ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛЇКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ XV. ВИПУСК I.

під редакцією

Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦЬКОГО, Дра ІВАНА РАКОВСЬКОГО
і Дра СТЕФАНА РУДНИЦЬКОГО.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND XV. HEFT I.

REDIGIERT VON

Dr. WLADIMIR LEWYĆKYJ, Dr. IWAN RAKOWŚKYJ
u. Dr. STEPHAN RUDNYĆKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1912.

Накладом Наукового Товариства ім. Шевченка.

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка.

Книгарня Наукового Товариства імени Шевченка

у Львові, Ринок ч. 10.

має на складі між иньшими отсі книжки і брошури:

	корон
Бобяк Григорий. Про наші губи	0·30
— Причинки до ліхенольоґії східної Галичини	0·45
Брайтенбах В. Біольоґія в XIX. в.	0·25
Верхратский Іван. Зоольоґія (на низші кляси)	3·—
Верхратский-Ростафіньский. Ботаніка для висших кляс	2·40
Візнер Ю. Житє ростин у морі	0·15
— Ботаніка (на низші кляси)	3·20
— Мінеральоґія (вичерпане)	—·—
— Соматольоґія	1·80
Начерк соматольоґії	3·—
— Нічна лівка мотилів (вичерпане)	—·—
Вовк Хв. Антропомитричні досліде	1·50
Гірняк Ю. Роля сталої, плинної і ґазової фази в хемічній рівновазі	0·45
Ґінтер С. Історня ґеоґрафічних відкрить у XV—XVI в.	2·20
Глібовицкий Клим. Микола Г. Абель і єго значінє в математиці	2·—
Др. Горбачевский Іван. Уваги о терміньольоґії хемічній	0·10
— Загальний метод добуваня нуклеінного квасу з орґанів	0·10
Др. Дакура Осип. Зі шпитальної казуїстики за рік 1899	0·20
— Інтересний случай новотвору середгрудного	0·20
Збірник секциї математично-природописно-лікарскої Наукового Товариства імени Шевченка. Том I.	3·—
— Том II.	3·—
— Том III. випуск I. Часть лікарска	2·—
— Том III. випуск II. Часть математично природописна	2·—
— Том IV. випуск I. Часть лікарска	2·—
— Том IV. випуск II. Часть математична	1·—
— Том V. випуск I. Часть лікарска	2·—
— Том V. випуск II. Часть лікарска	2·—
— Том VI. випуск I. Часть математично-природописна	2·—
— Том VI. випуск II. Часть лікарска	2—
— Том VII. випуск I. Часть математично-природописна	2·—
— Том VII. випуск II. Часть математично-природописна	3·—
— Том VIII. випуск I. Часть лікарска	2·—
— Том VIII. випуск II. Часть математично-природописна	3·—
— Том IX.	5·—
— Том X.	5—
— Том XI.	5·—
— Том XII.	5—
— Том XIII.	5·—
— Том XIII	5·—
Левицкий Володимир. Еліптичні модулові функциї	0·60
— Про переступ чисел e і π	1·20
— Електромаґнетна теория сьвітла і причинок до поділу рівнань 2-го степеня	1·60
— Клясифікация наук математичних	0·35
— Короткий начерк теориї функций автоморфних	0·75
— Теория перстеня Сатурна	1·—
— Додаток до теориї дробів тяглих та ґрупи модулової	0·20
— Найновійші праці з теориї функций аналітичних	0·25
— Математика теоретична а практична	0·30
— Ґеометрия метова в оптиці ґеометричній після теорії Ф. Кляйна	0·40
— Иньший сьвіт	0·30
— Машини електростатичні	0·25
— Відношенє ґеометриї метричної до метової	0·25

ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛЇКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ XV. ВИПУСК I.

ПІД РЕДАКЦІЄЮ

**Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦЬКОГО, Дра ІВАНА РАКОВСЬКОГО
і Дра СТЕФАНА РУДНИЦЬКОГО.**

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND XV. HEFT I.

REDIGIERT VON

Dr. WLADIMIR LEWYĆKYJ, Dr. IWAN RAKOWŚKYJ
u. Dr. STEPHAN RUDNYĆKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1912.

Накладом Наукового Товариства ім. Шевченка

З друкарнї Наукового Товариства імени Шевченка.

ЗМІСТ.

INHALT.

Про закон бігунового дуалізму ґеометричних творів.

написав

В. Каліцун.

(B. Kalicun. Über das Gesetz der polaren Dualität in der Geometrie.)

Часть II. (II. Teil.)

Про закон бігунового дуалізму в просторі.

I.

1. Дана є в просторі поверхня другого степеня $F^{(2)}$ і довільна точка P.

Довільна площа α, яка переходить через точку P, перетинає дану поверхню $F^{(2)}$ після кривої II-го степеня c^2. Бігунова точки P, з огляду на ту криву c^2, нехай буде означена через p. Иньша плоша α_1, переходяча через точку P, перетинає поверхню $F^{(2)}$ після кривої $C_1{}^2$, а криву C^2 в двох точках A і B. Бігунова p_1 точки P, з огляду на криву $C_1{}^2$, перейде через точку U, гармонічно спряжену з P в ґрупі $(FUAB) = -1$, через яку переходить рівнож бігунова p, бо точки A і B є спільні для обох кривих C^2 і $C_1{}^2$. З того слідує, що прямі p і p_1 лежать на одній площі Π.

Однак нетрудно буде доказати, що на тій площі Π лежать всі бігунові p_x точки P, з огляду на перерізи $C_x{}^2$ поверхні $F^{(2)}$ довільними площами α_x, які переходять через точку P.

Коли іменно площа α_x перетинає прямі p і p_1 в точках U_1 і U_2, а криві C^2 і $C_1{}^2$ в парах точок: C і D, E і F, то точки U_1 і U_2 є гармонічно спряжені з точкою P в ґрупах: $(PU_1CD) = -1$, $(PU_2EF) = -1$; отже пряма p_x, яка сполучує точки U_1 і U_2, є бігуновою точки P, з огляду на криву $C_x{}^2$, бо точки C і D, E і F належать рівнож і до тої кривої $C_x{}^2$. — Так отже дійсно пряма p_x лежить на площі Π, визначеній прямими p і p_1.

З повисшого розумованя слїдує твердженє:

„Коли січна площа α_x поверхнї II-го ст. $F^{(2)}$ обертає ся около своєї сталої точки P, тодї бігунова p_x тої точки P, з огляду на криву C_x^2, після якої площа α_x перетинає поверхню $F^{(2)}$, описує сталу площу Π.“

Площу тую названо „бігуновою площею“ точки P, з огляду на поверхню II-го степеня $F^{(2)}$.

Нетрудно однак запримітити, що:

„Бігунова площа Π точки P, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, є місцем ґеометричним точок U, U_1, U_2, ... гармонїчно спряжених з точкою P з огляду на пари точок A, B; C, D; ..., в яких прямі, що переходять через точку P, перетинають ту поверхню $F^{(2)}$.“

А позаяк точки U, U_1, U_2, ... є одинокими точками гармонїчно спряженими з точкою P в ґрупах $(PUAB)$, (PU_1CD), ..., проте площа Π є одинокою бігуновою площею точки P, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$.

З сего слїдує, що:

„З кождою дїйсною точкою (P) простору є спряжена певна площа (Π), яка є однозначно визначена тою точкою і поверхнею II-го ст. $F^{(2)}$.“

Зі свійства гармонїчної ґрупи чотирох точок дасть ся дальше легко доказати, що:

„Бігунова площа Π довільної точки P, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, є площею стичности стожка II-го ст., описаного з точки P на данїй поверхнї $F^{(2)}$.“

„Бігунова площа точки в безконечности переходить через осередок поверхнї $F^{(2)}$.“

„Бігунова площа точки P, що лежить на поверхнї $F^{(2)}$, сходить ся з площею стичною тої поверхнї в точцї P.“

2. Виходжу тепер з заложеня, що є дана в просторі довільна площа Π і поверхня II-го степеня $F^{(2)}$.

Бігунова площа Π_1 довільної точки P_1, що лежить на площі Π, перетинає поверхню $F^{(2)}$ після кривої C_1^2, а площу Π після прямої p_1; подібно бігунова площа Π_2 иньшої точки P_2 на площі Π, перетинає поверхню $F^{(2)}$ після кривої C_2^2, площу Π після прямої p_2, а площу Π_1 після прямої d. Та послїдна пряма d перетинає криві C^1_2 і C_2^2 в двох спільних точках A і B, а площу Π в точцї U, яка є точкою пересїчи прямих p_1 і p_2. З того слїдує, що пряма d мусить перейти через точку P, гармонїчно спряжену в ґрупі $(PUAB) = -1$, а яка є бігуном прямої p_1, з огляду на криву C_1^2, як рівнож бігуном прямої p_2, з огляду на криву C_2^2.

Рівнож легко буде доказати що через тую точку переходять всї бігунові площі (Π_x) точок (P_x) площі Π, з огляду на $F^{(2)}$.

Іменно бігунова площа Π_x точки P_x, що лежать на площі Π, перетинає поверхню $F^{(2)}$ після кривої $C_x{}^2$, а бігунові площі Π_1, Π_2 точок P_1, P_2 після прямих d_1, d_2. Ті послїдні перетинають криві $C_x{}^2$ і $C_1{}^2$, $C_x{}^2$ і $C_2{}^2$ в їх спільних точках C і D, E і F, а прямі p_1 і p_2 в точках U_1, U_2. Отже на прямих d_1, d_2 мусить лежати точка P, яко гармонічно спряжена з точками U_1, U_2 в ґрупах $(PU_1\,CD) = -1$, $(PU_2\,EF) = -1$.

Таким способом доказалисьмо слїдуюче твердженє:

„Бігунові площі (Π_x) всїх точок (P_x), що лежать на даній площі Π, з огляду на поверхню II-го степеня $F^{(2)}$, переходять через одну і ту саму точку P."

Однак з твердженя попередного уступа слїдує, що спільні точки A і B кривих $C_1{}^2$ і C^2_2 є точками стичности стичних площ σ_1 і σ_2 до поверхнї $F^{(2)}$, які переходять через пряму $[P_1\ P_2] = g$. Ввиду сего площа v, яка лучить точку P з прямою g, є гармонїчно спряжена з площею Π, з огляду на стичні площі σ_1 і σ_2, бо ті площі переходять через точки P, U, A, B, що творять ґрупу гармонїчну. Отже:

„Коли грана (g) двох стичних площ (σ_1 і σ_2) поверхнї II-го ст. $F^{(2)}$ порушає ся по сталій площі Π, тодї площа V гармонічно спряжена з площею Π, з огляду на пару стичних площ σ_1 і σ_2, обертає ся около сталої своєї точки P."

А що через кожду пряму g площі Π можна попровадити тілько одну площу v, яка є гармонїчно спряжена з площею Π, з огляду на площі σ_1 і σ_2, проте точка P є одинокою спільною точкою всїх площ V.

Точку P названо „бігуном" площі Π, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$.

Подібно отже як через точку і поверхню II-го ст. $F^{(2)}$ є однозначно визначена бігунова площа тої точки, так і взаїмно „з кождою дїйсною площею є спряжена одинока дїйсна точка, яка є докладно визначена тою площею і поверхнею $F^{(2)}$.

3. Вертаю єще раз до попередної фіґури і беру під розвагу довільну точку P_x на прямій g площі Π.

Бігунова площа Π_x тої точки, з огляду на поверхню $F^{(2)}$, мусить перейти через бігун P площі Π, з огляду на $F^{(2)}$, як рівнож через бігун P_g прямої g, з огляду на криву C^2, після якої площа Π перетинає поверхню $F^{(2)}$. Коли отже точка P_x, порушаючи ся по прямій g, описує ряд (P_x), то єї бігунова площа Π_x визначує вязку

(Π_x), що посїдає прями g_1 за вісь, яка лучить ті два сталі бігуни P і P_g. Однак звісно, що ряд (P_x) є проєктивний з вязкою бігунових тих точок, з огляду на криву C^2, яка то вязка не є нічим иньшим як слїдами площ Π_x на площі Π. — Отже:

„Коли точка P_x описує на прямій g ряд (P_x), то єї бігунова площа Π_x, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, переходить через одну і ту саму пряму g_1 і творить вязку (Π_x), яка є проєктивна з рядом (P_x)."

І взаїмно:

„Коли площа Π_x описує около своєї сталої прямої g_1 вязку площ (Π_x), то бігун P_x тої площі, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, порушає ся по сталій прямій g і визначує ряд (P_x), який є проєктивний з вязкою (Π_x)."

З повисших тверджень передовсїм слїдує, що „прямій (g), яку уважаємо за основу ряду точок (P_x), відповідає бігуново, з огляду на поверхню $F^{(2)}$ II-го ст. иньша пряма g_1, котра становить вісь вязки (Π_x) бігунових площ точок P_x, з огляду на тую поверхню.

Прямі g і g_1 що в той спосіб собі відповідають названо „прямими бігуново зі собою спряженими", з огляду на поверхню II-го степ. $F^{(2)}$.

Нетрудно буде відтак провірити слїдуючі свійства прямих g і g_1 бігуново спряжених, з огляду на $F^{(2)}$:

„Коли пряма g порушає ся по площі Π, то пряма g_1, бігуново спряжена з g, з огляду на поверхню II-го степеня $F^{(2)}$, переходить через бігун P площі Π, з огляду на ту поверхню."

І взаїмно:

„Коли пряма g описує на площі Π вязку прямих о вершку P_1, то g_1 описує вязку прямих на площі Π_1, бігуновій точки P_1, якої то вязки вершком є бігун P площі Π; Обі ті вязки прямих є проєктивні".

4. Дві точки, які посїдають те свійство, що бігунова площа, з огляд на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, одної з них — переходить через другу, носять назву „спряжених бігунів"; подібно під „двома бігуново спряженими площами", з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, належить розуміти такі дві площі, з котрих одна переходить через бігун другої.

В попереднім відступі (3) доказано, що ряд точок P_x на прямій g є проєктивний з вязкою бігунових площ (Π_x) тих точок, визначених з огляду на поверхню $F^{(2)}$. З сего слїдує, що точки P'_x, в яких пробиває пряма g вязку $(\Pi_x,)$ творять ряд (P'_x), проєктивний з рядом (P_x). Однак легко запримітити, що точки відповідні тих рядів є спряженими бігунами, з огляду на криву C^2, після якої перетинає поверхню $F^{(2)}$ довільна площа Π, що переходить через пряму g; ті ряди мусять отже, як звісно з I части, творити інволюцию. Позаяк однак точки F_x і P'_x є спряженими бігунами рівнож і з огляду на поверхню $F^{(2)}$, а площі Π_x і Π'_x, що переходять через ті точки і пряму g_1, бігуново спряжену з прямою g, є бігуново спряженими площами, з огляду на поверхню $F^{(2)}$, проте з повисшого розумованя слїдують твердженя:

„Всї пари спряжених бігунів, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, що лежать на тій самій прямій g, творять ряд інволюцийний, якого подвійними точками є точки пересїчи тої прямої з поверхнею $F^{(2)}$.“

I взаїмно:

„Всї пари бігуново спряжених площ, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, переходячих через ту саму пряму g_1, творять вязку інволюцийну, якої подвійними площами є стичні площі до $F^{(2)}$, поведені через пряму g_1.“

„Коли прямі g і g_1 є зі собою бігуново спряжені, з огляду на $F^{(2)}$, тодї інволюцийний ряд спряжених бігунів на однїй з них є перспективічний з вязкою бігуново спряжених площ, переходячих через другу.“

5. Повисші сполученя між просторними елементами і їх творами I-го ст. становлять основне свійство „закона бігунового дуалїзму в просторі.“

Після того закона:

„Просторному системови Σ, який складає ся з точок — яко вершків вязок (P), — з прямих — яко основ рядів точок (g) або осий вязок площ (l) — і з площ — яко основ плоских системів (Π) — відповідає бігуново дуалїстично, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, инший просторний систем Σ, котрий складає ся з площ — яко основ плоских системів, відповідаючих бігуново вязкам (P), — з прямих — яко осий вязок площ проективних з рядами (g) або основ рядів проективних з вязками (l), — і з точок яко вершків вязок, бігуново спряжених з плоскими системами (Π),“ — при чім:

„Кождому твердженю, кождій дефініциї, конструкциї або завданю, в яких виступають певні сполученя і свійства метові між елементами систему Σ, відповідає инше твердженє, инша дефініция, конструкция або задача о сполученях і свійствах метових між елементами систему Σ_1, які слїдують з перших, коли поміняємо понятя: — точка — і площа; ділaня: — перетинати — і — лучити, а полишимо однаковож незміненими понятя: прямої перспективічного положеня і відношеня подвійного поділу.“

Системи Σ і Σ_1, що в той спосіб собі відповідають, названо „системами бігуново спряженими“, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, яку знов названо „провідною бігунового дуалїзму.“

6а) Нехай отже точка P в системі Σ, яка порушаює ся після певного закона, описує криву просторну C.

Що дві безпосередно по собі слїдуючі точки тої кривої визначують єї стичні, які з причини неперерваного наслїдства творять поверхню розвивну Π_r, описану на кривій C; що дві безпосередно по собі слїдуючі стичні перетинають ся в точцї тої кривої, визначаючи площу (α), яка є стичною до розвивної поверхнї Π_r, а рівночасно тїсно-стичною до кривої C. — Неперерваному наслїдству точок P в системі Σ відповідає в системі Σ_1, бігуново спряженім з Σ, неперерване наслїдство єго бігунової площі Π, яка обвиває поверхню розвивну Π_r'. Що дві безпосередно по собі слїдуючі стичні площі визначають творячі тої поверхнї, які відповідають бігуново стичним кривої C, а що дві безпосередно по собі слїдуючі творячі тої поверхнї визначають точки кривої звороту C', які відповідають бігуново тїсно-стичним площам кривої C.

Отже:

„Кривій просторній C і на нїй описаній поверхнї розвивній Π_r відповідає бігуново дуалїстично поверхня розвивна Π'_r і єї крива звороту C'. — “

„Коли крива C є m-го ряду n-ої кляси r-го степеня, тодї з довільної точки можна попровадити m площ стичних до поверхнї Π'_r, отже m площ тїсно-стичних до кривої C', довільна площа перетинала-би криву звороту C' в n точках, а довільна пряма перетинала-би r творячих поверхнї Π_r' — отже r стичних кривої C'. Крива C' є отже ряду n-го кляси m-ої степеня r-го.“

Коли крива C є плоскою, тодї всї бігунові площі єї точок переходять через бігун площі тої кривої і обвивають стіжок (σ). Творячі того стіжка є бігуново спряжені зі стичними кривої C, а крива звороту (C') редукує ся до вершка того стіжка.

„Коли плоска крива C є ряду m-го кляси n-ої, то стіжок σ, бігуново з нею спряжений, з огляду на поверхню II. ст., є кляси m-ої ряду n-го.“

6б) З повисших розважань слїдує, що:

„Коли крива просторна C, що порушає ся після певного закона, творить поверхню $П$, то поверхня розвивна $П'_r$, бігуново з C спряжена, обвиває поверхню $П'$, яка відповідає бігуново дуалїстично поверхнї $П$.“

Поверхнї $П$ і $П'$ є зі собою в той спосіб спряжені, що:

„Кождій точцї і стичній площі в тій точцї одної поверхнї — відповідають бігуново дуалїстично стичні площі і їх точки стичности другої поверхнї.“

Ввиду сего легко запримітити, що:

„Коли поверхня $П$ є ряду $m^{\text{-го}}$ кляси $n^{\text{-ої}}$, то поверхня $П'$ з нею бігуново спряжена є кляси $m^{\text{-ої}}$ ряду $n^{\text{-го}}$.“

Іменно m точкам, в яких довільна пряма l перетинає поверхню $П$, відповідає m площ стичних, поведених через пряму l', бігуново спряжену з l, до поверхнї $П'$; n площам стичним, поведеним через довільну пряму q до поверхнї $П$ відповідає n точок пересїчи прямої q', бігуново спряженої з q, з поверхнею $П'$.

6в) Приймім під розвагу дві поверхнї $П$ і $П_1$, які належать до системи Σ; перша з них нехай буде ряду $m^{\text{-го}}$ кляси $n^{\text{-ої}}$, а друга ряду $q^{\text{го}}$ кляси $p^{\text{-ої}}$; то тим поверхням відповідають бігуново в системі Σ' дві иньші поверхнї $П'$ і $П'_1$, з яких перша є кляси $m^{\text{-ої}}$ ряду $n^{\text{-го}}$, а друга кляси $q^{\text{-ої}}$ ряду $p^{\text{-го}}$, — при чім легко запримітити, що:

1^0 „Кривій пересїчи поверхнї $П$ і $П_1$, яка є ряду $m.q^{\text{го}}$, відповідає поверхня розвивна ($П_r$), описана на бігунових поверхнях $П'$ і $П'_1$; та поверхня є отже кляси $mq^{\text{-ої}}$ 1)“.

І взаїмно:

2^0 „Поверхня розвивна описана на обох поверхнях $П$ і $П_1$ відповідає бігуново дуалїстично кривій пересїчи поверхний $П'$ і $П_1'$, є отже кляси $n.p^{\text{-ої}}$.“

3^0 „Коли поверхнї $П$ і $П_1$ стикають ся в певній точцї і посїдають в тій точцї спільну площу стичности, тодї їх бігунові поверхнї $П'$ і $П'_1$ стикають ся рівнож в одній точцї і посїдають в нїй спільну стичну площу; если-би отже перші поверхнї стикали ся вздовж певної кривої, тодї їх поверхнї бігунові стикали-би ся рівнож вздовж певної кривої.“

4^0 „З вязкою поверхний, які переходять через криву пересїчи поверхний $П$ і $П_1$, є бігуново дуалїстично спряжена громада по-

---

1) Cremona-Kurtze. Oberfläche... ст. 21.

верхний, вписаних в поверхню розвивну, яка є описана на поверхнях Π' і Π'_1."

Нехай в данім случаю будуть дані в системі Σ дві поверхні II-го степеня Π^2 і $\Pi_1{}^2$; то поверхні (Π'^2 і $\Pi_1{}'^2$), що відповідають їм бігуново дуалїстично, з огляду на поверхню провідну $F^{(2)}$, є рівнож II-го степеня; отже їх крива пересїчи є ряду IV-го кляси 12-ої ($C^4{}_{12}$). Та крива відповідає бігуново розвивній поверхні ($\Pi_4{}^r$), описаній на перших двох поверхнях, поверхня $\Pi^r{}_4$ є отже кляси 4-ої ряду XII-го. Звісно однак, що через ту криву C^4 можна повести чотири стіжкові поверхні II-го степеня~~, яких вершки сходять ся~~ з вершками спільного чотиростїнника бігунового обох поверхний Π'^2 і $\Pi'_1{}^2$. Тим чотиром стіжкам відповідають в системі Σ чотири криві II-го степеня, після яких перетинає ся сама зі собою розвивна поверхня $\Pi^r{}_4$; ті криві мусять отже лежати на стїнах спільного чотиростїнника бігунового обох поверхний Π^2 і $\Pi_1{}^2$.

Тим способом доходимо до знаного твердженя:

„Крива власноЇ пересїчи розвивноЇ поверхнї описаноЇ на двох поверхнях II-го степеня складає ся з чотирох кривих II-го степ., що лежать на стїнах спільного чотиростїнника бігунового обох тих поверхний."

6г) Повисші розумованя доказують, що бігуновий дуалїзм в просторі є загальною методою трансформаційною всїх сполучень і метових свійств ґеометричних утворів, до яких належать всї начеркові свійства тих утворів і сполученя взаїмного положеня їх елементів, що є зависимі від відношеня подвійного подїлу.

Коли ми хочемо троха розширити обсяг приміненя тої методи до сполучень метричних, приймаємо за поверхню провідну бігунового дуалїзму кулю або параболоїд, — подібно як то робилисьмо на площі, де принималисьмо за провідну бігунового дуалїзму коло або параболю.

7а) Нетрудно запримітити, що бігунова площа довільної точки, в віднесеню до кулї K, є прямовісна до проміру тої кулї, який переходить через сесю точку. З того відтак слїдує, що дві прямі бігуново зі собою спряжені, в віднесеню до кулї, є до себе прямовісні і кожда з них лежить на діяметральній площі, прямовісній до другої.

Коли возьмемо під розвагу дві площі Π і Π_1, то бігуни P і P' тих площ, з огляду на кулю K, лежать на промірах прямовісних до тих площ, отже замикають они кут, який є сповненем до 180° кута, замкненого даними площами. Подібно кут, який замикають дві перетинаючі ся прямі m і n, є сповненем кута, замкненого діяметральними площами, які переходять через прямі m' і n' бігуново спряжені з m і n.

З сего заключаємо, що:

„Коли дві просторні фіґури є зі собою бігуново спряжені, в віднесеню до кулї K, а між величинами кутів одної з них заходить певне получене, то подібне получене заходить між кутами, утвореними около осередка провідної кулї (K) промірами або площами діяметральними, яких напрями переходять через бігуни стїн зглядно бігунові боків перших кутів.“

7б) Нехай буде дана провідна куля K і иньша довільна куля K_1.

Кожда площа, що переходять через осередок обох куль, перетинає першу з них після кола k, а другу після кола k_1 — так, що бігунова кола k_1, в віднесеню до k, є кривою II-го степеня, яка має огнище в осередку кола -k-, а за провідну, приналежну до сего огнища, бігунову осередка кола k_1, з огляду на коло k[1]).

Ввиду сего зі симетричности обох куль слїдує, що:

„Кулї K_1 відповідає бігуново, з огляду на иньшу кулю K, оборотова поверхня II-го степеня (S), яка посїдає одно огнище в осередку провідної кулї K і має за провідну площу сего огнища бігунову площу осередка кулї K_1. — Поверхня S є елїпсоїдом, гіпербольоїдом двоповолоковим або парабольоїдом елїптичним, — залежить від сего, чи осередок провідної кулї лежить на вні, в нутрі або на самій поверхнї даної кулї K_1.“

З повисшого твердженя слїдує, що:

„Різличні свійства кутів у куль можна перемінити на свійства кутів, приналежних до спільного огнища оборотових поверхний II-го степеня.“

Трансформация метричних сполучень при помочи парабольоїда яко провідної поверхнї бігунового дуалїзму полягає на слїдуючім свійстві:

„Бігунові площі двох довільних точок, з огляду на парабольоїд, визначують на єго оси довжину, яка є рівна величинї прямокутного мета на ту вісь довжини, що сполучує дані точки.“

[Доказ сего свійства і єго інтерпретация є анальоґічні до тих, які знаходять ся в I-ій части ст. 12, проте їх полишаю].

II.

1. Часто два системи в просторі Σ і Σ', бігуново зі собою спряжені, з огляду на поверхню II го ст. $F^{(2)}$, уважаємо за один,

---

[1]) Порівнай I. часть ст. 11.

називаючи его „бігуновим системом“ (Σ) провідної поверхнї $F^{(2)}$.

Хочу в отсім роздїлї доказати, що основні свійства сего бігунового системy (Σ), які представилисьмо в попереднім роздїлї, істнують независимо від его провідної поверхнї $F^{(2)}$.

В тій цїли возьмім під увагу в системі бігуновім Σ, визначенім, з огляду на поверхню II-го степеня $F^{(2)}$, певний чотиростїнник $ABCD$, який посїдає те свійство, що его вершки є бігунами протилежних стїн, а взаїмно стїни є бігуновими площами протилежних вершків, — а крім сего довільну точку E і єї бігунову площу ε — і усуньмо на хвилю з нашої уяви провідну $F^{(2)}$ того системy.

Пари протилежних гран сего чотиростїнника є спряженими бігуновими, пари вершків лежачих на тих гранах — є спряженими бігунами, — а пари стїн переходячих через них, є бігуново спряженими площами даного бігунового системy. Отже вершки A, B даного чотиростїнника, які лежать на грани $AB \equiv s$, становлять одну пару відповідних точок інволюцийного ряду спряжених бігунів, який то ряд приналежить в данім системі Σ до прямої -s-. Коли хочемо визначити другу пару точок тої інволюциї, то мусимо пошукати точок пересїчи прямої s з площею ε і площею $[s_1, E]$, яка сполучує бігун E площі ε з прямою $s_1 \equiv CD$. Сими двома парами точок є інволюцийний ряд спряжених бігунів на прямій s докладно визначений.

Тим самим способом, незалежно від поверхнї $F^{(2)}$, дадуть ся визначити інволюциї спряжених бігунів на иньших гранах чотиростїнника $ABCD$, а тим самим інволюцийні вязки бігуново-спряжених площ, яких осями є ті грани, а відтак бігунові системи на его стїнах і бігунові снопи (жмути) в его вершках.

Коли хочемо в той сам спосіб, без помочи провідної поверхнї $F^{(2)}$, визначити бігун довільної площі Π, мусимо повести прямі a і d, після яких та площа перетинає дві протилежні стїни $BCD \equiv \alpha$, $BCA \equiv \delta$ даного чотиростїнника. Коли прямим тим (a, d) відповідають в бігунових системах плоских на площах α і δ бігуни A_1 і D_1, то прямі, які сполучують ті точки відповідно з бігунами площ α і δ [с. є. з точками A і D], є бігуново спряжені відповідно з прямими a, d в бігуновім системі Σ. А позаяк прямі a, d лежать на одній площі Π, проте прямі $\overline{AA_1}$, $\overline{DD_1}$ лежать рівнож на одній площі і перетинають ся в точці P, яка є бігуном даної площі Π. Бо через сю точку, як легко запримітити, переходять всї пари прямих, бігуново спряжених в системі Σ з прямими, після яких дана площа Π перетинає всі протилежні стїни чотиростїнника $ABCD$.

При помочи відворотної конструкциї дасть ся визначити для довільної точки P еї бігунова площа, а відтак для довільної прямої g — з нею бігуново спряжена пряма g_1 — враз з приналежною до неї інволюциєю спряжених бігунів зглядно бігуново спряжених площ, отже цїлий бігуновий систем Σ.

Проте з повисших розумовань слїдує:

„Бігуновий систем (Σ) в просторі буде визначений, коли в довільно принятім чотиростїннику $(ABCD)$ взаїмно спряжемо вершки з протилежними стїнами — яко бігуни і бігунові площі, — а крім сего приймемо довільну точку (E) і площу (ε) за бігун і відповідаючу єму бігунову площу.“

2. Чотиростїнник $ABCD$ названо „бігуновим чотиростїнником“ даного бігунового систему (Σ); інволюциї спряжених бігунів на его гранах [як рівнож інволюциї бігуново-спряжених площ, переходячих через ті грани] — є зависимим від принятя точки E і его бігунової площі ε. — Коли примінимо до бігунових системів плоских на стїнах того чотиростїнника твердженя з I части на сторонї 16 і 17, то буде можна легко запримітити, що слїдує:

1^0 „Коли на однїй парі протилежних гран бігунового чотиростїнника інволюциї спряжених бігунів є рівноіменні, то мусять бути рівноіменні ті інволюциї і на двох иньших парах протилежних гран. А іменно можуть они тодї бути: а) на всїх парах протилежних гран — еліптичні, в) на однїй парі еліптичні, а на двох иньших — гіперболїчні.“

2^0 „Коли на однїй парі протилежних гран бігунового чотиростїнника інволюциї спряжених бігунів є ріжноіменні, тодї мусять они бути ріжноіменні і на иньших парах протилежних гран, так, що маємо взагалї три інволюциї еліптичні і три гіперболїчні.“

Хотїлибисьмо однак доказати, що:

„Всї бігунові чотиростїнники, які виступають в певнім бігуновім системі, можуть бути тілько одного з повисших родів.“

І дїйсно, нехай прямі s, s_1 будуть одною парою, а прямі t, t_1 другою довільною парою спряжених бігунових в данім бігуновім системі Σ; то з довільної точки P в просторі можна повести тілько одну таку пряму, що перетинає рівночасно обі прямі s і s_1 — в точках A і A_1, — як рівнож тілько одну таку пряму, що перетинає рівночасно обі прямі t і t_1 — в точках B і B_1. Коли відтак точки A', A'_1; B', B'_1 будуть відповідно спряжені з точками A, A_1; B' B_1 в інволюциях спряжених бігунів, які приналежать до прямих

s, s_1 ; $t. t_1$ в данім бігуновім системі Σ, тодї прямі $\overline{A A_1}$ і $\overline{A' A'_1}$, $\overline{BB_1}$ і $\overline{B' B'_1}$ є зі собою бігуново спряжені, а точки AA_1 $A' A'_1$ є вершками одного бігунового чотиростїнника, а точки BB_1 $B' B'_1$ другого. Позаяк прямі $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ лежать на одній площі, проте прямі $\overline{A' A'_1}$, $\overline{B' B'_1}$ мусять рівнож лежати на одній площі (Π), а їх точка пересїчи (P') є бігуном площі Π', на якій лежать попередні прямі $[\overline{AA_1}, \overline{BB_1}]$, подібно як точка P є бігуном площі Π', визначеної прямими $\overline{A' A'_1}, \overline{B' B'_1}$. З сего слїдує, що грана $[\Pi \Pi^1] \equiv r_1$ тих площ є бігуново спряжена з прямою $\overline{PP'} \equiv r$, яка сполучує точки P і P'; ті отже прямі (r, r_1) перетинають так бігуново спряжені $\overline{AA_1}$ і $\overline{A' A'_1}$, — як рівнож бігуново спряжені $\overline{BB_1}$ і $\overline{B' B'_1}$. Нетрудно однак заприміти, що коли одна пара спряжених бігунових перетинає другу пару спряжених бігунових, тодї ті дві пари становлять протилежні грани бігунового чотиростїнника. На підставі отже повисше розважаного свійства бігунового чотиростїнника мусять інволюциї на прямих $\overline{AA_1}$ і $\overline{BB_1}$ посїдати такий сам характер як на s і s_1, отже як і на спряжених бігунових r і r_1 ; так само інволюциї на прямих t, t_1 ; $\overline{BB_1}$, $\overline{B' B'_1}$ посїдають такий сам характер як інволюциї на r і r_1 ; ввиду сего рід інволюций на спряжених бігунових s, s_1 є згідний з родом тих-же на спряжених бігунових t і t_1. А що прямі s, s_1 ; t, t_1 є довільно принятими парами бігунових спряжених в данім бігуновім системі, проте бачимо, що :

„Інволюциї спряжених бігунів [зглядно бігуново спряжених площ] на всїх парах бігуново спряжених прямих — є або всї рівноіменні (обі еліптичні або обі гіперболїчні) або всї ріжноіменні одна еліптична, друга гіперболїчна)“. — Се власне доказує, що певний бігуновий систем може посїдати бігунові чотиростїнники тілько одного з трьох родів, які ми вичислили на сторонї 20 і 21.

Ввиду сего дадуть ся розріжнити три роди бігунових системів в просторі :

„*А)* Бігуновий систем, що посїдає тілько такі бігунові чотиростїнники, у яких на одній парі протилежних гран є інволюциї спряжених бігунів елїптичні, а на двох иньших парах гіперболїчні.“

„*Б)* Бігуновий систем, що посїдає самі бігунові чотиростїнники, у яких кожда пара протилежних гран посїдає ріжні інволюциї спряжених бігунів, одну еліптичну і одну гіперболїчну.“

„*В*) Бігуновий систем, що посїдає самі бігунові чотиростїнники, у яких всї грани є основами елїптичних інволюций спряжених бігунів.“

3. Нетрудно буде доказати, що:

„Місцем ґеометричним подвійних точок інволюцийних рядів спряжених бігунів є: в бігуновім системі *А*) поверхня II-го степеня просточертна, в системі *Б*) поверхня II-го ст. кривочертна, а в системі *В*) поверхня II-го ст. мнима.“

„Поверхнї ті посідають те свійство, що бігунові площі їх точок є площами стичними в тих-же точках; проте поверхнї ті можна уважати за обвідні подвійних площ інволюцийних вязок бігуново спряжених площ.“

Коли іменно в бігуновім системі *А*) возьмемо під розвагу пару прямих бігуново спряжених s і s_1, на яких інволюцийні ряди спряжених бігунів є ґіперболїчні о подвійних точках F і F' зглядно F_1 і F'_1, то нетрудно буде можна запримітити, що пряма $\overline{FF_1} \equiv l$ є сама зі собою бігуново спряженя [с. з. площі бігунові всїх єї точок переходять через її саму]. Бо іменно бігунова площа точки F переходить через її саму і через пряму s_1, так само бігунова площа точки F_1 переходить через ту точку F_1 і пряму s. Отже граня тих двох площ сходить ся з прямою, яка сполучує точки F і F_1. — З тих самих причин є рівнож самі зі собою спряжені прямі: $\overline{FF'_1} \equiv l_1$, $\overline{F'F_1} \equiv g_1$, $\overline{F'F'_1} \equiv g$.

Дальші прямі самі зі собою бігуново спряжені в бігуновім системі *А*) дадуть ся визначити в слїдуючий спосіб:

Коли довільна пряма s_x перетинає винайдені прямі l і l_1 самі зі собою бігуново спряжені в точках X і Y_1, то бігун Y площі $[Y_1 \; l]$ мусить лежати на прямій l і є точкою пересїчи тої прямої з прямою s'_x бігуново спряженою з прямою s_x; так само бігун площі $[y \; l_1]$ сходить ся з точкою Y_1, яка є точкою пересїчи прямої l_1 з прямою s_x. З сего слїдує, що грана тих площ, се є пряма $\overline{YY_1}$ є сама зі собою бігуново спряжена. Коли площа $[l \; Y_1]$ обертає ся около прямої l і описує вязку площ, тодї єї бігун Y описує ряд (Y) на прямій l, який є проєктивний з тою вязкою площ, отже і з рядом (Y_1). З сего слїдує, що пряма $\overline{YY_1}$ сама зі собою бігуново спряжена сполучує відповідні точки проєктивних рядів (Y) і (Y_1), се значить ся: они є гранами відповідних елементів двох проєктивних вязок $[l \; Y_1]$ і $[l_1 \; Y]$, творять отже просточертну поверхню

II-го ст. $F^{(2)}$, що малисьмо як-раз для бігунового системи *A)* доказати.

З повисшого розумованя слїдує рівнож, що та поверхня $F^{(2)}$, є обвіднею подвійних елементів вязок бігуново спряжених площ сего бігунового системи.

Що тичить ся бігунового системи *Б)*, то в нїм кожда пара бігуновоспряжених прямих має ріжні інволюциї бігунів спряжених, а іменно на одній прямій та інволюция є еліптична, а на другій гіперболїчна, при чім перша з тих прямих є осию інволюцийної вязки гіперболїчної бігуново спряжених площ, а друга інволюцийної вязки еліптичної таких-же площ. — З сего слїдує, що так поверхня утворена подвійними точками інволюцийних рядів бігунів спряжених, як рівнож поверхня обвинена подвійними площами вязок інволюцийних бігуново спряжених площ, — є II-го степеня. Позістає тільки доказати що ті поверхнї є identичні і кривочертні.

Нехай отже s_e і s_p будуть парами бігуново спряжених прямих, а F і F' точками подвійними інволюцийного ряду гіперболїчного бігунів спряжених на s_p, то площа $[s_e\,F] = \Pi_r$ є бігуновою точки F, а рівночасно подвійною площею вязки бігуново спряжених площ о оси s_e. Всї прямі, які переходять через F є основами гіперболїчно-інволюцийних рядів спряжених бігунів, які мають одну подвійну точку в F, а другу в другій точцї пересїчи з шуканою поверхнею. Прямі бігуново спряжені з сими прямими творять площу Π_t, яка посїдає інволюцийні ряди спряжених бігунів — тілько елїптичні, наслїдком чого площа Π_t, крім точки F, не може посїдати більше дійсних точок спільних з поверхнею, що утворена подвійними точками інволюцийних рядів бігунів спряжених. Ся площа є стичною до згаданої поверхнї в точцї F. — Вязка інволюцийна спряжених бігунових, які переходять через F і лежать на площі Π_t, будучи перспективою еліптично-інволюцийною ряду спряжених бігунів на прямій s_e, є рівнож елїптична, а її подвійні прямі мнимі представляють прямі, після яких площа Π_t перетинає дану поверхню.

А позаяк так само річ має ся з кождою подвійною точкою (F) гіперболїчно-інволюцийних рядів (s_p) спряжених бігунів і з її бігуновою площею, проте дійсно, поверхня, утворена через ті подвійні точки є identичною з поверхнею, обвиненою подвійними площами інволюцийних вязок бігуново-спряжених площ — і є кривочертна.

В бігуновім системі *B)* всї точки, котрих бігунові площі через них переходять, — є мнимі; подібно є мнимі всї площі, яких бігуни лежать на них самих. А так як на кождій прямій є такі дві мнимі точки, як рівнож кожда пряма є осию двох таких мнимих площ, тому творять они мниму поверхню II-го степеня.

Нетрудно вичитати рівнож з повисших фіґур, що бігунові системи повисших поверхней є ідентичні з бігуновими системами щойно розслїджуваними, — так, що сї поверхнї є провідними тихже системів.

Замітка: Особлива точка (M) бігунового системy Σ, що є бігуном площі в безконечности, є осередком сего системy; площі і прямі, що переходять через точку M, зовемо дїяметральними площами зглядно промірами того системy.

Дїяметральні площі, які є головними площами бігунової вязки, приналежної до осередка M в тім бігуновім системі Σ, є рівнож головними площами того системy (Σ).

III.

1. На особливу увагу заслугують в бігуновім системі просторнім Σ такі пари бігуново спряжених прямих, що є до себе прямовісні. Загал всїх пар тих прямих носить назву „комплексу осий" бігунового системy Σ і єго провідної поверхнї $F^{(2)}$; комплекс сей відповідає бігуново в данім бігуновім системі Σ — сам собі.

Коли дві прямі e і e_1 бігуново зі собою спряжені в бігуновім системі Σ є до себе прямовісні, тодї через e_1 переходить одна тілько площа ε прямовісна до e, а єї бігун E містить ся на e

Пряму e названо „осию спряженою" з площею ε, точку E єї „бігуном", точку $[e\,\varepsilon]$ єї „основою", а площу ε „нормальною площею спряженою з осию e."

Кожда вісь e комплексу посїдає тілько один бігун E і одну спряжену з нею площу нормальну ε. Виїмок становлять головні оси бігунового системy Σ, які мають безконечне число бігунів і тількож спряжених нормальних площ. Таксамо кожда площа ε посїдає тілько одну з нею спряжену вісь -e-, через яку переходять всї площі бігуново спряжені з ε і до неї прямовісні; однак для головної площі системy Σ є всї до неї прямовісні прямі — єї спряженими осями. — Безконечно далека площа має за спряжені оси всї проміри бігунового системy Σ. — Ввиду сего нетрудно запримітити, що:

„До комплексу осий певного бігунового системy (Σ) і єго провідної поверхнї $F^{(2)}$ зачисляємо: головні оси всїх бігунових системів плоских і бігунових вязок того системy Σ, всї нормальні і проміри провідної поверхні $F^{(2)}$, прямі безконечно далекі і всї прямі, що є прямовісні до головних площ або лежать на сих послїдних.“

З сего слїдує між иньшим, що: „Довільна точка P в просторі є бігуном одної оси, а взагалї основою трьох осий, що перетинають ся прямовісно.“

Ті три оси є головними осями бігунової вязки, яка приналежить до точки P в бігуновім системі Σ. Коли точка P лежить на провідній поверхнї $F^{(2)}$, тодї її нормальна в P є одною з тих трьох осий, а дві иньші є прямими нормальними інволюцийної вязки спряжених стичних поверхнї $F^{(2)}$ в тій точцї P. Єсли та інволюция є прямокутна або єсли бігунова вязка в точцї P є оборотова, і має оборотовий стіжок за провідну, тодї крім нормальної зглядно оси обороту виступає вазка прямих, для яких точка P є основою.

2. Всї площі, бігуново спряжені з певною площею ε і до неї прямовісні, переходять через її вісь e; в тих площах лежать оси, спряжені з осями, які містять ся на площі ε. А що ті послїдні, як звісно з I части ст. 18, обвивають параболю, а на кождій площі вязки (e) переходить через бігун E площі ε по дві прямі бігуново спряжені і до себе нормальні, проте легко буде можна справдити слїдуюче твердженє:

1⁰ „Оси бігунового систему Σ, який лежить на певній площі ε, обвивають параболю, котра дотикає головних площ того системуʼ. Нормальні площі, спряжені з тими осями, переходять через вісь e, спряжену з площею ε, а їх бігуни лежать на прямій e_1, бігуново спряженій з e, а яка є стичною до сеї параболї. Що найбільше дві з тих осий є нормальними провідної поверхнї $F^{(2)}$, іменно в точках, в яких її e_1 перетинає.“

2⁰ Оси бігунового системуʼ Σ, яка переходять через точку E, творять взагалї рівнобічний стіжок II-го степ., котрий має один промір бігунового системуʼ і по одній нормальній до кождої головної площі того системуʼ. Позаяк що дві з тих осий перетинають ся в точцї E, проте їх бігуни лежать по два на щораз-то иньшій оси. Місцем ґеометричним тих бігунів є проте крива просторна (перехрестна) III-го степеня, якої тятиви є осями, а після якої перетинають ся що два повисші рівнобічні стіжки. Ся крива переходить через точку E, бігуни головних площ і осередок системуʼ і через такі точки провідної поверхнї $F^{(2)}$, в яких нормальні до $F^{(2)}$ переходять через точку E.“

Нетрудно рівнож запримітити, що: „Всї оси, які лежать на діяметральній площі бігунового системуʼ Σ, творять вязку промірів і вязку рівнобіжних прямих; і взаїмно: всї оси, які мають той сам напрям, лежать на одній діяметральній площі систему Σ.“

Коли іменно Π є площею діяметральною, тодї єї бігун P лежить в безконечности на промірі з нею спряженім. Прямі рівнобіжні, поведені в площі Π прямовісно до того напряму, є осями бігунового систему Σ, а так само прямі з ними бігуново спряжені, що переходять через P і творять другу діяметральну площу. З сего рівночасно слїдує:

1^0 „Оси, що переходять через дві точки проміру, є парами рівнобіжні; оба стіжки, до яких они належать, стикають ся вздовж того проміру і переходять через той сам безконечно далекий переріз стіжковий“.

2^0 „Всї параболї, обвинені через оси, які лежать в рівнобіжних площах, є перерізами одного і того самого стіжка, якого творячі є промірами бігунового систему Σ.“

3. Кожда пряма, поведена через P на головній площі -α- систему бігунового Σ, є осию того систему, проте стіжок, на якім лежать всї оси, що переходять через точку P, розпадає ся на дві плоскі вязки прямих. Коли отже e_x буде довільною осию, яка перетинає площу -α- в точцї P під кутом острим, тодї друга вісь тої вязки буде лежати на площі, якою мечемо прямовісно ту вісь на площу α. Бо в тій площі лежать крім e_x еще дві оси, а іменно слїд тої площі на площі α і прямовісна до α в точцї P.

Отже:

„Всї оси, які переходять через певну точку P головної площі α, творять дві вязки I-го ряду, з яких одна лежить в α, а друга в площі прямовісній до α. Бігуни сеї послїдної вязки лежать на прямій мрямовісній до α.“

Рівночасно маємо твердженє:

„Коли пряма -n- є прямовісна до головної площі α, то всї оси, які перетинають пряму n, творять стіжки II-го ст., котрих вершки знаходять ся на прямій n, а які посїдають з площею α спільну рівнобічну гіперболю.“

Іменно, котрийнебудь з повисших стіжків перетинає ся з площею α після рівнобічної гіперболї, яка переходить через точку $[n\,\alpha]$ і осередок бігунового систему Σ, а якої одна асимптота є рівнобіжна, друга прямовісна до иньшої головної площі (β). Однак після попередного твердженя кожда пряма, яка сполучує певну точку тої гіперболї з довільною точкою прямої -u- є осию бігунового систему Σ.

Коли площа ε обертає ся наоколо свого слїду на головній площі α, тодї параболя, обвинена осями, що на нїй находять ся, описує параболїчний валец, прямовісний до площі α; бо кожда стична тої параболї описує около своєї точки пересїчи з площею α вязку осий, якої площа є прямовісна до α. Отже:

„Оси, що перетинають певну пряму g, лежачу на головній площі α, обвивають в загалї параболїчний цилїндер, прямовісний до α. Коли однак пряма g є прямовісна до другої головної площі β, тодї ті оси перетинають пряму g_1, яка лежить на площі β і прямовісну до α.“

4. Повисші розумованя доказують, що:

„Комплекс осий є визначений, скоро є дані єго головні площі і одна єго вісь (e).“

Однак з твердженя на ст. 19 і 20 слїдує, що через головні площі, довільну точку E на оси e, приняту за бігун довільної площі ε, прямовісної до e, буде бігуновий систем в просторі докладно визначений, який посїдає той сам комплекс осий. А що так точка E як рівнож слїд $[e\,\varepsilon]$ можуть на прямій e заняти безконечно много положень, проте слїдує:

„Істнує ∞^2 бігунових системів співосевих і стілько співосевих поверхний II-го ст., що посїдають той сам комплекс осий.“

5. Нехай в бігуновім системі Σ буде дана довільна площа ε, єї бігун E і з нею спряжена нормальна e (вісь). Коли грану площі ε і площі головної α системи Σ означимо через p, а точку пересїчи оси e з тою площею α через P, то легко буде доказати, що через тую точку (P) переходять всї оси (e) спряжені з площами, переходячими через пряму p. Метаючи іменно з точки P бігуни тих площ і ведучи до них прямовісні, одержимо дві вязки прямих, проєктивні з тою вязкою площ, отже проєктивні зі собою. Однак ті дві вязки прямих мають три прямі спільні, а іменно пряму e, пряму прямовісну до площі α і пряму прямовісну до прямої p, з чого слїдує, що ті дві вязки є ідентичні.

Ся вязка осий, переходячих через точку P, визначує з вязкою площ, спряжених з тими осями і переходячими через пряму p — коло. Отже:

„Основи всїх осий, які перетинають головну площу α в точцї F, лежать на колї, яке переходить через точку P і перетинає прямовісно пряму p, що лежить на площі α, а через яку переходять всї нормальні площі, спряжені з тими-ж осями. Коло то має свій осередок на площі α.“

В подібний спосіб як з прямою p є спряжена точка P — так само з кождою иньшою прямою q на головній площі α є спряжена точка Q тої площі. Нетрудно однак запримітити, що коли пряма q переходить тягло через точку P, то точка Q описує пряму p. Бо в тім случаю вісь спряжена з площею $[e\,q]$ мусить лежати на площі ε перетинати площу α в точці Q прямої p. З того слїдує, що:

„Кожда площа (ε) і з нею спряжена вісь (e) в бігуновім системі Σ визначують на головній площі (α) того систему пару спряжених елементів (бігунову і бігун) певного бігунового систему плоского (U), якого головні оси сходять ся з головними осями систему Σ.“

Криву провідну сего бігунового систему плоского (u) названо „кривою огнищевою“, а єї точки „огнищевими точками“ просторного бігунового систему Σ і єго провідної поверхнї $F^{(2)}$.

Легко однак запримітити, що з трьох огнищевих кривих бігунового систему Σ дві є завсігди дїйсні, а одна мнима.

До огнищевих кривих того бігунового систему Σ належить рівнож мниме коло в безконечности. Именно площа в безконечности перетинає кожду площу ε і з нею спряжену вісь e після пари спряжених елементів бігунового систему плоского, якого мет з довільної точки простору можна доконати при помочи прямовісної бігунової вязки. Отже провідною кривою сего систему є коло мниме в безконечности.

Позаяк ті огнищеві криві є визначені, скоро є даний комплекс осий, проте з твердженя на ст. 33 слїдує, що:

„Бігунові системи, що посїдають той сам комплекс осий, є співогнищеві, а їх провідні поверхнї творять громаду співогнищевих поверхний.“

Ввиду сего свійства співогнищевих поверхний слїдують прямо з повисше пізнаних свійств їх комплексу осий.

Про бігунового-зеровий систем.

1. Нехай дані будуть три точки A, B, C просторної кривої III-го степ. (C^3) і в тих точках єї тїсно-стичні площі α, β, γ і єї стичні t_a, t_b, t_c.

Звісно, що:

1^0 Кожда з тих точок є вершком стіжка II-го степ., яким мечемо криву C^3.

2^0. Стичні площі пр. до стіжка $A(c^3)$ вздовж творячих AB або AC переходять відповідно через стичні t_b зглядно t_c кривої c^3 в точках B зглядно A.

З сего слїдує:

3⁰. Стична площа стіжка $A(c^3)$ вздовж творячої t_a сходить ся з тісно-стичною площею (α) кривої c^3 в точції А.

Коли возьмемо під увагу тристїнник $A(B, C, t_a)$, вписаний в стіжок $A(c^3)$, і означимо площу, яка сполучає точки A, B, C, через ε, тодї при помочи твердження Pascala легко є доказати, що грана $[\alpha\varepsilon]$ площ α і ε і точки $[t_c. Bt_a]$, $[t_b. Ct_a]$ пересїчи стичних t_c, t_b з площами, які сполучують точки B, C зі стичною t_a, лежать на одній площі ε_1.

З тої самої причини лежить грана $[\beta\varepsilon]$ площ β і ε і точки $[t_c. At_b]$, $[t_a. Ct_b]$ на одній площі ε_2, — як рівнож грана $[\gamma\varepsilon]$ площ γ і ε — і точки $[t_a. Bt_c]$, $[t_b. At_c]$ лежать на площі ε_3.

Позаяк однак площі $[At_c]$, $[Bt_a]$, $[Ct_b]$ перетинають ся в одній точці Q, яка є спільна для всїх трьох площ ε_1, ε_2 і ε_3, а площі $[At_b]$, $[Bt_c]$, $[Ct_a]$ перетинають ся в точці Q_1, яка є рівнож спільна для тих площ ε_1, ε_2, ε_3, проте ті площі (ε_1, ε_2, ε_3) мусять перетинати ся після одної прямої. Та пряма перетинає площу ε в точці E, через яку переходять тїсно-стичні площі α, β, γ.

Є то основне твердженє Chasles'a, яке звучить:

„Тісно-стичні площі α, β, γ в трьох точках A, B, C просторної кривої III-го ст. c^3 перетинають ся в одній точції E, яка лежить на площі ε, що сполучає ті точки стичности $[A, B, C]$.“

Точка E, в якій перетинають ся три тїсно-стичні площі α, β, γ просторної кривої III-го ст. c^3, названо „бігуном“ площі ε, яка сполучає точки A, B, C стичности тих площ. І взаїмно: площу ε названо „бігуновою“ точки E, з огляду на криву c^3.

Тому повисше твердженє Chasles'a можна висказати слїдуючо:

„Бігун $[E]$ довільної площі (ε), з огляду на просторну криву III-го ст. c^3, лежить на тій-же площі (ε)“. І взаїмно:

„Бігунова площа (ε) довільної точки (E), з огляду на просторну криву III-го ст. c^3, переходить через тую-ж точку.“

А відтак:

„Бігун тїсно-стичної площі до кривої c^3 сходить ся з точкою стичности тоїж площі.“

2. З повисших тверджень слїдує безпосередно:

1⁰. „Просторна крива III-го ст. c^3 є рівночасно кривою третої кляси, се значить, що з довільної точки (E) дадуть ся повести до кривої c^3 що найбільше три площі тїсно-стичні.“

Бо коли-би через E можна було повести чотири площі тїсно-стичні до кривої c^3 в точках A, B, C, D, тодї на площі (ABE) мусїли-б лежати і точки C, D, що бути не може, бо довільна площа не посїдає з кривою c^3 більше як три спільні точки.

2°. „Чотири точки просторної кривої III-го ст. c^3 творять один чотиростїнник, а їх тїсно-стичні площі творять другий чотиростїнник. Кождий з тих чотиростїнників є в другім вписаний, а рівночасно описаний."

Коли іменно є дані чотири точки A, B, C, D кривої c^3 і тїсно-стичні площі в тих точках α, β, γ, δ, тодї угол $[\beta\gamma\delta] \equiv A_1$ чотиростїнника $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ мусить лежати на стїнї $[B\,C\,D]$ першого чотиростїнника $A\,B\,C\,D$, бо точка A_1 є бігуном площі $[B\,C\,D] \equiv \alpha_1$. І взаїмно, площа α переходить через свій бігун A, що є углом чотиростїнника $A\,B\,C\,D$. Дійсно отже, вершки першого чотиростїнника лежать на стїнах другого, а стїни першого переходять через вершки другого.

Означім відтак вершки другого чотиростїнника через $[\gamma\delta\,\alpha] \equiv B_1$, $[\delta\,\alpha\,\beta] \equiv C_1$, $[\alpha\,\beta\gamma] \equiv D_2$, тодї прямо з погляду на ті чотиростїнники читаємо, що кожда з прямих $[A\,B_1]$. $[B\,A_1]$, $[C\,D_1]$, $[D\,C_1]$ перетинає всї чотири прямі: $[A\,B]$, $[\alpha\,\beta]$, $[C\,D]$, $[\gamma\,\delta]$. З сего заключаємо, що послїдні чотири прямі належать до одного системи творячих певного гіпербольоїда — або що ті прямі мають взглядом себе „гіпербольоїдальне" положенє. — Так само гіпербольоїдальне положенє мають чвірки прямих: $[A\,C]$, $[\alpha\,\gamma]$, $[B\,D]$, $[\beta\,\delta]$; $[B\,C]$, $[\beta\,\gamma]$, $[A\,D]$, $[\alpha\,\delta]$.

3. Поведім через довільну точку P дві тїсно-стичні площі α, β до просторної кривої III-го степеня c^3, яких точками стичности суть точки A, B; то бігунова площа точки P, з огляду на криву c^3, сполучує точку P з точками стичности A і B, се є $\Pi \equiv [P.AB]$.

Коли через точку P переходить иньша площа Π_1, що перетинає криву c^3 в точках C, D, в яких тїсно-стичні площі є γ, δ, тодї бігун P_1 площі Π_1 лежить так на площі Π_1 як рівнож на площах γ і δ, отже є їх спільною точкою: $P_1 \equiv [\Pi_1\ \gamma\ \delta]$.

Позаяк чотири площі Π, Π_1, α, β переходять через ту саму точку P, проте грана $[\Pi\ \Pi_1]$ площ Π і Π_1 перетинає грану $[\alpha\,\beta]$ лощ α, β, а відтак пряму $[A\,B]$, бо лежить з нею в однїй площі, Π, як рівнож пряму $[C,\ D]$, бо лежить з нею на площі Π_1. Однак на підставі свійства, доказаного при кінци попередного уступа мусить та сама пряма $[\Pi\ \Pi_1]$ перетинати і четверту пряму $[\gamma\,\delta]$. З сего заключаємо, що площі Π, Π_1, γ, δ перетинають ся в однїй точцї, с. з. що бігун P_1 площі Π_1 лежить на площі Π.

Отже:

„Коли площа Π_1 переходить через точку P, тодї єї бігун F_1, з огляду на просторну криву III-го ст. c^3, лежить на бігуновій площі Π точки P, з огляду на ту криву."

З сего слїдує твердженє:

„Бігунові площі всіх точок певної площі, з огляду на просторну криву III го ст. c^3, переходять через сталу точку тої площі, яка є бігуном тої площі, з огляду на криву c^3.“

І взаїмно:

„Бігуни всїх площ, які переходять через одну точку, з огляду на криву c^3, лежать на однїй площі, що переходить рівнож через тую точку, а яка є бігуновою тої точки, з огляду на c^3.“

4. Нехай будуть дані дві площі Π і Π_1 і їх бігуни P і P_1, з огляду на просторну криву III-го ст., то бігунові площі, з огляду на c^3, всіх точок, які лежать на грани площ Π і Π_1, мусять переходити рівнож через P і P_1, с. є через пряму $[P P_1]$, що сполучає ті точки. І взаїмно, бігунові площі точок, що лежать на прямій $[P P_1]$ переходять через пряму $[\Pi \Pi_1]$. Отже:

„Бігунові площі, з огляду на криву просторну III-го ст. c^3, всіх точок, що лежать на одній прямій (g), переходять через иньшу пряму (g_1).“

І взаїмно:

„Бугуни всїх площ, що переходять через пряму (g_1), з огляду на криву c^3, лежать на иньшій прямій (g).“

Пару таких прямих g і g_1 названо „прямими бігуново зі собою спряженими“, з огляду на просторну криву III-го ст. c^3. — Коли отже точка P перебігає пряму g, тодї єго бігунова площа, з огляду на c^3, описує вязку площ, що має за вісь пряму g_1 і є перспективічна з рядом точок (P), — отже з тим рядом проєктивна.

5. Повисші розважаня доказують, що:

„Точки, площі і прямі в просторі — дадуть ся при помочи кривої просторної III го ст. c^3 — в той спосіб спрягчи, що кождій точцї (P) відповідає певна означена площа (Π) [єї бігунова], що переходить через тую точку і взаїмно, кождій площі (Π) відповідає певна означена, на нїй лежача точка (P) [єї бігун], а кождій прямій (s) відповідає иньша пряма (s_1) [пряма бігуново спряжена з s]. — В той спосіб одержимо систем точок, площ і прямих в просторі, який посїдає основні свійства бігунового системи, однак в питомий спосіб змодифіковані. Той систем названо „бігуново-зеровим“; має він просторну криву III-го ст. c^3 за провідну.“

„Точка кривої c^3 і єї тїсно-стична площа, тятива тої кривої і грана площ тїсно-стичних в точках, в яких та тятива перетинає криву c^3, відповідають собі бігуново в тім бігуново-зеровім системі.“

„Кожда стична (t) кривої c^3 відповідає сама собі в бігуново-зеровім системі тої кривої."

Бо дійсно стичній (t), яка сполучує два безпосередно по собі слідуючі точки кривої c^3, відповідає бігуново грана двох тісно-стичних площ в тих точках, отже та сама пряма.

6. Приймімо в бігуново-зеровім системі просторної кривої c^3 довільну точку Q і через її переходячу площу Π_p.

Бігунова площа Π_q точки Q мусить переходити через тую точку Q і бігун P площі Π_p; проте точки P і Q лежать на грани їх бігунових площ Π_p і Π_q, с. з. що прямі бігуново зі собою спряжені $[\Pi_p . \Pi_q]$ і $[P Q]$ накривають ся. — Прямій g на площі Π_p, що не переходить через точку Q відповідає в тім системі пряма g_1, яка переходить через точку P, однак не лежить на площі Π_q.

Коли точка X описує на прямій ряд точок, тодї єго бігунова площа $[g_1 X] \equiv \xi$, обертаючи ся около прямої g_1, описує вязку площ, яка є перспективічна з тим рядом. А що з прямою $[Q X] \equiv s$, яка сполучує точки Q і X є бігуново спряжена грана бігунових площ тих точок, т. є. пряма $[\Pi_q \xi] \equiv s_1$, проте з повисшого розумованя слїдує свійство:

„Коли певна пряма s, обертаючи ся около точки Q, описує вязку прямих на площі Π_p, що переходить через тую точку Q, тодї пряма s_1 бігуново спряженя з прямою s в бігуново-зеровім системі, визначенім з огляду на c^3, описує вязку прямих на площі Π_q, бігуновій точки Q, — около бігуна P площі Π_p, з огляду на той-же систем. Обі ті вязки є проєктивні, а грана їх площ $[\Pi_q \Pi_p] \equiv [P Q]$ є їх спільною прямою."

Коли пряма g лежить на площі Π_p і переходить через бігун P тої площі, тодї пряма g_1, бігуново спряжена з ·g·, з огляду на бігуново-зеровий систем кривої c^3, мусить переходити через P і лежати на Π_p; однак площа Π' точки P', що лежить на прямій g, переходить через ту точку P' і точку P і перетинає площу Π_p після прямої g_1, бігуново спряженої з g; з того слїдує, що обі прямі g і g_1, накривають ся. Отже:

„Кожда пряма на довільній площі Π_p, яка переходить через бігун тої площі (P), з огляду на просторну криву III-го ст. c^3, є сама зі собою спряжена, з огляду на ту криву."

З повисших тверджень слїдує загальна увага о прямих зі собою спряжених в бігуново зеровім системі;

„Дві прямі зі собою спряжені в бігуново-зеровім системі є в загалї перехрестні; коли однак перетинають ся, тодї накривають ся і дають пряму саму зі собою бігуново спряжену або т. з. пряму провідну бігуново-зерового систему.“

Коли однак уважати будемо пряму g за місце ґеометричне, описане точкою X, а пряму g_1 бігуново з g спряжену за вісь вязки площ, визначеної бігуновою площею ξ точки X, то повисше доказана проєктивність ряду (X) і вязки (ξ) не буде знищена, коли прямі g і g_1 накривають ся. — Звідси слідує твердженє:

„Пряму саму зі собою бігуново спряжену в бігуново-зеровім системі можна уважати: раз за основу ряду (X), другий раз за вісь вязки площ (ξ) бігунових точок того ряду; ті оба утвори є проєктивні.“

7. Нетрудно буде однак доказати, що:

„Кожда пряма l, що перетинає дві прямі бігуново спряжені в бігуново-зеровім системі — є сама зі собою спряжена в тім системі.“

Коли іменно та пряма (l) перетинає бігуново спряжені прямі g і g_1 в точках P і P_1, тоді бігуновою площею точки -P- є $\Pi \equiv [Pg_1]$, а точки P_1 є $\Pi_1 \equiv [P_1 g]$. Обі ті площі перетинають ся після прямої $[\Pi \Pi_1]$, що є бігуново спряженя з прямою $[PP_1]$, с. є. сама зі собою.

А що бігун якоїнебудь площі, переходячої через пряму l, яка є сама зі собою бігуново спряжена, лежить на тійже прямій, проте маємо твердженє:

„Бігун площі Π, яка перетинає прямі бігуново-спряжені g і g_1 в точках P і P_1, лежить на прямій l, що сполучає ті точки.“

І взаїмно:

„Коли через довільну точку P попроваджу таку пряму, котраби перетинала дві прямі g і g_1 бігуново спряжені в бігуново-зеровім системі, тоді через ту пряму мусить переходити рівнож бігунова площа (Π) тої точки P.“

З тих твердженъ слідує свійство:

„Коли в бігуново-зеровім системі дані є дві пари спряжених бігунових g і g_1, g_2 і g_3, то пряма l, яка переходить через довільну точку P прямої g і перетинає прямі g_2 і g_3, мусить рівнож перетинати і пряму g_1.“

Та пряма l є іменно сама зі собою бігуново спряжена, проте бігунова площа єї точки P переходить через її саму і через пряму g_1. З сего бачимо, що прямі g, g_1, g_2 і g_3 мають зглядом себе гіпербольоїдальне положенє.

Отже:

„Якінебудь дві пари спряжених прямих в бігуново-зеровім системі мають гіпербольоїдальне положенє, с. з. они належать до одного системи творячих гіпербольоїда (H^2), якого творячі другого системи є прямими спряженими самими зі собою в тім бігуново-зеровім-системі.“

Нехай довільна площа Π перетинає повисший гіпербольоїд $H^{(2)}$ після кривої II-го ст. c^2, а єї творячі g, g_1; g_2, g_3 в двох парах точок S і S_1; T і T_1, то точка пересїчи прямих $[SS_1]$ і $[TT_1] \equiv P$ є бігуном площі Π в данім бігуново-зеровім системі. Кожда пряма, яка переходить через точку P, перетинає криву c^2 в двох точках X і X_1 через які мусять переходити дві творячі x і x_1 гіпербольоїда $H^{(2)}$; ті творячі (x і x_1) є спряженими прямими в данім бігуново-зеровім системі. Коли іменно хочемо для прямої x вишукати єї бігунову, треба повести через прямі g, g_1, x гіпербольоїд $H^{(2)}$ і визначити таку творячу того самого системи, до якого належать прямі g, g_1, x, якаби перетинала площу Π в точцї X_1, лежачій на прямій PX; — тою творячою мусить бути пряма x_1. Тим способом можна одержати безконечне число пар бігуново спряжених прямих (x і x_1) в данім бігуново-зеровім системі, які належать до одного системи творячих гіпербольоїда $H^{(2)}$.

Ті прямі укладають ся парами інволюторично, бо точки X, X_1 на кривій c^2 творять ряд інволюцийний, якого подвійними точками є точки стичности стичних, попроваджених з точки P до кривої c^2. Ті точки є дїйсні, коли P лежить на вні кривої c^2, а мнимі, коли P лежить в нутрі c^2. В першім случаю є в системі прямих x, x_1 дві прямі самі зі собою бігуново спряжені в бігуново-зеровім системі, а в другім случаю прямі самі зі собою спряжені в системі прямих x, x_1 — є мнимі.

З сего розумованя слїдує твердженє:

Коли є дані дві прямі самі зі собою спряжені в бігуново-зеровім системі, які не перетинають ся в просторі, тодї є безконечне множество иньших прямих самих зі собою спряжених, що перетинають обі перші; ті послїдні творять один систем творячих одно-поволокового гіпербольоїда. Другий систем творячих того гіпербольоїда, до якого належать обі приняті, самі зі собою спряжені прямі, містить безконечно много пар прямих бігуново спряжених в тім-же бігуново-зеровім системі, а які творять з принятими гармонїчні ґрупи.“

B. KALICUN: Über das Gesetz der polaren Dualität in der Geometrie.
II. Teil.

In der vorgelegten Abhandlung entwickelt der Verfasser das Gesetz des polaren Dualismus im Raume. Und zwar: im I. Abschnitte behandelt er die gegenseitige Abhängigkeit der projektivischen Eigenschaften der geometrischen Raumgebilde, indem er diese Gebilde polarisch in Bezug auf eine Fläche II-er Ord. verbindet, und weist nach, daß der polare Dualismus eine allgemeine Transformationsmethode der projektivischen Eigenschaften bildet; im II. Abschnitte weist der Verfasser hin, daß der polare Dualismus unabhängig von der Leitfläche existire; im III. Abschnitte beschäftigt sich der Verfasser mit der Theorie des Achsenkomplexes. Der letzte Abschnitt behandelt das Nullsystem.

Конструкция плоскої кривої V-го степ. з почвірною точкою.

В. Каліцун.

B. Kalicun. Die Konstruktion der ebenen Kurve V-ter Ord. mit einem vierfachen Punkte

В розвідцї п. з. „Über die Eigenschaften der ebenen Kurven etc“, предложенії Цїсарскій Академиї Наук у Відни 9. червня 1910, подав я загальні свійства кривої V-го степ. з почвірною точкою і спосіб, в який би та крива дала ся начеркнути при помочи двох одно-чотирозначних вязок лучів.

В отсїй розвідцї перепроваджую конструкцию доповненя двох одно-чотирозначних вязок (Рис. I), а відтак чертаю образ двох ґатунків згаданої кривої V-го степеня (Рис. II, III), якого то образу, о скілько менї звісно, нїхто єще не пробував начертати.

I. Доповненє двох одно-чотирозначних вязок лучів.

1. Звісно, що дві одно-чотирозначні вязки лучів будуть визначені, коли приймемо довільно девять пар відповідаючих собі лучів[1]), отже: $W^1 (a_1, b_1, \dots . i_1)$, $W^4 (a_4, b_4, \dots i_4)$. [Рисунок I].

Коли ми перетнемо вязку $W^1 (a_1, \dots i_1)$ лучем a_4, а вязку $W^4 (a_4, \dots i_4)$ лучем a_1, то одержимо два одно-чотирозначні ряди: $a_4 (A_1, B_1, \dots I_1)$, $a_1 (A_4, B_4, \dots I_4)$ в зредукованім положеню.

Прямі, які сполучують відповідні точки тих рядів, обвивають криву IV-ої кляси c_4, яка дотикає три рази основи a_1 чотирозначного ряду a_1[2]). З кождої точки якоїнебудь стичної s кривої c_4 виходить єще по три стичні тої кривої. Сї стичні визначують на по-

---

[1]) „Über die Eigenschaften der ebenen Kurven“ стор. 4.

[2]) „Über die Eigenschaften etc.“ стор 3.

трійній стичній a_1 ряд, який є тризначний з рядом на стичній s, визначеним поодинокими стичнями, які виходять з точок потрійної стичної a_1. Отже стична $\overline{B_1 B_4} \equiv s$ перетинає стичні кривої c_4: $\overline{C_1 C_4}$ $\overline{D_1 D_4}, \dots \overline{I_1 I_4}$ в точках $C, D, E, \dots I$, які творять однозначний ряд з тризначним рядом $C_4, D_4, E_4, \dots I_4$.

Ті одно-тризначні ряди є докладно визначені через сім згаданих пар відповідних точок, а їх доповнене провадить до доповненя одно-чотирозначних рядів a_1, a_4, а відтак даних вязок W^1, W^4.

Щоби доповнити одно-тризначні ряди: s $(C, D, E, \dots I)$ і a^1 $(C_4, D_4, \dots I_4)$ сполучуємо точку G_4 з елементами ряду $s\,(C, D, \dots I)$, а точку G з елементами ряду a_1 $(C_4. D_4, \dots I_4)$; тим способом одержані дві одно-тризначні вязки: G_4 $(C, D, \dots I)$ і G $(C_4, D_4, \dots I_4)$ в зредукованім положеню визначують криву III-го ст. c^3, яка переходить два рази через вершок G тризначної вязки. Крива c^3 є визначена подвійною точкою G і точками: $(G_4 C, G C_4) \equiv 1^2$, $(G_4 D, G D_4) \equiv 2^2$, $(G_4 E, G E_4) \equiv 3^2$, $(G_4 F, G F_4) \equiv 4^2$, $(G_4 H\ G H_4) \equiv 5^2$, $(G_4 I, G I_4) \equiv 6^2$.

Кожда пряма, що переходить через подвійну точку G, перетинає криву c^3 еще в одній точцї, а прямі, що переходять через довільну точку тої кривої, перетинають її в дальших двох точках. З сего слідує, що вязки лучів, які сполучують точку 1^2 з точками G, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, а точку G з точками 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, — є одно-двозначні.

Доповнене одно-двозначних вязок 1^2 $(2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2)$ і $G\,(2^2, 3^2, 4^2\ 5^2, 6^2) \equiv G\ (C_4, E_4, \dots I_4)$ не представляє найменьшої трудности: Іменно перетинаємо однозначну вязку $1^2\,(2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2)$ лучем $\overline{G\,3^2}$, а двозначну вязку G $(2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2)$ лучем $\overline{1^2\,3^2}$, наслідком чого одержимо два одно-двозначні ряди: (II, IV, V, VI) і (II', IV', V', VI') в зредукованім положеню, які визначують криву другої кляси c_2, що дотикає підстави $\overline{1^2\,3^2}$ двозначного ряду. З кождої точки стичної $\overline{1^2\,3^2}$ мож еще повести одну стичну до кривої c_2; сі стичні визначують на прямій $\overline{G\,3^2}$ однозначний ряд, а пари стичних, які виходять з точок прямої $\overline{G\,3^2}$, визначують на $\overline{1^2\,3^2}$ двозначний ряд.

2. По сих загальних увагах приступлю до розвязаня слідуючих завдань:

а) „Даний є луч x_4 чотирозначної вязки (W^4), визначити відповідаючий єму луч x_1 в однозначній вязцї (W^1)“.

Визначім точку X_4 пересїчи луча x_4 з прямою a_1 (рис. I), то пряма $G X_4$ є лучом двозначної вязки G $(C_4, E_4, \ldots I_4)$ [$\equiv G$ $(2^2, 3^2, \ldots 6^2)$] і перетинає пряму $\overline{1^2 3^2}$ в точції X^{IV}. Коли ми з точки X^{IV} поведемо способом Brianchon'а стичну s_x до кривої c_2 і сполучимо точку ${}^1X^{IV}$ пересічи тої стичної з прямою $\overline{G 3^2}$ з точкою 1^2, то одержимо луч $(1^2\,{}^1X^{IV})$ однозначної вязки 1^2 $(2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2)$, який відповідає лучеви $G X_4$ $(\equiv G X^{IV})$ двозначної вязки G $(2^2, 3^2, \ldots 6^2)$. Сї два лучі перетинають ся в точції X^2 кривої III-го ст. c^3, яка сполучена з G_4 дає луч однозначної вязки G_4 $(C, D, E, \ldots I)$. Луч $\overline{G_4 X^2}$ перетинає пряму s $(\equiv B_1 B_4)$ в точції X, а пряма $\overline{X_4 X}$, яка сполучує точку X з точкою X_4 є стичною кривої c_4 і перетинає a_4 в точції X_1, яка сполучена з W^1 дає луч x_1 однозначної вязки, що відповідає даному лучеви x_4 чотирозначної вязки.

б) „**Даний є луч y_1 однозначної вязки, визначити відповідаючі єму лучі в чотирозначній вязцї**".

Луч y_1 перетинає підставу a_4 однозначного ряду $(A_1, B_1, C_1, \ldots I_1)$ в точцї Y_1, якій в чотирозначнім рядї на a_1 відновідають чотири точки $Y^1{}_4$, $Y^2{}_4$, $Y^3{}_4$, $Y^4{}_4$; сї точки сполучені з вершком W^4 дають лучі $y^1{}_4$, $y^2{}_4$, $y^3{}_4$, $y^4{}_4$ чотирозначної вязки, які відповідають лучеви y_1 однозначної вязки.

Щоби визначити сї лучі, сполучуємо точку Y_1 з точками одно-тризначних рядів: s $(C, D, E, \ldots I)$, a_1 $(C_4, D_4, E_4, \ldots I_4)$ і визначуємо спільні лучі сих одно-тризначних вязок. Спільні лучі перетнуть пряму a_1 в чотирох точках, які лежать на шуканих лучах чотирозначної вязки¹).

Спільні лучі тих вязок визначимо в слїдуючий спосіб: Через вершок Y_1 чертаю довільне коло K, яке перетинає вязки Y_1 $(C, D, \ldots I;\ C_4, D_4 \ldots I_4)$ після двох одно-тризначних рядів: (c, d, e, f, g, h, i), $(c_4, d_4, e_4, f_4, g_4, h_4, i_4, f)$; спільні точки сих рядів лежать на спільних лучах повисших вязок.

Щоби вишукати згадані спільні точки, сполучуємо точку d з точками $c_4, d_4, e_4, \ldots i_4$, а точку d_4 з точками: c, d, e, f, g, h, i. Тим способом одержимо одно-тризначні вязки в зредукованім положеню, які як звісно, утворять криву III-го ст. c^3, що посїдає в d подвійну точку. Крива c^3 перетинає коло K єще в чотирох точках, які якраз є шуканими спільними точками згаданих рядів.

---

¹) Знане є твердженє Chasles'а, що: Два $(m\text{-}n)$ — значні твори мають $m+n$ спільних елементів.

Однак повисше завдане IV-го ряду дасть ся розвязати без помочи кривої c^3, виключно при помочи двох кривих II-го степеня:

Іменно крива c^3 є докладно визначена подвійною точкою d і точками: $(dc_4, d_4c) \equiv 1$, $(de_4, d_4e) \equiv 2$, $(df_4, d_4f) \equiv 3$, $(dg_4, d_4g) \equiv 4$, $(dh_4, d_4h) \equiv 5$, $(di_4, d_4i) \equiv 6$. Коли ми сполучимо точку 2 з точками 1, 3, 4, 5, 6, то одержимо вязку лучів, з яких кождий перетинає криву c^3 еще в одній дальшій точці $2'$, $3'$, $4'$, ..., а коло K в парах точок: a', a''; b', b''; c', c''; ..., які творять, як звісно, квадратову інволюцию. Коли ми відтак сполучимо точку d кривої c^3 з її точками 2, $2'$; 3, $3'$; 4, $4'$; ..., одержимо вязку двозначну з вязкою 2 (1, 3, 4, ...); пари лучів сеї двозначної вязки перетинають коло K в парах точок: c_4, c_4'; e_4, e'_4; f_4, f'_4; ... квадратової інволюциї. Інволюциї $(c_4, c'_4; e_4, e'_4;, \ldots)$ і $(a', a''; b', b''; c', c''; \ldots)$ є однозначні і мають чотири спільні точки, які є якраз точками пересічи кривої c^3 з колом K. Однак через сї точки переходить, як легко запримітити, стіжковий переріз p^2, який визначують дві однозначні вязки: 2 (1, 3, 4, 5) і $S\,(\overline{c_4\ c'_4}, \overline{e_4\ e'_4}, \overline{f_4\ f'_4} \ldots)$.

Коли отже начеркнемо переріз стіжковий p^2, то він перетне коло K в чотирох точках: η_1, η_2, η_3, η_4; прямі, які сполучують сї точки з точкою Y_1, є спільними лучами одно-тризначних вязок: $Y_1\,(C, D, \ldots I; C_4, D_4, \ldots I_4)$. Сї лучі перетинають пряму a_1 в чотирох точках: Y^1_4, Y^2_4, Y^3_4 Y^4_4, які сполучені з вершком W^4 дадуть лучі: y^1_4, y^2_4, y^3_4, y^4_4, чотирозначної вязки, що відповідають принятому лучеви y_1 однозначної вязки.

Увага: Лучі $d2'$ $d3'$ $d4'$, ... двозначної вязки $d\,(1, 3, 4, 5, 6, \ldots)$ визначив я на рисунку в слідуючий спосіб:

Вязки 2 (1, 3, 4, 5, 6 ...) і d (1, 3, 4, 5, 6 ...) є одно-двозначні і сими 5 парами відповідних лучів докладно визначені. Коли перетнемо однозначну вязку 2 (1, 3, 4, 6 ...) лучем $\overline{d4}$, а двозначну вязку d (1, 3, 4, 5, 6, ...) лучем $\overline{24}$, то одержимо одно-двозначні ряди: $(I'', III'', V'', VI'', \ldots)$ і $(I', III', V', VI' \ldots)$ в зредукованім положеню, які визначують криву-II-ої кляси c_2', що стикає ся з основою $\overline{24}$ двозначного ряду. З кождої точки однозначного ряду виходить еще по одній стичній до c_2', які перетинають пряму $\overline{24}$ в точках I_1', III'_2, V'_1, ...; точки сї творять по черзї з точками I', III', V', ... пари елементів двозначного ряду на прямій $\overline{24}$. Пари точок I' I', III' III'_1, ... творять, як звісно, квадратову інволюцию, отже коли їх получимо з точкою d, одержимо пари лучів двозначної вязки d (1, 3, 4, 5, ...).

II. Конструкция кривої V-го ст. (Рис. II, III).

1. Крива V-го ст. з почвірною точкою буде визначена, коли крім почвірної точки W_4 приймемо еще десять єї довільних точок: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, [рис. II, III]. Бо коли ми получимо точки 10 і W^4 з иньшими точками: 1, 2, 3, ... 9, то одержимо девять пар відповідних лучів двох одно-чотирозначних вязок, які то пари визначують цїлковито сї вязки[1]).

Коли отже доповнимо ті вязки що йно представленим способом, то точки пересїчи відповідних лучів утворять криву c^5. Щоби однак визначити точки кривої c^5 дорогою лінійною, треба при доповненю згаданих вязок виходити від лучів чотирозначної вязки [с. є від розвязаня завданя *a*)].

2. Стична s_w до кривої c^5 в довільній точці 10 (W^1) є лучем однозначної вязки W^1 (1, 2, ... 9), який відповідає спільному лучеви W^4 W^1, зачисленому до чотирозначної вязки W^4 (1, 2, ... 9).[2]).

Отже сю стичну визначимо способом лінїйним.

Щоби начертати стичні (s_1, s_2, s_3, s_4) кривої c^5 в почвірній точції W^4, належить памятати, що сї стичні є лучами почвірної вязки, які відповідають спільному лучеви $\overline{W^4 W^1}$, зачисленому до однозначної вязки. Отже знайдемо їх, коли розвяжемо завданє б) уст. I-го.

[В принятім положеню одно-чотирозначних вязок (рис. II), почвірна точка посїдає тілько дві дїйсні стичні t^1, t^2].

3. Безконечно далекі точки кривої c^5 найдемо в слїдуючий спосіб:

Пересуньмо однозначну вязку W^1 (1, 2, ...9) так рівнобіжно до первісного положеня, щоби єї вершок W^1 зійшов ся з вершком W^4 чотирозначної вязки, а відтак через вершок W^4 поведїм довільне коло *K*. Се коло перетне сї вязки після двох одно-чотирозначних рядів: (a_1, b_1, c_1, d_1, ... i_1) і (a_4, b_4, ... i_4). Коли отже сполучимо точку i_4 чотирозначного ряду з елементами однозначного ряду, а відповідну точку i_1 з точками чотирозначного ряду, то одержимо одно-чотирозначні вязки в зредукованім положеню. Сї вязки визначують криву c^4 четвертого степеня, яка посїдає в i_1 потрійну точку[3]).

---

[1]) „Über die Eigenschaften der ebenen etc.“ ст. 4.

[2]) „Über die Eigen. etc.“ ст. 17.

[3]) Über die Eigenschaften der eb. Kur. etc. ст. 3. Гляди рівнож: „Dr. M. Łazarski. Konstrukcye krzywej rz. IV...“ Академія Наук в Кракові т. XV.

Крива c^4 перетне коло K крім точки i_1 еще в пять дальших точках (які можуть бути парами мнимі), що є спільними точками згаданих рядів. Прямі, що сполучують сї точки з W^4, є спільними лучами одно-чотирозначних вязок W^1 i W^4 і вказують на безконечно далекі точки кривої c^5.

В данім положеню перетинає крива c^4 коло K тільки в трох дійсних точках; крива c^5 посїдає тільки три дійсні безконечно далекі точки.

Асимптоти $(a_1, a_2, \ldots)$ кривої c^5 начеркнемо, коли будемо приймати по черзї безконечно далекі точки за вершки однозначних вязок і в тих точках чертати стичні — способом поданим в уст. 2.

4. На рисунку III. начертав я криву V-го степ. з двома дїйсними стичними $(s_1\ s_2)$ в почвірній точцї і з одною дїйсною асимптотою (a).

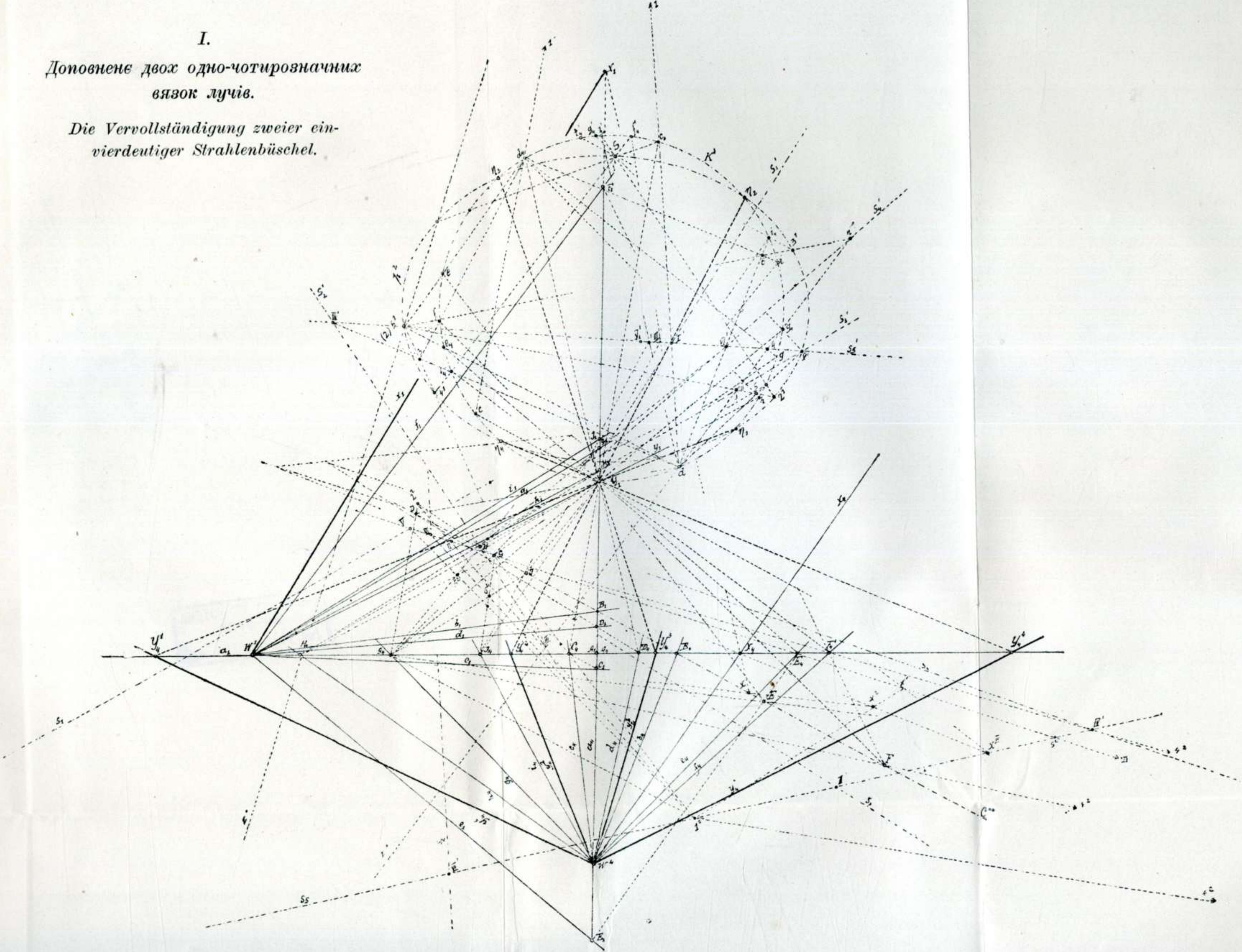
In der der kaiserlichen Akademie am 9. Juni 1910 vorgelegten Abhandlung habe ich die allgemeinen Eigenschaften der ebenen Kurve V-ter Ord. mit einem vierfachen Punkte entwickelt und auf die Art und Weise hingewiesen, auf welche diese Kurve mit Hilfe von zwei ein-vierdeutigen Strahlenbüscheln gezeichnet werden kann.

In der gegenwärtigen Abhandlung wird die Konstruktion zwei ein-vierdeutiger Strahlenbüschel und der genannten Kurve selbst durchgeführt.

I.

Доповненє двох одно-чотирозначних вязок лучів.

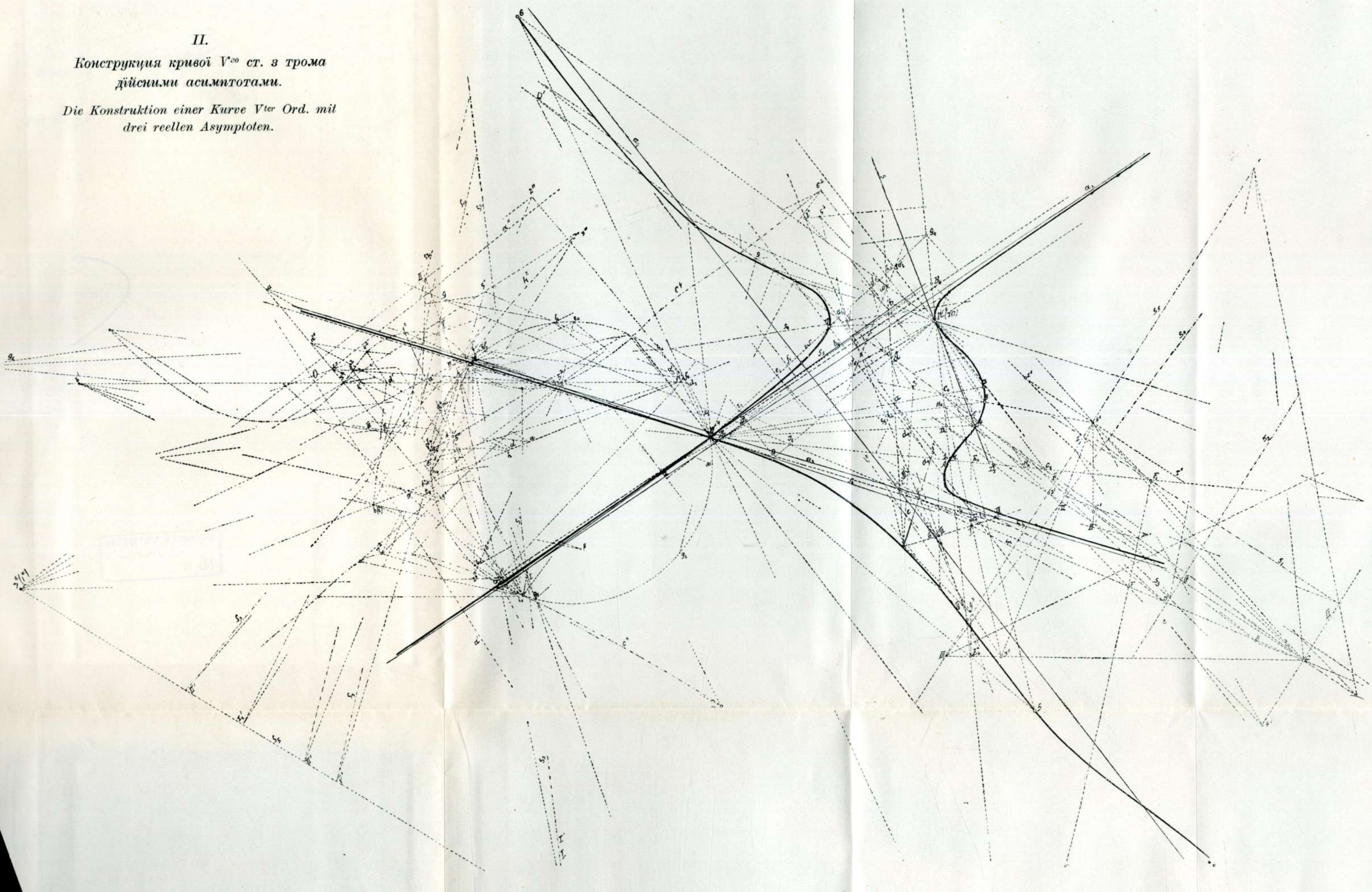
Die Vervollständigung zweier ein-vierdeutiger Strahlenbüschel.



II.

Конструкция кривої V^го ст. з трома дійсними асимптотами.

Die Konstruktion einer Kurve V^ter Ord. mit drei reellen Asymptoten.



71.

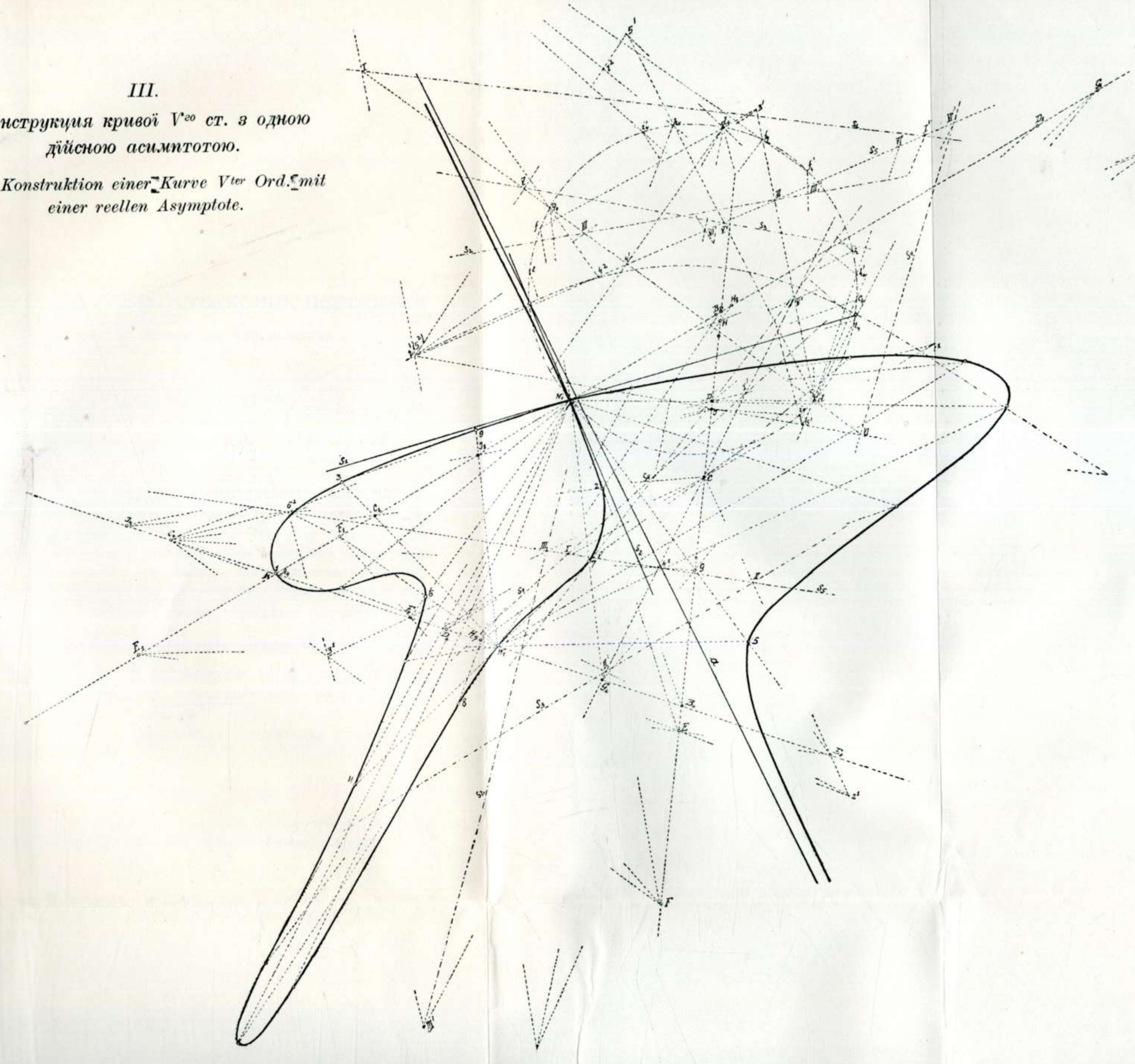
Конструкційна схема IV ст. з трьома півкруглими апсидами.

Die Konstruktion einer Kirche IV Jahrh. mit drei runden Apsiden.

III.

Конструкция кривої $V^{го}$ ст. з одною дійсною асимптотою.

Die Konstruktion einer Kurve V^{ter} Ord. mit einer reellen Asymptote.



Причинок до теорії стіжкових перекроїв.

(Ein Beitrag zur Theorie der Kegelschnitte).

написав

Др. Микола Чайковський.

§ 1.

Коли стіжкові перекрої будемо вважати ґеометричними місцями всїх точок, для яких відношенє віддалень від постійної точки (огнища) й постійної прямої (провідної лінїї) є постійне, то звідси можна випровадити богато прикмет, спільних всім стіжковим перекроям. Поминаючи всі ті прикмети, як загально звісні, хочемо в нинїшній нотатці звернути увагу на дві річи: 1) коли приймемо віддаленє огнища від вершка постійним і піддамо чисельну ексцентричність $\left(\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}\right)$ змінам від 0 до ∞, яку частину площі займе громада стіжкових кривих? і 2) як заховують ся провідні лїнії еліпс, коли ε буде так само зміняти ся, і коли приймемо відношенє огнища від вершка, як попередно, постійним?

Перед тим одначе випровадимо всї величини, потрібні для теорії стіжкових перекроїв.

§. 2.

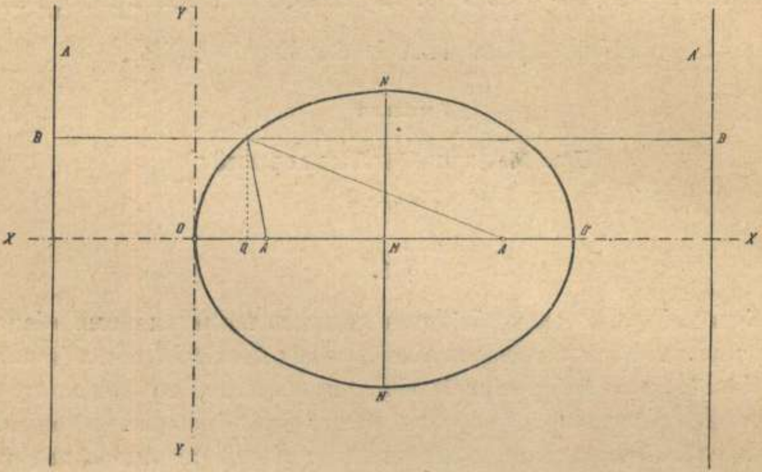
Нехай буде A огнищем, Λ провідною лінією стіжкових перекроїв; тодї дефініційне рівнанє всїх точок P бажаних кривих є:

$$\frac{AP}{PB} = \varepsilon, \tag{1}$$

де B є точкою, в якій трафляє провідну лінїю нормальна, поведена з P (рис. 1). З того дефініційного рівнаня одержимо аналїтичне рівнане стіжкових перекроїв

$$y^2 = 2c\,(\varepsilon + 1)\,x + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2, \qquad (2)$$

а саме вершкове рівнане, бо відносимо його до сорядних, яких осию X є нормальна з огнища до провідної лїнїї, а вісь Y переходить через ту точку на оси X, яка ділить віддалене огнища від провідної лїнїї в відношеню $\varepsilon : 1$. Коли O є вершком кривих, а заразом і початком сорядних, то $c = OA$ — т. зн., се віддалене огнища від вершка.



На основі рівнаня (2) можемо перевести повну дискусію стіжкових перекроїв, коли будемо вважати ε змінним параметром.

Іменно:

для $\varepsilon = 0$ маємо коло;
„ $\varepsilon < 1$ „ елїпсу;
„ $\varepsilon = 1$ „ параболю;
„ $\varepsilon > 1$ „ гіперболю;
„ $\varepsilon = \infty$ „ пряму лїнію, а саме вісь Y; її рівнане є: $x = 0$.

Для відємних ε криві є нездефінїовані.

§ 3.

Тепер шукаємо симетрії наших кривих; в тій цїли знаходимо точки пересїчи кривих з осию X; їх є дві: вершок O і вершок O'

в віддаленю $x_0 = \frac{2c}{1-\varepsilon}$; для $\varepsilon < 1$ лежить він на право від O, для $\varepsilon = 1$ є в безконечности, а для $\varepsilon > 1$ по лївій стороні від O, бо тоді є $x_0 < 0$. Назвім $a = \frac{c}{1-\varepsilon}$, тоді $x_0 = 2a$ називаєть ся *великою або головною осию кривої*.

Творячи похідну рівнаня (2), одержимо

$$yy' = c(\varepsilon + 1) + (\varepsilon^2 - 1)x;$$

вона стає зером для $x = \frac{c}{1-\varepsilon} = a$. В тій точцї досягає крива maximum або minimum. Віддалене обох екстремів називає ся *побічною* (або *малою*) *осию кривої*; означім її $2b$, тоді є

$$b = c\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

Для $\varepsilon = 1$ є $b = \infty$, для $\varepsilon > 1$ є воно мниме.

Точку пересїчи обох осий M називаємо *осередком кривої*. Віддалене осередка від вершка є

$$a = \frac{c}{1-\varepsilon},$$

віддалене від огнища є

$$AM = a - c = \frac{c\varepsilon}{1-\varepsilon} = a\varepsilon.$$

Воно має назву *лїнїйної ексцентричности*; означуємо його буквою e: $e = a\varepsilon$.

Звідси легко випровадити звісне рівнане:

$$a^2 - b^2 = e^2.$$

Для мнимого b маємо, розумієть ся, $a^2 + b^2 = e^2$.

§ 4.

Точка A', яка лежить на головній оси симетрично з A до M, є рівно-ж огнищем, а пряма Λ', симетрична до M супроти Λ, є також провідною лїнїєю кривої. Се легко провірити дуже простим рахунком. Коли назвемо B' точку, в якій пряма нормальна з P до Λ' трафляє пряму Λ', одержимо рівно-ж дефініційне рівнане кривої

$$\frac{PA'}{PB'} = \varepsilon \qquad (3)$$

З рівнань (1) і (3) слїдує

$$PA + PA' = \varepsilon \,.\, (PB + PB') = \varepsilon \,.\, CC';$$

величина CC' є віддаленєм обох провідних лїній:

$$CC' = 2CM = 2(CO + OM),$$

а що $CO = \frac{c}{\varepsilon}$, то $CO + OM = \frac{c}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$,

отже $CC' = \frac{2c}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = \frac{2a}{\varepsilon}$, проте $\varepsilon . CC' = 2a$;

коли положимо: $r_1 = PA$, $r_2 = PA'$, одержимо:

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad (4)$$

Отсе звичайна дефініція еліпси. — Її можемо примінити рівно-ж і до гіперболї, тільки з тим застереженєм, що коли точки A' і B' лежать по відємній сторонї оси Y, то величини PA' і PB' треба брати з відємним знаком, отже рівнанє (3) треба відоймити від (1). Се дасть:

$$r_1 - r_2 = \varepsilon . CC' = 2a. \qquad (5)$$

Осями симетрії кривих є обі оси; осередком симетрії осередок кривої. Параболя має тільки одну вісь симетрії, а саме вісь X (головну вісь). Її осередок симетрії лежить в безконечности.

§ 5.

Приходимо тепер до першого питаня, яке ми поставили на вступі, іменно, як заховуєть ся громада кривих (2) на площі, коли c буде постійне, а ε приймемо за змінний параметер*).

Для $\varepsilon = 0$ маємо коло о лучи c з осередком в A; віддаленє провідної лїнії є $CO = \infty$; так само й друга провідна лінія є в безконечности.

Для $\varepsilon < 1$ одержуємо еліпсу; її видовженє зростає зі зростом параметру ε, бо коли $\varepsilon < \varepsilon_1 < 1$, то $a_1 = \frac{c}{1-\varepsilon_1} > a$. Зі зростом ε віддалюють ся проте точки M, A' і O' постійно, аж для $\varepsilon = 1$ перейдуть в безконечність.

Коли ε перейде границю 1, всї згадані точки появляють ся по лївій сторонї Y, бо величини a і ε стають відємні. Вони будуть зближати ся постійно до вершка O, бо коли $\varepsilon_1 > \varepsilon > 1$, то $a_1 = \frac{c}{1-\varepsilon_1} = \frac{-c}{\varepsilon_1 - 1} < a_1$.

Для $\varepsilon = \infty$ одержимо $CC' = \frac{2c}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = 0$, проте обі провідні лїнії зійдуть ся; тоді є рівно-ж $CO = 0$, отже вони впадуть на вісь Y. З рівнаня (2) одержимо тоді $x = 0$; проте цїла крива перейде в вісь Y.

---

*) Не мішати з параметром стіжкових перекроїв!

Кожда з кривих буде обширнїйша від попередньої, бо коли приймемо $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, нпр. $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \delta$, ($\delta > 0$), то для того самого x маємо $y_2 > y_1$. Отже коли дві сусїдні криві стикають ся в точцї O, то не можуть вже мати инших спільних точок.

§ 6.

Коли схочемо знайти, яку частину площі покриє громада кривих при тяглій зміні параметру ε, поставмо собі таке питанє: „нехай буде дана точка $P(\xi, \eta)$ на площі; яка є вартість параметру ε тої кривої, що переходить через точку P“?

Вставивши в рівнанє (2) сорядні точки P й розвязавши його з огляду на ε, одержимо:

$$\varepsilon = -\frac{c}{\xi} + \frac{1}{\xi}\sqrt{(\xi - c)^2 + \eta^2}. \tag{6}$$

Знак „—“ при коріни є виключений, бо ми приймаємо параметер ε заєдно додатній. Звідси слїдує, що мусить бути сповнена одна вимога для ξ і η:

$$\sqrt{(\xi - c)^2 + \eta^2} \leqq c, \tag{7}$$

бо тільки тодї зможе бути $\varepsilon \geqq 0$. Нерівність (7) висказує, що тільки тодї через точку P може переходити одна крива з громади (2), коли P лежить не на полї кола о лучи c й осередку в огнищи A. Через кожду иншу точку переходить одна і тільки одна крива з громади (2), бо ε має тільки одну можливу вартість.

Звідси слїдує, що громада стіжкових кривих, даних рівнанем (2) зі змінним параметром ε, покриває цїлу площу з виїмком вершкового кола о лучи c з осередком в огнищи A.

Для відємних ε наші криві, як сказано, нездефініовані.

§ 7.

Щоби розслїджувати зміну положеня провідних лїній з параметром, зведім рівнанє (2) до осередочного виду (можливе се, розумієть ся, тільки при елїпсї й гіперболї).

При елїпсї пересуваємо початок сорядних о a на право; тому скорочуємо сорядну x о a:

$$(1 - \varepsilon^2)\,x + y^2 = c^2 \cdot \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, \tag{8}$$

або в звичайній формі

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\,;$$

при гіперболі відбуваєть ся отсе пересуненє о таку саму величину на ліво, отже сорядна x буде продовжена о a; се дасть:

$$(\varepsilon^2 - 1)x^2 - y^2 = c^2 \cdot \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}, \tag{9}$$

отже звичайна форма рівнаня гіперболї буде:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Віддаленє обох провідних лінїй є в обох разах

$$d = CC' = \frac{2c}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

зглядно

$$d = \frac{2c}{\varepsilon(\varepsilon-1)};$$

коли-ж тут не будемо вважати на знак, можемо приймити перший взорець.

Для $\varepsilon = 0$ є $d = \infty$; для $0 < \varepsilon < 1$ приймає воно скінчені вартости, а для $\varepsilon = 1$ стає опять ∞. Опісля, коли $\varepsilon > 1$, опадає воно від ∞ до 0. — Звідси слідує, що коли ε зростає від 0 до 1, d перебігає спершу спадаючий ряд, а опісля знов зростає.

Знайдїм долїшню границю того ряду. Коли положимо

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon(1 - \varepsilon),$$

маємо:

$$\varphi'(\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon;$$

$\varphi'(\varepsilon)$ стає зером для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, а що $\varphi''(\varepsilon) = -2 < 0$, то $\varphi(\varepsilon)$ є для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ maximum, отже тоді d є minimum. Отже долїшньою границею вартостий d є

$$d_{\text{min.}} = 8c;$$

обі провідні лінії еліпси не можуть ніколи зблизити ся до себе більше, як на $8c$.

§ 8.

Положім $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \delta_1 \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} - \delta$; тодї є

$$d_1 = d_2 = \frac{2c}{\frac{1}{4} - \delta^2}.$$

Дві еліпси, яких вершки однаково віддалені від огнищ і яких чисельні ексцентричности є симетрично розложені супроти числа $\frac{1}{2}$, мають ті самі провідні лінії. Такі дві еліпси о тих самих провідних лінїях назвемо приналежними еліпсами супроти δ (zugehörige Ellipsen in bezug auf δ).

Рівнаня кождої пари приналежних еліпс є такі:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{x}{\frac{2c}{1-2\delta}}\right)^2+\left(\frac{y}{c\sqrt{\frac{3+2\delta}{1-2\delta}}}\right)^2=1,\\&\left(\frac{x}{\frac{2c}{1+2\delta}}\right)^2+\left(\frac{y}{c\sqrt{\frac{3-2\delta}{1+2\delta}}}\right)^2=1.\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Тут є:

$$\left.\begin{aligned}&a_1=\frac{2c}{1-2\delta},\ a_2=\frac{2c}{1+2\delta};\\&b_1=c\sqrt{\frac{3+2\delta}{1-2\delta}},\ b_2=c\sqrt{\frac{3-2\delta}{1+2\delta}}.\end{aligned}\right|\qquad(10a)$$

Для $\delta=0$ зливають ся обі елїпси в одну:

$$\left(\frac{x}{2c}\right)^2+\left(\frac{y}{c\sqrt{3}}\right)^2=1.\qquad(11)$$

Отсе одинока елїпса, ідентична зі своєю приналежною; вона приналежна до $\delta=0$. Її назвемо головною елїпсою (Hauptellipse).

Коли пів-оси головної еліпси назвемо a, b, а пів-оси пари приналежних еліпс a_1, b_1 і a_2, b_2, одержимо такі реляції:

$$a_1>a>a_2;\quad b_1>b>b_2,$$

т. зн. з пари двох приналежних еліпс одна лежить на зовнї, а друга містить ся внутрі головної еліпси.

Для $\delta=\frac{1}{2}$ маємо: $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=0$, отже $d=\infty$; перше рівнанє (10) тратить своє значінє, бо обі пів-оси стають ∞, а друге стає $x^2+y^2=c^2$, т. зн.

Екстремом приналежних еліпс є така пара, що перша елїпса стає безконечно велика, т. є. оба її огнища, вершки й провідні лїнії відсувають ся безконечно далеко, (стає параболею о безконечно далекім вершку), а друга елїпса стає виїмковим колом о лучи c, з есередком M.

Для приналежних елїпс замітні такі реляції:

$$a_1+a_2=\frac{4c}{1-4\delta^2}=\tfrac{1}{2}d;$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2};\quad \frac{e_1}{e_2}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2=\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2.$$

§ 9.

Коли-б ми хотїли перевести той сам дослїд над гіперболею, побачимо, що для $\varepsilon > 1$ істнує minimum d тільки для $\varepsilon = \infty$; є воно $d = 0$. До нього належить тільки одно ε, отже до кождої пари провідних лїній належить одна і тільки одна гіпербола.

§ 10.

Конструкція пар приналежних елїпс.

Провідні лїнїї елїпси знаходимо, ведучи стичні до еліпси в кінцях її параметрів, т. є. в точках нормально над огнищами. Вони перетинають ся з осию X в точках, куди переходять провідні лїнїї. — Стичні-ж до еліпси перетинають вісь X в тих самих точках, що стичні до кола з осередком M і лучем a (велика пів-вісь еліпси), ведені з точок нормально над дотичними точками еліпс. Проте конструкція провідних лїній еліпси є дуже легка.

Нехай a_1 і a_2 означують великі пів-оси одної пари приналежних еліпс; тодї є дані також і обі еліпси, а з рівнань (10а) можемо знайти c і δ, отже всьо, що потрібне до визначеня еліпси. — Для приналежних еліпс істнує реляція

$$a_1 + a_2 = \tfrac{1}{2}d;$$

отже коли зачеркнемо з M співосередні кола лучами a_1 і a_2 і відміримо на оси X відтинок $CM = a_1 + a_2$, то точка C подасть, куди переходить провідна лїнія. З C ведемо стичні до обох кіл; мети точок стичности на вісь X визначать положенє огнищ обох еліпс (рис. 2).

Що сконструовані так еліпси є справдї приналежні, можемо доказати так: 1) мусимо виказати, що обі елїпси мають спільні провідні лїнїї; 2) мусимо доказати, що обі мають однакове віддаленє вершків від огнищ.

1) Слїдує безпосередно з конструкції; прямі Λ і Λ' є справдї провідними лініями обох еліпс, бо D_1C і D_2C є стичними до кіл над великими осями елїпс, а точки стичности лежать прямо над огнищами елїпс.

2) Маємо доказати, що $O_1A_1 = O_2A_2$. З ΔMCD_1 і MCD_2 слїдує:

$$a_1{}^2 = A_1M^2 + A_1D_1{}^2; \quad a_2{}^2 = A_2M^2 + A_2D_2{}^2,$$

а також:

$$A_1D_1{}^2 = CA_1 \,.\, A_1M; \quad A_2D_2{}^2 = CA_2 \,.\, A_2M.$$

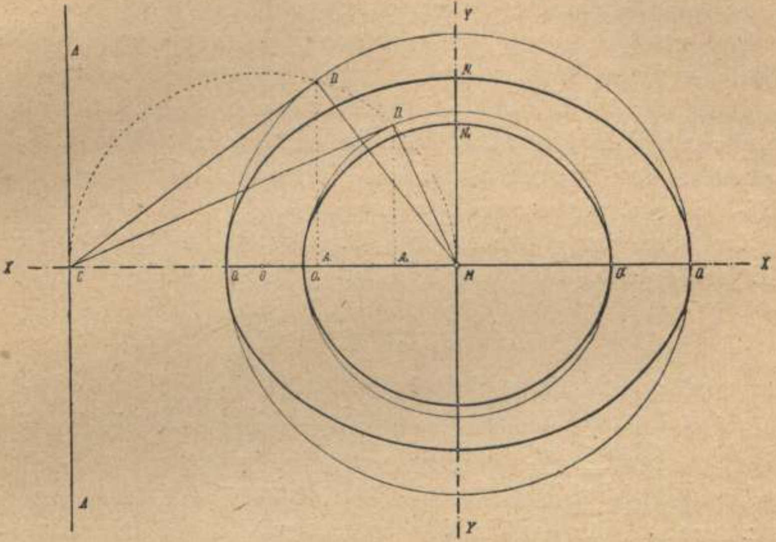
Тут є:

$$CA_1 = CM - A_1M = (a_1 + a_2) - A_1M;$$
$$CA_2 = CM - A_2M = (a_1 + a_2) - A_2M,$$

(бо $CM = a_1 + a_2$), отже дальше

$$A_1D_1^2 = [(a_1 + a_2) - A_1M] \,.\, A_1M;$$
$$A_2D_2^2 = [(a_1 + a_2) - A_2M] \,.\, A_2M,$$

проте: $$A_1M = \frac{a_1^2}{a_1 + a_2}; \quad A_2M = \frac{a_2^2}{a_1 + a_2}.$$



Бажані відтинки є:

$$O_1A_1 = a_1 - A_1M \quad \text{i} \quad O_2A_2 = a_2 - A_2M.$$

отже $$O_1A_1 = O_2A_2 = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = c,$$ як се слідує рівно-ж з (10a).

Для конструкції головної еліпси ($a_1 = a_2$) рисуємо точку C в віддаленю $2a_1 (= a_1 + a_2)$ від M.

Тернопіль, 30. XI. 1911.

RÈSUMÈ.

Hier werden die Kegelschnitte als geometrische Örter derjenigen Punkte definiert, für die das Verhältnis der Abstände von einem fixen Punkt A (Brennpunkt) und einer fixen Linie Λ (Leitlinie) einen konstanten Wert ε hat.

Wenn der Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkt O der Kurven mit c bezeichnet wird, dann lautet die Scheitelgleichung der Schaar sämtlicher Kegelschnitte:

$$y^2 = 2c(\varepsilon + 1)\,x + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2,$$

worin c der veränderliche Parameter*) ist, den man von 0 bis $+\infty$ stetig variieren lässt; für negative Werte desselben sind die Kurven nicht mehr definiert.

Der Gegenstand des vorstehenden Beitrags ist: 1) zu zeigen, welcher Teil der Ebene durch die ganze Kurvenschaar bedeckt wird, und 2) zu untersuchen, wie sich die Ellipsen verhalten, sobald man ihre Leitlinien hin und her verschiebt.

Die erste Frage ergibt die Antwort, dass durch alle diejenigen Punkte der Ebene Kurven der genannten Schaar gehen können, die nicht innerhalb des „Ausnahmskreises“ liegen, d. h. des Kreises vom Radius c um den Brennpunkt A. Den Extremen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = \infty$ entsprechen der Ausnahmskreis als Grenzlage aller Ellipsen, und die Y-Achse als Grenzlage aller Hyperbeln.

Zur Behandlung der zweiten Frage wird die Scheitelgleichung der Ellipse in eine Mittelpunktsgleichung transformiert:

$$(1-\varepsilon^2)\,x^2 + y^2 = c^2 . \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon};$$

ferner wird c als konstant beibehalten und beim Variieren des Parameters ε sollen alle Ellipsen konzentrisch bleiben. Es zeigt sich alsdann, dass für $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ den zwei Ellipsen, die durch $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \delta$ und $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} - \delta \, (0 \leqq \delta \leqq \frac{1}{2})$ bestimmt sind, je ein gemeinsames Leitlinienpaar zukommt; für solches Ellipsenpaar wird die Bezeichnung „einander zugehörige Ellipsen in bezug auf δ“ gewählt. Für $\delta = 0$ ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$; dann bekommen wir nur eine einzige, sich selbst zugehörige Ellipse. Sie mag „Hauptellipse“ heissen; bei ihr ist der Abstand der beiden Leitlinien ein Minimum, u. z. $= 8c$.

Für $\delta = \frac{1}{2}$ kommen wir auf ein Extrempaar; die eine Ellipse ist unendlich gross, die andere der Ausnahmskreis um M.

Zuletzt wird die Konstruktion der zugehörigen Ellipsenpaare angegeben; auf der X-Achse wird ein Punkt C bestimmt, dessen Abstand von M gleich der Summe ist der grossen Halbachsen beider Ellipsen; er gibt die Lage der Leitlinie Λ an, denn es ist der halbe Abstand beider Leitlinien $\frac{1}{2}d = a_1 + a_2$. Dann werden um M zwei Kreise mit den Radien a_1 und a_2 geschlagen, an welche dann von C aus Tangenten zu legen sind. Die Projektionen der Beruhrüngspunkte auf die X-Achse sind die Brennpunkte beider zugehörigen Ellipsen.

---

*) Nicht zu verwechseln mit dem „Parameter eines Kegelschnitts“!

Динаміка елєктрону.

написав

Володимир Кучер.

Основи динаміки елєктрону.

Катодові і β-лучі радіоактивних тїл є рухом елєктронів с. є. атомів відємної елєктричности. Повстає отже в сей спосіб елєктричний ток, який ріжнить ся від ґальванїчного току хиба тим, що не пливе по матеріяльнім осередку; такий ток називає ся током конвекцийним. Ток сей витворює около себе, так само як й ток в добрім провіднику, маґнетне поле, якого енерґія є пропорціональна до квадрату з сили тока. Зростаючій силї тока противдїлає елєктро-моторна сила власної індукциї, яка знов є пропорциональна до часової зміни сили тока. А що сила конвенцийного тока, який повстає в наслїдок руху елєктрону, тому елєктро-моторній силї власної індукциї відповідати-ме сила пропорциональна до прискореня елєктрону, але єї напрям буде противний. Ся послїдна відповідає в звичайній механіцї силї безвладности; кожда отже елєктрична частинка в руху посїдати-ме в наслїдок витвореного около себе елєктро-маґнетного поля безвладну масу, яку ми для відріжненя від безвладної маси тяжких дробин назвем за J. J. Thomson-ом і O. Heavisede-ом „сповидною“ або „елєктро-маґнетною“ масою.

Коли конвекцийний ток з елєктричних частинок витворює около себе маґнетне поле — що доказав досьвідом Rowland, то елєктрони в катодових лучах, які саме представляють конвекцийний ток, мусять посїдати елєктро-маґнетну масу. Крім сего можна ще приписати елєктронови на перший погляд матеріяльну масу, яка саме належить всякій тяжкій матерії, яку можна приписати й елєктричним йонам. Питанє однак є, чи можна елєктронови приписати сю послідну? Чи маємо уважати електрон за $\frac{1}{2000}$ чи $\frac{1}{1000}$ часть атому водня, чи нї? Питаня сего годї нам поминути навіть тодї, коли уважати-мемо безвладність електрону в части за матеріяльну, а в части за електро-маґнетну. — Відповідь на се питанє дають нам прояви безвладности, які електрони оказують в скоршім руху, чим в катодових лучах. Після аксіомів звичайної механїки маса матеріяльна важких частинок мусить бути постійна, незалежна від скорости, з якою рух відбуває ся. Електро-маґнетна знов маса, яка бере свій початок в електро-маґнетнім поли, буде залежати так само як й само електро-маґнетне поле від скорости, з якою електрон перелїтає космічний етер.

З відкритєм лучів β і пізнанєм їх природи, а іменно, що они є також рухом електронів о далеко більшій скорости, як в катодових лучах, показали досьвіди проф. Kaufmann-a, що безвладність електричних частинок росте в парі зі зростаючою їх скоростию. В тім отже часї прийшла гадка M. Abraham-ови вивести динаміку електрону на чисто електро-маґнетних основах. Теоретичні виводи Abraham-a найшли опісля досьвідне потвердженє Kaufmann-a[1] так, що на природописнім конґресї в Карльсруге 1900. р. могли оба сьміло виступити з думкою, що маса електрону є чисто електро-маґнетної природи.

Динаміка електрону має свою основу в рівнанях електронової теориї. Щоби однак дійти до сих послїдних, мусимо вийти з рівнань Maxwell-a для електро-маґнетного поля. Перше рівнанє Maxwell-a говорить що:

$$curl\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{z}$$ [2],

значить, що вир сили маґнетного поля $\mathfrak{H}$ є пропорцийональний до цїлої густоти тока $\mathfrak{z}$; притім не буде злишним зазначити, що $c = 3.10^{10}$.

Повний ток в електроновій теориї складає ся з двох частий: 1) з тока пересуненя в етері і 2) з конвекцийного тока електронів. Коли електричну силу назвемо $\mathfrak{E}$, тодї на ток пересуненя дістанемо: $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}$; а ток конвекцийний електронів дістанемо: $\mathfrak{i} = \frac{\varrho\mathfrak{v}}{c}$ [3],

---

[1] W. Kaufmann: Physik. Zeitschr. 4., стор. 54. 1902. M. Abraham: Phys. Zeitschr. 1902, стор. 52. Той сам: Göttingen Nachrichten 1903, стор. 90. Той сам: Gött. Nachr. 1902, стор. 20.

[2] Föppl Abraham: Theor. d. Elektr. т. I. стор. 235.

[3] Föppl-Abraham: Theorie d. Elektr. I. стор. 190.

де ϱ є електричною густотою, а $\mathfrak{v}$ скоростею електронів. В наслідок сего отримаємо перше рівнанє елекронової теориї:

$$\mathit{curl}\ \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = 4\pi\mathfrak{i}. \tag{I}$$

Друге рівнанє теориї Maxwell-a:

$$\mathit{curl}\ \mathfrak{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\ ^{1)}$$

означає, що вир електричної сили є пропорціональний до маґнетної індукциї $\mathfrak{B}$. В електроновій теориї переміняє ся она на

$$\mathit{curl}\ \mathfrak{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{II}$$

з огляду на се, що для етеру $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$. Крім сих двох задержує ще електронова теория слідуючі рівнаня:

$$\mathit{div}\ \mathfrak{E} = 4\pi\varrho\,;\ ^{2)} \tag{III}$$

$$\mathit{div}\ \mathfrak{H} = 0. \tag{IV}$$

До тих рівнань долучає ще H. A. Lorentz рівнанє, яке подає електро-маґнетну силу на одиницю наряду:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{S}].^{3)} \tag{V}$$

Притім треба додати, що цілий наряд, який ми приписуєм електронови і який уважаємо за елементарну скількість електричности, мусить бути розділений в певнім просторі. Сей саме простір крім наряду називаємо „електроном“. Він може порушати ся в просторі лише яко цілість, не може однак бути розділений.

Коли отже електричність о густоті ϱ є розділена на електроні, тоді до неї відносимо електро-маґнетну силу $\mathfrak{F}$. Послідна складає ся з двох частий, а іменно з зовнїшної сили $\mathfrak{F}_1$ електро-маґнетного поля і з внутрішної електро-маґнетної сили $\mathfrak{F}$, якою електрон сам на себе ділає. Так само треба розділити сили, які походять від самого електрону $\mathfrak{E}$ і $\mathfrak{H}$ та сили зовнїшні $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{E}_1$. В наслідок сего рівнанє (V) розділить ся на:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}].$$

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{E}_1 + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}_1].$$

Коли дальше динаміка електрону має бути збудована на чисто електро-маґнетних основах, тодї крім електро-маґнетних сил ніяких інших сил впроваджувати не треба. В случаю істнованя сих послідних, які мали-б ділати на електрон, динаміка електрону не була-б вже чисто електро-маґнетною.

---

1) l. c. стор. 238. 2) l. c. стор. 239. 3) l. c. стор. 412.

Ідучи дальше за думкою динаміки ціпких тїл жадаємо, щоби зовнїшні і внутрішні сили, які ділають на елемент обєму до електрону були собі рівні, але в противних напрямах; отже:

(VI) $$\iiint (\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1)\varrho\, dv = 0$$

а також цїлковитий момент тих сил:

(VIa) $$\iiint (\mathfrak{r}_1 \mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1)\varrho\, dv = 0.$$

Два послїдні рівнаня називають ся в динаміцї електрону „основними динамічними рівнанями“.

Дальше мусимо приписати електронови якісь скінчені розміри; годї уважати електрон за точку, бо колиб так було, тодї електромаґнетні сили в тій точцї були-б нескінчено великі, а напрям їх був би неозначений. Коли однак заложимо, що електрон посїдає справдї малі але скінчені розміри, тодї не міг би він виконувати оборотових рухів. З того слїдує, що в електро-маґнетній механїцї не істнує материяльна точка, як в аналїтичній механїцї. Електрон треба уважати за ціпке тїло, яке є спосібним так до руху поступового, як й до оборотового. Коли так, тодї до основних рівнань динаміки електрону треба долучити єще рівнанє з кінематики ціпких тїл:

(VII) $$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{r}],$$

до $\mathfrak{v}_0$ означає скорість осередка маси електрону, $\mathfrak{u}$ кутову скорість, а $\mathfrak{r}$ луч поведений з осередка маси. — Послїдне рівнанє (VII) зване кінематичним рівнанєм поясняє, що електричність годї відлучити елементови обєми електрону, она є з послїдним невіддїльною так, як важка матерія на елементах обєму ціпкого тїла. З рівнаня сего слїдує дальше, що електрон так само, як й ціпке тїло посїдає шість степений свободи руху.

Вернїм ще до перших чотирох рівнань (I—IV)[1]. Можна їх ще подати в інший спосіб, а іменно при помочи тзв. електро-маґнетних потенціялів. Рівнанє (IV) каже нам, що вектор $\mathfrak{H}$ не має жерел; сповняти отже буде єго така вартість на $\mathfrak{H}$:

1) $$\mathfrak{H} = curl\, \mathfrak{A}.$$

Ново впроваджений вектор $\mathfrak{A}$ є векторовим потенціялом, якого:

$$div\, \mathfrak{A} = 0.$$

Коли введемо в (II) рівнанє 1), тодї покаже ся, що:

$$curl\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

---

[1] M. Abraham: Prinzipien der Dynamik des Elektrons, Ann. d. Phys. 1903, стор. 103.

З сего знов слїдує дальше, що $(\mathfrak{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t})$ мусить бути відємним gradient-ом якогось скалярного (безнапрямного) потенціяму Φ, отже:

$$\mathfrak{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}=-\nabla\Phi$$

$$2)\qquad \mathfrak{E}=-\nabla\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}.$$

Коли однак маємо до дїла з постійним полем, тодї:

$$\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}=0,$$

а Φ редукує ся до електро-статичного потенціялу.

Впровадженєм вектору $\mathfrak{A}$ і скаляру Φ вдоволили ми рівнаням II) і IV) рівнанями 1) і 2). Ходить тепер о се, щоби $\mathfrak{A}$ і Φ так вибрати, щоби рівнаня I) і III) були також сповнені. Вставмо отже вартости на $\mathfrak{E}$ і $\mathfrak{H}$ з рівнань 1) і 2) в I) і III), то дістанемо:

$$curl^2\,\mathfrak{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2}+\nabla\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=4\pi\mathfrak{i}$$

$$\text{i:}\qquad -div\,\nabla\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\,\mathfrak{A}=4\pi\varrho.$$

Примінюючи ту правила векторової аналїзи мусимо сї рівнаня написати так:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\mathfrak{A}+\nabla(\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+div\,\mathfrak{A})=4\pi\mathfrak{i},$$

$$\text{i:}\qquad \nabla^2\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,div\,\mathfrak{A}=4\pi\varrho.$$

З огляду однак на дефініції Φ і $\mathfrak{A}$ маємо, що:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+div\,\mathfrak{A}=0,$$

в наслїдок чого отримаємо:

$$3)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\mathfrak{A}=4\pi\mathfrak{i}$$

$$4)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\nabla^2\Phi=4\pi\varrho.$$

В случаю, коли слїдувати-ме стан тривкий (stationärer Zustand), тодї Φ і $\mathfrak{A}$ не будуть залежати від себе; скаляр Φ перейде тодї в потенціял електро-статичного поля, а $\mathfrak{A}$ в векторовий потенціял маґнетного поля. Взагалї потенціяли подані рівнанями 3) і 4) називають ся „електро-маґнетними потенціялами", а іменно: Φ називає ся „скалярним електро-маґнетним потенціялом", $\mathfrak{A}$ знов „векторовим електро-маґнетним потенціялом".

Рівнаня руху елєктрону[1]).

Коли знаємо внїшне поле, положенє, проводну скорість і оборотову скорість елєктрону, тоді внїшна сила буде визначена рівнанєм:

$$5)\qquad \mathfrak{F}_1 = \iiint \varrho\, dv\, \mathfrak{F}_1 = \iiint \varrho\, (\mathfrak{E}_1 + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}_1])\, dv\,;$$

а весь момент внїшних сил буде:

$$6)\qquad \mathfrak{N}_1 = \iiint \varrho\, [\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}_1]\, dv = \iiint \varrho\, [\mathfrak{r}, \mathfrak{E}_1 + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}_1]\, dv.$$

Ходить нам дальше о точку відносну в елєктронї. Для круглого-елєктрону обираємо за таку точку єго осередок (осередок кулї), з якого ведемо провідний луч $\mathfrak{r}$. В кінематичнім рівнаню $\mathfrak{v}_0$ є скоростию якраз згаданого осередка, а $\mathfrak{u}$ оборотовою скоростию електрону около єго осередка.

Коли однак наряд не бувби симетрично розложений на елєктронї, тодї відносну точку треба би визначити рівнанєм:

$$(6a)\qquad \iiint \varrho\, \mathfrak{r}\, dv = 0\,;$$

она відповідала би осередкови мас в аналїтичній механїцї.

Приймім, що електрон відбуває лишень поступний рух, тодї $\mathfrak{u} = O$, а внїшна сила представить ся в сей спосіб:

$$(7)\qquad \mathfrak{P}_1^{(1)} = \iiint \varrho\, \mathfrak{E}_1 dv + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}_0 . \iiint \varrho\, \mathfrak{H}_1 dv].$$

Елєктричне і маґнетне поле в просторі величини ряду проміру елєктрону можна все вважати за однородне; в тім случаю поступна часть внїшної сили зредукуєсь до:

$$(7a)\qquad \mathfrak{P}_1^{(1)} = e\,\{\mathfrak{E}_1 + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}_0\, \mathfrak{H}_1]\},$$

де e означає нам наряд електрону.

Внїшний же момент оборотової сили для чистого поступного руху буде:

$$(7b)\qquad \mathfrak{N}_1^{(1)} = \iiint \varrho\, [\mathfrak{r}\, \mathfrak{E}_1]\, dv + \frac{1}{c} \iiint \varrho\, [\mathfrak{r}\,[\mathfrak{v}_0 \mathfrak{H}_1]] = O,$$

бо так $\mathfrak{E}_1$ як $[\mathfrak{v}_0\, \mathfrak{H}_1]$ можна вймити перед знак інтеґрованя, а дальше після 6а)

$$\iiint \varrho\, \mathfrak{r}\, dv = 0.$$

Приймім дальше, що електрон крім поступного руху відбуває ще обороти около свого осередка. Тодї долучить ся до внїшної сили ще складова оборотова в маґнетнім поли:

$$\mathfrak{P}_1^{(2)} = \frac{1}{c} \iiint \varrho\, [[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}],\ \mathfrak{H}_1] \,.\, dv.$$

---

[1] Abraham: Theorie d. Elekt. II. стор. 147. A. H. Bucherer: Math. Einf. in d. Elektronentheorie 1904, стор. 118. і дальші.

Рівнане се на основі правил векторового рахунку представить ся дальше так:

7c) $$\mathfrak{P}_1^{(2)} = \frac{1}{c} \iiint \varrho \{\mathfrak{r}(\mathfrak{u}\,\mathfrak{H}_1) - \mathfrak{u}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{H}_1)\}\, dv.$$

Бачимо отже, що й се вираженє також зникає; значить, що часть оборотової, внїшної сили в однороднім, маґнетнім поли зникає. Але оборотовий момент сеї складової внїшної оборотової сили:

$$\mathfrak{N}_1^{(2)} = \frac{1}{c} \iiint \varrho [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}] (\mathfrak{r}\,\mathfrak{H}_1)\, dv = \frac{1}{c} [\mathfrak{u} \iiint \varrho\, \mathfrak{r} (\mathfrak{r}\,\mathfrak{H}_1)\, dv]$$

є ріжним від зера. Момент сей є пропорціональний до векторового добутка з оборотової скорости $\mathfrak{u}$ і внїшної маґнетної сили $\mathfrak{H}_1$. Все те однак буде сповнене під умовою, що електрична маса є симетрично роздїлена з огляду на еї осередок. Отже:

$$\mathfrak{N}_1^{(2)} = \lambda [\mathfrak{u}\,\mathfrak{H}_1],$$

де λ є сочинником пропорціональности, який по обчисленю для обємного наряду електрору оказав ся:

$$\lambda_v = \frac{ea^2}{5c},$$

а для поверхневого наряду:

$$\lambda_\sigma = \frac{ea^2}{3c},$$

коли a означати-ме луч електрону.

Коли впровадимо вираженя на внїшну силу в динамічні рівнаня (VI), дістаємо їх в такій формі:

8) $$\mathfrak{P}_1 + \iiint \varrho\, \mathfrak{F}\, dv = 0$$

8a) $$\mathfrak{N}_1 + \iiint \varrho\, [\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}]\, dv = 0.$$

Ходить тепер о визначенє вектору $\mathfrak{F}$, сили, яка походить від самого електрону.

Щоби визначити внутрішні сили, требаби для кождої точки електрону визначити електро-маґнетне поле, а опісля електро-маґнетні сили, які дїлають на весь обєм, а дальше треба їх зложити подібно, як учать основи аналїтичної механїки цїпких тїл. Коли електрон в часї t зробив якусь дорогу, тодї внутрішна сила витворена ним самим в тім самім часї t буде залежати від скорости і від прискореня, якого він набрав в тім інтервалї часу. Ту вже якраз бачимо основну ріжницю між динамікою цїпких тїл а динамікою електрону. В першій визначають внїшні сили часові зміни проводної або оборотової скорости, при данім розкладї маси тїла. Динамічні однак рівнаня в електроновій динаміцї є рівнанями функцийними, які вяжуть з собою положенє електрону, скорість і прискоренє руху поступного і оборотового в якімсь інтервалї часу t. З огляду на се рівнаня динаміки електрону справляють більші трудности в розслїджуваню.

Можна однак улекшити собі цїлу річ в сей спосіб, коли заложимо, що електрони в катодових лучах і β-лучах відбувають рухи майже тривкі (quasi-stationäre Bewegung); в сей спосіб витворене електро-маґнетне поле буде майже таке саме, яке витворивби електрон, котрий порушавби ся рівномірно.

Припустїм, що електрон з нарядом e порушаєсь зі скоростию $\mathfrak{v}$ і що на него не дїлають ніякі внїшні сили, які би походили від якоїсь іншої матерії; лишень електро-маґнетні сили і таку-ж енерґію беремо під увагу. А що ми в динаміцї електрону всї сили і енерґію відносимо до етеру, то можемо все віддїлити дїлане не-електро-маґнетних сил якоюсь стїною, яку можемо умістити в безконечности. В сей спосіб можемо означити поле для одного електрону з поминанєм діланя інших електронів. Коли знати-мем поле, тодї означимо величину єго руху і енерґію.

Густоту електро-маґнетного поля, витвореного електроном означимо:

9) $$\mathfrak{g}=\frac{1}{c^2}\mathfrak{S},$$

де $\mathfrak{S}$ є вектором Poyting-а:

$$\mathfrak{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathfrak{F}\,\mathfrak{H}]$$

Величина ся подає нам виплив енерґії електро-маґнетного поля на одиницю поверхнї. Густота поля буде отже:

9a) $$\mathfrak{g}=\frac{1}{4\pi c}[\mathfrak{F}\,.\,\mathfrak{H}].$$

$\mathfrak{g}$ представляє ту нїчо іншого, як електро-маґнетну величину руху на одиницю поверхнї. Вся знов електро-маґнетна величина руху в просторі v буде сумою поодиноких $\mathfrak{g}$ на елемент простору dv; отже:

9b) $$\mathfrak{G}=\iiint\mathfrak{g}\,dv.$$

Величину $\mathfrak{G}$ називає M. Abraham імпульсом електро-маґнетного поля електрону. Коли електрон відбуває оборотовий рух, тодї мусить бути оборотовий електро-маґнетний імпульс, якого рівнанєм буде:

10) $$\mathfrak{D}=\iiint[\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}]\,dv.$$

Возьмім під увагу оден лишень електрон та поминїм внїшні електро-мачнетні сили, витворені іншими електронами $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{H}_1$, тодї будемо мати до дїла лишень з внутрішними силами електрону $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$. Цїла отже сила, яка дїлає на електрон буде:

11) $$\mathfrak{P}=\iiint\varrho\,.\,\mathfrak{F}\,.\,dv=\iint\mathfrak{R}\,ds-\frac{d\mathfrak{G}}{dt},$$

бо сила $\mathfrak{F}$ складає ся з сил неелектро-маґнетної природи $\mathfrak{N}$, які походять від інших тїл, а які ми відгородили поверхнею s, яким знов протидїлати-ме сила, що має своє жерело в часовій зміні імпульсу $\mathfrak{G}$. А що поверхню s для етеру обрали ми в безконечности так, що в часї, в якім треває явище, електро-маґнетне поле не дійде до неї, тому вектор $\mathfrak{N}$ зникає на поверхни s; в наслїдок сего стає ся зером перший член 11) і остає:

11a)
$$\mathfrak{P} = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt}.$$

Ціла отся сила, якою електро-маґнетне поле дїлає на електрон, рівнає ся відємній часовій зміні електро-маґнетної величини руху поля.

Аналоґічно момент сил буде означений моментом сил на поверхнї s поменшеним о часову зміну моменту імпульсового $\mathfrak{Y}$; тому:

$$\mathfrak{N} = \iint [\mathfrak{r}\,\mathfrak{N}]\,ds - \frac{d\mathfrak{Y}}{dt},$$

де $\mathfrak{r}$ є провідним лучем зачеркненим з осередка електрону до постійної точки в просторі. Треба однак зазначити, що оба моменти $\mathfrak{N}$ і $\mathfrak{Y}$ відносимо до осередка електрону, який порушає ся зі скоростию $\mathfrak{v}_0$. А що все відбуває ся в етері, тому стїну s можна все посунути аж до безконечности так, що для неї сили електро-маґнетного поля зникають, значить, що:

$$\iint [\mathfrak{r}\,\mathfrak{N}]\,ds = 0$$

і отримаємо $\mathfrak{N}$:

12)
$$\mathfrak{N} = -\frac{d\mathfrak{Y}}{dt}$$

З огляду однак на рівнанє 10) маємо:

$$\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} = \iiint [\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}]\,dv.$$

Коли знов $\mathfrak{r}$ є провідним лучем, поведеним з осередка електрону, тодї:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = -\mathfrak{v}_0;$$

отже:
$$\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} = \iiint \left[\mathfrak{r}, \frac{d\mathfrak{g}}{dt}\right] dv = [\mathfrak{G}\,\mathfrak{v}_0].$$

З аналоґії однак з оборотовим рухом цїпких тїл, не тяжко запримітити, що перший член правої сторони послїдного рівнаня представляє нам часову зміну електро-маґнетної величини руху на одиницю поверхнї при постійнім $\mathfrak{r}$; є се отже оборотивий момент $\mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{N} = \iiint \left[\mathfrak{r}, \frac{d\mathfrak{g}}{dt}\right].$$

В наслїдок послїдних двох рівнань отримаємо остаточно оборотовий момент електро-маґнетних сил електрону:

$$12a)\qquad \mathfrak{N} = \iiint [\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}]\,\varrho\,dv = [\mathfrak{v}_0 \mathfrak{G}] + \frac{d\mathfrak{Y}}{dt}.$$

Коли рівняня 11а) і 12а) вставимо в динамічні рівняня (VI) і узглядним рівняня 8) і 8а), тодї дістанемо динамічну звязь між внїшними і внутрішними силами електрону:

$$13)\qquad \mathfrak{P}_1 = \frac{d\,\mathfrak{G}}{dt}.$$

$$13a)\qquad \mathfrak{N}_1 = [\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{G}] + \frac{d\mathfrak{B}}{dt}.$$

Ся динамічна форма рівнань подана M. Abraham-ом відповідає зовсїм рівнаням руху цїпкого тїла; під зглядом формальним є они тотожні зі згаданими рівнанями. Заходить однак тут ріжниця, а іменно: в механїцї цїпких тїл уважаємо складові поступного і оборотового імпульсу за лїнїйні функциї поступної і оборотової скорости, коли знов не маємо сего при електро-маґнетній механїцї; тут залежність тих величин від скорости не дає нам лїнїйної функциї. Не лишень хвилевий рух в данім моментї часу впливає на імпульси електро-маґнетного поля, але всї рухи, які електрон зробив від часу спочинку. Оба імпульси визначають нам інтеґрали над цїлим простором, який займає електро-маґнетне поле; отримаємо єго однак через суперпозицию всїх піль, які електрон витворив від початку руху аж до даної хвилї. З тої саме причини заходять в рівнанях динаміки електрону великі комплїкациї; лишень для специяльних родів рухів, пр. для рівномірного поступного руху слїдують якісь функциї між скоростию а імпульсами.

З порядку річи треба тепер випровадити рівняня на енерґію поля, витвореного електроном. Енерґія ся W буде все скінченою величиною, коли від хвилї спочинку електрону дїлати будуть на него лишень скінчені внїшні сили.

Возьмім під увагу простір v ограничений стїною s, в якім електрон витворює електро-маґнетне поле. На кождий елємент обєму dv електрона дїлає внутрішна сила $\varrho\,\mathfrak{F}\,dv$; она витворює в одиници часу працю:

$$(\mathfrak{v}\,\mathfrak{F})\,\varrho\,dv = (\mathfrak{v}\,\varrho_1 \mathfrak{E})\,dv.$$

Складова знов сила, яка походить від маґнетної сили $\mathfrak{G}$, не виконує ніякої працї, бо она дїлає нормально до напряму розходженя електричности. Через зінтеґрованє сего рівняня отримаємо працю доконану електро-маґнетними силами в просторі v:

$$\iiint (\varrho\,\mathfrak{v}, \mathfrak{E})\,dv = \frac{dA}{dt}.$$

А що $\varrho\mathfrak{v}$ представляє сам густоту конвекційного тока, який ми означили $\mathfrak{f}$, тому:

$$\frac{dA}{dt} = c\iiint(\mathfrak{f}, \mathfrak{E})\,dv = \frac{c}{4\pi}\iiint\left(\mathfrak{E}, curl\,\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}\right)dv.$$

Возьмім тепер під увагу таке виражене:

$$\iint[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]\underset{\to n}{ds} = \iiint\mathfrak{H}\,curl\,\mathfrak{E}\,dv - \iiint\mathfrak{E}\,curl\,\mathfrak{H}\,dv,$$

де n означає, що беремо сей інтеґрал в нормальнім напрямі до поверхнї s. Коли знов порівнаємо з собою два послїдні рівнаня, так побачимо, що:

$$\frac{c}{4\pi}\iiint(\mathfrak{E}\,curl\,\mathfrak{H})\,dv = \frac{c}{4\pi}\iiint(\mathfrak{H}\,curl\,\mathfrak{E})\,dv - \frac{c}{4\pi}\iint[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]\underset{\to n}{ds}.$$

По обчисленю однак показує ся, що:

$$14)\qquad \frac{dA}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\}\frac{dv}{4\pi} - \iint\frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]\underset{\to n}{ds}.$$

Рівнане 14) є рівнанєм енерґії. Перша часть:

$$\iiint\frac{dv}{8\pi}\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\} = W$$

представляє нам енерґію електро-маґнетного поля; друга знов часть, се енерґія проміньованя, — се нїчо іншого як вектор Poyting-a:

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}] \text{ над поверхнею } s.$$

Напишемо отже рівнане енерґії в такій формі:

$$14a)\qquad \frac{dA}{dt} = -\frac{dW}{dt} - \iint\mathfrak{S}\,ds.$$

Але стїну s можемо собі уявити дуже далеко, як се ми висше вже учинили, так, що електро-маґнетне поле не доходить до неї, тожї ніяка енерґія не буде через ню випливати, значить, що:

$$\iint\mathfrak{S}\,ds = 0,$$

отже:

$$14b)\qquad \frac{dW}{dt} = -\frac{dA}{dt}.$$

Приріст енерґії поля в елементї часу dt рівназ ся умалимкови виконаної працї внутрішними електро-маґнетними силами $\mathfrak{F}$.

З кінематичного рівнаня (VII) слїдує, дальше, що:

$$\frac{dA}{dt} = \iiint(\mathfrak{v}\,\mathfrak{F})\,\varrho\,dv = (\mathfrak{v}_0, \iiint\varrho\,\mathfrak{F}\,dv) + (\mathfrak{u}, \iiint[\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}]\,\varrho\,dv).$$

Коли вставимо в се рівнане вислїди з 8) і 8a), отримаємо виражене на працю в такім видї:

$$14c)\qquad \frac{dA}{dt} = -(\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{P}_1) - (\mathfrak{u}\,\mathfrak{N}_1).$$

По узглядненю однак рівнань 14b) і 14c) дістанемо остаточне рівнанє енерґії:

$$15)\qquad \frac{dW}{dt}=(\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{P}_1)+(\mathfrak{u}\,\mathfrak{N}_1).$$

Приріст отже електро-маґнетної енерґії рівнає ся праці, виконаній внїшними силами. З рівнаня знов 14c) читаємо, що праця, виконана внїшними силами, має противний напрям до праці, виконаної внутрішними силами. Колиби ми приняли крім електро-маґнетних сил ще якісь инші сили, механїчні, тоді згадане рівнанє не булоби сповнене. Того рода сили після нашого вступного заложеня мусять бути вилучені.

По вставленю однак в рівнанє 15) вартостий за $\mathfrak{P}_1$ і $\mathfrak{N}_1$ з 13) і 13a), отримаємо рівнанє на енерґію, виражене електро-маґнетними імпульсами:

$$16)\qquad \frac{dW}{dt}=(\mathfrak{v}_0\,\frac{d\mathfrak{G}}{dt})+(\mathfrak{u}\,\frac{d\mathfrak{G}}{dt})+(\mathfrak{G}\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}_0]),$$

яке мати буде велике значінє в слїдуючих частях динаміки електрону.

Нїм однак прийдемо до частної динаміки електрону, зробім перед тим до сего приготованє через впровадженє нових величин. Най T представляє нам маґнетну енерґію, а U електричну; їх ріжниця:

$$17)\qquad T-U=L$$

означає нам „живу силу“ (lebendige Kraft). Величина ся має значінє функциї Lagrange'a на енерґію в механїці.

Означім дальше T і U при помочи електро-маґнетних потенціятів [1) і 2)], тоді отримаємо:

$$17a)\qquad T=\frac{1}{8\pi}\iiint\mathfrak{H}^2\,dv=\frac{1}{8\pi}\iiint(\mathfrak{H}\;curl\,\mathfrak{A})\,dv$$

$$17b)\qquad U=\frac{1}{8\pi}\iiint\mathfrak{E}^2\,dv=-\frac{1}{8\pi}\iiint(\mathfrak{E},\,\nabla\Phi+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t})\,dv.$$

Коли рівнанє 17a) зінтеґруємо per partes і знов заложимо, що інтеґрал над граничною стїною s раз на все зникає, а дальше впровадимо рівнанє (II), тоді дістанемо:

$$17c)\qquad T=\frac{1}{2}\iiint(\mathfrak{f}\,\mathfrak{A})\,dv+\iiint\frac{dv}{8\pi c}(\mathfrak{A},\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}).$$

При інтеґрованю per partes рівнаня 17b) зникнуть так само поверхневі інтеґрали. В рахунку отримаємо там між иншими оден складник: $div\,\Phi\,\mathfrak{E}$, який по приміненю векторового рахунку розложить ся:

$$div\,\Phi\,\mathfrak{E}=\Phi\,div\,\mathfrak{E}+\mathfrak{E}\,\nabla\Phi:$$

по приміненю однак твердження Gauss-а отримаємо:

$$\iiint \mathfrak{E} \bigtriangledown \Phi\, dv = -\iiint \Phi\, div\, \mathfrak{E}\, dv = 4\pi \iiint \Phi \varrho\, dv.$$

В кінци одержимо взір на U:

17d) $$U = \frac{1}{2} \iiint \Phi \varrho\, dv - \iiint \frac{dv}{8\pi c} (\mathfrak{E}, \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{A}}{dt}).$$

Впровадьмо дальше за M. Abraham-ом ще дві нові величини, а іменно:

$$\Psi = \Phi - \frac{1}{c} (\mathfrak{v} \mathfrak{A}),$$

та простірний інтеґрал сеї величини:

18a) $$V = \frac{1}{c} \iiint \Psi \varrho\, dv,$$

який Abraham називає функцією сил (Kräftefunktion). Єї можна ще написати так:

18b) $$V = \frac{1}{c} \iiint \Phi \varrho\, dv - \frac{1}{c} \iiint (\mathfrak{f} \mathfrak{A})\, dv,$$

де все $\mathfrak{f} = \varrho \mathfrak{v}$. З ріжниці 17c) і 17d) отримаємо вираженє на таку силу L:

18c) $$L = \frac{1}{8\pi c} \frac{d}{dt} \iiint (\mathfrak{E} \mathfrak{A})\, dv - V.$$

Рівномірно-поступний рух.

Приймім, що електрон порушає ся від якогось досить довгого часу поступно з постійною скоростию так що-до єї напряму, як до єї величини. Кінематичне рівнанє тут не буде вповні сповнене, бо: $\mathfrak{u} = 0$, остає лишень $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0$. Коли вісь x-ів оберемо за напрям руху, тоді складові скорости в напрямі оси y і z зникають: $\mathfrak{v}_y = \mathfrak{v}_z = 0$; остає лишень скорість в напрямі руху $\mathfrak{v}_x = \mathfrak{v}$. В попереднім уступі було вже згадане, що поле скалярного потенціялу Φ, так само й векторового потенціялу $\mathfrak{A}$ є суперпозицією піль, які електрон витворив в часі від спочинку до даної хвилї. Поле залежало отже від скоростий електрону, які він мав в кождій хвилї того інтервалу часу.

В рівномірно-поступнім руху рух в данім якімсь моменті є під кождим зглядом рівний рухови в попереднім та слїдуючім моменті. Тому поле потенціялів Φ і $\mathfrak{A}$ буде постійне в віднесеню до якогось укладу, який довершує разом також рух зі скоростию $\mathfrak{v}$.

Коли отже електро-маґнетні потенціяли є статочними в віднесеню до подвижного укладу, тоді анальоґічно до рівнань ґідромеханїки напишемо:

$$\frac{D\Phi}{Dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+(\mathfrak{v}\nabla)\,\Phi=0$$

$$\frac{D\mathfrak{A}}{Dt}=\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}+(\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{A}=0.$$

А що рух слїдує лишень в напрямі оси x, отже:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\mathfrak{v}_x\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}=-\mathfrak{v}_x\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial t}.$$

В наслїдок сего рівнаня 3) і 4) приберуть такий вид:

19) $$(1-\beta^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=-4\pi\varrho,$$

19a) $$(1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial z^2}=-4\pi\varrho\beta,$$

коли $\beta=\frac{\mathfrak{v}_x}{c}=\frac{|\mathfrak{v}|}{c}$. Густота конвекцийного тока в нормальних напрямах до напряму руху зникає, отже: $\mathfrak{i}_y=\mathfrak{i}_z=0$, остає тільки $\mathfrak{i}_x=\varrho\beta$, а відси слїдує, що:

19b) $$\mathfrak{A}_x=\beta\,\Phi;\quad \mathfrak{A}_y=\mathfrak{A}_z=0.$$

Коли в сей спосіб отримані вартости обох потенціялів вставимо в рівнаня 1) і 2), то обчислимо складові електричної сили, а іменно:

19d) $$\begin{cases}\mathfrak{E}_x=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\beta\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial x}=-(1-\beta^2)\frac{\partial\Phi}{\partial x}\\ \mathfrak{E}_y=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\\ \mathfrak{E}_z=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\end{cases}$$

дальше:

19e) $$\begin{cases}\mathfrak{H}_x=0\\ \mathfrak{H}_y=\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial z}=\beta\frac{\partial\Phi}{\partial z}=-\beta\,\mathfrak{E}_z\\ \mathfrak{H}_z=-\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial y}=-\beta\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\beta\mathfrak{E}_z.\end{cases}$$

При знаних $\mathfrak{E}$ і $\mathfrak{H}$ можна все обчислити складову електро-маґнетної сили $\mathfrak{F}$:

$$19\mathfrak{f})\quad \begin{cases} \mathfrak{F}_x = -(1-\beta^2)\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \mathfrak{F}_y = \mathfrak{E}_z - \beta\,\mathfrak{H}_z = -(-\beta^2)\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \mathfrak{F}_z = \mathfrak{E}_z + \beta\,\mathfrak{H}_z = -(-\beta^2)\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{cases}$$

З сих рівнань бачимо, що $\mathfrak{F}$ повстало з якогось скаляру $(1-\beta^2)\,\Phi$. Сей скаляр є нїчим іншим, як лишень Ψ, як о тім можемо легко переконати ся, коли в рівнане 18) вставимо вартости $\mathfrak{A}$ з рівнаня 19b); отже:

$$(1-\beta^2)\,\Phi = \Psi.$$

В наслїдок сего напишемо, що:

$$20)\qquad \mathfrak{F} = -\nabla\Psi.$$

Сей скалярний потенціял Ψ називає M. Abraham „конвенцийним потенціялом“. Сповняє він таке ріжничкове рівнанє:

$$20\text{a})\qquad \varkappa^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 4\pi\varrho\,\varkappa^2,$$

наколи $\varkappa = \sqrt{1-\beta^2}$. Чинник $\varkappa$ буде все величиною додатною і дїйсною, бо електрон порушає ся зі скоростию меншою від скорости сьвітла, отже $\beta < 1$.

Конвекцийний потенціял Ψ має таке саме значінє при руху поступнім електрону, як електро-статичний потенціял φ для електрону в спочинку. Як відємний ґрадієнт φ подає нам силу, яка дїлає на електрон в спочинку, так відємний ґрадієнт Ψ подає нам силу, яка дїлає на електрон в рівномірно-поступнім русї. Як умалимок енерґії електро-статичної:

$$21)\qquad U = \frac{1}{2}\iiint \varrho\, dv\, \varphi$$

подає нам працю, яку зискує ся при змінї конфіґурації електронів в спочинку, так умалимок функциї сил:

$$21\text{a})\qquad V = \frac{1}{2}\iiint \Psi\varrho\, dv$$

подає нам працю, яку можна отримати при змінї в конфіґурації в системі електронів, які порушають ся рівномірно-поступно.

Легко пізнати, що еквіпотенціяльні поверхнї для конвенцийного потенціялу будуть сплощеними оборотовими еліпсоідами, яких осередок впадає в осередок електрону, а оборотова вісь в напрям руху, а відношенє їх осий: $\varkappa : 1$. Такі еліпсоіди називають еліпсоідами Heaviside-a. Поверхнї рівного потенціялу нарядженого тїла в спочинку є все спів-осередними кулями навіть в дуже великім віддаленю від него. Так само поверхнї рівного, конвекцийного потенціялу прибирають навіть в великім віддаленю від електрону вид еліпсоід Heaviside-а. Сила $\mathfrak{F}$ має однак все нормальний напрям до тих поверхний.

Коли $\beta = 0$, тодї поле визначене вектором $\mathfrak{F}$ переходить в електро-статичне поле, визначене вектором $\mathfrak{E}$, а конвекцийний потенціял Φ переходить в електро-статичний φ; громада подібних елїпсоід Heaviside-а переходить в громаду спів-осередних куль.

Розходить ся нам тепер о визначене конвекцийного потенціяла Φ. Тому звернім ся до ріжничкового рівнаня 20а). Перейде оно в рівнане Poisson-а, коли через субституції впровадимо нові незалежні змінні такі:

22) $$x = \varkappa x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 .$$

Положім рівночасно:

22a) $$\varrho = \frac{\varrho_0}{\varkappa}.$$

Тодї рівнане конвекцийного потенціяла напишемо:

22b) $$\nabla_0{}^2 \Phi = -4\pi\varkappa\varrho_0.$$

Сорядні $x_0\, y_0\, z_0$ і електрична густота ϱ_0 належать до електро-статичної системи S_0, а сорядні $x y z$ і ϱ до рухомої системи S. Коли порівнаємо з собою S_0 і S, тодї показуєсь, що система S_0 повстає з S через видовжене рівнобіжне до напряму руху, в наслїдок чого вісь x видовжилась в відношеню $\varkappa^{-1}$; густота знов з огляду на 22а) повинна би зменшити ся в відношеню $\varkappa$ так, щоби відповідні елементи обєму S і S_0 мали такий самий наряд. Електро-статичний потенціял φ_0 системи S_0 сповняє рівнане Poissona:

22c) $$\ldots \nabla_0{}^2 \varphi_0 = -4\pi\varrho_0,$$

якого загальним розвязанем є:

22d) $$\varphi_0 = \iiint \frac{\varrho_0 dv_0}{r_0} = \int \frac{de_0}{r_0}.$$

Завважмо дальше, що наряди відповідних елементів обєму в S_0 і S є ті самі, то отримаємо по порівнаню 22с) і 22b), що:

23) $$\Phi = \varkappa \varphi_0 = \varkappa \iiint \frac{\varrho_0}{r_0} \varkappa v_0,$$

де:

$$r_0 = \sqrt{(x_0 - \xi_0)^2 + (y_0 - \eta_0)^2 + (z_0 - \zeta_0)^2} = \sqrt{\frac{1}{\varkappa}(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

є віддалене точок $(x_0\, y_0\, z_0)$ і $(\xi_0\, \eta_0\, \zeta_0)$ в системі S_0, які відповідають точкам $(x\, y\, z)$ і $(\xi\, \eta\, \zeta_0)$ в системі S. З сего бачимо, що через таку трансформацію визначене конвекцийного потенціяла зводить ся до визначеня статистичного потенціяла.

По порівнаню складових електро-статичної сили $\mathfrak{E}_0 = -\nabla_0\varphi_0$ в системі S_0 зі складовими електро-маґнетної сили $\mathfrak{F} = -\nabla\Psi$ в системі S, отримаємо такі реляції:

$$\text{23a)}\quad \begin{cases} \mathfrak{F}_x = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} = -\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} = \mathfrak{E}_{0,x} \\ \mathfrak{F}_y = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} = -\varkappa\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y_0} = \varkappa\mathfrak{E}_{0,y} \\ \mathfrak{F}_z = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial z} = -\varkappa\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial z_0} = \varkappa\mathfrak{E}_{0,z} \end{cases}$$

Складова електро-маґнетної сили при рівномірній трансляції в напрямі руху рівнає ся складовій електричної сили, коли знов дві інші складові нормальні до напряму руху є в відношеню $\varkappa = \sqrt{1-\beta^2}$ разів поменшені від електро-статичної сили.

Коли так маємо розвязаний електро-статичний проблєм для системи S_0 через розклад потенціялу, тодї легко можемо перейти до розвязаня системи S, яка відбуває рівномірний рух; она повстала з S_0 через контракцію рівнобіжну до напряму руху у відношеню $\varkappa$. Внутр системи S_0 електро-статичний потенціял є постійний, а електро-статичні сили $\mathfrak{E}_0$ там не істнують; анальоґічно в системі S конвекційний потенціял внутр єї є постійний, а електро-маґнетні сили $\mathfrak{F}$ зникають. Як в системі S_0 розклад рівноваги буде означений після W. Thomsona через minimum електро-статичної енерґії U_0, так само розклад електричности на провіднику системи S відзначає ся тим, що старає ся функцію сил:

$$\text{23b)}\quad V = \varkappa U_0 + \frac{1}{2}\iiint \Psi\varrho\, dv$$

звести до minimum.

Величина руху і вигляд електрону.

Возьмім під увагу електрон, який порушає ся поступним рухом з якоюсь скоростию по прямій лїнії. Виводи попередного уступу немов промовляють за тим, що рівномірно-поступний рух змінив внїшний вид електрону, а іменно з кулї на оборотову еліпсоіду. Чи дїйсно така деформація слїдувала, розкажемо низше. На разї приймаємо, що маємо до дїла з еліпсоідальним електроном, який порушає ся рівномірно по прямій лінії. По якімсь досить довгім часї від початку поступного руху вся енерґія і величина руху електро-маґнетного поля будуть постійні під услівєм, що скорість електрону є менша від скорости сьвітла. Енерґія і величина руху складати ся будуть з енерґії і величини руху електро-маґнетних филь, які вислав електрон перед рівномірним рухом і в часї вже самого рівномірно-поступного руху. Дальший рух електрону буде вже означений енерґією і величиною руху чистої трансляції.

Електромаґнетні імпульси $\mathfrak{G}$ і $\mathfrak{D}$ не будуть зміняти ся з часом при такім руху, в наслїдок чого після 13) і 13а) буде:

24) $$\mathfrak{P}_1 = 0$$

24a) $$\mathfrak{N}_1 = [\mathfrak{v}_0 \mathfrak{G}] = 0,$$

бо $\mathfrak{v} \parallel \mathfrak{G}$.

До піддержаня отже рівномірного руху еліпсоїдального електрону не треба ніякої внїшної оборотової, сили коли електро-маґнетний імпульс має згідний напрям з напрямом руху. Рівномірний поступний рух електрону може тілько тодї слїдувати без ніяких внїшних сил, коли імпульс буде годити ся з рухом що до напряму.

Чи се усліве руху буде сповнене, залежить се передовсїм від вигляду і розміщеня наряду, який порушає ся конвекцийно. З попередних однак заложень що до симетричности розміщеня наряду слїдує, що електро-маґнетний імпульс $\mathfrak{G}$ мати-ме напрям все згідний з напрямом руху, коли послїдний буде слїдувати рівнобіжно до напряму одної трех головних осий еліпсоїдального електрону. В случаю руху еліпсоїди в іншім напрямі треба внїшної сили оборотової, яка піддержала би рівномірний поступний рух без жадних оборотів. Рух отже еліпсоїдального електрону в якімсь скіснім напрямі до єго трех головних осий не сповняє першої засади Newton-a; він не може слїдувати дальше без дїланя внїшних сил.

Що до руху рівнобіжного до одної з трех головних осий еліпсоїдального електрону треба розріжнити в тім случаю рухи постійні і непостійні. За постійний поступний рух треба уважати сей, в якім при відклоненю головної оси з напряму руху повстає внутрішна сила, яка старає ся звернути головну вісь знов до напряму руху. Колиж однак по відклоненю головної оси повстають внутрішні сили того рода, що старають ся згадане відклонене ще побільшити, тодї такий рух треба уважати за нестійний.

Передтим сказали ми, що функція сил V подає нам працю при змінї конфіґурації нарядів в руху. А що в сїм случаю маємо до дїла зі статочним полем, тому після 18c):

23) $$V = -L.$$

В наслїдок сего поступні рухи постійні і непостійні будуть ріжнити ся між собою тим, що для перших функція сил прибирає minimum, а для других maximum при данїй скорости. Зовсїм анальоґічно як в механїцї ціпких тїл стан постійної і непостійної рівноваги вріжняє ся через minimum, зглядно maximum енерґії положеня. M. Abraham оказав дальше, що V для руху в напрямі найменшої оси елїпсоїдального електрону прибирає maximum своєї вартости, коли знов для руху в напрямі найбільшої оси minimum. Рух отсей в напрямі сеї послїдної треба уважати за постійний. Розходить ся тепер о се, який буде рух згідний з напрямом середної оси. Коли возьмемо під увагу сили, які відклонюють найменшу вісь, так супроти них рух згідний з напрямом середної оси треба ще уважати за постійний; але непостійним окаже ся рух супроти таких відклонень, які дїлають на найбільшу вісь. З огляду на се також поступний рух елїпсоїдального електрону в напрямі середної оси треба уважати за непостійний рух.

З тих причин M. Abraham є сеї думки, що електрони в катодних лучах і лучах раду, які мають рівномірно-поступні рухи, годї уважати за сплощені елїпсоїди, які порушають ся в рівнобіжнім напрямі до оборотової оси, бо за найменшою вішною причиною слїдувалоб вивернене електрону. Коли однак можна уважати електрони катодних лучів і лучів радіо-активних тїл за сплощені елїпсоїди, тодї треба би конечно приняти також, що они мають рух згідний що до напряму з найбільшою осию елїпсоїди, бо в противнім случаю рівномірно-поступний рух без дїланя внїшних сил був би неможливий; тілько круглий електрон заховає постійний рух без огляду на відклоненя; тодї не треба нїякої внїшної сили для піддержаня рівномірної трансляції. З сего слїдує, що рівномірно-поступний рух круглого електрону зі скоростию меншою від скорости сьвітла буде свобідним рухом без дїланя внїшних сил. Такий лише електрон сповняє першу основу нютонївскої механїки. Сї чисто теоретичні виводи M. Abraham-а найшли ствердженє у досьвідах Kaufmann-a[1]).

Крім сеї теориї що до вигляду електрону, який порушає ся зі скоростию меншою від скорости сьвітла, істнують ще дві інші теориї, а іменно теория Bucherer-a[2]) і H. A. Lorentz a[3]).

Після Bucherer-а деформація електрону слїдує в сей спосіб, що обєм єго остає захований. Деформація отже, якої дізнає електрон в часї свого руху, повстає в наслїдок дїланя електро-динамічних сил $\mathfrak{F}$ на повехню електрону. Сили ті старають ся звести дану систему до такого стану, в якім потенціяльна енерґія доходить до minimum своєї вартости. А до сеї вартости дійде згадана система тодї, коли поверхня і поверхня рівного потенціялу точки спадуть

---

[1]) W. Kaufmann: Über die Konstantion des Elektrons, Ann: d. Ph. 1906.

[2]) A. H. Bucherer Math: Einf. in d. Elektronentheorie, стор. 57. і дальші.

[3]) H. A. Lorentz: Versuch einer Theorie elektr. u. opt. Ersch. 1905, стор. 155. і дальші.

на себе. Бо коли в рівнанях потенціялу для елїпсоїди, яка відбуває рух, положимо $a = b = 0$, тодї побачимо, що поверхні рівного потенціялу точки є елїпсоїдальними поверхнями, яких оси позістають до себе у відношеню:

$$(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} : 1 : 1.$$

Коли куля з лучем a деформує ся в сего рода еліпсоїду, тодї при захованю обєму оси єї будуть означені в сей спосіб:

$$a(1-\beta^2)^{\frac{1}{3}},\ a(1-\beta^2)^{-\frac{1}{3}},\ a(1-\beta^2)^{-\frac{1}{3}},$$

що легко можна оказати рахунком.

В перших однак часах по оголошеню своєї теориї деформації електрону не удалось однак Bucherer-ови потвердити єї доказом. Аж в 1909 р.[1]) удалось єму зробити досьвідний доказ своєї теорії, але дуже субтельний.

Проти праці Bucherer-а виступив Bestelmeyer[2]) з Göttingen, який виказав похибки в досьвідах Bucherer-а. Похибки ті незначні вправдї, однак при їх увглядненю дійдемо до тих самих результатів, які Kaufmann одержав 1905. р., а якими він потвердив теоретичні виводи Abraham-а. Тому Bestelmeyer виказавши похибки в досьвідах Bucherera признає слушність Abraham-ови.

H. A. Lorentz для виясненя деяких цїкавих оптичних явищ, передовсїм неґативного результату інтерференції Michelson-Morley-а приймає, що електрон з початку круглий з лучем a деформує ся в елїпсоїду о осях:

$$a(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}},\ a,\ a.$$

Ся деформарцію, є отже сего рода, що оси нормальні до напряму руху остають незмінені, а вісь рівнобіжна до напряму руху зміняє ся у відношеню $(1-\beta)^{\frac{1}{2}}$. H. A. Lorentz приймає дальше, що електрон є стиснений, в наслїдок чого густота розділеної електричности зміняє ся при скорім руху. При скорости рівній скорости сьвітла, електрон здеформував би ся в кружок, а на єго кінцевих кругах густота булаб нескінчено велика.

Колиб однак електрон мав ся деформувати при поступнім руху з наслїдок дїланя електро-динамічної сили $\mathfrak{F}$, тодї для електрону в станї спочинку мусїли би ми приняти внутрішну силу, яка протидїлала-б силї, котра походить від великого електричного наряду, щоби в сей спосіб електрон знов остав ся кулею. Сила така

---

[1]) A. H. Bucherer: Ann: d. Physik, 1909, стор. 513.

[2]) Bestelmeyer: Ann: d. Phys., 1909, стор 166. 30. F.

не булаби вже силою електричної натури, але якоюсь елястичною силою. В такім случаю динаміка електрону не булаби вже чисто електро-маґнетною; електрон в рівномірно-поступнім руху не сповнив би тоді першої основи механїки Newton-а.

Рівнаня 19) і 20а) оперті на чисто електро-маґнетних основах все таки промавляють немов за деформацією електрону; з другої однак сторони, коли хочемо мати динаміку електрону оперту на чисто електро-маґнетних основах, мусимо відкинути, як висше ми показали, его деформацію в рівномірно-поступнім руху. Щоби однак уникнути трудности на яку ми вже висше вказали, розвяжемо сей проблем при помочи лїнїй електро-маґнетних сил.

Електрон, як ми на самім початку зазначили, не має іншої маси, як лишень електро-маґнетну; можна отже уважати его за осередок-жерело електро-маґнетних сил в етері немов дїру в етері, який однак заховує ся против всяких внїшних сил так, як цїпке тїло обдарене масою. Коли електрон є в спочинку, тодї лїнїї електро-маґнетних сил є рівномірно на всї сторони роздїлені. Поведїм около згаданого осередка кулю о дуже малім лучу і назначім на нїй околицї рівникові і бігунові; а що лїнїї сил роздїлені рівномірно, то однакова їх скількість припаде так на околицї бігунові, як й на рівникові. Приймім, що такий округлий електрон порушає ся рівнобіжно до своєї оси (лїнїї, яка лучить оба бігуни). Що стане ся тодї з лїніями сил? Они не будуть вже дальше рівномірно роздїлені; зачнуть они рїднути в бігунових околицях (рів. 19, 19а) а згущувати ся в рівникових околицях т. є. нормальних до напряму руху. Згущенє лїнїй сил буде не зовсїм значне, коли скорість електрону буде невеличка в порівнаню до скорости сьвітла. Коли однак скорість електрону зближати-ме ся до границї скорости сьвітла, тодї умалимок лїнїй електро-маґнетних сил в бігунових околицях буде дуже великий, але й також велике буде згущенє їх на рівнику, а іменно у відношеню:

$$1 : (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

В случаю, коли скорість електрону дорівнала би скорости сьвітла, отже $\mathfrak{v} = c$, бігунові части електрону булиб зовсїм пусті, а всї лїнїї сил зібрали би ся в рівникових частях, значить нормальних до напряму руху. (Рівнаня 19, 19а, 20а).

Електро-маґнетна енерґія поступного руху.

В попередних уступах показали ми, що між функцією сил V а функцією Lagrange-a L і електро-статичною енерґією електрону заходять такі реляції:

$$V = \varkappa U_0 = -L. \tag{25a}$$

З функції Lagrange-a дасть ся випровадити енерґія, а також величина руху для круглого електрону.

Функція Lagrange-a представляє ся після рівнаня 17) як ріжниця маґнетної енерґії T і електричної U:

$$L = T - U.$$

А що після 19е): $T = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{H}^2\, dv = \frac{\beta^2}{8\pi}\iiint \{\mathfrak{E}_y{}^2 + \mathfrak{E}_z{}^2\}\, dv$, тому:

$$L = -\frac{1}{8\pi}\iiint \{\mathfrak{E}_x{}^2 + \varkappa(\mathfrak{E}_y{}^2 + \mathfrak{E}_z{}^2)\}\, dv. \tag{26}$$

Зріжничкуймо послїдне вираженє з огляду на β, то дістанемо:

$$\frac{dL}{d\beta} = \frac{\beta}{4\pi}\iiint(\mathfrak{E}_y{}^2 + \mathfrak{E}^2)\, dv - \iiint \{\mathfrak{E}_x \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{E}_x}{\mathfrak{d}\beta} + \varkappa^2 (\mathfrak{E}_y \frac{d\mathfrak{E}_y}{\partial\beta} + \\ + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial\beta})\} \frac{dv}{4\pi}. \tag{26a}$$

Займім ся передовсїм другою частиною правої сторони. Виступають там частинні похідні сили $\mathfrak{E}$ з огляду на β; мають они означати, що ріжничкованє відносить ся до якоїсь означеної точки рухомого укладу. При узгляднbackenю 19f) можна згадану часть написати так:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint \{\mathfrak{F}_z \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial\beta} + \mathfrak{F}_y \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial\beta} + \mathfrak{F}_z \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial\beta}\}\, dv.$$

З огляду однак на рівнанє 20) та на те, що Ψ і $\mathfrak{E}$ маліють з віддаленєм від електрону, а іменно перше в (—1)-ій, а друге в (—2)-ій степени і з сеї причини інтеґрали тих величин над граничною поверхнею s в безконечности можна поминути (як се висше ми учинили) маємо, що:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint \Psi \frac{\partial}{\partial\beta} div\, \mathfrak{E}\, dv = \iiint \Psi \frac{\partial\varrho}{\partial\beta}\, dv.$$

А що ϱ т. є. розклад наряду не зміняє ся зі зміною скорости $\mathfrak{v}$, тому:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\beta} = 0,$$

отже:

$$\iiint \Psi \frac{\partial\varrho}{\partial\beta}\, dv = 0.$$

Відси бачимо, що друга частина правої сторони рівнаня 26а) рівнає ся зерови. Першу часть знов можемо при помочи рівнаня 19b) переміннти і тоді дістанемо таку реляцію:

$$26b)\qquad \frac{1}{c}\frac{dL}{\partial\beta}=\frac{1}{4\pi c}\iiint\{\mathfrak{E}_y\,\mathfrak{H}_z-\mathfrak{E}_z\,\mathfrak{H}_y\}\,dv=\iiint\mathfrak{g}_x\,dv=\mathfrak{G}_x.$$

Похідна функциї Lagrange-а з огляду на безглядну вартість скорости $|\mathfrak{v}|=c\beta$ подає нам складову елєктро-маґнетного імпульсу в напрямі руху. Для круглого елєктрону, якого елєктро-маґнетний імпульс є все згідний з напрямом руху, маємо:

$$27)\qquad |\mathfrak{G}|=G=\frac{\partial L}{\partial\,|\mathfrak{v}|}.$$

Коли би ми знов приняли, що вигляд елєктрону зміняє ся зі скоростию, а в наслїдок сего розклад наряду в рухомій системі змінив би ся, отже ϱ булоби функцією β, тодї друга часть правої сторони рівнаня 26а) не зникала би. Рівнанє 27) є дуже важне в динаміцї елєктрону; оно подає нам залежність елєктро-маґнетного імпульсу від енерґії.

Вся енерґія системи W по впровадженю функції Lagrange-а представляє ся так:

$$W=2T-L,$$

де T означає маґнетну енерґію. Розходить ся тепер о визначенє T яко функції $\mathfrak{G}$. Поступимо тут в сей спосіб:

Знаємо, що при узгляненю в поступнім руху $\mathfrak{G}_x=0$:

$$T=\frac{1}{8\pi}\iiint\{\mathfrak{H}_y{}^2+\mathfrak{H}_z{}^2\}\,dv=\frac{c\beta}{2}\iiint\mathfrak{g}_x\,dv$$

або по обостороннім зінтеґрованю отримаємо:

$$28)\qquad 2T=|\mathfrak{v}|\,\mathfrak{G}_x=(\mathfrak{v}\,\mathfrak{G}).$$

Подвійна маґнетна енерґія елєктрону в рівномірно-поступнім руху рівнає ся скалярному добуткови зі скорости і елєктро-маґнетного імпульсу. Вставляючи 28) в вираженє на енерґію W, дістаємо:

$$28a)\qquad W=|\mathfrak{v}|\,\mathfrak{G}-L,$$

або по впровадженю 27):

$$29)\qquad W=\mathfrak{v}\frac{dL}{d\,|\mathfrak{v}|}-L.$$

Рівнаня 27) і 29) подають звязь, яка позваляє визначити елєктро-маґнетну енерґію і імпульс при помочи функції Lagrange-а.

Розходить ся тепер о вираженє функциї Lagrange-а. Через трансформацію 23) відтворюєсь куля з лучем a в руху на еліпсоїду в спочинку, якої половини осий є:

$$30)\qquad a_0=\frac{a}{\varkappa},\quad b_0=c_0=a.$$

Є се видовжена еліпсоїда, якої оборотова вісь є рівнобіжна до напряму руху. Через таку трансформацію 23) зредукували ми обчисленє конвекцийного потенціялу Ψ до елєктро-статичного потенціяла φ, а іменно

$$\Psi = \varkappa \varphi_0.$$

Як поверхня оборотової еліпсоїди є поверхнею рівного потенціяла φ_0, так само поверхня елєктрону в поступнім русї є поверхнею постійного конвекцийного потенціялу Ψ. Елєктро-статичний потенціял оборотової еліпсоїди як учить елєктро-статика [Föppl-Abraham: Theorie der Elektricität B. I. §. 36.] виражає ся:

$$30a) \qquad \varphi_0 = \frac{e}{\sqrt{{a_0}^2 - {b_0}^2}} log\left(\frac{a_0 + \sqrt{{a_0}^2 - {b_0}^2}}{b_0}\right)$$

або по введеню трансформаційної форми 30) і по справленю маємо:

$$30b) \qquad \varphi_0 = \frac{e}{2a\beta} \varkappa \, log\left(\frac{1+\beta}{\varkappa}\right),$$

де *log* є натуральним льоґаритмом.

Тепер можна вже обчислити конвекцийний потенціял при помочи висше поданої форми $\varkappa \varphi_0 = \Psi$: отже:

$$30c) \qquad \Psi = \frac{e}{2a\beta} \varkappa^2 log\left(\frac{1+\beta}{\varkappa}\right) = \frac{e}{2a} \frac{1-\beta^2}{2\beta} log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

Знаючи Ψ можемо найти дальше при помочи рів. 23b) і 25) функцію Lagrange-a або функцію сил для елєктрену, а іменно:

$$31) \qquad L = -\frac{1}{2} e \Psi = \frac{e^2}{2a} \frac{1-\beta^2}{2\beta} log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = -V.$$

Рівнанє се однак є важне тілько для наряду розділеного на поверхнї елєктрону. З него знов можна випровадити анальоґічне рівнанє для наряду розділеного в просторі елєктрону на основі слїдуючого твердженя з теорії потенціялу: Елєктро-статична енерґія двох еліпсоїд тої самої форми, з яких одна має простірний наряд, а друга поверхний, позістають до себе у відношеню як 6 : 5. Відси слїдує, що функція L для простірного наряду елєктрону прибере форму:

$$31a) \qquad L = -\frac{3}{5} \frac{e^2}{a^2} \left(\frac{1-\beta^2}{2\beta}\right) log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

З 31) обчисляємо елєктро-маґнетний імпульс:

$$31b) \qquad \mathfrak{G} = \frac{dL}{d\,|\,\mathfrak{v}\,|} = \frac{e}{2ac\beta}\left\{\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right) log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\},$$

а дальше отримаємо всю елєктро-маґнетну енерґію елєктрону:

$$31c)\qquad W=|\mathfrak{v}|\frac{dL}{d|\mathfrak{v}|}-L=\frac{e^2}{2a}\left\{\frac{1}{\beta}\,log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-1\right\}.$$

Через додане, а опісля віднятє 31) і 31c) отримаємо виражене на часть електричної, а опісля маґнетної енерґії:

$$31d)\qquad T=\frac{e^2}{4a}\left\{\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right)log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}-1\right\},$$

$$31e)\qquad U=\frac{e^2}{4a}\left\{\left(\frac{3-\beta^2}{2\beta}\right)log\left(\frac{1-\beta}{1-\beta}\right)-1\right\}.$$

Коли розвинемо два послїдні рівнаня на ряди, слїдуючі після β^2, а опісля поминемо величини ряду β^4, дістанемо:

$$31f)\qquad U=U_0=\frac{e^2}{2a}$$

$$31g)\qquad T=T_0=\frac{e^2}{3a}\beta^2.$$

З послїдних двох рівнань бачимо, що при малій скорости катодових лучів їх енерґія електрична не залежить від скорости, маґнетна знов енерґія є пропорціональна до другої степени скорости; отже першу можна порівнати з потенціяльною, другу знов з кінетичною енерґією в механїцї.

До таких самих взорів на енерґію і електро-маґнетний імпульс дійдемо, коли приймемо теорію лїній електро-маґнетних сил для електрону.

Відплив цїлої енерґії при руху електрону на одиницю поверхнї подає нам вектор Poyting-a:

$$\mathfrak{S}=\frac{1}{4\pi c}[\mathfrak{E}\,.\,\mathfrak{H}].$$

який входить в виражене на імпульс. Відплив сей буде складати ся з двох частий, а іменно з енерґії електро-маґнетного поля, витвореного електроном і з енерґії, яка зуживаєсь на пересунене лїній електромаґнетних сил електрону при поступнім руху, отже:

$$\mathfrak{S}=|\mathfrak{v}|\,.\,w+\mathfrak{s},$$

де w означає густоту енерґії на одиницю поверхнї.

Розходить ся тепер о обчислене $\mathfrak{s}$. Возьмім під увагу якусь точку електрону, який порушає ся рівномірно поступно. Напрям електро-маґнетної сили в тій точцї може мати напрям згідний з напрямом руху електрону або напрям противний до напряму руху. В точках електрону, де електро-маґнетна сила має напрям згідний з напрямом руху, сила ся виконує працю, в наслїдок чого слїдує зужите енерґії. В точках знов, в яких напрям електро-маґнетної сили є противний до напряму руху, заощаджує ся на енерґії, бо там слїдує праця против електро-маґнетної сили. Рівновага знов наступить тодї, коли енерґія спливати-ме постійно від перших до других частий електрону. отже:

$$div\, \mathfrak{s} = -(\varrho \mathfrak{F} \mid \mathfrak{v} \mid),$$

де $\mathfrak{F}$ означає електро-маґнетну силу, ϱ простірну густоту, а $\mid \mathfrak{v} \mid$ скорість в напрямі руху. Для одиниції обему отримаємо отже:

$$div\, \mathfrak{s} + (\varrho \mathfrak{F} \mid \mathfrak{v} \mid) = 0.$$

або для цїлого обему v:

$$\iiint div\, \mathfrak{s}\, dv = - \mid \mathfrak{v} \mid \varrho \iiint \mathfrak{F}\, dv.$$

З векторової знов аналїзи знаємо, що:

$$- \iiint \mathfrak{r}\, div\, \mathfrak{s}\, dv = \iiint \mathfrak{s}\, dv,$$

де $\mathfrak{r}$ є провідним лучем, поведеним з якоїсь точки до елементу dv. З огляду на се:

$$\mid \mathfrak{v} \mid \iiint \mathfrak{F}\, dv = \iiint \mathfrak{s}\, dv.$$

Коли згадану точку оберемо за початок укладу сорядних, тодї складові $\mathfrak{r}$ і dv будуть собі рівні, отже: x, y, z. Тому отримаємо:

$$x \varrho \iiint \mathfrak{F}\, dv = \iiint \mathfrak{s}_x\, dv$$

$$y \varrho \iiint \mathfrak{F}\, dv = \iiint \mathfrak{s}_y\, dv$$

$$z \varrho \iiint \mathfrak{F}\, dv = \iiint \mathfrak{s}_z\, dv.$$

Послїдні рівнаня послужать нам до обчисленя електро-маґнетного імпульсу $\mathfrak{G}$, а іменно:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c^2} \iiint \mathfrak{S}\, dv = \frac{1}{c^2} \iiint \mid \mathfrak{v} \mid w\, dv + \frac{1}{c^2} \iiint \mathfrak{s}\, dv$$

або:

$$\mathfrak{G} = \frac{\mid \mathfrak{v} \mid}{c^2} W + \frac{1}{c^2} \iiint \mathfrak{s}\, dv,$$

коли означимо електро-маґнетну енерґію над цїлим обемом через W. По підставленю за $\mathfrak{s}$ маємо:

$$\mathfrak{G} = \frac{\mid \mathfrak{v} \mid}{c^2} W + \frac{x\varrho}{c^2} \iiint \mathfrak{F}\, dv.$$

Друга часть правої сторони означає працю, в наслїдок якої кожда точка електрону в напрямі оси x пересуваєсь нормально до неї о якийсь відступ. Є то отже праця потрібна до пересуненя лїнїй сил з бігунових частий в рівникові части електрону. Приймім однак, що кожда з лїнїй електро-маґнетних сил пересуне ся о якесь δs, тодї праця для пересуненя буде $\varrho(\mathfrak{F}\, \delta s)\, dv$. Цїла енерґія при поступнім руху електрону W розпаде ся на енерґію, потрібну для піддерженя руху, і на працю, потрібну для пересуненя лїнїй електо-маґнетних сил; отже:

$$W = |\mathfrak{v}|\,\mathfrak{G} - \varrho\iiint(\mathfrak{F}\,\delta s)\,dv.$$

(Знак мінус тому, бо праця відбуває ся коштом енерґії W).

Коли порівнаємо послїдну реляцію з 28а), то бачимо, що праця потрібна для пересуненя лїнїй сил є нічим іншим, як функцією Lagrange-а, яка подає нам „живу силу“:

$$\varrho\iiint(\mathfrak{F}\,\delta s)\,dv = L.$$

В сей спосіб дістали ми рівнанє, яке ми мали перед тим, іменно:

$$W = |\mathfrak{v}|\,\mathfrak{G} - L.$$

Приймім, що початковий розклад лїній сил був в укладї $x_0\, y_0\, z_0$. Однородне однак пересуненє їх в наслїдок сили $-(\varrho\mathfrak{F})\,dv$ змінило уклад на інший о сорядних:

$$x = x_0\,(1-\varepsilon), \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

де ε означає істий дріб. Рух слїдує лише в напрямі оси x, тому пересуненє:

$$\delta s = x_0\,\delta\varepsilon = \frac{x}{1+\varepsilon}\,\delta\varepsilon.$$

Вся праця потрібна на однороднє пересуненє лїнїй сил з бігунових частий в рівникові буде рівнати ся:

$$\varrho\iiint(\mathfrak{F}\,\delta s)\,dv = \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon}\iiint\mathfrak{F}\,x\,dv$$

або:

$$\varrho\iiint\mathfrak{F}\,x\,dv = (1+\varepsilon)\frac{\partial L}{\partial\varepsilon},$$

де $|\mathfrak{v}|$ при ріжничкованю уважаємо за постійне.

Коли отриману вартість вставимо в рівнанє для $\mathfrak{G}$, одержимо:

$$\mathfrak{G} = \frac{|\mathfrak{v}|}{c^2}W + \frac{|\mathfrak{v}|}{c}(1+\varepsilon)\frac{\partial L}{\partial\varepsilon}. \tag{α}$$

Величини $\mathfrak{G}$ і W можна виразити функцією Lagrange а L. Зі значіня самої функції L слїдує, що:

$$\mathfrak{G} = \frac{\partial L}{\partial|\mathfrak{v}|} \quad \text{(порівнай 27)};$$

отже:

$$W = |\mathfrak{v}|\frac{\partial L}{\partial|\mathfrak{v}|} - L.$$

Коли послїдні дві вартости вставимо до (α), дістанемо:

$$\frac{\partial L}{\partial|\mathfrak{v}|} = \frac{|\mathfrak{v}|^2}{c^2}\frac{\partial L}{\partial|\mathfrak{v}|} - \frac{|\mathfrak{v}|}{c^2}L - \frac{\mathfrak{v}}{c}(1-\varepsilon)\frac{\partial L}{\partial\varepsilon}$$

або :

$$(\beta^2-1)\frac{\partial L}{\partial\,|\mathfrak{v}|}+\beta(1-\varepsilon)\frac{\partial L}{\partial\varepsilon}-\beta L=1,$$

з заміткою, що $\beta=\frac{|\mathfrak{v}|}{c}$, $|\mathfrak{v}|=\beta c$.

Коли послїдне рівнанє подїлимо через $1+\beta^2$, отримаємо :

$$\varkappa\left(\frac{\partial L}{\partial\varkappa}\right)+(1+\varepsilon)\frac{\partial L}{\partial\varepsilon}=L,$$

де : $\varkappa=\sqrt{1-\beta^2}$.

Рівнанє се справдить лише функція :

$$L=-f\left(\frac{1+\varepsilon}{\varkappa}\right).$$

Для $\beta=0$, $\varkappa=1$, маємо :

$$L=-W_0(1+\varepsilon).$$

Є се енерґія електрону задержаного в поступнім руху, якого лїнії сил вже пересунулись однородно.

Функцію L для електрону перед поступним рухом, в якім лїнії сил були розділені рівномірно в просторі, отримаємо, коли положимо $\varepsilon=0$; тодї дістанемо :

$$L=-W_0.$$

Енерґія та змінить ся в наслїдок пересунени лїнїй сил в такім самім відношеню, в якім лїнії сил пересунулись з бігунових частин в рівникові, а іменно :

$$1:\varkappa.$$

Вираженє на енерґію одержимо з енерґії для елїпсоїди оборотової в спочинку, якої оси були:

$$(\beta)\qquad a=\frac{a_0}{\varkappa},\ b=c=0.$$

до лїнії сил пересунули ми у відношеню $1:\varkappa$.

Отже :

$$L=-\varkappa U,$$

де U означає електро-статичну енерґію.

Коли знаємо потенціял для висше поданої елїпсоїди, найдемо U. Потенціял :

$$\varphi=\frac{e}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$

(Föppl-Abraham : Theorie der Elektrizität l. c.), або по введеню (β)

$$\varphi=\frac{e}{2a\beta}\varkappa\log\left(\frac{1+\beta}{\varkappa}\right).$$

А що:

$$U = \tfrac{1}{2} \varphi e,$$

тому:

$$L = - \tfrac{1}{2} \varkappa \varphi e$$

або:

$$L = \frac{e^2}{2a} \frac{1-\beta^2}{2\beta} log \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right).$$

В сей спосіб зовсім іншою дорогою дійшли ми до тих самих взорів, що проф. Abraham. Коли знаємо L, то легко найдемо імпульс $\mathfrak{G}$ і енерґію W.

Поступний майже статочний рух електрону.

В трох послїдних уступах пізнали ми електро-маґнетне поле, енерґію і імпульс, які відповідають рівномірно-поступному рухови. Взори подані там для згаданих величин залежать тільки від скорости. Строго однак взявши, будуть они лишень тодї важні, коли скорість від безконечно довгого часу була рівномірна. Бо кожде прискорене, якого раз дізнав електрон, дїлає в сей спосіб, що місце, в якім електрон находив ся в даній хвилї, стає ся жерелом електро-маґнетних круглих фаль, які зі скоростию сьвітла розходять ся в просторі. Натуга електро-маґнетного поля тих филь, як й їх енерґія та величина руху залежать від прискореня, удїленого якраз тодї електронови. Яке-небудь лишень прискорене і колинебудь оно дїлати-ме на електрон в одностійнім руху, тодї енерґія і імпульс не будуть вже залежати виключно від єго скорости, а тим самим наші взори в попередних уступах не будуть строго важні. Ся якраз обставина утрудняє строге трактоване нерівномірних рухів електрону. В сім случаю послугуємо ся певною методою приближеня, яка оказалась вже правдивою в електро-динаміцї при токах в провідниках.

Коли електричний ток в провіднику є статочний, значить, що єго натуга від якогось довшого часу є постійна, тодї послїдна визначує маґнетне поле; коли-ж знов ток зміняє свою натугу, тодї маґнетне поле вже не відповідає натурі тока в даній хвилї, а залежати оно буде від єї часової зміни. При скорих дроганях, як дроганях Hertz-а, треба брати послїдну залежність під увагу; обявляє ся она передусїм через филї, які шле осцилятор Hertz-а. В теорії змінних токів майже не бере ся під увагу сего случаю. Маґнетне поле, витворене змінною натугою і розкладом тока, обчисляє ся там звичайно так, як би ток був статочний; з енерґії в сей спосіб обчисленого поля випроваджаєсь самоіндукцію, яка протидїлає часовій зміні натуги тока. Така теорія „майже статочного тока“ не завела для повільних дрогань; електро-маґнетне проміньоване слїдує тілько при дуже скорих і наглих дроганях тока.

Статочному токови в провіднику відповідає конвекцийний ток, який представляє нам рівномірний рух електронів; токови однак майже статочному відповідає майже статочний рух електронів. За майже статочний рух електронів будемо уважати такий рух, якого скорість так поволи зміняє ся, що імпульс кождоразової скорости можемо обчисляти як імпульс при статочнім руху.

Маса електрону.

Власна індукція в теорії тока в провіднику відповідає в динаміці електрону єго електро-маґнетній масі. На вступі вже зазначили ми, що доведено досьвідом до того, що електрон має безвладну масу, яка при малій скорости, як пр. при повільних катодних лучах показалась майже постійною, коли знов при скорих лучах β радіоактивних тїл, яко функція скорости.

В майже статочнім руху без дїланя оборотових сил електро-маґнетний імпульс має все згідний напрям з напрямом руху; тодї також:

$$[\mathfrak{v}\,\mathfrak{G}]=0,$$

а дальше оборотовий імпульс стає ся зером. Як імпульс зміняє ся з часом, то зміна ся рівнаєсь внїшній електро-маґнетній силї:

32) $$\frac{d\mathfrak{G}}{dt}=\mathfrak{P}_1.$$

Розложім ту силу на дві складові, а іменно $\mathfrak{F}_{1,s}$ рівнобіжну до напряму руху і $\mathfrak{F}_{1,r}$ нормальну до него. Перша з тих спричиняє приріст складової імпульсу, стичної до дороги, друга знов дає початок зміні напряму імпульсу. А що $\mathfrak{G}$ і $\mathfrak{v}$ показують все напрям руху, то складові часових змін тих векторів, які мають напрям стичної до дороги, рівнають ся часовим змінам їх безглядних вартостий. Тому:

32a) $$\mathfrak{P}_{1\,s}=\frac{d\mathfrak{G}}{dt}=\frac{d\mathfrak{G}}{d\,|\,\mathfrak{v}\,|}\cdot\frac{d\,|\,\mathfrak{v}\,|}{dt}.$$

Означім $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=\dot{\mathfrak{v}}$, отримаємо дальше:

32b) $$\frac{\mathfrak{P}_{1,s}}{\dot{\mathfrak{v}}}=\frac{d\mathfrak{G}}{d\,|\,\mathfrak{v}\,|}.$$

Складову нормальну до напряму руху найдемо в сей спосіб. Електро-маґнетний імпульс, який показує вже напрям руху, відклонює ся в просторі в наслїдок дїланя $\mathfrak{P}_{1,\mathfrak{r}}$ з якоюсь кутивою скоростию $\dot{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{r}} = \frac{|\mathfrak{v}|}{r}$, де r означає луч скривленя поверхнї. Шукана складова $\mathfrak{P}_{1,\mathfrak{r}}$ в сїм случаю виносити-ме:

$$\mathfrak{P}_{1,\mathfrak{r}} = G \, . \, \frac{|\mathfrak{v}|}{r} .$$

По подїленю сего рівнаня по обох сторонах через $\frac{|\mathfrak{v}|}{r} = \dot{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{r}}$, отримаємо:

32c) $$\frac{\mathfrak{P}_{1,\mathfrak{r}}}{\dot{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{r}}} = \frac{G}{|\mathfrak{v}|} .$$

З рівнань 32b), 32c) читаємо, що відношенє сили в стичнім напрямі до прискореня в тім напрямі, а також відношенє сили в нормальнім напрямі до свого прискореня є функціями скорости для майже статочного руху електрону. В сей спосіб маємо представлену другу основу механїки Newton-а в динаміцї електрону. Відношенє означене через 32b) дає нам вартість тзв: подовжної електро-маґнетної маси електрону (longitudinale elektromagnetische Masse):

33) $$m_{\mathfrak{s}} = \frac{dG}{d\,|\mathfrak{v}|} ,$$

коли знов відношенє 32c) подає тзв. поперечну масу електрону (transversale elektromagnetische Masse):

33a) $$m_{\mathfrak{r}} = \frac{G}{|\mathfrak{v}|} .$$

При повільнім руху електро-маґнетний імпульс є пропорціональний до скорости $\mathfrak{v}$ (31b); в сїм случаю обі висше згадані маси суть собі рівні.

По вставленю вартости на $\mathfrak{G}$ з 31b) в оба рівнаня 33, а, дістанемо обі маси:

34) $$m_{\mathfrak{s}} = \frac{e^2}{2ac^2} \cdot \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{2}{1-\beta^2} - \frac{1}{\beta} \log \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right\}^{1)} .$$

34a) $$m_{\mathfrak{r}} = \frac{e^2}{2ac^2} \cdot \frac{1}{\beta^2} \left\{ \left(\frac{1+\beta^2}{2\beta} \right) \log \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 1 \right\}$$

Для скоростий, які в порівнаню зі скоростию сьвітла є треба уважати за малі, можемо β^2 в супроти 1 поминути і отримаємо граничну вартість подовжної і поперечної маси:

---

[1] M. Abraham: l. c. стор. 191.

34b) $$m_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2},$$

для поверхного наряду; для простірного знов наряду треба помножити сю вартість через $\frac{6}{5}$, отже:

34c) $$m_0 = \frac{4}{5}\frac{e^2}{ac^2}.$$

Положім:

$$\frac{1}{\beta^2}\left\{\frac{2}{1-\beta^2} - \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\right\} = U_1(\beta)$$

а:

$$\frac{1}{\beta^2}\left\{\left(\frac{1-\beta^2}{2\beta}\right) \log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\} = U_2(\beta);$$

тоді напишемо обі маси для поверхневого і простірного наряду в виді:

34d) $$m_s = m_0 \cdot \tfrac{3}{4}\, u_1(\beta)$$

34e) $$m_r = m_0 \cdot \tfrac{3}{4}\, u_2(\beta);$$

На основі помірів з відклонень лучів β раду в сильнім маґнетнім поли доказав W. Kaufmann важність взору на поперечну масу, де $\beta = \frac{\mathfrak{v}}{c}$ виносило у него 0·60 до 0·95. Незгідність теоретичних обчислень з досьвідними виносила 1% до 1·5% [1].

При знаню m_0 можна обчислити відси питомий наряд електрону для повільних катодних лучів в *em.* o:

$$\frac{e}{c\,m_0} = \frac{3}{2}\frac{ac}{e},$$

а опісля луч електрону a. Після досьвідних помірів S. Simona:

$$\frac{e}{c\,m_0} = 1{\cdot}865.\ 10^7,$$

яке число видає ся бути найправдоподобнійшим зі всїх помірів. Відси слідує, що:

$$a = \frac{4}{5}\frac{e}{c}\,.\,1{\cdot}865.\ 10^7.$$

А що наряд електрону рівняє ся нарядови йону після E. Riecke-го:

$$2.10^{-10} < |\,e\,| < 20.10^{-10},$$

тому:

$$10^{-19}\,cm < a < 10^{-12}\,cm.$$

Коли розвинемо $u_1(\beta)$ і $u_2(\beta)$ на ряди і упорядкуємо їх після зростаючих степений β, тоді дістанемо:

34f) $$m_s = m_0 \left\{ 1 + \frac{6}{5}\beta^2 + \frac{9}{7}\beta^4 + \frac{12}{9}\beta^6 + \dots \right\}$$

---

[1] M. Abraham: Ann: d. Phys. 1903. l. c.

34g) $$m_r = m_0 \left\{ 1 + \frac{6}{3.5} \beta^2 + \frac{9}{5.7} \beta^4 + \frac{12}{7.9} \beta^6 + ... \right\}$$

Ряди сї є збіжні для $|\beta| < 1$. З послїдних рівнань легко заключити, що подожна маса все буде більша від поперечної маси. Колиб якась сила дїлала скісно до напряму руху, тодї прискорене не булоби згідне що до напряму з силою, бо вектор прискореня буде взагалї заключати зі стичною до напряму дороги щораз більший кут, як вектор сили, позаяк подовжна безвладність перевисшає поперечну. Тілько в случаю, коли сила дїлає рівнобіжно або нормально до напряму руху, годять ся з собою що до напрямів так сила, як й прискорене. Маса отже в динаміцї електрону не є скалярною величиною, як в звичайній механіцї. Сила є ту лїнійною векторовою функцією прискореня в загальнїйшім значіню, чим там. Електро-маґнетна маса є системою сочинників лїнійної векторової функції, є тензором о оборотовій симетрії, якого вісь симетрії визначає напрям руху електрону. Можна зробити тут порівнане з моментом безвладности тїла в оборотовім руху, для якого визначеня треба двох величин: моменту около оборотової оси і моменту около оси, нормальної до тої.

Масу електрону можна ще найти з реляції на енерґію. Висше мали ми рівнане енерґії (15) для чисто поступного руху електрону:

$$\frac{dW}{dt} (\mathfrak{v} \mathfrak{P}_1) = |\mathfrak{v}| \mathfrak{P}_{1,s}$$

Але для майже статочного руху треба уважати енерґію електрону яко функцію безглядної вартости скорости, тому:

$$\frac{dW}{d|\mathfrak{v}|} \cdot \frac{d|\mathfrak{v}|}{dt} = |v| \cdot \mathfrak{P}_{1,s}$$

або:

$$\frac{\mathfrak{P}_{1,s}}{|\dot{\mathfrak{v}}|} = \frac{1}{|\mathfrak{v}|} \cdot \frac{dW}{dt}.$$

Вартість відношеня $\frac{\mathfrak{P}_{1,s}}{|\dot{\mathfrak{v}}|}$ означили ми яко подовжну масу m_s, отже:

35) $$m_s = \frac{1}{|\mathfrak{v}|} \frac{dW}{dt}.$$

Рівнане се подає нам звязь між подовжною масою а eї енерґією.

Поперечну однак масу не можна виразити рівнанем енерґії, бо сила, яка дїлає нормально до напряму руху, не виконує нїякої працї.

Оба взірці на подовжну масу (33, 35) є тотожні, бо з рівнань (27 і 29) можна легко найти звязь між енерґією а імпульсом, іменно:

36)
$$\frac{dG}{d\,|\mathfrak{v}|} = \frac{1}{|\mathfrak{v}|}\cdot\frac{dW}{d\,|\mathfrak{v}|} = \frac{d^2L}{d\,|\mathfrak{v}|^2},$$

що дійсно доводить ідентичности взорів 33) і 35).

Колиби ми знов приняли, що вигляд електрону зміняє ся зі скоростию, то маси отримані з рівнаня для імпульсу і енерґії не булиби тотожні. Бо енерґія здеформованого електрону не є чисто електро-маґнетною, але в части іншої неелектро-маґнетної натури, яка походить від механїчних сил, що спричиняють деформацію електрону. В сїм случаю динаміка електрону пересталаби бути основана на чисто електро-маґнетних основах. Знов отже одна причина, яка промовляє проти деформації електрону, коли уважати будемо єго яко цїпке тїло.

Висші наведені взори на обі маси походять від M. Abraham-a. Крім него подали ще Bucherer і H. A. Lorentz взори на обі маси електрону, який деформує ся в часї руху, іменно:

Bucherer¹):

$$m_s = \frac{2}{3}\,\frac{e}{a}\left(1 + \frac{6}{5}\beta^2 + \frac{9}{7}\beta^4 + \ldots.\right)$$

$$m_r = 2\,\frac{e^2}{3a}\left(1 + \frac{6}{3.5}\beta^2 + \frac{9}{5.7}\beta^4 + \ldots.\right)$$

H. A. Lorentz²):

$$m_s = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{ac^2}\left(1 + \frac{3}{2}\beta^2 + \ldots.\right)$$

$$m_r = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{ac^2}\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \ldots.\right).$$

Оборотовий рух електрону.

До тепер займали ся ми виключно поступним рухом електрону і поминали ми всякі внїшні сили, які моглиби пустити в оборот електрон. Коли крім поступного руху зі скоростию $\mathfrak{v}$ маємо ще оборотовий рух з оборотовою скоростю $\mathfrak{u}$, тодї густоти токів $\mathfrak{i}_y$, $\mathfrak{i}_z$ а так само $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ не зникають в просторі, як при 19b). Примінемо передовсїм кінематичне рівнанє:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}].$$

---

[1] A. H. Bucherer: l. c. стор 53. і слїдуючі.

[2] M. Abraham, Phys. Zeitschr. 1904. стор. 576.

$$37)\qquad (1-{}^{2})\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 z}=-4\pi\varrho$$

$$37a)\qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial^2 z}=-4\pi\varrho\beta-4\pi\frac{\varrho}{c}(\mathfrak{u}_y z-\mathfrak{u}_z y)$$

$$37b)\qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{A}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_y}{\partial z^2}=-4\pi\frac{\varrho}{c}\mathfrak{u}_z x-\mathfrak{u}_x z)$$

$$37c)\qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{A}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_z}{\partial z^2}=-4\pi\frac{\varrho}{c}(\mathfrak{u}_x y-\mathfrak{u}_y x)$$

Приймім тут знов вісь x за напрям поступного руху. Електро-маґнетне поле витворене таким рухом можна уважати лишень тодї за статочне, коли вектор $\mathfrak{v}$ має постійний напрям в просторі, а крім сего ще постійний напрям у віднесеню до укладу, який порушає ся разом з електроном, се значить, коли напрям руху і оборотової оси спадають на себе. А що поле є статочне, то з сего слїдує, що імпульс $\mathfrak{G}$ і оборотовий імпульс $\mathfrak{Y}$ електро-маґнетного поля мусять мати постійні вартости і такі напрями, які булиби так в просторі, як й в самім електроні постійні; напрями висше згаданих величин спадають разом з напрямами векторів $\mathfrak{v}$ і $\mathfrak{u}$.

Положім в рівнанях від 37a) до 37c):

$$\mathfrak{u}_z=\mathfrak{u}_y=0;\quad \mathfrak{u}_x=\mathfrak{u},$$

тодї дістанемо:

$$38)\qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=-4\pi\varrho$$

$$38a)\qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}^x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial z^2}=-4\pi\varrho\beta$$

$$38b)\qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{A}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_y}{\partial z^2}=+4\pi\frac{\varrho}{c}\mathfrak{u}z$$

$$38c)\qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{A}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_z}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_z}{\partial z^2}=-4\pi\frac{\varrho}{c}\mathfrak{u}y.$$

По впровадженю до сих рівнань трансформації 22), як при поступнім руху, зведемо їх на звичайні рівнаня потенціялу. Потенціяли Φ і $\mathfrak{A}_x$ стають ся в безконечности зерами з відворотностю першої степени віддаленя; потенціяли знов $\mathfrak{A}_y$ і $\mathfrak{A}_z$ відповідалиби потенціялам мас, які в безконечности стають ся зером з відворотностию другої степенї віддаленя. Відси можемо найти конвекцийний потенціял Ψ при помочи взірця 18:

$$\Psi=\Phi-\frac{1}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{A}),$$

або в нашім случаю:

$$\Psi = \Phi - \beta \mathfrak{A}_x + \mathfrak{u}\,(z \mathfrak{A}_y - y \mathfrak{A}_z).$$

Перейдїм тепер до внїшної оборотової сили. Она була означена рівнанєм 6):

$$\mathfrak{N}_1 - \iiint [\mathfrak{r} \mathfrak{F}_1]\, \varrho\, dv.$$

В однороднім електричнім поли $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{E}_1$ для всїх точок електрону. З огляду знов на симетрію електрону $\iiint \varrho\, \mathfrak{r}\, dv = 0$, а з сего слїдує, що в однороднім внїшнім електричнім поли не може виступити нїяка оборотова сила. Те саме відносить ся до однородного маґнетного поля, коли нема нїяких оборотів. Для однородного маґнетного поля

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{1}{c}\, [\mathfrak{v}\, \mathfrak{H}_1]$$

для всїх точок електрону.

Зовсїм інакше представляє ся річ, коли електрон находить ся в оборотовім руху. Тодї в $\mathfrak{F}_1$ виступає складова $\frac{1}{c}\, [[\mathfrak{u}\, \mathfrak{r}], \mathfrak{H}_1]$, яку можна переробити при помочи векторової аналїзи на:

$$\frac{\mathfrak{r}}{c}\, (\mathfrak{u}\, \mathfrak{H}_1) - \frac{\mathfrak{u}}{c}\, (\mathfrak{r}\, \mathfrak{H}_1).$$

По вставленю вже сеї переробленої части до вираженя на $\mathfrak{N}_1$ і по зінтеґрованю покаже ся, що:

39) $$\mathfrak{N}_1 = \frac{ea^2}{3c}\, [\mathfrak{u}\, \mathfrak{H}_1].$$

Так виглядає оборотова сила в однороднім маґнетнім поли; є она нормальна до напряму і до лїнїй маґнетних сил.

В неоднородних полях виступають оборотові сили також тодї, коли навіть не було оборотового руху з початку. Возьмім тепер случай, що катодний луч переходить через неоднородне маґнетне або електро-статичне поле в нормальнім напрямі до лїнїй сил. Най вісь x представляє напрям луча, а додатна вісь y най буде рівнобіжна до електричної сили $\mathfrak{E}_1$, або коли маємо до дїла з маґнетним полем, то відємна вісь z най буде рівнобіжна до маґнетної сили $\mathfrak{H}_1$. На всякий случай $\mathfrak{F}_1$ буде показувати напрям додатної оси y. В електро-статичнім поли $|\mathfrak{F}_1| = |\mathfrak{E}_1|$, в маґнетнім знов $|\mathfrak{F}_1| = \beta\, |\mathfrak{H}_1|$. Дальше натуга поля має ся зміняти здовж оси x; отже: $\frac{d\, |\mathfrak{F}^1|}{dx}$ буде мірою неоднородности поля. Внутр неоднородного обсягу електрону можна все положити з достаточним приближенєм:

$$|\mathfrak{F}_1| = |\mathfrak{F}_1|_0 + x\frac{d\,|\mathfrak{F}^0|_0}{dx},$$

де $|\mathfrak{F}_1|_0$ і $\frac{d\,|\mathfrak{F}_1|_0}{dt}$ відносимо до осередка електрону. Тоді внїшна сила, яка ділає на електрон буде:

40) $$\mathfrak{F}_{1,y} = e\,|\mathfrak{F}_1|_0,$$

а оборотова сила:

40a) $$\mathfrak{N}_{1\cdot z} = \frac{e^2 a}{3}\cdot\frac{d\,|\mathfrak{F}_1|_0}{dx}.$$

Коли знов розважати будемо чистий оборотовий рух електрону, тодї поступна скорість осередка мас електрону буде зером $\mathfrak{v} = 0$. Електро-маґнетні потенціяли для оборотового руху означимо з рівнань 38—38c; коли там положимо $\beta = 0$, $\mathfrak{u}$ подасть знов вартість оборотової скорости. В сей спосіб дістанемо ріжничкові рівнаня, з яких можна визначити Φ і $\mathfrak{A}$, именно:

41) $$\begin{cases} \nabla\Phi = 4\pi\varrho \\ \nabla\mathfrak{A}_x = 0 \\ \nabla\mathfrak{A}_y = \frac{1}{c}\,4\pi\varrho\mathfrak{u}z \\ \nabla\mathfrak{A}_z = -\frac{1}{c}\,4\pi\varrho y\mathfrak{u}; \end{cases}$$

а дальше після рівнаня 18) отримаємо конвекцийний потенціял:

42) $$\Psi = \Phi - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{A}) = \Phi - \frac{\mathfrak{u}}{c}(z\mathfrak{A}_y - y\mathfrak{A}_z)$$

Тепер означимо функцію Lagrange-a зі взору:

$$L = -\iiint \frac{\Psi e}{2}\,dv,$$

або:

$$L = -V = -\iiint \frac{\Phi\varrho}{2}\,dv - \frac{\mathfrak{u}}{c}\iiint \frac{\varrho}{c}(z\mathfrak{A}_y - y\mathfrak{A}_z)\,dv.$$

Послїдні взори відносять ся лишень до сильних оборотів електрону, які дуже впливають на его свобідний рух. (Рух електронів радіоактивних тїл). Таких однак оборотів не удалось запримітити при досьвідах. О много більше, як говорить M. Abraham, годить ся з досьвідом ся теорія, яка уважає оборотові рухи за неконечні для динаміки електрону.

Кілька уваг до динаміки електрону.

Вже розважанєм майже статотних токів робимо закид, що поминає ся там страту енерґії у формі проміньованя. То само можна закинути майже статочному рухови електронів, який ми обговорювали в попередних уступах. Там обчисляли ми енерґію поля і електро-маґнетний імпульс так, як они відповідали скорости електрону в кождій хвилї. Але всяке проскорене, кожда зміна напряму руху електрону спричиняє висиланє електро-маґнетних филь, які ми саме поминули, коли прискорений і оборотовий рух електрону уважали за майже статочний.

Приймім, що цїла сила, якою електрон дїлає сам на себе, є:

42) $$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'',$$

де $\mathfrak{P}'$ означає силу того рода, яку обчисляли ми в попередних уступах, іменно:

$$\mathfrak{P}' = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt},$$

а $\mathfrak{P}''$ знов означає реакцийну силу електро-маґнетного проміньованя

$$\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}^{(s)}.$$

Величина $\mathfrak{G}$ яко імпульс поля, яке порушає ся разом з електроном, залежати буде від форми електрону, коли знов реакція проміньована від нього не залежить. Електро-маґнетні филї, вислані електроном, можна уважати за филї рівно-важні з филями наряджeної точки. Тодї рівнанє 42) для внутрішної електро-маґнетної сили сповняє зовсїм рівнанє енерґії і електро-маґнетних імпульсів.

Рівнанє руху, яке не буде вже в ніякій суперечности з основою захованя енерґії і імпульсів, буде:

42a) $$\mathfrak{P}_1 = -\mathfrak{P} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} - \mathfrak{P}^{(s)}.$$

Возьмім насамперед рух рівномірно поступний, який слїдує зі скоростию $\mathfrak{v}_1$; най опісля якась внїшна причина приспішить єго, а опісля най знов слїдує рівномірний рух зі скоростию $\mathfrak{v}_2$. В наслїдок прискореня став ся електрон жерелом електро-маґнетних филь, які по якімсь часї віддаляють ся достачочно від електрону. Внутр простору ограниченого сферою филї повстає електро-маґнетне поле, яке відповідає скорости $\mathfrak{v}_2$, а якого енерґія є W_2, а імпульс $\mathfrak{G}_2$. Енерґію і імпульс на зовні сфери филї поминаємо. Назвім дальше енерґію самої сфери W_{12}, а eї імпульс $\mathfrak{G}_{12}$, тодї отримаємо таке імпульсове рівнанє:

42b) $$\int_1^2 \mathfrak{P}_1 dt = \mathfrak{G}_2 - \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_{12},$$

і рівнане на енерґію:

$$\int_1^2 (\mathfrak{v}\,\mathfrak{P}_1)\,dt = W_2 - W_1 + W_{12}.$$

Для електрону, який деформує ся в часї руху, треба узглядняти ще внутрішну зміну потенціяльної енерґії.

Послїдні рівнаня є мірою, коли рухи електронів можемо уважати за майже статочні, а іменно: рух електронів можемо уважати тодї тільки за майже статочний, коли реакція сили проміньованя $\mathfrak{P}^{(s)}$ зникати-ме в порівнаню з внутрішною силою $\mathfrak{P}'$.

Возьмім під увагу лучі β раду в сильнім маґнетнім поли. Електрони будуть зачеркувати в сїм случаю колові рухи. Най лучем кола одного електрону буде R, тодї вартість сили безвладности майже статочного руху означимо:

$$(43)\qquad |\,\mathfrak{P}'\,| = m_r \frac{\mathfrak{v}^2}{R} = m_0 \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{v}^2}{R} u_2(\beta).$$

Реакція знов проміньованя, як означив M. Abraham (Theorie der Elektrizität B. II. стр. 131, 88); є:

$$43\text{a})\qquad \mathfrak{P}^{(s)} = -\,\mathfrak{v}\,.\,\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\mathfrak{v}^2}{\varkappa^2 R^2},\quad (\varkappa = 1-\beta^2).$$

Утворім відношене:

$$43\text{b})\qquad \mathfrak{P}^{(s)} : \mathfrak{P}' = \frac{4}{3}\frac{a}{R}\frac{\beta}{\varkappa^4 u_2(\beta)} = \frac{4}{3}\frac{a}{R} f(\beta)$$

то бачимо, що для рухів, яких скорість ледви зближає ся до скорости сьвітла, функція $f(\beta)$, яка виступає в відношеню є величиною доволї малою, а дальше R є дуже великим в порівнаню з a; тому вартість $\mathfrak{P}^{(s)}$ зникає в порівнаню з $\mathfrak{P}'$. З огляду на се можна ще все уважати рух електронів катодних лучів і лучів β радіоктивних тїл під дїланем маґнетних сил за рух майже статочний.

Вернїм ще до рівнаня 42). Два додатники правої сторони не становлять нїчо іншого, як два перші додатники такого ряду:

$$44)\qquad \mathfrak{P} = \mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'' + \mathfrak{P}''' + \ldots..,$$

який росте з зростаючими степенями a. Перший додатник є внутрішною електро-маґнетною силою, в якім виступає a; другий член є силою реакції проміньованя, яка від форми електрону не залежить, отже a не буде виступати в нїм. Третий член буде знов залежати від форми електрону і розкладу наряду і в нїм буде виступати a в чисельнику і т. д. А що внутрішна сила $\mathfrak{P}$ була означена скоростию і прискоренем, тому таке розвинене є все можливе, коли тілько рух є тяглий, а его скорість буде менша від скорости сьвітла. Чим дальше будемо провадити розвинене такого ряду, тим висші похідні v дістанемо і тим висші степенї тих похідних треба буде брати під увагу. Ряд сей буде тим менше збіжний, чим рух буде більше нетяглий, а скорість буде щораз більше доходити до границї скорости сьвітла. Для нетяглих рухів і рухів зі скоростию сьвітла ряд сей буде все розбіжний.

Про хльорофіль.

написав

Стефан Кордуба.

I.

Загально відомо, що зелена краска ростин походить від присутности осібних зелених тілець, розміщених в виді зелених грудочок серед клітинної протоплязми, котрі то тїльця називаємо **галинками зéленї** (Chlorophyllkörner). Галинки зéленї стрічаємо у всіх родів ростин, починаючи від найвисших а кінчаючи на найнизших, з виїмком бактерий та грибів, котрі при своїм галапаснім житю тої зеленї цїлком не потрібують. У глїнів (Algae) форма тих галинок є ще дуже ріжноманітна. Звичайно посідає тут кожда клітина одну велику галинку, так зв. **хльоропляст**, в виді щитоватім або лентоватім, що тягнеть ся будьто здовж клітинної болони (Palmelaceae, Coleochaete), будьто лежить в самій серединї клітини (Mougeotia). При дальшій діференціяції прибирають хльоропласти береги меньше або більше зубчасті або тягнуть ся здовж клітини в виді спірально звиненої стяжки, як се можна запримітити у оскрутнї (Spyrogyra), котра звідси взяла навіть свою назву. У висших вже глїнів, мохів та папоротий, як також у всіх явноцьвітих, форма галинок зеленї прибирає сталий вид: є вони по найбільшій части овальні або сочковаті або прибирають вид многобічних табличок. Загально, коли слідитимем морфольоґічний розвій тих галинок, починаючи від найнизших а кінчаючи на найвисших ростинах, побачимо, що й в тім напрямі поступала природа постепенно а то, маючи на оцї те важне завдане, яке ті галинки сповняють в житю ростини, побільшала постепенно їх число так, що коли у найнизших ростин стрічаємо сесї галинки в числї одної або двох, то у висших ростин подибуємо їх в кождій асімілюючій клїтинцї в великій скількости.

У висших, листястих ростин, галинки зеленї містять ся головно в листю, хоч подибуємо їх і в иньших частях орґанізму. В листю виступають вони в обох верствах листевої ткани так губчастій як і палїсаднїй, особливо в тій послїднїй в великій скількости. З чого вони повстають та звідки беруть ся в такім великім числї? Первісно думали, що галинки зеленї подібно як прочі хромопласти видїлюють ся з матерії, що находить ся серед клїтинної протоплязми, та з котрої викристалїзовують вони в видї подовгастих тїлець, подібно як пр. зеренця алеврону серед насїння наших збіж. Перший Schmitz виказав на водоростах, що нові тїльця зеленї повстають з давних дорогою подїлу а не родять ся з якоїсь твірчої матерії, розміщеної серед протоплязми. Слїдами Schmitz'а пішов Schimper, котрий ствердив, що такий процес має місце не лише у низших але й у всїх висших ростин. При помочи мікроскопійних дослїдів він переконав ся, що у всїх твірчих тканях ростин містять ся протоплязматичні безбарві тїльця, котрі через подїл множать ся а проникнувши до поодиноких тканий, ріжничкують ся відтак, то на левкопласти або тїльця безбарві, то на *хльоропласти* або як ми їх назвали, галинки зеленї, то знов на хромопласти, себто тїльця, що можуть бути ріжно забарвлені: на буро, жовточервоно і т. д. Хльоропласти збирають ся, як я вже згадав, головно в листю, надаючи йому барву зелену, хромопласти знова подибуємо головно в коронї цьвітів або наскірнї овочів, котрим надають відповідну закраску.

Хроматофори в клїтинках розвиваючих ся пучків, мають початково сочковату форму і лежать в досить великих відступах від себе, пізнійше однакож множачи ся через подїл, зближають ся до себе та прибирають вид овальний. В часї зміни форми доконуєть ся також зміна барви. Одні з білих стають ся зеленими, иньші знов з брудно-білої або сїрої барви прибирають краску цеглисточервону. Та переміна барви хроматофорів доконуєть ся у ріжних клїтинок в ріжнім часї так, що пр. в цьвітах рожі можемо подибати ріжні стани переходові від нормальних, сочковатих, галинок зеленї аж до трикутних хроматофорів жовтої або червоної краски. Зміна краски хроматофорів попереджує звичайно зміну форми. З сього бачимо, що зелені галинки або як ми назвали їх хльоропласти, є того самого походження що тїльця иньшої барви та що вони можуть взаїмно переображати ся і зміняти свою форму та барву, переходячи одні в других, при чім за зміною форми і барви слїдує зміна функції.

Галинки зелені (хльоропляєти) мають будову тїл протоплязматичних. Що однак відносить ся до їхньої внутрішньої структури, під многими зглядами не є вона ще докладно розслїджена. Pringsheim впевняв, що хльоропляcти мають структуру губчасто-поровату а ціла їх протоплязматична маса, котру називаємо основною (Grundmasse), є пересякла олїйно плинною барвиною (Farbstoff). A. Meyer описав дещо докладнїйше сесю протоплязматичну субстанцію і назвав її „Stroma“. В тій то масї розміщені суть поодинокі краплї зеленого плину так зв. *хльорофілю*. Meyer робив свої дослїди на ростинах, у котрих досить виразно можна бачити кропельки хльорофілю (пр. у Acanthophippium s.). Стан скупности, в якім виступає основна маса хльоропляcтів, є меньше більше сталий а радше пів плинний; в кождім разї є вона дуже ніжної та мягкої консистенції, як можна переконати ся з сього явища, що, коли галинки зелені, пірвані струєю порушаючої ся протоплязми, перетискають ся побіч себе, то сплощують ся і принимають подовгастий вид. Зі сторони внїшної покриває галинки зелені тоненька болонка, як об тім переконав ся Tschirch на живих клїтинках водних ростин Nitella i Elodea canad. То само можна ствердити у ростин сухоземних, але сї послїдні до дослїдів не надають ся, бо істноване плїнки у хльоропляcтів тих ростин можнаби також уважати за обяв патольоґічний. А хотяй би навіть дорогою чистої обсервації істнованя внїшної плїнки у хльоропляcтів ствердити не можна, то присутність її мусимо приймити хотяйби зі зглядів хемічно-фізичних.

Що відносить ся до барви основної маси хльоропляcтів, то тяжко ствердити, чи та маса є цїлком безбарва, чи слабо закрашена; очевидно зелені грудки хльорофілю не позваляють сего докладно розслїдити.

Що ся зелена барвина, звана хльорофілем, виступає в видї поодиноких грудочок, се ствердило много ботанїків та хеміків, але деякі з них як Tschirsch думали, що ся зелена барвина проникає основну протоплязматичну масу хльоропляcтів і є серед неї розпущена а не виступає в поодиноких зеренцях (grana). Проти сього погляду промавляє не лиш факт, заобсервований Schimper'om, Meyer'om та иньшими, котрі прямо бачили ті зеренця хльорофілю, але також дослїд, який виконав Reinke. Він переконав ся, що галинки зелені так як вони суть розміщені серед клїтинок листя, не флюоризують а навіть емульзія хльоропляcтів, витиснена з листя базнику (Sambucus nigra) і піддана стислим дослїдам при помочи спектроскопу і сильних сочок, не виказала анї слїду червоного сьвітла флюоресценції. Навпаки звісною є річию, що коли хльорофіль розпустимо в алькоголю або етері і той розчин слїдити мемо в сонїшнім сьвітлї, то він пічне сильно флюоризувати. Отже коли хльорофіль в листю не флюоризує, або як флюоризує то дуже слабо, то лише длятого, що хльорофіль не виступає в листю як розчин. Reinke розпустив відтак хльорофіль, котрий одержав з листя, намоченого в алькоголю, в розтопленій парафінї. Розчин зачав флюоризувати тодї так красно, як в алькоголю. Як лиш парафіну остудив, хльорофіль не оказав анї слїду флюоресценції. Сей дослїд веде нас до заключеня, що хльорофіль не містить ся в основній масї в станї цїлком плинним але радше плинно-сталім, збитий в поодинокі грудки (grana). Сей здогад є правдоподібним також з огляду на фізіольоґічну чинність сеї барвини: бо коли правдою є, що задачою хльорофілю є редукція двокису вугля (CO_2), котрий з воздуха проникає до галинок зеленї, то сей процес проникaня стає ся значно улекшеним при того рода розміщеню хльорофілю.

Як я згадав, протоплязматичні тїльця, з яких пізнїйше в міру розвою ростинного орґанїзму повстають хльоропласти, є первісно безбарві або слабо закрашені і як левкопласти виповняють ткань розвиваючих ся пучків і прозябцїв. В міру сього як внїшні обставини сприяють та ростина нормально розвиває ся, безбарві тїльця наперед жовтїють, але та жовта краска не треває довго, бо по якімсь часї прибирає листє під впливом дїланя внїшних чинників краску зелену; причиною сього є поява зеленої барвини себ то хльорофілю. Щоби однак хльорофіль міг витворити ся, до сього конче потрібні є слїдуючі чинники: передовсїм сьвітло, без згляду на се, чи се є сьвітло сонїшне чи иньше, а відтак певний степень теплоти. Ростини, що ростуть в темнотї або в сьвітлї дуже слабім та розсїянім, суть цїлком позбавлені зеленої краски і стають ся жовтими та блїдими, однак скоро лиш виставимо блїду ростину на дїлане сонїшних лучів, стає ся сейчас з блїдо-жовтої зеленою. Не у всїх ростин се явище виступає однаково. Деякі чатинні дерева (coniferae) визначають ся тим, що їх шпильки, як лиш розвинуть ся, суть жовтими, та потрібують аж кількох тижнів, щоб зазеленїти. Не лиш на сонїшнім сьвітлї зеленїють ростини, може се наступити при кождім иньшім штучнім сьвітлї як електричнім, маґнезієвім і т. и. та, як виказали дослїди, при такім штучнім сьвітлї ростини не лише заховують темно-зелену краску, але навіть досить добре розвивають ся і можуть видавати овочі. З другої сторони деякі з чатинних дерев як ялицї а також туї (Thuja or.) в часї кільченя можуть навіть в темнотї витворювати хльорофіль, однакож гинуть скоро, бо з недостачі сьвітла не можуть асімілювати. Факт сей різно толковано: одні говорять, що має тут вплив досить висока температура (14—16° C) иньші знов твердять, що в часї кільченя виділяють ся певні хемічні сполуки, котрі в цілости заступають діланє сонїшних лучів. Не всї сонїшні лучі впливають однаково на витворенє хльорофілю; як досліди виказали, головно жовті лучі ділають найенерґічнїйше, найслабше сині і фіолетні.

Як істнує певне minimum сьвітла, потрібне до витвореня хльорофілю, так є також певне optimum, при котрім витворюванє хльорофілю і процес асіміляциї відбуваєть ся найенерґічнїйше; поза тим стоїть межа, котрої переступленє може не лише утруднити процес асіміляциї але спричинити цїлковите знищенє галинок зеленї. Обсервації виказали, що не лише алькогольні та етерові розчини розкладають ся під впливом сьвітла; той сам розклад і знищенє хльорофілю може наступити в живім листю ростини, коли ся послїдня є виставлена на діланє занадто сильних сонїшних лучів, сильнїйших, чим се є потрібним до зросту і житя галинок. То нам пояснює, для чого много з наших дерев оказує в горячій і посушній порі року листє блїде як пр. деякі чатинні дерева, або длячого мохи, котрі в затїнених місцях оказують красну зелену барву, виставлені на діланє сильних сонїшних лучів, поволи жовкнуть і вянуть. Всї ті явища належить пояснювати собі в сей спосіб, що під впливом сильного сьвітла наступило в тих случаях частинне знищенє хльорофілю, отже барвини а не цїлої галинки зеленї, яка при лагіднїйшім сьвітлї (інсоляциї) може знова відзискати зелену краску. Се припущенє потверджають досліди Pringsheim'а. Пускаючи сконцентровані сочкою лучі на приготовані галинки зеленї, запримітив він, що в наслїдок великої інтензивности сьвітла наступило в них цїлковите знищенє хльорофілю і цїлої протоплязматичної маси, здаєть ся з причини процесу паленя.

Подібно як за сильне сьвітло, ділає убійчо на хльорофіль цїлковита недостача сьвітла. Sachs переконав ся, що в темнотї не лиш розкладаєть ся сам хльорофіль але також протоплязматичний підклад опускає повільно клїтинки, так що по якімсь часї наступає цїлковитий заник хльоропластів. Сей процес відбуваєть ся тим скорше чим висша є температура. У ростин, призвичаєних до сильного сьвітла, той процес виступає вже тодї, коли ті ростини короткий лиш час знайдуть ся в затемненім місцї, як то можна запримітити у деяких трав і чатинних дерев, иньші знова ростини можуть обійти ся без сьвітла цїлі місяцї і не тратять при тім зеленого вигляду.

Причиною розкладу хльоропластів в темнотї суть після Wiesner'а орґанічні кваси.

З огляду на змінні впливи осьвітленя прибирає листє ріжних ростин ріжне положенє зглядом падучих лучів сонця. І так загально є звісною річию, що особливо у ростин тропікальних країв уставляєть ся листє не як у наших дерев своєю площею нормально до падаючих лучів але радше рівнобіжно себто рубом, щоби в сей спосіб охоронити ся від надмірного жару сонця. Так як листє можуть також зміняти своє положенє галинки зе́ленї (хльороплясти), відповідно до напряму й інтензивности сьвітла. Коли Stahl уставив оден з глїнів, званий Mougeotia, в слабім сьвітлї, плитки зе́ленї уложили ся своїми поверхнями нормально до падаючих лучів, знова при сильнім сьвітлї площі їх злили ся з площею сьвітла. Через зміну інтензивности сьвітла можна викликати відповідний оборот і скрут хльороплястів. Такі рухи галинок, відбуваючі ся під впливом сьвітла, запримічено у багатьох висших ростин: як Ornithogallum umb., Scilla bifolia, Viola odorata, Polygonum і т. и. В многих случаях має вплив на рух і розміщенє галинок в листю виключно інтензивність сьвітла а не його напрям. Має се місце у многих мохів та водних ростин пр. у Elodea canad., Vallisneria spiralis та многих иньших. В слабім сьвітлї, яке для водних ростин є сьвітлом звичайним і нормальним, галинки уставляють ся в клїтинках рівнобіжно до поверхнї листка, при чім бічні стїни клїтинок є цїлком позбавлені зе́ленї (епістрофія). Як лиш однак кинемо на листок тих ростин сильнїйше сьвітло, сейчас галинки утікають і уставляють ся біля бічних стїнок клїтин (апострофія). При надмірній інтензивности сьвітла опускають галинки й ті бічні стїнки і переносять ся до середини клїтинок, щоб в сей спосіб ухоронитись від знищеня (систрофіа). Не лише сьвітло викликує те явище; можуть его викликати також иньші чинники, як ріжні хемічні та механїчні діланя, сильні стрясеня або нагла зміна температури.

Зміну положеня галинок зеленї в клїтинках належить толкувати собі не свійством порушуваня ся тих галинок але радше самої протоплязми, котра їх зі собою порикає.

Яке значінє має то явище для житя ростини, не трудно згадати. Задачию галинок є вглитанє сонїшних лучів, длятого при слабім осьвітленю уставляють ся галинки зе́ленї в той спосіб, щоби свою поверхню можливо як найбільше побільшити а тим самим з'абсорбувати як найбільше сонїшного сьвітла, як жерела енерґії потрібної до житя ростини. З другої знов сторони надмірне сьвітло ділає на них убійчо, длятого через відповіднє уложенє старають ся сього уникнути.

Побіч сьвітла при витворюваню хльорофілю має головне значінє відповідна температура. Що так є дійсно, можна об тім переконати ся кождої весни, коли снїги зачнуть топити ся. Мимо сього що сонце досить вже пригріває, поля і луги довго ще заховують жовту краску, бо видно температура воздуха не осягнула єще відповідної висоти. Можна переконати ся, що при температурі 18°—19° С хльорофіль творить ся єще досить поволи, хотяй деякі мотилькові ростини вже при температурі 4° С зачинають зеленїти і асімілювати, чатинні знова в часї кільченя навіть при 9° С не оказують зеленї. Minimum температури, при котрім ростини зачинають зеленїти, виносить + 16° С, коли спаде температура понисше minimum, новий хльорофіль не творить ся; коли низька температура триває довший час, ростини прибирають т. зв. зимову барву наших чатинних дерев, що повстає в наслїдок частинного знищеня зеленої барвини а виступленя на єї місце бурої. Колиж знова температура підносить ся, то в міру сього прибуває що раз більше хльорофілю але лише до певної границї, по за котру дальше підвисшуванє температури може спричинити вдержанє процесу асіміляції і смерть ростини. То maximum температури, при котрім хльорофіль єще витворюєсь, виносить + 40° С, optimum колибає ся між 20° С а 35° С.

Крім згаданих вже услівий конечні суть до витвореня хльорофілю ще й иньші чинники, як присутність кисня, амоняку (NH_3), желїзних і азотних солий та достаточна скількість вогкости. Що потрібною є достаточна скількість вогкости, то стверджує факт, що ново засїяне збіже в посушній осени є цїлком жовте, присутність знов амоняку та азотних солий є з того згляду потрібна, що галинки зеленї є, подібно як клїтинки, протоплязматичними творами, які без згаданого корму обійти ся не могуть.

Крім згаданих солий мають також цукри значний вплив на творбу хльорофілю. Переконав ся об тім Klebs, годуючи деякі водні ростини (Elodea canad.) в сильних цукрових розчинах. У Stichococcus bacillensis рішає рід поживи о появі хльорофілю в темнотї: а іменно азотани потасові не викликують зазеленїня, натомість asparagin або pepton може се спричинити. Рівнож виказали дослїди, що ростини блїді скорше зеленїють в розчинах цукру чим в чистій водї. Відай присутність певної скількости цукрів може бути користною хоть не конечною при творбі хльорофілю.

Розгляньмо тепер фізичні та хемічні свійства хльорофілю. Хльорофіль ріжнить ся тим від иньших природних барв, що не розпускаєть ся, анї в зимній анї горячій водї; можемо його одержати з зеленого листя, коли на якийсь час намочено єго в алькоголю або етері. Крім сього розпускаєть ся хльорофіль також в бензолю, бензині, товщах, хльороформі а навіть оливі.

Найкрасший розчин хльорофілю одержимо, коли зелене листє намочимо в 95% алькоголю. А щоби переконати ся, чи так одержаний хльорофіль є поодинокою чи зложеною барвиною, додаймо до сього зеленого розчину трохи бензолю, вимішаймо відтак добре сю мішанину а коли розчин успокоїть ся, побачимо по якімсь часї дві барвини: одна на сподї золото-жовта, розпущена в алькоголю тзв. Xanthophyll, друга блїдо синьої краски, розпущена в бензолю тзв. Cyanophyll. Тоті дві барвини виступають віддільно також в природї а іменно барвина блїдо синя переважає в сьвіжо розвитих листочках і билах, жовта знов барвина виступає в листю в порі осїнній, коли сонце слабше вже гріє а температура на дворі значно обнизить ся. Причиною жовкненя листя є безперечно повільний розклад хльорофілю; коли протоплязма і всї запаси корму переносять ся з листя до трівалих частий ростини та в зівялім листю лишаєть ся лише жовта барвина (Xanthophyll) в видї дрібоньких жовтих зерен. Інтересним є також, що деякі ростини як пр. Thuja orient, коли є в зимі звернені до сонця, прибирають від сеї сторони краску буру. Сю появу належить в сей спосіб розуміти, що хльорофіль розкладаєть ся під впливом морозу і сонця а на його місце виступає темна барвина. Хльорофіль є сполукою дуже нетревалою; алькогольний або етеровий розчин хльорофілю виставлений на дїланє сонця і воздуха тратить свою зелену краску а прибирає жовту або навіть бураво-жовту. Сей розклад хльорофілю може відбувати ся лише під впливом тих двох чинників; сам воздух без сьвітла або само сьвітло без воздуха сього процесу викликати не можуть. Розклад хльорофілю залежить головно від інтензивности дїлаючого сьвітла а також — як дослїди Reink'ого виказали, від якости сьвітла: найсильнїйше дїлають на розклад хльорофілю лучі червоні а найслабше зелені. Отсе захованє ся розчинів хльорофілю під впливом сьвітла наводить нас на здогад, що подібний розклад хльорофілю під впливом сьвітла відбуваєть ся в живій ткани ростини. Не бачимо однак сього, бо місце розложеного заступає сьвіжо витворений хльорофіль, подібно як дїєть ся з кождою живою матерією. Як довго треває гармонія між процесом розкладу а творби хльорофілю, так довго заховує ростина зелену краску, однак з хвилею, як оден процес зачинає брати верх над другим, сейчас виступає жовта або бура барва.

Так дїєть ся в осени, коли температура воздуха значно обнивить ся. Запримічено, що листє дерев жовкне в осени наперед на тих галузках, котрі найбільше суть виставлені на сонце. Подібно буравіють під впливом морозу і зимна найскорше ті галузки дерев чатинних (coniferae), що найбільше виставлені на ділане сонця, коли галузки, укриті в глубині корчів, заховують зелену краску. Відай до самого розкладу хльорофілю причиняєть ся не лише сама низька температура, але також в значній мірі сьвітло.

Очевидно не дасть ся заперечити, що чималий під тим зглядом вплив мають також орґанічні кваси, котрих в кождій ростині є подостатком. В літі, коли ткань листя є здоровою, кваси ті не можуть дістатись до нутра хльоропластів, бо сьому перешкаджає плінка, що їх окружає, але в осени чи зимою, коли ткань листя під впливом зимна гине, тоді всякі кваси та барвини легко проникають до нутра клітинок а відтак і до галинок зелені, спричиняючи розклад хльорофілю. В виду сього стає ясним, длячого Фльора, що росте близько фабрик, звідки добувають ся ріжні ґази та пари квасів, так скоро жовкне або й цілком примирає.

Хльорофіль і гемоґльобін, себ то червона барвина крови, є ідентичними хемічними сполуками.

Отсе твердженє є остаточним вислідом довголітних праць багатьох учених над складом хемічним хльорофілю. Досліди в тім напрямі розпочав еще Hoppe-Seyler, відтак вів їх дальше Hagenbach і Kraus, а в послїдних часах Nencki, Schunk і Marchlewski. В своїх працях послугували ся сї учені головно спектроскопом. Досліди над спектрум хльорофілю розпочав еще Brewster в роцї 1833 і переводив їх так над зеленим листєм як і над алькогольним розчином хльорофілю. Після точних дослїдів Kraus'a спектрум хльорофілю, розпущеного в алькоголю, складаєть ся з сїмох смуг абсорбційних: перша смуга, що лежить між B і C лінїй Фравенгофера в червонім полю спектра, є найсильнїйша, прочі суть меньші і слабші. Друга половина спектра від E — H, зміняєть ся дещо залежно від роду розчинника: в бензолю та часть спектра більше пересуваєть ся в сторону фіолетного кінця спектра.

Дослїди ті виказали, що хльорофіль є вельми скомплїкованою орґанічною сполукою. Дїлаючи на нього ріжними хемічними відчинниками, одержимо кілька похідних, з котрих найважнїйшою є так зв. *філльопорфірін* а котра в новійших часах стала ся предметом дослїдів учених, головно Nenck'ого, Schunk'a і Мархлевського. Завдяки їх працї а головно сього послїдного, стверджено, що межи **Філльопорфіріном**, котрий є темно-червоно-фіолєтної краски і оказує нахил до твореня дрібних кристалів а межи *гема-*

топорфіріном, барвиною крови, заходить дуже велика схожість. А іменно хемічний склад обох тих сполук є дуже до себе подібний: фільльопорфірін = $C_{16} H_{18} N_2 O$, гематопорфірін = $C_{16} H_{18} N_2 O_3$, що вказує на то, що оба ті тїла є лише ріжними степенями окисеня одної і тої самої субстанції.

Рівнож і спектра обох барвин в етеричних квасних і алькалїчних розчинах, а з другої сторони спектра розчинів відповідних солий цинкових, суть ідентичні, з тою лише малою ріжницею, що абсорбційні смуги гематопорфіріна є легко пересунені в напрямі червоного.

Після фотоґрафічних знимок Tschircha при помочи кварцевого спектроскопу анальоґія абсорбційних смуг розтягаєть ся також на спектрум позафіолєтове.

На основі тих і подібних фізичних та хемічних дослїдів можемо нинї майже рішучо сказати, що філльопорфірін, похідна хльорофілю і гемоґльобін себто червона барвина крови, становлять одну і ту саму матерію.

Отсей здобуток сучасної біохемії мусить нам послужити як ще оден незбитий доказ, що „natura nescit saltus“ — як говорили старинні фільозофи, що межи орґанїчними творами природи, між царством звірят а царством ростин, не істнує так велика пропасть, як то єще до недавна представляли собі учені, але навпаки й в тих, так на перший погляд відмінних сьвітах, дасть ся віднайти богато спільного, що лучить оба ті царства зі собою, та що вказує на їх спільне походженє.

Значінє хльорофілю в природї дуже велике: від него залежить житє не лише ростин але й цїлого орґанїчного сьвіта, не виключаючи чоловіка.

Як звісно ростина побирає корм двома дорогами: корінєм тягне ростина ріжні соли мінеральні, розпущені в воді, листєм знова побирає з воздуха крім иньших ґазів головно вуголь, котрий там уносить ся в виді сполуки, котру називаєм двокисом вугля. Зелені части ростин, як листє, вглитають отсей двокис разом з иньшими ґазами, котрі відтак розпускають ся в клітиннім соку і звідси проникають до зелених галинок. Під впливом сьвітла наступає тут сейчас редукція двокису вугля; вуголь лишаєть ся в хльоропластах, де разом з воднем і киснем лучить ся на так звану мучину або крохмаль а освободжений кисень видїляєть ся. Процес сей званий *асіміляцією* $C O_2$, відбуваєть ся в галинках так скоро, що вже по двайцять мінутовім дїланю сьвітла та при достаточній скількости вугляного квасу виступають в галинках маленькі зеренця мучини.

Щоби процес асіміляції міг відбувати ся, до сього потрібним є крім галинок зеленї, як властивого асіміляційного орґану, і двокису вугля, головно сьвітло. Як однак дослїди виказали не всї лучі сьвітла дїлають однаково: від червоного сьвітла починаючи до жовтого, дїлають лучі щораз інтензивнїйше а при сьвітлї жовтім асіміляція відбуваєть ся найенерґічнїйше.

При дїланю дальших лучів в спектрі сила асімїляційна зменьшаєть ся а при фіолетовім сьвітлї цїлком слабне. Що дотичить двокису вугля, то переконали ся, що чим більше єго в атмосфері, тим живійше відбуває ся процес асіміляції. В давних формаціях землї особливо в формації камінного вугля було в воздусї значно більше вугляного двокису як нинї, тож ростинність в тих часах була буйнїйша, доказом чого є грубі поклади камінного вугля, що заховались до нинї.

Процес асіміляції відбуваєть ся виключно в галинках зеленї. Черпаючи з воздуха двокис вугля ($C O_2$) і абсорбуючи його, видїляють рівночасно з себе галинки вільний кисень, очевидно в відношеню прямо пропорціональнім до скількости забсорбованого $C O_2$. Отсе явище видїлюваня кисня з хльоропластів є найлучшою крітерією, що лише в них а не деінде відбуває ся процес асіміляції. Наочно можемо о тім переконати ся при помочи бактеріольоґічної методи, котра визначаєть ся тою прикметою, що при єї помочи можна викрити найменьшу скількість кисня. Звісно, що деякі бактерії пр. bacterium thermo, виконують в атмосфері кисня скорі рухи, котрі однак сейчас устають, як лиш кисня забракне. Послугуючись сею методою, переконали ся, що пр. в клїтинці оскрутнї (Spyrogyra) коли єї виставимо на сьвітло, лише в галинці зеленї ґрупують ся та порушають ся бактерії, коли навпаки, бактерії, находячі ся в незеленій части клїтинки, заховують ся цїлком спокійно. З сього випливає заключенє, що лише в галинках зеленї вивязуєть ся кисень або иньшими словами лише в галинках відбуваєть ся процес асіміляції.

Однак з огляду на се, що кожда галинка зеленї складаєть ся, як згадано на самім початку, з части протоплязматичної (stroma) і з зеленої барвини або хльорофілю, виринає тепер друге питанє, котра з тих складових частий відграє важнїйшу ролю в асіміляційнім процесї. Щоби дати на се питанє достаточну відповідь, мусимо наперед переконати ся, як заховуєть ся на сьвітлї кожда з тих складових частий віддїльно від себе. Від давна ріжні вчені виголошували погляди, що хльорофіль сам як барвина без протоплязматичного підкладу потрафить асімілювати CO_2, а Regnard мав навіть запримітити, що алькогольні розчини хльорофілю виділяють зі себе кисень, але все те оказалось завдяки обсервації Pringsheim'a і Kny (1897) лише злудою. Так само свобідні від протоплязматичного підкладу „grana“ хльорофілю, виставлені на сьвітло, не лише не виділяли зі себе кисня, але навіть приміщені на протоплязматичнім субстраті иньших тїл, того явища цїлком не оказували. В новійших часах (1900) робив також в тім напрямі дослїди Bejjerink і переконав ся, що в розтертих хльоропластах відбуваєть ся також процес асіміляції, бо метода бактеріольоґічна ствердила у них виразно виділюванє кисня. Після остаточних вислїдів його працї, спосібність до асіміляції заховують навіть найдрібнійші частинки зеленого первища. Molisch (1904) повторив той дослїд з тим самим успіхом: він змішав ґліцериновий екстракт хльорофілю зі сьвіжого листя з порошком скоро і обережно висушеного листя, а виставивши його відтак на сонце, запримітив розклад двокису вугля і виділюванє кисня. Однаковож доси не удало ся ствердити правдивости сих дослїдів. Правдоподібно видїлюванє кисня в часї тих дослідів походить звідси, що богато заховало ся єще незнищених хльоропластів, по части також то явище могло бути викликаним посмертним розкладом через ензими. В виду сих наукових вислїдів мусимо нинї станути на тім, що хльорофіль віддїлений від первища, як барвина, асімілювати не може.

Чи однакож з другої сторони хльорофіль в лучности зі своїм протоплязматичним субстратом відграє в процесї асіміляційнім так важну ролю, як до послїдних часів приписували йому ботаніки, є річию сумнівною а обсервациї з послїдних часів вказують на щось противного. Знаємо пр. що істнує богато ростин виблїдлих, котрі отже є позбавлені хльорофілю а котрі мимо того асімілюють, як рівнож з другої сторони знаємо много бактерій тзв. пурпурових і зелених як bacterium viride, bacillus virescens, eubacillus multisporus, котрі на сьвітлї видїляють кисень, отже мусимо приймати, що асімілюють. Чи висше згадані бактерії длятого асімілюють, що їх пурпурова та зелена барвина зближена до хльорофілю, то на разї не звісно, однак в кождім разї отсї обсервациї вказують нам на се, що головну чинність в асіміляційнім процесї належить приписати радше протоплязматичній масї хльоропластів, чим самій барвинї, а через се чинність хльорофілю належить спровадити до чисто фізичної. Цікаві є під тим зглядом погляди Pringsheim-а, що створив так зв. „Lichtschirmtheorie“. Відмавляє він рішучо хльорофілеви хемічної чинности в асіміляційнім процесї і твердить, що хльорофіль в тім процесї сповняє чинність заслони, котрої завданем є хоронити протоплязму галинок перед надмірним віддиханем, та в котрої тїни можуть легко відбувати ся процеси асіміляції і редукції. Pringsheim перечить рішучо сьому, мовби хльорофіль улягав на сьвітлї тяглому розкладови і поновній реґенерації: він робив в тім напрямі численні досліди а ніколи не запримітив подібного розкладу. Після нього не CO_2 має викликувати розклад хльорофілю але кисень (O). Коли піддамо зелену клїтинку діланю сильних сонїшних лучів в атмосфері CO_2 без приступу кисня, хльорофіль позістає незмінним, підчас коли при тій самій інтензивности сьвітла вже мала скількість кисня вистарчить, щоби хльорофіль в протягу кількох хвиль знищити.

Погляд Pringsheima є о стільки неслушним, о скілько припускає він, що сьвітло може викликати який небудь вплив на процес віддиханя клїтинки, однакож друга часть його теорії, після котрої хльорофіль є тим чинником, котрого задачою є вглитати сонїшні лучі і переміняти їх в хемічну енерґію, має дійсно наукову основу.

Хльорофіль ділає тут іменно як sensibilisator. Звісно приміром, що срібні соли, якими послугують ся головно при фотоґрафії, суть вражливі лише на фіолетове сьвітло і лише під їх впливом розкладають ся; червоні лучі цїлком на них не ділають. Коли однакож покриємо ті соли якоюсь барвиною, котра вглитати-ме червоне сьвітло, ділане сих лучів сейчас на них переносить ся. Подібне явище заходить, здає ся, в галинках зеленї. Хльорофіль є тою барвиною, котра вглитає соняшні лучі і то лучі ріжної краски в ріжнім степени. І подібно як лучі фіолетні, вгличені плитою фотоґрафічною, викликують на нїй певні зміни натури хемічної, так і сонїшні лучі вгличені хльорофілем, стають ся жерелом енерґії, котра викликує розклад двокису вугля (CO_2). Сьвітло падаючи на хльорофіль, вправляє в рух єго молекули; виконують се головно ті лучі сьвітла, котрих довжина филь відповідає найбільше филям дрожачих молекулів. Хльорофіль хватає отже живу енерґію сонця в летї і вязнить єї в тїлї ростини. Длятого слушно каже Jul. Meyer, що відкрив право о непропащій енерґії: „Die Natur hat sich die Aufgabe gestellt, das der Erde zuströmende Licht im Fluge zu erhaschen und die beweglichste aller Kräfte in starre Formen umgewandelt aufzuspeichern. Zur Erreichung dieses Zweckes hat sie die Erdkruste mit Organismen überzogen, welche lebend das Sonnenlicht in sich aufnehmen. Diese Organismen sind die Pflanzen; die Pflanzenwelt bildet ein Reservoir, in welchem die flüchtigen Sonnenstrahlen fixiert werden“.

Сокаль дня 12/12 1911.

Лїтература.

1. Czapek Fr.: Biochemie der Pflanzen. 1905. Том I.
2. Ebermayer E.: Physiologische Chemie der Pflanzen 1882.
3. Grosglik S.: Z fizyologii roślin. (Fakty i przypuszczenia z dziedziny asymilacyi). 1889.
4. Haberlandt G.: Physiologische Pflanzenanatomie. II Aufl. 1896.
5. Hausen: Farbstoffe des Chlorophylls 1889.
6. Jost: Vorlesungen aus der Pflanzenphysiologie.
7. Knight: Sechs Pflanzen-physiologische Abhandlungen 1895.
8. Kraus G.: Zur Kentniss der Chlorophyllfarbstoffe 1872.
9. Marchlewski L.: Die Chemie des Chlorophylls 1895.
10. Meyer A.: Das Chlorophyllkorn 1884.
11. Meyer A.: Untersuchungen über die Stärkekörner 1895.
12. Monteverde: Das Absorbtionsspectrum des Chlorophylls 1893.
13. Pfeffer.: Pflanzenphysiologie 1897.
14. Pringsheim N.: Untersuchungen über das Chlorophyll. (Jahrbuch für wissenschaf. Botanik B. XII., 1881).
15. Sachs I.: Vorlesungen über Pflanzenphysiologie 1882.
16. Sachsse: Die Chemie und Physiologie der Farbstoffe, Kohlenhydrate und Proteinsubstanzen.
17. Schimper A. F. W.: Untersuchungen über die Chlorophyllkörner (Jahrbuch für wiss. Botanik. Bd. XVI. 1885).
18. Schunk und Marchlewski: Annalen der Chemie 1897.
19. Tschirch: Untersuchungen über das Chlorophyll 1884.
20. Tschirch: Berichte der botan. Gesellschaft. 1895.

	корон
Левицкий Володимир Материя і єї переміни	0.20
— Начерк термінольоґії хемічної	0·25
Левицкий Огоновский. Альґебра для висших кляс шкіл середних Частина I.	2 —
— „ „ „ „ „ „ „ II.	3·—
Матвіяс Софрон. Дещо про лучі Бекереля	0·20
— Новійші розсліди над лучами Бекереля	0 10
Мазуренко. Прохимію	0·42
Миколаєвич Як. Опис ґеоґрфаъ.-статист. повіти Камяндцкого	2· —
— Про падучі зьвізди	0·10
Наумович В Величина і будова звіздяного сьвіта	0 15
Налковський. Про воду на суші і в морі	0·80
Огоновский Петро. Учебник аритметики для низших кляс середних ч. I.	1 80
— „ „ „ „ „ „ ч. II.	1·80
— Учебник фізики для низших шкіл середних (вичерпане)	—·—
Озаркевич Евген. Досліди над переміною материї	0·20
— Про уробілїнну жовтачку	0·10
Охнич Михайло. Туберкульоза у людий і зьвірят	0·60
Окуневський Я. Листи з чужени 2 томи	8 —
Олехнєвич Р. Раси Европи	0·70
Пулюй Іван. Непропаща сила	0·20
— Нові і перемінні зьвізди	0 15
— Електрична централя Гогенфурт з 8 таблицями.	2 40
— Кругова діаграма ґенераторів для перемінних прудів.	0·25
Примак Федір. Єще кілька слів про глєву риб кістноскелетних	0·20
Подолинський С. Житє і здоровлє людий на Україні	3 —
Раковский Іван. Вік нашої землї	0·10
— Вулькани	0·20
— Істория а природничі науки	0.40
— Про землю, сонце і зьвізди	0·50
Ростафінський-Верхратский. Ботаніка для низших кляс	2·40
Рудницкий Стефан. Про плями сонїчні часть I. (вичерпане)	—·—
— „ „ „ „ II.	0·90
— Дещо з нашої популярно-природописної лїтератури	0.40
— Дещо про Антарктиду	0·20
— Знадоби до морфольоґії Карпатського сточища Днїстра	0·85
— Кілька гадок про ґеоґрафічні екскурсиї в середніх школах.	0·30
— Лїтературні новини до ґеоґрафії України-Руси	0·20
— Нинїшна ґеоґрафія	0·60
— Фізична ґеоґрафія при кінци XIX. століти.	1·20
— Начерк ґеоґрафічної термінольоґі	2·—
Савицкий Е. М. Ґеометрия для висших кляс	3.80
Сидорак Семен. Студия анатомічна над взаїмними відношенями знаряду слухового і міхура плавного у риб шарановатих і вюноватих	1· —
— Про погястки зібрані в Галичині	0 30
Сірий Юрій. Житє ростин	0·70
— Про сьвіт Божий	0·84
Стефанович Е. Зведеня інтеґралів елїптичних	0 15
Сумцов Н. О. Малорская Ґеограф. номенклятура	1·40
Уайт Р. Розвій ґеоґрафічних поглядів	0·30
— Розвій астрономічних поглядів	0·45
— Розвій поглядів на вселенну	0·90
Ферріср. Дарвінїзм	1·70
Флямаріон К. Небо. Астрономічна розвідка	2·40
Фрас Е. Нарис ґеольоґії	1·60

АДРЕСА:

Наукове Товариство імени Шевченка.

Львів, ул. Супінського ч. 21.

ADRESSE:

Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften, Lemberg, Supiński-Gasse 21.

ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛЇКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ XV. ВИПУСК II.

під редакцією

Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦЬКОГО, Дра ІВАНА РАКОВСЬКОГО
і Дра СТЕФАНА РУДНИЦЬКОГО.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND XV. HEFT II.

REDIGIERT VON

Dr. WLADIMIR LEWYĆKYJ, Dr. IWAN RAKOWŚKYJ
u. Dr. STEPHAN RUDNYĆKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1913.

Накладом Наукового Товариства ім. Шевченка.

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка.

Книгарня Наукового Товариства імени Шевченка

у Львові, Ринок ч. 10.

має на складі між иншими отсї книжки і брошури:

	корон
Бобяк Г. Про наші губи	0·30
— Причинки до ліхенольоґії східної Галичини	0·10
— Причинки до мікольоґії східної Галичини	0·45
Борис А. Житє	0·50
Брайтенбах В. Біольоґія в XIX. в.	0·25
Верхратский Іван. Ботаніка на низші кляси (2 вид.)	3·60
— Вправи мінеральоґічна	1·—
— Зоольоґія на низші кляси	3·—
— Начерк соматольоґії	3·—
— Нові знадоби номенклятури і термінольоґії природописної	1·40
— Соматольоґія коротко вібрана	1·80
Візнер Ю. Житє ростин у морі	0·15
Гірняк Юліян. Вплив температури на скорість декількох хемічних реакцій	0·10
— Начерк мінеральоґії і хемії для середних шкіл	2·40
— Про вплив синхронічної зміни концентрації	0·20
— Про періодичні хемічні реакції	0·10
— О проводі тепла в воднім розчині цукру	0·15
— Роля сталої, плинної і ґазової фази в хемічній рівновазї	0·45
— Beiträge zur chemischen Kinetik	2·—
Глїбовицький К. Микола Генрик Абель	2·—
— Права руху маятника	0·20
Горбачевський І. Загальний метод добуваня нуклеїнного квасу з орґанів	0·10
— Причинки до пізнаня виживи сільського населеня галицького Поділя	0·40
— Уваги о термінольоґії хемічній	0·10
Горницький З. Проект еліпсоґрафу	0·10
Грицак М. Аритметика на IV. і V. кл.	2·20
— Ґеометрія для II. і III. кл.	3·—
Ґеринович В. Про воздух	0·30
— Жителі Марса	0·20
— Про конець світа	0·30
— Трясенє землї	0·20
Ґінтер С. Історія ґеоґрафічних відкрить	2·20
Зарицький Т. Кров і її значінє для людського орґанізму	0·40
Збірник математично-природописно-лїкарської секції Наукового Товариства імени Шевченка. Том IV/2	1·—
— Томи III/1, 2. IV/1, V/1, 2, VI/1, 2, VII/1, VIII/1 по	2·—
— Томи I. II, VI/2, VIII/2. XV/1 по	3·—
— Томи IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XVI по.	5·—
Збірник медичної секції Українського Наукового Товариства в Київі. Книга I-ша	2·80
Збірник природничо-технічної секції Українського Наукового Товариства в Київі. Книга I-ша	4·20
Кляйн Ф. Наука ґеометрії	0·60
Кос М. Лічене трахоми	0·10
— Очні хиби у новобранців	0·10
— Про голові справи (III. вид.)	0·50
Кравс К. — Цегельський Р. Основи хемії	3·—
Кранц І. Льоґаритми (II. вид.)	1·30
Кучер В. Динаміка електрону	1·—
— Основи електроніки	1·20
Левицький В. Відношенє метричної ґеометрії до метової	0·25
— Ґеометрия метова в оптиці	0·40
— Додаток до теорії тяглих дробів і модулової ґрупи	0·15

ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛЇКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ XV. ВИПУСК II.

під редакцією

Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦЬКОГО, Дра ІВАНА РАКОВСЬКОГО
і Дра СТЕФАНА РУДНИЦЬКОГО.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND XV. HEFT II.

REDIGIERT VON

Dr. WLADIMIR LEWYĆKYJ, Dr. IWAN RAKOWSKYJ
u. Dr. STEPHAN RUDNYĆKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1913.

Накладом Наукового Товариства ім. Шевченка.

Здрукарні Наукового Товариства імени Шевченка.

ЗМІСТ.

INHALT.

Студії з теорії конґруенцій.

(Studien aus der Kongruenzentheorie).

НАПИСАВ

Др. Микола Чайковський.

Опираючись на клясичній теорії конґруенцій, даній Gauss'ом в „Disquisitiones arithmeticae“[1], можемо розвязувати тільки такі конґруенції, які мають самі дійсні корінї. Щоби одначе перевести розвязку конґруенцій вповнї, треба за почином Galois[2] ввести рід мнимих величин, які тут гратимуть подібну ролю, що звичайні мнимі числа $a + bi$ ($i^2 = -1$) в теорії рівнань. Отсю думку перевели новійші математики (головно Американцї: Cole, Moore і Dickson[3]), будуючи теорію „поля Galois“; вона відповідає подекуди теорії альґебраїчних тїл.

На тій основі переведена тут теорія конґруенцій третього й четвертого степеня з первочисельним модулом. Тим предметом займав ся вже Cauchy[4], але тільки в тїснім обсягу дійсних розвязок. Щоби одначе могти тут перевести повну теорію згаданих конґруенцій, подаємо в першій части нашої розвідки теорію поля Galois в тім видї, як її опісля будемо примінювати до нашої теми.

I. Теорія поля Galois.

§. 1.

1. З елєментарної теорії чисел звісно, що всї числа природного ряду

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m-1,\ m,\ m+1,\ \ldots \qquad (1)$$

---

[1] Lipsiae 1801, — Werke Bd. I, Leipzig, 1870.

[2] Sur la théorie des nombres, 1831.

[3] Dickson, Linear groups with an exposition of the Galois Field theory. Липск, 1901.

[4] Cauchy, Exercices de Mathématiques, IV. Année, Paris 1829. — Oeuvres, S. II, T. IX. Paris 1891.

розпадають ся після модула m на m кляс; кожда з них містить в собі безконечно богато чисел, пристайних поміж собою (mod. m), так що замість всіми числами природного ряду, можемо в деяких проблємах математики оперувати клясами непристайних поміж собою чисел

$$K_0, K_1, K_2, \ldots, K_{m-1} \tag{2}$$

згл. їх репрезентантами, т. є системою яких небудь чисел, вибраних довільно по одному з кождої кляси. Коли сю систему становлять числа

$$0, 1, 2, \ldots, m-1, \tag{2a}$$

то називаємо їх числами модула m або системою найменших останків модула m і пишемо се так: [mod. m]. До кляси K_0 належать всї многократи модула.

2. Визначну ролю в теорії чисел грає повна система останків первочисельного модула p:

$$0, 1, 2, \ldots, p-1; \tag{2aa}$$

її назвемо полем Galois степеня p і означимо $GF[p]$.

Взагалї називаємо полем, тїлом або обсягом вимірности систему, яка має ту прикмету, що її елєменти, лучені з собою при помочи операцій додаваня і множеня, дають на вислїд опять числа тої системи. Таким полем є система (2aa); вона має ще й ту прикмету, що скількість елєментів, які в нїй містять ся, є скінчена; се слїдує рівно-ж з елєментарної теорії чисел. Поле Galois степеня p має отже загалом такі прикмети:

1) При помочи операції додаваня одержуємо з кождих двох елєментів того поля, a і b, третій елємент s однозначно; так само при помочи множеня (тут мусимо одначе виключити елємент 0) однозначно елємент m:

$$a + b = s, \qquad a b = m.$$

2) Обі операції (додаваня й множеня) є злучні, т. є коли $(a + b)$ є сумою чисел a і b, а $(a b)$ їх добутком, то

$$\big((a + b) + c\big) = \big(a + (b + c)\big) \text{ і } \big((a b) c\big) = \big(a (b c)\big).$$

3) З

$$a + b = d \qquad \text{і} \qquad a + c = d$$

або

$$a b = e \qquad \text{і} \qquad a c = e$$

слїдує:

$$b = c.$$

4. Обі операції є перемінні, т. є

$$(a + b) = (b + a) \qquad \text{і} \qquad (a b) = (b a).$$

5) Врештї додаванє в полученю з множенєм є роздільне:

$$a (b + c) = a b + a c.$$

Коли за комбінуючу операцію приймемо додаване, то елементи ряду (2аа) творять скінчену ґрупу порядку p; беручи-ж за основу операцію множеня, одержимо з чисел

$$1, 2, 3, \ldots, p-1 \qquad (2aa^*)$$

рівно-ж скінчену ґрупу порядку $p-1$. Систему (2аа*) назвемо зредукованим полем Galois і зазначимо її $GF[p]^*$. До неї належать всї числа, перві супроти модула.

В обох разах є поле Galois перемінною ґрупою.

Елемент 0 грає супроти множеня особливу ролю; іменно, яке-б не було x, є завсїди:

$$0 . x = 0 \qquad \text{і} \qquad x . 0 = 0,$$

і навпаки: коли добуток двох чисел належить до кляси K_0, то принайменше один з чинників мусить належати до сеї кляси.

3. З прикмет ґрупи слїдує, що до кождого елемента a в $GF[p]$ єствує один і тільки один такий елемент b, який доданий до a дасть число з кляси K_0:

$$a + b \equiv 0 \ (\text{mod. } p);$$

його значимо

$$b \equiv -a \ (\text{mod. } p).$$

Проте є в $GF[p]$ можлива до переведеня операція відниманя.

Подібно є в $GF[p]^*$ завсїди можлива операція діленя; слїдує се з т. зв. теореми Fermat'a. Випишім іменно $GF[p]^*$ і помножім всї його числа одним з поміж них:

$$1.\ a,\ 2.\ a, \ldots, (p-1).\ a,$$

то через те зрепродукуємо його, тільки в иншім порядку. Добуток всїх його чисел є пристайний (mod. p) до добутка всїх чисел ряду (2аа*), бо в склад обох добутків входять репрезентанти тих самих кляс $K_1, K_2, \ldots K_{p-1}$:

$$1.\ a.\ 2.\ a.\ 3.\ a \ldots (p-1).\ a \equiv 1.\ 2.\ 3 \ldots (p-1) \ (\text{mod. } p)$$

або

$$(p-1)!\ (a^{p-1} - 1) \equiv 0 \ (\text{mod. } p).$$

Добуток $(p-1)!$ є супроти модула p первий, отже мусить бути

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod. } p). \qquad (3)$$

Отсей взірець є характеристичний для $GF[p]^*$. З нього слїдує, що до кождого числа a в $GF[p]^*$ дасть ся дібрати таке число a', що добуток тих обох чисел буде належати до кляси K_1:

$$a a' \equiv 1 \ (\text{mod. } p).$$

Бо помножім сю конґруенцію через a^{p-2}, то се дасть:

$$a' \equiv a^{p-2} \ (\text{mod. } p);$$

a є супроти модула p перве, отже і a^{p-2} належить до $GF[p]^*$.

Число a' називаємо **відворотностю** числа a' в $GF[p]^*$ або його **товаришем** (Sozius) і значимо символїчно:

$$a' \equiv \frac{1}{a} \text{ (mod. } p).$$

4. Прикмети 1) — 5) і взорець Fermat'a є характеристичні для кождого **скінченого поля**[1]). Покажемо, що коли система p елементів, де p є перше число, має ті всі прикмети, то вона творить скінчене поле, отже коли скількість елементів поля є первим числом, то його можна вважати полем Galois степеня p.[2])

Нехай будуть

$$A, B, C, \ldots, L \tag{4}$$

даними p елементами. Виберім з поміж них який небудь елемент H і утворім ряди

$$H + A, H + B, H + C, \ldots, H + L, \tag{4а}$$
$$A + H, B + H, C + H, \ldots, L + H, \tag{4б}$$

то вони оба є ідентичні — не вважаючи на порядок членів — з рядом (4) — (прикмета 1). Проте в першім з них мусить містити ся один елемент $H + I$, рівний елементови H з (4),

$$H + I = H,$$

а в другім елемент $J + H$, також рівний H:

$$J + H = H.$$

Звідси слїдує:

$$G + (H + I) = (G + H) + I = G + H$$
$$(J + H) + K = J + (H + K) = H + K$$

(прикмета 2), т. зн.: який би не був елемент M, то в ряді (4) єствує завсїди такий елемент I, який доданий до M з правої сторони не змінить його, — і такий елемент J, який доданий до M з лївої сторони рівно-ж не викличе в нїм нїякої зміни:

$$M + I = M,$$
$$J + M = M.$$

Врештї після прикмети 3) маємо: для $M = J$ з першого рівнаня

$$J + I = J$$

і для $M = I$ з другого:

$$J + I = I,$$

отже

$$J = I.$$

---

[1]) Під „скінченим полем“ розуміємо тут систему, зложену із **скінченого числа** елементів — у відріжненю від „скінчених альґебраічних тїл“, де скінченість лежить у тім, що при помочи основи, зложеної із скінченого числа величин, можемо представити кожду величину того тїла. — Пор. Weber, Algebra, I. §. 150, II. §. 80. (endlicher Kongruenzkörper).

[2]) Пор. пр. Borel-Drach, Théorie des nombres et l'algèbre supérieure (d'après les conferences par M. J. Tannery), Paris 1895, Note II, стр. 343.

Єствує проте в ряді (4) один і тільки один такий елемент I, який доданай з лївої або з правої сторони до котрого небудь иншого елемента, не змінить його. Огсей елемент відповідає клясі K_0 в $GF[p]$.

Возьмім тепер знова довільний елемент A і творім ряд:

$$A,\ (A+A),\ ((A+A)+A),\ \ldots\ldots,$$

якого числа будемо в скороченю називати:

$$A,\ 2A,\ 3A,\ \ldots\ldots,\ mA,\ \ldots\ldots; \qquad \text{(4в)}$$

на основі прикмети 1) містить він в собі тільки ті елементи, які є в (4), і є обмежений, отже його елементи будуть повторювати ся. Нехай на $(q+1)$-ім місцї стоїть елемент рівний першому; тоді возьмім під розвагу тільки q перших членів. — Коли-б ряд (4в) не вичерпував ще всіх елементів (4), то возьмім один з нових елементів B і при його помочи творім новий ряд:

$$A+B,\ 2A+B,\ 3A+B,\ \ldots\ldots,\ qA+B;$$

на його $(q+1)$-ім місцї буде стояти рівно-ж елемент з тої самої кляси, що перший елемент. Всї члени того ряду є відмінні від ряду (4) — (прикмета 3). — Коли ще тепер не зрепродукований цїлий ряд (4), то творимо при помочи нового елемента C третій такий самий ряд, аж врештї вичерпаємо всї елементи з (4); кождий з частинних рядів буде мати таку саму скількість членів, т. є q, отже

$$p=kq,$$

а що ми приймили p перве, то $k=1$, отже $p=q$, т. зн. ряд (4в) вичерпує всї елементи.

Рядом (4в) маємо здефінїоване і множенє, отже тою дорогою можемо перевести всї дальші анальоґії; мусимо ще тільки доказати, що коли модул m є зложений, то повна система чисел [mod. m] не творить поля Galois. Бракує тут іменно теореми Fermat'a. Добутки всїх чисел обох рядів

$$1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m-1,$$
$$1a,\ 2a,\ \ldots\ldots,\ (m-1)a,$$

є — що правда — пристайні до себе (mod. m), отже:

$$(m-1)!\ (a^{m-1}-1) \equiv 0 \ (\text{mod. } m),$$

зате кінцева замітка з уст. 2. не має тут приміненя, бо m і $(m-1)!$ мають $HC\Pi > 1$, отже модул m можна також представити як добуток двох чисел $< m$.

Натомість, коли уставимо в ряд всї елементи

$$a_0{:}\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_{\varphi(m)-1},$$

перві супроти модула m (їх є $\varphi(m)$ — теорема Gauss'a), то при помочи якого небудь з них можемо утворити добуток

$$a_0,\ a_1,\ .\ .\ .\ .\ a_{\varphi(m)-1}\ [a^{\varphi(m)} - 1] \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ m),$$

з якого слїдує

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\ m), \tag{5}$$

бо чинник перед [ ] є первий супроти m. Се т. зв. **узагальнена теорема Fermat'а.**

Звідси слїдує, що система p елементів, які сповнюють прикмети 1) — 5), є ідентична з $GF[p]$.

5. З огляду на неважність теореми Fermat'а для зложених модулів, мусимо зазначити, що:

1) Лінїйна конґруенція

$$ax \equiv b \ (\mathrm{mod.}\ m) \tag{6}$$

є тільки тодї рішима, коли $НСП$ чисел a і m містить ся і в b.

2) Коли d є $НСП$ чисел a і b, то конґруенцію можемо скоротити через d, лишаючи модул незмінений.

3) Коли d є $НСП$ чисел a, b і m, то обі сторони конґруенції можемо скоротити через d; модул можемо рівно-ж скоротити або лишити без зміни.

4) Коли $(a, m) = 1$, то конґруенція (6) має тільки одну розвязку. Бо рівнозначне з нею Діофантове рівнанє

$$ax - my = b,$$

не дасть ся нїяк скоротити; воно є рішиме, а вартости на x творять аритметичний поступ з ріжницею m, т. є всї є поміж собою пристайні (mod. m).

5) Коли $(a, m) = d$, конґруенція має d ріжних розвязок, бо з конґруенції (6) слїдує

$$\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d}\left(\mathrm{mod.}\ \frac{m}{d}\right), \tag{6a}$$

Тут є $\left(\frac{a}{d}, \frac{m}{d}\right) = 1$, отже конґруенція має одну розвязку — назвім її z —, а всї її прочі розвязки є $\equiv z \left(\mathrm{mod.}\ \frac{m}{d}\right)$. Натомість (6) може мати ще й инші розвязки, бо числа, непристайні до себе $\left(\mathrm{mod.}\ \frac{m}{d}\right)$ не, мусять бути непристайні (mod. m). Отже, коли $x \equiv z \left(\mathrm{mod.}\ \frac{m}{d}\right)$ є розвязкою конґруенції (6а), то (6) має такі коріні

$$x \equiv z + i\ \frac{m}{d}\ (\mathrm{mod.}\ m)$$

$$(i = 0,\ 1,\ .\ .\ .,\ d - 1),$$

бо вставивши се в (6) одержимо

$$a\left(z + i\frac{m}{d}\right) = az + i.\frac{a}{d}.m \equiv az \equiv b\ (\mathrm{mod.}\ m).$$

§. 2.

6. До тепер обговорили ми головні прикмети поля Galois степеня p і виказали, що повна система останків модула m творить тільки тоді поле Galois, коли m є первим числом. Тепер займемо ся конструкцією обширнійших піль Galois і докажемо, що їх степенем може бути тільки степень первого числа, p^n.

Альґебраїчний многочлен степеня m, якого сочинники є числами з $GF[p]$:

$$F(x) = a_0\, x^{m} + a_1\, x^{m-1} + \ldots + a_{m} \text{ (mod. } p), \qquad (1)$$

а a_0 не належить до кляси K_0, називаємо функцією m-того степеня в $GF[p]$. За сочинники $a_0, a_1, \ldots, a_m$ можемо приймати всї числа $GF[p]$ з виїмком $a_0 \equiv 0$ (mod. p), отже скількість всїх функцій m-ого степеня в $GF[p]$ є $p^m(p-1)$. Коли-ж чинник a_0 добудемо перед скобку і всї функції, що ріжнять ся тільки тим постійним чинником, будемо вважати одною й тою самою функцією, то скількість всїх ріжних функцій є p^m, проте:

В $GF[p]$ є p^m ріжних функцій m-того степеня.

7. Функцію $F(x)$ називаємо зведимою або незведимою в $GF[p]$, відповідно до того, чи можливе або ні розложити її на добуток

$$F(x) \equiv g(x)\, h(x) \text{ (mod. } p) \qquad (2)$$

двох инших функцій в $GF[p]$, степенїв низших як степень функції $F(x)$, а висших як 0. — Чинники $g(x)$ і $h(x)$ є зведимі або ні; коли вони оба зведимі, то функція $f(x)$ m-того степеня дасть ся остаточно розложити на m лінійних чинників:

$$f(x) \equiv (x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\,\ldots\,(x-\alpha_m) \text{ (mod. } p) \qquad (3)$$

Коли положимо $x \equiv$ одному з α, тодї буде

$$f(\alpha_i) \equiv 0, \text{ (mod. } p),$$

отже $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ є корінями конґруенції

$$f(x) \equiv 0 \text{ (mod. } p). \qquad (4)$$

В елементарній теорії конґруенцій доказують ся такі твердженя:

I. (основна теорема): Конґруенція m-того степеня з первим модулом не може мати більше як m ріжних або однакових чинників[1].

II. Ліва сторона конґруенції є (mod. m) ділима кождим „кориневим чинником" $x - \alpha_i$.

III. Сочинники конґруенції є основними симетричними функціями її корінїв.

IV. Многократні корінї конґруенції є заразом корінями її похідних.

---

[1] Може їх мати менше як m.

V. Коли функцію $f(x)$ розложити на добуток двох инших (3), і коли (4) має m корінів, то обі конґруенції:

$$g(x) \equiv 0 \text{ і } h(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

мають як раз по тільки корінів, кілько виносить їх степень.

VI. Конґруенція

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \tag{5}$$

має за корінї всї числа $GF[p]$.

З V. і VI. слідує спосіб визначуваня фактичної скількости корінів даної конґруенції (4): методою Евклїда вишукуємо *НСП* функцій $f(x)$ і $x^{p-1} - 1 \pmod{p}$; він містить в собі всї корінї даної конґруенції, отже його степень подає скількість її корінів. — Отся метода походить від Libri[1]).

Із сказаного слїдує, що як при рівнанях, так і тут зведимість і рішимість конґруенцій (mod. p) є ідентичні поняття.

Про рішимість (зведимість) конґруенцій можемо рішати на основі таких тверджень:

I. Щоби конґруенція (4) була рішима, є конечне і достаточне, щоби циклїчний визначник $\varDelta$ степеня $p - 1$, утворений із сочинників функції $f(x)$, був $\equiv 0 \pmod{p}$.

II. Конґруенція (4) має точно r ріжних корінів, коли ряд визначника $\varDelta$ є r. [2]).

III. Виріжник незведимої в $GF[p]$ функції є $\equiv (-1)^{n-1}$ (mod. p); коли $f(x)$ розпадаєть ся на r незведимих (mod. p) чинників, є її виріжник $\equiv (-1)^{n-r}$ (mod. p)[3]).

8. Займаючи ся квадратними функціями в $GF[p]$, приходимо до поняття квадратних останків і не-останків.

Скількість всїх квадратних функцій в $GF[p]$ є p^2, бо в

$$f(x) = x^2 + ax + b \tag{6}$$

можуть a і b приймати всї вартости з $GF[p]$.

Повну квадратну конґруенцію

$$x^2 + ax + b \equiv 0 \pmod{p} \tag{6a}$$

---

[1]) Mémoires de Mathématiques, I. p. 164.

[2]) Коли даний визначник $\varDelta$ степеня k і всї його підвизначники степенів 1, 2, 3, ... l мають вартість 0 вгл. $\equiv 0$ (mod. p), а бодай один з підвизначників ряду $l + 1$ є $\equiv 0$ вгл. $= 0$, тодї кажемо, що $\varDelta$ має ряд (Rang) $k - l$ (Kronecker, Frobenius).

[3]) Теореми I—II: Rados, Zur Theorie der Kongruenzen höheren Grades, Crelle's Journ. 89. (1886), p. 258—260; Kronecker, ibid. p. 320; Gegenbauer, Wiener Ber. 95. 2 (1887), p. 165—169. 610—617. — Теорема III. Stickelberger, Verhandlungen des I. intern. math. Kongresses in Zürich, 1897, p. 186; Voronoi, Verh. des III. int. math. Kongr. in Heidelberg, 1904, p. 186.

розвязуємо подібно як квадратне рівнане. Сочинник a можемо заступити яким небудь парнистим числом, що належить до тої самої кляси: $a \equiv 2a'$ (mod. p), отже напишемо:

$$(x+a')^2 \equiv a'^2 - b \ (\text{mod. } p), \tag{6б}$$

проте повну конґруенцію зводимо на двочленну

$$y^2 \equiv s \ (\text{mod. } p). \tag{7}$$

Вона може бути рішима або ні; в першім разі називаємо s квадратним останком, в другім квадратним не-останком модула p; коли-б було $s \equiv 0$, то конґруенція мала би один подвійний корінь $y \equiv 0$. Виключивши се, бачимо, що теорема Fermat'а наводить нас на такі крітерії рішимости конґруенції (7): коли

$$s^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (\text{mod. } p), \tag{8а}$$

то конґруенція є рішима; вона є нерішима, коли

$$s^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ (\text{mod. } p). \tag{8б}$$

Кожде число $GF[p]$* мусить сповнювати (для $p > 2$) одну і тільки одну з тих двох формулок; їх називаємо крітеріями Euler'а. Їх заступив Legendre символом $\left(\frac{s}{p}\right)$, іменно є:

$$\left(\frac{s}{p}\right) \equiv s^{\frac{p-1}{2}} \ (\text{mod. } p), \tag{9}$$

отже: 1) коли s є кв. останком, маємо

$$\left(\frac{s}{p}\right) = +1;$$

2) в разї не-останка:

$$\left(\frac{s}{p}\right) = -1.$$

3) Коли-ж для повности допустимо і $s \equiv 0$, то

$$\left(\frac{s}{p}\right) = 0.$$

Вартість символа $\left(\frac{s}{p}\right)$ називаємо квадратним характером числа s супроти модула p, отже: $\left.\begin{matrix}\text{останки}\\ \text{не-останки}\end{matrix}\right\}$ мають кв. характер ± 1, числа кляси K_0 характер 0.

Скількість останків і не-останків кождого модула є однакова і виносить по $\frac{p-1}{2}$. Добуток двох останків або двох й не-останків є останком, добуток останка й не-останка не-останком, бо

$$\left(\frac{s}{p}\right) \cdot \left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{st}{p}\right). \tag{9а}$$

В дальшім будемо потрібувати крітерій для кв. характеру чисел ± 1, ± 2, ± 3; вони є:
$+1$ є завсїди останком; -1 останком для первочисельних модулів $p \equiv 1$ (mod. 4), не-останком для $p \equiv -1$ (mod. 4), т. зн.

$$\left(\frac{+1}{p}\right) = +1, \ \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}. \qquad (9б)$$

Для ± 2:

$p = 8n+1$	$8n+3$	$8n+5$	$8n+7$
$\left(\frac{2}{p}\right) = +1$	-1	-1	$+1$
$\left(\frac{-2}{p}\right) = +1$	$+1$	-1	-1

Для ± 3:

$p = 12n+1$	$12n+5$	$12n+7$	$12n+11$
$\left(\frac{3}{p}\right) = +1$	-1	-1	$+1$
$\left(\frac{-3}{p}\right) = +1$	-1	$+1$	-1

9. Анальоґічно до квадратних останків і не-останків дефініюємо останки й не-останки всїх инших степенїв. Іменно, коли двочленна конґруенція

$$y^n \equiv s \ (\text{mod. } p) \qquad (10)$$

є рішима, s є n-тим (степенним) останком; коли вона нерішима, s є n-тим (степенним) не-останком. (Приймаємо, що s не є многократю модула).

Коли s належить до кляси K_1, маємо т. зв. одиничну конґруенцію (Einheitskongruenz):

$$x^n \equiv 1 \ (\text{mod. } p); \ (n \geq 3) \qquad (11)$$

вона є анальоґічна до рівнань подїлу кола. Її розвязки будемо називати n-тими коріннями одиниці (mod. p).

Коли r є найменшим виложником, для якого є $z^r \equiv 1$ (mod. p), тодї кажемо, що z належить (mod. p) до виложника r. Коли $r = p-1$, z є первісним n-тим коренем одиниці (mod. p); коли $r < n$, корінь називаємо непервісним. В такім разї є $n = k \cdot r$.

Нехай буде $n = p - 1$; тодї — на основі теореми Fermat'а — є всї числа $GF[p]$ n-тими коріннями одиницї, та не всї вони належать до виложника $p-1$; пр. квадратні останки належать до виложника $\frac{p-1}{2}$. Коли ніяка низша степень числа g, аж щойно $(p-1)$-ша, є $\equiv 1$ (mod. p), тодї називаємо g первісним коренем конґруенції (12) або первісним коренем числа p.

Всї корінї, спільні обом конґруенціям

$$x^{\alpha} \equiv 1 \text{ і } x^{\beta} \equiv 1 \pmod{p} \qquad (11a)$$

є корінями конґруенції

$$x^{\delta} \equiv 1 \pmod{p}, \qquad (11б)$$

де $\delta = (\alpha, \beta)$.[1] Отже, коли α і β є перві супроти себе, то обі конґруенції (11a) не мають спільних корінїв крім $x \equiv 1$.

Виложники, до яких належать (mod. p) числа $GF[p]^*$, є подільниками числа $p - 1$.

До кождого подільника d числа $p - 1$ належить (mod. p) $\varphi(d)$ чисел з $GF[p]^*$. До виложника $p - 1$ належить (mod. p) $\varphi(p - 1)$ чисел, т. зн. кожде число p має $\varphi(p - 1)$ первісних корінїв.

Коли g є одним із первісних корінїв числа p, то ряд

$$1, g, g_2, \dots, g^{p-2} \qquad (12)$$

є ідентичний — не вважаючи на порядок чисел — з $GF[p]^*$, отже всї ті числа є поміж собою ріжні. Отже до кождого числа з $GF[p]^*$ належить одна із $p - 1$ перших степенний числа g, т. зн. один із виложників від 0 до $p - 2$. Коли знайдемо, що

$$s \equiv g^{\sigma} \pmod{p}, \qquad (13)$$

то σ називаємо показчиком числа p (при основі g):

$$\sigma \equiv \operatorname{ind}_g s$$

згл.

$$\sigma \equiv \operatorname{ind}_g s \pmod{p - 1}, \qquad (14)$$

бо виложники повторюють ся що $p - 2$.

Теорія показчиків є анальоґічна з теорією льоґаритмів; вона дуже придатна до розвязки двочленних конґруенцій.

Конґруенція (10) є рішима, коли

$$s^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1 \pmod{p}, \qquad (15)$$

де $d = (p - 1, n)$; вона має тодї d корінїв. Назвім $y_0 \equiv g^{\eta_0}$ один з її корінїв, то прочі корінї будуть

$$y_0, \alpha y_0, \alpha^2 y_0, \dots, \alpha^{d-1} y^0,$$

де $\alpha \equiv g^{\frac{p-1}{d}}$. Формулка (15) є анальоґічна до крітерії Euler'а; вона висказує, що a є n-тим останком числа p. Символ, анальоґічний до Legendre'ового, є;

$$\left(\frac{s}{p}\right)_n = 1. \qquad (16)$$

10. Приміненя. 1) $n = 2$; тодї є $p - 1$ паристе, отже $d = (p-1, 2) = 1$. Крітерія Euler'а звучить, як знаємо: $s^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \pmod{p}$;

---

[1] Знаком (m, n) зазначуємо $НСП$ чисел m і n.

маємо по $\frac{p-1}{2}$ останків і не-останків. Первісні другі корінї з одиниції (mod. p) є: $+1$ і -1.

2) В разї $n=3$ маємо дві можливости: а) $p\equiv 1$ (mod. 6), б) $p\equiv -1$ (mod. 6); числа всїх инших форм не є первні.

а) Коли $p\equiv 1$ (mod. 6), то $d=3$, отже одинична конґруенція $z^3\equiv 1$ (mod. p) має три розвязки: 1, α, α^2, де $\alpha\equiv g^{\frac{p-1}{3}}$. Двочленна конґруенція (10) є рішима, коли $s^{\frac{p-1}{3}}\equiv 1$ (mod. p), нерішима, коли $s^{\frac{p-1}{3}}\equiv\alpha$ або α^2, отже коли один її корінь є r, то два другі є αr і $\alpha^2 r$. Єствує проте $\frac{p-1}{2}$ кубових останків, а $2.\frac{p-1}{3}$ не-останків; всї кляси чисел $GF[p]$ дїлять ся на три громади так, що кожде число i тої громади є $\equiv\alpha^i$ (mod. p) ($i=0, 1, 2$). Кубовий характер числа s значимо так:

$$\left[\frac{s}{p}\right]\equiv s^{\frac{p-1}{3}}\ \text{(mod. } p). \tag{17}$$

б) $p\equiv -1$ (mod. 6); тодї є $p-1=6m-2$, отже $d=(6m-2,3)=1$, проте крітерія звучить $s^{p-1}\equiv 1$ (mod. p). В такім разї всї числа $GF[p]^*$ є кубовими останками, отже двочленна конґруенція (10) є завсїди рішима, зате одинична конґруенція має тільки одну розвязку, $x\equiv 1$.

3) $n=4$. Тут мусимо розріжнити рівно-ж дві можливости: а) $p\equiv -1$ (mod. 4), б) $p\equiv +1$ (mod. 4).

а) Коли p має форму $4m-1$, то $p-1=4m-2$, отже $d=2$; одинична конґруенція $x^4\equiv 1$ (mod. p) може мати очивидно тільки дві розвязки: $+1$ і -1. Крітерія для двоквадратного характеру числа s є проте ідентична з Euler'овою для квадратних останків; отже кождий квадратний $\left\{\begin{matrix}\text{останок}\\ \text{не-останок}\end{matrix}\right\}$ є в тім разї і двократним $\left\{\begin{matrix}\text{останком}\\ \text{не-останком}\end{matrix}\right\}$ того самого числа — і навпаки.

б) В разї $p\equiv 1$ (mod. 4) є $p-1=4m$, отже $d=4$. Одинична конґруенція має чотири розвязки; 1, α, α^2, α^3, де $\alpha\equiv g^{\frac{p-1}{4}}$. З огляду на те, що $\alpha^2\equiv g^{\frac{p-1}{2}}$, а g є первісним коренем, отже належить до виложника $p-1$, є $\alpha^2\equiv -1$, а дальше $\alpha^3\equiv -\alpha$, проте корінї згаданої конґруенції можна написати також так: 1, α, -1, $-\alpha$.

Крітерією рішимости для $y^4\equiv s$ (mod. p) є тут $s^{\frac{p-1}{4}}\equiv 1$ (mod. p), а корінї тої конґруенцїї мають вартости r, $r\alpha$, $-r$, $-r\alpha$, де

$r^4 \equiv s$ (mod. p). Величина $s^{\frac{p-1}{4}}$ може приймати (mod. p) такі чотири вартости: ± 1, $\pm \alpha$; супроти того всї числа $GF[p]^*$ розпадають ся на чотири кляси, відповідно до того, до котрого з первісних четвертих корінїв одиницї (mod. p) є пристайна його $\frac{p-1}{4}$-ша степень.

Теорію двоквадратних останків перевів Gauss[1]), розширивши обсяг дїйсних чисел на числа форми $a + bi$, де i є коренем рівнаня $x^2 + 1 = 0$, а a і b належать до $GF[p]$; він дав тим чином початок теориї альґебраїчних чисел. Подібно ужив Eisenstein[2]) коріня рівнаня $x^3 = 1$, т. є величини $\varrho = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{3}$, до збудованя теориї кубових останків.

§. 3.

11. Займемо ся тепер дальше теорією поля Galois. Ми сказали, що скількість всіх функцій m-того степеня в $GF[p]$

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m \tag{1}$$

є $p^m(p-1)$ згл. p^m — відповідно тому, чи функції, що ріжнять ся постійним чинником, будемо вважати ріжними поміж собою, чи однаковими.

Нехай $F_n(x)$ буде якою небудь незведимою функцією в $GF[p]$ степеня n; тоді конґруенція

$$F_n(x) \equiv 0 \text{ (mod. } p) \tag{2}$$

не має корінїв в $GF[p]$. Длятого дефініюємо, подібно як в альґебрі або теориї альґебраїчних чисел, її коріні як нові величини, необняті полем Galois степеня p. Отсї величини називають ся **мнимими величинами Galois**, бо він перший впровадив їх до теориї конґруенцій.[3]) — З огляду на те, що конґруенція n-того степеня не може мати більше як n корінїв (уст. 7), дефініює нам кожда незведима конґруенція (2) точно n ріжних, мнимих чисел Galois. Проте можемо висказати таку **теорему** (I), анальоґічну до **основної теореми альґебри**:

---

[1]) Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio I. et II., Gottingae 1829/32. — Werke Bd. II. — Пор. рівно-ж Bachmann, Die Lehre von der Kreisteilung, Leipzig 1872, Vorlesung 13—16.

[2]) Crelle's Journ., Bd. 27, 28. Bachmann, op. cit.

[3]) Galois, Sur la théorie des nombres, Bulletin des sciences mathém. de Férussac, 1830. — Oeuvres, p. 17., éd. Liouville 1946. — Abhandlungen über die algebraische Auflösung von Gleichungen, von Abel und Galois, herausg. v. Maser, Berlin 1889, p. 100—107.

Кожда конґруенція n-того степеня з первочисельним модулом має рівно n корінів.

12. Утворім функцію (1) з незвісною x. Коли $m \geq n$, то при помочи конґруенції (2) можна зредукувати всї степені незвісної, висші від $n - 1$, так що зістане нам тільки

$$f(x) = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots a_{n-1}, \qquad (1a)$$

де сочинникови a_0 не накладаємо нїякого обмеженя.

Теорема II. Скількість функцій (1а) є p^n.

Доказ. Що скількість функцій $f(x)$ (степенів 0, 1, 2, . . ., $n-1$), не може бути більша як p^n, слїдує звідси, що кождий з n сочинників може приймати тільки p вартостий. Але вона не може бути менша від p^n, бо коли-б було $f(x) \equiv g(x)$ (mod. p), то звідси слїдувало би

$$(a_0 - b_0) x^{n-1} + (a_1 - b_1) x^{n-2} + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1}) \equiv 0 \text{ (mod. } p),$$

де b_i є сочинниками функції $g(x)$. Тому x було би коренем конґруенції степеня низшого нїж n, т. зн. функція $F_n(x)$ мала би з функцією низшого степеня спільний чинник, отже не могла би бути незведима. Отже дві функції $f(x)$ є тільки тодї рівні згл. пристайні, коли їх дотичні сочинники належать (mod. p) до однакових кляс, а такі функції ми вважаємо ідентичними.

13. **Теорема III.** Кожда функція $f(x)$ сповнює конґруенцію

$$X^{p^n} \equiv X \text{ (mod. } p). \qquad (3)$$

Доказ. Напишім всї функції $f(x)$ з виїмком тої, якої всї сочинники належать до кляси K_0; їх буде $p^n - 1$:

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{p^n-1}(x). \qquad (4)$$

Помножім ті всї величини якою небудь з поміж них, X:

$$X f_1(x), X f_2(x), \ldots, X f_{p^n-1}(x). \qquad (4a)$$

Оба ряди, (4) і (4а), складають ся з тих самих величин, тільки в иншім порядку, то-ж і добутки всїх величин кождого ряду є до себе (mod. p) пристайні:

$$f_1 f_2 \ldots f_{p^n-1} \equiv f_1 f_2 \ldots f_{p^n-1} X^{p^n-1} \qquad \text{(mod. } p)$$

Обі сторони можна скоротити добутком $f_1 f_2 \ldots f_{p^n-1}$, бо нї один його чинник не є пристайний до 0 (mod. p); длятого маємо

$$X^{p^n-1} \equiv 1 \text{ (mod. } p) \qquad (3a)$$

або

$$X^{p^n} \equiv X \text{ (mod. } p).$$

Отсей взорець є новим узагальненем теореми Fermat'a.

Заключене. 1) Конґруенція (3a) має p^n-1 корінів, обнятих рядом (4). Проте можемо функцію X^{p^n-1} розложити на добуток

$$X^{p^n}-1\equiv\big(X-f_1(x)\big)\big(X-f_2(x)\big)\ldots\big(X-f_{p^n-1}(x)\big)\ \text{(mod. } p).$$

2) Порівнуючи обі сторони тої ідентичної конґруенції і означуючи через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p^n-1}$ основні симетричні функції величин $f_k(x)$, бачимо, що

$$\sigma_1\equiv\sigma_2\equiv\ldots\equiv\sigma_{p^n-2}\equiv 0,\ \sigma_{p^n-1}\equiv-1\ \text{(mod. } p).$$

отже
$$\prod_{k=1}^{p^n-1} f_k(x)+1\equiv 0\ \text{(mod. } p). \qquad (5)$$

Отсе є узагальнене теорема Wilson'a.[1]

3) З окрема зазначимо, що $\sigma_1\equiv 0$ (mod. p), т. зн.

$$\sum_{k=1}^{p^n-1} f_k(x)\equiv 0\ \text{(mod } p). \qquad (6)$$

14. Теорема IV. Загал функцій (1a) або (4) творить поле Galois.

Доказ. Величини (4) репродукують ся через чотири основні операції. Що сума, ріжниця й добуток двох $f(x)$ мають опять ту саму форму, се очивидне; треба тільки ще до ряду (4) дібрати величину 0. Але і квот двох $f(x)$ належить рівно-ж до ряду (4). — Нехай буде дана реляція

$$f(x)\equiv g(x)\,h(x)\ \text{(mod. } p);$$

тоді при даних $f(x)$ і $g(x)$ можна найти все одну і тільки одну таку функцію $h(x)$, яка сповнюватиме ту реляцію [виключивши $g(x)$ $\equiv$ ідентично 0 (mod. p)]. Помножім обі її сторони через $\big[g(x)\big]^{p^n-1}$, то з огляду на (3a) буде

$$h(x)\equiv f(x)\big[g(x)\big]^{p^n-2}\ \text{(mod. } p);$$

отсе оправдує уживати на означене квота символічного взірця

$$h(x)\equiv\frac{f(x)}{g(x)}\ \text{(mod. } p).$$

Проте можемо сказати так:

Загал многочленів в $GF[p]$ степеня $(n-1)$-ого[2]) творить поле Galois степеня p^n, коли за змінчиву x прий-

---

[1] Теорема Wilson'a звучить: $(p-1)!+1\equiv 0$ (mod. p); вона є характеристична для первих чисел.

[2] т. зн. всїх степенїв, почавши від 0, до $(n-1)$-ого вкл.

мемо один з инших корінїв якоїсь незведимої конґруенції степеня n.

Поле Galois степеня p^n означуємо за Dickson'ом $GF[p^n]$[1]), а коли виключуємо з нього елемент 0, то зазначимо се, подібно, як попередно, $GF[p^n]^*$ і називаємо зредукованим полем Galois.

15. **Теорема V.** Коли в $f(x)$ заступимо x через x^p, то $f(x)$ перемінить ся в свою p-ту степень.

Доказ. Піднесїм $f(x)$ (1a) до степенї p; се дасть:

$$[f(x)]^p = a_0^p (x^p)^{n-1} + a_1^p (x^p)^{n-2} + \dots + a_{n-1}^p + g(x),$$

де $g(x)$ є сумою всїх прочих членів, отже членів з многочленними сочинниками (Binomialkoeffizienten), а вони всї є многократями числа p. Приміняючи теорему Fermat'a, $a^p \equiv a$ (mod. p), маємо

$$[f(x)]^p \equiv a_0 (x^p)^{n-1} + a_1 (x^p)^{n-2} + \dots + a_{n-1} \text{ (mod. } p),$$

отже

$$[f(x)]^p \equiv f(x^p) \text{ (mod. } p). \tag{7}$$

Тому, коли x заступити через x^p, то $f(x)$ перейде в $[f(x)]^p$, т. є кожде X в X^p.

Замітка. Повторюючи сю операцію n разів, одержимо:

$$\left.\begin{array}{l} f(x^p) \equiv \left[f(x)\right]^p, \\ f(x^{p^2}) \equiv \left[f(x)\right]^{p^2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ f\left(x^{p^{n-1}}\right) \equiv \left[f(x)\right]^{p^{n-1}}, \\ f\left(x^{p^n}\right) \equiv \left[f(x)\right]^{p^n} \equiv f(x). \end{array}\right\} \text{ (mod. } p),$$

17. Виконаймо отсю субституцію в данїй конґруенції

$$F_n(x) \equiv 0 \text{ (mod. } p); \tag{2}$$

се дасть:

$$F_n(x^p) \equiv [F_n(x)]^p \equiv 0 \text{ (mod. } p)$$

отже коли x є коренем конґруенції (2), то x^p є її другим коренем. Так само є $F_n\left(x^{p^2}\right) \equiv 0$, $F_n\left(x^{p^3}\right) \equiv 0, \dots, F_n\left(x^{p^{n-1}}\right) \equiv 0$ (mod. p), отже

Теорема VI. Корінї незведимої конґруенції (2) є

$$x, x^p, x^{p^2}, \dots\dots x^{p^{n-1}},$$

де x означує який небудь з її корінїв.

---

[1]) Лїтература про поле Galois: Schoenemann, Grundzüge einer allg. Theorie d. höh. Kongr. Crelle's Journal, Bd. 31 (1846) стр. 269—325. Dedekind, Abriss einer Theorie d. höh. Kongr. Crelle, Bd. 54 (1857) стр. 1—26. Dickson, Linear groups etc. стр. 1—71. Scarpis, Exposizione elementare della teoria del campo di Galois, Battaglini Annali, t. XLIV. (1907), p. 153—180.

Отсї величини, се власне мнимі числа, які ввів Galois.

Примір. Конґруенція

$$F_3(x) = x^3 - 3x + 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

є в $GF[7]$ незведима. Коли x є її коренем, то два другі корінї є x^7 і x^{49}; їх можна зредукувати до многочленів найвисше другого степеня при помочи даної конґруенції. Іменно є $x^3 \equiv 3x - 1$, отже $x^7 = (x^3)^2 . x$, а що $(x^3)^2 \equiv 2x^2 + x + 1$, то $x^7 \equiv 2x^3 + x^2 + x \equiv 2(3x - 1) + x^2 + x \equiv x^2 - 2$; дальше є: $x^{49} = (x^7)^7 \equiv (x^2 - 2)^7 = (x^2 - 2)[(x^2 - 2)^3]^2$, а що $(x^2 - 2)^3 \equiv x^6 + x^4 - 2x^2 - 1$, то з огляду на $x^6 + x^4 \equiv -2x^2 + 1$, маємо $(x^2 - 2)^3 \equiv 3x^2$. Квадрат тої остатньої величини є $9x^4 \equiv - x^2 - 2x$, а помножений через $x^2 - 2$ дає $- x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x \equiv - x^2 - x + 2$, отже коли x є одним коренем даної конґруенції, то оба другі корінї є $x^7 \equiv x^2 - 2$, $x^{49} \equiv - x^2 - x + 2$. Легко провірити, що $x(x^2 - 2)(\; x^2 - x + 2) \equiv - 1 \pmod{7}$.

17. Напишім ряд степений одної з величин в $GF[p^n]$:

$$1, X, X^2, X^3, \ldots;$$

отсей ряд не є безконечний, тільки повторюють ся в періодах що найвисше $(p^n - 1)$-членних, бо $X^{p^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p}$. Але можливе є й таке, що якась низша степень величини X, пр. s-та, буде пристайна до 1. Коли s є найменшим таким виложником, для якого є

$$X^s \equiv 1 \pmod{p}, \tag{8}$$

тодї кажемо, що X *належить* (mod. p) *до виложника* s.

Теорема VII. *Виложник* s, *до якого належить яка небудь з величин з* $GF[p^n]$, *є подїльником числа* $p^n - 1$.

Доказ. Нехай s не буде подїльником числа $p^n - 1$; тодї можемо написати так:

$$p^n - 1 = st + r,\ 0 < r < s.$$

Підносячи (6) до степені t, маємо

$$X^{st} \equiv 1 \pmod{p},$$

а що задля (3а)

$$X^{st+r} \equiv 1 \pmod{p},$$

то мусїло би бути також $X^r \equiv 1 \pmod{p}$. Се неможливе, коли $0 < r < s$, бо s є найменшим виложником, для якого сповнюють ся вимога (8). Проте мусить бути $r = 0$, отже

$$s = \frac{p^n - 1}{t}.$$

18. Величину X, яка належить до виложника $p^n - 1$, називаємо *первісною величиною* в $GF[p^n]$, подібно як число g, яке (mod. p) належить до виложника $p - 1$, назвали ми первісним коренем модула p або первісною величиною в $GF[p]$ (уст. 9).

Теорема VIII. Ціле $GF[p^n]^*$ можна представити рядом степенів котрої небудь первісної величини X того поля.

Доказ. Коли X є первісною величиною в $GF[p^n]$, то ряд

$$1, X, X^2, \ldots, X^{p^n-2} \tag{9}$$

складаєть ся з $p^n - 1$ поміж собою ріжних величин того поля, бо реляція

$$X^k \equiv X^l \text{ (mod. } p)$$

можлива тільки тодї, коли $k \equiv l$ (mod. $p^n - 1$); коли-ж k і l є $\leqq p^n - 2$, то се можливе тільки так, що $k = l$, отже два члени з ряду (9) з ріжними виложниками не можуть бути до себе пристайні (mod. p). — Супроти того, що кожде X^k є якоюсь величиною з $GF[p^n]$,

$$X^k \equiv f_k(x) \text{ (mod. } p),$$

є ряд (9) ідентичний з $GF[p^n]^*$.

§ 4.

19. Незведиму функцію n-того степеня в $GF[p]$, $F_n(x)$, при помочи якої ми конструували $GF[p^n]$, називаємо модуловою функцією (Modularfunktion).

Нехай буде $\Phi(x)$ якоюнебудь функцією в $GF[p]$. Коли її степень r є менший від n, тодї $\Phi(x)$ належить вже прямо до $GF[p^n]$; коли-ж $r \geqq n$, тодї можемо написати її у виді

$$\Phi(x) = f(x) + \varphi(x) F_n(x) + p\,\psi(x), \tag{1}$$

де $f(x)$ є одною з величин в $GF[p^n]$, $\varphi(x)$ функцією степеня $r - n$, а $\psi(x)$ якоюнебудь функцією в $GF[p]$. В такім разї називаємо — розширюючи понятє пристайности — $\Phi(x)$ пристайним до $f(x)$ з огляду на подвійний модул p, $F_n(x)$ і пишемо

$$\Phi(x) \equiv f(x) \text{ [modd. } p, F_n(x)]^{1)}. \tag{1a}$$

Супроти того можемо всї цїлі функції з цїлочисельними сочинниками поділити на p^n кляс; кожду з тих кляс будемо характеризувати тою функцією $f(x)$ з $GF[p]$, до котрої вона пристайна [modd. p, $F_n(x)$]. Тих репрезентантів будемо називати, подібно, як в теорії цїлих чисел, повною системою найменших останків подвійного модула p, $F_n(x)$.

Нехай X означує якунебудь цїлу функцію з цїлочисельними сочинниками, отже

$$X = f(x) + \varphi(x) F_n(x) + p\,\psi(x);$$

підносїм се рівнанє чергою до степений $p, p^2, \ldots, p^n$. Через се одержимо:

---

[1] Означенє походить від Serret'a, Algèbre, t. II, стр. 165 (5 вид.).

$$X^{p} = \left[f(x)\right]^{p} + \left[\varphi(x)\right]\left[F_n(x)\right]^{p} + p\,\psi_1(x),$$
$$X^{p^2} = \left[f(x)\right]^{p^2} + \left[\varphi(x)\right]^{p^2}\left[F_2(x)\right]^{p^2} + p\,\psi_1(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X^{p^n} = \left[f(x)\right]^{p^n} + \left[\varphi(x)\right]^{p^n}\left[F_n(x)\right]^{p^n} + p\,\psi_n(x),$$

де функції $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ . . ., близше нас не обходять. Ті рівнаня є рівнозначні з системою конґруенцій

$$\left.\begin{aligned} X^{p} &\equiv f(x^{p}),\\ X^{p^2} &\equiv f\left(x^{p^2}\right),\\ &\cdots\cdots\\ X^{p^n} &\equiv f\left(x^{p^n}\right), \end{aligned}\right\}\ [\text{modd. } p,\ F_n(x)],$$

а що $f\left(x^{p^n}\right) \equiv f(x) \ (\text{mod. } p) \equiv X \ [\text{modd. } p,\ F_n(x)]$, то

$$X^{p^n} \equiv X \ [\text{modd. } p,\ F_n(x)]. \tag{2}$$

Теорема I. Кожда ціла функція з цїлочисельними сочинниками сповнює реляцію (2), або иншими словами:

Функція $X^{p^n} - X$ є (mod. p) подїльна через модулову функцію $F_n(x)$.

20. Взорець (2) можемо написати ще так:

$$X^{p^n} - X \equiv \varphi(x)\,F_n(x) \ (\text{mod. } p),$$

а що він є важний для кождої величини X в $GF[p^n]$, то можемо підставити також $X = x$, отже будемо мати

$$x^{p^n} - x \equiv \varphi(x)\,F_n(x) \ (\text{mod. } p), \tag{3}$$

тому:

Теорема Ia. Функція $x^{p^n} - x$ є (mod. p) подїльна через модулову функцію $F_n(x)$.

Теорема II. Функція $x^{p^m} - x$ є тільки тоді (mod. p) подїльна через модулову функцію $F_n(x)$, коли m є многократю виложника n.

Доказ. Коли $m = kn$, то $x^{p^m} - x$ є подїльне через $x^{p^m} - x$, отже теорема доказана. Коли-ж m не є многократю n, $m = kn + r$, $0 < r < n$, то з дїленя $\left(x^{p^m}\right) : \left(x^{p^n}\right)$ випадає останок $x^{p^r} - x$. Отсей многочлен не є подїльний через $F_n(x)$, бо $x^{p^n} - x$ і $x^{p^r} - x$ не мають крім x і $x - 1$ нїякого спільного чинника, проте неможлива реляція форми $x^{p^r} - x \equiv \chi(x)\,F_n(x)$ (mod. p) для $0 < r < n$.

21. Отсї теореми дають нам змогу обчислити скількість незведимих (mod. p) в $GF[p]$ функцій n того степеня. Розложім іменно праву сторону конґруенції (3) на незведимі чинники:

$$x^{p^n} - x \equiv x\, F_n(x)\, G(x)\, H(x) \ . \ . \ . \ K(x) \ (\mathrm{mod.}\ p).$$

Поміж ними нема двох однакових, бо ліва сторона не має спільного чинника зі своєю похідною.

В ряді

$$x,\ F_n(x),\ G(x),\ H(x),\ . \ . \ .,\ K(x)$$

містять ся всі незведимі функції n-того степеня, бо ми можемо кожду з них приймити за модулову функцію, а що модулова функція містить ся все в $x^{p^n} - x$, то в згаданім ряді мусять виступати всі такі функції, які можуть грати ролю модулових. — Крім них можуть містити ся в тім ряді незведимі функції тільки таких степенів, які є подільні через n; слідує се з теореми II

Проте, коли з $x^{p^n} - x$ виділити добутки всіх незведимих функцій степенів менших від n, то одержимо добуток всіх незведимих функцій n-того степеня.

Нехай n буде первим числом; тоді з $x^{p^n} - x$ треба усунути добуток всіх лінійних чинників, проте добуток всіх незведимих (mod. p) функцій первого степеня n є

$$V = \frac{x^{p^n} - x}{x^p - x},$$

а його степень є $p^n - p$. Проте скількість незведимих (mod. p) функцій степеня n є

$$\lambda_n = \frac{1}{n}(p^n - p).$$

Коли n є зложеним числом,

$$n = a^\alpha\, b^\beta \ . \ . \ . \ e^\varepsilon,$$

то з $x^{p^n} - x$ мусимо усунути добутки всіх незведимих чинників, яких степені є подільниками числа n. Вводячи скорочене

$$x^{p^\lambda} - x = [\lambda],$$

переконаємо ся легко, що бажаний добуток є

$$V = \frac{[n]\, \Pi \left[\frac{n}{d_1\, d_2}\right] \Pi \left[\frac{n}{d_1\, d_2\, d_3\, d_4}\right] \cdots}{\Pi \left[\frac{n}{d}\right] \Pi \left[\frac{n}{d_1\, d_3\, d_3}\right] \cdot \cdot \cdot \cdot},$$

де d, d_1, d_2, d_3, . . . перебігають всі чинники числа n. Степень тої функції є

$$p^n - \sum p^{\frac{n}{d}} + \sum p^{\frac{n}{d_1\, d_2}} - \sum p^{\frac{n}{d_1\, d_2\, d_3}} + \cdot \cdot \cdot \cdot,$$

отже скількість всіх незведимих функцій n-того степеня є

$$\lambda_n = \frac{1}{n}\left[p^n - \sum p^{\frac{n}{d}} + \sum p^{\frac{n}{d_1 d_2}} - \sum p^{\frac{n}{d_1 d_2 d_3}} + \ldots\right]. \quad (4)$$

22. Результати з уст. 16. можна узагальнити при помочи пристайности з подвійним модулом.

1) Кожда функція в $GF[p]$ належить [modd. p, $F_n(x)$] до якогось виложника, що є подїльником числа $p^n - 1$; т. зн., коли s є найменшим виложником, для якого

$$X^s \equiv 1 \ [\text{modd. } p,\ F_n(x)], \quad (5)$$

то $p^n - 1$ є подїльне через s.

2) Коли $s = p^n - 1$, то X називає ся первісною величиною в $GF[p^n]$ при подвійнім модулї p, $F_n(x)$. — При помочи степенїв первісної величини X можемо представити цїле $GF[p^n]$.

3) З (5) слїдує безпосередно, що $F_n(x)$ містить ся (mod. p) в $X^s - 1$, отже і в $x^s - 1$.

Дальше докажемо таку

Теорему III. До виложника s належить [modd. p, $F_n(x)$] $\varphi(s)$ ріжних величин з $GF[p^n]$.

Доказ. Коли X належить [modd. p, $F_n(x)$] до виложника s, то в рядї

$$1,\ X,\ X^2,\ \ldots,\ X^{s-1}$$

є всї величини поміж собою ріжні, а s-та степень кождої з них є $\equiv 1$, бо для кождого $k < s$ є

$$(X^k)^s = (X^s)^k \equiv 1 \ [\text{modd. } p,\ F_n(x)].$$

Треба ще тільки найти виложник, до якого належить довільне X^k.

1) Нехай буде $(k, s) = 1$; тодї в рядї k, $2k$, . . ., $(s-1)k$ нема нї одної многократи числа s, отже нїяке X^{tk} не може бути $\equiv 1$, коли $t < k$, тому X^k належить до виложника s.

2) Коли $(k, s) = d < 1$, то $\left(X^k\right)^{\frac{s}{d}} = \left(X^{\frac{k}{d}}\right)^s \equiv 1 \,[\text{modd.} p, F_n(x)]$ а що $\frac{k}{d}$ і s є супроти себе первi, то X^k належить до виложника $\frac{s}{d}$.

Назвім $\psi(d)$ скількість величин X, що належить до виложника d; з огляду на те, що кожде X належить до якогось чинника числа $p^n - 1$ як виложника, маємо

$$\sum_{d/p^n - 1} \psi(d) = p^n - 1.$$

З другої сторони є $\Sigma \varphi(d) = p^n - 1$, отже

$$\sum_{d/p^n - 1} \psi(d) = \sum_{d/p^n - 1} \varphi(d),$$

т. зн. кожде $\psi(d) =$ або 0 або $\varphi(d)$. Перше є виключене, бо тоді було би $\Sigma\psi(d) = 0$, друге дає

$$\psi(d) = \varphi(d),$$

отже наша теорема доказана.

Заключенє. В $GF[p^n]$ є $\varphi(p^n - 1)$ первісних величин $[\text{modd. } p,\ F_n(x)]$, т. є таких, що належать до виложника $p^n - 1$.

23. Теорема IV. Коли X_1 і X_2 належать до виложників s_1 згл. s_2, то $X_1 X_2$ належить до виложника, який є найменшою спільною многократю чисел s_1 і s_2.

Доказ. Після заложеня є

$$X_1^{s_1} \equiv 1,\ X_2^{s_2} \equiv 1\ [\text{modd. } p,\ F_n(x)].$$

Нехай буде v виложником, до якого належить $X_1 X_2$ т. зн. найменшим виложником, для якого є

$$(X_1 X_2)^v \equiv 1\ [\text{modd. } p,\ F_n(x)];$$

НСП чисел s_1 і s_2 назвім d. Піднесім ту конґруенцію до степени $\frac{s_1}{d}$; се дасть

$$X_1^{\frac{v s_1}{d}} X_2^{\frac{v s_2}{d}} \equiv 1\ [\text{modd. } p,\ F_n(x)].$$

Тому, що $\left(\frac{s_1}{d}, s_2\right) = 1$, та конґруенція не може бути сповнена инакше, як тільки так, що і $X_1^{\frac{v s_1}{d}} \equiv 1$, і $X_2^{\frac{v s_1}{d}} \equiv 1$. Перша реляція вказує, що v мусить бути подїльне через d, друга, що $\frac{v s_1}{d}$ є многократю числа s_2. Так само побачимо, що $\frac{v s_2}{d}$ є многократю числа s_1, отже v многократю чисел s_1 і s_2; а що v має бути найменшим числом того рода, то наша теорема доказана.

Заключеня. 1) Коли величини $X_1, X_2, \ldots, X_k$ належать до виложників $s_1, s_2, \ldots, s_k$, то виложник, до якого належить добуток $X_1 X_2 \ldots X_k$, є найменшою спільною многократю тамтих виложників.

2) Коли $p^n - 1 = a^\alpha b^\beta \ldots$, ($a, b, \ldots$ первї числа), а $X_a, X_b, \ldots$ належать до виложників a^α, b^β, то добуток $X_a X_b \ldots$ є первісною величиною в $GF[p^n]$.

24. Функцію $X = f(x)$ з $GF[p]$ називаємо коренем конґруенції

$$\Phi(y) \equiv 0\ [\text{modd. } p,\ F_n(x)], \qquad (6)$$

коли X підставлене в нїй за y, зводить її до виду

$$\Phi(X) = \varphi(x)\, F_n(x) + p\,\psi(x).$$

Теорема V. Конґруенція (6) не може мати більше корінїв, як виносить її степень. Коли степень конґруенції m є рівний n або є подїльником того числа, то конґруенція має точно m корінїв.

Доказ. Що конґруенція m-того степеня не може мати більше ріжних корінїв як m, слїдує з елементарної теореми I. в §. 2.

Нехай дальше буде m подїльником числа n; тодї всї функції в $GF[p^n]$ є корінями конґруенції

$$X^{p^n} - X \equiv 0 \text{ [modd. } p,\ F_n(x)]. \qquad (2)$$

З другої сторони є $X^{p^n} - X$ подїльне (mod. p) через кожду величину з $GF[p^n]$, отже і через $\varPhi(x)$,

$$X^{p^n} - X \equiv \varPhi(X)\,\varPsi(X) \text{ (mod. } p),$$

отже

$$\varPhi(X)\,\varPsi(X) \equiv 0 \text{ [modd. } p,\ F_n(x)]$$

має ті самі корінї що (2). Через те розпадають ся всї величини з $GF[p^n]$ на корінї одної з двох конґруенцій

$$\left.\begin{array}{l} \varPhi(X) \equiv 0, \\ \varPsi(X) \equiv 0 \end{array}\right\} \text{[modd. } p\ \ F_n(x)].$$

Перша з них є степеня m, друга степеня $p^n - m$; коли-б перша мала менше як m корінїв, то друга мусїла-б їх мати більше, ніж виносить її степень.

25. **Теорема VI.** Коли $\varPhi(x)$ є функцією m-того степеня в $GF[p]$, то все можна найти таку незведиму (mod. p) функцію $F(x)$ в $GF[p]$, що конґруенція

$$\varPhi(X) \equiv 0 \text{ [modd. } p,\ F(x)]$$

буде мати точно m корінїв.

Доказ. Розложім $\varPhi(X)$ на незведимі (mod. p) чинники з $GF[p]$ степенів $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$:

$$\varPhi(X) \equiv \varPhi_1(X)\,\varPhi_2(X) \ldots . \varPhi_\mu(X) \text{ (mod. } p);$$

кождий з них буде містити ся (mod. p) в одній з функцій

$$X^{p^{m_1}} - X,\ X^{p^{m_2}} - X, \ldots, X^{p^{m_\mu}} - X,$$

а коли n є *нсм*[1]) чисел $m_1, m_2 \ldots, m_\mu$, то всї ті функції містять ся знова в $X^{p^n} - X$.

Коли-ж тепер взяти якунебудь незведиму функцію в $GF[p]$ степеня n, то кожда з конґруенцій $\varPhi_k(x) \equiv 0$ буде мати при тім самім подвійнім модулї p, $F(x)$ на основі теореми IV. m_k корінїв. Проте добуток тих функцій $\varPhi_k(x)$ сповнює вимоги нашої теореми.

---

[1]) т. є. найменша спільна многократь.

26. **Теорема VII.** Коли X є корінем конґруенції (6), то прочі її корінї є X^p, X^{p^2}, . . ., $X^{p^{n-1}}$.

Доказ. Подібно як в уст. 52 знаходимо, що

$$\left[\Phi(X)\right]^{p^k} \equiv \Phi\left(X^{p^k}\right) \equiv 0 \ [\text{modd. } p, F_n(x)]$$

для $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, та що дві ріжні степені з повисшого ряду є поміж собою ріжні. Отже теорема доказана.

Заключене. Конґруенція $F_n(x) \equiv 0$ (mod. p) т. зн. $F_n(x) \equiv 0$ [modd. p, $F_n(x)$] має такі корінї: x, x^p, x^{p^2}, . . ., $x^{p^{n-1}}$.

27. **Теорема VIII.** Поле Galois не залежить від модулової функції.

Доказ. В уст. 21 мали ми такий розклад:

$$x^{p^n} - x \equiv F_n(x)\, G_n(x) \ldots K_n(x)\, L(x) \ldots P(x) \ (\text{mod. } p);$$

тут означують $F_n(x)$, $G_n(x)$ . . . $K_n(x)$ незведимі функції степеня n, $L(x)$, . . ., $P(x)$ функції прочих допустимих степенїв. Коли x є елементом з $GF[p^n]$, то

$$x^{p^n} - x \equiv 0 \ (\text{mod. } p),$$

отже

$$F_n(x)\, G_n(x) \ldots K_n(x)\, S(x) \equiv 0 \ (\text{mod. } p),$$

де в $S(x)$ зєдинені всї функції низших степенїв, — т. зн., що x може бути коренем одної, і тільки одної, з поміж незведимих конґруенцій

$$\left.\begin{array}{r} F_n(x) \equiv 0, \\ G_n(x) \equiv 0, \\ \ldots\ldots \\ K_n(x) \equiv 0 \end{array}\right\} \ (\text{mod. } p).$$

Проте можемо за модулову функцію взяти котрунебудь з них, а поле Galois через те не змінить ся.

Примір. В $GF[7]$ є незведимими функціями нпр. $x^3 - 2$ і $x^3 - 3$. Коли приймемо за модулову функцію першу з них, творимо $GF[7^3]$ як загал функцій

$$f(i) = a_0 i^2 + a_1 i + a_2 \ (\text{mod. } 7),$$

де i дане конґруенцією $i^3 \equiv 2$ (mod. 7). Коли хочемо представити те саме поле Galois при помочи функції $x^3 - 3$, назвім j корінь конґруенції $j^3 \equiv 3$ (mod. 7), тодї $GF[7^3]$ є дане функцією

$$g(j) = b_0 j^2 + b_1 j + b_2 \ (\text{mod. } 7),$$

Величини i і j можна виразити одну через другу. Іменно одержуємо через помножене обох дефініційних конґруенцій

$$i^3 j^3 \equiv -1 \ (\text{mod. } 7),$$

отже $ij \equiv 3$ або 3α або $3\alpha^2$, де α дане реляцією $\alpha^2 + \alpha + 1 \equiv 0$ (mod. 7), т. зн. $\alpha \equiv 2$. Проте є пр. $ij \equiv 3$. Помножім ту конґруенцію через j^2, то одержимо $i^3 j \equiv 3$, т. зн. $j \equiv -2i^2$ (mod 7), а дальше $j^2 \equiv i$, т. зн.

$$g(j) \equiv -2b_1 i^2 + b_0 i + b_2 \text{ (mod. 7)}.$$

Нпр. величина $g(j) = j^2 - 2j - 3$ відповідає величині $f(i) = 4i^2 + i - 3$, бо з $j \equiv -2i^2$ слїдує $j^2 \equiv 4i^4 \equiv 4i^3 . i \equiv i$.

28. **Теорема IX.** Степенем поля Galois може бути тільки степень первого числа.

Доказ. Ми бачили в уст. 4, що поле Galois найнизшого степеня складаєть ся з p елементів, коли p є первим числом. Нехай x_1 буде одною з величин поля Galois степеня висшого нїж p; тоді Формулка $c_1 x_1$, де c_1 належить до $GF[p]$, т. є ряд величин $0x_1$, $1x_1$, $2x_1$, . . ., $(p-1)x_1$, не вичерпують ще цїлого поля. Проте мусить єствувати ще якась инша величина x_2, не обнята тамтим рядом. Утворім всї можливі суми

$$c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

де c_1 і c_2 перебігають цїле $GF[p]$; скількість тих сум виносить p^2, бо тільки одна з них є 0, а однакових поміж ними нема. — Ті суми або вичерпують поле Galois, або нї. В першім разї маємо $GF[p^2]$, в другім разї єствує ще нова величина x_3, при помочи якої творимо дальші суми

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \quad .$$

і т. д. Таким чином бачимо, що степень поля Galois може бути тільки степенню первого числа; отже можна дібрати таких n елементів x_1, x_2, . . . x_n, що всї можливі комбінації чисел з $GF[p]$ в сочинниках суми

$$X = c_1 x_1 + c_2 x_3 + \ldots + c_n x_n \text{ (mod. } p) \qquad (7)$$

вичерпують ціле $GF[p^n]$. — Таких n елементів називаємо основою поля Galois.

Теорема X. Перших $n-1$ степенїв кождої первісної величини з $GF[p^n]$, 1, x, x^2, . . ., x^{n-1} творить основу поля Galois (пор. теорему VIII, уст. 18).

Теорема XI. Поміж величинами (7) є тільки одна ідентично пристайна (mod. p) до зера, або иншими словами: елементи основи поля Galois є лїнійно незалежні.

Доказ. Кождий з елементів основи $GF[p^n]$ є (mod. p) пристайний до одної з первісних величин x того поля (уст. 18); отже суму X можемо звести до виду

$$X \equiv c'_1 + c'_2 x + c'_3 x^2 + \ldots + c'_n x^{n-1} \text{ (mod. } p).$$

Реляція $X \equiv 0$ можлива тільки так, що всї $c'_k \equiv 0$ (mod. p); коли-б так не було, то первісна величина $GF[p^n]$ сповнювала би конґруенцію степеня низшого як n, а се неможливе, бо x є корінем незведимої конґруенції степеня n. — Отже поміж елементами основи поля Galois не може єствувати нїяка инша лінійна звязь, як тільки та, що всї сочинники є $\equiv 0$ (mod. p), т. зн. ті елементи є лінійно незалежні[1]).

§. 5.

29. Щоби знайти первісні корінї конґруенції

$$X^{p^n} - X \equiv 0 \text{ [modd. } p,\ F_n(x)], \qquad (1)$$

маємо після уст. 23 (заключенє 2) вишукати первісні корінї конґруенцій

$$\left.\begin{array}{l} X^{a^\alpha} \equiv 1, \\ X^{b^\beta} \equiv 1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \text{[modd } p,\ F_n(x)],$$

де $a^\alpha\, b^\beta \ldots = p^n - 1$, і утворити їх добуток.

Коли модулова функція $F_n(x)$ належить (mod. p) до виложника $p^n - 1$, то всї її корінї є первісними величинами в $GF[p^n]$.

30. Коли знайдемо одну з незведимих (mod. p) функцій степеня n в $GF[p]$, $F_n(x)$, шукаємо при її помочи первісного коріня конґруенції (1). Тодї можемо розложити ліву сторону тої конґруенції на незведимі чинники.

Нехай X буде первісним корінем конґруенції (1); його k-та степень буде сповнювати якусь незведиму в $GF[p]$ конґруенцію

$$\Phi(x) \equiv 0 \text{ [modd. } p,\ F_n(x)] \qquad (2)$$

степеня $m = n$ або $\frac{n}{d}$; корінї тої конґруенції будуть

$$X^k,\ X^{kp},\ X^{kp^2}, \ldots,\ X^{kp^{m-1}},$$

отже будемо мати

$$\Phi(u) \equiv (u - X^k)(u - X^{kp})\left(u - X^{kp^2}\right) \ldots \left(u \quad X^{kp^{m-1}}\right) \text{ [modd. } p,\ F_n(x)],$$

Тому, що $X^{kp^m} \equiv X^k$, отже $X^{k\,(p^m-1)} \equiv 1$ [modd. p, $F_n(x)$], мусить бути виложник $k(p^m - 1)$ многократю числа $p^n - 1$, отже m мусить бути таким найменшим числом, для якого $p^m - 1$ є подільне через n; се висказує ся так, що X відповідає (passt) виложникови m.[2])

Коли X^k належить до виложника s, то ks є подільне через $p^n - 1$, отже s є многократю числа n, а що отся конґруенція спов-

---

[1]) Пор. аналоґічну теорему в теорії альґебраїчних чисел. Гл. пр. Weber, Algebra, Bd. II (2 Aufl.), §. 161.

[2]) Encyklopädie der math. Wiss. Bd. I. 1, p. 575.

нюють ся для $n = s$, то X^k належить до виложника n. Але і $\Phi(X)$ належить до того самого виложника, як се легко провірити; проте коли хочемо найти всї незведимі конґруенції степеня n і всїх инших допустимих степенів, беремо за k якунебудь многократь числа m, перву супроти n.

31. Galois пояснює свою теорію на такім примірі: знайти незведиму конґруенцію, від якої залежать первісні корінї двочленної конґруенції

$$X^{7^3} \equiv X \text{ (mod. 7).} \qquad (*)$$

Тут є $p = 7$, $n = 3$. Одною з незведимих (mod. 7) функцій третього степеня є $x^3 - 2$, отже творимо $GF[7^3]$ з функцій

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \ [\text{modd. } 7,\ x^3 - 2].$$

Нашою задачею є, знайти таку величину $X = f(x)$, якої всї степени, від зерової до $(7^3 - 1)$-ої включно, мають вичерпати всї корінї конґруенції

$$X^{7^3-1} - 1 \equiv X^{2.3^2.19} - 1 \equiv 0 \text{ (mod. 7).}$$

Після уст. 81. маємо помножити через себе первісні корінї таких трех конґруенцій:

$$\left.\begin{array}{l} X^2 \equiv 1 \\ X^{3^2} \equiv 1 \\ X^{19} \equiv 1 \end{array}\right\} \text{ (mod. 7).} \qquad (**)$$

Перша з них має первісний корінь — 1, лїву сторону другої можна розложити на добуток $(X^3 - 1)(X^3 - 2)(X^3 + 3)$ (mod. 7), отже її первісні корінї містять ся в конґруенціях

$$X^3 - 2 \equiv 0 \text{ і } X^3 + 3 \equiv 0 \text{ (mod. 7).}$$

Назвім корінь першої з них x, то x є первісним коренем середньої конґруенції з системи (**).

Врештї шукаємо первісного кореня третьої конґруенції. Galois робить се так, що пробує, чи функція $f(x) = ax + b$ її не сповнить, т. зн., як треба дібрати a і b, щоби було сповнене

$$(ax + b)^{19} \equiv 1 \text{ (mod. 7).}$$

З двочленного розвиненя слїдують такі вартости: $a \equiv 1$, $b \equiv -1$, отже $f(x) \equiv x - 1$ є тим первісним коренем. Помножім через себе ті три знайдені первісні корінї, то одержимо первісний корінь конґруенції (*):

$$X \equiv -1 \,.\, x \,.\, (x - 1) = -x^2 + x \text{ (mod. 7).} \qquad (***)$$

Елїмінуючи x з (***) і $x^3 - 2 \equiv 0$ (mod. 7), одержимо конґруенцію, від якої залежить X:

$$X^3 - X + 2 \equiv 0 \text{ (mod. 7).}$$

II. Конґруенції третього і четвертого степеня.

§. 6.

Конґруенції третього степеня.

32. Нехай буде дана конґруенція третього степеня в $GF[p]$

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3\equiv 0 \pmod{p} \qquad (1)$$

Метода, яку примінює Cauchy, полягає на зведеню повної конґруенції до двочленної; є вона зовсім анальоґічна до методи Lagrange'а при рівнанях третього степеня. Cauchy розвязує в тій цїли одну двочленну конґруенцію третього степеня і дві квадратні.

33. **Двочленні конґруенції.** Специяльна (одинична) конґруенція

$$z^3\equiv 1 \pmod{p} \qquad (2)$$

має завсїди один дїйсний корінь 1 і ще два инші, γ і γ^2, звязані реляцією

$$\gamma^2+\gamma+1\equiv 0 \pmod{p};$$

ми назвали їх первісними третими корінями одиниці (mod. p). Розвязуючи ту квадратну конґруенцію, або примінюючи результати уст. 10, бачимо, що коли $p\equiv 1$ (mod. 6), то γ і γ^2 є дїйсні, а саме

$$\gamma\equiv g^{\frac{p-1}{3}} \pmod{p};$$

означимо їх через α і α^2. В разї $p\equiv -1$ (mod. 6) належать вона до $GF[p^2]$; коли первісну величину того поля означимо через ε, одержимо

$$\gamma\equiv\frac{p-1}{2}(1-\varepsilon),\ \gamma^2\equiv\frac{p-1}{2}(1+\varepsilon),\ \varepsilon^2\equiv -3 \pmod{p}.$$

34. **Загальна двочленна конґруенція**

$$x^3\equiv A \pmod{p} \qquad (3)$$

зводить ся до попередньої. Нехай r буде одним з її корінїв, тодї два инші корінї є, як знаємо, $r\gamma$ і $r\gamma^2$.

Крітерією рішимости для (3) в $GF[p]$ є

$$A^{\frac{p-1}{d}}\equiv 1 \pmod{p},$$

де $d=(p-1,3)$, отже коли $p\equiv 1$ (mod. 6), то $d=3$, проте крітерія звучить

$$A^{\frac{p-1}{3}}\equiv 1 \pmod{p}. \qquad (4)$$

Коли вона сповнена, то конґруенція має три дїйсні корінї:

$$r,\ \alpha r,\ \alpha^2 r.$$

В противнім разї назвім j одну з первісних величин в $GF[p^3]$; тодї три корінї є

$$j,\ a j,\ a^2 j.$$

Коли $p \equiv -1$ (mod. 6), то A є все третім степенним останком, отже конґруенція (3) має все один дійсний корінь r. Зате два инші корені належать до $GF[p^2]$, отже (3) має такі три корені

$$r,\ \frac{p-1}{2}(1-\varepsilon)\, r,\ \frac{p-1}{2}(1+\varepsilon)\, r.$$

35. *Повну конґруенцію третього степеня* (1) множимо числом a_0', стоваришеним (mod. p) з числом a_0, і при помочи лінійного підставленя усуваємо член з квадратом незвісної; через те одержимо зредуковану конґруенцію

$$y^3 - 3Ay - 2B \equiv 0 \text{ (mod. } p). \tag{4}$$

Назвім її корені y_1, y_2, y_3 і утворім при їх помочи такі дві ресольвенти:

$$27 v_1 = (3t_1)^3 \equiv (y_1 + \gamma y_2 + \gamma^2 y_3)^3,$$
$$27 v_2 = (3t_2)^3 \equiv (y_1 + \gamma^2 y_2 + \gamma y_3)^3,$$

де $\gamma^2 + \gamma + 1 \equiv 0$ (mod. p). З огляду на те, що

$$27(v_1 + v_2) = 2\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3,$$
$$27^2 v_1 v_2 = (\sigma_1^2 - 3\sigma_2)^3,$$

а у нас є $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -3A$, $\sigma_3 = 2B$ (основні симетричні функції коренів), маємо

$$v_1 + v_2 = 2B,\ v_1 v_2 = A^3,$$

отже квадратна конґруенція для v_1 і v_2 є

$$v^2 - 2Bv + A^3 \equiv 0 \text{ (mod. } p). \tag{5}$$

Виріжник тої конґруенції, а заразом і конґруенції (3), є

$$D \equiv B^2 - A^3 \text{ (mod. } p). \tag{6}$$

Нехай буде $D \equiv \beta^2$ (β може бути дійсне або належати до $GF[p^2]$), отже маємо

$$v \equiv B \pm \beta,$$

проте зістає ще до розвязки конґруенція

$$t^3 \equiv v. \tag{7}$$

Коли се стало ся і $t \equiv t_1$ є її розвязкою для $v \equiv v_1$, то для $v \equiv v_2$ одержимо $t \equiv t_2$, обмежуючи ся в виборі коренів конґруенції (7), подібно як при формулці *Cardan'a*, реляцією

$$t_1 t_2 \equiv A \text{ (mod. } p)$$

(бо $v_1 v_2 \equiv A^3$). Маємо тому:

$$y_1 + y_2 + y_3 \equiv 0,$$
$$y_1 + \gamma y_2 + \gamma^2 y_3 \equiv 3t_1,$$
$$y_1 + \gamma^2 y_2 + \gamma y_3 \equiv 3t_2,$$

а звідси:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv t_1 + t_2, \\ y_2 &\equiv \gamma^2 t_1 + \gamma t_2, \\ y_3 &\equiv \gamma t_1 + \gamma^2 t_2, \end{aligned}\right\} \text{ (mod. } p).$$

Бачимо отже, що розвязка даної конґруенції (4) зводить ся до трьох инших:

1) квадратної для v: $\quad v^2 - 2Bv + A^3 \equiv 0$,

2) квадратної для γ: $\quad \gamma^2 + \gamma + 1 \equiv 0$,

3) двочленної третього степеня $t^3 \equiv B + \beta \equiv C$, всї (mod. p).

36. Дискусія розвязки. 1) Конґруенція для v є зведима або нї, відповідно до того, чи

$$\left(\frac{D}{p}\right) = +1 \text{ чи } -1.$$

2) Конґруенція для γ є при $p = 6n + 1$ зведима, при $p = 6n - 1$ незведима.

3) Конґруенція $t^3 \equiv C$ є при $p = 6n + 1$ зведима або нї, відповідно тому, чи

$$\left[\frac{C}{p}\right] = 1 \text{ чи } \neq 1;$$

при $p = 6n - 1$ є вона все зведима.

Займемо ся перше дискусією виріжника D

I. $D \equiv 0$ (mod. p); тодї є $v_1 \equiv v_2 \equiv B$, отже $t_1 = t_2 = t$; t є дїйсне, бо тодї $t^2 \equiv A$, а що $A^3 \equiv B^2$, то $\left(\frac{A}{p}\right) = \left(\frac{A^3}{p}\right) = \left(\frac{B^2}{p}\right) = +1$. Тодї є $y_1 = 2t$, $y_2 = y_3 = (\gamma + \gamma^2)t \equiv -t$. Отже коли чисельна вартість виріжника є многократю модула, то конґруенція має одну двократну розвязку. — Щоби розвязка була трикратна, мусить ще бути $2t \equiv -t$, т. зн. $t \equiv 0$ (mod. p), отже і $A \equiv B \equiv 0$ (mod. p). Тодї трикратна розвязка є $y \equiv 0$, отже коли від y перейдемо до x через лінійну субституцію, то трикратна розвязка буде $x \equiv c$, т. зн. дана конґруенція звучить: $(x - c)^3 \equiv 0$ (mod. p).

II. $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$; в такім разї заложім $r^2 \equiv D$, отже буде r дїйсне, $v \equiv B \pm r \equiv C$ дїйсне. Тепер розвязуємо

$$t^3 \equiv C \text{ (mod. } p). \qquad (7a)$$

1) Коли $p \equiv 1$ (mod. 6), тодї є такі можливости:

$$\text{а) } \left[\frac{C}{p}\right] = 1, \quad \text{б) } \left[\frac{C}{p}\right] \neq 1.$$

а) Коли C є кубовим останком, то t є дїйсне $= \tau$, а що і γ є дїйсне $= \alpha$, то маємо

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv \tau_1 + \tau_2, \\ y_2 &\equiv \alpha^2\tau_1 + \alpha\tau_2, \\ y^3 &\equiv \alpha\tau_1 + \alpha^2\tau_2, \\ \alpha^2 &+ \alpha + 1 \equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{ (mod. } p).$$

Всї три розвязки є дїйсні, ріжні поміж собою.

б) Коли C є не-останком, то t належить до $GF[p^3]$, отже $t = j$, і

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv j_1 + j_2, \\ y_2 &\equiv \alpha^2 j_1 + \alpha j_2, \\ y_3 &\equiv \alpha j_1 + \alpha^2 j_2, \\ j^3 &\equiv C,\ j_1 j_2 \equiv A. \end{aligned}\right\} \text{(mod. } p\text{)}.$$

Можемо ще одначе усунути один із елементів j, так що в розвязці буде приходити тільки одна j. Іменно є ${j_1}^3 j_2 \equiv A {j_1}^2$; помножім $MC \equiv A$, то $j_2 \equiv M {j_1}^2$, отже коли напишемо j за j_1, а Mj^2 за j_2, то:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv j\ (1 + Mj), \\ y_2 &\equiv j\ (\alpha^2 + \alpha Mj), \\ y_3 &\equiv j\ (\alpha + \alpha^2 Mj), \end{aligned}\right\} \text{(mod. } p\text{)}.$$

В тім разї є всї три розвязки величинами в $GF[p^3]$, а наша розвязка лежала в тім, що ми виразили всї три y при помочи коріня можливо найпростїйшої модулової функції $j^3 - C \equiv 0$ (mod. p).

3) $p = 6n - 1$, тоді C є завсїди останком, а γ належить до $GF[p^2]$, отже маємо

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv \tau_1 + \tau_2 \\ y_2 &\equiv \frac{p-1}{2}\Big[(\tau_1 + \tau_2) + \varepsilon\,(\tau_1 - \tau_2)\Big] \\ y_3 &\equiv \frac{p-1}{2}\Big[(\tau_1 + \tau_2) - \varepsilon\,(\tau_1 - \tau_2)\Big] \\ &\tau_1 \tau_2 \equiv A,\ \varepsilon^2 \equiv -3 \end{aligned}\right\} \text{(mod. } p\text{)}.$$

В тім разї є y_1 дїйсне, а y_2 і y_3 є спряжені в $GF[p^2]$.

III. $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$. Тодї конґруенція $D \equiv \beta^2$ є незведима, отже β належить до $GF[p^2]$. Положім $\beta = i$, то се дасть $v \equiv B \pm i$, і

$$t^3 \equiv B + i.$$

Заложім

$$t_1 \equiv a + b\,i,$$

де a і b є величинами з $GF[p]$ або $GF[p^3]$, то злучена з t_1 величина t_2 має форму

$$t_2 \equiv a - b\,i.$$

Порівнане сочинників при $t^3 \equiv B + i$ і ${t_1}^3 \equiv (a + b\,i)^3$ дає такі дві реляції:

$$a\,(a^2 + 3\,b^2 D) \equiv B,\ b\,(3\,a^2 + b^2 D) \equiv 1 \text{ (mod. } p\text{)}.$$

Коли дана конґруенція є рішима, то обі ті реляції є рівночасно рішимі в дїйсних числах, отже маємо

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv t_1 + t_2 \equiv 2\,a \\ y_2 \equiv \gamma^2\,(a + bi) + \gamma\,(a - bi) &\equiv -a + (\gamma^2 - \gamma)\,b\,i \\ y_3 \equiv \gamma\,(a + b\,i) + \gamma^2\,(a - b\,i) &\equiv -a - (\gamma^2 - \gamma)\,b\,i \end{aligned}\right\} \text{(mod. } p\text{)}.$$

а) Коли $p = 6n + 1$, то $\gamma^2 - \gamma \equiv \alpha^2 - \alpha$ є дійсне; положім ще $m \equiv b^2(\alpha^2 - \alpha)$, то $m^2 \equiv -3b^2$, отже

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv 2a \\ y_2 &\equiv -a + mi \\ y_3 &\equiv -a - mi \\ m^2 &\equiv -3b^2,\ i^2 \equiv D \end{aligned}\right\} \ (\text{mod. } p).$$

Отже одна розвязка є дійсна, дві инші з $GF[p^2]$.

б) Коли $p = 6n - 1$, то $\gamma^2 - \gamma \equiv -1$; положім $\varepsilon i \equiv \omega$, то се є дійсне число, бо коли $\varepsilon^2 \equiv -3$, $i^2 \equiv D$, то $(\varepsilon i)^3 \equiv -3D$, а коли $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, то $\left(\frac{-3D}{p}\right) = +1$. Отже маємо

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv 2a \\ y_2 &\equiv -a - b\omega \\ y_3 &\equiv -a + b\omega \\ \omega^2 &\equiv -3D \end{aligned}\right\} \ (\text{mod. } p)$$

Проте в тім разї маємо три дїйсні розвязки; тут маємо повну анальоґію до casus irreducibilis рівнань третього степеня.

Примір

$$y^3 + 5y + 4 \equiv 0 \ (\text{mod. } 11).$$

Маємо тут $A \equiv 2$, $B \equiv -2$, отже $D \equiv -4$, а що $\left(\frac{-4}{11}\right) = \left(\frac{-1}{11}\right) = -1$, то можемо положити $i^2 \equiv -4$ (mod. 11), або коли за i впровадити величину $\vartheta = 5i$, т. зн. $\vartheta^2 \equiv -1$ (mod. 11) отже ϑ буде мати вартість звичайного Gauss-ового символа i. Супроти того квадратна ресольвента прийме вид

$$v^2 + 5v - 3 \equiv 0 \ (\text{mod. } 11),$$

а її розвязка є $v \equiv -2 \pm 2\vartheta$ (mod. 11), отже

$$t^3 \equiv -2 + 2\vartheta.$$

Положім $t = a + b\vartheta$, то одержимо дві конґруенції

$$\left.\begin{aligned} a^3 - 3ab^2 &\equiv -2 \\ 3ab - b^3 &\equiv 2 \end{aligned}\right\} \ (\text{mod. } 11)$$

яких розвязкою є $a \equiv 1$, $b \equiv 1$, отже $t_1 \equiv 1 + \vartheta$, $t_2 = 1 - \vartheta$. З $\varepsilon^2 \equiv -3$, $\vartheta^2 \equiv -1$ слїдує $(\varepsilon\vartheta)^2 \equiv 3$, т. зн. $\varepsilon\vartheta \equiv \omega \equiv 5$ (mod. 11), отже

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv 2 \\ y_2 &\equiv -1 - 5 \equiv -6 \\ y_2 &\equiv -1 + 5 \equiv 4 \end{aligned}\right\} \ (\text{mod. } 11).$$

IV. Коли-ж дана конґруенція є незведима, то всї три розвязки належать до $GF[p^3]$, а модулова функція не дасть ся в тім разї звести до двочленної. Назвім один корінь даної конґруенції j, то два инші корінї є j^p і j^{p^2}.

37. **Зіставлене.** Рішимість конґруенції залежить від того, чи циклічний визначник Δ степеня $p-1$, утворений з її сочинників, є $\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ p)$, чи ні.

I. $\Delta \equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ p)$; тоді маємо:

1) коли $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, а) для $p = 6n + 1$ 3 корінї;
б) для $p = 6n - 1$ 1 корінь;
2) коли $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, а) для $p = 6n + 1$ 1 корінь;
б) для $p = 6n - 1$ 3 корінї.

Щоби усунути ріжницю поміж обома формами числа p, положім за **Мірімановим**[1]

$$R \equiv -3D\ (\mathrm{mod.}\ p),$$

то $\left(\frac{R}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right)\left(\frac{D}{p}\right)$, а що $\left(\frac{-3}{p}\right) = \pm 1$ для $p = 6n \pm 1$, то маємо

1\. а) $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, $\left(\frac{-3}{p}\right) = +1$, отже $\left(\frac{R}{p}\right) = +1$,
1\. б) $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$, отже $\left(\frac{R}{p}\right) = -1$;
2\. а) $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{-3}{p}\right) = +1$, отже $\left(\frac{R}{p}\right) = -1$,
2\. б) $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$, отже $\left(\frac{R}{p}\right) = +1$.

Проте можемо сказати коротко: конґруенція має три дійсні корінї, коли $\left(\frac{R}{p}\right) = +1$, один дійсний корінь, коли $\left(\frac{R}{p}\right) = -1$.

II. Коли $\Delta \not\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ p)$, то конґруенція є нерішима.

Конґруенції четвертого степеня.

38. **Двочленна одинична конґруенція**

$$z^4 \equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ p) \qquad (8)$$

має все два дійсні корінї $+1$ і -1; її первісні корінї залежать від

$$z^2 + 1 \equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ p). \qquad (8\mathrm{a})$$

Коли $p \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$, то $\left(\frac{-1}{p}\right) = +1$, отже (8а) має два дійсні корінї $\alpha \equiv g^{\frac{p-1}{4}}\ (\mathrm{mod.}\ p)$ і $\alpha^3 \equiv -\alpha$, так що всі корінї конґруенції (8) є

---

[1] D. Mirimanoff, Sur les congruences du troisième dégré, Enseignement mathématique, t. IX. (1907), p. 381—384.

$$1,\ \alpha,\ -1,\ -\alpha.$$

В разї $p \equiv -1 \pmod{4}$ є $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, отже оба коріні конґруенції (8а) є в $GF[p^2]$. Назвім одну з величин в $GF[p^2]$ γ, тоді маємо такі коріні конґруенції (8):

$$1,\ \gamma,\ -1,\ -\gamma.$$

39. Для загальної двочленної конґруенції

$$x^4 \equiv A \pmod{p} \qquad (9)$$

є крітерією рішимости $A^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1 \pmod{p}$; в разї $p \equiv 1 \pmod{4}$ мусить отже бути A двоквадратним, в разї $p \equiv -1 \pmod{4}$ квадратним останком. Проте в першім разї має конґруенція (9) 4 або 0 дїйсних корінїв,

$$r,\ \alpha r,\ -r,\ -\alpha r,$$

в другім разї 2 або 0 дїйсних

$$r,\ \gamma r,\ -r,\ -\gamma r.$$

Коли крітерія рішимости несповнена, тодї дефінїює дана конґруенція $GF[p^4]$.

40. Повну конґруенцію четвертого степеня

$$F(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \equiv 0 \pmod{p} \qquad (10)$$

зводимо до зредукованої форми

$$f(y) = y^4 - 6Ly^2 - 4My - 3N \equiv 0 \pmod{p}. \qquad (11)$$

Нехай її коріні будуть y_1, y_2, y_3, y_4, то їх основні симетричні функції є $\sigma_1 \equiv 0$, $\sigma_2 \equiv -6L$, $\sigma_3 \equiv 4M$, $\sigma_4 \equiv -3N$.

Утворім такі триресольвенти:

$$\left.\begin{aligned} 4v_1 &\equiv (y_1 + y_2 - y_3 - y_4)^2 - 16L \\ 4v_2 &\equiv (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)^2 - 16L \\ 4v_3 &\equiv (y_1 - y_2 - y_3 + y_4)^2 - 16L \end{aligned}\right\} \pmod{p}, \qquad (12)$$

або коли положимо для скороченя

$$\begin{aligned} a &= (y_1 + y_2 - y_3 - y_4)^2, \\ b &= (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)^2, \\ c &= (y_1 - y_2 - y_3 - y_4)^2, \end{aligned}$$

то будемо мати

$$\left.\begin{aligned} 4v_1 &\equiv a - 16L \\ 4v_2 &\equiv b - 16L \\ 4v_3 &\equiv c - 16L \end{aligned}\right\} \pmod{p}.$$

Щоби найти конґруенцію, від якої залежать v_1, v_2, v_3, творимо основні симетричні функції

$$\begin{aligned} 4(v_1 + v_2 + v_3) &= \tau_1 - 48L, \\ 16(v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_3 v_1) &= \tau_2 - 32\tau_1 L + 3.16^2 L^2, \\ 64 v_1 v_2 v_3 &= \tau_3 - 16\tau_2 L + 16^2 \tau_1 L^2 - 16^3 L^3, \end{aligned}$$

де $\tau_1 = a + b + c$, $\tau_2 = a b + b c + c a$, $\tau_3 = a b c$. Ті три остатнї величини легко обчислити; вони є

$$\tau_1 = 3\,\sigma_1{}^2 - 8\,\sigma_2,$$
$$\tau^2 = (3\,\sigma_1{}^3 - 16\,\sigma_1\,\sigma_2 + 16\,\sigma_3)\,\sigma_1 + 16\,\sigma_2{}^2 - 64\,\sigma_4,$$
$$\tau_3 = (\sigma_1{}^3 - 4\,\sigma_1\,\sigma_2 + 8\,\sigma_3)^2,$$

а з огляду на вартости функцій σ маємо

$$\tau_1 = 48\,L,$$
$$\tau_2 = 16.12\,(3\,L^2 + N),$$
$$\tau_3 = 64.16\,M^2.$$

Звідси слїдує передовсїм

$$4\,(v_1 + v_2 + v_3) = \tau_1 - 48\,L \equiv 0,$$

а проте можемо обі прочі функції написати так:

$$16\,(v_1\,v_2 + v_2\,v_3 + v_3\,v_1) = \tau_2 - 16\,\tau_1\,L,$$
$$64\,v_1\,v_2\,v_2 = \tau^3 - 16\,\tau_2\,L + 2.16^3\,L^3,$$

отже врештї є

$$v_1\,v_1 + v_2\,v_3 + v_3\,v_1 = -\,12\,(L^2 - N),$$
$$v_1\,v_2\,v_3 = 16\,(M^2 - 3\,L\,N - L^2).$$

Проте конґруенція для v (ресольвента третього степеня) є

$$\varphi(v) = v_2 - 12\,(L^2 - N)\,v - 16\,(M^2 - 3\,L\,N - L^3) \equiv 0 \pmod{p}. \quad (13)$$

Знайшовши її три корінї, v_1, v_2, v_3, творимо

$$a \equiv 4\,v_1 + 16\,L,$$
$$b \equiv 4\,v_2 + 16\,L,$$
$$c \equiv 4\,v_3 + 16\,L$$

і розвязуємо три квадратні конґруенції

$$\left.\begin{aligned} 16\,X^2 &\equiv a \\ 16\,Y^2 &\equiv b \\ 16\,Z^2 &\equiv c \end{aligned}\right\} \text{(mod. } p). \qquad (14)$$

Коли маємо їх корінї, находимо корінї даної конґруенції (11) з

$$\left.\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &\equiv 0 \\ y_1 + y_2 - y_3 - y_4 &\equiv 4\,X \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 &\equiv 4\,Y \\ y_1 - y_2 - y_3 + y_4 &\equiv 4\,Z \end{aligned}\right\} \text{(mod. } p).$$

Вони є

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv X + Y + Z \\ y_2 &\equiv X - Y - Z \\ y_3 &\equiv -X + Y - Z \\ y_4 &\equiv -X - Y + Z \end{aligned}\right\} \text{(mod. } p). \qquad (15)$$

З конґруенцій (14) одержуємо по дві вартости на X, Y, Z; в розвязцї (15) треба їх так комбінувати, щоби було

$$4\,X\,Y\,Z \equiv M \pmod{p}, \qquad (16)$$

отже, коли заложимо, що M є (mod. p) додатне, т. зн. $< \frac{p-1}{2}$, то скількість відємних (mod. p) величин, т. є X, Y, $Z > \frac{p-1}{2}$, буде 0 або 2. Можна також так поступити, що знайшовши дві з них, третю винаходимо з реляції (16).

41. **Дискусія.** Конґруенція (11) і її ресольвента (13)1) мають однаковий виріжник

$$D \equiv 64\,[(M^2 - 3LN - L^3)^2 - (L^2 - N)^3]. \qquad (17)$$

Від нього залежить якість розвязки.

I. Коли $D \equiv 0$ (mod. p), то $\varphi(v) \equiv 0$ має один многократний корінь, який може бути: 1) трикратний, 2) двократний.

1) Коли (13) має трикратний корінь $v_1 = v_2 = v_3$, то він є $\equiv 0$ (mod. p), проте ресольвента є

$$\varphi(v) = v^3 \equiv 0 \ (\text{mod. } p).$$

В такім разі є оба инші сочинники в $\varphi(v)$ пристайні до зера:

$$L^2 - N \equiv 0, \ M^2 - 3LN - L^3 \equiv 0 \ (\text{mod. } p),$$

тому панують поміж ними такі звязи:

$$N \equiv L^2, \ M^2 \equiv 4L^3 \ (\text{mod. } p),$$

отже L мусить бути квадратним останком для p.

Звідси слідує дальше: $a = b = c \equiv 16L$, проте $16X^2 \equiv 16L$ або

$$X^2 \equiv L \ (\text{mod. } p),$$

а що $\left(\frac{L}{p}\right) = +1$, то ся конґруенція є рішима, отже X дійсне. Назвім її корінь X, тоді є $Y \equiv Z \equiv X$, проте

$$z_1 \equiv 3X, \ y_2 \equiv y_3 \equiv y_4 \equiv -X.$$

Конґруенція четвертого степеня, якої ресольвента (13) має потрійний корінь, виглядає так:

$$f(y) = (y - 3X)(y + X)^3 \equiv 0 \ (\text{mod. } p),$$

отже вона має один однократний, один трикратний корінь.

Замітка. Коли $X \equiv 0$, тоді $f(y)$ має чотирократний корінь; тоді є $L \equiv 0$, отже і $M \equiv 0$, $N \equiv 0$, а конґруенція звучить $f(y) = y^4 \equiv 0$ (mod. p).

2) Коли ресольвента має один двократний дійсний корінь $v_2 = v_3$, то кладучи $v_1 \equiv 2z$, (z дійсне) маємо $v_2 = v_3 \equiv -z$, отже

$$\varphi(v) = v^3 - 3z^2 v - 2z^3 \equiv 0 \ (\text{mod. } p).$$

---

1) Ресольвентами називаємо і функції, яких уживаємо до розвязки рівнаня (чи конґруенції), і рівнанє (конґруенцію), від якого вона залежить. Непорозуміня нема тут чого побоювати ся.

Для визначеня z маємо реляцію $z^2 \equiv 4(L^2 - N)$; вона є завсіди рішима, бо з огляду $D \equiv 0$ є $(M^2 - 3LN - L^3)^2 \equiv (L^2 - N)^3$, отже $\left(\frac{L^2 - N}{p}\right) = +1$. Тоді є

$$\alpha \equiv 4(4L + 2z),$$
$$b = c \equiv 4(4L - z).$$

Дальше розвязуємо

$$\left.\begin{array}{l} 16X^2 \equiv 4(4L + 2z) \\ 16Y^2 = 16Z^2 \equiv 4(4L - z) \end{array}\right\} (\text{mod. } p) \qquad (18)$$

і маємо врешті

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \equiv X + 2X \\ y_2 \equiv X - 2Y \\ y_3 = y_4 \equiv -X \end{array}\right\} (\text{mod. } p),$$

отже один двократний корінь. Другий корінь є лише тоді двократний, коли $Y \equiv 0$ (mod. p).

а) $Y \not\equiv 0$ (mod. p). В такім разї (11) виглядає так:

$$f(y) = y^4 - 2(X^2 - 2Y^2)y^2 - 8XY^2 + X^2(X^2 - 4Y^2) \equiv 0 \ (\text{mod. } p). \quad (11a)$$

Чи X і Y можуть належати до иншого поля, як до $GF[p]$? Сочинники конґруенції (11a) мусять бути дїйсні; коли отже положимо $X = \alpha + \beta i$, $Y = \gamma + \delta i$, де i належить до $GF[p^2]$, то се доведе до таких реляцій:

$$\left.\begin{array}{c} 2\gamma\delta \equiv \alpha\beta \\ (2\alpha^2 + \gamma^2 + \delta^2 i^2)\beta \equiv 0 \\ (\alpha\beta - 2\gamma\delta)(\alpha^2 + \beta^3 i^2) \equiv 2\alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2 i^2) \end{array}\right\} (\text{mod. } p).$$

Супроти першої реляції зводить ся третя до

$$(\gamma^2 + \delta^2 i^2)\alpha\beta \equiv 0,$$

а в злуці з другою дає $\alpha^3\beta \equiv 0$. Звідси слїдує, що мусить бути $\alpha \equiv 0$ або $\beta \equiv 0$, а проте і одна з величин γ і δ рівно-ж $\equiv 0$.

Нехай буде перше $\alpha \not\equiv 0$, $\beta \equiv 0$; се не накладає на γ і δ нїякого иншого обмеженя, як тільки те, що одна з них є $\equiv 0$, т. зн. Y^2 є дійсне. Коли-ж $\alpha \equiv 0$, $\beta \not\equiv 0$, тоді з другої реляції слїдує $\gamma \equiv \delta \equiv 0$; отже коли в X дійсна часть є $\equiv 0$, тоді є або $X \equiv 0$, або $Y \equiv 0$ (mod. p). Проте всї сочинники конґруенції (11a) є дійсні, і корінї або всї дійсні, або двократний дійсний, а два прочі належать до $GF[p^2]$.

б) $Y \equiv 0$ (mod. p) потягає за собою $z \equiv 4L$, т. зн. $3L^2 + N \equiv 0$ (mod. p). Се вимагає, щоби було $\left(\frac{-3N}{p}\right) = +1$ і дальше, з огляду на $D \equiv 0$, $M^2(M^2 + 16L^3) \equiv 0$ (mod. p). Тут мусить бути $M \equiv 0$, бо

$M^2 \equiv -16L^3$ веде до $L \equiv 0$, отже рівно-ж і тодї було би $M \equiv 0$. Проте дана конґруенція виглядає так:

$$f(y) = (y^2 - X^2)^2 \equiv 0 \text{ (mod. } p\text{)},$$

а її корінї є $y_1 = y_2 \equiv X$, $y_3 = y_4 \equiv -X$.

42. Коли циклїчний визначник Δ, степеня $p-1$, утворений з сочинників ресольвенти $\varphi(v)$, є пристайний до 0 (mod. p), тодї $\varphi(v) \equiv 0$ має три або один дїйсний корінь, відповідно до квадратного характеру величини $R \equiv -3D$.

II. $\left(\frac{R}{p}\right) = +1$; v_1, v_2, v_3 є дїйсні, ріжні поміж собою. Утворім a, b, c і означім характери символів $\left(\frac{a}{p}\right)$, $\left(\frac{b}{p}\right)$, $\left(\frac{c}{p}\right)$. З поміж усїх можливих їх комбінацій є допустимі такі:

α) один з поміж тих символів є $= 0$;

β) два або три символи є $= 0$;

γ) всї три символи мають вартість $+1$;

δ) один символ є $+1$, два -1.

Евентуальности, щоби один або три символи були -1, є недопустимі, бо abc є квадратом.

α) Коли одна з величин a, b, c є $\equiv 0$, тодї мусить бути одно $v \equiv -4L$; коли подїлимо $\varphi(v)$ через $v + 4L$, одержимо як вимогу подїльности $M \equiv 0$, отже ресольвента має такі корінї:

$$\begin{aligned} v_1 &\equiv -4L, \\ v_2 &\equiv 2L + 2T, \\ v_3 &\equiv 2L - 2T, \end{aligned}$$

де T залежить від $T^2 \equiv 3N$, а $X \equiv 0$. Проте корінї даної конґруенції є

$$\left.\begin{aligned} y_1 \equiv -y_2 \equiv Y + Z \\ y_3 \equiv -y_3 \equiv Y - Z \end{aligned}\right\} \text{ (mod. } p\text{)}.$$

α_1) Коли $\left(\frac{3N}{p}\right) = +1$, то v_2 і v_3 є дїйсні, а Y і Z дїйсні або мнимі, відповідно до характерів величин $6L \pm 2T$.

α_2) Коли $\left(\frac{3N}{p}\right) = -1$, то v_2 і v_3 належать до $GF[p^2]$, отже маємо

$$\left.\begin{aligned} 4Y^2 &\equiv 6L + 2i \\ 4Z^2 &\equiv 6L - 2i \\ i^2 &\equiv 3N \end{aligned}\right\} \text{ (mod. } p\text{)},$$

т. зн. Y і Z є спряжені в $GF[p^2]$. Положім $Y = \alpha + \beta i$, $Z = \alpha - \beta i$, то α і β находимо з

$$\left.\begin{array}{r} 4\,\alpha\,\beta \equiv 1 \\ 2\,(\alpha^2 + \beta^2\, i^2) \equiv 3\,L \end{array}\right\} \text{(mod. } p).$$

Елїмінуючи з другої конґруенції $\beta \equiv \frac{1}{4\,\alpha}$, одержимо

$$16\,\alpha^4 + 24\,L\,\alpha^2 + 3\,N \equiv 0 \text{ (mod. } p). \tag{18}$$

При помочи α виразимо корінї y так:

$$\left.\begin{array}{r} y_1 \equiv -\,y_2 \equiv 2\,\alpha \\ y_3 \equiv -\,y_4 \equiv 2\,\beta\,i \end{array}\right\} \text{(mod. } p).$$

де $2\,\beta$ є (mod. p) товаришем величини $2\,\alpha$.

Конґруенція для α (18) є рівнозначна з

$$(4\,\alpha^2 + 3\,L)^2 \equiv 9\,L^2 - 3\,N \text{ (mod. } p). \tag{18a}$$

Займім ся її правою стороною. Вона не може бути $\equiv 0$, бо тодї було би $N \equiv 3\,L^2$, т. зн. $4\,\alpha^2 \equiv -\,3\,L$, отже мусїло би бути $\left(\frac{9\,L^2}{p}\right) = -\,1$, а се недорічність. Отже можливе тільки таке, що $\left(\frac{9\,L^2 - 3\,N}{p}\right) = +\,1$ або $-\,1$.

В першім разї, $\left(\frac{9\,L^2 - 3\,N}{p}\right) = +\,1$, положім $9\,L^2 - 3\,N = U^2$; се дасть

$$4\,\alpha^2 \equiv -\,3\,L \pm U;$$

тут знова може бути $\left(\frac{-\,3\,L \pm U}{p}\right) = \pm\,1$. В разї $+\,1$ є α дїйсне, отже y_1 і y_2 дїйсні, а y_3 і y_4 належать до $G\,F\,[p^2]$; в разї $-\,1$ дїєть ся навпаки. Тому, коли $\left(\frac{9\,L^2 - 3\,N}{p}\right) = +\,1$, маємо два корінї дїйсні, противних знаків, а два другі чисто мнимі спряжені в $G\,F\,[p^2]$.

Коли-ж врешті $\left(\frac{9\,L^2 - 3\,N}{p}\right) = -\,1$, то положім $9L^2 - 3\,N \equiv j^2$, де j належить до $G\,F\,[p^2]$, отже є

$$4\,\alpha^2 \equiv -\,3\,L \pm j.$$

Положім ще $\alpha = \mu + \nu\,j$, то се доведе до конґруенції

$$(8\,\mu^2 + 3\,L)^2 \equiv 3\,N \text{ (mod. } p),$$

яка є, з огляду на $\left(\frac{3N}{p}\right) = -\,1$, нерішима в $G\,F\,[p]$. Проте конґруенція (18) є нерішима в $G\,F\,[p^2]$, отже мусимо за α приймити якусь величину з $G\,F\,[p^4]$; тодї j дасть ся виразити через α:

$$j \equiv 4\,\alpha^2 + 3\,L,$$

отже шукана розвязка звучить:

$$\left.\begin{array}{r} y_1 \equiv -\,y_2 \equiv 2\,\alpha \\ y_3 \equiv -\,y_4 \equiv 2\,\beta\,(4\,\alpha^2 + 3\,L) \\ 4\,\alpha\,\beta \equiv 1 \end{array}\right\} \text{(mod. } p).$$

β) Коли ще другий з символів $\left(\frac{a}{p}\right), \left(\frac{b}{p}\right), \left(\frac{c}{p}\right)$ є 0, то через дальше ділене дійдемо до вимоги $3N \equiv 7L^2$, т. зн.

$$f(y) = y^4 - 6Ly^2 - 7L^2 \equiv 0 \pmod{p};$$

квадратами її корінів є

$$y^2 \equiv 7L \text{ і } -L.$$

Одержуємо проте дві пари корінїв рівних, з противними знаками; вони можуть або бути дїйсні, або належати до $GF[p^2]$.

Коли-ж всї три символї $є = 0$, то звідси слїдує $L = 0$, отже маємо чотирократний корінь $y = 0$.

γ) Коли всї три символи, $\left(\frac{a}{p}\right), \left(\frac{b}{p}\right), \left(\frac{c}{p}\right)$, $є = +1$, то X, Y, Z є дїйсні; дана конґруенція має чотири ріжні, дїйсні розвязки.

δ) Нехай врештї буде $\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{c}{p}\right) = -1, \left(\frac{a}{p}\right) = +1$; тодї є X дїйсне, Y і Z мнимі. Заложім $Y = \alpha + \beta i$, $Z = \gamma + \delta i$, тодї мусить бути $\gamma \equiv \pm \alpha$, $\delta \equiv \mp \beta$ (mod. p), бо $4XYZ \equiv M$ є дїйсне. Величини α і β визначуємо з конґруенцій

$$\left.\begin{aligned} X^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2 i^2) &\equiv 3L \\ 4X(\alpha^2 - \beta^2 i^2) &\equiv M \end{aligned}\right\} \text{(mod. } p\text{)},$$

а маючи їх, одержуємо такі корінї конґруенції (11):

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv X + 2\alpha \\ y_2 &\equiv X - 2\alpha \\ y_3 &\equiv -X + 2\beta i \\ y_4 &\equiv -X - 2\beta i \end{aligned}\right\} \text{(mod. } p\text{)},$$

отже y_1, y_2 і y_3, y_4 творять дві пари розвязок: одну дїйсну, другу спряжену в $GF[p^2]$.

43. В разї, коли III $\left(\frac{R}{p}\right) = -1$, ресольвента має один дїйсний корінь, а два инші спряжені в $GF[p^2]$:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &\equiv -2\alpha \\ v_2 &\equiv \alpha + \beta i \\ v_3 &\equiv \alpha - \beta i \end{aligned}\right\} \text{(mod. } p\text{)},$$

отже ресольвента є

$$\varphi(v) = v^3 - (3\alpha^2 + \beta^2 i^2)v + 2\alpha(\alpha^2 - \beta^2 i^2) \equiv 0 \text{ (mod. } p\text{)},$$

а величини a, b, c мають рівно-ж форму $A + Bi$. В тім разї належать корінї y або до $GF[p^2]$, або до $GF[p^4]$, подібно як попередно.

IV. Коли ресольвента $\varphi(v) \equiv 0$ (mod. p) є незведима, то X, Y, Z, які залежать від її корінів, є величинами, спряженими в $GF[p^3]$. Отже $X+Y+Z$ є дійсне, т. зн. y_1 є дїйсне, а три прочі корінї належать до $GF[p^3]$.

44. Як виконувати операції на величинах поля Galois, покажемо на слідуючім примірі:

$$f(y)=y^4-5y^2+7y-5\equiv 0 \text{ (mod. 19)}.$$

Тут є $L\equiv 4$, $M\equiv 3$, $N\equiv 8$ (mod. 19), отже ресольвента звучить:

$$\varphi(v)=v^3-v+3\equiv 0 \text{ (mod. 19)}.$$

Її виріжник є $D\equiv -5$, а що $\left(\frac{-5}{19}\right)=-1$, то вона має один дійсний корінь -4 і два инші $2(1\pm i)$, де i дане реляцією

$$i^2\equiv 2 \text{ (mod. 19)}. \qquad (*)$$

Тому є

$$\left.\begin{aligned}16X^2&\equiv a\equiv -9\\ 16Y^2&\equiv b\equiv -4+8i\\ 16Z^2&\equiv c\equiv -4-8i\end{aligned}\right\} \text{ (mod. 19)}.$$

Перша зводить ся до

$$X^2\equiv 3 \text{ (mod. 19)}, \qquad (**)$$

а що $\left(\frac{3}{19}\right)=-1$, то X належить до $GF[p^2]$; проте можемо його виразити через i. Робимо се так: множимо з собою (*) і (**), се дає $(Xi)^2\equiv 6\equiv 5^2$, $Xi\equiv\pm 5$, $Xi^2\equiv 2X^2\equiv\pm 5i$, отже

$$X\equiv\pm 7i;$$

нам вистарчить знати одну вартість, пр. $X\equiv 7i$.

Опісля находимо Y і Z, так що положимо

$$Y=\alpha+\beta i,\ Z=\alpha-\beta i;$$

се дає з огляду на $a+b+c\equiv 16(X^2+Y^2+Z^2)\equiv 2$

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2+2\beta^2&\equiv -5\\ \alpha\beta&\equiv 5\end{aligned}\right\} \text{ (mod. 19)}.$$

Звідси елімінуємо β і одержуємо

$$\alpha^4+5\alpha^2-7\equiv 0 \text{ (mod. 19)} \qquad (***)$$

або

$$(\alpha^2-7)^2\equiv -1 \text{ (mod. 19)}.$$

-1 є знова не-останком для 19, отже треба корінь конґруенції $z^2\equiv -1$ (mod. 19) виразити через i; легко знайти, що $z\equiv 3i$, бо $z^2\equiv 9i^2$. Отже є

$$\alpha^2\equiv 7+3i \text{ (mod. 19)}, \qquad (\dagger)$$

коли знова обмежимо ся до одного тільки знака.

Величина α, дана конґруенцією (***), дефініює $GF[p^4]$; при помочи реляції (†) можемо представити $GF[p^2]$, т. зн. i, через α:

$$i\equiv -5\alpha^2+4 \text{ (mod. 19)}. \qquad (\dagger\dagger)$$

Остаточно треба ще виразити β згл. βi через α. З $\alpha\beta \equiv 5$ (mod. 19) слідує $\alpha^3 \beta i \equiv 5 \alpha i$, т. зн.

$$(7 + 3 i) \beta i \equiv 5 \alpha i.$$

Розширюючи обі сторони спряженою величиною $7 - 3 i$, одержимо з огляду на $(7 + 3 i)(7 - 3 i) = 49 - 9 i^2 \equiv - 8 + 1 \equiv 12$,

$$12 \beta i \equiv 5 \alpha i (7 - 3 i) \equiv - 3 \alpha i + 4 \alpha i^2,$$

отже дальше

$$12 \beta i \equiv - \alpha (\alpha^2 - 7) + 8 \alpha \equiv - \alpha^3 - 4 \alpha,$$

т. зн.

$$\beta i \equiv - 8 \alpha^3 + 6 \alpha.$$

Маємо отже

$$\left.\begin{aligned} X &\equiv - 4 \alpha^2 + 9 \\ Y &\equiv - 8 \alpha^3 + 7 \alpha \\ Z &\equiv 8 \alpha^3 - 5 \alpha \end{aligned}\right\} \text{(mod. 19)}.$$

Звідси слідують корінї даної конґруенції, виражені при помочи корінїв простїйшої конґруенції (***):

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv - 4 \alpha^2 + 2 \alpha + 9 \\ y_2 &\equiv - 4 \alpha^2 - 2 \alpha + 9 \\ y_3 &\equiv 3 \alpha^3 + 4 \alpha^2 - 7 \alpha - 9 \\ y_4 &\equiv - 3 \alpha^3 + 4 \alpha^2 + 7 \alpha - 9 \end{aligned}\right\} \text{(mod. 19)}.$$

45. Як примір, в якімресольвента 3. степеня є незведима, отже приходить ся розвязувати квадратні конґруенції в $GF[p^3]$, розвяжемо таку конґруенцію:

$$f(y) = y^4 + y^2 - 2 y + 3 \equiv 0 \text{ (mod. 7)}.$$

Тут є: $L \equiv 1$, $M \equiv - 3$, $N \equiv - 1$, отже

$$\varphi (v) = v^3 - 3 v + 1 \equiv 0 \text{ (mod. 7)}.$$

Отся ресольвента є незведима; назвім один її корінь $v_1 \equiv j$, то два другі корінї є $v_2 \equiv j^2 - 2$, $v_3 \equiv - j^2 - j + 2$, (гл. уст. 16), отже

$$\left.\begin{aligned} a &\equiv - 3 j + 2 \\ b &\equiv - 3 j^2 + 1 \\ c &\equiv 3 j^2 + 3 j + 3 \end{aligned}\right\} \text{(mod. 7)},$$

а квадратні конґруенції для X, Y, Y зводять ся до

$$\left.\begin{aligned} X^2 &\equiv 2 j + 1 \\ Y^2 &\equiv 2 j^2 - 3 \\ Z^2 &\equiv - 2 j^2 - 2 j - 2 \end{aligned}\right\} \text{(mod. 7)}.$$

Першу з них розвязуємо так, що покладимо $X \equiv \alpha j^2 + \beta j + \gamma$, і визначуємо α, β, γ з

$$\left.\begin{aligned} 3 \alpha^2 + 2 \alpha \gamma + \beta^2 &\equiv 0 \\ \alpha^2 + \alpha \beta - 2 \beta \gamma &\equiv - 2 \\ \gamma^2 - 2 \alpha \beta &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \text{(mod. 7)};$$

се дає $\alpha \equiv 3$, $\beta \equiv 1$, $\gamma \equiv 0$, отже

$$X \equiv 3j^2 + j \pmod{7}.$$

Подібно знаходимо

$$Y \equiv -2j^2 - 3j + 3 \pmod{7},$$

а Z можемо обчислити зі звязи

$$4\,X\,Y\,Z \equiv M \pmod{p},$$

т. є

$$X\,Y\,Z \equiv 1 \pmod{7}.$$

Добуток $X\,Y$ є $\equiv \vartheta \equiv 2j^2 - 3j - 3$, отже

$$\vartheta Z \equiv 1 \pmod{7}.$$

Коли ϑ належить до виложника s, т. зн. $\vartheta^s \equiv 1 \pmod{7}$, то

$$Z \equiv \vartheta^{s-1} \pmod{7}.$$

Треба проте знайти виложник s; він мусить містити ся в $7^3 - 1 = 342 = 2 \,.\, 3^2 \,.\, 19$. Піднесім ϑ до степений 2, 3, 6, . . ., то найдемо $\vartheta^{57} \equiv 2$, отже

$$\vartheta^{57}\,Z \equiv 2\,Z \equiv \vartheta^{56} \pmod{7},$$

т. зн.

$$Z \equiv -3\,\vartheta^{56} \pmod{7},$$

а що $\vartheta^{56} \equiv 3j^2 + j - 3$, то

$$Z \equiv -2j^2 - 3j + 2 \pmod{7}.$$

Отже коріні даної конґруенції є

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv -j^2 + 2j - 2 \\ y_2 &\equiv 2 \\ y_3 &\equiv -3j^2 - j + 1 \\ y_4 &\equiv -3j^2 - j - 1 \end{aligned}\right\} \pmod{7}.$$

Берлїн, май — червень 1913.

Résumé.

Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bildet die Untersuchung der kubischen und der biquadratischen Kongruenzen mit Primzahlmodul im Galois'schen Felde. Dem eigentlichen Gegenstande geht ein Abriß der Theorie der Kongruenzen auf Grund der Eigenschaften des Galois'schen Feldes voran.

Mit den in Rede stehenden Kongruenzen hat sich schon Cauchy (1829) beschäftigt, ging aber über die Untersuchung der reduziblen Fälle nicht hinaus. Seine Methode ist der Lagrange'schen (für die kubischen bzw. biquadratischen Gleichungen) analog.

I. Die allgemeine kubische Kongruenz, auf die Form

$$f(y) = y^3 - 3Ay - 2B \equiv 0 \pmod{p}$$

reduziert, wird mit Hilfe der Resolventen gelöst:

$$\left.\begin{array}{l} 27v_1 = (3t_1)^3 \equiv (y_1 + \gamma y_2 + \gamma^2 y_3)^3 \\ 27v_2 = (3t_2)^3 \equiv (y_1 + \gamma^2 y_2 + \gamma y_3)^3 \end{array}\right\} (\text{mod. } p),$$

worin y_1, y_2, y_3 die Wurzeln von $f(y) \equiv 0$ sind, und γ durch

$$\gamma^2 + \gamma + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

gegeben wird; v_1 und v_2 hängen vor der Kongruenz ab

$$\varphi(v) = v^2 - 2Bv + A^2 \equiv 0 \ (\text{mod } p),$$

deren Diskriminante $D = B^2 - A^3$ zugleich Diskriminante von $f(y)$ ist.

Die Diskussion der Lösung führt zu folgenden Ergebnissen:

1) Ist $D \equiv 0$ (mod. p), so hat $f(y) \equiv 0$ eine doppelte, bzw. dreifache Wurzel; 2) ist $\left(\frac{-3D}{p}\right) = +1$, so hat die Kongruenz 3, ist 3) $\left(\frac{-D}{p}\right) = -1$, so hat sie nur eine reelle Wurzel, — vorausgesetzt, daß sie überhaupt lösbar ist. — Das Lösbarkeitskriterium lautet: es soll die zyklische aus den Koeffizienten der Kongruenz gebildete Determinante $(p-1)$ ter Ordnung $\equiv 0$ (mod. p) sein (König-Kronecker).

II. Die biquadratische Kongruenz reduziert man auf

$$f(y) = y^4 - 6Ly^2 - 4My - 3N \equiv 0 \pmod{p}$$

und führt als Resolventen ein

$$\left.\begin{array}{l} 4v_1 \equiv (y_1 + y_2 - y_3 - y_4)^2 - 16L \\ 4v_2 \equiv (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)^2 - 16L \\ 4v_2 \equiv (y_1 - y_2 - y_3 + y_4)^2 - 16L \end{array}\right\} \pmod{p}$$

die von

$$\varphi\,((y) = v^3 - 12\,(L^2 - N)\,v - 16\,(M^2 - 3\,L\,N - L^3) \equiv 0 \pmod{p}$$

abhängen. Hat $\varphi\,(y) \equiv 0$ (die Resolventenkongruenz oder kurz: die Resolvente) eine Doppelwurzel, so hat auch die gegebene Kongruenz mehrfache Wurzeln, aber nur in diesem Falle.

Ist die Resolvente vollständig lösbar, also sind ihre Wurzeln v_1, v_2, v_3 reell,dann löst man die drei quadratischen Kongruenzen

$$\left.\begin{aligned} (y_1 + y_2 - y_3 - y_4)^2 &\equiv 4\,v_1 + 16\,L \\ (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)^2 &\equiv 4\,v_2 + 16\,L \\ (y_1 - y_2 - y_3 + y_4)^2 &\equiv 4\,v_3 + 16\,L \end{aligned}\right\} \pmod{p};$$

nennt man ihre Lösungen $4\,X$, $4\,Y$, $4\,Z$, dann hat man:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv X + Y + Z \\ y_2 &\equiv X - Y - Z \\ y_3 &\equiv - X + Y - Z \\ y^4 &\equiv - X - Y - Z \end{aligned}\right\} \pmod{p}.$$

Je nachdem die obigen quadratischen Kongruenzen alle lösbar sind oder nicht, bekommt man für die y entweder reelle Zahlen, oder Größen des Galois'schen Feldes der Ordnungen p^2 bzw. p^4.

Enthält die Resolvente einen irreduziblen quadratischen Faktor, so sind zwei von den v imaginär, d. h. konjugiert komplex im Galois'schen Felde der Ordnung p^2. Dann gehören die y dem Galois'schen Felde der Ordnungen p^2 oder p^4.

Ist schließlich die Resolvente irreduzibel, so hat die gegebene Kongruenz eine reelle Wurzel, und die drei übrigen gehören dem Galois'schen Felde der Ordnung p^3 an.

Дещо про теоретичне і методичне значінє сочинника температури скоростий процесів для хемічної кінетики.

НАПИСАВ

Др. Юлїян Гірняк.

Перед двома роками оголосив я в збірці кінетичних розвідок п. з. „Beiträge zur chemischen Kinetik. I.“, виданих Товариством ім. Шевченка у Львові, начерк поглядів, що випливають з експериментального материялу, зібраного мною в дослїдах над сочинником температури скоростий хемічних реакций. В сім місци не можу, поки що, розвивати in extenso всїх думок там порушених, вже хочби з сеї причини, що й в згаданій публїкациї приходило ся менї з трудом упорядкувати річ в яку таку схему. Деяких, навіть дуже скомплїкованих квестий, вспів я діткнути ся ледви кількома словами, тому кілька важних, на мій погляд, моментів уважав я за відповідне висказати бодай в чисто афористичній формі (стор. 77, 88, 91, згаданої працї). Мушу також піднести, що деякі справи, там трактовані, уважаю тепер за передвчасно висунені так з огляду на методу представленя, як і з огляду на сучасну „констелляцию“ ріжнородних поглядів, що вибивають ся в лїтературі, а що найважнїйше — з огляду на призбираний, богатий експериментальний материял визначних дослїдників, на якім можна відразу оперти ся і деякі думки розвивати конкретно саме в ледви порушених, або й зовсїм тодї поминених фраґментах.

В сім розумію можна би зарезервувати на пізнійшу пору увагу на значінє більшої або меншої симетриї реаґуючих молекулів (стор. 79 до 84). Тесаме сказав би я про думки, кинені на сторонах 85—86. За те цїлий натиск випадало би покласти передовсїм на сї моменти, що ведуть до висуненя стеричних правильностий на перше місце цїлої хемічної кінетики. Отсю нотку присьвячу сїй справі, щоби при тім ще й висказати, як і о скілько могли би сягнути консеквенциї згаданих думок в систему молекулярної хемії не лише в кінетичній, але й в її статичній области, коли би найголовнїйші зариси згаданих поглядів вдержали ся в будучности.

Річ однак в тім, щоби, після мого погляду, узгляднювати не так саму скорість хемічного процесу, як радше сочинник температури сеї скорости, увільняючи ся в експериментальних дослїдах, о скілько лише можна, від всяких каталїтичних впливів на самий процес (з виїмком перемін, в яких їх каталїчний перебіг є ґенетичною сутию цїлого механїзму реакциї, себто, коли першою фазою переміни є переходова злука каталїзатора з реаґуючим молекулом).

Таке узгляднене сочинника температури можна би оперти і на кількох слїдуючих теоретичних арґументах.

Основною думкою всїх розумовань, опертих на другім законї термодинаміки, є в сути річи ідея ізотермічної рівноваги. Однак з умов одної одинокої температури не можна би a priori нїчого вивести про якийнебудь материяльний уклад. Вистане вказати вже на славний цикль Карнота. А відтак всї методичні виводи, основані на другім родї неможливости perpetuum mobile, виходять, що найменше з двох температур, та комбінують характеристичну функцию $f\ (T,\ p,\ v)$ тїла в „макро-фізичнім“, розуміню в рівновагою енерґії, зведеної до зера в замкненім циклї. Цїла отся аксіоматична термодинаміка, трактована чи то при помочи глибшої математичної аналїзи, чи без неї, не посунула би нас богато вперед поза те, що заміщує рівнане Clapeyron'a. Цїлий поступ і безперечний здобуток нових областий материяльної фізики і хемії — се лише примінене гіпотези Авоґадра до висше начеркненої ідеї. Чим однак не могла би ще бути цїла ся сьміла гіпотеза так в своїм заложеню як і в своїй доказовій арґументациї — як не унаглядненим образом однакової вартости сочинника температури одної (чи радше двох) фізикальної прикмети всїх досконалих ґазів? В яких саме обсягах вартостий p і v тратить свою силу (в значіню нїм. Giltigkeit) характеристичне рівнане досконалих ґазів і розширене рівнане van der Waals'a, як — не там, де сочинники температури $\left(\frac{dp}{dt}\right)_v$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)_p$ стають нерівнозвучні (nicht übereinstimmend) для поодиноких субстанций?

Абстрагуючи від непроглядного комплексу модерних молекулярних понять в цілій области фізикальної хемії, комплексу спочиваючого на гіпотезї Авоґадра і безнастанних змаганях van der Waals'a та цілої його школи, заакцентуймо лише факт, що ціла чисельна скаля абсолютної температури оперла ся о гіпотетичне зеро, векстрапольоване з ідентичної вартости сочинника температури $\left(\frac{dv}{dt}\right)_p$ досконалих ґазів. Коли дальше перенесемо ся в область термічного супокою молекулярних системів ($T = 0$) і поглянемо на форму нової гіпотези Nernst'a:

$$\left(\frac{dA}{dT}\right)_{T=0} = \left(\frac{dU}{dT}\right)_{T=0} = 0$$

зараз замітимо, що ся гіпотеза є пробою висказаня чогось конкретного про два дуже важні сочинники температури материяльних системів.

Досьвіди ствердять, о скілько ся гіпотеза окаже ся плідною в численних консеквенциях і відкритях, на які того рода твердженє повинно би напроваджувати. Поки що однак теорем Nernst'a заміщує лише чисто фізикальний зміст[1]) і не обіймає нїякого висказу про молекулярний механїзм материї. О скільки „хемічні сталі“ з него випроваджені приймуть в дійсности усталені чисельні вартости, треба буде їх конечно механїстично з'інтерпретувати.

Наконець думаю, що злишно було би задержувати ся на унїверзальнім значіню функциї $p = f\ (Q,\ T)$ для якоїнебудь субстанциї в цїлій материяльній фізиці, фізикальній хемії, а навіть електрохемії. Вистане може загально натякнути, що до сеї функциї збігає всяка так чисто термодинамічна, як і чисто кінетична теория, що до неї стремлять не лише ширше закроені ідеї небуденних дослїдників обох типів, але що в сїй функциї перехрещують ся дїйсно всякі звязи тепла і руху, вся дослїдна емпірия і здорова механїстична абстакция. Позволю собі висказати тут мій здогад, що кождий член сеї функциї (будьто поодиноко, будьто у відповідній частинній суммациї) є — що так висловлю — „дволичний“, т. зн. дасть ся раз термодинамічно, раз механїчно з'інтерпретувати. В статичній динаміцї материї можна обі інтерпретациї зовсім довільно і без шкоди, т. зн. без наражуваня ся на суперечности, приміняти. Сьвідчать про се численні теоретичні проби Boltzmann'a, Voigt'a, G. Jäger'a і ин. при випроваджуваню функциї $p = f\ (Q,\ T)$ для насичених пар, в якій тепло пароване дало ся зіндентифікувати з молекулярною працею, при чім стала інтеґрациї дала ся звязати

---

[1]) Гл. Ph. Kohnstamm und Dr. L. S. Ornstein. Proc. of the section of sciences. v. XIV. 2 a part. 1912. Amsterdam.

безпосередно з ріжницею міжмолекулярних, вільних просторів раз в ґазовім, другий раз в плиннім стані скупности. Можна би припускати[1]), що „хемічні сталі“ в рівнаню зближенім або й ідентичнім до рівнань Nernst'а дадуть ся вивести з того рода простірних вартостий, та що вони ґеометрично на них опруть ся. „Усталене“ їх піде найправдоподібнїйше по лінїї узгляднення таких реляций, особливо, коли загальна ассоцияцийна теория ґазів і плинних тїл прибере конкретну форму.

Не входячи дальше в того рода рефлексиї, піднесім один момент, що домінує, як очевидний аксіомат теоретичної думки в найголовнїйших питанях про явища материї. Цїла кінетика природи се лише рух молекулів та атомів (і електронів). Се, що ми називаємо температурою, се представляє лише інтензивність і зглядну скількість того руху, себ то напружене, що його міримо емпіричним термометром. Коли ми прикладемо якенебудь функцийне понятє або просто навіть першу лїпшу прикмету материї здовж температури, маємо тодї безперечно до дїла з найповажнїйшою справою в материяльній фізицї або хемії. Тому все те, що ми називаємо сочинником температури, дотикає непроглядного комплексу функцийних звязей всїх материяльних явищ. Навіть чиста термодинаміка не обійшла ся і не обійде ся без свого, собі питомого, „сочинника“. Вона однак нїколи не досягне механїзму справ, рівняня $p = f\ (Q, T)$ дотикає ся лише з вовнїшної, граничної сторони, і що найвисше констатує, як ся функция є нечувано „вразлива“ на зміну температури. Взагалї отже треба піднести, що чим більшу вартість матиме функция $\frac{dD}{dT}$, в якій D означує якунебудь більше або менше скомплїковану дефінїцию, виведену з прикмет материї, тим ся функция глибше сягає в молекулярну суть механїзму материяльного явища, тим близше підходить вона до области чистої кінетики, і тим заразом більше віддалює вона нас від царини чистої термодинаміки, яка приймає тут постепенно ролю емпіриї, передаючи теоретичний провід так в самій ідеї, як і методї чистій кінетицї.

Отсих кілька думок кидаю тут лише афористично, будучи тепер занятим сими питанями. В короткім часї, надїю ся, висловлю ся про се обширнїйше і в більше конкретній формі. Роблю се тому, щоби зазначити, що новий теорем Nernst'а вимагає як раз найбільше з того становиска докладнїйшого висьвітленя т. зн. в молекулярній области чистої хемії, а не із становиска „макрофізичних“ звязей поодиноких станів скупности.

---

[1]) Саме бажаю сю річ близше розслїдити кількома пробними рахунками.

Стерична динаміка концентрує ся до нинїшного дня виключно на дискусиї самої скорости хемічного процесу, отже явища на скрізь ізотермічного. На основі кількох повисших натяків уважаю сей напрям за зовсїм схиблений з теоретичного становиска, бо так не поступає навіть термодинамічна статика. Ся річ кидає ся тим більше в очи, що сочинник температури скорости хемічного процесу належить до найвисших, які лише знає стисла природнича наука. Що він є так високий, є зовсїм зрозуміле, коли зважимо, як далеко сягає того рода явище в атомістичну дрібноту своєї механїчної ґенези. Зінтерпретувати чисельну вартість сього сочинника — се на мій погляд — найвдячнїйша перспектива сьогочасної епохи, майже найдальша ціль всякої материяльної кінетики.

Коли я відважую ся висказати отсих кілька думок, то роблю се не для висуненя якогось субєктивного погляду, який не мав би значіня, але з огляду на методичні трудности, з якими боре ся і довго ще імовірно буде бороти ся математична аналїза кінетичної теориї, схоплена нинї під видом скомплїкованих, „найправдоподібнїйших" констеляций всїляких молекулярних роїв материї. Я є переконаний, що аналїтичний рахунок дістане колись знамените „оперте" в чисельній вартости кождого, доцільно вибраного, „стеричного" експерименту, однак під услівєм, що таких „даних" назбирає ся більше, що з них виробить ся який такий „систем".

До такого погляду осьміляє мене сконстатоване одної, про око може зовсїм незначної і припадкової появи, що дає ся замітити на сочиннику температури скорости кількох (зовсїм ріжних типів) амінових перемін.

Маємо до дїла з трома парами хем. реакций, а то:

1.¹) а) піридина + $C_2 H_5 J$
    б) колїдина + $C_2 H_5 J$
2.²) а) парарозанїлїна + $Na O H$
    б) кристальвіолєт + $Na O H$
3.³) а) δ-хльорбутильамін $\longrightarrow$ пирролїдиновий хльорогидрат
    б) гидрохльорбутальлїльметилькарбінамін $\longrightarrow$
    $\longrightarrow$ $\alpha\alpha$, — двометильопирролїдиновий хльорогидрат.

В отсих трох парах хемічних перемін находять ся в безпосереднім сусїдстві атому N в припадках 1 а), 2 а), 3 а) два атоми H, нато-

---

¹) I. Hirniak Beiträge zur chem. Kinetik. I. 1911. S. 67.

²) Hantzsch u. W. I Müller. Ber. d. deutsch. chem. Ges. 43, 2609—13.

³) H. Freundlich u A. Krestovnikoff. Zeitschr. f. phys. Chemie 76, 94
H Freundlich u Marion B. Richards. „ „ „ „ 79, 695.

місць в припадках 1 б), 2 б), 3 б) оба місця атомів H є заступлені ґрупами CH_3. У всїх трох парах реакций проявляє ся в однаковім змислї стеричний вплив CH_3 обменшенєм сочинника скорости переміни і підвисшенєм вартости сочинника температури сеї скорости. Тим самим був би сповнений загальний постулят стеричної кінетики на сих процесах і т. зв. правило антибазиї між обома згаданими хемічними характеристиками. З того погляду всї три пари перемін є інтересні і пригожі для сих постулятів, (нинї вони не рідко ще заводять), з другої однак сторони нікому не може сьогодня прийти навіть на думку шукати якихнебудь правильностий в обменшуваню скорости перемін при зіставленях 1 а) — 1 б), 2 а) — 2 б), 3 а) — 3 б), бо тут маємо до діла з перемінами, які належать до зовсЇм ріжних типів і відбувають ся в зовсїм ріжних услівях. Тим однак інтереснїйшим повинен бути факт, що в сочинниках температури находимо майже ідентичні чисельні ріжниці, а то:

в) 1 б) і 1 а) . . . . . 0·74
„ 2 б) і 2 а) . . . . . 0·77
„ 3 б) і 3 а) . . . . . 0·80

В моїй згаданій публїкациї я займив становиско, що стерична кінетика мусить оперти ся на сочиннику температури, а не на сочиннику скорости із богато инших, так теоретичних як і методичних причин. Саме сї мотиви повинні скріпити переконанє, що наведені тут цифри не мають припадкового значіня. Під хвилю я занятий зібранєм ще дальших двох-трох пар-амінових перемін, в яких будуть впроваджені по дві метилеві ґрупи (CH_3) в стеричну гру, однак на основі того, що тут констатую, я очікую з гори ріжниць, що будуть хитати ся коло 0·77. Коли се ствердить ся, що є зовсїм імовірне, можна буде висказати в загальнїйшій формі погляд, що сочинник температури скоростий хемічних процесів стане першим методичним етапом квантитативної стеричної динаміки. Вже тепер пр. я відважу ся пояснити, чому с. т. (сочинник температури) переміни, обробленої Н. Меншуткином[1]), а то:

$$NH_3 + CH_3Br = (CH_3)NH_2 \cdot HBr$$

видав так малу вартість (1·32 між 50° — 100° C). На стор. 62. моєї публїкациї є поданий с. т. для двометильо-пара-толюїдини: 2·24. Стеричне значінє мають для с. т. лише оба метилї, злучені з атомом N. (Гл. подібні обставини l. c. при коллїдинї).

Гіпотетично можна заложити, що для монометильоанїліни випаде с. т. менший о 0·35, для анїліни (або пара-толюїдини) менший

---

[1]) Zeitschr. f. phys. Ch. 17, 193, 1895.

о дальшу вартість 0·35, або разом о 0·70, т. зн. він повинен би мати вартість 1·54. Коли тепер відтягнемо від сего числа дальших 2 до 3 десятні, припадаючі на стеричний вплив бензильової ґруп C_6H_5, дістанемо дійсно незвичайно малий с. т. (дуже незначно висший від 1) для амоняку, згідно з тим, що експериментально ствердив І. с. Н. Меншуткин.

Хоч як ще далекі від стислости є того рода оцінки, не можна би їм однак відказувати всякої вартости. Я зазначу лише, що на основі стеричних чисел для C_6H_5 (від 0·3 до 0·5) і для CH_3 (кругло 0·35) можна гіпотетично комбінувати, які вартости с. т. припадуть на неодні ще хемічні процеси, що належуть до ріжних типів.

В змислі повисших виводів насувала би ся для сьогочасної хемічної кінетики дуже важна задача, усталити стеричні числа для ріжних ґруп, більших від CH_3. Вони не конче і не все мають випасти висші від 0·35. Залежить се від способу, як вони ґеометрично розгалузують ся від хемічного центрум. Етиль (C_2H_5) виявив в моїм досліді такий вплив, що так скорість процесу, як і її с. т. випали менші (в порівнаню з відповідними вартостями при метилю CH_3). На сім випадку бачимо, що хоч скорість процесу обменшує ся (немов під впливом ґеометрично більшого етилю), то однак вартість с. т., також менша була би виразом чогось противного і то аж до того степеня, що тут звихає ся релятивна антибазия між с. т. а с. р. (скоростию реакциї).

Сочинник температури мусить очивидно бути менше вразливий на фізикальні впливи того рода, як ассоцияция молекулів, степень їх взаїмного, а свобідного сконфіґурованя в данім обемі, ротацийна рухливість і инші ще моменти так важні і рішаючі при вартости с. р. Нема сумніву, що ціла їх низка становить отсе все, що ми могли би собі представити і унаглядняти під видом „фізичних“ каталїзаторів. Сочинник температури має однак сю методичну висшість над с. р., що він є менше від них залежний, вже із свого понятя і дефініциї, а по друге тому, що йому припадає ширший екстраполяцийний обсяг реального проявленя ся і вдержаня ся в виді стеричних правильностий в тих пересічних умовах температури, з якими ми маємо до діла. Проф. J. v. Braun зволив звернути мені увагу на се, що часто появляє ся менший стеричний опір при етилевих громадах, ніж при метилевих. Ся річ гармонїзувала би з моїми повисшими спостереженями саме тоді, як опремо ся на змислї того, що висказує с. т. (анормальний з огляду на релятивну антибазию). Були би дуже інтересні дослїди над с. т. тих реакций, які мав на думці проф. Braun, о скілько іменно в них анормальна релятивна антибазия (в зіставлених „метилевих“ і „етилевих“) мала би місце. О скілько мої погляди є вірні, там антибазия випала би зовсім нормально, під услівєм, що всї експериментальні умови для порівнаня були би задержані.

Про око, скомплїковані дещо відношеня, дали би ся легко проглянути на ґрафічнім рисунку. Сорядна x нехай означає температуру, y скорість реакциї. Порівнувати з собою ізотермічні точки y_a, y_b, y_c . . . і т. д., значить наражувати ся на витяганє консеквенций, які о кількадесять або лише о кільканайцять степенїв висше (або низше), залежно від положеня точки пересїчи кількох функций $y = f_a(x)$, $y = f_b(x)$, $y = f_c(x)$ і т. д., можуть давати зовсім противні вислїди. Натомість ріжничкові квоти $\frac{d\,y_a}{d\,x}$, $\frac{d\,y_b}{d\,x}$, $\frac{d\,y_c}{d\,x}$ і т. д. викажуть в тих самих услівях, в своїх обсягах вартостий, далеко простїйший, і квалїтативно одноцїльнїйший образ стеричних відношень. Поодинокі стеричні громади ($C\,H_3$, $C_2\,H_5$, . . . $C_n\,H_{2n+1}$, і ин.) треба би тимсамим характеризувати відповідаючими їм квотами $\frac{d\,y}{d\,x}$, т. є. сочинниками температури. Практично тому, що в ріжничковій формі підлягали би вони теоремови додаваня (Гл. перехід: піридина, α-піколїна, коллїдина). Теоретично тому, що в ріжничковій формі представляють вони відверненний образ релятивних правдоподібностий або шанс поодиноких хемічних перемін (Гл. l. c. стор. 93). З такої теоретичної точки погляду стають нам зрозумілі незвичайно інтересні вислїди праць проф. A. Skrabal'a, в яких він порівнує сочинники температури з кальоричними ефектами реакций[1]) і з повним успіхом інтерполює одні вартости при помочи других.

Отсе моє розуминє ролї кальоричного ефекту не колїдує з висказом на стор. 91 моєї згаданої працї. Однак сам ефект треба ще близше механїстично з'інтерпретувати, що однак вимагає більше місця і що задумую висьвітлити в найблизшій окремій публїкациї. Проти мого згаданого висказу застеріг ся до певної міри H. v. Halban (листовно). Однак його мотиви йдуть в иншім напрямі, а експериментальна праця, котру він відтак оголосив, не противорічить моїм виводам, що пізнїйше близше розгляну.

* * *

В звязи з повисшими поглядами стояло би також питанє, що відносить ся до ряду тавтомерних реакций. Питанє се має свою питоменну характеристику. До тепер не мало воно нїякого практичного значіня, замітна однак річ, що і для теоретичного по-

---

[1]) Гл. Monatshefte für Chemie рр. 1911 і 1912.

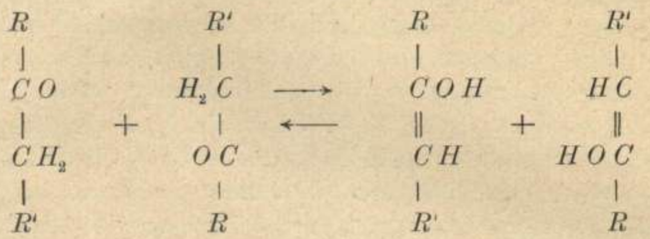
гляду представляє ся воно, здає ся менї, навіть загалови кінетиків зовсім рівнодушне. Не є виключене, що такий стан справи спричинив по части висказ W. Ostwald'a, який определив се питанє в слїдуючий спосіб:

„Незалежно від того, чи тавтомерна реакция є intra- чи inter-молекулярна (вийде на те саме: моно- чи полї-молекулярна), всї феноменні наслїдки лишуть ся в першім і другім випадку все одні і ті самі“.

Супроти того, для практика се питанє стало би безпредметове, для теоретика неможливе до прінціпіяльного рішеня, бо годї найти експериментальну крітерию для його порішеня. Тимсамим питанє се являє ся до сьогодня на скрізь ірраціональним чи трансцендентальним. Популярність поглядів W. Ostwald'a була так широка, що деякі з них розходили ся далеко навіть поза круги хеміків. Пр. славний американьский фільозоф W. James послужив ся в однім місци випадками тавтомерних перемін (в сїм власне осьвітленю, поданім W. Ostwald'ом) як одним з типових арґументів в своїм праґматичнім розумованю на обставину, що в природї стрічають ся ріжні механїзми появ, які в феноменних наслїдках лишають ся однакові.

Що правда, поки що лише в формі теоретичного здогаду, можна би тепер не так розуміти механїзм і феноменність тавтомерних перемін, як се тут зіставлено. На основі моїх поглядів дала би ся предвидїти дуже проста метода експериментального порішеня, як властиво стоїть справа з моно- чи полї-молекулярностю тавтомерних реакций в поодиноких випадках. Чисельна вартість сочинника температури має зовсїм инше жерело, коли ходить раз про дїйсно intra молекулярні, другий раз про висше молекулярні процеси. В припадках, що належуть до першого типу, жерелом є пересїчний статистичний момент атомових осциляций з нутрі молекулярної структури, представлений на внї в видї мексуелївского розкладу, момент, незвичайно вразливий на зміни температури (що стоїть в знаменнику експоненциальної функциї). Можна би собі представити, що маючи до порівнаня кілька випадків тавтомериї, однак таких, що вони належали би до того самого хемічного типу, а ріжнили би ся лише кількома невтральними громадами в сусїдстві осцилюючого атому — що момент сеї осциляциї не богато змінить ся в переходї від одного випадку до другого. Якнебудь могли би тут увійти в гру впливи сусїдних громад, на перший погляд тяжкі до схопленя, то однак проблем був би сам про себе зовсїм конкретний, хоч субтельний, а справа „власних осциляций“ атомів чи відокремлених громад є нині в инших областях фізикальної хемії достаточно розвинена. Заложім (що найперше методично насуває ся), що дають ся подумати численні випадки, в котрих сей вплив не входив би в гру. Тодї однак вартість сочинника температури не змінила би ся від одного до другого порівнаного випадку, як що реакция буде дїйсно, в цїлім слово значіню мономолекулярна.

Ціла справа змінила би ся, коли би ми мали до дїла з між-молекулярною тавтомерию. Нарисуймо найпростїйший тип переміни:



$$\begin{array}{ccccccc} R & & R' & & R & & R' \\ | & & | & & | & & | \\ CO & & H_2C & \longrightarrow & COH & & HC \\ | & + & | & \longleftarrow & \| & + & \| \\ CH_2 & & OC & & CH & & HOC \\ | & & | & & | & & | \\ R' & & R & & R' & & R \end{array}$$

В зіставленю кількох випадків того самого типу можна собі подумати громади R і R' так постепенно вибрані, що їх стеричний вплив мусїв би бути щораз висший з огляду на їх положенє супроти хемічного центрум H, $O =$, або OH і H_2. Коли би однак в такім зіставленю оказав ся сочинник температури постепенно ріжний, в однозначнім змислї, в гармонії з правилом антибазії, тодї можна би з відповідною осторожностю проголосити процес як дїйсно бімолекулярний.

Тавтомерним перемінам треба би присьвятити увагу ще з иншого становиска. Треба іменно за H. v. Halban'ом сконстатувати, що вони одинокі не підходять під схему розумовань van't Hoff'а, в його загальнім розглядї вартости сочинника температури скоростий хемічних реакций (Vorlesungen I.). Ся обставина є також не маловажна, коли зважимо, що стремлїня модерних теорий про хемічну рівновагу, а навіть кінетику (гл. цїла теория M. Trautz'а) основують ся виключно на термодинамічних розумованях.

У відповідних місцях моєї згаданої працї я вказував на конечне узглядненє чисто кінетичних і стеричних представлень, що правда, поки що лише для хемічної кінетики, а не для рівноваги. Однак і ся послїдна область є безпосередно звязана з кінетикою. Дорога до сего не була би сьогодня непроглядна, тим більше, що хемічна статика повинна би й методично випливати з кінетики, а не противно. Відкладаючи сю річ до пізнїйшого розглянення, звер-

нім ся до кінетики тавтомерних перемін і даймо тут місце кільком влучним висказам H. v. Halban'ови (l. c. стор. 173):

„...Die Frage, wann die Arrheniussche und wann die Berthelotsche Formel voraussichtlich gelten wird, ist nie diskutiert worden. Berücksichtigt man, dass von zwei Gegenreaktionen, welche zu einem Gleichgewicht führen, die endotherme das grössere A haben muss, weil die Differenz der beiden A — Werte der Wärmetönung der Reaktion proportional ist, so kommt man zu dem Schluss, dass endotherme Reaktionen eher der Arrheniusschen Formel folgen werden, als exotherme, da ein etwa vorhandenes kleines B in der oben zitierten van't Hoffschen Gleichung neben einem grossen $\frac{A}{T^2}$ eher zu vernachlässigen sein wird als neben dem kleinern der exothermen Reaktion. Die Frage nach dem Einfluss der Temperatur auf umkehrbare Reaktionen ist aber noch wenig untersucht. van't Hoff (Vorlesungen I, 230) weist darauf hin, dass man B als den Ausdruck des rein kinetischen Temperatureinflusses ansehen könne, während das Glied $\frac{A}{T^2}$ mit der Gleichgewichtsverschiebung zusammenhängt.

Es könnte dies so geschehen, dass für die exotherme Reaktion $A = 0$ ist. Diese würde also der Formel von Berthelot folgen. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass dann entweder die exotherme Reaktion eine abnorm kleine Temperaturabhängigkeit haben muss, oder die endotherme Gegenreaktion weder der Arrheniusschen, noch der Berthelotschen Formel innerhalb der Versuchsfehler folgen kann, sondern nur der vollständigen Formel von van't Hoff. Man erhält nämlich aus der van't Hoffschen Formel

$$\log \frac{K_{T+10}}{K_T} = \frac{10\,A}{T(T+10)} + 10\,B;$$

wäre nun für die exotherme Reaktion

$$A = 0, \text{ also } \log \frac{K_{T+10}}{K_T} = 10\,B.$$

Nehmen wir $T(T+10) = 10^5$, d. h. also t zwischen 40 und 50°, dann erhält man für die endotherme Reaktion

$$\log \frac{K_{T+10}}{K_T} = \frac{A}{10^4} + 10\,B.$$

Damit das mit der Arrheniusschen Formel innerhalb der Versuchsfehler zusammenfällt, muss $10^5 B$ neben A zu vernachlässigen sein. Die grössten bekannten Werte von A liegen aber unter 8.000, B müsste also neben 0·08 zu vernachlässigen sein. Für $K_{T+10}/K_T = 3$ ergibt sich aber bereits $B = 0·03$.

Die grosse Zahl von Reaktionen, welche der Arrheniusschen Formel folgen, deren Gegenreaktionen also nicht der Berthelotschen Formel folgen können, macht es also unwahrscheinlich, das letztere häufig gilt, und weist darauf hin, dass B meist sehr klein ist.

Gegen die Verteilung der beiden Temperatureinflüsse, des gleichgewichtsverschiebenden und des kinetischen, auf die beiden Konstanten der van't Hoffschen Formel lassen sich indessen schwerwiegende Bedenken geltend machen. Es müsste nach dieser Ausschauung ein wesentlicher Unterschied in den Temperaturabhängigkeit zwischen solchen Reaktionen, welche mit beträchlicher Wärmetönung verlaufen[1]) (в замітці[1]): van't Hoff, Vorlesungen I, S. 228: „...und dass demnach das Temperaturgesetz sich voraussichtlich bei Reaktionen, die nicht von Wärmetönung begleitet sind, am einfachsten herausstellen wird, die gegenseitige Verwandlung optischer Isomeren, . . . wäre in dieser Beziehung ein Idealfall."), und solchen bestehen, bei welchen dies nicht der Fall ist. Die Erfahrung seigt jedoch das Gegenteil. Dimroth hat gezeigt, dass das Gleichgewicht der von ihm untersuchten tautomeren Verbindungen praktisch unabhängig von der Temperatur ist und doch folgen diese Reaktionen der Arrheniusschein Formel, und die Konstante A ist sehr gross. Die Konstante B, welche nach der oben erwähnten Anschauung den kinetischen Einfluss der Temperatur wiedergeben soll, ist also hier zu vernachlässigen, die Temperaturabhängigkeit selbst aber sehr gross, und da das Gleichgewicht von der Temperatur nicht beeinflusst wird, kann diese Temperaturabhängigkeit nur kinetischer Natur sein".

Передовсїм мушу тут піднести, що H. v. Halban пораз перший і дуже влучно схарактеризував суперечність, яка скривала ся досї в поглядах на сю річ, сконструованих не меншим між дослїдниками, як сам van't Hoff. Після мене, суперечність дає ся однак ухилити, при помочи дуже простої інтерпретациї, поки що, на пів теоретичної, на пів емпіричної.

Теоретичну вартість має перший член рівнаня:

$$\log k = -\frac{A}{T} + B I + C$$

Форма сего члена $\left(-\frac{A}{T}\right)$ виплиеає з теоретичних заложень H. Goldschmidt'a[1]) і F. Krüger'a[2]), основаних на фундаментальних рівнанях Boltzmann'a, Maxwell'a и. ин., відносно розкладу скоростий молекулів і атомів в ґазах.

---

[1]) Inaugural-Dissertation (Breslau) 1907.

[2]) „Zur kinetik.. usw.", Göttinger Nachrichten 1903.

Сї заложеня се незвичайно щаслива інновация для хемічної кінетики, абстрагуючи від того, в який спосіб оба згадані автори її перевели. Сї заложеня становлять, що правда, лише оден, а однак принціпіяльно важний фраґмент, що дотикає незвичайно скомплікованого механїзму хемічних перемін. Він розяснює відразу гіпотезу „активних“ молекулів Arrhenius'a, антибазию між с. т. а скоростию процесу, обменшуване с. т. враз із підвишенем температури, але, що на мій погляд є особливо важне, що дає можність відвернути (злишну) увагу кінетиків від понятя кальоричного ефекту, вкорінену чи не за сильно в основи розуміня кінетичних явищ (без огляду на проби проф. A. Skrabal'a, що мають подекуди практичне значінє).

Коли тавтомерні реакциї будемо уважати за виключно intra- або моно-молекулярні, тодї в формулї:

$$\log k = -\frac{A}{T} + BT + C$$

належить просто відвернути поясненє або інтерпретацию (подану van't Hoff'ом) членів $-\frac{A}{T}$ і BT. В сїм змислї, в якім я се роблю для всїх хемічних реакций (стор. 90 l. c.), член $-\frac{A}{T}$ є чисто „кінетичний“, член $BT + C$ найправдоподібнїйше чисто „стеричний“, а „термодинамічного“ просто нема тут зовсїм.

О скілько тавтомерні переміни є на скрізь intra- молекулярні, цїла висока вартість їх сочинника температури має своє „кінетичне“ жерело виключно в членї $-\frac{A}{T}$, стеричні впливи членів $BT + C$ не входили би тут зовсїм до гри. Тим самим формула Arrhenius'a була би вдержана, однак з тим, що в членї $-\frac{A}{T}$ треба би дошукувати ся не термодинамічних, а лише чисто кінетичних впливів. „Дволичність“ інтерпретациї членів:

$$-\frac{A}{T} + BT + C$$

зводила би ся тимсамим, о скілько ходить о „чисту“ хемічну кінетику1), до того, що цїла їх інтерпретация повинна би бути чисто кінетична, а не термодинамічна. Тодї однак і цїла суперечність, про яку так влучно говорить H. v. Halban, розвязала би ся сама від себе.

Наконець докину ще кілька слів до обставини, що працї проф. H. Freundlich'a (гл. висше l. c.) позвалають менї повести трохи

---

1) Гл. стор. 91 отсеї розвідки.

дальше клясифікацию хемічних процесів. Оба приміри, котрі він вичерпуючо трактує:

б- хльорбутильамін $\longrightarrow$ пирролїдиновий хльорогидрат
гидрохльорбуталлїльметилькарбінамін $\longrightarrow$
$\longrightarrow$ *α α*, — двометильопирролїдиновий хльорогидрат,

становлять припадково незвичайно щасливо вибрані появи, що реакция, після дотеперішних поглядів на скрізь моно- молекулярна, може і повинна бути представлена як бімолекулярна, з огляду на два хемічні центра, що злучують ся взаїмно з собою в осередку одного і того самого молекула. Є се дїйсно незвичайно інтересні припадки, коли ходить про механїзм хемічних перемін. В них мусить іменно проявити ся стеричний вплив сусїдних громад (обох метилїв). Його дослїди потверджують не лише квалїтативно, але й квантитативно се, що я знайшов дотично приросту сочинника температури в переходї від піридини до коллїдини, що також квантитативно виявило ся на працях Hantzsch'a і Müller'a (l. c.) на молекулах високо зложених, а притім процесах, що належуть до зовсїм иншого типу. В виду того я можу мою клясифікацию хемічних процесів після хемічних центрів дальше розширити, і розвинути поняте перемін моно-, бі-, і полї- центральних, без огляду на се, чи реакциї є, відносно до кінетичних „ріжничкових рівнань“ моно-, чи полї- молекулярні. Однак близше обговорене отсеї, для мене незвичайно пригожої обставини, мушу зі всїми застереженями відложити на пізнїйше, тим більше, що як раз тепер підняв я дальше оброблене сеї справи і з експериментального боку. Закінчу лише сим, що й інтерпретация т. нзв. „реґули Halban‚a“ стає для мене тимсамим подекуди лекшою до переведеня в деяких точках, які дотепер становили менї частинну трудність чи довільність в її поясненю.

Breslau, в падолистї 1913.

Причинки до ґеоґрафічної термінольоґії. I.

Написав *Др. Стефан Рудницький.*

Вступ.

Отсї стрічки суть першим доповненєм мого „Начерку ґеоґрафічної термінольоґії“1). Се доповненє мабуть не останнє, томуто й я означив його порядковим числом. Воно подиктоване подібно як і „Начерк“ чисто практичними потребами. При кінци першого десятьлїтя XX-го віку розширилась фізіоґрафічна система Уілема Морріса Девіса по всїй европейській ґеоґрафічній науцї, так сильно і скоро, що прямо годї найти в цїлій історії нашої науки анальоґічно швидкого розросту якоїсь ідеї. Коли в 1908 роцї я вважав відповідним подати лиш деякі найважнїйші терміни з дуже гарної виразнї ґеніяльного Американця, то нинї бачу необхідну конечність присвоїти всю термінольоґію Девіса українській мові. Я дуже далекий від безкритичного захвату над системою Девіса, однак вважаю єї дуже поважним кроком наперед у розвитку морфольоґії і признаю їй дуже визначну дидактичну вартість. Коли нинї найвизначнїйші представники ґеоґрафічної науки на найперших сьвітових катедрах займають ся докладним перероблюванєм та інтерпретацією девісівської системи, то думаю не від річи буде дати й нашим адептам ґеоґрафії спромогу покористуватись сею системою і єї термінольоґією.

Нинїшні „Причинки“ обіймають отже передівсім цїлу термінольоґію Девіса, n. b. о скілько вона не була узгляднена в „Начерку“. Крім сего помістив я ту деякі слова, що з ріжних причин були

---

1) Збірник математично-природописної секції Наукового Товариства ім. Шевченка, т. XII. ст. 1—151.

в „Начерку“ пропущені. І тепер я старав ся як найменче слів кувати, впрочім термінольоґія Девіса така легка і прозора, що кованини майже не вимагала. „Причинки“ суть таксамо як „Начерк“ словарцем німецько-українським, лиш деякі питомі Девісу терміни подав я також в прямім переводі з анґлійського.

На сїм мігбим і закінчити отсе моє передне слівце. Однак при термінольоґічній роботї насували ся менї від давна і з великою упертістю постійно насувають ся ріжні питаня, дотичні нашої наукової термінольоґії і мови в загалї. Хотївбим нинї їх бодай поставити, бож їх розвязанє не лежить в моїх руках. Некомпетентні до розвязки сих питань навіть українські язикослови, хибань що малиби рівночасно вповнї всесторонне, всї науки без виємку обіймаюче, образованє. А в наших часах така універсальність абсолютно неможлива. Справа нашої наукової мови й термінольоґії може рішитись тільки спільною працею загального зїзду українських учених, який вибрав би постійну комісію, постанов котрої мусїв би придержуватись всякий Українець, що хотївби науково працювати в українській мові.

Чому я прийшов до таких радикальних висновків, поясню зараз, хоч тільки кількома словами. Зачну від термінольоґії. Завдяки матеріялам, зібраним дд. І. Верхратським, В. Левицьким, І. Горбачевським і иншими, маємо вже українську термінольоґію майже для всїх природних наук. Так щож з того? Термінольоґія ся є обмежена на невеличкий кружок наукових робітників, що гуртуєть ся довкола математично-природописної секції Наукового Товариства ім. Шевченка, крім сегож лиш на галицькі шкільні підручники (і то не на всї). Поза тим обсягом майже ніхто не узглядняє зібраних дотепер термінольоґічних матеріялів і то на жаль нетільки в популярно-наукових книжках але й в наукових виданях (пр. українського наукового Товариства в Київі). Натомість кождий автор, не жалуючи свого часу, сам творить собі термінольоґію, дуже часто навіть дивовижну, бо похопність до кованя нових слів у кождого пишучого Українця дуже велика. Щастє, що наша природописна наукова та популярно-наукова продукція ще така скупенька, а то невдовзї малиби ми безлїч термінольоґій. А одної лише потреба.

Такий стан для нашої молодої науки дуже а дуже непожаданий. Бо до безлїчи причин, що спиняють єї розвиток, прилучилаби ся отсим ще одна, дуже поважна.

А усуненє термінольоґічного безголовя прецінь таки в наших, українських руках. Вище вказаний спосіб: загального зїзду вчених, постійної комісії та виданих нею постанов у виді загального термінольоґічного словаря є одинокий. Бо на скільки знаю, видані дотепер термінольоґічні матеріяли, хоч нїгде з поважного місця не виказано їх безвартности, таки серед читаючої і пишучої публики не мають популярности й зустрічають ся з неприхильною критикою. По тім боці кордону вважають їх „галичанщиною“ і тим одним словом престіж їх убитий на 9/10-их простору нашої країни, по сїм боці кордону тамошний неприхильний осуд має теж богато значіня, крім сегож і в межах Австрії ще далеко не перевелись ті давні часи, колито кождий інтеліґентний Українець уважав себе компетентним в язикових справах. Такі обставини мусять спричинювати такий стан, який нинї маємо в термінольоґічнім питаню. Колижби термінольоґічні матеріяли були найповажнїйшим науковим збором передискутовані, справлені й усталені, тодї за прийнятою виразнею стоявби так сильний авторітет, що не хтобудь важивби ся проти него виступати і перемінювати працю термінольоґічних чорноробів у Сізифовий труд.

Вкінци ще дещо про нашу наукову мову в загалї. Ту справа стоїть без порівнаня лїпше, бо вся наша лїтературна мова опираєть ся на казочно богатій простонародній мові. На так широкій і богатій основі легко було побудувати систему нашої наукової мови. Але се зроблено дотепер лиш на поли історії та історії лїтератури, де маємо до дїла з катеґоріями предметів і відносин, які можна легко представити простим оповіданєм. Навіть аналїза на сих полях науки не спричинює нїяких трудностий у вислові чи стилїзації. Якже инакше стоїть справа в фільософії чи в природописних науках! Ту на кождім кроцї леґіонами повстають трудности, що хвиля виринає конечність так остро заказуваної нашими язикословами субординації речень, уживаня дїєприкметників ітд. ітд. В популярно-природописних статях можна ще сяк так обійти ся без тих заказаних овочів. Але в стисло науковій прозї се річ немислима. Замотані квестії стислих наук, представлені такою мовою, якої домагають ся тепер наші язикослови, стають ще більше замотаними, ба незрозумілими. Найлїпше се видно по переводах наукових чи навіть популярно-наукових творів на нашу мову. Вони майже без виїмку такі, що в богатьох випадках я мусів дуже часто заглядати до оріґіналу, щоби зрозуміти перевід. А оріґінальні чистонаукові працї українських природописців мають як найгіршу славу: в них мовляв стиль страшний, мова неможлива, спосіб представленя темний і замотаний.

Чиж ту вина авторів та перекладачів? Зовсїм нї! Вина лежить в занадто одностороннім виробленю нашої наукової мови. Вона вже вповні може вдоволити істориків чи фільольоґів — натомість природописці мусять страшно бідувати і рішучо домагати ся від язикословів, щоби помогли їм у всесторонні́м виробленю української наукової мови. Се справа першорядної ваги. На мій погляд стратилисьмо, головнож на російській Українї, неоден десяток Українцїв природописців, що не бачучи змоги працювати науково в українській мові, пішли на службу чужій науці.

Сих кілька висловів я вважав потрібним подати на вступі сеї частини „Причинків“. Може бути, що зможу в иншім місци розвести сї питаня. Се не критика наших фільольоґів, бож я не маю до сего ніяких квалїфікацій, се прямо кликане помочи для цілої так важної царини людського знаня, як є природописні науки.

А.

Abböschung	злагіднене (склону)
Ablenkung	відклонене, відклін
Ablenkungsknie	коліно відклону
Abrasionsebene	абразійна рівня
Abrasionsterrasse	абразійна тераса
Abstumpfung	притуплене
Abtragungsebene	денудаційна, знесена рівня, пенеплена
accident	перешкода, заколот
accordant jonction	рівнодонне усте
aggrade (to)	насипуване
Altland	старосуша, материк
Amphitheater	амфітеатер, цирк, кар, ледняковий котел
Angliederungsinsel	прилучений острів
Antezedenz	антецеденція, упередність
Anzapfung	надточене, надрізане
arid	сухий, посушний, пустинний
attitude	лежба
Auflösung (des Flußsystems)	розвязане
Aufpfropfung	нащіплене
Aufschluß	вихідня, відкривка, відслонене
Aufschüttungsterrasse	насипова тераса
auftauchen	виринати
Aufwölbung	видвигнене, висклеплене
Ausgangsform	вихідна, основна форма
Ausgestaltung	виобразоване

Ausgleichung	вирівнанє
Aushöhlung	видовбанє
Auslieger	відшибок, (сьвідок)

B.

Bad-Lands	рипища
barrier beach	коса
baselevel of erosion	ерозійна основа
bay head	головище (заливу)
beach	бережина
beheaded	стятий, полонений
Becken arides	пустинна, посушна заглубина
Becken zerschnittenes	порізана, розтята заглубина
Beckenablagerung	заглубинне відложенє
Bergland unterjochtes	підяремна, підчинена верховина
Bergsporn	гірський причілок
Beschleunigung	прискоренє
bestimmt konsequent	визначно консеквентний
Binnenebene	внутрішна рівня
Blockdiagramm	бльоковий діяґрам
Boden gewachsener	вросла почва
Bodenbewegung	рух почви
Bolson	бользон
bowlder	пень, брус
branche	притока
Brandungshöhle	погійна нора
Brandungshohlkehle	погійний підрив, вруб
Brandungskehle	погійне горло
Brandungslinie	погійна лїнія
Brecher	бовван
Bruchlinienstufe	лімнолїнійний ступень, поріг
Bruchlinienetal	лімнолїнійна долина
Buckel	горб
Buhne	кашиця
butte	острощовб

C.

Caliche	калїче
capture	полоненє
chasm	щілина

cliff	кліф, обрив, стрім
cliff-maker	стромотворець
coastal plain	побережна рівня
cove	погійний залив
creeping (of soil)	сповз
crest	гребінь, хребет
crooked	закручений, повигинаний
cuesta	куеста, поріг
cuesta-maker, Cuestabildner	пороготворець
Cuestabrücke	куестовий міст
cut off	меандровий пролім

D.

degrade to	зносити, обнижати
Delta rückläufiges	вспятна дельта
Deltaküste	дельтове побереже
Diffluenz	розплив
diffluierend	розпливний
dike	стіна
dismembered	розвязаний (про річну систему)
dissection	розрізане, роздолинене
divide	вододіл
domed mountains	щовбисті, копулисті гори
drainage	водяна сіть

E.

Ebene blossgelegte	обнажена рівня
Ebene fluviatile	річна рівня
Ebene zerschnittene	розтята рівня
eddy	вир, крутїж
Einbuchtung	вріз, вруб
Einebnung	вирівнане
Einebnungsfläche	вирівняна верхня
Einführung	введене (цикля)
Einschneiden	врізуване, поглублюване
Eiserosion	ледова ерозія
Eisfuß	ледова обнога
Eiskaskade	ледопад
Eiskliff	ледяний стрім
Eisstausee	ледовозапірне озеро

elbow of capture	колїно полоненя
embayed	повирізуваний
Endform	наконечна форма
engrafted	нащіплений
enthauptet	стятий
Entwässerung zentripetale	доосередне відводненє
Entwickelungsstadium	стадія розвитку
Episode	епізод (в циклю)
Erosion normale	нормальна ерозія, правильне жолобленє
Erosion seitliche	бічна ерозія, бічне жолобленє
Erosionsbasis örtliche	місцева ерозійна основа
Erosionszyklus (arider, glazialer, mariner, normaler)	ерозійний цикль (посушний, ледняковий, морський, нормальний)
Ertrunken	затоплений (гори, долини ітд.)
Escarpment	верствовий ступень

F.

Facette	фацета, виглад
Falaise	фалєза, побережний стрім
Fallbildner	водопадотворець
Fall-linie, fall line	водопадна лїнїя
fan (of waste)	сиповий вахляр
fastreif	майже спілий
fault	лім, скид
Felsebene	скельна рівня
Felsplattform	скельна плятформа
Firnmulde	фірнова лотка
flat topped	рівномірно притуплений
flood plain	річна рівня
Fluß abgelenkter	відклонена ріка
Fluß alter	стара ріка
Fluß aufgepfropfter	нащіплена ріка
Fluß ausgeglichener	вирівнана ріка
Fluß beschleunigter	прискорена ріка
Fluß enthaupteter	стята, полонена ріка
Fluß epigenetischer	епіґенетична, наложена ріка
Fluß insequenter	інсеквентна, ріжнопрямна ріка
Fluß intermittierender	інтермітивна, часова ріка
Fluß longitudinaler	повздовжна ріка
Fluß mäandernder	меандруюча ріка

Fluß neubelebter	новооживлена, відновлена ріка
Fluß normaler	нормальна, правильна ріка
Fluß peripherischer	періферична, окрайна ріка
Fluß reifer	спіла ріка
Fluß resequenter	ресеквентна, співпрямна ріка
Fluß subglazialer	субґляціяльна, підледнякова ріка
Fluß überfähiger	надздібна ріка
Fluß unterfähiger	підздібна, менче здібна ріка
Fluß verjüngter	відмолоднїла ріка
Fluß verlängerter	продовжена ріка
Flußablenkung	відклоненє ріки
Flußablenkung bevorstehende	надходяче відклоненє ріки
Flußablenkung lange vollzogene	давне відклоненє ріки
Flußablenkung neue	новітне відклоненє ріки
Flußablenkung voraussichtliche	майбутне відклоненє ріки
Flußaufschüttungsebene	річна насипова рівня
Flußbelastung	обтяженє ріки
Flußentwicklung	розвиток ріки
Flußgefälle	спад ріки
Flußsystem aufgelöstes	розвязана річна система
Flußwindung	закрут, меандер
Flutdelta	приливна дельта
Folgeform	прямна, слїдна форма
Formlinie	формова лїнія
Frane	франа
frühreif	вчасно спілий

G.

geköpft	стятий, полонений
Gekriech	сповз
Gesteinsbuckel	скельний горб
Gesteinsriegel	скельна перегорода
Gezeitendelta	временна дельта
Gezeitenmarsch	временна наплавина
Gezeitenöffnung	временна прірва
gleichsohlig	рівнодонний
Gleithang	сховзна збіч
Gletscherabzweigung	леднякове відгиленє
Gletscherbach	ледняковий потік
Gletscherende	конець ледняка

Gletschersattel	леднякове сїдло
Gletschersystem	леднякова система
Gletschertrog	леднякове корито
Gletschertrogsee	леднякове озеро
Gletschertrübe	ледняковий каламут
gorge	звір, яруга, дебра, прірва
gorge de raccordement	злучна прірва
grade	вирівнане
gradient	спад
gravel	ситець, рінь
Greisenalter	старечий вік
gulley	ритвина

H.

Hangbildner	кручетворець
Hängetal, hanging valley	висяча долина
Härtling	твердяк, монаднок
Haupttrog	головне корито
headward (erosion)	вспятна (ерозія)
Hebungsform	форма двигненя
Hebungsküste	двигнене побереже
Hochgebirgsform	високогірська форма
hog-back	верствове ребро
Hohlkehle	підрив, горло
humid	вохкий

I. J.

ice sheet	ледище, ледовище
initial form	початкова форма, праформа
inlet	тоня
Insel verknüpfte	прилучений остров
insequent	інсеквентний, ріжнопрямний
integration	зроснене
interfluve	межиріче
Jagendstadium	молодеча стадія

K.

Kar divergierendes	розбіжний кар, котел
Kar convergierendes	збіжний кар, котел
Karboden	дно кару, кітла

Karwand	стїна кару, кітла
Kliffreihe	клїфовий, обривний ряд, стрім
Kliffrutschung	клїфовий сповз
Kliffsturz	клїфовий сув
Klippe aufgefrischte	відсвіжена рипа
Klippe verschwindende	зникаюча рипа
Kluse	клюза, прірва
konsequent	консеквентний, прямний
Korrelation	корреляція
Kümmerfluß	збіднїла, злиденна ріка
Kuppelgebirge	копулисті гори
Küste heranreifende	доспіваюче побереже
Küste vereinfachte junge	упрощене молоде побереже
Küste zerrissene	роздерте побереже
Küstenart	рід побережа
Küstenform	форма побережа
Küstenebene lakustre	озїрна побережна рівня
Küstenebene untergetauchte	затоплена побережна рівня
Küstenebene verwickelte	замотана побережна рівня
Küstenebene zonar gegliederte	полосато розчленена побережна рівня
Küstenplattform	побережна плятформа
Küstenstreifen	побережна смуга

L.

Landform	форма поземеля, терену
landslide	сув, сповз
landtied island	прилучений остров
Lavadecke	крига ляви
Lavaebene	лявова рівня
Lido	коса
load	сиповий тягар
lobus	льоб, язик (меандра)
lofty mountains	високі, альпейські гори

M.

Mäander eingesenkter	поглублений меандер
Mäander freier	свобідний, мандрівний меандер
Mäanderdurchbruch	меандровий пролім
Marsch	марш, наплавина
meander belt	меандрова смуга

Meereshalde	морський насип
Mesa	меза, столище
migration of divides	переміщене вододїлів
misfit river	збідніла, злиденна ріка
Mittelgebirgsform	середногірська форма
monadnock	монаднок, твердяк
mosor	мозор
Mündung gleichsohlige	рівнодонне усте
Mündung ungleichsohlige	нерівнодонне усте
Musterform	взірцева форма

N.

Nebenflußmündung	усте притоки
Nebengletscher	бічний ледняк
Nebentrog	бічне корито
Nebenwasserscheide	побічний вододіл
neck	нек, чіп
Neubelebung	оживлене, віджите
Nische	нїша, вглублене, низок
nival	снїжний
normal	нормальний, правильний

O.

Obsequent	обсеквентний, протипрямний
Oberland	горіше, верховина
Öffnung	отвір, дїра, перерва
oldland	стара суша
outcrop	відкривка, вихідня
outlet	тоня, вихід
outlier	сьвідок, сьвідкова гора
oxbow lake	охаба

P.

Pfropfenberg	нек, чіп
piedmont	обніжна рівня
Piedmontebene fluviatile	річна обніжна рівня
Piedmontzone	обніжна полоса
piracy	надточене, полонене, стяте
Plateau zerbrochenes	поломане плоскозгіре
Prallhang	ударна збіч

R.

Randlich	окрайний
Randmoräne	окрайна морена
rapids	пороги, катаракти
ravine	звір, дебра, яруга, балка
reif	спілий, доспілий, дозрілий
reif zerschnitten	спіло розчлененний, розтятий
Relief (mittleres, niedriges, starkes)	релеф, різьба (середна, низька, сильна)
resequent	ресеквентний, співпрямний
Restberg	останкова, полишена гора
Resthügel	останковий, полишений горб
revived	віджившний, ново оживлений
Riedel	клин, клинець (межирічний)
Riegel	перегорода, запір, засув
rivulet	потік
rückläufig	вспятний (пр. дельта)

S.

Salzablagerung	зложище соли
Salzschichte	сільна верства
Sandinsel	пісчаний острів
Sandriff	пісчана рипа
Saugloch	понор, хлань
Schichtflut	розлив
Schichtfluterosion	розливна ерозія
Schichtlinie	верствова лїнїя, ізогипса, верствиця
Schichtrippenlandschaft	верствореброва країна
Schichtstufe	верствовий ступень
Schlipf	сув
Schrägstellung	скісне уставлене
Schulter	плече
Schuttdecke	сипова крівля
Schuttebene	сипова рівня
Schuttfächer	сиповий вахляр
Schuttlast	сиповий тягар
Schuttlinie	сипова лїнїя
Schuttschnelle	сипова бистрина
Schutttransport	сиповий транспорт
Schuttzufuhr	довіз, достава сипу
sea cliff	надморський кліф, обрив, стрім

Seeebene	озїрна рівня
Seitencañon	бічний яр
Seitental hängendes	бічна висяча долина
Seitental ungleichsohliges	бічна висяча, нерівнодонна долина
Seitentrog	бічне корито
Senkungsküste	западове побереже
sequential	прямний, слїдний
sheet flood	розлив
shifting divides	переміщене вододїлів
sink hole	вертеп
skerries	шери
slope	круча
slope-maker	кручетворець
spätjung	немолодий, доспіваючий
spätreif	пізноспілий, переспілий
spit	гак
Spitzkuppe	острощовб
Sporn	виступ, причілок
Spornende	кінчик
Spornrest	останок причілка
spur	виступ, причілок
Stadium, stage	стадія, стан
Staubebene	пильна рівня
Stiel	черен
Stirn	чоло (ступеня)
Störung (des Zyklus)	перепона, перешкода
Strandebene	бережинна рівня
Strandrücken	бережинний хребет
Strandvorsprung	бережинний виступ
Strecke ausgeglichene	вирівнана просторонь
Streifen freigelegter	вільна смуга
Strichdüne	смугова надма
Stromstrecke	річна просторонь
strong relief	сильний релеф, різьба
Strudeltopf	вировий глек
Struktur (deformierte, einfache, gefaltete, geneigte, horizontale, verwickelte)	структура, будова (здеформована, проста, фалдова, нахилена, позема, замотана)
Strudelströmung	вирова течія
Stufe aufgefrischte	відсьвіжений ступень
Stufenbildner	сходотворець

Stufenlehne	сходова збіч
Stufenmündung	сходове устє
Stufensporn	ступенний виступ, причілок
Sturmdelta	бурна дельта
subdivide	побічний вододіл
subdued mountains	підяремна, підчинена верховина
subkonsequent	субконсеквентний
subsequent	субсеквентний, наслїдний
surf	погій
swell	відгомінна филя

T.

Talaue	долинне болонє
Taldichte	густота долин, роздолиненє
Talentwickelung	розвиток долин
Talflur	долинне болонє
Talschluß	головище долини
talus	завалє, насип
Talvereinigung	злука долин
Talvertiefung	долинне вглубленє
Talwindung	закрут долини
Terrasse geschützte	захищена тераса
Terrassenstufe	терасовий ступень
Terrassenspitze	терасовий кінчик
Textur, texture	текстура, розчлененє, роздолиненє
texture (of waste)	грубість (ріни, сипу)
tidal marshes	временні наплави
Tief	тоня
tilting	скісне уставленє
Treppenstufe	сходовий ступень
Trogbett	(коритове) ложбище
Trogschluß	головище корита
Trogtal	коритова долина
Trogwand	стїна корита

U.

überfähig	надздібний
Überfließgletscher	переливний ледняк
Überhöhung	перевершенє
Übertiefung	переглубленє

Überweitung	переширенє
Uferlinie	бережна лїнія
Uferstreifen	бережна смуга
ultimate form	наконечна форма
Umkehrung, Umkehr (des Reliefs)	відверненє
Umlaufberg	обіжна гора
unbestimmt konsequent	неозначено, неточно консеквентний
undercut slope	ударна збіч
Unterbrechung (des Zyklus)	перерванє (циклю)
unterfähig	підздібний, ледви здібний
Untertauchung	зануренє
upland	горішє, верховина
uplift	двигненє, двиг
Urabdachung	прасклін
Urbach	прапотік
Urbecken	праночва
Urentwässerungsgebiet	прасточище
Urfluß	праріка
Urflußsystem	прарічна система
Urform	праформа
Urküste	прапобереже
Urküstenlinie	прапобережна лїнїя
Urmulde	пралоть, пралотка
Urmuldenlinie	пралоткова лїнїя
Uroberfläche	праповерхня
Ursee	праозеро
Ursenke	празападина
Urtiefland	прани́з
Urwanne	praванна
Urwasserscheide	правододїл

V.

valleuse	валєза, висяча побережна долина
Vereinfachung	виправленє, упрощенє
Vereinigung gleichsohlige	рівнодонна злука
verjüngt	відмолоджений, відмолоднїлий
Verknüpfung	сполученє, прилученє (островів)
Verlängerung	продовженє
Verschleppung	перетащенє
Verwachsen	зрастанє
Verwilderung	здичінє

Verzögerung	припізненє
vollreif	повноспілий, доспілий
Vordüne	передна надма
Vorgang	процес, хід
Vorlandvergletscherung	чолове зледенїнє
Vorstrand	чолова бережина
Vulkankern	черен вулькану

W.

warping	погнутє
waste	сип, груз
watergap	пролім, проломова долина
weathering	вітрінє
Wellenbasis	основа филь
wet weather rill	дощева ритвина
wiederbelebt	віджившиий, воскресший
Windmulde	вітрова лотка
Wüstenbecken	пустинна ночва
Wüstenebene	пустинна рівня

Z.

Zerschneidung	розрізанє, розтятє, розчлененє
Zertalung	роздолиненє
Zeugenberg	сьвідкова гора
zonar gegliedert	полосато розчленений
Zungenbecken	язикова ночва
Zurückschneiden	взадне зарізуванє
Zurückweichen	пяченє, відступанє
Zweigtrog	побічне корито
Zweikanter	двограняк
Zweizyklisch	двоциклевий

Бібліоґрафія.

V, 9. Bachmann P., Über Gauß' zahlentheoretische Arbeiten. (Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß, gesammelt von F. Klein und M. Brendel, I). Nachrichten der kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1911, p. 455–508.

Ґетінґенське наукове товариство, що займаєть ся виданєм творів свого незабутнього члена Карла Фрідріха Ґавсса, має дати в X. томі сего виданя повну научну біоґрафію того найвизначнійшого німецького математика XIX ст. Хто бодай поверховно займав ся творами того ґенїя, сей буде знати, що перед усіми иншими його працями треба поставити твори в теорії чисел; вони-ж дали підвалину до нинїшнього величавого розвитку сеї галузи математики. Вже сам Gauß сказав, що як математика є королевою наук, так аритметика (теорія чисел) є королевою математики. З тої саме причини як перший випуск матеріялів до біоґрафії Gauß'а появила ся праця проф. Bachmann'а про його роботи з теорії чисел; сюди належать такі твори:

Disquisitiones arithmeticae, епохальний твір Gauß'а, виданий 1801 р. в Липску, передрукований опісля як I. том його творів (вид. заходом ґетінґського наук. тов. у Teubner'а 1870 р.);

кільканацять розвідок з ріжних часів по 1801 р., друкованих в записках того-ж тов-а і виданих як II. том творів (1876), а також дещо з його спадщини.

Всї ті твори писані в латинській мові; німецький їх переклад зладив H. Maser, Berlin (Springer) 1890; видав п. з. „Arithmetische Untersuchungen von C. F. Gauß“.

До научної біоґрафії Gauß'а взята як субстрат його ціла письменницька спадщина, в якій містить ся богато начерків пізнійших публікацій, а головно записник Gauß'а, проваджений точно від р. 1796 до 1814. (Сей записник передрукований в записках ґетінґенського тов-а з 1901 р. і в 57 т. „Mathematische Annalen“).

Disquisitiones появили ся літом 1801 р.; тим проблємом займав ся Gauß від 1795 р. Одначе можна здогадувати ся, що він вже давнійше нераз ломив собі голову над деякими трудними питанями теорії чисел. Найдавнійшим його занятєм (від 15. року житя) було укладанє числових таблиць, які служили йому опісля емпіричним матеріялом для дедукованя загальних законів. Деякі з тих законів попали йому — що так скажемо — припадково під руку.

В перших роках твореня Disq. Gauß не був зовсім обізнаний з творами своїх попередників на полі теорії чисел; але вже 1796 р. знав добре праці Euler'а, Lagrange'а і Legendre'а і переконав ся, що його вислїди обнимають дослїди тамтих математиків, а крім того в численних точках виходять значно дальше поза них. Слїди студіованя тих творів є в цитатах, поміщених в Disq.

З записок Gauß'а виходить дальше, що він по кілька разів перероблював поодинокі розділи своїх Disq., а крім того мусів остатній (VIII) роздїл відлучити з готової вже майже книжки, раз що не хотів занадто збільшати її обєму, а друге — мабуть не вважав її результатів ще вповні зрілими до друку. Сей роздїл зістав невикінчений; фраґменти з нього оголошені в розвідці „Analysis residuorum“, а решта лишила ся невидрукована і оголошена вже по смерти як спадщина.

Чотири перші роздїли Disq. є посвячені тій дісціплїнї, яка нинї має назву „множної теорії чисел“ (multiplikative Zahlentheorie), отже обіймають теорію цїлих чисел, розкладанє чисел на чинники, перві числа, останки і т. д. Се не все є оріґінальний доробок Gauß'а; є там богато старого, а заслуга Gauß'а лежить в научнім уґрупованю матеріялу і систематичнім переведеню його. Вже на самім вступі вводить понятє пристайности і конґруенції[1]) і веде теорію конґруенцій, почнаючи від першого степеня і переходячи до висших. Се з природи річи потягає за собою теорію степенних останків; най-

---

[1]) На думку Bachmann'а є добір знака пристайности (≡) дуже щасливий, бо пригадує на велику аналоґію поміж конґруенціями а рівнанями (стр. 460); тимчасом значна більшість математиків є противного погляду, бо-ж пристайність слабше вяже числа з собою нїж рівність. Все-ж таки сей знак закорінив ся так глибоко в цїлій матем. лїтературі, що нїкому навіть не приходить на думку пропонувати зміну.

інтереснійші є ті розсліди, що відносять ся до первих чисел, і їм посвячений цїлий III. розділ.

Четвертий розділ займає ся квадратними останками; тут рішені такі два питаня: 1) які числа є квадратними останками даного модула m, і 2) для яких первочисельних модулів p є дане число a останком? Се провадить до означеня квадратного характеру чисел — 1, 2 і довільного первого q для даного модула p; сюди належить також „закон відворотности“ в теорії квадратних останків, якого перший вдоволяючий доказ повів ся Gauß'ови.

Дальші розділи (V і VI) займають ся теорією квадратних останків; початки тої теорії виводять ся від тої части „додавничої“ теорії чисел, де говорить ся про представлюванє чисел як суми двох квадратів згл. в формі $x^2 + m y^2$. Богато з вислідів того рода знали вже Fermat і Euler; були се одначе самі тільки поодинокі епізоди — що так скажемо — з того поля, які що йно Gauß уняв в одноцїльну теорію.

У нього виступають квадратні форми в виді

$$f\ (x,\ y) = a x^2 + 2 b x y + c y^2,$$

але що тут не так ходить о змінні x, y, як о постійні сочинники, значить він форму так: $f = (a,\ b,\ c)$; її сочинники є цїлі числа, а понад те ще середній сочинник $2 b$ є паристий.

Теорія Gauß'а полягає на двох основних прикметах квадратних форм; одна з них містить ся в ідентичности

$$f(x,\ y) \cdot f(x' y') = [\,(a x + b y) x' + (b x + c y) y']^2 - D.\,(x y' - x' y)^2,$$

де $D = b^2 - a c$ є виріжником (у Gauß'а: determinans) форми f. Звідси слїдує сейчас, що коли якесь число n має бути „представлене“ тою формою, то виріжник форми D мусить бути його квадратним останком, т. зн. мусить бути рішима конґруенція $z^2 \equiv D$ (mod. n). Се такий важний факт, що говоримо про представленє, яке „належить“ до даного коріня конґруенції.

Друга прикмета лежить в трансформації форм при помочи лінійних субституцій

$$x = \alpha x' + \beta y',\ y = \gamma x' + \delta y';$$

коли нова форма $\varphi = a' x'^2 + 2 b' x' y' + c' y'^2$ має визначник D, то мусить бути $D' = D \cdot (\alpha \delta - \beta \gamma)^2$. Щоби обі форми містили взаїмно одна другу, мусить бути $D' = D$, отже $\alpha \delta - \beta \gamma = \pm 1$. Дві форми, що переходять в себе при помочи такої „одномодулової“ субституції, називають ся рівноважні (äquivalent). Через те зводить ся проблєма представлюваня чисел до шуканя найпростійших форм, рівноважних з даною (се т. зв. редукція форм). З редукції форм слїдує т. зв. рівнанє Pell'а

$$t^2 - D u^2 = 1,$$

яке конечно треба розвязати, щоби знати всї бажані форми. Відповідно тому, чи визначник є додатний чи відємний (зером анї повним квадратом він не може бути, бо тодї форма розпадаєть ся на два лінійні чинники), треба до розвязки рівнаня Pell'а примінити відповідну методу. Відємні визначники ставлять нас перед значно лекшу задачу, нїж додатні.

Дальші здобутки в теорії квадратних форм є власностю Gauß'а. Сюди належить: розділ форм з даним визначником на кляси, розділ кляс на порядки, на роди (genera) і т. д. Потім іде складанє форм, яке дає перший в історії математики примір Абелевих ґруп, обчислюванє скількости кляс, скількости родів, а врештї ескурс в теорію трійкових форм

$$f = a x^2 + a' x'^2 + a'' x''^2 + 2 b x' x'' + 2 b' x'' x + 2 b'' x x',$$

з якої переведена тільки елементарна частина; висшу часть перевели що йно пізнійші математики.

Те все є змістом епохального пятого розділу; шестий розділ подає тільки деякі приміненя тої теорії. Зате семий розділ порушує зовсім нову до того часу в математицї матерію, теорію подїлу кола. Вийшовши з найпростійшого ґеометричного проблєму, поділити обвід кола на n рівних частий, доходить Gauß до альґебраїчного сформулованя тої задачі: розвязки рівнаня $x^n = 1$. Він мабуть не сподївав ся, яке значінє буде мати його теорія для цїлої пізнійшої математики та які горизонти вона отворить! Люди ждали звиж 2000 літ, щоби посунути вперед питанє про поділ кола; стало ся се 1796 р., коли Gauß подав конструкцію правильного 17-кутника, і то на чисто альґебраїчній дорозї.

Bachmann здогадуєть ся, що до тої теорії дійшов Gauß з альґебраїчних розслідів, займаючи ся рівнанєм $x^n = 1$, яке стоїть в очивидній звязи з поділом кола. Як в теорії конґруенцій, так і тут грають перві числа особлившу ролю, отже Gauß обмежуєть ся до первостепенних рівнань того рода. Він виказує, що рівнанє $(p - 1)$-ого степеня

$$X = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$

є незведиме та що його всї корінї є r, r^2, r^3, . . ., r^{p-1}, де $r = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$. Коли через g означимо первісний корінь (mod. p), то всї ті корінї r можна виразити таким рядом:

$$r, r^g, r^{g^2}, \ldots, r^{g^{p-2}}.$$

На такім уставленю в ряд і розкладаню того ряду на „f членні періоди“ в числї e ($e \, . \, f = p - 1$) полягає розвязка того рівнаня. Коли розложимо $p - 1$ на перві чинники, $p - 1 = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$, то маємо до розвязки α рівнань a-того степеня, β рівнань b-того степеня і т. д. В разї коли $p = 2^{2^k} - 1$, є всї помічні рівнаня другого степеня, отже конструкція того p-кутника дасть ся перевести при помочи лїнії і циркля; сюди належить згадана вже конструкція 17-кутника.

На тім роздїлї кінчать ся „Disquisitiones“; осьмий роздїл, про який є згадка навіть в передмові, відпав. Його змістом є, як згадано, теорія двочленних конґруенцій з первочисельним модулом:

$$x^n \equiv 1 \text{ (mod. } p).$$

Вона поміщена в части в „Analysis residuorum“. Тут є передовсім доказ, що n мусить містити ся в $p - 1$ та коли $\varphi(n) = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots$. то — подібно як при рівнанях подїлу кола — маємо розвязати α конґруенцій a-того степеня, β b-того степеня і т. д. І тут стрічаємо ся з розкладом на періоди.

В дальшій части маємо загальний розслїд конґруенцій висших степенів $F(x) \equiv 0$ (mod. p), які мають богато спільних точок з теорією рівнань. Врештї є згадка про розклад функцій на чинники, коли модулом є зложене число.

Дальшими розвідками з того поля є: „Theorematis arithmetici demonstratio nova“ (1808), „Summatio quarundarun serierum singularium“ (1811) і „Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae“ (1818). В них містять ся чотири нові докази основної теореми квадратних останків; головну трудність робило в однім з тих доказів визначенє знака ± при однім квадратнім корени. На се стратив Ґавсс цїлих 4 роки! — Замітна тут є ще т. зв. „лємма Gauß'а“: коли (q, p) означує скількість чисел

$$q, \; 2q, \; 3q, \; \ldots, \; \frac{p-1}{p} q,$$

яких абсолютно найменші останки (mod. p) є відємні, то

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{(q, p)} \text{ (mod. } p).$$

Загалом дав Gauß 8 доказів основної теореми.

Так вичерпали ми всї праці Gauß'а, що вяжуть ся з теорією квадратних останків; остає ще сказати дещо про теорію двоквадратних останків, опублїковану в двох розвідках: „Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio prima (1828)“ і „commentatio secunda

(1832)". Тут є бесїда тільки про перві числа типу $4n+1$, бо тип $4n+3$ зводить ся до квадратних останків. Всї ті числа розпадають ся на чотири кляси після того, яка є вартість

$$z^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1, f, f^2, f^3 \ (\text{mod. } p),$$

де $f^2 \equiv -1$ (mod. p); перша й третя кляса дають квадратні останки, а друга й четверта не-останки.

В Comm. prima подає Ґавсс ще двоквадратні характери чисел -1 і 2 і розклад перших чисел $p+4n+1$ на a^2+b^2; в Comm. secunda знаходить через індукцію характери кількох инших чисел і вказує на неможливість переведеня тої теорії, коли обмежимо ся на цїлих дійсних числах. Повну теорію будемо мати, коли возьмемо під увагу звичайні злучені числа $a+bi$. Gauß подає передовсїм аритметику тих чисел і висловлює дуже точно -- одначе без доказу — закон відворотности для двоквадратних останків.

Третя обіцяна розвідка не появила ся. — Зате в кількох уривках (друкованих і в спадщинї) знаходять ся натяки на те, як будувати теорію кубових останків; до тої цїли треба розширити дійсні цїлі числа на числа форми

$$a+b\varrho+c\varrho^2, \text{ де } \varrho = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \text{ отже } \varrho^3 = 1.$$

Для повности треба згадати, що Gauß займав ся також студіями над числом π і дав доказ на невимірність стичних вимірних дуг.

Поза тим не друкував Gauß нїчого більше з теорії чисел, хоча в його спадщинї лишило ся богато матеріялів, які дають доказ, що він займав ся ще й иншими питанями, а саме т. зв. „аналїтичними методами теорії чисел", які розвинув щойно Dirichlet; належать сюди головно деякі „асимптотні закони теорії чисел".

Як бачимо з того короткого начерку, є становиско Gauß'a в теорії чисел перворядне; він дав їй основу, дав зміст і вказав нові дороги, якими пішов дальший розвиток тої науки. Теорія квадратних форм, теорія подїлу кола й двоквадратних останків вказали пізнїйшим наслїдникам прямо невичерпані скарби, яких ще доси вони не використали вповнї.

Праця проф. Bachmann'a, знаменитого знатока лїтератури з того поля, а головно творів Gauß'a, є дуже цїнним причинком до історії математики XIX ст., яка щойно творить ся. Ми ще занадто стоїмо під впливом минувшого віку, щоби могти дати обєктивний огляд тих теорій і діс\-ціплїн, що в нїм зродили ся й зросли. — Реферована тут праця повинна причинити ся у великій мірі до глибшого зрозуміня й пізнаня Gauß'ового ґенія. *М. Ч.*

A2aa, c, D6a. Mertens F., Über die Zerfällung einer ganzen Funktion einer Veränderlichen in zwei Faktoren. Sitzungsberichte, Wien, CXX. Band, Abt. II a, 1911, p. 1485—1502.

Щоби перевести розклад функції n-того степеня $f(x) = \Sigma c_i x^i$ на добуток двох инших функцій степенів m і $n - m$, $f(x) = \Sigma a_i x^i$ і $h(x) = \Sigma b_i x^i$, вводить автор такі неозначені величини: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Основні симетричні функції тих n величин називає $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, основні симетричні функції перших m неозначених $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, а симетричні функції прочих $n - m$ означених $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-m}$. При помочи инших m змінних $u_1, u_2, \ldots, u_m$ творять лїнійну функцію

$$\omega = u_1 \omega_1 + u_2 \omega_2 + \ldots + u_m \omega_m,$$

яка є з огляду на x $v = \binom{n}{m}$ - вартісна, отже сповнює рівнанє

$$F(z;\ \sigma;\ u) = \Pi (z - \omega) = 0.$$

Рівнанє $F(\omega) = 0$ є ідентичне в $\omega_1, \ldots \omega_m$ і $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_{n-m}$, тому можна в нїм величини ω_i і ϑ_k заступити сочинниками функцій $g(x)$ і $h(x)$, а проте величини σ_j сочинниками функції $f(x)$, отже

$$F(a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m;\ c;\ u) = 0$$

є знова ідентичне в u. Длятого всї u можна заступити довільними числами $g_1, g_2, \ldots, g_m$. Коли напишемо

$$F(z;\ c;\ g) = G(z)$$

і положимо $g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots + g_m a_m = A$, то одержимо

$$G(A) = 0.$$

По тім приготованю ставить собі автор питанє, чи знаючи один корінь рівняня $G(z) = 0$ можна при відповіднім доборі чисел g спричинити бажаний розклад. Ріжничкуючи $F(\omega)$ після всїх змінних u і кладучи $\frac{\partial F(z)}{\partial u i} = - F_i(z)$, одержуємо

$$g_0(x) = \prod_{i=1}^{m} (x + x_i) = x^m + \frac{F_1(\omega)}{F(\omega)} x^{m-1} + \ldots + \frac{F_m(\omega)}{F'(\omega)}.$$

Звідси доходимо до такої ідентичности:

$$F'(z)^{n-m+1} f_0(x) = Q\,[F'(z)\,x^m + F_1(z)\,x^{m-1} + \ldots + F_m(z)] + R\,F,$$

де $f_0(x) = \prod_{i=1}^{n} (x + x_i)$, а Q і R є цілими функціями змінних

x; z; σ; u. Тут можна покласти замість σ і u: c і g, а через се перейде та ідентичність в

$$G'(z)^{n-m+1} f(x) = Q_0(x,z)\left[G'(z) x^m + G_1(z) x^{m-1} + \ldots + G_m(z)\right] + R_0\, G(z).$$

Коли вдасть ся числа g так дібрати, щоби рівнанє $G(z) = 0$ не мало многократних корінїв, то кождий його корінь w дає розклад:

$$f(x) = \left(x^m + \frac{G_1(w)}{G'(w)} x^{m-1} + \ldots + \frac{G_m(w)}{G'(w)}\right) \frac{Q_0(x, w)}{G'(w)^{n-m}}.$$

Такий добір чисел можливий завсїди, коли виріжник $\varDelta$ функції f не є зером; се слїдує з одної давнїйшої теореми автора (Sitzungsberichte, 1892). Проте бажаний розклад доверпений.

Отсей розклад дає безпосередно другий доказ Gauss'а для основної теореми альґебри.

В дальшім уступі подає автор конечну й достаточну вимогу, щоби функція $f(x)$ мала чинник $g(x)$ приписаного степеня m; ся вимога лежить в тім, щоби рівнанє $G(z) = 0$ мало один вимірний корінь.

Приміненє тих вислїдів до загальних альґебраічних тїл веде перше до питаня, коли рівнанє

$$G(x, \alpha) = x^{\nu} + \psi_1(\alpha) x^{\nu-1} + \ldots + \psi^{r}(\alpha) = 0,$$

де α належить до даного альґебраічного тїла R, має в тім тїлї R вимірний корінь. Коли $\psi(\alpha)$ є коренем того рівнаня, то він має форму $\psi(\alpha) = a_0 + a_1\ \alpha + \ldots + a_{r-1} \alpha^{\nu-1}$, де ν є степенем рівнаня $\chi(z) = 0$, яке дефінїює величину α; з істнованя того коріня слїдує, що добуток

$$\Psi(x, z) = \Pi\, G\left(x, \frac{\chi_{,}(z, \alpha)}{\chi'(\alpha)}, \alpha\right)$$

в якім $G(x, y, z) = y^{\nu} G\left(\frac{x}{y}, z\right)$, а добуток розтягаєть ся на всї α, — має чинник $T(x, z)$ з вимірними сочинниками типу

$$x^{\nu-1}(x - \psi(z)) + M X(z),$$

де $M(x)$ не переступає в x степеня $r - 1$.

Врештї доказує автор, що цїла функція $F(x, t)$, яка має для кождої цїлої вартости t лїнїйний чинник $x - g$, мусить мати лїнїйний чинник $x - T$, де T є цїлою функцією змінної t. *М. Ч.*

А. 3 с. Jeřábek A., O vyhledávání resolvent methodou neurčitých součinitelův. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, ročník XLII, стр. 65—97, v Praze 1912.

Дорога до твореня ресольвенти загального альґебраічного рівнаня n-того степеня складаєть ся з двох кроків:

а) При помочи неозначеного сочинника α творить ся вимірну функцію перших $n-1$ корінів даного рівнаня

$$f(x_0, x_1, \ldots . x_{n-2})$$

так, щоби вона мала тільки $n-2$ вартостий: $f_0, f_1, \ldots, f_{n-2}$. Опісля добираючи позісталий корінь і другий неозначений сочинник β, кладемо

$$y_k = f_k + \beta x_{n-1}$$
$$(x = 0, 1, \ldots, n-2),$$

а через те одержимо помічні функції y_k всїх корінів. Їх визначуємо методою неозначених сочинників так, щоби добуток $n-1$ величин $y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}$ був симетричною функцією всїх корінів x. Потім творимо помічне рівнанє степеня $n-1$, якого коріні є $y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}$; його сочинники R_i будуть містити в собі і x_{n-1}.

б) З того помічного рівнаня одержимо шукану ресольвенту, вводячи в нїм нову незвісну, т. зв. „розвязуючу функцію"

$$\eta = \varphi(y),$$

і вибираючи φ так, щоби всї сочинники нового рівнаня були вимірними функціями всїх R, але x_{n-1} в ній вже не приходить.

Автор переводить свою теорію на рівнанях 3. і 4. степеня і виказує, що при загальнім рівнаню степеня висшого над 4-ий крок а) не дасть ся перевести, бо веде до суперечности. *М. Ч.*

В. 16. Moritz R. E., On the Cubes of Determinants of the Second, Third and Higher Orders. Bull. of the American Math. Society, vol. XVIII (1911/12), p. 182—189).

Коли квадрат визначника є визначником того самого порядку, то в разї куба звісне доси се явище тільки в двох виїмкових випадках: 1) $\Delta_4^3 \equiv \Delta_4'$, де Δ_4 є визначником четвертого порядку, а Δ_4' є відворотним визначником супроти Δ_4 (т. є утворений з його мінорів), і 2) визначник з першим рядком $x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \ldots, xy^{n-1}, y^n$, а всї прочі його рядки можна утворити символїчно так: $x'\frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy}$, $\frac{1}{1.2}\left(x'\frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy}\right)^{(2)}, \ldots, \frac{1}{n!}\left(x'\frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy}\right)^{(n)}$. — Маючи визначник другого ряду,

$$\Delta_2 \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

одержує автор як його куб

$$\Delta_2^3 \equiv - \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & (a_1 + a_2)^2 \\ a_1 b_1 & a_2 b_2 & (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \\ b_1^2 & b_2^2 & (b_1 + b_2)^2 \end{vmatrix};$$

для третього ряду

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3{}^3 = \frac{-1}{c_1\ c_2\ c_3} \begin{vmatrix} A_1{}^2 & A_2{}^2 & A_3{}^3 \\ A_1 B_1 & A_2 B_2 & A_3 B_3 \\ B_1{}^2 & B_2{}^2 & B_3{}^2 \end{vmatrix},$$

$$A_i = \frac{\text{minor } a_i}{c_{i+1}\ c_{i+2}},\ B_i = \frac{\text{minor } b_i}{c_{i+1}\ c_{i+2}} \text{ (index mod. 3).}$$

На основі двох помічних теорем знаходить автор загально:

$$\Delta_n{}^3 = \frac{-1}{(c_1\ d_4 \ldots n_n)\ (c_2\ d_4 \ldots n_n)\ (c_3\ d_4 \ldots n_n)} \begin{vmatrix} A_1{}^2 & A_2{}^2 & A_3{}^2 \\ A_1 B_1 & A_2 B_2 & A_3 B_3 \\ B_1{}^2 & B_2{}^2 & B_3{}^2 \end{vmatrix},$$

а A_i і B_i є мінорами дотичних елементів в Δ_n. Порядок куба визначника Δ_n є $3n$. *М. Ч.*

J. 4. d. Fite W. B., Irreducible Homogeneous Linear Groups of Order p^m and Degree p or p^2. Ibid., Vol. XVIII, (1911/12) p. 117—121.

До ґруп, що не можуть бути одностепенно-ізоморфні з незведимими ґрупами ріжних степенїв, належать ґрупи порядку p^m першої, другої та третої кляси. В отсїй розвідцї розбирає автор питане, які ґрупи порядку p^m можуть бути одностепенно-ізоморфні з незведимими ґрупами ріжних степенїв, і рішає його в кількох спеціяльних випадках. Вислїди, до яких доходить, є: 1) Незведима ґрупа порядку p^m і степеня p не може бути ізоморфна з незведимою ґрупою иншого степеня, бо вона містить в собі Абелеву підґрупу о показчику p, а ґрупа порядку p^m, що має Абелеву підґрупу о показчику p^δ, не може бути ізоморфна з незведимою ґрупою степеня $> p^\delta$. 2) Незведима ґрупа порядку p^m і степеня p^2 не може бути ізоморфна з незведимою ґрупою якого иншого степеня; коли ґрупа степеня p^m належить до k-тої кляси ($k > 2$) і є ізоморфна з незведимою ґрупою степеня p^2, то вона містить Абелеву підґрупу о показчику $< p^k$. Коли $k = 2$, то показчик тої підґрупи є p^2. *М. Ч.*

J. 4. d. Miller G. A., Note on the Maximal Cyclic Subgroups of a Group of Order p^m. Ibid., Vol. XVIII (1911/12), p. 189—191.

Коли H є не-визначною підґрупою ґрупи G порядку p^m, то H трансформуєть ся в саму себе через всї спряжені з нею підґрупи в G, отже через всі оператори поза H. Коли H є циклічною ґрупою і не містить ся в ніякій висшій циклічній підґрупі ґрупи G, то називаєть ся вона найбільшою циклічною підґрупою в G. До неї відносить ся така теорема: Конечною й достаточною умовою, щоби кожда найбільша циклічна підґрупа порядку p^{α} в ґрупі G порядку p^{m} ($m > 3$) була трансформована в саму себе тільки $p^{\alpha+1}$ операторами ґрупи G, є те, щоби G містило в собі одну і тільки одну циклічну підґрупу порядку p^{m-1}. *М. Ч.*

J. 4 d. Miller G. A., A few Theorems Relating to Sylow Subgroups. Ibid., Vol. XIX (1912/13), p. 63–66.

Доказані такі теореми: 1) Коли ґрупа G, що має підґрупи Sylow'а порядку p^{m}, містить визначну підґрупу H, яка зі своєї черги має підґрупи Sylow'а порядку p^{β}, то число підґруп порядку p^{β} в H є дільником числа підґруп порядку p^{m} в G. Коли перше число є більше ніж друге, то G трансформує свої підґрупи порядку p^{m} після одної неперехідної ґрупи. 2) Число підґруп Sylow'а порядку 2^{m} в симетричній ґрупі степеня $n > 5$ є таке саме, як число тих підґруп порядку 2^{n-1} в альтернуючій ґрупі того самого степеня.

М. Ч.

J. 4 d. Miller G. A., The Product of Two ar More Groups. Ibid., Vol. XIX (1912/13), p. 303–310.

Щоби добуток двох ґруп H_1 і H_2 був зі своєї черги ґрупою, є конечною і достаточною вимогою те, щоби було $H_1 \cdot H_2 = H_2 \cdot H_1$, отже щоби сей добуток містив в собі відворотність кождого оператора. Коли $H_0 = \{ H_1, H_2 \}$ [1], а h_1, h_2, h_0 є порядками дотичних ґруп, то $H_1 \cdot H_2$ містить в собі $\frac{h_1 h_2}{h_0}$ ріжних операторів. Теорія добутків двох ґруп є елементарна, зате як в добуток виходить кілька чинників, то теорія є доволі скомплікована.

Автор доказує перше, що коли добуток $H_1 \cdot H_2 \ldots H_y$ містить в собі циклічну ґрупу тих чинників, то мусить містити рівно-ж і „двостінну ґрупу“ (Diedergruppe) тих всіх чинників. Дальше займаєть ся субституціями, що трансформують добуток ґруп в себе самого і доказує, що ті субституції творять ґрупу, а доказ переводить на трех ґрупах порядків 3, 4, 5. Врешті займаєть ся ґрупами, які є добутками підґруп Sylow'а і показує, що коли G є ґрупою

---

[1] Се означенє ввів Netto (Gruppentheorie, Samml. Schubert LV, p. 35) для перекрою обох ґруп, т. є ґрупи операторів, спільних обом ґрупам H_1 і H_2.

порядку $p^\alpha q^\beta r^\gamma$, де p, q, r є первими числами, а G_1, G_2, G_3 є підґрупами Sylow'а порядків $p^\alpha, q^\beta, r^\gamma$, то число ріжних операторів в $G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$ має форму $p^\alpha q^\beta r^\gamma - k p^\alpha r^\gamma$; щоби було $G = G_1 G_2 G_3$, мусить бути $k = 0$. Кожда рішима ґрупа є добутком не-спряжених (non-conjugate) підґруп Sylow'а, а порядок тих чинників в тім добутку є довільний. — Ті результати дають приступ до розвязки таких двох нерішених доси питань: 1) чи істнує проста (незложена) ґрупа зложеного порядку, яка є добутком всіх можливих рядів не-злучених підґруп Sylow'а? 2) Чи істнує ґрупа, яка не є таким добутком? *М. Ч.*

J. 4 d. Miss Cummings L. D., Note on the Groups for Triple-Systems. Ibid., Vol. XIX, (1912/13). p. 355–356.

Авторка конструує трійкову систему (Trippelsystem) з 15 елементів і доказує, що дві непристайні трійкові системи можуть мати ту саму ґрупу. *М. Ч.*

A. 4 d. Miller G. A., A Third Generalization of the Groups of the Regular Polyhedrons. Annals of Math., II ser. Vol. 13 (1912), p. 103–113.

Під назвою ґруп Hamilton'а розуміємо ґрупи, здефінїовані рівнанями

$$s_1^2 = s_3^3 = (s_1 s_2)^r = 1 \quad (r = 3, 4, 5);$$

се ґрупи оборотів правильних многостїнників. Їх узагальнив Dyck так, що три реляції Hamilton'а заступив одною. Другим узагальненем є одна давнїйша розвідка автора, в якій $(s_1 s_2)^r$ заступлене реляцією $(s_1 s_2)^r = (s_2 s_1)^r$. Трете узагальнене, яке є предметом нинїшньої розвідки, є

$$s_1^2 = s_2^3 = (s_1 s_2)^r \quad (r = 3, 4, 5);$$

тут ходить о доказ, що для кождого r істнує minimum дві, а maximum чотири ґрупи. Крім того розбирає автор ще кілька инших, подібних реляцій.

Вислїд є такий: для $r = 3$ маємо узагальнене ґрупи чотиростїнника $s_1^2 = s_2^3 = (s_1 s_2)^3$, яке дає чотири ґрупи: 1) ґрупу чотиростїнника, 2) не-дванацяткову ґрупу порядку 24, 3) і 4) ґрупу, одержану через потрійний ізоморфізм одної з тих ґруп і циклїчної ґрупи порядку 9. Коли s_1 і s_2 є перемінні, то творять циклїчну ґрупу порядку 9 або ґрупу порядку 3.

Реляція $s_1^3 = s_2^3 = (s_1 s_2)^2$ дефінїює: коли оператори неперемінні, або чотиростїнну ґрупу або не-дванацяткову ґрупу порядку 24. Коли $s_1 s_2 = s_2 s_1$, то ґрупа є порядку 3.

Неперемінні оператори, що сповнюють рівнанє $s_1{}^3 = s_2{}^4 = (s_1 s_2)^2$, творять або ґрупу осьмистїнника, або ґрупу порядку 48, яку автор вже давнїйше назвав G_{52}. Перемінні оператори того рода творять ґрупу порядку 2.

З $s_1{}^4 = s_2{}^2 = (s_1 s_2)^3$ слїдує: в разї неперемінности операторів з чотирох ґруп: осьмистїнна, або G_{52}, або прямий добуток одної з них і ґрупа порядку 5. Перемінні оператори дають ґрупи порядків 2 або 5, або циклїчну ґрупу порядку 10.

В разї $s_1{}^2 = s_2{}^3 (s_1 s_2)^4$ маємо: з неперемінних операторів 1) ґрупу осьмистїнника, 2) ґрупу G_{52}, 3) і 4) прямий добуток одної з них з ґрупою порядку 7; з перемінних: ґрупи порядків 2 і 7 або циклїчну порядку 14.

В разї $s_1{}^3 = s_2{}^5 = (s_1 s_2)^2$ маємо або ґрупу або 20-стїнника, або ґрупу порядку 120, звісну як G_{120}.

Коли дефінїюючим рівнанєм є $s_1{}^2 = s_2{}^5 = (s_1 s_2)^3$, то маємо: 1) ґрупу 20-стїнника, 2) G_{120}, 3) і 4) прямий добуток одної з них і ґрупи порядку 11. Коли $s_1 s_2 = s_2 s_1$, маємо ґрупу порядку 11.

Врештї $s_1{}^2 = s_2{}^3 = (s_1 s_2)^5$ дає ті дві ґрупи, що висше або їх добутки з ґрупою порядку 19. Перемінні оператори творять ґрупу порядку 19. *М. Ч.*

J. 4 d. B. 2 c. ß. Miller G. A.. Groups which Contain an Abelian Subgroup of Prime Index. Ibid. Vol. 14 (1913), p. 95—100.

Поданий доказ, що показчик підґрупи, утвореної із спільних операторів двох спряжених підґруп, супроти одної з тих підґруп, є завсїди менший, ніж показчик одної з тих підґруп супроти даної ґрупи. Звідси слїдує, що спільні оператори двох визначних підґруп того самого показчика p творять визначну підґрупу показчика p супроти кождої з тих визначних підґруп. Автор уживає тих теорем, щоби випровадити умови, серед яких неподільна не-абелева ґрупа містить в собі не-визначну, а серед яких визначну абелеву підґрупу о первочисельнім показчику. *М. Ч.*

J. 4 a, d. V 2. Bortolotti E., Un teorema di Paolo Ruffini sulla „Teoria delle sostituzioni". Atti della R. Accademia dei Lincei, Serie V. Vol. XXII. 1 sem. 1913, p. 679–683.

В згаданім творі доказує Ruffini таку теорему: „Коли ґрупа підставлень поміж 5 елементами 1, 2, 3, 4, 5 обіймає разом з яким небудь підставленєм t всї трансформовані з нього при помочи циклю $S_5 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, то вона містить в собі рівно-ж і сей цикль". На однім з примірників тої книжки дописав Ruffini власноручно таку замітку: „Отсю теорему можна розширити на перве число елєментів; коли число елєментів є зложене, теорема не має приміненя“, відсилаючи за доказом до своїх манускриптів, там його одначе не найдено.

Тому автор подає доказ тої теореми, і опирає його на двох лєммах: I. субституція

$$T=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p\end{pmatrix},$$

що переставлює не більше як p елєментів, тільки тоді може бути перемінна з циклем

$$S_p=(1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

коли є степенню того циклю“, і II. „ріжні субституції, трансформовані при помочи S_p з якоїнебудь субституції T поміж елєментами 1, 2, . . ., p, неперемінної з S_p, творять перехідну ґрупу G“. Порядок тої ґрупи є p або многократь числа p. Звідси легко слїдує теорема Ruffini'я і представленє субституції T_p о p елєментах в формі

$$T_p=S_p^{\alpha_p}\,S_{p-1}^{\alpha_{p-1}}\,S_{p-2}^{\alpha_{p-2}}\,\ldots\,S_3^{\alpha_3}\,S_2^{\alpha_2},$$

де $S=(1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$, $n=1, 2, \ldots, p$ (се анальоґія до розкладу цїлого числа на перві чинники), а врештї і друге представленє в формі:

$$T_p=S_p^{\alpha}\,T_{p-1},$$

де T_{p-1} є субституцією поміж $p-1$ першими елєментами, а α якимнебудь числом поміж 1 і p. *М. Ч.*

I. a. b a, 19 b. Meissner W., Über die Teilbarkeit von 2^p-2 durch das Quadrat der Primzahl $p=1093$. Sitzungsberichte, Berlin, 1913, p. 663—667.

Коли три числа x, y, z сповнюють реляцію Fermat'a $x^p+y^p+z^p=0$, то мусить бути, як вказав Wieferich,

$$2^{p-1}\equiv 1 \pmod{p^2};$$

се стоїть в звязи з теоремою Furtwängler'a, що для таких трех чисел x, y, z без спільного чинника мусить бути

$$r^{p-1}\equiv 1 \pmod{p^2}$$

для кождого чинника r числа x, коли $x\not\equiv 0 \pmod{p}$ і для кождого чинника r числа x^2-y^2, коли ся ріжниця $\not\equiv 0 \pmod{p}$.

Для $r>2$ знайшов Jacobi такі числа, які сповнюють конґруенцію Furtwängler'a, зате конґруенція Wieferich'a не була доси провірена на зїякім конкретнім примірі. Робить се автор, вказуючи, що в перших двох тисячках є число $p = 1093$ одиноке того рода, що сповнює ту конґруенцію. Врештї обчисляє вартости величин $\lambda \equiv \frac{2^t - 1}{p}$ і $\tau = \frac{p-1}{t}$, де t є виложником, до якого належить 2 (mod. p), для всїх $p < 200$. *М. Ч.*

J. 19 b. Bernstein F., Über den letzten Fermat'schen Satz. Nachr. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl., 1910, p. 382—488. — Über den zweiten Fall des letzten Fermat'schen Satzes. Ibid., p. 507—516.

Перша розвідка подає доказ, що: 1) коли другий чинник $h_2 = l^\mu h_2'$ числа кляс $h = h_1 h_2$ тїла k (ξ) l-тих корінїв з одиницї є що найменше раз ділимий через l $(\mu > 0$, h_2' перве супроти $l)$, і 2) в частиннім тїлї кляс степеня l^μ, що належить до чинника l^μ величини h_2, всї ідеали тіла k (ζ), яких l-ті степенї є головними ідеалами, є вже самі головними ідеалами, — рівнане Fermat'а $a^l + b^l + c^l = 0$ неможливе до сповненя в числах ріжних від 0 і первих супроти l. — Ся теорема, як також і друга, поміщена в другій розвідцї, обіймають як спеціяльні випадки результати, одержані Kummer'ом, так що ті дві працї становлять упрощенє і узагальненє остатньої розвідки Kummer'а.

В другій розвідцї, згаданій в заголовку, містить ся доказ, що рівнане Fermat'а для l первого супроти тільки двох чисел a і b є неможливе, коли число кляс тїла $k(Z)$ l^2-тих корінів з одиницї є ділиме тільки через першу степень числа l, — і що воно неможливе також тодї, коли те тїло $k(Z)$ не містить в собі кляси, що належить до виложника l^2, а число кляс h_2 тїла $k(J + J^{-1})$ є супроти l перве. *М. Ч.*

I. 19 b. Carmichael R. D., Note on Fermat's Last Theorem. Bulletin of the American Math. Society, Vol. XIX (1912/13), p. 233—236. — Second Note on Fermat's Last Theorem. Ibid., 402—403.

В першій нотї доказує автор, що коли p є перве, а рівнанє

$$x^p + y^p + z^p = 0$$

має цілочисельну розвязку (x, y, z), а всї ті числа перві супроти p і поміж собою, тодї істнує таке ціле число $s < \frac{1}{2}(p-1)$, що

$$(s+1)^{p^2} \equiv s^{p^2} + 1 \text{ (mod. } p^3).$$

В другій нотї заступає отсю вимогу простїйшою, а саме:

$$(s+1)^p \equiv s^p + 1 \text{ (mod. } p^3).$$

Оба докази є елементарні. *М. Ч.*

I. 19. b. Plemelj J., Die Unlösbarkeit von $x^5+y^5+z^5=0$ im Körper $k(\sqrt{5})$. Monatshefte f. Math. u. Phys. XIII. (1912), p. 305–308.

Автор подає елементарний доказ теореми Фермата для $n=5$. В тілї $k(\sqrt{5})$ дасть ся се рівнане представити в виді

$$x^5-y^5=(\sqrt{5})^{5+\mu}\,.\,z^5, \tag{1}$$

де $(x, y, z)=1$, а всї ті числа неділимі через $\sqrt{5}$. Розкладаючи ліву сторону на два чинника, з тих один лінїйний, знаходимо, що $x\equiv y$ (mod. 5), отже можна дїйти до того, що коли $x\equiv 1$, то буде і $y\equiv 1$ (mod. 5). Нелїнїйний чинник многочлена x^5-y^5, скорочений через 5, розпадає ся знова на два чинники

$$xy+\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2\sqrt{5}}(x-y)^2; \tag{2}$$

вони оба мусять бути добутками якихось пятих степений і якихось одиниць, одначе ті остатнї можна пропустити. Тому одержимо:

$$x-y=(\sqrt{5})^{3+\mu}\,.\,\zeta^5$$

а звідси:

$$\zeta^5-\eta^5=(\sqrt{5})^{5+2\mu}\,.\,\zeta^{10}, \tag{3}$$

до ξ і η є обома чинниками (2), а $\xi\eta\zeta=z$. Отсе рівнане (3) має ту саму форму, що (1), але о стільки простїйше, що тут ζ має менше первих чинників, як z, бо ξ і η не є рівночасно одиницями. Повторене того самого процесу на рівнаню (3) веде до суперечности, отже неможливість розвязки $x^5+y^5+z^5=0$ з $k(\sqrt{5})$ доказана. *М. Ч.*

I. 18 c., Hilbert D., Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen. (Waringsches Problem). Dem Andenken Hermann Minkowskis gewidmet. Nachrichten der kgl. Ges. J. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse, 1909, p. 17–26.

Анґлїйському математикови Waring'ови приписують загально висказ такої теореми: „Кожде додатне ціле число дасть ся представити як сума n-тих степенїв додатнїх цїлих чисел так, що їх скількість лежить низше границї, залежної тільки від виложника n, а незалежної від представлюваного числа". — Доси вдав ся був сей доказ тільки в кількох спеціяльних випадках, а саме для $n=2\ldots 10$ з виїмком 9. Автор подає загальний доказ при помочи „нового приміненя аналїзи до теорії чисел", яке полягає в тім, що — відворотно, як се звичайно дїє ся — автор виходить з одної інтеґральної формулки і одержує з неї чисто аритметичну реляцію.

Згаданий взорець висказує таку теорему, дану Hurwitz'ом: „При довільнім цілім числї m є ідентично в 5 змінних $x_1, \ldots x_5$:

$$(x_1{}^2+x_2{}^2+.\ \ +x_5{}^2)^m = C\int\underset{(T)}{\ldots}\int(t_{11}\,x_1+\ldots+t_{15}\,x_5)^{2m}\,dt_{11}\,dt_{21}\ldots dt_{22}\,dt_{23}\,..dt_{45}\,dt_{55}$$

де C означує довільну постійну додатну величину, дану числом m, а 25-кратний інтеґрал простягаєть ся на царину T, положену зовсім в скінчености, а визначену так, що віддалене кождої точки t_{kh} від точки o_{kh} 10-вимірного простору Ω, даного 15 реляціями прямокутности (ортоґональности)

$$o_{k_1}{}^2+\ldots+o_{h_5}{}^2=1$$
$$o_{k_1}\,o_{h_1}+\ldots+o_{k_5}\,o_{h_5}=0\ (k\neq h)$$
$$(k,h=1,\,2,\,\ldots,\,5)$$

є

$$\sum_{k,\,h}(t_{kh}-o_{kh})^2 \leqq 1.$$

З тої теореми переходить автор до другої ідентичности:

$$(x_1{}^2+x_2{}^2\ldots+x_5{}^2)^m=\sum_{h=1,\ldots,M} r_h\,(a_{1h}\,x_1+\ldots+a_{5h}\,x_5)^{2m},$$

де

$$M=\binom{2m+4}{4},$$

$r_1, \ldots, r_M$ означують додатні вимірні числа, залежні від m, а $a_{1h}, \ldots, a_{5h}$ цїлі числа, рівно-ж залежні тільки від m. Доказ тої ідентичности переводить ся через заступлене інтеґрала скінченою сумою.

Звідси слїдує доказ головної теореми за посередництвом таких заключень:

1) До кождого m належить якась скількість N додатнїх чисел $r_1, r_2, \ldots, r_N$ і два цїлі числа a, A, що мають таку прикмету: коли x і G є довільними цїлими числами, а Γ довільним додатнім числом, X цїлим додатнім числом, що сповняє нерівність $X<\Gamma^2 x^2$; тодї можна до тих чисел x, G, Γ, X дібрати таких N чисел $\left(\gtreqless 0\right) X_1\ X_2, \ldots, X_N$, які сповнюють нерівности $|X_h|<A\,\Gamma x$ $(h=1, \ldots, N)$, що

$$(G^2x^2+X)^m=\sum_{h=1,\ldots,N} r_h\,(a\,G\,x+X_h)^{2m}.$$

2) Серед тих самих преміс істнує N таких цїлих чисел $X_1, \ldots, X_N$, як попередно, що

$$x\,(G^2x^2+H)^m=\frac{1}{G}\sum_{h=1,\ldots,N} r_h\,(a\,G\,x+X_h)^{2m+1}.$$

3) До кождого виложника m належить якась скількість N додатнїх чисел $r_1, r_2, \ldots, r_N$, дальше дійсна функція $\varphi(k)$ дійсної змінної k, зовсїм додатна, врешті функція $F(K, k)$ (де K є цілим числом), яка при постійнім k разом з K зростає в безконечність; ті належні до m величини r_h, φ, F мають такі прикмети: коли x є довільним додатнїм цїлим числом, а $K > 16$, дальше дійсна змінна k сповнює нерівність $1 \leqq k < \frac{1}{2}\sqrt{K} - 1$; коли $k' = \varphi(k)$, $K' = F(K, k)$ і коли Y є довільним цілим числом $\left(\gtreqless 0\right)$, для якого $|Y| < k\sqrt{K}x^2$, то до величин x, K, k, Y можна завсїди дібрати N цілих чисел $Y_1, \ldots, Y_N \left(\gtreqless 0\right)$, для яких $|Y_h| < k'\sqrt{K'}.x$, що

$$(Kx^2 + Y)^m = \sum_{h=1,\ldots,N} r_h (K'x + Y_h)^{2m}.$$

4) Серед тих самих преміс істнує реляція

$$x(Kx^2 + Y)^m = \frac{1}{K'} \sum_{h=1,\ldots,N} r_h (K'x + Y_h)^{2m}.$$

5) До кождого виложника n належать два цілі числа p, q такі, що $0 \leqq p < q$ і $n = p + q$, дальше додатне число K і якась скількість N додатнїх вимірних чисел $k_1, k_2, \ldots, k_N$ того рода, що коли x є довільним цілим числом > 0, Y яким небудь цїлим числом $\left(\gtreqless 0\right)$, для якого $|Y| < \sqrt{K}x^4$, то істнує завсїди N^* таких додатнїх цїлих чисел $P_1, P_2, \ldots, P_{N^*}$, що

$$x^p(Kx^q + Y) = \sum_{h=1,\ldots,N} k_h P_p^n.$$

З остатнього заключеня виводить ся легко теорема Waring'а.

М. Ч.

B 2 a, I 3 a, b. Sanderson M., Generalizations in the Theory of Numbers and Theory of Linear Groups. Annals of Mathematics. II. ser. Vol. 13. (1912) p. 36—39.

Автор розважує конґруенції з подвійним модулом і дефінїює відворотну функцію $f_1(y)$ до функції $f(y)$ як таку, що

$$f(y) \cdot f_1(y) \equiv 1 \ [\text{modd. } m, P(y)].$$

На тій основі доказує, що до кождої функції (степеня нишого, як степень модулової функції $P(y)$), якої всі сочинники мають *НСП* первий супроти m, істнує відворотна функція [modd. m, $P(y)$], опісля означує скількість кляс останків, що мають відворотности, формулкою: $\varphi_r(m) = m^r \prod_p \left(1 - \frac{1}{{p_1}^r}\right)$, де $m = \Pi p$, і узагальнює теореми: Фермата: $[f(y)]^{\varphi_r(m)} \equiv 1$ [modd. m, $P(y)$] і Wilson'a: добуток всїх функцій, що мають відворотности, є $\equiv \mp 1$ [modd. m, $P(y)$]; перший знак тодї, коли $m = p^r$ або $2p^r$ або $m = 4$, $r = 1$, другий знак в кождім иншім разї. Врештї узагальнює лїнійні субституції, даючи їм подвійний модул; в такім разї мусить їх визначник мати відворотність [modd. m, $P(y)$]. *М. Ч.*

115 c α. Frobenius G., Über die Markoffschen Zahlen. Sitzungsberichte, Berlin, 1913, p. 458—487.

Числами Маркова називає автор кожду трійку чисел, що сповнює т. зв. рівнанє Маркова

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3\,abc.$$

Отсе рівнанє найшов Марков з звязи з розслїдами з теорії двійкових неозначених квадратних форм; сим рівнанєм займав ся доси один Hurwitz.

В отсїй розвідці подав автор повну теорію тих чисел, опираючи ся на своїй редукції неозначених квадратних форм і розвиваню на тяглі дроби.

Передовсїм доказує автор, що в загальнїйшім рівнаню $a^2 + b^2 + c^2 = k\,a\,b\,c$ може k мати вартість 1 або 3; підставлюючи в першім разї за a, b, c нові змінні, подільні через 3, приходимо до $k = 3$, отже рівнанє Маркова є одиноко можливе того рода. Кожда трійка чисел Маркова не має спільної міри; кожде з тих чисел p є форми $4n + 1$ або $2 . (4n + 1)$, а дальше: кождий непаристий первий чинник одного з тих чисел p та чисел $3p \pm 2$ є рівно-ж форми $4n + 1$.

Найменшими розвязками того рівнаня є: (1, 1, 1) і (2, 1, 1); їх називає автор одиничними (singulär). Всї инші розвязки містять в собі трійки ріжних чисел. Коли дві розвязки ріжнять ся тільки одним числом, то вони є сусїдні; кожда трійка має три ріжні сусїдні, тільки перша одинична трійка має одну, друга дві. З кождої трійки можна одержати цїлий ряд нових, коли одно число задержимо постійним, а два другі будемо зміняти і добирати до трійок сусїдні. Дїєть ся се так, що розвязуємо рівнанє $f(x) = x^2 + b^2 + c^2 - 3\,b\,c\,x = 0$, яке має два корінї a і a', звязані реляціями: $a + a' = 3\,b\,c$, $a\,a' = b^2 + c^2$. Через те одержуємо дві сусїднї трійки: (a, b, c) і (a', b, c); коли в кождій з них одно число зробимо постійним, одержимо ряд нових розвязок, який автор називає ланцухом, належним до того постійного числа. Таким чином можна одержати, кладучи за те постійне число чергою 1, 2 3, . . ., всї трійки чисел Маркова.

Щоби p було числом Маркова, є конечне і достаточне, щоби його можна представити формою φ, рівноважною з $-\varphi$, о виріжнику $9p^2-4$. Такою формою є м. и. $\varphi = px^2 + (3p-2q)xy + (r-3q)y^2$; найменшим числом, яке вона представляє, є p.

Врешті розвиває автор числа Маркова на ланцухові дроби і вводить знак $p_{\alpha\beta}$ для числа, яке відповідає дробови $\varrho = \frac{\alpha}{\beta}$, іменно є $p_{10}=1$, $p_{01}=2$, $p_{11}=5$, і дальше

$$p_{\alpha\alpha'} = 3\, p_{\beta\beta'}\, p_{\gamma\gamma'} - p_{\delta\delta'},$$

де $\alpha = \beta + \gamma$, $\alpha' = \beta' + \gamma'$, $\delta = |\beta - \gamma|$, $\delta' = |\beta' - \gamma'|$. Поміж такими числами панує звязь

$$p_{\alpha\alpha'}{}^2 + p_{\beta\beta'}{}^2 + p_{\gamma\gamma'}{}^2 = 3\, p_{\alpha\alpha'}\, p_{\beta\beta'}\, p_{\gamma\gamma'}$$

отже рівнанє Маркова. Число Маркова $p_{\varkappa\lambda}$ є тодї і тільки тодї паристе, коли $\varkappa$ є подїльне через 3.

На закінченє подає приміненє введених теорем до теореми Маркова про квадратні форми. *М. Ч.*

I. 15 a. Bieberbach L., Über die Minkowskische Reduktion der positiven quadratischen Formen und die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen. Nachrichten der kgl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. 1912, p. 207—216.

Теорія редукції квадратних форм, дана Мінковским, представляє в порівнаню з давнїйшими теоріями дуже богато користий. Та можна її оперти на зовсїм иншій основі, що тїснїйше вяже ть ся з сутю річи поодиноких тверджень. Отся розвідка подає приміненє теорії Мінковського в тій новій інтерпретації до доказу такої теореми: побіч одномодулових цїлочисельних трансформацій істнує тільки скінчене число ґруп цїлочисельних однородних лінійних субституцій. Звідси дедукують Jordan і Мінковскі істнованє тільки скінченого числа одномодулових цїлочисельних субституцій, що переводять редуковані форми в инші редуковані форми. З огляду на її важність подає автор безпосередний, елементарний доказ тої другої теореми. *М. Ч.*

I. 22 a. d. Jacobsthal E., Zur Theorie der Funktionale. Crelle's Journal f. reine u. angew. Mathematik, Bd. 140, 1911, p. 266—276.

Отся розвідка подає нове уґрунтованє теорії альґебраїчних чисел на основі т. зв. „функціоналів“ Weber'a; вона замітна тим, що на неї покликуєть ся Weber в найновійшім, скороченім виданю своєї альґебри (Braunschweig 1912, Vieweg u. Sohn. Цїна 14 м.).

Функціоналом називаємо, як звісно, квот $\omega = \frac{\varphi}{\psi}$ двох цїлих вимірних функцій яких небудь змінних з сочинниками з якого небудь альґебраїчного тїла n-того степеня. Загал всїх функціоналів творить функціональне тїло, в якім містить ся те альґебраїчне тїло як дїльник. Функціонал з вимірними сочинниками називаєть ся вимірним. — Заступаючи в данім функціоналї сочинники їх спряженими вартостями, одержимо n спряжених функціоналів; їх добуток є їх нормою.

Коли функціонал є вимірний, то можна його представити в формі $R = r \cdot \frac{P_1}{P_2}$, де r є вимірним, додатнїм числом, а P_1 і P_2 первісними функціями (т. є з цїлими сочинниками і без спільних чинників); r називаєть ся абсолютною вартістю функціонала: $r = |R|$.

Абсолютна вартість норми довільного функціонала називаєть ся абсолютною нормою.

Вимірний функціонал називаємо цїлим, коли його абсолютна вартість є цїлим числом. — Довільний функціонал називаєть ся цїлим, коли є коренем рівнаня, якого найвисший сочинник є 1, а прочі сочинники цїлими вимірними функціоналами.

Коли ε і $\frac{1}{\varepsilon}$ є рівночасно цїлими функціоналами, то ε називаєть ся одиницею, отже кожда первісна функція є в тім значіню одиницею.

Головна ціль тої розвідки є, виснувати з кількох теорем головне твердженє цїлої теорії про однозначність розкладу цїлих функціоналів на перві функціонали, вже відворотно, як се робить Weber (Algebra, II, 1. вид. p. 590 sqq). Автор доходить до своєї цїли такими головними теоремами:

I. Функціонал $A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \ldots + A_m$, якого сочинники є цїлими функціоналами без спільної міри, а t змінного, що не приходить в них, є одиницею.

II. Коли ϑ є який небудь функціонал, в якім не приходить змінна u, то $\frac{1}{\vartheta + u}$ є цїлий функціонал.

III. Коли цїла функція $G(u)$ з цїлими сочинниками функціоналами, в яких не приходить змінна u, є подільна через цїлу функцію

$g(u)$ з якими небудь сочинниками-функціоналами (рівно-ж без змінної u), то ціла функція $G(u):g(u)$ має цілі сочинники. Сю остатню теорему доказали вже перше Kronecker, Dedekind і Hurwitz, одначе не опирали ся на II. твердженю, яке в отсїй розвідцї грає головну ролю. *М. Ч.*

I. 4 a, 8 c, 13 b *α*. v. Schrutka L., Ein Beweis für die Zerlegbarkeit der Primzahlen von der Form $6n+1$ in einfaches und ein dreifaches Quadrat. Ibid., Bd. 140, 1911, p. 252—265.

Уживаючи т. зв. „сум n-того рода“, введених Jacobsthal'ем (Crelle, т. 132)

$$S_n=\sum\left(\frac{f(i)}{p}\right),$$

де i є цілою функцією з цілими сочинниками n-того степеня в i, а $\left(\frac{x}{p}\right)$ означує символ Legendre'а для квадратних останків, доказує автор звісну теорему, що кожде перве число форми $6n+1$ можна розложити на суму a^2+3b^2. Опісля означує основу (Basis) того розкладу і примінює свої вислїди до означеня скількости наслїдств (Sequenzen) квадратних останків і неостанків в природнім рядї чисел. *М. Ч.*

I. 4 a. v. Schrutka L., Theorie der quadratischen Kongruenzen. Monatshefte für Mathematik u. Physik, Bd. XXIII (1912), p. 92—105.

Навязуючи до попередної своєї статї в тій часописи (т. XVI, „Theorie der Polygonalreste“), автор переводить теорію квадратних конґруенцій на основі прінціпу, який називає „відбитєм (Abbildung) відповідно дібраних вимірних чисел, що творять аритметичні ряди, на ряд цілих чисел“. Коли в конґруенції

$$Ax^2+Bx\equiv -C \pmod{m}$$

положимо $2A=T$, $B-A=U$, де T і U є цілими, впрочім довільними, числами, то її ліву сторону переведемо в

$$T\cdot\frac{x^2+x}{2}+Ux.$$

Кождому цїлому числови a приписуємо число (неконечно ціле)

$$\alpha=F(a)=\frac{4a-T-2U}{2T};$$

перехід від a до α називаємо трансформацією F. Вона відповідає розтягненю (Streckung) чисельної лїнїї від точки $\frac{T+2U}{4-2T}$ у відношеню $1 : \frac{2}{T}$; лише для $T=2$ маємо пересуненє о $\frac{1+U}{2}$, а для $U=1$ є $F(a)=a$.

Функція, відворотна до F є

$$a = \Phi(\alpha) = \frac{2T\alpha + T + 2U}{4}.$$

Автор вводить ще такі означеня:

$$\iota = F(0),\ \varepsilon = F(1),\ \eta = F(2),\ \varrho = F(3),$$

$$f = \frac{(T+2U)(T+2U-4)}{8T};$$

вони під деяким зглядом грають ролю зера й одиниць. На їх основі дефінїює такі анальоґії додаваня, множеня й степенованя:

$$\alpha(+)\beta = F(a+b) = \alpha + \beta - \iota,$$

$$\alpha(\cdot)\beta = F(ab) = \frac{T}{2}\alpha\beta + \frac{T+2U}{4}(\alpha+\beta) + f,$$

$$\overset{(n)}{\alpha} = \overset{\underset{\smile}{1}}{\alpha}(\cdot)\overset{\underset{\smile}{2}}{\alpha}(\cdot)\overset{\cdots}{\ldots}(\cdot)\overset{\underset{\smile}{n}}{\alpha};$$

до них відносять ся закони перемінности, злучности і роздільности; врештї є

$$\alpha(+)\iota = \alpha,\ \alpha(\cdot)\varepsilon = \alpha,\ \alpha(\cdot)\iota = \iota.$$

Ті операції дають ся відвернути; виключене є дїленє через ι. З комбінації тих рівнань слїдує твердженє, що виконанє всїх операцій є завсїди можливе, коли по знаку (:) не стоїть ι, отже коли k означає результат операцій на числах $a, b, c, \ldots$, то істнує завсїди $\varkappa$, результат подібних операцій $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, так що $\varkappa = F(k)$.

Дальше вводить автор понятє дїлимости, первих чисел, і лїнїйних конґруенцій $\alpha(\cdot)\xi \equiv \beta$ (mod. p), які є рішимі, коли α і μ є первІ супроти себе. Теорема Fermat'а звучить так:

$$\alpha^{(\varphi(\mu))} \equiv \varepsilon \text{ (mod. } p).$$

Дальше істнує тут анальоґія до символїв Legendre'а:

$$\left(\left(\frac{\delta}{\pi}\right)\right) \equiv \delta^{\left(\frac{\varphi(\pi)}{2}\right)};$$

ті символї мають такі самі прикмети, як звісні нам з теорії квадратних останків.

Переходячи до квадратних конґруенцій, називає автор кожде перве число p при данім F неправильним (irregulär) або правильним (regulär) в міру того, чи воно містить ся в T, чи нї; 2 є правильне лише тоді, коли $T \equiv 2$ (mod. 4). Модул називає правильним тоді, коли він має виключно правильні перві чинники.

Коли модул правильний, то дріб $\frac{2}{T}$ є все (mod. m) пристайний до цілого числа m, первого супроти модула; так само $F(a) \equiv s$, де s рівно-ж ціле число, врешті й f. Тоді конґруенція $\alpha \equiv \beta$ для модула m є ідентична з конґруенцією для модула μ.

Конґруенцію другого степеня зводить до виду

$$\xi^{(2)} \equiv \gamma + f \text{ (mod. } \mu),$$

де $\xi \equiv x$ (mod. m), $\gamma \equiv -C$ (mod. m), отже вона рішима, коли $\gamma + f$ є квадратним останком модула m.

Коли-ж модул $M = q^{n} q'^{n'} \ldots m$ є який небудь, а $q, q', \ldots$ його неправильні чинники, то що до рішимости даної квадратної конґруенції оба модули, M і m, заховують ся однаково; доказ розділений на дві части, відповідно до того, чи ті перві q чинники є перві, чи $= 2$. *М. Ч.*

I 13 b *α.* v. Schrutka L., Drei Parallelsätze zum Fermat'schen Satz über die Zerlegung der Primzahlen von der Form $4n+1$ in zwei Quadrate, Ibid. Bd. XXIII (1912) p. 267–273.

Уживаючи тих самих означень, що в попередній статї, зводить автор питанє можливости розкладу

$$p = a^2 + b^2,$$

де p є первим числом форми $4n+1$, до рішимости неозначеного рівнаня

$$T\frac{x^2+x}{2} + Ux + T\frac{y^2+y}{2} + Uy = k.$$

Переводячи тут трансформацію F і визначуючи вартість вираженя $x^2 + y^2$ (mod. m), доходить до таких трех теорем:

1) Коли перве число $p \equiv 5$ (mod. 12), то $\frac{p-2}{3}$ дасть ся розложити в один, і тільки один спосіб, на суму двох „осьмикутників“ (т. є чисел форми $3x^2 - 2x$).

2) Коли $p \equiv 13$ (mod. 20), $\frac{p-8}{5}$ дасть ся розложити в один і тільки в один спосіб на суму двох „дванацятикутників“ ($= 5x^2 - 4x$).

3) Коли $p \equiv 10$ (mod. 20), то $\frac{p-2}{5}$ дасть ся розложити в один і тільки один спосіб на суму двох чисел форми $5n^2 - 2n$. *М. Ч.*

D. 2 b. Petr K., O sčítání řad numerickych. Časopis, ročník XLII. p. 353—369, 465—493. V Praze 1913.

В елементарній статї, призначеній для студентів, розбирає автор такі питаня з теорії чисельних рядів: трансформація слабо збіжного ряду в сильнїйше збіжний, розвиванє останка ряду в тяглий дріб, формулка Wallis'a для π, ряд $\sum \frac{a^k}{k}$, ряд для $\frac{\pi}{\sin \pi \xi}$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + u^{(1)} n + u^{(2)}}$, гіпергеометричний ряд Gauß'a, а врешті ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^3 - D(2n+1).}$. Статейка містить в собі богато цїкавих річий, з яких не всї подибують ся в звичайних підручниках аналїзи.

М. Ч.

B. I c. e, D 2 d. a. Rice L. H., Continuant Expressions for $\sqrt{a^2+b}$ and $(\sqrt{a^2+b}+a)^n$. Annals of Math. II. ser., vol. 14 (1913), p. 139—142.

Автор розвиває $\sqrt{a^2+b}$ і $(\sqrt{a^2+b}+a)$ в визначники і тяглі дроби, опираючи ся на теоремі Ramus'a:

$$\begin{vmatrix} 1 & b & & \\ -1 & a & b & \\ & -1 & a & b \\ & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \end{vmatrix}_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n\right]$$

Се дає:

$$(\sqrt{a^2+b}+a)^n = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{a^2+b} & & & \\ -1 & a & b & & \\ & -1 & 2a & b & \\ & & -1 & 2a & b \ldots \\ & & & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \end{vmatrix}_{n+1}$$

і

$$\sqrt{a^2+b} = |a| + \cfrac{b}{2|a| + \cfrac{b}{2|a| + \ldots .}}$$

М. Ч.

H. 11 h. Levi-Civita T., Sulle funzioni che ammettono una formula d'addizione del tipo $f(x+y)=\sum_{i=1}^{n} X_i(x)\,Y_i(y)$ Atti della R. Accademia dei Lincei, Vol. XXII, 2 dem. 1913, p. 181–183.

Примірами таких функцій є $e^{\omega x}$, $\sin \omega x$, $\cos \omega (x)$ (де ω є довільною постійною величиною) і многочлени $P(x)$. Щоби в загальнім разї функція $f(x)$ сповнювала ту умову, мусить бути $n=\infty$; тому автор питаєть ся, яким умовам мусить відповідати $f(x)$ для скінченого n, щоби було сповнене згадане рівнанє, і відповідає, що всї функції типу $P(x)\,e^{\omega x}$ (ω дійсне або спряжене). Приймаючи, що всї X_i і Y_i є лїнійно незалежні, приходить автор до заключеня, що всї X_i мусять бути розвязкоми системи рівнань

$$X_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j$$

з постійними сочинниками; Y_i рівно-ж. Звідси знаходимо f як лїнійну комбінацію сочинників функції x. *М. Ч.*

H. 12 b. E. 5. Brodén T., Einige Anwendungen diskontinuierlicher Integrale auf Fragen der Differenzenrechnung. Lunds Universitets Årsskrift. N. F. Afd. 2. Bd. 8. 1912. Nr. 8. pag. 1—17.

Автор навязує до розвідки Guichard'а з 1887 р. в „Annales de l'école normale supérieure", який ужив до розвязки функційного рівнаня

$$f(z+1)-f(z)=\varphi(z),$$

де φ звісне, f незвісне, нетяглих інтеґралів. Після його припису творить ся функцію $L(u)$ помічної змінної u, яка є аналїтичною, однозначною функцією о періоді 1 і в точках $u \equiv 0$ (mod. 1) має поодинокий бігун з останком (residuum) $=\frac{1}{2\pi i}$, впрочім є правильна. Потім треба утворити інтеґрал

$$H(z)=\int_{ih}^{ik} \varphi(u)\, L(u-z)\, du,$$

$h<k$ (оба дійсні, довільні), інтеґрал здовж прямої лїнії від ih до ik. При помочи того інтеґрала одержуємо врешті розвязку:

$$f(z)=H(z)+\Sigma m\, \varphi(z-n).$$

Подібною методою розслїджує автор два функцийні рівнаня,

$$f(z+1)-f(z)=\varphi(z)$$
$$f(z+i)-f(z)=\psi(z),$$

де φ і ψ є однозначними, аналітичними функціями, а треба найти функцію $f(z)$; тут стоять 1, i замість звичайно уживаних період ω, ω'. — Коли отся система має бути рішима, і то однозначно, то поміж φ і ψ мусить істнувати звязь

$$\varphi(z+i) - \varphi(z) = \psi(z+1) - \psi(z).$$

Коли $F(z)$ є розвязкою другого рівнаня, то розвязка системи має форму $F(z) + P(z)$, де $P(z)$ є довільна однозначна функція з періодою i, отже для її визначеня маємо рівнаня:

$$P(z+1) - P(z) = \varphi(z) + F(z) - F(z+1),$$
$$P(z+i) - P(z) = 0.$$

Тому розвязка даної системи редукуєть ся до випадку, де $\varphi(z) \equiv 0$:

$$\begin{matrix} f(z+1) - f(z) = \varphi(z) \\ f(z+i) - f(z) = 0 \end{matrix} \quad [\varphi(z+i) = \varphi(z)].$$

Її легко розвязати, кладучи

$$S(z) = \varphi(z-1) + \varphi(z-2) + \ldots$$

або

$$T(z) = -\varphi(z) - \varphi(z+1) - \varphi(z+2) - \ldots,$$

коли тільки знаємо, що оба ті ряди є рівномірно збіжні; але се тільки виїмковий випадок. — Можемо також приймити, що $\varphi(z)$ дасть ся в прямовіснім поясї о ширинї > 1 розвинути в ряд

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \ldots,$$

де функції φ_n мають рівно-ж періоду i, а притім рівнаня

$$f_n(z+1) - f_n(z) = \varphi_n(z)$$

є легко рішимі і то так, що також f_n має періоду i. Коли ряд

$$\sum_0^\infty f_n(z)$$

є збіжний в згаданім обсягу, то се є бажана розвязка.

Дальше займаєть ся автор приміненем нетяглих інтеґралів і вводить функцію $L(u)$, двоперіодну другого порядку, з періодами 1, i і бігунами $u = 0$, $u = \frac{1}{2}$. При її помочи творить інтеґрал

$$H(z) = \int_0^{ik} \varphi(u) L(u-z)\, du,$$

де $0 < k < \frac{1}{2}$, а дорогою інтеґрованя є пряма лінія. Тоді одержуємо як розвязку

$$f(z) = H(z) + \Sigma m\, \varphi(z-n) + \Sigma m,\ \varphi(z + \tfrac{1}{2} - n)$$
$$(m, n, m_1, n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Вешті дискутує автор прикмети функції $f(z)$ і подає ріжні модіфікації своєї методи, які мають приміненє в поодиноких випадках.

М. Ч.

I. 8 a. Plemelj J., Die Siebenteilung des Kreises. Monatshefte für Math. u. Phys. Bd. XXIII (1912), p. 309—311.

Поділ кола на 7 частий залежить від рівняня $\frac{x^7-1}{x-1} = 0$. Назвім один з його корінїв $\zeta = -e^{\frac{\pi i}{7}}$; тодї величини $\zeta^\lambda + \zeta^{-\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, 4)$ сповнюють рівнане

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0, \qquad (1)$$

а бік семикутника є $s_7 = i(\zeta^{-1} - \zeta)$. Через субституцію $y = 2 - s^2$ переходить рівнане (1) в добуток двох чинників

$$s^3 \pm \sqrt{7}(s^2 - 1) = 0; \qquad (2)$$

Карданська розвязка того рівняня дає $s_7 = r\frac{\sqrt{3}}{2} : \cos\frac{\alpha}{2}$, де $\alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Через се осягає автор таку точність, що блуд в s_7 виносить $r.\ 0{\cdot}000038 < r. \frac{1}{2.10^5}$.

М. Ч.

0¹ 2 e, q. Ernst P., Die allgemeine Mannheïmsche Kurve. Ibid. Bd. XXIII (1912), p. 289 - 286.

Кривою Mannheim'а називаєть ся — як звісно — ґеом. місце осередків кривини точок стичности кривої Γ, що котить ся по прямій; як її узагальнене приймив автор і H. Wieleitner, що крива Γ котить ся по колї[1]). В отсїй розвідцї йде ще дальше узагальнене, а саме, що за „криволїнїйну вісь“, по якій котить ся крива Γ, приймає автор довільну криву K.

М. Ч.

0¹ 2 q. Braude L., Über die Kurven, unter deren Zwischenevoluten sich Kreise befinden. Ibid. Bd. XXIII, (1912). p. 283—288.

Криву, що дїлить кождий луч кривини даної кривої K в постійнім відношеню $1 : \lambda$, назвав автор в своїй діссертації „посередною еволютою“ (Zwischenevolute) кривої K. В обговорюваній тут розвідцї займаєть ся він такими кривими, які поміж своїми „посередними еволютами“ мають кола. Показуєть ся, що крім кола кривими K можуть бути епі- і гіпоциклоіди $\lambda^2 s^2 + R^2 = a^2\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^2$, після того, яке є λ. Як спеціяльні випадки є обговорені $\lambda = \pm 1$ і $a = \infty$, т. зн., що поміж „посередними еволютами“ приходить пряма лінїя.

М. Ч.

---

[1]) Monatshefte XVIII, (1907), p. 315/6.

K^1 6 a. Láska V., O nomografii. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, ročník XLII, стр. 209—217, v Praze 1912.

В тій статейці пояснює автор суть номоґрафії; вона грає в приміненій математиці ту саму ролю, що н. пр. ґрафічна статика в будівництві. З огляду на се, що деякі номоґрами є дуже елементарні, радить автор ужити їх до оживленя науки в середніх школах. — По вступі переводить як приміри: номоґрами квадратних функцій $x^2 \pm a x \pm b = 0$ і функції $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{2}}{c}$, яка грає ролю в оптиці. Врешті згадує про номоґрафічне визначенє ріжничкового квота $\frac{d a}{d b}$. *М. Ч.*

L^1. 16 a. Jeřábek V., Geometricke důkazy parametrické vlastnosti kuželoseček. Ibid. ročník XLII, (1912) p. 217—226.

Автор доказує ґеометрично таку теорему: В стіжковім перекрою (M) о осях $AB = 2a$, $CD = 2b$, прямі MN і MP, нормальні до тятив AM і BM, визначують на оси AB відтинок $PN = 2p = 2\frac{a^2}{b}$. *М. Ч.*

K^1 7. Kounovský J., Základové projektivni geometrie. Ibid. ročník XLII, (1912), p. 230—236, 369—377.

Тут подані основи метової ґеометрії для учеників середніх шкіл; є згадка про ряд точок, подвійний поділ, перспективні ряди, вязки лучів, метове повстанє кола, конструкцію стіжкових перекроїв, а врешті теореми Pascal'a і Brianchon'a. *М. Ч.*

L^1 16 a. Pleskot A., O jistè vlastnosti kuželoseček. Ibid., ročník LXII, (1912) p. 494—497.

Навязуючи до нотв Єржабка (гл. висше), узагальнює автор його теорему так: Нарисуймо два стіжкові перекрої, що стикають ся з собою в кінцевих точках головної оси CD, виберім на одній з тих кривих довільну точку A, получім її з кінцями спільної оси і продовжім ті прямі до точок пересїчи B і E з другою кривою, то прямі AF і AK, поведені рівнобіжно до BD і CE, визначать на оси CD постійний відтинок KF, незалежний від положеня точки A на першій кривій. *М. Ч.*

K^1 6 a, O^1 2 b. Láska V., O sestrojování tečen jistých křivek rovinných. Ibid. ročník XLII, (1912) стр. 13—20.

Автор подає способи рисованя стичних до деяких плоских кривих при помочи номоґрафічних сорядних. Рівнанє прямої прямої в тих сорядних звучить

$$\frac{a}{u}+\frac{b}{v}=1;$$

коли вона переходить через дві точки (u_1, v_1), (u_2, v_2), то має рівнанє

$$\begin{vmatrix} u & v & u\,v \\ u_1 & v_1 & u_1\,v_1 \\ u_2 & v_2 & u_2\,v_2 \end{vmatrix}=0.$$

Відтинки a, b на осях U і V є

$$a=u_1\,u_2\,\frac{v_2-v_1}{u_1\,v_2-v_1\,u_2},\; b=v_1\,v_2\,\frac{u_2-u_1}{v_1\,u_2-v_2\,u_1},$$

а в границях маємо для відтинків стичних:

$$t_a=\frac{d\,v}{d\left(\frac{v}{u}\right)}\, t_b=\frac{d\,u}{d\left(\frac{u}{v}\right)}.$$

На основі тих взірцїв одержуємо легким способом стичні до таких кривих: еліпси, якої рівнанє в тих сорядних є $u\,v=c^2$, гіперболї $(u\,v=-c^2)$, Діоклевої кісоїди $(v^3-D^2\,u=0)$, елїптичної версіери[1]) і кривої „conchoida punctata“. Врешті доказує загальне твердженє, що коли для кривої $(u\,v)$ знаємо відтинки стичної t_a, t_b і маємо дану другу криву, що з першою є звязана реляцією $u\,u_1=a^2$, $v\,v_1=b^2$, то відтинки її стичної є

$$t_a'=\left(\frac{u_1}{a}\right)^2 t_a,\, t_b'=\left(\frac{v_1}{b}\right)^2 t_b,$$

тому її легко построїти.

Замітні тут легкі й незвичайно елєґантні конструкції стичних.

М. Ч.

Roman Cegielskij: Über das Sieden von Elektrolyten bei Stromdurchgang. (Sonder-Abdruck aus den Verhandl. d. Deutschen Phys. Gesellsch. XVII. 1911. p. 227—248).

Ся розвідка містить вислїди експериментальних дослїдів автора над впливом елєктричної струї на кипінє електролїтів. Вона складає ся з трех частий. У першій части (вступі) подано ріжні можливі

---

[1]) Loria, Spez. alg. u. transz. Kurven, стр. 78.

роди тепляних проявів, що виступають у електроліті, через який пливе електрична струя, н. пр. тепло Joule-а, тепло хемічних процесів; дальше обговорює ся вплив температури на електролітичні прояви і літературу сего предмету. У другій (теоретичній) части є розвинена звязь між теплом (Q), витвореним в електроліті або впровадженим до нього, а силою струї J, що пливе через нього. Вона зображена рівнанєм параболї $Q = A - BJ + CJ^2$, де на поодинокі члени складають ся отсї тепляні прояви: виміна тепла з окруженєм (огріванє електроліта ґазовою полуміню, випромінюванє), парованє, тепло Joule-а і т. д. Член BJ мусить мати відємний знак тому, що він представляє завсіди забсорбоване тепло; він стає зером лише тоді, як на електродах не вивязують ся ґази. З дискусії рівнаня бачимо, що заходять чотири можливі випадки: а) $B = 0$, б) $A > \frac{B^2}{4C}$, в) $A = \frac{B^2}{4C}$, г) $A < \frac{B^2}{4C}$.

Коли огрієм́о електроліт до кипіня і пустимо через нього електричну струю, то в першім випадку з ростучим J буде збільшати ся Q, отже парованє буде відбувати ся щораз живійше. В прочих трех випадках має Q minimum; тому парованє буде зразу досить живе, відтак слабне з ростучою натугою струї, опісля знов збільшає ся. Замітне, що для випадку г) наступає для певних вартостий J остудженє електроліта низше точки кипіня.

По причині опізненя кипіня (Siedeverzug) перебіг явища є відмінний, як се виходило би з теорії. В разї $B = 0$ спричинює приріст тепл, що походить з однонапрямної або перемінної струї, дальше опізненє кипіня в міру зросту натуги струї; тому підносить ся тодї температура в аналоґічний спосіб до висше згаданого перебігу функції Q із збільшенєм J. Коли-ж при електродах вивязують ся ґази, тодї можна ожидати бодай частинного усуненя опізненя кипіня при введеню навіть слабої однонапрямної струї; се объявляло би ся в зниженю температури. Із зростом натуги струї можуть проявити ся сильні від’ємні тепляні явища і то в такій мірі, що температура може обнизити ся поназше точки кипіня. Однак при переході ще сильнїйших струй через електроліт переважати ме тепло Joule-а; тому температура буде підносити ся і зможе навіть осягнути високий степень понад точкою кипіня, коли з’явить ся опізненє кипіня; останнє є майже завсїди. Як через електроліт пливе перемінна струя і при слабій її натузї є $B = 0$ або дуже мале, а за те при більшій натузї її B досягає значної величини, то можемо ожидати, що зразу температура електроліта буде підносити ся, відтак буде спадати, щоби опісля знова рости по причинї щораз сильнійшого тепла Joule-а. Як бачимо вплив перемінної струї на кипінє електролїтів нагадує в дечім вплив однонапрямної струї.

В третій (експериментальній) части описано перебіг досвідів і зображено його численними фіґурами, що подають звязь між натугою струї J і температурою t. Вислїди їх дадуть ся зібрати коротко в отсих кількох словах. Електролїти розпадають ся на дві ґрупи відповідно до впливу електричної струї на їх кипінє. До першої належать сї електролїти, що при переході однонапрямної струї виділюють водень і кисень (н. пр. розріджений сїрковий і азотовий квас, розчин содового сїркану). У них бачимо враз із зростом натуги струї: зразу обниженє температури (деколи низше точки кипіня води н. пр. в разї 0·15% H_2SO_4, 0·03% H_2SO_4, 1% HNO_3), опісля зріст температури, часто висше точки кипіня розчину. До сеї громади електролїтів належить зачислити також такі, що в них підчас електролїзи вивязують ся инші ґази; однак описані явища не виступають у них так виразно (н. пр. у $NaCl$). До другої ґрупи належать електролїти, що підчас електролїзи не виділюють ґазів, ізза чого їх електро-хемічне явище тепла є зером. У них температура не спадає взагалї підчас зросту натуги струї, але противно підносить ся високо понад точку кипіня (н. пр. у $CuSO_4$, $ZnSO_4$). Перемінна струя має подібний вплив на електролїти другої ґрупи, як однонапрямна. Однак відмінне поведенє бачимо у електролїтів першої ґрупи. Коли переходить через них перемінна струя, хоч в головних рисах характер функції $t = \varphi(J)$ є також тут такий сам, як в разї однопрямної струї.

Інтересний є перебіг остиганя киплячого електролїта, коли возьмемо полумінь на бік і рівночасно пустимо через нього електричну струю. Як електролїт належить до першої ґрупи, то остиганє відбуває ся під впливом електричної струї борше, як без неї; у прочих електролїтів повільнійше. В разї перемінних струй остигають всї електролїти взагалї повільнійше під впливом їх, як без них.

Наведені досвіди надають ся дуже добре до демонстрації в часї викладів про тепляні явища у електролїтів під впливом електричної струї. Вони послужили також авторови до ствердженя теоретичної основи описаних досвідів. *Р. Ц.*

Roman Cegielskij: Zur Frage der „Zerlegung hochkomplizierter chemischer Verbindungen im schwankenden magnetischen Kraftfelde“. (Sonder-Abdruck aus den Verhandl. d. Deutschen Phys. Gesellsch. XV. 1913. p. 566–570).

Під заголовком „Zerlegung etc.“ оголосив J. Rosenthal[1]) вислїди своїх досвідів, з яких виходить, що йому пощастило ся розложити зложені хемічні орґанїчні сполуки при помочи змінного маґнетного поля. А саме мало йому повести ся розложити крохмаль, тростиновий цукор і деякі білковаті тїла на складові части, які можна вдержати через гідролїзу сих субстанцій. Умовою сего розкладу є лише певна частота зміни поля (скількість перемін маґнетного поля на секунду), яка для кождої субстанції є инша, нпр. для крохмалю обертає ся вона в межах між 440 і 480. Rosenthal витворював змінне маґнетне поле при помочи перемінної або переривано̂ї однонапрямної електричної струї. Провідною думкою його досвідів, котрі він впрочім описує лише побіжно, був факт, що світло розкладає деякі субстанції; отже не є неможливим, що електромаґнетні дроганя з повільною періодою можуть викликувати той сам ефект. Автор рішив ся повторити сї давні досьвіди, навязуючи до досвідів, початих дром Lederer-ом в Чернівцях, котрий не міг продовжати їх по причинї свого виїзду. Останній зробив кілька досвідів з розчином крохмалю і цукру, однак безуспішно. Автор сеї працї уживав по змозї сильного маґнетного поля. Тому взяв цївку відповідних розмірів, на котрій було около 400 звоїв грубого дрота, і в серединї її передержував субстанцію. Електричну струю переривав при помочи переривача Wehnelt-а і старав ся придержувати числа переривань, поданою Rosenthal-ом. Досвіди робив з розчинами крохмалю і тростинового цукру, а час треваня їх виносив більшу скількість годин. Однак вислїд був завсїди відємний. З того виводить автор висновок, що або не повело ся нї йому нї дрови Lederer-ови осягнути вимаганих умов (н. пр. певного числа перемін маґнетного поля на секунду) або явище, винайдене Rosenthal-ом, не залежить взагалї від маґнетного поля[2]).

Р. Ц.

Р. Суппанчіч. Ґеометрия для I. кляси середних шкіл. За німецким підручником проф. Суппанчіча зладив проф. Іван Сїтницкий. Жовква 1912. Накладом автора. Стор. 47. Цїна бр. 60 с.

Михайло Грицак. Учебник ґеометриї для середних шкіл. Низший степень (II і III кляса). У Львові 1913. Накладом

---

[1]) Унїверситетський професор, фізиольоґ. Гл. Rosenthal. Sitzungsber. d. Königl. Preuss. Akad. d. Wiss. 1908, I. S. 20.

[2]) Недавно помістив G. W. Heimrod розвідку на ту саму тему у Zeitschrift f. Elektrochemie 19, 1913, p. 812. Згадавши про вислїди автора, подає він цїлий ряд своїх досвідів, що вповнї збивають виводи Rosenthal-а.

Українського Педаґоґічного Товариства. Стор. VIII + 179. Ціна опр. 2 К 20 с.

Михайло Грицак. Учебник аритметики для середних шкіл. Середних степень (IV і V кляса). У Львові 1913. Накладом українського Педаґоґічного Товариства. Стор. IV + 240 + табл. Ціна опр. 3 К.

Конрад Кравс. Основи хемії. Після підручника проф.... приладив Роман Цегельский. Чернівцї 1910. Заходом тов. „Українська Школа“ в Чернівцях. Стр. II + 151. Цїна опр. 3 К.

Др. Юліян Гірняк. Начерк мінеральоґії і хемії для середних шкіл. У Львові 1912. Накладом Руского Товариства Педаґоґічного. Стор. IV + 123. Ціна опр. 2 К 40 с.

Др. Володимир Левицкий. Фізика для висших кляс середних шкіл. У Львові 1912. Накладом краєвого фонду. Стор. VIII + 672 + 2 табл. Ціна опр. 4 К.

Др. Микола Чайковський. Начерк висших рахунків для ужитку учеників середних шкіл. VII. Звіт Дирекциї ц. к. ґімназії Франц-Йосифа I. за р. 1911/12 і окремою відбиткою, Тернопіль 1912, стр. 3 + 43 + 1 табл.

Др. Микола Чайковський. Новочасне „perpetuum mobile“. „Ілюстрована Україна“ 1913, чч. 13—14.

Популярна розвідка про велику теорему Фермата.

Др. Микола Чайковський. Безконечність. „Учитель“ 1913/14, чч. 1, 2, 3, 5—6.

Володимир Кучер. Електронова теория металїв. VIII. Звіт Дирекциї ц. к. ґімназиї Франц-Йосифа I. за р. 1912/13 і окремою відбиткою, Тернопіль 1913, стр. 3—29.

	корон
Левицький В. Електромаґнетна теорія світла і причинок до поділу рівнань другого степеня	1·60
— Еліптичні модулові функції	0·60
— Инший сьвіт або про четвертий розмір простору	0·30
— Інтересні таблиці чисел	0·10
— Клим Глібовицький (посмертна згадка)	0 10
— Клясифікація математичних наук	0·35
— Короткий начерк теорії автоморфних функцій	0·75
— Математика теоретична і практична	0·30
— Матерія і її переміни	0·20
— Машини електростатичні	0·25
— Найновійші праці з теорії аналітичних функций	0·25
— Причинок до теорії тяглих дробів і модулової ґрупи	0·45
— Про зерові місця функції $\zeta(s)$	0·10
— Про переступ чисел e і π	1·20
— Теорія перстенів Сатурна	1·—
— Фізика для висших кляс середних шкіл	4·—
— Beitrag zur Theorie das Modulgruppe	0·20
— Kilka uwag o wzorze interpolacyjnym Lagrange'a	0·25
— O miejscach zerowych funkcyi $\zeta(s)$	0·10
Левицький В. — Огоновський П. Альґебра для висших кляс середних шкіл I. ч. 2·—, II. ч.	3·—
Мазуренко В. Про химію	0·42
Матвіяс Софрон. Дещо про лучі Бекереля	0·20
— Новійші розсліди над лучами Бекереля	0 10
Миколаєвич. Опис ґеоґрафічно-статистичний Камянецького повіта	2·—
— Про падучі звізди	0·10
Налковський В. Про воду на суші і в морі	0·80
Наумович В. Величина і будова звіздяного сьвіта	0·15
Огоновський П. Учебник аритметики для низших кляс середних шкіл I. і II. ч. по	1 80
— Учебник фізики для низших кляс середних шкіл (II. вид.)	2·20
Охнич М. Туберкульоза у людий і зьвірят	0·60
Примак Ф. Єще кілька слів про глезу риб кістноскелетних	0·20
— Значінє природничо-біольоґічних наук в ґімн. пляні	0 36
Пулюй І. Електрична централка Гогенфурт	2·40
— Кругова діяґрама ґенераторів для перемінних прудів	0·25
— Непропаща сила	0·20
— Нові і перемінні звізди	0·20
Раковський І. Вік нашої землї	0·10
— Вулькани	0·20
— Історія а природничі науки	0·40
— Про землю, сонце і звізди	0·50
Ramsay W. Благородні і лучисті ґази	0·20
Ростафінський-Верхратский. Ботаніка для висших кляс	2·40
Рудницький С. Дещо з нашої популярно-природописної лїтератури	0·40
— Дещо про Антарктиду	0·20
— Знадоби до морфольоґії Карпатського сточища Днїстра	0·85
— Кілька гадок про ґеоґр. екскурсії в середнїх школах	0·30
— Коротка ґеоґрафія України	0·20
— Начерк ґеоґрафічної термінольоґії	2·—
— Нинїшна ґеоґрафія	0·60
— Про сонїчні плями I. ч. (вичерпана), II. ч.	0·90
— Фізична ґеоґрафія при кінци XIX. ст.	1·20
— Beiträge zur Morphologie des galizischen Dniestergebietes I, II по	0·60
Савицький Е. Ґеометрія для висших кляс	3·80
Сидоряк С. Про погастки	0 20
— Студія анатомічна над відношенями слухового знаряду і плавного міхура у риб	1·—

Ціна 3 К.

АДРЕСА:

Наукове Товариство імени Шевченка.

Львів, ул. Чарнецького ч. 26.

ADRESSE:

Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften, Lemberg, Czarnecki-Gasse 26.