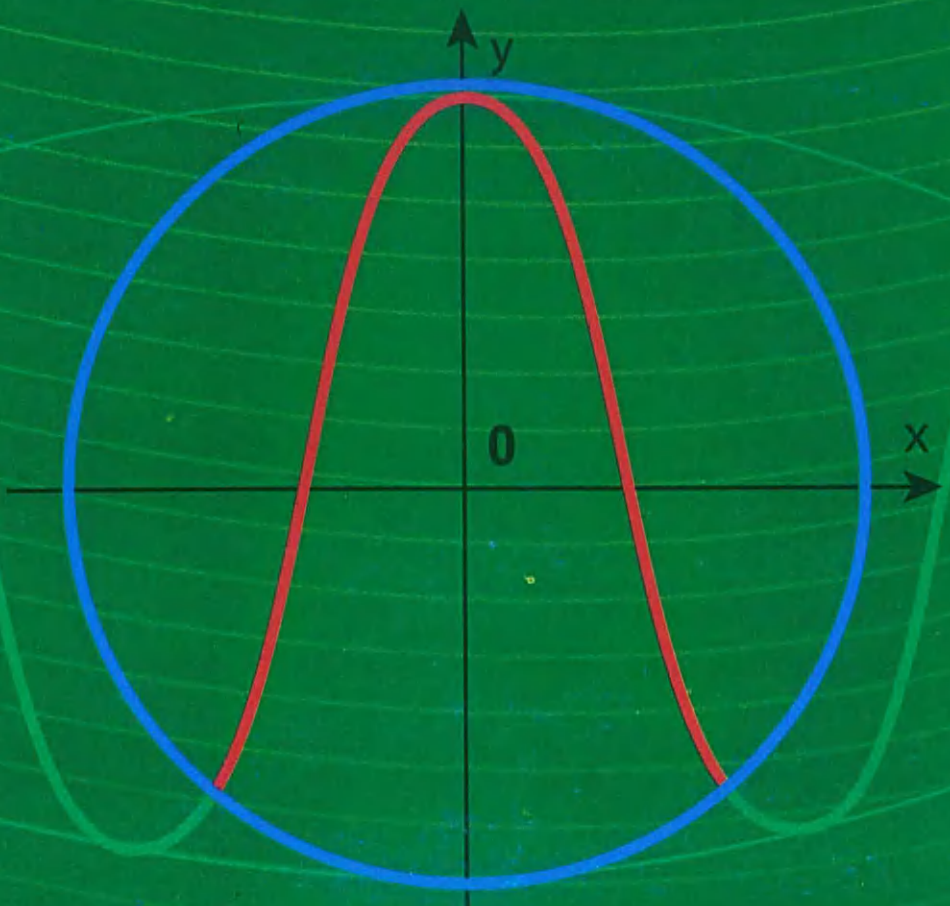
А. П. Єршова
Є. П. Нелін

Алгебра і початки аналізу

Самостійні та контрольні роботи

10 клас



ГІМНАЗІЯ

А. П. Єршова, Є. П. Нелін

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

10 клас

САМОСТІЙНІ ТА КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Академічний рівень,
профільний рівень

Харків
«Гімназія»
2013

УДК 373:512
ББК 22.151я721
Є80

Єршова А. П.

Є80 Алгебра і початки аналізу. 10 кл. : Самостійні та контрольні роботи : навч. посіб. : академ. рівень, профіл. рівень / А. П. Єршова, Є. П. Нелін. — Х. : Гімназія, 2013. — 96 с. : іл.
ISBN 978-966-474-209-9.

Посібник містить самостійні та контрольні роботи до підручників Є. П. Неліна «Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Академічний рівень» і «Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень». Пропоновані роботи складаються із 6 варіантів трьох рівнів складності та призначені для організації диференційованої самостійної роботи учнів.

Навчальний посібник можна також використовувати в комплекті з будь-яким підручником з алгебри і початків аналізу та для самоосвіти, наприклад під час підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.

УДК 373:512
ББК 22.151я721

ISBN 978-966-474-209-9

© А. П. Єршова, Є. П. Нелін, 2013
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, художнє оформлення, 2013

ПЕРЕДМОВА

Пропонований посібник призначений перш за все для вчителів та учнів, які працюють за підручниками Є. П. Неліна «Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Академічний рівень» і «Алгебра і початки аналізу. 10 клас. профільний рівень» (видавництво «Гімназія»), але його можна використовувати в комплекті з будь-яким підручником з алгебри і початків аналізу, наприклад під час підготовки учнів до ЗНО і ДПА.

Основні особливості пропонованого збірника самостійних і контрольних робіт

1. Збірник містить *добірку самостійних і контрольних робіт з усього курсу алгебри і початків аналізу 10 класу* відповідно до чинної програми як академічного, так і профільного рівня.

Контрольні роботи розраховані на один урок, самостійні роботи — на 25–40 хвилин, залежно від теми й рівня підготовки учнів.

2. Збірник дає змогу здійснити диференційований контроль знань, оскільки завдання розподілено за трьома рівнями складності: А, Б і В. Завдання рівня А призначені для учнів, які навчаються за програмою академічного рівня, завдання рівнів Б і В — для учнів, які навчаються за програмою профільного рівня. Завдання рівня В призначені для учнів, які виявляють підвищений інтерес до математики, а також для використання в класах, школах, гімназіях і ліцеях з поглибленим вивченням математики. Для кожного рівня наведено два розташованих поруч рівноцінних варіанти (як їх зазвичай записують на дошці), тому на уроці достатньо однієї книги на парті.

3. До книги включено також домашні самостійні та практичні роботи, що містять творчі, нестандартні задачі з кожної теми, що вивчається, і задачі підвищеної складності. Ці завдання можна в повному обсязі або вибірково пропонувати учням як залікові, а також використовувати як додаткові завдання для проведення контрольних робіт. На розсуд учителя виконання декількох або навіть одного такого завдання може оцінюватися відмінною оцінкою.

Відповіді до контрольних і домашніх самостійних робіт наведено в кінці книги.

При використанні збірника потрібно також ураховувати таке.

По-перше, провести з усім класом усі самостійні роботи з виставлянням оцінок, найімовірніше, не вдасться, та в цьому й немає потреби. Деякі з них можна використовувати як домашні або додаткові завдання з виставлянням оцінок для учнів, які виявляють підвищений інтерес до математики (на уроці або вдома). Самостійні роботи, що належать до певних тем, можна використовувати й під час вивчення інших тем (наприклад, при повторенні вивченого матеріалу через деякий проміжок часу).

По-друге, багато які самостійні роботи і всі контрольні роботи дещо великі за обсягом; передбачається, що вчитель самостійно добере з них частину завдань з урахуванням рівня підготовки учнів із предмета і часу, що відведено на виконання роботи.

Для зручності користування книгою в додатку наведено орієнтовне тематичне планування за підручниками «Є. П. Нелін. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Академічний рівень» і «Є. П. Нелін. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень», що включає можливий розподіл пропонованих самостійних і контрольних робіт.

Наша адреса в Інтернеті: www.gymnasia.com.ua

ФУНКЦІЇ, РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ

С-1. ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

Варіант А1

1 **Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:**

а) $y = 100x - 2011$;

б) $y = \frac{7}{6-2x}$.

2 **Знайдіть область значень функції, заданої формулою:**

$y = 150$.

3 **Дослідіть, якою є дана функція — парною, непарною або ні парною, ні непарною:**

$y = x^7$.

4 **Побудуйте графік функції:**

а) $y = (x+3)^2$;

б) $y = \frac{2}{1-x}$.

Варіант А2

1 **Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:**

а) $y = 2012 - 5x$;

б) $y = \frac{2}{2x-3}$.

2 **Знайдіть область значень функції, заданої формулою:**

$y = -25$.

3 **Дослідіть, якою є дана функція — парною, непарною або ні парною, ні непарною:**

$y = x^6$.

4 **Побудуйте графік функції:**

а) $y = x^2 - 3$;

б) $y = \frac{3}{x+1}$.

Варіант Б1

1 **Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:**

а) $y=\sqrt{27-3x}$;

б) $y=\dfrac{x}{x-x^3}$.

2 **Знайдіть область значень функції, заданої формулою:**

$y=x^2-8$.

3 **Дослідіть, якою є дана функція — парною, непарною або ні парною, ні непарною:**

$y=2x^2-3x^6+2$.

4 **Побудуйте графік функції:**

а) $y=(x+1)^2+3$;

б) $y=\left|\dfrac{1}{x-1}\right|$.

Варіант Б2

1 **Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:**

а) $y=\dfrac{2}{\sqrt{6x-12}}$;

б) $y=\dfrac{x-1}{x^2-x}$.

2 **Знайдіть область значень функції, заданої формулою:**

$y=2-x^2$.

3 **Дослідіть, якою є дана функція — парною, непарною або ні парною, ні непарною:**

$y=3x^3+2x^5$.

4 **Побудуйте графік функції:**

а) $y=4-(x-1)^2$;

б) $y=\dfrac{1}{|x|+1}$.

Варіант В1

1 **Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:**

а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}$;

б) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{|x|-4}$.

Варіант В2

1 **Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:**

а) $y=\dfrac{\sqrt{8+6x+x^2}}{x+4}$;

б) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{7-|x|}$.

❷

Знайдіть область значень функції, заданої формулою:

$y=|x|-12.$ $y=10+|x|.$

❸

Дослідіть, якою є дана функція — парною, непарною або ні парною, ні непарною:

$y=2x^3|x|-3x.$ $y=4x^4-2|x|x^2.$

❹

Побудуйте графіки функції і відповідності:

а) $y=\left|(x-2)^2-1\right|;$ а) $y=\left|(x-1)^2-4\right|;$

б) $|y|=\sqrt{2-|x|}.$ б) $|y|=2-\sqrt{|x|}.$

С-2. РІВНЯННЯ

Варіант Б1

❶

Знайдіть область допустимих значень (ОДЗ) рівняння:

а) $x^2-8x^3=0;$

б) $\frac{2x}{x+3}=\frac{1}{2-x};$

в) $\sqrt{4-x}=5.$

❷

Чи є рівносильними (на R) дані рівняння (відповідь обґрунтуйте):

а) $x^2=4$ і $(x-2)(x+2)=0;$

б) $x+1=0$ і $x+\sqrt{x}=\sqrt{x}-1?$

Варіант Б2

❶

Знайдіть область допустимих значень (ОДЗ) рівняння:

а) $x^4-16=0;$

б) $\frac{7}{x-13}+\frac{1}{5+x}=0;$

в) $\sqrt{x-6}-2=0.$

❷

Чи є рівносильними (на R) дані рівняння (відповідь обґрунтуйте):

а) $x^2=9$ і $3x=9;$

б) $x^2=x$ і $x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}=x+\frac{1}{\sqrt{x}}?$

3

За якої умови рівняння є рівносильними:

$f(x)=g(x)$ і $f(x)+\frac{1}{\sqrt{h(x)}}=g(x)+\frac{1}{\sqrt{h(x)}}$?

$f(x)=g(x)$ і $f(x)+\sqrt{h(x)}=g(x)+\sqrt{h(x)}$?

4

Розв'яжіть рівняння за допомогою рівнянь-наслідків і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильности:

$x^2-5x+\sqrt{x-3}=6+\sqrt{x-3}$.

$x^2+3x+\sqrt{x+2}=18+\sqrt{x+2}$.

5

Чи може відбутися втрата коренів або поява сторонніх коренів, якщо рівняння

$(x+5)f(x)=6x+30$ замінити рівнянням $f(x)=6$? Відповідь обґрунтуйте.

$\frac{f(x)}{x+5}=\frac{6}{x+5}$ замінити рівнянням $f(x)=6$? Відповідь обґрунтуйте.

Варіант В1

1

Знайдіть область допустимих значень (ОДЗ) рівняння:

а) $x^2-8x^3+\frac{5}{x^2+x+2}=0$;

б) $\frac{7}{x-3}+\frac{x}{\sqrt{x-2}}=5$;

в) $\sqrt{x^2-4x-32}-\frac{2}{x+4}=0$.

2

Чи є рівносильними дані рівняння (відповідь обґрунтуйте):

а) $(x-2)(x+2)=0$ і $(x-2)\sqrt{x+2}=0$;

Варіант В2

1

Знайдіть область допустимих значень (ОДЗ) рівняння:

а) $x^4-16-\frac{x}{x^2-x+2}=0$;

б) $\frac{\sqrt{x}}{x-4}-\frac{15}{x+3}=1$;

в) $\sqrt{3+2x-x^2}-\frac{3}{\sqrt{x+1}}=0$.

2

Чи є рівносильними дані рівняння (відповідь обґрунтуйте):

а) $(x-3)(x+3)=0$ і $(x+3)\sqrt{x-3}=0$;

б) $\sqrt{x+1}=5-x$ і $x+1=(5-x)^2$?

б) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-5}=0$ і $\sqrt{(x-1)(x-5)}=0$?

3

За якої умови рівняння є рівносильними:

$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ і $\sqrt{f(x)\cdot h(x)}=\sqrt{g(x)\cdot h(x)}$?

$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ і $\sqrt{\frac{f(x)}{h(x)}}=\sqrt{\frac{g(x)}{h(x)}}$?

4

Розв'яжіть рівняння за допомогою рівнянь-наслідків і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильности:

$\sqrt{x^2+3x-10}=\sqrt{x-2}$.

$\sqrt{9-x}=7-x$.

5

Чи може відбутися втрата коренів або поява сторонніх коренів, якщо

рівняння $\sqrt{x+2}\cdot f(x)=2\sqrt{x+2}$ замінити рівнянням $f(x)=2$? Відповідь обґрунтуйте.

рівняння $f(x)\cdot\sqrt{x-2}=7\sqrt{x-2}$ замінити рівнянням $f(x)=7$? Відповідь обґрунтуйте.

С-3. ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

Варіант А1

Варіант А2

1

Розв'яжіть рівняння, використовуючи в розв'язуванні вказаний метод:
— оцінка ОДЗ рівняння:

а) $x^2+100+\sqrt{x-5}=\sqrt{25-5x}+x^3$;

а) $\sqrt{7-x}-4x=x^2-77+\sqrt{3x-21}$;

— оцінка лівої та правої частин рівняння:

б) $\sqrt{x^6+9}=3-x^2$;

б) $\sqrt{x^4+1}=1-|x|$;

— рівність нулю суми декількох невід'ємних функцій:

в) $|x^2-x|+|1-x|+|x^2-2x+1|=0$;

в) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-4x+x^2}+\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+2}}=0$;

— використання зростання і спадання функцій:

г) $2x+x^3+x^5=4$.

г) $x^5+\sqrt{x}+2x^7=4$.

Варіант Б1

Варіант Б2

1

Розв'яжіть рівняння, використовуючи в розв'язуванні вказаний метод:

— оцінка ОДЗ рівняння:

а) $\sqrt{x^2-4}+x^2-1=$
$=\sqrt{20-5x^2}+\sqrt{x^2+5}$;

а) $\sqrt{7-x^2}+\sqrt{2+x^2}=$
$=\sqrt{2x^2-14}+10-x^2$;

— оцінка лівої та правої частин рівняння:

б) $\sqrt{4-x^2}=2+|5x^2-x|$;

б) $5-|x-1|=\sqrt{(1-x)^2+25}$;

— рівність нулю суми декількох невід'ємних функцій:

в) $|x^2-2x-3|+\sqrt{x^2-4x+3}+$
$+(x^2-9)^4=0$;

в) $\sqrt{x^2-x-2}+(4-x^2)^6+$
$+|x^2-3x+2|=0$;

— використання зростання і спадання функцій:

г) $\sqrt{7-x}+\sqrt{12-x}=5$.

г) $x^5+\sqrt{x-1}=33$.

Варіант В1

Варіант В2

1

Розв'яжіть рівняння, використовуючи в розв'язуванні вказаний метод:

— оцінка ОДЗ рівняння:

а) $\sqrt{x^4-1}+3(y+1)=\sqrt{1-x^8}+$
$+\sqrt{8+x^2}-\sqrt{x^2+y^2-4y+3};$

а) $\sqrt{4-y^2}+\sqrt{y-1}+2x-y+1=$
$=\sqrt{y^4-16}+\sqrt{x^2+2x+y-1};$

— оцінка лівої та правої частин рівняння:

б) $\sqrt{x^2+2x+5}=1-2x-x^2;$

б) $\sqrt{x^2-4x+13}=4x-x^2-1;$

— рівність нулю суми декількох невід'ємних функцій:

в) $x^2+y^2=10y-2x-26;$

в) $x^2+y^2+13+|x-2|=4x-6y;$

— використання зростання і спадання функцій:

г) $\sqrt{3x-2}+|x|=6-x.$

г) $\sqrt{4-x}+\frac{3}{x}=\sqrt{2x-2}.$

С-4. НЕРІВНОСТІ. МЕТОД ІНТЕРВАЛІВ

Варіант А1

Варіант А2

1

Розв'яжіть нерівність:

а) $(x^2-4)(x-3)>0;$

а) $(x^2-4x)(x+4)<0;$

б) $\frac{x^2-2x+1}{6+x-x^2}\leqslant 0;$

б) $\frac{4x-x^2-4}{4x-x^2-3}\geqslant 0;$

в) $\frac{x^2+2x}{x-3}\geqslant\frac{8}{x-3}.$

в) $\frac{x^2-2x}{x-4}\leqslant\frac{15}{x-4}.$

2

Знайдіть область визначення функції:

$y=\sqrt{x-\frac{16}{x}}$.

$y=\sqrt{\frac{4}{x}-x}$.

Варіант Б1

1

Розв'яжіть нерівність:

а) $(5x^2-5x)(x^2+2x-3)>0$;

б) $\frac{x^3+2x^2-3x}{x^2-3x+2}\leqslant 0$;

в) $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-1}\leqslant 2$.

2

Знайдіть область визначення функції:

$y=\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}$.

Варіант Б2

1

Розв'яжіть нерівність:

а) $(x^2-1)(x^2-5x+4)<0$;

б) $\frac{x^3-3x^2-4x}{x^2+3x+2}\geqslant 0$;

в) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\geqslant -2$.

2

Знайдіть область визначення функції:

$y=\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{4}}$.

Варіант В1

1

Розв'яжіть нерівність:

а) $(x^3+x^2)(x^2-14x+49)\leqslant 0$;

б) $\frac{(x^2-2x-3)(x^2+4x+4)}{(x^2+2x-3)(x^2-8x+16)}\geqslant 0$;

в) $(x^2-3x-3)(x^2-3x+1)<5$.

2

Знайдіть область визначення функції:

$y=\sqrt{\frac{3}{3x^2+4-x^4}}$.

Варіант В2

1

Розв'яжіть нерівність:

а) $(x^2-1)(x^2-3x-4)(x-4)\geqslant 0$;

б) $\frac{(x^2+x-2)(x^2-6x+9)}{(x^2-x-2)(4x^2+12x+9)}\leqslant 0$;

в) $(x^2+2x-5)(x^2+2x-6)\leqslant 6$.

2

Знайдіть область визначення функції:

$y=\sqrt{\frac{5}{5x^2-4-x^4}}$.

С-5. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ, ЩО МІСТЯТЬ ЗНАК МОДУЛЯ

Варіант А1

1

Розкрийте знак модуля:

а) $|\sqrt{5}-2|$;

б) $|3-\pi|$;

в) $|1+x^2|$;

г) $|-\sqrt{x}-x^8|$.

2

Розв'яжіть рівняння:

а) $|2x-3|=5$;

б) $|x^2-4|=x^2-4$;

в) $|x^2+x|=|3x+3|$;

г) $x^2-|x|-2=0$.

3

Розв'яжіть нерівність:

а) $|x-2|\leqslant 2$;

б) $\left|2+\frac{1}{x}\right|>-3$;

в) $|x^2-9|>16$;

г) $|2-x|\leqslant x$.

Варіант А2

1

Розкрийте знак модуля:

а) $|1-\sqrt{2}|$;

б) $|4-\pi|$;

в) $|-x^4-2|$;

г) $|x^2+\sqrt[4]{x}|$.

2

Розв'яжіть рівняння:

а) $|2x+4|=6$;

б) $|x^2-1|=1-x^2$;

в) $|x^2-x|=|2x-2|$;

г) $x^2+|x|-6=0$.

3

Розв'яжіть нерівність:

а) $|x+1|\leqslant 1$;

б) $\left|1+\frac{1}{x-1}\right|>-1$;

в) $|x^2-4|>12$;

г) $|4-x|\leqslant x$.

Варіант Б1

1

Розкрийте знак модуля:

а) $|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}|$;

б) $|2^{20}-3^{20}|$;

Варіант Б2

1

Розкрийте знак модуля:

а) $|3\sqrt{5}-5\sqrt{3}|$;

б) $|3^{20}-4^{30}|$;

в) $\left|-x^2+2x-2\right|$;

г) $\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right|$.

в) $\left|x^2+6x-10\right|$;

г) $\left|\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right|$.

❷

Розв'яжіть рівняння:

а) $\left|x^2+x\right|=2$;

б) $\left|x-1\right|=3x+5$;

в) $x^2-4\dfrac{x+2}{\left|x+2\right|}=0$;

г) $x^2-6x+\left|x-4\right|+8=0$.

а) $\left|x^2-x\right|=6$;

б) $\left|x+1\right|=2x+8$;

в) $x^2+\dfrac{\left|x-1\right|}{x-1}=0$;

г) $x^2+4x+\left|x+3\right|+3=0$.

❸

Розв'яжіть нерівність:

а) $\left|\sqrt{x+1}-1\right|>-2$;

б) $\left|4x+1\right|\geqslant 3$;

в) $\left|x^2-4\right|\leqslant 3x$;

г) $\left|x+1\right|<\left|x-3\right|$.

а) $\left|4-\sqrt{x-2}\right|>-5$;

б) $\left|4x-3\right|\leqslant 1$;

в) $\left|x^2-2x\right|\geqslant x$;

г) $\left|x+2\right|<\left|x-4\right|$.

Варіант В1

❶

Розкрийте знак модуля:

а) $\left|3\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right|$;

б) $\left|2^{30}-3^{20}\right|$;

в) $\left|2-x^2-\dfrac{1}{x^2}\right|$;

г) $\left|x^6+3-2x^3\right|$.

❷

Розв'яжіть рівняння:

а) $\left|\left|x-2\right|-1\right|=1$;

б) $\left|x^2+x-3\right|=x$;

Варіант В2

а) $\left|2\sqrt{10}-3\sqrt{5}\right|$;

б) $\left|3^{30}-4^{20}\right|$;

в) $\left|\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2\right|$;

г) $\left|4x^5-x^{10}-5\right|$.

Розв'яжіть рівняння:

а) $\left|\left|x+1\right|-3\right|=3$;

б) $\left|x^2-x-8\right|=-x$;

в) $\sqrt{9-x^2}=-|x^2+4x+3|$;

г) $|x|+|x-2|=4$.

в) $\sqrt{25-x^2}=-|x^2+2x-15|$;

г) $|x-1|+|x+1|=4$.

❸

Розв'яжіть нерівність:

а) $|x^2+3x|\geqslant 2-x^2$;

б) $|x^2-2x|\leqslant x$;

в) $|x^2+x-2|>|x+2|$;

г) $\left|\frac{\sqrt{x+3}-1}{x^2-1}\right|>0$.

а) $|x^2-2x|\geqslant 12-x^2$;

б) $|x^2+2x|\leqslant 4x$;

в) $|2x^2+x-1|>|x+1|$;

г) $\left|\frac{\sqrt{x+5}-2}{4-x^2}\right|>0$.

С-6. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ, РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

Варіант Б1

❶

Побудуйте ескіз графіка функції:

$y=x+\sqrt{x}$.

❷

Побудуйте графік рівняння:

$|y|=2x+4$.

❸

Побудуйте графік нерівності:

$y\geqslant x^2-4x+3$.

❹

Покажіть штрихуванням на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють систему:

$\begin{cases}x+y>0;\\ x^2-y\leqslant 0.\end{cases}$

Варіант Б2

❶

Побудуйте ескіз графіка функції:

$y=x^3+x$.

❷

Побудуйте графік рівняння:

$|y|=\frac{1}{2}x-1$.

❸

Побудуйте графік нерівності:

$y<x^2-3x-4$.

❹

Покажіть штрихуванням на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють систему:

$\begin{cases}x-y\geqslant 0;\\ x^2+y<0.\end{cases}$

Варіант В1

1 Побудуйте ескіз графіка функції:

$y = x - 1 + \frac{1}{x-1}$.

2 Побудуйте графік рівняння:

$|y| = x^2 - 4x + 7$.

3 Побудуйте графік нерівності:

$y > \frac{2}{|x|}$.

4 Покажіть штрихуванням на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9; \\ y > x^2 - 4; \\ y - 2 \leqslant 0. \end{cases}$$

Варіант В2

1 Побудуйте ескіз графіка функції:

$y = x + 2 + \frac{1}{x+2}$.

2 Побудуйте графік рівняння:

$|y| = x^2 + 6x + 8$.

3 Побудуйте графік нерівності:

$y < -\frac{1}{|x|}$.

4 Покажіть штрихуванням на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 4; \\ y \leqslant 5 - x^2; \\ y + 2 > 0. \end{cases}$$

С-7. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРАМИ

Варіант Б1

1 Розв'яжіть рівняння зі змінною x:

$5ax - a = 3ax + 2$.

2 Розв'яжіть нерівність зі змінною x:

$4x + 3a > 6 - ax$.

Варіант Б2

1 Розв'яжіть рівняння зі змінною x:

$3x - 2a = ax - 4$.

2 Розв'яжіть нерівність зі змінною x:

$2ax - 3 < a - x$.

❸

Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння має єдиний корінь:

$\dfrac{(x-2a)(x+4a)}{x+8}=0.$ $\dfrac{(x-3a)(x+6a)}{x-18}=0.$

Варіант В1

Варіант В2

❶

Розв'яжіть рівняння зі змінною x:

$|x-a-2|+|x|=3.$ $|x|+|x+a-1|=2.$

❷

Розв'яжіть нерівність зі змінною x:

$(x-a)(x-2a)^2\leqslant 0.$ $(x-a)^2(x-2a)\geqslant 0.$

❸

При яких значеннях параметра a рівняння має точно три різних корені:

$x^4+(a+2)x^2+a^2+3a=0?$ $x^4+(a-3)x^2+a^2-5a=0?$

К-1 (КП-1). ФУНКЦІЇ, РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ

Варіант А1

Варіант А2

❶

Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\sqrt{2x-4};$ а) $y=\sqrt{10-5x};$

б) $y=\dfrac{x^2-4}{x+5}.$ б) $y=\dfrac{2x^2-1}{x+3}.$

❷

Побудуйте графік функції:

а) $y=\sqrt{x-4};$ а) $y=\sqrt{x}-4;$

б) $y=|x|+3.$ б) $y=|x+3|.$

3

Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x^2-1}{x^3+1}=0$;

б) $|3x-6|=-4$.

а) $\frac{x^2-4}{x^3-8}=0$;

б) $|4-2x|=0$.

4

Розв'яжіть нерівність:

а) $(x-2)(x+3)(x-5)^2 \geqslant 0$;

б) $|x-1|<2$.

а) $(x+9)(x-4)^4(x-2) \leqslant 0$;

б) $|x+1|<3$.

5

а) Підберіть корінь рівняння:

$x+x^3=10$.

$x^3+x^5=2$.

Доведіть, що інших коренів це рівняння не має;

б) побудуйте графік нерівності:

$x+y \geqslant 0$.

$x-y \leqslant 0$.

Варіант Б1

1

а) Знайдіть область визначення функції:

$y=\frac{\sqrt{x}-x}{x^2-x}$;

б) знайдіть область значень функції:

$y=x^2-6$.

2

Побудуйте графік функції:

а) $y=\sqrt{x+2}-3$;

б) $y=|x^2-4|$.

3

Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=0$;

Варіант Б2

1

а) Знайдіть область визначення функції:

$y=\frac{\sqrt{2x}+x}{x^2-2x}$;

б) знайдіть область значень функції:

$y=x^2+3$.

2

Побудуйте графік функції:

а) $y=3-\sqrt{x-2}$;

б) $y=|x^2-9|$.

3

Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x^2+x-6}{x^2-9}=0$;

б) $|\sqrt{x}-5|=3$.

б) $|4-\sqrt{x}|=1$.

4

Розв'яжіть нерівність:

а) $\dfrac{x+5}{(x-7)(x+1)^2}\leqslant 0$;

б) $|2x-3|>5$.

а) $\dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x+3)}\geqslant 0$;

б) $|2x+1|\geqslant 3$.

5

а) Розв'яжіть рівняння:

$x^2+\sqrt{x^2-x}=0$;

$(x-1)^2+\sqrt{x^2+x-2}=0$;

б) побудуйте графік нерівності:

$x^2+y\geqslant 0$.

$x^2-y\leqslant 0$.

Варіант В1

Варіант В2

1

а) Знайдіть область визначення функції:

$y=\dfrac{\sqrt{2x+8}}{\sqrt{x}-2}$;

$y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}-3}$;

б) знайдіть область значень функції:

$y=\dfrac{6x+5}{2x-1}$.

$y=\dfrac{4x-3}{2x+1}$.

2

а) Побудуйте графік функції:

$y=|\sqrt{x-1}-3|$;

$y=|2-\sqrt{x+1}|$;

б) побудуйте графік рівняння:

$|y|=x^2-1$.

$|y|=4-x^2$.

3

Розв'яжіть рівняння:

а) $\dfrac{x^3-16x}{2\sqrt{x}+x}=0$;

б) $\sqrt{x-5}=\sqrt{3-x}+x^2$.

а) $\dfrac{x^4-81x^2}{x+3\sqrt{x}}=0$;

б) $\sqrt{x-5}-\sqrt{8-2x}=x^3$.

4

Розв'яжіть нерівність:

а) $\dfrac{x^2-x}{(x-3)(x-1)^3} \leqslant 0$;

б) $|2x-5|<7$.

а) $\dfrac{(x-3)^5(x+1)}{x^2-3x} \geqslant 0$;

б) $|2x+3|>5$.

5

а) Розв'яжіть рівняння:

$x+\sqrt{x}+x^3=3$;

$\sqrt{x}+x^5+2x=4$;

б) побудуйте графік нерівності:

$(x-2)^2+y^2 \leqslant 9$.

$x^2+(y-1)^2 \geqslant 4$.

С-8. МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Варіант Б1

1

Доведіть за допомогою методу математичної індукції, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність:

$1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\cdots+n(2n+1)=\dfrac{n(4n^2+9n+5)}{6}$.

2

Доведіть за допомогою методу математичної індукції, що вираз

$10^n+18n-28$ ділиться на 27 при будь-якому натуральному n.

3

Доведіть за допомогою методу математичної індукції, що при будь-якому натуральному n справедлива нерівність:

$5^n \geqslant 7n-3$.

Варіант Б2

1

Доведіть за допомогою методу математичної індукції, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність:

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2

Доведіть за допомогою методу математичної індукції, що вираз

$9^{n+1}-18n-9$ ділиться на 18 при будь-якому натуральному n.

3

Доведіть за допомогою методу математичної індукції, що при будь-якому натуральному n справедлива нерівність:

$2^n \geqslant n+1$.

Варіант В1

Варіант В2

❶

Доведіть за допомогою методу математичної індукції, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n^2}{2n+1}.$$

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n\cdot(n+1)}{2(2n+1)}.$$

❷

Доведіть за допомогою методу математичної індукції, що вираз

$6^{2n}+19^n-2^{n+1}$ ділиться на 17 при будь-якому натуральному n.

$6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ ділиться на 11 при будь-якому натуральному n.

❸

Доведіть за допомогою методу математичної індукції, що при будь-якому натуральному n справедлива нерівність:

$3^n \geqslant 2^n+n$.

$4^n \geqslant 3^n+n^2$.

С-9. МНОГОЧЛЕНИ. ТЕОРЕМА БЕЗУ. СХЕМА ГОРНЕРА. ФОРМУЛИ ВІЄТА

Варіант Б1

Варіант Б2

❶

Виконайте ділення многочлена на многочлен з остачею:

$2x^3-3x^2+4x-1$ на $x-2$.

$2x^3-3x^2+x-2$ на $x-3$.

❷

Перевірте справедливість формул Вієта для многочлена:

$x^3-3x^2-4x+12$.

$x^3+2x^2-9x-18$.

3 **Використовуючи схему Горнера, перевірте, чи є**

числа 1 і -2 коренями многочлена $x^3 + x^2 - 3x - 2$.

числа -1 і 2 коренями многочлена $x^3 - x^2 - 5x - 3$.

4 **Знайдіть цілі корені многочлена:**

$x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12$.

$x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x - 8$.

Варіант В1

1 **Виконайте ділення многочлена на многочлен з остачею:**

$2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 4$ на $x^2 - 2x - 1$.

2 **Складіть кубічний многочлен з коефіцієнтом 2 при старшому члені, який має**

корінь 1 кратності 2 і корінь -3.

3 **Використовуючи схему Горнера, перевірте, чи є**

числа -2 і $\frac{1}{3}$ коренями многочлена $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$.

4 **Знайдіть раціональні корені многочлена:**

$6x^4 + x^3 + 4x^2 + x - 2$.

Варіант В2

1 **Виконайте ділення многочлена на многочлен з остачею:**

$3x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$ на $x^2 + 2x - 1$.

2 **Складіть кубічний многочлен з коефіцієнтом 2 при старшому члені, який має**

корінь -1 кратності 2 і корінь 4.

3 **Використовуючи схему Горнера, перевірте, чи є**

числа 2 і $\frac{2}{3}$ коренями многочлена $3x^3 + x^2 - 5x + 2$.

4 **Знайдіть раціональні корені многочлена:**

$6x^4 + x^3 + 11x^2 + 2x - 2$.

(КП-2). МНОГОЧЛЕНИ ТА ЇХНІ КОРЕНІ. МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Варіант Б1

1 **Виконайте ділення многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$, якщо**

$A(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1,$
$B(x) = x^2 + x - 1.$

2 **Знайдіть цілі корені многочлена:**

$x^3 - 3x^2 - 10x + 24.$

3 **Многочлен $f(x)$ при діленні на двочлени $x - 1$ і $x + 1$**

дає остачу -4 і 4 відповідно.

Знайдіть остачу від ділення многочлена $f(x)$ на $x^2 - 1$.

4 **Доведіть за допомогою методу математичної індукції, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність:**

$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2.$

5 **Знайдіть значення a і b такі, щоб**

число 2 було коренем не менш ніж другої кратності для многочлена $x^3 - 5x^2 + ax + b$.

Варіант Б2

1 **Виконайте ділення многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$, якщо**

$A(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 + 2x + 1,$
$B(x) = x^2 - x + 1.$

2 **Знайдіть цілі корені многочлена:**

$x^3 - 5x^2 - 2x + 24.$

3 **Многочлен $f(x)$ при діленні на двочлени $x - 1$ і $x + 1$**

дає остачу 2 і -6 відповідно.

Знайдіть остачу від ділення многочлена $f(x)$ на $x^2 - 1$.

4 **Доведіть за допомогою методу математичної індукції, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність:**

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$

5 **Знайдіть значення a і b такі, щоб**

число 4 було коренем не менш ніж другої кратності для многочлена $x^3 - 7x^2 + ax + b$.

Варіант В1

1 Знайдіть неповну частку та остачу від ділення многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$, якщо

$A(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1$,
$B(x) = x^2 - x - 1$.

2 Знайдіть цілі корені многочлена:

$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$.

3 Многочлен $f(x)$ при діленні на двочлени $x + 2$, $x + 1$ і $x - 1$ дає остачі -1, 4 і 2 відповідно.

Знайдіть остачу від ділення многочлена $f(x)$ на $(x + 2)(x + 1)(x - 1)$.

4 Доведіть за допомогою методу математичної індукції, що вираз ділиться на 19 при будь-якому натуральному n:

$7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$.

5 Знайдіть значення a і b, якщо многочлен $ax^4 + bx^3 + 1$ ділиться на $(x - 1)^2$ без остачі.

Варіант В2

1 Знайдіть неповну частку та остачу від ділення многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$, якщо

$A(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$,
$B(x) = x^2 + x - 1$.

2 Знайдіть цілі корені многочлена:

$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$.

3 Многочлен $f(x)$ при діленні на двочлени $x + 2$, $x + 1$ і $x - 1$ дає остачі 4, -1 і 1 відповідно.

Знайдіть остачу від ділення многочлена $f(x)$ на $(x + 2)(x + 1)(x - 1)$.

4 Доведіть за допомогою методу математичної індукції, що вираз ділиться на 19 при будь-якому натуральному n:

$5^{2n+1} + 3^{n-2}2^{n-1}$.

5 Знайдіть значення a і b, якщо многочлен $ax^4 + bx^3 + 1$ ділиться на $(x + 1)^2$ без остачі.

СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

С-10. КОРІНЬ n-ГО СТЕПЕНЯ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Варіант А1

1

Обчисліть:

а) $\sqrt[3]{-3}\cdot\sqrt[3]{9}+\sqrt[4]{(-2)^4}$;

б) $\sqrt[7]{5-\sqrt{26}}\cdot\sqrt[7]{5+\sqrt{26}}$.

2

Позбудьтесь ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

3

Спростіть вираз:

а) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}+\sqrt[18]{a^3}$;

б) $6a\sqrt[4]{a^5}:\left(3\sqrt[4]{a}\right)$.

4

а) Винесіть множник із-під знака кореня ($x>0$, $y>0$):

$\sqrt[4]{81x^5y^9}$;

б) внесіть множник під знак кореня ($x>0$):

$2x\sqrt[5]{x}$.

Варіант А2

1

Обчисліть:

а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{-4}+\sqrt[6]{(-3)^6}$;

б) $\sqrt[9]{6+\sqrt{35}}\cdot\sqrt[9]{6-\sqrt{35}}$.

2

Позбудьтесь ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\frac{5}{\sqrt[5]{5}}$;

б) $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$.

3

Спростіть вираз:

а) $\sqrt[20]{a^2}-\sqrt[5]{\sqrt{a}}$;

б) $2a\sqrt[3]{a^4}\cdot 3\sqrt[3]{a^2}$.

4

а) Винесіть множник із-під знака кореня ($x>0$, $y>0$):

$\sqrt{25x^3y^7}$;

б) внесіть множник під знак кореня ($x>0$):

$4x^2\sqrt[3]{x}$.

5

Спростіть вираз і знайдіть його значення при $a = 3$:

$\sqrt{\left(2+\sqrt{a}\right)^2-8\sqrt{a}}$.

$\sqrt{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(1+\sqrt{a}\right)-2\left(\sqrt{a}-1\right)}$.

Варіант Б1

1

Обчисліть:

а) $\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}+\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{2}$;

б) $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

2

Позбудьтесь ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\dfrac{a+\sqrt{3}}{a-\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{a-1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}$.

3

Спростіть вираз:

а) $\sqrt{\sqrt[9]{a^6}}+\dfrac{2a}{\sqrt[3]{a^2}}$;

б) $\sqrt{2a^3}\cdot\sqrt[3]{2a}:\sqrt[6]{32a^{12}}$.

4

а) Винесіть множник із-під знака кореня:

$\sqrt[4]{32x^5y^{10}}$;

б) внесіть множник під знак кореня:

$-2ab^2\sqrt[6]{\dfrac{1}{16a^5b^{10}}}$.

5

Спростіть вираз і знайдіть його значення при $a = 0{,}8$:

$\sqrt{\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+2}\right)\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-2}\right)(a-4)+a}$.

Варіант Б2

1

Обчисліть:

а) $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[10]{3}+\sqrt[5]{-3\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{1+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}$.

2

Позбудьтесь ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\dfrac{\sqrt{2}-b}{\sqrt{2}+b}$;

б) $\dfrac{a+1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}$.

3

Спростіть вираз:

а) $\sqrt{\sqrt[10]{a^4}}-\dfrac{3a}{\sqrt[5]{a^4}}$;

б) $\sqrt[6]{27a^5}\cdot\sqrt[4]{9a}:\sqrt{9a^2}$.

4

а) Винесіть множник із-під знака кореня:

$\sqrt[3]{81x^4y^{10}}$;

б) внесіть множник під знак кореня:

$-\dfrac{1}{3a^2b}\sqrt[4]{243a^{10}b^5}$.

5

Спростіть вираз і знайдіть його значення при $a = 0{,}8$:

$\sqrt{\dfrac{a\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}-\sqrt{a}}+\sqrt{a}$.

Варіант В1

1

Обчисліть:

а) $\sqrt{3+\sqrt[4]{(-8)^2}}-\sqrt{3-\sqrt[4]{(-8)^2}}$;

б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{4+2\sqrt{3}}}$.

2

Позбудьтесь ірраціональності в чисельнику дробу та порівняйте дріб з нулем:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[6]{12}}{2}$;

б) $\dfrac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

3

Спростіть вираз:

а) $\sqrt[4]{8a}\cdot 9\sqrt[4]{12a^5}:\left(3\sqrt[4]{6a^2}\right)$;

б) $\sqrt[3]{2a\sqrt[4]{\dfrac{1}{a}}-\dfrac{a\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}}$.

4

а) Винесіть множник із-під знака кореня (n — натуральне число):

$\sqrt[n+1]{2^{n+3}\cdot a^{n^2-1}\cdot b^{3n+1}}$,

якщо $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$;

б) внесіть множник під знак кореня:

$0{,}5ab\sqrt[4]{-16ab^2}$.

5

Спростіть вираз і знайдіть його значення при $a=6$:

$\sqrt{a+4\sqrt{a-4}}-\sqrt{a-4\sqrt{a-4}}$.

Варіант В2

1

Обчисліть:

а) $\sqrt{4+\sqrt[8]{(-15)^4}}-\sqrt{4-\sqrt[8]{(-15)^4}}$;

б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{6+2\sqrt{5}}}$.

2

Позбудьтесь ірраціональності в чисельнику дробу та порівняйте дріб з нулем:

а) $\dfrac{\sqrt[6]{7}-\sqrt[3]{2}}{2}$;

б) $\dfrac{3-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

3

Спростіть вираз:

а) $25\sqrt[3]{9a^5}\cdot\sqrt[3]{6a^2}:\left(5\sqrt[3]{2a}\right)$;

б) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}-\dfrac{2a\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}}$.

4

а) Винесіть множник із-під знака кореня (n — натуральне число):

$\sqrt[n+2]{3^{n+3}\cdot a^{n^2-4}\cdot b^{5n+2}}$,

якщо $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$;

б) внесіть множник під знак кореня:

$-3a^2b\sqrt[6]{-\dfrac{b}{27a^4}}$.

5

Спростіть вираз і знайдіть його значення при $a=6$:

$\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$.

С-11. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Варіант А1

1 **Розв'яжіть рівняння:**

а) $\sqrt{x^2-4x}=\sqrt{6-3x}$;

б) $\sqrt{3x+1}=x-1$;

в) $2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}=1$;

г) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=3$.

2 **Визначте, при яких значеннях x**

функція $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ набуває значення 2.

Варіант А2

а) $\sqrt{x^2-10}=\sqrt{-3x}$;

б) $\sqrt{2x+4}=x-2$;

в) $3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}=5$;

г) $\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=1$.

функція $y=\sqrt[3]{x^2+2}$ набуває значення 3.

Варіант Б1

1 **Розв'яжіть рівняння:**

а) $\sqrt{x^2+x-3}=\sqrt{1-2x}$;

б) $\sqrt{2x^2+7}=x^2-4$;

в) $x^2+3x-\sqrt{x^2+3x}-2=0$;

г) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$.

2 **Знайдіть абсцису точки перетину графіків функцій:**

$y=\sqrt[3]{x-1}$ і $y=\sqrt[6]{x+5}$.

Варіант Б2

а) $\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{1-x}$;

б) $\sqrt{18x^2-9}=x^2-4$;

в) $x^2-8x-2\sqrt{x^2-8x}-3=0$;

г) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$.

$y=\sqrt[6]{x+3}$ і $y=\sqrt[3]{x+1}$.

Варіант В1

1 **Розв'яжіть рівняння:**

а) $\sqrt{x-2+2\sqrt{x+6}}=4$;

б) $\sqrt{3x+12}-\sqrt{x+1}=\sqrt{4x+13}$;

в) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$;

г) $\sqrt[3]{x-10}+\sqrt[3]{x-17}=3$.

2 **Знайдіть точки перетину графіків функцій:**

$y=\sqrt{x+2}$ і $y=\sqrt[3]{3x+2}$.

Варіант В2

1 **Розв'яжіть рівняння:**

а) $\sqrt{x-1+\sqrt{x+2}}=3$;

б) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x-1}$;

в) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$;

г) $\sqrt[3]{4x+3}-\sqrt[3]{x+2}=1$.

2 **Знайдіть точки перетину графіків функцій:**

$y=\sqrt[3]{x+7}$ і $y=\sqrt{x+3}$.

С-12. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Варіант А1

1 **Розв'яжіть рівняння, використовуючи оцінку ОДЗ:**

$\sqrt[4]{1-x}+x^3=\sqrt[6]{2x-2}+2-x^6$.

2 **Розв'яжіть рівняння, оцінивши значення його лівої та правої частин:**

$\sqrt{x^2-2x-3}=6x-x^2-9$.

3 **Розв'яжіть рівняння за допомогою рівносильних перетворень:**

$\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{1-3x}=x+5$.

Варіант А2

1 **Розв'яжіть рівняння, використовуючи оцінку ОДЗ:**

$1+\sqrt[8]{3-x}-x^2=x-11+\sqrt[4]{2x-6}$.

2 **Розв'яжіть рівняння, оцінивши значення його лівої та правої частин:**

$\sqrt{x^2-3x-4}=8x-16-x^2$.

3 **Розв'яжіть рівняння за допомогою рівносильних перетворень:**

$\sqrt{1-2x}\cdot\sqrt{2-x}=x+4$.

Варіант Б1

1 **Розв'яжіть рівняння:**

$$\sqrt[100]{x^2-16}+16x^{-1}=$$
$$=2x^{\frac{1}{2}}+\sqrt[200]{32-2x^2}.$$

2 **Розв'яжіть рівняння:**

$$\sqrt[4]{x^6-64}+\sqrt[8]{x^2-4}+\sqrt[6]{x^4-16}=0.$$

3 **Розв'яжіть рівняння за допомогою рівносильних перетворень:**

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x}.$$

Варіант Б2

1 **Розв'яжіть рівняння:**

$$x^{\frac{1}{2}}-\sqrt[100]{x^2-4x+3}=$$
$$=2-x^{\frac{1}{3}}+\sqrt[200]{8x-6-2x^2}.$$

2 **Розв'яжіть рівняння:**

$$\sqrt{81-x^4}+\sqrt[4]{2x^2-18}+\sqrt[6]{x^6-729}=0.$$

3 **Розв'яжіть рівняння за допомогою рівносильних перетворень:**

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x-1}.$$

Варіант В1

1 **Розв'яжіть рівняння:**

$$\sqrt[5]{x}+\sqrt{x-31}+\sqrt[3]{x-5}=6.$$

2 **Розв'яжіть рівняння:**

$$\sqrt[4]{x-5}+\frac{1}{\sqrt[4]{x-5}}=2-\left|x^2-5x-6\right|.$$

3 **Розв'яжіть рівняння:**

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-3}-2}+$$
$$+\sqrt{x-2\sqrt{x-3}-2}=x-3.$$

Варіант В2

1 **Розв'яжіть рівняння:**

$$\sqrt[3]{x^2+4}+\sqrt[5]{x-1}+\sqrt[7]{2x-3}=4.$$

2 **Розв'яжіть рівняння:**

$$\sqrt[6]{3-x}+\frac{1}{\sqrt[6]{3-x}}=2-(x-2)^2.$$

3 **Розв'яжіть рівняння:**

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-2}-1}+$$
$$+\sqrt{x-2\sqrt{x-2}-1}=x-2.$$

С-13. СИСТЕМИ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

Варіант А1

1 Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\ \sqrt{xy}=3;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sqrt[3]{x-y+27}=3,\\ \sqrt{2x-y+2}=x.\end{cases}$

2 Розв'яжіть нерівність:

а) $(x+1)\sqrt{2-x}>0;$

б) $\sqrt{2x+4}\leqslant 2;$

в) $\sqrt{x^2-3x+2}>-4.$

Варіант А2

1 Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,\\ \sqrt{xy}=2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sqrt[3]{x-y+8}=2,\\ \sqrt{3x-2y+6}=y.\end{cases}$

2 Розв'яжіть нерівність:

а) $(x-5)\sqrt{x+1}<0;$

б) $\sqrt{3x+1}\leqslant 1;$

в) $\sqrt{2+x-x^2}>-2.$

Варіант Б1

1 Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\ x-y=8;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1,\\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4.\end{cases}$

2 Розв'яжіть нерівність:

а) $(9-x^2)\sqrt{x^2-4}\leqslant 0;$

б) $\sqrt{\dfrac{x^2-x}{x+3}}>1;$

в) $x+\sqrt{x}<2.$

Варіант Б2

1 Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,\\ x-y=3;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2},\\ \sqrt{x-3y}+\sqrt{x+5y}=4.\end{cases}$

2 Розв'яжіть нерівність:

а) $(x^2-4)\sqrt{25-x^2}\geqslant 0;$

б) $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-4}}<1;$

в) $x-3\sqrt{x}>4.$

Варіант В1

1

Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{2y-5x}=x, \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{2y-5x}=y. \end{cases}$

2

Розв'яжіть нерівність:

а) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0;$

б) $\sqrt{2x+4}<\sqrt{x^2+4};$

в) $x^2-8x-2\sqrt{x^2-8x}\leqslant 3.$

Варіант В2

1

Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x\sqrt{x}-y\sqrt{y}=26, \\ x\sqrt{y}-y\sqrt{x}=6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2\sqrt{3y+x}-\sqrt{6y-x}=x, \\ \sqrt{3y+x}+\sqrt{6y-x}=3y. \end{cases}$

2

Розв'яжіть нерівність:

а) $(x-3)\sqrt{x^2-6x+8}\leqslant 0;$

б) $\sqrt{x^2+3}>\sqrt{3x+3};$

в) $x^2-3x-\sqrt{x^2-3x}\leqslant 2.$

С-14. СТЕПІНЬ З РАЦІОНАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Варіант А1

1

Подайте вирази у вигляді степеня числа x ($x > 0$):

а) $\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt{x};$

б) $\dfrac{x^{0,5}}{\left(\sqrt[4]{x}\right)^2}.$

2

Обчисліть:

а) $\dfrac{3^{\frac{2}{3}}\cdot 81^{\frac{3}{4}}}{3^{-\frac{1}{3}}};$

б) $\left(10^{-\frac{1}{3}}\cdot 0{,}01^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}.$

Варіант А2

1

Подайте вирази у вигляді степеня числа x ($x > 0$):

а) $\sqrt[10]{x^9}\cdot x^{1,1};$

б) $\dfrac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3}{\sqrt{x}}.$

2

Обчисліть:

а) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot 8^{\frac{2}{3}}}{2^{-\frac{1}{2}}};$

б) $\left(25^{-\frac{1}{4}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}.$

3

Спростіть вираз:

а) $(16x)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{8}x^{\frac{3}{8}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

б) $\left(a+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a-b^{\frac{1}{4}}\right)+\sqrt{b}$;

в) $\dfrac{ab^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b}{(ab)^{\frac{1}{3}}}$.

а) $(1000x)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(0{,}01x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)-\sqrt[3]{a^2}$;

в) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}b+b^{\frac{1}{4}}a}{(ab)^{\frac{1}{4}}}$.

4

Порівняйте числа:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\sqrt[7]{5^3}$ і $5^{0,4}$.

а) $3^{-\frac{1}{3}}$ і $3^{\frac{1}{3}}$;

б) $(0{,}5)^{0,2}$ і $\sqrt[9]{0{,}25}$.

Варіант Б1

1

Подайте у вигляді степеня з основою x ($x > 0$):

а) $\dfrac{x \cdot \sqrt[3]{x}}{x^{-\frac{2}{3}}}$;

б) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \left(x^{\frac{1}{8}}\right)^{-6}$.

2

Обчисліть:

а) $\dfrac{4^{-0,5} \cdot 8^{\frac{4}{5}}}{\left(\sqrt[5]{2}\right)^2}$;

б) $\left(0{,}001^{\frac{1}{3}} \cdot 10^3\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Варіант Б2

1

Подайте у вигляді степеня з основою x ($x > 0$):

а) $\dfrac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x^{-\frac{5}{4}}}$;

б) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \left(x^5\right)^{-\frac{1}{6}}$.

2

Обчисліть:

а) $\dfrac{27^{-\frac{1}{4}} \cdot 9^{1,5}}{\left(\sqrt[8]{3}\right)^2}$;

б) $\left(0{,}04^{\frac{1}{2}} \cdot 5^4\right)^{-\frac{1}{3}}$.

3

Спростіть вираз:

а) $\left(0{,}36ac^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{125}a^{\frac{3}{4}}c\right)^{-\frac{1}{3}}$;

б) $\frac{x^{1,5}-x^{0,5}}{x^{0,5}-x}$;

в) $\frac{a^{\frac{1}{4}}-4}{a^{\frac{1}{4}}+4a^{\frac{1}{8}}+4}$.

а) $\left(0{,}027a^2c\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{25}ac^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\frac{x^{\frac{4}{3}}-x}{x-x^{\frac{5}{3}}}$;

в) $\frac{a^{\frac{1}{3}}-6a^{\frac{1}{6}}+9}{a^{\frac{1}{3}}-9}$.

4

Оцініть значення виразу:

а) $x^{\frac{2}{5}}$, якщо $1 \leqslant x \leqslant 32$;

б) $x^{-\frac{1}{2}}$, якщо $\frac{4}{9} \leqslant x \leqslant 1\frac{11}{25}$.

а) $x^{\frac{4}{3}}$, якщо $0{,}008 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $x^{-\frac{1}{4}}$, якщо $\frac{1}{625} \leqslant x \leqslant 5\frac{1}{16}$.

Варіант В1

1

Подайте у вигляді степеня з основою x ($x > 0$):

а) $x\sqrt{x^3\sqrt[5]{x}}$;

б) $\sqrt[3]{\frac{x^{\frac{8}{3}} \cdot x^{-2,5}}{x^{-\frac{1}{6}}}}$.

2

Обчисліть:

а) $\left(4\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{81^{1,5}}{625}\right)^{\frac{1}{2}}$;

б) $\left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{0,5}}{21}}$.

Варіант В2

1

Подайте у вигляді степеня з основою x ($x > 0$):

а) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt[4]{x}$;

б) $\sqrt{\frac{x^{\frac{11}{6}} \cdot x^{-1,5}}{x^{-\frac{1}{3}}}}$.

2

Обчисліть:

а) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{32^{1,2}}{729}\right)^{\frac{1}{2}}$;

б) $\left(4\sqrt{2}\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{16^{0,75} \cdot 343^{\frac{1}{3}}}{28}}$.

❸

Спростіть вираз:

а) $\left(0{,}0625a^{1,2}b^{0,8}c^{-1}\right)^{\frac{3}{4}}\times$

$\times\left(\frac{1}{32}a^{\frac{3}{2}}bc^{\frac{5}{12}}\right)^{-0,6}$;

б) $\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}}$;

в) $\frac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y}{x-y}$.

а) $\left(0{,}00032a^{-\frac{1}{3}}b^{2}c^{-\frac{5}{6}}\right)^{0,4}\times$

$\times\left(\frac{1}{125}a^{-0,2}b^{1,2}c\right)^{-\frac{2}{3}}$;

б) $\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}+\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}}{x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}}$;

в) $\frac{x^{1,5}+y^{1,5}}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y-x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{2}}}$.

❹

Запишіть формулу залежності між змінними a і b, якщо

а) $a=t^{\frac{1}{4}}$, $b=t^{\frac{1}{3}}$;

б) $a=t^{0,8}+1$, $b=t^{-0,8}-1$.

а) $a=t^{\frac{1}{2}}$, $b=t^{\frac{1}{5}}$;

б) $a=(t+1)^{\frac{2}{3}}$, $b=(t-1)^{\frac{2}{3}}$.

С-15. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРАМИ

Варіант Б1

❶

Розв'яжіть рівняння:

$\sqrt{x+2}=a+2$.

❷

Розв'яжіть нерівність:

$(x-a)\sqrt{x-1}\geqslant 0$.

❸

Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння має тільки один дійсний корінь:

$\left(x^2-9x-10\right)\left(\sqrt{x}-a\right)=0$.

Варіант Б2

Розв'яжіть рівняння:

$\sqrt{5-x}=5-a$.

Розв'яжіть нерівність:

$(x-1)\sqrt{x-a}\geqslant 0$.

Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння має тільки один дійсний корінь:

$\left(x^2+7x-8\right)\left(\sqrt{x}+a\right)=0$.

Варіант В1

Варіант В2

1

Розв'яжіть рівняння:

$\sqrt{x-a}+\sqrt{x+2}=3.$

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+a}=2.$

2

Розв'яжіть нерівність:

$\frac{(x-3)\sqrt{x-a}}{x+2}\geqslant 0.$

$\frac{(x+1)\sqrt{x+a}}{x-4}\leqslant 0.$

3

Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння має тільки один дійсний корінь:

$\sqrt{ax-2}+1=x.$

$\sqrt{3-ax}+x=1.$

С-16*. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, НЕРІВНОСТЕЙ, СИСТЕМ

(домашня самостійна робота)

Варіант 1

Варіант 2

1

Розв'яжіть ірраціональне рівняння, використовуючи під час розв'язування вказаний спосіб:

— розкладання на множники (з урахуванням ОДЗ):

а) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12;$

б) $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{x^2-1};$

а) $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6;$

б) $2\sqrt{x^2-2x-8}-\sqrt{x^2-16}=\sqrt{3x^2-13x+4};$

— введення однієї або декількох нових змінних:

в) $\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}+x=2\sqrt{x+2}$;

г) $\sqrt[3]{x-4}=1-\sqrt{x+1}$;

ґ) $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$;

д) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=$
$=2x-15+2\sqrt{x^2+5x}$;

в) $\frac{x^2}{\sqrt{2x+5}}+\sqrt{2x+5}=2x$;

г) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$;

ґ) $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{15+x}=2$;

д) $\sqrt{x}+\sqrt{x-8}=$
$=2x-20+2\sqrt{x^2-8x}$;

— домноження на спряжений радикал:

е) $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$;

є) $\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\frac{2}{x}$;

е) $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+10}-4\right)=x$;

є) $\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6-x}}=\frac{x}{6}$;

— виділення повного квадрата:

ж) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+$
$+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=1$;

ж) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-$
$-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=3$;

— зростання і спадання відповідних функцій (на ОДЗ рівняння):

з*) $\sqrt{4x^2-1}=1-\sqrt{4x-1}$.

з*) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=\frac{2}{x}$.

2

Розв'яжіть нерівність, використовуючи рівносильні перетворення або метод інтервалів:

а) $\sqrt{x^2-3x-4}>x-2$;

б) $\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1$;

в) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}<3$;

г) $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\geqslant\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$;

ґ) $\frac{\sqrt{x^2-1}+1}{x}\geqslant 1$.

а) $\sqrt{x^2+3x-4}>x+2$;

б) $\sqrt{x^2-x-2}<x-1$;

в) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+15}<5$;

г) $\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+8}\leqslant\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2x+1}$;

ґ) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}\leqslant 3$.

3

Розв'яжіть систему рівнянь, використовуючи під час розв'язування вказаний спосіб:

а) введення нових змінних:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x+y+4}+\sqrt[3]{y+7}=4,\\ x+2y=5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3,\\ 2x+y=7;\end{cases}$$

б) множення рівнянь системи (і перевірки отриманих розв'язків):

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{108x}{5y}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y},\\ \sqrt{\dfrac{20y}{3x}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y},\\ \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y};\end{cases}$$

в) спосіб підстановки:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5,\\ \sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1.\end{cases}$$

К-2 (КП-3). СТЕПЕНІ ТА КОРЕНІ

Варіант А1

1

Знайдіть значення виразу:

а) $\left(\sqrt[3]{2^2\cdot\sqrt{2}}\right)^{\frac{6}{5}}$;

б) $\dfrac{2x^{\frac{1}{2}}}{x-4}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}-2}$ при $x=9$.

2

Розв'яжіть рівняння:

а) $\left(y^2-1\right)^{\frac{1}{3}}=2$;

б) $\sqrt{x+12}=x$;

в) $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{1-3x}=x+5$;

Варіант А2

1

Знайдіть значення виразу:

а) $\left(\sqrt{3^3\cdot\sqrt[3]{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$;

б) $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-3}-\dfrac{6}{x^{\frac{2}{3}}-9}$ при $x=8$.

2

Розв'яжіть рівняння:

а) $\left(y^2-19\right)^{\frac{1}{4}}=3$;

б) $\sqrt{7-x}=x-1$;

в) $\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{1-4x}=x+8$;

г) $x^2+x+2\sqrt{x^2+x}=0.$

г) $x^2-3x+2\sqrt{x^2-3x}=0.$

3

Розв'яжіть систему рівнянь:

$\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=7, \\ xy=4. \end{cases}$

$\begin{cases} x-y-2\sqrt{xy}=2, \\ xy=9. \end{cases}$

4

Визначте значення a, для яких при $x=1$ виконується нерівність:

$\sqrt{a-x}\geqslant x.$

$\sqrt{x-a}\geqslant\sqrt{x+3}.$

Варіант Б1

1

Знайдіть значення виразу:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{3\cdot\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[6]{9\cdot\sqrt{3}}};$

б) $\left(\dfrac{x-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-1}-2\sqrt[3]{x}+1\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+1}{x^{\frac{1}{3}}-1}$ при $x=8.$

2

Розв'яжіть рівняння:

а) $2x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-5=0;$

б) $\sqrt{6-4x-x^2}-x=4;$

в) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2;$

г) $(x^2-9x+14)\sqrt{x^2-9}=0.$

3

Розв'яжіть систему рівнянь:

$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x^2+xy}=3, \\ x+y+x^2+xy=5. \end{cases}$

Варіант Б2

1

Знайдіть значення виразу:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{4\cdot\sqrt{2}}};$

б) $\left(1+2\sqrt[4]{x}+\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{4}}-1}{x^{\frac{1}{4}}+1}$ при $x=16.$

2

Розв'яжіть рівняння:

а) $x^{0,4}+5x^{0,2}-14=0;$

б) $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x;$

в) $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2;$

г) $(x^2-9)\sqrt{x^2-5x+4}=0.$

3

Розв'яжіть систему рівнянь:

$\begin{cases} \sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x-y}=6, \\ x^2-y^2-x+y=12. \end{cases}$

4

Використовуючи метод інтервалів, розв'яжіть нерівність:

$\sqrt{x^2-x} < \dfrac{6}{\sqrt{x^2-x}}$.

$\sqrt{x^2+x} > \dfrac{2x^2-12}{\sqrt{x^2+x}}$.

Варіант В1

1

Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)$;

б) $\dfrac{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{x+x^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x-1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}\right)$ при $x=125$.

2

Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$;

б) $4\sqrt{3-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{3x-1}}=3$;

в) $\sqrt[3]{x+7}=\sqrt{x+3}$;

г) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.

3

Розв'яжіть систему рівнянь:

$\begin{cases} x+y-2\sqrt{xy}-\sqrt{x}+\sqrt{y}=2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8. \end{cases}$

4

Знайдіть усі значення a, при яких рівносильні нерівності:

$(x-a)\sqrt{x-2}>0$ і $x>a$.

Варіант В2

1

Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)$;

б) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{3x^{\frac{1}{3}}-1}{x+1}\right):\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{1}{3}}}$ при $x=64$.

2

Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{1+\sqrt{3x+1}}=\sqrt{x}$;

б) $3\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-2{,}5=3\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$;

в) $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{3x+2}$;

г) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{2x-1}$.

3

Розв'яжіть систему рівнянь:

$\begin{cases} x+y+2\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}=12, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1. \end{cases}$

4

Знайдіть усі значення a, при яких рівносильні нерівності:

$(x-2)\sqrt{x-a}>0$ і $x>2$.

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

С-17. РАДІАННА МІРА КУТІВ. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ КУТА І ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТУ

Варіант А1

1

Обчисліть:

а) $2\cos 60° - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

б) $\sin(-420°)$.

2

Порівняйте значення виразів:

а) $\sin\frac{8\pi}{7}$ і $\cos 90°$;

б) $\sin\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$.

3

Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

$0{,}5\cos\alpha + 2$.

Варіант А2

1

Обчисліть:

а) $\operatorname{ctg}45° - 2\sin\frac{\pi}{6}$;

б) $\cos(-750°)$.

2

Порівняйте значення виразів:

а) $\cos\frac{4\pi}{7}$ і $\sin 180°$;

б) $\frac{\pi}{3}$ і $\cos\frac{\pi}{3}$.

3

Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

$3\sin\alpha - 1$.

Варіант Б1

1

Обчисліть:

а) $2\cos 30°\operatorname{ctg}60° - \sin\frac{3\pi}{2}$;

б) $\dfrac{\sin 390° - \sin(-390°)}{\operatorname{tg}(-765°)}$.

Варіант Б2

1

Обчисліть:

а) $2\sin 60°\operatorname{tg}30° - \cos\pi$;

б) $\dfrac{\operatorname{ctg}405° - \operatorname{ctg}(-405°)}{2\sin(-750°)}$.

2

Порівняйте значення виразів:

а) $\cos\frac{25\pi}{13}\operatorname{tg}\frac{11\pi}{10}$ і $\sin(-330°)\operatorname{ctg}100°$;

б) $\cos2°$ і $\cos2$.

а) $\sin1{,}2\pi\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{7}$ і $\cos(-300°)\operatorname{tg}110°$;

б) $\sin4$ і $\sin4°$.

3

При яких значеннях a можлива рівність

$\sin x = a^2+1$?

$\cos x = -1-a^2$?

Варіант В1

1

Обчисліть:

а) $\sin(-45°)\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\cos(-45°)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

б) $\dfrac{\cos540°-\sin810°}{\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{2}-\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)}$.

2

Порівняйте значення виразів:

а) $\sin2\cos3\operatorname{tg}4$ і $\cos5$;

б) $\sin200°$ і $\sin(-200°)$.

3

При яких значеннях a нерівність

$\sin x \leqslant a^2-a-1$

виконується при будь-якому значенні x?

Варіант В2

1

Обчисліть:

а) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{tg}45°+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}45°$;

б) $\dfrac{\sin\frac{7\pi}{2}-\cos6\pi}{\operatorname{tg}540°-\operatorname{ctg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)}$.

2

Порівняйте значення виразів:

а) $\cos1\operatorname{tg}2\operatorname{ctg}3$ і $\sin4$;

б) $\operatorname{tg}(-100°)$ і $\operatorname{tg}100°$.

3

При яких значеннях a нерівність

$\cos x \geqslant a^2-3a+1$

виконується при будь-якому значенні x?

С-18. ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Варіант А1

1 **В одній системі координат побудуйте графіки функцій:**

$y = \cos x$,

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

$y = 2\cos x$.

2 **Знайдіть область визначення функції:**

$y = \operatorname{tg} x$.

3 **Доведіть, що функція $f(x)$ є парною, а функція $g(x)$ — непарною, якщо**

$f(x) = 3x^2 - \cos x$,

$g(x) = \sin 2x + x^3$.

4 **Використовуючи властивості зростання і спадання тригонометричних функцій, порівняйте значення виразів:**

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$ і $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$;

б) $\cos\frac{\pi}{8}$ і $\cos\frac{3\pi}{8}$.

5 **Укажіть проміжки зростання і спадання функції, її найбільше та найменше значення і точки, у яких їх досягнуто:**

$y = 2\sin x + 1$.

Варіант А2

1 **В одній системі координат побудуйте графіки функцій:**

$y = \sin x$,

$y = 3\sin x$,

$y = \sin x + 2$.

2 **Знайдіть область визначення функції:**

$y = \operatorname{ctg} x$.

3 **Доведіть, що функція $f(x)$ є парною, а функція $g(x)$ — непарною, якщо**

$f(x) = 2x^4 + \cos x$,

$g(x) = \operatorname{tg} x - 4x^5$.

4 **Використовуючи властивості зростання і спадання тригонометричних функцій, порівняйте значення виразів:**

а) $\sin\frac{\pi}{12}$ і $\sin\frac{\pi}{6}$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$ і $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$.

5 **Укажіть проміжки зростання і спадання функції, її найбільше та найменше значення і точки, у яких їх досягнуто:**

$y = 0{,}5\cos x - 1$.

Варіант Б1

1 **В одній системі координат побудуйте графіки функцій:**

$y = \sin x$,

$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,

$y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

2 **Знайдіть область визначення функції:**

$y = \operatorname{ctg} 3x$.

3 **Дослідіть функцію на парність або непарність:**

а) $f(x) = x^3 \cos x$;

б) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 - 4}$.

4 **Розташуйте в порядку зростання числа:**

а) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{7}$;

б) $\cos(-1{,}8)$; $\cos 2{,}3$; $\cos 2$.

5 **Укажіть проміжки зростання і спадання функції, її найбільше та найменше значення і точки, у яких їх досягнуто:**

$y = 0{,}5\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Варіант Б2

1 **В одній системі координат побудуйте графіки функцій:**

$y = \cos x$,

$y = -0{,}5\cos x$,

$y = -0{,}5\cos x + 1$.

2 **Знайдіть область визначення функції:**

$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

3 **Дослідіть функцію на парність або непарність:**

а) $f(x) = x^4 \sin x$;

б) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{x^3}$.

4 **Розташуйте в порядку зростання числа:**

а) $\sin\frac{\pi}{5}$; $\sin\frac{7\pi}{6}$; $\sin\frac{\pi}{3}$;

б) $\operatorname{ctg}(-0{,}3)$; $\operatorname{ctg} 1{,}2$; $\operatorname{ctg} 1$.

5 **Укажіть проміжки зростання і спадання функції, її найбільше та найменше значення і точки, у яких їх досягнуто:**

$y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Варіант В1

1

В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

$y = \operatorname{ctg} x$,

$y = 2\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

$y = \left|2\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

2

Знайдіть область визначення функції:

$y = \frac{1}{\cos x}$.

3

Дослідіть функцію на парність або непарність:

а) $f(x) = x\operatorname{tg} x - \sin^2 x$;

б) $f(x) = \frac{2x^3}{\cos x - 1}$.

4

Розташуйте дані числа:

а) у порядку зростання:

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$;

б) у порядку спадання:

$\cos(-\pi)$; $\cos 4$; $\cos 6$; $\sin 0{,}1$.

5

Укажіть проміжки зростання і спадання функції, її найбільше та найменше значення і точки, у яких їх досягнуто:

$y = \left|\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| - 1$.

Варіант В2

1

В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

$y = \operatorname{tg} x$,

$y = 0{,}5\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

$y = 0{,}5\operatorname{tg}\left|x + \frac{\pi}{4}\right|$.

2

Знайдіть область визначення функції:

$y = \frac{1}{2\sin x}$.

3

Дослідіть функцію на парність або непарність:

а) $f(x) = x^3\operatorname{ctg} x + |\sin x|$;

б) $f(x) = \frac{x^5 + x}{\cos x + 1}$.

4

Розташуйте дані числа:

а) у порядку зростання:

$\sin\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{9\pi}{7}$; $\cos\frac{\pi}{10}$; $\sin\frac{4\pi}{3}$;

б) у порядку спадання:

$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{ctg} 5$; $\operatorname{ctg} 1{,}8$; $\operatorname{tg} 0{,}9$.

5

Укажіть проміжки зростання і спадання функції, її найбільше та найменше значення і точки, у яких їх досягнуто:

$y = \left|3\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right| + 2$.

С-19*. ДОСЛІДЖЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ І ПОБУДОВА ЇХНІХ ГРАФІКІВ (домашня практична робота)

Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

Рівень А

1) $y=1{,}5\sin 2x$;

2) $y=2\cos\frac{x}{2}$;

3) $y=-\operatorname{tg}3x$;

4) $y=0{,}5\operatorname{ctg}0{,}5x$;

5) $y=\sin\frac{1}{3}x-1$;

6) $y=2-\cos 2x$;

7) $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}2x$;

8) $y=-2\operatorname{ctg}\frac{2x}{3}$;

9) $y=1+\operatorname{tg}\frac{x}{4}$;

10) $y=-3\cos 1{,}5x$.

Рівень Б

1) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$;

3) $y=-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$;

4) $y=\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+1$;

5) $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$;

6) $y=1+\cos\left(\frac{2}{3}x+\frac{2\pi}{3}\right)$;

7) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$;

8) $y=2\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$;

9) $y=1-\cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)$;

10) $y=-\sin\left(1{,}5x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Рівень В

1) $y=\left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|$;

2) $y=\operatorname{tg}\left(2|x|+\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y=3-2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2x}{3}\right)$;

4) $y=-\operatorname{ctg}\left(2\pi x-\frac{\pi}{4}\right)$;

5) $y=-0{,}5\sin\left|2x+\frac{\pi}{3}\right|$;

6) $y=3\cos\left(2|x|-\frac{\pi}{3}\right)$;

7) $y=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 2x}}$;

8) $y=\left|\operatorname{tg}\left|\frac{x}{2}\right|\right|-1$;

9) $y=\frac{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}2x}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}2x}$;

10) $y=2\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$.

С-20. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТУ

Варіант А1

1 **Відомо, що**

$\sin\alpha = 0{,}8$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Знайдіть значення трьох інших тригонометричних функцій кута α.

2 **Спростіть вирази:**

а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta$;

б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} \cdot (1 - \sin^2\alpha)$.

3 **Доведіть тотожність:**

$\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Варіант А2

1 **Відомо, що**

$\cos\alpha = 0{,}6$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Знайдіть значення трьох інших тригонометричних функцій кута α.

2 **Спростіть вирази:**

а) $\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\beta - \sin^2\alpha$;

б) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

3 **Доведіть тотожність:**

$\frac{1 + \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Варіант Б1

1 **Відомо, що**

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Знайдіть значення трьох інших тригонометричних функцій кута α.

2 **Спростіть вираз:**

а) $\frac{1}{\sin^2\alpha} - \operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\beta$;

б) $(\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha)\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)$.

Варіант Б2

1 **Відомо, що**

$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Знайдіть значення трьох інших тригонометричних функцій кута α.

2 **Спростіть вираз:**

а) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\beta$;

б) $(\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha)\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right)$.

❸

Доведіть тотожність:

$$\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}+2\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$$\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}+2\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Варіант В1

❶

Відомо, що

$$25\sin^2\alpha+5\sin\alpha-12=0 \text{ і } \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$$

Знайдіть значення чотирьох основних тригонометричних функцій кута α.

❷

Спростіть вираз:

а) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+\dfrac{3-3\cos^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$;

б) $\operatorname{ctg}^6\beta-\dfrac{\cos^2\beta-\operatorname{ctg}^2\beta}{\sin^2\beta-\operatorname{tg}^2\beta}$.

❸

Доведіть тотожність:

$$\frac{\sin\alpha-\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}=\frac{\sin\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\beta}.$$

Варіант В2

❶

Відомо, що

$$25\cos^2\alpha-5\cos\alpha-12=0 \text{ і } \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi.$$

Знайдіть значення чотирьох основних тригонометричних функцій кута α.

❷

Спростіть вираз:

а) $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha-\dfrac{3\sin^2\alpha-3}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

б) $\operatorname{tg}^6\beta-\dfrac{\sin^2\beta-\operatorname{tg}^2\beta}{\cos^2\beta-\operatorname{ctg}^2\beta}$.

❸

Доведіть тотожність:

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta+\cos\alpha}=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}.$$

С-21. ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ. ФОРМУЛИ ПОДВІЙНОГО АРГУМЕНТУ. ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

Варіант А1

❶

Обчисліть:

а) $\sin 300°$;

б) $\cos 62°\cos 28° - \sin 62°\sin 28°$;

Варіант А2

❶

Обчисліть:

а) $\cos 210°$;

б) $\sin 112°\cos 22° - \sin 22°\cos 112°$;

в) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$.

в) $\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$.

❷

Спростіть вираз:

а) $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}$;

а) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

б) $\frac{1}{2}\sin\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

б) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

❸

Доведіть тотожність:

$\sin\alpha\cos3\alpha-\cos\alpha\sin3\alpha=$
$=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)$.

$\sin4\alpha\sin\alpha-\cos4\alpha\cos\alpha=$
$=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+5\alpha\right)$.

Варіант Б1

❶

Обчисліть:

а) $\sin\frac{17\pi}{6}+\cos240°$;

б) $\dfrac{\cos52°\cos7°+\sin52°\sin7°}{\sin29°\cos16°+\sin16°\cos29°}$;

в) $\left(\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}\right)^2$.

❷

Спростіть вираз:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$;

б) $\sin(\alpha-30°)+\cos(60°+\alpha)$.

❸

Доведіть тотожність:

$\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\dfrac{\operatorname{tg}40°+\operatorname{tg}5°}{1-\operatorname{tg}40°\operatorname{tg}5°}$.

Варіант Б2

❶

Обчисліть:

а) $\cos\frac{10\pi}{3}+\sin150°$;

б) $\dfrac{\sin72°\cos12°-\sin12°\cos72°}{\cos18°\cos12°-\sin18°\sin12°}$;

в) $\left(\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$.

❷

Спростіть вираз:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

б) $\cos(60°-\alpha)-\sin(\alpha+30°)$.

❸

Доведіть тотожність:

$\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}=\dfrac{\operatorname{tg}55°-\operatorname{tg}10°}{1+\operatorname{tg}55°\operatorname{tg}10°}$.

Варіант В1

1

Обчисліть:

а) $\sin 530^\circ - \cos\frac{22\pi}{9}$;

б) $\frac{\sin 21^\circ\cos 9^\circ + \cos 159^\circ\cos 99^\circ}{\sin 20^\circ\cos 10^\circ + \cos 160^\circ\cos 100^\circ}$;

в) $\cos^4\frac{\pi}{8} - \sin^4\frac{\pi}{8}$.

2

Спростіть вираз:

а) $\frac{\cos(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha-\beta)} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(2\pi-\beta)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha-\beta)}$;

б) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) + \cos^2\alpha + \sin^2\beta$.

3

Доведіть тотожність:

$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = 1$.

Варіант В2

а) $\cos 770^\circ - \sin\frac{25\pi}{9}$;

б) $\frac{\sin 22^\circ\cos 8^\circ + \cos 158^\circ\cos 98^\circ}{\sin 23^\circ\cos 7^\circ + \cos 157^\circ\cos 97^\circ}$;

в) $\sin^4\frac{\pi}{12} - \cos^4\frac{\pi}{12}$.

а) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(2\pi+\beta)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)}$;

б) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta) + \sin^2\beta + \cos^2\alpha$.

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

С-22. ФОРМУЛИ ПЕРЕТВОРЕННЯ СУМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ У ДОБУТОК І ДОБУТКУ В СУМУ

Варіант А1

1

Перетворіть вираз:

а) у добуток:

$\sin 6\alpha - \sin 4\alpha$;

Варіант А2

$\cos 7\alpha - \cos 3\alpha$;

б) у суму:

$\cos 3\alpha \cos 2\alpha$.

$\sin 5\alpha \cos 2\alpha$.

2

Спростіть вираз:

а) $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin\alpha}{\cos 3\alpha - \cos\alpha}$;

б) $2 \sin 35^\circ \cos 10^\circ - \sin 25^\circ$.

а) $\dfrac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}$;

б) $\sin 25^\circ \sin 5^\circ - 0{,}5 \cos 20^\circ$.

3

Доведіть тотожність:

$\dfrac{\sin 4\alpha + 2\cos 3\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 2\alpha} = -\operatorname{ctg} 3\alpha$.

$\dfrac{\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$.

Варіант Б1

Варіант Б2

1

Знайдіть значення виразу, використовуючи подання тригонометричних виразів у вигляді:

а) добутку:

$\dfrac{\cos 18^\circ + \cos 42^\circ}{\cos 12^\circ}$;

$\dfrac{\cos 29^\circ - \cos 91^\circ}{\sin 31^\circ}$;

б) суми:

$\sin 105^\circ \sin 15^\circ$.

$\cos 75^\circ \cos 15^\circ$.

2

Спростіть вираз:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right)$;

б) $2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - 1 + 2\sin^2\beta$.

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\dfrac{3\pi}{4} + \alpha\right)$;

б) $2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) + 2\cos^2\alpha - 1$.

3

Доведіть тотожність:

$\dfrac{2\sin 3\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha} = \dfrac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}$.

$\dfrac{2\cos 3\alpha \cos\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha} = \dfrac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}$.

Варіант В1

1

Обчисліть:

а) $\dfrac{\sin\frac{7\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{7\pi}{18}-\cos\frac{\pi}{9}}$;

б) $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}$,

якщо $\cos\alpha=0{,}6$.

2

Спростіть вираз:

а) $\dfrac{\sin6\alpha-\sin4\alpha+\sin2\alpha}{4\cos3\alpha\cos2\alpha}$;

б) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\times$

$\times(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$.

3

Доведіть тотожність:

$\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$,

якщо A, B і C — кути трикутника.

Варіант В2

а) $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{18}+\sin\frac{2\pi}{9}}{\cos\frac{5\pi}{18}+\cos\frac{2\pi}{9}}$;

б) $\sin\alpha\sin3\alpha$,

якщо $\cos2\alpha=-0{,}8$.

а) $\dfrac{4\sin3\alpha\sin2\alpha}{\sin4\alpha-\sin6\alpha+\sin2\alpha}$;

б) $(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)\times$

$\times(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$.

3

Доведіть тотожність:

$\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A-\sin B}=-\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$,

якщо A, B і C — кути трикутника.

С-23. ФОРМУЛИ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТУ. ФОРМУЛИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗУ $a\sin x+b\cos x$

Варіант 1

1

Обчисліть, використовуючи множення і ділення на відповідний тригонометричний вираз:

а) $\sin18^\circ\sin54^\circ$;

б) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

Варіант 2

а) $\cos36^\circ\cos72^\circ$;

б) $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}$.

2

Спростіть вираз, використовуючи формули пониження степеня:

а) $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}+\alpha\right)$;

б) $\sin^2 2\alpha+\sin^2\beta+$
$+\cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta)$.

а) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}-\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{11\pi}{8}+\alpha\right)$;

б) $\sin^2(\alpha+\beta)+$
$+\cos^2(\alpha-\beta)-\sin 2\alpha\sin 2\beta$.

3

Розв'яжіть нерівність, застосовуючи тригонометричні перетворення:

а) $\cos(91^\circ - x)\cos x -$
$-\sin(91^\circ - x)\sin x < 0$;

б) $x^2 + 2x\cos 3{,}5\sin 0{,}5 -$
$-\sin 3\sin 4 < 0$.

а) $\sin(179^\circ + x)\cos x -$
$-\cos(179^\circ + x)\sin x > 0$;

б) $x^2 - 2x\cos 6{,}5\cos 0{,}5 +$
$+\cos 6\cos 7 < 0$.

4

Оцініть значення виразу, використовуючи введення допоміжного кута:

а) $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$;

б) $5\cos 2\alpha+12\sin 2\alpha$.

а) $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$;

б) $7\sin\alpha-24\cos\alpha$.

5

Знайдіть значення виразу, використовуючи формули вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу:

а) $\cos 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=-3$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$.

а) $\sin 4\alpha$, якщо $\operatorname{tg} 2\alpha = 3$;

б) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=-\frac{7}{25}$.

К-3 (КП-4). ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Варіант А1

1

Обчисліть:

а) $2\sin\frac{2\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

Варіант А2

а) $2\cos\frac{5\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

б) $\sin 56^\circ \cos 34^\circ + \cos 56^\circ \sin 34^\circ$.

б) $\cos 111^\circ \cos 69^\circ - \sin 111^\circ \sin 69^\circ$.

❷

Відомо, що

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin(\pi-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Знайдіть $\cos 2\alpha$.

❸

Спростіть вираз:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha+\sin^2\alpha-\frac{1}{\cos^2\alpha}$;

а) $\operatorname{ctg}^2\alpha+\cos^2\alpha-\frac{1}{\sin^2\alpha}$;

б) $\frac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha}+2\sin^2\alpha$.

б) $\frac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{2\cos 3\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha-1$.

❹

Доведіть тотожність:

$1-\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

$\operatorname{ctg}^2\alpha-1=\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

❺

Побудуйте графік функції:

$y = 2\cos x - 1$.

$y = \sin 2x + 1$.

Варіант Б1

❶

Обчисліть:

а) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}}-\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}$;

б) $\frac{\sin 50^\circ+\sin 10^\circ}{\cos 25^\circ\cos 5^\circ+\sin 25^\circ\sin 5^\circ}$.

❷

Відомо, що

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=0{,}5$ і $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Знайдіть $\sin(60^\circ-\alpha)$.

Варіант Б2

а) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}}+\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4}$;

б) $\frac{\cos 25^\circ\cos 15^\circ-\sin 25^\circ\sin 15^\circ}{\cos 100^\circ+\cos 20^\circ}$.

❷

Відомо, що

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{2}$ і $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Знайдіть $\sin(30^\circ+\alpha)$.

3

Спростіть вираз:

а) $\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2+\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2-2\sin^2\alpha;$

б) $\frac{\sin\alpha-\sin3\alpha}{\cos\alpha-\cos3\alpha}(1-\cos4\alpha).$

а) $2\cos^2\alpha-(\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha)^2-(\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha)^2;$

б) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha}(1+\cos4\alpha).$

4

Доведіть тотожність:

$\operatorname{tg}2\alpha\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin2\alpha.$

$\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\cos2\alpha.$

5

Побудуйте графік функції:

$y=3-\sin2x.$

$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$

Варіант В1

1

Обчисліть:

а) $\frac{\operatorname{tg}67°-\operatorname{tg}22°}{1+\operatorname{tg}67°\operatorname{tg}22°}+4\sin105°\cos105°;$

б) $\sqrt{\frac{1+\cos4}{2}}+\cos2.$

2

Відомо, що

$\sin 2\alpha = 0{,}8$ і $45° < \alpha < 90°.$

Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha.$

3

Спростіть вираз:

а) $\frac{4\cos\alpha}{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$

б) $\frac{\cos\alpha+\cos3\alpha}{\sin2\alpha}+\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha}{1+\cos2\alpha}.$

Варіант В2

1

Обчисліть:

а) $\frac{\operatorname{tg}29°+\operatorname{tg}16°}{1-\operatorname{tg}29°\operatorname{tg}16°}-4\sin75°\cos75°;$

б) $\sqrt{\frac{1-\cos8}{2}}+\sin4.$

2

Відомо, що

$\cos 2\alpha = 0{,}6$ і $135° < \alpha < 180°.$

Знайдіть $\operatorname{ctg}\alpha.$

3

Спростіть вираз:

а) $\frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha-\operatorname{ctg}^2 2\alpha}{4\operatorname{ctg}4\alpha};$

б) $\frac{\cos\alpha-\cos3\alpha}{1-\cos2\alpha}+\frac{\sin\alpha-\sin3\alpha}{\sin2\alpha}.$

❹

Доведіть тотожність:

$4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin 3\alpha.$

$4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos 3\alpha.$

❺

Побудуйте графік функції:

$y=\sin x+\sin|x|.$

$y=\sin x+|\sin x|.$

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

С-24. ОБЕРНЕНА ФУНКЦІЯ. ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Варіант А1

1 **Знайдіть функцію, обернену до функції:**

$y = 2x$.

2 **Обчисліть:**

а) $\arcsin 1 - \operatorname{arctg} 0$;

б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

в) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3 **Порівняйте числа:**

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ і $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

4 **Визначте, чи має зміст вираз**

$\arcsin(x-1)$

при $x = \sqrt{5}$; $x = 0{,}9$.

Відповідь поясніть.

Варіант А2

1 **Знайдіть функцію, обернену до функції:**

$y = 3x$.

2 **Обчисліть:**

а) $\arccos 0 - \operatorname{arctg} 1$;

б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3 **Порівняйте числа:**

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ і $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4 **Визначте, чи має зміст вираз**

$\arccos(x+1)$

при $x = -\sqrt{3}$; $x = \frac{1}{3}$.

Варіант Б1

1 **Знайдіть функцію, обернену до функції:**

$y = 2x + 4$.

2 **Обчисліть:**

а) $\arccos(-1) - 2\operatorname{arcctg} 0$;

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

в) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

3 **Порівняйте числа:**

$\sin 1$ і $\arcsin 1$.

4 **Визначте, при яких значеннях a має зміст вираз:**

$\arccos(2a - 1)$.

Варіант Б2

1 **Знайдіть функцію, обернену до функції:**

$y = 3x - 6$.

2 **Обчисліть:**

а) $\arcsin(-1) + 2\operatorname{arctg} 0$;

б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$;

в) $\arccos\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

3 **Порівняйте числа:**

$\arccos 0$ і $\cos 0$.

4 **Визначте, при яких значеннях a має зміст вираз:**

$\arcsin(3a + 2)$.

Варіант В1

1 **Знайдіть функцію, обернену до функції:**

$y = \frac{4}{2x+1}$.

2 **Обчисліть:**

а) $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right) - 2\arcsin 1$;

б) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right)$;

в) $\arccos(\sin(\operatorname{arctg} 0))$.

Варіант В2

1 **Знайдіть функцію, обернену до функції:**

$y = \frac{3}{3x-1}$.

2 **Обчисліть:**

а) $\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right) + 2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

в) $\arcsin(\cos(\operatorname{arcctg} 0))$.

❸

Порівняйте числа:

arctg $(a-1)$ і arctg $(a+1)$. arcctg a і arcctg $(a+2)$.

❹

Знайдіть область визначення функції:

$y=\sqrt{-\arcsin(x+1)}$. $y=\sqrt{\frac{\pi}{2}-\arccos(x-1)}$.

С-25*. ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОБЕРНЕНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ (домашня самостійна робота)

Варіант 1

❶

Визначте, при яких значеннях параметра a виконується тотожність, і доведіть її:

а) $\sin(\arccos a)=\sqrt{1-a^2}$;

б) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a)=\frac{1}{a}$;

в) $\operatorname{tg}(\arcsin a)=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$;

г) $\cos(\operatorname{arcctg} a)=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$;

ґ) $\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$.

❷

Обчисліть:

а) $\sin\left(2\arccos\frac{12}{13}\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$;

в) $\sin\left(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

Варіант 2

❶

Визначте, при яких значеннях параметра a виконується тотожність, і доведіть її:

а) $\cos(\arcsin a)=\sqrt{1-a^2}$;

б) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a)=\frac{1}{a}$;

в) $\operatorname{tg}(\arccos a)=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$;

г) $\sin(\operatorname{arctg} a)=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$;

ґ) $\operatorname{arctg} a+\operatorname{arcctg} a=\frac{\pi}{2}$.

❷

Обчисліть:

а) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

в) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arcctg}3\right)$.

3

Ураховуючи область значень аркфункцій, обчисліть:

а) $\arccos(\cos 10)$;

б) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}\right)$.

а) $\arcsin(\sin 6)$;

б) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}\right)$.

4

Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\arcsin(x^2+x-1)$;

б) $y=\arccos\sqrt{2-x}$.

а) $y=\arccos(x^2-3)$;

б) $y=\arcsin\frac{1}{x-1}$.

5

Знайдіть область визначення та область значень функції:

а) $y=\sqrt{-\arcsin x}$;

б) $y=2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

а) $y=\frac{1}{\arcsin x}$;

б) $y=\frac{\pi}{2}+2\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{x}\right)$.

6

Розв'яжіть рівняння:

а) $\cos(\arccos(x+2))=x^2$;

б) $6\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}=2\pi$;

в) $\arcsin(x^2-4)=\arcsin(2x+4)$;

г) $(\operatorname{arcctg}x)^2-6\operatorname{arcctg}x+8=0$.

а) $\sin(\arcsin(4x-1))=3x^2$;

б) $2\operatorname{arcctg}(2x-3)=\pi$;

в) $\arccos(x^2-x)=$
$=\arccos(2x-2)$;

г) $2(\operatorname{arctg}x)^2-$
$-5\operatorname{arctg}x+2=0$.

С-26. НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Варіант А1

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $2\sin x=\sqrt{3}$;

Варіант А2

а) $2\cos x=1$;

б) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$;

в) $\operatorname{tg}3x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

б) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$;

в) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$.

2

Знайдіть нулі функції:

$y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+1$.

$y=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+1$.

3

Розв'яжіть рівняння і знайдіть його найменший додатний корінь:

$\operatorname{ctg}\frac{x}{3}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

Розв'яжіть рівняння і знайдіть його найбільший від'ємний корінь:

$\operatorname{tg}4x=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Варіант Б1

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1=0$;

б) $1-2\cos^2 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-1$.

2

Знайдіть нулі функції:

$y=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-1$.

3

Розв'яжіть рівняння та знайдіть його корені, що належать проміжку $[0;\ \pi]$:

$\left(\sin 2x+\sin\frac{\pi}{6}\right)(\sin 2x-3)=0$.

Варіант Б2

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=0$;

б) $\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}=-\frac{1}{4}$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-3$.

2

Знайдіть нулі функції:

$y=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$.

3

Розв'яжіть рівняння та знайдіть його корені, що належать проміжку $[0;\ \pi]$:

$\left(\cos 2x+\cos\frac{\pi}{4}\right)(\cos 2x+4)=0$.

Варіант В1

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $4\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{8}=0;$

б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi x}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6};$

в) $\left|\cos\left(x\sin\frac{\pi}{6}\right)+0{,}5\right|=0{,}5.$

2

Не виконуючи побудови, знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій:

$f(x)=\cos 5x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ і $g(x)=\sin 5x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}.$

3

Визначте кількість коренів рівняння, що належать відрізку $[-\pi;\ \pi]$:

$(\sin x-1)\left(\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right)=0.$

Варіант В2

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $4\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{12}=0;$

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi x}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right);$

в) $\left|0{,}5-\sin\left(x\cos\frac{\pi}{3}\right)\right|=0{,}5.$

2

Не виконуючи побудови, знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій:

$f(x)=\sin 3x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $g(x)=\cos 3x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$

3

Визначте кількість коренів рівняння, що належать відрізку $[-\pi;\ \pi]$:

$(\cos x-1)\left(\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)=0.$

С-27. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Варіант А1

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $2\sin^2 x-3\sin x-2=0;$

б) $\sin 2x-\cos x=0;$

в) $\cos 7x+\cos x=0.$

Варіант А2

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $2\cos^2 x-5\cos x+2=0;$

б) $\sqrt{3}\cos x+\sin 2x=0;$

в) $\sin x+\sin 5x=0.$

❷

Знайдіть корені рівняння на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$3\operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x = 2.$

$\operatorname{tg}x - 2\operatorname{ctg}x = -1.$

Варіант Б1

Варіант Б2

❶

Розв'яжіть рівняння:

а) $4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0;$
б) $2\cos^2 x - \sin 2x = 0;$
в) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x.$

а) $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0;$
б) $\sin^2 x - 0{,}5\sin 2x = 0;$
в) $\sin 2x + \sin 6x = \cos 2x.$

❷

Знайдіть корені рівняння на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$:

$\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = -1.$

$3\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1.$

Варіант В1

Варіант В2

❶

Розв'яжіть рівняння:

а) $\cos 4x - 3\cos 2x = 1;$
б) $4\cos^2 x - \sin 2x = 1;$
в) $\sin 6x - 2\sin 2x = 0.$

а) $\cos x + 3\sin\frac{x}{2} = -1;$
б) $6\sin^2 x + \sin 2x = 4;$
в) $\cos 6x + 2\cos 2x = 0.$

❷

Доведіть, що на проміжку [0; π] дане рівняння має єдиний корінь, і знайдіть його:

$\sin x\operatorname{tg}x + 1 = \sin x + \operatorname{tg}x.$

$1 - \operatorname{ctg}x = \cos x - \cos x\operatorname{ctg}x.$

С-28. ВІДБІР КОРЕНІВ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Варіант А1

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $(\operatorname{ctg} x - 1)(\cos x + 1) = 0$;

б) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} = 0$;

в) $\sin 2x \sqrt{\cos x} = 0$.

2

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ x + y = 2\pi. \end{cases}$$

Варіант А2

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $(\operatorname{tg} x + 1)(\sin x - 1) = 0$;

б) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x} = 0$;

в) $\sin 2x \sqrt{\sin x} = 0$.

2

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{3}, \\ x + y = \pi. \end{cases}$$

Варіант Б1

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $(1 + \cos 2x)\operatorname{tg} x = \cos x$;

б) $\dfrac{\sin x - \sin 3x}{1+\cos x} = 0$;

в) $\sqrt{\operatorname{ctg} x} = \sqrt{2}\cos x$.

2

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}75, \\ \sin y \cos x = 0{,}25. \end{cases}$$

Варіант Б2

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $(1 - \cos 2x)\operatorname{ctg} x = \sin x$;

б) $\dfrac{\cos 3x + \cos x}{1+\sin x} = 0$;

в) $\sqrt{\operatorname{tg} x} = \sqrt{2}\sin x$.

2

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}75, \\ \sin x \sin y = 0{,}25. \end{cases}$$

Варіант В1

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}x}\left(\sqrt{2}\cos^2 x-\cos x\right)=0;$

б) $\frac{\cos^2 2x-\sin^2 x}{1-\sin 3x}=0;$

в) $\sqrt{2\sin^2 x-1}=\cos x-\sin x.$

2

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases}\cos x\cos y=\sin^2 x,\\ \sin x\sin y=\cos^2 x.\end{cases}$$

Варіант В2

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}x}\left(\sqrt{2}\sin^2 x+\sin x\right)=0;$

б) $\frac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{1+\cos 3x}=0;$

в) $\sqrt{1-2\cos^2 x}=\sin x+\cos x.$

2

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases}\cos x\sin y=\sin^2 x,\\ \sin x\cos y=\cos^2 x.\end{cases}$$

К-4 (КП-5). ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Варіант А1

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $2\sin x=\sqrt{3};$

б) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0;$

в) $2\sin^2 x+3\cos x=0;$

г) $\frac{\sin 3x+\sin x}{\cos x}=0.$

2

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases}\sin x=\cos y,\\ 2\cos^2 y+\sin x=3.\end{cases}$$

Варіант А2

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{2}\cos x=1;$

б) $\sin x+\cos x=0;$

в) $2\cos^2 x-\sin x=-1;$

г) $\frac{\cos 3x-\cos x}{\sin x}=0.$

2

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases}\cos x=\sin y,\\ \sin^2 y-\cos x=2.\end{cases}$$

Варіант Б1

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x = -1;$

б) $\sin^2 x - 2\sin 2x - 5\cos^2 x = 0;$

в) $1 - \cos x = \sin\frac{x}{2};$

г) $\frac{\sin 2x}{1+\sin x} = -2\cos x.$

2

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Варіант Б2

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = 1;$

б) $\cos^2 x + \sin 2x - 3\sin^2 x = 0;$

в) $1 + \cos 4x = \cos 2x;$

г) $\frac{\sin 2x}{1-\cos x} = 2\sin x.$

2

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x \sin y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Варіант В1

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}75;$

б) $2\cos^2\frac{x}{2} - 3\sin x + 2 = 0;$

в) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x;$

г) $\frac{\cos x - 2\sin x \sin 2x}{1+\sin 3x} = 0.$

2

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \cos x - \frac{2}{\sin y} = 3, \\ 2\cos x \sin y = 1. \end{cases}$$

Варіант В2

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5;$

б) $2\sin^2\frac{x}{2} + 3\sin x + 2 = 0;$

в) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1{,}5;$

г) $\frac{2\cos x \cos 2x - \cos x}{1-\sin 3x} = 0.$

2

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x + \frac{1}{\cos y} = 3, \\ \frac{\sin x}{\cos y} = 2. \end{cases}$$

С-29. БІЛЬШ СКЛАДНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Варіант 1

1 **Розв'яжіть рівняння:**

а) $\sin(\cos x) = 0{,}5$;

б) $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} 2x = 1$;

в) $\cos 4x \cos 7x = \cos 6x \cos 3x$;

г) $\sin 4x - \cos 4x \operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$.

2 **Використовуючи заміну змінної, розв'яжіть рівняння:**

а) $2\operatorname{tg}^2 x + 3 = \dfrac{3}{\cos x}$;

б) $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$;

в) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4$.

3 **Використовуючи розкладання на множники, розв'яжіть рівняння:**

а) $\cos 2x = \sin x - \cos x$;

б) $1 - \cos x = \operatorname{tg} x - \sin x$;

в) $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$.

4 **Розв'яжіть дане рівняння трьома способами (використовуючи формули подвійного кута, введення допоміжного кута, вираження функцій через тангенс половинного аргументу) і доведіть, що отримані відповіді збігаються:**

$2\sin x - 3\cos x = 2$.

Варіант 2

1 **Розв'яжіть рівняння:**

а) $\cos(\sin x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = -1$;

в) $\sin 7x \sin x = \sin 3x \sin 5x$;

г) $\sin 6x + \cos 6x \operatorname{ctg} 3x = \sqrt{3}$.

2 **Використовуючи заміну змінної, розв'яжіть рівняння:**

а) $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3$;

б) $4(\cos x - \sin x) = 4 - \sin 2x$;

в) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = -4$.

3 **Використовуючи розкладання на множники, розв'яжіть рівняння:**

а) $\sin 2x + 1 = \sin x + \cos x$;

б) $1 + \sin x = \operatorname{ctg} x + \cos x$;

в) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$.

4 **Розв'яжіть дане рівняння трьома способами (використовуючи формули подвійного кута, введення допоміжного кута, вираження функцій через тангенс половинного аргументу) і доведіть, що отримані відповіді збігаються:**

$3\cos x - 4\sin x = 5$.

5

Використовуючи множення на тригонометричну функцію, розв'яжіть рівняння:

а) $4\cos x\cos 2x\cos 3x=\cos 6x$;

б) $\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=-0{,}5$.

а) $\cos x\cos 2x\cos 4x=\frac{1}{8}$;

б) $\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x=\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x$.

6

Розв'яжіть тригонометричне рівняння:

а) $2\sqrt{\operatorname{ctg} x}=3-\operatorname{ctg} x$;

б) $\sqrt{0{,}5\cos x}=\sin\frac{x}{2}$;

в) $\sqrt{\sin 3x+\sin 5x}=\sqrt{\sin 4x}$.

а) $2-\operatorname{tg} x=\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

б) $\sqrt{-\cos 4x}=\sqrt{2}\cos 2x$;

в) $\sqrt{\cos 5x+\cos 7x}=\sqrt{\cos 6x}$.

С-30. СИСТЕМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Варіант 1

1

Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3}, \\ \cos^2 x-\cos^2 y=-\frac{3}{4}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y=\frac{4\pi}{3}, \\ \sin x\sin y=\frac{3}{4}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{2}, \\ \cos 2x+5\cos y=3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y=\frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg}\pi x-\operatorname{tg}\pi y=2. \end{cases}$

Варіант 2

1

Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4}, \\ \sin^2 x+\sin^2 y=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{6}, \\ \cos x\sin y=\frac{1}{4}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=\frac{5\pi}{2}, \\ \cos 2x+\sin y=2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-y=\frac{1}{3}, \\ \operatorname{ctg}\pi x-\operatorname{ctg}\pi y=-\sqrt{3}. \end{cases}$

❷

Знайдіть розв'язок системи, використовуючи:

а) підстановку та почленне додавання (віднімання) рівнянь системи:

$$\begin{cases}\cos x\cos y=0{,}75,\\ \operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y=3;\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{4},\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=1;\end{cases}$$

б) розкладання на множники або використання основної тригонометричної тотожності:

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=1,\\ \cos x-\cos y=\sqrt{3};\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin x-\sin y=0{,}5,\\ \cos x+\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\end{cases}$$

в) заміну змінних:

$$\begin{cases}\sin x+\cos y=1,\\ \cos 2x+\cos 2y=2.\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos x+\cos y=0{,}5,\\ \sin^2 x+\sin^2 y=1{,}75.\end{cases}$$

С-31. НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ

Варіант А1

❶

Розв'яжіть нерівність:

а) $2\sin x>1$;

б) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\operatorname{tg}2x\leqslant\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$.

❷

Знайдіть значення x, при яких графік функції

$$y=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

лежить нижче осі x.

Варіант А2

❶

Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{2}\cos x<1$;

б) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\geqslant-\dfrac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}\geqslant\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}$.

❷

Знайдіть значення x, при яких графік функції

$$y=\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

лежить вище осі x.

Варіант Б1

1

Розв'яжіть нерівність:

а) $-2\sin 2x < \sqrt{3}$;

б) $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right) \leqslant \cos\frac{5\pi}{3}$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\sqrt{3} \geqslant 0$.

2

Знайдіть значення x, при яких

графік функції $y=1-2\cos^2\frac{x}{8}$ лежить нижче прямої $y=0{,}5$.

Варіант Б2

1

Розв'яжіть нерівність:

а) $-2\cos\frac{x}{3} > 1$;

б) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \geqslant \sin\frac{3\pi}{4}$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-1 \leqslant 0$.

2

Знайдіть значення x, при яких

графік функції $y = 2\sin^2 4x - 1$ лежить вище прямої $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Варіант В1

1

Розв'яжіть нерівність:

а) $-4\sin\left(\frac{3}{4}x+\frac{\pi}{4}\right) > -2\sqrt{2}$;

б) $\cos^2 x \geqslant 0{,}25$;

в) $\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| \geqslant \sqrt{3}$.

2

Знайдіть значення x, при яких

графік функції $y=\frac{\sin x+\cos x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$ лежить вище осі x.

Варіант В2

1

Розв'яжіть нерівність:

а) $-\sqrt{3}\cos\left(1{,}5x+\frac{\pi}{6}\right) < -1{,}5$;

б) $\sin^2 x \leqslant 0{,}25$;

в) $\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right| \geqslant 1$.

2

Знайдіть значення x, при яких

графік функції $y=\frac{\sin x-\cos x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ лежить нижче осі x.

С-32. БІЛЬШ СКЛАДНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ

Варіант 1

1 **Розв'яжіть нерівність:**

а) $\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)}<\sqrt{0{,}75}$;

б) $\sin^4 x+\cos^4 x\leqslant\frac{5}{8}$;

в) $\cos 2x\,(\sin 8x-1)\leqslant 0$.

2 **Використовуючи заміну змінних, розв'яжіть нерівність:**

а) $\cos 2x+3\sin x\geqslant -1$;

б) $\frac{1}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg}x-3<0$;

в) $\operatorname{tg}x+\sin 2x\geqslant 2$;

г) $\sin^2 x+\sin 2x-3\cos^2 x>0$.

3 **Використовуючи метод інтервалів, розв'яжіть нерівність:**

а) $\cos 3x+2\cos x\geqslant 0$;

б) $\sin x\cos 5x<\sin 2x\cos 4x$;

в) $1-\cos x\leqslant\operatorname{tg}x-\sin x$.

Варіант 2

1 **Розв'яжіть нерівність:**

а) $\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{3}\right)}<\sqrt{0{,}25}$;

б) $\sin^6 x+\cos^6 x\geqslant\frac{5}{8}$;

в) $\sin 3x\,(\cos 2x+1)\geqslant 0$.

2 **Використовуючи заміну змінних, розв'яжіть нерівність:**

а) $\cos 2x+3\cos x\leqslant 1$;

б) $\frac{2}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}x-3<0$;

в) $2\sin 2x+3\operatorname{tg}x\leqslant 5$;

г) $2\sin^2 x+\sin 2x-4\cos^2 x>0$.

3 **Використовуючи метод інтервалів, розв'яжіть нерівність:**

а) $\sin 3x-2\sin x\leqslant 0$;

б) $\cos x\cos 7x>\cos 3x\cos 5x$;

в) $1+\sin x\leqslant\operatorname{ctg}x+\cos x$.

С-33. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ

Варіант Б1

1 **Розв'яжіть рівняння:**

$a\sin x-a+1=0$.

Варіант Б2

1 **Розв'яжіть рівняння:**

$(1-a)\cos x=a$.

❷

Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння має корені:

$(a^2-9)\cos 3x=(a+3)$.

$(4a^2-1)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=(2a-1)$.

❸

Визначте кількість коренів

рівняння $\sin x=a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)$ залежно від значень параметра a.

рівняння $\cos x=a$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ залежно від значень параметра a.

Варіант В1

❶

Розв'яжіть рівняння:

$(a^2-2a-3)\cos 2x=(a^2-a-6)$.

❷

Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння має корені:

$a\cos x+\sin\frac{x}{2}=1$.

❸

Визначте всі значення параметра a, при яких

рівняння $\sin^2 2x+\left(\frac{1}{2}-a\right)\sin 2x-\frac{a}{2}=0$ має рівно три корені, що належать відрізку $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$.

Варіант В2

❶

Розв'яжіть рівняння:

$(a^2+a-2)\sin\frac{x}{2}=(a^2+3a+2)$.

❷

Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння має корені:

$\cos 2x+1=a\cos x$.

❸

Визначте всі значення параметра a, при яких

рівняння $\cos^2 2x-\left(\frac{1}{2}+a\right)\cos 2x+\frac{a}{2}=0$ має рівно чотири корені, що належать відрізку $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{6}\right]$.

(КП-6). ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХНІ СИСТЕМИ

Варіант Б1

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin 2x = \sin x + \cos x - 1$;

б) $\sin x + \cos 4x = 2$.

2

Розв'яжіть нерівність:

а) $2\sin\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) - 1 \leqslant 0$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) < 1$.

3

Розв'яжіть систему:

$$\begin{cases} 3\sin x = \sin y, \\ 2\cos x + \cos y = -1. \end{cases}$$

4

Розв'яжіть рівняння:

$(x - 2)(2x + 1)\arcsin x = 0$.

5*

Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння має корені:

$a\sin\frac{1}{2}x = a^2 - 2a$.

Варіант Б2

1

Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin x - \cos x = \cos 2x$;

б) $\cos x + \cos 3x = 2$.

2

Розв'яжіть нерівність:

а) $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) > -\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) + 1 \geqslant 0$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) < \frac{1}{2}$.

3

Розв'яжіть систему:

$$\begin{cases} 5\sin x = \sin y, \\ 3\cos x + \cos y = 2. \end{cases}$$

4

Розв'яжіть рівняння:

$(4x - 1)(x + 3)\arccos x = 0$.

5*

Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння має корені:

$a\cos 2x = 4a - a^2$.

Варіант В1

1 **Розв'яжіть рівняння:**

а) $5(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1=0$;

б) $\sin 12x-\sin 4x=2$.

2 **Розв'яжіть нерівність:**

а) $\cos^2\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3}{2}x\right)>\frac{1}{2}$;

б) $\cos 4x\operatorname{ctg}2x+\sin 4x>\sqrt{3}$;

в) $\cos 2x\leqslant\sin x$.

3 **Розв'яжіть систему:**

$$\begin{cases}\sin x=\sqrt{2}\sin y,\\ \sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}\cos y.\end{cases}$$

4 **Розв'яжіть рівняння:**

$$\left(x^2-\frac{4\pi}{3}x+\frac{\pi^2}{3}\right)\arccos x=0.$$

5* **Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння має корені:**

$a\sin x+\sqrt{3}a\cos x=a+1$.

Варіант В2

1 **Розв'яжіть рівняння:**

а) $12\ (\sin x-\cos x)=\sin 2x+12$;

б) $\cos\frac{x}{8}+\cos\frac{x}{2}=2$.

2 **Розв'яжіть нерівність:**

а) $4\sin\left(\frac{\pi}{3}-1{,}5x\right)\cos\left(1{,}5x-\frac{\pi}{3}\right)<\sqrt{3}$;

б) $\sin 4x-\cos 4x\operatorname{tg}2x<\sqrt{3}$;

в) $\cos 2x\geqslant\cos x$.

3 **Розв'яжіть систему:**

$$\begin{cases}1+\cos x=\sqrt{2}\cos y,\\ \sin x=\sqrt{2}\sin y.\end{cases}$$

4 **Розв'яжіть рівняння:**

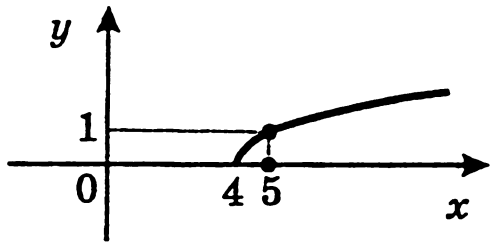
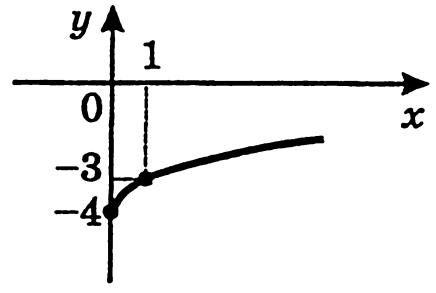
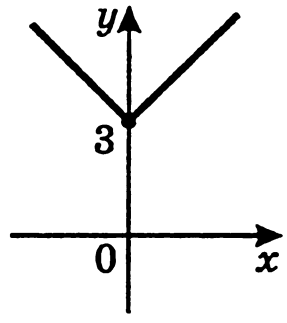
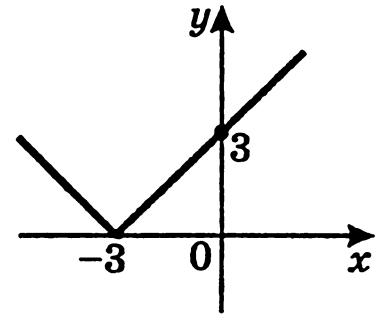
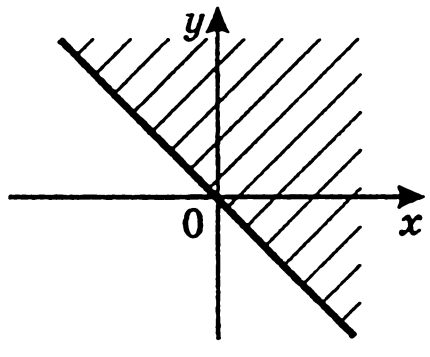
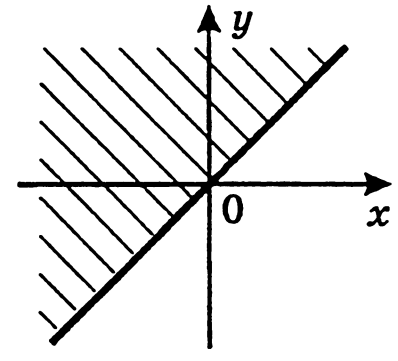
$$\left(x^2-\frac{7\pi}{6}x+\frac{\pi^2}{6}\right)\arcsin x=0.$$

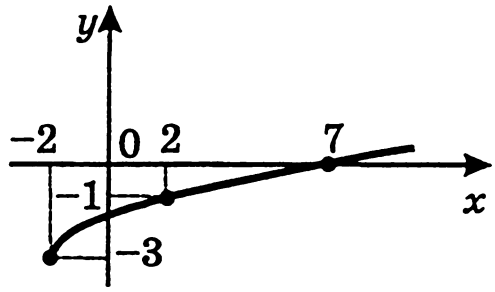
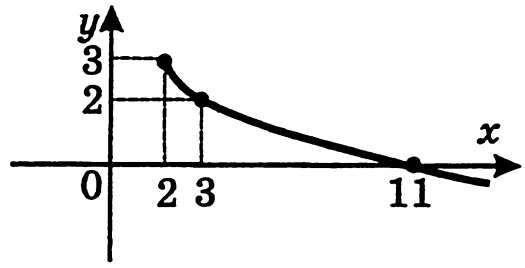
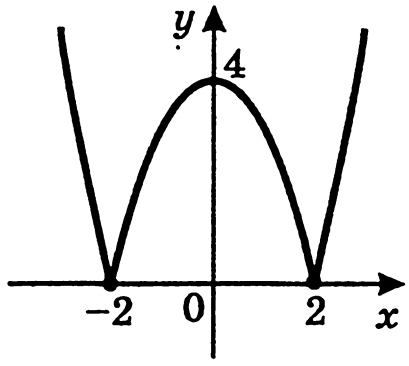
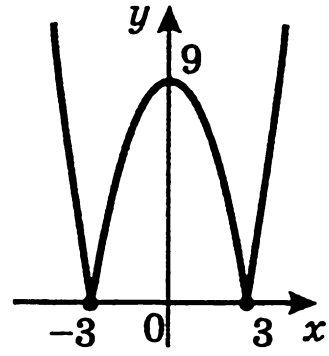
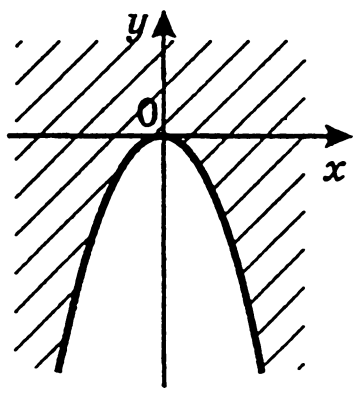
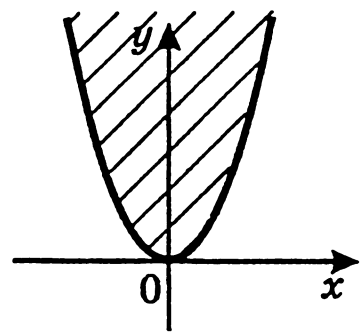
5* **Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння має корені:**

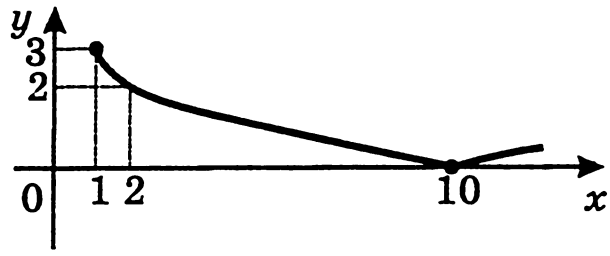
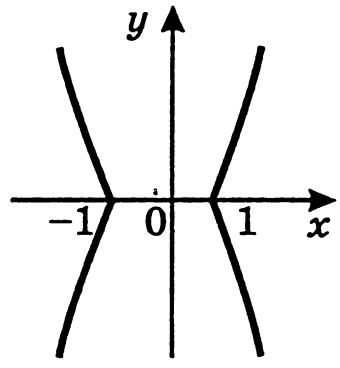
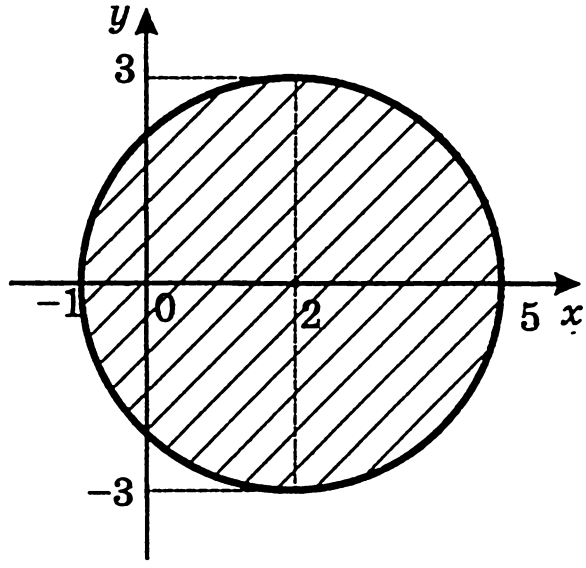
$3a\sin x+4a\cos x=a-1$.

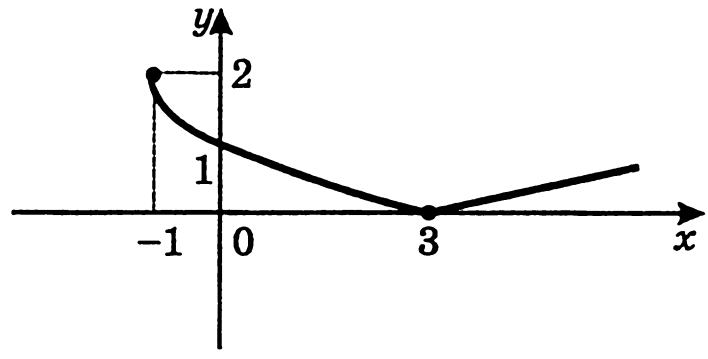
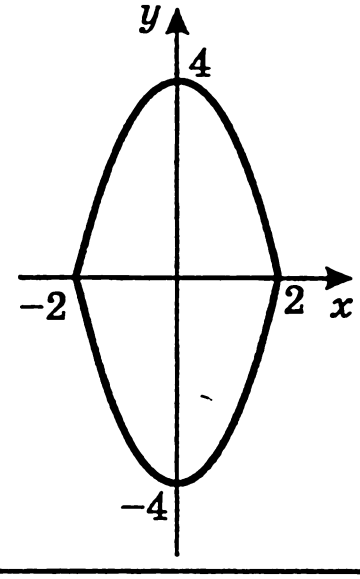
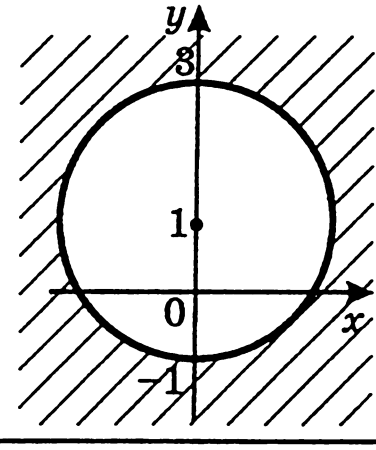
ВІДПОВІДІ

ВІДПОВІДІ ДО КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

К-1 (КП-1)	А1	А2
1 а)	$[2;+\infty)$	$(-\infty;2]$
1 б)	$(-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$	$(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$
2 а)		
2 б)		
3 а)	1	−2
3 б)	Коренів немає	2
4 а)	$(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$	$[-9,2]\cup\{4\}$
4 б)	$(-1;3)$	$(-4;2)$
5 а)	2	1
5 б)		

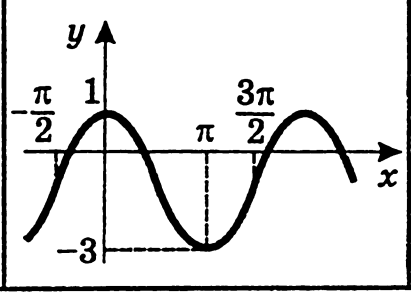
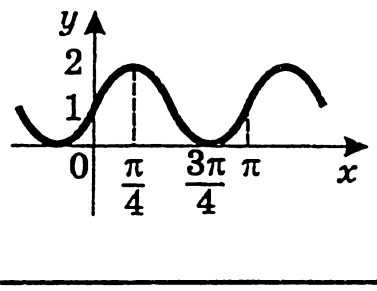
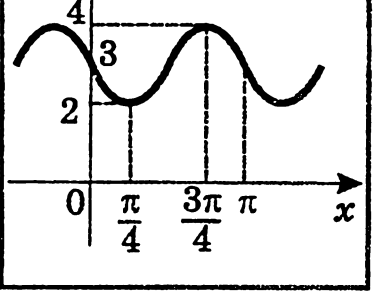
К-1 (КП-1)	Б1	Б2
1 а)	$(0;1)\cup(1;+\infty)$	$(0;2)\cup(2;+\infty)$
1 б)	$[-6;+\infty)$	$[3;+\infty)$
2 а)		
2 б)		
3 а)	1	2
3 б)	4; 64	9; 25
4 а)	$[-5;-1)\cup(-1;7)$	$(-\infty;-3)\cup\{-1\}\cup[5;+\infty)$
4 б)	$(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$	$(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$
5 а)	0	1
5 б)		

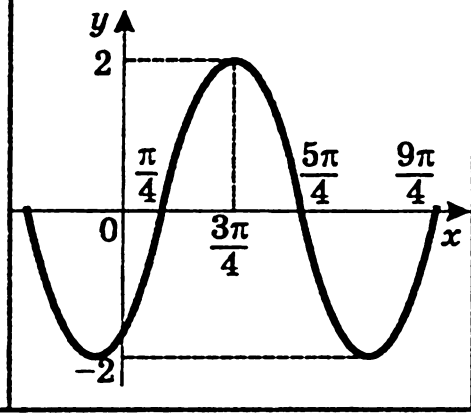
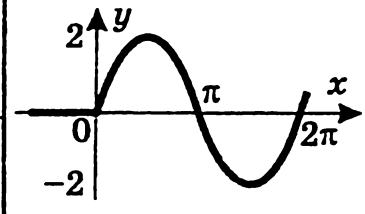
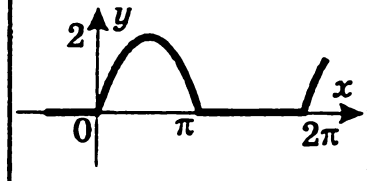
К-1 (КП-1)	В1
1 а)	$[0;4)\cup(4;+\infty)$
1 б)	$(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$
2 а)	
2 б)	
3 а)	4
3 б)	Коренів немає
4 а)	$[0;1)\cup(1;3)$
4 б)	$(-1;6)$
5 а)	1
5 б)	

К-1 (КП-1)	В2
1 а)	$[3;8)\cup(8;+\infty)$
1 б)	$(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$
2 а)	
2 б)	
3 а)	9
3 б)	Коренів немає
4 а)	$(-\infty;-1]\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$
4 б)	$(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$
5 а)	1
5 б)	

(КП-2)	Б1	Б2	В1	В2
1	—	—	$x^2+x;\ 2x+1$	$x^2+2x-1;\ x$
2	$-3;\ 2;\ 4$	$-2;\ 3;\ 4$	$-2;\ 1;\ 1;\ 3$	$-1;\ -1;\ 2;\ 3$
3	$-4x$	$4x-2$	$-2x^2-x+5$	$2x^2+x-2$
5	$8;\ -4$	$8;\ 16$	$3;\ -4$	$3;\ 4$

К-2 (КП-3)	А1	А2	Б1	Б2	В1	В2
1а)	2	3	1	1	1	-1
1б)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	3	3	6	3
2а)	± 3	± 10	1	32	4	5
2б)	4	3	-1	-1	$\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{5}$
2в)	-1	-2	6	5	1	2
2г)	$-1;\ 0$	$0;\ 3$	$\pm 3;\ 7$	$-3;\ 1;\ 4$	8	1
3	$(1;\ 4);$ $(4;\ 1)$	$(9;\ 1);$ $(-1;\ -9)$	$(4;\ -3);$ $\left(\frac{1}{4};\ 3\frac{3}{4}\right)$	$(4;\ 0)$	$(25;\ 9);$ $\left(12\frac{1}{4};\ 20\frac{1}{4}\right)$	$(4;\ 1)$
4	$a \geqslant 2$	$a \leqslant -3$	$(-2;\ 0) \cup$ $\cup (1;\ 3)$	$(-3;\ -1) \cup$ $\cup (0;\ 4)$	$[2;\ +\infty)$	$(-\infty;\ -2]$

К-3 (КП-4)	А1	А2	Б1
1а)	0	0	2
1б)	1	-1	1
2	0	0	-1
3а)	$-\cos^2\alpha$	$-\sin^2\alpha$	$\cos 2\alpha$
3б)	1	$\cos 2\alpha$	$-\sin 4\alpha$
5			

К-3 (КП-4)	Б2	В1	В2
1а)	2	0	0
1б)	1	0	0
2	-1	2	-2
3а)	$\cos 2\alpha$	$\sin^2\alpha$	$-\frac{1}{\sin 4\alpha}$
3б)	$\sin 4\alpha$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$
5			

К-4 (КП-5)	А1	А2	Б1
1а)	$(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$ *	$\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$	$-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$
1б)	$\frac{\pi}{3}+\pi n$	$-\frac{\pi}{4}+\pi n$	$\operatorname{arctg}5+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi k$
1в)	$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$	$\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$2\pi n;\ (-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k$
1г)	πn	$\frac{\pi}{2}+\pi n$	$\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$
2	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi k\right)$	$\left(\pi+2\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \pi k\right);\left(\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$

* Тут і далі $n \in Z$, $m \in Z$, $k \in Z$, $p \in Z$.

К-4 (КП-5)	Б2	В1	В2
1а)	$\frac{\pi}{6}+\pi n$	$(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$	$\frac{\pi n}{2}$
1б)	$-\operatorname{arctg}3+\pi n;$ $\frac{\pi}{4}+\pi k$	$2\operatorname{arctg}2+2\pi k;$ $\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k;$ $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$
1в)	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi k$	$\frac{\pi n}{2};\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi k$	$\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4};\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi k$
1г)	$\pi+2\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$	$\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$	$-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$
2	$\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{6}-\pi k\right)$	$\left(\pi+2\pi n;(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$

(КП-6)	Варіант Б1	Варіант Б2
1а)	$2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n$	$\pi+2\pi n;-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n$
1б)	$\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$2\pi n$
2а)	$\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}\right)$
2б)	$\left[\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right]$
2в)	$\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3};\frac{7\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}\right)$	$\left(-\frac{7\pi}{12}+\pi n;\frac{\pi}{12}+\pi n\right)$
3	$(\pi+2\pi k;2\pi n)$	$(2\pi n;\pi+2\pi k)$
4	$-0,5;\ 0$	$0,25;\ 1$
5*	$a=0;\ 1\leqslant a\leqslant 3$	$a=0;\ 3\leqslant a\leqslant 5$

(КП-6)	Варіант В1	Варіант В2
1 а)	$-\frac{\pi}{4}+\pi n$	$-\pi+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n$
1 б)	$-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$	$16\pi n$
2 а)	$\left(\frac{2\pi n}{3};\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3};\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}\right)$
2 б)	$\left(\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right)$
2 в)	$\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\}\cup\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$	$\{2\pi n\}\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right]$
3	$\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right);$ $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right);$ $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;-\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right);$ $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi k\right);$ $\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n;-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$
4	$1;\ \frac{\pi}{3}$	$0;\ \frac{\pi}{6}$
5*	$a\leqslant-\frac{1}{3};\ a\geqslant 1$	$a\leqslant-\frac{1}{4};\ a\geqslant\frac{1}{6}$

ВІДПОВІДІ ДО ДОМАШНІХ САМОСТІЙНИХ РОБІТ

С-16*	Варіант 1	Варіант 2
1а)	$-7;\ 8$	$0;\ 5$
1б)	1	4
1в)	$2-2\sqrt{3};\ 2$	$1+\sqrt{6}$
1г)	3	$1;\ 2;\ 10$
1д)	8	$-15;\ 1$
1е)	4	9
1ж)	4	-1
1з)	± 2	± 6
1и)	$[3;\ 8]$	Коренів немає
1к*)	$0{,}5$	1
2а)	$(-\infty;-1]\cup(8;+\infty)$	$(-\infty;-4]$
2б)	$[2{,}5;\ 3)$	$[2;\ 3)$
2в)	$[5;\ 6)\cup(9;\ 10]$	$\left[\frac{1}{2};1\right)$
2г)	$[-2;\ -1]\cup\{3\}$	$\{-3\}\cup\left(-\frac{1}{2};1\right]$
2д)	$[1;\ +\infty)$	$\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$
3а)	$(3;\ 1)$	$(2;3);\left(\frac{13}{3};-\frac{5}{3}\right)$
3б)	$(10;\ 6)$	$(5;\ 4)$
3в)	$(1;\ 81);\ (81;\ 1)$	$(64;\ 1)$

С-25*	Варіант 1	Варіант 2
1а)	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
1б)	$(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
1в)	$(-1; 1)$	$[-1; 0) \cup (0; 1]$
1г)	R	R
1д)	$[-1; 1]$	R
2а)	$\frac{120}{169}$	$\frac{5}{\sqrt{26}}$
2б)	5	$\frac{7}{24}$
2в)	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{7}{5\sqrt{2}}$
3а)	$4\pi - 10$	$6 - 2\pi$
3б)	$-\frac{\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{8}$
4а)	$[-2; -1] \cup [0; 1]$	$\left[-2;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};2\right]$
4б)	$[1; 2]$	$(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$
5а)	$D(f) = [-1; 0]$; $E(f) = \left[0;\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$	$D(f) = [-1; 0) \cup (0;1]$; $E(f) = \left(-\infty;-\frac{2}{\pi}\right)\cup\left(\frac{2}{\pi};+\infty\right)$
5б)	$D(f) = [0;+\infty)$; $E(f) = [0;\pi)$	$D(f) = [0;+\infty)$; $E(f) = \left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)$
6а)	-1	$\frac{1}{3}$
6б)	$2\sqrt{3} - 1$	$1{,}5$
6в)	-2	1
6г)	$\operatorname{ctg} 2$	$\operatorname{tg} 0{,}5$

ДОДАТОК

Орієнтовне тематичне планування курсу алгебри і початків аналізу в 10 класі за підручниками Є. П. Неліна на різних рівнях (і розподіл самостійних та контрольних робіт)

Академічний рівень (70 год, 2 год на тиждень, систематизація та узагальнення, резервний час — 8 год)

Профільний рівень* (175 год, 5 год на тиждень, систематизація та узагальнення, резервний час – 20 год)

Тема 1. Функції, многочлени, рівняння і нерівності (акад. – 12 год, проф. – 60 год)

№ з/п	Тема уроку	Академічн.	Профільн.	Самостійні (контрольні) роботи
		Кількість годин на тиждень		
		2	5	
1	2	3	4	5
1	Множини, операції над множинами	1	1	С-1
2	Розв'язування задач		1	
3	Взаємно однозначна відповідність між елементами множин. Рівнопотужні множини. [Зліченні множини]		1	
4	Розв'язування задач		1	
5	Числові множини. Множина дійсних чисел	1	1	
6	Розв'язування задач		4	
7	Числові функції. Означення. Область визначення і множина значень. Способи задання функцій. Графік функції	1	1	
8	Розв'язування задач		2	
9	Монотонність. Зростання і спадання, парність і непарність функцій, найбільше та найменше значення функції		1	
10	Розв'язування задач		1	

* Сірим кольором залито номери тем, які не є обов'язковими при навчанні на академічному рівні.

1	2	3	4	5
11	Властивості і графіки основних видів функцій	1	1	С-1
12	Обернена функція	1		
13	Розв'язування задач		1	
14	Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій	1	1	
15	Розв'язування задач	1	3	
16	Рівносильні перетворення рівнянь. Рівняння-наслідки	1	1	С-2
17	Розв'язування задач		1	
18	Системи рівнянь		1	
19	Розв'язування задач		1	
20	Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь		1	С-3
21	Розв'язування задач		3	
22	Рівносильні перетворення нерівностей, метод інтервалів	1	1	С-4
23	Розв'язування задач		3	
24	Рівняння і нерівності, що містять знак модуля	1	1	С-5
25	Розв'язування задач		2	
26	Побудова графіків рівнянь та нерівностей з двома змінними		1	С-6
27	Розв'язування задач		2	
28	Розв'язування задач	1	1	
29	Рівняння і нерівності з параметрами		1	С-7
30	Розв'язування задач		3	
31	Тематична контрольна робота	1	1	К-1 (КП-1)
32	Метод математичної індукції		1	С-8
33	Многочлени від однієї змінної та їх тотожна рівність		1	С-9
34	Розв'язування задач		1	

1	2	3	4	5
35	Дії над многочленами. Ділення многочлена на многочлен з остачею		1	
36	Розв'язування задач		1	
37	Теорема Безу. Корені многочленів		1	
38	Розв'язування задач		1	
39	Формули Вієта		1	
40	Розв'язування задач		1	С-9
41	Схема Горнера ділення многочлена на двочлен		1	
42	Розв'язування задач		1	
43	Знаходження раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами		1	
44	Розв'язування задач		3	
45	Тематична контрольна робота (профільний рівень)		1	КП-2
46	Узагальнення і систематизація знань, умінь і навичок учнів з теми		1	

Тема 2. Степенева функція

(акад. — 14 год, проф. — 30 год)

1	2	3	4	5
47	Корінь *n-го* степеня. Арифметичний корінь *n-го* степеня, його властивості	1	1	
48	Розв'язування задач	1	1	
49	Перетворення виразів з коренями *n-го* степеня	1	1	С-10
50	Розв'язування задач	1	1	
51	Функція $y=\sqrt[n]{x}$ та її графік	1	1	
52	Розв'язування задач	1	1	
53	Обернена функція		1	
54	Розв'язування задач		1	
55	Найпростіші способи розв'язування ірраціональних рівнянь	1	1	С-11
56	Розв'язування задач	1	2	

1	2	3	4	5
57	Застосування властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь		1	С-12
58	Розв'язування задач		1	
59	Приклади використання інших способів розв'язування ірраціональних рівнянь		1	
60	Розв'язування задач	1	1	
61	Ірраціональні нерівності		1	С-13
62	Розв'язування задач [Системи ірраціональних рівнянь]		1	
63	Розв'язування задач		2	
64	Степені з раціональними показниками, їхні властивості	1	1	С-14
65	Розв'язування задач		1	
66	Перетворення виразів, які містять степені з раціональним показником	1	1	
67	Розв'язування задач		1	
68	Степеневі функції, їхні властивості та графіки	1	1	
69	Розв'язування задач		1	
70	Розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей з параметрами		1	С-15
71	Розв'язування задач		1	
72	Розв'язування задач [Системи ірраціональних рівнянь і нерівностей з параметрами]		1	С-16*
73	Розв'язування задач	1	1	
74	Тематична контрольна робота	1	1	К-2 (КП-3)

Тема 3. Тригонометричні функції

(акад. — 20 год, проф. — 30 год)

1	2	3	4	5
75	Радіанне вимірювання кутів	1	1	С-17
76	Синус, косинус, тангенс, котангенс кута	1	1	
77	Розв'язування задач		1	
78	Тригонометричні функції числового аргументу	1	1	

1	2	3	4	5
79	Розв'язування задач		1	С-17
80	Властивості тригонометричних функцій.	1	1	
81	Розв'язування задач		1	
82	Властивості та графік функції $y = \sin x$	1	1	С-18, С-19*
83	Властивості та графік функції $y = \cos x$	1	1	
84	Властивості та графік функції $y = \operatorname{tg} x$	1	1	
85	Властивості та графік функції $y = \operatorname{ctg} x$	1	1	
86	Розв'язування задач		1	
87	Гармонійні коливання. Розв'язування задач	2	2	
88	Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу	1	1	С-20
89	Розв'язування задач	1	1	
90	Тригонометричні формули додавання	1	1	С-21
91	Розв'язування задач		1	
92	Формули подвійного аргументу	1	1	
93	Розв'язування задач		1	
94	Формули зведення	1	1	
95	Розв'язування задач	1	1	
96	Формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток	1	1	С-22
97	Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму	1	1	
98	Розв'язування задач		1	
99	Формули половинного аргументу. Формули потрійного аргументу		1	С-23
100	Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу		1	
101	Формула перетворення виразу $a\sin\alpha + b\cos\alpha$		1	
102	Розв'язування задач	1	1	
103	Тематична контрольна робота	1	1	К-3 (КП-4)

Тема 4. Тригонометричні рівняння і нерівності
(акад. — 16 год, проф. — 35 год)

1	2	3	4	5
104	Обернені тригонометричні функції: $y=\arcsin x$ і $y=\arccos x$ (означення, властивості, графіки)	1	1	С-24, С-25*
105	Обернені тригонометричні функції: $y=\operatorname{arctg} x$ і $y=\operatorname{arcctg} x$ (означення, властивості, графіки)	1	1	
106	Розв'язування задач		1	
107	Найпростіші тригонометричні рівняння. Рівняння $\cos x=a$	1	1	С-26
108	Найпростіші тригонометричні рівняння. Рівняння $\sin x=a$	1	1	
109	Найпростіші тригонометричні рівняння. Рівняння $\operatorname{tg} x=a$ і рівняння $\operatorname{ctg} x=a$	1	1	
110	Розв'язування задач		1	
111	Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь. Заміна змінних при розв'язуванні тригонометричних рівнянь	1	1	С-27
112	Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь. Розв'язування тригонометричних рівнянь зведенням до однієї тригонометричної функції (з однаковим аргументом)		1	
113	Розв'язування задач		1	
114	Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь. Розв'язування однорідних тригонометричних рівнянь та зведення тригонометричного рівняння до однорідного	1	1	
115	Розв'язування задач		1	
116	Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь . Розв'язування тригонометричних рівнянь виду $f(x)=0$ за допомогою розкладення на множники	1	1	
117	Розв'язування задач		1	
118	Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь. Відбір коренів тригонометричних рівнянь	1	1	С-28

1	2	3	4	5
119	Розв'язування задач		2	С-28
120	Основні способи розв'язування систем тригонометричних рівнянь	1	1	
121	Розв'язування задач	1	1	
122	Тематична контрольна робота	1	1	К-4 (КП-5)
123	Приклади розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь та їх систем	1	1	С-29, С-30
124	Розв'язування задач		1	
125	Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції		1	С-25
126	Розв'язування задач		1	
127	Найпростіші тригонометричні нерівності	1	1	С-31
128	Розв'язування задач	1	1	
129	Розв'язування тригонометричних нерівностей		1	С-32
130	Розв'язування задач		1	
131	Тригонометричні рівняння з параметрами		1	С-33
132	Розв'язування задач		1	
133	Розв'язування задач		1	
134	Тригонометричні нерівності з параметрами		1	
135	Розв'язування задач		1	
136	Розв'язування задач		1	
137	Тематична контрольна робота (на профільному рівні)		1	(КП-6)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 3

ФУНКЦІЇ, РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ 5

С-1. Числові функції, їхні властивості та графіки 5
С-2. Рівняння 7
С-3. Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь 9
С-4. Нерівності. Метод інтервалів 11
С-5. Рівняння і нерівності, що містять знак модуля 13
С-6. Побудова графіків функцій, рівнянь і нерівностей 15
С-7. Рівняння і нерівності з параметрами 16
К-1 (КП-1). Функції, рівняння, нерівності 17
С-8. Метод математичної індукції 20
С-9. Многочлени. Теорема Безу. Схема Горнера. Формули Вієта 21
(КП-2). Многочлени та їхні корені. Метод математичної індукції 23

СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ 25

С-10. Корінь n-го степеня та його властивості 25
С-11. Ірраціональні рівняння 28
С-12. Методи розв'язування ірраціональних рівнянь 29
С-13. Системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності 31
С-14. Степінь з раціональним показником і його властивості 32
С-15. Ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами ... 35
С-16*. Методи розв'язування ірраціональних рівнянь, нерівностей, систем (домашня самостійна робота) 36
К-2 (КП-3). Степені та корені 38

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ 41

С-17. Радіанна міра кутів. Тригонометричні функції кута і числового аргументу 41
С-18. Властивості та графіки тригонометричних функцій 43
С-19*. Дослідження тригонометричних функцій і побудова їхніх графіків (домашня практична робота) 46

С-20. Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу 47
С-21. Формули додавання. Формули подвійного аргументу. Формули зведення 48
С-22. Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток і добутку в суму 50
С-23. Формули половинного аргументу. Формули перетворення виразу $a\sin x + b\cos x$ 52
К-3 (КП-4). Тригонометричні функції 53

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ 57

С-24. Обернена функція. Обернені тригонометричні функції 57
С-25*. Застосування властивостей обернених тригонометричних функцій (домашня самостійна робота) 59
С-26. Найпростіші тригонометричні рівняння 60
С-27. Тригонометричні рівняння 62
С-28. Відбір коренів тригонометричних рівнянь. Системи рівнянь 64
К-4 (КП-5). Тригонометричні рівняння і системи рівнянь 65
С-29. Більш складні тригонометричні рівняння 67
С-30. Системи тригонометричних рівнянь 68
С-31. Найпростіші тригонометричні нерівності 69
С-32. Більш складні тригонометричні нерівності 71
С-33. Тригонометричні рівняння з параметрами 71
(КП-6). Тригонометричні рівняння, нерівності та їхні системи 73

Відповіді 75
Відповіді до контрольних робіт 75
Відповіді до домашніх самостійних робіт 83

Додаток
Орієнтовне тематичне планування курсу алгебри і початків аналізу в 10 класі 85

Навчальне видання

Єршова Алла Петрівна
Нелін Євген Петрович

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛИЗУ

10 клас

Самостійні та контрольні роботи

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Редактор *О. В. Трефілова*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 6,00.
Тираж 3000 прим. Замовлення №593.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

Видавництво «Гімназія» пропонує
навчально-методичний комплект
з алгебри і початків аналізу для 10 класу.
Аналогічний комплект розроблено для 11 класу

9 789664 742099

ТОВ ТО «Гімназія»
61052 Харків,
вул. Восьмого Березня, 31
тел.: (057) 719-46-80, 719-17-26
факс: (057) 758-83-93
e-mail: contact@gymnasia.com.ua