслідків рішень і заходів, що їх вживають у кожен поточний момент.

У наш час прогнозування соціально-економічних процесів сформувалося у спеціальність, виникла нова галузь науки зі своєю специфічною методологією. У розвинених країнах створено інститути прогнозування суспільного розвитку. Розроблення теорії та методів прогнозування соціально-економічної сфери дає змогу уникати експериментів над живими людьми, застосування нових технологій і сучасної обчислювальної техніки в цій царині, забезпечує вибір раціонального способу управління суспільством.

Розгляду сучасних методів і моделей прогнозування соціально-економічних процесів присвячено пропонований курс.

Прогнозування соціально-економічних процесів (СЕП) — це наукова дисципліна, яка вивчає розроблення прогнозів розвитку національної економіки та соціальної сфери в майбутньому, ґрунтується на науковому пізнанні соціально-економічних явищ і використанні всієї сукупності методів, засобів і можливостей прогностики.

Прогноз — науково обґрунтоване судження стосовно можливих станів об'єкта в майбутньому, альтернативні шляхи й терміни їх здійснення. Прогноз має випадковий характер, та оскільки він будується на підставі аргументованих наукових уявлень про стан і розвиток об'єкта, здійснення його є доволі ймовірним. Самі розробники прогнозу оцінюють його як очікуваний, імовірний стан об'єкта в майбутньому.

Процес розроблення прогнозів називають *прогнозуванням*. Подібно до будь-якого процесу трудової діяльності (зокрема й творчої) характер прогнозування визначають його суб'єкт і об'єкт, застосовувані засоби й методи, а також навколишнє середовище.

Суб'єктами прогнозування соціально-економічного розвитку є органи державної влади й місцевого самоврядування, корпорації й підприємства, також науково-дослідні й консалтингові організації, окремі експерти, яких залучають для розроблення й упровадження прогнозів.

Об'єктом соціально-економічного прогнозування є соціально-економічні процеси (СЕП)¹ — тобто сукупність економічних

¹ Процес — послідовна зміна станів або явищ, що відбувається закономірним порядком; перебіг розвитку чого-небудь.

і соціальних процесів формування та функціонування соціально-економічної системи, які характеризують динаміку зміни її параметрів на певному рівні господарювання [32].

Економічні (природні) процеси — це процеси між людиною та природою, які здійснюються за допомогою засобів праці з метою створення матеріальних продуктів виробничих процесів, або інтелектуальних продуктів — інформаційних та інноваційних процесів.

Соціальні (суспільні) процеси — це процеси взаємовідносин між людьми щодо забезпечення виробництва або придбання та споживання створених продуктів. Соціальні (суспільні) процеси формують сферу соціальної економіки, яка охоплює соціальні технології та пов'язані із ними політичні й організаційні процеси.

Взаємодія різноманітних процесів зумовлює утворення комбінованих видів: інформаційно-економічних, виробничо-економічних, інноваційно-економічних (у сфері природних процесів), політико-економічних, соціально-економічних та організаційно-економічних (у сфері суспільних процесів). Зв'язок між природними й суспільними процесами опосередковують процеси ринкового та інституціонального регулювання (див. рис. 1.1.1).

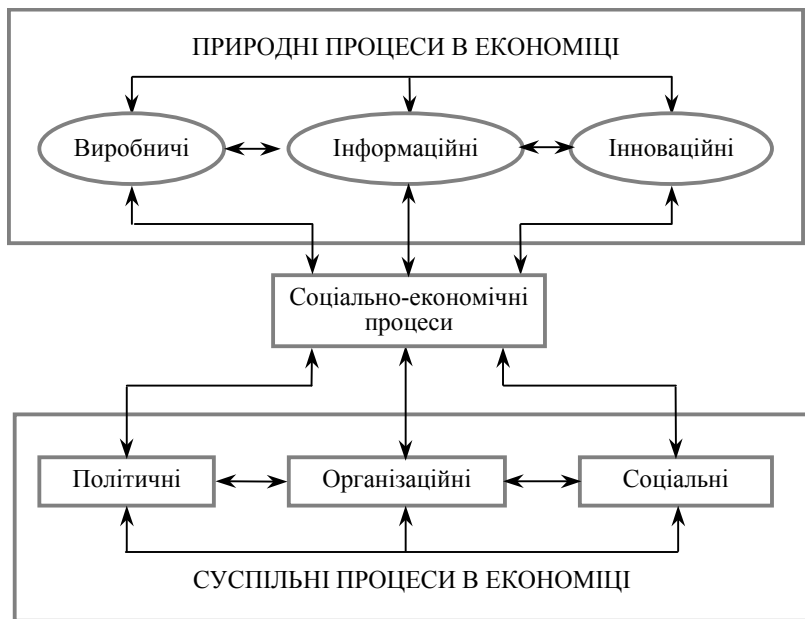


Рис. 1.1.1. Соціально-економічні процеси та їхній взаємозв'язок із іншими процесами в економіці

Предметом соціально-економічного прогнозування є пізнання закономірностей соціально-економічних процесів у майбутньому, дослідження способів розроблення прогнозів.

Метою соціально-економічного прогнозування є створення наукових передумов для прийняття управлінських рішень органами законодавчої та виконавчої влади, органами місцевого самоврядування. Ці передумови передбачають:

- науковий аналіз тенденцій зміни соціально-економічних процесів;
- варіантне передбачення розвитку соціально-економічних процесів з огляду на наявні тенденції й окреслену мету;
- оцінювання ймовірних наслідків ухвалюваних рішень;
- обґрунтування напрямів соціально-економічного та науково-технічного розвитку.

Завданням соціально-економічного прогнозування, з одного боку, є з'ясування перспективи найближчого або віддаленішого майбутнього, вважаючи на реальні процеси сьогодення, а з іншого — сприяння розробленню оптимальних програм і планів економічного та соціального розвитку об'єкта, що має ґрунтуватися на пропонуваному прогнозі й враховувати оцінку прийнятого рішення з позицій його наслідків у прогнозованому періоді.

Розглянемо детальніше сутність і мету розвитку соціально-економічної системи.

Соціально-економічну систему країни (СЕС) можна визначити як систему соціальних і економічних відносин у процесі виробництва, обміну, розподілу та споживання соціальних і матеріальних благ.

СЕС характеризується різноманітністю елементів, властивостей та відносин і може розглядатися як відносно відокремлена система, пов'язана своїми входами й виходами із зовнішнім середовищем.

Соціально-економічні процеси характеризуються динамікою зміни початкових (вхідних) і похідних (розрахункових) показників ефективності функціонування соціально-економічної системи за рівнем використання наявних виробничих потужностей та інших ресурсів, конкурентоспроможності продукції й обсягу її виробництва (зокрема й на експорт), рівня прибутку й платоспроможності, ефективності праці (включно із критеріями дохідності) та рівня його оплати. На підставі аналізу й оцінювання показників фактичного стану економіки прогнозують можливі зміни їх з огляду на науково-технічні та соціальні чинники у стратегічному й тактичному розумінні залежно від усталених тенденцій зміни ринкових ситуацій, зумовлених об'єктивними соціально-економічними процесами.

Засадовими *цілями розвитку СЕС* країни є:

- всебічний розвиток особистості, створення для кожного члена суспільства мінімальних умов, які забезпечують його свободу й безпеку;
- динамічний та ефективний розвиток країни;
- забезпечення національної безпеки країни в усіх аспектах — політичному, економічному (зокрема й продовольчому), соціальному, військово-стратегічному.

Цілі функціонування СЕС нерозривно пов'язані зі стратегією розвитку держави.

Стратегія соціально-економічного розвитку — це наука і мистецтво розроблення сукупності концептуально взаємопов'язаних довготермінових рішень, спрямованих на системне використання політичних, економічних, технологічних, соціальних, психологічних, організаційних та управлінських чинників для реалізації соціально-економічної політики, здійснюваної органами виконавчої влади в межах чинного законодавства [32].

Стратегія соціального розвитку невід'ємна від стратегії економічного розвитку. Це зумовлено спільною глобальною метою стратегії соціально-економічного розвитку на сучасному етапі — *забезпечити стале економічне зростання за умов випереджувальних темпів зростання реальних доходів громадян і використання їхнього трудового потенціалу*. Така постановка глобальної мети пов'язана із тим, що головним чинником, що об'єктивно стримує розвиток виробництва споживчих товарів і послуг, є неприпустимо низький рівень платоспроможного попиту більшості населення і невпинне відставання від розвинених країн за рівнем продуктивності й ефективності праці.

З огляду на ситуацію, що характеризується кризовим станом економіки та рівня життя населення й сфери праці, визначають цілі й підцілі соціально-економічного розвитку. Схематично це можна представити у вигляді дерева цілей (див. рис. 1.1.2).

Реалізація вказаних цілей зумовлена похідними від них підцілями, досягнення яких передбачає підвищення рівня ефективності функціонування усієї СЕС. Так, *для забезпечення сталого економічного зростання* необхідна ефективніша економіка, тобто підвищення віддачі на 1 гривню вкладених основних і оборотних коштів на кожному рівні господарювання за рахунок розвитку підприємництва і комплексного використання науково-технологічних, організаційних, структурних і соціальних чинників забезпечення конкурентоспроможності товарів і послуг, призначених для реалізації. *Для відтворення і зростання людського*

капіталу необхідна ефективна праця, тобто зростання її продуктивності, ефективності й дохідності за одночасного зростання оплати праці шляхом підвищення рівня знань і вмій працівників, гуманізації умов праці, застосування прогресивних технологій і норм, стимулювання творчих трудових досягнень. Для зростання реальних доходів населення потрібен ефективний соціальний захист, тобто підвищення надійності систем гарантій соціального забезпечення громадян на засадах нагромадження й адресного використання відповідних фондів з урахуванням наявних обсягів і результатів праці, розвитку страхування та сфери соціальних послуг.

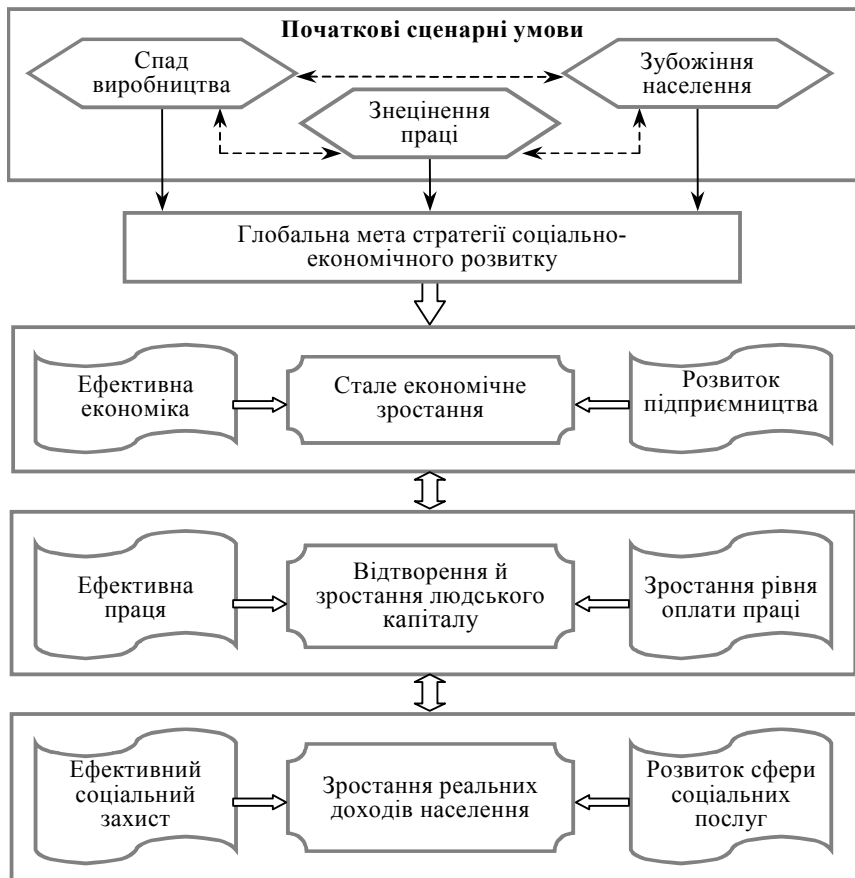


Рис. 1.1.2. Дерево цілей соціально-економічного розвитку [32]

Основним інструментом досягнення стратегічних цілей економічного росту й соціального розвитку є ефективне функціонування СЕС. Це зумовлено двома обставинами:

по-перше, тим, що загальною і суттєвою причиною тривалої системної кризи об'єктивно є неефективність розв'язання економічних і соціальних проблем на всіх рівнях господарювання, внаслідок чого більшість підприємств або не працюють, або перебувають на межі банкрутства, не відтворюється рівень реальної заробітної плати й реальних доходів населення;

по-друге, об'єктивною необхідністю пошуку оптимальних економічних і соціальних рішень, визначення шляхів підвищення їх ефективності за кількісними та якісними критеріями результативності, економічності витрат і стабільності забезпечення життєво важливих умов — безпеки, добробуту і справедливості.

Кожному рівню господарювання відповідають характерні саме для нього умови економічного зростання.

Для мікрорівня це:

- ефективне використання ресурсів;
- ефективна зайнятість робітників і суцільна економія робочого часу;
- раціональне використання сировини й матеріалів;
- застосування безвідходних технологій;
- скорочення виробничих запасів;
- раціональне використання виробничих потужностей;
- дотримання екологічних вимог.

Для сфери господарювання, що відповідає мезорівню, найважливішими умовами економічного зростання є розвиток підприємництва:

- розширення практики внутрішнього підприємництва на наявних підприємствах;
- створення нових підприємств і робочих місць;
- розвиток венчурного підприємництва.

Умовами економічного зростання на макрорівні є:

- оптимізація економічного середовища, що забезпечує створення необхідних стимулів для залучення інвесторів;
- отримання короткотермінових кредитів під низький відсоток;
- зниження податкових норм за рахунок розширення податкової бази;
- підвищення зайнятості й зниження безробіття шляхом вивільнення частини коштів фонду соціальної допомоги безробітним.

Реалізація перелічених умов економічного зростання потребує створення необхідного науково-методичного підґрунтя. Ефективне використання ресурсів потребує інженерного забезпечення у

формі відповідних технологій. Розвитку підприємництва сприятиме створення економічних механізмів, що забезпечують залучення інвестицій у необхідну матеріально-технічну базу нових підприємств. Оптимальне сприяння економічного оточення пов'язане із забезпеченням інституціональної підтримки у формі соціально-економічних норм і нормативів, які орієнтують на стимулювання економічного зростання.

Системний розгляд понять економічного зростання і умов його досягнення дає змогу вирізнити два принципові напрями розв'язання проблем (рис. 1.1.3).

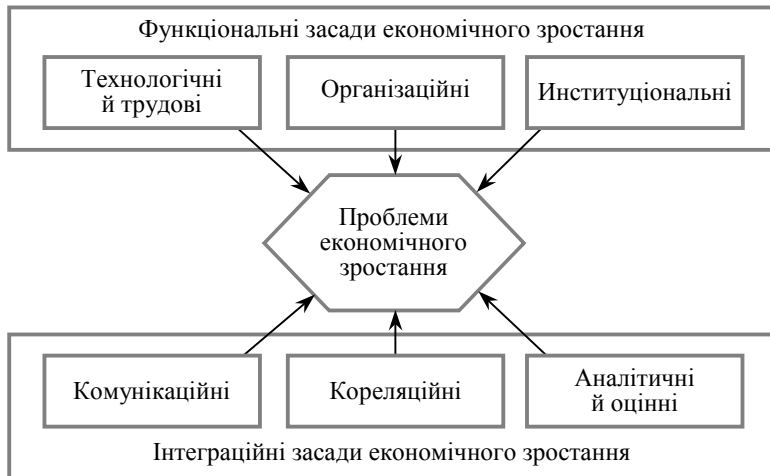


Рис. 1.1.3. Проблеми формування функціональних та інтеграційних засад економічного зростання

Перший напрям стосується функціональних засад (або аспектів) і ґрунтується на розглянутих вище чинниках, суб'єктах господарювання й принципових положеннях трудової теорії економічного зростання, якими є технологічні, трудові, підприємницькі та інституціонально-стимулювальні.

Другий напрям, що охоплює інтеграційні засади економічного зростання, ґрунтується на положенні про те, що кожен із названих функціональних засад можна реалізувати стосовно всіх економічних суб'єктів лише за умови встановлення між ними необхідного зв'язку (комунікаційні засади), відносного рівня впливу на економічне зростання (кореляційні засади) й одержання результатів (аналітичні й оцінні засади). Розроблення функціональних та інтеграційних засад економічного зростання слугує теоретичним під-

рунття проектування відповідних систем і прикладних програм технології, організації й стимулювання економічного зростання.

Управління соціально-економічними процесами становить сукупність управлінських рішень та дій, спрямованих на створення умов для здійснення потрібних змін в економіці й соціальній сфері. Головний принцип формування функцій управління у цьому разі полягає в тому, що соціально-економічні процеси, висвітлюючи динаміку стану економіки та соціальної сфери в режимі реального часу, водночас відіграють роль не лише об'єктів управління, а й заходів утілення їх. Окрім того, специфіка управління соціально-економічними процесами, на відміну від управління виробничими процесами, полягає в аналітичному, дослідницькому характері пошуку рішень у поєднанні з оперативністю реалізації їх, що визначає необхідність підготовки економістів-аналітиків широкого профілю, зорієнтованих на управління соціально-економічними процесами в усіх секторах економіки.

За цих умов **основні функції управління соціально-економічними процесами** можна визначити як етапи управлінського циклу, оскільки кожен із них характеризується досягненням певної проміжної мети у межах вирішуваних функціональних завдань. Перелік основних функцій управління соціально-економічними процесами в їх послідовності та з урахуванням зворотного зв'язку схематично представлено на рис. 1.1.4.



Рис. 1.1.4. Основні функції управління соціально-економічними процесами

Перша функція управління СЕП — *аналіз та оцінювання* цих процесів з метою виявлення фактичного стану досліджуваної економічної системи (підприємства, фірми, галузі, регіону) за усталеними позитивним й негативним критеріями. Ця функція здійснюється шляхом систематичного проведення моніторингу за даними статистичної звітності й безпосереднього вивчення економічних і соціальних процесів на підприємствах і фірмах, зважаючи на дію чинників ринкового та інституціонального регулювання. При цьому використовують первинні й похідні (розрахункові) показники, для яких можлива кількісна оцінка. До них належать такі показники:

- номінальний і реальний валовий внутрішній продукт, його структура за напрямом використання;

- співвідношення попиту й пропозиції на споживчі та інвестиційні товари;

- капітальні вкладення та їхня структура;

- обсяг продукції та її реалізації;

- індекси цін;

- питома вага збиткових підприємств;

- податки;

- заборгованість покупців постачальникам за кредитами банків, включно із простроченою;

- прожитковий мінімум;

- обсяг грошових доходів;

- середньомісячна заробітна плата в розрахунку на одного працівників;

- обсяг трудових ресурсів в економіці;

- чисельність безробітних тощо.

Окрім того, рекомендується використовувати якісні оцінки чинників, які не підлягають кількісному вимірюванню.

Друга функція — *прогнозування тенденцій розвитку* наявних економічних процесів, ґрунтоване на результатах їхнього аналізу й оцінювання. Розроблення прогнозу очікуваних змін стану економіки на досліджуваному рівні здійснюють у двох варіантах:

- розглядають очікувані показники за збереження наявних зовнішніх умов (кон'юнктура ринку та політика інституціонального регулювання), а також внутрішніх чинників (структурні й технологічні зміни), тобто вдаються до простої екстраполяції показників;

- з урахуванням вказаних чинників, за наявності низки варіантів прогнозу, кожен із них має супроводжуватися оцінюван-

ням імовірних економічних та соціальних наслідків залежно від терміну, на який розраховано прогноз, та від його призначення: (довготерміновий потрібен для розроблення стратегічних рішень; короткотерміновий — для рішень поточного тактичного характеру).

Третя функція — *стратегічне планування розвитку* економічних та соціальних процесів. Ця функція має за мету визначити, обґрунтувати й запропонувати оптимальні рішення стосовно вибору пріоритетних напрямів позитивної зміни перебігу економічних процесів шляхом вжиття заходів антикризового регулювання для забезпечення курсу економічного зростання у прогнозованому періоді.

Четверта функція — *організація процесів соціально-економічного регулювання*. Вона полягає в розробленні й удосконаленні економічних механізмів, призначених для цілеспрямованої зміни наявної практики відповідно до прийнятих напрямів стратегічного планування та з огляду на реальний стан економіки.

П'ята функція — *реалізація проектних і нормативних рішень* для досягнення поставленої мети. Головна форма реалізації — розроблення й затвердження програм введення нових економічних механізмів (і коригування наявних), а також пов'язаних із ними процесів економічного регулювання із використанням нормативних методів (або, за відсутності останніх, — аналітичних). Розглянута функція, подібно до зворотного зв'язку, слугує логічним підґрунтям для контролю над перебігом реалізації рішень, відповідного коригування та здійснення першої функції — аналізу й оцінювання соціально-економічних процесів.

Перехід до сталого розвитку СЕС потребує скоординованих дій в усіх сферах життя суспільства, відповідної переорієнтації соціальних, економічних та екологічних інститутів держави.

Державне управління процесом переходу до сталого розвитку передбачає розроблення системи програмних і прогнозних документів:

- державної стратегії дій тривалого характеру; довготермінових і середньотермінових прогнозів, складовим елементом яких є прогнози змін навколишнього середовища й окремих екосистем унаслідок господарської діяльності;
- короткотермінові прогнози і програми галузевого, регіонального (територіального) і державного рівнів. При цьому однією із

важливих умов є створення злагодженої системи взаємодії «центр — регіони», яка передбачає формування ефективної просторової структури економіки країни за дотримання балансу зацікавленості всіх суб'єктів господарювання, що доводить необхідність розроблення й реалізації програм переходу до сталого розвитку для кожного регіону, а також подальшої інтеграції цих програм у процесі розроблення державної політики у напрямі сталого розвитку.

Невід'ємною частиною концепції сталого розвитку є система індикаторів, розроблена однойменною Комісією ООН¹. На підставі національних і міжнародних пропозицій щодо розроблення й застосування індикаторів Комісія у 1995 році ухвалила робочу програму введення індикаторів для сталого розвитку. Програма містить попередній набір із 130 індикаторів. Для полегшення застосування та перевірки прийнятності їх були розроблені методологічні поради щодо кожного індикатора.

Індикатори відрізняються за рівнем спонукальної сили (*Driving Force*), тобто належністю до чинників, характеристики стану (*State*) та реагування, тобто зворотної реакції відповідної структури (*Response Framework*). Призначені вони для використання країнами на національному рівні в процесі ухвалення державних рішень. Не всі індикатори можуть бути застосовані в будь-якій ситуації, тобто країни можуть обирати для використання ті індикатори, які більшою мірою відповідають пріоритетам, цілям і завданням. Методологічні поради містять необхідну інформацію стосовно поняття, значення, вимірювання та джерела даних за кожним індикатором для полегшення збирання й аналізу даних.

Індикатори сталого розвитку можуть слугувати підґрунтям формування сценарних умов для прогнозування розвитку соціальної економіки. Під сценарними умовами розуміють сукупність індикаторів, які за кожним завданням або функцією (напрямом) прогнозування характеризують чинники, що впливають на розвиток об'єктів; оцінку стану об'єктів; оцінку заходів щодо реагування на зміну стану об'єктів.

¹ Indicators Sustainable Development. Framework and Metodologies. United Nations. — New York, 1996.

Таблиця 1.1

Цільові завдання (функції)	Індикатори чинників	Індикатори стану	Індикатори реагування
1. Економічні індикатори			
1. Міжнародна співпраця з метою пришвидшення сталого розвитку в країнах і відповідна внутрішня політика	<ul style="list-style-type: none"> • ВВП на душу населення • Частка чистих інвестицій у ВВП • Сума експорту та імпорту у відсотках до ВВП 	<ul style="list-style-type: none"> • Чистий внутрішній продукт з урахуванням зовнішнього оточення • Частка вироблених товарів у загальному обсязі експорту 	
2. Зміна моделей споживання	<ul style="list-style-type: none"> • Річне споживання енергії • Частка промислового видобування природних ресурсів у виробництві готової продукції 	<ul style="list-style-type: none"> • Розвідані мінеральні ресурси • Розвідані паливно-енергетичні ресурси • Термін використання розвіданих ресурсів 	
		<ul style="list-style-type: none"> • Інтенсивність використання матеріалів • Частка виробництва додаткового продукту у ВВП • Частка споживання відновлюваних енергетичних ресурсів 	
3. Фінансові ресурси і механізми	<ul style="list-style-type: none"> • Частка трансфертів чистих ресурсів у ВНП • Загальне перевищення кредитів (виданих або отриманих) у відсотках від ВНП 	<ul style="list-style-type: none"> • Борг ВНП • Обслуговування боргу /експорт 	<ul style="list-style-type: none"> • Видатки на захист навколишнього середовища у відсотках від ВВП • Обсяг нових або додаткових фондів на сталий розвиток

<p>4. Передання екологічно чистої технології, співпраця та забезпечення продуктивності</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Імпорт технологічних товарів • Прямі іноземні інвестиції 	<ul style="list-style-type: none"> • Частка імпорту екологічно чистих технологічних товарів 	<ul style="list-style-type: none"> • Гранти технічної співпраці
--	---	--	--

2. Соціальні індикатори

<p>1. Боротьба із бідністю</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Відсоток безробіття 	<ul style="list-style-type: none"> • Індекс бідності (за кількістю осіб) • Індекс рівня бідності • Точний індекс рівня бідності • Індекс Джини (нерівності доходів) • Відношення середньої зарплати жінок і чоловіків 	
<p>2. Демографічна стабільність</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Відсоток зростання населення • Відсоток чистої міграції • Відсоток народжуваності 	<ul style="list-style-type: none"> • Щільність населення 	
<p>3. Підтримка освіти, обізнаності суспільства та навчання, захист і підтримка здоров'я людини</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Відсоток населення шкільного віку • Зарахування до початкової школи (разом і сальдо) 	<ul style="list-style-type: none"> • Діти, які отримали високу оцінку за початкову освіту • Очікуваний результат шкільного життя • Очікувана тривалість життя • Відсоток дитячої смертності тощо 	<ul style="list-style-type: none"> • Частка витрат ВВП на освіту • Національний фонд здоров'я, що фінансується місцевими органами • Частка національного фонду здоров'я у ВВП

Закінчення табл. 1.1

Цільові завдання (функції)	Індикатори чинників	Індикатори стану	Індикатори реагування
3. Екологічні індикатори			
1. Захист якості та забезпечення ресурсами прісної води	<ul style="list-style-type: none"> • Річний обсяг ґрунтової і поверхневої води, не придатної до споживання • Внутрішнє споживання води на душу населення 	<ul style="list-style-type: none"> • Ресурси ґрунтової води • Концентрація фекальних речовин у прісній воді • Потреба біохімічного кисневого очищення водних басейнів 	<ul style="list-style-type: none"> • Укриття стічної води • Щільність гідрологічних мереж
2. Захист океанів, морів і узбережної зони	<ul style="list-style-type: none"> • Зростання населення в узбережних зонах • Виток нафти в узбережні води • Виток азоту й фосфору в узбережні води 	<ul style="list-style-type: none"> • Максимально стійкий вилов риби • Індекс Algae 	
3. Інтегральний підхід до планування й управління земляними ресурсами	<ul style="list-style-type: none"> • Зміни користування землею 	<ul style="list-style-type: none"> • Зміни стану ґрунтів 	<ul style="list-style-type: none"> • Централізоване управління природними ресурсами на місцевому рівні
4. Забезпечення сталого сільського господарства та розвитку села	<ul style="list-style-type: none"> • Застосування сільськогосподарських пестицидів • Застосування добрив • Відсоток іригації орних земель • Використання енергії у сільському господарстві 	<ul style="list-style-type: none"> • Орні землі на душу населення • Зона, що підлягає засоленню й затопленню 	<ul style="list-style-type: none"> • Сільськогосподарська освіта
5. Захист атмосфери тощо	<ul style="list-style-type: none"> • Виділення газів від теплиць (випаровування) • Виділення окису сірки • Виділення окису азоту • Споживання озонопоглиналих речовин 	<ul style="list-style-type: none"> • Концентрації забруднень навколо міських зон 	<ul style="list-style-type: none"> • Видатки на зменшення рівня забруднення повітря

Модель процесу подолання негативних соціальних наслідків економічної кризи і формування позитивних тенденцій соціально-економічного розвитку із поступовим переходом до фази економічного зростання схематично можна представити так (див. рис. 1.1.5):

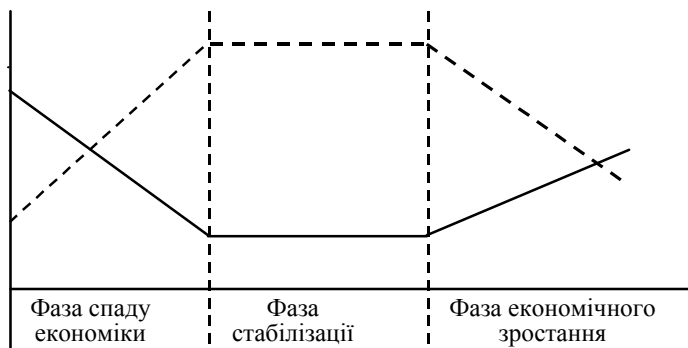


Рис. 1.1.5. Схема процесу руху економічних і соціальних індикаторів

Найважливішим інструментом аналізу, прогнозування й розроблення стратегії макроекономічного регулювання та розвитку є система соціальних нормативів (стандартів) і норм, які впроваджуються державними органами виконавчої влади.

Під час визначення ефективності соціально-економічного розвитку на підставі реалізації ухвалених стратегічних рішень слід зважати на рівень оптимальності збалансованих співвідношень між частками коштів чистого прибутку, які асигнуються на виробництво та споживання, тобто на стимулювання економічних результатів діяльності підприємств з метою збільшення доходів працівників. Для цього можна встановити такий показник, як індекс розподілу доходів, який визначається часткою прибутку, що витрачається на формування інвестиційного фонду, тобто на розвиток матеріально-технічної бази економічної й соціальної діяльності.

Залежно від призначення і правового статусу соціальних нормативів і норм їх можна розподілити на три групи:

- соціальні нормативи й норми як обов'язкові мінімальні соціальні гарантії загальної прямої дії на всіх рівнях економіки;
- соціальні нормативи, рекомендовані як підґрунтя розроблення норм на мезоекономічному рівні з огляду на територіальну й галузеву специфіку;

- соціальні та соціотехнологічні нормативи, рекомендовані як підґрунтя розроблення норм на мікроекономічному рівні з огляду на конкретні умови підприємств і корпорацій.

Під час визначення найактуальніших видів соціально-трудо-вих нормативів, зважаючи на належність їх до конкретної групи, передусім слід визначити нормативи чинників зростання продуктивності (дохідності) праці як засадової умови нагромадження коштів для соціального розвитку. До таких нормативів належать:

- мінімально допустима частка чистого прибутку, що має направлятися на поліпшення фондівіддачі (використання наявних виробничих потужностей);

- збільшення обсягу ВВП (виробленої продукції), а також освоєння та розвиток виробництва нової продукції, яка користується перспективним попитом, зі створенням додаткових робочих місць за одночасного впровадження нормативів, які передбачають економічне зростання в розрахунку на одного працівника.

1.2. Методологія прогнозування соціально-економічних процесів

Сучасні умови господарювання потребують максимального розширення фронту прогнозування, подальшого вдосконалення методології та методики розроблення прогнозів. Чим вищий рівень прогнозування процесів суспільного розвитку, тим ефективніше регулювання й управління цими процесами в суспільстві.

Методологія прогнозування — це галузь знань про методи, способи та системи прогнозування.

Загальнотеоретичним підґрунтям прогнозування є спеціальна галузь — **прогностика**, що вивчає закономірності розроблення прогнозів [7]. Прогностика визначає також:

- **Методи прогнозування** — сукупність заходів і способів мислення, що вможливує на основі аналізу ретроспективних даних, екзогенних та ендогенних зв'язків об'єкта прогнозування, а також вимірювань їх у межах явища або процесу, що розглядається, ймовірний висновок стосовно майбутнього розвитку об'єкта.

- **Способи прогнозування** — отримання й оброблення інформації про майбутнє на підставі однорідних методів розроблення прогнозу.

• **Системи прогнозування** — впорядкована сукупність методик і технічних засобів, призначена для прогнозування складних явищ або процесів. Система прогнозування СЕС означає певну єдність методології, організації й розроблення прогнозів, що забезпечує узгодженість, послідовність і неперервність їх.

Більш загальним поняттям ніж прогнозування є передбачення. *Передбачення* як випереджувальне (завчасне) відображення дійсності, ґрунтоване на пізнанні законів природи, суспільства та мислення, залежно від рівня конкретизації й характеру впливу на перебіг досліджуваних процесів, має чотири форми: гіпотезу (загальнонаукове передбачення), прогноз, програму та план.

Гіпотеза характеризує наукове передбачення на рівні загальної теорії. Це означає, що початкову базу побудови гіпотези становлять теорія і відкриті на її основі закономірності й причиново-наслідкові зв'язки функціонування і розвитку досліджуваних об'єктів. На рівні гіпотези дають якісну характеристику останніх, яка відбиває загальні закономірності їхньої поведінки.

Прогноз порівняно з гіпотезою більш визначений, оскільки ґрунтується не лише на якісних, а й на кількісних параметрах, що дає змогу характеризувати майбутній стан об'єкта ще й кількісно. Прогноз — це передбачення на рівні конкретно-прикладної теорії. Отже, прогноз відрізняється від гіпотези меншою мірою невизначеності та більшою ймовірністю. Разом із тим, зв'язки прогнозу з досліджуваним об'єктом або явищем не є жорсткими, однозначними: прогноз має імовірнісний характер.

Програма являє собою висування певної мети і передбачення конкретних, детальних подій досліджуваного об'єкта. У ній фіксуються шляхи і засоби розвитку відповідно до поставлених завдань, обґрунтовуються ухвалені управлінські рішення. Головна відмінна риса її — визначеність завдань. Отже, в програмі передбачення дістає найбільшу конкретність і визначеність. Подібно до прогнозу, програма ґрунтується на результатах і досягненнях конкретно-прикладної теорії.

Форми передбачення тісно пов'язані у своїх виявах одна з одною та з досліджуваною системою управління та планування, і становлять послідовні щаблі пізнання поведінки об'єкта в майбутньому. Початок цього процесу — загальнонаукове передбачення стану об'єкта, останній етап — побудова плану переведення об'єкта в новий, планований для нього стан. Важливим засобом

цього слугує прогноз як єднальна ланка між загальнонауковим передбаченням і планом.

Хоча гіпотеза має найзагальніший характер, без неї неможливе жодне наукове управління та планування. Гіпотеза впливає на цей процес через прогноз і є важливим джерелом інформації для його побудови. У багатьох випадках гіпотеза виконує аналогічну роль безпосередньо під час розроблення планів.

Найтісніше прогнозування пов'язане із плануванням.

План і прогноз — це взаємодоповнювальні стадії планування за вирішальної ролі плану як провідної ланки управління суспільним виробництвом. При цьому прогноз виступає чинником, який орієнтує наявну практику на можливості розвитку в майбутньому, а прогнозування є інструментом розроблення планів. Форми поєднання прогнозу та плану можуть бути різними: прогноз може передувати розробленню плану (як правило), складатися після плану (прогнозування наслідків зафіксованого у плані рішення), здійснюватися в процесі розроблення плану.

Між прогнозом і планом існують і розбіжності. Головна з них полягає в тому, що план має директивний, а прогноз — імовірний характер. План — це однозначне рішення, зокрема й тоді, коли його розробляють на варіантній основі. Натомість прогноз за своєї сутністю має альтернативний, варіантний зміст. У цьому сенсі прогнозування становить дослідницьку базу планування, яка, втім, має власне методологічне й методичне підґрунтя та значною мірою відрізняється від планування. Розроблення прогнозів ґрунтується на прогностичних методах, тоді як планування спирається на більш строгі й точні методи балансових та інших розрахунків. Прогнозування й планування відрізняються й тим, що характеризують різні щаблі пізнання досліджуваного об'єкта, різні, хоча й взаємопов'язані, форми передбачення його майбутнього стану.

У проблемі прогнозування розрізняють два аспекти: теоретико-пізнавальний та управлінський, пов'язаний із можливістю прийняття на підставі набутого знання управлінських рішень (див. рис. 1.2.1). Конкретизація в цих випадках також набуває різних форм: власне передбачальну (прескриптивну, описову) і вказівну (прескриптивну, визначальну).

- Під *передбаченням* розуміють опис можливих чи бажаних перспектив, станів, розв'язань проблем майбутнього.

- *Вказівка* (рекомендація) дає спосіб розв'язання цих проблем, використання інформації про майбутнє в цілеспрямованій діяльності.

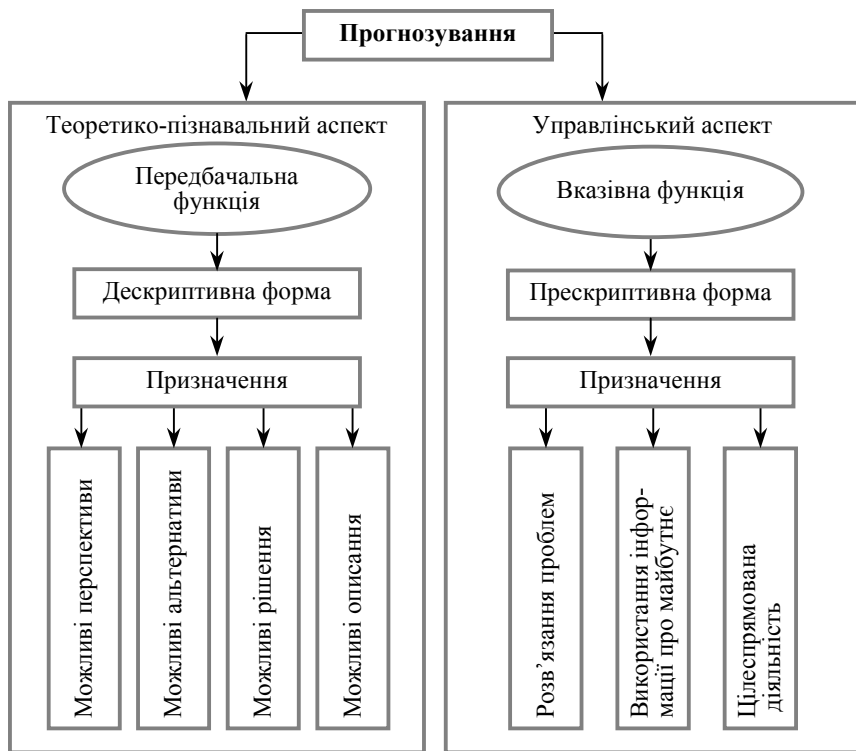


Рис. 1.2.1. Сутність прогнозування

Виходячи із загальноприйнятих понять теорії управління суспільними процесами, прогнозування відіграє провідну роль у системі управління процесами соціально-економічного розвитку як єдина ланка між об'єктивно необхідними функціями підготовки й реалізації відповідних рішень (див. рис. 1.2.2).

Функції підготовчого блоку мають дослідницький і аналітичний характер. До них належать такі:

- *інформація* — передбачає отримання поточних статистичних та аналітичних даних стосовно динаміки соціально-економічних процесів на відповідному рівні моніторингу, а також ознайомлення з новітнім досвідом і тенденціями в цій галузі;
- *цілеспрямованість* — полягає у встановленні системи конкретних цілей соціально-економічного розвитку стосовно певного календарного періоду, виходячи із загальнонаціональної мети — підвищення якості життя та зростання добробуту населення, гарантування його безпеки й соціальної справедливості;

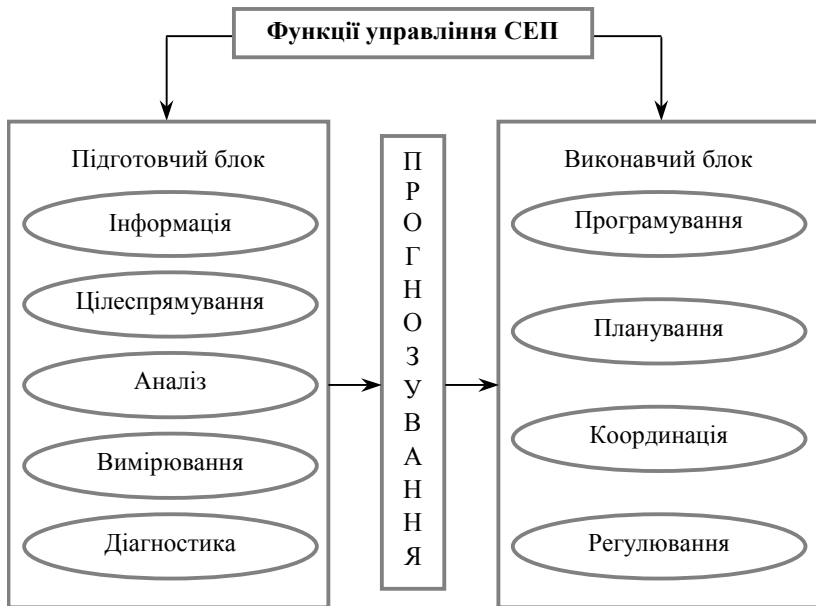


Рис. 1.2.2. Місце прогнозування серед функцій управління соціально-економічними процесами

- *аналіз* — передбачає вивчення й узагальнення одержаної інформації про динаміку соціально-економічних процесів у зіставленні з відповідними цільовими індикаторами;
- *вимірювання* передбачає створення та вдосконалення системи соціально-економічних показників (індикаторів) і методів кількісного оцінювання їх;
- *діагностика* — полягає в підготовці висновків і узагальнювального підсумку (на зразок аудиторського) щодо наявного стану та рівня соціально-економічного розвитку із визначенням позитивних і негативних чинників, які здійснили вплив на нього.

Прогнозування полягає в розробленні й обґрунтуванні можливих варіантів очікуваних змін соціально-економічної ситуації та їхніх наслідків під впливом внутрішніх і зовнішніх чинників. Тим самим прогнозування завершує підготовчий блок функцій управління соціально-економічними процесами, що передбачає розв’язання завдань прогнозування у комплексі з усіма попередніми функціями шляхом розроблення відповідних технологій їхнього виконання.

З іншого боку, прогнозування є підґрунтям здійснення функцій виконавчого блоку, які мають програмно-управлінський характер:

- *програмування* (тобто розроблення програм соціально-економічного розвитку);
- *планування* (укладання планів здійснення заходів, передбачених програмою);
- *регулювання* (внесення оперативних змін під час виконання програми).

Отже, стосовно якості та ефективності прогнозів соціально-економічного розвитку можна робити висновки мірою реалізації програм, які на них ґрунтуються.

Таким чином, усі функції управління соціально-економічними процесами становлять у сукупності цілісну систему узгодження й функціонального розподілу дій органів управління будь-яких рівнів.

Прогнозування соціально-економічного розвитку регіонів має виходити з необхідності науково обґрунтованого врахування загальноекономічних галузевих і регіональних пропорцій. У регіональному аспекті провідну роль відіграє соціальна домінанта розвитку економічних систем, оскільки регіони створюють передумови для всебічного розвитку індивіда, використовуючи для цього соціальні нормативи [32].

Якісне виконання функцій управління зумовлено рівнем обладнання й використання сучасних технологій і засобів комп'ютерної та телекомунікаційної техніки. Стосовно конкретного змісту й сфери впливу функцій управління на соціально-економічні процеси технологія, що розробляється, є механізмом виконання їх, який визначає послідовність операцій (дій), технічні засоби, склад виконавців і форми їхньої взаємодії, а також процедури узгодження й затвердження готових документів нормативного, проектного або розпоряджувального характеру.

Основними вимогами та пов'язаними із ними проблемами під час розроблення технологій прогнозування соціально-економічного розвитку є:

- виконання прийнятих у прогностиці принципів системності, узгодженості, варіантності, безперервності, верифікаційності (тобто ймовірності, точності, обґрунтованості) та рентабельності прогнозів;
- орієнтація на домінуючий вибір нормативного виду прогнозів, за яких прогнозовані показники визначають залежно від співвідношення фактичних і нормативних (ретроспективних і перспективних) значень внутрішніх і зовнішніх чинників;

- використання абсолютних і відносних показників, що відбивають динаміку зміни значень параметрів прогнозованих об'єктів;

- встановлення оптимальної довжини бази й упередження прогнозу.

Виходячи з принципу системності в розробленні технологій прогнозування визначають склад і взаємозв'язок економічних та соціальних параметрів, суттєвих для опису й кількісного оцінювання об'єктів прогнозування як значущих змінних стосовно завдання, що розв'язується. При цьому виокремлюють *ендогенні змінні* кожного об'єкта, які відображають його властивості, та *екзогенні змінні*, зумовлені впливом певної сукупності зовнішніх чинників. Кожен параметр характеризує об'єкт прогнозування впродовж прогнозної бази та періоду випередження прогнозу. Що стосується вимірювання й оцінювання параметрів об'єктів прогнозування, то для цього використовують як натуральні, так і похідні від них вартісні показники. Особливе значення при цьому має створення механізмів узгодження їх на всіх рівнях економіки, оскільки від цього залежить можливість порівняльного аналізу різних варіантів прогнозованих рішень, забезпечення безперервності й достовірності використовуваної інформації, а також ефективність прогностичної діяльності.

Однією з важливіших теоретичних проблем прогнозування є побудова **типології прогнозів**. Останню можна будувати залежно від різних критеріїв і ознак — цілей, завдань, об'єктів, методів організації прогнозування тощо. До найважливіших із них належать: масштаб прогнозування, характер об'єкта, функція прогнозу.

За масштабом прогнозування розрізняють: *макроекономічний* (народногосподарський) та *структурний* (міжгалузевий і міжрегіональний) прогнози, *прогнози розвитку народногосподарських комплексів* (паливно-енергетичного, агропромислового, інвестиційного, виробничої інфраструктури, сфери обслуговування населення тощо), *прогнози галузеві та регіональні*, *прогнози первинних ланок народногосподарської системи* — підприємств, виробничих об'єднань, а також окремих виробництв і продуктів (рис. 1.2.3) [33].

За періодом випередження прогнози поділяють на *короткотермінові* — від місяця до року; *середньотермінові* — від одного до п'яти років; *довготермінові* — від п'яти до п'ятнадцяти-двадцяти років; *далекоглядні* — триваліші за зазначені періоди.

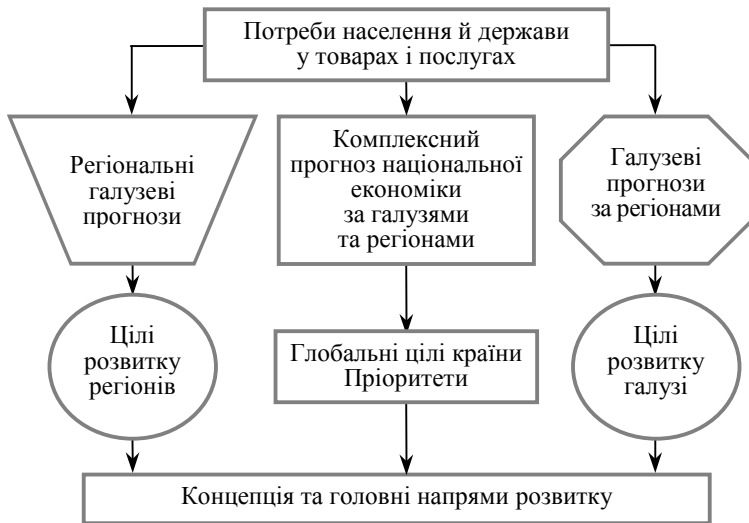


Рис. 1.2.3. Головні напрями розвитку країни

Зазначені типи прогнозів відрізняються як за змістом, так і за характером оцінок досліджуваного процесу. Короткотермінові прогнози СЕП ґрунтуються на припущенні, що у прогнозованому періоді не стануться ані кількісних, ані якісних суттєвих змін досліджуваного об'єкта. Середньо- та довготермінові виходять із кількісних і якісних змін у досліджуваному процесі, причому в середньотермінових кількісні зміни домінують над якісними. У середньотермінових прогнозах здійснюють кількісно-якісне оцінювання подій, у довготермінових — якісно-кількісне. Далекоглядні прогнози виходять суто з якісних змін, причому йдеться переважно про загальні закономірності розвитку досліджуваного об'єкта. Форма оцінювання прогнозованих подій — якісна (див. рис. 1.2.4) [33].

Розподіл прогнозів залежно від характеру досліджуваних процесів пов'язаний із різними аспектами процесу відтворення. За цією ознакою виокремлюють такі народногосподарські прогнози: *розвитку виробничих відносин; соціально-економічних передумов і наслідків науково-технічного прогресу; динаміки народного господарства (його темпів, чинників та структури); відтворення трудових ресурсів, зайнятості й підготовки кадрів; економічного використання природних ресурсів; відтворення основних фондів і капітальних вкладень; рівня життя населення; фінансових відносин, доходів і цін; зовнішніх економічних зв'язків* тощо.

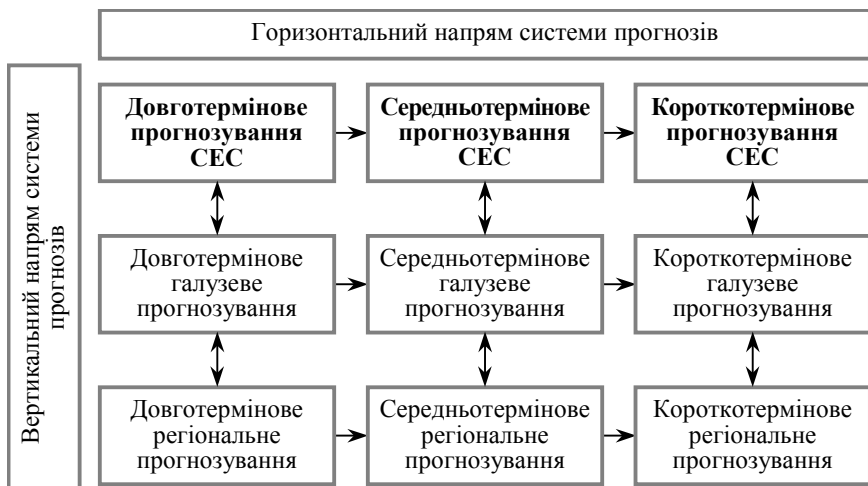


Рис. 1.2.4. Система прогнозів

Кожен із названих напрямів має самостійне значення і може розроблятися на власній основі. Разом із тим між ними існує методологічна єдність, яка забезпечує науковий характер прогнозування народного господарства загалом.

Економічне прогнозування здійснюють у поєднанні з іншими видами прогнозування: соціальним, політичним, демографічним, науково-технічним, прогнозуванням природних ресурсів тощо. На результати цих прогнозів зважають у народногосподарському та інших типах економічних прогнозів. Своєю чергою, економічні прогнози — невід’ємна складова прогнозування й планування розвитку суспільних процесів. Зв’язок різноманітних видів прогнозів дістає вияв у послідовності їхнього розроблення. Так, економічні прогнози будують за прогнозами науково-технічного прогресу, природних ресурсів, демографічних процесів тощо.

За функціональною ознакою (спрямуванням прогнозування) розрізняють два типи прогнозів: пошуковий і нормативний.

Пошуковий прогноз ґрунтований на умовному продовженні в майбутнє тенденцій розвитку об’єкта, що вивчається в минулому й сучасному, абстрагуючись від можливих рішень, здатних радикально змінити ці тенденції (планів, програм тощо). Його завдання — з’ясувати, як розвиватиметься досліджуваний об’єкт за умов збереження наявних тенденцій.

Нормативний прогноз, на відміну від пошукового, розробляють на базі заздалегідь визначених цілей. Його завдання —

визначити шляхи й терміни досягнення можливих станів об'єкта прогнозування в майбутньому, які визнано за мету. Якщо пошуковий прогноз у визначенні майбутнього стану об'єкта відштовхується від минулого та нинішнього, то нормативний прогноз здійснюється у зворотному порядку: від заданого стану в майбутньому до наявних тенденцій та зміни їх задля поставленої мети.

Обидва типи прогнозів на практиці водночас як напрями, підходи до прогнозування і використовуються разом (рис. 1.2.5). У поєднанні їх проявляється стимулювальна роль прогнозування як інструменту планування досягнення поставлених цілей. Стимулювальна функція прогнозування спричиняє таку його особливість, як ефект дії прогнозу на початкові передумови передбачення. Ефект дії може бути позитивним, пришвидшуючи здійснення прогнозу, та негативним, коли гальмує його реалізацію, а подеколи навіть приводить до самознищення прогнозу. Зумовлено це тим, що досягнення мети прогнозу безпосередньо залежить від об'єктивних умов його здійснення. Якщо прогноз відповідає нагальним умовам розвитку об'єкта, реалізація його на практиці відбудеться успішно. Навпаки, невідповідність прогнозу цим умовам негативно позначиться на його реалізації. На взаємозв'язки умов здійснення прогнозу з його цілями впливає вплив також взаємодія прогнозування із прийняттям рішень. Рішення, як правило, приймають на підставі даних прогнозування. Своєю чергою, прийняті рішення справляють вплив на результати здійснення прогнозів. Тому з метою запобігання розбіжності між прогнозом і прийнятим рішенням необхідно систематично коригувати прогноз, наприклад, шляхом порівняння його із цілями розвитку об'єкта прогнозування й можливістю здійснення їх.

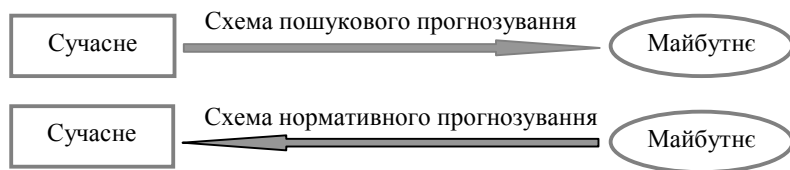


Рис. 1.2.5. Схеми пошукового та нормативного прогнозування

Із типологією прогнозів тісно пов'язане питання стосовно джерел інформації щодо майбутнього та способи його прогно-

зування. Розрізняють три основні джерела прогнозової інформації:

- *набутий досвід*, ґрунтований на знанні закономірностей проходження й розвитку досліджуваних явищ, процесів, подій;
- *екстраполяція наявних тенденцій*, закони розвитку яких у минулому й сучасному відомі;
- *побудова моделей* об'єктів прогнозування стосовно очікуваних або накреслених умов.

Цим джерелам інформації відповідають три *способи прогнозування*, що взаємно доповнюють одне одного:

- *експертний*, оснований на мобілізації професійного досвіду й інтуїції висококваліфікованих експертів для одержання прогнозів, що не мають кількісних характеристик. Цей спосіб застосовують, коли немає або не досить статистичних даних, не існує надійних методів оцінювання подій минулого, якщо в розвитку прогнозованих процесів передбачаються різкі зміни, про характеристики яких майже нічого невідомо;

- *екстраполяція* — вивчення минулого і сучасного розвитку об'єкта і перенесення закономірностей цього розвитку на майбутнє;

- *моделювання* — дослідження пошукових і нормативних моделей прогнозованого об'єкта у світлі очікуваних або окреслених змін його стану. Моделі соціально-економічних процесів прийнято розрізняти за методами, які використовують у математиці для їх побудови. Формалізоване відображення вхідних положень має загальну назву — «економіко-математичні моделі». Вони можуть бути статичними або динамічними, статистичними або детермінованими, лінійними або нелінійними, зі стаціонарною або змінною структурою відображення досліджуваного процесу тощо.

1.3. Структура прогнозування розвитку національної економіки

З огляду на сучасні вимоги до прогнозування соціально-економічного розвитку розглянемо в системному взаємозв'язку деякі актуальні питання технології розроблення прогнозів, включно з основними макроекономічними показниками, демографічними ситуаціями та зайнятістю населення, доходами населення й оплатою праці, соціально-економічною безпекою.

Прогнозування розвитку національної економіки здійснюється на підставі розроблення комплексної системи, яка передбачає базові та соціально-економічні прогнози [33].

У структурному плані такий комплекс прогнозів демонструє рис. 1.3.1.

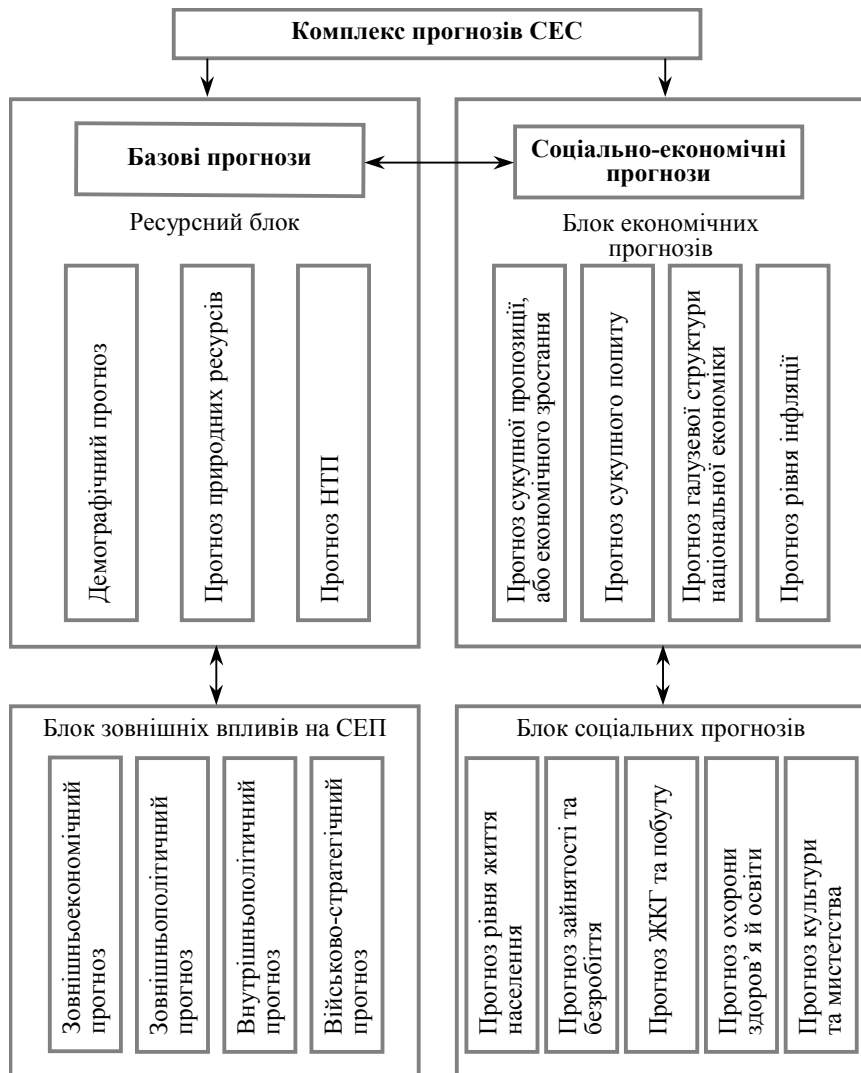


Рис. 1.3.1. Структурний розріз комплексу прогнозів

Базові прогнози мають свої цілі й завдання, тому слугують підґрунтям для розроблення соціально-економічних прогнозів.

Разом із тим, базові прогнози за їхнім стосунком до соціально-економічних прогнозів можна розподілити на два блоки: ресурсний і зовнішніх впливів. Перший блок базових прогнозів надає соціально-економічним прогнозам інформацію про можливі значення і подальші зміни ресурсної бази країни. Другий блок визначає зовнішні стосовно соціально-економічного розвитку чинники, які впливають на параметри СЕП країни.

Ресурсний блок охоплює демографічний прогноз, прогноз природних ресурсів та НТП.

Метою демографічного прогнозування є отримання даних щодо перспективної зміни таких показників, як:

- чисельність дітей дошкільного віку як у країні загалом, так і за регіонами для планування розвитку мережі дошкільних закладів і шкіл;
- чисельність осіб пенсійного віку для органів соціального забезпечення;
- дані щодо майбутньої статевовікової структури, потрібні для розвитку мережі медичного обслуговування населення, профілю підготовки медичних кадрів і будівництва медичних закладів;
- чисельність і склад сімей, необхідні для планування випуску товарів широкого вжитку, будівництва житла тощо.

У сучасному уявленні результат демографічного прогнозу — поняття комплексне, й складається із пов'язаних між собою елементів. Наприклад, перспективи розвитку населення регіону не можна визначити без прогнозу міграції. Своєю чергою міграція суттєво впливає на віковий склад населення. Але зміни вікового й статевого складу населення суттєво позначаються на динаміці народжуваності та смертності. Комплексність, своєю чергою, здебільшою визначає методику демографічних прогнозів.

Головною функцією демографічного прогнозу є прогнозування руху (міграції) населення країни та регіонів, відтворення трудових ресурсів за статевовіковим складом, рівня зайнятості працездатного населення, кваліфікації професійного складу.

Найважливішим результатом демографічного прогнозу є інформація щодо кількості сімей, середнього розміру їх, спрямованості та інтенсивності міграційних потоків населення, середньої тривалості життя, тривалості активної трудової діяльності, можливих структурних змін тощо.

➤ *Метою прогнозування природних ресурсів* вважають виявлення за вже розвіданими, тими що використовуються, відкри-

тими, але ще не введеними в дію родовищами, можливого рівня їх використання в майбутньому, а також необхідних для цього умов.

Прогноз охоплює всі види природних запасів: паливо й мінеральні ресурси, лісові ресурси (окрім тваринного світу), енергію річок, альтернативні види енергії (сонячну, вітрову, морських приливів і відпливів тощо), їхні кількісні та якісні характеристики.

Основною функцією є прогнозування обсягу та складу природних ресурсів, умов їх залягання, розподілу в просторі тощо, які впливають на структуру національної економіки, розвиток регіонів та їхню спеціалізацію, на експортну й імпортну складові платіжного балансу і, зрештою, на ефективність виробництва.

Основним результатом прогнозу є пошук можливості переходу до використання ресурсів нижчої якості, із меншим вмістом корисного компоненту, до освоєння родовищ у важкодоступних районах, використання вторинних і супутніх ресурсів, зменшення міри залежності суспільного виробництва від наявності природних ресурсів, пошуки інших альтернативних джерел енергії.

Прогноз природних ресурсів доповнюють від соціально-економічних прогнозів відомостями про потребу національної економіки в природних ресурсах і, своєю чергою, передають соціально-економічним прогнозам усі необхідні дані стосовно прогнозу природних ресурсів.

➤ Прогноз НТП, або прогноз науково-технічного розвитку країни, — це система прогнозів, яка містить три блоки.

Перший блок — прогнози розвитку фундаментальної науки, яка вивчає закони й закономірності функціонування та розвитку природи, а також прогнози розвитку найважливіших прикладних досліджень;

Другий блок — прогнози розвитку галузевої науки, техніки й технології, тобто пошукових робіт: науково-дослідних (НДР); дослідно-конструкторських (ДКР);

Третій блок — прогнози впровадження (або освоєння) результатів НДОКР у виробничу й невиробничу сфери: впровадження нової техніки (обладнання), технологій, прогресивних форм організації виробництва та праці.

Прогноз НТП тісно пов'язаний із прогнозом природних ресурсів, оскільки результати його використовують у соціально-економічному прогнозуванні.

Наприклад, виробництво і використання атомної енергії дозволяє зменшити споживання природних ресурсів, виробництво і використання синтетичних (хімічних) матеріалів дає можливість скоротити споживання як природних ресурсів, так і ресурсів тваринного походження (масла, фарби, шерсті, шкіри тощо).

Результати прогнозу НТП беруть за основу всіх розроблень із соціально-економічного прогнозування, оскільки економічне зростання безпосередньо пов'язано із НТП в частині інтенсивного розвитку виробництва і сфери послуг, структурний прогноз цілком базується на прогнозі розвитку науки й техніки.

Від прискорення темпів НТП залежить міра і способи задоволення особистих і суспільних потреб населення, раціональна організація та вдосконалення виробничого апарату країни, система методів і засобів управління національною економікою тощо.

Аналіз взаємозв'язку між НТП і динамікою кон'юнктури свідчить, що результати НТП є одним із найважливіших чинників, які визначають темпи розвитку економіки на багато років. Практично всі економічні індикатори змінюються відповідно до розвитку науки й техніки, що позначається на зміні технологічних укладів. Суспільні потреби спричиняють інтенсифікацію наукових досліджень і прискорюють НТП, що, своєю чергою, скорочує життєвий цикл інвестицій.

Блок зовнішніх впливів на СЕП

➤ *Метою зовнішньоекономічного прогнозу є визначення результатів експорту та імпорту. Результати прогнозу експорту залежать від даних прогнозу НТП, прогнозу природних ресурсів у частині визначення можливостей експорту ліцензій, ноу-хау, інформаційних технологій і програм тощо. Зовнішньоекономічний прогноз на підставі аналізу кон'юнктури і тенденцій розвитку світового ринку визначає можливості країни в експорті наукомісткої конкурентоспроможної продукції та необхідному імпорту інвестиційної й споживчої продукції.*

Для цього зовнішньоекономічний прогноз отримує від соціально-економічних прогнозів відповідну інформацію щодо виробництва наукомісткої продукції, прогнозні оцінки міри задоволення потреб (попиту) національного виробництва та сфери послуг в інвестиційній продукції (машини, обладнання, потужні установки) та нових технологіях, а також потреб (попиту) населення в товарах народного споживання і продуктах харчування. Варіанти зовнішньоекономічного прогнозу обмежені варіантами

зовнішньополітичних прогнозів, оскільки можливості торгівлі суттєво залежать від політичних відносин країн-партнерів. Під час розроблення прогнозу використовують дані, що характеризують геополітичне і гео економічне становище країни, її інтереси тощо.

➤ *Зовнішньополітичний прогноз* дає інформацію про можливі політичні відносини з іншими країнами. Із цією метою прогнозують можливі зміни політичної ситуації у провідних країнах світу та країнах — партнерах у торгівлі. Зовнішньополітичний прогноз розробляють у різних варіантах, які формуються під впливом результатів внутрішньополітичного прогнозу. Дані зовнішньополітичного прогнозу використовують для формування варіантів зовнішньоекономічного прогнозу та розроблення варіантів військово-стратегічного прогнозу.

➤ *Внутрішньополітичний прогноз* дає інформацію про можливі ситуації й розташування політичних сил усередині країни, їхні соціально-економічні, зовнішньоекономічні та військово-політичні наслідки. Залежно від того, яка партія стане «партією влади», визначається соціально-економічна політика уряду і Національного банку країни.

➤ *Військово-стратегічний прогноз* містить інформацію щодо ймовірних конфліктів із іншими країнами, можливих воєнних блоків інших країн, а також стосовно можливих воєнних блоків і договорів за участю своєї країни. У процесі прогнозування враховують інформацію зовнішньополітичного і внутрішньополітичного прогнозів. На підставі найімовірнішого військово-стратегічного прогнозу або найраціональнішого прогнозу, обраного з-поміж різних варіантів, формується воєнна доктрина країни.

Воєнна доктрина країни визначає рівень необхідної (достатньої) обороноздатності держави, потребу та рівень військової присутності збройних сил країни в інших регіонах. Військово-стратегічний прогноз використовує дані прогнозів розвитку військово-промислового комплексу і надає пропозиції економічним прогнозам стосовно необхідних обсягів озброєння й оснащення збройних сил.

Соціально-економічні прогнози також поділяють на два блоки — «економічні» та «соціальні» прогнози.

В «економічному» блоці основними є:

- прогноз сукупної пропозиції, або економічного зростання;
- прогноз сукупного попиту;
- прогноз галузевої структури національної економіки;
- прогноз рівня інфляції.

У «соціальному» блоці основними вважаються:

- прогноз рівня життя населення;
- прогноз зайнятості населення;
- прогноз житлово-комунального господарства (ЖКХ) та побуту;
- прогноз охорони здоров'я та освіти;
- прогноз культури й мистецтва.

Провідне місце в цій системі прогнозів належить прогнозу зайнятості населення. Він є складовою демографічного прогнозу, показники якого входять до прогнозу рівня життя, а також єдинною ланкою між економічними та соціальними прогнозами.

Особливий інтерес у практичному й теоретичному плані становлять функціональний та інформаційний зв'язки між цими двома блоками. Загальновідомим є те, що першочерговими завданнями розвитку громадянського суспільства окремої країни мають бути цілі гармонійного розвитку особистості. Це передбачає охорону здоров'я людини, продовження активної частини її життя, всебічну та якісну освіту, участь у культурному житті, виявлення й реалізацію всіх її здібностей тощо, що, своєю чергою, сприяє розвитку соціальної сфери — культури і мистецтва, освіти, охорони здоров'я, фізкультури та спорту. Але всі ці галузі невиробничі, й для їхнього розвитку потрібні ресурси, які створюються у сфері виробництва, тобто в економічній системі. Тому соціальна сфера є немов первинною стосовно економічної, вона висуває до економіки вимоги щодо становлення своїх галузей. Водночас соціальна сфера залежить від розвитку економіки. До того ж, для розвитку виробництва і соціальної сфери необхідна еволюція науки і техніки. Усі сфери — соціальна, виробнича та наукова — потребують для свого розвитку ресурсів, і передусім фінансових, оскільки наявність фінансів розв'язує проблеми і природних, і трудових ресурсів. Утім фінансові ресурси, як відомо, обмежені. Обсяг їх насамперед залежить від доходів (чистої продукції), які створюються у сфері виробництва. Разом із тим, якщо у великому обсязі фінансується виробництво, менше коштів залишається для фінансування науки, що негативно впливає на темпи зростання ефективності виробництва. Менше коштів дістається й соціальній сфері, що також негативно позначається на загальному стані суспільства, і зокрема трудових ресурсів, освіти і, зрештою, на виробництві. Саме тут виникає потреба в розробленні варіантів прогнозів, які відрізняються різними співвідношеннями розподілу коштів між цими трьома сферами.

2.1. Динамічна модель Кейса. Модель Самуельсона-Хікса

У прогнозуванні економічного зростання широко використовують трендові й економетричні моделі.

Трендові моделі описують розвиток (зміни) доволі стабільної у часі СЕС, особливо її агрегованих показників.

Економетричні моделі, на відміну від трендових, розглядають економічне зростання залежно від одного або кількох найсуттєвіших чинників. Серед економетричних моделей вирізняють прості й складні, односекторальні й багатосекторальні, закриті й відкриті.

➤ *Динамічна модель Кейнса* розглядає валовий внутрішній продукт (ВВП) як ендогенну змінну Y_t , що змінюється з часом. ВВП складається з чотирьох частин: споживання C ; валових окремих внутрішніх інвестицій I ; державних видатків на закупівлю товарів і послуг G ; чистого експорту E . У цій моделі економіка вважається закритою, тому чистий експорт дорівнює нулю, а державні видатки розподіляються на споживання і нагромадження:

$$Y = C + I.$$

Передбачається, що попит на інвестиційні товари постійний, а попит на споживчі товари в наступному році є лінійною функцією від ВВП поточного року:

$$C_{t+1}^D = \bar{C} + cY_t,$$

де \bar{C} — мінімальний обсяг фонду споживання;

c — нижня межа фонду невиробничого споживання або гранична схильність до споживання, $0 < c < 1$.

У динамічній моделі Кейнса запланований випуск товарів кінцевого використання порівнюють до прогнозованого попиту на них:

$$Y_{t+1} = \bar{C} + cY_t + I. \quad (2.1.1)$$

Цю модель можна застосовувати лише для аналізу й короткотермінового прогнозування поведінки економіки. Вона непридатна для довготермінового прогнозування, оскільки не відображає процесу відтворення, зокрема в ній не враховано вибуття фондів через їх фізичне та моральне зношування.

З математичної точки зору модель (2.1.1) є нелінійним різницеvim рівнянням першого порядку. За умови $c \neq 1$ розв'язок рівняння (2.1.1) має вигляд:

Розв'язок однорідного рівняння $Y_{t+1} - cY_t = 0$ будемо шукати у вигляді

$$Y_t = A \cdot c^t + \frac{\bar{C} + I}{1 + c}, \quad t = 0, 1, 2, \dots; \quad A = c^{-t} \left[Y_t - \frac{\bar{C} + I}{1 - c} \right].$$

Стала A визначається за допомогою початкового значення Y_0 :

$$Y_0 = A + Y_E, \quad \text{де } Y_E = \frac{\bar{C} + I}{1 - c}.$$

Звідси $A = Y_0 - Y_E$.

Остаточний розв'язок рівняння (2.1.1) запишеться

$$Y_t = (Y_0 - Y_E)c^t + Y_E. \quad (2.1.2)$$

При цьому $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = Y_E$, оскільки $0 < c < 1$, тобто Y_E — усталене (зрівноважене) значення ВВП.

► *Модель Самуельсона-Хікса.* Відміна моделі Самуельсона-Хікса від динамічної моделі Кейнса полягає у відмові від сталості інвестицій і введенні їхньої змінної частини, яка пропорційна приросту ВВП поточного року порівняно із минулим роком:

$$Y_{t+1} = C + cY_t + r(Y_t - Y_{t-1}) + I, \quad (2.1.3)$$

де r — коефіцієнт акселерації (прискорення), $0 < r < 1$.

З математичної точки зору модель Самуельсона-Хікса (2.1.3) — лінійне різницеве рівняння другого порядку. Його розв'язок знаходять за допомогою перетворення Лорана [34].

Рівняння других різниць (2.1.3) у стандартній формі записують так:

$$Y_{t+2} - (r + c)Y_{t+1} + rY_t = \bar{C} + I.$$

Введемо нові позначення змінних, які забезпечують нульове початкове значення ВВП:

$$Y_t = Y_0 + \eta_t, \quad \eta_t = Y_t - Y_0,$$

тоді η_t задовольняє рівнянню:

$$\eta_{t+2} - (r + c)\eta_{t+1} + r\eta_t = a, \quad \eta_0 = 0, \quad \eta_t = Y_t - Y_0, \quad (2.1.4)$$

де $a = \bar{C} + I - (1 - c)Y_0$.

2.2. Виробнича функція

Найвідомішою є двофакторна модель виробничої функції (ВФ), яка відображає залежність результату виробництва від витрат ресурсів. Під ресурсами (чинниками виробництва) найчастіше розуміють нагромаджену працю у формі виробничих фондів (капіталу) K і дійсну (живу) працю L , а під результатом — валовий випуск X , валовий внутрішній продукт Y або національний дохід N . У будь-якому разі результат стисло називають випуском і позначають Y (це може бути і валовий випуск, і ВВП, і національний дохід).

Іноді як ресурс у виробничу функцію включають залучені до виробництва природні ресурси. Якщо останні практично не змінюються, їх не слід розглядати.

Випуск продукції є функцією від витрат ресурсів (фондів і праці):

$$Y = F(K, L), \quad (2.1.5)$$

Виробничу функцію $Y = F(K, L)$, називають неокласичною, якщо вона гладка і задовольняє низку умов, що підлягають природному економічному тлумаченню:

1) $F(0, L) = F(K, 0) = 0$ — за відсутності одного з ресурсів виробництво неможливе;

2) $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$ — із мірою зростання ресурсів випуск зростає;

3) $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ — із мірою збільшення ресурсів швидкість зростання випуску гальмується;

4) $F(+\infty, L) = F(K, +\infty) = +\infty$ — за необмеженого збільшення одного з ресурсів випуск необмежено зростає.

Випуск продукції моделюють за допомогою такої нелінійної ВФ:

$$Y = A_0 K^\alpha L^\beta, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad (2.1.6)$$

де A — коефіцієнт нейтрального технічного прогресу;

α, β — коефіцієнти еластичності за фондами та працею.

Окремим випадком ВФ (2.1.6) є функція Кобба-Дугласа:

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}, \quad (2.1.7)$$

де $\beta = 1 - \alpha$.

Мультиплікативна ВФ визначається за часовими рядами випуску й витрат ресурсів (Y_t, K_t, L_t) , $t = 1, 2, \dots, n$, де n — довжина часового ряду, при цьому припускають, що виконуються n співвідношень:

$$Y_t = \delta_t AK_t^\alpha L_t^\beta, \quad (2.1.8)$$

де δ_t — коригувальний випадковий коефіцієнт, який у відповіднє фактичний і розрахунковий випуски й відображає флуктуацію результату під впливом інших чинників $M(\delta_t) = 1$.

Мультиплікативна функція, окрім властивості 1, має також властивість 2: із мірою зростання витрат ресурсів випуск збільшується, тобто

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial K} &= \alpha AK^{\alpha-1}L^\beta = \frac{\alpha Y}{K} > 0, \quad \alpha > 0; \\ \frac{\partial F}{\partial L} &= \beta AK^\alpha L^{\beta-1} = \frac{\beta Y}{L} > 0, \quad \beta > 0. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Часткові похідні випуску за чинниками називають граничними продуктами або граничними (маргінальними) ефективностями чинників; вони характеризують приріст випуску на невелику одиницю приросту чинника:

$\frac{\partial F}{\partial K}$ — гранична фондвіддача (гранична ефективність фондів);
 $\frac{\partial F}{\partial L}$ — гранична продуктивність праці (гранична ефективність праці).

Для мультиплікативної функції із (2.1.9) впливає, що гранична фондвіддача пропорційна середній фондвіддачі $\frac{Y}{K}$ із коефіцієнтом α , а гранична продуктивність праці — середній продуктивності праці $\frac{Y}{L}$ із коефіцієнтом β : $\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha \frac{Y}{K}$, $\frac{\partial Y}{\partial L} = \beta \frac{Y}{L}$.

Якщо $\alpha < 1$, $\beta < 1$, граничні віддачі чинників нижчі за середні; за цими самими умовами мультиплікативна функція має властивість 3, яка дуже часто спостерігається в реальній економіці: із мірою зростання витрат ресурсу його гранична віддача зменшується. Із (2.1.6) також видно, що мультиплікативна функція має властивість 4, тобто за необмеженого збільшення одного із ресурсів випуск необмежено зростає. Отже, мультиплікативна функція за $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ є неокласичною.

Економічне тлумачення параметрів A , α , β , мультиплікативної ВФ. Параметр A тлумачиться як параметр нейтрального технічного прогресу: за тих самих α й β випуск у точці (K, L) тим більший, чим більше A . Щоб тлумачити α , β , необхідно ввести поняття еластичностей як логарифмічних похідних чинників:

$$\alpha_K = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln K} = \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \frac{(\Delta Y / Y)}{\Delta K / K},$$

$$\alpha_L = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln L} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{(\Delta Y / Y)}{\Delta L / L},$$
(2.1.10)

Оскільки в нашому випадку $\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$,

то $\alpha_K = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln K} = \alpha$, $\alpha_L = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln L} = \beta$,

тобто α — еластичність випуску за основними фондами; β — еластичність випуску за працею.

Із (2.1.10) видно, що коефіцієнт еластичності чинника означає, на скільки відсотків збільшиться випуск, якщо чинник зросте на 1 %. Якщо $\alpha > \beta$, має місце працевоздержувальне (інтенсивне) зростання, в іншому випадку — фондоздержувальне (екстенсивне) зростання.

Розглянемо темп зростання випуску:

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t} \right)^\alpha \left(\frac{L_{t+1}}{L_t} \right)^\beta.$$
(2.1.11)

Якщо піднести обидві частини (2.1.8) до ступеня $\frac{1}{\alpha + \beta}$, отримаємо співвідношення:

$$\left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t} \right)^{\frac{1}{\alpha + \beta}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t} \right)^{1 - \alpha_1}.$$
(2.1.12)

праворуч — зважене середнє геометричне темпів зростання витрат ресурсів, тут за вагові коефіцієнти беруть відносні еластичності чинників:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad 1 - \alpha_1 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$
(2.1.13)

За $\alpha + \beta > 1$ випуск зростає швидше, ніж у середньому збільшуються чинники, а за $\alpha + \beta < 1$ — повільніше. Насправді, якщо чинники зростуть (тобто $K_{t+1} > K_t$, $L_{t+1} > L_t$), то згідно з (2.1.13) збільшиться й випуск (тобто $Y_{t+1} > Y_t$); тож за $\alpha + \beta > 1$ маємо:

$$\left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right) > \left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right)^{\alpha+\beta} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha_1}. \quad (2.1.14)$$

Отже, насправді темп зростання випуску перевищує середній темп зростання чинників. За $\alpha + \beta > 1$ ВФ описує економіку, що зростає.

Під час вивчення чинників зростання економіки виокремлюють екстенсивні чинники зростання (за рахунок збільшення затрат ресурсів, тобто збільшення масштабу виробництва) й інтенсивні чинники зростання (за рахунок підвищення ефективності використання ресурсів).

За допомогою ВФ можна відобразити масштаб та ефективність виробництва, якщо випуск і витрати виражено в порівняльних одиницях, наприклад представлено у вартісній формі. Однак проблема зіставлення сьогоденної та минулої праці й досі не має позитивного розв'язання.

У відносних показниках мультиплікативну ВФ записують так:

$$\frac{Y}{Y_0} = \left(\frac{K}{K_0}\right)^\alpha \left(\frac{L}{L_0}\right)^\beta, \quad (2.1.15)$$

де Y_0 , K_0 , L_0 — значення випуску й витрат фондів і праці в базовому році.

Безрозмірну форму (2.1.15) легко привести до початкового вигляду:

$$Y = \frac{Y_0}{K_0^\alpha L_0^\beta} K^\alpha L^\beta = AK^\alpha L^\beta.$$

Отже, A — це коефіцієнт, який порівнює ресурси з випуском.

Якщо позначити випуск та ресурси у відносних (безрозмірних) одиницях вимірювання через \tilde{Y} , \tilde{K} , \tilde{L} , то ВФ у формі (2.1.15) запишеться так:

$$\tilde{Y} = \tilde{K}^\alpha \tilde{L}^\beta. \quad (2.1.16)$$

Визначимо *ефективність економіки*, представлену ВФ (2.1.16).

Оскільки часткові показники ефективності ($\frac{\tilde{Y}}{\tilde{K}}$ — фондовіддача, $\frac{\tilde{Y}}{\tilde{L}}$ — продуктивність праці) мають однакову розмірність (точніше, вони однаково безрозмірні), то можна знайти будь-які середні з них. Оскільки ВФ виражена в мультиплікативній формі, то й середні взято в тій самій формі, тобто ВФ є середньгеометричним значенням.

Отже, узагальнений показник економічної ефективності є зваженим середнім геометричним часткових показників економічної ефективності, а саме:

$$E = \left(\frac{\tilde{Y}}{\tilde{K}} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\tilde{Y}}{\tilde{L}} \right)^{1-\alpha_1}, \quad (2.1.17)$$

тут роль вагових коефіцієнтів відіграють відносні еластичності (2.1.13), тобто окремі ефективності беруть участь у створенні узагальненої ефективності з такими самими пріоритетами, з якими входять до ВФ відповідні ресурси.

З (2.1.17) випливає, що за допомогою коефіцієнта економічної ефективності ВФ перетворюється на форму, яка зовні збігається із функцією Кобба-Дугласа:

$$\tilde{Y} = E \tilde{K}^{\alpha} \tilde{L}^{1-\alpha}, \quad (2.1.18)$$

але у співвідношенні (2.1.18) E не є постійним коефіцієнтом, а функціонально залежить від (K, L) .

Оскільки *масштаб виробництва* M виявляється в обсязі витрачених ресурсів, то згідно із міркуваннями, що були наведені стосовно розрахунків узагальненого показника економічної ефективності, середня кількість використаних ресурсів (масштаб виробництва) дорівнює:

$$M = \tilde{K}^{\alpha} \tilde{L}^{1-\alpha}. \quad (2.1.19)$$

З (2.1.18) та (2.1.19) випливає, що випуск \tilde{Y} є добутком економічної ефективності та масштабу виробництва:

$$\tilde{Y} = EM. \quad (2.1.20)$$

Можна відійти від описаного вище виду ВФ і розглянути залежність результату виробництва (Y) не безпосередньо через значення

чинників виробництва, а опосередковано — через чинники, які впливають як на величину (оцінку) чинників, так і на ефективність. Самі чинники виробництва (капітал, праця, НТП) є первинними (глобальними), а чинники, що впливають на них, — вторинними.

Вторинні чинники можна розглядати по-різному. З одного боку, це чинники, що впливають на величину глобальних чинників, з іншого — на їхню ефективність. Наведемо приклад такої класифікації чинників.

Жива праця у сфері виробництва:

1. Чинники впливу на величину L :

- тривалість робочого року, тижні, дні;
- віковий склад робочої сили;
- статевий склад робочої сили.

2. Чинники впливу на продуктивність праці:

- рівень загальної освіти;
- рівень професійної освіти;
- рівень навичок (тривалість роботи за фахом);
- рівень і система оплати праці.

Виробничі фонди (колишня праця)

1. Чинники, що впливають на величину K :

• погодинне завантаження фондів і рівень використання потужностей;

- швидкість обігу фондів.

2. Чинники, що впливають на оцінку продуктивності фондів:

- технічний рівень і рівень морального зношування фондів;
- галузевий розподіл фондів;
- територіальний розподіл фондів;
- масштаби виробництва.

Розвиток чинникового підходу передбачає не так удосконалення методу виробничої функції, як поглиблену економічну й статистичну роботу.

2.3. Модель Солоу. Трисекторна модель економічного зростання

➤ *Модель Солоу* також є односекторною моделлю економічного зростання. Економічна система розглядається як єдине ціле, що виробляє один універсальний продукт, який можна споживати й інвестувати. Модель доволі адекватно відображає найважливіші макроекономічні аспекти процесу відтворення. Експорт — імпорт у явному вигляді в ній не враховано.

Стан економіки в моделі Солоу визначають такі п'ять *ендогенних змінних*:

X — валовий внутрішній продукт (ВВП);

C — фонд невиробничого споживання;

I — інвестиції;

L — кількість зайнятих;

K — фонди.

Окрім того, в моделі використовують такі *екзогенні показники* (задані поза системою):

v — річний темп приросту кількості зайнятих;

μ — частка основних виробничих фондів, що вибули за рік;

ρ — частка нагромадження (частка валових інвестицій у валовому внутрішньому продукті).

Екзогенні параметри перебувають у таких межах: $-1 < v < 1$, $0 < \mu < 1$, $0 < \rho < 1$.

Припускається, що ендогенні змінні змінюються з часом (аргумент t пропущено, але він присутній за визначенням). Екзогенні показники вважаються постійними у часі, причому норма нагромадження є параметром управління, тобто в початковий момент часу може встановлюватися керівним органом системи з огляду на будь-яке гранично допустиме значення.

Час t вважається безперервним і вимірюється у роках. Для миттєвих значень показників $L = L(t)$, $K = K(t)$ в будь-який день можна з'ясувати кількість зайнятих і — шляхом інвентаризації — обсяг основних виробничих фондів. Значення показників типу потоків $X = X(t)$, $I = I(t)$, $C = C(t)$ у момент $t = [t] + \{t\}$ визначають у вигляді нагромаджених за рік, що починається на $\{t\}$ днів пізніше 1 січня року $[t]$.

Припускають, що річний випуск у кожен момент часу визначається лінійно-однорідною неокласичною виробничою функцією

$$X = F(K, L). \quad (2.1.21)$$

Згідно з визначенням темпу приросту

$$\frac{\Delta L}{L} = v \Delta t, \text{ або } \frac{dL}{dt} = vL,$$

тому

$$\ln L = vt + \ln A, \quad L = Ae^{vt}.$$

Використовуючи початкову умову $L(0) = L_0$, одержуємо $L = L_0 e^{vt}$.

Зношування та інвестиції в розрахунку на рік дорівнюють μK та I відповідно, а за час Δt — становить відповідно $\mu K \Delta t$, $I \Delta t$, то-

му приріст фондів за цей час дорівнюватиме $\Delta K = -\mu K \Delta t + I \Delta t$, звідки маємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + I, \quad K(0) = K_0.$$

Інвестиції та фонд споживання виражають через ВВП таким чином:

$$I = \rho X, \quad C = (1 - \rho)X.$$

Отже, маємо такий запис моделі Солоу в абсолютних показниках:

$$L = L_0 e^{vt}; \quad \frac{dK}{dt} = -\mu K + \rho X;$$

$$K(0) = K_0; \quad X = F(K, L); \quad I = \rho X; \quad C = (1 - \rho)X. \quad (2.1.22)$$

Оскільки

$$x = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(k); \quad i = \rho x; \quad c = (1 - \rho)x;$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d(kL)}{dt} = vLk + L \frac{dk}{dt},$$

то запис моделі в питомій вазі показників набуває форми:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho f(k), \quad \lambda = \mu + v, \quad k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0};$$

$$\begin{aligned} x &= f(k); \\ i &= \rho f(k); \\ c &= (1 - \rho)f(k). \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Отже, кожен абсолютний або відносний показник змінюється в часі, тобто можна говорити про траєкторію системи в абсолютних або відносних показниках.

Траєкторію називають *стаціонарною*, якщо показники з часом не змінюються:

$$k = k^0 = \text{const}, \quad x = x^0 = \text{const}, \quad I = I^0 = \text{const}, \quad c = c^0 = \text{const}.$$

Як видно з формул (2.1.23), перебування фондоозброєності на постійному рівні k^E приводить до виходу на стаціонарну траєкторію. На стаціонарній траєкторії $\frac{dk^E}{dt} = 0$, тому

$$-\lambda k^E + \rho f(k^E) = 0,$$

$$\text{або} \quad (2.1.24)$$

$$\lambda k^E = \rho f(k^E).$$

Якщо $k^0 = k^E$, то економіка, яка вже перебуває на стаціонарній траєкторії, може зійти з неї лише в разі зміни зовнішніх умов (встановлення іншого значення норми нагромадження, перехід до нових технологій зі зміною функції $F(K, L)$).

За $k^0 \neq k^E$ в економіці відбуватиметься перехідний процес, який завершиться встановленням стаціонарного режиму. У перехідному режимі фондоозброєність задовольняє рівнянню:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho f(k), \quad k(0) = k_0, \quad (2.1.25)$$

причому $\frac{dk}{dt} > 0$ за $k < k^E$ та $\frac{dk}{dt} < 0$ за $k > k^E$.

Диференціюванням (2.1.25) знаходимо

$$\frac{d^2k}{dt^2} = \frac{dk}{dt} [\rho f'(k) - \lambda], \quad (2.1.26)$$

звідки видно, що

а) за $k < \hat{k}$ маємо $\frac{d^2k}{dt^2} > 0$,

б) за $\hat{k} < k < k^E$, навпаки, $\frac{d^2k}{dt^2} < 0$,

в) за $k > k^E$ завжди $\frac{d^2k}{dt^2} > 0$, оскільки $\hat{k} < k^E$.

Розглянемо перехідний процес для випадку, коли виробничу функцію описано функцією Кобба-Дугласа (2.1.7) $F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$.

Тоді $f(k) = Ak^\alpha$, $\hat{k} = \left[\frac{\alpha \rho A}{\lambda} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $k^E = \left[\frac{\rho A}{\lambda} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$, а рівняння (2.1.25) набуває вигляду

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho Ak^\alpha, \quad k(0) = k_0. \quad (2.1.27)$$

Зробивши заміну $k = e^{-\lambda t} u$, $u = e^{\lambda t} k$, одержимо для u рівняння із розділеними змінними: $\frac{du}{u^\alpha} = \rho A e^{(1-\alpha)\lambda t} dt$, $u(0) = k_0$,

яке має такий розв'язок: $u(t) = \left[\frac{\rho A}{\lambda} e^{(1-\alpha)\lambda t} + k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho A}{\lambda} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$,

а з використанням значення стаціонарної фондоозброєності запишеться як:

$$u(t) = [(k^E)^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)\lambda t} + (k_0)^{1-\alpha} - (k^E)^{1-\alpha}]^{1/1-\alpha}.$$

Повертаючись до фондоозброєності, отримаємо

$$K(t) = [(k^E)^{1-\alpha} + ((k_0)^{1-\alpha} - (k^E)^{1-\alpha})e^{(1-\alpha)\lambda t}]^{1/(1-\alpha)},$$

звідки видно, що $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = k^E$.

Відповідно до (2.1.26) отримуємо три типи перехідного процесу стосовно фондоозброєності:

1) за $k_0 > \hat{k}$ — спочатку відбувається пришвидшене зростання фондоозброєності, яке після досягнення значення k переходить на повільне зростання;

2) за $\hat{k} < k_0 < k^E$ спостерігаємо вповільнене зростання фондоозброєності;

3) за $k_0 > k^E$ — уповільнений спад фондоозброєності («проїдання» фондів).

Таким чином, за $\hat{k} < k_0 < k^E$ існує зовсім короткий перехідний процес.

У реальній економіці освоєння капітальних вкладень відбувається із запізненням, тобто інвестиції перетворюються на фонди не миттєво, а впродовж певного часу.

Існують два підходи до моделювання запізнень. Перший полягає в тому, що запізнення відбувається із фіксованим лагом τ , тим самим введення фондів у момент t $V(t)$ є просто інвестиціями, зробленими в момент $t - \tau$, тобто

$$V(t) = I(t - \tau). \quad (2.1.28)$$

Другий підхід полягає у використанні розподіленого лага. При цьому передбачають, що інвестиції, зроблені в момент τ обсягом $I(\tau)$, на далі освоюватимуть поступово, частками, згідно з певним розподілом $N(t, \tau) > 0$, причому $\int_{-\infty}^{\infty} N(t, \tau) d\tau = 1$. Оскільки інвестиції здійснюються не лише в якийсь фіксований момент часу, а взагалі в будь-який момент τ , то до часу t накопичується обсяг фондів, які підлягають введенню, а саме:

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\tau} N(t, \tau) I(\tau) d\tau. \quad (2.1.29)$$

Якщо процес інвестування та введення в дію має стаціонарний характер, тоді $N(t, \tau) = N(t - \tau)$. Отже, (2.1.29) можна переписати таким чином:

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\tau} N(t - \tau) I(\tau) d\tau. \quad (2.1.30)$$

Далі приймаємо, що розподіл $N(t - \tau)$ є показниковим:

$$N(t - \tau) = \omega e^{-\omega(t-\tau)} \left(\int_{\tau}^{\infty} \omega e^{-\omega(t-\tau)} dt = 1 \right),$$

тому

$$V(t) = \omega \int_{-\infty}^t e^{-\omega(t-\tau)} I(\tau) d\tau. \quad (2.1.31)$$

У результаті прямого диференціювання (2.1.31) маємо

$$dV/dt = \omega I(t) - \omega V(t). \quad (2.1.32)$$

Додаючи останнє рівняння до відповідним чином скоригованої системи рівнянь стандартної моделі Солоу, одержуємо односекторну модель економіки з урахуванням затримки введення фондів:

$$\begin{aligned} X &= I + C; \\ X &= F(K, L); \\ dK/dt &= -\mu K + V, K(0) = K_0; \\ dV/dt &= \omega I - \omega V; \\ L &= L_0 e^{vt}. \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

Перше рівняння (2.1.33) — баланс розподілу ВВП на інвестиції та невиробниче споживання; друге — виробнича функція валового внутрішнього продукту залежно від ресурсів; третє — динаміка фондів залежно від зношування й уведення фондів; четверте — динаміка введення фондів із урахуванням інвестицій і затримки введення фондів; п'яте — динаміка трудових ресурсів.

Якщо, подібно до попередніх параграфів, вважати, що виробнича функція є лінійно-однорідною неокласичною, то рівняння (2.1.33) можна представити так: ($i = I/L$, $c = C/L$, $f = F/L$, $v = V/L$):

$$\left. \begin{aligned} dk/dt &= -\lambda k + v, \lambda = \mu + v; \\ dv/dt &= -\nu v + \omega f(k), \nu = \omega + \lambda; \\ c &= (1 - \rho) f(k). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.34)$$

Стаціонарна точка диференціальних рівнянь (2.1.34) задається такими алгебраїчними рівняннями:

$$\left. \begin{aligned} -\lambda k^E + v^E &= 0; \\ -\nu v^E + \omega \rho f(k^E) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.1.35)$$

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно v^E , отримаємо рівняння для k^E ,

$$-\lambda v k^E + \omega p f(k^E) = 0. \quad (2.1.36)$$

Якщо $f''(0) = \infty$, $f(k) > 0$, $f''(k) < 0$, то (2.1.36) має один розв'язок (виключаючи тривіальний $k^E = 0$).

➤ *Трисекторна модель економічного зростання* [34]. Економіку в моделі розподіляють на три сектори: *матеріальний* (нульовий) — виробляє предмети праці; *фондоутворювальний* (перший) — виробництво засобів праці; *споживчий* (другий) сектор — виробництво предметів споживання.

Припускають, що за кожним сектором закріплено основні виробничі фонди (ОВФ), тоді як праця й інвестиції можуть вільно пересуватися між секторами.

Окрім того, застосовують припущення, аналогічні до зроблених в односекторній моделі Солоу, яка відіграє роль базової.

1. Технологічний устрій вважається сталим і визначається за допомогою лінійно-однорідних неокласичних виробничих функцій

$$X_i = F_i(K_i, L_i), \quad i = 0, 1, 2,$$

де X_i , K_i , L_i — відповідно випуск, ОВФ і кількість зайнятих у i -му секторі.

2. Загальна кількість зайнятих L (у виробничій сфері) змінюється із постійним темпом приросту v .

3. Лаг капіталовкладень відсутній.

4. Коефіцієнти зношування ОВФ μ_i і прямих матеріальних витрат a_i секторів постійні.

5. Економіка замкнена, тобто зовнішня торгівля безпосередньо не розглядається.

6. Час t змінюється неперервно.

Припущення (2) в дискретному часі має вигляд (t — номер року):

$$\frac{L(t+1) - L(t)}{L(t)} = v,$$

у разі переходу до неперервного часу набуває форми диференціального рівняння:

$$\frac{dL}{dt} = vL, \quad L(0) = L^0,$$

яке має такий розв'язок:

$$L = L^0 e^{vt}. \quad (2.1.37)$$

Із припущень (3, 4) виходить, що зміна за рік ОВФ i -го сектора складається з двох частин: зносу ($-\mu_i K_i$) та приросту за рахунок валових капіталовкладень ($+I_i$), тобто:

$$K_i(t+1) - K_i(t) = -\mu_i K_i(t) + I_i(t), \quad i = 0, 1, 2,$$

або в неперервному часі:

$$K_i(t + \Delta t) - K_i(t) = -[\mu_i K_i(t) + I_i(t)]\Delta t,$$

за $\Delta t \rightarrow 0$ одержуємо диференціальні рівняння для ОВФ секторів:

$$\frac{dK_i}{dt} = -\mu_i K_i + I_i, \quad K_i(0) = K_i^0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.1.38)$$

Далі індекс часу t скрізь пропущено, але передбачається за визначенням. ОВФ і кількість зайнятих у секторах (K_i, L_i) є миттєвими показниками, тобто їхні значення можна визначити (виміряти) в будь-який момент часу t . Випуск секторів, інвестиції (X_i, I_i) є показниками типу потоку, тобто їхні значення нагромаджуються за рік, що розпочинається в момент t .

Отже, для зроблених припущень трисекторна модель економіки в абсолютних показниках набуває вигляду (2.1.39):

- $L = L(0)e^{vt}$ — кількість зайнятих;
- $L_0 + L_1 + L_2 = L$ — розподіл зайнятих за секторами;
- $\frac{dK_i}{dt} = -\mu_i K_i + I_i,$ — динаміка фондів за секторами; (2.1.39)
- $K_i(0) = K_i^0, \quad i = 0, 1, 2$
- $X_i = F_i(K_i, L_i), \quad i = 0, 1, 2$ — випуск за секторами;
- $X_1 = I_0 + I_1 + I_2$ — розподіл продукції фондоутворювального сектора;
- $X_0 = a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$ — розподіл продукції матеріального сектора,

де I_i — інвестиції у i -й сектор; v — темп приросту кількості зайнятих; μ_i — коефіцієнти вибуття ОВФ за секторами; a_i — коефіцієнти прямих матеріальних витрат за секторами.

Трисекторна модель є динамічною, оскільки містить чотири лінійні динамічні елементи. Вона нелінійна, оскільки випуски секторів задано нелінійними виробничими функціями.

У відносних показниках модель набуває форми:

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \\ s_0 + s_1 + s_2 = 1, \quad s_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \\ \frac{dk_i}{dt} = \frac{\theta_1 s_i}{\theta_i} f_1(k_i) - \lambda_i k_i, \quad k_i(0) = k_{i0}, \quad \lambda_i = \nu + \mu, \quad i = 0, 1, 2, \\ (1 - a_0)\theta_0 f_0(k_0) = a_1 \theta_1 f_1(k_1) + a_2 \theta_2 f_2(k_2), \end{aligned} \right\} (2.1.40)$$

де $\theta_i = \frac{L_i}{L}$ — частка числа зайнятих у i -му секторі із загальної кількості зайнятих;

$s_i = \frac{I_i}{X_1}$ — частка інвестицій у i -й сектор у загальному обсязі інвестицій;

$f_i(k_i) = \frac{X_i}{L_i} = F_i\left(\frac{K_i}{L_i}, 1\right)$ — продуктивність праці в i -му секторі;

$x_i = \frac{X_i}{L} = \theta_i f_i(k_i)$ народногосподарська продуктивність i -го сектора.

У моделі (2.1.40) параметри $a_0, a_1, a_2, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \nu$ є екзогенними та вважаються сталими. Параметри $(\theta, s) = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, s_0, s_1, s_2)$ — є керівними. Рівняння для фондоозброєності має таку стаціонарну точку за умови, що (θ, s) постійні:

$$s_1 f_1(k_1^0) = \lambda_1 k_1^0, \quad k_i^0 = \frac{\theta_1 s_i}{\theta_i \lambda_i} f_1(k_1^0), \quad i = 0, 2.$$

За $k_i < k_i^0$, як видно з (2.1.40), $\frac{dk_i}{dt} > 0$, а за $k_i > k_i^0$ значення $\frac{dk_i}{dt} < 0$, тому $\lim_{t \rightarrow \infty} k_i(t) = k_i^0$, (за $k_{i0} < k_i^0$ є зростаючими, фондоозброєність наближається до стаціонарного значення, а за $k_{i0} > k_i^0$ — спадними). Шляхом регульованого перерозподілу праці можна забезпечити монотонне наближення фондоозброєності до стаціонарного значення.

3.1. Лінійна статистична міжгалузєва модель

Сучасний стан виробничих сил розвинених країн характеризується складною та динамічною галузевою структурою. За цих умов дедалі більшого значення набуває ретельний розрахунок структури міжгалузевих зв'язків. Для цього розроблено спеціальний метод міжгалузевого аналізу, а моделі, побудовані на його підставі, дістали назву «витрати-випуск», або міжгалузєві моделі.

Предметом міжгалузевого аналізу є визначення параметрів, що зумовлюють взаємопов'язаний розвиток окремих галузей. Міжгалузєвий аналіз як метод економічної роботи полягає у визначенні й кількісному вимірюванні показників, що характеризують міжгалузєві зв'язки, залежність цих зв'язків від кількості ресурсів (праця і капітал), які використовуються кожною галуззю. В цьому плані можна вирізнити два аспекти міжгалузевого аналізу — статистичне вимірювання наявних у народному господарстві зв'язків і прогнозування цих зв'язків.

➤ **Міжгалузєвий баланс (МГБ)** є найвідомішим серед міжгалузєвих моделей, головна позитивна якість котрих як інструмента прогнозних розрахунків полягає в тому, що вони ґрунтуються на попередньому визначенні суспільних потреб.

Якщо описувати економічну систему загалом, то під балансовою моделлю мають на увазі систему рівнянь, кожне з яких виражає балансові співвідношення між виробництвом окремими економічними об'єктами обсягів продукції й сукупною потребою в цій продукції. За такого підходу досліджувана економічна система складається з об'єктів, кожен із яких випускає певний продукт, частина якого споживається ним самим та іншими об'єктами системи, а решта виводиться за межі системи як її кінцева продукція. Можна також розглядати приклади балансової відповідності, тобто: відповідність наявної робочої сили й кількості робочих місць, платоспроможного попиту населення та продукції (товарів і послуг) тощо.

Балансові моделі на підставі звітних балансів характеризують наявні пропорції, де ресурсна частина завжди дорівнює витратній. Для виявлення диспропорцій використовують балансові мо-

делі, в яких фактичні ресурси мають узгоджуватися не лише з їхнім фактичним споживанням, а й із потребою в них. Зазначимо, що балансові моделі не містять конкретного механізму порівняння окремих варіантів економічних рішень і не передбачають взаємозаміни різних видів ресурсів, що внаслідок цього вибір оптимального варіанта розвитку економічної системи. Власне, це й зумовлює певну обмеженість балансових моделей і балансового методу загалом.

Підґрунтям інформаційного забезпечення балансових моделей в економіці є матриця коефіцієнтів витрат ресурсів за конкретними напрямками їх використання. Наприклад, у моделі міжгалузевго балансу таку роль відіграє так звана *технологічна матриця* — таблиця міжгалузевго балансу, що складається з коефіцієнтів (нормативів) прямих витрат на виробництво одиниці продукції. Із багатьох причин вхідні дані реальних об'єктів господарювання не можуть бути використані в балансових моделях безпосередньо, тому підготовка інформації для розрахунків за моделлю є доволі складною проблемою.

Балансові моделі будуються як числові матриці — прямокутні таблиці чисел. У зв'язку з цим балансові моделі належать до типу матричних економіко-математичних моделей. У матричних моделях балансовий метод дістає чітке математичне вираження. Попри специфіку цих моделей їх об'єднує не лише спільний формальний (математичний) апарат побудови та єдиний алгоритм обчислень, а й аналогічність низки економічних характеристик. Це дає змогу розглядати структуру, зміст і основні залежності матричних моделей на прикладі міжгалузевго балансу та розподілу продукції в народному господарстві. Цей баланс відображає виробництво та розподіл суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузевих виробничих зв'язків, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення й розподіл валового внутрішнього продукту.

Принципову схему моделі МГБ зображено на рис. 3.1.1. У підґрунтя цієї схеми покладено розподіл сукупного продукту на дві частини: проміжний і кінцевий продукт; усе народне господарство подано тут як сукупність галузей (чисті галузі). Кожна з цих галузей фігурує в балансі як виробник і як споживач.

Розглянемо схему моделі в розрізі її блоків, що мають різний економічний зміст. Їх зазвичай називають *квADRантами* (на схемі квадранти позначено римськими цифрами).

Перший квадрант МГБ — це таблиця міжгалузевих потоків. Показники, що містяться на перетині рядків і стовпчиків, є обсяга-

ми міжгалузевих потоків продукції x_{ij} , i та j — відповідно номери галузей споживання. Перший квадрант за формою є квадратною матрицею n -го порядку, сума всіх елементів якої дорівнює річному фонду споживання засобів виробництва в матеріальній сфері.

У *другому квадранті* подано валову внутрішню продукцію кінцевого використання (витрати на кінцеве споживання, валове нагромадження та чистий експорт) всіх галузей матеріального виробництва. На схемі цей розподіл подано в узагальненому вигляді як один стовпчик величин $Y_j^{(V)}$.

Третій квадрант також характеризує ВВП за категоріями доходу — відображає процеси розподілу валової доданої вартості й утворення чинникових доходів учасників суспільного виробництва. В цьому розділі прогнозуються такі показники, як заробітна плата найманих працівників, податки на виробництво та імпорт, субсидії на виробництво та імпорт, валовий прибуток.

Четвертий квадрант відбиває розподіл і використання національного доходу. Внаслідок перерозподілу створеного національного доходу утворюються кінцеві доходи населення, підприємств, держави. Дані четвертого квадранта важливі для відображення в міжгалузевій моделі балансу доходів і витрат населення, джерел фінансування капіталовкладень, поточних витрат невиробничої сфери, для аналізу загальної структури доходів за групами споживачів.

	Проміжне споживання (CI)					ВВП за категоріями використання $GDP(V)$	Усього використано
	1	2	3	...	n		
1	I x_{ij}					$Y_1^{(V)}$	X_1
2						$Y_2^{(V)}$	X_2
3						$Y_3^{(V)}$	X_3
...						... II	...
n						$Y_n^{(V)}$	X_n
Проміжне споживання (CI)	CI_1	CI_2	CI_3	...	CI_n	IV	
ВВП за категоріями доходів $GDP(D)$	$Y_1^{(D)}$	$Y_2^{(D)}$	$Y_3^{(D)}$	III ...	$Y_n^{(D)}$		
Валовий випуск (GP)	X_1	X_2	X_3	...	X_n		

Рис. 3.1.1. Принципова схема моделі «витрати-випуск»

Розглядаючи схему балансу за стовпчиками, можна дійти висновку, що сума проміжного споживання будь-якої галузі та її валової доданої вартості дорівнює валовому випуску продукції цієї галузі:

$$X_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + Y_j^{(D)}. \quad (3.2.1)$$

Розглядаючи МГБ за рядками для кожної галузі-виробника, бачимо, що використана продукція будь-якої галузі дорівнює сумі матеріальних витрат галузей, які споживають її продукцію, витрат на кінцеве споживання продукції цієї галузі та чистого експорту:

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i^{(V)}. \quad (3.2.2)$$

Підсумовуючи за j систему рівнянь (3.2.1), дістаємо

$$\sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n Y_j^{(D)}. \quad (3.2.3)$$

Аналогічно, підсумовуючи за i систему рівнянь (3.1.2), отримуємо

$$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{i=1}^n Y_i^{(V)}. \quad (3.1.4)$$

Звідси легко помітити, що

$$\sum_{j=1}^n Y_j^{(D)} = \sum_{i=1}^n Y_i^{(V)}. \quad (3.1.5)$$

Це рівняння демонструє, що в міжгалузевому балансі дотримано принцип еквівалентності складу доходів і використання ВВП.

Підґрунтям інформаційного забезпечення моделі міжгалузевого балансу слугує технологічна матриця, що містить коефіцієнти прямих матеріальних витрат на виробництво одиниці продукції. Ця матриця є базою економіко-математичної моделі міжгалузевого балансу.

Передбачено гіпотезу, згідно з якою для виробництва одиниці продукції у j -й галузі необхідна певна кількість витрат проміжної продукції i -ї галузі, що становить a_{ij} , і ця величина не залежить від обсягів виробництва в j -й галузі та є доволі стабільною величиною в часі. Величини a_{ij} називають **коефіцієнтами прямих матеріальних витрат** і обчислюють таким чином:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad a_{ij} = \text{const}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.1.6)$$

Коефіцієнти прямих матеріальних витрат показують, яку кількість продукції i -ї галузі необхідно витратити, якщо враховувати лише прямі витрати, для виробництва одиниці продукції j -ї галузі. З економічного тлумачення цих коефіцієнтів виходить, що $a_{ij} \leq 1$ та $a_{ii} < 1$.

З урахуванням формули (3.1.6) систему рівнянь балансу (3.1.1) можна записати у вигляді:

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + Y_i^{(V)}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1.7)$$

Якщо залучити до розгляду матрицю коефіцієнтів прямих матеріальних витрат $A = (a_{ij})$, вектор-стовпчик кінцевого використання продукції X та вектор-стовпчик ВВП — Y , тоді система рівнянь (3.1.7) у матричній формі матиме вигляд:

$$X = AX + Y,$$

або
$$X - AX = Y. \quad (3.1.8)$$

Систему рівнянь (3.1.7), або в матричній формі (3.1.8), називають *моделлю міжгалузевого балансу*, або *моделлю Леонт'єва*, або *моделлю «витрати-випуск»*. За допомогою цієї моделі можна здійснити такі варіанти обчислень:

- задаючи в моделі обсяги кінцевого використання продукції кожної галузі (X_i), можна визначити обсяги ВВП кожної галузі (Y):

$$(E - A)X = Y, \quad (3.1.9)$$

де E — одинична матриця n -го порядку;

- задаючи обсяги ВВП всіх галузей (Y), можна визначити обсяги використання продукції кожної галузі (X_i):

$$X = (E - A)^{-1}Y; \quad (3.1.10)$$

- можна прогнозувати динаміку технологічних коефіцієнтів a_{ij} .

Зазначимо, що рівняння (3.1.9) та (3.1.10) мають розв'язок, оскільки матриця $(E - A)$ належить до цілком досліджених в алгебрі матриць із невід'ємними діагональними й недодатними недіагональними елементами [35] і для неї існує матриця $(E - A)^{-1}$. Введемо таке позначення:

$$B = (E - A)^{-1}. \quad (3.1.11)$$

Систему рівнянь у матричній формі (3.1.10) можна записати:

$$X = BY. \quad (3.1.12)$$

Елементи матриці B позначатимемо через b_{ij} , тоді з матричного рівняння (3.2.12) для будь-якої i -ї галузі можна отримати співвідношення:

$$X_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} Y_j. \quad (3.1.13)$$

Коефіцієнти b_{ij} називають **коефіцієнтами повних матеріальних витрат**. Вони містять як прями, так і опосередковані витрати всіх порядків. Якщо прями витрати відбивають кількість засобів виробництва, використаних безпосередньо на виготовлення певних обсягів конкретного продукту, то опосередковані стосуються попередніх стадій виробництва і залучаються у виробництво продукції не прямо, а через інші (проміжні) засоби виробництва.

Коефіцієнти повних матеріальних витрат b_{ij} показують, який обсяг продукції i -ї галузі необхідно виробити, щоб з урахуванням прямих і опосередкованих витрат цієї продукції отримати одиницю продукції кінцевого використання j -ї галузі. Коефіцієнти повних матеріальних витрат можна застосовувати, коли необхідно визначити, як вплинуть на валовий випуск певної галузі деякі зміни щодо обсягів випуску кінцевої продукції всіх галузей.

Разом із коефіцієнтами прямих та повних витрат у аналізі міжгалузевих пропорцій розглядають також **коефіцієнти розподілу продукції**. Вони визначаються так:

$$h_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_i}. \quad (3.1.14)$$

Коефіцієнти розподілу h_{ij} характеризують частку випуску продукції i -ї галузі та спожиту в галузі j . Оскільки функція витрат на виробництво в моделі міжгалузевого балансу виражається у формі $x_{ij} = a_{ij}X_j$, після її підставлення в (3.1.14) можна знайти співвідношення між коефіцієнтами витрат і коефіцієнтами розподілу:

$$h_{ij} = \frac{a_{ij}x_j}{X_i} \quad (3.1.15)$$

або в матричному вигляді:

$$H = \widehat{X}^{-1}A\widehat{X}, \quad (3.1.16)$$

де H — матриця коефіцієнтів розподілу h_{ij} ;

\widehat{X} — діагональна матриця валових випусків.

З (3.1.16) випливає, що матриці коефіцієнтів A та H подібні, тому вони мають однаковий ранг і визначник, тобто матриця $(E - H)$ не вироджена, а також однакові спектри власних значень, що визначає продуктивність матриці H . Ці властивості можна використати для побудови системи рівнянь витрат на виробництво, яка виходить із співвідношень $\sum_{i=1}^n x_{ij} + z_j = x_j$.

Після підстановки у ці співвідношення значень x_{ij} з (3.1.14) одержимо

$$\sum_{i=1}^n X_i h_{ij} + z_j = X_j. \quad (3.1.17)$$

Виходячи зі значень ВВП за категоріями доходів, що задаються екзогенно, за допомогою системи рівнянь (3.1.17) можна визначати значення валових випусків продукції галузей матеріального виробництва. Після відомих перетворень отримуємо (у матричному вигляді):

$$\begin{aligned} X'(E - H) &= Z'; \\ X' &= Z'(E - H)^{-1}, \end{aligned}$$

де X' і Z' — вектори-рядки відповідно валових випусків та ВВП.

Коефіцієнти h_{ij} не дістали широкого застосування у практиці міжгалузевих досліджень, позаяк порівняно з коефіцієнтами a_{ij} вони нестабільніші в динаміці. Це безпосередньо впливає з визначення коефіцієнта h_{ij} (3.1.15). На його величину, серед тих чинників, які впливають на значення коефіцієнта прямих витрат, справляє вплив і зміна співвідношення між обсягами випуску споживання та постачання. Обсяги випусків x_i та x_j змінюються під впливом великого набору чинників (динаміка всіх елементів кінцевого продукту й усіх коефіцієнтів прямих витрат), що по-

різному впливають на них. Тому припущення стосовно сталих пропорцій x_j та x_i були б нереальними.

Проте коефіцієнти розподілу можна з успіхом використовувати в низці царин економічного аналізу.

3.2. Прогнозування динаміки коефіцієнтів МГБ

Під час побудови міжгалузевих балансів потрібно зважати на низку додаткових вимог щодо початкової системи коефіцієнтів витрат.

1. Коефіцієнт прямих витрат a_{ij} є середньозваженою величиною з окремих коефіцієнтів витрат (a_{ij}^k) продукту i на продукт j різних господарських галузей k .

При цьому для виконання (принаймні приблизно) прямої пропорційної залежності між x_{ij} та x_j необхідне виконання однієї з таких умов:

- окремі коефіцієнти прямих витрат a_{ij}^k мають неістотно відрізнятися одне від одного для всіх k ;

- питома вага виробництва продукту j різними господарськими галузями має бути практично незмінною.

2. Окремі коефіцієнти прямих витрат a_{ij}^k , своєю чергою, є середньозваженими коефіцієнтів витрат на створення продукту j господарською галуззю k , диференційованих за технологічними варіантами виробництва. Під технологічним варіантом виробництва в цьому разі розуміють окремі підприємства, різні технологічні процеси тощо.

3. Коефіцієнти витрат зазвичай є узагальненими нормами витрат одного продукту за виробництва іншого, отриманими шляхом агрегування деталізованих нормативів матеріальних видатків.

Передумова стосовно прямої пропорційної залежності величин витрат предметів праці x_{ij} від значень обсягів випуску продукції X_j насправді може виконуватися лише в певних інтервалах зміни обсягу випуску продукції, для яких зрушення у внутрішній структурі випуску продукції (як у плані співвідношення господарських галузей і технологічних варіантів виробництва, так і з огляду на склад продуктів деталізованої номенклатури) не приводять до суттєвих змін коефіцієнтів прямих витрат a_{ij} . Інакше кажучи, кожному інтервалу обсягу виробництва має відповідати певне значення коефіцієнта прямих витрат a_{ij} .

Коефіцієнти a_{ij} виражають пряму пропорційну залежність між витратами на виробництво та випуском продукції у межах одного часового інтервалу (як правило, року). Для розрахунків на перспективні періоди треба знати, як змінюватимуться ці коефіцієнти [35].

Під час першого формулювання передумов моделі «витрати-випуск» В. Леонт'єв висунув гіпотезу, що коефіцієнти a_{ij} незмінні в часі. Початкові дослідження моделей «витрати-випуск» були спрямовані на перевірку цієї гіпотези. Такий аналіз ґрунтується на простому зіставленні обсягу виробництва продукції за будь-який рік із їхніми гіпотетичними обсягами, розрахованими з огляду на те, що коефіцієнти витрат не змінилися порівняно з іншим, як правило, попереднім періодом. Звісно, такий аналіз можливий лише за наявності звітних матриць міжгалузевих балансів за кілька років, побудованих за єдиною методологією.

Ці гіпотетичні обсяги визначалися таким чином:

$$X_{t+\tau} = (E - A)^{-1} Y_{t+\tau} \quad (3.2.1)$$

де $X_{t+\tau}$ — вектор гіпотетичних обсягів виробництва в році $t + \tau$;

A_t — матриця коефіцієнтів прямих витрат року t ;

$Y_{t+\tau}$ — вектор кінцевого продукту року $t + \tau$.

Такі дослідження проводили стосовно кількох країн за певний період часу. Аналіз даних засвідчив, що гіпотеза стосовно незмінності коефіцієнтів може спричинити до істотних викривлень реальних показників обсягів виробництва. Рівень цих викривлень неоднаковий як для різних галузей, так і для різних періодів часу. Це зумовлено розбіжностями в тенденціях технічного прогресу в різні періоди, що впливають на величину коефіцієнтів, та специфічними особливостями окремих галузей тощо. Водночас ці дані свідчать, що в багатьох випадках викривлення даних щодо обсягів виробництва, зумовлених незмінністю коефіцієнтів, порівняно невеликі.

З метою аналізу динаміки коефіцієнтів прямих витрат В. Леонт'єв запропонував використовувати величини їхніх відносних змін (\bar{a}_{ij}):

$$\bar{a}_{ij}(t, t+\tau) = \frac{2[a_{ij}(t) - a_{ij}(t+\tau)]}{[a_{ij}(t) + a_{ij}(t+\tau)]}, \quad (3.2.2)$$

а також показники зважених відносних змін коефіцієнтів (\tilde{a}_{ij}):

$$\tilde{a}_{ij}(t, t+\tau) = \bar{a}_{ij}(t, t+\tau) \frac{x_{ij}(t) + x_{ij}(t+\tau)}{2}. \quad (3.2.3)$$

Зважені відносні зміни більш придатні для аналізу, оскільки в разі використання їх враховують реальні обсяги видатків галузей і пов'язаний із цим рівень значущості коефіцієнтів залежно від розміру випуску галузі.

Як свідчать результати досліджень для низки країн, зміни коефіцієнтів витрат порівняно менше визначають зміни структури виробництва, ніж зміни обсягу й структури. Міру впливу зміни коефіцієнтів a_{ij} та кінцевого використання ВВП на обсяг і структуру виробництва можна визначити таким чином¹:

$$\begin{aligned} X_{t+\tau} - X_t &= (E - A_{t+\tau})^{-1} Y_{t+\tau} - (E - A_t)^{-1} Y_t = \\ &= [(E - A_{t+\tau})^{-1} Y_{t+\tau} - (E - A_{t+\tau})^{-1} Y_t] + [(E - A_{t+\tau})^{-1} Y_t - \\ &\quad - (E - A_t)^{-1} Y_t]. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Перший доданок формули (3.2.4), узятий у квадратні дужки, характеризує вплив зміни кінцевого використання ВВП на динаміку обсягу і структуру виробництва за період від року t до року $t + \tau$; другий доданок квадратних дужках — вплив змін коефіцієнтів.

Як зазначалося вище, використання в динаміці незмінних коефіцієнтів витрат подеколи може спричинитися до вельми суттєвого викривлення прогнозних обсягів виробництва продукції галузей.

Розроблення підходів до визначення коефіцієнтів витрат на перспективний період.

• Найпростіший підхід полягає в екстраполяції динаміки коефіцієнтів. Для нього можна скористатися різноманітними гіпотезами щодо характеру динаміки, зокрема:

$$a_{ij}(t+\tau) = \alpha_{ij}^{\tau} a_{ij}(t);$$

$$a_{ij}(t) = \bar{\alpha}_{ij} t^3 + \bar{\beta}_{ij} t^2 + \bar{\gamma}_{ij} t + \bar{\epsilon}_{ij} \text{ тощо.}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ — статистичні параметри.

Такий підхід мало придатний для практичного застосування. Для його реалізації потрібні доволі репрезентативні динамічні ряди коефіцієнтів за кілька років поспіль.

¹ Оскільки коефіцієнти прямих витрат переважно характеризують виробничо-технологічні зв'язки, структура яких за певного рівня технічного прогресу багато в чому схожа для промислово розвинених країн, то й результати такого аналізу для конкретної країни певною мірою можна поширити на відповідну групу країн.

• Інший можливий підхід пов'язаний з *аналізом чинників, які впливають на величину коефіцієнтів*. Найпростішу реалізацію цього підходу запропонував відомий англійський економіст Р. Стоун — це *метод RAS*.

Основні положення цього методу є такими.

1. У результаті розвитку виробництва й технічного прогресу місце одних продуктів у складі матеріальних витрат заступають інші, тож коефіцієнти витрат одних видів продукції зростають, інших — зменшуються. Рівень збільшення або зменшення коефіцієнтів визначають за допомогою спеціального множника r_i , однакового для i -го рядка матриці коефіцієнтів прямих витрат, який характеризує загальний ефект заміщення для продукції i -го виду. При цьому можливі три випадки:

$r_i > 1$, тобто в майбутньому відбудеться збільшення питомих витрат i -го продукту на виробництво інших видів продукції;

$r_i < 1$, тобто в майбутньому відбудеться зменшення питомих витрат i -го продукту на виробництво інших видів продукції;

$r_i = 1$, тобто в майбутньому питоми витрати i -го продукту на виробництво решти продуктів залишаться незмінними.

2. Прогноз розвитку виробництва пов'язаний зі зміною пропорцій між витратами живої й матеріалізованої праці, через що змінюється питома вага матеріальних витрат предметів праці в загальній вартості випуску продукції галузей.

В одних галузях у зв'язку із розширенням виробництва та дією інших чинників ця питома вага зменшується, в інших — збільшується, у третіх — залишається незмінною. Рівень збільшення чи зменшення питоми ваги витрат предметів праці визначають за допомогою коефіцієнтів s_j , однакових для j -го стовпчика матриці коефіцієнтів прямих витрат:

$s_j > 1$ — збільшення питоми ваги;

$s_j < 1$ — зменшення питоми ваги;

$s_j = 1$ — незмінність питоми ваги.

3. Коефіцієнти r_i та s_j не диференціюються за окремими видами витрат, усі пов'язані з ними зміни пропорційні відповідно для всіх елементів i -го рядка та j -го стовпчика. Отже, прогнозове значення коефіцієнта визначається як результат впливу двох чинників:

$$a_{ij(1)} = r_i a_{ij(0)} s_j, \quad (3.2.5)$$

де (1) та (0) означають величини, які належать відповідно до прогностового та базового періодів.

4. Коефіцієнти r_i та s_j вводять до моделі екзогенно.

Із коефіцієнтів r_i та s_j будуються діагональні матриці R і S :

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}.$$

За допомогою цих матриць матриця $A_{(1)}$ визначається так:

$$A_{(1)} = RA_{(0)}S.$$

Отже, в разі застосування методу RAS передбачається, що за зміни коефіцієнтів упродовж прогнозового періоду за рядками й стовпчиками виконується строга пропорційність. Справді, прогнозовані коефіцієнти прямих витрат i -го рядка дорівнюватимуть $(r_i a_{i1} s_1; r_i a_{i2} s_2; r_i a_{i3} s_3 \dots r_i a_{in} s_n)$. Усі вони містять однаковий множник r_i . Коефіцієнти прямих витрат j -го стовпчика визначатимуться як: $(r_1 a_{1j} s_j; r_2 a_{2j} s_j; r_3 a_{3j} s_j \dots r_n a_{nj} s_j)$. Усі вони містять однаковий множник s_j .

Реально такої пропорційності у зміні коефіцієнтів не існує. Заміщення одних видів матеріалів іншими не відбувається строго пропорційно за всіма напрямками споживання їх. Разом із тим, збільшення або скорочення питомої ваги споживання предметів праці не веде до пропорційної зміни всіх коефіцієнтів відповідних стовпчиків матриці. З урахуванням спільного впливу обох розглянутих чинників дещо пом'якшується строгість такої пропорційності, але вимоги до динаміки коефіцієнтів у разі використання методу RAS залишаються доволі жорсткими. Щоб упевнитися в цьому, розглянемо чотири пари базисних і прогнозних коефіцієнтів, розташованих у рядках i та k і в стовпцях j та l . Із (3.2.5) виходить:

$$\Delta a_{ij} = a_{ij(1)} - a_{ij(0)} = r_i a_{ij(0)} s_j - a_{ij(0)} = a_{ij(0)} (r_i s_j - 1),$$

звідки

$$\frac{\Delta a_{ij}}{a_{ij(0)}} + 1 = r_i s_j. \quad (3.2.6)$$

Співвідношення, аналогічні до (3.2.6), можна одержати і для інших пар коефіцієнтів:

$$\frac{\Delta a_{kj}}{a_{kj(0)}} + 1 = r_k s_j ; \quad (3.2.7)$$

$$\frac{\Delta a_{il}}{a_{il(0)}} + 1 = r_i s_l ; \quad (3.2.8)$$

$$\frac{\Delta a_{kl}}{a_{kl(0)}} + 1 = r_k s_l . \quad (3.2.9)$$

Із (3.2.6) та (3.2.7) виходить (з урахуванням, що $a_{ij(1)} = a_{ij(0)} + \Delta a_{ij}$)

$$s_j = \frac{a_{ij(1)}}{r_i a_{ij(0)}} = \frac{a_{kj(1)}}{r_k a_{kj(0)}} . \quad (3.2.10)$$

Із (3.2.8) та (3.2.9) визначаємо значення r_i та r_k й підставляємо їх у (3.2.10):

$$r_i = \frac{a_{il(1)}}{r_i a_{il(0)} s_l} ; \quad r_k = \frac{a_{kl(1)}}{r_k a_{kl(0)} s_l} ;$$

$$\frac{a_{ij(1)} a_{il(0)}}{a_{ij(0)} a_{il(1)}} = \frac{a_{kj(1)} a_{kl(0)}}{a_{kj(0)} a_{kl(1)}} . \quad (3.2.11)$$

Якщо позначити через λ_{ij} темп зростання коефіцієнта a_{ij} , тобто

$$\lambda_{ij} = \frac{a_{ij(1)}}{a_{ij(0)}} , \text{ тоді (3.2.11) матиме вигляд}$$

$$\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{il}} = \frac{\lambda_{kj}}{\lambda_{kl}} , \quad (3.2.12)$$

тобто темпи зміни коефіцієнтів, розташованих на перетині рядків i, k та стовпчиків j, l мають утворювати відповідну пропорцію.

• Прагнення уточнення коефіцієнтів на перспективу на підставі аналізу чинників зумовило спробу використати *методи кореляційно-регресійного аналізу для планування окремих коефіцієнтів*.

Для оцінювання чинників, які впливають на величину коефіцієнтів, можна скористатися:

— параметром, який характеризує вплив на величину коефіцієнта питомої ваги основного продукту в цілому;

- параметром, який характеризує вплив розбіжностей випуску в незмінних цінах;
- параметром, який характеризує вплив співвідношень між змінами цін на продукцію, що споживається та виробляється;
- параметром, який характеризує вплив енергооснащення праці;
- загальною кількістю зайнятих у галузі;
- параметром, який характеризує вплив часу тощо.

Такий підхід не набув поширення для прогнозування динаміки коефіцієнтів у силу того, що ряди динаміки коефіцієнтів, оскільки ряди динаміки коефіцієнтів практично невідомі, і значення аргументів, які впливають на величини коефіцієнтів прямих витрат і необхідних для розрахунку функцій, доволі важко визначити на перспективний період екзогенним шляхом.

➤ У практичному прогнозуванні значень коефіцієнтів прямих витрат предметів праці вельми поширеним є *метод техніко-економічного розрахунку*, який передбачає використання інформації, що надходить під час розроблення народногосподарських програм і планів. Відповідно до цього методу розрахунок коефіцієнтів здійснюють у два етапи: розрахунок коефіцієнтів витрат у натуральному вираженні (%); перехід до коефіцієнтів витрат у вартісному вираженні.

У розрахунку норм витрат на прогностичний період враховують прогресивні зміни в технології виробництва, зміни питомої ваги, технологічних варіантів створення одного виду продукції, зрушення у спеціалізації виробництва, які, своєю чергою, змінюють співвідношення між галузями, що виробляють цей продукт, та інші чинники. До того ж необхідні прогностичні відомості стосовно детальної номенклатури виробництва окремих видів продукції у складі кожної «чистої» галузі.

Отже, техніко-аналітичний метод є доволі вимогливим до наявності інформації, яку можна отримати лише в комплексному процесі прогнозування, а без нього достовірний міжгалузевий баланс на перспективний період побудувати не можна.

3.3. Динамічні багатогалузеві моделі

Розглянута статична модель міжгалузевого балансу характеризується такими рисами, які внеможливають застосування їх у прогностичних розрахунках. Ці ускладнення зумовлені тим, що за екзогенні елементи ВВП кінцевого використання бе-

руть такі, обсяги й структура яких безпосередньо залежать від ендегенних змінних моделі, тобто від обсягів випуску продукції. Передусім це стосується показників, що характеризують обсяг і структуру валового нагромадження. Залежність валового нагромадження від обсягу виробництва продукції найчіткіше виявляється в динаміці процесу виробництва. Валове нагромадження формується за рахунок продукції виробленої у поточному й попередніх виробничих циклах. Їхній результат, своєю чергою, справляє вплив на показники обсягу виробництва продукції в наступних періодах. На такі залежності зважають у динамічній моделі міжгалузевого балансу.

Динамічна модель міжгалузевого балансу відрізняється від статичної кількома рисами. Насамперед вона характеризує розвиток народного господарства за роками планового періоду. Стан економіки у році t багато в чому визначає її стан у році $t + 1$ і в подальші роки. Загальна динаміка розвитку народного господарства у цьому разі визначається початковим станом системи, характеристиками структурних параметрів на кожен рік прогнозного періоду та завданнями стосовно складових кінцевого використання продукту, які не мають зворотного зв'язку із приростом виробництва в прогнозовому періоді. Статична модель тільки фіксує народногосподарську структуру економіки на певний рік прогнозу. Передісторія цього року, а також вплив стану економіки в поточному році на її стан у майбутні роки визначаються поза моделлю.

➤ Нині розроблено різноманітні *типи динамічних моделей* за такою класифікацією.

➤ З точки зору відображення взаємозалежностей процесу формування капітальних вкладень від динамічно змінюваними обсягами виробництва можна виділити:

- «напівдинамічні» моделі (рекурсивні моделі зі зворотним зв'язком);

- рекурентні динамічні моделі (моделі поетапного розрахунку);

- «цілком динамічні» моделі.

➤ За способом математичного описання можна виділити три типи моделей:

- моделі у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь;

- моделі у вигляді системи лінійних різницевих рівнянь;

- моделі у вигляді системи звичайних лінійних рівнянь.

Система диференціальних і різницевих рівнянь відповідає одному із типів рекурентних динамічних моделей. Це моделі леонтьєвського типу, які були першим видом динамічних міжгалузе-

вих моделей. Для них характерним є те, що за невідомі змінні обирають обсяги випуску окремих видів продукції та річні прирости їх. Показники капітальних вкладень або основних виробничих фондів у моделях такого типу безпосередньо не розглядаються, вони можуть бути знайдені після розв'язання моделі як похідні величини від знайдених значень ендогенних змінних.

У моделях, які мають вид системи звичайних лінійних рівнянь, розглядають два типи невідомих величин, один із яких відображає обсяги виробництва продукції, а другий — капітальні вкладення (або введення в дію основних виробничих фондів чи виробничих потужностей, що залежить від конкретного виду моделі). У рекурентних міжгалузевих моделях обсяги капітальних вкладень розглядають як функції обсягів виробництва певного року, а самі капітальні вкладення впливають на обсяги виробництва продукції у майбутні роки. «Цілком динамічні» моделі враховують як прямі, так і зворотні зв'язки у часі.

➤ За характером відображення процесу формування капітальних вкладень розрізняють:

- моделі з урахуванням лагових змінних, що характеризують капітальні вкладення із затримкою;
- моделі без урахування лагових змінних капітальних вкладень.

Під лагом капітальних вкладень розуміють часовий інтервал (час затримки) між початком їх здійснення й тим моментом часу, коли вводять нові об'єкти, і вони починають впливати на приріст виробництва. Проблема відображення лага капітальних вкладень існує для рекурентних і «цілком динамічних» моделей.

➤ Найпростішим типом динамічних моделей є *рекурсивні моделі*. Основними ендогенними змінними в цих моделях постають показники обсягів виробництва різних видів продукції на останній рік періоду прогнозування та загальний обсяг капітальних вкладень в основні виробничі фонди кожної «чистої» галузі за весь період. Розподіл капітальних вкладень за роками прогнозового періоду можна здійснювати, наприклад, за допомогою екзогенно визначених параметрів $w_j(t)$ — питомої ваги капітальних вкладень у галузь j , що здійснюються у році t періоду прогнозування, в загальному обсязі капітальних вкладень за весь період:

$$\sum_{t=1}^{\Omega} w_j(t) = 1 \quad (t = 1, 2, \dots, \Omega),$$

де Ω — індекс останнього року прогнозового періоду.

Розрахунки за моделлю здійснюються у два етапи. На першому визначають обсяги виробництва для останнього року періоду та показники капітальних вкладень за весь період. Завдання другого етапу полягає в обчисленні показників виробництва продукції для кожного року періоду прогнозування.

Першому етапу відповідає система із $2n$ рівнянь та n невідомих величин виробництва продукції і n невідомих обсягів капітальних вкладень за весь період.

Перші n рівнянь є балансами виробництва й розподілу продукції, а останні n рівнянь — балансами основних виробничих фондів.

Середньорічна наявність основних фондів визначається як сума їх наявності на початок року та середньорічного введення їх у дію за підрахунком середньорічного вибуття фондів:

$$\bar{\Phi}_j(t) = (1 - \tilde{r}_j)[\Phi_j(t) + \lambda_j \Delta\Phi_j(t)], \quad (3.3.1)$$

де $\bar{\Phi}_j(t)$ — середньорічні основні виробничі фонди галузі j у році t ;

$\Phi_j(t)$ — основні виробничі фонди галузі j на початок року t ;

$\Delta\Phi_j(t)$ — введення в дію основних виробничих фондів галузі j в році t ;

\tilde{r}_j — коефіцієнт основних виробничих фондів (середньорічне вибуття відносно наявності їх);

λ_j — коефіцієнт перетворення фактичного введення в дію основних виробничих фондів у середньорічний.

За припущенням, коефіцієнти \tilde{r}_j та λ_j стали в часі.

Обсяги наявних основних фондів на початок року $t + 1$ у припущенні їх рівномірного вибуття впродовж року становитимуть:

$$\Phi_j(t + 1) = (1 - 2\tilde{r}_j)\Phi_j(t) + (1 - 2\tilde{r}_j)\Delta\Phi_j(t). \quad (3.3.2)$$

Рівномірне вибуття основних фондів упродовж року означає, що фактичне вибуття вдвічі перевищуватиме середньорічне вибуття.

У практиці економічних досліджень часто розглядають співвідношення між введенням у дію основних фондів певної галузі й загальним обсягом капітальних вкладень у галузь за будь-який рік $K_j(t)$:

$$\gamma_j = \frac{\Delta\Phi_j(t)}{K_j(t)}, \quad (3.3.3)$$

де γ_j — галузеві коефіцієнти введення в дію основних виробничих фондів.

У цьому разі передбачають, що коефіцієнти γ_j незмінні в часі. Величину галузевих капітальних вкладень можна представити як функцію загального обсягу їх для кожної галузі за весь період прогнозування K_j за допомогою коефіцієнтів $w_j(t)$:

$$K_j(t) = w_j(t)K_j. \quad (3.3.4)$$

Тоді з урахуванням (3.3.3) та (3.3.4) величина введення в дію основних фондів у році t дорівнюватиме

$$\Delta\Phi_j(t) = w_j(t)\gamma_j K_j. \quad (3.3.5)$$

Баланси виробництва й розподілу продукції на останній рік прогнозового періоду матимуть такий вигляд:

$$x_i(\Omega) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\Omega)x_j + \sum_{j=1}^n b_{ij}(\Omega)w_j(\Omega)K_j + y_i(\Omega), \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (3.3.6)$$

де $x_i(\Omega)$ — обсяг випуску продукції i -го виду в останньому прогнозовому році;

$y_i(\Omega)$ — «чистий» кінцевий продукт i -го виду в останньому прогнозованому році, який менший від обсягу кінцевого продукту статичної моделі на величину капітальних вкладень у галузі;

$b_{ij}(\Omega)$ — коефіцієнт структури капітальних вкладень, який характеризує питому вагу засобів праці i -го виду в загальному обсязі капітальних вкладень в j -у «чисту» галузь в останньому прогнозовому році.

Баланси основних фондів встановлюють для кожної галузі відповідність між величиною наявних фондів і потребою в них для відповідного року, яка визначається як добуток коефіцієнта фондомісткості на обсяг випуску продукції.

Розв'язок динамічних рекурсивних моделей не становить особливих ускладнень. Невід'ємність валових випусків продукції та обсягів капітальних вкладень, а також стабільність їхньої динаміки забезпечує екзогенне визначення коефіцієнтів $w_j(t)$.

Під час визначення коефіцієнтів $w_j(t)$ на прогнозовий період зазвичай виходять з екстраполяції їхніх значень за минулі періоди або з припущення стосовно постійного темпу зростання капітальних вкладень.

Надійні передбачення на підставі рекурсивних моделей можна отримати лише для доволі агрегованих галузей.

➤ Уперше динамічна міжгалузева модель у вигляді *системи лінійних диференціальних рівнянь* була запропонована В. Леонтьєвим. Ця система, записана в матричному вигляді, виглядає так:

$$X_t = A_t X_t + \bar{K}_t \dot{X}_t + \bar{Y}_t, \quad (3.3.7)$$

де X_t — вектор валових випусків у році t ;

\dot{X}_t — вектор приросту валових випусків у році t , виражений через похідні величини валових випусків галузей року t за часом;

\bar{Y}_t — вектор кінцевого продукту динамічної моделі;

\bar{K}_t — $(n \times n)$ -матриця коефіцієнтів капіталомісткості (зростання фондомісткості), що характеризує капітальні витрати засобів праці, необхідні для приросту валових випусків продуктів галузей матеріального виробництва на одиницю.

Модель (3.3.7) припускає миттєву реакцію економічної системи на розширення виробництва, оскільки описана системою диференціальних рівнянь для безперервного часового інтервалу. Реальним економічним системам така миттєва реакція не властива. Розширення виробництва майже завжди потребує капітальних вкладень, пов'язаних із «заморожуванням» засобів праці на період будівництва нових і реконструкції діючих підприємств, упродовж якого розширення виробництва неможливе. Щоб дослідити властивості розв'язків моделі (3.3.7), розглянемо деякі прості модифікації її.

1. Система однорідних рівнянь із постійними коефіцієнтами, тобто за $Y_t \neq 0$; $A_t = A = \text{const}$; $\bar{K}_t = \bar{K} = \text{const}$.

Тоді модель (3.3.7) матиме вигляд:

$$\dot{X}_t = \bar{K}^{-1}(E - A)X_t; \quad X_0 = [x_i(0)],$$

де $x_i(0)$ — відомі обсяги виробництва продукції галузей матеріального виробництва в базисному періоді ($i = 1, \dots, n$).

Загальний розв'язок системи має вигляд

$$X_t = e^{\bar{K}^{-1}(E-A)t} X_0,$$

де $e^{\bar{K}^{-1}(E-A)t} = E + \bar{K}^{-1}(E - A)t + \dots + [\bar{K}^{-1}(E - A)]^m \frac{t^m}{m!} + \dots$

за $t \rightarrow \infty$.

2. Система неоднорідних рівнянь з постійними коефіцієнтами, тобто за $\bar{Y}_t \neq 0$; $A_t = A = \text{const}$; $\bar{K}_t = \bar{K} = \text{const}$.

Модель, що відповідає цим умовам, виглядає так:

$$\dot{X}_t = \bar{K}^{-1}(E - A)X_t - \bar{K}^{-1}\bar{Y}_t; \quad X_0 = [x_i(0)],$$

а її розв'язок записують так:

$$X_t = e^{\bar{K}^{-1}(E-A)t} X_0 - \int_0^t e^{\bar{K}^{-1}(E-A)(t-\tau)} \bar{K}^{-1} \bar{Y}_\tau d\tau.$$

3. Система неоднорідних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, які залежать від часу, тобто:

$$Y_t \neq 0; \quad A_t = A(t); \quad \bar{K}_t = K(t) = K(t).$$

Тоді

$$\dot{X}_t = \bar{K}^{-1}(E - A)X_t - \bar{K}^{-1}\bar{Y}_t; \quad X_0 = [x_i(0)].$$

Розв'язок цієї системи має вигляд

$$X_t = \Gamma_t X_0 - \int_0^t \Gamma_t \Gamma_\tau^{-1} \bar{K}_\tau^{-1} \bar{Y}_\tau d\tau$$

де Γ_t — матриця, що визначена єдиним способом і задовольняє матричному диференціальному рівнянню:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = [\bar{K}_t^{-1}(E - A)]\Gamma; \quad \Gamma_0 = E.$$

Розв'язок розглянутих систем диференціальних рівнянь можливий, якщо існує матриця $\bar{K}_t^{-1}(E - A)$ або матриця \bar{K}^{-1} .

Важливим питанням побудови динамічних міжгалузевих моделей є забезпечення динамічної стабільності їхніх розв'язків, тобто поступової траєкторії показників валових випусків у динаміці, що має відповідати реальним умовам функціонування економіки. Втім, у загальному випадку розв'язок розглянутих типів систем диференціальних рівнянь цієї властивості не має.

До того ж якщо зважити на труднощі, які виникають під час розв'язання систем диференціальних рівнянь вищих порядків, можна зрозуміти всі причини, через які динамічні міжгалузеві моделі у вигляді систем лінійних диференціальних рівнянь не дістають практичного застосування, а використовуються лише в теоретичному аналізі.

➤ Спроби подолати основні недоліки розглянутого типу динамічної міжгалузевої моделі зумовили опис її у формі *лінійних різнице-вих рівнянь*:

$$X_t = A_t X_t + \bar{K}_t \Delta X_t + \bar{Y}_t, \quad (3.3.8)$$

де ΔX_t — вектор приростів валових випусків у році t порівняно із роком $t - 1$:

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}. \quad (3.3.9)$$

На відміну від системи диференціальних рівнянь у цьому разі розглядають дискретні інтервали, як правило, річні. Реакція економічної системи на розширення виробництва, тобто на здійснення капітальних вкладень, що забезпечують приріст продукції, має відбутися до завершення річного часового інтервалу. Таке припущення дещо пом'якшує занадто жорсткі вимоги миттєвої реакції, властиві системі диференціальних рівнянь, але цілком не усуває їх, оскільки спорудження великих виробничих об'єктів триває кілька років.

Розв'язок системи (3.3.8) можливий за допомогою системи рекурентних співвідношень для послідовних періодів прогнозування, починаючи з першого року, якщо відомий вектор валових випусків у базовому році X_0 . Для спрощення запису припускаємо, що $A_t = \text{const}$; $\bar{K} = \text{const}$.

Для першого року, враховуючи (3.3.9), маємо

$$X_1 = A_1 X_1 + \bar{K} (X_1 - X_0) + \bar{Y}_1 \quad \text{або} \quad (E - A - \bar{K}) X_1 = \bar{Y}_1 - \bar{K} X_0$$

Розв'язком цієї системи буде:

$$X_1 = (I - A - \bar{K})^{-1} (\bar{Y}_1 - \bar{K} X_0).$$

або якщо $(E - A - \bar{K}) = U$, то

$$X_1 = U^{-1} (\bar{Y}_1 - \bar{K} X_0). \quad (3.3.10)$$

Виходячи з цього, для другого року прогнозового періоду отримаємо таке значення вектора валових випусків:

$$X_2 = U^{-1} (\bar{Y}_2 - \bar{K} X_1).$$

Підставивши значення X_1 з (3.3.10), матимемо

$$X_2 = U^{-1} (\bar{Y}_2 - \bar{K} U^{-1} \bar{Y}_1) + (U^{-1} \bar{K})^2 X_0,$$

для третього року періоду

$$X_3 = U^{-1} [\bar{Y}_3 - (\bar{K} U^{-1}) \bar{Y}_2 + (\bar{K} U^{-1})^2 \bar{Y}_1] - (U^{-1} \bar{K})^3 X_0.$$

У загальному випадку буде:

$$\begin{aligned}
 X_t &= U^{-1}[\bar{Y}_t - (\bar{K}U^{-1})\bar{Y}_{t-1} + (\bar{K}U^{-1})^2\bar{Y}_{t-2} - \dots + \\
 &+ (-1)^{t-1}(\bar{K}U^{-1})^{t-1}\bar{Y}_1] + (-1)^t(U^{-1}\bar{K})^t X_0, \text{ або} \\
 X_t &= U^{-1} \sum_{\tau=0}^{t-1} (-1)^\tau (\bar{K}U^{-1})^\tau \bar{Y}_{t-\tau} + (-1)^t (U^{-1}\bar{K})^t X_0. \quad (3.3.11)
 \end{aligned}$$

Із (3.3.11) випливає, що продуктивність (тобто умова невід'ємності валових випусків) системи (3.3.8) не виконується автоматично в разі заданих характеристик матриць структурних параметрів подібно тому, як це відбувається в статичній моделі за невід'ємних векторів кінцевих продуктів для різних років періоду прогнозування, оскільки в загальний запис розв'язку ці вектори із відповідними матричними множниками входять зі знаками, що чергуються.

Дослідження властивостей системи (3.3.8), що забезпечують невід'ємність валових випусків для різних років прогнозу й стабільність (і монотонність) їхньої динаміки, є предметом спеціального дослідження.

➤ Реальні процеси капітальних вкладень мають доволі складну *часову структуру*. В заданому році капітальні вкладення здійснюються для введення в дію об'єктів не лише в поточному та наступних річних інтервалах часу, а й у віддаленіших періодах. Розрив у часі між початком здійснення вкладень і початком введення в дію основних виробничих фондів тим більший, чим складніший та більший об'єкт, що споруджується в цій галузі.

З іншого боку, введення в дію основних виробничих фондів є результатом капітальних вкладень не лише цього року, а й попередніх років, кількість яких залежить від тривалості лага в конкретній галузі.

У табл. 3.3.1 наведено структуру капітальних вкладень у часі для періоду прогнозування у 5 років та для лага у 3 роки. Кожен рядок таблиці характеризує розподіл капітальних вкладень, який здійснюють у цьому році, необхідних для введення в дію основних фондів у різні роки. У цьому плані обсяг капітальних вкладень року t дорівнює:

$$K(t) = \sum_{\tau=1}^{t+\theta} K(t, \tau), \quad (3.3.12)$$

де $K(t, \tau)$ — капітальні вкладення року t , що здійснюються для введення в дію основних фондів у році τ ;

θ — тривалість лага капітальних вкладень.

Стовпчики табл. 3.3.1 показують, за рахунок вкладень яких років відбувається введення в дію основних фондів у поточному році. Загальний підсумок стовпчика дорівнює:

$$\bar{\gamma}_{(\tau)} \Delta \Phi(\tau) = \sum_{t=\tau-\theta}^{\tau} K(t, \tau),$$

де $\bar{\gamma}_{(\tau)}$ — коефіцієнт, що характеризує відношення обсягу капітальних вкладень, необхідних для введення в дію основних фондів у році τ , до всього обсягу введення.

Таблиця 3.3.1

**ЧАСОВА СТРУКТУРА КАПІТАЛЬНИХ ВКЛАДЕНЬ (ТРИВАЛІСТЬ ПЕРІОДУ ПЛАНУВАННЯ — 5 РОКІВ;
ТРИВАЛІСТЬ ЛАГА КАПІТАЛЬНИХ ВКЛАДЕНЬ — 3 РОКИ)**

Рік здійснення вкладень (%)	Рік уведення в дію основних фондів (%)											Загалом
	Передплановий період			Період планування					Післяплановий період			
Передплановий період	- 2	- 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
- 2	К(- 2, 2)	К(- 2, -1)	К(- 2, 0)	К(- 2, 1)								К(- 2)
- 1		К(- 1, -1)	К(- 1, 0)	К(- 1, 1)	К(- 1, 2)							К(- 1)
0			К(0,0)	К(0,1)	К(0,2)	К(0,3)						К(0)
Період планування												
1				К(1,1)	К(1,2)	К(1,3)	К(1,4)					К(1)
2					К(2,2)	К(2,3)	К(2,4)	К(2,5)				К(2)
3						К(3,3)	К(3,4)	К(3,5)	К(3,6)			К(3)
4							К(4,4)	К(4,5)	К(4,6)	К(4,7)		К(4)
5								К(5,5)	К(5,6)	К(5,7)	К(5,8)	К(5)
Загалом				ΔФ(1)	ΔФ(2)	ΔФ(3)	ΔФ(4)	ΔФ(5)				

Обсяг таких вкладень перевищує величину введення за рахунок капітальних витрат, які не збільшують вартості основних фондів. Значення коефіцієнта зазвичай становить величину, близьку до одиниці, тому будемо вважати, що $\bar{\gamma}_{(\tau)} = 1$, тоді

$$\Delta\Phi(\tau) = \sum_{t=\tau-\theta}^{\tau} K(t, \tau). \quad (3.3.13)$$

В аспекті зв'язку капітальних вкладень у виробничу сферу із динамікою процесу виробництва в періоді прогнозування у їхньому складі можна виокремити три основні групи: капітальні вкладення, пов'язані з завершенням будівництва основних фондів, розпочатого в передпрогнозовому періоді (K_0); капітальні вкладення, пов'язані із будівництвом об'єктів, які вводяться в дію впродовж періоду прогнозування (K_p), і капітальні вкладення, пов'язані із завершенням капітального будівництва для введення в дію об'єктів у післяпрогнозовий період (K_f).

Очевидно, що на природи обсягів виробництва у прогнозовому періоді з-поміж загального обсягу вкладень безпосередньо впливають тільки величини K_0 та K_p .

Величина K_0 є заданою, й тому справляє однозначний вплив на показники обсягів виробництва у прогнозовому періоді. Тому її також слід враховувати у складі кінцевого продукту, що використовується.

У загальному випадку величину K_0 для року t можна записати так:

$$K_0(t) = \sum_{\tau=t}^{\theta} K(t, \tau), \text{ якщо } t \leq \theta; K_0(t) = 0, \text{ якщо } t \geq \theta.$$

Безпосередньо до складу структурних параметрів і невідомих динамічної моделі слід включити показники, що характеризують капітальні вкладення K_p . Величину для завершення будівництва впродовж післяпрогнозового періоду в загальному випадку визначають як:

$$K_f(t) = \sum_{\tau=t}^{t+\theta} K(t, \tau), \text{ якщо } t > \Omega - \theta; K_f(t) = 0, \text{ якщо } t \leq \Omega - \theta.$$

де Ω — індекс останнього прогнозового року.

Зафіксувати величину K_f у складі кінцевого продукту за роками важко, бо невідомо, як можна представити розвиток економі-

ки в післяпрогнозовому періоді, поки не з'ясовано принаймні основні пропорції її розвитку в минулому прогнозовому періоді. Утім, можна визначити певну тенденцію в динаміці капітальних вкладень і введення в дію основних фондів за ряд років, розташованих поспіль. Це дає можливість визначити функціональний взаємозв'язок між величинами K_p і K_f та компонентами, які їх визначають, а отже, замість фіксації величин K_f знаходити їх шляхом розв'язання моделі. Зрештою можна встановити таку залежність між кінцевим продуктом статичної (y_i) та динамічної (\bar{y}_i) моделі (до всіх наведених вище позначень додамо галузевий індекс i):

$$y_i = \bar{y}_i + K_{pi} + K_{fi},$$

а в загальному випадку $\bar{y}_i \leq y_i$.

Обсяг виробництва продукції в розглядуваній динамічній міжгалузевій моделі з урахуванням лага капітальних вкладень визначається потребами її постачання для поточного виробничого споживання, для капітальних вкладень K_p і K_f , а також для кінцевого споживання:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + K_{pi}(t) + K_{fi}(t) + \bar{y}_i(t),$$

або

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^n K_{ij}(t) + \bar{D}_i(t). \quad (3.3.14)$$

Тут $K_{ij}(t)$ — постачання засобів праці i -го виду для здійснення капітальних вкладень у j -ту галузь у році t ;

$$\bar{D}_i(t) = y_i(t) - \sum_{j=1}^n K_{ij}(t).$$

До динамічної моделі вводять коефіцієнти структури капітальних вкладень $\bar{b}_{ij}(t)$, аналогічні тим, що були використані в моделі (3.3.6):

$$K_{ij}(t) = \bar{b}_{ij}(t)K_j(t). \quad (3.3.15)$$

Як впливає з (3.3.12), капітальні вкладення здійснюють у році t для введення в дію основних фондів у різні роки періоду планування:

$$K_j(t) = \sum_{\tau=t}^{t+\theta_j} K_j(t, \tau), \quad (3.3.16)$$

де θ_j — лаг капітальних вкладень у галузі j .

Свою чергою, як зазначалося у (3.3.13), показники $K_j(t, \tau)$ є функціями від значень $\Delta\Phi_j(\tau)$ введення в дію основних фондів цієї галузі в році t . Цю залежність можна виразити за допомогою коефіцієнтів часової структури капітальних вкладень $v_j(t, \tau)$, які характеризують питому вагу капітальних вкладень року t у загальній вартості основних фондів галузі j , введених у дію в році τ :

$$v_j(t, \tau) = \frac{K_j(t, \tau)}{\Delta\Phi_j(\tau)}; \quad \sum_{\tau=t-\theta_j}^{\tau} v_j(t, \tau) = 1 \quad (3.3.17)$$

Підставивши значення $K_j(t, \tau)$ з (3.3.17) у (3.3.16), а знайдене таким чином значення $K_j(t)$ у (3.3.15), одержимо

$$K_j(t) = \bar{b}_{ij}(t) \sum_{\tau=t}^{t+\theta_j} v_j(t, \tau) \Delta\Phi_j(\tau). \quad (3.3.18)$$

Ураховуючи (3.3.18), баланси виробництва й розподілу продукції (3.3.14) можна записати так:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{\tau=t-\theta_j}^{t+\theta_j} \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij}(t) v_j(t, \tau) \Delta\Phi_j(\tau) + \bar{y}_i(t)$$

або в матричному вигляді:

$$(E - A_t) X_t - \bar{B}_t \sum_{\tau=t}^{t+\theta} V_{t\tau} \Delta\Phi_{\tau} = \bar{Y}_t; \quad (3.3.19)$$

$$(t = 1, \dots, \Omega; \tau = 1, \dots, \dots, \Omega, \dots, \Omega + \bar{\theta})$$

де \bar{B}_t — матриця коефіцієнтів $\bar{b}_{ij}(t)$; $V_{t,\tau}$ — діагональна матриця коефіцієнтів $v_j(t, \tau)$; $\Delta\Phi_{\tau}$ — вектор-стовпчик галузевих показників введення в дію основних фондів; $\bar{\theta}$ — максимальна тривалість лага капітальних вкладень.

4.1. Моделі прогнозування інфляції

Прогнозування інфляції, яку вимірюють з огляду на темп зростання цін, ґрунтується на аналітичному дослідженні головних чинників, що впливають на формування рівня цін, а саме:

- зростання виробничих витрат, насамперед за рахунок збільшення цін на енергоносії (за орієнтовною оцінкою);
- залежність рівня цін від загальнооекономічної ситуації у країні (рівень сукупного попиту, динаміка грошових доходів населення, конкуренція із іноземними виробниками);
- спрямованість державної економічної політики. Ослаблення грошово-кредитного контролю за умов спаду виробництва або його стабілізації на недостатньому рівні призводить до інфляції попиту;
- співвідношення динаміки загального рівня цін і відносних цін на окремі товари та послуги (з метою перерозподілу обмежених ресурсів). Зміна відносних цін здебільшого зумовлює зростання загального рівня цін (принаймні тимчасове);
- інфляційні очікування, наслідком яких є підвищення відсоткових ставок та вимоги стосовно підвищення заробітної плати;
- спрямованість офіційної політики країни, а саме: заходи контролю над цінами, політика щодо конкуренції й система зовнішньої торгівлі, режим обмінного курсу.

Прогнозування індексу споживчих цін (ІСЦ). ІСЦ є найпоширенішим показником рівня інфляції і, як правило, обчислюють на підставі періодичних обстежень споживчих цін.

Індекс споживчих цін (ІСЦ) — це індекс цін типового кошика імпортих та вітчизняних товарів, які споживаються резидентами.

Індекс споживчих цін є загальним показником темпів зміни цін, за якими домашні господарства-споживачі купують товари та послуги, тобто цін, які кожен член суспільства сплачує під час купівлі конкретного товару чи послуги. Це — показник інфляції у ринковій економіці, широко застосовуваний з метою контролю за динамікою цін.

До переліку ІСЦ для розрахунку державного індексу зараз належать 425 видів товарів і послуг-представників¹. Класифікація

¹ Методика розрахунку національного індексу споживчих цін для визначення рівня інфляції. — К.: Держкомстат України, 2001.

цих видів товарів і послуг відповідає стандартній класифікації, яку використовують у статистиці виробництва, роздрібної торгівлі та зовнішньоекономічної діяльності країни. Весь набір поділяється на три великі групи: продовольчі товари (38 підгруп), непродовольчі товари (56 підгруп) та послуги (27 підгруп).

Для розрахунку національного індексу споживчих цін в Україні (індексу інфляції) використовують формулу Ласпейреса. Обчислений із застосуванням формули (4.1.1) зведений індекс характеризує відношення вартості споживчого кошика товарів та послуг у цінах звітного періоду до його вартості в цінах базового періоду:

$$CPI_{0t} = \frac{\sum_j [(P_{tj} / P_{(t-1)j}) \times (P_{(t-1)j} \cdot Q_{0j})]}{\sum_j (P_{0j} \cdot Q_{0j})} \times 100, \quad (4.1.1)$$

де $P_{(t-1)j} \cdot Q_{0j} = P_{0j} \cdot Q_{0j} \times P_{1j} / P_{0j} \times P_{2j} / P_{1j} \times \dots \times P_{(t-1)j} / P_{(t-2)j}$;

CPI_{0t} — ІСЦ за період t порівняно з базовим (0);

P_{0j} — ціна товару j у базовому періоді;

P_{tj} — ціна товару j у періоді t ;

Q_{0j} — кількість товару j у базовому періоді.

Прогнозування інфляційних очікувань. Уявлення суб'єктів ринку про майбутній рівень цін належать до найважливіших параметрів, які визначають їхню поведінку. Тому для комплексного аналізу причин виникнення інфляції та прогнозування її впливу на економічну кон'юнктуру в макромоделях необхідно враховувати інфляційні сподівання. Залежно від способу формування ендогенні інфляційні сподівання поділяють на статичні, адаптивні та раціональні.

Статичним називають такий спосіб оцінювання сподівань, за якого ціна наступного періоду (P_t^e) дорівнює ціні попереднього періоду:

$$P_t^e = P_{t-1}. \quad (4.1.2)$$

Адаптивним називають спосіб формування сподівань, за якого здійснюється коригування майбутньої ціни з урахуванням збитків, що виникли внаслідок помилкового визначення ціни в попередньому періоді ($t - 1$):

$$P_t^e = P_{t-1}^e + a (P_{t-1} - P_{t-1}^e); \quad 0 < a < 1, \quad (4.1.3)$$

де a — коефіцієнт адаптації. За $a = 1$ очікування є сталою величиною.

Рациональним називають такий спосіб формування сподівань, за якого використовують усю наявну в поточний момент інформацію стосовно чинників, котрі впливають на значення параметра, що визначається. Очікувана ціна має вигляд функції від усіх ціноутворювальних чинників (x_i):

$$P_t^e = P_t^e(x_i), i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1.4)$$

Найпростіша модель прогнозу ціни відповідно до концепції раціональних сподівань може бути такою [10]:

$$y_t^D = a - bP_t^e + \varepsilon_{1t}; \quad (4.1.5)$$

$$y_t^S = c + dP_t^e + \varepsilon_{2t}; \quad (4.1.6)$$

$$P_t^e = P_t^e(x_i); \quad (4.1.7)$$

$$y_t^{De} = y_t^{Se}. \quad (4.1.8)$$

Параметри ε_{1t} та ε_{2t} — це стохастичні змінні, які відображають випадкові помилки у прогнозуванні обсягів попиту й пропозиції.

Рівняння (4.1.5) свідчить, що поточний попит на добробут (y_t^D) визначається його поточною ціною. Рівняння (4.1.6) засвідчує те, що рішення щодо обсягу пропозиції (y_t^S) продавцям доводиться приймати напередодні, тобто на підставі очікуваної ціни. Рівняння (4.1.7) — це свідчення того, що продавець будує свій прогноз згідно із концепцією раціональних сподівань. У моделі, що розглядається, це означає, що йому відомі параметри a , c , d , які визначають конкретний вид функції попиту й пропозиції. Тотожність (4.1.8) констатує рівність очікуваних обсягів попиту (y_t^{De}) і пропозиції (y_t^{Se}). Оскільки очікується, що прогноз буде точним, то:

$$y_t^{De} = a - bP_t^e(x_i) \text{ і } y_t^{Se} = c + dP_t^e(x_i),$$

звідси:

$$a - bP_t^e(x_i) = c + dP_t^e(x_i) \text{ і } P_t^e(x_i) = \frac{a - c}{b + d}. \quad (4.1.9)$$

Однак у реальному житті побудова адекватної прогнозової моделі пов'язана з проблемою збирання й оброблення необхідної інформації. Тому під час моделювання поведінки економічних суб'єктів, поряд із раціональними сподіваннями використовують

також адаптивні сподівання. Більше того, з метою спрощення коефіцієнт адаптації часто беруть за одиницю, й тоді виникає окремий випадок адаптивних сподівань — статичне сподівання.

Наведемо приклади побудови моделей інфляції.

1. Модель визначення рівня цін. Підґрунтям цієї моделі є таке рівняння кількісної теорії грошей:

$$M \cdot V = P \cdot Y \Rightarrow P, \quad (4.1.10)$$

де V — швидкість обертання грошей;

Y — реальний ВВП;

M — кількість грошей у обігу (наприклад, $M3$);

P — рівень цін у країні.

У рівнянні (3.3.10) параметри V та Y задано, швидкість обертання грошей залежить від частоти грошових виплат, яка визначається технічними й інституціональними умовами, а величина реального ВВП визначається мірою встановлення рівноваги в реальному секторі.

Оскільки ані V , ані Y не залежать від кількості грошей, рівень цін прямо пропорційний масі грошей, що обертаються:

$$P = \frac{V}{Y} M.$$

З огляду на те, що в сучасній Україні темпи зростання реального ВВП визначаються інституціональними й технологічними процесами, що стосуються переважно податково-бюджетної політики, зміни грошової маси та швидкості грошового обігу визначатимуть зміну номінального ВВП за рахунок зміни цін.

Розглядаючи чинники, що впливають на темпи інфляції, особливу увагу приділяють динаміці грошової маси. Збільшення її може відбуватися як унаслідок сприятливих змін у поведінці суб'єктів господарювання й населення, так і безпосередньої емісії. За умов економічної кризи головним джерелом збільшення грошової маси в обігу є емісія. Визначаються економічні наслідки емісії, а саме: відповідне зростання грошового агрегату $M1$, тобто зростання грошей поза банками ($M0$), коштів на розрахункових і поточних рахунках підприємств і депозитів до запитання населення (емісія понад 8—10 % грошової маси $M3$ не супроводжується пропорційним збільшенням строкових депозитів, вона посилює недовіру до національних грошей і призводить до поширення негативних інфляційних та валютних очікувань).

Якщо за рівень цін (4.1.10) вважати інфляцію, то для аналізу її динаміки згідно із кількісною теорією грошей можна використати вказані чинники.

2. Модель інфляції, побудована на основі множинної регресії. У цій моделі велика увага приділяється вибору пояснюючих змінних (факторів), що включаються в модель. Наприклад, оскільки інфляція — це відсоток приросту цін, такі чинники, як ВВП і грошова пропозиція, доцільно включати в модель у вигляді відсотка приросту до рівня попереднього місяця. Дуже важливо, щоб усі коефіцієнти при факторних змінних мали чітку економічну інтерпретацію.

Модель, яка найкраще описує вплив вказаних чинників на рівень інфляції, можна відобразити так¹:

$$h_t = a_0 + a_1 y_t + a_2 m_{t-3} + a_3 v_t + a_4 h_{t-12}, \quad (4.1.11)$$

де h — рівень місячної інфляції;

y — відсоток приросту рівня ВВП за поточний квартал стосовно рівня попереднього місяця;

m — відсоток приросту грошової маси (агрегат M_2) щодо рівня попереднього місяця.

Оскільки інфляція означає безперервне зростання цін, для прогнозування її в межах макроекономічної моделі необхідно встановити зв'язок між темпом приросту рівня цін $\pi_t = (P_t - P_{t-1})/P_t$, обсягами сукупного попиту — $y_t^D(\pi_t)$ та сукупної пропозиції — $y_t^S(\pi_t)$.

3. Модель процесу розвитку інфляції в часі, яку можна побудувати на підставі динамічних функцій сукупного попиту й сукупної пропозиції.

Динамічна функція сукупного попиту:

$$y_t = y_{t-1} + a\Delta A_t + c\Delta\pi_t^e + b\dot{M}_t - b\pi_t. \quad (4.1.12)$$

За заданих значень: обсягу виробництва попереднього періоду (Y_{t-1}), приросту автономного попиту в поточному періоді (A_t), темпу приросту номінальної кількості грошей (M_t), очікуваного темпу інфляції (π_t^e) — ця функція відбиває залежність між фактичним темпом інфляції та поточною величиною сукупного попиту.

Динамічна функція сукупної пропозиції для короткотермінового прогнозу з інфляційними очікуваннями:

$$\pi_t = k(y_t - y_F) + \pi_t^e, \quad (4.1.13)$$

¹ Науменко В. Інфляція. У пошуку взаємозв'язків // Вісник НБУ. — 1997. — Лютий.

або

$$y_t = y_F + \frac{1}{k}(\pi_t - \pi_t^e). \quad (4.1.14)$$

Кожному обсягу сукупної пропозиції відповідає вищий (нижчий) фактичний темп інфляції, який стає функцією від очікуваного темпу її $\pi_t = \pi_t(\pi_t^e)$.

Динамічна функція сукупної пропозиції для короткострокового прогнозу характеризує зв'язок між фактичним темпом інфляції й обсягом виробництва за заданих інфляційних очікувань. Коли фактичний темп інфляції не збігається з очікуваним, обсяг національного доходу не дорівнює національному доходу в умовах повної зайнятості (Y_F). Якщо впродовж тривалого часу темп інфляції не змінюється, очікуваний темп її стає рівним фактичному відповідно до будь-якої концепції формування очікувань ($\pi_t = \pi_t^e$). У цьому разі, як випливає із (4.1.14), обсяг сукупної пропозиції дорівнює національному доходу повної зайнятості за будь-якого темпу інфляції $Y_t = Y_F$. Цю залежність називають динамічною функцією сукупної пропозиції тривалого

періоду. Вона характеризує зв'язок між темпом інфляції й обсягом виробництва в разі збігу фактичного темпу інфляції із очікуваним.

4. Економетрична модель визначення темпу інфляції та обсягу виробництва, що становить структурну форму системи одночасних рівнянь функцій сукупного попиту та пропозиції:

$$\begin{cases} y_t^D = y_{t-1}^D + a\Delta A_t + c\Delta\pi_t^e + b\dot{M}_t - b\pi_t; \\ y_t^S = y_F + \frac{1}{k}\pi_t - \frac{1}{k}\pi_{t-1}; \\ y_t^D = y_t^S. \end{cases} \quad (4.1.15)$$

Приведена форма моделі матиме вигляд

$$\begin{cases} y_t = \alpha_1 \cdot y_{t-1}^D + \beta_1 \cdot \Delta A_t + \delta_1 \cdot \Delta\pi_t^e + \gamma_1 \cdot \dot{M}_t + \lambda_1 \cdot \pi_{t-1} + \varepsilon_{1t}; \\ \pi_t = \alpha_2 \cdot y_{t-1}^D + \beta_2 \cdot \Delta A_t + \delta_2 \cdot \Delta\pi_t^e + \gamma_2 \cdot \dot{M}_t + \lambda_2 \cdot \pi_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \end{cases} \quad (4.1.16)$$

де $Y = \begin{pmatrix} y_t \\ \pi_t \end{pmatrix}$ — вектор ендогенних змінних;

$X = \begin{pmatrix} \Delta A_t \\ \Delta \pi_t^e \\ \dot{M} \\ y_F \\ \pi_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$ — вектор екзогенних і лагових змінних;

H — матриця параметрів приведеної системи рівнянь.

Оцінки параметрів зведеної моделі (\hat{H}) можна одержати методом 2-МНК. Тоді розрахункові значення ендогенних змінних дістанемо, підставляючи в оцінювану систему вектор екзогенних змінних X_t :

$$Y_t = \hat{H} \cdot X_t. \quad (4.1.17)$$

Процес розвитку інфляції можна розглядати залежно від монетарних (а) чи фіскальних (б) впливів на економічну кон'юнктуру, при цьому можливі такі наслідки.

1) а) Якщо в першому прогнозованому періоді темп приросту номінальної кількості грошей буде $\dot{M}_1 > 0$, то відповідно до (4.1.12) сукупний попит набуде значення $y^D(\pi)_1$, а національний дохід у цьому періоді зросте до y'_1 за темпу інфляції π_1 , $0 < \pi_1 < \dot{M}_1$.

б) Якщо збільшити державні витрати, темп приросту автономного попиту дорівнюватиме ΔA_1 , тобто $\Delta A_1 > 0$, за інших незмінних значень екзогенних параметрів, то відповідно до (4.1.12) сукупний попит набуде значення $y^D(\pi)'_1$, темп інфляції π_1 перевищуватиме темп приросту грошової маси через прискорення обігу грошей $\pi_1 > \dot{M}_1$, а національний дохід зросте до y'_1 .

2) а) Припустимо, що економічні суб'єкти формують своє уявлення про майбутнє відповідно до концепції статичних сподівань. Тоді у другому періоді $\pi_2^e = \pi_1$, а значення динамічних функцій сукупної пропозиції нетривалого періоду відповідно до (4.1.13) дорівнюватиме $y^S(\pi)_2$, сукупного попиту відповідно до

(4.1.12) — $y^D(\pi)_2$, темп інфляції зросте до π_2 . На цьому етапі пристосування до нового рівноважного стану темп зростання рівня цін перевищує темп зростання грошової маси: $\pi_t > \dot{M}_1$.

б) За рахунок прискорення інфляції сукупна пропозиція зросте:

$$y^S(\pi)_0 \rightarrow y^S(\pi)'_2,$$

а величину сукупного попиту визначатимуть умови:

$\Delta A_2 = 0$ — відсутність подальшого зростання автономних витрат призводить до падіння сукупного попиту;

$\Delta A_2 > 0$ — подальше збільшення автономних витрат призводить до зростання сукупного попиту.

3) а) У третьому прогнозованому періоді сукупна пропозиція зміниться на величину $\pi_2 - \pi_1$, а сукупний попит — на $y_2 - y_1$. Як наслідок, у третьому періоді в разі подальшого прискорення інфляції виникне зниження обсягу виробництва порівняно із попереднім періодом.

б) Слідом за підвищенням темпу інфляції на попередньому етапі також продовжує зростати сукупна пропозиція, а сукупний попит змінюється залежно від умов другого етапу.

Із рівняння (4.1.12) випливає, що за незмінних значень A і π сукупний попит збільшується, якщо $\dot{M} > \pi$. Це пояснюється тим, що за $\dot{M} > \pi$ збільшуються реальні касові залишки, й тому, згідно з ефектом Пігу, зростає споживчий попит, а відповідно до ефекту Кейнса — інвестиційний попит.

У разі фіксованого темпу зростання грошової маси разовий приріст автономного попиту змінює економічну кон'юнктуру в нетривалому періоді, але не впливає на рівноважні значення економічних параметрів у тривалому періоді.

Із проведеного аналізу моделі та прогнозу розвитку інфляції випливає, що необхідною умовою її виникнення є швидше зростання номінальної кількості грошей чи прискорення обертання їх порівняно зі зростанням реального національного доходу. Такого самого висновку можна дійти на основі *ex post* аналізу тотожності $MV \equiv PY$, який констатує, що кількість грошей, витрачених на купівлю виробленої продукції, дорівнює кількості грошей, наявних в обігу, помноженій на швидкість обертання їх.

Записана в темпах приросту, ця тотожність має вигляд:

$$\dot{M} + \dot{V} \equiv \pi + \dot{y},$$

або

$$\pi \equiv \dot{M} + \dot{V} - \dot{y},$$

де π , \dot{M} , \dot{V} , \dot{y} — відповідно темпи приросту рівня цін, номінальної кількості грошей, швидкості їхнього обертання й реального доходу.

Для виникнення інфляції ($\pi > 0$) необхідно, щоб виконувалася принаймні одна із таких трьох умов:

$$\dot{M} > \dot{y}, \text{ якщо } \dot{V} = 0;$$

$$\dot{V} > \dot{y}, \text{ якщо } \dot{M} = 0;$$

$$\dot{M} + \dot{V} > \dot{y}.$$

За монетарною концепцією однією з головних причин інфляції вважають зростання номінальної кількості грошей, що перевищує зростання виробництва благ за незмінної швидкості обігу грошей. Інфляція може виникнути й за незмінної номінальної кількості грошей, якщо швидкість обертання їх зростає скоріше, ніж обсяг виробництва. Це може статися внаслідок падіння попиту на реальні касові залишки завдяки вдосконаленню техніки розрахунків або через заміну грошей цінними паперами у функції засобу збереження цінностей.

У немонетарних концепціях остання нерівність виступає лише необхідною умовою, але не причиною інфляції.

Монетарні й немонетарні причини інфляції не є взаємовиключними і можуть діяти одночасно, на що слід вважати під час прогнозування економічної кон'юнктури.

Більшість моделей ціноутворення, а відповідно й інфляції, характеризуються тим, що динаміка цін у них пояснюється дією певного чинника. Такі, по суті, односторонні моделі внеможливають визначення спільного впливу на зростання цін низки чинників, пов'язаних із внутрішньою економічною політикою, економічним циклом і впливом світового ринку на ціноутворення.

5. Економетрична модель аналізу та короткотермінового прогнозування інфляції споживчих цін. У Національному банку України, поряд з іншими підходами, застосовують модель, ґрунтовану на методі покомпонентного прогнозування інфляції¹. Застосування цього методу дає кращі результати порівняно

¹ Петрик О. І., Половнєв Ю. О. Аналіз чинників інфляції та її прогнозування в країні.

з іншими, оскільки дає змогу вимірювати рівень впливу чинників на кожний окремий компонент кошика, що, своєю чергою, підвищує точність прогнозу індексу споживчих цін. Застосування цього методу ускладнюється мірою поглиблення деталізації кошика. Методологічні засади побудови індексу споживчих цін в Україні передбачають розподіл його на індекси цін продовольчих товарів, непродовольчих товарів і послуг, які також мають свою внутрішню структуру, тобто поділяються на окремі компоненти.

Цю модель створено на основі визначення основних груп чинників, що впливають на значення індексу споживчих цін з огляду на специфіку української економіки. Кількість чинників впливу на розвиток інфляційних процесів доволі значна, тому в процесі побудови моделі потрібно проаналізувати певний набір їх і відібрати ті, що справляють найвідчутніший вплив на інфляційні процеси. Модель передбачає дію таких чинників: монітарного, обмінного курсу, реального зростання економіки, очікувань населення, адміністративного регулювання цін, зовнішніх та внутрішніх шоків, рівня розвитку банківської системи, продуктивності праці, внутрішніх взаємозв'язків.

Загалом модель прогнозування інфляції містить 55 стохастичних рівнянь та побудована на основі часових рядів, що описують динаміку цін 23 компонентів продовольчих товарів, 20 компонентів непродовольчих товарів, 9 компонентів послуг і трьох агрегованих компонентів товарів та послуг.

У загальному вигляді інфляцію (P), як вона розрахована в моделі, можна записати як зважене значення цін продовольчих товарів, непродовольчих товарів (P^N) та послуг (P^S):

$$P = \alpha P^F + \beta P^N + \gamma P^S, \quad (4.1.18)$$

де α , β , γ — частки відповідних груп у споживчому кошику, причому:

$$0 < \alpha < 1; 0 < \beta < 1; 0 < \gamma < 1; \alpha + \beta + \gamma = 1. \quad (4.1.19)$$

Своєю чергою компоненти відповідної групи споживчого кошика визначають на підставі таких залежностей:

$$P^F = \frac{\sum_{i=1}^I w_i^F \cdot f(AGR_{t...t-12}, M_{t-1...t-12}^S, ER_{t...t-2}, I_{t...t-6}^L, E, F, LP, X, \Omega_i^F)}{\alpha};$$

$$P^N = \frac{\sum_{i=1}^l w_i^N \cdot f(IND_{t-1..t-12}, M_{t-1..t-12}^S, ER_{t-1..t-2}, I_{t-1..t-6}^L, E, F, LP, X, \Omega_i^N)}{\beta}; \quad (4.1.20)$$

$$P^S = \frac{\sum_{i=1}^n w_i^S \cdot f(M_{t-1..t-12}^S, ER_{t-1..t-2}, LP, X)}{\gamma};$$

де: l, m, n — кількість компонентів у кожній групі споживчого кошика;

w_i^F, w_i^N, w_i^S — частка i -го компоненту відповідної групи у споживчому кошику;

t — поточний період часу;

AGR — продукція сільського господарства в постійних цінах;

IND — продукція промисловості в постійних цінах;

M^S — пропозиція грошей (або грошова маса — грошовий агрегат МЗ);

ER — обмінний курс гривні до долара США;

I^L — відсоткова ставка за кредитами;

F — ціни на паливно-мастильні матеріали;

E — ціни на електроенергію;

LP — продуктивність праці;

X — очікування населення, які розраховують на підставі агрегування місячних значень інфляції за ковзний попередній рік, зважених на відповідні економетрично обчислені частки;

Ω_i^F, Ω_i^N — підмножини інших компонентів споживчого кошика, які впливають на i -й компонент групи продовольчих товарів (F) та непродовольчих товарів (N).

Функціональна залежність від деяких чинників ціни, наприклад, компонента $P^{F(A)}$ споживчого кошика, має вигляд:

$$P^{F(A)} = f(P^{F(B,C,D,\dots)}, PDL(M^S)_{-5,\dots,-8}, ER_{-1}, I^L, F, E, X, LP), \quad (4.1.21)$$

де: $P^{F(A)}$ — ціна на продукцію;

$P^{F(B,C,D,\dots)}$ — ціни на сировину (B, C, D, \dots);

$PDL(M^S)_{-5,\dots,-8}$ — поліноміально розподілений лаг грошової маси (з 5-го до 8-го місяця).

До чинників впливу на ціну конкретного компонента не включено реальне зростання продукції сільського господарства, оскільки його враховувати під час оцінювання компонента « $P^{F(B,C,D,...)}$ », що є головними чинниками впливу на компонент « $P^{F(A)}$ ».

Роботу моделі відображає схема (рис. 4.1.1).

Практична реалізація моделі виконана в системі EViews у вигляді набору програм, які відповідають за виконання певних блоків.

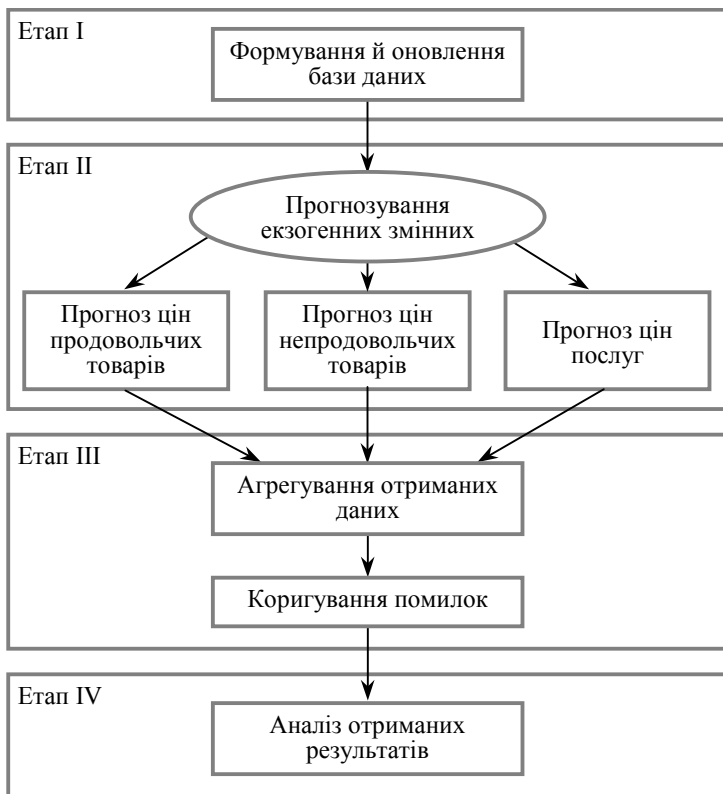


Рис. 4.1.1. Схема моделювання короткотермінового прогнозування інфляції споживчих цін

На першому етапі роботи моделі із головної бази даних обирають часові ряди з індексами цін на набір товарів і послуг, які відтворюють репрезентативну вибірку товарів та послуг споживчого кошика й набір рядів екзогенних змінних. Також для кожного компонента й екзогенних змінних формують блок шоків, які

передбачають можливе коригування поведінки певної величини як для подальшого аналізу впливовості чинників на неї й на ціну кошика товарів, так і для врахування певних чинників, інформація про дію яких уже надійшла або передбачається, але не може бути врахована в моделі іншим чином.

Другий етап передбачає експоненціальне згладжування і продовження часових рядів екзогенних змінних і коригування їх відповідно до встановлених орієнтирів. При цьому прогноз здійснюють лише на період, за який дані відсутні, та узгоджують його з фактичними даними для уникнення різких перепадів і «нелогічної» поведінки низки даних.

Після формування бази даних фактичних значень часових рядів і прогнозованих екзогенних змінних динамічно створюється та розв'язується модель, яка охоплює 55 стохастичних рівнянь (4.1.21).

На третьому етапі отримані дані стосовно компонентів об'єднуються в агреговані групи — продовольчі товари, непродовольчі товари та послуги (4.1.20).

Коригування помилок — це врахування певним чином залишків (різниці між фактичними й розрахунковими значеннями) визначеного цінового ряду під час розв'язання рівняння для певного компонента споживчого кошика. Взагалі коригування помилок можна здійснювати шляхом усереднення помилок за сезонами за кілька років і додаванням отриманих числових значень до прогнозованого ряду або шляхом перенесення їх з останнього року, або продовження на прогностичний період помилки останньої точки часового ряду. Якщо помилки незначні, коригування прогнозу можна не проводити.

У плані прийняття рішень на четвертому етапі, значний інтерес становлять можливості моделі для дослідження реакції залежної змінної на зміни однієї або кількох незалежних змінних (так звані «шоки»).

Загалом характеристики моделі щодо точності прогнозування є досить значущими. Модель є потужним інструментом для використання в Національному банку України як для аналізу лагів впливу монетарних чинників (грошової маси та обмінного курсу) на інфляційні процеси, так і для кількісної оцінки їхнього впливу. Оскільки рівняння моделі взаємопов'язані, значний інтерес для практичного використання становить закладена в моделі функція аналізу й оцінювання впливу зміни цін, які регулюються адміністративно, на загальний індекс споживчих цін і його динаміку.

6. Модель механізму ціноутворення, в якій враховано необхідність автономної або загальної оцінки впливу на механізм ціно-

утворення різноманітних чинників, будують у двох варіантах: для окремих розрахунків; для включення в середньотермінову агреговану макромодель¹.

Перший варіант призначений для виявлення наслідків прийняття рішень на макрорівні, він дає змогу оцінити ефективність антиінформаційних заходів податково-бюджетної й кредитно-грошової політики уряду. Другий варіант оцінює вплив змін світових цін на окремих товарних ринках і структурних зрушень, пов'язаних зі зміною умов виробництва, реалізації й споживання великих груп товарів.

Підґрунтям першого варіанта моделі слугує прогноз індексу цін валового внутрішнього продукту залежно від сценаріїв, пов'язаних з економічним регулюванням і циклом, а отриманий результат використовують для оцінювання динаміки більш деталізованих індексів цін за категоріями кінцевого попиту. За цими показниками здійснюються прямі й зворотні зв'язки між агрегованою моделлю та моделлю цін.

Прогноз цін здійснюють за невеликою за розміром моделлю, в якій обчислюють такі показники:

- індекс цін валового внутрішнього продукту (*INDGDP*);
- індекс споживчих цін (*INDCPI*);
- індекс цін на інвестиційні товари (*INDI*);
- індекс цін на товари, закуплені державою (*INDG*).

Якщо сценарій розв'язку передбачає оцінювання державного регулювання з метою зниження інфляції, розрахунки за моделлю реалізують у напрямку згори-вниз; якщо оцінюють інфляційні наслідки зростання світових цін і структурних зрушень, розрахунки здійснюють у напрямку знизу-догори.

Серед показників, що визначають динаміку цін, головне місце посідають показники кредитно-грошової політики (довгостроковий і короткостроковий відсоток, маса грошей в обігу тощо). З-поміж показників циклічного зростання виробництва із індексами цін ВВП найтісніше пов'язані чисельність безробітних і кількість державних замовлень.

Інфляційні наслідки збільшення державних витрат можуть відображатися двома способами. Якщо оцінюванню підлягають засоби фінансування товарних закупівель уряду, як чинник слід залучати зростання цін, обсяг урядових закупівель у поточних цінах. Під час визначення масштабів залучення виробничих ре-

¹ Моделирование глобальных экономических процессов / Под ред. В. С. Дадаева. — М.: Экономика, 1984.

сурсів на військові потреби необхідно враховувати продукцію державного сектору в постійних цінах.

Перелічені чинники водночас впливають на динаміку цін. Залежно від вибору альтернативних варіантів антиінфляційної політики в поєднанні з податковою та бюджетною можна побудувати різні рівняння для індексу цін ВВП, наприклад:

$$INDGDP = \alpha_{10} + \alpha_{11}FGP + \alpha_{12}NO + \alpha_{13}RD + \alpha_{14}BS;$$

$$INDGDP = \beta_{10} + \beta_{11}TPUN + \beta_{12}TPNO + \beta_{13}RD + \beta_{14}TPGP;$$

$$INDGDP = \lambda_{10} + \lambda_{11}UN + \lambda_{12}M + \lambda_{13}FGP,$$

де $INDGDP$ — темп зростання цін валового внутрішнього продукту у відсотках до попереднього року;

FGP , $TPFGP$ — державні закупівлі в постійних цінах і темпи їхнього зростання;

$TPGP$ — темп зростання державних закупівель у поточних цінах;

UN , $TPUN$ — чисельність безробітних і темпи її зростання;

NO , $TPNO$ — кількість нових замовлень і темпи зростання цієї величини;

RD — облікова ставка відсотка за довготерміновими внесеньми;

M — кількість грошей в обігу;

BS — сальдо зовнішньої торгівлі за товарами і послугами.

Розглядаючи вплив кожного чинника на динаміку цін за цим рівнянням, можна здійснити практичні розрахунки, які стосовно різних об'єктів і періодів дають змогу проаналізувати вплив кожного чинника на динаміку цін за цими рівняннями. Розрахунок стандартних помилок оцінок параметрів моделей свідчить, що в першому рівнянні головним чинником зростання цін, як правило, є довготерміновим відсоток, у другому — темп зростання державних закупівель, у третьому — маса грошей в обігу.

Оскільки перше рівняння допомагає описати «застійні» траєкторії зростання економіки, в ньому застосовують показник закупівель уряду в постійних цінах, які знижують величину виробничих ресурсів для нагромадження.

Друге рівняння більшою мірою відображає циклічний тренд розвитку й відповідає гіпотезі збереження середніх умов відтворення в прогнозованому періоді. Воно містить показники закупів-

вель уряду в поточних цінах, щоб оцінити масштаби можливої емісії грошей.

І, нарешті, третє рівняння дає змогу оцінити наслідки спільного зростання державних закупівель і грошової маси в обігу (за відсутності обмежувальних заходів, пов'язаних з умовами кредиту).

Індекси цін із категоріями кінцевого попиту визначають у цьому варіанті моделі з наступних рівнянь:

$$INDI = \alpha_{20} + \alpha_{21}PMEU + \alpha_{22}PFU + \alpha_{23}RD + \alpha_{24}INDGDP; \quad (4.1.20)$$

$$INDC = \beta_{20} + \beta_{21}RK + \beta_{22}INDGDP + \beta_{23}INDI + \beta_{24}PFU; \quad (4.1.21)$$

$$INDGP = \lambda_{20} + \lambda_{21}T + \lambda_{22}INDGDP + \lambda_{23}PMEU + \lambda_{24}L/SO; \quad (4.1.22)$$

де $PMEU$ — темп зростання цін на машини й обладнання на внутрішньому ринку;

PFU — темп зростання цін на паливо на внутрішньому ринку;

RK — облікова ставка відсотка за короткотерміновими внесеннями;

L/SO — співвідношення споживання рідкого й твердого палива в енергобалансі.

Із рівняння темпу зростання цін на інвестиційні товари випливає, що прискорення зростання цін на паливо за загального підвищення рівня цін залежно від знака коефіцієнта в рівнянні для $INDI$ має супроводжуватися відносним уповільненням або пришвидшенням зростання цін на інвестиційні товари.

На цій підставі можна дійти висновку, що підвищення (зниження) цін на паливо в розглядуваний період уповільнювалося (пришвидшувалося) мірою підвищення цін на ті товари, покупцями яких є корпорації, — темп зростання інвестиційних цін нижчий (вищий), ніж на інші елементи кінцевого попиту. Цей результат пояснюється й тим, що мірою зростання цін на паливо й енергетику монополії та держава витрачають дедалі більше коштів на розроблення енергозбережувальних технологій. Водночас значення коефіцієнта за змінної величини темпу зростання цін на паливо в рівнянні індексу споживчих цін показує, що на кожен відсоток приросту (спаду) цін на паливо припадає β_{24} відсоткового пункту зростання (спаду) цін на споживчі товари.

Розглянемо другий варіант моделі для визначення темпів зростання цін. Він складається з чотирьох рівнянь, які розв'язуються в іншій послідовності:

$$INDI = \alpha_{30} + \alpha_{31}PMEU + \alpha_{32}PICU + \alpha_{33}PFUW + \alpha_{34}L/SO; \quad (4.1.23)$$

$$INDC = \beta_{30} + \beta_{31}PCFU + \beta_{32}RK + \beta_{33}UN; \quad (4.1.24)$$

$$INDGP = \lambda_{30} + \lambda_{31}TPFGP + \lambda_{32}INDI + \lambda_{33}INDC + \lambda_{34}UN; \quad (4.1.25)$$

$$INDGDP = \varphi_{40} + \varphi_{41}INDI + \varphi_{42}INDGP + \varphi_{43}INDC, \quad (4.1.26)$$

де *PTCU* — темп зростання цін на промислові товари на внутрішньому ринку;

PFUW — темп зростання цін на паливо на світовому ринку;

PCFU — темп зростання цін на продовольчому внутрішньому ринку.

У цю модель введено показники галузевих цін як екзогенні характеристики умов виробництва продукції, що становить підгрунтя відповідного елемента кінцевого споживання. У рівнянні для інвестиції — це ціни на машини й обладнання на внутрішньому ринку, в рівнянні для споживчих цін — ціни на продовольчі товари, в рівнянні для державних закупівель — ціни на інвестиційні та споживчі товари.

Рівняння темпу приросту цін ВВП визначають у цій моделі як лінійну комбінацію відповідних дефляторів за елементами кінцевого споживання.

4.2. Прогнозування зайнятості та безробіття

Серед проблем моделювання відтворення робочої сили важливе місце належать аналізу та прогнозу зайнятості населення, який є соціально-економічним процесом застосування праці різних груп населення в різних сферах суспільно корисної діяльності та ґрунтується на суспільному розподілі праці.

У 1990-і роки прогнозування зайнятості зазнало певних змін і зумовило необхідність вимірювання економічно неактивного населення та безробіття.

Згідно із рекомендаціями Міжнародної організації праці (МОП) населення країни поділяють на економічно активне (робочу силу) й економічно пасивне (рис. 4.2.1)¹.

¹ Державний комітет статистики України. Економічна активність населення України. — 2002: Статистичний збірник. — К., 2003.

Економічно активне населення (робоча сила) складається з населення обох статей віком від 15 до 70 років включно, яке впродовж певного часу забезпечує пропозицію робочої сили на ринку праці.

До економічно активного населення належать лише ті особи, які займалися економічною діяльністю або шукали роботу й були готові приступити до неї, тобто яких класифікують як «зайнятих» і «безробітних» (за визначенням МОП).

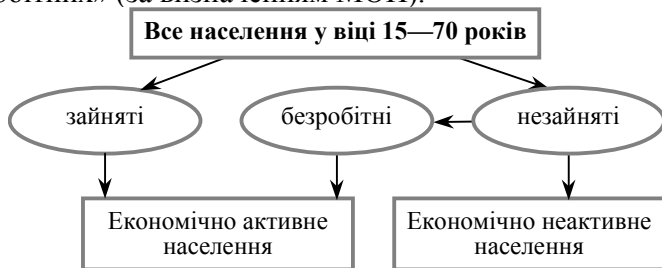


Рис. 4.2.1. Економічно активне та неактивне населення

Економічно пасивне населення (поза робочою силою) — особи, яких не можна класифікувати як «зайнятих» або «безробітних».

За матеріалами щоквартальних вибіркового обстежень населення з питань економічної активності все населення країни віком від 15 до 70 років розподіляється на три взаємовиключні та вичерпні категорії: зайняті, безробітні, економічно пасивні.

До *зайнятого населення* віднесено осіб, які займалися економічною діяльністю: працювали за наймом на умовах повного (неповного) робочого часу; роботодавці; особи, які самостійно забезпечували себе роботою або безкоштовно працювали в сімейному бізнесі; служителі релігійних культів; військові кадрової служби тощо.

До *зайнятого населення* не належать: учні працездатного віку, які навчаються та не працюють; військові строкової служби та жінки, які перебувають у відпустці з вагітності, пологів і догляду за дитиною до досягнення нею віку, визначеного чинним законодавством.

Відповідно до методології інформацію щодо кількості зайнятого населення поділяють на дві основні категорії: найманих працівників підприємств, установ, організацій та інших осіб, зайнятих економічною діяльністю.

Розроблення прогнозів зайнятості населення зумовлено очікуваними змінами попиту та пропозиції робочої сили й робочих місць, тобто стану ринку праці під впливом структурних змін в економіці, динаміці чисельності та структури населення, рівня

кваліфікації та заробітної плати працівників, рівня матеріального забезпечення громадян.

Розрахунки показників ринку праці на основі балансового методу [36].

Баланс ринку праці відображає взаємодії таких процесів:

- формування пропозиції робочої сили (її надходження);
- формування попиту на робочу силу (визначення можливостей);
- працевлаштування незайнятих громадян);
- визначення (внаслідок різниці попиту і пропозиції) кількості безробітних на кінець періоду.

Методологічна схема прогнозування ринку праці передбачає кілька стадій.

I стадія — аналіз формування ринку праці за попередній період з огляду на: тенденції розвитку ринку праці; зміни в структурі окремих джерел формування ринку праці; набуття чинності законодавчими актами, що впливали на попит і пропозицію робочої сили; ефективність діяльності служби зайнятості з питань працевлаштування.

II стадія — прогнозування змін у динаміці й структурі ринку праці, зважаючи на вплив окремих чинників, визначення орієнтирів зміни окремих джерел формування попиту і пропозиції робочої сили.

III стадія — прогнозування обсягів пропозиції робочої сили, попиту на неї, визначення кількості незайнятих і рівня безробіття.

Прогнозування показників попиту та пропозиції робочої сили на ринку праці має ґрунтуватися на економіко-статистичному аналізі наявних тенденцій розвитку ринку праці й урахуванні прогнозних макроекономічних показників: валового внутрішнього продукту; трудових ресурсів¹; загального обсягу інвестицій за рахунок усіх джерел фінансування; основних фондів та їхньої структури за формами власності.

Прогнозування попиту та пропозиції робочої сили на ринку праці здійснюють у розрізі окремих джерел їхнього формування.

◆ *Пропозицію робочої сили* визначають за такими показниками: чисельність зареєстрованих громадян, не зайнятих трудовою діяльністю на початок року; кількість вивільнених із галузей народного господарства; випускники навчальних закладів; раніше

¹ Термін «трудоі ресурси» за своїм змістом ширший за економічно активне населення, оскільки охоплює учнів, що навчаються із відривом від виробництва, домогосподарок та інших працездатних громадян працездатного віку.

зайняті в домашньому господарстві; інші категорії незайнятого населення.

◆ *Попит на робочу силу* розраховують як суму: потреб у працівниках для заміщення вільних робочих місць і вакантних посад; потреб у працівниках для комплектування новостворених робочих місць.

Прогнозуючи джерела формування ринку робочої сили, увагу треба приділяти показнику вивільненої робочої сили із галузей економіки, який за умов прискороного реформування економіки може суттєво перевищувати темпи розвитку сфери докладання праці.

Вивільнення працівників із галузей економіки зумовлено впливом комплексу чинників, характерних для конкретного етапу розвитку. На нинішньому етапі вивільнення робочої сили здебільшого спричинено структурними зрушеннями в економіці за рахунок: ліквідації підприємств, установ; реорганізації; перепрофілювання; скорочення персоналу; звільнення за власним бажанням; звільнення за порушення трудової дисципліни.

Під час прогнозування пропозиції робочої сили головним є визначення очікуваної кількості незайнятих економічною діяльністю громадян, які мають звернутися до біржі праці (не всі незайняті звертаються до біржі праці).

З огляду на особливості періоду реформувань та очікування економічного зростання у прогнозованому періоді можна передбачати збільшення частки незайнятих.

Структуру пропозиції робочої сили прогнозують зважаючи на тенденції розвитку її окремих джерел і чинників, що діятимуть у прогнозованому періоді.

Складнішим є завдання прогнозування попиту на робочу силу, який узагальнює потребу в працівниках для заміщення вакантних посад і новостворених робочих місць.

Ця потреба визначається з урахуванням чинників ринкових перетворень: структурної перебудови, приватизації, реструктуризації, пов'язаних із такими макроекономічними показниками, як: ВВП, загальний обсяг інвестицій за рахунок усіх джерел фінансування, стан і структура основних фондів за формами власності.

У розрахунковому балансі ринку праці попит на робочу силу відображає показник працевлаштування який віддзеркалює задоволений попит. Цей показник враховує і потребу в працівниках для заміщення вільних і новостворених робочих місць, і інші напрями працевлаштування. Оскільки не всім, хто звертається до служби зайнятості, допомагають із працевлаштуванням, певна

частина незайнятих громадян знімається з обліку. Кількість таких осіб визначають з урахуванням тенденцій зміни співвідношення їх із пропозицією робочої сили. У перспективі питома вага цієї категорії громадян зменшуватиметься.

У кожному суспільстві необхідно певною мірою впливати на процеси формування, розподілу, обміну й використання робочої сили.

Міжгалузевий баланс у трудовому вираженні є важливим інструментом регулювання й прогнозування зайнятості населення. Він уможливорює визначення потреби в працівниках для сфери виробництва R_t в t -му році залежно від обсягу виробництва X_{tj} і трудомісткості продукції l_{tj} галузей народного господарства. Його математичний запис такий:

$$R_t = \sum l_{tj} X_{tj}, \quad (4.2.1)$$

де j — індекс галузі (продукції).

Трудомісткість одиниці продукції часто називають коефіцієнтом прямих витрат праці. Прогнозову величину обчислюють як відношення середньорічної чисельності зайнятих основною діяльністю j -ї галузі у базовому періоді R_{0j} до обсягу продукції X_{0j} за той самий період, скоригований на коефіцієнт зростання продуктивності праці у прогнозованому періоді W_{tj} :

$$l_{tj} = \frac{R_{0j}}{X_{0j} W_{tj}}. \quad (4.2.2)$$

Підвищення продуктивності праці визначають різноманітними методами. Серед них донедавна особливе місце належало пофакторному плануванню виробітку. Розрахунки коефіцієнтів прямих витрат праці мають відображати трудові витрати всіх працівників основної діяльності (робітників, спеціалістів, керівників і технічних виконавців).

На основі прямих витрат праці встановлюють коефіцієнти повних витрат праці r_j . Вони є підсумком всіх витрат живої й матеріалізованої праці на виробництво j -ї продукції та обчислюються за формулою

$$r_j = l_j + a_{1j}r_1 + a_{2j}r_2 + \dots + a_{nj}r_n, \quad (4.2.3)$$

де a_{ij} — коефіцієнт прямих матеріальних витрат i -го продукту на одиницю j -го, який враховує не тільки витрати предметів праці, а й амортизаційні відшкодування.

У матричній формі рівняння (4.2.3) з врахуванням усіх зауважень для сукупності продуктів має вигляд:

$$R = L + A^T R, \quad (4.2.4)$$

де R, L — вектори коефіцієнтів відповідно повних і прямих витрат праці;

A^T — транспонована матриця коефіцієнтів прямих витрат включно з амортизаційними відшкодуваннями.

Розв'язок рівняння (4.2.4) дає

$$R = (E - A^T)^{-1} L. \quad (4.2.5)$$

Міжгалузевий баланс у трудовому вираженні вможливує обґрунтування розподілу працівників за чистими галузями матеріального виробництва та промисловості. Якщо в рівнянні (4.2.4) загальні прямі витрати праці представити питомими витратами праці окремих груп працівників, тоді можна записати:

$$l_j = l_{j1} + l_{j2} + \dots + l_{jz}, \quad (4.2.6)$$

де z — індекс професійно-кваліфікаційної групи, що бере участь у виробництві j -ї продукції.

Отже, замість вектора L маємо матрицю. У цьому разі R — матриця, в рядках якої відображено повні витрати праці на одиницю продукту, але не загалом, а за окремими професійно-кваліфікаційними групами, кожна з яких утворює в цій матриці свій стовпчик.

Важливою стадією *прогнозування зайнятості* економічно активного населення є розрахунок розподілу зайнятих за видами економічної діяльності, визначеними відповідно до Класифікатора видів економічної діяльності (КВЕД).

Для моделювання та прогнозування цього процесу використовують регресійні, матричні й трендові моделі. Але практичне застосування їх ускладнюється через недоліки статистичного обліку. Так, про витрати праці зайнятих можна судити лише за показниками середньорічної чисельності працівників, хоча для моделювання потрібен облік витрат праці в народному господарстві ще й за видами економічної діяльності в людино-годинах. Наявна статистична інформація внеможливує повною мірою з'ясувати кількісний вплив окремих чинників на процеси, що характеризують різні аспекти використання економічно активного населення, тому не завжди забезпечує можливість вивчення механізму формування закономірностей зайнятості населення за умов перехідного періоду.

Прогнозування рівня безробіття. Найважливішим показником стану ринку робочої сили є рівень безробіття, який показує

відношення (у відсотках) чисельності безробітних віком від 15 до 70 років до економічно активного населення (робочої сили) означеного віку або за відповідною віковою групою, статтю, рівнем освіти, належності до професійної групи, географічними ознаками.

◆ *Безробітні за визначенням МОП* — це особи віком від 15 до 70 років (зареєстровані й незареєстровані в державній службі зайнятості), які одночасно задовольняють три умови:

а) «не мали роботи (прибуткового заняття)»;

б) «активно шукали роботу або намагались організувати власну справу впродовж останніх чотирьох тижнів, що передували опитуванню», тобто робили конкретні кроки протягом останніх чотирьох тижнів з метою знайти оплачувану роботу за наймом або на власному підприємстві;

в) були «готові приступити до роботи впродовж двох найближчих тижнів», тобто почати працювати за плату за наймом або на власному підприємстві впродовж наступних двох тижнів.

До категорії безробітних також належать особи, які не шукають роботу, бо вже знайшли її та мають домовленість про початок роботи за певний проміжок часу, а також навчаються за направленням державної служби зайнятості населення.

◆ *Зареєстровані безробітні згідно із Законом України «Про зайнятість населення»* — це працездатні громадяни працездатного віку, які не мають заробітку або інших передбачених законодавством доходів, зареєстровані в державній службі зайнятості як такі, що шукають роботу, готові та здатні приступити до роботи, яка їх задовольняє.

◆ *Рівень безробіття, визначений за методологією МОП*: відношення (у відсотках) чисельності безробітних працездатного віку до економічно активного населення (робочої сили) зазначеного віку. Цей показник використовують для прогнозування, розроблення й оцінювання програм соціально-економічного розвитку, зайнятості, для макроекономічних розрахунків, наукових розробок, міжнародних зіставлень, аналізу дотримання конвенції МОП.

◆ *Рівень зареєстрованого безробіття*: відношення (у відсотках) кількості безробітних, зареєстрованих у державній службі зайнятості, до працездатного населення працездатного віку.

Сучасний ринок праці характеризується постійними динамічними змінами, переходами робочої сили з одного стану зайнятості до іншого. Оцінювання динамічних потоків на ринку праці дає змогу виявити чинники, які найбільшою мірою зумовлюють зміни у структурі безробіття. Так, високий рівень безробіття в будь-

якій соціально-економічній групі населення може бути пов'язаний не лише з великою ймовірністю втрати роботи, а й із частою зміною місця роботи, низькою соціально-економічною мобільністю та недостатньою активністю в пошуках роботи, тривалим періодом безробіття, невеликою ймовірністю збереження одержаного робочого місця тощо.

Для розроблення обґрунтованого прогнозу важливо не просто правильно оцінити рівень безробіття в тій чи тій групі населення, а й з'ясувати, які саме потоки робочої сили на ринку праці спричинюють такий рівень безробіття. З цією метою будують імовірнісні моделі безробіття¹.

Переміщення населення стосовно стану зайнятості (E), безробіття (U) й економічної пасивності (N) можна представити у вигляді схеми (рис. 2). P_{ij} відбиває імовірність переходу, тобто ймовірність, із якою представники певної групи населення перейдуть із i -го стану до j -го за певний проміжок часу. Імовірність переходу визначають як частку осіб, які перейшли з i -го стану до j -го за час $t, t + 1$ у загальній чисельності населення, яке перебувало в момент часу t в початковому стані i (наприклад, P_{ue} відображає частку безробітних, що отримали роботу за певний період.

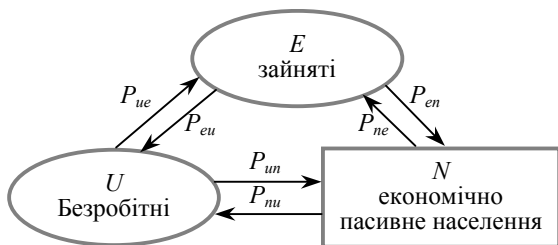


Рис. 4.2.2. Основні потоки на ринку праці

За умов рівноваги на ринку праці, коли кількість осіб, які вже не належать до категорії безробітних, дорівнює кількості осіб, що стали безробітними [$U(P_{un} + P_{ue}) = P_{ue}E + P_{un}N$], рівень безробіття (u_R) можна прямо виразити через імовірність переходу:

$$u_R = \frac{1}{1 + \frac{(P_{ne} + P_{nu})P_{ue} + P_{ne}P_{un}}{(P_{ne} + P_{nu})P_{eu} + P_{nu}P_{en}}}} \quad (4.2.7)$$

¹ Сабирьянова К. Микроэкономический анализ динамических изменений на российском рынке труда // Вопросы экономики. — 1998. — № 1. — С. 42—58.

Це рівняння виводять із двох наступних умов $P_{en}E = P_{ne}N$ (чисельність зайнятого населення, що перейшло до складу економічно пасивного населення, дорівнює чисельності економічно пасивного населення, що перейшло до категорії зайнятого населення) та $(P_{un} + P_{ue})U = P_{ue}E + P_{un}N$. Звідси

$$(P_{un} + P_{ue}) u_R T = (P_{un} + P_{ue}) [P_{en} / P_{ne}] (1 - u_R) T, \quad (4.2.8)$$

де T — чисельність економічно активного населення ($T = E + U$);

u_K — рівень безробіття ($u_K = U/T = 1 - E/T$).

Отже, рівень безробіття є функцією від імовірності переходу населення з одного альтернативного стану до іншого (зайнятість, безробіття й економічна пасивність):

$$u_R = f(P_{en}^+, P_{ne}^-, P_{un}^-, P_{nu}^+, P_{eu}^+, P_{ue}^-). \quad (4.2.9)$$

Знак «плюс» означає, що зростання змінної зумовлює підвищення рівня безробіття, знак «мінус» — що зростання цієї змінної сприяє зменшенню рівня безробіття. Отже, рівень безробіття буде тим вищий, чим нижчою є імовірність відтоку з категорії безробітних (P_{ue} та P_{en}) і отримання роботи особами, які раніше не належали до категорії робочої сили (P_{ne}), а також чим вищою є імовірність добровільної або вимушеної відмови від роботи (P_{en} та P_{ue}).

Із рівнянь (4.2.7) та (4.2.9) випливає, що під час оцінювання міри впливу державного регулювання на рівень безробіття слід зважати на зміни всіх шести ймовірностей переходу з огляду на тісний взаємозв'язок їх. Наприклад, скорочення або позбавлення пенсій працюючих пенсіонерів може, з одного боку, підвищити ймовірність переходу їх із категорії зайнятих до категорії економічно пасивного населення (P_{en}), а з іншого — стимулювати їх на пошуки додаткових заробітків, тим самим підвищуючи ймовірність переходу пенсіонерів до категорії безробітних, котрі шукають роботу (P_{nu}), або до категорії тих, хто самостійно забезпечує себе роботою (P_{ne}).

Аналіз розширених матриць імовірностей руху населення (за секторами економіки й категоріями зайнятості впродовж) між альтернативними станами ринків праці різних країн, побудованих залежно від таких чинників, як місце роботи, демографічні характеристики та рівень освіти індивіда, не дає відповіді на питання стосовно інтенсивності комбінованого впливу перелічених чинників (зважаючи на взаємозв'язок імовірності переміщення

населення між різними станами зайнятості). Частково відповідь на це питання дає регресійна оцінка логістичної моделі множинного вибору (*multinomial logit*).

Ця модель дає змогу оцінити вплив різноманітних незалежних змінних на імовірність здійснення трьох можливих варіантів для зайнятого населення: перехід до категорії безробітних (U), перехід до категорії економічно пасивного населення (N), збереження попереднього статусу зайнятості (E). Приймаючи один із варіантів (наприклад, третій) за початковий або базовий, на підставі моделі можна оцінити норми відносного ризику (*relative risk ratio*) переходу до перших двох категорій (RR_i):

$$RR_u = \frac{P(y=U)}{P(y=E)} = \exp(\beta_0^{(U)} + \beta_1^{(U)} X_1 + \dots + \beta_k^{(U)} X_k + \varepsilon);$$

$$RR_n = \frac{P(y=N)}{P(y=E)} = \exp(\beta_0^{(N)} + \beta_1^{(N)} X_1 + \dots + \beta_k^{(N)} X_k + \varepsilon),$$
(4.2.10)

де $P(y=i)$ — імовірність опинитися в одному із трьох імовірних i -х станів ринку праці (U, N, E);

(X_1, \dots, X_k) — вектор незалежних змінних, що охоплюють: демографічні характеристики індивіда (стать і вік), наявність певного рівня освіти, початкову форму зайнятості (державне підприємство, приватне підприємство, самозайнятість);

$(\beta_0, \dots, \beta_k)$ — вектор коефіцієнтів регресії;

ε — залишки.

Зміна незалежної змінної зумовлює також зміну відносної норми ризику, що відображається у відповідних коефіцієнтах відносного ризику для кожної незалежної змінної.

Практичні розрахунки за цією моделлю для різних об'єктів дослідження виявили низку загальних тенденцій:

- чим вищий рівень освіти, тим нижчий ризик втратити роботу (за умов, що усунуто вплив інших характеристик індивіда, які не можна спостерігати);
- із віком ризик потрапити до категорії безробітних стабільно зменшується;
- перехід до категорії економічно пасивного населення є найімовірніший для граничних вікових груп.

Місце роботи також суттєво впливає на переміщення населення. Найбільшою імовірністю потрапити до категорії безробітних та економічно пасивного населення є в осіб, котрі самостійно за-

безпечують себе роботою, та у працюючих на приватних підприємствах.

Прогнозування регіонального рівня безробіття. Останніми роками у деяких регіонах України на ринках робочої сили запанувала критична ситуація. Тому важливим напрямом вивчення й прогнозування безробіття є моделювання його територіальних особливостей і на цій підставі типологізація регіонів для визначення чисельності безробітних.

За ознаки класифікації можна обрати такі:

- відсоток безробітних у чисельності економічно активного населення, тобто характеристика регіонального рівня безробіття;
- обсяг виробництва товарів і послуг, що висвітлює ситуацію у сфері виробництва;
- рівень індустріалізації регіонів, адже з ним також пов'язані процеси формування безробіття.

Ці показники не мають між собою статистично суттєвих зв'язків, тому включення кожного з них до класифікаційної ознаки є виправданим. Виявлення класів регіонів за вказаними ознаками можливе завдяки використанню процедур кластерного аналізу.

Усю сукупність регіонів можна розподілити на 3—4 класи.

Перший клас — це група регіонів, що характеризуються невеликим або середнім за обсягом виробництвом товарів і послуг, низьким рівнем індустріального розвитку й доволі високим відсотком безробіття щодо кількості економічно активного населення.

Другий клас — великі за розміром регіони з високим рівнем індустріального розвитку та з відповідно невисоким рівнем безробіття.

Третій клас — решта регіонів із середнім рівнем безробіття, а також середнім за обсягом виробництвом товарів і послуг, доволі високим рівнем індустріалізації.

Отже, формується три типи регіонів:

- регіони з найскладнішою ситуацією на ринку праці, які за класифікацією потрапили до першого класу;
- великі регіони з високим рівнем безробіття — регіони другого класу;
- регіони з відносно низьким рівнем безробіття, середні за розміром та рівнем індустріалізації — це регіони третього класу.

Важливим етапом побудови моделі є оцінювання зв'язку безробіття з чинниками, що його зумовлюють.

Виявлення чинників, які статистично значимо впливають на безробіття, вможливило розроблення моделі поведінки «середнього регіону» певного типу. Для опису моделей введемо такі позначення:

i — номер групи регіонів;

U_i — чисельність безробітних за даними Держкомстату України;

u_i — рівень безробітних у % до економічно активного населення;

L_i — середньооблікова чисельність зайнятих у регіоні;

V_i — чисельність економічно активного населення;

K_i — загальний обсяг капіталовкладень за рахунок пільгових державних кредитів;

R_i — капіталовкладення на підприємствах усіх форм власності;

Z_i — обсяг товарообігу;

M_i — кількість людей, що прийшли на роботу за розглядуваний період;

S_i — потреба в робочій силі, заявлена підприємствами регіону на період проведення обстеження;

H_i — чисельність звільнених з роботи за розглядуваний період;

P_i — фактичний прибуток підприємств;

x_i — обсяг продукції у порівняльних цінах у % до відповідного періоду минулого року;

gv_i — показник капіталовкладень за рахунок пільгових державних кредитів, що припадають на одиницю економічно активного населення;

mv_i — фактичний прибуток регіону, поділений на чисельність економічно активного населення;

e_i — потреба в робочій силі, заявлена підприємствами регіону на період проведення обстеження;

dv_i — чисельність незайнятих, котрих визнано безробітними, у загальній кількості економічно активного населення на початок місяця обстеження;

rv_i — капіталовкладення підприємств усіх форм власності на одиницю економічно активного населення;

fv_i — уведення в дію основних фондів, поділене на чисельність економічно активного населення;

zv_i — товарообіг відносно до чисельності економічно активного населення.

Для першої групи регіонів — областей з високим ризиком безробіття — можливі такі моделі:

для абсолютного показника чисельності безробітних

$$U_1 = \alpha_0 + \alpha_1 K_1 + \alpha_2 Z_1 + \alpha_3 L_1 + \alpha_4 M_1, \quad (4.2.11)$$

для відсоткового показника чисельності безробітних стосовно економічно активного населення:

$$u_1 = \beta_0 + \beta_1 L_1 + \beta_2 M_1 + \beta_3 x_1 + \beta_4 g v_1 + \beta_5 m v_1 \quad (4.2.12)$$

Безробіття *другого типу регіонів* характеризується моделями:

$$U_2 = \alpha_0 + \alpha_1 S_2 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 P_2, \quad (4.2.13)$$

$$u_2 = \beta_0 + \beta_1 L_1 + \beta_2 M_1 + \beta_3 d v_2 + \beta_4 P_2.$$

У *третьому класі регіонів* безробіття описують моделями:

$$U_3 = \alpha_0 + \alpha_1 S_3 + \alpha_2 M_3 + \alpha_3 R_3 + V_3,$$

$$u_3 = \beta_0 + \beta_1 r v_3 + \beta_2 f v_3 + \beta_3 d v_2 + \beta_4 z v_3 + \beta_5 d v_3.$$

Прогнозування чисельності економічно неактивного населення. Найсуттєвіший внесок у чисельність економічно пасивного населення роблять пенсіонери різних категорій та особи, які навчаються з відривом від виробництва.

◆ Із загальної кількості пенсіонерів майже чотири п'ятих припадає на пенсіонерів за віком. Для *прогнозування чисельності зайнятих пенсіонерів* доцільно використовувати нормативно-експертні методи визначення частки цієї категорії в загальній кількості осіб, які отримують пенсію за віком. Проведені дослідження засвідчили, що близько трьох чвертей осіб, котрі досягли пенсійного віку, здатні працювати за станом здоров'я. Отже, помноживши загальну кількість людей у першій пенсійній п'ятірці (чоловіки віком 60—64 роки, жінки віком 55—59 років) на питому вагу пенсіонерів, які працюють, отримують величину їхньої зайнятості.

◆ *Розрахунок чисельності й динаміки тих, хто навчається з відривом від виробництва*, можна здійснити за допомогою такої системи моделей: моделі визначення чисельності школярів та інших учнів, що навчаються з відривом від виробництва, та моделі прогнозування вступу на перші курси ПТУ, технікумів і ВНЗ.

Аналіз розподілу випускників середньої школи засвідчує спад питомої ваги дванадцятикласників, що одразу йдуть працювати. Ця обставина робить важливим прогнозування чисельності тих,

хто навчається з відривом від виробництва. Воно може здійснюватися за моделлю:

$$R_t^j + {}_n R_t^3 = M_t; \quad (4.2.14)$$

$$M_t = M_0 + \alpha_t(t - t_0); \quad (4.2.15)$$

$${}_n R_t^3 = f\left(M_{t-1}, \frac{A_{t-2}}{A_1}, \frac{A_{t-1}}{A_t}\right); \quad (4.2.16)$$

$$\frac{R_t^2}{R_t^3} = f(t); \quad (4.2.17)$$

$$\frac{R_t^1}{R_t^3} = f(t); \quad (4.2.18)$$

$$\bar{A}_t = A_t - \sum_{j=1}^3 R_t^j, \quad (4.2.19)$$

де A_t — загальна чисельність випускників денних середніх шкіл у році t ;

\bar{A}_t — загальна чисельність випускників денних середніх шкіл, котрі одразу пішли працювати в році t ;

R_t^j — чисельність випускників денних середніх шкіл, що вступили до навчальних закладів у році t , $i=1, 2, 3$ (1 — ПТУ, 2 — технікум і коледж, 3 — ВНЗ);

${}_n R_t^3$ — чисельність тих, хто вступив до денних відділень (ті, хто закінчив денну середню школу раніше, а також школу робочої та сільської молоді або середній спеціальний навчальний заклад);

M_t — чисельність зарахованих у t -м році на перший курс денного відділення вузів;

t_0 — початок відліку;

M_0 — значення M_t для базового року;

α_t — середній щорічний приріст зарахованих до вищих навчальних закладів.

Основним методом визначення набору до вищих навчальних закладів на перспективу в цій моделі є екстраполяція. Включення в модель співвідношень (4.2.17—4.2.15), що враховують пропорції розподілу випускників повної середньої школи, дає змогу визначати кількість тих, хто вступив до технікумів, коледжів і ПТУ,

після з'ясування кількості першокурсників у вищих навчальних закладах.

◆ Аналіз структури категорії *домогосподарів та інших родичів, які доглядають за господарю та дітьми*, показує, що цю категорію переважно становлять жінки працездатного віку.

Дані соціологічних обстежень дають підстави для висновку, що головною причиною незайнятості в реальному секторі економіки жінок працездатного віку є догляд за дітьми. Тому прогнозову кількість цієї категорії економічно пасивного населення слід пов'язувати з чисельністю дітей віком до трьох років, які потребують материнського домашнього догляду. До того ж, слід пам'ятати про жінок у багатодітних родинах. Визначення кількості їх має спиратися на загальний прогноз чисельності та складу сімей і домогосподарств.

5 Прогнозування комплексного соціально-економічного розвитку країни

5.1. Загальна характеристика комплексних економетричних моделей прогнозування

Процес пізнання економічної реальності вимагає побудови економетричних моделей, причому кожна економетрична модель ґрунтується на певній економічній закономірності, яку необхідно економічно сформулювати й кількісно визначити на підставі статистичних даних.

Економетричні моделі є найпоширенішим типом соціально-економічних моделей, які використовують для аналізу й прогнозування комплексного розвитку країни. Вони складаються з функціональних регресійних і балансових рівнянь, які кількісно визначають взаємозв'язки та пропорції між макроекономічними величинами на всіх фазах процесу відтворення. Економетричні моделі спочатку використовували у формі простих моделей, що описують певну частину процесу відтворення. Лише за останні десятиліття дістали розвиток складні (комплексні) економетричні моделі, що мають відображати функціонування економіки загалом. Ці моделі поступово вдосконалюють і пристосовують до потреб практики, що зумовлює їхнє розширення й деталізацію.

□ *Економічний зміст комплексних економетричних моделей* визначають взаємозв'язки макроекономічних величин на окре-

мих фазах процесу відтворення, виражені рівняннями моделі. У зв'язку з цим економетричні моделі містять такі основні змінні та співвідношення.

◆ *Обсяг виробленої продукції*, як правило, вивчають за допомогою виробничих функцій, що відбивають залежність продукції від виробничих чинників і, як зазначалося вище, головним чином від робочої сили та капіталу. Сама продукція може бути виражена як валовий випуск, валовий внутрішній продукт, національний дохід, а також валовий національний дохід. Виробничі функції зазвичай дезагрегують за основними народногосподарськими галузями (промисловість, будівництво, сільське господарство тощо). До специфічних чинників, що впливають на виробництво продукції, належать тренд технічного розвитку в промисловості й будівництві, індекс погоди в сільському господарстві тощо.

◆ *Доходи та споживання* населення вивчають на підставі аналізу функцій доходів і споживання. Доходи населення залежать від рівня зайнятості й обсягів виробленої продукції або продуктивності праці, можна також враховувати середню заробітну плату. Особисте споживання населення стосовно попиту залежить головним чином від доходів населення і частково — від рівня цін, а стосовно пропозиції — від обсягів виробленої продукції та імпорту. При цьому особисте споживання та відповідні індекси цін можуть дезагрегуватися за групами товарів (продовольчі та промислові, товари короткотермінового і тривалого використання).

◆ *Капіталовкладення й основні фонди* вивчають за допомогою інвестиційних функцій, а також рівнянь створення та розміщення основних фондів. Інвестиційні функції виражають залежність капіталовкладень від внутрішніх і зовнішніх чинників економічного функціонування, однак в деяких моделях, особливо короткотермінових, інвестиції вважають заданими величинами. Створення основних фондів залежить від капіталовкладень із певним часовим запізненням (лагом).

◆ *Рівень зайнятості та безробіття* моделюють за допомогою рівнянь економічно активного та пасивного населення. У плані джерел ресурсів він залежить від чисельності населення працездатного віку, а стосовно потреб — від обсягів виробленої продукції як у державі загалом, так і в окремих галузях, від рівня та структури інвестицій, доходу. Цим змінним притаманна значна інерція, тобто залежність від рівня зайнятості та безробіття у попередніх періодах.

◆ *Обсяги зовнішньої торгівлі* вивчають за допомогою рівнянь експорту—імпорту. Експорт залежить від обсягів виробництва вітчизняної продукції та від обсягу імпорту з інших країн. Імпорт, з точки зору валютних ресурсів, залежить від експорту, а з точки зору потреб — від обсягів виробництва вітчизняної продукції або від споживання й інвестицій.

Макроеконометрична модель може також містити інші змінні та співвідношення процесу відтворення, які стосуються видатків, фінансів, кредиту, запасів тощо.

В економетричних моделях переважно застосовують такі визначення змінних:

- ендогенні змінні — змінні, що визначаються відповідними рівняннями моделі й є предметом дослідження;

- екзогенні змінні — змінні, які в економетричній моделі не пояснюються, а вводяться ззовні й у готовому вигляді;

- наперед визначені змінні — це екзогенні й лагові (узяті із запізненням) ендогенні змінні;

- пояснювальні змінні — це наперед визначені змінні й ті ендогенні змінні, які підставляють у відповідні рівняння з інших рівнянь моделі.

До екзогенних змінних належить багато типів спеціально введених штучних змінних, що виражають вплив таких чинників, безпосереднє статистичне вимірювання яких або неможливе, або недостатнє. До таких спеціальних екзогенних змінних головним чином відносять:

- змінні, створені на підставі непрямих даних, наприклад, вплив погоди на обсяг виробництва сільськогосподарської продукції;

- лінійні й нелінійні часові тренди;

- штучні змінні, що виражають якісні або невимірювані чинники;

- інші допоміжні змінні, зокрема авторегресійні змінні тощо.

Описані взаємозв'язки та змінні можна унаочнювати за допомогою схеми (рис. 5.1.1), в якій взаємозв'язки блоків ендогенних змінних позначено прямокутниками, а блоки екзогенних змінних — овалами.

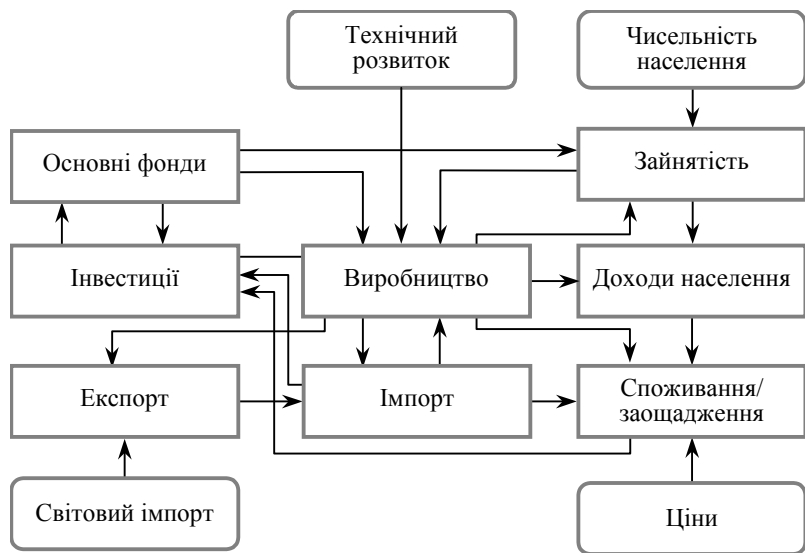


Рис. 5.1.1. Основні блоки змінних і зв'язки між ними в комплексній економетричній моделі

Готуючи статистичні матеріали до побудови економетричних моделей, треба забезпечити їх порівнюваність і адекватність змісту досліджуваних взаємозв'язків. Це означає, що статистичні дані мають бути деталізовані й отримані в необхідному обсязі. Забезпечення комплексності та порівнюваності даних потребує різноманітних попередніх розрахунків. Найчастіше використовують такі підходи:

- агрегацію або дезагрегацію даних;
- екстраполяцію чи інтерполяцію даних за відсутні періоди часових рядів;
- перелік вартісних показників за порівнювальними цінами на підставі індексів і коефіцієнтів цін;
- розрахунок індексів, часток, середніх величин та інших похідних даних, якщо вони є доцільнішими для вираження деяких змінних, ніж початкові дані;
- обчислення абсолютних або відносних міжрічних розбіжностей;
- розрахунок запізнілих змінних (у деяких випадках зрушення на один період недостатньо, доводиться обчислювати зважені середні значення із більшої кількості послідовних періодів) для вираження часового зрушення у причинних зв'язках.

Унаслідок впливу на народне господарство безлічі чинників із різними причинними зв'язками й залежностями, а також різних випадкових збурень, необхідно визначити основні складові економіки та знайти найсуттєвіші змінні. У цьому плані рівняння, що пояснюють основні економічні явища, становлять ядро макроеконометричної моделі. Кожне таке рівняння за допомогою пояснювальних змінних відображає механізм формування певної ендогенної (залежної) змінної. У комплексних економетричних моделях використовують переважно лінійні регресійні рівняння, які, втім, не обмежуються зв'язками прямої пропорційності між парами змінних, а виражають вплив багатьох пояснювальних чинників на залежні змінні. Коефіцієнти (параметри) регресійних рівнянь кількісно визначають зі статистичних часових рядів (або із вибіркового даних) окремих змінних, причому беруть до уваги стохастичний характер обчислювальних параметрів і за допомогою тестів перевіряють їхню статистичну значущість. Параметри регресійного рівняння застосовні до всіх періодів або спостережень, які обрано для їхньої кількісного визначення. До пояснювальних змінних належать ендогенні, екзогенні змінні та змінні з попередніх періодів (динамічні чинники).

Тотожності (балансові рівняння) у макроекономічних моделях відбивають балансові зв'язки між деякими змінними та поєднують регресійні рівняння в систему одночасних рівнянь, яка виражає також зворотні зв'язки між змінними. Ці балансові рівняння, як правило, виходять із системи національних розрахунків або із системи балансів народного господарства. Часові ряди позицій цих балансів і деяких інших показників утворюють базу даних для кількісного визначення параметрів комплексної економетричної моделі.

Складні макроеконометричні моделі висувають особливо жорсткі вимоги до кількісного визначення параметрів регресійних стохастичних рівнянь, що в методологічному плані є найскладнішим.

Використання комплексної моделі для моделювання і прогнозування може також вимагати перетворення моделі до зведеної форми з обчисленням матриць мультиплікаторів, екстраполяції екзогенних змінних і одночасного розрахунку прогнозів ендогенних змінних.

Під час конструювання моделей кожне рівняння треба кількісно визначити у варіантах, які перевіряють за допомогою методів математичної статистики. Найкращі альтернативи мають економічне тлумачення, а кількісне значення їх уточнюють за допомо-

гою методів оцінювання одночасних систем рівнянь. Потім перевіряють функціонування моделі загалом.

□ **Побудова економетричних моделей** і використання їх для прогнозування передбачає кілька етапів:

1. *Визначення мети дослідження.* Вибір адекватної теорії, що пояснює поведінку економічної системи. Побудова системи показників і відбір чинників, які найбільше впливають на кожен показник. Вибір форми зв'язку досліджуваних показників, між собою та відібраними чинниками.

2. *Відображення теорії у вигляді рівняння або системи рівнянь, що пов'язує обрані змінні.* Потрібно звертати особливу увагу на випередження та запізнення впливу змінних у рівняннях, а також на змінні, що містять інформацію стосовно перспективи. Залежно від обставин економетричні моделі можуть включати комбінацію лінійних і нелінійних функцій. Лінійні функції привабливіші простотою, особливо це стосується стадії оцінювання параметрів та прогнозування. Однак потреба розглядати такі змінні, як рівень цін та відносну швидкість зміни конкретного показника (рівень інфляції), означає, що навіть прості моделі містять нелінійності.

3. *Пошук відомостей про значення змінних із максимальним дотриманням теоретичних концепцій. Аналіз інформації.* В ідеалі потрібні точні дані про всі необхідні змінні. Але опубліковані дані є компромісом між потребами користувачів (економістів, працівників соціальних служб, комерсантів, промисловців) і розробників (як правило, урядових статистиків). Отже, існує різниця між теоретичними поняттями та реальними даними. Окрім того, опубліковані дані до певної міри неточні через неповне охоплення, тіньову економіку, використання вибіркового оцінок замість результатів перепису, помилок в обробленні даних.

4. *Використання відповідних економетричних методів для оцінювання (знаходження числових значень) невідомих параметрів, які входять до рівнянь.* На цьому етапі дані наводять відповідно до теоретичної моделі й оцінюють значення параметрів. Стандартний підхід — використати один із різновидів методу найменших квадратів — реалізується за допомогою комп'ютерних пакетів. У моделях із одночасними рівняннями звичайний МНК дає зміщені оцінки параметрів через присутність ендогенних змінних у правих частинах рівнянь. Отже, потрібні інші підходи, наприклад метод інструментальних змінних або метод систем.

5. *Перевірка якості побудованої моделі, передусім її адекватності досліджуваному економічному процесу.* Щойно параметри

моделі оцінено, їх можна перевірити на відповідність теорії, тобто порівняти їхні знаки та величини з ними. За наявності розбіжностей із теорією можна або знехтувати результатами, підтримуючи теорію, або відмовитися від цієї версії теорії й прийняти результати. У першому випадку можна дійти висновку, що відомості ненадійні або є результатом дії аномальних чинників, і спробувати зважити на них. В останньому випадку доцільно вдосконалити теорію, розглянувши інший набір рівнянь.

6. Обравши прийнятну модель, її можна використати для прогнозу. Щоб спрогнозувати значення ендогенних змінних на прогнозований період, маємо визначити величину екзогенних змінних, від яких суттєво залежить прогноз. Це можна зробити або на підставі одновимірної моделі часових рядів, або використовуючи інші джерела, наприклад іншу макроекономічну модель. Оскільки прогнозування значень екзогенних змінних спричинює додаткове ускладнення, зауважимо, що причина цього — у використанні каузальної моделі, тобто ми можемо пояснити, якими чинниками визначається показник, а не просто переносимо поведінку в минулому на майбутнє. На підставі рівнянь із оціненими параметрами і прогнозованими екзогенними змінними передбачають потрібні показники значень ендогенних змінних. Якщо потрібен прогноз на кілька майбутніх періодів, його можна одержати шляхом послідовності прогнозів на один період.

З аналізу соціально-економічного моделювання та прогнозування зрозуміло, що побудова обґрунтованих прогнозів вимагає не лише коректної економічної теорії, а й правильних рішень на кожному етапі побудови прогнозу. Інакше кажучи, прогнози є комбінацією економічної теорії та мистецтва прогнозиста. Як наслідок, дослідження прогнозів не обов'язково визначає, який із варіантів економічної теорії є коректним, і не завжди надає достатньо інформації стосовно відмінностей між економічними моделями. Подеколи може виявитися, що на точність прогнозу найбільше впливає передбачення або припущення стосовно майбутніх заходів уряду та значень екзогенних змінних.

□ ***Макроеконометричні моделі слід будувати, починаючи з простіших моделей невеликого розміру*** із агрегованими даними й річним розчленуванням. Без набуття певного досвіду роботи з невеликими за розміром моделями неможливо розпочинати побудову складніших (ширших і детальніших) моделей. При цьому і прості агреговані моделі можуть надати необхідні попередні матеріали для прогнозу та імітації. Важливо, щоб модель була ком-

плексною в плані відображення поєднання всіх фаз процесу відтворення, хоча й у спрощеному вигляді.

Статичною моделлю, побудованою на припущенні, що народне господарство являє собою систему закритого типу без державного регулювання економіки, є спрощений варіант *мультиплікаторної моделі Кейнса* — ММК (див. 2.1, кейнсіанська модель визначення доходу). Вона складається з двох рівнянь: функції споживання

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t; \quad (5.1.1)$$

тотожності національного доходу

$$Y_t = C_t + I_t, \quad (5.1.2)$$

де C_t — особисте споживання в постійних цінах за період t ;

Y_t — національний дохід у постійних цінах за період t ;

I_t — приватні інвестиції плюс державні видатки плюс баланс зовнішньої торгівлі в постійних цінах за період t . Ця змінна не пояснюється даною моделлю;

α — вільний член функції споживання виражає автономне споживання;

β — короткотермінова маржинальна квота споживання. Синонімом цього складника є короткострокова гранична схильність до споживання;

u_t — збурення функції споживання.

ММК є взаємозалежною й економетричною моделлю, оскільки функція в ній містить збурення u , які вносять в економічну модель стохастичні аспекти. Тобто економічна модель перетворюється на економетричну тоді, коли (в простішому випадку) в економічну модель вводять стохастичні елементи.

Обидва рівняння ММК належать до двох відмінних груп структурних рівнянь. Функція споживання (5.2.1) є рівнянням поведінки, а рівняння Y_t — типовою балансовою тотожністю.

Рівняння поведінки, яке ще називають рівнянням реакції, описує або пояснює поведінку економічних суб'єктів (наприклад, функцію споживання, функцію попиту, рівняння формування цін) або наслідки цієї поведінки за певних технічних (наприклад, функція виробництва) та організаційних структур (наприклад, функція, що визначає величину податку залежно від суми доходу). Числові значення параметрів рівнянь поведінки, як правило, невідомі, їх треба визначати, оцінюючи параметри.

Тотожність відрізняється від рівняння поведінки двома особливостями: числові величини коефіцієнтів пояснювальних змін-

них відомі до оцінювання параметрів; у тотожності відсутні збурення.

Окреме структурне рівняння взаємозалежної системи не можна застосовувати для одержання повноцінного прогнозу залежної змінної. За заданих структурних коефіцієнтів α і β у функції споживання (5.1.1) треба знати відповідне «повноцінне» значення Y_t . У разі прогнозування Y_t через розрахункову тотожність (5.1.2) слід знати (якщо заздалегідь відома величина інвестицій) невідоме значення C_t . Інакше кажучи, структурні рівняння взаємозалежної системи не можуть застосовуватися окремо для одержання якого прогнозу взаємозалежних змінних.

Для прогнозування взаємозалежних змінних моделі необхідно розв'язати структурні рівняння стосовно цих змінних. В економетрії це означає перехід до прогнозованої (приведеної) форми.

Цю форму для ММК можна отримати простою підстановкою одного структурного рівняння в друге.

1. Прогнозована (приведена) форма функції споживання:

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha + \beta(C_t + I_t) + u_t = \alpha + \beta C_t + \beta I_t + u_t; \\ C_t(1 - \beta) &= \alpha + \beta I_t + u_t; \\ C_t &= \frac{\alpha}{1 - \beta} + \frac{\beta}{1 - \beta} I_t + \frac{1}{1 - \beta} u_t. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

2. Прогнозована (приведена) форма балансового рівняння Y_t :

$$Y_t = \frac{\alpha}{1 - \beta} + \frac{1}{1 - \beta} I_t + \frac{1}{1 - \beta} u_t. \quad (5.1.4)$$

У правих частинах рівнянь прогнозованої форми не трапляється жодної взаємозалежної змінної. На діаграмі це унаочнено відсутністю стрілок між залежними змінними (рис. 5.1.1)¹. У рівняннях приведеної форми містяться лише екзогенні (і, можливо, лагові ендогенні) пояснювальні змінні. У ММК екзогенними є інвестиції I_t і допоміжна змінна x_{1t} . Тому будь-яке рівняння приведеної форми взаємозалежної системи можна застосовувати окремо для прогнозу залежної змінної.

¹ Грубер Й. Економетрія. Введення в економетрію. — К.: Астарта, 1996. — Т. 1.

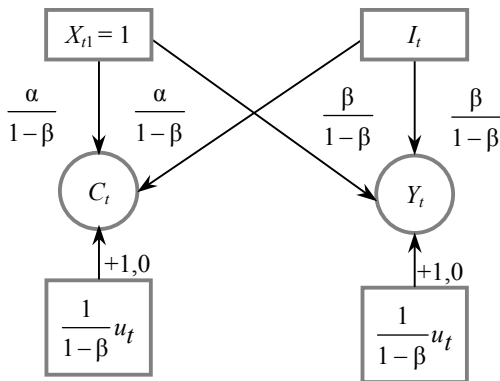


Рис. 5.1.1. Причинні зв'язки прогнозованої форми ММК

Кожен коефіцієнт у рівняннях приведеної форми складається з різноманітних коефіцієнтів структурної форми. У ММК коефіцієнти приведеної форми є лінійними комбінаціями з α та β .

Структурна та приведена форми моделі доповнюють одна одну в розумінні економічної теорії. Зокрема, на прикладі моделі ММК видно, що приведена форма функції споживання C_t (5.1.3) містить екзогенну змінну I_t й визначає рівень залежності між ними. Цього не можна зробити через структурну форму цієї функції (5.1.1), оскільки I_t не входить до неї. Тому більш-менш повну картину залежності між досліджуваними змінними для взаємозалежної моделі отримують, лише аналізуючи структурну та відповідну їй приведену форми.

Збурення в рівняннях, як головна відмінність економічної моделі від економетричної, більше впливають на залежні змінні, ніж це можна припустити на основі однієї лише структурної форми. У структурній формі ММК тільки функція споживання містить збурення, а у приведеній — в обох рівняннях вони містяться у вигляді $u_t / (1 - \beta)$. Таким чином, структурна форма моделі не дає повної інформації про вплив збурень на залежні змінні. Це зайвий раз наголошує необхідність аналізу обох форм моделі — структурної та приведеної.

Приведена форма лінійної взаємозалежної економетричної системи містить мультиплікатори. Всі мультиплікатори однакового періоду утворюють матрицю, відому як матричний мультиплікатор Кейнса, або «мультиплікаторна матриця». Складові цього матричного рівняння виглядають таким чином:

$$\begin{bmatrix} y_{t1} \\ y_{t2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{t1} \\ x_{t2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} \\ \pi_{12} & \pi_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{t1} \\ v_{t2} \end{bmatrix}; \quad (5.1.5)$$

$$\begin{bmatrix} C_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\beta & 1-\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ I_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\beta \\ 1-\beta \end{bmatrix} u_{t1}, \quad (5.1.6)$$

де $\Pi' = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} \\ \pi_{12} & \pi_{22} \end{bmatrix}$ — мультиплікаторна матриця розміром 2×2 статичної ММК.

Узагалі для системи лінійних рівнянь показовою є така обставина:

π_{ji} означає, на скільки одиниць, за інших незмінних умов, змінюється i -та ендогенна змінна y_{it} , якщо в цей самий період екзогенна змінна x_{jt} змінюється на одну одиницю;

π_{ji} є мультиплікатором j -ї екзогенної змінної x_{jt} стосовно i -ї ендогенної змінної y_{it} .

Зведена форма моделі у матричному вигляді:

$$BY_t + \Gamma Z_t = u_t, \quad (5.1.7)$$

де елементи матриць B та Γ становлять параметри за ендогенних і наперед визначених змінних у рівняннях, а елементи векторів Y_t , Z_t та u_t , відповідно, значення ендогенних і наперед визначених змінних, а також значення випадкових збурень у період t .

Вираз (5.1.7) можна записати в загальнішому вигляді:

$$Y_t = -B^{-1}\Gamma Z_t + B^{-1}u_t. \quad (5.1.8)$$

У цьому разі параметри детермінованої частини моделі у приведеній формі $-B^{-1}\Gamma$ можна розглядати як показники, що характеризують зміни ендогенних змінних, спричинені одиничними змінами екзогенних змінних.

Для відображення в моделі державного регулювання економіки в тотожності національного доходу вводять автономні урядові видатки (G_t):

$$Y_t = C_t + I_t + G_t. \quad (5.1.9)$$

Постає одне з головних завдань економетричного моделювання й прогнозування макроекономічних систем — оцінювання впливу бюджетної та грошово-кредитної політики на зміни у поведінці змінних. В основу її розв'язку покладено також поняття мультиплікатора, яке можна використати, наприклад, під час розгляду зв'язку між змінами автономних державних витрат G та змінами національного доходу Y у моделі (5.1.1, 5.1.8) [5].

Прогнозована форма цієї моделі для змінної Y має такий вигляд:

$$Y = (\alpha + \beta Y) + I + G = (\alpha + I + G)/(1 - \beta). \quad (5.1.10)$$

Мультиплікативну реакцію доходу на зміну величини автономних витрат можна подати у формі параметра цієї змінної, тобто як величину, зворотну граничній схильності до заощадження:

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1 - \beta}. \quad (5.1.11)$$

Аналогічні положення стосуються будь-якої статичної лінійної стохастичної моделі, яку можна записати як (5.1.7):

$$BY_t + \Gamma Z_t = u_t,$$

де Y_t — вектор ендогенних змінних, що стосуються лише періоду t ;

Z_t — сукупність екзогенно заданих змінних, які можуть включати як поточні, так і лагові значення кожної змінної.

Такий підхід цілком застосовний і для аналізу поведінки ендогенних змінних у часі, коли дослідження спирається на модель, яка виражає не статичні, а динамічні закономірності. Так, будь-яка система рівнянь, що містить лагові значення ендогенних змінних, може бути віднесена до розряду динамічних моделей, оскільки наслідки змін тих чи тих екзогенних змінних даватимуться взнаки за межами періоду часу, до якого вони належать. Вплив таких змін можна виявити лише шляхом вивчення руху ендогенних змінних упродовж послідовних періодів часу (починаючи із певного моменту, коли система перебувала в рівновазі). Розглянемо, наприклад, детерміновану динамічну модель такого виду:

$$C_t = \alpha + \beta Y_{t-1}; \quad (5.1.12)$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t. \quad (5.1.13)$$

Якщо величини I_t і G_t залишаються в колишніх значеннях, то й значення змінної Y_t в разі переходу від одного інтервалу часу до

іншого в цій моделі не змінюються. Але, якщо G принаймні в одному періоді (t) становитиме $(G_{t-1} + \Delta G)$, а потім повернеться до свого попереднього рівня, G_{t-1} , розміри доходу в період (t) дорівнюватимуть $(Y_{t-1} + \Delta G)$, а впродовж усіх наступних періодів ($t + T$) дохід становитиме $(Y_{t-1} + \beta^T \Delta G)$:

$$\begin{aligned}
 Y_{t-1} &= Y_{t-2}; \\
 Y_{t-1} &= \alpha + \beta Y_{t-2} + I_{t-1} + G_{t-1}; \\
 Y_t &= \alpha + \beta Y_{t-1} + I_{t-1} + G_{t-1} + \Delta G = Y_{t-1} + \Delta G; \\
 Y_{t+1} &= \alpha + \beta Y_t + I_{t-1} + G_{t-1} = \alpha + \beta(Y_{t-1} + \Delta G) + \\
 &\quad + I_{t-1} + G_{t-1} = Y_{t-1} + \beta \Delta G; \\
 Y_{t+2} &= Y_{t-1} + \beta^2 \Delta G;
 \end{aligned}
 \tag{5.1.14}$$

$$\begin{aligned}
 &\dots \\
 Y_{t+T} &= Y_{t-1} + \beta^T \Delta G,
 \end{aligned}
 \tag{5.1.15}$$

тому сумарний приріст доходу, викликаний змінами, дорівнюватиме:

$$\sum_T \Delta Y = \Delta G(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^T) = \Delta G(1 - \beta^{T+1}) / (1 - \beta).
 \tag{5.2.16}$$

Стосовно загальної траєкторії прямування, яку описує модель, можна стверджувати, що вона характеризується точкою стійкої рівноваги (у випадку, що розглядається — Y_{t-1}), до якої зі збільшенням T сходяться значення Y_{t+T} , якщо гранична схильність до споживання (β) менша за одиницю. Так само можна показати: якщо величина G_t після зміни в період t зберігає нове значення впродовж наступних періодів часу, дохід також поступово вийде на новий рівень, який можна визначити зі співвідношення:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Y_{t+T} = Y_{t-1} + \frac{\Delta G}{1 - \beta}.
 \tag{5.1.17}$$

Наведений результат цілком збігається з виразом (5.1.10), оскільки за початкових умов рівноваги $Y_t = Y_{t-1}$ співвідношення (5.1.12, 5.1.13) стають еквівалентними (5.1.1, 5.1.8).

В економічному аналізі найбільший інтерес можуть становити лише додатні значення величини β . Зазначимо, втім, якщо значення β від'ємні й за абсолютною величиною менші за одиницю, зміна Y_{t+T} характеризується згасаючими коливаннями навколо точки рівноваги Y_{t-1} .

Наведена форма рівняння для змінної Y_t (5.1.9), що виражається через значення, які належать до інтервалу $(t - 1)$, цілком збігається з виразом (5.1.14). Отже, вплив зміни G_t на першому етапі характеризується множителем, що дорівнює одиниці. Аналогічний результат можна одержати зі співвідношення (5.1.16), яке також описує значення кумулятивного мультиплікатора доходу для послідовних інтервалів часу (якщо в ньому $T = 0$).

За цією самою логікою можна виписати різницеве рівняння першого порядку:

$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1}. \quad (5.2.18)$$

Розв'язати це рівняння можна за методом індукції:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \alpha + \beta Y_0; \\ Y_2 &= \alpha + \beta Y_1 = \alpha + (1 + \beta)\alpha + \beta^2 Y_0; \\ &\dots \\ Y_T &= \beta^T [Y_0 - \alpha/(1 - \beta)] + \alpha/(1 - \beta). \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Вираз (5.1.19) становить розв'язок рівняння (5.1.18), з якого отримують значення Y_t у будь-який момент часу, навіть не знаючи попередніх значень Y_t , крім початкового, або граничного значення Y_0 . Усі отримують в такий спосіб величини Y_T задовольнятимуть умови, задані рівнянням (5.1.18). Так само можна знайти розв'язок системи (5.1.12, 5.1.13) щодо Y_t , якщо замість величини α в (5.1.19) підставити вираз $(\alpha + I_t + G_t)$. Остаточно можна записати таке співвідношення:

$$Y_t = \beta^t (Y_0 - Y_\varepsilon) + Y_\varepsilon, \quad (5.2.20)$$

причому Y_ε тут визначається за умови рівноваги, $Y_t = Y_{t-1} = Y_\varepsilon$. Коли потрібно знайти метод розв'язання системи (5.1.12, 5.1.13), значенням Y_t , Y_ε відповідає розв'язання системи (5.1.1, 5.1.8), записана у зведеній формулі (5.1.9). Якщо система є сталою, то в процесі спостереження тривалого періоду, впродовж якого $G_t + I_t$ підтримується на постійному рівні, показник доходу виходить на рівноважний рівень $Y_t = Y_{t-1} = Y_\varepsilon$ і вирази (5.1.12, 5.1.13) збігаються із (5.1.1, 5.1.8).

Розглянемо тепер будь-яку величину ΔG , котру доводять до системи та яка зумовлює початкове відхилення Y_t від Y_ε у момент $t = 0$:

$$\Delta G = Y_0 - Y_\varepsilon.$$

Вираз (5.2.20), подібно до розглянутого вище розв'язку (5.12.19), характеризує траєкторію повернення Y_t до початкового рівня Y_ε , за умови, що процес не ускладнюється подальшим впливом будь-яких інших зовнішніх чинників.

Аналогічна позиція доцільна також для лінійної динамічної моделі, яку в загальному вигляді можна записати так:

$$BY_t + \Gamma X_t + \Delta_1 Y_{t-1} + \dots + \Delta_s Y_{t-s} = u_t. \quad (5.2.21)$$

У цій системі за пояснювальні змінні беруть лагові значення ендогенних показників і поточні, або лагові екзогенні змінні. Прогнозована форма такої системи рівнянь матиме вигляд:

$$Y_t = -B^{-1}\Gamma X_t - B^{-1}\Delta_1 Y_{t-1} - \dots - B^{-1}\Delta_s Y_{t-s} + B^{-1}u_t, \quad (5.2.22)$$

тому граничне співвідношення між ендогенними та екзогенними змінними збігається з аналогічним виразом, виведеним для статичної моделі (5.2.11):

$$\frac{\partial Y_t}{\partial X_t} = -B^{-1}\Gamma. \quad (5.2.23)$$

Однак внаслідок того, що параметри зведеної форми — $B^{-1}\Gamma$ стосуються тепер суто початкового впливу зміни екзогенних змінних, їх називають мультиплікаторами початкової дії.

Якщо системі властива сталість, то значення рівноважних або довготермінових мультиплікаторів можна одержати за умови рівноваги, яка має вигляд:

$$Y_t = Y_{t-1} = \dots = Y_{t-s} = Y_\varepsilon.$$

У цьому разі детермінована частина системи (5.1.22) має такий вигляд:

$$(B + \Delta_1 + \dots + \Delta_s)Y_\varepsilon + \Gamma X_\varepsilon = 0, \quad (5.1.24)$$

$$\frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial X_\varepsilon} = -\Gamma(B + \Delta_1 + \dots + \Delta_s)^{-1}. \quad (5.1.25)$$

Завдяки цьому виразу визначають зміни ендогенних змінних, що можуть спричинити (коли мине досить тривалий час) постійні зміни на один відсоток кожної екзогенної змінної упродовж усього періоду, що розглядається.

5.2. Складні макромоделі комплексного соціально-економічного розвитку країни

Мета цих моделей — відобразити функціонування всієї економіки. Їх поступово вдосконалюють і пристосовують до потреб практики.

Великі економетричні моделі розвиваються головним чином у напрямі вдосконалення внутрішніх зв'язків між окремими блоками моделі й розширення її змісту, тобто в напрямі системного відображення всіх фаз процесу відтворення. Підходи до вдосконалення моделей можна розподілити на дві основні групи:

- динамізація, поглиблення внутрішньої змістовності моделей;
- часова й галузева дезагрегація моделей (поява галузевих і поквартальних показників).

Перший підхід типовий для голландської школи, яку заснував лауреат Нобелівської премії професором Я. Тінбергеном. Конструкція голландських економетричних моделей має певні особливості. Більшість змінних використовують у вигляді відносних (відсоткових) річних приростів. Регресійні рівняння містять багато пояснювальних змінних (5—10) із різним часовим запізненням, завдяки чому досягається часткова дезагрегація та динамізація моделей.

У Голландії розробляють і використовують також середньотермінові й довготермінові економетричні моделі.

Інший підхід, типовий для американської школи, характеризується галузевою та часовою дезагрегацією моделей, яка полягає у членуванні показників на галузі й квартали. Квартальні статистичні дані в більшості випадків відкориговано з урахуванням сезонів і виражено в незмінних цінах. Такі економетричні моделі є моделями середньої та великої розмірності, в результаті чого для кількісного визначення параметрів під час двоступеневого оцінювання доводиться використовувати деякі спеціальні методи, наприклад метод головних компонентів.

Найбільших успіхів американська школа досягла в розробленні короткотермінових моделей, для яких вихідною була модель Клейна-Гольдбергера, опублікована 1955 р. [6]. Надалі на її основі було розроблено чимало середньо- та довготермінових моделей. Модель складається із 20-ти економетричних рівнянь (зокрема із 15 регресійних стохастичних рівнянь і п'яти тотожностей). Система рівнянь містить 40 змінних (серед них 20

ендогенних і 20 екзогенних). Переважають рівняння лінійні. Параметри моделі розраховано на підставі річних статистичних даних національних обчислень США за 20 років.

Типовим прикладом екстенсивного підходу до побудови комплексної економетричної моделі є «Брукінгська модель» [6], яка з'явилася в 1965 році й започаткувала перехід від окремих економетричних моделей до комплексних. Вона належить до найпоширеніших короткотермінових економетричних моделей. Її підмоделі в початковому варіанті містили 359 рівнянь, кількість яких у разі включення їх до комплексної моделі було зменшено до 170 регресійних і 56 балансових. У розрахунках параметрів моделі було використано кілька методів, причому модель необхідно було привести до блочно-рекурсивної форми, оскільки часові ряди за 60 кварталів були недостатніми для одночасного кількісного визначення всіх рівнянь. Модель і далі вдосконалюють і застосовують для імітації альтернативних шляхів економічної політики.

Економетричні моделі в країнах Східної Європи почали застосовувати на початку 1970 років. Найсуттєвіших результатів у побудові комплексних економетричних моделей народного господарства досягнуто в Росії, Україні, Угорщині та Польщі.

Серед перших макроекономічних моделей України були економетричні моделі УКР-1 та УКР-2, розроблені в НДУ при Держплані УРСР¹. Модель УКР-1 визначала основні агреговані республіканські показники за допомогою 13 стохастичних регресійних рівнянь і 2 тотожностей, які утворюють динамічну одночасну систему. Повторюючи загальну тенденцію розвитку економетричних моделей, на подальшому етапі досліджень модель УКР-1 оформилася в дезагреговану за галузями модель УКР-2. Ця модель була детальнішою та пристосованішою до тодішньої планової методики. Її структуру формували 7 взаємопов'язаних блоків («Промисловість», «Сільське і лісове господарство», «Будівництво», «Транспорт і зв'язок», «Торгівля і громадське харчування», «Інші галузі матеріального виробництва», «Підсумкові республіканські показники»). Модель УКР-2 вважали дезагрегованою моделлю великого розміру. Вона мала 79 регресійних і 22 балансові рівняння.

Сучасні економетричні моделі характеризуються детальнішим розробленням комплексних моделей. Оскільки практичне застосування моделей пов'язано з різними труднощами, розвиток їх спрямований на побудову систем моделей, які ефективніше відо-

¹ Емельянов А. С., Кушнинский Ф. И. Динамическая модель эконометрического типа для Украинской ССР. Материалы симпозиума по моделированию народного хозяйства. — Новосибирск: Наука, 1970.

ображають різні аспекти розвитку економіки. Системи моделей створюють на рівні окремих країн (французька, італійська, німецька), на рівні господарств кількох країн (західноєвропейських, східноєвропейських, Америки й Канади та низки інших) і на рівні світового господарства загалом.

☞ Інститутом економіки НАН України та Міжнародним центром інформаційних технологій та систем НАН та Міносвіти і науки України розроблено кілька версій систем макроеконометричних моделей прогнозування економіки України **УКР-МАКРО**¹. Метою побудови взаємопов'язаної системи макроеконометричних моделей, за допомогою якої можливе прийняття ефективних рішень, є характеристика розвитку економіки України в перехідний період на макrorівні за різними сценаріями.

Перші дві версії — УКР-МАКРО 1 і УКР-МАКРО 2 побудовано на підставі макропоказників за схемою балансу народного господарства. У 1995 році розроблено нову версію моделей прогнозування — УКР-МАКРО 3 за системою національних рахунків.

На рис. 5.2.1 зображено структурну схему взаємозв'язків підсистем у скороченій системі моделей економіки України.

Зовнішнє середовище визначено формуванням населення, зовнішньо-економічною діяльністю, інфляційними процесами. Основними підсистемами в системі УКР-МАКРО 3 є:

- виробництво;
- зайнятість і безробіття;
- фонди та капітальні вкладення.

¹Лукінов І., Бакаєв О., Бондаренко Г. Система макроеконометричних моделей прогнозування економіки України // Економіст. — 1998. — № 5.

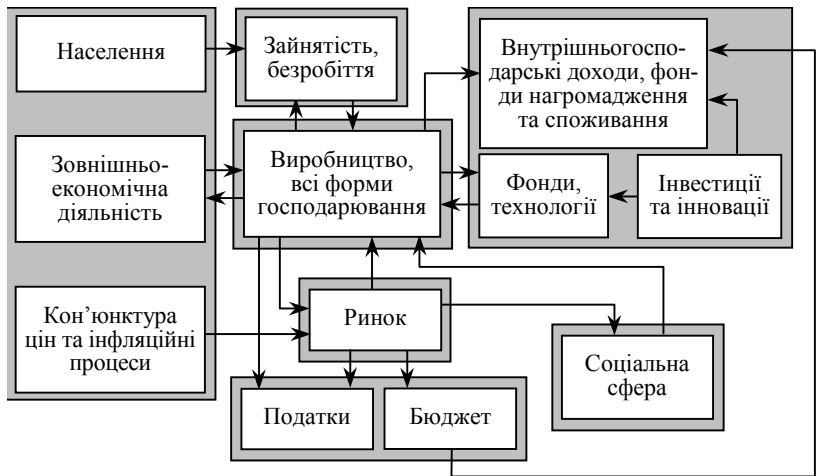


Рис. 5.2.1. Взаємозв'язки блоків-підсистем комплексу моделей прогнозування соціально-економічного розвитку України

Розширена модель охоплює також підсистеми:

- фінанси та податки;
- соціальну сферу;
- ринок товарів та послуг.

За умов перехідної економіки виникає чимало труднощів, до яких належать:

- прогнозування вартісних макроекономічних показників за умов інфляції;
- урахування темпів виробничого спаду впродовж трансформаційного періоду;
- урахування залежності економіки від імпорту енергоносіїв, новітніх технологій, продовольства й товарів широкого вжитку.

Для прогнозування вартісних макроекономічних показників за умов інфляції пропонується така схема:

1. Вирізняється один або кілька основних базових показників, динаміка яких прогнозується, абстрагуючись від інфляції, у порівняних цінах.
2. Вводяться показники інфляції шляхом співвідношення базових показників у фактичних цінах до їхнього значення в порівняних цінах.
3. Прогнозуються інші вартісні показники у фактичних цінах з урахуванням показника інфляції.

У цьому дослідженні базовим показником обрано обсяг валового внутрішнього продукту (ВВП) у постійних карбованцях 1990 року.

Введено дефлятор ВВП, розрахований як відношення номінального ВВП у фактичних цінах до його значення в порівнянних цінах 1990 року. Дефлятор валового внутрішнього продукту використовувався у системі як показник, що відображає інфляційні процеси. Як екзогенну змінну його визначили за допомогою експертизи на етапі розв'язання системи моделей в імітаційному режимі. Прогнозування інших вартісних оцінок здійснено у фактичних цінах з урахуванням інфляції через дефлятор ВВП.

У системі УКР-МАКРО 3 моделювання змін ВВП здійснюється відповідно до виробництва головних для країни продуктів та реального товарообігу їх у натуральному обчисленні. Продукти, розглянуті в системі моделей, представляють різні галузі промисловості й сільського господарства, тобто видобуток, виробництво сировини й матеріалів, продуктів кінцевого споживання та електроенергії, товарів народного споживання, головних продуктів сільського господарства та харчової промисловості, а також показники вантажообігу транспорту й уведення в експлуатацію житла.

На рис. 5.2.2 відображено схему причинно-наслідкових зв'язків між показниками, що належать до системи УКР-МАКРО 3.

На рис. 5.2.2 **екзогенними змінними** є:

- ДФВВП — дефлятор ВВП;
- ІМГАЗ — імпорт газу;
- ІМНФТ — імпорт нафти.

Ендогенні змінні:

ВВПР — реальний ВВП в порівнянних цінах 1990 року;

ВВПН — номінальний ВВП у фактичних цінах;

ПРСП — проміжне споживання;

ВТП — випуск товарів і послуг;

ЗАН — кількість зайнятих;

ПРПР — продуктивність праці;

ПБЗ — приховане безробіття.

Показники за категоріями використання номінального ВВП:

ФКСП — фактичне кінцеве споживання;

ВНОК — валове нагромадження основного капіталу;

ЗЗМОК — зміна запасів матеріальних обігових коштів;

ЕКСП — експорт товарів і послуг;

ІМП — імпорт товарів і послуг.

Показники формування номінального ВВП за категоріями доходу:

ОПНП — оплата праці найманих працівників;

СОК — споживання основного капіталу;

ПРИБ — прибуток;

ПОД — податки на виробництво та імпорт, за винятком субсидій.

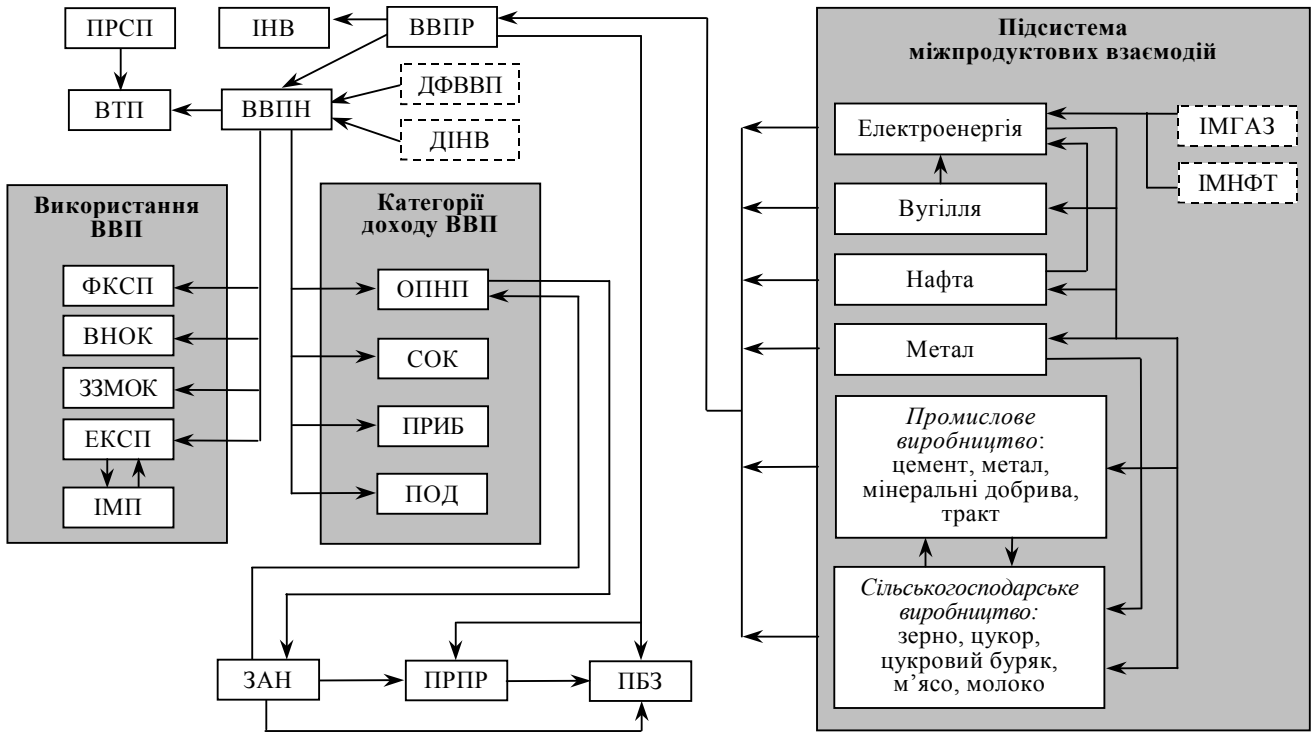


Рис. 5.2.2. Підсистеми «Макропоказники» та «Міжпродуктові взаємодії» в УКР-МАКРО 3

Згідно зі схемою модель економічного розвитку в цій системі складається із двох частин:

- виробництво основних продуктів у натуральному обчисленні;
- вартісні макропоказники за системою національних підрахунків.

Перша частина системи моделі міжпродуктових взаємодій складається з 28 співвідношень, серед яких 24 є стохастичними регресійними рівняннями, а 4 — трендами. Цю модель можна характеризувати як модель міжпродуктових взаємодій, оскільки обсяги виробництва одних видів продукції моделюються в ній залежно від обсягів виробництва інших (сировини, матеріалів, палива або устаткування), необхідних для процесу виробництва тих видів продукції, що моделюються.

Крім елементів першої частини моделі, до пояснюваних змінних відносять також елементи зовнішнього середовища, які відображають обсяги ввезення енергоносіїв, зокрема нафти та газу. Безумовно, треба зважати на сукупний експорт-імпорт усіх без винятку товарів. Проте це не завжди можливо, оскільки зведена інформація стосовно цього, на жаль, недостатньо достеменна, а інколи взагалі відсутня.

Зростання обсягів виробництва основних видів продукції у моделі представлено динамічним варіантом виробничої функції, яка ґрунтується на припущенні взаємодоповнюваності виробничих чинників.

Підсистема міжпродуктових взаємодій пов'язана із вартісними макропоказниками через реальний ВВП. Щоб урахувати спад виробництва за умов інфляції, реальний ВВП моделювали у постійних карбованцях 1990 року від обсягів виробництва основних видів продукції у натуральному вираженні. Для цього в модель були введені часткові прогнози реального ВВП, які визначалися залежно від рівнів виробництва кожного із видів продукції.

На підставі часткових прогнозів реального ВВП був розрахований реальний ВВП як їхнє середнє арифметичне.

Номінальний ВВП у фактичних цінах визначається в моделі як добуток реального ВВП і показника інфляції — дефлятора ВВП.

У систему рівнянь міжпродуктових взаємодій, що описують виробництво електроенергії, вантажообіг транспорту, виробництво сільськогосподарської продукції, входять показники: імпорт нафти та імпорт газу, які є важливим джерелом енергоресурсів для України, і саме тому обрані керівними у версії УКР-МАКРО 3.

Через штучні змінні, які вводяться до рівнянь виробництва сільськогосподарської продукції, відображається вплив випадкових чинників, зокрема погодних умов (у сценарних розрахунках: були вони сприятливі чи несприятливі). До рівняння, що описує виробництво вугілля, була введена і така змінна, що відбиває його спад унаслідок соціального напруження серед шахтарів. Використання цієї змінної дало змогу в прогностових оцінках урахувати стабільну чи нестабільну ситуацію у вугільній промисловості.

Таким чином, у версії УКР-МАКРО 3 реальний ВВП моделюється залежно від виробництва головних продуктів у натуральному вираженні, а також від імпорту енергоносіїв, погодних умов і соціальних ситуацій, особливо у вугільній промисловості.

У другій частині системи моделей УКР-МАКРО 3, яка збігається з новою версією УКР-МАКРО 4, представлено макропоказники відповідно до системи національних рахунків.

У цій версії системи моделей зроблено спробу моделювання економічного розвитку залежно від стану інвестування.

Між обсягами інвестицій та економічним зростанням існує тісний зв'язок. Отже, головним завданням моделі є оцінювання цього впливу на альтернативні прогнозовані рішення щодо зміни економічного стану залежно від розміру частини інвестицій у реальному ВВП, яку в системі прийнято як екзогенну — керівну змінну. Тобто на етапі одержання прогностових оцінок частка інвестицій у реальному ВВП на майбутнє має визначатися експертним шляхом.

Рівняння для вартісних макропоказників і системи УКР-МАКРО 3, і системи УКР-МАКРО 4 мають однаковий вигляд і моделювання їх здійснюється в реальному вимірі, тобто з урахуванням інфляції шляхом коригування цих показників на дефлятор ВВП. Згідно із системою національних рахунків у моделі розрізняються показники, які формують ВВП за категоріями доходу, і показники за категоріями використання ВВП.

На етапі прогнозування за системою УКР-МАКРО 3 було розглянуто два варіанти сценаріїв — оптимістичний і песимістичний. У системі УКР-МАКРО 3 керівними змінними є обсяги імпорту нафти та газу — й, рівні інфляції. У системі також є фонові змінні: зокрема погодні умови та ситуація у вугільній промисловості. Оптимістичний погляд полягає в тому, що постачання енергоносіїв здійснюватиметься наростаючими темпами як для нафти, так і для газу; погодні умови — сприятливі, ситуація у вугільній промисловості — стабільна. Песимістичний прогноз передбачає подальший спад у постачанні енергоносіїв, але темпи падіння

дещо уповільнюються; погодні умови — несприятливі, ситуація у вугільній промисловості — нестабільна.

За системою УКР-МАКРО 4 було також розглянуто два варіанти прогнозованих рішень: уповільнене чи прискорене зростання частки інвестицій у реальному ВВП.

☞ Інститутом економічного прогнозування НАН України зроблено «*Макромодель економіки України — 1*». Модель зорієнтована на складання середньотермінових прогнозів розвитку ключових макроекономічних показників [20]. Модельні зв'язки розглядаються у секторному розрізі на підставі показників і залежностей Системи національних розрахунків (СНР) України з урахуванням цілей економічної політики.

Зазначена економетрична модель має блокову структуру й призначена для обчислення прогнозних показників у щорічному вимірюванні. Взаємодія одночасових блоків виявляється у побудові та узгодженні ключових індикаторів платіжного й монетарного балансів, СНР та балансу державного бюджету.

Ендогенними змінними цієї економетричної моделі є: обсяг ВВП, обсяги приватного, державного та загального споживання, величина основних фондів та валових інвестицій, зміна запасів обігових коштів, обсяги імпорту та експорту (наведено у фактичних і базових цінах), рівень зайнятості, сальдо державного бюджету, обсяг загальних державних витрат, характеристики загального доходу й загальної пропозиції.

Екзогенними модельними змінними виступають: обсяг світового ВВП; дефлятори вітчизняного та світового ВВП, приватного та державного споживання, валових інвестицій, зміни запасів матеріальних обігових коштів, експорту та імпорту; індекси споживчих цін і цін промислового виробництва; кредитна відсоткова ставка; частка бюджетних надходжень та витрат у ВВП.

Змінними економічної політики визначаються: реальне та державне споживання, валові інвестиції, ставки окремих податків, експорт, імпорт, а також відсоткові ставки, валютний курс та індекс інфляції.

Взаємодія блоків моделі реально виявляється в побудові й узгодженні основних показників платіжного та монетарного балансів, системи національних рахунків (СНР) та балансу державного бюджету. До того ж виробництво, дохід і витрати (або заощадження), як відомо, мають три основні взаємозалежності: виробництво — дохід; дохід — витрати; заощадження — придбання активів.

Поточні й капітальні взаємозв'язки СНР між державним, приватним, зовнішнім секторами та монетарною системою як посеред-

ницьким сектором і три вищенаведені базові взаємозалежності становлять тотожності національного доходу. Вони відображають обмеження бюджетного, зовнішнього й грошово-кредитного секторів і використовуються для розроблення системи секторальних макромоделей оцінювання і прогнозування економіки України (рис. 5.2.3).

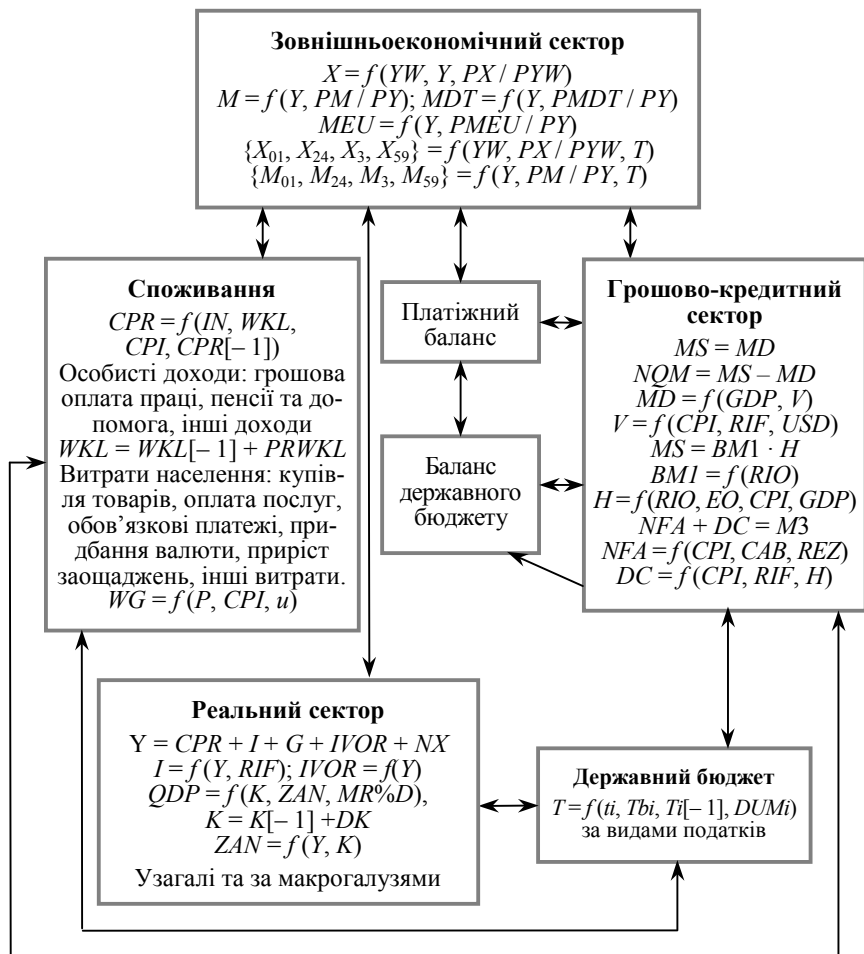


Рис. 5.2.3. Секторальні макромоделі економічного прогнозування

У макромоделі трансформація та дезагрегація балансових макроекономічних взаємозв'язків і тотожностей національного доходу ґрунтується на методах регресійного аналізу та методології конструювання систем відповідних економетричних моделей.

◆ *Модель реального сектора* містить базові макроекономічні тотожності, на підставі яких формуються складові ВВП за різними методами обчислення. У моделі виокремлено два блоки. Блок пропозиції формує виробничу функцію (сума валового внутрішнього продукту та імпорту), що залежить від основних фондів, зайнятості та імпорту кінцевих товарів і послуг та лагових змінних. У блоці наявні функції зайнятості та основних фондів.

Агрегований попит визначається як використання валового внутрішнього продукту й формує обсяги кінцевих споживчих витрат домашніх господарств, сектора загального державного управління, валового нагромадження основного капіталу, зміни запасів матеріальних обігових коштів та експорту товарів і послуг.

Пояснення до рис. 5.2.3:

Y, GDP — валовий внутрішній продукт (ВВП);

CPR — споживання домашніх господарств (приватне);

I — валові інвестиції;

QDP — загальна пропозиція;

K — основний капітал (основні фонди);

DK — приріст основного капіталу;

ZAN — зайнятість;

P — виробництво ВВП на одного зайнятого (або продуктивність праці);

WG — середньомісячна заробітна плата зайнятого в народному господарстві;

u — рівень безробіття;

NX — чистий експорт товарів і послуг;

X — експорт товарів і послуг;

M — імпорт товарів і послуг;

MDT — імпорт послуг;

MEU — імпорт машин та устаткування;

X_{01} — експорт продовольчих товарів;

X_{24} — експорт сировини;

X_3 — експорт проміжної продукції;

X_{59} — експорт готової продукції;

M_{01} — імпорт продовольчих товарів;

M_{24} — імпорт сировини;

M_3 — імпорт проміжної продукції;
 M_{59} — імпорт готової продукції;
 MD — попит на гроші;
 MS — пропозиція грошей в економіку;
 MD — попит на гроші;
 RW — відсоткова ставка;
 $PMEU, PMDT, PY, PX, PM$ — відповідні індекси цін;
 PYW — індекс цін (дефлятор) світового ВВП;
 $IVOR$ — змінна запасів обігових коштів, у цінах поточного періоду;
 $IWKL(-1)$ — сума заощаджень на початок року;
 WKL — сума заощаджень на кінець року;
 IN — особисті доходи домашніх господарств після сплати податків;
 YW — світовий ВВП;
 MS — пропозиція грошей в економіку;
 $BM1$ — грошовий мультиплікатор;
 H — грошова база;
 NQM — показник дисбалансу або нерівноваги грошового ринку;
 MSF, MDF — прогнозовані значення попиту та пропозиції грошей (відповідно);
 RIO — ставка рефінансування НБУ (офіційна);
 EO — офіційний обмінний курс національної грошової одиниці;
 USD — рівень доларизації;
 MQ — грошова маса (квазігроші);
 NFA — чисті зовнішні активи;
 $M1$ — грошова маса (агрегат $M1$);
 $M3$ — грошова маса (агрегат $M3$);
 REZ — зміни валютних резервів країни;
 CPI — індекс споживчих цін;
 CAB — сальдо поточного рахунка (платіжний баланс);
 DC — внутрішній кредит;
 RIF — ставка рефінансування НБУ (фактична);
 T_i — сума податку i -го виду;
 t_i — ставка податку i -го виду;
 Tb_i — податкова база i -го виду;
 DUM_i — фіктивна змінна, яка визначає організацію збирання та дискреційний ефект податку i -го виду.

Обидва вирізнені в моделі блоки тісно пов'язані зі змінними кредитно-грошового, зовнішньоекономічного секторів, фінансів і споживання. Рівняння й тотожності моделі охоплюють основні

макрогалузі та господарські комплекси національної економіки: промисловість у розрізі паливно-енергетичного, металургійного, хімічного комплексів, комплексу будівельних матеріалів, легкої та харчової промисловості; сільське і лісове господарство; будівництво; транспорт і зв'язок; сферу обігу та інші макрогалузі.

◆ *Модель сектору споживання та доходів населення* визначає функцію споживання, основні види доходів і витрат населення. Приватне споживання (кінцеве споживання домашніх господарств) пояснюється динамікою його лагового значення, особистих доходів домашніх господарств, суми заощаджень та індексу інфляції. Розглядаються модельні оцінки адресних субсидій населенню (на оплату житла), особистих гро-

шових доходів домашніх господарств до та після сплати податків, особисте споживання, платоспроможний попит, грошова оплата праці (загалом), середньомісячна заробітна плата зайнятих у народному господарстві, оплата послуг населення, купівля товарів, обов'язкові платежі та інші доходи й витрати населення.

◆ *Модель державного сектору* відображає функцію державного споживання (споживання сектору державного управління), основні види бюджетних надходжень та видатків, їхні загальні суми та баланс бюджету. Прогнозування надходжень ґрунтується на наявності зворотних зв'язків між податковими ставками та податковими базами, взаємозалежності всіх секторів економіки й обчислення доходів на підставі функцій, які будують для різних видів податків, виходячи з огляду на прогноз оцінки відповідних баз оподаткування. Тобто загальний вигляд суми окремих надходжень формується в моделі як функція від відповідної ставки податку, податкової бази та змінних, що характеризують ефективність роботи податкової адміністрації. Відповідно до структури бюджету України пропонується модельне визначення таких основних видів бюджетних надходжень: податку на прибуток підприємств і організацій, податку на додану вартість (ПДВ), акцизного збору, прибуткового податку з громадян, плати за землю, державного мита, надходження коштів від приватизації державного майна та інші. Вибір цих складових ґрунтується на тому, що вони визначають найвагоміші частки бюджетних надходжень і охоплюють їх більш як на 80 %.

Під час прогнозування надходжень слід зважати на наявність зворотних зв'язків між податковими ставками та податковими базами, що можливо в разі використання макроекономічної моделі, яка визначає взаємозв'язки між усіма секторами економіки. Крім того, загальна економетрична модель на макrorівні вможливує обчислення доходів на основі функцій, які будуються для різних видів податків на підставі прогнозних оцінок відповідних баз оподаткування.

Після визначення класифікації доходів бюджету для підготовки прогнозів використовують податкову функцію, за допомогою якої обчислюють надходження від того чи іншого податку залежно від величини приблизної податкової бази.

◆ У моделі зовнішньоекономічного сектору визначають макрозмінні експорту, імпорту та їхніх складових відповідно до стандартів міжнародної класифікації: експорт та імпорт продовольства, сировини й матеріалів, проміжної та кінцевої продукції. Функція загального експорту залежить від динаміки вітчизняного та світового ВВП й паритету дефляторів ВВП і експорту. Загальний імпорт і його агрегатні складові: імпорт послуг, імпорт машин і обладнання та інший імпорт моделюються під впливом динаміки реального ВВП і співвідношення відповідних дефляторів ВВП та визначених у моделі категорій імпорту.

◆ *Модель грошово-кредитного сектору* ґрунтується на припущенні рівності попиту і пропозиції грошей. Вихідними змінними є прогноз грошових агрегатів, грошової бази НБУ залежно від поставленої мети щодо зростання ВВП, рівня інфляції та значення обмінного курсу гривні. В моделі також здійснюють прогнозні розрахунки показників грошового ринку, за допомогою яких можна не лише аналізувати поточну ситуацію й оцінювати можливість застосування конкретних інструментів монетарної політики, а й визначати чинники, динаміка яких може вплинути на дотримання цільового орієнтиру економічного зростання: грошового мультиплікатора, швидкості обігу грошей, внутрішнього кредиту, зовнішніх активів.

В Інституті економічного прогнозування НАН України здійснено часткову реалізацію наведених секторальних моделей. Модель розроблено на підставі наявних у світовій практиці з метою отримання середньотермінових оцінок розвитку національної економіки й пошуку можливостей регулювання її розвитку за допомогою набору керівних змінних за умов економічної рівноваги. Складається вона із 33-х стохастичних регресійних рівнянь і тотожностей та належить до нелінійної,

агрегованої моделі, що містить одночасові блоки. Генерація стохастичних регресійних рівнянь здійснювалася на основі часових рядів методами найменших квадратів і автокореляції залишків першого порядку. Для моделювання регресійних рівнянь використовували лінійні, гіперболічні та логарифмічні функції, а також лагові й фіктивні змінні, за допомогою яких згладжувалися стрімкі зміни тенденцій динаміки змінних (Див. частину 2).

На базі цієї моделі було розраховано більшість макропоказників середньотермінового прогнозу економіки України. Наведено можливі найнижчі, ймовірні та верхні межі коливання реального виробництва (ВВП) та індексу інфляції, а також сценарії (ймовірний, оптимістичний, песимістичний) можливих змін основних агрегатів розподілу ВВП, бюджетних і грошово-кредитних показників.

▣ Певний інтерес становить розроблення Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України — *моделювальна система «Бюджет»*, призначена для розв'язання завдань бюджетного та макроекономічного моделювання, зокрема для оцінювання очікуваних надходжень до держбюджету й обсягів його найважливіших витрат, прогнозування динаміки цін, обсягів платоспроможного попиту, експортно-імпортних потоків тощо¹. Цю систему побудовано за блоковим принципом, кожен із 8 блоків є окремою економіко-математичною моделлю або групою моделей.

Підґрунтя блоку «Виробництво» становлять рівняння міжгалузевого балансу в базових цінах. У цьому блоці за нормативами балансу та галузевими індексами наявних цін, обчислених відносно базових, визначають також величини відносної собівартості продукції кожної галузі.

У блоці «Фінанси виробників та споживачів» обчислюють номінальні доходи та витрати виробників (із галузевою диференціацією) і споживачів. Модель дає змогу розрізнити групи споживачів за такими ознаками, як джерело отримання та величина доходів, соціальний статус тощо. Загальне (суспільне) споживання та його окремі складові, що фінансуються з державного бюджету, також можна розглядати в розрізі споживачів.

Платоспроможний попит споживачів залежно від доходів, грошових заощаджень і діючих цін, а також сукупний попит на

¹ Горбулін В., Михалеви́ч М., Серги́енко І. О некоторых проблемах и результатах финансового и бюджетного прогнозирования в условиях переходной экономики // Экономика Украины. — 1997. — № 2. — С. 31—40.

інвестиції з боку виробників і держави визначається в блоці «Попит».

У блоці «Бюджет» здійснюють розрахунок головних нормативів консолідованого бюджету та визначають їхній вплив на собівартість продукції й обсяги виробництва (через податкові ставки, з одного боку, і прямі та опосередковані субсидії, державні інвестиції — з іншого), на попит споживачів (через заплановані витрати на суспільне споживання) та інші фінансові показники. Реалізовано кілька стратегій субсидування виробництва, зокрема фіксації деяких цін на заданому рівні з покриттям частини витрат виробників із держбюджету. Модель визначення обсягів субсидування, необхідних для забезпечення цієї стратегії, також входить до цього блоку.

Розрахунок наявних цін здійснюють у блоці «Ціни», причому сюди входять моделі витратного, монопольного, олігопольного, конкурентного та інших механізмів ціноутворення.

У блоках «Експорт» та «Імпорт» здійснюють прогнозовий розрахунок обсягів цих показників.

Блок «Макроекономічні показники» має на меті розрахунок змін грошової маси в обігу, курсів обміну національної валюти, агрегованих показників цін (дефлятор ВВП, індекс споживчих цін) та інших макроагрегатів.

Моделювальну систему «Бюджет» використовували для аналізу проекту бюджету на 1996 рік у контексті сценарного моделювання: було розглянуто оптимістичний, реалістичний та помірно песимістичний сценарії. За кожним із них припускається, що монетарні показники є вирішальними впливовими чинниками економічної стабілізації, а варіювання їхніх величин залежить від певних (для кожного сценарію — своїх) параметрів грошово-кредитної політики. На підставі кожного виду сценарію надаються прогнози динаміки цін та оцінювання гранично можливих обсягів грошової маси в обігу.

☞ Ще одну *модель середньотермінового прогнозування* розроблено в Інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України (автори-розробники — Б. Панасюк, І. Сергієнко, Л. Гуляницький). Ця економетрична модель призначена для обчислення щорічних темпів зростання ключових макроекономічних змінних (реального ВВП, рівня інфляції та безробіття) і ґрунтується на використанні виробничих функцій типу Кобба-Дугласа¹.

¹ Гуляницький Л., Сергієнко І., Панасюк Б. Розробка моделей середньострокового прогнозування ВВП України // Економіст. — 1998. — № 5. — С. 68—72.

Екзогенні змінні моделі (віднесені авторами до чинників економічного зростання, що формують пропозицію) характеризують наявність працездатного населення, рівень безробіття, індекс матеріальних витрат, величину виробничого основного капіталу, завантаженість основного капіталу (виробничих потужностей), зношеність основного капіталу, обсяг капітальних вкладень, паливно-енергетичний баланс. Кількісна оцінка ВВП з боку сукупного попиту конкретизується за допомогою показників оплати праці, чисельності працездатного населення, фонду споживання, фонду нагромадження, рівня інфляції.

Ця модельна розробка фактично передбачає використання двох моделей — ступеневої квартальної моделі та лінійної річної (залежно від формалізації виробничої функції, що описує динаміку реального ВВП).

Ступенева модель складається із 8 стохастичних рівнянь, на підставі яких здійснюють прогнозові розрахунки реального ВВП, задіяних обсягів основного виробничого капіталу, частки задіяних трудових ресурсів, обсягів капітальних вкладень та обсягів прибутку підприємств. При цьому до уваги беруть такі керівні параметри, як частка безробітних, рівень зношування та використання основного виробничого капіталу, коефіцієнти матеріаломісткості, базові й поточні податкові ставки (ПДВ і податку на прибуток). Лагові змінні інвестиційних вкладень охоплюють період до двох років. Для переходу від реального до номінального вимірювання ВВП у моделі розраховують агрегований показник цін (дефлятор ВВП).

Особливістю зазначеної моделі є використання експертних оцінок для коригування статистичних даних, що характеризують період початку 1990-х років. Також експертним шляхом визначають межі перебування траєкторії динаміки ВВП, а потім — модельні параметри, за яких прогнозова крива значень ВВП вкладається в зазначені межі.

Лінійна модель призначена для формування довготермінових прогнозів і в робочому варіанті містить три основні функціональні залежності для визначення реального обсягу ВВП: визначається величина задіяного капіталу як функція від величини (бажаного) основного капіталу, обчисленої на кінець періоду за балансовою вартістю та мірою його спрацювання; визначається частка задіяних трудових ресурсів, що залежить від чисельності працездатного населення та міри використання основного капіталу; величина реального ВВП у цінах 1992 року є адитивною функцією, що містить дві вищезазначені залежності й характеристи-

ку впливу стохастичних змінних. На базі лінійної моделі розв'язують задачу квадратичної оптимізації з неточно заданими даними, причому траєкторію динаміки ВВП визначають експертним шляхом; для вирішення задачі автори розробили й реалізували комп'ютерний програмний комплекс. Це дає змогу здійснювати прогнозові розрахунки за двома сценарними варіантами розвитку економіки України — помірним і мінімальним.

Серед менш масштабних моделей слід вирізнити дві макроеконометричні розробки (мономоделі), які є перспективними для аналітичного використання.

☞ *Квартальна (річна) модель прогнозового розрахунку реального ВВП*, ґрунтована на використанні методу групового врахування аргументів (МГВА), розроблена в Кібернетичному Центрі НАН України під керівництвом О. Г. Івахненка¹.

Технологічним підґрунтям цієї моделі є метод групового врахування аргументів. Це індуктивний вирішковий метод, який надає переваги складноструктурованим системам, зокрема об'єктам із розмитими характеристиками (неповною вихідною інформацією). Алгоритми МГВА знаходять єдину оптимальну для кожної вибірки модель шляхом перебирання всіх можливих моделей-кандидатів та операції оцінювання їх за зовнішнім точнісним чи балансовим критерієм за незалежною вибіркою даних. Вихідною моделлю є краща серед багатьох моделей-кандидатів — та, що дає мінімальне значення зовнішнього критерію.

Модель, ґрунтована на використанні МГВА, придатна для прогнозів розрахунків реального обсягу ВВП, рівня реальних доходів населення та інших макропоказників. Для обчислення їх використовували квартальні й річні значення 82 макроекономічних та демографічних показників починаючи від 1992 року, які могли впливати на досліджувані чинники. Згідно із результатами застосування модельного підходу, найвпливовішими виявилися показники обсягу реального ВВП, зростання грошової бази, аукціонного обмінного курсу, дефлятора ВВП, індексу оптових цін, обсягу валової сільськогосподарської продукції, рівня середньої продуктивності праці, чисельності безробітних та їхньої частки від загальної робочої сили, обсягу грошових доходів населення, величини кредиторської заборгованості підприємств, обсягу імпортопостачання.

¹ Івахненко О., Івахненко Г. Індуктивні методи прогнозування та аналізу складних економічних систем // Економіст. — 1998. — № 5.

Прогнозова модель із використанням МГВА формально є лінійною багатофакторною регресією, її можна застосовувати для середньо- та довготермінового прогнозування.

☞ *Довготермінова економетрична модель економічного зростання у перехідних економіках* була розроблена співробітниками МВФ О. Гаврилишиним, І. Изворські, Р. Рооденом¹. Автори використали регресійний аналіз, виокремивши кілька впливових чинників, що характеризують інституційні зміни в економічному середовищі.

Ендогенною змінною моделі є темп зростання реального ВВП.

Екзогенними змінними виступають такі показники: темп інфляції (характеризує макроекономічну політику), індекс структурної реформи (опосередковує рівень реалізованих структурних реформ), обсяг урядової діяльності, що вимірюється державними витратами як відсотком від ВВП (відображає економічні спотворення, зумовлені високим рівнем оподаткування та бюрократизації).

У цій моделі присутні змінні, які характеризують два види «стартових умов», одна з них охоплює макроекономічні спотворення та незнання ринкових процесів, друга — рівень розвитку соціалістичної економіки та асоційованих із цим спотворень.

Модель було проаналізовано за допомогою групових даних для 25 країн із перехідною економікою за 1990—1997 р. (200 спостережень). Особливістю цієї моделі є варіантність та специфіка її використання. У першому випадку автори здійснювали декомпозицію ретроспективного періоду впродовж 1990—1993 років та 1994—1997 років. У другому випадку застосовували деталізацію індексу структурних реформ, що передбачає введення додаткових незалежних змінних: субіндексу структурних реформ для лібералізації внутрішніх цін, субіндексу структурних реформ для приватного входу на ринок, субіндексу структурних реформ для лібералізації торгівлі та системи обмінного курсу, субіндексу структурних реформ для правової реформи.

Модель формалізовано у вигляді лог-лінійної багатофакторної регресійної залежності.

¹ Україна на роздоріжжі. Уроки з міжнародного досвіду економічних реформ. — К.: Фенікс, 1998.



МЕТОДИ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ

ВСТУП

1 Основні поняття та попередній аналіз часових рядів

Сучасні дослідження макроекономічної динаміки, процесів перехідної економіки, фінансових ринків спираються на аналіз взаємозв'язків соціально-економічних даних, що має вигляд часових рядів. Урахування часової структури даних щодо реальних економічних процесів дозволяє адекватно відображати їх в економіко-математичних моделях. Усвідомлення цього факту зумовило як ревізію багатьох макроекономічних теорій, так і бурхливий розвиток специфічних методів аналізу таких даних. Знання цих методів і способів застосування їх до прогнозування соціально-економічних процесів є необхідною складовою підготовки економістів-дослідників (аналітиків).

1.1. Інформаційне представлення динаміки розвитку соціально-економічних процесів

Соціально-економічні процеси найчастіше спостерігаються у вигляді ряду послідовних, розташованих у хронологічному порядку значень того чи того показника.

Динамічний ряд — це сукупність спостережень одного показника, впорядкованих залежно від значень іншого показника, що послідовно зростають або спадають.

Часовий ряд (*time series*) — це ряд динаміки, впорядкований за часом, або сукупність спостережень економічної величини в різні моменти часу.

Теоретично вимірювання можна реєструвати безперервно, але зазвичай їх здійснюють через однакові проміжки часу, тобто дискретно, і нумерують за елементами вибірки. Складовими ряду спостережень є числові значення показника, які називають **рівнями** ряду, та **моменти** або **інтервали часу**, до яких належать рівні. Часовий ряд (ЧР) можна записати у стислому вигляді:

$$y_t, t = 1, 2, \dots, n,$$

де t — рівновіддалені моменти спостережень (година, доба, місяць, квартал, рік тощо)¹. Під **довжиною** часового ряду розуміють час, що минув від першого до останнього моменту спостереження. Часто довжиною ряду називають кількість рівнів n , які утворюють часовий ряд.

Залежно від характеру досліджуваних соціально-економічних показників часові ряди поділяють на моментальні, інтервальні та похідні.

Часові ряди, утворені показниками, що характеризують економічне явище на певні моменти часу, називають **моментальними**; прикладом такого ряду є дані щодо розміру виданих позичок відділенням Держбанку (табл. 1.1.1).

Таблиця 1.1.1

МОМЕНТАЛЬНИЙ ЧАСОВИЙ РЯД

Дата надання позички	01.10.	05.10.	12.10.	23.10.	03.11.	07.11.
Розмір наданої позички, тис. грош. од.	3747	3710	3839	3783	3747	3710

Якщо рівні часового ряду утворюються шляхом агрегування за певний проміжок (інтервал) часу, такі ряди називають інтервальними часовими рядами; приклад наведено в табл. 1.1.2.

Таблиця 1.1.2

ІНТЕРВАЛЬНИЙ ЧАСОВИЙ РЯД

Місяць	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень
Валовий внутрішній продукт, млн грн	6578	7016	7353	7353	7941

¹ Разом із часовим рядом іноді досліджують варіаційний ряд, який одержують із вхідного завдяки впорядкуванню за величиною рівня ряду. Отже, у варіаційному ряду на першому місці стоїть не перше за часом спостереження y_1 , а перше за величиною, тобто останнім буде мінімальне значення ряду.

Часові ряди можуть бути створені як із абсолютних значень економічних показників, так і з середніх або відносних величин — це *похідні* ряди; приклад такого ряду наведено в табл. 1.1.3.

Таблиця 1.1.3

ЧАСОВИЙ РЯД, УТВОРЕНИЙ ІЗ СЕРЕДНІХ ЗНАЧЕНЬ ПОКАЗНИКА

Місяць	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень
Середня зарплата загалом, грн/міс.	152,2	153,7	165,8	161,6	163,71

Основні характеристики динаміки розвитку соціально-економічних процесів. Для аналізу соціально-економічних показників абсолютні рівні моментальних або інтервальних часових рядів, а також рівні середніх величин часто доводиться перетворювати на відносні величини. Найпоширеніші характеристики динаміки розвитку соціально-економічних процесів та їхні розрахунки наведено в табл. 1.1.4.

Таблиця 1.1.4

ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМІКИ ЧАСОВОГО РЯДУ

Характеристики	Розрахункові формули
1	2
1. Абсолютний приріст	$\Delta y_i = y_i - y_{i-k}$
2. Коефіцієнт зростання	$K_{i(zp)} = \frac{y_i}{y_{i-k}}$
3. Коефіцієнт приросту	$K_{i(np)} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}}$
4. Темп зростання	$T_{i(zp)} = \frac{y_i}{y_{i-k}} \cdot 100\% = K_{i(zp)} \cdot 100\%$
5. Темп приросту	$T_{i(np)} = T_{i(zp)} - 100\%$, або $T_{i(np)} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}} \cdot 100\%$
6. Середня арифметична	$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$

1	2
7. Середня хронологічна	$\bar{y} = \frac{\sum y_i t}{\sum t}$
8. Середній абсолютний приріст	$\overline{\Delta y}_k = \frac{y_i - y_{i-k}}{k}$
9. Середній темп зростання	$\bar{T}(zp) = n-1 \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_1}}$
10. Середній темп приросту	$\bar{T}(np) = \bar{T}(zp) - 100\%$

Для визначення змін, що відбуваються з досліджуванним явищем, передусім обчислюють швидкість розвитку цього явища за часом. Показником швидкості слугує **абсолютний приріст**, який характеризує величину зміни показника за інтервал часу між порівнюваними періодами й обчислюється за формулою:

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-k}, \quad (1.1.1)$$

де y_i — i -й рівень часового ряду ($i = 2, 3, \dots, n$);

k — індекс початкового рівня; $k = 1, 2, \dots, n-1$ і може бути обраний будь-яким залежно від мети дослідження: за $k = 1$ отримують **ланцюгові** показники, за $k = i-1$ отримують **базові** показники із базовим початковим рівнем ряду тощо.

Точніше, швидкість зміни показника характеризує приріст за одиницю часу; ця величина має назву **середнього абсолютного приросту**:

$$\overline{\Delta y}_k = \frac{y_i - y_{i-k}}{k}. \quad (1.1.2)$$

Зокрема, середній абсолютний приріст за весь період спостереження для заданого часового ряду дорівнює:

$$\overline{\Delta y} = \frac{y_n - y_1}{n-1} \quad (1.1.3)$$

і характеризує середню швидкість зміни часового ряду, де n — індекс останнього спостереження.

Для визначення відносної швидкості зміни економічного явища як одиницю часу використовують відносні показники: коефіцієнти зростання й приросту (якщо ці показники виражені у відсотках, їх називають відповідно темпами зростання й приросту). Зазначимо, що в усіх наступних формулах індекс початкового рівня, стосовно якого здійснюють порівняння, також визначають за допомогою індексу k , як і раніше для показника абсолютного приросту.

Коефіцієнт зростання для i -го періоду обчислюють за формулою:

$$K_{i(\text{зр})} = \frac{y_i}{y_{i-k}}, \quad (1.1.4)$$

$K_{i(\text{зр})} > 1$, якщо рівень підвищується; $K_{i(\text{зр})} < 1$, якщо рівень зменшується; за $K_{i(\text{зр})} = 1$ рівень не змінюється.

Коефіцієнт приросту дорівнює:

$$K_{i(\text{пр})} = K_{i(\text{зр})} - 1 \text{ або } K_{i(\text{пр})} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}} \quad (1.1.5)$$

На практиці часто застосовують показники **темпу зростання** й **темпу приросту**:

$$T_{i(\text{зр})} = \frac{y_i}{y_{i-k}} \cdot 100 \%, \quad (1.1.6)$$

де $T_{i(\text{зр})}$ — темп зростання для i -го періоду;

$$T_{i(\text{пр})} = T_{i(\text{зр})} - 100 \% \text{ або } T_{i(\text{пр})} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}} \cdot 100 \%, \quad (1.1.7)$$

де $T_{i(\text{пр})}$ — темп приросту для i -го періоду. Темп приросту показує, на скільки відсотків рівень одного періоду збільшився стосовно рівня іншого періоду, тобто цей показник характеризує відносну величину приросту у відсотках.

Порівняння абсолютного приросту та темпу приросту за той самий інтервал часу показує, що в реальних економічних процесах уповільнення темпу приросту часто не супроводжується зменшенням абсолютних приростів.

Абсолютні значення одного відсотка приросту визначають як відношення абсолютного приросту Δy_i до темпу приросту у відсотках $T_{i(\text{пр})}$.

Середню швидкість зміни показника, що вивчається, за певний період характеризує також **середній темп зростання**. Його розраховують за формулою середньої геометричної:

$$\bar{T}_{(\text{зр})} = \sqrt[n]{T_{1(\text{зр})} \cdot T_{2(\text{зр})} \cdot \dots \cdot T_{n(\text{зр})}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \cdot 100\%, \quad (1.1.8)$$

де $T_{1(\text{зр})}, T_{2(\text{зр})}, \dots, T_{n(\text{зр})}$ — середні темпи зростання за окремі інтервали часу.

Відповідно **середній темп приросту** визначають як:

$$\bar{T}_{(\text{пр})} = \bar{T}_{(\text{зр})} - 100\%. \quad (1.1.9)$$

Показник середнього темпу зростання, обчислюваний за формулою середньої геометричної (1.1.8), має суттєві недоліки, оскільки ґрунтується на зіставленні останнього та початкового рівнів часового ряду, проміжні рівні до уваги не беруться. У разі суттєвого коливання рівнів використання середнього геометричного темпу зростання для статистичного аналізу може призвести до серйозних помилок, внаслідок чого реальна тенденція часового ряду буде викривлена.

Сучасні способи розрахунків середнього темпу зростання певною мірою позбавлені недоліків середньої геометричної. Наприклад, для розрахунків середнього темпу зростання пропонується використовувати формулу:

$$\bar{T}_{(\text{зр})} = \sqrt[n-1]{\frac{\hat{y}_n}{\hat{y}_1}}, \quad (1.1.10)$$

де \hat{y}_1, \hat{y}_n — згладжені за рівнянням тренду (рівнянням кривої зростання) перший та останній рівні часового ряду. Порядок побудови моделі тренду розглянуто в розділі 2.2 частини II. У моделі тренду враховано коливання проміжних рівнів часового ряду, тому обчислені за нею значення \hat{y}_1 та \hat{y}_n та середній темп зростання (1.1.10) точніше характеризуватимуть зміну економічного явища впродовж інтервалу дослідження.

Якщо тенденція часового ряду не змінюється, використовують характеристику **середнього рівня ряду**. В інтервальному ряду динаміки з однаково розташованими в часі рівнями середній рівень ряду обчислюють за формулою простої середньої арифметичної (тут і далі додавання ведеться за всіма періодами спостережень):

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}. \quad (1.1.11)$$

Якщо інтервальний ряд має неоднаково розташовані в часі рівні, тоді середній рівень ряду (так звану **середню хронологічну**) обчислюють за формулою зваженої арифметичної середньої, де вагою є тривалість часу (наприклад, кількість років), упродовж якого рівень постійний:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i t}{\sum t}, \quad (1.1.12)$$

де t — кількість періодів часу, для яких значення рівня y_i не змінюється.

Для моментального ряду з однаково розташованими в часі рівнями середню хронологічну розраховують за формулою:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n-1}, \quad (1.1.13)$$

де n — кількість рівнів ряду.

Середню хронологічну для моментального часового ряду з неоднаково розташованими в часі рівнями розраховують за формулою:

$$\bar{y} = \frac{(y_1 + y_2)t_1 + (y_2 + y_3)t_2 + \dots + (y_{n-1} + y_n)t_{n-1}}{2\sum t}. \quad (1.1.14)$$

Тут n — кількість рівнів ряду, а t — період часу, що відокремлює 1-й рівень ряду від $(t + 1)$ -го рівня.

Коригування рівнів часового ряду. Часовий ряд правильно відображає об'єктивний закон зміни економічного показника, коли рівні цього ряду є порівнянними, однорідними, сталими та мають достатню сукупність спостережень. Невиконання однієї із цих умов робить некоректним застосування математичного апарату для аналізу часового ряду.

Порівнянність означає, що рівні часових рядів повинні мати однакові одиниці вимірювання, однакову періодичність обліку окремих спостережень, однаковий ступінь агрегування, обчислюватися за тією самою методикою. В економіці й соціології найпоширенішими є такі причини непорівнянності:

- за територією, внаслідок зміни кордонів регіону, за яким збирають статистичні дані;
- за колом охоплення об'єктів і підпорядкуванням або формою власності. Наприклад, унаслідок переходу частини підприємств конкретного об'єднання до іншого;
- за часовим періодом, коли дані кількох років наведено за станом на різні дати, або місяці мають різну тривалість, на порівнянність економічних і соціологічних даних впливають свята;
- через розбіжність у структурі одиниць сукупності, для якої їх обчислено. Наприклад, дані стосовно кількості населення залежать не лише від зміни кількості народжених і померлих, а й від зміни вікового складу населення впродовж періоду спостереження;
- за вартісними показниками. Навіть у тих випадках, коли значення цих показників фіксуються в незмінних цінах, їх часто важко зіставити.

Існують й інші причини. Непорівнянність часових рядів неможливо усунути лише формальними методами, тому на неї зважають у процесі змістовного тлумачення рядів спостережень і результатів їхнього статистичного аналізу.

Однорідність означає відсутність нетипових, аномальних спостережень, а також викривлень тенденції. Під *аномальним рівнем* розуміють окреме значення рівня часового ряду, яке не відповідає потенційним можливостям економічної системи, що вивчається, і яке, залишаючись рівнем ряду, чинить суттєвий вплив на значення основних характеристик часового ряду. Формально аномальність виявляється як несподіваний стрибок (або спад) із подальшим поступовим встановленням попереднього рівня. Аномальність призводить до зміщення оцінок і, отже, до спотворення результатів аналізу. Причинами аномальних спостережень можуть бути помилки технічного порядку, або *помилки першого роду*: агрегування та дезагрегування показників, під час передання інформації та з інших технічних причин. Помилки першого роду слід виявляти й виправляти. Крім того, аномальні рівні в часових рядах можуть виникати через *помилки другого роду*: значення відображають об'єктивний розвиток процесу, але істотно відхиляються від загальної тенденції розвитку процесу; значення, що ви-

никають через зміну методики обчислення, тощо. Ці помилки трапляються епізодично, тобто дуже рідко, і не підлягають усуненню. Для виявлення аномальних рівнів часових рядів використовують методи, призначені для статистичних сукупностей (метод Ірвіна тощо). Засоби описової статистики та обчислення їх за даними вибірових спостережень наведено в табл. 1.1.5.

Таблиця 1.1.5

ОСНОВНІ СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВИБІРКИ

Характеристики	Оцінки вибірових значень
1	2
1. Середні значення:	
арифметичне	$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$
геометричне	$y_G = \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n} = (y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n)^{1/n}$
гармонійне	$\frac{1}{y_H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i}$
2. Дисперсія	$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 / (n-1) \text{ (незміщена оцінка)}$
Середньоквадратичне відхилення (СКВ)	$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$
3. Середнє абсолютне лінійне відхилення (MAD)	$MAD = \left(\sum_{i=1}^n y_i - \bar{y} \right) / n$
4. Початкові моменти: другого, третього, четвертого порядку	$v_2 = \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) / n ; v_3 = \left(\sum_{i=1}^n y_i^3 \right) / n ; v_4 = \left(\sum_{i=1}^n y_i^4 \right) / n$
5. Моменти центральні:	
другого,	$m_2 = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right) / n ;$
третього,	$m_3 = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^3 \right) / n$

1	2
четвертого порядку	$m_4 = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^4 \right) / n$
9. Коефіцієнт асиметрії	$A = m_3 / (m_2)^{\frac{3}{2}}$
його незміщена оцінка	$A_H = \left[\frac{((n-1)n)^{\frac{1}{2}}}{(n-2)} \right] A$
СКВ	$S_H = \left[\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)} \right]^{\frac{1}{2}}$
10. Показник ексцесу	$E = \frac{m_4}{(m_2)^2} - 3$
його незміщена оцінка	$E_H = \left[\frac{(n-1)}{(n-2)(n-3)} \right] \cdot [(n+1)E + 6]$
СКВ	$S_E = \left[\frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)} \right]^{\frac{1}{2}}$
11. Коефіцієнти варіації:	
за розмахом	$\frac{R}{\bar{y}}$
за середнім абсолютним лінійним відхиленням	$\frac{MAD}{\bar{y}}$
за СКВ	$\frac{\hat{\sigma}}{y}$
медіана	$m_e = y_n / 2$
мода	m_0 — характеризує величину, яка найчастіше спостерігається
мінімальне значення ряду	y_{\min}
максимальне значення ряду	y_{\max}
розмах	$R = y_{\max} - y_{\min}$

Метод Ірвіна ґрунтується на порівнянні сусідніх значень ряду та розрахунку характеристики λ_t , яка дорівнює:

$$\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\hat{\sigma}_y}; t = 2, 3, \dots, n, ; \quad (1.1.15)$$

де $\hat{\sigma}_y$ — оцінка середньоквадратичного відхилення вибіркового ряду y_t , яка розраховується з використанням формул:

$$\hat{\sigma}_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}{n}}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t}{n}.$$

Розрахункові значення λ_2, λ_3 тощо порівнюють із критичним значенням λ_α , і якщо вони не перевищують критичне, то відповідні рівні y_t вважаються нормальними. Критичні значення для рівня значущості $\alpha = 0,05$ (помилка 5 %) наведено в табл. 1.1.6.

Таблиця 1.1.6

n	2	3	10	20	30	50	100
λ_α	2,8	2,3	1,6	1,3	1,2	1,1	1,0

Критерій Ірвіна не «сприймає» аномальність, якщо вона виявляється в середині ряду зі стрімкою динамікою, тобто коли стрибок великий, але не перевищує рівнів наприкінці періоду спостережень, оскільки величина $\hat{\sigma}_y$ характеризує відхилення значень показника від середнього рівня за всією сукупністю спостережень.

Модифікація цього методу пов'язана із послідовним розрахунком $\hat{\sigma}_y$ не за всією сукупністю, а за трьома спостереженнями. Так, для всіх або лише для підозрюваних в аномальності рівнів розраховують оцінки середнього і середньоквадратичного відхилення для двох сусідніх із ними значень:

$$\bar{y}_t = \frac{(y_{t-1} + y_{t+1})}{2} \quad t = 2, 3, \dots, n-1, \quad (1.1.16)$$

$$\hat{\sigma}_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_{t-1} - \bar{y}_t)^2 + (y_{t+1} - \bar{y}_t)^2}{2}}. \quad (1.1.17)$$

Обчислюють величину $\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\hat{\sigma}_y}$, $t = 2, 3, \dots, n$. (1.1.18)

Розраховані ковзні значення λ_t порівнюють із критичними значеннями λ_α (див. табл. 1.1.6.) для $n = 3$.

Викривлення тенденції свідчить про зміну закономірності розвитку процесу або про зміну методики обчислення значень показника. Якщо точно встановлено, що причиною аномальності є помилки першого роду, то аномальні спостереження замінюють або простою середньою арифметичною двох сусідніх рівнів ряду, або відповідними значеннями за кривою, що згладжує цей часовий ряд. Не перевіряють часові ряди з періодом сезонності, більшим за одиницю, а також кінцеві рівні періоду спостережень.

Якщо значення наприкінці часового ряду «випадає» із загальної тенденції, то без додаткової інформації стосовно причин «випадіння» в кінці ряду неможливо визначити, чи це спостереження аномальне, чи відбувається зміна тенденції. У цьому разі важливо провести якісний аналіз змін, що відбуваються, або дочекатися надходження результатів нового спостереження. Якщо викривлення тенденції пояснюється зміною методики обчислення показника, то рівні, що передують викривленню тенденції, можуть бути використані для оцінювання характеристик динаміки і побудови моделі за умови, що вони будуть обчислені за новою методикою. Якщо таке обчислення неможливе, ці рівні ряду треба виключити з розгляду. Якщо викривлення тенденції відображає зміну закономірності розвитку процесу, то за інформаційну базу для статистичного аналізу можна взяти лише значення, що відповідають останнім змінам.

Стійкість часового ряду відбиває перевагу закономірності над випадковістю у зміні рівнів ряду. На графіках стійких часових рядів унаочнюється закономірність, а на графіках несталих рядів зміни послідовних рівнів постають хаотичними, тож пошук закономірностей формування значень рівнів таких рядів марний.

Достатня сукупність спостережень насамперед характеризує повноту даних. Достатня кількість спостережень визначається

залежно від мети дослідження динаміки. Якщо метою є описовий статистичний аналіз, то період дослідження можна обрати будь-який, на власний розсуд. Якщо мета дослідження — побудова прогнозової моделі, тоді для статистичного аналізу, який розглядає незалежні спостереження з однаковим розподілом, кількість рівнів динамічного ряду має бути якомога більшою і, як правило, не менш як утричі має перевищувати період упередження прогнозу й становити більше 7. У разі використання квартальних або місячних даних для дослідження сезонності й прогнозування сезонних процесів часовий ряд має містити квартальні або місячні дані не менш як за чотири роки, навіть якщо складають прогноз на 1—2 квартали (місяці).

У методах нелінійної динаміки підхід до формування достатньої кількості даних відрізняється від прийнятого більшістю статистиків. У стандартній статистичній теорії чим більше даних точок спостережень, тим краще, бо спостереження передбачаються як незалежні. Нелінійні динамічні системи характеризуються процесами із довготривалою пам'яттю. Тому для них охоплення більшого періоду часу є важливішим, ніж збільшення кількості точок спостережень. Наприклад, щоденна вибірка за чотири роки, або 1040 спостережень, не дадуть такого результату, як щомісячні дані за сорок років, або загалом 480 спостережень. Причина полягає в тому, що щоденні дані утворюють лише один чотирирічний цикл, а щомісячні — десять циклів. Нелінійні процеси мають так звану «стрілу часу». Збільшення «частоти» даних часто навіть ускладнює аналіз і не поліпшує значущості результату.

1.2. Випадкові процеси та часові ряди

Основні елементи теорії випадкових процесів.

Для аналізу часового ряду $y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_n}$ порядок у послідовності t_1, t_2, \dots, t_n є суттєвим, тобто час виступає одним із визначальних чинників. Це відрізняє часовий ряд від звичайної випадкової вибірки, де індекси вводять лише для зручності ідентифікації. Принциповою відмінністю часового ряду від простих статистичних сукупностей є:

- по-перше, рівні часового ряду не є незалежними. Інакше кажучи, якщо майбутні значення змінної можна визначити, то вони є функцією від минулих значень цієї змінної;

- по-друге, рівні часового ряду неоднаково розподілені. Закон розподілу ймовірностей цих випадкових величин i , зокрема, їхні математичні сподівання та дисперсії можуть залежати від часу.

Отже, не можна поширювати властивості та правила статистичного аналізу випадкових вибірових спостережень на часові ряди. Порушення умови незалежності між спостереженнями призводить до негативних наслідків застосування цих методів. Наприкінці 1980-х — на початку 1990-х років дослідники остаточно переконалися, що лише врахування часової структури даних про реальні економічні процеси дають змогу адекватно відобразити їх в економіко-математичних моделях. Усвідомлення цього факту зумовило перегляд багатьох макроекономічних теорій і побудов та бурхливий розвиток специфічних методів аналізу таких даних, що дістали назву **аналіз часових рядів**.

Потужним математичним апаратом дослідження зміни соціально-економічних показників у їхній динаміці нині є теорія випадкових (стохастичних) процесів. Випадковий процес описують деякою функцією від часу, значення якої в будь-які моменти часу є випадковими величинами. Наведемо основні поняття та визначення теорії випадкових процесів, необхідні для подальшого аналізу часових рядів.

Реалізацією випадкового процесу ξ_t називають послідовність n результатів спостережень $y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_n}$ певного економічного процесу в моменти часу t_1, t_2, \dots, t_n .

Динамічним або **часовим рядом (time series)** будемо називати послідовність спостережень y_{t_i} , отриманих у рівновіддалені моменти часу, а відповідну йому ймовірнісну модель — **дискретним випадковим** або **одnofакторним стохастичним процесом**.

Оскільки випадковий дискретний процес являє собою сукупність випадкових величин, то його найповнішою статистичною характеристикою є сумісна функція розподілу, або функція щільності розподілу. Щоб задати всі ймовірнісні властивості часового ряду, потрібна сукупність функцій розподілу, а саме одновимірна, двовимірна, тривимірна функції розподілу тощо: $F_1(\xi_{t_1})$; $F_2(\xi_{t_1}, \xi_{t_2})$; $F_3(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \xi_{t_3})$;... Індокси у величин $\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}$ означають, що випадкові величини розглядаються в моменти часу t_1, t_2, \dots, t_n і вони мають сумісну функцію розподілу. Якщо взяти інші моменти часу, то фун-

кція розподілу буде іншою. Така сукупність функцій розподілу цілковито характеризує випадковий процес.

Стаціонарні процеси. Економетричне моделювання відбувається, як правило, на підставі лише однієї реалізації випадкового процесу, тож ясно, що про оцінювання сукупності всіх функцій розподілу взагалі годі казати. Окрім того, якщо процес поводиться так, що його основні статистичні характеристики з часом змінюються, то за короткий проміжок часу спостережень про нього взагалі нічого не можна сказати. Проблема втрачає гостроту, якщо розглядати вужчий клас випадкових процесів, який дістав назву *стаціонарних випадкових процесів*. Під стаціонарністю розуміють такі випадкові процеси, деякі властивості яких не змінюються з часом.

Однією з важливіших властивостей стаціонарного випадкового процесу є *ергодичність*. Вона полягає в тому, що кожна окрема реалізація випадкового процесу є так би мовити «повноважним» представником усієї сукупності можливих реалізацій. Звідси для ергодичних процесів основні характеристики можна приблизно розраховувати не за кількома реалізаціями, як це робиться в загальному випадку, а за будь-якою однією реалізацією за доволі тривалий проміжок часу. В практичних розрахунках розглядають стаціонарний процес у широкому сенсі.

Стаціонарний часовий ряд у широкому сенсі — це процес, для якого математичне сподівання та дисперсія існують і є сталими величинами, що не змінюються в часі, а автокореляційна (автоковаріаційна) функція залежить лише від різниці між двома моментами часу $t_1 - t_2 = \tau$ і не залежить від конкретного періоду часу. Тобто для реалізації випадкового процесу $y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_n}$ основні моменти залишаються постійними й обмеженими у разі зміні часу t , для якого вони розраховуються, а саме:

математичне сподівання: $M(y_t) = \mu_y < \infty$, для всіх t ;

дисперсія: $Var(y_t) = D(y_t) = M(y_t - M(y_t))^2 = \sigma^2 < \infty$, для всіх t ;

автоковаріація порядку τ :

$$Cov(y_t, y_{t+\tau}) = M((y_t - M(y_t))(y_{t+\tau} - M(y_{t+\tau}))) = \gamma_\tau < \infty, \tau = 1, 2, 3, \dots,$$

для всіх t .

Для отримання практичних оцінок часових рядів користуються такими формулами:

$$\begin{aligned} \text{математичне сподівання: } \hat{\mu}_y &= \frac{\sum_{t=1}^n y_t}{n}; \\ \text{дисперсія: } \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\gamma}_0 &= \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{\mu}_y)^2}{n}; \\ \text{автоковаріація порядку } \tau: \hat{\gamma}_\tau &= \frac{\sum_{t=1}^{n-\tau} (y_t - \hat{\mu}_y)(y_{t+\tau} - \hat{\mu}_y)}{n - \tau}. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Зрушення в часі τ називають *часовим лагом*. Зауважимо, що $Cov(y_t, y_{t+\tau})$, коли $\tau = 0$, дорівнює дисперсії: $Cov(y_t, y_{t+0}) = Cov(y_t^2) = D(y_t) = \gamma_0$. При цьому $|\gamma_k| \leq \gamma_0$. Можна розглядати функцію γ_k як усі можливі значення автоковаріацій, де τ перебирає цілочисельні значення від $-\infty$ до ∞ . Сукупність значень автоковаріацій за всіх можливих значень τ називають *автоковаріаційною функцією* випадкового процесу. Автоковаріаційна функція стаціонарного часового ряду залежить лише від різниць моментів часу ($t_1 - t_2 = \tau$). Ця функція парна, і досить розглядати невід'ємні τ .

Коефіцієнт автокореляції між зрушеними на τ рівнями часового ряду — це автоковаріація, розділена на корінь із добутку двох дисперсій, та оскільки дисперсія стала, отримуємо просто σ^2 або γ_0 . Розраховують коефіцієнт автокореляції за формулою:

$$\rho_\tau = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}. \quad (1.2.8)$$

Вираз (1.2.8) визначає *автокореляційну функцію* (АКФ) часового ряду, яка показує наскільки статистично залежними є значення часового ряду для різних зрушень τ у часі (наприклад, для річних спостережень рік чи два роки тощо). Автокореляційна функція стаціонарного часового ряду залежить лише від різниці між двома моментами часу $t_1 - t_2 = \tau$, і є парною функцією, тобто $\rho(\tau) = \rho(-\tau)$. Задаючи різні значення $\tau = 1, 2, 3, \dots$, отримують послідовність значень $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$. Графік автокореляційної функ-

ції називають *корелограмою*. За корелограмою можна визначити запізнення, із яким зміна показника y_t позначається на його наступних значеннях.

У широкому сенсі оцінки наведених статистик є консистентними, тобто для них існує межа щодо ймовірності, яка збігається з їхніми справжніми значеннями для генеральної сукупності. Далі замість стаціонарності в широкому сенсі будемо просто говорити стаціонарність, оскільки інші різновиди стаціонарності не розглядатимуться.

Приклад 1.2.1.

На рис. 1.2.2 зображено часовий ряд щоквартальних значень доходів консолідованого бюджету України (млн грн) із 1999-го до 2002 року. Цей показник за 4 роки збільшився із 6008,5 до 17298,2. Аналіз середньої й середнього квадратичного відхилення, зроблений за кожен рік, свідчить, що середня величина і середнє квадратичне відхилення впродовж першого року будуть нижчими, ніж впродовж другого року тощо, і очевидно, що в останньому році, коли показник зростає до 17298,2 млн грн, його середній рівень буде вищий, ніж за перший рік.



Рис. 1.2.2. Нестационарний часовий ряд

Величина дисперсії й середнього квадратичного відхилення може бути функцією від значення показника. Отже, дисперсія показника, що коливається навколо 6008,5 (значення першого рівня), цілком може бути нижчою за дисперсію показника, що коливається навколо позначки 17298,2 (значення останнього рівня). Коваріація також може залежати від рівня значень даних, що аналізуються. У такому разі існує коваріація між послідовними спостереженнями.



Рис. 1.2.3. Часовий ряд доходів консолідованого бюджету, виражений у відсотках до ВВП

На рис. 1.2.3 показано часовий ряд доходів консолідованого бюджету, виражений у відсотках до ВВП. Доходи, виражені у відсотках до ВВП, характеризуються постійними середньою, середнім квадратичним відхиленням і коваріацією спостережень, яка залежить суто від інтервалів між спостереженнями. Очевидно, ряд значень показника доходів бюджету не є стаціонарним, тоді як ряд значень відсотка до ВВП доходів бюджету може бути стаціонарним. ►►

Інтуїтивно можна очікувати, що небагато (якщо взагалі знайдуться) часових рядів соціально-економічних показників будуть стаціонарними, оскільки зростаючі й спадні значення є головною рисою соціально-економічних показників.

Оптимальний предиктор і його властивості. Практика розроблення різноманітних прогнозів спирається на цілу систему методів, які стосуються оцінювання (прогнозування) величин, недоступних для безпосереднього спостереження в конкретний момент, і їх потрібно знайти за допомогою доступних для вимірювання (спостереження) супровідних величин.

Завдання стохастичного прогнозування полягає в тому, щоб за відомою сукупністю спостережень $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ за випадковими величинами побудувати таку функцію від цих величин, яку можна було б використати для оцінювання прогнозованої величини $\hat{y}_p : f(\vec{Y}) = y_p$. При цьому y_p та \vec{Y} стохастично пов'язані, тобто мають сумісну щільність розподілу $F(y_p, \vec{Y})$. Наприклад, y_p належить до майбутнього, а \vec{Y} — до теперішнього. Функцію $f(\vec{Y})$ називають **предиктором** величини y_p за \vec{Y} .

Для вимірювання точності предиктора, як правило, використовують середньоквадратичну похибку $MSE = M(f(\bar{Y}) - y_p)^2$. Предиктор, який мінімізує MSE в заданому класі предикторів, називають *оптимальним предиктором*, або прогнозом. Розроблення методів побудови оптимальних предикторів становить зміст стохастичного прогнозування. На підставі предиктора, можна одержати варіанти прогнозу, що відповідатимуть сформульованим гіпотезам та умовам, урахованим під час його побудови.

Теорія стохастичного прогнозування величини y_p за супровідними величинами \bar{Y} передбачає, що сумісний закон розподілу $F(\bar{Y}, y_p)$ — відомий. У практичному застосуванні точний вид залежності між y_p та \bar{Y} найчастіше невідомий і пошук найкращого предиктора обмежується лінійними прогнозами, тобто коли $f(\bar{Y}) = \beta_0 + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_k y_k$. Тоді оптимальний лінійний предиктор існує та збігається із функцією регресії y_p на \bar{Y} , тобто задається як умовне математичне сподівання¹:

$$f^*(\bar{Y}) = M(y_p | \bar{Y}) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 y_1 + \dots + \hat{\beta}_k y_k.$$

Ця функція має максимальну кореляцію з y_p серед усіх лінійних предикторів. Для побудови оптимального предиктора досить знати перші та другі моменти початкового розподілу $F(y_p, \bar{Y})$, які знаходять шляхом оброблення результатів відомих спостережень. Підставляючи ці оцінки замість теоретичних характеристик, отримують *емпіричний предиктор*, який використовують для прогнозування майбутніх значень y_p .

Отже, головну роль у статистичному підході до прогнозування відіграє вибір відповідної моделі. В разі наповнення її числовими параметрами вона стає безпосереднім інструментом прогнозування — предиктором.

Білий шум (*White noise*). Білим шумом називають часові ряди, рівні яких мають середню, що дорівнює нулю, сталу дисперсію та нульову коваріацію послідовних спостережень, тобто нульову автокореляцію. Наприклад, залишки регресії, що задовольняють умовам теореми Гауса-Маркова, є «білим шумом»: $M(\varepsilon_t) = 0$; $D(\varepsilon_t) = \sigma^2$; $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau}) = 0$ за $\tau \neq 0$.

¹ Доведення цього твердження можна знайти у [22].

Наведене визначення білого шуму характеризує його як стаціонарний ряд. Хоча стаціонарний ряд необов'язково буде білим шумом, оскільки може мати середню або коваріацію, відмінні від нуля.

Якщо $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, то йдеться про гаусівський білий шум, хоча змінна білого шуму не обов'язково підпорядковується закону нормального розподілу. Найкращим передбаченням або прогнозом білого шуму є його нульове середнє значення. Білий шум відіграє важливу роль в аналізі часових рядів. На практиці білий шум трапляється не надто часто, але він утворює складніші процеси. Прикладом цього є процес випадкового блукання.

Випадкове блукання (*Random walk*). Іноді його називають броунівським рухом. Це стохастичний процес, де зміна рівня ряду, скажімо, рівня інфляції, досягається додаванням до нього випадкової змінної ε_t із постійною дисперсією та середнім, що дорівнює нулю. Випадкове блукання задається так:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1.2.9)$$

де ε_t — білий шум. Цей процес можна розглядати як авторегресію із коефіцієнтом 1. Зазначимо, що лише ε_t має нульову середню та постійну дисперсію.

Термін «випадкове блукання» виник у зв'язку із жартівливою задачкою: якщо в поле випустити п'яного, то де він опиниться через деякий час? Результат — якщо п'яний блукає випадково, то його слід очікувати на тому самому місці, тобто в середньому його місцезнаходження не зміниться.

За умови наявності певної початкової точки y_0 підстановка у (1.2.9) значень змінної за попередні моменти часу дає вираз

$$y_t = y_0 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \dots = y_0 + \sum_{k=0}^t \varepsilon_{t-k},$$

який за t , що прямує до нескінченності, включатиме необмежену кількість доданків $\sum_{k=0}^t \varepsilon_{t-k}$, кожен із яких має нульове математичне сподівання та ненульову дисперсію σ_ε^2 .

Обрахуємо математичне сподівання процесу випадкового блукання: $M(y_t) = M(y_0) + M\left(\sum_{\tau=0}^t \varepsilon_{t-\tau}\right) = y_0 + \sum M(\varepsilon_{t-\tau}) = y_0 + 0 = const$, тобто математичне сподівання задовольняє умові стаціонарності.

Дисперсія процесу випадкового блукання дорівнює $D(y_t) = M\left\{\left(\sum_{\tau=0}^t \varepsilon_{t-\tau}\right)^2\right\}$. Після розкриття дужок подвоєні добутки після взяття математичного сподівання будуть дорівнювати нулю, і залишаться математичне сподівання суми квадратів. Ураховуючи властивості дисперсії білого шуму, одержимо $D(y_t) = t \cdot \sigma_\varepsilon^2$. Отже, процес випадкового блукання не стаціонарний, оскільки дисперсія y_t зростає з часом.

Прогноз такого процесу на 1 крок уперед дорівнює $\hat{y}_t(1) = M(y_{t+1}|y_t, \dots, y_1) = M(y_t + \varepsilon_{t+1})$. Але $y_{t+1} = y_t + \varepsilon_{t+1}$ незалежно від y_{t-1}, \dots, y_1 . Отже прогноз на крок уперед становить: $\hat{y}_t(1) = y_t + M(\varepsilon_{t+1}) = y_t$. На два кроки уперед: $\hat{y}_t(2) = M(y_{t+2}|y_t, \dots, y_1) = M(y_t + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}) = y_t$ тощо. Прогноз на k кроків уперед становитиме:

$$\hat{y}_t(k) = M(y_{t+k}|y_t, \dots, y_1) = M(y_t + \varepsilon_{t+1} + \dots + \varepsilon_{t+k}) = y_t.$$

Хоча величина прогновної оцінки зі зростанням періоду випередження прогнозу k залишається постійною, дисперсія помилки прогнозу зростає. Так, помилка прогнозу на один крок вперед дорівнює $e_1 = y_{t+1} - \hat{y}_{t+1} = y_t + \varepsilon_{t+1} - y_t = \varepsilon_{t+1}$ та її дисперсія дорівнює $M(\varepsilon_{t+1}^2) = \sigma_\varepsilon^2$. Для прогнозу на два кроки вперед — $e_2 = y_{t+2} - \hat{y}_{t+2} = y_t + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} - y_t = \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}$, а дисперсія — $M(\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2})^2 = 2\sigma_\varepsilon^2$, оскільки ε_{t+1} та ε_{t+2} — незалежні. Аналогічно для прогнозу на k кроків уперед дисперсія помилки прогнозу становитиме $k \cdot \sigma_\varepsilon^2$. Середньоквадратичне відхилення прогнозу зростає пропорційно \sqrt{k} , і можна оцінити інтервал надійності прогнозу.

Якщо рівняння $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, де збурення ε_t є білим шумом, переписати як $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$, отримаємо процес білого шуму. Приріст, або першу різницю (*first difference*), можна розглядати як інший часовий ряд Δy_t , який є стаціонарним. Перехід до перших різниць є розповсюдженим засобом зведення нестаціонарного часового ряду до стаціонарного.

Іноді випадкове блукання може передбачати елемент зсуення. Зсуення означає тенденцію (дрейф). Отже, випадкове блукання із зсуенням — це випадкове блукання із дрейфом. Наприклад:

$$y_t = y_{t-1} + \alpha + \varepsilon_t, \quad (1.2.10)$$

де α — стала величина.

Тепер $\hat{y}_t(1) = M(y_{t+1} | y_t, \dots, y_1) = y_t + \alpha$ та $\hat{y}_t(k) = y_t + k \cdot \alpha$.

Середньоквадратичне відхилення прогнозу в цьому разі не зміниться, оскільки: $e_1 = y_{t+1} - \hat{y}_{t+1} = y_t + \alpha + \varepsilon_{t+1} - y_t - \alpha = \varepsilon_{t+1}$.

Прогноз зростає лінійно за k , а інтервал надійності прогнозу розширюється пропорційно \sqrt{k} .

Середнє значення перших різниць становить швидкість зростання фактичного ряду спостережень, при цьому кожна зміна $\Delta y = y_t - y_{t-1}$ не залежить від усіх попередніх змін і має ідентичний розподіл імовірностей.

Марківський процес. Марківськими називають процеси, в яких стан об'єкта в кожен наступний момент часу визначається станом поточного моменту і не залежить від того, яким шляхом об'єкт досяг поточного стану. Це стаціонарна послідовність незалежних, однаково розподілених випадкових величин. У термінах кореляційного аналізу часових рядів марківський процес можна описати таким чином: існує статистично значущий кореляційний зв'язок початкового ряду із рядом, зрушеним на один часовий інтервал, і цей зв'язок відсутній із рядами, зрушеними на два, три тощо часові інтервали. В ідеальному випадку ці коефіцієнти кореляції дорівнюють нулю.

За допомогою рівняння авторегресії такий ряд можна представити як:

$$y_t = \alpha_t y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{або} \quad y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1.2.11)$$

розкладаючи y_{t-1} , отримуємо: $y_t = \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \rho^2 y_{t-2} = \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \rho^2 \varepsilon_{t-2} + \rho^3 y_{t-3}$ тощо. Очевидно, що y_t залежить від усіх минулих (але не майбутніх) ε_t . Якщо $M(\varepsilon_t) = 0$, то й $M(y_t) = 0$. Знайдемо добуток (1.2.11) на y_{t-1} і визначимо математичне сподівання:

$$M(y_t, y_{t-1}) = \rho M(y_{t-1}^2) \quad \text{або} \quad \text{Cov}(y_t, y_{t-1}) = \rho \cdot D(y_t),$$

остаточно $\rho = \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t-1})}{D(y_t)}$, тобто ρ є першою автокореляцією процесу.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(y_t, y_{t-k}) &= \rho \cdot \text{Cov}(y_{t-1}, y_{t-k}) \text{ розділимо на } D(y_t) \quad \rho_k = \rho \rho_{k-1} =: \\ &= \rho^2 \rho_{k-2} \dots = \rho^k. \end{aligned}$$

Отже, всі кореляції марківського процесу можна виразити через першу автокореляцію.

Окрім марківських з-поміж стаціонарних процесів авторегресії часто трапляються процеси Юла, в яких ураховано авторегресію не лише першого, а й другого порядку, тобто $y_t = \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$.

Розкладення (декомпозиція) часового ряду. Реальні часові ряди в економіці, як правило, є динамічно нестабільними, отже — не стаціонарними, і поняття стаціонарності процесу часто є лише зручною абстракцією для застосування статистичних методів. Кожен рівень часового ряду формується під впливом великої кількості чинників, які відображають закономірність і випадковість його формування. В аналізі часових рядів прийнято представляти часовий ряд y_t у вигляді суми систематичної складової (середньої) та випадкового відхилення від неї:

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t, \quad (1.2.12)$$

де $f(t)$ — не випадкова функція часу (детермінована частина);

ε_t — випадкова, недетермінована частина.

Завдання розкладення часового ряду полягає в аналізі чинників, що впливають на значення його рівнів, у вирізненні серед них головних і другорядних (випадкових), а потім серед головних — еволюційних та періодичних (сезонних тощо).

• **Еволюційні** чинники визначають загальний напрям розвитку економічного показника, провідну його тенденцію. Тенденція — це не випадкова складова часового ряду, яка змінюється повільно, і описується за допомогою певної функції v_t , яку називають **функцією тренду** або просто **трендом**. Тренд відображає вплив на економічний показник деяких постійних чинників, дія яких акумулюється в часі. У широкому сенсі під трендом розуміють будь-який упорядкований процес, що відрізняється від випадкового, тобто функцію $f(t)$ у (1.2.12). Іноді під трендом розуміють також зміщення у часі математичного сподівання. Відносно v_t припускається, що це певна гладка функція, ступінь гладкості якої за-

здаlegідь не відомий. Під ступенем гладкості розуміють мінімальний ступінь поліному, що найкраще згладжує компоненту v_t . На рис. 1.2.4 а) зображено умовний часовий ряд із тенденцією, що лінійно зростає.

• Серед чинників, що визначають регулярні коливання ряду, розрізняють такі:

Сезонні, що відповідають коливанням, які мають періодичний або близький до нього характер упродовж одного року. Наприклад, ціни на сільгосппродукцію взимку вищі, ніж улітку; рівень безробіття в курортних містах у зимовий період зростає відносно до літнього. Сезонні чинники можуть охоплювати причини, пов'язані з діяльністю людини (свята, відпустки, релігійні традиції тощо). Так, у ряду щомісячних даних слід очікувати наявності сезонних коливань із періодом 12, у кварталних рядах — із періодом 4. На рис. 1.2.4 б) зображено умовний часовий ряд, який містить лише сезонну компоненту. Результат дії сезонних чинників моделюють за допомогою функції s_t .

Циклічні (кон'юнктурні) коливання схожі на сезонні, але виявляються на триваліших інтервалах часу. Циклічні коливання пояснюються дією довготермінових циклів економічної, демографічної або астрофізичної природи. Наприклад, за багаторічними спостереженнями активність сонця має циклічність у 10,5—11 років, причому сплески сонячної радіації впливають на врожайність зернових культур, репродуктивну властивість тварин тощо. Отже динаміка показника міститиме характерні зміни, що повторюються з однаковою циклічністю. Результат дії циклічних чинників моделюють за допомогою функції c_t .

Тренд, сезонна й циклічна компоненти не є випадковими, тому їх називають **систематичними компонентами часового ряду**.

• **Випадкові** чинники не підлягають вимірюванню, але неминуче супроводжують будь-який економічний процес і визначають стохастичний характер його елементів. До випадкових чинників можна віднести помилки вимірювання, випадкові збурення тощо. Деякі часові ряди, наприклад стаціонарні, не мають тенденції та сезонної складової, кожен наступний рівень їх утворюється як сума середнього рівня ряду і випадкової (додатної або від'ємної) компоненти. Приклад такого ряду демонструє рис. 1.2.4 в). Результат впливу випадкових чинників позначається **випадковою компонентою** ε_t , яку обчислюють як залишок або похибку, що залишається після вилучення з часового ряду систе-

матичних компонент. Це не означає, що така складова не підлягає подальшому аналізу, оскільки містить лише хаос.

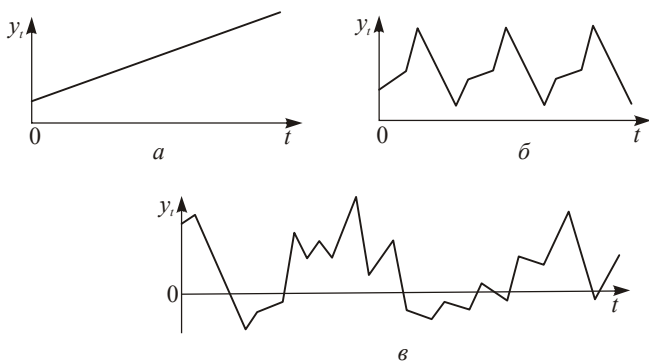


Рис. 1.2.4. Головні компоненти часового ряду:
a — тренд, що зростає; *б* — сезонна компонента;
в — випадкова компонента

За **декомпозицією Вольда** суто недетермінований стаціонарний у широкому сенсі випадковий процес можна записати у вигляді:

$$y_t - \mu = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = \sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_{\tau} \cdot \varepsilon_{t-\tau}, \quad (1.2.13)$$

де μ — детермінована складова або математичне сподівання цього процесу, ε_t — білий шум з обмеженими математичним сподіванням та дисперсією. Розкладення Вольда (1.2.13) ще називають лінійним фільтром, начебто білий шум пропустили крізь лінійний фільтр. Це означає, що, не втрачаючи цілого, обмежуються зручним лінійним представленням і переходять до вивчення стаціонарних процесів.

Щоб вираз (1.2.13) мав сенс, повинна виконуватися умова збіжності за ймовірністю, оскільки підсумовуються випадкові величини. Ця умова записується, як $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_{\tau}^2 < \infty$. Припускається, що $\psi_0 = 1$. Чим більший ваговий коефіцієнт ψ_{τ} , тим більший вплив випадкового збурення в момент $t - \tau$ на поточний момент t .

Аналіз випадкової компоненти є важливою інформативною частиною дослідження часових рядів. Пояснюється це тим, що в короткотерміновому та певною мірою середньотерміновому прогнозуванні результати прогнозу тісно пов'язані із випадковою компонентою, тоді як у довготерміновому прогнозуванні головну увагу приділяють визначенню тенденції й взаємозв'язків між чинниками.

Очевидно, реальні дані цілковито не відповідають лише одній із наведених функцій, тож часовий ряд y_t , $t=1,2,\dots,n$ можна уявити у вигляді розкладення:

$$y_t = v_t + s_t + c_t + \varepsilon_t, \quad t=1,2,\dots,n \quad (1.2.14)$$

або різноманітних поєднань окремих функцій. Однак завжди припускають обов'язкову наявність випадкової складової. Розкладення (декомпозиція) часового ряду відбувається за такими варіантами моделей:

$$\text{модель тренду } y_t = v_t + \varepsilon_t, \quad t=1,2,\dots,n; \quad (1.2.15)$$

$$\text{модель сезонності } y_t = s_t + \varepsilon_t, \quad t=1,2,\dots,n; \quad (1.2.16)$$

$$\text{тренд-сезонна модель } y_t = v_t + s_t + \varepsilon_t, \quad t=1,2,\dots,n. \quad (1.2.17)$$

Моделі тренду й сезонності (тренд-сезонні) можуть відображати як відносно постійну сезонну хвилю (цикл), так і динамічно змінювану залежно від тренду. Перша форма — (1.2.14—1.2.17) належить до **адитивних**, друга ($y_t = v_t \cdot s_t \cdot c_t \cdot \varepsilon_t$, $t=1,2,\dots,n$, (1.2.18)) — до **мультиплікативних** моделей.

Моделі для врахування циклічних чинників будують аналогічно до тренд-сезонних, тільки замість сезонної складової вводять циклічну.

Процес окремого обчислення функцій v_t, c_t, s_t і ε_t називають **фільтрацією компонент** часового ряду y_t . Процедура оцінювання детермінованої частини разом з усіма не випадковими компонентами має назву **згладжування** часового ряду.

Успішне розв'язання завдань виявлення й моделювання дії розглянутих складових чинників є підґрунтям, відправним пунктом для зрозуміння механізму формування соціально-економічного процесу та його прогнозування.

Утім, слід пам'ятати, що операція розкладення часового ряду, яка є допустимою з математичної точки зору й корисною для мо-

делювання динаміки зміни показників у часі, подеколи може ввести в оману. Зокрема, за такого підходу дуже спрощеним може виявитися припущення стосовно незалежного впливу названих компонент, їхньої чіткої структури.

Типи нестационарних часових рядів. За видом нестационарності часові ряди, що застосовують в економічній практиці, розподіляють на ряди типу: *TS*, *DS*, тренд-сезонні, нелінійні.

Часовий ряд типу *TS* (trend stationary process). До цього типу відносять нестационарні часові ряди із *детермінованим поліноміальним трендом* $y_t = P_k(t) + \varepsilon_t$, де $P_k(t)$ поліном ступеня k від t , а ε_t — стаціонарний процес, який не обов'язково є білим шумом. Наприклад, простий лінійний тренд $y_t = a + bt + \varepsilon_t$. Тут нестационарна змінна y_t виражена через детермінований, тобто не випадковий тренд. Попри те, що додавання стаціонарної змінної призводить до коливань навколо тренду й робить y_t випадковою, ми, власне, маємо інформацію тільки про середнє значення $y_t = a + bt$, тобто часовий ряд характеризується наявністю тренду в середньому значенні. Отже, ані поточна, ані минулі події не змінюють довготермінових прогнозів цього процесу. Вплив випадкового збурення ε_t (поточний шок) забувається одразу на наступному кроці ($t+1$). Похибка довготермінового прогнозу буде мати обмежену дисперсію σ_ε^2 , тому невизначеність є обмеженою навіть у далекому майбутньому.

Нестационарний процес типу *TS* зводять до стаціонарного за допомогою кількох методів. Наприклад, для лінійного тренду $y_t = a + bt + \varepsilon_t$ перехід до стаціонарності може відбуватися:

- шляхом виділення лінійного тренду. Наприклад, будують лінійну регресію за часом i розглядають стаціонарний залишок

$$y_t - \hat{y}_t;$$

- узяттям перших різниць: різниці двох суміжних рівнів часового ряду

$$\Delta^1 y_t = y_t - y_{t-1} \quad (1.2.20)$$

є першими різницями ряду y_t , або $\Delta^1 y_t = a + bt - [a + b(t-1)] + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$. Звідси $\Delta^1 y_t = b + u_t$, де $u_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ — випадкова величина, розподіл якої цілком визначається розподілом величини ε_t . Окрім того, перші різниці часового ряду з лінійною тенденцією

мають постійне математичне сподівання, що дорівнює певній константі b , не залежній від t .

Загалом якщо часовий ряд має тенденцію, що виражається через поліном ступеня d , то різниці порядку d

$$\Delta^d y_t = \Delta^{d-1} y_t - \Delta^{d-1} y_{t-1} \quad (1.2.21)$$

є випадковими величинами з постійним математичним сподіванням. У цьому разі $M(\Delta^{d+1} y_t) = 0$.

Якщо тенденція часового ряду відповідає експоненціальному або степеневому тренду, то метод послідовних різниць слід застосовувати не до початкового ряду, а до його логарифмів. Наприклад, процес у своєму розвитку наближається до певної величини a та може бути представлений у вигляді

$$Y_t = ae^{bt} + \varepsilon_t, \quad \lambda > 0, \quad (1.2.22)$$

де ε_t — аналогічна (1.2.20). Тоді процес, утворений із величин $z_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$, має постійне середнє (b) і може бути зведений до стаціонарного процесу авторегресії.

Часовий ряд туну DS (*differencing stationary process*). Це ряди без періодичної складової та тенденції зростання, але наявність тренду в дисперсії засвідчує їхню нестационарність. Прикладом таких рядів є процес випадкового блукання $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$. Як уже зазначалося, цей процес накопичує випадкові збурення від усіх попередніх шоків, тобто має нескінченну пам'ять. Такий процес описують стохастичним трендом і зводять до стаціонарного шляхом узяття першої різниці, звідси й відповідна назва.

Тренд-сезонні часові ряди окрім тренду містять чітко виражені сезонні коливання, які, своєю чергою, спричинюють нестационарність. Якщо процес включає періодичні (сезонні) коливання навколо середнього значення з періодом m , тобто

$$y_{t+m} \approx y_t \quad (1.2.23)$$

із точністю до випадкової складової, то в цьому разі різниці через m часових інтервалів представляють стаціонарний процес

$$\Delta_m y_t = y_{t+m} - y_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \text{ де } m \text{ — const}, \quad (1.2.24)$$

середнє значення якого збігається із середнім значенням початкового ряду.

Амплітуда сезонних коливань може зростати з часом і не обов'язково лінійно. Ці ряди характеризуються наявністю тренду в середньому значенні й дисперсії.

Нелінійні динамічні процеси. До цього типу відносять часові ряди зі складною структурою, вони мають тренд і містять різні види коливань, зокрема сезонні та циклічні. Структуру таких рядів узагалі не можна описати за допомогою відомих функцій, оскільки для різних ділянок часового ряду набір цих функцій буде різним, тобто в цьому разі можна говорити про ряди зі змінною структурою, які характерні для нелінійних динамічних процесів. Вони спостерігаються в динаміці цін на ринках капіталу тощо.

Лише в останні роки завдяки розвитку математичних методів нелінійної динаміки та комп'ютерних технологій з'явилася можливість досліджувати такі процеси. У певному аспекті [29] будь-який динамічний процес зрештою є детермінованим, і моделювання його як реалізації випадкового процесу є зручним спрощенням. Невипадковий часовий ряд відображає не випадкову природу впливів. Стрибки даних відповідають стрибкам впливових чинників і відбивають властиву їм кореляцію. Детерміновані процеси, що виглядають як випадкові, у теорії нелінійностей називають *детермінованим хаосом*. Добре відомо, що просте детерміноване нелінійне різницеве рівняння може породжувати надзвичайно складні часові траєкторії, які видаються випадковими. Наприклад, рівняння, яке трапляється в аналізі фінансових ринків $y_{t+1} = \alpha y_t (1 - y_t)$, де y_t є ціною облігацій. У багатьох економічних застосуваннях значення параметру α лежить між 1 та 4, таким чином виключають від'ємні значення рівноваги для y_t і уникають прямування процесу до нескінченності. За зміни α від 1 до 4 динаміка системи зазнає суттєвих змін. Наприклад, для $1 < \alpha < 3$, за будь-яким відхиленням від $y_t = 0$,

динаміка процесу прямує до рівноваги $y_t = 1 - \frac{1}{\alpha}$. Разом із тим для $3,75 < \alpha < 4$ спостерігатиметься нескінченна кількість циклів із різною періодичністю і нескінченне число положень рівноваги з еволюцією процесу залежно від початкового його стану. Такий тип поведінки називають «хаосом». Властивістю цього процесу є те, що хоча він детермінований, випадкове блукання є задовільною моделлю для описання механізму породження даних. У цьому випадку зміни y_t неможливо передбачити, хоча всю траєкторію перебігу процесу цілком можна передбачити.

1.3. Ідентифікація часових рядів

Структуру часового ряду в деяких випадках можна визначити графічно. Це стосується, наприклад, таких компонент ряду, як тренд і сезонні коливання. Однак чисту випадковість інколи помилково сприймають як наявність певної структури, і, навпаки, за шумом можна не розгледіти існування структури. Тому потрібні методи або інструменти, за допомогою яких можна було б звести нанівець ефект впливу шуму, після чого з'ясувати характеристики ряду, необхідні для побудови відповідної прогнозової моделі. Як правило, спочатку з'ясовують, із яким процесом доведеться працювати — стаціонарним чи нестаціонарним. Для будь-якого нестаціонарного ряду важливо визначити ознаку його нестационарності: чи описується він детермінованим трендом, чи є інтегрованим процесом і описується стохастичним трендом (лінійним або нелінійним), визначити наявність періодичної складової.

Перевірка стаціонарності часового ряду. Стаціонарні часові ряди передбачають, що процес породження наявних даних є лінійним. Вони не мають тренду або періодичної зміни середнього та дисперсії.

Перевірку гіпотез стосовно сталості середнього значення та дисперсії часового ряду можна здійснити кількома способами. Найпростішими з них є перевірка значущої відмінності двох середніх значень для деяких підмножин вибірки (наприклад, для першої та останньої третин усього обсягу даних) за z — критерієм (критерій перевірки гіпотези про рівність середніх двох нормально розподілених вибірок) і для дисперсії, якщо справедливе припущення про нормальний розподіл, можна використати F-критерій. Розглянемо два поширені методи: метод перевірки різниць середніх рівнів і метод Форстера-Стьюарта.

Метод перевірки різниць середніх рівнів. Реалізація цього методу передбачає такі чотири кроки.

Крок перший. Вхідний часовий ряд $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ розподіляють на дві приблизно однакові за кількістю спостережень частини: в першій частині n_1 першої половини рівнів вхідного ряду, у другій — решта рівнів n_2 ($n_1 + n_2 = n$).

Крок другий. Для кожної з цих частин розраховують середні

значення й дисперсії: $\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} y_t}{n_1}$; $\sigma_1^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} (y_t - \bar{y}_1)^2}{(n_1 - 1)}$; $\bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_2} y_t}{n_2}$;

$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_2} (y_t - \bar{y}_2)^2}{(n_2 - 1)}$.

Крок третій. Перевірка рівності (однорідності) дисперсій обох частин ряду за допомогою F -критерію, що порівнює розрахункове значення цього критерію:

$$F = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}, & \text{якщо } \hat{\sigma}_1^2 > \hat{\sigma}_2^2 \\ \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2}, & \text{якщо } \hat{\sigma}_1^2 < \hat{\sigma}_2^2 \end{cases} \quad (1.3.1)$$

із табличним (критичним) значенням критерію Фішера F_α із заданим рівнем значущості α . Якщо розрахункове значення F менше за табличне F_α , то гіпотезу про рівність дисперсій приймають, і можна переходити до четвертого кроку. Якщо F більше або дорівнює F_α , гіпотезу про рівність дисперсій відхиляють і доходять висновку, що цей метод не дає відповіді щодо наявності тренду.

На *четвертому кроці* перевіряють гіпотезу про відсутність тренду за допомогою t -критерію Стьюдента. Для цього визначають розрахункове значення критерію Стьюдента за формулою:

$$t = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad (1.3.2)$$

де $\hat{\sigma}$ — оцінка середньоквадратичного відхилення різниць середніх:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\hat{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{\sigma}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

Якщо розрахункове значення t менше за табличне t_α , то нульову гіпотезу не відхиляють, тобто тренд відсутній, інакше — тренд є. Зазначимо, що в цьому разі табличне значення t_α приймають для числа ступенів вільності, яке дорівнює $n_1 + n_2 - 2$, до того ж цей метод застосовують суто для рядів із монотонною тенденцією. Недолік методу полягає у неможливості правильно визначити існування тренду в тому разі, коли часовий ряд містить точку зміни тенденції у середині ряду.

Приклад 1.3.1.

Застосуємо метод перевірки різниць середніх рівнів для двох часових рядів: доходів консолідованого бюджету (млн грн) і доходів консолідованого бюджету (% ВВП). Для цього початкові часові ряди поділяють на дві однакові частини: перша охоплює 1999—2000 роки, друга — 2001—2002 роки. Кількість кварталів-спостережень в обох частинах однакова: $n_1 = n_2 = 8$. Результати розрахунків наведено в табл. 1.3.1. На рівні значущості $\alpha = 0,05$, тобто з імовірністю 0,95, із числом ступенів вільності $k_1 = n_1 - 1 = 8 - 1 = 7$ і $k_2 = n_2 - 1 = 8 - 1 = 7$ табличне значення критерію Фішера дорівнює $F_\alpha = 3,79$.

Таблиця 1.3.1

Доходи	Роки	Середнє значення	Дисперсія	F	$\hat{\sigma}$	t
Млн грн	1999—2000 2001—2002	9860,2 13695,8	8349206 4459451	1,87	2733,44	2,8
% до ВВП	1999—2000 2001—2002	26,0 24,5	6,41 1,92	3,34	2,2	1,37

Для обох часових рядів F розрахункові менші за табличне значення F_α , тобто приймається гіпотеза про рівність дисперсій.

На рівні значущості $\alpha = 0,05$ із числом ступенів свободи $n_1 + n_2 - 2 = 16 - 2 = 14$ табличне значення t -розподілу дорівнює $t_\alpha = 2,145$.

Для часового ряду доходів, виражених у млн грн, t -розрахункове перевищує табличне значення t_α , тобто нульова гіпотеза не приймається, тренд існує.

Для часового ряду доходів, виражених у відсотках до ВВП, t -розрахункове менше за табличне значення t_α , тобто приймається гіпотеза про відсутність тренду. ►

Метод Форстера-Стьюарта. Цей метод має більші можливості та дає надійніші результати, ніж попередній. Окрім тренду самого ряду (тренду в середньому), він дає змогу встановити існування тренду дисперсії часового ряду: якщо тренду дисперсії немає, то розкид рівнів ряду постійний; якщо дисперсія збільшується, то ряд «розхитується». Реалізація методу передбачає чотири кроки.

Крок перший. Порівнюють кожен рівень вхідного часового ряду, починаючи з другого рівня, з усіма попередніми, при цьому визначають дві числові послідовності:

$$k_t = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y_t \text{ більше всіх попередніх рівнів} \\ 0, & \text{в іншому разі} \end{cases} \quad (1.3.3)$$

$$l_t = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y_t \text{ менше всіх попередніх рівнів} \\ 0, & \text{в іншому разі} \end{cases} \quad (1.3.4)$$

$t = 2, 3, \dots, n$.

Крок другий. Розраховують величини c і d :

$$c = \sum_{t=2}^n (k_t + l_t); \quad (1.3.5)$$

$$d = \sum_{t=2}^n (k_t - l_t). \quad (1.3.6)$$

Величина c , яка характеризує зміну рівнів часового ряду, набуває значення від 0 (усі рівні ряду однакові) до $n - 1$ (ряд монотонний). Величина d характеризує зміну дисперсії часового ряду та змінюється від $[-(n - 1)]$ — ряд поступово згасає, до $(n - 1)$ — ряд поступово розхитується.

Крок третій Перевіряється гіпотеза стосовно того, чи можна вважати випадковими: 1) відхилення величини c від математичного сподівання ряду, в якому рівні розташовані випадково, 2) відхилення величини d від нуля. Цю перевірку здійснюють на підставі обчислення t -відношення відповідно для середньої та для дисперсії:

$$t_c = \frac{\left| \frac{c - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}_1} \right|; \quad \hat{\sigma}_1 = \sqrt{2 \ln n - 3,4253}; \quad (1.3.7)$$

$$t_d = \frac{\left| \frac{d - 0}{\hat{\sigma}_2} \right|; \quad \hat{\sigma}_2 = \sqrt{2 \ln n - 0,8456}, \quad (1.3.8)$$

де $\hat{\mu}$ — оцінка математичного сподівання ряду; $\hat{\sigma}_1$ — оцінка середньоквадратичного відхилення для величини c ; $\hat{\sigma}_2$ — оцінка середньоквадратичного відхилення для величини d .

Таблиця 1.3.2

n	10	20	30	40
$\hat{\mu}$	3,858	5,195	5,990	6,557
$\hat{\sigma}_1$	1,288	1,677	1,882	2,019
$\hat{\sigma}_2$	1,964	2,279	2,447	2,561

Фрагмент розрахованих значень величин $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}_1$ і $\hat{\sigma}_2$ для різних n наведено в табл. 1.3.2 [25].

Крок четвертий. Розрахункові значення t_c і t_d порівнюють із табличним значенням t -критерію із заданим рівнем значущості t_α . Якщо розрахункове значення t менше за табличне t_α , то гіпотезу про відсутність відповідного тренду приймають, в іншому разі тренд існує. Наприклад, якщо t_c більше табличного значення t_α , а t_d менше t_α , то для заданого часового ряду існує тренд у середньому, а тренду дисперсії рівнів ряду немає.

Приклад 1.3.2.

Застосування методу Форстера-Стьюарта для двох часових рядів: доходів консолідованого бюджету (млн грн) та доходів консолідованого бюджету (% до ВВП) дає розрахунки, наведені в табл. 1.3.3.

Таблиця 1.3.3

Доходи	$\sum k_t$	$\sum l_t$	c	d	t_c	t_d
Млн грн	8	0	8	8	3,28	4,07
% до ВВП	4	1	5	3	0,9	1,53

На рівні значущості $\alpha = 0,05$, тобто з імовірністю 0,95 та з числом ступенів волі $n - 2 = 16 - 2 = 14$ табличне значення критерія Стюдента дорівнює $t_\alpha = 2,145$.

Для часового ряду доходів, виражених у млн грн, розрахункові значення t_c і t_d перевищують табличне значення t_α , тобто нульова гіпотеза не приймається, існує тренд як середнього, так і дисперсії ряду.

Для часового ряду доходів, виражених у відсотках до ВВП, розрахункові значення t_c і t_d менші за табличне значення t_α , тобто приймається гіпотеза про відсутність тренду в тенденції й дисперсії ряду. ►►

Розглянуті вище два методи перевірки стаціонарності часового ряду — метод перевірки різниць середніх рівнів і метод Фостера—Стьюарта — дають різні результати щодо існування тренду дисперсії ряду доходів, виражених у % до ВВП. Якщо їхні висновки виявляються протилежними, перевагу віддають методу Фостера—Стьюарта.

Визначення типу нестаціонарності та ступеня інтеграції часового ряду. Стаціонарні ряди ще називають динамічно стабільними або такими, що мають нульовий порядок інтеграції $y_t \sim I(0)$.

Порядком інтеграції є число, що показує, скільки разів часовий ряд потребує застосування оператора перших різниць, щоб стати стаціонарним рядом.

Позначимо через d порядок інтеграції. Часовий ряд має одиничний корінь, або порядок інтеграції одиницю ($y_t \sim I(1); d = 1$), якщо

$\Delta^1 y_t = y_t - y_{t-1}$ є стаціонарним рядом, тобто ряд перших різниць має нульовий порядок інтеграції ($\Delta^1 y_t = (y_t - y_{t-1}) \sim I(0); d = 0$).

Часовий ряд має два одиничні корені, або порядок інтеграції 2, якщо його другі різниці є стаціонарним рядом: $y_t \sim I(2); d = 2$;

$\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} \sim I(0)$. У загальному випадку часовий ряд має порядок інтеграції d : $y_t \approx I(d)$, якщо $\Delta^d y_t = (\Delta^{d-1} y_t - \Delta^{d-1} y_{t-1}) \sim I(0)$.

Зазначимо: якщо ряд стаціонарний, то будь-які його різниці залишаються стаціонарним рядом: $y_t \sim I(0)$; $\Delta y_t \sim I(0)$ тощо.

Тест Діккі-Фуллера призначений для того, щоб розрізнити часові ряди типу *TS* та *DS*. Відповідно нульовій гіпотезі H_0 досліджуваний ряд належить до типу *DS*. За альтернативною гіпотезою він може бути типу *TS*, але одночасно бути або нестаціонарним — мати детермінований тренд, або не мати тренду — бути стаціонарним. Виділяють простий тест Діккі-Фуллера — *DF*-тест — та розширений тест Діккі-Фуллера — *ADF*-тест. Розглянемо їх по порядку.

Простий *DF*-тест. Припустімо, що y_t може бути описано моделлю:

$$y_t = \alpha + \rho \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1.3.9)$$

де випадкова величина ε_t є «білим шумом». Зазначимо, що модель (1.3.9) увібрала в себе риси як *DS*, так і *TS* процесів. Якщо $\rho = 1$, то y_t — це випадкове блукання із дрейфом $y_t = \alpha + y_{t-1} + \varepsilon_t$,

тобто є нестационарним DS процесом. Якщо $0 < \rho < 1$, тоді маємо справу зі стаціонарним марківським процесом. Зазначимо, що ρ не набуває значень, більших за 1, оскільки це передбачає вибуховий процес. Оскільки такі ряди мало імовірні в економічних дослідженнях, ми їх далі не розглядатимемо. Гіпотези щодо характеру ряду можна записати таким чином:

$$H_0 : \text{ряд є } DS, \text{ якщо } \rho = 1.$$

$$H_1 : \text{ряд є } TS, \text{ якщо } \rho < 1.$$

У класичній лінійній регресії для перевірки такої гіпотези використовують односторонню t -статистику. Для зведення процедури перевірки нульової гіпотези до більш звичної (коли коефіцієнт за y_{t-1} дорівнює нулю) відніmemo з обох частин (1.3.9) y_{t-1} . У результаті отримаємо регресію:

$$\Delta y_t = \alpha + (\rho - 1) \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t = \alpha + \gamma \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1.3.10)$$

в якій перевіряємо наступну нульову гіпотезу проти альтернативної:

$$H_0 : \text{ряд є } DS, \text{ якщо } \gamma = 0,$$

$$H_1 : \text{ряд є } TS, \text{ якщо } \gamma < 0.$$

Для звичайної регресії відношення $t = \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\sigma}_\gamma}$ порівнюється із

критичним значенням t -розподілу. Однак у разі виконання гіпотези H_0 , ряд y_t є випадковим блуканням, його дисперсія прагне до нескінченності при збільшенні часу, і розподіл t -відношення не підпорядковується t -розподілу, а підпорядковується розподілу Діккі-Фуллера (DF), який, на відміну від t , позначається τ . Тест, який використовує для перевірки типу нестационарності цей розподіл, за умови $\gamma = 0$, тобто коли процес належить типу DS , називають тестом Діккі-Фуллера.

Точна форма критерію значущості Діккі-Фуллера залежить від специфікації моделі, що підлягає тестуванню. Тому в загальному випадку розглядається модель:

$$\Delta y_t = \alpha + \beta \cdot t + \gamma \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1.3.11)$$

для якої можливі такі три випадки перевірки нульової гіпотези і три критичні величини DF -розподілу, розраховані в таблицях МакКіннона [29]:

1) Модель без лінійного тренду та дрейфу ($\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=\rho-1=0$). Для цього розподілу критичне значення DF позначимо τ_0 . Нульова гіпотеза означає, що $\rho=1$ і ряд y_t — це випадкове блукання без дрейфу, тобто є нестационарним (інтегрованим) процесом: $y_t \sim I(d), d > 0$.

2) Модель тільки із додатною середньою ($\alpha > 0$, $\beta=0$, $\gamma=\rho-1=0$). Критичне значення DF — τ_μ . Нульова гіпотеза означає, що $\rho=1$ і ряд y_t — це випадкове блукання із дрейфом, тобто є нестационарним процесом: $y_t \sim I(d), d > 0$.

3) Модель з лінійним трендом та дрейфом ($\alpha > 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma=\rho-1=0$). Для цього розподілу критичне значення DF позначимо τ_τ . Нульова гіпотеза означає, що ряд y_t — це випадкове блукання із двома типами тренду: стохастичним та детермінованим, тобто є нестационарним процесом $y_t \sim I(d), d > 0$.

Нульова гіпотеза буде відхилена, якщо t -відношення $t = \frac{\hat{\rho}-1}{\hat{\sigma}_{\sigma-1}^2}$ має від'ємне значення, менше за критичне із таблиць МакКіннона. У цьому випадку часовий ряд y_t — стаціонарний: $y_t \sim I(0), d=0$ або має лінійний тренд ($\beta \neq 0$) і після його вилучення стає стаціонарним.

Розширений ADF-тест. Його використання базується на припущенні, що замість білого шуму ε_t в моделі (1.3.12) випадкова складова є стаціонарним авторегресійним процесом, наприклад, типу марківського, або у загальному випадку — типу $ARMA(p, q)$. Тоді досліджується таке рівняння:

$$\Delta y_t = \alpha + \beta \cdot t + (\rho - 1) \cdot y_{t-1} + \sum_{i=1}^p w_i \cdot \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \delta_i \cdot \varepsilon_{t-i}. \quad (1.3.12)$$

В ADF -тесті перевіряється значущість лише одного коефіцієнта — $\rho-1$. Наявність лагових прирощень Δy та лагових значень випадкової змінної не змінює розподілу, тож можна користуватися таблицями Мак-Кіннона, що й для DF -тесту. Якщо в моделі (1.3.14) присутні і вільний член, і тренд, то нульову гіпотезу мож-

на перевіряти, використовуючи статистику τ_t ; якщо лише вільний член α , то статистику τ_μ ; якщо немає жодного потрібно використовувати статистику τ_0 .

Для можливості застосування *ADF*-тесту важливо перевірити, що дисперсія випадкової величини ε_t є сталою, тобто випадкові збурення гомоскедастичні. Інакше у випадку їх гетероскедастичності тест уже неможливо застосувати. У комп'ютерному пакеті *Ekonometric Views* реалізований *непараметричний тест Філіпса-Перрона (PP-тест)* цієї перевірки.

Наступною важливою проблемою є те, що *ADF*-тест дуже чутливий до правильного вибору значень p та q , які точно не відомі. Існує кілька способів її розв'язання:

- застосувати правило узгодження кількості лагів, котрі потрібно включати до моделі при застосуванні *ADF*-тесту, та довжиною часового ряду. В макроекономічних рядах, якщо маємо від 81 до 256 точок, потрібно включати три лага, якщо менше 81 точки, то два лага. Для фінансових рядів спрацьовує наближення $\left[n^{1/4} \right]$, де квадратні дужки означають цілу частину числа;

- залишати таку кількість лагів, для яких оцінки МНК-коефіцієнтів у разі прирощень у (1.3.12) будуть статистично значущими за t -розподілом Стьюдента;

- застосувати економетричний пакет *Ekonometric Views*, який містить алгоритм вибору кількості лагів.

Приклад 1.3.3.

Перевірити за *ADF*-тестом, до якого типу (*TS* або *DS*) належить ряд індексу ділової активності для Великої Британії (*UK FTA All Share*) [37].

1. Кількість лагів у моделі (1.3.12) дорівнювала трьом. Методом найменших квадратів оцінено таку модель:

$$\Delta y_t = 0,124 + 0,00025 \cdot t - 0,0284 \cdot y_{t-1} + \sum_{i=1}^3 \hat{w}_i \cdot \Delta y_{t-i} + e_t,$$

де t -відношення для коефіцієнта при y_{t-1} дорівнює $-2,27$. Критичне значення τ_t на рівні значущості 5 % дорівнює $-3,49$, тобто $-2,27 > -3,49$. Тому нульова гіпотеза не відхиляється, і ряд належить до типу *DS*, тобто має одиничний корінь.

2. На другому кроці оцінюємо регресію виду:

$$\Delta y_t = -0,0023 + 0,00007 \cdot t + \sum_{i=1}^3 \hat{a}_i \cdot \Delta y_{t-i} + e_t,$$

тобто виключаємо з моделі y_{t-1} . t -статистика коефіцієнта за лінійного тренду дорівнює 1.18. Порівнюємо її із таблицями нормального розподілу. Бачимо, що коефіцієнт незначущий, отже, тренд не потрібно включати до моделі. Тому переходимо до кроку 3.

3. Оцінюємо регресію виду:

$$\Delta y_t = 0,0166 - 0,00176 \cdot y_{t-1} + \sum_{i=1}^3 \hat{b}_i \cdot \Delta y_{t-i} + e_t,$$

Порівнюємо t -відношення для коефіцієнта при y_{t-1} із τ_μ . Оскільки $t = -0,38$, що набагато більше за критичне, то нульова гіпотеза не відхиляється. Але ще треба впевнитися у правильності включення до моделі вільного члена.

4. Оцінюємо модель виду:

$$\Delta y_t = 0,0067 + \sum_{i=1}^3 \hat{c}_i \cdot \Delta y_{t-i} + e_t.$$

Тут t — статистика, яка дорівнює 1,78, після порівняння з критичною величиною стандартного нормального розподілу, виявляється значущою на 5-відсотковому рівні за одностороннім критерієм. Отже, модель на кроці 3 специфіковано правильно.

Загальний висновок полягає в тому, що ряд належить до типу DS і не містить лінійного тренду. ►►

Встановлення типу нестационарності ряду не зводиться до одноразового застосування тесту Діккі-Фуллера. Потрібне детальне дослідження правильності специфікації тестової моделі.

Якщо на першому етапі ADF -тесту нульова гіпотеза не може бути відхилена, то постає питання про порядок інтегрованості ряду. І знову застосовують ADF -тест, тільки вже для перевірки стаціонарності перших різниць ряду, а базове регресійне рівняння набуває вигляду других різниць:

$$\Delta^2 y_t = \alpha_0 + \beta \cdot y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \hat{c}_i \cdot \Delta^2 y_{t-i} + e_t. \quad (1.3.13)$$

Тестування проводиться далі для наступних різниць, поки не отримують стаціонарний ряд і відповідне значення порядку інтеграції.

Модифікація критерію Дарбіна-Ватсона. Для часового ряду:

$$y_t = \alpha + u_t, \quad (1.3.14)$$

де u є випадковим блуканням

$$u_t = u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1.3.15)$$

ε_t — білий шум, оцінюють параметри й обчислюють статистику Дарбіна-Ватсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2}. \quad (1.3.16)$$

Якщо запропонована модель (1.3.14) — (1.3.15) є коректною, з (1.3.16) очевидно, що чисельник у DW є сумою квадратів $n-1$ доданків білого шуму, а знаменник є сумою n доданків, кожен із яких (рекурентною підстановкою замість u_{t-1} у (1.3.5)) можна записати як нескінченну суму квадратів доданків білого шуму. Отже, значення статистики Дарбіна-Ватсона буде близьким до нуля, а критерій полягає у визначенні значущості його відмінності від нуля. Ця статистика називається *коінтегративною регресійною статистикою Дарбіна-Ватсона (КРДВ)*, для якої розроблено таблиці критичних значень. Якщо для (1.3.14) статистика КРДВ не відмінна від нуля, доходять висновку, що Δu_t є стаціонарним, а u_t є нестаціонарним $I(1)$ -процесом.

Дослідження автокореляційної функції часового ряду (АКФ). Перевірки часових рядів на стаціонарність вважаються недостатньо путижними, особливо у невеликих вибірках, ось чому дуже корисно додатково аналізувати корелограми, які є менш формальним апаратом перевірки на стаціонарність.

Властивістю автокореляційної функції є те, що для стаціонарних рядів існує таке значення K , що для $k > K$ коефіцієнти автокореляції ρ_k приймають майже нульові значення. Отже, якщо зі збільшенням часового проміжку k АКФ ряду за абсолютним значенням поступово згасає, ряд можна вважати стаціонарним. Якщо поведінка автокореляційної функції не така, то вона не мо-

же бути автокореляційною функцією стаціонарного процесу. На практиці порядок k АКФ рекомендується обирати від $n/4$ до $n/3$. Значення коефіцієнта автокореляції, близьке до одиниці, вказує на значну додатну залежність між фактичним рядом даних і рядом, зрушеним на k одиниць часу. У цьому разі пари спостережень будуть близькими один до одного. Якщо з'ясується, що більше спостереження утворює пару з меншим, то коефіцієнт автокореляції буде від'ємним і близьким до -1 . Для перевірки статистичної значущості коефіцієнтів автокореляції не існує простих критеріїв.

Перевірка за критерієм стандартної похибки коефіцієнта автокореляції. Якщо обсяг вибірки (n) великий, окремі (кожного порядку) коефіцієнти автокореляції випадкових даних мають вибіркового розподілу, який наближається до нормального з нульовим математичним сподіванням і середнім квадратичним відхиленням, що дорівнює

$$s_{\rho_k} = \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (1.3.17),$$

Якщо ρ_k виходить за межі інтервалу $\pm 2 \frac{1}{\sqrt{n}}$, то часовий ряд має суттєву автокореляцію k -го порядку. Зазначимо: якщо обчислено 20 значень АКФ, то на 5-відсотковому рівні значущості в середньому один із 20 буде значущим. Цей факт разом із відносно малим обсягом вибірки на практиці означає, що критерій на підставі окремих коефіцієнтів може бути ненадійним. Альтернативою є використання критерію Бокса-Пірса.

Q — критерій Бокса-Пірса використовують для перевірки значущості всієї множини коефіцієнтів автокореляції як групи. Статистичний Q -критерій обчислюють за формулою:

$$Q = n \sum_{k=1}^m r_k^2, \quad (1.3.18)$$

де r_k — оцінка автокореляції порядку k ;

m — найбільший лаг, що розглядається.

Якщо всі автокореляції до порядку m дорівнюють нулю, то Q має приблизно χ^2 -розподіл із m ступенів свободи. Велике значення Q порівняно з критичним зумовлює відхилення нульової гіпотези.

Існує кілька модифікацій цього критерію. Найпопулярнішим із них є критерій *Льюнга-Бокса*:

$$LB = n(n+2) \sum_{k=1}^m (n-k)^{-1} r_k^2. \quad (1.3.19)$$

Ці критерії можна також застосовувати до часткових автокореляцій.

Приклад 1.3.4.

За вибіркою у 28 спостережень про чисті податки на виробництво та імпорт розраховані коефіцієнти автокореляції. Результати розрахунків наведено в табл. 1.3.4. Якщо коефіцієнт автокореляції першого порядку r_1 перебуває в інтервалі:

$$-1,96 \cdot 0,18 < r_1 < 1,96 \cdot 0,18 \text{ або остаточно } -0,35 < r_1 < 0,35,$$

то можна вважати, що дані не вказують на наявність автокореляції першого порядку на рівні значущості 0,05. Розраховані коефіцієнти автокореляції від першого до четвертого порядків значно перевищують 0,35. Отже, можна зробити висновок про існування автокореляції для часового ряду чистих податків. Однак після четвертого порядку коефіцієнти автокореляції стають статистично незначущими.

Таблиця 1.3.4

Лаг	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r_k	0,66	0,46	0,49	0,55	0,26	0,12	0,10	0,26	0,07	0,06	0,05	0,07
s_{r_k}	0,18	0,18	0,17	0,17	0,17	0,16	0,16	0,15	0,15	0,15	0,14	0,14

Статистичний критерій Q , наприклад, із лагом у дванадцять часових інтервалів, дорівнює:

$$Q = n \sum_{k\tau=1}^{12} r_k^2 = 28 \cdot 1,365 = 38,23; \quad \chi_{12}^2(0,05) = 21,0.$$

Отже, на 95 % можна бути впевненими, що справжні коефіцієнти автокореляції $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{12}$ для лагів у дванадцять періодів — не нульові (тобто значущі). Це можна пояснити наявністю у ряду чистих податків сезонних коливань, порядок яких кратний чотирьом. ►

Ідентифікація детермінованого тренду та сезонності. Визначити, які не випадкові чинники, окрім випадкових, беруть участь у формуванні значень часового ряду, можна за допомогою автокореляційного аналізу. Сутність методу полягає в застосу-

ванні апарату перших різниць і аналізу автокореляцій для ідентифікації часових рядів таких видів:

1) ряд не має тренду, якщо коефіцієнти автокореляції між рівнями ряду не залежать від часового лагу (статистично незначущі) і не мають певної закономірності зміни;

2) ряд має лінійний адитивний тренд у разі, коли автокореляційний аналіз вказує на лінійну залежність зміни коефіцієнтів автокореляції від часового лагу, а перехід до перших різниць виключає цю залежність;

3) ряд містить сезонну складову, якщо не існує лінійної залежності зміни коефіцієнтів автокореляції від часового лагу, але корелограма містить велику кількість значущих максимальних і мінімальних значень коефіцієнтів автокореляцій, що свідчить про значну залежність між спостереженнями, зрушеними на однаковий часовий інтервал;

4) ряд має лінійний тренд і сезонну складову, якщо його корелограма вказує на лінійну залежність зміни коефіцієнтів автокореляції від часового лагу і містить велику кількість значущих максимальних і мінімальних значень коефіцієнтів автокореляцій, а перехід до перших різниць виключає лінійний тренд, але статистична значущість певних коефіцієнтів автокореляцій залишається.

Приклад 1.3.5.

Проаналізуємо динаміку перевищення грошовими доходами витрат населення України за 2000—2001 роки. На рис. 1.3.1 побудовано графік цього ряду, де середнє значення впродовж 24 місяців майже не змінюється й становить приблизно 324,4 млн грн. Індивідуальні значення ряду коливаються навколо середнього, не виявляючи ані помітного зростання, ані сезонних змін. Отже, ряд має ознаки стаціонарного.



Рис. 1.3.1. Стаціонарний ряд

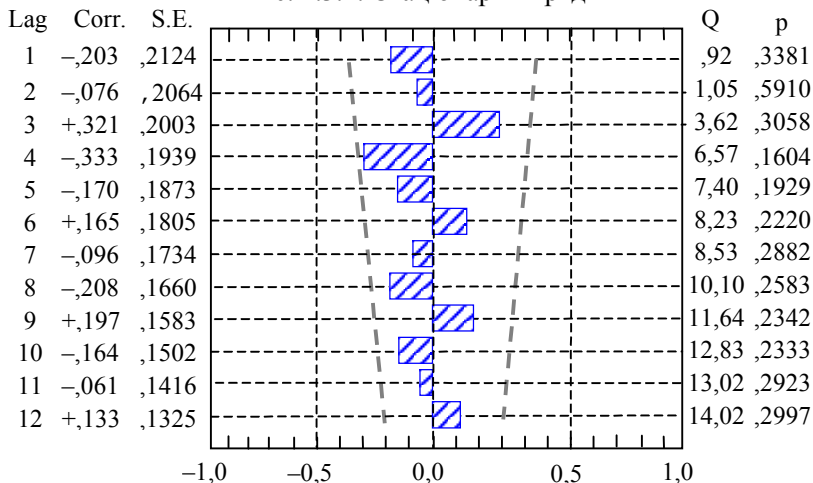


Рис. 1.3.2. Корелограма ряду без систематичної складової

Корелограму для цього ряду демонструє рис. 1.3.2. Точками позначено дві симетричні прямі, які визначають 95 %-ві межі значущості коефіцієнта автокореляції (\pm дві стандартні похибки, тобто $\pm 2/\sqrt{n} = 0,417$, де $n = 24$. Точніше, $n = 23$ за $k = 1$ і $n = 22$ за $k = 2$ тощо). Оскільки жоден із коефіцієнтів автокореляції не лежить за цими межами, а в зміні значень коефіцієнтів відсутня певна закономірність, можна вважати, що в цьому разі часовий ряд показників не містить систематичної складової. ►►

Лінійний тренд. Лінійним трендом називають такий закон зміни середнього, за яким середнє зростає або спадає із часом за лінійною залежністю. Наприклад, попит на певний продукт може мати лінійний тренд що зростає, якщо продукт є для ринку новим товаром або якщо розширюється обсяг самого ринку за умов, що частка продукту залишається незмінною. Навпаки, якщо певний товар старіє, то тренд попиту на нього буде спадним. Криві зростання багатьох соціально-економічних показників можна звести до лінійного виду тренду.

Адитивний тренд. В адитивних трендах фактичні значення відхиляються від середнього в більший чи менший бік приблизно на однакову величину. Наприклад, для лінійно-адитивного тренду середній приріст величини попиту за місяць може становити десять одиниць вимірювання.

Лінійно-адитивний тренд. Показник із таким видом тренду має середнє, яке зростає (або спадає) приблизно на однакову величину із кожним моментом часу. У разі лінійно-мультиплікативного тренду середнє є функцією часу, що зростає. Але у разі лінійно-адитивного тренду розкид відхилень фактичних значень навколо тренду приблизно постійний, тоді як у разі лінійно-мультиплікативного тренду цей розкид із часом збільшується.

Приклад 1.3.6.

На рис. 1.3.3 наведено лінійно-адитивний тренд щомісячної динаміки індексу цін споживчого ринку послуг за 2001 рік. Дослідження корелограми для цих даних (рис. 1.3.4) вказує на помітну залежність значень коефіцієнтів автокореляції від величини лага. Коефіцієнти автокореляції зменшуються зі збільшенням лага, максимальне значення відповідає лагу, який дорівнює одиниці (зрушення на один місяць), і становить 0,769; мінімальне значення коефіцієнта автокореляції відповідає зрушенням на 8 місяців і дорівнює $-0,414$. Така значна лінійна залежність унаочнює наявність лінійно-адитивного тренду.



Рис. 1.3.3. Ряд із лінійно-адитивним трендом

Побудуємо для початкового ряду даних із лінійно-адитивним трендом ряд перших різниць і відповідну йому корелограму (рис. 1.3.5). Початковий ряд формально можна розглядати як ряд нульових різниць, тому корелограму, зображену на рис. 1.3.4, теж називають корелограмою нульових різниць.

Корелограма на рис. 1.3.5, після того як лінійно-адитивний тренд переходом до перших різниць був виключений, чітко показує, що перші різниці можна вважати випадково розкиданими, а рис. 1.3.2 і рис. 1.3.5 схожими за своєю хаотичністю. Отже, якщо автокореляційний аналіз вказує, що у значеннях коефіцієнтів автокореляції нульових різниць (тобто початкового ряду) помітна строга лінійна залежність, а перехід

до перших різниць усуває її, початковий ряд містить лінійно-адитивний тренд.

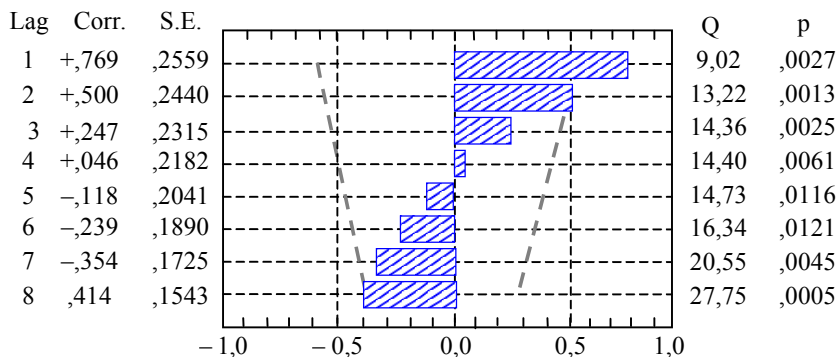


Рис. 1.3.4. Корелограма для випадку лінійно-адитивного тренду (нульові різниці)

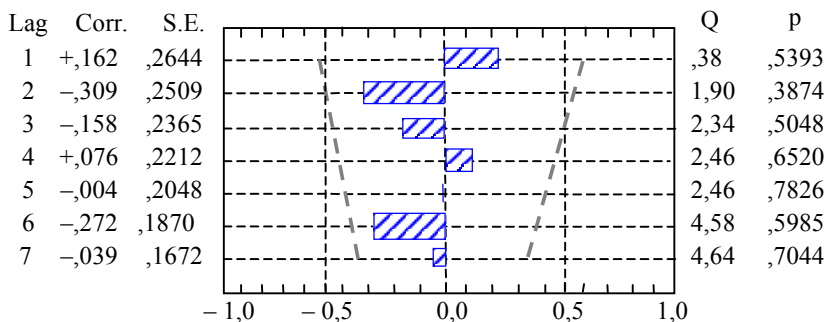


Рис. 1.3.5. Корелограма для випадку лінійно-адитивного тренду (перші різниці) ►►

Сезонність. Ряд називають сезонним, якщо середнє змінюється циклічно відповідно до певного часового циклу. У більшості випадків на практиці цей часовий цикл залишається однаковим упродовж кількох років, причому середнє за кожен місяць порівняно із середнім за весь рік може і спадати, і зростати. Сезонні коливання супроводжують динаміку попиту на такі товари, як одяг і взуття. До таких коливань схильні також потужні галузі промисловості (наприклад, коливання попиту на

автомобілі, що спадають із наближенням зими та зростають на-весні).

Приклад 1.3.7.

На рис. 1.3.6 зображено ряд із сезонними підвищеннями, що припадають на літо й осінь, та спадами, що припадають на зиму й весну. Лаг автокореляції має бути кратним 12, тобто січневе спостереження також слід порівнювати із січневим, але минулого року.



Рис. 1.3.6. Сезонний ряд

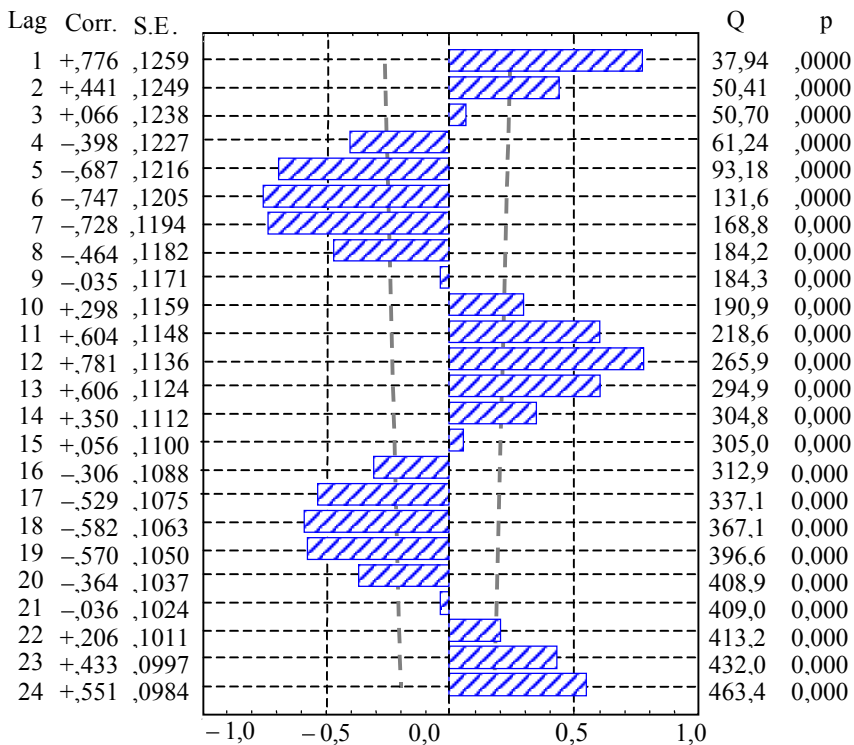


Рис. 1.3.7. Корелограма ряду із сезонним коливанням (нульові різниці)

Найбільші значення коефіцієнтів автокореляції, що спостерігаються для лагів у 12 і 24 місяці, дорівнюють відповідно 0,781 і 0,551, причому обидва ці коефіцієнти значущі (тобто перевищують 95 %-ву межу довіри, яка в цьому разі дорівнює $\pm 0,3$). Ця обставина вказує на значну залежність між спостереженнями за один місяць, але для різних років. Навпаки, якщо лаг дорівнює 6 або 18 місяцям, тобто спостереження, яке відповідає підйому, порівнюється зі спостереженням, яке відповідає спаду, коефіцієнт автокореляції має бути від'ємним. Це повністю підтверджується корелограмою, де мінімальні значення коефіцієнтів автокореляції відповідають лагу в 6 і 18 місяців і дорівнюють 0,747 і 0,582 відповідно. Таким чином, показником суто сезонного ряду без лінійного тренду слугує корелограма із великим числом значущих максимальних і мінімальних значень коефіцієнтів автокореляцій (зображених на рис. 1.3.6). Оскільки на рис. 1.3.6 не виявляється лінійна залежність величини коефіцієнта автокореляції від величини лага, то початковий ряд не має лінійного тренду, тож перехід до перших різниць тут навряд чи доцільний. ►►

Лінійний тренд із сезонно-адитивною складовою.

Приклад 1.3.8.

На рис. 1.3.8 зображено графік зміни дефлятора ВВП впродовж трьох років. Поряд із наявністю сезонної компоненти очевидною є присутність незначного, але сталого лінійного зростання. Корелограма для цих даних, тобто для нульових різниць, подана на рис. 1.3.9. Як видно з цього рисунка, існує значна додатна кореляція із лагом в 1—3 місяці, і від’ємна з лагом 22—24 місяці, що засвідчує наявність сезонних коливань ряду. На перший погляд автокореляція з лагом у 12 місяців незначна, однак це наслідок того, що весь графік корелограми начебто розгорнутий по вертикалі під гострим кутом, тобто в ряду існують (і це очевидно) дані лінійного зростання. Чітко виражений графік корелограми ряду, який має сезонні коливання, розгорнутий відносно вертикалі на деякий кут, свідчить про наявність у початковому ряду лінійного тренду із сезонно-адитивною складовою.



Рис. 1.3.8. Ряд із лінійним трендом та сезонно-адитивною складовою

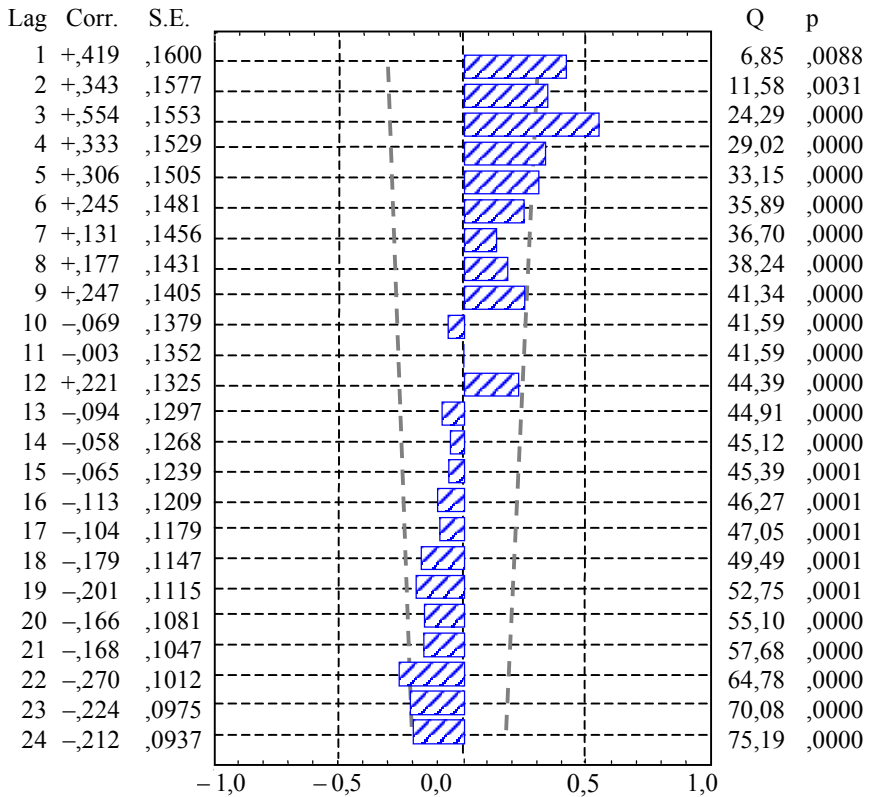


Рис. 1.3.9. Корелограма ряду з лінійним трендом та сезонно-адитивною складовою (нульові різниці)

Якщо за такої ситуації тренд виключити переходом до перших різниць, то графік відповідної корелограми (рис. 1.3.10) буде вертикальний, і сезонність матиме вже не такий виразний характер. Однак значення коефіцієнтів автокореляції, що перебувають за 95 %-ою межею довіри, засвідчують наявність сезонних коливань. ►►

Мультиплікативні тренди, або тренди відношень. У мультиплікативних трендах збільшення або зменшення фактичного значення становить приблизно однаковий відсоток відносно середнього, яке визначається характером тренду. Наприклад, передбачається, що попит на певний товар із зростаючим лінійно-мультиплікативним трендом буде зростати на 2 % за місяць.

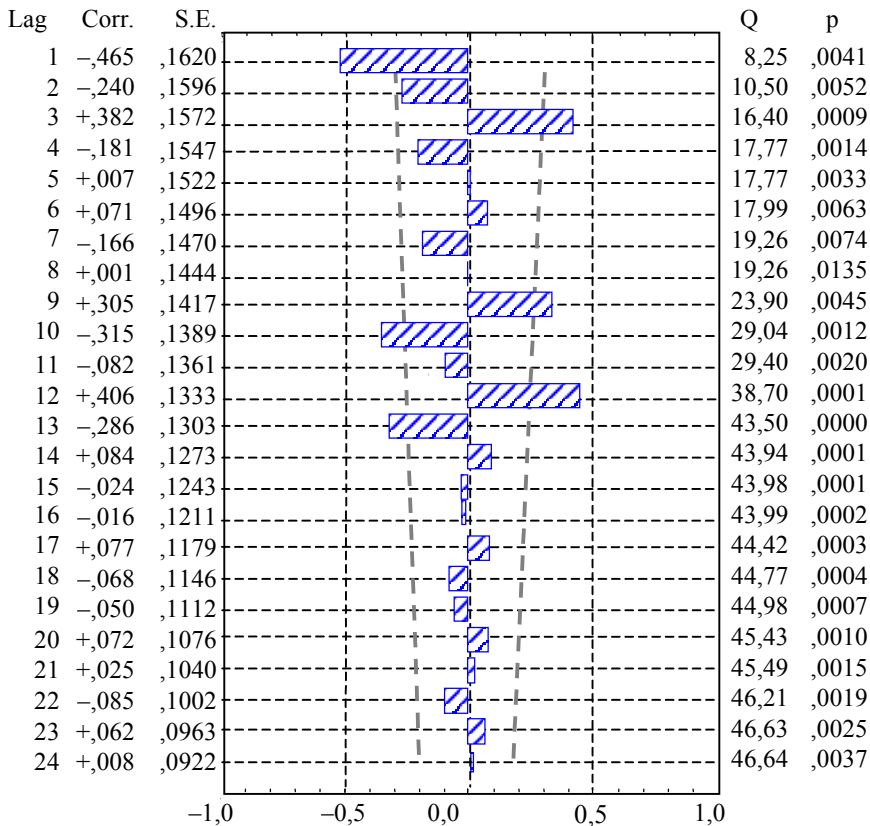


Рис. 1.3.10. Корелограма ряду з лінійним трендом та сезонно-адитивною складовою (перші різниці)

Комбінація адитивних і мультиплікативних трендів. Цей тип тренду є поєднанням двох трендів, розглянутих вище. Його вивчення досить складне, тому й застосовують його доволі нечасто.

Лінійно-мультиплікативний тренд. Значення показника за такого виду тренду перевершить (або буде меншим) попереднє значення приблизно на однаковий відсоток на всьому проміжку часу, що розглядається. На рис. 1.3.11 зображено таку ситуацію. При цьому із часом збільшується не лише середнє, а й розкид індивідуальних значень навкруги середнього тренду.

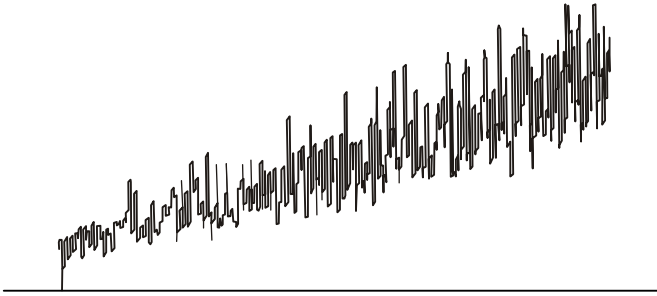


Рис. 1.3.11. Динаміка попиту з лінійно-мультиплікативним трендом

Комбінація лінійного та сезонно-адитивного тренду. Цей тип тренду може описувати також ситуацію суто сезонного тренду без лінійного елемента. Однак у загальному випадку для моделі цього типу характерна присутність сезонного тренду, який, своєю чергою, може лінійно зростати. Лінійний та сезонно-адитивний тренди зображено на рис. 1.3.12. Як бачимо, з року в рік повторюються два викиди.



Рис. 1.3.12. Динаміка попиту з лінійним трендом і сезонно-адитивною складовою

Комбінація лінійного та сезонно-мультиплікативного тренду. Як і для комбінації лінійного та сезонно-адитивного трендів, аналітичне дослідження цього типу трендів передбачає і випадок суто сезонно-мультиплікативного тренду без лінійного зростання (рис. 1.3.13), і випадок лінійного зростання.

Статистичні методи визначення наявності нелінійної динаміки й детермінованого хаосу. Належність часового ряду до випадкового процесу або детермінованого хаосу можна визначити за допомогою методу нормованого розмаху.

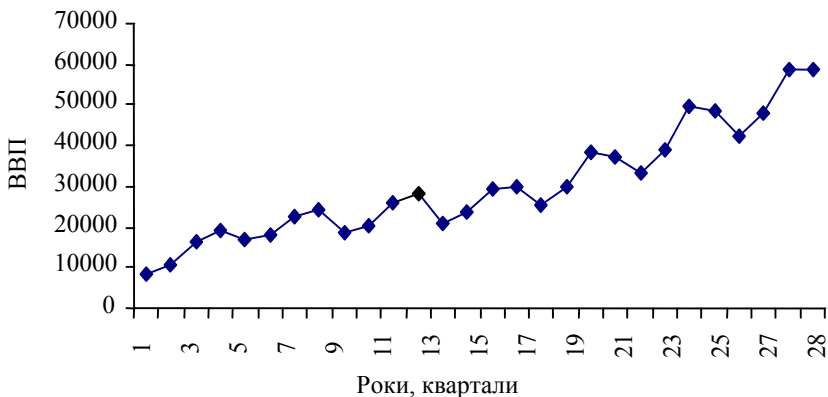


Рис. 1.3.13. Динаміка ВВП із сезонно-мультиплікативним трендом

Метод нормованого розмаху (R/S-аналіз) [29]. Застосування методу передбачає такі кроки:

Крок 1. Визначають розмах:

$$R = \max(Y_{t,n}) - \min(Y_{t,n}), \quad (1.3.20)$$

де R — розмах відхилення Y ;

$Y_{t,n}$ — нагромадження відхилення за n періодів,

$Y_{t,n} = \sum_{u=1}^t (y_u - \mu_n)$, y_u — рівень ряду в році u ; μ_n — середнє y_u за n періодів;

$\max(Y_{t,n})$ — максимальне значення Y ;

$\min(Y_{t,n})$ — мінімальне значення для Y ;

Крок 2. Для різних часових періодів обчислюють — R/S , де S — відповідне нормованому розмаху середньоквадратичне відхилення.

Нормована величина розмаху функціонально пов'язана з n таким чином:

$$R/S = (\alpha \cdot n)^H, \quad (1.3.21)$$

де α — константа; H — показник Херста.

Крок 3. Оцінюється показник Херста як коефіцієнт регресії, рівняння якої виходить після логарифмування співвідношення (1.3.21):

$$\log(R/S) = \hat{H} \cdot (\log(n) + \log(a)). \quad (1.3.22)$$

Ця оцінка не має жодного припущення щодо розподілу випадкової величини.

За значенням показника Херста можна дійти таких висновків:

1) Якщо $H = 0,5$ — економічний процес являє собою випадкове блукання, а розмах нагромаджених відхилень має збільшуватися пропорційно квадратному кореню від часу n .

2) $0 \leq H < 0,5$. Цей діапазон відповідає ергодичним антиперсистентним рядам. Такий тип процесу часто називають «поверненням до середнього».

Антиперсистентний часовий ряд є більш мінливим, ніж ряд випадковий, оскільки складається з частих реверсів «спад-підйом». Якщо процес демонструє зростання в попередньому періоді, то в наступному періоді найімовірніше почнеться спад. І навпаки, якщо відбувався спад, то ймовірний близький підйом. Стійкість такої поведінки залежить від того, наскільки H близьке до нуля. Чим ближче його значення до нуля, тим більше значення коефіцієнта від'ємної автокореляції рівнів часового ряду. Незважаючи на поширення концепції повернення до середнього в економічній та фінансовій літературі, досі було знайдено мало таких рядів.

3) За $0,5 < H \leq 1,0$ маємо персистентні, або тренд-стійкі ряди. Якщо ряд зростає (спадає) у попередній період, то він імовірно буде зберігати цю тенденцію певний час у майбутньому. Тренди очевидні. Трендо-стійкість поведінки, або сила персистентності, збільшується мірою наближення H до одиниці, або 100 % автокореляції. Чим ближче H до 0,5, тим більше ряд зазнає впливу шуму і тим менш виражений його тренд.

Персистентний ряд — це узагальнений броунівський рух, або випадкові блукання із дрейфом. Сила зсуву залежить від того, наскільки H перевищує 0,5. Такі ряди є нестабільними, вони властиві ринкам капіталу. Персистентний часовий ряд має довготривалу пам'ять, тому в ньому спостерігаються довготермінові кореляції між поточними подіями й подіями майбутніми.

Коли H відрізняється від 0,50, це означає, що спостереження не є незалежними. Кожне спостереження несе пам'ять про всі минулі події. Це не короткотривала пам'ять, яку часто називають

«марківською». Це інша пам'ять — довготривала, теоретично вона зберігається назавжди. Тобто нещодавні події справляють сильніший вплив, ніж події віддалені, але залишковий вплив останніх завжди відчутний.

Приклад 1.3.9.

У [29] розглянуто застосування R/S -аналізу до щомісячних даних із прибутків рейтингової компанії «Стандард енд Пур» ($S\&P$ 500) за 38-річний період від січня 1950 до липня 1988 року. Для цього виконуються такі кроки:

1) Вхідний часовий ряд (ціни), перетворюють на логарифмічний $S_t = \ln(P_t/P_{t-1})$, де S_t — логарифмічний прибуток в момент часу t ; P_t — ціна в момент часу t .

Для R/S -аналізу логарифмічні прибутки доцільніші, ніж широко використовувані відсоткові зміни цін, оскільки логарифмічні прибутки утворюють нагромаджений прибуток, який використовують в R/S -аналізі, тобто є нагромадженим відхиленням від середнього, чого не можна сказати про відсоткові зміни.

2) Рівняння (1.3.20) застосовують до різних часових періодів n . Ряд місячних даних, зафіксованих упродовж 40 років, містить 480 логарифмічних прибутків. Якщо починати з шестимісячних прирощень, можна поділити ряд на 80 незалежних відрізків. Оскільки ці шестимісячні періоди не перекриваються, спостереження виявляються незалежними. (Вони можуть і не бути такими, якщо існують короткотермінові залежності марківського типу, які тривають понад шість місяців.) Отже, за рівнянням (1.3.19) розраховують розмахи за кожним шестимісячним періодом і знаходять їхні нормовані значення. В результаті виходить 80 окремих R/S -спостережень. Шляхом осереднення цих спостережень отримуємо оцінку R/S для $n = 6$ місяцям.

Підрахунок продовжують для $n = 7, 8, 9, \dots, 240$. При цьому можна очікувати зменшення сталості оцінки R/S , оскільки зменшується кількість осереднюваних спостережень.

3) Сукупність розрахунків для всього діапазону n дає можливість визначити регресію $\log(R/S)$ на $\log(n)$ (1.3.21). На рис. 1.3.14 показано лінію регресії в подвійній логарифмічній шкалі. Нахил лінії регресії дає оцінку для $H = 0,78$. Однак оцінювати H для повного діапазону n було б неправильним, бо ряд має обмежену пам'ять і починає поводитися як випадкове блукання. Процес із довготривалою пам'яттю спостерігається впродовж близько 48 місяців. Після цієї точки графік починає поводитися як випадкове блукання за $H = 0,50$. Графіки на рис. 1.3.14 відповідають $H = 0,78$ і $H = 0,50$. За регресією для $n > 48$ місяців $H = 0,52 \pm 0,02$. Це підтверджує, що середня довжина циклу, або період для даних $S\&P$ 500 дорівнює 18 місяцям.

Висока оцінка $H = 0,78$ засвідчує, що фондовий ринок є очевидним нелінійним структурованим процесом і не поводить як випадкове блукання. Для перевірки значущості одержаних результатів застосуємо до ряду щомісячних прибутків наведено криві змішаного й незмішаного рядів. Змішаний ряд явно відрізняється, показуючи $H = 0,51$. Змішування руйнує структуру довготривалої пам'яті початкового ряду та перетворює його на ряд незалежний, що поводить як випадкове блукання.

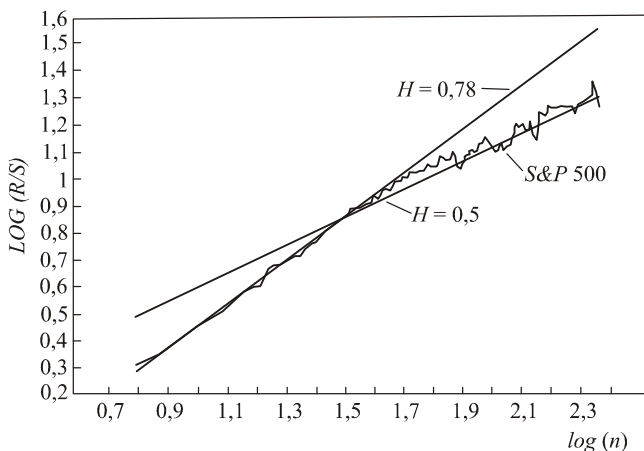


Рис. 1.3.14. R/S -аналіз: щомісячні прибутки $S\&P$ 500, січень 1950 — липень 1988 року. Оцінка $H = 0,78$. n — кількість років

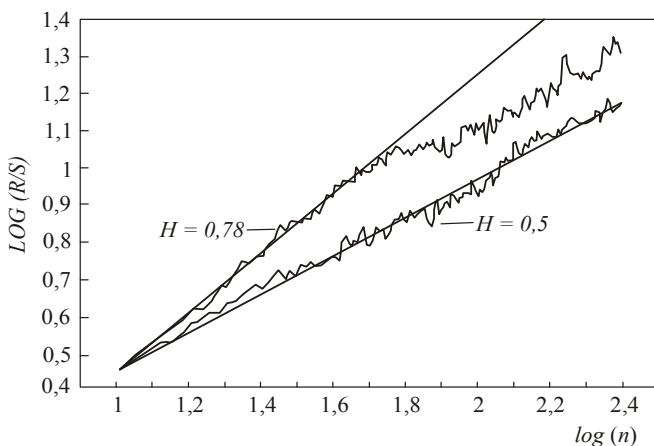


Рис. 1.3.15. Тест на змішування: $S\&P$ 500, щомісячні прибутки, січень 1950 — липень 1988 року. Незмішані дані: $H = 0,78$, змішані дані: $H = 0,51$.

R/S-аналіз показує, що часові ряди ринкових прибутків відповідають процесу випадкового блукання із дрейфом. Разом із тим, такий процес циклічний та має тенденцію до середньої довжини циклу, що дорівнює 48 місяцям. Це саме середня величина, оскільки процес має складнішу структуру, ніж просто періодичну. ►►

Перевірка нелінійності. Загального критерію нелінійності часового ряду не існує, оскільки вигляд статистик критеріїв залежить від конкретного типу нелінійності. Розглянемо один із критеріїв [14], що використовує автокореляційну функцію. Для лінійного інтегрованого процесу y_t

$$\rho_\tau(y_t^2) = [\rho_\tau(y_t)]^2, \quad (1.3.23)$$

де $\tau = 0, \pm 1, \dots$ і через ρ_τ позначено автокореляцію порядку τ . Тобто автокореляції y_t^2 є квадратами автокореляцій y_t . Будь-яке порушення цієї умови відображає нелінійність динамічного процесу.

2 Прогнозування часових рядів із використанням ARIMA-моделей

2.1. Основні поняття, про лінійні параметричні моделі часових рядів і властивості їхньої загальної моделі

Стаціонарні часові ряди можна представити широким класом лінійних параметричних моделей. Найпоширенішими є моделі авторегресії (*AR*), ковзної середньої (*MA*) та змішані (*ARMA*). Царина застосування цих моделей не обмежується стаціонарними процесами. Так, ряди зі специфічною однорідною нестаціонарністю можна звести до стаціонарних і описувати модифікованою формою моделі *ARMA*, відомою як модель Бокса-Дженкінса.

Лінійні параметричні моделі дістали загальну назву **авторегресійні інтегровані моделі ковзної середньої (ARIMA)**. Вони ґрунтуються на припущенні лінійності процесу породження даних і описують стаціонарний процес, який має три ознаки: p — порядок авторегресії, d — необхідний порядок інтегрування, тобто кількість разів взяття різниць для зведення початкового часового ряду до стаціонарного, q — порядок ковзної середньої в моделі.

Поєднання різних моделей аналізу часових рядів у межах однієї дає змогу працювати з моделями невисоких порядків, що суттєво розширює сферу практичного застосування їх. Окрім того, з'являється можливість розробляти модель за допомогою однакових статистичних характеристик — автокореляційних і часткових автокореляційних функцій, розробляти спільний алгоритм для обчислення параметрів моделі, однаковим чином будувати прогноз на підставі побудованої моделі тощо.

Загальна лінійна модель стаціонарного ряду. Будь-які різновиди *ARIMA*-моделей є окремим випадком загальної лінійної моделі часового ряду, яка є базовою для теоретичних досліджень стаціонарних процесів. В основі її визначення лежить поняття «білого шуму».

Будемо вважати, що середнє значення стаціонарного ряду $\mu = M(y_t) = 0$, якщо це не так, то потрібно перейти до $y_t - \mu$. Тоді загальна лінійна модель це стаціонарний процес у вигляді лінійної комбінації білого шуму з різними ваговими коефіцієнтами:

$$y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot \varepsilon_{t-j}, \quad (2.1.1)$$

де ε_t — білий шум із обмеженими математичним сподіванням та дисперсією.

Вираз (2.1.1) ще називають розкладенням Вольда або лінійним фільтром (див. 1.2.13).

Із визначення стаціонарності процесу (2.1.1) виходить, що його дисперсія — скінченне число, яке дорівнює

$$D(y_t) = \sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2, \quad (2.1.2)$$

і ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$ має межу. Оскільки підсумовуються випадкові величини, використовують навіть сильніше припущення: для ряду $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|$ має виконуватися умова збіжності за ймовірністю, тобто $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, і передбачається, що $\psi_0 = 1$. Чим більший ваговий коефіцієнт ψ_j , тим більший вплив випадкового збурення в момент $t - j$ на поточний момент t .

Автоковаріація стаціонарного процесу $y_t, t=1,2,\dots,n$ також має скінченне значення, яке дорівнює:

$$\gamma_\tau = \text{Cov}(y_t, y_{t+\tau}) = \text{Cov}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+\tau-j}\right) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+\tau}, \quad (2.1.3)$$

Із моделі (2.1.1) випливають і такі властивості:

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, y_{t-\tau}) = 0, \quad \text{Cov}(\varepsilon_t, y_t) = \sigma_\varepsilon^2, \quad \text{Cov}(y_t, \varepsilon_{t-\tau}) = \psi_\tau \sigma_\varepsilon^2, \quad \tau \geq 1. \quad (2.1.4)$$

Найважливішою є перша властивість, яка означає, що рівні часового ряду не корелюють із майбутніми збуреннями ε .

Для вивчення властивостей часових рядів зручно використовувати оператор зсуву L (лаговий оператор). Дія оператора зсуву дає значення часового ряду в попередні моменти часу. Наприклад $Ly_t = y_{t-1}$. Послідовне застосування оператора зсуву p разів дає значення часового ряду в момент часу на p періодів раніше: $L^p y_t = L(L(L\dots))y_t = y_{t-p}$. Іноді зручно використовувати нульову ступінь оператора зсуву: $L^0 y_t = y_t$, яка виконує роль нульового оператора.

Якщо ввести оператор зсуву L у рівняння (2.1.1), матимемо інший вигляд його запису:

$$y_t = \psi(L)\varepsilon_t, \quad (2.1.5)$$

де $\psi(L) = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots$ лінійний оператор або операторний поліном. Коефіцієнт біля ε_t завжди дорівнює 1.

У теорії загальної лінійної моделі важливим є знаходження оберненого значення для виразу операторного полінома $\psi(L)$.

Зазначимо, що для двох операторних поліномів $\psi(L)$ та $\phi(L)$ можливе виконання арифметичних операцій додавання, віднімання та множення на число. Результат послідовного впливу на y_t оператора $\psi(L)$, а потім на отриманий результат — ще й оператора $\phi(L)$, призводить до того самого результату, що й застосування до процесу y_t добутку поліномів $\psi(L)$ і $\phi(L)$: $\psi(L)[\phi(L)y_t] = [\psi(L)\phi(L)]y_t$.

Для операторного багаточлена $\phi(L)$, що діє на процес y_t , визначають обернений оператор так, щоб їхній добуток дорівнював одиничному оператору (на кшталт добутку прямої та оберненої матриць, який дорівнює оди-

ничній матриці). Якщо $\varphi(L)y_t = x_t$, то вплив на x_t оберненого оператора дає y_t : $\varphi(L)^{-1}x_t = y_t = [\varphi(L)^{-1}\varphi(L)]y_t$. Наприклад для поліному першого порядку його добуток на обернений оператор дає одиничний оператор. Зазначимо, що $(1 - \varphi L) \cdot (1 + \varphi L + \varphi^2 L^2 + \dots + \varphi^p L^p + \dots) = 1$, якщо необмежений ряд у дужках існує, має сенс. Отже, оберненою величиною для найпростішого лагового полінома першого порядку $\varphi(L) = (1 - \varphi L)$ є поліном вигляду: $[1 - \varphi L]^{-1} = \frac{1}{1 - \varphi L} = 1 + \varphi L + \varphi^2 L^2 + \dots + \varphi^p L^p + \dots$, якщо права частина має сенс. Для обмеженої суми замість необмеженого ряду маємо: $(1 - \varphi L) \cdot (1 + \varphi L + \varphi^2 L^2 + \dots + \varphi^p L^p) = 1 - \varphi^{p+1} L^{p+1}$. Для цього оператора на випадковий процес дає: $(1 - \varphi^{p+1} L^{p+1})y_t = y_t - \varphi^{p+1} y_{t-p-1}$. Для $p \rightarrow \infty$ права частина виразу прагне до y_t (за умов обмеження значень спостережень за випадковим процесом та $|\varphi| < 1$). Отже умова існування оберненого оператора для полінома першого порядку виглядає, як $|\varphi| < 1$.

Для загальної лінійної моделі (2.1.5) може бути знайдена обернена модель. Існування оберненого оператора до операторного полінома $\psi(L)$ впливає із умови

$$\psi(L) \neq 0, \text{ якщо } |L| \leq 1, \quad (2.1.6)$$

де замість L допускається підставлення комплексних чисел.

Обернений оператор до операторного полінома $\psi(L)$ має вигляд

$$\pi(L) = \psi^{-1}(L) = 1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \dots = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \cdot L^j, \text{ де } \sum_j |\pi_j| < \infty. \quad (2.1.7)$$

Прямий та обернений оператори задовольняють умову:

$$\psi(L)\pi(L) = (1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j L^j)(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \cdot L^j) = 1. \quad (2.1.8)$$

Рівняння (2.1.8) визначає коефіцієнти π_j . Щоб побачити це, розпишемо його за допомогою оператора зсуву:

$$(1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots) (1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \dots) = 1,$$

або $1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \dots$

$$-\pi_1 L - \pi_1 \psi_1 L^2 - \pi_1 \psi_2 L^3 - \dots - \pi_2 L^2 - \pi_2 \psi_1 L^3 - \dots - \pi_p L^p - \pi_p \psi_1 L^{p+1} - \dots = 1.$$

Оскільки $1 \equiv 1 + 0 \cdot L + 0 \cdot L^2 + 0 \cdot L^3 + \dots$, то

$$\begin{cases} \psi_1 - \pi_1 = 0, \\ \psi_2 - \pi_1 \psi_1 - \pi_2 = 0, \\ \psi_3 - \pi_1 \psi_2 - \pi_2 \psi_1 - \pi_3 = 0, \\ \dots \end{cases} \quad \text{звідки}$$

$$\begin{cases} \psi_1 = \pi_1, \\ \psi_2 = \pi_1 \psi_1 + \pi_2 = \pi_2 + \pi_1^2, \\ \psi_3 = \pi_1 \psi_2 + \pi_2 \psi_1 + \pi_3 = \pi_3 + 2\pi_1 \pi_2 + \pi_1^3, \\ \dots \end{cases}, \text{ тощо.} \quad (2.1.9)$$

Для $k > 0$ $\psi_k = \pi_1 \psi_{k-1} + \pi_2 \psi_{k-2} + \dots + \pi_p \psi_{k-p}$, де $\psi_0 = 1, \psi_j = 0, j < 0$.

Для процесу $y_t = \psi(L)\epsilon_t$, за умови його оберненості, маємо можливість відтворити ϵ_t за значеннями y_t :

$$\epsilon_t = \pi(L)y_t = y_t - \pi_1 y_{t-1} - \pi_2 y_{t-2} + \dots, \quad (2.1.10)$$

тобто значення збурення ϵ_t , своєю чергою, є лінійною комбінацією поточного й минулих значень y_t . Співвідношення (2.1.10) можна переписати у вигляді

$$y_t = \{\pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \dots\} + \epsilon_t \equiv \hat{y}_t + \epsilon_t \quad (2.1.11)$$

звідки випливає, що для загальної лінійної моделі, яка може бути перетворена на обернену, поточне значення процесу є лінійною комбінацією всіх його минулих значень плюс випадкове збурення ϵ_t , яке не корелює з цими значеннями $Cov(\epsilon_t, y_{t-k}) = 0$ за $k \geq 1$. Така форма загальної лінійної моделі є зручною для прогнозування майбутніх значень часового ряду, якщо відомі всі його минулі значення. Прогноз, що робиться в момент t із випередженням τ , відповідає умовному математичному сподіванню (2.1.11), тобто

$\hat{y}_t(\tau) = M(y_{t+\tau} | y_k, k \leq t)$, і має мінімальну середньоквадратичну похибку. Складову \hat{y}_t у (2.1.11) можна тлумачити як оптимальну лінійну незалежну функцію прогнозування (предиктор) для y_t за всіма минулими значеннями часового ряду $\hat{y}_t = \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \dots$, а доданок ϵ_t — як її випадкову похибку. Зокрема, знайдена з

(2.1.11) оцінка рівня ряду $\hat{y}_t = \hat{y}_{t-1}(1)$ є прогнозом в момент $t-1$ на один крок уперед. Похибка прогнозу на один крок уперед дорівнює $e_t(1) = y_{t+1} - \hat{y}_t(1) = \varepsilon_{t+1}$, тобто збурення ε , що генерують процес (2.1.1), стають похибками прогнозу на один крок уперед.

Підсумовуючи огляд загальної лінійної моделі, зазначимо, що лінійний процес (2.1.1) є стаціонарним, якщо ряд $\psi(L)$ сходиться за умови $|L| \leq 1$, та може бути оберненим, якщо в цій самій області сходиться ряд $\pi(L)$. Модель визначається нескінченною кількістю параметрів ψ , тому на практиці використовують різноманітні окремі випадки цієї моделі із обмеженою кількістю параметрів ($AR(p)$, $MA(q)$ та $ARMA(p, q)$ -моделі), які розглянуто далі.

2.2. Процеси ковзної середньої (MA(q)-процеси)

Стохастичний процес називають процесом ковзної середньої порядку q , якщо до загальної моделі (2.1.1) входять лише q складових. Позначимо коефіцієнти обмеженого ряду $MA(q)$ літерою b , тоді модель ковзної середньої порядку q має вигляд:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + b_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q} = \\ &= (1 + b_1 L + b_2 L^2 + \dots + b_q L^q) \varepsilon_t = b(L) \varepsilon_t \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

де випадкова величина ε_t — білий шум, $b(L) = 1 + b_1 L + b_2 L^2 + \dots + b_q L^q$ — лінійний оператор, та $(q+1)$ невідомих параметрів $b_1, b_2, \dots, b_q, \sigma_{\varepsilon}^2$ треба оцінити на підставі вибірових спостережень.

Процес (2.2.1) — стаціонарний, оскільки є окремим випадком загальної лінійної моделі, а саме, ψ_j включно до $j = q$ дорівнюють b_j , решта ψ_j дорівнюють нулю. Назва «ковзна середня» пояснюється тим, що поточне значення випадкового процесу визначається зваженим середнім q попередніх значень білого шуму.

Операторний багаточлен $b(L)$ можна розкласти на множники, використовуючи корені рівняння $b(L) = 0$. За основною теоремою алгебри будь-який поліном ступеня q із дійсними коефіцієнтами має q ком-

плексних коренів, серед яких можуть траплятися однакові за величиною. Отже, лінійний оператор $b(L)$ можна записати у вигляді:

$$b(L) = 1 + b_1L + b_2L^2 + \dots + b_qL^q = b \prod_{j=1}^q (L - Z_j),$$

де Z_j — корені рівняння $1 + b_1Z + b_2Z^2 + \dots + b_qZ^q = 0$.

$MA(q)$ — процес, відповідно, має вигляд:

$$y_t = b \prod_{j=1}^q (L - Z_j) \varepsilon_t.$$

Для використання умови обернення лінійного оператора знайдемо корені іншого характеристичного рівняння, а саме: $\lambda^q + b_1\lambda^{q-1} + \dots + b_q = 0$. Позначимо їх π_j . Такий запис характеристичного рівняння збігається із прийнятим у теорії різницевих лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Відмінність полягає в тому, що зазвичай різницеві рівняння містять поточний і наступні члени послідовності, а в часових рядах використовують поточний та попередні члени. Тому є два способи запису характеристичного рівняння. Перший, $\lambda^q + b_1\lambda^{q-1} + \dots + b_q = 0$ — відповідає загальному правилу для різницевих рівнянь. Другий, $1 + b_1Z + b_2Z^2 + \dots + b_qZ^q = 0$ — відповідає часовим рядам. Корені цих рівнянь пов'язані між собою співвідношенням $Z_j = \frac{1}{\pi_j}$, і навпаки. Використовуючи результат теореми Вієтта, добуток коренів характеристичного рівняння дорівнює $b_q(-1)^q$, одержимо:

$$y_t = b \prod_{j=1}^q \left(L - \frac{1}{\pi_j}\right) \varepsilon_t = \prod_{j=1}^q (1 - \pi_j L) \varepsilon_t.$$

Якщо виразити ε_t через y_t , не зважаючи на те, що L — це оператор, одержимо $\varepsilon_t = \frac{1}{\prod (1 - \pi_j L)} y_t$. І, якщо всі корені характеристичного

рівняння дійсні та відмінні за величиною, операторний дріб, знаменник якого розкладений на добуток однокленів першого ступеня стосовно L , можна записати у вигляді суми простих дробів виду:

$$\frac{1}{\prod (1 - \pi_j L)} = \frac{A_1}{1 - \pi_1 L} + \frac{A_2}{1 - \pi_2 L} + \dots$$

Таке розкладення застосовується під час інтегрування дробів і відоме з курсу математичного аналізу. Кожна складова має вираз формули нескінченно згасаючої геометричної прогресії. У цьому випадку A_j відіграє роль першого члена цієї прогресії, а замість множника нескінченно згасаючої геометричної прогресії знаходить-

ся $\pi_j L$. Якщо $|\pi_1| < 1$, то перший простий дріб можна розкласти в суму нескінченно згасаючої геометричної прогресії або в необмежений степеневий ряд $\frac{A_1}{1 - \pi_1 L} = A_1(1 + \pi_1 L + \pi_1^2 L^2 + \dots + \pi_1^k L^k + \dots)$. Якщо така умова ви-

конується для кожного кореня, то ε_t дорівнює сумі q таких необмежених розкладень. Після приведення подібних членів можна отримати нескінченний багаточлен з певними коефіцієнтами. Перетворений процес ковзної середньої має вигляд: $(a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + \dots + a_k L^k + \dots)y_t = \varepsilon_t$, де коефіцієнти a_j знаходять через характеристичні корені π_j . Якщо всі умови виконуються, то ε можна виразити через поточне й минулі значення y . Зроблені перетворення мають сенс лише тоді, коли кожний дріб виду $\frac{A_1}{1 - \pi_j L}$ можна тлумачити як суму нескінченно згасаючої геометричної

прогресії, тобто всі корені за модулем не перевищують одиниці: $|\pi_j| < 1$.

Якщо виразити y_t через усі його минулі значення та ε_t і поділити на a_0 , маємо еквівалентне представлення $y_t = -\frac{a_1}{a_0} y_{t-1} - \dots - \frac{a_k}{a_0} y_{t-k} - \dots + \frac{1}{a_0} \varepsilon_t$. Тут процес $MA(q)$ записано так, що поточне значення y_t виражається через поточне значення ε_t , а замість q минулих значень ε з'являється нескінченний ряд минулих значень y_{t-k} . За побудовою цей процес є авторегресійним стаціонарним випадковим процесом.

Умову обернення для $MA(q)$ процесів можна виразити через корені характеристичного рівняння $\lambda^q + b_1 \lambda^{q-1} + \dots + b_q = 0$: $|\pi_j| < 1$. Вона залишається незмінною і для випадку комплексних та/або кратних коренів. Ці корені зображують у вигляді точок комплексної площини. Комплексні числа, які за модулем дорівнюють одиниці, утворюють на цій площині коло одиничного радіусу. Тому умова існування оберненого оператора формулюється так: *корені характеристичного поліному π_j перебувають у межах кола одиничного радіусу*. Тут і далі буде використовуватися саме ця умова оберненості $MA(q)$ -процесів.

Альтернативним є твердження, що корені Z_j багаточлена $b(L) = 1 + b_1 L + b_2 L^2 + \dots + b_q L^q = 0$ мають перебувати поза колом одиничного радіусу. Отже, поліном $b(L)$ також є характеристич-

ним для процесу ковзної середньої порядку q . Корені характеристичних рівнянь, заданих різним способом, пов'язані між собою співвідношенням $Z_j = 1/\pi_j$.

За умови оберненості кожен скінченний $MA(q)$ -процес може бути представлений у вигляді нескінченного авторегресійного процесу:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + \varepsilon_t. \quad (2.2.2)$$

Розглянемо сформульовані вище твердження детальніше.

Автоковаріація та дисперсія $MA(q)$ процесу відповідно дорівнюють:

$$\gamma_k = \begin{cases} (-b_k + \sum_{j=1}^{q-k} b_j b_{j+k}) \sigma_\varepsilon^2, & k=1, \dots, q, \\ 0, & k > q, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

$$\gamma_0 = D(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 (1 + b_1^2 + \dots + b_q^2).$$

Нагадаємо, що завдяки парності функції γ_k досить її визначити для $k \geq 0$.

Автокореляційна функція (АКФ) процесу має вигляд

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{-b_k + \sum_{j=1}^{q-k} b_j b_{j+k}}{1 + b_1^2 + \dots + b_q^2}, \quad k=1, \dots, q, \quad \text{та } \rho_k = 0 \text{ для } k > q. \quad (2.2.4)$$

Автокореляційну функцію використовують для визначення порядку (кількості лагових змінних) $MA(q)$ -процесу, оскільки коефіцієнти автокореляції порядку, більшого за q , дорівнюють нулю.

Практичного застосування набули переважно процеси ковзної середньої першого ($q=1$) та другого ($q=2$) порядків. Розглянемо приклади.

Приклад 2.2.1.

Модель ковзної середньої першого порядку, або $MA(1)$:

$$y_t = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} = (1 - b_1 L) \varepsilon_t. \quad (2.2.5)$$

Мезі для можливого значення b_1 можна визначити, якщо записати (2.2.5) у вигляді $\varepsilon_t = y_t + b_1 \varepsilon_{t-1}$. Виражаючи величину ε_t через y_t , отримуємо

$$\varepsilon_t = y_t - b_1 y_{t-1} - b_1^2 y_{t-2} - \dots = (1 - b_1 L)^{-1} y_t. \quad (2.2.6)$$

Щоб величина ε_t була обмеженою за збільшення t , ряд у правій частині має сходитися, а це можливо лише за умови $-1 < b_1 < 1$. Ця умова також означає існування для $MA(1)$ -моделі оберненого оператора $\pi(L)$ у вигляді авторегресійного зображення нескінченного порядку $AR(\infty)$. Якщо $|b_1| \geq 1$, то y_t не є стаціонарним процесом.

Дисперсія y_t задається формулою

$$\begin{aligned} \gamma_0 = D(y_t) &= M(\varepsilon_t - b_1 \varepsilon_{t-1})^2 = M(\varepsilon_t^2 - 2b_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + b_1^2 \varepsilon_{t-1}^2) = \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + b_1^2 \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + b_1^2). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Автоковаріація першого порядку дорівнює:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = M(y_t, y_{t-1}) &= M[(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + b_1 \varepsilon_{t-2})] = \\ &= M[(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + b_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} + b_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2})] = +b_1 \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Автоковаріація другого порядку дорівнює:

$$\gamma_2 = M(y_t, y_{t-2}) = M[(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-2} + b_1 \varepsilon_{t-3})] = 0, \quad (2.2.9)$$

оскільки містить тільки добутки $\varepsilon_t \varepsilon_k$, $k \neq t$. У загальному випадку $\gamma_k = 0$ для $k > 1$.

АКФ дорівнює

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{b_1}{1 + b_1^2} \text{ та } \rho_k = 0 \text{ для } k > 1 \quad (2.2.10)$$

звідки b_1 можна обчислити шляхом розв'язку квадратного рівняння

$$b_1^2 - \frac{b_1}{\rho_1} + 1 = 0. \quad (2.2.11)$$

Оскільки із двох значень b_1 , що задовольняють рівнянню (2.2.11), одне завжди більше за одиницю (за теоремою Вієтта добуток коренів дорівнює одиниці), то умові обернення завжди задовольняє лише один корінь.

Іншою характеристикою часового ряду є часткова автокореляційна функція (ЧАКФ). Сутність коефіцієнтів часткової автокореляції (КЧА) доцільно пояснити на прикладі регресії

$$y_t = \phi_{12} y_{t-1} + \phi_{22} y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad (2.2.12)$$

де перша цифра індексу за ϕ відображає лаг змінної, а друга цифра позначає максимальний порядок регресії (разі у цьому 2). Тут коефіцієнт

за y_{t-2} є КЧА другого порядку, оскільки він відображає частковий, або додатковий ефект від додавання y_{t-2} до рівняння, в якому є y_{t-1} . КЧА першого порядку, ϕ_{11} , визначається зі співвідношення

$$y_t = \phi_{11}y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.2.13)$$

Очевидно, що у (2.2.13) $\phi_{11} = \rho_1$. У загальному випадку КЧА порядку k є коефіцієнтом ϕ_{kk} у рівнянні

$$y_t = \phi_{1k}y_{t-1} + \phi_{2k}y_{t-2} + \dots + \phi_{kk}y_{t-k} + \varepsilon_t. \quad (2.2.14)$$

Якщо y_t є білим шумом, то всі коефіцієнти у (2.2.14) дорівнюватимуть нулю, даючи нульові значення всіх КЧА.

Для моделі $MA(1)$ КЧА першого та другого порядків можна знайти з коефіцієнтів автокореляції:

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{b_1}{1 + b_1^2}, \quad \phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{b_1^2}{1 + b_1^2 + b_1^4}. \quad (2.2.15)$$

Так само можна знайти КЧА вищих порядків. У результаті маємо, що для $MA(1)$ процесу АКФ порядків вище першого дорівнюють нулю, тоді як ЧАКФ складніша і спадає приблизно як геометрична прогресія. Якщо $\rho_1 > 0$ і, відповідно, $b_1 < 0$, то часткова автокореляційна функція коливається зі зміною знака. За $\rho_1 > 0$ та $b_1 > 0$ всі значення ЧАКФ від'ємні. ►►

Приклад 2.2.2.

Модель ковзної середньої другого порядку або $MA(2)$ має вигляд:

$$y_t = \varepsilon_t - b_1\varepsilon_{t-1} - b_2\varepsilon_{t-2}. \quad (2.2.16)$$

Подібно до попереднього для автоковаріації маємо

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2(1 + b_1^2 + b_2^2). \quad (2.2.17)$$

$$\gamma_1 = -b_1(1 - b_2)\sigma_\varepsilon^2. \quad (2.2.18)$$

$$\gamma_2 = -b_2\sigma_\varepsilon^2. \quad (2.2.19)$$

$$\gamma_k = 0 \text{ для } k > 2.$$

Автокореляції дорівнюють:

$$\rho_1 = \frac{-b_1(1-b_2)}{1+b_1^2+b_2^2}, \quad (2.2.20)$$

$$\rho_2 = \frac{-b_2}{1+b_1^2+b_2^2}, \quad (2.2.21)$$

та $\rho_k = 0$ для $k > 2$.

ЧАК знаходять підставленням коефіцієнтів автокореляції у такі рівняння:

$$\phi_{11} = \rho_1, \quad \phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}. \quad (2.2.22)$$

Отже, $MA(2)$ процес характеризується нульовими значеннями АКФ порядку більшого ніж два, і досить складною ЧАКФ, яка має спадну тенденцію. ►►

2.3. Авторегресійні процеси (AR (p)-процеси)

Модель авторегресії описує стаціонарний процес, де значення показника y_t є лінійною комбінацією обмеженої кількості своїх попередніх значень і випадкової складової. Наприклад, процес $AR(p)$ можна відобразити таким чином:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (2.3.1)$$

де випадкова складова ε_t — білий шум. Модель $AR(p)$ містить $(p+1)$ невідомі параметри: $\sigma_{\varepsilon_t}^2$ — дисперсію випадкової складової ε_t та p коефіцієнтів моделі.

У цих термінах процес, обернений до $MA(q)$, може бути позначений як $AR(\infty)$. Якщо припустити, що обернена форма загальної лінійної моделі (2.1.10) містить обмежену кількість складових, тобто $\pi_k = 0$ за $k > p$, рівняння (2.1.10) після перепозначення його коефіцієнтів матиме вигляд (2.3.1), або

$$\varepsilon_t = (1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p) y_t = a(L) y_t, \quad (2.3.2)$$

де $a(L)$ — поліном від оператора зсуву $a(L) = 1 - a_1L - a_2L^2 - \dots - a_pL^p$. Тепер оператор ний поліном діє на y_t , а не на ε_t , і результат дорівнює ε_t . Тим самим маємо «дзеркальне відображення» процесу $MA(q)$.

Як відомо, процес $MA(q)$ завжди стаціонарний. Однак немає жодної гарантії, що $AR(p)$ -процес за будь-якими значеннями коефіцієнтів a_j , $j = 1, 2, \dots, p$ буде стаціонарним. Для того, щоб він був стаціонарним, необхідно, щоб його можна було зобразити у вигляді розкладення Вольда, або перевести у $MA(q)$ зображення, яке має сенс.

Вираз (2.3.2) можна розглядати як *різницеве рівняння* відносно y_t із випадковою правою частиною ε_t . Загальний розв'язок цього рівняння складається із загального розв'язку однорідного рівняння (коли немає ε_t) та часткового розв'язку повного (неоднорідного) рівняння, який залежить від ε_t . Загальний розв'язок однорідного рівняння має

такий вигляд: $y_t = \sum_{j=1}^p C_j(t)(\pi_j)^t$, де π_j — різні за величиною корені характеристичного рівняння, яке має вигляд: $\lambda^p - a_1\lambda^{p-1} - \dots - a_p = 0$, а

$C_j(t)$ — поліноми, ступінь яких на одиницю менший за кратність відповідного кореня. Розв'язок однорідного рівняння буде скінченним за умови, що корені характеристичного рівняння за модулем не перевищуватимуть 1: $|\pi_j| < 1$. Саме за цією умовою існує оператор, обернений до оператора $a(L)$, тобто має сенс вираз: $y_t = \frac{1}{a(L)} \varepsilon_t$. Отже, процес y_t приймає вигляд розкладення Вольда: $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, з чого випливає, що цей ряд є стаціонарним. Якщо за деяким j $|\pi_j| \geq 1$, то розв'язок не прагне до нуля (або прямує до нескінченності), і про стаціонарність навіть не йдеться.

Необхідною та достатньою умовою стаціонарності процесу (2.3.1) є те, що всі корені характеристичного рівняння для процесу $AR(p)$ перебувають у межах кола одиничного радіусу.

Процеси $AR(p)$ та $MA(q)$ мають певну схожість. Але процес $MA(q)$ завжди стаціонарний, і умова обернена лише забезпечує

йому певну корисну властивість. Для $AR(p)$ ця умова дуже жорстка: або процес стаціонарний і зводиться до $MA(\infty)$, або він не стаціонарний.

Умова, що всі корені рівняння за модулем не перевищують одиницю, еквівалентна тій, що граничні значення $M[y_t]$ та $M[y_t^2]$ прагнуть до нуля за необмеженого зростання t .

Дослідження коренів характеристичного рівняння $a(L) = 0$ можна також здійснити за допомогою аналізу автокореляційної функції. Свідомством того, що це рівняння містить корінь, близький до одиниці, є поступове згасання АКФ.

Для одержання співвідношень для основних характеристик моделі $AR(p)$ помножимо ліву та праву частини (2.3.1) на y_{t-k} :

$$y_t y_{t-k} = a_1 y_{t-1} y_{t-k} + a_2 y_{t-2} y_{t-k} + \dots + a_p y_{t-p} y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k}$$

і взявши математичне сподівання, одержимо рекурентне співвідношення для автоковаріацій (нагадаємо, що $M(\varepsilon_t) = M(y_t) = 0$, $M(y_{t-k} \varepsilon_t) = 0$ за $k > 0$ та $M(y_t \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$):

$$\begin{aligned} \gamma_k &= a_1 \gamma_{k-1} + a_2 \gamma_{k-2} + \dots + a_p \gamma_{k-p}, \quad k > 0 \\ \gamma_0 &= a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + \dots + a_p \gamma_p + \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Поділивши всі складові (2.3.3) на $\gamma_0 = M(y_t)^2$, побачимо, що автокореляції задовольняють аналогічне співвідношення:

$$\rho_k = a_1 \rho_{k-1} + a_2 \rho_{k-2} + \dots + a_p \rho_{k-p} \quad \text{або} \quad a(L) \rho_k = 0, \quad k > 0, \quad (2.3.4)$$

а дисперсія процесу має вигляд:

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 (1 - a_1 \rho_1 - \dots - a_p \rho_p)^{-1}.$$

Зазначимо, що рівняння для γ_k подібне до рівняння, яке задовольняє сам процес y_t . Із цих рівнянь виходить, що всі автокореляції у моделі $AR(p)$ визначаються першими p автокореляціями $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_p)$; також ними визначаються параметри $a = (a_1, \dots, a_p)$. Щоб виразити a через ρ , візьмемо рівняння (2.3.4) для $k = 1, 2, \dots, p$ і, враховуючи, що $\rho_0 = 1$ (кореляція часового ряду із

самим собою) та $\rho_{-k} = \rho_k$ для будь-якого k , побудуємо лінійну систему для обчислення коефіцієнтів моделі:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= a_1 + a_2\rho_1 + \dots + a_p\rho_{p-1} \\ \rho_2 &= a_1\rho_1 + a_2 + \dots + a_p\rho_{p-2} \\ &\dots\dots\dots \\ \rho_p &= a_1\rho_{p-1} + a_2\rho_{p-2} + \dots + a_p \end{aligned} \quad \text{або в матричній формі } R \cdot a = \rho, \quad (2.3.5)$$

де R — невідроджена автокореляційна матриця часового ряду

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dots \\ \rho_p \end{pmatrix}.$$

Отриману систему рівнянь називають системою Юла-Вокера. З неї визначають параметри $AR(p)$ -моделі:

$$a = R^{-1} \cdot \rho. \quad (2.3.6)$$

Практичного використання набули AR -процеси першого та другого порядків. Розглянемо приклади цього.

Приклад 2.3.1.

Модель авторегресії першого порядку $AR(1)$ описує *марківський процес*:

$$y_t = \delta + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = -\infty, \dots, \infty.$$

Зробимо підстановку $y_{t-1} = \delta + a_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$. Тоді

$$y_t = \delta + a_1(\delta + a_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \delta + a_1 \delta + a_1^2 y_{t-2} + \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1}.$$

Тепер y_t залежить вже не від попереднього значення y_{t-1} , а від значення y_{t-2} . Якщо y_{t-2} виразити як $AR(1)$ -процес, то y_t вже буде залежати від y_{t-3} . Повторивши процедуру підстановки j разів, отримаємо

$$\begin{aligned} y_t &= \delta + a_1 \delta + a_1^2 (\delta + a_1 y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} = \\ &= \dots = \delta \sum_{j=0}^{j-1} a_1^j + a_1^j y_{t-j} + \sum_{j=0}^{j-1} a_1^j \varepsilon_{t-j}. \end{aligned}$$

Отже, будь-який $AR(1)$ -процес можна записати як функцію від коефіцієнта a_1 . Розглянемо три випадки:

1) $|a_1| > 1$. Це означає, що за зростання j значення a_1^j також буде постійно зростати, і дуже впливовими на процес будуть значення похибок, які відбулися багато періодів назад. Таке припущення не відповідає дійсності. Процес за умови $|a_1| > 1$ є нестабільним і нестационарним;

2) $|a_1| = 1$. Таке припущення відповідає нестационарним процесам із сезонними коливаннями;

3) $|a_1| < 1$. Це припущення є реалістичним, оскільки найбільша вага під час визначення значень часового ряду надається його останнім елементам. Тому $AR(1)$ -процес далі аналізується саме в такому припущенні.

Якщо число підстановок j прямує до нескінченності, то величина a_1^j прямуватиме до 0. Тоді $y_t = \delta \sum_{j=0}^{t-1} a_1^j + \sum_{j=0}^{t-1} a_1^j \varepsilon_{t-j}$. Узявши математичне сподівання: $\mu = \delta \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j = \delta / (1 - a_1)$, бачимо, що $AR(1)$ -процес можна виразити через нескінченний $MA(\infty)$ -процес:

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}.$$

Розглянемо числові характеристики процесу. Середнє значення дорівнює

$$\mu = \frac{\delta}{(1 - a_1)}$$

і є обмеженим, якщо a_1 не дорівнює одиниці. Для визначення дисперсії зазначимо, що

$$y_t - \mu = \delta - a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{\delta}{(1 - a_1)} = a_1 (y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t.$$

Тому дисперсія y_t дорівнює

$$\gamma_0 = M(y_t - \mu)^2 = a_1^2 M(y_{t-1}^2) + M(\varepsilon_t^2) = a_1^2 \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2$$

і розв'язавши її відносно γ_0 , одержимо

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1 - a_1^2)}.$$

Щоб дисперсія була додатною, необхідне виконання умови $-1 < a_1 < 1$.

Автоковаріація першого порядку дорівнює:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= M[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)] = a_1 M(y_{t-1} - \mu)^2 + M(y_{t-1} - \mu)\varepsilon_t = \\ &= a_1 \gamma_0 = a_1 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1 - a_1^2)}.\end{aligned}$$

Автоковаріація другого порядку дорівнює:

$$\gamma_2 = a_1 \gamma_1 = a_1^2 \gamma_0$$

та в загальному випадку

$$\gamma_k = a_1^k \gamma_0 \text{ для } k > 0.$$

Автокореляції знаходять безпосередньо із автоковаріацій, вони дорівнюють

$$\rho_k = a_1^k.$$

Оскільки $-1 < a_1 < 1$, автокореляції є геометрично спадними для $AR(1)$ -моделі.

Часткові автокореляції (ЧАК) дорівнюють:

$$\phi_{11} = a_1,$$

$$\phi_{22} = 0$$

та у загальному випадку

$$\phi_{kk} = 0 \text{ для } k > 1.$$

Отже, $AR(1)$ -процес характеризується геометрично спадною АКФ та ЧАКФ, яка для порядків вище першого дорівнює нулю. ►►

Приклад 2.3.2.

Модель авторегресії другого порядку $AR(2)$, яку називають *процесом Юла*, задається рівнянням

$$y_t = \delta - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t.$$

Знайдемо середнє та дисперсію $AR(2)$ -процесу

$$\mu = \frac{\delta}{(1 - a_1 - a_2)}$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2 (1 - a_2)}{(1 - a_2 - a_1^2 - a_2 a_1^2 - a_2^2 + a_2^3)}.$$

Автокореляції процесу дорівнюють

$$\rho_1 = \frac{a_1}{1 - a_2},$$

$$\rho_2 = a_2 + \frac{a_1^2}{1 - a_2},$$

$$\rho_k = a_1\rho_{k-1} + a_2\rho_{k-2} \text{ для } k > 1.$$

Часткові автокореляції (ЧАК) дорівнюють:

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{a_1}{1 - a_2},$$

$$\phi_{22} = a_2,$$

$$\phi_{33} = 0,$$

$$\phi_{kk} = 0 \text{ для } k > 2.$$

Отже, для $AR(2)$ -процесу ЧАКФ дорівнює нулю для порядку більше двох і характеризується спадною АКФ. ►►

У загальному випадку для $AR(p)$ -процесів (2.3.1) можна показати, що АКФ геометрично спадає після ρ_p , та ЧАКФ дорівнюють нулю після ϕ_{pp} . Це дає змогу ідентифікувати можливу AR-модель за наявності інформації про вибірку АКФ та ЧАКФ для множини спостережень змінної.

Авторегресійні моделі є дуже корисними для опису багатьох часових рядів, що трапляються у практичній діяльності. Уперше вони були побудовані для випадкових систем, які мають інерцію та перебувають під впливом сил, що повертають систему до стану рівноваги. Так, моделі другого порядку ($p = 2$) доволі точно описують поведінку приблизно циклічної природи, наприклад маятник. Область застосування AR-моделей не обмежується лише стаціонарними процесами. Користуючись різницевами перетвореннями, можна звести процес, що має тенденцію, до стаціонарного. Окрім того, можна виключити тренд, одержаний за методом найменших квадратів або будь-яким іншим методом.

2.4. Змішані ARMA- та ARIMA-процеси

З метою кращого пристосування моделі до ряду спостережень інколи доцільно об'єднати в одній моделі і авторегресію, і ковзну середню. При цьому модель має бути якомога економнішою, тобто давати найкращу апроксимацію за допомогою невеликої кількості параметрів. Для досягнення цієї мети застосовують *змішані моделі авторегресії — ковзної середньої або ARMA(p, q)-моделі*:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + b_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q}, \quad (2.4.1)$$

або, використовуючи поліноми від оператора зсуву, (2.4.1) можна записати як:

$$a(L)y_t = b(L) \cdot \varepsilon_t, \quad (2.4.2)$$

де $a(L) = 1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p$, $b(L) = 1 + b_1 L + b_2 L^2 + \dots + b_q L^q$.

Властивості ARMA-моделі є сумішшю властивостей AR та MA моделей. Стаціонарність ARMA (p, q)-процесу визначається лише його AR-частиною. Тому умови такі самі, як і для AR-процесу. Процес ARMA стаціонарний, якщо всі корені характеристичного рівняння AR-частини (полінома $a(L)$) за модулем не перевищують одиницю. Так само умова обернення ARMA-процесу цілком визначається умовою обернення MA-частини. Якщо MA-частина має обернену, то й для всього ARMA-процесу можна знайти обернене зображення. При цьому якщо процес ARMA стаціонарний, він, за теоремою Вольда, обов'язково має MA (∞)-зображення нескінченного порядку. Разом із тим, він має і скінченне зображення ARMA(p, q). Добуток (2.4.2) на $b(L)^{-1}$ дає AR(∞)-зображення нескінченного порядку. Отже, ARMA(p, q) може бути зручним зображенням стаціонарного процесу і, якщо можна звести процес до ARMA, то він визначається усього $p + q$ параметрами.

Очевидно, що математичне сподівання стаціонарного ARMA(p, q)-процесу дорівнює нулю. Зазначимо, що введенням в модель (2.4.1) вільного члена a_0 можна врахувати ненульове, але стале, математичне сподівання. Тоді математичне сподівання

процесу дорівнюватиме $\mu = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2 - \dots - a_p}$.

Приклад 2.4.1.

Розглянемо властивості $ARMA(1,1)$ -моделі, яка має вигляд:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1},$$

або в операторному запису: $(1 - a_1 L)y_t = (1 + b_1 L)\varepsilon_t$.

Умова стаціонарності має вигляд $|a_1| < 1$, умова обернення — $|b_1| < 1$.

Для обчислення дисперсії процесу зручно використати $MA(\infty)$ зображення, яке відповідає розкладенню Вольда:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1 + b_1 L}{1 - a_1 L} \varepsilon_t = (1 + b_1 L)(1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + \dots) \varepsilon_t = \\ &= [1 + (a_1 + b_1)L + a_1(a_1 + b_1)L^2 + \dots] \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} D(y_t) = \gamma_0 &= [1 + (a_1 + b_1)^2 + a_1^2(a_1 + b_1)^2 + \dots] \sigma_\varepsilon^2 = \\ &= \left[1 + \frac{(a_1 + b_1)^2}{1 - a_1^2}\right] \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2(1 + b_1^2 + 2a_1 b_1)}{(1 - a_1^2)}. \end{aligned}$$

Для обчислення першої автокореляції помножимо $y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1}$ на y_{t-1} і візьмемо математичне сподівання від обох частин. Отримаємо $\gamma_1 = a_1 \gamma_0 + b \text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, y_{t-1})$. Помножимо вираз $y_{t-1} = a_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + b \varepsilon_{t-2}$ на ε_{t-1} і візьмемо математичне сподівання від обох частин. Отримаємо $\text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, y_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2$. Після підставлення отримаємо $\gamma_1 = a_1 \gamma_0 + b_1 \sigma_\varepsilon^2$. Оста-

$$\text{точно: } \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(a_1 + b_1)(1 + a_1 b_1)}{1 + b_1^2 + 2a_1 b_1} = a_1 - \frac{b_1 \sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0}.$$

Якщо помножити y_t на y_{t-2} і взяти математичне сподівання, отримаємо: $\gamma_2 = a_1 \gamma_1$ та $\rho_2 = a_1 \rho_1$. Для всіх значень з індексом більшим, ніж порядок MA -частини, отримуємо, що $\rho_k = a_1 \rho_{k-1}$. Такі самі співвідношення виконувалися і для «чистої» моделі $AR(1)$ і називалися рівняннями Юла-Вокера для автокореляційної функції. Отже, починаючи із другої, автокореляції $ARMA(1,1)$ -моделі поведуться так само, шой автокореляції $AR(1)$, але перші автокореляції цих процесів відрізняються.

Часткові автокореляції (ЧАК) дорівнюють:

$$\Phi_{11} = \rho_1,$$

$$\Phi_{22} = \rho_1(a_1 - \rho_1)/(1 - \rho_1^2)$$

та є в цілому спадними.

Результати прикладу 2.4.1 поширюються також на *ARMA* (p, q)-модель, звичайно, за умови стаціонарності процесу. Перші p значень автокореляційної функції визначаються через коефіцієнти *AR* та *MA*-частин, а потім значення автокореляційної функції виражаються у вигляді суми складових, що спадають за експонентою.

Для процесу *ARMA* (p, q), застосовуючи той самий метод знаходження добутку усіх членів (2.4.1) на y_{t-k} і переходу до математичних сподівань, отримуємо різницеве рівняння виду:

$$\gamma_k = a_1 \gamma_{k-1} + \dots + a_p \gamma_{k-p} + \gamma_{ye}(k) + b_1 \gamma_{ye}(k-1) + \dots + b_q \gamma_{ye}(k-q), \quad (2.4.3)$$

де $\gamma_{ye}(k) = M(y_{t-k} \varepsilon_t)$; при цьому $\gamma_{ye}(k) = 0$ для $k > 0$. Звідси виходить, що для значень $k \geq q+1$ автоковаріація та автокореляція задовольняють таким самим співвідношенням, як і в моделі *AR*(p):

$$a(L)\rho_k = 0, \quad k \geq q+1. \quad (2.4.4)$$

Це означає, що для процесу *ARMA*(p, q) існує q автокореляцій $\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_1$, значення яких пов'язані залежністю (2.4.3) з q параметрами ковзної середньої $b = (b_1, \dots, b_p)$ та p параметрами авто-регресії $a = (a_1, \dots, a_p)$. Далі, p значень $\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_{q-p+1}$, необхідні як початкові значення для розв'язання різницевого рівняння (2.4.4), яке визначає автокореляції для великих лагів k .

Отже, за $q-p < 0$ АКФ ($\rho_k, k \geq 0$) визначається поліномом $a(L)$ та початковими значеннями і складається із сукупності спадних експонент і (або) спадних синусоїд, а за $q-p \geq 0$ існують $q-p+1$ початкових значень $\rho_k, k \leq q-p$, які не вкладаються в цю загальну картину. Ці характеристики важливі під час ідентифікації моделі за спостереженнями над часовим рядом.

Якщо у (2.4.3) припустити, що $k = 0$, маємо дисперсію процесу:

$$\gamma_0 = a_1 \gamma_1 + \dots + a_p \gamma_p + \sigma_\varepsilon^2 + b_1 \gamma_{ye}(-1) + \dots + b_q \gamma_{ye}(-q). \quad (2.4.5)$$

Розв'язуючи це рівняння разом із p рівняннями (2.4.3) для $k = 1, \dots, p$, можна отримати $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$.

Царина застосування розглянутих вище параметричних лінійних моделей не обмежується лише стаціонарними процесами. Нагадаємо, що умова стаціонарності моделі (2.4.2) означає, що корені полінома $a(L)$ перебувають у середині одиничного кола.

Природним шляхом отримання нестационарного процесу, що також виглядає як (2.4.2), є послабшення цього обмеження. Зокрема, у багатьох випадках соціально-економічні процеси добре описуються моделями типу (2.4.2), в яких один або кілька коренів $a(L)$ дорівнюють одиниці. До таких нестационарних процесів можна віднести часові ряди типу TS , DS та тренд-сезонні процеси, які взяттям послідовних різниць можна звести до стаціонарного виду (див. розділ 1.2 частини 2). Наприклад, нестационарний ряд випадкового блукання, рівняння якого має вигляд: $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, після взяття першої різниці перетворюється на стаціонарний ряд: $\Delta y_t = z_t = \varepsilon_t$, де $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1-L)y_t$. У полінома другого ступеня: $y_t = \alpha + \beta \cdot t + \gamma \cdot t^2 + \varepsilon_t$, після взяття першої різниці ступінь поліному зменшується на одиницю:

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \alpha + \beta \cdot t + \gamma \cdot t^2 + \varepsilon_t - \alpha - \beta(t-1) - \gamma(t-1)^2 - \varepsilon_{t-1} = \\ &= \beta + 2\gamma \cdot t - \gamma + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}). \end{aligned}$$

Якщо взяти другу послідовну різницю, то одержимо стаціонарний процес: $\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} = 2\gamma + (\varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2})$. Отже, після того, як двічі до параболічної функції часу застосували послідовні різниці, процес перетворився на стаціонарний виду $MA(2)$.

Наведені приклади показують, що є нестационарні ряди, які після взяття послідовних різниць зводяться до стаціонарних, а саме до виду $ARMA$. Моделі таких рядів отримали назву **процеси авторегресії й інтегрованої ковзної середньої (ARMA)**.

Розглянемо модель

$$\varphi(L)y_t = b(L) \cdot \varepsilon_t, \quad (2.4.6)$$

де, на відміну від (2.4.2), $\varphi(L)$ — нестационарний оператор авторегресії порядку $p+d$, такий, що d коренів рівняння $\varphi(L) = 0$ дорівнюють одиниці, а решта p коренів перебувають у межах одиничного кола; оператор ковзної середньої $b(L)$, як і раніше має вигляд (2.1.1), тобто має порядок q і може бути оберненим (усі його корені перебувають у межах одиничного кола). Тоді можна записати, що

$$\varphi(L) = a(L) \cdot (1-L)^d, \quad (2.4.7)$$

де $a(L)$ — стаціонарний порядку p оператор авторегресії (тобто із коренями в межах одиничного кола). Якщо ввести оператор різ-

ниці $\Delta = 1 - L$; $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1 - L)y_t$, тоді $\varphi(L)$ запишеться як $\varphi(L) = a(L) \cdot \Delta^d$, і модель (2.4.6) можна представити у вигляді:

$$a(L) \cdot \Delta^d y_t = b(L) \varepsilon_t. \quad (2.4.8)$$

Тут d -ту різницю ряду y_t обчислюють за формулою:

$$\Delta^d y_t = (1 - L)^d y_t \equiv z_t. \quad (2.4.9)$$

Вона задовольняє рівняння

$$a(L)z_t = b(L) \cdot \varepsilon_t, \quad (2.4.10)$$

тобто вже є стаціонарним оберненим процесом $ARMA(p, q)$. З іншого боку, якщо ввести обернений до Δ оператор:

$$S \equiv \Delta^{-1} = (1 - L)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} L^j, \quad (2.4.11)$$

який називають оператором підсумку ($Sy_t = y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + \dots$), то з (2.4.9) виходить, що

$$y_t = S^d z_t, \quad (2.4.12)$$

де під d -кратною ітерацією оператора S розуміють ряд

$$S^d = (1 - L)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j C_{-d}^j L^j = \sum_{j=0}^{\infty} C_{d+j-1}^{d-1} L^j. \quad (2.4.13)$$

Отже, $y_t, t = 1, 2, \dots, n$, що описується рівнянням (2.4.8), можна отримати d -кратним підсумком процесу z_t , який, згідно із (2.4.10), є $ARIMA$. Тому процес, що задається моделлю (2.4.8), називають процесом $ARIMA$ (додаючи до $ARIMA$ термін інтегрований (I)). Якщо в (2.4.8) оператор авторегресії $a(L)$ має порядок (p), а оператор ковзної середньої $b(L)$ має порядок (q), то скорочено модель (2.4.8) записують як $ARIMA(p, d, q)$. Зокрема, за $(p, 0, q)$ виходить змішана модель $ARIMA(p, q)$, за $(p, 0, 0)$ — модель авторегресії $AR(p)$, за $(0, 0, q)$ — модель ковзної середньої $MA(q)$. Тим самим модель $ARIMA$ охоплює широкий клас як стаціонарних (при $d = 0$), так і нестаціонарних (при $d \geq 1$) процесів. На практиці d є додатним цілим, яке не перевищує 2, або нулем у разі стаціонарності y_t .

2.5. Аналіз часових рядів Бокса-Дженкінса

Практичне використання *ARMA*-моделей пов'язують із появою методики їхньої побудови, розробленої Г. Боксом та Г. Дженкінсом [30]. Методика передбачає такі послідовні процедури:

1. Ідентифікація моделі часового ряду.
2. Оцінювання параметрів моделі.
3. Діагностика побудованої моделі.
4. Використання моделі для прогнозування майбутніх значень часового ряду.

Ці процедури можуть неодноразово повторюватися в процесі уточнення моделі. Розглянемо кожен етап алгоритму детальніше.

Ідентифікація моделі. Під час побудови моделі аналізу часових рядів виникає проблема визначення її із мінімальною кількістю параметрів. Ця проблема має назву **ідентифікація**.

Визначення порядку *ARMA*-моделі на етапі ідентифікації складається із розв'язання двох відносно незалежних проблем:

- 1) аналізу стаціонарності процесу та визначення порядку d оператора переходу до послідовних різниць: $z_t = (1-L)^d y_t$;
- 2) вибору параметрів p і q в моделі *ARMA*, яка описує стаціонарний ряд як процес авторегресії та ковзної середньої.

З'ясування стаціонарності часового ряду здійснюють за допомогою методів, розглянутих у розділі 1 частини 2. У разі нестационарності ряду для визначення порядку різницевого оператора можна скористатися емпіричним критерієм, сутність якого полягає у тому, що знаходять такі значення d , за якими вираз

$$\sqrt{\frac{1}{n-d} \sum_{t=1}^{n-d} (z_t - \bar{z}_t)^2}, \quad (2.5.1)$$

де \bar{z}_t — середнє значення стаціонарного процесу $z_t = \Delta^d y_t$, $t=1, 2, \dots, n-d$, буде мінімальним. Величина критерію (2.5.1) зі збільшенням значення d зменшуватиметься доти, доки різницевий оператор не стане стаціонарним. Подальше підвищення порядку d різницевого оператора спричинить лише зростання дисперсії, а отже, збільшення її.

Систематичну складову можна також виключити з ряду, оцінивши її за методом найменших квадратів або будь-яким іншим методом згладжування часового ряду (див. розділ 3).

Коли стаціонарний ряд одержано, визначають порядок *ARMA*-моделі. На цьому етапі вельми корисними є графічні методи, а також порівняння автокореляційної та часткової автокореляційної функції із відповідними функціями відомих *ARMA*-процесів, наведених у табл. 2.6.1.

Таблиця 2.6.1

ХАРАКТЕРИСТИКИ *ARMA*-МОДЕЛЕЙ

Модель	АКФ	ЧАКФ
Білий шум	усі нулі	усі нулі
<i>MA</i> (1)	нулі після ρ_1	спадна після ϕ_{11}
<i>MA</i> (2)	нулі після ρ_2	спадна після ϕ_{22}
<i>MA</i> (q)	нулі після ρ_q	спадна після ϕ_{qq}
<i>AR</i> (1)	геометрично спадна після ρ_1	нулі після ϕ_{11}
<i>AR</i> (2)	геометрично спадна після ρ_2	нулі після ϕ_{22}
<i>AR</i> (p)	геометрично спадна після ρ_p	нулі після ϕ_{pp}
<i>ARMA</i> (1, 1)	геометрично спадна після ρ_1	спадна після ϕ_{11}
<i>ARMA</i> (p, q)	геометрично спадна після ρ_p	спадна після ϕ_{qq}

У загальному випадку, якщо використовують вибірку спостережень, розмір якої часто є відносно малим, можна очікувати, що точної відповідності між даними й теоретичною моделлю не буде. Це може призвести до вибору на цьому кроці двох або трьох пробних моделей *ARMA* (p, q) моделей, які мають кілька пар часових лагів p в авторегресійному процесі та лагових змінних q у моделі ковзної середньої. Вибір із кількох моделей найдоцільнішої для подальшого аналізу й прогнозування здійснюється за допомогою методів діагностичної перевірки, що розглядатимуться далі.

Оцінювання параметрів моделі. Після того, як процес ідентифікації визначив початковий варіант стаціонарної моделі *ARMA*-моделі, цю модель пристосовують до даних спостережень шляхом знаходження оцінок параметрів $a = (a_1, \dots, a_p)$ та $b = (b_1, \dots, b_q)$. Раніше було показано, що модель *ARMA*-моделі порядку (p, d, q), що враховує нестационарні процеси, зводиться за допомогою перших різниць до стаціонарної моделі порядку

$(p, 0, q)$. Тому процедура обчислення коефіцієнтів розглядається тільки для стаціонарної моделі.

Параметри AR -моделі можуть бути оцінені за допомогою звичайного методу найменших квадратів (виходять зсунуті, але консистентні оцінки), та його не можна застосувати до MA або $ARMA$ моделей. Наприклад, для $MA(1)$ -моделі $y_t = \mu + \varepsilon_t - b_1 \varepsilon_{t-1}$ неможливо оцінити параметри, користуючись лише спостереженнями y_t , оскільки невідомі значення параметрів для розрахунку ε .

Метод Бокса-Дженкінса [30] запропонували використовувати процедуру нелінійної оптимізації: процедуру пошуку на мережі (*grid-search procedure*). Це ітеративна процедура, в якій оцінки параметрів мінімізують суму квадратів залишків. Запишемо $MA(1)$ -модель як $\varepsilon_t = y_t - \mu + b \cdot \varepsilon_{t-1}$. Аналізуючи оцінки АКФ та ЧАКФ, можна зробити попередні припущення відносно значень параметрів. Можна використовувати вибіркове середнє (для μ) та першу автокореляцію (для b). Припустимо, що вони дорівнюють 100 та 0,2. Тоді модель має вигляд $\varepsilon_t = y_t - 100 + 0,2\varepsilon_{t-1}$. Припускаючи, що ε_0 дорівнює нулю, можна отримати оцінки ε_t для t від 1 до n та розрахувати суму квадратів залишків s_1 . Вибір нових початкових значень для μ та b дає нове значення s_2 суми квадратів залишків. Потім перевіряються інші початкові дані, і остаточними оцінками стають значення коефіцієнтів моделі, за якими s є мінімальним.

За часів Бокса і Дженкінса, через значні обмеження на використання комп'ютерів, для оцінювання коефіцієнтів розроблялись окремі методи для кожної моделі. Зараз учені розробили загальний *метод максимальної правдоподібності*, який уможливує отримання консистентних та асимптотично ефективних оцінок коефіцієнтів для будь-якої моделі [29].

Головна ідея застосування методу полягає у припущенні, що дані мають деякий імовірнісний розподіл та обчислюється ймовірність потрібної події. Це на загал залежить від деяких невідомих параметрів. Використовуючи дані, можна максимізувати ймовірність цієї події. Коефіцієнти, за яких досягається максимум ймовірності відповідної події, є необхідними оцінками параметрів. Іноді дуже важко знайти ці оцінки в аналітичному вигляді. В такому разі використовують числові методи оптимізації функції правдоподібності.

Будемо виходити зі спостережень $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ (для цього знадобляться $N = n + d$ спостережень $y_{-d+1}, \dots, y_0, y_1, \dots, y_n$ над

початковим рядом y_t). Запишемо модель $ARMA(p, q)$ -процес у вигляді

$$z_t = \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{t-j}. \quad (2.5.2)$$

Цей процес містить $p + q + 1$ невідомих параметрів: $a_i, b_j, \sigma_\varepsilon^2$.

Нехай $A = (a_1, a_2, \dots, a_p)^T$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_q)^T$, $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$, визначимо матрицю $V(A, B)$ таким чином, що $Dz_t = \sigma^2 V(A, B)$. Нехай також ε_t мають нормальний розподіл. Тоді логарифм функції правдоподібності має вигляд

$$\ln L(\sigma^2, A, B) = -\frac{1}{2} (n \ln \sigma^2 + \ln V(A, B) + \frac{Z^T (V(A, B))^{-1} Z}{\sigma^2}). \quad (2.5.3)$$

Оцінки $\hat{\sigma}^2, \hat{A}, \hat{B}$ отримують завдяки максимізації зазначеного логарифму функції правдоподібності. Існують також ефективніші методи обчислювання функції правдоподібності.

Функція правдоподібності. Розглянемо побудову функції правдоподібності більш детально. Нехай $y_t, t = 1, 2, \dots, n$ — вибірка, яка має імовірнісний розподіл $P(y_t | A)$, де A — набір невідомих параметрів. Припустимо, що $y_t \in$ незалежними, кожне із імовірнісним розподілом $P(y_t | A)$, а сумісний розподіл цілої сукупності $y_t, t = 1, 2, \dots, n$ подано формулою:

$$P(y_1, y_2, \dots, y_n | A) = P(y_1 | A) \cdot P(y_2 | A) \cdot \dots \cdot P(y_n | A) = \prod_{t=1}^n P(y_t | A). \quad (2.5.4)$$

Для відповіді на запитання, яке саме значення A максимізує ймовірність породження моделлю саме вибірки $y_t, t = 1, 2, \dots, n$, потрібно максимізувати функцію правдоподібності:

$$L(A) = \prod_{t=1}^n P(y_t | A). \quad (2.5.5)$$

Для подальшої оптимізації необхідно точно знати розподіл вибірки. Припустимо, що аналізується модель

$$y = f(X, a) + \varepsilon,$$

де y — часовий ряд,

X — матриця екзогенних змінних,

ε — вектор збурень, який має нормальний розподіл із нульовим вектором математичних сподівань та коваріаційною матрицею Θ . Тоді функція правдоподібності матиме вигляд:

$$L(a) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Theta|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(y-f(X,a))' \Theta^{-1} (y-f(X,a))}. \quad (2.5.6)$$

У загальному випадку ані функція правдоподібності, ані її логарифм не є лінійними, тож знайти максимум функції правдоподібності в аналітичному вигляді дуже важко. Тому потрібно використовувати числові методи знаходження максимуму функції, наприклад метод Гауса, загальний алгоритм яких складається з таких кроків:

1) Покласти початкові значення для вектора A_i .

2) Визначити напрям руху для A_i , в якому значення $L(A_i)$ збільшується.

3) Визначити довжину кроку й обчислити нове значення A_{i+1} .

4) Перевірити критерій зупинки. Якщо алгоритм треба продовжити, то задаємо $i = i + 1$ й повертаємося до кроку 2.

Звичайним критерієм зупинки є $|L(A_{i+1}) - L(A_i)| < \delta$, де δ — наперед задане мале число.

За допомогою відповідних функцій правдоподібності відбувається тестування гіпотез. Розглянемо критерій перевірки гіпотези H^0 проти альтернативної H^1 у загальному випадку. Існує три основні класи тестових статистик: тест Вальда, тест за допомогою множників Лагранжа, тест на основі відношень значень функцій правдоподібностей. Усі ці критерії мають підґрунтям максимізацію функції правдоподібності. Вони є асимптотично еквівалентними. Ключовою різницею між цими трьома підходами є вибір оцінки для розрахунків. Метод відношень функцій правдоподібності є найстарішим з усіх цих тестів, він був розроблений Нейманом та Пірсоном у 1928 році. Сутність методу полягає в порівнянні значень функцій правдоподібності за умови H^0 (із обмеженнями) та без її врахування (без обмежень). Наприклад, нехай без урахування H^0 оцінкою є \hat{A} , при врахуванні умови H^1 оцінкою буде \hat{A}^1 . Тоді

$$LR = \frac{L(\hat{A}^1)}{L(\hat{A})} > 1, \quad (2.5.7)$$

оскільки із визначення максимуму функції правдоподібності $L(\hat{A}^1) > L(\hat{A})$.

Потрібно визначити, якою може бути величина $L(\hat{A}^1) - L(\hat{A})$, щоб мож-

на було прийняти гіпотезу H^0 , тобто чи є суттєвими обмеження, включені до H^0 . Відповідна статистика має вигляд:

$$LRT = 2(\log L(\hat{A}) - \log L(\hat{A})) \approx \chi_m^2. \quad (2.5.8)$$

Отже, для перевірки гіпотези H^0 необхідно підрахувати значення LRT та порівняти його з χ^2 — статистикою, де кількість ступенів свободи визначається кількістю обмежень у гіпотезі H^0 . Якщо $LRT \geq \chi_m^2$, то гіпотеза H^0 відхиляється.

Діагностика моделі. Після знаходження оцінок параметрів треба перевірити, чи є побудована модель адекватною. Існує кілька різновидів критеріїв (див. розділ 7), що визначають значущість та стійкість параметрів, властивості залишків та придатність моделі для прогнозування. У цьому розділі розглянемо додаткові можливості діагностики, специфічні для *ARIMA*-моделей.

Перевірка залишків. Усі теоретичні моделі містять випадкову компоненту, тож, якщо оцінена модель коректна, залишки мають бути «білим шумом». Залишки моделі отримують відніманням від реальних спостережень значень, обчислених за моделлю, тобто $e_t = y_t - \hat{y}_t$.

Для моделі *AR(p)*-процесу $y_t = \sum_{j=1}^p a_j y_{t-j} + \varepsilon_t$ послідовність залишків будують за правилом:

$$e_t = y_t - \sum_{j=1}^p \hat{a}_j y_{t-j}, \quad t = p+1, \dots, n. \quad (2.5.8)$$

Зазначимо, що e_t не визначені для $t < p$.

Для *MA(q)*-моделі $y_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{t-j}$ залишки обчислюють рекуррентно:

$$\begin{aligned} e_j &= 0, \quad j \leq 0, \\ e_1 &= y_1, \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

$$e_2 = y_2 - \hat{b}_1 e_1 \text{ тощо, та для } t > q \quad e_t = y_t - \sum_{j=1}^p \hat{b}_j e_{t-j}.$$

Нарешті, для модель $ARMA(p, q)$ -процесу маємо

$$e_t = 0, \quad t \leq p,$$

$$e_t = y_t - \sum_{j=1}^p \hat{a}_j y_{t-j} - \sum_{j=1}^q \hat{b}_j e_{t-j}, \quad t \leq \max(p, q). \quad (2.5.10)$$

Отримані залишки треба перевірити на відповідність «білому шуму». Для цього обчислюють АКФ та ЧАКФ залишків і перевіряють їхню статистичну значущість за критеріями, розглянутими в розділі 1.1.3 (Бокса-Пірса, Льюнга-Бокса, стандартне відхилення). Інший критерій розглядає розподіл залишків, який вважають нормальним у разі малої вибірки (див. 7.1).

Критерій вибору кращої моделі. Коли задовільними виявляються кілька моделей, потрібне правило вибору між ними. Бокс і Дженкінс запропонували принцип ощадливості, згідно з яким, маючи кілька адекватних моделей, треба обрати модель із найменшою кількістю параметрів. Для використання цього принципу треба формалізувати правило компромісу між точністю пристосування моделі та кількістю її параметрів. Існує кілька підходів до розв'язання цієї проблеми.

Порівняння моделей. Припустімо, що розраховано задовільну $ARMA(p, q)$ -модель часового ряду за методом максимальної правдоподібності, причому L_0 — максимальне значення функції правдоподібності. Тепер те саме розрахуємо для моделей $ARMA(p + 1, q)$ та моделі $ARMA(p, q + 1)$. Отримаємо значення L_1 та L_2 відповідно. Згідно зі стандартною теорією тестування функції правдоподібності (2.5.8), якщо початкова модель $ARMA(p, q)$ є коректною, то статистики $2(L_1 - L_0)$ та $2(L_2 - L_0)$ розподілені як χ^2 -розподіл. Така перевірка є дуже простою. Але якщо дані сильно корелюють між собою, таке тестування може давати неправильні результати.

Числові критерії. На відміну від попередніх тестувань, числові критерії лише дають певне значення, за яким можна судити про адекватність моделі. Загальну характеристику критеріїв наведено в таблиці 2.5.2 [29].

ЧИСЛОВІ КРИТЕРІЇ

Назва критерію	Формула підрахунку	Бажаний екстремум
Коефіцієнт детермінації	$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}$	1
Скоригований коефіцієнт детермінації	$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-(p+q)}$	1
Інформаційний критерій Акаїке (<i>AIC</i>)	$AIC = \ln \left(\frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{n-(p+q)} \right)$	<i>Min</i>
Інформаційний критерій Шварца-Ріссанена (<i>SIC</i>)	$SIC = \ln \left(\frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{n-(p+q)} \right) + \frac{p+q}{n} \ln n$	<i>Min</i>
Критерій Ханнана-Квіна (<i>HQ</i>)	$HQ = \ln \left(\frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{n-(p+q)} \right) + \frac{c(p+q)}{n} \ln(\ln n), c \geq 2$	<i>Min</i>
Прогнозовий критерій (<i>FC</i>)	$FC = \frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{n-(p+q)} \left(1 + \frac{p+q}{n} \right)$	<i>Min</i>

Однією із пропозицій є обчислення коефіцієнта детермінації (R^2) та зваженого коефіцієнта детермінації (\bar{R}^2). Однак цей метод непридатний для різницевої змінної z у деяких моделях.

Інформаційні критерії ґрунтовані на мінімізації певних статистик, що мають стандартні розподіли.

Інформаційний критерій Акаїке (*AIC*) розглядає нелінійне компромісне співвідношення між дисперсією залишків і значенням загальної кількості оцінюваних параметрів ($p + q$), оскільки

моделі з більшою кількістю оцінюваних параметрів можна віддати перевагу лише за пропорційно великого зменшення дисперсії залишків.

Інформаційний критерій Шварца-Ріссанена (SIC) надає більшої ваги $(p + q)$ порівняно з *AIC* за $n > 7$, тобто зростання кількості оцінюваних параметрів потребує вагомішого зменшення дисперсії залишків для *SIC*, ніж для *AIC*.

Критерій Ханнана-Квіна (HQ). Тут вага при $(p + q)$ є більшою за 2, якщо $n > 15$.

Прогнозовий критерій (FC) використовує похибку передбачення.

Вибір між цими критеріями є довільним, оскільки всі статистики змінюються в одному напрямі в разі збільшення кількості оцінюваних параметрів. На практиці користуються одним із них.

Прогнозування за допомогою ARIMA моделей. В *ARIMA* моделях, під час прогнозування змінної для майбутнього моменту часу, лагові значення цієї змінної, які слугують пояснюючими змінними (регресорами) моделі, можна розглядати або фіксованими на вибіркових значеннях, або випадковими. Перша можливість призводить до умовного прогнозу, на кшталт множинної регресії, друга — до безумовного прогнозу. Отже, у прогнозуванні за моделлю типу *ARIMA* розглядають умовні та безумовні прогнози. Відомо, що умовна дисперсія випадкової величини не перевищує її безумовну дисперсію, тому точність умовного прогнозу завжди вища.

Якщо модель правильно специфіковано, то можливі два джерела помилок прогнозів: невизначеність майбутніх значень випадкової величини ε , відсутність точних значень коефіцієнтів моделі (наявні тільки їхні оцінки).

Під час прогнозування за моделлю *ARIMA* від наявної вибірки залежать як оцінки коефіцієнтів моделі, так і значення регресорів, тому важко аналітично виразити умовну дисперсію помилки прогнозу через спостереження часового ряду. Як правило, обмежуються припущенням про те, що коефіцієнти відомі точно. Зрозуміло, що таке припущення зменшує дисперсію помилки прогнозу й тим самим збільшує умовну точність як умовного, так і безумовного прогнозів.

Для досягнення мінімуму середньоквадратичної помилки (MSE) потрібно взяти умовне математичне сподівання: $M\{y_{t+\tau} | y_1, \dots, y_t\}$.

Прогноз за моделлю MA (q): $y_t = \theta + \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2} + \dots + b_q\varepsilon_{t-q}$.
Якщо коефіцієнти моделі точно відомі, і є значення y_t для

$t \in [1, n]$, то безумовним точковим прогнозом для будь-якого моменту часу буде математичне сподівання процесу, тобто θ . Умовним прогнозом для моменту часу $t+1$ буде умовне математичне сподівання:

$$\hat{y}_t(1) = M\{\theta + \varepsilon_{t+1} + b_1\varepsilon_t + \dots + b_q\varepsilon_{t-q+1} | y_1, \dots, y_t\}. \quad (2.5.11)$$

Серед випадкових величин ε , що знаходяться ліворуч, є такі, що пов'язані зі спостереженнями. Оскільки спостереження складаються із «модельного значення» й похибки, умовні математичні сподівання усіх складових, окрім ε_{t+1} , не дорівнюють нулю.

Наприклад, $M\{\varepsilon_t | y_1, \dots, y_t\}$ є залишком між спостереженням і розрахунком (прогнозом) за моделлю, тобто $e_t = y_t - \hat{y}_t$. Тому умовні математичні сподівання від усіх минулих значень випадкової складової треба замінити відповідними залишками. Так само буде прогнозу на 2 й більше кроків уперед. Усі майбутні ε замінюються нулями, а минулі — залишками, які можна обчислити. Отже, для моделі $MA(q)$ прогноз залежить від того, які похибки були на попередніх кроках. Починаючи із кроку $(q+1)$ умовний прогноз є математичним сподіванням θ , тобто умовний прогноз збігається з безумовним.

Умовна дисперсія помилки прогнозу на 1 крок випередження становить:

$$\begin{aligned} D(y_{t+1} - \hat{y}_t(1) | y_1, \dots, y_t) &= \\ &= M\{((\theta + \varepsilon_{t+1} + b_1\varepsilon_t + \dots + b_q\varepsilon_{t-q+1} - \\ &- \theta - b_1e_t - \dots - b_qe_{t-q+1}) | y_1, \dots, y_t)^2\} = \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Аналогічно дисперсія прогнозу на 2 кроки випередження дорівнює:

$$D(y_{t+2} - \hat{y}_{t+2} | y_1, \dots, y_t) = (1 + b_1^2)\sigma_\varepsilon^2, \quad (2.5.13)$$

а дисперсія на τ кроків становить

$$(1 + b_1^2 + \dots + b_\tau^2)\sigma_\varepsilon^2 \text{ для } \tau < q. \quad (2.5.14)$$

Якщо $\tau \geq q$, дисперсія помилки умовного прогнозу стає такою самою як і для безумовного прогнозу, тобто дорівнює дисперсії випадкового процесу y_t .

Прогноз за моделлю $AR(p)$: $y_t = \theta + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t$.
 Для прогнозу на один крок уперед можна записати:

$$\begin{aligned} \hat{y}_t(1) &= M\{y_{t+1} | y_1, \dots, y_t\} = \\ &= M\{\theta + a_1 y_t + \dots + a_p y_{t-p+1} + \varepsilon_{t+1} | y_1, \dots, y_t\} = \\ &= \theta + a_1 y_t + \dots + a_p y_{t-p+1} \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Тобто у рівняння моделі підставляють p минулих значень реалізації часового ряду. Для прогнозу на два кроки вперед отримують:

$$\begin{aligned} \hat{y}_t(2) &= M\{y_{t+2} | y_1, \dots, y_t\} = \\ &= M\{\theta + a_1 y_{t+1} + \dots + a_p y_{t-p+2} + \varepsilon_{t+2} | y_1, \dots, y_t\}. \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

Математичне сподівання від випадкової похибки ε знов дасть 0, умовне математичне сподівання від y_1, y_2, \dots, y_t дорівнює цим самим значенням, але до цього виразу входить умовне математичне сподівання від y_{t+1} , отримане на попередньому кроці. Можна підставити його вираз і отримати розгорнуту формулу через значення реалізації. Насправді зручніше розглядати рекурентне співвідношення, яке пов'язує послідовні значення прогнозу. Це співвідношення є лінійним різницеvim рівнянням порядку p , і його розв'язок прагне, якщо збільшується t , до величини $\frac{\theta}{1 - a_1 - \dots - a_p}$, тобто знов таки до безумовного прогнозу.

Умовну дисперсію помилки прогнозу розраховують аналогічно до випадку моделі ковзної середньої, але доведення стають досить громіздкими навіть для моделей невеликого порядку. Наприклад, для моделі $AR(2)$ без вільного члена прогноз на один крок випередження становить: $\hat{y}_t(1) = a_1 y_t + a_2 y_{t-1}$, та $y_{t+1} = a_1 y_t + a_2 y_{t-1} + \varepsilon_{t+1}$. Очевидно, що дисперсія помилки прогнозу на 1 крок дорівнює:

$$\begin{aligned} D(y_{t+1} - \hat{y}_t(1) | y_1, \dots, y_t) &= \\ &= M\{((\theta + \varepsilon_{t+1} + b_1 \varepsilon_t + \dots + b_q \varepsilon_{t-q+1} - \\ &- \theta - b_1 \varepsilon_t - \dots - b_q \varepsilon_{t-q+1}) | y_1, \dots, y_t)^2\} = \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

Для прогнозу на 2 кроки відповідно отримуємо:

$$\hat{y}_t(2) = a_1 \hat{y}_t(1) + a_2 y_t = a_1(a_1 y_t + a_2 y_{t-1}) + a_2 y_t,$$

$$y_{t+2} = a_1 y_{t+1} + a_2 y_t + \varepsilon_{t+2} = a_1(a_1 y_t + a_2 y_{t-1} + \varepsilon_{t+1}) + a_2 y_t + \varepsilon_{t+2}.$$

Дисперсія помилки прогнозу на 2 кроки випередження дорівнює:

$$(1 + b_1^2) \sigma_\varepsilon^2. \quad (2.5.18)$$

Для прогнозу на 3 кроки отримуємо:

$$\hat{y}_t(3) = a_1 \hat{y}_t(2) + a_2 \hat{y}_t(1) = a_1(a_1(a_1 y_t + a_2 y_{t-1}) + a_2 y_t) + a_2(a_1 y_t + a_2 y_{t-1}),$$

$$y_{t+3} = a_1 y_{t+2} + a_2 y_{t+1} + \varepsilon_{t+3} = a_1(a_1(a_1 y_t + a_2 y_{t-1} + \varepsilon_{t+1}) + a_2 y_t + \varepsilon_{t+2}) + a_2(a_1 y_t + a_2 y_{t-1} + \varepsilon_{t+1}) + \varepsilon_{t+3}.$$

Дисперсія помилки прогнозу на 3 кроки дорівнює:

$$(1 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1^2 b_2 + b_1^4) \sigma_\varepsilon^2. \quad (2.5.19)$$

Очевидно, що дисперсія помилки прогнозу збільшується з кожним кроком.

Значно простішими виходять вирази для дисперсії помилки прогнозу, якщо перейти від $AR(p)$ представлення до еквівалентного MA представлення: $y_t = \theta + \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \psi_q \varepsilon_{t-q} + \dots$ із необмеженою кількістю складових. Тоді дисперсію помилки прогнозу на τ кроків можна виразити формулою

$$\sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\tau-1} \psi_j^2 \quad (\psi_0 = 1). \quad (2.5.20)$$

Для загальної моделі $ARMA(p, q)$ потрібно об'єднати все те, про що говорилося вище. За моделлю, підставляючи туди для часу $[1, t]$ спостереження y_t та розраховані значення залишків, обчислюють прогнозовані значення y_t , а для майбутніх моментів часу — замінюють залишки нулями і замість y_t підставляють їхні прогнозовані значення. Дисперсію помилки прогнозу обчислюють за формулою (2.5.20).

Наприклад, для моделі $ARMA(1, 1)$:

$$y_t = (1 - aL)^{-1}(1 + bL)\varepsilon_t = (1 + aL + a^2L^2 + \dots)(1 + bL)\varepsilon_t = \varepsilon_t + \eta_1 \varepsilon_{t-1} + \eta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots,$$

де $\eta_1 = a + b$, $\eta_2 = a(a + b)$, ..., $\eta_k = a^{k-1}(a + b)$, починаючи з другого коефіцієнти спадають за геометричною прогресією. Звідси легко обчислити дисперсію помилки прогнозу на τ кроків:

$$\sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\tau-1} \eta_j^2 = \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \sum_{j=0}^{\tau-1} a^{2j} (a + b)^2 \right) = \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \frac{(a + b)(1 - a^{2\tau})}{1 - a^2} \right). \quad (2.5.21)$$

Для цієї моделі дисперсія помилки прогнозу асимптотично дорівнює дисперсії часового ряду.

В усіх розглянутих випадках умовний точковий прогноз асимптотично наближається до математичного сподівання ряду, а дисперсія помилки прогнозу — до дисперсії ряду. Це означає, що для стаціонарного процесу вплив наявної інформації на прогноз та його точність асимптотично спадає до нуля. До того ж за збільшення горизонту прогнозування дисперсія помилки не перевищує дисперсії часового ряду. Цей висновок, на жаль, є наслідком нереалістичного припущення про те, що коефіцієнти моделі відомі точно.

Приклад 2.5.1.

Користуючись методикою Бокса-Дженкінса, розрахувати прогноз чисельності населення в Україні на підставі часового ряду спостережень за 24 роки.

1. *Аналіз стаціонарності процесу та визначення порядку оператора різницевого перетворень d початкового ряду.* Для визначення порядку різницевого оператора використовували такі засоби, як візуальний аналіз графіків процесів y_t та його різницевого перетворення, порівняння автокореляційної та часткової автокореляційної функцій із відповідними функціями відомих (типових) ARIMA процесів, а також емпіричний критерій, сутність якого полягає в пошуку такого значення d , для якого середнє квадратичне відхилення ряду буде мінімальним. Із графіка залежності y_t від часу t (рис. 2.5.1) видно, що часовий ряд нестационарний. Тільки друге різницеве перетворення зводить початковий процес y_t до стаціонарного вигляду, про що свідчить рисунок 2.5.3. Із розрахунків описової статистики (табл. 2.5.2) можна дійти висновку, що мінімальне середньоквадратичне відхилення відповідає інтегрованому процесу другого порядку ($d = 2$). Із графіка (рис. 2.5.4) видно, що вибіркова автокореляційна функція експоненціально згасає, змінюючи знак, а часткова автокореляційна функція теж має згасаючий характер (рис. 2.5.5). Отже, ряд других різниць можна віднести до стаціонарного.

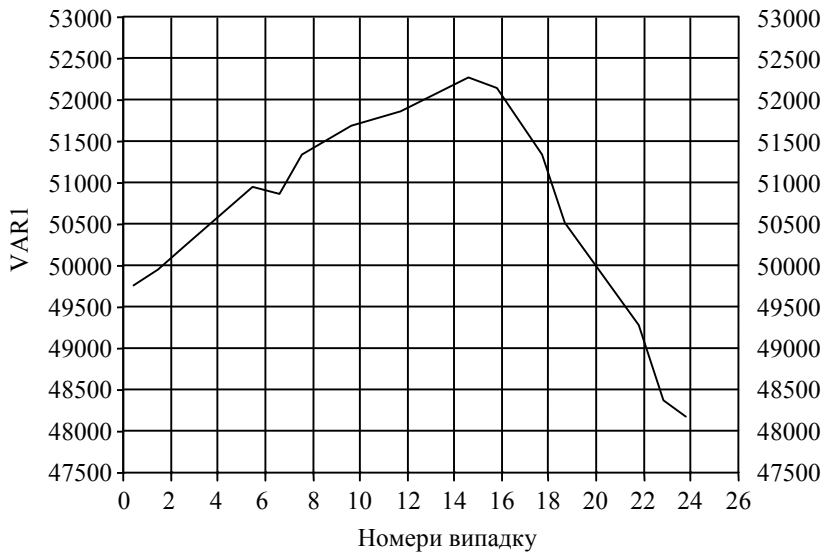


Рис. 2.5.1. Графік y_t
(VAR1 — чисельність населення за 24 роки)

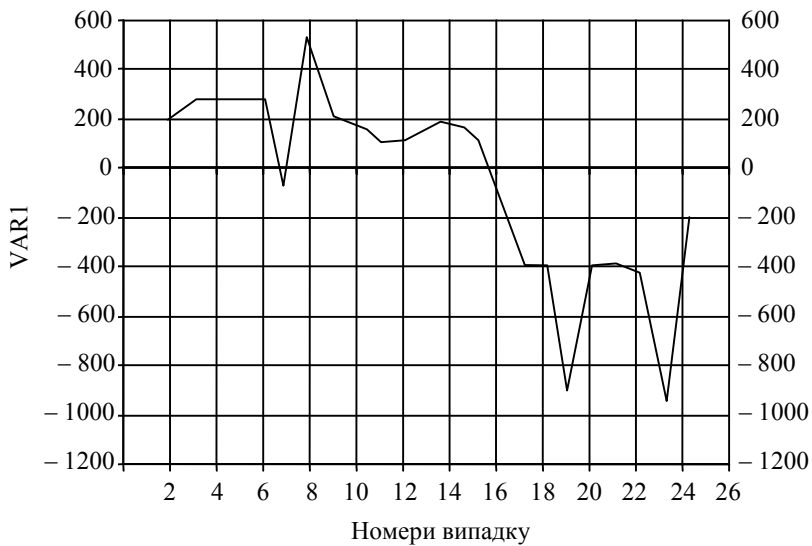


Рис. 2.5.2. Перші різниці Δy_t

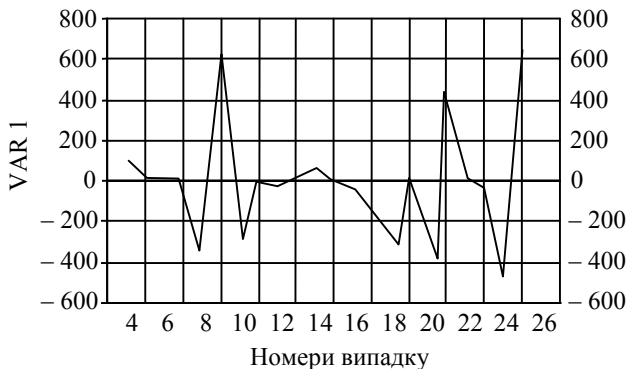


Рис. 2.5.3. Другі різниці $\Delta^2 y_t$

Таблиця 2.5.2

ОПИСОВА СТАТИСТИКА

Змінна	Середнє значення	Стандартне відхилення	min	max	Перший випадок	Другий випадок	N
VAR1	50 758,37	1137,026	48 202,5	52 200,0	1,000000	24,00000	24,00000
VAR1: D(- 1)	- 67,50	355,803	- 876,30	458,70	2,000000	24,00000	23,00000
VAR1: D(-1); D(- 1)	- 17,60	276,166	- 457,30	663,30	3,000000	24,00000	22,00000
VAR1: D(- 1); D(- 1); D(- 1)	28,02	456,691	- 826,90	1120,60	4,000000	24,00000	21,00000

2. Вибір параметрів p, q в $ARMA$ -моделі, яка представляє стаціонарний часовий ряд $\Delta^2 y_t$. Оскільки вибіркова АКФ (рис. 2.5.4) швидко згасає, а у вибірковій ЧАКФ (рис. 2.5.5) тільки значення з лагом 1 суттєво відрізняється від нуля, тобто після першого коефіцієнта вона різко обривається, можна зробити попередній висновок, що модель має характеристики $ARIMA(1,2,0)$. Зазначимо, що вибіркові АКФ та ЧАКФ є спроможними оцінками теоретичних АКФ та ЧАКФ, але точність їх залежить від довжини ряду спостережень. Тому в процесі оцінювання потрібно застосувати ще кілька видів $ARIMA$ -моделей.

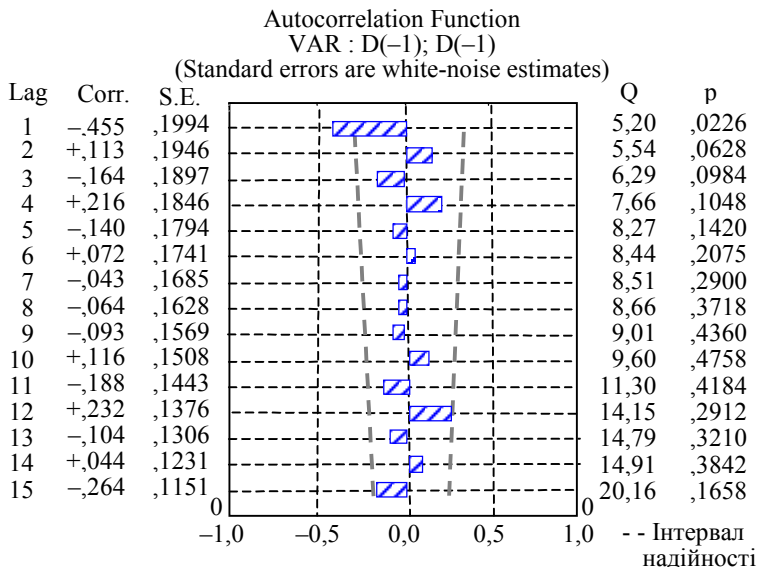


Рис. 2.5.4. АКФ процесу $\Delta^2 y_t$

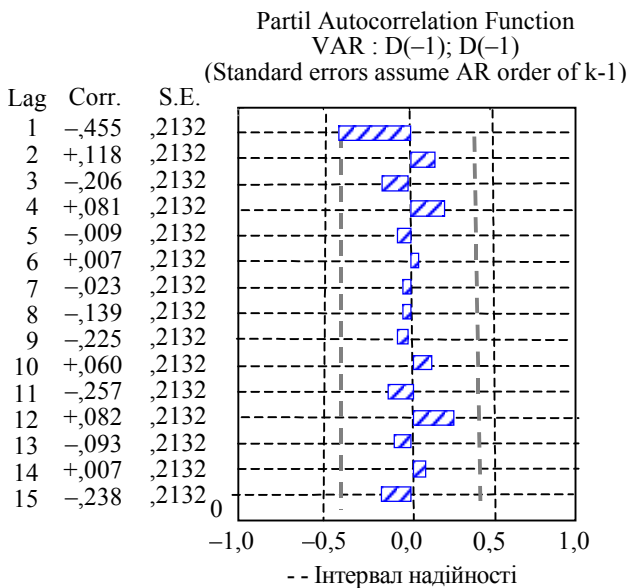


Рис. 2.5.5. ЧАКФ процесу $\Delta^2 y_t$

3. Оцінювання параметрів ARIMA-моделі здійснювали за допомогою спеціалізованого пакету STATISTICA. В результаті отримали таку прогнозову модель (табл. 2.5.3):

$$\hat{y}_t = -31,2447 - 0,6543y_{t-1}; \text{MSE} = 56238;$$

$$s_a = 0,23; t_a = -2,839; -1,135 \leq a \leq -0,174.$$

Таблиця 2.5.3

РЕЗУЛЬТАТИ ОЦІНЮВАННЯ ARIMA(1,2,0)-МОДЕЛІ

	Параметри	Asympt. Std.Err.	Asympt. Std.Err.	<i>p</i>	Нижня межа 95 %	Верхня межа 95 %
Постійна	- 31,2447	31,94315	- 0,97813	0,339692	- 97,8769	35,38755
<i>a</i> (1)	- 0,6543	0,23047	- 2,83919	0,010137	- 1,1351	- 0,17359

Корінь із середньоквадратичної похибки (*MSE*) дорівнює 237,2; що становить 0,4 % від середнього значення показника.

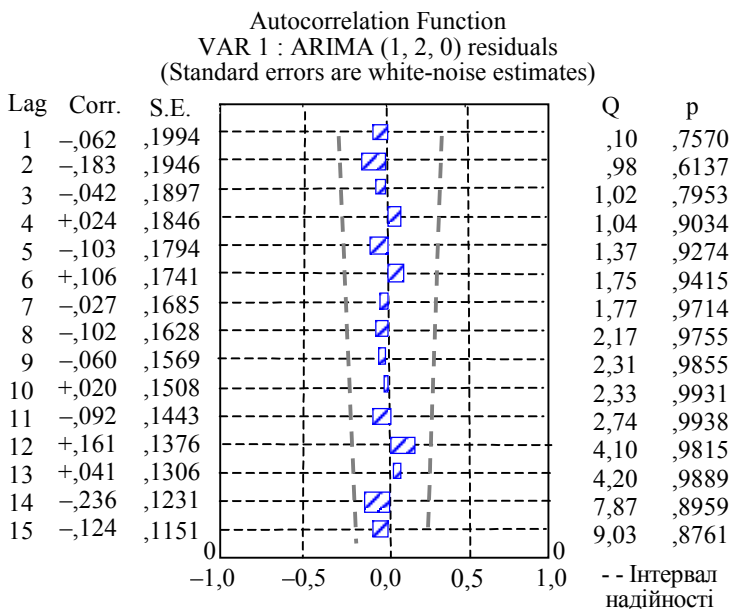


Рис. 2.5.6. АКФ залишків

Partial Autocorrelation Function
 VAR 1 : ARIMA (1, 2, 0) residuals
 (Standard errors assume AR order of k-1)

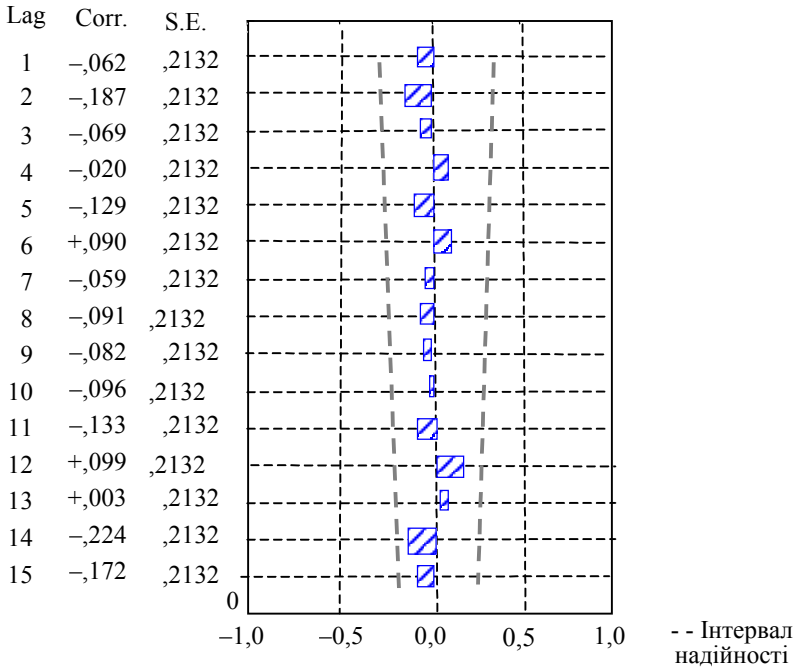


Рис. 2.5.7. ЧАКФ залишків

4. *Перевірку адекватності моделі* здійснювали за допомогою аналізу залишків і порівняння їх автокореляційної та часткової автокореляційної функцій із відповідними функціями для процесу «білого шуму». Із графіків АКФ та ЧАКФ видно (рис. 2.5.6—2.5.7), що ряд залишків нагадує процес «білого шуму», тобто немає періодичних коливань, систематичного зсуву та значущих кореляцій між ним. Про це також свідчить описова статистика ряду залишків. Гістограма залишків (рис. 2.5.8) із накладеним графіком нормальної щільності розподілу доводить симетричність і близькість їх до нормального розподілу. Аналогічний висновок випливає із графіка залишків, побудованого за нормальною ймовірнісною шкалою (рис. 2.5.9). Отже, модель доволі адекватно описує вхідний ряд.

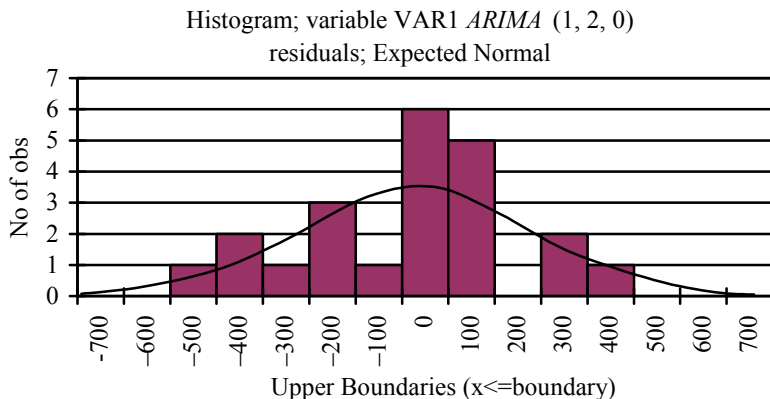


Рис. 2.5.8. Гістограма залишків

Побудова стандартної VAR1 *ARIMA* (1, 2, 0) residuals

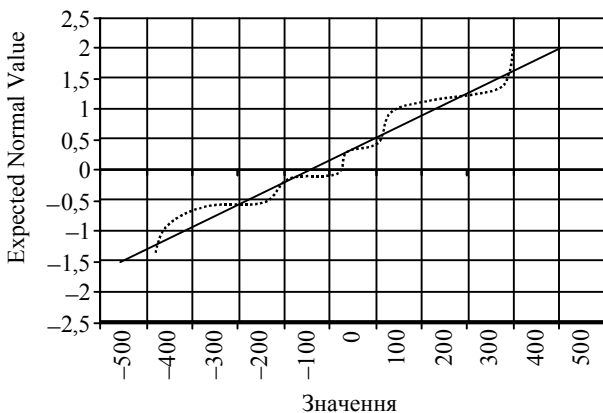


Рис. 2.5.9. Графік залишків за шкалою *ARIMA*(1, 2, 0)-моделі нормальної імовірності

Про високу точність прогнозової моделі свідчить її верифікація за допомогою так званого *EX POST*-прогнозування. Похибка прогнозу за критерієм *MAPE* (середньої абсолютної відсоткової похибки) становила 0,2 %.

5. *Прогнозування часового ряду* чисельності населення на підставі побудованої моделі ілюструє графік на рис. 2.5.10. Оцінки стандартних похибок апроксимації прогнозу на наступні десять років не перевищують 10 % (табл. 2.5.4).

Forecasts; Model: (1, 2, 0) Сезонне запізнювання 12 Вхід:
Start of origin: 1 End of origin: 24

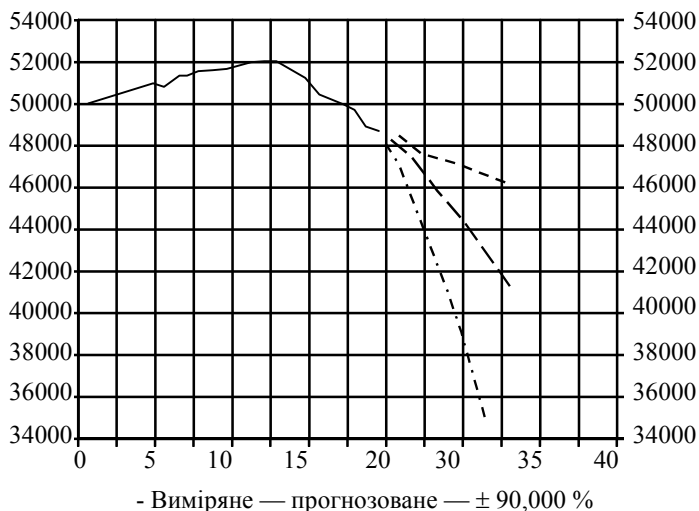


Рис. 2.5.10. Прогноз чисельності населення України на підставі побудованої моделі

Таблиця 2.5.4

**ПРОГНОЗ ЧИСЕЛЬНОСТІ НАСЕЛЕННЯ УКРАЇНИ
НА 10-РІЧНИЙ ПЕРІОД ВИПЕРЕДЖЕННЯ**

Forecasts; Model:(1,2,0) Вхід: Start of origin: 1 End of origin: 24				
	Прогноз	Нижня межа 90,00 %	Верхня межа 90,00 %	Std.Err.
25	47503,79	47094,78	47912,80	237,145
26	47071,21	46385,49	47756,93	397,585
27	46412,80	45307,49	47518,11	640,863
28	45850,47	44312,93	47388,01	891,475
29	45173,58	43130,32	47216,84	1184,693
30	44519,96	41941,03	47098,89	1495,276
31	43799,43	40635,19	46963,67	1834,641
32	43070,99	39288,51	46853,47	2193,100
33	42296,04	37856,11	46735,97	2574,294
34	41499,83	36370,37	46629,29	2974,084

3 Прогнозування тенденції на основі згладжування часових рядів

Задача згладжування часового ряду має таке формулювання. Для реалізації (часового ряду) y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) деякого випадкового процесу ξ_i потрібно найкращим чином визначити оцінку деякої не випадкової компоненти (тренду) \hat{y}_i , яка в кожен фіксований момент часу є середнім значенням випадкової величини ξ_i і відображає основні закономірності зміни досліджуваного показника в часі.

3.1. Прогнозування тенденції часового ряду за середніми характеристиками

Найпростішим способом прогнозування вважається підхід, який визначає прогнозну оцінку від фактично досягнутого рівня за допомогою середнього рівня, середнього приросту, середнього темпу зростання.

Екстраполяція на основі середнього рівня ряду. Під час екстраполяції соціально-економічних процесів на основі середнього рівня ряду прогнозоване значення беруть як середнє арифметичне значення попередніх рівнів ряду, тобто точковий прогноз $\hat{y}_n(\tau)$, зроблений у момент часу $t = n$ на період упередження τ , розраховують за формулою:

$$\hat{y}_n(\tau) = \bar{y}. \quad (3.1.1)$$

Інтервал надійності для прогнозу середньої за невеликої кількості спостережень визначається як

$$\hat{y}_n(\tau) \pm t_\alpha \hat{\sigma}_{\bar{y}}, \quad (3.1.2)$$

де t_α — критичне значення t — критерію Стьюдента із $n - 1$ ступенями свободи й рівнем значущості α ; $\hat{\sigma}_{\bar{y}}$ — оцінка середньої квадратичної похибки середнього ($\hat{\sigma}_{\bar{y}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$, де $\hat{\sigma}$ — оцінка середньо-кватратичного відхилення спостережень).

Отриманий інтервал надійності враховує невизначеність, приховану в оцінці середньої величини. Однак залишається припущення, що прогнозований показник дорівнює середньому вибірковому значенню, тобто за такого підходу не зважають на те, що окремі значення показника коливалися навкруги середнього в минулому, і це також відбуватиметься в майбутньому. Отже, загальна дисперсія включає коливання вибіркової середньої та коливання індивідуальних значень навколо середнього і становить величину $\hat{\sigma}^2 + \frac{\hat{\sigma}^2}{n}$, а інтервал надійності для прогнозованої оцінки ряду дорівнює:

$$\hat{y}_n(\tau) \pm t_\alpha \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}. \quad (3.1.3)$$

Екстраполяцію за середнім абсолютним приростом можна бути виконати в тому разі, коли загальна тенденція розвитку вважається лінійною. Прогнозову оцінку $\hat{y}_n(\tau)$ одержують за формулою:

$$\hat{y}_n(\tau) = y_n + \tau \cdot \overline{\Delta y}, \quad (3.1.4)$$

де $\overline{\Delta y}$ — середній абсолютний приріст.

Екстраполяцію за середнім темпом зростання можна виконувати у разі, коли є підстави вважати, що загальна тенденція динамічного ряду характеризується експоненціальною кривою. Прогноз $\hat{y}_n(\tau)$, зроблений у момент часу $t = n$ на період випередження τ , у цьому разі розраховують за формулою:

$$\hat{y}_n(\tau) = y_n \cdot \overline{T}_{зр}^\tau, \quad (3.1.5)$$

де $\overline{T}_{зр}$ — середній темп зростання, розрахований за середньою геометричною (1.1.8).

Інтервал надійності прогнозу за середнім абсолютним приростом і середнім темпом зростання можна одержати лише тоді, коли ці середні визначаються за допомогою статистичного оцінювання параметрів відповідно лінійної та експоненціальної кривої (див. 3.2).

Усі три способи привертають увагу багатьох працівників статистичних органів завдяки своїй простоті та легкості реалізації.

Однак, крім зазначених позитивних якостей, вони мають кілька суттєвих недоліків. По-перше, всі фактичні спостереження є результатом закономірності та випадковості, отже, виходити тільки з останнього спостереження неправильно. По-друге, немає можливості оцінити слушність використання середньої характеристики ряду в кожному конкретному випадку. По-третє, не завжди можна розрахувати інтервал надійності, до якого потрапляє прогнозована величина, і визначити його ймовірність. У зв'язку із цим екстраполяцію за середніми характеристиками ряду застосовують лише як орієнтир майбутнього розвитку або якщо неможливо використати інші статистичні методи (наприклад, за дуже малої кількості спостережень).

3.2. Прогнозування тенденції часового ряду за аналітичними методами згладжування

До методів аналітичного згладжування відносять регресійний аналіз разом із методом найменших квадратів та його модифікаціями. Виявити основну тенденцію аналітичним методом — означає надати досліджуваному процесу однакового розвитку впродовж усього часу спостереження. Тому для цих методів важливо обрати оптимальну функцію детермінованого тренду v_t (кривої зростання), яка згладжує ряд спостережень y_t .

Регресійний аналіз. Оцінювання параметрів кривих зростання здійснюють на підставі побудови моделі регресії, в якій пояснювальною змінною є час:

$$y_t = v_t + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2.1)$$

де v_t — функція тренду (крива зростання);

ε_t — невідомі випадкові похибки.

Виходячи з теоретичних міркувань крива зростання може описуватися будь-якою математичною функцією v_t . Оцінювання цієї функціональної залежності здійснюють за вибірковими спостереженнями $\{t, y_t\}$, $t = 1, 2, \dots, n$, а вибір методу оцінювання залежить від виду кривої й стохастичного походження випадкових похибок ε_t . Якщо функція v_t лінійна за параметрами, наприклад, має вигляд алгебраїчного полінома ступеня p :

$$v_t = a_0 + a_1 t + \dots + a_p t^p, \quad (3.2.2)$$

і при цьому довжина часового ряду n суттєво перевищує ступінь полінома p , а випадкові залишки ε_t мають властивості «білого шуму», тобто

$$\begin{aligned} M(\varepsilon_t) &= 0, \\ M(\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}) &= \begin{cases} \sigma^2, & \text{якщо } k = 0, \\ 0, & \text{якщо } k \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

тоді оцінки \hat{a} параметрів a можна одержати методом найменших квадратів (МНК). МНК-оцінки параметрів лінійної регресії за умови мінімізації суми квадратів відхилень точок вхідного часового ряду y_t від їхніх згладжених значень \hat{y}_t :

$$S = \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 t - \dots - \hat{a}_p t^p)^2 \quad (3.2.4)$$

обчислюють за формулою:

$$\hat{A} = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (3.2.5)$$

де \hat{A} — вектор оцінок параметрів моделі; $\hat{A}^T = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p)$

X — матриця значень спостережень пояснювальних змінних розмірністю $n \times (p+1)$, яка у разі (3.2.2) має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^p \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^p \end{pmatrix},$$

— вектор-стовпчик спостережень залежної змінної $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$.

Побудована модель прогнозу має супроводжуватися додатковою інформацією стосовно її точності та адекватності. Якщо умова сталості дисперсії та взаємної незалежності випадкових похибок моделі (3.2.3) не виконується, застосовують узагальнений МНК; модель, у якій функція v_t є нелінійною за параметрами, потребує техніки статистичного аналізу нелінійних моделей регресії тощо.

Для розрахунку в момент часу $t = n$ прогнозової оцінки $\hat{y}_n(\tau)$ на період випередження τ потрібно оцінити параметри лінійного

тренду \hat{A} та підставити їх у рівняння тренду (наприклад, (3.2.2)), де $t = n + \tau$.

Методи, розроблені для статистичних сукупностей, уможливають визначення інтервалу надійності прогнозу, який залежить від стандартної похибки оцінки прогнозованого показника, від часу випередження прогнозу, від довжини прогнозової бази та обраного рівня значущості.

Наприклад, у разі прямолінійного тренду інтервал надійності прогнозу U_y має вигляд

$$U_y = \hat{y}_n(\tau) \pm t_\alpha \hat{\sigma}_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n+2\tau-1)^2}{n(n^2-1)}}, \quad (3.2.6)$$

де τ — період випередження;

$\hat{y}_n(\tau)$ — точковий прогноз на момент часу $n + \tau$;

n — кількість спостережень у часовому ряду (довжина прогнозової бази);

$\hat{\sigma}_y$ — оцінка стандартної похибки (середньоквадратичною ві-

дхилення) оцінки \hat{y}_t , $\hat{\sigma}_y = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{n-2}}$;

t_α — табличне значення критерію Стьюдента для рівня значущості α і числа ступенів свободи $n-2$.

Іноді для розрахунку інтервалів надійності прогнозу відносно лінійного тренду застосовують наведену вище формулу в дещо перетвореному вигляді:

$$U_y = \hat{y}_n(\tau) \pm t_\alpha \hat{\sigma}_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(t_\tau - \bar{t})^2}{\sum (t - \bar{t})^2}},$$

або

$$U_y = \hat{y}_n(\tau) \pm t_\alpha \hat{\sigma}_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{t_\tau^2}{\sum t^2}}, \quad (3.2.7)$$

якщо перенести початок відліку часу на середину періоду спостережень ($\bar{t} = 0$), де t — порядковий номер рівня ряду ($t = 1, 2, \dots, n$); $n + \tau - t$ — час, для якого здійснюють прогноз; t — час, що відпо-

відає середині періоду спостережень вхідного ряду; підсумок робиться за всіма спостереженнями.

Формула для розрахунку інтервалів надійності прогнозу відносно тренду, який має вид полінома другого або третього порядку, виглядає так:

$$U_y = \hat{y}_n(\tau) \pm t_\alpha \hat{\sigma}_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{t_\tau^2}{\sum t^2} + \frac{\sum t^4 - 2t_\tau^2 \sum t^2 + nt_\tau^4}{n \sum t^4 - (\sum t^2)^2}}. \quad (3.2.8)$$

Аналогічно розраховують інтервали надійності для кривих зростання, які можна звести до лінійної функції.

Розглянутий розрахунок інтервалів надійності прогнозів на підставі кривих зростання, що ґрунтується на висновках і формулах теорії регресійного аналізу, для часових рядів не зовсім правомірний, оскільки динамічні ряди, як уже зазначалося, відрізняються від статистичних сукупностей. Тому до оцінювання інтервалів надійності для кривих зростання слід підходити з певною обережністю. Якщо припустити, що випадкова змінна ε_t ($y_{t+\tau} - \hat{y}_t(\tau) = \varepsilon_t$) є стаціонарним часовим рядом, то похибка прогнозу становитиме

$$y_{t+\tau} - \hat{y}_t(\tau) = \varepsilon_{t+\tau} + b_1 \varepsilon_{t+\tau-1} + b_2 \varepsilon_{t+\tau-2} + \dots + b_{\tau-1} \varepsilon_{t+1}. \quad (3.2.9)$$

Звідси

$$MSE = M(y_{t+\tau} - \hat{y}_t(\tau))^2 = (1 + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{\tau-1}^2) \sigma_\varepsilon^2. \quad (3.2.10)$$

Динамічним мультиплікатором збурення ε_t , тобто величиною, яка показує, на скільки зміниться значення часового ряду через τ періодів залежно від поточного збурення, є $\frac{\partial y_{t+\tau}}{\partial \varepsilon_t} = b_\tau$. Очевидно, що вплив збурення буде спадати з часом, тому $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial y_{t+\tau}}{\partial \varepsilon_t} = 0$.

Методи прогнозування, ґрунтовані на методах регресії, використовують для короткотермінового та середньострокового прогнозування. Вони не допускають адаптації: з отриманням нових даних процедура побудови прогнозу має повторюватися спочатку. Оптимальна довжина періоду випередження визначається окремо для кожного економічного процесу з урахуванням його статистичної нестабільності. Ця довжина, як правило, не пере-

вищує для рядів річних спостережень третини обсягу даних, а для квартальних і місячних рядів — двох років.

Види кривих зростання. Для відображення економічних процесів існує велика кількість видів кривих зростання. Щоб правильно підібрати найдоцільнішу криву для моделювання й прогнозування економічного явища, необхідно знати особливості кожного виду кривих. Криві зростання описують різні тенденції економічних процесів, наприклад, життєвий цикл товару, процес нагромадження капіталу, маркетингові зусилля фірм тощо. В економічній практиці вже здобуто певний досвід і розроблено певні типи кривих, які найчастіше використовують у соціально-економічних дослідженнях. До таких кривих належать: поліноміальні, експоненціальні та S -подібні криві зростання.

Поліноміальні криві зростання можна використовувати для апроксимації (наближення) та прогнозування економічних процесів, у яких майбутній розвиток не залежить від досягнутого рівня. Простіші поліноміальні криві зростання мають вигляд:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t \quad (\text{поліном першого ступеня}),$$

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (\text{поліном другого ступеня}), \quad (3.2.11)$$

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (\text{поліном третього ступеня}) \text{ тощо.}$$

Поліноміальні моделі лінійні за параметрами. Параметри цих моделей (лінійної, квадратичної, полінома третього ступеня) мають такі економічні тлумачення: a_1 — лінійний приріст, a_2 — прискорення зростання, a_3 — характеризує динаміку прискорення зростання.

Для полінома першого ступеня характерний постійний приріст. Якщо обчислити перші прирости за формулою $\Delta_t^1 = y_t - y_{t-1}$, $t = 2, 3, \dots, n$, то вони будуть постійними величинами та дорівнюватимуть a_1 .

Якщо перші прирости обчислити для полінома другого ступеня, то вони матимуть лінійну залежність від часу і ряд із перших приростів $\Delta_1^1, \Delta_2^1, \dots$ на графіку буде представлений прямою лінією. Другі прирости $\Delta_t^2 = \Delta_t^1 - \Delta_{t-1}^1$ для полінома другого ступеня будуть постійними.

Для полінома третього ступеня перші прирости будуть поліномами другого ступеня, другі прирости будуть лінійною функ-

цією часу, а треті прирости, які обчислюють за формулою $\Delta_t^3 = \Delta_t^2 - \Delta_{t-1}^2$, будуть постійними величинами.

Звідси можна відзначити такі властивості поліноміальних кривих зростання:

- від полінома високого ступеня шляхом розрахунку послідовних різниць (приростів) можна перейти до полінома нижчого порядку;

- значення приростів для поліномів будь-якого порядку є сталими величинами.

Експоненціальні криві використовують для зображення швидко зростаючих або спадних економічних процесів. Використання експоненціальних кривих зростання передбачає, що майбутній розвиток залежить від досягнутого рівня, тобто приріст залежить від значення функції.

В економіці використовують два різновиди експоненціальних кривих: просту експоненту та модифіковану експоненти.

Проста експонента може набувати різноманітних еквівалентних форм.

$$\hat{y}_t = ab^t, \text{ основна форма } b > 0. \quad (3.2.12)$$

$$\hat{y}_t = ae^{\beta t}, b \text{ замінюємо на } e^\beta, \text{ де } \beta = \ln(b). \quad (3.2.13)$$

$$\hat{y}_t = a(1-r)^t, b \text{ замінюємо на } (1-r), \text{ де } r = b-1. \quad (3.2.14)$$

$$\hat{y}_t = e^{\alpha+\beta t}, \text{ де } a \text{ замінюємо на } e^\alpha, \text{ і } b \text{ на } e^\beta. \quad (3.2.15)$$

$$\hat{y}_t = 10^{\alpha+\beta t}, \text{ де } a \text{ замінюємо на } 10^\alpha, \text{ і } b \text{ на } 10^\beta, \quad (3.2.16)$$

де a й b — додатні числа, при цьому якщо $b > 1$, то функція зростає, якщо $b < 1$ — спадає.

Усі ці форми використовують на практиці для описання різних економічних процесів, наприклад, форму (3.2.14) найчастіше використовують у фінансах, де r означає норму річного відсотка.

Логарифми ординат простої експоненти лінійно залежать від часу. Наприклад, для функції (3.2.12) $\ln \hat{y}_t = \ln a + t \ln b$, тобто темп зростання постійний для будь-якого моменту часу. Якщо ця крива застосовується для зображення інфляції, то коефіцієнт b буде характеризувати темп інфляції. Можна помітити, що ордината ці-

єї функції змінюється з постійним темпом приросту. Якщо взяти відношення приросту до самої ординати, то воно буде сталою величиною: $\frac{\Delta_t^1}{y_t} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_t} = 1 - \frac{1}{b}$.

Модифікована експонента має вигляд:

$$\hat{y}_t = a + bc^t, \quad (3.2.17)$$

де постійні величини: $b < 0$, $0 < c < 1$, а константа a має назву асимптоти цієї функції, тобто значення функції необмежено наближаються (знизу) до величини a . Можуть бути й інші варіанти модифікованої експоненти, але на практиці найчастіше трапляється розглянута вище функція. Наприклад, якщо на ринку з'являється новий товар, який супроводжується широкою рекламою, то спочатку попит на цей товар буде досить великий і швидкість продажу товару буде значною. Із часом продаж буде стабілізуватися та дійде до певного рівня насичення. У таких випадках фаза уповільненого зростання відсутня, і найкраще згладжування дасть модифікована експонента.

Логарифми перших приростів цієї функції лінійно залежать від часу, а якщо взяти відношення двох послідовних приростів,

то воно буде сталою величиною: $\frac{\Delta_t^1}{\Delta_{t-1}^1} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1} - y_{t-2}} = c$.

Модифікована експонента слугує базовою кривою, на підставі якої за допомогою певних перетворень отримують криву Гомперця (3.2.23) і логістичну криву (3.2.24), які використовують частіше.

Степенева крива. Рівняння степеневі кривої має вигляд:

$$\hat{y}_t = at^b. \quad (3.2.18)$$

Степенева крива добре згладжує показники, які з часом монотонно зростають, якщо $b > 0$, або спадають, якщо $b < 0$. Зокрема, за $b = -1$, $\hat{y}_t = a/t$. Це рівняння задає гіперболу, асимптотами якої є вісі координат, а добуток змінних є сталою величиною ($\hat{y}_t \cdot t = a$). В економіці такій умові задовольняє крива попиту з одиничною еластичністю: відсоток збільшення одиниці часу t на такий самий відсоток зменшує залежну змінну \hat{y}_t . На практиці

степеневі функції використовують для зображення різноманітних економічних процесів. Найвідомішою з них є виробнича функція Кобба-Дугласа. Крім того, вони застосовуються для зображення кривих байдужості, а також попиту на товари різних категорій (так звана крива Торнквіста) тощо.

Гіперболічна крива I типу. Звичайна гіпербола задається рівнянням:

$$\hat{y}_t = a + b/t. \quad (3.2.19)$$

Для цього типу гіперболи за $b > 0$ значення \hat{y}_t зменшується мірою зростання t і асимптотично наближається до a . Такого виду криву можна застосовувати для вирівнювання й прогнозування показника, який із часом спадає до певного відмінного від нуля рівня.

За $b < 0$ значення \hat{y}_t додатне, тільки якщо $t > b/a$; збільшення t приводить у цьому випадку і до збільшення \hat{y}_t з асимптотичною межею, що дорівнює a . Таким типом гіперболи доцільно зображувати зростаючі процеси з насиченням.

Гіперболічна крива II типу. Цей тип гіперболи задається рівнянням

$$\hat{y}_t = 1/(a + bt) \quad (3.2.20)$$

За $b > 0$ значення \hat{y}_t прагнуть до нуля у разі необмеженого збільшення часу t ; за $b < 0$ значення \hat{y}_t прагне до нескінченності, якщо t наближається до a/b . Остання ситуація на практиці мало ймовірна.

Гіперболічна крива III типу (проста раціональна залежність). Задається рівнянням

$$\hat{y}_t = t/(a + bt). \quad (3.2.21)$$

Для цього типу гіперболи незалежно від коефіцієнта b за $t = 0$ $\hat{y}_t = 0$. Для додатних значень b значення \hat{y}_t зростає та асимптотично прагне до величини $1/b$ за необмеженого збільшення t . За

від'ємного b ця крива, як і гіпербола другого типу, стає нестійкою за $t = a/b$.

S-подібна крива. В економіці поширені процеси, які спочатку поступово зростають, прискорюються, а потім знов уповільнюються свій розвиток, прагнучи певної межі. Наприклад, процес введення промислового об'єкта до експлуатації або зміна попиту на товари, що мають межу насичення тощо. Для моделювання таких процесів використовують так звані S-подібні криві зростання, які мають вигляд:

$$\hat{y}_t = e^{a+b/t} \quad (3.2.22)$$

Насправді ця крива має форму S тільки за від'ємного значення b та за умов, що його абсолютне значення більше за a . Якщо крива (3.2.22) справді має форму S, вона використовується для зображення повного циклу розвитку динамічних процесів. Повний цикл таких процесів починається з повільного зростання, потім настає фаза бурхливого розвитку і, нарешті, розвиток завершується періодом насичення (тобто асимптотичного наближення до величини e^a). Таке чергування фаз властиве багатьом соціально-економічним процесам. Для S-подібної кривої точку перегину, в якій швидкість зростання досягає максимального значення, знаходять розв'язок рівняння $f''(t) = 0$, де $f''(t)$ — друга похідна за t кривою $f(t)$. Для S-подібної кривої точкою перегину, тобто точкою, в якій зростання коефіцієнта нахилу дотичної змінюється спадом, буде точка $t = -b/2$. Утім, на практиці для опису таких процесів замість S-подібної кривої використовують більш гнучкі й адекватні криві: Гомперця та логістичну.

Крива Гомперця має такий аналітичний вираз:

$$\hat{y}_t = ab^{c^t}, \quad (3.2.23)$$

де c, b — додатні параметри, причому $c < 1$; параметр a — асимптота функції.

У кривій Гомперця виокремлюють чотири ділянки: на першій приріст функції незначний, на другій — збільшується, на третій ділянці приріст майже постійний, на четвертій — відбувається вповільнення темпів приросту, і функція необмежено наближається до значення a . В результаті конфігурація кривої нагадує латин-

ську літеру S . Точкою перегину цієї кривої буде $t_p = \frac{1}{\ln c} \ln\left(-\frac{1}{\ln b}\right)$

зі значенням функції \hat{y}_{t_p} , яке дорівнює $\hat{y}_{t_p} = a/e$, де $e = 2,71828$.

Логарифм цієї функції ($\ln \hat{y}_t = \ln a + c^t \ln b$) є модифікованою експонентою; логарифм відношення першого приросту до самої ординати функції лінійною функцією часу.

На підставі кривої Гомперця будується, наприклад, динаміка показників рівня життя; модифікації цієї кривої використовують у демографії для моделювання показника смертності тощо.

Логістична крива, або крива Перла-Ріда — зростаюча функція, яку найчастіше записують у вигляді

$$\hat{y}_t = \frac{1}{a + bc^t}. \quad (3.2.24)$$

У цьому виразі b і c — додатні параметри; a — граничне значення функції за нескінченного зростання часу.

Якщо взяти похідну від цієї функції, можна побачити, що швидкість зростання логістичної кривої у будь-який момент часу пропорційна досягнутому рівню функції й різниці між граничним значенням a і досягнутим рівнем. Логарифм відношення першого приросту функції до квадрата її значення (ординати) є лінійною функцією від часу.

Конфігурація графіка логістичної кривої близька до графіка кривої Гомперця, але, на відміну від останнього, логістична крива має точку симетрії, яка збігається із точкою перегину. Точка перегину дорівнює $t_p = \frac{1}{\ln c} \ln \frac{a}{b}$. Значення \hat{y}_{t_p} у точці перегину

дорівнює $\hat{y}_{t_p} = \frac{1}{2} a$.

Метод найменших квадратів і процедури регресійного аналізу є доцільними для випадку, коли рівняння кривої зростання \hat{y}_t після деяких перетворень можна звести до лінійної регресії. У таблиці 3.2.1. наведено криві зростання, які найчастіше спостерігаються в соціально-економічних дослідженнях, їхні математичні функції \hat{y}_t та перетворення, необхідні для зведення функцій до лінійного вигляду.

ВИДИ КРИВИХ ЗРОСТАННЯ

Основні види кривих зростання	Математична функція	Лінеаризація функції
1	2	3
Лінійна (поліном першого ступеня)	$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$	Не потрібна
Квадратична (поліном другого ступеня)	$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$	$\hat{y}_t = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2$
Поліном третього ступеня	$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$	$\hat{y}_t = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3$
Експонента (проста)	$\hat{y}_t = a e^{bt}$	$\ln \hat{y}_t = \ln a + bt$
Логарифмічна крива	$\hat{y}_t = a + b \cdot \ln t$	$\hat{y}_t = a + bt, t = \ln t$
S-подібна крива	$\hat{y}_t = e^{a+b/t}$	$\ln \hat{y}_t = a + b/t$
Обернена логарифмічна крива	$\hat{y}_t = \frac{1}{a + b \ln t}$	$Y = \frac{1}{y}, \hat{Y} = a + bz, z = \ln t$
Степенева	$\hat{y} = at^b$	$\ln \hat{y} = \ln a + b \ln t$
Гіперболічна крива I типу	$\hat{y} = a + b/t$	$\hat{y} = a + bz, z = 1/t$
Гіперболічна крива II типу	$\hat{y} = \frac{1}{a + bt}$	$Y = \frac{1}{y}, \hat{Y} = a + bt$
Гіперболічна крива III типу	$\hat{y}_t = \frac{t}{a + bt}$	$Y = \frac{1}{y}, \hat{Y} = a'z + b',$ $a' = b, b' = a, z = \frac{1}{t}$

1	2	3
Модифікована експонента	$\hat{y} = a + bc^t$	$c = \frac{(n-1)\sum_{t=0}^{n-1} y_t y_{t+1} - \sum_{t=1}^{n-1} y_t \sum_{t=1}^{n-1} y_{t+1}}{(n-1)\sum_{t=1}^{n-1} y_t^2 - (\sum_{t=1}^{n-1} y_t)^2};$ $b = \frac{n\sum c^t y_t - \sum c^t \sum y_t}{n\sum c^{2t} - (\sum c^t)^2};$ $a = \frac{\sum y_t - b\sum c^t}{n}$
Крива Гомперця	$\hat{y} = ab^{c^t}$	$\ln \hat{y} = \ln a + c^t \ln b$
Логістична крива	$\hat{y} = \frac{1}{a + bc^t}$	$Y = \frac{1}{y}, \hat{Y} = a + bc^t$

Як видно з таблиці 3.2.1, у практиці криволінійного вирівнювання широко використовують два види перетворень: логарифмування ($\ln y$) і зворотне перетворення $\left(\frac{1}{t}\right)$. При цьому можливі перетворення як залежної змінної y , так і незалежної t або обох одночасно. Параметри S-подібних кривих (Гомперця та логістичної кривої) визначаються складнішим способом. Їх можна отримати із модифікованої експоненти, так само, як були отримані зі звичайної лінійної регресії криві, розглянуті раніше. Криві, побудовані за модифікованою експонентою, задаються трьома параметрами (замість двох параметрів у лінійній залежності). Спочатку визначають параметр c , а потім два інші параметри: a та b . У табл. 3.2.1 наведено відповідні перетворення функції Гомперця та логістичної кривої на модифіковану експоненту.

Апроксимація спостережень складними функціями дає задовільне наближення до фактичних спостережень, але зменшує сталість моделі на інтервалі упередження прогнозу. Тому використовувати для прогнозування такі моделі (наприклад, поліном вище другого ступеня) слід обережно. В комп'ютерних програмах використовують близько двох десятків моделей. Зазначимо, що пошук параметрів функції Гомперця та логістичної кривої, через неможливість їхньої лінеаризації здійснюють методом багатовимірної числової оптимізації.

Вибір кривої зростання. Правильно встановити вид кривої, тобто вид аналітичної залежності значення показника від часу — одне з найважчих завдань. Обрана функція тренду має задовольняти такі умови: бути теоретично обґрунтованою; мати якнайменшу кількість параметрів; параметри функції повинні мати економічне тлумачення; оцінені значення тренду мають якомога менше відрізнитися від відповідних фактичних спостережень часового ряду.

Вибір форми кривої для згладжування певною мірою залежить від мети згладжування: інтерполяції або екстраполяції. У першому випадку метою є досягнення найбільшої близькості до фактичних рівнів часового ряду. У другому — виявлення основної закономірності розвитку явища, стосовно якої можна припустити, що в майбутньому вона збережеться.

В основі вибору кривої лежить теоретичний аналіз сутності економічного явища, зміни якого відображаються часовим рядом. Іноді до уваги беруть міркування стосовно характеру зростання рівнів ряду. Так, якщо зростання випуску продукції передбачається у вигляді арифметичної прогресії, то згладжування відбувається за прямою; якщо зростання йде в геометричній прогресії, то згладжування виконують за показниковою функцією.

На практиці під час попереднього аналізу часового ряду обирають, як правило, дві-три криві зростання для подальшого дослідження і побудови трендової моделі часового ряду. Розглянемо проблему вибору виду кривої зростання для конкретного часового ряду.

Метод послідовних різниць (Тінтнера). Цей метод може бути використаний для визначення порядку (ступеня) апроксимаційного полінома, якщо, по-перше, рівні часового ряду складаються лише із двох компонент: тренду та випадкової, і, по-друге, тренд є досить гладеньким, щоб його можна було згладити поліномом певного ступеня. Алгоритм застосування методу ідентичний алгоритму визначення порядку інтеграції нестационарного процесу (див. 2.6) і передбачає такі кроки.

1. Розраховують різниці (прирости) до d -го порядку включно:

$$\begin{aligned} \Delta_t^1 &= y_t - y_{t-1}; \\ \Delta_t^2 &= \Delta_t^1 - \Delta_{t-1}^1; \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_t^d &= \Delta_t^{d-1} - \Delta_{t-1}^{d-1}. \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

Для апроксимації економічних процесів зазвичай розраховують різниці до четвертого порядку.

2. Для вхідного ряду та для кожного різницевого ряду обчислюють дисперсії за такими формулами:

$$\text{для вхідного ряду — } s_0^2 = \frac{\sum_{t=1}^n y_t^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n y_t \right)^2}{n-1}; \quad (3.2.26)$$

для різницевого ряду d -го порядку ($d = 1, 2, \dots$) —

$$s_d^2 = \frac{\sum_{t=d+1}^n (\Delta_t^d)^2}{(n-d)c_{2d}^d}, \quad (3.2.27)$$

де c_{2d}^d — біноміальний коефіцієнт.

3. Порівнюють значення кожної наступної дисперсії із попередньою, тобто розраховують різниці $|s_d^2 - s_{d-1}^2|$, і якщо для будь-якого k ця величина не перевищує певної наперед заданої додатної величини, тобто порядок величин дисперсій однаковий, то ступінь апроксимаційного полінома має дорівнювати $d - 1$.

Необхідно зазначити, що для визначення тренду в економічних часових рядах не слід використовувати поліноми дуже великого порядку, оскільки отримані в такий спосіб функції згладжування відображатимуть випадкові відхилення, а не детерміновану складову, що суперечить поняттю тенденції.

Метод характеристик приросту є універсальним методом попереднього вибору кривих зростання. Він ґрунтується на використанні окремих характерних властивостей кривих, розглянутих вище. За цього методу вхідний часовий ряд попередньо згладжують методом простої змінної середньої. Наприклад, для інтервалу згладжування $m = 3$ згладжені рівні розраховують за формулою:

$$\bar{y}_t = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}, \quad (3.2.28)$$

причому щоб не втратити перший та останній рівні, їх згладжують за формулами:

$$\bar{y}_1 = \frac{5y_1 + 2y_2 - y_3}{6}, \quad \bar{y}_n = \frac{-y_{n-2} + 2y_{n-1} + 5y_n}{6}. \quad (3.2.29)$$

Далі обчислюють перші середні прирости

$$\bar{\Delta}_t = \frac{\bar{y}_{t+1} - \bar{y}_{t-1}}{2}, \quad t = 2, 3, \dots, l, n-1; \quad (3.2.30)$$

другі середні прирости

$$\bar{\Delta}_t^{(2)} = \frac{\bar{\Delta}_{t+1} - \bar{\Delta}_{t-1}}{2}, \quad (3.2.31)$$

а також ряд похідних величин:

$$\frac{\bar{\Delta}_t}{\bar{y}_t}; \log \bar{\Delta}_t; \log \frac{\bar{\Delta}_t}{\bar{y}_t}; \log \frac{\bar{\Delta}_t}{\bar{y}_t^2}. \quad (3.2.32)$$

Відповідно до характеру зміни середніх приростів і похідних показників обирають вид кривої зростання для вхідного часового ряду [27], при цьому використовують відомості з табл. 3.2.2.

Таблиця 3.2.2.

ВИБІР КРИВОЇ ЗРОСТАННЯ ЗА ХАРАКТЕРОМ ЗМІНИ ПОКАЗНИКА

Показник	Характер зміни показника з часом	Вид кривої зростання
Перший середній приріст $\bar{\Delta}_t$	Майже однаковий	Поліном першого порядку (пряма)
$\bar{\Delta}_t$	Змінюється лінійно	Поліном другого порядку (парабола)
Другий середній приріст $\bar{\Delta}_t^{(2)}$	Змінюється лінійно	Поліном третього порядку (кубічна парабола)
$\frac{\bar{\Delta}_t}{\bar{y}_t}$	Майже однаковий	Проста експонента
$\log \bar{\Delta}_t$	Змінюється лінійно	Модифікована експонента
$\log \frac{\bar{\Delta}_t}{\bar{y}_t}$	Змінюється лінійно	Крива Гомперця
$\log \frac{\bar{\Delta}_t}{\bar{y}_t^2}$	Змінюється лінійно	Логістична крива

3.3. Прогнозування тенденції часового ряду за алгоритмічними методами

Сутність алгоритмічних методів полягає у послідовній заміні фактичних рівнів часового ряду y_t їхніми згладженими значеннями \hat{y}_t , які за певним алгоритмом розрахунку оцінюють невідому функцію тренду v_t у будь-якій наперед заданій точці t , не претендуючи при цьому на аналітичне (тобто у вигляді певної формули) представлення функції v_t для всього базового періоду $t=1,2,\dots,n$. Вони мають механізм автоматичного налагодження на зміну досліджуваного показника. Завдяки цьому модель постійно пристосовується до зміни інформації й наприкінці інтервалу прогнозової бази відображає тенденцію, що склалася на поточний момент. Прогноз отримують як екстраполяцію тенденції поточного рівня ряду, тобто останнього на даний момент.

Найвідомішими ітераційними методами згладжування часових рядів є метод ковзної середньої, експоненціального згладжування, адаптивного згладжування та їхні модифікації.

Метод ковзної середньої ($MA(m)$) — «*moving average*»). Цей метод є одним із найпростіших методів вирізнення тренду. Згладжування за допомогою ковзної середньої ґрунтоване на тому, що в середніх величинах взаємно гасяться випадкові відхилення. Саме зменшення випадкового розкиду (дисперсії) якраз і означає *згладжування* відповідної траєкторії.

Згладжування за допомогою ковзної середньої відбувається так. Початкові рівні часового ряду y_t замінюють його середніми (згладженими) величинами \hat{y}_t , розрахованими для певної кількості рівнів ряду. Одержані значення стосуються середини обраного інтервалу. Потім інтервал зсувають на одне спостереження, і розрахунок повторюють. Інтервали визначення середньої весь час є однаковими. Таким чином, у кожному інтервалі згладжена середня оцінює середню точку цього інтервалу. В процесі згладжування часового ряду ковзною середньою участь у розрахунках беруть усі рівні ряду. Чим ширший інтервал ковзання, тим гладшим виглядає тренд. Кількість даних, які входять до інтервалу, називають порядком ковзної середньої. Наприклад, якщо в інтервал згладжування входять m значень часового ряду, то ми маємо ковзну середню m -го порядку, що записується як $MA(m)$.

Приклад 3.3.1.

На рис. 3.3.1 зображено згладжування часового ряду щомісячних змін реального ВВП за п'ять років відповідно ковзними середніми порядку 4, 9, 12 і 15. Очевидно, що мірою підвищення порядку згладжування ряд стає гладшим. Для ковзної середньої 12-го порядку він навіть більш гладкий, ніж для ковзної середньої 15-го порядку. Такий ефект пов'язаний із наявністю сезонності в часовому ряді, причому період сезонних коливань збігається з інтервалом згладжування.

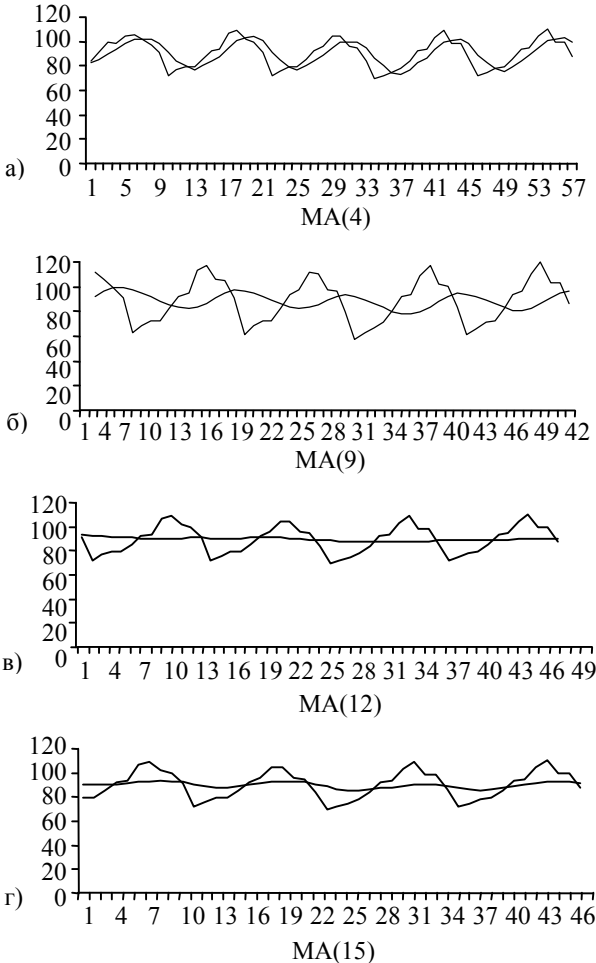


Рис. 3.3.1. Згладжування динамічного ряду ковзними середніми різних порядків

Вибір інтервалу згладжування залежить від специфіки вхідних даних. Окрім того, з його обранням пов'язане питання щодо техніки обчислення ковзної середньої. Розраховані середні дані потрібно розміщувати в центрі інтервалу згладжування. При цьому якщо m непарне, то розрахована середня потрапляє у центр інтервалу згладжування на фактичний рівень часового ряду. Якщо m парне, то розраховану середню не можна віднести до жодного рівня ряду: вона буде розташована в центрі інтервалу між двома суміжними рівнями. Щоб уникнути цієї незручності, додатково розраховують *центровані ковзні середні (МАС)* цих двох суміжних ковзних середніх.

Нехай непарний інтервал можна представити як $m = 2k + 1$ (ціле число k обирають відповідно до нерівності $k < \frac{n}{3}$ і, як правило, k не перевищує трьох). Тоді для непарного m ковзна середня обчислюється за формулою:

$$\hat{y}_t = \frac{\sum_{i=-k}^k y_{t+i}}{m}. \quad (3.3.1)$$

Наприклад, ковзна середня 7-го порядку в період t матиме вигляд:

$$\hat{y}_t = \frac{y_{t-3} + y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + y_{t+3}}{7},$$

$$m = 7, k = 3 \text{ і } 3 < t < n - 2.$$

Якщо m є парним і його можна записати у вигляді $(2k)$, ковзна середня обчислюється за формулою:

$$\hat{y}_t = \frac{\sum_{t=t-k+0,5}^{t+k-0,5} y_t}{m}. \quad (3.3.2)$$

Наприклад, ковзна середня 6-го порядку дорівнює:

$$\hat{y} = \frac{y_{t-2,5} + y_{t-1,5} + y_{t-0,5} + y_{t+0,5} + y_{t+1,5} + y_{t+2,5}}{6},$$

$$m = 6, k = 3; 3 < t < n - 2.$$

Зазначимо: якщо часовий ряд є періодичним з періодом сезонності m , тобто $y_{t+m} = y_t$, то яким буде t , $MA(m) = \text{const}$. Ковзна середня 12-го порядку згладжує більшість сезонних коливань.

Розрахунок ковзних середніх триває доти, доки не буде обчислено згладжене значення \hat{y}_{n-k} для останнього інтервалу згладжування заданого часового ряду. В результаті будуть знайдені оцінки \hat{y}_t згладжених значень часового ряду y_t для всіх t , окрім $t = 1, 2, \dots, k$ та $t = n, n-1, \dots, n-k+1$. Отже, згладжений ряд коротший за початковий на $(m-1)$ спостережень. Для визначення згладжених значень \hat{y}_t у k перших і k останніх крайніх точках усього часового ряду можна використати відповідні значення локально апроксимаційних поліномів, побудованих, відповідно, за $2k+1$ першими та $2k+1$ останніми точками часового ряду $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

Оцінка дисперсії ковзної середньої \hat{y}_t дорівнює

$$\hat{\sigma}_{\hat{y}_t}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{m}, \quad (3.3.3)$$

де $\hat{\sigma}^2$ — оцінка дисперсії всіх членів вхідного ряду.

Прогнозованому значенню $\hat{y}_n(1)$ на один період випередження відповідає останнє згладжене значення \hat{y}_{n-k} , обчислене як ковзна середня m -го порядку (і парного, і непарного m) за m останніми даними часового ряду $y_{n-m+1}, y_{n-m+2}, \dots, y_n$. Зазначимо, що згладжене значення \hat{y}_{n-k} у випадку стаціонарного ряду дорівнює прогнозу очікуваного значення показника в майбутньому не лише на прогнозований період $n+1$, а й на наступний та подальші періоди.

Точніші результати згладжування дає застосування зваженої ковзної середньої. Її оцінку \hat{y}_t в середині кожного інтервалу згладжування описує поліном p -го ступеня:

$$\hat{y}_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i t^i. \quad (3.3.4)$$

Параметри цього рівняння знаходять за методом найменших квадратів. Ковзну середню в обраному інтервалі визначають як зважене середнє усіх попередніх рівнів, причому ваги спостережень мають неоднакові значення.

Наприклад, якщо в інтервал згладжування входять p спостережень, а тенденцію можна представити поліномом другого ступеня, то згладжений середній рівень у взятому інтервалі виражатиме значення тенденції на початку відліку. За $t=0$ початок відліку, як виходить із формули (3.3.4), дорівнює a_0 .

Для цього випадку:

$$a_0 = \frac{1}{35}(-3y_{t-2} + 12y_{t-1} + 17y_t + 12y_{t+1} - 3y_{t+2}), \quad (3.3.5)$$

де коефіцієнти за y_{t+i} (позначимо їх w_i) характеризують «вагу», що надається рівню ряду, розташованому на відстані i від моменту t . Наприклад, $w_1 = \frac{12}{35}$.

Розраховані таким чином ваги мають дві основні властивості: сума ваг дорівнює одиниці (цим процедура ковзної середньої де-що відрізняється від поняття МА-процесів, введеного у розділі 2.2, оскільки підсумок коефіцієнтів $(1, -b_1, -b_2, \dots, -b_q)$ у (2.2.1) не обов'язково дорівнює одиниці); ваги симетричні стосовно середньої величини інтервалу згладжування.

Указані властивості характерні для будь-якої системи ваг, що розраховується за зваженою ковзною середньою. Обчислені значення вагових коефіцієнтів w_i , $i = -k, -k+1, \dots, -1, 0$ для різної довжини відрізків усереднення k (або порядку згладжування $m = 2k + 1$) і порядку апроксимаційного полінома p (3.3.2) наведено в таблиці 3.3.1 [24]. Зазначимо, що, по-перше, значення w_i для додатних i не вводяться, оскільки коефіцієнти симетричні стосовно середини відрізка згладжування, тобто $w_i = w_{-i}$; по-друге, за однакової довжини інтервалів згладжування $m = 2p + 1$, ваги w_i у формулі (3.3.4) для поліномів парного ступеня будуть

такими самими, що й для поліномів ступеня, більшого на одиницю (непарного).

Таблиця 3.3.1

**ЗНАЧЕННЯ ВАГОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ w ЗАЛЕЖНО
ВІД ДОВЖИНИ ВІДРІЗКІВ УСЕРЕДНЕННЯ k
ТА ПОРЯДКУ АПРОКСИМАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ p**

k	p	w_{-k}	w_{-k+1}	...	w_0
3	0 або 1	$\frac{1}{2k+1}$	$\frac{1}{2k+1}$...	$\frac{1}{2k+1}$
5	2 або 3	$-\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	—	$\frac{17}{35}$
7	2 або 3	$-\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{7}{21}$
9	2 або 3	$-\frac{21}{231}$	$\frac{14}{231}$	$\frac{39}{231}; \frac{54}{231}$	$\frac{59}{231}$
7	4 або 5	$\frac{5}{231}$	$-\frac{30}{231}$	$\frac{75}{231}$	$\frac{131}{231}$
9	4 або 5	$\frac{15}{429}$	$-\frac{55}{429}$	$\frac{30}{429}; \frac{135}{429}$	$\frac{179}{429}$

Метод ковзної середньої набув поширення для короткотермінового прогнозування. Згладжування часових рядів за допомогою ковзної середньої унаочнює визначення вид тренду. За більших значень m коливання згладженого ряду помітно зменшується, але водночас значно скорочується кількість спостережень. Цей недолік помітний за невеликої довжини ряду, або коли треба зробити екстраполяцію на майбутнє. Окрім того, тренд, одержаний за допомогою ковзної середньої, не має кількісного вираження, тобто швидкість зміни ряду невідома. За невеликої кількості спостережень метод часто призводить до викривлення тенденцій, а вибір величини інтервалу згладжування важко обґрунтувати, хоча від цього залежить форма кривої. Одночасно зі зменшенням дисперсії у згладженому ряду можуть з'явитися систематичні коливання, зумовлені автокореляцією його послідовних значень аж до порядку $2k$ (ефект Слущького-Юла), тобто методи ковзної середньої можуть спричинити автокореляцію залишків, навіть якщо вона була відсутня у початкових даних.

Приклад 3.3.1.

У таблиці 3.3.2 наведено динаміку основних індексів цін (ІЦ%) за дванадцять кварталів: із I кв. 1999-го року по IV кв. 2001 року. Згладимо наведені дані простою ковзною середньою 4-го порядку ($MA(4)$) і визначимо прогноз ІЦ на I кв. 2002-го року.

Таблиця 3.3.2

**ДИНАМІКА ІЦ (%) ТА ОЦІНЮВАННЯ ЗНАЧЕННЯ
ЗА МЕТОДОМ ПРОСТОЇ КОВЗНОЇ СЕРЕДНЬОЇ**

Квартали	t	ІЦ	Разом за 4 квартали	Ковзні середні $MA(4)$	Центровані ковзні середні $MAC(2)$	Прогноз	Похибки
1	2	3	4	5	6	7	8
1999 I кв.	1	105,8					
II кв.	2	105,0					
			417,6	104,40			
III кв.	3	101,0			105,125		
			423,4	105,85			
IV кв.	4	105,8			106,0875		
			425,3	106,33			
2000 I кв.	5	111,6			106,6875	104,40	7,2
			428,2	107,05			
II кв.	6	106,9			106,825	105,85	1,05
			426,4	106,6			
III кв.	7	103,9			105,5625	106,33	- 2,43
			418,1	104,53			
IV кв.	8	104,0			103,9875	107,05	- 3,5
			413,8	103,45			
2001 I кв.	9	103,3			102,8125	106,6	- 3,3
			408,7	102,18			
II кв.	10	102,6			101,8375	104,53	- 1,93
			406,0	101,5			
III кв.	11	98,8				103,45	- 4,65
IV кв.	12	101,3				102,18	- 0,88
2002 I кв.	13					101,5	

Порядок згладжування ряду:

1) обчислюємо середнє за перші чотири квартали: $105,8 + 105,0 + 101,0 + 105,8 = 417,6$;

2) отримане загальне середнє ділимо на 4. Звідси перша ковзна середня дорівнює 104,4;

3) цю середню вміщуємо в середню дату між II та III кварталами.

Потім інтервал згладжування зсувається на один рівень униз, повторюється розрахунок середньої арифметичної тощо. Згладжений ряд наведено в п'ятому стовпчику таблиці. Як бачимо, довжина згладженого ряду справді зменшується на $(m - 1) = 3$.

Для наведеного вище прикладу застосування центрованої ковзної середньої 2-го порядку дає змогу розташувати дані згідно із наявними кварталами спостережень часового ряду.

Прогнозоване значення показника на момент часу $t = n + 1 = 13$ обчислюють як ковзну середню 4-го порядку для 4-х останніх рівнів часового ряду $y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}$.

$$\hat{y}_{13} = \frac{103,3 + 102,6 + 98,8 + 101,3}{4} = 101,5.$$

Різниці між вхідним рядом та прогнозними значеннями дорівнюють оцінкам похибок прогнозу. ►

Метод експоненціального згладжування. Метод експоненціального згладжування дає можливість описати такий перебіг процесу, коли найбільшої ваги надають останньому спостереженню, а вага решти спостережень спадає геометрично. Одержана в результаті середня більше характеризує значення процесу наприкінці інтервалу згладжування, ніж на початку, і відома як *експоненціально зважена середня*. Так, для спостережень y_t , $t \leq n$ прогноз наступного значення y_{n+1} має вигляд:

$$\hat{y}_n(1) = \alpha(y_n + (1 - \alpha)y_{n-1} + (1 - \alpha)^2 y_{n-2} + \dots), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3.3.6)$$

де підсумок усіх ваг дорівнює 1, а α — параметр згладжування.

Практичний розрахунок експоненціальної середньої здійснюють за рекурентною формулою:

$$\hat{y}_t(1) = \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_t \quad \text{або} \quad \hat{y}_t(1) = \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t), \quad (3.3.7)$$

тобто в розрахунок нової експоненціальної середньої беруть попередню експоненціальну середню та частку (α) від різниці між попереднім спостереженням і його згладженим значенням, тобто похибки $e_t = y_t - \hat{y}_t$. Так, із надходженням нового спостереження

y_n розраховують прогноз $\hat{y}_n(1)$ як експоненціальну середню \hat{y}_{n+1} наступного значення y_{n+1} ; параметр α обирають при цьому з умови мінімуму похибки прогнозу.

Можна показати, що математичні сподівання часового ряду y_t й експоненціально згладженого ряду \hat{y}_t однакові, а дисперсія згладжених рівнів стає меншою за дисперсію початкового ряду спостережень:

$$M(\hat{y}_t) = M(y_t), \quad D\hat{y}_t = \frac{\alpha}{2-\alpha} Dy_t, \quad (3.3.8)$$

тобто якщо α наближається до одиниці, то різниця між дисперсіями невелика, однак зі зменшенням α коливання експоненціальної середньої стають більш гладкими. Тим самим експоненціальна середня відіграє роль фільтру, що поглинає коливання часового ряду.

Процедура оцінювання стандартної похибки прогнозу може здійснюватися також за методом експоненціального згладжування. Якщо похибка прогнозу оцінюється як різниця між фактичним і прогнозовим значенням $e_t = y_t - \hat{y}_t$, то замість обчислення суми квадратів похибок і знаходження дисперсії застосуємо інший вимір розкиду, відомий під назвою середнє абсолютне відхилення похибки (MAD_t) (див. (7.1)). Одним із різновидів експоненціально зваженого середнього може бути експоненціально зважена середня абсолютних похибок прогнозу:

$$MAD_t = \alpha|e_t| + (1-\alpha)MAD_{t-1}. \quad (3.3.9)$$

Для досить великого класу статистичних розподілів значення середнього квадратичного відхилення дещо перевищує значення середнього абсолютного відхилення і строго пропорційне йому. Константа пропорційності для різних розподілів коливається між 1,2 та 1,3 (для нормального закону розподілу це значення дорівнює $\sqrt{\pi/2} = 1,2533$), тому

$$\hat{\sigma}_{\hat{y}_t} = 1,25MAD_t. \quad (3.3.10)$$

Використання методу експоненціального згладжування передбачає розв'язання трьох питань: вибір постійної згладжування α , вибір початкового рівня згладжування ряду \hat{y}_0 , вибір початкового моменту згладжування (довжини бази згладжування). Аналітичного розв'язку поставлених завдань наразі не існує, і він на-

вряд чи можливий. Вибір характеристик згладжування має ґрунтуватися на експериментальних розрахунках і здійснюватися в кожному конкретному випадку по-різному.

Вибір постійної згладжування α . Вибір параметра згладжування є основною та доволі складною проблемою. Для різних значень α результати прогнозування відрізнятимуться. Якщо значення α близьке до одиниці, то під час прогнозування зважають здебільшого на основному вплив останніх спостережень; якщо близьке до нуля то вплив рівнів ряду спадає повільно, що вможлиблює врахування попередніх значень.

Для розв'язання практичних завдань часто використовують різноманітні емпіричні процедури. Наприклад, можна вибирати константу згладжування α шляхом мінімізації похибок прогнозу, які оцінюють для останньої третини ряду, використовуючи таку ітеративну процедуру:

1. Обрати одну із характеристик оцінки якості прогнозу (див. (7.1)), наприклад: MSE , MAE , $MAPE$ тощо.

2. Розділити множину визначення параметра α на значення, які змінюються з певним кроком, наприклад, із кроком 0,1. Тоді маємо підмножину значень α , яка дорівнює: $[0; 0,1; 0,2; \dots; 0,9; 1]$.

3. Обрати початкове наближення, наприклад $\hat{y}_0 = y_1$

4. Для кожного значення α із побудованої підмножини обчислити експоненціально згладжені середні.

5. Розрахувати значення обраної характеристики якості прогнозу.

6. Вибрати α , для якого одержано найкращу характеристику якості прогнозу.

Аналогічно можна підібрати й довжину прогнозову бази, і початковий рівень згладжування \hat{y}_0 .

Вибір початкового рівня згладжування ряду \hat{y}_0 . Від вибору початкового рівня згладжування залежить поведінка наступної згладженої послідовності. Найчастіше він або дорівнює значенню першого рівня ряду y_1 , або береться на рівні середньої арифметичної ряду. Можна скористатися спеціальними формулами, розробленими Брауном (табл. 3.3.5).

Зазначимо, що чим довший ряд, тим менший вплив на результат згладжування справляє вибір \hat{y}_0 .

Вибір початкового моменту згладжування (довжини бази згладжування). Проблема вибору початкової точки згладжування зумовлена від проблемою вибору сталої згладжування α . Чим

ближче початкова точка до поточної, тим менше інформації знадобиться для побудови прогнозу і тим ближче α до 1; чим далі початкова точка до поточної, тим менш чутливим буде прогноз до нових даних, і тим ближче α до 0.

Метод експоненціального згладжування застосовують під час короткотермінового прогнозування. Для побудови прогнозу необхідно задати лише початкову оцінку прогнозу, подальші розрахунки здійснюються автоматично мірою надходження нових даних спостережень, і прогноз не потрібно обчислювати спочатку. За цим методом згладжування не втрачаються ані початкові, ані останні рівні заданого часового ряду, тут немає точки, на якій ряд обривається. Чутливість експоненціально зваженого середнього з метою підвищення адекватності прогнозної моделі можна в будь-який момент змінити, якщо зробити іншою величину α .

Приклад 3.3.2.

За даними таблиці 3.3.3 спрогнозувати дохід бюджету України, використовуючи метод простого експоненціального згладжування.

Розв'язування. Задамо початкове згладжене значення $\hat{y}_0 = \hat{y}_{I \text{ кв. } 1999}$ на рівні 25,21875 %, тобто на рівні середнього значення показника за всі періоди спостережень, і величину α за двома варіантами: $\alpha = 0,7$ і $\alpha = 0,35$. Обчислюємо прогноз на II кв. 1999 р. ($\alpha = 0,7$):

$$\hat{y}_{II \text{ кв. } 1999} = 0,7 \cdot 23,8 + 0,3 \cdot 25,219 = 24,226 \%$$

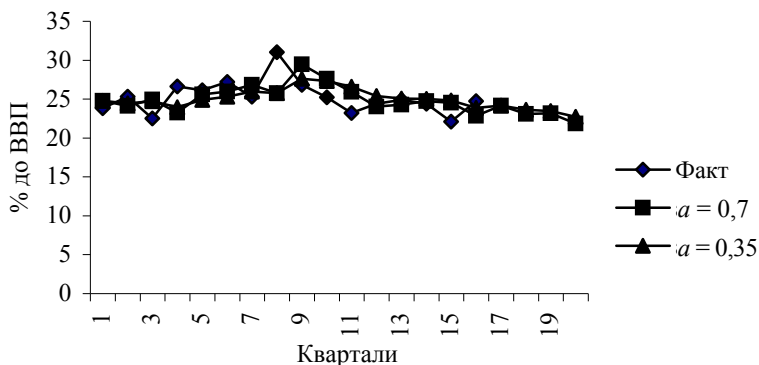


Рис. 3.3.2. Фактичні та прогнозовані значення доходу бюджету України

Таблиця 3.3.3

ДОХОДИ БЮДЖЕТУ ТА ОЦІНЮВАНІ ЗНАЧЕННЯ ЗА МЕТОДОМ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ЗГЛАДЖУВАННЯ

Періоди	№ квар- талу	Доходи бюджету y % ВВП (y_t)	Прогноз (\hat{y}_t) $\alpha = 0,7$	Похибка прогнозу $e_t = y_t - \hat{y}_t$	Прогноз (\hat{y}_t) $\alpha = 0,35$	Похибка прогнозу $e_t = y_t - \hat{y}_t$
Січень-Березень 1999	1	23,8	25,21875	- 1,41875	25,21875	- 1,41875
Квітень-Червень	2	25,3	24,225625	1,074375	24,72219	0,577813
Липень-Вересень	3	22,5	24,977688	- 2,47769	24,92442	- 2,42442
Жовтень-Грудень	4	26,6	23,243306	3,356694	24,07587	2,524126
Січень-Березень 2000	5	26,1	25,592992	0,507008	24,95932	1,140682
Квітень-Червень	6	27,2	25,947898	1,252102	25,35856	1,841443
Липень-Вересень	7	25,3	26,824369	- 1,52437	26,00306	- 0,70306
Жовтень-Грудень	8	31	25,757311	5,242689	25,75699	5,24301
Січень-Березень 2001	9	26,8	29,427193	- 2,62719	27,59204	- 0,79204
Квітень-Червень	10	25,2	27,588158	- 2,38816	27,31483	- 2,11483
Липень-Вересень	11	23,2	25,916447	- 2,71645	26,57464	- 3,37464
Жовтень-Грудень	12	24,4	24,014934	0,385066	25,39351	- 0,99351
Січень-Березень 2002	13	24,9	24,28448	0,61552	25,04578	- 0,14578
Квітень-Червень	14	24,4	24,715344	- 0,31534	24,99476	- 0,59476
Липень-Вересень	15	22,1	24,494603	- 2,3946	24,78659	- 2,68659
Жовтень-Грудень	16	24,7	22,818381	1,881619	23,84629	0,853714
Січень-Березень 2003	17				24,14509	
Квітень-Червень	18				23,60431	
Липень-Вересень	19				23,46280	
Жовтень-Грудень	20				22,70582	
			RMSE =	2,265137	RMSE =	2,136995

Прогнози на наступні квартали 1999—2002 років розраховують аналогічно. Оскільки значення y за I квартал 2003 року невідоме, всі прогнози на більш віддалене майбутнє дорівнюють прогнозу на I кв. 2003 року.

Згладжені ряди y в стовпчиках 4 та 6 побудовані на підставі різних α , але однакового початкового прогнозу. Розрахуємо похибки двох одер-

жаних прогнозів за показником $RMSE = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{n}}$. Значення RMSE

за 1999—2002 роки істотно не відрізняються, але слід віддати перевагу значенню $\alpha = 0,35$, за яким прогноз має меншу похибку ($RMSE = 2,14$).

Значення точкових прогнозів \hat{y}_{2003} на чотири квартали наступного року обчислено у стовпчику 6. На рис. 2.2.2 побудовано графіки фактичних і прогнозованих значень доходів бюджету.

Для розрахунку інтервального прогнозу знайдемо оцінку стандартної похибки згладженого ряду за формулою (3.3.10). Абсолютні значення похибок прогнозу, їхні експоненціально зважені середні (MAD_t)

та стандартні похибки прогнозу $\hat{\sigma}_{f_t}$ наведено в таблиці 3.3.4. Виходячи з припущення про незалежність похибок і нормальний розподіл їх, можна сподіватися, що значення фактичного доходу бюджету у січні—березні 2003 року перебуватиме в інтервалі $24,145 \pm 2 \cdot 1,71$.

Таблиця 3.3.4

ОЦІНКИ ПРОГНОЗІВ ТА ПОХИБОК

№ кварталу	Прогноз $\left(\hat{y}_t\right)$ $\alpha = 0,35$	$ e_t = \left y_t - \hat{y}_t\right $	$MAD_t = \alpha \cdot e_t + (1 - \alpha)MAD_{t-1}$	$\hat{\sigma} = 1,25MAD_t$
1	25,21875	1,419	2,522	3,152
2	24,72219	0,578	2,136	2,670
3	24,92442	2,424	1,590	1,988
4	24,07587	2,524	1,882	2,353
5	24,95932	1,141	2,107	2,634
6	25,35856	1,841	1,769	2,211
7	26,00306	0,703	1,794	2,243
8	25,75699	5,243	1,412	1,765
9	27,59204	0,792	2,753	3,441

№ кварталу	Прогноз $\left(\hat{y}_t\right)$ $\alpha = 0,35$	$ e_t = \left y_t - \hat{y}_t\right $	$MAD_t = \alpha \cdot e_t + (1 - \alpha)MAD_{t-1}$	$\hat{\sigma} = 1,25MAD_t$
10	27,31483	2,115	2,067	2,583
11	26,57464	3,375	2,084	2,604
12	25,39351	0,994	2,535	3,169
13	25,04578	0,146	1,996	2,495
14	24,99476	0,595	1,348	1,685
15	24,78659	2,687	1,085	1,356
16	23,84629	0,854	1,645	2,057
17	24,14509		1,368	1,710
18	23,60431		0,889	1,112
19	23,46280		0,578	0,723
20	22,70582		0,376	0,470



Адаптивні методи прогнозування часових рядів. Адаптивне прогнозування дає змогу автоматично змінювати константу згладжування в процесі обчислення. Інструментом прогнозування в адаптивних методах є математична модель з одним чинником «час».

Адаптивні моделі прогнозування — це моделі дисконтування даних, які здатні швидко пристосовувати свою структуру й параметри до зміни умов. Найважливіша особливість їх полягає у тому, що це саморегульовальні моделі, й у разі появи нових даних прогнози оновлюються із мінімальною затримкою без повторення спочатку всього обсягу обчислень.

Нехай ми перебуваємо в якомусь поточному стані, для якого відомий поточний рівень ряду y_t й очікуване значення $y_{t+1} = \hat{y}_t(1)$. Залежно від закладеної у модель гіпотези формування сподіваних значень розрізняють моделі адаптивних сподівань, неповного коригування, раціональних сподівань.

Методи розрахунку доволі складні, тож розглянемо лише підхід до цієї проблеми. Схему такого процесу представлено на рис. 3.3.3.

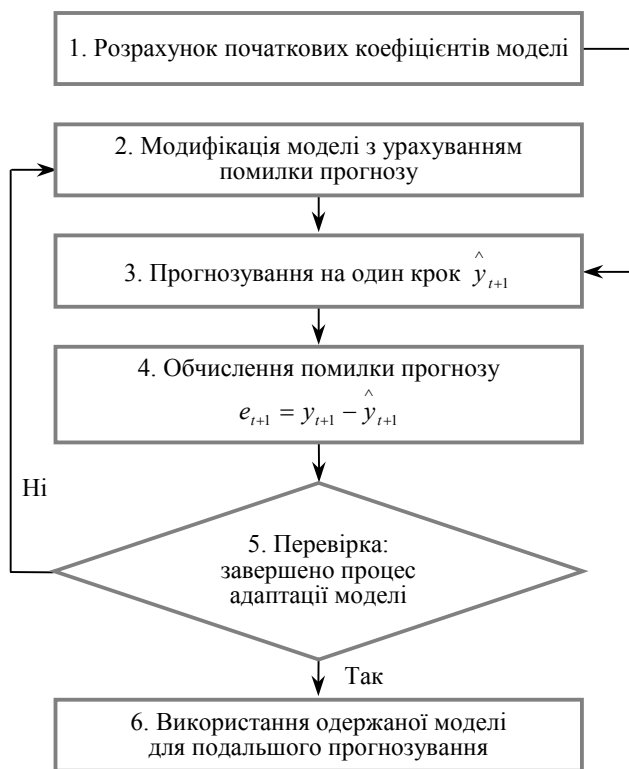


Рис. 3.3.3. Схема побудови адаптивних моделей

Після надходження фактичного значення обчислюється помилка, розбіжність між фактичним і прогнозованим рівнем (довготермінова функція моделі): $e_{t+1} = y_{t+1} - \hat{y}_t(1)$.

У моделі передбачається, що зміна фактичного рівня є деякою часткою ($0 \leq |\gamma| \leq 1$) від очікуваної зміни $y_t - y_{t-1} = \gamma(y_t^* - y_{t-1})$. Параметр γ називається коригувальним коефіцієнтом або параметром адаптації. За критерій оптимальності під час вибору параметра адаптації можна взяти мінімум середнього квадрата помилок прогнозування. Чим ближчий γ до одиниці, тим більше споді-

вання економічних суб'єктів відповідають реальній динаміці часового ряду, і навпаки, чим ближче до нуля — тим менше володіємо ситуацією, тому треба вносити корективи.

Помилка прогнозу через зворотний зв'язок надходить до моделі та враховується залежно від прийнятої системи переходу від одного стану до наступного. В результаті з'являються «компенсаційні» зміни, які дають змогу коригувати параметри моделі з метою більшого узгодження поведінки моделі з динамікою ряду. Наприклад, бажане значення $y^*(t)$ якогось економічного показника визначається рівнянням:

$$y_t^* = a_0^* + a_1^* t + \varepsilon_t^*, \quad (3.3.11)$$

де залишки ε_t^* є «білим шумом» і не корелюють із t . Фактичне значення на момент t y_t не співпадає із бажаним значенням, але буде пристосовуватися до нього за таким правилом:

$$y_t = y_{t-1} + \gamma(y_t^* - y_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad (3.3.12)$$

де ε_t — білий шум. Із (3.3.12) випливає, що на кожному кроці t рівень ряду y_t буде коригуватися в напрямі очікуваного значення y_t^* на величину, пропорційну різниці між бажаним і поточним рівнями економічного показника. Співвідношення (3.3.12) можна переписати у вигляді експоненціальної середньої першого порядку:

$$y_t = \gamma y_t^* + (1 - \gamma)y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3.3.13)$$

з чого видно, що поточне значення величини y_t є зваженим середнім бажаного рівня на даний момент часу та фактичного значення в попередньому періоді. Підставляючи значення (3.3.11) в (3.3.13), маємо модель коригування прогнозу:

$$y_t = \gamma a_0^* + \gamma a_1^* \cdot t + (1 - \gamma)y_{t-1} + (\varepsilon_t + \gamma \varepsilon_t^*). \quad (3.3.14)$$

Це співвідношення називають короткотерміновою функцією моделі.

Таким чином, адаптація здійснюється ітеративно з одержанням кожної нової фактичної точки ряду. Модель постійно «всмоктує» інформацію й розвивається з урахуванням нових тенденцій, наявних на теперішній момент. Завдяки зазначеним властивостям адаптивні методи найуспішніше використовують для оперативного прогнозування.

У практиці статистичного прогнозування базовими адаптивними моделями вважаються моделі Брауна і Хольта, які належать до схеми ковзної середньої, та модель авторегресії. Решта адаптивних методів (метод адаптивної фільтрації (МАФ), метод гармонійних ваг тощо [27]) розрізняються за способом оцінювання параметрів моделі та визначенням параметрів адаптації базових моделей.

Метод адаптивного згладжування Брауна. Метод Брауна є узагальненням методу простого експоненціального згладжування.

Розглянемо постановку задачі експоненціального згладжування в загальному випадку. Нехай часовий ряд y_t ($t=1,2,\dots,n$) можна описати моделлю виду $y_t = v_t + \varepsilon_t$, де v_t — функція тренду, ε_t — випадкові взаєм незалежні похибки із нульовим середнім значенням і сталою дисперсією, що розподілена нормально розподіленою із нульовим математичним сподіванням і дисперсією $\sigma_{\varepsilon_t}^2$.

Своєю чергою, функцію v_t можна розкласти в ряд Тейлора, тобто описати поліномом p -го порядку

$$y_t = a_0 + a_1 \cdot t + \frac{a_2}{2!} t^2 + \dots + \frac{a_p}{p!} t^p + \varepsilon_t = \sum_{i=0}^p \frac{a_i}{i!} t^i + \varepsilon_t. \quad (3.3.15)$$

Потрібно за даними ряду y_t зробити прогноз на моменти часу $(n + \tau)$ ($\tau=1,2,\dots,L$) шляхом зважування спостережень ряду y_t так, щоб пізнішим спостереженням надати більшу вагу, ніж попереднім. Прогноз рівнів ряду y_t на період часу $t + \tau$, де $t = n$ також можна побудувати за допомогою розкладення в ряд Тейлора:

$$\hat{y}_t(\tau) = y_t^{(0)} + \tau \cdot y_t^{(1)} + \frac{\tau^2}{2!} y_t^{(2)} + \dots + \frac{\tau^k}{k!} y_t^{(k)} + \dots + \frac{\tau^p}{p!} y_t^{(p)}, \quad (3.3.16)$$

де $y_t^{(k)}$ — k -та похідна, взята в момент t .

Згідно із теоремою, доведеною Р. Брауном та Р. Майером, будь-яка k -та похідна ($k = 0,1,2,\dots,p$) рівняння (3.3.15) може бути виражена через лінійні комбінації експоненціальних середніх до $(p+1)$ порядку. Головною метою експоненціального згладжування при цьому є обчислення рекурентних виправлень до оцінок коефіцієнтів a_i рівняння виду (3.3.15).

Так, експоненціальна середня 1-го порядку для ряду y_t записується, як

$$\hat{S}_t^{(1)}(y) = \alpha \sum_{i=0}^n (1-\alpha)^i y_{t-i}, \quad (3.3.17)$$

де α — параметр згладжування ($0 < \alpha < 1$).

Експоненціальна середня k -го порядку для ряду y_t записується як

$$\hat{S}_t^{(k)}(y) = \alpha \sum_{i=0}^n (1-\alpha)^i \hat{S}_{t-1}^{(k-1)}(y). \quad (3.3.18)$$

Для визначення експоненціальної середньої використовують таку рекурентну формулу:

$$\hat{S}_t^{(k)}(y) = \hat{S}_{y_t}^{(k-1)}(y) + (1-\alpha) \hat{S}_{t-1}^{(k)}(y). \quad (3.3.19)$$

Тобто в розрахунку нової експоненціальної середньої беруть попередню експоненціальну середню та частку (α) від різниці між новим спостереженням і його попереднім згладженим значенням.

Покажемо, як обчислюється експоненціальна середня для моменту часу t із раніше згладжених величин. Візьмемо, наприклад, експоненціальну середню першого порядку:

$$\begin{aligned} \hat{S}_t^{(1)}(y) &= \alpha y_t + (1-\alpha) \hat{S}_{t-1}^{(1)}(y) = \alpha y_t + (1-\alpha) [\alpha y_{t-1} + (1-\alpha) \hat{S}_{t-2}^{(1)}(y)] = \\ &= \alpha y_t + \alpha(1-\alpha) y_{t-1} + (1-\alpha)^2 [\alpha y_{t-2} + (1-\alpha) \hat{S}_{t-3}^{(1)}(y)] = \\ &= \alpha y_t + \alpha(1-\alpha) y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \dots + \alpha(1-\alpha)^i y_{t-i} + \dots + \\ &\quad + (1-\alpha)^t y_0 = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i y_{t-i} + (1-\alpha)^t y_0. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Тут y_0 — величина, що характеризує початкові умови.

Отже, функція (3.3.20) є лінійною комбінацією всіх попередніх спостережень. Ваги, які надаються минулим рівням y_{t-i} , зі збільшенням i спадають за геометричною прогресією. Тому коефіцієнт $(1-\alpha) = \beta$ можна тлумачити як *коефіцієнт дисконтування*, що характеризує ступінь знецінення інформації з плином часу, а α — як вагу поточного спостереження y_t .

Наприклад, якщо параметр згладжування $\alpha = 0,3$, то для моменту часу $(t-1)$ вага для відповідного спостереження буде дорів-

новати $0,3(1 - 0,3) = 0,21$; для спостереження в момент $(t - 2)$ вага становитиме $0,3(1 - 0,3)^2 = 0,147$; для моменту $(t - 3)$ — відповідно $0,1029$ тощо.

Виходячи з рекурентної формули, можна отримати експоненціальні середні різних порядків:

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_t^{(1)}(y) &= \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{S}_{t-1}^{(1)}(y); \\
 \hat{S}_t^{(2)}(y) &= \hat{S}_{y_t}^{(1)}(y) + (1 - \alpha) \hat{S}_{t-1}^{(2)}(y); \\
 &\dots\dots\dots \\
 \hat{S}_t^{(k)}(y) &= \hat{S}_{y_t}^{(k-1)}(y) + (1 - \alpha) \hat{S}_{t-1}^{(k)}(y); \\
 &\dots\dots\dots \\
 \hat{S}_t^{(n)}(y) &= \hat{S}_{y_t}^{(n-1)}(y) + (1 - \alpha) \hat{S}_{t-1}^{(n)}(y),
 \end{aligned}
 \tag{3.3.21}$$

де $\hat{S}_t^{(k)}(y)$ — експоненціальна середня k -го порядку в точці t .

Знаючи експоненціальні середні різних порядків, можна визначити оцінки параметрів у розкладенні (3.3.11) і, відповідно, прогнозів значення рівнів динамічного ряду.

Метод експоненціального згладжування можна узагальнити на випадки будь-якого ступеня полінома для вираження невідповідної складової часового ряду, але, як свідчить досвід, перевищення другого ступеня полінома не так збільшує точність прогнозу, як значно ускладнює процедуру розрахунків. Тому зазвичай розглядають три такі моделі Брауна.

Модель нульового порядку описує часовий ряд $y_t (t = 1, 2, \dots, n)$, у якому відсутні тренд і сезонні коливання, а процес (3.3.11) представлено у вигляді

$$y_t = a_0 + \varepsilon_t, \tag{3.3.22}$$

де a_0 — невідомий незалежний від часу параметр, що характеризує поточний рівень ряду.

Модель першого порядку описує лінійну тенденцію

$$y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t, \tag{3.3.23}$$

де a_0 — параметр, значення якого характеризує середню останнього рівня ряду; a_1 — параметр, що характеризує приріст наприкінці періоду спостереження, а також (хоча меншою мірою) швидкість зростання на попередніх періодах.

Модель другого порядку описує параболічну тенденцію зі змінюваними швидкістю та прискоренням:

$$y_t = a_0 + a_1 \cdot t + \frac{1}{2} a_2 t^2 + \varepsilon_t, \quad (3.3.24)$$

де a_2 — параметр, значення якого характеризує поточний приріст або прискорення.

Зазначимо, що розглянуті моделі експоненціального згладжування різних порядків можна представити як окремі випадки *ARIMA* (p, d, q)-моделі. Припустімо, що похибки прогнозу $e_t = y_t - \hat{y}_t$ є незалежними й однаково розподіленими. Тоді, підставляючи у (3.3.19) $\alpha = 1 - \beta$, для експоненціальної середньої першого порядку матимемо модель: $\hat{y}_{t-1} = (1 - \beta)y_t + \beta \cdot \hat{y}_t$. Оскільки: $y_{t+1} = \hat{y}_{t+1} + e_{t+1}$, то остаточно модель запишеться як: $y_{t+1} = \hat{y}_{t+1} + e_{t+1} = y_t - be_t + e_{t+1}$. Підставляючи t замість $t + 1$ та позначивши $y_t - y_{t-1} = \Delta y_t$, отримаємо: $\Delta y_t = e_t - be_{t-1}$, тобто прийшли до моделі *MA*(1) або, якщо початковий ряд представити за допомогою оператора перших різниць L : $Ly_t = y_{t-1}$, маємо *ARIMA* (0, 1, 1)-модель: $(1 - L)y_t = (1 - bL)e_t$.

Модель лінійно-адитивного тренду можна представити *ARIMA* (0, 2, 2)-моделлю:

$$(1 - L)^2 y_t = (1 - 2L\beta + L^2\beta^2)e_t \quad \text{з коефіцієнтами ковзної середньої — } 2\beta \text{ та } \beta^2.$$

Порядок моделі прийнято визначати або на підставі візуального аналізу графіка процесу (чи існує тренд і чи близький він до лінійної функції), знання законів розвитку характеру зміни досліджуваного явища, або методом випробувань, порівнюючи статистичні характеристики моделей різного порядку на ділянці ретроспективного прогнозу.

Оцінювання параметрів моделей на кожному кроці прогнозування t ($t = 1, 2, \dots, n$) здійснюється за так званими формулами «оновлення» (див. табл. 3.3.5), які використовують похибку прогнозу, обчислену в момент часу $(t - 1)$ на один крок уперед ($e_t = y_t - \hat{y}_t$). Початкові значення параметрів моделей можна визначити за методом найменших квадратів, використовуючи кілька перших спостережень. Оптимальне значення коефіцієнта дисконтування перебуває у межах $[0; 1]$, визначається методом числової оптимізації і не змінюються для всього періоду спостережень.

Таблиця 3.3.5

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ЗА АДАПТИВНИМ МЕТОДОМ БРАУНА

Вид моделі та відповідна їй експоненціальна середня	Початкові умови	Оцінки коефіцієнтів	Оцінка прогнозу	$C(\tau)$ для границь інтервалу надійності
$y_t = a_{0_t} + \varepsilon_t ;$ $S_t^{(1)} = \alpha y_t + (1 - \alpha) S_{t-1}^{(1)}$	$S_0^{(1)} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t}{n}$	$\hat{a}_{0_t} = (1 - \beta) y_t + \beta \cdot \hat{a}_{0_{t-1}}$	$f_t(\tau) = \hat{a}_{0_t}$	$C(\tau) = \alpha / (1 + \beta)$
$y_t = a_{0_t} + a_{1_t} \cdot t + \varepsilon_t ;$ $S_t^{(2)} = \alpha \cdot S_t^{(1)} + (1 - \alpha) S_{t-1}^{(2)}$	$S_0^{(1)} = a_0 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} a_1$ $S_0^{(2)} = a_0 - \frac{2(1 - \alpha)}{\alpha} a_1$	$\hat{a}_{0_t} = \hat{a}_{0_{t-1}} + \hat{a}_{1_{t-1}} + (1 - \beta^2) e_t$ $\hat{a}_{1_t} = \hat{a}_{1_{t-1}} + (1 - \beta)^2 e_t$	$f_t(\tau) = \hat{a}_{0_t} + \hat{a}_{1_t} \cdot \tau$	$C(\tau) = \alpha(1,25 + \alpha \cdot \tau)$
$y_t = a_{0_t} + a_{1_t} \cdot t + a_{2_t} t^2 + \varepsilon_t ;$ $S_t^{(3)} = \alpha \cdot S_t^{(2)} + (1 - \alpha) S_{t-1}^{(3)}$	$S_0^{(1)} = a_0 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} a_1 + \frac{(1 - \alpha)(2 - \alpha)}{2\alpha^2} a_2$ $S_0^{(2)} = a_0 - \frac{2(1 - \alpha)}{\alpha} a_1 + \frac{(1 - \alpha)(3 - 2\alpha)}{\alpha^2} a_2$ $S_0^{(3)} = a_0 - \frac{3(1 - \alpha)}{\alpha} a_1 + \frac{3(1 - \alpha)(4 - 3\alpha)}{2\alpha^2} a_2$	$\hat{a}_{0_t} = \hat{a}_{0_{t-1}} + \hat{a}_{1_{t-1}} + (1 - \beta^3) e_t$ $\hat{a}_{1_t} = \hat{a}_{1_{t-1}} + 2\hat{a}_{2_{t-1}} + \frac{3}{2}(1 - \beta)(1 - \beta^2) e_t$ $\hat{a}_{2_t} = \hat{a}_{2_{t-1}} + \frac{1}{2}(1 - \beta)^3 e_t$	$f_t(\tau) = \hat{a}_{0_t} + \hat{a}_{1_t} \cdot \tau + \frac{1}{2} \hat{a}_{2_t} \cdot \tau^2$	$C(\tau) = \alpha(2 + 3\alpha \cdot \tau + 3\alpha^2 \tau^2)$

Точковий прогноз розраховують після підстановки значення τ в оцінювану модель. Межі інтервалу надійності прогнозу можна визначити за формулою [31]:

$$\hat{y}_t(\tau) \mp \sigma_e \sqrt{1 + C(\tau)}, \quad (3.3.25)$$

де величини $C(\tau)$ обчислюють індивідуально для моделей різних порядків (формули розрахунку $C(\tau)$ наведено в табл. 3.3.5).

Приклад 3.3.3.

Побудувати прогноз кількості населення в Україні за лінійною моделлю Брауна. Ряд містить 24 рівні спостережень y_t цього показника (табл. 3.3.6).

Скористаємося схемою адаптивного прогнозування. Початкові оцінки параметрів одержимо МНК за першими п'ятьма точками:

$$\hat{a}_0 = 49638,7, \quad \hat{a}_1 = 126,07.$$

Візьмемо $\tau = 1$, а параметр згладжування $\beta = 0,3$. В табл. 3.3.6. наведено розрахунки параметрів моделі Брауна на кожному кроці. На останньому

кроці одержуємо модель $\hat{y}_n(\tau) = \hat{a}_{0,n} + \hat{a}_{1,n} \cdot \tau = 48455,66 - 645,443 \cdot \tau$. Прогнозовані оцінки за цією моделлю розраховують підстановкою у неї значень $\tau = 1$ та $\tau = 2$, а інтервальні — за формулою:

$$\hat{y}_n(\tau) \mp \hat{\sigma}_e \sqrt{1 + C(\tau)}, \quad \text{де } C(\tau) = \alpha(1,25 + \alpha \cdot \tau) = 0,7(1,25 + 0,7 \cdot \tau)$$

За розрахунками $\hat{\sigma}_e = 250,13$; $C(1) = 1,365$; $C(2) = 1,855$.

Інтервальні оцінки прогнозів дорівнюють: $47425,55 \leq \hat{y}_n(1) \leq 48194,88$ та $46742,14 \leq \hat{y}_n(2) \leq 47587,41$.

Таблиця 3.3.6

ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ БРАУНА

t	y_t	\hat{a}_0	\hat{a}_1	\hat{y}_t	e_t
0	49638,7			49638,7	0,00
1	49755	49764,77	126,1105	49890,88	- 135,88
2	49929,3	49767,23	59,5293	49826,76	102,5415
3	50000	49920,07	109,7746	50029,85	- 29,8459

t	y_t	\hat{a}_0	\hat{a}_1	\hat{y}_t	e_t
4	50100	50002,69	95,15014	50097,84	2,163725
5	50300	50099,81	96,21037	50196,02	103,9844
6	50926	50290,64	147,1627	50437,8	488,1959
7	50840	50882,06	386,3787	51268,44	- 428,441
8	51298,7	50878,56	176,4426	51055	243,6977
9	51475,2	51276,77	295,8545	51572,62	- 97,4217
10	51616,6	51483,97	248,1178	51732,09	- 115,486
11	51707	51626,99	191,5298	51818,52	- 111,524
12	51800	51717,04	136,8833	51853,92	- 53,9204
13	51944	51804,85	110,4623	51915,32	28,68488
14	52100	51941,42	124,5179	52065,94	34,06376
15	52200	52096,93	141,2091	52238,14	- 38,1434
16	52100	52203,43	122,5189	52325,95	- 225,952
17	51700	52120,34	11,8025	52132,14	- 432,138
18	51300	51738,89	- 199,945	51538,95	- 238,947
19	50499,9	51321,51	- 317,029	51004,48	- 504,576
20	50105,6	50545,31	- 564,272	49981,04	124,5597
21	49710,8	50094,39	- 503,237	49591,15	119,6477
22	49291,8	49700,03	- 444,61	49255,42	36,37822
23	48415,5	49288,53	- 426,785	48861,74	- 446,241
24	48202,5	48455,66	- 645,443	47810,22	392,2811
25				47810,22	
26				47164,78	

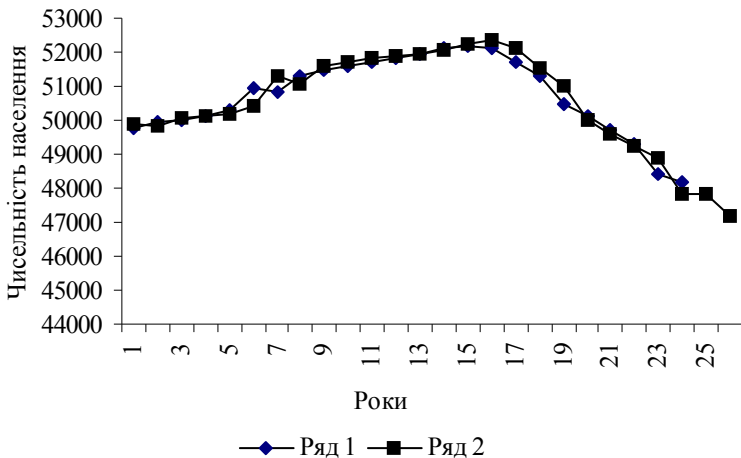


Рис. 3.3.4. Результати згладжування та прогнозування за адаптивною моделлю Брауна

На рис. 3.3.4 показано результати згладжування й прогнозування за побудованою моделлю. Ряд 1 відповідає фактичним даним, ряд 2 — розрахованим за моделлю Брауна, при цьому вказано точкові прогнози на два роки вперед. ►►

Метод Хольта. Адаптивна модель за методом Хольта — це динамічний процес у вигляді лінійно-адитивного тренду:

$$\hat{y}_t(\tau) = \hat{a}_{0,t} + \hat{a}_{1,t} \cdot \tau \quad (3.3.26)$$

де $\hat{y}_t(\tau)$ — прогнозована оцінка рівня ряду $y_{t+\tau}$, яка розраховується в момент часу t на τ кроків уперед,

$\hat{a}_{0,t}$ — оцінка поточного (t -го) рівня часового ряду,

$\hat{a}_{1,t}$ — оцінка поточного приросту.

Припускається, що випадкові залишки e мають нормальний закон розподілу із нульовим математичним сподіванням та дисперсією σ_e^2 .

У цьому методі послаблені умови однопараметричності моделі Брауна за рахунок уведення двох параметрів згладжування — α та β , ($0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$).

Коефіцієнти лінійної моделі (3.3.34) за методом Хольта розраховують за такими співвідношеннями:

$$\hat{a}_{0,t} = \hat{a}_{0,t-1} + \hat{a}_{1,t-1} + \alpha \cdot e_t, \quad (3.3.27)$$

$$\hat{a}_{1,t} = \hat{a}_{1,t-1} + \alpha \cdot \beta \cdot e_t, \quad (3.3.28)$$

де e_t — похибка прогнозу рівня y_t , обчислена в момент часу $(t-1)$ на один крок уперед, $e_t = y_t - \hat{y}_t$.

Коефіцієнт $a_{0,t}$ має значення, близьке до останнього рівня, і становить закономірну складову цього рівня; коефіцієнт $a_{1,t}$ — визначає приріст, що склався наприкінці періоду спостережень, але характеризує також швидкість зростання показника попередніх етапах. Початкові значення параметрів моделі знаходять за методом найменших квадратів на підставі кількох перших спостережень. Оптимальні значення параметрів згладжування α та β визначають методом багатовимірної числової оптимізації, вони є сталими для всього періоду спостереження.

Після оцінювання параметрів $a_{0,t}$ та $a_{1,t}$ прогноз на τ моментів часу, тобто $\hat{y}_t(\tau)$, розраховують як суму оцінки середнього поточного значення ($\hat{a}_{0,t}$) та очікуваного показника зростання ($\hat{a}_{1,t}$), помноженого на період випередження τ , тобто

$$\hat{y}_t(\tau) = \hat{a}_{0,t} + \hat{a}_{1,t} \tau. \quad (3.3.29)$$

За допомогою оператора L можна зрушити всю послідовність даних на один крок назад: $Ly_t = y_{t-1}$. Застосування оператора L до спостережень і коефіцієнтів моделі Хольта дає змогу представити її як модель ARIMA (0, 1, 1) у вигляді:

$$(1-L)^2 y_t = \{1 - (2 - (\alpha + \alpha \cdot \beta)L + (1 - \alpha)L^2)\} e_t. \quad (3.3.30)$$

Формулювання адаптивних моделей у термінах лінійних параметричних моделей ARMA (авторегресії — ковзної середньої) — уможливорює також тлумачення їх як підмножини класу лінійних параметричних моделей. Отже, встановлюється відпові-

дність між двома різними підходами до моделювання часових рядів.

Метод еволюції для дво- та трипараметричних моделей. Підбір параметрів адаптації є вузьким місцем для всіх адаптивних методів, ґрунтованих на експоненціальному згладжуванні. Як правило, для кожного набору значень параметрів розраховують серію прогнозів за цим методом згладжування, і, порівнюючи одержані середньоквадратичні похибки прогнозів, обирають кращі з них. Зазвичай всю громіздкість процедури перекладають на комп'ютер.

Альтернативою базовим моделям є динамічне коригування параметрів згладжування. В методах еволюції та симплекс-планування параметри адаптації постійно змінюються на кожному кроці t . Для кожного параметра згладжування задається кілька значень. Кожен набір параметрів згладжування розглядається як одна точка. Центральна точка вважається прогнозовою, решта — контрольними. Згідно із алгоритмом методу для наступного кроку кращим набором вважаються ті значення, для яких на попередньому кроці була побудована точніша модель. Методи еволюції відрізняються від симплекс-планування лише геометричною фігурою, що відображає сполучення параметрів згладжування (квадрат, куб, тетраedr тощо). Значення параметрів, які спочатку є довільними, постійно змінюються, й алгоритм їхньої зміни спрямований на якнайшвидше вилучення помилок прогнозування.

Для забезпечення адаптації параметра згладжування однопараметричної моделі до зміни динаміки ряду можна, використовуючи три різних параметри, які називаються відповідно *нормальним* (α), *низьким* ($\alpha - h$) і *високим* ($\alpha + h$), отримати не одну, а три оцінки наступного рівня ряду. При цьому оцінка, отримана за нормальним значенням параметра, вважається прогнозом, а інші дві оцінки є контрольними величинами.

Після одержання нового фактичного рівня ряду визначають величину параметра, яка дає найменшу абсолютну або згладжену похибку i , отже, є найкращою для попереднього й поточного кроків. Припускається, що параметр буде найкращим і на поточному кроці прогнозування. Це значення вважається нормальним, і вже з огляду на нього розраховуються нові низьке та високе значення ($\alpha \pm h$), що мають перебувати в певному інтервалі ($h, 1-h$).

Отже, значення параметру згладжування, яке попервах обирають навімання, постійно змінюється в напрямі компенсації й усунування похибок прогнозування, що постійно виникають.

4 Особливості прогнозування тренд-сезонних процесів

4.1. Методи фільтрації сезонної компоненти часового ряду

Часові ряди з інтервалом менше року (місяць, квартал), як правило, містять сезонність. Сезонна компонента s_t має період m : $s_{t+m} = s_t$ ($m = 12$ для ряду місячних даних; $m = 4$ — для ряду квартальних даних). Окрім того, відомо, що m кратне n , тобто $n = k \cdot m$, k — ціле число. Очевидно, якщо m — кількість місяців або кварталів у році, то k — кількість років, представлених у часовому ряду $\{y_{ij}\}$. Тому вхідні дані тренд-сезонного часового ряду часто представляють у вигляді матриці $\{y_{ij}\}$ розміру $[k \times m]$. У цьому випадку тренд-сезонну модель (1.2.2) записують із урахуванням подвійної індексації:

$$y_{ij} = v_{ij} + s_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad i = \overline{1, k}; j = \overline{1, m}. \quad (4.1.1)$$

Співвідношення, що встановлюють зв'язок між індексами t та (i, j) , мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} i &= \left[\frac{t}{m} \right] + 1 \\ j &= t - (i-1) \times m \end{aligned} \right\}; \quad [] \text{ означає цілу частину числа.} \quad (4.1.2)$$

Існує кілька методик оцінювання сезонної компоненти. Основні відмінності їх полягають у тому, в якій послідовності та якими методами виокремлювати складові часового ряду, на якому етапі вважати точність виокремлених складових задовільною.

Передусім перевіряють гіпотезу про наявність або відсутність сезонних коливань, оскільки часовий ряд не завжди містить сезонну складову. Для оцінювання впливу сезонності на досліджуваний показник іноді достатньо економічного (змістовного) аналізу та графічного відображення спостережень за двома роками. Якщо ступінь коливань не надто значний, можна використати спеціальні статистичні критерії: дисперсійний, автокореляційний, гармонічний тощо. Сутність їх зводиться до перевірки на випадковість залишкової компоненти ряду, з якого вилучено тренд.

У разі підтвердження існування сезонного процесу здійснюють фільтрацію сезонної компоненти. Більшість методів фільтрації побудовано таким чином, що спершу виокремлюють тренд. Визначити наявність у часовому ряду тренду і встановити ступінь його гладкості можна за допомогою статистичних методів, розглянутих у розділі 1.3. частини 2. Після виокремлення тренду залишаються сезонна компонента s_t разом з випадковою ε_t . Розподіл сезонної та випадкової компонент завжди починається із виокремлення сезонної компоненти, і якщо всі складові знайдено правильно, залишки мають властивості «білого шуму».

Під час дослідження сезонної хвилі s_t найчастіше припускають, що вона не змінюється з року в рік, тобто: $s_{i+m,j} = s_{ij}$, $i+m \leq k$. Насправді таке припущення далеке від дійсності, принаймні для більшості економічних процесів. Для сезонної хвилі характерна зміна з часом як її розмаху, так і форми. З рештою виникає потреба в аналізі та передбаченні змін сезонної хвилі.

Фільтрація сезонної компоненти за допомогою індексу сезонності. Найпростішим способом, який характеризує коливання рівнів досліджуваного показника, є розрахунок питомої ваги кожного рівня в загальному річному обсязі, або індексу сезонності.

Розглянемо таку модель:

$$y_{ij} = v_{ij} \cdot I_j + \varepsilon_{ij}, \quad (4.1.3)$$

де v_{ij} — «річна» складова (тренд);

I_j — індекс сезонності, або стала пропорційності для j -го кварталу (місяця), яка є безрозмірною величиною та не змінюється з року в рік.

Індекс сезонності I_j характеризує ступінь відхилення рівня сезонного часового ряду від ряду середніх v_i (тренду) або, інакше кажучи, ступінь коливань відносно 100 %. Наближені оцінки індексів обчислюють як:

$$I_j = \frac{\sum_{i=1}^k I_{ij}}{k} \text{ або } I_j = \frac{\sum_{i=1}^k I_{ij}}{k} 100 \%, \quad (4.1.4)$$

$$\text{де } I_{ij} = \frac{y_{ij}}{\bar{y}_i} \text{ та } \bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^m y_{ij}}{m} \quad (4.1.5)$$

Якщо відомі оцінки тренду \hat{v}_{ij} і сезонної компоненти \hat{s}_{ij} в адитивній моделі, то I_{ij} можна оцінити точніше:

$$I_{ij} = \frac{\hat{v}_{ij} + \hat{s}_{ij}}{\hat{v}_{ij}} = \frac{\hat{y}_{ij}}{\hat{v}_{ij}}. \quad (4.1.6)$$

Останнє свідчить про можливість оцінювання рівня сезонності незалежно від того, яку модель розглядають: адитивну або мультиплікативну. Недоліком цього підходу є те, що він не враховує наявності випадкових коливань і тенденцію зміни середньорічного рівня й сезонної хвилі.

Метод декомпозиції часового ряду. Загальна процедура методу для адитивної або мультиплікативної моделей майже однакова. Спочатку виявляють та прогнозують кожну компоненту окремо (етап декомпозиції), а потім отримують загальний прогноз шляхом певного об'єднання отриманих результатів.

Побудову прогнозової адитивної або мультиплікативної тренд-сезонної моделі здійснюють за таким алгоритмом.

1. Часовий ряд y_t згладжується за методом ковзної середньої.
2. Розраховують різниці між вхідними даними та центрованими середніми, тобто відхилення, які характеризують сезонний чинник: $s_{ij} = y_t - \tilde{y}_t$.

3. Розраховують оцінки сезонної компоненти \hat{s}_j . Для цього знаходять її середні значення \bar{s}_j для кожного періоду j :

$$\bar{s}_j = \frac{\sum_{i=1}^k s_{ij}}{k}, j = 1, 2, \dots, m; \quad (4.1.7)$$

і середнє сезонне значення: \bar{s}

$$\bar{s} = \sum_{j=1}^m \bar{s}_j. \quad (4.1.8)$$

При цьому припускають, що сезонні впливи за весь річний цикл гасять одне одного, тобто $\sum_{j=1}^m \bar{s}_j = 0$ для адитивної моделі та

$\sum_{j=1}^m \bar{s}_j = m$ для мультиплікативної моделі. Якщо ці умови не виконуються, то середні оцінки сезонної компоненти (\bar{s}_j) коригують.

Для адитивної моделі відкоригована оцінка сезонної компоненти вимірюється в абсолютних величинах і дорівнює $\hat{s}_j = \bar{s}_j - \alpha$, $\alpha = \bar{s}/m$.

Для мультиплікативної моделі це значення таке: $\hat{s}_j = \bar{s}_j \cdot \alpha$, $\alpha = m/\bar{s}$.

4. Вилученням сезонної компоненти із початкового часового ряду одержують десеоналізований ряд.

5. Аналітичне згладжування десеоналізованого ряду й отримання оцінок тренду \hat{v}_t .

6. Розрахунок не випадкової складової для адитивної моделі $\hat{v}_t + \hat{s}_t$ або мультиплікативної моделі $\hat{v}_t \cdot \hat{s}_t$.

7. Обчислення абсолютних або відносних похибок $\hat{\varepsilon}_t$ та перевірка адекватності моделі.

8. Розрахунок прогнозів.

Детальніше побудову кожної моделі розглянемо на прикладах.

Приклад 4.4.1.

Побудувати прогноз ВВП на 2002 рік, користуючись декомпозиційним аналізом часових рядів. Оцінити ймовірність прогнозу.

У табл. 4.1.1 у стовпчику 3 відображено поведінку ВВП впродовж семи років. Графічний аналіз динаміки ВВП (рис. 4.12) вказує на наявність лінійного сезонно-адитивного або мультиплікативного тренду. Розрахуємо його компоненти.

Спочатку розглянемо адитивну модель $Y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$.

Крок 1. Вирівнюємо початкові рівні ряду методом ковзної середньої з вікном згладжування 4 (згладжування ефекту квартального впливу на тенденцію ряду). Узгодимо згладжені значення із фактичними моментами часу, для чого знайдемо середні значення із двох послідовних ковзних середніх — центровані ковзні середні (ст. 4 табл. 4.1.1).

Крок 2. Знайдемо оцінки сезонної хвилі для кожного кварталу. Для цього шляхом віднімання від рівнів фактичного ряду (Y_t) центрованих ковзних середніх (T_t) розрахуємо сезонну й випадкову компоненти (ст. 5

табл. 4.1.1) і за їхніми значеннями проведемо в допоміжній таблиці 4.1.2. виокремлення сезонної складової за формулами (4.1.7—4.1.8). У моделях із сезонною компонентою припускається, що сезонні впливи за кожен річний період взаємно погашаються. В адитивній моделі це виражається в тому, що сума значень сезонної компоненти за всіма кварталами має дорівнювати нулю. Для цієї моделі маємо: $-4082,96 - 2266,1 + 3202,15 + 2686,04 = -460,88$.

Визначимо коефіцієнт коригування: $\alpha = -460,88/4 = -115,22$.

Розрахуємо скориговані оцінки сезонної компоненти як різницю між її середньою оцінкою та коефіцієнтом коригування: $\hat{s}_j = \bar{s}_j - \alpha$. Оцінки \hat{s}_t зведено в табл. 4.1.1 ст. 6.

Крок 3. Вилучимо вплив сезонної компоненти із ряду y_t за формулою $y_t - \hat{s}_t = v_t + \varepsilon_t$ (ст. 7 табл. 4.1.1).

Крок 4. Визначимо оцінку тренду \hat{v}_t . Для цього проведемо аналітичне згладжування ряду $v_t + \varepsilon_t$ за допомогою лінійного тренду. Остаточнок отримаємо:

$$8192,7 + 1508,34 \cdot t; \quad R^2 = 0,94; F = 383,1; \quad (4.1.9)$$

$$\hat{v}_t = (1279,11) (77,06)$$

Підставляючи в рівняння (4.1.9) значення $t = 1, 2, \dots, 20$, знайдемо теоретичні рівні тренду як для кожного заданого моменту часу, так і для прогнозованого періоду випередження (ст. 8 табл. 4.1.1).

Крок 5. Знайдемо теоретичні рівні ряду за формулою $\hat{v}_t + \hat{s}_t$ (ст. 9 табл. 4.1.1).

Крок 6. Похибки обчислюють за формулою $e_t = y_t - \hat{v}_t - \hat{s}_t$. Їхні значення наведено у ст. 10 табл. 4.1.1. Щоб визначити, наскільки точно розглядувана модель згладжує попередні дані, застосуємо два показники: середнє абсолютне відхилення (MAD), корінь із середньоквадратичної похибки ($RMSE$).

$$MAD = \frac{\sum |e_t|}{n} = 2659,54; \quad RMSE = \sqrt{\frac{\sum (e_t)^2}{n}} = 3174,13.$$

У цьому випадку $RMSE$ становить лише 11 % від середнього вибіркового значення ВВП, що свідчить про задовільну точність прогнозованої моделі.

Таблиця 4.1.1

РОЗРАХУНОК ОЦІНОК КОМПОНЕНТ АДИТИВНОЇ МОДЕЛІ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ЧАСОВОГО РЯДУ

Рік, квартал	№ кварталу, t	ВВП, y_t	Центрована ковзна середня v_t	Сезонна та випадкова компоненти $y_t - v_t = s_t + \varepsilon_t$	Оцінка сезонної компоненти \hat{s}_t	$y_t - \hat{s}_t = v_t + \varepsilon_t$	\hat{v}_t	$\hat{v}_t + \hat{s}_t$	$e_t = y_t - \hat{v}_t - \hat{s}_t$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1995 кв. I	1	8318,00	—	—	-3967,74	12 285,74	9701,04	5733,30	1635,51
кв. II	2	10 694,00	—	—	-2150,89	12 844,89	11 209,38	9058,49	66,92
кв. III	3	16 102,00	14 675,25	1426,75	3317,36	12 784,64	12 717,72	16 035,08	2374,68
кв. IV	4	19 402,00	16 618,13	2783,88	2801,26	16 600,74	14 226,05	17 027,32	4921,35
1996 кв. I	5	16 688,00	18 315,75	-1627,75	-3967,74	20 655,74	15 734,39	11 766,65	2775,15
кв. II	6	17 867,00	19 748,25	-1881,25	-2150,89	20 017,89	17 242,73	15 091,85	441,57
кв. III	7	22 510,00	20 634,75	1875,25	3317,36	19 192,64	18 751,07	22 068,43	1393,33
кв. IV	8	24 454,00	21 217,00	3237,00	2801,26	21 652,74	20 259,41	23 060,67	927,99
1997 кв. I	9	18 728,00	21 990,00	-3262,00	-3967,74	22 695,74	21 767,75	17 800,01	-640,20
кв. II	10	20 485,00	22 888,50	-2403,50	-2150,89	22 635,89	23 276,08	21 125,20	-2025,79
кв. III	11	26 076,00	23 623,13	2452,88	3317,36	22 758,64	24 784,42	28 101,79	-1018,02
кв. IV	12	28 076,00	24 274,38	3801,63	2801,26	25 274,74	26 292,76	29 094,02	-2850,36
1998 кв. I	13	20 983,00	25 073,75	-4090,75	-3967,74	24 950,74	27 801,10	23 833,36	-3718,55

КВ. 2	14	23 440,00	25 735,50	- 2295,50	- 2150,89	25 590,89	29 309,44	27 158,55	- 4619,14
КВ. 3	15	29 516,00	26 504,88	3011,13	3317,36	26 198,64	30 817,78	34 135,14	- 5197,38
КВ. 4	16	29 930,00	27 828,88	2101,13	2801,26	27 128,74	32 326,11	35 127,38	- 4582,71
1999 КВ. I	17	25 284,00	29 693,00	- 4409,00	- 3967,74	29 251,74	33 834,45	29 866,71	- 3460,91
КВ. II	18	29 731,00	31 690,63	- 1959,63	- 2150,89	31 881,89	35 342,79	33 191,91	- 2030,49
КВ. III	19	38 138,00	33 580,88	4557,13	3317,36	34 820,64	36 851,13	40 168,49	- 3871,73
КВ. IV	20	37 289,00	35 692,38	1596,63	2801,26	34 487,74	38 359,47	41 160,73	- 2853,07
2000 КВ. I	21	33 047,00	38 263,38	- 5216,38	- 3967,74	37 014,74	39 867,81	35 900,07	- 365,26
КВ. II	22	38 860,00	41 105,38	- 2245,38	- 2150,89	41 010,89	41 376,14	39 225,26	3375,15
КВ. III	23	49 577,00	43 687,25	5889,75	3317,36	46 259,64	42 884,48	46 201,85	1391,92
КВ. IV	24	48 586,00	45 990,00	2596,00	2801,26	45 784,74	44 392,82	47 194,08	471,58
2001 КВ. I	25	42 405,00	48 296,88	- 5891,88	- 3967,74	46 372,74	45 901,16	41 933,42	2665,39
КВ. II	26	47 924,00	50 735,38	- 2811,38	- 2150,89	50 074,89	47 409,50	45 258,61	6732,80
КВ. III	27	58 968,00	—		3317,36	55 650,64	48 917,84	52 235,20	5475,57
КВ. IV	28	58 703,00	—		2801,26	55 901,74	50 426,17	53 227,43	0,00
2002 КВ. I	29	47 966,77							
КВ. II	30	51 291,97		ПРОГНОЗ					
КВ. III	31	58 268,55							
КВ. IV	32	10 993,96							

Таблиця 4.1.2

$i \backslash j$	1	2	3	4	Середньосезонне значення, \bar{s}	Коригувальний коефіцієнт, α
1995	—	—	1426,75	2783,88		
1996	- 1627,75	- 1881,25	1875,25	3237,00		
1997	- 3262,00	- 2403,50	2452,88	3801,63		
1998	- 4090,75	- 2295,50	3011,13	2101,13		
1999	- 4409,00	- 1959,63	4557,13	1596,63		
2000	- 5216,38	- 2245,38	5889,75	2596,00		
2001	- 5891,88	- 2811,38	—	—		
Підсумок за j -й квартал	- 24497,75	- 13 596,63	19212,88	16116,25		
Середня оцінка сезонної компоненти для j -го кварталу, \bar{s}_j	- 4082,96	- 2266,10	3202,15	2686,04	- 460,88	- 115,22
Скоригована оцінка сезонної компоненти, \hat{s}_j	- 3967,74	- 2150,89	3317,36	2801,26	0,00	

Крок 7. Прогнозування за адитивною моделлю. Прогнозові значення за адитивною моделлю розраховують за формулою:

$$\hat{y}_t = \hat{v}_t + \hat{s}_t \quad (\text{за квартал}), \quad (4.1.10)$$

де тренд обчислюють за рівнянням $\hat{v}_t = 8192,7 + 1508,34 \cdot t$, коли t дорівнює прогнозованим кварталам ($t = 29, 30, 31, 32$), а оцінки сезонної компоненти не змінюються. Оцінки прогнозних значень ВВП на чотири квартали 2002 року наведено у табл. 4.1.1, ст. 4.

Не слід забувати: чим віддаленішим є період випередження, тим прогноз менш переконливий. У цьому випадку ми припускаємо, що тенденція, виявлена за ретроспективними даними, поширюється і на майбутній період. Для порівняно невеликих періодів випередження таке припущення справді може бути реальним, однак воно стає менш імовірним, якщо прогноз складають на віддалену перспективу.

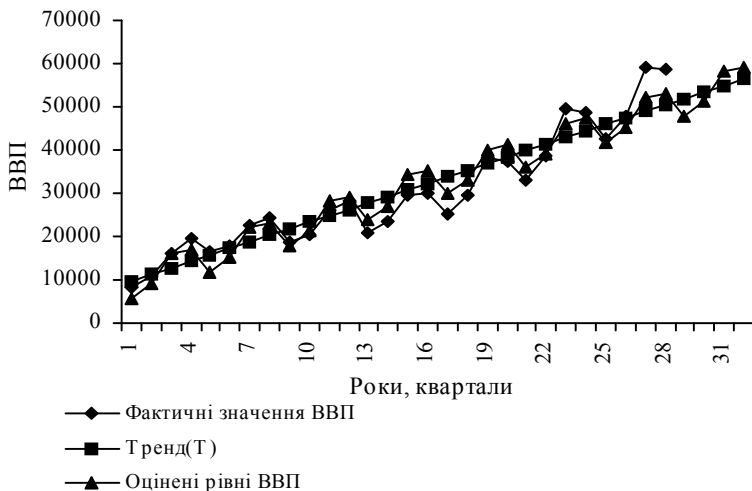


Рис. 4.1.2. Графічний аналіз динаміки ВВП за адитивною моделлю

Розглянемо *мультиплікативну модель* часового ряду ВВП:
 $y_t = v_t \cdot s_t \cdot \varepsilon_t$.

Крок 1. Вирівнювання початкових рівнів ряду. Власне ця процедура не відрізняється від тієї, що була застосована для адитивної моделі. Так само обчислюють центровані ковзні середні згладженого ряду (ст. 4 табл. 4.1.3).

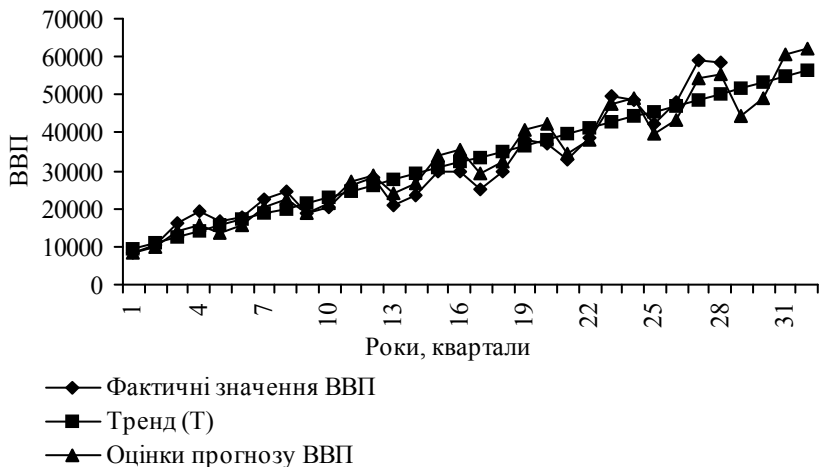


Рис. 4.1.3. Графічний аналіз динаміки ВВП за мультиплікативною моделлю

Крок 2. Знайдемо сезонну та випадкову компоненти для кожного кварталу. Для цього розділимо фактичні рівні ряду (y_t) на центровані ковзні середні (v_t) (ст. 5 табл. 4.1.3). Використаємо ці значення для розрахунку відкоригованої сезонної компоненти, для чого побудуємо допоміжну таблицю 4.1.4. Оскільки значення сезонної компоненти — це частки, а кількість сезонів у році дорівнює чотирьом, необхідно, щоб сума значень сезонних компонент за всіма кварталами теж дорівнювала чотирьом. Якщо ця сума не дорівнює чотирьом, то значення сезонної компоненти коригують. Наприклад, маємо середнє сезонне значення сезонної компоненти, що дорівнює 3,44.

Визначимо коефіцієнт коригування: $\alpha = 4/3,44 = 1,16$.

Розрахуємо скориговані оцінки сезонної компоненти як добуток середніх квартальних оцінок на коефіцієнт коригування: $\hat{s}_j = \bar{s}_j \cdot \alpha$.

Оцінки \hat{s}_t зведені в табл. 4.1.3 у ст. 6. У моделях із сезонною компонентою припускається, що сезонні впливи за весь річний цикл взаємопогашаються.

Крок 3. Вилучимо вплив сезонної компоненти з ряду y_t за формулою $y_t : \hat{s}_t = v_t \cdot \varepsilon_t$ (ст. 7 табл. 4.1.3).

Таблиця 4.1.3

РОЗРАХУНОК ОЦІНОК КОМПОНЕНТ АДИТИВНОЇ МОДЕЛІ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ЧАСОВОГО РЯДУ

Рік, квартал	№ кварталу, t	ВВП, y_t	Центрована ковзна середня v_t	Сезонна та випадкова компоненти $y_t : v_t = s_t \cdot \varepsilon_t$	Оцінка сезонної компоненти \hat{s}_t	$y_t : \hat{s}_t = v_t \cdot \varepsilon_t$	\hat{v}_t	$\hat{v}_t \cdot \hat{s}_t$	$e_t = \hat{y}_t / (\hat{v}_t \cdot \hat{s}_t)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1995 кв. I	1	8318,00	—	—	0,86	9635,34	9546,13	8240,99	1,01
кв. II	2	10 694,00	—	—	0,92	11 614,16	11 052,68	10 177,00	1,05
кв. III	3	16 102,00	14 675,25	1,10	1,11	14 508,15	12 559,22	13 938,97	1,16
кв. IV	4	19 402,00	16 618,13	1,17	1,11	17 541,10	14 065,77	15 557,98	1,25
1996 кв. I	5	16 688,00	18 315,75	0,91	0,86	19 330,92	15 572,31	13 443,27	1,24
кв. II	6	17 867,00	19 748,25	0,90	0,92	19 404,36	17 078,86	15 725,74	1,14
кв. III	7	22 510,00	20 634,75	1,09	1,11	20 281,85	18 585,40	20 627,18	1,09
кв. IV	8	24 454,00	21 217,00	1,15	1,11	22 108,54	20 091,95	22 223,47	1,10
1997 кв. I	9	18 728,00	21 990,00	0,85	0,86	21 694,00	21 598,49	18 645,55	1,00
кв. II	10	20 485,00	22 888,50	0,89	0,92	22 247,63	23 105,04	21 274,48	0,96
кв. III	11	26 076,00	23 623,13	1,10	1,11	23 494,87	24 611,58	27 315,39	0,95
кв. IV	12	28 076,00	24 274,38	1,16	1,11	25 383,15	26 118,13	28 888,96	0,97
1998 кв. I	13	20 983,00	25 073,75	0,84	0,86	24 306,13	27 624,67	23 847,84	0,88
кв. II	14	23 440,00	25 735,50	0,91	0,92	25 456,89	29 131,22	26 823,22	0,87

Закінчення табл. 4.1.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
кв. III	15	29 516,00	26 504,88	1,11	1,11	26 594,36	30 637,77	34 003,61	0,87
кв. IV	16	29 930,00	27 828,88	1,08	1,11	27 059,32	32 144,31	35 554,44	0,84
1999 кв. I	17	25 284,00	29 693,00	0,85	0,86	29 288,29	33 650,86	29 050,12	0,87
кв. II	18	29 731,00	31 690,63	0,94	0,92	32 289,20	35 157,40	32 371,96	0,92
кв. III	19	38 138,00	33 580,88	1,14	1,11	34 362,92	36 663,95	40 691,82	0,94
кв. IV	20	37 289,00	35 692,38	1,04	1,11	33 712,50	38 170,49	42 219,93	0,88
2000 кв. I	21	33 047,00	38 263,38	0,86	0,86	38 280,73	39 677,04	34 252,40	0,96
кв. II	22	38 860,00	41 105,38	0,95	0,92	42 203,70	41 183,58	37 920,70	1,02
кв. III	23	49 577,00	43 687,25	1,13	1,11	44 669,63	42 690,13	47 380,03	1,05
кв. IV	24	48 586,00	45 990,00	1,06	1,11	43 925,97	44 196,67	48 885,42	0,99
2001 кв. I	25	42 405,00	48 296,88	0,88	0,86	49 120,78	45 703,22	39 454,69	1,07
кв. II	26	47 924,00	50 735,38	0,94	0,92	52 047,61	47 209,76	43 469,44	1,10
кв. III	27	58 968,00	—	—	1,11	53 131,06	48 716,31	54 068,24	1,09
кв. IV	28	58 703,00	—	—	1,11	53 072,62	50 222,85	55 550,91	1,01
2002 кв. I	29	44 656,97							
кв. II	30	49 018,18		ПРОГНОЗ					
кв. III	31	60 756,45							
кв. IV	32	62 216,39							

Крок 4. Визначимо оцінку тренду v_t . Для цього проведемо аналітичне згладжування ряду $v_t \cdot \varepsilon_t$ за допомогою лінійного тренду. Остаточоно отримаємо:

$$\hat{v}_t = 8039,59 + 1506,55 \cdot t; R^2 = 0,95; F = 460,68 \quad (4.1.11)$$

$$(1165,0) (570,19)$$

Підставляючи в рівняння (4.1.11) значення $t = 1, 2, \dots, 20$, знайдемо теоретичні рівні тренду як для кожного заданого моменту часу, так і для прогнозованого періоду випередження (ст. 8 табл. 4.1.3).

Таблиця 4.1.4

$i \backslash j$	1	2	3	4	Середнє сезонне значення, \bar{s}	Коригувальний коефіцієнт, α
1995			1,10	1,17		
1996	0,91	0,90	1,09	1,15		
1997	0,85	0,89	1,10	1,16		
1998	0,84	0,91	1,11	1,08		
1999	0,85	0,94	1,14	1,04		
2000	0,86	0,95	1,13	1,06		
2001	0,88	0,94	0,00	0,00		
Підсумок за j -й квартал	5,19	5,54	6,68	6,65		
Середня оцінка сезонної компоненти для j -го кварталу, \bar{s}_j	0,74	0,79	0,95	0,95	3,44	1,16
Скоригована оцінка сезонної компоненти, \hat{s}_j	0,86	0,92	1,11	1,11	4,00	

Крок 5. Знайдемо теоретичні рівні ряду за формулою $\hat{v}_t \cdot \hat{s}_t$ (ст. 9 табл. 4.1.3).

Крок 6. Обчислення оцінок похибок здійснюють за формулою $e_t = y_t / (\hat{v}_t \cdot \hat{s}_t)$. Їх значення наведені у ст. 10 табл. 4.1.3.

$$MAD = \frac{\sum |e_t|}{n} = 1,01; RMSE = \sqrt{\frac{\sum (e_t)^2}{n}} = 1,02.$$

У цьому випадку $RMSE$ становить лише 0,003 % від середнього вибіркового значення ВВП, що свідчить про дуже високу точність прогнозова моделі.

Оцінки прогнозних значень ВВП на чотири квартали 2002 року наведено в табл. 4.1.3 ст. 4. ►►

Ітераційні методи фільтрації сезонної компоненти. Під час виокремлення (фільтрації) компонент часового ряду за допомогою певних методів неминуче постає питання про «чистоту» фільтрації, тобто про ступінь близькості оцінок \hat{v}_t і \hat{s}_t їхніх справжніх значенням v_t , s_t . Слід зазначити, що жоден відомий метод не забезпечує необхідного ступеня чистоти фільтрації для часових рядів різної структури.

Ітераційні методи фільтрації складових часового ряду з'явилися свого часу як результат визнання неможливості виокремлення компонент ряду прямими методами. Основна ідея ітераційних процедур полягає в багаторазовому застосуванні простої ковзної середньої:

$$\hat{y}_t = \frac{\frac{y_{t-m/2}}{2} + y_{t-m/2+1} + \dots + y_t + \dots + y_{t-m/2-1} + \frac{y_{t+m/2}}{2}}{m} \quad (4.1.12)$$

та одночасного оцінювання сезонної компоненти в кожному циклі. При цьому перехід від одного кроку ітераційної процедури до іншого може супроводжуватися зміною параметрів ковзної середньої. Якщо формулу для ковзної середньої записати у вигляді

$$\hat{y}_t = \frac{\sum_{\tau=-p}^p w_j y_{t+\tau}}{m'}, \quad m' = 2p + 1, \quad (4.1.13)$$

то під час переходу від однієї ітерації до іншої може відбуватися зміна довжини ділянки ковзання m' і закону зміни вагових коефіцієнтів w_j . У деяких ітераційних методах, окрім того, використовується регресія (як правило, лінійна) вхідного ряду y_t на перетворений на першому кроці ряд $\hat{y}_t \cong \hat{v}_t$.

Ітераційні методи відзначаються простотою та задовільною «чистотою» фільтрації компонент ряду. Однак усім їм притаманний суттєвий недолік — застосування ковзної середньої призводить до втрати частини інформації на кінцях часового ряду. Розглянемо ітераційний метод Четверикова, який дає змогу виключити

чити вплив сезонних хвиль змінної структури. З іншими ітераційними методами можна ознайомитися за [23].

Метод Четверикова. Алгоритм застосування методу такий.

Крок 1. Емпіричний ряд y_t вирівнюється ковзною середньою (4.1.12) із періодом ковзання m , тобто беруть $(m + 1)$ членів вхідного ряду. Вагу першого й останнього членів ряду ділять на 2, тобто: $\alpha_{-m/2} = \alpha_{m/2} = 1/2m/2$ членів ряду, що випали с обох його кінців або поновлюються екстраполюванням згладженого ряду, або залишаються незмінними в подальшій роботі. Формується ряд попередньої оцінки тренду $\hat{y}_t = v_t^{(1)}$ і відхилення емпіричного ряду від згладженого:

$$e_t = y_t - \hat{y}_t, t = \overline{1, n} \quad \text{або} \quad e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij}, \quad i = \overline{1, k}; j = \overline{1, m} \quad (4.1.14)$$

Крок 2. Для кожного i -го року розраховують $\hat{\sigma}_i$ — оцінка середньоквадратичного відхилення, на яку діляться потім окремі місячні (квартальні) відхилення відповідного року:

$$s_{ij} = \frac{e_{ij}}{\hat{\sigma}_i}, \quad (4.1.15)$$

де

$$\hat{\sigma}_i = \left[\frac{\sum_{j=1}^m e_{ij}^2 - (\sum_{j=1}^m e_{ij})^2 / m}{m-1} \right]^{1/2}. \quad (4.1.16)$$

Крок 3. На підставі «нормованих» таким шляхом відхилень розраховують попередню середню сезонну хвилю:

$$s_j^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^k s_{ij}}{k}. \quad (4.1.17)$$

Крок 4. Середня попередньо знайдена сезонна хвиля помножується на середньоквадратичне відхилення кожного року та віднімається від емпіричного ряду:

$$v_{ij}^{(1)} = y_{ij} - s_{ij}^{(1)} \hat{\sigma}_i. \quad (4.1.18)$$

Крок 5. Отриманий таким чином ряд із виключеною попередньою сезонною хвилею знову згладжується ковзною середньою

(для місячних даних за п'ятьма або сімома точками залежно від інтенсивності дрібних кон'юнктурних коливань і тривалості більших). У результаті отримують нову оцінку тренду $\hat{v}_t^{(2)}$.

Крок 6. Відхилення емпіричного ряду y_t від вирівняного ряду $\hat{v}_t^{(2)}$, отриманого на кроці 5

$$e_t^{(2)} = y_t - \hat{v}_t^{(2)}, \quad (4.1.19)$$

знову піддають аналогічній обробці за кроками 2 та 3 для виявлення остаточної середньої сезонної хвилі.

Крок 7. Видалення остаточної сезонної хвилі виконується після множення середньої сезонної хвилі на KH_i — коефіцієнт напруженості сезонної хвилі:

$$KH_i = \frac{\sum_{j=1}^m e_{ij}^{(2)} \hat{\varepsilon}_{ij}}{\sum_{j=1}^m \hat{\varepsilon}_{ij}^2}, \quad (4.1.20)$$

де $e_t^{(2)}$ — згладжені значення ряду, $\hat{\varepsilon}_{ij}$ — розраховані випадкові залишки: $\hat{\varepsilon}_{ij} = e_{ij}^{(2)} - s_j$.

Приклад 4.1.3.

Застосуємо метод Четверикова для виокремлення компонент часового ряду, наведеного в таблиці 4.1.1.

1. Згладимо часовий ряд y_t ковзною середньою із періодом згладжування $m = 4$. Отриману попередню оцінку тренду $\hat{y}_t = \hat{v}_t^{(1)}$ віднімаємо від початкового ряду: $e_t = y_t - \hat{v}_t^{(1)}$, $t = \overline{3,26}$ або $e_{ij} = y_{ij} - \hat{v}_{ij}^{(1)}$, $i = \overline{1,7}$; $j = \overline{1,4}$.

2. Для кожного року i (за рядком) розраховуємо оцінку середньоквадратичного відхилення $\hat{\sigma}_i$ величини e_{ij} , використовуючи формулу (4.1.16). Значення величин $\hat{\sigma}_i$ наведено в табл. 4.1.5. В обчисленні $\hat{\sigma}_i$

враховували тільки два останні квартали першого року: $m = \overline{7,12}$, а в обчисленні $\hat{\sigma}_7$ — два перші квартали сьомого року.

Таблиця 4.1.5

Рік	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{\sigma}_i$	3272,08	3341,582	4585,675461	4477,209	5159,432	6477,15	6882,067

Ділимо окремі значення кожного кварталу $y_t - v_t = e_t = e_{ij}$ з таблиці 4.1.1 на відхилення відповідного року: $\bar{s}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\hat{\sigma}_i}$. Результат заносимо в табл. 4.1.6.

Таблиця 4.1.6

НОРМОВАНИЙ ЗАЛИШКОВИЙ РЯД

Роки	1	2	3	4
1	—	—	0,436	0,851
2	-0,487	-0,563	0,561	0,969
3	-0,711	-0,524	0,535	0,829
4	-0,914	-0,513	0,673	0,469
5	-0,855	-0,378	0,883	0,309
6	-0,805	-0,347	0,909	0,401
7	-0,856	-0,409	—	—
$\hat{s}_j^{(1)}$	-0,771	-0,456	0,666207	0,638012

Останній рядок табл. 4.1.6 є попередніми значеннями середньої се-

зонної хвилі: $\hat{s}_j^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} e_{ij}}{k}$.

3. Знайдену в п. 2 попередню середню сезонну хвилю помножимо на оцінку середньоквадратичного відхилення кожного року $\hat{\sigma}_i$ і відні-

memo від початкового ряду: $\hat{v}_{ij}^{(1)} = y_{ij} - \hat{s}_{ij}^{(1)} \hat{\sigma}_i$. В результаті отримуємо ряд без попередньої сезонної хвилі (табл. 4.1.7).

Таблиця 4.1.7

РЯД БЕЗ ПОПЕРЕДНЬОЇ СЕЗОННОЇ ХВИЛІ ($\hat{v}_{ij}^{(1)}$)

Роки	1	2	3	4
1	—	—	14675,25	16618,12
2	18315,75	19748,25	20634,75	21217
3	21990	22888,5	23623,12	24274,37
4	25073,75	25735,5	26504,87	27828,87
5	29693	31690,63	33580,87	35692,37
6	38263,38	41105,38	43687,25	45990
7	48296,88	50735,38	—	—
$\hat{s}_j^{(2)}$	-0,767	-0,454	0,722784	0,578174

4. Часовий ряд із виключеною попередньою сезонною хвилею знову згладжують ковзною середньою третього порядку й одержують нову оцінку тренду $\hat{v}_{ij}^{(2)}$. Розраховуємо відхилення емпіричного ряду y_i від вирівняного ряду: $e_{ij}^{(2)} = y_{ij} - \hat{v}$. (табл. 4.1.8).

Таблиця 4.1.8

Роки	1	2	3	4
1	—	—	—	—
2	- 1396,28	- 1537,08	2071,781	3163,969
3	- 3328,11	- 2326,83	2496,534	3755,19
4	- 4053,9	- 2401,44	2652,846	1745,049
5	- 4529,84	- 1950,28	4402,485	1305,344
6	- 5376,8	- 2114,3	6061,31	2612,373
7	- 1396,28	- 1537,08	2071,781	3163,969

5. Отримані значення відхилень знову перераховуємо за п. 2 для виявлення нових значень сезонної хвилі. Одержуємо такі значення:

Квартали	1	2	3	4
$\hat{s}_{ij}^{(2)}$	-0,767	-0,454	0,722784	0,578174

Порівнюючи значення коефіцієнтів сезонної хвилі, одержаних на першій та другій ітераціях, можна зробити висновок, що вони несуттєво відрізняються одне від одного.

6. Розраховуємо коефіцієнт напруженості сезонної хвилі в такому порядку: розраховуємо значення залишкової компоненти:

$\hat{\varepsilon}_{ij} = e_{ij}^{(2)} - \hat{s}_j^{(2)}$, значення яких наведено в табл. 4.1.9, і, використовуючи співвідношення (4.1.20), розраховуємо величини коефіцієнту напруженості KH_i для кожного року, окрім першого й останнього (для першого й останнього років коефіцієнт напруженості не обчислюють, оскільки після повторного згладжування у них не залишилося спостережень).

Таблиця 4.1.9

Роки	1	2	3	4
1	—	—	—	—
2	-1395,513246	-1536,62	2071,058	3163,391
3	-3327,341996	-2326,37	2495,811	3754,612
4	-4053,136996	-2400,98	2652,123	1744,471
5	4529,075746	-1949,83	4401,762	1304,766
6	-5376,030746	-2113,85	6060,587	2611,794
7	-	-	-	-

Одержуємо такі значення коефіцієнтів напруженості сезонної хвилі:

t	1	2	3	4	5	6	7
KH_i	—	1838,548	517,562	-1750,23	-282,272	983,0286	—

7. Використовуючи коефіцієнти напруженості сезонної хвилі розраховуємо залишкові значення сезонної компоненти часового ряду (табл. 4.1.10): $\hat{s}_{ij} = \hat{s}_j \cdot KH_i$

Таблиця 4.1.10

Роки	1	2	3	4
1	—	—	—	—
2	- 1409,72	- 834,132	1328,874	1063,001
3	- 396,843	- 234,813	374,0857	299,2409
4	1341,997	794,0626	- 1265,04	- 1011,94
5	216,4334	128,0641	- 204,022	- 163,202
6	- 753,742	- 445,991	710,5176	568,3616
7	-	-	-	-

4.2. Моделі прогнозування сезонних процесів

В основі сезонних моделей прогнозування лежать їхні несезонні аналоги, доповнені засобами відображення сезонних коливань. Сезонні моделі здатні відображати як відносно постійну сезонну хвилю, так і динамічно змінювану залежно від тренду. Перша форма належить до класу адитивних, друга — до класу мультиплікативних моделей.

Модельовання сезонності з використанням множинної регресії. Множинну регресію можна пристосувати для одночасного оцінювання тренду й сезонного чинника. Наприклад, модель, що враховує тренд і сезонність, можна записати у вигляді:

$$y_t = a_0 e^{\lambda t} e^{c_1 q_{1t} + c_2 q_{2t} + c_3 q_{3t}} e^{\varepsilon_t}, \quad (4.2.1)$$

де $a_0 e^{\lambda t}$ — тренд;

$e^{c_1 q_{1t} + c_2 q_{2t} + c_3 q_{3t}}$ — сезонний чинник;

e^{ε_t} — випадкова компонента;

q_{1t}, q_{2t}, q_{3t} — сезонні фіктивні змінні, які набувають значення 1 у певному кварталі та 0 — для решти кварталів.

Логарифм функції (4.2.1) дає тренд-сезонну модель із лінійними параметрами:

$$\ln y_t = \ln a_0 + \lambda \cdot t + c_1 q_{1t} + c_2 q_{2t} + c_3 q_{3t} + \varepsilon_t, \quad (4.2.2)$$

Розглянемо, як відображається процес розкладу сезонного часового ряду за допомогою адаптивних моделей.

Метод Хольта-Вінтерса. Цей метод, на відміну від методу Хольта, окрім лінійного тренду включає ще й сезонну компоненту.

Прогноз на τ кроків уперед для адитивної форми моделі будують за формулою:

$$\hat{y}_t(\tau) = \hat{a}_{0t} + \hat{a}_{1t} \tau + \hat{s}_{t-m+\tau}, \quad (4.2.3)$$

де s — коефіцієнт сезонності;

m — період сезонного циклу (наприклад, за кварталними даними $m = 4$). Обчислення параметрів моделі виконують за співвідношеннями:

$$\hat{a}_{0t} = \alpha(y_t - \hat{s}_{t-m}) + (1 - \alpha)(\hat{a}_{0t-1} + \hat{a}_{1t-1}), \quad (4.2.4)$$

$$\hat{a}_{1t} = \gamma(\hat{a}_{0t} - \hat{a}_{0t-1}) + (1 - \gamma)\hat{a}_{1t-1}, \quad (4.2.5)$$

$$\hat{s}_t = \beta(y_t - \hat{a}_{0t}) + (1 - \beta)\hat{s}_{t-m}, \quad (4.2.6)$$

де α, β, γ — параметри згладжування (адаптації), ($0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$).

Мультиплікативна модель аналогічна адитивній моделі з тією лише різницею, що розраховані за лінійною моделлю прогнозові значення коригують шляхом множення їх на сезонні коефіцієнти. Прогноз на τ кроків розраховують за формулою:

$$\hat{y}_t(\tau) = (\hat{a}_{0t} + \hat{a}_{1t} \cdot \tau) \hat{s}_{t-m+\tau}, \quad (4.2.7)$$

а параметри обчислюють за співвідношеннями:

$$\hat{a}_{0t} = \alpha(y_t / \hat{s}_{t-m}) + (1 - \alpha)(\hat{a}_{0t-1} + \hat{a}_{1t-1}), \quad (4.2.8)$$

$$\hat{a}_{1t} = \gamma(\hat{a}_{0t} - \hat{a}_{0t-1}) + (1 - \gamma)\hat{a}_{1t-1}, \quad (4.2.9)$$

$$\hat{s}_t = \beta \cdot y_t / \hat{a}_{0t} + (1 - \beta)\hat{s}_{t-m}. \quad (4.2.10)$$

Для несезонних часових рядів обчислювальні формули спрощують за рахунок виключення сезонної компоненти. За відносно постійної амплітуди сезонної хвилі доцільно використовувати адитивну модель, у разі її зміни відповідно до тенденції середнього рівня — мультиплікативну. Зазначимо, що моделі змішаного типу іноді дають точніший результат, але погано тлумачаться змістовно. Практика показує, що у випадку, коли сезонні коливання процесу великі й не дуже стабільні, мультиплікативна модель дає неточні результати.

У процесі побудови моделі виконують числову оптимізацію параметрів адаптації в межах $[0; 1]$.

Метод Тейла-Вейджа. Цей метод формально пристосований до будь-яких часових рядів, однак найкращі результати він дає лише тоді, коли досліджуваний показник відповідає стохастичному процесу Тейла-Вейджа, тобто тенденція описується експоненціальним трендом із мультиплікативно врахованою сезонністю (тут найважливішим є етап ідентифікації, коли на підставі автокореляційної функції різницевого ряду другого порядку досліджують властивості процесу). Метод передбачає застосування адитивної моделі, обчислювання за якою відносно прості. Тому перед використанням адитивної моделі значення рівнів часового ряду заміняють їхніми логарифмами й тим самим перетворюють експоненціальний тренд на лінійний і водночас — мультиплікативну сезонність на адитивну. В результаті адитивна модель має вигляд

$$y_t = a_{0t} + s_t + \varepsilon_t, \quad (4.2.11)$$

$$a_{0t} = a_{0t-1} + a_{1t}, \quad (4.2.12)$$

де a_{0t} — рівень ряду, після вилучення сезонних коливань;

a_{1t} — адитивний коефіцієнт зростання;

s_t — адитивний коефіцієнт сезонності;

ε_t — білий шум.

Прогноз, зроблений на момент часу t на τ кроків уперед, розраховують за формулою:

$$\hat{y}_t(\tau) = \hat{a}_{0t} + \tau \cdot \hat{a}_{1t} + s_{t-m+\tau}, \quad (4.2.13)$$

де «оновлювання» коефіцієнтів на кожному наступному кроці $t+1$ відбувається за допомогою таких розрахунків:

$$\hat{a}_{0t} = \hat{a}_{0t-1} + \hat{a}_{1t-1} + \alpha(y_t - \hat{y}_t), \quad (4.2.14)$$

$$\hat{a}_{1t} = \hat{a}_{1t-1} + \alpha \cdot \beta(y_t - \hat{y}_t), \quad (4.2.15)$$

$$\hat{s}_t = \hat{s}_{t-m} + (1 - \alpha)\gamma(y_t - \hat{y}_t), \quad (4.2.16)$$

де α, β, γ — параметри адаптації, ($0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$).

Метод Харрісона [31] полягає у подвійному застосуванні процедури експоненціального згладжування Брауна. На першому кроці за допомогою ковзної середньої із вхідного ряду вилучають сезонні коливання, а потім до одержаного ряду застосовують метод простого експоненціального згладжування. Далі за відхиленнями від тренду визначають значущі гармоніки, котрі відображають сезонні коливання. На їх підставі розраховують адитивні коефіцієнти сезонності:

$$s_j = \sum_k a_k \cdot \cos(k \frac{2\pi \cdot j}{m}) + b_k \cdot \sin(k \frac{2\pi \cdot j}{m}), \quad (4.2.17)$$

де a_k і b_k — коефіцієнти значущих гармонік k , за якими робиться підсумок.

Параметри дисконтування рівнів, які використовують для побудови поліноміальної й коливальної складових, можуть бути різними. Їхня оптимальна величина визначається методом перебору. Прогнозові оцінки формуються шляхом підсумовування прогнозних оцінок тренду, одержаних за експоненціальною моделлю і сезонною компонентою.

Застосування динамічного фільтру Левандовського. Очевидно, що при малих значеннях сезонних коефіцієнтів вплив випадкового коливання рівня процесу є великим, причому він тим силь-

ніший, чим ближче значення цих коефіцієнтів до нуля. Модель у цьому разі стає неадекватною. Запобігти такому результату можна за допомогою динамічного фільтру Левандовського, згідно з яким величина параметра згладжування α стає (за допомогою додаткового параметра δ) залежною від суттєвості сезонних коливань. Якщо амплітуда коливань сезонних коефіцієнтів досягає чотирьох рівнів, то нове значення параметра згладжування a_1 , визначають як добуток α і δ . Зі збільшенням амплітуди, тобто зі зменшенням величини $h = \frac{S_t}{S_{\max}}$, значення δ лінійно зменшується

за співвідношенням: $\delta = 4h$. Отже, параметр згладжування дорівнюватиме одиниці в разі оброблення звичайних часових рядів і прагнутиме до нуля під час прогнозування рядів зі значною сезонністю.

Авторегресійна модель має вигляд:

$$z_t = a_0 + a_a \cdot z_{t-1} + a_2 \cdot z_{t-2} + \dots + a_p \cdot z_{t-m}. \quad (4.2.18)$$

Ідентифікація порядку d різницевого ряду z_t , $t = 1, \dots, n' = n - d$ виконується за допомогою тих самих засобів, що й для несезонних моделей.

Порядок $AR(p)$ -моделі можна обрати такий, що дорівнюватиме періоду сезонності, тобто $p = m$. У цьому разі її розмірність збігається із розмірністю моделі Вінтерса, параметри моделі набувають змісту індексів сезонності, але визначаються в інший спосіб (МНК). Кількість параметрів можна скоротити за рахунок несуттєвих за величиною впливу коефіцієнтів.

Сезонна модель авторегресії-ковзної середньої (ARIMA $(p, d, q) \cdot (P, D, Q)$) містить сезонні різниці перетворення (інтегровані ряди), авторегресії та ковзної середньої. В операторному вигляді її записують так:

$$\Delta_s^d \Delta_y^D a(L) \phi(L^s) y_t = b(L) \theta(L^s) \epsilon_t, \quad (4.1.19)$$

де Δ_s^D — оператор порядку сезонної різниці: $\Delta_s^D y_t = y_t - y_{t-m}$,

D — порядок інтеграції сезонного ряду;

m — період сезонності;

ϕ — оператор сезонної авторегресії порядку P ;

θ — оператор сезонної ковзної середньої порядку Q ;

p, d, q, Δ_y^d визначено раніше.

Основні кроки з розроблення сезонної моделі збігаються з аналогічними кроками для несезонної моделі.

5.1. Прогнозування на основі багатofакторних регресійних моделей

Істотна відмінність економетричних моделей від моделей часових рядів полягає у тому, що останні описують зміну досліджуваного показника як функцію його попередніх тенденцій, тоді як в основу економетричних моделей покладено економічну теорію, яка встановлює залежність досліджуваного показника від зміни інших показників, зокрема й від стану самого показника в минулому. У деяких випадках обидва типи моделей можуть бути подібними, зокрема якщо тенденція часового ряду моделюється за допомогою кривих зростання, але їхнє тлумачення відрізняється.

Розроблення економетричних моделей із метою прогнозування для будь-якого періоду випередження починають із визначення регресійної моделі. Позначимо через $y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{mt}$ ендogenous змінні, а через $x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt}$ — екogenous змінні, де t — спостереження ($t = 1, 2, \dots, n$). Ендogenous змінні, які визначаються внутрішньою структурою досліджуваного економічного явища, тобто їхні величини обчислюють на основі економетричної моделі. Екogenous змінні незалежні від внутрішньої структури економічного явища та їхні величини задаються поза моделлю. Рівняння регресії характеризує кореляційну залежність ендogenous змінної від екogenous змінних. Виділяють модель (рівняння) парної регресії:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + \varepsilon_t \quad (5.1.1)$$

та множинної регресії

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \dots + a_m x_{mt} + \varepsilon_t, \quad (5.1.2)$$

або в матричному запису

$$Y = X \cdot A + \bar{\varepsilon} \quad (5.1.3)$$

де $\bar{\varepsilon}$ — вектор випадкових змінних.

Рівняння регресії передбачає, що існує лише односторонній зв'язок між залежною (ендogenous) змінною y_t та незалежними (екogenous) змінними $x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt}$. У лінійному регресійному

Лінеаризація нелінійної регресії. Зв'язок між залежною та незалежними змінними не обов'язково може бути лінійним. Використовуючи матриці показників Y та X , можна по черзі випробувати різні види залежності (див. табл. 5.1.2). Для цього кожне із рівнянь регресії шляхом перетворень типу логарифмування або піднесення до ступеня зводять до лінійної моделі. Обирають той вид зв'язку, для якого коефіцієнт детермінації (R^2) ближчий до 1. У табл. 5.1.1 на прикладі парної регресії розглянуто функції, найпоширеніші у практиці економічних досліджень.

Таблиця 5.1.1

ОСНОВНІ ФУНКЦІІ ПАРНОЇ РЕГРЕСІЇ

Модель	Перетворення	Матриці	
		X	Y
$Y = a + bX$	Ні	$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
$Y = a + bX + cX^2$	Ні	$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
$Y = a + b/X$	Ні	$\begin{pmatrix} 1 & 1/x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 1/x_n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
$Y = 1 / (a + bX)$	Піднесення до ступеня (-1)	$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/y_1 \\ \dots \\ 1/y_n \end{pmatrix}$
$Y = 1 / (a + b \exp(-X))$	Піднесення до ступеня (-1)	$\begin{pmatrix} 1 & \exp(-x_1) \\ \dots & \dots \\ 1 & \exp(-x_n) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/y_1 \\ \dots \\ 1/y_n \end{pmatrix}$
$Y = a \exp(bX)$	Логарифмування	$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \dots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}$

$Y = a + b \lg(X)$	Ні	$\begin{pmatrix} 1 & \ln(x_1) \\ \dots & \dots \\ 1 & \ln(x_n) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
--------------------	----	---	---

Закінчення табл. 5.1.1

Модель	Перетворення	Матриці	
		X	Y
$Y = ab^x c^x$	Логарифмування	$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \dots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}$
$Y = a^{b^x}$	Логарифмування	$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \dots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}$
$Y = a + b / \ln(x)$	Ні	$\begin{pmatrix} 1 & 1/\ln(x_1) \\ \dots & \dots \\ 1 & 1/\ln(x_n) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
$Y = aX^b$	Логарифмування	$\begin{pmatrix} 1 & \ln(x_1) \\ \dots & \dots \\ 1 & \ln(x_n) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \dots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}$
$Y = a + bX + c(X)^{1/2}$	Ні	$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \sqrt{x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \sqrt{x_n} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
$Y = X / (a + bX)$	Ні	$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1/y_1 \\ \dots \\ x_n/y_n \end{pmatrix}$
$Y = a \cdot \exp(b/X)$	Логарифмування	$\begin{pmatrix} 1 & 1/x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 1/x_n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \dots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}$
$Y = a + bX^k$	Ні	$\begin{pmatrix} 1 & x_1^k \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n^k \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$

$Y = a + bX + cX^2 + \dots + dX^k$	Hi	$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \dots & x_1^k \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n \dots & x_n^k \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
------------------------------------	----	---	---

Методи оцінювання регресійних рівнянь та симультативних систем рівнянь. Рівняння множинної лінійної регресії уможливує встановлення статистичного взаємозв'язку досліджуваних показників, та в разі його значущості — визначення аналітичних і прогнозованих оцінок. Оцінки параметрів знаходять методом найменших квадратів (МНК) за умови мінімуму функціонала:

$$(Y - XA)^T (Y - XA). \quad (5.1.9)$$

МНК-оцінки обчислюють за формулою:

$$A = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (5.1.10)$$

вони є незсуненими, ефективними та консистентними.

Якщо $\hat{Y} = X \hat{A}$ — емпірична апроксимаційна регресія, то елементи вектора $\bar{\varepsilon} = Y - \hat{Y}$ називаються *залишками*. Аналіз залишків дає підстави для висновку стосовно якості побудованого рівняння регресії. Ускладнення методів оцінювання параметрів рівняння регресії й прогнозування залежної змінної зумовлене невиконанням допущень регресійного аналізу [13]. На особливу увагу заслуговують такі порушення, як мультиколінеарність, гетероскедастичність, автокореляція, незалежність між собою випадкових величин та чинників.

Якщо використовувати МНК для оцінювання параметрів рівняння, яке є складовою системи одночасних структурних рівнянь (5.1.4), то одержані оцінки будуть зсуненими й неконсистентними, а статистичні тести — некоректними. Це пояснюється тим, що деякі пояснювальні змінні в правій частині рівняння є ендогенними Y і частково залежать від ε . Тим самим порушується умова класичної регресії, що в рівнянні регресії пояснювальні змінні не корелюють із випадковою змінною ε . Цьому можна запобігти, якщо оцінювати приведену форму моделі. Для рекурсивної системи рівнянь немає потреби в залученні складних методів оцінювання параметрів. Застосування звичайного методу МНК до кожного із рівнянь рекурсивних систем окремо забезпечує консистентні оцінки параметрів.

Не завжди оцінювання приведеної форми моделі вможливило отримання однозначних величин параметрів структурної моделі системи симультативних рівнянь. Це пов'язано із проблемою ідентифікації. Якщо визначення параметрів певного структурного рівняння в системі неможливе, це рівняння *недоототожене* й не може бути оцінене жодними методами. Якщо існують умови, що вможливають однозначну оцінку параметрів, структурне рівняння системи називають *точно ототожненим*. І якщо умов більше, ніж потрібно для однозначної оцінки рівняння, маємо його *переототоження*.

Необхідною і достатньою умовою (умова рангу) для ототоження певного рівняння в системі з m рівнянь є можливість утворення принаймні одного ненульового визначника порядку $m - 1$ із коефіцієнтів змінних, які входять до системи, але відсутні в такому рівнянні. За умовою рангу загальні принципи ідентифікації окремого рівняння структурної моделі, яка складається з m симультативних рівнянь, формально записують так:

рівняння точно ототожене, якщо $k - k_i = m_i - 1$;

рівняння переототожене, якщо $k - k_i > m_i - 1$;

рівняння недоототожене, якщо $k - k_i < m_i - 1$;

де m — кількість ендогенних змінних у системі;

m_i — кількість ендогенних змінних в i -му рівнянні системи;

k — кількість екзогенних змінних у системі;

k_i — кількість екзогенних змінних в i -му рівнянні.

У разі точно ототожнених рівнянь можна застосувати звичайний метод найменших квадратів (МНК), але для цього систему одночасних структурних рівнянь треба перетворити на приведену форму.

Для оцінювання параметрів системи структурних переототожнених рівнянь застосовують спеціальні методи. Найпоширенішими є двокроковий і трикроковий методи найменших квадратів. Якщо рівняння моделі точно ототожені, то непрямий і двокроковий методи дають однакову оцінку параметрів моделі. Якщо рівняння будуть переототожненими, оцінки відрізняться.

Сутність *двокрокового методу найменших квадратів* (2МНК) полягає в тому, що на першому кроці для кожної ендогенної змінної будують регресії на всі екзогенні змінні, й на основі цих регресій методом найменших квадратів знаходять теоретичні (оцінені) значення ендогенних змінних Y . На другому кроці в кожне структурне рівняння системи замість пояснювальних ендого-

генних змінних підставляють їхнє теоретичне значення, після чого знову застосовують МНК. Оцінки 2 МНК, на відміну від звичайних МНК-оцінок, є спроможними.

Трикроковий метод найменших квадратів призначений для одночасного оцінювання параметрів усіх рівнянь моделі. Сутність методу полягає в тому, що спочатку застосовують двокроковий метод найменших квадратів. На підставі одержаних оцінок знаходять оцінку для коваріаційної матриці похибок системи рівнянь. На третьому кроці параметри рівнянь системи переоцінюють на основі узагальненого методу найменших квадратів. Трикроковий метод найменших квадратів забезпечує кращу, порівняно із двокроковим методом, асимптотичну ефективність оцінок лише в тому разі, коли залишки, які входять в різні рівняння моделі, корелюють між собою.

Щоб застосувати трикроковий метод найменших квадратів на практиці, необхідне виконання таких вимог:

1) усі тотожності, що входять до системи рівнянь, треба виключити, беручись до обчислення оцінок параметрів;

2) кожне недоототожене рівняння також треба виключити із системи;

3) якщо система рівнянь, що залишилася, має точно ототожені й переототожені рівняння, тоді трикроковий метод оцінки доцільно застосовувати до кожної із цих груп;

4) якщо група переототожнених рівнянь має лише одне рівняння, тоді трикроковий метод перетворюється на двокроковий;

5) якщо матриця коваріацій для структурних залишків є блоково-діагональною, то вся процедура оцінювання на основі трикрокового методу найменших квадратів може бути застосована окремо до кожної групи рівнянь, які відповідають одному блоку.

Коефіцієнти оцінки впливовості чинників. Апарат кореляційно-регресійного аналізу дає змогу розраховувати різні оцінні коефіцієнти для визначення ступеня впливу певного чинника:

a_j — *коефіцієнт граничної ефективності j -го чинника* — показує, на скільки одиниць свого вимірювання в середньому зміниться y , якщо чинник x_j зросте на одиницю за фіксованого стану решти чинників. Цей коефіцієнт відповідає частинній похідній y за відповідною x_j :

$$a_j = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_j}. \quad (5.1.11)$$

Зазначимо, що за допомогою коефіцієнтів регресії неможливо порівняти вплив чинників на залежну змінну через розбіжність одиниць вимірювання й ступеня коливання.

ξ_j — частковий коефіцієнт еластичності — показує, на скільки відсотків у середньому зміниться y , якщо чинник x_j зросте на 1 % за фіксованого стану решти чинників. Коефіцієнтом еластичності користуються для економічного тлумачення нелінійних зв'язків (табл. 5.1.2). Коефіцієнт еластичності обчислюють як

$$E_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}}. \quad (5.1.12)$$

Таблиця 5.1.2

Функція	Формула коефіцієнта еластичності
$y = a + bx$	$E = b(x / y)$
$y = a + bx + cx^2$	$E = (b + 2cx)(x / y)$
$y = a + b / x$	$E = b / (ax + b)$
$y = 1 / (a + bx)$	$E = bx / (a + bx)$
$y = 1 / (a + b)e^{-x}$	$E = bxe^{-x} / (a + be^{-x})$
$y = ae^{bx}$	$E = bx$
$y = a + b \ln(x)$	$E = b/y$
$y = ab^x c^{x^2}$	$E = a(\ln(b)e^x c^{x^2} + 2b^x x e^{x^2} \ln(c))(x/y)$
$y = ab^x$	$E = a \ln(b)e^x (x/y)$
$y = a + b / \ln(x)$	$E = b/(\ln^2(x)y)$
$y = ax^b$	$E = b$
$y = a + bx + c(x)^{1/2}$	$E = (b - c)(x)^{1/2} (x/y)$
$y = x / (a + bx)$	$E = a / (a + bx)$
$y = ae^{b/x}$	$E = b / x$

$y = a + bx^k$	$E = bkx^k / (a + bx^k)$
$y = a_0 + a_1x' + \dots + a_kx^k$	$E = (\sum_{i=1}^k a_i ix^i) / y$

β_j — *бета-коєфіцієнт* або коєфіцієнт регресії у стандартизованому вигляді використовують для усунення різниць у вимірюванні та ступені коливання чинників. Коєфіцієнт показує, на яку частину величини середньоквадратичного відхилення змінюється середнє значення залежної змінної, коли відповідна незалежна змінна збільшується на одне середньоквадратичне відхилення, а решта незалежних змінних залишаються сталими:

$$\beta_j = \frac{\hat{a}_j \hat{\sigma}_j}{\hat{\sigma}_y}, \quad (5.1.13)$$

де \hat{a}_j — коєфіцієнт регресії, який відповідає змінній x_j ,

$\hat{\sigma}_j$ — оцінка середньоквадратичного відхилення j -ї пояснювальної змінної,

$\hat{\sigma}_y$ — оцінка середньоквадратичного відхилення залежної змінної.

Δ_j — *дельта-коєфіцієнт* — показує частку впливу кожного чинника в загальній дії усіх чинників, включених до рівняння регресії. Розрахункова формула має вигляд:

$$\Delta_j = (r_j \cdot \beta_j) / R^2; \quad \sum_k \Delta_k = 1; \quad R^2 = r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \dots + r_k\beta_k, \quad (5.1.14)$$

де R^2 — коєфіцієнт детермінації; r_{yj} — коєфіцієнт парної кореляції між j -м чинником і залежною змінною.

За коректно зробленим аналізом величини дельта-коєфіцієнтів додатні, тобто всі коєфіцієнти регресії, мають той самий знак, що й відповідні парні коєфіцієнти кореляції.

Прогнозування на основі регресійних моделей передбачає такі етапи.

1. Визначення мети дослідження. Вибір відповідної теорії, яка пояснює поведінку економічної системи. Побудова системи показників, відбір чинників, що справляють найбільший вплив на кожен показник, та розроблення логіко-інформаційної схеми прогнозу. Вибір форми зв'язку показників між собою та відібраними чинниками.

2. Побудова економетричної моделі, тобто відображення теорії у вигляді рівняння регресії або системи рівнянь і тотожностей, яка пов'язує відібрані змінні. Особливо слід зважати на випередження та запізнення впливу змінних у рівняннях, а також на змінні, що містять інформацію про перспективу на майбутнє.

3. Знаходження даних про значення змінних, дотримуючись, за можливості, теоретичних концепцій. Аналіз інформації. В ідеалі потрібні точні дані про всі необхідні змінні.

4. Використання відповідного економетричного методу для оцінювання невідомих параметрів, які входять до рівнянь моделі.

5. Перевірка якості побудованої моделі, яка передбачає, передусім, її відповідність досліджуваному економічному процесу, а також адекватність, точність і прогнозову спроможність.

6. Використання знайденої прийнятої моделі для прогнозу. На підставі рівнянь із оціненими параметрами та прогнозованих екзогенних змінних роблять передбачення потрібних показників, а саме значень ендогенних змінних. Якщо потрібен прогноз на кілька періодів уперед, його можна одержати шляхом послідовності прогнозів на один період. Знайти значення величин екзогенних змінних, від яких суттєво залежить прогноз, можна або на основі одновимірної моделі часових рядів, або використовуючи інші джерела, наприклад іншу економетричну модель або експертні методи.

Як і раніше, позначимо прогноз $y_{t+\tau}$ на період часу $(t + \tau)$ через $\hat{y}_t(\tau)$. При цьому $\tau \geq 1$ є періодом випередження, відповідно,

помилки прогнозу дорівнюють: $e_{t+\tau} = y_{t+\tau} - \hat{y}_{t(\tau)}$. З огляду на те, що значення помилок можуть бути як від'ємними, так і додатними, використовують поняття мінімуму середнього квадрата помилок (MSE). Відповідно, оптимальним є прогноз, за якого мінімізується середній квадрат помилок прогнозу. Тобто обирають таке прогнозове значення $\hat{y}_t(\tau)$, за якого мінімізується

$M(e^2_{t+\tau}) = M\{(y_{t+\tau} - \hat{y}_{D(\tau)})^2\}$. Зауважимо, що, оскільки помилка прогнозу є випадковою величиною, ми мінімізуємо математичне

сподівання квадрата помилок. Мінімізація середнього квадрата помилок аналогічна прогнозованому значенню $\hat{y}_i(\tau)$, отриманому як умовне математичне сподівання $y_{i+\tau}$ за заданих усіх спостережень часового ряду до періоду t , тобто $\hat{y}_i(\tau) = M(y_{i+\tau} | y_i, y_{i-1}, \dots, y_1)$ (див. 7.1).

Припустімо, що для побудованої моделі виконуються всі допущення лінійної регресії. Тоді за відомими значеннями чинників $\vec{x}_{n+\tau} = (1, x_{1,n+\tau}, \dots, x_{k,n+\tau})$ на період випередження τ незміщена оцінка точкового прогнозу дорівнює:

$$\hat{y}_n(\tau) = \vec{x}_{n+\tau}' \hat{A}. \quad (5.1.15)$$

Якість прогнозу тим вища, чим надійніше оцінено параметри моделі; точніше визначено значення незалежних змінних для періоду випередження прогнозу; точніше виконуються в прогнозованому періоді всі допущення лінійної регресії.

Інтервал надійності прогнозу отримаємо для математичного сподівання залежної змінної y та для її індивідуального значення. Дисперсії величини y будуть у цих випадках різними. Оскільки похибка прогнозу $e_{n+\tau}$ є лінійною функцією нормально розподіленої змінної \hat{A} , то дисперсія математичного сподівання прогнозу дорівнює:

$$\sigma_e^2 = \sigma_e^2 \vec{x}_{n+\tau}' (X'X)^{-1} \vec{x}_{n+\tau}. \quad (5.1.16)$$

Виходячи з цього, інтервал надійності математичного сподівання $y_{n+\tau}$ для рівня довіри $1 - \alpha$ визначають за формулою:

$$\hat{y}_n(\tau) \pm t_{\alpha/2, n-k-1} \sqrt{\sigma_e^2 \vec{x}_{n+\tau}' (X'X)^{-1} \vec{x}_{n+\tau}}, \quad (5.1.17)$$

де $t_{\alpha/2, n-k-1}$ — визначається з таблиць t -розподілу.

Дисперсія похибки індивідуального прогнозу дорівнює

$$\sigma_{e(i)}^2 = \sigma_e^2 + \sigma_e^2 \vec{x}_{n+\tau}' (X'X)^{-1} \vec{x}_{n+\tau} = \sigma_e^2 (1 + \vec{x}_{n+\tau}' (X'X)^{-1} \vec{x}_{n+\tau}) \quad (5.1.18)$$

Відповідно, інтервал надійності для індивідуального значення $y_{n+\tau}$ визначають за формулою:

$$\hat{y}_n(\tau) \pm t_{\alpha/2, n-k-1} \sqrt{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (1 + \bar{x}'_{n+\tau} (X'X)^{-1} \bar{x}_{n+\tau})}. \quad (5.1.19)$$

Переваги прогнозування на підставі економетричних моделей увиразнюються завдяки розвитку обчислювальної техніки та програмних продуктів. Завдяки використанню їх можна, по-перше, збільшувати розмірність моделі, глибше розглядати подробиці економічних зв'язків. Важливим є те, що модельні розрахунки не просто вможливають стримання прогнозів за великою кількістю показників, але при цьому показники збалансовані, не суперечать одне одному, взаємопов'язані в систему.

Утім, економетричні моделі не позбавлені недоліків. Як зручний інструмент прогнозування, вони, однак, не розв'язують і не можуть розв'язати його принципових проблем. Перш за все, моделі не сприяють підвищенню точності прогнозування поворотних точок розвитку. В економетричних моделях припускається, що інституції (закони, ділова практика, економічна політика тощо) залишаються незмінними в часі, або ж їхні зміни контролюються. Вони більш придатні для екстраполяції вже встановлених тенденцій розвитку, ніж для розпізнавання зміни в них. З цієї причини прогнозування економічного зростання на підставі моделей можливе лише шляхом введення зовнішніх змінних і коригування параметрів.

До того ж, на практиці не завжди можливо сконструювати економетричну модель. По-перше, дослідник може вагатися стосовно вибору відповідної економічної теорії. По-друге, надійних даних про значення змінних, які належать до цієї моделі, може не існувати. З аналізу економічного моделювання й прогнозування зрозуміло, що побудова спроможних прогнозів вимагає не лише коректної економічної теорії, а й правильних рішень на кожному етапі побудови прогнозу. Інакше кажучи, прогнози є комбінацією економічної теорії та мистецтва прогнозиста. Як наслідок, дослідження прогнозів не обов'язково може визначити, який саме варіант економічної теорії є коректним, і не завжди містить достатньо інформації про відмінності між економічними моделями. Може статися, що на точність прогнозу найбільшою мірою впливає передбачення або припущення стосовно майбутніх заходів уряду та значень екзогенних змінних.

Приклад 5.1.1.

Розробити прогноз впливу державної фінансової політики на функціонування економіки країни, використовуючи модель Л. Клейна, яка відображає залежність шести ендогенних змінних від трьох екзогенних змінних (табл. 5.1.3). Дані умовні.

Ендогенні змінні: $C(t)$ — особисте споживання, $W_1(t)$ — заробітна плата, $P(t)$ — прибуток, $I(t)$ — інвестиції, $K(t)$ — основний капітал, $Y(t)$ — національний дохід.

Екзогенні змінні: $W_2(t)$ — державний фонд заробітної плати, $G(t)$ — державні замовлення, $X(t)$ — податок на ділову активність або податок на підприємництво (складаються з податків на продаж, акцизів, податків на майно, сплати ліцензій і мита).

Таблиця 5.1.3

**ВХІДНА ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ
ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ**

Роки (t)	$Y(t)$	$I(t)$	$G(t)$	$C(t)$	$X(t)$	$P(t)$	$W_1(t)$	$W_2(t)$	$K(t)$
1	1203,5	240,8	299,1	795,5	131,9	120,2	683,3	400	1220,8
2	1289,1	219,6	355	862	147,5	137,1	720,1	431,9	1440,4
3	1441,4	277,7	356,9	969	162,2	146,4	740	555	1718,1
4	1617,8	344,1	387,3	1057,6	171,2	150,2	810	657,6	2062,2
5	1838,2	416,8	425,2	1177,8	181,6	168,1	850,3	819,8	2479
6	2047,3	454,8	467,8	1319,8	195,1	174	895,5	977,8	2933,8
7	2203,5	437	530,3	1460,8	224,6	188,3	949,3	1065,9	3370,8
8	2443,5	515,5	588,1	1601,2	261,3	196,2	1026,3	1221	3886,3
9	2518,4	447,3	641,7	1693,8	264,4	200,4	1180	1138	4333,6
10	2719,5	502,3	675	1831,8	289,6	222,6	1290,6	1206,3	4835,9
11	3028,5	664,8	735,9	1956	328,2	288,6	1360,6	1379,3	5500,7
12	3234	643,1	820,8	2113,7	343,6	292,1	1500	1441,9	6143,8
13	3437,1	665,9	871,2	2247,3	347,3	300,4	1685,8	1450,9	6809,7
14	3678,7	712,9	924,7	2409,1	368	290	1826	1562,7	7522,6
1	3964,3	765,5	936,3	2655,2	392,7	310	2090	1564,3	8288,1

Розв'язок.

Математична модель задачі має вигляд:

Рівняння функціонування

Функція споживання: $C(t) = f(W(t), P(t), P(t-1))$ або
 $C(t) = a_0 + a_1 (W_2(t) + W_1(t)) + a_2 P(t) + a_3 P(t-1) + U_{1t}$. (1)

Функція інвестицій: $I(t) = f(P(t), P(t-1), K(t-1))$ або
 $I(t) = b_0 + b_1 P(t) + b_2 P(t-1) + b_3 K(t-1) + U_{2t}$. (2)

Функція попиту на робочу силу: $W_1(t) = f(Z(t), Z(t-1), T)$ або
 $W_1(t) = d_0 + d_1 Z(t) + d_2 Z(t-1) + d_3 T + U_{3t}$, $Z(t) = (Y(t) + X(t) - W_2(t))$. (3)

Тотожності

Рівняння національного доходу $Y(t) = C(t) + I(t) + G(t) - X(t)$. (4)

Рівняння прибутку $P(t) = Y(t) - W_1(t) + W_2(t)$. (5)

Рівняння зміни капіталу $K(t) = K(t-1) + I(t)$ (6)

Розрахунки за моделлю здійснюються у чотири етапи: формування інформаційної бази, оцінювання параметрів моделі, побудова економетричних моделей зв'язку ендогенних змінних, аналіз моделі.

Інформаційна база, окрім усіх вхідних даних, передбачає формуванням додаткових блоків для лагових ендогенних змінних: $Y(t-1)$, $X(t-1)$, $P(t-1)$, $K(t-1)$, $W_2(t-1)$, $Z(t-1)$.

Параметри структурної моделі (1 – 6) можна обчислювати двокроковим або трикроковим МНК, оскільки модель не містить недоотожнених рівнянь. У результаті розрахунків одержуємо таку числову модель задачі:

Функція споживання: $C(t) = 36,2 + 0,81(W_2(t) + 0,66W_1(t) + 0,0095P(t) - 0,42P(t-1) + U_{1t}$. (7)

Функція інвестицій: $I(t) = 64,7 + 1,648P(t) - 0,32P(t-1) + 0,037K(t-1) + U_{2t}$. (8)

Функція попиту на робочу силу: $W_1(t) = 52,62 + 1,06Y(t) - 0,83X(t) - 1,104W_2(t) - 0,129Z(t-1) + 13,25T + U_{3t}$. (9)

Рівняння національного доходу: $Y(t) = C(t) + I(t) + G(t) - X(t)$. (10)

Рівняння прибутку: $P(t) = Y(t) - W_1(t) + W_2(t)$. (11)

Рівняння капіталу: $K(t) = K(t-1) + I(t)$. (12)

Якщо виразити ендогенні змінні через лагові ендогенні й екзогенні змінні та константи, рівняння (7—12) матимуть вигляд:

$C(t) - 0,81(W_2(t) - 0,0095P(t) = 36,2 + 0,66W_1(t) - 0,42P(t-1) + U_{1t}$ (13)

$I(t) - 1,648P(t) = 64,7 - 0,32P(t-1) + 0,037K(t-1) + U_{2t}$. (14)

$$W_1(t) - 1,06Y(t) = 52,62 - 0,83X(t) - 1,104W_2(t) - 0,129Z(t-1) + 13,25T + U_3, \quad (15)$$

$$Y(t) - C(t) - I(t) = G(t) - X(t), \quad (16)$$

$$Y(t) - P(t) - W_1(t) = W_2(t), \quad (17)$$

$$K(t) - I(t) = K(t-1) \quad (18)$$

Систему (13—18) можна записати в загальному матричному вигляді:

$$AY = B, \quad (19)$$

де A — матриця, складена із коефіцієнтів за шести ендогенних змінних,
 Y — вектор невідомих ендогенних змінних, якому відповідає вектор-стовпчик,

B — вектор вільних членів, якому відповідають співвідношення між константами, екзогенними та ендогенними лаговими змінними.

Або в чисельному вигляді:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,8 & 0 & -0,0095 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1,65 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1,0643 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C(t) \\ I(t) \\ W(t) \\ Y(t) \\ P(t) \\ K(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36,2 + 0,66W_2(t) - 0,42P(t-1) + U_1 \\ 64,7 - 0,32P(t-1) + 0,037K(t-1) + U_2 \\ 52,62 - 0,826X(t) - 1,104W_2(t) - 0,129Z(t-1) + 13,25t + U_3 \\ G(t) - X(t) \\ W_2(t) \\ K(t-1) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Для розв'язування системи рівнянь (20) необхідно знайти $Y = A^{-1}B$.
 У результаті одержимо:

$$\begin{bmatrix} C(t) \\ I(t) \\ W(t) \\ Y(t) \\ P(t) \\ K(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,333 & 3,333 & -2,07 & 3,333 & -5,54 & 0 \\ -0,41 & 0,584 & -1,29 & -0,41 & -0,96 & 0 \\ 4,169 & 4,169 & -2,58 & 4,169 & -6,91 & 0 \\ 3,917 & 3,917 & -3,36 & 3,917 & -6,50 & 0 \\ -0,25 & -0,25 & -0,78 & -0,25 & -0,58 & 0 \\ -0,41 & 0,584 & -1,29 & -41 & -0,96 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \\ B_3(t) \\ B_4(t) \\ B_5(t) \\ B_6(t) \end{bmatrix},$$

Дослідимо вплив трьох фінансових політик уряду на величину національного доходу (табл. 5.1.4). Варіанти політики на кожен рік характеризуються відповідно:

- 1) зниженням податку $X(t)$ на 5 %;
- 2) збільшенням урядового фонду заробітної плати $W_2(t)$ на 5 %;
- 3) збільшенням урядових замовлень $G(t)$ на 5 %.

Таблиця 5.1.4

РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ ЗА МОДЕЛЛЮ

Т	$C(t)$	$I(t)$	$W_1(t)$	$Y(t)$	$P(t)$	$K(t)$
Варіант (0) — базовий						
1	1048,908	262,2796	971,4021	1518,687	115,3855	1483,079
2	1019,739	306,4003	830,6135	1520,839	135,2262	1789,479
3	1030,635	322,9850	769,9422	1569,720	142,1680	2112,464
4	1090,010	356,5600	713,8314	1690,170	156,5388	2469,024
5	1140,896	390,4097	654,4602	1804,005	171,7456	2859,433
6	1358,669	414,1272	861,8403	2107,996	180,2058	3273,560
7	1356,929	493,6134	735,7277	2177,343	220,6154	3,767,173
8	1510,584	471,9911	1017,717	2359,875	204,1587	4239,164
9	1673,220	527,0658	1155,779	2585,686	223,6069	4766,229
10	1767,421	010,9697	1140,526	2786,091	266,2648	5377,198
11	1969,857	633,3597	1364,174	3080,416	274,2530	6010,557
12	2196,286	640,8284	1644,174	3361,014	265,9399	6651,385
13	2423,221	698,5046	1831,013	3678,425	284,7124	7349,889
14	2464,201	751,9075	1890,551	3759,709	304,8572	8101,796
Варіант 1 — щорічне зменшення податку на 5 %						
1	1048,908	262,2796	971,4021	1518,687	115,3855	1483,079
2	1016,982	284,4809	827,3281	1504,273	121,9455	1767,559

3	1080,241	309,986	825,0847	1614,887	132,2032	2077,545
4	1129,322	342,4656	757,8390	1724,487	146,8487	2419,965
5	1178,879	374,9634	696,9379	1836,342	161,6046	2794,863
6	1299,756	408,4863	782,9602	2025,142	176,2821	3203,286
7	1381,183	472,8060	764,0480	2193,889	208,8412	3676,106
8	1555,350	450,6725	1067,534	2396,543	191,0082	4126,772
9	1720,381	503,2695	1208,034	2623,,531	209,1964	4630,069
10	1818,657	583,8430	1197,186	2826,600	250,1137	5213,943
11	1893,715	581,6225	1260,676	2969,738	267,1624	5795,572
12	2073,237	584,9945	1486,681	3199,532	261,9509	6380,494
13	2271,205	637,3594	1638,927	3483,664	282,0372	7017,849
14	2286,808	684,7725	1667,425	3534,820	303,0949	7702,622

Закінчення табл. 5.1.4

T	$C(t)$	$I(t)$	$W_1(t)$	$Y(t)$	$P(t)$	$K(t)$
Варіант (2) — щорічне збільшення урядового фонду заробітної плати на 5 %						
1	1048,908	262,2796	971,4021	1518,687	115,3855	1483,079
2	1008,822	311,7385	794,0457	1515,261	138,4653	1794,818
3	993,5362	319,7791	698,1546	1529,415	140,7506	2114,579
4	1078,420	364,5222	664,7143	1686,542	161,0379	2479,102
5	1110,025	399,9937	577,8286	1782,719	178,2011	2679,093
6	1223,264	436,9866	651,8901	1965,951	194,8708	3316,076
7	1295,946	506,1168	616,7321	2128,863	230,0815	3822,185
8	1467,858	484,0327	922,241	2329,190	212,0490	4306,212
9	1,635,166	540,0360	1062,513	2560,602	231,4799	4846,246
10	1727,656	625,8885	1037,964	2761,245	275,0265	5472,138
11	1928,180	649,1963	1257,189	3054,577	283,3974	6121,336
12	2155,279	657,0936	1537,772	3336,273	275,0664	6768,433
13	2382,207	716,2516	1719,962	3655,159	294,3564	7494,681
14	2423,802	770,0043	1780,475	3737,406	314,4105	8264,684
Варіант (3) — щорічне збільшення урядових замовлень на 5 %						
1	1048,908	262,2796	971,4021	1516,687	115,3855	1483,079
2	1079,011	299,0019	904,7668	1590,513	130,7462	17826081

3	1107,473	314,8187	863,6767	1657,791	136,5150	2096,898
4	1175,490	347,4392	817,7704	1787,829	150,2593	2444,329
5	1233,973	386,2238	767,6867	1910,297	164,9110	2824,553
6	1364,083	414,6963	865,0857	2110,979	180,0140	3239,246
7	1451,200	480,6445	853,5477	2288,045	213,4973	3719,884
8	1632,205	457,7111	1166,102	2499,296	195,1940	4177,591
9	1803,357	511,8773	1313,848	2734,205	214,0571	4689,467
10	1907,346	594,1891	1310,744	2946,025	255,9810	5283,649
11	2^24,714	614,3844	1552,561	3257,338	262,8769	5897,984
12	2360,342	620,4030	1843,402	3548,295	253,9035	6518,383
13	2595,421	676,5427	2040,082	3874,864	272,0814	7194,922
14	2637,403	729,2179	2100,561	3957,081	292,1694	7924,117

Для кожного варіанта окремо обчислюють величину національного доходу й обирають той варіант, де його середня величина за 14 років є максимальною. Перш за все, за моделлю (13—18) розраховують базовий варіант (0 — варіант), а далі послідовно реалізують три політики уряду (табл. 5.1.4), Рівні національного доходу за усіма варіантами політики уряду представлено графічно на рис. 5.1.1.

Таблиця 5.1.4

**ЗНАЧЕННЯ НАЦІОНАЛЬНОГО ДОХОДУ
ДЛЯ ОДЕРЖАНИХ ТРАЄКТОРІЙ**

Роки	Варіант (0)	Варіант (1)	Варіант (2)	Варіант (3)
1	1518,687	1518,687	1518,687	1516,678
2	1520,839	1504,273	1515,261	1590,513
3	1569,720	1614,887	1529,415	1657,791
4	1690,170	1724,487	1686,542	1787,829
5	1804,005	1836,342	1782,719	1910,297
6	2107,996	2025,142	1965,951	2110,979
7	2177,343	2193,889	2128,863	2288,045

8	2859,875	2396,543	2329,190	2499,296
9	2585,686	2623,531	2560,602	2734,205
10	2786,091	2826,600	2761,245	2946,025
11	3080,416	2969,738	3054,577	3257,338
12	3361,014	3199,532	3336,273	3548,205
13	3687,425	3483,664	3655,159	3874,864
14	3759,709	3534,820	3737,406	3957,031
ΣY	33999,98	33452,14	33561,89	35681,11
$Y_{сер.}$	2428,57	2389,438	2397,277	2548,650
S^2	591168,1	486533,2	597829,7	675490,5

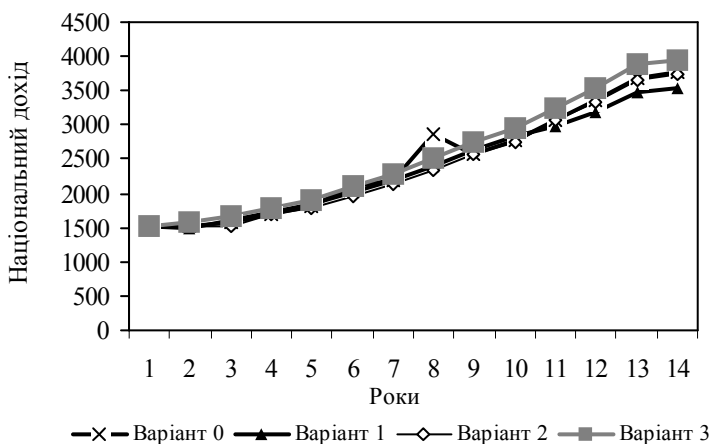


Рис. 5.1.1. Варіанти значень національного доходу стосовно варіантів фінансової політики

Для кожного із варіантів обчислимо середнє значення національного доходу Y і дисперсію σ^2 . Із даних таблиці 5.1.4 видно, що найбільше середнє значення національного доходу $Y(t)$ відповідає третій політиці уряду — збільшенню замовлень на 5%. При цьому середній максимальний національний дохід дорівнює $Y = 2548,65$, але йому відповідає дисперсія $\sigma^2 = 675480,5$ — найбіль-

ша серед решти варіантів, включно з базовим. Отже, з погляду стабільності рівня національного доходу доцільно обрати політику уряду зі зниження податку $X(i)$ на 5 %, тобто варіант 1. Для цього варіанта середній національний дохід дорівнює $Y = 2389,438$ одиниць, але дисперсія $\sigma^2 = 486533,2$ є найменшою серед усіх варіантів.

5.2. Економетричне прогнозування на основі ARIMA- та VAR-моделей

Обговорення в попередніх розділах різноманітних методів прогнозування доводить, що одновимірні моделі аналізу часових рядів (*AR*, *MA*, *ARIMA*) є атеоретичними, оскільки під час їх побудови економічну теорію майже не використовують. Ці моделі прості в застосуванні й не потребують великих витрат. Навпаки, аналіз економетричних моделей прогнозування наголошує вагомому роль економічної теорії. Але значним недоліком таких моделей є велика вартість їх дослідження і водночас ненадійність структурних зв'язків, відтворюваних у моделі, через непередбачені зміни реальних економічних процесів. Щоб уникнути проблем, пов'язаних із формулюванням припущень на підставі певного знання економічної теорії, розроблено економетричний апарат, який уможливорює поширення техніки одномірного прогнозування і на випадок кількох змінних. Одним із аргументів на користь використання одновимірної моделі є те, що її можна отримати зі структурної моделі, й тоді оцінювана одновимірна модель може забезпечити високу якість прогнозу за відносно низькі ціни. У цьому параграфі ми розглянемо деякі багатовимірні узагальнення *ARIMA*-моделей. Почнемо з прикладу.

Приклад 5.2.1.

Для демонстрації зв'язку між економетричним і суто статистичним підходами до прогнозування розглянемо приклад простої моделі економіки країни, яка задається такими рівняннями:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & Y_t = C_t + I_t + G_t, \\
(2) \quad & C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_t, \\
(3) \quad & I_t = \delta(Y_t - Y_{t-1}), \\
(4) \quad & \rho Y_{t-1} + G_t,
\end{aligned}$$

де ендogenous змінні Y_t, C_t, I_t, G_t є, відповідно, реальним доходом, споживанням, інвестиціями та урядовими витратами в момент часу t . До рівняння входить попереднє значення однієї ендogenous змінної, а саме значення реального доходу Y_{t-1} у момент часу $t - 1$, до того ж $\alpha, \beta, \delta, \rho, G$ є додатними сталими. Збурення ε_t є білим шумом, тобто $M(\varepsilon_t) = 0$ для всіх t та $M(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ для $t \neq s$, а дисперсія $M(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ є сталою.

У загальному випадку ми можемо розв'язати систему рівнянь, отримавши рівняння приведенного вигляду, в яких кожна ендogenous змінна записана як функція від усіх екзogenous змінних та значень ендogenous змінних системи у попередні моменти часу. Отже, підставивши (2), (3) та (4) у (1), ми отримаємо рівняння для доходу в приведенному вигляді:

$$Y_t = \lambda + \pi Y_{t-1} + u_t, \quad (5.2.1)$$

де $\lambda = (\alpha + G)/(1 - \beta - \delta)$, $\pi = (\rho - \delta)/(1 - \beta - \delta)$ та $u_t = \varepsilon_t/(1 - \beta - \delta)$.

У (5.2.1) величина Y виражена через свої попередні значення, сталу та збурення. Отже, (5.2.1) є одновимірним зображенням для Y , відомим як авторегресія першого порядку, або $AR(1)$ -процес, оскільки виражається через своє значення в попередній момент часу. Таким чином, економічну модель можна звести до простої одновимірної моделі. Якщо застосувати оператор лагів (зсуву у часі) L , визначений рівняннями, можна записати (5.2.1) як

$$Y_t = \lambda + \pi L Y_t + u_t, \quad (5.2.2)$$

або

$$Y_t = (1 - \pi L)^{-1} \lambda + (1 - \pi L)^{-1} u_t, \quad (5.2.3)$$

Якщо $-1 < \pi < 1$, то підстановка у (5.2.3) розкладу в геометричний ряд

$$(1 - \pi L)^{-1} = 1 + \pi L + \pi^2 L^2 + \pi^3 L^3 + \dots$$

дає рівняння

$$Y_t = (1 - \pi L)^{-1} \lambda + u_t + \pi u_{t-1} + \pi^2 u_{t-2} + \pi^3 u_{t-3} + \dots \quad (5.2.4)$$

У (5.2.4) значення Y є функцією від сталої та нескінченної кількості похибок, які є білим шумом. Якщо ряд можна записати у такий спосіб, то кажуть, що це процес рухомого середнього нескінченного порядку або $MA(\infty)$. Остаточню виразивши Y у (2) через C і підставивши замість Y_t та Y_{t-1} у (5,2,1), можна в результаті перетворень переписати рівняння (2) у вигляді

$$C_t = (\alpha - \alpha\lambda + \beta\lambda) + \pi C_{t-1} + \varepsilon_t - \pi\varepsilon_{t-1} + \beta u_t, \quad (5.2.5)$$

Тут C виражено через свої значення в попередні моменти (i , таким чином, є процесом авторегресії першого порядку або $AR(1)$) та значення залишків у поточний і попередній моменти часу (тобто є процесом рухомого середнього першого порядку або $MA(1)$). Процеси такого типу відомі як процес авторегресійного рухомого середнього або $ARMA(1,1)$.

Цей простий приклад ілюструє, як дві ендогенні змінні структурної моделі, Y та C , можна зобразити у вигляді одновимірного часового ряду та виразити винятково у термінах їхніх власних попередніх значень та/або випадкових похибок. Усе вищесказане можна також застосувати до решти ендогенних змінних, I та G . Звичайно, якщо змінити модель, включивши додаткові ендогенні змінні та значення інших змінних у попередні моменти часу, то зміняться й одновимірні зображення.

ARIMA-моделі є зручним інструментом коротко- та середньотермінового прогнозування окремих часових рядів. Однак сучасні дослідження зосереджуються на розробленні апарату одночасного моделювання кількох часових рядів за допомогою системи динамічних рівнянь *ARIMA*-процесів, що дає змогу включати й досліджувати взаємозворотні зв'язки між показниками та їхніми лаговими значеннями. ►►

Системи, що складаються лише зі змінних, які залежать одна від одної, а також від лагових значень усіх змінних моделі, дістали назву VAR-моделей (vector autoregressive). У цих моделях не намагаються відтворити реальну структуру економіки, відсутній розподіл змінних на екзогенні й ендогенні. Тому *VAR*-моделі зазвичай використовують для прогнозування, хоча за їх допомогою можна аналізувати взаємозалежність між змінними, точно встановлювати їхню структуру. Якщо в аналізі моделі використовують лагові значення деякого процесу з властивостями «білого шуму», такі моделі називають *VARIMA (vector autoregressive moving average)*. Крім того, якщо замість значень часового ряду беруть послідовні різниці, систему називають *VARIMA (vector autoregressive integrated moving average)*. Якщо додати до стандартної *VARIMA*-моделі кілька екзогенних змінних, отримана модель називатиметься *VARIMAX (vector autoregressive moving average with exogenous variables)*.

Зазначимо, що *VAR*-модель є багатовимірним узагальненням кількох підходів до економетричного моделювання, а саме: си-

мультипликативних систем одночасних рівнянь, критики Сімса економічних моделей [14] та багатовимірних *ARIMA*-моделей. Кожна з цих відправних точок може привести до векторних авторегресійних моделей.

Прикладом побудови простої *VAR*-моделі є модель прогнозування відсоткових ставок (R_t) і відсоткової зміни грошової маси (M_t):

$$\begin{cases} R_t = \beta_{10} + \beta_{11}M_{t-1} + \beta_{12}R_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ M_t = \beta_{20} + \beta_{21}M_{t-1} + \beta_{22}R_{t-1} + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

Головною відмінністю цієї моделі є симетрія змінних — обидві змінні з'являються по обидва боки кожного рівняння. Таке подання системи рівнянь є структурною формою *VAR*-моделі. Як і у разі мультипликативних систем рівнянь, структурну форму *VAR*-моделі завжди можна переписати у вигляді приведеної форми, тобто виразити всі ендогенні змінні тільки через предетерміновані змінні.

Означення стандартної *VAR(p)*-моделі. *VAR*-модель у приведеній формі називається стандартною *VAR*-моделлю. В загальному випадку, якщо досліджують m змінних, кожен з яких спостерігали протягом n періодів, то приведена векторна авторегресійна модель p -го порядку (*VAR(p)*) описується системою рівнянь:

$$\begin{aligned} y_{i,t} = & c_i + a_{i1}^{(1)} y_{1,t-1} + a_{i2}^{(1)} y_{2,t-1} + \dots + a_{im}^{(1)} y_{m,t-1} + \dots + \\ & + a_{i1}^{(2)} y_{1,t-2} + a_{i2}^{(2)} y_{2,t-2} + \dots + a_{im}^{(2)} y_{m,t-2} + a_{i1}^{(p)} y_{1,t-p} + \dots + \\ & + a_{i2}^{(p)} y_{2,t-p} + \dots + a_{im}^{(p)} y_{m,t-p} + \varepsilon_{i,t}, \quad i = \overline{1, m}; \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

де i — номер змінної,

$a_{i,j}^k$ — коефіцієнти моделі,

$\bar{\varepsilon}_i$ — векторні процеси «білого шуму».

Для спрощення запису введемо нові позначення:

$$Y_t = \begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ \dots \\ y_{m,t} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(j)} & a_{1,2}^{(j)} & \dots & a_{1,m}^{(j)} \\ a_{2,1}^{(j)} & a_{2,2}^{(j)} & \dots & a_{2,m}^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1}^{(j)} & a_{m,2}^{(j)} & \dots & a_{m,m}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad \bar{\varepsilon}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \dots \\ \varepsilon_{mt} \end{pmatrix},$$

Тоді модель (5.2.6) матиме вигляд

$$I \cdot Y_t = C + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} + \bar{\varepsilon}_t, \quad (5.2.7)$$

де I — одинична матриця розміру $(m+1)(m+1)$.

Використовуюючи поліном від оператора зсуву $A(L) = 1 - A_1 L - A_2 L^2 - \dots - A_p L^p$, отримуємо запис VAR -моделі в матричному вигляді:

$$A(L)Y_t = C + \bar{\varepsilon}_t, \quad (5.2.8)$$

При цьому припускається, що ряди y_{it} , стаціонарні, тобто мають постійну дисперсію та математичне сподівання, значення яких не залежать від періоду часу. У разі нестационарних часових рядів їх необхідно перетворити на стаціонарні операцією різниць. Інакше оцінені коефіцієнти моделей можуть виявитися хибними, а похибка регресії (*estimated error*) — викривленою. Випадкові величини $\varepsilon_{i,t}$ є «білим шумом», але корелюють між собою

За аналогією з $ARIMA$ -процесами, які завжди можна представити у вигляді процесів ковзної середньої, вектор-авторегресійні моделі можна представити у вигляді вектор-процесів ковзної середньої. Так, $VAR(p)$ -процес вигляду (5.2.8) можна перетворити на $VMA(\infty)$ -процес, який у стандартному вигляді записують як:

$$Y_t = M + H_0 \bar{\varepsilon}_t + H_1 \bar{\varepsilon}_{t-1} + H_2 \bar{\varepsilon}_{t-2} + \dots, \quad (5.2.9)$$

де H_0 — одинична матриця, а кожна матриця коефіцієнтів має вигляд:

$$H_\tau = \begin{pmatrix} h_{11}^{(\tau)} & h_{12}^{(\tau)} & \dots & h_{1n}^{(\tau)} \\ h_{21}^{(\tau)} & h_{22}^{(\tau)} & \dots & h_{2n}^{(\tau)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1}^{(\tau)} & h_{n2}^{(\tau)} & \dots & h_{nn}^{(\tau)} \end{pmatrix},$$

Практична побудова $VAR(p)$ -моделі передбачає такі етапи:

- 1) визначення порядку (p) моделі;
- 2) оцінювання параметрів;
- 3) побудову прогнозу;
- 4) аналіз функції імпульсних відгуків (аналіз реагування на шоки) та декомпозицію дисперсії.

Визначення порядку $VAR(p)$ -моделі є першим практичним етапом її побудови. Основне питання полягає у визначенні кількості рівнянь m у системі, кількості лагів p для кожної змінної.

При включенні багатьох змінних із великою кількістю лагів систему, важко оцінити й аналізувати взаємовплив змінних одна на одну. Разом із тим, невелика кількість змінних або лагів може призвести до неправильної оцінки моделі. Незважаючи на певну невизначеність стосовно параметра p , треба пам'ятати, що краще додати до моделі зайві лаги, аніж зменшити необхідну кількість їх. В останньому випадку в моделі можливе зсунення оцінок через помилку специфікації, тоді як у першому випадку можлива лише втрата деякої ефективності оцінених коефіцієнтів. На практиці обирають спочатку максимально можливе значення p_{\max} , причому кількома шляхами. Наприклад, якщо економічна інформація є квартальною, то найчастіше обирають $p_{\max} = 4$ або $p_{\max} = 8$. Вибір p_{\max} також залежить від кількості спостережень за процесом, оскільки за наявності лише кількох спостережень можна використовувати дуже малі значення p_{\max} .

Найбільш формальним критерієм вибору є AIC -критерій, який для $VAR(p)$ -моделі модифікують до вигляду:

$$AIC(p) = \ln \left| \hat{V} \right| + \frac{2pm^2}{n}, \quad (5,2,10)$$

де \hat{V} — коваріаційна матриця залишків у разі застосування методу найменших квадратів, $\left| \hat{V} \right|$ — детермінант коваріаційної матриці.

Тоді вибір p_{\max} здійснюють таким чином. Спочатку послідовно обчислюють значення $AIC(p)$ для всіх $p = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{m^2} \right]$, де квадратні дужки позначають цілу частину числа. За величину p_{\max} обирають те значення p , за якого мінімізується $AIC(p)$.

Ще однією можливістю вибору p_{\max} є застосування такого критерію. Нехай модель має s рівнянь, кожне з яких має p_1 лагів. Усього маємо $s^2 p_1$ змінних, без констант. Спочатку визначимо параметри моделі й обчислимо визначник коваріаційної матриці похибок D_1 . Зменшимо кількість лагів до величини p_2 і знайдемо відповідне значення D_2 . Після цього обчислимо статистику

$$\chi^2 = (n - p_1) \ln \frac{D_1}{D_2}, \quad (5.2.11)$$

Якщо $\chi^2 < \chi_{s^2(p_1-p_2)}^2$, то обираємо модель із меншим числом лагів p_2 . На жаль, цей критерій може лише визначити, яка кількість лагів — p_1 чи p_2 — краща, але не дає змоги визначити оптимальну кількість лагів. Тому для застосування цього методу необхідно перевірити всі значення кількості лагів p від 0 до $\frac{n}{m^2}$.

Оцінювання VAR-моделей. Загальна кількість коефіцієнтів, які потрібно оцінити у VAR (p)-моделі виду (5.2.7), у якій присутні m змінних, сягає $m + p \cdot m^2$ (коефіцієнти вектора C , матриць A_1, A_2, \dots, A_p). Для спрощення процесу знаходження коефіцієнтів введемо позначення:

$W = [C : A_1 : A_2 : \dots : A_p]$ — матриця розміру $m \times (p \cdot m + 1)$ коефіцієнтів моделі,

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ \dots \\ Y_{t-p} \end{pmatrix} = (1 \ y_{1,t-1} \ y_{2,t-1} \ \dots \ y_{m,t-1} \ y_{2,t-1} \ y_{2,t-2} \ \dots \ y_{m,t-2} \ \dots \ y_{m,t-p})^T$$

вектор розміру $(p \cdot m + 1) \times 1$ екзогенних змінних.

Тоді модель (5.2.7) запишеться як:

$$Y_t = WX_t + \bar{\varepsilon}_t. \quad (5.2.12)$$

Очевидно, що оцінити таку модель неважко за допомогою методу найменших квадратів, який дає консистентні й асимптотично ефективні оцінки. Оскільки існує m рівнянь, то необхідно застосувати цей метод m разів. Однак зазначимо, що це можливо, оскільки кількість лагових змінних у кожному рівнянні системи однакова. Якщо це не так, тоді оцінка системи на основі МНК неможлива. В такому разі VAR-модель необхідно оцінювати методом уявно непов'язаних регресій (SUR), що забезпечує ефективні оцінки.

Для оцінювання коефіцієнтів структурної форми за знайденими коефіцієнтами приведеної форми потрібно розв'язати питання ототожнення, яке формулюється як завдання певних обмежень. Так, система VAR у структурній формі буде точно ототожненою, якщо на один із параметрів накласти обмеження; якщо обмеження накладено більш як на один параметр, система буде переототожненою.

Прогнозування на основі VAR-моделей. Завдяки VAR-моделям можна отримати одночасно прогнози багатьох взаємопов'язаних

заних економічних показників. Зазвичай, передбачення майбутніх значень часових рядів здійснюють, як і у випадку *ARMA*-моделей, із мінімально можливою помилкою.

Нагадаємо, що під час прогнозування можливі два типи помилок: пов'язані з різницею між дійсними та оціненими коефіцієнтами моделі, які використовують для прогнозу, та пов'язані з ігноруванням випадкових величин (майбутніх збурень). Класично зважають лише на другий тип помилок, тому під час прогнозування намагаються мінімізувати саме його.

Як і раніше, позначимо прогноз Y_t у період часу $(t + \tau)$ через $\hat{y}_t(\tau)$. При цьому $\tau \geq 1$ є прогнозовим періодом, або періодом випередження. Відповідно помилки прогнозу дорівнюють:

$\bar{e}_{t+\tau} = Y_{t+\tau} - \hat{Y}_t(\tau)$. З огляду на те, що значення помилок можуть бути як від'ємними, так і додатними, використовують поняття мінімуму середнього квадрата помилок (MSE). Відповідно, оптимальним є прогноз, за якого мінімізується середній квадрат помилок прогнозу, тобто обирається таке прогнозове значення $\hat{Y}_t(\tau)$, за якого мінімізується $M(e_{t+\tau}^2) = M\{(Y_{t+\tau} - \hat{Y}_t(\tau))^2\}$. Зауважимо, що, оскільки помилка прогнозу є випадковою величиною, ми мінімізуємо математичне сподівання квадрата помилок.

Мінімізація середнього квадрата помилок відповідає прогнозовому значенню $\hat{Y}_t(\tau)$, отриманому як умовне сподівання $\vec{Y}_{t+\tau}$ за даними всіх спостережень часового ряду до періоду t , тобто

$$\hat{Y}_t(\tau) = M(Y_{t+\tau} / Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_1).$$

Загальний принцип розрахунку прогнозу проілюструємо для випадку найпростішої *VAR*-моделі в стандартному вигляді:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= a_{10} + a_{11}y_{1,t-1} + a_{12}y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= a_{20} + a_{21}y_{1,t-1} + a_{22}y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}. \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

Перепишемо (5.2.13) у матричному вигляді:

$$Y_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{5.2.14}$$

Для спрощення виключимо з (5.2.14) вектор A_0 і отримаємо

$$Y_t = A Y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{5.2.15}$$

Таким чином, якщо дійсні значення за $VAR(1)$ -моделлю (5.2.15) в період часу $(t+1)$: $Y_{t+1} = AY_t + \varepsilon_{t+1}$, то відповідно прогнозові значення в період часу $(t+1)$:

$$Y_t(1) = M(Y_{t+1}|Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_1) = AY_t, \text{ оскільки } M(\varepsilon_{t+1}) = 0,$$

Вектор помилок прогнозу в період часу $(t+1)$ дорівнює $e_{t+1} = Y_{t+1} - Y_{t+1} = \varepsilon_{t+1}$.

Вектор дійсних значень за $VAR(1)$ -моделлю в період часу $(t+2)$

$$Y_{t+2} = AY_{t+1} + \varepsilon_{t+2} = A^2Y_t + A\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}.$$

Прогнозні значення Y у період $(t+2)$

$$\hat{Y}_t(2) = M(Y_{t+2}|Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_1) = A^2Y_t,$$

Помилки прогнозу

$$e_{t+2} = Y_{t+2} - \hat{Y}_t(2) = A\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2},$$

Відповідно для періоду $(t+\tau)$ отримаємо:

$$Y_{t+\tau} = A^\tau Y_t + A^{\tau-1}\varepsilon_{t+1} + \dots + A\varepsilon_{t+\tau-1} + \varepsilon_{t+\tau}, \quad (5.2.16)$$

$$\hat{Y}_t(\tau) = M(Y_{t+\tau}|Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_1) = A^\tau Y_t. \quad (5.2.17)$$

Помилки прогнозу

$$e_{t+\tau} = Y_{t+\tau} - \hat{Y}_t(\tau) = \varepsilon_{t+\tau} + A\varepsilon_{t+\tau-1} + A^{\tau-1}\varepsilon_{t+1}. \quad (5.2.18)$$

Якщо позначити $VAR-COV$ -матрицю векторів випадкових величин через $\Sigma = M(\varepsilon_t \varepsilon_t')$, то з виразу (5.2.18) легко побачити, що $VAR-COV$ -матриця для помилок у період $(t+\tau)$ відповідно дорівнює:

$$\Sigma(\tau) = \Sigma + A^1 A^2 \Sigma (A^1)^2 + \dots + A^{\tau-1} \Sigma (A^1)^{\tau-1}. \quad (5.2.19)$$

Ілюстрація принципу прогнозування на основі найпростішої VAR -моделі демонструє надзвичайну простоту отримання прогнозів, коли вся необхідна для цього інформація міститься лише в часових рядах досліджуваних змінних. При цьому модель уникає довільних обмежень економічної теорії, водночас шляхом включення кількох змінних можна подолати обмеженість одновимірних моделей. Сучасні пакети прикладних програм уможливають отримання прогнозів для VAR -моделей вищих порядків із великою кількістю досліджуваних показників.

Імпульсний аналіз. На відміну від $ARIMA$ -моделей VAR -моделі дають змогу проводити економічний аналіз результатів, Звичайно, самі коефіцієнти VAR -моделей важко тлумачити, але можна інтерпретувати результати функції імпульсних відгуків (*impulse response function*) і декомпозиції дисперсій (*variance decomposition*).

Розглянемо стандартну $VMA(\infty)$ — модель (5.2.9). Елемент h_{ij}^τ

кожної матриці коефіцієнтів $H_\tau = \begin{pmatrix} h_{11}^{(\tau)} & h_{12}^{(\tau)} & \dots & h_{1n}^{(\tau)} \\ h_{21}^{(\tau)} & h_{22}^{(\tau)} & \dots & h_{2n}^{(\tau)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1}^{(\tau)} & h_{n2}^{(\tau)} & \dots & h_{nn}^{(\tau)} \end{pmatrix}$ показує, як змі-

ниться значення i -ї ендогенної змінної (y_i) залежно від j -го шоку (зміни j -ї випадкової змінної) τ періодів тому. Таким чином:

$$h_{ij}^\tau \frac{\partial y_{i,t+\tau}}{\partial \varepsilon_{j,t}} = \frac{\partial y_{i,t}}{\partial \varepsilon_{j,t-\tau}}. \quad (5.2.20)$$

Вираз h_{ij}^τ як функція від τ називається функцією імпульсних відгуків. За допомогою цієї функції можна досліджувати, який вплив на майбутні значення справляють відповідні шоки в минулому.

Приклад 5.2.1.

Проілюструємо ідею імпульсного аналізу простим прикладом, Для $VAR(1)$ -моделі (5.2.13), або у матричному вигляді $Y_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + \bar{\varepsilon}_t$, для спрощення припускаємо, що вектор A_0 (перетини) відсутній, тобто в матричному вигляді маємо $Y_t = A Y_{t-1} + \bar{\varepsilon}_t$.

Нехай нам відома матриця коефіцієнтів $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$ та варіаційно-коваріаційна матриця залишків $VAR - COV = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$. Перший елемент варіаційно-коваріаційної матриці є дисперсією першого збурення, тобто $\sigma_{\varepsilon_1}^2 = 9$. Побудуємо імпульсну функцію із припущенням, що перше збурення змінюється на одне середньоквадратичне відхилення, тобто на 3. Крім того, припустимо, що початкові значення ендогенних змінних дорівнюють нулю:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \varepsilon_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

За нашим припущенням, у перший період часу ε_{11} зростає на 3, а в інші проміжки часу знову спадає до нуля; друге збурення залишається без змін. Проаналізуємо ланцюгову зміну Y як реакцію на одноразовий шок, спричинений зміною першого збурення.

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 1,5 \end{pmatrix},$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,85 \end{pmatrix},$$

$$Y_4 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,85 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,211 \\ 0,38 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$$

Цей процес можна продовжити, відповідно імпульсна функція матиме вигляд:

Імпульсна функція (IRF) від $\varepsilon_1 = (3)$		
Період	y_{1t}	y_{2t}
1	3	0
2	0,9	1,5
3	0,42	0,85

4	0,211	0,38
...

Сучасні програмні пакети надають графічне зображення імпульсної функції. Вона вимірює ефект на значення ендогенних змінних системи в поточний та майбутні періоди, викликаний зміною одного з показників на одне середньоквадратичне відхилення в поточний період.

Зауважимо, що у *VAR*-моделях у приведеній формі інтерпретація імпульсної функції ускладнюється, оскільки збурення в такій системі, на відміну від структурної форми, корелюють між собою. Якщо кореляція існує, то, відповідно, є загальний компонент, який не може бути пов'язаний лише з однією змінною. Розв'язанням цієї проблеми є представлення збурень приведенної форми *VAR*-моделі через збурення структурної форми, які за припущенням не корелюють між собою. ►►

5.3. Застосування моделей коригування помилок (коінтегрування)

Основним припущенням моделювання й прогнозування за *VARMA*-моделями є стаціонарність часових рядів. Наявність стаціонарності також важлива у вивченні співвідношень між різними рядами. Під час обговоренні нестационарних рядів у розділі 1.2 частини II було введено поняття інтегрованих рядів, які перетворюються на стаціонарні шляхом переходу до різниць. Проте внаслідок такого перетворення втрачаються зв'язки між динамічними рядами та важлива довгострокова інформація. Одним із можливих шляхів розв'язання цієї проблеми в разі моделювання на основі часових рядів є застосування моделі коригування помилки (*ECM*). Головною ідеєю цього підходу є оцінювання довготривалого рівноважного взаємозв'язку (на підставі значень відповідних часових рядів у рівнях) між досліджуваними показниками та його комбінація із короткотривалими зв'язками (оціненими на підставі перетворених часових рядів у різницях). Побудова моделі коригування помилки є коректною лише у випадку коінтегрування часових рядів.

Коінтегрування часових рядів. Спочатку сутність коінтегрування проілюструємо на прикладі. Припустімо, що два ряди y_{1t} та y_{2t} є інтегрованими першого порядку $I(1)$, тоді будь-яка лінійна комбінація їх також буде $I(1)$. Простим прикладом є споживання (y_{1t}) та дохід (y_{2t}), пов'язані між собою рівнянням ре-

гресії $y_{1t} = a + by_{2t} + u_t$. Дані про ці змінні за тривалий проміжок часу свідчать про наявність сильно зростаючих трендів, а їхня різниця (заощадження) також має зростаючий тренд. Однак іноді комбінація двох $I(1)$ -рядів є насправді $I(0)$ -рядом. Так, лінійна функція споживання, що складається з $I(1)$ -змінних, може мати стаціонарні залишки, тобто споживання та прибуток є коінтегрованими, тобто формальніше, якщо нова змінна u_t може бути визначена як

$$u_t = y_{1t} - \lambda y_{2t}, \quad (5.3.1)$$

де $u \in I(0)$, кажуть, що y_{1t} та y_{2t} *коінтегровані*, а λ називають *сталою коінтегрування*. Змінну u можна інтерпретувати як похибку й за допомогою сталої, котру можна включити до (5.3.1), можна зробити рівним нулю середнє значення похибки, тобто перетворити на коінтегративне регресійне рівняння. Це пов'язано з коінтегративною регресійною статистикою Дарбіна-Ватсона, наведеного в розділі 1.3 частини 2, до якої ми повернемося далі.

Більш загальне поняття коінтегрування є таким. Нехай часові ряди y_{1t} та y_{2t} є інтегрованими порядку d , тобто $I(d)$. Тоді, як правило, лінійна комбінація цих двох рядів також буде $I(d)$. Але якщо існує лінійна комбінація цих рядів $I(d-b)$, тоді ці ряди називають *коінтегрованими порядку (d, b)* , що позначають $CI(d, b)$. Якщо відповідну лінійну комбінацію можна записати у формі $\vec{\lambda}^T y_t$, де $\vec{\lambda}^T = (y_{1,t}, y_{2,t})$, то вектор $\vec{\lambda}$ називається *коінтеграційним вектором*. У попередньому прикладі змінні y_{1t} та $y_{2t} \in I(1)$, тому $d = b = 1$, $\vec{\lambda}_t \in CI(1, 1)$ та коінтеграційний вектор $\vec{y}_t = (1, -\lambda)$.

Зазначимо такі властивості коінтегрованих змінних:

1) включення сталої до (5.3.1) не дає жодного ефекту;
 2) доведено, що коінтегрованість змінних означає коінтегрованість їхніх логарифмів, тоді як коінтегрованість логарифмів змінних не означає коінтегрованості самих змінних (звідси випливає, що для вибору конкретної функціональної форми бажано провести окремі дослідження нелінійних перетворень змінних у коінтегративних співвідношеннях);

3) коінтегрування передбачає, що дві змінні не рухаються окремо, оскільки u , що є мірою розбіжності між y_{1t} та y_{2t} , можна розглядати як «похибку», яка є стаціонарною із нульовим середнім. Це твердження можна записати у вигляді:

$$y_{1t} - \lambda y_{2t} = 0 \quad (5.3.2)$$

і тлумачити як обмежене або рівноважне співвідношення між y_{1t} та y_{2t} . Динамічний шлях коінтегрованих рядів можна уявити (рис. 5.3.1) як поточне відхилення від довготривалої рівноваги;

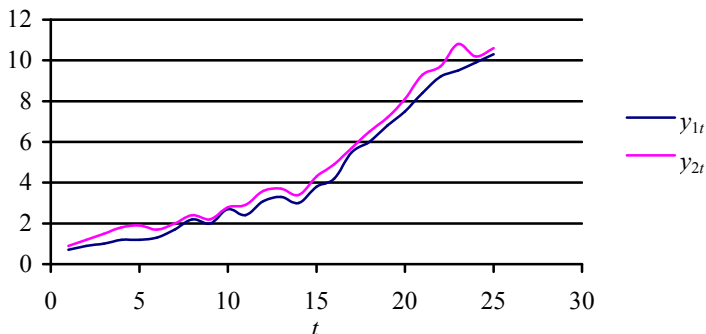


Рис. 5.3.1. Коінтеграція двох часових рядів

4) доведено, якщо y_{1t} та y_{2t} обидва є $I(1)$, мають сталі середні значення й є коінтегрованими, тоді існує механізм генерації даних із коригуванням похибки, або *модель коригування похибки (ЕСМ)*.

Модель коригування похибки (ЕСМ). Лінійна комбінація змінних є лише оцінкою довготривалого зв'язку й не відображає короткотривалої динаміки. Щоб поглибити економетричний аналіз і поліпшити точність моделювання, розглядають модель коригування похибки, яка поєднує довготривалий зв'язок для досліджуваних змінних із лагом одиниця та короткотривалий динаміку, виражену залежністю різниць ендогенних змінних від поточних і лагових (затриманих на певний проміжок часу) різниць екзогенних змінних. Найпростіша модель коригування похибки для випадку двох змінних y_{1t} та y_{2t} має такий формалізований вигляд:

$$\Delta y_{1t} = -\rho_1 u_{t-1} + L(\Delta y_{1t}, \Delta y_{2t}) + d(L)\varepsilon_{1t}, \quad (5.3.3)$$

$$\Delta y_{2t} = -\rho_2 u_{t-1} + L(\Delta y_{1t}, \Delta y_{2t}) + d(L)\varepsilon_{2t}, \quad (5.3.4)$$

де u задається (5.3.1), $d(L)$ є поліномом скінченного порядку від лаг-оператора L та похибки ε_{1t} та ε_{2t} є сумісними процесами білого шуму, які, можливо, корельовані за однакових значень t і $|\rho_1| + |\rho_2| \neq 0$.

Остання умова означає, що u трапляється принаймні в одному з рівнянь. Справедливість (5.3.3) та (5.3.4) впливає із того, що y_{1t} та $y_{2t} \in I(1)$, отже, їхня різниця $\in I(0)$, і тому кожен доданок $\in I(0)$.

Моделі коригування похибки широко використовують в економіці. Вони вимагають наявності добре визначеної рівноваги економічної системи та умови, аби швидкість руху змінних у напрямі положення рівноваги відображала відстань системи до положення рівноваги. Отже, коінтегративне рівняння (5.3.1) відображає положення рівноваги цієї системи. Абсолютне значення величини u_{t-1} вимірює відстань до положення рівноваги в попередній момент часу. Механізм коригування похибки може з'явитися в моделях фінансових ринків за умови, коли очікувані суб'єктами майбутні значення змінних втілені у поточній змінній. Зазначимо, що не тільки коінтегровані змінні мають задовольняти такій моделі, а й дані, породжені *ECM*, також мають бути коінтегрованими.

Цей результат має велике значення, оскільки пов'язує дві раніше відокремлені області: моделі часових рядів та *ECM*. Якщо кілька змінних є коінтегрованими, то існує їхнє векторне *ARMA*-зображення. У стандартній *VARMA*-моделі немає обмежень щодо взаємного руху кількох часових рядів. Саме коінтеграція дає змогу дослідникові вводити до відповідної системи необхідний зв'язок між змінними, що зумовлює точніше оцінювання моделі.

Побудова й коректне застосування моделей коригування похибки з метою прогнозування передбачає послідовне виконання таких етапів:

- 1) перевірка рядів на стаціонарність;
- 2) визначення порядку інтеграції кожного ряду;
- 3) тестування рядів на коінтеграцію;
- 4) оцінювання моделі та перевірка на адекватність.

Критерії визначення порядку інтегрованості та коінтегрованості рядів. У розділі 1.3 частини 2 ми бачили, як коінтегративний регресійний критерій Дарбіна-Ватсона (КРДУ) (1.3.14) та критерій Дікі-Фуллера (1.3.16) можна використати для перевірки порядку інтегрованості одного ряду. Тепер розглянемо їх більш загальне використання. Спочатку перепишемо критерій перевірки того, чи є два ряди коінтегрованими (5.3.1), у вигляді

$$y_{1t} = a + \lambda \cdot y_{2t} + u_t. \quad (5.3.5)$$

Оцінки параметрів рівняння знаходять за допомогою звичайного метода найменших квадратів і обчислюють статистику Дарбіна-Ватсона (1.2.14). Якщо КРДВ перевищує критичне значення,

то $u \in I(0)$ і y_{1t} та y_{2t} є коінтегрованими. Можна очікувати, що для коінтегрованих змінних значення R^2 буде досить великим.

Критерій Дікі та Фуллера розглядає залишки \hat{u}_t з (5.3.5) для оцінки

$$\Delta \hat{u}_t = \rho \Delta \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5.3.6)$$

і потім перевіряє, чи є ρ значимо від'ємним. Для цього використовують таблиці Дікі та Фуллера, і якщо ρ є значущим, то $u \in I(0)$, отже, y_{1t} та y_{2t} є коінтегрованими. Коли залишки в (5.3.6) не є білим шумом, рівняння можна модифікувати, включивши сталу й додаткові значення $\Delta \hat{u}_t$ за минулі періоди, поки залишки не стануть «білим шумом» (за розширеним тестом Дікі-Фуллера [ADF]). Якщо залишки є стаціонарними, можна дійти висновку, що оцінена лінійна комбінація досліджуваних змінних насправді є рівнянням коінтеграції, тобто змінні коінтегрують. Якщо ρ дорівнює нулю, кажуть, що u має одиничний корінь.

Коли встановлено, що дві (або більше) змінні є коінтегрованими, можна обрати модель коригування похибки й оцінити її параметри. Енгл та Гренджер запропонували двоетапну процедуру, в якій на першому етапі для одержання оцінок залишків \hat{u}_t за допомогою метода найменших квадратів знаходять оцінки параметрів регресії (5.3.5). За наявності більш ніж двох коінтегрованих змінних важливо перевірити, чи всі вони необхідні. Друга стадія процедури полягає у підстановці оцінок залишків з (5.3.5) замість u_{t-1} у загальну модель корекції похибки (5.3.3) та (5.3.4) і оцінюванні параметрів цих рівнянь.

Якщо критерії свідчать, що змінні не є коінтегрованими, це означає некоректність теоретичної моделі, зокрема, можливо, що знехтувано важливими змінними. Для досягнення коінтегрованості можна додавати нові змінні. Однак знаходження коінтегрованих змінних має бути сигналом для початку перевірки коінтегрованості підмножин цих змінних.

Приклад 5.3.1.

Для ілюстрації побудови моделі коригування похибки (ECM) розглянемо прогнозування надходження податку на додану вартість (ПДВ) до Зведеного бюджету України [28].

Введемо такі позначення:

ПДВ — податок на додану вартість у номінальному вимірюванні (млрд грн);

ІСЦ — індекс споживчих цін;

ПДВР — податок на додану вартість у реальному вимірюванні (ПДВР = ПДВ/ІСЦ);

ПДВРС — податок на додану вартість, очищений від сезонності;

ВВП — валовий внутрішній продукт у номінальному вимірюванні (млрд грн);

ВВПР — валовий внутрішній продукт у реальному вимірюванні (ВВПР = ВВП/ІСЦ);

ВВПРС — валовий внутрішній продукт, очищений від сезонності.

Для побудови моделі коригування похибки для двох змінних: ПДВ та ВВП були використані реальні щомісячні дані.

Виконання завдання передбачає кілька кроків.

Крок 1. *Перевірка виконання передумов коінтеграції.* Перед побудовою моделі коригування похибки спершу необхідно перевірити, чи є розглядувані часові ряди нестационарними однакового порядку. Якщо так, можна перейти до кроку 2. Якщо ні, то неможливо побудувати модель коригування похибки. За допомогою розширеного тесту Дікі-Фуллера можна показати, що реальні надходження ПДВР є нестационарним рядом, порядок інтеграції якого дорівнює одиниці, реальні податкові надходження, скориговані на сезонність (ПДВРС), та реальний ВВПР, скорегований на сезонність (ВВПРС), є також нестационарними часовими рядами з порядком інтеграції один ($I(1)$). Попередній аналіз часових рядів ПДВ та ВВП (у реальному вимірюванні та очищених від сезонності) показав, що вони є нестационарними однакового порядку інтеграції. Отже, передумови для коінтеграції виконано. Тепер ряди потрібно перевірити на наявність коінтеграції.

Крок 2. *Перевірка часових рядів на коінтеграцію за методикою Інгла-Гренджера.* Щоб перевірити часові ряди на коінтеграцію, маємо спочатку оцінити довготривалу залежність між надходженнями від ПДВ (ПДВРС) та ВВП (ВВПРС) звичайним методом найменших квадратів (використовують реальні та сезонно скориговані змінні), а потім перевірити похибки оціненої моделі на стаціонарність.

Оцінене регресійне рівняння залежності між надходженнями від ПДВ (ПДВРС) та ВВП (ВВПРС) методом найменших квадратів статистично значуще на рівні 0,05 і має вигляд: $\text{ПДВРС} = -0,002 + 0,126 \times \text{ВВПРС}$. Як можна побачити, зростання на 1 млрд грн реального ВВП приводить до зростання надходжень ПДВ приблизно на 126 млн грн.

Щоб дійти висновку стосовно коінтеграції часових рядів, необхідно перевірити на стаціонарність похибки, розраховані на підставі оціненого вище рівняння. Використовують тест Дікі-Фуллера (*ADF*). Слід пам'ятати, що йдеться про справдження гіпотези щодо $a = 0$ в такому

рівнянні: $\Delta \text{REZID}_t = m + \alpha \cdot \text{REZID}_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta \text{REZID}_{t-1}$. Тобто перевіря-

ється гіпотеза про наявність одиничного кореня. Якщо нульова гіпотеза відхиляється, можна зробити висновок про стаціонарність похибок, або, інакше, про існування коінтеграції (тривалої залежності) між змінними. Таким чином, можна переходити до наступного кроку, тобто до побудови моделі коригування похибки.

Крок 3. Побудова моделі коригування похибки за методикою Інгла-Гренджера.

Оскільки виявлена наявність коінтеграції між ПДВ та ВВП, можна оцінити модель коригування похибки для цих змінних, тобто побудувати залежність перших різниць реальних очищених від сезонності значень ПДВ (ПДВРС) від перших різниць реальних очищених від сезонності значень ВВП (ВВПРС) та відхилення від довготривалої рівноваги із одиничним лагом. Зазначимо, що в модель включені фіктивні змінні для 1997 фінансового року, для грудня 1997-го і січня 1998-го років (фіктивні змінні дорівнюють одиниці для всіх місяців 1997 року та нулю для решти місяців). Модель коригування похибки має вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta \text{ПДВРС}_t = & -0,4508 \times (\text{ПДВРС}_{t-1} - 0,1023 \times \text{ВВПРС}_{t-1} + 0,001225) \\ & + 0,0465 \times \Delta \text{ПДВРС}_{t-1} - 0,5691 \times \Delta \text{ПДВРС}_{t-2} - 0,0978 \times \\ & \times \Delta \text{ВВПРС}_{t-1} + 0,0674 \times \Delta \text{ВВПРС}_{t-2} + 0,00134 \times \text{DUMMY9712} - \\ & - 0,0011 \times \text{DUMMY9801} + 0,000316 \times \text{DUMMY97} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \text{ВВПРС}_t = & -1,635 \times (\text{ПДВРС}_{t-1} - 0,1023 \times \text{ВВПРС}_{t-1} + \\ & + 0,00125) - 0,0627 \times \Delta \text{ПДВРС}_{t-1} - 1,2064 \times \Delta \text{ПДВРС}_{t-2} - \\ & - 0,5681 \times \Delta \text{ВВПРС}_{t-1} - 0,1444 \times \Delta \text{ВВПРС}_{t-2} + 0,0028 \times \\ & \times \text{DUMMY9712} + 0,000129 \times \text{DUMMY9801} + \\ & + 0,0010 \times \text{DUMMY97}. \end{aligned}$$

Використовуючи ці результати, можна визначити тривалу залежність між змінними (коефіцієнти нормалізовані таким чином, щоб коефіцієнти, які стоять при залежних змінних, дорівнювали одиниці). Прокоментуємо отримані результати й звернемо увагу на окремі моменти.

1. Система стабільна відносно змінної ПДВРС (коефіцієнт відхилення від довготривалої рівноваги (коінтеграційне рівняння) дорівнює $-0,45$), але нестабільна з точки зору іншої змінної — ВВПРС (-1.63). Утім, потрібно зазначити, що ВВПРС є слабо екзогенною, оскільки оцінений коефіцієнт є статистично незначущим за відносно низького рівня довіри.

2. Кількість лагів у прикладних дослідженнях часто обирають, виходячи з максимальних значень Акайк- та Шварц-критеріїв, якщо немає попередньої апріорної інформації щодо прийнятної кількості.

Крок 4. Прогнозування на основі оцінюваної моделі коригування похибки. Раз оцінивши модель, можемо використати її для прогнозування податкових надходжень. Щоб зробити прогноз, розв'язують модель, надаючи конкретні значення екзогенним змінним у прогнозовому горизонті. У цьому разі модель складається лише з одного рівняння, тому має дуже простий вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta \text{ПДВРС}_t = & -0,4508 \times (\text{ПДВРС}_{t-1} - 0,1023 \times \text{ВВПРС}_{t-1} + \\ & + 0,001225) + 0,0465 \times \Delta \text{ПДВРС}_{t-1} - 0,5691 \times \Delta \text{ПДВРС}_{t-2} - \\ & - 0,0978 \times \Delta \text{ВВПРС}_{t-1} + 0,0674 \times \Delta \text{ВВПРС}_{t-2} + 0,00134 \times \\ & \times \text{DUMMY9712} - 0,0011 \times \text{DUMMY9801} + 0,000316 \times \text{DUMMY97}. \end{aligned}$$

Звичайна найпростіша перевірка якості прогнозу полягає у візуальному порівнянні фактичних і теоретично обчислених значень часових рядів. На рис. 5.3.1 відображено фактичні та прогнозні значення ПДВ (у реальному вимірюванні та очищеному від сезонності).

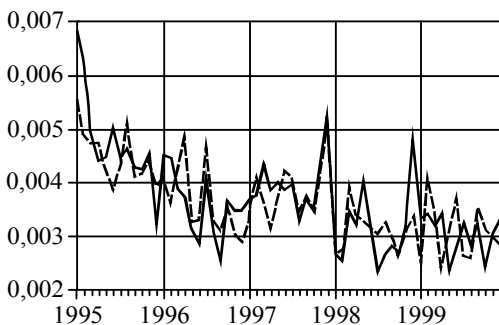


Рис. 5.3.1. Фактичні (—) та прогнозні (---) значення ПДВ (в реальному вимірюванні та очищеному від сезонності)

Візуальний аналіз демонструє, що прогнозні значення (теоретично розрахований ряд) досить непогано «відображають» фактичні. Звичайно, висновки, зроблені на підставі візуального аналізу, слід підкріпити формальними критеріями якості прогнозу. ►►

Під час застосування коінтеграційного методу існують такі труднощі, на які варто звернути увагу. Перша має статистичну природу й полягає в тому, що потужність критеріїв перевірки гіпотези стосовно рівності кореня одиниці у разі, коли справжнє значення близьке до одиниці, часто дуже низька за невеликої кількості спостережень. У таких ситуаціях гіпотеза стосовно рівності кореня одиниці приймається, якщо справжнє значення є, скажімо, 0,96. Однак у цьому разі подальшу інформацію стосовно коінтегрованості ряду можна одержати шляхом перевірки значущості коефіцієнтів при u_{t-1} у рівняннях коригування похибки. Друга проблема стосується вибору залежної та незалежної змінної в коінтеграційній регресії. Якщо y_{1t} та y_{2t} — дві коінтегровані змінні, то $y_{1t} - \lambda y_{2t}$ та $y_{2t} - \frac{1}{\lambda} y_{1t}$ є однаково правильними зображеннями, тобто використання або y_{1t} або y_{2t} як залежної змінної у разі двох змінних дасть однакові оцінки для λ за

великого значення R^2 . Енгл і Гренджер довели, що цей результат, як правило, має місце у практиці. Для загального випадку, якщо в коінтегративній регресії є k змінних, коінтегративний вектор не буде єдиним. Це породжує проблеми в інтерпретації моделей коригування похибки. Третя проблема така. Попри те, що співвідношення рівноваги у структурній моделі радше не змінюватимуться у відповідь на зміну економічної політики, це взагалі не буде правильним щодо пристосування до положення рівноваги. Тому модель коригування похибки буде змінюватися разом із економічною політикою. Однак ті самі міркування стосовно також ймовірностей зміни політики, які було зроблено для *ARMA*-моделей. Додамо також, що припущення, ніби параметри є сталими впродовж усього періоду, засвідчує стабільність співвідношень, які лежать в основі моделі, тож їх можна легко перевірити звичайним методом переоцінювання на підперіодах.

6 Суб'єктивні (експертні) методи прогнозування

Методи експертних оцінок використовують для аналізу об'єктів і проблем, розвиток яких цілком або частково не підлягає математичній формалізації, тобто для яких важко розробити адекватну модель. Це пояснюється:

- невизначеністю та складністю прогнозованих явищ;
- необхідністю кількісно оцінити події, для характеристики яких бракує необхідної інформації й чіткого знання тенденцій розвитку ситуації;
- необхідністю враховувати не тільки об'єктивні тенденції розвитку ситуації, а й реакцію учасників подій на рішення, що приймається.

Типовими проблемами, які потребують проведення експертизи, є, зокрема такі: визначення мети розвитку об'єкта управління; прогнозування; розроблення сценаріїв; генерування альтернативних варіантів розв'язків; розроблення системи кількісних оцінок; визначення рейтингів тощо.

У всіх цих випадках доводиться звертатися до думки експертів. **Експерт** — це компетентний фахівець із певного питання, чий оцінки та судження з приводу об'єкта експертизи враховують під час прийняття рішення. Прогнозоване експертне оцінювання відбиває індивідуальні погляди фахівців стосовно перспектив розвитку об'єкта й ґрунтується на мобілізації фахового досвіду та інтуїції.

Під **експертизою** розуміють проведення вимірювань певних характеристик об'єкта до прийняття рішення.

6.1. Методи індивідуальної та колективної експертизи

Індивідуальні експертні методи ґрунтуються на використанні думки експертів-фахівців відповідного профілю незалежно один від одного.

Найчастіше застосовують такі два методи формування прогнозу: *інтерв'ю* та *аналітичні експертні оцінки*.

◆ **Метод інтерв'ю** здійснюється шляхом розповсюдження поштових листівок, телефонних дзвінків або особистих інтерв'ю, він передбачає бесіду прогнозиста з експертом, під час якої прогнозист відповідно до заздалегідь розробленої програми ставить експерту питання стосовно об'єкта дослідження.

Головний недолік методу — залежність одержаних даних від суб'єктивізму й відповідальності респондентів, які можуть давати недостатньо продумані відповіді, особливо коли гарантовано анонімність, і респондент не зазнає збитків унаслідок неправильного прогнозу. Часто виникають проблеми ідентифікації респондентів, недвозначного формулювання запитань та одержання достатньої кількості відповідей. Метод ґрунтується на припущенні, що об'єкти опитування сформулювали свої плани на майбутнє, і не трапляється нічого, що могло б змінити ці плани.

◆ **Аналітичні експертні оцінки** передбачають тривалу й ретельну самостійну роботу експерта над аналізом тенденції, оцінювання стану та шляхів розвитку прогнозованого об'єкта. Цей метод дає можливість експерту використати всю потрібну йому інфор-

мацію про об'єкт прогнозу. Свої думки експерт оформлює у вигляді доповідної записки.

Головними перевагами розглянутих методів є можливість максимального використання індивідуальних здібностей експертів і незначний психологічний тиск на окремого виконавця. Однак ці методи майже не придатні для прогнозування найзагальніших стратегій через обмеженість знань одного фахівця-експерта про розвиток суміжних галузей науки.

Методи колективних експертних оцінок. *Сутність* колективної експертної оцінки для розроблення прогнозів полягає у визначенні узгоджених думок експертів щодо перспективних напрямів розвитку об'єкта прогнозування, сформульовані раніше окремими фахівцями, а також в оцінюванні напрямів розвитку об'єкта, які не можна визначити іншими методами (наприклад, аналітичним розрахунком, експериментом тощо).

◆ У наш час значного поширення набули експертні методи, основані на роботі спеціальних комісій, коли групи експертів за «круглим столом» обговорюють конкретну проблему, щоб узгодити думки й виробити спільне судження. Недолік цього методу полягає у тому, що група експертів у своїх узагальненнях здебільшого керується логікою компромісу.

◆ *Метод колективної генерації ідей («мозкова атака»).* Завдання прогнозування, які вирішують із використанням методів експертних оцінок, містять два формально не пов'язані між собою елементи: визначення можливих варіантів розвитку об'єкта прогнозування та їхню оцінку. Застосування «мозкових атак» у визначенні можливих варіантів розвитку дає змогу швидко одержати продуктивні результати і залучити всіх експертів до активного творчого процесу.

Методи «мозкових атак» можна класифікувати за ознакою існування або відсутності зворотного зв'язку між керівником і учасниками «мозкової атаки» в процесі розв'язання певної проблемної ситуації. Наявність зворотного зв'язку дає змогу учасникам концентрувати увагу суто на варіантах, корисних за тим чи тим критерієм для розв'язання проблемної ситуації. Однак штучне введення обмежень унеможливує бачення всього багатоманіття підходів, тож з рештою можна пропустити оригінальні думки, які мають потенційну, але поки не усвідомлену цінність. Відсутність зворотного зв'язку, тобто максимальна стимуляція висловлювань, передбачає складну й більшу за обсягом роботу на етапі оцінювання їх.

Один із варіантів методу «мозкової атаки» — *деструктивна відносна оцінка (ДВО)* — забезпечує якісне й досить швидке

оцінювання варіантів, не обмежуючись при цьому їхньою кількістю.

Сутність цього методу полягає в актуалізації творчого потенціалу фахівців під час «мозкової атаки» проблемної ситуації, що реалізує спочатку генерацію ідей і подальше спростування або критику із формулюванням контрідей.

◆ *Дельфійський метод* певною мірою вможливорює організацію статистичного оброблення думок експертів-фахівців і досягнення ними більш або менш узгодженої думки. Цей метод розроблено американською пошуковою корпорацією РЕНД. Своєю вона отримала від грецького міста Дельфи, відомого завдяки розташуванню тут храму, жерці якого передбачали майбутнє.

Дельфійський метод побудований за принципом, згідно з яким у гуманітарних науках думки експертів та суб'єктивні судження мають замінити точні закони причинності природознавчих наук.

Підгрунття цього методу становить багатоетапне узгодження думок групи експертів. Спочатку з'ясовують індивідуальні думки кожного члена групи стосовно ймовірності настання деякої події, наприклад, зростання безробіття в країні впродовж наступних п'яти років. Експерти можуть працювати разом або бути незалежними. Результати опитування збирають і обговорюють провідні фахівці. Авторам найнижчого та найвищого рівнів прогнозу пропонують переглянути свої думки. Після дискусії здійснюють друге опитування із подальшим обговоренням. Процес може повторюватися доти, доки не з'явиться узгоджений прогноз, прийнятний для всіх експертів. В альтернативній версії експерти ніколи не зустрічаються, а їхні думки надсилають поштою (зокрема й електронною) разом зі стислим викладом аргументів. Експертам пропонують переглянути свої прогнози з урахуванням точки зору інших, аж поки не буде досягнуто консенсусу, що, може статися лише після кількох раундів.

Дельфійський метод *характеризується трьома особливостями*, які вирізняють його серед звичайних методів групової взаємодії експертів, а саме:

1. *Анонімність експертів*, яка полягає в тому, що в процесі процедури експертного оцінювання прогнозованого явища учасники експертної групи не знають один одного. При цьому взаємодія членів групи під час заповнення анкет цілком виключається. У такому разі автор відповіді може змінити свою думку, не оголошуючи про це.

2. Використання результатів попереднього туру опитування. Ця система дає можливість групі фахівців зосередитися на початкових завданнях, а не вигадувати щоразу щось нове. Оскільки

групова взаємодія здійснюється безпосередньо шляхом відповіді на анкету, фахівець або організація, які проводять дослідження за дельфійським методом, дістають з анкет лише ту інформацію, яка стосується цієї проблеми. Фахівець-прогнозіст враховує «за» та «проти» експертів стосовно кожної точки зору. Головний результат функціонування цієї системи полягає в тому, щоб запобігти досягненню групою власних мети й завдань.

3. *Статистична характеристика групової відповіді* полягає в тому, що група фахівців складає прогноз, який містить точку зору більшості експертів. При цьому використовують статистичні характеристики відповіді, яка відображає думку всієї групи. Групова відповідь може бути подана у вигляді медіани та двох квартилів, тобто таким числом, яке перевищує оцінки однієї половини групи та менше за оцінки другої.

Члени журі змінюють свої оцінки за умови переконливих доказів їхніх колег, у противному разі вони дотримуються власних точок зору.

Метод має кілька недоліків.

1. На кінцевий результат впливають особисті риси експертів, зокрема наполегливість в обстоюванні своїх думок.

2. Застосування методу може вимагати значних коштів, а кінцевий результат не завжди задовольняє всіх експертів.

3. Немає згоди щодо того, чи варто використовувати саме фахівців. Як розуміти термін «експерт» (чи має журі складатися з фахівців різних спеціальностей) або яким обсягом інформації треба обмінюватися на першому етапі (медіани можуть зумовити зсув до центру розподілу).

◆ *Побудова сценаріїв*. Сценарій можна визначити як «виклад альтернативних варіантів майбутнього» або «передбачувану послідовність подій за допустимих умов». Він виглядає як хронологія майбутніх змін, зокрема містить деталі зовнішнього середовища, стратегії конкурентів, нові відкриття та дії уряду. Сценарії формулюють як реалістичні можливості, часто із використанням переконливої мови та багатої уяви. Метод аналізу сценаріїв полягає у розгляді кількох різних сценаріїв, які характеризують імовірні шляхи розвитку ситуації. Намір переконати особу, яка приймає рішення, передбачає зваження на чинник невизначеності й розроблення стратегії, придатної за будь-яких обставин. Під час розгляду цілого набору можливостей зменшується ймовірність непередбаченої ситуації. Крім того, експерт усвідомлює внутрішню невизначеність процесу прогнозування, тому остаточно не впевнений у доцільності жодного із варіантів.

6.2. Процедура проведення експертизи й аналіз експертних оцінок

Для проведення якісної експертизи необхідні такі умови.

- Наявність експертної комісії, яка складається з фахівців, знайомих із об'єктом експертизи, котрі мають досвід експертної роботи.

- Існування аналітичної групи, яка професійно володіє технологією організації та проведення експертиз, методами отримання й аналізу експертної інформації.

- Отримання надійної експертної інформації.

- Коректне оброблення й аналіз експертної інформації.

Відокремлюють такі **основні етапи експертизи**:

1. Формулювання мети експертизи.
2. Побудова об'єктів оцінювання або їхніх характеристик (до початку експертизи цей етап уже може бути виконаний).
3. Створення експертної групи.
4. Визначення способу експертного оцінювання та способу подання експертних оцінок.
5. Проведення експертизи.
6. Оброблення й аналіз результатів експертизи.
7. Повторний тур експертизи, якщо виникає потреба в уточненні або зближенні думок експертів.
8. Формування варіантів рекомендацій.

Види експертних оцінок. Експертиза, тобто вимірювання та порівняння об'єктів, пов'язана з певним оцінюванням об'єктів. Оцінки бувають різних видів. На відміну від кількісних, які зазвичай відповідають об'єктивним вимірюванням об'єктивних показників, в експертизі використовують бальні оцінки. Вони характеризують суб'єктивні думки. Бальна шкала являє собою обмежений ряд рівновіддалених одне від одного чисел. Бальні оцінки бувають двох видів:

- 1) оцінки першого виду здійснюють згідно з об'єктивним критерієм, загальноприйнятим еталоном і відповідно до градацій цього еталона. Чим точніше характеристика й оцінка відхилення від еталону, тим більшою є довіра до нього. Отже, оцінювання здійснюють за бальною шкалою;

- 2) бальну оцінку другого виду застосовують, коли бракує не тільки загальноприйнятих еталонів, а й навіть сумнівною є наявність одного об'єктивного критерію, що забезпечує суб'єктивні відображення у вигляді оцінок. У цьому разі йдеться про поряд-

кову (або рангову) шкалу. Такі оцінки можна порівнювати за принципом «більше-менше».

Наступний вид оцінювання — ранжування. Це впорядкування об'єктів за зменшенням віддання переваги (допускається рівноцінність об'єктів та їхніх оцінок).

Існує метод попарного порівняння, який іноді здається легшим для якісного порівняння двох об'єктів, ніж оцінювання їх за бальною або ранговою шкалою. Для впорядкування об'єктів на підставі якісного критерію подеколи доцільним є метод середньої точки: обирають кращий і гірший об'єкти; потім об'єкт, який може розташовуватися посередині між ними, потім об'єкти, які можна розташувати посередині між гіршим і раніше знайденим середнім, а також посередині між кращим і середнім, тощо.

Для отримання й оброблення кількісними методами якісної експертної інформації використовують вербально-числові шкали зі змістовними найменуваннями певних градацій і відповідними їм числовими значеннями або діапазонами числових значень. Відома вербально-числова шкала Харрінгтона, яка має такий вигляд:

Найменування градації	Числові інтервали
Дуже висока	1,0—0,8
Висока	0,8—0,63
Середня	0,63—0,37
Низька	0,37—0,2
Дуже низька	0,2—0,0

Оцінки відносної важливості характеризують:

- а) узагальнену думку групи експертів стосовно відносної важливості розвитку різних об'єктів;
- б) рівень узгодженості думок експертів;
- в) «активність» експертів (міра їхньої участі в оцінюванні різних об'єктів);
- г) компетентність експертів з кожного із запропонованих питань.

Дані експертизи являють собою сукупність оцінок, наданих кожним експертом кожному з оцінюваних ним об'єктів прогнозування. Ці оцінки виражають у балах (наприклад, від 0 до 100).

◆ Показниками *узагальненої думки експертів* можуть бути: *середнє статистичне значення* M_i , *величини оцінки певного i -го об'єкта* (в балах). Його обчислюють за формулою

$$M_i = 1/n \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad (6.2.1)$$

де x_{ij} — оцінка i -го об'єкта j -м експертом;
 n — кількість експертів у групі.

M_i визначають для кожного із t об'єктів експертизи. При цьому воно може коливатися у межах від 0 до 100 балів. Чим більше значення M_i , тим вагомішим є об'єкт i .

Частоту k_{100i} максимально можливих оцінок (100 балів), отриманих за i -м напрямом досліджень, обчислюють за формулою:

$$k_{100i} = \frac{n_{100i}}{n}, \quad (6.2.2)$$

де n_{100i} — кількість 100-бальних оцінок, наданих i -му об'єкту.

Цю величину розраховують для кожного з n напрямів досліджень, вона може коливатися у межах від 0 до 1. Нижня межа відповідає випадку, коли серед оцінок, одержаних i -м напрямом досліджень, немає максимально можливих (100 балів) оцінок, а верхня — випадку, коли всі оцінки, одержані i -м напрямом досліджень, є максимально можливими. Важливість розвитку i -го напрямку досліджень зростає в разі змінення k_{100i} від 0 до 1. Цей показник слід розглядати як додатковий до основного показника важливості M_i . Він характеризує значущість об'єкта i з точки зору кількості присуджених йому «перших місць».

Поряд із середнім статистичним (M_i) і частотою максимально можливих оцінок (k_{100i}), судження про важливість того чи іншого напрямку досліджень дає *сума рангів оцінок, одержаних i -м напрямом досліджень* (S_i), яку використовують також у визначенні рівня узгодженості думок експертів. Суму рангів S_i , наданих n експертами об'єкту i , визначають за формулою:

$$S_i = \sum_{j=1}^n R_{ij}, \quad (6.2.3)$$

де R_{ij} — ранг наданий j -м експертом об'єкту i .

Очевидно, що під час порівняння значущості різних об'єктів найважливішим слід вважати той, що характеризується найбільшим значенням S_i .

◆ Поряд із показниками відносної важливості суттєвим є **визначення рівня узгодженості думок експертів**.

Шляхом обчислення дисперсії σ_i^2 оцінок i -го напрямку досліджень і середньоквадратичного відхилення цих оцінок визначають коефіцієнт варіації V_i :

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (x_{ij} - M_i)^2}{n-1}, \quad (6.2.4)$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}, \quad (6.2.5)$$

$$V_i = \frac{\sigma_i}{M_i}. \quad (6.2.6)$$

Коефіцієнт варіації V_i визначають для кожного напрямку досліджень, він характеризує рівень узгодженості думок експертів стосовно відносної важливості i -го об'єкта. Чим менше значення V_i , тим вищий рівень узгодженості думок стосовно відносної важливості i -го об'єкта.

Показником рівня узгодженості думок експертів стосовно відносної важливості сукупності всіх запропонованих до оцінювання об'єктів слугує *коефіцієнт конкордації* w . Його визначають для кожного питання на кшталт «оцінка важливості» шляхом обчислення таких показників:

— середньої арифметичної \bar{S} сум рангів оцінок, одержаних усіма об'єктами:

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^m S_i}{m}; \quad (6.2.7)$$

де m — кількість об'єктів експертизи, $i = \overline{1, m}$;

— відхилень d_i суми рангів оцінок, одержаних об'єктом i від середньої арифметичної сум рангів оцінок, одержаних усіма об'єктами:

$$d_i = S_i - \bar{S}; \quad (6.2.8)$$

— показників T_j однакових рангів оцінок, наданих j -м експертом. Якщо всі m рангів оцінок, наданих j -м експертом, різні, то $T_j = 0$; якщо серед рангів оцінок трапляються однакові, тоді:

$$T_j = \sum_{l=1}^{L_j} (m_{lj}^3 - m_{lj}), \quad (6.2.9)$$

де L_j — кількість груп однакових рангів;

m_{lj} — кількість об'єктів, які утворюють l -у групу однакових рангів.

Потім обчислюють коефіцієнт конкордації w за формулою:

$$w = \frac{12 \sum_{i=1}^m d_i^2}{n^2 (m^3 - m) - n \sum_{j=1}^n T_j}. \quad (6.2.10)$$

Коефіцієнт конкордації коливається в межах від 0 до 1. За цілкової узгодженості поглядів експертів $w = 1$. Зміна w від 0 до 1 відповідає зростанню рівня узгодженості поглядів експертів.

Якщо значення коефіцієнта конкордації w невелике, спостерігається незначна узгодженість поглядів експертів. Причини тут можуть бути різні: або в досліджуваній сукупності експертів справді немає спільності поглядів, або серед сукупності експертів існують групи з великою узгодженістю поглядів, однак їхні узагальнені думки протилежні.

Рівень узгодженості поглядів кожного експерта з рештою експертів унаочнює багатокутник, кожна вершина якого відповідає певному експерту, а лінії, що з'єднують певну вершину з іншими, — коефіцієнтам парної рангової кореляції. Коефіцієнт парної рангової кореляції між оцінками двох будь-яких експертів α і β визначають за формулою:

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{\sum_{i=1}^m \varphi_i^2}{\frac{1}{6}(m^3 - m) - \frac{1}{12}(T_\alpha - T_\beta)}, \quad (6.2.11)$$

де φ_i — різниця (за модулем) величин рангів оцінок i -го напрямку досліджень, заданою експертами α і β , $\varphi_i = |R_{i\alpha} - R_{i\beta}|$;

T_α, T_β — показники однакових рангів оцінок експертів α і β .

Коефіцієнт парної рангової кореляції може набувати значення $-1 \leq \rho \leq 1$. Значення $\rho = +1$ відповідає цілковитій узгодженості поглядів двох експертів. Значення $\rho = -1$ показує, що думка одного експерта є протилежною погляду іншого.

Багатокутник також дає змогу визначити групи експертів, у середині яких узгодженість поглядів велика, тоді як між групами існує неузгодженість.

Чим нижчий рівень статистичної значущості показника узгодженості поглядів експертів, тим більшою є імовірність існування не випадкової узгодженості поглядів експертів.

Для визначення довірчої імовірності коефіцієнтів w та ρ використовують критерій χ^2 з $(m-1)$ ступенями свободи:

$$\chi^2 = \frac{12 \sum_{i=1}^m d_i^2}{m \cdot n(m+1) - \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^n T_j^2} \quad (6.2.12)$$

◆ **Показник активності експертів k_{aei}** визначають таким чином:

$$k_{aei} = \frac{n_i}{n}, \quad (6.2.13)$$

де n_i — кількість експертів, котрі оцінювали об'єкт i ;
 n — загальна кількість експертів.

Чим більше k_{aei} , тим більша кількість експертів вважають себе компетентними в оцінюванні i -го напрямку досліджень.

◆ **Аналіз компетентності**, як правило, здійснюють за допомогою спеціальних анкет. У відповідях на них кандидати в експерти мають продемонструвати свої ділові і фахові якості, а також аналітичні здібності.

Для визначення відповідності потенційного експерта названим вимогам використовують анкетне опитування. Додатково ще вдаються до самооцінювання компетентності експерта. Коли експерт визначає міру своєї обізнаності з досліджуваного питання. Оброблення даних дає можливість одержати кількісну оцінку компетентності потенційного експерта за такою формулою:

$$K = 0,5 \frac{\sum_{i=1}^m v_i}{\sum_{i=1}^m v_{i \max}} + \frac{\lambda}{\rho}, \quad (6.2.14)$$

де v_i — вага показника, закресленого експертом стосовно i -ї характеристики в анкеті у балах;

v_{imax} — максимальна вага (межа шкали) i -ої характеристики в балах;

m — загальна кількість характеристик компетентності в анкеті;

λ — вага клітинки, закресленої експертом у шкалі самооцінки в балах;

p — межа шкали самооцінки експерта в балах.

Показником компетентності експерта може слугувати такий коефіцієнт:

$$k_k = \frac{k_z + k_a}{2}, \quad (6.2.15)$$

де k_k — коефіцієнт компетентності експерта;

k_z — коефіцієнт міри ознайомлення експерта з обговорюваною проблемою. Він визначається шляхом самооцінки експерта за десятибальною шкалою. Значення балів для самооцінки:

0 — експерт не розуміється на питанні;

1, 2, 3 — експерт мало розуміється на питанні, але воно належить до кола його інтересів;

4, 5, 6 — експерт задовільно розуміється на питанні, але не бере безпосередньої участі в практичному розв'язанні його;

7, 8, 9 — експерт добре розуміється на питанні, бере участь у практичному розв'язанні його;

10 — питання належить до кола вузької спеціалізації експерта. Експерту пропонують самому оцінити міру обізнаності з питанням і підкреслити відповідний бал, який потім помножують на 0,1 і отримують коефіцієнт k_z ;

k_a — коефіцієнт аргументації, який розраховують як суму балів еталонної таблиці [7]. У цій таблиці експерт оцінює джерело інформації за градаціями: В (висока), С (середня), Н (низька).

Приклад 6.2.1.

Трьом експертам треба визначити рейтинг п'яти об'єктів інвестування. Кожен експерт оцінює міру привабливості інвестицій за балами від одного до п'яти. Оцінки експертів наведено в таблиці 6.2.1.

ОЦІНКИ ЕКСПЕРТІВ

Об'єкт інвестування	Кількість балів		
	1	2	3
А	2	1	3
Б	3	3	2
В	1	2	1
Г	5	4	4
Д	4	5	5

Потрібно встановити, чи є в наведених результатах певний порядок стосовно відносної привабливості сукупності запропонованих до оцінювання об'єктів інвестування і якщо є, тоді визначити їхні реальні рейтинги.

Розв'язок. Підрахуємо суму квадратів відхилень d_i^2 та коефіцієнт конкордації w .

Напрямок інвестування	Сума рангів оцінок $\sum_{i=1}^m S_i$	Квадрати суми рангів оцінок
А	6	36
Б	8	64
В	4	16
Г	13	169
Д	14	196
Разом	45	481

$$d_i^2 = \sum_{i=1}^m S_i^2 - \frac{(\sum S_i)^2}{m} = 481 - (45^2)/5 = 76;$$

$$w = \frac{12 \cdot d_i^2}{n^2(m^3 - m)} = \frac{12 \cdot 76}{3^2(5^3 - 5)} = 0,844.$$

Оскільки значенню $d_i^2 = 76$ відповідає рівень значущості α , що перебуває у межах $(0,0053; 0,015)$, гіпотезу про неузгодженість думок експертів відхиляють з імовірністю похибки, яка не перевищує $0,015$. Отже розташувати об'єкти за їхньою інвестиційною привабливістю можна, наприклад, за сумами номерів S_i .

Так, напрямок А має посісти друге місце, напрямок Б слід поставити на третє, напрямок В — на перше місце, потім йдуть напрямки Г та Д. ►►

7.1. Критерії визначення якісного прогнозу

Якість прогнозу характеризують такі поширені в прогностичній літературі терміни, як точність і надійність. Проте зміст цих термінів часто тлумачать досить неоднозначно. Це можна пояснити тим, що нині поки не знайдено ефективного підходу до оцінювання якості прогнозу, окрім його практичного підтвердження.

Про точність прогнозу прийнято судити за розміром помилки прогнозу — різниці між прогнозним і фактичним значенням досліджуваного показника. Але такий підхід можливий лише тоді, якщо дослідник має інформацію стосовно справжніх значень часового ряду, який він оцінював під час розроблення прогнозів. Наприклад, період випередження вже завершився, і дослідник має фактичні значення змінної (це можливо в разі короткотермінового прогнозування) або прогноз перебуває в стадії розроблення, тобто прогнозування здійснюється для певного моменту часу в минулому, для якого існують фактичні дані. Спрощену схему періодів прогнозування показано на рис. 7.1.

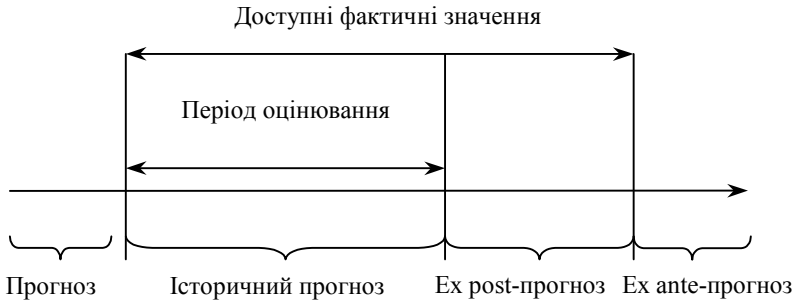


Рис. 7.1. Спрощена схема періодів прогнозування

В останньому випадку йдеться про використання *ex post*-прогнозу. Його сутність полягає у побудові моделі за меншим обсягом даних ($n - m$) із подальшим порівнянням прогнозних оцінок за останніми m точками (для t від $n - m + 1$ до n) із відомими фактичними, але спеціально залишеними рівнями ряду.

Отримані ретроспективно помилки прогнозу певною мірою характеризують точність застосовуваної методики прогнозування й можуть виявитися корисними в зіставленні кількох прогнозів.

Параметричні методи аналізу точності прогнозів. За результатами *ex post*-прогнозу розраховують такі показники точності прогнозів за m кроків:

Середня квадратична похибка:

$$MSE = \frac{\sum_{i=n-m+1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{m}, \quad (7.1.1)$$

корінь із середньоквадратичної похибки

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=n-m+1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{m}}, \quad (7.1.2)$$

середня абсолютна похибка:

$$MAE = \frac{\sum_{i=n-m+1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{m} \quad (7.1.3)$$

корінь із середньоквадратичної похибки у відсотках:

$$RMSPE = \sqrt{\frac{100}{m} \sum_{i=n-m+1}^n \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right)^2}, \quad (7.1.4)$$

середня абсолютна похибка у відсотках (*MAPE*):

$$MAPE = \sum_{i=n-m+1}^n \frac{100 |y_i - \hat{y}_i|}{m |y_i|}, \quad (7.1.5)$$

Чим менше значення цих величин, тим вища якість ретропрогнозу. На практиці ці характеристики використовують досить часто. Даний підхід дає гарні результати, якщо на періоді ретропрогнозу не виникають принципово нові закономірності. На підс-

таві останніх двох критеріїв можна дійти висновку стосовно загального рівня адекватності моделі шляхом їх порівняння.

<i>MAPE, RMPSE</i>	Точність прогнозу
Менше 10 %	Висока
10 % — 20 %	Добра
20 % — 40 %	Задовільна
40 % — 50 %	Погана
Більше 50 %	Незадовільна

Вадою обговорених вище характеристик точності прогнозів є їх залежність від обраних одиниць виміру. Було б корисним ука-зати безрозмірний показник, аналогічний до коефіцієнта кореля-ції. Одним з таких показників є коефіцієнт невідповідності Тейла, чисельником якого є середньоквадратична похибка прогнозу, а знаменник дорівнює квадратному кореню із середнього квадрата фактичних та оцінних значень:

$$U = \frac{\sqrt{\sum (\hat{y}_i - y_i)^2 / m}}{\sqrt{\frac{1}{m} \sum y_i^2} + \sqrt{\frac{1}{m} \sum \hat{y}_i^2}}. \quad (7.1.6)$$

Перевага коефіцієнта Тейла полягає в тому, що його значення завжди перебувають у межах від нуля до одиниці. Якщо всі про-гнози абсолютно точні, то $U = 0$. Якщо всі прогнози дорівнюють нулю, а жодне з фактичних значень не дорівнює нулю або навпаки, U дорівнюватиме одиниці. Таким чином, мале значення U засвід-чує, що прогноз є точним, але максимального значення не існує. Значення, яке дорівнює одиниці, відповідає ситуації, коли всі про-гнозові значення дорівнюють нулю, що нереально під час прогно-зування номінальних величин, але під час розгляду змін такий про-гноз відповідає моделі «без змін». Більші за одиницю значення вказують на те, що прогноз гірший, ніж прогноз «без змін».

Коефіцієнт невідповідності Тейла (U) може бути розкладений на три частини:

$$\text{пропорцію зсунення } U^M = \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{(y_i - \hat{y}_i)}{y_i}}, \quad (7.1.7)$$

$$\text{пропорцію дисперсії } U^S = \frac{(\sigma_y - \hat{\sigma}_y)^2}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{y_i}}, \quad (7.1.8)$$

$$\text{пропорцію коваріації } U^C = U^C = \frac{2(1-\rho)(\sigma_y \cdot \hat{\sigma}_y)}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}. \quad (7.1.9)$$

Зазначимо, що $U^M + U^S + U^C = 1$. Критерій зсуву пропорції (U^M) використовується, щоб перевірити, чи є систематичне відхилення середніх розрахованих та фактичних рядів, тобто чи дає модель систематично завищені або занижені прогнози. Чим менше значення U^M , тим краще. Якщо U^M дорівнює нулю, у розрахованих (прогнозних) значеннях немає зсувнень, тобто з моделлю все гаразд. Пропорція дисперсії (U^S) використовується, щоб переконатися, що модель має достатні динамічні властивості для відтворення дисперсії фактичних рядів. Наприклад, модель може відтворювати систематично менші коливання, ніж фактичні. Як і у випадку критерію U^M , менше значення U^S вказує на менше зсування. Пропорція коваріації вказує, як корелюють фактичні та розраховані ряди. Якщо U^C дорівнює 1, то фактичні та розраховані ряди корелюють ідеально.

Критичні точки важливі як критерії якості, оскільки деякі моделі можуть бути точними, але погано передбачати зміни тенденції (наприклад, поворотні точки в циклах), тобто погано відтворювати критичні точки. Інші моделі можуть бути неточними, але мати гарний динамічний характер. Загалом може бути певний компроміс між точністю та динамічними властивостями моделі. Формального тесту для оцінки цієї властивості не існує. Проте візуальний огляд розрахованих та фактичних рядів звичайно одразу виявляє, здатна модель відтворювати критичні точки чи ні.

Обговорені характеристики точності прогнозів є параметричними в тому сенсі, що вони потребують виконання заданих припущень щодо властивостей математичного сподівання та дисперсії, чинних за умов нормальності відповідних розподілів. Наприклад, використовуючи MSE , ми неявно припускаємо, що всі похибки прогнозу мають однакові й постійні математичні сподівання та дисперсії. У реальних економічних ситуаціях найчастіше порушуються припущення гомоскедастичності та відсутності

автокореляції. Можна стверджувати, що кожного разу прогноз будуватиметься у новій ситуації, отже, порівняння числової точності прогнозів, зроблених у різні моменти часу, не зовсім коректне. Наведені міркування зумовили використання непараметричних методів аналізу точності прогнозів.

Непараметричні методи аналізу точності прогнозів. Непараметричні методи не залежать від вигляду розподілу, тож не потребують припущення щодо нормальності розподілів. Це особливо корисно, коли йдеться про дані, які внеможливають використання числових шкал. Розглянемо два типи непараметричних критеріїв: критерій знаків та рангові критерії.

Критерій знаків для порівняння точності двох послідовностей прогнозів базується на відсотку випадків, коли метод визначення прогнозу А кращий, ніж метод В. Таке порівняння здійснюють для індивідуальних прогнозів однакових подій (змінних). Якщо обидва методи дають однакову точність, імовірність відповіді «так» на запитання «чи прогноз А кращий за прогноз Б» становить 0,5 для кожного з m випадків прогнозування. Число K випадків, коли прогноз А кращий, підпорядковано біномальному розподілу ймовірностей

$$p(K = x) = C_m^x 0,5^x 0,5^{m-x}. \quad (7.1.10)$$

Отже, можна підрахувати імовірність того, що $K \geq x$. Якщо довжина послідовності прогнозів значна, для оцінювання ймовірностей можна використати нормальну апроксимацію біноміального розподілу.

Критерій знаків можна також використовувати для перевірки значущості описової статистики, відомої під назвою «відсоток кращих результатів», яка показує відсоток випадків, у яких один метод прогнозування кращий за інший і розраховується за формулою:

$$\eta = \frac{m}{m+n}, \quad (7.1.11)$$

де m — кількість прогнозів, підтверджених фактичними даними;
 n — кількість прогнозів, не підтверджених фактичними даними. Коли всі прогнози підтверджуються, $n = 0$ і $\eta = 1$; якщо всі прогнози не підтвердилися, то $m = 0$, а отже, і η дорівнюють 0.

Рангові критерії. У разі застосування цих критеріїв чисельна характеристика точності (абсолютна похибка, коли маємо один прогноз, або MSE , коли розглядають послідовність прогнозів) замінюється рангами, які потім переводяться на значущість. Напри-

клад, якщо послідовності прогнозів показників A та B одержують за допомогою k методів, то спочатку обчислюють MSE , потім їхні значення ранжують від 1 (найменша MSE) до k (найбільша MSE) (відповідні ранги позначають через R_{A_i} та R_{B_i} , для $i = \overline{1, k}$). Після знаходження різниць (d_i) між рангами обчислюють коефіцієнт рангової кореляції Спірмена:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}. \quad (7.1.12)$$

За нульову гіпотезу приймають відсутність залежності між рангами, тобто жоден з методів не є гіршим за решту. Гіпотеза відкидається, якщо значення r_s досить велике.

Хоча непараметричні методи мають свої переваги, важливо усвідомлювати, що вони ігнорують частину доступної інформації. Так, критерії знаків та рангів не враховують числових значень похибок.

Розмір помилки ретроспективного прогнозу не можна розглядати як остаточний доказ придатності або, навпаки, непридатності застосовуваного методу прогнозування. До неї варто ставитися з відомою обережністю, а в разі застосування її як міри точності необхідно пам'ятати, що її отримано із використанням лише частини наявних даних. Проте ця міра точності має більшу наочність і теоретично надійніша, ніж похибка прогнозу, обчислена для періоду, характеристики котрого вже були використані під час оцінювання параметрів моделі.

Перевірка гіпотези стосовно правильності вибору виду тренду. В практичній роботі проблему точності прогнозу треба розв'язувати тоді, коли період випередження ще не минув, і справжнє значення прогнозованої змінної невідоме. У цьому разі проблему точності можна розглядати з точки зору зіставлення апріорних якостей, властивостей прогностичних моделей. Власне, ідеться про статистичний аналіз залишків, тобто відхилень від тренду. Досліджування залишкової компоненти здійснюють із метою перевірки гіпотез: чи правильно підібрано тренд; чи становить залишкова послідовність стаціонарний випадковий процес. У разі підтвердження цих гіпотез прогноз можна зробити за обома складовими часового ряду: за трендом — шляхом простої екстраполяції, за відхиленнями від тренду — за допомогою наявних методів прогнозування стаціонарних випадкових процесів. Підсумок двох одержаних таким чином прогнозів дає загальний прогноз показника.

За правильного вибору виду тренду відхилення від нього $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$ матимуть випадковий характер. Це означає, що зміна випадкової величини ε_t не залежить від чинника часу.

Найпростішим способом перевірки припущення стосовно випадковості ε_t слугує визначення коефіцієнта кореляції між відхиленнями від тренду ε_t і чинником часу t та перевірка його значущості. Однак цей зв'язок може бути нелінійним. Тому характер відхилень доцільно вивчати за допомогою непараметричних критеріїв, якими є, ґрунтований на медіані вибірки, критерій «зростаючих» та «спадних» серій тощо. Розглянемо цей критерій. Для цього позначимо e_t розбіжність між фактичними і розрахованими за моделлю рівнями часового ряду $e_t = y_t - \hat{y}_t$ ($t = 1, 2, \dots, n$).

Критерій серій, ґрунтований на медіані вибірки. Згідно з критерієм серій ряд із величин e_t розташовують у порядку зростання їхніх значень і знаходять медіану e_m одержаного варіаційного ряду, тобто значення, що перебуває в середині для непарного n або середню арифметичну з двох середніх значень для n парного. Повертаючись до вхідної послідовності e_t і порівнюючи значення цієї послідовності з e_m , ставлять знак «плюс», якщо значення e_t перевищує медіану, і знак «мінус», якщо воно менше за медіану; у випадку однаковості порівнюваних величин відповідне значення e_t пропускають. Отже, одержують послідовність, що складається із плюсів та мінусів, загальна кількість яких не перевищує n . Послідовність розташованих одне за одним плюсів або мінусів називають серією. Щоб послідовність e_t була випадковою вибіркою, довжина найдовшої серії не має бути занадто великою, а загальна кількість серій — занадто малою.

Позначимо довжину найдовшої серії через K_{\max} , а загальну кількість серій — через v . Вибірка вважається випадковою, якщо виконуються такі нерівності для 5 %-го рівня значущості:

$$K_{\max} < [3,3(\ln n + 1)], \quad (7.1.13)$$

$$v > \left[\frac{1}{2}(n + 1 - 1,96\sqrt{n - 1}) \right],$$

де квадратні дужки означають цілу частину числа.

Якщо хоча б принаймні з цих нерівностей порушується, то гіпотеза про випадковий характер відхилень рівнів часового ряду від тренду спростовується, а модель тренду визнається неадекватною.

Перевірка гіпотези стосовно нормального закону розподілу випадкової компоненти. У деяких випадках, наприклад під час визначення похибки прогнозу за авторегресійними моделями, необхідно перевірити гіпотезу стосовно того, що відхилення від тренду або від певної моделі відповідають закону нормального розподілу. Оскільки часові ряди соціально-економічних процесів зазвичай не дуже довгі, перевірку розподілу на нормальність можна здійснити лише наближено за допомогою дослідження показників асиметрії (A) і ексцесу (E). Для нормального розподілу асиметрія і ексцес певної генеральної сукупності дорівнюють нулю. Ми припускаємо, що відхилення від тренду становлять вибірку із генеральної сукупності, тому можна визначити лише вибіркові характеристики асиметрії й ексцесу та їхні похибки:

$$\hat{A} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2\right)^3}}; \quad \hat{\sigma}_{\hat{A}} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}; \quad (7.1.14)$$

$$\hat{E} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2\right)^2} - 3; \quad \hat{\sigma}_{\hat{E}} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}. \quad (7.1.15)$$

У цих формулах \hat{A} — вибіркова характеристика асиметрії; \hat{E} — вибіркова характеристика ексцесу; $\hat{\sigma}_{\hat{A}}$ — середньоквадратична похибка вибіркової характеристики асиметрії; $\hat{\sigma}_{\hat{E}}$ — середньоквадратична похибка вибіркової характеристики ексцесу.

Якщо одночасно виконуються такі нерівності:

$$\left| \hat{A} \right| < 1,5 \hat{\sigma}_{\hat{A}}; \quad \left| \hat{E} + \frac{6}{n+1} \right| < 1,5 \hat{\sigma}_{\hat{E}}, \quad (7.1.16)$$

то гіпотезу про нормальний характер розподілу випадкової компоненти не відхиляють.

Якщо виконується принаймні одна із нерівностей

$$\left| \hat{A} \right| \geq 2 \hat{\sigma}_{\hat{A}}; \quad \left| \hat{E} + \frac{6}{n+1} \right| \geq 2 \hat{\sigma}_{\hat{E}}, \quad (7.1.17)$$

гіпотезу про нормальний характер розподілу відхиляють, а модель тренду визнають неадекватною. Інші випадки потребують додаткової перевірки за допомогою складніших критеріїв. Для адекватних моделей доцільно ставити запитання щодо оцінювання їхньої точності. Вважається, що моделі з меншою розбіжністю між фактичними й розрахунковими значеннями краще відображають досліджуваний процес у майбутньому. Для характеристики рівня близькості використовують такі описові статистики: середнє квадратичне відхилення (або дисперсія)

$$\hat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{1}{n-k-1} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}; \quad (7.1.18)$$

середню відносну похибку апроксимації (чим ближче до 0, тим точніша модель):

$$\bar{e}_{\text{відн.}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| 100\%; \quad (7.1.19)$$

коефіцієнт сходження:

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}, \quad (7.1.20)$$

коефіцієнт детермінації (чим ближче до 1, тим точніша модель):

$$R^2 = 1 - \varphi^2. \quad (7.1.21)$$

У формулах (7.1.18—7.1.21) n — кількість рівнів ряду, k — кількість пояснювальних змінних у моделі, \hat{y}_t — оцінки рівнів ряду за моделлю, \bar{y} — середнє арифметичне значення вибірки.

На підставі розглянутих показників можна з кількох адекватних моделей обрати найточнішу. Помилка прогнозу, обчисленого для періоду, характеристики котрого вже були використані при оцінюванні параметрів моделі, як правило, буде незначною та мало залежатиме від теоретичної обґрунтованості, застосованої для побудови моделі.

Оскільки формально-статистичний вибір кращої моделі в багатьох випадках не гарантує цілковитої впевненості в його пра-

вильності, адже добрий прогноз можна отримати і на підставі погані моделі, і навпаки, тому про якість застосовуваних методик і моделей у прогнозуванні можна судити лише за сукупністю зіставлень прогнозів і їх реалізації. При цьому незалежно від обраної методики та моделі прогнозування джерелами помилок прогнозу можуть бути:

1) природа змінних (випадковий характер змінних гарантує, що прогноз відхилятиметься від справжніх величин, навіть якщо модель правильно специфікована, її параметри точно відомі);

2) природа моделі (сам процес оцінювання спричиняє похибки оцінок параметрів);

3) помилки, привнесені прогнозом незалежних випадкових величин (пояснювальних змінних);

4) помилки специфікації моделі.

Інтегровані критерії точності й адекватності. Схема формування інтегрованих критеріїв точності й адекватності, а також загального критерію якості прогнозування полягає у тому, що формується склад окремих критеріїв, на підставі яких обчислюють інтегрований показник (скажімо, точність можна характеризувати лише коефіцієнтом детермінації, або дисперсією та середньою помилкою апроксимації, або всіма переліченими критеріями).

Попередньо для кожного окремого критерію розробляють процедуру його нормування. Нормований критерій одержують із вихідної статистики критерію таким чином, щоб виконувалися умови: нормований критерій дорівнює 100, якщо модель абсолютно точна (*адекватна*), нормований критерій дорівнює 0, якщо модель абсолютно неточна (*неадекватна*).

Узагальнений критерій якості моделі розраховують як зважену суму узагальненого критерію точності (його вага 0,75) і узагальненого критерію адекватності (його вага 0,25), тобто віддають перевагу точності. За характеристику точності обирають нормоване значення середньої відносної похибки апроксимації, а за критерій адекватності — нормоване значення критерію Дарбіна-Ватсона та характеристики нормального закону розподілу залишкової компоненти. Числове значення узагальненого критерія якості перебуває у діапазоні від 0 до 100 (мінімум відповідає абсолютно неправильній моделі, а максимум — моделі, що ідеально відображає розвиток показника). Досвід застосування цього показника свідчить про надійність моделей, оцінка якості яких не менша за 75.

Наведені вимірювання якості прогнозу виходять із незначного відхилення його від фактичних значень, але зрозуміло, що деякі

змінні прогнозувати простіше, ніж інші. Так, вважається, що обсяг поточного рахунка платіжного балансу, який визначається як різниця двох великомасштабних показників — імпорту та експорту, — прогнозувати важче, ніж величини, які змінюються відносно повільно, наприклад тривалість життя, рівень безробіття. Отже, для визначення оптимального прогнозу необхідний системний критерій. Точніше оптимальний прогноз слід визначати з розгляду функції витрат користувача прогнозу, тобто з аналізу збитків через помилку прогнозу, а також із порівняння додаткового вигаду від зменшення помилки та витрат на вдосконалення прогнозу. Таким чином, оптимальним вважається найкращий прогноз, який можна одержати за наявних обставин.

Оптимальний прогноз — це зроблене на підставі економічної теорії передбачення, яке використовує всю доступну на момент побудови прогнозу інформацію. Для оптимального прогнозу граничний вигад та граничні витрати збігаються.

Оптимальний прогноз іще називають прогнозом раціональних сподівань. Раціональні сподівання можуть відрізнитися від фактичних значень, але будь-яка різниця має бути випадковою й непередбачуваною. Оскільки раціональні сподівання ґрунтуються на коректній економічній теорії, вони мають властивості незсуненості (за умови квадратичної функції витрат) та ефективності.

Незсуненість означає, що помилка прогнозу має нульове математичне сподівання.

Ефективність передбачає, що в процесі прогнозування буде використана вся доступна інформація, отже, помилка прогнозу не буде корелювати з цією інформацією.

Існують численні критерії перевірки раціональності послідовності прогнозів [14]. Стандартний критерій незсуненості потребує перевірки гіпотези стосовно того, що $\alpha = 0$ та $\beta = 1$ водночас для такої моделі:

$$y_t = \alpha + \beta \hat{y}_t + \varepsilon_t, \quad (7.1.22)$$

де y_t — ряд фактичних значень або спостережень;

\hat{y}_t — ряд прогнозованих значень;

ε_t — випадкові залишки.

Перевірка ефективності є складнішою оскільки неможливо коректно визначити відповідний масив інформації, стосовно якого похибки прогнозу будуть некорельованими.

Узагальнюючи огляд критеріїв визначення якісного прогнозу, можна стверджувати, що варто користуватися системою критеріїв, які мають враховувати:

- кількість зусиль, витрачених на побудову моделі, і наявність готових комп'ютерних програм;
- швидкість, із якою метод уловлює істотні зміни у поведінці ряду, наприклад раптовий зсув математичного сподівання або збільшення кута нахилу лінії тренду;
- існування серійної кореляції у помилках;
- незмінюваність первинних даних;
- повний обсяг роботи в деяких сферах діяльності — тисячі рядів щомісяця потребують оновлення, невеликі витрати й швидкість мають першорядне значення;
- терміновість прогнозування.

7.2. Побудова комбінованого прогнозу

Формулювання проблеми. Серед дослідників немає єдиної думки щодо існування найкращого методу прогнозування. Досвід застосування різноманітних підходів до прогнозування доводить, що кожен метод призводить до різних результатів. Отже, як правило, виходить кілька відмінних прогнозів одного економічного показника. Постає питання: чи переважає якийсь метод решту, і чи можливо якимось чином скомбінувати прогнози, одержані різними методами, щоб побудувати узагальнений прогноз, який буде точніший за індивідуальні?

Можна сподіватися, що будь-який прогноз, відкинтий через його неоптимальність, майже завжди містить певну корисну незалежну інформацію. Така інформація може бути двосторонньою: по-перше, кожен прогноз ґрунтований на інформації, яка є спеціальною для цього підходу, і тому не враховується в інших методах; по-друге, кожен прогноз відтворює певну форму взаємозв'язків між змінними, що відрізняється від зв'язків, досліджуваних в інших моделях. Об'єднання незалежно одержаних прогнозів залучає обидва види додаткової інформації, і якщо припустити, що кожна з моделей описує лише один бік динаміки заданого процесу, то використання кількох моделей уможливить точніший і повніший опис і прогнозування динаміки. Не випадково сучасна теорія систем пропонує стратифікований підхід до опису складних систем. Така точка зору сприяла ідеї об'єднання прогнозів і формування на цій основі комбінованого, або об'єданого прогнозу.

Об'єднання можна здійснювати як на підставі прогнозів, отриманих із різних джерел, наприклад, експертним шляхом і за допомогою моделей, так і із застосуванням, побудованими за допомогою статистичних моделей одного класу.

Спосіб об'єднання окремих прогнозів, як правило, полягає в тому, щоб представити комбінований прогноз у вигляді зваженої суми окремих прогнозів:

$$\hat{y}_{it} = \sum_{i=1}^M k_i \hat{y}_{it}, \quad (7.2.1)$$

де \hat{y}_{it} — i -й окремий прогноз, одержаний для моменту часу t ;
 M — кількість об'єднуваних прогнозів;
 k_i — вагові коефіцієнти окремих прогнозів. $0 \leq k_i \leq 1$.

Сума всіх вагових коефіцієнтів має давати одиницю, окремі ваги мають перебувати в інтервалі $[0, 1]$. Очевидно, що головна проблема, яка при цьому виникає, — визначення ваг k_i , оскільки саме вони визначатимуть якість об'єданого прогнозу. На практиці завжди прагнуть надати більшої ваги тому набору прогнозів, який містить менші за величиною середньоквадратичні похибки. Існує чимало способів визначення вагових коефіцієнтів, найвідомішими серед яких є два:

- дисперсійно-коваріаційний метод, що дає змогу зводити кілька незміщених прогнозів у лінійну комбінацію з найменшою дисперсією. Вагові коефіцієнти окремих прогнозів залежать від дисперсій та коваріацій похибок прогнозів;
- регресійний метод, який є узагальненням дисперсійно-коваріаційного на випадок зсуеності прогнозів.

Спосіб комбінування прогнозів, одержаних за статистичними моделями одного класу, породжує низку питань. Наприклад, які прогнози можуть об'єднуватися, якою має бути кількість прогнозів та процедура об'єднання тощо. Об'єднання прогнозів пов'язано з такими ускладненнями, як корельованість прогнозів, одержаних за різними моделями, властивість похибок прогнозу змінюватися із часом, зміщення комбінованого прогнозу тощо. Кожне з названих ускладнень потребує застосування спеціального підходу. Поки не розроблено єдиних правил, суб'єктивні судження дослідника є складовою прийняття рішення стосовно того, як комбінувати прогнози.

Дисперсійно-коваріаційний метод. Об'єднання прогнозів розглянемо на прикладі побудови середньозваженого прогнозу двох

окремих прогнозів, оскільки поширення одержаних результатів на більшу кількість окремих прогнозів здійснюється досить просто. У загальному випадку два незсунені прогнози можна скомбінувати для одержання нового прогнозу. Будемо виходити з мінімізації дисперсії похибки прогнозу, тобто використовувати квадратичну функцію збитків.

Нехай маємо на період t два незсунені прогнози \hat{y}_{1t} і \hat{y}_{2t} , дисперсії яких σ_1^2 та σ_2^2 і коваріація σ_{12} . Новий незсунений прогноз \hat{y}_t будується за правилом

$$\hat{y}_t = k \hat{y}_{1t} + (1-k) \hat{y}_{2t}. \quad (7.2.2)$$

Дисперсія похибки комбінованого прогнозу дорівнюватиме:

$$\sigma_y^2 = k^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) - 2k(\sigma_2^2 - \sigma_{12}) + \sigma_2^2. \quad (7.2.3)$$

Мінімізуючи цей вираз за k , одержимо, що

$$k = (\sigma_2^2 - \sigma_{12}) / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}). \quad (7.2.4)$$

Отже, ваги в оптимальній лінійній комбінації залежать від дисперсій та коваріацій похибок прогнозу, звідки й походить назва дисперсійно-коваріаційний метод.

Кореляція між похибками окремих прогнозів дорівнює $\rho = \sigma_{12} / \sigma_1 \sigma_2$, підстановка замість σ_{12} та k у (7.2.3) дає

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)}{(\sigma_1 - \rho \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 (1 - \rho^2)}. \quad (7.2.5)$$

Звідси можна показати, що $(\sigma_1^2 - \sigma_y^2) \geq 0$ та $(\sigma_2^2 - \sigma_y^2) \geq 0$ і σ_y^2 менше або дорівнює мінімальному з σ_1^2 та σ_2^2 . Отже, комбінований прогноз принаймні не менш точний за кращий із двох прогнозів, які взято як компоненти.

Оптимальну величину k не можна одержати на початковій стадії синтезу прогнозу, оскільки вона змінюється мірою накопичування знань про відносну ефективність двох окремих прогнозів. Більше того, на попередній стадії ще невідомі ані дисперсії похибок окремих прогнозів σ_j^2 , ані коефіцієнти коре-

ляції між цими похибками. Їх треба оцінювати. Узагальнення цього методу до комбінування M прогнозів відбувається за формулою:

$$Z = \frac{V^{-1}I}{I^T V^{-1}I}, \quad (7.2.6)$$

де V — коваріаційна матриця похибок прогнозу розмірності $M \times M$;

I — M -мірний вектор-стовпчик, усі координати якого є одиницями.

Аналіз знайдених оптимальних ваг дає підстави для таких висновків:

- по-перше, очевидно, що інтуїтивна привабливість простого вибору найкращого (із найменшою дисперсією похибки) прогнозу та його використання здається сумнівною, оскільки в загальному випадку комбінований прогноз має меншу дисперсію похибки;

- по-друге, якщо σ_1^2 та σ_2^2 дорівнюють один одному, то у (5.2.9) ваги також рівні, а комбінований прогноз є простим середнім значенням компонентів.

- по-третє, якщо коваріація похибок прогнозів додатна й більша за одну із дисперсій (наприклад, якщо $\sigma_2^2 - \sigma_{12}$ від'ємне), одна вага буде від'ємною, а інша перевищуватиме одиницю. Зауважимо, що від'ємність ваги не обов'язково свідчить про хибність прогнозу;

- по-четверте, коли дисперсія похибки прогнозу прямує до нуля, вага цього прогнозу прямує до одиниці. Отже, чим надійніший прогноз, тим більшу вагу він має.

Регресійний метод є узагальненням дисперсійно-коваріаційного методу. Його можна тлумачити як оцінювання параметрів регресійного рівняння виду

$$\hat{y}_t = \beta_0 + \beta_1 \hat{y}_{1t} + \beta_2 \hat{y}_{2t} + \dots + \beta_M \hat{y}_{Mt} + v_{1t}, \quad (7.2.7)$$

де збурення v має нульове середнє.

Новий комбінований прогноз є лінійною комбінацією M прогнозів. Коефіцієнти β_i , $i = 0, 2, \dots, M$ оцінюють за методом найменших квадратів. Якщо всі прогнози є незсуненими, то доданок β_0 можна опустити. У цьому разі значення коефіцієнтів збігатимуться із оцінками вектора Z із попереднього методу.



1. Закон України «Про державне прогнозування та розроблення програм економічного і соціального розвитку України». — К., 2000.
2. *Саркисян С. А., Голованов Л. В.* Прогнозирование развития больших систем. — М.: Статистика, 1975.
3. *Красс И. А.* Математические модели экономической динамики. — М.: Советское радио, 1976.
4. *Класс А.* и др. Введение в эконометрическое моделирование. — М.: Финансы и статистика, 1978.
5. *Винн Р., Холден К.* Введение в прикладной эконометрический анализ. — М.: Финансы и статистика, 1981.
6. Рабочая книга по прогнозированию. — М: Мысль, 1982.
7. *Горелова В. Л., Мельникова Е. Н.* Основы прогнозирования систем. — М.: Высшая школа, 1986.
8. *Льюис К. Д.* Методы прогнозирования экономических показателей. — М.: Финансы и статистика, 1986.
9. Статистическое моделирование и прогнозирование / Под ред. А. Г. Гранберга. — М.: Финансы и статистика, 1990.
10. *Гальперин В. М.* и др. Макроэкономика. — СПб.: Экономическая школа, 1994.
11. *Уотшем Т. Дж., Паррамоу К.* Количественные методы в финансах. — М.: Финансы, 1999.
12. *Науменко В., Панасюк Б.* Впровадження методів прогнозування і планування в умовах ринкової економіки. — К.: Глобус, 1995.
13. *Наконечний С. І., Терещенко Т. О., Романюк Т. П.* Економетрія: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 1997.
14. *Холден К., Піл Д. А., Томпсон Дж. Л.* Економічне прогнозування: Вступ. — К.: Інформтехніка, ЕМЦ, 1996.
15. *Белецький В. М., Бакуменко В. Д.* Моделювання макроекономічних процесів. — К.: УАДУ при Президентіві України, 1998.
16. *Лук'яненко І., Краснікова Л.* Економетрика: Практикум з використанням комп'ютера. — К.: Знання, КОО, 1998.
17. ЕКОНОМІСТ. — 1998. — № 5.
18. *Костіна Н. І., Алексеев А. А., Василик О. Д.* Фінанси: система моделей і прогнозів: Навч. посібник. — К.: Четверта хвиля, 1998.

19. *Кугаенко А. А.* Основы теории и практики динамического моделирования социально-экономических объектов и прогнозирования их развития. — М.: Вузовская книга, 1998.
20. *Айвазян С. А., Мхитарян В. С.* Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ, 1998.
21. Секторальні моделі прогнозування економіки України / За ред. В. М. Гейця. — К.: Фенікс, 1999.
22. *Боровиков В. П., Ивченко Г. И.* Прогнозирование в системе STATISTICA в среде Windows. Основы теории и интенсивная практика на компьютере: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 1999.
23. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В. В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 2000.
24. *Дубров А. М.* Многомерные статистические методы: Учебник. — М.: Финансы и статистика, 2000.
25. *Шелобаев С. И.* Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учебное пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
26. *Кобелев Н. Б.* Практика применения экономико-математических методов и моделей: Учебно-практическое пособие. — М.: ЗАО Финстатинформ, 2000.
27. *Петерс Е.* Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка: Пер. с англ. — М.: Мир, 2000.
28. *Лук'яненко І. Г., Городніченко Ю. О.* Сучасні економетричні методи у фінансах. — К.: Літера ЛТД, 2002.
29. *Черняк О. І., Ставицький А. В.* Динамічна економетрика: Навч. посібник. — К., 2000.
30. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. — М.: Мир, 1974.
31. *Горчаков А. А., Орлова И. В.* Компьютерные экономико-математические модели. — М.: ЮНИТИ, 1995.
32. *Слезингер Г. Э.* Социальная экономика — М.: Дело и сервис, 2001.
33. *Парсаданов Г. А.* Планирование и прогнозирование социально-экономической системы: Учебное пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
34. *Колемаев В. А.* Математическая экономика. — М.: ЮТИТИ, 2002.
35. Моделирование народнохозяйственных процессов. Под ред. В. С. Дадаева. — М.: Экономика, 1973.
36. Прогнозування і розробка програм. (Методичні рекомендації) / За ред. В. Ф.Беседіна. — К.: Науковий світ, 2000.
37. *Канторович Г. Г.* Анализ временных рядов. Лекционные и методические материалы // Экономический журнал ВШЭ. — 2002. — № 3.



Частина 1. МОДЕЛІ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ	3
Вступ	3
1. Соціально-економічні процеси країни як об'єкт прогнозування	3
1.1. Основні поняття, сутність, цілі та завдання прогнозування соціально-економічних процесів	3
1.2. Методологія прогнозування соціально-економічних процесів	20
1.3. Структура прогнозування розвитку національної економіки	30
2. Прогнозування економічного зростання	37
2.1. Динамічна модель Кейнса. Модель Самуельсона-Хікса	37
2.2. Виробнича функція	39
2.3. Модель Солоу. Трисекторна модель економічного зростання	44
3. Прогнозування розвитку виробничих зв'язків в економіці	53
3.1. Лінійна статична міжгалузева модель	53
3.2. Прогнозування динаміки коефіцієнтів МГБ	60
3.3. Динамічні багатогалузеві моделі	66
4. Прогнозування інфляції та безробіття	80
4.1. Моделі прогнозування інфляції	80
4.2. Прогнозування зайнятості та безробіття	96

5. Прогнозування комплексного соціально-економічного розвитку країни	110
5.1. Загальна характеристика комплексних економетричних моделей прогнозування	110
5.2. Складні макромоделі комплексного соціально-економічного розвитку країни.....	125
 Частина 2. МЕТОДИ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ	144
Вступ.....	144
1. Основні поняття та попередній аналіз часових рядів	144
1.1. Інформаційне представлення динаміки розвитку соціально-економічних процесів.....	144
1.2. Випадкові процеси та часові ряди	156
1.3. Ідентифікація часових рядів.....	173
2. Прогнозування часових рядів із використанням ARIMA-моделей	200
2.1. Основні поняття про лінійні параметричні моделі часових рядів і властивості їхньої загальної моделі.....	200
2.2. Процеси ковзної середньої ($MA(q)$ -процеси).....	205
2.3. Авторегресійні процеси ($AR(p)$ -процеси).....	211
2.4. Змішані $ARMA$ - та $ARIMA$ -процеси.....	218
2.5. Аналіз часових рядів Бокса-Дженкінса.....	223
3. Прогнозування тенденції на основі згладжування часових рядів	243
3.1. Прогнозування тенденції часового ряду за середніми характеристиками	243
3.2. Прогнозування тенденції часового ряду за аналітичними методами згладжування.....	245
3.3. Прогнозування тенденції часового ряду за алгоритмічними методами.....	260
4. Особливості прогнозування тренд-сезонних процесів	286
4.1. Методи фільтрації сезонної компоненти часового ряду.....	286
4.2. Моделі прогнозування сезонних процесів.....	306

5. Економетричні методи прогнозування	311
5.1. Прогнозування на основі багатофакторних регресійних моделей	311
5.2. Економічне прогнозування на основі <i>ARIMA</i> - та <i>VAR</i> -моделей	331
5.3. Застосування моделей коригування помилок (коінтегрування)	342
6. Суб'єктивні (експертні) методи прогнозування	350
6.1. Методи індивідуальної та колективної експертизи	351
6.2. Процедура проведення експертизи й аналіз експертних оцінок	355
7. Оцінювання прогнозів	363
7.1. Критерії визначення якісного прогнозу	363
7.2. Побудова комбінованого прогнозу	374
<i>Література</i>	378

Навчальне видання

**ПРИСЕНКО Галина Василівна
РАВІКОВИЧ Євген Ісаєвич**

**ПРОГНОЗУВАННЯ
СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ
ПРОЦЕСІВ**

Навчальний посібник

Редактор *В. Гломозда*
Художник обкладинки *Т. Зябліцева*
Технічний редактор *Т. Піхота*
Коректор *С. Кирилаш*
Верстка *С. Лозова*

Підписано до друку 27.04.05. Формат 60×84/16. Папір офсет. № 1.
Гарнітура Тип Таймс. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 22,08.
Обл.-вид. арк. 26,95. Наклад 370 пр. Зам. № 04-2763.

Київський національний економічний університет
03680, м. Київ, проспект Перемоги, 54/1
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи (серія ДК, №235 від 07.11.2000)
Тел./факс: (044) 458–00–66; 456–64–58
E-mail: publish@kneu.kiev.ua