

# ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Л. Т. Шкельов  
А. М. Станкевич  
Д. В. Пошивач

# ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Л. Т. Шкельов  
А. М. Станкевич  
Д. В. Пошивач

Підручник для вищих  
навчальних закладів



Міністерство освіти і науки України  
Київський національний університет  
будівництва і архітектури

**Л. Т. Шкельов**  
**А. М. Станкевич**  
**Д. В. Пошивач**

# **ОПІР МАТЕРІАЛІВ**

Затверджено Міністерством освіти і науки України  
як підручник для студентів будівельних спеціальностей  
вищих навчальних закладів

Київ  
ЗАТ "Віпол"  
2011

УДК 539.3  
ББК 30.121  
Ш 66

Рецензенти: *В. І. Гуляєв*, доктор технічних наук, професор (Національний транспортний університет), *В. В. Лобода*, доктор фізико-математичних наук, професор (Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара), *Ю. І. Немчинов*, доктор технічних наук, професор (ДП "Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій").

*Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів будівельних спеціальностей вищих навчальних закладів (лист Міністерства освіти і науки України №1/11-3767 від 07.05.2010).*

**Шкельов, Л. Т. та ін.**

Ш 66      Опір матеріалів: Підручник для студентів вищих навчальних закладів / Л. Т. Шкельов, А. М. Станкевич, Д. В. Пошивач. — К.: ЗАТ "Віпол", 2011. — 456 с.

ISBN 978-966-646-104-2

У підручнику викладена просторова задача теорії пружності та загальні питання розрахунку конструкцій на міцність. Від цих загальних положень здійснено перехід до розгляду напружено-деформованого стану таких тіл як стержень та тонкостінний стержень. Висвітлено врахування в розрахунку стержня таких додаткових чинників як статична невизначуваність, спірання на пружну основу, вплив стиску на згинання, динамічні навантаження, пластичні деформації. Теоретичний матеріал проілюстровано прикладами.

УДК 539.3  
ББК 30.121

ISBN 978-966-646-104-2

© Л. Т. Шкельов, А. М. Станкевич,  
Д. В. Пошивач, 2011

## Вступ

За всю історію розвитку людства створено велику кількість різних об'єктів (промислові та цивільні споруди, гідротехнічні споруди, судна та літаки, машини та верстати тощо). Усі вони відрізняються зовнішнім виглядом, розмірами, функціональним призначенням та іншими своїми індивідуальними властивостями. Водночас вони повинні мати такі властивості, які полягають у дотриманні умов щодо міцності та жорсткості, тобто повинні витримувати необхідні навантаження, а також істотно не змінювати свої форму та розміри.

Наприклад, конструкції моста повинні витримувати навантаження від транспорту, що рухається ним, а також забезпечувати деформування моста в межах, які не будуть перешкоджати руху транспорту. Необхідно, щоби конструкції міжповерхового перекриття у будинку витримували вагу меблів та іншого обладнання, а також мешканців будинку, а деформації перекриття при цьому залишалися малими. Подібних прикладів можна навести дуже багато.

Міцність і жорсткість конструкцій залежать від матеріалу, з якого вони зроблені, їх розмірів, характеру деформування та багатьох інших факторів. Металеві конструкції мають значно більшу міцність та жорсткість, ніж подібні конструкції з деревини. За умови, що конструкції зроблені з однакового матеріалу, стержень, що має більший поперечний розмір, є більш міцним і жорстким. Його простіше зруйнувати згинанням, ніж розтягом. Тонкий стержень при стиску руйнується внаслідок втрати стійкості, яка полягає у виникненні поперечної деформації. При розтягу стержня подібне явище не виникає.

Просте констатування багатьох окремих факторів і прикладів не дозволяє встановити загальні закономірності. Для цього потрібне їх творче усвідомлення, узагальнення і створення на цій основі теоретичних та експериментальних методів дослідження явищ, що вивчаються. Ці питання і розглядає дисципліна "Опір матеріалів". Структура і послідовність їх розгляду, викладені у даному підручнику, базуються на початковому вивченні всіх

загальних положень, а потім на їх основі розглядаються різні часткові варіанти та приклади.

Підручник складається з чотирьох розділів, кожен з яких має декілька глав та параграфів.

Перший розділ присвячений розгляду загального напружено-деформованого стану просторового тіла довільної форми. Отримані всі необхідні залежності, наведені відомості про механічні характеристики матеріалів, поняття про їх міцність та жорсткість. Сформульована загальна постановка задачі розрахунку конструкцій.

У другому розділі на основі попередньо отриманих залежностей розглянуто напружено-деформований стан стержня. Дано пояснення гіпотез, на основі яких здійснюється перехід від тіла довільної форми до стержня. Введені поняття про внутрішні зусилля та дана методика їх визначення, а також порядок перевірки стержня на міцність та жорсткість.

Третій розділ присвячений врахуванню деяких додаткових факторів, які впливають на напружено-деформований стан стержня, а саме: статична невизначуваність, спирання стержня на пружну основу, втрата стійкості, динамічні навантаження.

У четвертому розділі викладена методика розрахунку тонкостінного стержня, його специфічні особливості.

У кожному розділі всі загальні теоретичні положення проілюстровані конкретними прикладами. Ці приклади доцільно розглядати під час вивчення теоретичних положень.

# Розділ 1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕХАНІКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМІВНОГО ТІЛА

## Глава 1.1. Загальні статичні співвідношення

### 1.1.1. Основні поняття та гіпотези

Вище було зазначено, що предметом вивчення є оцінка міцності і жорсткості різних споруд, конструкцій і окремих елементів. При всій їх різноманітності загальним є те, що всі вони можуть розглядатися як з'єднання твердих деформівних тіл різних форм і розмірів. У зв'язку з цим доцільно почати вивчення з розгляду поведінки твердого деформівного тіла довільної форми, яке знаходиться під дією зовнішнього навантаження. При цьому будемо базуватися на наступних загальних гіпотезах.

1. *Гіпотеза суцільності.* Вважаємо, що усе тіло безперервно заповнено матеріалом, воно є суцільним і не має порожнин.

2. *Гіпотеза однорідності.* Матеріал тіла є фізично однорідним, тобто має однакові властивості у всіх точках.

3. *Гіпотеза про природний ненапружений стан.* У природному стані у матеріалі відсутні внутрішні напруження.

Дамо характеристику зовнішнім факторам, дія яких буде розглянута. Це механічні навантаження та вимушене деформування, що виникає при коливаннях температури та інших фізичних явищах.

Механічні навантаження можна поділити на дві категорії: поверхневі і об'ємні.

Поверхневі навантаження прикладені у точках поверхні тіла і є наслідком взаємодії з іншими тілами. Позначати їх будемо  $q$ . Їх розмірність дорівнює відношенню одиниці виміру сили до одиниці виміру площі ( $\text{H}/\text{m}^2$ ).

Об'ємне навантаження є наслідком взаємодії тіла з силовими полями (сила тяжіння, магнітне поле, сили інерції). Вони прикладені у кожній точці тіла. Позначати їх будемо  $g$ . Їх розмірність дорівнює відношенню одиниці виміру сили до одиниці виміру об'єму ( $\text{Н/м}^3$ ).

Додатний напрям зовнішнього навантаження співпадає з додатним напрямом координатної осі, до якої воно є паралельним. Будемо використовувати праву систему координат.

Перейдемо до розгляду окремого тіла довільної форми, до якого прикладене врівноважене зовнішнє навантаження. Його головний вектор і момент дорівнюють нулю. Обираємо внутрішню довільну точку тіла  $B(x, y, z)$ , через яку проводимо площину, що поділяє тіло на дві частини (рис. 1.1). Кут нахилу цієї площини може бути довільним.

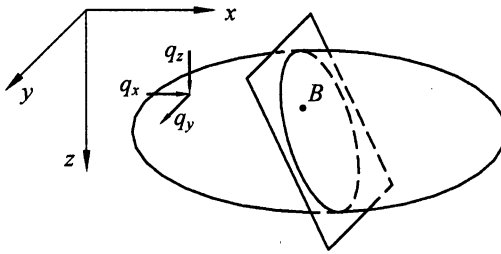


Рис. 1.1. Навантажене тіло довільної форми для з'ясування питання про внутрішні сили

Доведемо, що у внутрішніх точках тіла від дії зовнішнього навантаження виникають внутрішні сили. Для цього розглянемо одну з відокремлених частин тіла (рис. 1.2).



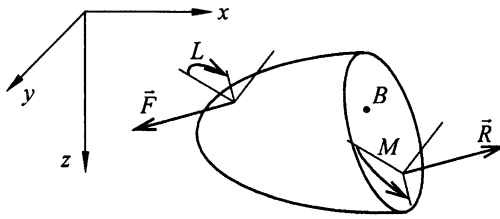


Рис. 1.2. Відокремлена частина тіла, на яку діють зовнішні навантаження та внутрішні сили

У зв'язку з довільним вибором площини, якою перерізується тіло, на відокремленій частині тіла, що розглядається зовнішнє навантаження може бути неврівноважене. Його головний вектор  $\vec{F}$  і момент  $\vec{L}$  не будуть дорівнювати нулю. Якщо на цю частину тіла більше не будуть діяти ніякі сили, то вона не буде знаходитися у рівновазі і повинна переміщуватися, тобто має можливість відокремлюватись від другої частини, але цього не відбувається. Це можливо лише за умови, що на неї діють ще якісь сили. Такі сили можуть виникати тільки на площині перерізу. Позначимо їх  $\vec{R}$  і  $\vec{M}$  (рис. 1.2). Вони повинні дорівнювати зовнішнім навантаженням. Таким чином, повинні задовольнятися два векторних рівняння:

$$\begin{aligned}\vec{F} + \vec{R} &= 0, \\ \vec{L} + \vec{M} &= 0.\end{aligned}$$

Сили  $\vec{R}$  і  $\vec{M}$  відносно відокремленої частини можуть розглядатися як зовнішні сили, а відносно всього тіла вони є внутрішніми, що виникають внаслідок взаємодії двох частин тіла. У даному курсі нам не потрібно встановлювати їх фізичний зміст, тому зупинитися на цьому не будемо. Потрібно встановити їх величину і напрям у кожній точці тіла. При цьому необхідно буде знайти не загальне значення, а їх величину, що діє на одиницю площі у кожній точці. З цього випливає поняття внутрішніх напружень.

Зупинимось на визначенні середнього напруження у точці тіла. Слід підкреслити, що внаслідок прийнятих гіпотез всі властивості, які будуть

отримані в одній точці, можуть бути застосовані у всіх інших точках. Для цього на площині перерізу біля точки  $B$  виділимо невелику ділянку, площа якої дорівнює  $\Delta A$  (рис. 1.3). Позначимо головний вектор і момент, які діють у межах цієї площі,  $\vec{\Delta R}$  та  $\vec{\Delta M}$  відповідно. Середнім значенням напруження у точці  $B$  є відношення:

$$\begin{aligned}\bar{p}_{\text{сєр}} &= \frac{\vec{\Delta R}}{\Delta A}, \\ \bar{m}_{\text{сєр}} &= \frac{\vec{\Delta M}}{\Delta A},\end{aligned}\tag{1.1}$$

де  $\bar{p}_{\text{сєр}}$  і  $\bar{m}_{\text{сєр}}$  — відповідно силове та моментне напруження.

Переходячи у співвідношеннях (1.1) до граничної межі значення  $\Delta A$ , що дорівнює нулю, отримаємо напруження, які мають назву напруження в точці

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta R}}{\Delta A}, \\ \bar{m} &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta M}}{\Delta A}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Подальші перетворення можуть базуватися на двох варіантах. Один з них застосовує залежності (1.2) без будь-яких змін. Це означає, що в точках тіла виникають як силові, так і моментні напруження. Вказаний варіант має назву моментної теорії пружності. Він застосовується для розв'язку специфічних задач, пов'язаних з визначенням концентрації напружень.

Але в більшості випадків застосовується спрощений варіант, в якому моментні напруження приймаються рівними нулю, тобто

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta M}}{\Delta A} = 0.$$

Вказана залежність буде мати місце, якщо силові напруження будуть рівномірно розподілені на нескінченно маленьких ділянках тіла. В той же час на ділянках, розміри яких не є нескінченно малими, силові напруження

розподілені нерівномірно, тому середнє моментне напруження нулю не дорівнює. Саме цей варіант і буде розглядатися у даному курсі.

Внутрішні сили і напруження виникають внаслідок взаємодії двох суміжних частин тіла. Тому, згідно із законом Ньютона, можна стверджувати, що на дві суміжні частини тіла діють однакові внутрішні сили і напруження, але вони мають протилежні напрями.

Далі зупинимось на розгляді загальних понять, пов'язаних із внутрішніми напруженнями. Оберемо систему координат і роз'єднаємо тіло на дві частини площиною, перпендикулярною осі  $x$  (рис. 1.3).

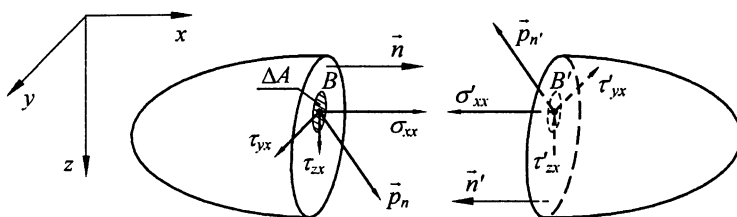


Рис. 1.3. Напруження, які виникають у внутрішніх точках тіла

Проведемо до перерізів кожної частини зовнішні нормалі  $\vec{n}$  і  $\vec{n}'$ . Вони будуть паралельні осі  $x$ , але додатний напрямок нормалі  $\vec{n}$  співпадає із додатним напрямком осі  $x$ , а нормалі  $\vec{n}'$  — навпаки. Тому нормаль  $\vec{n}$  має назву додатної нормалі, а  $\vec{n}'$  — від'ємної. Відповідно переріз лівої частини тіла будемо називати *перерізом з додатною нормаллю*, а переріз правої частини вважається *перерізом з від'ємною нормаллю*.

Розглянемо напруження у точці  $B(x, y, z)$ . На лівій частині вона має таку саму назву, як на правій:  $B'$ . Вектори напружень у цих точках  $\vec{p}_n$  і  $\vec{p}_{n'}$  рівні за величиною, але протилежні за напрямом. Виходячи з формули (1.2) їх розмірність дорівнює відношенню одиниці виміру сили до одиниці виміру площі, а саме  $\text{Н/м}^2$ . Ця одиниця виміру має назву "паскаль".

Розкладемо вектори  $\bar{p}_n$  і  $\bar{p}_{n'}$  на три складові, паралельні координатним осям. Ці складові або перпендикулярні до площини перерізу ( $\sigma_{xx}$ ), або знаходяться в ній ( $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zx}$ ). Перпендикулярна складова має назву нормального напруження, а дві інші мають назву дотичних напружень. Перший індекс у назвах цих складових напружень співпадає з назвою осі, якій вона паралельна, а другий індекс має назву осі, перпендикулярної до площини перерізу.

На рисунку 1.3 складові напружень у точках  $B$  і  $B'$  зображені у додатних напрямках, але у цих двох точках вони мають протилежний напрямок. Це пов'язано з тим, що точка  $B$  розташована у перерізі з додатною нормаллю, а точка  $B'$  — навпаки. На цій підставі можна сформулювати наступне правило:

- у точках, що розташовані на площинах з додатними нормаллями, напрям додатних напружень співпадає з додатними напрямками відповідних осей;
- у точках, розташованих на площинах з від'ємною нормаллю, додатний напрям напружень протилежний додатному напрямку відповідних координатних осей.

Зупинимось ще на одній особливості напруженого стану у точці. Через довільну точку  $B$  можна провести безліч площин під різними кутами, які поділять тіло на дві частини, форми і розміри яких у кожному випадку будуть відрізнятися одна від одної. Тому, головний вектор і момент зовнішнього навантаження, яке знаходиться у межах окремої частини, будуть мати різні значення. Відповідно можна стверджувати, що головний вектор і момент внутрішніх напружень у площині перерізу теж будуть різні. Внаслідок чого відрізнятися будуть і напруження у точці  $B$ . Їх загальна кількість необмежена. Далі буде доведено, що серед цієї необмеженої кількості напружень незалежними будуть тільки певна частина, всі інші напруження визначаються через них.

На рисунку 1.3 зображені напруження та їх складові, що виникають у перерізі, перпендикулярному координатній осі  $x$ , і наведено їх позначення.

Необхідно ці питання вирішити також для перерізів, нахил яких до координатних осей довільний (рис. 1.4).

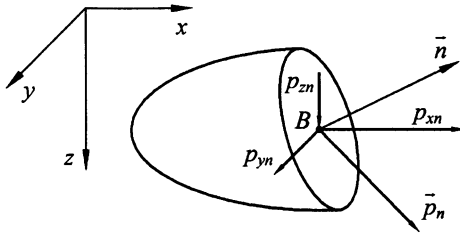


Рис. 1.4. Складові внутрішніх напружень паралельних координатним осям

Напруження  $\vec{p}_n$ , що діє у точці  $B$ , розкладено на три складові  $p_{xn}$ ,  $p_{yn}$ ,  $p_{zn}$ , які паралельні координатним осям. Оскільки ці складові не співпадають з нормаллю та площиною перерізу, позначати їх будемо літерою  $p$ . Перший індекс у цих позначеннях співпадає з назвою відповідної осі, а другий — з назвою нормалі до перерізу.

Можливий і інший варіант, коли напруження  $\vec{p}_n$  розкладається за напрямками, що співпадають з нормаллю  $\vec{n}$  до перерізу і лініями  $s_1$  і  $s_2$ , які належать площині перерізу (рис. 1.5).

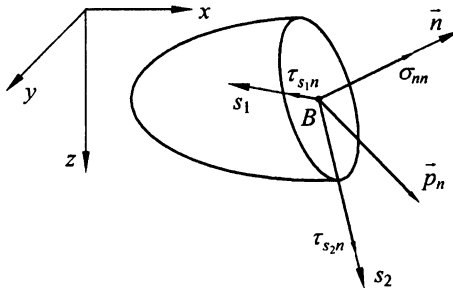


Рис. 1.5. Складові внутрішніх нормальних та дотичних напружень

Внаслідок того, що в цьому випадку складові вектора напружень  $\vec{p}_n$  є нормальним і дотичним напруженням, то вони позначаються літерами  $\sigma$  і  $\tau$ . Перший індекс відповідає назві лінії, якій паралельна ця складова. Другий індекс — це назва нормалі до перерізу.

Розглянемо ще два загальних положення, які будемо далі застосовувати.

*Метод перерізів.* Він вже використовувався, але без загальних пояснень. Його суть: внутрішні сили, що приховані усередині тіла, необхідно перетворити у зовнішні, щоб була можливість оперувати ними. Це досягається умовним розрізом тіла на частини, по поверхнях яких прикладаються сили взаємодії з іншими частинами, внаслідок чого внутрішні сили (напруження) перетворюються у зовнішні, до яких є можливість застосовувати закони теоретичної механіки.

*Принцип отвердіння.* Конструкції (або тіла), що розглядаються є деформівними, тобто, під дією навантаження змінюються їх форма і розміри. Але у більшості задач при розгляді умов рівноваги вони розглядаються як абсолютно тверді, що дає можливість користуватися методами теоретичної механіки. Врахування деформування на стадії складання умов рівноваги необхідно брати до уваги при розв'язанні окремих задач, що і буде розглянуто у відповідних розділах.

*Принцип незалежності дії навантажень.* Якщо до конструкції прикладено декілька груп навантажень, то можливі два варіанти розрахунку. Перший заснований на одночасному врахуванні усіх навантажень. Другий дозволяє робити розрахунки окремо від кожної групи навантажень, а потім визначити їх алгебраїчну або геометричну суму. Вона буде співпадати з результатами розрахунку на загальне навантаження.

### 1.1.2. Залежності між напруженнями, що виникають у точці, і діють по різних напрямках

Вище зазначалось, що напруження в точці за будь-яким напрямом необхідно визначити через певну кількість так званих базисних напружень. Для доказу цього положення відокремимо нескінченно малу внутрішню частину тіла, яка має форму тетраедра (рис. 1.6).

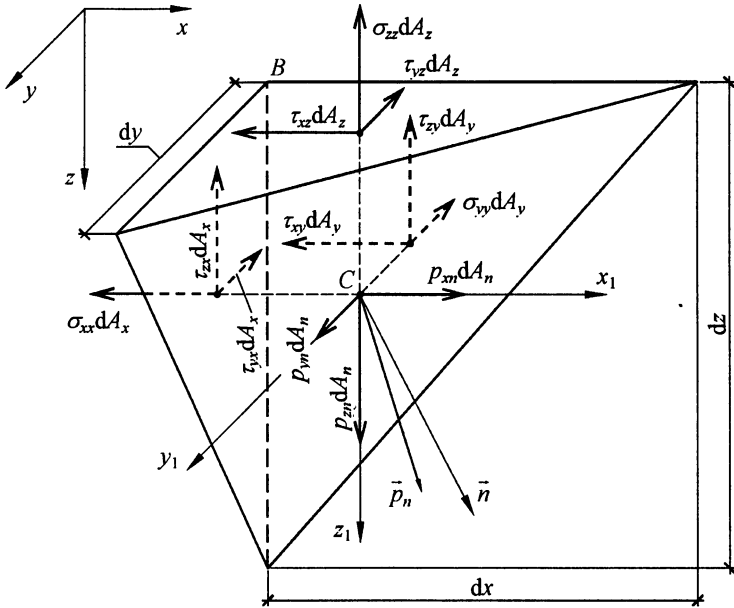


Рис. 1.6. Нескінченно мала частина тіла, до якої прикладені внутрішні напруження

Три грані тетраедра перпендикулярні координатним осям, а четверта грань має довільний нахил відносно координатних осей. Усі чотири грані або проходять через точку  $B$ , або знаходяться на нескінченно малій відстані від неї, тому напруження на всіх гранях можна розглядати як напруження у точці  $B$ .

Позначимо напрямні косинуси нормалі  $\vec{n}$  відносно координатних осей відповідно  $n_x = \cos(x, \vec{n})$ ,  $n_y = \cos(y, \vec{n})$ ,  $n_z = \cos(z, \vec{n})$ . Вище було зазначено, що

напруження на нескінченно малих площах рівномірно розподілені, тому їх рівнодіючі на кожній грані будуть співпадати з їх центрами ваги і дорівнювати інтенсивності напруження, помноженій на площу відповідної грані. Площі граней тетраедра позначимо  $dA_x$ ,  $dA_y$ ,  $dA_z$ ,  $dA_n$ . Індекси відповідають назвам нормалей до граней тетраедра.

Відмітимо декілька властивостей, пов'язаних з формою тетраедра.

Усі лінії дії нормальних напружень перетинаються у точці  $C$ , яка є центром ваги грані тетраедра. Ця грань перпендикулярна до лінії  $\vec{n}$ .

Між площами граней тетраедра існують залежності:

$$\frac{dA_x}{dA_n} = n_x, \quad \frac{dA_y}{dA_n} = n_y, \quad \frac{dA_z}{dA_n} = n_z. \quad (1.3)$$

Далі зупинимось на складанні рівнянь рівноваги тетраедра. Базуємось на тому, що якщо тіло, від якого відокремлений цей тетраедр, врівноважене, то і будь-яка його частка також буде врівноважена. Складаємо суми проекцій на координатні осі.

$$\sum X = 0: \quad p_{xn} dA_n - \sigma_{xx} dA_x - \tau_{xy} dA_y - \tau_{xz} dA_z = 0;$$

$$\sum Y = 0: \quad p_{yn} dA_n - \tau_{yx} dA_x - \sigma_{yy} dA_y - \tau_{yz} dA_z = 0;$$

$$\sum Z = 0: \quad p_{zn} dA_n - \tau_{zx} dA_x - \tau_{zy} dA_y - \sigma_{zz} dA_z = 0.$$

Враховуючи залежності (1.3), отримаємо:

$$p_{xn} = \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z,$$

$$p_{yn} = \tau_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z, \quad (1.4)$$

$$p_{zn} = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z.$$

Запишемо ще три рівняння рівноваги, а саме суму моментів відносно осей

$Cx_1 y_1 z_1$ :

$$\sum M_{x_1} = 0: \quad \tau_{zy} \cdot dA_y \cdot \frac{1}{3} dy - \tau_{yz} \cdot dA_z \cdot \frac{1}{3} dz = 0;$$

$$\sum M_{y_1} = 0: \quad \tau_{xz} \cdot dA_z \cdot \frac{1}{3} dz - \tau_{zx} \cdot dA_x \cdot \frac{1}{3} dx = 0;$$



$$\sum M_{z_1} = 0: \tau_{yx} \cdot dA_x \cdot \frac{1}{3} dx - \tau_{xy} \cdot dA_y \cdot \frac{1}{3} dy = 0.$$

Беручи до уваги значення площ граней тетраедра  $dA_x = \frac{1}{2} dy dz$ ,

$dA_y = \frac{1}{2} dx dz$ ,  $dA_z = \frac{1}{2} dx dy$ , будемо мати:

$$\begin{aligned} \tau_{zy} &= \tau_{yz}, \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}, \\ \tau_{yx} &= \tau_{xy}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Отримані залежності мають назву закону парності дотичних напружень.

Слід підкреслити, що ці рівняння встановлюють співвідношення між значеннями напружень, але за характером вони залишаються різні, тому що діють у різних площинах.

Співвідношення (1.5) врахуємо у рівняннях (1.4) і знайдемо:

$$\begin{aligned} p_{xn} &= \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\ p_{yn} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z, \\ p_{zn} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z. \end{aligned} \tag{1.6}$$

На підставі цих залежностей можна зробити висновок, що напруження, які виникають у точці на довільно орієнтованій площині, можуть бути визначені через напруження по трьох взаємно ортогональних площинах, які проходять через цю точку.

Таким чином, напружений стан у точці однозначно визначається дев'ятьма напруженнями, що виникають по трьох взаємно ортогональних площинах, орієнтація яких може бути довільною. Вказані напруження можна об'єднати у так званий *тензор напружень*:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

### 1.1.3. Екстремальні нормальні напруження

Зупинимось на аналізі напруженого стану у точці. Визначимо значення повного напруження  $p_n$  через його складові, які паралельні координатним осям:

$$p_n = \sqrt{p_{xn}^2 + p_{yn}^2 + p_{zn}^2}.$$

Розкладемо напруження  $\vec{p}_n$  по інших напрямках (рис. 1.7). Один з них візьмемо збіжним з нормаллю  $\vec{n}$ , а другий — з лінією  $\vec{s}$ , яка є лінією перетину грані тетраедра з площиною, що визначається двома лініями  $\vec{p}_n$  і  $\vec{n}$ .

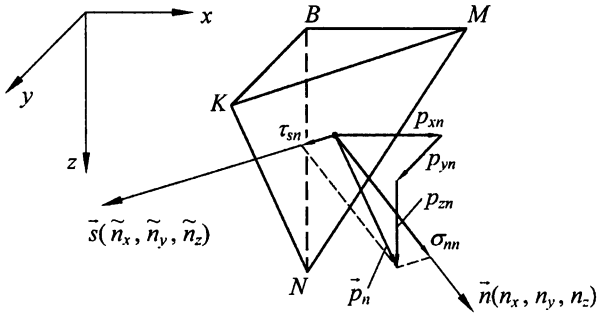


Рис. 1.7. Ілюстрація розкладу повного напруження по різних напрямках

Можливість розкладу просторового вектора  $\vec{p}_n$  на два напрями забезпечена тим, що всі три лінії  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}_n$ ,  $\vec{s}$  знаходяться в одній площині. Складові напруження  $p_n$  у цьому випадку є нормальним  $\sigma_{nn}$  і дотичним  $\tau_{sn}$  напруженнями відносно грані тетраедра. Одночасно зобразимо складові повного напруження паралельні координатним осям  $p_{xn}$ ,  $p_{yn}$ ,  $p_{zn}$ .

Нормальне напруження  $\sigma_{nn}$  дорівнює проекції  $\vec{p}_n$  на напрям нормалі  $\vec{n}$ , а дотичне  $\tau_{sn}$  — на лінію  $\vec{s}$ . Проекцію вектора на вісь можна визначити через проекції на цю вісь його складових, тому можна записати так:

$$\sigma_{nn} = p_{xn}n_x + p_{yn}n_y + p_{zn}n_z,$$

$$\tau_{sn} = p_{xn}\tilde{n}_x + p_{yn}\tilde{n}_y + p_{zn}\tilde{n}_z.$$

У другому виразі  $\tilde{n}_x$ ,  $\tilde{n}_y$ ,  $\tilde{n}_z$  є напрямними косинусами лінії дії дотичних напружень  $s$ .

Після підстановки залежностей (1.6) будемо мати:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \sigma_{xx}n_x^2 + \sigma_{yy}n_y^2 + \sigma_{zz}n_z^2 + 2\tau_{xy}n_xn_y + 2\tau_{xz}n_xn_z + 2\tau_{yz}n_yn_z, \\ \tau_{sn} &= (\sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z)\tilde{n}_x + (\tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z)\tilde{n}_y + \\ &+ (\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z)\tilde{n}_z. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Знайдемо положення грані тетраедра  $KMN$ , при якому напруження  $\sigma_{nn}$  буде досягати екстремального значення. Положення вказаної грані може бути визначене напрямними косинусами нормалі  $\vec{n}$ , тому можна розглядати вираз (1.8) як функцію трьох змінних  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ . У той же час підкреслимо, що між цими величинами існує залежність:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1 = 0. \quad (1.9)$$

Враховуючи наявність умови (1.9), треба для знаходження екстремуму функції (1.8) застосувати правило визначення умовного екстремуму.

Використовуємо метод невизначених коефіцієнтів Лагранжа. Помножимо вираз (1.9) на довільний коефіцієнт  $\lambda$  і віднімемо від виразу (1.8).

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \sigma_{xx}n_x^2 + \sigma_{yy}n_y^2 + \sigma_{zz}n_z^2 + 2\tau_{xy}n_xn_y + 2\tau_{xz}n_xn_z + 2\tau_{yz}n_yn_z - \\ &- \lambda(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1). \end{aligned}$$

Візьмемо від цього виразу похідні по  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  і прирівняємо їх до нуля.

Отримаємо три рівняння, до яких приєднаємо ще залежність (1.9). У результаті будемо мати систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} - \lambda)n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z &= 0, \\ \tau_{xy}n_x + (\sigma_{yy} - \lambda)n_y + \tau_{yz}n_z &= 0, \\ \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + (\sigma_{zz} - \lambda)n_z &= 0, \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= 1. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Якщо припустити, що величина  $\lambda$  відома, то можна окремо розглянути перші три рівняння як однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Ненульовий розв'язок однорідної системи можливий тільки за умови рівності нулю її визначника. Записуючи його у розгорнутому вигляді та об'єднуючи його члени за однаковими степенями коефіцієнта  $\lambda$ , отримаємо:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0. \quad (1.11)$$

Коефіцієнти цього рівняння дорівнюють інваріантам тензора напружень (1.7), а саме:

коефіцієнт  $I_3$  дорівнює визначнику матриці тензора напружень:

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix};$$

коефіцієнт  $I_2$  дорівнює сумі головних мінорів цієї матриці:

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix};$$

коефіцієнт  $I_1$  дорівнює сумі членів тензора напружень, розташованих на головній діагоналі:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}.$$

Значення інваріантів  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  не залежать від системи координат, в якій визначені компоненти тензора напружень.

Внаслідок розв'язку кубічного рівняння (1.11), отримаємо три величини  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ . Можна довести, що завдяки симетрії тензора напружень відносно діагоналі корені кубічного рівняння будуть мати дійсні значення. Підставляючи по черзі  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  у систему (1.10), отримаємо три системи рівнянь. З кожної системи визначаємо три напрямних косинуси. Кожна трійка цих напрямних конусів відповідає одному з трьох значень  $\lambda_n$ .

Відмітимо особливість вказаних трьох систем рівнянь. Нагадаємо, що визначник першої трійки кожної з цих систем дорівнює нулю. Це свідчить про

їх лінійну залежність, тому достатньо використовувати з трьох перших рівнянь тільки два і обов'язково четверте рівняння.

Чисельне значення множника Лагранжа  $\lambda$  знаходиться, як було вказано, з кубічного рівняння (1.11). Зупинимось на визначенні його фізичного змісту. Для цього підставимо значення  $\lambda_i$  в систему (1.10), після чого помножимо перші три рівняння на напрямні косинуси  $n_{xi}$ ,  $n_{yi}$ ,  $n_{zi}$  і знайдемо їх суму. Після нескладних перетворень, отримаємо:

$$\lambda_i (n_{xi}^2 + n_{yi}^2 + n_{zi}^2) = \sigma_{xx} n_{xi}^2 + \sigma_{yy} n_{yi}^2 + \sigma_{zz} n_{zi}^2 + 2\tau_{xy} n_{xi} n_{yi} + 2\tau_{xz} n_{xi} n_{zi} + 2\tau_{yz} n_{yi} n_{zi}.$$

Порівнюючи ліву і праву частини цього виразу з залежностями (1.8) і (1.9), матимемо:

$$\lambda_i = \sigma_{mm} = \sigma_{ii}.$$

Таким чином, за змістом множники  $\lambda_i$  дорівнюють екстремальним нормальним напруженням. Усього в точці може виникнути три екстремальних нормальних напруження:

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}.$$

Лінії, по яких діють ці напруження, визначаються напрямними косинусами, які знаходяться з системи рівнянь (1.10). Кожному з екстремальних напружень, як було показано вище, відповідає певна трійка напрямних косинусів:

$$\sigma_{11}: n_{x1}, n_{y1}, n_{z1};$$

$$\sigma_{22}: n_{x2}, n_{y2}, n_{z2};$$

$$\sigma_{33}: n_{x3}, n_{y3}, n_{z3}.$$

Можна довести, що лінії дії екстремальних нормальних напружень взаємно ортогональні, тому між напрямними косинусами існує залежність:

$$n_{xi} n_{xj} + n_{yi} n_{yj} + n_{zi} n_{zj} = 0. \quad (1.12)$$

Знайдемо дотичні напруження  $\tau_{sn}$  на площині, де нормальні напруження досягають екстремальних значень. З рівнянь (1.10) можна отримати наступні залежності:

$$\lambda_i n_{xi} = \sigma_{xx} n_{xi} + \tau_{xy} n_{yi} + \tau_{xz} n_{zi},$$

$$\lambda_i n_{yi} = \tau_{xy} n_{xi} + \sigma_{yy} n_{yi} + \tau_{yz} n_{zi},$$

$$\lambda_i n_{zi} = \tau_{xz} n_{xi} + \tau_{yz} n_{yi} + \sigma_{zz} n_{zi}.$$

Враховуючи ці співвідношення у виразі (1.8) для  $\tau_{sn}$ , будемо мати:

$$\tau_{sn} = \lambda_i (n_{xi} \tilde{n}_x + n_{yi} \tilde{n}_y + n_{zi} \tilde{n}_z).$$

Вираз у дужках дорівнює нулю у зв'язку з тим, що нормальні і дотичні напруження взаємно ортогональні, тому  $\tau_{sn} = 0$ . Беручи це до уваги, можна зробити загальний висновок, що на площадці з екстремальним нормальним напруженням дотичні напруження дорівнюють нулю. Ці площадки мають назву головних площадок, а нормальні напруження, які виникають на них, є головними напруженнями.

Вище було зазначено, що головні напруження взаємно ортогональні. Це дає можливість обрати координатними осями три лінії 1, 2, 3, які паралельні головним напруженням (рис. 1.8).

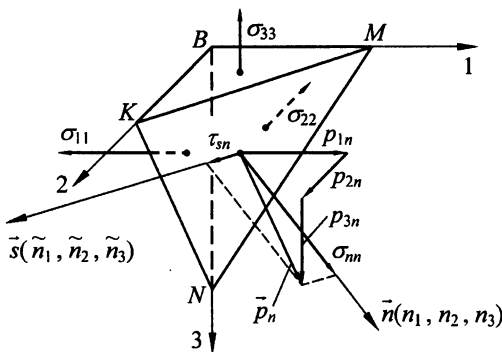


Рис. 1.8. Частка тіла у формі тетраедра, три грані якого перпендикулярні до головних напружень

На рисунку 1.8 зображено тетраедр, три ортогональні грані якого співпадають з головними площадками. Тензор напружень у цьому випадку буде мати такий вигляд:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Вище був викладений алгоритм перетворення тензора напружень, складеного в довільних осях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , у тензор, що має вигляд (1.13). Інваріанти цього тензора мають наступні значення:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \\ I_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}, \\ I_3 &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}. \end{aligned}$$

Слід підкреслити, що вони дорівнюють інваріантам тензора у будь-яких інших осях.

### 1.1.4. Екстремальні дотичні напруження

Для знаходження екстремальних дотичних напружень розглядаємо тетраедр, ортогональні грані якого перпендикулярні до головних напружень (рис. 1.8). У цьому випадку тензор напружень буде мати вигляд, який визначається залежністю (1.13).

Повне напруження  $\vec{p}_n$  на грані тетраедра  $KMN$  розкладено на дві складові  $\sigma_{nn}$  і  $\tau_{sn}$ . Нормальне напруження  $\sigma_{nn}$  співпадає з нормаллю до цієї грані, а дотичне  $\tau_{sn}$  — з лінією  $\vec{s}$ , яка є лінією перетину грані  $KMN$  з площиною, що визначається нормаллю  $\vec{n}$  і лінією повного напруження  $\vec{p}_n$ . Значення дотичного напруження можна визначити за формулою (1.8). З урахуванням характеру тензора напружень (1.13) формула буде мати вигляд:

$$\tau_{sn} = \sigma_{11}n_1\tilde{n}_1 + \sigma_{22}n_2\tilde{n}_2 + \sigma_{33}n_3\tilde{n}_3. \quad (1.14)$$

У цій формулі, як зображено на рисунку 1.8,  $n_1, n_2, n_3$  є напрямні косинуси нормалі  $\vec{n}$ , а  $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \tilde{n}_3$  — лінії  $\vec{s}$ . Слід підкреслити, що лінії  $\vec{n}$  і  $\vec{s}$  взаємно перпендикулярні. Для знаходження екстремальних значень дотичних напружень необхідно встановити відповідне положення грані тетраедра  $KMN$ . У залежності від її положення будуть змінюватись напрямні косинуси ліній  $\vec{n}$  і  $\vec{s}$ . Таким чином, функція  $\tau_{sn}$ , яка визначається формулою (1.14), залежить від шести змінних. Але між цими змінними існують такі співвідношення:

$$\begin{aligned} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1 &= 0, \\ \tilde{n}_1^2 + \tilde{n}_2^2 + \tilde{n}_3^2 - 1 &= 0, \\ n_1 \cdot \tilde{n}_1 + n_2 \cdot \tilde{n}_2 + n_3 \cdot \tilde{n}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отже, мова йде про умовний екстремум. Для його визначення потрібно застосовувати метод Лагранжа. Для цього слід додати до виразу (1.14) всі три співвідношення (1.15), які необхідно помножити на невизначені коефіцієнти, внаслідок чого будемо мати:

$$\begin{aligned} \tau_{sn} = \sigma_{11}n_1\tilde{n}_1 + \sigma_{22}n_2\tilde{n}_2 + \sigma_{33}n_3\tilde{n}_3 - \lambda_1(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1) - \\ - \lambda_2(\tilde{n}_1^2 + \tilde{n}_2^2 + \tilde{n}_3^2 - 1) - \lambda_3(n_1\tilde{n}_1 + n_2\tilde{n}_2 + n_3\tilde{n}_3). \end{aligned}$$

Беремо від цього виразу похідні за напрямними косинусами і прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} \frac{\partial \tau_{sn}}{\partial n_1} = 0: & (\sigma_{11} - \lambda_3)\tilde{n}_1 - 2\lambda_1 n_1 = 0; \\ \frac{\partial \tau_{sn}}{\partial \tilde{n}_1} = 0: & -2\lambda_2 \tilde{n}_1 + (\sigma_{11} - \lambda_3)n_1 = 0; \end{cases} \\ 2) \quad & \begin{cases} \frac{\partial \tau_{sn}}{\partial n_2} = 0: & (\sigma_{22} - \lambda_3)\tilde{n}_2 - 2\lambda_1 n_2 = 0; \\ \frac{\partial \tau_{sn}}{\partial \tilde{n}_2} = 0: & -2\lambda_2 \tilde{n}_2 + (\sigma_{22} - \lambda_3)n_2 = 0; \end{cases} \\ 3) \quad & \begin{cases} \frac{\partial \tau_{sn}}{\partial n_3} = 0: & (\sigma_{33} - \lambda_3)\tilde{n}_3 - 2\lambda_1 n_3 = 0; \\ \frac{\partial \tau_{sn}}{\partial \tilde{n}_3} = 0: & -2\lambda_2 \tilde{n}_3 + (\sigma_{33} - \lambda_3)n_3 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.16)$$



Отримані залежності являють собою три системи однорідних рівнянь, тому розв'язок кожного з них має два варіанти. По-перше, система задовольняється, якщо всі невідомі дорівнюють нулю. Ненульові розв'язки можливі, коли визначник системи дорівнює нулю. Будемо застосовувати обидва варіанти. Невідомі однієї з трьох систем приймаємо рівними нулю, а у двох інших прирівнюємо до нуля визначники. Почнемо з того, що нульове значення будуть мати невідомі третьої системи  $n_3 = \tilde{n}_3 = 0$ . Рівними нулю приймаємо визначники двох інших систем, першої та другої.

$$(\sigma_{11} - \lambda_3)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 = 0,$$

$$(\sigma_{22} - \lambda_3)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 = 0.$$

З цих двох залежностей знайдемо:

$$\lambda_3 = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \frac{1}{2},$$

$$\lambda_1 = \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{16\lambda_2}.$$

Підставимо ці значення у одне з рівнянь першої та другої системи (1.16) і отримаємо два рівняння:

$$4\lambda_2\tilde{n}_1 - (\sigma_{11} - \sigma_{22})n_1 = 0,$$

$$4\lambda_2\tilde{n}_2 + (\sigma_{11} - \sigma_{22})n_2 = 0.$$

Звідси визначимо:

$$\tilde{n}_1 = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{4\lambda_2} n_1, \tag{1.17}$$

$$\tilde{n}_2 = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{4\lambda_2} n_2.$$

Враховуючи ці співвідношення у третьому рівнянні (1.15), одночасно беручи до уваги, що  $n_3 = \tilde{n}_3 = 0$ , знайдемо:

$$n_1 = n_2.$$

Після чого, на підставі залежностей (1.17), отримаємо:

$$\tilde{n}_1 = -\tilde{n}_2.$$

Беручи до уваги останні два співвідношення у двох перших рівняннях (1.15) отримуємо:

$$n_1 = n_2 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tilde{n}_1 = -\tilde{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (1.18)$$

Таким чином, напрямні косинуси ліній  $\bar{n}$  і  $\bar{s}$  мають значення:

$$\bar{n}: n_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n_3 = 0;$$

$$\bar{s}: \tilde{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tilde{n}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tilde{n}_3 = 0.$$

На рис. 1.9 показано положення цих ліній і площадки, на якій виникають екстремальні дотичні напруження.

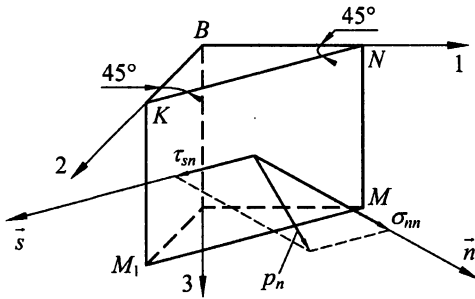


Рис. 1.9. Розташування екстремальних дотичних напружень відносно головних напружень

Екстремальне дотичне напруження  $\tau_{sn}$  належить грані  $KNMM_1$ . Ця площина паралельна осі 3, а з осями 1 і 2 утворює кути  $45^\circ$ . У той же час очевидно, що  $\tau_{sn}$  разом із  $\sigma_{nn}$  і  $p_n$  знаходиться у площині, яка визначається лініями  $\bar{n}$  і  $\bar{s}$ . Ця площина перпендикулярна до осі 3.

Нагадаємо, що був розглянутий варіант розв'язку системи (1.16), в якому прийнято  $n_3 = \tilde{n}_3 = 0$ , але це не єдиний варіант. Можливі ще два варіанти, коли  $n_1 = \tilde{n}_1 = 0$  та  $n_2 = \tilde{n}_2 = 0$ . Порядок розв'язання у цих двох випадках аналогічний, але положення ліній  $\bar{n}$  і  $\bar{s}$  буде іншим. Приведемо остаточні значення усіх варіантів напрямних косинусів.

$$\begin{array}{l}
 \text{I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1 = 0, \quad n_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \tilde{n}_1 = 0, \quad \tilde{n}_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tilde{n}_3 = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{array} \right. \\
 \text{II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \tilde{n}_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tilde{n}_2 = 0, \quad \tilde{n}_3 = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{array} \right. \\
 \text{III)} \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n_3 = 0, \\ \tilde{n}_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tilde{n}_2 = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tilde{n}_3 = 0. \end{array} \right.
 \end{array} \quad (1.19)$$

Знаки "+" перед коренем говорять лише про те, що площини, на яких виникають екстремальні дотичні напруження, розташовані у різних октаедрах просторової системи координат. Величини напружень для усіх трьох варіантів можна встановити за формулами (1.8):

$$\begin{array}{l}
 \text{I)} \quad \tau_{sn} = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2}, \quad \sigma_{nn} = \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2}; \\
 \text{II)} \quad \tau_{sn} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2}, \quad \sigma_{nn} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2}; \\
 \text{III)} \quad \tau_{sn} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}, \quad \sigma_{nn} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}.
 \end{array} \quad (1.20)$$

Якщо  $\sigma_{11}$  має максимальне значення, а  $\sigma_{33}$  мінімальне, то максимальне дотичне напруження буде обчислюватися за другим варіантом, а мінімальне — за третім варіантом. Слід підкреслити, що на площинах з екстремальними дотичними напруженнями виникають і нормальні напруження. Відмітимо ще

одну особливість, а саме: нормалі до площин, на яких виникають екстремальні дотичні напруження, не є взаємно ортогональними. Встановимо кут  $\alpha$  між нормальми другого і третього варіантів.

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Таким чином  $\alpha = 60^\circ$ . Аналогічно і в інших варіантах. На рис. 1.10 зображені три площини, що відповідають усім трьом варіантам.

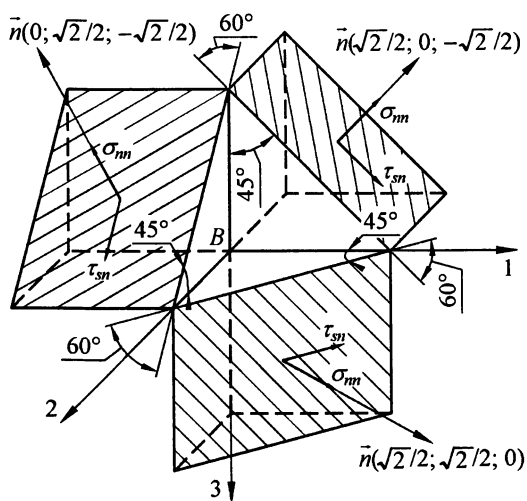


Рис. 1.10. Положення трьох площин, на яких виникають екстремальні дотичні напруження

### 1.1.5. Умови рівноваги у внутрішніх та граничних точках тіла

У попередньому матеріалі було зроблено аналіз напруженого стану в окремій довільній точці. Отримані співвідношення між напруженнями, які виникають у точці в різних напрямках. Їх можна використовувати, коли напруження знайдені. Слід підкреслити, що напружені стани у різних точках відрізняються один від одного, тому потрібно вміти встановлювати залежності

між ними. Для визначення цих залежностей потрібно розглянути дві точки і встановити співвідношення між напруженнями, які в них виникають.

Всередині тіла оберемо дві точки  $B$  і  $D$  (рис. 1.11).

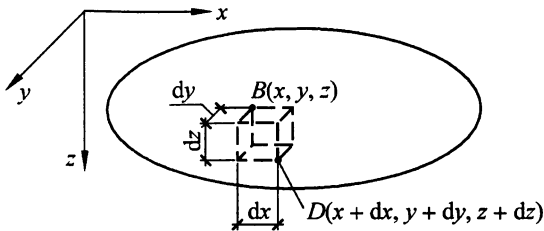


Рис. 1.11. Положення двох внутрішніх точок, відносно яких відокремлюється частина тіла у формі паралелепіпеда

Через кожну точку проведемо по три взаємно перпендикулярні площини. Перетинаючись, ці площини утворюють тіло, яке має форму паралелепіпеда із розмірами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 1.12).

На гранях паралелепіпеда виникають напруження, які завдяки нескінченно малим розмірам граней вважаємо рівномірно розподіленими по всій площині грані. Тому їх рівнодіюча дорівнює значенню напружень помножених на відповідну площу. Прикладаємо їх у центрах граней. Крім того, у центрі паралелепіпеда прикладене об'ємне навантаження. Його складові дорівнюють інтенсивності навантаження, помноженій на об'єм паралелепіпеда.

Вкажемо на ще одну суттєву обставину. У площинах, які проходять через точку  $B$ , прикладені напруження, які виникають у цій точці. Те ж саме стосується і точки  $D$ . Вище було зазначено, що напруження у різних точках відрізняються одне від одного, тому напруження на гранях, які відносяться до точок  $B$  і  $D$ , мають різні значення.

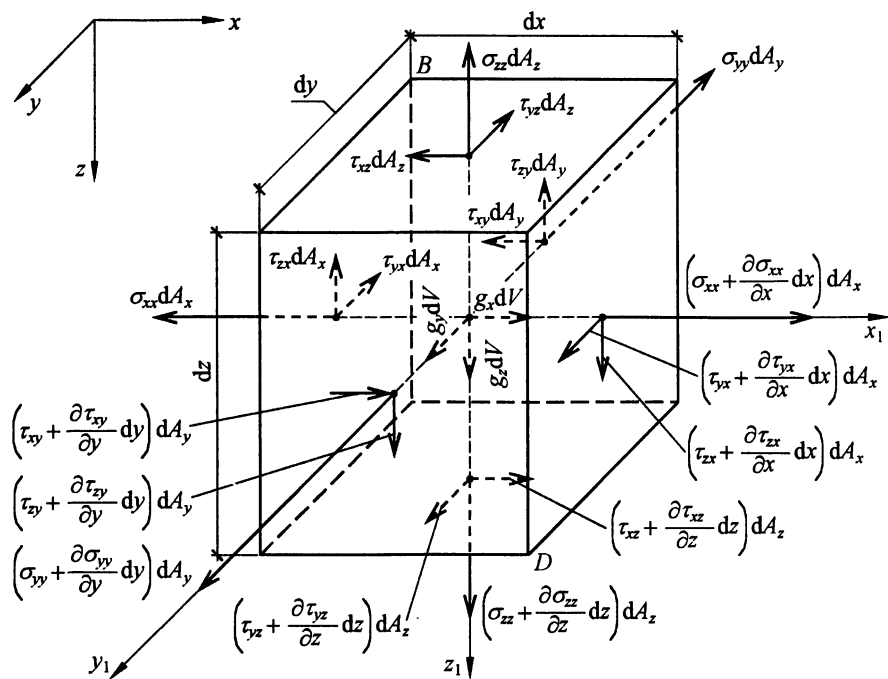


Рис. 1.12. Напруження, які діють по гранях паралелепіпеда

Дамо пояснення, чому саме вони відрізняються на величини, що вказані на рисунку. Розглянемо порядок зміни напруження  $\sigma_{xx}$  (рис. 1.13).

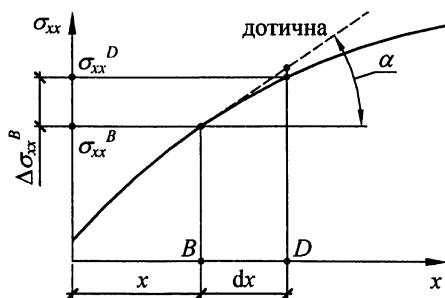


Рис. 1.13. Графік зміни нормальних напружень

На рисунку 1.13 зображена довільна лінія, яка характеризує зміну  $\sigma_{xx}$  у залежності від  $x$ . З графіка випливає:

$$\sigma_{xx}^D = \sigma_{xx}^B + \Delta\sigma_{xx}^B.$$

Враховуючи, що відстань між точками  $B$  і  $D$  нескінченно мала, можна замінити на цій ділянці криволінійний графік відрізком дотичної. Це дає можливість записати:

$$\Delta\sigma_{xx}^B = \operatorname{tg}\alpha \cdot dx = \frac{\partial\sigma_{xx}^B}{\partial x} dx.$$

Таким чином, матимемо:

$$\sigma_{xx}^D = \sigma_{xx}^B + \frac{\partial\sigma_{xx}^B}{\partial x} dx.$$

Аналогічно можна записати і зміну інших напружень за будь-яким напрямком. Індекси  $B$  і  $D$  далі застосовувати не будемо.

Якщо тіло знаходиться у стані рівноваги, то будь-який елемент тіла також буде задовольняти умовам рівноваги. Це стосується і паралелепіпеда, якій розглядається. Тому, можна скласти шість рівнянь рівноваги. Проектуємо сили, прикладені до граней паралелепіпеда, на осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

$$\sum X = 0,$$

$$\begin{aligned} & -\sigma_{xx} dA_x - \tau_{xy} dA_y - \tau_{xz} dA_z + \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dA_x + \\ & + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dA_y + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dA_z + g_x dV = 0. \end{aligned}$$

Враховуємо в цьому рівнянні значення відповідних площ:

$$dA_x = dydz, \quad dA_y = dx dz, \quad dA_z = dx dy, \quad dV = dx dy dz.$$

Після простих перетворень, отримаємо:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + g_x = 0.$$

Аналогічно можна скласти суму проєкцій на осі  $y$  і  $z$ , після чого будемо мати три рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum X = 0: & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x = 0; \\ \sum Y = 0: & \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + g_y = 0; \\ \sum Z = 0: & \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + g_z = 0.\end{aligned}\tag{1.21}$$

Ще три рівняння отримаємо, склавши суму моментів відносно осей  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , які паралельні осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  і перетинають центр паралелепіпеда:

$$\begin{aligned}\sum M_{x_1} = 0, \\ \tau_{zy} dA_y \frac{dy}{2} + \left( \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy \right) dA_y \frac{dy}{2} - \\ - \tau_{yz} dA_z \frac{dz}{2} - \left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz \right) dA_z \frac{dz}{2} = 0.\end{aligned}$$

Враховуємо значення  $dA_y$  та  $dA_z$ :

$$\tau_{zy} dx dz dy + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy dx dz dy - \tau_{yz} dx dy dz - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz dx dy dz = 0.$$

Нехтуючи членами вищого порядку малості, отримаємо:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}.$$

Аналогічні вирази знайдемо, склавши суму моментів відносно осей  $y_1$  і  $z_1$ . У результаті будемо мати три залежності:

$$\begin{aligned}\sum M_{z_1} = 0: & \tau_{xy} = \tau_{yx}; \\ \sum M_{y_1} = 0: & \tau_{xz} = \tau_{zx}; \\ \sum M_{x_1} = 0: & \tau_{yz} = \tau_{zy}.\end{aligned}\tag{1.22}$$



Ці співвідношення повністю співпадають з рівняннями (1.5). Таким чином, підтверджується закон парності дотичних напружень. Врахуємо його у рівняннях (1.21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + g_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + g_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Отримані залежності (1.23) є остаточною рівняннями рівноваги у внутрішніх точках просторового тіла. Вони свідчать про те, що для знаходження невідомих напружень недостатньо застосовувати тільки статичні умови, бо кількість рівнянь менша кількості невідомих. Рівнянь маємо три, а невідомих напружень шість. Це говорить про необхідність застосування інших залежностей (кінематичних і фізичних), які будуть розглянуті далі. Вони дають можливість отримати додаткові умови, які дозволять розкрити так звану статичну невизначуваність.

Зупинимось на розгляді умов рівноваги у точках на зовнішній поверхні тіла. Обираємо точку  $B$  так, що її відстані до точок поверхні дорівнюють  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . У цьому випадку, якщо через точку  $B$  провести три взаємно ортогональні площини, то отримаємо тетраедр. Його четверта грань співпадає з поверхнею тіла. Враховуючи, що розміри тетраедра нескінченно малі, вказану частину поверхні можливо замінити площиною. Таким чином, отримаємо звичайний тетраедр (рис. 1.14). На його ортогональних гранях будуть діяти внутрішні напруження, бо вони знаходяться усередині тіла. До четвертої грані прикладені розташовані на поверхні тіла зовнішні навантаження.

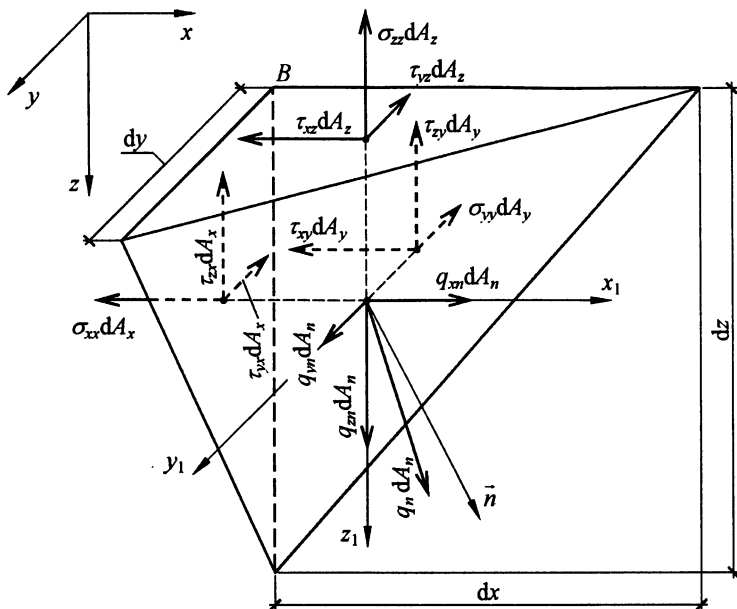


Рис. 1.14. Розгляд рівноваги частки тіла у формі тетраедра для отримання граничних умов

Якщо порівняти цей тетраедр із тетраедром, який зображений на рис. 1.6, бачимо, що вони відрізняються тільки назвою сил, які прикладені до четвертої грані тетраедра. Це дозволяє отримати рівняння рівноваги на підставі залежностей (1.6). Необхідно тільки замінити напруження  $p_{xn}$ ,  $p_{yn}$ ,  $p_{zn}$  навантаженням  $q_{xn}$ ,  $q_{yn}$ ,  $q_{zn}$ :

$$\begin{aligned}
 q_{xn} &= \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\
 q_{yn} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z, \\
 q_{zn} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z.
 \end{aligned}
 \tag{1.24}$$

Рівняння (1.24) мають назву граничних умов. Вони встановлюють залежності між напруженнями у точках поверхні тіла і поверхневим навантаженням. Це додаткові умови, які повинні задовольнятися, крім рівнянь (1.23). Але за змістом вони відрізняються одне від одного. Рівняння (1.23) стосується внутрішніх точок, а (1.24) — точок на поверхні тіла.

## Глава 1.2. Загальні кінематичні співвідношення

### 1.2.1. Лінійні і кутові деформації, їх зв'язок з переміщеннями

При розрахунках будь-яких конструкцій, крім визначення напружень, потрібно знаходити переміщення і деформації, що виникають при навантаженні, тому необхідно вивчити кінематичну сторону явищ, які розглядаються. Про це свідчить і той фактор, що одних статичних залежностей недостатньо для отримання розв'язку.

Почнемо з розгляду загальних понять. Зміна положення довільної точки тіла  $M$  у просторі може бути визначена вектором  $\vec{u}$ , складові якого вздовж осей координат позначимо  $u_x, u_y, u_z$  (рис. 1.15).

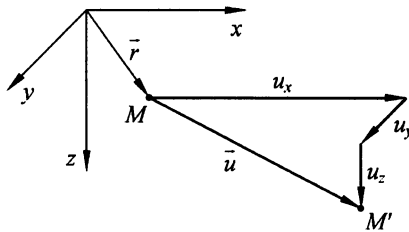


Рис. 1.15. Загальне переміщення точки тіла та його складові

У зв'язку з тим, що матеріал тіла є деформівним, величини і напрями переміщень різних точок тіла відрізняються одне від одного, завдяки чому тіло змінює свою форму і розміри, тобто деформується. Ці зміни визначаються двома видами деформацій, а саме лінійними і кутовими. Лінійні деформації встановлюють зміну відстані між двома точками у певному напрямі. Якщо цю зміну поділити на розмір відстані, то будемо мати так звану відносну лінійну деформацію. Кутові деформації визначають зміну кута між двома різними напрямками.

Очевидно, що значення деформацій залежить від вибору напрямку, за яким вони виникають. Оскільки в кожній точці можливо обрати безліч напрямків, то і кількість деформацій буде нескінченно великою. В той же час, як і в напруженому стані, тільки певна частина їх незалежні, а інші можна визначити через них.

Зупинимось на розгляді лінійної деформації за довільним напрямком. З цією метою позначимо у тілі дві нескінченно близькі точки  $M$  і  $N$  (рис. 1.15, 1.16). Положення точки  $M$  визначається радіус-вектором  $\vec{r}$ , а точки  $N$  — радіус-вектором  $(\vec{r} + d\vec{r})$ .

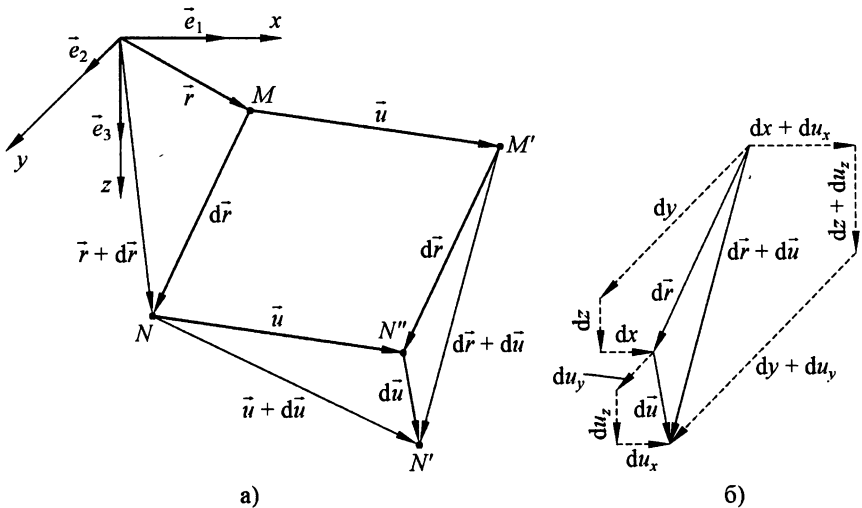


Рис. 1.16. Переміщення двох точок тіла для встановлення залежностей між переміщеннями і деформаціями

Припустимо, що внаслідок деформування тіла точка  $M$  отримала переміщення, яке дорівнює вектору  $\vec{u}$ , і зайняла положення  $M'$ . Якщо припустити, що точка  $N$  отримала таке саме переміщення і перейшла у точку  $N''$ , то очевидно, що відрізок  $MN$  внаслідок поступового переміщення зайняв положення  $M'N''$  і не змінив своєї довжини. Однак, у загальному випадку точка

$N$  може отримати переміщення  $(\vec{u} + d\vec{u})$ , яке відрізняється від переміщення точки  $M$ , внаслідок чого нове положення точки  $N$  співпадає з  $N'$ . При цьому відрізок  $MN$  перейде у відрізок  $M'N'$  і змінить свою довжину та напрям.

Позначимо модулі векторів  $|d\vec{r}| = ds$  і  $|d\vec{r} + d\vec{u}| = d\tilde{s}$ . Вони визначають довжину відрізка  $MN$  до деформування і після деформування. Зміна його довжини буде дорівнювати:

$$\Delta MN = d\tilde{s} - ds.$$

Величина  $\Delta MN$  визначає абсолютну деформацію відрізка  $MN$ . Його відносна деформація, яку позначимо  $\varepsilon_{ss}$ , буде дорівнювати:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{d\tilde{s} - ds}{ds}. \quad (1.25)$$

Звідси знайдемо:

$$d\tilde{s} = ds(1 + \varepsilon_{ss}). \quad (1.26)$$

Помножимо чисельник і знаменник виразу (1.25) на  $(d\tilde{s} + ds)$ , і враховуючи залежність (1.26), отримаємо:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{d\tilde{s}^2 - ds^2}{ds^2} \cdot \frac{1}{2 + \varepsilon_{ss}},$$

або інакше:

$$\varepsilon_{ss}(\varepsilon_{ss} + 2) = 2\varepsilon_{ss} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{ss} + 1 \right) = \frac{d\tilde{s}^2 - ds^2}{ds^2}. \quad (1.27)$$

Беручи до уваги, що  $ds$  і  $d\tilde{s}$  це модулі векторів  $d\vec{r}$  і  $(d\vec{r} + d\vec{u})$ , їх значення можна отримати як скалярний добуток цих векторів самих на себе:

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r},$$

$$d\tilde{s}^2 = (d\vec{r} + d\vec{u}) \cdot (d\vec{r} + d\vec{u}) = d\vec{r} \cdot d\vec{r} + 2d\vec{r} \cdot d\vec{u} + d\vec{u} \cdot d\vec{u}.$$

Враховуючи ці співвідношення, знайдемо:

$$d\tilde{s}^2 - ds^2 = 2d\vec{r} \cdot d\vec{u} + d\vec{u} \cdot d\vec{u}.$$

Розкладемо вектори, які увійшли у цей вираз, по одиничних базисних векторах:

$$\begin{aligned}d\vec{r} &= \vec{e}_1 dx + \vec{e}_2 dy + \vec{e}_3 dz, \\d\vec{u} &= \vec{e}_1 du_x + \vec{e}_2 du_y + \vec{e}_3 du_z.\end{aligned}\tag{1.28}$$

Підкреслимо, що складові переміщення є функціями трьох змінних  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Підставимо вирази (1.28) у попередню залежність:

$$\begin{aligned}d\tilde{s}^2 - ds^2 &= 2(\vec{e}_1 dx + \vec{e}_2 dy + \vec{e}_3 dz) \cdot (\vec{e}_1 du_x + \vec{e}_2 du_y + \vec{e}_3 du_z) + \\&+ (\vec{e}_1 du_x + \vec{e}_2 du_y + \vec{e}_3 du_z) \cdot (\vec{e}_1 du_x + \vec{e}_2 du_y + \vec{e}_3 du_z).\end{aligned}$$

Враховуючи, що скалярний добуток базисних векторів з різними індексами дорівнює нулю, тобто  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = 0$ , а з однаковими індексами дорівнює одиниці ( $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$ ), матимемо:

$$d\tilde{s}^2 - ds^2 = 2(du_x dx + du_y dy + du_z dz) + du_x^2 + du_y^2 + du_z^2.\tag{1.29}$$

Повні диференціали складових вектора переміщень дорівнюють:

$$\begin{aligned}du_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz, \\du_y &= \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz, \\du_z &= \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz.\end{aligned}\tag{1.30}$$

Підставимо ці залежності у вираз (1.29) і згрупуємо за добутками диференціалів змінних  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\begin{aligned}d\tilde{s}^2 - ds^2 &= 2(dx^2 \tilde{\varepsilon}_{xx} + dy^2 \tilde{\varepsilon}_{yy} + dz^2 \tilde{\varepsilon}_{zz} + \\&+ dx dy \tilde{\gamma}_{xy} + dx dz \tilde{\gamma}_{xz} + dy dz \tilde{\gamma}_{yz}).\end{aligned}\tag{1.31}$$

У виразі застосовані наступні позначення:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right], \\
\tilde{\varepsilon}_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right], \\
\tilde{\varepsilon}_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right], \\
\tilde{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\
\tilde{\gamma}_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
\tilde{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Пояснення фізичного, а точніше геометричного змісту цих величин буде зроблено далі.

Підставимо вираз (1.31) у (1.27), при цьому врахуємо такі співвідношення:

$$n_x = \frac{dx}{ds}, \quad n_y = \frac{dy}{ds}, \quad n_z = \frac{dz}{ds}, \tag{1.33}$$

де  $n_x, n_y, n_z$  — напрямні косинуси лінії  $MN$ .

У результаті будемо мати:

$$\varepsilon_{ss} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{ss} + 1 \right) = \tilde{\varepsilon}_{xx} n_x^2 + \tilde{\varepsilon}_{yy} n_y^2 + \tilde{\varepsilon}_{zz} n_z^2 + \tilde{\gamma}_{xy} n_x n_y + \tilde{\gamma}_{xz} n_x n_z + \tilde{\gamma}_{yz} n_y n_z. \tag{1.34}$$

Отримана залежність дає можливість визначити лінійну деформацію  $\varepsilon_{ss}$  вздовж лінії  $MN$ , якщо відомі величини, що увійшли у співвідношення (1.32).

Далі розглянемо порядок визначення кутових деформацій. Знайдемо кут між лініями  $MN$  та  $MN'$ . Він є кутом між векторами  $d\vec{r}$  і  $(d\vec{r} + d\vec{u})$ . Напрямні

косинуси  $\tilde{n}_x$ ,  $\tilde{n}_y$ ,  $\tilde{n}_z$  вектора  $(d\vec{r} + d\vec{u})$  дорівнюють відношенню складових цього вектора до його модуля, а саме:

$$\tilde{n}_x = \frac{dx + du_x}{ds(1 + \varepsilon_{ss})}, \quad \tilde{n}_y = \frac{dy + du_y}{ds(1 + \varepsilon_{ss})}, \quad \tilde{n}_z = \frac{dz + du_z}{ds(1 + \varepsilon_{ss})}.$$

Враховуємо у цих виразах залежності (1.30) і (1.33):

$$\begin{aligned} \tilde{n}_x &= \frac{1}{1 + \varepsilon_{ss}} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) n_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} n_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} n_z \right], \\ \tilde{n}_y &= \frac{1}{1 + \varepsilon_{ss}} \left[ \frac{\partial u_y}{\partial x} n_x + \left( 1 + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) n_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} n_z \right], \\ \tilde{n}_z &= \frac{1}{1 + \varepsilon_{ss}} \left[ \frac{\partial u_z}{\partial x} n_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} n_y + \left( 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) n_z \right]. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Аналогічно можна знайти напрямні косинуси іншої лінії після деформування. Для отримання виразу кута зсуву розглянемо положення двох ліній, які проходять через одну точку. До деформування позначимо цю точку  $M$  (рис. 1.17), а напрямні косинуси ліній 1 і 2 відповідно  $n_{x1}$ ,  $n_{y1}$ ,  $n_{z1}$  та  $n_{x2}$ ,  $n_{y2}$ ,  $n_{z2}$ . Кут між ними приймаємо рівним  $\beta$ .

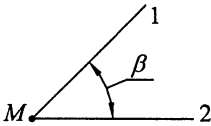


Рис. 1.17. Дві довільні лінії, між якими встановлюється кут повороту

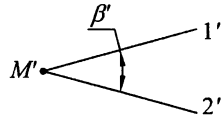


Рис. 1.18. Положення двох ліній (рис. 1.17) після зміни кута  $\beta$  між ними

Після деформування точка  $M$  перейде у  $M'$ , а лінії 1 та 2 займуть положення  $1'$  і  $2'$  (рис. 1.18). Кут між лініями  $1'$  і  $2'$  дорівнює  $\beta'$ .

Напрямні косинуси ліній  $1'$  і  $2'$  позначимо  $\tilde{n}_{x1}$ ,  $\tilde{n}_{y1}$ ,  $\tilde{n}_{z1}$  та  $\tilde{n}_{x2}$ ,  $\tilde{n}_{y2}$ ,  $\tilde{n}_{z2}$ . Косинус кута  $\beta'$  буде дорівнювати:

$$\cos \beta' = \tilde{n}_{x1} \cdot \tilde{n}_{x2} + \tilde{n}_{y1} \cdot \tilde{n}_{y2} + \tilde{n}_{z1} \cdot \tilde{n}_{z2}.$$



Підставимо в це рівняння значення напрямних косинусів (1.35), крім того врахуємо співвідношення (1.32). Не зупиняючись на перетвореннях, запишемо остаточний вираз для косинуса кута  $\beta'$ :

$$\begin{aligned} \cos \beta' = & \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_{22}} \left[ (1 + 2\tilde{\varepsilon}_{xx})n_{x1}n_{x2} + (1 + 2\tilde{\varepsilon}_{yy})n_{y1}n_{y2} + \right. \\ & + (1 + 2\tilde{\varepsilon}_{zz})n_{z1}n_{z2} + \tilde{\gamma}_{xy}(n_{x1}n_{y2} + n_{x2}n_{y1}) + \\ & \left. + \tilde{\gamma}_{xz}(n_{x1}n_{z2} + n_{x2}n_{z1}) + \tilde{\gamma}_{yz}(n_{y1}n_{z2} + n_{y2}n_{z1}) \right]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Вираз (1.36) дозволяє визначити косинус кута між двома довільними напрямками після деформування. Кутова деформація (кут зсуву) дорівнює різниці між кутами  $\beta$  і  $\beta'$ , а саме:

$$\gamma_{12} = \beta - \beta'. \quad (1.37)$$

Підкреслимо, що кутова деформація між довільними напрямками, як і лінійна деформація  $\varepsilon_{ss}$  (формула 1.34), може бути знайдена через величини, які визначаються співвідношеннями (1.32).

Визначимо вираз для кута зсуву у випадку, коли між лініями 1 і 2 кут  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , тоді  $\cos \beta' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin \gamma_{12}$ . Крім того, при  $\beta = \frac{\pi}{2}$  існує залежність:  $n_{x1} \cdot n_{x2} + n_{y1} \cdot n_{y2} + n_{z1} \cdot n_{z2} = 0$ . Враховуючи це у формулі (1.36) матимемо:

$$\begin{aligned} \sin \gamma_{12} = & \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_{22}} \left[ 2\tilde{\varepsilon}_{xx}n_{x1}n_{x2} + 2\tilde{\varepsilon}_{yy}n_{y1}n_{y2} + 2\tilde{\varepsilon}_{zz}n_{z1}n_{z2} + \right. \\ & \left. + \tilde{\gamma}_{xy}(n_{x1}n_{y2} + n_{x2}n_{y1}) + \tilde{\gamma}_{xz}(n_{x1}n_{z2} + n_{x2}n_{z1}) + \tilde{\gamma}_{yz}(n_{y1}n_{z2} + n_{y2}n_{z1}) \right]. \end{aligned} \quad (1.38)$$

### 1.2.2. Врахування малості деформацій, тензор деформацій, рівняння сумісності деформацій

На величини перемішень і деформацій, які виникають у різних конструкціях і спорудах від навантаження, накладаються певні обмеження.

Переміщення повинні бути значно меншими за розмір конструкцій. Це призводить до того, що відносні лінійні і кутові деформації будуть значно менше одиниці. Вказані обмеження дають можливість спростити отримані вище залежності. Розглянемо відносну лінійну деформацію вздовж координатної осі  $x$ . Застосуємо формулу (1.34), приймаючи лінію  $s$  як таку, що збігається з віссю  $x$ . Напрямні косинуси у цьому випадку будуть дорівнювати:

$$n_x = 1, \quad n_y = 0, \quad n_z = 0.$$

Враховуючи це у формулі (1.34), знайдемо:

$$\varepsilon_{xx} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} + 1 \right) = \tilde{\varepsilon}_{xx},$$

або

$$\varepsilon_{xx}^2 + 2\varepsilon_{xx} - 2\tilde{\varepsilon}_{xx} = 0.$$

Звідси знайдемо:

$$\varepsilon_{xx} = -1 \pm \sqrt{1 + 2\tilde{\varepsilon}_{xx}}.$$

Завдяки малості деформацій  $\tilde{\varepsilon}_{xx} \ll 1$ ,  $\sqrt{1 + 2\tilde{\varepsilon}_{xx}} \approx 1 + \tilde{\varepsilon}_{xx}$ , тому можна прийняти:

$$\varepsilon_{xx} = -1 \pm (1 + \tilde{\varepsilon}_{xx}).$$

Варіант формули зі знаком "мінус" перед дужками відкидаємо, бо він суперечить змісту величин, що розглядаються. Остаточо маємо:

$$\varepsilon_{xx} = \tilde{\varepsilon}_{xx}.$$

Аналогічно можна знайти:

$$\varepsilon_{yy} = \tilde{\varepsilon}_{yy}, \quad \varepsilon_{zz} = \tilde{\varepsilon}_{zz}.$$

На підставі формули (1.38) отримаємо кутову деформацію  $\gamma_{xy}$ . Приймаємо, що лінії 1 і 2 співпадають з осями  $x$  та  $y$ . Напрямні косинуси будуть дорівнювати:

$$n_{x1} = 1, \quad n_{y1} = 0, \quad n_{z1} = 0,$$

$$n_{x2} = 0, \quad n_{y2} = 1, \quad n_{z2} = 0.$$

Враховуючи це у формулі (1.38), будемо мати:

$$\sin \gamma_{xy} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{xx}} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_{yy}} \tilde{\gamma}_{xy}.$$

При малих деформаціях можна прийняти  $\sin \gamma_{xy} \approx \gamma_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xx} \ll 1$ ,  $\varepsilon_{yy} \ll 1$ .

Внаслідок цього матимемо:

$$\gamma_{xy} = \tilde{\gamma}_{xy}.$$

Аналогічно:

$$\gamma_{xz} = \tilde{\gamma}_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \tilde{\gamma}_{yz}.$$

Таким чином, робимо висновок, що за формулами (1.32) можна безпосередньо знайти значення малих деформацій відносно координатних осей. Але можливе ще одне дуже суттєве спрощення. У правих частинах формул (1.32) можна відкинути члени, які залежать від квадрата похідної чи добутку похідних, тому що квадрат чи добуток малих величин значно менший за їх значення у першому степені. Усе викладене дає можливість отримати наступні залежності між деформаціями і переміщеннями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Ці співвідношення називають формулами Коші.

Деформації у формулах (1.39) називають базовими деформаціями.

Запишемо їх у вигляді тензора деформацій.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \tag{1.40}$$

Множник  $1/2$  при кутових деформаціях застосований для надання симетрії тензору. Він не впливає на зміну кута зсуву між двома напрямками. Розглянемо кутову деформацію між осями  $x$  і  $z$  (рис. 1.19 і 1.20).

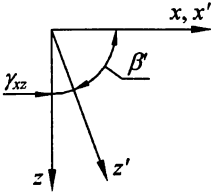


Рис. 1.19. Кут зсуву між осями  $x$  та  $z$  при умові, що повертається тільки вісь  $z$

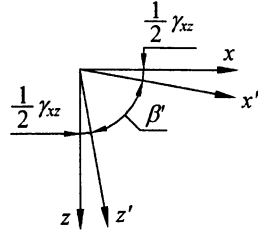


Рис. 1.20. Кут зсуву між осями  $x$  та  $z$  при умові, що обидві осі повертаються на однаковий кут

Кут  $\gamma_{xz}$  можна повністю відраховувати від осі  $z$  (рис. 1.19). Але є інший варіант. За рахунок жорсткого повороту ліній  $x'$  і  $z'$  так, що кут  $\beta'$  залишається без зміни. При цьому кути між лініями  $x$  та  $x'$ , а також  $z$  та  $z'$  стануть рівними  $\frac{1}{2}\gamma_{xz}$  (рис. 1.20). Тоді кут зсуву між осями  $x$  і  $z$  не змінюється.

Через компоненти тензора деформацій можна визначити лінійні та кутові деформації за довільними напрямками. Для цього потрібно застосувати формули (1.34) та (1.38), враховуючи в них деякі положення малості деформацій, а саме:  $(1 + \varepsilon_{ss}) \approx 1$ ,  $\sin \gamma_{12} \approx \gamma_{12}$  та інші.

Внаслідок чого матимемо:

$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon_{xx}n_x^2 + \varepsilon_{yy}n_y^2 + \varepsilon_{zz}n_z^2 + \gamma_{xy}n_xn_y + \gamma_{xz}n_xn_z + \gamma_{yz}n_yn_z, \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = & 2\varepsilon_{xx}n_{x1}n_{x2} + 2\varepsilon_{yy}n_{y1}n_{y2} + 2\varepsilon_{zz}n_{z1}n_{z2} + \\ & + \gamma_{xy}(n_{x1}n_{y2} + n_{x2}n_{y1}) + \gamma_{xz}(n_{x1}n_{z2} + n_{x2}n_{z1}) + \gamma_{yz}(n_{y1}n_{z2} + n_{y2}n_{z1}). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Розглянемо рівняння (1.39). Шляхом певних перетворень можна отримати шість співвідношень. До них увійдуть тільки деформації, а переміщення будуть виключені. Їх називають рівняннями сумісності деформацій. Для отримання одного з цих рівнянь візьмемо у формулах Коші (1.39) другу похідну від  $\varepsilon_{xx}$  по  $y$ , від  $\varepsilon_{yy}$  — по  $x$  і від  $\gamma_{xy}$  — по  $x$  і  $y$ :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}.$$

Додаючи перші дві залежності і віднімаючи третю, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Підкреслимо, що в цю залежність увійшли три деформації, які виникають у площині  $xy$ . Аналогічно можна отримати ще два співвідношення між деформаціями у площинах  $xz$  та  $yz$ . Їх вирази наведені у формулах (1.43). Для отримання ще трьох рівнянь необхідно кожний раз використовувати три кутові деформації і одну лінійну, беручи від них другі похідні за відповідними змінними. Запишемо порядок отримання одного з таких рівнянь. Візьмемо у формулах (1.39) другу похідну від  $\varepsilon_{xx}$  по  $y$  і  $z$ , від  $\gamma_{xy}$  — по  $x$  і  $z$ , від  $\gamma_{xz}$  — по  $x$  та  $y$ , від  $\gamma_{yz}$  — по  $x$ :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^2 \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^2 \partial y}.$$

Віднімаючи від першого рівняння друге та третє, помножені на 1/2, і додаючи четверте, помножене на 1/2, будемо мати:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 0.$$

Аналогічно можна скласти ще два рівняння. Остаточо матимемо шість рівнянь сумісності деформацій:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right), \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right).$$

Можна довести, що незалежними серед цих шести рівнянь є тільки три.

### 1.2.3. Екстремальні лінійні та кутові деформації, об'ємна деформація

Для знаходження екстремальних значень вказаних величин застосуємо залежність (1.41). Додамо до виразу  $\varepsilon_{ss}$  співвідношення, що існує між напрямними косинусами:

$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon_{xx} n_x^2 + \varepsilon_{yy} n_y^2 + \varepsilon_{zz} n_z^2 + \gamma_{xy} n_x n_y + \gamma_{xz} n_x n_z + \gamma_{yz} n_y n_z - \lambda (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1).$$

Візьмемо похідні від цього виразу по трьом напрямним косинусам і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{xx} - \lambda)n_x + \frac{1}{2}\gamma_{xy}n_y + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n_z &= 0, \\
\frac{1}{2}\gamma_{xy}n_x + (\varepsilon_{yy} - \lambda)n_y + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n_z &= 0, \\
\frac{1}{2}\gamma_{xz}n_x + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n_y + (\varepsilon_{zz} - \lambda)n_z &= 0, \\
n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1 &= 0.
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Якщо порівняти цю систему із системою (1.10), можна переконатися, що вони мають однакову структуру. Відрізняються вони змістом величин, які до них входять. Тому порядок розв'язання буде однаковим, і немає потреби його повторювати. Дамо пояснення тільки остаточним результатам.

Коефіцієнт  $\lambda$  буде мати три значення, які дорівнюють екстремальним величинам лінійних деформацій  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$ , і мають назву головних деформацій. Лінії, по яких виникають ці деформації, взаємно ортогональні. Їх напрямні косинуси  $n_{x1}$ ,  $n_{y1}$ ,  $n_{z1}$ ,  $n_{x2}$ ,  $n_{y2}$ ,  $n_{z2}$ ,  $n_{x3}$ ,  $n_{y3}$ ,  $n_{z3}$ , як і в попередньому випадку, знаходяться із системи (1.44). Можна довести, що кути зсуву між лініями головних деформацій дорівнюють нулю. Для доведення використовуємо формулу (1.42). Запишемо її в іншому вигляді:

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} = 2\varepsilon_{xx}n_{x1}n_{x2} + 2\varepsilon_{yy}n_{y1}n_{y2} + 2\varepsilon_{zz}n_{z1}n_{z2} + 2 \cdot \frac{1}{2}\gamma_{xy}(n_{x1}n_{y2} + n_{x2}n_{y1}) + \\
+ 2 \cdot \frac{1}{2}\gamma_{yz}(n_{x1}n_{z2} + n_{x2}n_{z1}) + 2 \cdot \frac{1}{2}\gamma_{xz}(n_{y1}n_{z2} + n_{y2}n_{z1}).
\end{aligned}$$

Зробимо перегрупування членів цього виразу:

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} = & \left( \varepsilon_{xx}n_{x1} + \frac{\gamma_{xy}}{2}n_{y1} + \frac{\gamma_{xz}}{2}n_{z1} \right) n_{x2} + \left( \varepsilon_{xx}n_{x2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}n_{y2} + \frac{\gamma_{xz}}{2}n_{z2} \right) n_{x1} + \\
& + \left( \frac{\gamma_{xy}}{2}n_{x1} + \varepsilon_{yy}n_{y1} + \frac{\gamma_{yz}}{2}n_{z1} \right) n_{y2} + \left( \frac{\gamma_{xy}}{2}n_{x2} + \varepsilon_{yy}n_{y2} + \frac{\gamma_{yz}}{2}n_{z2} \right) n_{y1} + \\
& + \left( \frac{\gamma_{xz}}{2}n_{x1} + \frac{\gamma_{yz}}{2}n_{y1} + \varepsilon_{zz}n_{z1} \right) n_{z2} + \left( \frac{\gamma_{xz}}{2}n_{x2} + \frac{\gamma_{yz}}{2}n_{y2} + \varepsilon_{zz}n_{z2} \right) n_{z1}.
\end{aligned}$$

Порівнюючи вирази у дужках із відповідними рядками системи (1.44), можна стверджувати, що вони дорівнюють добутку одного зі значень  $\lambda$  на відповідний напрямний косинус. Враховуючи це, отримаємо:

$$\gamma_{12} = \lambda_1 n_{x1} n_{x2} + \lambda_2 n_{x2} n_{x1} + \lambda_1 n_{y1} n_{y2} + \lambda_2 n_{y2} n_{y1} + \lambda_1 n_{z1} n_{z2} + \lambda_2 n_{z2} n_{z1}.$$

Згрупуємо члени з однаковим значенням  $\lambda$ :

$$\gamma_{12} = \lambda_1 (n_{x1} n_{x2} + n_{y1} n_{y2} + n_{z1} n_{z2}) + \lambda_2 (n_{x2} n_{x1} + n_{y2} n_{y1} + n_{z2} n_{z1}).$$

Оскільки лінії головних деформацій взаємно ортогональні, то вирази у дужках дорівнюють нулю, тоді будемо мати:

$$\gamma_{12} = 0.$$

Аналогічно можна довести, що

$$\gamma_{13} = 0, \quad \gamma_{23} = 0.$$

Враховуючи взаємну ортогональність ліній головних деформацій, можна обрати їх координатними осями. Тензор деформацій у головних осях буде мати вигляд:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

Структура цього тензора аналогічна структурі тензора напружень у головних осях (1.13).

Для отримання екстремальних значень кутових деформацій координатними осями обираємо три взаємно ортогональні лінії головних деформацій. У цьому випадку тензор деформацій має вигляд (1.45), тобто серед базових деформацій не рівними нулю будуть тільки три головні лінійні деформації  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$ . Розглянемо дві взаємно перпендикулярні лінії  $\vec{n}$  і  $\vec{s}$  (рис. 1.21). На підставі формули (1.42) складемо вираз для кута зсуву між цими лініями.



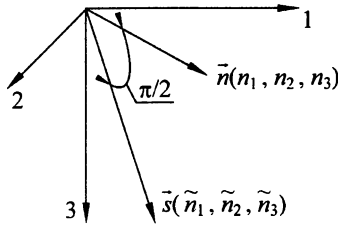


Рис. 1.21. Положення ліній  $\vec{n}$  та  $\vec{s}$ , між якими кут зсуву досягає екстремальних значень

$$\gamma_{ns} = 2\varepsilon_{11} \cdot n_1 \cdot \tilde{n}_1 + 2\varepsilon_{22} \cdot n_2 \cdot \tilde{n}_2 + 2\varepsilon_{33} \cdot n_3 \cdot \tilde{n}_3. \quad (1.46)$$

Якщо порівняти цей вираз із (1.14), то можна побачити, що вони мають однакову структуру і відрізняються тільки заміною головних напружень головними деформаціями. Це дає можливість для знаходження екстремальних кутових деформацій використати результати, отримані при знаходженні екстремальних дотичних напружень. На підставі формул (1.19) можливо знайти напрямні косинуси ліній  $\vec{n}$  і  $\vec{s}$ . Так само, як і при розгляді дотичних напружень, екстремальні кутові деформації виникають між трьома парами ліній  $\vec{n}$  і  $\vec{s}$ . Їх напрямні косинуси дорівнюють:

$$\begin{aligned} \text{I)} & \begin{cases} n_1 = 0, & n_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, & n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \tilde{n}_1 = 0, & \tilde{n}_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, & \tilde{n}_3 = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \\ \text{II)} & \begin{cases} n_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, & n_2 = 0, & n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \tilde{n}_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, & \tilde{n}_2 = 0, & \tilde{n}_3 = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \\ \text{III)} & \begin{cases} n_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, & n_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, & n_3 = 0, \\ \tilde{n}_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, & \tilde{n}_2 = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}, & \tilde{n}_3 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.47)$$

На (рис. 1.22) зображено положення ліній  $\vec{n}$  і  $\vec{s}$ , яке відповідає третьому варіанту напрямних косинусів.

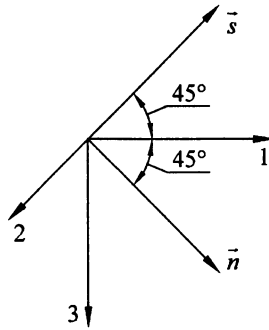


Рис. 1.22. Положення ліній  $\vec{n}$  і  $\vec{s}$ , що відповідають одному з варіантів екстремального значення кута зсуву

Лінії  $\vec{n}$  і  $\vec{s}$  визначають площину, яка перпендикулярна осі 3. Якщо розглянути інші варіанти, то площини, що визначаються цими лініями, будуть перпендикулярні осям 1 і 2. Між лініями  $\vec{n}$  та  $\vec{s}$ , які відповідають різним варіантам, кути будуть дорівнювати  $60^\circ$ .

Крім лінійних та кутових деформацій потрібна буде об'ємна деформація. Для її визначення відокремимо у довільній точці тіла паралелепіпед, ребра якого дорівнюють  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  і паралельні координатним осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 1.23).

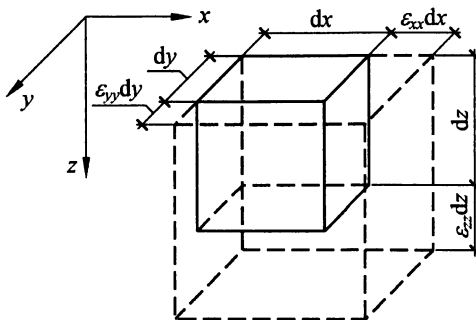


Рис. 1.23. Ілюстрація визначення об'ємної деформації

Якщо прийняти лінійні деформації рівними  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ , то довжина ребер паралелепіпеда після деформування буде дорівнювати  $dx(1 + \varepsilon_{xx})$ ,  $dy(1 + \varepsilon_{yy})$ ,  $dz(1 + \varepsilon_{zz})$ . Об'єм паралелепіпеда до деформування дорівнював:

$$dV = dx dy dz.$$

Після деформування він збільшиться на величину  $\Delta dV$  і буде дорівнювати:

$$dV + \Delta dV = dx dy dz (1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy})(1 + \varepsilon_{zz}).$$

Абсолютна об'ємна деформація буде мати значення:

$$(dV + \Delta dV) - dV = dx dy dz [(1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy})(1 + \varepsilon_{zz}) - 1].$$

Розкриваючи дужки і нехтуючи добутками лінійних деформацій у порівнянні з їх першими степенями, отримуємо:

$$\Delta dV = dx dy dz (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}).$$

Відносна об'ємна деформація дорівнює:

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}. \quad (1.48)$$

## Глава 1.3. Механічні властивості матеріалу твердого тіла.

### Загальні поняття, теорії міцності

Розглянутих у попередніх розділах питань не достатньо для розрахунку будь-якої конструкції на міцність та жорсткість. На це суттєво впливають механічні властивості матеріалів, з яких виготовлена конструкція. Існують два підходи до вивчення характеристик матеріалів. Один з них базується на розгляді структури матеріалу на мікрорівні, тобто встановлюються взаємодії елементарних часток тіла. Цей метод поки що не дає можливість отримати необхідні залежності для розрахунку конструкцій. Тому, розглянемо властивості матеріалів на макрорівні. Цей метод заснований на експериментальних випробуваннях різних зразків обумовлених розмірів.

Випробування проводяться на спеціальному обладнанні у певній кількості і визначає середньостатистичний результат, який потім застосовується при розрахунках конструкцій із цього матеріалу.

### 1.3.1. Результати випробування різних матеріалів

Розглянемо і проаналізуємо результати деяких випробувань. Почнемо з розгляду експериментального графіка випробування сталевго циліндричного зразка, який зображено на рис. 1.24.

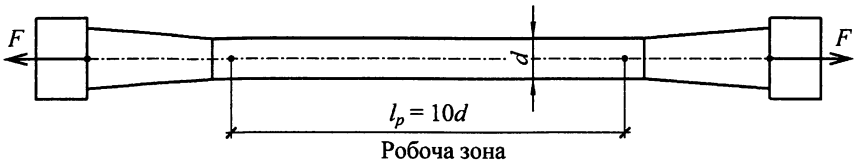


Рис. 1.24. Зразок для випробування матеріалу на розтяг

За допомогою розривної машини проводиться розтяг цього стержня до його розриву. На різних етапах випробування фіксується значення сили розтягу і величини деформування. Це дає можливість побудувати діаграму залежності між напруженнями і деформаціями (рис. 1.25).

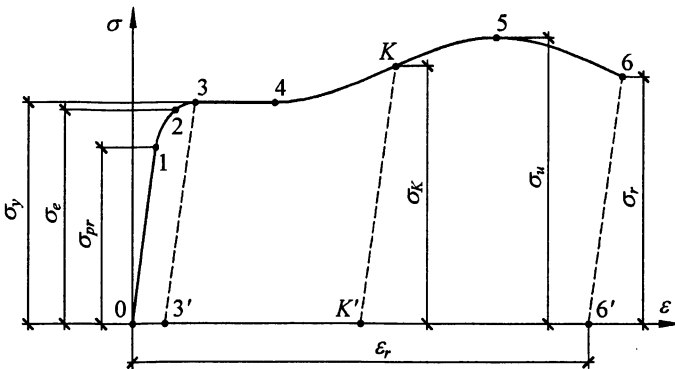


Рис. 1.25. Графік залежності між напруженнями і деформаціями для пластичної сталі

Завдяки специфічній формі зразка у межах робочої зони нормальні напруження по площі поперечного перерізу будуть розподілені рівномірно, тому їх значення можна визначити за формулою:

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{A}.$$

Дамо пояснення характеру залежностей, що існують між напруженнями і деформаціями на різних ділянках діаграми.

На ділянці 0-1 між напруженнями і деформаціями існує пряма пропорційна залежність. Якщо, не виходячи за межі цієї ділянки припинити навантаження і почати розвантаження, графік залежності між  $\sigma$  і  $\varepsilon$  співпаде з лінією 0-1. При повному розвантаженні зразок прийме свої початкові форми і розміри, тобто, якщо напруження не виходять за межі точки 1, графіки обох процесів (навантаження і розвантаження) співпадають. Це свідчить про те, що в матеріалі не виникають залишкові деформації. Напруження  $\sigma_{pr}$ , яке відповідає точці 1, має назву границі пропорційності.

На ділянці 1-2 не існує прямої пропорційності між  $\sigma$  і  $\varepsilon$ , однак графіки навантаження і розвантаження співпадають, що знову свідчить про відсутність залишкових деформацій і зворотність процесу деформування. Напруження  $\sigma_e$ , яке відповідає точці 2, має назву границі пружності.

Ділянка 2-3 є першою ділянкою діаграми, на якій виникають залишкові деформації. Про це свідчить графік розвантаження, який має форму прямої лінії, паралельної 0-1. Якщо розвантаження почати у точці 3, то ця лінія співпадає із 3-3'. Відрізок 0-3' є залишкова відносна лінійна деформація. Напруження  $\sigma_y$ , що відповідає точці 3, має назву границі текучості.

Ділянка 3-4 має назву площадки текучості. В межах цієї ділянки спостерігається зростання деформації без збільшення напруження. Це відбувається за рахунок ковзання кристалів відносно один одного. Площина ковзання спрямована під кутом  $45^\circ$  відносно напрямку головних напружень, що відповідає напрямку екстремальних дотичних напружень. Унаслідок перебудови

кристалічної структури матеріалу змінюються його властивості. Знову зростання деформацій відбувається тільки при збільшенні напружень.

Про це свідчить характер діаграми на ділянці 4-5. Напруження  $\sigma_u$ , яке відповідає точці 5, має назву границі міцності.

Ділянка між точками 5 і 6 називається повторною площадкою текучості. На ній деформації зростають при зменшенні напруження. Напруження у точці 6 має назву розривне напруження  $\sigma_r$ . Існують два підходи до його визначення. Справа в тому, що коли зразок випробування знаходиться у стані, який визначається ділянкою 5-6, на ньому в якомусь місці відбувається різке зменшення розмірів поперечного перерізу. Виникає так звана шийка (рис. 1.26).

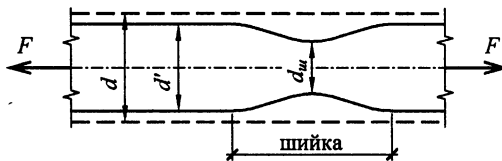


Рис. 1.26. Вигляд зразка після деформування за рахунок розтягу

На рис. 1.26 зображені три діаметри:

$d$  — діаметр зразка до деформування,

$d'$  — діаметр зразка під час деформування,

$d_u$  — діаметр зразка у місці виникнення шийки.

Площа перерізу зразка дорівнює:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \text{ — площа до деформування,}$$

$$A_u = \frac{\pi d_u^2}{4} \text{ — площа перерізу шийки.}$$

Маючи значення цих двох площ, знайдемо відповідні розривні напруження:

$$\sigma_r = \frac{F}{A} = \frac{F \cdot 4}{\pi d^2},$$

$$\sigma_{r,u} = \frac{F}{A_u} = \frac{F \cdot 4}{\pi d_u^2}.$$

Перший вираз дає значення напруження розриву без урахування деформації поперечного перерізу. Другий вираз дає фактичне значення напруження розриву.

На рис. 1.26 зображені зміни поперечних розмірів зразка при поздовжньому розтягу. Поперечні деформації дійсно відбуваються разом з поздовжніми, але вони в декілька разів менші.

Проведений аналіз діаграми випробування дозволяє зробити висновки, що при різних значеннях напружень виникають два типи деформацій. Одні зникають після розвантаження, а другі залишаються.

Перший тип має назву пружних деформацій. Як було відмічено, граничне напруження при цьому дорівнює  $\sigma_e$ , яке співпадає з точкою 2. Другий тип — це залишкові деформації, які не зникають після розвантаження. Якщо між точками 2 і 5 на діаграмі обрати довільну точку  $K$  і здійснити розвантаження, то графік цього процесу буде мати вигляд прямої лінії  $KK'$ , паралельної лінії 0-1. Відрізок  $OK'$  буде дорівнювати залишковій деформації, яка виникає від напруження  $\sigma_K$ . Залишкові деформації мають назву пластичних деформацій. Властивість матеріалу зберігати деформації і при цьому не руйнуватися має назву пластичності матеріалу. Характеристика пластичності матеріалу може бути визначена на підставі двох наступних показників:

$$\varepsilon_r = \frac{l'_p - l_p}{l_p} \cdot 100\%,$$

$$\psi_r = \frac{A - A_u}{A} \cdot 100\%.$$
(1.49)

У першій формулі  $l'_p$  означає довжину робочої зони зразка після деформування. Матеріал вважається пластичним, якщо  $\varepsilon_r \geq 5\%$ . Для досить розповсюдженої сталі ВСт3СП5 показники пластичності дорівнюють  $\varepsilon_r = 21\%$ ,  $\psi_r = 50\%$ .

Приведемо діаграми випробування інших матеріалів (рис. 1.27).

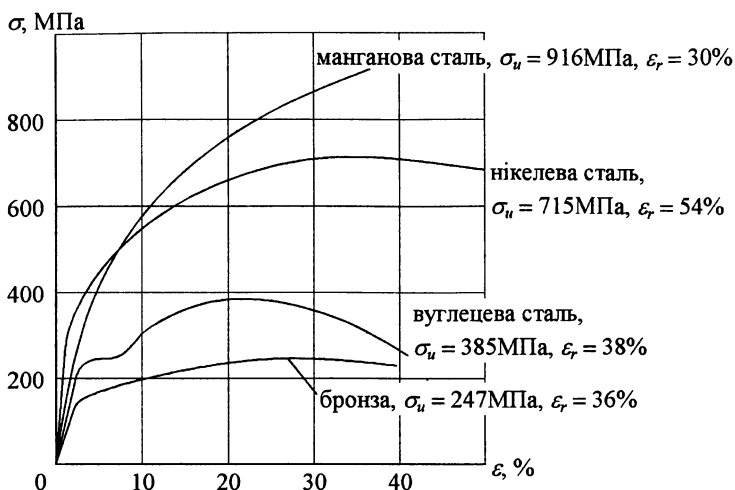


Рис. 1.27. Графіки залежності між напруженнями та деформаціями різних матеріалів

Усі приведені на цьому рисунку діаграми відносяться до пластичних матеріалів, але тільки на діаграмі вуглецевої сталі є у явному вигляді площадка текучості. Для матеріалів, діаграми яких не мають явно визначеної площадки текучості (рис. 1.28), установлюють умовну границю текучості.

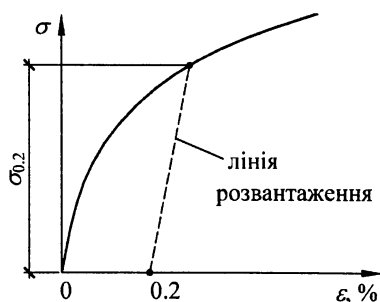


Рис. 1.28. Графік співвідношення між напруженнями та деформаціями, за яким встановлюється умовна границя текучості



За умовну границю текучості приймається напруження  $\sigma_{0,2}$ , при якому після розвантаження залишкова деформація становитиме 0.2%.

Наслідки випробування крихких матеріалів свідчать про те, що вони руйнуються при малих пластичних деформаціях. Розглянемо діаграми випробування чавуну на розтяг та стиск (рис. 1.29, 1.30).

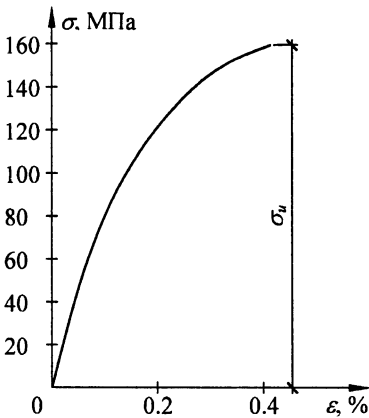


Рис. 1.29. Графік співвідношень між напруженнями і деформаціями при випробуванні чавуну на розтяг

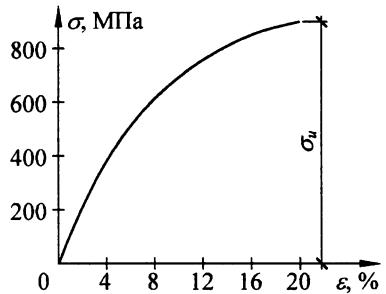


Рис. 1.30. Графік співвідношення між напруженнями і деформаціями при випробуванні чавуну на стиск

Чавун при розтягу веде себе як крихкий матеріал. Він руйнується при дуже малому значенні пластичної деформації. При стиску, навпаки, характер його руйнації свідчить про його пластичні властивості. Таким чином, є матеріали, механічні властивості яких залежать від характеру напруженого стану.

Для багатьох матеріалів суттєву роль відіграє орієнтація навантаження відносно їх структурних особливостей. Розглянемо це на прикладі деревини. На рис. 1.31 наведені графіки їх випробування на стиск при напрямі навантаження вздовж волокон (а) та поперек волокон (б).

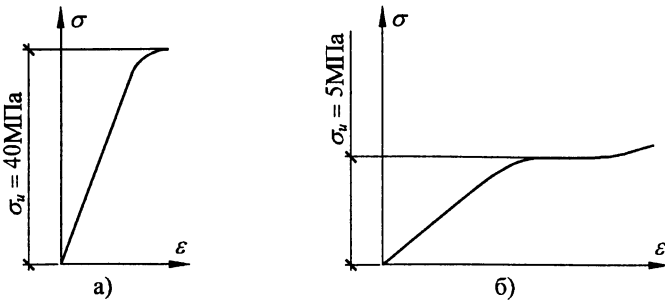


Рис. 1.31. Діаграма випробування деревини

Таким чином є матеріали, що мають однакові властивості за будь-яким напрямком. Вони мають назву ізотропних матеріалів. Анізотропними матеріалами є такі, у яких механічні властивості залежать від напрямку навантаження відносно їх структури.

Усі розглянуті вище випробування відображають поведінку матеріалів, коли між навантаженням і розвантаженням або руйнацією проходить невеликий проміжок часу. При тривалих навантаженнях мають місце свої особливості, а саме, спостерігається зростання деформації при постійних значеннях напружень. Таке явище має назву повзучості матеріалу. На рис. 1.32 зображена відповідна діаграма.

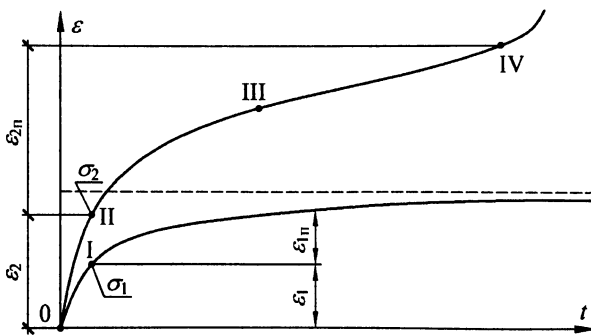


Рис. 1.32. Діаграма повзучості матеріалу

На рис. 1.32 зображені графіки повзучості конструкції з одного матеріалу при двох різних значеннях напружень, які не змінюються за часом  $t$ .

Графік 1 побудований при напруженні  $\sigma_1$ , яке менше ніж напруження  $\sigma_2$ , при якому побудований графік 2. На обох графіках ділянки 0-I та 0-II являють собою діаграми короточасних деформацій. У точках I та II напруження досягають значень  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$  і потім впродовж всього часу залишаються без змін, але подовжується зростання деформацій повзучості.

Структура графіка 1 показує, що при певному напруженні деформації повзучості зростають протягом обмеженого часу, після чого їх збільшення припиняється і матеріал не руйнується.

При більших значеннях напружень, яким відповідає графік 2, зростання деформацій повзучості не припиняються, що призводить до руйнування матеріалу. Швидкість збільшення деформацій змінюється за часом. На ділянці II-III швидкість вища, ніж на останній ділянці III-IV, але при досягненні певного значення, якому відповідає точка IV, настає різке зростання деформації і конструкція руйнується.

Як впливає з аналізу діаграм, при певних значеннях напружень ( $\sigma_1$ ) конструкція може існувати нескінченно довго, а при більших напруженнях ( $\sigma_2$ ) вона може проіснувати обмежений час. Зазначені явища під час розрахунку конструкцій можуть бути враховані застосуванням таких понять, як границя повзучості і границя тривалої міцності.

*Границею повзучості* є напруження, при якому деформації повзучості при певній температурі за встановлений час не перевищують визначеної величини, наприклад, 1% за 100 000 годин.

*Границею тривалої міцності* є напруження, при якому руйнація можлива тільки після встановленого строку безперервної дії даного напруження.

Розглянемо ще одне явище, пов'язане із процесом деформування за часом. Воно має назву релаксації напружень. Суть його полягає в тому, що протягом певного часу пружні деформації можуть частково або повністю

перейти у пластичні, внаслідок чого може змінитися напруження. Як приклад, можна розглянути болтове з'єднання. Стягнуті болтом деталі будуть щільно притиснуті одна до одної, якщо у болті мають місце тільки пружні деформації. З часом частина пружних деформацій за рахунок повзучості матеріалу може перейти у пластичні, напруження болта зменшаться, і з'єднання деталей послабне. Подібні явища спостерігаються і у попередньо напружених конструкціях. Графік релаксації напружень у залежності від часу  $t$  зображений на рис. 1.33.

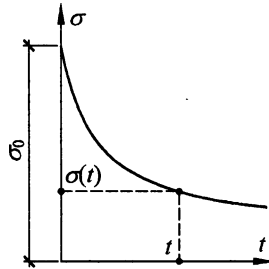


Рис. 1.33. Графік релаксації напружень

### 1.3.2. Співвідношення між напруженнями і деформаціями, закон Гука

Для встановлення аналітичної залежності між напруженнями і деформаціями, необхідно використати результати досліджень механічних властивостей матеріалів. Їх аналіз свідчить про наявність трьох видів деформацій — пружних, пластичних та повзучості. Порівнюючи між собою всі деформації, потрібно обрати найбільш придатні для існування та експлуатації споруд і окремих конструкцій. Певні переваги мають пружні деформації. Вони полягають в тому, що їх величини значно менші за інші, крім того, вони не є залишковими і не змінюються з часом. Наочним прикладом цього є ресори автомобіля. При навантаженні вони деформуються, і автомобіль осідає. Якщо б деформації не були пружними, то він і після розвантаження залишався б у такому стані. Оскільки при проектуванні та виготовленні автомобіля

передбачені пружні деформації, автомобіль повертається у свій первинний стан.

Практично на всі споруди та конструкції накладаються вимоги, щоб в них не виникали залишкові деформації. Це дає можливість зробити висновок, що величина напружень не повинна перевищувати границі пружності, тому більша частина курсу буде присвячена розрахунку конструкцій у пружному стані.

Якщо проаналізувати діаграми випробування матеріалів, а саме — їх ділянки, які знаходяться в межах границі пружності, то можливо зробити висновок, що між напруженнями і деформаціями існує залежність, близька до прямої пропорційності. На цій підставі приймається гіпотеза, яка стверджує, що між напруженнями і деформаціями існує лінійна залежність.

При цьому, як зображено на рис. 1.25 та 1.26, від напружень, що діють в одному напрямі, деформації виникають і в інших двох напрямках. Очевидним є те, що деформації у поперечних напрямках прямо пропорційні поздовжньому напруженню, але вони значно менші поздовжніх деформацій. Відмітимо ще одну особливість, пов'язану з дотичними напруженнями і деформаціями зсуву. Експерименти підтверджують, що між ними теж існує лінійна залежність.

Беручи до уваги сказане, і в першу чергу — прийняту гіпотезу, запишемо аналітичну залежність між напруженнями і деформаціями у загальному вигляді:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} + a_{14}\tau_{xy} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{yz}, \\
 \varepsilon_{yy} &= a_{21}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz} + a_{24}\tau_{xy} + a_{25}\tau_{xz} + a_{26}\tau_{yz}, \\
 \varepsilon_{zz} &= a_{31}\sigma_{xx} + a_{32}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz} + a_{34}\tau_{xy} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{yz}, \\
 \gamma_{xy} &= a_{41}\sigma_{xx} + a_{42}\sigma_{yy} + a_{43}\sigma_{zz} + a_{44}\tau_{xy} + a_{45}\tau_{xz} + a_{46}\tau_{yz}, \\
 \gamma_{xz} &= a_{51}\sigma_{xx} + a_{52}\sigma_{yy} + a_{53}\sigma_{zz} + a_{54}\tau_{xy} + a_{55}\tau_{xz} + a_{56}\tau_{yz}, \\
 \gamma_{yz} &= a_{61}\sigma_{xx} + a_{62}\sigma_{yy} + a_{63}\sigma_{zz} + a_{64}\tau_{xy} + a_{65}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{yz}.
 \end{aligned}
 \tag{1.50}$$

Дані залежності можливо суттєво спростити, якщо врахувати наслідки різних експериментів. Вони свідчать про те, що дотичні напруження не впливають на лінійні деформації, а нормальні напруження — на кутові

деформації. Крім того, кожне дотичне напруження викликає кутову деформацію тільки в одній площині, тобто від  $\tau_{xy}$  виникає  $\gamma_{xy}$ , від  $\tau_{xz}$  і  $\tau_{yz}$  відповідно  $\gamma_{xz}$  і  $\gamma_{yz}$ . На підставі зазначеного можна записати:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}, \\ \varepsilon_{yy} &= a_{21}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz}, \\ \varepsilon_{zz} &= a_{31}\sigma_{xx} + a_{32}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz}, \\ \gamma_{xy} &= a_{44}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xz} &= a_{55}\tau_{xz}, \\ \gamma_{yz} &= a_{66}\tau_{yz}.\end{aligned}\tag{1.51}$$

Для ізотропного матеріалу, механічні властивості якого у будь-якому напрямку однакові, очевидним є наступне:

$$\begin{aligned}a_{11} &= a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E}, \\ a_{12} &= a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = -\mu \frac{1}{E}, \\ a_{44} &= a_{55} = a_{66} = \frac{1}{G}.\end{aligned}\tag{1.52}$$

Застосовані позначення мають такі назви:

$E$  — модуль Юнга, або модуль пружності першого роду,

$G$  — модуль зсуву, або модуль пружності другого роду,

$\mu$  — коефіцієнт Пуассона, або коефіцієнт поперечної деформації.

Коефіцієнти  $a_{ik}$ , коли  $i \neq k$ , мають знак "мінус", тому що характер поперечної деформації протилежний характеру поздовжньої деформації. Про це свідчить рис. 1.26. Коефіцієнт Пуассона  $\mu < 0.5$ .

Врахуємо залежності (1.51) і (1.52):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy} - \mu\sigma_{zz}), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \mu\sigma_{zz}), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G}\tau_{xz}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}.\end{aligned}\tag{1.53}$$

Отримані співвідношення мають назву закону Гука. Всі коефіцієнти, що увійшли у рівняння (1.53), залежать від матеріалу і визначаються експериментально. Між ними існує залежність:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.\tag{1.54}$$

На доведенні цієї залежності зупинятися не будемо.

### 1.3.3. Загальна система рівнянь для пружного деформівного тіла довільної форми

У перших двох главах були розглянуті напружений і деформований стан. Для їх визначення потрібно знайти компоненти тензорів напружень і деформацій і також вектори переміщень.

До тензора напружень увійшли шість невідомих компонентів:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.\tag{1.55}$$

Така сама кількість невідомих компонентів входить до тензора деформацій:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.56)$$

Три невідомі має вектор переміщень:

$$u = (u_x, u_y, u_z). \quad (1.57)$$

Кожна вказана невідома компонента є функцією трьох координат, тобто функцією трьох змінних. Загальна кількість невідомих дорівнює п'ятнадцяти. Для їх знаходження потрібно мати п'ятнадцять рівнянь. Необхідна кількість рівнянь отримана у розглянутих трьох главах.

Розгляд напруженого стану дає три рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + g_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + g_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.58)$$

У другій главі отримано шість кінематичних співвідношень:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Ще шість рівнянь складені на підставі закону Гука:



$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy} - \mu\sigma_{zz}), & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \mu\sigma_{zz}), & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G}\tau_{xz}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy} + \sigma_{zz}), & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz},\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1+\mu} \left[ \varepsilon_{xx} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right], & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1+\mu} \left[ \varepsilon_{yy} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right], & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\mu} \left[ \varepsilon_{zz} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right], & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}.\end{aligned}\tag{1.60}$$

У цих залежностях величини  $E$ ,  $G$ ,  $\mu$ , як було вище відмічено, знаходяться експериментально, тому їх можна розглядати як відомі величини.

Підрахунок кількості невідомих і кількості рівнянь свідчить про те, що у обох випадках будемо мати однакове значення, яке дорівнює п'ятнадцяти. На цій підставі можна зробити висновок, що задача має однозначний розв'язок. Але завдяки його складності загальний розв'язок знайти не вдається, тому застосовуються наближені методи. Існують різні підходи.

Один із них заснований на використанні різних наближених методів розв'язку отриманих диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Другий варіант базується на прийнятті додаткових гіпотез у залежності від форми тіла. Найбільш розповсюдженими є конструкції, які мають форму стержня, пластини і оболонки. Методики їх розрахунку будуть розглянуті далі.

Можливе застосування так званих зворотних або напівзворотних методів, суть яких полягає у тому, що розв'язок спочатку вигадується повністю або частково, після чого перевіряється, задовольняє він чи ні усі необхідні залежності. Дана методика використана у прикладах 1.4.4, 1.4.5.

Слід брати до уваги ще одне положення. Оскільки рівняння (1.58), (1.59), (1.60) є диференціальними, то необхідно враховувати граничні умови. Якщо до поверхні тіла прикладені відомі навантаження, то граничні умови складаються на підставі формул (1.24). Можливі інші залежності, коли точки поверхні тіла мають кінематичні закріплення або змішані статичні і кінематичні умови. Ці питання будуть розглядатися при розрахунку конструкцій, які мають визначені форми.

### 1.3.4. Потенціальна енергія пружної деформації

Під дією зовнішнього навантаження пружне тіло деформується. Його точки отримують переміщення. Серед них є точки, до яких прикладене зовнішнє навантаження. На цих переміщеннях зовнішні сили здійснюють роботу. Відповідно до закону збереження енергії ця робота не зникає, а перетворюється у інші види енергії, а саме у потенціальну енергію пружної деформації, яка накопичується у деформованому тілі. При знятті навантаження потенціальна енергія витрачається на відновлення початкових форм і розмірів тіла. Таким чином, має місце рівняння:

$$W_{ext} = E_{pot}. \quad (1.61)$$

де  $W_{ext}$  — робота зовнішніх сил, що прикладені до деформівного тіла,  
 $E_{pot}$  — потенціальна енергія пружної деформації.

Складемо вираз роботи зовнішніх сил. При пружних деформаціях між зовнішніми силами і переміщеннями існує лінійна залежність (рис. 1.34).

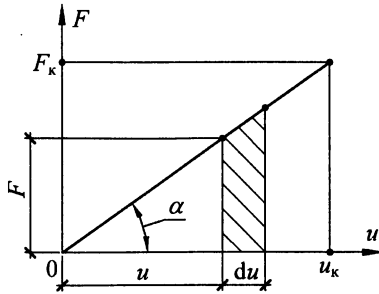


Рис. 1.34. Графік залежності між навантаженням та пружним переміщенням точки, де воно прикладене

Припустимо, що у точці, де переміщення має значення  $u_k$ , діє сила  $F_k$ . Її напрям співпадає з напрямом переміщення, тоді робота цієї сили буде дорівнювати:

$$W_{ext} = \int_0^{u_k} F du.$$

Згідно з графіком на рис. 1.34  $F = u \cdot \operatorname{tg} \alpha$ . Врахуємо це у попередньому виразі:

$$W_{ext} = \int_0^{u_k} \operatorname{tg} \alpha u du = \operatorname{tg} \alpha \frac{u_k^2}{2} = \frac{1}{2} F_k u_k. \quad (1.62)$$

Таким чином, робота сили дорівнює половині від добутку сили на переміщення. Для визначення роботи внутрішніх сил, розглянемо нескінченно малу частку тіла у вигляді паралелепіпеда, по гранях якого діють напруження (рис. 1.35). Усі пояснення до діючих напружень та їх рівнодіючої наведені при розгляді рис. 1.12.

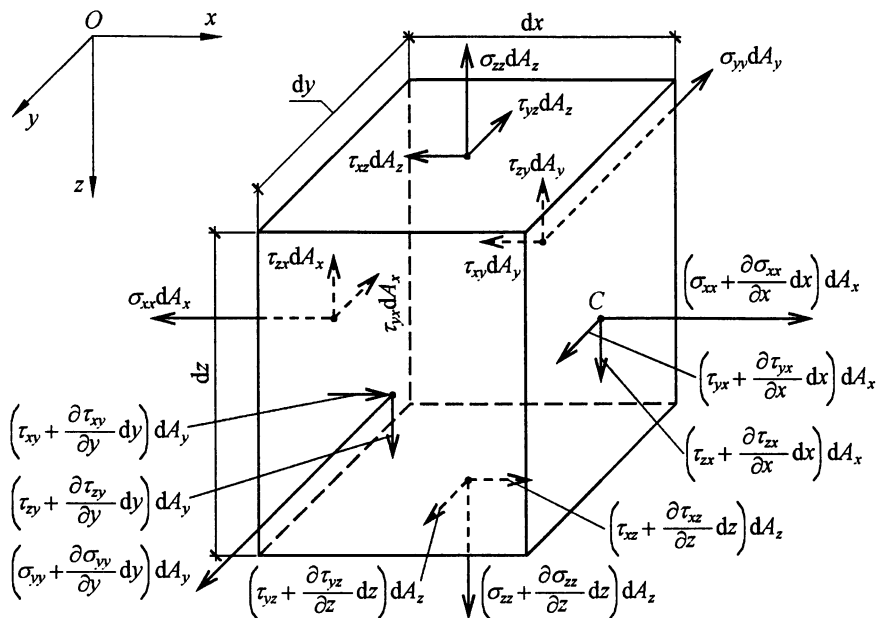


Рис. 1.35. Напружений стан паралелепіпеда для встановлення потенціальної енергії пружної деформації

Зображені на рисунку напруження відносно відокремленого паралелепіпеда є зовнішніми силами. Внутрішні напруження діють у середині паралелепіпеда і згідно із законом Ньютона мають протилежний напрям. Під дією вказаних навантажень паралелепіпед деформується. Його грані отримують переміщення, завдяки чому навантаження здійснюють роботу, яку можливо розглядати як роботу зовнішніх сил. Це дає можливість застосувати формулу (1.62).

Для більш наочного зображення деформацій і переміщень, розглянемо проекції паралелепіпеда на площину  $xOz$  (рис. 1.36).

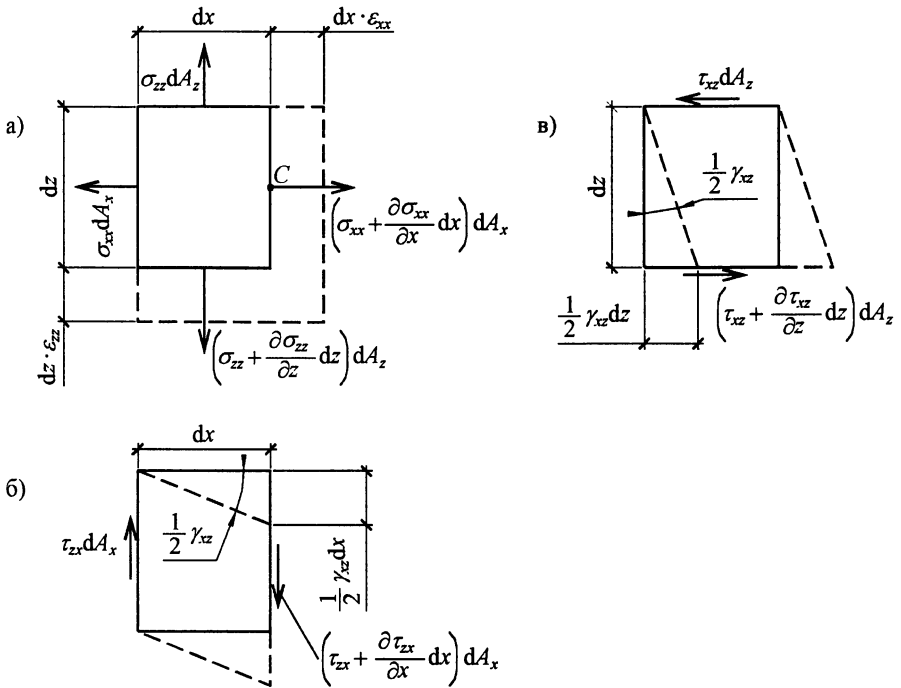


Рис. 1.36. Характер деформування граней паралелепіпеда під дією нормальних та дотичних напружень

Відповідно до рисунка 1.36(а) переміщення точки  $C$ , в якій прикладена рівнодіюча напруження  $\sigma_{xx}$ , дорівнює  $dx \cdot \epsilon_{xx}$ . Робота цієї рівнодіючої згідно з формулою (1.62) буде мати значення:

$$(dW_{ext})_{\sigma_{xx}} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dA_x \cdot \epsilon_{xx} dx.$$

Підставляючи величину  $dA_x = dy dz$  і відкидаючи члени вищого порядку малості, отримаємо:

$$(dW_{ext})_{\sigma_{xx}} = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dx dy dz.$$

На підставі рис. 1.36(б), (в) складемо вираз для роботи дотичного напруження  $\tau_{xz}$ :

$$(dW_{ext})_{\tau_{xz}} = \frac{1}{2} \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx \right) dA_x \frac{1}{2} \gamma_{xz} dx + \\ + \frac{1}{2} \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dA_z \frac{1}{2} \gamma_{xz} dz = \frac{1}{2} \tau_{xz} \gamma_{xz} dx dy dz.$$

Аналогічно можливо знайти роботу усіх напружень, які діють по гранях тетраедра. Беручи до уваги, що  $dx dy dz = dV$ , будемо мати:

$$dW_{ext} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV. \quad (1.63)$$

Цей вираз визначає роботу сил, діючих по всіх гранях паралелепіпеда. Вище було зазначено, що ці сили потрібно розглядати як зовнішні. Внутрішні напруження відрізняються тільки напрямом, тому потрібно просто змінити знак:

$$dW_{int} = -dW_{ext}.$$

Робота внутрішніх напружень, що діють у межах усього тіла, буде дорівнювати:

$$W_{int} = -\frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV. \quad (1.64)$$

Потенціальна енергія пружної деформації дорівнює роботі зовнішніх сил, або зі зворотним знаком — роботі внутрішніх сил, тому на підставі формули (1.64) запишемо:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV. \quad (1.65)$$

Якщо вираз (1.63) поділити на  $dV$ , то отримаємо питому потенціальну енергію, тобто енергію, яка накопичується у межах одиниці об'єму тіла.

$$e_{pot} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}). \quad (1.66)$$

Беручи до уваги закон Гука (1.53), знайдемо вираз  $e_{pot}$  у напруженнях:

$$e_{pot} = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\mu(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + 2(1 + \mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right] \quad (1.67)$$

При деформуванні тіла відбувається зміна об'єму і форми. На кожний з цих видів деформації витрачається певна кількість енергії. Надалі буде потрібно мати окремі значення енергії для кожного з цих видів деформації. Для цього розглянемо елемент тіла у формі куба, розміри ребер якого дорівнюють одиниці (рис. 1.37).

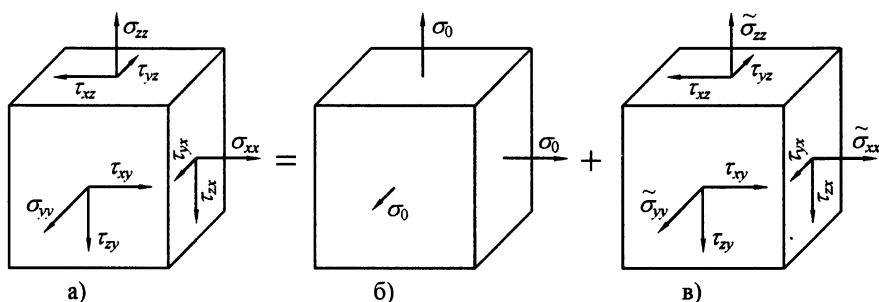


Рис. 1.37. Розділення загального напруженого стану для встановлення потенціальної енергії об'ємної деформації та деформації зміни форми

По гранях куба діють напруження, які об'єднаємо у тензор  $\sigma$ . Розкладемо цей тензор на дві частини —  $\sigma_0$  і  $\tilde{\sigma}$ , тобто:

$$\sigma = \sigma_0 + \tilde{\sigma}.$$

Складові цих трьох тензорів зображені на рис. 1.37, відповідно (а), (б), (в). Запишемо суму цих тензорів:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tilde{\sigma}_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tilde{\sigma}_{zz} \end{bmatrix}.$$

Оскільки сума напружень стану (б) і (в) дорівнює напруженням стану (а), то є можливість стверджувати, що сума потенціальних енергій станів (б) і (в)

дорівнює потенціальній енергії стану (а). Значення напруження  $\sigma_0$  підберемо так, щоб об'ємні деформації станів (а) і (б) були між собою рівні:

$$\varepsilon_0^{(a)} = \varepsilon_0^{(b)}.$$

Підкреслимо, що при такій умові об'ємна деформація у стані (в) дорівнює нулю. В цьому стані виникає тільки деформація зміни форми, тому потенціальна енергія цього стану витрачається тільки саме на таку деформацію.

Складемо вирази об'ємних деформацій, застосувавши формули (1.48) та (1.60):

$$\varepsilon_0^{(a)} = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}),$$

$$\varepsilon_0^{(b)} = \frac{1-2\mu}{E} 3\sigma_0.$$

Враховуючи, що вони між собою рівні, отримаємо значення  $\sigma_0$ :

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \quad (1.68)$$

Формула (1.67) дає можливість скласти значення питомої потенціальної енергії стану (б), у якому дотичні напруження дорівнюють нулю, а всі нормальні напруження між собою рівні і мають значення  $\sigma_0$ . Врахувавши це у формулі (1.67), отримаємо:

$$e_{pot}^0 = \frac{1-2\mu}{2E} 3\sigma_0^2.$$

Підставивши у цю залежність значення  $\sigma_0$  згідно з формулою (1.68), знайдемо остаточний вираз потенціальної енергії об'ємної деформації:

$$e_{pot}^0 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2. \quad (1.69)$$

Віднімаючи цей вираз від виразу (1.67), будемо мати питому потенціальну енергію зміни форми, що відповідає стану (в):



$$e_{pot}^{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]. \quad (1.70)$$

Якщо у початковому стані перейти до головних напружень, то вирази питомої потенціальної енергії будуть мати наступний вигляд:

$$e_{pot} = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\mu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) \right],$$

$$e_{pot}^0 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2, \quad (1.71)$$

$$e_{pot}^{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} \left[ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 \right].$$

### 1.3.5. Критерії оцінки міцності та жорсткості конструкцій

Після визначення усіх компонент напруженого і деформованого стану, потрібно дати вірну оцінку отриманим величинам з точки зору безпечної роботи конструкції, нормальних умов її експлуатації, тобто оцінити міцність та жорсткість конструкції.

Жорсткість конструкції оцінюється шляхом порівняння отриманих максимальних переміщень із встановленими нормативними. Отримані величини не повинні суттєво відрізнятися від нормативних. Якщо вони більші нормативних, то це свідчить про недостатню жорсткість, а якщо суттєво менші, то про перебільшення розмірів конструкції, тобто про зайві витрати матеріалу.

При оцінюванні міцності виникають додаткові ускладнення, які пов'язані з вибором критерію, що свідчить про вичерпання несучої здатності. Необхідно встановити, який саме параметр потрібно порівнювати з нормативними показниками, щоб здійснити вірне оцінювання міцності. Крім того, необхідно визначити обґрунтовані нормативні показники міцності матеріалів.

Як впливає з результатів механічних випробувань різних матеріалів, руйнація відбувається при досягненні напруженнями певних значень, тобто

критеріями міцності є внутрішні напруження. Але в той же час при складному напруженому стані нема однозначної відповіді, яке саме напруження потрібно обрати для перевірки. Тензор напружень у цьому випадку, навіть після приведення його до головних осей, буде мати три компоненти:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Експерименти свідчать про те, що руйнація відбувається за різних співвідношень між головними напруженнями, кількість яких є нескінченно великою, тому вирішити це питання за рахунок експерименту неможливо. Тому застосовується підхід, що базується на визначенні за трьома головними напруженнями єдиного фактору, який дає можливість оцінювати міцність. Поки що нема єдиного підходу до цього питання. Існують декілька теорій, що мають назву теорій міцності, які дають можливість на підставі певних положень обрати критерієм міцності відповідний фактор.

При обранні критеріїв міцності застосовується два загальних припущення:

1. Два напружених стани вважаються рівноцінними (рівнонебезпечними), якщо при збільшенні всіх головних напружень у кожному стані в однакову кількість разів вони одночасно перетворюються на небезпечні.

2. Ознакою вичерпання несучої здатності конструкції у будь-якому напруженому стані є досягнення в одній точці деяким фактором, прийнятим за критерій міцності, нормативного значення, встановленого для даного матеріалу.

Таким чином для оцінки міцності конструкції потрібно на підставі однієї з теорій міцності, які буде розглянуто далі, обрати певний фактор  $\psi$ , який визначається через головні напруження, що виникають у конструкції.

Граничне значення вказаного фактора визначається експериментально. При цьому експеримент проводиться із застосуванням простого напруженого стану, який вважається рівномічним з більш складним напруженим станам.

Найчастіше використовуються одновісні напружені стани, такі як розтяг, стиск, кручення та інше. Деякі з них були розглянуті вище. Позначимо граничне значення фактору міцності, що знайдено з вказаних випробувань  $\psi_u^0$ , і запишемо умову міцності.

$$\psi_{\max} \leq \psi_u^0. \quad (1.72)$$

$\psi_{\max}$  — максимальне значення фактору міцності, яке виникає у напруженому стані, що розглядається.

Розглянемо п'ять головних теорій міцності.

Перша теорія — *теорія екстремальних нормальних напружень*.

Згідно з цією теорією за фактор міцності приймається одне з екстремальних головних напружень  $\sigma_{11}$  або  $\sigma_{33}$ . Перше з них відповідає розтягу, а друге — стиску.

У формі рівномічного стану використовується одновісний розтяг або стиск. У кожному з них не рівним нулю є тільки одне напруження:  $\sigma_{11}^0$  або  $\sigma_{33}^0$ .

Їх граничне значення  $\sigma_u^{(+)}$  і  $\sigma_u^{(-)}$  неважко знайти експериментально. Умови міцності мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &\leq \sigma_u^{(+)}, \\ \sigma_{33} &\leq \sigma_u^{(-)}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Друга теорія — *теорія максимальних лінійних деформацій*.

За критерій міцності приймається максимальна лінійна деформація, яка згідно із законом Гука може бути визначена через головні напруження:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \mu \sigma_{22} - \mu \sigma_{33}).$$

При одновісному розтягу, який приймається як рівномічний стан, цей фактор має вираз:

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{E} \sigma_{11}^0.$$

Граничне значення цього фактора буде дорівнювати:

$$\varepsilon_u^0 = \frac{1}{E} \sigma_u^0.$$

Величина  $\sigma_u^0$  визначається з експерименту.

На підставі залежності (1.72), можна отримати:

$$\varepsilon_{11} \leq \varepsilon_u^0,$$

або

$$\sigma_{11} - \mu\sigma_{22} - \mu\sigma_{33} \leq \sigma_u^0. \quad (1.74)$$

Третя теорія міцності — *теорія максимальних дотичних напружень*.

Згідно з цією теорією за критерій міцності приймається максимальне дотичне напруження, яке за формулою (1.20) дорівнює:

$$\tau_{sn} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2}.$$

При одновісному розтягу будемо мати:

$$\tau_{sn}^0 = \frac{\sigma_{11}^0}{2}.$$

Граничне значення буде дорівнювати:

$$\tau_u^0 = \frac{\sigma_u^0}{2}.$$

Як і у попередніх випадках,  $\sigma_u^0$  знаходиться експериментально.

Умова міцності має вигляд:

$$\tau_{sn} \leq \tau_u^0.$$

або

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} \leq \sigma_u^0. \quad (1.75)$$

Четверта теорія міцності — *енергетична*.

За критерій міцності приймається питома потенціальна енергія зміни форми, яку можливо визначити через головні напруження за формулою (1.71):

$$e_{pot}^{\phi} = \frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2].$$

При одновісному розтягу будемо мати:

$$e_{pot}^{\phi,0} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_{11}^0)^2.$$

Граничне значення дорівнює:

$$e_{pot,u}^{\phi,0} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_u^0)^2.$$

Умова міцності має вигляд:

$$e_{pot}^{\phi} \leq e_{pot,u}^{\phi,0},$$

або

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2} \leq \sigma_u^0. \quad (1.76)$$

П'ята теорія — *теорія Мора*.

Теорія Мора базується на результатах механічних випробувань матеріалів у двовісному напруженому стані, при  $\sigma_{11} \neq 0$ ,  $\sigma_{33} \neq 0$ ,  $\sigma_{22} = 0$ . Графік залежності між  $\sigma_{11}$  і  $\sigma_{33}$ , при якій матеріал руйнується, зображено на рис. 1.38.

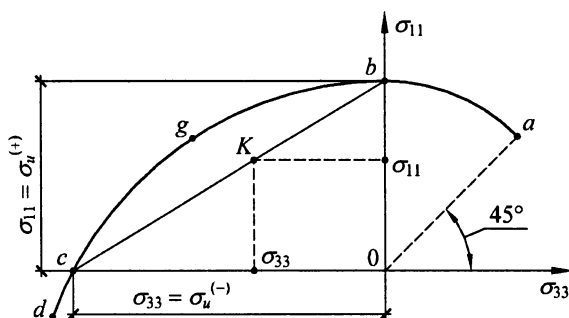


Рис. 1.38. Діаграма деформування матеріалу при плоскому напруженому стані для встановлення формули міцності Мора

Проаналізуємо графік на ділянці  $b-g-c$ , де напруження  $\sigma_{11} > 0$ , а  $\sigma_{33} < 0$ . Лінія  $b-g-c$  є межею, яка розподіляє залежності між  $\sigma_{11}$  і  $\sigma_{33}$  на безпечні і небезпечні. Точки, які знаходяться нижче вказаної лінії, відповідають

безпечному співвідношенню між  $\sigma_{11}$  і  $\sigma_{33}$ . Натомість, точки, розташовані вище цієї лінії, відповідають небезпечним співвідношенням. Для отримання нескладних співвідношень між  $\sigma_{11}$  і  $\sigma_{33}$  криволінійний графік  $b-g-c$  замінюємо прямою лінією  $b-c$ , яку будемо розглядати як межу між безпечною і небезпечною зонами. Така заміна йде на підвищення запасу безпеки.

Встановимо співвідношення між  $\sigma_{11}$  і  $\sigma_{33}$ , значення яких відповідає точці  $K$ , яка розташована на прямій  $b-c$ . Для встановлення вказаної залежності потрібно скласти рівняння прямої лінії, що проходить через дві точки  $b$  і  $c$ :

$$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_u^{(+)}} - \frac{\sigma_{33}}{\sigma_u^{(-)}} = 1,$$

або

$$\sigma_{11} - \frac{\sigma_u^{(+)}}{\sigma_u^{(-)}} \sigma_{33} \leq \sigma_u^{(+)} . \quad (1.77)$$

Ліва частина цього виразу може розглядатися як критерій міцності. Очевидно, якщо  $\sigma_u^{(+)} = \sigma_u^{(-)}$ , отримана залежність співпадає з (1.75). Теорію Мора доцільно застосовувати для матеріалів, які мають різні якості при розтягу і стиску.

Аналіз отриманих по всіх теоріях критеріїв міцності свідчить про те, що ліві частини у всіх вказаних виразах — це певні комбінації головних напружень, тому їх можна розглядати як напруження. Вказані вирази прийнято називати "еквівалентні напруження" і позначати  $\sigma_{екв}$ . Значення  $\sigma_{екв}$ , за різними теоріями міцності, мають наступні вирази:

за першою теорією:

$$\sigma_{екв}^I = \sigma_{11}; \quad (1.78)$$

за другою теорією:

$$\sigma_{екв}^{II} = \sigma_{11} - \mu\sigma_{22} - \mu\sigma_{33}; \quad (1.79)$$

за третьою теорією:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_{11} - \sigma_{33}; \quad (1.80)$$

за четвертою теорією:

$$\sigma_{екв}^{IV} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2}; \quad (1.81)$$

за п'ятою теорією:

$$\sigma_{екв}^V = \sigma_{11} - \frac{\sigma_u^{(+)}}{\sigma_u^{(-)}} \sigma_{33}. \quad (1.82)$$

Застосовуючи поняття  $\sigma_{екв}$ , можливо записати умову міцності у загальному вигляді:

$$\sigma_{екв} \leq \sigma_u. \quad (1.83)$$

У правій частині цього виразу фігурує граничне значення напруження, через яке матеріал руйнується. Для забезпечення роботи конструкцій застосовується інша залежність:

$$\sigma_{екв} \leq \sigma_{adm}, \quad (1.84)$$

де  $\sigma_{adm}$  — так зване допустиме напруження, яке встановлюється нормами проектування.

Для отримання допустимого напруження необхідно граничні значення напружень, при яких відбувається руйнування матеріалу, поділити на коефіцієнт запасу міцності  $n_{adm}$ , а саме:

для пластичних матеріалів:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{n_{adm}}; \quad (1.85)$$

для крихких матеріалів:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{n_{adm}}. \quad (1.86)$$

Коефіцієнт запасу міцності  $n_{adm}$  у різних випадках має різні значення, але завжди він більше одиниці.

## Глава 1.4. Приклади до першого розділу

### 1.4.1. Приклад визначення напружень на довільній похилій площині

У точці 0 просторового тіла (рис. 1.39) від діючого навантаження відомі внутрішні напруження у напрямку осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

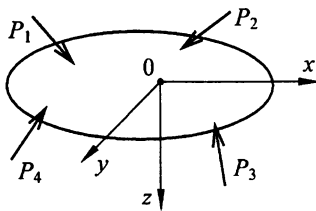


Рис. 1.39. Положення точки, в якій визначатимуться напруження

Тензор напружень  $\sigma$  у цій точці такий:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \text{ МПа .}$$

Потрібно визначити напруження у цій точці в інших напрямках на площині, яка задана нормаллю  $\vec{n}$ . Для цього необхідно біля точки 0 відокремити нескінченно малий тетраедр, три грані якого перпендикулярні до осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 1.40). Положення четвертої грані визначається напрямними косинусами нормалі  $\vec{n}$ . Шукані напруження визначатимуться саме по цій грані.



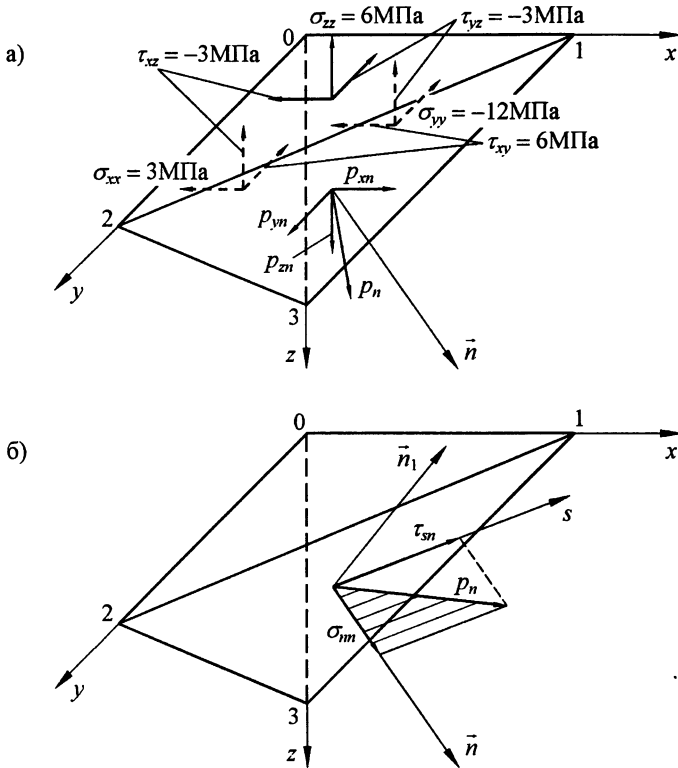


Рис. 1.40. Положення грані, на якій визначаються напруження

Напрявні косинуси нормалі  $\vec{n}$  до грані 1-2-3, які визначають її положення, дорівнюють:

$$n_x = \frac{2}{3}, \quad n_y = \frac{1}{3}, \quad n_z = \frac{2}{3}.$$

Спочатку за формулами (1.6) знайдемо на цій грані складові повного напруження, які паралельні координатним осям:

$$p_{xn} = 3 \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} + (-3) \cdot \frac{2}{3} = 2 \text{ МПа}.$$

$$p_{yn} = 6 \cdot \frac{2}{3} + (-12) \cdot \frac{1}{3} + (-3) \cdot \frac{2}{3} = -2 \text{ МПа}.$$

$$p_{zn} = (-3) \frac{2}{3} + (-3) \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 1 \text{ МПа} .$$

Значення повного напруження  $p_n$  дорівнює:

$$p_n = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3 \text{ МПа} .$$

Напрявні косинуси повного напруження мають значення:

$$n_{xp} = \frac{p_{xn}}{p_n} = \frac{2}{3}, \quad n_{yp} = \frac{p_{yn}}{p_n} = -\frac{2}{3}, \quad n_{zp} = \frac{p_{zn}}{p_n} = \frac{1}{3} .$$

За формулою (1.8) знайдемо нормальне напруження  $\sigma_{nn}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} = & 3 \left( \frac{2}{3} \right)^2 + (-12) \left( \frac{1}{3} \right)^2 + 6 \left( \frac{2}{3} \right)^2 + 2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \\ & + 2(-3) \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + 2(-3) \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 1,333 \text{ МПа} . \end{aligned}$$

Зупинимось на розгляді дотичного напруження  $\tau_{sn}$ . Його напрямок співпадає з лінією  $s$ , яка є лінією перетину площини грані тетраедра 1-2-3 та площини, що утворюється двома прямими  $\vec{n}$  та  $\vec{p}_n$ . Нормаль до цієї площини  $\vec{n}_1$ . Напрявні косинуси цієї нормалі  $n_{x1}$ ,  $n_{y1}$ ,  $n_{z1}$  знайдемо з умови, що вона перпендикулярна до ліній  $\vec{n}$  та  $\vec{p}_n$ . Це дозволяє скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases} n_x \cdot n_{x1} + n_y \cdot n_{y1} + n_z \cdot n_{z1} = 0, \\ n_{xp} \cdot n_{x1} + n_{yp} \cdot n_{y1} + n_{zp} \cdot n_{z1} = 0, \\ n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + n_{z1}^2 = 1. \end{cases}$$

Підставимо чисельні значення напрямних косинусів  $\vec{n}$  та  $\vec{p}_n$ :

$$\begin{cases} \frac{2}{3} n_{x1} + \frac{1}{3} n_{y1} + \frac{2}{3} n_{z1} = 0, \\ \frac{2}{3} n_{x1} - \frac{2}{3} n_{y1} + \frac{1}{3} n_{z1} = 0, \\ n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + n_{z1}^2 = 1. \end{cases}$$

Звідки знайдемо:

$$n_{x1} = 0,620, \quad n_{y1} = 0,248, \quad n_{z1} = -0,744.$$

Після цього можна скласти систему рівнянь для визначення напрямних косинусів лінії  $\vec{s}(n_{xs}, n_{ys}, n_{zs})$ . Вона перпендикулярна до нормалі  $\vec{n}$  та  $\vec{n}_1$ .

Система рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}n_{xs} + \frac{1}{3}n_{ys} + \frac{2}{3}n_{zs} = 0, \\ 0,620n_{xs} + 0,248n_{ys} - 0,744n_{zs} = 0, \\ n_{xs}^2 + n_{ys}^2 + n_{zs}^2 = 1. \end{cases}$$

Після розв'язання системи отримаємо:

$$n_{xs} = 0,413, \quad n_{ys} = -0,910, \quad n_{zs} = 0,0413.$$

Величину дотичного напруження знайдемо за формулою (1.8):

$$\tau_{sn} = 2 \cdot 0,413 + (-2)(-0,910) + 1 \cdot 0,0413 = 2,687 \text{ МПа}.$$

Зробимо перевірку значень  $\sigma_{nn}$  та  $\tau_{sn}$ , враховуючи, що

$$p_n = \sqrt{\sigma_{nn}^2 + \tau_{sn}^2} = \sqrt{1,333^2 + 2,687^2} = 3 \text{ МПа}.$$

#### 1.4.2. Приклад визначення екстремальних нормальних і дотичних напружень

Розглянемо порядок визначення екстремальних нормальних та дотичних напружень. Знову вважаємо, що у деякій точці просторового тіла від діючого навантаження знайдені напруження у напрямку осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Тензор напружень має вигляд:

$$\sigma = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 10 \\ 8 & 10 & -5 \end{bmatrix} \text{ МПа}.$$

Його компоненти вказані на рис. 1.41.

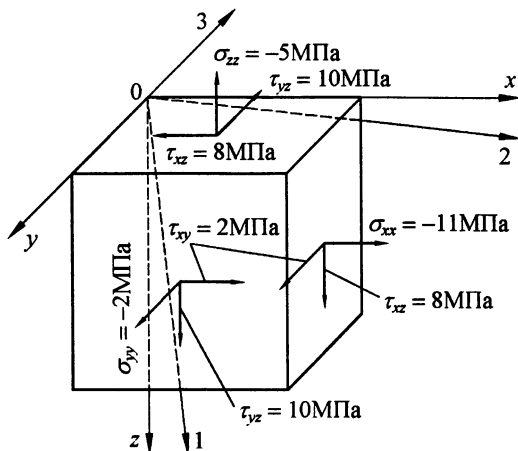


Рис. 1.41. Компоненти тензора напружень, які діють по гранях куба

Застосуємо рівняння (1.11):

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0.$$

За відповідними формулами параграфу 1.1.3 знайдемо коефіцієнти:

$$I_1 = -11 - 5 - 5 = -18 \text{ МПа},$$

$$I_2 = [(-11)(-2) - 2 \cdot 2] + [(-11)(-5) - 8 \cdot 8] + [(-2)(-5) - 10 \cdot 10] = -81 \text{ МПа}^2,$$

$$I_3 = (-11)(-2)(-5) + 8 \cdot 2 \cdot 10 + 8 \cdot 2 \cdot 10 - 8(-2)8 - (-11)10 \cdot 10 - (-5)2 \cdot 2 = 1458 \text{ МПа}^3.$$

Беручи до уваги, що  $\lambda = \sigma_{nn}$ , запишемо кубічне рівняння:

$$\sigma_{nn}^3 + 18\sigma_{nn}^2 - 81\sigma_{nn} - 1458 = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є три головних напруження:

$$\sigma_{11} = 9 \text{ МПа}, \quad \sigma_{22} = -9 \text{ МПа}, \quad \sigma_{33} = -18 \text{ МПа}.$$

Для знаходження напрямних косинусів головних напружень застосуємо систему рівнянь (1.10). Знову робимо заміну  $\lambda = \sigma_{nn}$ . Спочатку приймаємо

$$\lambda = \sigma_{11} = 9 \text{ МПа} :$$

$$\begin{cases} (-11-9)n_{x1} + 2n_{y1} + 8n_{z1} = 0, \\ 2n_{x1} + (-2-9)n_{y1} + 10n_{z1} = 0, \\ 8n_{x1} + 10n_{y1} + (-5-9)n_{z1} = 0, \\ n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + n_{z1}^2 = 1. \end{cases}$$

З перших трьох рівнянь незалежними є тільки два, тому залишаємо перші два та четверте рівняння:

$$\begin{cases} -20n_{x1} + 2n_{y1} + 8n_{z1} = 0, \\ 2n_{x1} - 11n_{y1} + 10n_{z1} = 0, \\ n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + n_{z1}^2 = 1. \end{cases}$$

Знаходимо:

$$n_{x1} = \frac{1}{3}, \quad n_{y1} = \frac{2}{3}, \quad n_{z1} = \frac{2}{3}.$$

Це — напрямні косинуси першого головного напруження  $\sigma_{11}$ .

Підставляємо по черзі у систему (1.10)  $\sigma_{22} = -9\text{МПа}$ ,  $\sigma_{33} = -18\text{МПа}$  і знаходимо напрямні косинуси другого та третього головних напружень.

Остаточо маємо:

$$\sigma_{11}: \quad n_{x1} = \frac{1}{3}, \quad n_{y1} = \frac{2}{3}, \quad n_{z1} = \frac{2}{3};$$

$$\sigma_{22}: \quad n_{x2} = \frac{2}{3}, \quad n_{y2} = -\frac{2}{3}, \quad n_{z2} = \frac{1}{3};$$

$$\sigma_{33}: \quad n_{x3} = \frac{2}{3}, \quad n_{y3} = \frac{1}{3}, \quad n_{z3} = -\frac{2}{3}.$$

Для перевірки потрібно переконатися в ортогональності головних напружень. Зробити це можна на підставі рівняння (1.12).

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \left( -\frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0,$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left( -\frac{2}{3} \right) = 0,$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}\right) = 0.$$

Головні напруження показані на рис. 1.42.

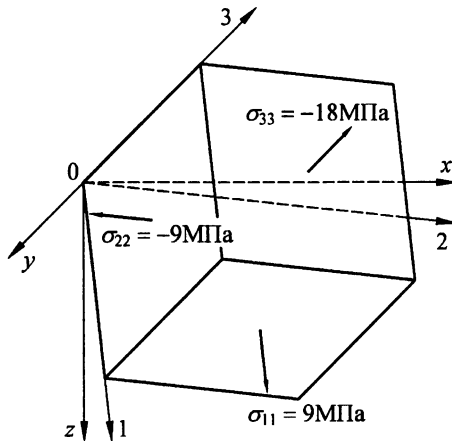


Рис. 1.42. Головні напруження, які діють по гранях куба

Орієнтація граней куба у цьому випадку відрізняється від положення граней куба, зображеного на рис. 1.41. Його грані перпендикулярні до головних напружень. Лінії, які паралельні головним напруженням, утворюють систему координат 0123. Положення цих координатних ліній відносно осей 0хуз показано на рис. 1.41.

Перейдемо до визначення екстремальних дотичних напружень. Формально це можна зробити, застосувавши формули (1.20) та (1.19), але для надання певних пояснень краще використати умови рівноваги елементів тіла. Вони мають вигляд трикутної призми (рис. 1.43, 1.44).

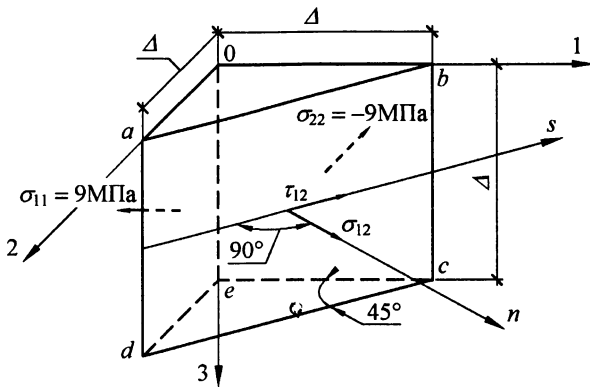


Рис. 1.43. Розташування екстремального дотичного напруження

Усі розміри призми є нескінченно малими величинами  $\Delta$ .

Складемо суму проекцій діючих напружень на лінію  $s$ , яка співпадає з напруженням  $\tau_{12}$ :

$$\tau_{12} \cdot \tilde{A} - \sigma_{11} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma_{22} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

де  $\tilde{A}$  — площа грані  $abcd$ ,  $\tilde{A} = \Delta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta + \Delta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta = \Delta^2 \sqrt{2}$ ,

$A$  — площа граней  $0ade$ ,  $0bce$ ,  $A = \Delta \cdot \Delta = \Delta^2$ .

Враховуючи значення  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $A$  та  $\tilde{A}$ , отримаємо:

$$\tau_{12} \cdot \Delta^2 \sqrt{2} - 9 \cdot \Delta^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-9) \cdot \Delta^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\tau_{12} = \frac{9 - (-9)}{2} = 9 \text{ МПа} .$$

Спроектуємо діючі напруження на нормаль  $n$ :

$$\sigma_{12} \cdot \tilde{A} - \sigma_{11} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sigma_{22} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sigma_{12} \cdot \Delta^2 \sqrt{2} - 9 \cdot \Delta^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-9) \cdot \Delta^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sigma_{12} = \frac{9 + (-9)}{2} = 0.$$

Розглянемо ще два елементи (рис. 1.44).

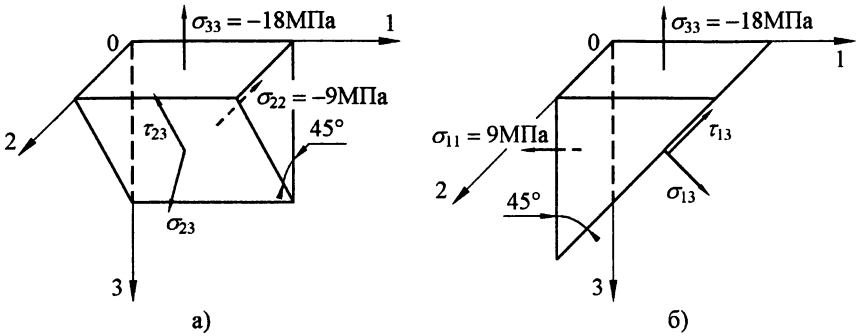


Рис. 1.44. Розташування двох інших дотичних напружень

Складаємо рівняння рівноваги на підставі рис. 1.44(а).

$$\tau_{23} \cdot \tilde{A} - \sigma_{22} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma_{33} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\tau_{23} \cdot \Delta^2 \sqrt{2} - (-9) \cdot \Delta^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-18) \cdot \Delta^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\tau_{23} = \frac{-9 - (-18)}{2} = 4,5 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{23} \cdot \tilde{A} - \sigma_{22} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sigma_{33} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sigma_{23} \cdot \Delta^2 \sqrt{2} - (-9) \cdot \Delta^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-18) \cdot \Delta^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sigma_{23} = \frac{-9 + (-18)}{2} = -13,5 \text{ МПа}.$$

Аналогічно за рис. 1.44(б).

$$\tau_{13} \cdot \tilde{A} - \sigma_{11} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma_{33} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$



$$\tau_{13} \cdot \Delta^2 \sqrt{2} - 9 \cdot \Delta^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-18) \cdot \Delta^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\tau_{13} = \frac{9 - (-18)}{2} = 13,5 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{13} \cdot \tilde{A} - \sigma_{11} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sigma_{33} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sigma_{13} \cdot \Delta^2 \sqrt{2} - 9 \cdot \Delta^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-18) \cdot \Delta^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sigma_{13} = \frac{9 + (-18)}{2} = -4,5 \text{ МПа}.$$

### 1.4.3. Приклад застосування кінематичних та фізичних співвідношень

Потрібно визначити напруження у точці просторового тіла за умови, що у цій точці відомі лінійні деформації у напрямку взаємно перпендикулярних ліній  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  та кутові деформації між ними (рис. 1.45). Напрявні косинуси ліній відомі:

$$s_1: n_{x1} = 1/3, \quad n_{y1} = 2/3, \quad n_{z1} = 2/3;$$

$$s_2: n_{x2} = 2/3, \quad n_{y2} = 1/3, \quad n_{z2} = -2/3;$$

$$s_3: n_{x3} = 2/3, \quad n_{y3} = -2/3, \quad n_{z3} = 1/3.$$

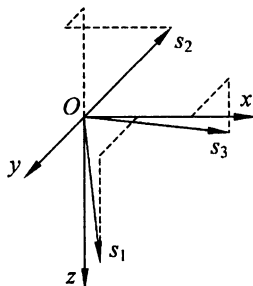


Рис. 1.45. Положення трьох ліній  $s_1$ ,  $s_2$  та  $s_3$ , у напрямку яких відомі деформації

Задані наступні значення деформацій:

$$\varepsilon_{s_1 s_1} = 1 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_{s_2 s_2} = 1 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_{s_3 s_3} = 2 \cdot 10^{-4},$$

$$\gamma_{s_1 s_2} = 1 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{s_1 s_3} = 2 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{s_2 s_3} = 1 \cdot 10^{-4}.$$

Задані наступні характеристики матеріалу:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0,2$ .

Застосувавши формули (1.41) та (1.42), складаємо систему рівнянь:

$$\varepsilon_{s_1 s_1} = \varepsilon_{xx} n_{x1}^2 + \varepsilon_{yy} n_{y1}^2 + \varepsilon_{zz} n_{z1}^2 + \gamma_{xy} n_{x1} n_{y1} + \gamma_{xz} n_{x1} n_{z1} + \gamma_{yz} n_{y1} n_{z1},$$

$$\varepsilon_{s_2 s_2} = \varepsilon_{xx} n_{x2}^2 + \varepsilon_{yy} n_{y2}^2 + \varepsilon_{zz} n_{z2}^2 + \gamma_{xy} n_{x2} n_{y2} + \gamma_{xz} n_{x2} n_{z2} + \gamma_{yz} n_{y2} n_{z2},$$

$$\varepsilon_{s_3 s_3} = \varepsilon_{xx} n_{x3}^2 + \varepsilon_{yy} n_{y3}^2 + \varepsilon_{zz} n_{z3}^2 + \gamma_{xy} n_{x3} n_{y3} + \gamma_{xz} n_{x3} n_{z3} + \gamma_{yz} n_{y3} n_{z3},$$

$$\gamma_{s_1 s_2} = 2\varepsilon_{xx} n_{x1} n_{x2} + 2\varepsilon_{yy} n_{y1} n_{y2} + 2\varepsilon_{zz} n_{z1} n_{z2} +$$

$$+ \gamma_{xy} (n_{x1} n_{y2} + n_{x2} n_{y1}) + \gamma_{xz} (n_{x1} n_{z2} + n_{x2} n_{z1}) + \gamma_{yz} (n_{y1} n_{z2} + n_{y2} n_{z1}),$$

$$\gamma_{s_1 s_3} = 2\varepsilon_{xx} n_{x1} n_{x3} + 2\varepsilon_{yy} n_{y1} n_{y3} + 2\varepsilon_{zz} n_{z1} n_{z3} +$$

$$+ \gamma_{xy} (n_{x1} n_{y3} + n_{x3} n_{y1}) + \gamma_{xz} (n_{x1} n_{z3} + n_{x3} n_{z1}) + \gamma_{yz} (n_{y1} n_{z3} + n_{y3} n_{z1}),$$

$$\gamma_{s_2 s_3} = 2\varepsilon_{xx} n_{x2} n_{x3} + 2\varepsilon_{yy} n_{y2} n_{y3} + 2\varepsilon_{zz} n_{z2} n_{z3} +$$

$$+ \gamma_{xy} (n_{x2} n_{y3} + n_{x3} n_{y2}) + \gamma_{xz} (n_{x2} n_{z3} + n_{x3} n_{z2}) + \gamma_{yz} (n_{y2} n_{z3} + n_{y3} n_{z2}).$$

Підставимо числові значення деформацій та напрямних косинусів:

$$1 \cdot 10^{-4} = \varepsilon_{xx} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \varepsilon_{yy} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \varepsilon_{zz} \left(\frac{2}{3}\right)^2 +$$

$$+ \gamma_{xy} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \gamma_{xz} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \gamma_{yz} \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3},$$

$$1 \cdot 10^{-4} = \varepsilon_{xx} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \varepsilon_{yy} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \varepsilon_{zz} \left(\frac{-2}{3}\right)^2 +$$

$$+ \gamma_{xy} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \gamma_{xz} \frac{2}{3} \cdot \frac{-2}{3} + \gamma_{yz} \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3},$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot 10^{-4} &= \varepsilon_{xx} \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \varepsilon_{yy} \left( \frac{-2}{3} \right)^2 + \varepsilon_{zz} \left( \frac{1}{3} \right)^2 + \\
&+ \gamma_{xy} \frac{2}{3} \cdot \frac{-2}{3} + \gamma_{xz} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \gamma_{yz} \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{3}, \\
1 \cdot 10^{-4} &= 2\varepsilon_{xx} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 2\varepsilon_{yy} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2\varepsilon_{zz} \frac{2}{3} \cdot \frac{-2}{3} + \\
&+ \gamma_{xy} \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + \gamma_{xz} \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + \gamma_{yz} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right), \\
2 \cdot 10^{-4} &= 2\varepsilon_{xx} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 2\varepsilon_{yy} \frac{2}{3} \cdot \frac{-2}{3} + 2\varepsilon_{zz} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \\
&+ \gamma_{xy} \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + \gamma_{xz} \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + \gamma_{yz} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right), \\
1 \cdot 10^{-4} &= 2\varepsilon_{xx} \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + 2\varepsilon_{yy} \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3} + 2\varepsilon_{zz} \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \\
&+ \gamma_{xy} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{-2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + \gamma_{xz} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{-2}{3} \right) + \gamma_{yz} \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{-2}{3} \cdot \frac{-2}{3} \right).
\end{aligned}$$

Маємо систему шести рівнянь, до якої увійшли шість невідомих:  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,

$\varepsilon_{zz}$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ . Розв'язавши систему, знайдемо:

$$\varepsilon_{xx} = 2,555559 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{xy} = -0,111111 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_{yy} = 0,555556 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{xz} = 1,555556 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_{zz} = 0,888889 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{yz} = -0,555556 \cdot 10^{-4}.$$

Далі застосуємо закон Гука (1.60).

Спочатку знайдемо

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = (2,555559 + 0,555556 + 0,888889)10^{-4} = 4,000004 \cdot 10^{-4},$$

що співпадає із сумою

$$\varepsilon_{s_1 s_1} + \varepsilon_{s_2 s_2} + \varepsilon_{s_3 s_3} = (1 + 1 + 2)10^{-4} = 4 \cdot 10^{-4}.$$

Знайдемо також

$$\frac{\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \frac{0,2}{1-2 \cdot 0,2} 4 \cdot 10^{-4} = 1,333333 \cdot 10^{-4}.$$

За формулою (1.60) отримаємо:

$$\sigma_{xx} = \frac{2 \cdot 10^5}{1+0,2} (2,555559 + 1,333333) 10^{-4} = 64,814867 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{yy} = \frac{2 \cdot 10^5}{1+0,2} (0,555556 + 1,333333) 10^{-4} = 31,481483 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2 \cdot 10^5}{1+0,2} (0,888889 + 1,333333) 10^{-4} = 37,037033 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xy} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0,2)} (-0,111111) 10^{-4} = -1,851851 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xz} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0,2)} 1,555556 \cdot 10^{-4} = 25,925925 \text{ МПа},$$

$$\tau_{yz} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0,2)} (-0,555556) 10^{-4} = -9,259259 \text{ МПа}.$$

Тензор напружень у точці  $O$  має вигляд:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 64,82 & -1,852 & 25,93 \\ -1,852 & 31,48 & -9,259 \\ 25,93 & -9,259 & 37,04 \end{bmatrix} \text{ МПа}.$$

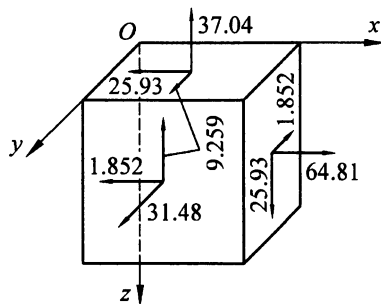


Рис. 1.46. Зображення компонент тензора напружень, що виникають у точці  $O$

### 1.4.4. Приклад визначення напружень, деформацій та переміщень у циліндричному тілі

Розглянемо циліндричне тіло (рис. 1.47).

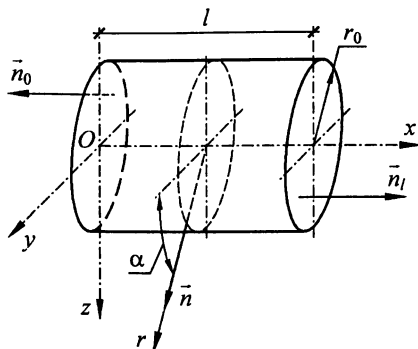


Рис. 1.47. Циліндричне тіло, розрахунок якого буде зроблено

Поверхня тіла обмежена двома площинами  $x=0$  та  $x=l$ , а також циліндричною поверхнею  $y^2 + z^2 = r_0^2$ . Проведемо через довільні точки кожної з цих площин нормалі  $\vec{n}_0$ ,  $\vec{n}_l$  та  $\vec{n}$  і визначимо їх напрямні косинуси.

$$\vec{n}_0: n_{x0} = -1, \quad n_{y0} = 0, \quad n_{z0} = 0;$$

$$\vec{n}_l: n_{xl} = 1, \quad n_{yl} = 0, \quad n_{zl} = 0;$$

$$\vec{n}: n_x = 0, \quad n_y = \cos \alpha, \quad n_z = \sin \alpha.$$

До торцевих площин прикладені три види навантаження (рис. 1.48).

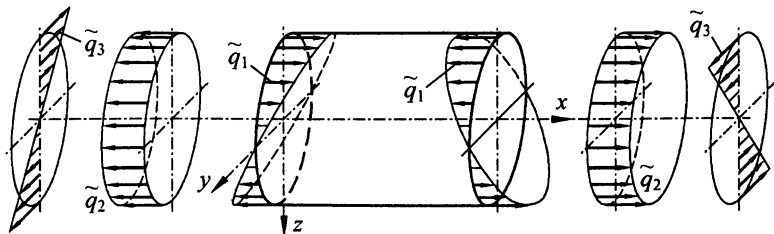


Рис. 1.48. Навантаження, що діють на тіло

Навантаження  $\tilde{q}_1$  паралельне осі  $Ox$  і змінюється за законом площини, яка повернута навколо осі  $Oy$ . Його вираз має вигляд  $\tilde{q}_1(z) = q_1 \frac{z}{r_0}$ .

Навантаження  $\tilde{q}_2$  паралельне осі  $Ox$  та рівномірно розподілене по торцевих площинах тіла:  $\tilde{q}_2 = q_2 = \text{const}$ .

Навантаження  $\tilde{q}_3$  розташовано у торцевих площинах, воно перпендикулярне до радіуса круга і змінюється за лінійним законом  $\tilde{q}_3(r) = q_3 \frac{r}{r_0}$  у полярній системі координат.

Складові головного вектора та моменту цих навантажень дорівнюють таким величинам:

$$R_x = \iint_A q_2 dA = q_2 \pi r^2, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0,$$

$$M_x = \iint_A q_3 \frac{r}{r_0} r dA = \frac{q_3 \pi r_0^3}{2},$$

$$M_y = \iint_A q_1 \frac{z}{r_0} z dA = \frac{q_1 \pi r_0^3}{4}, \quad M_z = 0.$$

Кожне з трьох навантажень має одну складову головного вектора або моменту. Вони показані на рис. 1.49.

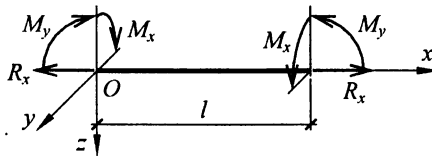


Рис. 1.49. Розрахункова лінійна модель циліндричного тіла

Для розрахунку циліндричного тіла, що розглядається, можна застосувати два варіанти. Перший передбачає врахування одразу усіх трьох навантажень. Другий базується на принципі незалежності дії навантаження. Він дозволяє

робити розрахунок окремо на кожне навантаження, а потім скласти отримані три результати. Застосуємо другий варіант.

Для розрахунку використовуємо зворотний метод. Він заснований на початковому вигадуванні розв'язку, який повинен задовольняти усім залежностям та умовам.

Почнемо з розрахунку на навантаження  $\tilde{q}_1$ . Приймаємо такі значення напружень для всіх точок тіла:

$$\sigma_{xx} = \tilde{q}_1 = q_1 \frac{z}{r_0}, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Починаємо перевірку з умов рівноваги (1.58). Підставляючи прийняті значення напружень у рівняння рівноваги, переконуємося, що всі вони задовольняються. Далі перевіряємо граничні умови (1.24). Розглядаємо три ділянки поверхні тіла.

При  $x = 0$

$$q_{xn} = -q_1 \frac{z}{r_0}, \quad q_{yn} = q_{zn} = 0, \quad n_{x0} = -1, \quad n_{y0} = n_{z0} = 0.$$

Підставляємо ці величини у рівняння (1.24):

$$-q_1 \frac{z}{r_0} = q_1 \frac{z}{r_0} (-1),$$

$$0 = 0,$$

$$0 = 0,$$

тобто у площині  $x = 0$  усі граничні умови виконуються.

При  $x = l$

$$q_{xn} = q_1 \frac{z}{r_0}, \quad q_{yn} = q_{zn} = 0, \quad n_{xl} = 1, \quad n_{yl} = n_{zl} = 0.$$

Підставляємо ці величини у рівняння (1.24):

$$q_1 \frac{z}{r_0} = q_1 \frac{z}{r_0} \cdot 1,$$

$$0 = 0,$$

$$0 = 0.$$

У площині  $x = l$  усі граничні умови виконуються.

На боковій циліндричній поверхні

$$q_{xn} = q_{yn} = q_{zn} = 0, \quad n_x = 0, \quad n_y = \cos \alpha, \quad n_z = \sin \alpha.$$

Враховуючи ці значення в граничних умовах (1.24), отримаємо:

$$0 = q_1 \cdot 0,$$

$$0 = 0 \cdot \cos \alpha,$$

$$0 = 0 \cdot \sin \alpha.$$

Отже, прийняті напруження повністю задовольняють усі необхідні залежності. Крім напружень, потрібно визначити деформації та переміщення.

За формулами (1.53) знайдемо:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} q_1 \frac{z}{r_0}, \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{\mu}{E} q_1 \frac{z}{r_0}, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\mu}{E} q_1 \frac{z}{r_0},$$

$$\gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0.$$

Після чого на підставі формул (1.59) запишемо:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{E} q_1 \frac{z}{r_0}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\mu}{E} q_1 \frac{z}{r_0}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\mu}{E} q_1 \frac{z}{r_0},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

Інтегруючи перші три залежності, будемо мати:

$$u_x(x, y, z) = \int \frac{1}{E} q_1 \frac{z}{r_0} dx + f_1(y, z) = \frac{1}{E} q_1 \frac{z}{r_0} x + f_1(y, z),$$

$$u_y(x, y, z) = \int -\frac{\mu}{E} q_1 \frac{z}{r_0} dy + f_2(x, z) = -\frac{\mu}{E} q_1 \frac{z}{r_0} y + f_2(x, z),$$



$$u_z(x, y, z) = \int \frac{-\mu}{E} q_1 \frac{z}{r_0} dz + f_3(x, y) = -\frac{\mu}{E} q_1 \frac{z^2}{2r_0} + f_3(x, y).$$

Довільні додатки  $f_1(y, z)$ ,  $f_2(x, z)$ ,  $f_3(x, y)$  є функціями двох змінних. У цьому випадку довільні додатки залежать від двох змінних, за якими не відбувається інтегрування. Для їх визначення потрібно використати кутові деформації, які дорівнюють нулю, що дозволяє скласти три рівняння. Складання та розв'язок цих рівнянь розглянемо у кінці прикладу, а зараз використаємо їх остаточні значення, внаслідок чого отримаємо:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= \frac{q_1}{E} \cdot \frac{xz}{r_0}, \\ u_y(x, y, z) &= -\frac{\mu q_1}{E} \cdot \frac{yz}{r_0}, \\ u_z(x, y, z) &= -\frac{q_1}{2Er_0} (x^2 - \mu y^2 + \mu z^2). \end{aligned} \tag{1.87}$$

Проаналізувавши ці вирази, можна встановити характер деформування тіла (рис. 1.50).

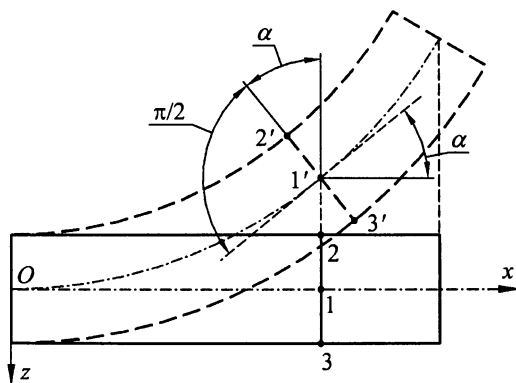


Рис. 1.50. Вигляд деформованого тіла

Відзначимо деякі особливості деформування тіла. Поздовжня вісь і тіло згинаються у площині  $xOz$ . Деформована поздовжня вісь приймає форму

квадратної параболи. Точки, які розташовані на осі  $Ox$ , переміщуються тільки у напрямку осі  $Oz$ . Поперечний переріз тіла, перпендикулярний до поздовжньої осі, після деформування залишається площиною перпендикулярною до деформованої поздовжньої осі. Він повертається навколо осі  $Oy$  на кут  $\alpha$ . На такий же кут повертається дотична до деформованої поздовжньої осі.

Розглянемо розрахунок на друге навантаження  $\tilde{q}_2 = q_2 = \text{const}$ . Алгоритм розв'язання абсолютно подібний попередньому. Приймаємо напруження:

$$\sigma_{xx} = q_2, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Як у попередньому розв'язанні, підставляємо ці значення в рівняння рівноваги (1.58) та граничні умови (1.24). Переконаємося, що вони задовольняються. Далі за формулами (1.53) визначаємо деформації:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} q_2, \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{\mu}{E} q_2, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\mu}{E} q_2, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

Інтегруючи вирази для лінійних деформацій, знаходимо переміщення:

$$u_x(x, y, z) = \frac{1}{E} q_2 x + f_1(y, z),$$

$$u_y(x, y, z) = -\frac{\mu}{E} q_2 y + f_2(x, z),$$

$$u_z(x, y, z) = -\frac{\mu}{E} q_2 z + f_3(y, z).$$

Для знаходження невідомих додатків  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  складаємо систему рівнянь, підставляючи переміщення у вирази для кутових деформацій, які дорівнюють нулю. Після визначення невідомих додатків будемо мати:

$$u_x(x, y, z) = \frac{q_2}{E} x,$$

$$u_y(x, y, z) = -\frac{\mu q_2}{E} y,$$

$$u_z(x, y, z) = -\frac{\mu q_2}{E} z.$$

Розглянемо розрахунок на третє навантаження  $\tilde{q}_3 = q_3 \frac{r}{r_0}$ . Послідовність

розв'язання аналогічна попереднім. Приймаємо:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{q_3}{r_0} z, \quad \tau_{xz} = \frac{q_3}{r_0} y, \quad \tau_{yz} = 0.$$

Повне дотичне напруження  $\tau_{sx}$  дорівнює:

$$\tau_{sx} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{q_3}{r_0} r.$$

Прийняті напруження задовольняють рівнянням рівноваги (1.58) та граничним умовам (1.24). Після чого за формулами (1.53) та (1.59) визначаємо:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{q_3}{r_0} z,$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{q_3}{r_0} y,$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

Маючи ці залежності, знайдемо переміщення:

$$u_x(y, z) = 0,$$

$$u_y(y, z) = -\frac{q_3}{G} \cdot \frac{yz}{r_0},$$

$$u_z(y, z) = \frac{q_3}{G} \cdot \frac{yz}{r_0}.$$

Загальне переміщення  $u_s$ , перпендикулярне до радіуса, буде дорівнювати:

$$u_s = \sqrt{u_y^2 + u_z^2} = \frac{\sqrt{2}}{G} q_3 \frac{yz}{r_0}.$$

Підсумуємо результати прикладу. В першу чергу визначимо напруження і переміщення від сумарної дії трьох навантажень. Враховуючи незалежність дії навантажень потрібно додати результати розрахунків від кожного навантаження, внаслідок чого будемо мати:

$$\sigma_{xx} = q_1 \frac{z}{r_0} + q_2, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0,$$

$$\tau_{xy} = -q_3 \frac{z}{r_0}, \quad \tau_{xz} = q_3 \frac{y}{r_0}, \quad \tau_{yz} = 0.$$

$$u_x = \frac{1}{E} \left( q_1 \frac{xz}{r_0} + q_2 x \right),$$

$$u_y = \frac{1}{E} \left[ -\mu q_1 \frac{xz}{r_0} - \mu q_2 y - 2q_3 (1 + \mu) \frac{yz}{r_0} \right],$$

$$u_z = \frac{1}{E} \left[ -\frac{q_1}{2r_0} (x^2 - \mu y^2 + \mu z^2) - \mu q_2 z + 2q_3 (1 + \mu) \frac{yz}{r_0} \right].$$

У даному прикладі отримано точний розв'язок для просторового тіла. Можливість такого розв'язку виникла завдяки простій формі тіла і простому навантаженню. Якщо форму тіла або навантаження ускладнити, то отримати точний розв'язок не вдасться. Тому для різних форм тіла розроблені окремі методики. Найбільш простою є методика розрахунку стержня. Розтягнуте циліндричне тіло може розраховуватися як стержень, якщо його довжина у декілька разів більше діаметра. Отриманий розв'язок дозволяє встановити точність методики розрахунку стержня.

А тепер, як і було сказано раніше, розглянемо детальніше методику визначення переміщень. Зробимо це на прикладі виведення формул (1.87), що описують переміщення тіла при дії на нього першого навантаження  $\tilde{q}_1$ . Від цього навантаження були знайдені вирази для переміщень:

$$u_x(x, y, z) = \frac{q_1}{E} \cdot \frac{xz}{r_0} + f_1(y, z),$$

$$u_y(x, y, z) = -\frac{\mu q_1}{E} \cdot \frac{yz}{r_0} + f_2(x, z),$$

$$u_z(x, y, z) = -\frac{\mu q_1}{E} \cdot \frac{z^2}{2r_0} + f_3(x, y).$$

Потрібно визначити невідомі функції  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ . Для цього використаємо три умови:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0,$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0,$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

Підставимо сюди вирази для перемішень:

$$\frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x, z)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial f_3(x, y)}{\partial x} + \frac{q_1}{E} \cdot \frac{x}{r_0} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial f_3(x, y)}{\partial y} - \frac{\mu q_1}{E} \cdot \frac{y}{r_0} = 0.$$

У перше рівняння увійшли дві невідомі функції, кожна з яких залежить від двох змінних. Одна з них, а саме  $z$ , загальна, а інші дві різні. Сума цих двох функцій дорівнює нулю, тобто вони між собою рівні, тільки мають різні знаки. Це можливо лише за умови, що вони не залежать від різних змінних, тому можна прирівняти кожен з них до певної функції, яка залежить від однієї загальної змінної. Аналогічні умови повинні виконуватися і в двох інших рівняннях. Вказані функції записані безпосередньо у системі рівнянь. Виконання зазначених умов дозволяє записати:

$$\frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} = \varphi(z), \quad \frac{\partial f_2(x, z)}{\partial x} = -\varphi(z),$$

$$\frac{\partial f_1(y, z)}{\partial z} = \psi(y), \quad \frac{\partial f_3(x, y)}{\partial x} + \frac{q_1}{E} \cdot \frac{x}{r_0} = -\psi(y),$$

$$\frac{\partial f_2(x, z)}{\partial z} = \omega(x), \quad \frac{\partial f_3(x, y)}{\partial y} - \frac{\mu q_1}{E} \cdot \frac{y}{r_0} = -\omega(x).$$

Інтегруючи ці залежності, отримаємо:

$$f_1(y, z) = \varphi(z) \cdot y + \varphi_1(z), \quad f_2(x, z) = -\varphi(z) \cdot x + \varphi_2(z),$$

$$f_1(y, z) = \psi(y) \cdot z + \psi_1(y), \quad f_3(x, y) = -\psi(y) \cdot x - \frac{q_1}{E} \cdot \frac{x^2}{2r_0} + \psi_3(y),$$

$$f_2(x, z) = \omega(x) \cdot z + \omega_2(x), \quad f_3(x, y) = -\omega(x) \cdot y + \frac{\mu q_1}{E} \cdot \frac{y^2}{2r_0} + \omega_3(x).$$

Порівняємо однакові функції, складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y\varphi(z) + \varphi_1(z) = z\psi(y) + \psi_1(y), \\ -x\varphi(z) + \varphi_2(z) = z\omega(x) + \omega_2(x), \\ -x\psi(y) - \frac{q_1}{E} \cdot \frac{x^2}{2r_0} + \psi_3(y) = -y\omega(x) + \frac{\mu q_1}{E} \cdot \frac{y^2}{2r_0} + \omega_3(x). \end{cases}$$

Почнемо з третього рівняння. Порівнюючи ліву і праву частини, можна записати:

$$\psi_3(y) = -y\omega(x) + \frac{\mu q_1}{E} \cdot \frac{y^2}{2r_0},$$

$$\omega_3(x) = -x\psi(y) - \frac{q_1}{E} \cdot \frac{x^2}{2r_0}.$$

Характерною особливістю цих залежностей та двох перших рівнянь є те, що рівні між собою ліві та праві їх частини залежать від різних змінних. Для усунення цього протиріччя необхідно всі невідомі функції прийняти рівними константам, крім двох функцій  $\psi_3(y)$  та  $\omega_3(x)$ . Враховуючи сказане і виконуючи вимоги рівнянь, приймаємо:

$$\varphi(z) = \alpha, \quad \psi(y) = \beta, \quad \omega(x) = \gamma,$$

$$\varphi_1(z) = \beta z, \quad \psi_1(y) = \alpha y,$$

$$\varphi_2(z) = \gamma z, \quad \omega_2(x) = -\alpha x.$$

У цих виразах  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  це невідомі константи.

На підставі прийнятих залежностей визначасмо всі необхідні величини:

$$\psi_3(y) = -\gamma y + \frac{\mu q_1}{E} \cdot \frac{y^2}{2r_0}, \quad \omega_3(x) = -\beta x - \frac{q_1}{E} \cdot \frac{x^2}{2r_0},$$

$$f_1(y, z) = \alpha y + \beta z,$$

$$f_2(x, z) = -\alpha x + \gamma z,$$

$$f_3(x, y) = -\gamma y - \beta x - \frac{q_1}{E} \cdot \frac{x^2}{2r_0} + \frac{\mu q_1}{E} \cdot \frac{y^2}{2r_0}.$$

Підставимо ці залежності у вирази для переміщень:

$$u_x(x, y, z) = \frac{q_1}{E} \cdot \frac{xz}{r_0} + \alpha y + \beta z,$$

$$u_y(x, y, z) = -\frac{\mu q_1}{E} \cdot \frac{yz}{r_0} - \alpha x + \gamma z,$$

$$u_z(x, y, z) = -\frac{\mu q_1}{E} \cdot \frac{z^2}{2r_0} - \gamma y - \beta x - \frac{q_1}{E} \cdot \frac{x^2}{2r_0} + \frac{\mu q_1}{E} \cdot \frac{y^2}{2r_0}.$$

Якщо за цими виразами для переміщень визначити деформації, то вони не будуть залежати від констант  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Це свідчить про те, що константи впливають тільки на жорстке переміщення тіла і не впливають на деформації. Відповідно їх можна не враховувати, тобто прийняти рівними нулю. Вказане дозволяє скласти остаточний вираз для переміщень:

$$u_x(x, y, z) = \frac{q_1}{E} \cdot \frac{xz}{r_0},$$

$$u_y(x, y, z) = -\frac{\mu q_1}{E} \cdot \frac{yz}{r_0},$$

$$u_z(x, y, z) = -\frac{q_1}{2Er_0} (x^2 - \mu y^2 + \mu z^2).$$

### 1.4.5. Приклад перевірки міцності

Зробимо перевірку тіла, що розглядалося у прикладі 1.4.4, на міцність. Врахуємо одночасно усі три навантаження. Приймаємо такі значення навантажень:  $q_1 = 600 \text{ кН/м}^2$ ,  $q_2 = 400 \text{ кН/м}^2$ ,  $q_3 = 600 \text{ кН/м}^2$ .

Напруження будуть дорівнювати:

$$\sigma_{xx} = q_1 \frac{z}{r_0} + q_2 = \left( 600 \frac{z}{r_0} + 400 \right) \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} = \left( 600 \frac{z}{r_0} + 400 \right) \cdot 10^{-3} \text{ МПа} ,$$

$$\tau_{xy} = -q_3 \frac{z}{r_0} = -600 \frac{z}{r_0} \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} = -600 \frac{z}{r_0} 10^{-3} \text{ МПа} ,$$

$$\tau_{xz} = q_3 \frac{y}{r_0} = 600 \frac{y}{r_0} \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} = 600 \frac{y}{r_0} 10^{-3} \text{ МПа} .$$

Установимо точку тіла, в якій напруження досягають максимальних значень. Аналізуючи вирази для напружень, можна зробити висновок, що вони не залежать від координати  $x$ , тобто, у будь-якому поперечному перерізі тіла напруження будуть однакові. Тому потрібно розглянути один переріз (рис. 1.51).

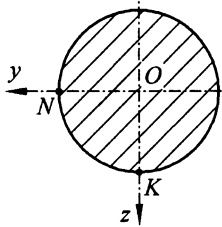


Рис. 1.51. Поперечний переріз, в якому перевіряється міцність

Знову розглядаючи вирази для напружень, робимо висновок, що максимальні напруження виникають у точках, де координати  $z$  та  $y$  мають найбільші значення. Такими точками є  $K$  та  $N$ . Знайдемо у них значення напружень.



$$\sigma_{xx}^K = \left( 600 \frac{r_0}{r_0} + 400 \right) 10^{-3} = 1 \text{ МПа} .$$

$$\tau_{xy}^K = -600 \frac{r_0}{r_0} 10^{-3} = -0,6 \text{ МПа} .$$

$$\tau_{xz}^K = 600 \frac{0}{r_0} 10^{-3} = 0 .$$

$$\sigma_{xx}^N = \left( 600 \frac{0}{r_0} + 400 \right) 10^{-3} = 0,4 \text{ МПа} .$$

$$\tau_{xy}^N = -600 \frac{0}{r_0} 10^{-3} = 0 .$$

$$\tau_{xz}^N = 600 \frac{r_0}{r_0} 10^{-3} = 0,6 \text{ МПа} .$$

Порівнюючи значення напружень у цих точках, бачимо, що найбільші напруження виникають у точці  $K$ , тому перевірку на міцність потрібно виконати саме у ній. Складемо тензор напружень у точці  $K$ :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & -0,6 & 0 \\ -0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ МПа} .$$

Відмітимо, що всі напруження розташовані у площині, перпендикулярній до осі  $Oz$ .

Враховуючи значення компонент тензора напружень, знайдемо коефіцієнти кубічного рівняння.

$$I_1 = 1, \quad I_2 = -(-0,6)(-0,6) = -0,36, \quad I_3 = 0 .$$

Запишемо кубічне рівняння:

$$\sigma_{nn}^3 - I_1 \sigma_{nn}^2 + I_2 \sigma_{nn} - I_3 = 0 ,$$

$$\sigma_{nn}^3 - 1 \cdot \sigma_{nn}^2 + (-0,36) \sigma_{nn} - 0 = 0 ,$$

$$\sigma_{nn} (\sigma_{nn}^2 - \sigma_{nn} - 0,36) = 0 .$$

Один корінь цього рівняння дорівнює нулю, два інших знайдемо з квадратного рівняння.

$$\sigma_{nn}^2 - \sigma_{nn} - 0,36 = 0,$$

$$\sigma_{nn} = 0,5 \pm 0,781.$$

Остаточо маємо три головні напруження:

$$\sigma_{11} = 1,281 \text{ МПа}, \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{33} = -0,281 \text{ МПа}.$$

Визначимо їх напрямні косинуси.

$$\begin{cases} (1 - 1,281)n_{x1} - 0,6n_{y1} + 0 \cdot n_{z1} = 0, \\ -0,6n_{x1} + (0 - 1,281)n_{y1} + 0 \cdot n_{z1} = 0, \\ 0 \cdot n_{x1} + 0 \cdot n_{y1} + (0 - 1,281)n_{z1} = 0, \\ n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + n_{z1}^2 = 1. \end{cases}$$

Звідси знайдемо:  $n_{x1} = 0,905$ ,  $n_{y1} = 0,424$ ,  $n_{z1} = 0$ .

$$\begin{cases} (1 - 0)n_{x2} - 0,6n_{y2} + 0 \cdot n_{z2} = 0, \\ -0,6n_{x2} + (0 - 0)n_{y2} + 0 \cdot n_{z2} = 0, \\ 0 \cdot n_{x2} + 0 \cdot n_{y2} + (0 - 0)n_{z2} = 0, \\ n_{x2}^2 + n_{y2}^2 + n_{z2}^2 = 1. \end{cases}$$

Будемо мати:  $n_{x2} = 0$ ,  $n_{y2} = 0$ ,  $n_{z2} = 1$ .

$$\begin{cases} (1 + 0,281)n_{x3} - 0,6n_{y3} + 0 \cdot n_{z3} = 0, \\ -0,6n_{x3} + (0 + 0,281)n_{y3} + 0 \cdot n_{z3} = 0, \\ 0 \cdot n_{x3} + 0 \cdot n_{y3} + (0 + 0,281)n_{z3} = 0, \\ n_{x3}^2 + n_{y3}^2 + n_{z3}^2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язком системи є значення:  $n_{x3} = -0,242$ ,  $n_{y3} = 0,905$ ,  $n_{z3} = 0$ .

Перше та третє головні напруження розташовані у площині, перпендикулярній до осі  $Oz$ , під певними кутами до осей  $Ox$  та  $Oy$ . Друге

головне напруження перпендикулярне до цієї ж площини, але його значення дорівнює нулю.

Нарисуємо проекцію частини тіла на площину  $xOy$  і зобразимо головні напруження (рис. 1.52).

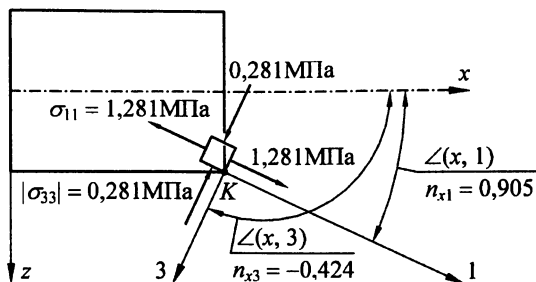


Рис. 1.52. Головні напруження, що виникають у точці  $K$  поперечного перерізу

Для перевірки міцності потрібно обрати одну з теорій міцності і знайти відповідне до неї значення  $\sigma_{екв}$ . Застосуємо третю та четверту теорії міцності.

За формулою (1.80) знайдемо  $\sigma_{екв}^{III}$ , яке відповідає третій теорії міцності.

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_{11} - \sigma_{33} = 1,281 - (-0,281) = 1,562 \text{ МПа} .$$

За формулою (1.81) знайдемо  $\sigma_{екв}^{IV}$ .

$$\sigma_{екв}^{IV} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(1,281 - 0)^2 + (1,281 + 0,281)^2 + (0 + 0,281)^2} = 1,442 \text{ МПа} .$$

Далі потрібно отримані значення  $\sigma_{екв}$  порівняти з допустимим напруженням. Припустимо, воно дорівнює  $\sigma_{adm} = 3 \text{ МПа}$ . За формулою (1.84) запишемо:

$$\sigma_{екв}^{III} = 1,562 \text{ МПа} < 3 \text{ МПа} = \sigma_{adm} ,$$

$$\sigma_{екв}^{IV} = 1,442 \text{ МПа} < 3 \text{ МПа} = \sigma_{adm} .$$

Таким чином за обома теоріями міцності умова міцності задовольняється.

## Розділ 2. НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН СТЕРЖНЯ

### Глава 2.1. Загальні поняття тіла, що має форму стержня, його геометричні характеристики та статичні співвідношення

#### 2.1.1. Загальні поняття і гіпотези

У попередньому розділі отримано всі необхідні рівняння і залежності для визначення напружено-деформованого стану просторового тіла довільної форми. Але їх складний характер не дає можливості здійснити їх загальний розв'язок, тому виникає потреба у розробці методів їх спрощення. Найбільш ефективним є застосування додаткових гіпотез, які враховують специфіку форми тіла. Найбільш простою і в той же час найбільш розповсюдженою формою тіла є стержень.

Стержень — це тіло, яке має форму, отриману за рахунок переміщення довільної плоскої фігури вздовж деякої лінії — осі стержня. Вказана плоска фігура, що має назву поперечного перерізу, при переміщенні постійно залишається перпендикулярною до осі стержня, а її центр ваги співпадає з віссю. Розміри поперечного перерізу повинні бути у декілька разів меншими, чим довжина стержня. Вісь стержня може бути прямолінійною, криволінійною, ламаною та ін.

На рис. 2.1 зображено прямолінійний стержень постійного поперечного перерізу. Вказана на рисунку система координат буде постійно застосовуватися далі. Вісь  $Ox$  співпадає з віссю стержня, а поперечний переріз паралельний площині  $yOz$ .

Характерною особливістю стержня є переважання довжини  $l$  над розмірами поперечного перерізу:

$$l \gg h, \quad l \gg b.$$

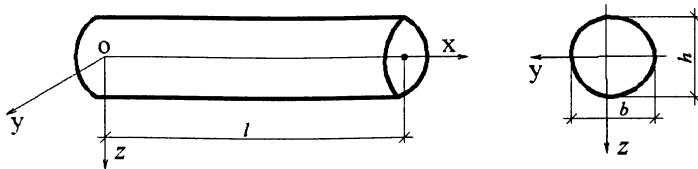


Рис. 2.1. Просторове тіло, що має форму стержня

Вказане співвідношення дає можливість зробити припущення, що поздовжні деформації і напруження, які виникають у стержні, значно більші поперечних деформацій і напружень. Це підтверджується й експериментально. Тому в основу методики розрахунку стержня покладені наступні додаткові гіпотези:

1. Гіпотеза недеформованості поперечного перерізу.

Поперечний переріз стержня не деформується у своїй площині. Це дає можливість стверджувати:

$$\varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0.$$

2. Гіпотеза плоских перерізів.

Поперечний переріз, перпендикулярний осі стержня до деформування, залишається перпендикулярним осі й після деформування.

3. Нормальні напруження, які перпендикулярні осі стержня, суттєво менше нормального напруження, паралельного осі стержня, тобто:

$$\sigma_{yy} \ll \sigma_{xx}, \quad \sigma_{zz} \ll \sigma_{xx}.$$

Далі напруження  $\sigma_{yy}$  та  $\sigma_{zz}$  будемо приймати рівними нулю.

На підставі прийнятих припущень можна скласти тензор напружень стержня у такому вигляді:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогічну структуру має і тензор деформацій:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Прийняті гіпотези не є абсолютно достовірними, вони мають деякі розбіжності. Але експериментальні та розрахункові перевірки підтверджують можливість застосовувати, засновану на них, методику для розрахунку стержневих конструкцій.

### 2.1.2. Геометричні характеристики плоских фігур

Беручи до уваги те, що в основі утворення стержня знаходиться плоска фігура довільної форми, потрібно зупинитися на її геометричних характеристиках. Вони увійдуть у розрахункові формули, які будуть отримані далі.

Почнемо з введення узагальненого поняття, яке називається моментом площі плоскої фігури різного степеня відносно координатних осей (рис. 2.2).

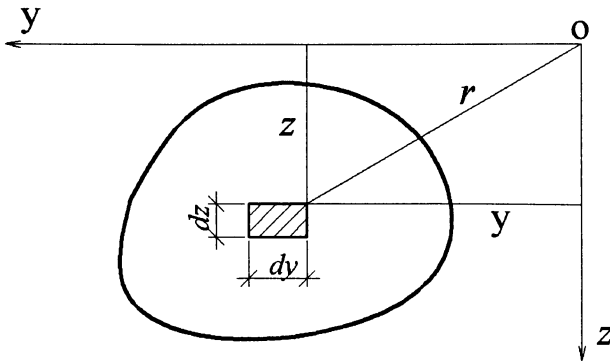


Рис. 2.2. Поперечний переріз, який розглядається для визначення моменту площі

Момент площі визначається інтегралом наступного вигляду:

$$I_{y^k z^m} = \iint_A y^m z^k dA. \quad (2.1)$$

Далі нам будуть потрібні моменти нульового, першого і другого порядку.

Моментом нульового порядку за змістом є площа фігури:

$$I_{y^0 z^0} = \iint_A dA = A.$$

Моменти першого порядку мають два вигляди:

$$I_{y^1 z^0} = \iint_A z dA = S_y,$$

$$I_{y^0 z^1} = \iint_A y dA = S_z.$$

Це вирази статичних моментів площі відносно осей  $Oy$  і  $Oz$ .

Моменти другого порядку мають уже три різновидності:

$$I_{y^2 z^0} = \iint_A z^2 dA = I_y,$$

$$I_{y^0 z^2} = \iint_A y^2 dA = I_z,$$

$$I_{y^1 z^1} = \iint_A yz dA = I_{yz}.$$

За змістом  $I_y$ ,  $I_z$  є моментами інерції відносно осей  $Oy$  і  $Oz$ , а  $I_{yz}$  називається відцентровим моментом інерції. Всі вони є моментами інерції площі фігури.

Сума двох моментів інерції відносно координатних осей визначає полярний момент інерції:

$$I_r = I_y + I_z = \iint_A (z^2 + y^2) dA = \iint_A r^2 dA.$$

Обчислення моментів площі зводиться до визначення подвійного інтеграла. Зрозуміло, що починаючи з моментів першого порядку і вище їх значення залежать від вибору системи координат, тому доцільно встановити залежність між моментами площі відносно різних систем координат. Для цього

розглянемо довільну за формою фігуру і дві системи координат  $yOz$  та  $\tilde{y}\tilde{O}\tilde{z}$  (рис. 2.3).

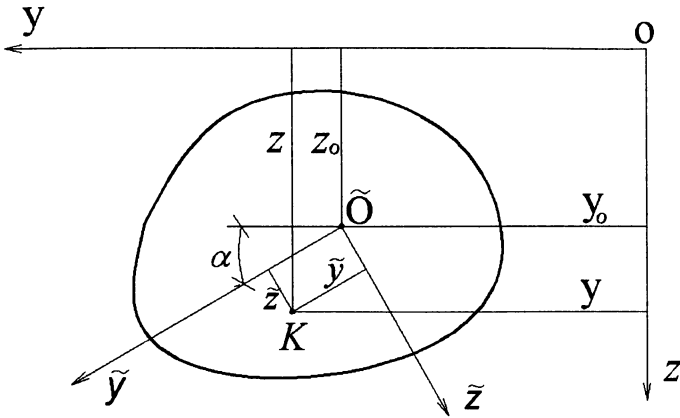


Рис. 2.3. Поперечний переріз, для якого будуть отримані відповідні залежності

Початок координат  $\tilde{O}$  знаходиться на відстані  $y_0$  та  $z_0$  від точки  $O$ . Крім того, осі  $\tilde{y}\tilde{O}\tilde{z}$  повернуті відносно осей  $yOz$  на кут  $\alpha$ . Додатний кут відраховується проти годинникової стрілки. Між координатами довільної точки  $K$  в осях  $yOz$  та  $\tilde{y}\tilde{O}\tilde{z}$  існує залежність:

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= (y - y_0) \cos \alpha + (z - z_0) \sin \alpha, \\ \tilde{z} &= -(y - y_0) \sin \alpha + (z - z_0) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Маючи співвідношення між координатами у різних осях, можна знайти геометричні характеристики у одних осях через характеристики в інших осях. Зробимо подібне перетворення для статичних моментів. Запишемо їх вираз в осях  $\tilde{y}\tilde{O}\tilde{z}$ :

$$\begin{aligned} S_{\tilde{y}} &= \iint_A \tilde{z} \, dA, \\ S_{\tilde{z}} &= \iint_A \tilde{y} \, dA. \end{aligned}$$



Замість  $\tilde{y}$  і  $\tilde{z}$  підставимо співвідношення (2.2):

$$S_{\tilde{y}} = \iint_A [-(y - y_0) \sin \alpha + (z - z_0) \cos \alpha] dA,$$

$$S_{\tilde{z}} = \iint_A [(y - y_0) \cos \alpha + (z - z_0) \sin \alpha] dA.$$

Розкриваючи дужки, отримуємо у правій частині значення площі фігури і статичних моментів в осях  $yOz$ :

$$S_{\tilde{y}} = S_y \cos \alpha - S_z \sin \alpha - A(z_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha),$$

$$S_{\tilde{z}} = S_z \cos \alpha + S_y \sin \alpha - A(y_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha).$$

Подібні залежності можна отримати і для моментів інерції. В осях  $\tilde{y}\tilde{O}\tilde{z}$  моменти інерції мають вирази:

$$I_{\tilde{y}} = \iint_A \tilde{z}^2 dA,$$

$$I_{\tilde{z}} = \iint_A \tilde{y}^2 dA,$$

$$I_{\tilde{y}\tilde{z}} = \iint_A \tilde{y}\tilde{z} dA.$$

Підставляючи сюди залежності (2.2) і роблячи відповідні перетворення, знайдемо:

$$I_{\tilde{y}} = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin(2\alpha) - 2(S_y \cos \alpha - S_z \sin \alpha)(z_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha) + A(z_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha)^2,$$

$$I_{\tilde{z}} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + I_{yz} \sin(2\alpha) - 2(S_z \cos \alpha + S_y \sin \alpha)(y_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha) + A(y_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha)^2,$$

$$I_{\tilde{y}\tilde{z}} = \frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin(2\alpha) + I_{yz} \cos(2\alpha) + (S_z y_0 - S_y z_0) \sin(2\alpha) - (S_z z_0 + S_y y_0) \cos(2\alpha) + A y_0 z_0 \cos(2\alpha) + \frac{1}{2} A (z_0^2 - y_0^2) \sin(2\alpha). \quad (2.3)$$

На підставі цих загальних залежностей отримаємо декілька різних варіантів. Припустимо, що початок координат системи  $yOz$  співпадає з центром ваги фігури, а точка  $\tilde{O}$  займає довільне положення. Тоді статичні моменти  $S_y = S_z = 0$ , внаслідок чого будемо мати:

$$\begin{aligned} I_{\tilde{y}} &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin(2\alpha) + A(z_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha)^2, \\ I_{\tilde{z}} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + I_{yz} \sin(2\alpha) + A(y_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha)^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$I_{\tilde{yz}} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin(2\alpha) + I_{yz} \cos(2\alpha) + Ay_0 z_0 \cos(2\alpha) + \frac{A}{2} (z_0^2 - y_0^2) \sin(2\alpha).$$

Якщо осі  $\tilde{y}\tilde{O}\tilde{z}$  паралельні осям  $yOz$ , які проходять через центр ваги, то з формул (2.4) отримаємо:

$$\begin{aligned} I_{\tilde{y}} &= I_y + Az_0^2, \\ I_{\tilde{z}} &= I_z + Ay_0^2, \\ I_{\tilde{yz}} &= I_{yz} + Ay_0 z_0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

У випадку, коли початок координат обох систем співпадає з центром ваги фігури, але вони повернуті на кут  $\alpha$ , то на підставі формул (2.4) будемо мати:

$$\begin{aligned} I_{\tilde{y}} &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin(2\alpha), \\ I_{\tilde{z}} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + I_{yz} \sin(2\alpha), \\ I_{\tilde{yz}} &= \frac{I_y - I_z}{2} \sin(2\alpha) + I_{yz} \cos(2\alpha). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Це так звані центральні моменти інерції. Знайдемо кут  $\alpha$ , при якому вони будуть досягати екстремальних значень. Прирівнюючи до нуля похідні по  $\alpha$  від  $I_{\tilde{y}}$  і  $I_{\tilde{z}}$ , отримаємо рівняння, з яких знайдемо необхідне значення кута  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\tilde{y}}}{d\alpha} = 0: & \quad -2 \left[ \frac{I_y - I_z}{2} \sin(2\alpha) + I_{yz} \cos(2\alpha) \right] = 0; \\ \frac{dI_{\tilde{z}}}{d\alpha} = 0: & \quad 2 \left[ \frac{I_y - I_z}{2} \sin(2\alpha) + I_{yz} \cos(2\alpha) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Обидва рівняння однакові, тому значення знайденого кута  $\alpha$  співпадатиме і буде визначатися за формулою:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}. \quad (2.8)$$

Координатні осі, які відповідають умовам, що розглядалися, мають назву головних осей, а моменти інерції відносно них є головними моментами інерції.

Зазначимо ще деякі особливості. Порівнюючи вираз відцентрового моменту інерції  $I_{\tilde{y}\tilde{z}}$ , який входить до залежностей (2.6), з рівняннями (2.7) відмічаємо, що вони між собою рівні. Таким чином, відцентровий момент інерції відносно головних осей дорівнює нулю:  $I_{\tilde{y}\tilde{z}} = 0$ . Крім того, беручи похідні від виразів (2.7), отримаємо залежність:

$$\frac{d^2 I_{\tilde{z}}}{d\alpha^2} = -\frac{d^2 I_{\tilde{y}}}{d\alpha^2}.$$

Це співвідношення говорить про те, що один з головних моментів інерції є максимальним, а другий — мінімальним.

Складаючи перші два рівняння (2.6), будемо мати:

$$I_{\tilde{y}} + I_{\tilde{z}} = I_y + I_z = I_r.$$

Отримана залежність стосується моментів інерції відносно будь-яких осей, які мають загальний початок координат.

Головні центральні моменти інерції можуть визначатися за формулами (2.6), якщо підставити в них значення кута  $\alpha$ , який задовольняє залежності (2.8). Але можна отримати інші співвідношення. Для цього потрібно тригонометричні функції у формулах (2.6) виразити через  $\operatorname{tg}(2\alpha)$ , застосовуючи вираз (2.8), а саме:

$$\sin(2\alpha) = \frac{\operatorname{tg}(2\alpha)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\alpha)}}, \quad \cos(2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\alpha)}},$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\alpha)] = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\alpha)}} \right),$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\alpha)] = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\alpha)}} \right).$$

Підставляючи значення  $\operatorname{tg}(2\alpha)$  згідно формули (2.8), отримаємо:

$$\sin(2\alpha) = -\frac{2I_{yz}}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2}},$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{I_y - I_z}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2}} \right),$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{I_y - I_z}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2}} \right).$$

Врахування цих залежностей у формулах (2.6) дає можливість записати інший варіант формул для головних моментів інерції:

$$\begin{aligned} I_{\tilde{y}} &= \frac{1}{2} \left( I_y + I_z \pm \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \right), \\ I_{\tilde{z}} &= \frac{1}{2} \left( I_y + I_z \mp \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Можна отримати ще один варіант формул для головних моментів інерції. Застосуємо залежність:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Враховуючи це у формулі (2.8), будемо мати:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}.$$

Запишемо цей вираз у вигляді квадратичного рівняння:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha \frac{I_y - I_z}{I_{yz}} - 1 = 0.$$

Знайдемо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2I_{yz}} \left( I_y - I_z \pm \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \right).$$

Перетворимо вираз у дужках:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{2I_{yz}} \left[ -(I_y + I_z) \pm \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} + 2I_y \right] = \\ &= \frac{-1}{2I_{yz}} \left[ (I_y + I_z) \mp \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} - 2I_y \right]. \end{aligned}$$

Або в інший спосіб:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2I_{yz}} \left[ (I_y + I_z) \pm \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} - 2I_z \right].$$

Після чого отримаємо:

$$\frac{1}{2} \left( I_y + I_z \mp \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \right) = I_y - I_{yz} \operatorname{tg} \alpha,$$

або

$$\frac{1}{2} \left( I_y + I_z \pm \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \right) = I_z + I_{yz} \operatorname{tg} \alpha.$$

Порівнюючи ліві частини цих виразів із формулами (2.9), робимо висновок, що вони дорівнюють головним моментам інерції, тому можна записати так:

$$I_{\tilde{y}} = I_z + I_{yz} \operatorname{tg} \alpha, \tag{2.10}$$

$$I_{\tilde{z}} = I_y - I_{yz} \operatorname{tg} \alpha.$$

Підкреслимо, що за формулами (2.9) і (2.10) визначаються тільки головні моменти інерції.

Введемо поняття ще деяких геометричних характеристик плоских фігур, які далі будуть потрібні.

Радіуси інерції фігури визначаються співвідношенням:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}. \tag{2.11}$$

Моменти опору фігури визначаються як відношення головних моментів інерції до координат точок, які найбільш віддалені від головних осей (рис. 2.4):

$$W_{y1} = \frac{I_y}{z_1}, \quad W_{y2} = \frac{I_y}{z_2}, \quad W_{z3} = \frac{I_z}{y_3}, \quad W_{z4} = \frac{I_z}{y_4}.$$

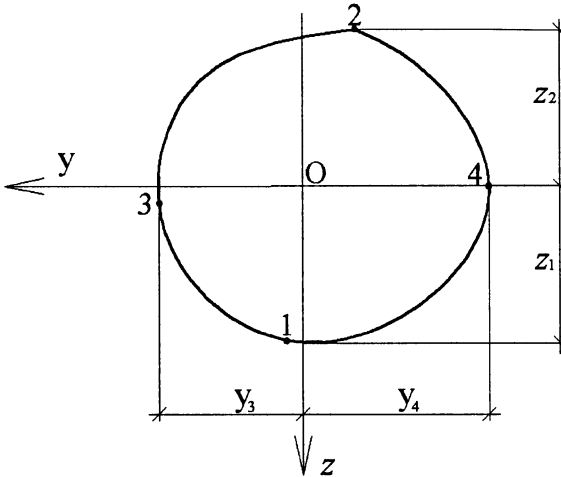


Рис. 2.4. Координати поперечного перерізу, по яких визначаються його моменти опору

Моменти інерції плоских фігур можна визначати безпосереднім інтегруванням за формулами (2.1). Але для фігур складної форми доцільним є інший шлях. Потрібно складну фігуру поділити на декілька простих, значення моментів інерції яких відомі, а потім застосувати наведені формули.

### 2.1.3. Статичні залежності для стержня

Загальні статичні співвідношення для просторового тіла довільної форми були отримані у попередньому розділі. Специфічна форма стержня і прийняті на цій підставі додаткові гіпотези дають можливість внести до них певні зміни і отримати залежності, які будуть застосовані при розрахунках стержня. З цією

метою розглянемо прямолінійний стержень, поперечний переріз якого має довільну форму, однакову по всій довжині (рис. 2.5).

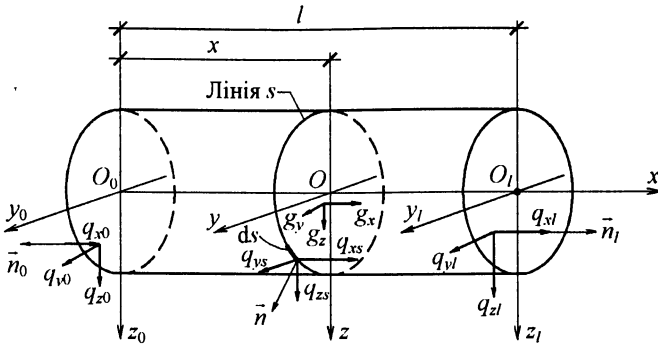


Рис. 2.5. Стержень постійного перерізу довільної форми з прикладеним навантаженням

Поверхня стержня має три ділянки. Це дві торцеві площини, перпендикулярні осі стержня, і бокова поверхня, яка може мати різні форми в залежності від форми поперечного перерізу. Торцеві ділянки мають форму поперечного перерізу.

У внутрішніх точках стержня прикладені об'ємні навантаження  $g_x$ ,  $g_y$ ,  $g_z$ . На кожній ділянці поверхні прикладені поверхневі навантаження. По торцевих ділянках —  $q_{x0}$ ,  $q_{y0}$ ,  $q_{z0}$  та  $q_{x1}$ ,  $q_{y1}$ ,  $q_{z1}$ . У точках бокової поверхні прикладені навантаження  $q_{xs}$ ,  $q_{ys}$ ,  $q_{zs}$ . Величини навантажень залежать від координат точок, у яких вони прикладені. Приймаємо, що стержень знаходиться у рівновазі, тому головні вектор і момент усіх навантажень дорівнюють нулю.

До кожної ділянки поверхні проведемо нормалі  $\vec{n}_0$ ,  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}$ . Визначимо їх напрямні косинуси:

$$\vec{n}_0: n_{x0} = -1, \quad n_{y0} = 0, \quad n_{z0} = 0;$$

$$\vec{n}_1: n_{x1} = 1, \quad n_{y1} = 0, \quad n_{z1} = 0;$$

$$\vec{n}: n_x = 0, n_y, n_z.$$

Відмітимо, що напрямні косинуси нормалей до торцевих площин у всіх точках мають однакові значення. Напрямні косинуси  $n_y$  і  $n_z$  нормалі  $\vec{n}$  до бокової поверхні змінюються в залежності від положення точки на лінії  $s$ , яка є лінією перетину бокової поверхні з площиною, перпендикулярною до осі стержня. Від координати  $x$  вони не залежать.

Зупинимось на визначенні внутрішніх напружень стержня.

На довільній відстані  $x$  від лівого кінця стержня відокремимо його частину площиною, перпендикулярною осі  $Ox$  (рис. 2.6).

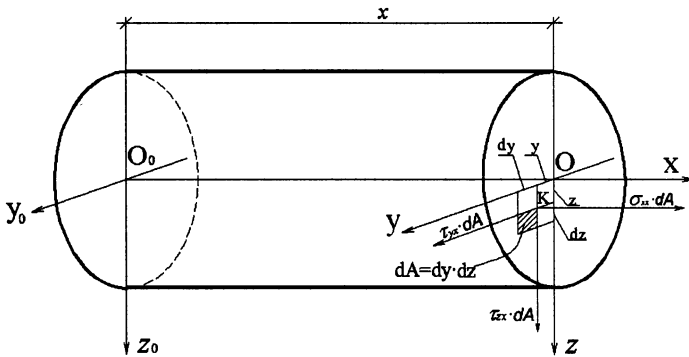


Рис. 2.6. Внутрішні напруження, що виникають у поперечному перерізі стержня

На площині перерізу діють внутрішні напруження  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zx}$ . Визначимо складові головного вектора і головного моменту цих напружень у межах площі перерізу  $A$ . Складові головного вектора будемо позначати  $N_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ , а головного моменту —  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ . Індeksi у перших трьох величинах відповідають назві осі, до якої вони паралельні, індeksi у другій трійки вказують на назву осі, відносно якої визначається момент. Для отримання значень вказаних величин біля довільної точки перерізу  $K$  з координатами  $y$ ,  $z$  необхідно обрати нескінченно малу площу  $dA = dy \cdot dz$ , на



яку помножити діючі у цій точці напруження. Таким чином знайдемо рівнодіючі внутрішніх напружень, зібраних на площі перерізу  $dA$ . Для визначення складових головного вектора необхідно значення цих рівнодіючих проінтегрувати по площі перерізу  $A$ . Складові головного моменту дорівнюють інтегралу по площі перерізу  $A$  від добутку вказаних рівнодіючих на їх плече відносно відповідної осі координат. Підкреслимо, що моменти визначаються відносно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , початок яких знаходиться у точці  $O$ . Беручи до уваги вищезазначене, будемо мати:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \iint_A \sigma_{xx} dA, & M_x &= \iint_A (\tau_{zx}y - \tau_{yx}z) dA, \\
 Q_y &= \iint_A \tau_{yx} dA, & M_y &= \iint_A \sigma_{xx}z dA, \\
 Q_z &= \iint_A \tau_{zx} dA, & M_z &= \iint_A \sigma_{xx}y dA.
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Отримані складові головних вектора і моменту внутрішніх напружень розглядаються як внутрішні зусилля, що виникають у поперечних перерізах стержня. Вони мають такі назви:

- $N_x$  — поздовжня сила,
- $Q_y, Q_z$  — поперечна сила,
- $M_x$  — повний кругний момент,
- $M_y, M_z$  — згинальні моменти.

Необхідно відмітити, що складові головного вектора повинні бути прикладені у початковій точці осей, відносно яких визначаються складові головного моменту. Це означає, що поздовжнє та поперечні зусилля необхідно прикласти у точці  $O$  (рис. 2.7). Звернемо увагу ще на одну дуже важливу властивість внутрішніх зусиль. На відміну від внутрішніх напружень, які є функціями трьох координат, вони залежать тільки від однієї змінної  $x$ , оскільки дорівнюють подвійним визначеним інтегралам від напружень. Інтегрування здійснюється по змінним  $y$  та  $z$ .

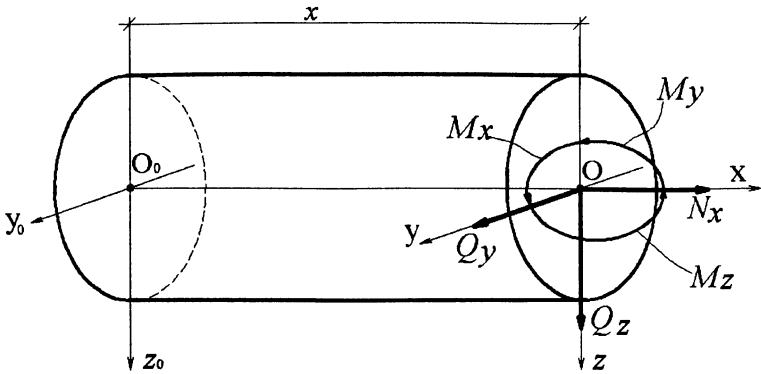


Рис. 2.7. Внутрішні зусилля, які виникають у поперечному перерізі стержня

Перейдемо до складання рівнянь рівноваги стержня. Беручи до уваги те, що рівняння рівноваги (1.23), отримані для просторового тіла довільної форми, можна використати при розгляді умов рівноваги стержня. Запишемо рівняння (1.23):

$$\begin{aligned} \sum X = 0: \quad & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x = 0; \\ \sum Y = 0: \quad & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + g_y = 0; \\ \sum Z = 0: \quad & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + g_z = 0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Проінтегруємо їх по  $dA$  в межах поперечного перерізу:

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dA + \iint_A \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dA + \iint_A g_x dA = 0, \\ \iint_A \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dA + \iint_A \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dA + \iint_A g_y dA = 0, \\ \iint_A \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dA + \iint_A \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dA + \iint_A g_z dA = 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Здійсимо перетворення других інтегралів у цих виразах. Застосуємо формулу Гріна, яка дає можливість подвійний інтеграл по площі  $A$  деякої фігури замінити криволінійним інтегралом по контуру цієї фігури, а саме:

$$\iint_A \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dA = \int_s (\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) ds,$$

$$\iint_A \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dA = \int_s (\sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z) ds,$$

$$\iint_A \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dA = \int_s (\tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z) ds.$$

Проаналізуємо підінтегральні вирази у правих частинах отриманих залежностей. Згадувані в них величини  $n_y$  і  $n_z$  є напрямними косинусами нормалі до бокової поверхні стержня, про що свідчить рисунок 2.5. Її напрямний косинус  $n_x = 0$ . Порівнюючи розглядувані вирази із рівняннями (1.24) і знов звертаючись до рисунка 2.5, можна зробити висновок, що вони дорівнюють поверхневим навантаженням  $q_{xs}$ ,  $q_{ys}$ ,  $q_{zs}$ , тобто:

$$\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = q_{xs},$$

$$\sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z = q_{ys},$$

$$\tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z = q_{zs}.$$

Внаслідок цього будемо мати:

$$\iint_A \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dA = \int_s q_{xs} ds,$$

$$\iint_A \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dA = \int_s q_{ys} ds,$$

$$\iint_A \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dA = \int_s q_{zs} ds.$$

Враховуючи це в рівняннях (2.14) і беручи до уваги залежності (2.12), отримаємо:

$$\frac{dN_x}{dx} + \int_s q_{xs} ds + \iint_A g_x dA = 0,$$

$$\frac{dQ_y}{dx} + \int_s q_{ys} ds + \iint_A g_y dA = 0,$$

$$\frac{dQ_z}{dx} + \int_s q_{zs} ds + \iint_A g_z dA = 0.$$

З'ясуємо зміст членів цих рівнянь, які залежать від навантаження. Вони дорівнюють складовим головного вектора об'ємного і поверхневого навантаження, яке прикладене в межах одиниці довжини стержня. Вказані складові навантаження будемо позначати  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$ , тобто:

$$q_x = \int_s q_{xs} ds + \iint_A g_x dA,$$

$$q_y = \int_s q_{ys} ds + \iint_A g_y dA, \quad (2.15)$$

$$q_z = \int_s q_{zs} ds + \iint_A g_z dA.$$

Враховуючи це у попередніх рівняннях, знайдемо:

$$\sum X = 0: \quad \frac{dN_x}{dx} = -q_x;$$

$$\sum Y = 0: \quad \frac{dQ_y}{dx} = -q_y; \quad (2.16)$$

$$\sum Z = 0: \quad \frac{dQ_z}{dx} = -q_z.$$

Беручи до уваги, що стержень є просторовим тілом, потрібно скласти ще три рівняння моментів відносно трьох ортогональних осей, це осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Знову застосуємо рівняння (1.23) або (2.13). Для отримання моменту відносно осей  $Oy$  і  $Oz$  необхідно перше рівняння, яке є сумою проєкцій на вісь  $Ox$ , помножити по черзі на координати  $z$  і  $y$  і проінтегрувати по площі  $A$ . Момент відносно осі  $Ox$  знайдемо як різницю третього рівняння, помноженого на

координату  $y$ , і другого рівняння, помноженого на координату  $z$ . Обидві вказані залежності потрібно проінтегрувати по площі перерізу  $A$ .

Зробивши зазначені операції, отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum M_y = 0: & \iint_A \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} z dA + \iint_A \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) z dA + \iint_A g_x z dA = 0; \\ \sum M_z = 0: & \iint_A \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} y dA + \iint_A \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) y dA + \iint_A g_x y dA = 0; \\ \sum M_x = 0: & \iint_A \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} y - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} z \right) dA + \\ & + \iint_A \left[ \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) y - \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) z \right] dA + \iint_A (g_z y - g_y z) dA = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Перші інтеграли в усіх трьох рівняннях на підставі формул (2.12) можна прирівняти до похідних від згинальних і крутного моментів:

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} z dA &= \frac{d}{dx} \iint_A \sigma_{xx} z dA = \frac{dM_y}{dx}, \\ \iint_A \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} y dA &= \frac{d}{dx} \iint_A \sigma_{xx} y dA = \frac{dM_z}{dx}, \\ \iint_A \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} y - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} z \right) dA &= \frac{d}{dx} \iint_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = \frac{dM_x}{dx}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Перейдемо до перетворення других інтегралів. Достатньо ретельно розглянути тільки інтеграл з першого рівняння. Інші змінюються аналогічно.

$$\iint_A \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) z dA = \iint_A \left( \frac{\partial(\tau_{xy} \cdot z)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xz} \cdot z)}{\partial z} - \tau_{xz} \right) dA.$$

Враховуючи формули (2.12), будемо мати:

$$\iint_A \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) z dA = \iint_A \left( \frac{\partial(\tau_{xy} z)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xz} z)}{\partial z} \right) dA - Q_z.$$

Інтеграл у правій частині перетворимо за формулою Гріна:

$$\iint_A \left( \frac{\partial(\tau_{xy}z)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xz}z)}{\partial z} \right) dA = \int_s [(\tau_{xy}z)n_y + (\tau_{xz}z)n_z] ds = \int_s (\tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z)z ds.$$

Згідно з формулами (1.24) вираз у дужках матиме вигляд  $\tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = q_{xs}$ , внаслідок чого отримуємо:

$$\iint_A \left( \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} \right) z dA = \int_s q_{xs}z ds - Q_z.$$

Аналогічні перетворення виконуються у другому та третьому рівняннях (2.17), що призводить до наступних залежностей:

$$\iint_A \left( \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} \right) y dA = \int_s q_{xs}y ds - Q_y,$$

$$\iint_A \left[ \left( \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \right) y - \left( \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} \right) z \right] dA = \int_s (q_{zs}y - q_{ys}z) ds.$$

Врахуємо отримані вирази і формули (2.18) у рівняннях (2.17), внаслідок чого матимемо:

$$\frac{dM_y}{dx} - Q_z + \int_s q_{xs}z ds + \iint_A g_x z dA = 0,$$

$$\frac{dM_z}{dx} - Q_y + \int_s q_{xs}y ds + \iint_A g_x y dA = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{dM_x}{dx} + \int_s (q_{zs}y - q_{ys}z) ds + \iint_A (g_z y - g_y z) dA = 0.$$

Встановимо зміст членів, що залежать від зовнішнього навантаження. Вони дорівнюють складовим головного моменту поверхневого та об'ємного навантаження, яке прикладене в межах одиниці довжини стержня. Будемо позначати їх  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$ , а саме:

$$\begin{aligned}
m_x &= \int_s (q_{zs}y - q_{ys}z) ds + \iint_A (g_z y - g_y z) dA, \\
m_y &= \int_s q_{xs}z ds + \iint_A g_x z dA, \\
m_z &= \int_s q_{xs}y ds + \iint_A g_x y dA.
\end{aligned}
\tag{2.20}$$

Враховуючи це у виразах (2.19), отримаємо остаточні рівняння рівноваги стержня як суму моментів відносно осей  $Oxyz$  :

$$\begin{aligned}
\frac{dM_x}{dx} &= -m_x, \\
\frac{dM_y}{dx} - Q_z &= -m_y, \\
\frac{dM_z}{dx} - Q_y &= -m_z.
\end{aligned}
\tag{2.21}$$

Об'єднаємо рівняння (2.16) та (2.17) в єдину систему, яка визначатиме загальну систему рівнянь рівноваги стержня:

$$\begin{aligned}
\sum X = 0: \quad \frac{dN_x}{dx} &= -q_x; \quad \sum M_x = 0: \quad \frac{dM_x}{dx} = -m_x; \\
\sum Y = 0: \quad \frac{dQ_y}{dx} &= -q_y; \quad \sum M_y = 0: \quad \frac{dM_y}{dx} - Q_z = -m_y; \\
\sum Z = 0: \quad \frac{dQ_z}{dx} &= -q_z; \quad \sum M_z = 0: \quad \frac{dM_z}{dx} - Q_y = -m_z.
\end{aligned}
\tag{2.22}$$

Зробимо ще одне перетворення, а саме, визначимо складові головних вектора і моменту поверхневих навантажень, прикладених по двох торцевих поверхнях стержня. Складові головних векторів дорівнюють проєкціям навантаження на осі  $O_0xy_0z_0$  та  $O_1xy_1z_1$ . Складові головних моментів визначаються відносно тих самих осей. Позначати вказані величини будемо  $R$  та  $L$  з відповідними індексами. Враховуючи сказане, можна скласти наступні вирази:

по лівій торцевій площині:

$$R_{x0} = \iint_A q_{x0} dA, \quad L_{x0} = \iint_A (q_{z0}y - q_{y0}z) dA,$$

$$R_{y0} = \iint_A q_{y0} dA, \quad L_{y0} = \iint_A q_{x0}z dA, \quad (2.23)$$

$$R_{z0} = \iint_A q_{z0} dA, \quad L_{z0} = \iint_A q_{x0}y dA;$$

по правій торцевій площині:

$$R_{xl} = \iint_A q_{xl} dA, \quad L_{xl} = \iint_A (q_{zl}y - q_{yl}z) dA,$$

$$R_{yl} = \iint_A q_{yl} dA, \quad L_{yl} = \iint_A q_{xl}z dA, \quad (2.24)$$

$$R_{zl} = \iint_A q_{zl} dA, \quad L_{zl} = \iint_A q_{xl}y dA.$$

Беручи до уваги порядок знаходження складових головних векторів і моментів поверхневого навантаження по торцевих площинах, можна стверджувати, що на лівому кінці вони прикладені у точці  $O_0$ , а на правому кінці — у точці  $O_l$  (рис. 2.8).

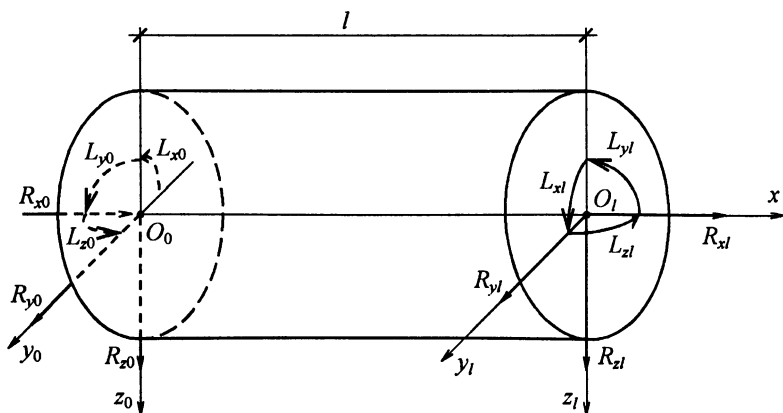


Рис. 2.8. Рівнодіюча зовнішніх навантажень по торцевих площинах



Аналіз отриманих статичних залежностей свідчить про те, що всі навантаження, які прикладені до стержня, і виникаючі у ньому внутрішні зусилля слід розглядати, як сили і моменти, що діють у точках, розташованих на поздовжній осі стержня. Це дає можливість при виконанні будь-яких операцій з вказаними величинами розглядати не просторове тіло, яким є стержень, а його розрахункову лінійну модель, що розглядається як лінія, яка співпадає з поздовжньою віссю стержня (рис. 2.9 та 2.10).

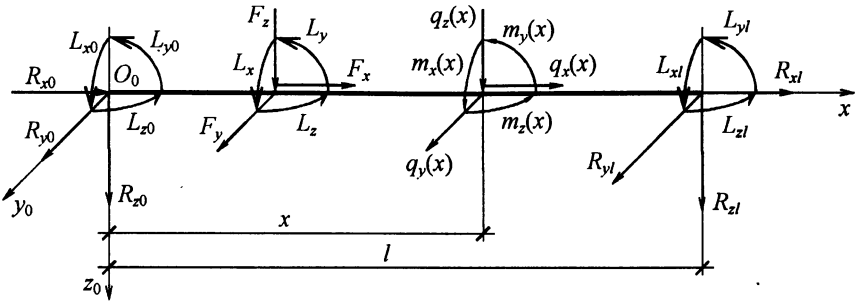


Рис. 2.9. Лінійна модель стержня

На рис. 2.9 зображені тільки навантаження. Їх можна поділити на дві групи. Розподілені по довжині стержня  $q$  (кН/м) і  $m$  (кН·м/м=кН) та зосереджені навантаження  $F$  (кН),  $R$  (кН),  $L$  (кН·м). Для зображення внутрішніх зусиль необхідно зробити переріз і розглянути дві частини стержня (рис. 2.10).

Крім зображених на цьому рисунку внутрішніх зусиль, на кожен частину стержня діють відповідні навантаження.

Розгляд лінійної моделі стержня дає можливість отримати залежності, які будуть співпадати з попередніми виразами. Для цього відокремимо нескінченно малий елемент моделі стержня і складемо рівняння його рівноваги (рис. 2.11).

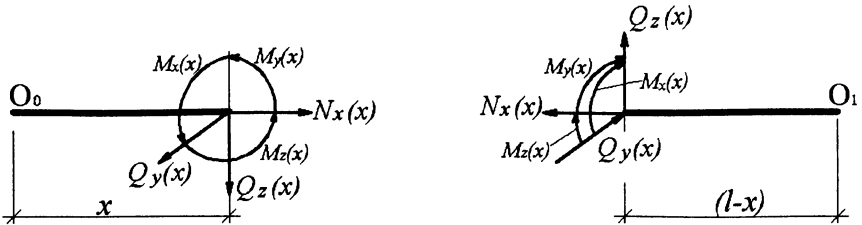


Рис. 2.10. Внутрішні зусилля, які виникають у поперечних перерізах лінійної моделі стержня

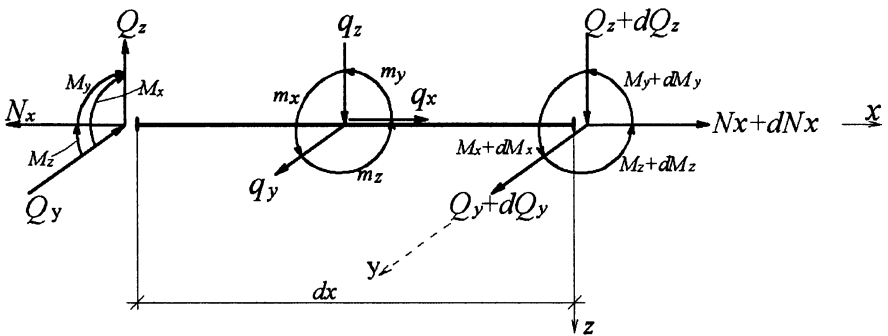


Рис. 2.11. Частина лінійної моделі стержня, для якої складаються рівняння рівноваги

Приріст зусиль у правому перерізі пояснюється тим, що координати змінної величини  $x$ , від якої залежать зусилля, у лівому і правому перерізах мають різні значення. Складемо рівняння рівноваги частини моделі стержня, що розглядається.

$$\sum X = 0: -N_x + N_x + dN_x + q_x dx = 0,$$

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x;$$

$$\sum Y = 0: -Q_y + Q_y + dQ_y + q_y dx = 0,$$

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q_y;$$

$$\sum Z = 0: -Q_z + Q_z + dQ_z + q_z dx = 0,$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z;$$

$$\sum M_x = 0: -M_x + M_x + dM_x + m_x dx = 0,$$

$$\frac{dM_x}{dx} = -m_x;$$

$$\sum M_y = 0: -M_y + M_y + dM_y - Q_z dx + m_y dx + q_z dx \frac{dx}{2} = 0,$$

$$\frac{dM_y}{dx} - Q_z = -m_y;$$

$$\sum M_z = 0: M_z - M_z - dM_z + Q_y dx - m_z dx - q_y dx \frac{dx}{2} = 0,$$

$$\frac{dM_z}{dx} - Q_y = -m_z.$$

У рівнянні  $\sum M_y = 0$  членом  $q_z dx \frac{dx}{2}$  можна нехтувати як величиною

вищого порядку малості. Аналогічно в рівнянні  $\sum M_z = 0$ .

Порівнюючи отримані залежності з рівняннями (2.22), переконуємося, що вони повністю співпадають. Це підтверджує можливість при виконанні певних розрахункових операцій, пов'язаних зі стержнем, застосовувати його лінійну модель.

#### 2.1.4. Методика знаходження внутрішніх зусиль

Внутрішні зусилля та зовнішні навантаження пов'язані між собою співвідношеннями (2.22). Всі вони є силами, паралельними головним осям стержня, або моментами відносно цих осей. Зазначені сили прикладені до поздовжньої осі стержня. Слід підкреслити, що автоматично це не відбувається, тому в першу чергу необхідно знайти головні осі і привести до них всі зовнішні навантаження і внутрішні зусилля. Після чого всі операції, які пов'язані з

визначенням внутрішніх зусиль, можна виконувати застосовуючи лінійну модель стержня, яка називається розрахунковою схемою стержня. При виконанні вказаних перетворень для зовнішніх навантажень можна застосовувати формули (2.15), (2.20), (2.24).

Зовнішнє навантаження необхідно поділити на дві частини, а саме на активне та реактивне. До активного відноситься задана частина, а до реактивного та, яку необхідно спочатку знайти. До неї належать сили, що виникають у в'язях, якими закріплені стержень. Кількість в'язей, необхідних для закріплення стержня, дорівнює ступеню його вільності. У просторі вона дорівнює шести, а у площині дорівнює трьом.

Реакції, що виникають у в'язях, знаходяться з умов рівноваги стержня. Кількість незалежних рівнянь співпадає зі ступенем вільності. Таким чином, для просторової схеми стержня є можливість скласти шість рівнянь, а для плоскої — три. Їх загальний вигляд такий:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0, \\ \sum M_x &= 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0;\end{aligned}$$

у площині  $xOz$

$$\sum X = 0, \quad \sum Z = 0, \quad \sum M_y = 0.$$

У цих рівняннях враховуються всі активні і реактивні навантаження. Якщо кількість невідомих реактивних сил перебільшує можливу кількість незалежних рівнянь рівноваги, то задача відноситься до класу статично невизначуваних задач. Їх розв'язання має свої особливості, тому зараз розглядати такі задачі не будемо.

Дамо визначення стану, до якого відноситься задача — до просторового, чи до плоского. Плоский стан навантаження характеризується тим, що всі ділянки стержня і всі навантаження розташовані в одній з головних площин. В інших випадках задача має просторовий характер.

Потрібно дати характеристику в'язей, або інакше кажучи — опорних закріплень. Вони мають різні властивості. Одна з них полягає в тому, що

перешкоджає лінійному переміщенню поперечного перерізу у напрямку поздовжньої осі, а друга не дає можливості повертатися поперечному перерізу відносно деякої осі. Можливо об'єднання цих двох властивостей. Схеми вказаних в'язей зображені на рис. 2.12.

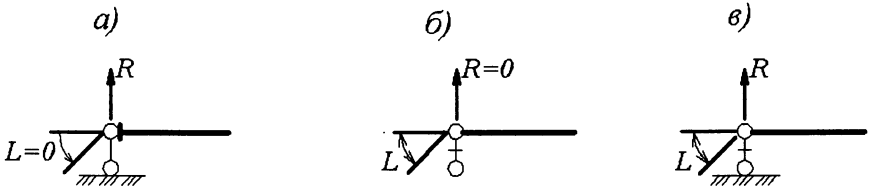


Рис. 2.12. Схеми опорних в'язей

Характеризуємо зображені в'язі:

рис. 2.12(а) — лінійна в'язь, яка перешкоджає лінійному переміщенню у напрямку опорного стержня, обмежує один ступінь вільності. В ній виникає силова реакція  $R$ , що співпадає з напрямком опорного стержня;

рис. 2.12(б) — кутова в'язь, що перешкоджає повороту відносно осі, яка співпадає з її напрямом, обмежує один ступінь вільності. В ній виникає моментна реакція  $L$ , яка співпадає з площиною, перпендикулярною до її напрямку;

рис. 2.12(в) — лінійно-кутова в'язь, яка має обидві властивості і обмежує два ступені вільності. В ній виникає силова і моментна реакції.

Існують інші способи зображення в'язей або опорних закріплень. Головним є не спосіб зображення, а наявність характерних їм властивостей.

При складанні рівнянь рівноваги для знаходження опорних реакцій стержень розглядається як абсолютно жорстке тіло, що не деформується. Його розміри і форма залишаються такими, якими були до навантаження. Після перетворення навантаження і знаходження реакцій можна перейти до

визначення внутрішніх зусиль, через які знаходяться напруження і потім робиться перевірка міцності.

Для достовірної перевірки міцності необхідно мати можливість визначити напруження у будь-якій точці стержня, а це потребує застосування методик, які дозволяють знаходити зусилля у всіх точках поздовжньої осі. Існують два методи.

Перший полягає у безпосередньому розв'язанні системи диференціальних рівнянь (2.22).

Другий метод заснований на властивості, яку має будь-яке тіло, що знаходиться у стані рівноваги. Якщо від нього відокремити будь-яку частину і в площині перерізу прикласти внутрішні сили, то при врахуванні цих сил та зовнішнього навантаження вона буде знаходитися у стані рівноваги. Це дозволяє скласти рівняння рівноваги для цієї частини.

При застосуванні цього методу для визначення зусиль у стержні розглядається його лінійна модель. Робиться переріз, яким вона розділяється на дві частини. У точках перерізу прикладаються внутрішні зусилля (рис. 2.13).

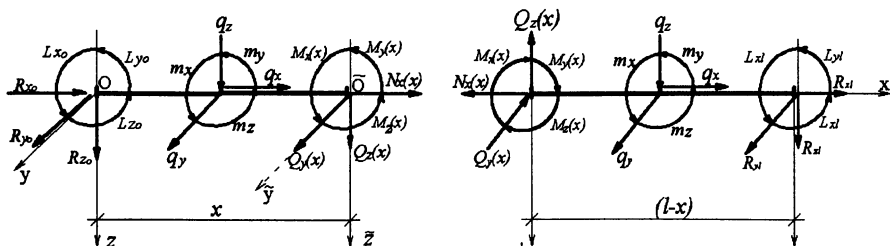


Рис. 2.13. Розділ стержня на дві частини, для яких складаються умови рівноваги і знаходяться внутрішні зусилля

Положення точки перерізу визначається координатою  $x$ . Значення внутрішніх зусиль залежить від положення перерізу відносно координати  $x$ . Можна розглянути два варіанти. Вважати  $x$  як змінну величину або надавати їй конкретне чисельне значення. При застосуванні першого варіанта зусилля є

функцією аргументу  $x$ . У другому варіанті вони будуть мати чисельне значення.

Обираємо з двох частин стержня ліву частину і складаємо шість рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned}
 \sum X = 0: & N_x(x) + \sum(R_x, q_x) = 0; \\
 \sum Y = 0: & Q_y(x) + \sum(R_y, q_y) = 0; \\
 \sum Z = 0: & Q_z(x) + \sum(R_z, q_z) = 0; \\
 \sum M_x = 0: & M_x(x) + \sum(L_x, m_x) = 0; \\
 \sum M_{\tilde{y}} = 0: & M_y(x) + \sum(L_y, m_y, R_z, q_z) = 0; \\
 \sum M_{\tilde{z}} = 0: & M_z(x) + \sum(L_z, m_z, R_y, q_y) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

Два останніх рівняння складаємо як суму моментів відносно осей  $\tilde{Oy}$ ,  $\tilde{Oz}$ , що проходять через точку перерізу. Знак " $\Sigma$ " слід розуміти як суму проєкцій або моментів активних та реактивних сил, які відомі, і прикладені до частини тіла, що розглядається. При складанні цих рівнянь стержень вважається недеформованим. Його розміри і форма залишаються без змін після прикладання навантаження.

У рівняння (2.26) увійшли шість невідомих величин, які потрібно визначити. При цьому у кожному з шести рівнянь є тільки одна невідома, що дозволяє її одразу визначити. В залежності від того, який характер має координата  $x$ , змінна це величина чи постійна, отримаємо відповідний вигляд знайдених зусиль. У першому випадку вони будуть аналітичними виразами залежними від аргументу  $x$ , у другому випадку — чисельними значеннями.

Відомо, що функцію можна представляти у трьох виглядах, а саме: аналітичному, чисельному і графічному. Тому, визначити внутрішні зусилля по всій довжині стержня можна двома способами. Крім того, кожний з них дозволяє виконати графічне зображення функцій, яке має назву епюри зусиль.

Зупинимось на розгляді обов'язкових умов, які потрібно врахувати і виконувати при визначенні зусиль по всій довжині стержня та побудові їх

епюр. Справа в тому, що навантаження на різних ділянках стержня мають різний характер, тому у рівняннях (2.26) члени, які залежать від навантажень, будуть неоднакові при різних значеннях координати  $x$ . Те ж саме буде відбуватися і з зусиллям. Це унеможливило застосування одного перерізу для визначення зусиль у всіх точках стержня. Потрібно визначити їх аналітичні вирази або чисельні значення у межах кожної ділянки. Це вимагає у першу чергу необхідність розподілу стержня на відповідну кількість ділянок, граничні точки яких повинні співпадати з початковими та кінцевими точками усього стержня, точками зміни характеру навантаження, а також точками зміни напрямку поздовжньої осі (рис. 2.14).

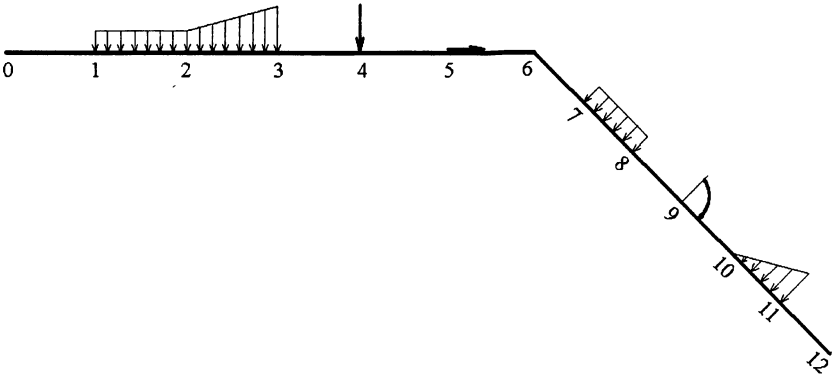


Рис. 2.14. Лінійна розрахункова модель ламаного стержня

Точки, в яких прикладені зосереджені силові або моментні навантаження, потрібно розглядати як ділянки нульової довжини.

Після того, як стержень буде розділений на необхідну кількість ділянок, можна перейти до визначення зусиль по всій довжині стержня та побудови епюр. Розглянемо порядок застосування аналітичного та чисельного методів.

При використанні аналітичного методу необхідно зробити перерізи у межах кожної ділянки. Координати перерізів приймати як змінні величини. Для кожної частини стержня, що відокремлюється відповідним перерізом,



складаються рівняння рівноваги, з яких знаходяться аналітичні вирази зусиль у межах ділянки, що розглядається. Зробивши це по всіх ділянках, будемо мати можливість знаходити зусилля у будь-якій точці стержня та будувати епюри, крім того, визначати їх екстремальні значення.

При використанні чисельного методу для складання рівнянь рівноваги, з яких знаходяться зусилля, перерізи необхідно робити у кожній граничній точці ділянок. Після визначення зусиль у граничних точках необхідно проаналізувати характер навантаження по всіх ділянках і встановити, де потрібно знаходити зусилля у проміжних точках ділянки. Вирішується це питання встановленням зв'язку між характером навантаження і характером розподілення зусиль у межах ділянки стержня. Значення зусиль у проміжних точках потрібно знаходити, коли розподіл зусиль у межах ділянки має криволінійний вигляд. При прямолінійному розподілі проміжні точки не потрібні. У таблиці 2.1 приведені необхідні для цього залежності.

Звернемо увагу на особливий характер зміни зусиль у точках, де прикладене зосереджене навантаження. Ця точка розглядається як ділянка нульової довжини з початковою та кінцевою граничними точками (рис. 2.15).

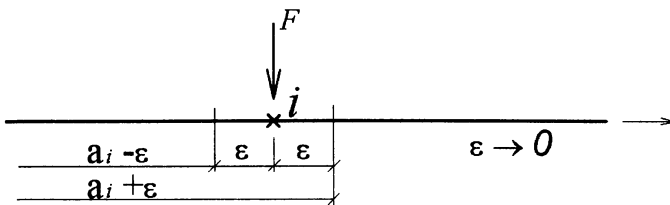
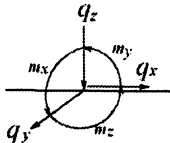
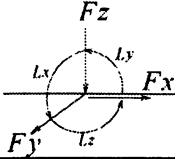
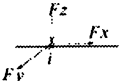
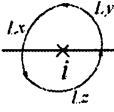
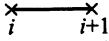
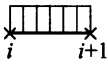
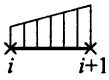

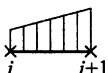
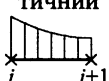

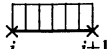
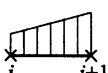


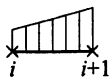
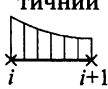
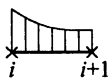


Рис. 2.15. Врахування особливостей зосередженого навантаження

У таблиці вказано, при яких навантаженнях і які саме зусилля мають стрибковий характер. У цих випадках необхідно визначити відповідні зусилля у двох перерізах з координатами  $a_i - \varepsilon$  та  $a_i + \varepsilon$ . В одне рівняння увійде зосереджене навантаження, а в друге — ні. Тому зусилля у цих двох перерізах

будуть відрізнятися одне від одного. Подібна ситуація може виникати у точках зміни напрямку поздовжньої осі стержня.

Таблиця 2.1

Вид зусилля	Вид навантаження	Розподілене навантаження			Зосереджене навантаження		Вид навантаження		
									
		відсутнє	рівно- мірно розподі- лене	лінійно зміню- ване					
									
Характер зміни зусиль у межах ділянки $i, i+1$			Характер зміни зусиль у точці $i$						
$N_x$	$q_x$	сталий	лінійний	квадра- тичний	стрижко- вий		$F_x$		
$Q_y$	$q_y$						$F_y$		
$Q_z$	$q_z$								$F_z$
$M_x$	$m_x$					сталий	лінійний	квадра- тичний	стрижко- вий
$M_y$	$m_y$						$L_y$		
$M_z$	$m_z$								$L_z$
$M_y$	$q_z$					лінійний	квадра- тичний	кубичний	
$M_z$	$q_y$								

Дамо пояснення відносно знака зусиль, який визначає їх напрям. Будемо застосовувати праву систему координат. При цьому вісь  $x$  приймається співпадаючою з поздовжньою віссю стержня. Додатний напрям зусилля вважаємо співпадаючим з додатним напрямом відповідного напруження, а саме того, рівнодіючим якого воно є. У першому розділі було прийнято, що у

перерізі з додатною нормаллю додатні напруження співпадають з додатними напрямками відповідних координатних осей, у перерізі з від'ємною нормаллю — навпаки. З урахуванням цих положень на рис. 2.16 зображені додатні напрями зусиль у перерізах з додатною та від'ємною нормаллю.

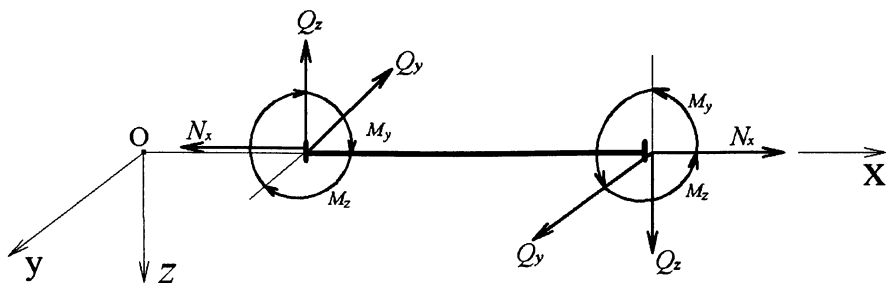


Рис. 2.16. Додатні напрями внутрішніх зусиль у перерізах з додатною та від'ємною нормаллю

На епюрах зусиль знаки необхідно вказувати. Можна цього не робити тільки на епюрах згинальних моментів, якщо домовитися, що вони будуються на розтягнутому волокні стержня.

Більш конкретні пояснення відносно знаходження зусиль і побудові їх епюр будуть надані у прикладах.

Для подальшого використання внутрішніх зусиль потрібно визначити їх екстремальні значення і координати точок, де вони виникають.

## Глава 2.2. Кінематичні співвідношення, їх зв'язок зі статичними величинами

### 2.2.1. Кінематичні залежності для стержня

Загальні кінематичні залежності (1.39), які отримані для просторового тіла довільної форми, можна застосовувати і для стержня. Однак специфіка

геометричної форми стержня, на підставі якої прийняті певні гіпотези, дозволяє суттєво їх спростити. Переміщення, які входять до вказаних залежностей, є функціями трьох змінних. Вони стосуються будь-яких точок тіла, у тому числі і довільних точок стержня. Під час перетворення загальних залежностей будуть застосовуватися не тільки вони, але і переміщення точок, розташованих на поздовжній осі стержня. Для можливості відрізнити їх введемо різні позначення. Переміщення довільної точки стержня будемо позначати  $\tilde{u}_x(x, y, z)$ ,  $\tilde{u}_y(x, y, z)$ ,  $\tilde{u}_z(x, y, z)$ , а точки, яка належить до поздовжньої осі стержня —  $u_x(x)$ ,  $u_y(x)$ ,  $u_z(x)$ . Враховуючи сказане, перепишемо формули (1.39):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial x}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial y}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

На підставі першої гіпотези, згідно з якою приймаються рівними нулю деформації поперечного перерізу у своїй площині, можна прийняти:

$$\varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0.$$

Враховуючи у цих співвідношеннях залежності (2.26), отримаємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}_y(x, y, z)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}_z(x, y, z)}{\partial z} &= 0.\end{aligned}$$

На підставі цих рівнянь можна стверджувати, що  $\tilde{u}_y$  не залежить від  $y$ , а  $\tilde{u}_z$  — від  $z$ , тобто вони є функціями двох змінних, а саме:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_y &= \tilde{u}_y(x, z), \\ \tilde{u}_z &= \tilde{u}_z(x, y).\end{aligned}$$

Беручи це до уваги при складанні виразу  $\gamma_{yz}$ , отримаємо:

$$\frac{\partial \tilde{u}_y(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_z(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Сума цих двох величин буде дорівнювати нулю тільки при умові, що кожна з них дорівнює деякій довільній функції однієї загальної змінної  $x$ , але з різними знаками. Приймаємо:

$$\frac{\partial \tilde{u}_y(x, z)}{\partial z} = -\varphi_x(x),$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_z(x, y)}{\partial y} = \varphi_x(x).$$

Інтегруючи перший вираз по  $z$ , а другий по  $y$ , знайдемо:

$$\tilde{u}_y(x, z) = -\varphi_x(x) \cdot z + u_y(x),$$

$$\tilde{u}_z(x, y) = \varphi_x(x) \cdot y + u_z(x).$$

(2.27)

Функції  $u_y(x)$  і  $u_z(x)$  є довільними функціями. Але неважко встановити, що вони — переміщення точок поздовжньої осі стержня. Для цього приймаємо  $y = z = 0$ , це є координати поздовжньої осі. Будемо мати:

$$\tilde{u}_y(x, 0) = u_y(x),$$

$$\tilde{u}_z(x, 0) = u_z(x).$$

Таким чином, функції  $u_y(x)$  і  $u_z(x)$  дійсно є відповідними переміщеннями поздовжньої осі стержня.

Встановимо зміст функції  $\varphi_x(x)$ . Для цього розглянемо поперечний переріз стержня (рис. 2.17).

Прийемо переміщення осі стержня  $u_y = u_z = 0$  і розглянемо точку  $K$  з координатами  $y$  і  $z$ . Згідно з формулами (2.27), матимемо:

$$\tilde{u}_y(x, z) = -z\varphi_x(x),$$

$$\tilde{u}_z(x, y) = y\varphi_x(x).$$

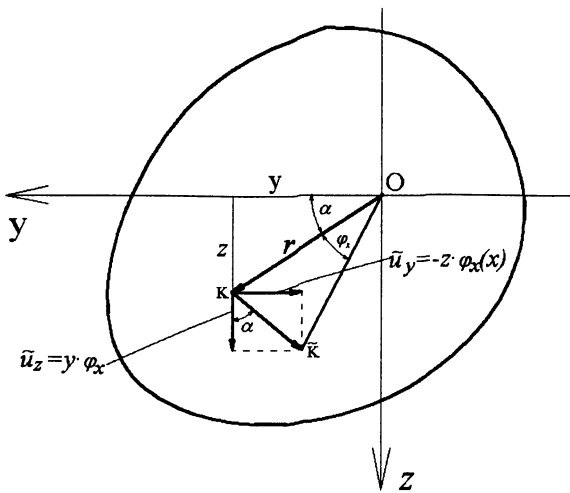


Рис. 2.17. Переміщення точок поперечного перерізу стержня

Повне переміщення  $\tilde{u}$  цієї точки, що співпадає з відрізком  $K\tilde{K}$ , який перпендикулярний до відрізка  $OK$ , буде дорівнювати:

$$\tilde{u} = \sqrt{\tilde{u}_y^2 + \tilde{u}_z^2} = \varphi_x(x) \sqrt{y^2 + z^2} = \varphi_x(x) \cdot r.$$

Отриманий вираз дозволяє встановити зміст  $\varphi_x(x)$ . Це є кут повороту поперечного перерізу відносно поздовжньої осі стержня, тобто відносно осі  $Ox$ .

Підводячи підсумки виконаним перетворенням, можна зробити висновок, що переміщення довільної точки стержня у напрямку осей  $y$  і  $z$  визначаються за формулами (2.27). Вони залежать від переміщень у цих напрямках поздовжньої осі стержня і кута повороту поперечного перерізу відносно цієї осі. Всі вказані величини є функціями однієї змінної  $x$ . При цьому поперечний переріз розглядається як абсолютно жорстке плоске тіло, яке у своїй площині не деформується, і після переміщення його форма залишається без змін.

Перейдемо до визначення третьої складової переміщення  $\tilde{u}_x$ . На рис. 2.18 зображено поперечний переріз стержня до і після деформування.

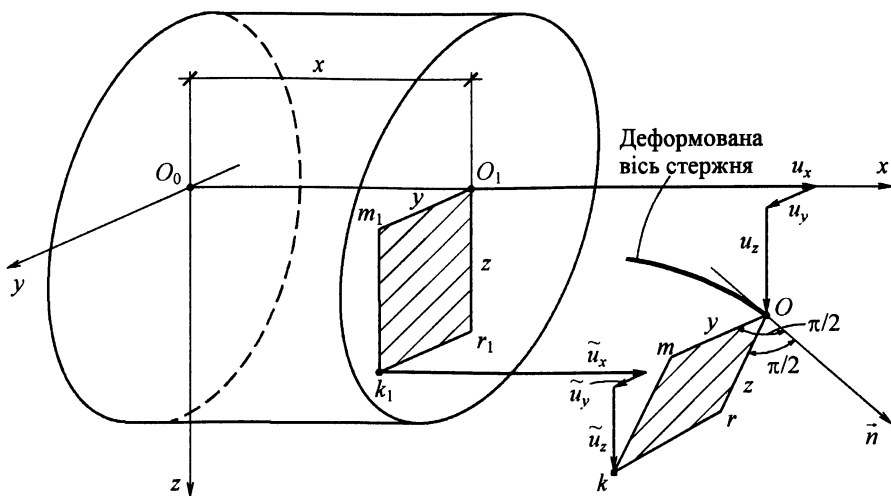


Рис. 2.18. Поздовжнє переміщення поперечного перерізу стержня

Щоб не ускладнювати рисунок у деформованому стані зображена тільки частина перерізу, але враховуючи, що після деформування переріз залишається плоским, увесь переріз співпадає з площиною, яку визначає ця частина. Прямокутник, що розглядаємо, змінив своє положення за рахунок переміщень, які отримали його точки. Для встановлення положення перерізу після деформування складемо рівняння деформованої осі. Для цього необхідно визначити координати точки  $O$  через переміщення. Вони будуть дорівнювати:

$$\begin{aligned} x_O(x) &= x + u_x(x), \\ y_O(x) &= u_y(x), \\ z_O(x) &= u_z(x). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Це — параметрична форма рівняння деформованої осі. Параметром прийнята координата  $x$ . Маючи ці залежності складемо рівняння дотичної до деформованої осі. На рисунку 2.18 вона позначена як пряма лінія  $\vec{n}$ . Її рівняння має вигляд:

$$\frac{\tilde{X}(x) - x_O(x)}{n_x} = \frac{\tilde{Y}(x) - y_O(x)}{n_y} = \frac{\tilde{Z}(x) - z_O(x)}{n_z}, \quad (2.29)$$

де  $\tilde{X}(x)$ ,  $\tilde{Y}(x)$ ,  $\tilde{Z}(x)$  — координати точок, що розташовані на дотичній,  
 $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  — напрямні косинуси дотичної.

Напрямні косинуси дорівнюють похідним від координат точки  $O$  (2.28) по криволінійній координаті  $s$ , що відрховується вздовж деформованої осі:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{dx_O}{ds} = \frac{dx_O}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}, \\ n_y &= \frac{dy_O}{ds} = \frac{dy_O}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}, \\ n_z &= \frac{dz_O}{ds} = \frac{dz_O}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Враховуючи, що  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ , отримаємо

$$\left( \frac{dx_O}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy_O}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz_O}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \right)^2 = 1,$$

звідки

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left( \frac{dx_O}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dy_O}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz_O}{dx} \right)^2}. \quad (2.31)$$

Застосовуючи вирази (2.28), будемо мати:

$$\frac{dx_O}{dx} = 1 + \frac{du_x}{dx}, \quad \frac{dy_O}{dx} = \frac{du_y}{dx}, \quad \frac{dz_O}{dx} = \frac{du_z}{dx}.$$

У першій залежності похідну  $\frac{du_x}{dx}$  можна відкинути, тому що вона дорівнює лінійній деформації  $\varepsilon_x$ . При малих деформаціях ця величина значно менше одиниці, тому отримаємо:

$$\frac{dx_O}{dx} = 1, \quad \frac{dy_O}{dx} = \frac{du_y}{dx}, \quad \frac{dz_O}{dx} = \frac{du_z}{dx}. \quad (2.32)$$

Згідно з прийнятими гіпотезами дотична до деформованої осі перпендикулярна до площини перерізу після деформування, тому лінію  $\vec{n}$  можна розглядати як нормаль до площини перерізу у деформованому стані,



тобто до прямокутника  $Omk$ . Її напрямні косинуси визначаються за формулами (2.30). Це дозволяє скласти рівняння площини перерізу після деформування. Воно має вигляд:

$$(\tilde{x}_k - x_O)n_x + (\tilde{y}_k - y_O)n_y + (\tilde{z}_k - z_O)n_z = 0, \quad (2.33)$$

де  $\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k$  — координати довільної точки перерізу, яка позначена  $k$ .

Знайдемо вирази цих координат через переміщення. При цьому знов врахуємо гіпотези, згідно з якими розміри і форма перерізу при деформуванні стержня залишаються без змін. Це дозволяє отримати:

$$\tilde{x}_k = \tilde{u}_x + x, \quad \tilde{y}_k = \tilde{u}_y + y, \quad \tilde{z}_k = \tilde{u}_z + z.$$

Крім того, переміщення  $\tilde{u}_y$  та  $\tilde{u}_z$  довільної точки перерізу визначимо за формулами (2.27), внаслідок чого будемо мати:

$$\tilde{x}_k = \tilde{u}_x + x, \quad \tilde{y}_k = u_y - z\varphi_x + y, \quad \tilde{z}_k = u_z + y\varphi_x + z.$$

Підставимо ці вирази у рівняння площини, а також врахуємо залежності (2.28) та (2.32) і значення напрямних косинусів нормалі:

$$\begin{aligned} & [\tilde{u}_x + x - (x + u_x)] \cdot 1 \cdot \frac{dx}{ds} + (u_y - z\varphi_x + y - u_y) \frac{du_y}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} + \\ & + (u_z + y\varphi_x + z - u_z) \frac{du_z}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = 0. \end{aligned}$$

Усі члени цього виразу мають однаковий множник  $\frac{dx}{ds}$ , на який можна скоротити. Крім того, врахуємо наступні рівності, які буде підтверджено далі:

$$\frac{du_y}{dx} = \varphi_z, \quad \frac{du_z}{dx} = \varphi_y,$$

де  $\varphi_z$  та  $\varphi_y$  — це кути повороту перерізу відносно осей  $z$  та  $y$ .

Беручи це до уваги, знайдемо:

$$(\tilde{u}_x - u_x) + (y - z\varphi_x)\varphi_z + (z + y\varphi_x)\varphi_y = 0. \quad (2.34)$$

Врахування малості деформацій дозволяє добутки кутів  $\varphi_x \cdot \varphi_z$  та  $\varphi_x \cdot \varphi_y$  відкинути, порівнюючи їх величини з величинами кутів у першому степені. Остаточнo будемо мати:

$$\tilde{u}_x = u_x - y\varphi_z - z\varphi_y,$$

або

$$\tilde{u}_x = u_x - y \frac{du_y}{dx} - z \frac{du_z}{dx}. \quad (2.35)$$

На рис. 2.19 та 2.20 зображені графіки переміщень поздовжньої осі стержня  $u_y$  та  $u_z$ .

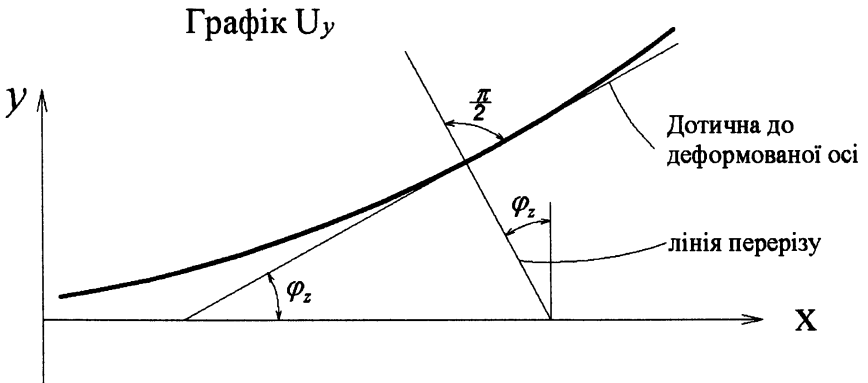


Рис. 2.19. Графік переміщення поздовжньої осі стержня  $u_y$

Якщо взяти похідні по  $x$  від функцій  $u_y$  та  $u_z$ , отримаємо:

$$\frac{du_y}{dx} = \operatorname{tg} \varphi_z \approx \varphi_z, \quad \frac{du_z}{dx} = \operatorname{tg} \varphi_y \approx \varphi_y. \quad (2.36)$$

Врахування малості деформацій дозволяє вважати тангенси кутів рівними кутам. Лінії, які перпендикулярні дотичним, співпадають з проекціями перерізів, тому кути повороту перерізів співпадають з кутами нахилу дотичних.

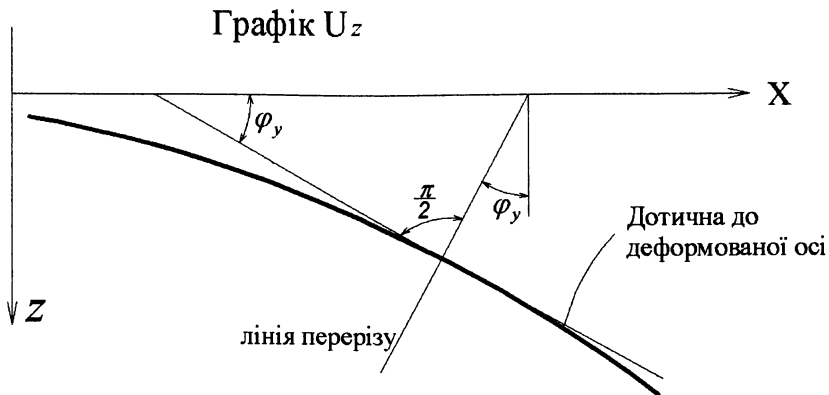


Рис. 2.20. Графік переміщення поздовжньої осі стержня  $u_z$

Підведемо підсумок отриманим кінематичним залежностям. На підставі формул (2.27) і (2.36) можна знайти переміщення будь-якої точки стержня у всіх трьох напрямках:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_x(x, y, z) &= u_x(x) - y\varphi_z(x) - z\varphi_y(x), \\ \tilde{u}_y(x, z) &= u_y(x) - z\varphi_x(x), \\ \tilde{u}_z(x, y) &= u_z(x) + y\varphi_x(x).\end{aligned}\tag{2.37}$$

Беручи до уваги залежності (2.36), запишемо другий варіант цих формул:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_x(x, y, z) &= u_x(x) - yu'_y(x) - zu'_z(x), \\ \tilde{u}_y(x, z) &= u_y(x) - z\varphi_x(x), \\ \tilde{u}_z(x, y) &= u_z(x) + y\varphi_x(x).\end{aligned}\tag{2.38}$$

Як впливає з цих формул, вказані переміщення визначаються через шість функцій однієї змінної  $x$ . За змістом вони є лінійними переміщеннями поздовжньої осі стержня і кутом повороту поперечного перерізу, який розглядається як жорстке плоске тіло. Структура наведених формул свідчить про можливість використовувати лінійну модель стержня, яка співпадає з поздовжньою віссю стержня. Аналогічний висновок був зроблений при розгляді статичних залежностей.

Застосовуючи формули (2.38), знайдемо деформації стержня:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}(x, y, z) &= u'_x(x) - yu''_y(x) - zu''_z(x), \\
 \varepsilon_{yy} &= 0, \\
 \varepsilon_{zz} &= 0, \\
 \gamma_{xy}(x, z) &= -z\varphi'_x(x), \\
 \gamma_{xz}(x, y) &= y\varphi'_x(x), \\
 \gamma_{yz} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

### 2.2.2. Співвідношення між статичними та кінематичними компонентами напружено-деформованого стану стержня

Статичними компонентами напруженого стану стержня є елементи тензора напружень і внутрішні зусилля, які пов'язані з елементами тензора напружень залежностями (2.12).

Кінематичні компоненти деформованого стану складаються з елементів тензора деформацій та лінійних і кутових переміщень. Між ними існує зв'язок, що визначається залежностями (2.39).

Основою для отримання співвідношень між вказаними двома видами компонент є закон Гука, який у загальному вигляді визначається за формулами (1.53). Беручи до уваги характер тензорів напружень і деформацій стержня, отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \sigma_{xx}, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\
 \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}.
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

У цих виразах встановлені залежності між напруженнями і деформаціями. Якщо врахувати формули (2.39), то можна отримати

співвідношення між напруженнями і переміщеннями.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y, z) &= E[u'_x(x) - yu''_y(x) - zu''_z(x)], \\ \tau_{xy} = \tau_{yx}(x, z) &= -Gz\phi'_x(x), \\ \tau_{xz} = \tau_{zx}(x, y) &= Gy\phi'_x(x).\end{aligned}\tag{2.43}$$

Аналізуючи отримані вирази, можна зробити висновок, що напруження у стержні є функціями трьох координат. Залежність від координати  $x$  визначається поки ще невідомими функціями, які пов'язані з переміщеннями поздовжньої осі стержня. Залежність від координат  $y$  та  $z$  відома. Вони увійшли у формули в першому степені, тому всі три напруження по площі перерізу змінюються за законом площини. Характер їх розподілу по площині перерізу зображений на рис. 2.21.

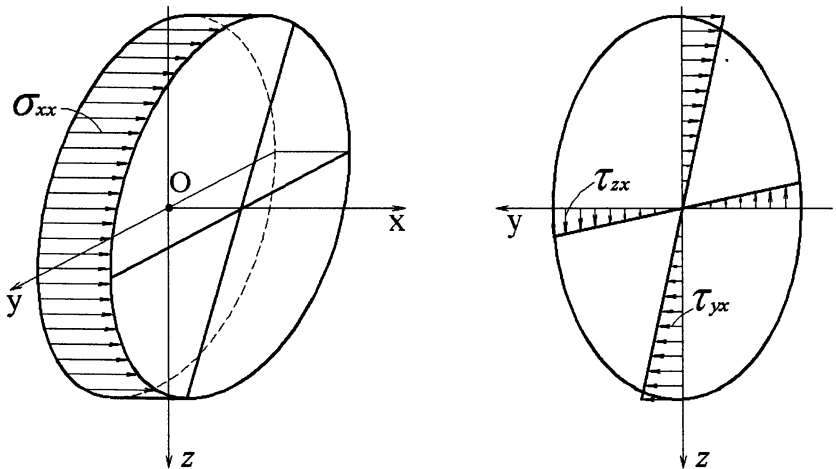


Рис. 2.21. Характер розподілу нормальних напружень та дотичних напружень кручення по площині перерізу стержня

Можна встановити зв'язок між зусиллями і переміщеннями. Для цього необхідно вирази (2.43) підставити у (2.12). Отримані рівняння запишемо у іншому порядку. Спочатку запишемо все, що залежить від  $\sigma_{xx}$ , а потім — від

дотичних напружень.

$$N_x(x) = \iint_A E[u'_x(x) - yu''_y(x) - zu''_z(x)] dA,$$

$$M_y(x) = \iint_A E[u'_x(x) - yu''_y(x) - zu''_z(x)]z dA,$$

$$M_z(x) = \iint_A E[u'_x(x) - yu''_y(x) - zu''_z(x)]y dA,$$

$$Q_y(x) = -\iint_A Gz\varphi'_x(x) dA,$$

$$Q_z(x) = \iint_A Gy\varphi'_x(x) dA,$$

$$M_x(x) = \iint_A [Gy\varphi'_x(x)y + Gz\varphi'_x(x)z] dA.$$

Інтегрування у цих виразах відбувається по площі поперечного перерізу, тому  $dA = dydz$ . Це дозволяє винести за межі інтегралів постійні величини і функції, які не залежать від змінних інтегрування  $y$  та  $z$ :

$$N_x(x) = E \left[ u'_x(x) \iint_A dA - u''_y(x) \iint_A y dA - u''_z(x) \iint_A z dA \right],$$

$$M_y(x) = E \left[ u'_x(x) \iint_A z dA - u''_y(x) \iint_A yz dA - u''_z(x) \iint_A z^2 dA \right],$$

$$M_z(x) = E \left[ u'_x(x) \iint_A y dA - u''_y(x) \iint_A y^2 dA - u''_z(x) \iint_A yz dA \right],$$

$$Q_y(x) = -G\varphi'_x(x) \iint_A z dA,$$

$$Q_z(x) = G\varphi'_x(x) \iint_A y dA,$$

$$M_x(x) = G\varphi'_x(x) \iint_A (y^2 + z^2) dA.$$

Враховуючи зміст інтегралів, можна записати:

$$N_x(x) = Eu'_x(x)A - Eu''_y(x)S_z - Eu''_z(x)S_y,$$

$$M_y(x) = Eu'_x(x)S_y - Eu''_y(x)I_{yz} - Eu''_z(x)I_y,$$

$$\begin{aligned}
 M_z(x) &= Eu'_x(x)S_z - Eu''_y(x)I_z - Eu''_z(x)I_{yz}, \\
 Q_y(x) &= -G\varphi'_x(x)S_y, \\
 Q_z(x) &= G\varphi'_x(x)S_z, \\
 M_x(x) &= G\varphi'_x(x)I_r.
 \end{aligned}$$

Якщо координатні осі  $Oyz$  сумістити з головними осями перерізу, то статичні моменти та відцентровий момент інерції будуть дорівнювати нулю. Внаслідок чого будемо мати:

$$\begin{aligned}
 N_x(x) &= EAu'_x(x), \quad M_y(x) = -EI_y u''_z(x), \\
 M_z(x) &= -EI_z u''_y(x), \quad Q_y(x) = 0, \\
 Q_z(x) &= 0, \quad M_x(x) = G\varphi'_x(x)I_r.
 \end{aligned}$$

Аналізуючи отримані вирази, бачимо, що у перших трьох залежностях, пов'язаних з нормальним напруженням, нема ніяких невідповідностей. У той же час четвертий і п'ятий вирази, згідно з якими  $Q_y(x) = Q_z(x) = 0$ , суперечать двом умовам рівноваги (2.22), а саме  $\sum Y = 0$  та  $\sum Z = 0$ . Це свідчить про те, що дотичні напруження потребують деяких уточнень, які будуть розглянуті далі. Таким чином, для подальшого використання поки маємо тільки три рівняння:

$$\begin{aligned}
 N_x(x) &= EAu'_x(x), \\
 M_y(x) &= -EI_y u''_z(x), \\
 M_z(x) &= -EI_z u''_y(x),
 \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
 u'_x(x) &= \frac{1}{EA} N_x(x), \\
 u''_z(x) &= -\frac{1}{EI_y} M_y(x), \\
 u''_y(x) &= -\frac{1}{EI_z} M_z(x).
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Якщо врахувати ці залежності у першій формулі (2.43), отримаємо вираз для нормального напруження, яке визначається через зусилля:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y. \quad (2.45)$$

Ця розрахункова формула є основною для знаходження нормальних напружень.

## Глава 2.3. Напружений стан та перевірка міцності

### 2.3.1. Удосконалення формули дотичних напружень

Із вищевикладеного зрозуміло, що отримані значення дотичних напружень не відповідають умовам рівноваги. Причина в тому, що обидві складові їх головного вектора —  $Q_y(x)$  та  $Q_z(x)$  дорівнюють нулю. Відрізняється від нуля тільки складова головного моменту  $M_x(x)$ , який за змістом є моментом кручення. Це дає підставу вважати, що прийнята гіпотеза, яка покладена в основу визначення напружень у стержні, має деякі суперечності. В той же час слід підкреслити, що при визначенні нормальних напружень ніяких невідповідностей не виникає, тому відмовлятися від них немає сенсу. Потрібно внести додаткові зміни у формули дотичних напружень. Зупинимось на розгляді цього питання.

Приймаємо вирази дотичних напружень у вигляді суми двох складових:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{\text{кр}} + \tau_{xy}^{\text{зг}}, \\ \tau_{xz} &= \tau_{xz}^{\text{кр}} + \tau_{xz}^{\text{зг}}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Перші складові  $\tau_{xy}^{\text{кр}}$  та  $\tau_{xz}^{\text{кр}}$  мають назву дотичних напружень чистого кручення. Другі складові розглядаються як дотичні напруження згинання.



В основу перших складових будуть покладені формули (2.43), але з внесенням деяких змін:

$$\begin{aligned}\tau_{xy}^{кр} &= -\alpha_y Gz\varphi'_x(x), \\ \tau_{xz}^{кр} &= \alpha_z Gy\varphi'_x(x).\end{aligned}\tag{2.47}$$

Коефіцієнти  $\alpha_y$  та  $\alpha_z$  є сталими величинами, тому характер епюр залишається без змін, тобто такий як на рис. 2.21. Відрізняються тільки чисельні значення. Крім того, очевидним є те, що значення двох складових головного вектора  $Q_y(x)$  та  $Q_z(x)$  залишаються рівними нулю. Чисельні величини  $\alpha_y$  та  $\alpha_z$  визначаються на підставі розв'язку стержня у вигляді просторового тіла методами теорії пружності. Характер навантаження такий, що викликає кручення стержня. У цьому випадку епюра дотичних напружень має криволінійний вигляд (рис. 2.22(а), (б)).

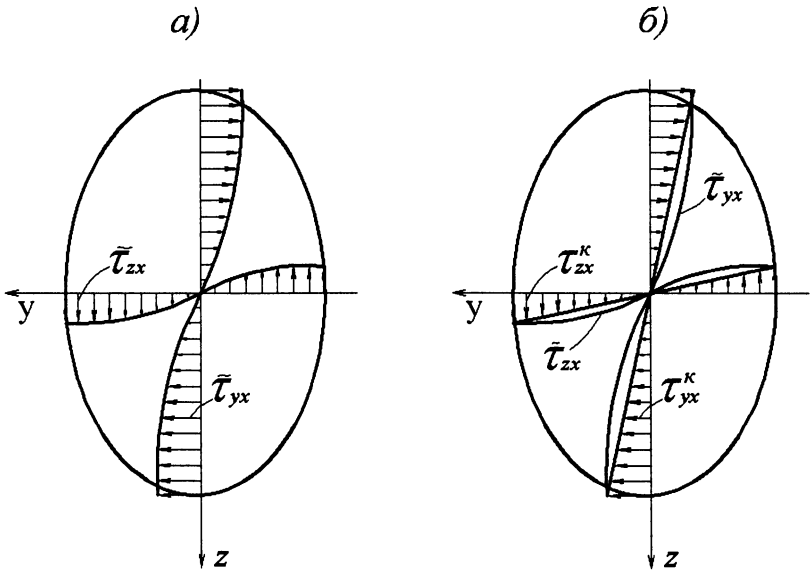


Рис. 2.22. Порівняння епюр дотичних напружень кручення у стержні та просторовому тілі

Коефіцієнти  $\alpha_y$  та  $\alpha_z$  визначаємо з умови, що максимальні значення напружень  $\tau_{xy}^{\text{кр}}$  та  $\tau_{xz}^{\text{кр}}$  дорівнюють максимальним значенням криволінійних епюр  $\tilde{\tau}_{yx}$  та  $\tilde{\tau}_{zx}$  (рис. 2.22(б)).

Величини  $\alpha_y$  та  $\alpha_z$  залежать від форми поперечного перерізу.

Знайдемо складову головного моменту дотичних напружень  $\tilde{\tau}_{yx}$  та  $\tilde{\tau}_{zx}$ :

$$\tilde{M}_x = \iint_A (\tilde{\tau}_{zx}y - \tilde{\tau}_{yx}z) dA.$$

Визначимо складову головного моменту  $M_x^{\text{кр}}$ , яка називається моментом чистого кручення, від дотичних напружень  $\tau_{xy}^{\text{кр}}$  та  $\tau_{xz}^{\text{кр}}$ . Враховуючи, що характери епюр двох видів дотичних напружень  $\tilde{\tau}_{yx}$ ,  $\tilde{\tau}_{zx}$  та  $\tau_{xy}^{\text{кр}}$ ,  $\tau_{xz}^{\text{кр}}$  відрізняються, значення моментів, що розглядаються, не будуть між собою рівні. Щоб зробити їх рівними, введемо ще один коефіцієнт  $\alpha$ , а саме:

$$M_x^{\text{кр}} = \alpha \iint_A (\tau_{xz}^{\text{кр}}y - \tau_{xy}^{\text{кр}}z) dA.$$

Коефіцієнт  $\alpha$  знаходимо з умови  $M_x^{\text{кр}} = \tilde{M}_x$ . Враховуючи формули (2.47)

у виразі  $M_x^{\text{кр}}$ , будемо мати:

$$M_x^{\text{кр}} = \alpha G \varphi'_x(x) \iint_A (\alpha_z y^2 + \alpha_y z^2) dA. \quad (2.48)$$

Введемо поняття моменту інерції чистого кручення  $I_{\text{кр}}$ . Він дорівнює:

$$I_{\text{кр}} = \alpha \iint_A (\alpha_z y^2 + \alpha_y z^2) dA. \quad (2.49)$$

Беручи до уваги цей вираз у формулі (2.48), отримаємо:

$$M_x^{\text{кр}} = G I_{\text{кр}} \varphi'_x(x),$$

або

$$\varphi'_x = \frac{M_x^{\text{кр}}}{G I_{\text{кр}}}. \quad (2.50)$$

Підставляючи значення  $\varphi'_x$  у формулі (2.47), знайдемо:

$$\begin{aligned}\tau_{xy}^{\text{кр}} &= -\alpha_y \frac{M_x^{\text{кр}}}{I_{\text{кр}}} z, \\ \tau_{xz}^{\text{кр}} &= \alpha_z \frac{M_x^{\text{кр}}}{I_{\text{кр}}} y.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Максимальні значення дотичних напружень виникають у точці перерізу найбільш віддалених від головних осей  $Oyz$ . Позначимо ці відстані  $h_z$  та  $h_y$ ; будемо мати:

$$\begin{aligned}\tau_{xy, \text{max}}^{\text{кр}} &= -\alpha_y \frac{M_x^{\text{кр}}}{I_{\text{кр}}} h_z, \\ \tau_{xz, \text{max}}^{\text{кр}} &= \alpha_z \frac{M_x^{\text{кр}}}{I_{\text{кр}}} h_y.\end{aligned}$$

Введемо поняття моменту опору чистого кручення:

$$W_y^{\text{кр}} = \frac{I_{\text{кр}}}{\alpha_y h_z}, \quad W_z^{\text{кр}} = \frac{I_{\text{кр}}}{\alpha_z h_y}.$$

Врахуємо це у попередніх формулах:

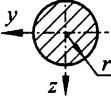
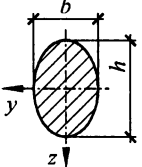
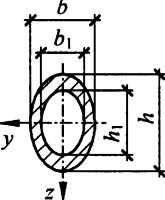
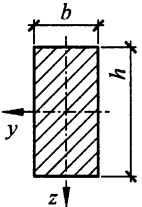
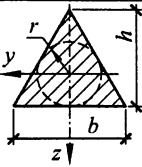
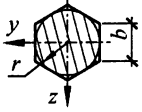
$$\begin{aligned}\tau_{xy, \text{max}}^{\text{кр}} &= -\frac{M_x^{\text{кр}}}{W_y^{\text{кр}}}, \\ \tau_{xz, \text{max}}^{\text{кр}} &= \frac{M_x^{\text{кр}}}{W_z^{\text{кр}}}.\end{aligned}\tag{2.52}$$

Значення коефіцієнтів  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$ ,  $\alpha$  та момент інерції чистого кручення  $I_{\text{кр}}$  в залежності від форми перерізу наведені в таблиці 2.2. Якщо переріз має форму круга, то всі коефіцієнти  $\alpha = \alpha_y = \alpha_z = 1$ , тоді будемо мати:

$$\begin{aligned}I_{\text{кр}} &= \iint_A (y^2 + z^2) dA = I_z + I_y = I_r = \frac{\pi d^4}{32}, \\ W_y^{\text{кр}} &= W_z^{\text{кр}} = \frac{\pi d^3}{16},\end{aligned}$$

де  $d$  — діаметр круга.

Таблиця 2.2

Форма перерізу	Розрахункова схема	$h/b$	$\alpha_y$	$\alpha_z$	$\alpha$	$I_{кр}$
Коло			1	1	1	$\frac{\pi r^4}{2}$
Еліпс		$\frac{h}{b} = n \geq 1$	$\frac{2}{n^2 + 1}$	$\frac{2n^2}{n^2 + 1}$	1	$\frac{\pi}{16} \cdot \frac{n^3}{n^2 + 1} b^4$
Еліптичне кільце		$\frac{h}{b} = \frac{h_1}{b_1} = n \geq 1,$ $\frac{h_1}{h} = \frac{b_1}{b} = \beta < 1$	$\frac{2}{n^2 + 1}$	$\frac{2n^2}{n^2 + 1}$	1	$\frac{\pi}{16} \cdot \frac{n^3}{n^2 + 1} \times (1 - \beta^4) b^4$
Прямокутник		1	1,356	1,356	0,624	$0,141hb^3$
		1,5	0,968	1,697	0,607	$0,196hb^3$
		2	0,781	1,862	0,569	$0,236hb^3$
		3	0,495	1,97	0,491	$0,262hb^3$
		4	0,371	1,993	0,426	$0,287hb^3$
		6	0,247	2	0,328	$0,298hb^3$
		8	0,186	2	0,265	$0,307hb^3$
		10	0,148	2	0,222	$0,311hb^3$
Рівно-сторонній трикутник		$h = b \frac{\sqrt{3}}{2},$ $r = \frac{h}{3}$	1,5	1,5	0,4	$\frac{h^3 b}{30} = 3,117r^4$
Правильний шестикутник		$r = b \frac{\sqrt{3}}{2}$	1,222	1,222	0,787	$1,846r^4$

Звернемо увагу на те, що таблиця дає можливість отримати геометричні характеристики тільки простих фігур (коло, прямокутник, трикутник тощо). Якщо переріз має форму більш складної фігури, то його потрібно поділити на декілька частин, кожна з яких буде мати вигляд, який є у таблиці. Моменти інерції усього перерізу будуть дорівнювати сумі моментів інерції окремих частин:

$$I_{\text{кр}} = \sum_i I_{\text{кр},i}.$$

Кути кручення кожної частини перерізу будуть однакові і співпадати з кутом кручення усього перерізу. Це положення дозволяє розділити загальний момент кручення між окремими частинами. Згідно з формулою (2.50) можна записати:

$$\varphi'_x = \frac{M_x^{\text{кр}}}{G \sum_i I_{\text{кр},i}}, \quad \varphi'_x = \frac{M_{xi}^{\text{кр}}}{GI_{\text{кр},i}}.$$

Враховуючи, що у цих виразах ліві частини однакові, будемо мати:

$$\frac{M_x^{\text{кр}}}{G \sum_i I_{\text{кр},i}} = \frac{M_{xi}^{\text{кр}}}{GI_{\text{кр},i}}.$$

Звідси знайдемо:

$$M_{xi}^{\text{кр}} = M_x^{\text{кр}} \frac{I_{\text{кр},i}}{\sum_i I_{\text{кр},i}}.$$

Таким чином, отримаємо момент кручення  $M_{xi}^{\text{кр}}$ , який діє на окрему ділянку, це дозволяє отримати напруження на кожній ділянці.

Після знаходження максимальних значень дотичних напружень, беручи до уваги їх лінійний характер розподілення по площині перерізу, можна знайти значення напружень і в інших точках.

Розглянуті питання дозволяють знайти першу складову дотичних напружень, а саме дотичних напружень чистого кручення.

Перейдемо до визначення других складових дотичних напружень  $\tau_{xy}^{3r}$ ,  $\tau_{xz}^{3r}$ . В основу буде покладено не закон Гука, як звичайно, а умови рівноваги, які не задовольнялися першими складовими  $\tau_{xy}^{kp}$ ,  $\tau_{xz}^{kp}$ .

Для складання рівняння рівноваги розглянемо нескінченно малу ділянку стержня (рис. 2.23), відокремлену від іншої частини стержня двома перерізами на відстані  $x$  та  $x + dx$  від початку координат.

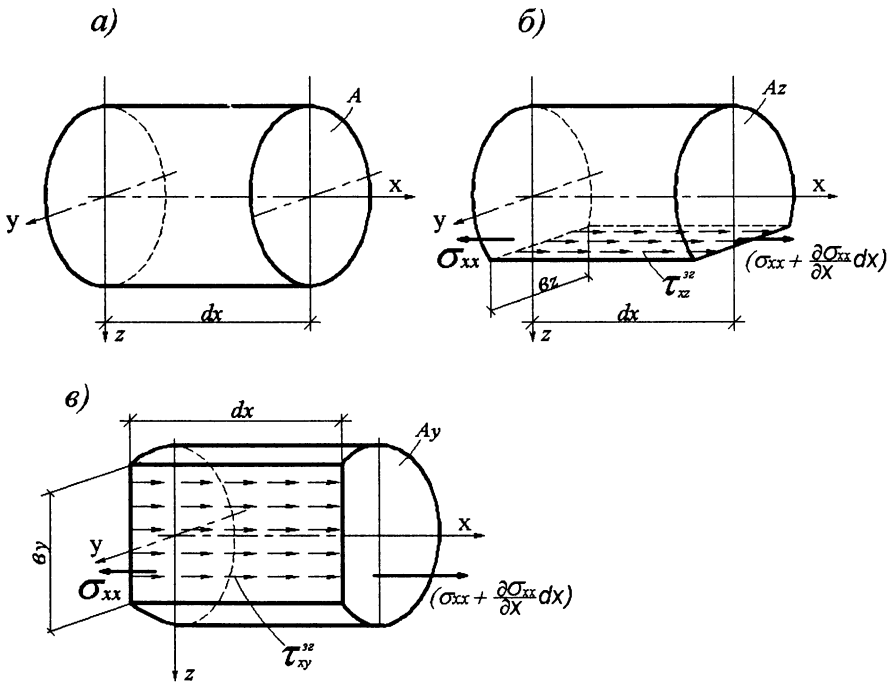


Рис. 2.23. Розгляд рівноваги окремих часток стержня для визначення дотичних напружень згину

Відокремимо від вказаного елемента стержня (рис. 2.23(а)) його дві частини, спочатку зробивши переріз площиною, перпендикулярною до вісі  $z$  (рис. 2.23(б)), а потім — площиною, перпендикулярною до вісі  $y$  (рис. 2.23(в)).

Прикладемо до цих двох частин стержня внутрішні напруження  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{xy}$ , які виникають по площинах перерізів, і складемо рівняння рівноваги. Але спочатку зробимо наступні припущення:

- вважаємо, що навантаження, яке паралельне осі  $x$ , дорівнює нулю:  
 $q_x = 0$ ;
- дотичні напруження  $\tau_{xy}^{зг}$  та  $\tau_{xz}^{зг}$  рівномірно розподілені по ширині відповідного перерізу, тобто у напрямках  $b_z$  та  $b_y$ .

Складемо рівняння рівноваги у вигляді суми проекцій на вісь  $x$ , розглядаючи ділянку стержня на рис. 2.18(б):

$$\sum X = 0: - \iint_{A_z} \sigma_{xx} dA + \iint_{A_z} \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dA + \tau_{xz}^{зг} \cdot b_z \cdot dx = 0.$$

Розглянувши ділянку стержня на рис. 2.18(в), отримаємо аналогічне рівняння:

$$- \iint_{A_y} \sigma_{xx} dA + \iint_{A_y} \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dA + \tau_{xy}^{зг} b_y dx = 0.$$

При складанні цих рівнянь враховано, що дотичні напруження вздовж нескінченно малої ділянки  $dx$  також розподілені рівномірно. Роблячи перетворення записаних рівнянь, можна множник  $dx$  і похідну  $\frac{\partial}{\partial x}$  винести за знак інтегралу, тому що  $dA = dy dz$ , внаслідок чого будемо мати:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{зг} &= -\frac{1}{b_z} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_{A_z} \sigma_{xx} dA, \\ \tau_{xy}^{зг} &= -\frac{1}{b_y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_{A_y} \sigma_{xx} dA. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Підставимо значення  $\sigma_{xx}$  згідно з формулою (2.45):

$$\tau_{xz}^{зг} = -\frac{1}{b_z} \left( \frac{N'_x}{A} \iint_{A_z} dA + \frac{M'_y}{I_y} \iint_{A_z} z dA + \frac{M'_z}{I_z} \iint_{A_z} y dA \right),$$

$$\tau_{xy}^{3r} = -\frac{1}{b_y} \left( \frac{N'_x}{A} \iint_{A_y} dA + \frac{M'_y}{I_y} \iint_{A_y} z dA + \frac{M'_z}{I_z} \iint_{A_y} y dA \right).$$

Оскільки  $q_x = 0$ , то  $m_y$  та  $m_z$  також дорівнюють нулю. Отримаємо  $N'_x = 0$ ,  $M'_y = Q_z$ ,  $M'_z = Q_y$ . Крім того, врахуємо зміст інтегралів, які дорівнюють площі або статичним моментам частини перерізу (рис. 2.23). Це дозволяє попередні вирази записати у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{3r} &= -\frac{1}{b_z} \left( \frac{Q_z S_{yz}}{I_y} + \frac{Q_y S_{zz}}{I_z} \right), \\ \tau_{xy}^{3r} &= -\frac{1}{b_y} \left( \frac{Q_z S_{yy}}{I_y} + \frac{Q_y S_{zy}}{I_z} \right). \end{aligned} \tag{2.54}$$

На підставі цих формул визначається друга складова дотичних напружень, що входить у вираз (2.46).

У позначеннях статичних моментів перший індекс відповідає осі, відносно якої вони визначаються, а другий співпадає з назвою осі, до якої перпендикулярна лінія, що відокремлює частину перерізу. Наприклад,  $S_{yz}$  — статичний момент відносно осі  $y$  частини площі перерізу, яка відокремлена лінією, перпендикулярної до осі  $z$ . На рис. 2.24 ця площа позначена  $A_z$ .

Знайдемо складові головних вектора і моменту дотичних напружень згинання. Складова  $R_z$ , паралельна осі  $z$ , дорівнює площі епюри  $\tau_{xz}^{3r}$ .

$$R_z = \iint_A \tau_{xz}^{3r} dA = \iint_A \left[ -\frac{1}{b_z} \left( \frac{Q_z S_{yz}}{I_y} + \frac{Q_y S_{zz}}{I_z} \right) \right] dA.$$

Беручи до уваги, що  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $I_y$  та  $I_z$  не залежать від змінних інтегрування  $y$ ,  $z$ , виносимо їх за знаки інтегралів.

$$R_z = -\frac{Q_z}{I_y} \iint_A \frac{1}{b_z} S_{yz} dA - \frac{Q_y}{I_z} \iint_A \frac{1}{b_z} S_{zz} dA.$$



Запишемо інтеграли в іншому вигляді, який відповідає порядку інтегрування:

$$\iint_A \frac{S_{yz}}{b_z} dA = \int_{h_1}^{h_2} \left[ dz \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \frac{1}{b_z(z)} \int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} \xi d\xi \int d\eta \right],$$

$$\iint_A \frac{S_{zz}}{b_z} dA = \int_{h_1}^{h_2} \left[ dz \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \frac{1}{b_z(z)} \int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} d\xi \int \eta d\eta \right].$$

Величини, які увійшли в ці вирази, зображені на рис. 2.24.

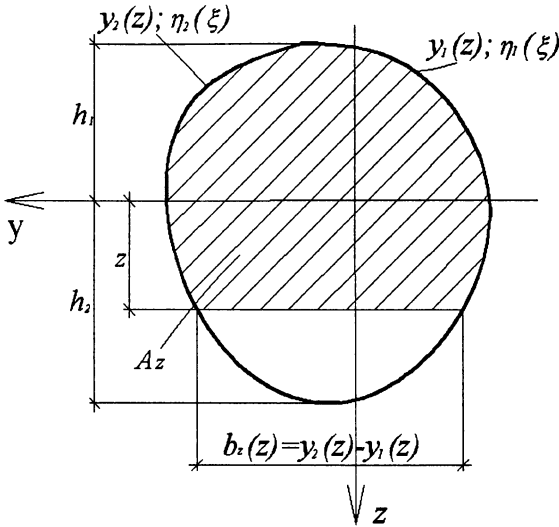


Рис. 2.24. Поперечний переріз стержня для визначення рівнодіючих дотичних напружень згину

Функції  $y_1(z)$  та  $y_2(z)$  відповідають рівнянням контуру перерізу. Змінні  $\eta$  і  $\xi$  співпадають із  $y$  та  $z$ .

Не зупиняючись на подробицях інтегрування, запишемо їх остаточний результат:

$$\iint_A \frac{S_{yz}}{b_z} dA = -(I_y + h_2 S_y) = -I_y,$$

$$\iint_A \frac{S_{zz}}{b_z} dA = h_2 S_y - I_{yz} = 0.$$

Остаточний результат заснований на тому, що у головних осях перерізу  $S_y = S_z = 0$ ,  $I_{yz} = 0$ . Враховуючи отримані значення, у виразі  $R_z$  будемо мати:

$$R_z = Q_z.$$

Друга складова головного вектора  $R_y$  дорівнює площі епюри  $\tau_{xy}^{3r}$ :

$$R_y = \iint_A \tau_{xy}^{3r} dA = \iint_A \left[ -\frac{1}{b_y} \left( \frac{Q_z S_{yy}}{I_y} + \frac{Q_y S_{zy}}{I_z} \right) \right] dA.$$

Звідси знайдемо:

$$R_y = Q_y.$$

Таким чином, складові головного вектора дотичних напружень згину дорівнюють:

$$\begin{aligned} R_z &= \iint_A \tau_{xz}^{3r} dA = Q_z, \\ R_y &= \iint_A \tau_{xy}^{3r} dA = Q_y. \end{aligned} \quad (2.55)$$

З'ясуємо, чи виникає від дотичних напружень згину момент відносно поздовжньої осі стержня.

$$M_x^{3r} = \iint_A (\tau_{xz}^{3r} y - \tau_{xy}^{3r} z) dA. \quad (2.56)$$

Підставимо вирази (2.54):

$$M_x^{3r} = -\iint_A \frac{y}{b_z} \left( \frac{Q_z S_{yz}}{I_y} + \frac{Q_y S_{zz}}{I_z} \right) dA + \iint_A \frac{z}{b_y} \left( \frac{Q_z S_{yy}}{I_y} + \frac{Q_y S_{zy}}{I_z} \right) dA.$$

Об'єднаємо члени з однаковими поперечними зусиллями і винесемо за знаки інтегралів величини, які не залежать від змінних інтегрування:

$$M_x^{3r} = \frac{Q_z}{I_y} \iint_A \left( -\frac{y S_{yz}}{b_z} + \frac{z S_{yy}}{b_y} \right) dA - \frac{Q_y}{I_z} \iint_A \left( -\frac{z S_{zy}}{b_y} + \frac{y S_{zz}}{b_z} \right) dA. \quad (2.57)$$

Позначимо:

$$c_y = \frac{1}{I_y} \iint_A \left( \frac{S_{yyz}}{b_y} - \frac{S_{yz}y}{b_z} \right) dA, \quad (2.58)$$

$$c_z = \frac{1}{I_z} \iint_A \left( \frac{S_{zzy}}{b_z} - \frac{S_{zyz}}{b_y} \right) dA.$$

Аналізуючи праві частини цих виразів можна стверджувати, що вони мають лінійну розмірність. Це дає можливість розглядати  $c_y$  та  $c_z$  як координати деякої точки  $C$ , до якої прикладені поперечні зусилля  $Q_y$  та  $Q_z$  (рис. 2.25).

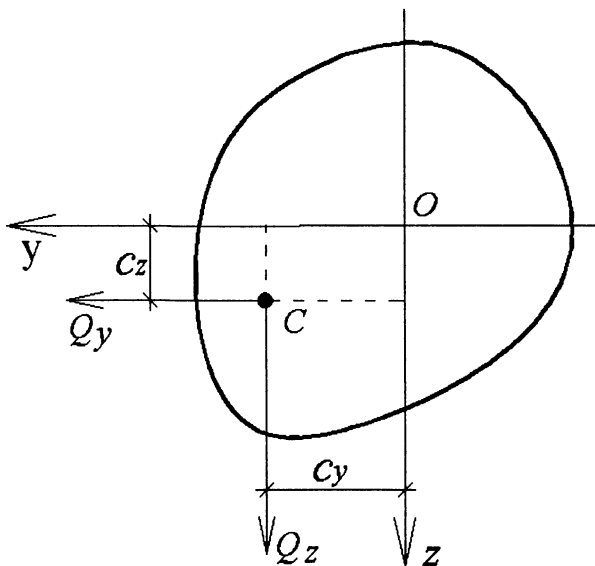


Рис. 2.25. Положення точки прикладення поперечних зусиль

Дуже важливим є те, що точка  $C$  не обов'язково співпадає з центром ваги, що свідчить про можливість утворення поперечними зусиллями моменту відносно осі  $x$ , тобто моменту кручення:

$$M_x^{3Г} = Q_z c_y - Q_y c_z.$$

Точка  $C$  співпадає з центром ваги, якщо головні осі  $y$  та  $z$  є осями симетрії.

Отримані результати свідчать про те, що згинальне навантаження, яке прикладене так, що перетинає центр ваги, може утворювати момент кручення. Але ці результати не абсолютно достовірні, тому що базуються на припущенні рівномірного розподілу дотичних напружень згину по ширині перерізу. Це не підтверджується більш точними розв'язками теорії пружності, особливо коли ширина і висота перерізу суттєво не відрізняються одне від одного. У цьому випадку необхідно застосовувати методи теорії пружності. Якщо ширина перерізу значно менше висоти (тонкостінний стержень), то рівномірний розподіл дотичних напружень згинання по ширині перерізу дає прийнятні результати. Методика розрахунку подібних стержнів розглянута у четвертому розділі.

### 2.3.2. Перевірка міцності стержня

Після знаходження зусиль необхідно перейти до визначення напружень, на підставі яких робиться перевірка міцності стержня. Між зусиллями і напруженнями існують залежності (2.45), (2.51), (2.54). Об'єднаємо їх у єдиний блок:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y,$$

$$\tau_{xy}^{\text{зг}} = -\frac{1}{b_y} \left( \frac{Q_z S_{yy}}{I_y} + \frac{Q_y S_{zy}}{I_z} \right), \quad \tau_{xy}^{\text{кр}} = -\alpha_y \frac{M_x^{\text{кр}}}{I_{\text{кр}}} z, \quad (2.59)$$

$$\tau_{xz}^{\text{зг}} = -\frac{1}{b_z} \left( \frac{Q_z S_{yz}}{I_y} + \frac{Q_y S_{zz}}{I_z} \right), \quad \tau_{xz}^{\text{кр}} = \alpha_z \frac{M_x^{\text{кр}}}{I_{\text{кр}}} y.$$

Виконання умов міцності потребує, щоб у кожній точці стержня еквівалентне напруження  $\sigma_{екв}$ , яке визначається згідно певної теорії міцності, не перевищувало допустимого напруження  $\sigma_{adm}$ :

$$\sigma_{екв} \leq \sigma_{adm}. \quad (2.60)$$

Для отримання  $\sigma_{екв}$  необхідно визначити головні напруження. Методика їх знаходження розглянута у першому розділі. Вона складається із визначення компонент тензора напружень, який для стержня має вигляд:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Після чого складаємо рівняння (1.11), коефіцієнти якого дорівнюють:

$$I_1 = \sigma_{xx}, \quad I_2 = -\tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2, \quad I_3 = 0.$$

Враховуємо це у рівнянні (1.11):

$$\sigma_{ii}^3 - \sigma_{xx}\sigma_{ii}^2 - (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)\sigma_{ii} = 0.$$

Звідси знайдемо головні напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_{xx} + \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)} \right], \\ \sigma_{22} &= 0, \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_{xx} - \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)} \right] \end{aligned} \quad (2.61)$$

Далі необхідно обрати теорію міцності, за якою визначаємо  $\sigma_{екв}$ . Наведемо вирази  $\sigma_{екв}$  по третій та четвертій теоріях міцності, які застосовуються найбільш часто.

$$\begin{aligned} \sigma_{екв}^{III} &= \sigma_{11} - \sigma_{33} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)}, \\ \sigma_{екв}^{IV} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2} = \\ &= \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Перевірку міцності потрібно здійснювати у точках, де  $\sigma_{екв}$  досягає максимальних значень. Це буде відбуватися у точках, де компоненти тензора напружень, які визначаються за формулами (2.59), досягають максимальних значень. Як впливає із вказаних формул, напруження залежить від зусиль та певних геометричних характеристик перерізів, тому саме максимальні значення цих величин потрібно встановлювати.

Почнемо з внутрішніх зусиль. Їх максимальні значення найпростіше встановити за епюрами зусиль. Аналізуючи епюри, встановлюємо, де кожне зусилля досягає максимальних значень. Таким чином визначаємо положення перерізів, в яких потрібно визначати напруження і робити перевірку міцності. Це необхідно виконувати у кожному перерізі, де одне з зусиль має максимальне значення, а інші мають відповідні величини. Слід звернути увагу на те, що перевірку міцності потрібно робити також у перерізах, у яких декілька зусиль мають величини, близькі до максимальних.

Встановивши вказані перерізи за епюрами зусиль, визначаємо в них усі внутрішні зусилля, після чого необхідно знайти положення точок, в яких виникають максимальні напруження. Для цього потрібно встановити характер зміни напружень у площині перерізу. Це можливо зробити на підставі формул (2.59).

Почнемо з аналізу формули нормальних напружень  $\sigma_{xx}$ . Беручи до уваги, що всі змінні величини ( $y$  і  $z$ ) входять у формулу в першому степені, можна стверджувати, що це — рівняння площини, тобто напруження  $\sigma_{xx}$  змінюється за законом площини (рис. 2.26) незалежно від форми перерізу.

Очевидним є те, що максимальні значення  $\sigma_{xx}$  виникають у точках найбільш віддалених від головних осей. Знайдемо лінію перетину площини нормальних напружень із поперечним перерізом. Для цього потрібно прийняти  $\sigma_{xx} = 0$ , тоді будемо мати:

$$\frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = 0. \quad (2.63)$$

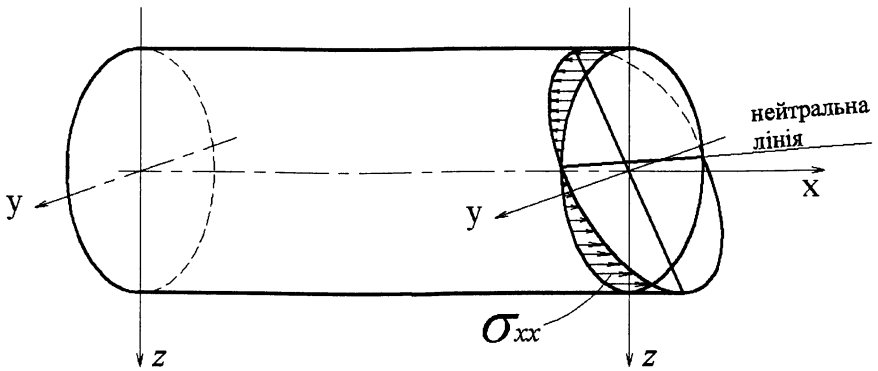


Рис. 2.26. Розподіл нормальних напружень  $\sigma_{xx}$  по площі перерізу

Ця лінія є нейтральною віссю. Приведемо її рівняння до нормальної форми, помноживши його на нормувальний множник  $\lambda$ :

$$\lambda = \pm \sqrt{\left(\frac{M_y}{I_y}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{I_z}\right)^2}. \quad (2.64)$$

Отримаємо:

$$\lambda \frac{M_y}{I_y} z + \lambda \frac{M_z}{I_z} y + \lambda \frac{N_x}{A} = 0. \quad (2.65)$$

Коефіцієнти при змінних у цьому рівнянні дорівнюють тригонометричним функціям кута  $\alpha$  (рис. 2.27).

$$\cos \alpha = \lambda \frac{M_y}{I_y}, \quad \sin \alpha = \lambda \frac{M_z}{I_z}, \quad \lambda \frac{N_x}{A} = |OB|. \quad (2.66)$$

Оберемо нову систему координат  $Ox\tilde{y}\tilde{z}$ . Вісь  $O\tilde{y}$  паралельна нейтральній лінії, а вісь  $O\tilde{z}$  їй перпендикулярна. Переведемо вираз  $\sigma_{xx}$  в нову систему координат. Помножимо його на коефіцієнт  $\lambda$ :

$$\lambda \sigma_{xx} = \lambda \frac{M_y}{I_y} z + \lambda \frac{M_z}{I_z} y + \lambda \frac{N_x}{A},$$

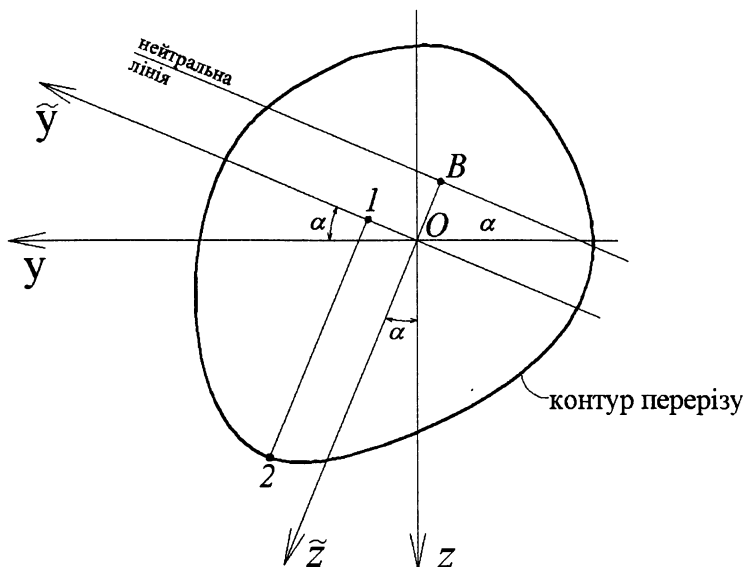


Рис. 2.27. Система координат у перерізі стержня, що співпадає з нейтральною лінією нормальних напружень  $\sigma_{xx}$

або

$$\lambda \sigma_{xx} = z \cos \alpha + y \sin \alpha + \lambda \frac{N_x}{A}. \quad (2.67)$$

Між координатами  $y, z$  та  $\tilde{y}, \tilde{z}$  існує залежність:

$$\begin{aligned} y &= \tilde{y} \cos \alpha + \tilde{z} \sin \alpha, \\ z &= -\tilde{y} \sin \alpha + \tilde{z} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Підставляючи ці залежності у попередній вираз, отримаємо:

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{\lambda} \tilde{z} + \frac{N_x}{A}. \quad (2.69)$$

Ця формула дозволяє встановити, що найбільше напруження  $\sigma_{xx}$  виникає у точці контуру перерізу, яка має найбільшу ординату  $\tilde{z}$ . На рис. 2.27 це відрізок 1-2.



Встановимо характер зміни дотичних напружень кручення  $\tau_{xy}^{кр}$  та  $\tau_{xz}^{кр}$ . Як випливає з формул (2.64), вони також змінюються за законом площини. Нейтральна вісь напружень  $\tau_{xy}^{кр}$  співпадає з лінією, що проходить через центр ваги перерізу і паралельна осі  $y$  (рис. 2.28).

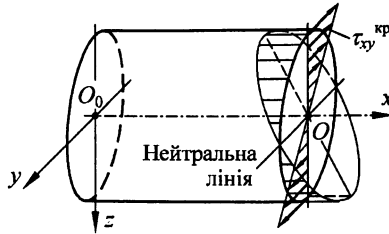


Рис. 2.28. Розподіл дотичних напружень кручення  $\tau_{xy}^{кр}$  по площі перерізу

Дотичні напруження  $\tau_{xz}^{кр}$  мають аналогічний характер зміни, тільки вони паралельні осі  $z$ .

Зупинимось на встановленні характеру зміни дотичних напружень згину  $\tau_{xz}^{зг}$ ,  $\tau_{xy}^{зг}$ . Аналізуючи їх вирази (2.59), можна зробити висновок, що зміна згаданих напружень залежить від характеру зміни статичних моментів частин перерізу та їх ширини у різних точках, а на значення вказаних величин суттєво впливає форма перерізу. При різних формах перерізів вони мають досить складний вигляд. Щоб позбутися цих ускладнень, розглянемо всі необхідні перетворення для перерізу простої форми у вигляді прямокутника (рис. 2.29).

Відокремимо частину прямокутника  $A_z$  лінією 1-2. Встановимо величини, необхідні для підрахунку дотичних напружень  $\tau_{xz}^{зг}$ .

$$b_z = b, S_{yz} = -\left(z + \frac{h}{2}\right)b \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - z\right) = -\frac{1}{8}(h^2 - 4z^2)b.$$

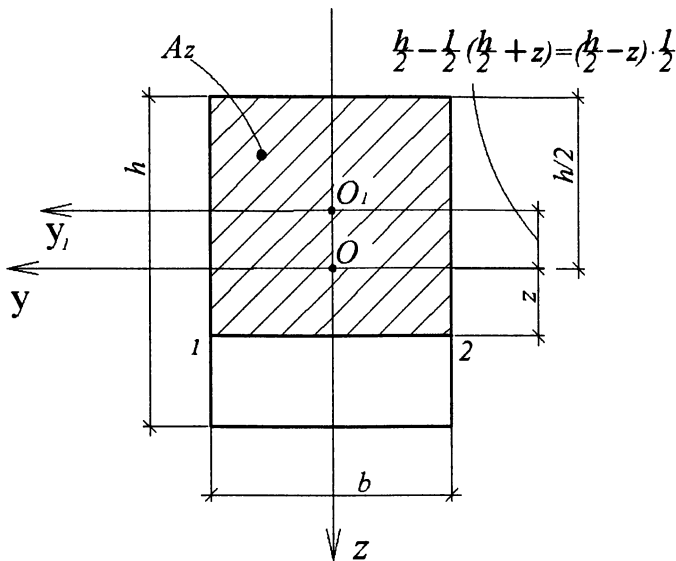


Рис. 2.29. Прямокутний переріз стержня для визначення статичного моменту частини його площі

Підставляємо ці величини у відповідну формулу (2.64):

$$\tau_{xz}^{зг} = \frac{Q_z}{I_y} \cdot \frac{(h^2 - 4z^2)b}{8b} = \frac{Q_z}{8I_y} (h^2 - 4z^2). \quad (2.70)$$

Згідно з отриманим виразом на рис. 2.30 зображений характер зміни  $\tau_{xz}^{зг}$  по площині перерізу.

Дотичні напруження  $\tau_{xz}^{зг}$  змінюються по площині перерізу за параболічним законом і мають максимальне значення по середині перерізу. Таким чином, характер їх зміни суттєво відрізняється від зміни напружень  $\sigma_{xx}$  та  $\tau_{xz}^{кр}$ .

Аналогічним шляхом можна отримати вираз для дотичних напружень  $\tau_{xy}^{зг}$ . Він має вигляд:

$$\tau_{xy}^{3\Gamma} = \frac{Q_y}{I_z} (b^2 - 4y^2). \quad (2.71)$$

Розглянемо переріз, що складається з трьох прямокутників (рис. 2.31).

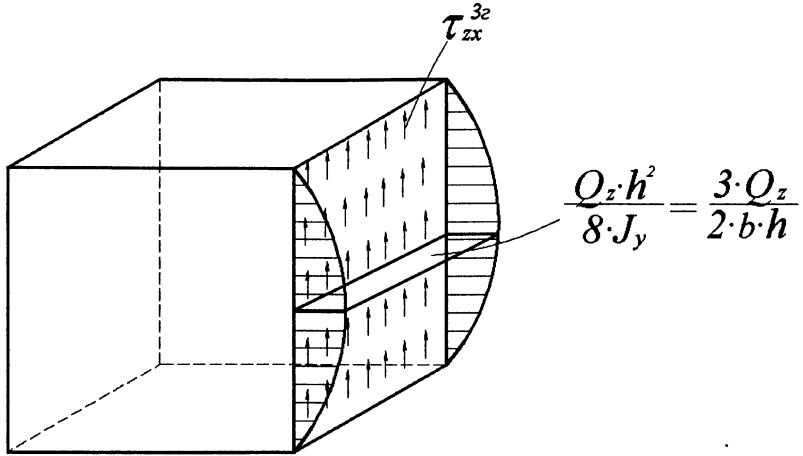


Рис. 2.30. Розподіл дотичних напружень згину  $\tau_{xz}^{3\Gamma}$  по площі прямокутного перерізу

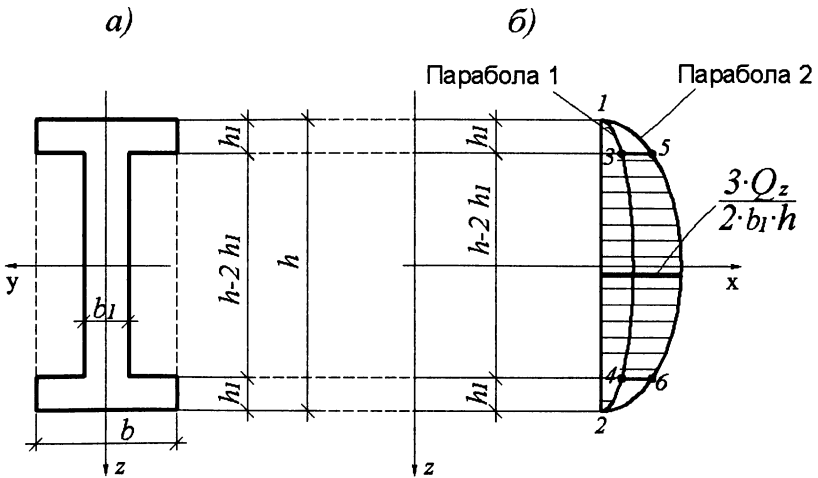


Рис. 2.31. Розподіл дотичних напружень згину  $\tau_{xz}^{3\Gamma}$  по перерізу, що має форму двотавра

Розглянемо почергово два прямокутних перерізи  $b \times h$  та  $b_1 \times h$ . Для кожного з них епюру дотичних напружень будемо за формулою (2.70). У першому варіанті ширину перерізу беремо рівною  $b$ , а у другому —  $b_1$ . Епюра у першому варіанті на рис. 2.31(б) — парабола 1, а у другому — парабола 2.

Ординати параболи 1 менше ординат параболи 2 у  $b/b_1$  разів. Параболу 1 застосовуємо у межах точок 1-3 та 4-2, а параболу 2 — у межах точок 5-6. У точках, де різко змінюється ширина перерізу, також різко змінюються ординати епюри  $\tau_{xz}^{зг}$ .

Отримані результати розподілення напружень у межах поперечного перерізу стержня дозволяють встановлювати положення точок, в яких напруження досягають найбільших значень. У цих точках необхідно робити перевірку стержня на міцність.

### 2.3.3. Окремі випадки напруженого стану стержня

Попередній матеріал присвячений розгляду загального напруженого стану, коли у стержні виникають шість зусиль та п'ять напружень. Подібний стан не завжди виникає у стержні. Можливі окремі простіші варіанти, у яких кількість зусиль та напружень менш ніж у загальному випадку. Крім того, у таких окремих випадках спрощується характер розподілення напружень, завдяки чому визначення небезпечних точок для перевірки міцності стає значно простішим. Це залежить від характеру навантаження та форми поздовжньої осі стержня, що дозволяє встановити, який вигляд має напружений стан до початку розрахунку, тому зупинимось на їх розгляді.

*Плоский напружений стан.* Він виникає, коли вісь стержня та активне і реактивне навантаження розташовані у одній площині, припустимо  $xOz$  (рис. 2.32). У цьому випадку у стержні виникають три зусилля:  $N_x$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$ . Нулю дорівнюють  $M_z$ ,  $M_x^{зг}$ ,  $M_x^{кп}$  та  $Q_y$ .

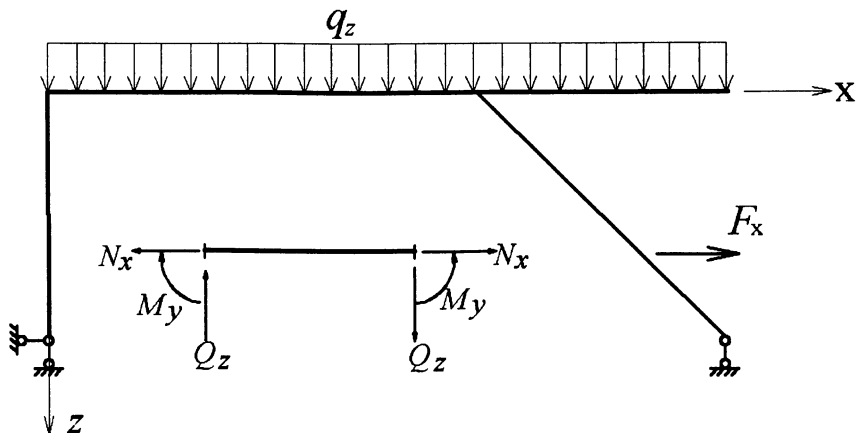


Рис. 2.32. Умова, при якій виникає плоский напружений стан у стержні

Для закріплення стержня такої форми достатньо трьох в'язей. Реакції у цих в'язях знаходяться з трьох рівнянь рівноваги. Аналогічно, при визначенні внутрішніх зусиль складається три умови рівноваги. У перерізах стержня виникають тільки два напруження  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xz}^{3r}$ . Характер їх розподілення по площині перерізу такий, що вони змінюються тільки за напрямом осей  $x$  та  $z$  і не змінюються за напрямом осі  $y$  (рис. 2.33).

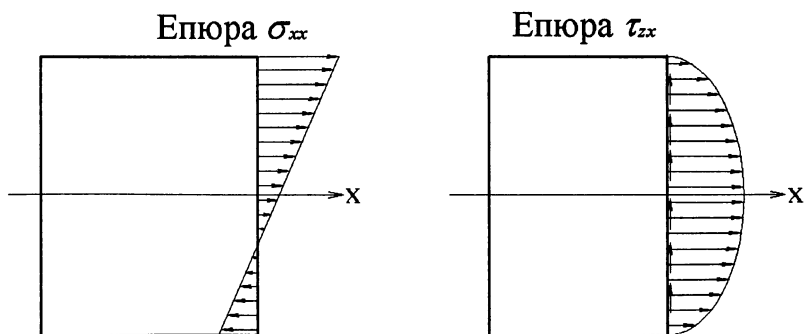


Рис. 2.33. Розподіл нормальних напружень  $\sigma_{xx}$  та дотичних  $\tau_{xz}^{3r}$  у плоскому напруженому стані стержня

Форма перерізу повинна бути такою, щоб центр ваги і центр згину знаходились на одній лінії, яка знаходиться у площині  $xOz$ .

Другий варіант напруженого стану плоского стержня. Цей варіант виникає у плоскому стержні, коли всі навантаження — активні та реактивні спрямовані перпендикулярно до площини стержня (рис. 2.34).

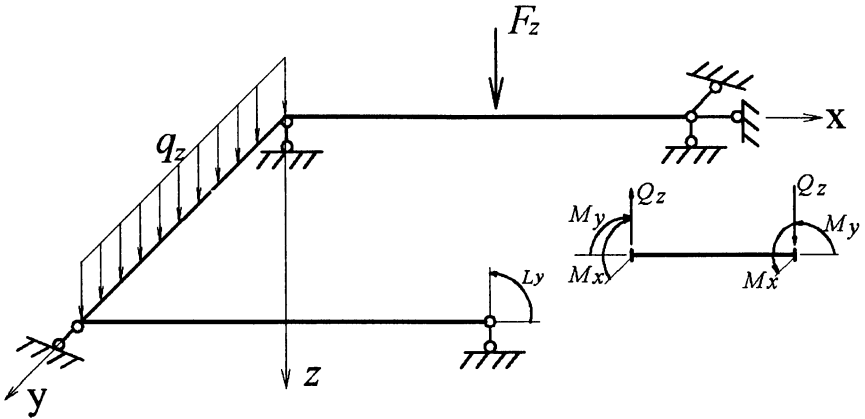


Рис. 2.34. Плоский стержень, до якого прикладене навантаження, перпендикулярне його площині

У даному випадку виникають наступні внутрішні зусилля — один згинальний момент, одна поперечна сила та момент кручення. На рис. 2.34 показані шість в'язей, які закріплюють стержень, але реакції виникають тільки у трьох в'язях, паралельних осі  $z$ . В інших вони дорівнюють нулю. Врахування вказаних особливостей дозволяє спростити розрахунок стержня. Напруження, які виникають у цьому випадку —  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xz}^{зг}$ ,  $\tau_{xz}^{кр}$ ,  $\tau_{xy}^{кр}$ . Їх розподілення по площині перерізу подібне тому, що було зазначено вище.

*Косий згин стержня.* Виникає, коли навантаження прикладені у напрямку двох головних осей. При такому навантаженні у стержні виникають два загальні моменти  $M_y$  та  $M_z$  і дві поперечні сили  $Q_y$  та  $Q_z$ . Нормальні та дотичні напруження визначаються за формулами:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y,$$

$$\tau_{xy}^{зг} = -\frac{1}{b_y} \left( \frac{Q_z S_{yy}}{I_y} + \frac{Q_y S_{zy}}{I_z} \right),$$

$$\tau_{xz}^{зг} = -\frac{1}{b_z} \left( \frac{Q_z S_{yz}}{I_y} + \frac{Q_y S_{zz}}{I_z} \right).$$

*Плоский згин прямолінійного стержня.* Виникає, коли навантаження прикладене паралельно тільки одній з головних осей, наприклад, осі  $z$ . Формули для визначення нормальних та дотичних напружень мають вигляд:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_y} z,$$

$$\tau_{xz}^{зг} = -\frac{Q_z S_{yz}}{b_z I_y}.$$

Доцільнішим є застосування простішої формули:

$$\sigma_{xx, \max} = \frac{M_y}{W_y}.$$

*Розтяг чи стиск стержня.* Виникає, коли навантаження прикладені тільки вздовж поздовжньої осі стержня. Виникають тільки нормальні напруження:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A}.$$

*Чисте кручення стержня.* Виникає при навантаженні у вигляді моментів відносно поздовжньої осі стержня. З внутрішніх зусиль не рівним нулю є тільки момент чистого кручення  $M_x^{кр}$ , від дії якого виникають тільки дотичні напруження кручення. Їх максимальні значення визначаються за формулами (2.52):

$$\tau_{xy, \max}^{\text{кр}} = -\frac{M_x^{\text{кр}}}{W_y^{\text{кр}}}, \quad \tau_{xz, \max}^{\text{кр}} = \frac{M_x^{\text{кр}}}{W_z^{\text{кр}}}.$$

*Позацентрово стиснутий або розтягнутий прямолінійний стержень.*  
 Подібний напружений стан виникає, коли навантаження прикладене до торцевих перерізів прямолінійного стержня і його напрямок паралельний поздовжній осі (рис. 2.35).

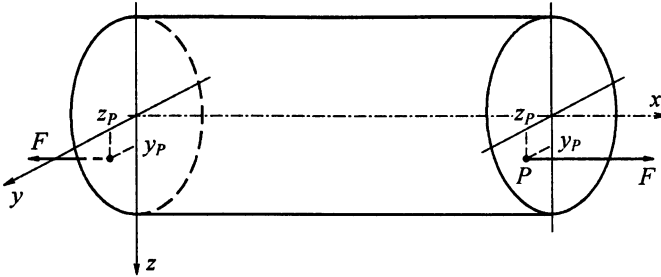


Рис. 2.35. Позацентрово стиснутий або розтягнутий прямолінійний стержень

Зовнішнє навантаження  $F$  прикладене у точках із координатами  $y_P, z_P$ . Навантаження, як завжди, необхідно привести до головних осей, тоді воно буде мати наступний вигляд (рис. 2.36).

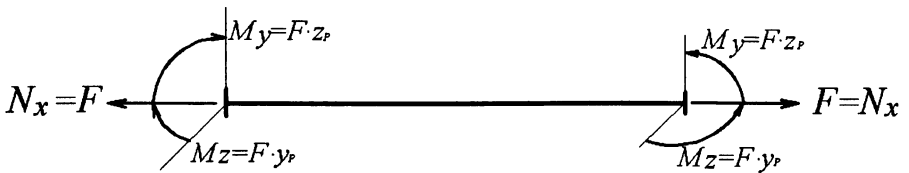


Рис. 2.36. Зусилля, які виникають у позацентрово навантаженому стержні

У стержні виникає тільки нормальне напруження:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y,$$

яке по перерізу розподілене за законом площини (рис. 2.26).



Підставимо у вираз  $\sigma_{xx}$  значення поздовжньої сили та моментів згину (рис. 2.36):

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot z_P}{I_y} z + \frac{F \cdot y_P}{I_z} y.$$

Винесемо за дужки перший член цього виразу:

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_P}{i_y^2} z + \frac{y_P}{i_z^2} y \right). \quad (2.72)$$

Тут враховані співвідношення:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A}, \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A}.$$

Приймаючи у формулі (2.72)  $\sigma_{xx} = 0$ , отримаємо рівняння нейтральної лінії епюри  $\sigma_{xx}$ :

$$\frac{y_P}{i_z^2} y + \frac{z_P}{i_y^2} z + 1 = 0. \quad (2.73)$$

Отримане рівняння свідчить про те, що між положенням нейтральної лінії та координатами  $y_P$ ,  $z_P$  точки прикладання навантаження  $F$  існують певні залежності. Проаналізуємо їх характер. Для цього через точки контуру перерізу проведемо систему дотичних прямих, які будуть обгортати переріз, не перетинаючи його (рис. 2.37). Вказані прямі будемо розглядати як нейтральні лінії. Встановимо зв'язок між цими нейтральними лініями і координатами  $y_P$ ,  $z_P$ . Для цього зведемо рівняння (2.73) до нормального вигляду, помноживши його на нормувальний множник  $\lambda$ , який дорівнює:

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y_P}{i_z^2}\right)^2 + \left(\frac{z_P}{i_y^2}\right)^2}} = -\frac{i_y^2 i_z^2}{\sqrt{i_y^4 y_P^2 + i_z^4 z_P^2}}. \quad (2.74)$$

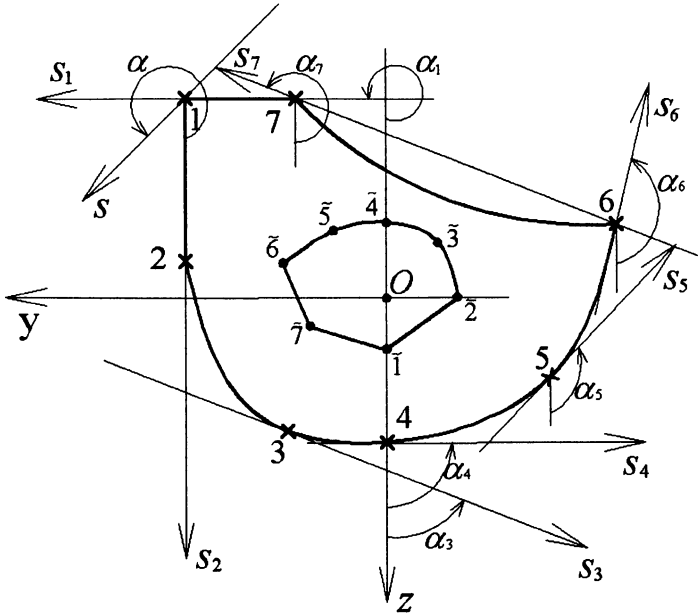


Рис. 2.37. Ядро перерізу, яке застосовується в розрахунку позацентровано навантаженого стержня

Рівняння (2.73) приймає вигляд:

$$y \cos \alpha + z \sin \alpha + \lambda = 0,$$

$$\text{де } \cos \alpha = \lambda \frac{y_P}{i_z^2} = -\frac{i_y^2 y_P}{\sqrt{i_y^4 y_P^2 + i_z^4 z_P^2}},$$

$$\sin \alpha = \lambda \frac{z_P}{i_y^2} = -\frac{i_z^2 z_P}{\sqrt{i_y^4 y_P^2 + i_z^4 z_P^2}}.$$

Знайдемо вираз  $\cos^2 \alpha$ :

$$\cos^2 \alpha = \frac{i_y^4 y_P^2}{i_y^4 y_P^2 + i_z^4 z_P^2},$$

звідки отримаємо

$$i_z^4 z_P^2 \cos^2 \alpha = i_y^4 y_P^2 (1 - \cos^2 \alpha),$$

або

$$i_z^4 z_P^2 \cos^2 \alpha = i_y^4 y_P^2 \sin^2 \alpha.$$

Остаточний вираз цього співвідношення приймаємо у наступному вигляді:

$$i_z^2 z_P \cos \alpha - i_y^2 y_P \sin \alpha = 0. \quad (2.75)$$

Застосовуючи цю залежність разом з (2.73), отримаємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} i_z^2 z_P \cos \alpha - i_y^2 y_P \sin \alpha = 0, \\ \frac{y_P}{i_z^2} y + \frac{z_P}{i_y^2} z + 1 = 0. \end{cases}$$

Звідки знайдемо:

$$\begin{aligned} z_P &= -\frac{i_y^2 \sin \alpha}{y \cos \alpha + z \sin \alpha}, \\ y_P &= -\frac{i_z^2 \cos \alpha}{y \cos \alpha + z \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Якщо взяти до розгляду конкретну нейтральну лінію, що проходить через точку  $K$  з координатами  $y = y_K$ ,  $z = z_K$  під кутом  $\alpha = \alpha_K$ , то за формулами (2.76) отримаємо координати точки прикладення навантаження  $F$ , яка пов'язана з цією нейтральною лінією. На рис. 2.37 зображена певна кількість таких точок ( $\tilde{1}$ ,  $\tilde{2}$ , ...,  $\tilde{7}$ ), які пов'язані з нейтральними лініями, що обгортають контур перерізу. Вказані точки обмежують частину площі перерізу навколо центра ваги, яка називається ядром перерізу. Властивість цієї зони полягає в тому, що від навантаження, прикладеного в її межах, виникають напруження  $\sigma_{xx}$  одного знаку у всіх точках перерізу.

Формули (2.76) дозволяють визначити окремі точки ядра перерізу. Зупинимось на встановленні характеру граничної лінії ядра при переході від однієї точки до іншої. Це пов'язано з переходом від однієї нейтральної лінії до другої. Почнемо з нейтральних ліній  $s_1$  та  $s_2$ . Встановимо положення

відповідних їм точок  $\tilde{1}$  та  $\tilde{2}$ . Підставляємо у формули (2.76) параметри, які характеризують положення ліній  $s_1$  та  $s_2$  (рис. 2.37). Вони мають такі значення:

$$s_1: \alpha = 270^\circ, \quad y = y_1, \quad z = -z_1;$$

$$s_2: \alpha = 0, \quad y = y_1, \quad z = -z_1.$$

Враховуючи це у формулах (2.76), будемо мати:

$$z_{\tilde{1}} = \frac{i_y^2}{z_1}, \quad y_{\tilde{1}} = 0,$$

$$z_{\tilde{2}} = 0, \quad y_{\tilde{2}} = -\frac{i_z^2}{y_1}.$$

Запишемо рівняння прямої, що проходить через ці дві точки:

$$z \frac{i_z^2}{y_1} - y \frac{i_y^2}{z_1} = \frac{i_y^2 \cdot i_z^2}{z_1 \cdot y_1}.$$

Перевіримо, чи задовольняють цьому рівнянню координати  $z_P$  та  $y_P$  точок, які пов'язані з нейтральними лініями  $s$  (рис. 2.37), що проходять через точку  $1(y_1; -z_1)$  під довільним кутом  $\alpha$ . Замість  $z$  та  $y$  підставимо  $z_P$  та  $y_P$ , визначені за формулами (2.76):

$$z_P = -\frac{i_y^2 \sin \alpha}{y_1 \cos \alpha - z_1 \sin \alpha},$$

$$y_P = -\frac{i_z^2 \cos \alpha}{y_1 \cos \alpha - z_1 \sin \alpha},$$

$$-\frac{i_y^2 \sin \alpha}{y_1 \cos \alpha - z_1 \sin \alpha} \cdot \frac{i_z^2}{y_1} + \frac{i_z^2 \cos \alpha}{y_1 \cos \alpha - z_1 \sin \alpha} \cdot \frac{i_y^2}{z_1} = \frac{i_y^2 \cdot i_z^2}{z_1 \cdot y_1}.$$

Після нескладних перетворень переконуємося, що рівняння задовольняється. Таким чином, границя ядра перерізу між точками  $\tilde{1}$  та  $\tilde{2}$  є пряма лінія. Аналогічний характер буде мати границя ядра між точками  $\tilde{7}-\tilde{1}$  та  $\tilde{6}-\tilde{7}$ , тобто це стосується точок контуру перерізу, через які можна провести нейтральні лінії, не змінюючи координати точок, а змінюючи тільки кути  $\alpha$ .

Розглядаючи інші точки (припустимо, 3-4), між точками  $\tilde{3}$ - $\tilde{4}$  характер граничної лінії ядра залежить від форми контуру перерізу. Це буде у тих випадках, коли змінюються координати точок і кут  $\alpha$ .

## Глава 2.4. Переміщення стержня

### 2.4.1. Визначення переміщень прямолінійного стержня методом початкових параметрів

Переміщення довільної точки стержня можна визначати через лінійні переміщення його поздовжньої осі  $u_x(x)$ ,  $u_y(x)$ ,  $u_z(x)$  та кути повороту поперечного перерізу  $\varphi_x(x)$ ,  $\varphi_y(x)$ ,  $\varphi_z(x)$ . Серед вказаних шести величин незалежними є тільки чотири. Кути повороту  $\varphi_y$  та  $\varphi_z$  пов'язані з лінійними переміщеннями наступними співвідношеннями:

$$\varphi_y = u'_z, \quad \varphi_z = u'_y. \quad (2.77)$$

Для знаходження чотирьох складових переміщень необхідно отримати чотири диференціальних рівняння. Використаємо рівняння (2.22). З рівнянь  $\sum M_y = 0$  та  $\sum M_z = 0$  отримаємо:

$$Q_z = M'_y + m_y,$$

$$Q_y = M'_z + m_z.$$

Врахуємо ці залежності у рівняннях  $\sum Y = 0$  та  $\sum Z = 0$ . Звідки знайдемо:

$$M''_y = -(q_z + m'_y),$$

$$M''_z = -(q_y + m'_z). \quad (2.78)$$

Рівняння  $\sum M_x = 0$  запишемо у вигляді

$$(M_x^{кр})' = -m_x \quad (2.79)$$

(саме такий варіант найчастіше застосовується). На підставі першого рівняння (2.22) та рівнянь (2.78) і (2.79), отримаємо необхідні чотири рівняння:

$$\begin{aligned}\frac{dN_x}{dx} &= -q_x, \\ \frac{dM_x^{\text{кр}}}{dx} &= -m_x, \\ \frac{d^2 M_y}{dx^2} &= -(q_z + m'_y), \\ \frac{d^2 M_z}{dx^2} &= -(q_y + m'_z).\end{aligned}\tag{2.80}$$

Враховавши залежності (2.44) та (2.50), знайдемо:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u_x}{dx^2} &= -\frac{1}{EA} q_x, \\ \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} &= -\frac{1}{GI_{\text{кр}}} m_x, \\ \frac{d^4 u_z}{dx^4} &= \frac{1}{EI_y} (q_z + m'_y), \\ \frac{d^4 u_y}{dx^4} &= \frac{1}{EI_z} (q_y + m'_z).\end{aligned}\tag{2.81}$$

Таким чином, отримали чотири диференціальних рівняння, необхідних для знаходження компонент переміщення. Вони є лінійними неоднорідними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами. Два з них другого і два — четвертого порядку. Алгоритм їх розв'язання однаковий, тому докладно розглянемо розв'язок одного з них, а саме:

$$\frac{d^4 u_z}{dx^4} = \frac{1}{EI_y} (q_z + m'_y).\tag{2.82}$$

Його розв'язок складається з суми загального розв'язку однорідного рівняння  $u_z$  та частинного розв'язку неоднорідного рівняння  $u_z^*$ . Для отримання розв'язку однорідного рівняння складаємо характеристичне рівняння:

$$\kappa^4 = 0.$$

Звідки знайдемо чотири корені:

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = 0.$$

Усі вони дійсні, однакові числа, тобто чотирикратні корені. Дійсному кореню характеристичного рівняння відповідає розв'язок диференціального рівняння у вигляді показникової функції. Тому перший частинний розв'язок дорівнює:

$$f_1(x) = e^{\kappa_1 x} = e^{0x} = 1.$$

Завдяки чотириохкратності коренів характеристичного рівняння наступні розв'язки знаходяться за рахунок помноження попереднього на аргумент, внаслідок чого будемо мати:

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2, \quad f_4(x) = x^3.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння дорівнює:

$$u_z(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + c_4 f_4(x).$$

Лінійний характер диференціального рівняння дає можливість змінити функції  $f_i(x)$ . Підберемо їх так, щоби вони задовольняли наступним умовам:

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 1, & f_2(0) &= 0, & f_3(0) &= 0, & f_4(0) &= 0, \\ f_1'(0) &= 0, & f_2'(0) &= 1, & f_3'(0) &= 0, & f_4'(0) &= 0, \\ f_1''(0) &= 0, & f_2''(0) &= 0, & f_3''(0) &= 1, & f_4''(0) &= 0, \\ f_1'''(0) &= 1, & f_2'''(0) &= 0, & f_3'''(0) &= 0, & f_4'''(0) &= 1. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Ці функції мають вигляд:

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \frac{x^2}{2}, \quad f_4(x) = \frac{x^3}{6}. \tag{2.84}$$

При їх застосуванні довільні константи у загальному розв'язку можна змінити на значення переміщення  $u_z(x)$  і його похідних при  $x = 0$ . Враховуючи це, запишемо:

$$u_z(x) = u_z(0) f_1(x) + u_z'(0) f_2(x) + u_z''(0) f_3(x) + u_z'''(0) f_4(x). \tag{2.85}$$

Можливість такої заміни довільних констант підтвердиться, якщо у виразі  $u_z(x)$  та його похідних підставити  $x=0$ . Врахувавши залежності (2.83), отримаємо  $u_z(0)=u_z(0)$ , тобто перша константа дійсно дорівнює переміщенню у початковій точці. Аналогічні висновки отримаємо для інших констант  $u'_z(0)$ ,  $u''_z(0)$ ,  $u'''_z(0)$ .

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.82) можна прийняти у вигляді:

$$u_z^*(x) = \int_0^x \frac{1}{EI_y} f_4(x-t) [q_z(t) + m'_y(t)] dt. \quad (2.86)$$

У цьому виразі змінною інтегрування є величина  $t$ , яка визначає координату точки, від якої залежать всі підінтегральні функції. Межами інтегрування є початкова нульова координата  $x=0$  і довільна координата  $x$ , в якій визначається функція  $u_z^*(x)$ . Для того, щоби переконатися в тому, що функція (2.86) є дійсно частинним розв'язком неоднорідного рівняння (2.82), підставимо її у рівняння (2.82). Це потребує знаходження четвертої похідної від функції (2.86). Нагадаємо, як визначаються похідні від підінтегральних функцій.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,t) f(t) dt &= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{dF(x,t)}{dx} f(t) dt + \\ &+ \frac{d\varphi_2(x)}{dx} F[x, \varphi_2(x)] f[\varphi_2(x)] - \frac{d\varphi_1(x)}{dx} F[x, \varphi_1(x)] f[\varphi_1(x)]. \end{aligned} \quad (2.87)$$

На підставі цих залежностей знайдемо:

$$\begin{aligned} \frac{du_z^*(x)}{dx} &= \int_0^x \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{df_4(x-t)}{dx} [q_z(t) + m'_y(t)] dt + \\ &+ \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{dx}{dx} f_4(x-x) [q_z(x) + m'_y(x)] - 0. \end{aligned}$$

Враховуючи співвідношення (2.83), отримаємо  $f_4(x-x) = f_4(0) = 0$ . Крім



того, маємо  $\frac{d f_4(x-t)}{dx} = f_3(x-t)$ . Підставимо ці значення у вираз похідної

від  $u_z^*(x)$ :

$$\frac{d u_z^*(x)}{dx} = \int_0^x \frac{1}{EI_y} f_3(x-t) [q_z(t) + m'_y(t)] dt.$$

Послідовно беручи другу, третю та четверту похідні, знайдемо:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 u_z^*(x)}{dx^4} &= \int_0^x \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{d^4 f_4(x-t)}{dx^4} [q_z(t) + m'_y(t)] dt + \\ &+ \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{dx}{dx} f_4'''(x-x) [q_z(x) + m'_y(x)]. \end{aligned}$$

Залежності (2.83) та (2.84) дають можливість визначити:

$$\frac{d^4 f_4(x-t)}{dx^4} = 0, \quad f_4'''(x-x) = f_4'''(0) = 1,$$

тому

$$\frac{d^4 u_z^*(x)}{dx^4} = \frac{1}{EI_y} [q_z(x) + m'_y(x)].$$

Таким чином, можна стверджувати, що функція (2.86) є розв'язком диференціального рівняння (2.82).

Відзначимо дуже важливу властивість функції  $u_z^*(x)$ . Вона сама та її похідні до третьої включно при  $x=0$  дорівнюють нулю.

Зробимо ще одне необхідне перетворення частинного розв'язку  $u_z^*(x)$ .

Розглянемо його одну складову:

$$\int_0^x \frac{1}{EI_y} f_4(x-t) m'_y(t) dt.$$

Виконаємо інтегрування частинами:

$$u = f_4(x-t), \quad dv = m'_y(t) dt,$$

$$du = \frac{d f_4(x-t)}{dt} dt = -f_3(x-t) dt, \quad v = m_y(t),$$

$$\int_0^x \frac{1}{EI_y} f_4(x-t) m_y'(t) dt = \frac{1}{EI_y} f_4(x-t) m_y'(t) \Big|_{t=0}^x +$$

$$+ \int_0^x \frac{1}{EI_y} f_3(x-t) m_y(t) dt = -\frac{1}{EI_y} f_4(x) \cdot m_y(0) + \int_0^x \frac{1}{EI_y} f_3(x-t) m_y(t) dt.$$

Остаточний вираз  $u_z^*(x)$  матиме вигляд:

$$u_z^*(x) = \frac{1}{EI_y} \left[ \int_0^x f_4(x-t) q_z(t) dt + \int_0^x f_3(x-t) m_y(t) dt - m_y(0) f_4(x) \right]. \quad (2.88)$$

Вирази (2.83) та (2.88) дозволяють записати загальний розв'язок неоднорідного рівняння (2.82):

$$u_z(x) = u_z(0) f_1(x) + u_z'(0) f_2(x) + u_z''(0) f_3(x) + u_z'''(0) f_4(x) +$$

$$+ \frac{1}{EI_y} \left[ \int_0^x f_4(x-t) q_z(t) dt + \int_0^x f_3(x-t) m_y(t) dt - m_y(0) f_4(x) \right].$$

Залежності (2.23), (2.30), (2.44) дозволять скласти співвідношення:

$$u_z'(x) = \varphi_y(x),$$

$$u_z''(x) = -\frac{1}{EI_y} M_y(x), \quad (2.89)$$

$$u_z'''(x) = -\frac{1}{EI_y} [Q_z(x) - m_y(x)].$$

Врахуємо це у попередньому виразі:

$$u_z(x) = u_z(0) f_1(x) + \varphi_y(0) f_2(x) - \frac{M_y(0)}{EI_y} f_3(x) - \frac{Q_z(0) - m_y(0)}{EI_y} f_4(x) +$$

$$+ \frac{1}{EI_y} \left[ \int_0^x f_4(x-t) q_z(t) dt + \int_0^x f_3(x-t) m_y(t) dt - m_y(0) f_4(x) \right].$$

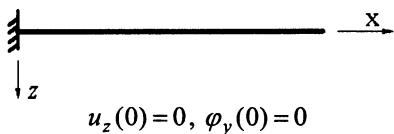
Члени, до яких входить  $m_y(0)$ , скорочуються, тоді будемо мати остаточно формулу:

$$u_z(x) = u_z(0)f_1(x) + \varphi_y(0)f_2(x) - \frac{M_y(0)}{EI_y}f_3(x) - \frac{Q_z(0)}{EI_y}f_4(x) + \frac{1}{EI_y} \left[ \int_0^x q_z(t)f_4(x-t)dt + \int_0^x m_y(t)f_3(x-t)dt \right]. \quad (2.90)$$

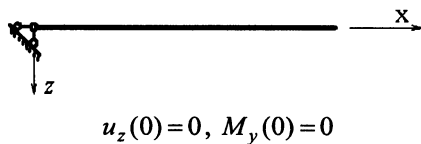
У формулу (2.90) увійшли чотири невідомі константи, які є переміщеннями  $u_z(0)$ ,  $\varphi_y(0)$  та зусиллями  $M_y(0)$ ,  $Q_z(0)$  у початковій точці стержня. Вони називаються початковими параметрами. Функції  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$ ,  $f_4(x)$  визначаються за формулами (2.84). Залежності (2.89) дозволяють знайти інші необхідні величини, а саме  $\varphi_y(x)$ ,  $M_y(x)$  та  $Q_z(x)$ . Для визначення початкових параметрів потрібно застосовувати граничні умови на лівому та правому кінці стержня.

На кожному кінці можна скласти дві граничні умови при будь-яких закріпленнях стержня. Розглянемо чотири варіанти закріплення лівого кінця стержня (рис. 2.38).

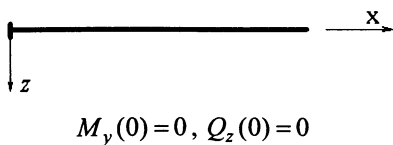
Жорстке закріплення, при  $x = 0$



Шарнірна опора, при  $x = 0$



Вільний край, при  $x = 0$



Повзунковий шарнір, при  $x = 0$

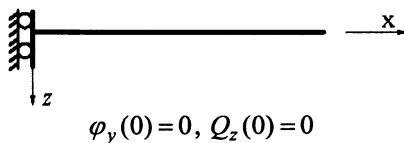


Рис. 2.38. Граничні умови при різних закріпленнях стержня

Аналогічні умови можна скласти на правому кінці. Тільки потрібно замість  $x = 0$  приймати  $x = l$ , де  $l$  — довжина стержня. Таким чином, кількість

граничних умов завжди дорівнює кількості невідомих початкових параметрів. Звернемо увагу на те, що з граничних умов при  $x=0$  відразу визначаються два початкових параметри. Слід відзначити ще одну особливість. Вона полягає в тому, що права частина граничних умов не обов'язково дорівнює нулю. Припустимо, на вільному краю прикладена зосереджена сила  $F$ , тоді поперечна сила буде дорівнювати цій силі:  $Q_z = F$ .

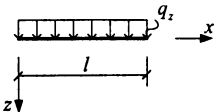
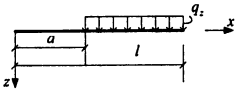
Застосування аналогічної методики для інших рівнянь (2.81) дозволяє знайти:

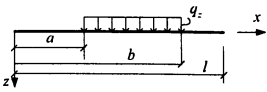
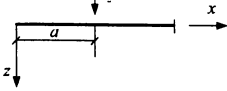
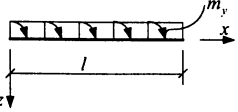
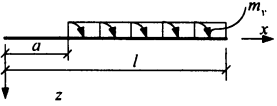
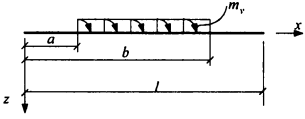
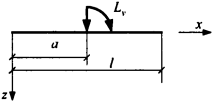
$$\begin{aligned}
 u_x(x) &= u_x(0)f_1(x) + \frac{N_x(0)}{EA}f_2(x) - \int_0^x \frac{q_x(t)}{EA}f_2(x-t)dt, \\
 \varphi_x(x) &= \varphi_x(0)f_1(x) + \frac{M_x^{kp}(0)}{GI_{kp}}f_2(x) - \int_0^x \frac{m_x(t)}{GI_{kp}}f_2(x-t)dt, \\
 u_y(x) &= u_y(0)f_1(x) + \varphi_z(0)f_2(x) - \frac{M_z(0)}{EI_z}f_3(x) - \frac{Q_y(0)}{EI_z}f_4(x) + \\
 &+ \frac{1}{EI_z} \left[ \int_0^x q_y(t)f_4(x-t)dt + \int_0^x m_z(t)f_3(x-t)dt \right].
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

При різному характері навантажень частинний розв'язок має різні вирази.

У таблиці 2.3 приведені значення частинних розв'язків  $u_z^*(x)$ , що відповідають вказаним навантаженням.

Таблиця 2.3

№	Характер навантаження	Частинний розв'язок $u_z^*(x)$
1.		$u_z^*(x) = \frac{q_z x^4}{24EI_y}$
2.		$u_z^*(x) = \frac{q_z (x-a)^4}{24EI_y}$

№	Характер навантаження	Частинний розв'язок $u_z^*(x)$
3.		$u_z^*(x) = \frac{q_z [(x-a)^4 - (x-b)^4]}{24EI_y}$
4.		$u_z^*(x) = \frac{F_z (x-a)^3}{6EI_y}$
5.		$u_z^*(x) = -\frac{m_y x^3}{6EI_y}$
6.		$u_z^*(x) = -\frac{m_y (x-a)^3}{6EI_y}$
7.		$u_z^*(x) = -\frac{m_y [(x-a)^3 - (x-b)^3]}{6EI_y}$
8.		$u_z^*(x) = -\frac{L_y (x-a)^2}{2EI_y}$

#### 2.4.2. Визначення переміщень методом Мора

Метод Мора заснований на застосуванні енергетичних принципів, а саме, принципу можливих переміщень. Для пружних деформівних систем цей принцип формулюється наступним чином.

Якщо пружна система знаходиться в умовах рівноваги, то сума робіт всіх зовнішніх та внутрішніх сил на будь-якому можливому переміщенні дорівнює нулю.

За можливе переміщення може бути обрано будь-яке мале переміщення пружної системи, що розглядається, яке задовольняє умовам її закріплення.

При застосуванні принципу можливих переміщень розглядаються два різних стани однієї пружної системи. У одному стані обираємо для розгляду зовнішнє навантаження, внутрішні зусилля та напруження, які виникають від нього. Вказані силові фактори можуть виконувати роботу на переміщеннях, які виникають у тій самій пружній системі від іншого діючого фактора. Проілюструємо це на простому прикладі балки на двох опорах (рис. 2.39).

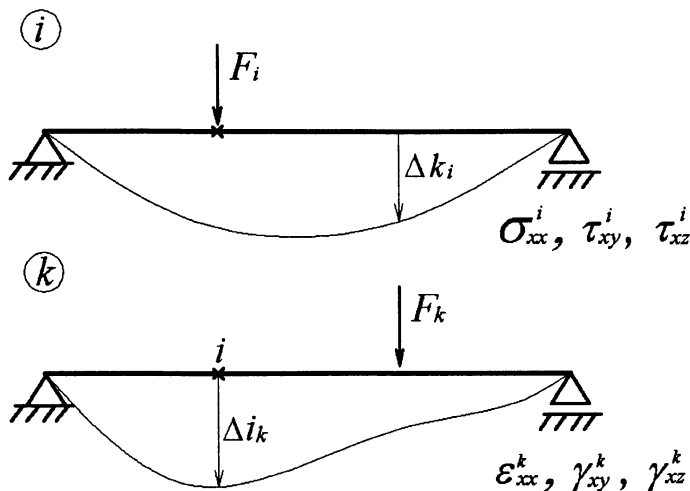


Рис. 2.39. Два різних навантаження стержня, які розглядаються для визначення переміщень за методом Мора

У стані "i" діє навантаження  $F_i$ . Визначаємо напруження  $\sigma_{xx}^i, \tau_{xy}^i, \tau_{xz}^i$ , що виникають від нього. У стані "k" прикладене зовнішнє навантаження  $F_k$ . Визначаємо у цьому стані деформації  $\epsilon_{xx}^k, \gamma_{xy}^k, \gamma_{xz}^k$ . Визначимо переміщення у цьому стані, яке виникає у точці  $i$ , від прикладеного зовнішнього навантаження  $F_i$  у стані "i". Переміщення і деформації стану "k" розглядаємо як можливі, на яких зовнішні і внутрішні сили стану "i" здійснюють можливу роботу.

Позначимо роботу зовнішніх сил  $W_{ext}^{ik}$ , а внутрішніх  $W_{int}^{ik}$ . На підставі принципу можливих переміщень запишемо:

$$W_{ext}^{ik} + W_{int}^{ik} = 0. \quad (2.92)$$

Для складання виразів роботи зовнішніх і внутрішніх сил застосуємо формули (1.62), (1.64). Необхідно тільки відкинути множник 1/2, тому що можлива робота утворюється силами, які вже досягли остаточного значення. Враховуючи сказане, отримаємо:

$$W_{ext}^{ik} = \Delta_{ik} \cdot F_i, \quad (2.93)$$

$$W_{int}^{ik} = - \iiint_V \left( \sigma_{xx}^i \varepsilon_{xx}^k + \tau_{xy}^i \gamma_{xy}^k + \tau_{xz}^i \gamma_{xz}^k \right) dV.$$

Знак "мінус" у правій частині другого виразу говорить про те, що робота внутрішніх сил дорівнює потенційній енергії пружної деформації зі зворотним знаком.

Перетворимо другий вираз. Розглянемо його першу складову. Інші складові перетворюються аналогічно, тому можна їх не розглядати. Визначимо нормальне напруження  $\sigma_{xx}^i$  та  $\varepsilon_{xx}^k$  через внутрішні зусилля:

$$\sigma_{xx}^i = \frac{N_x^i}{A} + \frac{M_{yz}^i}{I_y} + \frac{M_z^i y}{I_z},$$

$$\varepsilon_{xx}^k = \frac{1}{E} \left( \frac{N_x^k}{A} + \frac{M_{yz}^k}{I_y} + \frac{M_z^k y}{I_z} \right).$$

Врахуємо ці залежності у першому члені виразу (2.93):

$$\iiint_V \sigma_{xx}^i \varepsilon_{xx}^k dV = \iiint_V \left( \frac{N_x^i}{A} + \frac{M_{yz}^i}{I_y} + \frac{M_z^i y}{I_z} \right) \frac{1}{E} \left( \frac{N_x^k}{A} + \frac{M_{yz}^k}{I_y} + \frac{M_z^k y}{I_z} \right) dV.$$

Елемент об'єму  $dV$  можна записати у наступному вигляді:

$$dV = dx dy dz = dx dA.$$

Врахуємо це у попередній залежності:

$$\iiint_V \sigma_{xx}^i \varepsilon_{xx}^k dV = \int_0^l dx \frac{1}{E} \iint_A \left( \frac{N_x^i}{A} + \frac{M_y^i z}{I_y} + \frac{M_z^i y}{I_z} \right) \left( \frac{N_x^k}{A} + \frac{M_y^k z}{I_y} + \frac{M_z^k y}{I_z} \right) dA \Bigg].$$

Помножимо одини на одного вирази у дужках, одночасно винесемо з-під знака інтеграла по  $dA$  величини, що не залежать від  $y$  та  $z$ :

$$\begin{aligned} \iiint_V \sigma_{xx}^i \varepsilon_{xx}^k dV = & \int_0^l dx \frac{1}{E} \left( \frac{N_x^i \cdot N_x^k}{A \cdot A} \iint_A dA + \frac{M_y^i \cdot N_x^k}{I_y \cdot A} \iint_A z dA + \frac{M_z^i \cdot N_x^k}{I_z \cdot A} \iint_A y dA + \right. \\ & + \frac{N_x^i \cdot M_y^k}{I_y \cdot A} \iint_A z dA + \frac{M_y^i \cdot M_y^k}{I_z \cdot I_y} \iint_A z^2 dA + \frac{M_z^i \cdot M_y^k}{I_z \cdot I_y} \iint_A yz dA + \\ & \left. + \frac{N_x^i \cdot M_z^k}{I_z \cdot A} \iint_A y dA + \frac{M_y^i \cdot M_z^k}{I_z \cdot I_y} \iint_A zy dA + \frac{M_z^i \cdot M_z^k}{I_z \cdot I_z} \iint_A y^2 dA \right) dx. \end{aligned}$$

Інтеграли по площі  $dA$ , що увійшли у цю рівність, визначають різні геометричні характеристики поперечного перерізу відносно головних осей. Тому частина з них дорівнює нулю, а саме, статичні моменти  $S_y$ ,  $S_z$  та відцентровий момент інерції  $I_{yz}$ . Враховуючи це, знайдемо:

$$\iiint_V \sigma_{xx}^i \varepsilon_{xx}^k dV = \int_0^l \left( \frac{N_x^i N_x^k}{EA} + \frac{N_y^i M_x^k}{EI_y} + \frac{M_z^i M_z^k}{EI_z} \right) dx. \quad (2.94)$$

Аналогічно можна перетворити другу та третю складову виразу (2.93). Не зупиняючись на перетвореннях, отримаємо:

$$\iiint_V (\tau_{xy}^i \gamma_{xy}^k + \tau_{xz}^i \gamma_{xz}^k) dV = \int_0^l \left( \frac{Q_y^i Q_y^k}{GAK_y} + \frac{Q_z^i Q_z^k}{GAK_z} + \frac{M_x^{кр,i} M_x^{кр,k}}{GI_{кр}} \right) dx.$$

У цьому виразі  $K_y$  і  $K_z$  — коефіцієнти приведення площі поперечного перерізу, які пов'язані з його формою. Не будемо зупинятися на більш докладних поясненнях, тому що в більшості випадків члени, пов'язані з поперечними зусиллями, відкидаються у зв'язку з їх малістю. Приймаючи це до уваги, знайдемо:



$$W_{int}^{ik} = -\int_0^l \left( \frac{N_x^i N_x^k}{EA} + \frac{M_y^i M_y^k}{EI_y} + \frac{M_z^i M_z^k}{EI_z} + \frac{M_x^{кр,i} M_x^{кр,k}}{GI_{кр}} \right) dx. \quad (2.95)$$

На підставі залежності (2.92) будемо мати:

$$W_{ext}^{ik} = -W_{int}^{ik}.$$

Підставляючи у цей вираз співвідношення (2.03) та (2.95), отримаємо:

$$\Delta_{ik} \cdot F_i = \int_0^l \left( \frac{N_x^i N_x^k}{EA} + \frac{M_y^i M_y^k}{EI_y} + \frac{M_z^i M_z^k}{EI_z} + \frac{M_x^{кр,i} M_x^{кр,k}}{GI_{кр}} \right) dx. \quad (2.96)$$

Якщо стержень складається з декількох ділянок, необхідно для кожної ділянки визначити інтеграли за формулами (2.95) і скласти їх суму. Крім того, приймаємо у стані "i" силу  $F_i = 1$ , після чого будемо мати остаточний вираз формули Мора:

$$\Delta_{ik} = \int_0^l \left( \frac{N_x^i N_x^k}{EA} + \frac{M_y^i M_y^k}{EI_y} + \frac{M_z^i M_z^k}{EI_z} + \frac{M_x^{кр,i} M_x^{кр,k}}{GI_{кр}} \right) dx. \quad (2.97)$$

Отримана формула дозволяє за зусиллями, які знайдені у двох станах, знайти переміщення будь-якої точки стержневої системи. Індокси у позначенні переміщення  $\Delta_{ik}$  вказують на те, що це є переміщення точки  $i$  у напрямку одиничної сили, прикладеної до цієї точки у стані "i", від дії навантаження, прикладеного до стержня у стані "k". Величина  $\Delta_{ik}$  визначає не тільки лінійні переміщення. Це може бути кут повороту, якщо у стані "i" прикласти не одиничну силу, а одиничний момент. Крім того, є таке поняття як узагальнені сили і переміщення. Вони прикладаються до різних точок і дають можливість знайти взаємні лінійні або кутові переміщення точок, до яких прикладені вказані сили.

Звернемо увагу ще на одну обставину. При знаходженні формули Мора у ролі можливого переміщення був прийнятий стан "k", в якому прикладене навантаження, що є причиною переміщення. Таким чином, за стан можливого переміщення прийнятий той, у якому до стержня, що розглядається, прикладене фактичне навантаження. Це не суперечить вимогам, які накладаються на

можливі переміщення, тому що допустимі переміщення у реальних спорудах мають невеликі значення. Умови закріплення відповідають необхідним вимогам.

Причиною виникнення переміщень можуть бути не тільки сили навантаження, можливий також тепловий вплив, вимушене переміщення опор та інше. Зупинимось на виведенні формули Мора від вказаних вище двох факторів.

Розглянемо тепловий вплив. У першу чергу застосовується припущення, що по площі поперечного перерізу температура розподіляється за законом площини. Вказане припущення необхідно для погодження температурних деформацій з гіпотезою плоских перерізів. Для побудови площини, яка визначає закон змінювання температури у точках, де осі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  перетинають площу та контур перерізу, відкладемо у напрямі осі  $Ox$  відрізки, що дорівнюють температурі у цих точках (рис. 2.40).

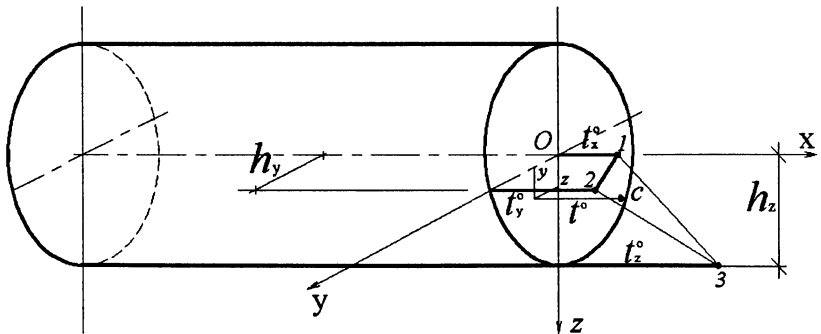


Рис. 2.40. Розподіл температури по площі перерізу

Кінцеві точки цих відрізків позначені 1-2-3. Їх координати дорівнюють:

$$1: (t_x, 0, 0); \quad 2: (t_y, h_y, 0); \quad 3: (t_z, 0, h_z).$$

Через ці точки проведемо площину та визначимо на ній довільну точку  $C$  з координатами  $(t_x, y, z)$ . Рівняння цієї площини має вигляд:

$$\begin{vmatrix} (t-t_x) & (y-0) & (z-0) \\ (t_y-t_x) & (h_y-0) & (0-0) \\ (t_z-t_x) & (0-0) & (h_z-0) \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси визначимо температуру  $t$  у довільній точці  $C$  через температуру точок 1-2-3:

$$t = t_x + \frac{t_y - t_x}{h_y} y + \frac{t_z - t_x}{h_z} z.$$

Відомо, що при зміні температури тіла у ньому виникають тільки лінійні деформації, а кутові дорівнюють нулю. Згідно з прийнятими гіпотезами у стержні потрібно врахувати тільки деформацію  $\varepsilon_{xx}$ , яка у довільній точці перерізу буде дорівнювати:

$$\varepsilon_{xx} = \alpha t = \alpha \left( t_x + \frac{t_y - t_x}{h_y} y + \frac{t_z - t_x}{h_z} z \right). \quad (2.98)$$

де  $\alpha$  — коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Розглянемо стержень, на який впливає зміна температури, від чого у ньому виникають деформації та переміщення. Позначимо цей стан "k" і оберемо другий стан "i" (рис. 2.41).

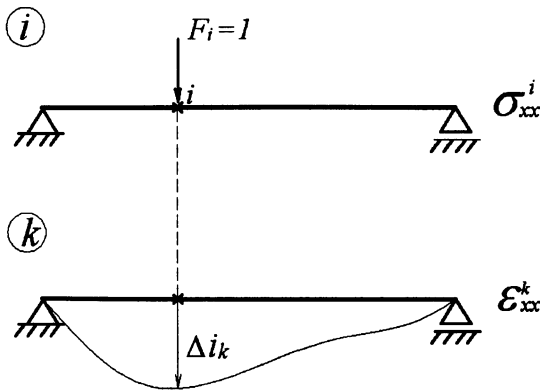


Рис. 2.41. Два різних стани стержня, які застосовуються при визначенні переміщень від зміни температури

У стані "i" прикладемо силу  $F_i = 1$  у напрямку, в якому необхідно визначити переміщення. Від навантаження  $F_i = 1$  знаходимо  $\sigma_{xx}^i$ . У стані "k" за формулою (2.98) знаходимо деформацію  $\varepsilon_{xx}^k$ . Запишемо можливу роботу зовнішніх і внутрішніх сил стану "i" на деформаціях і переміщеннях стану "k".

$$\Delta_{ik} \cdot 1 - \iiint_V \sigma_{xx}^i \varepsilon_{xx}^k dV = 0.$$

Підставимо вирази (2.98) та вираз нормального напруження  $\sigma_{xx}$ :

$$\Delta_{ik} = \int_0^l \left[ dx \iint_A \alpha \left( t_x + \frac{t_y - t_x}{h_y} y + \frac{t_z - t_x}{h_z} z \right) \left( \frac{N_x^i}{A} + \frac{M_y^i z}{I_y} + \frac{M_z^i y}{I_z} \right) dA \right].$$

Здійснивши перетворення, аналогічні здійсненим при отриманні формули (2.96), будемо мати:

$$\Delta_{ik} = \alpha \int_0^l \left( t_x N_x^i + \frac{t_y - t_x}{h_y} M_z^i + \frac{t_z - t_x}{h_z} M_y^i \right) dx. \quad (2.99)$$

Якщо температура по довжині стержня не змінюється, то формулу можна записати у такому вигляді:

$$\Delta_{ik} = \alpha \left( t_x \int_0^l N_x^i dx + \frac{t_y - t_x}{h_y} \int_0^l M_z^i dx + \frac{t_z - t_x}{h_z} \int_0^l M_y^i dx \right). \quad (2.100)$$

Інтеграли у цій формулі дорівнюють площам відповідних епюр.

Зупинимось ще на одному факторі, який теж впливає на переміщення. Це вимушене переміщення опор. Знову розглянемо два стани (рис. 2.42).

У стані "i", як завжди, прикладаємо силу  $F_i = 1$  у напрямку, в якому потрібно визначити переміщення. Вважаємо, що у стані "k" опора  $j$  отримала вимушене переміщення  $\Delta_j^k$ . Відзначимо, що переміщення опори еквівалентне її зникненню, завдяки чому статично визначена система перетворюється у рухомий механізм і буде рухатися як жорстке тіло без виникнення деформацій, тобто  $\varepsilon_{xx}^k = \gamma_{xy}^k = \gamma_{xz}^k = 0$ . Знову застосуємо принцип можливих переміщень. Запишемо роботу сил стану "i" на переміщеннях стану "k". Враховуючи, що

деформації стану "k" дорівнюють нулю, будемо мати тільки роботу зовнішніх сил:

$$\Delta_{ik} \cdot 1 + \Delta_j^k \cdot R_j^i = 0.$$

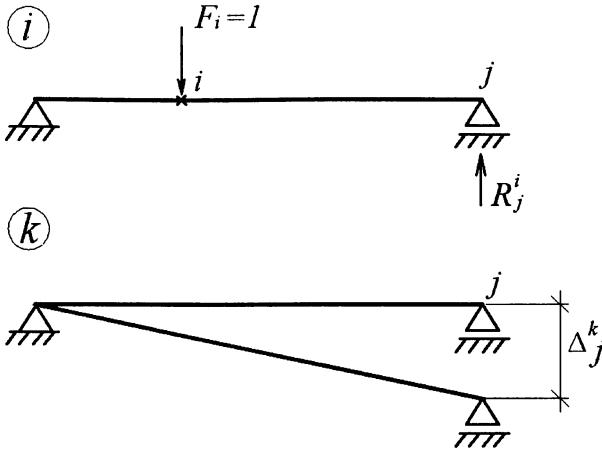


Рис. 2.42. Два різних стани стержня, які необхідні при визначенні переміщень від вимушеної осадки опор

Якщо у стані "k" переміщення отримують декілька опор, в яких у стані "i" виникають реакції, то потрібно скласти суму добутків  $\Delta_j^k R_j^i$ . Враховуючи це, знайдемо:

$$\Delta_{ik} = -\sum_j (\Delta_j^k R_j^i). \quad (2.101)$$

Підводячи підсумки отриманих результатів, можна скласти загальний вираз для переміщення, який враховує три зовнішніх фактори, що впливають на переміщення. Це сили навантаження, температура та вимушені осадки опор:

$$\Delta_{ik} = \Delta_{ik}^F + \Delta_{ik}^t + \Delta_{ik}^o. \quad (2.102)$$

Три складові цього виразу визначаються за формулами (2.97), (2.100) та (2.101).

Зупинимось на доказі деяких загальних положень. Проаналізуємо формулу (2.96). Вона виведена за умов можливих переміщень, обраних у стані "k". Якщо у ролі можливих переміщень обрати стан "i", то права частина формули (2.96) залишиться без змін. Це дозволяє записати:

$$W_{int}^{ik} = W_{int}^{ki}. \quad (2.103)$$

На підставі формули (2.92) можна скласти два вирази:

$$W_{ext}^{ik} + W_{int}^{ik} = 0,$$

$$W_{ext}^{ki} + W_{int}^{ki} = 0.$$

Враховуючи залежність (2.103), отримаємо:

$$W_{ext}^{ik} = W_{ext}^{ki}. \quad (2.104)$$

Вирази (2.103) та (2.104) відповідають теоремі взаємності робіт (теорема Бетті). У лінійно-деформівній системі можлива робота внутрішніх чи зовнішніх сил стану "i" на переміщеннях стану "k" дорівнює відповідним роботам стану "k" на переміщеннях стану "i".

Розглянемо другу теорему Бетті — теорему взаємності одиничних переміщень. Для цього потрібно у стані "i" та "k" прикласти сили рівні одиниці. При такому навантаженні переміщення будемо позначати  $\delta_{ik}$  та  $\delta_{ki}$ . У цьому випадку можливі роботи зовнішніх сил будуть дорівнювати:

$$W_{ext}^{ik} = \delta_{ik} \cdot 1,$$

$$W_{ext}^{ki} = \delta_{ki} \cdot 1.$$

Враховуючи залежність (2.104), отримаємо:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (2.105)$$

Розглянемо питання, пов'язані з визначенням інтегралів, які входять у формулу (2.97). Під знаком інтегралів знаходяться добутки двох функцій, які

позначимо  $f_i(x)$  та  $f_k(x)$ . Інтеграл буде мати вигляд  $\int_{x_1}^{x_2} f_i(x)f_k(x)dx$ .

Перший спосіб має назву способу Верещагіна. Його можливо застосовувати, коли одна функція має довільний вигляд, а друга є лінійна функція (рис. 2.43).

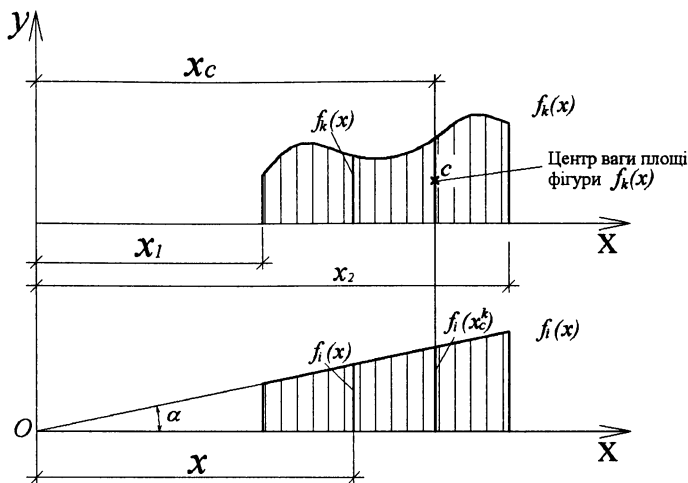


Рис. 2.43. Графіки функцій, що використовуються при застосуванні методу Верещагіна

Враховуючи лінійний характер функції  $f_i(x)$ , можна записати:

$$f_i(x) = x \operatorname{tg} \alpha .$$

Підставляємо під знак інтеграла:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_i(x) f_k(x) dx = \operatorname{tg} \alpha \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f_k(x) dx .$$

Інтеграл у правій частині є статичним моментом площі фігури  $f_k(x)$  відносно осі  $Oy$ . Його можна записати як добуток площі цієї фігури на координату  $x_C$  її центру ваги:

$$\operatorname{tg} \alpha \int_{x_1}^{x_2} f_k(x) x dx = A_k x_{Ck} \operatorname{tg} \alpha .$$

Очевидно, що добуток  $x_{Ck} \operatorname{tg} \alpha$  дорівнює ординаті функції  $f_i(x)$  при значенні  $x = x_{Ck}$ . Таким чином, будемо мати:

$$x_{Ck} \operatorname{tg} \alpha = f_i(x_{Ck}).$$

Це дозволяє записати остаточний вираз:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_i(x) f_k(x) dx = A_k f_i(x_{Ck}). \quad (2.106)$$

Це дозволяє інтеграл від добутку двох функцій обчислити як добуток площі фігури, обмеженої довільною функцією, на ординату лінійної функції, яка розташована під центром ваги криволінійної функції.

Другий спосіб визначення інтеграла  $\int_{x_1}^{x_2} f_i(x) f_k(x) dx$  базується на застосуванні формули чисельного інтегрування Сімпсона-Корноухова. Якщо одна функція  $f_i(x)$  має лінійний характер, то ділянку інтегрування достатньо поділити на дві рівні частини (рис. 2.44).

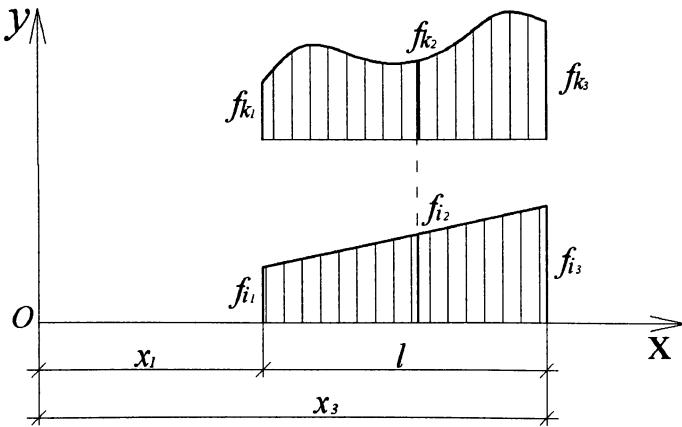


Рис. 2.44. Графіки функцій, що використовуються при застосуванні методу Сімпсона-Корноухова



У цьому випадку формула Сімпсона-Корноухова буде мати такий вигляд:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_i(x) f_k(x) dx = \frac{l}{6} (f_{k1} f_{i1} + 4 f_{k2} f_{i2} + f_{k3} f_{i3}). \quad (2.107)$$

## Глава 2.5. Приклади до другого розділу

### 2.5.1. Приклад визначення геометричних характеристик поперечного перерізу стержня

Визначити геометричні характеристики складеної плоскої фігури (рис. 2.45).

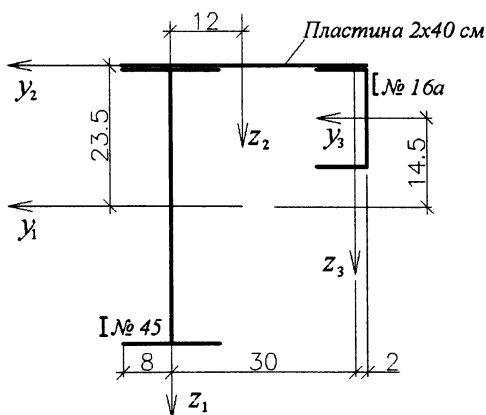


Рис. 2.45. Розміри та форма поперечного перерізу стержня, для якого визначаються геометричні характеристики

1. Встановлюємо геометричні характеристики окремих частин фігури відносно власних головних осей.

Двотавр № 45:  $A_1 = 84,7 \text{ см}^2$ ,  $I_{y_1} = 27696 \text{ см}^4$ ,  $I_{z_1} = 808 \text{ см}^4$ .

Пластина  $2 \times 40 \text{ см}$ :  $A_2 = 2 \cdot 40 = 80 \text{ см}^2$ ,  $I_{y_2} = \frac{40 \cdot 2^3}{12} = 26,67 \text{ см}^4$ ,

$$I_{z_2} = \frac{2 \cdot 40^3}{12} = 1066,67 \text{ см}^4.$$

Швелер №16а:  $A_3 = 19,5 \text{ см}^2$ ,  $I_{y_3} = 823 \text{ см}^4$ ,  $I_{z_3} = 78,8 \text{ см}^4$ .

2. Знаходимо координати центра ваги всієї фігури (рис. 2.46).

$$y_0 = \frac{S_{z_2}}{A}, \quad z_0 = \frac{S_{y_1}}{A}.$$

$$A = 84,7 + 80 + 19,5 = 184,2 \text{ см}^2,$$

$$S_{z_2} = -40 \cdot 2 \cdot 12 - 19,5 \cdot 30 = -1545 \text{ см}^3,$$

$$S_{y_1} = -40 \cdot 2 \cdot 23,5 - 19,5 \cdot 14,5 = -2162,75 \text{ см}^3.$$

$$y_0 = -\frac{1545}{184,2} = -8,39 \text{ см},$$

$$z_0 = -\frac{2162,75}{184,2} = -11,74 \text{ см}.$$

3. Визначасмо моменти інерції всієї фігури відносно центральних осей  $y_0, z_0$ , застосовуючи формули (2.5).

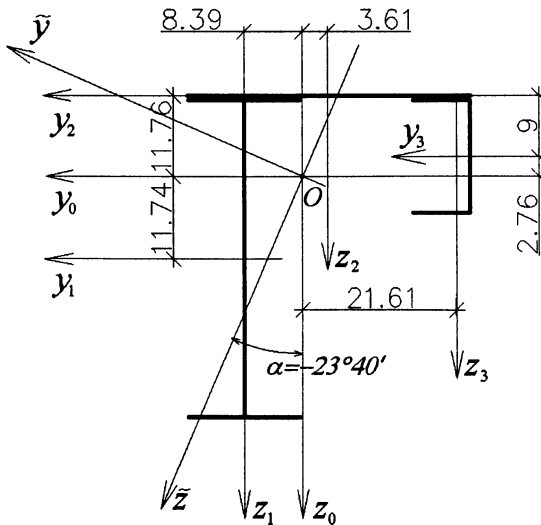


Рис. 2.46. Положення центральних та головних осей перерізу, що розглядається

$$I_{z_0} = 808 + 84,7 \cdot 8,39^2 + 1066,67 + 80(-3,61)^2 + 78,8 + 19,5(-21,61)^2 = 27664,59 \text{ см}^4.$$

$$I_{y_0} = 27696 + 84,7 \cdot 11,74^2 + 26,67 + 80(-11,76)^2 + 823 + 19,5(-2,76)^2 = 51432,01 \text{ см}^4.$$

$$I_{y_0 z_0} = 84,7 \cdot 8,39 \cdot 11,74 + 80(-11,76)(-3,61) + 19,5(-2,76)(-21,61) = 12902,17 \text{ см}^4.$$

4. Обчислюємо кут нахилу головних осей  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$  (рис. 2.46) за формулою (2.8):

$$\text{tg}(2\alpha) = -\frac{2 \cdot 12902,17}{51432,01 - 27664,59} = -1,086.$$

$$2\alpha = -0,826 \text{ рад} = -47^\circ 20', \quad \alpha = -0,413 \text{ рад} = -23^\circ 40',$$

$$\sin \alpha = -0,401, \quad \cos \alpha = 0,916, \quad \sin(2\alpha) = -0,735, \quad \cos(2\alpha) = 0,677.$$

5. За формулами (2.6) обчислюємо значення головних моментів інерції:

$$I_{\tilde{y}} = 51432,01 \cdot 0,839 + 27664,59 \cdot 0,161 - 12902,17(-0,735) = 57088,55 \text{ см}^4,$$

$$I_{\tilde{z}} = 51438,01 \cdot 0,161 + 27664,59 \cdot 0,839 + 12902,17(-0,735) = 22009,02 \text{ см}^4,$$

$$I_{\tilde{y}\tilde{z}} = 0,5(51432,01 - 27664,59)(-0,735) + 12902,17 \cdot 0,677 = 0.$$

Для перевірки потрібно застосувати формули (2.09) або (2.10). Крім того, повинна виконуватися залежність

$$I_{y_0} + I_{z_0} = I_{\tilde{y}} + I_{\tilde{z}}.$$

$$I_{y_0} + I_{z_0} = 51432,01 + 27664,59 = 79096,6 \text{ см}^4,$$

$$I_{\tilde{y}} + I_{\tilde{z}} = 57088,55 + 22009,02 = 79097,6 \text{ см}^4.$$

6. Знаходимо координати точок перерізу (1, 2, 3, 4, 5, 6) у центральних осях  $y_0$ ,  $z_0$  та головних осях  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$  (рис. 2.47). Координати  $y_0$  та  $z_0$  точки 1 визначаємо за допомогою рис. 2.45 та 2.46. Координати у головних осях отримуємо за формулами (2.2):

$$\tilde{y}_1 = 16,39 \cdot 0,916 + 34,24(-0,401) = 1,28 \text{ см},$$

$$\tilde{z}_1 = -16,39(-0,401) + 34,24 \cdot 0,916 = 37,94 \text{ см.}$$

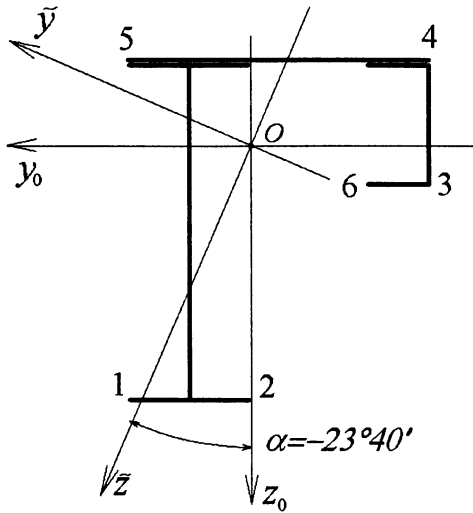


Рис. 2.47. Розташування характерних точок перерізу

Аналогічно в інших точках. Усі значення координат точок наведені у таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

№ точки	$y_{0i}$ , см	$z_{0i}$ , см	$\tilde{y}_i$ , см	$\tilde{z}_i$ , см
1	16,39	34,24	1,28	37,94
2	0,39	34,24	-13,37	31,52
3	-23,61	5,24	-23,73	-4,67
4	-23,61	-12,76	-16,15	-21,26
5	16,39	-12,76	20,13	-5,12
6	-16,18	5,24	-17,5	-1,94

7. Головні радіуси інерції знайдемо за формулами (2.11):

$$i_{\tilde{y}} = \sqrt{\frac{I_{\tilde{y}}}{A}} = \sqrt{\frac{57088,55}{184,2}} = 17,6 \text{ см,}$$

$$i_{\bar{z}} = \sqrt{\frac{I_{\bar{z}}}{A}} = \sqrt{\frac{22009,02}{184,2}} = 10,93 \text{ см.}$$

8. Обчислюємо моменти опору, розглядаючи найбільш віддалені точки:

$$W_{\bar{y}} = \frac{I_{\bar{y}}}{\bar{z}_1} = \frac{57088,55}{37,94} = 1504,71 \text{ см}^3,$$

$$W_{\bar{z}} = \frac{I_{\bar{z}}}{|\bar{y}_3|} = \frac{22009,02}{23,73} = 927,48 \text{ см}^3.$$

### 2.5.2. Приклад приведення навантаження до головних осей стержня

Розглянемо стержень, поперечний переріз якого має форму фігури з попереднього прикладу. Він спирається на шарнірні опори. До стержня прикладене навантаження (рис. 2.48 та рис. 2.49).

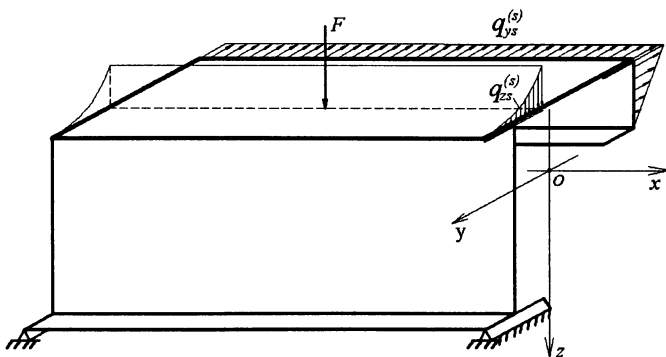


Рис. 2.48. Загальний вигляд стержня

Демо характеристику поверхневого навантаження, прикладеного на відрізках 3-4 та 2-5. На кожному відрізку навантаження змінюється в залежності від координат лінії  $s$ , яка спрямована вздовж периметра перерізу. На різних відрізках лінія  $s$  співпадає з напрямом осей  $y$  або  $z$ . Це дозволяє замінити координати  $s$  на  $y$  або  $z$ . На відрізку 3-4 лінія  $s$  паралельна осі  $y$ .

Застосуємо місцеву систему координат (рис. 2.49(а)). Аналогічно на відрізьку 2-5 теж застосована місцева система координат (рис. 2.49(б)). На розглянутих відрізьках визначені вирази для відповідних навантажень. Зазначені навантаження по довжині стержня рівномірно розподілені.

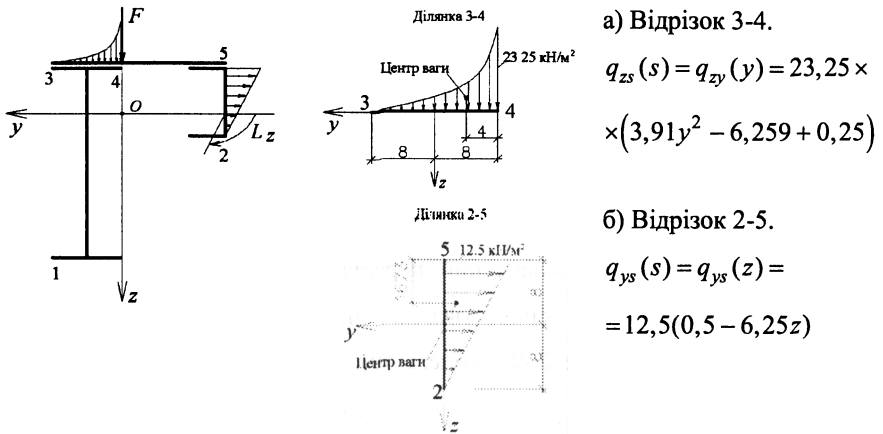


Рис. 2.49. Характер навантаження на різних відрізьках перерізу

Зосереджені навантаження  $F_z$  та  $L_z$  прикладені посередині довжини стержня. Сила  $F_z$  розташована у площині  $xOz$ , а момент  $L_z$  у площині  $xOy$ . Їх величини дорівнюють:  $F_z = 11 \text{ кН}$ ,  $L_z = 6,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Крім того, врахуємо власну вагу стержня, яка рівномірно розподілена по площі перерізу та довжині стержня. Вона діє паралельно осі  $Oz$ . Питома вага матеріалу стержня  $g_0 = 78 \text{ кН/м}^3$ .

Усі діючі навантаження необхідно привести до такого, яке діє на лінійну модель стержня (рис. 2.9). Для цього необхідно на кожному відрізьку знайти рівнодіючу прикладеного до нього навантаження. Це можна зробити двома способами. Перший базується на застосуванні формул (2.16). Вони дозволяють знайти значення рівнодіючої окремо на кожному відрізьку.

На відрізку 3-4:

$$q_{z,3-4} = \int_{-0,8}^{0,8} q_{zy}(y) dy = \int_{-0,8}^{0,8} 23,25(39,1y^2 - 6,259 + 0,25) dy,$$

$$q_{z,3-4} = 1,24 \text{ кН/м}.$$

На відрізку 2-5:

$$q_{y,2-5} = \int_{-0,8}^{0,8} q_{yz}(z) dz = \int_{-0,8}^{0,8} 12,5(0,5 - 6,25z) dz,$$

$$q_{y,2-5} = 1 \text{ кН/м}.$$

Рівнодіюча власної ваги:

$$q_{z,0} = \iint_A g_0 dA = \iint_A 78 dA = 78 \iint_A dA = 78A,$$

$$q_{z,0} = 78 \cdot 184,2 \cdot 10^{-4} = 1,44 \text{ кН/м}.$$

Другий спосіб враховує те, що значення рівнодіючої на кожному відрізку дорівнює площі відповідної епюри навантаження.

На відрізку 3-4 рівнодіюча  $q_{z,3-4}$  дорівнює площі параболи:

$$q_{z,3-4} = \frac{1}{3} 0,16 \cdot 23,25 = 1,24 \text{ кН/м}.$$

На відрізку 2-5 рівнодіюча  $q_{y,2-5}$  дорівнює площі трикутника:

$$q_{y,2-5} = \frac{1}{2} 0,16 \cdot 12,5 = 1 \text{ кН/м}.$$

Рівнодіюча власної ваги дорівнює добутку питомої ваги матеріалу балки на площу поперечного перерізу:

$$q_{z,0} = 78 \cdot 184,2 \cdot 10^{-4} = 1,44 \text{ кН/м}.$$

Знайдені рівнодіючі є навантаженням, що діє на один метр довжини стержня. Точки їх прикладання співпадають з центрами ваги відповідних епюр навантаження. Їх розташування зображено на рис. 2.50(а).

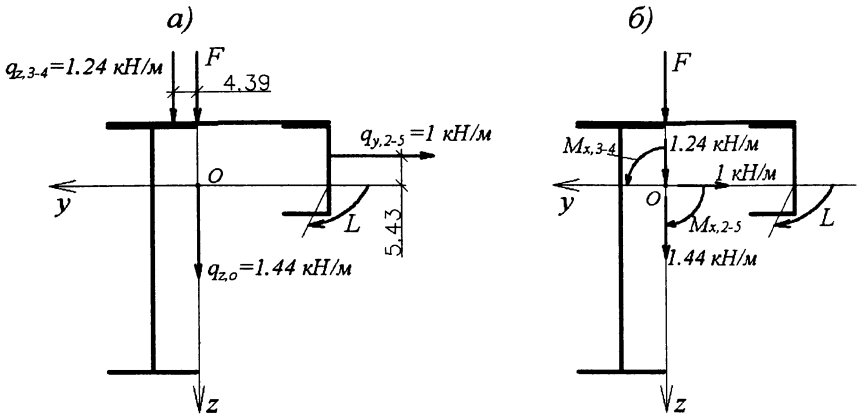


Рис. 2.50. Рівнодіючі навантаження на різних відрізках стержня

Перенесемо навантаження до центральної поздовжньої осі  $Ox$  (рис. 2.50(б)). При паралельному переносі сили  $F$  потрібно врахувати момент відносно осі, до якої переноситься сила. У даному випадку моменти утворюються силами  $q_{z,3-4}$  та  $q_{y,2-5}$ . Їх значення дорівнюють:

$$M_{x,3-4} = q_{z,3-4} \cdot 4,39 = 1,24 \cdot 4,39 = 5,44 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x,2-5} = -q_{y,2-5} \cdot 5,43 = -1 \cdot 5,43 = -5,43 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

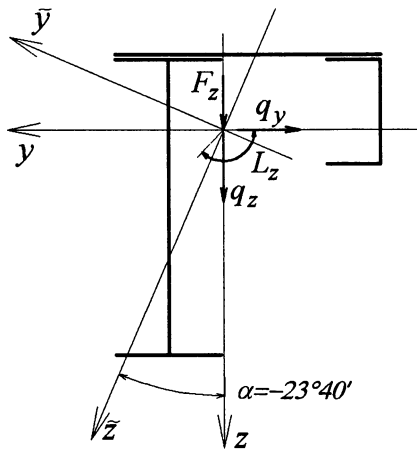


Рис. 2.51. Розташування навантаження відносно центральних осей



У даному випадку їх сума приблизно дорівнює нулю, тому їх можна не враховувати. Остаточний вигляд навантаження зведеного до центру ваги зображено на рис. 2.51.

Здійснені перетворення дозволяють встановити характер навантаження лінійної моделі стержня (рис. 2.52).

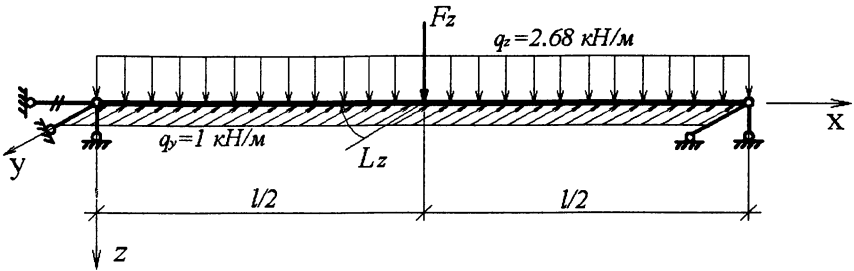


Рис. 2.52. Лінійна модель стержня з навантаженням у напрямку центральних осей

Отримані навантаження на лінійну модель стержня співпадають з центральними осями стержня. Для подальших розрахунків потрібно знайти їх складові, що співпадають з головними осями стержня  $\tilde{y}\tilde{O}\tilde{z}$  (рис. 2.46). Для цього потрібно всі навантаження спроекувати на головні осі. Вони будуть дорівнювати:

$$q_{\tilde{z}} = q_z \cos(23^\circ 40') - q_y \sin(23^\circ 40') = 2,68 \cdot 0,916 - 1 \cdot 0,401 = 2,05 \text{ кН/м} \approx 2 \text{ кН/м},$$

$$q_{\tilde{y}} = -q_y \cos(23^\circ 40') - q_z \sin(23^\circ 40') = -1 \cdot 0,916 - 2,68 \cdot 0,401 = -1,99 \text{ кН/м} \approx 2 \text{ кН/м},$$

$$F_{\tilde{z}} = F \cos(23^\circ 40') = F \cdot 0,916 \approx 11 \text{ кН},$$

$$F_{\tilde{y}} = -F \sin(23^\circ 40') = -F \cdot 0,401 \approx -4,5 \text{ кН}.$$

Вектор моменту  $L_z$  співпадає з віссю  $z$ , тому його проекції на осі  $\tilde{z}$  та  $\tilde{y}$  дорівнюють:

$$L_{\tilde{z}} = L_z \cos(23^\circ 40') = 0,916 L_z \approx 6 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$L_{\bar{y}} = -L_z \sin(23^\circ 40') = -0,401L_z \approx -2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Наближені значення навантажень прийнято для спрощення розрахунків у наступному прикладі.

Складові навантаження у головних осях зображено на рис. 2.53(а). Повернемо переріз навколо осі  $Ox$  так, щоб його головні осі зайняли вертикальне та горизонтальне положення (рис. 2.53(б)). Лінійна модель стержня для цього випадку зображена на рис. 2.54.

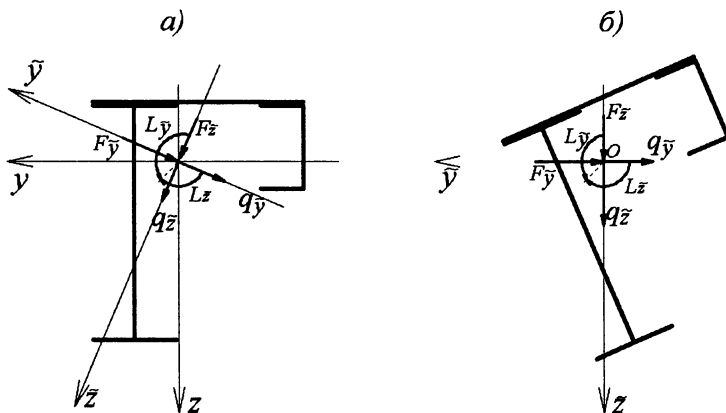


Рис. 2.53. Розташування навантаження відносно головних осей

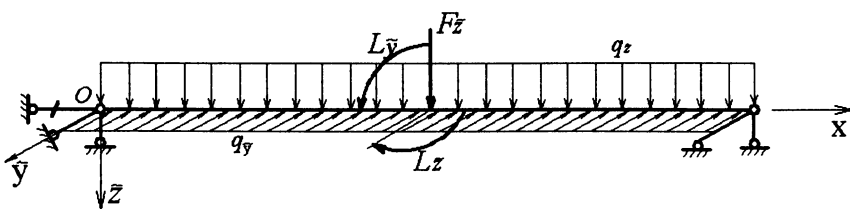


Рис. 2.54. Лінійна модель стержня з навантаженням у напрямку головних осей

### 2.5.3. Приклад побудови епюр внутрішніх зусиль

У прикладі розглядається побудова епюр внутрішніх зусиль для стержня з попереднього прикладу. Відповідно до викладеної методики побудови епюр, усі розрахунки виконуються для лінійної моделі стержня. Лінійна модель стержня, що розглядається, була отримана у прикладі 2.5.2 (рис. 2.54). Повторимо цей рисунок.

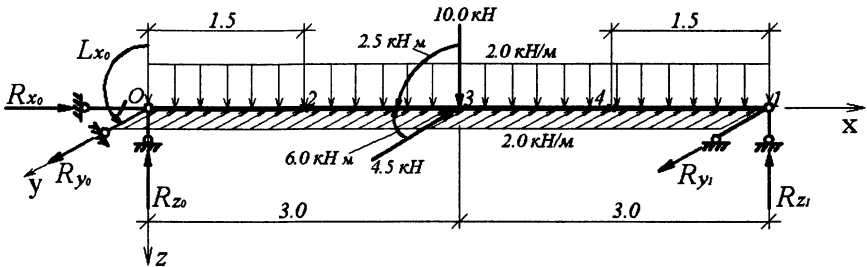


Рис. 2.55. Розрахункова лінійна модель стержня

Дамо детальну характеристику опорним закріпленням. Усього необхідно накласти шість в'язей. На лівому кінці у точці 0 накладено чотири в'язі. Три лінійних у напрямку осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  і одна кутова, яка утримує стержень від обертання навколо осі  $ox$ . На правому кінці накладено дві лінійні в'язі у напрямку осей  $y$  та  $z$ . Характер та назву зусиль, що виникають у в'язях, наведено на рис. 2.55.

Починати розв'язок потрібно з визначення реакцій у в'язях. Для цього необхідно скласти шість рівнянь рівноваги. Рівняння доцільно обирати так, щоб у кожне рівняння входила одна невідома реакція. У даному випадку це має такий вигляд:

$$1) \sum X = 0, \quad R_{x0} = 0;$$

$$2) \sum M_x = 0, \quad L_{x0} = 0;$$

$$3) \sum M_{y0} = 0, \quad R_{z1} \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3 - 10 \cdot 3 + 2,5 = 0,$$

$$R_{z1} = 10,6 \text{ кН};$$

$$4) \sum M_{z0} = 0, \quad R_{y1} \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3 - 4,5 \cdot 3 + 6 = 0,$$

$$R_{y1} = 7,25 \text{ кН};$$

$$5) \sum M_{y1} = 0, \quad R_{z0} \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3 - 10 \cdot 3 - 2,5 = 0,$$

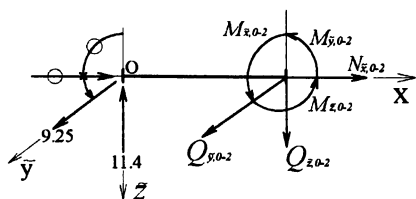
$$R_{z0} = 11,4 \text{ кН};$$

$$6) \sum M_{z1} = 0, \quad R_{y0} \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3 - 4,5 \cdot 3 - 6 = 0,$$

$$R_{y0} = 9,25 \text{ кН}.$$

Далі перейдемо до побудови епюр зусиль. Для цього застосуємо метод визначення зусиль у характерних точках. У прикладі, який розглядається, це є кінцеві точки 0 та 1; точка 3, де прикладене зосереджене навантаження, а також точки 2 та 4, які розташовані посередині відрізків з розподіленим навантаженням.

Почнемо з точки 0. Зробимо переріз нескінченно близький до цієї точки і розглянемо рівновагу відокремленої лівої частини, внаслідок чого знайдемо:

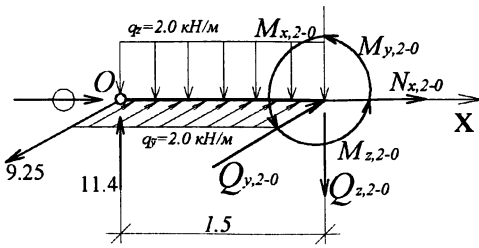


$$N_{x0-2} = 0, \quad M_{x0-2} = 0,$$

$$Q_{y0-2} = -9,25 \text{ кН}, \quad M_{y0-2} = 0,$$

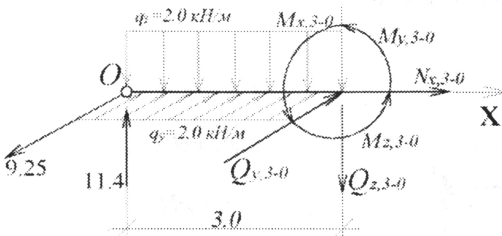
$$Q_{z0-2} = 11,4 \text{ кН}, \quad M_{z0-2} = 0.$$

Далі зробимо переріз біля точки 2. Розглянемо рівновагу відокремленої частини.



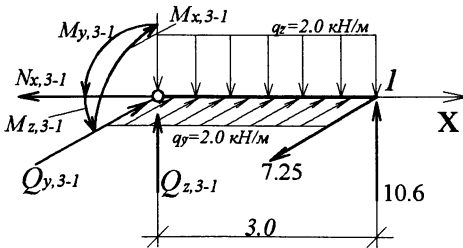
$$\begin{aligned}
 N_{x2-0} &= 0, \\
 Q_{y2-0} &= -6,25 \text{ кН}, \\
 Q_{z2-0} &= 8,4 \text{ кН}, \\
 M_{x2-0} &= 0, \\
 M_{y2-0} &= 14,85 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\
 M_{z2-0} &= -11,625 \text{ кН} \cdot \text{м}.
 \end{aligned}$$

Наступний переріз обираємо біля точки 3.



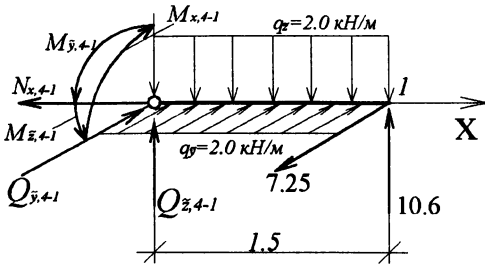
$$\begin{aligned}
 N_{x3-0} &= 0, \\
 Q_{y3-0} &= -3,25 \text{ кН}, \\
 Q_{z3-0} &= 5,4 \text{ кН}, \\
 M_{x3-0} &= 0, \\
 M_{y3-0} &= 25,3 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\
 M_{z3-0} &= -18,75 \text{ кН} \cdot \text{м}.
 \end{aligned}$$

Знову обираємо переріз біля точки 3, але праворуч від цієї точки, і розглянемо рівновагу правої частини.



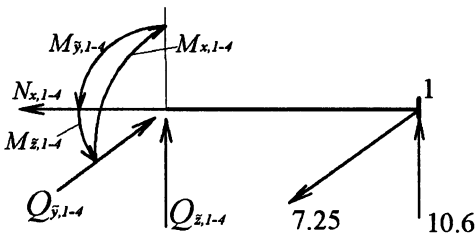
$$\begin{aligned}
 N_{x3-1} &= 0, \\
 Q_{y3-1} &= 1,25 \text{ кН}, \\
 Q_{z3-1} &= -4,6 \text{ кН}, \\
 M_{x3-1} &= 0, \\
 M_{y3-1} &= -22,8 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\
 M_{z3-1} &= 12,75 \text{ кН} \cdot \text{м}.
 \end{aligned}$$

Наступним розглядаємо переріз біля точки 4.



$$\begin{aligned}
 N_{x4-1} &= 0, \\
 Q_{y4-1} &= 4,25 \text{ кН}, \\
 Q_{z4-1} &= -7,6 \text{ кН}, \\
 M_{x4-1} &= 0, \\
 M_{y4-1} &= -13,65 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\
 M_{z4-1} &= 8,625 \text{ кН} \cdot \text{м}.
 \end{aligned}$$

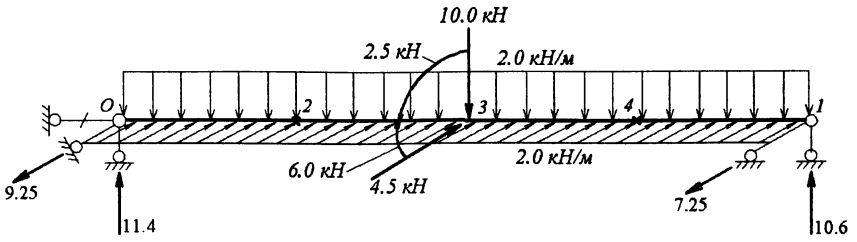
Останнім розглядаємо переріз біля точки 1.



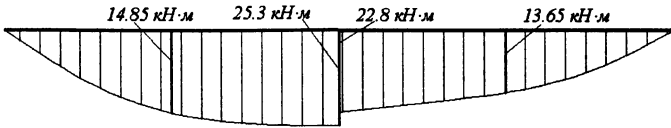
$$\begin{aligned}
 N_{x1-4} &= 0, \\
 Q_{y1-4} &= 7,25 \text{ кН}, \\
 Q_{z1-4} &= -10,6 \text{ кН}, \\
 M_{x1-4} &= 0, \\
 M_{y1-4} &= 0, \\
 M_{z1-4} &= 0.
 \end{aligned}$$

Побудуємо епюри зусиль (рис. 2.56).

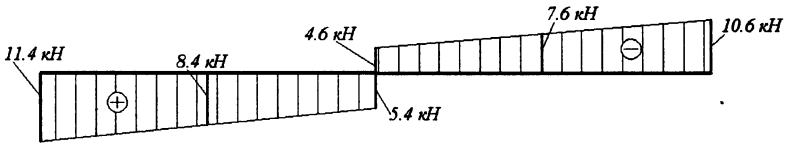
Зауважимо, що на епюрах згинальних моментів знаки не ставимо, тому що вони будуються на розтягнутому волокні стержня.



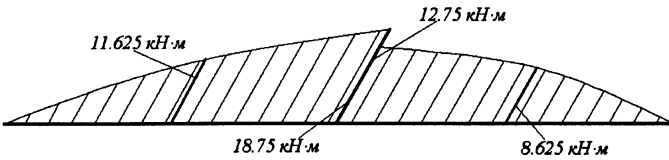
$En M_y$



$En Q_z$



$En M_z$



$En Q_y$

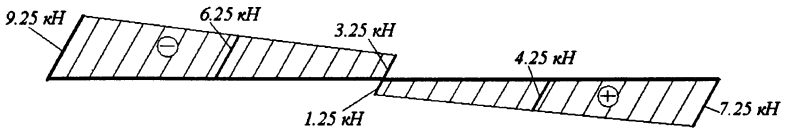


Рис. 2.56. Епюри внутрішніх зусиль у стержні

### 2.5.4. Приклад побудови епюр внутрішніх зусиль

Розглянемо побудову епюр зусиль у ламаному стержні, який знаходиться у плоскому напруженому стані (рис. 2.57). Вважаємо, що навантаження зведено до головних осей.

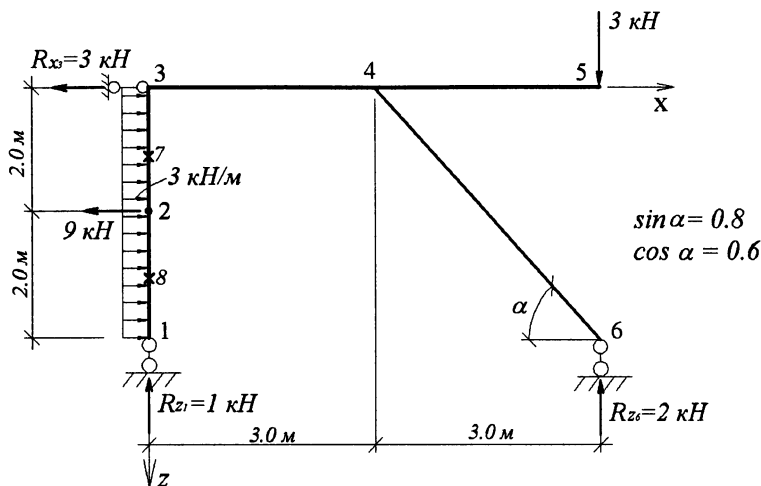


Рис. 2.57. Схема ламаного плоского стержня

Позначимо характерні точки 1, 2, ..., 6. З умов рівноваги визначаємо опорні реакції. Для знаходження зусиль у характерних точках робимо перерізи та розглядаємо рівновагу відокремленої частини стержня (рис. 2.58).

Для кожної відокремленої частини стержня, що зображені на рис. 2.58, прикладені три невідомих зусилля, які знаходяться з умов рівноваги цієї частини. Наприклад, з умов рівноваги частини 4-5-6 знаходимо:

$$\begin{aligned} \sum x &= 0, & N_{4-3} &= 0, \\ \sum z &= 0, & Q_{4-3} - 3 + 2 &= 0, & Q_{4-3} &= 1 \text{ кН}, \\ \sum M_4 &= 0, & M_{4-3} - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 &= 0, & M_{4-3} &= 3 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$



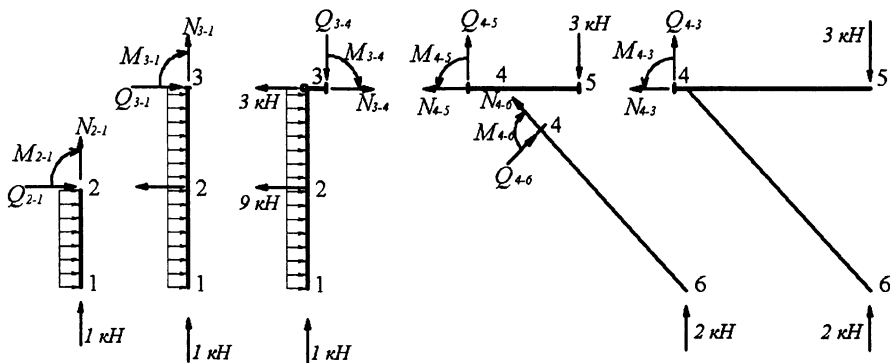


Рис. 2.58. Окремі ділянки стержня

Так визначаємо внутрішні зусилля у всіх характерних точках і будемо епюри зусиль (рис. 2.59).

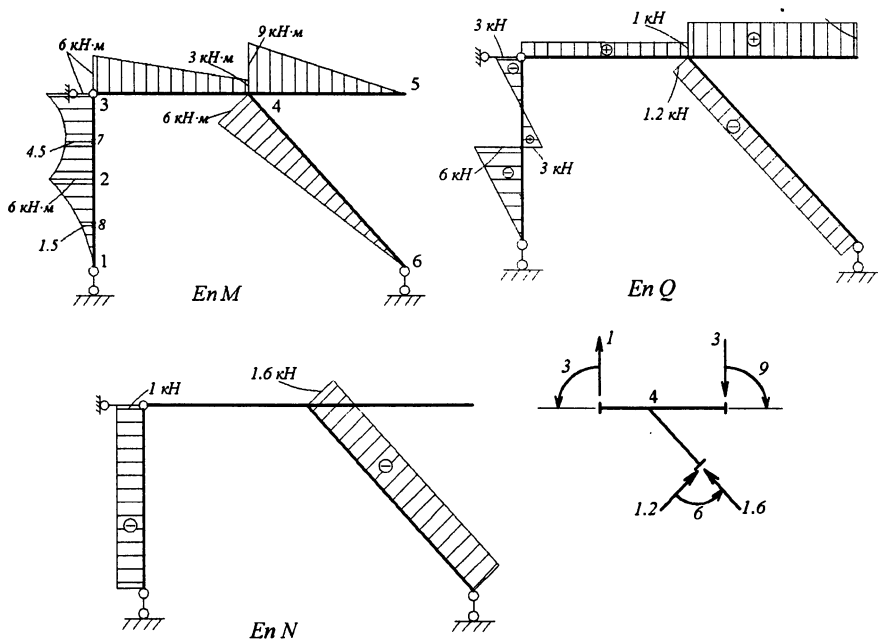


Рис. 2.59. Епюри внутрішніх зусиль, які виникають у стержні (приклад 2.5.4)

Для правильної побудови епюри  $M$  на відрізках 1-2 та 2-3 необхідно знайти моменти у точках 8 та 7. Після побудови епюру потрібно зробити перевірку рівноваги вузлів. Розглянуто рівновагу вузла 4.

$$\sum x = 0: 1,2 \cdot 0,8 - 1,6 \cdot 0,6 = 0,$$

$$\sum z = 0: 1,2 \cdot 0,6 + 1,6 \cdot 0,8 + 1 - 3 = 0,$$

$$\sum M_4 = 0: 3 + 6 - 9 = 0.$$

### 2.5.5. Приклад побудови епюру внутрішніх зусиль

Побудувати епюри зусиль у плоскому криволінійному стержні (рис. 2.60).

Рівняння осьової лінії має вигляд

$$z = \frac{1}{12}x(12 - x).$$

Тангенси кутів нахилу дотичних до цієї лінії дорівнюють

$$\operatorname{tg} \alpha = z' = \frac{1}{6}(6 - x).$$

Для побудови епюру зусиль знайдемо їх значення у точках 1, 2, 3, 4, 5. Для вказаних точок зусилля знаходимо з умов рівноваги відсіченої частини стержня. Проілюструємо це для точки 2.

$$x_2 = 3 \text{ м}, \quad z_2 = 2,25 \text{ м},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = 0,5, \quad \sin \alpha_2 = 0,447, \quad \cos \alpha_2 = 0,894.$$

$$\sum S_2 = 0: \quad N_{2-1} + 15 \cdot 0,894 + 45 \cdot 0,447 - 10 \cdot 3 \cdot 0,447 = 0,$$

$$N_{2-1} = -20,1 \text{ кН}.$$

$$\sum N_2 = 0: \quad Q_{2-1} + 15 \cdot 0,447 - 45 \cdot 0,894 + 10 \cdot 3 \cdot 0,894 = 0,$$

$$Q_{2-1} = 6,7 \text{ кН}.$$

$$\sum M_2 = 0: \quad M_{2-1} + 15 \cdot 2,25 - 45 \cdot 3 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0,$$

$$M_{2-1} = 56,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

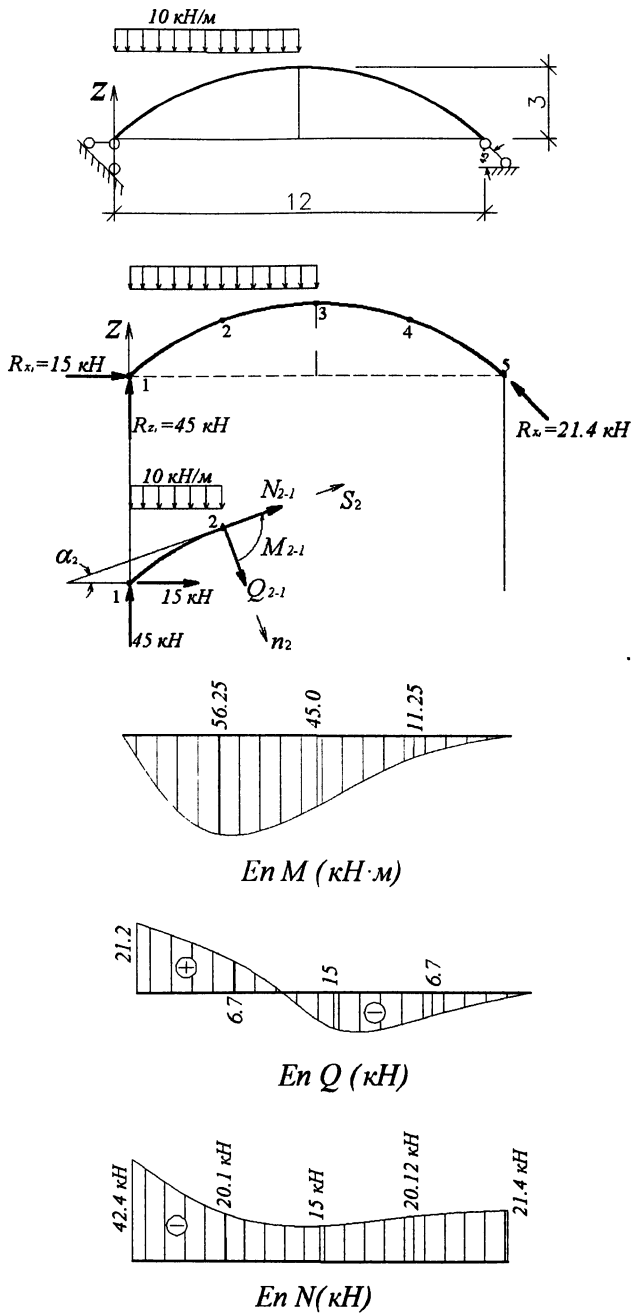


Рис. 2.60. Схема криволінійного стержня та епюри зусиль

## 2.5.6. Приклад побудови епюр внутрішніх зусиль

Побудова епюр зусиль у ламаному просторовому стержні (рис. 2.61).

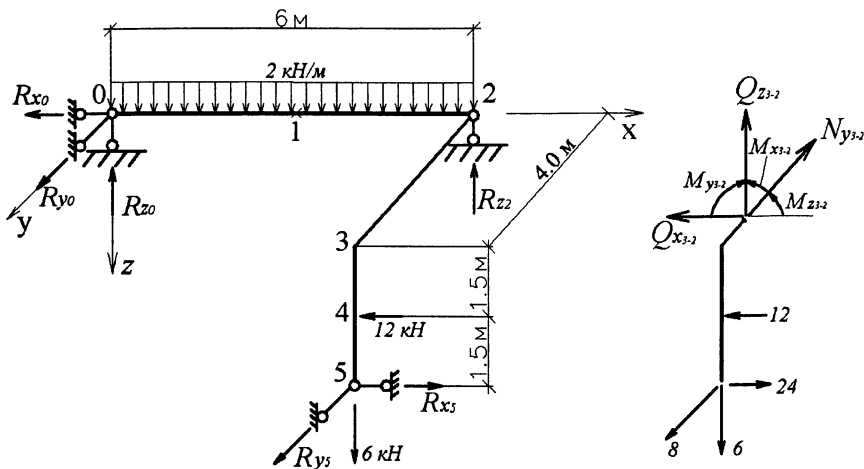


Рис. 2.61. Схема ламаного просторового стержня

Розв'язок починаємо з визначення опорних реакцій. Спочатку записуємо суми моментів відносно осей  $z, x, y$ , які проходять через точку 0. Наступними записуємо суми проекції на осі  $z, x, y$ . З цих рівнянь знаходимо  $R_{y5} = 8 \text{ кН}$ ,  $R_{x5} = 24 \text{ кН}$ ,  $R_{z5} = 3 \text{ кН}$ ,  $R_{x0} = 12 \text{ кН}$ ,  $R_{y0} = 8 \text{ кН}$ ,  $R_{z0} = 15 \text{ кН}$ .

Позначаємо необхідні характерні точки і обчислюємо в них зусилля з умов рівноваги відокремлених частин стержня. Розглянемо відрізок 5-3, для якого знаходимо:

$$N_{y3-2} = 8 \text{ кН}, Q_{x3-2} = 12 \text{ кН}, Q_{z3-2} = 6 \text{ кН},$$

$$M_{x3-2} = 24 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_{y3-2} = 64 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_{z3-2} = 0.$$

Аналогічно знаходимо внутрішні зусилля на інших відрізках. Після чого будемо епюри зусиль (рис. 2.62).

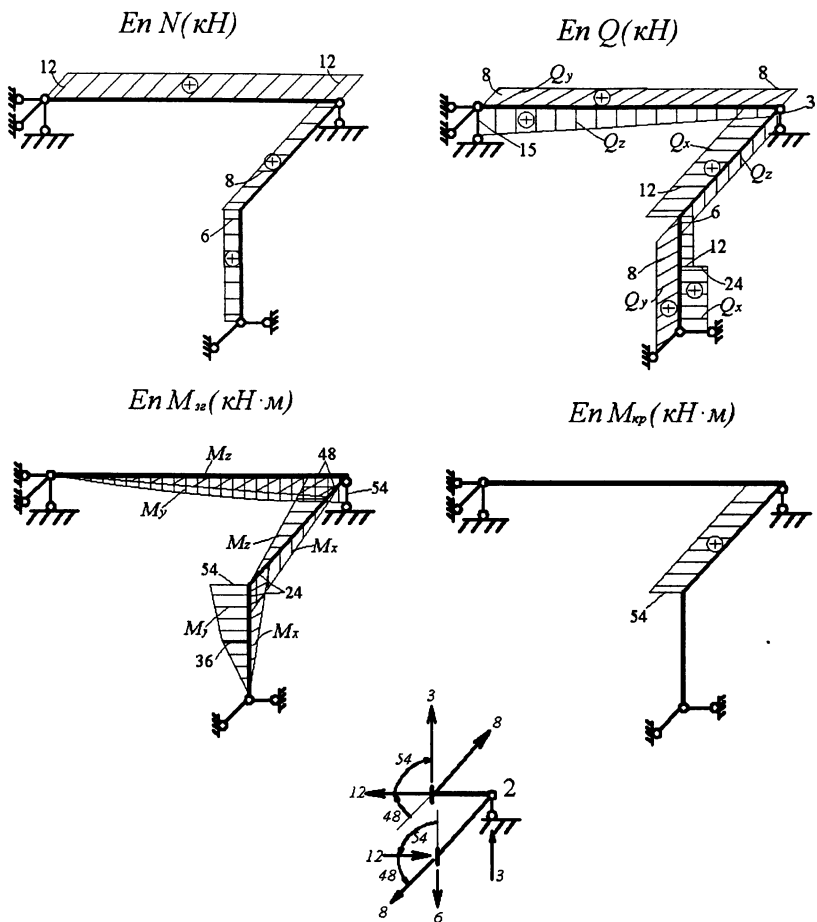


Рис. 2.62. Епюри внутрішніх зусиль у стержні

Для перевірки необхідно розглянути рівновагу вузлів. На рис. 2.62 це зроблено для вузла 2.

### 2.5.7. Приклад побудови ядра перерізу

Ядро перерізу будуватимемо у фігурі, геометричні характеристики якої були визначені у прикладі 2.5.1. Усі необхідні загальні пояснення зроблені у

параграфі 2.3.3. Розв'язок задачі починаємо з проведення дотичних до контуру перерізу:  $S_{1-2}, S_{2-3}, S_{3-4}, S_{4-5}, S_{5-1}$ , які обгортають його з усіх сторін (рис. 2.63).

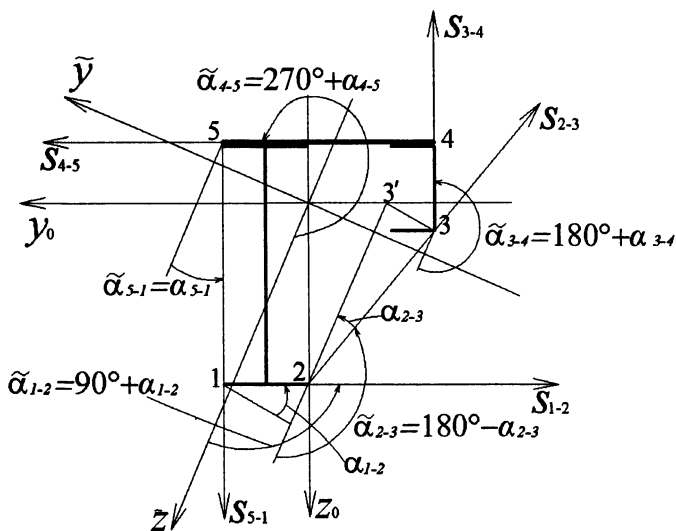


Рис. 2.63. Схема перерізу для побудови його ядра

Координати точок ядра перерізу визначаються за формулами (2.76). Для застосування цих формул необхідно отримати у головних осях координати точок 1, 2, 3, 4, 5. Це точки контуру перерізу, через які проведено дотичні  $S_{1-2}, S_{2-3}, S_{3-4}, S_{4-5}, S_{5-1}$ . Для цього необхідно застосувати формули (2.2). За рис. 2.46 можна визначити координати вказаних точок у центральних осях  $y_0 z_0$ . Результати підрахунку розміщені у таблиці 2.5.

Таблиця 2.5

№ точки	$y_{0i}$ , см	$z_{0i}$ , см	$\tilde{y}_i$ , см	$\tilde{z}_i$ , см
1	16,39	34,24	1,28	37,94
2	0,39	34,24	-13,37	31,52
3	-23,61	5,24	-23,73	-4,67
4	-23,61	-12,76	-16,51	-21,16
5	16,39	-12,76	20,13	-5,12

Формула (2.2) має наступний вигляд:

$$\tilde{y}_i = y_{0i} \cos \alpha + z_{0i} \sin \alpha,$$

$$\tilde{z}_i = -y_{0i} \sin \alpha + z_{0i} \cos \alpha.$$

$$\alpha = -23^{\circ}40', \quad \cos \alpha = 0,916, \quad \sin \alpha = -0,401.$$

Кожній дотичній лінії  $s$  відповідає одна точка ядра перерізу. Загальна кількість точок дорівнює п'яти. Між собою вони з'єднуються прямими лініями, тому що перехід від однієї дотичної до наступної відбувається за рахунок обертання дотичної навколо відповідної точки. Наприклад, лінія  $s_{1-2}$  перейде у  $s_{2-3}$ , якщо  $s_{1-2}$  повернути навколо точки 2, поки вона не співпаде з точкою 3. Номери точок ядра перерізу мають індекси, які співпадають з індексами відповідної лінії  $s$ , а саме:

$$s_{1-2} \rightarrow \tilde{y}_{1-2}, \quad \tilde{z}_{1-2}, \quad s_{2-3} \rightarrow \tilde{y}_{2-3}, \quad \tilde{z}_{2-3} \text{ і т. п.}$$

Формули (2.76), за якими визначаються координати точок ядра перерізу, мають вигляд:

$$\tilde{z}_{i-k} = -\frac{i_y^2 \sin \tilde{\alpha}_{i-k}}{\tilde{y}_i \cos \tilde{\alpha}_{i-k} + \tilde{z}_i \sin \tilde{\alpha}_{i-k}},$$

$$\tilde{y}_{i-k} = -\frac{i_z^2 \sin \tilde{\alpha}_{i-k}}{\tilde{y}_i \cos \tilde{\alpha}_{i-k} + \tilde{z}_i \sin \tilde{\alpha}_{i-k}}.$$

Для розрахунку необхідно знайти тригонометричні функції кутів нахилу ліній  $s_{i-k}$ . Вони зображені на рис. 2.63. Лінії  $s_{1-2}, s_{2-3}, s_{3-4}, s_{4-5}, s_{5-1}$  паралельні центральним осям — або  $y_0$  або  $z_0$ , — тому абсолютне значення кутів  $|\alpha_{1-2}| = |\alpha_{3-4}| = |\alpha_{4-5}| = |\alpha_{5-1}| = 23^{\circ}40'$ , тобто співпадають з кутом повороту головних осей. Кут  $\alpha_{2-3}$  знайдемо, розглянувши трикутник 2-3'-3 (рис. 2.64).

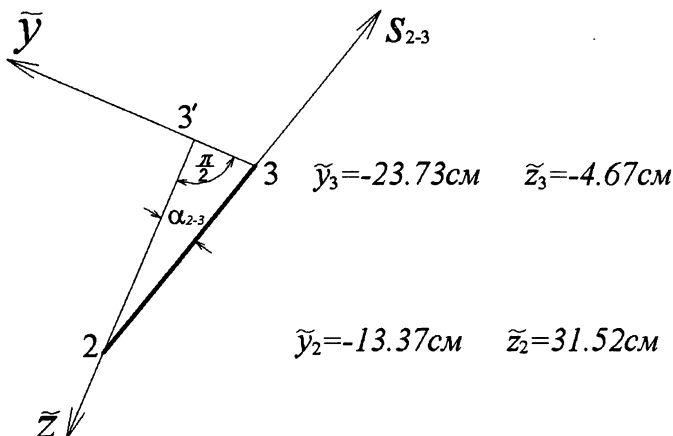


Рис. 2.64. Розташування лінії, дотичної до контуру перерізу, для визначення її кута нахилу до головних осей

Визначимо довжину сторін цього трикутника.

$$|3' - 3| = |\tilde{y}_3 - \tilde{y}_2| = |-23,73 - (-13,37)| = 10,36 \text{ см.}$$

$$|2 - 3'| = |\tilde{z}_3 - \tilde{z}_2| = |-4,67 - 31,52| = 36,19 \text{ см.}$$

$$|2 - 3| = \sqrt{(10,36)^2 + (36,19)^2} = 37,64.$$

$$\sin|\alpha_{2-3}| = \frac{10,36}{37,64} = 0,275.$$

$$\cos|\alpha_{2-3}| = \frac{36,19}{37,64} = 0,961.$$

Значення тригонометричних функцій усіх ліній  $S_{i-k}$  наведені у таблиці 2.6.

Значення тригонометричних функцій з таблиці 2.6 підставляємо у формулу (2.76), а з таблиці 2.5 беремо значення координат  $\tilde{y}_i$  та  $\tilde{z}_i$ . Радіуси інерції  $i_y$  та  $i_z$  визначені у прикладі 2.5.1:  $i_y = 17,6 \text{ см}$ ,  $i_z = 10,93 \text{ см}$ . Знаходимо координати точок ядра перерізу.



Таблиця 2.6

$s_{i-k}$	$\tilde{\alpha}_{ik}$	$\sin \tilde{\alpha}_{i-k}$	$\cos \tilde{\alpha}_{i-k}$	$\sin \alpha_{i-k}$	$\cos \alpha_{i-k}$	$\sin \tilde{\alpha}_{i-k}$	$\cos \tilde{\alpha}_{i-k}$
1-2	$90^\circ + \alpha_{1-2}$	$\cos \alpha_{1-2}$	$-\sin \alpha_{1-2}$	0,401	0,616	0,916	-0,401
2-3	$180^\circ - \alpha_{2-3}$	$\sin \alpha_{2-3}$	$-\cos \alpha_{2-3}$	0,275	0,961	0,275	-0,961
3-4	$180^\circ + \alpha_{3-4}$	$-\sin \alpha_{3-4}$	$-\cos \alpha_{3-4}$	0,401	0,916	-0,401	-0,916
4-5	$270^\circ + \alpha_{4-5}$	$-\cos \alpha_{4-5}$	$-\sin \alpha_{4-5}$	0,401	0,916	-0,916	0,401
5-1	$\alpha_{5-1}$	$\sin \alpha_{5-1}$	$\cos \alpha_{5-1}$	0,401	0,916	0,401	0,916

$$\tilde{y}_{1-2} = -\frac{(10,93)^2 \cdot (-0,401)}{1,28(-0,401) + 37,94(0,916)} = 1,4 \text{ см},$$

$$\tilde{z}_{1-2} = -\frac{(17,6)^2 \cdot (0,916)}{1,28(-0,401) + 37,94(0,916)} = -8,29 \text{ см},$$

$$\tilde{y}_{2-3} = -\frac{(10,93)^2 \cdot (-0,916)}{(-13,37)(-0,961) + 31,52(0,275)} = 5,34 \text{ см},$$

$$\tilde{z}_{2-3} = -\frac{(17,6)^2 \cdot (0,275)}{(-13,37)(-0,961) + 31,52(0,275)} = -3,96 \text{ см}.$$

Аналогічно знаходимо координати інших характерних точок ядра перерізу. Всі вони наведені у таблиці 2.7.

Таблиця 2.7

$s_{i-k}$	$\tilde{y}_{i-k}$ , см	$\tilde{z}_{i-k}$ , см
$s_{1-2}$	1,4	-8,29
$s_{2-3}$	5,34	-3,96
$s_{3-4}$	4,63	5,26
$s_{4-5}$	-3,69	21,82
$s_{5-1}$	-6,68	-7,58

Для побудови ядра перерізу необхідно суміжні характерні точки з'єднати прямими лініями, тому що перехід від однієї лінії  $s_i$  до наступної відбувається

за рахунок її обертання навколо відповідної характерної точки. Це було доведено у параграфі 2.3.3. Побудоване ядро перерізу зображено на рис. 2.65.

Підкреслимо властивість ядра перерізу. Якщо поздовжнє навантаження прикласти у межах ядра, то усі точки перерізу матимуть напруження одного знаку. Це важливо для анізотропних матеріалів, які мають різні властивості при розтягу та стиску.

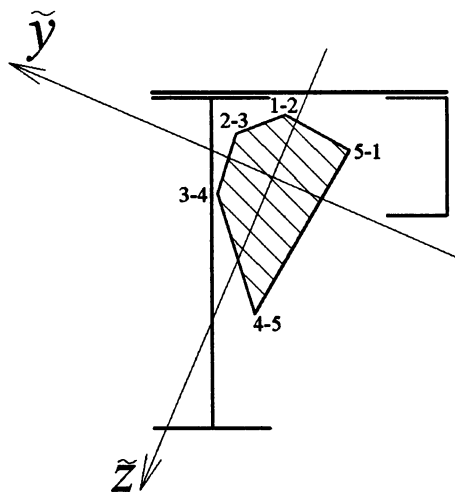


Рис. 2.65. Побудоване ядро перерізу

### 2.5.8. Приклад перевірки міцності стержня

Вважаємо, що внутрішні зусилля в стержні знайдені у прикладі 2.5.4, а переріз стержня — двотавр, розміри якого потрібно визначити (рис. 2.66).

Задано допустиме напруження матеріалу  $\sigma_{adm} = 160$  МПа. З епюри зусиль (рис. 2.59) визначаємо переріз, у якому згинальний момент має максимальне значення. Це переріз 4-5, де  $M_{4.5} = 9$  кН·м,  $Q_{4.5} = 3$  кН,  $N_{4.5} = 0$ .

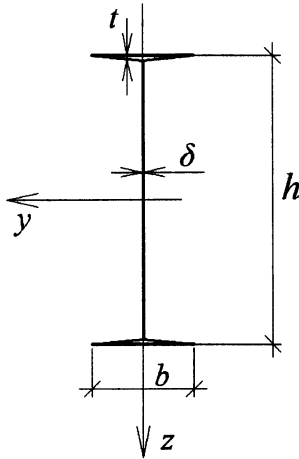


Рис. 2.66. Форма та розміри перерізу стержня для перевірки його на міцність

Для розрахунку застосуємо формули, за якими визначаються напруження у разі плоского згину стержня (2.29):  $\sigma_{xx} = \frac{M_y \cdot z}{I_y}$ . Максимальне напруження

виникає у точках, де координата  $z$  має найбільше значення, тобто  $z = h/2$ .

Напруження дорівнює:

$$\sigma_{xx, \max} = \frac{M_y \cdot \frac{h}{2}}{I_y} = \frac{M_y}{W_y}.$$

Приймаємо напруження рівним допустимому:

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{M_y}{W_y}, \text{ або } W_y = \frac{M_y}{\sigma_{\text{adm}}}.$$

Підставляючи у праву частину відомі величини, отримаємо:

$$W_y = \frac{9 \text{кН} \cdot \text{м}}{160 \text{МПа}} = \frac{9 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 5,625 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 56,25 \text{ см}^3.$$

У сортаменті вибираємо найближче до необхідного значення  $W_y$ , яке має двотавр №12. Його момент опору дорівнює  $W_y = 58,4 \text{ см}^3$ , інші розміри  $h = 12 \text{ см}$ ,

$b = 6,4\text{ см}$ ,  $\delta = 0,48\text{ см}$ ,  $t = 0,73\text{ см}$ ,  $I_y = 350\text{ см}^4$ ,  $S_y = 33,7\text{ см}^3$  — статичний момент половини перерізу відносно осі  $y$ . Побудуємо епюри нормальних  $\sigma_{xx}$  та дотичних напружень  $\tau_{zx}$ , застосовуючи такі формули:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y \cdot z}{I_y}, \quad \tau_{zx} = -\frac{Q_z \cdot S_y}{b_z \cdot I_y}.$$

Для побудови епюр напружень застосуємо спрощену форму двотавра (рис. 2.67), приймаючи товщини полок постійними, рівними  $t = 0,73\text{ см}$ .

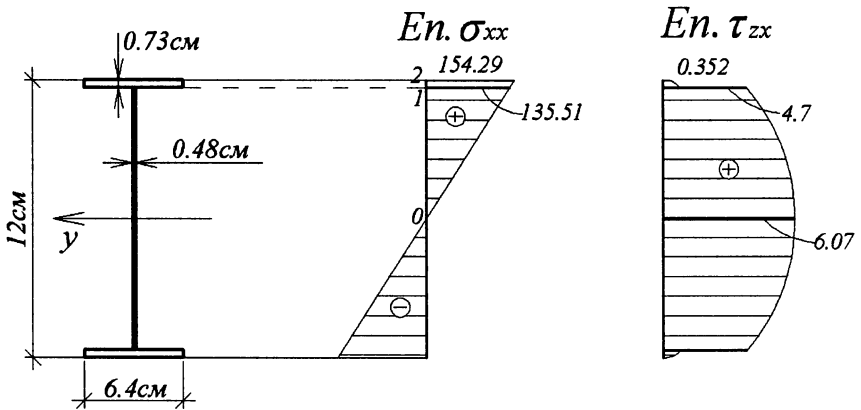


Рис. 2.67. Епюри нормальних та дотичних напружень

Ординати епюри нормальних напружень:

у точці 2:

$$z_2 = 6\text{ см}, \quad \sigma_{xx,2} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 0,06}{350 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-6} = 154,29\text{ МПа};$$

у точці 1:

$$z_1 = 5,23\text{ см}, \quad \sigma_{xx,1} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 0,0523}{350 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-6} = 135,51\text{ МПа};$$

у точці 0:

$$z_0 = 0, \quad \sigma_{xx,0} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 0}{350 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-6} = 0.$$

Ординати епюри дотичних напружень:

у точці 0:

$$S_{yn,0} = -33,7 \text{ см}^3, \quad b_{z,0} = 0,48 \text{ см.}$$

$$\tau_{zx,0} = -\frac{3 \cdot 10^3 (-33,7) \cdot 10^{-6}}{0,48 \cdot 10^{-2} \cdot 350 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-6} = 6,02 \text{ МПа.}$$

у точці трохи нижче точки 1:

$$S_{yn,1} = -6,4 \cdot 0,73 \left(6 - \frac{1}{2} \cdot 0,73\right) \cdot 10^{-6} = -26,33 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$b_{z,1} = 0,48 \text{ см.}$$

$$\tau_{zx,1} = -\frac{3 \cdot 10^3 (-26,33) \cdot 10^{-6}}{0,48 \cdot 10^{-2} \cdot 350 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-6} = 4,70 \text{ МПа.}$$

у точці трохи вище точки 1:

$$S_{yn,1} = -26,33 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3,$$

$$b_{z,1} = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

$$\tau_{zx,1} = -\frac{3 \cdot 10^3 (-26,33) \cdot 10^{-6}}{6,4 \cdot 10^{-2} \cdot 350 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-6} = 0,352 \text{ МПа.}$$

у точці 2:

$$S_{yn,2} = 0,$$

$$b_{z,2} = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

$$\tau_{zx,2} = -\frac{3 \cdot 10^3 \cdot 0}{6,4 \cdot 10^{-2} \cdot 350 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-6} = 0.$$

У точці 1 епюра  $\tau_{zx}$  має стрибковий характер за рахунок різкої зміни розміру  $b_z$ .

Перевірку міцності потрібно зробити у трьох точках: 2, 0, 1.

У точці 2 напруження дорівнюють  $\sigma_{xx} = 154,29 \text{ МПа}$ ,  $\tau_{zx} = 0$ . Тому що  $\tau_{zx} = 0$ , —  $\sigma_{xx}$  є головним напруженням, і його потрібно порівняти з допустимим напруженням.

$$154,29 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

Таким чином, у цій точці міцність забезпечена.

У точці 0 є тільки дотичне напруження, яке потрібно порівняти з допустимим дотичним напруженням, яке дорівнює 100 МПа:

$$6,02 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа}.$$

У точці трохи нижче точки 1 напруження дорівнюють  $\sigma_{xx} = 135,51 \text{ МПа}$ ,  $\tau_{zx} = 4,7 \text{ МПа}$ , тобто тензор напружень має вигляд:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 135,51 & 0 & 4,7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4,7 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для визначення головних напружень застосуємо рівняння (1.11), враховуючи, що  $\lambda$  дорівнює головним напруженням.

$$I_1 = 135,51, \quad I_2 = \begin{vmatrix} 135,51 & 4,7 \\ 4,7 & 0 \end{vmatrix} = -22,09, \quad I_3 = 0.$$

$$\sigma_{mn}^3 - 135,51\sigma_{mn}^2 - 22,09\sigma_{mn} - 0 = 0,$$

$$\sigma_{11} = 135,67 \text{ МПа}, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{33} = -0,16 \text{ МПа}.$$

Для перевірки міцності необхідно визначити еквівалентне напруження, обравши теорію міцності.

За третьою теорією міцності (1.79) матимемо:

$$\sigma_{екв}^{\text{III}} = 135,67 - (-0,16) = 135,8 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{екв}^{\text{III}} = 135,83 < 160 \text{ МПа}.$$

За четвертою теорією міцності (1.80):

$$\sigma_{екв}^{\text{IV}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(135,67)^2 + [135,67 - (-0,16)]^2 + (-0,16)^2} = 135,75 < 160 \text{ МПа}.$$

Таким чином, умови міцності за двома теоріями задовольняються.

## 2.5.9. Приклад визначення переміщень методом початкових параметрів

Задана розрахункова схема прямолінійного стержня (рис. 2.68), модуль пружності та форма перерізу: двотавр № 33.

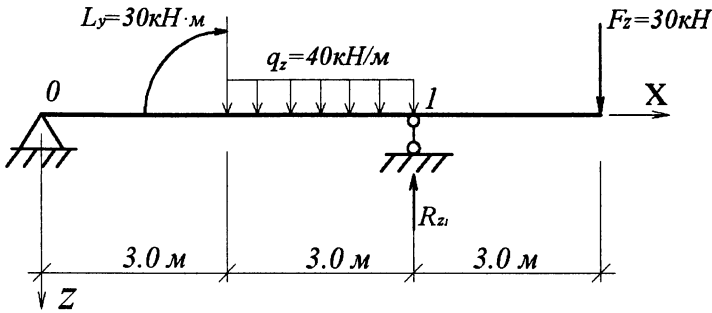


Рис. 2.68. Розрахункова схема стержня

Відомі  $E = 2,03 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$ ,  $I_y = 9840 \text{ см}^4$ ,  $EI = 2 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ .

Необхідно визначити переміщення осі стержня.

Застосуємо метод початкових параметрів. Загальний вираз переміщення  $u_z(x)$  визначається за формулами (2.90) та (2.84).

$$u_z(x) = u_z(0) + \varphi_v(0) \cdot x - \frac{M_v(0)}{EI} \frac{x^2}{2} - \frac{Q_z(0)}{EI} \frac{x^3}{6} + u_z^*(x).$$

Перші чотири члени цієї формули завжди однакові, незалежно від умов закріплення та навантаження. Останній доданок  $u_z^*$  залежить від навантаження та умов з'єднання окремих відрізків стержня. Конкретні значення частинного розв'язку наведені у таблиці параграфу 2.4.1. Користуючись тією таблицею, запишемо:

$$u_z^*(x) = -\frac{L_y}{EI} \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{q_z \left[ (x-3)^4 - (x-6)^4 \right]}{24EI} - \frac{R_{z1}}{EI} \frac{(x-6)^3}{6}.$$

У частинному розв'язку враховуються усі навантаження, які прикладені у точках стержня, розташованих між початковою і кінцевою точками.

Навантаження, які прикладені в кінцевій точці, у частинному розв'язку не враховуються. Підкреслимо, що потрібно враховувати задані навантаження, а також невідомі реактивні сили.

Якщо у цьому прикладі проаналізувати вирази  $u_z(x)$  та  $u'_z(x)$ , побачимо, що до них увійшли п'ять невідомих, а саме:

$$u_z(0), \varphi_z(0), M_y(0), Q_z(0), R_{z1}.$$

Для їх визначення складемо п'ять рівнянь. По два граничних рівняння складаємо у початковій і кінцевій точках і одне додаткове рівняння у точці 1. Їх вигляд залежить від умов закріплення (рис. 2.38).

При  $x = 0$

$$1) u_z(0) = 0,$$

$$2) M_y(0) = 0;$$

при  $x = 9$

$$3) M_y(9) = 0,$$

$$4) Q_z(9) = 30;$$

при  $x = 6$

$$5) u_z(6) = 0.$$

З перших двох рівнянь отримуємо значення двох невідомих. Врахуємо їх у виразі  $u_z(x)$ . У частинний розв'язок підставимо відомі значення навантаження.

$$u_z(x) = \varphi_y(0) \cdot x - \frac{Q_z(0)}{EI} \frac{x^3}{6} - \frac{30}{EI} \frac{(x-3)^2}{2} + \\ + \frac{40[(x-3)^4 - (x-6)^4]}{24EI} - \frac{R_{z1}}{EI} \frac{(x-6)^3}{6}.$$

На підставі залежностей між  $u_z(x)$  та іншими величинами знайдемо:

$$u'_z(x) = \varphi_y(0) - \frac{Q_z(0)}{EI} \frac{x^2}{2} - \frac{30}{EI} (x-3) + \\ + \frac{40[(x-3)^3 - (x-6)^3]}{6EI} - \frac{R_{z1}}{EI} \frac{(x-6)^2}{2},$$



$$M_y(x) = -EIu''_y(x) = Q_z(0) \cdot x + 30 - \frac{40[(x-3)^2 - (x-6)^2]}{2} + R_{z1} \cdot (x-6),$$

$$Q_z(x) = -M'_y(x) = Q_z(0) - 40 \cdot [(x-3) - (x-6)] + R_{z1}.$$

Застосуємо ці вирази для граничних умов (3) та (4) і додаткової умови (5).

$$3) M_y(y) = 0, \quad Q_z(0) \cdot 9 + 30 - 20[(9-3)^2 - (9-6)^2] + R_{z1}(9-6) = 0;$$

$$4) Q_z(y) = 30, \quad Q_z(0) - 40[(9-3) - (9-6)] + R_{z1} = 30;$$

$$5) u_z(6) = 0, \quad \varphi_y(0) \cdot \frac{Q_z(0) 6^3}{EI} - \frac{30(6-3)^2}{EI} + \frac{40[(6-3)^4 - (6-6)^4]}{24EI} = 0.$$

Після обчислення отримуємо:

$$9Q_z(0) + 3R_{z1} = 510,$$

$$Q_z(0) + R_{z1} = 150,$$

$$6EI\varphi_y(0) - 36Q_z(0) = 0.$$

Звідки знаходимо:

$$Q_z(0) = 10 \text{ кН}, \quad \varphi_0 = \frac{60}{EI}, \quad R_{z1} = 140 \text{ кН}.$$

Підставимо ці значення у вирази для переміщення та зусиль:

$$u_z(x) = \frac{1}{EI} \left\{ 60x - 10 \frac{x^3}{6} - 30 \frac{(x-3)^2}{2} + 40 \frac{[(x-3)^4 - (x-6)^4]}{24} - 140 \frac{(x-6)^3}{6} \right\},$$

$$\varphi_y(x) = \frac{1}{EI} \left\{ 60 - 10 \frac{x^2}{6} - 30(x-3) + 40 \frac{[(x-3)^3 - (x-6)^3]}{6} - 140 \frac{(x-6)^2}{2} \right\},$$

$$M_y(x) = 10x + 30 - 40 \frac{[(x-3)^2 - (x-6)^2]}{2} + 140(x-6),$$

$$Q_z(x) = 10 - 40[(x-3) - (x-6)] + 140.$$

Звернемо увагу на те, що доданки, до яких входять множники  $(x-a)$ , враховуються тільки коли  $x > a$ . Побудуємо всі епюри (рис. 2.69).

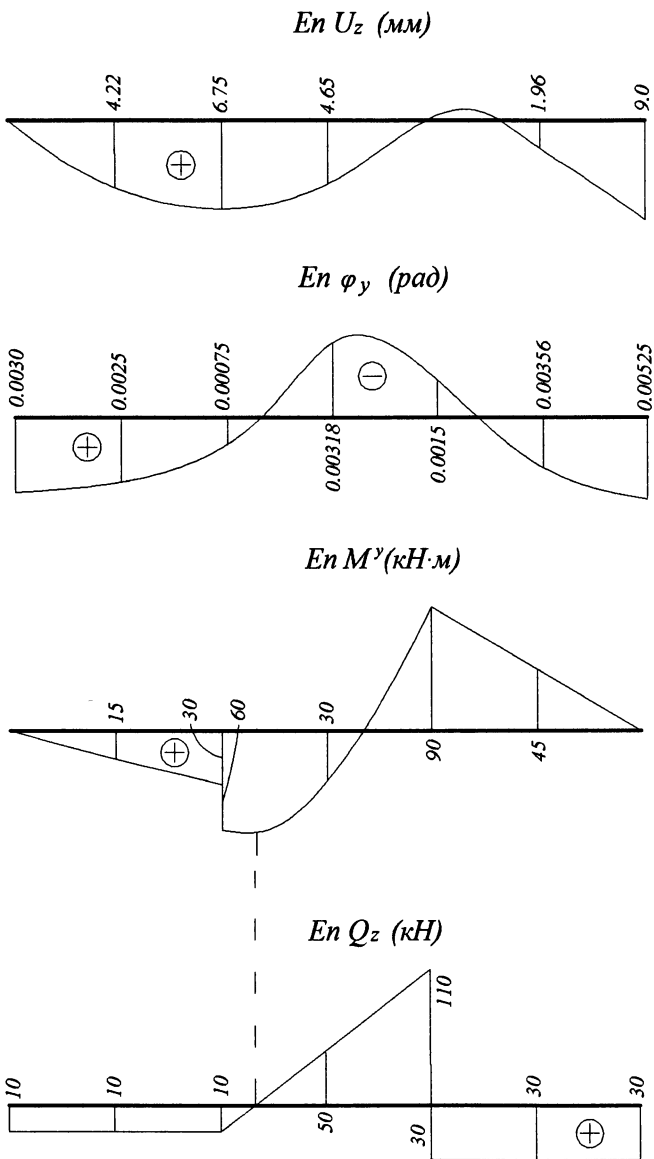


Рис. 2.69. Епюри переміщень та зусиль у стержні (рис. 2.68)

## 2.5.10. Приклад визначення переміщень методом початкових параметрів

Необхідно знайти переміщення стержня (рис. 2.70).

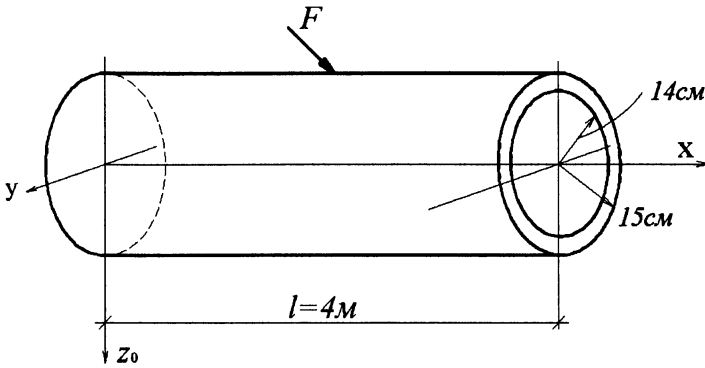


Рис. 2.70. Розміри і форма стержня з навантаженням

Дано:  $F = \sqrt{3} \cdot 30 \text{ кН}$ ,  $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$ ,  $G = 0,8 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$ ,  
 $I_y = I_z = 9589 \text{ см}^4$ ,  $EI_y = 1,92 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ ,  $GI_{кр} = 1,53 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ .

Навантаження  $F$  прикладене у середній точці  $K$  на верхній поверхні стержня. Воно має однакові кути з усіма головними осями  $x, y, z$ , тому його напрямні косинуси  $n_x = n_y = n_z = \sqrt{3}/3$ .

Розкладаємо силу  $F$  у напрямках головних осей і переносимо усі складові до точки 1, яка розташована у центрі середнього перерізу стержня. Розрахункова схема стержня і умови закріплення зображені на рис. 2.71.

Лівий кінець стержня жорстко закріплений. Тут виникають шість опорних реакцій. Закріплення правого кінця зображено відповідно до рис. 2.12. Воно відповідає умовам  $u_x = u_y = u_z = 0$ ,  $\varphi_x = 0$ . Можливі опорні реакції вказані на рис. 2.71.

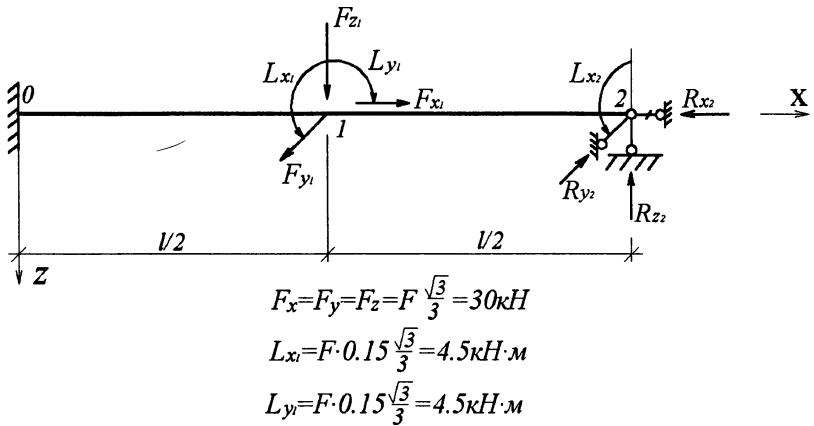


Рис. 2.71. Загальна розрахункова схема стержня

Беручи до уваги характер навантаження, можна стверджувати, що у стержні виникають переміщення в напрямку осей  $ox, oy, oz$  та поворот навколо осі  $ox$ . Для знаходження цих переміщень застосуємо формули (2.90) та (2.91). Вони є незалежними.

Почнемо з визначення переміщення  $u_z$ . Розрахункова схема має такий вигляд (рис. 2.72):

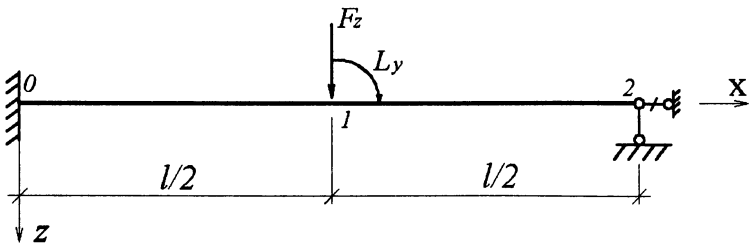


Рис. 2.72. Розрахункова схема стержня для визначення переміщення в напрямку осі  $z$

Порядок розв'язку аналогічний до попереднього прикладу. На підставі таблиці 2.3 запишемо частинний розв'язок:

$$u_z^* = \frac{F_z}{EI_y} \frac{(x-l/2)^3}{6} - \frac{L_y}{EI_y} \frac{(x-l/2)^2}{2}.$$

Граничні умови:

При  $x=0$

1)  $u_z(0) = 0,$

2)  $\varphi_z(0) = 0,$

при  $x=l$

3)  $u_z(l) = 0,$

4)  $M_y(l) = 0.$

Складемо два рівняння на підставі граничних умов при  $x=l$ . При цьому враховуємо значення частинного розв'язку та граничні умови при  $x=0$ .

$$3) -\frac{M_y(0)}{EI_y} \cdot \frac{l^2}{2} - \frac{Q_z(0)}{EI_y} \cdot \frac{l^3}{6} + \frac{F_z}{EI_y} \cdot \frac{(l-l/2)^2}{6} - \frac{L_y}{EI_y} \cdot \frac{(l-l/2)^2}{2} = 0,$$

$$4) M_y(0) + Q_z(0) \cdot l - F_z(l-l/2) + L_y = 0.$$

Підставляємо чисельні значення та розв'язуємо систему рівнянь.

Отримуємо:

$$M_y(0) = -21,9 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad Q_z(0) = 19,36 \text{ кН}.$$

Підставляємо ці значення у вираз (2.90). Знаходимо переміщення  $u_z(x)$ .

На підставі залежностей (2.89) отримуємо вирази для інших величин. Після обчислення їх значень будемо всі необхідні епюри.

Перейдемо до знаходження переміщення  $u_y(x)$ . Розрахункова схема зображена на рис. 2.73.

Частинний розв'язок дорівнює:

$$u_z^* = \frac{EI_y}{EI_z} \cdot \frac{(x-l/2)^3}{6}.$$

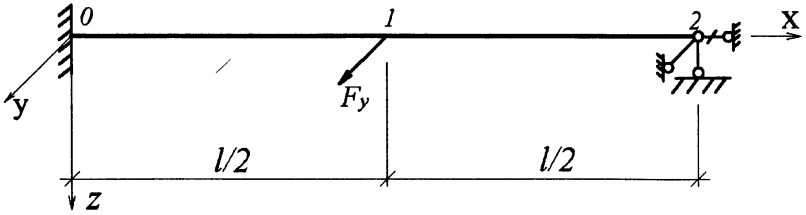


Рис. 2.73. Розрахункова схема стержня для визначення переміщень в напрямку осі  $y$

Граничні умови:

При  $x = 0$

$$1) u_y(0) = 0,$$

$$2) \varphi_z(0) = 0,$$

при  $x = l$

$$3) u_y(l) = 0,$$

$$4) M_z(l) = 0.$$

Загальний вираз  $u_y(x)$  визначається за третьою формулою (2.91). На його підставі з урахуванням частинного розв'язку та граничних умов складаємо систему рівнянь:

$$3) -\frac{M_z(0)}{EI_z} \cdot \frac{l^2}{2} - \frac{Q_y(0)}{EI_z} \cdot \frac{l^3}{6} + \frac{F_y}{EI_z} \cdot \frac{(l-l/2)^2}{6} = 0,$$

$$4) M_z(0) + Q_y(0) \cdot l - F_y \cdot (l-l/2) = 0.$$

З цих рівнянь знаходимо:

$$M_z(0) = -22,5 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad Q_y(0) = 20,625 \text{ кН}.$$

Підставляємо знайдені початкові параметри та значення інших величин у вираз  $u_y(x)$ . Обчислюємо значення та будуємо епюри  $\varphi_z(x)$ ,  $M_z(x)$ ,  $Q_y(x)$ .

Розглянемо знаходження переміщення  $u_x(x)$ . Розрахункова схема має такий вигляд рис. 2.74:

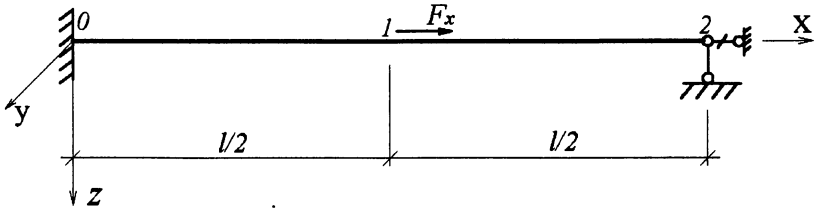


Рис. 2.74. Розрахункова схема стержня для визначення переміщень вздовж осі  $x$

Застосуємо першу формулу (2.91). Частинний розв'язок буде дорівнювати:

$$u_x^*(x) = \frac{F_x}{EA} \cdot (x - l/2).$$

Вираз для переміщення  $u_x(x)$  відрізняється від  $u_z(x)$  та  $u_y(x)$  тим, що до нього увійшли два, а не чотири початкових параметри. На кожному кінці стержня можна записати по одній граничній умові.

При  $x = 0$

$$1) u_x(0) = 0,$$

при  $x = l$

$$2) u_x(l) = 0.$$

З першої умови визначаємо початковий параметр  $u_x(0) = 0$ . Складемо рівняння для другої умови:

$$\frac{N_x}{EA} \cdot l - \frac{F_x}{EA} (l - l/2) = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$N_x(0) = \frac{1}{2} F_x = 1,5 \text{ кН}.$$

Підставляємо це значення у перший вираз (2.91). Отримуємо:

$$u_x(x) = 15 \cdot \frac{x}{EA} - 30 \frac{(x - l/2)}{EA}.$$

На підставі залежності  $N_x = EAu'_x(x)$  маємо:

$$N_x = 15 - 30x$$

Другий доданок вираховується тільки коли  $x \geq l/2$ . Епюри  $u_x(x)$  та  $N_x(x)$  мають такий вигляд (рис. 2.75):

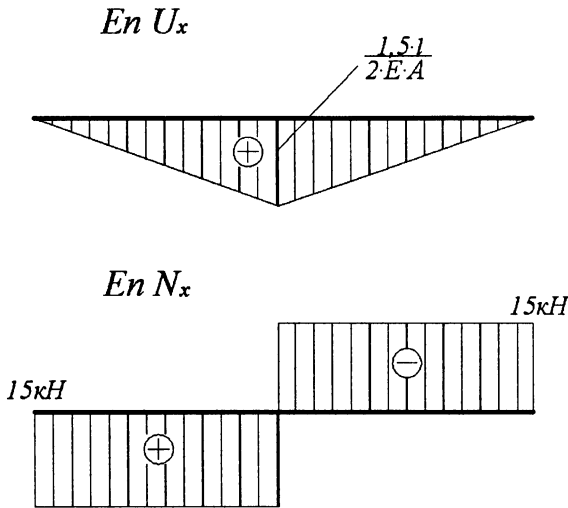


Рис. 2.75. Епюри поздовжніх переміщень та зусиль

Аналогічно можна визначити кут повороту  $\varphi_x$  за другою формулою (2.91). Розрахункова схема має такий вигляд (рис. 2.76):

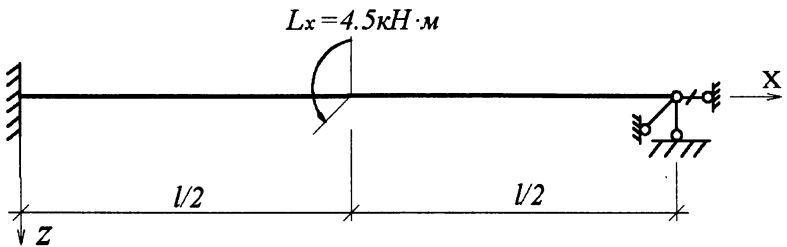


Рис. 2.76. Розрахункова схема стержня для визначення кута повороту



Частинний розв'язок має вигляд:

$$\varphi_x^*(x) = -\frac{L_x}{GI_k}(x-l/2).$$

Граничні умови:

При  $x=0$

$$1) \varphi_x(0) = 0,$$

при  $x=l$

$$3) \varphi_x(l) = 0.$$

Друга умова дозволяє записати:

$$\frac{M_x^k(0)}{GI_k}l - \frac{L_x}{GI_k}(l-l/2) = 0.$$

$$M_x^k(0)l - L_x \frac{l}{2} = 0, \quad M_x^k(0) = \frac{1}{2}L_x = 2,25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Підставляємо значення початкових параметрів

$\varphi_x(0) = 0$ ,  $M_x^k(0) = +0,075 \text{ кН}\cdot\text{м}$  у відповідну формулу (2.91) та отримуємо вираз для кута повороту:

$$\varphi_x(x) = +2,25 \cdot \frac{x}{GI_k} - 4,5 \frac{(x-l/2)}{GI_k}.$$

На підставі залежності  $M_x^k = GI_k \varphi_x$  знайдемо момент кручення:

$$M_x^k = 2,25 - 4,5x \geq l/2.$$

### 2.5.11. Приклад визначення переміщень методом Мора

Визначити переміщення, які виникають у стержні, зображеному на рис. 2.68. Для розв'язання застосувати метод Мора.

Переміщення за методом Мора від силового навантаження визначаються за формулою (2.97). До неї входять внутрішні зусилля у двох станах. Один

відповідає заданому навантаженню, а другий необхідно обрати в залежності від того, яке переміщення і в якій точці необхідно знайти.

Епюри зусиль від заданого навантаження зображено на рис. 2.69. Використовуємо їх у готовому вигляді.

Обираємо другий стан — одиничний. Якщо потрібно знайти вертикальне переміщення у середній точці стержня при  $x = 3$ , то в цю точку необхідно прикласти вертикальну одиничну силу (рис. 2.77).

Епюри зусиль у двох станах зображено на рис. 2.78.

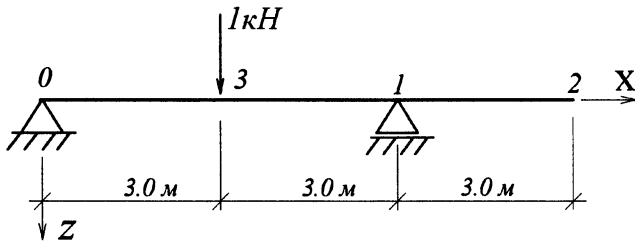


Рис. 2.77. Розрахункова схема одиничного стану стержня

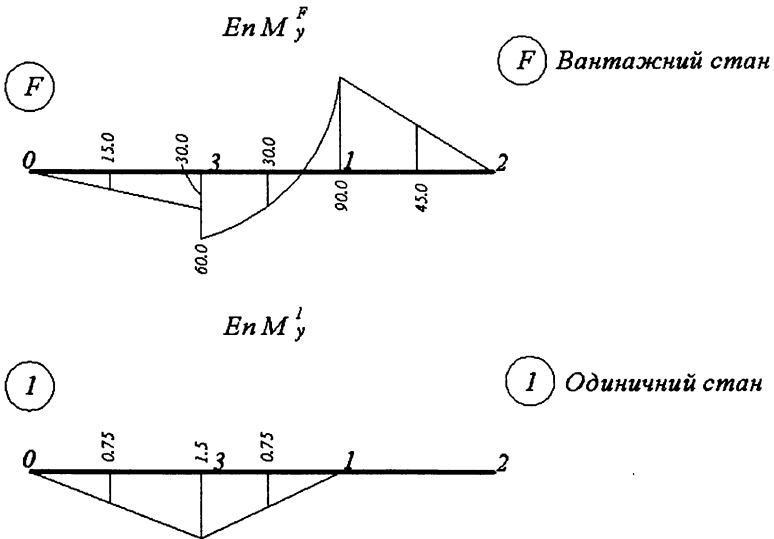


Рис. 2.78. Епюри зусиль у двох станах навантаження

Відповідно до формули (2.97) для знаходження переміщення  $\Delta_{FI}$  необхідно обчислити інтеграл:

$$\Delta_{FI} = \int_0^l \frac{M_y^F \cdot M_y^1}{EI_y} dx.$$

Для обчислення значення інтеграла необхідно стержень розділити на три відрізки: 0-3, 3-1 та 1-2. На кожному відрізьку для обчислення інтеграла застосуємо правило Верещагіна або Сімпсона.

Відрізок 0-3.

За правилом Верещагіна запишемо:

$$\int_0^3 \frac{M_y^F \cdot M_y^1}{EI_y} dx = \frac{1}{2} 30 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 1,5 \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^4} = 22,5 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Відрізок 3-1.

За правилом Сімпсона запишемо:

$$\int_0^6 \frac{M_y^F \cdot M_y^1}{EI_y} dx = \frac{3}{6} (60 \cdot 1,5 + 4 \cdot 30 \cdot 0,75 + 90 \cdot 0) \frac{1}{2 \cdot 10^4} = 45 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Відрізок 1-2.

$$\int_0^9 \frac{M_y^F \cdot M_y^1}{EI_y} dx = 0.$$

Переміщення  $\Delta_{FI}$  дорівнює сумі отриманих величин.

$$\Delta_{FI} = (22,5 + 45) \cdot 10^{-4} = 67,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 6,75 \text{ мм.}$$

Як бачимо, результат співпадає з результатом, отриманим у прикладі 2.5.10.

Якщо потрібно знайти кут повороту у цій точці, то необхідно обрати другий одиничний стан. У точці 3 потрібно прикласти одиничний момент та побудувати від нього епюру моментів (рис. 2.79).

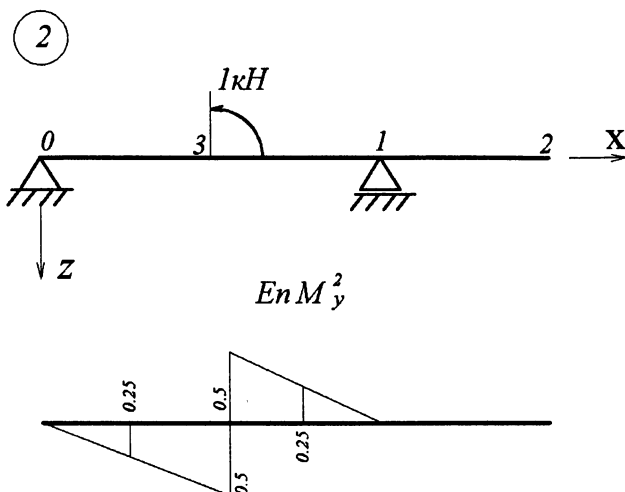


Рис. 2.79. Розрахункова схема одиничного стану стержня для визначення кутового переміщення

Для визначення  $\Delta_{F2}$  використовуємо той самий спосіб, як у попередньому прикладі.

$$\begin{aligned} \Delta_{F2} &= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^4} + \frac{3}{6} (-60 \cdot 0,5 - 4 \cdot 30 \cdot 0,25 + 90 \cdot 0) \frac{1}{2 \cdot 10^4} = \\ &= \frac{7,5}{10^4} - \frac{15}{10^4} = -0,000765 \text{ рад.} \end{aligned}$$

Знак "мінус" свідчить про те, що поперечний переріз у точці 3 повертається у протилежному напрямі. Цей результат співпадає з результатом прикладу 2.5.9.

### 2.5.12. Приклад визначення переміщень методом Мора

Визначити переміщення у стержні, розрахункова схема якого зображена на рис. 2.57, від дії навантаження з прикладу 2.5.4.

Спочатку знаходимо горизонтальне переміщення точки 1. Обираємо одиничний стан (рис. 2.80).

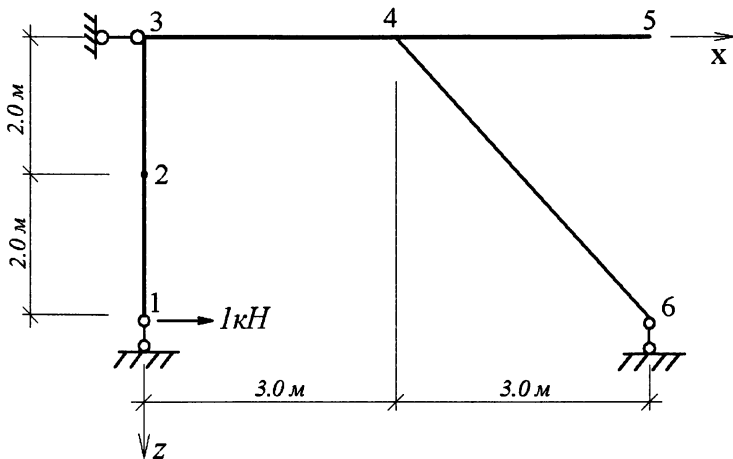


Рис. 2.80. Розрахункова схема одиничного стану стержня

Вважаємо, що стержень виготовлений з двотавра №20. Його характеристики:  $I = 1840 \text{ см}^4$ ,  $A = 26,8 \text{ см}^2$ ,  $E = 2 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2$ ,  $EI = 3,68 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ ,  $EA = 5,36 \cdot 10^5 \text{ кН}$ .

Будуємо епюри зусиль у стані навантаження та одиничному стані. Епюри вантажного стану беремо з прикладу 2.5.4 (рис. 2.59). Епюри обох станів зображено на рис. 2.81.

Переміщення визначасмо за формулою Мора (2.97). Для обчислення значення інтегралів стержень розподіляємо на відрізки 1-2, 2-3, 3-4, 4-6. На перших трьох відрізках застосовуємо правило Сімпсона, а на відрізку 4-6 — правило Верещагіна. При обчисленні доданка, що залежить від поздовжнього зусилля, стержень розподіляємо на два відрізки, а саме 1-3 та 4-6, і на обох відрізках застосовуємо правило Верещагіна.

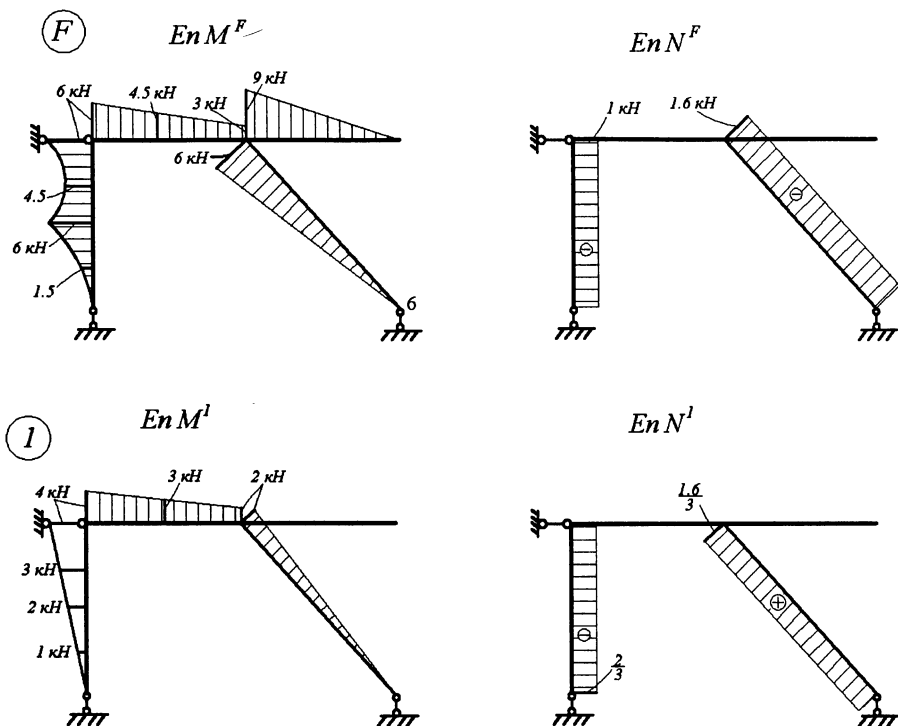


Рис. 2.81. Епюри зусиль у двох станах навантаження

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} = & \frac{3}{6}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 1,5 \cdot 1 + 2 \cdot 6) \frac{1}{EI} + \frac{3}{6}(6 \cdot 2 + 4 \cdot 4,5 \cdot 3 + 4 \cdot 8) \frac{1}{EI} + \\ & + \frac{3}{6}(4 \cdot 6 + 4 \cdot 4,5 \cdot 3 + 3 \cdot 2) \frac{1}{EI} - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EI} + 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EA} - \\ & - 1,6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1,6}{3} \cdot \frac{1}{EA}. \end{aligned}$$

Враховуючи значення  $EI$  та  $EA$ , знайдемо:

$$\Delta_{1F} = 2,06 \text{ см} - 0,003 \text{ см}.$$

Перший доданок у цьому виразі отриманий від врахування згинального моменту, а другий — від поздовжнього зусилля. Порівнюючи їх, можна зробити висновок: якщо у стержні виникає згинальний момент і поздовжнє зусилля, то у формулі Мора поздовжнє зусилля можна не враховувати,

тобто  $\Delta_{1F} = 2,06 \text{ см}$ . Отже, від діючого навантаження точка 1 у горизонтальному напрямі отримала визначене переміщення.

Зупинимося на знаходженні горизонтального переміщення точки 1 від зміни температури. Вважаємо, що зовнішня температура стержня дорівнює  $t_{\text{зовн}} = -10^\circ\text{C}$ , а внутрішня  $t_{\text{внутр}} = +20^\circ\text{C}$  (рис. 2.82). Врахуємо коефіцієнт теплового розширення матеріалу стержня, рівний  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ .

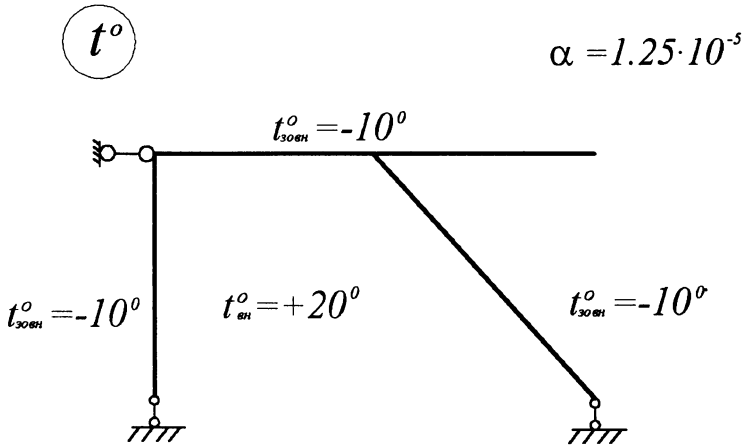


Рис. 2.82. Схема розподілення температури

У залежності від зміни температури переміщення визначаються за формулою (2.100). У цю формулу входять поздовжнє зусилля  $N_x$  та згинальний момент  $M_y$ , значення яких відповідають епюрам одиничного стану (рис. 2.81), а  $M_z = 0$ . Інші величини зображені на рис. 2.83.

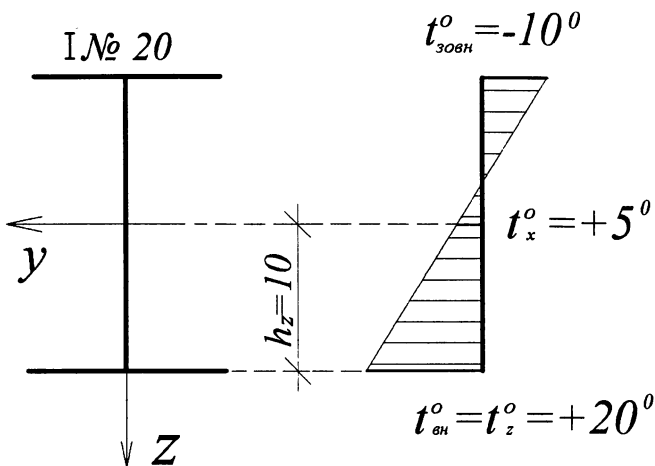


Рис. 2.83. Характер розподілу температури по перерізу стержня

Враховуючи вказані величини, запишемо:

$$\begin{aligned} \Delta_{1t} = & \alpha \left[ (+5^\circ\text{C}) \left( -\frac{2}{3} 4\text{м} \right) + (+5^\circ\text{C}) \left( +\frac{1,6}{3} 5\text{м} \right) + \right. \\ & + \frac{(20-5)^\circ\text{C}}{0,1\text{м}} \cdot \left( -\frac{1}{2} 4\text{м} \cdot 4\text{м} \right) + \frac{(20-5)^\circ\text{C}}{0,1\text{м}} \cdot \left( -\frac{(4+2)\text{м}}{2} 3\text{м} \right) + \\ & \left. + \frac{(20-5)^\circ\text{C}}{0,1\text{м}} \cdot \left( -\frac{1}{2} 2\text{м} \cdot 5\text{м} \right) \right] = 1,25 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1} (-3300^\circ\text{C} \cdot \text{м}) = -0,041\text{м} = \\ & = -4,1\text{см}. \end{aligned}$$

Також зупинимося на знаходженні переміщень від вимушеної осадки опор. Знов будемо знаходити горизонтальне переміщення точки 1, від вимушеного вертикального осідання опори 6 (рис. 2.84).



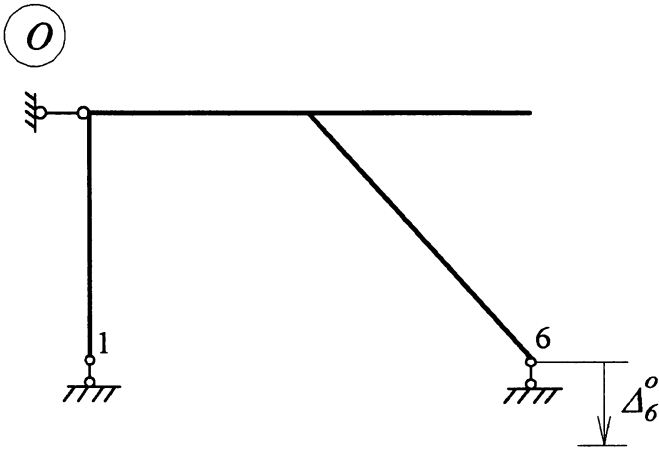


Рис. 2.84. Характер вимушеної осадки опори стержня

Необхідно застосувати формулу (2.101). Реакції, що входять до цієї формули, визначаємо в одиничному стані (рис. 2.81). Тоді матимемо:

$$\Delta_{1o} = -R_6^1 \cdot \Delta_6^o = -\frac{2}{3} \Delta_6^o.$$

Знак "мінус" свідчить про те, що горизонтальне переміщення точки 1 є протилежним напрямку одиничної сили.

## **Розділ 3. ВРАХУВАННЯ ДОДАТКОВИХ ФАКТОРІВ ПРИ РОЗРАХУНКУ СТЕРЖНЯ**

### **Глава 3.1. Визначення зусиль та переміщень у статично невизначуваних стержнях**

#### **3.1.1. Загальні поняття статичної невизначуваності**

Поняття статичної невизначуваності було встановлено у першому розділі, коли розглядалися умови рівноваги частини просторового тіла. Були отримані три рівняння (1.23), до яких увійшли шість невідомих внутрішніх напружень, тобто кількість невідомих перевищила кількість рівнянь рівноваги, які можна скласти. Подібні викладки якраз і пов'язані з поняттям статичної невизначуваності. Для розв'язання цих задач потрібно застосовувати, крім рівнянь рівноваги, кінематичні та фізичні залежності. Розглянутий варіант відноситься до поняття внутрішньої статичної невизначуваності, тому що розглядаються внутрішні точки тіла і невідомими є напруження у цих точках.

Існує другий варіант, який має назву зовнішньої статичної невизначуваності. Це пов'язано із знаходженням реакцій у в'язях, які з'єднують між собою різні тіла. Припустимо, потрібно просторове тіло прикріпити до землі. У просторі тіло має шість степенів вільності, тому для його закріплення потрібно застосувати шість в'язей, в яких виникає шість невідомих реакцій. Для їх визначення можна скласти шість рівнянь рівноваги. Але якщо кількість в'язей буде більшою ніж кількість рівнянь на величину  $n$ , то задача буде  $n$  разів статично невизначуваною. При цьому вона має назву зовнішньо статично невизначуваної, тому що невідомими є реакції в'язей, які прикладені до зовнішніх точок тіла.

Характерною особливістю стержня є те, що на підставі прийнятих гіпотез у загальному вигляді вирішена його внутрішня статична невизначуваність.

Таким чином, стержень може мати тільки зовнішню статичну невизначуваність. Її величина  $n$  дорівнює різниці між кількістю в'язей закріплення  $k$  та степенів вільності  $m$ :

$$n = k - m. \quad (3.1.)$$

Степінь вільності тіла у просторі  $m = 6$ , степінь вільності на площині  $m = 3$ .

### **3.1.2. Порядок розрахунку статично невизначуваного стержня при силовому навантаженні**

Для розв'язання вказаної задачі буде застосований метод, який має назву методу сил. Подібна назва пов'язана з тим, що за невідомі приймаються силові фактори, а саме зусилля у в'язях.

Метод базується на перетворенні статично невизначуваної системи у статично визначувану шляхом відкидання певної кількості в'язей, яка дорівнює степеню статичної невизначуваності. До отриманої таким чином системи у точках приєднання відкинутих в'язей та за їх напрямом прикладаються відповідні невідомі зусилля. Внаслідок вказаних дій перетворена система стає статично визначуваною, до якої, крім заданого зовнішнього навантаження, будуть прикладені невідомі зусилля у вигляді зосереджених сил або моментів, у залежності від характеру усунутих в'язей.

Беручи до уваги, що система, яка розглядається статично визначувана, можна зробити її розрахунок, тобто знайти зусилля та переміщення. Вказані розрахунки потрібно робити окремо від кожного навантаження, а саме від заданого зовнішнього навантаження та кожної невідомої реакції усунутих в'язей. Таким чином, для знаходження цих невідомих реакцій необхідно скласти певні рівняння. Умови складання цих рівнянь полягають у тому, що переміщення в статично визначуваній системі в напрямку кожної відкинутої в'язі від дії усіх навантажень дорівнює нулю. Це відповідає умовам закріплення статично невизначуваної системи. Кількість цих рівнянь співпадає з кількістю

невідомих зусиль, які виникають в усунутих в'язях, і дорівнює степеню статичної невизначуваності. Дані загальні положення проілюструємо на прикладі (рис. 3.1).

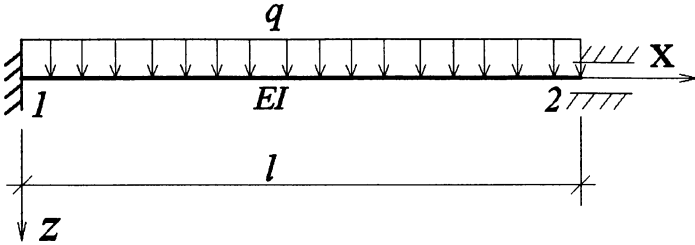


Рис. 3.1. Приклад статично невизначуваного стержня

Зовнішнє навантаження, що прикладене до стержня, і сам стержень розташовані в одній площині, тому стержень може розглядатися як плоске тіло, яке має три степені вільності. Його закріплення складається з п'яти в'язей, тому згідно з формулою (3.1) степінь статичної невизначуваності дорівнює двом. Усуваючи дві в'язі, які розташовані у точці 2, перетворюємо його у статично визначуваний стержень (рис. 3.2).

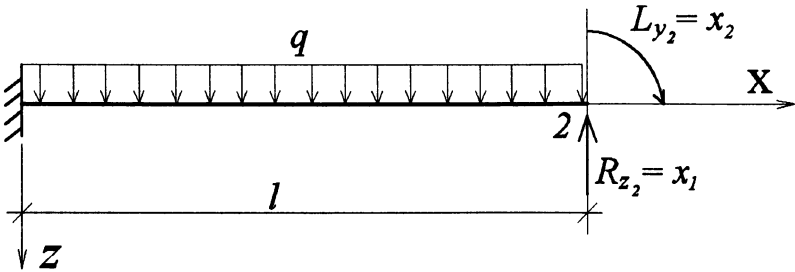


Рис. 3.2. Основна статично визначувана система

В'язі у точці 2 мають різний характер. Одна з них не дає можливості переміщуватись цій точці у вертикальному напрямку, тому у цьому напрямку

прикладаємо невідому вертикальну реакцію  $R_{z_2} = x_1$ . Друга в'язь не дає повертатися поперечному перерізу відносно осі  $y$ . У даному випадку реакція має характер моменту  $L_{y_2} = x_2$  відносно осі  $y$ . Отриманий таким чином стержень називається основною статично визначуваною системою. Навантаження на цю систему складається з відомого  $q_z$  та двох невідомих  $R_{z_2} = x_1$  та  $L_{y_2} = x_2$ . Усі необхідні розрахунки основної статично визначуваної системи далі будуть виконуватись окремо від кожного з цих трьох навантажень. У зв'язку з цим потрібно розглянути три стани навантаження (рис. 3.3).

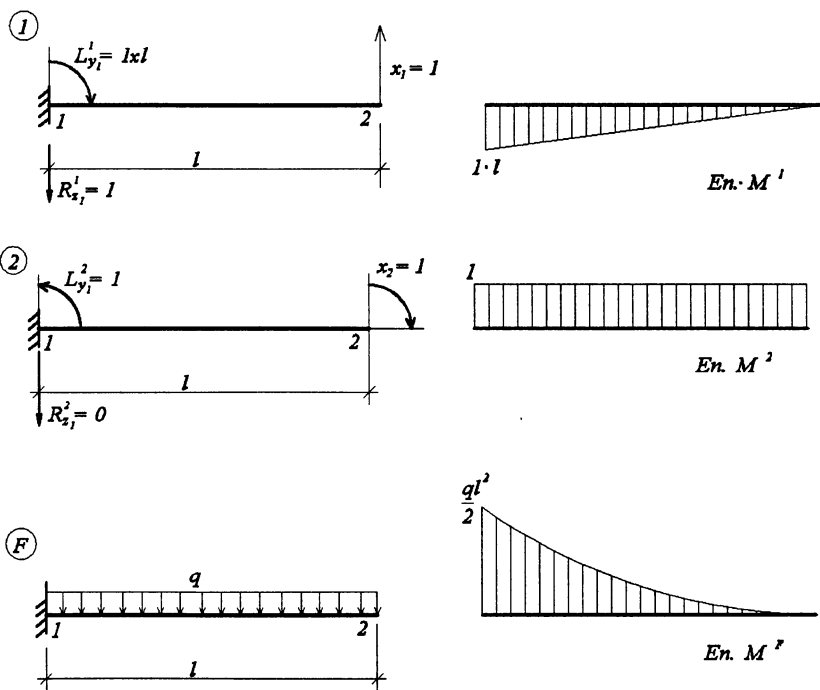


Рис. 3.3. Три різні стани навантаження основної статично визначуваної системи

У першому та другому стані розрахунки будемо виконувати від навантаження, що дорівнюють одиниці. Це спрощує всі необхідні операції, в

той же час дозволяє знайти всі необхідні величини від навантаження  $x_1$  та  $x_2$ . Для цього потрібно величини, отримані від одиничного навантаження, помножити на  $x_1$  чи  $x_2$ .

Для знаходження невідомих реакцій  $x_1$  та  $x_2$  необхідно скласти систему двох рівнянь, використовуючи умови, що переміщення у точці 2 у напрямку реакцій  $x_1$  та  $x_2$  від усіх трьох навантажень дорівнює нулю. Це відповідає переміщенню у цій точці в заданій статично невизначуваній системі.

Знаходити вказані переміщення будемо за формулою Мора окремо від кожного навантаження. Почнемо з визначення вертикального переміщення точки 2. Воно потребує визначення трьох складових  $\delta_{11}, \delta_{12}, \Delta_{1F}$ , які відповідають навантаженням  $x_1 = 1, x_2 = 1$  та  $q$ . Якщо перші дві складові помножити на  $x_1$  та  $x_2$ , то отримаємо переміщення  $\delta_{11}x_1$  та  $\delta_{12}x_2$  від навантаження  $x_1$  та  $x_2$ . Повне вертикальне переміщення точки 3 буде складатися з трьох величин і згідно з умовами закріплення цієї точки в заданій статично невизначуваній системі повинно дорівнювати нулю:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1F} = 0.$$

Аналогічно знайдемо кут повороту у точці 2, який теж дорівнює нулю. В результаті будемо мати два рівняння з двома невідомими:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1F} = 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Отримана система дозволяє знайти реакції опори 2, які виникають у статично невизначуваній системі  $R_{z_2} = x_1, L_{y_2} = x_2$ . Таким чином буде розкрита статична невизначуваність заданої системи.

Нагадаємо, що для визначення коефіцієнтів системи (3.2) необхідно у станях "1", "2", "F" побудувати епюри моментів (рис. 3.3) і перемножити їх одну на одну.

Маючи значення невідомих  $x_1$  та  $x_2$ , які дорівнюють реакціям у точці 2, можна знайти з умов рівноваги стержня три реакції в точці 1, а саме  $R_{x_1}, R_{z_1}$ , після чого звичайним методом побудувати епюри зусиль, які виникають у заданому статично невизначуваному стержні. Ці епюри називаються дійсними епюрами. Існує інший спосіб побудови дійсної епюри. Необхідно ординати одиничних епюр у станах "1" та "2" помножити на значення  $x_1$  та  $x_2$ , після чого скласти їх з ординатами епюри стану "F". Вказана сума буде дорівнювати дійсній епюрі. Слід відмітити, що зазначеними методами можна будувати не тільки епюри моментів, а також епюри інших зусиль, які виникають у стержні.

Після побудови дійсних епюр зусиль потрібно зробити кінематичну перевірку отриманого результату. Зміст цієї перевірки полягає у тому, що застосовуючи формулу Мора, визначаються переміщення у напрямку реакцій відкинутих опор у статично невизначуваній системі. Для цього множимо дійсну епюру на епюри одиничних станів "1" та "2", які позначаємо  $\Delta_{1D}$  та  $\Delta_{2D}$ . Ці переміщення повинні дорівнювати нулю, тобто  $\Delta_{1D} = \Delta_{2D} = 0$ , тому що за змістом вони є переміщеннями у статично невизначуваній системі в напрямку існуючих в'язей. У стержні, що розглядається, це переміщення точки 2 у напрямку реакцій  $R_{z_2}$  та  $L_{y_2}$ . Всі конкретні розрахунки, пов'язані з розглянутою схемою, наведені у прикладі.

Підсумовуючи розглянутий матеріал, запишемо послідовність виконання розрахунку статично невизначуваних систем.

1. Аналізуємо характер закріплення стержня і встановлюємо ступінь статичної невизначуваності стержня.
2. Перетворюємо задану систему у статично визначувану за рахунок відкидання частини в'язей, яка дорівнює степеню статичної невизначуваності. Ці в'язі прийнято називати зайвими.
3. За напрямом відкинутих в'язей прикладаємо виникаючі у них зусилля. Отримана таким чином статично визначена система, до якої





9. Застосовуючи формулу Мора, виконуємо кінематичну перевірку. Перемножуючи дійсну епюру на кожен одиничну, знаходимо переміщення  $\Delta_{iD}$ , які повинні дорівнювати нулю.

10. Після знаходження зусиль у статично невизначуваній системі перевірка міцності виконуються так само, як у статично визначуваних системах.

### **3.1.3. Розрахунок статично невизначуваних стержнів від впливу температури та вимушеного переміщення опор**

Причиною виникнення зусиль у статично невизначуваних системах можуть бути не тільки силові навантаження, але й такі зовнішні фактори, як зміна температури та вимушені переміщення опор. У статично визначуваних системах ці фактори викликають тільки переміщення.

Спочатку розглянемо зміну температури. Загальний порядок розрахунку у більшості співпадає з раніше встановленим. Різниця полягає тільки у визначенні складових  $\Delta_{iF}$  системи (3.3), які залежать від навантаження. Вони визначаються також за формулою Мора, але з використанням її складової, яка залежить від температури.

Для встановлення порядку розрахунку розглянемо стержень, зображений на рис. 3.1, але приймемо навантаження рівним нулю:  $q = 0$ . Врахуємо інший фактор, а саме зміну температури між різними точками поперечного перерізу (рис. 3.4).

Як було доведено раніше, цей стержень двічі статично невизначуваний. Відкидаючи дві в'язі, перетворюємо його у статично визначуваний. Основна статично визначувана система зображена на рис. 3.5.

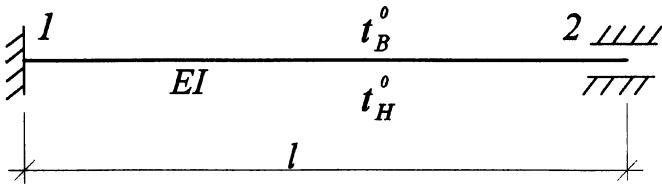


Рис. 3.4. Приклад статично невизначуваного стержня, у якому відбувається зміна температури

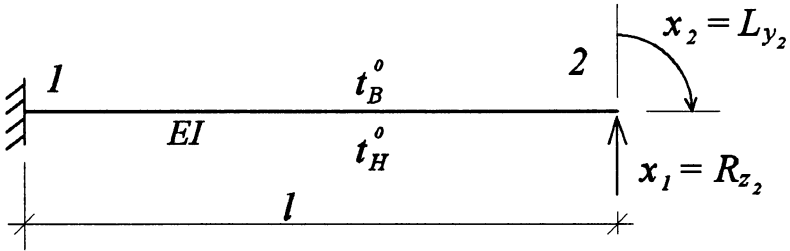


Рис. 3.5. Основна статично визначувана система

Обираємо два одиничних стани "1" і "2", які мають такий же вигляд, як і в попередньому прикладі (рис. 3.3). Відрізнитися буде тільки стан, в якому враховується зміна температури. Він зображений на рис. 3.6.

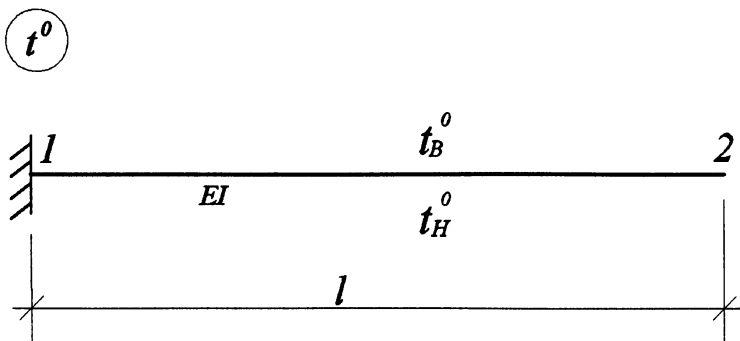


Рис. 3.6. Статично визначувана система, в якій враховується зміна температури

Для знаходження невідомих  $x_1$  та  $x_2$  складаємо систему двох рівнянь, подібну до (3.2). Враховуючи, що одиничні стани залишаються без змін, можна стверджувати, що коефіцієнти  $\delta_{ik}$  при невідомих  $x_1$  та  $x_2$  не змінюються. Потрібно тільки замінити  $\Delta_{1F}$  і  $\Delta_{2F}$  на  $\Delta_{1t}$  та  $\Delta_{2t}$ , які визначаються за формулою:

$$\Delta_{it} = \alpha \frac{t_z - t_x}{h_z} \int_0^l M_i dx.$$

Система рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1t} = 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2t} = 0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо  $x_1$  та  $x_2$ , на які множимо ординати одиничних епюр  $M_1$  та  $M_2$ , після чого визначаємо їх суму, яка є дійсною епюрою, тому що у стані "t" зусилля не виникають, тобто будемо мати:

$$M_D = M_1x_1 + M_2x_2.$$

Розглянемо розрахунок стержня на вимушене переміщення опор. Для пояснення застосуємо той самий стержень. Фактором, від якого виникають зусилля, приймаємо вертикальне переміщення опори 1 (рис. 3.7). Силове навантаження приймаємо рівним нулю ( $q = 0$ ).

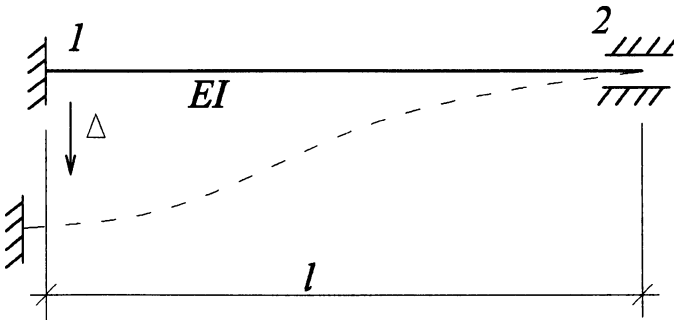


Рис. 3.7. Приклад статично невизначуваного стержня при вимушеному переміщенні опор

Порядок розрахунку подібний попереднім прикладам. Необхідно тільки стан, у якому діє заданий фактор, від якого виникають зусилля, змінити на інший (рис. 3.8).

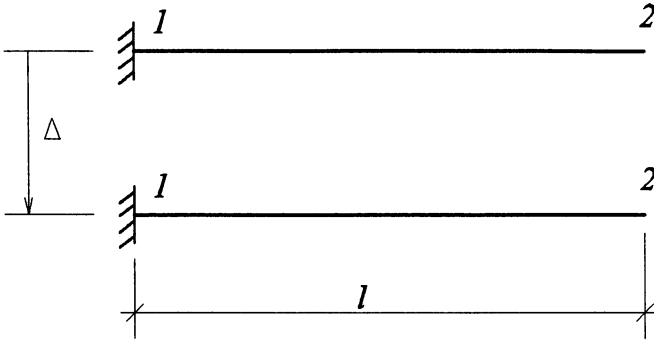


Рис. 3.8. Основна статично визначувана система, в якій враховано вимушене переміщення

Для знаходження переміщення  $\Delta_{1F} = \Delta_{i_0}$  необхідно застосувати ту складову формули Мора, яка враховує вимушене переміщення опор:

$$\Delta_{i_0} = -\sum_j (\Delta_j^0 R_j^i).$$

У даному випадку потрібно вертикальні реакції в першій опорі для обох одиничних станів помножити на переміщення  $\Delta$  (рис. 3.8). Реакції опор у одиничних станах зображені на рис. 3.9. Враховуючи сказане, отримаємо:

$$\Delta_{1_0} = -(1 \cdot \Delta) = -\Delta,$$

$$\Delta_{2_0} = -(0 \cdot \Delta) = 0.$$

Для визначення невідомих  $x_1$  та  $x_2$ , складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 - \Delta = 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + 0 = 0. \end{cases}$$

Коефіцієнти  $\delta_{ik}$  при невідомих  $x_1$  та  $x_2$  приймаємо такі, як у системі (3.2). Після знаходження невідомих  $x_1$  та  $x_2$  для отримання зусиль застосуємо формулу (3.4), приймаючи  $M_F = 0$ .

### 3.1.4. Визначення переміщень у статично невизначуваних системах

Розглянемо методику визначення переміщень у статично невизначуваних системах від трьох факторів: силового навантаження, дії температури та вимушеного переміщення опор. Усі пояснення дамо на конкретному прикладі. Почнемо з розгляду силового навантаження (рис. 3.9(а)).

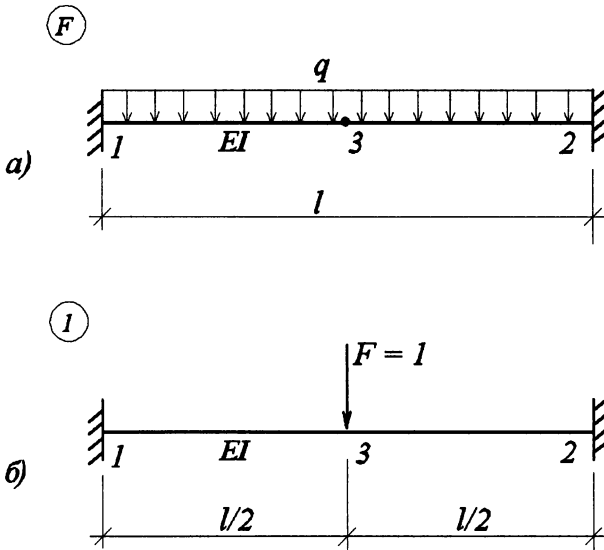


Рис. 3.9. Два стани навантаження при визначенні переміщень у статично невизначуваному стержні

Потрібно знайти вертикальне переміщення точки 3 посередині стержня. Застосуємо метод Мора. Необхідно розглянути два стани "F" та "1". Одиничний стан обираємо в залежності від того, в якій точці і в якому напрямку шукаємо

переміщення. У кожному з цих станів будемо епюри зусиль для використання у формулі Мора. Будемо враховувати згинальний момент. Будемо епюри моментів  $M_D^F$  у стані "F" та  $M_D^1$  у стані "1". Переміщення визначаємо за формулою:

$$\Delta_{1F} = \int_0^l \frac{M_D^F M_D^1}{EI} dx.$$

Беручи до уваги, що  $M_D^F$  та  $M_D^1$  — це моменти у статично невизначуваних системах, їх вирази можна скласти за формулами (3.4):

$$M_D^F = M_F + M_1 x_1 + M_2 x_2 + \dots + M_n x_n,$$

$$M_D^1 = M_F^1 + M_1 x_1^1 + M_2 x_2^1 + \dots + M_n x_n^1.$$

У вираз для переміщення підставимо у розгорнутому вигляді  $M_D^1$ :

$$\Delta_{1F} = \int_0^l \frac{M_D^F (M_F^1 + M_1 x_1^1 + M_2 x_2^1 + \dots + M_n x_n^1)}{EI} dx.$$

Кінематичною перевіркою розрахунку статично невизначуваних систем було доведено, що інтеграл від добутку будь-якої одиничної епюри, побудованій у основній статично визначуваній системі на дійсну епюру моментів, дорівнює нулю, тобто

$$\int_0^l \frac{M_D^F M_i}{EI} dx = 0.$$

Враховуючи це у виразі  $\Delta_{1F}$ , будемо мати:

$$\Delta_{1F} = \int_0^l \frac{M_D^F M_F^1}{EI} dx. \quad (3.5)$$

Ця формула є остаточним виразом для знаходження переміщення у статично невизначуваній системі від силового навантаження. У цей вираз увійшли момент  $M_D^F$ , який виникає в заданій статично невизначуваній системі, та момент у статично визначуваній системі від одиничного навантаження  $M_F^1$  (рис. 3.10).

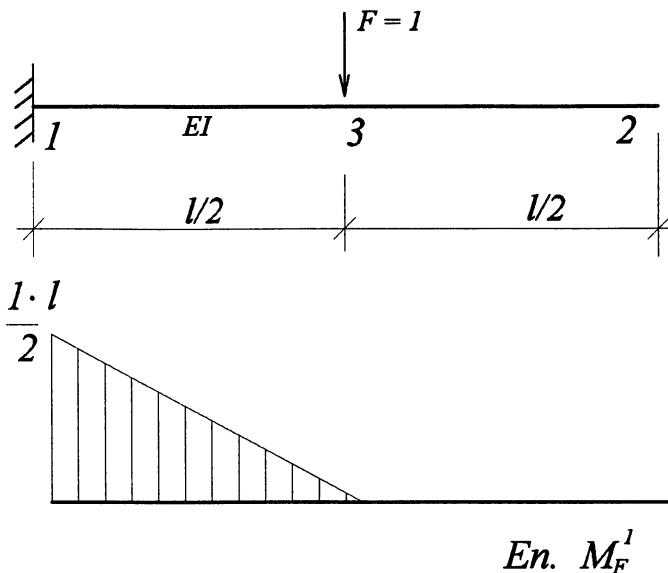


Рис. 3.10. Одиничний стан навантаження статично визначуваної системи

Зупинимося на розгляді методики знаходження переміщень у статично невизначуваній системі від дії температури. Головна особливість полягає у тому, що у статично невизначуваній системі від дії температури, крім переміщень, виникають внутрішні зусилля. Це потребує при застосуванні формули Мора враховувати дві складові, які залежать від зусиль та температури:

$$\tilde{\Delta}_{1t} = \Delta_{1F} + \Delta_{1t}.$$

Розглянемо статично невизначувану балку (рис. 3.11(а)), в якій потрібно знайти вертикальне переміщення точки 3 від дії температури.

Для застосування формули Мора потрібно обрати одиничний стан (рис. 3.11(б)) відповідно характеру шуканого переміщення. В обох станах потрібно знайти внутрішні зусилля, які враховуються у формулі Мора. На підставі формули (3.4) запишемо їх:

$$M_D^t = M_F + M_1 x_1 + M_2 x_2 + \dots + M_n x_n,$$

$$M_D^1 = M_F^1 + M_1 x_1^1 + M_2 x_2^1 + \dots + M_n x_n^1.$$

У першому виразі  $M_F = 0$ . Одна зі складових переміщення  $\tilde{\Delta}_{1t}$ , яка залежить від зусиль, має вигляд:

$$\Delta_{1F} = \int_0^l \frac{M_D^t M_D^1}{EI} dx.$$

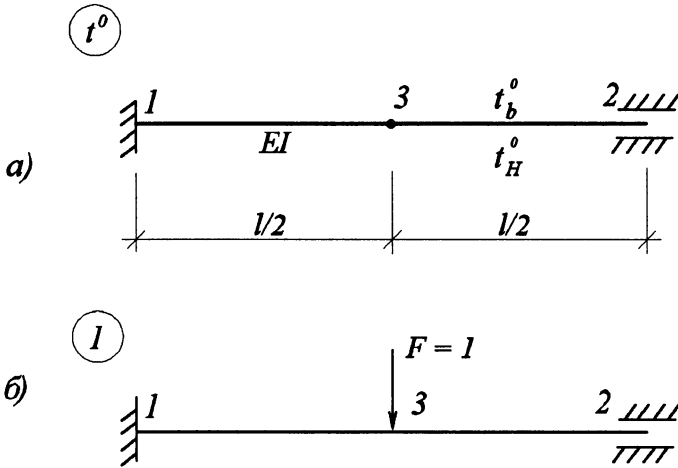


Рис. 3.11. Два стани статично невизначуваної системи при знаходженні переміщень від зміни температури

Підставимо в цю формулу  $M_D^t$  у розгорнутому вигляді:

$$\Delta_{1F} = \int_0^l \frac{(0 + M_1 x_1 + M_2 x_2 + \dots + M_n x_n) M_D^1}{EI} dx.$$

Кінематичною перевіркою розрахунку статично невизначуваних систем було доведено, що

$$\int_0^l \frac{M_i M_D}{EI} dx = 0,$$

тому маємо

$$\Delta_{1F} = 0.$$



Враховуючи це значення у виразі  $\tilde{\Delta}_{1t}$ , отримаємо:

$$\tilde{\Delta}_{1t} = \Delta_{1t}.$$

Таким чином, при знаходженні переміщення у статично невизначуваних системах потрібно у формулі Мора враховувати тільки одну складову, яка залежить від температури. Внаслідок чого остаточний вираз переміщення буде мати вигляд:

$$\tilde{\Delta}_{1t} = \Delta_{1t} = \alpha \frac{t_z - t_x}{h_z} \int_0^l M_D^1 dx.$$

Підкреслимо, що  $M_D^1$  це момент у заданій статично невизначуваній системі від одиничного навантаження (рис. 3.11(б)). В узагальненому вигляді, якщо у формулі Мора потрібно враховувати не тільки згинальний момент, будемо мати:

$$\Delta_{1t} = \alpha \left( t_x \int_0^l N_{xD}^1 dx + \frac{t_z - t_x}{h_z} \int_0^l M_{yD}^1 dx + \frac{t_y - t_x}{h_y} \int_0^l M_{zD}^1 dx \right). \quad (3.6)$$

Необхідно розглянути ще один фактор від якого виникають переміщення: це вимушене переміщення опор. Як і в попередньому варіанті, потрібно розглянути два стани (рис. 3.12).

Потрібно знайти переміщення точки 3 від вимушеного переміщення  $\Delta$  опори 1. У цьому варіанті дуже багато спільного з попереднім. Від осадки  $\Delta$  у стані "о", крім переміщень, виникають внутрішні зусилля, тому у формулі Мора потрібно брати дві складові:

$$\tilde{\Delta}_{1o} = \Delta_{1F} + \Delta_{1o}.$$

Перша складова залежить від внутрішніх зусиль, але аналогічно до попереднього варіанта можна довести, що вона дорівнює нулю:  $\Delta_{1F} = 0$ . Тому будемо мати:

$$\tilde{\Delta}_{1o} = \Delta_{1o},$$

тобто потрібно врахувати тільки складову, яка залежить безпосередньо від осідання. Вона має вигляд:

$$\tilde{\Delta}_{1_0} = \Delta_{1_0} = -\sum_j (\Delta_j^0 R_j^1). \quad (3.7)$$

Зміст величин під знаком "Σ" такий:

$\Delta_j^0$  — вимушена осадка  $j$ -ї опори у стані "0",

$R_j^1$  — реакція, що виникає у статично невизначуваному стані "1" у напрямку переміщення  $\Delta_j^0$ .

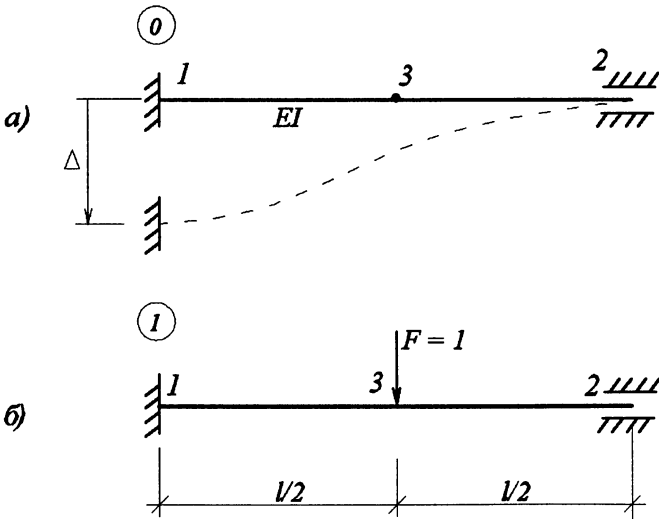


Рис. 3.12. Два стани статично невизначуваної системи при знаходженні переміщень від вимушеного осідання опор

Таким чином, для знаходження переміщення у довільній точці статично невизначуваної системи потрібно в ній знайти реакції опор від одиничного навантаження і помножити на відповідне переміщення, яке задано у стані "0".

## Глава 3.2. Напружено-деформований стан балок на пружній основі

### 3.2.1. Диференціальне рівняння балки на пружній основі

У попередній главі було розглянуто розрахунок статично невизначуваних систем, які закріплені в'язями, що приєднуються до стержня в окремих точках. Характерна особливість балки на пружній основі полягає у тому, що в'язі безперервно розподілені по усьому стержню або по його частині. Крім того, спираються на деформівну основу. Характер деформування основи суттєво впливає на напружено-деформований стан балки. Існує декілька моделей основи. Зупинимось на розгляді найбільш розповсюдженої моделі, яка має назву моделі Вінклера. Вона побудована на припущенні про пружний характер деформування основи та лінійну залежність між переміщенням точок основи і значенням тиску на них. При цьому вважається, що будь-яка точка основи переміщується незалежно від суміжних точок. Фізичну модель такої основи можна розглядати як непов'язані між собою пружини.

З точки зору статичної невизначуваності балка на пружній основі може розглядатися як безліч разів статично невизначувана система. Для її розкриття необхідно знайти функцію, яка буде визначати закон розподілу реакцій основи. Для цього потрібно скласти і розв'язати диференціальне рівняння.

Розглянемо стержень, безперервно у всіх точках зв'язаний із пружною основою і навантажений довільним навантаженням, паралельним одній із головних осей поперечного перерізу осі  $OZ$  (рис. 3.13).

З боку основи на балку буде діяти на одиницю площі реактивне навантаження  $q_z^0(x)$ , яке теж паралельне осі  $OZ$  (рис. 3.14).

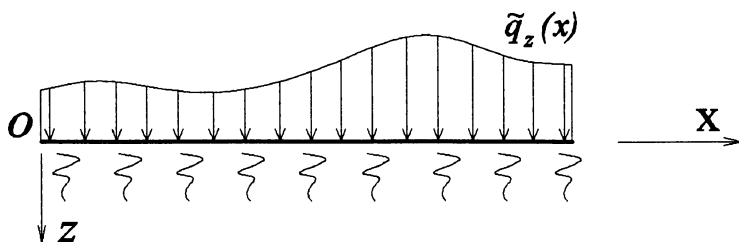


Рис. 3.13. Стержень на пружній основі

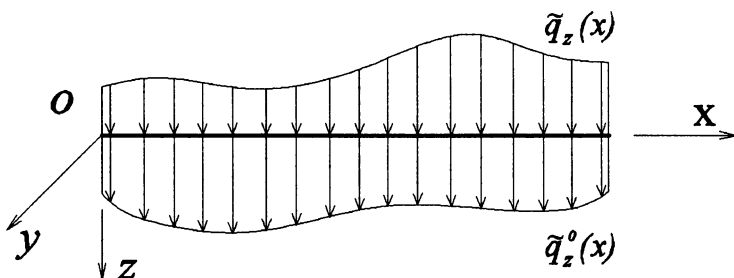


Рис. 3.14. Зовнішнє та реактивне навантаження на стержень

Вважаємо, що по ширині балки, тобто у напрямку осі  $ou$ , навантаження  $\tilde{q}_z(x)$  та  $\tilde{q}_z^0(x)$  рівномірно розподілені, тому навантаження на одиницю довжини поздовжньої осі балки буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} q_z(x) &= \tilde{q}_z(x) \cdot b, \\ q_z^0(x) &= \tilde{q}_z^0(x) \cdot b. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Величина  $b$  дорівнює ширині балки. Отримані навантаження розташовані у площині  $xoz$ , тому у балки виникає плоский напружено-деформований стан. Диференціальне рівняння у цьому випадку має такий вигляд:

$$\frac{d^4 u_z(x)}{dx^4} = \frac{1}{EI_y} [q_z(x) + q_z^0(x)] \quad (3.9)$$

У це рівняння входять дві невідомі функції  $(u_z, q_z^0)$ , тому необхідно скласти ще одне рівняння. Його можна отримати, базуючись на гіпотезі Вінклера, про лінійну залежність між реакцією основи та переміщенням:

$$\tilde{q}_z^0(x) = -k_0 u_z(x), \quad (3.10)$$

де  $k_0$  — коефіцієнт пружності основи. За змістом він дорівнює силі, яку необхідно прикласти до одиниці площі пружної основи, щоб отримати її переміщення, яке дорівнює одиниці довжини. Його розмірність дорівнює  $\text{H}/\text{м}^3$ . На підставі співвідношення (3.8) можна записати:

$$q_z^0(x) = \tilde{q}^0(x) \cdot b = -k_0 \cdot b \cdot u_z(x).$$

Позначимо:  $k = k_0 \cdot b$ , і тоді маємо:

$$q_z^0(x) = -k u_z(x). \quad (3.11)$$

Підставимо цей вираз у диференціальне рівняння (3.9):

$$\frac{d^4 u_z}{dx^4} + \frac{k}{EI_y} u_z = \frac{1}{EI_y} q_z. \quad (3.12)$$

Позначимо:

$$\frac{k}{EI_y} = 4\beta^4, \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_y}}. \quad (3.13)$$

Враховуючи це у попередньому рівнянні, матимемо:

$$\frac{d^4 u_z}{dx^4} + 4\beta^4 u_z = \frac{1}{EI_y} q_z. \quad (3.14)$$

Отримане рівняння є неоднорідне лінійне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами. Далі розглянемо порядок його розв'язання.

### 3.2.2. Розв'язання диференціального рівняння балки на пружній основі

Розв'язок рівняння (3.14) складається з суми загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного. Для отримання

загального розв'язку однорідного рівняння необхідно скласти характеристичне рівняння:

$$r^4 + 4\beta^4 = 0.$$

Його чотири корені дорівнюють:

$$r_1 = \beta(1 + i), \quad r_2 = \beta(1 - i), \quad r_3 = -\beta(1 + i), \quad r_4 = -\beta(1 - i).$$

Їм відповідають чотири частинні розв'язки диференціального рівняння:

$$\begin{aligned} u_{z1} &= e^{\beta x} \sin(\beta x), & u_{z2} &= e^{\beta x} \cos(\beta x), \\ u_{z3} &= e^{-\beta x} \sin(\beta x), & u_{z4} &= e^{-\beta x} \cos(\beta x). \end{aligned} \quad (3.15)$$

У зв'язку з тим, що рівняння (3.14) є лінійним, як розв'язок може бути застосована будь-яка лінійна комбінація частинних розв'язків. На підставі цієї властивості складемо чотири інших функції, які також будуть розв'язками однорідного диференціального рівняння (3.14):

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \operatorname{ch}(\beta x) \cos(\beta x), \\ f_2(x) &= \frac{1}{2\beta} [\operatorname{ch}(\beta x) \sin(\beta x) + \operatorname{sh}(\beta x) \cos(\beta x)], \\ f_3(x) &= \frac{1}{2\beta^2} \operatorname{sh}(\beta x) \sin(\beta x), \\ f_4(x) &= \frac{1}{4\beta^3} [\operatorname{ch}(\beta x) \sin(\beta x) - \operatorname{sh}(\beta x) \cos(\beta x)]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ці функції мають назву функцій А. М. Крилова. Існують таблиці значень цих функцій. Вони мають такі властивості:

$$f_4^{\text{IV}}(x) = f_3^{\text{III}}(x) = f_2^{\text{II}}(x) = f_1'(x) = -4\beta^4 f_4(x). \quad (3.17)$$

Довести це можливо безпосереднім диференціюванням виразів (3.16).

Крім того, дуже важливими є такі властивості:

$$\begin{aligned}
 f_1(0) &= 1, & f_2(0) &= 0, & f_3(0) &= 0, & f_4(0) &= 0, \\
 f_1'(0) &= 0, & f_2'(0) &= 1, & f_3'(0) &= 0, & f_4'(0) &= 0, \\
 f_1''(0) &= 0, & f_2''(0) &= 0, & f_3''(0) &= 1, & f_4''(0) &= 0, \\
 f_1'''(0) &= 0, & f_2'''(0) &= 0, & f_3'''(0) &= 0, & f_4'''(0) &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Співвідношення (3.18) дозволяють загальний розв'язок рівняння (3.14) записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
 u_z(x) &= u_z(0) \cdot f_1(x) + u_z'(0) \cdot f_2(x) + \\
 &+ u_z''(0) \cdot f_3(x) + u_z'''(0) \cdot f_4(x) + u_z^*(x),
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

де  $u_z^*(x)$  є частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Частинний розв'язок  $u_z^*(x)$  при будь-якому навантаженні  $q_z(x)$  можна отримати на підставі виразу:

$$u_z^*(x) = \frac{1}{EI_y} \int_0^x f_4(x-t) q_z(t) dt.
 \tag{3.20}$$

Достовірність цього виразу можна довести, якщо його підставити у рівняння (3.14). Функція  $u_z^*(x)$  має такі властивості:

$$u_z^*(0) = u_z'^*(0) = u_z''^*(0) = u_z'''^*(0) = 0.
 \tag{3.21}$$

Якщо у співвідношенні (3.19) врахувати залежності

$$u_z'(x) = \varphi_y(x), \quad u_z''(x) = -\frac{1}{EI_y} M_y(x), \quad u_z'''(x) = -\frac{1}{EI_y} Q_z(x),$$

отримаємо розв'язок у вигляді формули початкових параметрів:

$$u_z(x) = u_z(0) f_1(x) + \varphi_y(0) f_2(x) - \frac{M_y(0)}{EI_y} f_3(x) - \frac{Q_z(0)}{EI_y} f_4(x) + u_z^*(x).
 \tag{3.22}$$

Чотири невідомих початкових параметри визначаються з граничних умов. На кожному кінці балки завжди можна визначити дві граничні умови.

На підставі формули (3.22), враховуючи співвідношення (3.17), знайдемо:

$$\begin{aligned}
\varphi_y(x) &= -4\beta^4 u_z(0) f_4(x) + \varphi_y(0) f_1(x) - \\
&- \frac{M_y(0)}{EI_y} f_2(x) - \frac{Q_z(0)}{EI_y} f_3(x) + [u_z^*(x)]'; \\
M_y(x) &= 4\beta^4 u_z(0) f_3(x) + 4\beta^4 EI_y \varphi_y(0) f_4(x) + \\
&+ M_y(0) f_1(x) + Q_z(0) f_2(x) - EI_y [u_z^*(x)]''; \\
Q_z(x) &= 4\beta^4 EI_y u_z(0) f_2(x) + 4\beta^4 EI_y \varphi_y(0) f_3(x) - \\
&- 4\beta^4 M_y(0) f_4(x) + Q_z(0) f_1(x) - EI_y [u_z^*(x)]'''.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Зупинимось на отриманні частинних розв'язків  $u_z^*(x)$  при конкретних виразах найбільш розповсюджених навантажень. Розглянемо рівномірно розподілене навантаження на певній ділянці балки (рис. 3.15).

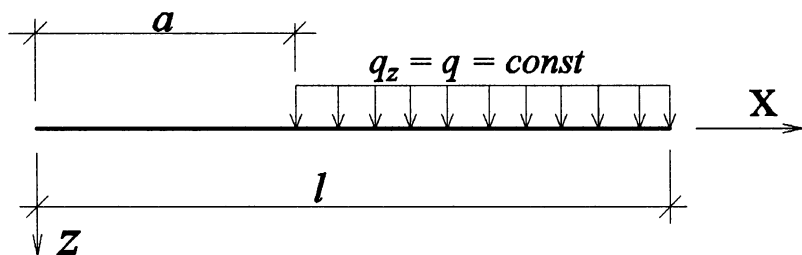


Рис. 3.15. Варіант зовнішнього навантаження

Використовуємо вираз (3.19), при цьому врахуємо, що на ділянці  $0 \leq x \leq a$  навантаження  $q_z = 0$ , будемо мати:

$$u_z^*(x) = \frac{1}{EI_y} \int_a^x f_4(x-t) q dt.$$

Навантаження  $q = \text{const}$  можна винести за знак інтеграла. Крім того, зробимо заміну функції  $f_4(x-t) = -\frac{1}{4\beta^4} f_1'(x-t)$ , що підтверджується залежностями (3.17):



$$u_z^*(x) = \frac{q}{EI_y} \int_a^x \left[ -\frac{1}{4\beta^4} f_1'(x-t) \right] dt.$$

Введемо нову змінну  $\zeta = (x-t)$ . Тоді  $dt = -d\zeta$ . Крім того, врахуємо, що  $\zeta = x-a$  при  $t = a$ , і  $\zeta = 0$  при  $t = x$ .

Після вказаних перетворень, отримаємо:

$$u_z^*(x) = -\frac{q}{4\beta^4 EI_y} \int_{x-a}^0 f_1'(\zeta) \cdot (-d\zeta).$$

Після інтегрування будемо мати:

$$u_z^*(x) = \frac{q}{4\beta^4 EI_y} [f_1(0) - f_1(x-a)].$$

Перш ніж скласти остаточний вираз  $u_z^*(x)$ , врахуємо дві обставини.

Перша залежить від того, що на лівій частині стержня навантаження  $q_z = 0$ , а друга пов'язана з тим, що  $f_1(0) = 1$ . Внаслідок чого отримаємо:

$$\begin{aligned} u_z^*(x) &= 0, & 0 \leq x \leq a, \\ u_z^*(x) &= \frac{q}{4\beta^4 EI_y} [1 - f_1(x-a)], & a \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Позначимо  $4\beta^4 EI_y = k$ .

Аналогічно можна отримати частинні розв'язки при інших навантаженнях. Не зупиняючись на доказах, запишемо їх остаточні вирази. Характер навантаження зображений на рис. 3.16.

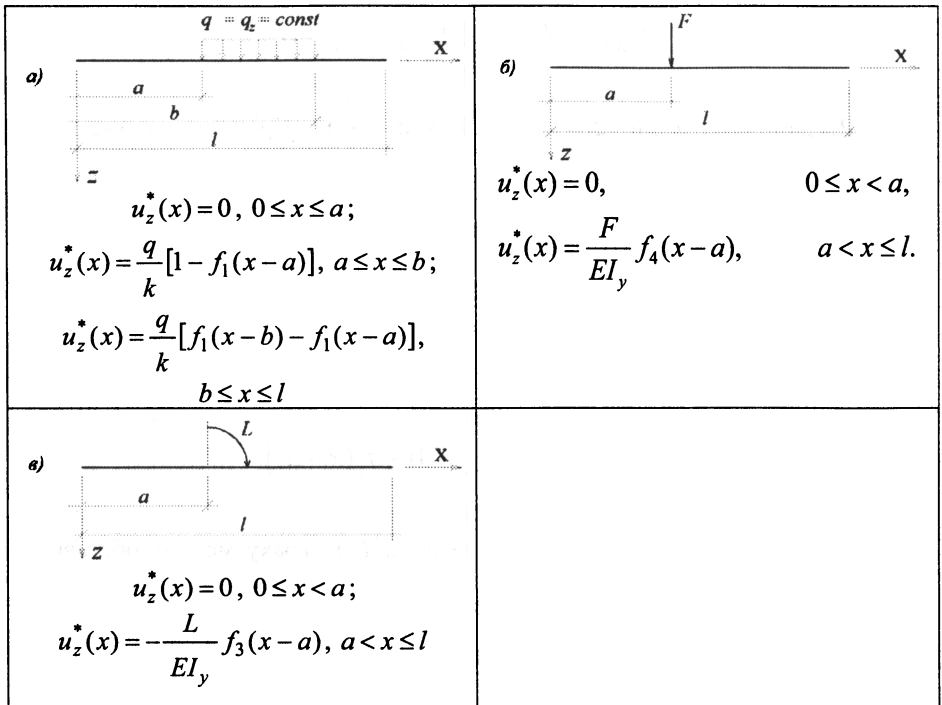


Рис. 3.16. Частинні розв'язки диференціального рівняння

Розглянутий матеріал присвячений розрахунку так званої короткої балки, у якій переміщення та зусилля по всій довжині суттєво не відрізняються. Крім того, потрібно враховувати граничні умови на обох кінцях балки. Інший підхід застосовується при розрахунках досить довгих балок. Далі буде встановлено, до якої категорії відноситься та чи інша балка.

Розглянемо напівнескінченну балку. Під цим розуміється розрахункова схема, в якій початок координат співпадає з лівим кінцем балки. Її довжина від початкової до кінцевої точки дорівнює нескінченності, тобто  $0 \leq x \leq \infty$ . Навантаження може бути прикладене тільки у точці  $x = 0$  у вигляді зосереджених сили та моменту (рис. 3.17).

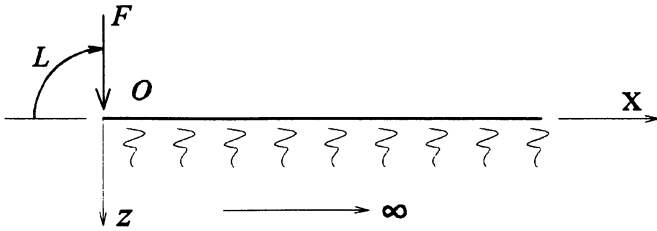


Рис. 3.17. Напівнескінченна балка

Для розв'язання цієї задачі також застосовується диференціальне рівняння (3.14) за умови, що  $q_z = 0$ . Загальне рівняння можна скласти на підставі функцій (3.15):

$$u_z(x) = e^{-\beta x} (c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x) + e^{\beta x} (c_3 \sin \beta x + c_4 \cos \beta x).$$

Беручи до уваги, що правий кінець балки має координату  $x = \infty$ , необхідно прийняти  $c_3 = c_4 = 0$ , щоб у цій точці переміщення  $u_z(x)$  не приймало нескінченно велике значення. Залишаються тільки члени з константами  $c_1$  та  $c_2$ . Враховуючи це, отримаємо загальні вирази усіх необхідних величин.

$$\begin{aligned} u_z(x) &= e^{-\beta x} [c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x] \\ \phi_y(x) &= \beta e^{-\beta x} [c_1 (\cos \beta x - \sin \beta x) - c_2 (\cos \beta x + \sin \beta x)] \\ M_y(x) &= 2\beta^2 e^{-\beta x} EI_y [c_1 \cos \beta x - c_2 \sin \beta x] \\ Q_z(x) &= 2\beta^3 EI_y e^{-\beta x} [-c_1 (\sin \beta x + \cos \beta x) + c_2 (\sin \beta x - \cos \beta x)]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Константи  $c_1$  та  $c_2$  потрібно визначати з граничних умов при  $x = 0$ . Можливі три варіанти цих умов. Вони показані на рис. 3.18.

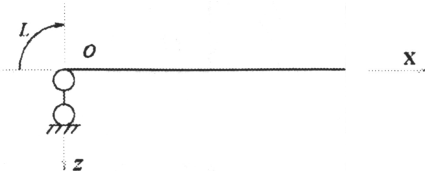
а) вільний край



$$M_y(0) = L,$$

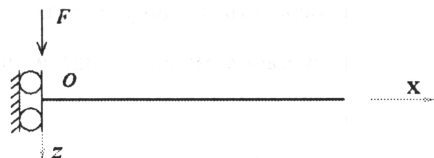
$$Q_z(0) = -F;$$

б) шарнірна опора



$$u_z(0) = 0, M_y(0) = L$$

в) повзунковий шарнір



$$\varphi_y(0) = 0, Q_z(0) = -F$$

Рис. 3.18. Граничні умови для напівнескінченної балки

Отримані результати можна використати для розрахунку нескінченно довгої балки, це коли виконується умова  $(-\infty \leq x \leq \infty)$  рис. 3.19.

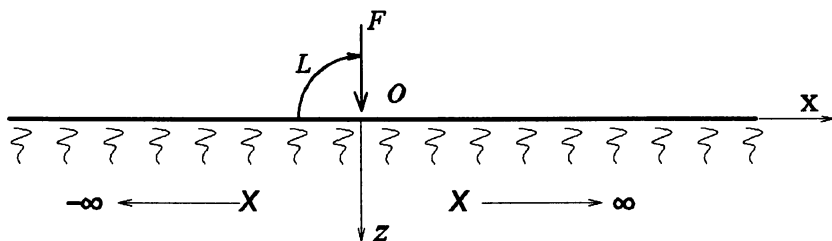


Рис. 3.19. Нескінченна балка

Навантаження вважаємо прикладеним у точці  $x = 0$  у вигляді зосереджених сили  $F$  та моменту  $L$ . Кожне з цих навантажень будемо розглядати окремо. Спочатку розглянемо навантаження силою (рис. 3.20.).

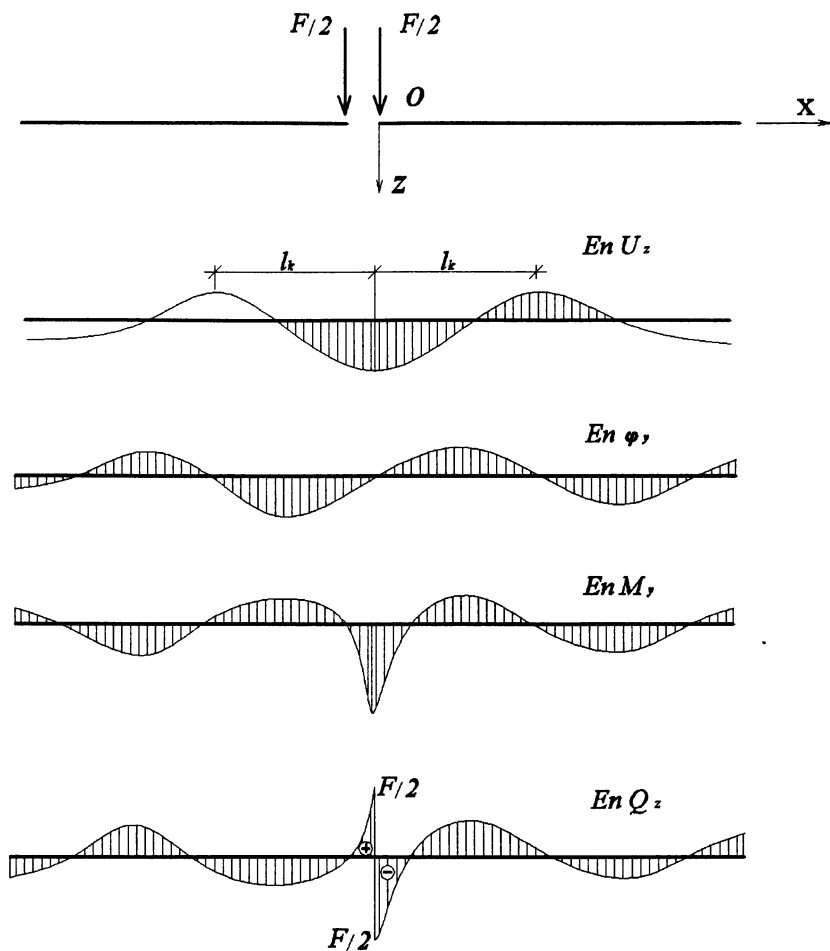


Рис. 3.20. Характер епюр переміщень та зусиль у нескінченно довгій балці на пружній основі від дії зосередженої сили

Балку розділили на дві рівні частини. З умов симетрії можна розглянути одну з них, припустимо, праву частину. Вона співпадає з напівнескінченною балкою, тому можна використати всі отримані вище залежності, а головне — це формули (3.25). Крім того, на підставі симетрії складено граничні умови у точці  $x = 0$ . Вони мають вигляд:

при  $x = 0$

$$\varphi_y = 0, \quad Q_z = -\frac{F}{z}.$$

З цих умов можна визначити константи  $c_1$  та  $c_2$  і побудувати епюри переміщень та зусиль. На рис. 3.20 без підрахунків зображено характер цих епюр. Їх особливість полягає у тому, що на невеликій відстані  $l_k$  вони починають дуже швидко зменшуватися. Це пов'язане із множителем  $e^{-\beta x}$ , який є у всіх виразах (3.25). Якщо прийняти  $\beta x = \pi$ , то отримаємо  $e^{-\pi} = 0,046$ . Знайдене значення свідчить про те, що воно дорівнює приблизно 5% від найбільшої величини  $e^{-\beta x}$ , яка дорівнює одиниці при  $x = 0$ . Це відбувається на відстані  $l_k$  від початку координат де  $\beta l_k = \pi$ .

$$l_k = \frac{\pi}{\beta}. \quad (3.26)$$

Відстань  $l_k$  називають довжиною крайового ефекту. Поняття крайового ефекту пов'язано із зоною, де переміщення та зусилля біля точки прикладення зосереджених навантажень мають найбільші значення. За межами довжини  $l_k$  переміщення та зусилля мають такі невеликі значення, що вони зовсім не впливають на перевірку балки на міцність та жорсткість. Це дозволяє зробити висновок, що балку, до якої прикладені зосереджені навантаження, якщо відстані від навантаження до крайніх точок дорівнюють  $l_k$ , можна розраховувати як нескінченно довгу. Розглянемо порядок розрахунку нескінченно довгої балки зосередженим моментом  $L$  (рис. 3.21).

Врахована симетрія. Граничні умови:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad u_z(0) &= 0, \\ M_y(0) &= \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

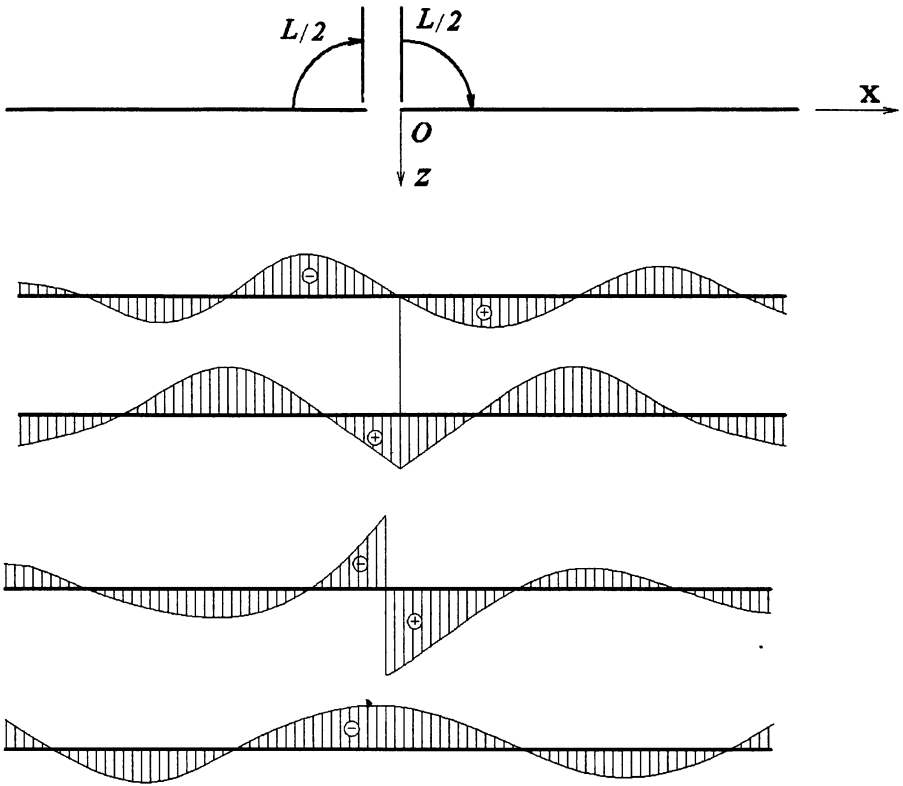


Рис. 3.21. Характер епюр переміщень та зусиль у нескінченно довгій балці на пружній основі від дії зосередженого моменту

Застосування формул (3.25) дозволяє з граничних умов визначити

$$c_1 = \frac{L}{4\beta^2 EI_y},$$

$$c_2 = 0.$$

Підставимо у формули (3.25).

$$u_z(x) = \frac{L}{4\beta^2 EI_y} e^{-\beta x} \sin \beta x,$$

$$\varphi_y(x) = \frac{L}{4\beta^2 EI_y} \beta e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x),$$

$$M_y(x) = \frac{L}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x,$$

$$Q_z(x) = -\frac{L}{2} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x).$$

### 3.2.3. Визначення переміщень у стержні на пружній основі методом Мора

Зупинимось на отриманні формули Мора для знаходження переміщень у стержнях, які спираються на пружну основу. Необхідно розглянути, як завжди, два стани (рис. 3.22).

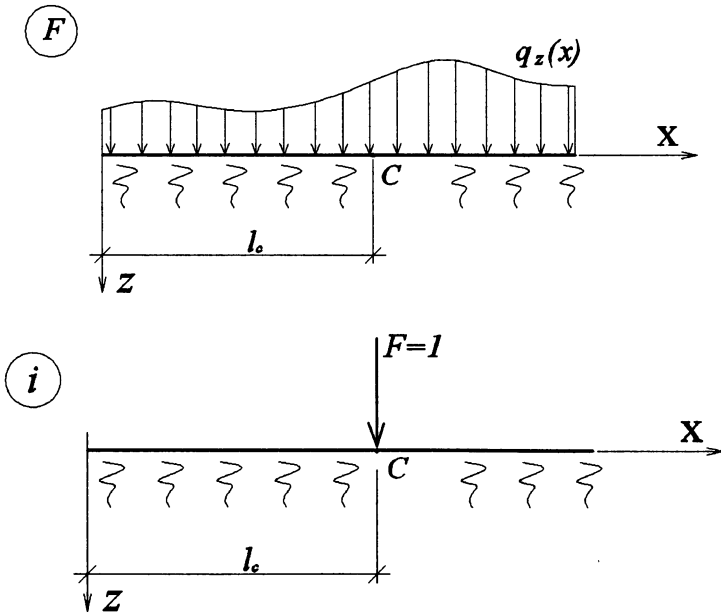


Рис. 3.22. Два стани навантаження балки, які необхідні для визначення її переміщень



У стані "F" прикладено навантаження, від якого потрібно знайти вертикальне переміщення точки C. У цій точці у стані "i" потрібно прикласти одиничну силу у напрямку шуканого переміщення. В обох станах враховується пружна основа. Складемо вирази можливої роботи зовнішніх і внутрішніх сил стану "i" на переміщеннях стану "F". Особливістю є необхідність врахування роботи реактивних сил  $q_z^{oi}$  пружної основи. Вона розглядається як робота зовнішніх сил і дорівнює виразу:

$$\int_0^l u_z^F \cdot q_z^{oi} dx = -k \int_0^l u_z^F \cdot q_z^i dx.$$

Тут врахована залежність (3.11):

$$q_z^{oi} = -ku_z^i.$$

З урахуванням отриманого значення роботи реакції пружної основи запишемо роботу зовнішніх сил:

$$W_{\text{ext}}^{iF} = \Delta_{iF} \cdot 1 - k \int_0^l u_z^F u_z^i dx.$$

Підставляємо цей вираз у формулу Мора:

$$\Delta_{iF} - k \int_0^l u_z^F u_z^i dx = \int_0^l \frac{M_y^i \cdot M_y^F}{EI_y} dx.$$

Звідси знайдемо переміщення, яке шукаємо:

$$\Delta_{iF} = \int_0^l \frac{M_y^i \cdot M_y^F}{EI_y} dx + k \int_0^l u_z^F u_z^i dx. \quad (3.27)$$

Як бачимо, потрібно у формулі Мора додатково врахувати другу складову правої частини цієї формули.

## Глава 3.3. Напружено-деформований стан стиснуто-зігнутого стержня

### 3.3.1. Загальні поняття. Диференціальне рівняння рівноваги

Дана глава присвячена розгляду плоского напружено-деформованого стану стиснуто-зігнутого стержня. Воно виникає за умови, що всі активні та реактивні сили розташовані у одній з головних площин поперечного перерізу, а саме у площині  $xoz$ . Особливістю такого стану є врахування деформацій при складанні рівнянь рівноваги, чого раніше не було. Однак при цьому не всі деформації враховуються. До уваги беруться тільки ті, які суттєво впливають на збільшення зусиль та переміщень. До таких відносяться деформації згину. Поздовжні деформації при складанні рівнянь рівноваги не використовуються.

Розглянемо стержень, у якому виникає плоский напружено-деформований стан (рис. 2.3).

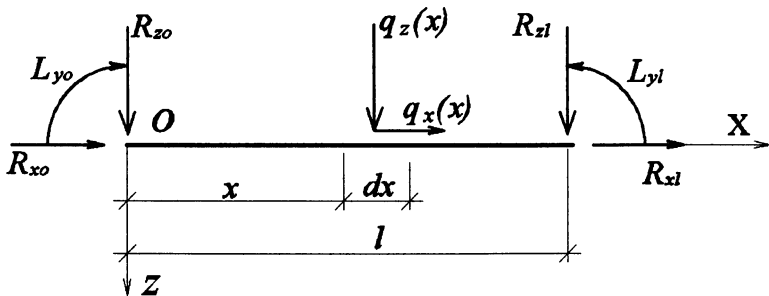


Рис. 3.23. Розрахункова схема стиснуто-зігнутого стержня

Зупинимось на складанні диференціального рівняння рівноваги цього стержня. З цією метою виділимо нескінченно малий елемент стержня. На рис. 3.24 зображений цей елемент у недеформованому та деформованому станах відрізками  $\overline{ab}$  та  $\overline{a'b'}$  відповідно.

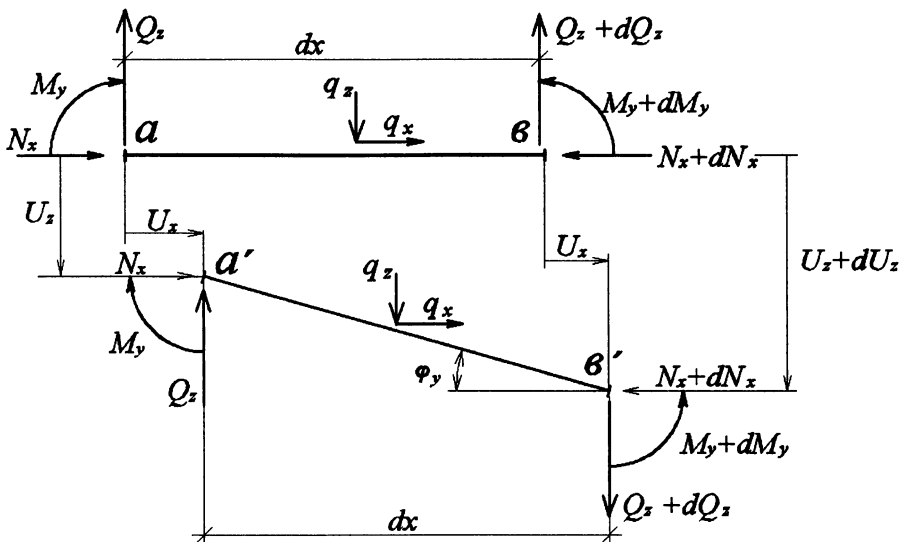


Рис. 3.24. Ділянка стиснуто-зігнутого стержня, яка застосовується для складання рівняння рівноваги

Беручи до уваги, що довжина відрізка  $\overline{ab}$  нескінченно мала, у деформованому стані криволінійний елемент  $\overline{a'b'}$  можна замінити прямолінійним відрізком, який співпадає з дотичною до деформованої осі стержня. Оскільки поздовжні деформації не враховуються, то його довжину приймаємо рівною  $dx$ . Його проекцію на вісь  $ox$  внаслідок малості кута  $\varphi_y$  теж можна прийняти рівною  $dx$ . Напрямки внутрішніх зусиль у деформованому стані залишаємо без змін. Складемо три рівняння рівноваги, розглядаючи деформований стан.

$$\sum X = 0: N_x - (N_x + dN_x) + q_x dx = 0, \quad \frac{dN_x}{dx} = q_x,$$

$$\sum Z = 0: -Q_z + (Q_z + dQ_z) + q_z dx = 0, \quad \frac{dQ_z}{dx} = -q_z,$$

$$\sum M_{b'} = 0 \text{ — сума моментів відносно точки } b':$$

$$-M_y + (M_y + dM_y) - Q_z dx - N_x [(u_z + du_z) - u_z] + \\ + q_z dx \cdot \frac{1}{2} dx - q_x dx \frac{1}{2} [(u_z + du_z) - u_z] = 0.$$

Після простих перетворень будемо мати:

$$dM_y - Q_z dx - N_x du_z + \frac{1}{2} q_z dx dx - \frac{1}{2} dx du_z = 0.$$

Перші три члени є величинами першого порядку малості, а два останніх — другого порядку, тому ними можна нехтувати, після чого разом з двома першими рівняннями отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{dN_x}{dx} &= q_x, \\ \frac{dQ_z}{dx} &= -q_z, \\ Q_z &= \frac{dM_y}{dx} - N_x \frac{du_z}{dx}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Враховавши у третьому рівнянні відому залежність

$$M_y = -EI_y u_z'', \quad (3.29)$$

будемо мати:

$$Q_z = -EI_y u_z''' - N_x \frac{du_z}{dx}. \quad (3.30)$$

Підставивши цю залежність у друге рівняння (3.28), отримаємо:

$$EI_y u_z^{IV} + \frac{d}{dx} (N_x \cdot u_z') = q_z,$$

або

$$u_z^{IV} + \frac{1}{EI_y} (N_x' \cdot u_z' + N_x u_z'') = \frac{1}{EI_y} q_z. \quad (3.31)$$

Розглянемо варіант, коли розподілене навантаження  $q_x = 0$ , а паралельно осі  $ox$  діють тільки зосереджені сили  $F$ , прикладені у кінцевих точках стержня (рис. 3.25).

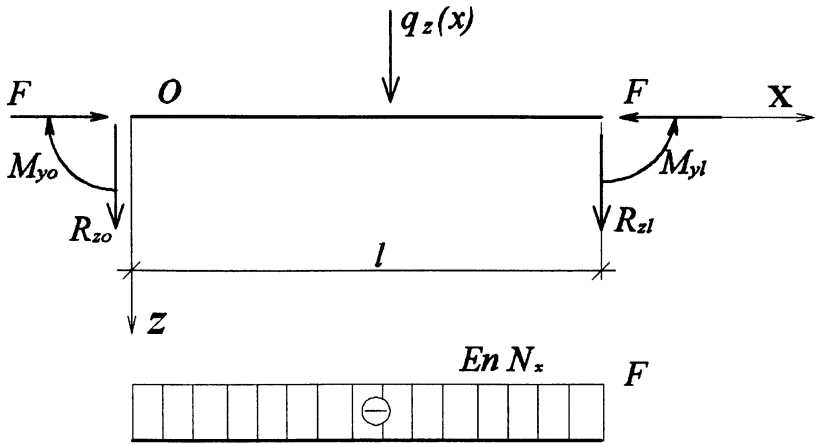


Рис. 3.25. Епора поздовжнього зусилля, яке враховується при розрахунку стиснуто-зігнутого стержня

Поздовжня сила у цьому випадку постійна по всій довжині балки, тому її похідна дорівнює нулю:  $N'_x = 0$ . Враховуючи це у рівнянні (3.31), будемо мати:

$$u_z^{IV} + \frac{N_x}{EI_y} u_z'' = \frac{1}{EI_y} q_z.$$

Позначимо

$$\frac{N_x}{EI_y} = \nu^2, \tag{3.32}$$

та підставимо у попереднє рівняння:

$$u_z^{IV} + \nu^2 u_z'' = \frac{1}{EI_y} q_z. \tag{3.33}$$

Це остаточний вигляд диференціального рівняння.

Розглянемо вираз (3.30) для поперечної сили. Винесемо за дужки добуток  $EI_y$ :

$$Q_z = -EI_y \left( u_z''' + \frac{N_x}{EI_y} u_z' \right).$$

Врахуємо залежність (3.32):

$$Q_z = -EI_y(u_z'' + v^2 u_z'). \quad (3.34)$$

Отриманий вираз визначає поперечне зусилля, яке перпендикулярне до недеформованої поздовжньої осі стержня. Але потрібно ще мати значення поперечного зусилля, яке перпендикулярно до деформованої осі. Розглянемо рис. 3.26.

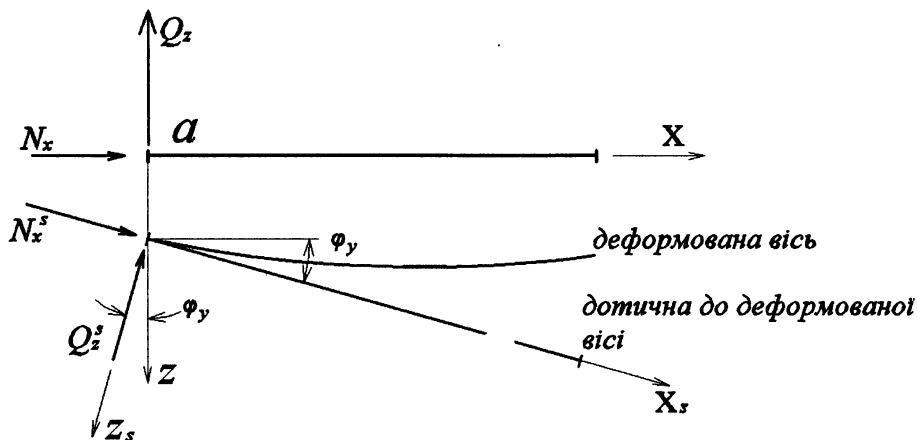


Рис .26. Деформована схема ділянки стиснуто-зігнутого стержня, яка застосовується для визначення поперечного зусилля

Поздовжні та поперечні зусилля  $N_x, Q_z$  та  $N_x^s, Q_z^s$  є складовими головного вектора внутрішніх зусиль, які виникають у перерізі, тому між ними існує залежність:

$$Q_z^s = Q_z \cos \varphi_y + N_x \sin \varphi_y,$$

$$N_x^s = -Q_z \sin \varphi_y + N_x \cos \varphi_y.$$

Гіпотеза малості деформацій дозволяє розглядати  $\varphi_y$  як невеликий кут, тому приймаємо:

$$\cos \varphi_y = 1, \quad \sin \varphi_y = \operatorname{tg} \varphi_y = \varphi_y = u_z'.$$

Врахуємо це у виразі для  $Q_z^s$ :

$$Q_z^s = Q_z + \nu^2 EI_y \varphi_y, \quad (3.35)$$

або

$$Q_z = Q_z^s - \nu^2 EI_y \varphi_y.$$

Якщо у перший вираз підставити залежність (3.34), матимемо:

$$Q_z^s = -EI_y u_y''', \quad (3.36)$$

або

$$u_z''' = -\frac{1}{EI_y} Q_z^s.$$

Співвідношення (3.34) та (3.36) визначають поперечні зусилля, перпендикулярні недеформованій та деформованій поздовжній осі через переміщення  $u_z$ .

### 3.3.2. Розв'язання диференціального рівняння рівноваги стиснуто-зігнутого стержня

Диференціальне рівняння, яке потрібно розв'язувати, визначається залежністю (3.33) і має вигляд:

$$u_z^{IV} + \nu^2 u_z'' = \frac{1}{EI_y} q_z.$$

Проаналізувавши його, робимо висновок, що воно є лінійним, неоднорідним рівнянням з постійними коефіцієнтами. Для його розв'язку необхідно скласти характеристичне рівняння:

$$k^4 + \nu^2 k^2 = 0.$$

Його корені дорівнюють:

$$k_{1,2} = 0, \quad k_{3,4} = \pm \nu i.$$

Цим кореням відповідають чотири частинні розв'язки диференціального рівняння:

$$1, x, \sin(\nu x), \cos(\nu x).$$

Для складання загального розв'язку замість цих функцій застосуємо їх лінійні комбінації:

$$f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = \frac{1}{\nu^2}(1 - \cos \nu x), f_4(x) = \frac{1}{\nu^3}(\nu x - \sin \nu x). \quad (3.37)$$

Характерною особливістю цих функцій є їх значення при  $x=0$ :

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 1, f_2(0) = 0, f_3(0) = 0, f_4(0) = 0, \\ f_1'(0) &= 0, f_2'(0) = 1, f_3'(0) = 0, f_4'(0) = 0, \\ f_1''(0) &= 0, f_2''(0) = 0, f_3''(0) = 1, f_4''(0) = 0, \\ f_1'''(0) &= 0, f_2'''(0) = 0, f_3'''(0) = 0, f_4'''(0) = 1. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Врахування залежностей (3.38) дозволяє записати загальний розв'язок диференціального рівняння у такому вигляді:

$$u_z(x) = u_z(0)f_1(x) + u_z'(0)f_2(x) + u_z''(0)f_3(x) + u_z'''(0)f_4(x) + u_z^*(x). \quad (3.39)$$

Частинний розв'язок може бути інтегралом від добутку навантаження на четверту функцію:

$$u_z^*(x) = \frac{1}{EI_y} \int_0^x f_4(x-t) \cdot q_z(t) dt. \quad (3.40)$$

Використання залежностей (3.29), (3.36) та  $u_z'(x) = \varphi_y(x)$  у розв'язку (3.30) дозволяє отримати формулу початкових параметрів:

$$\begin{aligned} u_z(x) &= u_z(0)f_1(x) + \varphi_y(0) \cdot f_2(x) - \\ &- \frac{M_y(0)}{EI_y} f_3(x) - \frac{Q_z^s(0)}{EI_y} f_4(x) + u_z^*(x). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Через переміщення  $u_x(x)$  можна визначити всі величини, які потрібні для розрахунку стиснуто-зігнутого стержня. Складемо їх вирази, підставивши у формулу (3.41) значення (3.37) функцій  $f_i(x)$ :



$$\begin{aligned}
u_z(x) &= u_z(0) + \phi_y(0) \cdot x - \frac{M_y(0)}{EI_y} \frac{1}{\nu^2} (1 - \cos \nu x) - \\
& - \frac{Q_z^s(0)}{EI_y} \frac{1}{\nu^3} (\nu x - \sin \nu x) + u_z^*(x), \\
\phi_y(x) &= u_z'(x) = \phi_y(0) - \frac{M_y(0)}{EI_y} \frac{1}{\nu} \sin \nu x - \\
& - \frac{Q_z^s(0)}{EI_y} \frac{1}{\nu^2} (1 - \cos \nu x) + [u_z^*(x)]', \tag{3.42}
\end{aligned}$$

$$M_y(x) = M_y(0) \cos \nu x + Q_z^s(0) \frac{1}{\nu} \sin \nu x - EI_y [u_z^*(x)]'',$$

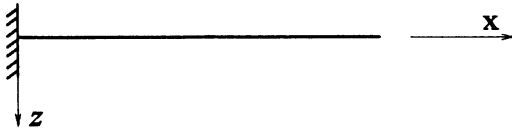
$$Q_z^s(x) = -\nu M_y(0) \sin \nu x + Q_z^s(0) \cos \nu x - EI_y [u_z^*(x)]''',$$

$$Q_z(x) = Q_z^s(0) - \nu^2 EI_y \phi_y(0) - EI_y \{ [u_z^*(x)]'''' + \nu^2 [u_z^*(x)]' \}.$$

При складанні цих формул були використані залежності (3.41), (3.37), (3.29), (3.35), (3.36).

Для знаходження невідомих початкових параметрів необхідно скласти систему рівнянь, використавши граничні умови. На кожному кінці стержня можна при будь-яких умовах закріплення скласти два рівняння, тому їх загальна кількість відповідає кількості невідомих початкових параметрів. Граничні умови наведені на рис. 3.27.

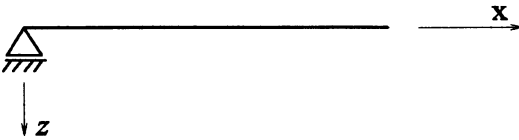
а) жорстке закріплення



При  $x = 0$

$$\begin{aligned} 1) u_z &= 0, \\ 2) \varphi_y &= 0. \end{aligned}$$

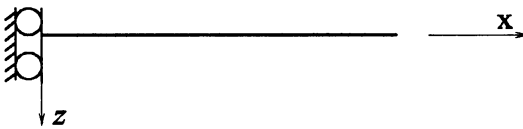
б) шарнірні опори



При  $x = 0$

$$\begin{aligned} 1) u_z &= 0, \\ 2) M_y &= 0. \end{aligned}$$

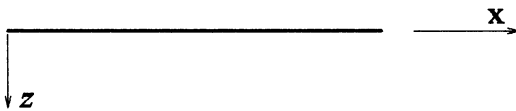
в) повзунковий шарнір



При  $x = 0$

$$\begin{aligned} 1) \varphi_y &= 0, \\ 2) Q_z^s &= 0. \end{aligned}$$

г) вільний край



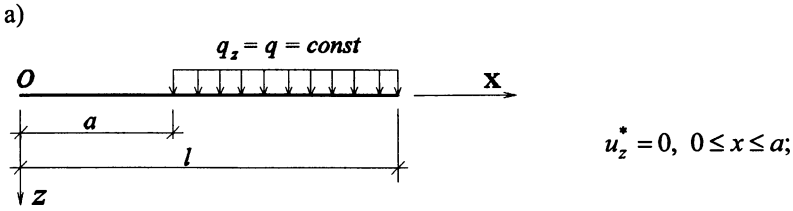
При  $x = 0$

$$\begin{aligned} 1) M_y &= 0, \\ 2) Q_z &= Q_z^s - \nu^2 EI_y \varphi_y = 0. \end{aligned}$$

Рис. 3.27. Граничні умови при різних закріпленнях стиснуто-зігнутого стержня

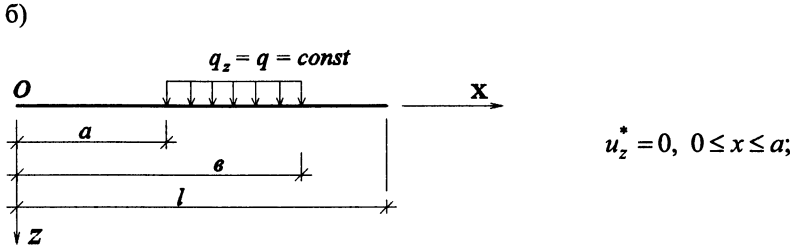
Граничні умови на правому кінці стержня при  $x = l$  мають аналогічний вигляд.

Наведемо частинні розв'язки при деяких навантаженнях (рис. 3.28).



$$u_z^* = \frac{q}{EI_y \nu^3} \int_a^x [\nu(x-t) - \sin \nu(x-t)] dt = \frac{q}{EI_y \nu^4} \left[ \frac{\nu^2(x-a)^2}{2} + \cos \nu(x-a) - 1 \right],$$

$a \leq x \leq l$



$$u_z^* = \frac{q}{EI_y \nu^4} \left[ \frac{\nu^2(x-a)^2}{2} + \cos \nu(x-a) - 1 \right], \quad a \leq x \leq b;$$

$$u_z^* = \frac{q}{EI_y \nu^3} \left[ \frac{\nu^2(x-a)^2}{2} - \frac{\nu^2(x-b)^2}{2} + \cos \nu(x-a) - \cos \nu(x-b) \right], \quad b \leq x \leq l$$

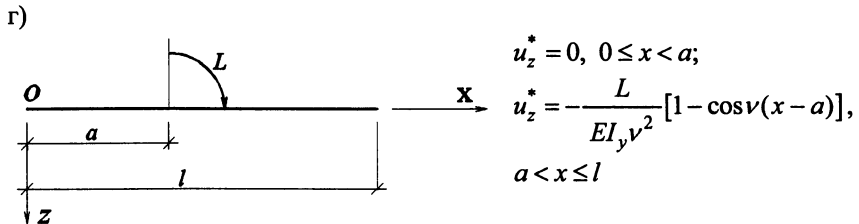
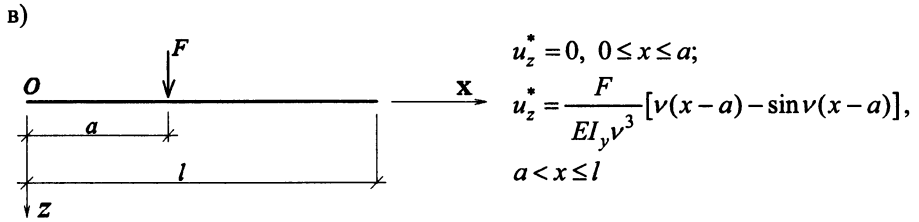


Рис. 3.28. Різні стани навантажень стиснуто-зігнутого стержня, для яких визначаються частинні розв'язки

### 3.3.3. Стійкість стержня

При деяких видах напружено-деформованого стану стержня може виникати таке явище, яке має назву *втрати стійкості*. Зміст цього явища пояснимо на прикладі конструкції (рис. 3.29), яка складається з абсолютно жорсткого вертикального стержня  $BC$  і горизонтальної пружини  $CD$ .

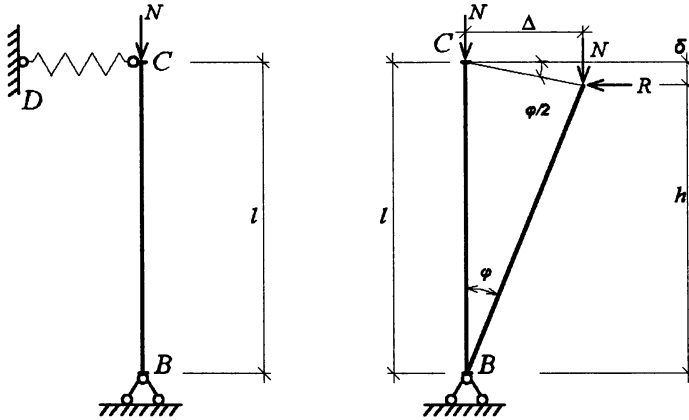


Рис. 3.29. Ілюстрація втрати стійкості стержня

До стержня  $BC$  прикладена постійно діюча сила  $N$ , яка стискає стержень. Жорсткість пружини  $CD$  позначимо  $K$ . Коефіцієнт  $K$  дорівнює силі, що викликає одиничне переміщення при розтягу чи стиску пружини.

Припустимо, що внаслідок дії деякого зовнішнього фактора точка  $C$  отримала переміщення та перейшла у положення  $C'$ . Таким фактором може бути сила  $F$ , яка має імпульсивний характер. Після відхилення стержня  $BC$  від вертикального напрямку сила  $F$  припиняє свою дію. Деформація системи, що розглядається виникає за рахунок розтягу пружини на величину  $\Delta$ . У пружині виникає реактивна сила  $R = K\Delta$ . Її напрям приймаємо горизонтальним. Розглядаючи деформований стан, складаємо вираз моменту усіх сил, які діють на стержень  $BC'$  відносно точки  $B$ :

$$M_B = R \cdot h - N \cdot \Delta.$$

Визначимо  $h$  та  $\Delta$  через довжину  $l$  і кут нахилу  $\varphi$ :

$$h = l \cos \varphi, \quad \Delta = l \sin \varphi.$$

Підставимо ці значення у попередній вираз. Крім того, врахуємо значення  $R = K\Delta = Kl \sin \varphi$ , внаслідок чого отримаємо:

$$M_B = l \sin \varphi (Kl \cos \varphi - N).$$

Розглянемо три можливих варіанти, які залежать від співвідношення двох складових у дужках:

- 1)  $Kl \cos \varphi - N > 0, \quad N < Kl \cos \varphi$ ;
- 2)  $Kl \cos \varphi - N = 0, \quad N = Kl \cos \varphi$ ;
- 3)  $Kl \cos \varphi - N < 0, \quad N > Kl \cos \varphi$ .

Кожний з цих варіантів відповідає певному характеру рівноваги.

1) При  $N < Kl \cos \varphi$  рівновага буде стійкою. Стержень  $BC$  після відхилення повернеться у початкове положення.

2) При  $N = Kl \cos \varphi$  рівновага буде байдужою. Стержень  $BC$  може залишитися у відхиленому стані або повернутися у початкове положення, тобто, величина  $N$  є граничною.

3) При  $N > Kl \cos \varphi$  рівновага нестійка. Стержень  $BC$  не може повернутися у своє початкове положення. Навпаки, його відхилення необмежено зростають — відбувається втрата стійкості.

Сила  $N = Kl \cos \varphi$ , що відповідає другому варіанту, має назву критичної сили. Вона знаходиться на межі втрати стійкості.

З'ясуємо ще одне поняття. Значення  $N$  у всіх трьох випадках залежить від величини кута відхилення  $\varphi$ . Чим більший кут, тим менша сила  $N$  та її критичне значення. Якщо система стійка за великого первинного відхилення, то це має назву стійкості у "великому".

При малих кутах  $\varphi$  можна прийняти  $\cos \varphi = 1$ . Тоді критична сила буде мати значення  $N_{кр} = K \cdot l$ . Вона характеризує стійкість системи у "малому".

Аналогічні явища відбуваються у звичайному пружному стержні. Розглянемо шарнірно-закріплений стиснутий стержень (рис. 3.30).

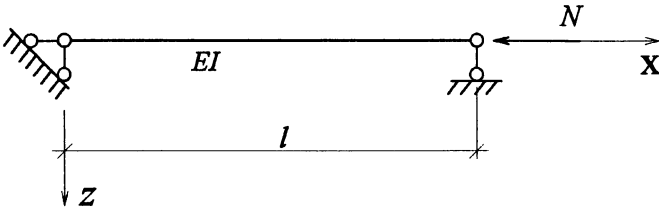


Рис. 3.30. Схема стержня, яка використовується при розрахунку стержня на стійкість

Для розв'язку задачі застосуємо метод початкових параметрів. Усі необхідні величини визначаються за формулами (3.42). У першу чергу потрібно скласти граничні умови для знаходження значень початкових параметрів. Характер граничних умов встановлюємо за рис. 3.27(б).

При  $x = 0$

$$1) u_z(0) = 0,$$

$$2) M_y(0) = 0,$$

при  $x = l$

$$3) u_z(l) = 0,$$

$$4) M_y(l) = 0.$$

Перші два рівняння безпосередньо визначають два початкових параметри. За формулами (3.42) складаємо третє та четверте рівняння. При цьому врахуємо, що частинний розв'язок  $u_z^*(x) = 0$ .

$$\varphi_y(0)l - \frac{Q_z^s(0)}{EI_y} \cdot \frac{1}{\nu^2} [\nu l - \sin(\nu l)] = 0,$$

$$\varphi_y(0) \cdot 0 + Q_z^s(0) \frac{1}{\nu} \sin(\nu l) = 0.$$

Отримана система є однорідною. Ненульовий розв'язок однорідної системи буде за умови, що її визначник дорівнює нулю. Складаємо визначник:

$$\Delta = l \cdot \frac{l}{v} \sin vl.$$

Приймаючи його рівним нулю, отримуємо:

$$\sin vl = 0.$$

Ця залежність буде задовольнятися, якщо  $vl = k\pi$ , де  $k=1, 2, 3, \dots$

Звідси знайдемо:

$$v = \frac{k\pi}{l}, \quad v^2 = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}.$$

Врахуємо залежність (3.32):

$$\frac{N}{EI_y} = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}.$$

Звідси отримуємо:

$$N_{кр} = \frac{k^2 \pi^2 EI_y}{l^2}. \quad (3.43)$$

Отримане значення поздовжньої сили забезпечує ненульовий розв'язок однорідної системи граничних рівнянь, а це свідчить про те, що початкові параметри  $\varphi_y(0)$  та  $Q_z^s(0)$  не дорівнюють нулю. Звідси можна зробити висновок, що при поздовжньому навантаженні виникають поперечні переміщення, тобто стержень згинається і втрачає стійкість. Сила, яка викликає втрату стійкості має назву *критичної сили*.

Якщо змінюються умови закріплення, то критична сила буде мати інше значення. Вказані зміни можна врахувати у формулі (3.43). Вони матимуть такий вигляд:

$$N_{кр} = \frac{k^2 \pi^2 EI_y}{(\mu l)^2}. \quad (3.44)$$

Коефіцієнт  $\mu$  залежить від умов закріплення стержня (рис. 3.31).

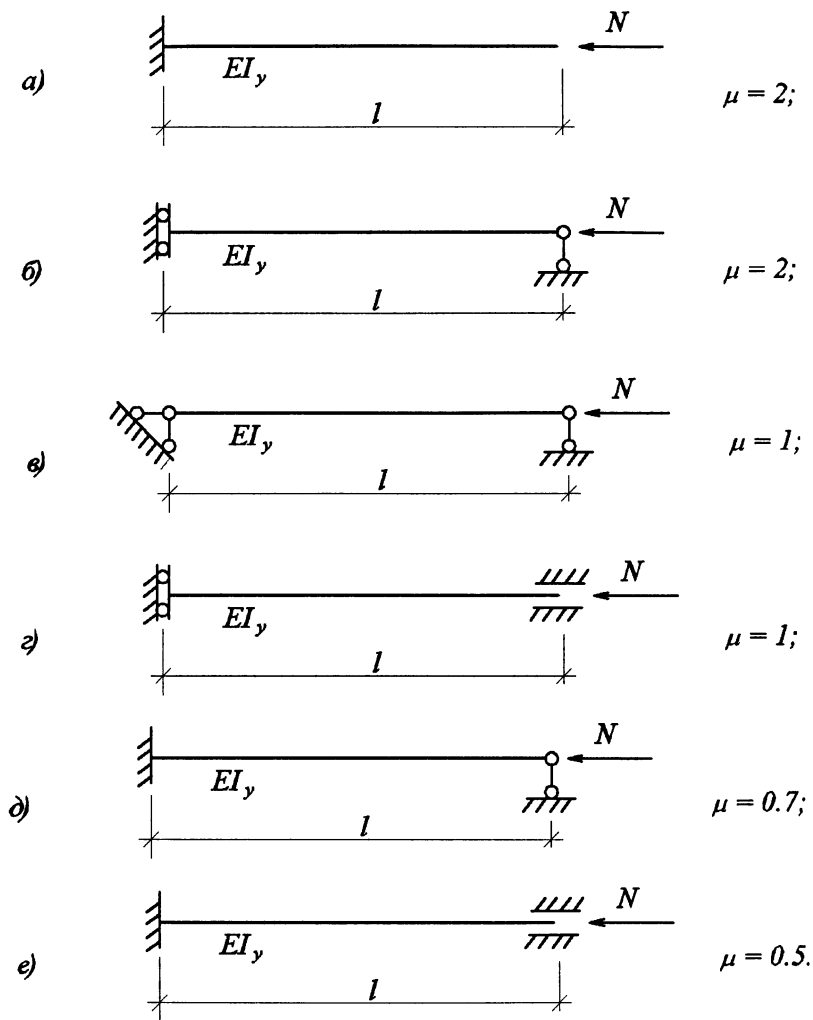


Рис. 3.31. Різні умови закріплення стиснутого стержня, за якими визначається коефіцієнт встановлення умовної довжини

Формула (3.44) має назву формули Ейлера, який перший розробив методику визначення критичної сили.

Значення критичної сили залежить від коефіцієнта  $K$ , який дорівнює цілим числам. Найбільша величина критичної сили, коли стержень втрачає



стійкість, відповідає коефіцієнту  $K=1$ , тому поздовжнє навантаження повинно бути менше цього значення.

Звернемо увагу на одну дуже важливу обставину, яка пов'язана з втратою стійкості. Якщо до стержня прикладена стискаюча сила, що дорівнює  $N_{кр}$ , він не обов'язково втратить стійкість. Потрібно, щоб на нього вплинув деякий фактор, який відхилить його від початкової, прямолінійної форми рівноваги. Після чого при значенні  $N = N_{кр}$  він вже не зможе прийняти свою початкову форму рівноваги. Практично такі фактори завжди присутні. До них можна віднести: поперечний поштовх, наявність відхилення конструкції від абсолютно прямолінійної форми, неспівпадіння точки прикладення поздовжньої сили із центром ваги перерізу тощо. Всі подібні обставини свідчать про те, що поздовжня сила у стиснутому стержні повинна бути меншою чим критична сила  $N < N_{кр}$ .

Маючи значення критичної сили, можна знайти нормальне критичне напруження:

$$\sigma_{кр} = \frac{N_{кр}}{A}.$$

Враховуючи вираз критичної сили (3.44) та приймаючи  $K=1$ , отримаємо:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 EI_y}{(\mu l)^2 \cdot A}. \quad (3.45)$$

Відношення  $\frac{I_y}{A}$  можна замінити на квадрат радіуса інерції  $i_y^2$ , тоді

будемо мати:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i_y^2}{(\mu l)^2}.$$

Введемо таке поняття як гнучкість стержня:

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y}. \quad (3.46)$$

Підставимо це співвідношення у попередній вираз:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2}. \quad (3.47)$$

Формула Ейлера (3.44) та отримана на її основі формула (3.47) мають певні обмеження. Це пов'язано з тим, що вони отримані на підставі застосування закону Гука, який передбачає пряму пропорційну залежність між напруженнями та деформаціями. Така залежність існує тільки коли напруження не перевищує межу пропорційності, тобто  $\sigma_{кр}$ , яке визначається за формулою (3.47), повинно бути менше  $\sigma_{пр}$ :

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пр}. \quad (3.48)$$

Виконання умови (3.48) та застосування формули (3.47) дозволяє знайти мінімальне значення гнучкості стержня, коли можна застосовувати формулу Ейлера для визначення критичної сили.

Наприклад, розглянемо сталевий стержень марки ВстЗПС6-1. Її межа пропорційності  $\sigma_{пр} = 210$  МПа та модуль пружності  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа.

Підставимо ці значення у формулу (3.47):

$$210 = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{\lambda^2}.$$

Приймаючи  $\pi^2 = 10$ , знайдемо мінімальне значення гнучкості стержня:

$$\lambda_{min} = 100.$$

При напруженнях, які перевищують межу пропорційності, у матеріалі виникають остаточні пластичні деформації. Їх врахування приводить до інших співвідношень для критичних сил та напружень. Вони зображені на графіку залежності між напруженням  $\sigma_{кр}$  та гнучкістю  $\lambda$  (рис. 3.32).

Перша ділянка 1-2 є горизонтальна пряма. Вона відповідає стержням малої гнучкості. Такі стержні не втрачають стійкості. У цьому випадку критичне напруження можна вважати рівним границі текучості або границі міцності матеріалу.

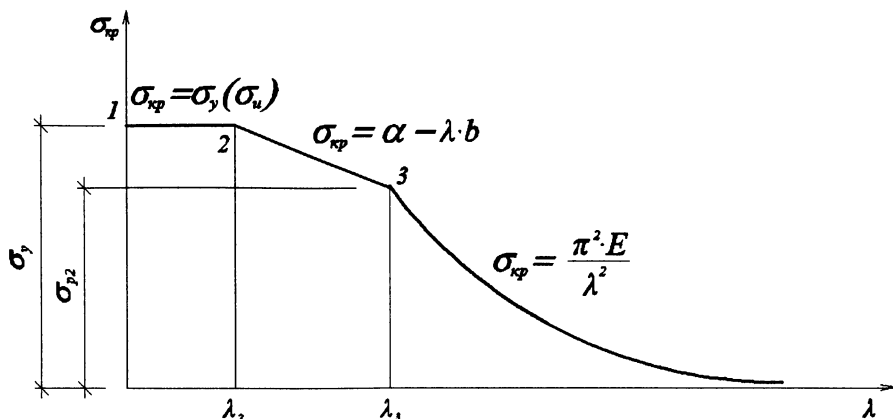


Рис. 3.32. Графік залежності критичного напруження від гнучкості  $\lambda$

Третя ділянка розташована за межами точки 3 і продовжується до нескінченності. Значення гнучкості  $\lambda$  у точці 3 відповідає її мінімальній величині, коли можна застосовувати формулу Ейлера (3.45). Графік на цій ділянці змінюється за законом гіперболи.

Залишилось проаналізувати другу ділянку між точками 2 і 3. При значеннях гнучкості стержня в межах цієї ділянки спостерігається втрата стійкості, але критичні напруження не перебільшують границю пропорційності. Залежність на цій ділянці між гнучкістю та критичним напруженням різними дослідниками пропонуються різні. Найбільш простим та достатньо прийнятним результатом є пропозиція Ясинського, згідно з якою графіком на цій ділянці є пряма лінія, що з'єднує точки 2 і 3. Рівняння цієї прямої має вигляд:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda. \quad (3.49)$$

Коефіцієнти  $a$  і  $b$  мають розмірність напружень і визначаються за умови, коли пряма лінія проходить через точки 2 і 3. Формула (3.49) має назву формули Ясинського. Значення коефіцієнтів  $a$  і  $b$  для різних матеріалів наведені у довідниках.

На графіку (рис. 3.32) значення  $\sigma$  та  $\lambda$  залежать від матеріалу стержня. Наприклад, для маловуглецевої сталі гнучкість у точці 2 дорівнює 40, а у

точці 3 дорівнює 100. При цьому коефіцієнти  $a$  і  $b$  у формулі (3.49) мають наступні значення:  $a=310\text{МПа}$ ,  $b=1,14\text{МПа}$ .

Відповідно до ділянок графіка стержні можливо поділити на три категорії.

1. Стержні малої гнучкості  $0 \leq \lambda \leq \lambda_2$ .
2. Стержні середньої гнучкості  $\lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_3$ .
3. Гнучкі стержні  $\lambda_3 \leq \lambda$ .

У залежності від того, до якої категорії належить стержень, потрібно застосовувати відповідні формули для визначення критичних напружень. Стержні категорії 1 на стійкість перевіряти не потрібно. Для другої категорії  $\sigma_{кр}$  знаходиться за формулою (3.49), для третьої категорії застосовується формула (3.47).

Підсумовуючи вищезазначене, зупинимось на розгляді порядку перевірки міцності з урахуванням можливості втрати стійкості. Якщо у стержні виникає тільки поздовжнє зусилля, то визначення нормального напруження та перевірку міцності потрібно здійснювати, застосовуючи формули:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A}, \quad \sigma_{xx} \leq \sigma_{adm}, \quad \sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{n} \left( \frac{\sigma_u}{n} \right);$$

де  $n$  — коефіцієнт запасу міцності.

Стиснутий стержень потребує ще перевірки на стійкість, для чого необхідно застосувати такі формули:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_{кр}}{A}, \quad \sigma_{xx} \leq \sigma^s_{adm}, \quad \sigma^s_{adm} = \frac{\sigma_{кр}}{n_s};$$

де  $n_s$  — коефіцієнт запасу стійкості.

Обидві перевірки на міцність та стійкість можна об'єднати в одну перевірку. Для цього застосуємо наступне співвідношення:

$$\varphi = \frac{\sigma^s_{adm}}{\sigma_{adm}} = \frac{\sigma_{кр} \cdot n}{n_s \cdot \sigma_u}.$$

Звідси отримаємо:

$$\sigma_{adm}^s = \varphi \cdot \sigma_{adm}$$

Застосований у цих виразах коефіцієнт  $\varphi$  має назву коефіцієнта поздовжнього згину. Його значення менше одиниці ( $\varphi < 1$ ), тому що приймається  $n < n_s$ , крім того,  $\sigma_{кр} < \sigma_u$ . Врахування розглянутих залежностей дозволяє загальну перевірку на міцність та стійкість виконувати за однією формулою, яка має такий вигляд:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} \leq \varphi \sigma_{adm}$$

або (3.50)

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{\varphi A} \leq \sigma_{adm}$$

Величина коефіцієнта  $\varphi$  залежить від матеріалу та гнучкості стержня.

Існують таблиці таких значень (таблиця 3.1).

Таблиця 3.1

Гнучкість $\lambda = \frac{\mu l}{i}$	Коефіцієнт $\varphi$			Гнучкість $\lambda = \frac{\mu l}{i}$	Коефіцієнт $\varphi$	
	Сталь	Чавун	Дерево		Сталь	Дерево
0	1,0	1,0	1,0	110	0,52	0,25
10	0,99	0,97	0,99	120	0,45	0,22
20	0,96	0,91	0,97	130	0,40	0,18
30	0,94	0,81	0,93	140	0,36	0,16
40	0,92	0,69	0,87	150	0,32	0,14
50	0,89	0,57	0,80	160	0,29	0,12
60	0,86	0,44	0,71	170	0,26	0,11
70	0,81	0,34	0,60	180	0,23	0,10
80	0,75	0,26	0,48	190	0,21	0,09
90	0,69	0,20	0,38	200	0,19	0,08
100	0,60	0,16	0,31	210	0,17	—

## Глава 3.4. Розрахунок стержня на динамічне навантаження

### 3.4.1. Загальні поняття про динамічне навантаження

Усі питання, які перед цим розглядалися, пов'язані з розрахунками на статичні навантаження. Характерною особливістю таких навантажень є повільне змінювання упродовж часу, що дозволяє нехтувати швидкостями та прискореннями під час його зміни.

Зміна динамічного навантаження відбувається з великою швидкістю, що викликає прискорення конструкцій, завдяки чому виникають сили інерції, які потрібно враховувати.

Динамічні навантаження утворюють працюючі верстати, рухомий транспорт, поривчастий вітер, сейсмічні явища і тому подібне.

При динамічному навантаженні конструкція постійно перебуває у рухомому стані у вигляді пружних коливань. Вказані явища суттєво впливають на методи розрахунку конструкцій. В основу їх розробки покладені принципи Даламбера. В їх основу закладено положення, яке дозволяє рухоме тіло розглядати як таке, що знаходиться у стані миттєвої рівноваги, якщо до нього крім діючих зовнішніх навантажень прикласти сили інерції, які дорівнюють добуткам рухомих мас на їх прискорення та спрямовані у бік, протилежний переміщенню.

Звернемо увагу на те, що при розрахунках на динамічне навантаження стержня справедливі всі прийняті раніше гіпотези. Проілюструємо це на прикладі (рис. 3.33).

Розглядаємо підняття балки з прискоренням, яке дорівнює  $a$ . Вага одного метра балки дорівнює  $q$ , а її маса  $m = \frac{q}{g}$ , де  $g$  є прискорення земного

тяжіння. При піднятті балки на неї, крім власної ваги, буде діяти сила інерції

$q_i = m \cdot a = \frac{q}{g} a$ . Сума цих двох навантажень є динамічним навантаженням

$q_{\partial} = q + q_i = q(1 + \frac{a}{g})$ . Для визначення поздовжньої сили  $N$  застосуємо

принцип Даламбера, який дозволяє зображену на рис. 3.33 систему вважати такою, що знаходиться в умовах рівноваги, якщо врахована сила інерції.

Рівняння рівноваги матиме вигляд:

$$N_0 = q_{\partial} \cdot l = q(1 + \frac{a}{g}) \cdot l.$$

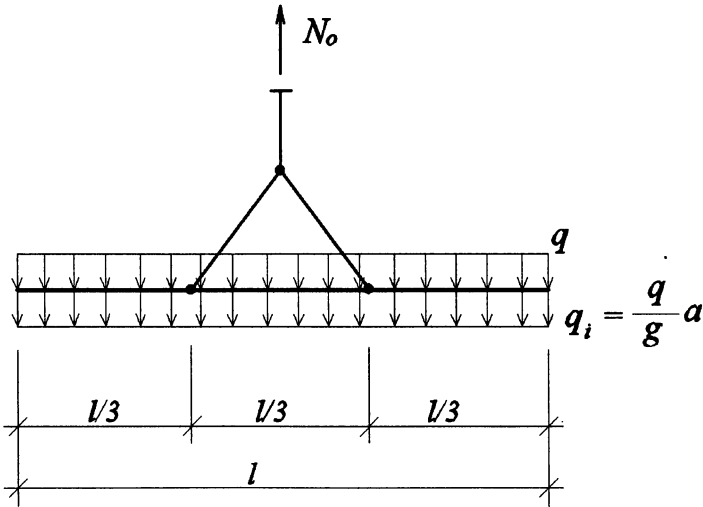


Рис. 3.33. Ілюстрація розрахунку на динамічні навантаження

Введемо поняття коефіцієнта динамічності  $K_{\partial}$ , який дорівнює величині, на яку потрібно помножити значення статичних величин, щоб отримати відповідні динамічні величини. У даному випадку динамічний коефіцієнт має значення:

$$k_{\partial} = (1 + \frac{a}{g}). \quad (3.51)$$

Враховуючи це, попередній вираз можна записати у вигляді:

$$N_l = q \cdot l \cdot k_{\partial} = N_{cm} \cdot k_{\partial}.$$

### 3.4.2. Розрахунок стержня на ударне навантаження

Ударне навантаження виникає, коли тіло, маючи певну масу, під час руху зіштовхується з іншим тілом. Друге тіло може теж рухатися чи знаходитись у стані нерухомості. Воно теж має якусь масу. При зіткненні між ними виникає сила взаємодії, яка примушує ударене тіло рухатися з певною швидкістю у напрямку удару. Можливі два варіанти. Перший полягає в тому, що обидва тіла з'єднуються і далі рухаються разом. Другий варіант припускає відскок одного тіла від іншого. При розгляді будівельних конструкцій сама конструкція є нерухомою, по якій може вдарити якесь тіло, що падає.

Для отримання методики розрахунку стержня на ударне навантаження розглянемо шарнірно закріплену балку, в якій від удару виникає плоский напружений стан (рис. 3.34).

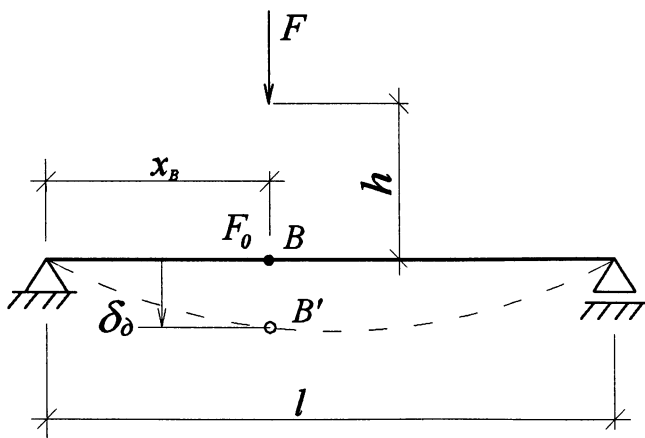


Рис. 3.34. Ілюстрація розрахунку стержня на ударне навантаження

На рис. 3.34 зображена балка на двох опорах, але отримана методика може бути застосована і для інших схем стержня. Вагу балки, що дорівнює  $F_0$ , вважаємо зосередженою у точці  $B$ , по якій ударає вантаж  $F$ . Він падає з висоти  $h$ . Вважаємо, що після удару вантаж  $F$  об'єднується з вагою балки  $F_0$  і далі



вони переміщуються разом на відстань, що дорівнює  $\delta_\delta$ . Після досягнення точки  $B'$  рух у напрямку удару припиняється, і завдяки пружним властивостям у балці виникають пружні коливання. Цей процес розглядатися не буде. Зупинимось тільки на самому процесі удару.

Вантаж  $F$ , як тіло що вільно падає, при досягненні точки  $B$  буде мати швидкість, яка дорівнює  $V = \sqrt{2gh}$ . Після з'єднання з вагою  $F_0$  їх сумісне переміщення буде здійснюватися з іншою швидкістю  $V_0$ , яку можна визначити з умов рівності кількості руху до удару і після нього:

$$m \cdot V = (m + m_0)V_0,$$

де  $m, m_0$  — це маси вантажів  $F$  та  $F_0$ ,  $m = \frac{F}{g}$ ,  $m_0 = \frac{F_0}{g}$ .

З попередньої залежності знайдемо:

$$V_0 = V \frac{m}{m + m_0}. \quad (3.52)$$

Вантаж  $F$  та вага  $F_0$  після з'єднання у точці  $B$  переміщуються на величину  $\delta_\delta$  до точки  $B'$  за рахунок згину балки. Величина  $\delta_\delta$  є динамічним переміщенням точки  $B$ .

Враховуючи, що у точці  $B$  вантажі  $F$  та  $F_0$  мають швидкість  $V_0$ , знайдемо їх початкову кінетичну енергію:

$$E_{\text{кін}}^B = \frac{(m + m_0) \cdot V_0^2}{2}.$$

Підставляємо значення  $V_0$  (3.52):

$$E_{\text{кін}}^B = \frac{m^2}{2(m + m_0)} V^2.$$

Швидкість  $V = \sqrt{2gh}$ , тому

$$E_{\text{кін}}^B = \frac{m^2 \cdot 2gh}{2(m + m_0)} = \frac{Fhm}{m + m_0}. \quad (3.53)$$

Під час руху від точок  $B$  до  $B'$  швидкість навантаження  $(F + F_0)$  буде змінюватися, і у точці  $B'$  їх кінетична енергія  $E_{кін}^{B'}$  матиме інше значення, а саме  $E_{кін}^{B'}=0$ , тому що у цій точці рух закінчується і швидкість буде дорівнювати нулю. Витрачена кінетична енергія буде дорівнювати різниці:

$$E_{кін}^{B'} - E_{кін}^B = 0 - \frac{F \cdot h \cdot m}{(m + m_0)} = -\frac{F \cdot h \cdot m}{(m + m_0)}. \quad (3.54)$$

Тепер перейдемо до опору балки. Після того, як на точку  $B$  почне діяти ударне навантаження, в ній почне діяти сила опору пружної балки, яку позначимо як  $F_\delta$ , тобто динамічна сила.

Зауважимо, що робота зовнішніх та внутрішніх сил, які діють на пружну систему під час її деформування, якщо система знаходиться у рівновазі, дорівнює нулю. Це дозволяє записати рівняння:

$$E_{кін}^{B'} - E_{кін}^B = P + E_{pot}. \quad (3.55)$$

Ліва частина визначається виразом (3.54). Величина  $P$  це робота повного значення сили  $F$ , яка ударає по балці на переміщенні  $\delta_\delta$ . Робота сили  $F$  на цьому переміщенні не враховується у виразах кінетичної енергії, тому її потрібно врахувати окремо.

$$P = F \cdot \delta_\delta.$$

$E_{pot}$  — це потенціальна енергія, яка накопичується у балці при згині. Її можна прийняти рівною роботі сили опору  $F_\delta$  на переміщенні  $\delta_\delta$ . Зауважимо, що вона зростає поступово за лінійним законом при пересуванні від точки  $B$  до  $B'$ , тому потрібно застосовувати множник 1/2. Крім того, потенціальна енергія має зворотний знак відносно роботи зовнішньої сили:

$$E_{pot} = -\frac{1}{2} F_\delta \cdot \delta_\delta.$$

Враховуючи сказане у формулі (3.55), отримаємо:

$$-\frac{F \cdot h \cdot m}{(m + m_0)} = F \cdot \delta_\partial - \frac{1}{2} F_\partial \cdot \delta_\partial. \quad (3.56)$$

Зробимо певні перетворення цього виразу. Розглянемо балку, що навантажена силою  $F$ , яка прикладена як статичне навантаження (рис. 3.35).

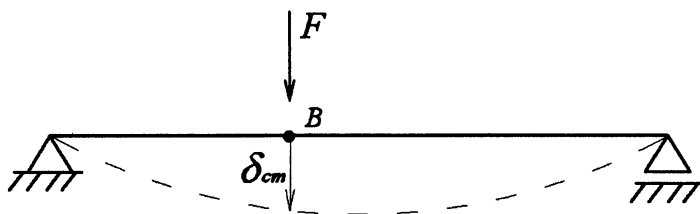


Рис. 3.35. Розрахункова схема статичного навантаження, яке застосовується при врахуванні ударного навантаження

Від статичного навантаження силою  $F$  у точці  $B$  виникне переміщення  $\delta_{cm}$ . Враховуючи лінійну залежність між навантаженням та переміщеннями, можна стверджувати, що при зміні навантаження з  $F$  на  $F_\partial$  переміщення  $\delta_{cm}$  зросте до  $\delta_\partial$ . Між цими величинами буде існувати залежність:

$$\frac{F_\partial}{\delta_\partial} = \frac{F}{\delta_{cm}},$$

тобто

$$\delta_\partial = \delta_{cm} \frac{F_\partial}{F}.$$

Цей вираз  $\delta_\partial$  врахуємо у (3.56), крім того, зробимо заміну

$$\frac{m}{m + m_0} = \frac{m \cdot g}{(m + m_0)g} = \frac{F}{F + F_0}.$$

Внаслідок цього вираз (3.56) буде мати наступний, остаточний вигляд:

$$F_{\delta}^2 - 2F \cdot F_{\delta} - \frac{2F^2 h}{\delta_{cm}} \cdot \frac{F}{F + F_0} = 0.$$

Маємо квадратне рівняння, з якого знайдемо:

$$F_{\delta} = F \pm \sqrt{F^2 + F^2 \frac{2h}{\delta_{cm}} \cdot \frac{F}{F + F_0}}.$$

Знак "мінус" перед коренем суперечить фізичному змісту виразу, тому його відкидаємо і остаточно будемо мати:

$$F_{\delta} = F \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{cm}} \cdot \frac{F}{F + F_0}} \right). \quad (3.57)$$

Вираз у дужках за змістом можна розглядати як коефіцієнт динамічності:

$$k_{\delta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{cm}} \cdot \frac{F}{F + F_0}}. \quad (3.58)$$

Враховуючи це, отримаємо:

$$F_{\delta} = F \cdot k_{\delta}. \quad (3.59)$$

Цей вираз дозволяє стверджувати, що всі зусилля, деформації та переміщення, які виникають у стержні при ударному навантаженні, можна визначити як відповідні величини, що виникають у цьому стержні від статичного навантаження, помножені на коефіцієнт динамічності  $k_{\delta}$  (3.59).

Якщо вважати, що навантаження  $F_0$ , яке розташоване на стержні, відсутнє, тобто  $F_0=0$ , то формула динамічного коефіцієнта має вигляд:

$$k_{\delta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{cm}}}. \quad (3.60)$$

Розглянута методика дозволяє розбити розрахунок стержня на ударне навантаження за умови, що на ньому розташована одна зосереджена маса, яка знаходиться у точці, куди вдаряє сила. До необхідного варіанта можна привести реальні конструкції, у яких власна вага розподілена по всій довжині стержня. Для цього потрібно розподілену масу стержня привести до однієї точки, по якій відбувається удар. Величину цієї зосередженої маси потрібно визначити з

умови, що кінетична енергія, яку вона утворює, співпадала з кінетичною енергією розподіленої маси. Для отримання необхідних співвідношень розглянемо дві розрахункові схеми (рис. 3.36).

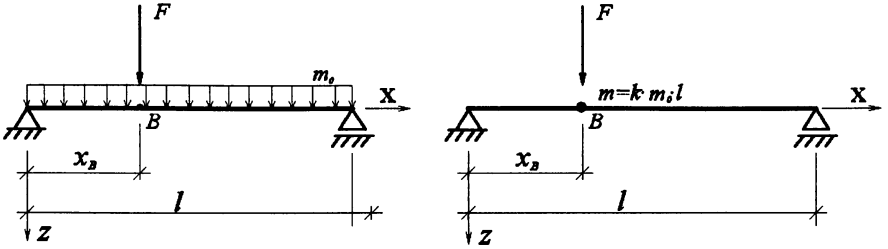


Рис. 3.36. Пояснення до встановлення значення зосередженої маси

Коефіцієнт  $k$  — невідома величина, яку потрібно знайти. Для цього необхідно знайти переміщення балки, яка зображена на рис. 3.36 від статичного навантаження  $F$ , що прикладається у точці  $B$ , по якій відбувається удар. Вважаємо, що переміщення є функцією двох змінних, а саме координати  $x$  та часу  $t$ . Вона має вигляд:

$$\tilde{u}_z(x, t) = T(t) \cdot u_z(x).$$

Застосувавши метод початкових параметрів, знайдемо функцію  $u_z(x)$ . Підставивши у цю функцію значення  $x = x_B$ , отримаємо переміщення точки  $B$ , тобто  $u_z(x_B)$ . Конкретний вигляд функції  $T(t)$  не потрібен.

Визначимо кінетичну енергію для обох схем. При розподіленій масі вона буде дорівнювати:

$$E_{m_0} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \frac{dT}{dt} u_z(x) \right]^2 \cdot m_0 \cdot dx = \frac{m_0}{2} \left( \frac{dT}{dt} \right)^2 \int_0^l (u_z)^2 dx.$$

Кінетична енергія зосередженої маси має значення:

$$E_m = \frac{1}{2} k m_0 l \left[ \frac{dT}{dt} \cdot u_z(x_B) \right]^2.$$

Врахуємо умову  $E_{m_0} = E_m$ :

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)^2 \cdot \frac{m_0}{2} \int_0^l (u_z)^2 dx = \left(\frac{dT}{dt}\right)^2 \frac{1}{2} km_0 l [u_z(x_B)]^2.$$

Незалежно від виразу функції  $T(t)$ , отримане співвідношення можна скоротити на множник  $\left(\frac{dT}{dt}\right)^2$ . Після чого матимемо:

$$kl \cdot [u_z(x_B)]^2 = \int_0^l (u_z)^2 dx.$$
$$k = \frac{\int_0^l (u_z)^2 dx}{l [u_z(x_B)]^2}. \quad (3.62)$$

За допомогою коефіцієнта  $k$  знайдемо значення зосередженої маси, після чого можна розрахунок балки з розподіленою масою змінити на розрахунок балки з однією зосередженою масою.

### 3.4.3. Пружні поперечні коливання стиснуто-зігнутого стержня

Зупинимось на розгляді питання, пов'язаного з коливанням пружних стержневих систем. Їх характерною особливістю є періодичне повторення процесу руху. Ці коливання виникають під впливом певних зовнішніх факторів. Існують два види коливань — вільні та вимушені.

Вільні коливання у пружних системах виникають внаслідок дії короткострокового (імпульсивного) навантаження. Воно викликає пружне деформування, після чого зупиняє свої дії, і далі система продовжує свій періодичний рух під впливом сил пружності.

Вимушені коливання відбуваються при постійній дії зовнішнього періодичного навантаження.

Підкреслимо основні характеристики коливального процесу. До них відносяться: частота власних і вимушених коливань, амплітуди і форми деформування.

Частота власних коливань  $\omega$  дорівнює кількості циклів коливань за  $2\pi$  секунд.

Частота вимушених коливань  $\tilde{\omega}$  дорівнює кількості циклів зміни зовнішнього періодичного навантаження за  $2\pi$  секунд.

З частотою коливань безпосередньо пов'язана друга характеристика, а саме період коливань  $t_0$  і  $\tilde{t}_0$ . Період власних коливань дорівнює тривалості одного повного циклу. Період вимушених коливань співпадає з тривалістю дії одного циклу навантаження. Періоди коливань пов'язані з частотами наступними співвідношеннями:

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \tilde{t}_0 = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}.$$

Розглянемо поперечні (згинальні) коливання стиснуто-зігнутого стержня при плоскому деформуванні у площині  $xoz$ . Вважаємо, що на стержень діє постійне за часом навантаження, від якого у всіх перерізах виникає однакоє поздовжнє зусилля  $N$ . У поперечному напрямі діє навантаження  $q_z(x, t)$ , яке може змінюватись по довжині стержня, а крім того, залежить від часу  $t$  (рис. 3.37).

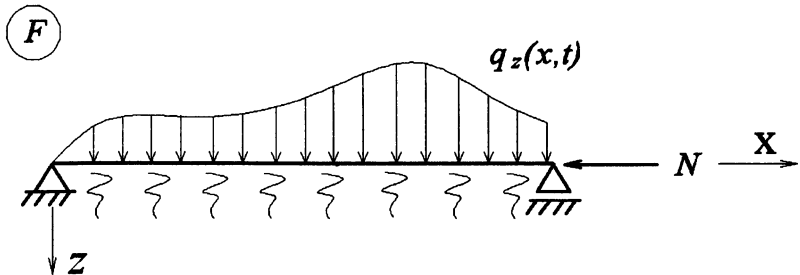


Рис. 3.37. Особливості динамічного навантаження

Отриманий далі розв'язок не пов'язаний із конкретним характером опорних закріплень, зображених на рис. 3.37. Його можна буде застосовувати при будь-яких інших закріпленнях.

Згинальні коливання стержня пов'язані з поперечним переміщенням  $\tilde{u}_z(x, t)$ , яке так само, як і навантаження, залежить від двох змінних  $x, t$ . У зв'язку з динамічним характером навантаження на стержень будуть діяти сили інерції  $q_{zi}(x, t)$ , які дорівнюють добутку маси  $m$  одиниці довжини стержня на прискорення, що визначається як друга похідна за часом від переміщення  $\tilde{u}_z(x, t)$ . Це дозволяє записати силу інерції у вигляді:

$$q_{zi}(x, t) = -m \frac{\partial^2 \tilde{u}_z(x, t)}{\partial t^2}. \quad (3.62)$$

Таким чином, загальне поперечне навантаження буде дорівнювати:

$$q_z(x, t) + q_{zi}(x, t) = q_z(x, t) - m \frac{\partial^2 \tilde{u}_z(x, t)}{\partial t^2}. \quad (3.63)$$

Відповідно до принципу Даламбера, якщо враховані сили інерції, то конструкцію, що рухається, можна розглядати як таку, що знаходиться у нерухомому стані рівноваги. Це дозволяє для визначення переміщення  $\tilde{u}_z(x, t)$  застосувати рівняння рівноваги стиснуто-зігнутого стержня (3.33), підставляючи у праву частину навантаження, яке визначено залежністю (3.63). Крім того, враховуючи, що переміщення  $\tilde{u}_z(x, t)$  залежить від двох змінних, потрібно звичайні похідні замінити на частинні, внаслідок чого будемо мати:

$$\frac{\partial^4 \tilde{u}_z}{\partial x^4} + \nu^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial x^2} = \frac{1}{EI_y} \left( q_z - m \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial t^2} \right),$$

де  $\nu^2 = \frac{N}{EI_y}$ .

Позначимо  $\alpha^2 = \frac{m}{EI_y}$ .



Перенесемо другий доданок правої частини у ліву. Отримаємо остаточний вираз рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial^4 \tilde{u}_z}{\partial x^4} + \nu^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial t^2} = \frac{1}{EI_y} q_z. \quad (3.64)$$

Розглянемо розв'язок однорідного рівняння без врахування правої частини. Це означає, що навантаження  $q_z = 0$ , тому розглядатимемо вільні коливання.

$$\frac{\partial^4 \tilde{u}_z}{\partial x^4} + \nu^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial t^2} = 0. \quad (3.65)$$

Для розв'язку рівняння застосуємо метод розділення змінних. Приймемо переміщення  $\tilde{u}_z(x, t)$  у вигляді суми ряду, кожний член якого визначається як добуток двох функцій. Один множник  $u_{zk}(x)$  це функція змінної  $x$ , а другий  $T_k(t)$  залежить від змінної  $t$ .

$$\tilde{u}_z(x, t) = \sum_{k=1}^{k=\infty} u_{zk}(x) \cdot T_k(t). \quad (3.66)$$

Підставимо цей вираз у рівняння (3.65):

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \left[ (u_{zk}^{IV} + \nu^2 u_{zk}'' ) T_k + \alpha^2 u_{zk} T_k'' \right] = 0. \quad (3.67)$$

При коливанні пружних систем процес зміни руху за часом відповідає гармонічному характеру. У цьому випадку для функції  $T(t)$  існує залежність:

$$T_k'' = -\omega_k^2 T_k,$$

або (3.68)

$$T_k'' + \omega_k^2 T_k = 0.$$

Маємо диференціальне рівняння у звичайних похідних. Його загальний розв'язок можна записати у такому вигляді:

$$T_k = B_k \sin(\omega_k t + \Theta_0),$$

де  $\omega_k$  — частота коливань,

$\Theta_0$  — початкова фаза коливань,

$B_k$  — амплітуда коливань.

Врахуємо співвідношення (3.68) у рівнянні (3.67):

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \left[ (u_{zk}^{IV} + v^2 u_{zk}'' - \beta_k^4 u_{zk}) \cdot T_k \right] = 0,$$

де  $\beta_k^4 = \alpha^2 \omega_k^2$ .

Сума, що увійшла у це рівняння, буде дорівнювати нулю, якщо кожний член суми дорівнює нулю при будь-яких значеннях змінних  $x$  та  $t$ . Кожний член ряду є добуток двох функцій, тому буде дорівнювати нулю, коли нулю буде дорівнювати один з цих множників. З розгляду виразу (3.69) зрозуміло, що функція  $T_k$  не дорівнює нулю при будь-якому значенні змінної  $t$ , тому для виконання зазначеної умови потрібно прийняти рівним нулю інший множник, тобто вираз у дужках. Виконуючи цю умову, будемо мати:

$$u_{zk}^{IV} + v^2 u_{zk}'' - \beta_k^4 u_{zk} = 0. \quad (3.69)$$

Таким чином, отримано лінійне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами у звичайних похідних. Для його розв'язку складаємо характеристичне рівняння:

$$r_k^4 + v^2 z_k^2 - \beta_k^4 = 0.$$

Його корені дорівнюють:

$$r_{k,1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-v^2 \pm \sqrt{v^4 + 4\beta_k^4}}{2}}.$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \sqrt{\frac{v^2 + \sqrt{v^4 + 4\beta_k^4}}{2}}, \\ \tilde{\lambda}_k &= \sqrt{\frac{-v^2 + \sqrt{v^4 + 4\beta_k^4}}{2}}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Враховуючи ці позначення, будемо мати:

$$\begin{aligned}\Gamma_{k_{1,2}} &= \pm \lambda_k \cdot i, \\ \Gamma_{k_{3,4}} &= \pm \tilde{\lambda}_k.\end{aligned}$$

Перші два корені є спряжені уявні числа, а інші два — спряжені дійсні числа. Їм відповідають чотири частинні розв'язки рівняння (3.69):

$$\sin \lambda_k x, \cos \lambda_k x, \operatorname{sh} \tilde{\lambda}_k x, \operatorname{ch} \tilde{\lambda}_k x.$$

Враховуючи лінійний характер рівняння (3.69), можна скласти чотири розв'язки  $f_{1k}(x)$ ,  $f_{2k}(x)$ ,  $f_{3k}(x)$ ,  $f_{4k}(x)$  іншого вигляду, кожен з них повинен задовольняти наступним умовам у початковій точці  $x=0$ :

$$\begin{aligned}f_{1k}(0) &= 1, & f_{2k}(0) &= 0, & f_{3k}(0) &= 0, & f_{4k}(0) &= 0, \\ f'_{1k}(0) &= 0, & f'_{2k}(0) &= 1, & f'_{3k}(0) &= 0, & f'_{4k}(0) &= 0, \\ f''_{1k}(0) &= 0, & f''_{2k}(0) &= 0, & f''_{3k}(0) &= 1, & f''_{4k}(0) &= 0, \\ f'''_{1k}(0) &= 0, & f'''_{2k}(0) &= 0, & f'''_{3k}(0) &= 0, & f'''_{4k}(0) &= 1.\end{aligned}\tag{3.71}$$

Виконуючи ці умови, знайдемо:

$$\begin{aligned}f_{1k}(x) &= \frac{1}{\Delta_k^2} \left( \tilde{\lambda}_k^2 \cos \lambda_k x + \lambda_k^2 \operatorname{ch} \tilde{\lambda}_k x \right), \\ f_{2k}(x) &= \frac{1}{\Delta_k^2} \left( \frac{\tilde{\lambda}_k^2}{\lambda_k} \sin \lambda_k x + \frac{\lambda_k^2}{\tilde{\lambda}_k} \operatorname{sh} \tilde{\lambda}_k x \right), \\ f_{3k}(x) &= \frac{1}{\Delta_k^2} \left( -\cos \lambda_k x + \operatorname{ch} \tilde{\lambda}_k x \right), \\ f_{4k}(x) &= \frac{1}{\Delta_k^2} \left( -\frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k x + \frac{1}{\tilde{\lambda}_k} \operatorname{sh} \tilde{\lambda}_k x \right),\end{aligned}\tag{3.73}$$

$$\text{де } \Delta_k = \lambda_k^2 + \tilde{\lambda}_k^2.$$

У зв'язку з тим, що функції  $f_{ik}(x)$  задовольняють умовам (3.71), загальний розв'язок рівняння (3.69) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned}u_{zk}(x) &= u_{zk}(0) \cdot f_{1k}(x) + u'_{zk}(0) \cdot f_{2k}(x) + u''_{zk}(0) \cdot f_{3k}(x) + \\ &+ u'''_{zk}(0) \cdot f_{4k}(x).\end{aligned}\tag{3.73}$$

Отримані функції  $T_k(t)$  та  $u_{zk}(x)$  дозволяють скласти вирази  $\tilde{u}_z(x,t)$  та всіх інших величин, необхідних для розрахунку стержня.

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_z(x,t) &= \sum_{k=1}^{k=\infty} u_{zk}(x) \cdot T_k(t), \\
 \tilde{\varphi}_y(x,t) &= \frac{\partial \tilde{u}_z(x,t)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{k=\infty} u'_{zk}(x) \cdot T_k(t), \\
 \tilde{M}_y(x,t) &= -EI_y \frac{\partial^2 \tilde{u}_z(x,t)}{\partial x^2} = -EI_y \sum_{k=1}^{k=\infty} u''_{zk}(x) \cdot T_k(t), \\
 \tilde{Q}_z^s(x,t) &= -EI_y \frac{\partial^3 \tilde{u}_z(x,t)}{\partial x^3} = -EI_y \sum_{k=1}^{k=\infty} u'''_{zk}(x) \cdot T_k(t), \\
 \tilde{Q}_z(x,t) &= -EI_y \left[ \frac{\partial^3 \tilde{u}_z(x,t)}{\partial x^3} + \nu^2 \frac{\partial \tilde{u}_z(x,t)}{\partial x} \right] = \\
 &= -EI_y \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[ u'''_{zk}(x) + \nu^2 u'_{zk}(x) \right] \cdot T_k(t). \tag{3.74}
 \end{aligned}$$

Застосуємо далі наступні залежності:

$$\begin{aligned}
 u'_{zk}(x) &= \varphi_{yk}(x); \quad -EI_y u''_{zk}(x) = M_y(x), \quad -EI_y u'''_{zk}(x) = Q_z^s(x), \\
 -EI_y \left[ u'''_{zk}(x) + \nu^2 u'_{zk}(x) \right] &= Q_z(x). \tag{3.76}
 \end{aligned}$$

Врахуємо ці залежності у формулах (3.74):

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_z(x,t) &= \sum_{k=1}^{k=\infty} u_{zk}(x) \cdot T_k(t), \\
 \tilde{\varphi}_y(x,t) &= \sum_{k=1}^{k=\infty} \varphi_{yk}(x) \cdot T_k(t), \\
 \tilde{M}_y(x,t) &= \sum_{k=1}^{k=\infty} M_{yk}(x) \cdot T_k(t), \\
 \tilde{Q}_z^s(x,t) &= \sum_{k=1}^{k=\infty} Q_{zk}^s(x) \cdot T_k(t), \\
 \tilde{Q}_z(x,t) &= \sum_{k=1}^{k=\infty} Q_{zk}(x) \cdot T_k(t). \tag{3.76}
 \end{aligned}$$

Аналізуючи ці вирази, можна зробити висновок, що перші множники визначають характер зміни всіх вказаних величин по довжині стержня. Другий множник відповідає їх зміні у часі. При цьому очевидно, що всі вони у часі змінюються однаково. Крім того, залежності (3.76) свідчать про таке: якщо побудувати епюри величин, що розглядаються по довжині стержня, то їх характер не змінюється в залежності від часу. Вплив часу відбувається за рахунок множення ординат епюр на однаковий множник, що дорівнює значенню функції  $T_k(t)$  у відповідний час.

Беручи до уваги розглянуті питання, можна на підставі залежностей (3.73) та (3.75) отримати формули початкових параметрів:

$$\begin{aligned}
 u_{zk}(x) &= u_{zk}(0) \cdot f_1(x) + \varphi_{yk}(0) \cdot f_2(x) - \\
 &\quad - \frac{M_y(0)}{EI_y} f_3(x) - \frac{Q_z^s(0)}{EI_y} f_4(x), \\
 \varphi_{yk}(x) &= u_{zk}(0) \cdot f_1'(x) + \varphi_{yk}(0) \cdot f_2'(x) - \\
 &\quad - \frac{M_y(0)}{EI_y} f_3'(x) - \frac{Q_z^s(0)}{EI_y} f_4'(x), \\
 M_{yk}(x) &= -EI_y u_{zk}(0) \cdot f_1''(x) - EI_y \varphi_{yk}(0) \cdot f_2''(x) + \\
 &\quad + M_y(0) f_3''(x) + Q_{zs} f_4''(x), \\
 Q_z^s(x) &= -EI_y u_{zk}(0) \cdot f_1'''(x) - EI_y \varphi_{yk}(0) \cdot f_2'''(x) + \\
 &\quad + M_y(0) f_3'''(x) + Q_x^s f_4'''(x), \\
 Q_z(x) &= Q_x^s(x) - EI_y \cdot v^2 \cdot \varphi_y(x) = Q_z^s(x) - N \cdot \varphi_y(x). \quad (3.77)
 \end{aligned}$$

Початкові параметри визначаються з граничних умов, які залежать від умов закріплення кінцевих точок стержня. Розглянемо можливі варіанти граничних умов. Почнемо з жорсткого закріплення (рис. 3.38).

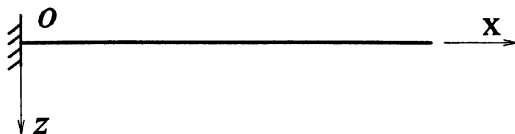


Рис. 3.38. Граничні умови при жорсткому закріпленні стержня

При  $x = 0$

$$u_z(x, t) = 0, \quad \varphi_y(x, t) = 0.$$

Врахуємо залежності (3.77):

$$\sum_{k=1} u_{zk}(0) \cdot T_k(t) = 0$$

$$\sum_{k=1} \varphi_{yk}(0) \cdot T_k(t) = 0.$$

Умови будуть виконані, якщо прийняти:

$$u_{zk}(0) = 0,$$

$$\varphi_{yk}(0) = 0.$$

Аналогічно знайдемо граничні умови для інших варіантів закріплення стержня (рис. 3.39).

	$u_{zk}(0) = 0,$ $M_{yk}(0) = 0$
	$\varphi_{yk}(0) = 0,$ $Q_{zk}^s(0) = 0$
	$M_{yk}(0) = 0,$ $Q_{zk}(0) = 0$

Рис. 3.39. Граничні умови при різних варіантах закріплення стержня

Аналогічний вигляд будуть мати граничні умови на правому кінці стержня, коли  $x$  дорівнює  $l$  ( $x = l$ ).

Звернемо увагу на деякі особливості, які мають місце при розгляді вільних коливань балки. Завдяки відсутності навантаження, диференціальне рівняння (3.65) буде однорідним. Його частинні розв'язки, які залежать від правої частини, дорівнюють нулю, тому система рівнянь, складених на підставі граничних умов для визначення початкових параметрів, буде системою однорідних алгебраїчних рівнянь.

Існують два варіанти розв'язку такої системи, які залежать від визначника  $\Delta$  системи рівнянь. У першому варіанті всі невідомі дорівнюють нулю; це відбувається, коли визначник не дорівнює нулю. Якщо визначник має нульове значення, то виникає другий варіант, у якому всі невідомі або певна їх частка нулю не дорівнюють.

Невідомі величини системи рівнянь, що розглядається, після їх визначення враховуються у формулах (3.77) початкових параметрів. При їх нульових значеннях всі переміщення і зусилля у стержні дорівнюють нулю, тобто коливання стержня не відбувається, він знаходиться у стані спокою. При ненульовому рішенні все навпаки. Переміщення та зусилля виникають у стержні, а це говорить про те, що відбуваються коливання стержня.

Коефіцієнти системи рівнянь, про яку йде мова, дорівнюють значенням функцій  $f_{ik}$  (3.73), а їх величини залежать від коефіцієнтів  $\lambda_k$  та  $\tilde{\lambda}_k$ , які визначаються за формулами (3.70). Розглянувши вирази  $\lambda_k$  та  $\tilde{\lambda}_k$ , можна зробити висновок, що вони пов'язані з частотою власних коливань  $\omega_k$ , це свідчить про залежність від цієї величини визначника  $\Delta$ . З цього випливає, що для знаходження частоти власних коливань  $\omega_k$  потрібно скласти рівняння  $\Delta(\omega) = 0$ . Конкретні пояснення розглянутих питань будуть наведені у прикладі.

Перейдемо до розгляду коливання стержня, який працює на згин. При цьому не враховується поздовжнє зусилля, тобто  $N_x = 0$  та  $\nu = 0$ . Це потребує внесення певних змін у залежності, що стосуються стиснуто-зігнутого стержня. У першу чергу зробимо перетворення формул (3.71), за якими визначаються параметри  $\lambda_k$  та  $\tilde{\lambda}_k$ . Враховуючи, що  $\nu = 0$ , будемо мати:

$$\lambda_k = \tilde{\lambda}_k = \beta_k.$$

Внесемо зміни у формули (3.73). Підставляємо отримані значення  $\lambda_k$  та  $\tilde{\lambda}_k$ :

$$\begin{aligned} f_{1k}(x) &= \frac{1}{2}(\cos \beta_k x + ch \beta_k x), \\ f_{2k}(x) &= \frac{1}{2\beta_k}(\sin \beta_k x + sh \beta_k x), \\ f_{3k}(x) &= \frac{1}{2\beta_k^2}(-\cos \beta_k x - ch \beta_k x), \\ f_{4k}(x) &= \frac{1}{2\beta_k^3}(-\sin \beta_k x + sh \beta_k x). \end{aligned} \tag{3.78}$$

Подальший порядок розрахунку стержня, який працює на згин, повністю співпадає з викладеною методикою при розгляді стиснуто-зігнутого стержня. Потрібно тільки у всіх залежностях замінити функцій, що визначаються за формулами (3.73), на функції (3.78).

#### 3.4.4. Вимушені коливання стиснуто-зігнутого стержня

Розглянемо коливання стержня під дією зовнішнього динамічного навантаження. У цьому випадку необхідно знайти розв'язок неоднорідного рівняння (3.64), який складається із загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Першу складову було отримано у попередньому параграфі, тому достатньо зупинитися на отриманні частинного розв'язку.



Особливістю динамічного навантаження є залежність його від координати  $x$  по довжині стержня та від часу  $t$ . Розглянемо навантаження, яке довільно змінюється по довжині стержня, а за часом змінюється за гармонічним законом:

$$q_z(x, t) = q_z(x) \cdot \sin \Theta t, \quad (3.79)$$

де  $\Theta$  — частота зміни циклів навантаження за  $2\pi$  секунд.

Врахуємо це у рівнянні (3.64):

$$\frac{\partial^4 \tilde{u}_z}{\partial x^4} + v^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial x^2} = \frac{1}{EI_y} q_z(x) \cdot \sin \Theta t.$$

Приймаємо:

$$\tilde{u}_z(x, t) = u_z(x) \sin \Theta t.$$

Підставляючи це у попереднє рівняння, будемо мати:

$$\left( u_z^{IV} + v^2 u_z'' - \alpha^2 \Theta^2 u_z \right) \sin \Theta t = \frac{1}{EI_y} q_z \sin \Theta t.$$

Враховуючи, що у лівій та правій частині є однаковий множник  $\sin \Theta t$ , який при довільному значенні  $t$  не дорівнює нулю, можна записати:

$$u_z^{IV} + v^2 u_z'' - \alpha^2 \Theta^2 u_z = \frac{1}{EI_y} q_z. \quad (3.80)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння можна скласти за аналогією з формулою (3.74). Функції  $f_i(x)$  складаються за аналогією з формулами (3.73).

Необхідно тільки у виразах  $\lambda$  та  $\tilde{\lambda}$  (3.71) замінити  $\omega_k$  на  $\Theta$ , і отримаємо:

$$\lambda_k^* = \sqrt{\frac{v^2 + \sqrt{v^4 + 4\alpha^2 \Theta^2}}{2}}, \quad \tilde{\lambda}_k^* = \sqrt{\frac{-v^2 + \sqrt{v^4 + 4\alpha^2 \Theta^2}}{2}}. \quad (3.81)$$

Частинний розв'язок має вигляд:

$$u_z^* = \frac{1}{EI_y} \int_0^x f_4(x - \xi) q_z(\xi) d\xi. \quad (3.82)$$

Значення частинних розв'язків, які відповідають певним навантаженням, показані на рис. 3.40.

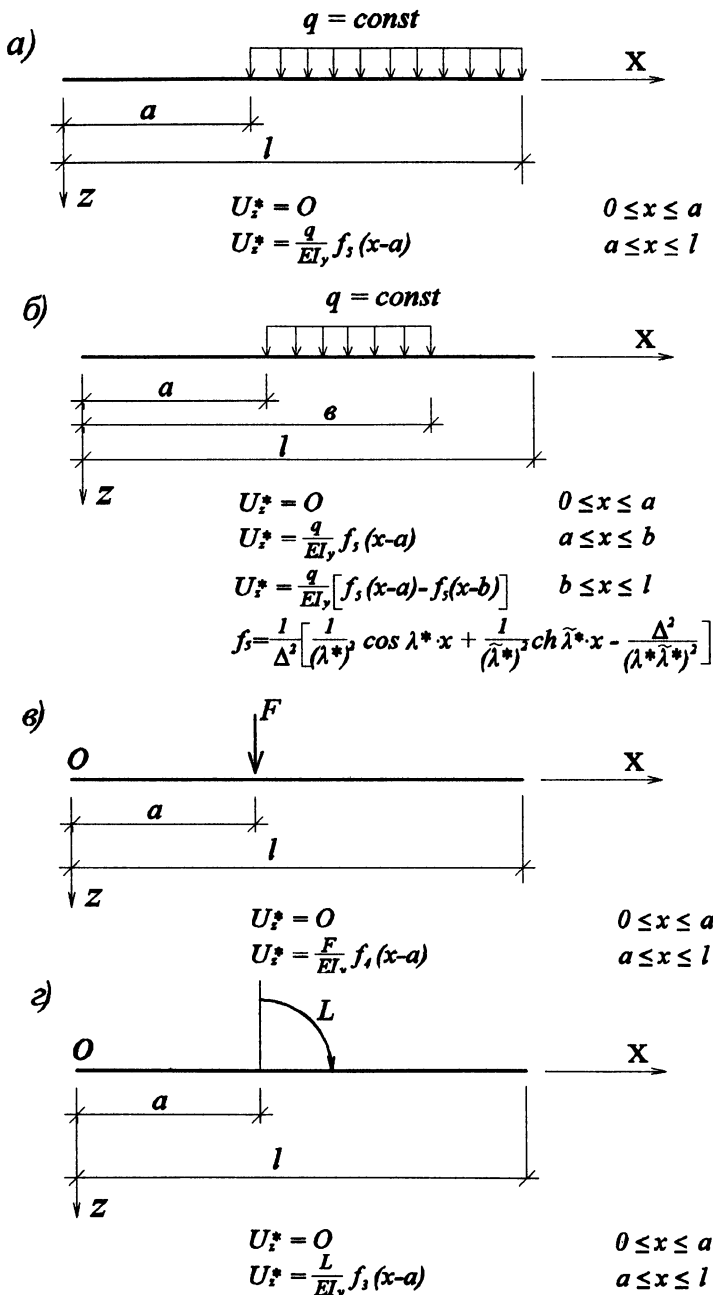


Рис. 3.40. Різні стани навантаження, для яких встановлюються частинні розв'язки

## Глава 3.5. Врахування пластичних деформацій при розрахунку стержня

### 3.5.1. Розрахунок стержня на згин

Усі розглянуті вище методи розрахунку стержня базуються на застосуванні закону Гука, в основу якого покладена пряма пропорційна залежність між напруженнями та деформаціями і який враховує тільки пружні деформації. Граничний стан конструкції, при якому несна здатність вважається вичерпаною, настає при досягненні напруженням хоча б у одній точці значення, що дорівнює межі міцності. Для пластичних матеріалів це є границя текучості. Але саме для пластичних матеріалів у дійсності несна здатність у цьому випадку не буде втрачена. Аналіз напружено-деформованого стану саме у цій стадії роботи конструкції дозволяє встановити більш обґрунтовану оцінку несної здатності.

При напруженнях, які перебільшують межу пропорційності, втрачає силу закон Гука, а також всі залежності і рівняння, що на ньому базуються. У зв'язку з цим дослідження напружено-деформованого стану за межами прямої пропорційності повинні базуватися на інших закономірностях та виконуватися іншими методами. Ці задачі розглядаються у теорії пластичності. У даному курсі обмежимося розглядом деяких простих питань, які застосовуються у практичних розрахунках.

Як і раніше, будемо виходити з припущення про малість деформацій. Замість дійсної діаграми, яка пов'язує напруження та деформації, приймаємо для пластичних матеріалів ідеалізовану діаграму (рис. 3.41).

При її побудові приймаємо, що границя пропорційності співпадає з границею текучості, а довжина площадки текучості нескінченна. Базуючись на цих припущеннях, розглянемо деякі прості напружено-деформовані стани стержня.

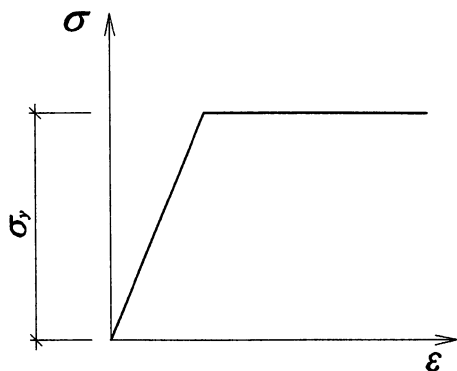


Рис. 3.41. Графік залежності між деформацією та напруженням текучості

Розглянемо плоский згин прямолінійного стержня. Вважаємо, що в стержні виникає тільки згинальний момент. Інші зусилля дорівнюють нулю. Якщо напруження не перебільшують границю пропорційності, їх максимальні значення визначаються за формулою:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{W_y},$$

звідки

$$M_y = \sigma_{xx} \cdot W_y. \quad (3.83)$$

Епюра напружень зображена на рис. 3.42(б).

Максимальні напруження виникають у крайніх волокнах. При розрахунках у межах пружності несна здатність стержня вважається втраченою, якщо ці напруження досягли значення границі текучості.

Експерименти свідчать про те, що при збільшенні навантаження стержень не руйнується, відбувається збільшення напружень у сусідніх волокнах. Епюра приймає вигляд, зображений на рис. 3.42(в). Це відбувається до того часу, доки напруження у всіх волокнах не досягнуть границі текучості (рис. 3.42(г)), після чого стержень втрачає можливість чинити опір подальшому зростанню навантаження.

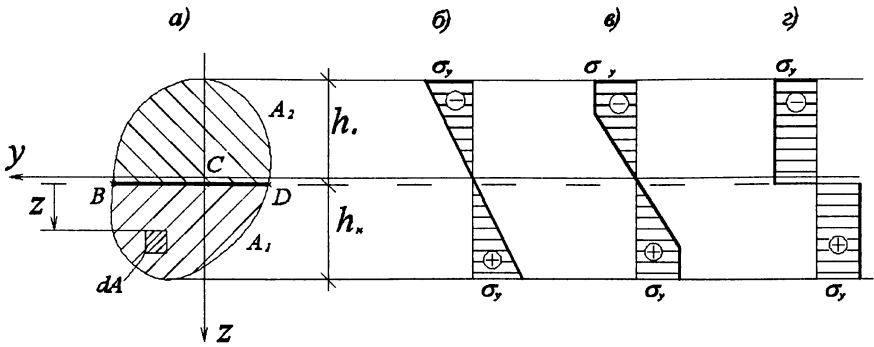


Рис. 3.42. Епюра нормальних напружень, які виникають у стержні при врахуванні пластичних деформацій

Нормальні напруження пов'язані з поздовжнім зусиллям та згинальним моментом такими залежностями:

$$N_x = \iint_A \sigma_{xx} dA,$$

$$M_y = \iint_A z \sigma_{xx} dA.$$

Враховуючи характер епюри  $\sigma_{xx}$  у граничному стані (рис. 3.42(г)), можна записати:

$$N_x = \iint_{A_1} \sigma_y dA - \iint_{A_2} \sigma_y dA,$$

$$M_y = \iint_{A_1} z \sigma_y dA + \iint_{A_2} z \sigma_y dA.$$

У цих формулах  $A_1$  та  $A_2$  відповідають площам нижньої та верхньої частин перерізу, на які він поділяється лінією  $BD$ . У виразах згинального моменту  $z$  відраховується від лінії  $BD$ . По цій лінії відбувається зміна знаку у граничній епюрі нормальних напружень. Беручи до уваги, що напруження  $\sigma_{xx}$  мають у межах кожної частини перерізу постійне значення, його можна у двох попередніх виразах винести з-під знаку інтеграла:

$$N_x = \sigma_y \left( \int_{A_1} dA - \int_{A_2} dA \right) = \sigma_y (A_1 - A_2),$$

$$M_y = \sigma_y \left( \int_{A_1} z dA + \int_{A_2} z dA \right) = \sigma_y (S_1 - S_2),$$
(3.84)

де  $S_1$  та  $S_2$  — статичні моменти нижньої та верхньої частин перерізу відносно лінії  $BD$ .

Якщо, як було зазначено,  $N_x = 0$ , то матимемо:

$$A_1 - A_2 = 0, \text{ або } A_1 = A_2.$$
(3.85)

Тоді лінія  $BD$  поділяє поперечний переріз на дві рівні частини. Ця умова і визначає її розташування. Слід підкреслити, що лінія  $BD$  у загальному випадку не співпадає з віссю  $y$ , що проходить через центр ваги перерізу  $C$ .

Введемо поняття пластичного моменту опору, який приймається рівним сумі статичних моментів:

$$W_{nl} = S_1 + S_2.$$
(3.86)

Враховуючи це у виразі (3.84), отримаємо граничне значення  $M_{y,n}$  загального моменту:

$$M_y^{nl} = \sigma_T W_{nl}.$$
(3.87)

Якщо у перерізі величина загального моменту досягла граничного значення, то цей переріз вже не здатен витримати його збільшення. У точці, де розташований цей переріз, утворюється так званий пластичний шарнір, тобто цей переріз не може чинити опір збільшенню згинального моменту. Ця властивість аналогічна звичайному конструктивному шарніру, який теж не може чинити опір згинальному моменту. При розгляді статично визначуваної балки поява додаткового шарніру перетворює її у геометрично змінну систему (рис. 3.43).

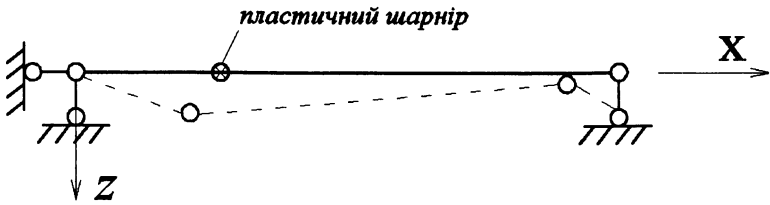


Рис. 3.43. Схема балки при врахуванні пластичного шарніра

Додатковий шарнір перетворює нерухому балку у механізм, і вона втрачає свою несну здатність. Навантаження, яке виникає появу пластичного шарніру, називається руйнівним або граничним навантаженням. Зрозуміло, що пластичний шарнір виникає у точках, де згинальний момент досягає максимального значення.

Звернемо увагу на одну дуже важливу обставину. Значення пластичного моменту опору більше звичайного моменту опору, який застосовується при розрахунку пружних систем. Яка між ними різниця, залежить від форми перерізу. Якщо він має форму прямокутника, то співвідношення між ними таке:

$$W_{nl} = 1,5W.$$

Для двотавра

$$W_{nl} \approx (1,12 \dots 1,1)5W.$$

Ця властивість означає, що при розрахунках з врахуванням пластичних деформацій руйнівне навантаження буде більшим, ніж при розгляді пружних деформацій. Приймаючи однаковий коефіцієнт запасу міцності, при пластичному варіанті можна прийняти менший за розмірами переріз, тобто більш економічний варіант.

Аналізуючи розглянуті питання, можна визначити порядок розрахунку стержня на міцність з урахуванням пластичних деформацій. Починати потрібно з побудови епюри моментів, розглядаючи балку як пружну систему. Це необхідно для встановлення місця екстремальних значень згинального моменту та його залежності від навантаження. Проілюструємо це на конкретній схемі балки (рис. 3.44).

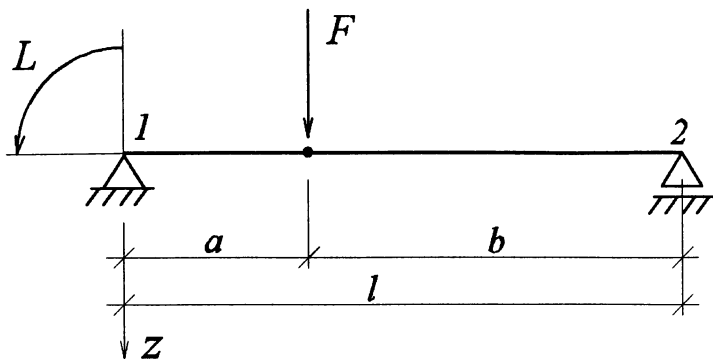


Рис. 3.44. Один з прикладів навантаження стержня, необхідний для пояснень

При побудові епюри моментів застосуємо принцип незалежності навантаження, тобто спочатку побудуємо окремо епюри від навантаження  $L$  та  $F$ , а потім їх додамо і отримаємо остаточну епюру (рис. 3.45).

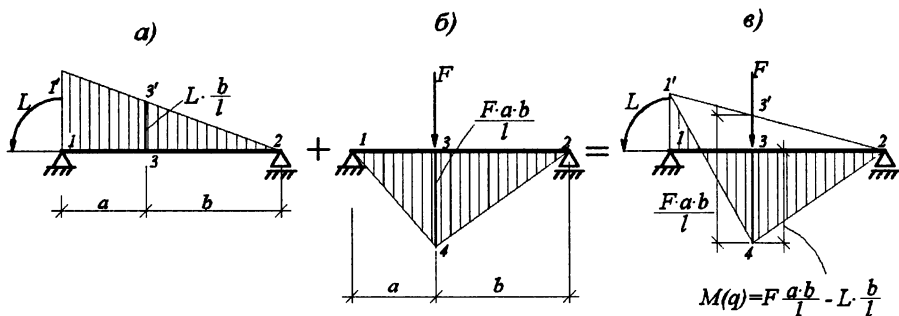


Рис. 3.45. Епюри згинальних моментів для різних станів навантаження

Лінія 1'-2, яка визначена на епюрі від моменту  $L$ , називається лінією опорних моментів. При побудові остаточної епюри (рис. 3.45(в)) вона розглядається як вісь, від якої відкладаються ординати епюри від інших навантажень. У даному випадку це навантаження  $F$ .

Звернемо увагу на особливості додавання епюр, побудованих окремо. Там, де площі епюр накладаються одна на одну, в сумарній епюрі ординати



дорівнюють нулю. В інших частинах вони залишаються без змін і утворюють сумарну епюру.

Перейдемо до знаходження зусиль та побудови їх епюр з урахуванням пластичних деформацій. Крім того, при цьому можна знайти руйнівне значення зовнішнього навантаження. Розглянемо варіант, коли момент  $L$  залишається без змін, а сила  $F$  збільшується, доки балка не зруйнується. При зростанні сили  $F$  ставатимуть більшими ординати, що залежать від неї.

Максимальне значення має ордината 3-4 (рис. 3.45(в)). Навантаження  $F$  буде збільшуватися, доки у перерізі у точці 3 епюра  $\sigma_{xx}$  не прийме такого вигляду, як на рис. 3.42(г). У цьому випадку максимальне значення ординати 3-4 сумарної епюри моментів може бути визначена за формулою (3.87):

$$M_{3-4}^{nn} = M_y^{nn} = \sigma_T \cdot W_{nl}.$$

Для того, щоб отримати за цією формулою значення  $M_{3-4}^{nn}$ , необхідно прийняти розміри і форму перерізу та за формулою (3.86) знайти  $W_{nl}$ . При вказаному зростанні сили  $F$  вигляд епюри (рис. 3.45(в)) залишається без змін, а тільки збільшуються її ординати (рис. 3.46).

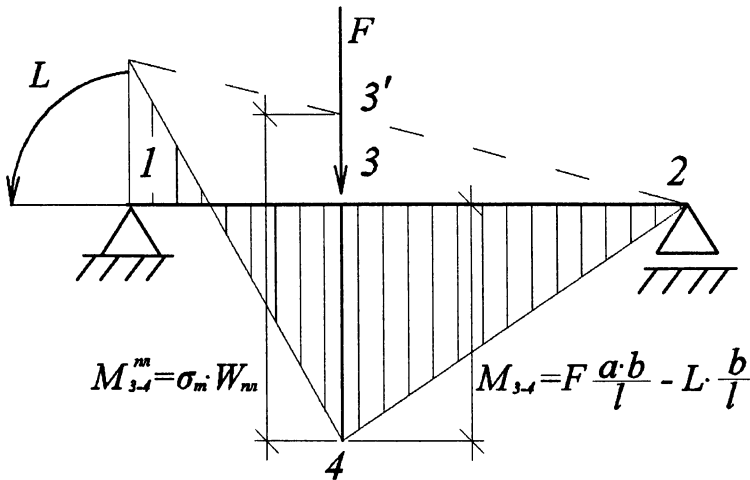


Рис. 3.46. Епюра згинального моменту при утворенні пластичного шарніра

Залежність ординати  $M_{3-4}(q)$  від навантаження залишається такою самою, як на рис. 3.45(в), це дозволяє скласти вираз:

$$M_{3-4}^{nl} = M_{3-4},$$

або

$$\sigma_T W_{nl} = F \frac{ab}{l} - L \frac{b}{l}.$$

Звідси знайдемо граничне значення навантаження  $F_{zp}$ , при якому у точці 3 виникає пластичний шарнір і балка руйнується:

$$F_{zp} = \frac{1}{a} \left( \sigma_T W_{nl} \frac{l}{b} + L \right).$$

Для отримання допустимого значення сили  $F_{adm}$  необхідно його граничне значення поділити на коефіцієнт запасу міцності  $K$ :

$$F_{adm} = \frac{F_{zp}}{K}.$$

Перейдемо до розгляду статично невизначуваних балок. Усі пояснення зробимо, застосовуючи конкретну схему (рис. 3.47).

У першу чергу необхідно встановити характер епюри згинального моменту, вважаючи балку пружною. Конкретні значення ординат цієї епюри визначати не обов'язково. Потрібно тільки встановити, у яких точках кожного прольоту виникають найбільші значення моментів. Саме в цих перерізах при зростанні навантаження до граничної межі будуть виникати пластичні шарніри. Загальні моменти у кожному з цих перерізів визначаються за формулою (3.87). Відкладемо значення цих моментів  $M_y^{nl}$  у точках, що знаходяться на опорах, і з'єднаємо їх прямими лініями. Отримаємо епюру опорних моментів (рис. 3.48(а)).

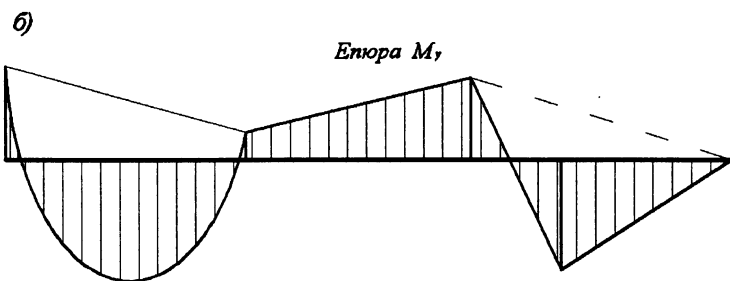
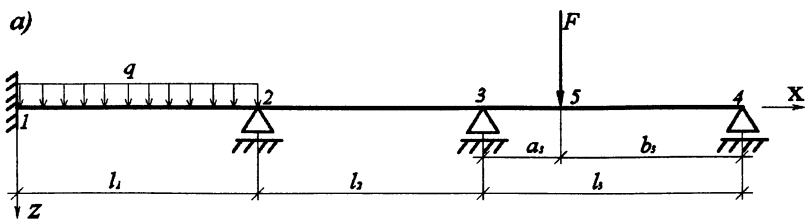


Рис. 3.47. Епюра моментів у статично невизначуваному стержні без врахування пластичних деформацій

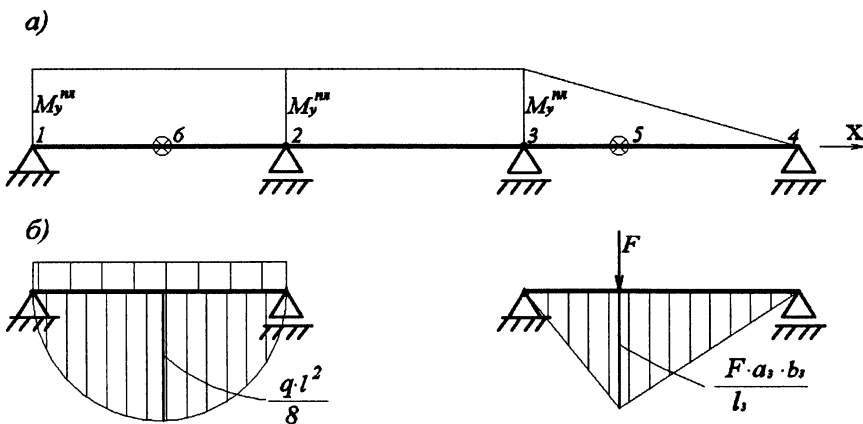


Рис. 3.48. Епюра моментів на різних ділянках стержня

Побудуємо епюри моментів у кожному прольоті, де прикладене навантаження, розглядаючи кожен проліт як балку на двох шарнірних опорах (рис. 3.48(б), (в)). Накладаємо ці епюри на епюру опорних моментів,

враховуючи, що у проміжних точках цих прольотів (точки 5 та 6) моменти дорівнюють  $M_y^{nl}$ . Внаслідок цього отримуємо епюру моментів з врахуванням пластичних деформацій (рис. 3.49).

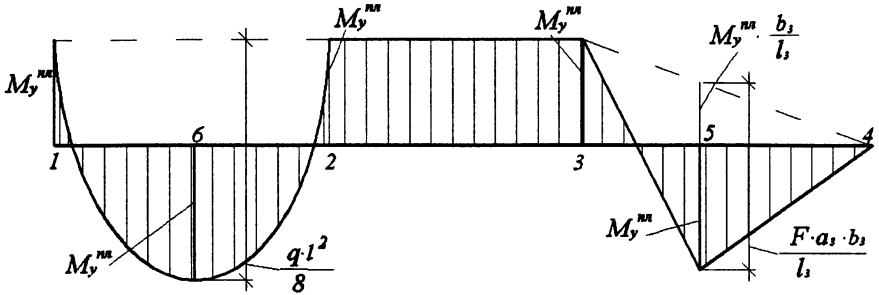


Рис. 3.49. Епюра моментів у статично невизначуваному стержні при врахуванні пластичних деформацій

Підкреслимо, що завдяки однаковому значенню моментів у точках 1 та 2 точка 6 буде розташована посередині першого прольоту. Аналізуючи побудовану епюру, можна скласти такі дві залежності:

$$M_y^{nl} + M_y^{nl} = \frac{ql_1^2}{8},$$

$$M_y^{nl} + M_y^{nl} \frac{b_3}{l_3} = \frac{F a_3 b_3}{l_3}.$$

Підставимо  $M_y^{nl} = \sigma_T \cdot W_{nl}$  і знайдемо граничні значення навантажень  $q_{zp}$  та  $F_{zp}$ :

$$q_{zp} = \frac{16\sigma_T \cdot W_{nl}}{l_1^2},$$

$$F_{zp} = \frac{\sigma_T \cdot W_{nl} (l_3 + b_3)}{a_3 b_3}.$$

Накреслимо схему балки з урахуванням пластичних шарнірів (рис. 3.50).

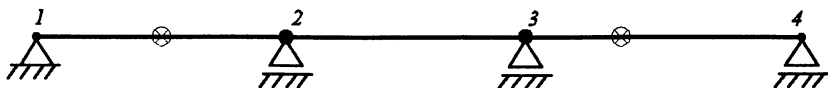


Рис. 3.50. Схема розташування пластичних шарнірів у статично невизначуваному стержні

Проаналізувавши цю схему, можна чітко визначити, що балка перетворилась у рухомий механізм, тобто втратила свою несну здатність. Зауважимо, що на ділянці балки 2-3 пластичні шарніри виникають у всіх перерізах цієї ділянки.

### 3.5.2. Врахування пластичних деформацій для інших напружено-деформованих станів

Розглянемо чисте кручення стержня круглого поперечного перерізу (рис. 3.51).

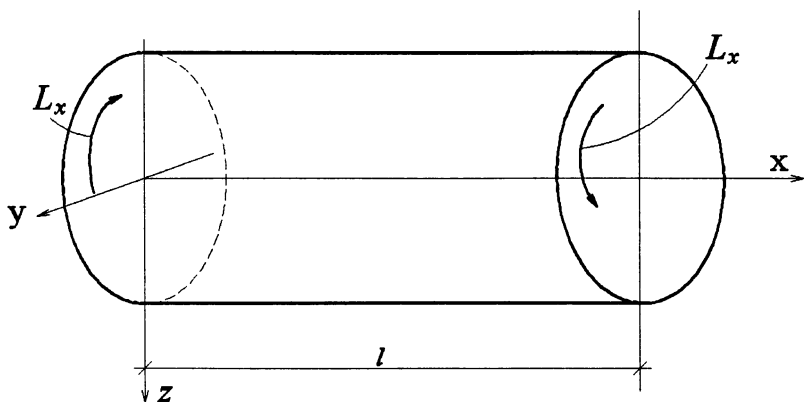


Рис. 3.51. Стержень, який розраховується на кручення з урахуванням пластичних деформацій

Повне дотичне напруження  $\tau_{\rho x}$  дорівнює їх сумі (рис. 3.52):

$$\tau_{\rho x} = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yx}^2} = G\phi'_x \sqrt{y^2 + z^2} = G\phi'_x \cdot \rho.$$

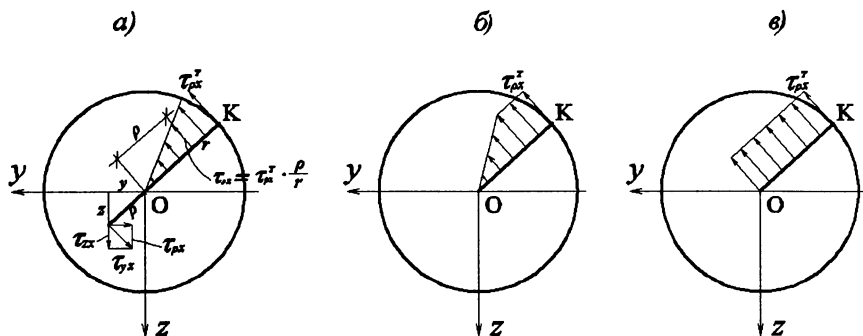


Рис. 3.52. Епюра дотичних напружень при врахуванні пластичних деформацій

Якщо стержень розглядати як пружну систему, то коли максимальне значення  $\tau_{\rho x}$  у точці  $K$  досягає величини  $\tau$  текучості, вважається, що стержень втрачає свою несну здатність. Але в пластичних матеріалах цього не відбувається. Так само, як і при згині стержня, напруження починають зростати в інших точках (рис. 3.52(б)), а втрата несної здатності відбувається, коли напруження досягають в усіх точках перерізу значення  $\tau$  текучості (рис. 3.52(в)).

Знайдемо граничні значення моментів кручення, при яких стержень руйнується. Розглянемо два варіанти: коли у стержні виникають тільки пружні деформації і пластичні деформації. Перший варіант отримаємо, користуючись рис. 3.52(а), а другий — беручи до уваги рис. 3.52(в).

Граничний момент при пружних деформаціях:

$$M_{x,zp}^{np} = \iint_A \tau_{\rho x} \cdot \rho \cdot dA.$$

Елемент площі  $dA = \rho d\varphi \cdot d\rho$ , тоді:

$$M_{x,zp}^{np} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \tau_{\rho x}^T \frac{\rho}{r} \rho \cdot \rho \cdot d\rho = \tau_{\rho x}^T \cdot \frac{2\pi r^3}{2} = \tau_{\rho x}^T \cdot \frac{\pi d^3}{16}.$$

Момент опору кручення стержня при пружних деформаціях  $W_x^{np}$  дорівнює:

$$W_x^{np} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Врахуємо це у попередньому виразі:

$$M_{x,zp}^{np} = \tau_{\rho x}^T \cdot W_x^{np}.$$

Граничний момент кручення при пластичних деформаціях знайдемо, на підставі рис. 3.52(в).

$$M_{x,zp}^{np} = \iint_A \tau_{\rho x} \cdot \rho \cdot dA = \tau_{\rho x}^T \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho^2 \cdot d\rho = \tau_{\rho x}^T \cdot \frac{2\pi r^3}{3} = \tau_{\rho x}^T \cdot \frac{\pi d^3}{12}.$$

Пластичний момент опору кручення має значення:

$$W_x^{nl} = \frac{\pi d^3}{12}. \quad (3.88)$$

Підставимо у попередній вираз:

$$M_{x,zp}^{nl} = \tau_{\rho x}^T \cdot W_x^{nl}. \quad (3.89)$$

Порівняємо  $W_x^{nl}$  із  $W_x^{np}$ :

$$\frac{W_x^{nl}}{W_x^{np}} = \frac{\pi d^3}{12} \cdot \frac{16}{\pi d^3} = \frac{4}{3} = 1,333.$$

Таким чином, пластичний момент опору у 1,333 разів більше пружного моменту опору. Таке саме співвідношення буде і між граничними моментами:

$$M_{x,zp}^{nl} = 1,333 \cdot M_{x,zp}^{np}.$$

Отримані залежності дозволяють зробити висновок, що зовнішнє граничне навантаження у вигляді моменту кручення  $L$ , при якому втрачається

несна здатність стержня, з врахуванням пластичних деформацій буде в 1,333 рази більшим у порівнянні з граничним моментом, який визначається для пружних деформацій.

Якщо переріз має вигляд труби (рис. 3.53), граничне значення моменту буде дорівнювати:

$$M_{x,zp}^{np} = \tau_{\rho x}^T \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho^2 \cdot d\rho = \tau_{\rho x}^T \cdot \frac{\pi d^3}{12} \left(1 - \frac{d_0^3}{d^3}\right). \quad (3.90)$$

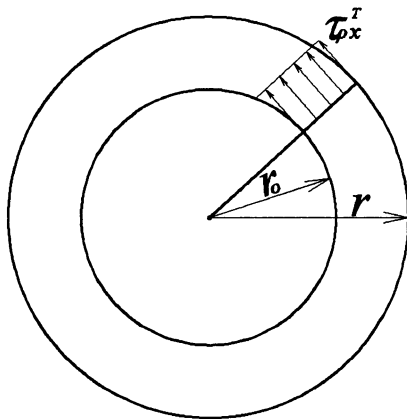


Рис. 3.53. Епюра дотичних напружень у перерізі, що має форму труби

Перейдемо до розгляду іншого виду конструкцій, в яких пластичні деформації враховуються у стержнях, що працюють на розтяг або стиск (рис. 3.54). Це стосується статично невизначуваних систем.

Система один раз статично невизначувана. При розрахунку цієї системи будемо вважати, що горизонтальна балка має велику жорсткість, тому її деформації не будемо враховувати. Приймаємо до уваги тільки деформування трьох вертикальних стержнів. Потрібно знайти величину навантаження  $F$ , при якому система втрачає несну здатність.



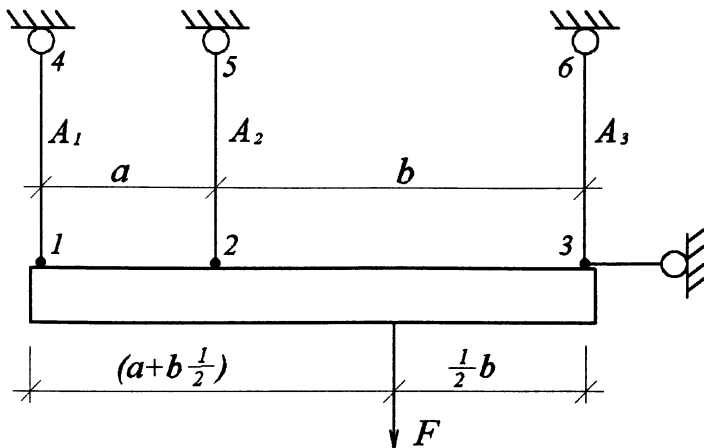


Рис. 3.54. Приклад для розрахунку з урахуванням пластичних деформацій від дії поздовжнього зусилля

Ознакою руйнування системи, яку розглядаємо, буде втрата несної здатності двох вертикальних стержнів, яких саме — не має значення. Почнемо з припущення, що міцність втрачають стержні 2-5 та 3-6, це означає, що нормальні напруження в них досягають значення межі текучості  $\sigma_T$ . У вертикальних стержнях виникають тільки поздовжні зусилля, тому для вказаних стержнів вони будуть дорівнювати:

$$N_{2-5} = \sigma_T \cdot A_2, \quad N_{3-6} = \sigma_T \cdot A_3.$$

Враховуючи ці значення, розглянемо рівновагу горизонтальної балки (рис. 3.55).

Невідомими є три величини  $N_{1-3}$ ,  $R_3$ ,  $F$ . Для їх визначення складемо систему трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum x &= 0, & R_3 &= 0 \\ \sum M_1 &= 0, & N_{2-5} \cdot a + N_{3-6} \cdot (a + b) - F(a + \frac{1}{2}b) &= 0 \\ \sum M_k &= 0, & N_{2-5} \cdot \frac{b}{2} - N_{3-6} \cdot \frac{b}{2} + N_{1-4}(a + \frac{1}{2}b) &= 0. \end{aligned}$$

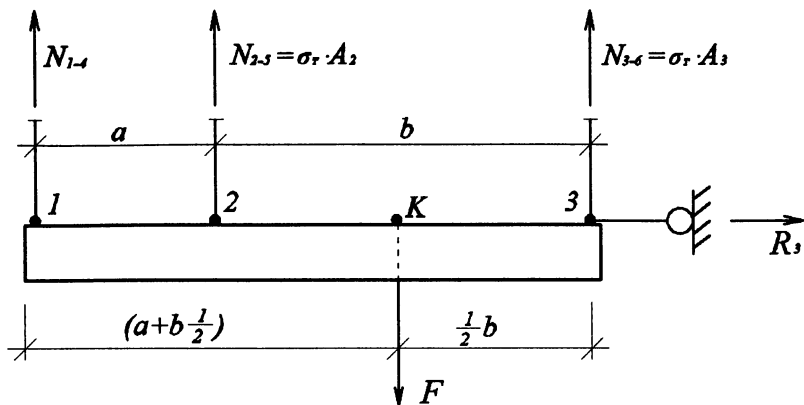


Рис. 3.55. Розрахункова схема, за якою складаються умови рівноваги

Після підстановки значення  $N_{2-5}$  та  $N_{3-6}$  знайдемо:

$$F_{zp} = \sigma_T \frac{2[A_2 \cdot a + A_3(a+b)]}{(2a+b)},$$

$$N_{1-4} = \sigma_T (A_3 - A_2) \frac{b}{2a+b}.$$

Якщо прийняти  $A_1 = A_2 = A$ ;  $A_3 = 2A$ , матимемо:

$$F_{zp} = \sigma_T A \frac{2(3a+2b)}{2a+b},$$

$$N_{1-4} = \sigma_T A \frac{b}{2a+b}.$$

Напруження у стержні 1-4 дорівнює:

$$\sigma_{1-4} = \frac{N_{1-4}}{A} = \sigma_T \frac{b}{2a+b}.$$

Отриманий вираз свідчить про те, що напруження  $\sigma_{1-4} < \sigma_T$ , отже стержень 1-4 не руйнується.

Розглянутий варіант не є остаточним. Потрібно розглянути інші варіанти руйнування системи. Припустимо, напруження  $\sigma_T$  виникають у інших двох стержнях, а саме 1-4 та 2-5. Застосовуючи аналогічну методику, знайдемо

граничне значення навантаження  $F_{zp}$ , що відповідає цьому варіанту руйнування. Необхідно нову граничну величину  $F_{zp}$  порівняти з попередньою. Небезпечним буде варіант, для якого значення  $F_{zp}$  буде найменшим. Необхідно зробити перевірку усіх можливих варіантів.

## Глава 3.6. Приклади до третього розділу

### 3.6.1. Приклад розрахунку статично невизначуваного стержня

Виконати розрахунок статично невизначуваного ламаного стержня, схема якого зображена на рис. 3.56(а).

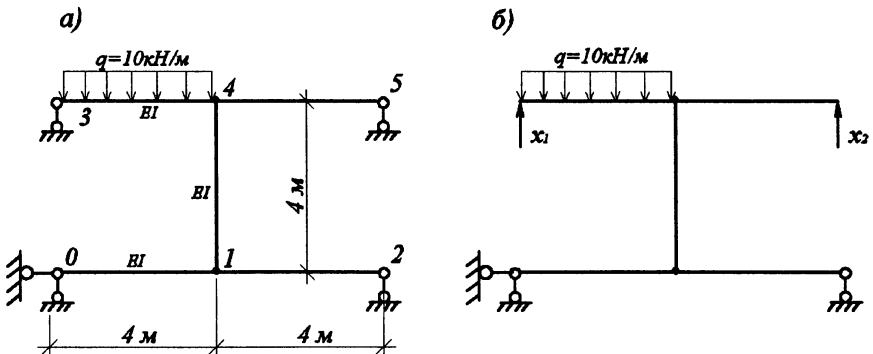


Рис. 3.56. Схеми статично невизначуваного ламаного стержня та його основної статично визначуваної системи

Для виконання розрахунку скористаємось алгоритмом, викладеним у п. 3.1.2.

По-перше встановлюємо степінь статичної невизначуваності. Стержень є плоскою системою, яка має у площині три степені вільності, тому для його закріплення необхідно використати три в'язі. Аналізуючи задану схему,

бачимо, що в'язей накладено п'ять, тобто дві зайві. Отже, заданий стержень двічі статично невизначуваний.

Далі статично невизначувану систему перетворюємо у статично визначувану. Для цього відкидаємо дві "зайві" в'язі, замість яких прикладаємо невідомі сили.

Відкидаємо в'язі у точках 3 та 5. У цих точках у напрямку усунутих в'язей прикладаємо дві невідомі сили  $x_1$  та  $x_2$ . Отримана основна статично визначувана система зображена на рис. 3.56(б). До неї прикладені три види навантаження, а саме: задане  $q$  та дві невідомі сили. Від кожного навантаження окремо будуємо епюри зусиль, при цьому приймаємо  $x_1$  та  $x_2$ , які дорівнюють одиниці. Епюри зазначених зусиль зображені на рис. 3.57.

Для знаходження невідомих  $x_1$  та  $x_2$  складаємо систему рівнянь, яка має такий вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1F} = 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Коефіцієнти системи визначаємо за формулою Мора.

$$\delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{EI} \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{EI} = \frac{320}{3EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{22} = -4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{EI} = -\frac{64}{3EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{320}{3EI}.$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{64}{6EI} (0 + 4 \cdot 2 \cdot 20 + 80 \cdot 4) -$$

$$-80 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{EI} - \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{EI} = -\frac{2240}{EI},$$

$$\Delta_{2F} = 80 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{EI} - \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{EI} = \frac{3200}{3EI}.$$

Підставляємо ці значення у систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{320}{3}x_1 - 64x_2 - 2240 = 0, \\ -64x_1 + \frac{320}{3}x_2 + \frac{3200}{3} = 0. \end{cases}$$

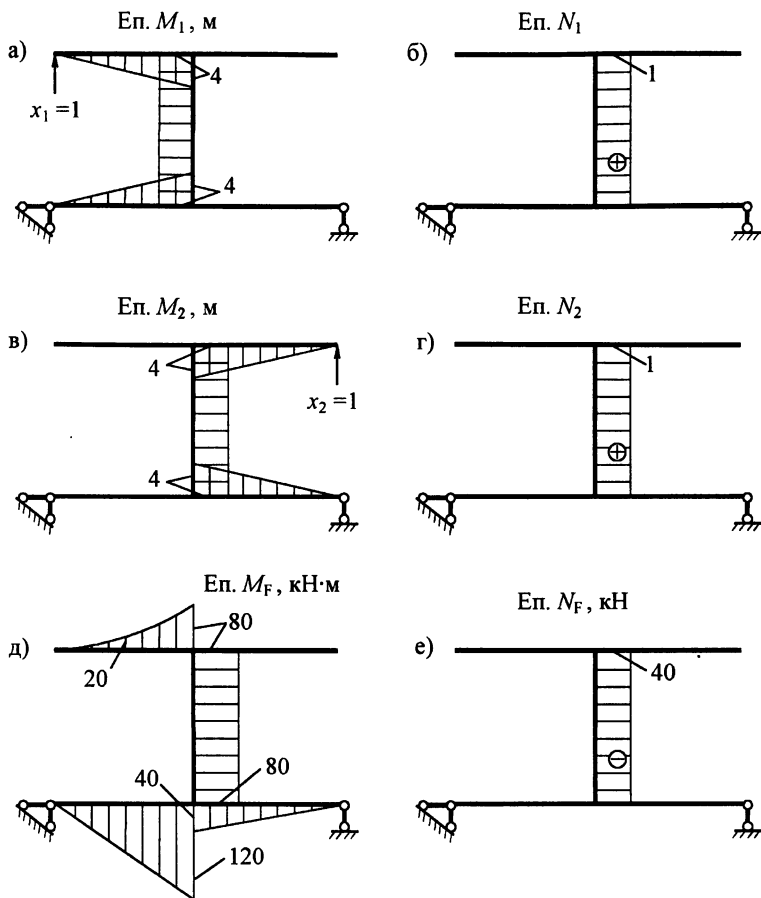


Рис. 3.57. Епюри зусиль у різних станах навантаження основної статично визначуваної системи

Розв'язуємо систему та знаходимо:

$$x_1 = 23,475 \text{ кН}, \quad x_2 = 4,0625 \text{ кН}.$$

Звернемо увагу на те, що при визначенні коефіцієнтів поздовжню силу не враховували, тому що отримані від неї величини значно менші, ніж від моментів. Будуємо дійсні епюри. Епюри стану "1" та "2" множимо на  $x_1$  та  $x_2$  відповідно, та додаємо до епюри "F".

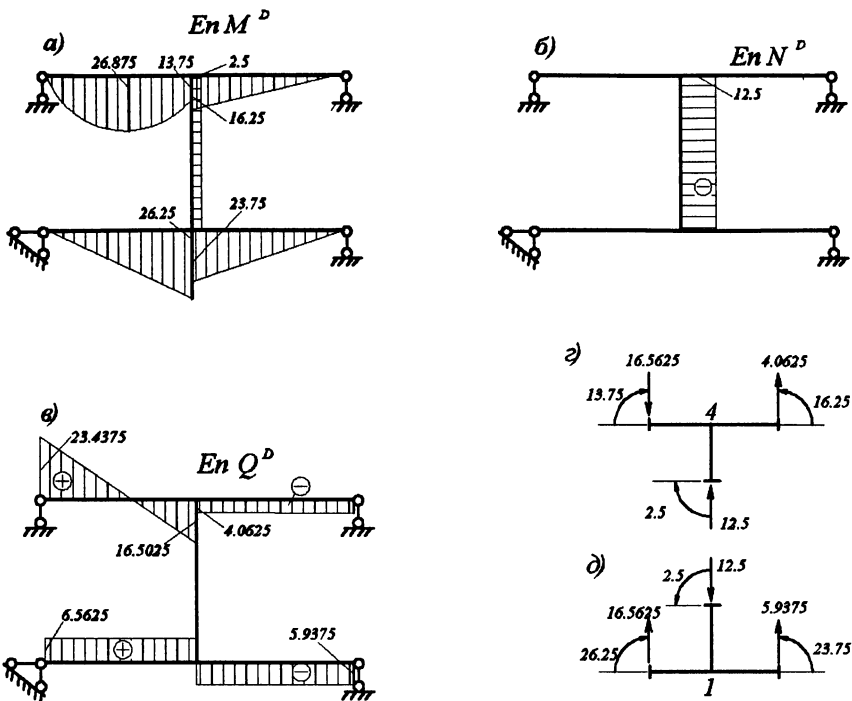


Рис. 3.58. Дійсні епюри зусиль у статично невизначуваному стержні

Виконуємо статичну перевірку дійсних епюр, розглядаючи рівновагу вузлів 1 та 4 (рис. 3.58(г), (д)). Умови рівноваги дотримуються. Також виконуємо кінематичну перевірку. Перевіряємо  $\Delta_{1D}$  та  $\Delta_{2D}$ , які обчислюємо за формулою Мора, використовуючи одиничні та дійсну епюри.

$$\begin{aligned} \Delta_{1D} &= \frac{4}{6EI} (0 + 4 \cdot 2 \cdot 26,875 + 13,75 \cdot 4) - \\ &\quad - 4 \cdot 2,5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{EI} - \frac{1}{2} 26,25 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 0, \\ \Delta_{2D} &= \frac{1}{2} 16,25 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{EI} - \frac{1}{2} 23,75 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{EI} + \\ &\quad + 2,5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{EI} = 0. \end{aligned}$$

Значення  $\Delta_{1D} = 0$  та  $\Delta_{2D} = 0$  свідчать про те, що вертикальні переміщення точок 3 та 5 у заданій статично невизначуваній системі дорівнюють нулю. Це відповідає умовам закріплення.

Також розглянемо розрахунок заданого стержня на дію температури. Температурний стан зображено на рис. 3.59. Стержень має наступні характеристики:  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$ ,  $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$ ,  $EI = 3,68 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$ .

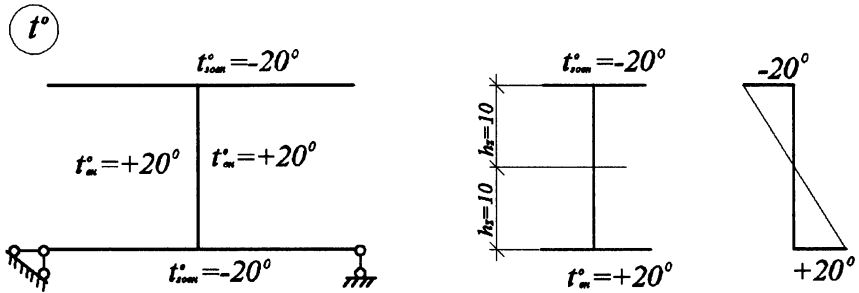


Рис. 3.59. Характер розподілу температури у стержні

Для визначення невідомих  $x_1$  та  $x_2$ , як і в попередньому прикладі, складаємо систему рівнянь. Тільки при визначенні  $\Delta_{1F}$  та  $\Delta_{2F}$  замість стану "F" використовуємо стан "t". Коефіцієнти  $\delta_{11}, \delta_{12} = \delta_{22}, \delta_{21}$  залишаються без зміни.

$$\Delta_{1t^o} = \alpha \left[ t_x^o \int_0^l N_x^1 dx + \frac{t_z^o - t_x^o}{h_z} \int_0^l M^1 dx \right];$$

$$\Delta_{1t^o} = \alpha \left[ 20^\circ \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{20^\circ - 0^\circ}{0,10} \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \right] = 3280 \cdot \alpha = 0,041;$$

$$\Delta_{2t^o} = \alpha \left[ 20^\circ \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{20^\circ - 0^\circ}{0,10} \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \right] = 3280 \cdot \alpha = 0,041.$$

Система рівнянь матиме такий вигляд:

$$\frac{320}{3EI} x_1^{f_0} - \frac{64}{EI} x_2^{f_0} + 0,041 = 0,$$

$$-\frac{64}{EI} x_1^{f_0} + \frac{320}{3EI} x_2^{f_0} + 0,041 = 0.$$

$$x_1^{f_0} = -3,53625 \text{ кН.}$$

$$x_2^{f_0} = -3,53625 \text{ кН.}$$

Будуємо дійсну епюру моментів. Вона складається з двох доданків:

$$M_D^{f_0} = M^1 \cdot x_1^{f_0} + M^2 \cdot x_2^{f_0},$$

та має такий вигляд, показаний на рис. 3.60.

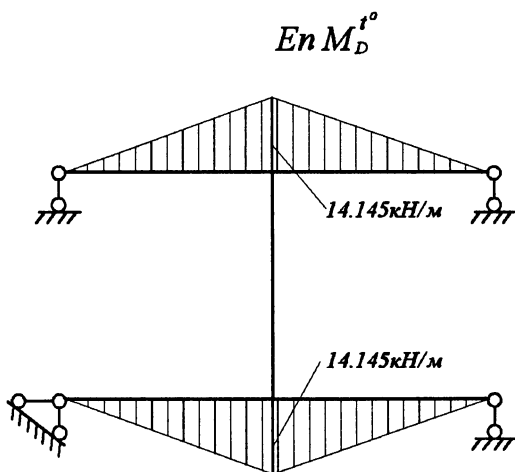


Рис. 3.60. Дійсна епюра у статично невизначуваному стержні від дії температури

Виконуємо кінематичну перевірку:

$$\Delta_{1D}^{f_0} = -2 \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 14,145 \frac{1}{EI} = -0,041,$$

$$\Delta_{2D}^{f_0} = -2 \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 14,145 \frac{1}{EI} = -0,041.$$

Як бачимо, у цьому випадку  $\Delta_{1D}^{f_0} = -\Delta_{1f_0}$ ,  $\Delta_{2D}^{f_0} = -\Delta_{2f_0}$ .



Розглянемо третій варіант розрахунку на вимушене осідання опор.  
 Розрахункову схему зображено на рис. 3.61.

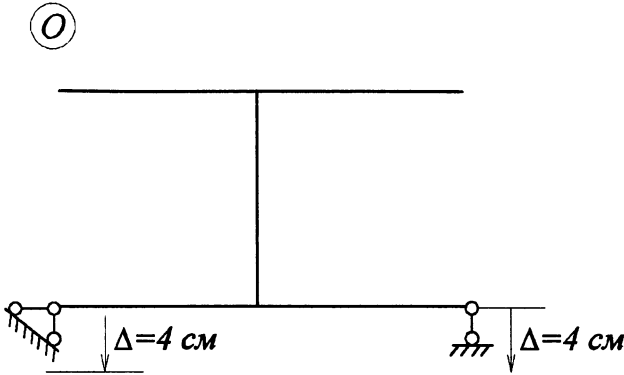


Рис. 3.61. Характер вимушеного переміщення опор ламаного стержня

У системі рівнянь, як у попередньому випадку,  $\Delta_{1F}$  та  $\Delta_{2F}$  потрібно замінити на  $\Delta_{10}$  та  $\Delta_{20}$ , які знаходимо враховуючи вимушене осідання опор:

$$\Delta_{10} = -\Delta \cdot 1 = 0,04 \text{ м}, \quad \Delta_{20} = -\Delta \cdot 1 = 0,04 \text{ м}.$$

Система рівнянь матиме вигляд:

$$\frac{320}{3EI} x_1 - \frac{64}{EI} x_2 - 0,04 = 0,$$

$$-\frac{64}{EI} x_1 + \frac{320}{3EI} x_2 - 0,04 = 0.$$

$$x_1 = 3,45 \text{ кН}, \quad x_2 = 3,45 \text{ кН}.$$

Будуємо дійсну епюру моментів (рис. 3.62).

Виконуємо перевірку:

$$\Delta_{1D}^o = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 13,8 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 0,04,$$

$$\Delta_{2D}^o = 0,04.$$

Аналогічно попередньому випадку  $\Delta_{1D}^o = -\Delta_{10}$ ,  $\Delta_{2D}^o = -\Delta_{20}$ .

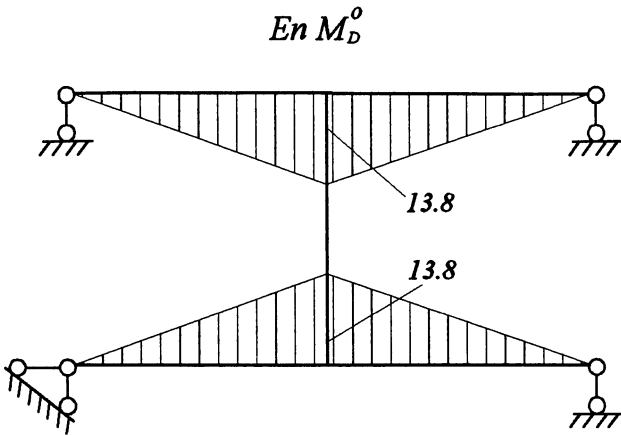


Рис. 3.62. Дійсна епіюра моментів від вимушеного переміщення опор у статично невизначуваному стержні

### 3.6.2. Приклад розрахунку статично невизначуваного стержня

Виконаємо розрахунок другого статично невизначуваного стержня (рис. 3.63).

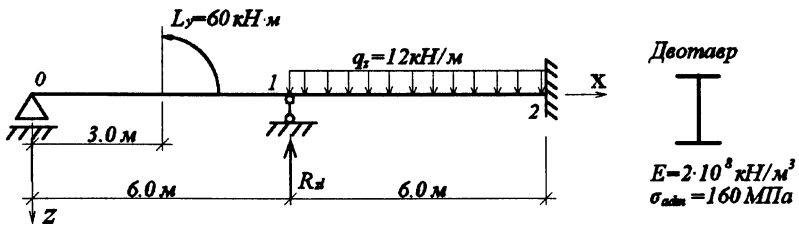


Рис. 3.63. Схема статично невизначуваного прямолінійного стержня

Аналізуючи умови закріплення, можна стверджувати, що стержень двічі статично невизначуваний. Для перетворення його на статично визначувану систему потрібно усунути дві в'язі. Відкидаємо зайві в'язі у точках 1 та 2. Тоді

основна статично визначувана система матиме такий вигляд, показаний на рис. 3.64.

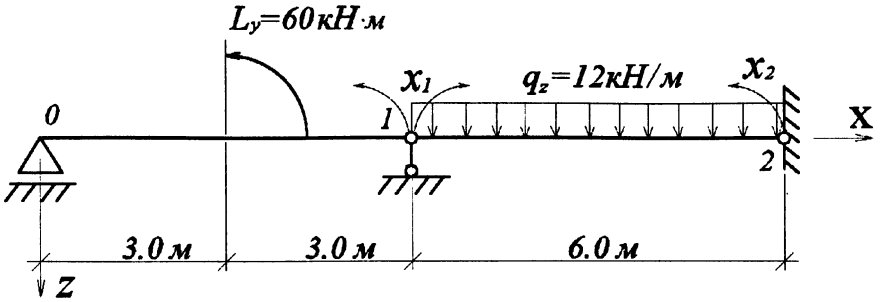


Рис. 3.64. Основна статично визначувана система

Для визначення невідомих  $x_1$  та  $x_2$  складаємо систему рівнянь:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1F} = 0,$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

Для знаходження коефіцієнтів системи будуємо епюри моментів у двох одиничних і вантажному станах (рис. 3.65).

Обчислюємо коефіцієнти:

$$\delta_{11} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI} = \frac{4}{EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI} = \frac{1}{EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI} = \frac{2}{EI}.$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{EI} - \frac{3}{6EI} (0,5 \cdot 30 + 4 \cdot 0,75 \cdot 15 + 0) + \\ &+ \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 54 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI} = \frac{93}{EI}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{2F} = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 54 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI} = \frac{108}{EI}.$$

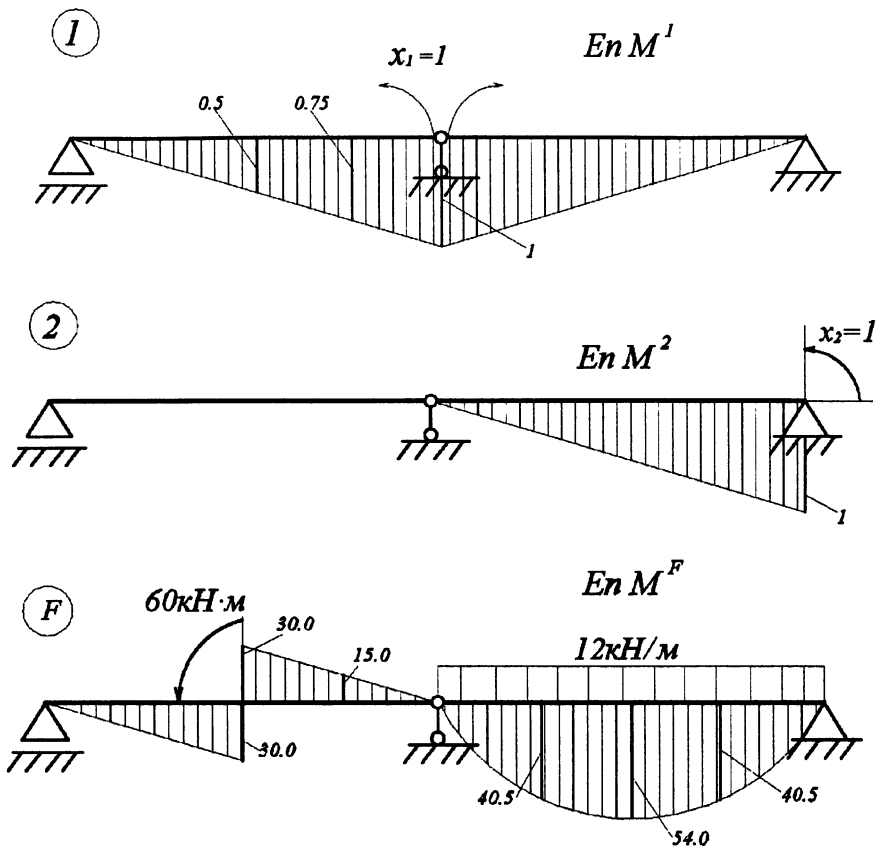


Рис. 3.65. Епюри зусиль у різних станах навантаження основної статично визначуваної системи

Підставляємо коефіцієнти у систему рівнянь:

$$4x_1 + x_2 + 93 = 0,$$

$$x_1 + 2x_2 + 108 = 0.$$

$$x_1 = -11,14 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad x_2 = -48,43 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо дійсні епюри моментів та поперечних зусиль (рис. 3.66).

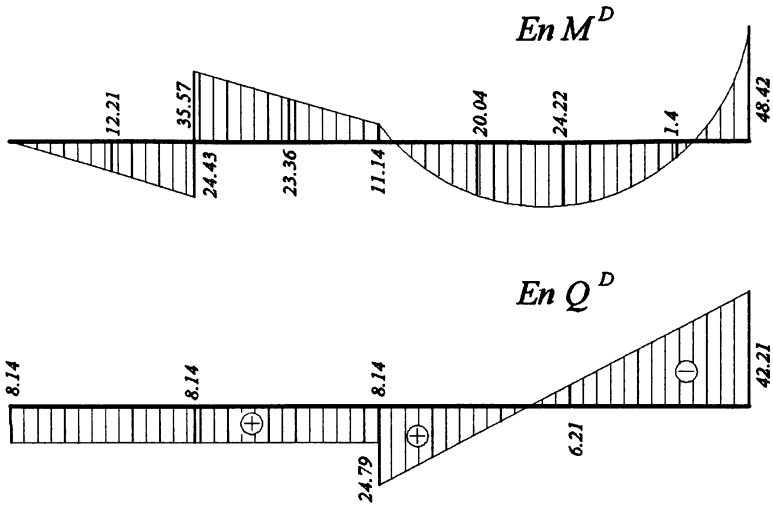


Рис. 3.66. Дійсні епюри у статично невизначуваному стержні

З умови міцності підбираємо двотавр.

$$W_{\max} = \frac{W_{\max}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{48,42 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{160 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 3,026 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 302,6 \text{ см}^3.$$

Приймаємо двотавр №27,  $W_{\max} = 371 \text{ см}^3$ ,  $\sigma = 130,5 \text{ МПа} < \sigma_{\text{adm}}$ .

Для прямолінійного статично невизначуваного стержня можна застосувати метод початкових параметрів.

Позначимо  $\tilde{u}_z(x) = EI \cdot u_z(x)$ ,  $\tilde{\varphi}_y(x) = EI \cdot \varphi_y(x)$ . У цьому випадку формули матимуть вигляд:

$$\tilde{u}_z(x) = \tilde{u}_z(0) + \tilde{\varphi}_y(0) \cdot x - M_y(0) \frac{x^2}{2} - Q_z(0) \frac{x^3}{6} + \tilde{u}_z^*(x),$$

$$\tilde{\varphi}_y(x) = \tilde{\varphi}_y(0) - M_y(0)x - Q_z(0) \frac{x^2}{2} + \tilde{\varphi}_y^*(x),$$

$$M_y(x) = M_y(0) + Q_z(0)x + M_y^*(x),$$

$$Q_z(x) = Q_z(0) + Q_z^*(x).$$

Відповідно до прикладеного навантаження та з урахуванням невідомої реакції  $R_{z1}$ , частинний розв'язок матиме такий вигляд:

$$\tilde{u}_z^*(x) = 60 \frac{(x-3)^2}{2} + 12 \frac{(x-6)^4}{24} - R_{z1} \frac{(x-6)^3}{6},$$

$$\tilde{\varphi}_y^*(x) = 60(x-3) + 12 \frac{(x-6)^2}{6} - R_{z1} \frac{(x-6)^2}{2},$$

$$M_y^*(x) = -60 - 12 \frac{(x-6)^2}{2} + R_{z1}(x-6),$$

$$Q_z^*(x) = -12(x-6) + R_{z1}.$$

Враховуючи характер закріплення (рис. 3.61), складемо граничні умови:

при

$$x = 0, \quad 1) \tilde{u}_z(0) = 0, \\ 2) M_y(0) = 0,$$

при

$$x = 6, \quad 3) \tilde{u}_z(6) = 0,$$

при

$$x = 12, \quad 4) \tilde{u}_z(12) = 0, \quad 5) \tilde{\varphi}_y(12) = 0.$$

З перших двох граничних умов визначаємо два невідомих початкових параметри. Три інші граничні умови дозволяють скласти систему трьох рівнянь, з яких визначаємо ще три невідомих:  $\tilde{\varphi}_y(0)$ ,  $Q_z(0)$ ,  $R_{z1} = 0$ . Рівняння мають вигляд:

$$\tilde{u}_z(6) = 0, \quad \tilde{\varphi}_y(0) \cdot 6 - Q_z(0) \frac{6^3}{6} + 60 \frac{(6-3)^2}{2} = 0,$$

$$\tilde{u}_z(12) = 0, \quad \tilde{\varphi}_y(0) \cdot 12 - Q_z(0) \frac{12^3}{6} + 60 \frac{(12-6)^2}{24} + 12 \frac{(12-6)^4}{24} - R_{z1} \frac{(12-6)^3}{6} = 0,$$

$$\tilde{\varphi}_y(12) = 0, \quad \tilde{\varphi}_y(0) - Q_z(0) \frac{12^3}{6} + 60(12-3) + 12 \frac{(12-6)^3}{6} - R_{z1} \frac{(12-6)^2}{2} = 0.$$

Звідки знайдемо:  $\tilde{\varphi}_y(0) = 3,857$ ,  $Q_z = 8,143$ ,  $R_{z1} = 21,643$ .

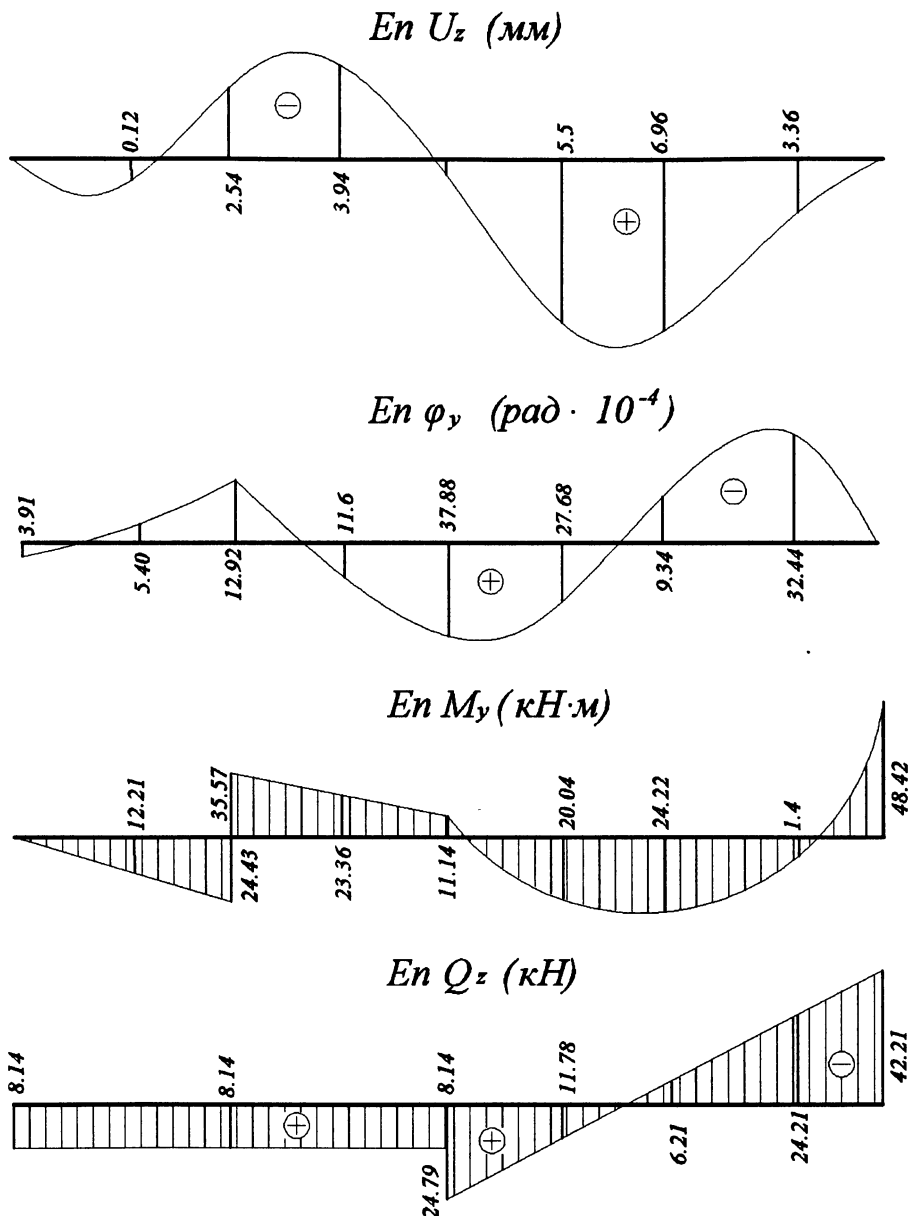


Рис. 3.67. Епюри переміщень та зусиль у прямолінійному статично невизначуваному стержні, які отримані методом початкових параметрів

Підставляємо ці значення у формули для переміщень та зусиль. Після чого будемо епюри (рис. 3.67). При цьому врахуємо, що двотавр №27 має  $I_y = 5010 \text{ см}^4$ . Добуток  $EI_y = 2 \cdot 10^8 \cdot 5010 \cdot 10^{-8} = 10020 \approx 1 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ .

### 3.6.3. Приклад розрахунку балки на пружній основі

Виконати розрахунок балки на пружній основі. Схема балки зображена на рис. 3.68.

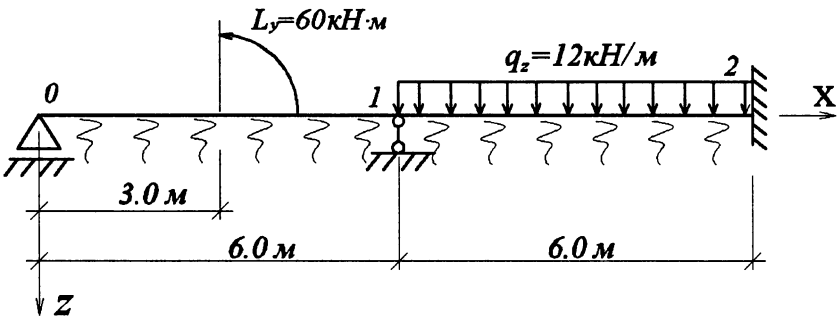


Рис. 3.68. Схема балки, що спирається на пружну основу

Згинальна жорсткість балки  $EI_y = 1 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ .

Ширина балки  $b_y = 0,125 \text{ м}$ .

Коефіцієнт пружності основи  $k_0 = 8,192 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^3$ .

Застосовуємо метод початкових параметрів. Позначимо:

$$\tilde{u}_z(x) = EI_y u_z(x), \quad \tilde{\varphi}_y(x) = EI_y \varphi_y(x), \quad \tilde{u}_z^*(x) = EI_y u_z^*(x),$$

$$\tilde{\varphi}_y^*(x) = EI_y \varphi_y^*(x).$$

Запишемо формули, за якими визначаються переміщення та зусилля.

Вони отримані у параграфі 3.2.2. Це формули (3.22) та (3.23).



$$\begin{aligned}
\tilde{u}_z(x) &= \tilde{u}_z(0) \cdot f_1(x) + \tilde{\varphi}_y(0) \cdot f_2(x) - M_y(0) \cdot f_3(x) - \\
&- Q_z(0) \cdot f_4(x) + \tilde{u}_z^*(x), \\
\tilde{\varphi}_y(x) &= -4\beta^4 \tilde{u}_z(0) \cdot f_4(x) + \tilde{\varphi}_y(0) \cdot f_2(x) - \\
&- M_y(0) \cdot f_2(x) - Q_z(0) \cdot f_3(x) + \tilde{\varphi}_y^*(x), \\
M_y(x) &= 4\beta^4 \tilde{u}_z(0) \cdot f_3(x) + 4\beta^4 \tilde{\varphi}_y(0) \cdot f_4(x) + \\
&+ M_y(0) \cdot f_1(x) + Q_z(0) \cdot f_2(x) + M_y^*(x), \\
Q_z(x) &= 4\beta^4 \tilde{u}_z(0) \cdot f_2(x) + 4\beta^4 \tilde{\varphi}_y(0) \cdot f_3(x) - \\
&- 4\beta^4 M_y(0) \cdot f_4(x) + Q_z(0) \cdot f_1(x) + Q_z^*(x).
\end{aligned}$$

Враховуючи задані активні та реактивні навантаження, складаємо вирази для частинних розв'язків.

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_z^*(x) &= 60f_3(x-3) + 12[1 - f_1(x-6)] \frac{1}{4\beta^4} - R_{z1}f_4(x-6), \\
\tilde{\varphi}_y^*(x) &= 60f_2(x-3) + 12f_4(x-6) - R_{z1}f_3(x-6), \\
M_z^*(x) &= -60f_1(x-3) + 12f_3(x-6) + R_{z1}f_2(x-6), \\
Q_z^*(x) &= 60 \cdot 4\beta^4 f_4(x-3) - 12f_2(x-6) + R_{z1}f_1(x-6).
\end{aligned}$$

За формулою (3.13) визначаємо коефіцієнт  $\beta$ , від якого залежать значення функцій Крилова —  $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ . Чисельні значення цих функцій виписуємо з довідника.

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k_0 \cdot b}{4EI_y}} = \sqrt[4]{\frac{8,192 \cdot 10^3 \cdot 0,125}{4 \cdot 1 \cdot 10^4}} = 0,4 \frac{1}{\text{м}}.$$

За характером закріплення балки визначаємо граничні умови у кінцевих точках балки та додаткову умову у точці 1:

при

$$x = 0, \quad 1) \tilde{u}_z(0) = 0,$$

$$2) M_y(0) = 0,$$

при

$$x = 6, \quad 3) \tilde{u}_z(6) = 0,$$

при

$$x = 12, \quad 4) \tilde{u}_z(12) = 0, \quad 5) \tilde{\varphi}_y(12) = 0.$$

На підставі цих умов складаємо п'ять рівнянь для знаходження п'яти невідомих, що увійшли у розрахункові формули, а саме: чотирьох початкових параметрів та реакції  $R_{z1}$ . Із граничних умов у точці  $x = 0$  визначаємо два початкових параметри. Для визначення решти параметрів залишається скласти тільки три рівняння. Вони матимуть такий вигляд:

$$1) \tilde{u}_z(6) = 0, \quad \tilde{\varphi}_y(0)f_2(6) - Q_z(0)f_4(6) + 60f_3(x-6) = 0,$$

$$2) \tilde{u}_z(12) = 0, \quad \tilde{\varphi}_y(0) \cdot f_2(12) - Q_z(0)f_4(12) + 60f_3(12-3) + \\ + \frac{12}{4\beta^4} [1 - f_1(12-6)] - R_{z1}f_4(12-6) = 0,$$

$$3) \tilde{\varphi}_z(12) = 0, \quad \tilde{\varphi}_y(0)f_1(12) - Q_z(0)f_3(12) + \\ + 60f_2(12-3) + 12f_4(12-6) - R_{z1}f_3(12-6) = 0.$$

Підставляємо значення функцій Крилова у систему рівнянь та отримуємо:

$$-0,3465\tilde{\varphi}_y(0) - 30,4078Q_z(0) = -263,812,$$

$$-69,013\tilde{\varphi}_y(0) + 257,1938Q_z(0) - 30,4078R_{z1} = 919,845,$$

$$5,3164\tilde{\varphi}_y(0) + 189,1181Q_z(0) - 11,5381R_{z1} = 1472,73.$$

Обчислюємо невідомі:

$$\tilde{\varphi}_y(0) = 10,8228, \quad \varphi_y(0) = \frac{\tilde{\varphi}_y(0)}{EI_y} = 5,4114 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

$$Q_z(0) = 8,5525 \text{ кН},$$

$$R_{z1} = 17,5284 \text{ кН}.$$

Підставляємо ці значення у формули переміщень та зусиль та отримуємо:

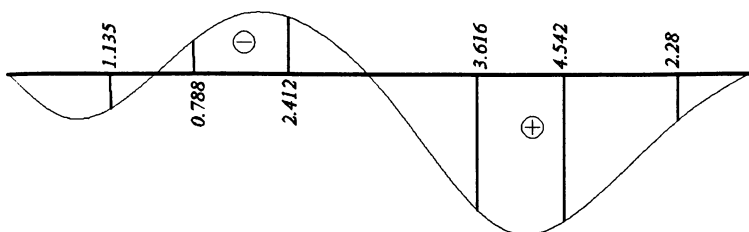
$$\tilde{u}_z(x) = 10,8228f_2(x) - 8,5525f_4(x) + \tilde{u}_z^*(x),$$

$$\tilde{\varphi}_y(x) = 10,8228f_1(x) - 8,5225f_3(x) + \tilde{\varphi}_y^*(x),$$

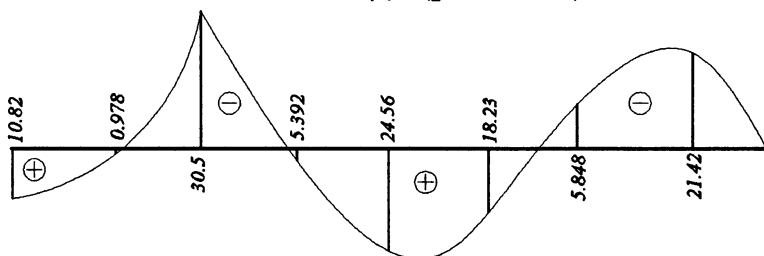
$$M_y(x) = 1,10825f_4(x) + 8,5525f_2(x) + M_y^*(x),$$

$$Q_z(x) = 1,10825f_3(x) + 8,5525f_1(x) + Q_z^*(x);$$

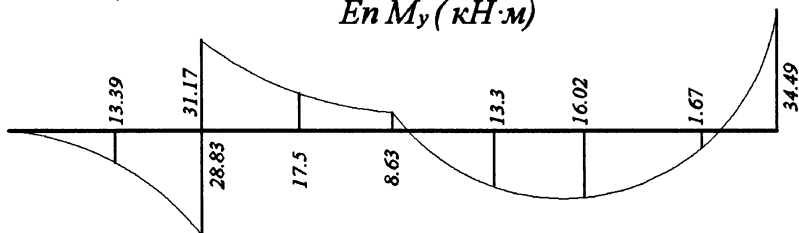
$En U_z$  (мм)



$En \varphi_y$  (рад · 10<sup>-4</sup>)



$En M_y$  (кН·м)



$En Q_z$  (кН)

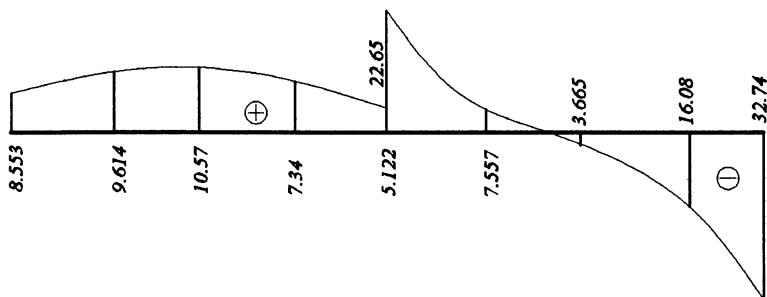


Рис. 3.69. Епюри переміщень та зусиль у балці, що спирається на пружну основу

$$\begin{aligned} \tilde{u}_z^*(x) &= 60f_3(x-3) + 117,188[1 - f_1(x-6)] - 17,5284f_4(x-6), \\ \tilde{\varphi}_z^*(x) &= 60f_2(x-3) + 12f_4(x-6) - 17,5284f_3(x-6), \\ M_y(x) &= -60f_1(x-3) - 12f_3(x-6) + 17,5284f_2(x-6), \\ Q_z(x) &= 6,114f_4(x-3) - 12f_2(x-6) + 17,5284f_1(x-6). \end{aligned}$$

За цими формулам обчислюємо значення переміщень та зусиль, знову використовуючи таблиці функцій Крилова. За результатами будуємо епюри переміщень та зусиль (рис. 3.69).

### 3.6.4. Приклад визначення критичної сили

Виконати розрахунок стиснуто-зігнутого стержня. У першу чергу зупинимось на розв'язку, мета якого полягає у визначенні критичної сили. Розрахункова схема зображена на рис. 3.70.

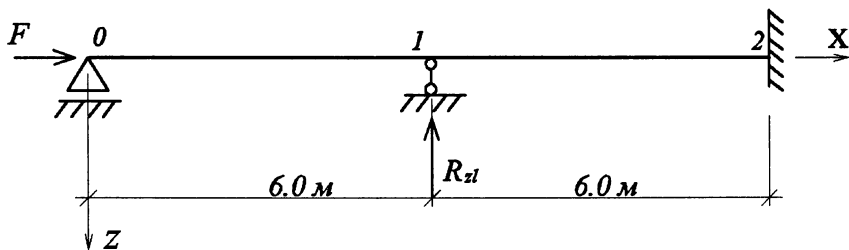


Рис. 3.70. Схема стиснутого стержня для визначення критичної сили

Необхідно визначити величину сили  $F_x$ , яка викличе втрату стійкості стержня.

Для розв'язку застосовуємо метод початкових параметрів.

Позначимо  $\tilde{u}_z(x) = EI_y \cdot y_z(x)$ ,  $\tilde{\varphi}_z(x) = EI \cdot \varphi_y(x)$ .

Запишемо необхідні формули:

$$\tilde{u}_z(x) = \tilde{u}_z(0) \cdot x + \tilde{\varphi}_y(0) \cdot x - M_y(0) \frac{1}{\nu^2} (1 - \cos \nu x) -$$

$$-Q_z(0) \frac{1}{\nu^3} (\nu x - \sin \nu x) + \tilde{u}_z^*(x),$$

$$\tilde{\varphi}_y(x) = \tilde{\varphi}_y(0) - M_y(0) \frac{1}{\nu} \sin \nu x - Q_z(0) \frac{1}{\nu^2} (1 - \cos \nu x) + \tilde{\varphi}_y^*(x),$$

$$\tilde{u}_z^*(x) = -R_{z1} \frac{1}{\nu^3} [\nu(x-6) - \sin \nu(x-6)],$$

$$\tilde{\varphi}_y^*(x) = -R_{z1} \frac{1}{\nu^2} [1 - \cos \nu(x-6)].$$

З розгляду закріплення стержня запишемо граничні умови:

при

$$x = 0, 1) \tilde{u}_z(0) = 0,$$

$$2) M_y(0) = 0,$$

при

$$x = 6, 3) \tilde{u}_z(6) = 0,$$

при

$$x = 12, 4) \tilde{u}_z(12) = 0, 5) \tilde{\varphi}_y(12) = 0.$$

Граничні умови дозволяють скласти п'ять рівнянь, що відповідає кількості невідомих. З перших двох рівнянь можна одразу визначити два початкових параметри:  $\tilde{u}_z(0) = 0$ ,  $M_y(0) = 0$ . Враховуючи їх значення, запишемо ще три рівняння:

$$\tilde{u}_z(6) = 0, \quad \tilde{\varphi}_y(0) \cdot 6 - Q_z(0) \frac{1}{\nu^3} (\nu 6 - \sin \nu 6) = 0,$$

$$\tilde{u}_z(12) = 0, \quad \tilde{\varphi}_y(0) \cdot 12 -$$

$$-Q_z(0) \frac{1}{\nu^3} (\nu 12 - \sin \nu 12) - R_{z1} \frac{1}{\nu^3} [\nu(12-6) - \sin \nu(12-6)] = 0,$$

$$\tilde{\varphi}_z(12) = 0, \quad \tilde{\varphi}_y(0) -$$

$$-Q_z(0) \frac{1}{\nu^2} (1 - \cos \nu 12) - R_{z1} \frac{1}{\nu^2} [1 - \cos \nu(12-6)] = 0.$$

Проаналізуємо отримані рівняння, оскільки вони мають певні особливості. У першу чергу нагадаємо, що відповідно із залежністю (3.32)

$$v^2 = \frac{N_x}{EI_y} \quad \text{або} \quad N_x = EI_y v^2. \quad \text{Величина поздовжнього зусилля} \quad |N_x| = |F_x|.$$

Оскільки значення сили  $F_x$  невідомо, то в отриманих трьох рівняннях буде ще четверта невідома  $v$ , відповідно потрібно скласти ще одне рівняння. Це можна зробити, якщо врахувати, що система трьох рівнянь однорідна. Її невідомі не будуть дорівнювати нулю, якщо визначник системи буде дорівнювати нулю. На цій підставі і отримуємо четверте рівняння.

Визначник має вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6; & -\frac{1}{v^3}(6v - \sin 6v); & \\ 12; & -\frac{1}{v^3}(12v - \sin 12v); & -\frac{1}{v^3}(6v - \sin 6v); \\ 1; & -\frac{1}{v^2}(1 - \cos 12v); & -\frac{1}{v^2}(1 - \cos 6v); \end{vmatrix}$$

Запишемо його у розгорнутому вигляді:

$$\Delta = \frac{6}{v^5}(12v - \sin 12v)(1 - \cos 6v) + \frac{1}{v^6}(6v - \sin 6v)^2 - \frac{6}{v^5}(6v - \sin 6v)(1 - \cos 12v) - \frac{12}{v^5}(6v - \sin 6v)(1 - \cos 6v).$$

Використаємо умову  $\Delta = 0$ .

Як бачимо, у це рівняння увійшла тільки одна невідома  $v$ , яку потрібно знайти з цього рівняння, а потім визначити критичну поздовжню силу.

Для знаходження необхідного значення  $v$  побудуємо графік функції  $\Delta(v)$ . Визначаємо  $\Delta(v_i)$  при різних чисельних значеннях  $v_i$ . Графік зображено на рис. 3.71.

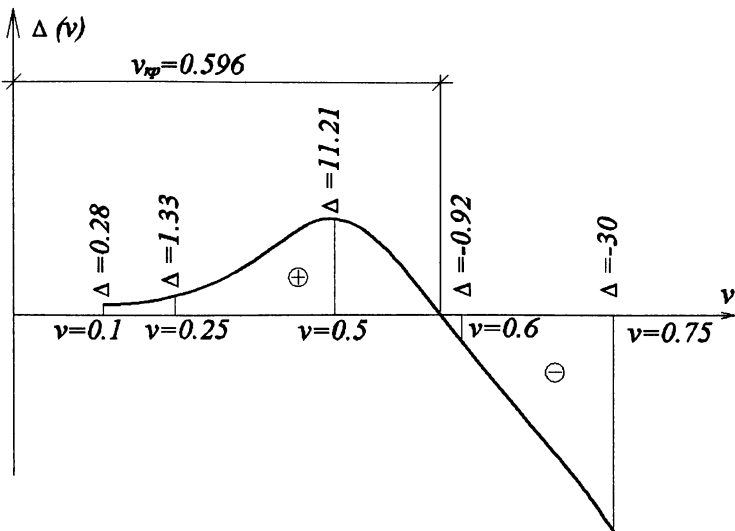


Рис. 3.71. Графік залежності визначника системи рівнянь від коефіцієнта  $v$

Почнемо з  $v=0,1$ . Приймати  $v=0$  недоцільно, тому що у цьому випадку  $N_x = 0$ . Як бачимо, графік функції  $\Delta(v)$  перетинає горизонтальну вісь, коли  $v$  близько 0,6. Якщо уточнити це значення, матимемо, що  $\Delta(v) \approx 0$ , коли  $v = 0,596$ . Отже, наближене значення  $v_{кр} \approx 0,596$  відповідає значенню критичної сили.

$$N_{кр} = EI_y (0,596)^2 = 0,355EI_y.$$

Для визначення критичної сили був застосований метод Ейлера. Але потрібно зауважити, що методика Ейлера обмежена певними умовами. Так, для сталі гнучкість стержня  $\lambda$  повинна бути більшою або рівною 100.

У цьому прикладі встановити точне значення  $\lambda$  неможливо, тому зупинимось на знаходженні наближеного значення. Для цього розглянемо відрізок стержня 0-1 як окремих стержень. Він має шарнірну опору на лівому кінці і пружне закріплення у точці 1 (рис. 3.72).

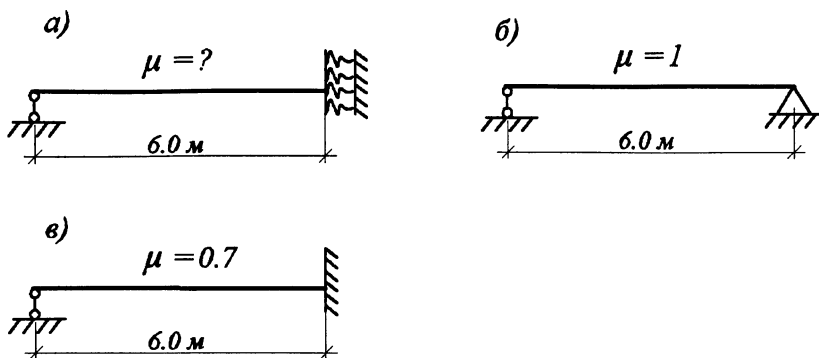


Рис. 3.72. Три різні схеми закріплення однопролітного стержня

Гнучкість  $\lambda$  визначається за формулою:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

На рис. 3.72(б) та (в) зображено стержні, для яких значення  $\mu$  відомі. Якщо порівняти з ними умови закріплення стержня на рис. 3.72(а), то можна стверджувати, що значення коефіцієнта  $\mu$  знаходиться між цими двома величинами:

$$0,7 < \mu < 1.$$

Обираємо середнє значення, тобто:

$$\mu = \frac{1 + 0,7}{2} = 0,85.$$

У цьому випадку максимальний радіус інерції стержня, при якому можна застосувати методу Ейлера, буде дорівнювати  $i = \frac{0,85 \cdot 600}{100} = 5,1$  см, що відповідає двотавру №12 або №14.

Якщо прийняти двотавр більшого розміру, то критичну силу потрібно визначати за формулою Ясинського:

$$\sigma_{кр} = a - \lambda b.$$



Для сталі  $a = 310 \text{ МПа}$ ,  $b = 1,14 \text{ МПа}$ . Знайдемо критичну силу для двотавра №27:

$$i = 11,2 \text{ см}, \lambda = \frac{0,85 \cdot 600}{11,2} = 45,5.$$

$$\sigma_{кр} = 310 - 45,5 \cdot 1,14 = 258,1 \text{ МПа}.$$

Критична сила буде дорівнювати:

$$N_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = 258,1 \cdot 40,2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 = 1037,56 \text{ кН}.$$

Якщо за формулою Ясинського визначити критичні сили у стержнях, що зображені на рис. 3.72(б) та (в), то для двотавра №27 матимемо:

$$N_{кр} = 1000,7 \text{ кН}.$$

$$N_{кр} = 1074,3 \text{ кН}.$$

Всі три значення суттєво не відрізняються.

### 3.6.5. Приклад розрахунку стиснуто-зігнутого стержня

Виконати розрахунок стиснуто-зігнутого стержня, який розглядався у попередньому прикладі за умови, що до нього прикладене поздовжнє навантаження  $F_x = 625 \text{ кН}$ , що складає 0,602 від критичної сили, яку визначаємо за формулою Ясинського. Крім того, прикладене також поперечне навантаження (рис. 3.73). Поперечний переріз стержня двотавр №27.

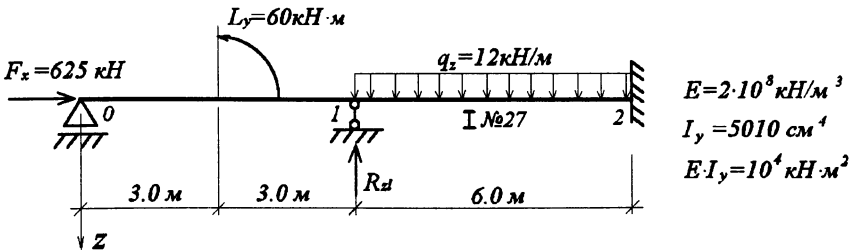


Рис. 3.73. Схема стиснуто-зігнутого стержня

Як і у попередньому прикладі, користуватися будемо методом початкових параметрів. Усі кроки розв'язку аналогічні тим, що застосовувалися у прикладі 3.6.4. Відрізнятися буде тільки частинний розв'язок. Він матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_z^*(x) = & -R_{z1} \frac{1}{\nu^3} [\nu(x-6) - \sin \nu(x-6)] + 60 \frac{1}{\nu^2} [1 - \cos \nu(x-3)] + \\ & + \frac{12}{\nu^4} \left[ \frac{\nu^2(x-6)^2}{2} + \cos \nu(x-6) - 1 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_z^*(x) = & -R_{z1} \frac{1}{\nu^3} [1 - \cos \nu(x-6)] + 60 \frac{1}{\nu} \sin \nu(x-3) + \\ & + \frac{12}{\nu^3} [\nu(x-6) - \sin \nu(x-6)]. \end{aligned}$$

Поздовжнє зусилля у стержні дорівнює навантаженню  $F_x = 625,0$  кН.

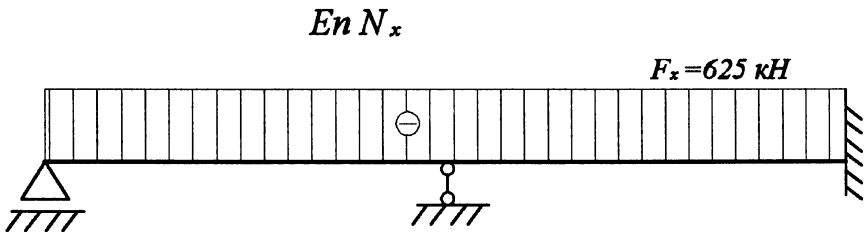


Рис. 3.74. Епора поздовжнього зусилля

Маючи значення  $N_x$ , обчислюємо коефіцієнт  $\nu$ :

$$\nu = \sqrt{\frac{N_x}{EI_y}} = \sqrt{\frac{625,0}{10^4}} = 0,25 \text{ м}^{-1}.$$

Складаємо систему рівнянь для знаходження невідомих. Вона подібна до системи з попереднього прикладу. Відрізняється виразами частинних розв'язків та значенням  $\nu=0,25$ , при якому визначник не буде дорівнювати нулю.

Записуємо систему рівнянь, прийнявши  $\tilde{u}(x) = EI_y u_z(x)$ ,  $\tilde{\varphi}_y = EI_y \varphi_y(x)$ .

$$\tilde{u}_z(6) = 0,$$

$$\begin{aligned} 6\tilde{\varphi}_y(0) - Q_z(0) \frac{1}{0,25^3} (6 \cdot 0,25 - \sin 6 \cdot 0,25) = \\ = -60 \frac{1}{0,25^2} (1 - \cos 3 \cdot 0,25), \end{aligned}$$

$$\tilde{u}_z(12) = 0,$$

$$\begin{aligned} 12\tilde{\varphi}_y(0) - Q_z(0) \frac{1}{0,25^3} (12 \cdot 0,25 - \sin 12 \cdot 0,25) - \\ - R_{z1} \frac{1}{0,25^3} (6 \cdot 0,25 - \sin 6 \cdot 0,25) = \\ = -60 \frac{1}{0,25^2} (1 - \cos 9 \cdot 0,25) - \frac{12}{0,25^4} \left( \frac{0,25^2 \cdot 6^2}{2} + \cos 6 \cdot 0,26 - 1 \right), \end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}_y(12) = 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_y(0) - Q_z(0) \frac{1}{0,25^2} (1 - \cos 12 \cdot 0,25) - \\ - R_{z1} \frac{1}{0,25^2} (1 - \cos 6 \cdot 0,25) = \\ = -60 \frac{1}{0,25} \sin 9 \cdot 0,25 - \frac{12}{0,25^3} (6 \cdot 0,25 - \sin 6 \cdot 0,25). \end{aligned}$$

Розв'язуючи систему, отримуємо:

$$\tilde{\varphi}_y(0) = 1,0268, \quad Q_z(0) = 8,2009, \quad R_{z1} = 21,023.$$

Підставляємо ці значення у вирази для переміщень та зусиль, обчислюємо значення та будемо епюри (рис. 3.75).

Маючи значення зусиль, знайдемо нормальні напруження. Максимальне значення напруження буде на правому кінці стержня.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = -\frac{N_x}{A} - \frac{M_y}{W} = -\frac{625 \cdot 10^3}{40,2 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} - \frac{52,2 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-6} = \\ = 296,2 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

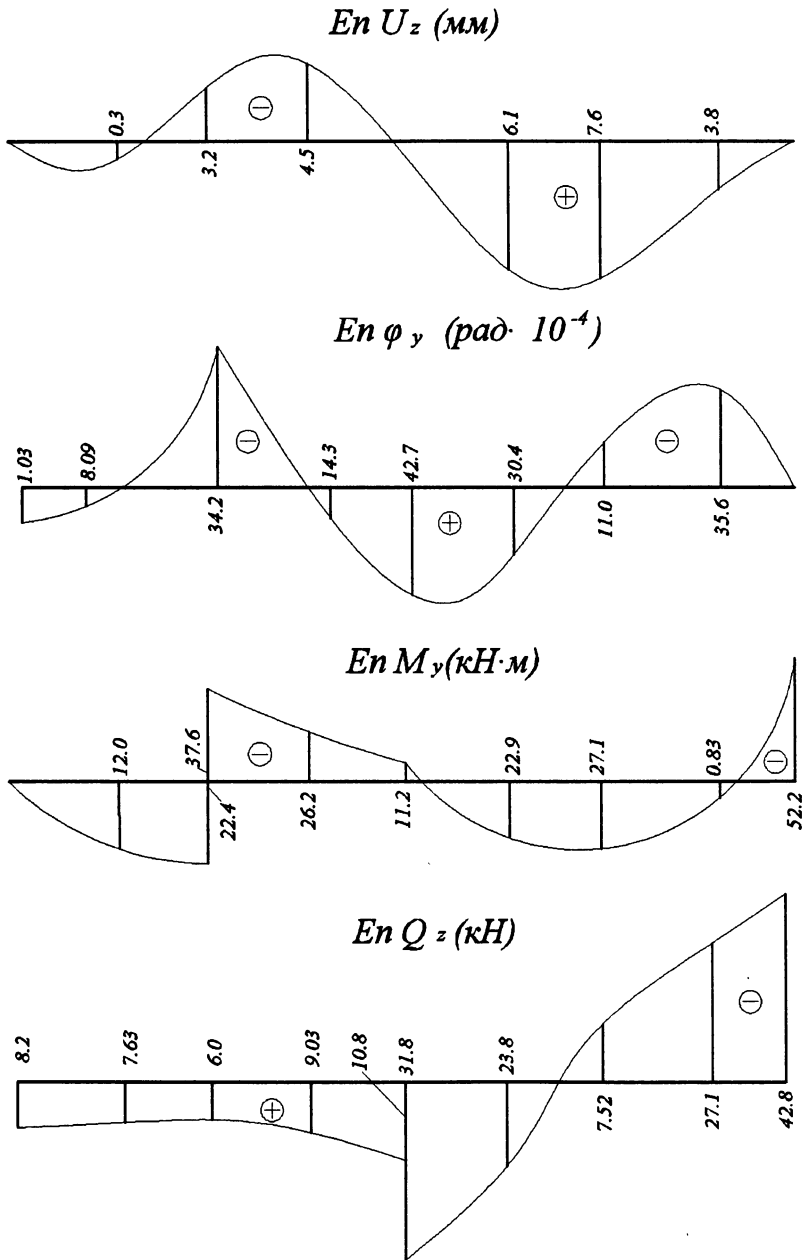


Рис. 3.75. Епюри переміщень та зусиль у стиснуто-зігнутому стержні

Це свідчить про те, що стержень не витримає заданого навантаження, тому, потрібно або збільшити розмір перерізу або зменшити навантаження. Розглянемо варіант зменшення навантаження. Зменшимо поздовжнє навантаження до  $F_x = 121 \text{ кН}$ . Знайдемо коефіцієнт  $\nu$ , який відповідає поздовжній силі  $N_x = 121 \text{ кН}$ .

$$\nu = \sqrt{\frac{121}{1 \cdot 10^4}} = 0,11 \text{ м}^{-1}.$$

Далі повторюємо всі попередні кроки розв'язку, змінюючи  $\nu = 0,25$  на  $\nu = 0,11$ . Обчислимо тільки максимальне значення моменту у небезпечному перерізі і визначимо напруження  $M_{\max} = 49,1 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $N_{\max} = 121 \text{ кН}$ .

$$\sigma_{xx} = -\frac{121 \cdot 10^3}{40,2 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} - \frac{49,10 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = 162,3 \text{ МПа}.$$

Максимальне напруження перевищує допустиме тільки на 1,43%, що вважається прийнятним.

### 3.6.6. Приклад розрахунку стиснутого стержня

Необхідно підібрати розмір  $h$  перерізу дерев'яного стержня (рис. 3.76).

$$\sigma_{adm} = 10 \text{ МПа}.$$

Для розрахунку стиснутого стержня потрібно використовувати формулу (3.50):

$$\sigma = \frac{N_x}{\varphi \cdot A}.$$

Запишемо її в іншому вигляді:

$$A = \frac{N_x}{\varphi \cdot \sigma_{adm}}.$$

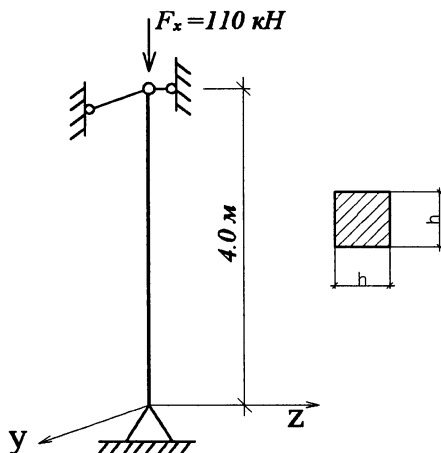


Рис. 3.76. Схема стиснутого стержня

У цій формулі є дві невідомі: це площа  $A$  та коефіцієнт поздовжнього згину  $\varphi$ , тому необхідно застосувати методикку послідовних наближень. Одне з невідомих довільно приймаємо рівним  $\varphi = 0,7$ , а інше визначаємо з формули

$$A = \frac{110 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 10 \cdot 10^6} = 0,01571 \text{ м}^2.$$

Це відповідає розміру  $h = 0,125 \text{ м}$ .

Приймаємо  $h = 0,13 \text{ м}$ . Визначаємо геометричні характеристики перерізу:

$$I_y = I_z = \frac{0,13^4}{12} = 2,38 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4,$$

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{2,38 \cdot 10^{-5}}{0,01571}} = 0,0389 \text{ м}.$$

Знаходимо гнучкість:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{1 \cdot 4,0}{0,0389} = 103.$$

За таблицею 3.1 визначаємо коефіцієнт  $\varphi = 0,599$ .

Він значно менший, ніж був прийнятий, тому при значенні  $h = 0,13$  м міцність стержня забезпечена.

### 3.6.7. Приклад розрахунку власних коливань стержня

Необхідно розрахувати стержень на власні згинальні коливання. Розв'язок задачі полягає у визначенні частоти власних коливань. Виконаємо розрахунок для двох варіантів закріплення однопролітного стержня (рис. 3.77).

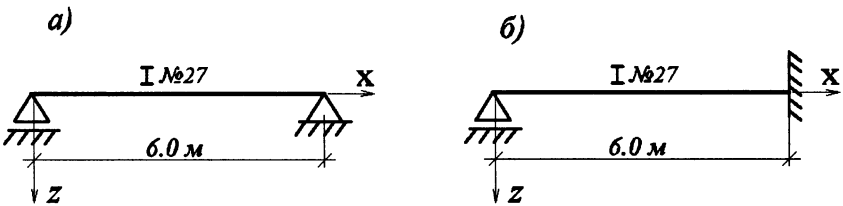


Рис. 3.77. Схеми двох стержнів з різними умовами закріплення для встановлення частоти їх власних коливань

Застосуємо метод початкових параметрів. Поперечне переміщення  $u_z(x)$  визначається за формулою (3.77):

$$u_z(x) = u_z(0)f_1(x) + \varphi_y(0)f_2(x) - \frac{M_y(0)}{EI_y}f_3(x) - \frac{Q_z^s(0)}{EI_y}f_4(x) + u_z^*(x).$$

Згідно з формулами (3.78) функції  $f_i(x)$  мають вигляд:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(\cos \beta x + ch\beta x), \quad f_3(x) = -\frac{1}{2\beta^2}(\cos \beta x - ch\beta x),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2\beta}(\sin \beta x + sh\beta x), \quad f_4(x) = -\frac{1}{2\beta^3}(\sin \beta x - sh\beta x).$$

Коефіцієнт  $\beta$  дорівнює:

$$\beta^4 = \alpha^2 \cdot \omega^2, \quad \alpha^2 = \frac{m}{EI_y},$$

де  $\omega$  — частота власних коливань за  $2\pi$  секунд, яку необхідно знайти.

При визначенні власної частоти зовнішні навантаження відсутні, тому частинний розв'язок  $u_z^*(x) = 0$ . Для знаходження невідомих початкових параметрів складаємо систему рівнянь, використовуючи граничні умови. У подальшому будемо використовувати такі співвідношення:

$$\tilde{u}_z(x) = EI_y u_z(x), \quad \tilde{\varphi}_y(x) = I_y \varphi_y(x).$$

Почнемо з розгляду схеми 3.77(а). Граничні умови мають такий вигляд:

при

$$x = 0, \quad \tilde{u}_z(0) = 0,$$

при

$$x = l, \quad \tilde{u}_z(l) = 0,$$

$$M_y(0) = 0,$$

$$M_y(l) = 0.$$

Між похідними функцій  $f_i(x)$  існують залежності:

$$f_4^{IV}(x) = f_3^{III}(x) = f_2^{II}(x) = f_1^I(x) = \beta^4 f_4(x).$$

Записуємо вираз для згинального моменту, враховуючи значення  $\tilde{u}_z(0) = 0$  та  $M_z(0) = 0$  з граничних умов при  $x = 0$ .

$$M_y = -\tilde{\varphi}_y(0) \cdot \beta^4 f_4(x) + Q_z(0) f_2(x).$$

Складаємо також два рівняння на підставі граничних умов при  $x = l$ :

$$\tilde{\varphi}_y(0) f_2(l) - Q_z(0) f_4(l) = 0,$$

$$-\tilde{\varphi}_y(0) \beta^4 f_2(l) + Q_z(0) f_4(l) = 0.$$

Отримана система є однорідною, тому можливі два варіанти розв'язку. У першому варіанті обидві невідомі  $\tilde{\varphi}_y(0) = Q_z(0) = 0$ . Це означає, що поперечне переміщення  $u_z(x)$  дорівнює нулю, тобто коливань немає. Перший варіант можливий, коли визначник системи рівнянь не дорівнює нулю  $\Delta \neq 0$ . У другому варіанті невідомі мають ненульове значення, тобто поперечні коливання існують. Обов'язковою умовою другого варіанту є  $\Delta = 0$ . Виконаємо цю умову. Складемо визначник системи:



$$\Delta = f_2^2(l) - \beta^4 f_4^2(l) = [f_2(l) - \beta^2 f_4(l)] \cdot [f_2(l) + \beta^2 f_4(l)].$$

Підставимо значення функцій:

$$\Delta = \frac{1}{\beta^2} \sin \beta l \cdot sh \beta l.$$

Як зазначалося,  $\Delta = 0$ , тому

$$\frac{1}{\beta^2} \sin \beta l \cdot sh \beta l = 0.$$

Реальний фізичний зміст буде у випадку, коли  $\sin \beta l = 0$ , тобто  $\beta l = \pi, 2\pi, 3\pi \dots$

Найменша частота, яку і потрібно знайти, буде при  $\beta l = \pi$ ,  $\beta = \frac{\pi}{l}$ .

Підставимо значення  $\beta$  у вираз  $\beta^4 = \alpha^2 \cdot \omega^2$ .

$$\frac{\pi^4}{l^4} = \alpha^2 \omega^2.$$

Звідки знаходимо:

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Якщо підставити показники двотавра №27, а саме  $EI = 1 \cdot 10^4$  кН·м<sup>2</sup>,

$$m = \frac{q}{g} = \frac{315 \cdot 10^{-3} \text{ кН/м}}{10 \text{ м/сек}^2} = 315 \cdot 10^{-4} \text{ кН} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2,$$

$$\omega = \frac{\pi^2}{6^2} \sqrt{\frac{1 \cdot 10^4}{315 \cdot 10^{-4}}} = 156,4 \text{ с}^{-1}.$$

Маючи частоту, визначаємо період коливань:

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = 0,284 \text{ с}.$$

Розглянемо другий варіант (рис. 3.77(б)), який відрізняється граничними умовами.

При  $x = 0$

$$\tilde{u}_z(0) = 0, \quad M_y(0) = 0, \quad \tilde{\varphi}_y(l) = 0;$$

при  $x = l$

$$\tilde{u}_z(l) = 0.$$

Порядок розв'язання аналогічний попередньому варіанту. Складаємо систему рівнянь для граничних умов при  $x = l$ .

$$\tilde{\varphi}_y(0) f_2(l) - Q_z(0) f_4(l) = 0,$$

$$\tilde{\varphi}_y(0) \beta^4 f_1(l) - Q_z(0) f_3(l) = 0.$$

Визначник  $\Delta$  має вигляд:

$$\Delta = -f_2(l) \cdot f_3(l) + f_1(l) \cdot f_4(l).$$

Підставимо значення функцій і, враховуючи, що  $\Delta = 0$ , отримаємо:

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta l)}{\operatorname{th}(\beta l)} = 1.$$

Звідки знаходимо  $\beta l = 1,25\pi$ .

Враховуючи показники двотавра №27, обчислюємо частоту  $\omega = 244,4 \text{ с}^{-1}$ .

### 3.6.8. Приклад розрахунку власних коливань стержня

Визначити частоту власних коливань для двопролітної балки, розрахункова схема якої зображена на рис. 3.78.

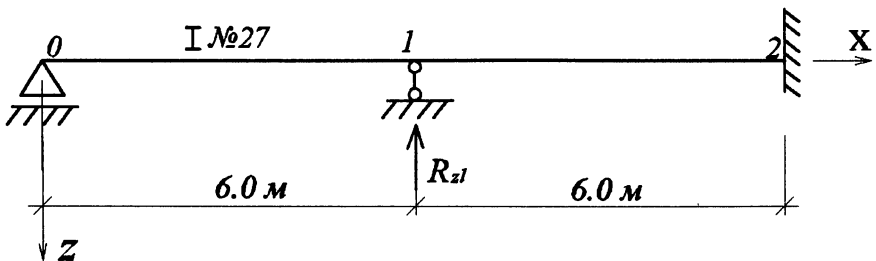


Рис. 3.78. Схема двопролітної балки для визначення частоти власних коливань

Послідовність розв'язку та усі залежності аналогічні тим, що застосовувались у попередньому прикладі. Зробити лише деякі зміни. По-перше, у частинному розв'язку  $u_z^*(x)$  необхідно врахувати реакцію  $R_{z1}$ .

$$\tilde{u}_z^*(x) = -R_{z1} f_4(x - 6).$$

Також необхідно врахувати додаткову граничну умову у точці 1.

$$\begin{aligned} \text{При } x=0, \quad \tilde{u}_z(0)=0, \quad \text{при } x=l, \quad \tilde{u}_z(l)=0, \quad \text{при } x=2l, \quad \tilde{u}_z(2l)=0, \\ M_y(0)=0, \quad \tilde{\varphi}_y(2l)=0. \end{aligned}$$

Невідомими є початкові параметри та реакція  $R_{z1}$ . З перших граничних умов визначаємо два початкових параметри  $\tilde{u}_z(0)=0$ ,  $M_y(0)=0$ .

Складаємо з інших трьох умов систему трьох рівнянь. Вона має вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_y(0) f_2(\beta l) - Q_z(0) f_4(\beta l) &= 0, \\ \tilde{\varphi}_y(0) f_2(\beta \cdot 2l) - Q_z(0) f_4(\beta \cdot 2l) - R_{z1} f_4(\beta l) &= 0, \\ \tilde{\varphi}_y(0) f_1(\beta \cdot 2l) - Q_z(0) f_3(\beta \cdot 2l) - R_{z1} f_3(\beta l) &= 0. \end{aligned}$$

Визначник цієї системи буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} \Delta(\beta) = f_3(\beta l) [f_2(\beta l) \cdot f_4(\beta \cdot 2l) - f_4(\beta l) f_2(\beta \cdot 2l)] + \\ + f_4(\beta l) [f_4(\beta l) \cdot f_1(\beta \cdot 2l) - f_2(\beta l) f_3(\beta \cdot 2l)]. \end{aligned}$$

Розглянемо визначник  $\Delta(\beta)$  як функцію, аргументом якої є змінна величина  $\beta$ . Підставляючи значення  $l=6\text{м}$ , а також різні значення  $\beta$ , будуємо графік (рис. 3.79).

Нульове значення визначник  $\Delta(\beta)$  має при  $\beta l = 1,08\pi$ . Пояснимо, чому саме графік будували при таких значеннях  $\beta l$ . Справа в тому, що відрізок стержня 0-1 може розглядатися як однопролітна балка. Її лівий кінець має шарнірну опору, а правий — жорстко з'єднаний пружиною з ділянкою 1-2. Тому характеристики цього закріплення будуть знаходитись між шарнірною опорою і жорстким закріпленням. У попередньому прикладі були розглянуті обидва варіанти. При шарнірному закріпленні значення  $\beta l$ , при якому визначник дорівнював нулю, дорівнювало  $\beta l = \pi$ , а при жорсткому  $\beta l = 1,25\pi$ .

Це дозволяє зробити висновок, що у нашому прикладі величина  $\beta l$  також буде знаходитись між цими двома значеннями, тому значення аргументу приймалося у зазначених межах. Отже,  $\Delta(\beta) = 0$ , коли  $\beta l = 1,081\pi$ . Звідси знаходимо:

$$\beta = 1,081 \frac{\pi}{6}.$$

Далі визначаємо частоту власних коливань:

$$\omega = \frac{(1,082)^2 \pi^2}{6^2} \sqrt{\frac{1 \cdot 10^4}{315 \cdot 10^{-4}}} = 182,8 \text{ с}^{-1}.$$

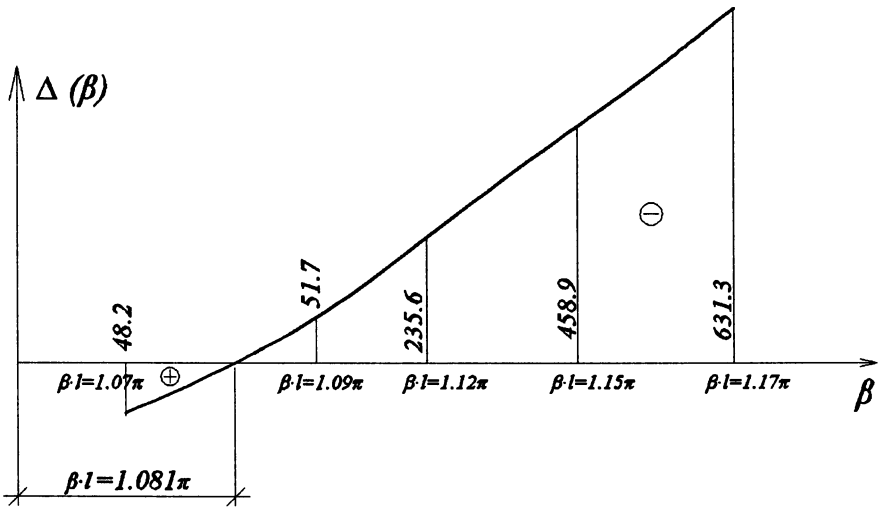


Рис. 3.79. Графік залежності визначника системи рівнянь від змінної  $\beta$

### 3.6.9. Приклад розрахунку вимушених коливань стержня

Виконати розрахунок стержня на вимушені коливання для стержня, схема якого зображена на рис. 3.80.

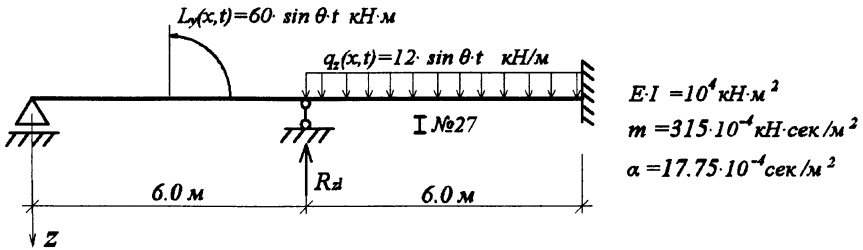


Рис. 3.80. Схема двопролітної балки для розрахунку на вимушені коливання

Частота власних коливань цього стержня була визначена у попередньому прикладі:  $\omega = 182,89$ . Частота вимушених коливань  $\tilde{\omega}$  повинна бути менша за частоту власних коливань. Приймаємо її рівною  $\tilde{\omega} = 0,3423 \omega = 62,6 \text{ с}^{-1}$ . Розв'язання виконуємо методом початкових параметрів. Застосуємо вираз

$$u_z(x) = u_z(0) f_1(\tilde{\beta}x) + \varphi_y(0) f_2(\tilde{\beta}x) - \frac{M_y(0)}{EI_y} f_3(\tilde{\beta}x) - \frac{Q_z(0)}{EI_y} f_4(\tilde{\beta}x) + u_z^*(\tilde{\beta}x).$$

Частинний розв'язок дорівнює:

$$u_z^*(\tilde{\beta}x) = -\frac{R_{z1}}{EI_y} f_4[\tilde{\beta}(x-6)] + \frac{60}{EI_y} f_3[\tilde{\beta}(x-3)] + \frac{12}{EI_y} f_5[\tilde{\beta}(x-6)].$$

Функція  $f_5[\tilde{\beta}(x-6)]$  має вигляд:

$$f_5[\tilde{\beta}(x-6)] = \frac{1}{2\tilde{\beta}^4} [\cos \tilde{\beta}(x-6) + ch \tilde{\beta}(x-6) - 2]$$

Значення коефіцієнта  $\tilde{\beta}$  визначається із залежності:

$$\tilde{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \tilde{\omega}} = \frac{1}{3} = 0,333333 \text{ м}^{-1}.$$

Як завжди, у формулі початкових параметрів будемо використовувати співвідношення  $\tilde{u}_z = EI_y u_x$ ,  $\tilde{\varphi}_y = EI_y \varphi_y$ .

Для визначення невідомих використаємо граничні умови:

$$\text{При } x=0, \quad \tilde{u}_z(0)=0, \quad \text{при } x=6, \quad \tilde{u}_z(6)=0, \\ M_y(0)=0,$$

$$\text{при } x=12, \quad \tilde{u}_z(12)=0, \\ \tilde{\varphi}_y(12)=0.$$

Враховуючи, що з перших двох рівнянь два параметри відомі ( $\tilde{u}_z(0)=0$ ,  $M_y(0)=0$ ), складемо систему трьох рівнянь для інших граничних умов:

$$\tilde{\varphi}_y(0)f_2(\tilde{\beta} \cdot 6) - Q_z(0)f_4(\tilde{\beta} \cdot 6) = -60f_3(\tilde{\beta} \cdot 3), \\ \tilde{\varphi}_y(0)f_2(\tilde{\beta} \cdot 12) - Q_z(0)f_4(\tilde{\beta} \cdot 12) - R_{z1}f_4(\tilde{\beta} \cdot 6) = \\ = -60f_3(\tilde{\beta} \cdot 9) - 12f_5(\tilde{\beta} \cdot 6), \\ \tilde{\varphi}_y(0)f_1(\tilde{\beta} \cdot 12) - Q_z(0)f_3(\tilde{\beta} \cdot 12) - R_{z1}f_3(\tilde{\beta} \cdot 6) = \\ = -60f_2(\tilde{\beta} \cdot 9) - 12f_4(\tilde{\beta} \cdot 6).$$

У останньому рівнянні враховуємо залежність  $f'_5 = f_4$ .

Обчислюємо значення функцій:

$$6,804237\tilde{\varphi}_y(0) - 36,687100 \cdot Q_z(0) = -270,75015, \\ 39,799672\tilde{\varphi}_y(0) - 378,630716 \cdot Q_z(0) - 36,687100 \cdot R_{z1} = -3639,746456, \\ 13,327295\tilde{\varphi}_y(0) - 125,828444 \cdot Q_z(0) - 18,802541 \cdot R_{z1} = -1354,554747.$$

Невідомі дорівнюють:

$$\tilde{\varphi}_y(0) = 1,319028, \quad Q_z(0) = 7,624618, \quad R_{z1} = 21,95127.$$

Підставляємо ці значення у вирази для переміщень та зусиль та будемо відповідні епюри (рис. 3.81).

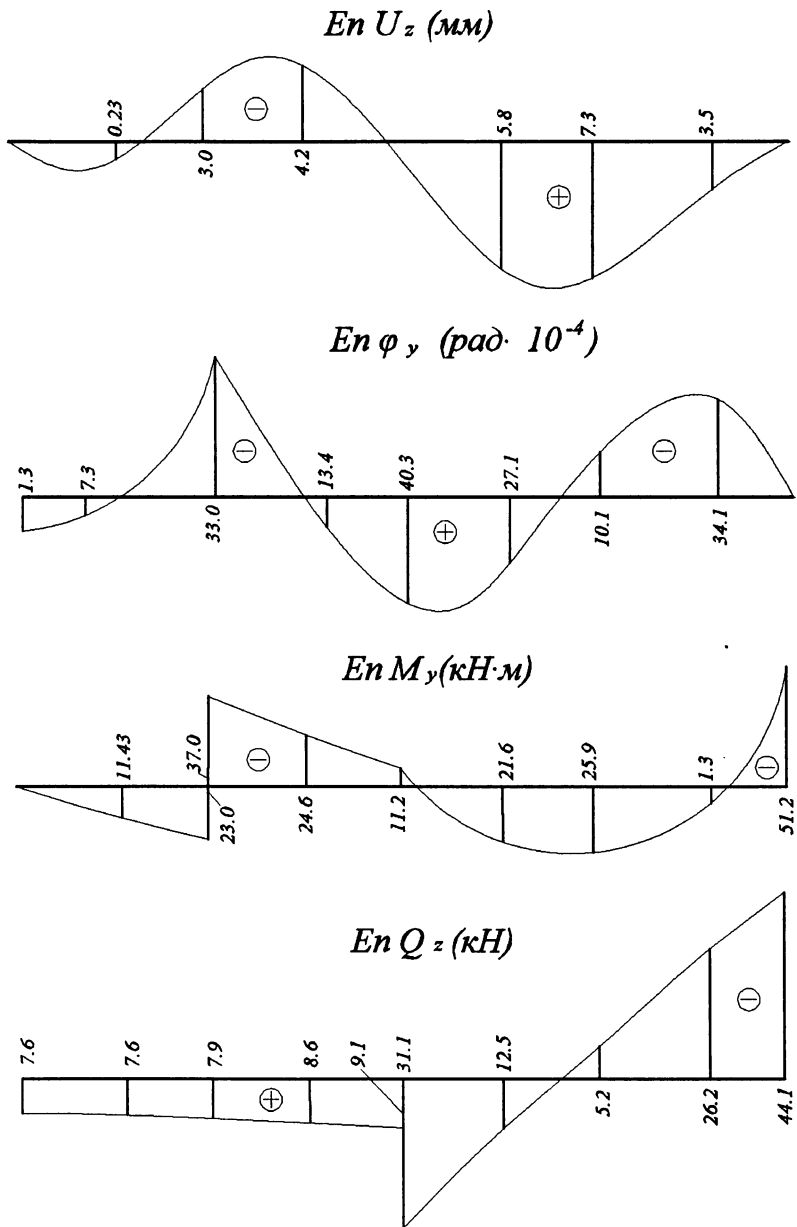


Рис. 3.81. Епюри переміщень та зусиль у двопролітній балці від динамічного навантаження

Визначимо максимальне нормальне напруження у крайньому правому перерізі:

$$\sigma_{xx} = \frac{M}{W} = \frac{51,3 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-6} = 138,3 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа.}$$

Стержень витримує задане динамічне навантаження. Це можна пояснити тим, що частота вимушених коливань значно менша за частоту власних коливань  $\tilde{\omega} = 0,2434 \cdot \omega = 62,6 < 182,89$ .

Якщо частоту вимушених коливань більше наблизити до частоти власних коливань, то зусилля суттєво зростуть. Зробимо перевірку міцності, коли  $\tilde{\omega} = 140,85 \text{ с}^{-1}$ , тобто  $\tilde{\omega} = 0,77 \cdot \omega = 0,77 \cdot 182,89 \text{ с}^{-1}$ . Повний розрахунок повторювати не будемо, тому що він аналогічний попередньому. Звернемо увагу тільки на те, що  $\tilde{\beta} = 0,5$ . При вказаній частоті вимушених коливань максимальний момент дорівнює 73,27 кНм. Напруження матиме таке значення:

$$\sigma_{xx} = \frac{73,27 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-6} = 197,5 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа.}$$

Отже, балка не витримає такого навантаження.

### 3.6.10. Приклад розрахунку коливань стиснуто-зігнутого стержня

Виконати розрахунок на коливання стиснуто-зігнутого стержня, розрахункова схема якого зображена на рис. 3.82.

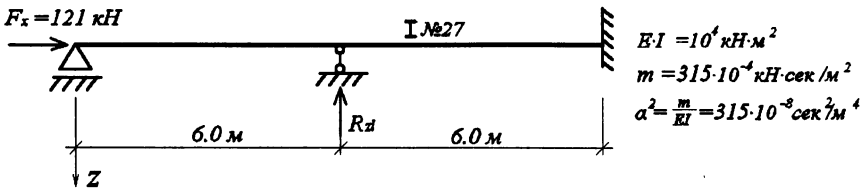


Рис. 3.82. Розрахункова схема стиснуто-зігнутого стержня для якого визначається частота власних коливань



$$EI = 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2,$$

$$m = 315 \cdot 10^{-4} \text{ кН} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2,$$

$$\alpha^2 = \frac{m}{EI} = 315 \cdot 10^{-8} \text{ с}^2/\text{м}^4.$$

Розв'язання виконуємо методом початкових параметрів. Загальний вираз для поперечного переміщення має вигляд:

$$u_z(x) = u_z(0)f_1(x) + \varphi_y(0)f_2(x) - \frac{M_y(0)}{EI_y} f_3(x) - \frac{Q_z(0)}{EI_y} f_4(x) + u_z^*(x).$$

Частинний розв'язок залежить тільки від невідомої реакції  $R_{z1}$ :

$$u_x^*(x) = -\frac{R_{z1}}{EI_y} f_4(x-6).$$

У даному випадку функції  $f_i(x)$  мають такий вигляд:

$$f_1(x) = \frac{1}{\delta^2} (\tilde{\lambda}^2 \cos \lambda x + \lambda^2 ch \tilde{\lambda} x), \quad \delta^2 = \lambda^2 + \tilde{\lambda}^2;$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\delta^2} \left( \frac{\tilde{\lambda}^2}{\lambda} \sin \lambda x + \frac{\tilde{\lambda}^2}{\lambda} sh \tilde{\lambda} x \right), \quad \nu^2 = \frac{N_x}{EI};$$

$$f_3(x) = \delta^2 (-\cos \lambda x + ch \tilde{\lambda} x), \quad \beta^4 = \alpha^2 \omega^2;$$

$$f_4(x) = \delta^2 \left( -\frac{1}{\lambda} \sin \lambda x + \frac{1}{\lambda} sh \tilde{\lambda} x \right).$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\nu^2 + \sqrt{\nu^4 + 4\beta^4}}{2}}, \quad \tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{-\nu^2 + \sqrt{\nu^4 + 4\beta^4}}{2}}.$$

Між функціями  $f_i(x)$  існують співвідношення:

$$f_4'(x) = f_3(x), \quad f_2'(x) = f_1(x).$$

Для визначення невідомих величин складаємо систему рівнянь, використовуючи граничні умови:

$$\begin{aligned} \text{При } x=0, \quad 1) \tilde{u}_z(0) = 0, \quad \text{при } x=6, \quad 3) \tilde{u}_z(6) = 0, \\ 2) M_y(0) = 0, \end{aligned}$$

при  $x = 12$ , 4)  $\tilde{u}_z(12) = 0$ ,  
 5)  $\tilde{\phi}_y(12) = 0$ .

Тут позначено:  $\tilde{u}_z(x) = EI_y u_z(x)$ ,  $\tilde{\phi}_y(x) = EI_y \phi_y(x)$ .

Перші дві умови визначають дві невідомі, тому необхідно скласти тільки три рівняння:

$$\tilde{\phi}_y(0)f_2(6) - Q_z(0)f_4(6) = 0,$$

$$\tilde{\phi}_y(0)f_2(12) - Q_z(0)f_4(12) - R_{z1}f_4(6) = 0,$$

$$\tilde{\phi}_y(0)f_1(12) - Q_z(0)f_3(12) - R_{z1}f_3(6) = 0.$$

Оскільки система рівнянь однорідна, то ненульовий розв'язок буде за умови, що визначник  $\Delta = 0$ . Він розглядається як функція від змінної величини  $\omega$ , що входить у вираз  $\lambda$ , тому розглядаємо  $\Delta(\lambda)$  у залежності від  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= f_2(6)f_4(12)f_3(6) + f_4(6)f_4(6)f_1(12) - \\ &- f_3(12)f_4(6)f_{21}(6) - f_3(6)f_2(12)f_4(6) = \\ &= f_2(6)[f_4(12)f_3(6) - f_3(12)f_4(6)] + \\ &+ f_4(6)[f_1(12)f_4(6) - f_2(12)f_3(6)] \end{aligned}$$

Будуємо графік функції  $\Delta(\lambda)$  (рис. 3.83). Для цього необхідно знайти значення функцій  $f_i$  при різних значеннях  $\lambda$ . Між  $\lambda$  та  $\tilde{\lambda}$  існує залежність:

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\lambda^2 - v^2}.$$

У відповідності з графіком  $\Delta(\lambda) = 0$ , коли  $\lambda = 0,566$ .

Враховуючи значення  $\lambda$ , визначасмо  $\omega$ .

$$\lambda = \sqrt{\frac{v^2 + \sqrt{v^4 + 4\beta^4}}{2}}, \quad \lambda^2 = \frac{v^2 + \sqrt{v^4 + 4\beta^4}}{2}.$$

$$(2\lambda^2 - v^2) = v^4 + 4\beta^4, \quad 4\lambda^4 - 4v^2\lambda^2 = 4\beta^4.$$

$$\beta^4 = \lambda^2(\lambda^2 - v^2), \quad \alpha^2\omega^2 = \lambda^2(\lambda^2 - v^2).$$

$$\omega^2 = \frac{\lambda^2(\lambda^2 - v^2)}{\alpha^2}.$$

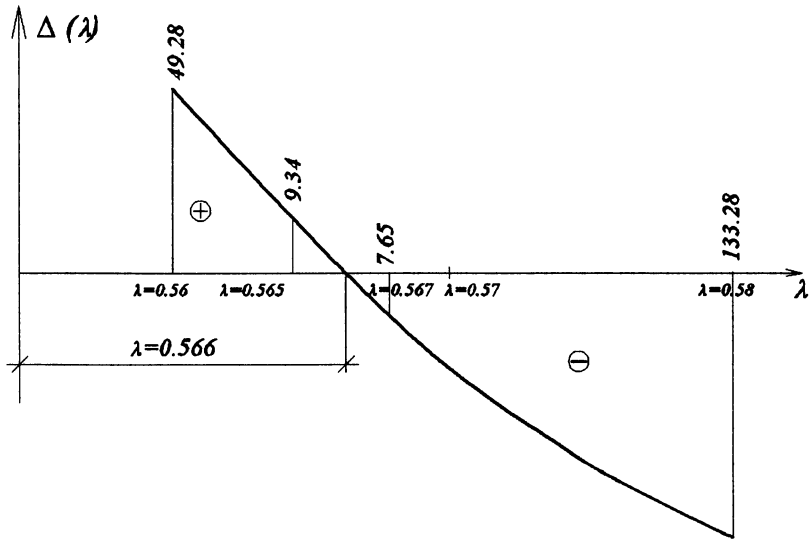


Рис. 3.83. Графік залежності визначника від коефіцієнта  $\lambda$

Підставляємо значення  $\lambda = 0,566$  та інших величин, знаходимо:

$$\omega = 177 \text{ с}^{-1}.$$

Якщо порівняти це значення з  $\omega$ , яке було знайдено у прикладі (3.6.8), то бачимо, що  $\omega$  зменшилося. Це відбулося за рахунок прикладеного поздовжнього навантаження. При його збільшенні власна частота буде зменшуватися. Коли  $F_x$  буде дорівнювати критичній силі, взагалі  $\omega=0$ , тобто коливань не буде, бо стержень втрачає стійкість.

Перейдемо до розгляду розрахунку стержня на вимушене коливання. Схема стержня зображена на рис. 3.84.

Приймаємо частоту вимушених коливань рівною 0,3423 від власних коливань  $\omega$ :

$$\tilde{\omega} = 0,3423 \cdot 177 = 60,5871 \text{ с}^{-1}.$$

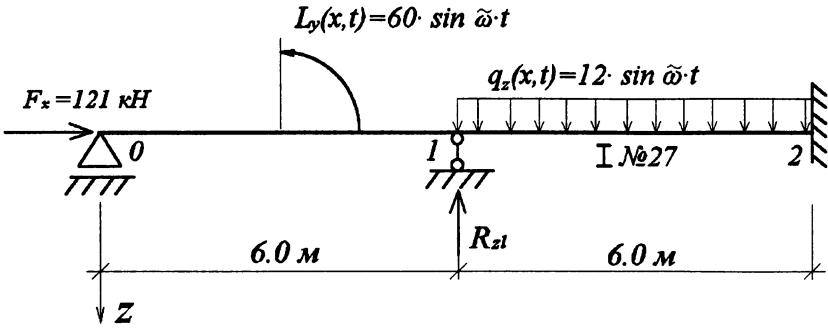


Рис. 3.84. Схема стиснуто-згнутото стержня для розрахунку на вимушені коливання

Визначаємо величину  $\lambda$  та  $\tilde{\lambda}$ :

$$\lambda = \sqrt{\frac{0,0121 + \sqrt{(0,0121)^2 + 4 \cdot 315 \cdot 10^{-8} \cdot 60,5871}}{2}} = 0,2056.$$

$$\tilde{\lambda} = 0,1737.$$

Розв'язок будемо виконувати методом початкових параметрів.

Враховуючи прикладене навантаження, записуємо частинний розв'язок:

$$\tilde{u}_z^*(x) = \frac{60}{EI_y} f_3(x-3) + \frac{12}{EI_y} f_5(x-6) - \frac{R_{z1}}{EI_y} f_4(x-6).$$

Функція  $f_5(x)$  дорівнює

$$f_5(x) = \frac{1}{\Delta^2} \left[ \frac{1}{\lambda^2} \cos(\lambda x) + \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{ch}(\tilde{\lambda} x) - \frac{\lambda^2 + \tilde{\lambda}^2}{\lambda^2 \tilde{\lambda}^2} \right].$$

Похідна від  $f_5(x)$  дорівнює

$$f_5'(x) = f_4(x).$$

Поперечне переміщення  $u_z(x)$  із врахуванням частинного розв'язку дорівнює

$$u_z(x) = u_z(0) f_1(x) + \phi_y(0) f_2(x) - \frac{M_y(0)}{EI_y} f_2(x) - \frac{Q_z(0)}{EI_y} f_4(x) - \frac{R_{z1}}{EI_y} f_4(x-6) + \frac{60}{EI_y} f_3(x-3) + \frac{12}{EI_y} f_5(x-6).$$

Рівняння для знаходження невідомих складаємо враховуючи граничні умови:

при  $x = 0$

$$1) \tilde{u}_z(0) = 0,$$

$$2) M_y(0) = 0;$$

при  $x = 6\text{ м}$

$$3) \tilde{u}_z(6) = 0;$$

при  $x = 12\text{ м}$

$$4) \tilde{u}_z(12) = 0,$$

$$5) \tilde{\varphi}_y(12) = 0.$$

Як завжди, використовуємо залежності

$$\tilde{u}_z(x) = EI_y u_z(x), \quad \tilde{\varphi}_y(x) = EI_y \varphi_y(x).$$

Враховуючи, що з перших двох рівнянь визначено дві невідомі, складаємо систему трьох рівнянь, застосовуючи умови (3), (4), (5).

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_y(0) f_2(6) - Q_z(0) f_4(6) = -60 f_3(3), \\ \tilde{\varphi}_y(0) f_2(12) - Q_z(0) f_4(12) - R_{z1} f_4(6) = -60 f_3(9) - 12 f_5(6), \\ \tilde{\varphi}_y(0) f_1(12) - Q_z(0) f_3(12) - R_{z1} f_3(6) = -60 f_3(9) - 12 f_4(6). \end{cases}$$

Обчислюємо значення функцій, що увійшли у ці рівняння. Отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$6,804237 \tilde{\varphi}_y(0) - 35,933459 \cdot Q_z(0) = -268,339195,$$

$$40,000404 \tilde{\varphi}_y(0) - 354,339291 \cdot Q_z(0) - 35,933459 \cdot R_{z1} = -3444,10129,$$

$$13,266943 \tilde{\varphi}_y(0) - 115,168757 \cdot Q_z(0) - 18,181888 \cdot R_{z1} = -1261,162536.$$

Розв'язуючи систему, знаходимо:

$$\tilde{\varphi}_y(0) = 0,51087, \quad Q_z(0) = 7,5648, \quad R_{z1} = 21,8187.$$

Підставляємо ці значення у формули для переміщень і зусиль та обчислюємо їх значення. Будуємо епюри (рис. 3.85).

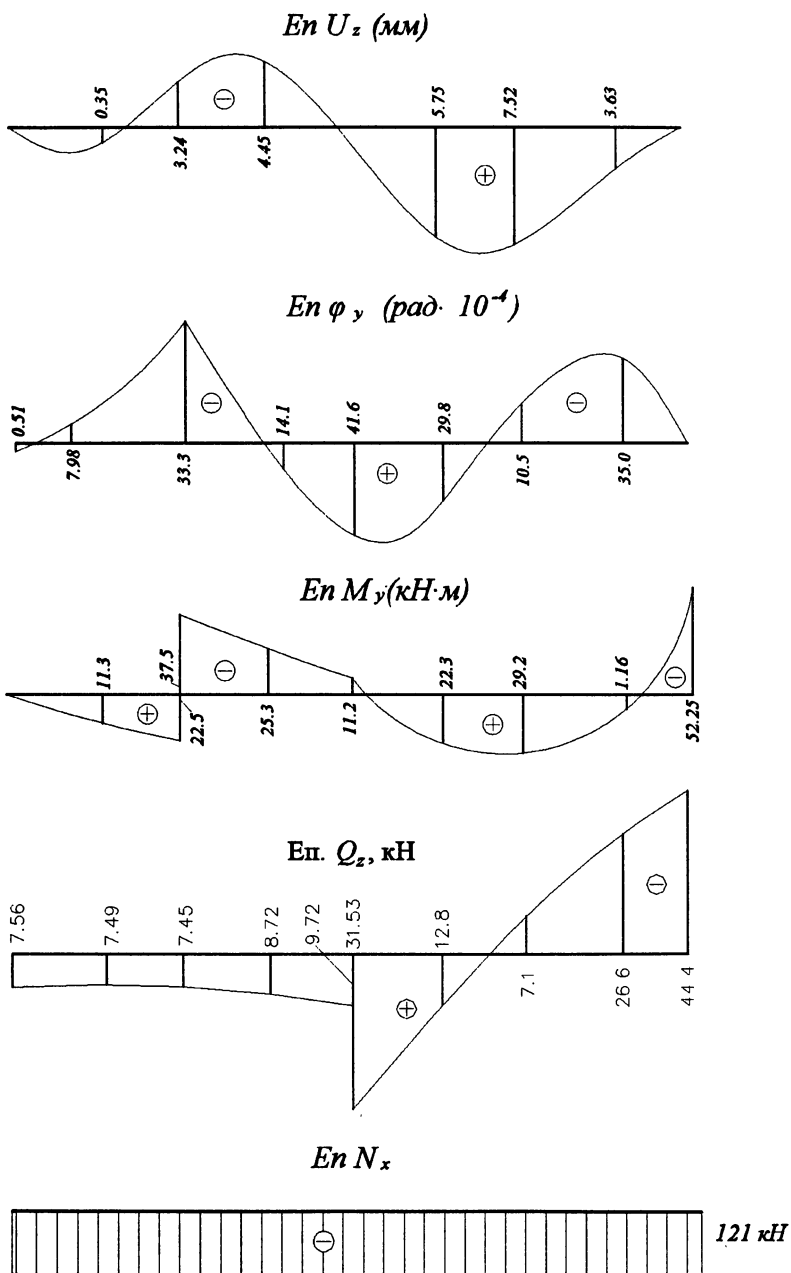


Рис. 3.85. Епюри переміщень та зусиль у стиснуто-зігнутому стержні від динамічного навантаження

Визначаємо максимальні нормальні напруження.

$$\sigma_{\max} = -\frac{121 \cdot 10^3}{40,2 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} - \frac{52,25 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-6} = -171 \text{ МПа.}$$

Напруження перевищує допустиме:  $\frac{171-160}{160} 100\% \approx 7\%$ , тобто

міцність не забезпечена.

### 3.6.11. Приклад розрахунку стержня на ударне навантаження

Виконати розрахунок стержня на ударне навантаження. Схема стержня зображена на рис. 3.86.

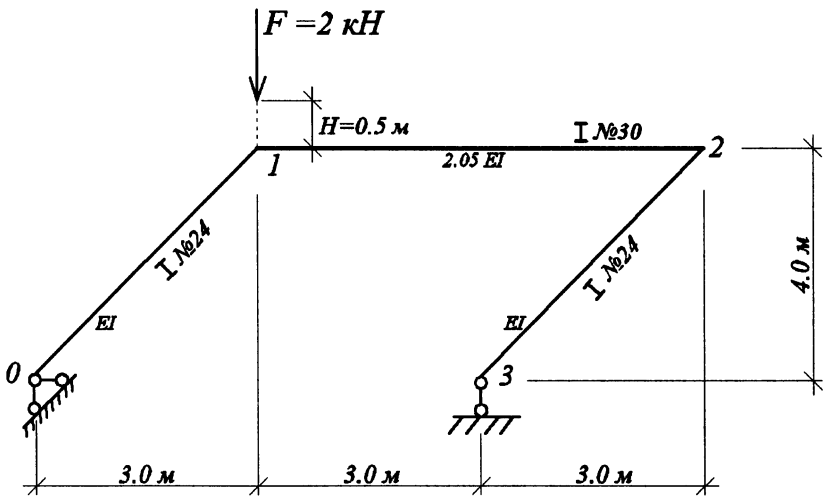


Рис. 3.86. Схема плоского ламаного стержня для розрахунку на удар

$E = 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$ , момент інерції двотавра №24  $I = 3460 \text{ см}^4$ , момент інерції двотавра №30  $I_{30} = 7080 \text{ см}^4 = 2,05I$ ,

$EI = 2 \cdot 10^8 \cdot 3460 \cdot 10^{-8} = 6920 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ ,  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_T = 210 \text{ МПа}$ .

Переміщення та зусилля від ударного навантаження можна визначити через переміщення і зусилля, що виникають від статичного навантаження. Для цього знайдені величини необхідно помножити на коефіцієнт динамічності  $k_d$ , який обчислюється так:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}}}$$

У першу чергу знайдемо внутрішні зусилля та переміщення точки 1 від статичного навантаження. Для цього побудуємо епюру згинальних моментів від навантаження  $F$  (рис. 3.87), яке прикладене у точці 1. Також побудуємо епюру від одиничного навантаження, прикладеного у точці 1 (рис. 3.88).

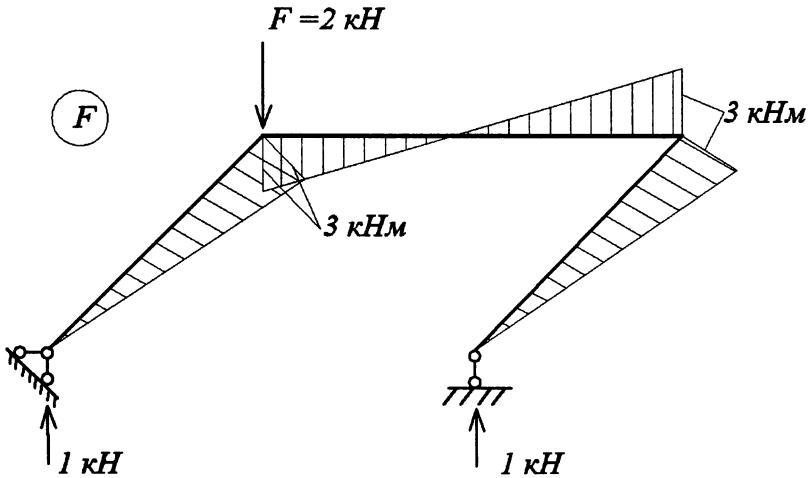


Рис. 3.87. Епюра згинальних моментів у ламаному стержні від статичного навантаження



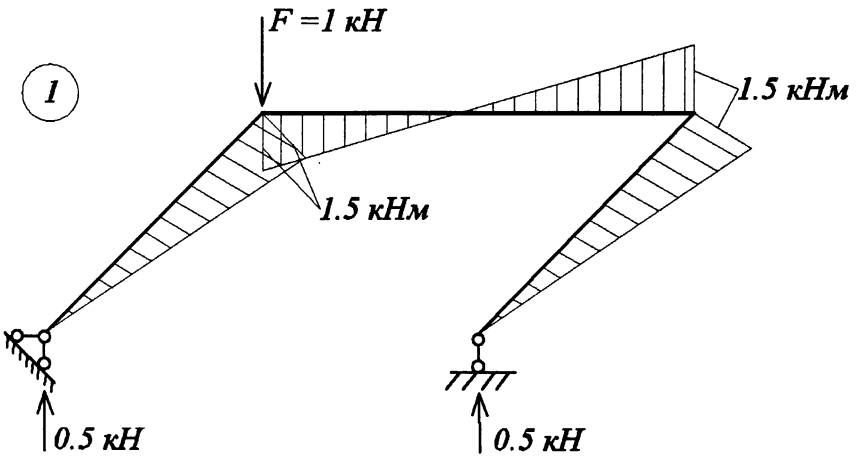


Рис. 3.88. Епюра згинальних моментів у ламаному стержні від одиночного навантаження

Статичне переміщення  $\Delta_{cm}$  точки 1 визначаємо за формулою Мора, перемножуючи епюри "F" та "1".

$$\Delta_{cm} = \Delta_{1F} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{EI} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{2,05EI} =$$

$$= 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Визначасмо динамічний коефіцієнт:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,5}{2,8 \cdot 10^{-3}}} = 19,9.$$

Побудуємо епюру моментів від ударного навантаження (рис. 3.89).

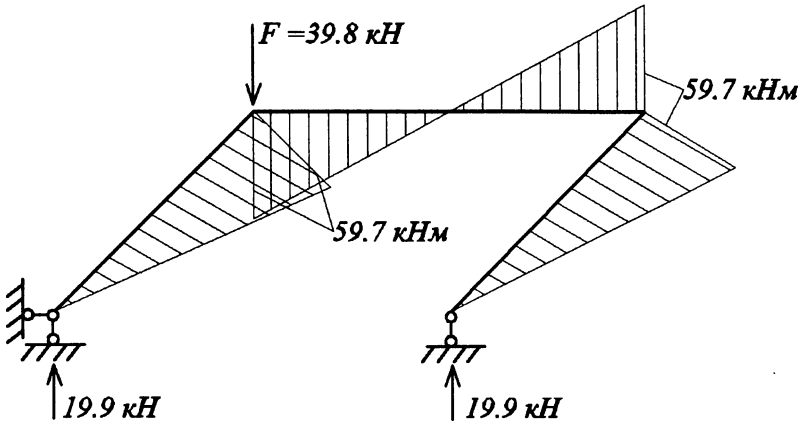


Рис. 3.89. Епюра моментів у ламаному стержні від ударного навантаження

Максимальні нормальні напруження будуть у стержнях 0-1 та 2-3 в точках 1 та 2.

$$\sigma_{xx} = \frac{M}{W} = \frac{59,7 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-6} = 206 \text{ МПа.}$$

Це напруження більше, ніж допустиме, але менше, ніж  $\sigma_T$  текучості, тому конструкція може витримати такий удар, але може і зруйнуватися. Тобто стан конструкції є небезпечним.

## Розділ 4. НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН ТОНКОСТІННОГО СТЕРЖНЯ

### Глава 4.1. Загальні положення, геометричні характеристики та кінематичні співвідношення

#### 4.1.1. Загальні поняття, означення, гіпотези

У першу чергу визначимо, які саме тіла (конструктивні елементи) можна віднести до тонкостінних стержнів. Для цього зупинимося на побудові їхнього геометричного образу. Першим кроком є побудова плоскої лінії  $KN$  довільного обрису (рис. 4.1). Ця лінія зветься *серединною лінією* тонкостінного стержня. Її довжину вважаємо рівною  $S_{KN}$ .

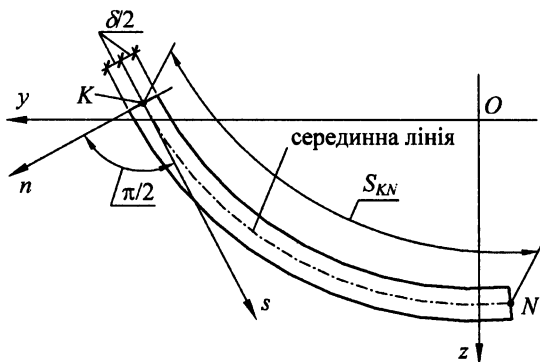


Рис. 4.1. Поперечний переріз тонкостінного стержня

Через точку  $K$  проведемо лінію  $n$ , перпендикулярну до серединної лінії. Відкладемо на ній відрізок довжиною  $\delta$ . Середину цього відрізка суміщаємо зі серединною лінією. Переміщуємо цей відрізок уздовж лінії  $KN$  так, аби зберігався прямий кут між ним та дотичною  $s$  до серединної лінії, а середина відрізка лежала на лінії  $KN$ . У результаті вказаної операції отримаємо плоску

фігуру, котра є поперечним перерізом тонкостінного стержня. Величина  $\delta$  визначає товщину поперечного перерізу тонкостінного стержня. Вона вважається значно меншою, ніж довжина серединної лінії  $S_{KN}$ .

Переміщуючи поперечний переріз уздовж осі, перпендикулярної до його площини, на величину  $l$ , що значно перевищує розмір  $S_{KN}$ , отримаємо тривимірне тіло (рис. 4.2), котре і буде представляти собою геометричний образ тонкостінного стержня. З вищезазначеного випливає, що його розміри у трьох визначальних напрямках мають різний порядок:

$$l \gg S_{KN} \gg \delta.$$

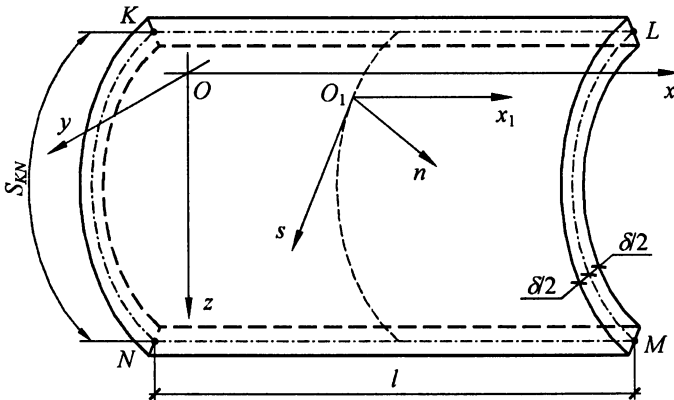


Рис. 4.2. Геометричний образ тонкостінного стержня

Якщо вздовж осі, перпендикулярної до площини перерізу, переміщувати серединну лінію, то отримаємо *серединну поверхню*. На рис. 4.2 вона позначена  $KNML$ . Використовуючи поняття серединної поверхні, можна вказати інший шлях побудови геометричного образу тонкостінного стержня. Для цього необхідно в кожній точці серединної поверхні провести перпендикулярні до неї лінії та відкласти на них в обидва боки від поверхні відрізки довжиною  $\delta/2$ . Кінці цих відрізків утворюють граничні поверхні тонкостінного стержня.

Розрізняють два різновиди тонкостінних стержнів — *відкритого і замкнутого поперечного перерізу* (профілю) (рис. 4.3).

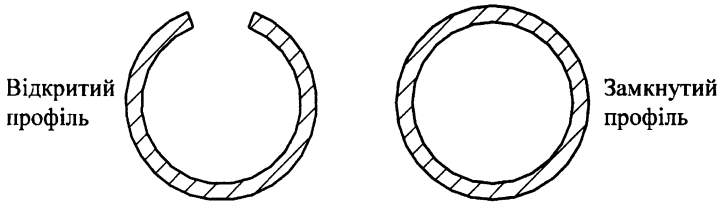


Рис. 4.3. Різновиди поперечних перерізів тонкостінних стержнів

Напружено-деформований стан тонкостінних стержнів відрізняється від звичайних нетонкостінних стержнів. Здебільшого це стосується стержнів відкритого профілю, тому розглядатимемо саме їх.

При отриманні розрахункових співвідношень для тонкостінних стержнів зручно використовувати дві системи координат: звичайну декартову систему  $Oxyz$  і криволінійну  $O_1x_1s$  (рис. 4.2). У другій системі координат вісь  $O_1x_1$  паралельна осі  $Ox$ , вісь  $O_1s$  спрямована по дотичній, а вісь  $O_1n$  — по нормалі до серединної поверхні. Підкреслимо, що саме осі криволінійної системи координат співпадають з основними напрямками, що визначають геометричну форму тонкостінного стержня. У зв'язку з цим доцільно прийняти напрямки базових напружень і деформацій такими, що співпадають із криволінійною системою координат.

Зупинимось на описі характеру деформування тонкостінного стержня, котрий впливає зі специфіки його форми та співвідношення розмірів у різних напрямках. Багато положень, прийнятих при розгляді звичайних стержнів, зберігається й при розгляді тонкостінних стержнів.

Перш за все зазначимо, що зберігається припущення щодо недеформованості поперечного перерізу у своїй площині. Це положення дозволяє розглядати переміщення поперечного перерізу в площині, перпендикулярній до поздовжньої осі, як переміщення абсолютно твердого

тіла, розташування якого повністю визначається переміщенням серединної лінії. Разом із тим, серединна лінія в результаті поздовжніх деформацій не залишається плоскою, а викривляється й перетворюється на просторову криву. Однак при цьому в кожній її точці зберігається прямий кут між дотичною до неї та дотичною до деформованої поздовжньої лінії серединної поверхні, що проходить через розглядувану точку.

Прямий кут зберігається і між деформованою серединною поверхнею та лініями поперечного перерізу, що були перпендикулярні до серединної поверхні перед деформацією.

Зі сказаного випливає, що деформація тонкостінного стержня переважно визначається деформацією його серединної поверхні, деформований стан котрої, у свою чергу, може бути визначений деформацією та переміщенням серединної лінії. Для побудови геометричного образу тонкостінного стержня після деформації достатньо в обидва боки від деформованої серединної поверхні в кожній її точці відкласти перпендикулярні до неї відрізки величиною  $\delta/2$ .

На підставі наведеного вище опису характеру деформування сформулюємо низку гіпотез, котрі покладені в основу всіх подальших побудов.

**Перша гіпотеза.** Деформації поперечного перерізу у своїй площині дорівнюють нулю. З цього випливає:

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0. \quad (4.1)$$

Подібні деформації в координатах  $O_1x_1sn$  також дорівнюватимуть нулю:

$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon_{nn} = 0, \quad \gamma_{sn} = 0. \quad (4.2)$$

Дана гіпотеза повністю збігається з аналогічною гіпотезою, що прийнята при розрахунку звичайних стержнів. Зазначимо, що з умов (4.1) і (4.2) й закону Гука випливає, що  $\tau_{yz} = 0$  або  $\tau_{sn} = 0$ .

**Друга гіпотеза.** У процесі деформації серединна лінія викривляється в напрямку, перпендикулярному до площини поперечного перерізу, переходячи з плоскої кривої у просторову. При цьому в кожній її точці зберігається прямий

кут між дотичною до неї та дотичною до лінії серединної поверхні, котра перед деформацією була паралельна поздовжній осі  $Ox$  (рис. 4.4).

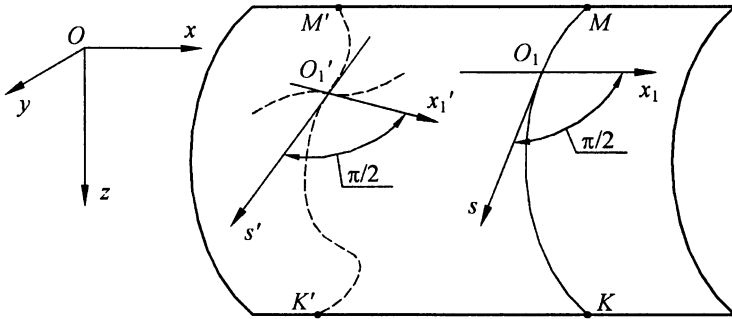


Рис. 4.4. До другої гіпотези

Наведене припущення еквівалентне твердженню про рівність нулю кута зсуву  $\gamma_{xs}$  у кожній точці серединної поверхні:

$$\gamma_{xs} = 0. \quad (4.3)$$

Дане припущення аналогічне одному з положень гіпотези плоских перерізів, в якому йдеться про те, що після деформації дотична до осьової лінії залишається перпендикулярною до площини поперечного перерізу. Водночас, у тонкостінних стержнях не застосовується припущення про збереження поперечним перерізом плоскої форми.

**Третя гіпотеза.** Нормальними напруженнями  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ , що перпендикулярні до осьової лінії, можна знехтувати з огляду на їх малість порівняно з напруженням  $\sigma_{xx}$ . У зв'язку з цим приймаємо:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0.$$

**Четверта гіпотеза.** З огляду на малість дотичних напружень  $\tau_{xm} = \tau_{nx}$  порівняно з  $\tau_{xs} = \tau_{sx}$  можна прийняти:

$$\tau_{xm} = \tau_{nx} = 0.$$

**П'ята гіпотеза.** Вважаємо, що нормальні напруження  $\sigma_{xx}$  та одна складова дотичних напружень  $\tau_{sx}^{zg} = \tau_{xs}^{zg}$  рівномірно розподілені вздовж напрямку  $n$ , перпендикулярного до серединної лінії.

З прийнятих припущень випливає, що в тензорі напружень, який характеризує напружений стан тонкостінного стержня, не дорівнюють нулю лише три компоненти:  $\sigma_{xx}$  і  $\tau_{sx} = \tau_{sx}$ . При цьому дотичні напруження, як і в звичайному стержні, приймаються рівними двом складовим:

$$\tau_{sx} = \tau_{sx}^{kp} + \tau_{sx}^{zg}. \quad (4.4)$$

Перша складова представляє собою дотичні напруження чистого або вільного кручення. Друга пов'язана зі згинанням і стисненим крученням стержня.

*Чисте кручення* виникає в тих випадках, коли умови закріплення стержня не перешкоджають вільному переміщенню точок поперечного перерізу вздовж поздовжньої осі стержня. При цьому лінійне подовження  $\varepsilon_{xx}$  виявляється рівним нулю, звідки випливає рівність нулю нормальних напружень  $\sigma_{xx}$ . Таким чином, при чистому крученні виникають лише дотичні напруження  $\tau_{sx}^{kp}$ .

Якщо опорні закріплення перешкоджають вільному поздовжньому переміщенню точок поперечного перерізу при крученні стержня, то напружено-деформований стан, що виникає, прийнято називати *стисненим крученням*. У ньому відмінними від нуля будуть і нормальні, і дотичні напруження.

#### 4.1.2. Геометричні характеристики тонкостінного стержня

Геометричні характеристики поперечного перерізу тонкостінного стержня зустрічатимуться у подальшому в різних залежностях, як і при розрахунку звичайного стержня. Серед них фігурують знайомі поняття, такі як лінійні координати, площі фігур, їх статичні моменти та моменти інерції. Але з'являється принципово новий фактор, який має назву *секторної координати*. З ним пов'язані деякі нові геометричні характеристики. Тому в першу чергу з'ясуємо зміст секторної координати, яку в подальшому позначатимемо  $\omega$ .



Вона є подвійною площею сектора  $CDK$ , що міститься між початковим радіусом  $CD$ , поточним радіусом  $CK$  і серединною лінією поперечного перерізу  $DK$  (рис. 4.5).

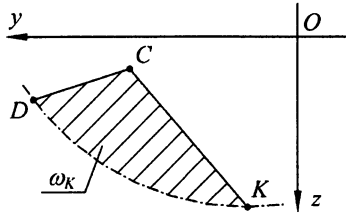


Рис. 4.5. До визначення секторної координати

Означена площа є секторною координатою точки  $K$ , такою що відповідає полюсу  $C$  й початку відліку від радіуса  $CD$ , котрі були обрані довільно. Від секторної координати залежать вказані нижче геометричні характеристики поперечного перерізу:

*секторний статичний момент*

$$S_{\omega} = \iint_A \omega \, dA, \quad (4.5)$$

*лінійно-секторні моменти інерції*

$$I_{\omega y} = \iint_A \omega \cdot z \cdot dA, \quad I_{\omega z} = \iint_A \omega \cdot y \cdot dA, \quad (4.6)$$

*секторний момент інерції*

$$I_{\omega} = \iint_A \omega^2 \, dA. \quad (4.7)$$

З рис. 4.5 випливає, що секторна координата точки залежить від розташування полюса  $C$  і вибору початкового радіуса  $CD$ . Їх вибір поки що ніяк не обговорювався. Це дає змогу так підібрати вказані три параметри, аби перетворилися на нуль деякі геометричні характеристики, а саме статичний момент  $S_{\omega}$  і лінійно-секторні моменти інерції  $I_{\omega y}$ ,  $I_{\omega z}$ . З цією метою встановимо співвідношення між секторними координатами точки, отриманими з різних полюсів. На рис. 4.6 показані секторні координати точки  $K$ , що

відповідають двом полюсам  $C$  і  $B$  при збереженні положення початкової точки відліку  $D$ .

Знайдемо співвідношення між елементарними секторними площами  $d\omega_B$  і  $d\omega_C$ . Вони визначаються подвійними площинами трикутників  $BNN'$  і  $CNN'$ . Ці трикутники мають спільну основу  $NN'$ , що дорівнює  $ds$ . Їхні висоти дорівнюють відповідно  $h_B$  і  $h_C$ . Тоді

$$d\omega_B = ds \cdot h_B,$$

$$d\omega_C = ds \cdot h_C.$$

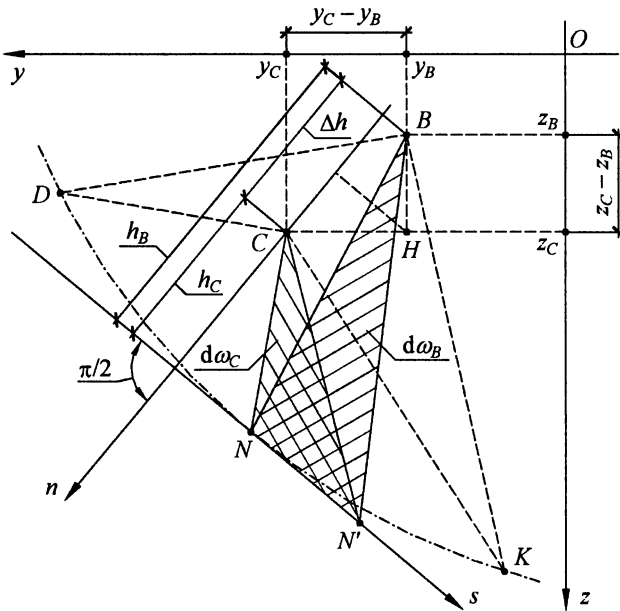


Рис. 4.6. До встановлення зв'язку між секторними координатами з різними полюсами ( $B$  та  $C$ )

З рис. 4.6 випливає залежність:

$$h_B = h_C + \Delta h.$$

Це співвідношення дозволяє встановити зв'язок між  $d\omega_B$  і  $d\omega_C$ :

$$d\omega_B = ds(h_C + \Delta h) = d\omega_C + ds\Delta h.$$

Виразимо  $\Delta h$  через різницю координат точок  $C$  та  $B$ . Очевидно,  $\Delta h$  дорівнюватиме сумі проєкцій відрізків  $BH$  і  $CH$ , рівних відповідно  $(z_C - z_B)$  і  $(y_C - y_B)$ , на нормаль  $\vec{n}$ . Косинуси кутів між нормаллю  $\vec{n}$  та осями координат  $Oy$ ,  $Oz$  будемо, як і раніше, позначати  $n_y$  і  $n_z$ . Тоді

$$\Delta h = (z_C - z_B)n_z + (y_C - y_B)n_y.$$

Врахуємо це у виразі  $d\omega_B$ :

$$d\omega_B = d\omega_C + ds[(z_C - z_B)n_z + (y_C - y_B)n_y]. \quad (4.8)$$

Виразимо напрямні косинуси  $n_y$ ,  $n_z$  через співвідношення приростів координат. Для цього виконаємо побудову, наведену на рис. 4.7.

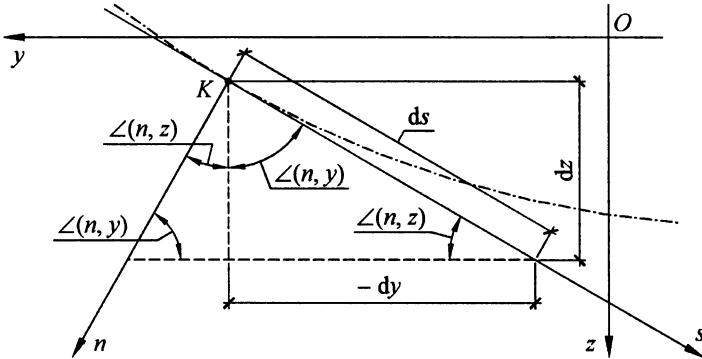


Рис. 4.7. До вираження напрямних косинусів через прирости координат

З рис. 4.7 випливає:

$$n_y = \cos \angle(n, y) = \frac{dz}{ds}, \quad (4.9)$$

$$n_z = \cos \angle(n, z) = -\frac{dy}{ds}.$$

Врахуємо ці залежності у виразі (4.8):

$$d\omega_B = d\omega_C + (z_C - z_B) \left( -\frac{dy}{ds} \right) ds + (y_C - y_B) \frac{dz}{ds} ds,$$

або

$$d\omega_B = d\omega_C - (z_C - z_B)dy + (y_C - y_B)dz.$$

Інтегруючи цю рівність, отримаємо:

$$\omega_B = \omega_C - (z_C - z_B)y + (y_C - y_B)z + a, \quad (4.9)$$

де  $a$  — довільна константа.

Запишемо лінійно-секторні моменти інерції, приймаючи за полюс точку  $B$ :

$$I_{\omega_B y} = \iint_A \omega_B \cdot z \cdot dA, \quad I_{\omega_B z} = \iint_A \omega_B \cdot y \cdot dA.$$

Підставимо сюди вираз (4.9):

$$I_{\omega_B y} = \iint_A \omega_C z dA - (z_C - z_B) \iint_A yz dA + (y_C - y_B) \iint_A z^2 dA + a \iint_A z dA,$$

$$I_{\omega_B z} = \iint_A \omega_C y dA - (z_C - z_B) \iint_A y^2 dA + (y_C - y_B) \iint_A yz dA + a \iint_A y dA.$$

Враховуючи геометричне значення інтегралів, присутніх у цих рівностях, можна записати:

$$I_{\omega_B y} = I_{\omega_C y} - (z_C - z_B)I_{yz} + (y_C - y_B)I_y + aS_y,$$

$$I_{\omega_B z} = I_{\omega_C z} - (z_C - z_B)I_z + (y_C - y_B)I_{yz} + aS_z.$$

Вважаючи, що осі  $Oyz$  є головними центральними осями перерізу, отримаємо

$$I_{\omega_B y} = I_{\omega_C y} + (y_C - y_B)I_y,$$

$$I_{\omega_B z} = I_{\omega_C z} - (z_C - z_B)I_z.$$

Визначимо координати полюса  $B$  з умов, що  $I_{\omega_B y} = 0$  і  $I_{\omega_B z} = 0$ . У результаті отримаємо:

$$y_B = y_C + \frac{I_{\omega_C y}}{I_y}, \quad (4.10)$$
$$z_B = z_C - \frac{I_{\omega_C z}}{I_z}.$$

Виходячи зі значення величин, що фігурують у виразах (4.10), потребується попереднє визначення головних центральних осей перерізу  $Oy$ ,  $Oz$  і визначення головних моментів інерції  $I_y$ ,  $I_z$ . Потім обирається довільний полюс  $C$  і знаходяться лінійно-секторні моменти інерції  $I_{\omega_{By}}$ ,  $I_{\omega_{Bz}}$ . Підставляючи вказані величини у вирази (4.10), можна обчислити координати особливої точки  $B$ . Її використання в ролі полюса гарантує перетворення на нуль лінійно-секторних моментів інерції  $I_{\omega_{By}}$  і  $I_{\omega_{Bz}}$ . Цей особливий полюс носить назву *центра згинання* поперечного перерізу тонкостінного стержня.

Зупинимося також на спеціальному виборі початкової точки відліку секторної координати, за котрого секторний статичний момент перетворюється на нуль. Для цього після знаходження полюса  $B$  виконаємо побудови, наведені на рис. 4.8.

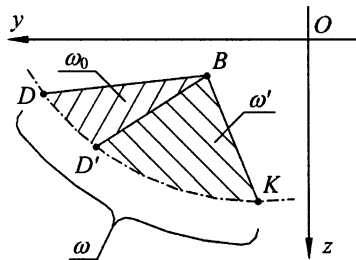


Рис. 4.8. Зв'язок між секторними координатами з різними початковими радіусами

З рисунка випливає, що секторна координата точки  $K$  при початковому радіусі, проведеному з точки  $D$ , дорівнює  $\omega$ . При переході до початку відліку від радіуса  $BD'$  секторна координата точки  $K$  позначена  $\omega'$ . Різниця першої та другої координати дорівнює  $\omega_0$ , тобто:

$$\omega = \omega' + \omega_0.$$

Визначимо секторний статичний момент, виходячи з початкової точки  $D$ :

$$S_{\omega} = \iint_A \omega \, dA.$$

Підставимо сюди значення  $\omega$  з попередньої рівності:

$$S_{\omega} = \iint_A (\omega' + \omega_0) dA,$$

або

$$S_{\omega} = S_{\omega'} + \iint_A \omega_0 dA.$$

Зауважимо, що  $\omega_0$  є подвійною площею сектора, що міститься між двома фіксованими точками  $D$  і  $D'$ . Отже,  $\omega_0$  є сталою величиною, котру можна винести з-під знаку інтеграла. Тоді:

$$S_{\omega} = S_{\omega'} + \omega_0 \cdot A.$$

Водночас,  $\omega_0$  є секторною координатою точки  $D'$ , положення котрої обиралося довільно. Це дає змогу накласти певні умови на її вибір, а саме, її положення слід підбирати так, аби секторний статичний момент  $S_{\omega'} = 0$ . Враховуючи це в попередній рівності, отримаємо:

$$S_{\omega} = \omega_0 \cdot A.$$

Звідси знайдемо секторну координату  $\omega_0$ , що визначає положення точки  $D'$ :

$$\omega_0 = \frac{S_{\omega}}{A}. \quad (4.11)$$

Таким чином, задля знаходження особливого положення початкового радіуса необхідно знайти секторний статичний момент, базуючись на довільно обраній початковій точці відліку, й розділити його на площу поперечного перерізу.

Вибір центра згинання в ролі полюса, а в ролі початкової точки відліку — точки з координатою  $\omega_0$ , визначеною формулою (4.11), гарантує перетворення на нуль двох лінійно-секторних моментів інерції та секторного статичного моменту. Ці умови будуть використані як необхідні при отриманні формули нормальних напружень (4.20).

Відзначимо ще одну принципову особливість, що відрізняє порядок визначення геометричних характеристик тонкостінного стержня порівняно зі звичайними стержнями. Вона полягає в тому, що всі операції, пов'язані з цими питаннями, виконуються на моделі поперечного перерізу, яка представляє собою його серединну лінію. Більш детально ці питання будуть проілюстровані на прикладі, розглянутому у главі 4.3.

### 4.1.3. Кінематичні співвідношення

Переміщення довільної точки тонкостінного стержня у просторі визначається трьома компонентами вектора переміщень  $\tilde{u}_x(x, y, z)$ ,  $\tilde{u}_y(x, y, z)$ ,  $\tilde{u}_z(x, y, z)$ . Кожна з цих складових є функцією трьох змінних. Як і для звичайного стержня, ґрунтуючись на наведених вище гіпотезах, можна в явній формі встановити загальні співвідношення між переміщеннями та змінними  $y$ ,  $z$ , після чого три компоненти вектора переміщень міститимуть в ролі невідомих величин шість функцій однієї змінної. Подібні перетворення суттєво полегшують розв'язання задачі, про що свідчать розв'язки, отримані для звичайного стержня. Почнемо з розгляду поперечних переміщень  $\tilde{u}_y$ ,  $\tilde{u}_z$ .

На підставі першої гіпотези запишемо:

$$\varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0.$$

Виразимо деформації через переміщення, використовуючи залежності (1.39):

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial z}.$$

Враховуючи попередні рівності, матимемо:

$$\frac{\partial \tilde{u}_y(x, y, z)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_z(x, y, z)}{\partial z} = 0.$$

Звідси випливає, що кожна з цих функцій залежить лише від двох змінних:

$$\tilde{u}_y(x, z), \quad \tilde{u}_z(x, y).$$

Врахуємо це при записі виразу  $\gamma_{yz}$ :

$$\frac{\partial \tilde{u}_y(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_z(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Обидва члени цієї рівності залежать від однієї спільної змінної  $x$  та від двох різних змінних  $y, z$ . Вона буде задовольнятися лише за умови, що кожен з двох доданків дорівнюватиме одній і тій самій функції спільної змінної  $x$ , але з протилежним знаком:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_y(x, z)}{\partial z} &= -\varphi_x(x), \\ \frac{\partial \tilde{u}_z(x, y)}{\partial y} &= \varphi_x(x). \end{aligned}$$

Інтегруючи ці вирази, знайдемо:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_y(x, z) &= -\varphi_x(x) \cdot z + u_y(x), \\ \tilde{u}_z(x, y) &= \varphi_x(x) \cdot y + u_z(x), \end{aligned} \tag{4.12}$$

де  $u_y(x), u_z(x)$  — довільні функції, що представляють собою відповідні переміщення осьової лінії.

Для з'ясування якісного значення функції  $\varphi_x(x)$  розглянемо поперечний переріз стержня. Виокремимо на ньому довільну точку  $K$  з координатами  $y, z$  (рис. 4.9). З'єднаємо її з точкою  $O$ , де осьова лінія перетинається з поперечним перерізом. Довжину відрізка  $OK$  позначимо  $r$ . Повернемо поперечний переріз навколо точки  $O$  на кут  $\varphi_x$ . На той самий кут повернеться відрізок  $OK$ . При малих поворотах точка  $K$  переміститься вздовж перпендикуляра до лінії  $OK$  на величину  $r \cdot \varphi_x$ . Складові цього переміщення вздовж осей  $y$  та  $z$  позначимо відповідно  $(-u_y)$  та  $u_z$ . Вони дорівнюватимуть проекціям повного



переміщення на осі  $Oy$  та  $Oz$ :

$$-u_y = r \cdot \varphi_x \sin \alpha,$$

$$u_z = r \cdot \varphi_x \cos \alpha.$$

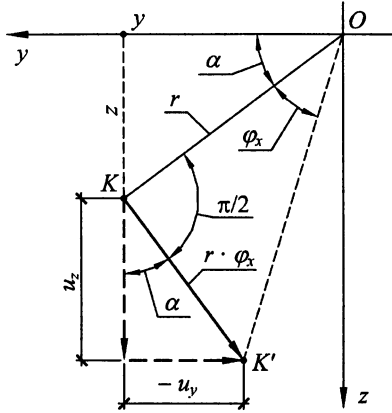


Рис. 4.9. До з'ясування змісту функції  $\varphi_x(x)$

З побудови на рис. 4.9 випливає:

$$r \cdot \sin \alpha = z, \quad r \cdot \cos \alpha = y.$$

Підставляючи ці вирази в попередні рівності, отримаємо:

$$u_y = -z \cdot \varphi_x,$$

$$u_z = y \cdot \varphi_x.$$

Зіставляючи ці рівності зі співвідношеннями (4.12), переконуємося, що функція  $\varphi_x(x)$  у виразах (4.12) являє собою поворот поперечного перерізу відносно поздовжньої осі  $Ox$ , тобто *кут закручування*.

Отримані співвідношення (4.12) в явному вигляді виражають дві компоненти вектора переміщень через змінні  $y$ ,  $z$  і три невідомі функції однієї змінної  $x$ .

Перейдемо до визначення співвідношень для третьої компоненти вектора переміщень  $\tilde{u}_x(x, y, z)$ . Для цього розглянемо серединну лінію тонкостінного стержня, розташовану в площині поперечного перерізу (рис. 4.10).

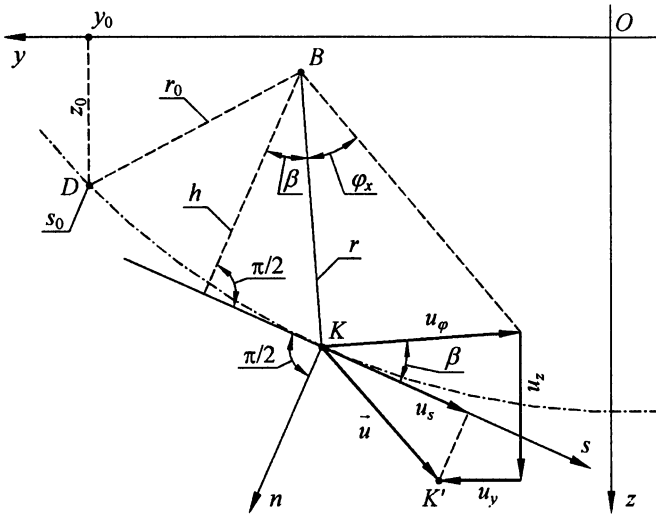


Рис. 4.10. Переміщення точки серединної лінії при повороті навколо полюса  $B$

Згідно з першою гіпотезою, поперечний переріз тонкостінного стержня у своїй площині не деформується. Отже, не деформуватиметься й серединна лінія. Таким чином, переміщення серединної лінії може розглядатися як рух абсолютно твердого тіла у площині. Він складається з поступального руху та обертального руху відносно деякої точки. Зважаючи на сказане, розглянемо переміщення точки  $K$ . За полюс обертання оберемо точку  $B$ . Компоненту обертального руху позначимо  $u_\varphi$ . Компоненти поступального руху позначені  $u_y, u_z$ . Повне переміщення визначається вектором  $\vec{u}$ .

Знайдемо складову повного переміщення, паралельну дотичній  $s$ . Для цього спроектуємо складові вектора  $\vec{u}$  на дотичну  $s$ :

$$u_s = u_\varphi \cdot \cos \beta + u_z n_y - u_y n_z,$$

де  $n_y, n_z$  — напрямні косинуси нормалі  $n$ .

Складова обертального руху  $u_\varphi$  при малих переміщеннях дорівнює наступному виразу:

$$u_\varphi = r \cdot \varphi_x.$$

Врахуємо це співвідношення у виразі  $u_s$  і, зважаючи на те, що  $r \cdot \cos \beta = h$ , отримаємо:

$$u_s = \varphi_x \cdot h + u_z n_y - u_y n_z.$$

Величини, що входять у цю рівність, залежать від різних змінних. Саме переміщення  $u_s$  є функцією двох змінних  $x$  та  $s$ . Переміщення осьової лінії  $u_y$ ,  $u_z$  і кут закручування  $\varphi_x$  є функціями однієї змінної  $x$ . Решта величин залежать від змінної  $s$ . Враховуючи це, запишемо:

$$u_s(x, s) = \varphi_x(x) \cdot h(s) + u_z(x) \cdot n_y(s) - u_y(x) \cdot n_z(s).$$

Вираз для поздовжнього переміщення знайдемо, використовуючи другу гіпотезу. З рівності (4.3) випливає:

$$\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial x} = 0.$$

Підставимо сюди значення  $u_s$ . Враховуючи залежності величин, що входять у нього, від різних змінних, отримаємо:

$$\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial s} = -\varphi'_x \cdot h - u'_z \cdot n_y + u'_y \cdot n_z.$$

Врахуємо вирази напрямних косинусів (4.9):

$$\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial s} = -\varphi'_x h - u'_z \frac{dz}{ds} - u'_y \frac{dy}{ds}.$$

Проінтегруємо отриману рівність по  $ds$  у межах від довільно обраної фіксованої точки  $D$  з координатами  $y_0$ ,  $z_0$ ,  $s_0$  до точки  $M$  з поточними координатами  $y$ ,  $z$ ,  $s$ :

$$\int_{s_0}^s \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial s} ds = -\varphi'_x \int_{s_0}^s h ds - u'_z \int_{s_0}^s \frac{dz}{ds} ds - u'_y \int_{s_0}^s \frac{dy}{ds} ds. \quad (4.13)$$

До виконання подальших перетворень зупинимося на з'ясуванні геометричного значення підінтегрального виразу першого члена правої частини  $(h \cdot ds)$ . Необхідні побудови зображені на рис. 4.11.

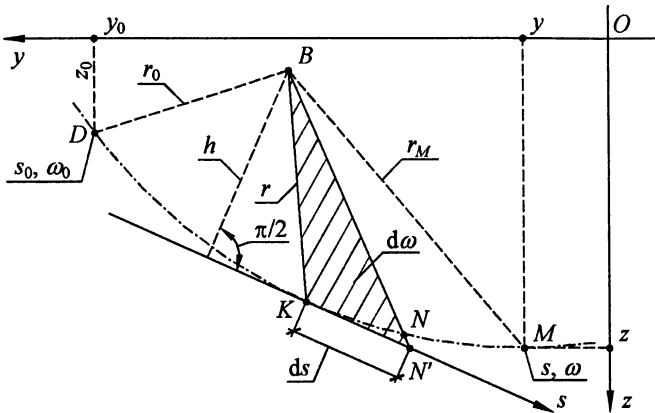


Рис. 4.11. До визначення приросту секторної координати

Аналізуючи побудови рис. 4.11, можна стверджувати, що добуток  $(h \cdot ds)$  дорівнює подвійній площі трикутника  $BKN'$ , основою якого є  $ds$ , а висотою —  $h$ . Нескінченно малий елемент дотичної  $ds$  можна вважати таким, що співпадає з елементом дуги  $KN$ . Це дає право тлумачити добуток  $(h \cdot ds)$  як подвійну площу сектора  $BKN$ . Позначивши цю площу  $d\omega$ , можна записати:

$$d\omega = h ds.$$

Врахуємо це у рівності (4.13), котра після низки простих перетворень набуває вигляду:

$$\int_{s_0}^s \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial s} ds = -\varphi'_x \int_{s_0}^s d\omega - u'_z \int_{s_0}^s dz - u'_y \int_{s_0}^s dy.$$

Замінивши межі інтегрування у правій частині, отримаємо:

$$\int_{s_0}^s \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial s} ds = -\varphi'_x \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega - u'_z \int_{z_0}^z dz - u'_y \int_{y_0}^y dy.$$

Виконуючи інтегрування, знайдемо:

$$\tilde{u}_x(x, s) - \tilde{u}_x(x, s_0) = -\varphi'_x(\omega - \omega_0) - u'_z(z - z_0) - u'_y(y - y_0).$$

Зауважимо, що переміщення  $\tilde{u}_x(x, s)$  відповідає будь-якій точці серединної лінії, а  $\tilde{u}_x(x, s_0)$  — фіксованій точці  $D$  і є функцією лише однієї змінної  $x$ . Після простих перетворень можна записати:

$$\tilde{u}_x(x, s) = -\varphi'_x\omega - u'_z z - u'_y y + [\tilde{u}_x(x, s_0) + \varphi'_x\omega_0 + u'_z z_0 + u'_y y_0].$$

Усі величини, що містяться у квадратних дужках, залежать від однієї змінної  $x$  і не залежать від  $s$ , тому цей вираз має однакове значення в усіх точках серединної лінії поперечного перерізу. Отже, він визначає поступальний рух поперечного перерізу вздовж осі  $Ox$ . Позначимо його просто  $u_x(x)$ , тобто

$$u_x(x) = \tilde{u}_x(x, s_0) + \varphi'_x\omega_0 + u'_z z_0 + u'_y y_0.$$

Враховуючи це у попередній рівності, отримаємо:

$$\tilde{u}_x(x, s) = u_x - u'_z z - u'_y y - \varphi'_x\omega. \quad (4.14)$$

Згідно зі значенням проведених вище перетворень координати  $y$ ,  $z$  і величина  $\omega$  відносяться до довільної точки серединної лінії, котра була позначена  $M$ . На підставі наведеного означення можна вивести, що  $\omega$  представляє собою подвійну площу сектора, що міститься між початковим радіусом  $r_0$ , поточним радіусом  $r_M$  і ділянкою серединної лінії  $DM$ . У подальшому  $\omega$  будемо розглядати як самостійну координату точки, вимірювану вищевказаною площею, і називатимемо секторною координатою.

Зупинимся на з'ясуванні геометричного значення ще двох величин у виразі (4.14), а саме  $u'_z$  і  $u'_y$ . Як відомо, похідна від функції представляє собою тангенс кута, котрий дотична до лінії, відповідної розглядуваній функції, утворює з координатною віссю. В даному випадку це — тангенси кутів між дотичними до ліній  $u_z(x)$  і  $u_y(x)$  та віссю  $Ox$ . При малих кутах тангенс кута можна вважати рівним самому куту, тобто

$$u'_z \approx \varphi_y, \quad u'_y \approx \varphi_z.$$

Враховуючи ці залежності у рівностях (4.12) і (4.14), отримаємо:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_x &= u_x - z\varphi_y - y\varphi_z - \omega\varphi'_x, \\ \tilde{u}_y &= u_y - z\varphi_x, \\ \tilde{u}_z &= u_z + y\varphi_x.\end{aligned}\tag{4.15}$$

У лівих частинах цих рівностей фігурують переміщення довільних точок поперечного перерізу стержня, а у правих частинах — лінійні й кутові переміщення осьової лінії. Зіставляючи дані рівності із залежностями, отриманими для звичайного стержня, зазначимо, що до першого виразу (4.15) увійшов додатковий член, що враховує вплив кута закручування на поздовжнє переміщення. За наявності цього доданку розглядувана рівність перестає бути рівнянням площини. Таким чином, у тонкостінному стержні в результаті деформації поперечний переріз не залишається плоским. Відбувається так звана *депланція* поперечного перерізу, тобто його вихід із площини. У зв'язку з цим не можна ототожнювати кути  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$  нахилу дотичної до деформованої осі стержня із поворотом поперечного перерізу, що мало місце у звичайному стержні.

## Глава 4.2. Напружений стан тонкостінного стержня

### 4.2.1. Визначення нормальних напружень

Згідно з прийнятими гіпотезами не рівним нулю виявляється лише одне нормальне напруження  $\sigma_{xx}$ . Для встановлення залежності між ним та переміщеннями скористаємося законом Гука. В даному випадку він матиме простий вигляд:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}.$$

Лінійна деформація  $\varepsilon_{xx}$  пов'язана з переміщеннями відомою залежністю:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x}.$$

На підставі співвідношення (4.14) знайдемо:

$$\varepsilon_{xx} = u'_x - zu''_z - yu''_y - \omega\varphi''_x.$$

Отже,

$$\sigma_{xx} = E[u'_x - zu''_z - yu''_y - \omega\varphi''_x]. \quad (4.16)$$

Для отримання співвідношень між напруженнями та внутрішніми зусиллями скористаємося відомими залежностями:

$$N_x = \iint_A \sigma_{xx} dA; \quad M_y = \iint_A z\sigma_{xx} dA; \quad M_z = \iint_A y\sigma_{xx} dA.$$

Як було зазначено вище, величина  $\omega$  розглядається як самостійна координата, тому логічно розглянути добуток цієї координати з напруженням. Інтеграл від цього добутку позначимо  $B$  й будемо розглядати, як ще одне зусилля, котре називатимемо *бімоментом*:

$$B = \iint_A \omega\sigma_{xx} dA. \quad (4.17)$$

Підставляючи у вирази для зусиль значення напруження (4.16), отримаємо чотири рівності:

$$\begin{aligned} N_x &= E \iint_A [u'_x - zu''_z - yu''_y - \omega\varphi''_x] dA, \\ M_y &= E \iint_A z[u'_x - zu''_z - yu''_y - \omega\varphi''_x] dA, \\ M_z &= E \iint_A y[u'_x - zu''_z - yu''_y - \omega\varphi''_x] dA, \\ B &= E \iint_A \omega[u'_x - zu''_z - yu''_y - \omega\varphi''_x] dA. \end{aligned}$$

Беручи до уваги те, що лінійні й кутові переміщення, що увійшли в ці співвідношення, не залежать від змінних інтегрування  $dA = dydz$ , винесемо їх з-під знаку інтеграла. Тоді

$$\begin{aligned}
N_x &= E \left[ u'_x \iint_A dA - u''_z \iint_A z dA - u''_y \iint_A y dA - \varphi''_x \iint_A \omega dA \right], \\
M_y &= E \left[ u'_x \iint_A z dA - u''_z \iint_A z^2 dA - u''_y \iint_A yz dA - \varphi''_x \iint_A z\omega dA \right], \\
M_z &= E \left[ u'_x \iint_A y dA - u''_z \iint_A yz dA - u''_y \iint_A y^2 dA - \varphi''_x \iint_A y\omega dA \right], \\
B &= E \left[ u'_x \iint_A \omega dA - u''_z \iint_A z\omega dA - u''_y \iint_A y\omega dA - \varphi''_x \iint_A \omega^2 dA \right].
\end{aligned}$$

Інтеграли в цих виразах представляють собою геометричні характеристики поперечного перерізу. Частина з них, що залежить від лінійних координат, уже зустрічалася при розгляді звичайного стержня. Інші, пов'язані з секторною координатою  $\omega$ , означені формулами (4.5), (4.6), (4.7).

Перепишемо попередні рівності, замінивши інтеграли відповідними геометричними характеристиками, і отримаємо:

$$\begin{aligned}
N_x &= E[Au'_x - S_y u''_z - S_z u''_y - S_\omega \varphi''_x], \\
M_y &= E[S_y u'_x - I_y u''_z - I_{yz} u''_y - I_{y\omega} \varphi''_x], \\
M_z &= E[S_z u'_x - I_{yz} u''_z - I_z u''_y - I_{z\omega} \varphi''_x], \\
B &= E[S_\omega u'_x - I_{y\omega} u''_z - I_{z\omega} u''_y - I_\omega \varphi''_x].
\end{aligned} \tag{4.18}$$

У цих виразах усі члени, розташовані не на головній діагоналі, можуть за певних умов перетворюватися на нуль за рахунок рівності нулю відповідної геометричної характеристики. Якщо осі  $y$  і  $z$  сумістити з головними центральними осями, то дорівнюватимуть нулю статичні моменти  $S_y$ ,  $S_z$  і відцентровий момент інерції  $I_{yz}$ . А особливий вибір полюса й початкового радіуса при визначенні секторних площ (про що йшлося у п. 4.1.2) забезпечує рівність нулю секторного статичного моменту  $S_\omega$  та лінійно-секторних моментів інерції  $I_{\omega y}$ ,  $I_{\omega z}$ .



Підінтегральні вирази у вказаних вище секторних характеристиках можуть мати різні знаки. Розглядаючи інтеграл як суму, зазначимо, що не виключений варіант, коли суми додатних і від'ємних членів дорівнюватимуть одна одній. У цьому випадку сума перетворюється на нуль.

Подібна ситуація не може виникнути при обчисленні  $I_\omega$ , оскільки у виразі  $I_\omega$  під інтегралом можуть бути лише додатні члени, рівні  $\omega^2$ . Таким чином,  $I_\omega$  ніколи не може бути нулем.

Беручи до уваги сказане, вважатимемо всі побічні члени у співвідношеннях (4.18) рівними нулю. У результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} N_x &= EAu'_x, \\ M_z &= -EI_z u''_z, \\ M_y &= -EI_y u''_y, \\ B &= -EI_\omega \varphi''_x. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Легко знайти зворотні співвідношення:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{1}{EA} N_x, & u''_y &= -\frac{1}{EI_z} M_z, \\ u''_z &= -\frac{1}{EI_y} M_y, & \varphi''_x &= -\frac{1}{EI_\omega} B. \end{aligned}$$

Підставляючи ці вирази у (4.16), матимемо:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{B\omega}{I_\omega}. \tag{4.20}$$

Отримана формула відрізняється від аналогічної формули для нормальних напружень звичайного стержня наявністю четвертого члена, що враховує вплив бімоменту.

## 4.2.2. Визначення дотичних напружень

Як випливає з наведених вище гіпотез, у тонкостінному стержні відмінними від нуля будуть лише дотичні напруження  $\tau_{sx} = \tau_{xs}$ , котрі згідно з рівністю (4.4) дорівнюють сумі двох складових:

$$\tau_{sx} = \tau_{sx}^{\text{кр}} + \tau_{sx}^{\text{зг}}.$$

Перший доданок представляє собою *дотичні напруження чистого кручення*, а другий — *згинальні дотичні напруження*. Доданки визначаються незалежно один від одного, тому доцільно розглянути способи їх отримання окремо. Почнемо з визначення першого доданка. Він визначається на підставі наближеної формули, що випливає з розв'язку задачі кручення і отримана методами теорії пружності для тонкостінного стержня прямокутного поперечного перерізу (рис. 4.12).

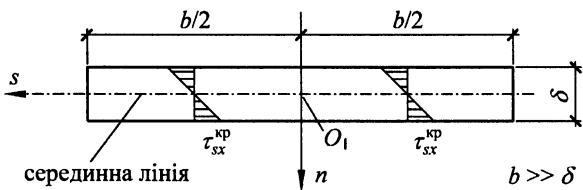


Рис. 4.12. Характер розподілу дотичних напружень чистого кручення

Перш за все зазначимо, що характер розподілу напружень  $\tau_{sx}^{\text{кр}}$  по товщині перерізу є лінійним (рис. 4.12). Нульове значення вони мають у точках серединної лінії  $s$ . Їхні величини можуть бути отримані за формулою:

$$\tau_{sx}^{\text{кр}} = \frac{2M_x^{\text{кр}}}{I_{\text{кр}}} n, \quad (4.21)$$

де  $M_x^{\text{кр}}$  — крутний момент,

$I_{\text{кр}}$  — момент інерції кручення,

$n$  — координата вздовж осі  $O_1n$ .

Момент інерції кручення визначається за наближеною формулою:

$$I_{\text{кр}} = \frac{1}{3} b \cdot \delta^3. \quad (4.22)$$

Якщо поперечний переріз складається з декількох прямокутників, то момент інерції всього перерізу визначається як сума моментів інерції окремих прямокутників:

$$I_{\text{кр}} = \sum_{j=1}^m I_{\text{кр},j}.$$

Зазначимо, що кожен прямокутний елемент поперечного перерізу сприймає частину крутного моменту, пропорційну його жорсткості:

$$M_{xj}^{\text{кр}} = M_x^{\text{кр}} \frac{I_{\text{кр},j}}{\sum_{j=1}^m I_{\text{кр},j}}.$$

Як випливає з формули (4.21), дотичні напруження чистого кручення не залежать від координати  $s$ . Однак розв'язки більш точними методами показують різке зменшення значень  $\tau_{sx}^{\text{кр}}$  у точках, близьких до  $s = \pm b/2$ , а при  $s$  у точності рівному  $\pm b/2$  вони перетворюються на нуль.

Наведемо залежність між крутним моментом і кутом закручування  $\varphi_x$ :

$$\varphi'_x = \frac{M_x^{\text{кр}}}{GI_{\text{кр}}}, \quad M_x^{\text{кр}} = GI_{\text{кр}} \varphi'_x. \quad (4.23)$$

Друге дотичне напруження чистого кручення  $\tau_{nx} = \tau_{xn}$  згідно з прийнятою вище гіпотезою вважаємо рівним нулю. Уточнені розрахунки підтверджують це припущення. Дійсно, ці напруження практично по всій площині поперечного перерізу близькі до нуля, й лише в точках, наближених до  $s = \pm b/2$ , вони набувають значень, порівнянних з  $\tau_{sx}$ .

Зупинимось на визначенні другої складової дотичних напружень, а саме  $\tau_{sx}^{3\Gamma}$ . Вони пов'язані зі стисненим крученням і виникають при згинанні стержня. Для їх визначення необхідно використати умови рівноваги

нескінченно малого елемента стержня, виокремленого в довільній точці  $K$  з координатами  $x, s$  (рис. 4.13).

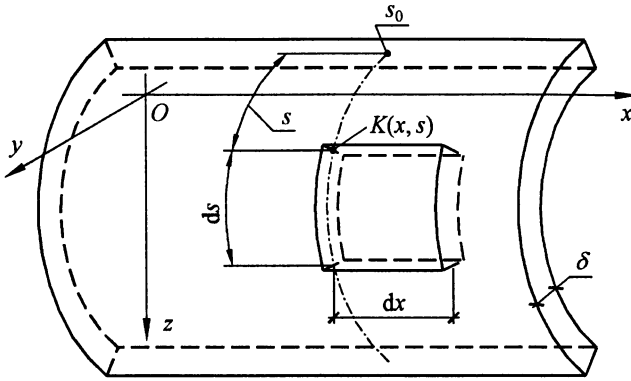


Рис. 4.13. До визначення згинальних дотичних напружень

По гранях виокремленого елемента прикладаємо напруження (рис. 4.14). На рисунку показані лише напруження, паралельні осі  $Ox$ , оскільки для отримання необхідних співвідношень буде використано рівняння рівноваги  $\sum X=0$ . Вважаємо, що зовнішні навантаження, паралельні осі  $Ox$ , дорівнюють нулю:  $q_x=0$ .

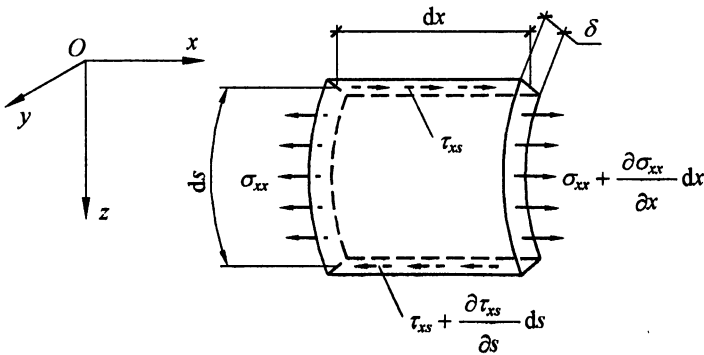


Рис. 4.14. До визначення згинальних дотичних напружень

Беручи до уваги, що по товщині перерізу напруження  $\tau_{sx}^{3r}$  і  $\sigma_{xx}$  розподілені рівномірно, запишемо:

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_{xx} \delta ds + \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) \delta ds - \\
 & -\tau_{xs}^{3r} \delta dx + \left( \tau_{xs}^{3r} + \frac{\partial \tau_{xs}^{3r}}{\partial s} ds \right) \delta dx = 0.
 \end{aligned}$$

Звідси знаходимо:

$$\frac{\partial \tau_{xs}^{3r}}{\partial s} = -\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}. \quad (4.24)$$

Інтегруємо обидві частини рівності по змінній  $s$ :

$$\tau_{xs}^{3r} = -\int \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} ds + f(x), \quad (4.25)$$

де  $f(x)$  — довільна функція, що залежить від змінної  $x$ .

Для визначення довільної добавки  $f(x)$  використаємо умову рівності нулю дотичних напружень на грані стержня, відповідній значенню  $s = s_0$ . Це випливає з прийнятої раніше умови рівності нулю зовнішніх навантажень  $q_x = 0$ . Враховуючи сказане, можна записати:

$$0 = -\int \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} ds \Big|_{s=s_0} + f(x),$$

звідки випливає, що

$$f(x) = \int \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} ds \Big|_{s=s_0}.$$

Підставляючи це значення у формулу (4.25), отримаємо:

$$\tau_{xs}^{3r} = -\int_{s_0}^s \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} ds.$$

Помножимо праву частину рівності на відношення, тотожно рівне одиниці, а саме  $\frac{\delta}{\delta} = 1$ . Приймаючи добуток  $\delta \cdot ds = dA$ , перейдемо у

попередній рівності до подвійного інтегралу:

$$\tau_{xs}^{3Г} = -\frac{1}{\delta} \iint_{A_K} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dA.$$

Межа інтегрування  $A_K$  представляє собою частину площі поперечного перерізу, розташовану між точкою, де  $s = s_0$ , і точкою  $K$  (рис. 4.15).

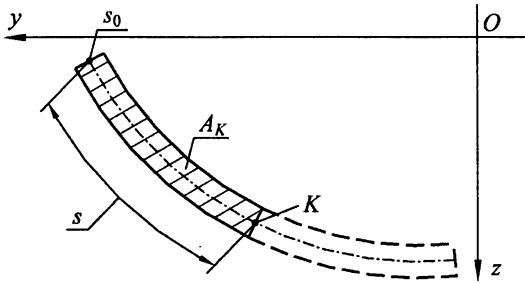


Рис. 4.15. До визначення згинальних дотичних напружень

Підставимо у вираз  $\tau_{xs}^{3Г}$  значення  $\sigma_{xx}$  за формулою (4.20):

$$\tau_{xs}^{3Г} = -\frac{1}{\delta} \iint_{A_K} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{N_x}{A} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{B\omega}{I_\omega} \right) dA.$$

Враховуючи, що зусилля в підінтегральному виразі залежать лише від змінної  $x$ , отримаємо:

$$\tau_{xs}^{3Г} = -\frac{1}{\delta} \left( \frac{N'_x}{A} \iint_{A_K} dA + \frac{M'_y}{I_y} \iint_{A_K} z dA + \frac{M'_z}{I_z} \iint_{A_K} y dA + \frac{B'}{I_\omega} \iint_{A_K} \omega dA \right).$$

Інтеграли у цій рівності представляють собою частину площі поперечного перерізу  $A_K$  та її осеві й секторні статичні моменти  $S_{yK}$ ,  $S_{zK}$ ,

$S_{\omega K}$ . Завдяки цьому можна записати:

$$\tau_{xs}^{3Г} = -\frac{1}{\delta} \left( N'_x \frac{A_K}{A} + M'_y \frac{S_{yK}}{I_y} + M'_z \frac{S_{zK}}{I_z} + B' \frac{S_{\omega K}}{I_\omega} \right).$$

З рівності нулю  $q_x$  випливає:

$$N'_x = -q_x = 0.$$

Крім того, врахуємо співвідношення між поперечними силами та згинальними моментами:

$$M'_y = Q_z, \quad M'_z = Q_y.$$

Введемо позначення  $B' = M_x^\omega$ . Нижче буде показано, що  $M_x^\omega$  представляє собою крутний момент, котрий називатимемо *згинально-крутним моментом* (на відміну від *моменту чистого кручення*  $M_x^{\text{кр}}$ ). На підставі прийнятого співвідношення й формули (4.19) його можна виразити через кут закручування  $\varphi_x$ :

$$M_x^\omega = B' = -EI_\omega \cdot \varphi_x'''. \quad (4.26)$$

Приймаючи до уваги сказане, запишемо остаточний вираз для  $\tau_{xs}^{3\Gamma}$ :

$$\tau_{xs}^{3\Gamma} = -\frac{1}{\delta} \left( \frac{Q_z S_{yK}}{I_y} + \frac{Q_y S_{zK}}{I_z} + \frac{M_x^\omega S_{\omega K}}{I_\omega} \right). \quad (4.27)$$

Якщо зіставити цей вираз із дотичними напруженнями звичайного стержня, то відмінність буде лише в наявності третього доданка. Ще раз підкреслимо, що згинальні дотичні напруження по товщині перерізу розподілені рівномірно.

#### 4.2.3. Визначення кута закручування та пов'язаних із ним зусиль і переміщень

Для визначення нормальних і дотичних напружень, як це впливає з формул (4.20), (4.21) і (4.27), необхідно визначити внутрішні зусилля. Більша їх частина збігається із зусиллями, що виникають у звичайному нетонкостінному стержні. Це поздовжнє зусилля  $N_x$ , два поперечних зусилля  $Q_z$  і  $Q_y$ , два згинальних моменти  $M_y$  і  $M_z$ . Вони визначаються так само, як і у звичайному стержні, тому зупинятися на цих питаннях немає необхідності. Слід розглянути

лише особливості знаходження двох моментів кручення  $M_x^{\text{кр}}$  і  $M_x^\omega$  та бімоменту  $B$ . Ці три зусилля виражаються через кут закручування  $\varphi_x$ , із яким вони пов'язані залежностями (4.19), (4.23) і (4.26), а саме:

$$\begin{aligned} M_x^{\text{кр}} &= GI_{\text{кр}} \cdot \varphi'_x, \\ M_x^\omega &= -EI_\omega \cdot \varphi''_x, \\ B &= -EI_\omega \cdot \varphi''_x. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Крім того, виразимо через  $\varphi_x$  значення *повного крутного моменту*  $M_x$ , який дорівнює сумі:

$$M_x = M_x^{\text{кр}} + M_x^\omega. \quad (4.29)$$

Підставляючи значення складових, отримаємо:

$$M_x = GI_{\text{кр}} \cdot \varphi'_x - EI_\omega \cdot \varphi''_x.$$

Винесемо за дужки  $EI_\omega$ . Тоді

$$M_x = -EI_\omega \left( \varphi''_x - \frac{GI_{\text{кр}}}{EI_\omega} \cdot \varphi'_x \right).$$

Введемо позначення:

$$\beta^2 = \frac{GI_{\text{кр}}}{EI_\omega}. \quad (4.30)$$

Враховуючи це, отримаємо:

$$M_x = -EI_\omega (\varphi''_x - \beta^2 \varphi'_x). \quad (4.31)$$

Як впливає з наведених залежностей, усі вказані зусилля виражаються через кут закручування  $\varphi_x$ . Для його визначення складемо диференціальне рівняння, використовуючи одну з умов рівноваги, а саме, рівність нулю суми моментів відносно поздовжньої осі тонкостінного стержня, що проходить через центр згинання поперечного перерізу:

$$M'_x = -m_x,$$

де  $m_x$  — момент зовнішніх навантажень відносно вищевказаної осі.



Підставимо в рівняння рівноваги вираз (4.31):

$$-EI_{\omega}(\varphi_x^{IV} - \beta^2 \varphi_x'') = -m_x.$$

Розділивши на  $EI_{\omega}$  та змінивши знаки, остаточно отримаємо:

$$\varphi_x^{IV} - \beta^2 \varphi_x'' = \frac{m_x}{EI_{\omega}}. \quad (4.32)$$

Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Запишемо відповідне характеристичне рівняння:

$$k^4 - \beta^2 k^2 = 0.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = \pm \beta.$$

Відповідні до них розв'язки однорідного диференціального рівняння дорівнюватимуть

$$1, \quad x, \quad \text{sh}(\beta x), \quad \text{ch}(\beta x).$$

Для складання розв'язку рівняння у формі методу початкових параметрів застосуємо функції, що представляють собою лінійні комбінації наведених розв'язків. Як початкові параметри застосуємо початкові значення  $\varphi_x(0)$ ,  $\varphi_x'(0)$ ,  $B(0)$ ,  $M_x(0)$ . Тоді розв'язок рівняння (4.32) може бути записаний у вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi_x(x) = & \varphi_x(0) + \varphi_x'(0) \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta x) + \frac{B(0)}{EI_{\omega}} \cdot \frac{1}{\beta^2} (1 - \text{ch}(\beta x)) + \\ & + \frac{M_x(0)}{EI_{\omega}} \cdot \frac{1}{\beta^3} (\beta x - \text{sh}(\beta x)) + \varphi_x^*(x). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Частинний розв'язок  $\varphi_x^*(x)$  дорівнює:

$$\varphi_x^*(x) = -\frac{1}{EI_{\omega} \beta^3} \int_0^x [\beta(x-t) - \text{sh}(\beta(x-t))] m_x(t) dt.$$

Виразимо через  $\varphi_x$  залежні від неї величини, використовуючи формули (4.28):

$$\begin{aligned}
\varphi'_x(x) &= \varphi'_x(0) \operatorname{ch}(\beta x) - \frac{B(0)}{EI_\omega} \cdot \frac{1}{\beta} \operatorname{sh}(\beta x) + \frac{M_x(0)}{EI_\omega} \cdot \frac{1}{\beta^2} (1 - \operatorname{ch}(\beta x)) + \\
&\quad + [\varphi_x^*(x)]', \\
B(x) &= -EI_\omega \beta \varphi'_x(0) \operatorname{sh}(\beta x) + B(0) \operatorname{ch}(\beta x) + M_x(0) \frac{1}{\beta} \operatorname{sh}(\beta x) - \\
&\quad - EI_\omega [\varphi_x^*(x)]'', \\
M_x^{\text{кр}}(x) &= GI_{\text{кр}} \varphi'_x(0) \operatorname{ch}(\beta x) - B(0) \beta \operatorname{sh}(\beta x) + M_x(0) (1 - \operatorname{ch}(\beta x)) + \\
&\quad + GI_{\text{кр}} [\varphi_x^*(x)]', \\
M_x^\omega(x) &= -EI_\omega \beta^2 \varphi'_x(0) \operatorname{ch}(\beta x) + B(0) \beta \operatorname{sh}(\beta x) + M_x(0) \operatorname{ch}(\beta x) - \\
&\quad - EI_\omega [\varphi_x^*(x)]'''. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Похідні частинного розв'язку  $\varphi_x^*(x)$  у формулах (4.34) мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
[\varphi_x^*(x)]' &= -\frac{1}{EI_\omega \beta^2} \int_0^x [1 - \operatorname{ch}(\beta(x-t))] m_x(t) dt, \\
[\varphi_x^*(x)]'' &= \frac{1}{EI_\omega \beta} \int_0^x \operatorname{sh}(\beta(x-t)) m_x(t) dt, \\
[\varphi_x^*(x)]''' &= \frac{1}{EI_\omega} \int_0^x \operatorname{ch}(\beta(x-t)) m_x(t) dt.
\end{aligned}$$

Повний крутний момент виразимо за формулою (4.29), урахувавши в ній рівності (4.34):

$$M_x(x) = M_x(0) - \int_0^x m_x(t) dt. \tag{4.35}$$

Наведемо вирази частинних розв'язків, що відповідають деяким видам навантажень. Схеми навантажень показані на рис. 4.16 (рівномірно розподілене крутне моментне навантаження — рис. 4.16(а), зосереджений зовнішній

крутний момент — рис. 4.16(б), зосереджений зовнішній бімомент — рис. 4.16(в)). Відповідні вирази містяться в табл. 4.1.

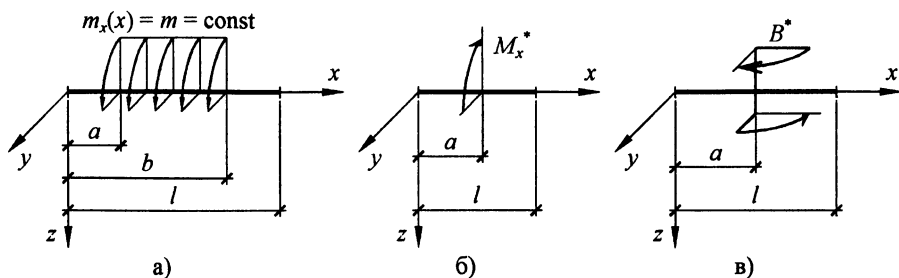


Рис. 4.16. Варіанти зовнішніх навантажень

Таблиця 4.1

Номер схеми	Ділянка	Частинний розв'язок
а)	$0 \leq x \leq a$	$\varphi_x^*(x) = 0$
	$a \leq x \leq b$	$\varphi_x^*(x) = -\frac{m}{EI_\omega \beta^4} \left[ 1 + \beta^2 \frac{(x-a)^2}{2} - \text{ch}(\beta(x-a)) \right]$
	$b \leq x \leq l$	$\varphi_x^*(x) = -\frac{m}{EI_\omega \beta^4} \left[ \beta^2 \frac{(x-a)^2 - (x-b)^2}{2} - \text{ch}(\beta(x-a)) + \text{ch}(\beta(x-b)) \right]$
б)	$0 \leq x \leq a$	$\varphi_x^*(x) = 0$
	$a \leq x \leq l$	$\varphi_x^*(x) = \frac{M_x^*}{EI_\omega \beta^3} [\beta(x-a) - \text{sh}(\beta(x-a))]$
в)	$0 \leq x \leq a$	$\varphi_x^*(x) = 0$
	$a \leq x \leq l$	$\varphi_x^*(x) = \frac{B^*}{EI_\omega \beta^2} [1 - \text{ch}(\beta(x-a))]$

У вирази (4.33), (4.34) і (4.35) входять чотири невідомі сталі величини, що представляють собою значення відповідних функцій у початковій точці. Для того, аби за умовами закріплення кінців стержня можна було з'ясувати граничні

умови, слід уявляти фізичне значення величин, які визначаються вказаними рівностями.

Функція  $\varphi_x$  представляє собою кут повороту поперечного перерізу відносно поздовжньої осі стержня, тобто *кут закручування*.

Значення першої похідної  $\varphi'_x$  від кута закручування можна з'ясувати з виразу (4.14). З нього випливає, що від похідної  $\varphi'_x$  залежить поздовжнє переміщення  $\tilde{u}_x$  точок поперечного перерізу. Завдяки виникненню цих переміщень поперечний переріз виходить зі своєї первісної площини, тобто деформується. У зв'язку з цим похідну  $\varphi'_x$  називають *мірою депланції поперечного перерізу*.

Наочне уявлення про *бімомент* можна скласти за рис. 4.17. На ньому зображений поперечний переріз тонкостінного стержня, що має форму двотавра. До однієї з його кутових точок прикладено зосереджену силу  $F$ , паралельну поздовжній осі. Задля приведення цього навантаження до головних центральних осей розкладемо його на чотири складові, прикладені у кутових точках. Їхні напрямки обираємо так, аби в сумі вони давали вихідне навантаження.

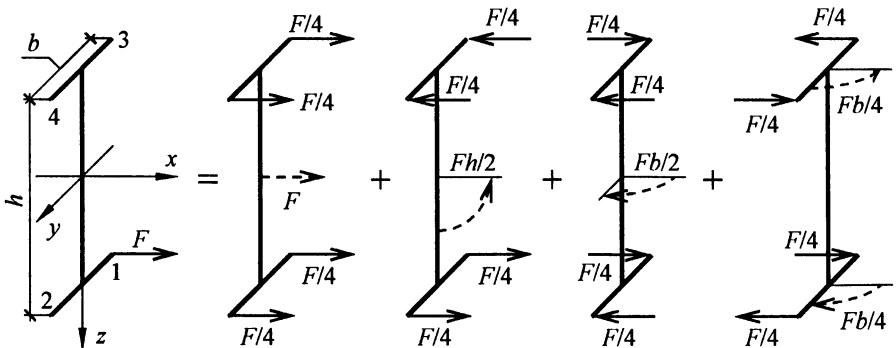


Рис. 4.17. Зовнішні згинальні моменти та зовнішній бімомент, створювані позацентрово прикладеною поздовжньою силою

У кожному з чотирьох станів пунктиром показані головні вектори й головні моменти, до яких приводиться навантаження даного стану. В останньому стані на кожну з двох полиць двотавра діє пара сил, що створюють два протилежно спрямованих рівних за величиною моменти. Вони віддалені один від одного на відстань, що дорівнює висоті стінки двотавра  $h$ . Помноживши величину моменту на цю відстань, знайдемо значення бімоменту. Він дорівнюватиме:

$$B = \frac{1}{4} Fbh.$$

Таким чином, бімомент можна розглядати як дві пари сил, що прикладені до різних елементів тонкостінного стержня й віддалені одна від одної на деяку відстань.

Значення бімоменту, що відповідає розглядуваному навантаженню, можна отримати іншим шляхом. Для цього необхідно побудувати епюру головних секторних площ (рис. 4.18).

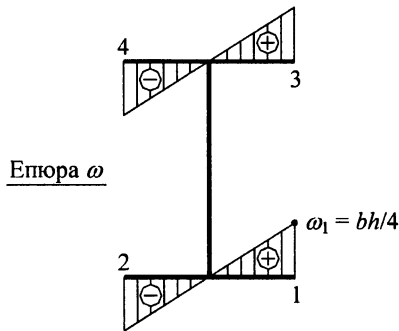


Рис. 4.18. Епюра головних секторних площ перерізу з рис. 4.17

Помноживши силу  $F$ , прикладену в точці 1, на значення координати  $\omega_1$  цієї точки, отримаємо:

$$B = F \cdot \omega_1 = \frac{1}{4} Fbh.$$

Узагальнюючи, можна стверджувати, що поздовжнє зосереджене навантаження, прикладене у довільній точці поперечного перерізу тонкостінного стержня, створює відносно головних центральних осей, крім силових та моментних навантажень, також і зовнішній бімомент. Його значення дорівнює добутку величини навантаження на головну секторну координату точки прикладення. Знак бімоменту відповідає знакові добутку. При цьому сила  $F$  вважається додатною, якщо її напрямок співпадає з додатним напрямком поздовжньої осі стержня. Все сказане можна розповсюдити й на розподілені навантаження, оскільки їх завжди можна представити як систему зосереджених сил.

Подібні поняття можна застосувати й для бімоменту, що створюється внутрішніми напруженнями. Відповідно до формули (4.17) бімомент визначається наступним виразом:

$$B = \iint_A \omega \sigma_{xx} dA.$$

Добуток  $(\sigma_{xx} \cdot dA)$  представляє собою елементарну поздовжню силу, котра множиться на секторну координату даної точки. У результаті вираз під інтегралом відповідає елементарному бімоменту, котрий потім підсумовується по всій площі поперечного перерізу.

Зупинимося на з'ясуванні значення величини  $M_x^\omega = B'$ . Відповідно до формули (4.17) можна записати:

$$M_x^\omega = \iint_A \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \omega dA.$$

Врахуємо співвідношення (4.24):

$$M_x^\omega = - \iint_A \frac{\partial \tau_{xs}^{3r}}{\partial s} \omega dA = - \int_{s_0}^{s_k} \frac{\partial \tau_{xs}^{3r}}{\partial s} \omega \delta ds.$$

Межі інтегрування  $s_0$  і  $s_k$  відповідають початковій і кінцевій точкам серединної лінії поперечного перерізу.

Перетворимо останній інтеграл, застосовуючи правило інтегрування частинами. Приймаємо:

$$u = \omega, \quad dv = \frac{\partial \tau_{xs}^{3r}}{\partial s} ds,$$

$$du = d\omega = r \cos \beta ds, \quad v = \tau_{xs}^{3r}.$$

Після цього можна записати:

$$M_x^\omega = -\delta(\tau_{xs}^{3r} \cdot \omega) \Big|_{s_0}^{s_k} + \delta \int_{s_0}^{s_k} \tau_{xs}^{3r} r \cos \beta ds.$$

Перший доданок у цьому виразі дорівнює нулю, оскільки  $\tau_{xs}^{3r}$  при  $s = s_k$  і  $s = s_0$  дорівнює нулю. В другому доданку перейдемо до інтегрування по  $dA = \delta ds$ :

$$M_x^\omega = \iint_A \tau_{xs}^{3r} r \cos \beta dA.$$

З рис. 4.19 випливає, що добуток  $(r \cos \beta)$  являє собою величину перпендикуляра, опущеного з центра згинання на лінію дії напруження  $\tau_{xs}^{3r}$ .

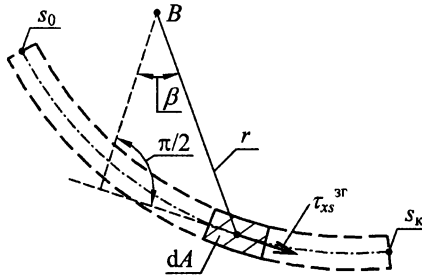


Рис. 4.19. До визначення моменту згинальних дотичних напружень відносно центра згинання

Це дозволяє стверджувати, що підінтегральний вираз являє собою момент елементарної сили  $(\tau_{xs}^{3r} \cdot dA)$  відносно центра згинання. Інтеграл по всій площі

перерізу від цієї величини являє собою момент дотичних напружень  $\tau_{xs}^{зг}$  усього перерізу відносно центра згинання.

Отже,  $M_x^{\omega}$  представляє собою крутний момент, створюваний згинальними дотичними напруженнями відносно центра згинання.

Дотичні напруження чистого кручення  $\tau_{xs}^{кр}$  визначаються за формулою (4.21). Характер їх розподілення по поперечному перерізу показаний на рис. 4.12. За такого закону розподілення на кожній елементарній ділянці поперечного перерізу їхній головний вектор і головний момент матимуть лише одну ненульову складову, а саме, момент відносно осі, перпендикулярної до площини перерізу. Значення моменту не залежать від розташування точки, через яку проходить така вісь. Це дає змогу обрати вісь, що проходить через центр згинання. Підсумовуючи елементарні моменти по площі перерізу, знайдемо момент чистого кручення, що діє на весь переріз.

Зважаючи на те, що момент чистого кручення  $M_x^{кр}$  та згинально-крутний момент  $M_x^{\omega}$  визначені як моменти відносно тієї самої осі, повний крутний момент  $M_x$ , рівний їх сумі, являтиме собою момент відносно тієї ж осі, тобто відносно поздовжньої осі, що проходить через центр згинання.

Розглянемо деякі види граничних умов, що відповідають різним варіантам закріплення тонкостінного стержня. Фіксуватимемо лише умови, що накладаються на кут закручування  $\varphi_x$  і пов'язані з ним величини.

Почнемо з жорсткого затиснення кінця стержня (рис. 4.20(а)). У цьому випадку всі кутові й лінійні переміщення поперечного перерізу дорівнюють нулю. Отже, дорівнює нулю кут закручування  $\varphi_x$ . Крім того, дорівнює нулю похідна  $\varphi'_x$  від кута закручування, оскільки у зв'язку з відсутністю поздовжніх переміщень не виникає депланація.

На вільному від закріплення кінці стержня (рис. 4.20(б)) бімомент і повний крутний момент дорівнюють нулю.



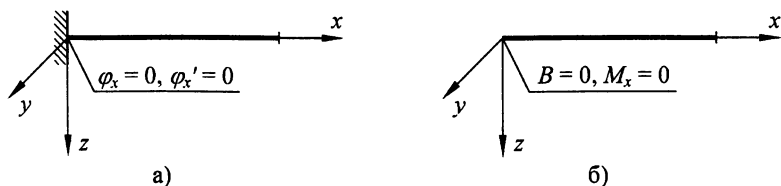


Рис. 4.20. Варіанти граничних умов

На опорі, що перешкоджає куту закручування і не перешкоджає поздовжньому переміщенню, дорівнюватимуть нулю кут закручування та бімомент:  $\varphi_x = 0$ ,  $B = 0$ . Спеціальних умовних позначень для такої опори немає, тому слід просто обговорювати, які саме обмеження накладаються на ті чи інші величини. Аналогічним чином слід характеризувати граничні умови для інших варіантів закріплення. Всього для кута закручування та залежних від нього величин на кожному кінці стержня можна встановити дві умови.

## Глава 4.3. Приклади до четвертого розділу

### 4.3.1. Приклад розрахунку тонкостінного стержня

Порядок визначення геометричних характеристик, зусиль і напружень у тонкостінному стержні проілюструємо на конкретному прикладі. Розрахункова схема стержня показана на рис. 4.21.

На першому етапі розрахунку необхідно визначити геометричні характеристики поперечного перерізу. Почнемо зі знаходження положення головних центральних осей. Одна з них співпадає з віссю симетрії перерізу (вісь  $Oy$ ). Друга, вісь  $Cz$ , пройде перпендикулярно до неї через центр ваги перерізу. Положення центра ваги слід визначити.

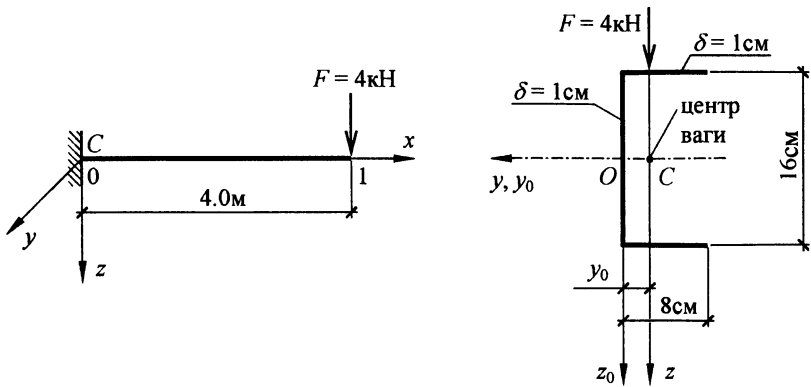


Рис. 4.21. Розрахункова схема тонкостінного стержня

При пошуку центра ваги застосуємо довільну початкову систему координат  $y_0Oz_0$ . За наявності в перерізі осі симетрії доцільно сумішати одну з початкових осей з віссю симетрії.

Центр ваги  $C$  лежить на осі симетрії. Його координата  $y_0$  визначається формулою:

$$y_0 = \frac{S_{z_0}}{A}.$$

$$A = \iint_A dA = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} ds \right) = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 16 = 32 \text{ cm}^2.$$

$$S_{z_0} = \iint_A y_0 dA = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} y_0 ds \right).$$

Для знаходження значення інтеграла у виразі  $S_{z_0}$  побудуємо епюру лінійних координат  $y_0$  в осях  $y_0Oz_0$  (рис. 4.22). За геометричним змістом зазначений інтеграл представляє собою площу епюри  $y_0$ .

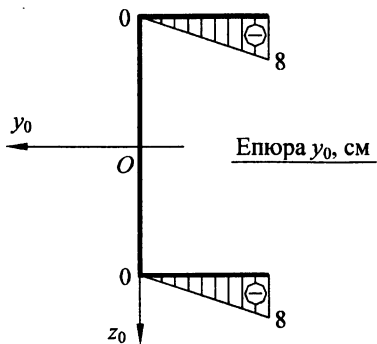


Рис. 4.22. До визначення центра ваги

$$S_{z_0} = -\left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8\right) 2 = -64 \text{ см}^3.$$

$$\text{Отже, } y_0 = \frac{-64}{32} = -2 \text{ см.}$$

Будемо епюри лінійних координат  $y$  і  $z$  у головних центральних осях (рис. 4.23).

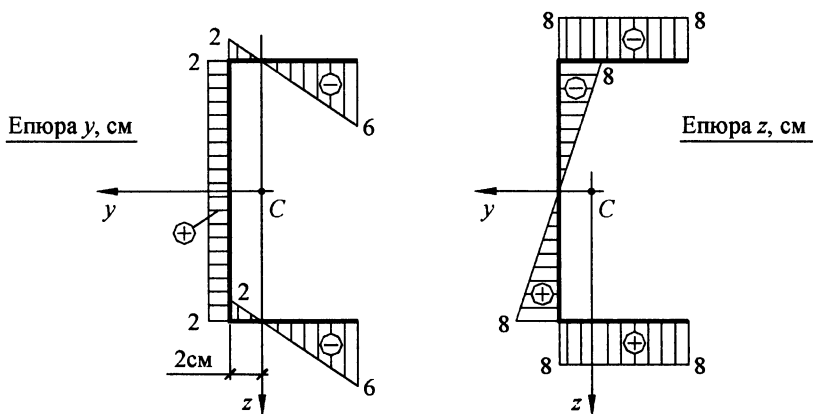


Рис. 4.23. Епюри лінійних координат у системі головних осей

При пошуку центра згинання застосовуємо довільну початкову систему відліку секторної координати. Обираємо довільну точку за полюс і будемо

епюру секторних координат. Прийємо полюс у точці  $C$  (рис. 4.24).

При побудові епюри  $\omega_C$  керуємося загальним означенням секторної координати. Це є подвійна площа фігури, що міститься між початковим радіусом, поточним радіусом і серединною лінією поперечного перерізу. Таким чином, після вибору полюса слід обрати початковий радіус. Прийємо його таким, що співпадає з лінією  $CO$ . Взагалі, для спрощення подальших розрахунків у симетричних перерізах початковий радіус слід суміщати з віссю симетрії. Поточний радіус почергово проводимо в точки серединної лінії, для яких знаходимо секторні координати.

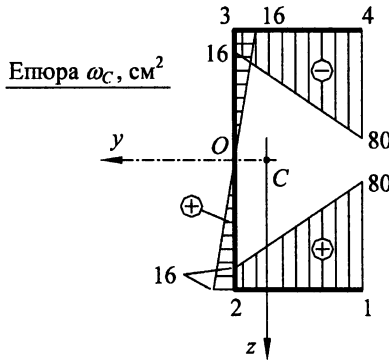


Рис. 4.24. Епюра секторної координати у початковій системі відліку

$$\omega_{C3} = 2 \text{пл.} \Delta CO3 = -(2 \cdot 8) = -16 \text{ см}^2.$$

$$\omega_{C4} = 2 \text{пл.} \Delta C34 + \omega_{C3} = -(8 \cdot 8) - 16 = -80 \text{ см}^2.$$

Знак приймається залежно від напрямку повороту поточного радіуса відносно початкового радіуса. При повороті проти годинникової стрілки приймається знак "плюс", і навпаки. Так поточний радіус при переході від положення  $CO$  до  $C3$  обертається за годинниковою стрілкою. При переході від  $C3$  до  $C4$  поточний радіус також обертається за годинниковою стрілкою.

За формулами (4.10) знайдемо координати центра згинання:

$$y_B = y_C + \frac{I_{\omega_C y}}{I_y}, \quad z_B = z_C - \frac{I_{\omega_C z}}{I_z},$$

де  $y_C, z_C$  — координати обраного нами довільного полюса.  $y_C = z_C = 0$ .

Геометричні характеристики, що входять у формули, знаходимо, використовуючи епюри координат  $y, z, \omega_C$ .

$$I_y = \iint_A z^2 dA = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} z^2 ds \right);$$

$$I_z = \iint_A y^2 dA = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} y^2 ds \right);$$

$$I_{\omega_C y} = \iint_A \omega_C z dA = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} \omega_C z ds \right);$$

$$I_{\omega_C z} = \iint_A \omega_C y dA = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} \omega_C y ds \right).$$

Інтеграли у цих виразах можуть бути знайдені способами Верещагіна й Сімпсона. Для цього треба "перемножити" епюри підінтегральних функцій. Так, для визначення  $I_y$  слід помножити епюру  $z$  саму на себе; для визначення  $I_{\omega_C y}$  слід епюру  $\omega_C$  помножити на епюру  $z$ ; аналогічно визначаються й інші величини.

$$I_y = 2 \cdot 1 \left( \frac{1}{2} 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} 8 + 8 \cdot 8 \cdot 8 \right) = \frac{4096}{3} \text{ см}^4;$$

$$I_z = 2 \cdot 1 \left[ 2 \cdot 8 \cdot 2 + \frac{8}{6} (2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 6 \cdot 6) \right] = \frac{640}{3} \text{ см}^4;$$

$$I_{\omega_C y} = 2 \cdot 1 \left[ \frac{1}{2} 16 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} 8 + \frac{1}{2} (16 + 80) 8 \cdot 8 \right] = \frac{20480}{3} \text{ см}^5;$$

$$I_{\omega_C z} = 0.$$

Координати центра згинання дорівнюватимуть:

$$y_B = 0 + \frac{20480 \cdot 3}{3 \cdot 4096} = 5 \text{ см},$$

$$z_B = 0.$$

Перебудовуємо епюру секторної координати, приймаючи за полюс центр згинання  $B$ , а за початковий радіус — відрізок  $BO$ , що співпадає з віссю симетрії (рис. 4.25).

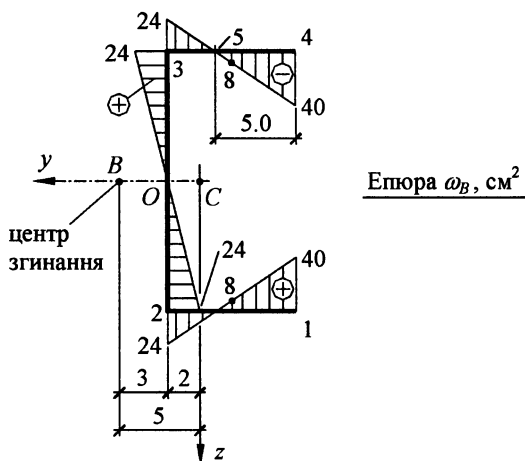


Рис. 4.25. Епюра секторної координати у головній системі відліку

Епюра  $\omega_B$  являється епюрою головних секторних площ. За нею знаходимо секторний момент інерції  $I_\omega$ :

$$I_\omega = I_{\omega_B} = \iint_A \omega_B^2 dA = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} \omega_B^2 ds \right).$$

$$I_\omega = 2 \cdot 1 \left[ \frac{1}{2} 24 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} 24 + \frac{8}{6} (24 \cdot 24 + 4 \cdot 8 \cdot 8 + 40 \cdot 40) \right] = \frac{28672}{3} \text{ см}^6.$$

У подальшому виникне потреба в епюрах статичних моментів відсічених частин перерізу, оскільки їхні значення входять до виразу згинальних дотичних напружень (4.27). Тому зупинимося на побудові цих епюр. Значення статичних

моментів, відповідні до деякої довільної точки  $T$  серединної лінії, здобуваються за наступними формулами:

$$S_{yT} = \iint_{A_T} z \, dA = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} z \, ds \right), \quad (4.36)$$

$$S_{\omega T} = \iint_{A_T} \omega_B \, dA = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} \omega_B \, ds \right).$$

Для їх визначення необхідно через розглядувану точку  $T$  провести нормальну до серединної лінії пряму  $t$ , котра розсікає поперечний переріз на дві частини (рис. 4.26(а)).

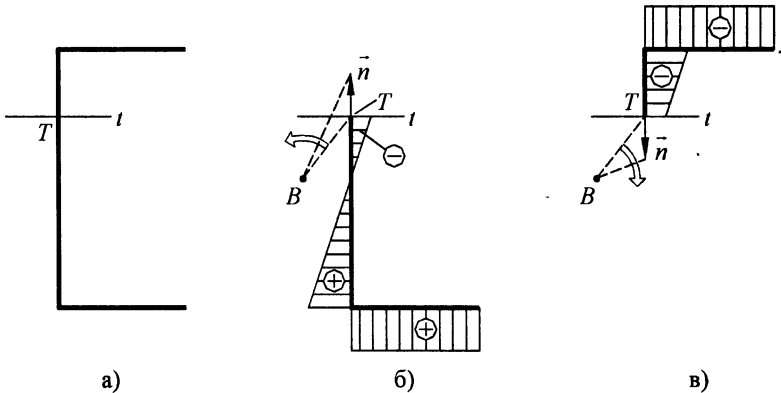


Рис. 4.26. До визначення статичного моменту частини перерізу

Після цього знаходимо статичний момент однієї з цих частин. Його знак і величина визначаються знаком і площею відповідної епюри координати, точніше, частини цієї епюри, що відноситься до відповідної частини перерізу (рис. 4.26(б)). Крім того, площа епюри на кожній ділянці серединної лінії множиться на товщину відповідної ділянки перерізу  $\delta_i$ . Статичний момент другої частини перерізу (рис. 4.26(в)) матиме таке ж значення, але з протилежним знаком. Постає питання, який знак статичного моменту слід прийняти, перш ніж підставити його у формулу (4.27).

Проведемо з точки  $T$  вектор зовнішньої нормалі до частини перерізу (рис. 4.26(б)), тобто такий вектор  $\vec{n}$ , що перпендикулярний до січної лінії  $t$  і є продовженням серединної лінії частини перерізу. Проведемо з центра згинання  $B$  у розглядувану точку радіус  $BT$  і повернемо його від початку вектора  $\vec{n}$  до кінця вектора. Якщо цей поворот спрямований проти годинникової стрілки, дану частину перерізу називають *частиною з додатною зовнішньою нормаллю*. Статичний момент такої частини підставляється у формулу (4.27) із власним знаком.

В іншій частині перерізу (рис. 4.26(в)) при аналогічних побудовах радіус  $BT$  повертатиметься за годинниковою стрілкою. Таку частину перерізу називають *частиною з від'ємною зовнішньою нормаллю*. У формулі (4.27) можна застосувати статичний момент і такої частини перерізу, але слід попередньо змінити його знак на протилежний.

Зазначимо також особливість побудови епюр статичних моментів, пов'язану з точками, де серединна лінія перерізу різко змінює свій напрямок або розгалужується. В такому випадку слід розсікти переріз по кожній ділянці, що примикає до такої вузлової точки, оскільки в сусідніх точках по різні боки від вузлової значення статичних моментів можуть відрізнятись.

Згідно з наведеним вище означенням обчислимо за формулами (4.36) статичні моменти в деяких характерних точках перерізу і побудуємо відповідні епюри (рис. 4.27).

$$S_{yO} = 1 \left[ 8 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \right] = 96 \text{ см}^3,$$

$$S_{y_{3-O}} = -1 \cdot 8(-8) = 64 \text{ см}^3,$$

$$S_{y_{3-4}} = 1 \cdot 8(-8) = -64 \text{ см}^3,$$

$$S_{y_4} = 0.$$

$$S_{\omega O} = 1 \left[ \frac{1}{2} \cdot 8(-24) + 8 \cdot \frac{-24 + 40}{2} \right] = -32 \text{ см}^4,$$



$$S_{\omega 3-0} = -1 \cdot 8 \cdot \frac{24 + (-40)}{2} = 64 \text{ см}^4,$$

$$S_{\omega 3-4} = 1 \cdot 8 \cdot \frac{24 + (-40)}{2} = -64 \text{ см}^4,$$

$$S_{\omega 5} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (-40) = -100 \text{ см}^4,$$

$$S_{\omega 4} = 0.$$

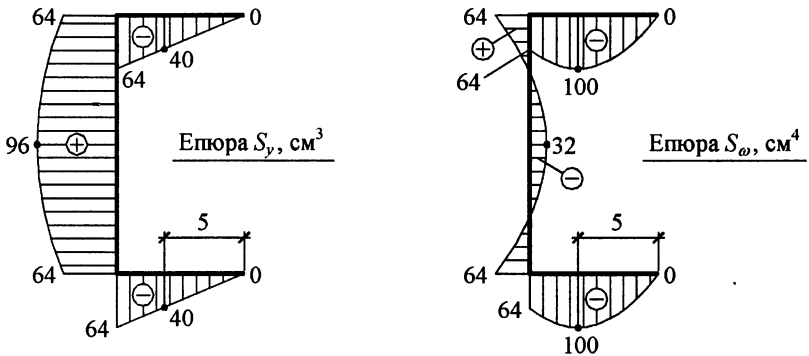


Рис. 4.27. Епюри статичних моментів частин перерізу

Після визначення геометричних характеристик перейдемо до знаходження зусиль. Перш за все зазначимо, що сила  $F$  віддалена від центра згинання на відстань, рівну 5 см. Крутний момент внутрішніх напружень представляє собою момент відносно центра згинання, тому необхідно й момент зовнішніх сил визначати відносно осі, що проходить через цю точку. У зв'язку з цим необхідно в точці 1 (рис. 4.28) крім сили  $F$  прикласти момент, рівний

$$M_x^* = F \cdot 0.05 \text{ м} = 0.2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За наведеною на рис. 4.28 розрахунковою схемою визначаємо переміщення й зусилля, що виникають у стержні. Частина з них, а саме лінійне переміщення  $u_z$ , кут повороту  $\varphi_y$ , згинальний момент  $M_y$  і поперечну силу  $Q_z$  знаходимо як у звичайному нетонкостінному стержні. Друга частина, пов'язана з кутом закручування  $\varphi_x$ , визначається методом початкових параметрів, котрий

базується на використанні виразів (4.34). До цієї частини відносяться самий кут закручування  $\varphi_x$ , міра депланації  $\varphi'_x$ , бімомент  $B$ , момент чистого кручення  $M_x^{кп}$  і згинально-крутний момент  $M_x^\omega$ .

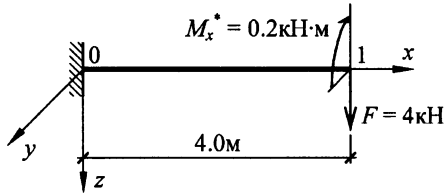


Рис. 4.28. Навантаження, приведені до центра згинання

На основі заданої розрахункової схеми формуємо чотири граничні умови:

при  $x=0$

1)  $\varphi_x = 0$ ,

2)  $\varphi'_x = 0$ ;

при  $x=4\text{ м}$

3)  $B = 0$ ,

4)  $M_x = -0.2\text{ кН}\cdot\text{м}$ .

З перших двох граничних умов випливає, що два початкових параметри дорівнюють нулю, а саме:  $\varphi_x(0) = 0$ ,  $\varphi'_x(0) = 0$ . Два інших початкових параметри знаходимо з граничних умов на правому кінці балки. На підставі формул (4.34) і (4.35) запишемо ці умови в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} B(0)\text{ch}(\beta \cdot 4) + M_x(0)\frac{1}{\beta}\text{sh}(\beta \cdot 4) = 0, \\ M_x(0) = -0.2. \end{cases}$$

Звідси знайдемо:

$$M_x(0) = -0.2\text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$B(0) = 0.2 \text{ кН} \cdot \text{м} \frac{1}{\beta} \text{th}(\beta \cdot 4 \text{ м}).$$

Визначимо параметр  $\beta$  за формулою (4.30):

$$\beta^2 = \frac{GI_{\text{кр}}}{EI_{\omega}}.$$

Візьмемо коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0.25$ , тоді  $G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = 0.4E$ .

Момент інерції кручення знаходимо на підставі виразу (4.22):

$$I_{\text{кр}} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{3} \delta_i^3 b_i \right) = \frac{1}{3} (2 \cdot 1^3 \cdot 8 + 1^3 \cdot 16) = \frac{32}{3} \text{ см}^4.$$

Враховуючи отримані співвідношення у виразі  $\beta^2$ , знайдемо:

$$\beta^2 = \frac{0.4E \cdot 32 \text{ см}^4 \cdot 3}{3 \cdot E \cdot 28672 \text{ см}^6} = 4.4642857 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{см}^2} = 4.46429 \frac{1}{\text{м}^2},$$

$$\beta = 2.11289 \text{ м}^{-1}.$$

Після цього знаходимо значення  $B(0)$ :

$$B(0) = 0.094657 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Підставимо значення початкових параметрів у формули (4.33), (4.34)

і (4.35):

$$\varphi_x(x) = \frac{0.021203}{EI_{\omega}} [(1 - \text{ch}(\beta x)) - (\beta x - \text{sh}(\beta x))];$$

$$\varphi'_x(x) = \frac{-0.0447996}{EI_{\omega}} [\text{sh}(\beta x) + (1 - \text{ch}(\beta x))];$$

$$B(x) = 0.094657 [\text{ch}(\beta x) - \text{sh}(\beta x)];$$

$$M_x^{\omega}(x) = 0.2 [\text{sh}(\beta x) - \text{ch}(\beta x)];$$

$$M_x^{\text{кр}}(x) = -0.2 [\text{sh}(\beta x) + (1 - \text{ch}(\beta x))];$$

$$M_x(x) = -0.2.$$

На підставі цих формул будуюмо епюри, показані на рис. 4.29. Крім

вказаних величин на тому ж рисунку наведені епюри згинального моменту  $M_y$  і поперечної сили  $Q_z$ .

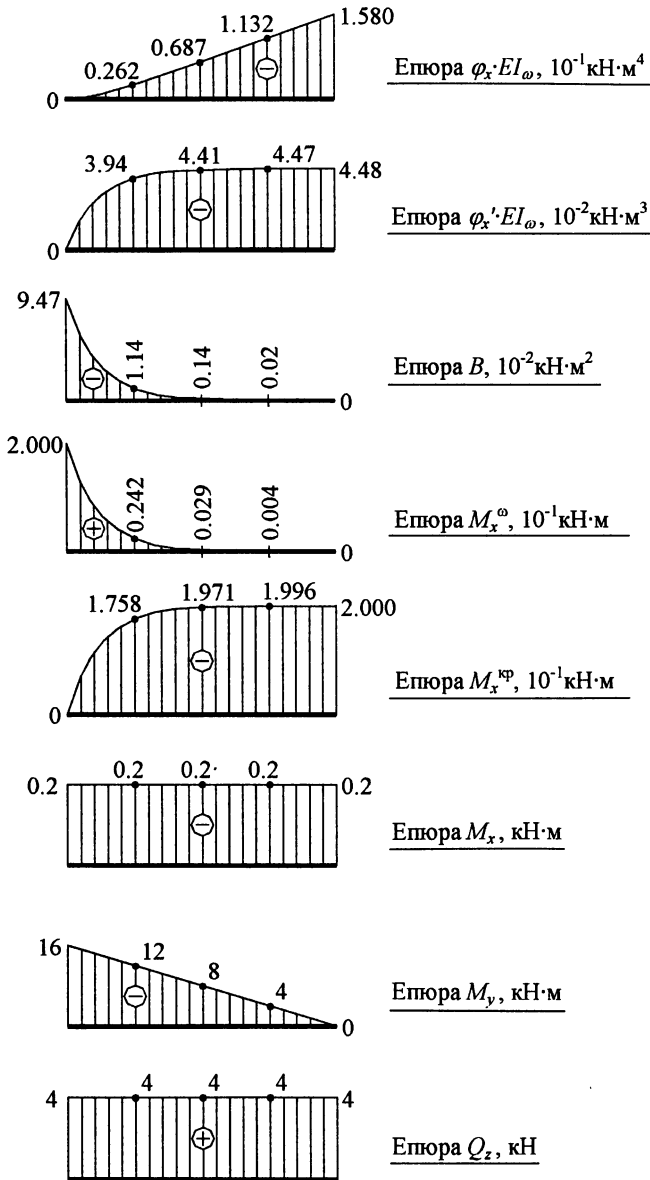


Рис. 4.29. Епюри переміщень та внутрішніх зусиль

За епюрами встановлюємо найбільш небезпечний переріз і визначаємо в ньому напруження. Як розрахунковий приймаємо поперечний переріз при  $x=0$ . У цьому перерізі згинальний момент і бімомент досягають екстремальних значень:  $M_y = -16 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $B = 0.094657 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$ .

За формулою (4.20) знаходимо нормальні напруження в характерних точках.

$$\sigma_{xx} = \frac{-16 \text{ кН}\cdot\text{м}\cdot 3}{4096 \text{ см}^4} z + \frac{0.094657 \text{ кН}\cdot\text{м}^2 \cdot 3}{28672 \text{ см}^6} \omega =$$

$$= \left[ \frac{-11.71875}{\text{см}} z + \frac{0.99041}{\text{см}^2} \omega \right] \text{ МПа} .$$

$$\sigma_{xx1} = -11.71875 \cdot 8 + 0.99041 \cdot 40 = -54.1335 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_{xx2} = -11.71875 \cdot 8 + 0.99041 \cdot (-24) = -117.51984 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_{xx3} = -11.71875 \cdot (-8) + 0.99041 \cdot 24 = 117.51984 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_{xx4} = -11.71875 \cdot (-8) + 0.99041 \cdot (-40) = 54.1335 \text{ МПа} .$$

Розподіл нормальних напружень по поперечному перерізу показано на рис. 4.30. По товщині елементів перерізу нормальні напруження розподілені рівномірно.

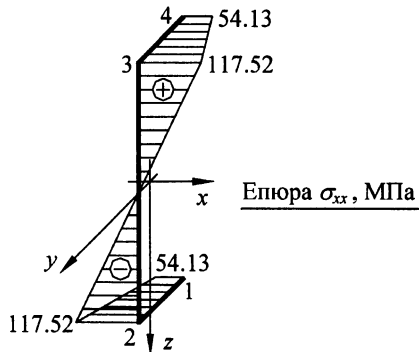


Рис. 4.30. Епюра нормального напруження

У перерізі  $x=0$ , де  $Q_z = 4\text{кН}$ ,  $M_x^\omega = -0.2\text{кН}\cdot\text{м}$ , визначаємо за формулою (4.27) згинальні дотичні напруження. Після підстановки числових значень отримаємо наступний вираз:

$$\tau_{sx}^{3r} = \left[ \frac{-0.029296875}{\text{см}^3} S_y + \frac{0.020926339}{\text{см}^4} S_\omega \right] \text{МПа} .$$

У характерних точках перерізу напруження дорівнюватимуть:

$$\tau_{sx0}^{3r} = -0.02930 \cdot 96 + 0.02093 \cdot (-32) = -2.8125 - 0.6696 = -3.4821 \text{МПа} ;$$

$$\tau_{sx2-0}^{3r} = -0.02930 \cdot 64 + 0.02093 \cdot 64 = -1.875 + 1.339 = -0.536 \text{МПа} ;$$

$$\tau_{sx2-1}^{3r} = -0.02930 \cdot (-64) + 0.02093 \cdot (-64) = 1.875 - 1.339 = 0.536 \text{МПа} ;$$

$$\tau_{sx5}^{3r} = -0.02930 \cdot (-40) + 0.02093 \cdot (-100) = 1.172 - 2.093 = -0.921 \text{МПа} .$$

На рис. 4.31 наведені епюри згинальних дотичних напружень, побудовані окремо для кожного з двох доданків.

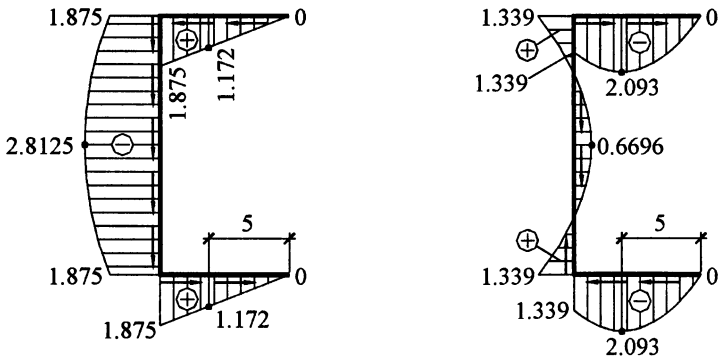


Рис. 4.31. Епюри складових згинального дотичного напруження, на яких показані напрямки дії напружень

Визначимо рівнодійні дотичних напружень на окремих ділянках поперечного перерізу. Їхні значення показані на рис. 4.32.

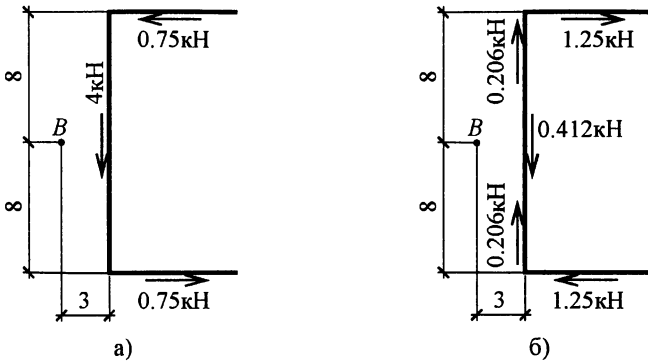


Рис. 4.32. Рівнодійні сили згинальних дотичних напружень

На рис. 4.32(а) показані рівнодійні дотичних напружень, що відповідають поперечній силі. Їх сума проєкцій на вертикальну вісь дорівнює поперечній силі  $Q_z = 4 \text{ кН}$ , а на горизонтальну вісь — нулю. Момент відносно точки  $B$  дорівнює:

$$M_B = 4 \text{ кН} \cdot 3 \text{ см} - 2 \cdot 0.75 \text{ кН} \cdot 8 \text{ см} = 0.$$

На рис. 4.32(б) зображені дотичні напруження, що виникають від згинально-крутного моменту  $M_x^{\omega} = -0.2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Як впливає з рисунка, суми проєкцій цих сил на вертикальну й горизонтальну осі дорівнюють нулю, а момент відносно точки  $B$  становить:

$$M_B = 0.412 \text{ кН} \cdot 3 \text{ см} - 2 \cdot 0.206 \text{ кН} \cdot 3 \text{ см} + 2 \cdot 1.25 \text{ кН} \cdot 8 \text{ см} = 0.2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Таким чином, складові головного вектора й головного моменту внутрішніх напружень дорівнюють зусиллям, що виникають у цьому перерізі.

Як впливає з епюр внутрішніх зусиль (рис. 4.29), максимальні дотичні напруження чистого кручення виникають у крайньому правому перерізі, де  $M_x^{\text{кр}} = -0.2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Відповідні йому дотичні напруження згідно з формулою (4.21) дорівнюватимуть:

$$\tau_{sx}^{кр} = \frac{2(-0.2 \text{ кН}\cdot\text{м})}{\frac{32}{3} \text{ см}^4} \cdot 0.5 \text{ см} = \left[ \frac{2(-0.2 \cdot 10^3) \cdot 3}{32 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.5 \cdot 10^{-2} \right] 10^{-6} \text{ МПа} =$$

$$= -18.75 \text{ МПа}.$$

По товщині перерізу ці напруження розподілені за лінійним законом (рис. 4.33).

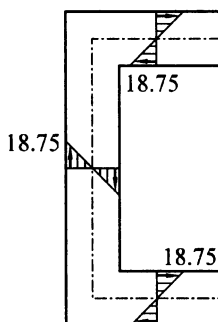


Рис. 4.33. Розподіл і напрямки дотичних напружень чистого кручення

Усі складові головного вектора цих напружень дорівнюють нулю, не дорівнює нулю лише складова головного моменту.

### 4.3.2. Приклад розрахунку тонкостінного стержня

Розглянемо ще один приклад розрахунку тонкостінного стержня (рис. 4.34). Шарнірні опори на кінцях стержня перешкоджають повороту навколо осі  $x$ . Коефіцієнт Пуассона матеріалу  $\mu = 0.25$ .

Визначимо геометричні характеристики перерізу стержня. При пошуку центра ваги застосовуємо початкову систему координат  $y_0Oz_0$ , причому вісь  $y_0$  проводимо по осі симетрії перерізу.



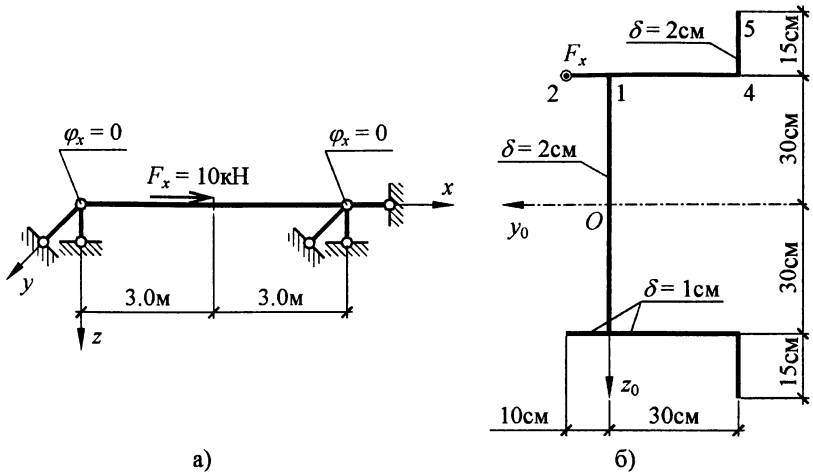


Рис. 4.34. Розрахункова схема тонкостінного стержня

Центр ваги  $C$  лежить на осі симетрії. Його координата  $y_0$  визначається формулою:

$$y_{0C} = \frac{S_{z_0}}{A}.$$

Побудуємо епюру координати  $y_0$  (рис. 4.35).

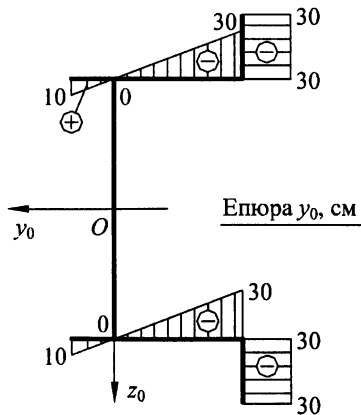


Рис. 4.35. До визначення центра ваги

$$A = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} ds \right) = (2 \cdot 30 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 15) 2 = 260 \text{ см}^2.$$

$$S_{z_0} = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} y_0 ds \right) = \left[ 1 \cdot \frac{-30 + 10}{2} 40 + 2(-30)15 \right] 2 = -2600 \text{ см}^3.$$

$$y_{0C} = \frac{-2600}{260} = -10 \text{ см}.$$

Через центр ваги проводимо головні осі  $y$ ,  $z$  і будуємо епюри координат у цій системі осей (рис. 4.36).

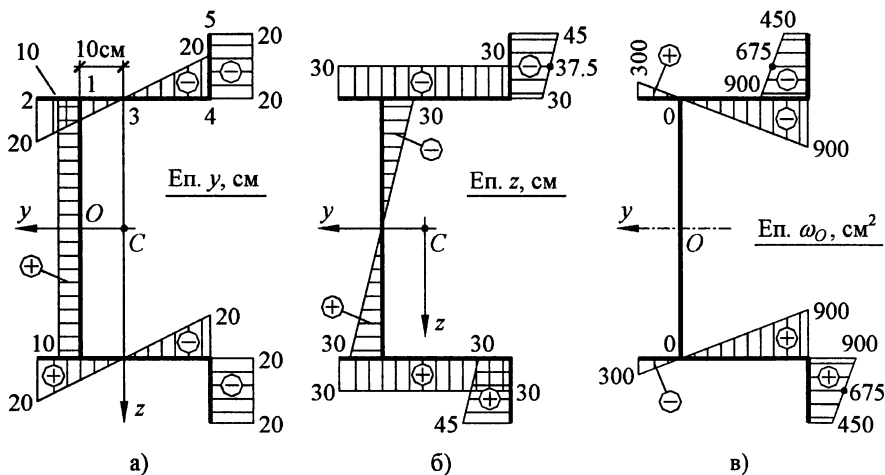


Рис. 4.36. Епюри головних лінійних координат та епюра секторної координати у початковій системі відліку

Для пошуку центра згинання на рис. 4.36(в) також побудована епюра  $\omega_0$  — секторної координати, визначеної виходячи з довільного початкового полюса. В ролі такого взято точку  $O$ . Її координати у головних осях:  $y_0 = 10 \text{ см}$ ,  $z_0 = 0$ .

Координати центра згинання  $B$  визначимо за формулами (4.10):

$$y_B = y_O + \frac{I_{\omega_O y}}{I_y}, \quad z_B = z_O - \frac{I_{\omega_O z}}{I_z},$$

З умов симетрії випливає, що  $z_B = 0$ .

$$I_y = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} z^2 ds \right) = \left[ \frac{1}{2} 30 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} 30 \cdot 2 + 30 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 1 + \right. \\ \left. + \frac{15}{6} (30 \cdot 30 + 4 \cdot 37.5 \cdot 37.5 + 45 \cdot 45) 2 \right] 2 = 193500 \text{ см}^4.$$

$$I_{\omega_O y} = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} \omega_O z ds \right) = \left[ \frac{900 - 300}{2} 40 \cdot 30 \cdot 1 + \right. \\ \left. + \frac{15}{6} (900 \cdot 30 + 4 \cdot 675 \cdot 37.5 + 450 \cdot 45) 2 \right] 2 = 2205000 \text{ см}^5.$$

$$y_B = 10 + \frac{2205000}{193500} = 21.395 \text{ см}.$$

Перебудовуємо епюру секторної координати, приймаючи за полюс центр згинання  $B$ , а за початковий радіус — відрізок  $BO$ , що співпадає з віссю симетрії (рис. 4.37).

Головний секторний момент інерції перерізу дорівнює:

$$I_{\omega} = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} \omega_B^2 ds \right) = \left[ \frac{1}{2} 341.86 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} 341.86 \cdot 2 + \frac{40}{6} (641.86^2 + \right. \\ \left. + 4 \cdot 41.86^2 + 558.14^2) 1 + \frac{15}{6} (558.14^2 + 4 \cdot 247.67^2 + 62.791^2) 2 \right] 2 = 20023256 \text{ см}^6.$$

Момент інерції кручення перерізу дорівнює:

$$I_{\text{кр}} = \sum_i \left( \frac{1}{3} \delta_i^3 b_i \right) = \left( \frac{1}{3} 2^3 \cdot 30 + \frac{1}{3} 1^3 \cdot 40 + \frac{1}{3} 2^3 \cdot 15 \right) 2 = 266.6 \text{ см}^4.$$

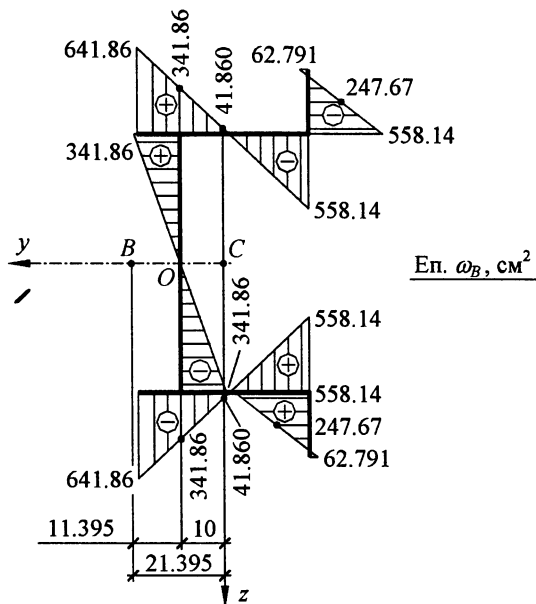


Рис. 4.37. Епюра головної секторної координати

Побудуємо епюри статичних моментів частин перерізу (рис. 4.38). Їхні значення для будь-якої довільної точки  $T$  серединної лінії визначаються за формулами (4.36) і згідно з описаною у п. 4.3.1 процедурою:

$$S_{yT} = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} z ds \right), \quad S_{zT} = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} y ds \right), \quad S_{\omega T} = \sum_i \left( \delta_i \int_{s_{0i}}^{s_{ki}} \omega_B ds \right).$$

Запишемо обчислення деяких ординат цих епюр. Значення  $S_y$  у точці 1 з боку точки 3 дорівнює площі епюри  $z$  на ділянці 1-3-4-5, помноженій на відповідні значення  $\delta$ .

$$S_{y1-3} = -30 \cdot 30 \cdot 1 - \frac{30 + 45}{2} 15 \cdot 2 = -2025 \text{ см}^3.$$

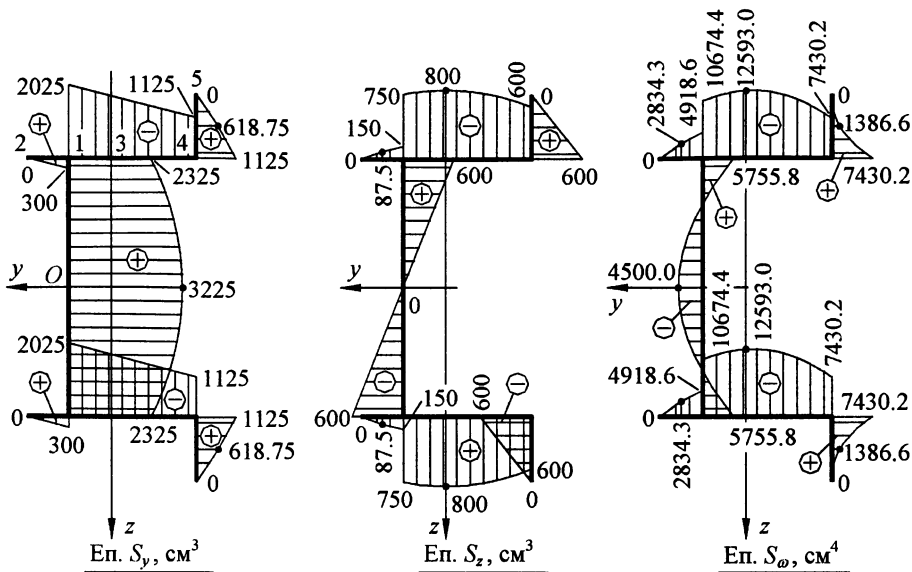


Рис. 4.38. Епюри статичних моментів частин перерізу

Значення  $S_z$  у точці 3 дорівнює площі епюри  $y$  на ділянці 3-4-5, помноженій на відповідні значення  $\delta$ .

$$S_{z3} = -\frac{1}{2} 20 \cdot 20 \cdot 1 - 20 \cdot 15 \cdot 2 = -800 \text{ см}^3.$$

Значення  $S_\omega$  у точці 1 з боку точки  $O$  дорівнює площі епюри  $\omega$  на ділянках 1-2 та 1-3-4-5, помноженій на відповідні значення  $\delta$  і взятій з протилежним знаком.

$$S_{\omega 1-O} = -\left( \frac{641.86 - 558.14}{2} \cdot 40 \cdot 1 + \frac{62.79 - 558.14}{2} \cdot 15 \cdot 2 \right) = 5755.814 \text{ см}^4.$$

Зупинимось на визначенні внутрішніх зусиль та переміщень. У першу чергу приведемо навантаження до поздовжньої осі стержня (рис. 4.39). Сила  $F_x$ , прикладена у точці 2 (рис. 4.34(б)), за рахунок свого позacentрового прикладення створює також моменти  $L_y$ ,  $L_z$  відносно осей  $y$ ,  $z$  та бімомент  $B^*$ .

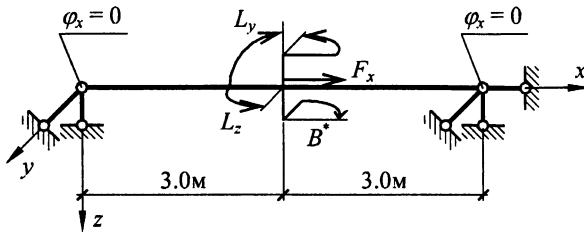


Рис. 4.39. Навантаження, приведені до поздовжньої осі стержня

$$L_y = F_x \cdot z_2 = 10 \cdot 0.3 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$L_z = F_x \cdot y_2 = 10 \cdot 0.2 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$B^* = F_x \cdot \omega_2 = 10 \cdot 641.86 \cdot 10^{-4} = 0.642 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Кожне з навантажень може розглядатися окремо. Спочатку розглянемо дію бімоменту, який спричиняє виникнення у стержні зусиль та переміщень, характерних саме для напружено-деформованого стану тонкостінного стержня.

Розв'язання виконуємо методом початкових параметрів, застосовуючи формули (4.33) та (4.34), в яких частинний розв'язок визначаємо за табл. 4.1.

$$\varphi_x^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 3, \\ \frac{B^*}{EI_\omega \beta^2} [1 - \text{ch}(\beta(x-3))], & 3 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Визначимо параметр  $\beta$  за формулою (4.30).

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{E}{2(1+0.25)} = 0.4E.$$

$$\beta = \sqrt{\frac{GI_{\text{кр}}}{EI_\omega}} = \sqrt{\frac{0.4E \cdot 266.6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4}{E \cdot 20023256 \cdot 10^{-12} \text{ м}^6}} = 0.231 \frac{1}{\text{м}}.$$

Стержень на кінцях закріплений шарнірними опорами. Крім того, унеможливлений поворот кінців стержня навколо осі  $x$ . Сформулюємо граничні умови:

при  $x=0$

1)  $\varphi_x = 0,$

2)  $B = 0;$

при  $x = 6\text{ м}$

3)  $\varphi_x = 0$ ,

4)  $B = 0$ .

З двох перших граничних умов випливає, що деякі початкові параметри дорівнюють нулю:  $\varphi_x(0) = 0$ ,  $B(0) = 0$ . Інші початкові параметри визначимо з системи рівнянь, що утворюється на основі третьої та четвертої граничних умов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'_x(0) \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta \cdot 6) + \frac{M_x(0)}{EI_\omega} \cdot \frac{1}{\beta^3} (\beta \cdot 6 - \text{sh}(\beta \cdot 6)) + \frac{B^*}{EI_\omega \beta^2} [1 - \text{ch}(\beta(6 - 3))] = 0, \\ -EI_\omega \beta \varphi'_x(0) \text{sh}(\beta \cdot 6) + M_x(0) \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta \cdot 6) + B^* \text{ch}(\beta(6 - 3)) = 0, \end{array} \right.$$

Розв'язавши систему отримаємо:

$$M_x(0) = -0.107 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad EI_\omega \varphi'_x(0) = -0.152 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Підставляємо значення початкових параметрів у формули (4.33), (4.34), обчислюємо значення кута закручування та пов'язаних із ним величин і будемо відповідні епюри (рис. 4.40).

Розглянемо дію навантажень  $F_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ . Вони спричиняють виникнення у стержні поздовжньої та поперечних сил і згинальних моментів. Визначаємо ці зусилля методами розрахунку звичайних стержнів і будемо відповідні епюри (рис. 4.41).

За епюрами внутрішніх зусиль з'ясуємо, що найбільш небезпечним є переріз правої ділянки стержня при  $x = 3\text{ м}$ . Там збігаються найбільші значення всіх зусиль:  $N = -10 \text{ кН}$ ,  $Q_y = 0.3 \text{ кН}$ ,  $Q_z = -0.5 \text{ кН}$ ,  $M_y = 1.5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $M_z = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $B = 0.321 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ ,  $M_x^\omega = -0.124 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $M_x^{\text{кп}} = 0.0166 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Визначаємо нормальні напруження у характерних точках перерізу за формулою (4.20). Будемо епюру нормальних напружень (рис. 4.42).

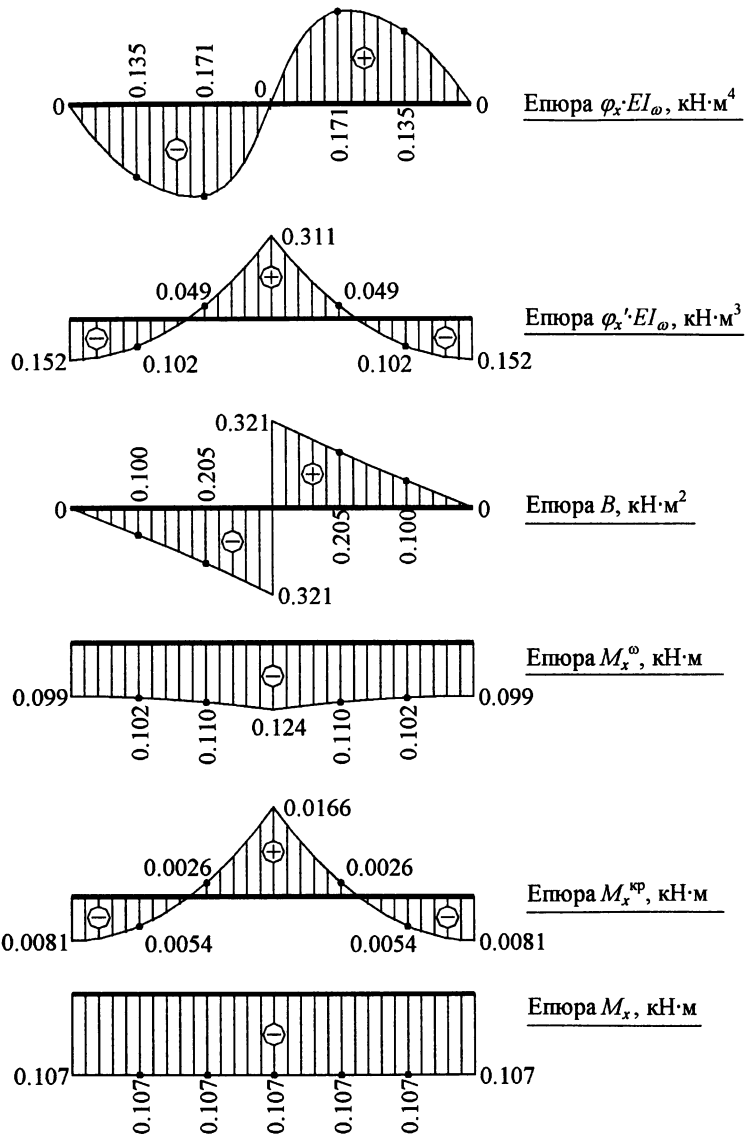


Рис. 4.40. Епюри переміщень та внутрішніх зусиль,  
пов'язаних із дією зовнішнього бімоменту



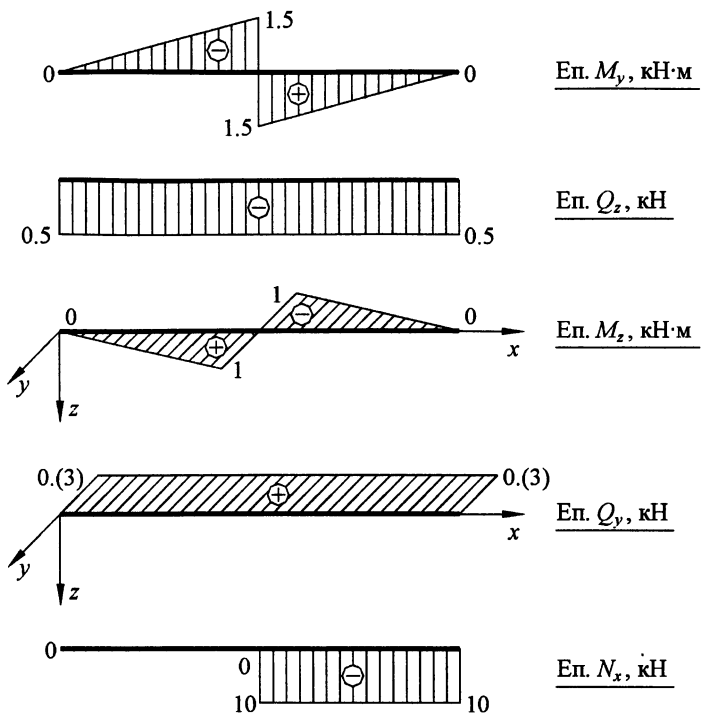


Рис. 4.41. Епюри внутрішніх зусиль, пов'язаних із дією сили та моментів

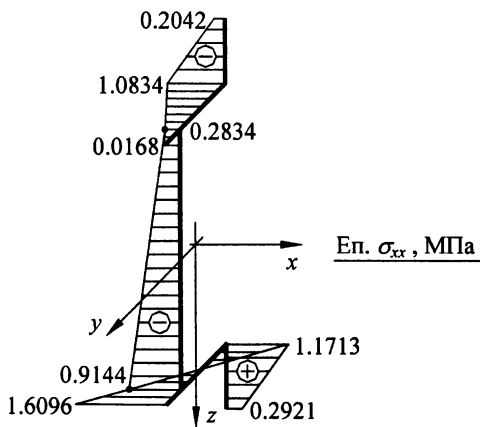


Рис. 4.42. Епюра нормального напруження

Визначаємо згинальні дотичні напруження за формулою (4.27). Будемо відповідну епюру (рис. 4.43(а)).

Згинально-крутні дотичні напруження розподілені по товщині перерізу рівномірно, тобто протягом всієї товщини мають однакову величину та напрямок. Дотичні ж напруження чистого кручення розподілені по товщині перерізу за лінійним законом так, що на протилежних краях перерізу досягають однакових найбільших значень, маючи протилежні напрямки (рис. 4.12). Виходячи з формули (4.21), ці найбільші значення дорівнюють

$$\tau_{sx, \max}^{\text{кр}} = \frac{M_x^{\text{кр}}}{I_{\text{кр}}} \delta. \quad (4.37)$$

Визначаємо найбільші значення дотичних напружень чистого кручення за формулою (4.37) на всіх ділянках серединної лінії перерізу. Будемо відповідну епюру (рис. 4.43(б)).

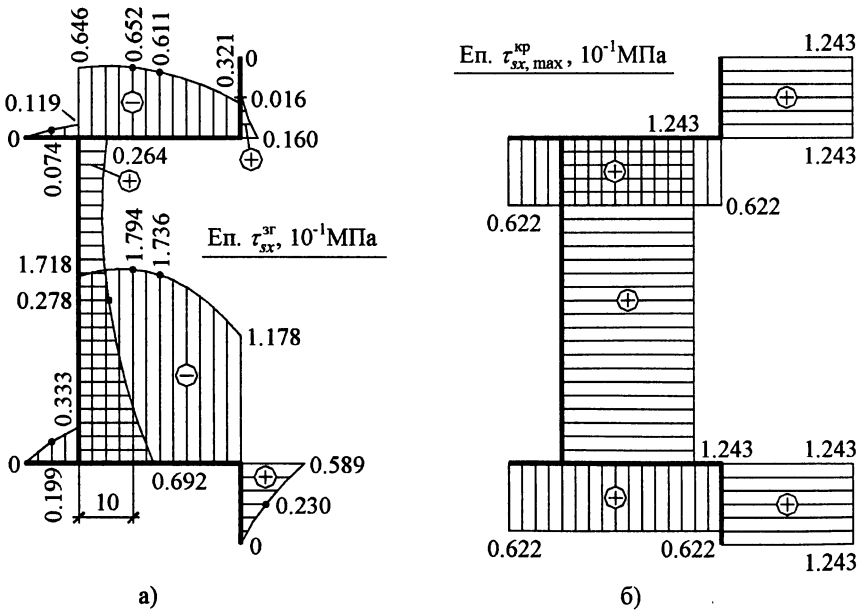


Рис. 4.43. Епюри згинального та крутного дотичних напружень

Повне дотичне напруження  $\tau_{sx} = \tau_{sx}^{kp} + \tau_{sx}^{3r}$  досягне найбільшого значення на одній з краёк перерізу, де  $\tau_{sx}^{3r}$  і  $\tau_{sx}^{kp}$  матимуть однаковий напрямок. Це найбільше значення можна визначити за формулою

$$\tau_{sx, \max} = \tau_{sx}^{3r} \pm \tau_{sx, \max}^{kp} \quad (4.38)$$

Побудуємо епюри повного дотичного напруження на крайках перерізу за формулою (4.38), прийнявши у ній одного разу знак "плюс" (рис. 4.44(а)), а потім — "мінус" (рис. 4.44(б)).

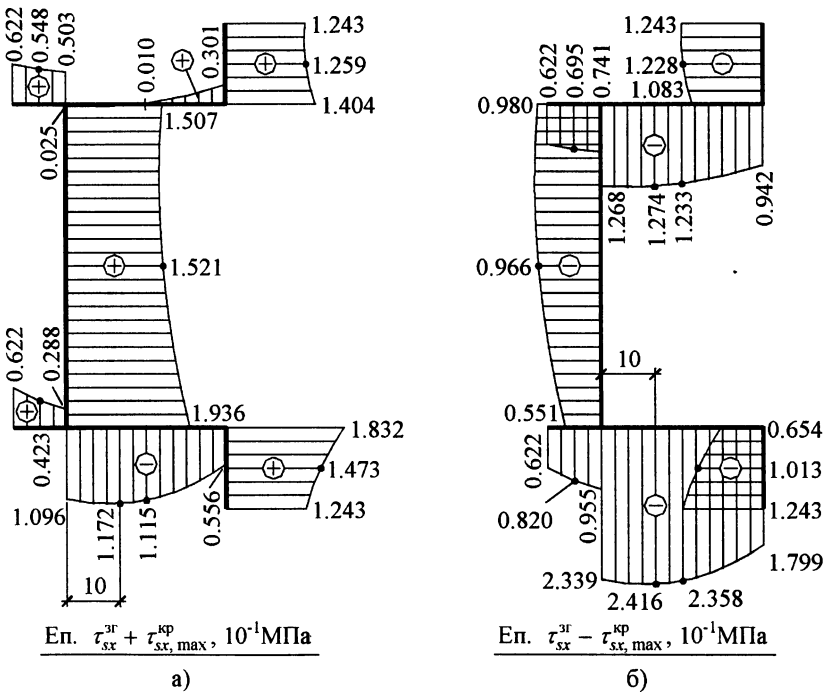


Рис. 4.44. Епюри повного дотичного напруження на протилежних крайках перерізу, отримані за двома варіантами формули (4.38)

З'ясуємо, до яких крайок перерізу відносяться наведені на рис. 4.44 значення. Для цього на схемі серединної лінії перерізу (рис. 4.45(а)) стрілками покажемо напрямки додатних напружень  $\tau_{sx}^{3r}$  у перерізі з додатною нормаллю.

При цьому виходимо з того, що додатні напруження створюють момент відносно центра згинання  $B$ , спрямований проти годинникової стрілки.

На рис. 4.45(б) покажемо напрямки додатних напружень  $\tau_{sx}^{kp}$  на протилежних крайках перерізу з додатною нормаллю. Кожна ділянка серединної лінії відповідає частині перерізу у формі видовженого прямокутника (рис. 4.12), де напруження  $\tau_{sx}^{kp}$  спрямовані вздовж довгих сторін і розподілені лінійно по товщині. Визначаючи додатні напрямки напружень, виходимо з того, що у кожному такому прямокутнику їхній головний момент має бути спрямований проти годинникової стрілки.

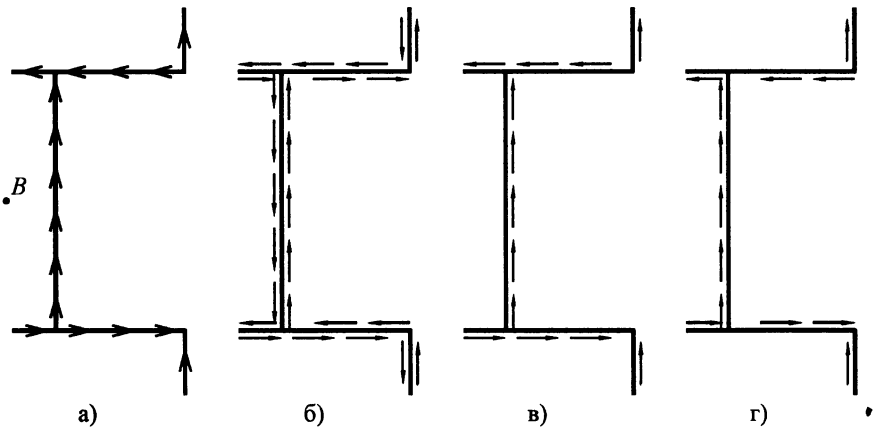


Рис. 4.45. Розташування та додатні напрямки повних дотичних напружень, що визначаються за двома варіантами формули (4.38)

На рис. 4.45(в) покажемо стрілки вздовж тих крайок перерізу, де додатні напрямки  $\tau_{sx}^{зг}$  і  $\tau_{sx}^{kp}$  збігаються. Там найбільше значення повного дотичного напруження визначається за формулою (4.38), у котрій приймається знак "плюс".

На рис. 4.45(г) покажемо стрілки вздовж тих крайок перерізу, де додатні напрямки  $\tau_{sx}^{зг}$  і  $\tau_{sx}^{kp}$  протилежні. Напрямок стрілок повторює такий на рис. 4.45(а). На тих крайках перерізу у формулі (4.38) приймається знак "мінус".

## Рекомендована література

1. Опір матеріалів: Підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; За ред. Г. С. Писаренка. — 2-ге вид., доп. і перероб. — К.: Вища школа, 2004. — 655 с.
2. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. / За ред. В. Г. Піскунова. — К.: Вища школа, 1994-1995.
3. Александров А. В. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин — 2-е изд., испр. — М.: Высшая школа, 2000. — 560 с.
4. Шкелев Л. Т. Сопротивление материалов и основы строительной механики / Л. Т. Шкелев — К.: Вища школа, Головное изд.-во, 1989. — 248 с.
5. Новожилов В. В. Теория упругости / В. В. Новожилов — Л.: Судпромгиз, 1958. — 370 с.
6. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев; отв. ред. Г. С. Писаренко — 2-е изд., перераб. и доп. — К.: Наукова думка, 1988. — 736 с.
7. Справочник по сопротивлению материалов / С. П. Фесик — 2-е изд., перераб. и доп. — К.: Будівельник, 1982. — 280 с.

## Зміст

Вступ .....	3
<b>Розділ 1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕХАНІКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМІВНОГО ТІЛА .....</b>	<b>5</b>
Глава 1.1. Загальні статичні співвідношення .....	5
1.1.1. Основні поняття та гіпотези .....	5
1.1.2. Залежності між напруженнями, що виникають у точці, і діють по різних напрямках .....	13
1.1.3. Екстремальні нормальні напруження .....	16
1.1.4. Екстремальні дотичні напруження .....	21
1.1.5. Умови рівноваги у внутрішніх та граничних точках тіла .....	26
Глава 1.2. Загальні кінематичні співвідношення .....	33
1.2.1. Лінійні і кутові деформації, їх зв'язок з переміщеннями .....	33
1.2.2. Врахування малості деформацій, тензор деформацій, рівняння сумісності деформацій .....	39
1.2.3. Екстремальні лінійні та кутові деформації, об'ємна деформація .....	44
Глава 1.3. Механічні властивості матеріалу твердого тіла. Загальні поняття, теорії міцності .....	49
1.3.1. Результати випробування різних матеріалів .....	50
1.3.2. Співвідношення між напруженнями і деформаціями, закон Гука .....	58
1.3.3. Загальна система рівнянь для пружного деформівного тіла довільної форми .....	61
1.3.4. Потенціальна енергія пружної деформації .....	64
1.3.5. Критерії оцінки міцності та жорсткості конструкцій .....	71
Глава 1.4. Приклади до першого розділу .....	78

1.4.1.	Приклад визначення напружень на довільній похилій площині . . . . .	78
1.4.2.	Приклад визначення екстремальних нормальних і дотичних напружень . . . . .	81
1.4.3.	Приклад застосування кінематичних та фізичних співвідношень . . . . .	87
1.4.4.	Приклад визначення напружень, деформацій та перемішень у циліндричному тілі . . . . .	91
1.4.5.	Приклад перевірки міцності . . . . .	102
<b>Розділ 2.</b>	<b>НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН СТЕРЖНЯ . . . . .</b>	<b>106</b>
Глава 2.1.	Загальні поняття тіла, що має форму стержня, його геометричні характеристики та статичні співвідношення . . . . .	106
2.1.1.	Загальні поняття і гіпотези . . . . .	106
2.1.2.	Геометричні характеристики плоских фігур . . . . .	108
2.1.3.	Статичні залежності для стержня . . . . .	116
2.1.4.	Методика знаходження внутрішніх зусиль . . . . .	129
Глава 2.2.	Кінематичні співвідношення, їх зв'язок зі статичними величинами . . . . .	137
2.2.1.	Кінематичні залежності для стержня . . . . .	137
2.2.2.	Співвідношення між статичними та кінематичними компонентами напружено-деформованого стану стержня . . . . .	146
Глава 2.3.	Напружений стан та перевірка міцності . . . . .	150
2.3.1.	Удосконалення формули дотичних напружень . . . . .	150
2.3.2.	Перевірка міцності стержня . . . . .	162
2.3.3.	Окремі випадки напруженого стану стержня . . . . .	170
Глава 2.4.	Переміщення стержня . . . . .	179
2.4.1.	Визначення переміщень прямолінійного стержня методом початкових параметрів . . . . .	179
2.4.2.	Визначення переміщень методом Мора . . . . .	187

Глава 2.5.	Приклади до другого розділу . . . . .	199
2.5.1.	Приклад визначення геометричних характеристик поперечного перерізу стержня . . . . .	199
2.5.2.	Приклад приведення навантаження до головних осей стержня	203
2.5.3.	Приклад побудови епюр внутрішніх зусиль . . . . .	209
2.5.4.	Приклад побудови епюр внутрішніх зусиль . . . . .	214
2.5.5.	Приклад побудови епюр внутрішніх зусиль . . . . .	216
2.5.6.	Приклад побудови епюр внутрішніх зусиль . . . . .	218
2.5.7.	Приклад побудови ядра перерізу . . . . .	219
2.5.8.	Приклад перевірки міцності стержня . . . . .	224
2.5.9.	Приклад визначення переміщень методом початкових параметрів . . . . .	229
2.5.10.	Приклад визначення переміщень методом початкових параметрів . . . . .	233
2.5.11.	Приклад визначення переміщень методом Мора . . . . .	239
2.5.12.	Приклад визначення переміщень методом Мора . . . . .	242
Розділ 3.	<b>ВРАХУВАННЯ ДОДАТКОВИХ ФАКТОРІВ ПРИ РОЗРАХУНКУ СТЕРЖНЯ . . . . .</b>	<b>248</b>
Глава 3.1.	Визначення зусиль та переміщень у статично невизначуваних стержнях . . . . .	248
3.1.1.	Загальні поняття статичної невизначуваності . . . . .	248
3.1.2.	Порядок розрахунку статично невизначуваного стержня при силовому навантаженні . . . . .	249
3.1.3.	Розрахунок статично невизначуваних стержнів від впливу температури та вимушеного переміщення опор . . . . .	255
3.1.4.	Визначення переміщень у статично невизначуваних системах	259
Глава 3.2.	Напружено-деформований стан балок на пружній основі . . . .	265
3.2.1.	Диференціальне рівняння балки на пружній основі . . . . .	265



3.2.2.	Розв'язання диференціального рівняння балки на пружній основі .....	267
3.2.3.	Визначення переміщень у стержні на пружній основі методом Мора .....	278
Глава 3.3.	Напружено-деформований стан стиснуто-зігнутого стержня	280
3.3.1.	Загальні поняття. Диференціальне рівняння рівноваги .....	280
3.3.2.	Розв'язання диференціального рівняння рівноваги стиснуто-зігнутого стержня .....	285
3.3.3.	Стійкість стержня .....	290
Глава 3.4.	Розрахунок стержня на динамічне навантаження .....	300
3.4.1.	Загальні поняття про динамічне навантаження .....	300
3.4.2.	Розрахунок стержня на ударне навантаження .....	302
3.4.3.	Пружні поперечні коливання стиснуто-зігнутого стержня ....	308
3.4.4.	Вимушені коливання стиснуто-зігнутого стержня .....	318
Глава 3.5.	Врахування пластичних деформацій при розрахунку стержня	321
3.5.1.	Розрахунок стержня на згин .....	321
3.5.2.	Врахування пластичних деформацій для інших напружено-деформованих станів .....	331
Глава 3.6.	Приклади до третього розділу .....	337
3.6.1.	Приклад розрахунку статично невизначуваного стержня .....	337
3.6.2.	Приклад розрахунку статично невизначуваного стержня .....	344
3.6.3.	Приклад розрахунку балки на пружній основі .....	350
3.6.4.	Приклад визначення критичної сили .....	354
3.6.5.	Приклад розрахунку стиснуто-зігнутого стержня .....	359
3.6.6.	Приклад розрахунку стиснутого стержня .....	363
3.6.7.	Приклад розрахунку власних коливань стержня .....	365
3.6.8.	Приклад розрахунку власних коливань стержня .....	368
3.6.9.	Приклад розрахунку вимушених коливань стержня .....	370
3.6.10.	Приклад розрахунку коливань стиснуто-зігнутого стержня ...	374
3.6.11.	Приклад розрахунку стержня на ударне навантаження .....	381

Розділ 4.	НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОНКОСТІННОГО СТЕРЖНЯ . . . . .	385
Глава 4.1.	Загальні положення, геометричні характеристики та кінематичні співвідношення . . . . .	385
4.1.1.	Загальні поняття, означення, гіпотези . . . . .	385
4.1.2.	Геометричні характеристики тонкостінного стержня . . . . .	390
4.1.3.	Кінематичні співвідношення . . . . .	397
Глава 4.2.	Напружений стан тонкостінного стержня . . . . .	404
4.2.1.	Визначення нормальних напружень . . . . .	404
4.2.2.	Визначення дотичних напружень . . . . .	408
4.2.3.	Визначення кута закручування та пов'язаних із ним зусиль і переміщень . . . . .	413
Глава 4.3.	Приклади до четвертого розділу . . . . .	423
4.3.1.	Приклад розрахунку тонкостінного стержня . . . . .	423
4.3.2.	Приклад розрахунку тонкостінного стержня . . . . .	438
	Рекомендована література . . . . .	451

Навчальне видання

*Шкельов Леонід Тихонович*  
*Станкевич Анатолій Миколайович*  
*Пошивач Дмитро Володимирович*

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ**

Підручник для студентів вищих навчальних закладів

Редагування і коректура авторів

Підп. до друку 07.02.2011. Формат 60×90/16. Папір офс. №1. Гарнітура Таймс. Друк офс.  
 Фіз. друк. арк. 28,5. Ум. фарбо-відб. 28,5. Обл.-вид. арк. 31,33. Наклад 500 прим. Зам. 1Г-123

ЗАТ "Віпол". 03151, Київ 151, вул. Волинська, 60



