

В. М. Павлович

**ФІЗИКА
ЯДЕРНИХ РЕАКТОРІВ**



Національна академія наук України
Інститут проблем безпеки АЕС

В. М. Павлович

ФІЗИКА ЯДЕРНИХ РЕАКТОРІВ

Навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Чорнобиль 2009

УДК 539.1
ББК 22.383
П12

Рецензенти:

І. М. Вишневський, д-р фіз.-мат. наук, професор, академік НАН України;
І. М. Каденко, д-р фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедрою ядерної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

*Рекомендовано до друку вченою радою
Інституту проблем безпеки АЕС НАН України*

Павлович В. М.
П12 Фізика ядерних реакторів: навчальний посібник / В. М. Павлович ; НАН України, Ін-т проблем безпеки АЕС. – Чорнобиль (Київ. обл.) : Ін-т проблем безпеки АЕС, 2009. – 224 с.
ISBN 978-966-02-5204-2

У посібнику розглянуто основні поняття та фізичні принципи роботи ядерних реакторів. Поряд з традиційними для фізики реакторів питаннями, такими як ядерні процеси, дифузія та сповільнення нейтронів, швидкі та повільні нестационарні процеси, накопичення продуктів поділу та трансуранових елементів, також розглянуто питання стійкості реакторів та введено основні поняття статистичної теорії реакторів.

Для студентів ядерних та енергетичних спеціальностей вищих навчальних закладів, а також спеціалістів з ядерної енергетики та фізики реакторів.

УДК 539.1

ISBN 978-966-02-5204-2

© В. М. Павлович, 2009

Зміст

Передмова.....	6
Вступ.....	7
Розділ 1. Основні відомості про ядерні реактори.....	10
§ 1.1. Найпростіший реактор.....	10
§ 1.2. Паливо ядерних реакторів.....	14
§ 1.3. Продукти поділу.....	17
§ 1.4. Баланс нейтронів у реакторах.....	19
§ 1.5. Конструкція реакторів.....	21
§ 1.6. Класифікація реакторів.....	24
Розділ 2. Ядерні процеси.....	27
§ 2.1. Самовільний розпад.....	27
§ 2.2. Пружне зіткнення нейтронів з ядрами.....	29
§ 2.3. Перерізи реакцій.....	31
§ 2.4. Непружне розсіювання нейтронів.....	33
§ 2.5. Поглинання нейтронів.....	34
§ 2.6. Реакція поділу.....	37
§ 2.7. Ланцюгова реакція.....	39
Розділ 3. Дифузія нейтронів. Кінетична теорія переносу нейтронів.....	42
§ 3.1. Методи кінетичної теорії.....	42
§ 3.2. Рівняння переносу нейтронів.....	44
§ 3.3. Дифузія моноенергетичних нейтронів.....	45
§ 3.4. Стаціонарний розв'язок дифузійного рівняння.....	49
§ 3.5. Розв'язки стаціонарного рівняння дифузії у випадку простих геометрій.....	50
§ 3.6. Загальні міркування про розрахунки реакторів.....	57
Розділ 4. Теорія сповільнення нейтронів.....	59
§ 4.1. Імовірність сповільнення нейтронів.....	59
§ 4.2. Рівняння пружного сповільнення нейтронів. Спектр Фермі.....	62
§ 4.3. Розв'язки рівняння сповільнення.....	64
§ 4.4. Розв'язок рівняння сповільнення з урахуванням поглинання нейтронів.....	67
§ 4.5. Вікове наближення.....	69
§ 4.6. Спектр нейтронів у реакторі.....	72
§ 4.7. Імовірність уникнути резонансного поглинання.....	74
§ 4.8. Багатогрупові рівняння.....	78
Розділ 5. Теорія відбивачів.....	81
§ 5.1. Коефіцієнт відбивання нейтронів.....	81
§ 5.2. Урахування сповільнення в моно-енергетичному рівнянні. Ефективний коефіцієнт дифузії.....	83
§ 5.3. Критичне рівняння для реактора з відбивачем. Сферична геометрія.....	86

§ 5.4. Критичне рівняння для реактора з відбивачем. Циліндрична геометрія.....	89
Розділ 6. Нестационарні процеси та теорія регуляторів.....	92
§ 6.1. Нестационарний процес у реакторі в рамках одно групового дифузійного наближення.....	92
§ 6.2. Реактивність реактора.....	95
§ 6.3. Процеси керування реакторами.....	97
§ 6.4. Точкова модель реактора.....	100
§ 6.5. Нейтрони, що запізнюються.....	104
§ 6.6. Кінетика реактора з постійною реактивністю.....	106
§ 6.7. Поведінка реактора під час зміни реактивності.....	110
§ 6.8. Реактивність стрижня керування.....	112
§ 6.9. Інтерференція реактивностей.....	116
Розділ 7. Повільні нестационарні процеси в реакторах.....	119
§ 7.1. Отруєння реактора продуктами поділу.....	119
§ 7.2. Зміна в часі концентрації отруювачів.....	121
§ 7.3. Шлакування реактора.....	123
§ 7.4. Нейтронно-ксенонові коливання.....	125
§ 7.5. Зміна нуклідного складу палива.....	127
§ 7.6. Відтворення ядерного палива.....	131
Розділ 8. Температурні коефіцієнти.....	136
§ 8.1. Загальні уявлення про температурні ефекти.....	136
§ 8.2. Температурні коефіцієнти величин η і ϵ	138
§ 8.3. Температурний коефіцієнт імовірності уникнути резонансного поглинання.....	139
§ 8.4. Температурний коефіцієнт величини θ	140
§ 8.5. Температурний коефіцієнт довжини міграції M	140
§ 8.6. Спеціальні коефіцієнти реактивності.....	142
Розділ 9. Гетерогенні реактори.....	144
§ 9.1. Переваги гетерогенного розташування палива.....	144
§ 9.2. Метод гомогенізації. Коефіцієнт використання теплових нейтронів.....	147
§ 9.3. Ефективний резонансний інтеграл у гетерогенних системах.....	153
§ 9.4. Імовірність уникнути резонансного поглинання.....	156
§ 9.5. Імовірності зіткнень.....	160
§ 9.6. Коефіцієнт розмноження на швидких нейтронах.....	166
§ 9.7. Обчислення матеріального параметра.....	168
§ 9.8. Гетерогенний метод Галаніна – Фейнберга.....	170
Розділ 10. Стійкість реакторів.....	174
§ 10.1. Загальні уявлення про стійкість реакторів.....	174
§ 10.2. Якісне дослідження поведінки систем на фазовій площині.....	175
§ 10.3. Дослідження простої моделі реактора.....	180
§ 10.4. Рівняння в часткових похідних.....	186

§ 10.5. Ксенонові коливання в реакторах.....	190
§ 10.6. Просторові ксенонові коливання.....	194
§ 10.7. Поняття про динамічний хаос.....	198
Розділ 11. Статистична теорія реакторів.....	202
§ 11.1. Вступ.....	202
§ 11.2. Середні значення та моменти.....	202
§ 11.3. Кореляційні функції та кореляційні співвідношення.....	203
§ 11.4. Статистичні дискретні методи у фізиці реакторів.....	207
§ 11.5. Розподіли імовірності.....	209
§ 11.6. Кореляційні вимірювання.....	213
§ 11.7. Вимірювання в частотній області.....	214
§ 11.8. Теорія гілчастих процесів.....	218
Список літератури.....	223

Передмова

Поданий до Вашої уваги, шановний читачу, посібник було написано на основі курсу лекцій, який автор читав протягом ряду років студентам старших курсів кафедри ядерної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Оскільки більшість випускників Київського університету працевлаштовується у науково-дослідних інститутах та науково-технічних підрозділах Національної атомної енергетичної компанії «Енергоатом», то основна увага в посібнику приділена фізичним процесам та явищам, що відбуваються в ядерному реакторі. Дуже важливі технічні особливості конкретних типів ядерних реакторів практично не розглядалися, хоча дуже часто ці технічні особливості визначають фізику процесів у реакторі. Більш докладні відомості про конструкційні відмінності реакторів різних типів можна знайти в спеціалізованій літературі. Тому даний посібник можна розглядати як вступ до фізики ядерних реакторів.

Останнім часом у світовій літературі інтенсивно розглядаються реактори майбутніх поколінь, які прийдуть на зміну тим, що зараз використовуються для виробництва електричної енергії. Деякі з цих реакторів базуються на дещо інших фізичних принципах, ніж традиційні реактори, хоча зрозуміло, що основою отримання енергії в нових реакторах є також реакція поділу ядер важких елементів. Ідеться перш за все про підкритичні системи, реакція поділу в яких підтримується зовнішнім джерелом нейтронів, та про реактори на хвилі ядерного поділу, яка розповсюджується крізь сировинні матеріали і яка не потребує ніякого зовнішнього втручання, крім відбору тепла. Фізичні принципи, які лежать в основі реакторів нових поколінь, потребують окремого розгляду.

Автор дуже вдячний співробітникам відділу теорії ядерних реакторів Інституту ядерних досліджень НАН України та відділу фізики реакторів Інституту проблем безпеки АЕС НАН України за допомогу в оформленні посібника. Автор також вдячний своїй дружині Світлані за довготерпіння під час написання посібника і редактору посібника Л.Троян за кропітку роботу з його редагування.

Вступ

Перед тим, як перейти до викладу основних фізичних процесів, що відбуваються в ядерному реакторі, варто сформулювати в загальному - що таке ядерний реактор. Фізики-ядерники, для яких написаний цей посібник, а також більшість людей на інтуїтивному рівні непогано уявляють собі, що ядерний реактор являє собою установку, в якій у великому обсязі відбувається реакція поділу ядер "палива" під дією нейтронів із виділенням великої кількості енергії. Слово паливо взяте в лапки тому, що спалювання палива у звичайному розумінні не відбувається. В ядерному реакторі хімічна реакція горіння не протікає, проте відбувається ядерна реакція поділу ядер урану або плутонію. Саме ці матеріали називають "паливом" ядерних реакторів (далі слово «паливо» в лапки ми брати не будемо).

Реактор має надзвичайно багату фізику, тобто дія реактора обумовлена багатьма фізичними процесами. Які процеси мають на увазі? По-перше, це ядерні реакції, що відбуваються в реакторі: реакції поділу ядер палива під дією нейтронів – основна реакція, яка визначає виділення енергії в ядерному реакторі; реакція фотоподілу ядер палива під дією γ -квантів; реакції розсіювання та поглинання нейтронів; реакції розпаду продуктів поділу; реакції $(n, 2n)$, (α, n) тощо. Усі ці процеси відбуваються на мікроскопічному рівні й описуються законами квантової механіки. Не всі вони є ядерними реакціями у власному розумінні цього терміну, тобто не завжди існують ядра та частинки, які взаємодіють між собою і в результаті чого виникають нові ядра і частинки. Але всі ці процеси зручно об'єднати одним терміном як процеси, що потребують для опису квантової механіки. Треба також зауважити, що не всі ці реакції мають однакову вагу з точки зору їх впливу на стабільну і безпечну роботу ядерного реактора.

Другий клас процесів, що відбуваються в реакторі, це процеси переносу нейтронів у неоднорідному середовищі, яке розмножує й поглинає нейтрони. Під час розгляду цих процесів звичайно вважають, що нейтрони являють собою точкові частинки, рух яких можна описати законами класичної механіки. У хорошому наближенні ці процеси описуються рівняннями типу рівнянь звичайної дифузії. Тому часто процеси переносу в реакторах називають процесами дифузії нейтронів. Більш точне наближення для опису дифузії нейтронів у реакторі базується на інтегро-диференціальних рівняннях типу рівняння Больцмана. Розв'язок цих рівнянь дає змогу визначити густину нейтронів у реакторі залежно від координат, часу та енергії нейтронів. У свою чергу, знання густини нейтронів дає змогу визначити багато характеристик реактора, таких як виділення енергії по об'єму реактора, поле температур у реакторі, ступінь вигорання палива тощо.

Треба усвідомлювати, що детерміністичні рівняння типу рівняння дифузії, рівняння Больцмана та інші дають можливість визначати тільки середні величини. У дійсності на розподіл нейтронів у реакторі впливає багато випадкових факторів.

дкових факторів, наприклад коливання в потоці охолоджуючої речовини та інші. Сам акт випромінювання нейтронів під час поділу носить випадковий характер. Такий вплив можна описати за допомогою теорії випадкових процесів, що дасть змогу також визначати відхилення від середніх значень, час досягання критичних значень різних величин, часи релаксації та багато інших важливих характеристик.

Ще один клас процесів у реакторі - теплофізичні гідродинамічні процеси. Оскільки реакції поділу супроводжуються виділенням великої кількості енергії, яка майже вся перетворюється в теплову енергію (за винятком тієї частки енергії, яка виноситься потоком нейтрино, - майже 7 %), то для стабільної роботи реактора дуже важливо цю енергію відводити і (в енергетичних реакторах) використовувати. Для цього звичайно застосовують рідкі або газоподібні теплоносії. Процеси відбору тепла та переносу його за межі реактора описуються рівняннями гідродинаміки та теплопереносу. Ці процеси є дуже важливими для повного розуміння роботи реактора, не кажучи вже про їх виняткову важливість для безпечної роботи ядерних реакторів.

Нейтронна та теплова підсистеми реактора пов'язані між собою різноманітними зворотними зв'язками. Нейтронна підсистема "керує" виділенням тепла, тобто визначає джерело тепла в рівняннях теплопереносу. У свою чергу теплова підсистема впливає на кількість нейтронів у реакторі. Механізми такого впливу є досить різноманітними і вони будуть вивчатись у відповідних розділах посібника.

І нарешті, існує ще один клас процесів - це процеси, що відбуваються в конструкційних матеріалах реактора під дією ядерного випромінювання. Ці процеси не дуже сильно впливають на розподіл нейтронів - їх вплив є пасивним і зводиться до поглинання й розсіювання нейтронів. Цей вплив необхідно врахувати під час проектування реактора, а надалі під час роботи реактора він змінюється дуже повільно і в невеликому обсязі.

Але процеси в конструкційних матеріалах є дуже важливими з точки зору довгострокової безаварійної роботи реактора. Завдяки цим процесам відбувається більшість аварій на ядерних реакторах. Вони полягають у збільшенні крихкості або, навпаки, пластичності матеріалів під дією нейтронного опромінення, у зміні темпів корозії матеріалів і т. ін. Оскільки всі матеріали в реакторах знаходяться під великим навантаженням, то ці процеси можуть привести (і, на жаль, приводять) до тріщин і порушення функціональних властивостей різноманітних трубопроводів і конструкцій реактора. Розуміння процесів у конструкційних матеріалах може допомогти уникнути багатьох неприємностей. Як приклад можна нагадати, що завдяки порадам матеріалознавців було змінено режим виходу на потужність чорнобильських реакторів, що збільшило строк служби реакторних конструкцій.

На реактор можна поглянути з більш узагальнюючої точки зору - точки зору нерівноважної статистичної фізики. Як відомо, системи, що знаходяться у стані, далекому від стану термодинамічної рівноваги, й інтенсивно обмі-

нюються з оточуючим середовищем енергією та інформацією, мають незвичайні властивості. У таких системах можуть виникати просторові або часові структури, що називаються зараз дисипативними структурами. Цю назву вперше ввів видатний бельгійський фізик Ілля Пригожин, який досліджував такі системи за допомогою методів нерівноважної статистичної фізики. Зараз дослідженням таких систем займається нова наука - синергетика. З такої точки зору ядерний реактор - це типова синергетична система, яка описується системою нелінійних рівнянь із багатьма змінними й великою кількістю обернених зв'язків. У реакторах також можливе виникнення дисипативних структур, які ми розглянемо далі.

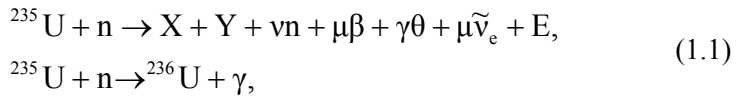
Мета цього посібника - дати більш докладні відомості про всі ці процеси.

Розділ 1

Основні відомості про ядерні реактори

§ 1.1. Найпростіший реактор

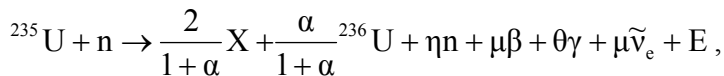
Відомо, що для палива ядерних реакторів використовують ізотопи урану і плутонію в чистому вигляді або у вигляді суміші з деякими іншими ізотопами. Тому, як простий приклад, розглянемо найпростіший реактор - шматок металу з ізотопу ^{235}U , який може ділитися під дією нейтронів. Найбільш важливими є дві ядерні реакції ізотопу ^{235}U з нейтронами:



де n , β , γ , $\tilde{\nu}_e$ - нейтрони, β -частинки, γ -кванти та антинейтрино відповідно; X , Y - скалки поділу ядра ^{235}U ; E - енергія, яка в середньому виділяється під час поділу; ν -, μ -, θ - кількості частинок, що виділяються при поділі одного ядра.

Подібні реакції з нейтронами є характерними для найважчих елементів. Перша реакція називається *реакцією поділу* і є найбільш важливою. Саме вона надала можливість побудувати ядерні реактори. Ця реакція була відкрита в 1938 р. Ганом і Штрассманом, а вже в 1942 р. Енріко Фермі побудував перший ядерний реактор.

Друга реакція називається *реакцією радіаційного захоплення*, і майже кожний елемент взаємодіє з нейтронами відповідно до схеми цієї реакції, для важких ядер ці дві реакції ідуть паралельно. Відношення ймовірностей цих двох реакцій для кожного елемента залежить тільки від енергії нейтронів. Ті ядра, для яких перша реакція протікає при дуже низьких енергіях нейтронів, називають *ядрами, що діляться*. Саме такими є ядра ^{235}U , ^{233}U , ^{239}Pu . Відношення кількості реакцій захоплення до кількості реакцій поділу позначається α . Тоді відносні ймовірності цих реакцій рівні $1/(1+\alpha)$ і $\alpha/(1+\alpha)$ відповідно. У цих позначеннях реакції (1.1) можна подати єдиною схемою



де введено величину $\eta \equiv \nu/(1 + \alpha)$, яка є *середньою кількістю нейтронів, які виділяються при захопленні нейтрона одним ядром* ^{235}U і є однією з найбільш важливих величин теорії реакторів. Варто ще раз нагадати, що ν - це *середня кількість нейтронів, які виділяються під час поділу одного ядра* ^{235}U . Величина η визначає результат первинного процесу – поглинання нейтрона ядром ^{235}U , а величина ν визначає результат вторинного процесу – поділ ядра ^{235}U після захоплення ядром нейтрона. Зрозуміло, що $\eta < \nu$, оскільки не всі ядра ^{235}U , що поглинули нейтрон, діляться. Можна також визначити величини η і ν для інших нуклідів, що можуть ділитися після поглинання нейтрона.

Величина ν вимірювалась дуже багато разів із точністю, що весь час зростала. За даними 80-х років значення величини ν для реакції поділу різних нуклідів тепловими нейтронами наведено в табл. 1.1. Більш уточнені сучасні дані містяться в бібліотеках оцінених ядерних даних, які розповсюджуються разом із програмами розрахунку ядерних реакторів.

Таблиця 1.1. Середнє число нейтронів поділу

Ядро	^{233}U	^{235}U	^{239}Pu	^{241}Pu	^{252}Cf
ν	2,4933	2,4521	2,8768	2,9369	3,7675

Тут же варто сказати, що *тепловими* називаються нейтрони, які мають швидкості, розподілені відповідно закону Максвелла з температурою, рівною температурі середовища. Імовірність поділу ядер, що діляться, суттєво залежить від швидкості нейтронів, і, наприклад, для ^{235}U ймовірність поділу з поглинанням теплового нейтрона приблизно в 1000 разів більша, ніж з поглинанням швидкого нейтрона з енергією > 100 кеВ.

Підкреслимо ще раз, що ν - це *середнє* число нейтронів, що виділяються при поділі ядра. У дійсності під час поділу виділяється різне число нейтронів з різними ймовірностями. Для поділу ядер ^{235}U тепловими нейтронами ці ймовірності наведено в табл. 1.2.

Таблиця 1.2. Імовірність P_k утворення k нейтронів під час поділу ^{235}U

k	0	1	2	3	4	5	6	7
P_k	0,0333	0,1745	0,3349	0,3028	0,1231	0,0281	0,0032	0,0001

Звичайно вважають, що ймовірність виникнення восьми та більше нейтронів під час поділу рівна нулю. З табл. 1.2 видно, що ймовірність виникнення двох і трьох нейтронів найбільша, так що *середнє* число нейтронів якраз дорівнює 2,4521.

Зараз ми введемо дуже важливе поняття: *нейтрони, що запізнюються*. Виявляється, що величина ν складається з двох частин $\nu = \nu_p + \nu_d$, де ν_p - середня кількість миттєвих нейтронів, що випромінюються в момент поділу важкого ядра, а ν_d - середня кількість нейтронів, що випромінюються через деякий час після поділу ядра під час розпаду продуктів поділу (скалок поділу). Величина $\nu_d \ll \nu_p$, але саме наявність нейтронів, що запізнюються, дає можливість керувати ядерними реакторами за допомогою механічних пристроїв. Докладніше це питання розглянемо пізніше.

Повернемося до величини ν . Вона відрізняється для різних нуклідів і, крім того, зростає із зростанням енергії нейтрона. Зміна величини ν із зростанням енергії непогано описується напівемперичною формулою (1.2) для залежності ν_p від атомного номера Z нукліда, що ділиться, масового числа A , енергії нейтрона E_n

$$v_p(Z,A,E_n) = 2,33 + 0,06[2 - (-1)^{A+Z} - (-1)^Z] + 0,15(Z-92) + 0,02(A-235) + [0,13 + 0,006(A-235)](E_n - E_{\text{пор}}), \quad (1.2)$$

де $E_{\text{пор}}$ - порогова енергія, значення якої відрізняються для різних нуклідів. Тобто виявляється, що деякі нукліди можуть ділитися, тільки якщо енергія нейтрона перевищує деяку порогову енергію. Значення порогової енергії для деяких нуклідів наведено в табл. 1.3, а схематичну залежність перерізу поділу σ_f від енергії для порогового й безпорогового поділу наведено на рис. 1.1.

Таблиця 1.3 Порогова енергія для деяких нуклідів

Нуклід	^{232}Th	^{233}U	^{234}U	^{235}U	^{236}U	^{238}U	^{239}Pu	^{240}Pu
$E_{\text{пор}}(\text{МеВ})$	1,7	-1,3	0,56	-0,41	1,37	1,45	-0,89	-0,31

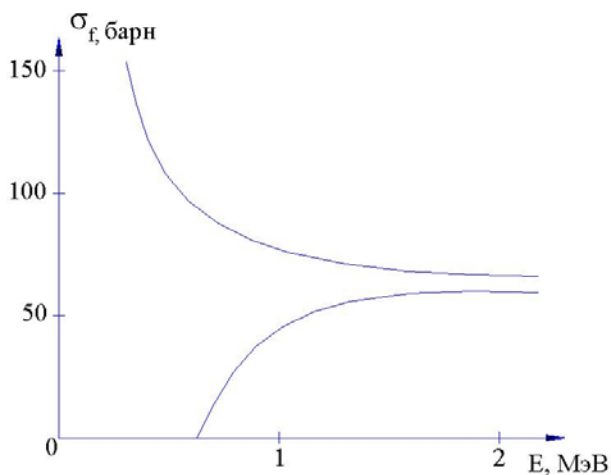


Рис. 1.1. Схематична залежність σ_f від енергії для безпорогового (верхня крива) та порогового (нижня крива) поділу.

З табл. 1.3 видно, що деякі нукліди мають від'ємний поріг, тобто вони можуть ділитися під дією нейтронів будь-яких енергій. У той же час деякі нукліди мають досить високий поріг, а це якраз ті нукліди, що найбільше розповсюджені в природних покладах - ^{232}Th і ^{238}U . Той факт, що ці нукліди також можуть ділитися під дією нейтронів досить високих енергій - швидких нейтронів, має деяке цілком визначене значення для фізики реактора, оскільки поділ цих ядер необхідно врахувати при обчисленні повного балансу нейтронів у реакторі.

Оскільки частина нейтронів поглинається ядрами ^{235}U з утворенням ^{236}U , то величина η значно менша від ν і лежить в межах 1,45 – 3,0 для ізотопів урану і плутонію. Величина η (також, як ν і α) залежить від енергії нейтронів.

Під час кожного поділу ядра ^{235}U виділяється приблизно 200 MeV енергії (точні значення також залежать від енергії нейтрона і вони зібрані в бібліотеках оцінених даних). В усередненому процесі, що описується реакцією (1б), виділення енергії в $(1 + \alpha)$ разів менше і рівне 184 MeV. Уся ця виділена при поділі ядра енергія складається з:

- кінетичної енергії скалок ($\approx 80\%$);
- кінетичної енергії нейтронів ($\approx 2,5\%$);
- енергії γ -квантів, які випромінюються безпосередньо під час поділу ядра ($\approx 2,5\%$);
- енергії γ -квантів, які випромінюються продуктами поділу ($\approx 3,8\%$);
- енергії β -частинок, які випромінюються продуктами поділу ($\approx 3,8\%$);
- енергії антинейтрино ($\approx 6,2\%$);

Уся ця енергія виділяється в реакторі у вигляді тепла, крім енергії антинейтрино, енергії, що виділяється під час розпаду продуктів поділу з великим періодом напіврозпаду $> 10^8 \text{ с} \approx 3$ роки (час, який паливо знаходиться в реакторі), а також енергії нейтронів і γ -квантів, яка поглинається в захисній оболонці реактора.

Повернемося до нашого реактора із шматка ^{235}U і розглянемо долю нейтронів, що випромінюються при поділі ядра. Одні нейтрони поглинаються ^{235}U з утворенням ^{236}U , інші йдуть на поділ інших ядер ^{235}U , а деяка кількість нейтронів виходить за межі шматка. Кількість нейтронів, що поглинається в середині шматка, залежить тільки від фізичних параметрів середовища, а тих, що виходять зовні шматка, визначається площею його поверхні. Тобто відносна частка нейтронів, що виходять зовні шматка, визначається відношенням площі поверхні до об'єму шматка. З точки зору економії нейтронів було б вигідним зробити це відношення найменшим. Відомо, що це відношення є найменшим для кулі й воно змінюється обернено-пропорційно радіусу кулі. Звідси можна зробити висновки:

- реактор вигідно робити у вигляді кулі;
- існує критичний розмір кулі, для якого реакція поділу ядер ^{235}U вже буде підтримуватись сама.

Реактор, розмір якого більше критичного називають *надкритичним*, а реактор з меншим розміром - *підкритичним*.

Чи буде реактор критичним, залежить як від величини η так і від P -імовірності того, що нейтрон, який виник під час поділу, не покине межі кулі. Кожне поглинання нейтрона ядром ^{235}U призводить до появи η нейтронів, з яких ηP нейтронів залишається в реакторі. Для того щоб реакція сама себе підтримувала, необхідно, щоб величина $C \equiv \eta P$ дорівнювала 1. Величина C називається *коефіцієнтом критичності*.

Основним завданням реактора як енергетичної установки є виробництво тепла. Куля з металічного ^{235}U , яку ми розглядаємо, є дуже неефективним пристроєм для такої мети. Куля, нагріта до максимальної температури -

температури плавлення, може віддавати тепло тільки з поверхні, а на поверхні тепло буде передаватися тільки за рахунок теплопровідності, що є досить низькою – $0,07 \text{ Ккал}/(\text{см}\cdot\text{с})$. Простий розрахунок показує, що рівномірно нагріта куля діаметром 5 см може максимально виділити 20 кВт. У той же час 1 кг палива, що приблизно міститься в такій кулі, забезпечує добу роботи АЕС з тепловою потужністю 1000 МВт або електричною потужністю в 3,5 рази меншою, рівною приблизно 300 тис. кВт. Це досягається за рахунок більш раціонального тепловідводу від палива. Але при таких складних конструкціях, які є в реальних реакторах, ми суттєво змінюємо фізичні характеристики середовища, в якому розповсюджуються нейтрони. І потік нейтронів, який визначає розподіл тепла в реакторі, визначається значно більшою кількістю ядерних реакцій, крім реакції (1). Якраз основним завданням теорії ядерних реакторів є визначення потоку нейтронів як функції координат, швидкості й часу, тобто функції $\Phi(\vec{r}, \vec{v}, t)$, а також обрахування коефіцієнта критичності.

Реакція (1) збільшує кількість нейтронів в η -1 разів. У добре спроектованому реакторі частину цих нейтронів можна використати для деяких корисних потреб. По-перше, частина нейтронів може бути поглинута ядрами ^{238}U , які майже завжди є в паливі реакторів і які з поглинанням нейтрона перетворюються на ядра ^{239}Pu . Останні є матеріалом, що розщеплюється і може використовуватись як паливо. По-друге, частину нейтронів можна вивести з реактора й використати для експериментів, в яких вивчається взаємодія нейтронів з різними об'єктами. І не тільки з метою вивчення взаємодії, а також і для практичного використання. Наприклад, відома така операція, як нейтронне легування напівпровідників, завдяки якій можна отримати напівпровідникові матеріали з дуже однорідними властивостями. Останнім часом також інтенсивно розвивається медичне застосування нейтронів.

Таким чином, бачимо, що реальний реактор є значно складнішою системою, ніж куля з ^{235}U . Розрахунок такої системи є також досить складною проблемою. Між іншим, проектні розрахунки ядерних реакторів мають значно більше значення, ніж розрахунки інших теплових установок типу парових котлів. Помилки в таких розрахунках можуть привести до перегріву паливних елементів, їх виходу з ладу та руйнування, забруднення радіоактивністю реактора до такого стану, що ремонт може стати неможливим.

§ 1.2. Паливо ядерних реакторів

Розглянемо тепер, які речовини можуть використовуватись як паливо в ядерних реакторах. Для цього треба проаналізувати можливі реакції з нейтронами різних ядер. Ці реакції повинні задовольняти таким умовам:

1. На кожний нейтрон, що бере участь у реакції, повинно виділятися більше одного нейтрона.

2. Реакція повинна бути екзотермічною, причому енергія нейтрона, що виник унаслідок реакції, повинна бути більша, ніж енергія нейтрона, який викликає поділ.

3. Необхідно, щоб підходящі ядра зустрічались у природі або їх можна було отримати штучно.

Як приклад реакції, що не задовольняє цим умовам, можна навести реакцію



яка не є екзотермічною, як і всі $(n, 2n)$ реакції.

Єдиною реакцією, що задовольняє всім цим умовам, є реакція поділу нейтронами парно-непарних ядер важких елементів ${}^{233}\text{U}$, ${}^{235}\text{U}$, ${}^{239}\text{Pu}$. До цього переліку можна було б додати ${}^{241}\text{Pu}$, ${}^{252}\text{Cf}$ та ін., якби реакції з утворенням цих нуклідів були більш імовірними і їх можна було б отримати у великій кількості.

Парно-парні важкі ізотопи, такі як ${}^{232}\text{Th}$, ${}^{238}\text{U}$, також можуть ділитися під дією швидких нейтронів. Але середня енергія нейтронів, які виділяються при цьому поділі, недостатня для того, щоб перекрити зменшення енергії завдяки зіткненням з ядрами середовища. Тому в чистому вигляді ці ізотопи не можуть використовуватись як паливо в ядерних реакторах.

З перерахованих вище трьох парно-непарних ізотопів тільки ${}^{235}\text{U}$ зустрічається в природі. Два інших треба отримувати штучно. У покладах ${}^{235}\text{U}$ зустрічається разом із двома іншими ізотопами урану - ${}^{234}\text{U}$ і ${}^{238}\text{U}$. Кількість ізотопу ${}^{235}\text{U}$ в природному урані - 0,71 %, ${}^{234}\text{U}$ - 0,0058 %, основна маса - це ізотоп ${}^{238}\text{U}$ - 99,28 %. Цікаво, що таке співвідношення між ізотопами в природному урані витримується майже для всіх покладів урану, крім одного - в Окло (Габон, Західна Африка). Тут кількість ${}^{235}\text{U}$ на 0,4 % менша, ніж в інших родовищах. Дослідженнями цього факту встановлено, що глибоко під землею в цьому місці в доісторичні часи працював природний ядерний реактор. Грунтові води слугували як уповільнювач і як теплоносій.

Виникає одне цікаве питання. Вважається, що природний уран не може використовуватись як паливо в ядерному реакторі, в якому уповільнювачем є звичайна вода. Це пов'язано з двома причинами. По-перше, ${}^{238}\text{U}$ є досить сильним поглиначем нейтронів, і для нейтронів малих енергій, тобто сповільнених нейтронів, для ${}^{238}\text{U}$ $\alpha = \infty$ і $\eta = 0$. Для природної суміші ${}^{238}\text{U}$ з ${}^{235}\text{U}$ величина $\eta = 1,34$, і для того щоб реактор був критичним, імовірність незахвату сторонніми ядрами або невиходу за межі реактора повинна бути досить великою: $P = 0,74$. Якраз другою причиною є те, що звичайна вода є також досить сильним поглиначем нейтронів і вона не може забезпечити такого високого значення P , якщо вона присутня в реакторі та служить сповільнювачем. Реактор на природному урані можливий лише в тому

випадку, якщо сповільнювачем є важка вода D_2O , яка майже не поглинає нейтронів, або графіт.

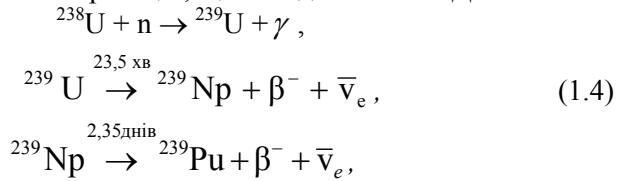
Яким же чином працював природний реактор в Окло? Справа в тому, що в природній суміші ізотопів урану в ті часи, коли працював реактор в Окло, було значно більше, ніж тепер, ізотопу ^{235}U , приблизно 3 %. Тобто така ж кількість, як у збагаченому паливі на сучасних електростанціях. Це пов'язано з тим, що всі три ізотопи урану є α -радіоактивними з різними періодами напіврозпаду: $^{238}U - 4,51 \cdot 10^9$ років, $^{235}U - 7,1 \cdot 10^8$ років, $^{234}U - 2,6 \cdot 10^5$ років. Тому за великий проміжок часу, який пройшов з часів роботи реактора в Окло, відносно більша кількість ^{235}U розпалася, порівняно з ^{238}U , так що відсоток вмісту ^{235}U в суміші знизився до 0,71.

Таким чином, для використання в реакторах у вигляді палива природний уран доцільно збагачувати, тобто збільшувати вміст ізотопу ^{235}U до 2 % - 100 %. Для цього, треба використати яку-небудь ознаку ядра ^{235}U , яка відрізняє його від інших ізотопів урану. Найбільш очевидними ознаками є розмір і маса ядра. Саме відмінність цих двох характеристик для різних ізотопів урану лежить в основі більшості промислових методів збагачення урану. Історично першим з цих способів є газодифузійний, заснований на тому, що молекули газу (звичайно UF_6) дифундують крізь поруваті мембрани, і молекули з меншою масою і трохи меншим розміром мають дещо більший коефіцієнт дифузії. Другий метод – мас-спектральний – полягає в тому, що радіус руху заряджених частинок у магнітному полі залежить від маси частинок. Більш практичним спочатку виявився газодифузійний метод, і більшість ізотопу ^{235}U для перших електростанцій і для ядерної зброї було отримано на газодифузійних заводах. У чистому вигляді цей ізотоп дуже дорогий, і він використовується або в малопотужних дослідницьких реакторах, де треба мало палива, або в транспортних реакторах, де обмежений об'єм силової установки.

Різниця в масі ізотопів використовується також у методі центрифугування, і в наш час більшість ізотопу ^{235}U отримують на високошвидкісних центрифугах.

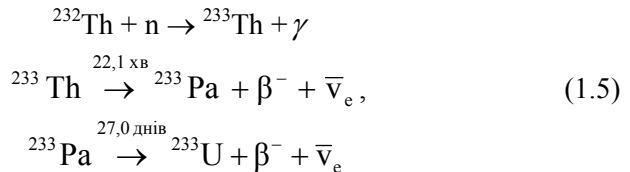
Іншою ознакою, що відрізняє молекули, атоми та ядра різних ізотопів, є деяка різниця в рівнях енергії - коливальних у молекулах, електронних в атомах, нуклонних в ядрах, яка також звичайно обумовлена різницею в розмірах і масах ядер різних ізотопів. Цю відмінність також можна застосувати для розділення ізотопів урану за допомогою методів селективного лазерного збудження вибраних рівнів. У наш час широко досліджуються експериментально з побудовою промислово-дослідних установок методи молекулярного, атомного й хімічного лазерного розділення ізотопів. Щодо стосується ядерних рівнів, то приваблює увагу існування збудження ізомерного рівня ядра ^{235}U з енергією 69 eV і з часом життя ~ 30 хв. Можливість використання цього рівня для розділення ізотопів зараз вивчається в лабораторних умовах.

Два інші ізотопи, які можна використовувати як паливо, ^{239}Pu і ^{233}U отримують штучно за допомогою реакцій, що наведені нижче. Для ^{239}Pu



Завдяки цьому процесу ^{239}Pu завжди виникає в реакторах, в яких присутній ^{238}U . У реакторах на природному урані його виробляється приблизно стільки ж, скільки згорає ^{235}U .

Ізотоп ^{233}U виробляється за такою схемою:



Таким чином, ^{233}U виробляється в реакторах, в яких присутній торій. Обидва ізотопи ^{233}U і ^{239}Pu можуть використовуватися як паливо в реакторах на повільних нейтронах. Більше того, якщо в ці реактори додавати ^{238}U і ^{232}Th , то такі реактори будуть додатково виробляти паливо. Взагалі кількість ^{232}Th в природних родовищах значно вища, ніж кількість ^{238}U , тому ядерний цикл на основі торію може мати велике майбутнє, якщо тільки людство не придумає чого-небудь кращого за ядерні реактори.

§ 1.3. Продукти поділу

Розглянемо тепер, що ми маємо в результаті реакції (1), тобто, що ховається за словами - дві скалки поділу. У більшості випадків ядро ділиться на дві нерівні частини, а ймовірність поділу на три частини має порядок $\sim 10^{-7}$. Частіше разом з двома скалками виникає легка частинка ^1H , ^2H , ^3H , ^4He , але, ймовірність таких процесів мала і їх звичайно не враховують під час аналізу продуктів поділу.

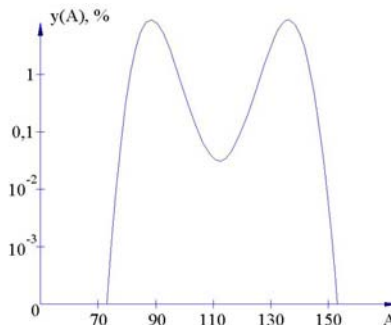


Рис 1.2. Розподіл за масами скалок поділу ^{235}U

Розподіл двох скалок поділу за відносними атомними масами має характерний вигляд кривої з двома максимумами: з $A \approx 90 - 100$ і $A \approx 130 - 140$ (рис.1.2). Саме до цих максимумів попадають такі нукліди як ^{91}Sr і ^{137}Cs , що приносять нам багато неприємностей з часів Чорнобильської катастрофи. Імовірність появи скалки поділу з масовим числом A називають “виходом A під час поділу” і позначають $y(A)$. Максимальна ймовірність появи скалки з масовим числом A поблизу 90 або 135 дорівнює приблизно 6 – 7%. Із збільшенням маси ядра, що ділиться, максимуми на цій кривій зсуваються в бік більших значень A . Із збільшенням енергії нейтронів, які викликають поділ, до декількох MeV значення функції $y(A)$ зростають, а також зменшується “провал” між максимумами.

Кінетична енергія скалок поділу залежить від того, як ділиться ядро. Розподіл скалок поділу за енергіями має два досить широкі максимуми: один поблизу 65 MeV для важкої скалки, другий поблизу 100 MeV для легкої. Початкова швидкість важкої скалки становить біля 10^9 см/с, а легкої - приблизно $1,4 \cdot 10^9$ см/с. Вилітаючи з такою високою швидкістю, скалки поділу не встигають захопити на свої орбіти всі електрони материнського ядра. Тому початковий заряд скалок поділу є додатним і становить 10 - 20 зарядів електрона.

Рухаючись у речовині, скалки поділу віддають свою енергію на іонізацію атомів середовища й на пружні й непружні зіткнення з атомами та ядрами. Звичайно, зменшення енергії скалки поділу супроводжується зменшенням її заряду, і в кінці пробігу скалка поділу стає нейтральною. Довжина пробігу визначається густиною речовини. Наприклад, у повітрі пробіг скалок поділу дорівнює близько 2,2 і 1,5 см для легкої та важкої скалок відповідно, у твердих речовинах максимальний пробіг змінюється від декількох до десятків мікрометрів.

Оскільки відносне число нейтронів в ядрах, що діляться, $(A-Z)/A$ значно більше, ніж у стабільних ядрах із середньою масою, то більшість скалок поділу виявляються “перевантаженими” нейтронами і є β^- -радіоактивними або в деяких випадках випромінюють нейтрони, що запізнюються. Останній випадок має місце тоді, коли після β^- -розпаду виникає ядро в дуже збудженому стані. Типову схему β^- -розпаду, з яким конкурує випромінювання нейтронів, що запізнюються, наведено на рис. 1.3.

Під час дослідження продуктів розпаду використовують такі означення:

Незалежний вихід - імовірність виникнення даного нукліду в результаті поділу після випромінювання миттєвих нейтронів, але до радіоактивного розпаду його самого та його попередників.

Кумулятивний вихід - імовірність виникнення даного нукліду в результаті поділу після випромінювання миттєвих нейтронів і нейтронів, що запізнюються, до його радіоактивного розпаду, але після радіоактивних розпадів усіх його попередників.

Вихід ланцюжка - імовірність утворення стабільного нукліда в результаті поділу після випромінювання нейтронів і після розпаду всіх його попередників.

Виходи ланцюжків задовольняють очевидним законам збереження

$$\sum_A y(A) = 2 ; \sum_A Ay(A) = A_F + 1, \quad (1.6)$$

де A_F – маса ядра, що поділилося.

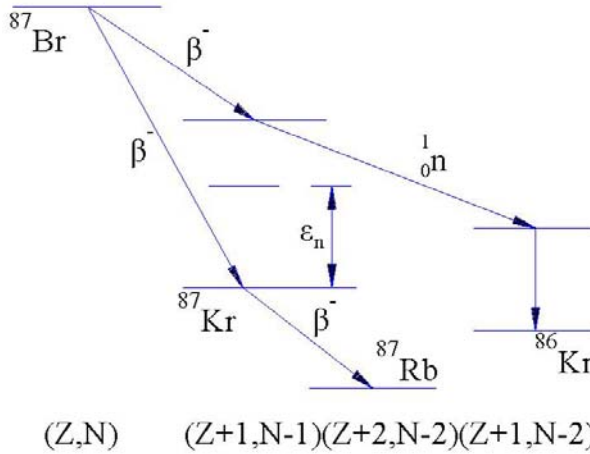


Рис.1.3. Два конкуруючих канали розпаду ^{87}Br

Ці закони збереження допомагають обробляти експериментальні результати.

§ 1.4. Баланс нейтронів у реакторах

Розглянемо тепер цікаве питання про “долю” нейтронів у реальних ядерних реакторах або процеси, що забезпечуються нейтронами в реакторах. Ця “доля” нейтронів буде різною в реакторах на повільних і швидких нейтронах. Розподіл нейтронів у цих двох типах реакторів наведено на схемах рис. 1.4 і 1.5. Треба зазначити, що конструктивні особливості тих чи інших реакторів можуть внести деякі незначні зміни в ці схеми, тому числа нейтронів, наведені на цих схемах, треба розглядати як деякі характерні середні значення.

У реакторах на теплових нейтронах під час поділу 100 ядер палива утворюється в середньому 259 нейтронів¹. Деякі з цих нейтронів погли-

¹ Ця величина дещо не узгоджується з наведеною вище величиною для ν – середньою кількістю нейтронів, що виділяються під час поділу ^{235}U . Треба врахувати, що в енергетичних реакторах паливо, крім ^{235}U , містить також ^{238}U і ^{239}Pu . Крім того, поділ відбувається не тільки на теплових нейтронах.

наються в продуктах поділу, конструкційних матеріалах (у тому числі в органах керування) і в захисній оболонці реактора. У сумі губиться 59 нейтронів. Останні 200 нейтронів поглинаються в паливі. Свіже паливо реактора на теплових нейтронах складається з незначної кількості ізотопу ^{235}U , що ділиться під дією теплових нейтронів (2 – 4 %), і великої кількості ^{238}U . З 200 нейтронів 78 поглинається в ^{235}U і тільки 63 з них призводять до поділу цих ядер. Інші 15 нейтронів поглинаються з утворенням ^{236}U і вибувають з гри. 63 нейтрони поглинаються в ^{238}U , але тільки п'ять з них призводять до поділу, тому що ^{238}U може ділитися тільки під дією швидких нейтронів, що не встигли уповільнитись при зіткненнях з ядрами палива та уповільнювача. Останні 57 нейтронів призводять до утворення ядер ^{239}Pu за схемою, наведеною в § 2. Таким чином, у реакторі, що нормально функціонує, завжди є деяка кількість ^{239}Pu . 59 нейтронів, що залишилися, поглинаються ^{239}Pu і призводять до 32 актів поділу. Таким чином, у стаціонарному реакторі приблизно третина енергії виробляється за рахунок поділу плутонію. 27 нейтронів, що залишились, ідуть на утворення вищих ізотопів ^{240}Pu , ^{241}Pu тощо.

У реакторах на швидких нейтронах баланс нейтронів дещо відмінний. Під час поділу 100 ядер палива в швидкому реакторі виникає більше нейтронів, ніж у тепловому (292). Це пояснюється тим, що величина ν залежить від енергії нейтрона й збільшується з її зростанням. Крім того, у паливі реакторів на швидких нейтронах міститься більше ^{239}Pu . Звичайно, свіже паливо реакторів на швидких нейтронах складається з суміші плутонію (до 20 %) із збідненим ураном, тобто з природним ураном, з якого вилучено деяку кількість ^{235}U . Цей ^{235}U може бути або спалений на теплових реакторах, або вилучений на збагачувальних заводах. Тобто паливо для швидких реак

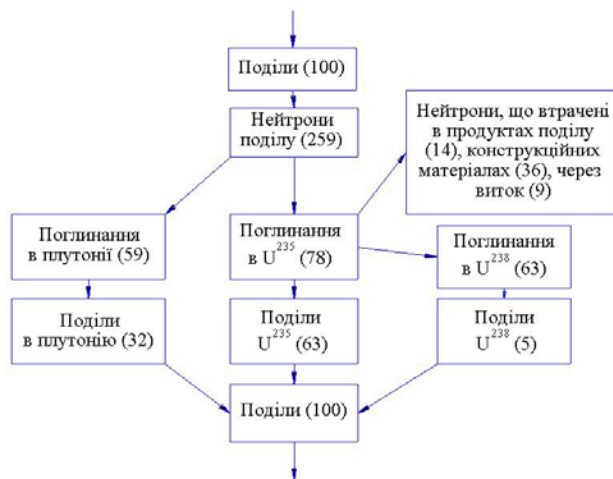


Рис. 1.4. Утворення, реакції та поглинання нейтронів поділу в тепловому реакторі

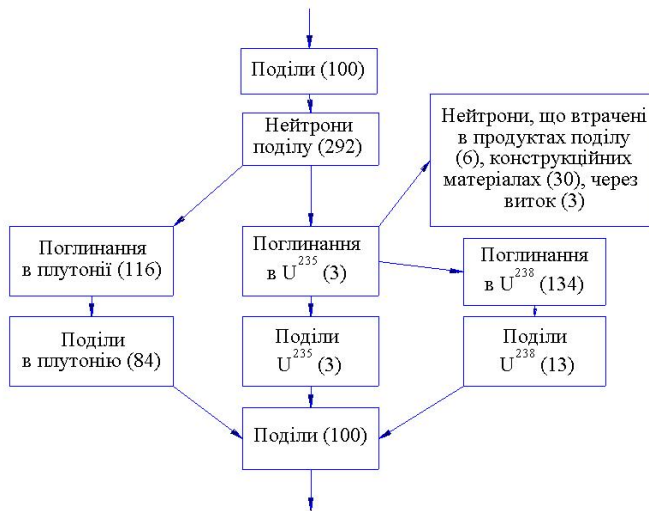


Рис. 1.5. Утворення, реакції та поглинання нейтронів поділу в швидкому реакторі

торів являє собою відходи теплових реакторів або збагачувальних заводів. Саме тому ^{235}U , що залишився в паливі, забезпечує тільки три акти поділу із 100. Основна кількість поділів відбувається в плутонії, де поглинається 116 нейтронів, з яких 84 проводять поділ. Ізотоп ^{238}U поглинає 134 нейтрони, з них тільки 13 забезпечують поділ, а 121 нейтрон іде на виробництво плутонію. Звідси видно, що кількість нейтронів, які забезпечують виробництво плутонію, більше кількості нейтронів, що поглинаються ^{239}Pu . Тобто ^{239}Pu виробляється із швидкістю, більшою, ніж вигоряє. Крім цього, у швидкому реакторі менше нейтронів поглинається в продуктах поділу, конструкційних матеріалах і захисті. Сумарно губиться 39 нейтронів.

Таким чином, швидкий реактор, крім виробництва енергії, може виробляти ^{239}Pu . Цей процес зветься відтворенням палива і він дає змогу використовувати в якості палива такі сировинні матеріали, як ^{238}U і ^{232}Th . Взагалі, це явище відкриває величезні запаси енергії. За деякими оцінками використання “швидкого” паливного циклу може забезпечити людство енергією протягом 500 років.

§ 1.5. Конструкція реакторів

Розглянемо тепер основні елементи конструкції ядерних реакторів. Звичайно, в цьому параграфі ми розглянемо будову реактора тільки схематично, а більш докладні відомості про конструктивні особливості діючих реакторів можна знайти в спеціальних виданнях, які варто розглядати після вивчення основних принципів роботи реактора. На рис. 1.6 наведено схему, на якій відображено всі основні елементи реактора.

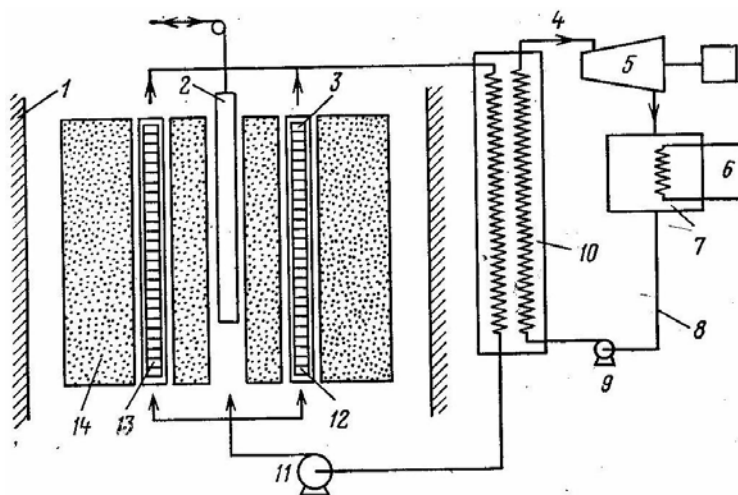


Рис 1.6. Основні компоненти ядерного реактора: 1 – радіаційний захист; 2 – регулюючий стрижень; 3 – оболонка паливного елемента; 4 – пара; 5 – турбіна; 6 – вода; 7 – конденсатор; 8 – вода; 9 – насос, що живить парогенератор; 10 – парогенератор; 11 – циркуляційний насос теплоносія; 12 – паливо; 13 – паливний елемент; 14 – сповільнювач.

Перш за все, у реакторі повинно знаходитись паливо. Це паливо у вигляді невеликих таблеток з чистого металу або карбїду металу, або оксиду металу, або суміші металів (мається на увазі торій, уран і плутоній) вміщують у паливні елементи, так звані ТВЕЛі (тепловиділяючі елементи), тобто в оболонку з магнієвого, цирконієвого сплавів або з нержавіючої сталі. Оболонка потрібна для того, щоб не допустити контакту палива з теплоносієм. Цей контакт є небажаним тому, що треба запобігти хімічній реакції палива з теплоносієм або його розчиненню в теплоносії, а також розповсюдженню продуктів розпаду. Паливні елементи звичайно групуються в паливні збірки.

Збірки паливних елементів розміщують у потоці теплоносія для відводу тепла від палива. Крім того, для сповільнення нейтронів навколо паливних елементів розміщують сповільнювач. Як сповільнювач використовують речовини, що складаються з легких елементів, яким, з одного боку, нейтрони можуть віддати багато енергії під час зіткнення, а з другого боку, які мають невеликий коефіцієнт поглинання нейтронів. Частіше за все для цього використовують легку й важку воду, а також графіт. Якщо теплоносієм і сповільнювач - одна й та ж речовина, то цю речовину можна просто прокачувати крізь систему паливних елементів для відбору тепла. Якщо це різні речовини, то використовують реактори каналного типу. У каналах розміщують паливо і через них прокачують теплоносієм. Навколо каналів розміщують сповільнювач.

Теплоносієм, що пройшов крізь паливні елементи, надходить до парогенераторів, де він віддає своє тепло на утворення пари. Пара, у свою

чергу, надходить до турбін, де виробляється електроенергія.

Для керування процесом розмноження й розповсюдження нейтронів у реакторі використовують регулюючі стрижні. Вони містять матеріали, що сильно поглинають нейтрони, звичайно це бор або кадмій. Як уже було відзначено, під час поділу виникають нейтрони двох типів: миттєві нейтрони та нейтрони, що запізнюються. Час життя нейтронів у тепловому реакторі - 10^{-3} - 10^{-4} с, у швидких реакторах - 10^{-5} - 10^{-8} с. Тепер припустимо, що ми вивели реактор у критичний режим. У реакторі завжди існують які-небудь статистичні флуктуації, що можуть локально порушити цей режим - хай навіть на дуже незначну величину змінити густину потоку нейтронів. Якби під час поділу виділялись тільки миттєві нейтрони, то така зміна потоку нейтронів привела б або до миттєвого розгону реактора, тобто до вибуху, або до миттєвої зупинки, бо ніякими механічними засобами за час життя нейтронів неможливо змінити густину потоку нейтронів. Справу рятують нейтрони, що запізнюються. Хоча їх частка дуже невелика в загальному потоці нейтронів (~0,7 %), саме завдяки їм можливе керування реактора за допомогою механічних засобів, тобто регулюючих стрижнів. Зрозуміло, що для безпечної роботи реактора не можна допускати зміни потоку нейтронів більшої, ніж частка нейтронів, що запізнюються. Звичайні статистичні флуктуації призводять до значно менших змін, і, як правило, вони зникають за рахунок від'ємних зворотних зв'язків між різними підсистемами реактора. Це питання докладніше буде розглянуте пізніше в розділах 8 і 10.

Час запізнювання з випроміненням затриманих нейтронів продуктами поділу ~ 0,6 – 80 с, а час повного переміщення керуючих стрижнів ~ 2 – 20 с, аварійних стрижнів - ще менше. Таким чином більшістю нейтронів, що запізнюються, можна керувати за допомогою стрижнів. Отже, органи регулювання реактора керують тільки нейтронами, що запізнюються, і цього виявляється достатньо для керування роботою всього реактора.

Ще одним важливим елементом конструкції реактора є радіаційний захист. Навіть після припинення реакції поділу всі продукти поділу є дуже радіоактивними, і для безпечної роботи персоналу реактора необхідно забезпечити надійний захист. Звичайно, радіаційний захист складається із сталеві оболонки, водяної сорочки та бетонної оболонки. На більшості реакторів уся система вміщується в захисну оболонку, яка забезпечує невихід радіоактивних продуктів за межі реактора під час великих аварій, а також неможливість руйнування реактора ззовні. На жаль, реактори на Чорнобильській станції не були вміщені в захисну оболонку, і саме цим обумовлено величезний негативний вплив аварії на навколишнє середовище.

Інші елементи конструкції - парогенератори, турбіни, циркуляційні насоси, теплообмінники, трубопроводи тощо - є дуже важливими для забезпечення нормальної роботи реактора та його безпеки, але вони слабо впливають на фізичні процеси в реакторі (якщо не торкатися зворотних зв'язків), і ми їх майже не будемо розглядати.

§ 1.6. Класифікація реакторів

Оскільки ми вже маємо основні уявлення про реактор, тепер можна провести класифікацію реакторів. Усяка класифікація - річ умовна, і можна набрати велику кількість ознак, за якими можна класифікувати реактори. Але класифікація може допомогти під час аналізу фізичних процесів у реакторі. Тому ми зараз проведемо класифікацію з точки зору внутрішньої структури реактора, яка безпосередньо визначає коефіцієнт критичності й розподіл нейтронів у реакторі.

Різницю в структурі реакторів можна розглядати з п'ятьох різних точок зору, виходячи із сорту палива, середньої енергії нейтронів, сорту сповільнювача, системи теплообміну, з точки зору просторового розміщення палива.

1. Ми вже перераховували найбільш важливі матеріали, що можуть ділитися: ^{235}U , ^{233}U , ^{239}Pu . Тому паливом для реакторів можуть бути або ці матеріали в чистому вигляді, або в їх суміші, або в суміші з іншими ізотопами.

Як паливо використовують природний уран. Він може використовуватись тільки в реакторах на теплових нейтронах ($\eta = 1,34$) і в дуже великих реакторах ($P > 0,74$). У більшості реакторів як паливо використовують збагачений уран, тобто уран, в якому збільшена частка ізотопу ^{235}U . Ступінь збагачення може бути 100 % і значно меншою. В енергетичних реакторах ступінь збагачення урану 2 – 5 %. Як паливо можна також використовувати суміш ^{235}U і ^{232}Th , але поки що ця суміш не застосовується в енергетичних реакторах. У “швидких” реакторах використовується суміш збідненого урану і ^{239}Pu . У більшості енергетичних реакторів використовуються оксиди цих металів, але можливе також використання нітридів, карбідів, інтерметалідів тощо. Останнім часом розглядається можливість використовувати як паливо інертні матеріали (типу ZrO_2), в яких розчинено матеріали, що можуть ділитися (^{233}U , ^{235}U , ^{239}Pu) в кількості, що відповідає ступенню збагачення палива в енергетичних реакторах. Також останнім часом у деяких країнах використовується так зване МОХ паливо – суміш оксидів урану й плутонію з метою використання величезних запасів збройного плутонію.

2. Друга ознака - енергія нейтронів. Кажуть, що реактор працює на швидких, проміжних та теплових нейтронах, якщо основна частка реакцій поділу відбувається з поглинанням нейтронів з енергією відповідно вище 100 кеВ, менше 100 кеВ, але більше теплової енергії kT (k - постійна Больцмана, T - абсолютна температура) і приблизно рівною kT . У реакторах на швидких нейтронах майже нема матеріалів, що уповільнюють рух нейтронів, у той час як у двох інших типах реакторів міститься досить велика кількість сповільнюючих матеріалів.

3. Можна класифікувати реактори за типом сповільнювача. Кінетична енергія нейтронів може зменшуватись як під час непружних, так і під час пружних зіткнень з ядрами середовища. Основну роль у процесі зменшення енергії нейтронів грають пружні зіткнення. Під час пружних зіткнень енергія передається ядру у вигляді енергії віддачі. Ця енергія віддачі збільшується із зменшенням маси ядер, з якими зіткнувся нейтрон. Таким чином, найбільш ефективним сповільнювачем є водень (з точки зору ефективності відбору енергії від нейтрона).

Процес сповільнення за допомогою пружних зіткнень конкурує з процесами поглинання нейтронів. Тому не кожний легкий елемент є гарним сповільнювачем. Наприклад, літій не може бути хорошим сповільнювачем, тому що він сильно поглинає нейтрони. Можна, наприклад, чекати, що гелій може бути хорошим сповільнювачем, бо він легкий і не поглинає нейтрони. Але гелій - це газ з дуже малою густиною й тому він не може використовуватись як сповільнювач (як, до речі, і водень у чистому вигляді). Хорошими сповільнювачами є вода, важка вода, берилій, окис берилію, карбід берилію, графіт. Усі ці сповільнювачі використовують у різних реакторах.

4. Тепло, що виділяється в реакторі в результаті поділу ядер палива, необхідно виводити з реактора, навіть якщо призначенням реактора не є виробництво енергії. Тепло необхідно виводити для запобігання перегріву всіх внутрішніх елементів реактора. Існує п'ять можливостей відводу тепла від палива – теплопередача випромінюванням, теплопровідність, циркуляція теплоносія, циркуляція рідкого палива, кипіння теплоносія.

Паливо в реакторах нагрівається до дуже високих температур. Відомо, що із збільшенням температури кількість енергії, що випромінюється електромагнітними хвилями, зростає пропорційно четвертому ступеню температури (закон Стефана - Больцмана). Тому теплопередача від внутрішніх нагрітих областей паливних таблеток до оболонок ТВЕЛів значною мірою здійснюється завдяки випромінюванню електромагнітних хвиль.

Теплопровідність сама по собі є дуже неефективним способом відводу тепла, і за рахунок тільки теплопровідності неможливо відвести тепло від великих об'ємів. Але в реакторах з твердим паливом теплопровідність так чи інакше працює, і за рахунок теплопровідності тепло відводиться, поряд із радіаційним теплопереносом, від внутрішніх частини паливних елементів.

Циркуляція теплоносія з великою теплоємністю - це дуже ефективний спосіб відводу тепла, і він використовується в більшості побудованих реакторів. Після проходження теплоносія крізь паливні елементи він, звичайно, подається до теплообмінників, де відбувається утворення пари і де теплоносії охолоджується.

Якщо паливо рідке, наприклад розчин уранової солі, то можлива циркуляція такого рідкого палива та охолодження його поза активною зоною

в теплообмінниках за звичайною схемою. Це також дуже ефективний спосіб охолодження.

Оскільки теплота пароутворення, як правило, за величиною більша, ніж теплоємність рідкого теплоносія, то найбільш ефективним способом охолодження паливних елементів є утворення пари безпосередньо на поверхні паливних елементів. У цьому випадку існує дві можливості - або проходження цієї суміші пари з рідким теплоносієм крізь теплообмінник з конденсацією первинної пари в ньому та утворенням вторинної пари. Це так звана двоконтурна схема, яка використовується в багатьох реакторах. Можлива також схема, коли суміш теплоносія і його пари проходить крізь сепаратор пари, і вже суха пара подається безпосередньо до турбіни електрогенератора. Така схема зветься одноконтурною, і вона використана, наприклад, у реакторах типу РВПК (чорнобильського типу) або в реакторах BWR (Boiling Water Reactors – реактори з киплячою водою). Ця схема дешева, але може привести до забруднення турбінного залу, навіть при наявності незначних негерметичностей паливних елементів.

У деяких молекулах теплота дисоціації може бути порівняною й більшою за теплоту пароутворення. Тому розроблялися також проекти й було виготовлено дослідний зразок реактора, де теплоносієм є рідина, молекули якої розкладаються під час нагрівання. У конденсаторі відбувається обернений процес. Така схема охолодження також є дуже ефективною для відводу тепла від паливних елементів реактора.

5. Нарешті, остання ознака - це внутрішня геометрична структура реактора. Кожний реактор, навіть одного типу, має якісь геометричні відмінності від попередників. Але існують два типи реакторів, що суттєво відрізняються один від одного. Це гомогенні й гетерогенні реактори. У гетерогенному реакторі сповільнювач і паливні елементи розділені геометрично і, як правило, паливні елементи утворюють ґратку. У гомогенному реакторі сповільнювач і паливо змішані й знаходяться в одній фізичній фазі.

Ці п'ять ознак, за якими ми класифікували реактори не є повністю незалежними, і вибір, наприклад, типу палива тягне за собою вибір сповільнювача, геометричної структури і т. ін. Наприклад, природний уран потребує важкої води або графіту як сповільнювача і гетерогенної структури активної зони.

У наступних розділах будуть детальніше розглянуті всі процеси, що визначають поведінку ядерних реакторів, і про які ми згадували лише побіжно в цьому розділі.

Розділ 2

Ядерні процеси

Існують два типи ядерних перетворень: самовільний розпад ядер і реакції під час зіткнень. Самовільний розпад ядер визначається тільки властивостями ядра, у той час як реакції під час зіткнень залежать не тільки від природи і стану ядер, що зіштовхуються, але також від їх відносної швидкості.

Обидва типи реакцій грають суттєву роль у роботі ядерних реакторів. Основна маса продуктів поділу є β -активними, тобто зазнають β -розпаду, у результаті якого в реакторі виділяється близько 7 % енергії. Однак найбільше значення для роботи реактора мають реакції нейтронів з матеріалами, що діляться, із сировинними матеріалами, що входять до складу палива, з продуктами поділу та з конструкційними матеріалами. Нижче ми розглянемо основні ядерні реакції, які мають важливе значення в роботі ядерного реактора.

§ 2.1. Самовільний розпад

Розглянемо спочатку самовільний розпад ядер. Ядро може розпадатися з випромінюванням α -частинок, β -частинок і в рідких випадках з випромінюванням інших частинок. Випромінювання γ -кванта можна також розглядати з погляду феноменологічного опису як розпад ядра. Але з погляду квантової механіки випромінювання γ -кванта не є розпад ядра, а просто перехід із збудженого до основного стану.

Розпад ядер носить імовірнісний характер, і в усіх випадках розпад ядер можна характеризувати константою розпаду λ . Ця константа характеризує ймовірність того, що дане ядро розпадеться за одиницю часу, якщо відомо, що воно не розпалося раніше. Ця ймовірність не залежить від моменту утворення радіоактивного ядра. Тобто зміна кількості ядер за час Δt , що не розпалися до моменту часу t , $N(t)$, повинна визначатися самою кількістю ядер, що не розпалися, константою розпаду і проміжком часу Δt :

$$N(t + \Delta t) - N(t) = -\lambda N(t) \Delta t.$$

Звідки маємо диференціальне рівняння для величини $N(t)$:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N. \quad (2.1)$$

Звичайно, таке саме рівняння можна записати для ймовірності $P(t)$ того, що ядро не розпадеться за час t :

$$\frac{dP}{dt} = -\lambda P. \quad (2.1 \text{ a})$$

Якщо N_0 - кількість радіоактивних ядер в момент $t = 0$, то кількість радіоактивних ядер, що не розпалися до моменту часу t , дорівнює

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (2.2)$$

Величина $P(t) = e^{-\lambda t}$ являє собою ймовірність того, що ядро не розпалося за час t , величина $\lambda e^{-\lambda t}$ дає ймовірність розпаду ядра за час від t до $t + \Delta t$. Тому середній час життя радіоактивного ядра дорівнює

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} \lambda dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (2.3)$$

У довідниках звичайно наводиться не середній час життя різних радіоактивних ядер, а їх період напіврозпаду, тобто час, за який кількість ядер, що не розпалися, зменшується наполовину:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 0,693 \bar{t}. \quad (2.4)$$

Взагалі радіоактивне ядро може розпадатися не єдиним шляхом, а випромінюючи чи α -частинку, чи β -частинку, чи інші частинки. Кожний з цих процесів характеризується своєю постійною розпаду, а ймовірність ядра не розпастися зменшується в часі відповідно до рівняння

$$\frac{dP}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots)P. \quad (2.5)$$

Період напіврозпаду різних радіоактивних ядер може мінятися від часток секунд до мільйонів років (^{129}I : $t_{1/2} \sim 10^6$ років). Енергія β -частинок може мінятися від десятків кіло електрон-вольтів до 5,3 MeV (^{84}Br).

Визначення константи розпаду λ або ймовірності розпаду за одиницю часу, виходячи із законів квантової механіки, є принципово різним для процесів α -розпаду і β -розпаду. Це пов'язано з тим, що процеси α - та β -розпаду викликані дією різних за природою сил.

Досить грубо процес α -розпаду можна уявити собі як такий, що протікає у два етапи. Перший етап пов'язаний з утворенням α -частинки всередині ядра, а другий етап - проникнення α -частинки крізь кулонівський бар'єр. Отже, процес α -розпаду визначається ядерною (сильною) та електромагнітною взаємодією. Більш докладні відомості про теорію α -розпаду можна знайти в монографіях з теорії ядер (див., наприклад, [1]).

Процес електронного β -розпаду визначається перетворенням одного нейтрона ядра в протон, електрон та електронне антинейтрино. Таким чином,

заряд ядра збільшується на одиницю, і випромінюються електрон та антинейтрино. Можливе також перетворення одного протона ядра в нейтрон, позитрон і нейтрино, причому заряд ядра зменшується на одиницю, і випромінюються позитрон і нейтрино. Отже, процес β -розпаду визначається взаємодією нуклона ядра з електронно-нейтринним полем (так звана слабка взаємодія). Докладніше про теорію β -розпаду можна дізнатися з монографії [2].

§ 2.2. Пружне зіткнення нейтронів з ядрами

Перейдемо тепер до реакцій нейтронів з ядрами. Самою простою й однією з найбільш важливих є реакція пружного зіткнення або просто пружне розсіювання. Пружне зіткнення можна назвати ядерною реакцією з деякою натяжкою, хоча в деяких випадках пружне розсіювання відбувається з утворенням проміжного ядра, має резонансну залежність від енергії і його можна розглядати як ядерну реакцію.

Під час пружного розсіювання не змінюється ні склад ядер, ні квантовий стан ядер. Але, хоча внутрішній стан ядер не змінюється, змінюється характеристика їх руху. При цьому може відбутися передача частини кінетичної енергії від однієї частинки до іншої. Звичайна картина така: нейтрон має дуже велику кінетичну енергію, а ядро майже не рухається. У результаті зіткнення нейтрон губить частину енергії, а ядро-мішень отримує енергію віддачі. Величина цієї енергії залежить від кінетичної енергії нейтрона й маси ядра. Процес сповільнення нейтронів у реакторі в основному являє собою сукупність послідовних пружних зіткнень.

Оскільки внутрішня енергія ядра, з яким стикається нейтрон, не змінюється під час пружного зіткнення, то повинні виконуватися закони збереження кінетичної енергії та імпульсу системи, що складається з двох частинок - нейтрона та ядра. Для аналізу передачі енергії від нейтрона до ядра зручно розглядати процес у системі координат, що пов'язана з непорушним центром інерції нейтрона та ядра - C -системі (рис. 2.1).

Нехай \vec{V}'_a і \vec{V}'_b - швидкості нейтрона та ядра в C -системі до зіткнення, а \vec{V}_a і \vec{V}_b - ці ж швидкості після зіткнення відповідно.

Тоді закон збереження імпульсу дає ($m_n = 1$, $M = A$, де m_n - маса нейтрона, а M - маса ядра):

$$\begin{aligned}\vec{V}'_a + A\vec{V}'_b &= \vec{V}_a + A\vec{V}_b = 0, \\ \vec{V}'_a &= -A\vec{V}'_b; \vec{V}_a = -A\vec{V}_b.\end{aligned}\tag{2.6}$$

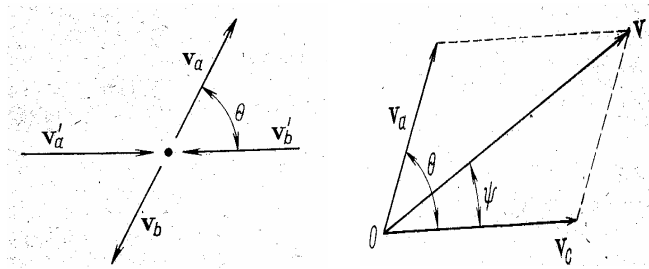


Рис 2.1. Кінематична схема пружного розсіювання

Якщо перейти до абсолютних значень швидкостей, то

$$V'_a = AV'_b; V_a = AV_b; V = |\vec{V}|.$$

Закон збереження кінетичної енергії в С-системі дає

$$V_a'^2 + AV_b'^2 = V_a^2 + AV_b^2. \quad (2.7)$$

Із формул (2.6) і (2.7) випливає

$$V_a'^2 \left(1 + \frac{1}{A}\right) = V_a^2 \left(1 + \frac{1}{A}\right),$$

$$V'_a = V_a; V'_b = V_b. \quad (2.8)$$

Таким чином, в С-системі до і після зіткнення нейтрон і ядро рухаються вздовж прямої, яка сполучає їхні центри (до удару - назустріч, після удару - у протилежні боки), причому абсолютні значення швидкостей до й після удару збігаються, але напрям руху відхиляється на деякий кут θ .

У лабораторній системі координат (L-системі) за означенням (рис. 2.2)

$$\vec{V}' = \vec{V}_c + \vec{V}'_a, \quad \vec{V} = \vec{V}_c + \vec{V}_a, \quad (2.9)$$

і якщо до зіткнення ядро перебувало у спокої, то

$$\vec{V}'_b = 0, \quad \vec{V} = \vec{V}_c + \vec{V}_a. \quad (2.10)$$

В L-системі сума імпульсів до і після зіткнення дорівнює імпульсу центра інерції:

$$(A+1)\vec{V}_c = \vec{V}' + A\vec{V}'_a = \vec{V} + A\vec{V}_a. \quad (2.11)$$

З формул (2.10) і (2.11) маємо

$$\vec{V}_c = \frac{\vec{V}'}{A+1} \quad \text{і} \quad V_c = \frac{V'}{A+1}. \quad (2.12)$$

З формули (2.9) отримуємо

$$\vec{V}'_a = \vec{V}' - \vec{V}_c = \vec{V}' \left(1 - \frac{1}{A+1}\right) = \vec{V}' \frac{A}{A+1},$$

$$V'_a = V_a = V' \frac{A}{A+1} \quad (2.13)$$

З рис. 2.1 і з формули (2.9) для проєкцій швидкостей на напрям \vec{V}_c випливає

$$V \cos \varphi = V_c + V_a \cos \theta = \frac{V'}{A+1} + \frac{V' A}{A+1} \cos \theta$$

або

$$\frac{V}{V'} \cos \varphi = \frac{1 + A \cos \theta}{A + 1}. \quad (2.14)$$

Знову ж таки з рис. 2.1

$$V^2 = V_c^2 + V_a^2 + 2V_c V_a \cos \theta = \frac{V'^2}{(A+1)^2} + \frac{V'^2 A^2}{(A+1)^2} + \frac{2V'^2 A}{(A+1)^2} \cos \theta.$$

Тому

$$\frac{E}{E'} = \left(\frac{V}{V'} \right)^2 = \frac{1 + 2A \cos \theta + A^2}{(A+1)^2} = \frac{1}{2} [1 + \alpha_A + (1 - \alpha_A) \cos \theta],$$

де
$$\alpha_A = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2. \quad (2.15)$$

Тут E' і E - кінетична енергія нейтрона до й після зіткнення в L -системі. Очевидно, що максимальна передача енергії відбудеться під час лобового зіткнення, коли $\cos \theta = -1$ ($\theta = \pi$). Тоді $\frac{E}{E'} = \alpha_A$ і

$$\Delta E_m = (E' - E)_m = (1 - \alpha_A) E'. \quad (2.16)$$

Ця величина визначає максимальну енергію, яку може згубити нейтрон під час зіткнення. Коли $A = 1$, $\alpha_A = 0$ і $\Delta E = E'$, тобто нейтрон може згубити всю енергію під час зіткнення з ядром атома водню. Чим більша маса ядра, тим менше енергії нейтрон може передати ядру за одне зіткнення. Саме тому найкращими сповільнювачами є легкі речовини, про які згадувалося в минулому розділі.

§ 2.3. Перерізи реакцій

Перед тим, як перейти до розгляду інших важливих ядерних реакцій, варто нагадати деякі важливі поняття, які ми будемо надалі використовувати. Найважливішим поняттям є поняття перерізу реакції.

Нехай пучок частинок падає перпендикулярно до тонкої мішені. Нехай густина частинок у пучку дорівнює n [1/см³], а їх швидкість - V [см/с]. Тоді кількість реакцій i -го типу R_i , що відбуваються на одиниці площі мішені в одиницю часу, пропорційна кількості частинок nV , що налітають на мішень, і кількості ядер N на одиниці площі мішені:

$$R_i = \sigma_{ij} N_j n V . \quad (2.17)$$

Коефіцієнт пропорційності називається ядерним або мікроскопічним перерізом такої реакції. Його розмірність квадратний сантиметр. Більшість ядерних реакцій має переріз від 10^{-24} до 10^{-27} см², тому як одиницю вимірювання перерізу часто вибирають 1 барн (б) = 10^{-24} см².

Переріз залежить від енергії частинок, що стикаються. При цьому рух центра інерції не впливає на величину перерізу, тому переріз залежить від відносних швидкостей частинок, тобто від енергії частинок у системі центра інерції.

У квантовій механіці часто використовують поняття диференційного перерізу розсіювання, яке визначають як відношення кількості частинок, що розсіялись за одиницю часу в елемент тілесного кута $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, до густини потоку частинок, що падають на силовий центр. Але в теорії реакторів значно частіше використовують поняття макроскопічного перерізу. Макроскопічний переріз дорівнює мікроскопічному перерізу, помноженому на кількість ядер в 1 см³. Він позначається Σ і має розмірність [см⁻¹]. Визначають також макроскопічні перерізи розсіювання та поглинання, що позначають, як Σ_s і Σ_a відповідно.

Макроскопічний переріз визначає середню довжину вільного пробігу нейтронів у середовищі. Нехай Σ_t - сумарний, повний переріз усіх реакцій, що можуть відбутися з ядрами середовища під дією нейтрона. Тобто Σ_t визначає ймовірність того, що нейтрон взаємодіятиме з ядрами середовища на одиниці довжини. Тоді зменшення кількості нейтронів – $d\Phi(z)$ пропорційно добутку самої кількості нейтронів, імовірності взаємодії та довжині шляху $\Phi(z)\Sigma_t dz$. Розв'язок простого рівняння з урахуванням початкових умов дає

$$\frac{\Phi(z)}{\Phi(0)} = \exp(-\Sigma_t z),$$

так що ймовірність нейтрона не взаємодіяти на довжині z рівна $P(z) = e^{-\Sigma_t z}$. Визначимо тепер середній шлях, який пройде нейтрон без взаємодії. За визначенням середнього, вважаючи середовище нескінченним, маємо

$$\bar{l} = \frac{\int_0^{\infty} z\Phi(z)dz}{\int_0^{\infty} \Phi(z)dz} = \frac{\int_0^{\infty} z \exp(-\Sigma_t z) dz}{\int_0^{\infty} \exp(-\Sigma_t z) dz} = \frac{1}{\Sigma_t}. \quad (2.18)$$

Вплив різних ядерних реакцій на роботу реактора визначається величинами макроскопічних перерізів цих реакцій, тобто кількістю різних ядер і ймовірністю їх взаємодії з нейтронами. Розглянемо основні з цих реакцій.

§ 2.4. Непружне розсіювання нейтронів

Наступною за простотою ядерною реакцією (після самовільного розпаду та пружного розсіювання) є непружне розсіювання. Ця реакція також не є власне ядерною реакцією, бо в результаті такого зіткнення ми маємо ті ж самі частинки, які були до зіткнення. Але при цьому змінюється внутрішній квантовий стан ядра.

Пружне розсіювання може відбуватися з будь-якою енергією нейтронів. Але оскільки внутрішні енергетичні стани ядра мають дискретну структуру, то непружне розсіювання може відбуватися тільки тоді, коли енергія нейтрона більша від деякої мінімальної величини. Ця енергія називається енергією порога непружного зіткнення й визначається різницею між енергіями першого збудженого та основного рівнів.

Уже зазначалося, що переріз реакції (а отже, і переріз непружного розсіювання) визначається відносною швидкістю частинок, тобто енергією в системі центра інерції

$$E = \mu \frac{V'^2}{2}, \quad (2.19)$$

де $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ - зведена маса частинок, що зіштовхуються, з нашими

означеннями ($m_n = 1$, $m_y = A$) $\mu = \frac{A}{A+1}$. Якщо ядро, з яким зіштовхується нейтрон, нерухоме до зіткнення, то

$$E = \frac{A}{A+1} E', \quad (2.19a)$$

де E' - кінетична енергія нейтрона в лабораторній системі координат.

Зрозуміло, що в C -системі енергія порога непружного зіткнення дорівнює енергії, яка необхідна для збудження першого збудженого рівня ядра. Оскільки можлива ситуація, коли після зіткнення частинки не будуть рухатися одна відносно одної, то енергія порога просто буде дорівнювати енергії першого збудженого рівня. У лабораторній системі координат цю енергію треба збільшити в $\frac{A+1}{A}$ разів.

Як приклад можна навести реакцію непружного зіткнення нейтрона з ядром ${}^7\text{Li}$



де позначення ${}^7\text{Li}^*$ використовується для збудженого ядра ${}^7\text{Li}$. Енергія першого збудженого рівня ${}^7\text{Li}$ дорівнює 475 кеВ. Тому, якщо кінетична енергія нейтрона в C -системі досягає цієї величини, то непружне розсіювання нейтрона на ${}^7\text{Li}$ може відбутися (хоч і з малою ймовірністю). Якщо ядро ${}^7\text{Li}$ нерухоме в L -системі, то енергія нейтрона повинна бути в L -системі більша від

475 кеВ в $\frac{A + 1}{A}$ разів, а саме повинна бути рівною $(8/7) \cdot 475$ кеВ. Тоді після реакції нейтрон і ядро ${}^7\text{Li}^*$ будуть нерухомі один відносно іншого, а енергія $(8/7) \cdot E$ залишиться у вигляді кінетичної енергії їх центра мас.

Непружні зіткнення нейтронів мають велике значення в процесі сповільнення нейтронів у реакторі. Саме завдяки непружним зіткненням у природному урані енергія нейтронів поділу настільки швидко зменшується нижче порога поділу ${}^{238}\text{U}$, що вони не встигають викликати помітну кількість актив поділу ${}^{238}\text{U}$. Тобто переріз непружного розсіювання нейтронів на ядрах ${}^{238}\text{U}$ значно більший, ніж переріз поділу на швидких нейтронах. Таким чином, під час непружного зіткнення нейтрон з енергією E попадає в ядро, що призводить до утворення проміжного ядра. Після цього нейтрон випромінюється з нижчою енергією, а ядро залишається в збудженому стані. Через деякий час ядро випромінює γ -кванти. Непружне розсіювання неможливе, якщо енергія нейтронів не перевищує в $(A + 1)/A$ разів енергію першого збудженого рівня. Як правило, енергія порога зменшується із зростанням A від 1 МеВ до 100 кеВ і нижче. Крім того, відстань між рівнями в парно-парних ядрах звичайно більша, ніж у парно-непарних ядрах. Тому парні ізотопи менш ефективні, ніж непарні, як непружні сповільнювачі. Звідси робиться висновок, що у швидких реакторах, коли треба ухилитися від сповільнення нейтронів, як конструкційні матеріали варто використовувати парні ізотопи. Навпаки, для використання в захисній оболонці краще використовувати непарні ядра.

Звичайно, якщо енергія нейтронів досить висока, то під час непружного зіткнення можливе збудження не тільки першого збудженого рівня, а й більш високих збуджених рівней. Особливо це стосується важких ядер, тому що з ростом A зменшується відстань між рівнями. Наприклад, перші збуджені рівні таких важливих у фізиці реакторів ядер, як ${}^{235}\text{U}$, ${}^{238}\text{U}$, ${}^{238}\text{Pu}$, ${}^{239}\text{Pu}$, ${}^{240}\text{Pu}$ знаходяться при 13, 45, 44,1, 7,9, 42,9 кеВ відповідно. Ці значення можна порівняти з першим збудженим рівнем ядра ${}^7\text{Li}$ – 475 кеВ. Зрозуміло, що нейтрони поділу, середня енергія яких дорівнює 2 МеВ можуть збудити декілька рівнів у важких ізотопах під час непружного зіткнення.

§ 2.5. Поглинання нейтронів

Поглинання нейтронів ядрами лише в декількох випадках веде до утворення двох і більше частинок. Найбільш імовірним виявляється процес, в якому поглинання нейтронів ядром з масовим числом A веде до утворення ядра з масовим числом $A + 1$ з одночасним випромінюванням γ -кванта, тобто реакція (n, γ) . Це твердження стосується взаємодії нейтронів з досить важкими ядрами з $A > 60$. Ця реакція називається реакцією радіаційного захоплення і є дуже важливою у фізиці реакторів. А саме в теплових реакторах звичайно знаходиться велика кількість ${}^{238}\text{U}$, який поглинає значну кількість нейтронів. Крім того, саме завдяки цій реакції майже всі конструкційні мате-

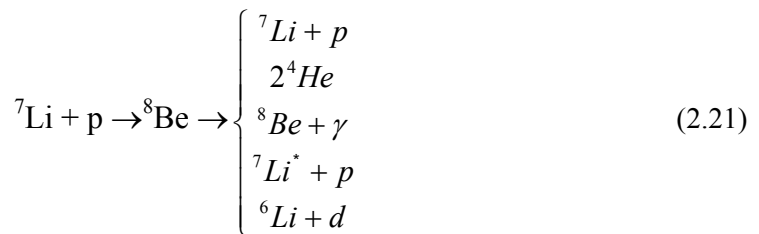
ріали в реакторах виявляються радіоактивними, і після зупинки реактора потрібно десятки і сотні років, щоб ця активність зменшилася до більш менш безпечного рівня.

Аналогічно непружному розсіюванню процес поглинання нейтронів можна уявити собі як послідовність двох процесів. Спочатку виникає складене (проміжне) ядро звичайно в збудженому стані, після чого відбувається перехід в основний стан з випромінюванням одного або декількох γ -квантів.

Складене ядро завжди виникає в одному з можливих квантових станів або, як кажуть, складене ядро знаходиться на одному з резонансних рівнів. Тому в залежності перерізу поглинання від енергії можна спостерігати різкі максимуми при таких значеннях енергії нейтрона, які відрізняються від значень енергії одного з цих резонансних рівнів на величину енергії зв'язку.

Треба відзначити, що всі реакції, які йдуть з утворенням проміжного ядра, у тому числі й реакції пружного й непружного розсіювання, мають резонансну залежність перерізу реакції від енергії. І взагалі, дві частинки, які вступають у реакцію (наприклад, нейтрон і ядро), у результаті реакції можуть дати різні продукти реакції. Як кажуть, реакція з певною ймовірністю проходить за одним з можливих каналів реакції.

Як приклад можна розглянути реакцію взаємодії протона з достатньо низькою енергією з ядром ${}^7\text{Li}$. У результаті взаємодії виникає складене або проміжне ядро ${}^8\text{Be}^*$ у збудженому стані¹. Це проміжне ядро розпадається одним з можливих каналів відповідно до схеми



Тому повний переріз взаємодії є сумою перерізів різних каналів реакції. Звичайно, кількість каналів реакції суттєво залежить від енергії частинок, що зіштовхуються. Це пов'язано з тим, що деякі канали реакції є ендотермічними, тобто енергія частинок, що вступають в реакцію, має перевищувати деякий поріг реакції (наприклад, два останні канали реакції (2.21) - реакція непружного розсіювання протона і (p, d) реакція).

Переріз кожного каналу реакції дорівнює добутку перерізу утворення складеного ядра на ймовірність того, що складене ядро розпадеться одним із можливих способів (i-м). Ця ймовірність, відповідно до визначень, дорівнює

¹ Збуджений стан ядра будемо позначати зірочкою. Тут же відзначимо, що складене ядро завжди виникає в сильно збудженому стані, тому що на енергію збудження йде не тільки кінетична енергія, але й енергія зв'язку частинок, що зіштовхуються.

$$\frac{\lambda_i}{\sum_i \lambda_i} = \frac{\Gamma_i}{\Gamma}, \quad (2.22)$$

де λ_i - константа розпаду для i -го процесу, величина $\Gamma_i = \hbar\lambda_i$ називається парціальною шириною рівня для даного процесу, а $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$ - повною шириною рівня.

З іншого боку, переріз утворення складеного ядра залежно від енергії описується відомою формулою Брейта - Вігнера (див., наприклад, [1])

$$\sigma(E) = \frac{p\hbar^2 g_c}{p^2 g} \left(\frac{\Gamma_i \Gamma}{\Gamma^2/4 + (E - E_r)^2} \right), \quad (2.23)$$

де E і p - енергія та імпульс частинок, що зіштовхуються, у системі центра мас; E_r - енергія середини резонансного рівня; g_c і g - статистичні ваги складеного ядра й частинок, що вступають у реакцію відповідно. Формула Брейта - Вігнера є аналогом відомої формули Лоренца для ймовірності переходу в одиницю часу між квантовими рівнями (див., наприклад [3]).

Переріз реакції будь-якого типу, включаючи пружне розсіювання, залежно від енергії описується формулою, яка є добутком (2.22) і (2.23). Відповідно до цієї формули переріз є максимальним, коли $E = E_r$, з напівшириною максимуму, що дорівнює $\Gamma/2$. Що стосується перерізу пружного розсіювання, то така формула не є точною. Це пов'язано з тим, що частинки можуть розсіюватись одна на одній без утворення проміжного ядра. Таке розсіювання називається потенціальним розсіюванням, і повний переріз пружного розсіювання дорівнює сумі перерізів потенціального розсіювання, резонансного розсіювання й деякого інтерференційного члена, який стає суттєвим поблизу резонансної енергії. Виникнення цього інтерференційного члена пов'язано з тим, що для процесів, які не є статистично незалежними, сумувати треба амплітуди ймовірності, а не самі ймовірності (див., наприклад, [4]). Після визначення квадрата модуля амплітуди ймовірності, який є пропорційним ймовірності переходу в одиницю часу, а отже, і перерізу реакції отримаємо три члени: переріз одного процесу, переріз другого процесу та інтерференційний член.

Формула (2.23) є справедливою поблизу окремого квантового стану; поблизу інших резонансних рівнів "працюють" аналогічні формули з іншими значеннями Γ_i , Γ і E_r . Більш того, формулу типу (2.23) можна розповсюдити на область енергій нижче самого низького резонансу до значень енергії $E = 0$, якщо врахувати залежність величин Γ від енергії. Ця залежність є досить складною, і ми не будемо наводити відповідних формул. Відомості про енергетичну залежність парціальних ширин можна знайти в книзі А. Вайнберга і Е. Вігнера [5], а також в інших підручниках з теорії ядер.

Повернемося до реакцій взаємодії нейтронів з ядрами. У реакторах на теплових нейтронах більшість нейтронів мають енергію нижчу порога ендотермічних реакцій, так що в цій області енергій повна ширина резонансного рівня Γ є сумою тільки двох складових. Перша з них відповідає утворенню після реакції початкових частинок, тобто розсіюванню нейтрона на ядрі, а друга поглинанню нейтрона з випромінюванням γ -квантів. Для легких ядер з $A < 60$ переріз пружного розсіювання переважає переріз радіаційного захоплення. Для більш важких ядер γ -ширина виявляється більшою нейтронної ширини, і для резонансів з енергією < 1 кеВ процес (n, γ) є найбільш імовірним. Більш того, навіть із збільшенням енергії більшість процесів є процесами (n, γ) у тих випадках, коли реакція поділу є неможливою.

Реакції поглинання нейтронів визначають таке важливе явище в роботі реактора, як отруєння реактора продуктами його роботи. Це отруєння виявляється різним для реакторів на теплових нейтронах і реакторів на проміжних і швидких нейтронах.

У реакторах на проміжних і швидких нейтронах основну роль відіграє поглинання на найбільш низьких резонансах більшості парно-непарних продуктів поділу, а також важких ізотопів паливних елементів ^{234}U , ^{236}U , ^{240}Pu . Перерізи поглинання нейтронів цих ізотопів не дуже великі ($\sim 10 - 30$ б), але в умовах великого вигорання палива сумарно ці ізотопи призводять до значного отруєння реактора.

У свою чергу, у реакторах на теплових нейтронах основне поглинання нейтронів відбувається на кількох ізотопах з аномально високим перерізом поглинання $10^4 - 10^6$ б ("чемпіоном" є ^{135}Xe з $\sigma_a \approx 3 \cdot 10^6$ б). Але оскільки поглинання в цих декількох ізотопах дуже швидко виходить на насичення, то в цілому отруєння реакторів на теплових нейтронах в умовах глибокого вигорання палива виявляється значно менш серйозним, ніж у реакторах на проміжних і швидких нейтронах. Більш докладні відомості про отруєння реактора будуть подані нижче у відповідних розділах.

§ 2.6. Реакція поділу

Реакція поділу важких ядер під дією нейтронів полягає в тому, що після захоплення нейтрона ядро з масовим числом A_0 розділяється на дві, як правило, нерівні частини з масовими числами A_1 і A_2 з виділенням значної енергії E_f , яку називають енергією поділу. Цю енергію можна визначити, користуючись поняттям енергії зв'язку і співвідношенням Ейнштейна між масою та енергією. Тому перед визначенням енергії поділу варто нагадати поняття енергії зв'язку.

Повною енергією зв'язку ядра E_{con} називається різниця між масою ядра в енергетичних одиницях і сумою мас нуклонів, що входять до цього ядра. Якщо M - масове число (кількість нуклонів), N_n - кількість нейтронів, m_n і m_p - маса нейтрона й протона відповідно, c - швидкість світла в вакуумі, то

$$E_{con}^n = c^2 [m_n N_n + m_p (A - N_n) - M] = c^2 [(m_n - m_p) N_n + m_p A - M] \approx c^2 (A m_n - M), \quad (2.24)$$

оскільки $m_n \approx m_p$.

Середньою енергією зв'язку на нуклон \bar{E}_{con} є величина

$$\bar{E}_{con} = \frac{E_{con}^n}{A} = c^2 \left(m_n - \frac{M}{A} \right), \quad (2.25)$$

що визначає енергію, яку необхідно витратити для розділення ядра на окремі нейтрони та протони. Величина \bar{E}_{con} змінюється немонотонно від 1 до 9 МеВ.

Нехай ядро з масовим числом A після захоплення нейтрона ділиться на два ядра з масовими числами A_1 і A_2 . Маса складеного ядра не дорівнює сумі мас ядер 1 і 2. Ця різниця якраз визначає енергію поділу E_f , що звільнюється під час поділу ядра. Вона дорівнює

$$E_f = c^2 [M_c - (M_1 + M_2)], \quad (2.26)$$

де M_c - маса складеного ядра. У визначення середньої енергії зв'язку на нуклон (2.25) можна масу i -го ядра виразити через \bar{E}_{con}^i :

$$M_i = A_i \left[m_n - \frac{\bar{E}_{con}^i}{c^2} \right]. \quad (2.27)$$

З формул (2.26) і (2.27) маємо $(A + 1 = A_1 + A_2)$

$$E_f = (A + 1) [\bar{E}_{con}^{(2)} - \bar{E}_{con}^{(C)}] + A_1 (\bar{E}_{con}^{(1)} - \bar{E}_{con}^{(2)}). \quad (2.28)$$

Вигляд функції E_f залежно від атомного числа показано на рис. 2.2. Точне значення масового числа A , при якому енергія E_f стає додатною, залежить від способу розпаду складеного ядра. Якщо $A_1 = A_2$, то це число приблизно дорівнює 85. Якщо $A < 85$, то отримати енергію за рахунок реакції поділу неможливо.

Розглянемо тепер якісні уявлення про процес поділу. Зазначимо, перш за все, що поділ ядер майже завжди відбувається, коли ядро набуває деякої енергії збудження. У випадку, коли ядро ділиться після поглинання нейтрона, ця енергія збудження складається з кінетичної енергії нейтрона та енергії зв'язку нейтрона в складаному ядрі. Поділ може також відбуватися й без збудження ядра (спонтанний поділ), але ймовірність такого процесу дуже мала, хоча він грає деяку роль у роботі реакторів, особливо під час пуску.

Після поглинання нейтрона збуджене складене ядро ділиться на дві нерівні частини. Час життя ядра відносно поділу приблизно дорівнює $1,1 \cdot 10^{-14}$ с, який можна оцінити, виходячи з ширини резонансу поділу $\approx 0,06$ еВ і використовуючи співвідношення невизначеностей. Як тільки скалки поділу виходять за межі дії ядерних сил, їх додатні заряди починають відштовхуватись, і вже на відстані порядку 10^{-11} см скалки поділу набувають ≈ 90 % своєї

кінетичної енергії, знаходячись ще всередині найнижчої електронної оболонки атома. Цю енергію вони набувають за час, приблизно рівний $1,3 \cdot 10^{-20}$ с.

Скалки поділу знаходяться в дуже збудженому стані, тобто вони “забирають” у складеного ядра частину його енергії збудження. У середньому сумарна енергія збудження обох скалок поділу становить близько 20 МеВ, але з великою ймовірністю вона може становити як 30 так і 10 МеВ. Тобто розподіл скалок поділу за енергією збудження має велику ширину.

Оскільки скалки поділу виникають під час розпаду важких ядер, в яких кількість нейтронів значно більше кількості протонів порівняно з ядрами стабільних елементів середини таблиці Менделєєва, то збуджені ядра скалок поділу розпадаються з випромінюванням γ -квантів і “миттєвих нейтронів”. Миттєві нейтрони випромінюються за час після поділу, приблизно рівний 10^{-17} с. За цей час скалки поділу проходять відстань, приблизно рівну діаметру атома, отже, миттєві нейтрони випромінюються, коли скалки поділу проходять через електронну оболонку материнського ядра і перебудовують її. На цьому процес поділу можна вважати завершеним, а всі подальші процеси можна віднести до перетворень продуктів поділу.

§ 2.7. Ланцюгова реакція

Ми вже розглянули основні ядерні реакції, які є важливими в роботі ядерного реактора. Вплив різних ядерних реакцій на роботу реактора визначається величинами перерізів цих реакцій. Ці перерізи за останні 50 років виміряно з високою точністю, і більшість важливих реакцій обраховано теоретично. Величини цих перерізів можна знайти в довідниках [6], а також у файлах оцінених ядерних даних, зібраних у відповідні бібліотеки ядерних даних. Ці бібліотеки є доступними у національних центрах ядерних даних.

Наведемо перелік тих реакцій, які відіграють важливу роль у реакторі за ступенем їх важливості:

- 1) реакція поділу (n , поділ);
- 2) захоплення нейтронів к паливі та інших матеріалах (n , γ);
- 3) пружне й непружне розсіювання нейтронів (n , n) і (n , n);
- 4) розпад продуктів поділу;
- 5) реакція (n , $2n$);
- 6) реакція (γ , n);
- 7) реакція фотоподілу (γ , поділ).

У зв'язку з можливістю реакцій (n , $2n$), (γ , n) і (γ , поділ) виникає цікаве питання: чи можливо підтримувати ланцюгову реакцію за рахунок реакцій (5 - 7)? Відповідь на це питання негативна. Що стосується реакції (5), то енергія основної частини нейтронів у реакторі менше порога цієї реакції. Тому навіть при наявності в реакторі берилію і дейтерію, для яких перерізи цієї реакції досить значні, реакція (n , $2n$) значно менш важлива, ніж реакції (1 - 3). Аналогічно реакції під дією γ -квантів також мають досить високий поріг. І

хоча в реакторі випромінюються γ -кванти з енергією вище порога реакцій (6 і 7), але ці γ -кванти досить швидко гублять енергію в речовині за рахунок ефекту Комптона. Тому кількість вторинних реакцій поділу буде значно меншою, ніж первинних, і ланцюгова реакція не встигне встановитися.

Для реакцій (n , поділ) на ядрах ^{233}U , ^{235}U , ^{239}Pu ситуація протилежна. Переріз цієї реакції із зменшенням енергії нейтронів збільшується, а не зменшується, як у реакціях (5 - 7). Тому єдиною умовою для підтримання ланцюгової реакції є умова, щоб кількість нейтронів, що випромінюються під час поділу, була більшою від кількості нейтронів, що потрібна для наступного кроку поділу, і щоб кількість нейтронів, які поглинаються і вибувають із реакції, підтримувалась на досить низькому рівні.

Таку умову можна записати в кількісному вигляді для реального палива, яке є сумішшю ^{235}U і ^{238}U . Нехай ядро ^{235}U поглинуло нейтрон і розділилося. Під час поділу випромінюється в середньому ν нейтронів. Поки ці нейтрони не встигли сповільнитись, існує деяка ймовірність того, що під час зіткнення з ядром ^{238}U відбудеться поділ цього ядра й кількість нейтронів збільшиться до величини $\nu\epsilon$. Величину ϵ звичайно називають коефіцієнтом розмноження на швидких нейтронах.

Переріз поділу на швидких нейтронах ядер ^{238}U є меншим, ніж переріз непружного розсіювання швидких нейтронів на ядрах ^{238}U . Тому переважна більшість нейтронів поділу вже в одному акті непружного розсіювання на ядрах ^{238}U губить свою енергію до рівня, нижчого порога поділу ^{238}U . Надалі нейтрони гублять свою енергію переважно за рахунок пружних зіткнень з ядрами сповільнювача. Під час процесу сповільнення нейтрон може зустрітись з ядром ^{238}U і поглинутись ним з подальшим утворенням ^{239}Pu . Звичайно, найбільшу ймовірність поглинутись мають нейтрони з енергіями, що збігаються з одним із резонансів ядра ^{238}U . Тоді, якщо позначити через ϕ ймовірність того, що в процесі сповільнення нейтрон не буде захоплено ядром ^{238}U , то кількість теплових нейтронів буде дорівнювати $\nu\epsilon\phi$. Величину ϕ називають також ймовірністю уникнути резонансного поглинання.

Теплові нейтрони дифундують у середовищі доти, доки вони не будуть поглинуті яким-небудь ядром. Це можуть бути ядра конструкційних матеріалів, органів керування, ядра палива, тобто ^{235}U і т. ін. Позначимо через θ ймовірність того, що тепловий нейтрон буде поглинатись ядрами ^{235}U . При цьому можна не враховувати розпад самого нейтрона, тому що час життя нейтрона в конденсованому середовищі набагато менший, ніж час життя вільного нейтрона. Величину θ називають також коефіцієнтом використання теплових нейтронів.

Якщо тепер згадати, що величина $\frac{1}{1 + \alpha}$ визначає ймовірність того, що ядро ^{235}U , що поглинуло нейтрон, поділиться, то кількість нейтронів, які викликають наступний поділ ядер ^{235}U , дорівнює

$$k = \frac{\nu}{1 + \alpha} \varepsilon \varphi \theta = \eta \varepsilon \varphi \theta \equiv k_{\infty}. \quad (2.29)$$

Цю величину називають коефіцієнтом розмноження нескінченно великого реактора, тому що в цьому виразі не враховується можливість виходу нейтрона за межі реактора. Таким чином, якщо $k = 1$, то процес поділу повторюється, тобто виникає ланцюгова реакція поділу ядер урану. Якщо $k > 1$, то кількість нейтронів зростає, а якщо $k < 1$, то кількість нейтронів зменшується, і ланцюгова реакція встановитись не може.

Коли реактор має кінцеві розміри, то деяка частка нейтронів може вийти за межі реактора. Якщо P - імовірність того, що нейтрони не вийдуть за межі реактора, то для підтримання ланцюгової реакції необхідно, щоб одиниці дорівнювала величина

$$k_{ef} = k_{\infty} P \quad (2.30)$$

Кожному значенню об'єму при фіксованій формі реактора відповідає фіксоване значення P . Якщо при цьому значенні $k_{ef} = 1$, то такий об'єм буде критичним. Отже, величина k_{∞} визначає фізичні властивості матеріалів реактора, а величина k_{ef} враховує також геометрію реактора.

Треба виділити, що формула “чотирьох співмножників” (2.29), яка була дуже популярною в перші роки розвитку теорії реакторів, є досить умовною. Вона, наприклад, не враховує можливість поділу ядер ^{235}U при поглинанні нейтронів високої енергії і проміжних енергій. Тому останнім часом коефіцієнт розмноження визначають як

$$k_{\infty} = \frac{\text{кількість нейтронів, що народились}}{\text{кількість нейтронів, що поглинулись}}. \quad (2.31)$$

Величина k_{∞} використовується в рівняннях для розрахунку реакторів. Вона дуже тісно пов'язана з величиною реактивності реактора, яка буде введена в наступних розділах.

Розділ 3

Дифузія нейтронів Кінетична теорія переносу нейтронів

§ 3.1. Методи кінетичної теорії

Після виникнення в результаті поділу нейтрони починають рухатись у середовищі, зіштовхуючись з ядрами середовища. У результаті таких зіткнень траєкторія руху нейтронів у реакторі являє собою сполучені між собою відрізки випадково напрямлених прямих. Зіткнення, у результаті яких змінюється енергія та напрямок руху нейтронів, підкорюються законам теорії ймовірності, і ми не можемо точно передбачити, в якому місці опиниться нейтрон, який виник, скажімо, у точці \vec{r} . Але для практичних потреб нам не потрібні знання траєкторії кожного нейтрона. Нам необхідно знати з деякою точністю кількість нейтронів з даною енергією в заданій точці простору, що рухаються в напрямку $\vec{\Omega}$ в певний момент часу, тобто функцію $\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$, уведену в попередньому розділі.

Про рух нейтрона, який випадково зіткнеться з ядрами середовища, говорять як про випадкові блукання нейтрона, а сам процес розповсюдження нейтронів у середовищі називають *процесом дифузії нейтронів*. Під час таких випадкових блукань енергія нейтрона весь час змінюється, що вносить додаткові ускладнення під час теоретичного опису такого процесу. Навіть після зменшення енергії нейтронів до величин, що можуть бути порівняні з енергією теплового руху атомів середовища, енергія нейтронів не залишається постійною, а весь час змінюється таким чином, що розподіл нейтронів за швидкостями має вигляд, близький до максвеллівського.

Для математичного опису випадкових блукань нейтронів із зміною енергії використовують декілька методів. Можна згадати метод ядра або метод інтегрального рівняння, метод багатогрупових рівнянь дифузії та ін. Так чи інакше, ці методи є спрощеними варіантами методу інтегродиференціального рівняння переносу нейтронів типу рівняння Больцмана для функції розподілу нейтронів у просторі за енергіями і за напрямками руху. На відміну від самого рівняння Больцмана, що було отримано для функції розподілу швидкостей молекул в газі, це рівняння є лінійним, оскільки в ньому не враховуються зіткнення нейтронів між собою. Це припущення впливає з таких міркувань. Навіть у реакторах, де потік нейтронів становить 10^{16} нейтрон/(см²·с) (що є дуже великим потоком і рідко зустрічається в реакторах), густина нейтронів становить близько 10^{11} нейтрон/(см³·с). Ця густина є значно меншою, ніж густина ядер середовища, з якими зіштовхуються нейтрони (10^{22} ядер/см³). Тому зіткнення нейтронів між собою є настільки малоімовірними, порівняно із зіткненнями з ядрами середовища, що вони не впливають на рух нейтронів і ними можна знехтувати.

Ще одне наближення, що використовується під час виводу рівняння переносу нейтронів, полягає в тому, що нейтрон вважають точковою частинкою, яка повністю характеризується її координатами та швидкістю. Тобто не враховуються ні хвильові властивості нейтронів, ні їх спін та магнітний момент. Більшість нейтронів у реакторі мають довжину хвилі, яка є меншою за відстань між ядрами середовища, тому їх хвильові властивості не враховуються під час вивчення процесів розсіювання й поглинання ядрами. Тільки у невеликій частини низькоенергетичних нейтронів довжина хвилі стає порівняною з між'ядерною відстанню. У цьому випадку можлива інтерференція нейтронних хвиль, що розсіялись різними ядрами. Така інтерференція визначається не тільки довжиною хвилі, а також упорядкованим розташуванням ядер, і є суттєвою тільки під час розсіювання нейтронів на монокристалах. Усі тверді речовини в реакторах є полікристалами, і когерентне розсіювання незначної частини нейтронів на них можна не враховувати під час вивчення розподілу нейтронів у реакторі. Але розсіювання теплових нейтронів на монокристалах є могутнім засобом дослідження самих кристалів, і з цією метою воно широко використовується на дослідницьких реакторах.

Що стосується поляризаційних ефектів, обумовлених спін-орбітальною взаємодією під час розсіювання швидких нейтронів, то вони можуть бути суттєвими тільки в деяких рідких випадках [5] і звичайно не враховуються під час практичних розрахунків реакторів.

У рівнянні переносу нейтронів не враховуються також флуктуації густини нейтронів, тобто випадкові відхилення від середніх значень. У стаціонарних критичних режимах, для розрахунків яких в основному використовується рівняння переносу нейтронів і наближення до нього, флуктуації звичайно малі і їх можна не враховувати. Але їх треба враховувати при розгляді перехідних і пускових режимів, а також поблизу порога стійкості деяких режимів. Крім того, знання флуктуацій нейтронного потоку дає змогу визначити деякі параметри реактора, що останнім часом використовується в методах так званої шумової діагностики реакторів.

Рівняння переносу нейтронів не містить також нейтронів, що запізнюються, і не враховує, взагалі, можливість випромінювання нейтронів продуктами поділу із запізненням у часі. Нейтрони, що запізнюються, суттєво визначають динамічну поведінку реактора, але оскільки вони становлять незначну частину повної кількості нейтронів у реакторі, то, як правило, вони не враховуються для розрахунків стаціонарних режимів.

§ 3.2. Рівняння переносу нейтронів

Переходимо тепер до вивчення основного рівняння, яке описує розповсюдження нейтронів у реакторі, а також деяких наближених методів. Уведемо величину $N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) dV d\vec{\Omega} dE$, що визначає кількість нейтронів в елементі об'єму dV у момент часу t , які мають енергію в інтервалі $(E + dE, E)$ і

напрямок швидкості яких лежить в інтервалі тілесного кута $d\bar{\Omega}$ поблизу $\bar{\Omega}$. Розглянемо тепер, як зміниться ця кількість нейтронів за деякий час Δt . Припустимо, що перерізи взаємодій нейтронів з ядрами середовища є неперервними функціями координати \vec{r} .

Позначимо абсолютне значення швидкості нейтрона через v . Тоді відстань, яку пройде нейтрон за час Δt дорівнює $v\Delta t$. Імовірність того, що нейтрон провзаємодіє на цій відстані з ядрами середовища є $\Sigma_t(\vec{r}, E)v\Delta t$, де $\Sigma_t(\vec{r}, E)$ - повний макроскопічний переріз взаємодії нейтрона з ядрами, включаючи розсіювання та поглинання. Отже, величина $1 - \Sigma_t(\vec{r}, E)v\Delta t$ визначає ймовірність того, що нейтрон за час Δt не змінить своєї енергії та напрямку руху. Тому кількість нейтронів, що не змінили свої швидкості як векторні величини, дорівнює $N(\vec{r}, \bar{\Omega}, E, t)(1 - \Sigma_t(\vec{r}, E)v\Delta t)dVd\bar{\Omega}dE$. За час Δt нейтрони, що були в точці \vec{r} досягнуть точки $\vec{r} + \bar{\Omega}v\Delta t$, якщо вони не зіткнуться з ядрами середовища.

Зміна кількості нейтронів в елементі $dVd\bar{\Omega}dE$ визначається не тільки процесами вибування нейтронів за рахунок розсіювання та поглинання, а також процесами надходження нейтронів за рахунок незалежного джерела нейтронів і за рахунок розсіювання з інших елементів фазового простору. Отже, за рахунок розсіювання в елемент $dVd\bar{\Omega}dE$ попадають

$$\left\{ \iint \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E)v'N(\vec{r}, \bar{\Omega}', E', t)d\bar{\Omega}'dE' \right\} dVd\bar{\Omega}dE\Delta t$$

нейтронів, а за рахунок джерела нейтронів -

$$Q(\vec{r}, \bar{\Omega}, E, t)dVd\bar{\Omega}dE\Delta t.$$

Густину нейтронів у точці $\vec{r} + \bar{\Omega}v\Delta t$ у момент часу $t + \Delta t$ можна отримати, склавши всі три вирази:

$$N(\vec{r} + \bar{\Omega}v\Delta t, \bar{\Omega}, E, t + \Delta t) = N(\vec{r}, \bar{\Omega}, E, t)(1 - \Sigma_t(\vec{r}, E)v\Delta t) + Q\Delta t + \left[\iint \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E)v'N(\vec{r}, \bar{\Omega}', E', t)d\bar{\Omega}'dE' \right] \Delta t. \quad (3.1)$$

Звичайна процедура переходу до границі $\Delta t \rightarrow 0$ дає

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(\vec{r} + \bar{\Omega}v\Delta t, \bar{\Omega}, E, t + \Delta t) - N(\vec{r}, \bar{\Omega}, E, t)}{\Delta t} + \Sigma_t(\vec{r}, E)vN(\vec{r}, \bar{\Omega}, E, t) = \\ = \iint \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E)v'N(\vec{r}, \bar{\Omega}', E', t)d\bar{\Omega}'dE' + Q. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Перший доданок у лівій частині рівняння (3.2) є не що інше як повна похідна по часу від густини нейтронів N , тобто

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + v\Omega_x \frac{\partial N}{\partial x} + v\Omega_y \frac{\partial N}{\partial y} + v\Omega_z \frac{\partial N}{\partial z}. \quad (3.3)$$

Остаточне рівняння переносу приймає вигляд

$$\frac{\partial N}{\partial t} + v\bar{\Omega}\bar{v}N + \Sigma_t vN = \iint \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E)v'N'd\bar{\Omega}'dE' + Q. \quad (3.4)$$

Ще раз нагадаємо фізичний зміст кожного доданка в рівнянні (3.4). Перший доданок у лівій частині рівняння визначає зміну кількості нейтронів з часом у точці \vec{r} . Другий доданок описує вихід нейтронів з об'єму dV за рахунок прямолінійного руху без зіткнень із швидкістю v , а третій визначає втрату нейтронів з елемента $dVd\vec{\Omega}dE$ під час зіткнень з ядрами середовища. Перший доданок у правій частині рівняння описує прихід нейтронів в елемент $d\vec{\Omega}dE$ завдяки зіткненням з ядрами середовища, тобто зміні енергії та напрямку руху нейтронів під час розсіювання.

Рівняння переносу може бути записано для потоку нейтронів, що визначається як $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = vN(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$. Тоді

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\Omega} \vec{\nabla} \Phi + \Sigma_t \Phi = \iint \Sigma'_s \Phi' d\Omega' dE' + Q, \quad (3.5)$$

де $\Sigma'_s = \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E)$, $\Phi' = \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t)$. Ця форма рівняння переносу найбільш часто зустрічається у фізичних дослідженнях реакторів.

Рівняння (3.5) є найбільш загальним рівнянням, що описує розповсюдження нейтронів у середовищі. Разом з граничними умовами воно визначає потік нейтронів у реакторах. Єдиною його вадою є те, що його розв'язки досить складні і для практичних розрахунків використовують ті чи інші наближення. Одним з найбільш важливих наближень є дифузійне наближення моноенергетичних нейтронів, яке ми розглянемо в наступному параграфі.

§ 3.3. Дифузія моноенергетичних нейтронів

Перед тим, як перейти до випадку дифузійного наближення, варто якісно розглянути енергетичний спектр нейтронів у реакторі, тобто розподіл нейтронів за енергіями.

Під час поділу ядер палива виділяються нейтрони із середньою енергією приблизно 2 МеВ. Розподіл нейтронів навколо цієї середньої енергії подібний до гауссівського. Але навіть у швидких реакторах існують конструкційні матеріали і ядра сировинних матеріалів, що сповільнюють нейтрони. Тому розподіл нейтронів у швидкому реакторі має максимум поблизу енергії 100 кеВ – 1 МеВ залежно від типу реактора. У реакторах на проміжних нейтронах максимум розподілу лежить в області 1 кеВ, і розподіл значно ширший за розподіл нейтронів у реакторах на швидких нейтронах.

У реакторах на теплових нейтронах більшість нейтронів мають енергії поблизу kT ($kT \approx 0,025$ еВ при кімнатній температурі) з незначною шириною розподілу. Саме тому для опису реакторів на теплових нейтронах використовується моноенергетичне наближення, тобто вважається, що всі нейтрони мають однакову енергію.

Для вивчення основного рівняння дифузійного моноенергетичного наближення знову розглянемо баланс нейтронів в елементі об'єму реактора

dV в енергетичному інтервалі dE поблизу E , при цьому ми не будемо цікавитись напрямком руху нейтронів. Нехай $N(\vec{r}, E, t)dVdE$ - кількість нейтронів в об'ємі dV та інтервалі dE , а $\Phi(\vec{r}, E, t) = vN(\vec{r}, E, t)$ - густина потоку нейтронів. Вихід нейтронів з елемента об'єму $dVdE$ обумовлений такими причинами:

- поглинання ядрами;
- розсіювання із зміною енергії під час зіткнення;
- виходом з об'єму ΔV за рахунок дифузії.

Кількість нейтронів, що поглинулись за час Δt дорівнює

$$\Sigma_a(\vec{r}, E)\Phi(\vec{r}, E, t)\Delta V\Delta E\Delta t,$$

а кількість нейтронів, що змінили енергію під час розсіювання,

$$\Sigma_{out}(\vec{r}, E)\Phi(\vec{r}, E, t)\Delta V\Delta E\Delta t,$$

де Σ_{out} - переріз виходу з інтервалу ΔE . Ясно, що цей переріз повинен бути зв'язаний з перерізом розсіювання. Цей зв'язок ми встановимо нижче.

Вихід з об'єму ΔV за рахунок дифузії дорівнює

$$\oint_S \vec{J}_n(\vec{r}, E, t)dS\Delta E\Delta t,$$

де S - поверхня, що обмежує об'єм ΔV ; $J(r, E, t)$ - густина струму нейтронів. Перетворюючи цей інтеграл в об'ємний за теоремою Гаусса, отримаємо кількість нейтронів, що вийшли з об'єму ΔV :

$$\text{div}\vec{J}(\vec{r}, E, t)\Delta V\Delta E\Delta t.$$

Надходження нейтронів в об'єм визначається джерелом нейтронів

$$Q(r, E, t)\Delta V\Delta E\Delta t.$$

Різниця між надходженням і виходом нейтронів у об'ємі ΔV дорівнює ΔN - приросту кількості нейтронів в цьому об'ємі. Поділивши на $\Delta V\Delta E\Delta t$, отримаємо рівняння балансу нейтронів

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \text{div}\vec{J} + (\Sigma_{out}(\vec{r}, E) + \Sigma_a(\vec{r}, E))\Phi(\vec{r}, E, t) = Q(\vec{r}, E, t). \quad (3.6)$$

Вираз для потужності джерела нейтронів різний для різних енергетичних інтервалів ΔE . Для швидких нейтронів джерелом є реакція поділу плюс частина нейтронів, що уповільнилась завдяки зіткненням з ядрами середовища, тобто ті нейтрони, які до зіткнення мали енергію, вищу за ΔE . Для нейтронів, що сповільнюються, джерелом є тільки нейтрони, які сповільнюються завдяки зіткненням з ядрами середовища. Для теплових нейтронів джерелом є нейтрони, що сповільнюються, плюс нейтрони, що прискорюються в даний інтервал ΔE завдяки зіткненням холодних нейтронів з гарячими ядрами середовища.

Рівняння (3.6) записано для вузького енергетичного інтервалу ΔE . Цей інтервал можна розширити, і всі величини, що входять у рівняння, треба

розглядати як деякі середні по цьому інтервалу. Граничним випадком такого укрупнення є дві групи нейтронів: теплові й ті, що сповільнюються.

Для теплової групи нейтронів $\Sigma_{\text{out}} = 0$, тобто зіткнення, під час яких нейтрон може отримати енергію більшу за енергію границі теплової групи E_c , дуже мало ймовірні. Тому рівняння для теплової групи таке:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div } \vec{J}(\vec{r}, t) + \Sigma_a(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, t) = Q(\vec{r}, t). \quad (3.7)$$

Вираз для струму нейтронів можна отримати з відомого закону Фіка для дифундуючих частинок

$$\vec{J} = -D \vec{\nabla} \Phi, \quad (3.8)$$

де D - коефіцієнт дифузії нейтронів. Такий же вираз можна отримати, розглядаючи струм нейтронів, що проходить через елемент внутрішньої поверхні реактора з обох боків. Зробивши це, отримаємо вираз для коефіцієнта дифузії

$$D = \frac{\Sigma_s}{3\Sigma_t^2}, \quad (3.9)$$

де Σ_s - переріз розсіювання, а $\Sigma_t = \Sigma_a + \Sigma_s$ - повний переріз взаємодії нейтрона з ядрами середовища. Приведений вираз для коефіцієнта дифузії заснований на припущенні, що розсіювання є сферично симетричним. Можна вивести рівняння дифузії нейтронів, не використовуючи цього припущення. Очевидно, що якщо розсіювання вперед переважає, то нейтрони повинні розповсюджуватись в об'єм більший, ніж коли розсіювання сферично-симетричне, або переважає розсіювання назад. Тому коефіцієнт дифузії, крім перерізів розсіювання та поглинання, повинен визначатись середнім косинусом кута розсіювання $\bar{\mu}$ і повинен бути більшим, якщо $\bar{\mu}$ додатне. Кінетична теорія дає такий вираз для коефіцієнта дифузії

$$D = \frac{\Sigma_s}{3\Sigma_t(\Sigma_t - \bar{\mu}\Sigma_s)} = \frac{\Sigma_s}{3\Sigma_t\Sigma_{tr}} \approx \frac{1}{3\Sigma_t(1 - \bar{\mu})}, \quad (3.9a)$$

де $\Sigma_{tr} = \Sigma_t - \bar{\mu}\Sigma_s$ - транспортний переріз,

Остання рівність є справедливою, коли $\Sigma_a \ll \Sigma_s$. Величина $\bar{\mu} \approx 0$ для теплових нейтронів. Для швидких нейтронів $\bar{\mu}$ буде додатним у лабораторній системі координат, навіть якщо в системі центра мас розсіювання буде сферично-симетричним. Дійсно, зрозуміло, що розсіювання буде витягнуто вперед, якщо швидкий нейтрон розсіюється на непорушному ядрі.

Вираз для потужності джерела теплових нейтронів неважко отримати, якщо застосувати ті логічні побудови, що привели нас до виразу для коефіцієнта розмноження K_∞ для нескінченного середовища. Тоді

$$Q(\vec{r}, t) = K_\infty \Sigma_a(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, t), \quad (3.10)$$

і рівняння для визначення функції $\Phi(r, t)$ для теплових нейтронів приймає вигляд

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = D \Delta \Phi + (K_{\infty} - 1) \Sigma_a \Phi, \quad (3.11)$$

де Δ - оператор Лапласа або лапласіан ($\Delta \equiv \text{div grad}$).

Рівняння (3.11) є основним рівнянням одноступового дифузійного наближення для теплових нейтронів, що широко використовується в теорії реакторів і практичних розрахунках реакторів. Умовою застосування рівняння є умова, щоб зміна функції $\Phi(r, t)$ на довжині вільного пробігу була незначна, тобто

$$(\Sigma_t \Phi)^{-1} |\vec{\nabla} \Phi| \ll 1. \quad (3.12)$$

У неоднорідному середовищі виникає ще одна умова - розмір неоднорідності повинен бути значно більший за довжину вільного пробігу

$$R \gg \Sigma_t^{-1}. \quad (3.13)$$

Ці умови можуть задовольнятися тоді, коли поглинання нейтронів у середовищі є незначним, тобто $\Sigma_a \ll \Sigma_s$. Зрозуміло, що при значному поглинанні можливі різкі зміни густини потоку нейтронів і умова (3.12) не буде виконуватись. Можна помітити, що незначне поглинання призводить також до останньої рівності в рівнянні (3.9а). Отже, якщо саме дифузійне рівняння є справедливим, то вираз для коефіцієнта дифузії приймає вигляд ($\bar{\mu} \cong 0$)

$$D = \frac{1}{3\Sigma_t}.$$

Для того щоб отримати величину густини потоку нейтронів з рівняння (3.11), його необхідно доповнити граничними умовами на межі розділу середовищ

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 \Big|_{\vec{r}=S}, \\ D_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} &= D_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \Big|_{\vec{r}=S}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

де індекси 1 і 2 належать до різних середовищ, а $(\delta\Phi/\delta n)$ визначає похідну по нормалі до поверхні S розділу середовищ.

На межі з вакуумом граничні умови дещо відмінні. Зрозуміло, що далеко від границі густина потоку повинна бути рівна нулю. Але поблизу від поверхні це не так, оскільки нейтрони дифундують крізь поверхню. Точний розрахунок струму нейтронів через границю з вакуумом, виходячи з кінетичної теорії, показує, що густина потоку нейтронів обертається в нуль на деякій відстані від границі, яка дорівнює $0,71 \cdot l_{tr} = 0,71 \cdot \Sigma_{tr}^{-1} \approx 0,71 \cdot 3D$. Отже, на границі з вакуумом

$$\begin{aligned} \Phi(R) &= 0, \\ \partial_e R &= R_0 + 0,71 l_{tr}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

Границю R називають екстрапольованою границею реактора.

Таким чином, рівняння (3.11) разом із граничними умовами (3.14) і (3.15) дозволяє визначити потік нейтронів у теплових реакторах

У цьому параграфі ми отримали дифузійне рівняння за допомогою простих міркувань, як рівняння балансу нейтронів в елементі об'єму. Це рівняння можна отримати більш строго безпосередньо з рівняння переносу нейтронів за допомогою розкладу густини потоку нейтронів у ряд за повною системою кульових функцій, обмежившись першими двома членами розкладу.

§ 3.4. Стаціонарний розв'язок дифузійного рівняння

Стаціонарний випадок, тобто визначення незмінної в часі густини потоку нейтронів варто розглянути окремо, оскільки він є основою всіх практичних розрахунків реакторів.

Коли реактор виведено в критичний режим $\partial\Phi/\partial t = 0$ і

$$D\Delta\Phi + \Sigma_a(k_\infty - 1)\Phi = 0 \quad (3.16)$$

або

$$(\Delta + \gamma^2)\Phi = 0, \quad (3.17)$$

де

$$\gamma^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2}, \quad L = (3\Sigma_a\Sigma_t)^{-1/2}.$$

Величину L^2 називають *довжиною дифузії*, а параметр γ^2 - *лапласіаном* або матеріальним параметром у тому розумінні, що для обчислення γ треба знати характеристики середовища, а саме довжину дифузії і коефіцієнт розмноження. В англійській літературі величину γ^2 називають *баклінгом* і звичайно позначають як B^2 .

З урахуванням граничних умов рівняння (3.16) дозволяє визначити потік нейтронів в об'ємі реактора як функцію координат, а також критичні розміри реактора. Як допоміжне для цього використовують рівняння Гельмгольца

$$(\Delta + \alpha^2)\psi = 0, \quad (3.18)$$

яке ще називають *хвильовим рівнянням*, а величину α - *хвильовим числом*.

При наявності нульових граничних умов це рівняння має нескінченну множину лінійно незалежних розв'язків, які можна перерахувати, - власних функцій

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots,$$

Кожній власній функції відповідає своє власне значення $-\alpha_n^2$ оператора Лапласа

$$\Delta\psi_n = -\alpha_n^2\psi_n, \quad (3.19)$$

причому

$$0 \leq \alpha_0^2 \leq \alpha_1^2 \leq \dots \leq \alpha_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Найменшому власному значенню відповідає тільки одна власна функція ψ_0 (яка називається основною гармонікою), що не має вузлів в об'ємі V , тобто не обертається в нуль усередині об'єму V . Усі інші власні функції можуть міняти знак усередині V , і функція ψ_n має n вузлів.

Для визначення критичного розміру реактора треба розв'язати одно-групове дифузійне рівняння з нульовими граничними умовами на поверхні. Розв'язок цього рівняння повинен задовольняти очевидній додатковій умові - функція розподілу потоку нейтронів мусить бути додатною в усьому об'ємі реактора. Цю умову можна задовольнити, якщо покласти

$$\alpha_0 = \gamma, \\ \Phi(\vec{z}) = C\psi_0(\vec{z}),$$

де C - додатне число.

Найменше власне значення α_0 називають геометричним параметром, тому що він визначається геометричними розмірами об'єму V . Розмір реактора, в якому можливий стаціонарний потік нейтронів називають критичним, а масу речовини, що ділиться в цьому об'ємі, - критичною масою. Рівняння, що визначає критичні параметри (умова критичності), - це рівність геометричного й матеріального параметрів.

§ 3.5. Розв'язки стаціонарного рівняння дифузії у випадку простих геометрій

1. Знайдемо критичні розміри середовища, яке розмножує нейтрони для однорідної активної зони у вигляді кулі. Для цього оператор Лапласа треба записати у сферичних координатах. Якщо середовище однорідне, то густина потоку нейтронів не повинна залежати від полярного φ та азимутального θ кутів. Тому рівняння Гельмгольца приймає вигляд

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + \alpha^2 \psi = 0. \quad (3.20)$$

Зробимо підстановку $r\psi = f(r)$. Тоді

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 f}{dr^2} + \alpha^2 \frac{f}{r} = 0$$

або

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \alpha^2 f = 0.$$

Це рівняння другого порядку має два лінійно незалежні розв'язки

$$f_1 = \sin \alpha r, f_2 = \cos \alpha r. \quad (3.21)$$

Тому

$$\psi(z) = C_1 \frac{\sin \alpha r}{r} + C_2 \frac{\cos \alpha r}{r}.$$

Граничні умови мають вигляд

$$\begin{aligned}\psi(R) &= 0, \\ \psi(0) &< \infty.\end{aligned}\tag{3.22}$$

З другої умови маємо $C_2 = 0$, а з першої

$$C_1 \frac{\sin \alpha R}{R} = 0 \quad \text{або} \quad \sin \alpha R = 0,$$

$$\alpha R = \pi(n+1).$$

Звідси

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{\pi}{R}(n+1), \\ \alpha_0 &= \frac{\pi}{R}, \\ \psi_0(R) &= C_1 \frac{\sin \frac{\pi r}{R}}{r}.\end{aligned}$$

З умови критичності $\alpha_0 = \gamma$

$$R = \pi/\gamma$$

або

$$R = \pi L / (k_\infty - 1)^{1/2}.\tag{3.23}$$

Цей радіус і називається критичним радіусом реактора. Довільна константа C визначає потужність реактора, а її довільність означає те, що реактор може мати довільну потужність, залишаючись у критичному стаціонарному стані. На рис. 3.1 показано густину потоку нейтронів залежно від радіуса реактора. Треба пам'ятати, що R тут і далі означає екстрапольовану границю реактора, якщо про це не говориться окремо.

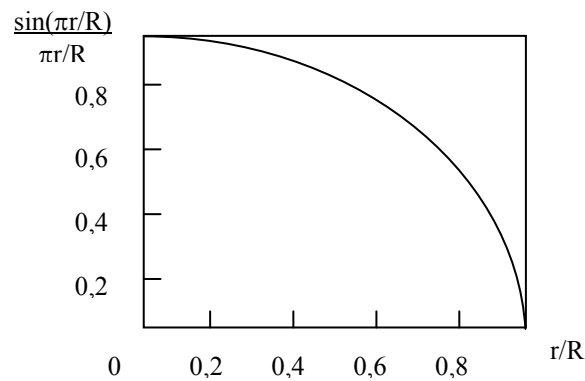


Рис. 3.1. Розподіл потоку нейтронів у сферичній активній зоні

2. Розглянемо реактор у вигляді кулі з центральною внутрішньою порожниною радіусом a . Граничні умови в цьому випадку на внутрішній поверхні реактора можна записати у вигляді

$$J = J^+, \quad (3.24)$$

де J і J^+ - відповідно струми нейтронів на границі реактора з порожниною, напрямлені до порожнини й до реактора. Фізичний зміст цієї умови полягає в тому, що кількість нейтронів, що вийшли в порожнину, дорівнює кількості нейтронів, що повернулися в реактор, бо порожнина не поглинає нейтронів.

Отже, на границі з порожниною $J(a) = 0$, звідки, використовуючи закон Фіка, маємо

$$\nabla\psi|_{r=a} = 0. \quad (3.25)$$

На зовнішній (екстрапольованій) границі

$$\psi(R) = 0. \quad (3.26)$$

Розв'язок рівняння (3.20) знову ж таки являє собою суму двох лінійно незалежних розв'язків (3.21), яку можна подати у вигляді

$$\psi(r) = C \frac{\sin \alpha(\Omega - r)}{r},$$

де C і Ω - довільні сталі, що визначаються з граничних умов.

З формули (3.26) маємо

$$C \frac{\sin \alpha(\Omega - R)}{R} = 0,$$

звідки $\Omega = R$.

Обчислимо тепер $\nabla\psi(\alpha)$ і прирівняємо результат нулю:

$$\nabla\psi(a) = \frac{C}{a^2} [a\alpha \cos \alpha(R - a) + \sin \alpha(R - a)] = 0.$$

Звідки

$$\operatorname{tg} \alpha(R - a) = -a\alpha. \quad (3.27)$$

Рівняння (3.27) є рівнянням критичного реактора для визначення α . Його можна розв'язати графічно, якщо ввести позначення $x = \alpha R$, $\beta = a/R$. Графічний розв'язок подано на рис. 3.2.

Якщо $a \rightarrow 0$, то $\beta \rightarrow 0$; $\alpha_n = \frac{\pi(n+1)}{R}$ відповідно до розв'язку рівняння

(3.20) у випадку кулі без порожнини. Варто також розглянути окремий випадок, коли порожнина заповнена "абсолютно чорним тілом", тобто речовиною, яка поглинає всі нейтрони, що попадають у порожнину. Тоді граничну умову (3.25) треба замінити на умову рівності нулю густини потоку нейтронів на екстрапольованій всередину порожнини границі a'

$$\psi(a') = 0. \quad (3.28)$$

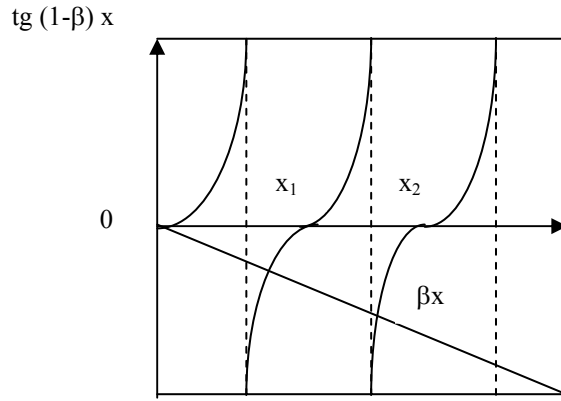


Рис. 3.2. Визначення власних значень для сферичного шару

Тоді рівняння критичності спрощується і приймає вигляд

$$C \frac{\sin \alpha(R - a')}{a'} = 0,$$

звідки

$$\sin \alpha(R - a) = 0, \alpha_n = \frac{\pi(n+1)}{R+a},$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{R-a}.$$

З умови критичності $\alpha_0 = \gamma$ визначається критичний радіус

$$R = a + \frac{\pi L}{(k_\infty - 1)^{1/2}}, \quad (3.29)$$

а густина потоку нейтронів у сферичному реакторі з “абсолютно чорною” порожниною визначається виразом

$$\psi(r) = \frac{C}{r} \sin \frac{\pi(R-r)}{R-a} \quad (3.30)$$

Цікаво порівняти зміну густини потоку нейтронів залежно від радіуса у випадку пустої порожнини (вакуум) і “абсолютно чорної”. Таке порівняння наведено на рис. 3.3.

3. Розглянемо розв’язок рівняння для густини потоку нейтронів у випадку реактора у вигляді циліндра з радіусом R і висотою H . Рівняння Гельмгольца в циліндричній системі координат, яке не враховує залежність ψ від полярного кута, має вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dz^2} + \alpha^2 \psi = 0, \quad (3.31)$$

з граничними умовами на зовнішніх границях

$$\psi_S(r, z) = \psi\left(R, \pm \frac{H}{2}\right) = 0. \quad (3.32)$$

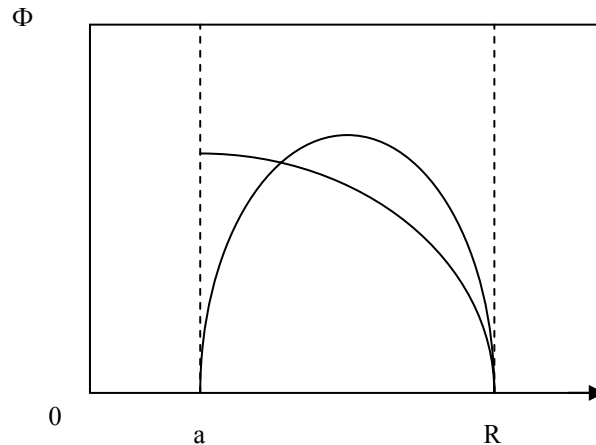


Рис. 3.3. Розподіл потоку нейтронів у кулі з вакуумною порожниною (1) і з порожниною, заповненою абсолютно чорним тілом (2)

Рівняння (3.31) можна розв'язати за допомогою методу розділення змінних (метод Фур'є), вважаючи що функція $\psi(r, z)$ являє собою добуток двох функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної r або z : $\psi(r, z) = \psi(r)Z(z)$. Після підстановки в (3.31) отримаємо

$$\frac{1}{\psi(r)} \frac{d}{dr} r \frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 z}{dz^2} = -\alpha^2. \quad (3.33)$$

Якщо сума двох членів, які залежать від різних змінних, дорівнює сталій, то це означає, що кожний член окремо дорівнює сталій величині. Позначимо ці сталі α_r і α_z відповідно. Тоді замість виразу (3.33) маємо систему двох рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\psi}{dr} &= -\alpha_r^2 \psi, & \psi(R) &= 0, & \psi(0) &< \infty, \\ \frac{d^2 z}{dz^2} &= -\alpha_z^2 z, & z\left(\pm \frac{H}{2}\right) &= 0, \\ \alpha_r^2 + \alpha_z^2 &= \alpha^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Перше рівняння є рівнянням Бесселя [7] і має два лінійно незалежні розв'язки функції Бесселя і функції Неймана. Загальний розв'язок цього рівняння являє собою суму двох лінійно незалежних розв'язків

$$\psi(r) = C_1 J_0(\alpha_r r) + C_2 N_0(\alpha_r r).$$

З умови скінченності функції $\psi(r)$ при $r = 0$ маємо $C_2 = 0$, оскільки функція Неймана має логарифмічну особливість при $r \rightarrow 0$. Функція Бесселя скінченна при $r \rightarrow 0$ і осцилює із зростанням r . Тому вона може описувати критичний потік нейтронів, якщо r змінюється від нуля до першого нуля функції Бесселя, тобто розв'язок рівняння $J_0(\alpha_r r) = 0$, яке збігається з другою граничною умовою при $r = R$. Найменший корінь цього рівняння $\alpha_r^0 \approx 2,405$. Тому радіальна функція має вигляд

$$\psi(r) = C_1 J_0\left(2,405 \frac{r}{R}\right).$$

Друге рівняння (3.34) легко розв'язується. Його розв'язок

$$Z(r) = C_3 \cos(\alpha_z z) + C_4 \sin(\alpha_z z).$$

Оскільки функція Z не може приймати від'ємні значення всередині реактора, то $C_4 = 0$. З граничної умови $\alpha_z^0 \frac{H}{2} = \frac{\pi}{2}$, тобто $\alpha_z^0 = \frac{\pi}{H}$. Тому умова критичності циліндричного реактора приймає вигляд

$$\gamma^2 \equiv \frac{k-1}{L^2} = \left(\frac{2,405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2, \quad (3.35)$$

і критичні розміри циліндричного реактора визначаються, звичайно, його радіусом і висотою. Розподіл потоку нейтронів у циліндричному реакторі задається формулою

$$\Psi(r, z) = C J_0\left(\frac{2,405}{R} r\right) \cos\left(\frac{\pi}{H} z\right). \quad (3.36)$$

4. Розглянемо ще один випадок простої геометрії: реактор у вигляді паралелепіпеда. У декартовій тривимірній системі координат хвильове рівняння приймає вигляд

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \alpha^2 \psi = 0, \quad (3.37)$$

з граничними умовами

$$\psi\left(\pm \frac{a}{2}, y, z\right) = \psi\left(x, \pm \frac{b}{2}, z\right) = \psi\left(x, y, \pm \frac{c}{2}\right) = 0, \quad (3.38)$$

де a, b, c - розміри паралелепіпеда. Метод розділення змінних $\psi = XYZ$ дає три рівняння для визначення функції ψ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha_x^2 x = 0 \quad X\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + \alpha_y^2 y = 0 \quad Y\left(\pm \frac{b}{2}\right) = 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + \alpha_z^2 z = 0 \quad Z\left(\pm \frac{c}{2}\right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

$$\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2.$$

Кожне рівняння (3.39) аналогічно для висотного розподілу потоку нейтронів у циліндричному реакторі. Тому з урахуванням граничних умов розв'язок задачі для паралелепіпеда залишимо у вигляді

$$\psi(x, y, z) = C \cos(\alpha_x^0 x) \cos(\alpha_y^0 y) \cos(\alpha_z^0 z), \quad (3.40)$$

де $\alpha_x^0 = \frac{\pi}{a}$, $\alpha_y^0 = \frac{\pi}{b}$, $\alpha_z^0 = \frac{\pi}{c}$. Умова критичності приймає вигляд

$$\frac{k-1}{L^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2. \quad (3.41)$$

Якщо порівняти всі умови критичності, які ми отримали для кульового, циліндричного і прямокутного реакторів, то можна побачити, що тільки одна умова критичності для кульового реактора однозначно визначає розміри, а отже, об'єм і масу палива. Для циліндричного і прямокутного реакторів критична умова $k = \alpha_0$ може виконуватись для різного співвідношення між характерними розмірами, а отже, і для різних об'ємів реактора.

Співвідношення між розмірами можна визначити, задавшись деякою додатковою умовою. Наприклад, можна вимагати, щоб об'єм реактора був мінімально можливий, при якому ще задовольняється умова критичності. Математично задачу можна розв'язати, скористувавшись методом невизначених множників Лагранжа. Нам треба визначити умовний мінімум функції V_R - об'єму реактора з додатковою умовою $\alpha_0 = k$. Для циліндра $V_R = \pi R^2 H$ з умовою критичності $\gamma^2 = \frac{\xi^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2}$, де $\xi^2 = 2,405$ - перший нуль функції Бесселя. Для застосування методу невизначених множників треба скласти допоміжну функцію $F = \pi R^2 H + \lambda \left(\frac{\xi^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} - \gamma^2 \right)$, де λ - невизначений множник, і прирівняти нулю її похідні по H і R .

$$\frac{\partial F}{\partial H} = \pi R^2 - \frac{2\pi^2 \lambda}{H^3} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial R} = 2\pi R H - \frac{2\xi^2 \lambda}{R^3} = 0.$$

Виразимо λ з першого рівняння і підставимо в друге. Після деяких перетворень отримаємо співвідношення між H і R

$$\frac{H^2}{R^2} = 2\pi^2 / \xi^2, \quad \frac{H}{R} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\xi} = 1,85.$$

Умова критичності

$$\gamma^2 = \frac{\xi^2}{R^2} + \frac{\pi^2 \xi^2}{2\pi^2 R^2} = \frac{3}{2} \frac{\xi^2}{R^2}, \quad (R^2 = 1/(2\gamma^2/3\xi^2)),$$

і таке співвідношення між висотою і радіусом дає об'єм реактора (мінімальний критичний)

$$V_R = \pi \frac{3\xi^2}{2\kappa^2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{\xi}{\gamma} = \frac{\pi 3\sqrt{3}\xi^3}{2\sqrt{2}\gamma^3} \approx \frac{148}{\gamma^3}.$$

Аналогічне співвідношення між сторонами паралелепіпеда має вигляд

$$a = b = c,$$

і мінімальний критичний об'єм паралелепіпеда з рівними сторонами, тобто куба, дорівнює

$$V_R = \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{\gamma} \right)^3 = 161 / \gamma^3.$$

§ 3.6. Загальні міркування про розрахунки реакторів

Під час розрахунків реактора звичайно дотримуються такої послідовності дій. Спочатку вибирають деяку геометрію активної зони і задають склад речовин, що містяться в активній зоні. Склад речовин дозволяє визначити коефіцієнт розмноження в нескінченному середовищі і довжини вільного пробігу, а отже, матеріальний параметр реактора. Потім розв'язують дифузійне рівняння (або систему рівнянь) для заданої геометрії і визначають критичні розміри реактора. Якщо ці розміри не задовольняють умовам замовника, то змінюють склад або геометрію й знову повторюють розрахунки.

Звичайно реактори проектується так, щоб органи керування реактором дали змогу змінювати величину k_{ef} і робити її більше або менше одиниці. Звичайно це роблять за допомогою керуючих стрижнів або рідких поглиначів нейтронів. Зрозуміло, що під час стаціонарної роботи реактора $k_{ef} = 1$. Однак у процесі роботи деякі ефекти призводять до зменшення k_{ef} . Перш за все сюди належить вигорання палива, тобто зменшення кількості ядер, що діляться. Можливе також збільшення кількості ядер, що поглинають нейтрони. У деяких реакторах можливі також збільшення k_{ef} за рахунок утворення ^{239}Pu з ядер ^{238}U . У будь-якому разі необхідно передбачити можливість зміни k_{ef} у той чи інший бік.

Зрозуміло, що більшість реакторів (де утворення ^{239}Pu не переважає вигорання палива) проектується з розмірами, більшими критичного, а зайва реактивність, тобто перебільшення k_{ef} над одиницею, компенсується введен-

ням поглинаючих стрижнів в активну зону реактора. У процесі роботи реактора ці стрижні поступово виводяться з активної зони для того, щоб забезпечити рівність k_{ef} одиниці. Після повного виведення керуючих стрижнів з активної зони реактор зупиняється для завантаження свіжого палива. У деяких реакторах передбачена можливість перевантаження палива під час роботи реактора.

Таким чином, під час проектування реакторів визначається зайва реактивність, яка залежить від строків кампанії реактора, тобто від проміжку часу, який потрібен для вигорання палива, від темпів вигорання палива, від швидкості накопичення плутонію, від самої системи регулювання тощо. Багато цих факторів неможливо визначити з достатньою точністю, що ускладнює задачу проектування реакторів. Тому під час роботи реакторів ці параметри уточнюються експериментально і проводяться додаткові розрахунки реактора.

Інша складність розрахунків реакторів полягає в тому, що реальний реактор має досить складну геометричну структуру, яка суттєво відрізняється від простих реакторів з однорідною активною зоною (гомогенні реактори), які ми досі розглядали. Звичайно, активна зона являє собою сукупність збірок тепловіділяючих елементів, різних каналів для циркуляції теплоносія, сповільнювача. Вона, як правило, огорожена відбивачем нейтронів або іноді зоною відтворення палива, що містить велику кількість ^{238}U , а також біологічним захистом. Навіть розподіл палива в активній зоні рідко буває однорідним, бо, як це ми бачили, в однорідному реакторі в центрі активної зони знаходиться область з підвищеною густиною нейтронів, а отже, і з підвищеним енерговиділенням. Тобто всередині гомогенного реактора знаходиться нагріта область, що може привести до складнощів із відводом тепла. Неоднорідні завантаження паливом можуть зменшити ці складнощі, також як і використання відбивача. Завдяки відбивачам частина нейтронів, яка виходить з активної зони, знову повертається до неї, що вирівнює вигорання палива й енерговиділення по об'єму реактора.

Зрозуміло, що ті прості результати, які наведено вище, можна використовувати тільки для грубих оцінок. Для розрахунків реальних реакторів використовуються багатогрупові наближення та чисельні розрахунки рівнянь цих наближень. Але процедура по суті залишається такою ж, як описано вище.

Розділ 4

Теорія сповільнення нейтронів

§ 4.1. Імовірність сповільнення нейтронів

У дифузійному рівнянні для моноенергетичних нейтронів джерело нейтронів визначається коефіцієнтом розмноження k_{∞} для нескінченного розмножуючого середовища. Якщо розглядати тільки теплові нейтрони, то ця величина визначається тільки нейтронами, що сповільнилися від енергій поділу до теплових енергій. Виміряти цю величину непросто, і вона звичайно розраховується на основі теорії сповільнення нейтронів. Як ми вже зауважували раніше, втрата нейтроном енергії у реакторі відбувається завдяки процесам пружного й непружного зіткнення. Основну роль у процесах сповільнення грає пружне зіткнення нейтронів. У розділі 2 ми отримали співвідношення між енергією нейтрона E до зіткнення та енергією нейтрона E' після зіткнення з ядром з масовим числом A

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{2} [1 + \alpha_A + (1 - \alpha_A) \cos \theta], \quad (4.1)$$

де $\alpha_A = \left(\frac{1-A}{1+A}\right)^2$, а θ - кут розсіювання в системі центра мас.

Якщо $\cos \theta = 1$, то $E' = E$, і якщо $\cos \theta = -1$ (лобове зіткнення), то $E' = \alpha_A E$. Отже, енергія нейтрона під час пружного розсіювання може змінюватись у межах $\alpha_A E \leq E' \leq E$. Величину $\Delta E = (1 - \alpha_A)E$ називають *сходінкою сповільнення*, вона визначає максимальну енергію, яку може загубити нейтрон під час зіткнення.

Квантово-механічні розрахунки показують, що розсіювання нейтронів з малою енергією в системі центра інерції є ізотропним, тобто рівномірним є розсіювання в будь-який тілесний кут $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, і ймовірність розсіювання на кут θ є

$$W(\theta) d\theta = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta. \quad (4.2)$$

Оскільки енергія після розсіювання пов'язана з кутом θ виразом (4.1), то ймовірність попадання нейтрона після розсіювання в інтервал $d\theta$ рівна ймовірності розсіювання в інтервал dE' , тобто $W(E, E') dE' = W(\theta) d\theta$, звідки

$$W(E, E') dE' = \frac{1}{2} \left| \frac{d\theta}{dE'} \right| = \frac{1}{2} \frac{d(\cos \theta)}{dE'} = \frac{1}{(1 - \alpha_A)E}.$$

Таким чином, для ймовірності розсіювання в інтервал dE' маємо

$$W(E, E') = \begin{cases} \frac{dE'}{(1 - \alpha_A)E} = \frac{dE'}{\Delta E}, & \alpha_A E \leq E' \leq E, \\ 0 & (E' > E) \vee (E' < \alpha_A E). \end{cases} \quad (4.3)$$

Енергія нейтронів, для яких є справедливим закон ізотропного розсіювання залежить від маси ядра. Так, для водню верхньою границею ізотропного розсіювання є 10 МеВ, а для вуглецю – 2 МеВ. Тобто для водню перекривається весь спектр нейтронів поділу, а для вуглецю - майже весь спектр.

Після першого зіткнення мінімальна енергія нейтрона є $\alpha_A E$, після другого - $\alpha_A^2 E$, після третього - $\alpha_A^3 E$ тощо, тобто значення енергії становлять геометричну прогресію. Логарифми цих значень становлять арифметичну прогресію, тому логарифмічна шкала енергій виявляється більш зручною. Логарифм відношення енергій називається *летаргією*

$$u = \ln\left(\frac{E_0}{E}\right),$$

де E_0 - будь-яка енергія. Звичайно вибирають $E_0 = 10$ МеВ або $E_0 = 2$ МеВ. Останнє значення є не дуже зручним, бо в такому випадку деякі нейтрони можуть мати від'ємну летаргію.

Обрахуємо середню зміну летаргії за одне зіткнення

$$\xi = \overline{\ln\left(\frac{E}{E'}\right)} = \frac{E}{\alpha_A E} \int_{\alpha_A E}^E \ln\left(\frac{E}{E'}\right) W(E, E') dE' = 1 + \frac{\alpha_A \ln \alpha_A}{1 - \alpha_A}. \quad (4.4)$$

Знання зміни летаргії дає змогу легко обрахувати середнє число зіткнень N_C , що відбуваються під час сповільнення від E_0 до E_T - верхньої границі (яка є досить умовною) теплового розподілу. Звичайно покладають $E_T \approx 0,4$ еВ. Тоді

$$N_C = \left[\overline{\ln\left(\frac{E}{E'}\right)} \right]^{-1} \ln\left(\frac{E_0}{E_T}\right) = \xi^{-1} \ln\left(\frac{E_0}{E_T}\right).$$

У табл. 4.1 наведено значення N_C для сповільнення нейтронів у різних речовинах

Таблиця 4.1. Кількість зіткнень для сповільнення нейтронів до теплових енергій в різних матеріалах

Ядра	H	D	Be	C
N_C	16	22	78	102

Можна також увести функцію $W(u, u')$, яка визначає ймовірність розсіювання із зміною летаргії $u \rightarrow u'$. Вважаючи $u_0 = 0$ і використовуючи для функціонально залежних величин співвідношення $W(u, u')du = W(E, E')dE$, можна отримати

$$W(u, u') = W(E, E') \left| \frac{dE}{du} \right|, \quad (4.5)$$

де

$$W(u, u') = \begin{cases} \frac{\exp(-(u - u'))}{1 - \alpha_A}, & u - q_A \leq u' \leq u, \\ 0 & (u' > u) \vee (u' < u - q_A), \end{cases}$$

а $q_A = \ln \frac{1}{\alpha_A}$ - сходишка сповільнення в шкалі летаргії.

Функція $W(u, u')$, а також $W(E, E')$ повинні бути нормованими на одиницю:

$$\int_u^{u+q_A} W(u, u') du' = 1.$$

Звичайно, величину середньої зміни летаргії ξ за одне зіткнення можна також отримати за допомогою функції $W(u, u')$

$$\xi_A = \int_0^{q_A} \frac{(u - u') \exp[-(u - u')]}{1 - \alpha_A} d(u - u') = 1 - \frac{\alpha_A q_A}{1 - \alpha_A}. \quad (4.6)$$

Враховуючи визначення величини q_A , можна побачити, що рівняння (4.6) збігається з рівнянням (4.4).

Функцію $W(E, E')$ (або $W(u, u')$) ми визначали, використовуючи закони пружного розсіювання. Відомо, що нейтрони гублять свою енергію в середовищі також за рахунок непружної взаємодії з ядрами середовища. На жаль, загального аналітичного виразу для $W(E, E')$ у випадку непружного зіткнення не існує. Тому для розрахунків доводиться використовувати чисельні дані. Однак деякі моделі теорії ядра дозволяють отримати аналітичний вираз для функції $W(E, E')$ у випадку, коли енергія нейтрона значно перевищує енергію першого збудженого рівня ядра. Тоді процес можна собі уявити у вигляді двох етапів. На першому етапі нейтрон захоплюється ядром з утворенням сильно збудженого складеного ядра з масою $A + 1$. Далі складене ядро випромінює нейтрон подібно до того, як нагріта рідина випромінює молекули. У цій моделі складене ядро можна описати ефективною температурою

$$kT_{ef} \equiv \mathcal{G} = \frac{2\sqrt{E}}{B}, \quad B \approx 0,62\sqrt{A}. \quad (4.7)$$

Докладне визначення функції $W(E, E')$ можна знайти в курсах теорії ядра. Наведемо лише остаточний вираз

$$W(E, E') = \frac{E'}{\theta^2} \exp\left(-\frac{E'}{\theta}\right). \quad (4.8)$$

Умовою цього наближення є значне перевищення енергією нейтрона енергії першого збудженого рівня ядра. Як ми бачили, енергія першого збудженого рівня паливних і сировинних матеріалів є значно менша енергії нейтронів поділу, тому для них можна використовувати наближення (4.8).

§ 4.2. Рівняння пружного сповільнення нейтронів Спектр Фермі

Розглянемо сповільнення нейтронів у нескінченному гомогенному середовищі, припускаючи, що нейтрони гублять енергію лише за рахунок пружного зіткнення. Припустимо також, що нейтрони народжуються в середовищі з постійною потужністю джерела нейтронів, наприклад завдяки реакції поділу ядер палива. Пружні зіткнення з ядрами середовища ведуть до зменшення енергії нейтронів спочатку великими порціями, а потім все меншими. У кінці цього процесу енергія нейтронів у середовищі стане рівною середній тепловій енергії ядер сповільнювача.

Позначимо через $\Phi(E)$ інтегральний потік нейтронів, енергії яких лежать в одиничному інтервалі навколо E . Звичайно $\Phi(E) = \int \Phi(\vec{r}, E) d\vec{r}$. Можна також розглядати $\Phi(E)$ як потік нейтронів у нескінченному середовищі, в якому потужність джерела нейтронів всюди постійна.

Прирівняємо кількість нейтронів, яка попадає в одиничний інтервал енергії навколо E , тій кількості нейтронів, які розсіюються з цього інтервалу в одиницю часу. Кількість розсіюваних електронів є $\Phi(E)\Sigma(E)$, а тих, що приходять завдяки розсіюванню,

$$\int_0^{\infty} \Phi(E')\Sigma(E')W(E', E)dE'.$$

Якщо до останнього виразу додати кількість нейтронів, що випромінюється джерелом $Q(E)$, то баланс нейтронів можна записати у вигляді

$$\int_0^{\infty} \Phi(E')\Sigma(E')W(E', E)dE' + Q(E) = \Phi(E)\Sigma(E). \quad (4.9)$$

У цьому виразі ми не враховували поглинання нейтронів середовищем, тому $\Sigma(E)$ - це переріз розсіювання, який у даному випадку збігається з повним перерізом. У праву частину рівняння (4.9) повинен входити повний переріз $\Sigma_t = \Sigma_a + \Sigma_s$, а в підінтегральний вираз - сума перерізів пружного й непружного розсіювання, домножених на відповідні функції розсіювання. Якщо також врахувати, що в реакторі можуть бути різні типи атомів, то інтегральний член повинен складатись із суми інтегралів розсіювання на атомах різних типів з різними A . Зрозуміло також, що рівняння сповільнення можна отримати із стаціонарного рівняння переносу нейтронів, проінтегрувавши його за координатами та кутами.

У рівнянні (4.9) зручно перейти до змінної летаргії. Для цього визначимо спочатку потік нейтронів, залежний від летаргії як

$$\Phi(\vec{r}, E) = \Phi(\vec{r}, u) \left| \frac{du}{dE} \right| = \frac{1}{E} \Phi(\vec{r}, u). \quad (4.10)$$

Для переходу до змінної летаргії в рівнянні (4.9) його необхідно домножити на $\left| \frac{dE}{du} \right|$ і провести заміну змінної інтегрування

$$dE' = \left| \frac{dE'}{du'} \right| du'. \quad (4.11)$$

Тоді

$$\int_0^{\infty} dE' \Phi(E') \Sigma(E') W(E', E) \left| \frac{dE}{du} \right| + Q(E) \left| \frac{dE}{du} \right| = \Phi(E) \Sigma(E) \left| \frac{dE}{du} \right|,$$

або

$$\int_1^{\infty} \Phi(u') \Sigma(u') W(u', u) du' + Q(u) = \Phi(u) \Sigma(u), \quad (4.12)$$

де $Q(u) = Q(E) \left| \frac{dE}{du} \right|$, а також ми змінили границі інтегрування відповідно до зміни летаргії під час пружного розсіювання.

У правій частині рівняння (4.12) стоїть величина $F(u) = \Phi(u) \Sigma(u) = \Phi(E) \Sigma(E) E$, яку називають густиною зіткнень на одиничний інтервал летаргії. Вона є постійною в тому інтервалі енергій, що лежить значно нижче енергій джерела нейтронів, тобто коли $Q = 0$, що видно з рівняння (4.12). Такий розподіл називається асимптотичним, оскільки він встановлюється в області енергій, далекій від енергій джерела нейтронів. Отже,

$$F(u) \equiv \Phi(E) \Sigma(E) E = const = C. \quad (4.13)$$

Ця постійна визначає кількість зіткнень за одиницю часу в одиничному інтервалі летаргії. Її можна визначити за допомогою наступних міркувань.

Середня зміна летаргії за одне зіткнення є ξ . Тому кількість нейтронів, що перетинають середнє значення летаргії за одиницю часу є $C\xi$. Оскільки всі нейтрони перетинають кожне значення летаргії, що лежить вище летаргії джерела (якщо нема поглинання), то

$$Q = C\xi, \text{ або } C = Q/\xi. \quad (4.14)$$

Із цих співвідношень витікає розподіл нейтронів за енергіями в асимптотичній енергетичній області в середовищі без поглинання

$$\Phi(E) = \frac{Q}{\xi\Sigma(E)E}. \quad (4.15)$$

Цей спектр нейтронів називається спектром Фермі, він у першому наближенні описує розподіл за енергіями епітеплових (надтеплових) нейтронів у реакторі з енергіями, меншими енергії джерела нейтронів, тобто енергіями нейтронів поділу.

Наведемо також деякі означення, які ми будемо використовувати надалі. Кількість нейтронів, що перетинають енергію E в одиничному об'ємі в одиницю часу, дорівнює

$$q(E) = \xi\Sigma(E)E\Phi = \xi F, \quad (4.16)$$

і цю величину називають *густиною сповільнення*. Величину $\xi\Sigma(E)$ - зміна летаргії в одиничному потоці в одиницю часу - називають *сповільнюючою здатністю речовини*.

Таким чином, ми отримали розв'язок стаціонарного інтегрального рівняння сповільнення в області енергій, далеких від енергій джерела нейтронів.

§ 4.3. Розв'язки рівняння сповільнення

У минулому параграфі ми отримали розв'язок рівняння сповільнення в області енергій (або летаргій), де потужність джерела нейтронів дорівнює нулю. Розглянемо тепер рівняння сповільнення в середовищі з джерелом, яке випромінює моноенергетичні нейтрони з енергією, що відповідає летаргії u_0 , і має одиничну інтенсивність (1 нейтрон/с), тобто розподіл нейтронів джерела дається δ -функцією Дірака $Q(u) = \delta(u - u_0)$. З таким джерелом розв'язок рівняння (4.12) має зміст функції Гріна $G(u, u_0)$. Оскільки рівняння (4.12) лінійне, то його розв'язок за наявності довільної функції $Q(u)$ являє собою суперпозицію полів нейтронів від одиничних джерел з вагою $Q(u)$, тобто

$$\Phi(u) = \int G(u, u'_0)Q(u'_0)du'_0, \quad (4.17)$$

де функція $G(u, u_0)$ задовольняє рівнянню

$$-\Sigma(u)G(u, u_0) + \int_{\max(u-q, u_0)}^u G(u', u_0)\Sigma(u')W(u', u)du' + \delta(u - u_0) = 0. \quad (4.18)$$

Таким чином, для того щоб знайти розв'язок рівняння сповільнення (4.12) з довільною функцією $Q(u)$, виявляється досить знайти його розв'язок із джерелом $Q(u) = \delta(u - u_0)$, а оскільки u_0 в шкалі летаргій вибирається довільним, то досить покласти $Q(u) = \delta(u)$ і розв'язувати рівняння

$$-\Sigma(u)\Phi(u) + \int_{\max(u-q, 0)}^u G(u', u_0)\Sigma(u')W(u', u)du' + \delta(u) = 0, \quad (4.19)$$

а розв'язок із довільною функцією $Q(u)$ отримується за допомогою рівняння (4.17).

Розглянемо тепер найпростіший випадок, коли сповільнювачем є чистий водень ($A = 1$). Тоді $\alpha = 0$, $q_A = \infty$, $W(u', u) = \exp[-(u - u')]$, і рівняння (4.19) приймає вигляд

$$-F(u) + \int_0^u F(u') \exp[-(u - u')] du' + \delta(u) = 0. \quad (4.20)$$

Загальна процедура розв'язку таких рівнянь полягає у виділенні сингулярної частини розв'язку

$$F(u) = \delta(u) + F_1(u), \quad (4.21)$$

де $F_1(u)$ - деяка регулярна функція.

Підстановка в рівняння (4.20) дає²

$$-F_1(u) + \int_0^u du' F_1(u') e^{-(u-u')} + e^{-u} = 0. \quad (4.22)$$

Тут e^{-u} являє собою джерело нейтронів, які маючи летаргію $u' = 0$, зіткнулись тільки один раз з ядром водню, а $F_1(u)$ - густина зіткнень нейтронів, які випромінюються джерелом $Q(u) = e^{-u}$.

Якщо покласти $F_1(u) = y(u)e^{-u}$, то для $y(u)$ маємо просте рівняння

$$-y(u) + \int_0^u du' y(u') + 1 = 0. \quad (4.23)$$

Покладаючи $u = 0$, отримуємо

$$y(0) = 1. \quad (4.24)$$

² $\int_0^u \delta(u') e^{-(u-u')} du' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^u \delta(u') e^{-(u-u')} du' = e^{-u}$

Диференціюючи рівняння (4.23), приходимо до диференціального рівняння $\frac{dy}{du} = y$, звідки із врахуванням початкових умов (4.24)

$y = e^{-u}$, $F_1(u) = 1$, тобто розв'язок рівняння (4.20) має вигляд

$$F(u) = \begin{cases} \delta(u) + 1, & u \geq 0, \\ 0 & u < 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Тут сингулярна частина розв'язку має зміст функції розподілу нейтронів, які жодного разу не зіткнулись з ядрами середовища.

Якщо $A > 1$, то для визначення функції $F(u)$ треба розв'язувати рівняння сповільнення з $\alpha \neq 0$ (4.19). Коли летаргія нейтронів лежить у межах першої сходинки сповільнення $0 \leq u \leq q$, рівняння (4.19) приймає вигляд

$$-F(u) + \int_0^u F(u') \frac{\exp[-(u-u')]}{1-\alpha} du' + \delta(u) = 0.$$

Підстановка рівняння (4.21) дає

$$-F_1(u) + \int_0^u F_1(u') \frac{\exp[-(u-u')]}{1-\alpha} du' + \frac{e^{-u}}{1-\alpha} = 0.$$

Останній доданок знову дає розподіл нейтронів джерела з летаргією $u = 0$, які зіткнулись тільки один раз. Повторюючи процедуру розв'язку (4.23 - 4.25), отримаємо

$$F_1(u) = \frac{1}{1-\alpha} \exp\left(\frac{\alpha u}{1-\alpha}\right), \quad 0 \leq u \leq q.$$

Таким чином, у межах першої сходинки сповільнення функція $F_1(u)$ зростає від значення $F_1(+0) = \frac{1}{1-\alpha}$ до значення $F_1(q-0) = \frac{1}{1-\alpha} e^{\alpha q / (1-\alpha)}$.

Розв'язок рівняння для $F_1(u)$ при $q \leq u$ взагалі не можна отримати у вигляді елементарних функцій. Але можна проаналізувати його поведінку крок за кроком у межах кожної сходинки сповільнення. Уперше такий аналіз був проведений Плачеком у 1946 р., тому ця функція носить його ім'я і позначається $F_p(u)$. Отже,

$$F(u) = \delta(u) + F_p(u).$$

Як ми вже бачили, функція Плачека зростає в межах першої сходинки сповільнення $0 \leq u \leq q$. Виявляється, коли $u = q$, функція $F_p(u)$ має розрив. Схематично поведінку функції $F_p(u)$ наведено на рис. 4.1. Із зростанням u функція Плачека осцилює навколо асимптотичного значення $F_p \rightarrow I/\xi$, якого вона досягає досить швидко при зростанні u , і залишається неперервною. Розриви мають перша похідна в $u = 2q$, друга в $u = 3q$ тощо. У відповідності з

отриманим раніше результатом $F_p(u) \rightarrow const = \frac{1}{\xi}$, $\xi = 1 - \frac{\alpha q}{1 - \alpha}$ - середня зміна летаргії за одне зіткнення.

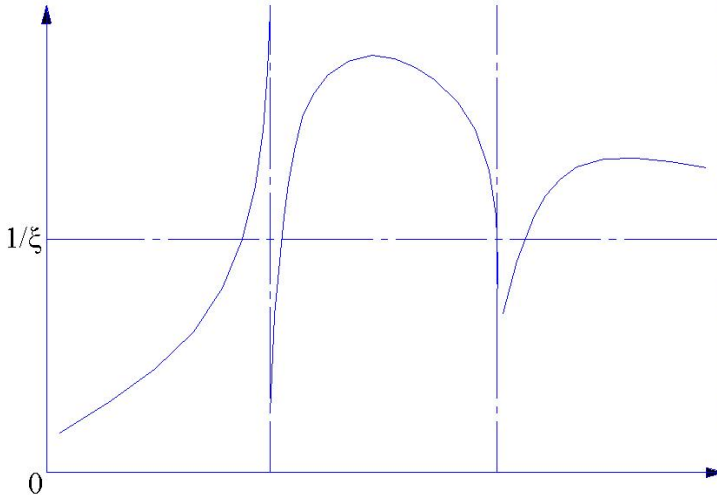


Рис. 4.1. Схематична поведінка функції Плачека.

§ 4.4. Розв'язок рівняння сповільнення з урахуванням поглинання нейтронів

Розглянемо тепер сповільнення нейтронів при наявності поглинання. У великій системі, де протікає ланцюгова реакція, має місце поглинання нейтронів у паливі, наприклад в ^{235}U . Якщо паливо дуже збагачене, то поглинання може стати настільки великим, що ні один нейтрон не досягне теплової енергії. Навпаки, у теплових реакторах на природному урані можна допустити поглинання тільки $\approx 25\%$ нейтронів. У всякому разі для визначення коефіцієнта розмноження середовища необхідно точно знати частку нейтронів, що уникли поглинання під час сповільнення, тобто ймовірність уникнути резонансного поглинання.

Цю ймовірність можна точно розрахувати тільки у двох граничних випадках, навіть коли відомі всі перерізи:

1. Сповільнювач - водень, а поглинач має нескінченну масу, так що під час розсіювання на поглиначі зміни енергії не відбувається;
2. Сповільнювач - довільний, але всі перерізи поглинання й розсіювання не залежать від енергії.

Звичайно реальною є ситуація, коли і поглинач, і сповільнювач мають довільну масу, а перерізи розсіювання й поглинання залежать від енергії. То-

чно цю задачу розв'язати не вдається, але можливі деякі наближені розв'язки. Більш близькою до реальності є ситуація, коли сповільнювач - водень, а поглинач має нескінченну масу.

Інтегральне рівняння сповільнення на водні, коли враховується поглинання в середовищі, має вигляд

$$\int_E^{\infty} \Phi(E') \Sigma_s(E') \frac{dE'}{E'} + Q(E) = \Phi(E) [\Sigma_s(E) + \Sigma_a(E)], \quad (4.26)$$

де $\Sigma_s(E)$ - переріз пружного розсіювання на водні. Тут ураховано, що $\alpha_A = 0$ і $W(E, E') = 1/E'$. Уведемо нову змінну $\Phi(E) \Sigma_t(E) \equiv \Phi(E) [\Sigma_s(E) + \Sigma_a(E)]$ і продиференціюємо рівняння (4.26) по енергії. Тоді

$$-\frac{\Sigma_s}{\Sigma_t} \frac{\Phi(E) \Sigma_t(E)}{E} + \frac{d}{dE} Q(E) = \frac{d}{dE} \Phi(E) \Sigma_t(E). \quad (4.27)$$

Розв'язком цього рівняння є

$$\Phi(E) \Sigma_t(E) = Q(E) + \frac{1}{E} \int_0^{\infty} dE' Q(E') \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma_t(E')} \exp \left[- \int_E^{E'} \frac{\Sigma_a(E'')}{\Sigma_t(E'')} \frac{dE''}{E''} \right]. \quad (4.28)$$

Порівняно з попереднім випадком (сповільнення без поглинання (4.12 – 4.15) потужність джерела зменшується на величину $\frac{\Sigma_s}{\Sigma_a + \Sigma_s}$ і домножується на функцію, що характеризує ймовірність уникнути резонансного поглинання

$$\exp \left\{ - \int_E^{E'} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_s} \frac{dE''}{E''} \right\}. \quad (4.29)$$

Найбільш простим є випадок, коли $Q(E) = 0$, для $E < E_Q$, а поглинання рівне нулю при $E > E_Q$, тобто якщо поглинання починається нижче нижньої границі спектра поділу. У такому випадку

$$\Phi = \frac{Q}{\Sigma_t(E)E} \exp \left\{ - \int_E^{E_Q} \frac{\Sigma_a(E'')}{\Sigma_a(E'') + \Sigma_s(E'')} \frac{dE''}{E''} \right\}, Q = \int_{E_Q}^{\infty} Q(E') dE'. \quad (4.30)$$

Для густини зіткнень маємо

$$F = Q \exp \left\{ - \int_{u_Q}^u \frac{\Sigma_a(u')}{\Sigma_t(u')} du' \right\}. \quad (4.31 \text{ a})$$

Імовірність уникнути резонансного поглинання

$$\exp\left\{-\int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_a(E') + \Sigma_s(E')} \frac{dE'}{E'}\right\} = \exp(-I(E)) \quad (4.31 \text{ б})$$

визначає кількість нейтронів, енергія яких стала менше E , якщо потужність джерела дорівнює одиниці. Це та сама величина, яку ми позначали $q(E)$, тобто густина сповільнення. Порівняння з виразом для Φ дає

$$q(E) = \Sigma_t(E) \Phi(E) E = F \quad (\text{або } \xi F, \text{ оскільки } \xi = I \text{ для } A = I). \quad (4.32)$$

Тобто густина сповільнення визначається повним числом зіткнень $\Sigma_t = \Sigma_a + \Sigma_s$, а не тільки перерізом розсіювання, як можна було очікувати. Справа в тому, що густина сповільнення q визначає кількість нейтронів, які перетинають енергію E , причому вихід з одиничного інтервалу навколо E обумовлений як розсіюванням, так і поглинанням. Для сповільнювача, у якого середнє значення приросту летаргії за одне зіткнення дорівнює ξ

$$q = \xi F = \xi E \Sigma_t(E) \Phi(E). \quad (4.33)$$

Це рівняння є хорошим наближенням і для реального випадку, коли є довільний сповільнювач і перерізи залежать від енергії.

Таким чином, рівняння сповільнення дає змогу визначити густину сповільнення або кількість нейтронів, які перетинають під час сповільнення деяку енергію E . Якщо покласти $E = E_t$, де E_t - верхня границя теплового спектра нейтронів, то $q(E_t)$ повинна визначати потужність джерела теплових нейтронів у рівнянні дифузійного наближення для теплових нейтронів.

§ 4.5. Вікове наближення

У попередньому параграфі було отримано вирази для густини сповільнення $q(E)$. Розрізнялись два випадки: в системі немає поглинання; поглинання відбувається на ядрах з нескінченною масою, а розсіювання – на водні (тобто зіткнення з ядром, що поглинає, не приводить до зміни енергії).

Вирази для густини сповільнення в обох випадках дуже схожі ((4.16) і (4.33)) і відрізняються лише перерізами - у другий вираз входить повний переріз, який визначається сумою перерізів розсіювання й поглинання $\Sigma_T = \Sigma_A + \Sigma_S$. Результати другого випадку є наближенням для випадку довільного сповільнювача і залежних від енергії перерізів.

Величина $q(E)$ визначає кількість нейтронів, що в процесі сповільнення перетинають енергію E в одиниці об'єму за одиницю часу. Отже, за рахунок сповільнення в інтервалі dE навколо E в одиниці об'єму за одиницю часу з'являється нейтронів

$$[q(\vec{r}, E + dE) - q(\vec{r}, E)] d\vec{r} = \frac{\partial q(\vec{r}, E)}{\partial E} dE d\vec{r}. \quad (4.34)$$

Фактично, такий самий член може з'явитись в інтегральному рівнянні сповільнення нейтронів (4.19), якщо величину $\Phi(u') \Sigma_s(u')$ розкласти в ряд

поблизу точки $u' = u$ і обмежитись першим членом розкладу. Фізичний зміст такого наближення - незначна зміна летаргії під час зіткнення і, отже, розгляд сповільнювача з не дуже малою масою. Застосуємо таке наближення до рівняння, що визначає залежність $q(\vec{r}, E)$ від координат. Враховуючи рівняння (4.34), стаціонарне рівняння балансу нейтронів у дифузійному наближенні має вигляд

$$D\Delta\Phi - \Sigma_a\Phi + \frac{\partial q}{\partial E} = Q(\vec{r}, E). \quad (4.35)$$

Використаємо наслідки співвідношення (4.33)

$$D\Delta\Phi = \frac{D}{\xi\Sigma_t E} \Delta q, \quad \Sigma_a\Phi = \frac{\Sigma_a}{\xi\Sigma_t E} q$$

і зробимо заміну змінної E на τ

$$\tau = \int_E^{E_0} \frac{DdE'}{\xi\Sigma_t E'}, \quad d\tau = -\frac{DdE}{\xi\Sigma_t E}, \quad Q(\vec{r}, E)dE = -Q(\vec{r}, \tau)d\tau.$$

Рівняння (4.35) приймає вигляд

$$\Delta q - \frac{\Sigma_a}{D} q = \frac{\partial q}{\partial \tau} Q(\vec{r}, \tau). \quad (4.36)$$

Це рівняння називають рівнянням вікового наближення, а величину τ - віком нейтронів. Якщо $\Sigma_a = Q = 0$, то це рівняння приймає вигляд відомого рівняння теплопровідності

$$\Delta q = \frac{\partial q}{\partial \tau}. \quad (4.37)$$

У визначенні τ величина E_0 - довільна енергія, яку звичайно приймають рівною значенню E_0 у визначенні летаргії. Тоді, якщо перерізи не залежать від летаргії,

$$\tau(E) = \frac{D}{\xi\Sigma_t} \ln\left(\frac{E_0}{E}\right) = \frac{D}{\xi\Sigma_t} u(E). \quad (4.38)$$

Розмірність величини τ - см^2 .

Для повного визначення q необхідно мати початкові й граничні умови. Граничні умови неважко визначити із граничних умов для $\Phi(\vec{r}, E)$, тобто на межі двох середовищ має виконуватись

$$\left(\frac{q(\vec{r}, E)}{\xi\Sigma_t}\right)_1 = \left(\frac{q(\vec{r}, E)}{\xi\Sigma_t}\right)_2 \quad \text{і} \quad \left(\frac{Dq'(\vec{r}, E)}{\xi\Sigma_t}\right)_1 = \left(\frac{Dq'(\vec{r}, E)}{\xi\Sigma_t}\right)_2, \quad (4.39 \text{ а, б})$$

де штрихом позначена похідна по напрямку, нормальному до границі.

Для того щоб отримати початкові умови, розглянемо рівняння вікового наближення у випадку моноенергетичного джерела, тобто

$$\Delta q + Q(\vec{r})\delta(\tau) = \frac{\partial q}{\partial \tau}. \quad (4.40)$$

Якщо проінтегрувати це рівняння по малому інтервалу $\Delta \tau$ поблизу $\tau = 0$ і спрямувати $\tau \rightarrow 0$, то

$$q(\vec{r}, 0) = Q(\vec{r}). \quad (4.41)$$

Тобто для моноенергетичного джерела можна розглядати рівняння (4.40) без джерела з початковими умовами (4.41).

Визначимо нейтронне поле в нескінченному однорідному середовищі, що сповільнює нейтрони, від точкового джерела моноенергетичних нейтронів, тобто розв'яжемо рівняння

$$\frac{\partial q(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} = \Delta q(\vec{r}, \tau) \quad (4.42)$$

з початковими умовами

$$q(\vec{r}, 0) = \delta(\vec{r}). \quad (4.43)$$

Для розв'язку цього рівняння застосуємо Фур'є-перетворення

$$q(\vec{r}, \tau) = (2\pi)^{-n} \int \bar{q}(\vec{k}, \tau) \exp(i\vec{k}\vec{r}) d\vec{k}, \quad (4.44)$$

$$\bar{q}(\vec{k}, \tau) = \int q(\vec{r}, \tau) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) d\vec{r},$$

де $n = 1, 2, 3$ для одно-, дво- і тривимірного середовища.

Функція $\bar{q}(\vec{k}, \tau)$ з початковими умовами $\bar{q}(\vec{k}, 0) = 1$ задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial \bar{q}(\vec{k}, \tau)}{\partial \tau} = -k^2 \bar{q}(\vec{k}, \tau), \quad (4.45)$$

Це рівняння має розв'язок $\bar{q}(\vec{k}, \tau) = \exp(-k^2 \tau)$, і обернене Фур'є-перетворення дає розв'язок рівняння (4.42)

$$q(\vec{r}, \tau) = (2\pi)^{-n} \int \exp(-k^2 \tau + i\vec{k}\vec{r}) d\vec{r} = (2\pi\tau)^{-n/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4\tau}\right). \quad (4.46)$$

Функція $q(\vec{r}, \tau)$ нормована на одиницю ($\int q(\vec{r}, \tau) d\vec{r} = 1$) і її можна інтерпретувати як ймовірність того, що нейтрон, який народився в точці $\vec{r} = 0$ з енергією E_0 , сповільнився до віку τ і опинився при цьому в точці \vec{r} . Середній квадрат переміщення $\overline{r^2}$ під час сповільнення дорівнює

$$\overline{r^2} = \int r^2 q(\vec{r}, \tau) d\vec{r} = 2n\tau,$$

де $n = 1, 2, 3$ для джерела у вигляді площини, нитки й точки відповідно. Тому величину $\sqrt{\tau}$ називають також довжиною сповільнення.

Якщо джерело нейтронів немоноенергетичне, то його можна уявити як суперпозицію моноенергетичних джерел

$$Q(\tau) = \int Q(\tau - \tau')\delta(\tau')d\tau',$$

і оскільки рівняння вікового наближення є лінійним, то його розв'язок також можна подати у вигляді суперпозиції розв'язків від моноенергетичних джерел

$$q_Q(\vec{r}, \tau) = \int Q(\tau - \tau')q(\vec{r}, \tau')d\tau'.$$

Тобто $q(r, \tau)$ - функція Гріна загального рівняння. Вікове наближення, яке ми розглянули, має деякі обмеження. Умовами його застосування є:

1. Слабке поглинання нейтронів в системі $\Sigma_a = 0$.
2. Ізотропне розсіювання в системі центра мас (не дуже великі енергії нейтронів) $\mu = 0$.
3. Енергія нейтронів (з іншого боку) повинна бути значно більшою енергії зв'язку атомів в молекулі або кристалічній ґратці $E_n \gg E_{зв}$.
4. Нейтрон у процесі сповільнення повинен відчувати багато зіткнень $N_e \gg 1$ (мала зміна летаргії за час одного зіткнення).
5. Градієнти потоків повинні бути малими відповідно до умови застосування дифузійного наближення

$$\frac{l}{q\Sigma_{tz}} \left| \frac{dq}{dr} \right| = \frac{r}{2\tau\Sigma_{tz}} \ll 1.$$

Таким чином, вікове наближення дає змогу обчислити густину сповільнення як функцію координат і віку (енергії) нейтронів. Якщо сповільнення відбувається до теплових енергій, то густина сповільнення визначає джерело нейтронів у рівнянні для густини потоку теплових нейтронів

$$D\Delta\Phi - \Sigma_a\Phi = -q(\vec{r}, \tau_T), \quad (4.47)$$

де τ_T - вік нейтронів на границі теплової групи.

§ 4.6. Спектр нейтронів у реакторі

Ще раз нагадаємо, що під час розгляду моноенергетичного рівняння й вікового наближення всі перерізи вважалися усередненими за деяким проміжком енергії. У віковому наближенні вся енергетична шкала ділиться на два інтервали – від нуля до границі теплової групи нейтронів (0,4 еВ) і від цієї границі до максимальної енергії поділу E_0 . Для більш точного розгляду енергетичної залежності нейтронів у реакторах дуже часто енергетичну шкалу ділять на значно більшу кількість інтервалів – енергетичних груп. І в цьому випадку рівняння переносу нейтронів зводиться до багатогрупової системи рівнянь, кожне з яких описує зміну кількості нейтронів у рамках однієї групи.

Під час переходу до багатогрупових наближень усі величини, що залежать від енергії, необхідно усереднити на проміжку енергій, який відповідає

даній групі, з вагою, що відповідає розподілу нейтронів за енергіями, тобто енергетичному спектру нейтронів.

Можна вважати, що нейтрони, які сповільнились до енергій, порівняних з енергіями теплового руху атомів середовища, знаходяться в стані термодинамічної рівноваги із середовищем (якщо не враховувати поглинання й вихід нейтронів за межі реактора). У цьому випадку спектр описується розподілом Максвелла

$$\Phi(E) = \Phi_M \frac{E}{E_T^2} \exp\left(-\frac{E}{E_T}\right), \quad (4.48)$$

де $E_T = kT$. Цей спектр нормований

$$\int_0^{\infty} \Phi(E) dE = \Phi_M.$$

Середнє значення енергії в максвеллівському спектрі енергій дорівнює

$$\bar{E} = \frac{\int EN(E)dE}{\int N(E)dE} = \frac{3}{2}kT \equiv \frac{3}{2}E_T, \quad N(E) = \frac{\Phi(E)}{v}.$$

Функція (4.48) максимальна, коли $E = E_T$, тобто E_T - найбільш імовірне значення енергії.

Урахування поглинання приведе до того, що спектр буде відрізнятися від максвеллівського. Оскільки повільні нейтрони поглинаються значно швидше, то в цьому спектрі буде більше швидких нейтронів порівняно з максвеллівським спектром. Якщо поглинання не дуже сильне, то в деякому наближенні можна вважати, що спектр знову описується розподілом Максвелла, але з деякою ефективною температурою, вищою за температуру сповільнювача $E_{cn} = kT_{cn}$: $E_T = zE_{cn}$, $z > 1$.

Таким чином, у реальному розподілі E_T уже не є ні температурою середовища, ні середньою енергією нейтронів у тепловій групі. Це просто зручний параметр, який визначає максимум розподілу в тепловій групі.

Для нейтронів, що мають температуру, вищу за енергію границі теплової групи E_c , ми отримали вираз для спектра Фермі: $\Phi(E) = (\xi \Sigma_s E)^{-1} Q$. Якщо знову врахувати поглинання нейтронів і використати рівняння (4.31), то для спектра нейтронів з енергіями, вищими за енергію теплової границі групи, можна прийняти

$$\Phi(E) = \frac{QP}{\xi \Sigma_s E \zeta(E)}, \quad (4.49)$$

де $P = \exp(-I(E))$ - імовірність уникнути резонансного поглинання, а $\zeta(E)$ враховує відхилення від спектра Фермі, обумовлене рухом атомів середовища.

У виразі (4.49) потужність джерела Q також залежить від енергії. Величина Q повинна бути пропорційною кількості реакцій поділу в одиниці

об'єму. Остання величина визначається перерізом поділу $\Sigma_f(E)$ і густиною потоку нейтронів у тепловій групі (якщо ми розглядаємо теплові реактори і вважаємо, що основна кількість реакцій поділу відбувається під дією нейтронів теплової групи). Отже,

$$Q(E) = \chi(E) \int_0^{\infty} \nu(E') \Sigma_f(E') \Phi_T(E') dE', \quad (4.50)$$

де $\nu(E)$ - середня кількість нейтронів, що випромінюються під час реакції поділу (див. §1.1), а $\chi(E)$ - функція, що визначає спектр нейтронів поділу.

Ця функція також дуже схожа на розподіл Максвелла, але з деякою ефективною температурою, що суттєво відрізняється від температури як сповільнювача, так і палива:

$$\chi(E) = 2 \sqrt{\frac{E}{\pi \mathcal{G}^3}} \exp\left(-\frac{E}{\mathcal{G}}\right). \quad (4.51)$$

Середня енергія нейтронів поділу $\bar{E} = \frac{3}{2} \mathcal{G}$ звичайно $\bar{E} \approx 2$ МеВ. Спектр нейтронів поділу досягає 18 МеВ, але кількість нейтронів з енергіями вище 10 МеВ дуже мала і можна вважати, що максимальна енергія нейтронів поділу рівна ≈ 10 МеВ.

Існують також інші апроксимації спектра нейтронів поділу. Наприклад, формула Уатта

$$\chi(E) = C \exp(-E) \operatorname{sh}(\sqrt{2E}), \quad (4.52)$$

де постійна C визначається з умови нормування.

Таким чином, спектр нейтронів у тепловому реакторі можна описати двома функціями:

$$\begin{aligned} \Phi_1(E) &= \frac{C}{E_t^2} E \exp\left(-\frac{E}{E_t}\right), \quad E < E_c, \\ \Phi_2(E) &= \frac{Q(E) \exp(-W(E))}{\xi \Sigma_t E \zeta(E)}, \quad E > E_c. \end{aligned} \quad (4.53)$$

На границі теплової групи повинно виконуватись $\Phi_1(E_c) = \Phi_2(E_c)$, звідки можна визначити постійну C . За допомогою цього спектра можна проводити усереднення за енергіями. При наявності сильного резонансного поглинання це можна зробити з деякими застереженнями, які ми розглянемо у наступному параграфі.

§ 4.7. Імовірність уникнути резонансного поглинання

Вираз (4.31) і саме рівняння вікового наближення отримані в припущенні, що функція $\Sigma_s \Phi$ не дуже різко змінюється з енергією. Але саме по-

няття резонансу має на увазі дуже сильну залежність перерізів від енергії. Зрозуміло, що потік нейтронів в області цих резонансів повинен різко послаблюватись, так що асимптотичні вирази типу спектра Фермі в області резонансів не є справедливими.

Можна знайти ймовірність уникнути резонансного поглинання, використовуючи не асимптотичний, а точний потік нейтронів (4.9) в області, де $Q = 0$, і коли перерізи мають резонансну залежність від енергії. Рівняння сповільнення в цьому випадку можна подати у вигляді

$$\Phi(E)\Sigma_t(E) = \frac{1}{1-\alpha_n} \int_E^{E/\alpha_n} \frac{\Phi(E')\Sigma_{sn}(E')}{E'} dE' + \frac{1}{1-\alpha_c} \int_E^{E/\alpha_c} \frac{\Phi(E')\Sigma_{sc}(E')}{E'} dE', \quad (4.54)$$

де індексами n і c позначено поглинач і сповільнювач відповідно.

Розглянемо детальніше поведінку перерізів поглинання і сповільнення в області енергій, яка нас цікавить, тобто між ≈ 1 eВ і ≈ 1 keВ, де з'являються резонанси поглинання важких ядер, таких як ^{238}U і ^{232}Th . У цій області переріз розсіювання сповільнювача не залежить від енергії, а переріз розсіювання поглинача постійний усюди, окрім області безпосередньо поблизу резонансу. Переріз поглинача в околі резонансу можна записати у вигляді відомої формули Брейта - Вігнера

$$\Sigma_{an}(E) = \Sigma_0 \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_r}{E}} \left[1 + 4 \frac{(E - E_r)^2}{\Gamma^2} \right]^{-1}, \quad (4.55)$$

де E_r - енергія резонансу; Γ_γ - радіаційна ширина; Γ - повна ширина резонансу.

Радіаційна ширина Γ_γ як правило є постійною шириною для резонансів даного ізотопу. Наприклад, для ^{238}U

$$\Gamma_\gamma(^{238}\text{U}) = 0,0246 \text{ eВ}. \quad (4.56)$$

Переріз розсіювання поглинача також має резонансну залежність від енергії в околі енергії резонансу E_r , а між резонансами він є постійною величиною

$$\Sigma_{sn}(E) = \Sigma_0 \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{1}{(E - E_r)^2/\Gamma^2 + 1} + \Sigma_I \frac{2(E - E_r)/\Gamma}{(E - E_r)^2/\Gamma^2 + 1} + \Sigma_p, \quad (4.57)$$

де Γ_n - і Γ_γ - нейтронна й радіаційна ширини резонансу, а повна ширина є

$$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma. \quad (4.58)$$

Перший член цього вираз описує резонансне, другий - інтерференційне, а третій - потенціальне розсіювання. На рис. 4.2 схематично показано поведінку перерізу розсіювання поблизу резонансу. Основний пік визначається першим членом (4.57), "провалля" в перерізі описується інтерференційним членом, а постійна величина на віддалі від резонансу дає член потен-

ціального розсіювання. Можна ввести також ефективну ширину резонансу, яка визначається як відстань між точками, де повний резонансний переріз стає рівний потенціальному перерізу

$$\Gamma_p = \Gamma \sqrt{\frac{\Sigma_0}{\Sigma_p}}. \quad (4.59)$$

Оскільки, звичайно, $\Sigma_0 \gg \Sigma_p$, то $\Gamma_p \gg \Gamma$.

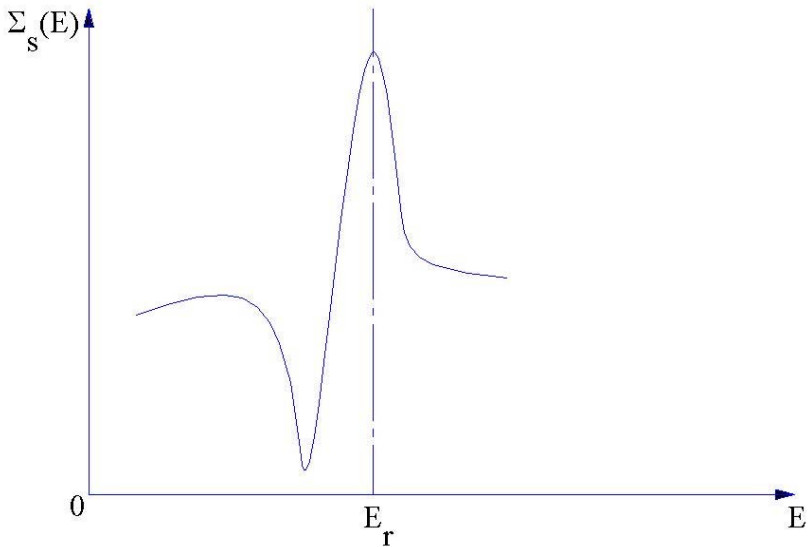


Рис 4.2. Залежність перерізу розсіювання від енергії в околі резонансу.

Повернемося до рівняння (4.54). В інтегралі, що описує розсіювання на сповільнювачі можна замінити точний потік на його асимптотичне значення, тобто на спектр Фермі $\Phi(E) = (\xi \Sigma_s E)^{-1}$. Така заміна можлива тому, що інтервал інтегрування $[E, E/\alpha_c]$ є значно більшим за ефективну ширину резонансу, і більша частина інтервалу віддалена від резонансу. Оскільки Σ_{sc} є постійна величина і не має резонансної залежності від енергії, то при такому наближенні ми нехтуємо деяким "виданням" потоку нейтронів на резонансі. У спектрі Фермі в цьому випадку Σ_s є сума $\Sigma_{sc} + \Sigma_p$. Отже,

$$\frac{1}{1 - \alpha_c} \int_E^{E/\alpha_c} \frac{\Phi(E') \Sigma_{sc}(E')}{E'} dE' \approx \frac{1}{1 - \alpha_c} \frac{\Sigma_{sc}}{\xi \Sigma_s} \int_E^{E/\alpha_c} \frac{dE'}{E'} = \frac{\Sigma_{sc}}{\xi \Sigma_s E}. \quad (4.60)$$

Якщо резонанс вузький (порівняно із сходинкою сповільнення), то таке саме наближення можна використати для обчислення інтеграла, який належить до поглиначя. Тоді $\Sigma_{sn} \approx \Sigma_p$ і

$$\frac{1}{1 - \alpha_n} \int_E^{E/\alpha_n} \frac{\Phi(E') \Sigma_{sn}(E')}{E'} dE' \approx \frac{\Sigma_p}{\xi \Sigma_s E}. \quad (4.61)$$

Далі, використовуючи рівняння (4.54), для спектра нейтронів у наближенні вузьких резонансів отримаємо

$$\Phi_{NR}(E) = \frac{\Sigma_{sc} + \Sigma_p}{\xi \Sigma_s E \Sigma_t}. \quad (4.62)$$

У цьому випадку для ймовірності уникнути поглинання на одному вузькому резонансі можна записати вираз

$$P_{NR} = \exp(-N_F I_{NR} / \xi \Sigma_s), \quad (4.63)$$

де резонансний інтеграл

$$I_{NR} = \int dE \frac{\sigma_{an}(E)(\Sigma_{sc} + \Sigma_p)}{E \Sigma_t(E)}, \quad (4.64)$$

тут N_F - ядерна густина поглиначя; σ_{an} - мікроскопічний переріз поглинання.

Якщо умова вузьких резонансів не виконується, а, навпаки, сходинка сповільнення є значно меншою, ніж ефективна ширина резонансу, то можна використати так зване *наближення нескінченної маси*. Воно полягає в тому, що під час розсіювання на важких ядрах зміна енергії настільки мала, що функція $\Phi \Sigma_{sn}$ слабо змінюється. Отже, цю функцію можна винести з під знака інтеграла в рівнянні (4.61)

$$\frac{1}{1 - \alpha_n} \int_E^{E/\alpha_n} \frac{\Phi(E') \Sigma_{sn}(E')}{E'} dE' \approx \frac{\Phi(E) \Sigma_{sn}(E)}{1 - \alpha_n} \int_E^{E/\alpha_n} \frac{dE'}{E'}. \quad (4.65)$$

Інтеграл у рівнянні (4.65) треба оцінювати для граничного переходу $\alpha_n \rightarrow 1$, тобто

$$\lim_{\alpha_n \rightarrow 1} \frac{1}{1 - \alpha_n} \int_E^{E/\alpha_n} \frac{dE'}{E'} = 1. \quad (4.66)$$

Тоді рівняння (4.65) приймає вигляд простого добутку $\Phi(E) \Sigma_{sn}(E)$, а рівняння (4.54) приймає вигляд

$$\Phi(E) \Sigma_t(E) - \Phi(E) \Sigma_{sn}(E) = \frac{\Sigma_{sc}}{\xi \Sigma_s E}, \quad (4.67)$$

і для спектра нейтронів отримаємо

$$\Phi_{IM}(E) = \frac{\Sigma_{sc}}{\xi \Sigma_s (\Sigma_t - \Sigma_{sn}) E}, \quad (4.69)$$

де індекс IM позначає наближення нескінченної маси.

Ймовірність уникнути резонансного поглинання в цьому наближенні є

$$P = \exp(-N_F I_{IM} / \xi \Sigma_s), \quad (4.70)$$

де

$$I_{IM} = \int \frac{\sigma_{an} \Sigma_{sc}}{E(\Sigma_t - \Sigma_{sn})} dE.$$

Цей вираз для резонансного інтеграла дуже схожий з виразом для I_{NR} з тою різницею, що в ньому нехтується розсіюванням на поглиначі. Зрозуміло, що ці два наближені вирази не дають дуже точних результатів, оскільки, у більшості випадків, ширини резонансів і сходинок сповільнення порівняні за величиною й обидва наближення виявляються непридатними. Зрозуміло також, що обидва наближення враховують послаблення потоку нейтронів у середині резонансу за рахунок залежності від енергії перерізу поглинання в рівняннях (4.69) і (4.62). Такий ефект послаблення потоку називається *енергетичним самоекрануванням*.

§ 4.8. Багатогрупові рівняння

Запишемо стаціонарне дифузійне рівняння балансу нейтронів, урахувавши залежність від енергії, у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}[D(E)\bar{\nabla}\Phi(\vec{r}, E)] - \Sigma_t(E)\Phi(\vec{r}, E) + \int_0^\infty \Sigma_s(E')W(E', E)\Phi(\vec{r}, E')dE' = \\ = -\chi(E)\int_0^\infty \nu(E')\Sigma_f(E')\Phi(\vec{r}, E')dE'. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Розглянемо спочатку член, пов'язаний із розсіюванням нейтронів. Функція $W(E, E')$ в області енергій нейтронів, що сповільнюються, має вигляд $[(1 - \alpha)E']^{-1}$, який є справедливим від границі теплової групи ET до $E \approx 100$ кеВ. Вище 100 кеВ у багатьох випадках не виконується закон ізотропного розсіювання в системі центра інерції. Крім того, необхідно враховувати непружне розсіювання нейтронів. Нижче границі теплової групи $E < E_C$ функція $W(E', E)$ повинна враховувати розсіяння як із зменшенням, так зі збільшенням енергії нейтронів. Явний вигляд цих функцій не завжди можна встановити (під час розрахунків використовується чисельні значення цих функцій), тому надалі ми обмежимося формальним записом рівнянь. Ще однією причиною для формального запису рівнянь є те, що всі коефіцієнти рівняння (4.71) - D , Σ_t , Σ_s , Σ_f - є функціями координат. Звичайно проводять усереднення цих величин по координатах, але це не є дуже простою задачею.

Перейдемо безпосередньо до виведення багатогрупових рівнянь. Перш за все весь інтервал енергій $0 < E < E_{\max}$, де $E_{\max} \approx 10$ МеВ, розділимо на деяку кількість G інтервалів. Такий поділ зручно провести так, щоб відношення E_j/E_{j+1} не залежало від енергії. Тоді інтервал енергії

$\Delta u = u_{j+1} - u_j$ не буде залежати від номера групи. Звичайно, можуть існувати задачі, коли недоцільно розбивати весь інтервал на рівні частини Δu . Наприклад, при наявності вузького резонансу в поглинанні потік нейтронів у межах цього резонансу має сильну залежність від енергії. Тому варто було б інтервал енергій в околі цього резонансу виділити в окрему групу. Звичайно, більш докладно аналізують ту групу, яка нас найбільше цікавить і яка має особливості. У практичних розрахунках широко розповсюджений розділ інтервалу енергій на 4, 16, 26, 27, 44 груп і більше, з яких останні групи описують теплові нейтрони.

Проінтегруємо рівняння (4.71) в інтервалі $E_j < E < E_{j+1}$ і позначимо

$$\begin{aligned}\Phi_j(\vec{r}) &= \int_{E_{j+1}}^{E_j} \Phi(\vec{r}, E) dE, \\ \Sigma_{aj} &= [\Phi_j(\vec{r})]^{-1} \int_{E_{j+1}}^{E_j} \Sigma_a(E) \Phi(\vec{r}, E) dE, \\ \Sigma_{sj} &= [\Phi_j(\vec{r})]^{-1} \int_{E_{j+1}}^{E_j} \Sigma_s(E) \Phi(\vec{r}, E) dE, \\ D_j &= [\Phi_j(\vec{r})]^{-1} \int_{E_{j+1}}^{E_j} D(E) \Phi(\vec{r}, E) dE.\end{aligned}\tag{4.72}$$

Якщо густину потоку $\Phi(\vec{r}, E)$ можна подати у вигляді $\Phi(\vec{r})\Phi(E)$, то групові константи не будуть залежати від координат при умові, що вихідні константи від них не залежать. Інтеграл у правій частині рівняння (4.71) можна подати у вигляді

$$\int_0^{\infty} \nu(E) \Sigma_f(E) \Phi(\vec{r}, E) dE = \sum_j \nu_j \Sigma_{ff} \Phi_j(\vec{r}),\tag{4.73}$$

де

$$\nu_j \Sigma_{ff} = [\Phi(\vec{r})]^{-1} \int_{E_{j+1}}^{E_j} \nu(E) \Sigma_f(E) \Phi(\vec{r}, E) dE,$$

а також

$$\chi_j = \int_{E_{j+1}}^{E_j} \chi(E) dE.$$

Застосуємо перетворення для інтеграла в лівій частині рівняння (4.71)

$$\int_{E_{j+1}}^{E_j} dE \int_0^{\infty} \Sigma_s(E') W(E', E) \Phi(\vec{r}, E) dE' = \sum_{j' \neq j} \Sigma_{j'j} \Phi_{j'}(\vec{r}) + \Sigma_{jj} \Phi_j(\vec{r}), \quad (4.74)$$

де $\Sigma_{j'j}$ - переріз переходу нейтрона з групи j' в групу j , а Σ_{jj} - переріз розсіювання, що залишає нейтрон у групі j . Різниця $\Sigma_{\text{вих}} = \Sigma_{sj} - \Sigma_{jj}$ дає переріз виходу з даної групи.

Використовуючи наведені вище означення, багатогрупові рівняння дифузійного наближення можна записати у вигляді

$$\bar{\nabla} [D_j \bar{\nabla} \Phi_j(\vec{r})] - (\Sigma_{aj} + \Sigma_{\text{вих}}) \Phi_j(\vec{r}) + \sum_{j' \neq j} \Sigma_{j'j} \Phi_{j'}(\vec{r}) = -\chi_j \sum_i \nu_i \Sigma_{fi} \Phi_i(\vec{r}). \quad (4.75)$$

Саме такі багатогрупові рівняння використовують для розрахунків ядерних реакторів. Більш докладну інформацію можна отримати з [8] і [9].

Для розрахунків великих реакторів на теплових нейтронах достатнім буває двогрупове наближення, тобто в спектрі виділяють теплові нейтрони і нейтрони, що сповільнюються. Тоді рівняння для цих двох груп набуває вигляду

$$\begin{aligned} D_1 \Delta \Phi_1 - (\Sigma_{12} + \Sigma_{a1}) \Phi_1 &= -\nu (\Sigma_{f1} \Phi_1 + \Sigma_{f2} \Phi_2) \quad - \text{швидка група}, \\ D_2 \Delta \Phi_2 - \Sigma_{a2} \Phi_2 &= -\Sigma_{12} \Phi_1 \quad - \text{теплова група}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Цікаво порівняти ці рівняння з отриманими раніше результатами. При цьому треба пам'ятати, що вікове наближення не враховує поглинання нейтронів. Таке порівняння та аналіз змісту коефіцієнтів залишаємо читачеві.

Розділ 5

Теорія відбивачів

§ 5.1. Коефіцієнт відбивання нейтронів

Задача про критичні розміри реактора є центральною задачею фізики реакторів. У розділі 3 ми розглянули декілька гомогенних (однорідних) реакторів з різною геометрією активної зони. Вважалося, що ці реактори межують з вакуумом, який поглинає всі нейтрони, що виходять з активної зони. Зрозуміло, що така ситуація є ідеалізованою, і активна зона реальних реакторів завжди огорожена біологічним захистом і деякими конструкційними елементами, наприклад металічною оболонкою.

Матеріали, що сильно поглинають нейтрони, не дуже сильно відрізняються від вакууму за своїм впливом на активну зону і на розподіл нейтронів у реакторі. Їхня дія визначається під час розрахунку транспортного перерізу для нейтронів Σ_{tr} , який визначає ефективну границю реактора (див. рівняння (3.9б)). З другого боку, зрозуміло, що коли активна зона огорожена матеріалами з малими перерізами поглинання нейтронів, деяка частина нейтронів завдяки розсіюванню на ядрах таких матеріалів буде наvertатись назад в активну зону реактора. Ця додаткова кількість нейтронів буде також приймати участь у процесах розмноження нейтронів. Отже, наявність матеріалів, які майже не поглинають нейтронів, на границях активної зони реактора призводить до економії нейтронів і до зменшення критичних розмірів і маси активної зони. Більше того, активну зону можна огорожувати матеріалами, які не тільки не поглинають нейтрони, але й збільшують (відносно) їх кількість за рахунок $(n, 2n)$, (α, n) і (γ, n) реакцій, а отже, дають додаткове зменшення критичних розмірів реактора.

Конструкцію з матеріалів з малим перерізом поглинання нейтронів, яка огорожує активну зону реактора, називають *відбивачем*. Ефективність такої конструкції характеризують *коефіцієнтом відбиття нейтронів* β , або *альбедо*. За визначенням цей коефіцієнт рівний відношенню однобічних струмів нейтронів, що перетинають границю поділу

$$\beta = J^- / J^+. \quad (5.1)$$

Для того щоб отримати явний вигляд коефіцієнта β , необхідно дати точне визначення струму нейтронів J , а також однобічних струмів J^- , J^+ . Зрозуміло, що вектор струму повинен визначатися як швидкістю, так і напрямком руху нейтронів, тобто $\vec{\Omega} = \vec{v}/v$. У моноенергетичному реакторі густина потоку нейтронів залежить від координат, напрямку руху нейтронів і часу $\Phi = \Phi(r, \Omega, t)$. З курсу квантової механіки відомо, що довільну квадратично-

інтегровану функцію напрямку Ω можна розкласти в ряд за повною системою кульових функцій

$$f(\Omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j C_{j,m} Y_{j,m}. \quad (5.2)$$

Якщо функція $f(\Omega)$ слабо залежить від напрямку Ω , то можна обмежитись першими двома членами ряду по j ($j = 0, 1$)

$$f(\Omega) = \frac{C_0}{4\pi} + \frac{3}{4\pi} (\vec{\Omega} \vec{C}_1) + \dots, \quad (5.2a)$$

де

$$C_0 = \int f(\Omega) d\Omega, \quad \vec{C}_1 = \int f(\Omega) \vec{\Omega} d\Omega, \quad (5.3)$$

тобто C_0 і C_1 - нульовий та перший кутові моменти функції $f(\Omega)$.

Стосовно до функції $\Phi(r, \Omega, t)$ розклад виразу (5.2a) має вигляд

$$\Phi(r, \Omega, t) = \frac{\Phi(r, t)}{4\pi} + \frac{3}{4\pi} (\vec{\Omega} \vec{J}), \quad (5.4)$$

де функція $\Phi(r, t)$ визначається звичайним чином як $\int \Phi(r, \Omega, t) d\Omega$, а $J(r, t)$ - функція струму нейтронів визначається як перший кутовий момент густини потоку нейтронів

$$\vec{J}(r, t) = \int \Phi(r, \Omega, t) \vec{\Omega} d\Omega. \quad (5.5)$$

Загальний струм нейтронів можна подати у вигляді суми однобічних струмів J^- і J^+

$$\vec{J} = \vec{J}^-(r, t) + \vec{J}^+(r, t) = \int_{S^-} \Phi(r, \Omega, t) \vec{\Omega} d\Omega + \int_{S^+} \Phi(r, \Omega, t) \vec{\Omega} d\Omega, \quad (5.6)$$

де $S^+ + S^- = S$ - поверхня одиничної кулі з центром у точці r . Площина, яка перпендикулярна до вектора \vec{J} , ділить одиничну кулю на дві частини (рис. 5.1): S^+ - перетинає промінь, що направлений уздовж \vec{J} , і S^- - доповнює S^+ до S . Далі нехай $\mu = \cos(\theta)$, де θ - кут між $\vec{\Omega}$ і \vec{J} . Тоді $d\Omega = d\mu d\psi$ і, враховуючи рівняння (5.4), для J^+ маємо

$$\vec{J}^+ = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 d\mu \left(\vec{\Omega}_{\perp} + \mu \frac{\vec{J}}{J} \right) \frac{\Phi}{4\pi} + \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 d\mu \left(\vec{\Omega}_{\perp} + \mu \frac{\vec{J}}{J} \right) \frac{3}{4\pi} \mu J. \quad (5.7)$$

В рівнянні (5.7) $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\perp} + \mu \vec{J}/J$, а Ω_{\perp} - проекція орта $\vec{\Omega}$ на площину (x, y) . Під час інтегрування по ψ доданок з Ω_{\perp} дає нуль.

Отже,

$$\vec{J}^+ = \frac{\Phi(r, t)}{4} \frac{\vec{J}}{J} + \frac{1}{2} \vec{J}(r, t), \quad (5.8)$$

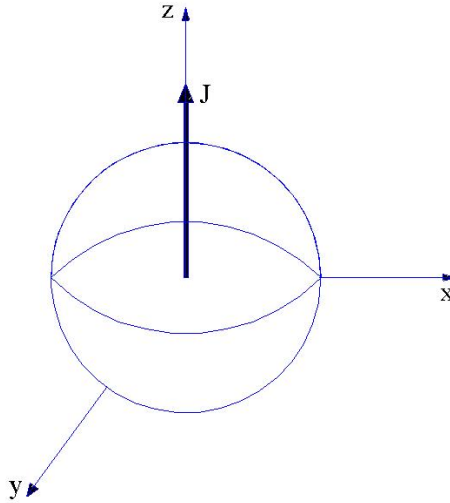


Рис. 5.1. Схема визначення однобічних струмів. Система координат вибирається так, щоб вектор струму був направлений вздовж осі (OZ).

аналогічно для J^- маємо

$$\vec{J}^- = -\frac{\Phi(r,t)}{4} \frac{\vec{J}}{J} + \frac{1}{2} \vec{J}(r,t).$$

Знаючи тепер вирази для однобічних струмів і враховуючи закон Фіка $J = -D\nabla\Phi$, неважко отримати вираз для коефіцієнта відбиття нейтронів β (у дифузійному наближенні)

$$\beta = \frac{|J^-|}{|J^+|} = \frac{1 + 2D\nabla\Phi/\Phi}{1 - 2D\nabla\Phi/\Phi}. \quad (5.9)$$

Використовуючи поняття коефіцієнта відбиття, або альbedo, можна переформулювати граничні умови на границі активної зони і відбивача. Але перш ніж застосовувати поняття альbedo, варто визначити рівняння, яке треба використовувати для визначення критичних розмірів реактора з відбивачем.

§ 5.2. Урахування сповільнення в моноенергетичному рівнянні. Ефективний коефіцієнт дифузії

Для визначення критичних розмірів реактора з відбивачем не можна використовувати дифузійне рівняння моноенергетичних нейтронів, оскільки поблизу границі з відбивачем умови використання цього рівняння порушуються. Однак для великих реакторів, коли економія в критичних розмірах завдяки застосуванню відбивача є невеликою, а також коли непотрібна висока точність розрахунків, тобто коли розрахунки носять характер оцінок, тоді варто отримати прості аналітичні результати за допомогою дифузійного рівняння, яке враховує нейтрони, що сповільнюються. Розрахунки в цьому

випадку виявляються значно простішими, ніж проміжні розрахунки за теорією двох груп нейтронів.

У розділі 3 ми отримали вираз для джерела нейтронів у вигляді $Q = K_{\infty} \sum_a \Phi$, яке не враховує в явному вигляді процес сповільнення нейтронів. Якщо вважати, що є справедливою вікова теорія сповільнення нейтронів, і згадати вираз (4.46) для функції точкового джерела моноенергетичних нейтронів, тоді вираз для Q можна подати у вигляді

$$Q = K_{\infty} \int g(\vec{r}, \vec{r}', \tau_T) \Phi(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (5.10)$$

де функція $g(r-r', \tau_T)$ означає ймовірність того, що швидкий нейтрон, який народився в точці r' , сповільниться до теплової енергії в точці r ; інтегрування у виразі (5.10) проводиться по всьому об'єму реактора. Для нескінченного однорідного середовища функція $g(r-r', \tau_T)$ має вигляд

$$g(\vec{r} - \vec{r}', \tau_T) = (4\pi\tau_T)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(r-r')^2}{4\tau_T}}, \quad (5.11)$$

Тут варто згадати, що ця величина отримана без урахування поглинання, яке входить у рівняння віткового наближення у вигляді лінійного члена. Такі лінійні члени легко враховуються введенням інтегруючого множника, який якраз і являє собою ймовірність уникнути резонансного поглинання. Отже, з урахуванням поглинання функція $g(r-r', \tau_T)$ замінюється функцією $G(r-r', \tau) = P_T g(r-r', \tau_T)$, де P_T - ймовірність уникнути резонансного поглинання при сповільненні до теплової енергії.

Таким чином, можна прийняти рівняння, яке описує дифузію теплових нейтронів у великому реакторі у вигляді

$$-DV^2\Phi(\vec{r}) + \sum_a \Phi(\vec{r}) = \int v\Sigma_f(\vec{r}')G(r-r')dr'. \quad (5.12)$$

Для сферично-симетричної системи, яку ми розглядаємо, підінтегральна функція дуже швидко спадає з відстанню від центра сфери. Тому без великої помилки інтегрування можна розповсюдити на весь простір.

У цьому рівнянні інтеграл можна оцінити, розклавши потік $\Phi(\vec{r}')$ у ряд в околі точки \vec{r} і обмежившись першими трьома членами розкладу:

$$\Phi(\vec{r}') = \Phi(\vec{r}) + (\vec{r} - \vec{r}')\nabla\Phi(\vec{r}) + r'[(r-r')\nabla]^2\Phi(\vec{r}) + \dots$$

Підстановка цього виразу в інтеграл та інтегрування трьох доданків з урахуванням вигляду функції $G(r-r', \tau_T)$ дає наступне:

$$\begin{aligned} v\Sigma_f \int \Phi(\vec{r})G(r-r')dr' &= v\Sigma_f P_T \Phi(\vec{r}), \\ v\Sigma_f \int (r-r')\nabla\Phi(r)G(r-r')dr' &= 0, \\ v\Sigma_f \int [(r-r')\nabla]^2\Phi(\vec{r})G(r-r')dr' &= v\Sigma_f \tau_T P_T \nabla^2\Phi(\vec{r}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Таким чином, рівняння дифузії теплових нейтронів у великому реакторі приймає вигляд

$$(D + v\Sigma_f P_T \tau_T) \nabla^2 \Phi(\vec{r}) + (v\Sigma_f P_T - \Sigma_a) \Phi(\vec{r}) = 0. \quad (5.14)$$

Якщо тепер ввести позначення

$$B^2 = \frac{v\Sigma_f P_T - \Sigma_a}{D + v\Sigma_f P_T \tau_T} = \frac{k_\infty - 1}{L^2 + k_\infty \tau_T}, \quad (5.15)$$

де

$$k_\infty = \frac{v\Sigma_f P_T}{\Sigma_a}, \quad L = \frac{D}{\Sigma_a},$$

то рівняння зводиться до звичайного вигляду, яке можна досліджувати на критичність знайомими методами. У виразі (5.15) ми позначили матеріальний параметр як B^2 (на відміну від розділу 3). Таке позначення є загальноновизначеним в англійській літературі і воно походить від англійського слова “backling” – виток.

Повернемося тепер до задачі відбивачів.

Ще раз відзначимо, що реактор із відбивачем не можна аналізувати в одногруповому наближенні, оскільки швидкі нейтрони не народжуються у відбивачі. Отже, просторовий розподіл швидких і теплових нейтронів у реакторі з відбивачем суттєво різний. Але у великих реакторах на теплових нейтронах, коли врахування відбивача дає незначний внесок до критичних розмірів реактора, аналітичні результати, отримані за допомогою одногрупового наближення (особливо з урахуванням сповільнення), можуть дати навіть непогані кількісні результати.

Реактор із відбивачем фактично являє собою двозонну систему, де в кожній зоні присутні матеріали з різними властивостями. Для розрахунку такої системи треба задати рівняння, що описують розподіл нейтронів у кожній зоні, і граничні умови на границі між зонами і на зовнішній границі системи. Ми будемо вважати, що активна зона і відбивач являють собою гомогенні середовища, і на відміну від активної зони відбивач не містить матеріалів, що розмножують нейтрони. Така система описується двома рівняннями для густини потоку нейтронів $\Phi_{az}(\vec{r})$ і $\Phi_e(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_{az}(\vec{r}) + B^2 \Phi_{az}(\vec{r}) &= 0, \\ \nabla^2 \Phi_e(\vec{r}) - \chi_e^2 \Phi_e(\vec{r}) &= 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

де $B^2 = \frac{1}{D_{az}} [v\Sigma_f - \Sigma_a^{az}]$ - матеріальний параметр без урахування сповіль-

нення, або $B^2 = \frac{v\Sigma_f P_T - \Sigma_a^{az}}{D^{az} + v\Sigma_f P_T \tau_T}$ - з урахуванням сповільнення; $\chi_e^2 = \frac{\Sigma_a^e}{D}$.

На величини $\Phi(\vec{r})$ треба накласти такі граничні умови:
у центрі активної зони потік є симетричним або скінченним;
на поверхні між активною зоною і відбивачем потік повинен бути неперервним;
на поверхні між активною зоною і відбивачем повинен бути неперервним також струм нейтронів;
потік нейтронів повинен обертатись у нуль на зовнішній екстрапольованій границі відбивача.

§ 5.3. Критичне рівняння для реактора з відбивачем. Сферична геометрія

Розглянемо тепер сферично-симетричний реактор радіуса R_0 і сферичний шар відбивача з радіусом R_1 . Тоді загальний розв'язок рівнянь (5.16) має вигляд

$$\begin{aligned}\Phi_{az}(\vec{r}) = \Phi_{az}(r) &= A_{az} \frac{\sin Br}{r} + C_{az} \frac{\cos Br}{r}, \\ \Phi_{\epsilon}(\vec{r}) = \Phi_{\epsilon}(r) &= A_{\epsilon} \frac{sh\chi_{\epsilon} r}{r} + C_{\epsilon} \frac{ch\chi_{\epsilon} r}{r}.\end{aligned}\quad (5.17)$$

Виходячи з першої умови, треба покласти $C_{az} = 0$; оскільки функція $\frac{\cos Br}{r}$ має особливість при $r = 0$.

Четверта умова вимагає покласти потік нулю на екстрапольованій границі системи $\tilde{R}_1 = R_1 + 0,71\lambda_{TR}$. Тоді рівняння (5.17) приймає вигляд

$$\begin{aligned}\Phi_{az} &= A \frac{\sin Br}{r}, \\ \Phi_{\epsilon} &= C \frac{sh\chi_{\epsilon}(\tilde{R} - r)}{r}.\end{aligned}\quad (5.18)$$

З умов неперервності витікає

$$\begin{aligned}\Phi_{az}(R_0) &= \Phi_{\epsilon}(R_0), \\ D_{az}\Phi'_{az}(R_0) &= D_{\epsilon}\Phi'_{\epsilon}(R_0).\end{aligned}\quad (5.19)$$

Перше з цих рівнянь дає співвідношення між A і C

$$C = \frac{A \sin BR_0}{sh\chi_{\epsilon}(\tilde{R}_1 - R_0)}, \quad (5.20)$$

а підстановка рівняння (5.18) в друге рівняння дає рівняння критичності

$$BR_0 \text{ctg} BR_0 - 1 = \frac{D_{az}}{D_{\epsilon}} \left[\chi_{\epsilon} R_0 \text{cth} \chi_{\epsilon} (\tilde{R}_1 - R_0) + 1 \right]. \quad (5.21)$$

Оскільки відбивач повертає частину нейтронів назад в активну зону, то при тій же концентрації палива система з відбивачем буде мати менший критичний розмір порівняно із системою без відбивача. Ця різниця в критичних розмірах називається ефективним доданком.

Спробуємо оцінити ефективний доданок до сферичного реактора, обумовлений дуже тонким відбивачем. Припустимо, що критичний радіус системи без відбивача дорівнює R_0^0 . Умову тонкого відбивача можна записати у вигляді $\chi_\epsilon(\tilde{R}_1 - R_0) \ll 1$, і гіперболічний котангенс розкласти в ряд ($\text{cthx} \approx \frac{1}{x} + x/3$). Тоді критичне рівняння приймає приблизний вигляд

$$BR_0 \text{ctg} BR_0 - 1 \approx -\frac{D_\epsilon}{D_{a3}} \left(\frac{R_0}{\tilde{R}_1 - R_0} + 1 \right). \quad (5.22)$$

Права частина цього рівняння є великою, отже $BR_0 \approx \pi$ і можна скористатись розкладом для ctgx , якщо $x = \pi - \epsilon$, $\epsilon \ll 1$ ($\text{ctg}(\pi - \epsilon) \approx -\frac{1}{\epsilon}$). Тоді

$$\frac{BR_0}{BR_0 - \pi} \approx -\frac{D_\epsilon}{D_{a3}} \left(\frac{R_0}{T} + 1 \right), \quad T = \tilde{R}_1 - R_0 \quad (5.23)$$

і

$$R_0 \approx \frac{\pi}{B} - \frac{D_{a3}}{D_\epsilon} T$$

Для сферичного реактора без відбивача (див. розділ 3) $R_0 = \frac{\pi}{B}$, отже

для тонкого відбивача ефективний доданок рівний $\frac{D_{a3}}{D_\epsilon} T$, тобто введення

відбивача з екстрапольованою товщиною $T = \tilde{R}_1 - R_0$ дозволяє зекономити в критичному радіусі активної зони практично таку саму величину T , оскільки в більшості випадків $D_{a3} \approx D_\epsilon$.

Звичайно, якщо умова малої товщини відбивача не виконується, то для визначення R_0 треба розв'язувати трансцендентне рівняння (5.21). Такий розв'язок подано на рис. 5.2, звідки видно, що для великої товщини відбивача подальше її збільшення практично не дає збільшення ефективного доданка, де g – ефективний доданок.

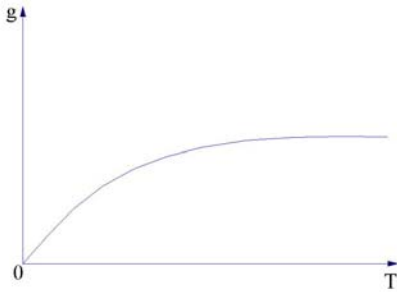


Рис. 5.2. Залежність ефективного доданку від товщини відбивача

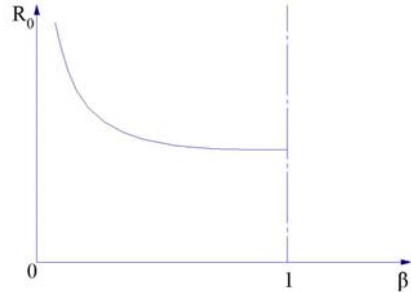


Рис. 5.3. Залежність критичного радіуса сферичного реактора від альbedo

Розрахунок густини потоку нейтронів у рамках одногрупового дифузійного наближення можна також провести за допомогою альbedo β , яке ми ввели в першому параграфі.

У цьому випадку граничні умови на поверхні між активною зоною і відбивачем приймають вигляд

$$\begin{aligned} (1) \quad \Phi_{az}(r) &\neq \infty, \quad r \in R_0, \\ (2) \quad J_{-}^{az}(R_0) &= \beta J_{+}^{az}(R_0). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Умові (1) задовольняє розв'язок рівняння (5.18). Якщо його підставити в умову (2) з урахуванням рівнянь (5.8) і (5.9), отримаємо

$$\frac{D_{az}}{R_0} (1 - BR_0 \operatorname{ctg} BR_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right). \quad (5.25)$$

Це рівняння критичності, що відповідає рівнянню (5.21). Використовуючи розклад для $\operatorname{ctg}(\pi - \varepsilon)$, можна отримати граничні форми рівняння (5.25):

$$\begin{aligned} \beta \rightarrow 0; \quad B &\rightarrow \frac{\pi}{R_0 + 2D_{az}}, \quad \frac{R_0}{2D_{az}} \gg 1, \\ \beta \rightarrow 1; \quad BR_0 \operatorname{ctg} BR_0 &= 1. \end{aligned} \quad (5.26)$$

При незмінній концентрації речовин в активній зоні критичний радіус активної зони зменшується із збільшенням альbedo. Графічно залежність критичного радіуса від альbedo подано на рис. 5.3. Фізично збільшити альbedo можна за рахунок збільшення товщини відбивача, збільшенням макроскопічного перерізу розсіювання відбивача і зменшенням його макроскопічного перерізу поглинання.

Під час проведення чисельних розрахунків реакторів у багатогрупових наближеннях часто вводять альbedo для кожної енергетичної групи. Ці альbedo розраховуються для найбільш поширених матеріалів відбивачів і розміщуються у вигляді таблиці в пам'яті комп'ютера.

§ 5.4. Критичне рівняння для реактора з відбивачем. Циліндрична геометрія

Аналітично задача про критичний розмір циліндричного реактора, що з усіх боків огорожений відбивачем, не може бути розв'язана. Можна аналітично розв'язати задачу про критичний розмір циліндричного реактора з бічним відбивачем і реактор з торцевими відбивачами.

Розглянемо циліндричну активну зону з відбивачем на бічній поверхні. Відповідні рівняння у випадку аксіальної симетрії мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_{a3}(\rho, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_{a3}(\rho, z) + B^2 \Phi_{a3} &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_6(\rho, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_6(\rho, z) - \chi_6^2 \Phi_6 &= 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Розв'язки цих рівнянь повинні задовольняти граничним умовам, що описані в кінці § 5.2.

У цих рівняннях змінні розділяються, тобто

$$\begin{aligned} \Phi_{a3}(\rho, z) &= F_{a3}(\rho) G_{a3}(z), \\ \Phi_6(\rho, z) &= F_6(\rho) G_6(z), \end{aligned} \quad (5.28)$$

що дає

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho F_{a3}(\rho)} \frac{d}{d\rho} [\rho F'_{a3}(\rho)] + \frac{G''_{a3}(z)}{G_{a3}(z)} &= -\beta^2, \\ \frac{1}{\rho F_6(\rho)} \frac{d}{d\rho} [\rho F'_6(\rho)] + \frac{G''_6(z)}{G_6(z)} &= \chi_6^2. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Сума двох незалежних величин може дорівнювати сталій величині, тільки якщо кожна з цих величин стала. Тобто

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho F_{a3}(\rho)} \frac{d}{d\rho} [\rho F'_{a3}(\rho)] &= -\lambda_{a3}^2, & \frac{1}{\rho F_6(\rho)} \frac{d}{d\rho} [\rho F'_6(\rho)] &= -\lambda_6^2, \\ \frac{G''_{a3}(z)}{G_{a3}(z)} &= -\mu_{a3}^2, & \frac{G''_6(z)}{G_6(z)} &= -\mu_6^2. \end{aligned} \quad (5.30)$$

З рівняння (5.29) випливає, що

$$\lambda_{a3}^2 + \mu_{a3}^2 = \beta^2; \quad \lambda_6^2 - \mu_6^2 = \chi_6^2.$$

Загальні розв'язки рівнянь (5.30) мають вигляд

$$\begin{aligned} F_{a3}(\rho) &= A_1 J_0(\lambda_{a3} \rho) + A_2 Y_0(\lambda_{a3} \rho), \\ F_6(\rho) &= C_1 I_0(\lambda_6 \rho) + C_2 K_0(\lambda_6 \rho), \\ G_{a3}(z) &= A_3 \cos \mu_{a3} z + A_4 \sin \mu_{a3} z, \\ G_6(z) &= C_3 \cos \mu_6 z + C_4 \sin \mu_6 z. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Для того щоб задовольнити першій умові, треба покласти $A_2 = A_4 = C_4 = 0$, оскільки функція Неймана має особливість при $\rho = 0$, а функція $\sin \mu z$ несиметрична відносно $z = 0$.

Розглянемо другу умову рівності потоків на поверхні між активною зоною та відбивачем. З рівняння (5.31) маємо

$$A_1 J_0(\lambda_{az} \rho_0) A_3 \cos \mu_{az} z = [C_1 I_0(\lambda_g \rho_0) + C_2 K_0(\lambda_g \rho_0)] C_3 \cos \mu_g z, \quad (5.32)$$

де ρ_0 – радіус активної зони. Цьому рівнянню можна задовольнити якщо $\mu_{az} = \mu_g = \mu$. Об'єднуючи константи A_1 , A_2 і C_3 в одну постійну A , можна записати

$$\begin{aligned} \Phi_{az}(\rho, z) &= A J_0(\lambda_{az} \rho) \cos \mu z, \\ \Phi_g(\rho, z) &= [C_1 I_0(\lambda_g \rho) + C_2 K_0(\lambda_g \rho)] \cos \mu z. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Спробуємо задовольнити тепер умові (4) про рівність потоку нулевій на екстрапольованій зовнішній границі. На торцевих поверхнях

$$\begin{aligned} \Phi_{az}(\rho, \tilde{h}) &= A J_0(\lambda_{az} \rho) \cos \mu \tilde{h} = 0, \\ \Phi_g(\rho, \tilde{h}) &= [C_1 I_0(\lambda_g \rho) + C_2 K_0(\lambda_g \rho)] \cos \mu \tilde{h} = 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

У цих двох рівняннях величина \tilde{h} - екстрапольована границя - різна, оскільки вона визначається транспортною довжиною вільного пробігу різних матеріалів активної зони і відбивача. Але для великих реакторів із розмірами, значно більшими довжини екстраполяції, можна вважати \tilde{h} приблизно однаковими. В усякому разі, рівняння можна задовольнити, коли

$$\cos \mu \tilde{h} = 0; \quad \mu = \frac{\pi}{2\tilde{h}},$$

де ми використали найбільше власне значення.

Вимога обертання в нуль потоку на зовнішній бічній екстрапольованій границі дає співвідношення між коефіцієнтами C_1 і C_2

$$C_1 = \frac{C_2 K_0(\lambda_g \tilde{\rho}_1)}{I_0(\lambda_g \tilde{\rho}_1)}, \quad (5.35)$$

де $\tilde{\rho}_1$ – зовнішній радіус відбивача. Якщо позначити

$$L_0(\rho) = I_0(\lambda_g \tilde{\rho}_1) K_0(\lambda_g \rho) - I_0(\lambda_g \rho) K_0(\lambda_g \tilde{\rho}_1),$$

то потоки можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_{az}(\rho, z) &= A J_0(\lambda_{az} \rho) \cos \frac{\pi z}{2\tilde{h}}, \\ \Phi_g(\rho, z) &= C L_0(\rho) \cos \frac{\pi z}{2\tilde{h}}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

де коефіцієнти A і C треба визначити з умови неперервності потоку та струму на поверхні розділу активної зони і відбивача

$$AJ_0(\lambda_{a3}\rho_0) = CL_0(\rho_0),$$

$$D_{a3}AJ'_0(\lambda_{a3}\rho_0) = D_eCL'_0(\rho_0).$$

Одне з цих рівнянь можна використати для отримання співвідношення між A і C . Але розв'язок для потоків завжди повинен містити одну довільну сталу, яка визначається рівнем потужності реактора. Відношення двох рівнянь не містить довільних сталих і визначає рівняння критичності

$$\frac{D_{a3}J'_0(\lambda_{a3}\rho_0)}{J_0(\lambda_{a3}\rho_0)} = \frac{D_eL'_0(\rho_0)}{L_0(\rho_0)}. \quad (5.37)$$

У цьому рівнянні всі величини відомі за виключенням, наприклад, концентрації палива. Звичайно ця концентрація є низькою, отже можна вважати, що коефіцієнт дифузії D_{a3} також відомий, оскільки він в основному визначається сповільнювачем. Тоді це рівняння можна використати для визначення λ_{a3} . А за допомогою λ_{a3} можна визначити також лапсасіан

$$B^2 = \left(\frac{\pi}{2\tilde{h}} \right)^2 + \lambda_{a3}^2.$$

Тому концентрація палива може бути визначена з визначення B^2 (без урахування сповільнення)

$$\frac{v\Sigma_f - \Sigma_{\theta}^{a3}}{D} = B^2 = \left(\frac{\pi}{2\tilde{h}} \right)^2 + \lambda_{a3}^2. \quad (5.38)$$

Аналогічно можна розглянути циліндричну активну зону з торцевими відбивачами, оскільки ми в цьому випадку маємо ті ж самі рівняння, але дещо інші граничні умови.

Розділ 6

Нестационарні процеси та теорія регуляторів

§ 6.1. Нестационарний процес у реакторі в рамках одногрупового дифузійного наближення

Розглянемо зміну нейтронного потоку в часі (нестационарний процес) у рамках моноенергетичного наближення й обмежимося випадком однорідної активної зони без відбивача. Нестационарне рівняння балансу нейтронів має вигляд

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = D \Delta \Phi - \sum_a \Phi + k_{\infty} \sum_a \Phi, \quad (6.1)$$

тобто швидкість зміни густини потоку нейтронів в одиниці об'єму навколо точки \vec{r} визначається швидкістю дифузії, швидкістю поглинання і швидкістю генерації нейтронів поділу в одиниці об'єму. Граничні умови не змінюються в порівнянні із стаціонарним процесом, тобто густина потоку нейтронів на екстрапольованій границі обертається в нуль:

$$\Phi(\vec{r}, t) / S = 0, \quad (6.2)$$

де S - границя активної зони з об'ємом V .

На додаток до граничних умов для визначення функції $\Phi(\vec{r}, t)$ необхідно також додати початкові умови, тобто розподіл густини потоку нейтронів у деякий момент часу $t = 0$, від якого починаємо змінювати параметри реактора.

Нехай

$$\Phi(\vec{r}, t = 0) = f(\vec{r}), \quad (6.3)$$

де $f(\vec{r})$ - деяка функція, яка є розв'язком стаціонарного рівняння дифузії нейтронів. Якщо ввести матеріальний параметр $B^2 = (k_{\infty} - 1) / L^2$, то рівняння (6.1) можна переписати у вигляді

$$\frac{1}{D\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Delta \Phi + B^2 \Phi. \quad (6.1a)$$

Розв'язок цього рівняння легко отримати, якщо використати властивість повноти власних функцій оператора Гельмгольца. Якщо ці функції нормовані, то

$$\int_V \psi_m^* \psi_n d\vec{r} = \delta_{mn}, \quad (6.4)$$

і довільну функцію $\phi(\vec{r})$ (квадратично інтегровану) можна розкласти в узагальнений ряд Фур'є

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \int \phi(\vec{r}') \psi_m^*(\vec{r}') d\vec{r}' \psi_m(\vec{r}), \quad (6.5)$$

який за відомими теоремами математичного аналізу збігається за нормою. Якщо ввести позначення для норми функції і скалярного добутку двох функцій, відповідно

$$\|\phi(\vec{r})\|^2 = \int_V \phi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (6.6)$$

$$(\phi, \psi) = \int_V \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (6.7)$$

То з рівняння (6.5) випливає узагальнена теорема Піфагора

$$\|\phi(\vec{r})\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |(\phi, \psi_m)|^2. \quad (6.8)$$

Використовуючи рівності (6.4 - 6.8), розв'язок рівняння (6.1a) можна шукати у вигляді

$$\Phi(\vec{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(t) \psi_m(\vec{r}). \quad (6.9)$$

Підставимо цей розв'язок у рівняння і врахуємо, що $\Delta \psi_m = -\alpha_m^2 \psi_m$. Тоді

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m(t) (B^2 - \alpha_m^2) \psi_m(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{D\nu} C_m'(t) \psi_m(\vec{r}), \quad (6.10)$$

де штрих означає похідну за часом. Оскільки функції ψ_m лінійно незалежні, то рівність (6.10) можлива тільки, якщо рівні коефіцієнти біля функцій ψ_m :

$$C_m(t) (B^2 - \alpha_m^2) = \frac{1}{D\nu} C_m'(t). \quad (6.11)$$

Рівняння (6.11) являє собою рівняння для визначення коефіцієнтів $C_m(t)$, розв'язок якого має вигляд

$$C_m(t) = C_m(0) \exp\{D\nu(B^2 - \alpha_m^2)t\}. \quad (6.12)$$

Таким чином, для $\Phi(r, t)$ маємо

$$\Phi(r, t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(0) \exp\{D\nu(B^2 - \alpha_m^2)t\} \psi_m(\vec{r}), \quad (6.13)$$

де

$$C_m(0) = \int_V \phi(\vec{r}) \psi_m^*(\vec{r}) d\vec{r} = (\phi, \psi_m). \quad (6.14)$$

Цей розв'язок має одну властивість: якщо $\phi(\vec{r}) \geq 0$, то і $\Phi(r, t) > 0$, якщо $\vec{r} \in V$, що і потрібно за фізичним змістом функції $\Phi(\vec{r}, t)$.

Виділимо з ряду рівняння (6.13) перший член з $m = 0$ і запишемо різницю

$$\Phi(\vec{r}, t) - C_0\psi_0 e^{D\nu(B^2 - \alpha_0^2)t} = \sum_{m=1}^{\infty} (\phi\psi_m)\psi_m e^{D\nu(B^2 - \alpha_0^2)t} \quad (6.15)$$

або

$$\Phi(r, t) e^{-D\nu(B^2 - \alpha_0^2)t} - C_0\psi_0 = \sum_{m=1}^{\infty} (\phi\psi_m)\psi_m e^{D\nu(\alpha_0^2 - \alpha_m^2)t}. \quad (6.15a)$$

За узагальненою теоремою Піфагора

$$\|\Phi(r, t) e^{D\nu(B^2 - \alpha_0^2)t} - C_0\psi_0\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |(\phi\psi_m)|^2 e^{2D\nu(B^2 - \alpha_0^2)t} \quad (6.16)$$

Оскільки $(\alpha_0^2 - \alpha_m^2) \leq \alpha_0^2 - \alpha_1^2 < 0$, то

$$\|\Phi(r, t) e^{-D\nu(B^2 - \alpha_0^2)t} - C_0\psi_0\|^2 \leq e^{2D\nu(\alpha_0^2 - \alpha_m^2)t} \sum_{m=1}^{\infty} |(\phi\psi_m)|^2 = e^{2D\nu(\alpha_0^2 - \alpha_m^2)t} \|\phi\|^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Тобто асимптотично, якщо $t \rightarrow \infty$ функція $\Phi(r, t)$ має вигляд

$$\Phi(r, t) \approx C_0\psi_0(\vec{r}) \exp(D\nu(B^2 - \alpha_0^2)t) = C_0\psi_0 \exp(\omega_0 t) \quad (6.17)$$

Величина

$$\omega_0 = D\nu(B^2 - \alpha_0^2) \quad (6.18)$$

має зміст постійного розгону або затухання ланцюгової ядерної реакції, а сам нестационарний процес має експоненціальний характер. Величина $T_0 = \frac{1}{\omega_0}$

називається періодом реактора. За фізичним змістом T_0 - це час, за який густина потоку нейтронів або потужність реактора змінюється в e разів в установленому перехідному режимі, коли всі вищі гармоніки є суттєво малими.

Вираз

$$T_e = \frac{1}{D\nu(\alpha_0^2 - \alpha_1^2)} = \frac{1}{\omega_0 - \omega_1}, \quad (6.19)$$

має розмірність часу і визначає час релаксації перехідного режиму, тобто час затухання всіх вищих гармонік.

У минулих розділах ми бачили, що умова критичності реактора полягає в рівності матеріального параметра й першого власного значення оператора Лапласа $\alpha_0 = B$, тобто в критичному реакторі $\omega_0 = 0$ і

$$\Phi(r, t) = C_0\psi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\phi\psi_m)\psi_m e^{\omega_m t}. \quad (6.20)$$

Це означає, що в критичному реакторі може існувати стаціонарна складова поля нейтронів, яка пропорційна нульовій гармоніці, а також може існувати нестаціонарна складова поля нейтронів, яка змінюється за експонентою з часом релаксації $T_e = \frac{1}{\omega}$. Це дуже важливий висновок. Якщо прийняти до

уваги наявність випадкових флуктуацій поля нейтронів, які затухають з часом релаксації, то це означає, що навіть у критичному реакторі ніколи не встановлюється стаціонарний розподіл і дійсне нейтронне поле весь час коливається навколо середнього поля, яке визначається нульовою гармонікою.

Якщо реактор некритичний, то стаціонарного нейтронного поля в ньому не встановлюється навіть у розумінні середнього поля. Таким чином, взагалі можливі три випадки:

1. $\omega_0 > 0$ - реактор надкритичний, інтенсивність ланцюгового процесу в ньому росте. Закон цього росту встановлюється експоненціальним через проміжок часу, більший за час релаксації T_e вищих гармонік.

2. $\omega_0 = 0$ - реактор критичний, і через час, який більше часу релаксації, у ньому встановлюється стаціонарний режим у середньому, якщо не враховувати флуктуацій нейтронного поля.

3. $\omega_0 < 0$ - реактор підкритичний і ланцюгова реакція затухає.

Ці результати загальні і не залежать від моделі, якою ми описуємо поле нейтронів.

§ 6.2. Реактивність реактора

Вище ми бачили, що власне значення ω_0 можна розглядати як міру критичності реактора. Але в теорії реакторів і в практичних розрахунках звичайно користуються іншою величиною, яка характеризує некритичність реактора.

Назвемо ефективним коефіцієнтом розмноження k_{ef} число, на яке треба поділити k_∞ , щоб реактор став критичним. Тому після заміни $k_\infty \rightarrow \frac{k_\infty}{k_{ef}}$ параметр ω_0 стає рівним нулю і функція ψ_0 задовольняє стаціонарному рівнянню

$$D\Delta\psi_0 + \left(\frac{k_\infty}{k_{ef}} - 1 \right) \Sigma_a \psi_0 = 0. \quad (6.21)$$

У такому випадку кажуть, що функція ψ_0 описує потік нейтронів в умовно-критичному реакторі.

Розрахуємо кількість нейтронів, що проходить в одиницю часу через поверхню всього реактора. Для цього треба обрахувати інтеграл

$$I = \oint_S dS \vec{n}(R) \vec{j}(R) \quad R \in S. \quad (6.22)$$

Застосуємо до цього інтеграла теорему Гаусса й дифузійне наближення, тобто врахуємо, що $\vec{j} = -DV\Phi$.

Тоді

$$I = \int_V d\vec{r} \operatorname{div} \vec{j} = -D \int_V d\vec{r} \Delta \psi_0 = \frac{D\alpha_0^2}{\Sigma_a} \int d\vec{r} \Sigma_a \psi_0 = L^2 \alpha_0^2 N_a, \quad (6.23)$$

де $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$ - довжина дифузії, а $N_a = \int d\vec{r} \Sigma_a \psi_0$ - швидкість поглинання нейтронів у всьому реакторі.

Проінтегруємо тепер рівняння (6.21) по об'єму реактора V . Маємо

$$-I + \frac{k_\infty}{k_{ef}} N_a - N_a = 0. \quad (6.24)$$

Якщо позначити $k_\infty N_a = N_f$ - швидкість генерації нейтронів в об'ємі реактора, то

$$k_{ef} = \frac{N_f}{N_a + I} = \frac{N_f}{N_a} \frac{N_a}{N_a + I} = k_\infty \frac{1}{1 + L^2 \alpha_0^2}. \quad (6.25)$$

Величина $P_L = \frac{1}{1 + L^2 \alpha_0^2} = \frac{N_a}{N_a + I}$ визначає відносну ймовірність нейт-

рона поглинутись у реакторі або відношення ймовірності поглинання до суми ймовірностей поглинання й витоку нейтронів.

Із цих формул можна визначити критичний реактор як такий, де $k_{ef} = 1$, що означає рівність швидкості генерації нейтронів до суми швидкості поглинання і виходу за межі реактора.

Згадаємо вираз для величини, оберненої періоду реактора (6.18). Враховуючи явний вираз для матеріального параметра $B^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2}$, можна для умовно-критичного реактора записати

$$\omega' = DV \left(\frac{k_\infty / k_{ef} - 1}{L^2} - \alpha_0^2 \right) = 0. \quad (6.26)$$

Віднімаючи від ω_0 величину (6.26) отримаємо

$$\omega_0 - \omega' \equiv \omega_0 = DV \frac{k_\infty}{L^2} \left(1 - \frac{1}{k_{ef}} \right) = \frac{k_\infty \rho}{l}, \quad (6.27)$$

де $l = \frac{L^2}{DV}$ - час життя нейтрона; $\rho = \frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}}$ - реактивність реактора - міра

некритичності реактора, яка використовується під час практичних розрахунків і міркувань. Треба підкреслити, що реактивність - це величина, що характеризує критичність реактора в цілому, а не окремих його частин, хоча зміна реактивності реактора звичайно викликається зміною характеристик деяких його частин. Наприклад, якщо до поверхні опуклого середовища, що розмножує нейтрони, додати якийсь елемент, який не є абсолютно чорним для нейтронів, тобто не поглинає всіх нейтронів, то реактивність реактора зросте. Дійсно, оскільки не всі нейтрони поглинаються, то частина нейтронів завдяки розсіюванню повернеться в реактор, зменшиться потік I виходу нейтронів за межі реактора, отже збільшиться k_{ef} і реактивність ρ (на цьому якраз засновано принцип дії відбивачів). Але для різних реакторів зміна реактивності буде різною, якщо додавати до поверхні однакові елементи. Отже, цьому елементу не можна приписати визначене значення реактивності.

Аналогічно, якщо в порожнині реактора помістити довільний елемент, який досить сильно поглинає нейтрони, то реактивність реактора зменшиться (на цьому, як правило, засновано принцип дії органів керування реактором). Але не можна сказати, що цей елемент має реактивність, що дорівнює зменшенню реактивності всього реактора.

§ 6.3. Процеси керування реакторами

Процес керування ланцюговою ядерною реакцією засновується на зміні власного значення ω_0 або на зміні реактивності, що одне й те ж. Нехай процес керування відбувається за допомогою стрижнів керування, які звичайно виготовляють з матеріалу, який сильно поглинає нейтрони (солі бору, кадмію, або гадолінію).

Припустимо, що стаціонарному стану на рівні потужності W_0 відповідає положення стрижня 1 (рис. 6.1). Припустимо також, що ми хочемо збільшити рівень потужності реактора. Тоді ми мусимо пересунути стрижень в положення 2 , де потік нейтронів менше. Тоді швидкість поглинання нейтронів зменшується, а k_{ef} збільшується і ω_0 стає більше нуля. При цьому потужність через проміжок часу більша, ніж час релаксації T_e , вона буде змінюватись за законом $W = W_0 \exp(\omega_0 t)$. Коли потужність досягне рівня W_1 , стрижень необхідно повернути в положення 1 , при якому $\omega_0 = 0$. Знову після затухання вищих гармонік реактор буде в стаціонарному стані на рівні потужності W_1 . Навпаки, якщо ми захочемо зменшити потужність реактора, ми повинні на деякий час перемістити стрижень в положення 3 , де потік нейтронів більший, ніж у вихідному положенні. Реактивність у цьому випадку зменшується, ω_0 стає менше нуля і потужність змінюється за законом

$W = W_1 \exp(-\omega_0' t)$. Взагалі кажучи, експоненціальний закон зміни нейтронного потоку (або потужності) у вигляді (6.17) є ідеалізованим, оскільки ми не враховуємо нейтрони, що запізнюються. Крім того, під час зміни потужності, а отже, і величини потоку нейтронів змінюються також інші характеристики реактора, наприклад змінюється концентрація ^{135}Xe , який дуже сильно поглинає нейтрони. Тому для відновлення стаціонарного стану стрижні повертаються в дещо інше місце.

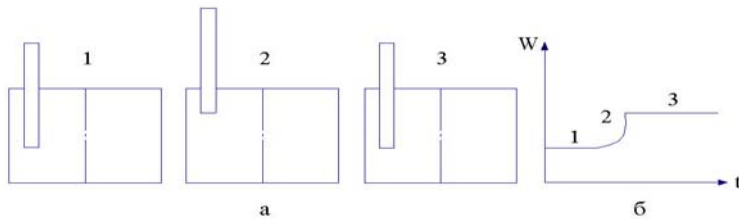


Рис. 6.1. Положення стрижня керування (а) і зміна потужності реактора в часі (б).

Можна керувати реакторами також іншими засобами, не тільки за допомогою стрижнів. Наприклад, можна змінювати швидкість поглинання нейтронів, змінюючи концентрацію речовини, яка сильно поглинає нейтрони, розчиненої в сповільнювачі. Звичайно змінюють концентрацію борної кислоти у воді. Можливі також інші засоби. Під час роботи ядерного реактора виникають численні ефекти, що змінюють його реактивність. Крім того, сама задача керування реактором, тобто пуск і зупинка, зміна потужності, перерозподіл нейтронного потоку в об'ємі реактора, потребують зміни реактивності реактора. Тобто конструкція реактора повинна передбачити систему регулювання його реактивності, що дає змогу збільшувати або зменшувати реактивність реактора в деяких межах, які визначаються можливими змінами реактивності в процесі експлуатації реактора або аварійних ситуаціях.

Перерахуємо ті причини, що призводять до зміни реактивності реактора:

1. Зміна ізотопного складу палива в результаті вигорання палива або перевантаження палива. Вигорання палива веде до поступової зміни реактивності, а його перевантаження веде до східчастої зміни реактивності.

2. Процес отруєння реактора ізотопами ^{135}Xe і ^{149}Sm , який може протікати з відносно високою швидкістю. Ці ізотопи утворюються або безпосередньо під час поділу ядер палива, або в результаті радіоактивного розпаду продуктів поділу. Вони мають надзвичайно високі перерізи поглинання нейтронів і відносно невеликі періоди напіврозпаду, що веде до швидкої і значної зміни реактивності разом із зміною стаціонарного стану реактора - під час

пуску і зупинки реактора, під час зміни потужності, під час перевантаження палива та змін розподілу нейтронів.

3. Температурні ефекти та ефекти зміни потужності, що у свою чергу зводяться до зміни температури окремих частин реактора. Ці ефекти досить складні й різноманітні. Із збільшенням потужності реактора температура його складових частин росте. При цьому звичайно росте середня енергія теплових нейтронів, що призводить до збільшення дифузійної довжини і зменшення ефективних перерізів поглинання в тепловій області; зростає довжина розсіювання нейтронів у водяних плівках і вони стають більш прозорими для нейтронів; із зростанням температури паливних блоків за рахунок ефекту Доплера резонансні рівні розширюються і збільшується поглинання на резонансних рівнях, а отже, зменшується кількість теплових нейтронів; збільшення температури палива призводить до збільшення відношення перерізів захвату й поділу, тобто до зменшення η ; цей ефект особливо сильний в ^{239}Pu і слабкий в ^{235}U . Збільшення температури веде до зміни густини як рідких, так і твердих складових реактора, що веде до зміни всіх макроскопічних перерізів.

4. Перехід рідини в пару викликає особливо сильні зміни густини. Більше того, у двофазній суміші густина може значно змінюватись при постійній температурі, що веде до сильної зміни реактивності. Вона звичайно збільшується із зниженням густини теплоносія, тобто з витісненням рідини парою. Це звичайно відбувається із зростанням потужності в киплячих реакторах. Повні зміни реактивності реактора із зміною його потужності та температури можуть досягати значень $\Delta\rho \sim 0,1$. Ще більші зміни реактивності відбуваються із вигорянням палива, збільшенням концентрації ^{135}Xe і ^{149}Sm . Усього проектувальникам доводиться враховувати зміну реактивності реактора $\rho \sim 0,3$.

Звичайно, проектувальник мусить забезпечити якнайменші коливання реактивності під час нормальної роботи реактора. Це можна зробити за допомогою деяких спеціальних засобів, наприклад неперервне (або квазінеперервне) перевантаження палива, використання поглиначів нейтронів, що “вигоряють” у процесі роботи реактора, примішування домішок до теплоносія, які добре поглинають нейтрони, вибір параметрів ґратки паливних елементів, які мало чутливі до коливань температури й потужності.

Крім розглянутих причин зміни реактивності в процесі нормальної роботи реактора, треба врахувати можливості зростання реактивності в аварійних ситуаціях. Наприклад, унаслідок розриву трубопроводу першого контуру, в якому теплоносієм циркулює під великим тиском, цей теплоносієм з великою швидкістю може залишити активну зону. У результаті можливе різке зростання реактивності реактора, що може привести до його розгону та руйнуванню конструкції реактора. Тому основним завданням системи аварійного захисту є швидкий і надійний ввід від’ємної реактивності, аби із самого початку аварії запобігти небезпечному зростанню потужності й температури.

Ще одним завданням системи керування є локальне введення поглинача для запобігання локального перегріву, а також для забезпечення перерозподілу нейтронного потоку і відповідно виділення тепла по об'єму реактора. Остання задача виникає з точки зору економічно й технічно оптимальної експлуатації реактора. Звичайно, найбільш ефективним є рівномірне виділення тепла в об'ємі реактора.

Тепер перерахуємо ті основні засоби, що використовуються в реакторобудуванні для керування реактивністю:

- уведення й виведення твердих стрижнів різної форми, що сильно поглинають нейтрони, у різні області активної зони і відбивача;

- те саме, але з введенням у спеціальні канали активної зони рідкого або газового поглинача;

- уведення нейтронних поглиначів у потік теплоносія, який циркулює через активну зону;

- зміна виходу нейтронів за межі реактора за рахунок переміщення деяких частин відбивача або застосування стрижнів, які сильно розсіюють нейтрони;

- переміщення частин активної зони, наприклад введення касет з паливними елементами або зміна концентрації ізотопу, що ділиться, у реакторах з рідким паливом;

- зміна сповільнюючої здатності сповільнювача або зміна його густини або складових (для суміші важкої і легкої води).

§ 6.4. Точкова модель реактора

Міркування, які наведено в попередніх параграфах щодо керування реактором, є дещо ідеалізованими, бо вони не враховують наявності нейтронів, що запізнюються. У § 6.2 ми отримали вираз для величини ω_0 - постійної розгону або затухання реактора (6.27), яка визначається реактивністю реактора й часом життя нейтронів. Типове значення часу життя ℓ нейтронів у реакторах на теплових нейтронах $\ell \sim 10^{-3}$ с. Припустимо, що ефективний коефіцієнт розмноження $k_{eff} = 1,001$, що є дуже невеликим відхиленням від критичності. З таким коефіцієнтом розмноження величина $\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}$ і, отже, густина потоку нейтронів і потужність реактора зростуть в e разів за 1 с. Це дуже швидке зростання для незначного відхилення від критичності. І якби не було нейтронів, що запізнюються, то втримати реактор на необхідному рівні за допомогою тих засобів, які перераховані в попередньому параграфі, не вдалося б.

Нейтрони, що запізнюються, випромінюються під час радіоактивного розпаду деяких продуктів поділу. Загальна їх кількість є дуже незначною $\sim 0,7\%$ від всієї кількості нейтронів, і вони практично не грають ніякої ролі під час розгляду стаціонарного стану реактора. Це пов'язано з тим, що в стаціонарному стані недостача нейтронів $0,7\%$ у визначений момент часу по-

кривається за рахунок нейтронів, що випромінюються в попередні моменти часу. Але якщо потужність реактора зростає, то кількість нейтронів, що запізнюються і з'являються у визначений момент часу, виявляється меншою, ніж недостача нейтронів у цей же момент часу. Тому швидкість зростання потоку нейтронів повинна бути меншою, ніж у випадку, коли не враховуються нейтрони, що запізнюються.

Хоча частка нейтронів β , що запізнюються, є дуже невеликою, час запізнення випромінювання виявляється досить значним порівняно з часом життя нейтронів у реакторі. Цей час запізнення змінюється від десятих часток секунди до 80 с. для різних нуклідів. Тому період реактора, в якому враховується час запізнення з випромінюванням нейтронів, виявляється значно більшим, ніж отриманий нами раніше. Точні вирази для цього періоду ми отримаємо нижче.

Перехідні процеси в реакторі (зміна потужності реактора) з урахуванням нейтронів, що запізнюються, вивчаються на основі так званої точкової моделі реактора, яка не враховує просторового розподілу нейтронів, а розглядає весь реактор як ціле. Рівняння цієї моделі неважко отримати з рівнянь дифузійного наближення. Але додатково до неї треба врахувати нейтрони, що запізнюються. Вони враховуються у виразі для джерела нейтронів. Тоді дифузійне рівняння моноенергетичних нейтронів можна записати у вигляді

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = D \nabla^2 \Phi - \sum a \Phi + (1 - \beta) k_{\infty} \sum a \Phi + \sum_i \lambda_i C_i, \quad (6.28)$$

де λ_i - постійна розпаду i -го ядра - попередника нейтронів, що запізнюються; C_i - концентрація цих ядер; \sum_i враховує всі ядра-попередники нейтронів, що запізнюються, тобто всі скалки поділу, під час радіоактивного розпаду яких випромінюються нейтрони, що запізнюються; β - сумарна частка нейтронів, що запізнюються, і якщо β_i - це частка таких нейтронів, що випромінюються під час розпаду ядер i -го сорту, то $\beta = \sum_i \beta_i$.

Рівняння (6.28) треба доповнити рівняннями, які визначають зміну в часі концентрації ядер-попередників. Якщо паливо знаходиться у твердій фазі й пробіг скалки поділу ~ 1 мкм, то можна вважати, що дифузія скалок поділу не відбувається, і рівняння мають вигляд

$$\frac{dC_i}{dt} = \beta_i k_{\infty} \sum a \Phi - \lambda_i C_i. \quad (6.29)$$

Таких рівнянь має бути стільки, скільки є ядер-попередників нейтронів, що запізнюються. Але деякі ядра мають дуже близькі константи напіврозпаду і їх звичайно об'єднують в групи. Усі експерименти, в яких вивчався спад інтенсивності нейтронів, що запізнюються, дуже добре описуються за допомогою суми шести експонент, тобто експериментальні дані добре описуються

шістьма групами нейтронів, що запізнюються. Таким чином, треба розв'язувати шість рівнянь типу (6.29) з різними β_i і λ_i . Іноді для якісних оцінок досить використати одне рівняння з деякими ефективними параметрами.

Рівняння типу (6.29), не враховують усіх можливих процесів. По-перше, якщо паливо є рідким, то в ньому можливе просторове перенесення скалок поділу за рахунок дифузії і конвекції. Це просторове перенесення не враховується рівняннями (6.29). Крім того, можливий процес, коли нейтрон, що запізнюється, випромінюється не скалкою поділу безпосередньо, а одним з ядер, яке утворюється після розпаду скалки поділу. У такому випадку до рівнянь (6.29) треба додати рівняння, що описує зміну в часі концентрації скалки поділу, яке є попередником ядра-попередника нейтрона, що запізнюється. Такі багатосходнікові процеси, можливо, мають місце в реакторах з важкою водою і берилієм, але в подальшому аналізі ми їх враховувати не будемо.

Розглянемо систему рівнянь (6.28) і (6.29). Припустимо, що ці рівняння припускають розділення змінних \vec{r} і t , тобто розв'язок можна подати у вигляді

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r})n(t), \quad C_i(r, t) = g(\vec{r})C_i(t). \quad (6.30)$$

Зрозуміло, що подати розв'язок у такому вигляді можна в тому випадку, коли розподіл описується основною гармонікою, тобто тоді, коли всі вищі гармоніки вже зреласували, або для часів більше, ніж час релаксації.

Підставимо розв'язок у вигляді рівняння (6.30) в рівняння (6.29):

$$\frac{dC_i}{dt} = \beta_i k_\infty \sum a \frac{\Phi(\vec{r})}{g(\vec{r})} n(t) - \lambda_i C_i(t). \quad (6.31)$$

Далі треба припустити, що відношення $\frac{\Phi(\vec{r})}{g(\vec{r})}$ не залежить від координат, тобто функції Φ і g_i різняться тільки постійною. Це фізично оправдане припущення, бо розподіл скалок поділу повинен відтворювати розподіл нейтронів, що викликають поділ, тобто повинно бути $\frac{\Phi(\vec{r})}{g(\vec{r})} = 1$. Тоді рівняння (6.31) має вигляд

$$\frac{dC_i}{dt} = \beta_i k_\infty \sum a n(t) - \lambda_i C_i(t). \quad (6.31a)$$

Для першого рівняння маємо

$$\frac{1}{v} \frac{dn}{dt} = D \frac{\nabla^2 \Phi}{\Phi} n(t) - \sum a n(t) + (1 - \beta) k_\infty \sum a n(t) + \sum_i \lambda_i \frac{g_i}{\Phi} C_i. \quad (6.32)$$

Для того щоб це рівняння не залежало від координат, необхідно, щоб функція $\Phi(\vec{r})$ задовольняла рівнянню Гельмгольца $\nabla^2 \Phi + B^2 \Phi = 0$. Якщо

далі ввести середній час життя нейтронів $\ell = \frac{1}{\nu \Sigma_a}$ і довжину дифузії

$L^2 = D / \Sigma_a$, то приходимо до рівняння

$$\frac{dn}{dt} = [((1-\beta)k_\infty - (1+L^2B^2)) / \ell] n + \sum_i \lambda_i C_i. \quad (6.33)$$

Уведемо позначення

$$k_{ef} = k_\infty / (1+L^2B^2), \quad \ell_0 = \ell / (1+L^2B^2). \quad (6.34)$$

Тоді

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = \frac{k_{ef} - 1 - \beta k_{ef}}{\ell_0} n + \sum_i C_i \lambda_i, \\ \frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i k_{ef}}{\ell_0} n - \lambda_i C_i. \end{cases} \quad (6.35)$$

Уведемо величину $\tau = \frac{\ell}{k_{ef}}$, яку називають часом генерації нейтронів, а

також реактивність

$$\rho = \frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}}.$$

Тоді система (6.35) приймає вигляд

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\tau} n + \sum_i C_i \lambda_i, \\ \frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\tau} n - \lambda_i C_i, \end{cases} \quad \beta = \sum_i \beta_i. \quad (6.36)$$

У такому вигляді ці рівняння описують точкову модель реактора. Зрозуміло, що ці рівняння значно простіші, ніж вихідні, і вони дають можливість провести детальний аналіз змін стану реактора з часом. Ми бачимо також, що реактивність - це інтегральна характеристика реактора і саме вона разом з нейтронами, що запізнюються, визначає поведінку реактора. Реактивність може залежати від часу й визначається, як ми вже бачили, і станом палива, і органами керування та компенсації.

З вигляду рівняння (6.36) видно, що реактивність зручно вимірювати в одиницях β . Тоді кажуть, що реактивність реактора дорівнює одному долару, якщо $\rho = \beta$. Взагалі реактивність реактора в доларах дорівнює відношенню $\$ = \rho / \beta$. Використовується також сота частина долара - цент.

§ 6.5. Нейтрони, що запізнюються

У попередньому параграфі ми отримали рівняння точкової моделі реактора, яка використовується для опису перехідних процесів у реакторі, тобто процесів, параметри яких змінюються в часі. Суттєвим моментом цих рівнянь є врахування нейтронів, що запізнюються. Ми вже згадували, що з достатньою для практичних завдань точністю всі ядра-попередники нейтронів, що запізнюються, можна об'єднати в шість груп, усередині яких ядра мають дуже близькі постійні розпаду (або періоди напіврозпаду), а значить часи запізнення з випромінюванням нейтронів. Для різних сортів палива періоди напіврозпаду і частки нейтронів, що запізнюються різні, але, що є досить дивним, для різних ізотопів, що можуть ділитися, нейтрони, що запізнюються, можна об'єднати в шість груп. Для прикладу можна навести табл. 6.1 з періодами напіврозпаду ядер-попередників нейтронів, що запізнюються, для палива з ^{235}U .

Таблиця 6.1. Період напіврозпаду, частка і вихід на один акт поділу для різних груп нейтронів, які запізнюються, для палива з ^{235}U

№ групи	$T^{1/2}$, с	β_i/β	Вихід на 1 поділ
1	54,51	0,038	0,00063
2	21,84	0,213	0,00351
3	6,00	0,188	0,00310
4	2,23	0,407	0,00672
5	0,436	0,128	0,00211
6	0,179	0,026	0,00049

За останні 10 - 15 років проведено значні експериментальні дослідження нуклідів, які випромінюють нейтрони, що запізнюються. Усього виявлено 66 нуклідів, для яких відомі константи λ_i . Крім того, наведено теоретичні оцінки ще 50 нуклідів з дуже малими значеннями ймовірності випромінювання нейтронів, що запізнюються. Ці останні дають незначний внесок у загальну кількість затриманих нейтронів. Основне значення під час поділу ^{235}U мають такі ядра-попередники (у дужках вказано період напіврозпаду): ^{87}Br (55,67 с), ^{137}I (24,5 с), ^{88}Br (15,88 с), ^{138}I (6,63 с), ^{89}Br (4,33 с), ^{90}Br (1,63 с), ^{139}I (2,47 с), ^{94}Rb (2,83 с). Ці ядра-попередники дають біля 70 % нейтронів, що запізнюються.

Можна навести два типові ланцюжки розпаду ядер ^{87}Br і ^{137}I (рис. 6.2): З цих схем можна побачити, що не всі радіоактивні ядра ^{87}Br і ^{137}I випромінюють нейтрони, що запізнюються. Тільки частина цих ядер, які після випромінювання електронів перетворюються в дуже збуджені ядра $^{87}\text{Kr}^*$ і $^{137}\text{Xe}^*$, що випромінюють миттєво нейтрони, є ядрами-попередниками нейтронів, що запізнюються.

У двох випадках, коли густина потоку нейтронів змінюється або дуже швидко, або дуже повільно, нейтрони, що запізнюються можна об'єднати в

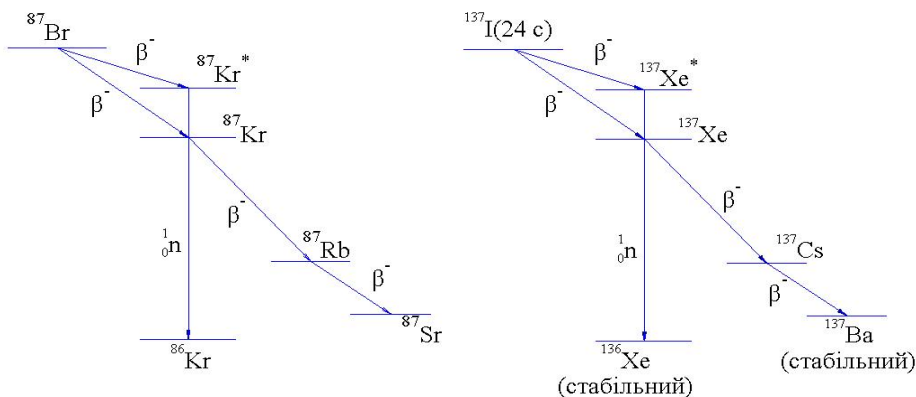


Рис. 6.2. Схема розпаду ^{87}Br і ^{137}I з випромінюванням нейтронів, що запізнюються.

одну групу з ефективними параметрами розпаду. У такому випадку користуються середньозваженими періодами й постійними розпаду. Середньозважений період розпаду визначається як $\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\beta} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}$, а середньозважена по-

стійна розпаду - як $\lambda = \frac{1}{\beta} \sum_i \beta_i \lambda_i$. З визначень видно, що $\lambda' \neq \lambda$. Треба

також зауважити, що в кожному реакторі навіть з одним типом палива ефективна частка β нейтронів, що запізнюються, дещо різна. Це пояснюється тим, що в кожному реакторі є своє співвідношення імовірностей епітеплого витоку нейтронів, імовірностей захоплення миттєвих нейтронів і нейтронів, що запізнюються.

§ 6.6. Кінетика реактора з постійною реактивністю

Розглянемо розв'язки рівнянь точкової динаміки реактора, якщо реактивність є постійною величиною. Зрозуміло, що такі розв'язки є ідеалізованою моделлю дійсного поведіння реактора. Дійсно, наприклад, під час уведення стрижня керування реактивність починає змінюватись і тільки коли стрижень припиняє свій рух, реактивність стає постійною. Але, по-перше, відхилення цього приблизного розв'язку від істинного часто дуже швидко затухають, і, по-друге, ці розв'язки є дуже простими, і можна легко зрозуміти поведінку реактора, аналізуючи ці розв'язки. Крім того, вони є основою для вивчення більш складних проблем.

З урахуванням джерела нейтронів q рівняння точкової динаміки реактора приймає вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{\rho - \beta}{\tau} n + \sum_i \lambda_i C_i + q, \\ \frac{dC_i}{dt} &= \frac{\beta_i}{\tau} n - \lambda_i C_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.36a)$$

У цих рівняннях величини $\beta_i, \beta, \tau, \lambda_i$ вважають постійними, функції $\rho(t), q(t)$ відомі функції часу. У такому вигляді ці рівняння лінійні і їх можна розв'язувати. При великих рівнях потужності реактора можлива ситуація, коли функція ρ стає залежною від n . Тоді система рівнянь стає нелінійною, і до рівнянь (6.36a) треба додати рівняння для ρ . Виникає обернений зв'язок за реактивністю, і розв'язок такої системи стає проблематичним. Але поведінку нелінійних систем можна аналізувати за допомогою якісної теорії диференціальних рівнянь.

Треба зауважити про джерело нейтронів. У новому реакторі, зрозуміло, нейтронів майже немає, за винятком невеликої кількості нейтронів спонтанного поділу і нейтронів від космічних променів. Новий реактор треба виводити на високий рівень потужності дуже обережно, потроху вводячи додатну реактивність і з високою точністю вимірюючи потік нейтронів. Але прилади, що вимірюють густину потоку нейтронів, як правило, при малих рівнях густини потоку нейтронів взагалі не працюють. Тому на початковій стадії роботи реактора в реактор вводять зовнішнє джерело нейтронів.

Якщо просумувати всі рівняння (6.36a)

$$\frac{d}{dt} (n + \sum_i C_i) = \frac{\rho}{\tau} n + q, \quad (6.37)$$

то можна побачити, що в критичному реакторі $\rho = 0$ із зовнішнім джерелом нейтронів $q \neq 0$ відбувається зростання густини нейтронів. Тому джерело нейтронів, що вводиться в активну зону для забезпечення надійної роботи приладів, потрібно видалити з активної зони, як тільки досягнуто критичного стану.

Є ще одне цікаве застосування зовнішнього джерела нейтронів. Останнім часом розглядають проекти реакторів з підвищеним рівнем безпеки, які працюють у підкритичному стані при наявності зовнішнього джерела нейтронів. Зрозуміло, що у випадку виникнення аварійної ситуації в такому реакторі його дуже легко зупинити, відключивши зовнішнє джерело нейтронів.

Повернемося до розв'язків рівнянь (6.36) з постійною реактивністю. Нам треба знайти функцію $n(t)$, якщо $\rho = \rho_0$ і $t > 0$. Будемо шукати розв'язки системи (6.36) за допомогою методу перетворення Лапласа. Уведемо

$$N(S) = \int_0^{\infty} n(t) \ell^{-St} dt, \quad (6.38)$$

$$\Gamma_i(S) = \int_0^{\infty} C_i(t) \ell^{-St} dt,$$

помножимо рівняння (6.36) на ℓ^{-St} і проінтегруємо за часом у межах $[0, \infty]$. Тоді

$$SN - n(0) = \frac{\rho_0 - \beta}{\tau} N + \sum_i \lambda_i \Gamma_i, \quad (6.39)$$

$$S\Gamma_i - C_i(0) = \frac{\beta_i}{\tau} N - \lambda_i \Gamma_i.$$

З останнього рівняння

$$\Gamma_i = \frac{\frac{\beta_i}{\tau} N + C_i(0)}{\lambda_i + S}. \quad (6.40)$$

З урахуванням цього

$$N(S) = \frac{\tau(n(0) + \sum_i \frac{\lambda_i C_i(0)}{S + \lambda_i})}{\tau S - \rho_0 + \beta - \sum_i \lambda_i \beta_i / (S + \lambda_i)}. \quad (6.41)$$

Останній вираз можна записати у вигляді відношення двох поліномів: у чисельнику поліном ступеня m і в знаменнику - поліном ступеня $m + 1$. Поліном у знаменнику має $m + 1$ різних коренів, тобто функція $N(S)$ має $m + 1$ простих полюсів. Тому, виходячи із загальної теорії перетворення Лапласа, можна записати, що функція $n(t)$ має вигляд

$$n(t) = \sum_{j=1}^{m+1} A_j \ell^{\omega_j t}, \quad (6.42)$$

де ω_j - корені знаменника функції $N(S)$, ($N(S) \rightarrow \infty, S \rightarrow \omega_j$), а коефіцієнти A_j визначаються лишками функції $N(S)$. Таким чином, величини ω_j задовольняють рівнянню

$$\rho_0 = \tau\omega + \beta - \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i}{\omega + \lambda_i}. \quad (6.43)$$

Рівняння (6.43) є алгебраїчним рівнянням ступеня $m + 1$ відносно ω . Воно має m від'ємних дійсних коренів плюс один дійсний корінь з тим же знаком, що ρ_0 . При великих ω як додатних, так і від'ємних

$$\rho_0 = \tau\omega + \beta, \text{ або } \omega = \frac{\rho_0 - \beta}{\tau}. \quad (6.44)$$

Якщо $\omega \ll \lambda$:

$$\rho_0 \approx \left(\tau + \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}\right)\omega \text{ або } \omega = \frac{\rho_0}{\tau + \sum_i \beta_i / \lambda_i}. \quad (6.45)$$

З рівняння видно, що $\rho_0 \rightarrow \pm\infty$, якщо $\omega \rightarrow \lambda_i$. Це означає, що є m асимптот $\omega = -\lambda_i$ і $m - 1$ коренів рівняння (6.43) обмежені асимптотами $\omega = -\lambda_i$.

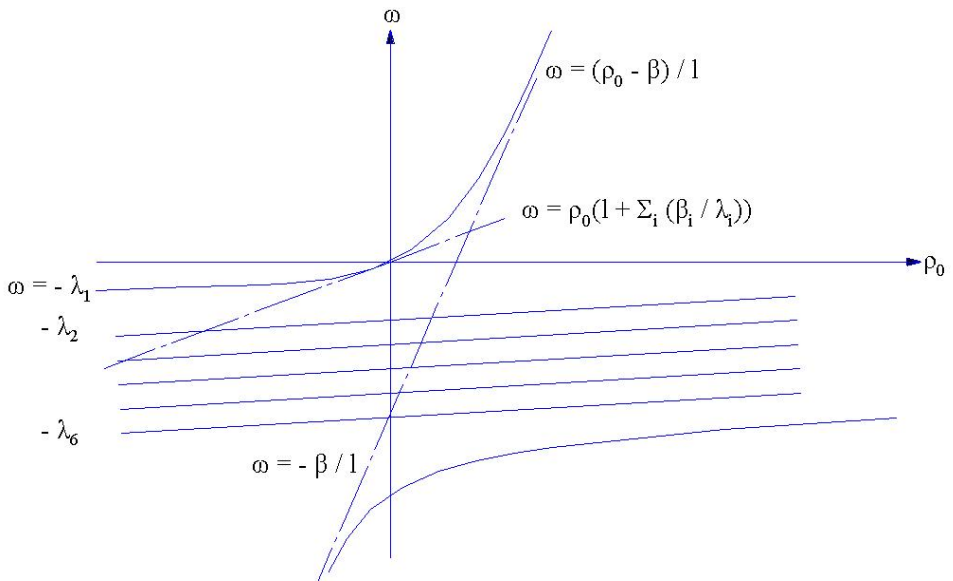


Рис. 6.3. Графічний розв'язок рівняння (6.43).

На рис. 6.3 показано залежність ω від ρ_0 . Для шести груп нейтронів, що запізнюються, маємо сім різних значень ω . Алгебраїчно найбільше значення ω_1 , що за знаком збігається з ρ_0 , визначає період реактора $T = \frac{1}{\omega_1}$, бо всі інші експоненти у виразі (6.42) дуже швидко затухають. Якби не було нейтронів, що запізнюються, то зміна густини потоку нейтронів визначалася рівнянням $n(t) = n(0) \exp\left(\frac{\rho_0}{\tau} t\right)$. Для малих реактивностей $\rho_0 = \tau'\omega$, де

$$\tau' = \tau + \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}, \quad (6.46)$$

і тоді вираз, який визначає зміну потужності реактора в часі, буде рівний

$$A_i \exp\left(\frac{\rho_0}{\tau'} t\right). \quad (6.47)$$

Оскільки τ' більше, ніж τ , то нейтрони, що запізнюються, сповільнюють зростання інтенсивності ланцюгової реакції. Наскільки велике це сповільнення, можна визначити, якщо порівняти τ і τ' . У тепловому реакторі $\tau \approx 10^{-3}$ с. Якщо обрахувати $\sum_i \beta_i / \lambda_i$, то можна отримати, що ці величини

для різних видів палива лежать у межах від 0,02 до 0,08. Отже, часом життя нейтронів можна знехтувати порівняно з ефективним часом життя, і період реактора визначається тільки нейтронами, що запізнюються. Оскільки величина ω_1 визначає період реактора (іноді кажуть *усталений період реактора*)

$\omega_1 = \frac{1}{T}$, то рівняння (6.43) дозволяє зв'язати реактивність з періодом реактора

$$\rho_0 = \frac{\tau}{T} + \beta - \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i}{\lambda_i + T^{-1}}. \quad (6.48)$$

Це співвідношення називають рівнянням обернених годин. Обвернена година - це одиниця реактивності, для якої період реактора рівний одній годині. Треба зауважити, що реактивність у дві обернені години не відповідає періоду реактора в 30 хв, тобто вказана одиниця є нелінійною. У теперішній час ця дивна нелінійна одиниця не використовується.

Крім указаних раніше доларів і центів, використовують також одиницю, яка рівна чисельному значенню відношення $(k_{ef} - 1)/k_{ef}$. Цю одиницю називають *ре*, а для малих значень використовують *міліре* $= 10^{-3} (k_{ef} - 1)/k_{ef}$ і *мікроре* $= 10^{-6} (k_{ef} - 1)/k_{ef}$.

§ 6.7. Поведінка реактора під час зміни реактивності

Тепер ми маємо всі можливості для визначення поведінки реактора під час східчастої зміни реактивності. Будемо вважати, що до моменту $t = 0$ реактор працював на постійній потужності n_0 . Тоді величини $C_i(0)$ можна знайти,

виходячи з другого рівняння (6.36), коли $\frac{dC_i}{dt} = 0$,

$$C_i(0) = \beta_i n_0 / \lambda_i \tau, \quad t \leq 0, \quad (6.49)$$

Будемо вважати, що в момент часу $t = 0$ вводиться постійна реактивність ρ_0 . При такому підході ми нехтуємо тими процесами, які відбуваються в реакторі під час уведення або видалення стрижня регулювання. Це можна зробити тоді, коли час руху стрижня значно менший часу розгону реактора, або періоду реактора, тобто, коли ρ_0 має малі значення (до речі, правилами ядерної безпеки дозволяється змінювати реактивність із швидкістю, не більшою ніж $0,7 \frac{\beta}{c}$). Наприклад, під час уведення реактивності в 20 центів у типовому тепловому реакторі на ^{235}U зміна потужності на два порядки відбувається за 150 с, а типовий час уведення стрижня керування - декілька секунд; під час уведення реактивності в 10 центів потужність змінюється на порядок за 200 с.

Таким чином, ураховуючи рівняння (6.49), для $N(S)$ маємо

$$N(S) = n_0 \frac{\tau + \sum_i \frac{\beta_i}{S + \lambda_i}}{\tau S + \beta - \rho_0 - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{S + \lambda_i}} = \frac{P(S)}{D(S)}. \quad (6.50)$$

Для оберненого перетворення Лапласа ми маємо

$$n(t) = \sum_{j=1}^{m+1} A_j \exp(\omega_j t).$$

Усі ω_j ми вже визначили, а величини A_j визначається за допомогою теорії лишків. Тоді

$$n(t) = n_0 \sum_{j=1}^{m+1} \frac{P(\omega_j)}{D'(\omega_j)} \exp(\omega_j t), \quad (6.51)$$

де $D'(\omega_j)$ похідна від знаменника $D(S)$, якщо $S \rightarrow \omega_j$.

Якісно поведінку потужності залежно від часу можна продемонструвати на графіку. Нехай $\rho_0 > 0$. Тоді з рис. 6.4 видно, що існує швидке початкове зростання густини нейтронів і потужності, яке змінюється більш повільним експоненціальним зростанням, що визначається періодом реактора ω_1 . Це пояснюється тим, що в початковий момент часу (момент уведення реактивності) кількість затриманих нейтронів відповідає рівню потужності n_0 . З дальшим зростанням потужності кількість нейтронів, що запізняються, збільшується і швидкість зростання потужності зменшується до того часу, поки величини $C(t)$ і $n(t)$ не будуть змінюватись за одним законом $A_1 \exp(\omega_1 t)$, який визначається періодом реактора. Початкове зростання потужності називають «стрибком на миттєвих нейтронах».

Ми розглянули перехідні процеси в реакторі на основі точкової моделі реактора. Виникає питання, чи змінюється як-небудь просторовий розподіл

густини потоку нейтронів у результаті зміни реактивності реактора? Відповідь на це питання неоднозначна. Розглянемо, наприклад, ситуацію, коли ми змінюємо реактивність однорідно по всьому реактору, уводячи, наприклад, розчин поглинача в сповільнювач. У такому разі форма основної гармоніки

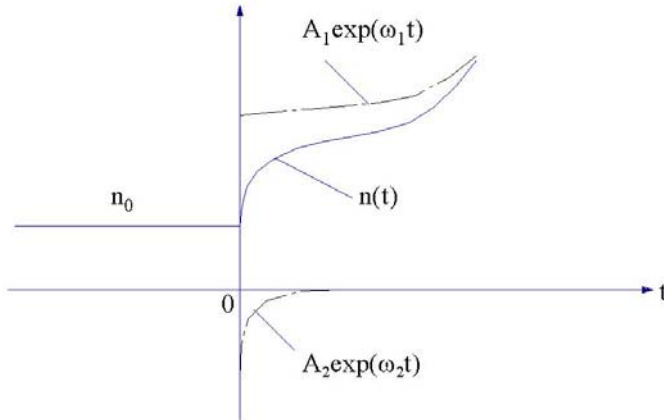


Рис. 6.4. Залежність потужності реактора в часі при миттєвому уведенні додатної реактивності (стрибок на миттєвих нейтронах).

не змінюється. Але, як і в усякому перехідному процесі, виникають вищі гармоніки, які затухають за час, рівний часу релаксації T_e . У той же час швидка зміна густини нейтронів відбувається за час $\frac{\tau}{\beta - \rho_0}$. Якщо $\rho_0 \ll \beta$, то ве-

личина $\frac{\tau}{\beta}$ виявляється більшою, ніж T_e ($T_e \sim 10^{-2}$ с для теплових реакторів), але порівняно за порядком величину. Тобто вищі гармоніки затухають за час, менший, ніж час швидкої зміни густини потоку нейтронів або час “стрибка на миттєвих нейтронах”. Якщо $\rho \sim \beta$, то $\beta - \rho \ll \beta$, тому $\tau/(\beta - \rho) \gg T_e$ і вищі гармоніки майже не спотворюють “стрибок на миттєвих нейтронах”.

Ситуація значно складніша, коли введення реактивності змінює саму основну гармоніку. У такому разі стрижень ніби виштовхує нейтрони з деякої області. Але через деякий час установлюється основна гармоніка (спотворена відносно початкової) і розвивається перехідний процес за тими законами, які ми тільки що отримали.

Цікава ситуація виникає в реакторах, в яких паливо циркулює і ядра-попередники нейтронів, що запізнюються, розміщується в об’ємі реактора як за рахунок конвекції, так і за рахунок дифузії. Під час виводу точкової моделі реактора ми вважали, що концентрація ядер-попередників нейтронів, що запізнюються, відтворює просторовий розподіл густини нейтронів. У випадку

циркулюючого палива більш справедливим є припущення, що ядра-попередники нейтронів, що запізнюються, розподілені рівномірно по об'єму реактора. Якщо розкласти концентрацію ядер-попередників нейтронів, що запізнюються, у ряд за власними функціями, то в цьому ряді будуть присутніми всі вищі гармоніки, а функція ψ_0 буде входити з деяким меншим коефіцієнтом. Оскільки кінетика нейтронів все одно визначається вищою гармонікою, то це рівнозначно зменшенню ефективної частки β нейтронів, що запізнюються. Можна обрахувати коефіцієнт, на який треба помножити β при такому розмішуванні. Цей коефіцієнт дещо різний для реакторів різної форми, але приблизно рівний $\frac{1}{2}$. Оскільки період реактора визначається часткою нейтронів, що запізнюються, то і період реактора зменшується вдвічі. Це означає, що в реакторі з паливом, яке циркулює, стабілізуючий ефект нейтронів, що запізнюються, зменшується. Якщо до того ж рідке паливо виводиться з реактора для відбору тепла, то частина ядер-попередників також виходить з реактора і випромінює затримані нейтрони за межами активної зони. Цей ефект ще зменшує кількість затриманих нейтронів, і це зменшення визначається швидкістю циркуляції палива.

§ 6.8. Реактивність стрижня керування

Розглянемо тепер ті зміни реактивності, які вносяться регулюючими стрижнями в активну зону реактора. Нехай реактор не має відбивача і працює на теплових нейтронах. Інтенсивність дії регуляторів характеризується реактивністю ρ :

$$\rho = \frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}} = 1 - \frac{1}{k_{ef}} = 1 - \frac{1 + \alpha_0^2 L^2}{k_\infty} \exp(\alpha_0^2 \tau). \quad (6.52)$$

Зробимо оцінку приросту реактивності $\Delta\rho$ реактора за рахунок введення регулюючого стрижня. Будемо вважати, що дія такого стрижня не міняє матеріального параметра реактора, а міняє тільки геометричний параметр. Дійсно, якщо стрижень виготовлено з матеріалу, який дуже сильно поглинає нейтрони, то його можна вважати абсолютно чорним тілом для нейтронів, яке еквівалентне вакууму. Тобто як абсолютно чорне тіло, так і вакуум не віддають нейтрони назад у реактор. Тому введення абсолютно чорного тіла еквівалентне тому, що ми робимо в реакторі дірку, а значить, міняємо геометричні розміри і форму реактора, тобто змінюємо геометричний параметр α_0 . Тоді приріст $\Delta\rho$ можна отримати, продиференціювавши вираз для ρ по α :

$$\Delta\rho = -\left\{ \frac{\exp(\alpha_0^2\tau)}{k_\infty} \left(1 + \frac{\alpha_0^2 L^2 \tau_T}{M^2} \right) \right\} M^2 \Delta\alpha_0^2, \quad (6.53)$$

$$M^2 = L^2 + \tau^2.$$

Множник у дужках дуже близький до одиниці, тому що в критичному реакторі $k_{ef} = 1 = k_\infty \exp - \frac{\alpha_0^2 \tau_T}{(1 + \alpha_0^2 L^2)}$, й у великих реакторах $\alpha_0^2 L^2 \ll 1$ та $\alpha_0^2 L^2 \tau / M^2 \ll 1$. Тому для великих реакторів

$$\Delta\rho = -M^2 \Delta\alpha_0^2 = -2 M^2 \alpha_0 \Delta\alpha_0. \quad (6.54)$$

Для невеликих реакторів вводиться коригуючий множник і

$$\Delta\rho = -2 M^2 \alpha_0 \Delta\alpha_0 \left(1 + \frac{\alpha_0^2 L^2 \tau_T}{M^2} \right) / (1 + \alpha_0^2 L^2). \quad (6.55)$$

Для розрахунку регулюючого стрижня розглянемо найпростішу задачу, коли регулюючий стрижень, який поглинає нейтрони, радіусом a розміщений уздовж осі циліндричної активної зони нескінченної висоти. Вважаємо, що без стрижня в реакторі реалізується критичний стан ($\rho = 0$). Тоді регулюючий стрижень вносить від'ємну реактивність. Для визначення її величини треба визначити геометричний параметр, тобто найменше власне значення оператора Лапласа в циліндричній системі координат.

Таким чином, нам необхідно розв'язати рівняння

$$\Delta\Phi + \alpha^2\Phi = 0, \quad (6.56)$$

в циліндричній системі координат з граничними умовами

$$\Phi(a_{ef}) = \Phi(R) = 0, \quad (6.57)$$

де a_{ef} - радіус стрижня, який ураховує екстрапольовану границю, а R - радіус циліндричної активної зони також з урахуванням екстрапольованої границі. Перша гранична умова (6.57) уведена додатково до звичайної граничної умови на поверхні циліндричної зони для врахування того факту, що в реактор уведено стрижень, що поглинає нейтрони. Екстрапольована границя для стрижня збігається із звичайним визначенням екстрапольованої границі для вакууму в тому випадку, коли $a \gg \lambda_{tr}$. Тоді $a - a_{ef} \approx 0,71\lambda_{tr}$. Але якщо $a \sim \lambda_{tr}$, то для цього випадку треба розв'язувати газокінетичне рівняння переносу нейтронів, і звичайно $a - a_{ef} < 0,71\lambda_{tr}$.

Як відомо, рівняння Гельмгольца є рівнянням другого порядку і має два лінійно незалежні розв'язки. У циліндричних координатах ці розв'язки подаються функціями Бесселя першого і другого роду - функціями Бесселя $J(\alpha r)$ і функціями Неймана $N(\alpha r)$. Ці розв'язки мають різну поведінку

при $r \rightarrow 0$ і $r \rightarrow \infty$. Функція Бесселя кінцева при $r \rightarrow 0$ і прямує до нуля при $r \rightarrow \infty$. Функція Неймана прямує до нескінченності при $r \rightarrow 0$ (має логарифмічну особливість), і тому її не можна використовувати як розв'язок у випадку неперервного циліндричного реактора (без стрижня), бо вона не відповідає основній фізичній умові: потік нейтронів не повинен приймати нескінченного значення всередині реактора. Але у випадку, коли потік нейтронів повинен обертатися в нуль на деякій відстані від точки $r = 0$, задовольнити граничній умові за допомогою тільки однієї функції J_0 або N_0 не можна. Тому розв'язок треба шукати у вигляді лінійної комбінації

$$\Phi = J_0(\alpha r) + AN_0(\alpha r). \quad (6.58)$$

Константа A визначається з умови на зовнішній границі

$$A = -\frac{J_0(\alpha R)}{N_0(\alpha R)}. \quad (6.59)$$

Для визначення α треба застосувати граничну умову на внутрішній границі $r = a_{ef}$

$$J_0(\alpha a_{ef}) - \frac{J_0(\alpha R)}{N_0(\alpha R)} N_0(\alpha a_{ef}) = 0. \quad (6.60)$$

Рівняння (6.60) являє собою трансцендентне рівняння для визначення α . Його можна розв'язувати чисельними методами. Але для якісного аналізу можна застосувати наближені методи. Будемо вважати, що величина α не дуже сильно відрізняється від значення α_0 для циліндричного реактора без стрижня, особливо у випадку, коли $a_{ef} \ll R$. Оскільки $\alpha \sim \alpha_0 = \frac{\xi}{R} \approx \frac{2,4}{R}$, то

$\alpha a_{ef} \approx 2,4 \frac{a_{ef}}{R} \ll 1$. Тоді $J_0(\alpha a_{ef})$ і $N_0(\alpha a_{ef})$ можна розкласти в ряд за ступенями малого аргументу αa_{ef} . Тоді $J_0(\alpha a_{ef}) \approx 1$, а

$$\begin{aligned} N_0(\alpha a_{ef}) &\approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{\alpha a_{ef}} = \frac{2}{\pi} \ln(\alpha_0 + \Delta\alpha) a_{ef} = \\ &= \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\xi a_{ef}}{R} + \Delta\alpha a_{ef} \right) \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{\xi a_{ef}}{R}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Можна також спростити вирази для $J_0(\alpha R)$ і $N_0(\alpha R)$, використовуючи рівності

$$\begin{aligned} \alpha R &= \alpha_0 R + R\Delta\alpha = \xi + R\Delta\alpha, \\ R\Delta\alpha &\ll 1. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Тоді, оскільки $J_0'(\xi) = -J_1(\xi)$,

$$J_0(\alpha_0 R + \Delta\alpha R) \approx J_0(\xi) + R\Delta\alpha J_0'(\xi) \approx R\Delta\alpha J_1(\xi) \approx -0,52R\Delta\alpha, \quad (6.63)$$

$$N_0(\alpha_0 R + \Delta\alpha R) \approx N_0(\xi) + R\Delta\alpha N_0'(\xi) \approx N(\xi) \approx 0,51.$$

А іншими членами знехтуємо. Тоді рівняння (6.60) приймає вигляд

$$1 - R\Delta\alpha \frac{J_1(\xi)}{N_0(\xi)} \frac{2}{\pi} \ln \frac{\xi a_{\text{эф}}}{R} = 0$$

або

$$\Delta\alpha \approx \frac{\pi}{2R \ln(R/\xi a_{\text{эф}})}. \quad (6.64)$$

Знаючи $\Delta\alpha$ можна, відповідно до рівняння (6.54), знайти $\Delta\rho$:

$$\Delta\rho = -\frac{2M^2 \xi \pi}{2R^2 \ln(R/\xi a_{\text{эф}})} \approx 7,55 \frac{H^2}{R^2} \frac{1}{0,116 + \ln(R/\xi a_{\text{эф}})}. \quad (6.65)$$

Звідси видно, що залежність $\Delta\rho$ від радіуса стрижня є слабкою - логарифмічною, тому збільшення радіуса дуже слабо змінює $\Delta\rho$. Значно краще для більшої зміни реактивності збільшувати кількість стрижнів, а не їх - радіус.

Треба зауважити, що одностружне наближення не дає істинної картини поглинання стрижнем, тому що воно не враховує різне поглинання різних частин спектра нейтронів, тобто залежність перерізу поглинання стрижня від енергії нейтронів. Такий підхід завищує величину $\Delta\rho$. Більш доцільно обрхувати зміну реактивності на основі двогрупового наближення. Тоді, наприклад, якщо стрижень виготовлено з кадмію, то можна вважати, що він є абсолютно чорним для теплових нейтронів і прозорим для нейтронів сповільнення.

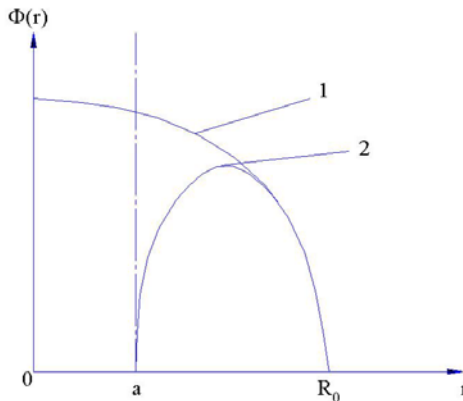


Рис. 6.5. Залежність густини потоку нейтронів від радіуса в циліндричному реакторі без стрижня керування (1) і з повністю введеним у центр циліндра стрижнем (2).

Зрозуміло, що введення стрижня не тільки змінює поглинання нейтронів, а й змінює розподіл нейтронів у реакторі (рис. 6.5). Абсолютно чорний стрижень працює таким чином, що ніби виштовхує нейтрони з реактора. У результаті збільшується градієнт поля поблизу зовнішньої границі й відповідно збільшується кількість нейтронів, що вийшла за межі реактора.

§ 6.9. Інтерференція реактивностей

Як відомо, у реактор звичайно вводиться не один стрижень, а набагато більше як для керування реактором, так і для компенсації тої надкритичності, яка вводиться свіжим паливом. Або, як кажуть, щоб компенсувати значний запас реактивності. Тому постає питання про розрахунок довільно розташованих стрижнів.

Для аналізу такої ситуації можна розв'язати декілька простих задач і на їх основі проаналізувати ситуацію в цілому. Наприклад, розв'язуються задачі для ґратки стрижнів, розташованих у центральній області активної зони або на її периферії. Параметри такої ґратки замінюються введенням ефективного поглинача, тобто розглядається неоднорідний реактор з різними коефіцієнтами поглинання в центральній і периферичній областях активної зони. Можна також розглянути ексцентрично розташований стрижень або декілька стрижнів. Розв'язки таких задач можна знайти в [8].

Основний висновок, що впливає з розв'язків цих задач, полягає в тому, що введення в активну зону декількох стрижнів не дає адитивного результату. Тобто сумарна реактивність, яка вводиться в реактор декількома стрижнями, не є сумою реактивностей окремих стрижнів. Фізична причина цього зрозуміла. Після того, як ми ввели стрижень до реактора, нейтронне поле в усьому реакторі змінюється, і другий стрижень уводиться в уже змінене поле. Якщо другий стрижень уводиться в деякій області реактора, в якій поле не змінилося після введення першого стрижня, то тоді можна вважати, що реактивності стрижнів додаються.

Тепер варто зробити декілька зауважень про поняття «баланс реактивностей», і «запас реактивності». Ці вирази начебто припускають можливість додавати й віднімати реактивність з реактора і розглядати її як деяку субстанцію, що підлягає законам збереження. Саме таке поняття на інтуїтивному рівні побутує серед практичних працівників ядерних реакторів. І коли експеримент показує, що баланс реактивностей не виконується, то вводять таке поняття як інтерференція реактивностей, припускаючи з початку, що такі ефекти малі. Як ми бачили, простий фізичний розгляд проблеми показує, що адитивність реактивностей, а значить, і закон збереження є винятком із загальної ситуації, коли зміна параметрів активної зони в одній області реактора не змінює нейтронного поля в іншій області, в якій ми також передбачаємо змінити параметри.

На феноменологічному рівні таку ситуацію можна описати, якщо ввести набір параметрів x_1, x_2, \dots, x_n , які впливають на властивості реактора, а отже, і на реактивність ρ . Такими параметрами можуть бути, наприклад, координати кінців регулюючих стрижнів, ступінь вигорання палива в різних каналах, температура, густина сповільнювача тощо. Нехай значення цих параметрів під час “нормальної” роботи реактора дорівнюють $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$. Тоді, якщо в розкладі

$$\begin{aligned} \rho(x_1, x_2, \dots, x_n) = & \rho_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \frac{\partial \rho}{\partial x_1}(x_1 - x_{10}) + \frac{\partial \rho}{\partial x_2}(x_2 - x_{20}) + \\ & \dots + \frac{\partial \rho}{\partial x_n}(x_n - x_{n0}) + \dots \end{aligned} \quad (6.66)$$

можна знехтувати всіма похідними вище першої, то ми можемо говорити про адитивність реактивності й розглядати її як суму реактивностей у нормальному стані плюс деякі доданки, пов’язані з тим чи іншим параметром.

Якщо в цьому розкладі суттєві не тільки лінійні члени, то тоді кажуть про інтерференцію реактивностей. Наприклад, під час уведення двох стрижнів вони посилюють або послаблюють дію один одного і сумарна реактивність дорівнює сумі реактивностей кожного стрижня плюс (або мінус) деяка величина, що характеризує взаємодію між стрижнями. Ця величина називається інтерференційним доданком. Якщо стрижнів більше, то треба вводити інтерференційні доданки вищих порядків.

Яка користь від уведення таких величин?

Користь може бути в тому випадку, коли ці доданки малі і їх можна легко розрахувати. У деяких випадках така передумова справджується, але в більшості реакторів виміряти сумарну реактивність, вимірюючи реактивність доданків, не вдається.

Навіщо взагалі вимірювати реактивність стрижнів?

Розглянемо ситуацію, яка зустрічається при побудові різних реакторів. Нехай побудовано реактор, який деякий час мусить працювати без заміни ядерного палива. Однак невідомо, скільки часу він зможе працювати, тому що для розрахунків реактора потрібно багато величин, які визначаються з деякою похибкою, наприклад концентрація палива, коефіцієнти поглинання різних конструкцій тощо. Саме тому й термін неперервної роботи реактора також визначається з деякою похибкою.

На початковій стадії роботи реактор “задавлено” компенсуючими органами і він є критичним. Не зрозуміло, наскільки вистачить запасу надкритичності або запасу реактивності, бо експериментально вивчати реактор без компенсуючих органів неможливо. Хоча запас реактивності можна якісно оцінити за ступенем уведення в реактор органів регулювання. Але кількісно, знову ж таки, невідоме точне значення реактивності кожного органу окремо і ступінь їх взаємодії, оскільки вони зроблені з деякими допусками.

Експериментально можливо “зважувати” кожний орган окремо. Але це теж не дуже просто, бо видалення, припустимо, стрижня треба чимось компенсувати: або ввести якийсь отруювач, або змінити геометричні розміри виведенням частини відбивача. Виміривши таким чином усі регулюючі органи, можна вже зробити деякі висновки про запас реактивності.

Якщо виймати по два органи зразу, то можна виміряти інтерференційні поправки. Але така послідовність дій може привести до деяких складностей. Виймаючи з реактора регулюючі органи, треба слідкувати, щоб зміна реактивності при цьому не перевищувала частки нейтронів, що запізнюються. Інакше можливий розгін реактора на миттєвих нейтронах, який можна не встигнути чим-небудь попередити. Крім того, можливі ситуації, коли введення інтерференційних поправок не є виправданим, тобто ряд (6.66) сходиться погано, і другі і треті похідні мають значну величину й різні знаки й можуть компенсувати одна одну. *A priori* таку ситуацію визначити неможливо і необхідно досліджувати кожен новий реактор, спираючись на можливо кращі математичні моделі реактора й доповнюючи їх можливими експериментальними вимірюваннями.

Розділ 7

Повільні нестационарні процеси в реакторах

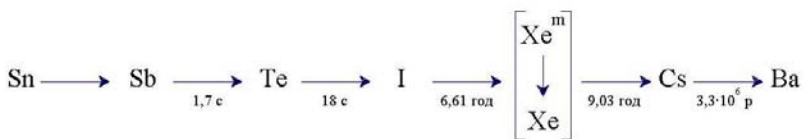
§ 7.1. Отруєння реактора продуктами поділу

Розглянемо більш повільні процеси зміни стану реактора в часі з характерними періодами порядку декількох годин. Зрозуміло, що під час аналізу цих процесів ми можемо не враховувати нейтронів, що запізнюються, так само, як і для аналізу дуже швидких процесів, обумовлених миттєвими нейтронами.

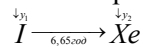
Такі повільні процеси обумовлені перш за все накопиченням у реакторі продуктів поділу ядер палива, як радіоактивних, так і стабільних. Накопичення радіоактивних продуктів розпаду, що досить інтенсивно поглинають нейтрони, називають звичайно отруєнням реактора, а накопичення стабільних ізотопів - поглиначів нейтронів - шлакуванням реактора.

Визначну роль у процесі отруєння реактора відіграє ^{135}Xe , який має виключно великий переріз поглинання теплових нейтронів (максимально великий серед усіх ядер). Переріз поглинання теплових нейтронів ^{135}Xe рівний $2,65 \cdot 10^6$ б, період його напіврозпаду 9,08 год, період напіврозпаду ядра-попередника (^{135}I) – 6,61 год, вихід ланцюжка 6 – 8 % для різних ядер, що діляться. Деякий внесок в отруєння реактора вносить ізотоп родію ^{105}Rh , але переріз його поглинання на два порядки менший, ніж у ^{135}Xe , і вихід його ланцюжка на порядок менший виходу ксенону для ізотопів ^{233}U і ^{235}U і порівняний за величиною з виходом ^{135}Xe тільки для поділу ізотопів плутонію. Таким чином, для грубих оцінок вплив родію в отруєння реактора можна не враховувати.

Схема виникнення ^{135}Xe з урахуванням розпаду ядер-попередників виглядає як



Звичайно можна не враховувати ядер-попередників йоду з малим часом життя, а також Xe^m в метастабільному стані, продуктів розпаду ^{135}Xe і накопичення стабільного ізотопу ^{136}Xe , який виникає після поглинання нейтрона ядром ^{135}Xe . Тоді схема виникнення ^{135}Xe спрощується:



У цій схемі врахована зміна напівперіоду розпаду йоду за рахунок виникнення ксенону в метастабільному стані Xe^m ; тут же y_1 - кумулятивний вихід ^{135}I , а y_2 - незалежний вихід ^{135}Xe .

Система рівнянь, що описує зміну концентрацій I і Xe, має вигляд

$$\frac{dI}{dt} = y_1 \Sigma_f \Phi - \lambda_1 I, \quad (7.1)$$

$$\frac{dX}{dt} = y_2 \Sigma_f \Phi + \lambda_1 I - (\sigma_{Xe} \Phi + \lambda_2) X,$$

де I і X - концентрації ^{135}I і ^{135}Xe ; λ_1 і λ_2 - постійні розпаду ^{135}I і ^{135}Xe відповідно ($\lambda_1 = 2,895 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1} = 0,1042 \text{ год}^{-1}$; $\lambda_2 = 2,12 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1} = 0,0763 \text{ год}^{-1}$); Σ_f - макроскопічний переріз поділу ядер палива; σ_{Xe} - мікроскопічний переріз поглинання нейтрона ядром ^{135}Xe ; Φ - густина потоку нейтронів. Систему рівнянь (7.1) треба доповнити рівнянням, що визначає зміну густини потоку теплових нейтронів $\Phi(\vec{r}, t)$. Але оскільки час зміни густини потоку нейтронів, який визначається періодом реактора, значно менший часу життя ^{135}I і ^{135}Xe , то можна вважати, що нейтронна підсистема миттєво "відслідковує" зміну концентрацій йоду і ксенону і в першому наближенні Φ є постійною величиною.

Розглянемо спочатку стаціонарний стан $\frac{dI}{dt} = \frac{dX}{dt} = 0$. Тоді

$$I_0 = \frac{y_1 \Sigma_f \Phi}{\lambda_1}, \quad X_0 = \frac{(y_1 + y_2) \Sigma_f \Phi}{\lambda_2 + \sigma_{Xe} \Phi}, \quad (7.2)$$

і макроскопічний переріз поглинання ^{135}Xe дорівнює

$$\Sigma_X \equiv \sigma_{Xe} X_0 = \frac{(y_1 + y_2) \Sigma_f \sigma_{Xe} \Phi}{\sigma_{Xe} \Phi + \lambda_2} = \frac{y \Sigma_f}{1 + \frac{\lambda_2}{\sigma_{Xh} \Phi}} = \frac{y \Sigma_f}{1 + \frac{\Phi_X}{\Phi}}, \quad (7.3)$$

де $y = y_1 + y_2$ і $\Phi_X = \frac{\lambda_2}{\sigma_{Xe}}$ - деяке характерне значення густини потоку нейтронів.

Звідси маємо висновки:

1) у стаціонарному стані концентрація ^{135}I визначається виходом з реакції поділу і наступним розпадом, а концентрація ксенону - безпосереднім виходом ксенону і йоду з реакції поділу і наступним зникненням ксенону завдяки розпаду і поглинанню нейтрона;

2) у стаціонарному стані концентрація ксенону не залежить від постійної розпаду йоду;

3) для великих потоків нейтронів макроскопічний переріз поглинання нейтронів ксеноном не залежить від мікроскопічного перерізу. В останньому випадку всі ядра ^{135}Xe , що виникли в реакторі, видаляються з нього завдяки реакції поглинання нейтрона, а не в процесі β -розпаду. Характерне значення густини потоку нейтронів, для якого знаменник (7.3) рівний двом, є

$\Phi_X = \frac{\lambda_2}{\sigma_{Xe}} = 0,8 \cdot 10^{13}$ нейтрон/(см²с), тому вже для потоків 10^{14} нейтрон/(см²с) знаменник майже не відрізняється від одиниці.

Зміна коефіцієнта розмноження, завдяки накопиченню ксенону, визначається зміною коефіцієнта поглинання

$$\frac{\Delta k}{k} = -\frac{\Sigma_X}{\Sigma_a} = -\frac{-\Sigma_f}{\Sigma_a} \left(1 + \frac{\Phi_X}{\Phi}\right)^{-1}. \quad (7.4)$$

У цьому виразі припускається, що густина потоку нейтронів не залежить від координат. У дійсності Φ залежить від координат, і це приводить до деякого збільшення від'ємної реактивності (приблизно в 1,2 рази), якщо порівняти з реактивністю, обрахованою з використанням середньої густини потоку. Це пов'язано з тим, що отруєння максимальне в центрі реактора, де вартість¹ нейтронів найбільша.

§ 7.2. Зміна в часі концентрації отруювачів

Розглянемо тепер залежність концентрації ксенону від часу, тобто проаналізуємо ксенонові перехідні процеси. Вважаючи Φ і Σ_f постійними, розв'язки рівнянь (7.1) можна подати у вигляді

$$I(t) = I_0 + [I(0) - I_0] \exp(-\lambda_1 t), \quad (7.5)$$

$$X(t) = X_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda'_x - \lambda_1} [I(0) - I_0] [\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda'_x t)] + [X(0) - X_0] \exp(-\lambda'_x t), \quad (7.6)$$

де $\lambda'_x = \lambda_2 + \sigma_{Xe} \Phi$.

Якщо в цих виразах покласти $I(0) = X(0) = 0$, то ми отримаємо закон зростання концентрації йоду і ксенону під час пуску реактора, причому густина потоку нейтронів змінюється стрибком від нуля до середнього значення Φ в момент часу $t = 0$. Знаючи концентрацію ксенону можна визначити макроскопічний переріз і зміну реактивності в часі. Зрозуміло, що ці величини зростають від нуля до значень стаціонарного стану, якому відповідає концентрація X_0 .

¹ У цьому виразі поняття вартості нейтрона використовується в тому розумінні, що всередині реактора тепловий нейтрон має більшу ймовірність поглинутись ядром палива, ніж на краю реактора.

Розглянемо тепер поведінку $X(t)$ під час зупинки реактора, коли він довгий час працював на постійній потужності. Для цього потрібно знайти розв'язок рівнянь (7.1) для $\Phi = 0$ з початковими умовами $I(0) = I_0$, $X(0) = X_0$. З цією метою в виразах для $I(t)$ і $X(t)$ треба покласти $I_0 = X_0 = \Phi = 0$ і $I(0) = I_0$, $X(0) = X_0$. Тоді

$$I(t) = I_0 \exp(-\lambda_1 t), \quad (7.7)$$

$$X(t) = X_0 \exp(-\lambda_x^{\circ} t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_x^{\circ} - \lambda_1} I_0 [\exp(-\lambda_1 t) + \exp(-\lambda_x^{\circ} t)]. \quad (7.8)$$

Звідси видно, що концентрація йоду спадає з часом завдяки розпаду, а концентрація ксенону складається з двох доданків, один з яких, пов'язаний з початковою концентрацією ксенону, спадає, а другий доданок, пов'язаний з утворенням ксенону з йоду, спочатку зростає, а потім спадає. Якщо початковий потік нейтронів малий, то другий доданок спадає.

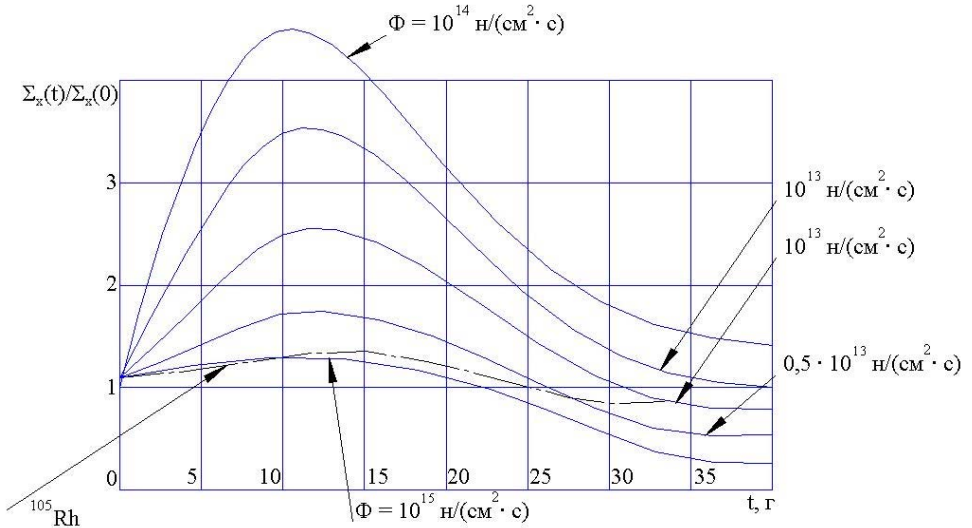


Рис. 7.1. Зміна відносної концентрації ксенону при різних початкових потоках нейтронів. Для прикладу також наведено зміну концентрації родію (^{105}Rh).

Загальну поведінку $\Sigma_x(t)/\Sigma_x(0)$ можна побачити на рис. 7.1. З рисунка

видно, що сумарна концентрація ксенону, а отже, і від'ємна реактивність при достатньо високих початкових потоках нейтронів може збільшуватись після зупинки реактора. Таке збільшення від'ємної реактивності називають "йодною ямою". Фізична причина виникнення "йодної ями" полягає в тому, що під час зменшення густини потоку нейтронів зменшується головна причина зменшення кількості ядер ^{135}Xe за рахунок поглинання нейтронів. У той же час виникнення ядер ^{135}Xe за рахунок розпаду йоду деякий час відбувається з

попередньою швидкістю, оскільки період напіврозпаду ^{135}I досить високий (значно більший, ніж час спадання густини потоку нейтронів під час зупинки реактора). Через деякий час, порівнянний з часом життя ^{135}I , кількість йоду зменшується, ^{135}Xe розпадається і його концентрація з часом прямує до нуля.

З рисунка видно, що при деяких значеннях Φ наростання концентрації ксенону не відбувається. Це граничне значення $\Phi_{cp} = 7 \cdot 10^{11}$ нейтрон/(см²·с). Для більших значень Φ концентрація ^{135}Xe після зупинки реактора в декілька разів перевищує стаціонарну концентрацію, і це перевищення має тривалість 30 – 40 год. Для того щоб збільшити потужність реактора в цей період, треба мати значний запас додатної реактивності, що досить небезпечно. Тому часто такого запасу не роблять, а в необхідних випадках просто чекають, коли розпадеться весь ^{135}Xe .

Аналогічна поведінка інших радіоактивних продуктів поділу ядер палива, які сильно поглинають нейтрони, але їх роль в отруєнні реактора значно менша.

§ 7.3. Шлакування реактора

Вплив стабільних продуктів поділу та радіоактивних продуктів з великими періодами напіврозпаду, що вимірюються роками, на роботу реактора дещо відрізняється від розглянутого в попередньому параграфі. Основна відмінність полягає в тому, що зменшення концентрації цих нуклідів пов'язане тільки з поглинанням нейтронів і не пов'язане з їх розпадом. Таких нуклідів декілька: ^{149}Sm , ^{151}Sm , ^{119}Cd , ^{157}Gd ; з них ^{151}Sm є радіоактивним з періодом напіврозпаду ~ 90 років, і його розпадом можна знехтувати.

Якщо продукт поділу є стабільним, то його концентрація визначається з рівняння

$$\frac{dc_i}{dt} = y_i \Sigma_f \Phi - \sigma_i c_i \Phi, \quad (7.9)$$

де y_i - вихід i -го продукту під час поділу.

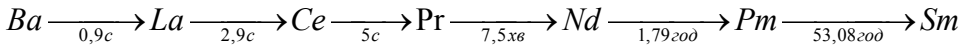
Якщо $\sigma_i \gg \sigma_f$, то швидко встановлюється насичення, і за цей час не встигають суттєво змінитися ні склад палива, ні густина потоку нейтронів. Тому розв'язок рівняння (7.9) можна шукати з умовою $\Phi = const$, $\Sigma_f = const$, $c_i(0) = 0$. Тоді

$$\tilde{n}_i(t) = y_i \frac{\Sigma_f}{\sigma_i} (1 - \exp(-\sigma_i \Phi t)). \quad (7.10)$$

Оцінки, проведені для різних нуклідів, показують, що головним нуклідом у процесі шлакування є ^{149}Sm . Але обчислювати його концентрацію без врахування розпаду його попередника невірно, оскільки, як ми бачили в по-

передньому параграфі, час розпаду попередника суттєво впливає на кінетику накопичення нукліда.

Ланцюжок виникнення ^{149}Sm має вигляд



Більшість попередників можна не враховувати завдяки короткому часу життя, а можна врахувати тільки один попередник з ефективним періодом напіврозпаду

$$T_{1/2}^{ef} = T_{1/2}(\text{Nd}) + T_{1/2}(\text{Pm}) = 54,8 \text{ год.} \quad (7.11)$$

Рівняння для зміни концентрації ^{149}Sm , ^{149}Pm можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= y\Sigma_f\Phi - \lambda_p^{\circ}P, \\ \frac{dS}{dt} &= \lambda_p P - \sigma_s S\Phi, \end{aligned} \quad \lambda'_p = \lambda_p + \sigma_p\Phi. \quad (7.12)$$

Накопичення прометію і самарію в реакторі, в якому в момент $t = 0$ потік змінюється від 0 до Φ , відбувається за законом

$$\begin{aligned} P &= \frac{y\Sigma_f\Phi}{\lambda'_p} [1 - \exp(-\lambda'_p t)], \\ S &= \frac{y\Sigma_f\lambda_p}{\lambda'_p} [1 - \exp(-\sigma_s\Phi t)] + \\ &+ y\Sigma_f\Phi \frac{\lambda_p/\lambda'_p}{\lambda'_p - \sigma_s\Phi} [\exp(-\lambda'_p t) - \exp(-\sigma_s\Phi t)]. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Поглинання нейтронів ізотопом ^{149}Pm невелике, і можна покласти $\lambda'_p = \lambda_p$. Для характерних значень потоку $\Phi_s = \frac{\lambda_s}{\sigma_s} \approx 5 \cdot 10^{13}$ нейтрон/(см²с)

обидві експоненти затухають приблизно за три доби, а значить за три доби концентрація прометію і самарію досягає стаціонарних значень.

Після зупинки реактора виникає явище, схоже на “йодну яму” з тою різницею, що ^{149}Sm не розпадається. У цьому випадку концентрація самарію і прометію змінюється за законом

$$\begin{aligned} P(t) &= P(0)\exp(-\lambda_p t), P(0) = \frac{y\Sigma_f\Phi}{\lambda'_p}, \\ S(t) &= S(0) + P(0)[1 - \exp(-\lambda_p t)], S(0) = \frac{y\Sigma_f\lambda_p}{\lambda'_p\sigma_s}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Після зупинки реактора після затухання експонент коефіцієнт розмноження зменшується на величину

$$\Delta k = \frac{y}{v} \left(\frac{1 - \sigma_p / \sigma_s}{1 + \frac{\sigma_p \Phi}{\lambda_p}} \right) \frac{\Phi}{\Phi_s}, \quad (7.15)$$

яка не відновлюється, і весь самарій доводиться “випалювати” під час наступного включення реактора.

Якщо реактор працює на високих потоках нейтронів $\Phi > 10^{15}$ нейтрон/(см²·с), то після зупинки реактора можлива ситуація, коли зміна реактивності настільки велика, що новий запуск реактора стає неможливим. Таку ситуацію зовуть “самарієвою смертю” реактора. Вона означає, що реактори з високим потоком нейтронів не можна зупинити (в усякому разі, різко і надовго). Потрібні спеціальні режими зменшення потоку нейтронів, під час протікання яких самарій «випалюється». Такі режими розроблено, і задачу зупинки високопоточного реактора розв’язано.

Треба відзначити, що крім нуклідів, які сильно поглинають нейтрони, існує дуже багато скалок поділу із значно меншим перерізом поглинання нейтронів. Цих нуклідів досить багато, і в сумі вони можуть дати помітний внесок у зміну реактивності реактора. Звичайно всі скалки поділу, які слабо поглинають нейтрони, враховують у вигляді деякої ефективної скалки поділу з ефективним попередником, із сумарним ефективним виходом і деяким ефективним перерізом поглинання. Сучасний стан науки такий, що всі параметри більшості скалок поділу відомі, і ефективні параметри підганяють шляхом розрахунків на ЕОМ так, щоб найкраще апроксимувати зміну сумарного макроскопічного перерізу поглинання. Звісно, параметри такої ефективної скалки поділу залежать від густини потоку нейтронів.

§ 7.4. Нейтронно-ксенонові коливання

Повернемося до вивчення впливу ксенона на поведінку реактора. В простих випадках, які розглядалися в попередніх параграфах, нас цікавила сумарна концентрація ксенона та її вплив на реактивність реактора. Але виявляється, що концентрація ксенона може змінюватися неоднорідно в об’ємі реактора і немонотонно в часі. Ці ефекти можна дослідити, якщо врахувати нелінійні зворотні зв’язки, що виникають в реакторі.

В усіх рівняннях, що описують зміну концентрації нуклідів, ми поклали густину потоку нейтронів Φ постійною. У дійсності, ця величина змінюється із зміною реактивності, а отже, із зміною концентрації нуклідів, що поглинають нейтрони. Тому рівняння для зміни концентрації нуклідів треба доповнити рівнянням для зміни густини потоку нейтронів Φ , в якому треба врахувати зміну коефіцієнта поглинання із зміною концентрації нукліда, що поглинає нейтрони.

Таким чином, для випадку отруєння реактора ксеноном із врахуванням зміни Φ у моноенергетичному дифузійному наближенні система рівнянь, що описує отруєння реактора, приймає вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{D\nu} \frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial t} &= \Delta \Phi(r,t) + (\alpha_0^2 - BX)\Phi(r,t), \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma_1 \Sigma_f \Phi - \lambda_1 I, \\ \frac{dX}{dt} &= \gamma_2 \Sigma_f \Phi + \lambda_1 I - (\lambda_2 + \sigma_X \Phi)X. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Отже, для повного розв'язку задачі ми маємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими функціями $\Phi(r, t)$, $I(r, t)$, $X(r, t)$. Особливість цієї системи полягає в тому, що вона має члени типу $\sim AX\Phi$ - пропорційні добутку двох невідомих функцій, тобто ця система нелінійна.

Нелінійні рівняння, як відомо, не мають єдності розв'язку. Крім того, їх розв'язки майже неможливо отримати в аналітичному вигляді, за винятком деяких окремих рівнянь, де вдалося просто вгадати розв'язок. Саме та властивість, що нелінійні рівняння не мають єдності розв'язку, є дуже цікавою. Наприклад, нехай розв'язок нашої системи залежить від деякого параметра, наприклад розміру реактора. Можливою є ситуація, коли, наприклад, для малих значень параметра розв'язок єдиний, а після його збільшення більше деякого критичного значення виникають дві гілки розв'язку. Ці дві гілки розв'язку можуть мати різну масу, наприклад одна гілка розв'язку може бути нестійкою відносно малих збурень. Тому система не може знаходитись у цьому стані, і вона переходить на стійку гілку розв'язку.

Таким чином, у нелінійних системах виникає задача дослідження розв'язків на стійкість відносно малих збурень. Такі дослідження звичайно проводять за допомогою якісної теорії диференціальних рівнянь. Звичайно, у нелінійних системах можливе виникнення багато інших цікавих ситуацій, на яких ми не будемо зупинятись докладно.

Наука, яка вивчає процеси в нелінійних системах, що знаходяться в станах, далеких від стану термодинамічної рівноваги, називається синергетикою (див., наприклад, [10]). Реактор є типово синергетичною системою, і в ньому якраз і виникають такі структури та процеси, які вивчає синергетика. А типовим прикладом виникнення таких структур є можливі просторові ксенонові коливання нейтронного поля в ядерному реакторі.

У цьому розділі ми не будемо досліджувати систему рівнянь реактора (7.16) на стійкість відносно виникнення ксенонових коливань. Такі дослідження можна знайти, наприклад, в [11] (див також розділ 10). Розглянемо тільки якісно, яким чином виникають ці просторові нейтронно-ксенонові коливання.

Нехай реактор працює на постійній потужності. Керування реактором відбувається таким чином, що потужність підтримується постійно, за рахунок

введення поглиначів, рівномірно по всьому об'єму реактора. Нехай у деякій точці \vec{r}_0 в момент t_0 завдяки флуктуації зросла густина нейтронного потоку. У результаті навколо цієї точки зростає випалювання ксенону, його концентрація зменшується, бо час життя йоду досить великий, і ксенон не встигає виникати завдяки розпаду йоду.

Оскільки концентрація ксенону зменшилась, то реактивність всього реактора збільшилась, і автоматично по всьому об'єму реактора вводиться поглинач. Для великих реакторів поглинач вводиться недостатньо для того, щоб компенсувати локальне збільшення реактивності. Тобто, незважаючи на введення поглинача, в околі точки \vec{r}_0 буде збільшуватись реактивність, а значить, і густина потоку нейтронів, а значить, і концентрація йоду при зменшенні концентрації ксенону. Це буде продовжуватись до того часу, поки не почне розпадатися йод, обумовлений локальним зростанням густини потоку нейтронів, і концентрація ксенону в околі точки \vec{r}_0 не почне збільшуватись.

На деякій віддалі від точки \vec{r}_0 потік нейтронів задавлено поглиначем, концентрація ксенону збільшилась, зменшилась густина потоку нейтронів і концентрація йоду. Але за той самий час розпаду йоду на цій відстані від \vec{r}_0 почне спадати концентрація ксенону, завдяки зменшенню кількості йоду, і збільшуватись густина потоку нейтронів. Таким чином, виникають коливання нейтронного поля, пов'язані з коливанням концентрації ксенону.

Якщо дослідити систему рівнянь на стійкість, то можна отримати умову виникнення просторових ксенонових коливань. Виявляється, що ця умова пов'язана з розмірами реактора, і в малих реакторах такі коливання не виникають.

§ 7.5. Зміна нуклідного складу палива

Розглянемо тепер ще більш повільні процеси в реакторі, для яких характерний час зміни стану реактора можна порівняти з місяцями й роками роботи реактора. Процеси такого терміну пов'язані як із змінами нуклідного стану палива, так і зі змінами фізичного стану конструкційних матеріалів реактора. У наступних параграфах даного розділу ми розглянемо саме зміну нуклідного стану палива під час роботи реактора.

Якщо паливом реактора є збагачений або природний уран, то основними ядерними процесами, які ведуть до зміни нуклідного стану палива, є реакція поділу ^{235}U , реакції радіаційного захоплення ядрами ^{235}U , ^{238}U , реакції β -розпаду важких ізотопів, у результаті яких утворюються трансуранові елементи. Іноді варто також враховувати поділ ядер ^{239}Pu , ^{241}Pu та захоплення нейтронів всіма ізотопами плутонію. Завдяки цим процесам, змінюються концентрації різних нуклідів, а отже, змінюються макроскопічні перерізи, коефіцієнт розмноження та реактивність реактора.

Розглянемо спочатку зміну концентрації ^{235}U . Нижче під концентрацією даного нукліда ми будемо розуміти відношення кількості його ядер до кількості ядер ^{238}U , вигорянням якого ми будемо нехтувати в цьому параграфі, тобто $c_5 \rightarrow \frac{c_5}{c_8}$. Зміна концентрації c_5 ядер ^{235}U визначається рівнянням

$$\frac{dc_5}{dt} = -\sigma_5 c_5 \Phi. \quad (7.17)$$

У цьому виразі Φ - середня густина потоку теплових нейтронів у реакторі, яку можна вважати постійною, якщо розглядати невеликі зміни c_5 (мала глибина вигоряння палива). Величина σ_5 - переріз поглинання нейтронів ядрами ^{235}U повинна враховувати як поглинання теплових нейтронів, так і поглинання нейтронів, які сповільнюються, тому що поглинання на резонансах палива є порівнянним за величиною з поглинанням в тепловій групі. Тобто зміна концентрації палива повинна визначатися інтегралом

$$\int \sigma(E) \Phi(E) dE. \quad (7.18)$$

Якщо прийняти поділ нейтронів за енергією на дві групи - теплові нейтрони та нейтрони, що сповільнюються, то вираз для σ_5 можна подати у вигляді

$$\sigma_5 = \bar{\sigma}_5 + \gamma I_{ef}, \quad (7.19)$$

де $\bar{\sigma}_5$ - середній переріз поглинання в тепловій групі; I_{ef} - ефективний резонансний інтеграл; γ - параметр жорсткості спектру нейтронів. Точні вирази для γ і I_{ef} визначаються виглядом виразу для спектра нейтронів, що сповільнюються.

Розв'язок рівняння (7.17) можна записати у вигляді

$$c_5 = c_5^0 \exp(-s), \quad s = \int_0^t \sigma_5(t) \Phi(t) dt. \quad (7.20)$$

Для малих глибин вигоряння ($\Phi = const, \sigma_5 = const$)

$$c_5 = c_5^0 (1 - s_5), \quad s_5 = \sigma_5 \Phi t. \quad (7.21)$$

Утворення ядра ^{236}U визначається реакцією радіаційного захоплення нейтрона ядром ^{235}U з перерізом σ_{c_5} . Тому зміну концентрації ^{236}U можна визначити з рівняння

$$\frac{dc_6}{dt} = \sigma_5 c_5 \Phi - \sigma_6 c_6 \Phi. \quad (7.22)$$

Для малих глибин вигоряння концентрація c_6 лінійно зростає з часом, якщо вважати $c_6^0 = 0$:

$$c_6 = c_5^0 \sigma_{c_5} \Phi t.$$

Ми вже бачили, що поглинання нейтронів ядром ^{238}U веде до появи нових ядер, що можуть ділитися. Це ядра ^{239}Pu і ^{241}Pu . Їх ядрами-попередниками є ^{239}Np і ^{240}Pu відповідно. Якщо розглядати малі глибини вигорання, то концентрацією ^{241}Pu (c_1) можна знехтувати. Можна також знехтувати утворенням ядер ^{239}U і ^{240}Np завдяки їх малому періоду напіврозпаду. Таким чином, система рівнянь для концентрацій ^{239}Np (c_N), ^{239}Pu (c_9), ^{240}Pu (c_0) при умові $c_8 = \text{const}$ приймає вигляд

$$\begin{aligned}\frac{dc_N}{dt} &= \sigma_8 \Phi - \lambda' c_N, \lambda' = \lambda + \sigma_N \Phi, \\ \frac{dc_9}{dt} &= \lambda c_N - \sigma_9 c_9 \Phi, \\ \frac{dc_0}{dt} &= \sigma_{c_9} c_9 \Phi + \sigma_N c_N \Phi - \sigma_0 c_0 \Phi.\end{aligned}\quad (7.23)$$

Розв'язок цієї системи за умовою $\Phi = \text{const}$, $\sigma_i = \text{const}$ приймає вигляд

$$\begin{aligned}c_N &= \frac{\sigma_8 \Phi}{\lambda'} (1 - \exp(-\lambda' t)), \\ c_9 &= \frac{\lambda}{\lambda' - \sigma_9 \Phi} \frac{\sigma_8}{\sigma_9} \left[1 - \exp(-s_9) - \sigma_9 \Phi \frac{1 - \exp(-\lambda' t)}{\lambda'} \right], \\ s_9 &= \sigma_9 \Phi t.\end{aligned}\quad (7.24)$$

Коефіцієнт розмноження можна записати у вигляді

$$k = \frac{\nu_5 \Sigma_{f5} + \nu_9 \Sigma_{f9}}{\Sigma_5 + \Sigma_9 + \Sigma_N + \Sigma_8 + \delta \Sigma}, \quad (7.25)$$

де через $\delta \Sigma$ позначено переріз поглинання всіма нуклідами, що не виписані у явному вигляді, а через Σ_i - переріз поглинання i -м нуклідом. У початковий момент часу коефіцієнт розмноження визначається виразом $k = \eta_5 \theta$, де

$$\theta = \frac{\Sigma_5^0}{\Sigma_a^0}, \text{ і } \Sigma_a^0 - \text{повний переріз поглинання в початковий момент часу. Зміна}$$

коефіцієнта розмноження, а отже, і зміна реактивності за рахунок зміни концентрації важких нуклідів без урахування поглинання продуктами поділу дорівнює

$$\frac{\Delta k}{k} = \left(\frac{\eta_9}{\eta_5} - \theta \right) \frac{\sigma_9 c_9}{\sigma_5 c_5^0} - (1 - \theta) s_5 - \theta \frac{\sigma_N c_N}{\sigma_5 c_5^0}. \quad (7.26)$$

Три доданки в рівнянні (7.26) мають ясне фізичне значення. Перший з них визначає зміну реактивності завдяки накопиченню плутонію. Ця зміна має додатний знак, бо $\eta_9 \approx \eta_5$, а $\theta < 1$. Другий доданок від'ємний і пов'язаний з вигоранням ^{235}U . Третій доданок пов'язаний з поглинанням нейтронів нептунієм.

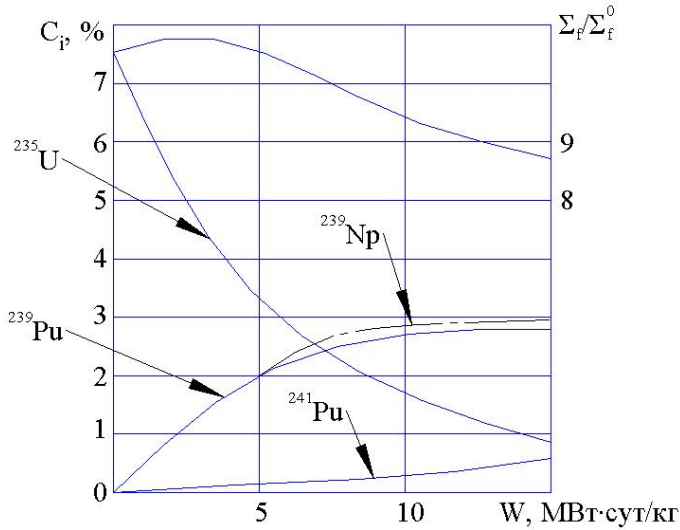


Рис. 7.2. Залежність концентрацій основних нуклідів від вигорання палива. Верхня крива являє собою сумарну зміну відносного макроскопічного перерізу поділу (права шкала).

Зміну концентрацій основних важких нуклідів можна проілюструвати графіками зміни в часі ізотопного складу урану і плутонію (рис. 7.2). Ці графіки розраховані без умови малого вигорання палива.

Вище під час розгляду зміни концентрації ядер палива ми використовували поняття глибини вигорання палива. Це одне з найважливіших понять, що визначає економічність роботи АЕС. Це поняття має декілька визначень. Іноді кажуть про відносне вигорання нуклідів палива й виражають його у відсотках, тобто глибиною вигорання палива $\rho_{\text{вгл}}$ називають величину

$$\rho_{\text{вгл}} = \frac{\Delta m_U}{m_U} 100 \%, \quad (7.27)$$

де m_U - маса завантаженого в реактор палива, а Δm_U - маса палива, що згоріло під час роботи реактора.

Значно частіше глибину вигорання палива пов'язують з кількістю енергії, яка виділяється під час роботи реактора. Тоді глибина вигорання палива визначається як відношення енергії, отриманої за час роботи реактора, до маси завантаженого урану

$$\rho_{\text{вгл}} = Q_T t / m_U. \quad (7.28)$$

Одиницею вимірювання глибини вигорання палива в цьому випадку є МВт·доба/кг урану. Співвідношення між двома визначеннями можна отримати, урахувавши, що один відсоток палива, що вигоріло, приблизно дорівнює 10 МВт·добу/кг урану.

В енергетичному реакторі варто досягати найбільш можливої глибини вигорання палива. Однак для кожного реактора існує деяка гранична глибина вигорання палива, яка визначається, перш за все, стійкістю твелів. Справа в тому, що великі терміни роботи реактора можуть привести до розпухання палива, підвищення тиску газоподібних продуктів поділу на оболонку твелів. Сама оболонка твелів також може розпухати й піддаватися ерозії та корозії під спільною дією нейтронів, теплоносія та високої температури. Останнім часом досягли досить високої стійкості твелів, що дає змогу значно підвищувати глибину вигорання палива.

§ 7.6. Відтворення ядерного палива

Реактор є унікальною енергетичною установкою, яка дозволяє не тільки спалювати ядерне паливо, але й напрацьовувати або нове ядерне паливо, або аналогічне початковому залежно від ядерного циклу, який використовується в реакторі. Здатність реактора напрацьовувати додаткове ядерне паливо визначається коефіцієнтом відтворення ядерного палива. Коефіцієнт відтворення (KB) визначається як відношення швидкості накопичення нових ядер, що діляться, до швидкості вигорання початково завантажених у реактор ядер палива:

$$KB = \frac{\left| \frac{dc_i}{dt} \right|}{\left| \frac{dc_{c0}}{dt} \right|}. \quad (7.29)$$

У випадку уран-плутонієвого циклу коефіцієнт відтворення ще називають плутонієвим коефіцієнтом, і він визначається відношенням швидкості накопичення ядер плутонію до швидкості зменшення ядер ^{235}U .

Значення процесу відтворення палива для ядерної енергетики надзвичайно велике. Дійсно, наявність цього процесу дає змогу спалювати в реакторі значно більше палива, ніж було завантажено в реактор. Спалюючи 1 кг палива, ми напрацьовуємо KB кг нового палива, спалюючи яке, отримуємо KB^2 кг палива, і т.д. Якщо $KB < 1$, то замість 1 кг палива ми можемо спалити в реакторі

$$1 + KB + KB^2 + \dots = \frac{1}{1 - KB} \text{ кг.} \quad (7.30)$$

Якщо $KB > 1$, то процес відтворення палива закінчується тоді, коли весь сировинний матеріал перетворюється на матеріал, що ділиться. Таким чином, в ядерній енергетиці можна використати сировинні матеріали, запаси яких набагато більші, ніж запаси матеріалів, що діляться. Отже, основним завданням є отримання коефіцієнта відтворення, більшого від одиниці.

Розглянемо, якими фізичними факторами визначається коефіцієнт відтворення палива. У реакторі, як відомо, існують три групи матеріалів: паливо, сировинні матеріали й різноманітні поглиначі нейтронів, до яких можна віднести і сповільнювач, і теплоносій, і конструкційні матеріали. З точки зору такого поділу баланс нейтронів у реакторі виглядає так: в одному акті поділу виділяється ν нейтронів; після можливого поглинання швидкого нейтрона як ядрами палива, так і ядрами сировинних матеріалів ця кількість нейтронів збільшується в ε раз, де ε - коефіцієнт розмноження на швидких нейтронах. Після сповільнення один з цих нейтронів витрачається на підтримання ланцюгової реакції, KB нейтронів поглинаються сировинними матеріалами в основному на резонансах в області проміжних енергій. У поглиначах нейтронів поглинається q_n нейтронів. Ця величина визначається через коефіцієнт використання теплових нейтронів θ як $q_n = \frac{1 - \theta}{\theta}$. Таким чином,

$$\nu\varepsilon = 1 + KB + q_n. \quad (7.31)$$

або

$$KB = \nu\varepsilon - q_n - 1.$$

Основним завданням з точки зору відтворення палива є отримання $KB > 1$. З рівності (7.31) видно, що для цього потрібно максимально збільшити ν , ε і максимально зменшити q_n . Як ми вже бачили в попередніх розділах, величини ν і ε залежать від енергії нейтронів і є максимальними на швидких нейтронах. Отже, KB може досягти максимально можливих величин у реакторах на швидких нейтронах з мінімумом поглиначів, і бажано, з неперервним видаленням продуктів поділу.

Для ілюстрації можна навести оцінки коефіцієнта відтворення для різних можливих паливних циклів. Нагадаємо, що існують два різні паливні цикли: уран-плутонієвий і торій-урановий; для скорочення ми будемо їх називати урановим і торієвим паливними циклами. Таким чином, для уранового циклу на швидких нейтронах $\varepsilon = 1,35$, $\nu = 2,7$ і $KB \leq 2,6$ (рівність, якщо $q_n = 0$). Для торієвого циклу на швидких нейтронах $\varepsilon = 1,11$, $\nu = 2,3$ і $KB \leq 1,6$. Для уранового циклу на теплових нейтронах $\varepsilon = 1,15$, $\nu = 2,05$ і якщо $q_n = 0,15$, то $KB = 1,15$. Для торієвого циклу на теплових нейтронах $\varepsilon = 1,05$, $\nu = 2,08$ і якщо $q_n = 0,15$, то $KB = 1,25$.

Для реакторів на теплових нейтронах у цих оцінках не враховано поглинання на продуктах поділу і поглинання ^{240}Pu і ^{234}U . Якщо врахувати всі поглиначі, то виявляється, що дуже важко побудувати реактор на теплових нейтронах та урановому циклі з коефіцієнтом відтворення палива $KB > 0,7 - 0,8$. Але в теплових реакторах на торієвому циклі є досить реальним отримання коефіцієнта відтворення більше одиниці. Остання обставина є дуже важливою, оскільки теплові реактори є найбільш технічно розроблені, а отже, більш безпечні та дешевші. Таким чином, з точки зору економічності ядерної енер-

гетики найбільш вигідними є швидкі реактори на урановому циклі та теплові реактори на торієвому циклі.

Розглянемо тепер визначення коефіцієнта відтворення безпосередньо з рівнянь випалювання. Для уран-плутонієвого циклу маємо очевидні рівняння для зміни концентрації ^{235}U і ^{239}Pu :

$$\begin{aligned} \frac{dc_9}{dt} &= (-\sigma_9 c_9 + \sigma_{c8} c_8) \Phi, \quad c_9(0) = 0, \\ \frac{dc_5}{dt} &= -\sigma_5 c_5 \Phi, \quad c_5(0) = c_5^0. \end{aligned} \quad (7.32)$$

У початковий момент роботи реактора

$$KB = \left. \frac{dc_9}{dc_5} \right|_{t=0} = \frac{\sigma_{c8} c_8}{\sigma_5 c_5} = \frac{\Sigma_a^8}{\Sigma_a^5}. \quad (7.33)$$

Отже, коефіцієнт відтворення збільшується із зменшенням перерізу поглинання ^{235}U , а отже, із зменшенням збагачення палива. Зрозуміло, що таке зменшення можливе тільки до деякої межі, поки коефіцієнт розмноження нейтронів не стане меншим деякого граничного значення $k_\infty > 1$ (такого, щоб k_{ef} не зменшився до значень менших одиниці). Наведені вирази є справедливими тільки для критичного реактора. У загальному випадку

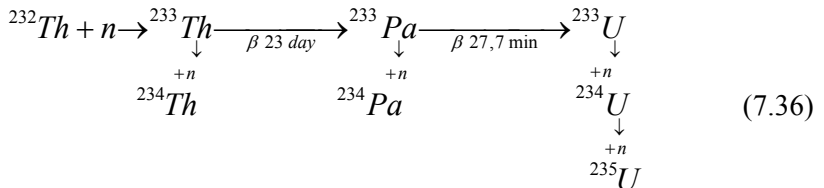
$$k_\infty = v\varepsilon \frac{\Sigma_a^5}{\Sigma_a^5 + \Sigma_a^8 + \Sigma_a^*} = v\varepsilon \frac{1}{1 + \frac{\Sigma_a^8}{\Sigma_a^5} + \frac{\Sigma_a^*}{\Sigma_a^5}} = \frac{v\varepsilon}{1 + KB + q}. \quad (7.34)$$

Отже,

$$KB = \frac{v\varepsilon}{k_\infty} - 1 - q. \quad (7.35)$$

Якщо врахувати вихід нейтронів за межі реактора, то замість k_∞ у виразі (7.35) треба записати k_{ef} .

Розглянемо більш докладно цикл на основі торію. Зрозуміло, що більш точне визначення зміни концентрації нуклідів потребує врахування попередників і наступників. Для такого врахування нагадаємо схему ядерних перетворень торієвого циклу:



До речі, крім позначених у схемі (7.36) ядерних реакцій, у торієвому циклі важливу роль відіграє реакція

$${}^{233}\text{U}(n, 2n) {}^{232}\text{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{228}\text{Th} \xrightarrow{\gamma} . \quad (7.37)$$

Саме випромінювання γ -кванта з енергією близько 5 МеВ є однією з причин невикористання торієвого циклу в сучасних реакторах. Існування цього ланцюжка не дозволяє обробляти паливо в звичайних умовах, а потребує спеціального обладнання.

Виходячи із схеми (7.36), можна записати кінетичні рівняння для зміни концентрації нуклідів у часі (у цих рівняннях $F = \Phi t$):

$$\begin{aligned} \frac{dc_3}{dF} &= -\sigma_3 c_3 + \lambda^* c_{Pa}, & \lambda^* &= \frac{\lambda}{\Phi}, \\ \frac{dc_{Pa}}{dF} &= -\sigma_{aPa} c_{Pa} - \lambda^* c_{Pa} + \sigma_{c2} c_2, \\ \frac{dc_4}{dF} &= -\sigma_{a4} c_4 + \sigma_{c3} c_3, \\ \frac{dc_5}{dF} &= -\sigma_5 c_5 + \sigma_{a4} c_4. \end{aligned} \quad (7.38)$$

У цих рівняннях не враховується зміна концентрації ${}^{232}\text{Th}$, оскільки початкове завантаження торію дуже велике порівняно з іншими нуклідами, і відносна зміна його концентрації є невеликою.

Уведемо величину T_3 - час випалювання ${}^{233}\text{U}$ в e разів. За визначенням $T_3 = \frac{1}{\Phi \sigma_3}$. Тоді, якщо $\frac{1}{\lambda} \ll T_3$, то під час визначення концентрації протактинію можна вважати $\frac{dc_3}{dF} = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \sigma_3 c_3 &= \lambda^* c_{Pa}, \\ \frac{c_{Pa}}{c_3} &\approx \frac{\sigma_3 \Phi}{\lambda} = \frac{T_{Pa}}{T_3} \end{aligned} \quad (7.39)$$

і коефіцієнт згубного поглинання в протактинії рівний

$$q = \frac{\sum_{Pa}}{\sum_{a3}} = \frac{\sigma_{aPa} T_{Pa}}{\sigma_3 T_3}. \quad (7.40)$$

Отже, із збільшенням швидкості випалювання ${}^{233}\text{U}$ (T_3 зменшується) зростає згубне поглинання на протактинії, і відтворення зменшується.

Розглянемо тепер випадок простого відтворення, тобто $KB = 1$. Тоді

$$\frac{dc_3}{dF} = -\sigma_3 c_3 + \lambda^* c_{Pa} = 0.$$

Через час, більший від T_{Pa} , концентрацію протактинію також можна вважати постійною

$$\frac{dc_{Pa}}{dF} = -(\sigma_{aPa} + \lambda^*)c_{Pa} + \sigma_{a2}c_2 = 0.$$

Звідки

$$\frac{c_{Pa}}{c_2} = \frac{\sigma_{a2}}{\sigma_{aPa} + \lambda^*}. \quad (7.41)$$

З урахуванням рівняння (7.39) маємо

$$\frac{c_3}{c_2} = \frac{\sigma_{a2}\lambda}{(\sigma_{aPa} + \lambda^*)\Phi\sigma_3} = \frac{\sigma_{a2}}{\sigma_3\left(1 + \frac{\Phi\sigma_{aPa}}{\lambda}\right)}. \quad (7.42)$$

Тобто ми отримали стаціонарне співвідношення між концентраціями ^{233}U і ^{232}Th . Таке співвідношення підтримується в реакторі майже весь час його роботи (звичайно, за умови $KB = 1$), за винятком початкового та кінцевого періодів роботи реактора.

Рівняння випалювання звичайно можна розв'язати точно. Тоді

$$c_3 = c_3^0 e^{-\sigma_3 F} + c_2^0 \frac{\sigma_{a2}\lambda^*}{\sigma_{aPa}} \left(\frac{1 - e^{-\sigma_{aPa} F}}{\sigma_3} - \frac{e^{-\sigma_{aPa} F} - e^{-\sigma_3 F}}{\sigma_3 - \sigma_{aPa}} \right). \quad (7.43)$$

Знову ж таки, якщо $KB > 1$, то можна використати майже весь Th, що завантажено в реактор. Але якщо $KB < 1$, як у більшості теплових реакторів, то кількість використаного сировинного матеріалу визначається за формулою (7.30).

На теперішній час у світі працюють тільки три енергетичних реактори на швидких нейтронах, у яких $KB > 1$. Це пов'язано з тим, що в цих реакторах використовують дуже складну трьох контурну систему охолодження рідким металом – натрієм. Взагалі перехід до ядерної енергетики, яка буде використовувати реактори на швидких нейтронах в широких масштабах, може допомогти розв'язати енергетичні проблеми людства, оскільки запасів сировинних матеріалів може вистачити на тисячі років.

Більш того, останнім часом розглядається реактор зі швидким нейтронним спектром на хвилі ядерного поділу, яка розповсюджується крізь сировинний матеріал. На фронті хвилі ^{238}U перетворюється на плутоній, який внаслідок поділу постачає нейтрони в наступні шари урану і т.д. Ця хвиля виявляється стабільною без усякого зовнішнього втручання, тобто такий реактор не потребує керування за допомогою стрижнів, що поглинають нейтрони. Але звичайно, процеси охолодження реактора і поглинання нейтронів у поглиначах будуть впливати на проходження хвилі. Оцінки показують, що паливом для таких реакторів, крім чистого та збідненого ^{238}U , може бути відпрацьоване паливо теплових реакторів, причому без додаткової радіохімічної переробки.

Розділ 8

Температурні коефіцієнти

§ 8.1. Загальні уявлення про температурні ефекти

Реактор є енергетичною установкою з великим виділенням тепла. Отже, у більшості реакторів внутрішні частини реактора є нагрітими до досить високих температур, навіть незначна зміна стаціонарного стану реактора може привести до значних змін температури окремих частин реактора. Особливо великі зміни температури відбуваються під час перехідних режимів.

У розділі 6, коли ми розглядали причини зміни реактивності реактора, було відзначено основні механізми зміни реактивності із зміною температури. Нижче ми розглянемо більш докладно ці механізми й визначимо кількісні критерії, що описують вплив температури на реактивність реактора.

У реакторі можна визначити чотири різні температури. По-перше, це температура ядерного палива T_f . Ця температура може суттєво відрізнитися від температури і теплоносія, і сповільнювача. Така ситуація особливо характерна для гетерогенних реакторів, де контакт між паливом і теплоносієм не є досить щільним. У цих реакторах у випадку раптового підвищення потоку нейтронів збільшується інтенсивність реакції поділу і, отже, збільшується температура палива. Але температура теплоносія буде збільшуватись із деяким запізненням. Крім того, паливо в гетерогенних реакторах не можна характеризувати єдиною температурою, оскільки температура в центрі паливного стрижня значно вища, ніж на його границі.

Вплив температури палива на поглинання теплових нейтронів визначається зміною густини палива, а отже, його макроскопічних перерізів. Більш важливим є вплив температури палива на резонансне поглинання і резонансний поділ, які визначаються доплерівським уширенням резонансу.

По-друге, важливим показником є температура сповільнювача T_m . Ця температура знову ж таки визначає густину сповільнювача, а отже, і його макроскопічні перерізи. Вона визначає також температуру нейтронів, яка є дещо вищою від температури сповільнювача.

По-третє, введення температури теплоносія T_l є суттєвим, коли теплоносій і сповільнювач є різними речовинами, особливо у випадку реакторів, що киплять. У цих реакторах незначна зміна температури теплоносія може привести до значної зміни густини теплоносія і до значних змін макроскопічних перерізів.

Нарешті, четвертою характерною температурою є температура нейтронів T_n . У реакторах на теплових нейтронах температура нейтронів перевищує температуру сповільнювача на величину, що залежить від перерізів поглинання та розсіювання сповільнювача. Температура нейтронів дорівнює температурі сповільнювача, помноженій на величину $(1 + 0,46\Delta)$, де

$\Delta = 2A\Sigma_a/\Sigma_s \approx 4\Sigma_a/\xi\Sigma_s$ ($\xi\Sigma_s$ - сповільнююча здатність сповільнювача). У реакторах на проміжних і швидких нейтронах більшість нейтронів не досягають теплової енергії, тому їх не можна характеризувати поняттям температури.

Для якісного вивчення залежності реактивності ρ або ефективного коефіцієнта розмноження k_{ef} від температури іноді розглядають реактор як єдине ціле і характеризують його деякою середньою температурою. Характеристиками зміни реактивності з температурою є температурний ефект реактивності й температурний коефіцієнт реактивності. Температурним ефектом реактивності називають зміну реактивності $\Delta\rho_T$ під час зміни температури реактора від T_1 до T_2 :

$$\Delta\rho_T = \rho(T_2) - \rho(T_1) = \frac{k_{ef}(T_2) - k_{ef}(T_1)}{k_{ef}(T_2)k_{ef}(T_1)}. \quad (8.1)$$

Температурний коефіцієнт реактивності визначається як похідна від реактивності по температурі й кількісно є зміною реактивності під час зміни температури реактора на один градус:

$$\alpha_T \equiv \frac{\partial\rho}{\partial T} = \frac{1}{k_{ef}^2} \frac{\partial k_{ef}}{\partial T}. \quad (8.2)$$

У загальному випадку величини $\Delta\rho_T$ і α_T є функціями температури, а коефіцієнти, визначені формулами (8.1) і (8.2), є ізотермічними. Якщо реактор працює в квазістаціонарному режимі, тобто його параметри мають незначні зміни навколо середніх стаціонарних значень, то температурні ефекти визначаються формулами (8.1) і (8.2), причому розрізняють температурні ефекти по паливу, сповільнювачу, теплоносію та нейтронах, відповідно до визначених вище температур реактора.

Для розрахунку температурного коефіцієнта реактивності ефективний коефіцієнт розмноження зручно подати у вигляді

$$k_{ef} = k_\infty P, \text{ де } P = \frac{1}{1 + \alpha_0^2 M^2}.$$

Тоді, вважаючи, що реактор критичний ($k_{ef}^2 = k_\infty$), для якого й варто розглядати температурні ефекти, отримаємо

$$\alpha_T = \frac{1}{k_{ef}} \frac{\partial k_{ef}}{\partial T} = \frac{1}{k_\infty} \frac{\partial k_\infty}{\partial T} + \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial T}. \quad (8.3)$$

У свою чергу, використовуючи формулу чотирьох співмножників, маємо

$$\frac{1}{k_{ef}} \frac{\partial k_\infty}{\partial T} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial T} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial T} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial T} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial T} &= -\frac{\alpha_0^2 M^2}{1 + \alpha_0^2 M^2} \left(\frac{1}{\alpha_0^2} \frac{\partial \alpha_0^2}{\partial T} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial M^2}{\partial T} \right) \approx \\ &\approx -\alpha_0^2 M^2 \left(\frac{1}{\alpha_0^2} \frac{\partial \alpha_0^2}{\partial T} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial M^2}{\partial T} \right). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Таким чином, для визначення температурного коефіцієнта реактивності необхідно знайти температурні залежності величин η , ε , φ , θ , α_0^2 , M^2 .

§ 8.2. Температурні коефіцієнти величин η і ε

Наявність близьких до теплової області резонансів впливає на величину $\alpha = \frac{\sigma_c^5}{\sigma_f^5}$, а отже, величина $\eta = \frac{\nu}{1 + \alpha}$ повинна залежати від температури нейтронів. Для палива, що складається з чистих ізотопів, що діляться, ефект визначається зміною величини $(1 + \alpha)$ із зміною температури. Експерименти показують, що η збільшується із збільшенням температури для ^{233}U і ^{235}U , а для чистого плутонієвого палива η зменшується із збільшенням температури.

Якщо паливо являє собою суміш ізотопів, що діляться, і сировинних ізотопів, то для такого палива величина η , тобто кількість вторинних нейтронів поділу на один нейтрон, який поглинутий паливом, визначається співвідношенням між перерізами поділу ізотопів, що діляться, і перерізами радіаційного захоплення всіх ізотопів суміші.

Наприклад, зміна величини η для природного або дещо збагаченого урану викликається зміною η ізотопу, що ділиться, а також зміною відношення поглинання в ^{235}U до поглинання ^{238}U . Якщо долю атомів ^{235}U у суміші позначити через R , то для нейтронів з енергією E середнє значення η у суміші дорівнює

$$\eta(E) = \frac{R\nu\sigma_f^5(E)}{R\sigma_a^5(E) + (1-R)\sigma_c^8(E)}, \quad (8.6)$$

де
$$\sigma_a = \sigma_c + \sigma_f.$$

Якщо вважати, що розподіл нейтронів за енергіями є максвеллівським з температурою T і густина потоку нейтронів $\varphi(E) = \sqrt{EM}(T, E)$, то середнє значення η для даної температури T є

$$\eta(T) = \frac{R\nu \int \sigma_a^5(E) \sqrt{EM}(T, E) dE}{\int [R\sigma_a^5(E) + (1-R)\sigma_c^8(E)] \sqrt{EM}(T, E) dE}. \quad (8.7)$$

Розрахунки величини $\eta(T)$, проведені за формулою (8.7) для природного урану ($R = 0,0071$), такі:

$T, ^\circ K$	0	293,6	423	575	751
η	1,132	1,333	1,333	1,327	1,307

Як видно, для природного урану величина η мало змінюється із зміною температури до температур $\sim 575 ^\circ K$. Вище цієї температури температурний коефіцієнт величини η , тобто $\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial T}$, є від'ємний і рівний приблизно $10^{-4} / ^\circ K$.

Отже із зростанням температури нейтронів на $100 ^\circ C$ реактивність реактора зменшується на 1 % (за рахунок тільки цього ефекту).

Інша ситуація виникає у випадку, коли паливо містить достатню кількість ^{239}Pu . Співвідношення між різними нуклідами палива виявляється таким, що температурний коефіцієнт величини η може виявитися додатним $\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial T} > 0$. Зрозуміло, що додатність температурного коефіцієнта реактивності в цілому негативно впливає на стабільність реактора, і для безпечної роботи реактора таких ефектів треба уникати.

Що стосується температурного коефіцієнта величини ε - коефіцієнта розмноження на швидких нейтронах, то його зміна із зміною температури пов'язана із зміною густини речовин реактора. Із зростанням температури густина речовин зменшується за рахунок їх теплового розширення. Особливо значний цей ефект для рідини, тобто теплоносія і сповільнювача. Унаслідок зменшення густини теплоносія і сповільнювача зменшуються їхні макроскопічні перерізи. Отже, ці речовини стають більш "прозорими" для нейтронів. Тому із збільшенням температур зростає ймовірність того, що швидкий нейтрон, який вийшов з блока палива в теплоносії і сповільнювач, знову повернеться в паливо без значної зміни енергії. У результаті коефіцієнт розмноження на швидких нейтронах збільшується, тобто $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} > 0$. Залежність ε

від температури є суттєвою, коли паливні збірки розташовані дуже тісно, і виявляється незначною в розріджених паливних ґратках.

§ 8.3. Температурний коефіцієнт імовірності уникнути резонансного поглинання

Імовірність уникнути резонансного поглинання пов'язана із властивостями ядер палива, тому температурний коефіцієнт величини ϕ визначається, перш за все, зміною температури палива. Унаслідок збільшення швидкості коливань ядер палива збільшується вплив ефекту Допплера, тобто уширення резонансних ліній поглинання нейтронів. Унаслідок цього збільшуються ефективні резонансні інтеграли поглинання, що визначають величину ϕ .

Другий ефект пов'язаний з температурою сповільнювача і залежить від його густини. Із зростанням температури сповільнювач стає більш “прозорим” для нейтронів, що сповільнюються, і, отже, збільшується ймовірність нейтрона повернутися в блок палива. У результаті цього ймовірність уникнути резонансного поглинання зменшується із збільшенням температури. Як і для швидких нейтронів, цей ефект значний у тисних ґратках.

Розрахунки, а також безпосередні експериментальні вимірювання величини ϕ показують, що температурний коефіцієнт величини ϕ є від'ємним $\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial T} < 0$ і стабілізує роботу реактора.

§ 8.4. Температурний коефіцієнт величини θ

Коефіцієнт використання теплових нейтронів залежить від відношення перерізів поглинання в паливі і сповільнювачі. Якщо всі перерізи в тепловій області залежать від швидкості нейтронів, як $1/v$, і якщо реактор гомогенний, то величина θ не повинна залежати від температури нейтронів. Якщо деякі перерізи відхиляються від закону $1/v$, то величина θ може залежати від температури. Ніяких загальних висновків у цьому разі зробити не можна, і в гомогенних реакторах звичайно вважають, що θ не залежить від температури.

У гетерогенних реакторах крім відношення перерізів поглинання у визначенні величини θ суттєву роль грають зміни густини сповільнювача й палива, зміна мікроскопічного перерізу поглинання паливом у тепловій області. Додатково із зростанням температури зменшується сповільнююча здатність сповільнювача, що веде до перерозподілу нейтронного потоку всередині комірки. Ці ефекти ведуть до того, що в гетерогенному реакторі $\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial T} > 0$.

Більш докладно зміну величин θ і ϕ в гетерогенних реакторах буде розглянуто в наступному розділі.

§ 8.5. Температурний коефіцієнт довжини міграції M

За визначенням $M^2 = L^2 + \tau$, отже для визначення температурного коефіцієнта довжини міграції треба отримати температурні залежності величин L^2 і τ окремо. Довжина сповільнення τ визначається (див. розділ 4) транспортним перерізом і перерізом розсіювання. Отже, основною причиною залежності τ від температури є зміна густини сповільнювача. Як відомо, температурний коефіцієнт об'ємного розширення β речовини визначається зміною N в одиниці об'єму.

За визначенням

$$\tau = \frac{1}{3N_m^2 \xi} \int \frac{dE}{\sigma_{sm} \sigma_{trm} E},$$

де N_m - кількість ядер сповільнювача в одиниці об'єму. Тоді

$$\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dT} = 2\beta, \quad (8.8)$$

Внесок величини τ у температурний коефіцієнт реактивності дорівнює

$$-\tau \alpha_0^2 \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dT}. \quad (8.9)$$

Якщо вважати, що $\tau \alpha_0^2 \approx 10\%$, тобто 10% нейтронів витікає з реактора в процесі сповільнення, то вся величина (8.9) має порядок $10^{-5}/^\circ\text{C}$, оскільки характерні величини $\beta \sim 10^{-3} - 10^{-4}/^\circ\text{C}$. Знак величини (8.9) від'ємний, тобто виток нейтронів, що сповільнюються, з реактора збільшується із зростанням температури, що позитивно впливає на стабільність реактора.

За означенням довжина дифузії L дорівнює

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} = \frac{1}{3\Sigma_{tr}\Sigma_a}. \quad (8.10)$$

Отже, однією з причин температурної залежності L^2 є зміна густини сповільнювача, і залежність температурного коефіцієнта величини L^2 від коефіцієнта розширення така ж сама, як для τ . Іншою причиною є залежність перерізу поглинання від швидкості нейтронів. Оскільки $\Sigma_a \sim \frac{1}{v_n} \sim \frac{1}{T_n^{1/2}}$,

то в сумі маємо

$$\frac{1}{L^2} \frac{dL^2}{dT} = 2\beta + \frac{1}{2T_n}. \quad (8.11)$$

Обидва члени в рівнянні (8.11) дають приблизно рівний внесок у сумарний температурний коефіцієнт реактивності, а в реакторах із твердим сповільнювачем (графіт) внесок другого члена є навіть більшим, ніж першого. Крім того, у реакторах із твердими компонентами помітну роль відіграє зміна геометричних розмірів реактора із зміною температури таким чином, що

$$\frac{1}{\alpha_0^2} \frac{d\alpha_0^2}{dT} = -\frac{2\beta}{3}. \quad (8.12)$$

Транспортний переріз також залежить від швидкості нейтронів. Ця залежність досить складна, вона визначається особливостями кристалічної структури й хімічного зв'язку. У цілому ця залежність є суттєвою для сповільнювачів, що містять водень, і в реакторах, де сповільнювачем є H_2O . Бли-

зько 40 % залежності L^2 від температури визначається транспортним перерізом.

Треба зазначити, що розбиття температурного коефіцієнта реактивності на складові частини є зручним для теоретичного аналізу, але рідко застосовується на практиці. Таке розбиття важко провести практично й навряд чи є доцільним. Важливим є тільки сумарна величина температурного коефіцієнта реактивності та його знак.

Будь-який реактор треба робити таким, щоб у ньому було $\alpha_T < 0$. Тоді він буде стійким у роботі. Так що збільшення температури призводить до зменшення реактивності й навпаки. Тоді реактор такий, що саморегулюється. Якщо $\alpha_T > 0$, то керувати таким реактором можливо за допомогою органів керування, тільки якщо α_T є малою величиною. Особливо важливою є від'ємність температурного коефіцієнта реактивності під час виведення реактора на номінальну потужність. Для того щоб таке виведення стало можливим, треба мати деякий запас реактивності. Отже, оптимальним є реактор з від'ємним і малим за абсолютною величиною температурним коефіцієнтом реактивності.

§ 8.6. Спеціальні коефіцієнти реактивності

Найбільш типовим нестационарним процесом у реакторах є зміна їх потужності. Унаслідок зміни потужності змінюється температура окремих частин реактора. Але ці зміни мають різну вагу в роботі реактора й відбуваються з різною швидкістю. Тому під час швидкої зміни потужності є недоцільним користуватися ізотермічним температурним коефіцієнтом реактивності. Частіше користуються більш зручним *потужностним коефіцієнтом* реактивності. Він визначається як зміна реактивності реактора, викликана зміною потужності на одиницю. Цей коефіцієнт не враховує процеси, що відбуваються із запізненням, наприклад нагрівання сповільнювача, який звичайно має велику масу й теплоємність. Безпосередньо після зміни потужності змінюється температура палива, оскільки саме в паливі виділяється основна частина енергії. Для дуже швидких змін потужності процесами, що запізнюються, можна знехтувати. Але звичайно, вони є дуже важливими під час квазістационарних процесів, що відбуваються з невеликою швидкістю. Отже, під час миттєвих змін потужності реактора користуються динамічним потужностним коефіцієнтом реактивності. Він визначається лише зміною температури палива, перш за все за рахунок ефекту Доплера. Для того щоб реактором можна було керувати, необхідно, щоб динамічний потужностний коефіцієнт реактивності був від'ємний. Тоді реактор може бути відносно безпечним, навіть коли $\alpha_T > 0$.

Другим специфічним коефіцієнтом, що також залежить безпосередньо від потужності реактора, є паровий коефіцієнт реактивності. За визначенням

він дорівнює зміні реактивності внаслідок одичної зміни кількості пари в теплоносії. У реакторах, що киплять, кількість пари в теплоносії змінюється залежно від потужності реактора і фактично незалежно від температури теплоносія. Збільшення кількості пари в теплоносії при незмінній температурі теплоносія можливо й у реакторах під тиском, коли температура теплоносія досягає температури насичення. Знак парового коефіцієнта реактивності може бути довільним залежно від багатьох факторів: збагачення палива, розміри ґратки, відносна кількість сповільнювача й теплоносія, якщо це різні речовини тощо. Звичайно для стабільної роботи реактора потрібно, щоб паровий коефіцієнт реактивності був від'ємний. Саме додатність парового коефіцієнта реактивності в чорнобильському реакторі була однією з причин катастрофи. Цікавим є те, що у реакторах чорнобильського типу (РВПК – реактор великої потужності каналний) паровий коефіцієнт реактивності змінюється в процесі роботи реактора: коли в реактор завантажено свіже паливо, паровий коефіцієнт реактивності є від'ємним; в процесі вигорання палива паровий коефіцієнт реактивності змінює знак. Після Чорнобильської катастрофи в реакторах РВПК підвищили початкове збагачення палива, так щоб позбутися ефекту зміни знаку парового коефіцієнту реактивності в процесі роботи реактора.

Розділ 9

Гетерогенні реактори

§ 9.1. Переваги гетерогенного розташування палива

До цього розділу ми вивчали фізичні процеси в реакторах, в яких паливо, сповільнювач і теплоносії знаходяться в одній фізичній фазі і активна зона реактора являє собою однорідне гомогенне середовище, яке розмножує нейтрони. У той же час відомо, що в більшості побудованих реакторів паливо, сповільнювач і теплоносії - це різні речовини, розташовані в різних місцях реактора (іноді сповільнювач і теплоносії - одна й та ж речовина). Тому виникає питання: чи роздільне розташування палива і сповільнювача є фізично вигідним (у розумінні виграшу у фізичних процесах), чи гетерогенне розташування зроблено тільки з точки зору технологічних зручностей.

Друге питання виникає у зв'язку з використанням природного урану як палива ядерних реакторів. Відомо, що в природних покладах урану ланцюгова реакція неможлива. Крім того, на початку розвитку атомної енергетики було обраховано, що найбільший коефіцієнт розмноження, який можна отримати в однорідній суміші природного урану і графіту, приблизно дорівнює 0,85. Виявляється, що гетерогенне розташування природного урану і графіту дозволяє отримати коефіцієнт розмноження більший від одиниці. Для того щоб визначити причини, завдяки яким коефіцієнт розмноження збільшується в гетерогенній системі, треба згадати основні фізичні процеси, що визначають коефіцієнт розмноження в суміші ^{235}U і ^{238}U .

У розділі 1 ми отримали формулу чотирьох співмножників, яка якраз визначає коефіцієнт розмноження в нескінченній однорідній суміші ^{235}U і ^{238}U :

$$k = \eta \varepsilon \rho \theta . \quad (9.1)$$

Поглинання теплових нейтронів в ^{235}U забезпечує вихід вторинних нейтронів поділу в кількості $\eta = \frac{\nu}{1 + \alpha} \approx 1,34$. В однорідній суміші природного урану і сповільнювача поділ ядер ^{238}U на швидких нейтронах з енергією більшою енергії порога $E > 1,2$ МеВ майже не збільшує кількості вторинних нейтронів. Це пов'язано з тим, що в такій суміші уран настільки розбавлений сповільнювачем, що швидкий нейтрон поділу майже напевно зіткнеться з ядром сповільнювача до того часу, як зустрінє атом ^{238}U . Отже, в однорідній суміші природного урану і сповільнювача $\varepsilon \approx 1$. Взагалі, завдяки першим двом множникам, кількість нейтронів у системі збільшується.

Два інших ефекти зменшують кількість нейтронів. Дуже важливим ефектом є поглинання нейтронів з резонансною енергією на ядрах ^{238}U . Вище в розділі 4 ми бачили, що ймовірність уникнути резонансного поглинання ρ визначається формулою

$$\varphi = \exp \left[- \frac{N_F}{\xi \Sigma_s} \left(\int \frac{\sigma_{a0} dE}{E} \right)_{ef} \right], \quad (9.2)$$

де N_F - концентрація ядер урану; $\xi \Sigma_s$ - сповільнююча здатність сповільнювача; σ_{a0} - мікроскопічний переріз поглинання палива. Напівемпірична формула для ефективного резонансного інтеграла дає

$$I_{ef} \approx 3,8 \left(10^{24} \frac{\Sigma_s}{N_F} \right)^{0,42}, \quad (9.3)$$

Тому розбавлення урану сповільнювачем, тобто зменшення N_u , завжди призводить до збільшення ймовірності уникнути резонансного поглинання.

Коефіцієнт використання теплових нейтронів θ визначається як частка теплових нейтронів, що поглинаються в урані:

$$\theta = \frac{\Sigma_{a0}}{\Sigma_{a0} + \Sigma_{a1}}, \quad (9.4)$$

де Σ_{a0} і Σ_{a1} - відповідно макроскопічні переріз поглинання ураном і сповільнювачем. Збільшення відносної кількості урану веде до збільшення коефіцієнта використання теплових нейтронів тому, що збільшується відносна кількість нейтронів, що поглинаються в урані. Таким чином, із зміною співвідношення між паливом і сповільнювачем імовірність уникнути резонансного поглинання та коефіцієнт використання теплових нейтронів змінюються в різні боки. Тому існує оптимальне розведення палива сповільнювачем, яке дає найбільше значення добутку $\varphi\theta$. Такі значення обраховано для різних сповільнювачей і їх наведено в таблиці.

Значення φ , θ і k , а також відношення кількості ядер урану та молекул сповільнювача, які дають максимальне k для різних однорідних сумішей сповільнювача й природного урану

Сповільнювач	$\frac{N_1}{Nu}$	θ	φ	k
H_2O	2,43	0,828	0,755	0,898
$(D_2O + 0,2\%H_2O)$	167	0,955	0,910	1,145
Be	193	0,816	0,728	0,796
C	452	0,837	0,757	0,849

З таблиці видно, що в гомогенному реакторі на природному урані можна досягти більших від одиниці значень коефіцієнта розмноження, тільки якщо сповільнювачем є важка вода, яка дуже слабо поглинає нейтрони.

Перед обговоренням впливу гетерогенного розташування палива на коефіцієнт розмноження розглянемо спочатку якісно просторовий розподіл нейтронів різних енергій у реакторі, в якому паливо розташоване у вигляді окремих блоків, а проміжок між блоками заповнено сповільнювачем (рис. 9.1). Оскільки швидкі нейтрони народжуються в паливі і вихід їх у сповільнювач веде до швидкого зменшення їх енергії, то концентрація швидких нейтронів буде високою в паливі *I* і дуже малою в сповільнювачі *II*, як це відображено кривою *a* на рис. 9.1.

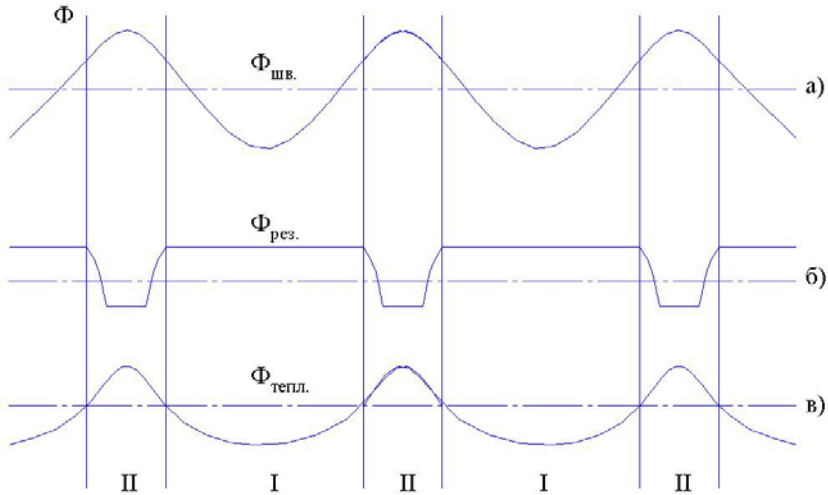


Рис. 9.1. Якісний вигляд просторового розподілу нейтронів різних енергій у гетерогенному реакторі (*a* – швидкі нейтрони, *б* – резонансні нейтрони, *в* – теплові нейтрони, *I* – сповільнювач, *II* – паливо).

Ситуація буде протилежною для нейтронів, які сповільнюються. Вони виникають в об'ємі сповільнювача, а в паливі вони дуже швидко поглинаються на резонансах сировинних матеріалів. Отже, їх концентрація буде високою в сповільнювачі і швидко спадати всередині блока палива (крива *б*). Аналогічний розподіл теплових нейтронів, які виникають у сповільнювачі й поглинаються в паливі в основному ізотопами, що діляться (крива *в*).

Такий розподіл нейтронів призводить до суттєвої зміни коефіцієнта розмноження нейтронів у гетерогенному реакторі порівняно з гомогенною ситуацією. Ця зміна визначається чотирма основними ефектами, три з яких ведуть до збільшення k , а один до зменшення. Сумарний ефект звичайно збільшує k .

Розглянемо ці ефекти.

1. У гетерогенному реакторі нейтрони гублять свою енергію в основному в сповільнювачі. Тому збільшується ймовірність того, що нейтрон промине область резонансних енергій і досягне теплових енергій, не зіткнувшись з ядрами палива, що розташовані в окремому блоці. У результаті цього ймовірність уникнути резонансного поглинання збільшується.

2. Така сама причина веде до того, що нейтрон стає тепловим на віддалі від атомів урану, і ймовірність того, що нейтрон буде поглинутий атомами палива, зменшується порівняно з гомогенною сумішшю урану і сповільнювача. Таке зменшення коефіцієнта використання теплових нейтронів значно перевищує збільшення ϕ , згадане в п. 1. Отже, сумарно ці два ефекти ведуть до зменшення коефіцієнта розмноження нейтронів, і якщо б не було інших ефектів, то розташування палива у вигляді блоків було б невиконаним.

3. Найбільш вагомий ефект пов'язаний з наявністю високих резонансних піків поглинання. Наявність таких піків забезпечує сильне екранування внутрішніх частин блока палива і, таким чином, зменшує резонансне поглинання в паливі. Тобто нейтрони резонансних енергій поглинаються в основному зовнішніми поверхневими шарами блока палива, а основна маса палива не бере участі в резонансному поглинанні. Наприклад, у металічному урані величина ефективного резонансного інтеграла, віднесена до одного атома урану, може зменшитися в 90 разів завдяки блочному розташуванню палива. У результаті цього ймовірність уникнути резонансного поглинання значно збільшується, і основні переваги, пов'язані з блочним розташуванням палива, викликані цим ефектом.

4. Четвертий ефект пов'язаний з коефіцієнтом розмноження на швидких нейтронах. Розташування палива у вигляді блоків веде до того, що швидкі нейтрони з більшою ймовірністю будуть викликати поділ ядер ^{238}U до того часу, як вони вийдуть з блока і їхня енергія зменшиться нижче порога поділу ^{238}U завдяки зіткненням з атомами сповільнювача. Треба зазначити, що крім імовірності поділу на швидких нейтронах також збільшується ймовірність непружного розсіювання на ^{238}U і ймовірність виходу за межі блока без будь-якого зіткнення. Але ці два ефекти не компенсують збільшення ймовірності поділу на швидких нейтронах. Отже, завдяки цьому ефекту коефіцієнт розмноження нейтронів може збільшитись на декілька процентів.

§ 9.2. Метод гомогенізації. Коефіцієнт використання теплових нейтронів

Аналіз гетерогенних реакторів звичайно починають з визначення k_{ef} - коефіцієнта розмноження нейтронів у реакторі. Існують два методи розрахунку гетерогенних реакторів. Перший з них використовується для розрахунку великих реакторів і заснований на наявності періодичного розташування палива і сповільнювача. Другий метод, так званий метод Галаніна - Фейнберга, частіше застосовується до нерегулярних структур невеликих розмірів. Цей метод ми розглянемо в кінці даного розділу.

Якщо припустити, що блоки палива і сповільнювач утворюють нескінченну ґратку, то в такій системі завжди можна виділити деякі поверхні симетрії, які обмежують комірку ґратки, що періодично повторюється. На цих поверхнях симетрії токи нейтронів повинні дорівнювати нулю, оскільки нейтрони не повинні перетікати з однієї комірки в іншу. Тоді в окремій комірці

можна розглянути поле нейтронів і визначити в ній імовірність поглинання теплових і резонансних нейтронів.

Коли крок ґратки малий, порівняно з розмірами реактора, то можна описати весь реактор, замінюючи гетерогенну структуру гомогенною з деякими середніми нейтронними параметрами. Такий метод називається методом ефективної гомогенізації. Продемонструємо застосування цього методу на прикладі обчислення коефіцієнта використання теплових нейтронів.

За визначенням, коефіцієнт використання теплових нейтронів є рівним відношенню кількості нейтронів, які поглинулися в паливі до певної кількості нейтронів, які поглинулися в паливі і сповільнювачі:

$$\theta = \frac{\int \Sigma_{aF}(\vec{r})\Phi(\vec{r})d\vec{r}}{\int (\Sigma_{aF} + \Sigma_{am})\Phi(\vec{r})d\vec{r}}. \quad (9.5)$$

Якщо паливо повністю відділено від сповільнювача і якщо ці дві області є однорідними, то

$$\theta = \frac{\Sigma_{aF} \int_{fuel} \Phi(\vec{r})d\vec{r}}{\Sigma_{aF} \int_{fuel} \Phi(\vec{r})d\vec{r} + \Sigma_{am} \int_{mod} \Phi(\vec{r})d\vec{r}}. \quad (9.6)$$

Можна визначити середні значення потоків теплових нейтронів $\bar{\Phi}_0$ і $\bar{\Phi}_1$ відповідно в паливі і сповільнювачі:

$$\bar{\Phi}_0 = \frac{1}{V_0} \int_{fuel} \Phi(\vec{r})d\vec{r} \quad \text{і} \quad \bar{\Phi}_1 = \frac{1}{V_1} \int_{mod} \Phi(\vec{r})d\vec{r}, \quad (9.7)$$

де V_0 і V_1 - відповідно об'єм областей, які зайняті паливом і сповільнювачем. Тоді коефіцієнт використання теплових нейтронів приймає вигляд

$$\theta = \frac{\Sigma_{aF}}{\Sigma_{aF} + \Sigma_{am} \frac{V_1}{V_0} \frac{\bar{\Phi}_1}{\bar{\Phi}_0}}. \quad (9.8)$$

Відношення середніх потоків теплових нейтронів у сповільнювачі і в паливі $d = \frac{\bar{\Phi}_1}{\bar{\Phi}_0}$ називається коефіцієнтом програшу для теплових нейтронів.

Оскільки за рахунок поглинання в паливі потік теплових нейтронів $\bar{\Phi}_0 < \bar{\Phi}_1$ і коефіцієнт програшу завжди більший одиниці. Саме тому в гетерогенній системі коефіцієнт використання теплових нейтронів менший, ніж у гомогенній.

Таким чином, для обчислення коефіцієнта використання теплових нейтронів необхідно обчислити розподіл нейтронів в елементарній комірці ґратки реактора. Для такого обчислення звичайно роблять деякі припущення:

1. Припускають, що густина сповільнення є постійною величиною в сповільнювачі і дорівнює нулю в паливі. Тобто допускають, що теплові нейтрони виникають з рівною ймовірністю в кожній точці сповільнювача і зовсім не виникають у паливі. Це припущення виникає внаслідок розрахунків за віковою теорією густини сповільнення від точкових джерел, розташованих у вузлах ґратки. Виявляється, що суперпозиція таких розв'язків дає практично однорідний розподіл густини сповільнення в сповільнювачі за умовою, що крок ґратки не більший двох-трьох довжин сповільнення.

2. Друге припущення полягає в тому, що реальну елементарну комірку ґратки замінюють на еквівалентну елементарну комірку більш високої симетрії з рівною площею комірки, розв'язки рівнянь переносу нейтронів для якої є відомими й більш простими. Наприклад, квадратну комірку замінюють коміркою з перерізом у вигляді кола з площею перерізу, рівною площі квадрата (рис. 9.2). Таке наближення звичайно називають наближенням Вігнера - Зейтца, яке вони вперше застосували для обрахунку хвильових функцій електронів у кристалах.

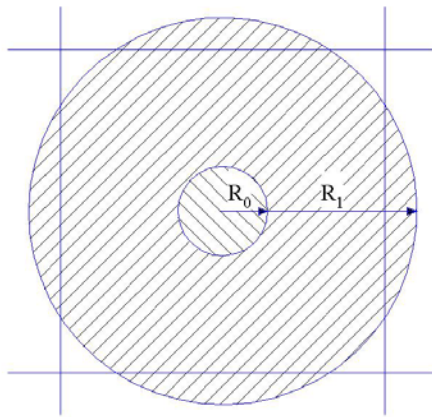


Рис. 9.2. Еквівалентна циліндрична комірка.

3. Третім припущенням є застосування дифузійного наближення. Це наближення є справедливим, коли розміри комірки великі порівняно з довжиною дифузії, коли поглинання нейтронів не є досить сильним і в системі нема джерел нейтронів. Усі ці припущення не виконуються, але порівняння з більш точними розрахунками показує, що дифузійна теорія в багатьох випадках дає достатню для практичного використання точність. Зрозуміло, що комірку із складною внутрішньою структурою необхідно обчислювати, використовуючи більш точні рівняння переносу нейтронів.

Обчислимо розподіл нейтронів в елементарній комірці (див. рис. 9.2). Радіус стрижня палива в цій комірці дорівнює R_0 , а радіус еквівалентної комірки дорівнює R_1 . Припускаємо, що комірка має циліндричну симетрію з довжиною циліндра значно більшою його радіуса, так що ми будемо розгля-

дати одновимірну задачу. Таким чином, дифузійні рівняння для густини потоку нейтронів у паливі Φ_0 і сповільнювачі Φ_1 мають вигляд

$$D_0 \nabla^2 \Phi_0 - \Sigma_{a0} \Phi_0 = 0, \quad (9.9)$$

$$D_1 \nabla^2 \Phi_1 - \Sigma_{a1} \Phi_1 + q = 0, \quad (9.10)$$

де q - густина сповільнення. Граничні умови на границі поділу двох середовищ, тобто палива і сповільнювача, визначаються рівностями

$$\Phi_0 \Big|_{r=R} = \Phi_1 \Big|_{r=R_0}$$

$$D_0 \frac{d\Phi_0}{dr} \Big|_{r=R_0} = D_1 \frac{d\Phi_1}{dr} \Big|_{r=R_0}. \quad (9.11)$$

На границі між комірками припускаємо рівність нулю току нейтронів через поверхню комірки, тобто

$$\frac{d\Phi_1}{dr} \Big|_{r=R_1} = 0. \quad (9.12)$$

Уведемо як звичайно матеріальний параметр $\chi^2 = \frac{\Sigma_a}{D}$. Тоді загальний розв'язок рівняння (9.9) можна записати у вигляді

$$\Phi_0(\vec{r}) = C_1 I_0(\chi_0 r) + C_2 N_0(\chi_0 r), \quad (9.13)$$

де $I_0(x)$ і $N_0(x)$ – функції Бесселя уявного аргументу першого і другого роду.

З умови скінченності густини потоку нейтронів усередині блока палива витікає, що $C_2 = 0$. Отже

$$\Phi_0(r) = C_1 I_0(\chi_0 r). \quad (9.13a)$$

Для визначення коефіцієнта використання теплових нейтронів нам потрібно знати абсолютні значення потоку нейтронів, а тільки відношення потоків. Тому зручно покласти

$$\Phi_0(r_0) = 1 = C_1 I_0(\chi R_0),$$

$$\Phi_0(r) = I_0(\chi r) / I_0(\chi R_0). \quad (9.14)$$

Знайдемо середнє значення потоку в блоці палива:

$$\bar{\Phi}_0 = \frac{\int_0^{R_0} \Phi_0(r) 2\pi r dr}{\int_0^{R_0} 2\pi r dr} = \frac{\int_0^{R_0} C_1 I_0(\chi r) r dr}{\int_0^{R_0} r dr}. \quad (9.15)$$

Використовуючи співвідношення між функціями Бесселя уявного аргументу у вигляді

$$\frac{d}{dr} [x^n I_n(x)] = x^n I_{n-1}(x),$$

отримаємо

$$\bar{\Phi}_0 = C_1 2I_1(\chi R_0) / \chi R_0. \quad (9.16)$$

Для зони сповільнювача (1) рівняння дифузії приймає вигляд

$$\Delta \Phi_1 - \chi_1^2 \Phi_1(r) + \frac{q}{D_1} = 0, \quad \chi_1^2 = \frac{1}{L_1^2} = \frac{\Sigma_{a1}}{D_1}.$$

Розв'язком неоднорідного рівняння, як відомо, є сума загального розв'язку і часткового:

$$\Phi_1(r) = \frac{q}{\Sigma_{a1}} + E_1 I_0(\chi_1 r) + E_2 N_0(\chi_1 r). \quad (9.17)$$

Коефіцієнти E_1 і E_2 визначаються з граничних умов. З урахуванням цих граничних умов знайдемо для потоку наступний вираз:

$$\begin{aligned} \Phi_1(r) = & 1 + \frac{1}{2} \frac{D_0 \chi_0}{D_1 \chi_1} \chi_0 r \frac{\Phi_0(R_0)}{\bar{\Phi}_0} \times \\ & \times \left\{ \frac{N_1(\chi_1 R_1) [I_0(\chi_1 R_0) - I_0(\chi_1 r)] + I_1(\chi_1 R_1) [N_0(\chi_1 R_0) - N_0(\chi_1 r)]}{N_1(\chi_1 R_0) I_1(\chi_1 R_1) - N_1(\chi_1 R_1) I_1(\chi_1 R_0)} \right\} \end{aligned} \quad (9.18)$$

Середнє значення потоку визначається виразом

$$\bar{\Phi}_1 = \frac{\int_{R_0}^{R_1} \Phi_1(r) r dr}{\int_{R_0}^{R_1} r dr} \quad (9.19)$$

або

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1 = & 1 - \frac{\Phi_0(R_0)}{\bar{\Phi}_0} \frac{D_0}{2R_0 D_1 \chi_1} \left[\frac{R_0}{\chi_1} \frac{2}{(R_1^2 - R_0^2)} - A \right], \\ A = & \frac{I_0(\chi_1 R_0) N_1(\chi_1 R_1) + I_1(\chi_1 R_1) N_0(\chi_1 R_0)}{N_1(\chi_1 R_0) I_1(\chi_1 R_1) - N_1(\chi_1 R_1) I_1(\chi_1 R_0)}. \end{aligned} \quad (9.19a)$$

Відношення середніх потоків таке:

$$\frac{\bar{\Phi}_1}{\bar{\Phi}_0} = \frac{\Phi_0(R_0)}{\bar{\Phi}_0} + \frac{\bar{\Phi}_1 - \Phi_0(R_0)}{\bar{\Phi}_0} = Q_0 + Q_1. \quad (9.20)$$

Величини Q_0 і Q_1 називають внутрішнім і зовнішнім блок-ефектом, а величину Q_0 – відношення максимального потоку нейтронів у блоці палива до його середнього значення - коефіцієнтом екранування. Для величин Q_0 і Q_1 існують наближені формули, які дозволяють зробити деякі оцінки. Коли $\frac{R_0}{L_0} \ll 1$, маємо

$$Q_0 = 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{R_0}{L_0} \right)^2, \quad (9.21)$$

а якщо $\chi_1 R_1 < \frac{3}{4}$, то

$$Q_1 = \frac{V_0 \Sigma_{a0}}{V_1 \Sigma_{a1}} \chi_1^2 R_1^2 \frac{1}{2} \left[\frac{\Psi^2}{\Psi^2 - 1} \ln \Psi - \frac{3}{4} + \frac{1}{4\Psi^2} \right], \quad \Psi = \frac{R_1}{R_0}. \quad (9.22)$$

З цих виразів зрозуміло, що коефіцієнт програшу для теплових нейтронів $q = \frac{\bar{\Phi}_1}{\bar{\Phi}_0}$ завжди більше одиниці, отже в гетерогенній системі θ завжди менше, ніж у гомогенній.

Під час розрахунку θ основна похибка вноситься за рахунок використання дифузійного наближення в блоці палива, де дуже високе поглинання нейтронів і, отже, не виконується умова використання дифузійного наближення. Існують також інші методи обчислення середніх потоків – метод імовірності перших зіткнень, методи розв'язку кінетичного рівняння шляхом розкладу в ряди за сферичними гармоніками, метод дискретних ординат та ін. Усі ці методи дають більш точні значення величини θ і саме вони використовуються для розрахунку коефіцієнта розмноження нейтронів у складних системах.

На рис. 9.3 показано залежності внутрішнього і зовнішнього блок-ефектів, а також коефіцієнта програшу від відношення об'ємів ω сповільнювача і палива в комірці уран-водної ґратки.

З рисунка видно, що, по-перше, $\frac{Q_0}{Q_1} = \frac{\Phi(R_0)}{\bar{\Phi}_1 - \Phi(R_0)} \gg 1$, і в реальних комі-

рках ці величини відрізняються приблизно на порядок. По-друге, величина Q_0 в рамках дифузійної теорії не залежить від відношення V_1/V_0 (пунктир на рис. 9.3), така залежність виникає тільки при більш точному обрахунку.

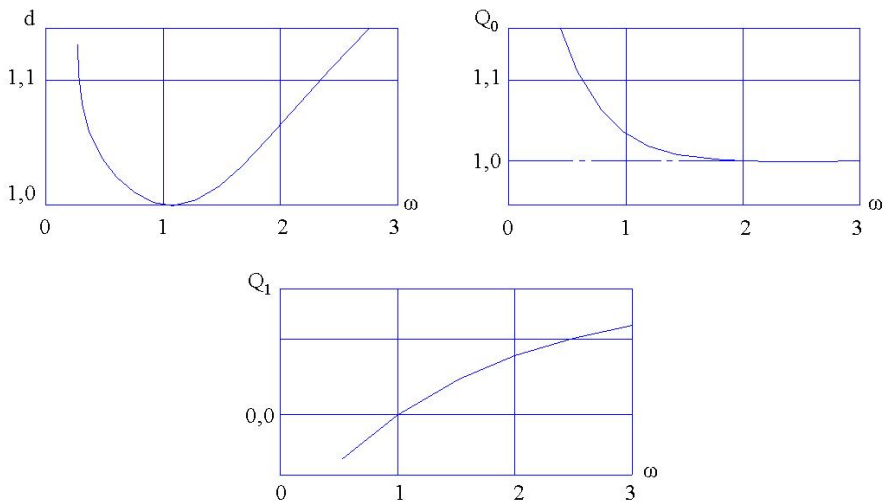


Рис. 9.3. Залежність внутрішнього (Q_0), зовнішнього (Q_1) блок-ефектів і коефіцієнта програшу d від відношення об'ємів сповільнювача і палива $\omega = V_1/V_0$.

§ 9.3. Ефективний резонансний інтеграл у гетерогенних системах

У § 9.1 ми бачили, що основний внесок у збільшення коефіцієнта розмноження в гетерогенних системах вносить імовірність уникнути резонансного поглинання. Під час розгляду сповільнення нейтронів для ймовірності уникнути резонансного поглинання в системі, що поглинає нейтрони з енергією E , ми отримуємо вираз

$$\varphi(E) = \exp \left\{ - \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\xi(\Sigma_s + \Sigma_a)} \frac{dE'}{E'} \right\}, \quad (9.23)$$

де E_0 - енергія нейтронів поділу; Σ_a, Σ_s - макроскопічні перерізи поглинання і розсіювання; ξ - середня втрата летаргії за одне зіткнення. Оскільки переріз поглинання палива значно вищий за переріз поглинання сповільнювача, то Σ_a визначається поглинанням у паливі. Формула (9.23) була отримана для водневого сповільнювача і нескінченно важкого поглинача, але її можна також застосувати, коли резонанси в поглинанні не перекриваються.

Якщо реактор містить N_F атомів резонансного поглинання в одиниці об'єму (наприклад ^{238}U), то $\Sigma_a = N_F \sigma_{a_0}$, де σ_{a_0} - мікроскопічний переріз поглинання палива. Тоді

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_s} = \frac{N_F \sigma_{a_0}}{\Sigma_s} \frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma_a}. \quad (9.24)$$

Поблизу резонансу перерізи розсіювання як сповільнювача, так і палива можна вважати незалежними від енергії нейтрона, тому

$$\varphi(E) = \exp \left\{ - \frac{N_F}{\xi \Sigma_s} \int_E^{E_0} \frac{\sigma_{a_0} \Sigma_s}{\Sigma_a + \Sigma_s} \frac{dE'}{E'} \right\}. \quad (9.25)$$

Інтеграл у виразі (9.25) називається ефективним резонансним інтегралом, і для нього використовують позначення

$$\int_E^{E_0} \sigma_{a_0} \frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma_a} \frac{dE'}{E'} = \int_E^{E_0} (\sigma_{a_0})_{ef} \frac{dE'}{E'}. \quad (9.26)$$

Якісна картина поглинання нейтронів з резонансними енергіями блоком палива нам вже відома: нейтрони дуже сильно поглинаються на поверхні блока і потік резонансних нейтронів усередині блока зменшується. Отже, ефективний переріз поглинання $(\sigma_{a_0})_{ef}$ усередині стрижня палива стає меншим, ніж в однорідній суміші палива і сповільнювача. На поверхні стрижня нейтронний спектр буде таким самим, як у сповільнювачі, отже резонансне поглинання на поверхні блока палива буде таким самим, як в нескінченно розведеній суміші палива і сповільнювача.

Таким чином, резонансне поглинання в блоці палива можна розділити на дві частини: об'ємне поглинання, яке пропорційне кількості атомів поглиначів в одиниці об'єму, і поверхневе поглинання, яке пропорційне відношенню поверхні блока до його об'єму, тобто

$$(\sigma_{a_0})_{ef} = a(E) + b(E) \frac{S}{M}, \quad (9.27)$$

де $a(E)$ - переріз об'ємного і $b(E)$ - коефіцієнт поверхневого поглинання відповідно, S - поверхня блока і M - його маса. Така залежність перерізу поглинання від поверхні блока підтверджується експериментально. Припущення про розділення σ_{a_0} на дві частини вперше було зроблено Вігнером і незалежно Данковим і Гінзбургом. Для обрахунку $a(E)$ можна вважати, що ця величина дорівнює ефективному перерізу поглинання всередині блока. Тоді відповідно до формули (9.26)

$$a(E) = \sigma_{a_0} \frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma_a}. \quad (9.28)$$

Якщо блок палива складається з двох елементів (наприклад, UO_2), то

$$a(E) = \sigma_{a_0} \frac{N_0 \sigma_{s_0} + N_1 \sigma_{s_1}}{N_0 \sigma_{s_0} + N_1 \sigma_{s_1} + N_0 \sigma_{a_0}}, \quad (9.29)$$

де індекс (1) стосується кисню. Для чистого металічного урану

$$a(E) = \frac{\sigma_{a_0} \sigma_{s_0}}{\sigma_{s_0} + \sigma_{a_0}}. \quad (9.30)$$

Для обчислення коефіцієнта поверхневого поглинання необхідно перш за все обрахувати потік резонансних нейтронів усередині блока. Якби не було сильного поверхневого поглинання нейтронів, то ефективний переріз поглинання нейтронів усередині блока дорівнював би просто σ_{a_0} . Отже, за рахунок поверхневого поглинання кількість нейтронів усередині блока зменшується в $\frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma_a}$ разів. Тому потік нейтронів усередині стрижня дорівнює

$$\Phi'(E) = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma_a} \Phi(E), \quad (9.31)$$

де $\Phi(E)$ - потік нейтронів, що падають на стрижень палива. Різниця між не-послабленим потоком і послабленим дає величину потоку резонансних нейтронів на поверхні блока палива

$$\Phi_{rez}(E) = \Phi(E) - \Phi'(E) = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} \Phi(E). \quad (9.32)$$

Якщо обрахувати кількість нейтронів, що падають в одиницю часу на одиницю поверхні блока палива, то вона приблизно дорівнює $\frac{1}{4} \Phi_{rez}$. А ймовірність того, що нейтрон буде поглинуто під час першого зіткнення в блоці палива, дорівнює $\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a}$. Отже, повне число нейтронів з енергією E , що поглинуто на одиниці поверхні на одиницю потоку, таке:

$$\frac{\Sigma_a}{4(\Sigma_s + \Sigma_a)} \frac{\Sigma_a}{(\Sigma_s + \Sigma_a)} = \frac{1}{4} \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} \right)^2. \quad (9.33)$$

Кількість атомів урану в 1 г палива дорівнює $\frac{N_F}{\rho}$, де ρ - густина палива.

Тому поверхневе поглинання на атом, на одиницю потоку, на 1 см²/г є

$$b(E) = \frac{\rho}{4N_F} \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} \right)^2. \quad (9.34)$$

Тоді ефективний резонансний інтеграл для блока палива дорівнює

$$\int (\sigma_{a_0})_{\text{ef}} \frac{dE}{E} = \int a(E) \frac{dE'}{E} + \frac{S}{M} \int b(E) \frac{dE'}{E'}, \quad (9.35)$$

а величини $a(E)$ і $b(E)$ визначаються формулами (9.28) і (9.34) відповідно.

Експериментальне визначення резонансного поглинання в блоках палива можливо провести, якщо блок палива покрити кадмієм, який поглинає теплові нейтрони, а потім виміряти активність ²³⁹U, який виникає після радіацій-

ного захоплення нейтронів ядрами ^{238}U . Можна також блок, покритий кадмієм внести в реактор і виміряти зміну реактивності, викликану таким внесенням. Потім цю реактивність можна перерахувати на зміну ймовірності резонансного поглинання.

Такі вимірювання було проведено багатьма дослідниками. Для металічного урану було отримано такі результати:

$$\int a(E) \frac{dE'}{E'} = 9,25 \text{ б},$$

$$\int b(E) \frac{dE'}{E'} = 24,7 \text{ б} \cdot \text{г}/\text{см}^2. \quad (9.36)$$

Ці значення можна порівняти із значеннями резонансного інтеграла $\int \sigma_a \frac{dE'}{E'} \approx 280 \text{ б}$. Отже, ефект блокування палива призводить до зменшення резонансного поглинання в металічному урані майже в 20 разів.

§ 9.4. Ймовірність уникнути резонансного поглинання

Вираз для ймовірності уникнути резонансного поглинання (9.23) було отримано без урахування перерозподілу потоку нейтронів усередині елементарної комірки. Якщо блоки палива впорядковано в ґратку, то зрозуміло, що величина ймовірності уникнути резонансного поглинання буде залежати від розподілу резонансних нейтронів в елементарній комірці такої ґратки. У блоці палива повне число поглинань в одиницю часу в одиничному інтервалі енергій навколо E дорівнює

$$A(E) = \bar{\Phi}_0(E) N_0 V_0 a(E) + \bar{\Phi}_s(E) N_0 V_0 b(E) \frac{S}{M}, \quad (9.37)$$

де V_0 - об'єм блока в елементарній комірці, $\bar{\Phi}_0(E)$ - середній потік нейтронів усередині блока, віднесений до одиничного інтервалу енергій навколо точки E , визначається інтегралом

$$\bar{\Phi}_0(E) = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \Phi(\vec{r}) dV.$$

Величина $\bar{\Phi}_s(E)$ - це середній потік на поверхні блока, віднесений до одиничного інтервалу енергій навколо E :

$$\bar{\Phi}_s(E) = \frac{1}{S} \int_s \Phi(\vec{r}) dS.$$

Повне число $q(E)$ нейтронів, що перетинають енергію E під час сповільнення в сповільнювачі, який заповнює елементарну комірку навколо блока палива, дорівнює

$$q(E) = \bar{\Phi}_1(E) V_1 \xi_1 \Sigma_{s1}, \quad (9.38)$$

де V_1 - об'єм сповільнювача в елементарній комірниці, а $\bar{\Phi}_1(E)$ - середній потік у сповільнювачі на одиничний інтервал енергій навколо точки E :

$$\bar{\Phi}_1(E) = \frac{1}{V_1} \int_{V_1} \Phi(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Швидкість зміни $q(E)$ з енергією визначається поглинанням у блоці палива

$$\frac{dq(E)}{dE} = A(E). \quad (9.39)$$

З урахуванням формул (9.37) і (9.38) отримаємо

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{dE} = \left[\frac{N_0 V_0 \bar{\Phi}_0(E) a(E)}{\bar{\Phi}_1(E) V_1 \xi_1 \Sigma_{s1}} + \frac{N_0 V_0 \Phi_s(E) b(E) S}{V_1 \bar{\Phi}_1(E) \xi_1 \Sigma_{s1}} \right] \frac{1}{E}. \quad (9.40)$$

Після інтегрування отримаємо

$$q(E) = q(E_0) \exp \left\{ - \frac{N_0 V_0}{V_1 \xi_1 \Sigma_{s1}} \left[\int_E^{E_0} \frac{\bar{\Phi}_0(E')}{\bar{\Phi}_1(E')} a(E') \frac{dE'}{E'} + \frac{S}{M} \int_E^{E_0} \frac{\bar{\Phi}_s(E')}{\bar{\Phi}_1(E')} b(E') \frac{dE'}{E'} \right] \right\}. \quad (9.41)$$

Ймовірність уникнути резонансного поглинання $\varphi(E)$ в інтервалі від E_0 до E визначається відношенням $q(E) / q(E_0)$, тобто

$$\varphi(E) = \exp \left\{ - \frac{N_0 V_0}{V_1 \xi_1 \Sigma_{s1}} \left[\int_E^{E_0} \frac{\bar{\Phi}_0}{\bar{\Phi}_1} a \frac{dE'}{E'} + \frac{S}{M} \int_E^{E_0} \frac{\bar{\Phi}_s}{\bar{\Phi}_1} b \frac{dE'}{E'} \right] \right\}. \quad (9.42)$$

В однорідній суміші $\frac{\bar{\Phi}_0}{\bar{\Phi}_1}$ і $\frac{\bar{\Phi}_s}{\bar{\Phi}_1}$ дорівнюють одиниці при будь-яких енергіях і об'єми V_0 і V_1 рівні між собою. Таким чином, для однорідної суміші вираз для ймовірності уникнути резонансного поглинання зводиться до знайомого виразу

$$\varphi(E) = \exp \left\{ - \frac{N_0}{\xi_1 \Sigma_{s1}} \int (\sigma_{a_0})_{ef} \frac{dE'}{E'} \right\}$$

Для ґраток з оптимальними співвідношеннями між V_0 і V_1 можна вважати, що $\frac{\bar{\Phi}_0}{\bar{\Phi}_1} = \frac{\Phi_s}{\Phi_1}$, а також, що це відношення не залежить від енергії. Тоді вираз для $\varphi(E)$ спрощується:

$$\varphi(E) = \exp \left\{ - \frac{N_0 V_0 \bar{\Phi}_0}{V_1 \xi_1 \Sigma_{s1} \bar{\Phi}_1} \int (\sigma_{a_0})_{ef} \frac{dE'}{E'} \right\}, \quad (9.43)$$

і ймовірність уникнути резонансного поглинання можна досить просто розрахувати, знаючи ефективний резонансний інтеграл і коефіцієнт програшу $\frac{\bar{\Phi}_0}{\bar{\Phi}_1}$ для резонансних нейтронів.

Задача розрахунку коефіцієнта програшу для резонансних нейтронів фактично не відрізняється від аналогічної задачі для теплових нейтронів (тобто розрахунку коефіцієнта використання теплових нейтронів). Якщо постійні, що входять у дифузійні рівняння, відомі (визначення цих постійних не є простою задачею), то для обчислення коефіцієнта програшу для резонансних нейтронів треба розв'язати систему двох дифузійних рівнянь для блока палива і сповільнювача в елементарній комірці.

Знову ж таки, вважаючи, що джерелом резонансних нейтронів є нейтрони, які сповільнилися в сповільнювачі з постійним розподілом по ефективній елементарній комірці, можна записати для блока палива

$$\nabla^2 \Phi_0 - \chi_0^2 \Phi_0 = 0, \quad \chi_0^2 = \frac{\Sigma_a}{D},$$

а для сповільнювача

$$\nabla^2 \Phi_1 - \chi_1^2 \Phi_1 + S = 0,$$

де S - постійна величина. Граничні умови збігаються з граничними умовами для теплових нейтронів:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi_1 \Big|_{r=R_0}, \\ D_0 \frac{d\Phi_0}{dr} &= D_1 \frac{d\Phi_1}{dr} \Big|_{r=R_0}, \\ \frac{d\Phi_1}{dr} &= 0 \Big|_{r=R_1}. \end{aligned}$$

Якщо тепер ввести величину θ_γ , яку можна назвати коефіцієнтом використання резонансних нейтронів за аналогією з коефіцієнтом використання теплових нейтронів, і визначити її як відношення кількості резонансних нейтронів, які поглинулися на резонансах, до певної кількості утворених резонансних нейтронів, то коефіцієнт програшу можна виразити через θ_γ у вигляді

$$\frac{\bar{\Phi}_1}{\bar{\Phi}_0} = \frac{V_0 \Sigma_{a0}}{V_1 \Sigma_{a1}} \left(\frac{1}{\theta_\gamma} - 1 \right). \quad (9.44)$$

Вираз для θ_γ повністю аналогічний виразу (9.8) для коефіцієнта використання теплових нейтронів, з тою відмінню, що коефіцієнти стосуються резонансної області. Таким чином, використовуючи формулу (9.44) для ймовірності уникнути резонансного поглинання, маємо

$$\varphi(E) = \exp \left[- \frac{N_0 \Sigma_{a1}}{\xi \Sigma_{s1} \Sigma_{a0}} \frac{\theta_r}{(1 - \theta_r)} \int (\sigma_{a_0})_{ef} \frac{dE}{E} \right]. \quad (9.45)$$

Розглядаючи резонансні нейтрони як окрему групу нейтронів, що обмежена енергіями E_1 і E_2 , проведемо усереднення по цій групі нейтронів. Тоді за визначенням

$$\frac{\Sigma_{a1}}{N_0} = \frac{\int_{E_2}^{E_1} (\sigma_{a_0})_{ef} \frac{dE}{E}}{\ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right)}. \quad (9.46)$$

Якщо згадати теорію сповільнення нейтронів з поглинанням, то можна записати

$$\frac{\Sigma_{a1}}{\xi \Sigma_{s1}} = \frac{1}{\ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right)}. \quad (9.47)$$

Отже, для ймовірності уникнути резонансного поглинання, використовуючи формули (9.46) і (9.47), отримаємо простий вираз

$$\varphi(E) = \exp \left\{ - \frac{\theta_r}{1 - \theta_r} \right\}. \quad (9.48)$$

Як ми бачили з формул (9.21), (9.22) величина θ (отже, і θ_r) визначається співвідношеннями між радіусами стрижня палива та ефективною елементарної ґратки, а також відношенням об'ємів сповільнювача і палива.

Залежності φ від відношення об'ємів для різних радіусів стрижнів наведено на рис. 9.4. З рисунка видно, що ймовірність уникнути резонансного поглинання зростає із зростанням радіуса стрижня при постійному V_1/V_0 , а також із зростанням V_1/V_0 при постійному радіусі. Тобто умови зростання φ збігаються з умовами зменшення коефіцієнта використання теплових нейтро

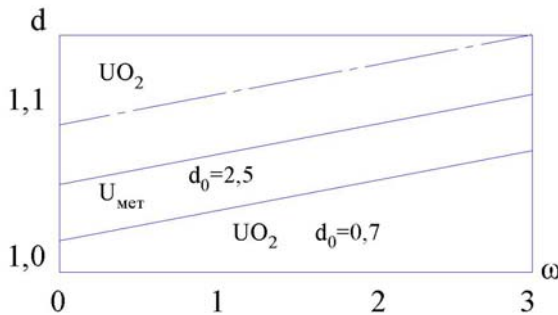


Рис. 9.4. Залежність φ від $\omega = V_1/V_2$ для різних радіусів блока.

нів (див. рис. 9.3). Отже, задачею проектувальників під час вибору схеми нового реактора є визначення оптимального співвідношення між ϕ і θ шляхом варіації V_1/V_0 і R_0 .

§ 9.5. Імовірності зіткнень

Ми вже відзначали, що основну похибку під час розрахунку коефіцієнта використання теплових нейтронів і ймовірності уникнути резонансного поглинання вносить використання дифузійного наближення. Особливо велику похибку дифузійне наближення вносить під час розрахунку резонансного поглинання, оскільки дифузійне наближення є справедливим якраз у відсутності поглинання. Тому для розрахунку резонансного поглинання варто застосувати в якомусь сенсі протилежне до дифузійного наближення – наближення ймовірностей перших зіткнень.

Нагадаємо спершу деякі визначення, які ми використовували в розділі 2. Для нейтрона, що виник на початку координат і рухається в напрямку осі x , ймовірність пройти шлях x , не зазнавши при цьому зіткнення, дорівнює $p(x) = \exp(-\Sigma x)$, де Σ - повний переріз, тобто ймовірність зіткнутися на шляху Δx дорівнює $\Sigma \Delta x$. Відповідно до цих визначень $l = \Sigma^{-1}$ - середня довжина вільного пробігу, $l_a = \Sigma_a^{-1}$ і $l_s = \Sigma_s^{-1}$ - довжина поглинання і довжина розсіювання відповідно. У конденсованих середовищах l_a має різний порядок величини від часток міліметра до 100 м (для D_2O), а l_s дорівнює декільком сантиметрам.

Нехай у точці \mathbf{r}' розташоване точкове ізотропне джерело нейтронів, що випромінює 1 нейтрон в 1 с. Тоді ймовірність того, що нейтрон дійде до точки \mathbf{r} без зіткнення, а потім на шляху ds відбудеться зіткнення з ядром, дорівнює

$$\Sigma ds \exp[-\Sigma|r - r'|].$$

Для ймовірності зіткнення в об'ємі dV , розташованому біля точки \mathbf{r} , одержимо (з урахуванням того, що $dV = |r - r'|^2 d\Omega ds$ і що всередині тілесного кута $d\Omega$ в 1 с випромінюється $\frac{1}{4\pi} d\Omega$ нейтронів)

$$\Sigma [4\pi(r - r')^2]^{-1} \exp[-\Sigma|r - r'|] dV.$$

Функцію

$$K(r) = (4\pi r^2)^{-1} \exp(-\Sigma r)$$

називають ядром першого зіткнення для точкового джерела, а добуток ΣK - густиною зіткнень. Якщо є протяжне джерело $Q(r')$, то густина зіткнень, яка утворюється цим джерелом в точці \mathbf{r} , дорівнює

$$\tilde{K}(r) = \frac{\Sigma}{4\pi} \int (r-r')^{-2} \exp[-\Sigma|r-r'|] Q(r') dV'.$$

Обчислимо ядро першого зіткнення для плоского джерела $Q(r) = \delta(x_0 - x')$:

$$K(r-r_0) = \frac{1}{4\pi} \int (r-r')^{-2} \exp(-\Sigma|r-r'|) \delta(x_0 - x') dV'.$$

Уведення полярних координат у площині y', z' дає

$$K(r-r_0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\exp[-\Sigma\sqrt{(x-x_0)^2 + \rho^2}]}{(x-x_0)^2 + \rho^2} \rho d\rho = \frac{1}{2} E_1(|x-x_0|),$$

де $E_1(x-x_0)$ - інтегральна експонента:

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{\exp(-x)}{x} dx.$$

Нехай в об'ємі V є однорідне ізотропне джерело нейтронів, тобто $Q(r) = 1$. Імовірність зіткнення в об'ємі V дорівнює

$$P_c = \frac{\Sigma}{4\pi V} \int_V \int_V \frac{\exp[-\Sigma|r-r'|]}{(r-r')^2} dV dV'.$$

Імовірність для нейтрона, народженого в об'ємі V , вийти з цього об'єму, не зазнавши жодного зіткнення, дорівнює

$$P = 1 - P_c.$$

Імовірність P для тіл різноманітної форми була обчислена багатьма авторами. Для нескінченно довгого циліндра справедливі такі розкладання:

$$P = 1 - \frac{2a}{3} + \frac{a^2}{8} \ln \frac{2C_0}{a} + \frac{5a^2}{32} + \dots, \quad a = 2\rho\Sigma \ll 1; \quad C_0 = 1,12,$$

$$P = 1 - \frac{3}{4a^3} + \dots, \quad a \gg 1.$$

Часто для ймовірності P використовують раціональне наближення Вігнера

$$P = 1 - P_c \approx (1+a)^{-1}.$$

Помилка цього виразу порівняно з точним досягає 10 – 20 %. Використовується також значно більш точна формула

$$P = \frac{1 - \exp(-a)}{a} - Aa \exp(-a); \quad a = \bar{l}\Sigma,$$

де \bar{l} - середня хорда об'єму V , рівна $\bar{l} = 4V/S$, а S - площа поверхні цього об'єму. Постійна A для сфери дорівнює 0,068, для циліндра – 0,098, для пластини – 0,205. Похибка цієї формули $\sim 0,5\%$, якщо $a < 5$, і біля 1%, коли $a \sim 5-7$.

Розглянемо ймовірність зазнати будь-яке зіткнення всередині об'єму V для нейтрона, що падає на поверхню S , яка обмежує цей об'єм, причому всі кути падіння рівномірні. Ця ймовірність дорівнює

$$G = \int_0^{l_{\max}} [1 - \exp(-\Sigma l)] w(l) dl, \quad (9.49)$$

де l - хорда аналізованого об'єму, а $w(l)$ - розподіл хорд за довжинами. Між ймовірностями G і P є зв'язок:

$$G = \Sigma \bar{l} (1 - P_c) = \Sigma \bar{l} P. \quad (9.50)$$

Ці співвідношення справедливі для довільних опуклих тіл.

Обчислимо тепер ефективний резонансний інтеграл. Нехай переріз поглинання описується формулою Брейта - Вігнера

$$\sigma_a(E) = \sigma_a(E_r) \sqrt{\frac{E_r}{E}} \frac{1}{1 + \frac{4(E - E_r)^2}{\Gamma^2}}.$$

Визначимо ширину «небезпечної зони» $\Delta(E_r)$ (або «практичну ширину резонансу») за допомогою рівності

$$\sigma_a\left(E_r - \frac{\Delta E_r}{2}\right) N_8 \bar{l} = 1, \quad (9.51)$$

де N_8 - кількість ядер ^{238}U у 1 см^3 блока (для визначеності будемо мати на увазі резонансне поглинання в ^{238}U). Оскільки $\Delta(E_r) \gg \Gamma/2$ і в більшості випадків $\Delta(E_r) \ll E_r$, то з попередніх двох формул отримаємо

$$\Delta E_r = \Gamma \sqrt{a}; \quad a = \sigma_a(E_r) N_8 \bar{l}. \quad (9.52)$$

Для ^{238}U $a \gg 1$ і $\Delta E_r \gg \Gamma$. Це означає, що основне поглинання відбувається не в центральній частині резонансної лінії шириною Γ , а в значно більш широкій області ΔE_r , тобто фактично на крилах резонансної кривої. При збільшенні концентрації ширина небезпечної зони зростає пропорційно кореню з концентрації.

Надалі будемо вважати, що нейтрони з енергією поблизу резонансу виникають у сповільнювачі однорідно в просторі та ізотропно за кутами (при відсутності поглинання густина потоку нейтронів взагалі не залежить від координат). Це справедливо, якщо втрати енергії під час розсіювання на ядрах сповільнювача $\Delta E \gg \Delta E_r$. Ця нерівність достатньо сильна, і наближення однорідності та ізотропності є справедливим, коли ці величини одного порядку. Крім того, вважаємо, що блок палива не уповільнює нейтрони:

$$\Delta E(^{238}\text{U}) \ll \Delta E_r; \quad \Gamma_n \ll \Gamma. \quad (9.53)$$

Кількість нейтронів з енергією E , що з'являються в одиницю часу в об'ємі сповільнювача V_1 , якщо потужність джерела нормована на один нейтрон у комірці з об'ємом V , дорівнює

$$\frac{\Sigma_{s1} V_1}{\xi \Sigma_s E V},$$

де Σ_{s1} - макроскопічний переріз розсіювання в сповільнювачі; $\xi \Sigma_s$ - середня сповільнююча здатність середовища в комірни.

Розглянемо нейтрон, що отримав енергію E в результаті зіткнення з ядром сповільнювача. Нехай \bar{P} - імовірність зазнати таке зіткнення знову в сповільнювачі, причому припускається багатократне перетинання блоків палива і розсіювання, але не поглинання в них. Якщо виконується умова великих втрат енергії $\Delta E \gg \Delta E_r$, то після зіткнення нейтрон вийде з небезпечної (з погляду поглинання на резонансах) зони. Тому кількість поглинених нейтронів дорівнює

$$\psi = \frac{\Sigma_{s1} V_1}{\xi \Sigma_s V} \int (1 - \bar{P}) \frac{dE}{E}, \quad (9.54)$$

а ймовірність уникнути резонансного поглинання $\varphi = 1 - \psi$. Якщо кількість рівнів велика, то $\psi = \sum_i \psi_i$, а $\varphi = \exp(-\psi)$, що формально збігається з

виразом для резонансного поглинання в гомогенному середовищі.

Нехай P_1 - імовірність зіткнення в сповільнювачі для нейтрона, що виник усередині сповільнювача, за умови, що він не перетинає границю сповільнювача з блоком. Нехай далі G_0 - імовірність поглинання нейтрона, що падає на блок, а G_1 - імовірність зіткнутися в сповільнювачі для того нейтрона, що потрапив у сповільнювач, перетинаючи границю блока. Тоді кількість нейтронів $1 - \bar{P}$ складається з тих, що не зіткнулись у сповільнювачі (імовірність $(1 - P_1)$) і поглинулися в блоці (імовірність G_0), і тих, що не зіткнулись в сповільнювачі, не поглинулися блоком (імовірність $(1 - P_1)(1 - G_0)$), повернулися в сповільнювач із блока, але зіткнулись у ньому (імовірність $(1 - G_1)$), поглинулися в блоці (імовірність G_0) і т.д. У результаті отримуємо геометричну прогресію

$$1 - \bar{P} = (1 - P_1)G_0 + (1 - P_1)(1 - G_0)(1 - G_1)G_0 + \dots = \frac{(1 - P_1)G_0}{G_1 + (1 - G_1)G_0}. \quad (9.55)$$

З урахуванням формули (1.2), а також співвідношення між середньою хордою об'єму сповільнювача і його поверхнею $\bar{l}_1 = 4V_1/S_1$, вираз (2.4) можна записати у вигляді

$$\psi = \frac{S_1}{4\xi \Sigma_s V} \int_{E_c}^{E_0} \frac{G_0}{1 + \frac{1 - G_1}{G_1} G_0} \frac{dE}{E}. \quad (9.56)$$

Якщо розміри комірки набагато більші, ніж $\Sigma_{s1}^{-1} = l_{s1}$, то G_1 близьке до одиниці, і замість формули (2.6) отримуємо наближення ізольованого блока

$$\psi = \frac{S_1}{4\bar{\xi}\Sigma_s V} \int_{E_c}^{E_0} G_0 \frac{dE}{E}, \quad (9.57)$$

а різниця між формулами (2.6) і (2.7) обумовлена впливом інших блоків палива.

Коли ми виводили вираз (9.55), ми мали на увазі, що в блоці палива може відбуватися розсіювання нейтронів, але енергія нейтронів під час цього розсіювання змінюється на величину, що набагато менша, ніж ширина небезпечної зони. Якщо це не так, то величини G_0 будуть різні в кожному доданку (9.55). Таке припущення виконується тільки для перших рівнів ^{238}U . Однак внесок більш високих рівнів незначний і відповідно помилка при обчисленні резонансного інтеграла буде незначною.

Розглянемо тепер обчислення величини G_0 . Відповідно до (9.49)

$$G_0(E) = \int_0^{l_{\max}} [1 - \exp\{-\Sigma_a(E)l\}] w(l) dl =$$

$$=< 1 - \exp(-\Sigma_a(E)l) > \quad (9.58)$$

Змінюючи порядок інтегрування по E і l і враховуючи те, що поверхня сповільнювача рівна поверхні блока (під час обрахунку поверхні сповільнювача враховується тільки границя з блоком, оскільки на границі з сповільнювачем сусідньої комірки використовуються умови дзеркального відбиття), для ймовірності поглинання отримаємо

$$\psi = \frac{S_0}{4\bar{\xi}\Sigma_s V} < \int_{E_c}^{\infty} [1 - \exp(-\Sigma_a(E)l)] \frac{dE}{E} > = \frac{N_8 V_0}{\bar{\xi}\Sigma_s V} I_{ef}, \quad (9.59)$$

де V_0 – об'єм блока палива, а I_{ef} – ефективний резонансний інтеграл.

$$I_{ef} = (N_8 \bar{l})^{-1} < \int_{E_c}^{\infty} [1 - \exp(-\Sigma_a(E)l)] \frac{dE}{E} >, \quad (9.60)$$

а $\bar{l} = 4V_0 / S_0$ - середня хорда блока. Для обчислення ефективного резонансного інтеграла для ізольованого резонансного рівня у формулі Брейта - Вігнера покладемо $x = \frac{2}{\Gamma}(E - E_r)$, множники, які повільно змінюються $\frac{1}{E}$ та

$\sqrt{\frac{E_r}{E}}$, винесемо з під знака інтеграла в точці $E = E_r$. Тоді

$$I_{ef} = \frac{\Gamma}{2N_8 \bar{l} E_r} < \int_{-\frac{2(E_r - E_c)}{\Gamma}}^{\infty} [1 - \exp(-\frac{a(l)}{1 + x^2})] dx, \quad a(l) = \sigma_a(E_r) N_8 l. \quad (9.61)$$

Нижню границю в інтегралі можна замінити на $-\infty$, оскільки, як правило, $\frac{2(E_r - E_c)}{\Gamma} \gg 1$ (нагадаємо, що E_c – границя теплової групи). Тоді

$$I_{ef} = \frac{\Gamma \sigma_a(E_r)}{2E_r \bar{a}} < \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \exp(-\frac{a(l)}{1+x^2})] dx > = I_{\infty} \beta, \quad (9.62)$$

де $\bar{a} = a(\bar{l})$, I_{∞} - резонансний інтеграл нескінченного розведення, а β - коефіцієнт блокування, який визначається відомим інтегралом

$$\beta = \frac{1}{\pi \bar{a}} < J(a) > = \frac{1}{\pi \bar{a}} < \pi a \exp(-a/2) [I_0(a/2) + I_1(a/2)] >, \quad (9.63)$$

де $I_0(x)$ та $I_1(x)$ – функції Бесселя уявного аргументу. Коли a великі (для першого рівня ^{238}U при $\bar{l} = 1$, $a \approx 1000$), можна використати асимптотичний розклад циліндричних функцій і отримати

$$J(a) = 2\sqrt{\pi a} (1 - \frac{1}{4a} + \dots), \quad \beta = \frac{2}{\sqrt{\pi \bar{a}}} \frac{< \sqrt{\bar{l}} >}{\sqrt{\bar{l}}}. \quad (9.64)$$

Отже, ефективний резонансний інтеграл визначається геометричними параметрами блока (величина l), концентрацією речовини, що поглинає нейтрони (N_g), а також параметрами резонансного рівня в комбінації $\Gamma \sqrt{\sigma_a(E_r)} / E_r$, яку називають “вагою” рівня. Для більшості практично важливих випадків $< \sqrt{\bar{l}} > / \bar{l}$ дуже близьке до одиниці, отже задачу обчислення резонансного інтеграла для ізольованого блока палива можна вважати розв’язаною.

Розглянемо тепер, яким чином можна врахувати наявність інших блоків палива, які розташовані неподалік від розглянутого. Поправка, що враховує наявність сусідніх блоків, звичайно називається фактором Данкова. Як ми вже бачили, вплив сусідніх блоків, що визначається ймовірностями других, третіх і далі зіткнень, описано виразом (9.56). Розкладемо цей вираз у ряд за степенями $(1 - G_1)$ і подамо його у вигляді

$$\psi = \psi_0 (1 - D), \quad (9.65)$$

де ψ_0 визначається виразом (9.57), а фактор Данкова D у першому наближенні дорівнює

$$D = \frac{1 - G_1}{G_1} \frac{\int G_0^2 \frac{dE}{E}}{\int G_0 \frac{dE}{E}}. \quad (9.66)$$

Неважко показати, що

$$D = (2 - \sqrt{2}) \frac{1 - G_1}{G_1}, \quad (9.67)$$

і у загальному вигляді

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} C_{n+1} \left(\frac{1-G_1}{G_1} \right)^n. \quad (9.68)$$

У сучасних розрахункових програмах закладено вирази для фактора Данкова для різних найбільш уживаних геометрій. У випадку довільних геометрій фактор Данкова можна розрахувати за допомогою прямого моделювання руху нейтрона в середовищі із заданою геометрією за методом Монте-Карло (метод випадкових випробувань).

§ 9.6. Коефіцієнт розмноження на швидких нейтронах

Коли говорять про розмноження на швидких нейтронах, то мають на увазі поділ ядер ^{238}U після поглинання нейтронів з енергією, вище енергії порога поділу ^{238}U , яка приблизно дорівнює 1,1 МеВ. Звичайно, оскільки ядра ^{233}U , ^{235}U , ^{239}Pu можуть ділитися під дією нейтронів будь-яких енергій, то швидкі нейтрони можуть також викликати поділ цих ізотопів і дати додатковий внесок у коефіцієнт розмноження. Однак поділ сировинних ізотопів під дією нейтронів з енергією вище порога поділу є більш важливим, ніж поділ ізотопів, що діляться під дією надтеплових нейтронів. Останній звичайно враховується в неявному вигляді деякою зміною перерізу поділу.

Що стосується поділу ядер ^{238}U , то він також носить ланцюговий характер, тобто існує відмінна від нуля ймовірність того, що швидкий нейтрон при поглинанні в ^{238}U викликає випромінення швидкого нейтрона, який знову може викликати поділ і т.д.

Коефіцієнт розмноження на швидких нейтронах ϵ можна визначити як кількість нейтронів, що сповільнилися нижче порога поділу ^{238}U , який припадає на один первинний швидкий нейтрон, тобто який утворився після поділу на теплових нейтронах. Такий розрахунок повинен урахувати всі швидкі нейтрони, що утворилися в ланцюговому процесі.

Швидкі нейтрони, що виникли в блоці палива, сповільнюються за рахунок двох процесів. По-перше, це непружене зіткнення нейтрона з ядрами ^{238}U . Під час такого зіткнення енергія нейтрона зменшується до величини нижче порога поділу, і нейтрон вибуває з ланцюгового процесу. По-друге, сповільнення відбувається після виходу нейтрона з блока палива в сповільнювач. З хорошою точністю можна вважати, що ні один із швидких нейтронів не повернеться в блок палива, не зменшивши енергії нижче порога поділу. Що стосується пружного зіткнення всередині блока палива, то можна вважати, що таке зіткнення не зменшує енергії нейтронів (унаслідок великої маси ядер палива).

Нехай P - імовірність того, що первинний швидкий нейтрон зіткнеться з ядром палива всередині блока, де він виник. Тобто P - це середня кількість

зіткнень у блоці палива. Тоді в результаті поділу ^{238}U виникне $\frac{\nu_8 P \Sigma_f^8}{\Sigma_t}$ вторинних швидких нейтронів, де Σ_f^8 - переріз поділу ^{238}U , Σ_t - повний переріз для швидких нейтронів. Кількість пружних зіткнень є $\frac{P \Sigma_s}{\Sigma_t}$, кількість непружних зіткнень - $\frac{P \Sigma_{in}}{\Sigma_t}$, а ймовірність виходу нейтрона за блок дорівнює $1 - P$.

Повна кількість швидких нейтронів, що залишилися й виникли в блоці після першого зіткнення, є $\frac{P(\nu_8 \Sigma_f^8 + \Sigma_s)}{\Sigma_t}$. Якщо тепер цю величину домножити на

ϵ , то отримаємо внесок в ϵ нейтронів, які залишилися й виникли в блоці після першого зіткнення. Отже, повний баланс нейтронів, що сповільнилися нижче порога поділу, є

$$\epsilon = 1 - P + \epsilon P \frac{\nu_8 \Sigma_f^8 + \Sigma_s}{\Sigma_t} + P \frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t}. \quad (9.69)$$

Це рівняння можна розв'язати відносно ϵ як

$$\epsilon = \frac{1 - P + P \frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t}}{1 - P \frac{\nu_8 \Sigma_f^8 + \Sigma_s}{\Sigma_t}},$$

і враховуючи, що $\Sigma_t = \Sigma_f^8 + \Sigma_s + \Sigma_{in} + \Sigma_\gamma$, де Σ_γ - переріз радіаційного захоплення, отримаємо

$$\epsilon - 1 = \frac{(\nu_8 - 1) \frac{\Sigma_f^8}{\Sigma_t} - \frac{\Sigma_\gamma}{\Sigma_t}}{\frac{1}{P} - \frac{\nu_8 \Sigma_f^8 + \Sigma_s}{\Sigma_t}}. \quad (9.70)$$

Для обрахунку цієї формули треба зробити деякі зауваження з приводу обчислення величин σ і ν . Під час виводу формули (9.70) ми вважали, що всі перерізи не залежать від енергії, отже вони є усередненими за деяким проміжком енергій. У такому одногруповому підході звичайно вважають, що всі надпорогові нейтрони складають одну групу нейтронів, і перерізи усереднюють за спектром поділу ядер ^{235}U в межах від порога поділу ^{238}U до нескінченності:

$$\bar{\sigma} = \int_{E_{\text{пор}}}^{\infty} \sigma(E) \chi(E) dE,$$

де $\chi(E)$ - нормований спектр поділу ^{235}U .

§ 9.7. Обчислення матеріального параметра

Значення чотирьох величин η , θ , ϕ , ε дає змогу обчислити коефіцієнт розмноження нескінченного середовища. Але для визначення рівняння критичності або ефективного коефіцієнта розмноження необхідно також знати матеріальний параметр реактора $\frac{k_{\infty} - 1}{M^2}$, де M^2 - площа міграції теплових нейтронів: $M^2 = L^2 + \tau$. Отже, для повного обрахунку гетерогенного реактора необхідно також визначити довжину дифузії і вік нейтронів у ґратці реактора.

За визначенням довжина дифузії визначається відношенням коефіцієнта дифузії до перерізу поглинання нейтронів $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$. Коефіцієнти дифузії в

паливі і сповільнювачі мало відрізняються один від одного, крім того, об'єм сповільнювача в елементарній комірці звичайно значно більший об'єму палива. Тому середній коефіцієнт дифузії можна покласти рівним коефіцієнту дифузії в сповільнювачі $D = D_1$. Але для визначення перерізу поглинання в елементарній комірці необхідно його усереднити відповідно до розподілу густини потоку нейтронів у комірці, оскільки переріз поглинання є суттєво різним для двох середовищ - палива і сповільнювача. Таке усереднення проводиться за формулою

$$\Sigma_a = \frac{V_1 \Sigma_{a1} \bar{\Phi}_1 + V_0 \Sigma_{a0} \bar{\Phi}_0}{V_1 \bar{\Phi}_1 + V_0 \bar{\Phi}_0} = \frac{V_1 \Sigma_{a1} + V_0 \Sigma_{a0} \left(\frac{\Phi_0}{\Phi_1} \right)}{V_1 + V_0 \left(\frac{\Phi_0}{\Phi_1} \right)}. \quad (9.52)$$

Відповідно до визначення коефіцієнта використання теплових нейтронів θ

$$V_0 \Sigma_{a0} \frac{\bar{\Phi}_0}{\bar{\Phi}_1} = V_1 \Sigma_{a0} \frac{\theta}{1 - \theta}. \quad (9.53)$$

Тоді вираз для Σ_a приймає вигляд

$$\Sigma_a = \frac{\Sigma_{a1}}{1-\theta} \frac{V_1}{V_1 + V_0 \frac{\Phi_0}{\Phi_1}}. \quad (9.54)$$

У реальних реакторах об'єм сповільнювача V_1 значно більший величини $V_0 \frac{\Phi_0}{\Phi_1}$. Якщо знехтувати останньою величиною, то для середнього макроскопічного перерізу поглинання маємо простий вираз

$$\Sigma_a = \frac{\Sigma_{a1}}{1-\theta}. \quad (9.55)$$

Тому дифузійна величина для теплових нейтронів у гетерогенному реакторі дається виразом

$$L_{zem} = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}} = \sqrt{\frac{D_1(1-\theta)}{\Sigma_{a1}}} = L_1 \sqrt{1-\theta}. \quad (9.56)$$

Треба зазначити, що коли в реакторі існують пустоти або щілини, не заповнені сповільнювачем, довжина дифузії повинна збільшуватись. Таке збільшення можна врахувати введенням деякого множника

$$L_{ef}^2 = L_{zem}^2 (1+f)^2, \quad (9.57)$$

де $f = \frac{V_n}{V_1}$, де V_n - об'єм пустот у реакторах. Можливо також уведення більш

складних поправок, які враховують реальну структуру елементарних комірок у ґратці. Наприклад, для тісних водяних ґраток, де об'єм палива можна порівняти з об'ємом сповільнювача, уже не можна нехтувати різницею довжин дифузії в паливі і сповільнювачі й треба використовувати просту поправку до формули (9.56)

$$L_{zem}^2 = L_1^2 (1-\theta) + L_0^2 \theta.$$

Що стосується віку нейтронів, то в першому наближенні можна вважати, що вік нейтронів у ґратці рівний віку нейтронів у чистому сповільнювачі. Така ситуація виникла завдяки тому, що пружні зіткнення нейтронів з ядрами палива не приводять до втрати енергії. Отже, можна чекати, що вік нейтронів дещо збільшиться порівняно з чистим сповільнювачем. Але цей ефект компенсується непружними зіткненнями нейтронів з ядрами палива, так що в сповільнювач виходять нейтрони з дещо меншою енергією. Таким чином, приблизна рівність віку нейтронів у ґратці віку в сповільнювачі є справедливою тільки для досить розріджених ґраток з великою кількістю сповільнювача. Отже, вік нейтронів у ґратці буде залежати від відношення об'ємів сповільнювача і палива V_1/V_0 . Така залежність враховується наступною формулою для величини τ у ґратках:

$$\tau_{ep} = \tau_0 (1 - P_{in}) + \tau_1 P_{in},$$

де $P_{in} = G_0 \frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t}$ - імовірність нейтрона зазнати непружного зіткнення в паливі.

Таким чином, визначивши площу міграції в гетерогенних системах, ми визначаємо матеріальний параметр реактора. Прирівнюючи його до геометричного параметра, ми можемо визначити критичні розміри реактора.

§ 9.8. Гетерогенний метод Галаніна - Фейнберга

Метод гомогенізації, заснований на моделі ефективної елементарної комірки Вігнера - Зейтца непогано описує реальні реактори, коли ці реактори великі й активна зона складається з великої кількості комірок з явно вираженою періодичністю структури. Для невеликих реакторів з малою кількістю паливних блоків стає важливим реальне розташування всіх елементів реактора. Така модель, що враховує детальну картину розташування джерел та витоків нейтронів, була розроблена в роботах Галаніна і Фейнберга.

У цьому методі гетерогенний реактор розглядається як сукупність лінійних або точкових джерел у сповільнювачі. Швидкі нейтрони, тобто нейтрони поділу, сповільнюються в сповільнювачі. Вважається, що просторовий розподіл нейтронів, що сповільнюються, описується розв'язком вікового рівняння Фермі. Для опису нейтронів теплової групи використовують звичайне дифузійне рівняння. У цьому рівнянні джерело нейтронів являє собою суму внесків від усіх блоків палива в реакторі. У рівняння вводиться додатковий член, який враховує, що кожен блок палива діє також як виток (поглинач) теплових нейтронів. Явний вигляд цього члена визначається з дифузійної теорії лінійних і точкових джерел, що розташовані в нескінченному сповільнювачі.

Метод Галаніна - Фейнберга базується на таких припущеннях:

1. Потік теплових нейтронів в околі блока палива має сферичну або аксіальну симетрію, так що окремі блоки палива можна розглядати як лінійні або точкові джерела й виток.
2. В області сповільнювача між блоками палива для густини потоку теплових нейтронів є справедливою елементарна дифузійна теорія.
3. Властивості поглинання блоків палива описуються за допомогою логарифмічної похідної теплового потоку нейтронів на поверхні блока палива.
4. У блоках палива нема резонансного поглинання.

Перша умова є справедливою, якщо відстань між блоками значно більша, ніж їхні розміри.

Друга умова вимагає, щоб поглинання в сповільнювачі було невеликим і щоб дифузійна довжина для сповільнювача була малою порівняно з відстанню між блоками.

Третє припущення вводиться для зручності розрахунків і його справедливність визначається точністю, з якою обраховують логарифмічну похідну.

Останнє припущення зроблено для спрощення розрахунків. Резонансне поглинання враховане Галанінім.

Розглянемо нескінченну гетерогенну ґратку з циліндричних стрижнів палива нескінченної довжини. Нехай радіус стрижнів дорівнює ρ_F , кількість швидких нейтронів на один поглинений тепловий нейтрон η . Логарифмічна похідна визначається як відношення току нейтронів J в блок до величини теплового потоку на поверхні

$$\gamma_h = -\frac{2\pi\rho_F J(\vec{r}_k)}{\Phi(\vec{r}_k)}, \quad (9.58)$$

де \vec{r}_k - точка розміщення k -го стрижня.

Густина потоку нейтронів у сповільнювачі визначається як розв'язок рівняння

$$-D_1\nabla^2\Phi_1(\vec{r}) + \sum a_1\Phi_1(\vec{r}) = S(\vec{r}) - A_{vit}(\vec{r} \rightarrow \vec{r}_k). \quad (9.59)$$

Тут $S(\vec{r})$ - кількість теплових нейтронів, що з'являються в точці \vec{r} в одиниці об'єму в одиницю часу від усіх джерел у системі. $A_{vit}(\vec{r} \rightarrow \vec{r}_k)$ - кількість поглинань теплових нейтронів в одиницю часу точковими блоками в точках \vec{r}_k .

Функцію $S(\vec{r})$ можна розрахувати. Якщо $J(\vec{r}_k)$ - ток теплових нейтронів на поверхні стрижня, то повне число швидких нейтронів, що випромінюються в одиницю часу на одиницю довжини стрижня в результаті актів поділу, у стрижні визначається як

$$S_f(\vec{r}_k) = -\eta 2\pi\rho_F J(\vec{r}_k). \quad (9.60)$$

З урахуванням визначення γ_h

$$S_f(\vec{r}_k) = \eta\gamma_h\Phi_1(\vec{r}_k). \quad (9.61)$$

Для того щоб отримати вираз для джерела теплових нейтронів в точці \vec{r} , необхідно вираз для $S_f(\vec{r})$ помножити на величину $q(\vec{r}, \vec{r}_k)$, що визначає кількість нейтронів джерела, який продукує один нейтрон в одиницю часу в точці r_k , що сповільнився до теплової енергії в точці \vec{r} . Тоді функція $S(\vec{r})$ є сума вкладів від всіх джерел. Якщо вважати, що η і γ_h однакові для всіх стрижнів, отримаємо

$$S(\vec{r}) = \eta\gamma_n \sum_{r_k} q(\vec{r}, \vec{r}_k)\Phi_1(\vec{r}_k). \quad (9.62)$$

Обрахунок виразу для витоків нейтронів

$$A_{vit}(r \rightarrow r_k) = -\sum_k 2\pi\rho_F J(\vec{r}_k)\delta(\vec{r} - \vec{r}_k) = \gamma_h \sum_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k)\Phi_1(\vec{r}_k). \quad (9.63)$$

Ураховуючи формули (9.62) і (9.63), рівняння (9.59) приймає вигляд

$$-D\nabla^2\Phi_1(\vec{r}) + \sum a_1\Phi_1(\vec{r}) = \eta\gamma_h \sum_k q(\vec{r}, \vec{r}_k)\Phi_1(\vec{r}_k) - \gamma_h \sum_k J(\vec{r} - \vec{r}_k)\Phi_1(\vec{r}_k). \quad (9.64)$$

Це рівняння визначає тепловий потік у сповільнювачі, якщо відомий вираз для $q(\vec{r}, \vec{r}_k)$. Цей вираз можна легко отримати з вікової теорії Фермі. Для лінійного джерела

$$q(\vec{r}, \vec{r}_k) = \frac{\ell \frac{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2}{4\tau}}{4\pi\tau}, \quad (9.65)$$

де τ - вік теплових нейтронів у сповільнювачі.

Розв'язок дифузійного рівняння можна отримати, використовуючи двомірне перетворення Фур'є

$$\tilde{\Phi}(S) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\vec{r}) \ell^{i\vec{S}\vec{r}} d\vec{r}. \quad (9.66)$$

Якщо врахувати вираз для q , увести позначення $L_1^2 = \frac{\sum a_1}{D_1}$, домножити рівняння (9.64) на $\ell^{i\vec{S}\vec{r}}$ і проінтегрувати, то отримаємо

$$(S^2 + L_1^2)\bar{\Phi}_1(S) = \frac{\gamma_h}{2\pi D_1} \sum_k \Phi_1(\vec{r}_k) \ell^{i\vec{S}\vec{r}_k} [\eta \ell^{-S^2\tau} - 1]$$

або

$$\tilde{\Phi}_1(S) = \frac{\gamma_h}{2\pi D_1} \sum_k \left(\Phi_1(\vec{r}_k) \ell^{i\vec{S}\vec{r}_k} \right) / (S^2 - L_1^2) [\eta \ell^{-S^2\tau} - 1]. \quad (9.67)$$

Обернене двомірне перетворення Фур'є має вигляд

$$\Phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(\vec{S}) \ell^{-i\vec{S}\vec{r}} d\vec{S}. \quad (9.68)$$

Виконуючи це перетворення, отримаємо

$$\Phi_1(\vec{r}) = \frac{\gamma_h}{2\pi D_1} \sum_k \Phi_1(\vec{r}_k) \left[\eta \int_0^{\infty} (S \ell^{-S^2\tau} J_0(S\rho)) / (S^2 + L^2) dS - k_0(\rho) \right], \quad (9.69)$$

де $\rho = |\vec{r}_k - \vec{r}|$, $J_0(S\rho) = \int_0^{2\pi} \ell^{iS\rho \cos\theta} d\theta$ - функція Бесселя нульового порядку;

$k_0(\rho) = \int_0^{\infty} (S J_0(S\rho)) / (S^2 + L^2) dS$ - функція Бесселя нульового порядку уявного аргументу.

Вираз для $\Phi_1(\vec{r})$ можна подати у більш симетричному вигляді

$$\Phi_1(\vec{r}) = \frac{\gamma_h}{2\pi D_1} \sum_k \Phi_1(r_k) \left\{ \eta \ell^\beta \int_\beta^\infty - \int_0^\infty \right\} \exp\left(-S + \rho^2 / 4SL_1^2\right) \frac{dS}{2S}, \quad (9.70)$$

$$\beta = \tau L_1^2, \quad L_1^2 = \frac{D_1}{\sum a_1}.$$

Якщо ввести позначення

$$H(\rho_k) = \frac{V_{kom}}{2\pi L_1^2} \left\{ \eta \ell^\beta \int_\beta^\infty \ell^{-St \frac{\beta \rho^2}{4\tau S}} \frac{dS}{2S} - \int_0^\infty \ell^{-St \frac{\beta \rho^2}{4\tau S}} \frac{dS}{2S} \right\}, \quad (9.71)$$

тоді рівняння для $\Phi_1(\vec{r})$ приймає простий вираз

$$C_0 \Phi_1(\vec{r}) = \sum_k H(\rho_k) \Phi_1(\vec{r}_k), \quad (9.72)$$

де

$$C_0 = \frac{V_{kom} \sum a_1}{\gamma_h}.$$

Логарифмічну похідну густини потоку нейтронів можна обрахувати в будь-якому наближенні. Найбільш просте дифузійне наближення, в якому

$$\gamma_h = (2\pi \rho_F \sum a_0 J_1(L_0 \rho_F) / (J_0(L_0 \rho_F) L_0)),$$

де індекс 0 стосується паливного циліндричного стрижня.

Умову критичності можна отримати, виходячи з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$C_0 \Phi_1(\vec{\lambda}) = \sum_{\vec{\mu}} H(\rho_\mu) \Phi_1(\vec{\mu}), \quad (9.73)$$

де $\vec{\lambda}$ і $\vec{\mu}$ - координати будь-яких стрижнів у системі. Рівність нулю визначника цієї системи дає умову існування нетривіального стаціонарного розв'язку, а отже, рівняння критичності реактора. З цього рівняння за трьома відомими параметрами визначається четвертий. Ці чотири параметри такі: величина η , розмір крока ґратки, розмір стрижня і матеріал сповільнювача.

Наприклад, для повністю симетричної нескінченної ґратки, коли всі $\Phi_1(\vec{\lambda})$ однакові, рівняння критичності приймає простий вигляд

$$C_0 = \sum_k H(\vec{r}_k),$$

де \vec{r}_k - відстань між двома будь-якими стрижнями в системі.

У більшості програмних кодів, які використовують для розрахунків великих енергетичних реакторів реалізовано метод гомогенізації. Метод Галаніна – Фейнберга реалізовано в кодах, які використовуються для розрахунків дослідницьких реакторів.

Розділ 10

Стійкість реакторів

§ 10.1. Загальні уявлення про стійкість реакторів

У цьому розділі ми переходимо до вивчення питань стійкості реактора, що тісно пов'язані з синергетичними властивостями реактора як типово нерівноважної системи. У вступі до посібника ми згадували, що ці властивості пов'язані, з одного боку, з наявністю великої кількості обернених зв'язків між різними підсистемами реактора, а з другого боку, з нелінійною залежністю параметрів реактора від різних змін. Частково такі обернені зв'язки ми розглянули в розділі 8, де вивчався зв'язок між тепловою і нейтронною підсистемою реактора, а також у розділі 7, де розглядався вплив продуктів поділу на нейтронну підсистему.

Перш за все варто визначити, що ми розуміємо, коли говоримо про стійкість реактора. Відомо, що більшість часу реактор працює в стаціонарному режимі, тобто його основні параметри (густина потоку, температура тощо) не змінюється в часі. Але це твердження є справедливим тільки в середньому. Увесь час відбуваються невеликі відхилення від цих середніх значень, обумовлені і зовнішніми, і внутрішніми чинниками. Зрозуміло, для стабільної роботи реактора необхідно, щоб незначні зміни параметрів реактора не приводили до значних змін стаціонарного стану. Таким чином, під стійкістю реактора ми розуміємо його здатність повертатися до стаціонарного стану після невеликих відхилень значень змінних.

Наведене визначення стійкості є інтуїтивним, і можна навести більш точне його математичне визначення. Але для цього треба зрозуміти, що реактор є досить складною системою, для повного опису якої необхідно розв'язати систему з великої кількості диференційних або інтегрально-диференціальних рівнянь – звичайних або в часткових похідних. Зрозуміло, що для дослідження тих чи інших конкретних процесів можна не розглядати деякі змінні, які слабо впливають на даний процес, і таким чином прийти до спрощеної системи рівнянь.

Наприклад, під час розгляду ксенонових коливань у реакторі необхідно брати до уваги зміни концентрації ксенону, концентрації йоду, густини потоку нейтронів і можна не розглядати зміни температури, швидкості теплоносія, концентрації затриманих нейтронів тощо. Отже, для опису ксенонових коливань у реакторі достатньо розв'язати систему з трьох нелінійних диференціальних рівнянь. Таким чином, у даному випадку стан системи описується репрезентуючою точкою в тривимірному фазовому просторі, а зміна цього стану в часі описується траєкторією в цьому просторі.

Тепер можна навести математичне визначення стійкості. Нехай точка A описує стаціонарний стан системи у фазовому просторі змінних цієї системи, і нехай ε - малий замкнений контур навколо цієї точки. Тоді стаціонарний

стан A називається стійким, коли для будь-якого наперед заданого ε можна знайти такий окіл $\delta(\varepsilon)$ стану A , що будь-яка траєкторія, яка виходить з околу $\delta(\varepsilon)$, ніколи не досягне границі ε . Якщо такого околу не існує, то стійкість стаціонарного стану не гарантована.

Як правило, розглядати систему нелінійних рівнянь декількох змінних в аналітичному вигляді не вдається. Тому звичайно спочатку проводять якісне дослідження системи рівнянь, що описує систему, як правило, спрощеної. Таке дослідження дає змогу виявити характерні риси поведінки реактора в тих чи інших умовах, і після цього, ґрунтуючись на результатах якісного аналізу, проводити чисельні розрахунки більш складних математичних моделей.

Під якісним аналізом системи рівнянь розуміють визначення границь стійкості системи під час зміни параметрів, що характеризують систему, і визначення характеру поведінки системи під час переходу в область нестійкості. Для такого дослідження застосовують теорію біфуркацій, яка була розвинена в роботах А. Пуанкаре, Н. Андронова із співавторами і Е. Хопфа. Біфуркацією називають якісну зміну динамічної поведінки системи під час переходу деякого параметра, що визначає поведінку системи, через визначене значення. Це значення параметра називається біфуркаційним. Наприклад, часто спостерігається перехід системи від стаціонарного стану до стану коливань з визначеним періодом. Можливі також і багато інших типів біфуркацій.

Якісне дослідження системи рівнянь з їх довільною кількістю є непростю задачею. Повністю в загальному вигляді ця задача розв'язана тільки для системи з двох нелінійних рівнянь. На прикладі аналізу системи з двох рівнянь можна добре проілюструвати і основні поняття, і основні прийоми якісного аналізу поведінки нерівноважних нелінійних систем, до яких належать реактори.

§ 10.2. Якісне дослідження поведінки систем на фазовій площині

Розглянемо динамічну систему, що описується двома зв'язаними автономними нелінійними диференціальними рівняннями. Автономність рівнянь означає, що час явно не входить в праву частину рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, a), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y, a).\end{aligned}\tag{10.1}$$

де a – деякий параметр (або сукупність параметрів).

Еволюція системи або зміна стану системи в часі відображується деякою траєкторією на фазовій площині двох змінних x і y . Ця фазова траєкторія визначається, крім рівнянь (10.1), початковими умовами $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Нахил кривої в кожній точці визначається похідною

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f_1}{f_2}. \quad (10.2)$$

Стационарні стани системи визначаються рівністю нулю похідних $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, і отже стаціонарні стани можна визначити з системи двох алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} f_1(x, y, a) &= 0, \\ f_2(x, y, a) &= 0. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Припустимо, що ми розв'язали цю систему і знайшли k дійсних розв'язків: x_k^* , y_k^* . У кожному стані, що відповідає цим розв'язкам, система може знаходитись у залежності від початкових умов. Стійкість цих розв'язків ми будемо вивчати за допомогою введення невеликих відхилень від стаціонарних станів

$$\delta x(t) = x - x_k^*, \quad \delta y = y - y_k^*. \quad (10.4)$$

Розкладемо тепер праві нелінійні частини рівняння (10.1) в ряди Тейлора за малими відхиленнями δx , δy від того стаціонарного значення x_k^* , y_k^* , стійкість якого ми досліджуємо, і обмежимося тільки лінійними членами (лінеаризація системи):

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x}{dt} &= (x - x_k^*) \frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{x=x_k^*} + (y - y_k^*) \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big|_{y=y_k^*} \\ \frac{d\delta y}{dt} &= (y - y_k^*) \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big|_{y=y_k^*} + (x - x_k^*) \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{x=x_k^*} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Вільний член цього розкладу дорівнює нулю за визначенням стаціонарних станів. Отриману систему (10.5) можна записати в симетричному вигляді, якщо ввести позначення: $x_1 = \delta x$, $x_2 = \delta y$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{x=x_j^*} = Q_{ij}$. Тоді лінеаризована система для малих відхилень від положення рівноваги має вигляд

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^2 Q_{ij} x_j. \quad (10.5a)$$

Таку ж процедуру можна провести для системи з N змінних, і тоді N лінеаризованих рівнянь для відхилень будуть мати вигляд (10.5a), де сумування розповсюджується на всі N змінних.

Будемо шукати розв'язки системи (10.5a) у вигляді $x_i(t) \sim e^{\lambda_i t}$. Тоді для величин x_i отримуємо систему лінійних рівнянь

$$\lambda_i x_i = \sum_{j=1}^2 Q_{ij} x_j. \quad (10.6)$$

Умовою існування нетривіальних розв'язків цієї системи є рівність нулю її визначника. З цього рівняння, яке називається характеристичним, можна визначити значення λ_i системи (10.6)

$$\begin{vmatrix} Q_{11} - \lambda & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (10.7)$$

або

$$\lambda^2 - (Q_{11} + Q_{22})\lambda + (Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21}) = 0. \quad (10.7a)$$

Квадратичне рівняння можна подати у звичайному вигляді

$$\lambda^2 - b\lambda + c = 0,$$

з розв'язками

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (10.8)$$

У загальному випадку ми маємо два комплексні корені $\lambda_{1,2} = \lambda' + i\lambda''$. Тоді наш стаціонарний стан x_k^* буде стійким, якщо $Re\{\lambda_{ij}\} < 0$, $i = 1, 2$, оскільки в цьому випадку відхилення $\delta x(t) \sim e^{-|\lambda'|t}$ і $\delta y(t) \sim e^{-|\lambda'|t}$ від стаціонарного стану зменшується з часом і зникають, коли $t \rightarrow \infty$. Якщо λ'_1 і λ'_2 додатні, то стаціонарний стан нестійкий (відхилення від стаціонарного стану зростають). Коли $\lambda'_1 = \lambda'_2 = 0$ і $\lambda'' \neq 0$, то ми маємо стан нейтральної стійкості, де система знаходиться на границі області стійкості і може коливатися з періодом λ'' по замкненій траєкторії навколо стаціонарного стану.

Залежно від значень величин λ' і λ'' можна провести класифікацію стаціонарних станів, яка відображає поведінку траєкторій в околі стаціонарного стану (стаціонарні стани також називаються особливими точками). Розглянемо наступні випадки:

1. λ_1 і λ_2 - дійсні корені одного знака. Тоді стаціонарний стан є особливою точкою x_0, y_0 типу вузол (рис. 10.1, а). Якщо $\lambda_{1,2} < 0$, цей вузол стійкий; коли $\lambda_{1,2} > 0$, вузол нестійкий. Стрілками на рисунку показано напрямок руху точки, що відображає стан системи, уздовж фазових траєкторій системи із зростанням t . Такий рисунок фазових траєкторій системи на фазовій площині називається фазовим портретом.

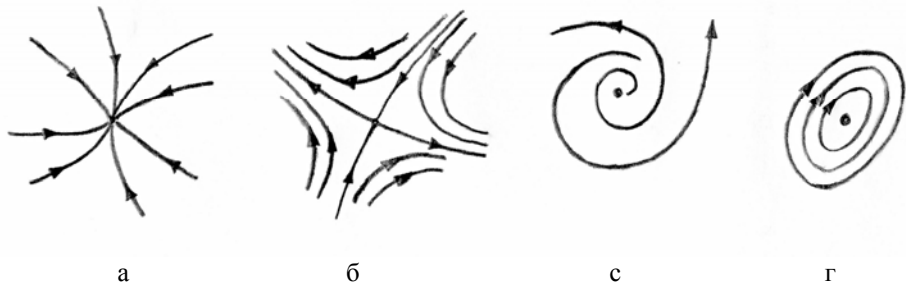


Рис. 10.1. Фазові портрети в околі стаціонарних точок різних типів: *a* – стійкий вузол; *b* – сідлова точка; *c* - нестійкий фокус; *г* - центр.

2. λ_1 і λ_2 - дійсні корені різних знаків. Стаціонарний стан є особливою точкою типу "сідло" (див. рис. 10.1, *b*). Це нестійкий стан рівноваги, і через цю точку проходять тільки дві траєкторії системи на відміну від вузла. Ці траєкторії (інтегральні криві) називаються сепаратрисами сідла.

3. λ_1 і λ_2 - комплексно спряжені корені. Особлива точка називається фокусом. Коли $\lambda'_{1,2} < 0$ - стійкий фокус, а якщо $\lambda'_{1,2} > 0$ - нестійкий фокус.

4. λ_1 і λ_2 - чисто уявні корені. Це стан нейтральної стійкості, який ми вже згадували. У цьому стані ліанеризована система стійка й особлива точка називається центром. Суттєво, що вихідна нелінійна система може мати стан рівноваги, який не є центром, а може бути також фокусом.

З викладеного можна побачити, що характер поведінки системи в околі стаціонарного стану цілком визначається коефіцієнтами характеристичного рівняння *b* і *c*. На рис. 10.2 наведено діаграму, яка визначає тип і стійкість стану рівноваги залежно від коефіцієнтів *b* і *c*. Під час аналізу стану рівноваги двовимірної системи якраз і користуються цією діаграмою.

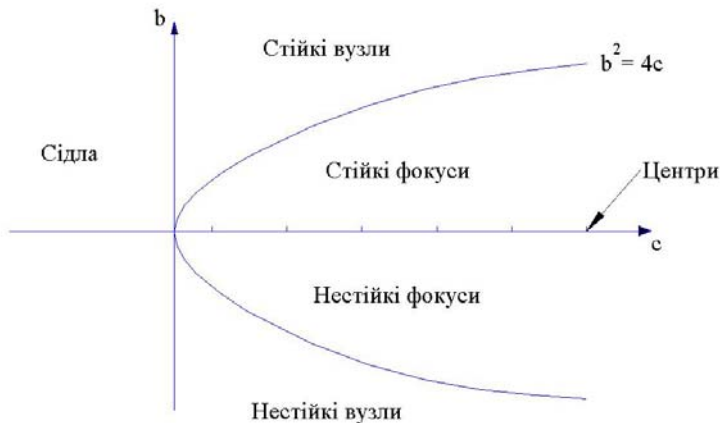


Рис 10.2. Залежність типів станів рівноваги від параметрів *b* і *c*.

Стаціонарні стани й особливі точки ділять на грубі й негрубі, а також на прості й складні. Стан рівноваги називається грубим, якщо незначні зміни функцій f_1 і f_2 і (або) їх перших похідних не призводять до зміни його типу, і негрубим, якщо така зміна відбувається. Складними називають такі особливі точки, для яких $c = 0$. Вузли, сідла й фокуси – грубі стани рівноваги, складний фокус і центр – негрубі стани.

Крім особливих точок, важливу роль відіграють замкнені траєкторії системи, що відображають періодичний рух. Замкнена траєкторія називається ізольованою, якщо в деякому її околі (малому, кільцевидному) нема іншої замкненої траєкторії. У свою чергу замкнена ізольована фазова траєкторія називається граничним циклом.

Граничні цикли також можуть бути стійкими або нестійкими. Граничний цикл буде стійким, якщо існує такий його окіл, що всі фазові траєкторії, що починаються в цьому околі, асимптотично ($t \rightarrow \infty$) наближаються до граничного циклу (рис. 10.3, а), відповідно граничний цикл називається нестійким, якщо в будь-якому малому околі існує хоч одна траєкторія, що не наближається до нього при $t \rightarrow \infty$ (рис. 10.3, б).

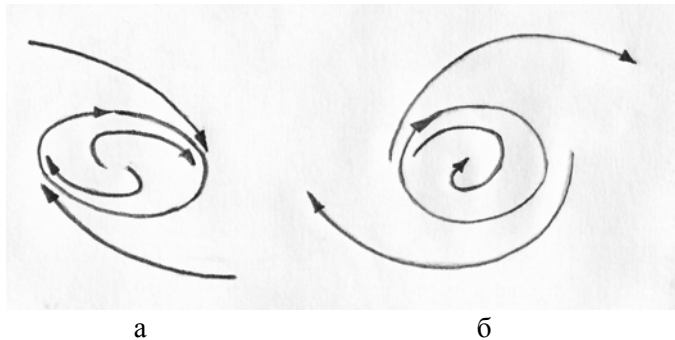


Рис. 10.3. Приклади стійкого (а) та нестійкого (б) граничних циклів.

Стійкий граничний цикл – це геометричне відображення коливального (періодичного) руху на фазовій площині. Нестійкий граничний цикл не має прямого фізичного змісту; він умовно розділяє фазову площину на області з різним характером фазових траєкторій.

Таким чином, питання про наявність у системі автоколивальних режимів зводиться до питання про існування стійких граничних циклів. Існує декілька теорем, що доводять існування в деякій області стійких або нестійких граничних циклів. Існують також достатні критерії відсутності граничних циклів. Наприклад, такі корисні критерії пов'язані з особливими точками системи. Доведено, що якщо в системі немає рівноважних станів, то в ній немає також граничних циклів. Якщо в системі існує тільки сідлова особлива точка, то в ній також немає замкнених фазових траєкторій. Докладно про ці та інші теореми, пов'язані з граничними циклами, можна дізнатися з [10].

Система рівнянь (10.1) визначається не тільки змінними x, y , а також значеннями параметрів a . Зрозуміло також, що корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}$ також визначаються значеннями цих параметрів. Отже, під час зміни значень параметрів можливі зміни знаків і величин коренів характеристичного рівняння й тому зміни якісного характеру динамічної поведінки системи. Як ми вже відзначали, така зміна називається біфуркацією.

Зміна параметрів системи є цілком реальною. Під час роботи ядерного реактора всі його параметри повільно змінюються, наприклад завдяки вигорянню палива й накопиченню продуктів поділу. Тому дослідження динамічної поведінки реактора залежно від значень параметрів є необхідною умовою вибору найбільш безпечних й економічно вигідних режимів роботи реактора.

Для двовимірної системи можливі наступні типи біфуркацій. Можливе народження або зникнення особливих точок, зміна їх типів, народження або зникнення граничних циклів, якісна зміна положення сепаратрис сідел.

Таким чином, якісне дослідження системи рівнянь полягає в наступних кроках: 1) знаходження особливих точок системи у фазовому просторі й визначення їх типів, а також знаходження особливих траєкторій типу граничних циклів; 2) знаходження точок біфуркацій (у випадку одного параметра) або біфуркаційних кривих (у випадку двох і більше параметрів); 3) визначення характеру зміни поведінки фазових траєкторій системи під час переходу значень параметрів через біфуркаційні криві, а отже, визначення характеру біфуркацій.

Після цього, як правило, переходять до чисельного дослідження системи рівнянь у тій області простору параметрів, яка цікавить або найбільш важлива з практичної точки зору.

§ 10.3. Дослідження простої моделі реактора

Розглянемо точкову модель динаміки реактора із зворотними зв'язками за потужністю й температурою [11]. Знехтуємо при цьому затриманими нейтронами. Неповнота цієї моделі з фізичної точки зору компенсується можливістю її повного якісного аналізу. Отже, розглянемо систему

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \rho(N, T)N, \\ C \frac{dT}{dt} &= N - k(T - T_0). \end{aligned} \tag{10.9}$$

У цих рівняннях N – потужність реактора, яка пропорційна густині потоку нейтронів, ρ – відношення реактивності до часу генерації (порівняно з формулою (6.37)). До рівняння нейтронної підсистеми додається рівняння, що описує зміну температури T у середовищі з повною теплоємністю C . Під температурою T_0 можна розуміти температуру теплоносія і тоді k – це коефі-

цієнт теплопередачі від палива до теплоносія. Взагалі зміст величин T , T_0 і k може змінюватись залежно від схеми охолодження реактора.

Функцію $\rho(N, T)$ можна розкласти в ряд в околі стаціонарного стану N_0, T_0 (порівняно з формулою (6.66)). У стаціонарному стані $\rho(N_0, T_0) = 0$ і

$$\rho(N, T) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial N} \right)_0 (N - N_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_0 (T - T_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right)_0 (T - T_0)^2 + \dots \quad (10.10)$$

Звичайно залежність реактивності від температури є нелінійною, тому ми обмежимося в розкладі членами другого порядку за змінами температури, що непогано описують таку нелінійну залежність. Перейдемо в рівняннях (10.9) до безрозмірних змінних $x = \frac{N - N_0}{N_0}$, $y = \frac{T - T_0}{T_0}$ і $\tau = \frac{kt}{C}$. Якщо та-

кож ввести безрозмірні параметри

$$\alpha = \frac{N_0 C}{k} \left(\frac{\partial \rho}{\partial N} \right)_0, \quad \beta = \frac{N_0 C}{k^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_0, \quad \gamma = \frac{C N_0^3}{2k^3} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right)_0. \quad (10.11)$$

тоді вихідні рівняння приймають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= (\alpha x + \beta y + \gamma y^2)(1 + x) \equiv f_1(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= (x - y) \equiv f_2(x, y). \end{aligned} \quad (10.12)$$

За визначенням коефіцієнтів реактивності параметри α і β пропорційні потужносному й температурному коефіцієнтам реактивності, а параметр γ є нелінійним температурним коефіцієнтом реактивності.

Таким чином, нам треба дослідити поведінку системи рівнянь (10.12) на фазовій площині залежно від параметрів α , β , γ .

Визначаємо спочатку стани рівноваги системи. З рівнянь $x - y = 0$ і $(\alpha x + \beta y + \gamma y^2)(1 + x) = 0$ знаходимо три стани рівноваги:

$$\begin{aligned} P_1 - (x = 0, y = 0); \quad P_2 - (x = -1, y = -1), \\ P_3 - \left(x = -\frac{\alpha + \beta}{\gamma}, y = -\frac{\alpha - \beta}{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (10.13)$$

Перший стан P_1 відповідає стаціонарному режиму з $N_0 > 0$ і $T > T_0$, точка P_2 відповідає зупиненому реактору з потужністю $N = 0$, а стан P_3 обумовлено нелінійною залежністю реактивності від температури. Цей стан існує, якщо

$$x_0 = -\frac{\alpha + \beta}{\gamma} \geq -1 \quad (\text{точка } (-1) \text{ відповідає зупиненому реактору}).$$

Наступним кроком є лінеаризація рівнянь в околі кожного стану рівноваги і складання характеристичних рівнянь:

для P_1

$$\lambda^2 + (1 - \alpha)\lambda - (\alpha + \beta) = 0, \quad (10.14)$$

для P_2

$$(\lambda + 1)(\lambda - \gamma + \alpha + \beta) = 0, \quad (10.15)$$

для P_3

$$\lambda^2 + [1 - \alpha(1 - \frac{\alpha + \beta}{\gamma})]\lambda + (\alpha + \beta)(1 - \frac{\alpha + \beta}{\gamma}) = 0. \quad (10.16)$$

Аналіз коренів цих трьох рівнянь дає змогу розбити простір параметрів α , β , γ на 11 областей, що відповідають різним типам точок P_1 , P_2 , P_3 . Отримані результати зведено в табл. 10.1, де $\sigma = 1 - \alpha + \alpha \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$.

Таблиця 10.1. Типи станів рівноваги залежно від значень параметрів

N	Співвідношення між параметрами	P_1	P_2	P_3
1	$\gamma > 0, \alpha < 1$ $\alpha + \beta < 0$	Стійкий вузол (фокус)	Сідло	Сідло
2	$0 < \alpha + \beta < \gamma$ $\sigma > 0$	Сідло	Сідло	Стійкий вузол (фокус)
3	$\alpha + \beta > \gamma > 0$	Сідло	Стійкий вузол	-
4	$\gamma > \alpha + \beta > 0$ $\sigma < 0$	Сідло	Сідло	Нестійкий вузол (фокус)
5	$\gamma > 0, \alpha > 0$ $\alpha + \beta < 0$	Нестійкий вузол (фокус)	Сідло	Сідло
6	$\alpha + \beta < \gamma < 0$ $\alpha < 1$	Стійкий вузол (фокус)	Сідло	-
7	$\gamma < \alpha + \beta < 0$ $\alpha < 0$	Стійкий вузол (фокус)	Стійкий вузол	Сідло
8	$\gamma < 0, \alpha + \beta > 0$ $\sigma > 0$	Сідло	Стійкий вузол	Стійкий вузол (фокус)
9	$\gamma < 0, \alpha + \beta > 0$ $\sigma < 0$	Сідло	Стійкий вузол	Нестійкий вузол (фокус)
10	$\alpha > 1$ $\gamma < \alpha + \beta < 0$	Нестійкий вузол (фокус)	Стійкий вузол	Сідло
11	$\alpha > 1$ $\alpha + \beta < \gamma < 0$	Нестійкий вузол (фокус)	Сідло	-

Примітка. Риска в стовпчику для P_3 означає, що в цьому випадку точка P_3 лежить поза межами фізично припустимої зміни змінної x .

Проаналізуємо тепер існування граничних циклів. Але для цього необхідно знов звернутися до теоретичних засад і привести критерій, який визна-

чає відсутність замкнених траєкторій в деякій області фазового простору. Цей критерій Дюлака визначається наступною теоремою.

Нехай функція $F(x, y)$ неперервна разом із першими частковими похідними. Нехай у деякій області G фазового простору системи (10.1) вираз

$$D = D(x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(Ff_1) + \frac{\partial}{\partial y}(Ff_2) \quad (10.17)$$

не змінює знака й не рівний нулю тотожно.

Тоді: 1) якщо область G однозв'язна, то в ній не існує замкнених кривих цілком складених із фазових траєкторій системи (10.1), а отже, не може існувати граничних циклів; 2) якщо область G двозв'язна (кільцева), то в ній не може існувати більше одного замкнутого контуру, цілком складеного з фазових траєкторій системи (10.1).

Коли $F(x, y) \equiv 1$, критерій Дюлака називається критерієм Бендіксона.

Отже, виберемо функцію $F(x, y)$ у вигляді

$$F(x, y) = \frac{1}{1+x} \quad (10.18)$$

і будемо розглядати тільки фізичну область $x > -1$.

У цьому випадку

$$D = \frac{\partial}{\partial x}(Ff_1) + \frac{\partial}{\partial y}(Ff_2) = \alpha - \frac{1}{1+x}. \quad (10.19)$$

Ця величина завжди менше нуля, коли $\alpha \leq 0$, отже в цій області замкнених траєкторій не існує. Коли $\alpha > 0$, також використаємо критерій Дюлака й візьмемо $F(x, y) = (1+x)^{m-1} \exp[-\alpha(m+1)y]$, для D отримаємо

$$D = F(x, y)[m\gamma^2 + (\beta m + \alpha m + \alpha)y + \alpha - 1]. \quad (10.20)$$

Підберемо константу m таким чином, щоб вираз (10.20) не змінював знак в області $1+x > 0$. Зрозуміло, що $F(x, y) > 0$, а вираз у квадратних дужках не буде змінювати знака, якщо дискримінант цього квадратичного тричлена менший нуля:

$$(d + \beta)^2 m^2 + 2m[\alpha(\alpha + \beta) - 2\gamma(\alpha - 1)] + \alpha^2 < 0. \quad (10.21)$$

Дійсні значення, що задовольняють умові (10.21), існують, якщо

$$[\alpha(\alpha + \beta) - 2\gamma(\alpha - 1)]^2 - (\alpha + \beta)^2 \alpha^2 > 0. \quad (10.22)$$

Звідки

$$(1 - \alpha)\sigma > 0. \quad (10.23)$$

Таким чином, в області $(1+x) > 0$ не існує замкнених траєкторій, якщо параметри системи задовольняють умові (10.23).

Якщо тепер докладно розглянути всі області, перераховані в таблиці, то можна зробити такі висновки:

1. Для точок в області 1, що близькі до значень $\alpha = 1$, система має один нестійкий граничний цикл, що охоплює точку рівноваги P_1 (рис. 10.4, а), якщо в цій же області виконується умова (10.23), нестійкого граничного циклу не існує, а область притягання є область між сепаратрисами сідла P_3 (рис. 10.4, б).

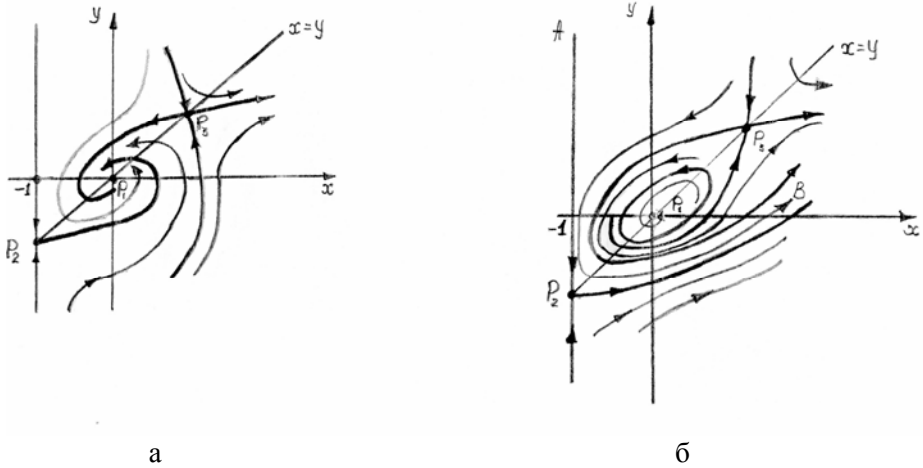


Рис. 10.4. Фазові траєкторії для області 1 табл. 10.1.

2. Для точок з області 2, що близькі до кривої $\sigma = 0$, система має єдиний нестійкий граничний цикл, який охоплює точку P_3 . У цій області параметрів стан P_1 нестійкий, але стійкою є точка P_3 . Область притягання точки P_3 визначається або нестійким граничним циклом (рис. 10.5, а) або сепаратрисами сідла P_1 (рис. 10.5, б), коли виконується умова (10.23).

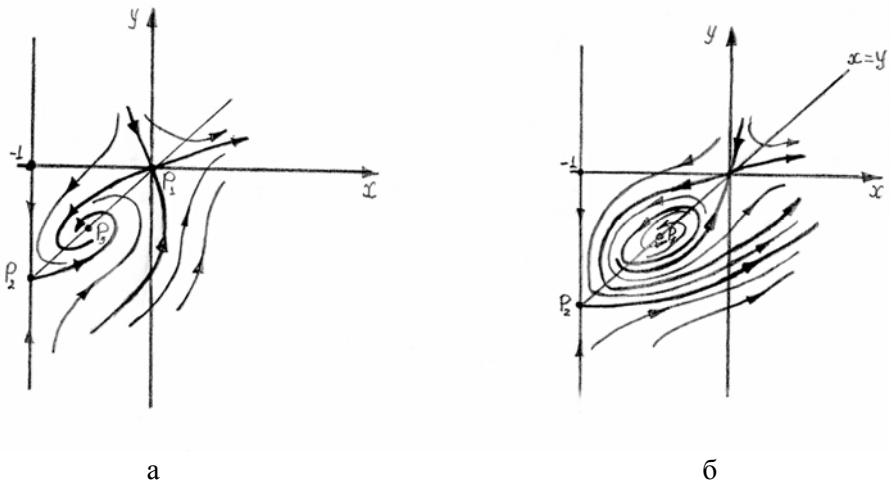
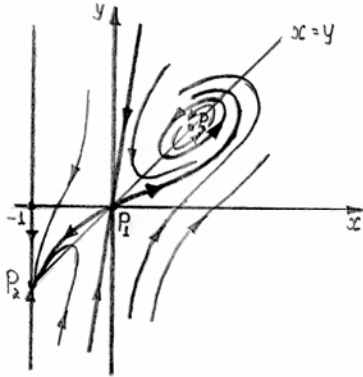
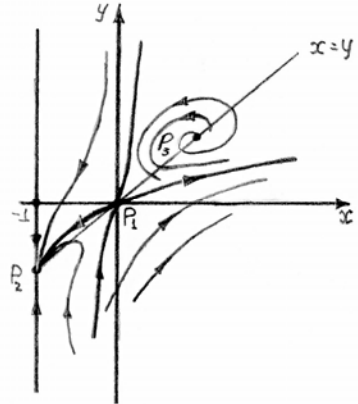


Рис. 10.5. Фазові траєкторії для області 2 табл. 10.1.

3. Для точок з області 9, що близькі до кривої $\sigma = 0$, система має єдиний стійкий граничний цикл навколо точки P_3 (рис. 10.6, а). Сама точка P_3 є нестійким фокусом. Коли виконується умова (10.23) замкнених траєкторій не існує (рис. 10.6, б), в обох випадках існує тільки один стійкий стан рівноваги - точка P_2 .



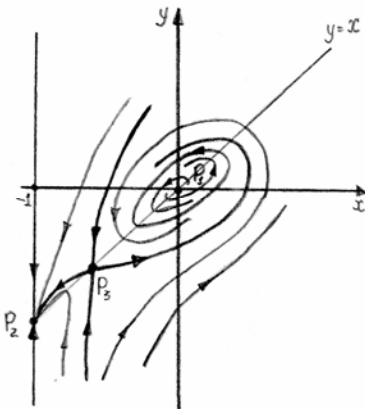
а



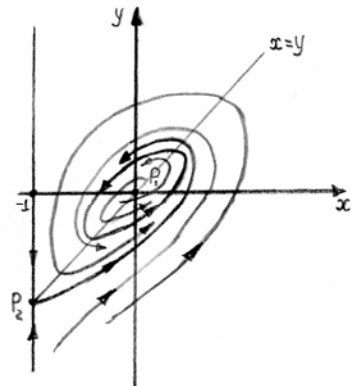
б

Рис. 10.6. Фазові траєкторії для області 9 таблиці 10.1

4. Для точок з областей 10 і 11, що близькі до значень $a = 1$, існує один стійкий цикл навколо точки P_1 , яка в цих випадках є нестійким фокусом (рис.10.7, а, б). Ці області різняться стійкістю точки P_2 і відсутністю точки P_3 в області $1 + x > 0$ у випадку 11.



а



б

Рис. 10.7. Фазові траєкторії для області 10 та 11 табл. 10.1.

Наявність стійких граничних циклів в областях 9 - 11 означає виникнення автоколивань потужності й температури реактора. Автоколивання можливі, коли потужносний коефіцієнт реактивності є додатним $\alpha > 0$, а для областей 10 і 11 він на додаток ще й відносно великий $a > 0$.

Для областей 3 - 8 неважко намалювати фазові портрети відповідно до типу точок, наведених у табл. 10.1. У цих областях не існує замкнених траєкторій системи.

Таким чином, простий аналіз рівнянь, що описують динаміку реактора, дав змогу виявити області значень параметрів, при яких виникають автоколивання потужності й температури. Зрозуміло, що з точки зору безпеки та економічності реактора необхідно не допускати виникнення автоколивань, що можливо, коли нам відомі значення параметрів, при яких виникають автоколивання. У деяких випадках припускається робота реактора в режимі стійких автоколивань з незначною амплітудою. Наприклад, реактори BWR (boiling water reactor) – корпусні реактори на киплячій воді – працюють звичайно в режимі стійких автоколивань невеликої амплітуди, що обумовлені нелінійною залежністю реактивності від кількості пари в реакторі.

§ 10.4. Рівняння в часткових похідних

Усі реальні реактори є просторовими структурами, і використання точкової моделі для їх опису може привести до втрати деяких важливих розв'язків. Майже весь попередній матеріал цього підручника було присвячено якраз дослідженню просторового розподілу густини потоку нейтронів на основі лінійного дифузійного наближення. Урахування нелінійних членів у рівняннях, а також зворотних зв'язків з іншими підсистемами реактора може привести до виникнення якісно нових станів реактора, а також до втрати стійкості вже відомих станів, як ми вже бачили на прикладі спрощеної точкової моделі. Зрозуміло, що дослідження системи рівнянь, що містить рівняння в часткових похідних, є значно складнішим завданням, ніж дослідження систем звичайних диференціальних рівнянь.

Тому спочатку на прикладі одного нелінійного рівняння дифузії ми розглянемо можливі розв'язки рівнянь такого типу, а в наступному параграфі дослідимо можливість та умови виникнення ксенонових коливань в ядерних реакторах на основі дифузійного наближення для нейтронної підсистеми реактора.

Розглянемо рівняння дифузії з однією просторовою змінною і з деякою нелінійною залежністю правої частини рівняння від шуканої функції

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial n}{\partial z} + f(n). \quad (10.24)$$

У рівнянні (10.24) $n \equiv n(z, t)$ - шукана функція часу та однієї просторової змінної z . Ця функція визначається крім рівняння початковими і граничними умовами.

Для рівняння (10.24) стан системи в момент часу t описується функцією $n(z, t)$, яка задана на деякому проміжку $[L_1, L_2]$. Тобто фазовим простором рівняння (10.24) є простір функцій, які задані на проміжку $[L_1, L_2]$. Точки цього простору є функції, а еволюція системи в часі визначається деякою кривою в просторі функцій.

Розв'язок рівняння (10.24), який не залежить від часу, називається стаціонарним розв'язком $n_0(z)$. Стан рівноваги, що відповідає стаціонарному розв'язку, можна визначити, якщо розв'язати звичайне диференціальне рівняння

$$D \frac{d^2 n_0(z)}{dz} + f(n_0) = 0 \quad (10.25)$$

із заданими граничними умовами.

Стійкість стаціонарного розв'язку визначається аналогічно тому, як це робилося для звичайних диференціальних рівнянь, а саме: знаходяться власні значення лінеаризованого рівняння (10.25), і якщо ці власні значення розташовані ліворуч від уявної осі, то відповідний стан рівноваги є стійким.

Для прикладу розглянемо просте рівняння

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \quad (10.26)$$

з граничними умовами

$$n(0, t) = n(\pi, t) = 0. \quad (10.27)$$

Стаціонарним розв'язком рівняння (10.26) є розв'язок звичайного диференціального рівняння

$$n''(z) = 0, \quad (10.28)$$

тобто функція $n(z) = az + b$ з довільними постійними a і b , які можна визначити з граничних умов (10.27), звідки $a = b = 0$. Отже, єдиним стаціонарним розв'язком є функція $n(z) = 0$.

Щоб вирішити питання про стійкість цього розв'язку, треба розв'язати задачу на власні значення

$$n'' - \lambda n = 0 \quad (10.29)$$

з граничними умовами

$$n(0) = n(\pi) = 0. \quad (10.30)$$

Якщо $\lambda \geq 0$, то розв'язок (10.29) має вигляд

$$n(z) = a_1 e^{\sqrt{\lambda}z} + a_2 e^{-\sqrt{\lambda}z}. \quad (10.31)$$

З граничних умов (10.30) випливає, що $a_1 = a_2 = 0$, отже рівняння (10.29) не має невід'ємних власних значень, оскільки функція тотожно рівна нулю.

Якщо $\lambda < 0$, то розв'язком є функція

$$n(z) = b_1 \cos \sqrt{|\lambda|}z + b_2 \sin \sqrt{|\lambda|}z. \quad (10.32)$$

З граничних умов випливає, що

$$|\lambda| = k$$

i

$$\lambda_k = -k^2, \quad k = 1, 2 \dots \quad (10.33)$$

є власні значення рівняння (10.29).

Таким чином, усі власні значення є від'ємними, отже стаціонарний розв'язок $n(z) = 0$ є стійким.

Повернемося до рівняння (10.24). Характерною відзнакою цього рівняння є його нелінійність (якщо функція $f(n)$ є нелінійною). Нелінійні рівняння мають значно більше типів розв'язків, ніж лінійні, і, перш за все, як правило, більш ніж один розв'язок. Крім цього, у нелінійному рівнянні типу (10.24) можливі періодичні і хвильові розв'язки, які є неможливими в лінійних рівняннях параболічного типу.

Нагадаємо, що періодичним називається розв'язок рівняння (10.24), який задовольняє умові

$$n(z, t + T) = n(z, t) \quad (10.34)$$

для будь-якого t . Тоді величина T називається періодом цього розв'язку, і періодичному розв'язку відповідає замкнена траєкторія у фазовому просторі рівняння (10.24).

Стан рівноваги рівняння (10.24) може також зазнавати біфуркацій аналогічно станам рівноваги звичайних диференціальних рівнянь. У випадку біфуркації Андронова – Хопфа від стану рівноваги відгілкується замкнена траєкторія, що відповідає появі періодичного розв'язку. Умовою появи такого розв'язку є перетин взаємно спряженими комплексними власними значеннями уявної осі в точках $\pm i\omega$ під час зміни біфуркаційного параметра. У цьому випадку від стаціонарного розв'язку рівняння в часткових похідних відгілкується періодичний розв'язок з асимптотичним періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, тобто з таким періодом поблизу критичного значення біфуркаційного параметру.

Хвильові розв'язки рівняння (10.24) шукаються у вигляді

$$n(z, t) = \varphi(z - ct) \equiv \varphi(\xi). \quad (10.35)$$

Якщо підставити цей розв'язок в рівняння (10.24), то для $\varphi(\xi)$ можна отримати звичайне диференційне рівняння

$$-C\varphi'(\xi) = D\varphi''(\xi) + f(\varphi), \quad \varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}. \quad (10.36)$$

Це рівняння можна переписати у вигляді системи двох рівнянь, якщо покласти $x_1 = \varphi, x_2 = \varphi'$:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{C}{D}x_2 - f(x_1) \end{cases} \quad (10.37)$$

Фазовим простором цієї системи є площина x_1, x_2 . Можливі два типи розв'язків цієї системи.

Припустимо, що система (10.37) при деякому значенні параметра C має гомоклінічну траєкторію, тобто таку траєкторію, яка входить і виходить у точку $(0, 0)$ (рис. 10.8). Для цього необхідно, щоб точка $x_1 = 0, x_2 = 0$ була положенням рівноваги і $f(0) = 0$. Для вихідного рівняння (10.24) це означає, що $n(z, t) \equiv 0$ є розв'язком. Для системи (10.37) це означає, що точка $(0, 0)$ є сідлом.

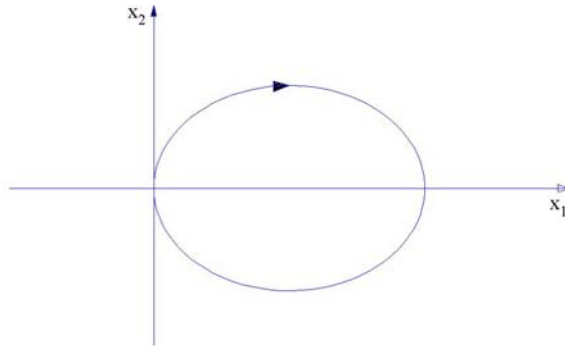


Рис. 10.8. Гомоклінічна фазова траєкторія.

Розв'язок $\bar{x}(\xi) = (x_1(\xi), x_2(\xi))$, що відповідає цій траєкторії, задовольняє умові

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \bar{x}(\xi) = 0. \quad (10.38)$$

Графік функції $x_1(\xi) = \varphi(\xi)$ подано на рис. 10.9, а графік функції $n(z, t) = \varphi(z - ct)$ як функції змінної z подано на рис. 10.10. Функція змінюється вздовж осі Z із швидкістю C у бік додатних z , якщо $C > 0$ і в бік від'ємних z , якщо $C < 0$. Такий розв'язок рівняння (10.24) називається хвильовим розв'язком типу імпульс, або автосолітоном, і він не залежить від граничних умов.

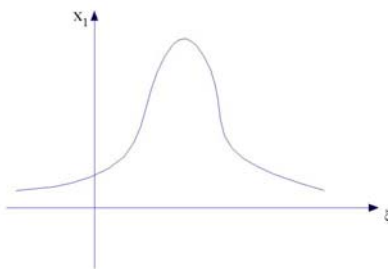


Рис. 10.9. Автохвиля типу імпульс у залежності від хвильової змінної ξ .

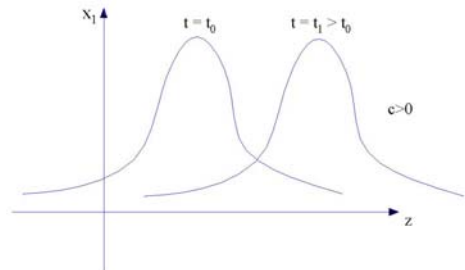


Рис. 10.10. Автохвиля типу імпульс у залежності від просторової координати z для різних моментів часу.

Другий тип розв'язку можливий, якщо система рівнянь (10.37) має гетероклінічну траєкторію, що виходить з положення рівноваги $\vec{X}^0(b,0)$ і закінчується в іншому положенні рівноваги $\vec{X}^{(1)}(a,0)$ (рис. 10.11).

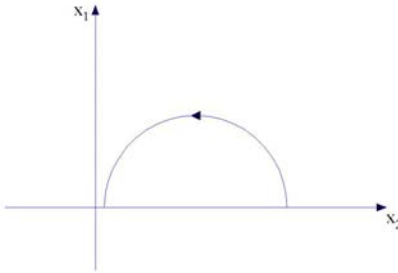


Рис. 10.11. Приклад гетероклінічної фазової траєкторії.

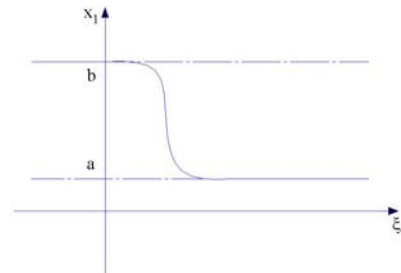


Рис. 10.12. Автохвиля типу фронт.

Тоді розв'язок, що відповідає цій траєкторії, задовольняє умовам

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \vec{X}(\xi) = X^0(b,0), \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \vec{X}(\xi) = X^{(1)}(a,0). \quad (10.39)$$

У цих точках $f(a) = f(b) = 0$, і ми маємо просторово однорідні стаціонарні стани $u(z,t) \equiv a, u(z,t) \equiv b$. Для функції $\varphi(\xi)$, що описує хвильовий розв'язок

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \varphi(\xi) = b, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \varphi(\xi) = a. \quad (10.40)$$

і графік функції $\varphi(\xi)$ (рис. 10.12) являє собою хвилю типу фронту, що розповсюджується вздовж осі Z із швидкістю C .

Ми привели тільки два приклади можливих розв'язків нелінійних рівнянь у часткових похідних. Зрозуміло, що якщо збільшувати кількість рівнянь, що описують систему, то кількість можливих розв'язків збільшується, їх типи ускладнюються, дослідження такої системи являє собою досить складну задачу. Але в наш час уже досліджено багато різноманітних систем, що описують процеси у фізичних, хімічних, біологічних та соціальних системах, вони мають багато схожих властивостей, деякі з них ми розглянемо нижче.

§ 10.5. Ксенонові коливання в реакторах

Розглянемо тепер більш детально ксенонові процеси в ядерних реакторах з точки зору методів, що розвинуті в попередніх параграфах. Попередні відомості про ксенонові коливання наведено в розділі 7. Спочатку ми будемо розглядати точкову модель реактора.

У кінетичних рівняннях, що описують систему, ми будемо враховувати такі процеси:

1) пряме утворення ^{135}I і ^{135}Xe в реакції поділу ядра урану з виходами γ_1 і γ_2 відповідно;

2) β -розпад йоду з утворенням ксенону й наступний β -розпад ксенону з утворенням інших продуктів з константами розпаду λ_1 і λ_2 відповідно;

3) поглинання нейтрона ядром ксенону з мікроскопічним перерізом σ .

У цій моделі не враховується поглинання нейтронів йодом, оскільки переріз такого поглинання на шість порядків менше, ніж переріз поглинання нейтрона ксеноном. Не враховуємо також усіх попередників йоду та розпад йоду з утворенням Xe^m в метастабільному стані. Останні процеси можна врахувати деякою зміною констант γ_i і λ_i .

Рівняння для зміни концентрацій йоду I і ксенону X приймають вигляд

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \gamma_2 \Sigma_f \Phi + \lambda_1 I - (\sigma \Phi + \lambda_2) X, \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma_1 \Sigma_f \Phi - \lambda_1 I,\end{aligned}\tag{10.41}$$

де Φ - густина потоку нейтронів, а Σ_f - макроскопічний переріз поділу.

Додамо до цих рівнянь рівняння для густини потоку нейтронів з урахуванням зворотних зв'язків за потужністю і ксеноном. Затримані нейтрони врахуємо введенням феноменологічної константи $\tau_0 \approx 0,65$ с, оскільки затримані нейтрони практично не впливають на кінетику ксенонових процесів.

Якщо ввести параметр $\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, а також нові змінні $X^* = \frac{X}{X_\infty}$, $I^* = \frac{I}{I_\infty}$,

де $X_\infty = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\Sigma_f \sigma}$, то система рівнянь приймає вигляд

$$\begin{aligned}\tau_0 \dot{\Phi} &= \Phi(\rho - a_\phi \Phi - a_x X), \\ \dot{X}^* &= \gamma \sigma \Phi + \lambda_1 I^* - (\lambda_x + \sigma \Phi) X^*, \\ \dot{I}^* &= (1 - \gamma) \sigma \Phi - \lambda_1 I^*.\end{aligned}\tag{10.42}$$

У цих рівняннях величини ρ , a_ϕ , a_x можна розглядати як змінні параметри, інші величини є постійними з відомими значеннями: $\gamma = 0,05$, $\lambda_1 = 2,86 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$, $\lambda_x = 2,07 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$, $\sigma = 3 \cdot 10^{-18} \text{ cm}^2$.

Уведемо тепер безрозмірні параметри й змінні:

$$\Phi = \frac{\lambda_2}{\sigma} x, \quad X^* = \frac{\rho}{a_x} y, \quad I^* = (1 - \gamma) \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z,$$

$$W = \lambda_1 \sqrt{\frac{\tau_0}{\lambda_2 \rho}}, \quad S = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda_2 \tau_0}}, \quad q = \frac{a_\phi \lambda_2}{\rho \sigma}, \quad f = \frac{a_x (1 - \gamma)}{\rho} \quad (10.43)$$

і безрозмірний час $t = t'r$, де $r^2 = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\tau_0}{\rho}$. У таких позначеннях система приймає вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x - xy - qx^2)S, \\ \dot{y}' &= \frac{1}{S}(-y - xy + fz) + \frac{1}{S} \frac{f\gamma}{1 - \gamma} x, \\ \dot{z} &= W(x - z). \end{aligned} \quad (10.44)$$

У цих рівняннях параметри визначають інтенсивність зворотних зв'язків за потужністю ($\Phi\Phi$) і за концентрацією ксенону (ΦX), параметр S - константа, яка визначається реактивністю системи, а параметри W і S пов'язані співвідношенням $WS \sim \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sim 1,37$. Параметр S можна вважати великим порівняно з одиницею; так, для $\rho = 0,0005$ - $S = 6,09$, а для $\rho = 0,005$ - $S = 19$. Він визначає розділення нашої системи на дві підсистеми - повільну (ксенонову) і швидку (нейтронну).

Аналіз системи рівнянь на стійкість можна провести відповідно до методів, викладених у попередніх параграфах, а саме: спочатку визначаються стаціонарні точки системи, а потім для кожної точки рівноваги складається характеристичне рівняння ліанеризованої системи (10.44).

Виявляється, що система рівнянь має два стаціонарні розв'язки. Тривіальний розв'язок ($x_0 = 0 = y_0 = z_0$) є завжди нестійким. Для нетривіального розв'язку можна записати характеристичне рівняння для показників ω (у попередніх параграфах ми їх позначали як λ):

$$\omega^3 - T\omega^2 + \delta\omega - 1 = 0. \quad (10.45)$$

Коефіцієнти цього рівняння залежать від параметрів нашої системи:

$$\begin{aligned} \Delta &= -Wqx_0(1 + x_0) - Wy_0, \\ \delta &= WE + qx_0(1 + x_0) + y_0 - fx_0, \\ T &= -W - E, \\ E &= Sy_0 + \left(\frac{1}{S} + 2qS\right)x_0 + \frac{1}{S} - S, \end{aligned} \quad (10.46)$$

а також від стаціонарних значень змінних x_0, y_0 , що визначаються з рівнянь

$$qx_0 + x_0 \left(q + \frac{f}{1-\gamma} - 1 \right) = 0, \quad (10.47)$$

$$y_0 = \frac{x_0}{1+x_0} \frac{f}{1-\gamma}.$$

Для дослідження стійкості цього стаціонарного розв'язку залежно від параметрів f і q необхідно визначити, чи існують значення коренів характеристичного рівняння, що мають додатну дійсну частину. Крім того, варто відрізнити області параметрів, для яких корені є дійсними або комплексно спряженими. Відповідно до цього в просторі параметрів можна виділити декілька областей з різним характером коренів характеристичного рівняння. Ці області можна позначити наступним чином: $(- - -)$ означає область, де всі три корені від'ємні, отже це область стійкості; $(- - i)$ означає область параметрів, де один корінь дійсний і від'ємний, а два інших комплексно спряжені з від'ємною дійсною частиною, отже це стійка область з коливним затуханням флуктуацій (відхилень від положення рівноваги); $(- + i)$ – область, де один корінь від'ємний, два інші корені комплексно спряжені з додатною частиною, отже це нестійка область і в ній виникають коливання; $(- + +)$ – область, де один корінь дійсний від'ємний, а два інших – дійсні додатні, отже область нестійка.

Визначити границі цих областей дозволяють відомі теореми алгебри, що стосуються коренів поліномів третього степеня (див., наприклад, [12]).

Такий аналіз є досить простим, але громіздким, і ми не будемо його тут наводити. Результати цього аналізу наведено на рис. 10.13, де в просторі параметрів q і f виділено області відповідно до введених вище позначень.

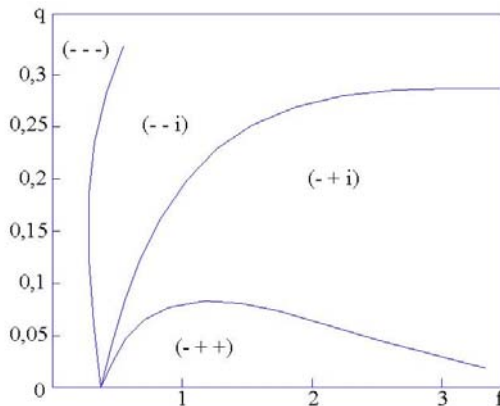


Рис .10.13. Стійка область $(- - -)$, стійка область із коливним затуханням флуктуацій $(- - i)$, нестійкі області $(- + i)$ та $(- + +)$ у площині параметрів q, f .

Якісний аналіз характеру розв'язків підтверджується чисельним розв'язком системи рівнянь (10.44). На рис. 10.14 наведено перерізи фазових

траекторій системи площиною (yz) для трьох різних значень параметра f при: а) $q = 0,04$, $f = 0,45$ – стійка область з дійсними коренями ω ; б) $f = 0,5675$ – стійка область з двома комплексно спряженими коренями, стаціонарний стан є стійким фокусом; в) $f = 0,568$ – нестійка область з виникненням граничного циклу («жорстке» народження коливань при незначній зміні параметра f).

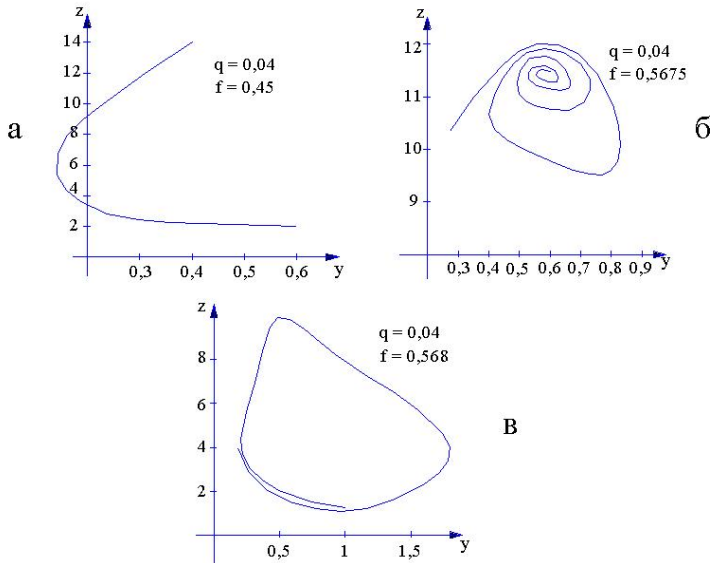


Рис. 10.14. Фазові траєкторії реактора у «ксенон-йодній» площині для різних значень параметрів q, f .

Нагадаємо, що площина (y, z) – “ксенон-йодна” площина, яка відображує коливання концентрації йоду та ксенону.

§ 10.6. Просторові ксенонові коливання

Точкова модель реактора дає опис зміни в часі тільки середньої за об’ємом реактора густини потоку нейтронів. Якщо цікавитися також поведінкою густини потоку нейтронів у просторі, то необхідно користуватися рівняннями, що враховують можливість міграції нейтронів по об’єму реактора. Простішою з таких моделей є дифузійна модель, і, як правило, ксенонові коливання досліджуються за допомогою дифузійної моделі.

Разом з тим, якщо ми розглядаємо реактори, де паливо є твердою речовиною, то в таких реакторах можна не враховувати міграцію продуктів розпаду, тобто йоду та ксенону, отже зміна концентрацій йоду та ксенону може бути описана рівняннями (10.41), в яких концентрації $I(\vec{r}, t), X(\vec{r}, t)$ також залежать від просторової координати.

Як ми бачили в попередньому параграфі, стійкість реактора відносно виникнення ксенонових коливань в основному визначається параметром f ,

який визначає зворотний зв'язок за концентрацією ксенону і слабо залежить від потужностного коефіцієнта реактивності. Тому нижче ми спробуємо дослідити систему рівнянь без урахування потужностного коефіцієнта реактивності, але врахуємо можливість впливу на реактивність органів керування. Таким чином ми будемо досліджувати систему рівнянь

$$\begin{aligned} (\Delta + \chi_0^2 - \beta X)\Phi(r, t) &= \varepsilon(t)\Phi(r, t) + \frac{1}{D} \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial t}, \\ \frac{dX}{dt} &= \gamma_2 \Sigma_f \Phi + \lambda_1 I - (\sigma_x \Phi + \lambda_2) X, \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma_1 \Sigma_f \Phi - \lambda_1 I, \end{aligned} \quad (10.48)$$

де $\varepsilon(t)$ описує однорідний вплив органів регулювання на реактивність реактора. Ми будемо вважати цей вплив таким, що органи регулювання достатньо швидко реагують на зовнішні збурення і підтримують потужність реактора постійно.

Лінеаризація системи рівнянь (10.48) дає наступну систему рівнянь для відхилень $\varphi(r, t) = \Phi(r, t) - \Phi_0(r, t)$, $x(r, t) = X(r, t) - X_0(r, t)$, $i(r, t) = I(r, t) - I_0(r, t)$ від стаціонарного стану:

$$\begin{aligned} (\Delta + \chi^2)\varphi(r, t) - \beta \Phi_0 x(r, t) &= \varepsilon(t)\Phi_0 + \frac{1}{D} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ \frac{dx}{dt} &= \gamma_2 \Sigma_f \varphi + \lambda_1 i - (\sigma_x X_0 + \lambda_2)x - \sigma_x X_0 \varphi, \\ \frac{di}{dt} &= \gamma_1 \Sigma_f \varphi - \lambda_1 i, \\ \chi^2 &= \chi_0^2 - \beta X_0. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Як ми бачили в розділі 6, стаціонарні концентрації X_0, I_0 дорівнюють

$$I_0 = \frac{\gamma_1 \Sigma_f \Phi}{\lambda_1}, \quad X_0 = \frac{\gamma \Sigma_f \Phi}{\sigma_x \Phi + \lambda_x}.$$

Як одиницю густини потоку введемо величину $\Phi_x = \frac{\lambda_x}{\sigma_x} = 0,8 \cdot 10^{13}$ нейтрон/(см²·с) і позначимо $\Phi_0 \frac{\sigma_x}{\lambda_x} = \psi(\vec{r})$. Тоді $X_0 = \frac{\gamma \Sigma_f \psi}{\sigma_x (1 + \psi)}$. Застосуємо до рівнянь (10.49) перетворення Лапласа і при-

пустимо, що початкові умови для відхилень концентрації $i(r, 0) = 0$, $x(r, 0) = 0$, а початкові флуктуації в нейтронній підсистемі дорівнюють $\varphi(r, 0)$.

Тоді для відхилень перетворень Лапласа маємо

$$\begin{aligned} i(r, p) &= \frac{\gamma_1 \Sigma_f}{\lambda_1 + p} \varphi(r, p), \\ x(r, p) &= \frac{\gamma \Sigma_f}{\lambda_2} \left(\frac{p}{\lambda_2} + 1 + \psi \right)^{-1} \left[\left(\lambda_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma} p \right) (\lambda_1 + p)^{-1} - \psi (1 + \psi)^{-1} \right] \varphi(r, p). \end{aligned} \quad (10.50)$$

Якщо ввести безрозмірні величини $p \rightarrow \lambda_2 p$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda$, то

$$x(r, p) = \frac{\gamma \Sigma_f}{\lambda_2} (p + 1 + \psi)^{-1} \left[\left(\lambda + \frac{\gamma_2}{\gamma} p \right) (\lambda + p)^{-1} - \frac{\psi}{1 + \psi} \right] \varphi(r, p). \quad (10.51)$$

Рівняння для густини потоку нейтронів перетворюється як

$$\left[\Delta + \chi^2 - F(p, r) \right] \varphi(r, p) = \varepsilon(p) \Phi_0 + \frac{\lambda_x p}{D} \varphi(r, p) - \frac{1}{D} \varphi(r, 0), \quad (10.52)$$

де

$$\begin{aligned} F(r, p) &= \beta_1 \psi(\bar{r}) \left[p + 1 + \psi(\bar{r}) \right]^{-1} \left\{ \left(\lambda + \frac{\gamma_2}{\gamma} p \right) (p + \lambda)^{-1} - \frac{\psi}{1 + \psi} \right\}, \\ \beta_1 &= \frac{k^2}{M^2} \frac{\gamma}{\nu}. \end{aligned}$$

Неважко показати, що $\frac{\lambda_2 p}{D} \ll \chi^2$, отже другим членом у правій частині (10.52) можна знехтувати.

Розглянемо найпростіший випадок, коли зміна густини потоку залежить тільки від координати z . Така ситуація досить близька до реальної оскільки у великих енергетичних реакторах звичайно відслідковують різницю в потужності верхньої й нижньої частин реактора. Тоді величини $\varphi(r, p)$ і $F(r, p)$ залежать тільки від z . Крім того, у грубому наближенні замінимо величину $\psi(r)$ її середнім значенням $\bar{\psi}$ і $F(z, p) \rightarrow \bar{F}(p)$.

Якщо початкова флуктуація відбувається в першій гармоніці, тобто $\varphi(z, 0) = \varphi_0 \cos \chi z$, то за умовою постійної потужності

$$\int \varphi(\bar{r}, t) d\bar{r} = 0 \quad (10.53)$$

органи керування повертають реактор у вихідний стан $\varphi(r, t) = 0$. Якщо початкове збурення має вигляд гармонік $\varphi(z, 0) = \varphi_0 \cos \chi n z$, $n \geq 2$, і n -парне, то

умова (10.53) виконується автоматично й рівняння (10.52) можна задовольнити, якщо прийняти

$$\begin{aligned} \varphi(z, p) &= a_n(p) \cos \chi n z, \varepsilon(p) = 0, \\ a_n &= \frac{\varphi_0}{D} \left[(n^2 - 1) \chi^2 + \bar{F}(p) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (10.54)$$

У знаменнику величини a_n виникає поліном другого порядку, корені якого визначають частоти коливань після оберненого перетворення Лапласа. Рівняння для коренів має вигляд

$$p^2 + bp + c = 0, \quad (10.55)$$

де

$$\begin{aligned} b &= 1 + \lambda + \bar{\nu} - \frac{\beta \bar{\nu}}{(n^2 - 1) \chi^2} \left(\frac{\bar{\nu}}{1 + \bar{\nu}} - \frac{\gamma_2}{\gamma} \right) \\ c &= \lambda(1 + \bar{\nu}) + \frac{\lambda \beta \bar{\nu}}{(1 + \bar{\nu})(n^2 - 1) \chi^2} \end{aligned}$$

Умова стійкості ($\text{Re } p < 0$) полягає у виконанні нерівностей

$$c > 0; \quad b > 0.$$

Величина c завжди більша нуля. Отже нестійкість може виникнути, якщо порушується умова $b > 0$. Якщо згадати визначення $\chi^2 = \left(\frac{\pi}{H} \right)^2$, то критерій стійкості відносно виникнення ксенонових коливань можна записати у вигляді

$$\frac{M^2}{H^2} > \frac{k^2 \gamma}{(n^2 - 1) \pi^2 \nu} \left(\frac{\bar{\nu}}{1 + \bar{\nu}} - \frac{\gamma_2}{\gamma} \right) \left(1 + \frac{1 + \lambda}{\bar{\nu}} \right)^{-1}. \quad (10.56)$$

З цієї умови випливає, що при малих густинах потоків, коли $\frac{\gamma_2}{\gamma} \ll \bar{\nu} \ll 1$, критичне значення $\frac{M^2}{H^2}$ зростає як $\bar{\nu}^2$, а при великих $\bar{\nu}$ прямує до постійної величини (рис. 10.15), яка для $n = 2$, $k = 1$, $\nu = 2,42$, $\gamma_1 = 0,06$ дорівнює:

$$\frac{M}{H} = \frac{k}{\pi} \sqrt{\frac{\gamma_1}{(n^2 - 1) \nu}} = 0,029. \quad (10.57)$$

Для малих густин потоків, коли $\Phi < \Phi_x \frac{\gamma_2}{\gamma} = 7,4 \cdot 10^{11}$ нейтрон/(см²·с) для

²³⁵U або $\Phi < 1,5 \cdot 10^{12}$ нейтрон/(см²·с) для ²³⁹Pu права частина стає від'ємною і реактор стає стійким для будь-яких M/H . Якщо умова (10.56) не виконується (у великих реакторах при звичайних потоках), то починаються коливання з

частотою порядку λ_2^{-1} й амплітудою, що зростає. Як ми вже бачили з аналізу точкової моделі, відбувається “жорстке” народження граничного циклу.

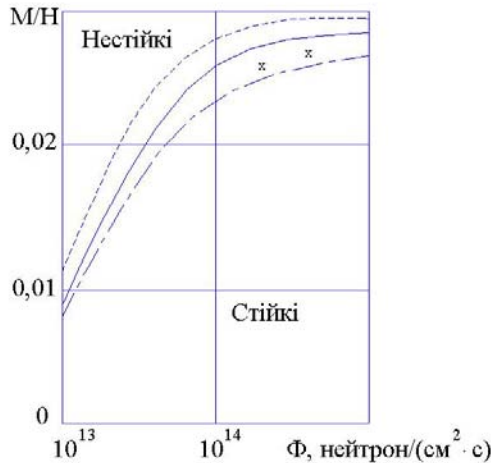


Рис 10.16 Межі стійкості для ксенонових коливань (^{235}U з урахуванням незалежного виходу ^{135}Xe ; без урахування незалежного виходу; для ^{239}Pu з урахуванням незалежного виходу; x – розрахунок з наближеним урахуванням неперервної частини спектра [13]).

Більш точний аналіз рівняння (10.52) вказує на наявність області неперервного спектра в коливаннях нейтронного потоку, що дещо ускладнює обернене перетворення Лапласа. Взагалі, більш точний аналіз варто використовувати з урахуванням локальної дії регулятора і його деякого запізнення внаслідок витрат часу на обробку інформації про зміну густини потоку нейтронів і на введення в дію механічних пристроїв.

Більшість енергетичних реакторів є нестійкими до виникнення ксенонових коливань, але оскільки частоти коливань дуже низькі, то система регулювання реактора здатна компенсувати будь-які зміни нейтронного потоку й не допустити виникнення коливань.

§ 10.7 Поняття про динамічний хаос

Про фізичний об’єкт кажуть як про динамічну систему, якщо можна ввести набір змінних, які характеризують стан системи, таким чином, що значення цих змінних у будь-який момент часу визначаються вихідним набором даних за деяким правилом. Це правило задається оператором еволюції системи.

Наприклад, рух матеріальної точки (або кульки) в одновимірному просторі задається координатою і швидкістю (точкою на фазовій площині). Зміна в часі визначається фазовою траєкторією на цій площині. Для N матеріальних

точок рух визначається фазовою траєкторією в $2N$ -вимірному фазовому просторі. Оператор еволюції в даному випадку задається рівняннями руху, тобто рівняннями Ньютона.

Інший приклад, модель реактора, розглянутого в § 10.3, є динамічною системою, еволюція якої визначається у двовимірному просторі, а оператор еволюції задається двома диференціальними рівняннями.

Існують два класи динамічних систем – консервативні й дисипативні. До консервативних можна віднести коливальні системи без тертя. Їх стан у різні моменти часу визначаються початковими умовами. Дисипативні системи характеризуються тим, що через деякий час стан системи вже не визначається початковими умовами, система їх „забуває” і переходить у стан, який називається атрактором. Прикладами атракторів є стійкий рівноважний стан або граничний цикл. Система може мати декілька атракторів, в які вона переходить з різних областей фазового простору, так що початкові умови забуваються не повністю, а в деяких межах.

Саме в дисипативних динамічних системах можливе виникнення хаотичного руху, який на перший погляд протирічить самому поняттю динамічної системи, де значення змінних визначаються за попередніми. У хаотичних системах нескінченно малі зміни початкових станів приводять до експоненційного зростання невизначеності стану (експоненційне розбігання траєкторій), так що передбачити поведінку системи в будь-які проміжки часу стає неможливим. Можливо тільки визначити «горизонт прогнозу», який визначається показниками експонент, що характеризують розбігання траєкторій (показниками Ляпунова). Наприклад, для горизонту прогнозу погоди загальноприйняті моделі дають час, приблизно рівний трьом тижням.

Поняття про молекулярний хаос увів у фізику Людвіг Больцман, який розглядав системи, що складаються з величезної кількості молекул. Неможливість передбачити рух кожної молекули обумовлювалася тим, що ми не можемо визначити початкові умови (координату й швидкість) для кожної молекули, а також величезною кількістю зіткнень кожної молекули під час руху. Тобто виникнення хаотичного руху пов'язувалося з нашою неможливістю відслідкувати рух кожної молекули, а отже, із суб'єктивними чинниками.

Але у другій половині ХХ ст. виявилось, що існують нестійкі, нелінійні, нерівноважні системи, в яких виникає хаотичний непередбачуваний рух, навіть якщо початкові умови точно визначені. Цей рух відбувається в обмежених областях фазового простору, які були названі дивними атракторами. Ці області фазового простору мають тонку структуру, яка має всі ознаки фракталів (про фрактали можна більш докладно довідатися з монографії [14], автор якої ввів це поняття у фізику й математику).

Виявляється, що в деяких режимах ядерні реактори також мають хаотичний рух, причому такий рух може виникати і в часі, і в просторі, коли випадковими є не тільки часові характеристики процесу, а й просторовий розподіл нейтронного поля. Умовою виникнення такого руху є наявність нелінійних

обернених зв'язків у реакторі та нестійкість основного стану реактора відносно значень деяких параметрів (більш докладно див. [15], де можна знайти посилання на інші роботи).

В роботі [15] хаотичний рух виникає в системі, де обернені зв'язки обумовлені наявністю автоматичної системи керування реактором. Але виявляється, що хаотичний рух може виникати також в реакторі, що працює в стаціонарному режимі, коли система автоматичного керування реактором не включається. Наявність хаотичного чи регулярного руху можна визначити за допомогою спеціальних алгоритмів обробки часових рядів випадкових даних, отриманих, наприклад, на основі показників детекторів густини нейтронного потоку.

Нагадаємо, що густина потоку нейтронів навіть у стаціонарному стані не є постійною величиною, а постійно змінюється навколо деякого середнього значення, яке і задає постійну потужність реактора. В кожний момент часу показники детекторів є різними, і якщо їх зафіксувати, то вони складуть часовий ряд випадкових даних. Вважалося, що випадковість цих даних обумовлена випадковістю всіх нейтронних процесів в реакторі – поділ, поглинання, розсіювання і детектування. До появи новітніх нелінійних методів обробки часових рядів даних такі сигнали розглядалися як некорисний «шум», якого потрібно позбутися за допомогою різноманітних методів фільтрації «зашумленого» сигналу. Така ідеологія аналізу даних є характерною для лінійних систем, на які діє випадкова зовнішня сила.

Виявляється, що нелінійні системи можуть продукувати випадкові (хаотичні) сигнали, навіть якщо не враховувати випадковість мікроскопічних процесів, що відбуваються в системі. Ця хаотичність сигналу обумовлена хаотичною фрактальною структурою фазового простору, в якому рухається нелінійна система. Звичайно такий хаотичний сигнал також може бути «забруднений» деяким зовнішнім «шумом», і позбутися цього «забруднення» можна за допомогою того чи іншого різновиду Фур'є-перетворення.

Для визначення наявності регулярного або хаотичного руху необхідно розв'язати наступну задачу. На основі аналізу ряду випадкової скалярної (одновимірної) величини, вимірної в деякі моменти часу (наприклад, показань детектора густини нейтронного потоку), потрібно визначити деякі параметри, які характеризують рух системи. Які це параметри? Наприклад, можна визначити розмірність фазового простору системи, тобто кількість диференціальних рівнянь першого порядку, необхідних для опису системи¹. Можна також визначити фрактальну розмірність дивного атратора, показники Ляпунова, які дають швидкість розбігання траєкторій у фазовому просторі, тобто час, за який відстань між траєкторіями збільшується у e разів. Визначають також різні інваріанти орбіт; величини, що не залежать від початкових умов; інші

¹ Нагадаємо, що для опису руху матеріальної точки у тривимірному евклідовому просторі необхідно шість рівнянь першого порядку – три для зміни координат у часі і три для швидкостей.

параметри, що характеризують рух системи. Сукупність всіх цих величин називають структурою хаосу (дивне поняття – яка може бути структура у сукупності випадкових величин? Виявляється – може!).

Для нелінійного аналізу рядів випадкових даних було запропоновано багато різних методів, починаючи з 80-х років минулого сторіччя. Огляд цих методів можна знайти, наприклад, в книзі Девіда Рюеля [16], де також є посилання на оригінальні роботи.

Повертаючись до ядерних реакторів, можна відмітити, що хаотичний рух було виявлено в реакторах різних типів, таких як BWR (реактор на киплячій воді) і PWR (реактор з водою під тиском - ВВЕР), на основі аналізу як експериментальних даних, так і на основі аналізу математичних моделей цих реакторів. В цілому можна сказати, що нелінійний аналіз експериментальних даних (густини потоку нейтронів, температури теплоносія, акустичного сигналу від ядерного реактора) може стати новим потужним методом діагностики стану ядерних реакторів, здатним виявити перші ознаки аварійних ситуацій і таким чином запобігти виникненню аварій.

Розділ 11

Статистична теорія реакторів

§ 11.1. Вступ

У попередніх розділах ми вивчали поведінку ядерних реакторів, базуючись на визначенні середніх значень змінних і параметрів, які визначають стан реактора, таких як густина потоку нейтронів, температура теплоносія, концентрації різних ізотопів, реактивність, макроскопічні перерізи тощо. Зрозуміло, що більшість процесів в ядерних реакторах є імовірнісними випадковими процесами, які протікають у системі з великою кількістю частинок. Випадковість цих процесів обумовлена як імовірністю законів квантової механіки, що описують елементарні закони взаємодії між частинками, так і розмірами всієї системи, тобто дуже великою кількістю частинок у реакторах. Тому опис реакторів за допомогою середніх значень змінних і параметрів не завжди є коректним, і в багатьох випадках буває необхідним відслідковувати миттєві значення змінних, що описують реактор, тобто вимірювати флуктуації цих змінних. Більш того, вимірювання статистичних характеристик ядерних реакторів може дати значно більше інформації про стан реактора, ніж вимірювання тільки середніх значень змінних. Саме на вимірюванні флуктуацій змінних, що описують стан реактора, засновані методи шумової діагностики реакторів, які останнім часом почали широко застосовуватись в енергетичних ядерних реакторах.

Методи вимірювання флуктуацій змінних реактора можна розділити на два класи: мікроскопічні дискретні методи та методи макроскопічних шумів. У мікроскопічних методах вимірюються властивості індивідуальних ланцюжків поділу, що утворюються в реакторах. У свою чергу, у макроскопічних методах вимірюються кореляційні або спектральні властивості випадкових процесів, що відбуваються в реакторах.

Перед тим, як перейти до викладу основних положень статистичної теорії реакторів, варто навести основні визначення теорії ймовірності та теорії випадкових процесів, які будуть використовуватись у подальшому.

§ 11.2. Середні значення та моменти

Усі величини, що описують ядерний реактор (тиск, температура, густина потоку нейтронів або потужність) є величинами змінними в часі. Тобто якщо вимірювати ці величини за невеликі проміжки часу, то навіть для стаціонарного процесу ми отримаємо ряд неоднакових значень, які (для стаціонарного процесу) будуть змінюватись навколо деякого середнього значення (рис. 11.1, *a*). Вимірювання значення цієї ж величини x за інший проміжок часу, але рівний за величиною проміжку часу першого вимірювання, дасть іншу криву $x(t)$, але з тим же середнім значенням. Оскільки ми не можемо перед-

бачити, яку саме величину x ми вимірюємо в момент часу t_0 , то ця величина є випадковою величиною. Сукупність усіх можливих окремих вимірювань, що обумовлені випадковими явищами, можна назвати стохастичним процесом (або випадковим процесом).

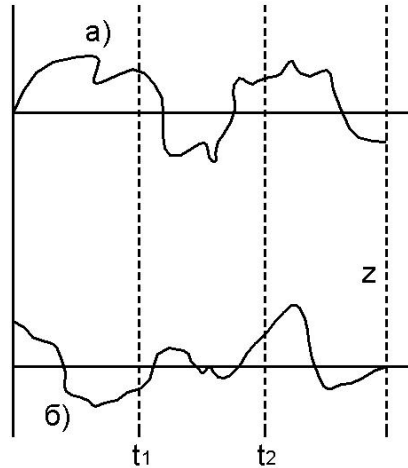


Рис. 11.1. Приклади реалізацій стаціонарного випадкового процесу.

Продовжуючи вимірювання величини x за однакові проміжки часу або вимірюючи цю ж величину x іншими детекторами, ми отримуємо сукупність кривих, яку називають ансамблем сигналів. Для такого ансамблю можна визначити середньоарифметичне значення величини $x(t)$ в момент часу, наприклад t_j :

$$\langle x(t_1) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N x_i(t_1)}{N}. \quad (11.1)$$

Можна також визначити середнє значення в часі тієї ж величини $x(t)$:

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (11.2)$$

Якщо середнє значення по ансамблю дорівнює середньому значенню в часі, то такий стаціонарний процес називається ергодичним. Більшість реальних стаціонарних процесів є ергодичними і їх статистичні характеристики можна вимірювати, проводячи усереднення в часі достатньо довгого сигналу.

Для визначення середніх величин їхніх корисних статистичних характеристик можна використовувати також поняття ймовірності того, що випадкова величина x прийме значення x_i . Вимірюючи цю ймовірність для різних значень x_i , ми отримуємо функцію густини ймовірності $p(x)$.

Для дискретної випадкової змінної (тобто якщо випадкова змінна приймає дискретні значення) за допомогою функції густини ймовірності можна

визначити середні значення μ_x (перший момент функції густини ймовірності), середньоквадратичне значення ψ_x^2 (другий момент) і т. д.:

$$\mu_x = \frac{\sum_{i=0}^N x_i p(x_i)}{\sum_{i=0}^N p(x_i)} = \sum_{i=0}^N x_i p(x_i) = E(x),$$

$$\psi_x^2 = \frac{\sum_{i=0}^N x_i^2 p(x_i)}{\sum_{i=0}^N p(x_i)} = \sum_{i=0}^N x_i^2 p(x_i) = E(x^2), \quad (11.3)$$

де $E(x)$ і $E(x^2)$ – математичні очікування величин x і x^2 відповідно. Оскільки N – повне число подій, то знаменник дорівнює одиниці. У реальних процесах величини рівняння (11.3) треба визначати, коли $N \rightarrow \infty$.

Аналогічні вирази можна написати для середнього та середньоквадратичного значення неперервних випадкових величин:

$$\mu_x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = E(x), \quad (11.4)$$

$$\psi_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = E(x^2).$$

Можна також визначити дисперсію (σ_x^2) та середньоквадратичне відхилення (σ_x) – корисні величини, що визначають ступінь відхилення реальних величин від середніх:

$$\sigma_x^2 = \psi_x^2 - \mu_x^2, \quad (11.5)$$

$$\sigma_x = (\psi_x^2 - \mu_x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

У теорії випадкових процесів буває корисним використовувати метод характеристичних функцій, оскільки моменти функції густини ймовірності можна отримати з неї шляхом операції диференціювання, а саме характеристична функція задовольняє рівнянню, яке можна розв'язати в багатьох цікавих випадках. Характеристична функція визначається у вигляді інтеграла Фур'є

$$M_x(iv) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx} p(x)dx. \quad (11.6)$$

Тому за визначених умов для отримання густини ймовірності можна застосувати обернене перетворення Фур'є

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_x(iv) e^{-ivx} dv. \quad (11.7)$$

Якщо взяти похідну від характеристичної функції по v і визначити її при $v = 0$, то результат, помножений на $(-i)$, дасть середнє значення випадкової величини x :

$$(-i) \frac{dM_x(iv)}{dv} \Big|_{v=0} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \equiv \mu_x. \quad (11.8)$$

Вищі моменти n -го порядку отримуються з характеристичної функції шляхом n -кратного диференціювання, обчислення похідної при $v = 0$ і множення на $(-i)^n$.

Крім характеристичних функцій часто використовують твірні функції ймовірностей. Для дискретного процесу з розподілом імовірностей $p_n(t)$ твірна функція визначається як

$$F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) x^n, \quad |x| \leq 1, \quad (11.9)$$

де x – допоміжна змінна. Для твірних функцій також можна отримати диференціальні рівняння, а моменти будь-якого порядку визначаються диференціюванням функції по x в точці $x = 1$.

§ 11.3. Кореляційні функції та кореляційні співвідношення

Поняття кореляції є одним з найважливіших понять теорії випадкових процесів. Кореляція встановлює якісне або кількісне відношення однієї змінної до іншої (або інших) змінної або до самої себе в інші моменти часу.

Проілюструвати поняття кореляції можна наступним чином. Нехай ми маємо дві випадкові дискретні змінні x_i і y_i . Якщо на осі абсцис відкласти значення x_i у момент часу t_i , а на осі ординат – значення y_i у ті ж моменти часу, то отримаємо так звану діаграму розсіяння. Застосовуючи метод найменших квадратів можна провести по отриманих точках пряму. Якщо всі точки ляжуть на цю пряму, то можна сказати, що випадкові змінні x та y є лінійно залежними або повністю корельованими. Якщо точки так розкидані, що пряму виділити важко, то скоріше за все змінні x та y є незалежними або некорельованими. Змінні також можуть бути частково залежними, якщо пряма виділяється, але існують великі розкиди точок. Отже, поняття кореляції визначає взаємну залежність випадкових змінних.

Поняття «лінійно незалежні змінні» і «некорельовані змінні» не є ідентичними. Незалежні випадкові змінні є некорельованими. Але некорельовані змінні не обов'язково є незалежними, оскільки ці змінні можуть бути зв'язані нелінійною залежністю.

Використаємо метод найменших квадратів для побудови за даними точками прямої

$$y_p = a + bx, \quad (11.10)$$

де y_p - очікуване значення y , a та b – постійні. Середньоквадратичну похибку можна визначити як

$$\varepsilon = E[(y - y_p)^2] = E\{[y - (a + bx)]^2\}. \quad (11.11)$$

Диференціювання по a і b та прирівнювання нулю дає

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} &= -2E(y) + 2a + 2bE(x) = 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial b} &= -2E(xy) + 2aE(x) + 2bE(x^2) = 0, \end{aligned} \quad (11.12)$$

звідки

$$b = \frac{E(xy) - E(x)E(y)}{E(x^2) - [E(x)]^2} = \frac{E(xy) - E(x)E(y)}{\sigma_x^2}, \quad (11.13)$$

$$a = \frac{E(xy)E(x) - E(y)E(x^2)}{(E(x^2) - [E(x)]^2)E(x)} = \frac{E(xy) - E(x)E(y)}{\sigma_x^2 E(x)}. \quad (11.14)$$

Ми отримали лінію регресії y від x . Не менш доцільно отримати лінію регресії x від y , тобто підігнати точки до прямої

$$x_p = a' + b'y. \quad (11.15)$$

Константи a' та b' визначаються виразами

$$b' = \frac{E(xy) - E(x)E(y)}{\sigma_y^2}, \quad (11.16)$$

$$a' = \frac{E(xy)E(y) - E(x)E(y^2)}{\sigma_y^2 E(y)}. \quad (11.17)$$

Якщо x та y повністю корельовані, то регресії повинні збігатися, звідки

$$a = -a' / b' \text{ або } ab' = -a', \quad (11.18)$$

$$bb' = 1. \quad (11.19)$$

Якщо змінні не повністю корельовані, то ступінь кореляції можна визначити за відхиленням від рівняння (11.18). Для цього вводять нормований коефіцієнт кореляції ρ як

$$\rho = (bb')^{\frac{1}{2}} = \frac{E(xy) - E(x)E(y)}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (11.20)$$

Якщо змінні лінійно незалежні, то

$$E(xy) = E(x)E(y), \quad (11.21)$$

і, отже, $\rho = 0$. З цього видно, що значення нормованого коефіцієнта кореляції змінюється від нуля для повністю некорельованих величин до одиниці для лінійно залежних випадкових величин.

Ступінь залежності двох випадкових величин можна також визначати за допомогою коваріаційних та кореляційних функцій. Коваріаційна функція визначається як чисельник рівняння (11.19)

$$C_{xy} = E(xy) - E(x)E(y). \quad (11.22)$$

Можна також визначати ступінь залежності двох змінних у різні моменти часу:

$$C_{xy}(t, t + \tau) = E([x(t) - \mu_x(t)][y(t + \tau) - \mu_y(t + \tau)]), \quad (11.23)$$

а взаємна кореляційна функція визначається як

$$\varphi_{xy}(\tau) = E(x(t), y(t + \tau)), \quad (11.24)$$

тобто коваріаційна та кореляційна функції зв'язані співвідношенням

$$C_{xy}(\tau) = \varphi_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y. \quad (11.25)$$

Кореляційна функція виражається через функцію густини взаємної ймовірності як

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)y(t_2)p(x(t_1)y(t_2))dx dy. \quad (11.26)$$

Для часткового випадку $\tau = 0$,

$$\varphi_{xy}(0) = E(x(t)y(t)), \quad (11.27)$$

$$\varphi_{xx}(0) = \psi_x^2. \quad (11.28)$$

§ 11.4. Статистичні дискретні методи у фізиці реакторів

Визначення статистичних характеристик відліків нейтронів у детекторах, що вимірюють густину потоку нейтронів у реакторах, може дати інформацію не тільки про ймовірність різних процесів, але й про динамічні характеристики всього реактора. Це пов'язано з тим, що послідовне випромінювання нейтронів під час процесів поділу пов'язане між собою в ланцюжки, довжина яких визначається динамічними характеристиками реактора, а саме - реактивністю, і які спотворюють первинний ймовірнісний розподіл процесу випромінювання нейтронів під час поділу.

У розділі 2 ми приводили розподіл ймовірності випромінювання ν_p нейтронів під час поділу. Цей розподіл, хоча і є дзвоноподібним, але суттєво відрізняється від розподілу Пуассона ($p(m) = \frac{\mu_m^m e^{-\mu_m}}{m!}$, $p(x) = \frac{a^x e^{-a}}{x!}$). Відносна ширина розподілу ймовірностей визначається як

$$D_x = \frac{\psi_x^2 - \mu_x}{\mu_x^2} = \frac{\tau_x^2 + \mu_x^2 + \mu_x}{\mu_x^2}. \quad (11.29)$$

Для розподілу ймовірностей випромінювання нейтронів під час поділу ця величина була обрахована Дайвеном (і називається параметром Дайвена) і дорівнює

$$D_v = \frac{\overline{v_p^2} - v_p}{v_p^2} = \frac{\overline{v_p(v_p - 1)}}{v_p^2}. \quad (11.30)$$

Ця величина відрізняється для різних ізотопів, що діляться. Так, для ^{235}U величина $D_v = 0,796 \pm 0,007$, для ^{233}U - $D_v = 0,786 \pm 0,013$, для ^{239}Pu - $D_v = 0,815 \pm 0,017$. Ці значення суттєво відрізняються від одиниці, якій рівні відносні ширини пуассонівського і біноміального розподілів.

Цей параметр входить суттєвою складовою майже в усі методи, що визначають розподіл відліків нейтронів детектором в ядерному реакторі. Історично першим був метод Россі-альфа, який визначає ймовірність того, що нейтрон буде зареєстровано в момент часу t після реєстрації первинного нейтрона в момент $t = 0$, якщо вихідний поділ відбувся в момент t_0 .

Як відомо, з точкової моделі реактора кількість нейтронів в підкритичному реакторі спадає експоненційно з часом, якщо в системі немає зовнішнього джерела. Постійна спаду $\alpha = \frac{1 - k(1 - \beta)}{l}$ визначається коефіцієнтом розмноження на миттєвих нейтронах $k_p = k(1 - \beta)$ та часом життя нейтронів l .

Якщо в момент $t = 0$ відбувся відлік нейтрона детектором, то існує деяка ймовірність того, що через час t детектор зареєструє або випадковий нейтрон, тобто нейтрон іншого ланцюжка, або споріднений нейтрон, тобто нейтрон з того ж ланцюжка, один з яких викликав відлік детектора при $t = 0$. Ймовірність відліку випадкових нейтронів дорівнює $A\Delta$, де Δ - інтервал часу, протягом якого відбувається вимірювання (як правило, ширина одного каналу аналізатора), A - середня швидкість відліків детектора.

Оскільки кількість миттєвих нейтронів спадає експоненційно з часом, то ймовірність реєстрації спорідненого нейтрона зменшується, як $\exp(-\alpha t)$. Тому повна ймовірність реєстрації нейтрона в інтервалі часу Δ визначається як

$$p(t)\Delta = A\Delta + B \exp(-\alpha t)\Delta, \quad (11.31)$$

де A - фон (визначається середньою швидкістю ділень $A = F\varepsilon$, ε - ефективність детектора); B - корисний сигнал.

$$B = \frac{\overline{\varepsilon v_p(v_p - 1)k_p^2}}{2v_p^2(1 - k_p)e} = \frac{\varepsilon D_v k_p^2}{2\alpha e^2}. \quad (11.32)$$

У результаті маємо для п'яти невідомих величин F , ε , D_v , k_p , l два рівняння. Деякі з цих величин можуть бути відомими або з незалежних вимірювань, або з теоретичних розрахунків.

На статистичних міркуваннях базуються різні методи визначення характеристик реакторів.

Метод Фейнмана засновано на вимірюванні відношення дисперсії до середньої кількості відліків, що відбулися за фіксований інтервал часу:

$$\frac{\bar{S}^2}{\bar{C}} = \frac{\bar{C}^2 - C^{-2}}{\bar{C}}.$$

Можна показати, що

$$\frac{\bar{S}^2}{\bar{C}} = 1 + \frac{\varepsilon k_p^2 D_v}{(1 - k_p)} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T}\right) = 1 + \frac{\varepsilon D_v}{\rho_p^2} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T}\right) = 1 + Y.$$

У цьому виразі, якщо $\alpha T \ll 1$, то член у дужках приблизно дорівнює одиниці, і вимірюючи відношення дисперсії до середньої кількості відліків, можна отримати або величину \bar{v} , якщо відомо $\rho_p \approx \rho - \beta$, або навпаки.

Метод нульової ймовірності (Могильнера - Золотухіна) полягає у вимірюванні ймовірності того, що за інтервал часу Δ не відбудеться ні одного відліку нейтрона. Могильнер і Золотухін отримали простий вираз для цієї нульової ймовірності

$$P_0(\Delta) = (1 + Y)^{-\frac{\bar{C}}{Y}}, \quad (11.33)$$

де Y - та сама ж величина, що й у методі Фейнмана. Вимірюючи величину нульової ймовірності, а також середню кількість відліків \bar{C} , можна визначити Y , а отже, α . Пізніше вираз для нульової ймовірності уточнювався і було показано, що вираз (11.33) є справедливим для малих інтервалів $\Delta < 3$ мкс.

Існують також інші методи визначення ймовірності тих чи інших процесів. Але перед тим, як перейти до подальшого викладу, варто нагадати про деякі, найбільш уживані ймовірнісні розподіли.

§ 11.5. Розподіли ймовірності

Дуже наочно різні розподіли ймовірності можна ввести, розглядаючи радіоактивний розпад.

Якщо є велика кількість радіоактивних атомів з ймовірністю розпаду p , то можна обчислити ймовірність розпаду m атомів за час t . Розглянемо спочатку тільки m атомів з N_0 . Ймовірність того, що перший з цих m атомів розпадеться, є p , ймовірність того, що розпадеться перший і другий атоми, є p^2 тощо. Ймовірність того, що розпадутся всі m атоми є p^m . Якщо m атомів розпадається, то $N-m$ атомів не повинні розпастися. Ймовірність цього є $(1 - p)^{N-m}$. Таким чином, ймовірність того, що вибрана група з m атомів із N_0 атомів роз-

падеться, є $p^m(1-p)^{N_0-m}$. Однак ця група з m атомів не є єдиною, яка може розпастися. Першим атомом з m атомів, що можуть розпастися, є будь-який атом з N_0 атомів, другим - є будь-який атом з $N_0 - 1$ атомів, m -м атомом є будь-який з $N_0 - m + 1$ атомів. Добуток цих виразів

$$N_0(N_0 - 1)\dots(N_0 - m + 1) = \prod_{i=0}^{m-1} (N_0 - i) = \frac{N_0!}{(N_0 - m)!}, \quad (11.34)$$

дає загальну схему, за якою можуть розпастися m атомів із N_0 атомів за час t . Оскільки добуток визначається також порядком вибору m атомів, то його необхідно поділити на кількість перестановок із m атомів, тобто на $m!$. Отже, імовірність того, що будь-які m атомів із N_0 атомів розпадутся за час t , є

$$p(m) = \left[\frac{N_0!}{(N_0 - m)!m!} \right] p^m (1-p)^{N_0-m}. \quad (11.35)$$

Цей вираз для $p(m)$ називають біноміальним розподілом імовірності, оскільки коефіцієнт у квадратних дужках є коефіцієнтом розкладу бінома $(1+x)^{N_0}$.

Швидкість розпаду ядер у момент t пропорційна кількості ядер, що залишились

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad (11.36)$$

де λ - константа розпаду радіоактивного матеріалу. Розв'язок цього рівняння

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = (1-p) \quad (11.37)$$

дає відносну кількість ядер, що не розпалися, тобто ймовірність того, що ядро не розпадеться за час t - $(1-p) = q$. Отже, величина $p = 1 - e^{-\lambda t}$. Тоді для біноміального розподілу ймовірності маємо

$$p(m) = \frac{N_0!}{(N_0 - m)!m!} (1 - e^{-\lambda t})^m (e^{-\lambda t})^{N_0-m}. \quad (11.38)$$

За допомогою біноміального розподілу можна визначити середню кількість атомів, що розпалися за час t , тобто визначити математичне очікування кількості розпадів.

$$\mu_m = \sum_{m=0}^{N_0} m p(m) = \sum_{m=0}^{N_0} m \left(\frac{N_0!}{(N_0 - m)!m!} \right) p^m q^{N_0-m}. \quad (11.39)$$

Цей вираз можна обчислити, використовуючи біноміальний розклад виразу $(px + q)^{N_0}$.

$$(px + q)^{N_0} = \sum_{m=0}^{N_0} \frac{N_0!}{(N_0 - m)!m!} p^m q^{N_0-m} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} x^m p(m). \quad (11.40)$$

Диференціювання його по x дає

$$N_0 p(px + q)^{N_0 - 1} = \sum_{m=0}^{N_0} mx^{m-1} p(m). \quad (11.41)$$

Якщо покласти $x = 1$, маємо

$$N_0 p(p + q)^{N_0 - 1} = N_0 p = \sum_{m=0}^{N_0} mp(m) = \mu_m. \quad (11.42)$$

Отже, функція $(px + q)^{N_0}$ є твірною функцією біноміального розподілу.

Використовуючи визначення p у рівнянні (11.37), отримаємо середню кількість розпадів за час t :

$$\mu_m = N_0 p = N_0 (1 - e^{-\lambda t}). \quad (11.43)$$

Якщо розглядати час t , який є малий порівняно з періодом напіврозпаду (як правило, менший за одну соту частину періоду напіврозпаду), то

$$\mu_m \approx N_0 (1 - 1 + \lambda t) = N_0 \lambda t. \quad (11.44)$$

Середньоквадратичне відхилення та дисперсію кількості розпадів за час t можна отримати, узявши другу похідну по x біноміального розкладу (11.40):

$$N_0 (N_0 - 1) p^2 (px + q)^{N_0 - 2} = \sum_{m=0}^{N_0} m(m-1) x^{m-2} p(m). \quad (11.45)$$

Якщо покласти $x = 1$, маємо другий факторіальний момент розподілу ймовірностей

$$N_0 (N_0 - 1) p^2 = \sum_{m=0}^{N_0} m(m-1) p(m) = \sum_{m=0}^{N_0} m^2 p(m) - \sum_{m=0}^{N_0} mp(m). \quad (11.46)$$

Використовуючи визначення середньоквадратичного та середнього значення можна отримати

$$N_0 (N_0 - 1) p^2 = \psi_m^2 - \mu_m. \quad (11.47)$$

Дисперсію $\sigma_m^2 = \psi_m^2 - \mu_m^2$ легко отримати з рівнянь (11.47) і (11.42)

$$\sigma_m^2 = N_0 (N_0 - 1) p^2 + \mu_m - \mu_m^2 = N_0 pq = \mu_m q. \quad (11.48)$$

Для радіоактивного розпаду

$$\sigma_m^2 = \mu e^{-\lambda t}, \quad (11.49)$$

і для малих часів t ($\lambda t \ll 1$) (11.49) переходить у

$$\sigma_m^2 = \mu, \quad \sigma_m = \sqrt{\mu_m},$$

тобто середньоквадратичне відхилення кількості розпадів за час t дорівнює кореню квадратному із середньої кількості розпадів. Ми отримали класичний результат статистичної фізики, коли величина флуктуацій дорівнює кореню квадратному із середньої величини. Підкреслимо, що цей результат є справедливим для малих часів спостереження.

Біноміальний розподіл (11.38) можна спростити, якщо виконуються такі умови:

$$\begin{aligned} m &<< N_0, \\ N_0 &>> 1, \\ \lambda t &<< 1. \end{aligned} \quad (11.50)$$

Використовуючи далі розклад $e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t$, формулу Стірлінга

$$x! \approx (2\pi x)^{\frac{1}{2}} e^{-x} x^x, \quad (11.51)$$

визначення експоненційної функції

$$\left(1 - \frac{m}{N_0}\right)^{N_0} \approx \lim_{N_0 \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{m}{N_0}\right)^{N_0} = e^{-m} \quad (11.52)$$

і визначення μ_m для малих λt : $\mu_m \approx N_0 \lambda t$, отримаємо розподіл Пуассона

$$p(m) = \frac{\mu_m^m e^{-\mu_m}}{m!}, \quad (11.53)$$

який є справедливим, коли $N > 200$, $\lambda t < 0,01$. Основною перевагою розподілу Пуассона є те, що він залежить від одного параметра μ_m . Якщо накласти додаткову умову

$$|\mu_m - m| \ll \mu_m \quad (11.54)$$

і використати наближення

$$\ln\left(1 + \frac{\mu_m - m}{m}\right) \approx \frac{\mu_m - m}{m} - \frac{(\mu_m - m)^2}{2m^2}, \quad (11.55)$$

то розподіл Пуассона зводиться до

$$p(m) = (2\pi\mu_m)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(\mu_m - m)^2}{2\mu_m}\right\}. \quad (11.56)$$

Цей розподіл називається нормальним розподілом, або розподілом Гаусса, і є симетричним відносно центрального значення μ_m .

Середньоквадратичне відхилення для нормального розподілу визначається формулою, аналогічною формулі для біноміального розподілу

$$\sigma_m = \sqrt{\mu_m}. \quad (11.57)$$

З урахуванням цього факту отримуємо більш звичайний вигляд розподілу Гаусса

$$p(m) = \frac{1}{\sigma_m \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu_m - m)^2}{2\sigma_m^2}}. \quad (11.58)$$

Розподіл Гаусса відіграє дуже важливу роль у фізиці, оскільки існує центральна гранична теорема, яка стверджує, що сума незалежних випадкових змінних за достатньо загальних умов підпорядковується нормальному розподілу. Наприклад, у великих і потужних реакторах густина потоку нейтронів у даній точці обумовлена багатьма практично некорельованими ланцюжками і приблизно описується розподілом Гаусса.

§ 11.6. Кореляційні вимірювання

Взаємна кореляційна функція стаціонарного процесу $\varphi_{xy}(\tau)$ (або автокореляційна функція, коли $x = y$) визначається рівнянням

$$\varphi_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)y(t_2)p(x(t_1)y(t_2))dx dy, \quad (11.59)$$

де $p(x(t_1)y(t_2))$ – густина розподілу спільної ймовірності того, що в момент часу t_1 відбудеться подія x , а в момент часу t_2 відбудеться подія y . Зрозуміло, що якщо ці події незалежні, то $p(x(t_1)y(t_2)) = p(x(t_1))p(y(t_2))$.

Якщо подія x - це реєстрація нейтрона детектором 1 у момент t_1 , а подія y - це реєстрація нейтрона детектором 2 у момент часу t_2 (або тим же детектором 1 у момент t_2 , якщо $x = y$), то кореляційна функція є по суті ймовірністю пари відліків, що відбуваються в інтервалі Δ_1 при t_1 і в інтервалі Δ_2 при t_2 , тобто величина, яку ми досліджували в методі росі-альфа. Тобто

$$\varphi_{xy}(\tau) = p(t_1, t_1 + \tau) = P_c(t_1 t_2) + P_r(t_1 t_2), \quad (11.60)$$

де P_c і P_r означають імовірність корельованих та випадкових відліків відповідно. Якщо врахувати наявність δ -функції при $\tau = 0$, то автокореляційна функція буде дорівнювати

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(\tau) &= F^2 \varepsilon^2 + F \varepsilon^2 \frac{D_v k_p^2}{2(1-k_p)l} \exp(-\alpha\tau) + F \varepsilon \delta(\tau) = \\ &= A^2 + AB \exp(-\alpha\tau) + A \delta(\tau), \end{aligned} \quad (11.61)$$

де величини A і B визначаються виразами (11.31 і 32).

Якщо використовувати два детектори однакової ефективності ε , то

$$\varphi_{xy}(\tau) = F^2 \varepsilon^2 + F \varepsilon^2 \frac{D_v k_p^2}{2(1-k_p)l} \exp(-\alpha\tau) = A^2 + AB \exp(-\alpha\tau). \quad (11.62)$$

Цей вираз визначає метод взаємного кореляційного аналізу, який відрізняється від рівняння (11.61) відсутністю δ -функції в рівнянні (11.62). Це відповідає відсутності фону в частотній області й дає змогу проводити вимірювання з детекторами низької ефективності.

Треба зауважити, що всі викладені вище вирази отримані на основі точкової моделі реактора й не враховують затриманих нейтронів. Реактор повинен бути достатньо малим, щоб просторові ефекти були незначними, а також детектори необхідно розташовувати поряд. Затримані нейтрони можуть стати суттєвими при наближенні системи до критичності.

Можна також визначати коваріаційні функції, які являють собою різницю між середнім значенням добутку двох змінних і добутком їх середніх значень:

$$C_{xy} = E(xy) - E(x)E(y). \quad (11.63)$$

Якщо ця різниця прямує до нуля, то дві змінні не є корельованими. Якщо ми виміряли велику кількість відліків $C_1(\Delta)$ і $C_2(\Delta)$ двох детекторів нейтронів, то коваріацію можна розрахувати як

$$C_{xy}(\Delta) = \langle (C_1 - \langle C_1 \rangle)(C_2 - \langle C_2 \rangle) \rangle = \langle C_1 C_2 \rangle - \langle C_1 \rangle \langle C_2 \rangle. \quad (11.64)$$

Якщо наближення для миттєвих нейтронів $\alpha\Delta \ll 1$ є справедливим, то можна показати, що вирази для коваріації є фактично виразами для відношення дисперсії до середнього (Фейнман):

$$\begin{aligned} \frac{C_{12}(\Delta)}{\langle C_1 \rangle} &= \frac{\varepsilon_2 D_v}{\rho_p^2} \left[1 - \frac{1 - \exp(-\alpha\Delta)}{\alpha\Delta} \right], \\ \frac{C_{12}(\Delta)}{\langle C_2 \rangle} &= \frac{\varepsilon_1 D_v}{\rho_p^2} \left[1 - \frac{1 - \exp(-\alpha\Delta)}{\alpha\Delta} \right]. \end{aligned} \quad (11.65)$$

§ 11.7. Вимірювання в частотній області

Якщо деяка функція $\varphi(\tau)$ дуже швидко змінюється з часом, то це означає, що її поведінку визначають високі частоти і навпаки. Іноді буває значно простіше виміряти саме частотні залежності поведінки випадкових змінних. Для цього необхідно виконати перетворення Фур'є шуканих функцій.

З цією метою визначають деяку функцію, яку називають спектральною густиною потужності $\phi_{xx}(\omega)$ і визначають як фур'є-перетворення автокореляційної функції

$$\phi_{xx}(\omega) = F(\varphi_{xx}(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (11.66)$$

Умова існування перетворення Фур'є $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{xx}(\tau)| d\tau < \infty$ виконується, оскільки $\varphi_{xx}(\tau) \rightarrow 0, \tau \rightarrow \pm\infty$.

Величини $\phi_{xx}(\omega)$ і $\varphi_{xx}(\tau)$ практично несуть одну і ту ж інформацію про статистичні властивості системи, оскільки перетворення Фур'є є зворотним і $\phi_{xx}(\omega) \rightarrow 0$ $\omega \rightarrow \pm\infty$ (за винятком білого шуму), тобто

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int \phi_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (11.67)$$

Розглянемо деякі спеціальні автокореляційні функції і спектральні густини потужності, оскільки розуміння їх поведінки в простих випадках дає змогу аналізувати більш складні ситуації. Крім того, якщо випадкова величина є сумою незалежних випадкових величин ($x(t) = x_1(t) \dots x_N(t)$), то є справедливим принцип суперпозиції і

$$\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{11}(\tau) + \varphi_{22}(\tau) + \dots + \varphi_{NN}(\tau). \quad (11.68)$$

Аналогічно в частотній області

$$\phi_{xx}(\omega) = \sum_{i=1}^N \phi_{NN}(\omega). \quad (11.69)$$

Отже, розглядаємо деякі прості випадки.

Постійна $x = a$ (рис. 11.2),

$$\varphi_{xx}(\tau) = E(aa) = a^2,$$

$$\phi_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 e^{-i\omega\tau} d\tau = 2\pi a^2 \delta(\omega).$$

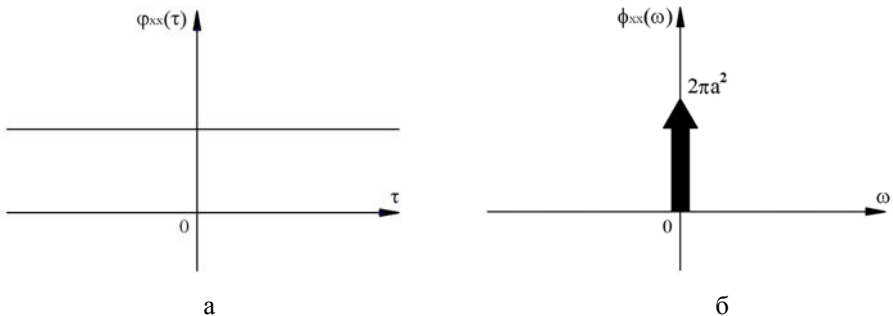


Рис. 11.2. Постійна в часі автокореляційна функція (а) та її фур'є-перетворення або спектральна густина потужності (б).

Синусоїда (рис. 11.3):

$$x(t) = A \sin \omega_0 t,$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau,$$

$$\phi_{xx}(\omega) = \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)].$$

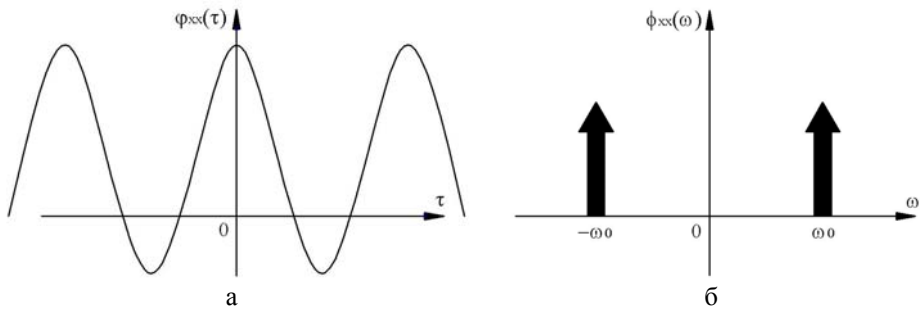


Рис. 11.3. Синусоїдальна автокореляційна функція (а) та її фур'є-перетворення (б).

Білий шум визначається як випадкова величина, що має всюди постійну спектральну густину потужності $\phi_{xx}(\omega) = a$.

Тоді

$$\phi_{xx}(\tau) = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \varepsilon d\tau = a\delta(\tau).$$

Тобто випадкова величина повністю некорельована. Низькочастотний білий шум (рис. 11.4):

$$\phi_{xx}(\omega) = a, \quad |\omega| \leq \omega_0,$$

$$\phi_{xx}(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_0,$$

$$\phi_{xx}(\omega) = \frac{a}{2\pi\tau} \sin \omega_0 \tau = \frac{a\omega_0}{\pi} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau}.$$

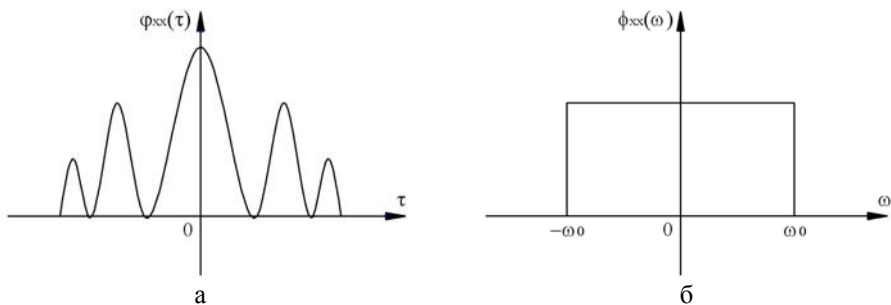


Рис. 11.4. Автокореляційна функція низькочастотного білого шуму (а) та його спектральна густина потужності (б).

Білий шум у заданій смузі частот (рис. 11.5):

$$\phi_{xx}(\omega) = a, \quad \left(\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2} \leq |\omega| \leq \omega_c + \frac{\Delta\omega}{2}\right),$$

$$\phi_{xx}(\omega) = 0, \text{ поза смугою.}$$

Тоді

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int a \cos \omega \tau d\omega = \frac{\Delta\omega}{\pi} \cos \omega_0 \tau \left[\frac{\sin \tau \frac{\Delta\omega}{2}}{\tau \Delta\omega / 2} \right].$$

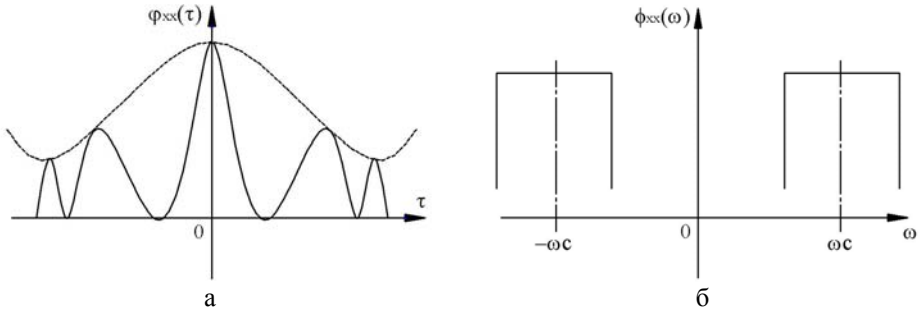


Рис. 11.5. Автокореляційна функція білого шуму в заданій смузі частот (а) та його спектральна густина потужності (б).

Випадковий шум з експоненційною автокореляційною функцією. Більшість змінних мають автокореляційні функції, що спадають із зростанням τ (рис. 11.6).

$$\varphi(\tau) = \sigma^2 \exp(-\beta|\tau|).$$

Стационарні процеси, автокореляційні функції яких експоненційні, називаються марківськими процесами. Для них

$$\phi_{xx}(\omega) = 2\tau^2 \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} \cos \omega \tau d\tau = \frac{2\tau^2 \beta}{\beta^2 + \omega^2}.$$

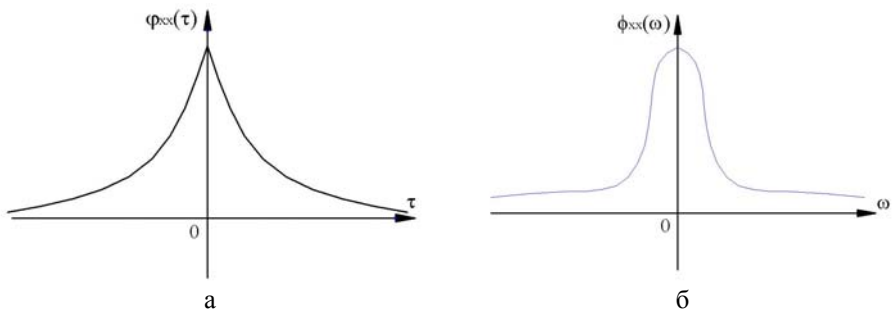


Рис. 11.6. Експоненційна автокореляційна функція (а) та її фур'є-перетворення (б).

Кореляційні функції з урахуванням просторової залежності потоку нейтронів можуть нести значно більше інформації про процеси в реакторах, але отримати їх значно складніше, вони непросто піддаються аналізу, для якого необхідно проводити велику кількість чисельних розрахунків.

§ 11.8. Теорія гілчастих процесів

Для статистичного опису процесів розмноження нейтронів у реакторах природним є застосування теорії гілчастих процесів. У найпростішому випадку такої теорії розглядається тільки один тип частинок (нейтрони) в однорічковому точковому наближенні. У теорії гілчастих процесів припускається, що подальша доля частинки, що існує в даний момент часу, не залежить від її минулого та від інших аналогічних частинок.

Для повного опису еволюції ансамблю частинок необхідно задати ймовірності елементарних процесів народження, перетворення та зникнення частинок за невеликий проміжок часу Δt . Нехай $\lambda_c \Delta t + 0(\Delta t)$ - імовірність зникнення частинки (поглинання або вихід за межі системи); $\lambda_f \Delta t + 0(\Delta t)$ - імовірність поділу ядра даною частинкою; $1 - (\lambda_c + \lambda_f) \Delta t + 0(\Delta t)$ - імовірність відсутності будь-яких змін; π_k - імовірність перетворення частинки в k частинок, якщо відбувся поділ ядра.

Припускається, що $\lambda_c > 0$, $\lambda_f > 0$, $\pi_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$.

Зрозуміло, що введені ймовірності повинні бути зв'язані з відомими величинами, що описують процеси розмноження нейтронів у реакторах. Наприклад, $\lambda_f = \nu \Sigma_f$, де Σ_f - макроекономічний переріз поділу, а ν - середня швидкість нейтрона. Середній час життя нейтрона $l_0 = (\lambda_f + \lambda_c)^{-1}$ і т.п.

Уведемо твірну функцію випадкового процесу перетворення частинок відповідно до введених імовірностей елементарних процесів

$$f(x) = \lambda_c + \lambda_f Y(x) - (\lambda_c + \lambda_f)x, \quad (11.70)$$

де $Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k x^k$ - твірна функція розподілу числа частинок, що виникають

під час поділу ядра. Взагалі $Y(x)$ - це твірна функція розподілу загального числа вторинних нейтронів як миттєвих, так і затриманих в одному акті поділу. У цьому розділі ми не будемо враховувати затримані нейтрони.

Розглянемо ланцюжок поділів, які викликані одним нейтроном, що існував у момент часу $t = 0$. Кількість нейтронів, що існують у момент t і є нащадками початкового нейтрона, позначимо μ_t . Середня кількість нейтронів у момент $t - A(t)$ є математичним очікуванням величини μ_t у момент $t - A(t) = E(\mu_t)$

Розподіл числа нейтронів зручно вивчати за допомогою твірних функцій математичних очікувань

$$F(t, x) = E(x^{\mu_t}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\mu_t = n) x^n, \quad |x| \leq 1, \quad (11.71)$$

де $P(\mu_t = n)$ - імовірність того, що кількість нейтронів у момент t дорівнює n .

Зрозуміло, що величина $A(t)$ легко визначається з функції $F(t, x)$ за допомогою диференціювання по x :

$$A(t) = \left. \frac{\partial}{\partial x} F(t, x) \right|_{x=1}. \quad (11.72)$$

Аналогічно визначаються вищі моменти розподілу.

Використовуючи деякі формули теорії ймовірностей, що стосуються математичних очікувань, а також визначення елементарних імовірностей π_k та λ_i , можна отримати рівняння для функції $F(t, x)$:

$$\frac{dF}{dt} = f(F) \quad F(0, x) = x, \quad (11.73)$$

де $f(x)$ – уведена раніше твірна функція випадкового процесу перетворення частинок.

З рівняння для функції $F(t, x)$ можна отримати рівняння для всіх моментів розподілу кількості частинок у момент часу t . Наприклад, для першого моменту (математичного очікування величини μ_t у момент часу t) маємо

$$\frac{dA}{dt} = aA, \quad A(0) = 1, \quad (11.74)$$

де величина $a = f'(F(t, 1)) = f'(1)$. Фактично ми отримали рівняння точкової моделі реактора. Якщо врахувати, що $a = \lambda_f \bar{v} - (\lambda_c + \lambda_f)$, ввести величину

$$k_{ef} = \frac{\lambda_f \bar{v}}{\lambda_f + \lambda_c},$$

то неважко отримати, що

$$a = \frac{k_{ef} - 1}{l_0}$$

є параметром критичності точкової моделі реактора.

Розв'язок рівняння для математичного очікування A є очевидним - $A = e^{at}$, так що кількість нейтронів у момент t зростає або спадає залежно від знака параметра a : $a < 0$ – система підкритична, $a > 0$ – система надкритична, $a = 0$ – система критична і знаходиться в стаціонарному стані.

Можна також отримати й розв'язати рівняння для другого факторіального моменту

$$B(t) = E(\mu_t(\mu_t - 1)) = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x=1}. \quad (11.75)$$

Якщо покласти $x = 1$ в рівнянні

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = f''(F) \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + f'(F) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad (11.76)$$

отримаємо

$$\frac{dB}{dt} = aB + bA^2, \quad B(0) = 0, \quad (11.77)$$

і

$$B(t) = \begin{cases} \frac{b}{a} e^{at} (e^{at} - 1), & a \neq 0, \\ bt, & a = 0, \end{cases} \quad (11.78)$$

де

$$b \equiv f''(1) = \lambda_f \bar{v}^2 D_v = \nu \Sigma_f \bar{v}^2 D_v.$$

Для дисперсії кількості частинок у момент t отримаємо

$$\sigma_\mu^2 = B + A - A^2,$$

і цей вираз збігається з виразом Фейнмана для дисперсії кількості відліків детектора.

Якщо експериментальний розподіл кількості відліків детектора за деякий проміжок часу є явно асиметричним (а таке може бути для малих проміжків часу), то можна використати рівняння для третього факторіального моменту розподілу для визначення третьої з п'яти невідомих величин, про які ми згадували в методі Россі-альфа. Це рівняння неважко отримати за аналогію з рівняннями для перших двох моментів

$$\frac{dC}{dt} = cA^2 + 3bAB + aC \quad (11.79)$$

з розв'язком

$$C(t) = \left[c - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) \right] A + \frac{B}{2}, \quad (11.80)$$

де $c = \overline{\nu(\nu-1)(\nu-2)}$, а $C(t) = \left. \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right|_{x=1}$.

Принципово можна використовувати також і вищі моменти, але їх важко визначити з експериментальних розподілів.

Таким чином, визначення статистичних характеристик ансамблю нейтронів у реакторі є потужним методом визначення характеристик самого реактора, і цей метод останнім часом досить широко застосовується для вивчення підкритичних систем, таких як підкритичні збірки, сховища відпрацьованого ядерного палива, скупчення ядерно-небезпечних матеріалів (наприклад, в об'єкті «Укриття» над зруйнованим 4-м блоком ЧАЕС).

Звичайно, ті прості вирази, що наведені вище, можна застосовувати тільки в системах невеликих розмірів, близьких до критичного стану, коли можна застосовувати точкову модель реактора. У великих глибоко підкритичних системах для обробки експериментальних даних необхідно застосовувати більш удосконалені теоретичні моделі з урахуванням просторових ефектів, наявності джерела нейтронів, детекторів, іноді необхідно враховувати затримані нейтрони тощо. Деякі з таких моделей можна знайти в [17].

Останнім часом дуже велика увага приділяється підкритичним реакторам, що керовані зовнішнім джерелом нейтронів (так звані ADS – accelerated driven system – системи керовані прискорювачами). Такі реактори мають абсолютну ядерну безпеку, оскільки при будь-яких нештатних ситуаціях зовнішнє джерело нейтронів можна відключити практично миттєво, а сам по собі підкритичний реактор є безпечним, тому що ланцюжки поділів затухають в ньому за час, порівняний з часом життя нейтронів.

Вважається, що підкритичні реактори із зовнішнім джерелом нейтронів мають великі перспективи для сталого розвитку ядерної енергетики, оскільки крім безпосереднього отримання енергії в таких системах можливе «спалювання» радіоактивних відходів із великим часом життя – так звана трансмутація радіоактивних відходів. Тобто трансуранові елементи, які звичайно містяться у відпрацьованому ядерному паливі і які несуть у собі найбільший радіотоксичний ризик, можна за рахунок реакцій поглинання нейтронів та поділу перетворити в елементи з коротким часом життя або навіть у стабільні елементи. Продукти поділу з довгим часом життя (наприклад, ^{129}I) також перетворюються в ізотопи з коротким часом життя.

Необхідними умовами для трансмутації є жорсткий спектр нейтронів у реакторі та достатньо висока густина потоку нейтронів. Перша умова досягається використанням нейтронів, які отримують у реакціях прискорених заряджених частинок з речовиною. Практично всі такі нейтрони мають енергію, значно вищу, ніж середня енергія нейтронів поділу – від 14 MeV в D – T реакції до 300 MeV в реакції протонів з енергією 1 GeV з важкими металами типу свинцю та вісмуту. За умови мінімальної кількості в реакторі матеріалів, що сповільнюють нейтрони, тобто з використанням схеми охолодження, звичайної для реакторів на швидких нейтронах, в підкритичних системах, керованих прискорювачами заряджених частинок, спектр нейтронів буде значно жорсткішим, ніж у звичайних реакторах на швидких нейтронах.

Другу умову – високі потоки нейтронів – виконати значно складніше. Для цього необхідно використовувати прискорювачі з дуже високим струмом заряджених частинок. Крім суто технічних проблем побудови прискорювачів з високим струмом, такі установки виявляються дуже дорогими, так що створення підкритичного реактора, керованого прискорювачем, виявляється в декілька разів дорожче, ніж побудова звичайного реактора такої ж потужності. Саме тому на теперішній час провадяться тільки розрахункові дослідження

таких систем або проектуються (будуються) дослідницькі установки на існуючих прискорювачах.

Розвиток підкритичних реакторів потребує вдосконалення методів вимірювання підкритичних характеристик реактора, оскільки наближення до критичності несе загрозу непередбачуваного розвитку аварійної ситуації. В таких системах було б бажано проводити on-line вимірювання підкритичних характеристик реактора в процесі його роботи. Для використання викладених в цьому розділі методів вимірювання підкритичних характеристик в системах керованих прискорювачами їх необхідно дещо вдосконалити, врахувавши, наприклад, статистичні характеристики нейтронів джерела від прискорювача, який може бути або імпульсним, або неперервним. Іншою складністю таких вимірювань може бути високі потоки нейтронів, так що вимірювання проводяться у струмовому режимі детектора. У свою чергу, флуктуації струму детектора потребують окремого розгляду з точки зору теорії випадкових процесів.

Таким чином, статистичні вимірювання нейтронних характеристик реакторів і в загальному випадку систем, що розмножують нейтрони, можуть мати широке застосування при подальшому розвитку ядерної енергетики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Давыдов А.С.* Атомы. Ядра. Частицы. - К. Наук. думка, 1971. - 216 с.
2. *Кадменский С.Г., Фурман В.И.* Альфа-распад и родственные ядерные реакции. - М.: Энергоиздат, 1985. - 224 с.
3. *Гайтлер В.* Элементарная квантовая механика. - М.: ИЛ, 1948. - 136 с.
4. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. 8. Квантовая механика. - М.: Мир, 1966. - 272 с.
5. *Вейнберг А., Вигнер Е.* Физическая теория ядерных реакторов. - М.: Мир. 1961. - 536 с.
6. *Абагян Л.П. и др.* Групповые константы для расчета реакторов и защиты: Справочник. - М.: Энергоатомиздат, 1981. - 267 с.
7. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. - 734 с.
8. *Мегреблиан Р., Холмс Д.* Теория реакторов. - М.: Атомиздат, 1962. - 560 с.
9. *Марчук Г.И., Лебедев В.И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. - М.: Атомиздат, 1981. - 456 с.
10. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. - М.: Мир, 1985. - 419 с.
11. *Горяченко В.Д.* Методы исследования устойчивости ядерных реакторов. - М.: Энергоатомиздат, 1990. - 536 с.
12. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1978. - 831 с.
13. *Галанин А.Д.* Введение в теорию реакторов на тепловых нейтронах. - М.: Энергоатомиздат, 1990. - 536 с.
14. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. - М.: ИКИ, 2002. - 666 с.
15. *Постников Н.С.* Пространственно-временной хаос в распределенных моделях реактора // Атомная энергия. - 1999.- Т. 86, вып. 6. - С. 450.
16. *Рюель Д.* Случайность и хаос. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 192 с.
17. *Дорогов В.И., Чистяков В.П.* Вероятностные модели превращения частиц. - М.: Наука, 1988. - 112 с.

Наукове видання

Павлович Володимир Миколайович

ФІЗИКА ЯДЕРНИХ РЕАКТОРІВ

Навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Підп. до друку 16.10.09. Формат 70×100¹/₁₆.
Папір офс. Гарнітура Таймс. Друк офс.
Умов. друк. арк. 9,9. Тираж 500 прим. Зам. № 9-127.

Інститут проблем безпеки АЕС НАН України
Київська обл., 07270, м. Чорнобиль, вул. Кірова, 36-а
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2114 від 25.02.2005 р.

ЗАТ "Книга"
04053, Київ-53, вул. Артема, 25
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2325 від 25.10.2005 р.