ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛЇКАРСКОЇ СЕКЦИЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ IX.

під редакциєю

**ІВАНА ВЕРХРАТСКОГО, Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦКОГО
і Дра ЕВГЕНА ОЗАРКЕВИЧА.**

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SECTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND IX.

REDIGIRT VON

JOHANN WERCHRATSKYJ, Dr. VLADIMIR LEWYCKYJ
u. Dr. EUGEN OZARKEVYČ.

У ЛЬВОВІ, 1903.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З печатнї Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарского.

КНИГАРНЯ НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА ІМЕНИ ШЕВЧЕНКА

має на складі між иньшими отсї книжки і брошури:

	корон
Вобяк Григорий. Про наші губи	0·10
— Причинки до лїхенольоґії східної Галичини	0·10
Верхратский Іван. Зоольоґія (на нисші кляси)	1·60
— Ботаніка (на нисші кляси)	1·40
— Мінеральоґія	1 40
— Соматольоґія	1·80
— Начерк соматольоґії	3· —
— Нічна лївка мотилів	0·10
Верхратский-Ростафіньский. Ботаніка для висших кляс	2·40
Глїбовицкий Клим. Рівнанє пятого степеня	0·40
— Права руху маятника	0·30
Др. Горбачевский Іван. Причинок до пізнаня виживи селяньскої людности галицкого Поділя	0·30
— Загальний метод добуваня нуклеїнного квасу з орґанів	0·06
Др. Дакура Осип. Зі шпитальної казуїстики за рік 1899	0·20
— Інтересний случай новотвору середґрудного	0·20
Збірник секциї математично-природописно-лїкарскої Наукового Товариства імени Шевченка. Том I.	3·—
— Том II.	3·—
— Том III. випуск I. Часть лїкарска	2·—
— Том III. випуск II. Часть математично-природописна	2 —
— Том IV. випуск I. Часть лїкарска	2·—
— Том IV. випуск II. Часть математична	1·—
— Том V. випуск I. Часть лїкарска	1·—
— Том V. випуск II. Часть лїкарска	1·—
— Том VI випуск I. Часть математично-природописна	2·—
— Том VI. випуск II. Часть лїкарска	2·—
— Том VII. випуск I. Часть математично-природописна	2·—
— Том VII. випуск II. Часть математично-природописна	3·
— Том VIII. випуск I. Часть лїкарска	3·—
— Том VIII. випуск II. Часть математично-природописна	3·—
Левицкий Володимир. Ґрупа модулова	0 10
— Еліптичні модулові функциї	0·30
— Материяли до фізичної термінольоґії ч. I.	0 20
— „ „ „ „ ч. II. і III.	0·20
— „ „ „ „ ч. IV.	0·15
— Про переступ чисел e і π	0 70
— Електромаґнетна теория сьвітла	0·70
— Клясифікация наук математичних	0·15
— Короткий начерк теориї функций автоморфних	0·30
— Теория перстеня Сатурна	0·40
— Додаток до теориї дробів тяглих та ґрупи модулової	0 20
— Найновійші праці з теориї функций аналїтичних	0·20
— Математика теоретична а практична	0·10
— Д. Гільберта основи ґеометриї	0·10
— З теориї рядів степенних	0·10
— Ґеометрия метова в оптиці ґеометричній	0·20
— Материяли до математичної термінольоґії	0·35
Матвіяс Софрон. Дещо про лучі Бекереля	0·10
Огоновский Петро Учебник аритметики для низших кляс середних ч. I.	1·80
— „ „ „ „ „ „ ч. II.	1 60
— Учебник фізики для низших шкіл середних	2·40

ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛЇКАРСКОЇ СЕКЦИЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ IX.

ПІД РЕДАКЦИЄЮ

ІВАНА ВЕРХРАТСКОГО, Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦКОГО
і Дра ЕВГЕНА ОЗАРКЕВИЧА.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SECTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND IX.

REDIGIRT VON

JOHANN WERCHRATSKYJ, Dr. VLADIMIR LEWYCKYJ
u. Dr. EUGEN OZARKEVYČ.

У ЛЬВОВІ, 1903.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З печатнї Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарского.

5р

ЗМІСТ.

INHALT.

МИКОЛА ГЕНРИХ АБЕЛЬ І ЄГО ЗНАЧІНЄ В МАТЕМАТИЦЇ.

(З нагоди столїтних роковин єго уродин).

написав

Клим Глїбовицкий.

Сьвіт науковий обходив 1902. р. столїтню річницю уродин великого ґенїя, математика норвеґского Абеля. В виданях товариств наукових усїх народів вийшли або ще вийдуть статї посьвячені памяти сего незвичайного чоловіка — велита, яких не числить на сотки история культури людскости[1]. Може раз на сто років спроможесь природа на єство такої сили духа, яка була у Абеля; творчість єго така величезна, а дїла такої ваги в історії розвою математики, що прямо непонятним здає ся, щоби се міг зробити чоловік, що в 27. роцї житя зійшов до гробу. — Не годить ся·ж і нам остати зовсїм по заду других і не почтити Абелевого ювилею; а не мож сего зробити красше, як передаючи спадщину по нїм виданям Наукового Товариства ім. Шевченка.

ЧАСТЬ ПЕРША.

Житє Абеля.

Микола Генрих Абель (Niels Henrik Abel) родив ся 25. серпня 1802. р. в селї Findoe в Норвеґії, де батько єго був протестанцким

---

[1] Єго памяти посьвячений приміром величавий твір: N. H. Abel, memorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. (Leipzig, B. G. Teubner 1902, цїна 21 марок).

пастором. Дитячі лїта перевів Абель в Gierrestadt, сусїдній парохії, де вже в р. 1803. перенїс ся єго отець. І ту розпочалось образованє малого хлопця під проводом самого батька і тревало до р. 1815, поки він не вступив до школи катедральної в Християнії. Ту зразу не виріжняв ся він від своїх співучеників; аж коли в р. 1818. Holmboe зістав іменований професором в тій власне школї, тодї на окремих годинах, які сей професор призначив на вправлюванє своїх учеників в розвязуваню проблємів з альґебри і ґеометриї, показавсь вперве талан Абеля, і від тодї став він розвиватись безпримірно скоро. Вже тодашні єго поступи казали догадуватись в нїм ґенія. Проф. Holmboe зайняв ся ним і поза годинами шкільними перейшов з ним основи рахунку ріжничкового і інтеґрального Айлєра (Euler). Відтак Абель ішов вже дальше самостійно, читав працї Lacroix'a, Francoeur'a, Poisson'a, Gauss'a, Lagrange'a і сам став пробувати сил своїх. Скінчивши школу катедральну вже по смерти свого батька вступив він на універзитет в Християнії, а що батько не оставив средств на єго образованє, то деякі з поміж професорів зложились, щоби дати Абелеви можність незалежного істнованя,

1802 — 1829.

конечного для так визначного талану. По двох роках ряд на внесене сенату академічного надав єму надзвичайну стипендию в висоті 200 Sp. річно. І ту стипендию побирав він через два роки аж до правильного укінченя студий універзитетских.

В тім часї працював Абель з великим запалом і написав кілька розправ друкованих в „Magazin für die Naturwissenschaften“ в Християнії. Перша з них друкована в р. 1820. має заголовок: „Allgemeine Methode Functionen einer variablen Grösse zu finden, wenn eine Eigenschaft dieser Functionen durch eine Gleichung zwischen zwei Variablen ausgedrückt ist“. І вже тодї займав ся він справою розвязки альґебраічної рівнаня пятого степеня; раз навіть здавалось єму вже, що найшов розвязку, та на жаль спостеріг похибку в своїй роботї. Але се єго не зразило, і він постановив собі або дійти до розвязки або показати, що розвязка є неможлива. Се послїдне вдалось єму і він в р. 1824. оголосив в Християнії свій доказ під заголовком: „Mèmoire sur les équations algébriques où on démontre l' impossibilité de la résolution de l' équation générale du cinquième degré“. Так розяснив Абель се питанє в теориї рівнань альґебраічних, питанє найважнїйше, яке було до розвязаня в аналїзї, як каже Legendre[1]).

З огляду на ту визначну діяльність наукову надав ряд Абелеви на єго просьбу стипендию 600 Sp. річно на протяг двох років, щоби єму уможливити дальше фахове образованє на заграничних універзитетах. Абель хотїв зразу їхати прямо до Парижа, але що разом їхали і другі єго краяни і вибирали Берлїн, то і він поїхав разом і не жалував сего, бо там познакомив ся з Crelle'ом, що став відтак єго щирим приятелем і був ним аж до смерти. Дневник „Crelle's Journal“, якого перший зошит вийшов з початком р. 1826. в часї побуту Абеля в Берлїнї, причинив ся немало до лїтерацкої слави Абеля. Він був одним з найдїяльнїйших співробітників сеї часописи і в кождім зошитї була бодай одна або дві єго розвідки; а кожда з них причинила ся немало до піднесеня поваги сеї часописи.

З кінцем лютого р. 1826. покинув Абель Берлїн і на Липск, Фрейбурґ, Дрезно і Прагу поїхав до Відня; по місяцю, десь з кінцем мая, виїхав він з Відня до Італії та Швайцариї, а в липни був вже в Парижи, де задержав ся на довше, бо до сїчня 1827. р. Ту

---

[1]) Обширне представленє сеї квестиї находить ся в розвідцї: „К. Глїбовицкий. Рівнанє пятого степеня (Збірник матем. природ. том II).

познакомив ся він з многими математиками, а між ними і з Cauchy'ом. Відтак побув єще в Берлїнї та Копенгазї, а в маю був вже з поворотом в Християнії. Ту старав ся він о катедру математики на унїверзитетї, але обі катедри, які були, були на сей час занятї, а нової для Абеля ряд не хотїв утворити. І так оставав він без місця аж до р. 1828, коли то поручено єму заступство проф. Hansteen'а на час подорожи сего до Сиберії. Вже тодї був Абель членом королївскої академії наук в Throndhjem.

Приятелї Абеля в Нїмеччинї звернули увагу пруского міністра просьвіти на визначний талан Абеля і спонукали, що ряд згодив ся запросити єго на берлїньский унїверзитет. В тім самім часї кількох членів королївскої академії наук в Парижи звернули ся до короля шведского з просьбою, щоби покликав Абеля на унїверзитет в Штокгольмі, та пруский ряд поспішив ся. Crelle дістав припорученє поспитати Абеля, чи евентуально приняв би запрошенє, а по прихильній єго відповіди мав остаточно уложити ту справу і стягнути Абеля до Берлїна. Єще того самого дня сповнив Crelle припорученє, та на жаль було за пізно — лист прийшов вже по смерти. Невпинна праця послїдних років, а також журба о завтра підкосили і так не сильне здоровлє Абеля. В грудни 1828. р. серед лютої зими виїхав він до гути желїзної в Froland коло Arendal, де була єго наречена панна Кетр (пізнїйше панї Keilhau); там захорував в сїчни 1829. р. і мимо усяких старань і заходів нареченої і властителїв гути помер на чахотку дня 6. цьвітня 1829¹).

Можна сьміло сказати про него: Коли-б був пожив довше, то не одно єще були-б про него почули. То, що Абель оставив по собі, дає повне право до такого висказу. Вистане згадати доказ про неможливість альґебраічної розвязки рівнань загальних степеня висшого чим четвертий, єго працї над функциями елїптичними, які властиво він сотворив разом з Jacobi'м, розправу про загальні прикмети функций перестушних і т. д., щоби бачити, що не сказалось за богато. Се все є працї, що далеко розширили границї аналїзи.

Пригляньмо ся тепер спадщинї, яка осталась по сїм так передвчасно померлим ґенїяльнім математичнім дусї.

---

¹) Порів. Holmboe: Noties sur la vie de l'auteur (Передмова до Oeuvres complètes de N. H. Abel). Обширну біоґрафію Абеля видав Bjerknes п. заг. Niels-Henrik Abel (Paris, Gauthier-Villars 1885).

ЧАСТЬ ДРУГА.

Твори Абеля1).

I. Шуканє функций двох величин змінних независимих x і y, таких f(xy), що f(z, f(xy)) є функциєю симетричною величини x, y і z. (Oeuvres complètes I. 1).

Вийшовши з частного приміру:

$$f(xy) = x+y, \quad \text{де} \quad f(z, f(xy)) = z+x+y,$$

де отже виходить симетрична функция даних величин, шукає автор відтак загальної форми функциї f. Яко симетрична мусить она сповняти слїдуючі рівнаня:

$$f(z, f(xy)) = f(x, f(yx))$$
$$f(z, f(xy)) = f(y, f(zx))$$

а коли для скороченя назвем:

$$f(xy) = r, \quad f(yz) = v, \quad f(zx) = s \qquad (1),$$

то дістанемо через ріжничкованє:

$$\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial z}} = \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\frac{\partial s}{\partial z}}.$$

Наколи приймем z постійне, тодї:

$$\frac{\partial v}{\partial y} : \frac{\partial v}{\partial z} = \varphi(y)$$

---

1) Твори Абеля вийшли в двох виданях; перше виданє видав Holmboe в р. 1839, друге, дуже старанно зредаґоване через L. Sylow'a і S. Lie, вийшло заходом ряду норвеґского в Християнії в мові француский в р. 1881. п. заг.: Oeuvres complètes de Niels-Henrik Abel, nouvelle édition (перший том ст. VIII+621, том другий ст. IV+341) цїна 24 марок. — Розвідки Абеля, що ся відносять до альґебраічної розвязки рівнань, видав H. Maser враз з творами E. Galois під заг. Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen (Berlin, J. Springer 1889); їх є пять. Дві розвідки Абеля вийшли в „Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften", а іменно № 71 клясиків (з р. 1895) містить: „Untersuchungen über die Reihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots\ldots$", а № 111 (з р. 1900) містить: „Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen". Одна розвідка п. з. „mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes" вийшла в Парижи в р. 1841.

буде функциєю самого y, а

$$\frac{\partial s}{\partial x} : \frac{\partial s}{\partial z} = \varphi(x)$$

буде такою самою функциєю величин z і x, як v величин z і y; а з відси:

$$r = \psi\left[\int\varphi(x)dx + \int\varphi(y)dy\right].$$

(ψ якась функция). А коли для скороченя поставимо за інтеґрал $\int\varphi(x)dx$ і $\int\varphi(y)dy$ $\varphi(x)$ та $\varphi(y)$, дістанемо:

$$r = f(xy) = \psi\left(\varphi(x), \varphi(y)\right) \qquad (2)$$

т. є. форму, яку має мати функция дана, лиш треба обмежити рівнаня головні (1), бо форма (2) є більше загальна як (1).

В той сам спосіб буде далї:

$$f(z, r) = \psi\left(\varphi(z), \varphi(r)\right) = \psi\Big(\varphi(z) + \varphi\psi\left(\varphi(z), \varphi(y)\right)\Big).$$

А що се вираженє є симетричне з огляду на x, y, z, то:

$$\varphi z + \varphi\psi\,(\varphi x + \varphi y) = \varphi x + \varphi\psi\,(\varphi y + \varphi z).$$

Най: $\varphi z = o$, $\varphi y = o$, то:

$$\varphi\psi\,(\varphi x) = \varphi x + c.$$

Положім $\varphi(x) = p$, то:

$$\varphi\psi(p) = p + c,$$

а коли φ_1 є функциєю відворотною до φ такою, що $\varphi\varphi_1(x) = x$, то:

$$\psi(p) = \varphi_1(p + c),$$

а форма загальна функциї, яку шукаєм, буде:

$$f(xy) = \varphi_1(c + \varphi x + \varphi y). \qquad (3)$$

Автор кіньчить натяком, що можна в подібний спосіб найти функциї двох величин змінних, що будуть сповняти рівнаня дані трох змінних.

Близькою тій розвідцї є иньша про: **функциї, що сповняють рівнанє $\varphi x + \varphi y = \psi\,(xfy + yfx)$**. (Oeuvres compl. I. 103).

Рівнанє:

$$\psi x + \varphi y = \psi\,(xfy + yfx) \qquad (1)$$

буде сповнене, коли приміром:

$$fy = \tfrac{1}{2}y, \quad а \quad \varphi x = \psi x = loq\ x$$

або коли:

$$fx = \sqrt{1-y^2}, \quad \text{а} \quad \varphi x = \psi x = \text{arc sin } x.$$

Абель ставить собі за задачу найти загальний вид функций, що відповідали би даному рівнаню і виводить, що функциями такими будуть:

$$\varphi x = a\alpha \int \frac{dx}{fx + \alpha' x}$$

$$\text{де} \quad a = \varphi' 0, \quad \alpha = f0, \quad \alpha' = f'0 \qquad (2)$$

$$\psi x = a\alpha \int \frac{dx}{\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \alpha' x} + \varphi 0$$

підчас коли само **fx** є визначене через рівнанє:

$$f'x\ (fx + \alpha' x) + (mx - \alpha' fx) = 0 \qquad (3)$$

або:

$$c^{2n} = (fx - nx)^{\,n+\alpha}\ (fx + nx)^{\,n-\alpha'}$$

де **c** означає постійну інтеґрованя.

Рівнаня ті можуть послужити до вишуканя функций сповняючих рівнанє (1), в частних случаях, при означених вартостях на **n** і α'.

Функцию **φx** виражену ту (2) в виді інтеґралу мож також представити при помочи льоґаритмів в виді:

$$\varphi x = \frac{a\alpha}{n+\alpha'} \log\ (cnx + cfx), \quad fx \text{ відоме.}$$

В случаях $\alpha' = \infty$, і $n = 0$, fx приймає якусь вартість частну яку найде ся з рівнаня (3).

II. Квестию **розвязки р'внань альґебраічних** розібрав і розвязав Абель в слїдуючих розвідках:

а) **Розвідка про рівнаня альґебраічні, де виказуєсь неможливість розвязки загального рівнаня пятого степеня.** (Християнїя 1824, Oeuvres compl. 1881. I. 28).

б) **Доказ неможливости альґебраічної розвязки загальних рівнань, степеня висшого як четвертий.** (Crelle's Journal I. 1826. Oeuvres compl. I. 66).

в) **Розвідка про специяльну клясу рівнань, що ся дають альґебраічно розвязати.** (Crelle's J. IV. 1829. Oeuvres compl. I. 478).

г) **Про альґебраічну розвязку рівнань** (твір посмертний, Oeuvres compl. II. 217).

д) **Нова теория альґебраічної розвязки рівнань** (вступ до розвідки попередної, Oeuvres compl. II. 329).

Вислїди тих епохальних розвідок, що творять chef d' oeuvres Абеля в альґебрі, розібрали ми основно в наведеній висше розвідцї[1], тому пригадаєм тут лиш хід гадок в головних чертах.

1. Абель каже ось-так: Розвязати альґебраїчно рівнанє значить виразити корені рівнаня через функциї альґебраїчні сочинників. Тому-то розбирає він вперед загальний вид функций альґебраічних і шукає, чи можна сповнити дане рівнанє, наколи вставимо на місце незвісної вираженє функциї альґебраїчної.

Най:

$$c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_{r-1} y^{r-1} + y^r = 0 \qquad (1)$$

буде дане рівнанє з сочинниками $c_0\ c_1\ c_2 \cdots$, що є вимірими функциями величин независимих $x', x'' \cdots$, та най функция альґебраїчна величин $x', x'', \cdots$:

$$y = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \qquad (2)$$

сповняє то рівнанє. Вставивши то вираженє за y в дане рівнанє одержимо (редукуючи висші степені p, чим $p^{\frac{n-1}{n}}$) вираженє виду:

$$r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0 \qquad (3)$$

де $r_0\ r_1 \cdots r_{n-1}$ є функциї виміримі величин $p\ q_0\ q_1 \cdots q_{n-1}$. Рівнанє (3) сповнить ся лиш тодї, наколи:

$$r_0 = 0,\ r_1 = 0, \cdots r_{n-1} = 0.$$

Оно ся сповнить також, коли за $p^{\frac{1}{n}}$ будемо класти по черзї:

$$\alpha^s p^{\frac{1}{n}} \ (s = 0, 1, 2, \cdots n-1),$$

де α є корені рівнаня:

$$\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + 1 = 0.$$

З огляду на се дістанемо на y ряд вартостий (q_1 кладем $= 1$).

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} \alpha^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

Звідси можна кожду з величин:

$$p^{\frac{1}{n}}\ q_0\ q_2 \cdots q_{n-1}$$

---

[1] пор. Глїбовицкий loc. cit.

виразити виміримо через $y_1\, y_2 \cdots\cdots$. Бачимо проте, що наколи рівнанє якесь дасть ся альґебраїчно розвязати, то на кождий корінь рівнаня дістанемо виражене таке, що кожда функция, яка в нього входить, є виміримою функциєю корінїв даного рівнаня (1).

Наколи загальне рівнанє пятого степеня має мати розвязку альґебраїчну, то в склад єго увійдуть функциї виду $v = R^{\frac{1}{m}}$, де R є вимірима функция сочинників рівнаня, а m є число перве. На основі (1) є v вимірима функция корінїв; она має m ріжних вартостий, а так як число ріжних вартостий, які функция m величин може приймати, не може бути меньше, як найбільше число перве, що приходить в добутку $1.2.3. \cdots\cdots m$, бо в противнім разї зведе ся до 2 або 1, а се є функция пятьох величин x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, то m яко число перве може бути рівне 1, 2, 5. $m = 1$ треба відкинути, бо корінь рівнаня не може бути виміримою функциєю сочинників; остає отже $m = 2, 5$.

Возьмім $m = 5$; загальний вид функциї пятивартістної пятьох величин є:

$$\sqrt[5]{R} = r_0 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + r_4x^4;$$

з відси:

$$x = s_0 + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}},$$

а відтак, як передше:

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} (x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) \quad (\alpha^5 = 1).$$

То рівнанє є неможливе, позаяк права сторона має 120 вартостий, коли тимчасом се має бути корінь рівнаня 5. степеня:

$$z^5 - s_1 R = 0.$$

Остає отже $m = 2$. Тоді є:

$$\sqrt{R} = p + qs,$$

де p і q є функциї симетричні, а $s = (x_1 - x_2) \cdots (x_4 - x_5)$; а що, наколи перемінимо x_1 і x_2 випаде:

$$-\sqrt{R} = p - qs,$$

то мусить бути $p = 0$, отже $\sqrt{R} = qs$, значить ся, що кожда альґебраїчна функция першого степеня, що виступає в виражeню на корінь, мусить мати вид $\alpha + \beta\sqrt{s^2} = \alpha + \beta s$ (α, β симетричні функциї). А що є річ неможлива, корінї виразити через функцию виду $\alpha + \beta\sqrt{R}$, то мусить істнувати рівнанє:

$R^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}} = v$ (α, β функциї симетричні, m число перве, v вимірима функция корінів). З відси є:

$$v_1 = \sqrt[m]{\alpha + \beta s}, \quad v_2 = \sqrt[m]{\alpha - \beta s}, \quad v_1 v_2 = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}.$$

Наколи би функция $v_1 v_2$ не була симетрична, то для $m = 2$ було би $v = \sqrt{\alpha + \beta\sqrt{s^2}}$, значить ся v малоби чотири вартости, що неможливе. Мусить отже $\gamma = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$ бути функция симетрична; тодї є:

$$p = v_1 + v_2 = R^{\frac{1}{m}} + \frac{\gamma}{R} R^{\frac{m-1}{m}}, \qquad R = \alpha + \beta\sqrt{s^2}.$$

Положім за $R^{\frac{1}{m}}$ $\alpha R^{\frac{1}{m}}$, $\alpha^2 R^{\frac{2}{m}}$, ······ де $\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + 1 = 0$, то дістанем місто p вартости $p_1\ p_2 \cdots p_m$. Легко показати, що p має m ріжних вартостий; звідси слїдує $m = 5$, а тодї:

$$p = R^{\frac{1}{5}} + \frac{\gamma}{R^{\frac{1}{5}}} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4.$$

З відси слїдує далї:

$$x = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + s_3 p^3 + s_4 p^4,$$

або:

$$x = t_0 + t_1 R^{\frac{1}{5}} + t_2 R^{\frac{2}{5}} + t_3 R^{\frac{3}{5}} + t_4 R^{\frac{4}{5}}$$

($t_0\ t_1 \cdots$ є виміримі функциї R і сочинників даного рівнаня. З відси (як передше):

$$t_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) = p' \quad (4)$$

далї є:

$$p'^5 = t_1{}^5 R,$$

а що

$t_1{}^5 R$ має вид $u + u'\sqrt{s^2}$, то є $p'^5 = u + u'\sqrt{s^2}$, або $(p'^5 - u)^2 = u'^2 s^2$.

Звідси би виходило p' через рівнане 10. степеня, якого сочинники є симетричними функциями, а що се неможливе, бо після (4) p' мало би 120 ріжних вартостий, то і загальне рівнане степеня пятого (а так само і висшого) не дасть ся розвязати.

2. Та хотяй рівнаня степеня висшого чим 4. взагалї альґебраічно розвязати ся не дадуть, то однак є певна кляса рівнань всяких степенїв, що дають розвязку альґебраічну; такими є приміром рівнаня виду $x^n - 1 = 0$. Розвязка таких рівнань опираєсь

на відношенях, які заходять між корінями. І так: коли два корінї рівняня незведимого є так звязані між собою, що один з них можна виразити виміримо через другий, тодї розвязка рівняня даного дає ся звести до розвязки якогось числа рівнань низшого степеня. А і само рівнанє дане дасть ся тодї розвязати альґебраічно, коли степень єго є числом первим.

Так само дасть ся розвязати рівнанє, єсли всї єго корінї мож представити в видї:

$$x,\ \Theta x,\ \Theta^2 x,\ . \text{—} \cdots\cdots\ \Theta^{n-1}x \qquad (\Theta^n x = x)$$

(є се Абелева ґрупа правильна), де Θx є вимірима функция величини x, $\Theta^2 x$ така сама функция, що Θx, два рази взята $(\Theta^2 x = \Theta\,\Theta x)$ і т. д.

Метода, якою послугує ся Абель при розвязуваню сих послїдних рівнань, годить ся з методою Gauss'а, поданою в „Disquisitiones arithmeticae“ pag. 645 sqts.

В сїм случаю всї корінї рівняня дадуть ся виразити виміримо при помочи одного з них; але на відворот рівняня, котрих корінї мають ту прикмету, не все дають ся розвязати альґебраічно, кромі що-йно наведеного случаю.[1]

Розвязка альґебраічна рівняня є можлива єще в однім случаю, а се тодї, коли всї корінї рівняня дадуть ся виразити альґебраічно через один з них, приміром z, а поміж двома якими-небудь корінями тогож рівняня Θx і $\Theta_1 x$ заходить відношенє:

$$\Theta\,\Theta_1 x = \Theta_1\,\Theta x.$$

(є се ґрупа абелева).

На случай, коли степень рівняня даного $\varphi(x) = 0$ (а все маємо на думцї рівняня незведимі) μ дасть ся розложити ся на:

$$\mu = \varepsilon_1^{\nu_1}\,\varepsilon_2^{\nu_2}\,\varepsilon_3^{\nu_3} \cdots\cdots \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha}$$

де $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \cdots\cdots$ є числами первими, тодї x буде можна винайти через розвязку ν_1 рівнань степеня ε_1, ν_2 рівнань степеня ε_2 і т. д. і всї тї рівняня дадуть ся альґебраічно розвязати.

Коли $\mu = 2^\nu$, можна найти вартість x через витягненє ν корінів квадратових.

Тї висліди стосує Абель до функций колових і показує, що щоби подїлити округ кола на $(2n+1)$ рівних частий, вистане:

---

[1] Рівняня тї назвав Kronecker „рівнянями Абелевими“.

1) поділити округ на 2n рівних частий.

2) поділити лук на 2n рівних частий.

3) витягнути корінь квадратовий з величини $(2n+1)$.

Послїдний теорем висказав вже і Gauss в Diquisitiones arith., на що і Абель ся покликує.

3. Дальші єго працї з обсягу **альґебри** відносились до сумованя рядів. Тут належать:

Дослїди над рядом:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$

(Oeuvres compl. I. 66)

Розвідка ся важна є тим, що в нїй по раз перший (спрецизовано) поставлено умовини збіжности ряду.

Тих умовин і прикмет рядів збіжних вичислює автор 6, а є они слїдуючі:

I. Єсли $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \cdots$ становлять ряд величин додатних, а квот $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, для ростучих безнастанно вартостий m, зближає ся безконечно до границї α, де $\alpha > 1$, тодї ряд:

$$\varepsilon_0\varrho_0+\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\cdots\qquad+\varepsilon_m\varrho_m+\cdots$$

— де ε_m для m безнастанно ростучого не наближає ся безконечно до зера, — є рядом розбіжним.

II. Наколи в рядї $\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots$ квот $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$ для ростучих вартостий m зближає ся безнастанно до границї $a < 1$, тодї ряд

$$\varepsilon_0\varrho_0+\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\cdots$$

— де $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots$ не переходять одиницї, — є рядом збіжним.

III. Єсли $p_m = t_0+t_1+t_2+\cdots+t_m$ є меньше, чим якась означена величина δ, тодї

$r = \varepsilon_0 t_0+\varepsilon_1 t_1+\varepsilon_2 t_2+\cdots+\varepsilon_m t_m$ є меньше, чим $\varepsilon_0\,\delta$, де $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ суть величинами додатними малїючими.

IV. Наколи ряд

$$f(\alpha) = v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots+v_m\alpha^m+\cdots$$

є збіжний для якоїсь вартости δ змінчивої α, то він буде збіжний і для кождої меньшої вартости α, а для безнастанно малїючої вартости β функция $f(\alpha+\beta)$ зближає ся безконечно до границї $f(\alpha)$, коли α є рівне або меньше чим δ.

V. Коли $v_0 + v_1 \delta + v_2 \delta^2 + \cdots$

є рядом збіжним, а $v_0, v_1, v_2, \cdots$ представляють функциї величини x, тяглі в границях межи a і b, то ряд

$$fx = v_0 + v_1 \alpha + v_2 \alpha^2 + \cdots ,$$

де $\alpha < \delta$, буде також збіжний і буде функциєю тяглою x в тих самих границях.

VI. Єсли через $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \cdots , \varrho_0', \varrho_1', \varrho_2', \cdots$ назначимо вартости чисельні відповідних членів двох рядів збіжних

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots = p, \quad v_0' + v_1' + v_2' + \cdots = p'$$

то наколи ряди

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots , \quad \varrho_0' + \varrho_1' + \varrho_2' + \cdots$$

суть збіжні, тодї ряд $r_0 + r_1 + r_2 + \cdots$ котрого член заґальний є:

$$r_m = v_0 v'_m + v_1 v'_{m-1} + v_2 v'_{m-2} + \cdots + v_m v'_0$$

буде новим рядом збіжним, а єго сума буде рівнатись:

$$(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots)(v_0' + v_1' + v_2' \cdots).$$

По тім вступі автор приходить до властивої задачі вишуканя суми ряду:

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-m)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \cdots \qquad (1)$$

для всїх вартостий дїйсних або мнимих x і m, для яких сей ряд є збіжний.

Назвім наш ряд через $\varphi(m)$ і положім для скороченя:

$$1 = m_0, \ \frac{m}{1} = m_1, \ \frac{m(m-m)}{1.2} = m_2, \cdots \frac{m(m-1)\cdots(m-\mu+1)}{1.2.3\cdots\mu} = m_\mu$$

то $\varphi(m) = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \cdots + m_\mu x^\mu + \cdots$ (2)

Най $x = a + bi$, $m = k + k'i$ $(i = \sqrt{-1})$

де a, b, k, k' є числа дїйсні, то дістанемо

$$\varphi(m) = p + qi$$

де p і q суть рядами.

Представмо x в виді

$$x = \alpha(\cos\varphi + i \sin\varphi) \qquad \text{де} \quad \alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$$

так само:

$$\frac{m - \mu + 1}{\mu} = \delta_\mu (\cos\gamma_\mu + i \sin\gamma_\mu)$$

де

$$\delta_\mu = \sqrt{\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2}$$

то:

$$m_\mu x^\mu = \alpha^\mu.\delta_1.\delta_2.\delta_3 \cdots \delta_\mu\left[\cos(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)+i\sin(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)\right].$$

Для скорочення назвемо:

$$\delta_1 . \delta_2 . \delta_3 \cdots \delta_\mu = \lambda_\mu$$

$$\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu = \Theta_\mu$$

тоді:

$$m_\mu x^\mu = \lambda_\mu \alpha^\mu (\cos\Theta_\mu + i\sin\Theta_\mu)$$

а $\varphi(m)$ представить ся:

$$\varphi(m) = 1 + \lambda_1 \alpha(\cos\Theta_1 + i\sin\Theta_1) + \lambda_2 \alpha^2(\cos\Theta_2 + i\sin\Theta_2) + \cdots + \cdots + \lambda_\mu \alpha^\mu(\cos\Theta_\mu + i\sin\Theta_\mu) + \cdots \tag{3}$$

з відси:

$$\begin{aligned} p &= 1 + \lambda_1 \alpha\cos\Theta_1 + \lambda_2\alpha^2\cos\Theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\cos\Theta_\mu + \cdots \\ q &= \quad\ \lambda_1\alpha\sin\Theta_1 + \lambda_2\alpha^2\sin\Theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\sin\Theta_\mu + \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

З форми на λ_μ виходить

$$\lambda_{\mu+1} = \delta_{\mu+1}\lambda_\mu$$

отже:

$$\lambda_{\mu+1}\alpha^{\mu+1} = \alpha\,\delta_{\mu+1}\lambda_\mu\alpha^\mu$$

або:

$$\frac{\lambda_{\mu+1}\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\alpha^\mu} = \alpha\,\delta_{\mu+1}$$

а що:

$$\delta_{\mu+1} = \sqrt{\left(\frac{k-\mu}{\mu+1}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2}$$

для вартостий μ ростучих в безконечність зближає ся до одиниції, через що

$$\frac{\lambda_{\mu+1}\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\alpha^\mu}$$

наближає ся до границї α, проте p і q буде збіжне або розбіжне, залежно від того, чи α є більше, чи меньше від одиниції.

Представмо ряд $\varphi(\mathrm{m})$ в виді:

$$\mathrm{p} + \mathrm{q\,i} = \mathrm{r}(\cos \mathrm{s} + \mathrm{i} \sin \mathrm{s})$$

де

$$\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2};$$

возьмім, що:

$$\mathrm{s} = \psi(\mathrm{k}, \mathrm{k}'), \qquad \mathrm{r} = \mathrm{f}(\mathrm{k}, \mathrm{k}'),$$

то:

$$\mathrm{p} + \mathrm{q\,i} = \varphi(\mathrm{k} + \mathrm{k}'\mathrm{i}) = \mathrm{f}(\mathrm{k}, \mathrm{k}')\left[\cos \psi(\mathrm{k\,k}') + \mathrm{i} \sin \psi(\mathrm{k\,k}')\right]$$

а вид тих функций f і ψ буде:

одної:

$$\psi(\mathrm{k\,k}') = \beta \mathrm{k} + \beta' \mathrm{k}' - 2\mathrm{m}\pi$$

де β і β' суть якимись величинами постійними,

а другої:

$$\mathrm{f}(\mathrm{k\,k}') = \mathrm{e}^{\delta \mathrm{k} + \delta' \mathrm{k}'}$$

де δ і δ' суть рівнож величинами постійними.

З відси:

$$\varphi(\mathrm{k} + \mathrm{k}'\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\delta \mathrm{k} + \delta' \mathrm{k}'}\left[\cos(\beta \mathrm{k} + \beta' \mathrm{k}') + \mathrm{i} \sin(\beta \mathrm{k} + \beta' \mathrm{k}')\right] \tag{5}$$

є найзагальнїйшою функциєю, представляючою суму ряду $\varphi(\mathrm{m})$ з неозначеними еще на разї величинами постійними $\beta, \beta', \delta, \delta'$.

Розділїм часть першорядну і другорядну, то дістанемо:

$$\mathrm{e}^{\delta \mathrm{k} + \mathrm{k}'\delta'} \cos(\beta \mathrm{k} + \beta' \mathrm{k}') = 1 + \lambda_1 \alpha \cos \Theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \cos \Theta_2 + \cdots + \lambda_\mu \alpha^\mu \cos \Theta_\mu + \cdots \tag{6}$$

$$\mathrm{e}^{\delta \mathrm{k} + \delta' \mathrm{k}'} \sin(\beta \mathrm{k} + \beta' \mathrm{k}') = \lambda_1 \alpha \sin \Theta_1, + \lambda_2 \alpha^2 \sin \Theta_2 + \cdots + \lambda_\mu \alpha^\mu \sin \Theta_\mu + \cdots$$

а для $\mathrm{k}' = 0$ взори ті перейдуть на:

$$\mathrm{e}^{\delta \mathrm{k}} \cos \beta \mathrm{k} = 1 + \frac{\mathrm{k}}{1} \alpha \cos \varphi + \frac{\mathrm{k}(\mathrm{k}-1)}{1.2} \alpha^2 \cos 2\varphi + \frac{\mathrm{k}(\mathrm{k}-1)(\mathrm{k}-2)}{1.2.3} \alpha^3 \cos 3\varphi + \cdots$$

$$\mathrm{e}^{\delta \mathrm{k}} \sin \beta \mathrm{k} = \frac{\mathrm{k}}{1} \alpha \sin \varphi + \frac{\mathrm{k}(\mathrm{k}-1)}{1.2} \alpha^2 \sin 2\varphi + \frac{\mathrm{k}(\mathrm{k}-1)(\mathrm{k}-2)}{1.2.3} \alpha^3 \sin 3\varphi + \cdots \tag{7}$$

а з відси для $\mathrm{k} = 1$ найдемо:

$$\mathrm{e}^{\delta} = \sqrt{1 + 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2} \quad \text{і} \quad \mathrm{tg}\beta = \frac{\alpha \sin \varphi}{1 + \alpha \cos \varphi}$$

т. з.

$$\delta = \tfrac{1}{2} \log(1 + 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2), \quad \text{а} \quad \beta = \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\alpha \sin \varphi}{1 + \alpha \cos \varphi}\right)$$

а тоді рівнаня (7) представлять ся остаточно в виді:

$$1+\frac{k}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\cos 3\varphi+\cdots$$
$$=\sqrt{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^k}\cos k s$$
$$\frac{k}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\sin 3\varphi+\cdots \qquad (8)$$
$$=\sqrt{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^k}\sin k s$$

де s значить найменьшу вартість, яку β може приняти. Та вартість заключена є поміж $-\frac{\pi}{2}$ а $+\frac{\pi}{2}$. Подібно, як β і δ, найде ся вартости на β' і δ' і они будуть $\beta'=\delta$, $\delta'=-\beta$. А тоді рівнаня (6) можуть приняти вид:

$$1+\lambda_1\alpha\cos\Theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\Theta_2+\cdots+\lambda_\mu\alpha^\mu\cos\Theta_\mu+\cdots$$
$$=e^{\delta k-\beta k'}\cos(\beta k+\delta k') \qquad =p$$
$$\lambda_1\alpha\sin\Theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\Theta_2+\cdots+\lambda_\mu\alpha^\mu\sin\Theta_\mu+\cdots \qquad (9)$$
$$=e^{\delta k-\beta k'}\sin(\beta k+\delta k') \qquad =q$$

Отже наш ряд $\varphi(m)=p+qi$ буде:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-\mu+1)}{1.2.3\cdots\mu}x^\mu+\cdots$$
$$=e^{\delta k-k\beta'}\left[\cos(\beta k+\delta k')+i\sin(\beta k+\delta k')\right]$$

де $m=k+k'i$, а $x=a+bi=\alpha(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

з чого виходить:

$$\alpha=\sqrt{a^2+b^2},\ \alpha\cos\varphi=a,\ \alpha\sin\varphi=b,\ \delta=\tfrac{1}{2}\log(1+2a+a^2+b^2)$$
$$\beta=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{1+a}\right).$$

Вставивши тоє і кладучи m замість k, а n замість k', дістанемо на суму ряду:

$$1+\frac{m+ni}{1}(a+bi)+\frac{(m+ni)(m+ni-1)}{1.2}(a+bi)^2+$$
$$+\frac{(m+ni)(m+ni-1)(m+ni-2)}{1.2.3}(a+bi)^3+\cdots$$
$$+\cdots+\frac{(m+ni)(m+ni-1)+\cdots+(m-\mu+1+ni)}{1.2.3\cdots\mu}(a+bi)^\mu+\cdots \qquad (10)$$

$$=\left[(1+a)^2+b^2\right]^{\frac{m}{2}} e^{-n\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b}{1+a}\right)}\left[\cos\left\{m\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\frac{1}{2}n\log\left((1+a)^2+b^2\right)\right\}\right.$$
$$\left.+i\sin\left\{m\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\frac{1}{2}n\log\left((1+a)^2+b^2\right)\right\}\right]$$

Виражене то сповняє ся для всяких $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$ меньших чим одиниця.

Для $b=0$ і $n=0$ дістанемо ряд поданий в заголовку.

Єслиж $\sqrt{a^2+b^2}$ є рівне одиниції, тодї наш ряд буде збіжний для всякої вартости m заключеної поміж -1 і $+\infty$, єсли рівночасно не є $\alpha=-1$. Наколиж $\alpha=-1$, то m мусить бути додатне. У всїх иньших случаях ряд є розбіжний.

Ту треба згадати також про другі ряди, якими займав ся Абель.

І так ряд:

$$y=\varphi(0)+\varphi(1)x+\varphi(2)x^2+\cdots\cdots+\varphi(n)x^n\ ^{1)}$$

— де n є число цїле додатне, скінчене або безконечно велике, а $\varphi(n)$ означає функцию альґебраічну виміриму величин n, — сумує автор при помочи рядів виду:

$$p=A0^\alpha+Ax+A2^\alpha x^2+\cdots\cdots+An^\alpha x^n$$
$$q=\frac{B}{\alpha^\beta}+\frac{Bx}{(\alpha+1)^\beta}+\frac{Bx^2}{(\alpha+2)^\beta}+\cdots\cdots+\frac{Bx^n}{(\alpha+n)^\beta}$$

котрі на суму дають:

$$\frac{p-A0^\alpha}{A}=x+2^\alpha x^2+3^\alpha x^3+\cdots\cdots+n^\alpha x^n=$$
$$=x\,d\,(x.d\,(x\cdots\cdots d\left(x.d\left(\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right)\right)$$

а $$\frac{q}{B}=\frac{1}{x^\beta}+\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\cdots\cdots\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx\,(x^{\beta-1}-x^{n+\beta})}{1-x}$$

а що ряд даний складаєсь з рядів тих двох видів, то і сума цїлого ряду буде через них визначена.

Подібно находить і суму ряду:

$$z=f(0)\,\varphi(0)+f(1)\,\varphi(1)x+f(2)\,\varphi(2)x^2+\cdots\cdots+f(n)\,\varphi(n)x^n$$

де $f(n)$ означає функцию яку небудь, а $\varphi(n)$ функцию виміриму.

---

[1] Oeuvres compl. II. 41.

Окремо займає ся єще автор рядом:

$$\psi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots\cdots \qquad ^{1})$$

Подає іменно лежандрівскі вислїди сумованя сего ряду для частних арґументів в границях збіжности $(-1 \cdots\cdots + 1)$, а відтак сумує сей ряд для арґументу, що є добутком функций двох змінних, а іменно:

$$\psi\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\right) = \psi\left(\frac{y}{1-x}\right) + \psi\left(\frac{x}{1-y}\right) - \psi y - \psi x - \log(1-y)\log(1-x).$$

В тім взорі x і y мусять мати такі вартости, щоби величини: $\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\right)$, $\frac{y}{1-x}$, $\frac{x}{1-y}$, y, x не перевисшали одиниції. А то стане ся для додатних x і y, коли $x + y < 1$. — Наколиж $y = -m$, тодї мусить $x + m < 1$, а коли оба і x і y суть від'ємні, тодї вистане, наколи кожде з них є меньше чим одиниця.

III. Перейдїм тепер до другої царини аналїзи, яку Абель збогатив безсмертними дослїдами, а се до **теориї функций еліптичних**, та перегляньмо по черзї єго розвідки в тій области.

1. Перша єго розвідка має заголовок:

Розвязка загального проблєму відносячого ся до перетвореня функций еліптичних. (Oeuvrel compl. I. 253).

Ту ставить собі Абель за завданє найти всї можливі случаї, в яких сповнить ся рівнанє ріжничкове:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1{}^2y^2)(1-e_1{}^2y^2)}} = \pm a \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

наколи за y вставимо функцию альґебраїчну величини x, вимірниму або невимірниму.

Задача дуже тяжка на око з огляду на загальність функциї y дасть ся спровадити до случаю, коли y є вимірне, змінить ся лиш сочинник a даного рівняня, а прочі величини c c_1 e e_1 остануть ті самі.

Положім:

$$\Theta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

---

[1]) Oeuvres compl. II. 249.

то x буде якоюсь функциєю величини Θ; назвім єї $\lambda\Theta$. Дальше назвім через $\frac{\omega}{2}$ і $\frac{\omega'}{2}$ вартости Θ для $x = \frac{1}{c}$ і $x = \frac{1}{e}$, а через $\Delta\Theta$ функцию $\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}$.

Тодї на підставі рівнаня:

$$\lambda(\Theta \pm \Theta') = \frac{\lambda\Theta . \Delta(\Theta') \pm \lambda\Theta' \, \Delta(\Theta)}{(1 - c^2 e^2 \lambda^2 \Theta) . \lambda^2 \Theta'}$$

де Θ і Θ' означають величини які небудь, і на підставі твердженя, що рівнанє:

$$\lambda\Theta = \lambda\Theta'$$

сповнить ся, коли положимо:

$$\Theta' = (-1)^{m+m'} \Theta + m\omega + m'\omega'$$

де m і m' є які небудь числа цїлковиті додатні або від'ємні, легко буде можна дістати загальне вираженє на y і на вартости величин c_1 і e_1.

Най $y = \psi(x)$ буде функциєю виміримою, якої шукаємо, то x виражене яко функция y буде корінєм рівнаня $y = \psi(x)$; а всї коріні сего рівнаня то будуть всї ріжнї вартости вираженя:

$$\lambda(\Theta + k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 + \cdots\cdots + k_\nu \alpha_\nu)$$

які дістанемо, даючи величинам $k_1 \; k_2 \cdots\cdots k_\nu$ всї вартости цїлковиті, підчас коли $\alpha_1 \; \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_\nu$ мати муть вид: $\mu\omega + \mu'\omega'$ (μ і μ' числа виміримі). Назвім вартости повисшого вираженя:

$$\lambda\Theta, \; \lambda(\Theta + \alpha_1), \; \lambda(\Theta + \alpha_2), \cdots\cdots \lambda(\Theta + \alpha_{m-1})$$

і положім $\psi(x) = \frac{p}{q}$ (p і q функциї цїлковиті величини x без спільного подїльника), тодї:

$$p + qy = A(x - \lambda\Theta)\big(x - \lambda(\Theta + \alpha_1)\big) \cdots\cdots \big(x - \lambda(\Theta + \alpha_{m-1})\big)$$

а рівнанє се сповнить ся для всякої вартости x. A яко сочинник при x^{m-1} буде мати вид $f - gy$, де f і g є величини постійні.

На случай, коли p і q є степеня першого, розвязка нашої задачі може мати слїдуючі три види:

1) $y = ax, \quad {c_1}^2 = \frac{c^2}{a^2}, \quad {e_1}^2 = \frac{e^2}{a^2}$

2) $y = \frac{a}{ec} \frac{1}{x}, \quad {c_1}^2 = \frac{c^2}{a^2}, \quad {e_1}^2 = \frac{e^2}{a^2}$

3) $y = m \frac{1 - x\sqrt{ec}}{1 + x\sqrt{ec}}, \; c_1 = \frac{1}{m} \frac{\sqrt{c} - \sqrt{e}}{\sqrt{c} + \sqrt{e}}, \; e_1 = \frac{1}{m} \frac{\sqrt{c} + \sqrt{e}}{\sqrt{c} - \sqrt{e}}, \; a = \frac{m\sqrt{-1}}{2}(c - e).$

Для якого-небудь степеня m функциї p і q дістанемо:

$$y = \frac{f' + f \, . \, \varphi\Theta}{g' + g \, . \, \varphi\Theta}$$

де f' g' є сочинники при x^{m-1} в p і q, а $\varphi\Theta$ має вид:

$$\varphi\Theta = (1 - k) x + \frac{k'' - k'}{ec} \frac{1}{x} \sum_{\alpha} \frac{2x \Delta(\alpha)}{1 - e^2 c^2 \lambda^2 \alpha \, . \, x^2};$$

k, k' і k'' є рівні зеру або одиниці.

З тих перетворень витягає Абель дуже важні твердженя, що дотичать еліптичних функций; і так:

а) Наколи рівнанє:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - c_1{}^2 y^2)(1 - e_1{}^2 y^2)}} = \pm a \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2 x^2)(1 - e^2 x^2)}}$$

сповнить ся через підставленє: $y = \psi(x) = \frac{p}{q}$, де степень функций p і q є рівний добуткови mn, то всегда буде можна найти функциї виміримі φ і f такі, що наколи положимо:

$$x_1 = \varphi(x) = \frac{p'}{q'},$$

то дістанемо:

$$y = f(x_1) = \frac{p_1}{q_1}$$

$$\frac{dx_1}{\sqrt{(1 - c_2{}^2 x_1{}^2)(1 - e_2{}^2 x_1{}^2)}} = a_1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2 x^2)(1 - e^2 x^2)}}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - c_1{}^2 y^2)(1 - e_1{}^2 y^2)}} = a_2 \frac{dx_1}{\sqrt{1 - c_2{}^2 x_1{}^2)(1 - e_2{}^2 x_1{}^2)}}$$

при чім степень функций p' і q' є рівний одному з чинників m і n, а степень p_1 і q_1 другому.

б) Який-небудь бувби степень рівнаня $p - qy = 0$, то все можна буде дістати вартість x в y дорогою альґебраїчною. Маємо отже одну клясу рівнань, що дадуть ся розвязати альґебраїчно; їх коріні будуть функциями виміримими величин:

$$y, \; r_1^{\frac{1}{n_1}}, \; r_2^{\frac{1}{n_2}}, \cdots\cdots r_\nu^{\frac{1}{n_\nu}}$$

де $n, n_2 \cdots\cdots n_\nu$ є перші зглядом себе, а їх добуток рівнаєсь степеневи рівнаня даного; $r_1, r_2, \cdots\cdots r_\nu$ мають вид:

$$\xi + t\sqrt{(1-c_1{}^2 y^2)(1-e_1{}^2 y^2)}$$

(ξ і t функциї цїлковиті y).

в) Коли шукаєм всїх можливих розвязок рівнаня:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c^2y^2)(1-e^2y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

і оно дасть розвязку альґебраічну що до x і y без згляду на те, чи y дасть ся представити виміримо через x чи нї, то величина постійна a буде мати вид $\mu' + \sqrt{-\mu}$, де μ і μ' є числа виміримі, а μ є все додатне. При такій вартости на a можна найти безконечне число ріжних вартостий e і c, що будуть сповняти наше рівнанє, а всї они дадуть ся виразити через корінї.

г) Через введенє нових змінних перейде рівнанє на:

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-b^2\sin^2\psi}} = a\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Наколи заложимо φ і ψ дїйсне, а модул $c < 1$, а надто рівнанє дістане на інтеґрал функцию альґебраічну що до $\sin\varphi$ і $\sin\psi$, то a буде квадратовим корінем з додатної виміримої величини.

Яко додаток до попередних перетворень функций еліптичних випроваджує Абель теорему:

Щоби рівнанє:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1{}^2y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

сповнити рівнанєм альґебраічним о змінних x і y, при чім модули c і c_1 є меньші як 1, а сочинник a дїйсний або мнимий, потреба, а заразом вистарчає, щоби тї модули так були звязані з собою, щоби одно з виражень $\frac{\omega_1}{\tilde\omega_1}$ і $\frac{\tilde\omega_1}{\omega_1}$ дало ся виразити виміримо через $\frac{\omega}{\tilde\omega}$,

де
$$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

а
$$\frac{\tilde\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}}$$

$$b_1 = \sqrt{1-c^2}$$

а де ω_1 і $\tilde\omega_1$ відносять ся до модулів c_1 і b_1.

2. В окремій розвідці випроваджує Абель:

Число перетворень функциї еліптичної одержаних через підставленє функциї виміримої, котрої степень є числом першим. (Oeuvres compl. I. 309).

Приймім, що рівнанє

$$\frac{dy}{\varDelta'} = a\,\frac{dx}{\varDelta} \qquad (1)$$

де $\varDelta' = (1-y^2)(1-c_1{}^2y^2)$, $\varDelta = (1-x^2)(1-c^2x^2)$
сповнить ся, коли за y підставимо функцию вимірииу x виду:

$$y = \frac{A_0 + A_1x + \cdots + A_{2n+1}x^{2n+1}}{B_0 + B_1x + \cdots + B_{2n+1}x^{2n+1}}$$

де $2n+1$ є числом першим, а бодай один з сочинників A_{2n+1} і B_{2n+1} є ріжний від зера. Найзагальнійшим розвязанєм рівнаня (1) буде для $B_{2n+1} = 0$:

$$y = a\,\frac{x\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 2\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 n\alpha}\right)}{(1-c^2\lambda^2\alpha x^2)\left[1-c^2\lambda^2(2\alpha)x^2\right]\cdots\left[1-c^2\lambda^2(n\alpha)x^2\right]}$$

$$c_1 = c^{2n+1}\left[\lambda\left(\frac{\omega}{2}+a\right)\lambda\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\cdots\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^4$$

$$a = \frac{c^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c_1}}\left(\lambda\alpha\,.\,\lambda(2\alpha)\,.\cdots\lambda(n\alpha)\right)^2 \qquad (2)$$

де $\alpha = \frac{m\omega + m'\omega}{2n+1}$, $\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\varDelta}$, $\frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\varDelta}$
а m і m' суть числами цілими.

Всї прочі вартости на y будуть виду $\frac{f'+fy}{g'+gy}$, де y подане через (2) а f', f, g' і g суть величинами постійними, сповняючими рівнанє:

$$\left(1+\frac{g+f}{g'+f'}x\right)\left(1+\frac{g--f}{g'-f'}x\right)\left(1+\frac{g+c'f}{g'+c'f'}x\right)\left(1+\frac{g-c'f}{g'-c'f'}x\right)$$
$$= (1-x^2)(1-c'^2x^2).$$

Рівнанє то дає 24 системів вартостий ріжних поміж собою. Отже найдемо, що кождій вартости α відповідає 24 вартостий y і 12 вартостий модулу c_1; але позаяк що дві вартости y суть рівні, лише противних знаків, то число ріжних вартостий y буде 12, а так само число вартости c_1 буде рівнати ся шість. Кождій вартости c_1 відповідають дві ріжні вартости функциї у. Отже коли числам m і m' дамо якінебудь вартости цїлковиті, дістанемо всї можливі розвязаня нашого проблєму.

3. Дальша розвідка з теориї функций елїптичних носить заголовок:

Досліди над функциями еліптичними. (Oeuvres coml. I. 141).

На вступі подає Абель коротку історию функций елїптичних від часу Euler'а, що впровадив тї функциї до математики доказавши спроможности інтеґрованя рівнаня:

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}+\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}=0$$

аж по часи Legendre'а, котрий показав, що всякий інтеґрал елїптичний т. є. інтеґрал

$$\int\frac{Rdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$$

де R є функциєю виміримою, а α, β, γ, δ, ε величини постійні дїйсні, можна звести до одного з трох видів:

$$\int\frac{d\Theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\Theta}},\ \int d\Theta(1-c^2\sin^2\Theta),\ \int\frac{d\Theta}{(1+n\sin^2\Theta)\sqrt{1-c^2\sin^2\Theta}}$$

т. є. інтеґрал першого, другого і третого виду.

Абель займає ся в своїй розвідцї функциєю відворотною, функциєю $\varphi(x)$ означеною рівнанями:

$$x=\int\frac{d\Theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\Theta}}$$

$$\sin\Theta=\varphi(x)=x$$

а надавши їй вид:

$$\alpha=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$$

або:

$$\varphi'(\alpha)=\sqrt{(1-c^2\varphi^2\alpha)(1+e^2\varphi^2\alpha)}$$

займає ся прикметами трох функций

$$\varphi\alpha,\quad f\alpha=\sqrt{1-c^2\varphi^2\alpha},\quad F\alpha=\sqrt{1+e^2\varphi^2\alpha}.$$

Деякі з тих прикмет виходять безпосередно з видомих прикмет інтеґралів першого виду, иньші є меньше видні.

І так справджує теорем додаваня для функций φ, f, F, випроваджує їх періодичність, через що стає нам відоме заховане ся функций на цїлім необмеженім просторі змінної дїйсної і мнимої, наколи знаєм заховане ся функциї для вартостий дїйсних в границях $\frac{\omega}{2}$ і $-\frac{\omega}{2}$, а для вартостий мнимих в границях $\frac{\tilde{\omega}}{2}$ і $-\frac{\tilde{\omega}}{2}$; дальше випроваджує Абель, що рівнаня $\varphi\alpha = 0$, $\mathrm{f}\alpha = 0$, $\mathrm{F}\alpha = 0$ мають безконечне число корінїв, перше з них в виді:

$$\alpha = \mathrm{m}\omega + \mathrm{n}\tilde{\omega}\mathrm{i},$$

друге:

$$\alpha = \left(\mathrm{m} + \frac{1}{2}\right)\omega + \mathrm{n}\tilde{\omega}\mathrm{i},$$

трете:

$$\alpha = \mathrm{m}\omega + \left(\mathrm{n} + \frac{1}{2}\right)\tilde{\omega}\mathrm{i};$$

се є вже всї корінї тих рівнань.

Одною з найбільше характеристичних прикмет тих функций є, що $\varphi(\mathrm{m}\alpha)$, $\mathrm{f}(\mathrm{m}\alpha)$, $\mathrm{F}(\mathrm{m}\alpha)$, де m є числом цїлим, можна виразити виміримо через $\varphi\alpha$, $\mathrm{f}\alpha$, $\mathrm{F}\alpha$ (*теорем множеня*). Але случай відворотний не має місця, бо рівнаня, які виражають $\varphi(\mathrm{m}\alpha)$, $\mathrm{f}(\mathrm{m}\alpha)$, $\mathrm{F}(\mathrm{m}\alpha)$, є взагалї рівнанями висших степенїв, огже відверненя не є однозначні. Але корінї тих рівнань дадуть ся виразити при помочи φ, f, F і то коли $m = 2\mathrm{n}$ (паристе), то:

$$\varphi\alpha = \mathrm{x} = \pm\,\varphi\left[(-1)^{\mathrm{m}'+\mu'}\alpha + \frac{\mathrm{m}'}{2\mathrm{n}}\,\omega + \frac{\mu'}{2\mathrm{n}}\,\tilde{\omega}\mathrm{i}\right]$$

де m' і μ' є додатні, меньші від 2n. Отже всї ріжні вартости на x дістанемо кладучи за m' і μ' всї вартости (0 .... 2n — 1); число корінїв є $8\mathrm{n}^2$. — Колиж $\mathrm{m} = 2\mathrm{n} + 1$ (непаристе), тодї:

$$\mathrm{x} = \varphi\left[(-1)^{\mu'+\mathrm{m}'}\alpha + \frac{\mathrm{m}'}{2\mathrm{n}+1}\,\omega + \frac{\mu'}{2\mathrm{n}+1}\,\tilde{\omega}\mathrm{i}\right],$$

де за m' і μ' треба класти всї вартости цїлковиті (— n .... + n); число корінїв є тодї $(2\mathrm{n}+1)^2$.

Так само:

$$\mathrm{y} = \mathrm{f}\alpha = \mathrm{f}\left[\alpha + \frac{2\mathrm{m}'}{\mathrm{m}}\,\omega + \frac{\mu'}{\mathrm{m}}\,\tilde{\omega}\mathrm{i}\right]$$

(m' і μ' цїлковиті меньші від m); корінїв буде m^2.

А:

$$\mathrm{z} = \mathrm{F}\alpha = \mathrm{F}\left[\alpha + \frac{\mathrm{m}'}{\mathrm{m}}\,\omega + \frac{2\mu'}{\mathrm{m}}\,\tilde{\omega}\mathrm{i}\right]$$

(m' і μ' цїлковиті додатні, меньші від m); корінїв буде m^2.

Через розвязку тих рівнань доходить Абель до представленя функций $\varphi\left(\frac{\alpha}{m}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{m}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{m}\right)$ при помочи функций $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$, $F(\alpha)$. Задачу ту дїлить він на дві части, при чім шукає вираженя наперед для $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ при помочи $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, а відтак для $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ при помочи $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, бо всяке число мож розбити на $2^{\nu}(2n+1)$.

В першім случаю приходять в вираженю самі лиш корінї квадратові, в другім треба розвязати рівнанє степеня $(2n+1)^2$, а розвязка та, як доказує Абель, дасть ся все перевести альґебраічно. Вираженя, якими представлені є корінї сего рівнаня, заключають дві величини постійні, що зависять від рівнаня степеня $(2n+1)^2-1$. Та розвязка сего рівнаня дасть ся звести до розвязки лиш одного рівнаня степеня $2n+2$; тільки се рівнанє не дасть ся взагалї розвязати альґебраічно.

Та в дуже многих случаях розвязка альґебраічна є можлива, пр. коли: $e=c$, $e=c\sqrt{3}$, $e=c(2\pm\sqrt{3})$ і т. д.

Першим з тих случаїв займає ся Абель і стосує сей случай до ґеометриї, щоби при помочи лїнії і циркля подїлити округ лемніскати на m рівних частий, наколи $m=2^n$, або 2^{n+1}, або коли m є добутком більше чисел тих обох видів. Є се той сам теорем, який стосував Gauss до кола.

Функциї $\varphi(n\alpha)$, $f(n\alpha)$, $F(n\alpha)$ можна представити в ріжнім видї. Назначім через $\sum_{k}^{k'}{}^{m}\,\psi(m)$ суму, а через $\prod_{m=k}^{k'}\psi(m)$ добуток всіх $\psi(m)$, які одержимо кладучи за m всї вартости цїлковиті (k ------- k'), далї через $\sum_{k}^{k'}{}^{m}\sum_{\nu}^{\nu'}{}^{\mu}\,\psi(m\mu)$ суму, а через $\prod_{m=k}^{k'}\prod_{\mu=\nu}^{\nu'}\psi(m\mu)$ добуток всїх вартостий функциї $\psi(m\mu)$, які одержимо кладучи за m всї вартости цїлковиті від k до k', а за μ всї вартости цїлковиті від ν до ν', тодї наші функциї представлять ся в видї сум:

$$\varphi(2n+1)\alpha=\frac{1}{2n+1}\sum_{-n}^{+n}{}^{m}\sum_{-n}^{+n}{}^{\mu}(-1)^{m+\mu}\varphi\left(\alpha+\frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)$$

$$f(2n+1)\alpha = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{-n}^{+n}{}^{m} \sum_{-n}^{+n}{}^{\mu} (-1)^m f\left(\alpha + \frac{m\omega + \mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)$$

$$F(2n+1)\alpha = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{-n}^{+n}{}^{m} \sum_{-n}^{+n}{}^{\mu} (-1)^{\mu} F\left(\alpha + \frac{m\omega + \mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)$$

або в виді добутків:

$$\varphi(2n+1)\alpha = (2n+1)\varphi\alpha \prod_{m=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2}i + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{m=1}^{n} \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2}i + \frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \; \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}$$

$$f(2n+1)\alpha = f\alpha \prod_{m=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{m=1}^{n} \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2}i + \frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \; \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}$$

$$F(2n+1)\alpha = F\alpha \prod_{m=1}^{n} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\tilde{\omega}}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\tilde{\omega}i}{2}+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2}+\frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\tilde{\omega}i}{2}+\frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{m=1}^{n} \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2}+\frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\tilde{\omega}i}{2}+\frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \; \frac{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2}+\frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\tilde{\omega}i}{2}+\frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}$$

Се є вартости для $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$, коли m є числом непаристим; анальоґічні взори вийдуть і для m паристого.

Наколи підставимо в тих взорах $\alpha = \dfrac{\beta}{2n+1}$, дістанемо взори на функциї $\varphi\beta$, $f\beta$, $F\beta$, які зі згляду на неозначене число n можуть зміняти ся на безконечно много способів. Поміж всїми тими взорами заслугують на увагу ті, які випадуть, коли вставимо $n = \infty$. Тодї дістанемо на функциї $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ вираженя зложені з безконечно много виразів; і так з взорів на суми дістанемо безконечні ряди:

$$\varphi\alpha = \frac{1}{ec}\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\left(\frac{(2\mu+1)\omega}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}-\frac{(2\mu+1)\tilde{\omega}}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}\right)$$

$$\mathrm{f}\alpha = \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left\{\sum_{0}^{\infty}{}^{\mathrm{m}}(-1)^{\mathrm{m}}\frac{2[\alpha-(\mathrm{m}-\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha-(\mathrm{m}+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}-\sum_{0}^{\infty}{}^{\mathrm{m}}(-1)^{\mathrm{m}}\frac{2[\alpha+(\mathrm{m}+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha+(\mathrm{m}+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}\right\}$$

$$\mathrm{F}\alpha = \frac{1}{\mathrm{c}}\sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty}\left\{\sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}(-1)^{\mu}\frac{(2\mu+1)\tilde{\omega}}{[\alpha-(\mathrm{m}+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}+\sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}(-1)^{\mu}\frac{(2\mu+1)\tilde{\omega}}{[\alpha+(\mathrm{m}+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}\right\}$$

а з взорів на добутки:

$$\varphi\alpha = \alpha\prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^2}{\mu^2\tilde{\omega}^2}\right)\prod_{\mathrm{m}=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{\mu^2\omega^2}\right)\prod_{\mathrm{m}=1}^{\infty}\prod_{\mu=1}^{\infty}\frac{1+\frac{(\alpha+\mathrm{m}\omega)^2}{\mu^2\omega^2}}{1+\frac{[\alpha+(\mathrm{m}-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}\,\frac{1+\frac{(\alpha-\mathrm{m}\omega)^2}{\mu^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{[\alpha-(\mathrm{m}-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}\left\{\frac{1+\frac{(\mathrm{m}-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{\mathrm{m}^2\omega^2}{\mu^2\tilde{\omega}^2}}\right\}^2$$

$$\mathrm{f}\alpha = \prod_{\mathrm{m}=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{(\mathrm{m}-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right)\prod_{\mathrm{m}=1}^{\infty}\prod_{\mu=1}^{\infty}\frac{1+\frac{[\alpha+(\mathrm{m}-\frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{[\alpha+(\mathrm{m}-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}\,\frac{1+\frac{[\alpha-(\mathrm{m}-\frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{[\alpha-(\mathrm{m}-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}\left\{\frac{1+\frac{(\mathrm{m}-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{(\mathrm{m}-\frac{1}{2})^2\omega^2}{\mu^2\tilde{\omega}^2}}\right\}^2$$

$$\mathrm{F}\alpha = \prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^2}{(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}\right)\prod_{\mathrm{m}=1}^{\infty}\prod_{\mu=1}^{\infty}\frac{1+\frac{(\alpha+\mathrm{m}\omega)^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{[\alpha+(\mathrm{m}-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}\,\frac{1+\frac{(\alpha-\mathrm{m}\omega)^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{[\alpha-(\mathrm{m}-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}\left\{\frac{1+\frac{(\mathrm{m}-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{\mathrm{m}^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}\right\}^2$$

Через застосоване функций виложничих та колових до повисших взорів дійдем до еще простійших виражень на функциї $\varphi\alpha$, $\mathrm{f}\alpha$, $\mathrm{F}\alpha$:

$$\varphi\alpha = \frac{\omega}{\pi} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right) \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + \dfrac{4\sin^2\left(\dfrac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}} - e^{-\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}}\right)^2}}{1 - \dfrac{4\sin^2\left(\dfrac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}} + e^{-\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}$$

$$\mathrm{F}\alpha = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1 + \dfrac{4\sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}} - e^{-\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}{1 - \dfrac{4\sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}} - e^{-\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}$$

$$\mathrm{f}\alpha = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right) \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{4\sin^2\left(\dfrac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}} + e^{-\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}}\right)^2}}{1 - \dfrac{4\sin^2\left(\dfrac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}} + e^{-\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}$$

А вже найпростійший вид після Абеля буде:

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \frac{4\pi}{c\omega'}\sqrt{q}\left(\sin x \frac{1}{1-q} + \sin 3x \frac{q}{1-q^3} + \sin 5x \frac{q}{1-q^5} + \cdots\cdots\right)$$

$$\lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \frac{4\pi}{c^2\omega'}\sqrt{q}\left(\cos x \frac{1}{1+q} + \cos 3x \frac{q}{1+q^3} + \cos 5x \frac{q}{1+q^5} + \cdots\cdots\right)$$

де $q = e^{-\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'}\pi}$, $\sqrt[4]{c} = \dfrac{1-r}{1+r}\,\dfrac{1-r^3}{1+r^3}\,\dfrac{1-r^5}{1+r^5}\cdots\cdots$, $r = e^{-\pi i - \frac{\omega'}{\tilde{\omega}'}\pi}$

а де λ і λ' означають функциї, на які перейде φ і f, коли за α підставимо $1 - \dfrac{2\pi}{x}$.

На підставі повисшого вираженя на модул c дійдем до відношеня загального між модулами; а іменно, коли функция еліптична має модул: $\sqrt[4]{c} = \frac{1-r}{1+r} \frac{1-r^3}{1+r^3} \frac{1-r^5}{1+r^5} \cdots\cdots$, то модул кождої иньшої функциї еліптичної дасть ся перетворити на перший, наколи в вираженє на c вставимо на місце r $r^{\frac{n}{m}}$, де n і m є які небудь два числа цїлковиті додатні.

Legendre показав в своїх „Exercises de calcul integral“, як можна заміните інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

на иньші інтеграли того самого виду з ріжними модулами. Тоту теорию зґенералїзував Абель доказавши, що наколи назначимо:

$$\alpha = \frac{(m+\mu)\omega + (m-\mu)\tilde{\omega}i}{2n+1}$$

де бодай одно з поміж чисел m і μ є перше зглядом $(2n+1)$, то дістанемо:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-c_1{}^2y^2)(1+e_1{}^2y^2)}} = \pm\, a \int \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$$

де:

$$y = f.x.\frac{(\varphi^2\alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2)\cdots\cdots(\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha.x^2)\cdots\cdots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2)}$$

$$\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\cdots\cdots\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^2$$

$$\frac{1}{e_1} = \frac{f}{e}\left[\varphi\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2}+\alpha\right)\varphi\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2}+2\alpha\right)\cdots\cdots\varphi\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2}+n\alpha\right)\right]^2$$

$$a = f(\varphi\alpha\,.\,\varphi 2\alpha\,.\,\varphi 3\alpha \cdots\cdots \varphi n\alpha)^2$$

де f є неозначене, c_1 і e_1 є вираженє через c і e при помочи функциї φ так, що істнує лиш одно відношенє поміж тими величинами. Відношенє се можна представити також при помочи рівнаня альґебраічного. Величини e_1 і c_1 можуть принимати усякі вартости кромі 0 і ∞.

На основі повисших взорів можна при помочи функций φ, f, F дістати безконечне число перетворень, що є великої ваги в зіставленю повної теориї перетворень функций еліптичних.

4. Дальша розвідка Абеля з теориї функций еліптичних під заголовком: **„Теория функций еліптичних“** ділить ся на дві части. (Oeuvr. compl. I. 326.)

Перша часть говорить про функциї еліптичні яко інтеґрали неозначені і не згадує ся в нїй нїчо про природу величин дїйсних або мнимих, з яких ті функциї ся складають. В тій части послугуєсь Абель слїдуючими означенями:

$$\Delta(x, c) = \pm \sqrt{(1-x^2)(1-c^2 x^2)}$$

$$\tilde{\omega}(x, c) = \int \frac{dx}{\Delta(x, c)}, \quad \tilde{\omega}_0(x, c) = \int \frac{x^2\, dx}{\Delta(x, c)}$$

$$\Pi(x, c, a) = \int \frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right) \Delta(x, c)}$$

так що $\tilde{\omega}(x, c)$, $\tilde{\omega}_0(x, c)$, $\Pi(x, c, a)$ означають функциї першого, другого і третого виду.[1])

Часть друга говорить про функциї о модулах дїйсних меньших як одиниця. На місце функций $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_0$ і Π впроваджує Абель три иньші, а се функцию $\lambda(\Theta)$ означену рівнанем:

$$\Theta = \int_0^{\lambda\Theta} \frac{dx}{\Delta(x, c)}$$

отже функцию відвернену першого виду, і дві функциї:

$$\tilde{\omega}_0(x, c) = \int (\lambda\Theta)^2\, d\Theta$$

$$\Pi(x, c, a) = \int \frac{\Delta\Theta}{1 - \frac{\lambda^2\Theta}{a^2}}$$

які одержимо кладучи в виражених на $\tilde{\omega}_0(x, c)$ і $\Pi(x, c, a)$ $x = \lambda\Theta$.

a) Часть перша. Функциї еліптичні мають ту прикмету, що суму кількох-небудь тих функций можна виразити через одну лише функцию того самого виду з додатком якогось вираженя альґебраїчного і льоґаритмічного. Коли ψx буде представляти яку-небудь функцию виду:

---

[1]) се властиво не є функциї, але інтеґрали еліптичні.

$$\psi x = \int \left[A + Bx^2 + \frac{\alpha}{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{\alpha_1}{1 - \frac{x^2}{a_1{}^2}} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{1 - \frac{x^2}{\alpha_\nu{}^2}} \right] \frac{dx}{\Delta x},$$

то :

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = C - Bp - \frac{\alpha a}{2\Delta a} \log \frac{fa + \varphi a \, \Delta a}{fa - \varphi a \, \Delta a} -$$

$$- \frac{\alpha_1 a_1}{2\Delta a_1} \log \frac{fa_1 + \varphi a_1 \, \Delta a_1}{fa_1 - \varphi a_1 \, \Delta a_1} - \cdots - \frac{\alpha_\nu a_\nu}{2\Delta a_\nu} \log \frac{fa_\nu + \varphi a_\nu \, \Delta a_\nu}{fa_\nu - \varphi a_\nu \, \Delta a_\nu}$$

де C є стала інтеґрована, p функция альґебраічна, f(x) і φ(x) дві якінебудь функциї цїлковиті що до x, одна паристого степеня, друга непаристого, о сочинниках змінних.

Окремо для функций першого, другого і третого виду форма ся перейде по черзї на:

$$\tilde{\omega} x_1 + \tilde{\omega} x_2 + \cdots + \tilde{\omega} x_\mu = \tilde{\omega} y + C$$

$$\tilde{\omega}_0 x_1 + \tilde{\omega}_0 x_2 + \cdots + \tilde{\omega}_0 x_\mu = \tilde{\omega}_0 y - b_{\mu-1} + C$$

$$\Pi x_1 + \Pi x_2 + \cdots \Pi x_\mu = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a} \log \frac{fa + \varphi a \Delta a}{fa - \varphi a \Delta a} + C$$

де $b_{\mu-1}$ є сочинником при найвисшій степени x в функциї φ(x), а:

$$y = \pm \frac{a_0}{x_1 \, x_2 \cdots x_{\mu-1}}$$

(a_0 вираз вільний в f(x); знак + або — залежить від того, чи μ непаристе чи паристе).

$$\tilde{\omega} x = \int \frac{dx}{\Delta x}, \quad \tilde{\omega}_0 x = \int \frac{x^2 \, dx}{\Delta x}, \quad \Pi x = \int \frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Delta x}.$$

Суму якого-небудь числа функций еліптичних можна проте представити одною лиш функциєю того самого виду з додатком величини постійної для функций першого виду, а функциї льоґаритмічної для функций третого виду. — Теорем сей не є новий, бо єго поставив єще Legendre.

Теорем сей можна виразити при помочи трох иньших простїйших теоремів, дуже важних в своїх застосованях:

1) Коли якийсь інтеґрал виду:

$$\int (y_1 \, dx_1 + y_2 \, dx_2 + \cdots + y_\mu \, dx_\mu)$$

— де $y_1\,y_2 \cdots y_\mu$ є функциї альґебраічні величин $x_1\,x_2 \cdots x_\mu$, звязані поміж собою якимсь числом рівнань альґебраічних — дасть ся виразити через функциї альґебраічні, льоґаритмічні, еліптичні в спосіб:

$$\int(y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2 + \cdots + y_\mu\,dx_\mu) = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu + \alpha_1\,\psi_1(t_1) + \alpha_2\,\psi_2(t_2) + \cdots + \alpha_n\,\psi_n(t_n),$$

де $A_1\ A_2 \cdots \alpha_1\ \alpha_2 \cdots$ є сталі, $u\ v_1\ v_2 \cdots t_1\ t_2 \cdots$ функциї альґебраічні величин $x_1\ x_2 \cdots$, а $\psi_1\ \psi_2 \cdots$ якінебудь функциї еліптичні, то все буде можна виразити сей інтеґрал в спосіб:

$$\delta \int(y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2 + \cdots + y_\mu\,dx_\mu) = r + A' \log \varrho' + A'' \log \varrho'' + \cdots + A^{(k)} \log \varrho^{(k)} + \alpha_1\,\psi_1(\Theta_1) + \cdots + \alpha_n\,\psi_n(\Theta_n),$$

де δ є число ціле, $\alpha_1\,\alpha_2, \cdots A'\,A'' \cdots$ сталі, а Θ_1, $\Delta_1(\Theta_1)$, Θ_2, $\Delta_2(\Theta_2)$, $\cdots\ \Theta_n$, $\Delta_n(\Theta_n)$, $\varrho'\ \varrho'' \cdots \varrho^{(k)}$ є функциї вимірими величин $x_1\,x_2 \cdots x_\mu\,y_1\,y_2 \cdots y_\mu$.

Теорем сей служить не лиш до розвязки передше поданого теорему загального, але кромі сего є він підставою до застосованя функций альґебраічних, льоґаритмічних і еліптичних до теориї інтеґрованя форм ріжничкових альґебраічних.

2) Коли інтеґрал виду:

$$\int(y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2 + \cdots + y_\mu\,dx_\mu)$$

дасть ся виразити функциєю альґебраічною і льоґаритмічною виду: $u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu$, то $u\ v_1\ v_2 \cdots$ все будуть функциями вимірими величин: $x_1\,x_2 \cdots x_\mu$, $y_1\,y_2 \cdots y_\mu$.

Коли отже маєм інтеґрал $\int y dx$, *де* y *є з* x *звязане якимсь рівнанем альґебраічним, то тоді* $u\ v_1\ v_2 \cdots$ *є функциями вимірими величин* x *і* y[1].

Покладім в відношеню якімнебудь заходячім між функциями еліптичними:

---

[1] Є се „теорем Абелевий“, важний в теориї „інтеґралів Абелевих“. На нім основує автор нову теорию інтеґрованя форм ріжничкових альґебраічних. Задачею сеї теориї є виконати всї можливі перетвореня інтеґралів форм альґебраічних при помочи функций альґебраічних і льоґаритмічних. Через се зводить ся до можливо малого числа інтеґрали, то представляють в скінченім виді всї інтеґрали тої самої кляси.

$$\alpha_1 \psi_1 (x_1) + \alpha_2 \psi_2 (x_2) + \cdots + \alpha_\mu \psi_\mu (x_\mu) = u + A_1 \log v_1 + \\ + A_2 \log v_2 + \cdots A_\nu \log v_\nu , \qquad (A)$$

де $\psi_1 (x_1)$, $\psi_2 (x_2)$, $\cdots$ $\psi_\mu (x_\mu)$ означають функциї еліптичні, — $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_\mu = x$, а модули тих функций $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_\mu = c$, то ліва сторона рівнаня (А) буде інтеґралом $\int \frac{rdx}{\Delta x}$, де r є функциєю виміримою змінної x.

Отже:

3) Коли поміж функциями $\tilde\omega x$, $\tilde\omega_0 x$, $\Pi_1 x_1 \cdots \Pi_\mu x$, — де модули функций першого, другого і третого виду суть ті самі, — заходить відношенє:

$$\alpha \tilde\omega x + \alpha_0 \tilde\omega_0 x + \alpha_1 \Pi_1 x_1 + \alpha_2 \Pi_2 x_2 + \cdots + \alpha_\mu \Pi_\mu x_\mu = u + A_1 \log v_1 + \\ A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu ,$$

то u, v_1, $v_2 \cdots v_\nu$ все будуть виду $p + q\Delta x$, де p і q суть функциями вимірими x.

Порівнуючи рівнанє (А) з рівнанєм одержаним з него через ріжничкованє, можемо (А) обнижати, так що число функций еліптичних в тім рівнаню буде маліти, а в кінци через повтарянє дійдемо до рівнаня, в котрім будуть приходити лише функциї альґебраічні і льоґаритмічні.

І так теорем поставлений на самім вступі „части першої“ зводить ся до сповненя рівнаня:

$$\psi (x) = \beta_1 \psi_1 y_1 + \beta_2 \psi_2 y_2 + \cdots + \beta_n \psi_n y_n + u + A_1 \log v_1 + \\ + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu .$$

А щоби се рівнанє сповнити в случаю найзагальнійшім, потреба:

1) Найти всї случаї, коли дасть ся сповнити рівнанє:

$$(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = p^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2) \qquad (1)$$

(p і q функциї вимірімі неозначеного x, а c і c' величини постійні).

2) Сповнивши рівнанє (1), звести три функциї $\tilde\omega(yc')$, $\tilde\omega_0(yc'a)$ $\Pi(yc'a)$ до виду:

$$r + A \tilde\omega x + A_0 \tilde\omega_0 x + A' \Pi (x a') + A'' \Pi (x a'') + \cdots$$

де r означає часть альґебраічну і льоґаритмічну.

3) Найти умовини потрібні і достаточні, щоби функцию виду:

$$\alpha \tilde\omega x + \alpha_0 \tilde\omega_0 x + \alpha_1 \Pi' (x a') + \alpha_2 \Pi'' (x a'') + \cdots$$

— де всї функциї еліптичні мають той сам модул — виразити при помочи функций альґебраічних і льоґаритмічних.

Найлекша є умовина послїдна і тому від неї зачнемо.

Взір, що позваляє функциї елїптичні якінебудь всїх трох видів виразити при помочи функций альґебраічних і льоґаритмічних, є:

$$\beta\tilde{\omega}x - \frac{2m_1\,\Delta\,\alpha_1}{\alpha_1}\,\Pi'\alpha_1 - \frac{2m_2\,\Delta\,\alpha_2}{\alpha_2}\,\Pi'\alpha_2 - \cdots\cdots$$

$$- \frac{2m_n\,\Delta\,\alpha_n}{\alpha_n}\,\Pi'\alpha_\nu = \log\left(\frac{fx + \varphi x\Delta x}{fx - \varphi x\Delta x}\right) + C$$

де α_1, α_2, ⋯⋯ α_n мусять сповняти рівнанє:

$$(fx)^2-(\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha_1{}^2)^{m_1}(x-\alpha_2{}^2)^{m_2}\cdots\cdots(x-\alpha_n{}^2)^{m_n}$$

а з поміж функций fx і φx одна є париста, друга непариста.

Таке є відношенє найзагальнїйше поміж функциями відносячими ся до того самого модулу і тої самої змінної. Цїкаве, що у взорі повисшім нема зовсїм функциї елїптичної другого виду.

Друга умова, то сповненє рівняня:

$$(1-y^2)(1-c'^2y^2) = r^2(1-x^2)(1-c^2x^2)$$

де y і r суть функциями вимірими величини x. Через підставленє

$$r = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{dy}{dx}$$

де ε є постійне, можна се рівнанє звести до виду:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{\varepsilon\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

або:

$$\frac{dy}{\Delta(y,c')} = \varepsilon\,\frac{dx}{\Delta(x,c)}$$

а інтеґруючи одержимо:

$$\tilde{\omega}(y,c') = \varepsilon\tilde{\omega}(x,c) + C.$$

Отже коли істнує відношенє між якимнебудь числом функций елїптичних, а c означає модул одної з них довільно вибраної, то поміж прочими функциями найдесь бодай одна о модулї c' така, що між функциями *першого виду* відповідаючими модулам c і c' істнує відношенє:

$$\tilde{\omega}(y,c') = \varepsilon\tilde{\omega}(x,c) + C$$

де y є функция вимірима x, а де ε є постійне. Якийнебудь буде степень тої функциї

$$y = \psi(x) = \frac{p}{q}$$

де p і q суть функциями цїлковитими x, то все модул c' буде мати 6 вартостий ріжних між собою, а до кождої вартости модула c належати будуть дві вартости y. Значить, що функция y буде мати 12 ріжних вартостий. Вид тої функциї буде залежати від вартостий a і b в рівнаню

$$p - qy = (a - by)(z - x)(z - x')(z - x'') \cdots (z - x^{(\mu-1)})$$

де a і b суть постійні, а $x', x'', \cdots x^{(\mu-1)}$ суть коренями рівнаня $y = \psi(x)$.

І так для b рівного зеро, а μ непаристого $\mu = 2n + 1$

$$y = a\,\frac{x(e_1{}^2 - x^2)(e_2{}^2 - x^2) \cdots (e_n{}^2 - x^2)}{(1 - c^2 e_1{}^2 x^2)(1 - c^2 e_2{}^2 x^2) \cdots (1 - c^2 e_n{}^2 x^2)}$$

для $b = 0$, а $\mu = 2n$

$$y = \frac{a(1 - \delta_1{}^2 x^2)(1 - \delta_2{}^2 x^2) \cdots (1 - \delta_n{}^2 x^2)}{x(1 - c^2 e_1{}^2 x^2)(1 - c^2 e_2{}^2 x^2) \cdots (1 - c^2 e_{n-1}^2 x^2)}$$

для $a = 0$, а $\mu = 2n + 1$

$$y = \frac{a(1 - c^2 e_1{}^2 x^2)(1 - c^2 e_2{}^2 x^2) \cdots (1 - c^2 e_n{}^2 x^2)}{x(e_1{}^2 - x^2)(e_2{}^2 - x^2) \cdots (e_n{}^2 - x^2)}$$

для $a = 0$, а $\mu = 2n$

$$y = a\,\frac{x(1 - c^2 e_1{}^2 x)(1 - c^2 e_2{}^2 x^2) \cdots (1 - c^2 e_{n-1}^2 x)}{(1 - \delta_1{}^2 x^2)(1 - \delta_2{}^2 x^2) \cdots (1 - \delta_n{}^2 x^2)}$$

де e_1, e_2, $\cdots$ суть коренями рівнаня $e^n = 0$, а e_n є функция величини e така, що:

$$\frac{de_n}{\Delta e_n} = n\,\frac{de}{\Delta e},$$

а де δ_1, δ_2 $\cdots$ суть коренями рівнаня $q = 0$.

Рівнане $y = \psi(x)$, де $\psi(x)$ є функциєю виміримою x, сповняюче:

$$\frac{dy}{\Delta(y,c')} = \varepsilon\,\frac{dx}{\Delta(x,c)}$$

має ту прикмету, що дасть ся розвязати при помочи самих лиш коренїв.[1]

Через се дістаємо цїлу величезну клясу рівнань альґебраічних якихнебудь степенїв, що дадуть ся розвязати альґебраічно.

---

[1] Теорем сей, званий теоремом множеня функций елїптичних, має первородне значінє в дальшім розвою функций елїптичних.

На трету умовину відповідає автор, що відношенє якенебудь між функциями еліптичними о модулах c_1, c_2, $\cdots\cdots$ c_m, не може істнувати, наколи поміж відповідними функциями першого виду не заходить відношенє:

$$\tilde{\omega}(x,c)=\frac{1}{\varepsilon_1}\,\tilde{\omega}(y_1,c)=\frac{1}{\varepsilon_2}\,\tilde{\omega}(y_2,c)=\cdots\cdots=\frac{1}{\varepsilon_m}\,\tilde{\omega}(y_m,c_m)$$

де ε_1, ε_2, ε_3 $\cdots\cdots$ ε_m суть величини постійні, а y_1, y_2, y_3 $\cdots\cdots$ y_m функциї виміримі змінної x.

Але коли якусь функцию еліптичну $\varphi(x)$ о модулї c' мож виразити через другі функциї еліптичні о модулах c_1, c_2, $\cdots\cdots$ c_m, то все буде мож ту функцию виразити при помочи функций еліптичних, — всіх з тим самим модулом c, де c є довільно вибраним з поміж модулів c_1, c_2, $\cdots\cdots$ c_m. Тота функция представить ся:

$$\varphi y=\int\frac{r\,dx}{\Delta(x\,c)}$$

де y і r є функциї виміримі змінної x.

б) В части другій подані лиш самі вислїди без доказів, а всї они відносять ся до прикмет функциї $\lambda\Theta$.

1. Функция $\lambda\Theta$ є двоперіодична і має період один дїйсний, другий мнимий.

$$\lambda(\Theta+2\tilde{\omega})=\lambda\Theta,$$
$$\lambda(\Theta+\omega i)=\lambda\Theta$$

де $$\frac{\tilde{\omega}}{2}=\int_0^1\frac{dx}{\Delta(x\,c)},\qquad \text{а}\quad \frac{\omega}{2}=\int_0^1\frac{dx}{\Delta(x,b)}$$

$$(b=\sqrt{1-c^2},\quad \sqrt{-1}=i)$$

2. Функция $\lambda\Theta$ стає ся зером і безконечностию для безконечного числа вартостий дїйсних і мнимих Θ:

$$\lambda(m\tilde{\omega}+n\omega i)=0,$$
$$\lambda\left(m\tilde{\omega}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega i\right)=\frac{1}{0}$$

де m і n є числа цілі додатні або відємні.

Дальше для:

$$\Theta'=(-1)^m\,\Theta+m\tilde{\omega}+n\omega i$$

є $$\lambda\Theta'=\lambda\Theta.$$

3. Функция $\lambda\Theta$ сповняє рівнанє:

$$\lambda(\Theta' + \Theta)\,\lambda(\Theta' - \Theta) = \frac{(\lambda\Theta')^2 - (\lambda\Theta)^2}{1 - c^2(\lambda\Theta)^2(\lambda\Theta')^2}$$

де Θ і Θ' суть якінебудь величини змінні дїйсні або мнимі.

4. Функция $\lambda\Theta$ дасть ся розвинути на добуток або суму дробів на богато способів. Примірои кладучи:

$$q = e^{-\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\pi}, \quad p = e^{-\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\pi}$$

дістанемо:

$$\lambda(\Theta\omega) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{c}}\sqrt[4]{q}\,\sin(\pi\Theta)\,\frac{[1-2q^2\cos(2\Theta\pi)+q^4]\,[1-2q^4\cos(2\Theta\pi)+q^8]\,[1-2q^6\cos(2\Theta\pi)+q^{12}]\cdots}{[1-2q\cos(2\Theta\pi)+q^2]\,[1-2q^3\cos(2\Theta\pi)+q^6]\,[1-2q^5\cos(2\Theta\pi)+q^{10}]\cdots}$$

$$= \frac{4\sqrt{q}}{c}\,\frac{\pi}{\tilde{\omega}}\left[\frac{1}{1-q^2}\sin(\Theta\pi) + \frac{q}{1-q^3}\sin(3\Theta\pi) + \frac{q^2}{1-q^5}(5\Theta\pi) + \cdots\cdots\right]$$

$$\lambda\left(\frac{\tilde{\omega}}{2} - \Theta\omega\right) = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\frac{(1-pe^{-2\pi\Theta})(1-pe^{2\pi\Theta})(1-p^3e^{-2\pi\Theta})(1-p^3e^{2\pi\Theta})\cdots}{(1+pe^{-2\pi\Theta})(1+pe^{2\pi\Theta})(1+p^3e^{-2\pi\Theta})(1+p^3e^{2\pi\Theta})\cdots}$$

Анальоґічно мож представити функцию другого і третого виду.

5. Дуже важна прикмета функциї $\lambda\Theta$ є слїдуюча: (для скороченя підставимо $\varDelta\Theta = \pm\sqrt{(1-\lambda^2\Theta)(1-c^2\lambda^2\Theta)}$)

Наколи рівнанє:

$$(\lambda\Theta)^{2n} + a_{n-1}(\lambda\Theta)^{2n-2} + \cdots\cdots + a_1(\lambda\Theta)^2 + a_0 = b_0\,\lambda\Theta + b_1(\lambda\Theta)^3 + \cdots\cdots +$$
$$+ b_{n-2}(\lambda\Theta)^{2n-3}.\,\varDelta\Theta$$

буде сповнене, коли за Θ підставимо 2n вартостий Θ_1, $\Theta_2 \cdots\cdots \Theta_{2n}$, таких що $(\lambda\Theta_1)^2$, $(\lambda\Theta_2)^2, \cdots\cdots (\lambda\Theta_{2n})^2$, суть ріжні поміж собою, тодї буде все:

$$\lambda(\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots\cdots + \Theta_{2n}) = 0$$

$$-\lambda(\Theta_{2n}) = \lambda(\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots\cdots + \Theta_{2n-1}) = \frac{a_0}{\lambda\Theta_1\,.\,\lambda\Theta_2 \cdots\cdots \lambda\Theta_{2n-1}}$$

сочинники a_0, $a_1, \cdots\cdots$, b_0, $b_1, \cdots\cdots$ можуть бути якінебудь, а можна їх визначити, позаяк Θ_1, $\Theta_1, \cdots\cdots \Theta_{2n-1}$ є дані.

А отсе також важна прикмета:

Коли покласти

$$p^2 - q^2(1 - x^2)(1 - c^2x^2) = A(x - \lambda\Theta_1)(x - \lambda\Theta_2) \cdots\cdots (x - \lambda\Theta_\mu)$$

де p і q є якінебудь функциї цїлковиті x, то все мож буде вибрати величини Θ_1, Θ_2, $\Theta_3 \cdots\cdots \Theta_\mu$ так, що вираженє:

$$\lambda(\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots\cdots + \Theta_\mu)$$

буде зером або безконечностию.

Подібно примíром, коли

$$p^2 - x^2(1 - x^2)(1 - c^2x^2) = A(x^2 - \lambda^2 \Theta)^\mu$$

де одна з функций p і q, є париста а друга непариста, тодї буде:

а) для p паристого:

$$\lambda(\mu\Theta) = 0, \text{ коли } \mu \text{ є паристе}$$

$$\lambda(\mu\Theta) = \frac{1}{0}, \text{ коли } \mu \text{ є непаристе.}$$

б) для p непаристого

$$\lambda(\mu\Theta) = 0, \text{ коли } \mu \text{ є непаристе}$$

$$\lambda(\mu\Theta) = \frac{1}{0}, \text{ коли } \mu \text{ є паристе;}$$

а з відси виходить, що коли рівнанє повисше має місце, то:

$$\lambda\Theta = \lambda\left(\frac{m\varpi + \frac{1}{2}n\omega i}{\mu}\right)$$

де m і n суть цїлі і меньші чим μ.

6. Поміж величинами $\lambda\left(\frac{m\varpi + n\omega i}{2\mu+1}\right)$ а коренями одиниці $(2\mu+1)^{\text{ими}}$ істнують дуже цікаві відношеня:

$$0 = \lambda\left(\frac{2m\varpi + \omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^k\lambda\left(\frac{2m\varpi + 2\omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^{2k}\lambda\left(\frac{2m\varpi + 3\omega i}{2\mu+1}\right) + \\ + \cdots\cdots + \delta^{2\mu k}\lambda\left(\frac{2m\varpi + 2\mu\omega i}{2\mu+1}\right)$$

$$0 = \lambda\left(\frac{\omega + m\omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^{k'}\lambda\left(\frac{2\varpi + m\omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^{2k'}\lambda\left(\frac{3\varpi + m\omega i}{2\mu+1}\right) + \\ + \cdots\cdots + \delta^{2\mu k'}\lambda\left(\frac{2\mu\varpi + m\omega i}{2\mu+1}\right)$$

де $\delta = \cos\frac{2\pi}{2\mu+1} + i\sin\frac{2\pi}{2\mu+1}$, а всї величини $\lambda\left(\frac{m\varpi + n\omega i}{2\mu+1}\right)$ суть коренями одного лиш рівнаня степеня: $(2\mu+1)^2$, котрого сочинники є функциями виміримими c^2.

7. Коли функция

$$\int\frac{dx}{\Delta(xc)}$$

о модулї c, дїйснім і меньшім чим одиниця, дасть ся перетворити на иньшу:

$$\varepsilon \int \frac{dy}{\Delta(x,c')}$$

о модулї c' дїйснім або мнимім, через підставленє за y якоїнебудь функциї альґебраічної x, тодї модул c' дасть ся виразити через одно з помежи рівнань:

$$\sqrt[4]{c'} = \sqrt{2}\ \sqrt[8]{q_1}\ \frac{(1+q_1{}^2)(1+q_1{}^4)(1+q_1{}^6)\cdots\cdots}{(1+q_1)(1+q_1{}^3)(1+q_1{}^5)\cdots\cdots}$$

$$\sqrt[4]{c'} = \frac{1-q_1}{1+q_1} \cdot \frac{1-q_1{}^3}{1+q_1{}^3} \cdot \frac{1-q_1{}^5}{1+q_1{}^5} \cdots\cdots$$

де $q_1 = q^{\mu}$, а μ виміриме, або, що на одно вийде:

$$q_1 = e^{\left(\mu \frac{\omega}{\tilde{\omega}} + \mu' i\right)\pi}$$

μ і μ' які небудь числа виміримі.

8. Функция $\lambda\Theta$ має застосованє в теориї перетворень. І так при єї помочи показуєсь, що, щоби дві функциї дїйсні перетворити одну на другу, т. зн. щоби сповнити рівнанє:

$$\int \frac{dy}{\Delta(x,c')} = m\,\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} \int \frac{dx}{\Delta(x,c)}$$

потреба, щоби поміж функциями $\tilde{\omega}$, ω, $\tilde{\omega}'$, ω' заходило рівнанє:

$$\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'} = \frac{n}{m}\,\frac{\tilde{\omega}}{\omega}$$

де n і m є числа цїлі.

9. На увагу заслугує случай, коли один з поміж модулів мож перетворити на єго доповненє $\sqrt{1-c^2} = b$.

В тім случаю будемо мати з узглядненєм рівнаня:

$$\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'} = \frac{n}{m}\,\frac{\tilde{\omega}}{\omega} \quad :$$

$$\frac{\tilde{\omega}}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{n}} \quad \text{i} \quad \frac{dy}{\Delta(y,b)} = \sqrt{mn}\,\frac{dx}{\Delta(x,c)}.$$

Модул c буде визначений рівнанєм альґебраічним, котре мож розвязати при помочи корінів; бодай так буде дїйсно, коли $\frac{m}{n}$ є повним квадратом. У всїх случаях легко виразити c через безконечні добутки.

I справдї коли

$$\frac{\tilde{\omega}}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{n}},$$

тодї маємо:

$$\sqrt[4]{c} = \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\, \frac{\left(1+e^{-2\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\left(1+e^{-4\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\cdots\cdots}{\left(1+e^{-\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\left(1+e^{-3\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\cdots\cdots}$$

$$= \frac{\left(1-e^{-\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\left(1-e^{-3\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\cdots\cdots}{\left(1+e^{-\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\left(1+e^{-3\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\cdots\cdots}$$

Коли два модули *c* і *c'* дадуть ся перетворити один на другий, то они будуть звязані між собою альґебраічно. Але взагалї буде неможливо виразити *c'* через *c* при помочи коренів і тілько в тім случаю буде се можливе, коли *c* мож перетворити на єго доповненє.

Рівнаня модулові мають ту прикмету, що всї їх коренї мож виразити виміримо при помочи двох з поміж них; а всї коренї дадуть ся виразити через один з помежи них при помочи корінів.

10. Функцию $\lambda\Theta$ мож розвинути на:

$$\lambda\Theta = \frac{\Theta + a\Theta^3 + a'\Theta^5 + \cdots\cdots}{1 + b'\Theta^4 + b''\Theta^6 + \cdots\cdots}$$

де чисельник і знаменник є рядами збіжними.

Кладучи:

$$\varphi\Theta = \Theta + a\Theta^3 + a'\Theta^5 + \cdots\cdots$$
$$f\Theta = 1 + b'\Theta^4 + b''\Theta^6 + \cdots\cdots$$

можемо ті функциї виразити при помочи рівнань:

$$\varphi(\Theta' + \Theta)\,\varphi(\Theta' - \Theta) = (\varphi\Theta f\Theta')^2 - (\varphi\Theta' f\Theta)^2$$
$$f(\Theta' + \Theta)\, f(\Theta' - \Theta) = (f\Theta f\Theta')^2 - c^2(\varphi\Theta\varphi\Theta')^2$$

де Θ і Θ' є независимі змінні.

IV. Широко опрацьовує автор теорию **переступних функций еліптичних.** Ту належить розвідка:

1. **Теория переступних функций еліптичних.** (Oeuvres compl. II. 93.)

Автор розпочинає зведенєм інтеґрала

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}}$$

на функциї альґебраічні.

Назвім для скорочення корінь через $\sqrt{R}$ та розбираймо:

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$$

де P значить функцию альґебраїчну виміриму x.

P мож розложити на члени виду Ax^m і $\frac{A}{(x-a)^m}$, де m є числом цілковитим. Автор розбирає ті інтеґрали:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} \quad \text{i} \quad \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$$

спершу окремо, а відтак разом.

а) *Зведенє інтеґрала*

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}.$$

Пошукаймо загальної функциї альґебраїчної, котрої ріжничка дасть ся розложити на члени виду

$$\frac{Ax^m dx}{\sqrt{R}},$$

бо тоді інтеґрал тої функциї так розложеної дасть відношенє загальне поміж інтеґралами виду

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}.$$

Функция шукана не може заключати иньших корінїв, лише $\sqrt{R}$, а як функция вимірима величин x, $\sqrt{R}$ буде мати вид:

$$f(x, \sqrt{R}) = Q' + Q\sqrt{R}$$

де Q і Q' суть функциями вимірмими x, або опустивши Q', позаяк оно буде заключати лише самі вираженя вимірмі x, дістанемо:

$$f(x, \sqrt{R}) = Q\sqrt{R}.$$

Функция Q мусить бути цілковитою, бо в противнім случаю, колиб заключала член виду $\frac{1}{(x-a)^m}$, тодї ріжничка вираженя

$$\frac{\sqrt{R}}{(x-a)^m}:$$

$$d\left[\frac{\sqrt{R}}{(x-a)^m}\right] = \left[\frac{\frac{1}{2}\frac{dR}{dx}}{(x-a)^m} - \frac{mR}{(x-a)^{m+1}}\right]\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

малаби за сочинник при $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ функцию дробову, хиба що R малоби принайменьше два сочинники рівні т. з. інтеґрал мавби зовсїм иньший вид, бо $\int\frac{Pdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$.

Тото Q яко цїлковита функция альґебраічна представить ся:

$$Q = f(0) + f(1)x + f(2)x^2 \cdots\cdots + f(n)x^n;$$

зріжничкуймо найдену функцию $Q\sqrt{R}$, то дістанемо:

$$d(Q\sqrt{R}) = \frac{RdQ + \frac{1}{2}QdR}{dx} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}} = S\frac{dx}{\sqrt{R}},$$

а коли за Q і R підставимо вартости, дістанемо на S якусь функцию цілковиту x степеня m, пр.

$$S = R\frac{dQ}{dx} + \tfrac{1}{2}Q\frac{dR}{dx} \qquad (1)$$

$$= \varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \cdots\cdots + \varphi(m)x^m; \qquad (2)$$

з порівнаня сочинників (1) і (2) вийдуть вартости на φ:

$$\varphi(p) = (p+1)\,f(p+1)\alpha + (p+\tfrac{1}{2})\,f(p)\beta + pf(p-1)\gamma + (p-\tfrac{1}{2})\,f(p-2)\delta + $$
$$+ (p-1)\,f(p-3)\varepsilon \qquad (3)$$

де $p = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots m$.

А що дотичить вартости n, то випаде $m = n+3$.

І тепер функция наша:

$$Q\sqrt{R} = \int S\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

представить ся в видї:

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}} + \cdots\cdots + \varphi(m)\int\frac{x^mdx}{R} =$$
$$= \sqrt{R}\,(f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots\cdots + f(m-3)x^{m-3}) \qquad (4)$$

То є найзагальнїйше відношенє поміж інтеґралами виду $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, виражене функциями альґебраічними. З рівнаня сего мож випровадити всї зведеня (réduction), які інтеґрали сего виду допускають. Лїва сторона сего рівнаня є заразом найбільше загальним інтеґралом виду $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ (P функция цїлковита x), який дасть ся виразити через функциї альґебраїчні.

В рівнаню (4) є очевидно $m \geqq 3$, бо права сторона є функциєю цілковитою x, отже всяке $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, $m \geqq 3$, дасть ся виразити через інтеґрали того самого виду о низшім m. Лише

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$

суть незведимі при помочи функций альґебраїчних, і то суть одинокі функциї переступні в інтеґралї $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ (P функция цілковита), (інтеґрали абелеві I-го, II-го і III-го виду).

Щоби звести інтеґрал $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, положимо в рівнаню (4) $\varphi(m) = -1$, а позаяк:

$$\varphi(m-1) = \varphi(m-2) = \cdots\cdots \varphi(3) = 0$$

то:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} = \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}} -$$

$$- \sqrt{R}\,(f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots\cdots + f(m-3)x^{m-3})$$

а сочинники $\varphi(0)$ $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $f(0)$, $f(1)$, $\cdots\cdots$ $f(m-3)$ дістанемо з (3) кладучи $p = 0, 1, \cdots\cdots m$.

І так приміром $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}}$ виразить ся через названі функциї переступні ось як:

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}} = \left(\frac{5}{24}\frac{\beta\delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{3}\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

$$+ \left(\frac{5}{12}\frac{\gamma\delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\varepsilon}\right) \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$$

$$+ \left(\frac{5}{8}\frac{\delta^2}{\varepsilon^2} - \frac{2}{3}\frac{\gamma}{\varepsilon}\right) \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$

$$- \left(\frac{5}{12}\frac{\delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{\varepsilon}x\right) \sqrt{R}$$

Інтеґрал $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ дасть ся, як бачилисьмо, виразити через три функциї переступні. Колибисьмо хотїли се число функций переступних зменьшити, то поміж величинами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ мусїлиби зайти якісь відношеня. Приміром, щоби $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ виразити через функциї альґебраїчні, требаби покласти $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(2) = 0$, а тодї три з поміж $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ виразять ся через дві прочі. Приміром інтеґрал $\int\frac{x^4 dx}{\sqrt{R}}$ виражений функциями альґебраїчними буде:

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{R}} = -\left(\frac{5}{12}\,\frac{\delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{\varepsilon}x\right)\sqrt{R}$$

б) *Зведенє інтеґрала*

$$\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}.$$

В тім случаю Q яко функция дробова дасть ся розложити на дроби частинні:

$$Q = \frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \cdots\cdots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}$$

$$d(Q\sqrt{R}) = \int\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

де S кладемо:

$$S = \varphi'(0) + \varphi'(1)(x-a) + \varphi'(2)(x-a)^2 + \frac{\chi(1)}{x-a} + \frac{\chi(2)}{(x-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{\chi(m)}{(x-a)^m}$$

а φ і χ суть сочинниками при відповідних степенях $(x-a)$, такі які випадуть з розвиненя.

А інтеґрал: $Q\sqrt{R} = \int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ представить ся:

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$

$$+\chi(1)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \chi(2)\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}} + \cdots\cdots + \chi(m)\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$$

$$= \sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{(x-a)} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \cdots\cdots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}\right) \quad (5)$$

З сеї форми видко, що

$$\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}},\ m>1$$

все дасть ся виразити через три інтеґрали:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}},\ \int\frac{xdx}{\sqrt{R}},\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}\ \text{і інтеґрал}\ \int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}},$$

та що сей послїдний *взагалї* є незведимий. Він дасть ся звести лише через відповідне дібране величин α, β, γ, δ, ε, подібно, як три попередні функциї переступні. Кладучи в (5) $\chi(m)=-1$, $\chi(2)=\chi(3)=\cdots\cdots=\chi(m-1)=0$, дістанемо:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}=\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}+\chi(1)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$
$$-\sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{x-a}+\frac{\psi(2)}{(x-a)^2}+\frac{\psi(3)}{(x-a)^3}+\cdots\cdots+\frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}\right)\qquad(6)$$

Єслиж (x — a) є чинником функциї R, отже R стає зером для x = a, тодї (5) не дасть ся застосувати до зведеня інтеґрала $\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$. Та коли за m положимо $m+1$ і в так зміненім взорі покладемо m = 1, тодї інтеґрал $\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$ дасть ся виразити через $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}=\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$
$$-\sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{x-a}+\frac{\psi(2)}{(x-a)^2}+\cdots\cdots\frac{\psi(m)}{(x-a)^m}\right)\qquad(7)$$

Ві всїх прочих случаях оно є неможливе, позаяк рівнанє (6) закладає m > 1.

Інтеґрал $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ дасть ся також звести в случаю, коли (x — a) є чинником R. Взір (7) перейде тодї на:

$$\int\frac{dx}{(x-a\sqrt{R}}=-\frac{a^2+a(a'+a''+a''')}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\int\frac{dx}{\sqrt{R}}-\frac{a+a'+a''+a'''}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$$
$$+\frac{2}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}-\frac{2}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\cdot\frac{\sqrt{R}}{x-a}\qquad(8)$$

де $R=(x-a)(x-a')(x-a'')(x-a''')$.

Щоби найти відношене поміж інтеґралами виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, положім:

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}}+$$

$$+\varphi(3)\int\frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}}=\sqrt{R}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{x-a'}+\frac{A''}{x-a''}+\frac{A'''}{x-a'''}\right)$$

$$\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{x-a'}+\frac{A''}{x-a''}+\frac{A'''}{x-a'''}=Q$$

Та коли в то рівнанє підставимо вартости за $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і т. д., тоді дістанемо відношене:

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}}=$$

$$=\sqrt{R}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{x-a'}+\frac{A''}{x-a''}\right) \qquad (9)$$

То є відношене між трома якиминебудь з помежи інтеґралів:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}}$$

значить, два з поміж них можна виразити через два другі, наколи (x — a) є чинником R. В противнім случаю, коли (x — a) не є чинником *R*, відношенє нїяке між інтеґралами не істнує.

Пошукаймо тепер єще, чи інтеґрали

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}},\ \int\frac{xdx}{\sqrt{R}},\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$

не дадуть ся звести на інтеґрали виду $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і які відношеня мусять тоді істнувати поміж $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$.

Позаяк (x — a) мусить бути чинником *R*, проте на підставі (9):

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}=$$

$$=A\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+A'\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\sqrt{R}\left(\frac{B}{(x-a)}+\frac{B'}{(x-a')}\right)$$

Підставивши за $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і $\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$ вартости, дістанемо з порівнаня сочинників вартости на A, A', B, B', а межи $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ вийде відношене:

$$2\varepsilon\varphi(1)-\delta\varphi(2)=0.$$

Кладучи $\varphi(1)=0$ а $\varphi(0)=1$ дістанемо $\varphi(2)=0$, а тоді:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{(a-a'')(a-a''')}{(a''+a'''-a-a')}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+$$

$$+\frac{(a'-a'')(a'-a''')}{(a''+a'''-a-a')}\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\frac{2\sqrt{R}}{(a+a'-a''-a''')(x-a)(x-a')} \tag{10}$$

Колиж покладемо $\varphi(0)=0$, а $\varphi(2)=1$, тоді $\varphi(1)=\frac{\delta}{2\varepsilon}$ і дістанемо:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}+\tfrac{1}{2}\delta\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}=\frac{a'(a'-a-a''-a''')f'(a)}{2(a'-a)(a+a'-a''-a''')}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

$$+\frac{a(a-a'-a''-a''')f'(a')}{2(a-a')(a+a'-a''-a''')}\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} \tag{11}$$

$$+\frac{\sqrt{R}}{(a-a')(a+a'-a''-a''')}\cdot\left(\frac{a'(a'-a-a''-a''')}{x-a}-\frac{a(a-a'-a''-a''')}{x-a'}\right)$$

де:

$$f'(a)=\frac{df(a)}{da}\qquad f(x)=R.$$

Отже бачимо, що $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ дасть ся виразити при помочи інтеґралів $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і $\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$. А вже інтеґрали $\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$ і $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$ не дадуть ся виразити в сей спосіб. Коли $a+a'=a''+a'''$, то (10) і (11) стають ілюзоричні, а лишаєсь лише рівнане (8); в тім случаю мож найти відношене поміж двома інтеґралами виду $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$; оно буде:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}=\frac{2\sqrt{R}}{(a''-a)(a''-a')(x-a)(x-a')}$$

Дальшою квестиєю є слідуюча:

Зведенє інтеґралу $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ при помочи функций льоґаритмічних.

Будемо шукати відношень льоґаритмічних, які мож одержати поміж чотирома інтеґралами $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ незведимими при помочи функций альґебраічних. В тій цїли пошукаємо загальної функциї льоґаритмічної, котрої ріжничка дасть ся розложити на вираженя виду:

$$\frac{Ax^n\,dx}{\sqrt{R}}, \text{ і } \frac{Adx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$$

а зінтеґрувавши ту ріжничку дістанемо загальне відношенє поміж тими чотирома інтеґралами, виражене при помочи функций льоґаритмічних. Шукана функция льоґаритмічна буде очевидно мати вид:

$$T = A\log(P+Q\sqrt{R}) + A'\log(P'+Q'\sqrt{R}) + A^{(2)}\log(P^{(2)}+Q^{(2)}\sqrt{R}) + \\ + \cdots\cdots + A^{(n)}\log(P^{(n)}+Q^{(n)}\sqrt{R}).$$

де $P, P', P^{(2)}, \cdots\cdots Q, Q', Q^{(2)} \cdots\cdots$ суть цїлковитими функциями x, а $A, A', A^{(2)}, \cdots\cdots$ суть величинами постійними. З тої функциї T мож еще виділити виміриму часть яко не маючу значіня і взяти під увагу функцию:

$$T' = A\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right) + A'\log\left(\frac{P'+Q'\sqrt{R}}{P'-Q'\sqrt{R}}\right) + \cdots\cdots$$

а вже ріжничка сего вираженя не буде зовсім заключати в собі частий вимірних.

$$dT' = A\frac{PQdR+2(PdQ-QdP)R}{(P^2-Q^2R)\sqrt{R}} + A'\frac{P'Q'dR+2(P'dQ'-Q'dP')R}{(P'^2-Q'^2R)\sqrt{R}} + \cdots\cdots \\ = S'\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

Коли положимо:

$$A\frac{PQdR+2(PdQ-QdP)R}{(P^2-Q^2R)\sqrt{R}} = \frac{M}{N}\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

то:
$$M = A\frac{2N\frac{dP}{dx} - P\frac{dN}{dx}}{Q}, \quad N = P^2 - Q^2R.$$

З сего видко, що коли $(x-a)^m$ є подїльником функциї N, $(x-a)^{m-1}$ буде подїльником M, отже $\frac{M}{N}$ не може мати членів виду $\frac{B}{(x-a)^m}$ при $m > 1$. Дальше, коли $(x-a)$ є чинником заключеним в R, то він буде і чинником P, отже M і N будуть єго мати яко чинник спільний, значить $\frac{M}{N}$ не може заключати також виражень $\frac{B}{x-a}$, наколи $(x-a)$ є чинником R. $\frac{M}{N}$ є на случай, коли $m > n+2$ і $m < n+2$, величиною постійною, а лише на случай коли $m = n+2$, може бути функциєю цїлковитою першого степеня, (m означає степень функциї P, а n функциї Q), і на тій підставі $\frac{M}{N}$ буде мати вид:

$$\frac{M}{N} = Bx + B' + \frac{C}{x-a} + \frac{C'}{x-a'} + \frac{C''}{x-a''} + \cdots\cdots$$

де $(x-a)$, $(x-a')\cdots\cdots$ не суть чинниками в R.

З сего виходить, що інтеґрал $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$ є незведимий в ніякім случаю. Він становить незведимість особливу (transcedente particulière).

T' представить ся:

$$T' = k\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + k'\int\frac{xdx}{\sqrt{R}} + L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \cdots\cdots + L^{(\nu)}\int\frac{dx}{(x-a^{(\nu)})\sqrt{R}} \tag{12}$$

І се є найзагальнїйше відношенє між нашими інтеґралами.

Щоби скористати з сего рівнаня, автор розвязує кілька (пять) частинних проблемів, з котрих перший є:

А) Виразити інтеґрал $\int\frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}}$ через як найменьше число інтеґралів виду $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

Наколи $P, Q, P', Q', \cdots\cdots P^{(r)}, Q^{(r)}$ суть степенів: $m, n, m', n', \cdots\cdots m^{(r)}, n^{(r)}$, то они мають $m + n + m' + n' + \cdots\cdots + m^{(r)} + n^{(r)} + r + 1$ сочинників неозначених, а додавши до сего ще $A, A', \cdots\cdots A^{(r)}$, будемо мати всїх сочинників неозначених:

$$m + n + m' + n' + \cdots\cdots + m^{(r)} + n^{(r)} + 2r + 2 = a'$$

отже:

$$A\frac{M}{N}+A'\frac{M'}{N'}+A''\frac{M''}{N''}+\cdots\cdots\cdots+A^{(r)}\frac{M^{(r)}}{N^{(r)}}$$

$$=k+k'x+\frac{C+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_{\nu-\alpha'+1}x^{\nu-\alpha'+1}}{D+D_1x+D_2x^2+\cdots\cdots+D_{\nu-\alpha'+1}x^{\nu-\alpha'+1}}=P$$

(ν є сумою степенів N, $N'\cdots\cdots N^{(r)}$, k і k′ суть які небудь). А то значить, що: *Інтеґрал* $\int\frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}}$ *можна виразити через* $\nu+\alpha'+2$ *інтеґралів виду* $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

В случаю частнім, іменно коли всї P будуть степеня $m=n+2$, випаде: $\nu-\alpha'+2=2$. Тоді

$$S=k+k'x+\frac{C+C'x}{D+D_1x+D_2x_2}=k+k'x=\frac{L}{(x-a)}+\frac{L'}{(x-a')}$$

а інтеґрал сего:

$$\int\frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}}=T'-L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}-L'\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}.$$

А позаяк r є довільне, то при $r=0$

$$T'=A\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

а коли кромі сего положимо $n=0$, бо оно також є довільне, то $m=2$. Положім:

$$P=f+f^{(1)}x+f^{(2)}x^2,\ \text{а}\ Q=1$$

дістанемо:

$$N=P^2-Q^2R=(f+f^{(1)}x+f^{(2)}x^2)^2-R=D+D_1x+D_2x^2$$

$$M=A\left(2N\frac{dP}{dx}-P\frac{dN}{dx}\right)$$

$$=A\left[2(D+D_1x+D_2x^2)(f^{(1)}+2f^{(2)}x)-(D_1+D_2x)(f+f^{(1)}x+f^{(2)}x^2)\right]$$

$$=C+C_1x+C_2x^2+C_3x^3$$

а з відси через порівнанє сочинників одержимо C, C_1, C_2, C_3, D, D_1, D_2, f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, отже:

$$\frac{M}{N}=\frac{C+C_1x+C_2x^2+C_3x^3}{D+D_1x+D_2x^2}=\frac{C_3}{D_3}x+\frac{C_2D_2-C_3D_1}{D_2{}^2}+\frac{C'+C'_1x}{D+D_1x+D_2x^2}$$

де для скороченя положено:

$$\frac{C_1 D_2 - C_3 D}{D_2} - \frac{D_1 (C_2 D_2 - C_3 D_1)}{D_2{}^2} = C_1{}' \quad \text{a}$$

$$C - \frac{D(C_2 D_2 - C_3 D_1)}{D_2{}^2} = C'$$

Возьмім $\frac{C_3}{D_3} = k'$ а $\frac{C_2 D_2 - C_3 D_1}{D_2{}^2} = k$

то наколи: $\frac{C' + C_1{}' x}{D + D_1 x + D_2 x^2}$ розібемо на:

$$\frac{L}{x-a} + \frac{L'}{x-a'} \qquad \text{тоді:}$$

$$\int \frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}} = - L \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} - L' \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} \tag{13}$$

$$+ \frac{k'}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon} x^2 + \sqrt{R}}{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon} x^2 - \sqrt{R}} \right)$$

і то є шукане зведенє.

Коли $k = 0$, а $k' = 1$, то взір сей перейде на:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{R}} = (G + H\sqrt{K}) \int \frac{dx}{(x - \sqrt{K})\sqrt{R}} + (G - H\sqrt{K}) \int \frac{dx}{(x - \sqrt{K})\sqrt{R}} \tag{14}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{\frac{\beta}{\delta} \sqrt{\varepsilon} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon} x^2 + \sqrt{R}}{\frac{\beta}{\delta} \sqrt{\varepsilon} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon} x^2 - \sqrt{R}} \right)$$

де:

$$G = \frac{4\alpha\delta^2\varepsilon + \beta\delta^3 + \beta^2\varepsilon^2 - 4\beta\gamma\delta\varepsilon}{2(\delta^4 + 8\beta\delta\varepsilon^2 - 4\gamma\delta^2\varepsilon)}$$

$$H = \frac{\delta}{4\varepsilon} \left(\frac{\beta^2\varepsilon - \alpha\delta^2}{\varepsilon\beta^2 - \alpha\delta^2} \right), \quad K = \frac{4\varepsilon}{\delta} \left(\frac{\varepsilon\beta^2 - \alpha\delta^2}{4\gamma\delta\varepsilon - 8\beta\varepsilon^2 - \delta^3} \right)$$

На случай, коли $D_2 = 0$, рівнанє (13) перейде на

$$\int \frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}} = \left[\frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}} f - \left(\frac{k'}{3\varepsilon} - k \right) \mu \right] \int \frac{dx}{(x+\mu)\sqrt{R}}$$

$$+\frac{k'}{2\sqrt{\varepsilon}}\log\left(\frac{f+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x+\sqrt{\varepsilon}\,x^2+\sqrt{R}}{f+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}+\sqrt{\varepsilon}\,x^2+\sqrt{R}}\right)$$

де: $f=\frac{4\varepsilon\gamma-\delta}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}$ а: $\mu=\frac{(f^2-\alpha^2)\sqrt{\varepsilon}}{f\delta-\beta\sqrt{\varepsilon}}$

а взір (14) представить ся:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}=\frac{1}{3\varepsilon}(\mu'-\mu)\int\frac{dx}{(x+\mu)\sqrt{R}}+\frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}}\log\left(\frac{\frac{\mu'}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x+\sqrt{\varepsilon}\,x^2+\sqrt{R}}{\frac{\mu'}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x+\sqrt{\varepsilon}\,x^2-\sqrt{R}}\right)$$

де: $\mu'=\frac{4\varepsilon\gamma-\delta^2}{8\varepsilon}$ а $\mu=-\frac{\delta}{2\varepsilon}$;

між сочинниками α, β, γ, δ, ε заходить тодї відношенє:

$$(4\varepsilon\gamma-\delta^2)^2+4\delta^2(4\varepsilon\gamma-\delta^2)+32\beta\delta\varepsilon^2-64\alpha\varepsilon^3=0.$$

До зведень тих дійшли ми в той спосіб, щосьмо спровадили $\frac{M}{N}$ до виду $\frac{C+C_1x+C_2x^2+C_3x^3}{D+D_1x+D_2x^2}$ кладучи $P^2-Q^2R=D+D_1x+D_2x^2$. Але се можна би зробити також в иньший спосіб, приміром кладучи:

$$R=(p+qx+rx^2)(p'+q'x+x^2)$$
$$P=f(p'+q'x+x^2),\ Q=1.$$

Поступаючи анальоґічно найдемо, що $\int\frac{(k+x)dx}{\sqrt{R}}$ на сей спосіб звести ся не дасть, за се $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ дасть ся звести до одного лише інтеґрала виду $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}=-L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+A\log\left[\frac{f(p'+q'x+x^2)+\sqrt{R}}{f(p'+q'x+x^2)-\sqrt{R}}\right]\qquad(15)$$

де:

$$L=\frac{pq'-qp'+(rq'-q)a^2}{(rq'-q)a}$$

$$A=\frac{f^2-r}{f(rq'-q)},\quad a=\frac{q-q'f^2}{2(f^2-r)}$$

а f визначене є рівнанєм

$$f^4(q'^2-4p')-f^2(2qq'-4p-4p'r)+q^2-4pr=0.$$

Положім в взорі (15) $r=1$, $q'=-q$, $p'=p$, то дістанемо:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(p+qx+x^2)(p-qx+x^2)}}=2\sqrt{p}\int\frac{dx}{(x-\sqrt{p})\sqrt{(p+qx+x^2)(p-qx+x^2)}} \tag{16}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{4p-q^2}}\log\left(\frac{\frac{q+2\sqrt{p}}{\sqrt{4p-q^2}}\sqrt{p-qx+x^2}+\sqrt{p+qx+x^2}}{\frac{q+2\sqrt{p}}{\sqrt{4p-q^2}}\sqrt{p-qx+x^2}+\sqrt{p+qx+x^2}}\right).$$

Можна еще через підставлене $P=f+f^{(1)}x+f^{(2)}x^2$ звести інтеґал $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ і на иньші способи, пр. кладучи:

$$N=P^2-R=k(x-a)^4,\quad R=\varepsilon(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''').$$

Взір зведеня буде:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}=L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}} \tag{17}$$

$$+A\log\frac{f+f'x+f''x^2+\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}{f+f'x+f''x^2-\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}$$

де:

$$A=-\frac{1}{2\sqrt{(p+p'-2a)(p''+p'''-2a)}}$$

$$L=2\sqrt{\frac{(a-p)(a-p')(a-p'')(a-p''')}{[2a-(p+p')]\,[2a-(p''+p''')]}}$$

а коли в тім взорі положимо $p''=-p$, $p'''=-p'$ і назвемо $(p+p')$ через q, а pp' через r, то (17) перейде на:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}}=2\sqrt{r}\int\frac{dx}{(x-\sqrt{R})\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}} \tag{18}$$

$$-\frac{1}{(q^2-4r)}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{q^2-4r}\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}}{2r\sqrt{r}-q^2x+2\sqrt{r}\,x^2}\right)$$

А то є той сам взір, що (16), лише представлений в иньшім виді. Додати треба, що все можна приняти P і R без спільного чинника, (бо через перерібку все мож дійти до таких P' і R, котрі не будуть мати спільного подільника).

Б) Найти умовини потрібні, щоби:

$$\int \frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + \cdots\cdots + k' + k}{x^m + l^{(m-1)} x^{m-1} + \cdots\cdots + l'x + l} \frac{dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}$$

Спосіб переведеня остане той сам.

Положім:

$$Q = e_1 + e^{(1)} x + e^{(2)} x^2 + \cdots\cdots + e^{(n-1)} x^{(n-1)} + x^n$$

$$P = f + f^{(1)} x + f^{(2)} x^2 + \cdots\cdots + f^{(n+1)} x^{(n+1)} + x^{n+2}$$

де n є число цїле, сповняюче услівє $2n + 4 > m$.

Най:

$$x^m + l^{(m-1)} x^{m-1} + \cdots\cdots + l'x + l = (x-a)((x-a')(x-a'') \cdots\cdots (x-a^{(m-1)}),$$

то щоби $\frac{M}{N}$ звести до виду:

$$\frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + k^{(m-2)} x^{m-2} + \cdots\cdots + k}{x^m + l^{(m-1)} x^{m-1} + l^{(m-2)} x^{m-2} + \cdots\cdots + l} = \frac{M'}{(x-a)(x-a') \cdots\cdots (x-a^{(m-1)})}$$

потреба положити:

$$N = P^2 - Q^2 R = C(x-a)^{\mu} (x-a')^{\mu'} (x-a'')^{\mu''} \cdots\cdots (x-a^{(m-1)})^{\mu^{(m-1)}} = CS$$

де $$2n + 4 = \mu + \mu' + \mu'' + \cdots\cdots + \mu^{(m-1)};$$

а то сповнимо, кладучи пр.

$$P = Fx, \quad Q = fx, \quad R = \varphi(x)$$

і дістанемо $(m - 1)$ рівнань:

$$(Fx)^2 = (fx)^2 \varphi x$$

або:

$$Fx = \pm fx \sqrt{\varphi x} = i\, fx \sqrt{\varphi x}$$

$$x = a, \ a', \ a'', \cdots\cdots a^{(m-1)}. \tag{19}$$

А ріжничкуючи перше $(\mu - 1)$ разів, друге $(\mu' - 1)$ разів і т. д. дістанемо зі зглядом на a рівнанє виду:

$$d^p Fa = \pm d^p fa \sqrt{\varphi a} + p d^{p-1} fa\, d\sqrt{\varphi a} + \frac{p(p-1)}{2} d^{p-2} fa\, d^2 \sqrt{\varphi a} + \\ + \cdots\cdots + fa\, d^p \sqrt{\varphi a} \tag{20}$$

$$a = a, \ a', \ a'', \cdots\cdots$$

а кладучи:

$$p = 0, \ 1, \ 2, \cdots\cdots \mu$$

$$p = 0, \ 1, \ 2, \cdots\cdots \mu'$$

$$p = 0, \ 1, \ 2, \cdots\cdots \mu''$$

і т. д.

дістанемо рівнаня потрібні до визначеня e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $\ldots$ f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $\ldots$ і т. д. Щоби найти k, k', k'' $\ldots$ і A, утворім:

$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{\mu}{x-a} + \frac{\mu'}{x-a'} + \frac{\mu''}{x-a''} + \frac{\mu'''}{x-a'''} + \cdots$$

$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{h + h^{(1)}x + h^{(2)}x^2 + h^{(3)}x^3 + \cdots + h^{(m-1)}x^{m-1}}{l + l^{(1)}x + l^{(2)}x^2 + l^{(3)}x^3 + \cdots + l^{(m-1)}x^{m-1}} = \frac{t}{S}$$

а:

$$\frac{M}{N} = \frac{A\left(2\frac{dP}{Qdx}S - \frac{PT}{Q}\right)}{S} = \frac{k + k^{(1)}x + k^{(2)}x^2 + \cdots + k^{(m-1)}x^{m-1} + x^m}{S}$$

а з відси:

$$k + k^{(1)}x + k^{(2)}x^2 + \cdots + k^{(m-1)}x^{m-1} + x^m = A\,\frac{2\frac{dP}{dx}S - Pt}{Q};$$

для $x = a$ буде:

$$k + k^{(1)}a + k^{(2)}a^2 + k^{(3)}k^3 + \cdots + a^m = -\,i\mu A\sqrt{\varphi}\,\psi(a) \qquad (21)$$

де $$\psi(x) = (x-a')(x-a'')(x-a''')\cdots$$

для $x = a,\ a',\ a'' \ldots a^{(m-1)}$.

Через се дістанемо з (21) m рівнань на визначенє: k, $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, $\ldots$ $k^{(m-1)}$ при помочи A, a, a', a'' $\ldots$ a^{m-1}, а на A найдемо вартість:

$$A = -\frac{1}{(\mu a + \mu'a' + \mu''a'' + \cdots)\,f^{(n+2)} + 2f^{(n+1)}}.$$

Коли $\mu = \mu' = \mu'' = \cdots = \mu^{(m-1)} = 1$, рівнаня остануть ті самі, а $m = 2n + 4$.

Возьмім $n = 0$ і щоби найти сочинники, покладїм:

$$R = (x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')$$

а в рівнанях:

$$P = \sqrt{R + CS},\quad S = l + l^{(1)}x + l^{(2)}x^2 + l^{(3)}x^3 + x^4 = \Theta x$$

положім $x = p,\ p',\ p'',\ p'''$, то на підставі (19) дістаємо чотири рівнаня:

$$f + pf^{(1)} + p^2f^{(2)} = \sqrt{C}\sqrt{(\Theta p)} \qquad p = p,\ p',\ p'',\ p'''$$

а усуваючи з тих рівнань f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, дістанемо рівнанє:

$$\frac{\sqrt{(p-a)(p-a')(p-a'')(p-a''')}}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{\sqrt{(p'-a)(p'-a')(p'-a'')(p'-a''')}}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}+$$

$$+\frac{\sqrt{(p''-a)(p''-a')(p''-a'')(p''-a''')}}{(p''-p)(p''-p'')(p''-p''')}+\frac{\sqrt{(p'''-a)(p'''-a')(p'''-a'')(p'''--a''')}}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')}=0$$

котре вказує, які відносини мусять заходити, щоби сповнилось заложене подане в заголовку.

Перейдім другі частні случаї.

1) $m=2,\ n=0.$

Се мож сповнити кладучи:

$$\alpha)\quad P^2-R=C(x-a)(x-a')^3$$

$$\beta)\quad P^2-R=C(x-a)^2(x-a')^2$$

α) Наколи $P^2-R=C(x-a)(x-a')^3$, то з рівнань (19) і (20) вийдуть вартости на f, $f^{(1)}$; $f^{(2)}$, а на відношене між a і a' дістанемо:

$$\sqrt{\varphi a}-\sqrt{\varphi a'}-\frac{1}{2}(a-a')\frac{\varphi'(a')}{\sqrt{\varphi a'}}+\frac{1}{8}(a-a')^2.\frac{2\varphi a'\varphi''(a')^2}{\varphi a'\sqrt{\varphi a'}}=0$$

$$A=-\frac{1}{(a+3a')f^{(2)}+2f^{(1)}}\quad .$$

β) Коли $\qquad P^2-R=C(x-a)^2(x-a')^2$

то підставляючи вартости за f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ і A найдені з рівнаня (20) в вираженях на k і k' дістанемо:

$$\frac{k+k'x+x^2}{(x-a)(x-a')}=1+\frac{2b+2b'x}{(x-a)(x-a')},$$

де:

$$b=\frac{a'\sqrt{\varphi a}+a\sqrt{\varphi a'}}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}},\quad b'=\frac{\sqrt{\varphi a}+\sqrt{\varphi a'}}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}}$$

Отже інтеґрал виразить ся:

$$\int\frac{dx}{\varphi(x)}=-\int\frac{(2b+2b'x)}{(x-a)(x-a')}\frac{dx}{\sqrt{\varphi x}}+A\log\frac{P+\sqrt{\varphi x}}{P-\sqrt{\varphi x}}$$

а відношене поміж a і a' буде:

$$a'=\frac{(pp'-p''p''')a+(p+p')p''p'''-(p''+p''')pp'}{(p+p'-p''-p''')-pp'+p''p'''}$$

2) Для $m=1$ буде:

$$P^2-Q^2R=C(x-a)^{2n+4}$$

$$\int \frac{x+k}{(x-a)} \frac{dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

k виразить ся безпосередно з рівнаня (21) $k = -a - \mu A \sqrt{\varphi a}$, а величини *A*, a, f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ········ і т. д. найде ся при помочи (20).

Підставивши вартість за *k* в повисшім інтеґралї одержимо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \mu A \sqrt{\varphi a} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

В той спосіб найде ся всї інтеґрали виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, які мож спровадити на інтеґрал $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ при помочи функциї льоґаритмічної виду $A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$.

З цїлого сего уступу бачимо, що коли заходить рівнане

$$\int \frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + k^{(m-2)} x^{m-2} + \cdots\cdots + k^{(1)} x + k}{(x-a)(x-a')(x-a'') \cdots\cdots\cdots\cdots (x-a^{(m-1)})} \frac{dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P+R\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

то поміж сочинниками a, a', a'' ········ $a^{(m-1)}$, k, k' ········ $k^{(m-1)}$ буде істнувати (m+1) рівнань, значить буде мож *m+1* з поміж тих величин вибрати довільно і при їх помочи означити прочі. Звідси виходить, що можна положити:

$$\frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + k^{(m-2)} x^{m-2} + \cdots\cdots\cdots + k^{(1)} x + k}{(x-a)(x-a') \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (x-a^{(m-1)})} =$$

$$= \frac{x^m + k_1^{(n-1)} x^{n-1}, + \cdots\cdots\cdots + k_1^{(1)} x + k_1}{(x-a)(x-a') \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (x-a^{(n-1)})} + \frac{L}{x-c} + \frac{L'}{x-c'} + \cdots\cdots + \frac{L^{(n-1)}}{x-c^{(n-1)}}.$$

де $k_1^{(n-1)}$, $k_1^{(n-2)}$, ········ $k_1^{(1)}$, k_1, a, a', a'', ········ $a^{(n-1)}$ суть які-небудь.

Отже інтеґрал

$$\int \frac{x^n + k_1^{(n-1)} x^{n-1} + \cdots\cdots\cdots + k_1^{(1)} x + k_1}{(x-a)(x-a') \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (x-a^{(n-1)})} \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

мож виразити через *n* інтеґралів виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$. Так само видко, що можна інтеґрал $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ виразити через n інтеґралів виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, з поміж котрих $(n-1)$ є довільних зі згляду на a.

В) Найти всї інтеґрали виду $\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{R}}$, що дадуть ся виразити при помочи функциї $A \log \left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$.

Позаяк
$$\int \frac{(x-k)dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

то ріжничка
$$x+k = \frac{M}{N}$$

а з сего виходить, що $N = c = \text{const.}$

З взорів:
$$M = \frac{A\left(2N\frac{dP}{dx} - P\frac{dN}{dx}\right)}{Q}$$
$$N = P^2 - Q^2 R$$
дістанемо:
$$c(x+k) = 2Ac\frac{dP}{dx}, \qquad c = P^2 - Q^2R.$$

З рівнань тих мож винайти k і A, наколи P і Q суть відомі. Принявши $c = 1$, положім в наших рівнанях:
$$P = f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^2 + \cdots\cdots + f^{(n+2)}x^{n+2}$$
$$Q = e + e^{(1)}x + e^{(2)}x^2 + \cdots\cdots + e^{(n)}x^n$$
то дістанемо на A і k вартости:
$$A = \frac{e^{(n)}}{(2n+4)\,f^{(n+2)}}, \quad k = \frac{f^{(1)}e^{(n)}}{(n+2)\,e\,f^{(n+2)}}.$$

Що до вартостий P і Q, то їх дістанемо з рівнаня:
$$P^2 - Q^2R = 1.$$

Іменно, коли за P і Q підставимо повисші вираженя, дістанемо:
$$(f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^{(2)} + \cdots + f^{(n+2)}x^{n+2})^2 - (e + e^{(1)}x + e^{(2)}x^2 + \cdots + e^{(n)}x^n)^2(\alpha + \beta x + \cdots \varepsilon x^4) = 1. \qquad (22)$$

Розвинувши се і порівнавши сочинники, дістанемо $(2n+5)$ рівнань на означенє $(2n+4)$ сочинників: f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $\cdots$ $f^{(2n+2)}$, e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ $\cdots$ $e^{(n)}$, значить ся, що понад се дістанемо ще відношенє поміж α, β, γ, δ, ε. Сочинник при x^{2n} буде: $f^{(n+2)} - \varepsilon e^{(n)} = 0$, а через се вартости на A і k перейдуть на:
$$A = \frac{1}{(2n+4)\sqrt{\varepsilon}}, \quad k = \frac{1}{(n+2)\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{f^{(1)}}{e}. \qquad (23)$$

Є ту лиш недогідність рахунку, а то та, що рівнаня, які вийдуть з порівнаня сочинників в (22), не суть лїнійні. Але рівнаня ті мож заступити системою рівнань лїнійних в слїдуючий спосіб: Коли в рівнаню:

$$P^2 - Q^2 R = 1$$

місто x положимо $\frac{1}{y}$, одержимо рівнанє виду:

$$(Fy)^2 - (fy)^2 \varphi(y) = y^{2n+4}$$

котре для $y = 0$ перейде на:

$$Fy = fy\sqrt{\varphi y}$$

а в нїм:

$$\begin{aligned} F(y) &= f y^{2n+2} + f^{(1)} y^{n+1} + \cdots\cdots + f^{(n+2)} \\ f(y) &= e y^n + e^{(1)} y^{n-1} + \cdots\cdots + e^{(n)} \\ \varphi(y) &= \alpha y^4 + \beta y^3 + \gamma y^2 + \delta y + \varepsilon \end{aligned}$$

Зріжничкувавши рівнанє $Fy = fy\sqrt{\varphi y}$ $2n+3$ разів дістанемо дл $y = 0$ по підставленю вартостий:

$$\begin{array}{l} f^{(n+2)} = c\,e^{(n)} \\ f^{(n+1)} = c\,e^{(n-1)} + c^{(1)} e^{(n)} \\ f^{(n)} = c\,e^{(n-2)} + c^{(1)} e^{(n-1)} + \frac{1}{2} c^{(2)} e^{(n)} \\ \vdots \qquad \vdots \\ f^{(2)} = c\,e + c^{(1)} e^{(1)} + \frac{c^{(2)}}{2} e^{(2)} + \frac{c^{(3)}}{2.3} e^{(3)} + \cdots\cdots + \frac{c^{(n)}}{1.2\cdots n} e^{(n)} \\ f^{(1)} = c^{(1)} e + \frac{c^{(2)}}{2} e^{(1)} + \frac{c^{(3)}}{2.3} e^{(2)} + \cdots\cdots + \frac{c^{(n+1)}}{1.2.3\cdots(n+1)} e^{(n+1)} \\ f = \frac{c^{(2)}}{2} e + \frac{c^{(3)}}{2.3} e^{(2)} + \frac{c^{(4)}}{2.3.4} e^{(3)} + \cdots\cdots + \frac{c^{(n+2)}}{1.2.3\cdots(n+3)} e^{(n+1)} \\ 0 = \frac{c^{(3)}}{2.3} e + \frac{c^{(4)}}{2.3.4} e^{(1)} + \frac{c^{(5)}}{2.3.4.5} e^{(2)} + \cdots\cdots + \frac{c^{(n+3)}}{1.2.3\cdots(n+3)} e^{(n)} \\ 0 = \frac{c^{(4)}}{2.3.4} e + \frac{c^{(5)}}{2.3.4.5} e^{(1)} + \cdots\cdots + \frac{c^{(n+4)}}{1.2.3\cdots(n+4)} e^{(n)} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ 0 = \frac{c^{(n+3)}}{2.3\cdots(n+3)} e + \frac{c^{(n+4)}}{2.3\cdots(n+4)} e^{(1)} + \cdots\cdots + \frac{c^{(2n+3)}}{1.2.3\cdots(2n+3)} e^{(n)} \end{array} \tag{24}$$

де в сочинники c, $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, $\cdots\cdots$ і т. д. війшли кромі c ще α, β, γ, δ, ε. З $n+1$ послїдних з поміж тих рівнань виразимо $e^{(1)}$, $e^{(2)} \cdots\cdots e^{(\;n}$

при помочи *e*, а кромі сего дістанемо відношенє поміж $c^{(3)}$, $c^{(4)}$, ... і т. д. Перших $(n+2)$ рівнань дасть знова f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ ...... $f^{(n+2)}$ виражені при помочи *e*. Само *e* є довільне і в вислїдї не буде приходити. Коли положимо $k=0$, то і $f^{(1)}=0$, а з відси дістанемо ще друге відношенє поміж $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, ... і т. д. і тодї побачимо що:

Інтеґрал $$\int \frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$$

дасть ся виразити при помочи льоґаритмів все, наколи поміж α, β, γ, δ, ε, заходять два відношеня, які дістанемо, коли виелїмінуємо з $n+1$ з поміж (20) і з $f^{(1)}=0$ величини e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ... $e^{(n)}$. (Ограниченє $k=0$ не впливає на загальність проблєму, бо вистане в вислїдї положити $x=y+k$, а дістанемо той сам інтеґрал, як колиб не були закладали $k=0$).

І так пр. для $n=0$ тото відношенє поміж α, β, γ, δ, ε представить ся:

$$\gamma=\frac{2\varepsilon\beta}{\delta}+\frac{\delta^2}{4\varepsilon}.$$

Пр.: $n=1$;

можна положити $\varepsilon=1$, $\beta=-\alpha$, тодї з рівнань (20) вийде: $\delta=2$, $\gamma=3$, *e* (яко довільне) возьмемо $=2$, то дальше вийде: $e^{(1)}=1$, $f^{(3)}=1$, $f^{(2)}=3$, $f^{(1)}=0$, $f=-\frac{\alpha}{2}-2$, $k=0$, $A=\frac{1}{6}$

отже:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}}=\frac{1}{6}\log\left(\frac{x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}+(x+2)\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}}{x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}-(x-2)\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}}\right)$$

Рівнанє: $P^2-1=Q^2R$ можна переробити:

$$(P+1)(P-1)=Q^2R=P'^2Q'^2R'R''.$$

Положім ту:

$$Q=P'Q',\quad R=R'R'',$$

то дістанемо:

$$P+1=P'^2R'$$

$$P-1=P'^2R''$$

а з відси:

$$2=P'^2R'-Q'^2R'' \tag{25}$$

А то є простїйше рівнанє, чим $P^2 - Q^2 R = 1$. Пожиток з сего рівнаня побачимо.

Положім:

$$R' = x^2 + 2qx + p, \quad R'' = x^2 + 2q'x + p'$$

а P' і Q' возьмім постійні, то дістанемо через порівнанє сочинників в (25) по підставленю вартостий за R' і R''

$$P = \frac{2x^2 + 4qx + p + p'}{p - p'}, \quad Q = \frac{2}{p - p'}, \quad k = q, \quad A = \frac{1}{4}.$$

А інтеґрал виразить ся:

$$\int \frac{(x+q)dx}{\sqrt{(x^2+2qx+p)(x^2+2q'x+p')}} = \frac{1}{4} \log \left(\frac{2x^2+4qx+p+p'+2\sqrt{R}}{2x^2+4qx+p+p'-2\sqrt{R}} \right)$$

Є ще і другий спосіб розвязаня рівнаня:

$$P^2 - Q^2 R = 1 \tag{26}$$

а є він слїдуючий:

Поставмо: $$R = r^2 + s,$$

де r є степеня другого, а s першого, то:

$$P^2 - Q^2 r - Q^2 s = 1.$$

Перший сочинник в P^2 і в $Q^2 r$ мусить бути той сам, отже можна положити:

$$P = Qr + Q_1$$

де Q_1 буде степеня $n - 1$, наколи Q є степеня n, а наше рівнанє перейде на:

$$Q_1{}^2 + 2QQ_1 - Q^2 s = 1.$$

А коли v є найбільшою функциєю цїлковитою, що містить ся в $\frac{r}{s}$, тодї:

$$r = sv + u,$$

де u є постійне.

Через се дістанемо:

$$Q_1{}^2 + 2QQ_1 u + Qs(2vQ_1 - Q) = 1$$

або кладучи:

$$Q = 2vQ_1 + Q_2$$

$$s_1 = 1 + 4uv, \quad r_1 = r - 2u$$

дістанемо місто рівнаня (26):

$$s_1 Q_1{}^2 - 2r_1 Q_1 Q_2 - sQ_2{}^2 = 0$$

А стосуючи до сего рівнаня на той сам лад і дальші підставленя виду:

$$s_m = s_{m-2} + 4u_{m-1} v_{m-1} \qquad (27)$$

$$r_m = r_{m-1} - 2u_{m-1} \qquad (28)$$

$$r_m = s_m v_m + u_m \qquad (29)$$

$$Q_m = 2v_m Q_{m+1} + Q_{m+2}$$

де Q_{m+2} є степеня $n - m - 2$, дійдемо до рівнаня:

$$s_n Q_n^2 = (-1)^{n+1}$$

де Q_n буде величиною постійною, а тим самим і s_n буде постійне. А то значить, що коли $P^2 - Q^2 R = 1$ дасть ся розвязати при помочи функций цїлковитих, тодї одна з поміж величин:

$$c,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \cdots\cdots$$

є постійною і на відворот. А коли приміром $s_n = const$, тодї P є степеня $n + 2$, а Q степеня n. Отже треба по черзї класти s, s_1, $s_2, \cdots\cdots = const$, щоби найти всї вартости R.

З рівнань (27), (28), (29), виходять слїдуючі прикмети величин r, s, u, v для $s_n = const$:

$$r_{n-k} = r_k\,,\ s_{n-k} = s_{k-1} u^{\pm 1},\ v_{n-k} = v_{k-1} u^{\mp 1},\ u_{n-k} = - u_{k-1}.$$

Для n непаристого $= 2\alpha + 1$ дістанемо кладучи $k = \alpha + 1$:

$$u_\alpha = 0,$$

а для n паристого $= 2\alpha$ дістанемо:

$$u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0.$$

То значить, що коли $P^2 - Q^2 R = 1$ дасть ся розвязати, а P є степеня непаристого, тодї $u_\alpha = 0$, а коли P є степеня паристого, тодї $u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0$ і на відворот: $u_\alpha = 0$ в разї непаристого степеня P, а $u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0$ в разї P паристого суть умовинами потрібними і достаточними до розвязаня рівнаня $P^2 - Q^2 R = 1$.

З взорів перетворюючих (трансформацийних)

$$Q_m = 2v_m Q_{m+1} + Q_{m+2}$$

$$Q = 2vQ_1 + Q_2\,,\quad P = rQ + Q_1$$

одержимо $\frac{P}{Q}$ в видї дроба тяглого:

$$\frac{P}{Q} = r + \frac{1}{2v} + \frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2v_{n-2}} + \frac{1}{2v_{n-1}}$$

а звиваючи се на дроб звичайний одержимо F і Q.

$\sqrt{R}$ дістанемо кладучи в $\frac{P}{Q} = \sqrt{R}$ $n = \infty$

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2v + \cfrac{1}{2v_1 + \cfrac{1}{2v_2 + \cdots \text{in inf.}}}}$$

На случай коли $P^2 - Q^2 R = 1$ дасть ся розвязати, дроб сей буде періодичний.

Щоби означити величини v_m, u_m, s_m і r_m для всякої вартости m, положім:

$$r_m = x^2 + ax + b_m, \quad s_m = c_m + p_m x, \quad v_m = (g_m + x) \frac{1}{p_m}.$$

Коли ті вартости підставимо в (27), (28), (29), дістанемо через порівнане сочинників рівнаня, з котрих постепенно найдемо c_m, p_m, b_m, g_m, u_m. — Так само мож ті величини дістати, зіставляючи названі рівнаня з рівнанем:

$$(c_{m-1} + p_{m-1} x)(c_m + p_m x) + (x^2 + ax b_m)^2 = (x^2 + ax + b)^2 + c + px.$$

Тут дістанемо ще відношеня:

$$c_{m-1} c_m = c + b^2 - b_m^2, \quad p_{m-1} p_m = 2(b - b_m) = 2q_m$$

де
$$(b - b_m) = q_m.$$

$$c_{m-1} p_m + c_m p_{m-1} = p + 2a(b - b_m)$$

а з відси по перерібці:

$$q_m = \frac{\frac{1}{2} p^2 + (ap - 2c) q_{m-1} - q_{m-2} q_{m-1}^2}{q_{m-1}^2}$$

$$\frac{c_m}{p_m} = \frac{c + q_m q_{m-1}}{p}, \quad q_m = a - \frac{c_m}{p_m}, \quad p_m = \frac{2q_m}{2q_{m-1}} p_{m-2}$$

маємо:
$$q_m = b - b_m,$$

отже:
$$q = b - b = 0, \quad q_1 = b - b_1$$

з відси:
$$b_m = - b_{m-1} + 2 \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}} \left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right)$$

а для:
$$m = 1 \quad b_1 = - b + 2 \frac{c}{p} \left(a - \frac{c}{p}\right)$$

$$q_1 = 2 \frac{b p^2 - a cp + c^2}{p^2}$$

Застосуймо се до інтеґрала:

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}}$$

Для упрощеня можна положити $c=0$ і будемо мати:

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}} = \frac{1}{2n+4} \log \left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$$

а узглянивши $P^2-Q^2R=1$

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}} = \frac{1}{n+2} \log (P+Q\sqrt{R})$$

Щоби се рівнанє було можливе, потреба перше всього, щоби:

$$P^2-Q^2R=1$$

дало ся розвязати. Се станесь, наколи $s_n = const$, а що $s_n = c_n + p_n x$, проте мусить бути:

$$p_n = 0.$$

Коли та умовина $p_n = 0$ буде сповнена, то все буде мож визначити k так, що $\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}}$ буде рівне $\frac{1}{n+2} \log (P+Q\sqrt{R})$.

Вартість k мож буде винайти, так як шукало ся єї повисше: $k=\frac{1}{n+2}a+\frac{f^{(1)}}{e}$. Ту тото k буде мати вартість:

$$k=\frac{1}{n+2}a+\frac{1}{n+2}\left(\frac{c_1}{p_1}+\frac{c_2}{p_2}+\cdots\cdots+\frac{c_{n-2}}{p_{n-2}}\right)$$

Позаяк умовина $p_n = 0$ є рівноважна з иньшою, іменно $q_n = 0$ або $q_{n-k} = q_{k-1}$, то збираючи всьо то разом дістанемо слїдуюче правило, щоби найти всї інтеґрали виду:

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px+c}}$$

які дадуть ся представити функциєю льоґаритмічною:

$$2\,A \log \left[P+Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px+c}\,\right]$$

іменно:

Обчислює ся всї величини $q_2, q_3, q_4,$ $\cdots\cdots$ після взора:

$$q_m = \frac{\frac{1}{2}p^2 + (ap - 2c)\,q_{m-1} - q_{m-2}\,q^2_{m-1}}{q^2_{m-1}}$$

закладаючи:

$$q = 0, \quad q_1 = 2\,\frac{bp^2 - acp + c^2}{p^2}$$

Відтак кладе ся по черзї:

$$q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ q_3 = 0, \cdots\cdots q_n = 0$$

або, що на одно вийде:

$$q_{n-k} = q_{k-1}\,.$$

Тодї всї вартости, які R може мати, одержимо позбуваючись з тих рівнань і рівняня $R = 0$ одної з поміж a, p, b, c. Найшовши R найдемо k:

$$k = \frac{1}{n+2}\,a + \frac{1}{n+2}\left(\frac{c}{p} + \frac{c_1}{p_1} + \cdots\cdots + \frac{c_{n-1}}{p_{n-1}}\right)$$

де:

$$\frac{c_m}{p_m} = \frac{c + q_m\,q_{m-1}}{p}.$$

Дальше $\frac{P}{Q}$ представить ся:

$$\frac{P}{Q} = x^2 + ax + b + \cfrac{1}{\cfrac{x+g}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{x+g_1}{p_1} + \cfrac{1}{\cfrac{x+g_2}{p_2} + \cdots\cdots + \cfrac{1}{\cfrac{x+g_{n-1}}{p_{n-1}}}}}}$$

де:

$$g_m = a - \frac{c + q_m\,q_{m-1}}{p}.$$

А з відси дістанемо P і Q, коли сей дроб тяглий замінимо на дроб звичайний, памятаючи що $q_{n-k} = q_{k-1}$. Найшовши се маємо наконець

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}} = \frac{1}{n+2}\log\left[P + Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}\,\right]$$

Г) Найти всї інтеґрали виду $\int \frac{x+k}{x+l}\,\frac{dx}{\sqrt{R}}$, які дадуть ся виразити через функцию льоґаритмічну

$A \log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$. Єсть се вправді частний случай заключений в проблємі (Б), та для єго ваги в теориї функций еліптичних розвяжемо єго окремо при помочи проблєму попередного.

Вийдемо з рівнаня:

$$\int \frac{(y+k')dy}{\sqrt{R'}} = A' \log\left(\frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}}\right)$$

і коли в нїм за y підставимо $\frac{1}{x+l}$, дістанемо

$$-k'\int \frac{(x+k)dx}{(x+l)\sqrt{R}} = A' \log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$$

де $k' = \frac{1}{k-l}$, а P, Q, R означають вартости, на які перейде P', Q', R' по підставленю $y = \frac{1}{x+l}$.

Вартість на l дістанемо з порівнаня сочинників в рівнанях:

$$R = \left(1 + (x+l)a + (x+l)^2 b\right)^2 + p(x+l)^3 + e(x+l)^4$$

$$R = (b^2 + c)(x^4 + \delta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha)$$

іменно l виразить ся при помочи α, β, γ і δ, а наш інтеґрал представить ся в виді:

$$\int \frac{(x+k)}{(x+l)\sqrt{(x^4+\delta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha)}} = A\sqrt{b^2+c}\,\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

де:

$$A = -\frac{A'}{k'}$$

а звідси:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = (k-l)\int \frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}} = A\sqrt{b^2+c}\,\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

або:

$$\int \frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}} = \frac{1}{l-k}\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{A\sqrt{b^2+c}}{l-k}\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$$

І в той спосіб дістанемо всї інтеґрали виду

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

які дадуть ся виразити через інтеґрал $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ і функцию льоґаритмічну $A\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$.

Д) Відношенє поміж інтеґралами виду:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}},\ \int \frac{xdx}{\sqrt{R}},\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}},\ \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

Загально неможливо є виразити інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ через інтеґрали $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$. Але в границях, іменно для таких *x*, котрі дають $R = 0$, все мож інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ виразити через тамті інтеґрали.

І так, коли інтеґрал:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

зріжничкуємо зі згляду на *a* і $\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}$ зведемо на інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, дістанемо узгляднюючи таке $x = r$, що для него $R = f(x) = 0$, таке рівнанє:

$$\sqrt{fa}\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}} - \sqrt{fx}\int \frac{da}{(x-a)\sqrt{fa}} =$$

$$= \int \frac{da}{\sqrt{fa}}\int \frac{(\frac{1}{2}\,\delta x + \varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}} - \int \frac{dx}{\sqrt{fx}}\int \frac{(\frac{1}{2}\,\delta a + \varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}}$$

Маємо в той спосіб ріжницю двох інтеґралів $\sqrt{fa}\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}$ і $\sqrt{fx}\int \frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}}$ виражену через інтеґрали виду:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{fy}} \text{ i } \int \frac{(\frac{1}{2} dy + \varepsilon y^2)\, dx}{\sqrt{fy}}.$$

Наколи інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}$ возьмемо в границях від $x = r$ до $x = r_1$, де r_1 також є вартостию, що сповняє $fx = 0$, дістанемо:

$$\sqrt{fa} \int_r^{r_1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}} =$$

$$= \int_r \frac{da}{\sqrt{fa}} \int_r^{r_1} \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2)\, dx}{\sqrt{fx}} - \int_r^{r_1} \frac{dx}{\sqrt{fx}} \int_r \frac{(\frac{1}{2}\delta \alpha + \varepsilon \alpha^2)\, da}{\sqrt{fa}}$$

Взір сей має важне значінє в теориї функций еліптичних.

Можна найти еще загальнїйше відношенє межи інтеґралами означеними в слїдуючий спосіб:

Най s означає якунебудь функцию льоґаритмічну виду:

$$A \log \left(\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}} \right) + A' \log \left(\frac{P' + Q'\sqrt{R'}}{P' - Q'\sqrt{R'}} \right) + \cdots\cdots$$

то:

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{R}} \left(B + Cx + \frac{L}{x-a} + \frac{L'}{x-a'} + \cdots\cdots \right)$$

а з відти:

$$s = \int \left(\frac{B + Cx}{\sqrt{R}} \right) dx + L \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + L' \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + \cdots\cdots$$

а інтеґруючи від $x = r$ до $x = r_1$ одержимо:

$$s' - s = \int_r^{r_1} \frac{(B + Cx)\, dx}{\sqrt{R}}$$

$$- \int_r^{r_1} \frac{dx}{\sqrt{fx}} \left[\frac{L}{\sqrt{fx}} \int_r \frac{(\frac{1}{2}\delta \alpha + \varepsilon \alpha^2)\, da}{\sqrt{fa}} + \frac{L'}{\sqrt{fa'}} \int_r \frac{(\frac{1}{2} d\alpha' + \varepsilon \alpha'^2)}{\sqrt{fa'}} + \cdots\cdots \right]$$

$$+ \int_r^{r_1} \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2)\, dx}{\sqrt{fx}} \left[\frac{L}{\sqrt{fa}} \int_r \frac{da}{\sqrt{fa}} + \frac{L'}{\sqrt{fa'}} \int \frac{da'}{\sqrt{fa'}} + \cdots\cdots \right]$$

Рівнанє се дає відношенє поміж системою інтеґралів виду:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{fy}}, \int \frac{y\,dy}{\sqrt{fy}}, \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{fy}}.$$

Кромі до тепер введених відношень поміж функциями переступними, випроваджує автор такіж:

2. Відношеня для частної кляси функций переступних. (Oeuvres compl. II. p. 54).

І так, коли *y* є функциєю *x* ($y = \psi x$) сповняючою рівнане:

$$y\,fx + \varphi x \frac{dy}{dx} = 0,$$

тодї між функциями тими заходити буде відношенє:

$$\frac{1}{\psi a} \int \frac{\psi x\,dx}{x - a} - \psi x\,\varphi x \int \frac{da}{(a - x)\,\varphi a\,\psi a} =$$

$$= \sum \left((n+1)\,\alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1}\right) \int \frac{a^m\,da}{\varphi a\,\psi a} \int x^n\,\psi x\,dx$$

де α і β суть сочинниками належачими до:

$$\varphi x = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots\cdots$$
$$fx = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \cdots\cdots$$

Причім треба зазначити, що інтеґрали зі взгляду на *x* належить брати від тої вартости *x*, яка зводить до зера функцию $\psi x \,.\, \varphi x$, а зі згляду на *a* від тої вартости *a*, яка зводить до зера функцию $\frac{1}{\psi a}$.

Наколи $\psi x = \frac{1}{\sqrt{\varphi x}}$, тодї повисше відношенє переходить на:

$$\sqrt{\varphi a} \int \frac{dx}{(x - a)\sqrt{\varphi x}} - \sqrt{\varphi x} \int \frac{da}{(a - x)\sqrt{\varphi a}} =$$

$$= \sum \tfrac{1}{2}(n - m)\,\alpha_{m+n+2} \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{\varphi x}} \int \frac{a^m\,da}{\sqrt{\varphi a}}$$

а для відомого нам вже виду функциї φx:

$$\varphi x = (1 - x^2)(1 - c^2 x^2)$$

дістанемо відношенє:

$$\sqrt{[(1-a^2)(1-c^2a^2)]}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}-$$

$$-\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}}$$

$$=c^2\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}\int\frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(1-a^2c^2)}}-$$

$$-c^2\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}\cdot\int\frac{a^2\,da}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}}$$

котре служить як точка вихідна до випроваджуваня прикмет функций елїптичних. — Єсть се твердженє Абеля найбільше основне в цілій теориї інтеґралів альґебраїчних.

3. Як виразити суму функций переступних $\int f(yx)\,dx$, де y є функциєю x, через означене число функций того самого виду, показує Абель в уступі під заголовком: **Порівнанє функций переступних.** (Oeuvres compl. II. p. 66).

Коли y є функциєю альґебраїчною, означеною рівнанєм:

$$0=\alpha+\alpha_1 y+\alpha_2 y^2 \cdots\cdots +\alpha_m y^m \qquad (1)$$

де α суть функциями цїлковитими x:

а так само:

$$0=q+q_1 y+q_2 y^2+\cdots\cdots+q_{m-1} y^{m-1} \qquad (2)$$

де q суть функциями цїлковитими x і якогось числа иньших змінних a, a_1, a_2, ⋯⋯, де ті a суть сочинниками при ріжних степенях x в функциях q, q_1, q_2 ⋯⋯. З обох тих рівнань можна y виразити виміримо при помочи x, a, a_1, a_2 ⋯⋯. Нехай r буде тою функциєю, значить $y=r$, то підставивши ту вартість за y в одно з обох рівнань даних, дістанемо:

$$s=0$$

де s є функциєю цїлковитою x, a, a_1, a_2 ⋯⋯.

Зріжничкувавши єго і помноживши через $f(yx)=f(rx)$, дістанемо:

$$f(yx)\,dx=\varphi(x)\,da+\varphi_1(x)\,da_1+\varphi_2(x)\,da_2+\cdots\cdots \qquad (3)$$

де $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ ⋯⋯ суть функциями вимірними x, a, a_1, a_2, ⋯⋯.

Наколи $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ суть корінями рівнаня $s = 0$, то підставивши їх по черзї в послїдне рівнанє, дістанемо суму:

$$f(y_1 x_1) dx_1 + f(y_2 x_2) dx_2 \cdots + f(y_n x_n) dx_n = R da + R_1 da_1 + \cdots$$

де R, R_1, R_2, суть функциями вимірими а a_1 a_2 виду:

$$R_m = \varphi_m(x_n) + \varphi_m(x_{n-1}) + \cdots + \varphi_m(x_2) + \varphi_m(x_1).$$

Позаяк лїва сторона повисшого рівнаня ріжничкового є цїлковитою ріжничкою, то і права сторона також мусить дати ся з'інтеґрувати:

$\int R da + \int R_1 da_1 + \int R_2 da_2 + \cdots = \varrho$, де ϱ є функциєю альґебраічною і льоґаритмічною величин a, a_1, a_2, $\cdots$.

Назвавши ще $\int f(yx)dx$ через $\psi(x)$

дістанемо: $$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) \cdots + \psi(x_n) = C + \varrho. \qquad (4)$$

При помочи сего рівнаня можна виразити суму якогонебудь числа функций ψx через означене число функций того самого виду.

Величини $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ суть функциями змінних независимих a, a_1, a_2, $\cdots$. Ясною річею є, що закладаючи число тих змінних рівне μ, мож уважати число μ з поміж величин $x_1, x_2, \cdots x_n$ яко независимі, а прочі $n - \mu$ яко їх функциї. Функциї ті мож вишукати.

Положім в рівнаню (4) $n = \mu + \nu$, а $x_{\mu+1} = c_1$, $x_{\mu+2} = c_2, \cdots x_n = c_\nu$, то оно перейде на:

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots + \psi(x_\mu) = C + \varrho$$

де $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ суть звязані між собою рівнанями:

$$\Theta(x_1) = 0, \ \Theta(x_2) = 0 \cdots \Theta(x_\mu) = 0$$
$$\Theta(c_1) = 0, \ \Theta(c_2) = 0 \cdots \Theta(c_\nu) = 0 \qquad (5)$$

Колиж тепер покладемо $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, $\cdots x_\nu = x'_\nu$

а: $$x'_{\nu+1} = \beta_1, \ x'_{\nu+2} = \beta_2 \cdots x'_\mu = \beta_{\mu-\nu},$$

дістанемо: $$C = -\varrho' + \psi(x_1') + \psi(x_2') + \cdots + \psi(x'_\nu)$$

а:

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots + \psi(x_\mu) = \varrho - \varrho' + \psi(x_1') + \psi(x_2') + \cdots + \psi(x'_\nu),$$

де $x_1', x_2', \cdots x'_\nu$ суть означені рівнанями:

$$\Theta(x_1') = 0, \ \Theta(x_2') = 0, \cdots \Theta(x'_\nu) = 0$$
$$\Theta(\beta_1) = 0, \ \Theta(\beta_2) = 0, \cdots \Theta(\beta_{\mu-\nu}) = 0$$
$$\Theta(c_1) = 0, \ \Theta(c_2) = 0, \cdots \Theta(c_\nu) = 0 \qquad (6)$$

То коли s означимо через $\Theta_1(x)$, то буде також

$$\Theta_1(x'_\varkappa) = 0, \quad \Theta_1(\beta_\varkappa) = 0, \quad \Theta_1(c_\varkappa) = 0,$$

позаяк $a, a_1, a_2, \cdots a_{\mu-1}$ суть визначені двома послїдними рядами рівнань (6).

Отже буде:
$$\Theta_1(x) = (x-x_1')(x-x_2') \cdots (x-x_\nu') \cdot (x-\beta_1)(x-\beta_2) \cdots (x-\beta_{\mu-\nu}) \cdot (x-c_1)(x-c_2) \cdots (x-c_\nu)$$

а дїлячи рівнанє $\Theta_1(x) = 0$ через добуток:

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2) \cdots (x-\beta_{\mu-\nu})(x-c_1)(x-c_2) \cdots (x-c_\nu)$$

дістанемо рівнанє степеня ν, котрого коренї будуть величинами:

$$x_1', x_2', \cdots x'_\nu.$$

А коли так визначені суть $x_1', x_2' \cdots x_\nu'$, яко функциї $c_1, c_2, \cdots c_\nu$ то можна їх уважати яко змінні а визначені через (5). В той спосіб величин $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ суть независимі, а $x_1', x_2', \cdots x_\mu'$ стають функциями тих змінних.

V. Прочі розвідки Абеля належать до ріжних дїлів математики, а вимінити з них належить слїдуючі:

1. Про функцию переступну $\sum\left(\frac{1}{x}\right)$. (Oeuvres compl. p. 24 et 30). Функция $\sum\left(\frac{1}{x}\right)$ названа через Абеля Lx є першою функциєю переступною, яка приходить в рахунку ріжничковім, є се функция такої самої ваги в рахунку ріжничковім як $\int \frac{dx}{x}$ в рахунку інтеґральнім.

Автор зачинає представленем її в видї ряду і принявши що

$$L(a+x) = \alpha + \beta x + \gamma x(x-1) + \delta x(x-1)(x-2) + \varepsilon x(x-1)(x-2)(x-3) + \cdots \tag{1}$$

находить через ріжничковане вартости на $\alpha, \beta, \gamma \cdots$, через що $L(a+x)$ прийме вид:

$$L(a+x) = La + \frac{x}{a} - \frac{x(x-1)}{2a(a+1)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3a(a+1)(a+2)} - \frac{x(x-1)(x-)(x-3)}{4a(a+1)(a+2)(a+3)} + \cdots \tag{2}$$

Наколи за x возьмемо число цїле, тодї ряд сей буде мати скінчене число членів, а єсли будемо знали вартість $L(a)$, то будем знати так само і $L(a+n)$, де n є число цїле додатне.

І так, коли в взорі тім підставимо по черзї $x = 1, 2, 3$ і т. д., то знаючи вартість $L(a)$ для всїх величин на a, від $a = 1$ до $a = 2$, найдемо $L(a)$ для всїх прочих вартостий на a. [Позаяк функция $\sum\left(\frac{1}{x}\right) = Lx$ має одну величину постійну довільну, то для якоїсь даної вартости на a буде мож за ню підставити яку небудь вартість функциї $L(a)$, прим. $L(1) = 0$, тодї з нашого взора (2) дістанемо: $L(0) = -\infty$, $L(a) = -\infty$].

Щоби найти $L(a)$ від $a = 1$ до $a = 2$, треба взір (2) представити в відповіднім видї:

$$L(1+\omega) = \frac{\omega}{\omega+1} + (S_2-1)\,\omega - (S_3-1)\,\omega^2 + (S_4-1)\,\omega^3 - \cdots\cdots$$

$$\text{де} \quad S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots\cdots ;$$

кладучи $-\omega$ на місце ω дістанемо (3)

$$L(1-\omega) = \frac{\omega}{\omega-1} - (S_2-1)\,\omega - (S_3-1)\,\omega^2 - (S_4-1)\,\omega^3 + \cdots\cdots$$

а позаяк: $L(2-\omega) = L(1-\omega) + \frac{1}{1-\omega}$, то:

$$L(2-\omega) = 1 - (S_2-1)\,\omega - (S_3-1)\,\omega^2 - (S_4-1)\,\omega^3 - \cdots\cdots.$$

Взори (3) мають важне застосоване при обчисленю рядів. Бо позаяк $S\varphi(x) = \Sigma\varphi(x+1)$, то буде мож найти суму всяких рядів, котрих член загальний є φx, наколи знаємо $\Sigma\varphi x$.

Обчислїм для приміру суму ряду гармонїчного при помочи функциї $L(x)$:

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} + \cdots\cdots + \frac{a}{b+cx} = S\left(\frac{a}{b+cx}\right) = P$$

маємо $P = \sum\left(\frac{a}{b+c+cx}\right) = a\sum\left(\frac{1}{b+c+cx}\right)$.

Положім $b+c+cx = cy$, то $P = \frac{a}{c}\sum\left(\frac{1}{y}\right) = C + \frac{a}{c}\,L(y)$

$P = C + \frac{a}{c}\,L\left(\frac{b+c}{c} + x\right)$. Щоби означити C, положім $x = o$, тодї $P = \frac{a}{b}$, а з відси: $\frac{a}{b} = C + \frac{a}{c}\,L\left(\frac{b+c}{c}\right)$, отже:

$$P = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\left[L\left(\frac{b+c}{c} + x\right) - L\left(\frac{b+c}{c}\right)\right];$$

для $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$ буде:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{1+2x} = 1 + \frac{1}{2} L\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} L\left(\frac{3}{2}\right).$$

Функция $L(1+a)$ дасть ся представити при помочи інтеґралу:

$$L(1+a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{x - 1}\, dx$$

кладучи $x^{a'}$ на місце x і називаючи $a a' = m$, дістанемо:

$$L\left(1 + \frac{m}{a'}\right) = a' \int_0^1 \frac{x^m - 1}{x^{a'} - 1}\, x^{a'-1}\, dx$$

а взір сей говорить, що доки y є якою небудь величиною дійсною, то $L(y)$ дасть ся все виразити через функциї альґебраічні, льоґаритмічні і колові, бо інтеґрал $\int \frac{x^m - 1}{x^{a'} - 1} x^{a'-1}\, dx$ дасть ся для цілковитих вартостий a' і m представити при помочи функций альґебраічних, льоґаритмічних і колових.

Цікаві суть також деякі прикмети тої функциї; і так:

$$L\left(\frac{1}{a}\right) + L\left(\frac{2}{a}\right) + L\left(\frac{3}{a}\right) + \cdots + L\left(\frac{a-1}{a}\right) = a \log\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$2\, L(2a) = 2 \log 2 + L(a) + L\left(a + \frac{1}{2}\right)$$

$$L(na) = \log n + \frac{1}{n}\left[L(a) + L\left(a + \frac{1}{n}\right) + \cdots + L\left(a + \frac{n-1}{n}\right)\right]$$

і т. д.

Ріжничкуючи постепенно функцию $\sum\left(\frac{1}{a}\right)$ дістанемо:

$$\frac{d \sum\left(\frac{1}{a}\right)}{da} = \frac{\sum\left(d \frac{1}{a}\right)}{da} = - \sum \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{d^2 \sum \frac{1}{a}}{d a^2} = \frac{\sum d^2 \left(\frac{1}{a}\right)}{d a^2} = + 2 \sum \frac{1}{a^3}$$

$$\frac{d^n \sum \frac{1}{a}}{d a^n} = \frac{\sum d^n \left(\frac{1}{a}\right)}{d a^n} = \pm 2.3.4 \cdots n \sum \frac{1}{a^{n+1}}$$

де знак + буде, коли n паристе, а —, коли непаристе.

То і на відворот:

$$\sum \frac{1}{a^2} = \frac{d \sum \frac{1}{a}}{da}, \quad \sum \frac{1}{a^3} = \frac{d^2 \sum \frac{1}{a}}{da^2} \text{ і т. д.}$$

Ті всї функциї переступні висшорядні мож представити при помочи інтеґралів означених:

Було, що:

$$\sum \frac{1}{a} = \mathrm{La} = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - 1}{x - 1}\, dx;$$

ріжничкуючи се зі згляду на a дістанемо:

$$\sum \frac{1}{a^2} = -\int_0^1 \frac{x^{a-1}\, lx}{x-1}\, dx \qquad \text{де } lx = \int \frac{dx}{x}$$

$$\sum \frac{1}{a^3} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{a-1}\,(lx)^2}{x-1}\, dx \quad \text{і т. д.}$$

$$\sum \frac{1}{a^\alpha} = \pm \frac{1}{2.3.\cdots\alpha} \int_0^1 \frac{x^{a-1}\,(lx)^{\alpha-1}}{x-1}\, dx$$

або:

$$\sum \frac{1}{a^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{x^{a-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}\, dx \ (\Gamma \text{ функция Euler'a})$$

найшовши сталу інтеґрованя і вставивши в послїднім взорі одержимо:

$$\sum \frac{1}{a^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{x^{a-1} - 1}{x-1} \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx$$

2. **Інтеґрал скінчений $\Sigma^n \varphi x$ виразити через інтеґрал означений поодинокий.** (Oeuvres compl. II. 45).

Після Parseval'a можна інтеґрал скінчений $\Sigma^n \varphi x$ виразити через інтеґрал означений подвійний.

Абель представляє той сам інтеґрал $\Sigma^n \varphi x$ при помочи інтеґралу означеного поодинокого.

Він надає функциї φx вид:

$$\varphi x = \int e^{xv} fv.\, dv \tag{1}$$

де інтеґрал бересь поміж двома якимись границями v незалежними від x, fv означає функцию v залежну від виду φx.

Інтеґруючи обі сторони для $\Delta x = 1$ дістанемо:

$$\Sigma \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{e^v - 1} dv$$

з додатком сталої інтеґрованя. А по n-кратнім інтеґрованю одержимо:

$$\Sigma^n \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{(e^v - 1)^n} dx \tag{2}$$

з додатком:

$$C + C_1 + C_2 x^2 + \cdots + C_{n-1} x^{n-1},$$

де C, C_1, C_2, суть сталими інтеґрованя.

$\frac{1}{(e^v - 1)^n}$ дасть ся представити в виді:

$$\frac{1}{(e^v - 1)^n} = (-1)^{n-1} \left(A_{0,n} p + A_{1,n} \frac{dp}{dx} + A_{2,n} \frac{d^2 p}{dv^2} + \cdots + \right.$$
$$\left. + A_{n-1,n} \frac{d^{n-1} p}{dv^{n-1}} \right).$$

Ріжничкуючи се рівнане одержимо взори на сочинники: $A_{0,n}$, $A_{1,n}$ і т. д.

$$A_{0,n} = 1, \ A_{1,n} = \sum \frac{1}{n}, \ A_{2,n} = \sum \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{n} \right),$$

$$A_{3,n} = \sum \left[\frac{1}{n} \sum \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$A_{n,n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1}, \ A_{0,1} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}.$$

А що після Legendre'a (Exerc. de calc. int. T. II. p. 189).

$$\frac{1}{e^v - 1} = \frac{1}{v} - \frac{1}{2} + 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt \sin dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

проте для n паристого

$$\frac{d^n p}{dv^n} = \frac{2 . 3 \cdots n}{v^{n+1}} - 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^n \, dt \cos vt}{e^{2\pi t} - 1}$$

для n непаристого будемо мати знак — і $\sin vt$ місто $\cos vt$. Інтеґрал $\int e^{vx} fv \sin vt \, dv$ найдемо кладучи в рівнаню (1) за x раз $x + ti$, другий раз $x - ti$; дістанемо іменно:

$$\int e^{vx} . \sin vt . fv . dv = \frac{\varphi(x + ti) - \varphi(x - ti)}{2i}$$

а так само:

$$\int e^{vx} . \cos vt . fv . dv = \frac{\varphi(x + ti) + \varphi(x - ti)}{2}$$

узгляднивши при тім

$$\int^{n} \varphi x \, dx = \int e^{vx} fv \frac{dv}{v^3}$$

дістанемо по підставленю:

$$\sum^{n} \varphi x = A_{n-1, n} \Gamma(n) \int^{n} \varphi x \, dx^{n} - A_{n-2, n} \Gamma(n-1) \int^{n-1} \varphi x \, dx^{n+1} + \cdots\cdots + $$

$$+ (-1)^{n-1} \int \varphi x \, dx + (-1)^{n} \tfrac{1}{2} \varphi x$$

$$+ 2(-1)^{n-1} \int_{0}^{\frac{1}{0}} \frac{P . dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(x + ti) - \varphi(x - ti)}{2i} +$$

$$+ 2(-1)^{n-1} \int_{0}^{\frac{1}{0}} \frac{Q . dt}{e^{\pi t} - 1} \frac{\varphi(x + ti) + \varphi(x - ti)}{2}$$

де: $P = A_{0, n} - A_{2, n} t^2 + A_{4, n} t^4 - \cdots\cdots$

а: $Q = A_{1, n} - A_{3, n} t^3 + A_{5, n} t^5 - \cdots\cdots .$

Взором (3) представлений є інтеґрал скінчений $\Sigma^{n} \varphi x$ при помочи інтеґрала означеного поодинокого.

3. В розвідцї:

Визначні прикмети функциї $y = \varphi x$, означеної рівнанєм:

$$fy . dy - dx \sqrt{(a - y)(a_1 - y)(a_2 - y) \cdots\cdots (a_m - y)} = 0$$

де fy **означає якунебудь функцию** y, **що не стає ся зером анї безконечностию для** $y = a, \ a_1, \ a_2, \cdots\cdots a_m$. (Oeuvres compl. II. 51), — доказує автор, що функция φx є функциєю періодичною о періодї 2α означенім рівнанєм:

$$\alpha = \int^{a} \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{\psi y}}$$

де отже α означає вартість x відповідаючу вартости $y = a$.

$$\varphi(v) = \varphi(v + 2n\alpha + 2n_1\alpha_1 + 2n_2\alpha_2 + \cdots\cdots + 2n_m\alpha_m)$$

де
$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots\cdots + n_m = 0$$

а де α_1, α_2, і т. д. суть вартостями x для $y = a_1$, a_2, ········ a_m.

4. **Теория функций творячих (génératrice) і визначаючих (determinante).** (Oeuvres compl. II. 77).

Єсли $\varphi(xyz)$ представляє якунебудь функцию змінних x, y, z, то мож найти функцию $f(u, v, p)$ таку, щоби:

$$\varphi(x, y, z) = \int e^{xu+yv+zp} f(u, v, p)\,du\,dv\,dp$$

число змінних може бути якенебуь.

В рівнаню тім називає автор φ функциєю творячою функциї f і значить єї: $\varphi(x, y, z \cdots\cdots) = \text{fg}f(u, v, p, \cdots\cdots)$, а f називає визначаючою функциї φ і значить: $f(u, v, p \cdots\cdots) = D\varphi(x, y, z \cdots\cdots)$.

Возьмім функцию одної змінної:

$$\varphi x = \int e^{vx} fv\,.\,dv$$

$$\varphi x = D\varphi x$$

$$fv = \text{fg}\,.\,fv$$

так само:

$$\varphi_1 x = \int e^{vx} f_1 v\,dv$$

то:

$$\varphi x + \varphi_1 x = \int e^{vx}(fv + f_1 v)\,dv$$

отже:

$$D(\varphi x + \varphi_1 x) = fv + f_1 v$$

т. з.:

$$D(\varphi x + \varphi_1 x) = D\varphi x + D\varphi_1 x$$

так само:

$$D(\varphi x + \varphi_1 x + \varphi_2 x + \cdots\cdots) = D\varphi x + D\varphi_1 x + D\varphi_2 x + \cdots\cdots$$

а рівночасно:

$$\text{fg}\,.\,(fv + f_1 v + f_2 v + \cdots\cdots) = \text{fg}\,.\,fv + \text{fg}\,.\,f_1 v + \text{fg}\,.\,f_2 v + \cdots\cdots.$$

Дальше випроваджує автор, що:

$$D\left(\frac{d^n \varphi v}{dx^n}\right) = v_n D \varphi v,$$

$$fg.(v^n f v) = \frac{d^n fx}{dx^n}$$

що:

$$D\left(\int^n \varphi x \, dx^n\right) = v^{-n} D\varphi x, \quad fg(v^{-n} fv) = \int^n \varphi x \, dx^n$$

Потім:

$$D(\Delta^n_\alpha \varphi x) = (e^{v\alpha} - 1)^n fv, \quad fg.[(e^{v\alpha} - 1)^n fv] = \Delta^n_\alpha \varphi x$$

$$D(\Sigma^n_\alpha(\varphi x)) = (e^{v\alpha} - 1)^{-n} fv, \quad fg.[(e^{v\alpha} - 1)^{-1} fv] = \Sigma^n_\alpha \varphi x$$

де α значить ріжницю x.

Єсли возьмемо загально:

$$\delta(\varphi x) = A_{n,\alpha} \frac{d^n \varphi(x+\alpha)}{dx^n} + A_{n_1,\alpha_1} \frac{d^{n_1} \varphi(x+\alpha_1)}{dx^{n_1}} + \cdots\cdots$$

то:

$$\delta(\varphi x) = \int e^{vx} . fv \left(A_{n,\alpha} v^n . e^{v\alpha} + A_{n_1,\alpha_1} v^{n_1} e^{v\alpha_1} + \cdots\cdots\right) dx$$

отже:

$$D(\delta \varphi x) = fv . \left(A_{n,\alpha} v^n e^{v\alpha} + A_{n_1,\alpha_1} v^{n_1} e^{v\alpha_1} + \cdots\cdots\right).$$

Назвім:

$$A_{n,\alpha} v^n e^{v\alpha} + A_{n_1,\alpha_1} v^{n_1} e^{v\alpha_1} + \cdots\cdots = \psi(v)$$

тодї:

$$D(\delta \varphi x) = \psi(v) . D\varphi x$$

а:

$$D(\delta \delta_1 \delta_2 \cdots\cdots \varphi x) = \psi(v) . \psi_1(v) . \psi_2(v) \cdots\cdots D \varphi x.$$

Теория та є дуже придатна при розвиваню функций на ряди.

Розвинім для приміру $\varphi(x+a)$ при помочи ріжничкових сочинників φx.

Визначаюча функциї $\varphi(x+a)$ є рівна $e^{v\alpha} f v$, а функциї $\frac{d^n \varphi x}{dx^n} = v^n . fv$. Ходить о розвинене $e^{v\alpha}$ на вираженя виду $A_n v^n$, отже буде:

$$e^{v\alpha} = 1 + v\alpha + \frac{v^2}{1.2}\alpha^2 + \frac{v^3}{1.2.3}\alpha^3 + \cdots\cdots + \frac{v^n}{1.2.3 \cdots n}\alpha^n + \cdots$$

а:

$$e^{v\alpha}.fv = fv + \alpha.vfv + \frac{\alpha^2}{1.2}v^2fv + \frac{\alpha^3}{1.2.3}v^3fv + \cdots\cdots$$

а беручи функцию творячу кождого члена сего рівнаня дістанемо з увагою на:

$$fg(e^{v\alpha}.fv) = \varphi(x+a) \text{ і } fg(v^n fv) = \frac{d^n\varphi x}{dx^n}$$

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi x + \alpha\frac{d\varphi x}{dx} + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d^2\varphi x}{dx^2} + \cdots\cdots$$

форма відома нам з рахунку ріжничкового.

Таких примірів застосованя повисшої теориї випроваджує автор більше.

Дальше є пару розвідок, в яких автор старає ся ріжні функциї виразити при помочи інтеґралів означених пр.:

5. **Виразити** $\varphi(x+yi)+\varphi(x-yi)$ **через інтеґрал означений.** (Oeuvr. compl. II. 222).

Часть дїйсну сеї суми $\varphi(x+yi)+\varphi(x-yi)$ можна на случай, коли φ є функциєю альґебраічною, льоґаритмічною, виложничою або коловою, представити в видї дїйснім і скінченім, та не мож сего зробити в случаю загальнім. За се мож саму суму представити при помочи означеного інтеґрала:

Коли $\varphi(x+yi)$ і $\varphi(x-yi)$ розвинемо після взору Taylor'а, то дістанемо на суму:

$$\varphi(x+yi)+\varphi(x-yi) = 2\left(\varphi x - \frac{\varphi''x}{1.2}y^2 + \frac{\varphi''''x}{1.2.3.4}y^4 - \cdots\cdots\right) \quad (1)$$

Щоби найти суму сего ряду, возьмім під увагу:

$$\varphi(x+t) = \varphi x + t.\varphi'x + \frac{t^2}{2}\varphi''x + \frac{t^3}{2.3}\varphi'''x + \cdots\cdots$$

Помноживши обі сторони рівнаня через $e^{-v^2t^2}$ та інтеґруючи від $t=-\infty$ до $t=+\infty$ одержимо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)\,e^{-v^2t^2}dt =$$

$$= \varphi x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}dt + \varphi'x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}.t\,dt + \tfrac{1}{2}\varphi''x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}.t^2dt + \cdots \quad (2)$$

а що:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}t^{2n+1}dt = 0$$

проте останутъ самі пaристі ріжнички функциї φx. Інтеґрали з паристими виложниками при t будуть мати вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2t^2} . t^{2n} dt = \frac{1.3.5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n v^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{v^{2n+1}} . A_n$$

По підставленю вартостий за них в рівнаню (2) одержимо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) e^{-v^2t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{v} \left(\varphi x + \frac{A_1}{2} \frac{\varphi'' x}{v^2} + \frac{A_2}{2.3.4} . \frac{\varphi'''' x}{x^4} + \cdots\cdots \right) \tag{3}$$

Помноживши се через $e^{-v^2y^2}.v.dv$ і з'інтеґрувавши від $v = -\infty$ до $+\infty$ дістанемо остаточно:

$$\frac{2y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v.dv.e^{-v^2y^2} . \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) e^{-v^2t^2} dt = 2 \left(\varphi x - \frac{\varphi'' x}{2} . y^2 + \frac{\varphi'''' x}{2.3.4} . y^4 \cdots\cdots \right) \tag{4}$$

Другий член сего рівнаня є рівний:

$$(\varphi x + y i) + \varphi(x - y i)$$

отже:

$$\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi) = \frac{2y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} vdv.e^{-v^2y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) e^{-v^2t^2} dt$$

дасть суму $\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi)$ виражену означеним інтеґралом.

6. **Числа Bernoulli'ого виражені при помочи означених інтеґралів і випроваджене звідси вираженє скінченого інтеґралу $\Sigma \varphi x$.** (Oeuvr. compl. II. 224).

Числа Бернулього суть то сочинники A_1, A_2, A_3 $\cdots\cdots$ в розвиненю функциї $1 - \frac{u}{2} \cot \frac{u}{2}$ на ряд після ростучих степений u:

$$1 - \frac{u}{2} \cot \frac{u}{2} = A_1 \frac{u^2}{2} + A_2 \frac{u^4}{2.3.4} + \cdots\cdots + A_n \frac{u^{2n}}{2.3.4\cdots\cdots 2n}$$

Вартости тих сочинників суть:

$$\frac{A_n}{1.2.3\cdots\cdots 2n} = \frac{1}{2^{2n-1} \pi^{2n}} \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots\cdots\cdots \right)$$

Возмім на увагу інтеґрал:

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1} dt}{e^t - 1} .$$

Розвинувши єго знаменник на ряд дістанемо:

$$\int \frac{t^{2n-1}dt}{e^t} = \int e^{-t}.t^{2n-1}dt + \int e^{-2t}t^{2n-1}dt + \cdots + \int e^{-kt}t^{2n-1}dt + \cdots$$

а позаяк:
$$\int_0^{\frac{1}{0}} e^{-kt}t^{2n-1}dt = \frac{\Gamma(2n)}{k^{2n}}$$

проте:

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^t-1} = \Gamma(2n)\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots\right) = \frac{\Gamma(2n).2^{2n-1}.\pi^{2n}}{1.2.3\cdots 2n}.A_n$$

отже:
$$A_n = \frac{2n}{2^{2n-1}}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^{\pi t}-1}$$

При помочи послїдного вираженя мож функцию $\Sigma\varphi x$ виразити означеним інтеґралом.

$$\Sigma\varphi x = \int \varphi x\, dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + A_1\frac{\varphi' x}{1.2} - A_2\frac{\varphi''' x}{1.2.3.4} + A_3\frac{\varphi^{v} x}{1.2.3.4.5.6} - \cdots$$

Підставивши за A_1, A_2, $A_3 \cdots$ вартости дістанемо (винявши перед скобки $\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t}-1}$):

$$\Sigma\varphi x = \int \varphi x\, dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t}-1}\left(\varphi' x\frac{t}{2} - \frac{\varphi'''' x}{1.2.3}\frac{t^3}{2^3} + \frac{\varphi^{v} x}{1.2.3.4.5}\frac{t^5}{2^5} + \cdots\right)$$

а що:
$$\varphi' x\frac{t}{2} - \frac{\varphi'''' x}{1.2.3}\frac{t^3}{2^3} + \frac{\varphi^{v} x}{1.2.3.4.5}.\frac{t^5}{2^5} - \cdots$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\varphi\left(x+\frac{t}{2}i\right) - \varphi\left(x-\frac{t}{2}i\right)\right]$$

проте $\Sigma\varphi x$ виразить ся рівнанєм:

$$\Sigma\varphi x = \int \varphi x\, dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t}-1}\,\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}i\right) - \varphi\left(x-\frac{t}{2}i\right)}{2i}$$

Суть також розвідки, в яких Абель подає способи інтеґрованя деяких рівнань ріжничкових. Пр.:

7. Інтеґрованє рівнаня ріжничкового $dy = (p + qy + ry^2)\,dx = 0$ **де** p, q, **і** r **суть функциями самого** y. (Oeuvr. compl. II. 229).

Рівнанє ріжничкове: $dy = (p + qy + ry^2)\,dx = 0$ (1) перейде через підставленє $y = zr'$ на:

$$(2) \qquad dz + (pe^{\int q dx} + re^{-\int q dx} z^2)\,dx = 0$$ т. є на рівнанє

виду: $$dy = (P + \Theta y^2)\,dx$$

а се рівнанє (1) дасть ся з'інтеґрувати, наколи $pe^{\int q dx} = are^{-\int q dx}$, бо тоді (3)

$$\frac{dz}{a + 2^2} = -\frac{p}{a} e^{\int q dx}.dx, \quad \text{отже:}$$

$$z = -\sqrt{a}\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \int p\,dx.e^{\int q dx}\right)$$

значить, що:

$$y = -\sqrt{a}.e^{\int -q dx}\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \int e^{\int q dx}.p\,dx\right) \tag{4}$$

Через підставленє (3) перейде рівнанє (1) на:

$$dy + \left[p + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dr}{r\,dx} - \frac{dp}{p\,dx}\right) y + ry^2\right] dx = 0 \tag{5}$$

а єго інтеґрал на:

$$y = -\sqrt{\frac{p}{r}}\,\mathrm{tg} \int \sqrt{rp}\,dx$$

або виразивши tang функциями виложничими на:

$$y = \sqrt{-\frac{p}{r}}\,.\,\frac{1 - e^{2\int dx\,\sqrt{-pr}}}{1 + e^{2\int dx\,\sqrt{-pr}}} \tag{6}$$

Пр. для $p = -r = \frac{1}{x}$ інтеґрал сей буде $y = \frac{1 - cx^2}{1 + cx^2}$.

Та помимо сего, що — як видко в деяких случаях — через відповідне підставлене рівнанє дасть ся з'інтеґрувати, то всеж догіднїйшим для інтеґрованя рівнань є чинник інтеґруючий. Коли примîром чинник інтеґруючий возьмемо $z = e^r$, то рівнанє (1) перейде на:

$$\frac{dr}{dx} = (p + qy^2)\frac{dr}{dy} + 2qy \tag{7}$$

Рівнане се взагалї не є лекше до розвязаня чим (1); та мож найти богато частних случаїв, в яких рівнане (7) дасть ся з'інтеґрувати.

Возьмім примірои за чинник інтеґруючий

$$\frac{1}{(\alpha+\beta y)^2},$$

тодї рівнане (7) перейде на:

$$dy + \left(\frac{\alpha'}{\beta} - \frac{\beta'}{\alpha} y^2\right) dx = 0 \qquad (8)$$

де α' значить $\frac{d\alpha}{dx}$ а $\beta = \frac{d\beta}{dx}$

причім α і β будуть звязані рівнанями:

$$\alpha' - \beta p = 0, \quad \beta' + aq = 0.$$

З'інтеґрувавши (8) дістанемо:

$$\int \frac{dy}{(\alpha+\beta y)^2} + fx = 0$$

або:

$$fx - \frac{1}{\alpha+\beta y} = 0.$$

Щоби найти fx, треба се послїдне рівнане зріжничкувати, виразити y при помочи x, тодї:

$$f'x = -\frac{\alpha'}{\alpha\beta^2}, \quad \text{a} \quad fx = -\int \frac{\beta'}{\alpha\beta^2} dx$$

а тодї інтеґрал рівнаня (8) буде:

$$\frac{1}{\beta(\alpha+\beta y)} + \int \frac{\beta'}{\alpha\beta^2} dx = 0$$

т. є.

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta^2\left(C - \int \frac{\beta'}{\alpha\beta^2} dx\right)}$$

Застосоване чинника інтеґруючого до розвязаня рівнань ріжничкових показує автор ще і на рівнаню:

$$(y+s)\, dy + (p + qy + ry^2)\, dx = 0$$

розвязуючи єго на кілька способів при помочи ріжних чинників інтеґруючих. Т. II. р. 236).

8. **Умовини потрібні, щоби функция більше змінних і їх ріжничок скінчених, — де ті змінні суть независимі одна від другої — була цїлковитою ріжничкою.** (Oeuvres compl. II. 9.).

Най U буде функциєю, що має бути цїлковитою ріжничкою а ΣU єї інтеґралом, то наколи $\Sigma \mathrm{U}$ має бути цїлковитим інтеґралом, тодї і $\delta\Sigma \mathrm{U}$ також ним буде.

Наколиж:

$$\mathrm{U} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \cdots\cdots \varDelta\mathrm{x}, \varDelta\mathrm{y}, \varDelta\mathrm{z}, \cdots\cdots \varDelta^2\mathrm{x}, \varDelta^2\mathrm{y}, \varDelta^2\mathrm{z}, \cdots\cdots)$$

то:

$$\Sigma\delta\mathrm{U} = \Sigma\delta\mathrm{x}\,.\,\mathrm{P} + \Sigma\delta\mathrm{y}\,.\,\mathrm{Q} + \Sigma\delta\mathrm{z}\,.\,\mathrm{R} + \cdots\cdots + \alpha$$

де:

$$\mathrm{P} = \mathrm{fx} - \varDelta\mathrm{f}'\big(\varDelta(\mathrm{x} - \varDelta\mathrm{x})\big) + \varDelta^2\mathrm{f}'\big(\varDelta^2(\mathrm{x} + 2\varDelta\mathrm{x} + \varDelta^2\mathrm{x})\big) - \cdots\cdots$$

$$\mathrm{Q} = \mathrm{f}'\mathrm{y} - \varDelta\mathrm{f}'\big(\varDelta(\mathrm{y} - \varDelta\mathrm{y})\big) + \varDelta^2\mathrm{f}'\big(\varDelta^2(\mathrm{y} + 2\varDelta\mathrm{y} + \varDelta^2\mathrm{y})\big) - \cdots\cdots$$

і т. д.; α означає часть поза знаком інтеґрованя.

Позаяк $\delta\mathrm{x}, \delta\mathrm{y}, \delta\mathrm{z}, \cdots\cdots$ суть независимі, проте $\Sigma\delta\mathrm{x}\,.\,\mathrm{P}$, $\Sigma\delta\mathrm{y}\,.\,\mathrm{Q}$, $\Sigma\delta\mathrm{z}\,.\,\mathrm{R}, \cdots\cdots$ не будуть цїлковитими інтеґралами, хиба що $\mathrm{P} = 0$, $\mathrm{Q} = 0$, $\mathrm{R} = 0$. А се значить, що щоби функция більше змінних і їх ріжничок скінчених була повною ріжничкою, потреба, щоби сповнили ся слїдуючі рівнаня:

$$0 = \mathrm{f}'(\mathrm{x}) - \varDelta\mathrm{f}'\left[\varDelta(\mathrm{x} - \varDelta\mathrm{x})\right] + \varDelta^2\mathrm{f}'\left[\varDelta^2(\mathrm{x} - 2\varDelta\mathrm{x} + \varDelta^2\mathrm{x})\right] -$$

$$- \varDelta^3\mathrm{f}'\left[\varDelta^3(\mathrm{x} - 3\varDelta\mathrm{x} + 3\varDelta^2\mathrm{x} - \varDelta^3\mathrm{x})\right] + \cdots\cdots$$

$$0 = \mathrm{f}'(\mathrm{y}) - \varDelta\mathrm{f}'\left[\varDelta(\mathrm{y} - \varDelta\mathrm{y})\right] + \varDelta^2\mathrm{f}'\left[\varDelta^2(\mathrm{y} - 2\varDelta\mathrm{y} + \varDelta^2\mathrm{y})\right] -$$

$$- \varDelta^3\mathrm{f}'\left[\varDelta^3(\mathrm{y} - 3\varDelta\mathrm{y} + 3\varDelta^2\mathrm{y} - \varDelta^3\mathrm{y})\right] + \cdots\cdots$$

$$0 = \mathrm{f}'(\mathrm{z}) - \varDelta\mathrm{f}'\left[\varDelta(\mathrm{z} - \varDelta\mathrm{z})\right] + \varDelta^2\mathrm{f}'\left[\varDelta^2(\mathrm{z} - 2\varDelta\mathrm{z} + \varDelta^2\mathrm{z})\right] -$$

$$- \varDelta^3\mathrm{f}'\left[\varDelta^3(\mathrm{z} - 3\varDelta\mathrm{z} + 3\varDelta^2\mathrm{z} - \varDelta^3\mathrm{z})\right] + \cdots\cdots$$

і т. д.

Се суть умовини конечні, а як автор дальше доказує, заразом і достаточні.

Рівнаня ті випроваджує автор ще і другий раз як умовини потрібні, щоби інтеґрал функциї даної був maximum або minimum. Є се іменно предметом розвідки: **Про maxima і minima інтеґралів.** (Oeuvres compl. II. p. 1.). Там окрім випровадженя повисших взорів, є ще і два частні приміри яко застосованє виведених рівнань.

Закінчене.

Так перейшов я по черзї всї працї Абеля, великі обємом, богаті ріжнородностию обсягів, а перворядного значіня в історнї розвою математики. Вже перші его працї з обсягу розвязуваня рівнань альґебраїчних мають епохальне значінє в альґебрі. Квестия, яка через два столїтя оставала непорішеною, а якій посьвятили свої працї майже всї визначні математики XVIII. столїтя, як Euler, Bézout, Lagrange, Vandermonde, Malfatti і иньші, квестия альґебраїчного розвязаня рівнаня пятого степеня, війшла тепер на нову дорогу. Стало ясно, що рівнаня степеня висшого чим четвертий, альґебраїчно розвязати не дадуть ся, а тим самим і дослїди на тім поли мусїли звернутись в иньшім напрямі; треба було шукати иньших функций, що при їх помочи рівнанє пятого степеня дало ся розвязати. Се й довело до розвязаня при помочи функций елїптичних.

Теория ґруп абелевих дала новий спосіб розвязуваня рівнань альґебраїчних, а дальше можність пізнаваня, коли рівнанє дасть ся розвязати альґебраїчно. Теория ся, піднята пізнїйше через Galois, розвинула ся широко і отворила нове поле до дослїдів над функциями аналїтичними. Не меньше цїнні є працї Абеля, що відносять ся до функций елїптичних, а період 1815 - 1829, на який припадає час твореня Абеля, мож безперечно назвати найважнїйшим в розвою теориї функций елїптичних. Прикмети функций елїптичних, виносажених теоремом множеня зложеного, по части доказані, а по части лиш (інтуіцийно) віщо перечуті Абелем, стались товчком до дальших праць в тім напрямі Jacobi, Hermite'a, Jouberta, Greenhilla, Webera, а передовсїм Kroneckera, який не лише доказав теореми Абля, але відкрив глубші відносини сеї науки до альґебри і теориї чисел. В тім множеню зложенім беруть початок „числа альґебраїчні“, які доперва в послїдних часах стали загальним добром ширших кругів математичних. Відкритє альґебраїчної природи рівнаня, відносячого ся до подїлу періодів функций елїптичних, основує ся на відношенях поміж коренями того рівнаня, відношенях, які відкрив Абель.

Єго дослїди над функциями переступними суть підставою до цїлої нової теориї функций і інтеґралів абелевих, а его славне твердженє о сумі інтеґралів абелевих є найбільше основним твердженєм в цїлій теориї функций альґебраїчних і їх інтеґралів. З ним вяжуть ся працї Riemanna і цїла теория поверхний рімановских, дальше праці Eulera, Weierstrassa, Neumanna, а також Clebscha і Gordana, який щасливо зробив *ту* початок до сполуки понять ґеометричних і аналїтичних.

В загалї у всїх галузях аналїзи слїдний вплив сего великого чоловіка.

Перемишль, вересень 1902. – май 1903.

Роля сталої, плинної і ґазової фази в хемічній рівновазї.

I.

Від коли хемія вступила на науковий шлях, від тодї датуєсь повстанє проблєму самої сути тої внутренної сили, що поводує хемічні переміни. Вже навіть старинна грецка фільозофія говорить про симпатию і антипатию атомів. Від того старинного погляду наука не поступала так дуже наперед, якби собі може дехто уявляв. Нинї тая симпатия атомів має лише нову наукову назву хемічного свояцтва чи посвояченя, котрим коротко збуваємо неясну для нас квестию. Но з другої сторони ґодї заперечити, щоби на тім поли забракло коли серийозної і совісної працї. Безперечний поступ у тім напрямі в порінаню з поглядами старинних зробили Бореллї і Лємері, котрі собі уявляли, що атоми мають гачковату структуру, дальше Нютон, Берґман і Бертолє́, котрі підряджують хемічні процеси явищам взаїмної атракциї маси, яко щось зовсїм анальоґічного спаданю каміня на верхню землї. Пізнїйше (в половинї XIX віку) панувала довгий час іпотеза Берцелїя о елєктричних силах, котра однакож, не причинилась зовсїм до поступу на дорозї вияснення властивої сути хемічної сили.

Нинїшне становище хемії в тїй квестиї є таке, що ті працї троха ще за передчасні, як на теперішний стан науки і від коли вчені зачали займатись не самою сутию, но лиш обсягом і сферою проявлюваня тої своячної міжатомової сили, а особливо в зависимости від внїшних фізичних условий якими є пр. масове відношенє складових тїл систему, температура і тиск, що впрочім зовсїм не сьвідчить о зрезиґнованю з того понадного для нас питаня, тільки о зрілім і строго науковім єго трактованю, отже від коли питаємось, не чому квaси інвертують цукор, но як го інвертують, і т. д.; від того часу прийшла наука до посіданя закладних і основних законів, котрі кермують хемічними переміками, хоч не подають нам найглубшої причини, чому заходить хемічна реакция взагалї.

Загально звісний факт, що наколи зробимо собі якийсь зовсїм здовільний уклад кількох ріжних субстанций, або як то тепер говорить ся : хемічний систем, то сейчас повстає у нїм якийсь міжчастинковий рух, якась для нашого ока несхіпна внутренна виміна, котра так перестроює поодинокі складові того системy, що їх вніїшні власности, визір, яким они проявляють ся нашим змислам, приймає зовсїм нові форм. І з тих власне нових форм ми пересьвідчаємось о внутреннїй переміні, о руху, котрим кермують неімовірно прості закони, до котрих математичного сформулованя приходимо по довгих, трудних обсервациях і експериментальних працях. Той рух устає по упливі якогось часу цілком, нові тїла (твори) не зміняють вже дальше своїх прикмет, словом настає рівновага.

На єствоване такої рівноваги звернули увагу вже Венцель (1777) і Бертоле (1799), котрі завважали, що границя стану рівноваги є зависимою від скількости реаґуючих творів.

Про таку рівновагу можна ще загально то сказати, що она доперва тоді наступає, як один або більше творів (тїл) перемінить ся зовсїм квантитативно в иньші твори о цїлком нових прикметах, про що нам сьвідчить найбільша часть перемін між мінеральними творами і з чого, як знаємо, зроблено як найобширнїйше примінене в аналїтичнїй хемії, або рівновага наступає вже в половині переміни, загально сказавши в певнїй лиш части, так, що вагово-масове відношенє хемічних творів по обох сторонах знаку хемічного рівнаня взросло до якоїсь характеристичної для того системy максимальної вартости в даних фізичних условях. В орґанічнїй хемії маємо незмірно численні приміри, де реакция здержує ся вже в половині переміни одних хемічних творів на иньші.

Дуже цікавим є дальше фактом, що єще в часї, коли о математичнім трактованю хемічного свояцтва не могло бути й бесїди, формовано собі повні глубокої інтуїциї погляди і прочувано гейби інстинктово, що наука мусить вглубитись в незмірно дрібний сьвіт частинок і там студиювати напруженя між ними, бо в тих лиш ріжничкових відношенях зсумованих в системи дїлаючі фізично на наші змисли і доступні нашій обсервациї і експериментациї, є напрям і сила з якою відбувають ся хемічні явища. Досить лиш пригадати дві перші з шістьох тез Guyton'a de Morveau виголошених ще в 18. віку, а іменно:

I). Corpora non agunt, nisi fluida. Хемічна лучба́ не наступить, єсли бодай одно з тіл не є так плинним, щоби єго найдрібнійші частинки могли підлягати хемічній силї, котра їх має з собою получити.

II). Тая сила свояцтва може ділати виключно між найдрібнійшими частинками творів.

III). . . . . і т. д.

Як бачимо автор несьвідомо, мовби в прочутю витичує науцї дорогу, вказує область, в котрій попросту бачить фізичну можливість слїдженя за загальними законами хемічних перемін і реакций. Ту область представляють очевидно реакциї, що заходять виключно в ґазових системах, одноцїльних на скрізь, де частинки самі собою вимішують ся безперестанно.

Ґазовий стан материї, та єї крайна форма, де всяке притягане між частинками, терте і т. д. є зовсїм виключене, представляє найдогіднїйші условя для аналїтичного студиєваня хемічних сил, приміри хемічних перемін будуть отже в ґазових системах самі собою найпростїйші, тим то не диво, що наука мусїла звернутись вперед до перестудиєваня тої области. Туда ступаючи випровадили Ґульдберґ і Ваґе (1865) перший основний закон діланя мас (Massenwirkung), дальші епохові працї St. Claire-Deville'а (1866) і Горстманна (1865—1870), що впроваджують в хемію незвичайно цїнну термодинамічну доктрину, вибрали собі за субстрат явища диссоцияциї, тему що правда дуже обширну, бо сягаючу далеко поза ґазові переміни, всеж таки виходячу і обертаючу ся коло тих послїдних.

Тому я уважаю за відповідне випровадити вперед коротенько закон діланя мас на основі кінетичної теориї ґазів.

Частинки материї, що находить ся в тій фазї є в найбільшім поступнім руху, отже бють об окружаючі стїни і о себе незмірно часто, ослабляють через те взаїмну притяжну силу поодиноких атомів, котра їх держить в частинцї, словом бомбардують ся взаїмно, через що в разї присутности кількох ріжних хемічних творів спроваджують таку зміну в данім системі, що нагромаджують велику скількість свобідних атомів, котрі відбувають незвичайно скорі рухи.

Но обопільне свояцтво первнів, що найшлись тим способом in statu nascendi не перестає ту дїлати, отже в слїд за тим розбиті атоми сполучують ся знов з собою, ґрупуючись лиш трохи відмінно і творячи відповідні комбінациї.

Больцман видить навіть теоретичну можливість випроваджуваня при помочи рахунку правдоподібности як раз тих нових творів, котрі мусять повставати через комбінацию атомів первнів присутних, навіть їх чисельне до себе відношенє (що має основуватись на первісних вагових відношенях).

Чим сильнійше буде розбитє атомів в частинках, від котрих виходимо, тим сильнійше може заходити реакция в напрямі твореня нових тіл; а то розбитє є в певній зависимости від скількости взаїмних ударів між частинками. Тая знов скількість є при близших даних вільних условях точно означеною, хоч для нас скількостю не знаною. Однак те ще нас не виключає по крайній мірі від якостного аналізованя тих відносин. Що тут заходить проста пропорциональність між степенем переміни а скількостию ударів в одній пр. секунді, то річ певна, а всякий сумнів є виключений.

На частість взаїмних частинкових ударів в данім ґазовім системі вливає з осібна присутність тіл A_1, A_2, A_3, і т. д., а в сумі буде та загальна скількість зависима від продукту концентраций всїх тіл.

Наколи степень переміни будемо міряти скількостию тїл, що повстають або зникають в певнім часї пр. також в одній секунді (в практиці бересь звичайно мінуту) то спровадимо цілу студию хемічної динаміки до слїдженя скорости переміни *(v)*. Тая скорість, як бачимо, буде все пропорциональною до продукту концентраций всїх ділаючих тїл, котрий напишім $c_1\ c_2\ c_3$ і т. д. Буде отже лиш пропорциональною, а рівною доперва тоді, коли той продукт $c_1 . c_2 . c_3 ...$ помножимо через якусь сталу вартість k, котру можемо назвати сочинником скорости, котрої величина чи абсолютна чисельна вартість мусить зависїти від безглядної температури, від меньшого чи більшого свояцтва атомів, з котрих новий твір має зложити ся, якої абсолютна вартість, словом буде математичним виразом имовірности, що реакция в тім напрямі і в тім степени буде взагалї заходити.

Нові ґазові твори, що повстають при таких перемінах ділають зовсім так само як попередні, з котрих они повстали, отже бють об себе і стїни, бомбардують ся і викликують через нове розбиванє частинок на атоми in statu nascendi реакциї цїлком противні, що стремлять до витворби тіл, з котрих ми вийшли, реакциї звані в термодинаміці відвертні*). (Umkehrbare, reversible Reaktionen).

---

*) Ту треба замітити, що лиш на таких відвертних реакциях в ґазових системах можна було оперти випровадженє закону ділання мас, бо рівноваги які ту бу-

Те нове наворотне дїланє буде, ясна річ, так само пропорціональне до продукту концентрациї творів, що повстали при першій переміні, то є до їх масової вартости в одиниці об'єму.

В загалї, єсли реакция поступає наперед в якімсь напрямі, то скорість з якою під обсервацию взятий систем стремить до стану рівноваги, є вже ріжницею двох скоростий $v - v'$, з котрих кожда дїлає в цїлком противнім напрямі. Нї одної нї другої не зможемо нїколи експериментально знайти. Ми можемо лиш ствердити, що ріжниця між противними що до себе скоростями є доволї великою, тодї, як виражаєм ся, хемічна реакция поступає. Доперва, коли ріжниця приймає вартість нулї, або парцияльні скорости зрівнують ся, зникає на око всякий рух і виміна, а на їх місце наступає зглядна, що так скажу, рівновага. Зглядна тому, бо після погляду кінетичної теориї рівновага нїколи не може прийти. Безглядна хемічна рівновага в ґазових системах, ідентична з ундуляцийною або термічною смертию може настати доперва при температурі абсолютної нулї, — 273° Цель., де є виключений всякий рух частинок. Кождий материяльний систем, що находить ся в температурі понад — 273° Цель. є вже тимсамим в молекулярнім руху з котрого при ріжницях в напружінях енерґії того самого рода, в напруженях анальоґічних до ріжниці електричних потенциялів, ріжниці в температурі двох тїл в однім системі, ріжниці в віддаленях двох тїл від осередка притягаючої атракцийної сили, випливає вічна і ненастанна виміна, стремлїнє до рівноваги, вирівнуванє тих хемічних напружений. Та сили, які ту проявляють ся, надибають і поконують найріжнїйші опори, отже виладовують ріжницю чи злишку енерґії в найріжнїйші напрями і форми а через те викликують нечувану ріжнородність то фізичних, то хемічних явищ, котрими мертва та жива природа дїлає на наші змисли, на нашу сьвідомість. В послїдних десятках лїть повстала в хемії нова наука, що попросту вдираєсь в ту область, що виясняє нам ґенезу того богатства форм, в яких як неорґанічне кому, так орґанічне житє нам проявляєсь, ба не лиш ґенезу в загалї, але намагаєсь випроваджувати з математичною точностию конечність прояву таких а таких конкретних форм. Наука та заініцийована і математично уґрунтована американьским хеміком Джібсом,

---

вають, є справдїшні, реальні, що дають ся осягнути з обох боків знаку хемічного рівнаня, в противставленю до множества таких припадків, де рівноваги є фальшиві, як пр.

$$2H_2 + O_2 \rightleftarrows 2H_2O$$

в низких температурах.

називаєсь тепер наукою о фазах і про ню як раз я бажаю в тій вступній студиї висказати кілька загальних, признаю, під зглядом практично-наукової вартости банальних поки що гадок.

Отже вперед вертаю до дальшого характеризованя хемічної рівноваги і реасумую ще раз коротенько дотеперішні розважуваня реакций між ґазовими творами. Ріжниця $v - v'$ називаєсь скоростию переміни, а продукт концентрациї поодиноких ґазових тіл в системі, що стоять по одній стороні знаку хемічного рівняня, і котрих та активна маса числить ся тепер ґрамово частинковими або молярними одиницями, помножений ще через сталу „k", є виразом одної з тих парцияльних скоростий v або v' —

Отже випадкова

$$V = k\ c_1\ c_2 \ldots - k'\ c'_1\ c'_2 \ldots$$

При рівновазї зменьшуєсь она до нулї, тоді

$$k\ c_1\ c_2\ c_3 \ldots = k'\ c'_1\ c'_2\ c'_3 \ldots$$

а відношенє k до $k' = \frac{k}{k'}$

можна знайти з рівняня

$$\frac{k}{k'} = \frac{c'_1 .\ c_{,2} \ldots}{c_1 .\ c_2 \ldots}$$

отже тимсамим представити знаними нам (з відповідної хемічної аналїзи систему має розуміти ся) концентрациями. Той квот, як показує експериментальний дослїд має сталу вартість дла кождого хемічного системи при незмінній температурі. Називають єго тепер сочинником рівноваги і означують великим K.

$$K = \frac{k}{k'} = \frac{c'_1 .\ c'_2 \ldots}{c_1 .\ c_2 \ldots}$$

Тут отже маємо вже цїлком точно означені математичні взаємини між k_1, k'_1, c_1, c_2, і т. д представлені незвичайно простим рівнанєм. Через відповідну дискусию того рівняня випроваджуємо всї заключеня, котрі можуть для нас мати практичну вартість і позволять нам пояснити собі справу, реґульовати і бути попросту панами над напрямом хемічних реакций. Один з таких заключеній пр. той що степень переміни в одиниці часу не зависить від абсолютної скількости поодиноких складових творів, лиш від їх активних мас з осібна, иньшими словами концентрациї або скількости маси в одиниці обєму, є основним законом хемічної статики і називаєсь законом дїланя мас.

В дотеперішних розважуванях, що мали нас допровадити до наведеного математичного взору стояли ми на тім, що в станї рівноваги міждробинний рух дальше відбуває ся, що складні дальше на себе впливають і що в тім стані відворотні собі переміни зносять ся ідеально. То можна коротко ще так назвати, що хемічна рівновага в загалї не є статична, лиш динамічна.

Рівновагу між чистою водою а єї парою толкує Клавзіюс в той спосіб, що через означений меннїск води перелітають безперестанно частинки в противних собі напрямах, але так, що як раз тілько ґазових частинок затоплюєсь моментально в воді, кілько їх видобуваєсь з плинної части в ґазовий простір.

Зовсім так само можна собі толкувати рівновагу між иньшими ґазовими творами, плинними, або сумішкою одних і других. Но треба застеречись, що тії закони, заключеня не вийшли з чисто теоретичної дедукциї а потім доперва зістали доказані експериментально, лиш як раз навпаки, з дослїдних фактів, з дуже великого материялу, в котрім є перестудийовані найріжнїйші хемічні реакциї, меньше або більше скомплїковані, доходить ся до емпіричних математичних взорів, а доперва в дальшій консеквенциї до погляду на суть хемічної рівноваги, котра тим характеризуєсь, що в кождім моментї переміна в обох напрямах є рівна.

Тому закон дїланя мас треба нинї уважати за дослїдний, експериментальний факт, независимий зовсїм від теоретичної кінетично-частинкової спекуляциї; наколи давнїйше примінене кінетичної теориї до випроваджуваня нинї нам знаних реляций було узнаване принайменше занадто сьміле і невистарчаюче, то тепер хемічна статика і кінетика як найвимовнїйше потверджує кінетичні погляди на сталу, плинну і ґазову материю, так що ми нинї можемо нею навідворот послугуватись до вияснення собі взагалї напряму і степеня хемічних перемін, до вияснення поки що більше образового нїж беззглядно правдивого *).

Випадалоби тепер подати ту деякі приміри, котрі би мали в конкретний спосіб ілюструвати випроваджуване а опісля по передискутованю практичне примінене математичних рівнаний, що формують природні закони, після котрих відбувають ся всякі явища в природі, а специяльно хемічні реакциї.

Та при теперішнім станї науки є перестудиєване вже так велике число специяльних хемічних реакций, що представити менї їх ту фізично неможливо. Я передискутую, а радше згадаю лиш про

---

*) То буде, ясна річ, зависїти від конкретних припадків. Однї меньше скомплїковані дають ся легко кінетичною теориєю пояснити, иньші вимагають ще іпотетичних преміс. Один з таких типових примірів наводжу низше.

кілька рефлексий, які насувають ся при читаню хемічної динаміки. Вперед кілька слів, про чисто ґазові системи.

На реакції повставаня йодакового квасу з водня і ґазового йоду, перестудиєваної в тім*) напрямі Готфиєм (Hautefeuille), пізнійше Лемоаном (Lemoine), що представляєсь хемічно:

$$H_2 + J_2 \rightleftarrows 2HJ \text{ і т. д.}$$

видимо, що з двох ріжних, що до хемічної природи, частинок повстають дві рівні. Єсли тая реакция відбуває ся в замкненім системі, зі всїх боків, то замість парцияльних концентраций, котрі були очевидно вихідною точкою при таких емпіричних студиях можна брати на основі ґазового закону Дальтона, пропорциональну їм вартість парцияльного тиску кождого з тих трех ґазових тїл.

Парцияльний тиск для H_2 назначім p_1, для J_2 p_2, а для HJ p, то після висше представленого загального закону в станї рівноваги маємо

$$v = v'$$

$$\text{або } k.\ p_1 : p_2 = k'.\ p.\ p. = k'.\ p^2.$$

$$\text{а з відси } \frac{k'}{k} = \frac{p_1\ p_2}{p^2}$$

Отже стала рівноваги, котру ван'т Гоф (van't Hoff) називає попросту сталою свояцтва, велике K буде $= \frac{p_1\ p_2}{p^2}$ і буде змінятись лиш враз з температурою системи. Ту згадаю коротенько, що названий хемік потрафив зробити дуже важний крок вперед до вияснення хемічного свояцтва через впроваджене в математичну реляцию сталої K з температурою. Загально сформулював він ті відношеня в той спосіб:

При підношеню температури наступає переміна, що спротивляєсь, протиділає тому підношеню, то є наступає масове пересуване рівноваги в тім змислї, що наступає реакция, котра в своїм пробігу абсорбує теплоту системи. Дальше, виходячи з того погляду на хемічну реакцию, що то є енерґетична прояви, зовсїм анальоґічна до такої фізичної переміни як топлене сталих тіл, пароване або кипінє течий і т. д., примінив він ту термодінамічні закони, особливо другий основний закон, що модифікує переміни одних форм енерґії на иньші, через що прийшов до математичної формулки

$$\frac{d\ l\ n\ k}{dT} = -\ \frac{q}{RT^2}$$

де K є сталою рівноваги, котрої абсолютна вартість, як знаємо вже,

---

*) Lemoine, Ann. d. chim. et de Rys. [5] 12. 145; Bodenstein, Zeitschr. f. Physik. Chem 22, 1.

зависить виключно від концентрациї поодиноких реаґуючих творів, q означає вглинену (заабсорбовану) скількість теплоти, а R рівняєсь сталій для ідеальних ґазів (= 1.99 cal.)

Наколи той ґазовий систем стиснемо і зменшимо его обєм на n-ту часть первісної вартости, тодї парцияльний тиск поодиноких складових збільшаеть ся на n-ту вартість. Дістанемо тодї

$$\frac{n\, p_1 .\ n\, p_2}{np.\ np} = \frac{p_1\ p_2}{p^2} = K.$$

Звідси видимо, що внїшний тиск не мае ту найменшого впливу на рівновагу. Зовсїм противно мае ся річ при розкладї, диссоцияциї ґазів на лекші фізично частинки.

Ту з одного хемічного індивідуум A, возьмім з одного моля повстає n_1 молїв субстанциї A_1, $+$ n_2 молїв субст. A_2 $+ \ldots +$ і т. д.

Стала рівноваги K, котра ту називає ся сталою диссоцияциї має вартість

$$K = \frac{p_1^{n_1}\, p_2^{n_2} \ldots}{p}$$

де p_1, p_2, p_3,.... і т. д. означує парцияльні тиски ґазів, що ту повстають, (p парцияльний тиск першого ґазу), n_1 n_2.... число молїв тих нових індувідуів з окрема. Збільшенє внїшного тиску, як то дуже легко порозуміти з анальоґії до попередного случаю, впливає дуже сильно на стан хемічної рівноваги. А імено чисельник.... росте дуже скоро вже не лиш через збільшенє парцияльних тисків p_1 p_2.... і т. д. але також, через вартість експонентів n_1, n_2...., котрі по найбільшій части в практицї, в призначеню до типоввих розкладових перемін мають вартість більшу від 1, тодї як знаменник мусить збільшатись виключно своїм активним концентрованем, своїм парцияльним тиском.

Дальше дослід показує, що вартість цїлого дробу не зміняєсь пропорциоально до зміни чисельника викликаної внїшним атмосферичним тиском, бо вона має сталу вартість K, отже з того виходить скорий зріст активної вартости знаменника, або первісного ґазу в порівнаню з тамтими. Словами: внїшний атмосферний тиск впливає сильно на стан ґазової диссоцияциї.

Берім річ загальнїйше, отже втягнїм ту і перший примір:

$$H_2 + J_2 \rightleftarrows 2HJ$$

то дістанемо правило:

Стан хемічної рівноваги є независимим від внїшного тиску лиш в тім случаю, як вчасї хемічної реакциї не зміняєсь число частинок, як сума молїв по обох сторонах знаку хем. рівнаня є тасама, або (на основі законів Ґе-Лїссака і ипотези Авоґадри) як об'єм ґазового системну не зміняєсь.

Иньшими словами можна схарактеризувати вплив вн̈ішного тиску, а додам мимоходом і температури, на стан хемічної рівноваги: збільшенє тиску сприяє реакциї, при котрій наступає контракция первісного обєму, а підвисшуванє температури сприяє реакциї, при котрій абсорбує ся теплота.

Не можна здержатись, щоби не навести в тім власне місци кілька гарних рефлекций проф. Оствальда, крайного енерґетиста як го називають, на тему сути хемічної енерґії.

Всї переміни і явища в природї не є нїчим иньшим як ненастанними змінами енерґетичних станів. Наколи ми в станї змірити ті зміни після якости і скількости, тодї доперва можемо їх науково означити і здефінювати. Цїлий вн̈ішний сьвіт, що нас окружає, можна уважати за уклад, в котрім енерґія найріжнїйших форм є розложена в означений собі спосіб в просторі і часї. При таких феноменах як переходженє одних хемічних тїл в иньші переміняєсь хемічна енерґія майже все в иньші форми. В які? запитаємо. Проф. Оствальд так відповідає. При всїх хемічних реакциях зміняєсь вічно концетрация присутних в системі творів. Ті як раз зміни становлять цїлу суть тих реакций. З того легко зрозуміємо, що форма енерґії, яка ту проявляє ся, буде енерґією обєму, котра знов входить в загальну енерґію механїчну. Згадані дві еї форми т. є обєму і хемічна входять в себе взаїмно, і тим поводують вн̈ішні явища. Отже нова наука, що називаєсь хемічною механїкою, заслугує вповнї на тую назву, бо наука о хемічній рівновазї є справдї наукою про реляциї між механїчними а хемічними формами енерґії.

На закінченє згадаю ще про найважнїйші способи якими нинї слїдить ся поступ хемічних реакций. В одноцїльних ґазових системах найвизначнїйшу аналїтичну ролю при означуваню масових відношений мають:

1) звичайні т. зв. хемічно-вагові методи або волюметричні і розуміє сь ґазометричні о скілько дають примінити ся.

2) визначуванє густоти, котра зміняєсь всюда там, де зміняєсь обєм або що на те саме виходить скількість ґазових молїв в наслїдок хемічної переміни.

При диссоциациї та друга метода є дуже корисна. Специфічна вага системну малїє враз із ростом диссоциациї, бо об'єм ґазів збільшуєсь при тім дуже сильно, хоч їх маса лишаєсь все та сама.

Припустім, маємо 1С0 частинок або молїв. Якась їх дробова частина α, диссоциюєсь на n нових молїв, отже їх нове число виносить тодї 100 n. α. Нездиссоцииованих лишилось 100 $(1 - \alpha)$. По скінченій диссоцияциї в станї рівноваги сума всїх молів збільшить ся на

$$100(1-\alpha)+n\,100\,\alpha=100\left[1+(n-1)\,\alpha\right].$$

або инакше пропорциональний приріст маєсь як $1:1+(n-1)\,\alpha$.

Означім тепер специфічну вагу первісного ґазу через δ, здиссоцииованого $\varDelta$, то на основі ипотези Авоґарди маємо пропорцию

$$\frac{\varDelta}{\delta}=\frac{1}{1+(n-1)\,\alpha}$$

а звідси

$$\alpha=\frac{\delta\cdot\varDelta}{(n-1)\varDelta}$$

В той спосіб через визначенє питомого тягару ґазу перед і по здиссоцииованю, приходимо незвичайно простою методою до найденя α, т. є. молярного степеня розкладу.

Дальші фізикальні методи визначуваня квантитативного пробігу диссоцияциї можуть основуватись на помірах скорости еффузиї ґазів, специфічної теплоти при сталїм тиску C_p, проводженю теплоти перед і по диссоцияциї, часом навіть зміни барви ґазу.

Однак найоригінальнїйший спосіб квантитативного слїдженя диссоцияциї ґазових творів подав Девіль, про котрого я вже згадав, що він впровадив термодинамічну доктрину в хемію. Наведенє тих метод не відповідає загальному характерови розвідки, тому згадаю про них дуже коротенько.

Девіль студиєвав диссоцияцию CO^2 на $CO + O$ в дуже високих температурах. А позаяк про безпосередні експериментальні дослїди ту тяжко навіть подумати, проте примінював він ту термодинамічну методу. Щоби вперед випровадити одну типову і дуже важну формулку, що виражає вплив температури на кальоричну прояву якоїнебудь хемічної реакциї, заложім слїдуюче.

Наколи ми якусь хемічну реакцию переводимо в температурі t_1, то єї кальоричний затон*) най виносить U_1 cal.

Тая сама реакция переведена в температурі t_2 дає на вні U_2 cal.

Подумайно собі тепер слїдуючий замкнений процес.

Вперед заходить переміна в температурі t_1, отже дістаємо на вні теплоту.................. $+U_1$ cal.

---

*) Wärmetönnung.

Тепер відвисшуємо температуру систему з t_1 на t_2, до чого зуживаємо................ $(t_2 - t_1) c_1$ cal. де c_1 означає спец. теплоту продуктів хемічної реакциї.

В тім місци уявім собі, що реакция відвертає ся і переходить термодинамічно відвертним способом очевидно цїлий час при сталій температурі t_2 в противну сторону. Експериментально завважаєму тодї абсорбцию теплоти, що виносить................ $- U_2$ cal. Наконець остудїм систем первісних тїл, котрі ту зреґенерувались, назад до температури t_1, то достанемо тодї................ $+ (t_2 - t_1)c$ cal. де c означає спец. теплоту систему, в котрого ми вийшли.

З принципу захованя енерґії можна вже теоретично догадуватись, що в тім замкненім процесї не можна на вні анї дістати анї стратити жадної теплоти, бо ту вертаємо до того стану з котрого ми вийшли. (Закон Гесса 1840). Отже можна сьміло написати:

$$U_1 - (t_2 - t_1) c_1 - U_2 + (t_2 - t_1) c = 0, \text{ також}$$

$$U_1 + (t_2 - t_1) c = U_2 + (t_2 - t_1) c,$$

$$\text{або } c - c_1 = \frac{U_2 - U_1}{t_2 - t_1}$$

що можна висказати словами:

Злишка специфічної теплоти реаґуючих тїл над спец. теплотою тїл, що повстають при реакциї, проявляєсь нам на вні, експериментально, приростом кальоричного затону або ефекту на 1^0 підвисшеної температури.

Послїдна формулка має, як легко догадатись, перворядне місце в термохемиї. Застановім ся тепер над практичним приміном того взору на реакцию:

$$2\,CO^2 \rightleftarrows O_2 + 2\,CO.$$

c може ту означати лиш спец. теплоту ґазу CO_2

c_1 „ „ „ „ „ „ сумішки $2\,CO + O_2 + n\,CO^2$,

t_1 най означає комнатну температуру $+ 15^0$ Цель, а t_2 здовільно ставлену, в тім випадку степеновану що раз висше аж до 3000^0 Цель.

U_1, представляє ту кальоричний ефект при спаленю CO на CO^2 при 15^0 Цель., або висказуючись яснїйше при оксидациї $2CO + O_2$. Тодї U_2, котре означає теплоту що вивязуєсь при тій самій реакциї, але в температурах 100^0, 1000^0 2000^0, 3000^0 Цель. і т. д. можна з послїдної формулки дуже легко обчислити на тій основі, що: 1) c і c_1 зміняють ся лиш дуже незначно при ріжних температурах

2) ріжниця між c і c_1 є взагалі дуже невелика 3) абсолютна вартість c_1 сумішки $2CO + O_2 + nCO_2$ независить практично від n.*)

Тепер пригадаймо собі формулку ван т'Гофа

$$\frac{d \ln k}{dT} = - \frac{q}{RT^2}$$

котра представляє нам сталу рівноваги K яко функцию абсолютної температури, або наколи та послїдна є, як в нашім конкретнім случаю знаною, стало здефіньованою (бо здовільно вибраною), яко функцию q т. є. кальоричного затону реакциї, Той послїдний уміємо вже обчислити для кождої температури, отже по вставленю q і T в формулку ван т'Гофа можемо K, або масові відносини CO^2, CO і O_2 дуже легко обчислити інтеґральним рахунком. Девіль подає ту табелю:

Із 100 молїв CO^2 здиссоциовало ся:

при внішнім тиску	0.001	0.01	0.1	1	10	100	атмос.
в темп. 1000° Цель.	0.7	0.3	0.13	0.06	0.03	0.015	
1500° „	7	3.5	1.7	0.8	0.4	0.2	
2000° „	40	12.5	8.0	4.0	3.0	2.5	
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . .
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . .
4000° „	97	90	80	63	45	25	

Про велике значенє тої табелї для металюрґічної технїки досить згадати.

Та мушу йти дальше. Нїм приступлю до розтворів подаю один еще примір реакциї, між ґазовими, але вже і одним сталим твором. Випадок під кождим зглядом типовий, тому буду старатись єго докладнїйше обговорити.

Горстманн студиєвав іменно закон дїланя мас на диссоцияциї сталих тіл. Яко вихідну точку взяв сублїмацию амонового карбамінїяну.

$$CO\begin{cases} ONH_4 \\ NH_2 \end{cases} \rightleftarrows 2NH_3 + CO_2$$

---

*) Треба розуміти в тім змислї, що тую теоретичну формулку можна ужити лиш при виповненю тих трех условій, бо лиш тодї реакция є відвертна термодинамічно.

Тая материя улїтає при рівночасній майже диссоцияциї пар, котрі, що й но повстають з якимсь означеним напруженєм при даній температурі.

Абсолютна вартість того сублїмацийного напруженя малїє враз з тим, як нагромаджують ся пари над сталою материєю, наконець приймає вартість нулї в хвили, як приходить рівновага, то є тілько частинок вилїтає в ґазовий простір, кілько їх згущає ся на верхнї сталого твору в туюж форму.

Поки що, розгляньмо реакцию, що заходить лиш в ґазовій фазї, а іменно сам процес диссоцияциї. Означім собі парцияльний тиск першого тїла π, другого p_1, третого p_2, то для реакциї.

$$CO \begin{matrix} / ONH_4 \\ \backslash NH_2 \end{matrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{matrix} 2NH_3 + CO_2$$

Закон дїланя мас виражуєсь математично

$$k\pi = p_1{}^2 . p_2$$

як то ясно виходить з молярного відношеня тїл в тім хемічнім рівнаню.

Парцияльний тиск π не має сталої вартости в ґазовім станї, бо зменьшує ся дуже скоро враз з підношуванєм температури, але наколи находить ся і стала фаза в системі, тодї вже не зміняє своєї беззглядної вартости, доки сталий твір зовсїм не зникне. Отже в рівнаню $k\pi = p_1{}^2 p_2$ лїва сторона не змінає своєї чисельної вартости, а через те саме і права сторона $p_1{}^2 . p^2$ задержує сталу вартість. Максимальну вартість диссоцияцийного напруженя означім через P. На амоняк припадає тодї після закону Дальтона $^2/_3$ P, а $^1/_3$ P на CO_2. Огже стала вартість $k\pi$ виносить тодї $(^2/_3 P)^2 \, ^1/_3 P = \frac{4}{27} P^3$, де P дає дуже легко змірити ся манометром, а тим самим експериментальне ствердженє поставленої формулки є можливе.

Тепер дуже легко порозуміти, що нове впроваджуванє амоняку до системи впливає далеко більше на обнижуванє степеня диссоцияциї ґазового амонового карбаміняну, нїж додаток CO^2. Отже дістаємо ту дуже важне заключенє, котрого анальоґії при иньших хемічних реакциях можуть мати принціпіяльну вартість в хемічній практицї.

Ще одно заключенє, дуже загальної натури, насуваєсь при розважуваню того клясичного приміру. Парцияльний тиск π є ту супроти p_1 і p_2 дуже малий, що константуємо експериментально, (через хемічну аналїзу), тому сублїмация сталого твору буде ту розмірно дуже скоро поступати. Коли знов противно при сублїмациї якого небудь твору пари, що виходять, будуть досить поволи диссоцийовати ся, тодї сильно також зменшить ся зглядне темно процесу сублїмациї.

Той факт може на око видатись досить дивним, коли зважимо, що при диссоцияциї повстає з одної частинки дві або й більше нових частинок, з котрих кожда має свій ґазовий тиск. Отже мимо того, що загальний тиск в замкненій атмосфері системy взростає дуже сильно, сублїмация не зменшуєсь, лиш навпаки поступає скоршим темпом.

Знамениту того анальоґію маємо при процесї розчинюваня сталих тїл в иньших плинних, котрих сила розчинюваня йде в дуже численних случаях рівнобіжно зі степенем електролїтичної диссоцияциї частинок, що розпускають ся.

Та вhішна суперечність вияснить ся нам зовсїм, як собі з другої сторони пригадаємо, що вплив вhїшного атмосферного тиску на стан рівноваги системy є зовсїм инший від парцияльного тиску твору, котрий своєю присутностию і участию в реакциї нормує пересув масової рівноваги в одну або другу сторону хемічного рівнаня відповідно до постуляту закону дїланя мас.

Перейдїм гадкою ще раз ті скомплїковані відношеня.

Кождій зміні температури відповідмє якась зміна максимального сублїмацийного напруженя сталого карбамінїяму на ґазовий. Скорість з якою той простий систем стремить до свого питомого максимального напруженя в даній температурі або що на одно виходить, скорість сублїмациї, зависить виключно від напруженя нагромаджених пар карбамінїяму в системі, як то зовсїм ясно виходить з енерґетичного понимaня скорости переміни і з кінетичного понимaня динамічної рівноваги.

Після закону Дальтона домішуванє яких иньших, „чужих“ ґазів пр. азоту, кисня, а в нашім випадку навіть NH_3 або CO^2 не може мати найменшого безпосередного впливу на зміну максимального напруженя ґазового карбамінїяму в сумішцї, що ту при сублїмациї повстає, або иншими словами не зміняє сталої „K“ реакциї самого сублїмованя, котра збільшуєсь лише від висшої температури.

Так отже підвисшуванє температури збільшує той тиск в наслїдок інтензивнїйшої сублїмациї, но здругої сторони, пригадаймо собі, мусить також зменшувати єго, а то по поводу майже рівночасної диссоцияциї тих частинок на NH_3 і CO^2, при чім стала „K“ процесу диссоцияциї має вже в тих условях доволї велику вартість.

Поки не зникне стала фаза будуть зносити ся ідеально тії два собі противні впливи, котрих інтензивність може більшати при енерґічнім допроваджуваню теплоти до системy дуже нагло. Виразом тої незвичайно займавої динамічної рівноваги хемічних сил є ту тая вислїдочна сталість парцияльного тиску ґазових частинок карбамініяну, котра так довго задержить ся, доки більшане енерґії систему через абсорбцию внїшної теплоти не перемінить цїлком сталої материї на здиссоцийовані ґазові частинки.

Такий обяв припадкової сталости тиску повтаряєсь в теоретичній хемії дуже часто і подібних примірів можнаби ту много ще навести.

Вже Ґульберґ і Вааґе завважали, що в гетероґенїчних системах, то є таких, де хемічні твори находять ся при собі в ріжних аґреґатах, активна маса сталих складнїв є зовсїм незмінна. В послїдних часах Нернст поставив іпотези в дусї кінетичної теориї, що она є рівноважна а радше просто пропорциональна до скількости частинок сталої материї, що переходять в означених очевидно условях в розчин або як в наведенім примірі в ґаз при сублїмациї. Дуже влучно згадує Русбум про дотеперішне поясноване тих відношений в коротенькім, але знаменитім історично-критичнім вступі до своєї працї, котрої частину оголосив перед двома роками*).

Передовсїм пригадує, що можна їх собі пояснювати двояко, а іменно за Нернстом кінетично або термодинамічно „фазовим законом“, що відкрив Джібс.

Наведений припадок сублїмациї я старав ся роз'яснити як найдокладнїйше кінетичною теориєю.

На зовсїм подібний лад толкує ся нинї диссоцияцию угляну вапнового на окис вапновий і на ґаз CO^2, котру представляє ся схематично.

$$CaCO^3 \leftrightarrows CaO + CO^2 -$$

При степеннім огріваню вапно розкладає ся з щораз більшим парцияльним тиском CO^2. При температурі + 812° Цель. той тиск дістає свою максимальну вартість одної атмосфери і тодї вже температура систему отвореного на вільнім воздусї не підносить ся так довго, доки $CaCO^3$ не розложить ся зовсїм квантитативно на $CaO + CO^2$. При тім диссоцияцийний тиск CO^2 не зміняєсь ту так само, як в попереднім случаю, доки в системі не зникне стала фаза $CaCO^3$, котра достарчує безперестанно сьвіжі порциї CaO і CO^2.

---

*) Dr. H. W. Bakhuis Rooseboom. Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. Braunschweig 1901.

Сталість тиску і задержане температури при $+812^0$ Цель, мимо ненастанного огріваня пояснює Нернст тим, що приймає в системі побіч CO^2 еще ґазові материї $CaCO^3$ і CaO.

Через таке іпотетичне заложене цїле явище можна зрозуміти яко постулят закону діланя мас, зовсїм анальоґічно як в наведенім случаю диссоцияциї карбамінїяну.

Але Горстман пояснював собі реакциї того типу инакше, а іменно в слїдуючий спосіб.

Незмінність і независимість активної вартости сталої фази в гетероґенічнім системі проявляє ся тим, що при якім небудь переході тої форми материї в иньшу, будь то в фізично иньшу фазу (плинну чи ґазову), будь то лиш в альотропну або полімеричну сталу форму, можемо завважати сталий максимальний тиск при піддержуваню незмінної температури в системі. Та сталість є зовсїм независимою від масового відношеня, від скількости сталої форми*).

І чим більше сталих творів, тим лекше рівновагу математично опредїлити, бо тим меньше є она зависимою від масової скількости поодиноких членів системy. Сталість тиску і температури $+812^0$ при диссоцияциї $CaCO^3$ на CaO і CO^2 толкує Горстман коротко присутностию аж двох сталих творів т. є. $CaCO^2$ і CaO. Виходить, додаю від себе, що наколиби CO^2 не був ґазом, лиш також сталою материєю, то навіть пересув максимальної вартости диссоцияцийного тиску враз із змінами температури булиби також виключені.

На тім коротенькім зазначеню другої теориї поперестаю. В докладнїйше еї обговорене не можу ту входити, бо мусївби вивести вперед цїлий фазовий закон. Зроблю то аж при кінци розвідки і там буду мав нагоду сказати ще кілька слів про те.

Як бачили ми зрозуміне цїлого механізму хемічних перемін було строго сполучене з конечним знанєм величини і хемічної структури частинок. В молодечих стадиях розвою має нова доктрина о хемічних рівновагах нечувані трудности через таке обмежене, бо о фізичній конфіґурациї та хемічній структурі частинок плинних а тим менше сталих творів ми не маємо майже жадного виображеня. А предся їх знане малоби не лиш для хемиї, але і для всїх майже природних наук неоцїнену вартість. При нинїшнім станї науки годї собі представити, щоби до знаня молекулярної структури сталих і плинних творів можна дійти иньшою дорогою, як дорогою,

---

*) На розкладї $CaCO^3$ на $CaO + CO^2$ перший заобсервував той факт Ґебрай (Debray) 1867 р.

сказати-б, a posteriori, з точного і всестороннього знаня хемічної рівноваги між материями, котрих фізичний і хемічний характер хочемо дослїдити.

На закінчене того вступу до властивої теми додам ще, що роля того посередного ґазового твору (амонового карбамінїяну), котрого активна маса в системі не зміняє ся мимо єго наглої переміни і реґенерациї, насуває дуже живо на гадку анальоґію до ролї, яку декотрі твори грають в невислїдженім ще механїзмі всяких каталїтичних перемін. В згаданім случаю сублїмациї і диссоцияциї без їпотетичного заложеня тої посередної фази, не можнаби ту примінити закону дїланя мас до вияснения їх пробігу. Що тая фаза є ту чисельно, на вагу беручи, зникуще мала, в границях за субтельних для наших аналїтичних метод, то є очевидно чистий припадок. Тая фаза може бути що до своїх змірів, що так скажу, свобідно великою, але ту треба на то бити, що она не може цїлком зникнути, пропасти в переміні тому, що після Джібса хемічний потенциял якої небудь материї приймає зовсім иньші вартости в хвили, як концентрация маси в данім системі зближуєсь до нулї. Власне тим наглим змінам напруженя треба приписувати захованє дуже собою цїкавої хоч провізоричної сталости парцияльного тиску тої посередної фази.

Возьмім тепер під розвагу каталїзу.

Через строго математичне трактованє хемічних реакций доходить ся до висновку, що переміна не поступить нїколи так далеко, щоби одна сторона хем. рівнаня зовсїм зникла, щоби зникаюча субстанция чи фаза зменьшилась до абсолютної нулї. Динамічно говорить ся, що то наступить доперва по часї $t=\infty$, а розуміємо в той спосіб, що вартість хемічного потенциялу материї, котрої концентрация зближуєсь до нулї збільшуєсь проґрессивно і таким чином зачинає протидїлати силї, що ю має знищити. Наведу ту в кількох словах математичне сформулованє тих відношеній за Оствальдом [Ostwald. Lecrb. der allg. Chemie. Zweiten Bandes zweiter Theil. Leipzig 1896—1902 стр. 129].

Основне рівнанє для хемічної рівноваги, примінене до гомоґенічної маси котра складає ся з двох независимих від себе складових творів представить ся при сталім t, p і m_1 [маса одного з творів] математично:

$$m_1\left(\frac{\alpha\mu_1}{dm_1}\right)_{t,\,p,\,m_1}+m_2\left(\frac{\alpha\mu_2}{dm_2}\right)_{t,\,p,\,m_1}=0.(\mu_1 \text{ і } \mu_2=\text{потенцияли } m_1 \text{ і } m_2)$$

Єсли m_2 має перейти в нулю, то будемо мати:

$$\left(\frac{\alpha\mu_1}{dm_1}\right)_{t,\,p,\,m_1}=0\ (\mathrm{I})\text{ або }\left(\frac{\alpha\mu_2}{dm_2}\right)_{t,\,p,\,m_1}=\infty\ (\mathrm{II}).$$

Розгляньмо тепер такий конкретний случай. До течі, розчинника m_1, додаємо дуже маленьку скількість иньшої материї dm_2. Ту dm_2 мусить отже мати позитивну а не неґативну вартість. Наколиб (I) було правдиве, то $\alpha\mu_1$ мусїлоби бути $=0$, то зн. потенцпял розчичника не змінив би ся. Тим часом дослїд показує, що він зменьшуєсь, бо наколи передтим розчинник був в рівновазї зі своєю парою, то по розпущеню в собі dm_2 єго парове напруженє стає меньшим. Отже діфференцияльний квот (I) має скінчену неґативну вартість, а тим самим бачимо, що не (I) але (II) є правдиве.

Наколиб ми тепер до розчинника m_1 додавали не індиферентну субстанцию dm_2, лиш таку що викликає хемічні в нїм переміни, то можливість каталїзованя стає нам ясною на нові закону дїланя мас, бо активна вартість посередної материї може ту приймати найріжнїйші скінчені вартости.

Анальоґія, котру ту підношу, впадає тим більше в очи, що при каталїзах маємо так само ненастанну реґенерацию посередної материї, а єї потенциял потрібний инакше системови до перемін в означенім напрямі, буде реґулюватись сам:

а) поємисто, то є масово-ваговою скількостию фази, щоби тим самим надати собі взагалї якусь чисельну вартість, зависиму від условий системи,

б) нївеляцийно, що так скажу, то є тим, щоби свою прибрану вартість ненастанно задержувати. В виду того пояснюванє хемічних рівноваг в гетероґенїчних системах за Нернстом кінетичною теориєю можнаби також підтягнути під пояснюванє фізичною каталїзою або навідворот.

Закон дїланя мас, як бачилисьмо, випроваджено індукцийною методою з хемічних перемін, що заходять між ґазовими творами, бо нинї можемо лиш кінетично-молекулярною теориєю їх льоґічно вияснити і зрозуміти. О єго абсолютній правдивости нинї нїхто не сумнїваєсь, бо дослїдом зіставав як найдокладнїйше потверджений і потверджуєсь дальше в щоденній ляборатори́йній і технїчній практиці на вічну память, подібно як закон захованя маси в аналїтичній практиці. Тому реакциї між сталими і ґазовими творами уявляємо собі яко переміни, що відбувають ся виключно між самими ґазовими творами в той спосіб, що сталі материї вперед сублїмують а допєрва їх пари реаґують на себе хемічно наслїдком диссоцияциї, якій они підпадають в висшій температурі.

Коли отже напружности сублїмациї яких небудь сталих творів будуть нам знані, дальше коли сочинники диссоцияциї пар, що при тім повстають, будуть нам так само знані в цїлій тяглїй реляциї від температури, тодї напрям реакциї можна предвидїти, а цїлий єї квантитативний пробіг дуже докладно обчислити. З того становища виходячи висказуєсь Нернст, що найблизшою задачею загальної хемиї є подати тії всї сочинники як найбільше вичерпуючо, для всїх даючих ся подумати частинок материї, що можуть повставати через комбінацию сїмдесять кількох первнїв до що раз висшої кляси. Як бачимо домаганя не аби які.

II.

По такій поверховній характеристицї реакций, котрі можуть зайти між сталими і ґазовими творами і які розуміємо тягом в сьвітлї кінетичної теориї частинок, переходжу до дальшого не меньше в самій річи поверховного начеркненя хемічної рівноваги в розчинах. Ту мушу зазначити, що нову форму материї то є плинну фазу, можемо уважати за відмінне в дечім середовище від попередного середовища чужих індиферентних ґазів, котре від тамтого ріжнить ся лиш більшим сконцентрованєм маси в просторі. Сублїмация сталої материї при відповідно високій температурі відбуває ся в самій річи так само і в иньшім індиферентнім плинї, як передше в атмосфері воздуха, безводника квасу угляного або в вакуум, по сублїмациї виступає так само при досить високій температурі електролїтична диссоцияция на йони, як тепер науково виражаємо ся, а всяка хемічна виміна в розчинї може відбувати ся, виконклюдовано консеквентно і дослїдно стверджено, виключно між йонами.

Отже при зіставленю сталого твору побіч иньшого (хемічно індиферентного) плинного маємо зовсїм подібні відношеня, як в попереднім случаю, а цїла ріжниця лише в тім, що великого значеня і впливу на стан хемічної рівноваги набирає ту аттракцийна міжчастинкова сила котра в ґазовім середовищи була лиш діференцияльною величиною, рівною нулї. Требаби тут згадати о дуже цїкавих дослїдах Ганная і Гоґарта над розчинюванєм сталих творів в ґазах під високим тиском, котрі приміром завважали, що алькоголь висше своєї критичної температури то є в ґазовім станї розпускає в більшій скількости йодак потасовий. Той послїдний сублїмує ту при анормально високім напруженю*). Дальше студиї Віллярда**) виказують той факт, що ґази згущені високим тиском мають власність розпускати сталі материї, приміром бром парує в атмосфері стисненого кисня з далеко більшим напруженєм нїж в порожни (вакуум). (Хоч і ту є виїмки пр. скомпримований ґаз водня розпускає слабше сталі субстанциї).

Отже при розчинюваню сталих материй в течах маємо цїлком анальоґічний случай до їх сублїмациї в атмосфері иньших сильно скомпримованих ґазів. Висше згадані факти годять ся як найлучше з тим, що плинні твори впливають в без порівнаня більшій мірі на аґреґатні зміни сталих творів від ґазів, що мають напруженє одної атмосфери.

Справдї дивні гадки насувають ся нам, коли вглублюєм ся в той сьвіт нечуваної ріжнородности відношений, яку ту вивязують ся. В границях температури від 0° Цель. — до 20°, а атмосферного тиску 720—760 mm помічаємо тілько найріжнїйших тревалих атомних комплексів, тілько хемічних индивідуїв, що обняти їх уміло навіть для фахових майже неможливо. А цїлу комплїкацию треба

---

*) Ostwald. Lehrb. der allg. Chemie. B. I. 1891. стор. 612.

**) Journal de physique [3]. 5. 453. 1896.

очевидно віднести до ріжних напружностий, відмінних і питомих для кождої хемічної субстанциї з осібна. Питаюсь тепер, відки бересь тая нечувана ріжнородність напружень, з котрих кожда представлявсь ґрафічно иньшою кривиною в зависимости від температури і тиску? Чи хвилевий напрям тих кривин буде в кождім случаю зависїти лиш від температури і тиску? Фазовий закон дає на те неґативну віповідь і повідає, що крім тих двох чинників то є температури і тиску ділає ту ще третий найсильнїйший хемічний (чинник) вплив, вплив чужих тіл, що находять ся припадково в данім системі, вплив середовища чи медиюм.

При найповерхнїйшім характеризованю хемічної динаміки і статики в розтворах можна виказати дуже досяглу ролю, яку відграють три типові форми материї в хемічній рівновазї то є стала, плинна і ґазова форма.

Щоби собі виробити який такий погляд на цїлу тую обширну квестию, спробую тепер нашкіцувати цїлий механїзм міжчастинкових рухів в системі, що находить ся в плиннім середовищи на основі кінетичної теориї.

Кінетична енерґія частинок зависить виключно від абсолютної температури, єсть єї дефініциєю. Відношенє енерґії поступного руху частинок до внутренної енерґії вируючих атомів є знане, представлявсь квотом $\frac{C_p}{C_v}$, їх ріжниця для ідеальних ґазів виносить $R = 1{\cdot}99$ cal., котра зменьшує ся до нулї, як температура опадає до 273° Цель. Чим більше підносить ся температура тим більше взрастає тая ріжниця, але то помічаєсь лиш у ґазів, що складають ся з більше атомних частинок, де ріжниця стає визначнїйшою.

Отже при більшеатомних частинках ґазовий тиск буде дуже скоро зміняти ся з температурою, крітериї по поводу диссоциациї будуть частїйше являтись і ту треба шукати причини того в далеко більшій мірі ріжнородного поведеня під взглядом хемічного характеру в протиставленю до ідеальних ґазів.

Всї ґазові частинки мають в однозначних вийшних условях зовсім ідентичні виміри в просторі. Всї збилисьби в одну безглядну масу (що малаби правдо-подібно виповняти в тяглий і безпроривний спосіб простір), наколиб не мали в собі жадної енерґії, що проявлявсь на вні ґазовим тиском о стілько, о скілько она перевисшила міжатомну аттракцию маси.

Анальоґічно беручи, цїла атмосферна напружність сталої, плинної і ґазової маси є лише виразом злишки кінетичної енерґії частинок над атракцийною силою маси. Цїла спосібність диссоцияциї зложеної частинки є лиш дальшою реляциєю тої злишки.

Звідси можна випровадити слїдуюче дуже загальне заключенє:

Чим з лекших атомів суть збудовані частинки материї, тим єї тревалість в наших условях буде меньша, тим єї критична температура буде низша і на відворот, бо вміру того як зменьшуєсь атомна вага малїє також атракцийна сила і наконець не вистарчає, щоби поконати кінетичну енерґію атомів, котрі з вирового руху, подібного до руху планет, переходять раз на все в поступовий рух або висказуючись инакше стала або плинна материя переходить в ґазову форму.

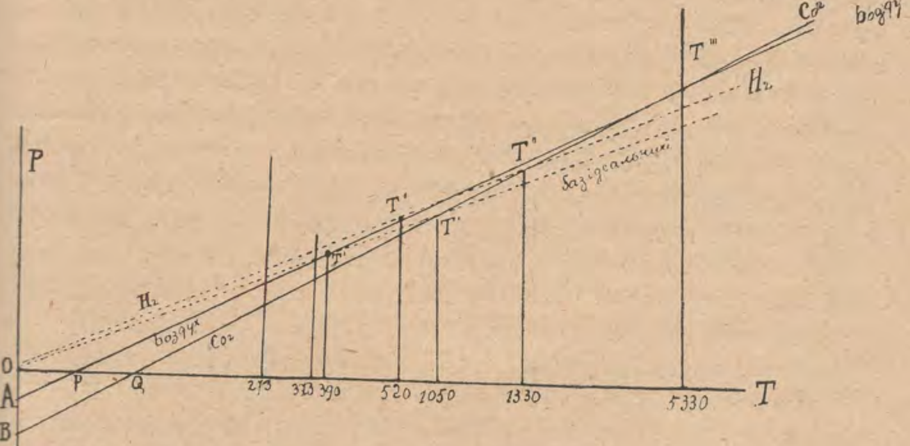
В найбільшій части дослїдна практика не противить ся зовсїм такому висновкови. Всї легко улїтаючі материї складають ся понайбільшій части з атомів, що мають домірно малу атомну вагу. Дуже наглядних репрезентантів тої кляси творів маємо в ідеальних ґазах. Коли тепер яка небудь материя перейде раз в поле, що лежить висше єї критичної температури, коли переступить критичну ізотерму, тодї вже має спроможність примінитись до найширших условий внїшного тиску, бо буде мусїла соєствовати (коеґзистувати) безпоривно в ґазовій формі при найріжнїйших гетероґенїчних системах. В плинну форму не перейде нїколи. Більше зложені частинки материї, що легко улїтають мають звичайно можність дальшого диссоцийованя в дуже високій температурі на меньше зложені, а кондензованя (згущаня) при малїючій енерґії поступового руху, котрі то однак переміни відбувають ся все після математичного шабльону, нормального законом дїланя мас. Отже тимсамим мають можність захованя своєї ґазової фази в дуже широких границях внїшного тиску, в котрих мусять наступати основні фазові переміни для иньших станів скупленя, то є сталого і плинного.

І те як раз становить цїлий характер ґазової фази материї, що в дуже просторім шматї на дияґрамі, що йде в гору від критичної ізотерми, потрафить вдержатись в коеґзистенциї при найріжнїйших укладах в протиставленю до плинної і сталої фази.

Та нелишень потрафить вдержатись, але з другої сторони впливати своєю присутностию, своїми хемічними прикметами і своїм енерґетичним темпераментом (висше згадана пр. фізична та хемічна каталїза) на стан хемічної рівноваги у тих системах. Звідси стає нам зрозумілою цїла досяглість точного знаня кривих напружности пар в зависимости від температури та внїшного тиску для всїх ґазових творів, звідси з другого боку розуміємо, чому так велика скількість найріжнїйших сталих та плинних творів сублїмує або парує в звичайній температурі.

Таке характеристичне захованє ґазової материї відмінилоби ся доперва дуже близко температури — 273° Цель, для творів, що мало ріжнять ся від ідеальних ґазів, а степенно в щораз висших температурах понад — 273°, чим відповідна материя є у висше згаданім змислї меньше трівкою в наших фізичних условях або чим єї властива температуральна нуля стоїть висше — 273° Цель.

Мимоходом мушу ту застеречись проти евентуальних і дуже справедливих замітів, що ґазовий тиск твору не буде зависїти виключно від висоти своєї температуральної нулї. Оно справдї так ся має, а щоби тії відносини легко порозуміти вистарчить подати ту за van Laar'ом ґрафічне представленє систему кількох простих лїній ґазового тиску для слїдуючих чотирох субстанций: H_2, CO_2, воздуха і ґазу ідеального*).



Але спішусь до плинного середовища. При ґазовій фазї не було й бесїди о якій небудь комплїкациї від масової атракциї. Єї вартість була за мала, щоби впливати на стан хемічної рівноваги. Зовсїм противно мають ся відносини в плинних системах. Зближенє частинок є ту вже так велике, що переступає критичну ізотерму, в слїд за чим частинки у всїх своїх рухах підпадають своїй власній притягаючій силї.

Безмірне число можливих частинкових одиниць, що можуть повстати через комбінацию 70 первнів, з котрих кождий має иньший тягар атомний або пропорциональну єї притягаючу силу, стає причиною такої ріжнородности функций тої атракциї, що доволї тяжко

---

*) I. I. van Laar. Die Thermodynamik in der Chemie. 1893. S. 15.

представити собі відвагу кінетичної теориї, що намагаєсь вишукати загальні закони, після котрих тую ріжнородність можнаби опанувати точно одною лиш гадкою, або, що на те саме виходить виснити фізично причину всїх реакций в розтворах та предвидїти захованє кождого твору в кождих даючих ся подумати внїшних условях як що до тиску, температури, так і материяльного середовища (Medium).

Молоденька наука „фізикальна хемія“ не встигла ще здефініювати і конкретно виповісти дуже простих законів, котрі в першій мірі справляють реакциї в ту або другу сторону, але нинї можна надїятись, що їх математичне сформулованє висить у воздусї, що в плиннім середовищи все дасть ся спровадити до атракцийної маси атомів. Енерґетика сповнила вже свою задачу о стілько, що виповіла дуже много законів, при котрах помочи можна зрозуміти всї межидробинчі рухи в ґазових творах, що ґрунтують хемічну динаміку особливо основний закон дїланя мас. Але там дїлає виключно термічна енерґія, а є зовсім виелїмінована атракцийна сила.

Накидаєсь питанє, якимже чудом удалось в послїдних часах ван'т Гофови так углубитись в розчини, де прецїнь панує дуже великий тисяч-атмосферичний внутренний тиск, що є споводований виключно між-частинковою атракциєю маси? Цїла єго нечувано досягла теория розтворів не узглядняє нї на волос тої атракцийної сили. Пригадаю лиш, що для етеру пр. Стефан обчисляє на основі реляциї між теоретичними законами капілярної сили а парованєм течей, що внутренний тиск є о 1287 атмосфер більший, нїж тиск єго пари, єго пружність на внї, а з критичних даних вставлених в рівнанє ван дер Вальса (van der Waals) обчисляєсь 1400 атмосфер*).

Отже чому ван'т Гофа теория не згадує про вплив середовища на стан хемічної рівноваги, чому стає безсильною супроти осмотичного тиску сконцентрованих розчинів, а тим більше супроти сталих творів?

Спробую відповісти коротенько на то питанє при помочи кінетичної теориї на основі закону диссоциациї, про котрий я згадав в першій части. Вперед однак, нїм го ту єще раз наведу, зверну увагу на давний, бо ще 1807 р. Дальтоном поставлений закон, котрий повідає: в сумішцї кількох ґазів загальний тиск є рівний сумі парцияльних тисків кождого ґазового складня.

Подумаймо собі тепер такий найпростший гетероґенічний систем двох тїл, індиферентних до себе в хемічнім змислї. В замкненім

---

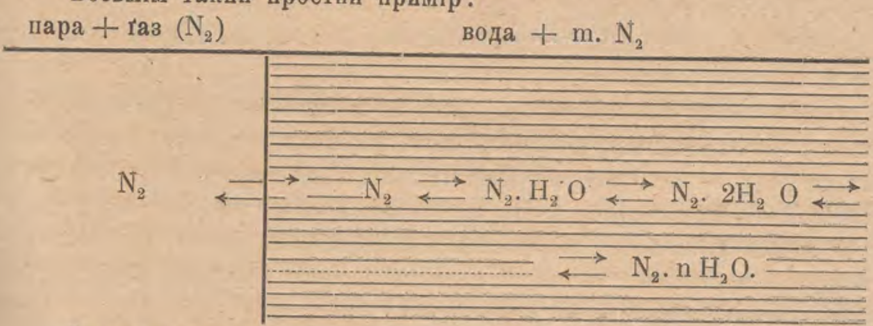
*) Ostwald. Zeitschrift für physikalische Chemie I 46. 1887.

начиню находить ся вода. В вільнім просторі над єї меннїском побіч водяної пари находить ся якась скількість чужого ґазу пр. H_2, O_2, воздуха, CO і т. д. Єще давнїйший закон Анрі'я (Hewri), бо поставлений 1803 р. дефінює математично рівновагу між обома материями, що належить до ріжних фаз, а іменно рівновагу між ґазами і плинами в той спосіб: ґази розпускають ся в індиферентнім розчиннику просто пропорционально до свого тиску. Той надзвичайно простий закон потвердили безчисленні дослїди дуже докладно. Він задержує своє значенє очевидно і на відворот для плинних творів, що розпустились в ґазовій фазї і після него приміром парцияльний тиск пари алькоголю над водним розчином є пропорциональний до своєї концентрациї в водї.

На тій основі дістаємо можність слїдженя поступу реакциї, взагалї стану хемічної рівноваги в розчинах, єсли будемо в можности визначити парцияльну напружність тих творів понад меннїском плинної фази, бо їх напружність на вні все буде пропорциональна до концентрациї в плиннім медиюм. Тая дорога називає ся тепер: приміном ґазової фази до означуваня активної вартости даного твору в плинній фазї, та основує сь на принципі рівности потенциялів в станї рівноваги, поставленій Джібсом.

Коли іменно субстанция А находить ся в рівновазї з субстанциєю Б, а Б з субст. В в яких небудь фазах, тодї очевидно заходить рівновага між субстанциями А і В.

Возьмім такий простий примір:



З того схематичного представленя видимо, що розпущений ґаз є із згляду на свою концентрацию або парцияльний тиск з одної сторони в динамічній рівновазї зі своєю ґазовою напружностию, що уявляє сь над меннїском води, з другого боку в динамічній рівновазї із своїми евентуальними гідратами, про котрих єствованє маємо поки що лиш здогади в тім случаю. Всяка диссоцияция N_2 в розчинї на $N + N$ або полїмеризация на N_4, N_6.......... і т. д. є виключена, бо тодї, по ріжних сторонах знаку хемічного рівнаня малибсьмо ріжне число частинок, отже тимсамим проста пропорциональність між тиском ґазу а єго розчиненою скількости булаби звихнена, або иньшими словами ґаз не слухав би закону Анрі'я.

Дальше, як видимо, заходить також точна пропорциональність між концентрациями N_2, а $N_2 H_2 O$ і т. д., отже тимсамим маємо заґварантовану просту пропорциональність між гідратами а ґазовими частинками N_2.

Розчинник, становить, зовсім відмінне середовище від вакуум або від атмосфери ґазів через свій атракцийний тиск. Єсли однак заходить такий случай, що той розчинник мимо свого великого тиску не впливає зовсім на зміну числа частинок ґазового твору, що при контакті переходить на основі свого руху в єго плинну фазу, отже тим самим не зміняє поєму активної концентрациї даних частинок в розчині, тоді слідуюча висше згадана формулка набирає ту актуального значеня:

„Стан хемічної рівноваги не зависить від вїшного тиску лиш тоді, як через хемічну реакцию не зміняє ся число частинок або як обєм ґазів не зміняєсь.

Висше згаданий примір відповідає тим условям, бо слухає закону Анрі'я. Означім собі осмотичний тиск розпущеного азоту через π, ґазовий тиск через p, тоді дістаємо пропорциональність $\pi = L.p$, або коли замість парцияльних тисків возьмемо концентрациї:

$$c = L.C$$

де L означає сочинник розчинюваня.

На основі тої простої пропорциї можна було всї закони, що нормують динамічну рівновагу між ґазовими творами розширити на твори розчинені в індиферентних плинах, що зробив ґеніяльний ван'т Гоф. Вплив середовища зазначив ся лиш тим, що пружність або лучше тиск ґазу понад плином не є прямо рівний осмотичному тискови, а є лиш пропорцийональним до єго вартости. Зрівнятись з ним може лиш в такім случаю як

$$v = V \text{ чи } \frac{1}{v} = \frac{1}{V} \text{ або}$$

$$c = C$$

то є наколиб простірна концентрация ґазового твору в розчині і в вакуум, що з ним стикає ся, була та сама. Але то в практиці майже ніколи не виступає, хиба при материях, що себе взаїмно в безграничнім степени розпускають, бо внутренне атракцийне терте при поступнім руху того самого ґазового твору в обох середовищах має зовсім ріжні вартости.

Отже сочинник рівноваги буде для творів розчинених в індиферентнім середовищи зовсїм такий сам, як наколиб ті твори находились в ґазовій формі в вакуум або в якімсь чужім індиферентнім ґазї. Цїлу ріжницю можнаби хиба добачувати в скорости внутренних відворотних перемін, або, як кому подобаєсь, в скорости внутренних віртуальних перемін. В такім случаю рівновага в плиннім середовищи малаби характер в більшій (або меньшій) мірі зближений до безглядної статичної рівноваги від ґазового системy. Она пригадує придавлені хитаня, котрих амплїтуди не зміняють ся. Отже в меннїску на граници двох фаз малибисьмо немовби лиш скік в тім придавненю, але не в вартости сочинника рівноваги.

Комплїкациї зі взгляду на можливу а навіть дуже імовірну реакцию:

$$N_2 + H_2O \rightleftarrows N_2H_2N$$

$$N_2 + 2H_2O \rightleftarrows N_2 . 2H_2O \text{ і т. д.}$$

(котру мимоходом згадаю можна знаменито помічати пр. в наглих скоках сочинника розчинюваня в водї ґлявберської соли) не треба так довго боятись, доки розчинник находить ся в перемагаючім надмірі, де число молїв N_2 супроти числа молїв H_2O є нескінчено малим.

Отже коли частинки якогонебудь ґазу по переходї в чужий плинний твір не переступають ще в наслїдок дуже високого внутренного тиску свого критичного стану зі взгляду на можливе иньше уложенє атомів в середині частинки або иньшими словами: як не зачнуть анї диссоциювати ся, анї кондензуватись нї полїмеризуватись, тодї тиск середовища, котрий мимо своєї імпонуючої вартости не потрафить в жадний спосіб змінити числа розпущених молів, елімінуєсь і з ним „бодай так довго не треба числитись, доки через хемічні переміни в розтворах дістаємо частинки творів, для котрих температура середовища лежить висше їх критичної температури“.

Отже середовище зачне при материях послушних законови Анрія впливати на рівновагу в що й но згаданім змислї аж тоді, коли концентрация розпущених частинок буде дуже велика, коли їх активність взросте аж до тої границї, що они самі або зачнуть між собою полїмеризуватись, або входячи в сполуки з розчинком зачнуть впливати сильно на свої молярні відношеня до него і т. д.

Тодї всї дуже прості закони хемічної рівноваги для гомоґенїчного ґазового системусправ страчують ту свою вартість і значінє, і тому всї сконцентровані розчини не слухають вже законів ван'т Гофа.

Рідкий розчин заховуєсь під зглядом свого осмотичного тиску, що стоїть в простім відношеню до концентрациї розчинених молїв, зовсїм як ідеальні ґази до того степеня, що ван'т Гоф розтягнув на него відразу гіпотезу Авоґадра.

Але ту заразом видимо як на долони, що тоє цїле щасливе виелїмінованє атракцийної сили частинок середовища, можна було розтягнути лиш на дуже рідкі розтвори і на ґази послушї законам Боіля і Ґе-лїссака. Но коли те простє і в високім степени припадкове условє не є виповнене, тодї стаємо перед нечуваною ріжнородностию і комплїкациєю, котру бажаю дальше легонько шкіцувати кінетично. Досить згадати лиш про імпонуючий розріст електролїтичної теориї, котра узгляднює один лиш дуже специяльний случай диссоцияциї частинок, що розпустились.

Отже атракцийній силї медиюм треба приписати першорядну досяглість. Она становить жерело напруженя верхнї течи, котре держить частинки мимо величезної вартости їх термічної енерґії в фізичній рівновазї так, що всї разом місто розсунутись експльозийно та побільщити тисячі разів свій об'єм представляють збиту, одноцїльну, плинну фазу.

Тая фаза має своє питоме поле еґзистенциї, о специфічній собі розтяглости на дияґрамі температури і масової атракциї, котра має ся відворотно до простірного сконцентрованя частинок. При допроваджуваню теплоти через огріванє плину підносимо кінетичну енерґію частинок, котрі розсуваючись в наслїдок інтензивнїйших потручувань побільшують обєм фази аж до критичної вартости. В тій температурі, званій критичною температурою, термічна енерґія поступного руху частинок поконує вже атракцийну енерґію так сильно, що сума об'єму всїх частинок, коволюм (b), займає вже лиш трету частину цїлого обєму плинного твору, котрий ексериментально міримо. Енерґія верхнї змалїла ту до нулї, меннїск зник, а плинна фаза заховуєсь як ґаз.

Колиб тая фаза мала в собі розчинену якусь чужу материю, котраби улїтала вже в критичній температурі розчинника, то тая сумішка заховувалаби ся в тих условях зовсїм після закону Дальтона, яко сумішка двох ґазів. В міру того як зачнемо остуджувати сумішку буде рости енерґія верхнї розчинника т. є. твору що є в перемагаючім надмірі в сумішцї. А величина напруженя верхнї, видима функция фізичного концентрованя частинок, зменьшує дуже сильно напружене пари обох творів на вні, бо придавлює або скорочує пересічну дорогу їх поступового руху, котрого виразом є як раз згадана пружність. Для ідеальних плинів т. є. таких, котрих частинкова вага в обох фазах є тасама, буде можна поставити зовсім анальоїічно до висше наведеного закону Анрія, пропорціональність того придавленя до масового сконцентрованя фази, а вартість сочинника пропорциї буде в поодиноких случаях зависїти лиш від форми верхнї.

Одже приходимо до висновку, що від скількости нагромадженя маси в плиннім середовищи, отже від масового поєму плинної фази буде зависїти енерґія напруженя верхнї котра зменьшує атмосферну пружність пари частинок розчинника і заразом частинок чужих материй в нїм розпущених. В той спосіб посередна (випадкова) пружність рідкого розчину слабо улїтаючих творів є все меньша від суми напружности обох складнїв в тих самих условях. Так толкую собі придавлене пружности сумішки при помочи кінетичної теориї, хотяй впрочім термодинамічно толкує ся ще простїйше.

Так отже ту знов через дуже щасливі обставини здибаємо для рідких розчинів просту і в очи бючу пропорциональність того придавленя, котра нинї по працях Француского Фізика Раульта виражує ся дробом $\frac{N}{n+N}$, де N означує число молїв розчинника, n число молїв розчиненої материї. Послїдна Формулка по розширеню гіпотези Авоґадра на розчини ван't Гофом стала основою до визначуваня числа молїв в розчинах або навідворот частинкової ваги розчиненої субстанциї.

Що до широкого призначеня і відповідного примінюваня тої Формулки на найріжнїйші типи хемічних перемін в розчинах згадаю лиш, що ту ще лежить широке поле до працї, котру заініциювали в послїдних часах Дігем і Марґілес через енерґетичну теорию сумішок.

Тепер вертаюсь назад до характеризованя тиску а іменно високого тиску.

Внїшний тиск впливає на даний систем зовсім так як притягаюча (атракцийна) сила маси. Він стає по тім самім боцї поруч неї в борбі з термічною енерґією, котра стремить до розпорошеня материї в просторі, до збільшеня об'єму всїх творів поза їх критичну вартість то є аж в ґазову Форму. В тім новім станї поле можливих перемін, котрим дає основу, як знаємо вже, чим раз дальша диссоцияция, мусить чим раз більше стїсняти ся та малїти власне по поводу вислїмінованя притягаючої сили.

Як бачимо, маємо ту дві противні сили, що ненастанно ділають на материю в противних напрямах. Кожда з них стремить зовсїм независимо від другої до якоїсь собі питомої критериї. При крайній побідї термічної енерґії маса системи переходить в ґаз, в противнім случаю, при відпровадженю тої енерґії через остуджене дістаємо сталї твори. Недалека вже здаєсь будучність зунїтаризує тії дві сили наскрізь та докаже, що тії дві сили мають зовсїм одноцїльний характер і природу, що они є по просту рухом космічного етеру, котрий ту інтерферує ся.

Я буду пробувати зазначити, що в дорозї до згаданої строго наукової унїтаризациї сил, що дїлають в природї наука про фази зробила вже великий крок наперед і то крок експериментальний.

Від коли іменно дістала наука в свої руки свобідне примінене тих двох собі противних сил в свої досліди, то є сили між-частинкового притяганя і термічної сили, від коли фізики навчили ся збільшати або степенно зменьшати вплив першої штучним тиском, отже зменьшуванєм обєму тїл або концентрованєм маси, а вплив другої сили обсервувати через штучне викликуване ріжних температур, від того доперва часу найшлась наука в дуже корисних условях розвою, якими нинї тїшить ся. Відтак треба ще було розмірно не довго чекати на рациональне студиєване тих обох сил в граничних областях, в полях, на котрих сильно переважує одна з них а друга є диференцияльно, зникаючо малою. До тепер фізика і хемія пережила вже одну добу правдиво майстерного аналїтичного перестудиєваня дїланя термічної енерґії на материю, як що до єї обєму, так і напруженя через кінетичну теорию. Живемо в хвили найбільшого триумфу тої теориї. Ван Вальс (van der Waals) положив підвалину другій добі, котра тепер приходить і буде що раз більше розвиватись. Она вже тепер кидає ясне світло на дуже важну, але і дуже скомплїковану ролю середовища особливо плинного в хемічних перемінах.

Ван Вальс перший показав дорогу експериментальної аналїзи притягаючої сили маси частинок через степенне їх зближуванє за посередництвом компрессиї ґазів, через зменьшенє свобідної дороги їх поступного руху аж на критичне віддаленє, при котрім обі сили ідеально рівноважать ся. Иньшими словами виказав можливість переходженя ґазової маси в плинну і на відворот в тяглий спосіб, без наглих скоків. Коли лиш ослабимо термічну енерґію достаточним зменьшенєм температури, атракцийній енерґії прийдемо в поміч внїшним тиском, тодї впадаємо дуже легко в поле тої характеристичної тяглости.

Отже в плинній фазї, як я вже мав нагоду висше згадати, панує дуже високий тиск, що виражуєсь в тисячах атмосфер. При тій самій температурі вартість того тиску буде змінятись для ріжних хемічно творів, бо кождий з них є збудований з відмінних, що до тягару атомного, атомів. На основі до тепер представлених законів хемічної рівноваги можна звідси витягнути такий висновок:

Кожда хемічна реакция, при котрій число частинок по обох сторонах знаку є тасама або що на тесаме виходить, при котрій молярний сочинник не зміняє своеї суми в часї переміни, буде заходити в тім самім квантитативнім степени в кождім плиннім, але індиферентнім розчиннику, коли лиш стала розчинюваня для всїх складових реакциї не змінить ся для відповідних середищ, наколи не повстають занадто легко улїтаючі продукти і т. д. Цїла ріжниця буде лиш в придавленю реакциї, ріжнім для ріжних розчинників, що далоби ся легко зміряти та порівнати визначуванем скорости переміни в поодиноких случаях.

Таку дорогу експериментального студиєваня впливу плинного середовища можнаби назвати динамічною, а иншу запропонувану і примінену Нернстом, що лежить на визначуваню степеня розділюваня якоїсь материї між два або більше розчинників „статичною“ методою. Та друга метода основуєсь на перенесеню закона Дальтона і Анрія на дві поруч себе єствуючі плинні фази. При хвилинї застанови можна ту добачити можливість щораз дальшого розтяганя осмотичної теориї ван'т Гофа від одної плинної фази до другої враз зі всїма мериторичними і експериментальними консеквенциями.

Єсли тепер возьмемо під увагу другий случай, де при хемічних реакциях зміняє ся сума молїв, тодї вплив середовища буде дуже великий і осмотична теория стає ту безсильною.

Отже зовсїм анальоґічно до того як я згадав висше при зіставленю ґазової і плинної материї, правило розділюваня плинних фаз (Vertheilungs-satz) поставлене на основі кінетичної теориї Нернстом має дуже широке применене при „тонких“ розтворах.

Нинї вже не сумнїваємо ся, що цїлий ряд дуже характеристичних явищ пр. стручуваня або розчинюваня материй має свою причину виключно тілько в вирівнуваню атракцийного спаду між дотичними фазами. Можна ту замітити про дотеперішні дивні будь що будь здогади, що при розчинюваню сталих материй маємо par excellence явища диссоциациї частинок на меньше зложені але між собою ідентичні комплекси, крім звичайної сублїмациї супроти того, що диссоциация, як знаємо, є клясичним приміром тих крайних случаїв, де внішний тиск ділає як раз в кондензуючім напрямі. Але коли тасама хемічна материя має в ріжних розчинниках всілякий степень розчинюваня, то можна догадувати ся, що вже невелика ріжниця в тих тисках буде рішати напрям хемічної переміни або по відповіднім змодифікованю того постуляту, що середне міжчастинкове віддалене входить ту на перший плян та викликує вже дуже маленькими ріжницями в тих віддаленях величезні ріжниці внутренних тисків.

Отже в розчинах маємо критерию борби тих двох собі противних сил в найвисшій та рішаючій фазї. Як в ґазових системах переважує виключно термічна енерґія, в сталих атракцийна так в характеристичній посередній фазї видимо перехрещене обох і степенне їх рівноважене здовж цїлого поля екзистенциї плинної материї. Проґресивне пересуване стану рівноваги між ними в границях згаданого поля проявляє ся нам цїлим рядом фізичних перемім в розчині як пр. розчинюванем або осаджуванем сталих творів а дальше посередно через сотворене нових фізичних умов в данім системі і досяглими нераз хемічними перемінами

Тую квестию підніс Геен в своїй теориї плинів, де дотеперішні лиш здогади формулує математично

$$\frac{f}{f^1}=\frac{r^{1n}}{r^n}.$$

В тім взорі, „r“ означує середну віддаль частинок гомоґенічного плину, „f“ атракцийну силу, або внутрений тиск середовища „n“ має ту досить велику вартість, бо =7. Отже ту маємо щось в родї ґравітациї Нютона.

Що той взір не має, як показало ся пізнїйше з дослїду, точного, математичного значеня, то проте з того ще не виходить, щоби го з засади відкидати, бо якостно (квалїтативно) бодай в доволяючий спосіб толкує нам надзвичайно ріжнородні відношеня між течами а частинками инших творів.

Отже плинне середовище представляє найріжнїйші а заразом всї можливо найкориснїйші условя до переведеня хемічних перемін в означених напрямах, що для нас можуть бути дуже пожадані. Там можуть повставати найздовільнїйші фізичні условя навіть такі, як неґативний тиск, через котрі моглиби ми перейти до метастабільних і лябільних, на мою гадку, станів, що мають, як легко догадаємо ся, принципіяльне значене для розвою науки. Отже тїч є сотворена до того, щоби в собі переводити найосновнїйші та найбільше скомплїковані хемічні переміни, тим то не диво, що природа виконує при еї помочи архисинтези, про котрі нинїшна наука може лиш несьміло мріти.

В сій розвідцї хочу звернути увагу на деякі вислїди дотеперішної науки експериментальної, що йде в тім напрямі. Тому мушу бодай коротко згадати про теорию ван дер Вальса, а радше відповісти на питане, як далеко дійшла кінетична теория в пояснюваню впливу плинного середовища на хемічні переміни. Учений сей використав анормальне захованє ґазів доконалих під високим тиском. — Він заключив, що тая компліґкация мусить походити від самотворби притягаючого поля в серединї ґазового твору, сказати-б від кінетичного автомасованя ґазової фази. Отже ріжні вартости продукту pv вздовж табелї зростаючого компримацийного тиску уважає за скількостний вираз того внутренного притяганя і піддає его математичній аналізї. Тую анормальність можна помітити пр. на продукті PV для етилєну при 20° Цель. і сильнім тиску:

P = 31,58 Atm.	84,16 Atm.	398,71 Atm.
PV = 0,914	0,399	1,248.

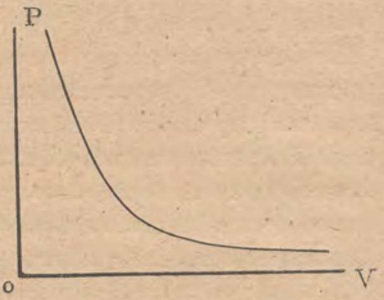
Славна формулка PV = konst = RT, — що замикає в собі закони Боіля, Ґе-лїссака та іпотезу Авоґадри, котра ту тим виражує ся, що R є для всїх ґазів тесаме, коли порівнюємо їх ґрамово частинкові скількости, — відповідає отже дїйсним відносинам лиш при малім P а дуже великім V, бо тодї і міжмолекулярне притяганє і беззглядний обєм ґазової материї „b“ не впливають на вартість RT.

Тодї $PV - RT = o$.

Но при зближуваню до критичного стану, як бачимо емпірично на поданім примірі $PV - RT = O = F$, де F представляє якусь загальну функцию, котра доперва для безконечно великої вартости V має вартість $= O$. Щоби тую функцию визначити впровадив van der Waals в те рівнанє еще внутренний тиск, що мусить бути відворотно пропорциональний в першім приближеню до квадрату обему $\frac{a}{v^2}$, з другої сторони поправив сумаричний обєм V в той спосіб, що поменшив го о абсолютний обєм материї ґазової зв. коволюм „b“ через що дістав формулку

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(V - b) = RT.$$

Як видимо те рівнанє із зглядy на V є вже рівнанєм третого степеня, отже при здовільно вибраній а незмінній вартости T, крива лїнїя, що представляє зависимість P від V перестає бути реґулярною іперболїчною ізотермою що мала форму слїдуючу (fig. 1. стор. 34) і переходить на иньшу форму*). Обчислїм іменно $\frac{dP}{dV}$ при сталій температурі



отже:

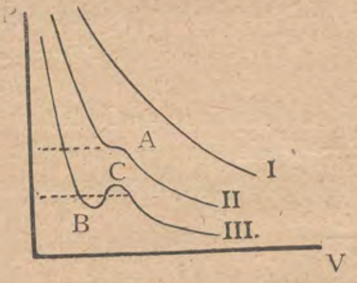
$$\frac{dP}{dV} = \frac{2a}{V^3} - \frac{RT}{(V-b)^2}.$$

При великих вартостях на T має той диференцияльний квот неґативну вартість отже кривйна має менше більше визір I.

Дальше при малих вартостях на V, де V − δ зближує ся до O маємо також $\frac{dP}{dV}$ неґативне, отже ліва сторона ізотерми II. і III. перебігає як I.

$$\text{Але як: } \frac{2a}{V^3} - \frac{RT}{(V-b)^2} = O$$

то на ізотерні II, мусить вже в якімсь місци пр. в A наступити мале вигненє рівнобіжне до V, а коли возьмемо ще низшу температуру то вже будуть слїдувати позитивні вартости $\frac{dP}{dV}$ отже наступають вже вигинаня в гору на право пр. BC.



Але нїм приступлю ще до закінченя тої дуже очевидно поверховної характеристики теориї van der Waals'a, зверну увагу на студию Arthur'a A Noyes'a, що в дуже простий спосіб толкує анормальність ґазових законів в розчинах кінетичною теориєю**).

Коли ван't Гоф розтягав закони Боіля і Авоґадри на рідкі розчини, то ясно зазначив, що тії закони відносять ся лиш до дуже многих случаїв в дїйсности, що при солях, сильних засадах і квасах подибує ся значно більше обниженє пружности температури цїпненя розчину, нїж того теория Авоґадри вимагає.

---

*) J. H. van't Hoff. Vorlesungen über theoretische und physikalische Chemie. 1900. Drites Heft. S. 9.

**) Über die Abweichungen von den Gasgezetzen in Lösungen. Von Arthur A. Noyes. Zeitschr. f. physik. Chemie. B. V. 53. 1889.

Тую атомалїю вияснив не довго потім Аргенїюс іпотезою елїктротичної диссоцияциї. Але крім тих виїмків, котрі вже тепер вповнї годять ся з теориєю van't Hoff'a, є ще другі далеко численнїйші. Як далеко іменно сягає експериментальне визначуванє температури цїпленя густїйших розчинів — яка-б не була материя або розчинник — нїгде не подибує ся сталої вартости на частинкову вагу при ріжних концентрациях, тілько раз менші а раз значно більші вартости. Тії аномалії можна з одної сторони без сумнїву толкувати повставанєм більших молєкулярних комплєксів в таких условях, але з другої сторони такі случаї треба знов за виїмки уважати, а головної причини треба шукати в анальоґії до поведеня ґазів під дуже високим тиском.

На таке пояснюванє звертали увагу — як пише Noyes — Ostwald, (Zeitschrift für physik. Chemie 2, — 280), Arhenius, (ibid. 2, 499), Beckmann, (ibid. 2 734), — а він піддає єї матиматичній аналїзї о скілько єму стає експериментального материялу.

В розчинах треба отже як при ґазах від цїлого обєму відчислити обєм частинок розпущеної материї, а замічений тиск осмотичний треба збільшити о вартість, що представляє притяганє між частинками. Но при розчинах тії відношеня много більше скомплїковані ніж в ґазах. Ту обєм розчину треба зменшити не лиш о обєм частинок розпущених, але ще о обєм частинок розчинника, бо оба скорочують в той сам спосіб свобідну дорогу руху частинок. Дальше крім взаїмного міждробинного притяганя розпущеної материї треба ще взяти в рахубу притяганє між ними а частинками розчинника, котре впрочім, ясна річ, перевисшає дуже много попередне. Отже як означимо собі через p осмотичний тиск, v обєм розчину в лїтрах, в котрім маємо розпущений один моль материї, B обєм того моля, b обєм частинок в однім молю материї, c обєм частинок в однім лїтрі розчинника, то обєм розчину треба зменшити о $[b + (v - B) c]$. Міждробинне притяганє між материєю а розчинником є пропорциональне до простірної концентрациї кождого з них або до $\frac{1}{v}$ resp. $\frac{v - B}{v.}$ Тому, як стала „a“ представляє питоме притяганє, то осмотичний тиск треба зменшити о вартість $\frac{a.}{v} \quad \frac{v - B}{v}$ а тодї місто формулки van der Waals'a

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) = \text{konst.} \text{ одержуємо:}$$

$$\left(p-\frac{a.}{v}\,\frac{v-B}{v}\right)(v-[b+(v-B)c]=\left(p-\frac{a.}{v}\,\frac{v-B}{v}\right)\cdot$$

$$(1-c)\left(v-\frac{b-B}{c}\right)=K.$$

Вартість $\frac{a}{v}$ в порівнаню з p і таксамо вартість B в порівнаню з v є взагалї дуже мала, отже за $\frac{v-B}{v}$ можна в приближеню поставити 1. Подїлїм ще крім того рівнане через сталу (1—c) то дістанемо.

$$\left(p-\frac{a}{v}\right)\left(v-\frac{b-Bc}{1-c}\right)=pv-a-p\,\frac{b-Bc}{1-c}$$

$$+\frac{a.}{v}\,\frac{b-Bc}{1-c}=\frac{K}{1-c}$$

Тоє рівнане стає ще простійшим при розваженю, що $\left(\frac{a.}{v}\,\frac{b-Bc}{1-c}\right)$ є дуже мале отже можемо заложити v відворотно пропорциональне до p.

Нехай a_1 буде новою сталою, то формулка так представить ся:

$$pv-p\,\frac{b-Bc}{1-c}+pa_1\,\frac{b-Bc}{1-c}=p\left(v-(1-a_1)\,\frac{b-Bc}{1-c}\right)$$

$$=\frac{K}{1-c}+a$$

або коротше $p(v-d)=K_1$

де $K_1=\frac{K}{1-c}+a,\ d=(1-a_1)\frac{b-Bc}{1-c}$

По такім розвиненю теориї виказує Noyes на цїлім рядї обчислений, котрі примінив до широкого материялу поданого Бекманом [Zeitschr. f. phys. Ch. 2, 715], що така теория знаменито годить ся з обниженєм температури цїпненя доволї згущених розчинів.

З цїлого ряду визначуваній Бекмана обчислив d після рівнаня

$p(v-d)=p_1(v_1-d)$ або $d=\frac{p_1v_1-pv}{p_1-p}$

елімінуючи заразом в той спосіб блуди експериментальні, що з такої пари вартостий на „d“ брав середну. Потім для кождого окремого визначеня обчисляв вартість p(v — d), котра після наведеної теориї мусить бути незмінною для якої небудь концентрациї. Щоби читателеви показати, як така теория добре годить ся, обчислив середну вартість із всїх p(v — d), а в найблизшій колюмнї представив відношене кождої з них до середної.

Я подам ту кілька табель, котрі він уложив.

Над кождою з них є напис матерні, єї формулка, тягар частинковий і обчислена середна вартість d. В першій колюмнї є подане обниженє температури цїпненя p (що є майже просто пропорціональне до осмотичного тиску), в другій обєм розчину v, в котрім є розпущений моль, в третій pv продукт обох, в четвертій вартости на p(v — d), а в послїдній їх відношене до середної.

I. В розчинї бензолю

p	v	pv	p(v−d)	відношене
1. Ацетон $(CH_3)_2$ CO (58) d = — ·064.				
1.220	4.594	5.606	5.684	1.001
3.615	1.507	5.448	5.679	1.000
5.365	0.9921	5.322	5.666	0.998
8.470	0.6088	5.157	5.686	1.001
		Середна:	5.679	
2. Бензальдегид C_6H_5. CHO (106) d = — ·027.				
1.000	5.846	5.846	5.873	1.000
3.130	1.850	5.789	5.873	1.000
5.245	1.093	5.732	5.873	1.000
		Середна:	5.873	
3. Ацетофенон C_6H_5. $COCH_3$ (120) d = + ·0122.				
1.650	3.526	5.817	5.797	1.000
3.235	1.804	5.835	5.795	1.000
5.425	1.079	5.857	5.791	0.999
8.370	0.705	5.902	5.800	1.000
		Середна:	5.796	
4. Бензофенон $(C_6H_5)_2$ CO (182) d = + ·069.				
0.960	6.120	5.876	5.809	1.002
2.480	2.408	5.971	5.800	1.001
4.440	1.371	6.087	5.781	0.997
6.140	1.010	6.197	5.773	0.996
8.420	0.7604	6.401	5.820	1.004
		Середна:	5.797	

Дальше наводить праву камфору $C_{10}H_{16}O$ (152) $d = + 0{\cdot}1154$, хльораль $d = + .0276$, ацеталь, квас оцтовий, фенетоль, нафталїну і т. д. разом 14 материй. Потім подає 21 таких табель для ріжних материй розпущених в квасї оцтовім і 6 табель для материй розпущених в водї. Всюди та сама згідність.

Отже формулка $p(v - d) = \text{konst.}$ дає добре вираз тій аномалії супроти закону Боіля.

Дальше ставить Noyes питанє, чи обчислене з табель Бекмана „d“ має справди значенє сталої „d“ випровадженої в теорет. формулцї. Як видимо она складає ся з многих инших чинників і є так скомплїкована, що він не сподїє ся, щоби ю можна докладно кількостно доказати. Але деякі заключеня, які туть дають випровадити ся, справджують ся з дійсностию дуже добре.

З рівнаня $d = \frac{1 - a_1}{1 - c}(b - Bc)$ виходить, що 1) чинник $\frac{1 - a_1}{1 - c}$ є все позитивний, отже 2) d мусить бути раз позитивне раз неґативне після того, чи „b“ є більше чи меньше від Bc — иньшими словами — чи обєм розпущених частинок є більший, чи менший від обєму частинок розчинника при рівних з другої сторони обємах, А дальше сумаричний обєм частинок в обох случаях (b resp. Bc) є рівний продуктови обєму одинокої частинки і числа частинок, котре знов є просто пропорціональне до питомої, — а відворотно до молекулярної ваги. Означім через b_0 і b_1 обєми одної частинки розчинника resp. розпущеної материї, а через A_0 і A_1 відповідні квоти пропорціональні до числа частинок і наконець зберім всї незнані чинники в X, то дістанемо:

$$d = \frac{1 - a_1}{1 - c}(b - Bc) \text{ або } \frac{d}{B} = \frac{1 - a_1}{1 - c}\left(\frac{b}{B} - c\right)$$

рівне $\frac{d_1}{B_1} X = A_1 b_1 - A_0 b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$

Для иншої субстанциї $\frac{d_2}{B_2} X = A_2 b_2 - A_0 b_0$.

Через получене тих двох рівнаний

$$\left(\frac{d_1}{B_1} - \frac{d_2}{B_2}\right) X = A_1 b_1 - A_0 b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

З рівнаний (1) і (2) можна в деяких случаях обчислити зглядні розміри ріжних частинок. X є позитивне. Отже після того чи вираз при нїм є позитивний чи неґативний, буде $A_1 b_1$ більше або менше від $A_0 b_0$ (або $A_2 b_2$). Дальше по розваженю ще того, що лиш тодї можна робити слїдуючі обчисленя, як $A_1 - A_0$ (або $A_1 - A_2$)

має знак противний як вираз при X, подає знов табелю, в котрій є обчислені взглядні розміри ріжних частинок, що були розпущені в бензолю.

назва	символь	$A \times 100$	$\frac{d}{B}$	частинка більша від	а менша ніж
бензоль	b_0	1.13	$+\cdot105$	b_6	$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_9\ b_{10}$
ацетофенон	b_1	·86	$+\cdot565$	$b_0\ b_6\ b_7\ b_8$	$b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_9\ b_{10}$
ацеталь	b_2	·70	$+>1$	$b_0\ b_1\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8\ b_{10}$	$b_3\ b_4$
камфора	b_3	·65	$+\cdot750$	$b_0\ b_1\ b_2\ b_4\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8\ b_9\ b_{10}$	
бензоан етильовий	b_4	·70	$+\cdot606$	$b_0\ b_1\ b_2\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8\ b_{10}$	b_3
нафталіна	b_5	·90	$+\cdot428$	$b_0\ b_1\ b_6\ b_7\ b_8$	$b_2\ b_3\ b_4\ b_{10}$
ацетон	b_6	1·40	$-\cdot896$		$b_0\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_7\ b_8\ b_9\ b_{10}$
бензальдегид	b_7	·99	$-\cdot267$	$b_7\ b_8$	$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_9\ b_{10}$
нітробензоль	b_8	·98	$-\cdot490$	b_6	$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_9\ b_{10}$
бензофенон	b_9	·60	$+\cdot414$	$b_0\ b_1\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8$	b_3
фенетоль	b_{10}	·80	$+\cdot566$	$b_9\ b_1\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8$	$b_2\ b_3\ b_4$

З того видимо, що ві всїх случаях, де конституция позваляє судити о зглядних розмірах ріжних частинок, доходить ся до такої самої оцїнки з обчисленої вартости що до d —. Noyes розбирає дальше подрібно ті відношеня і відповідає на евентуальні закиди, особливо на квестию анормального в тім змислї поведеня оксимів і материй алькогольних. Але в те входити нам непотрібно.

Замітне лиш се, що в плинній фазї комплїкує ся закон дїланя мас головно обємами частинок, що дїлають на себе і то в мірі без порівнаня більшій, нїж питомими притяганями між ними.

Так в той спосіб дійшли ми за думками Noyes'а до відношеній в плиннім середовищи, що є цїлком анальоґічні до стисненої ґазової фази, котру теоретично обробив ван дер Вальс. Видимо ту, що найвизначнїйшу ролю при тих перемінах відграють абсолютні зміри частинок материї. Стоячи доперва на тій точцї, можна оцїнити, як слїд працю ученого Ph. A. Guye оголошену в Compt. rend. 110 141. 1890 [Ref. Ostwald, Zeitschr. f. ph. Ch. V. 275], де він реасумуючи свої розважуваня над теориєю ван дер Вальса, виказує, що стала „b" в рівнаню $\left(p + \frac{v}{a^2}\right)(v - b) = RT$ мусить бути пропорциональна до молекулярної рефракциї хемічної материї. Як прийме ся $R = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2.}\ \frac{1}{d,}$

то $\frac{MR}{K}$ буде рівне konst. К представляє ту відношенє критичної температури (в беззглянднім численю) до критичного тиску, котре з другої сторони є пропорціональне до сталої „b“ згаданого рівнаня.

Видимо з того ясно, що оптика може віддати неоціненні услуги кінетичній теориї плинів і взагалї хемії. Для цїлости скажу ще пару слів про критичні стани. В місци (А) на лїнії II, Фіґ. 2. на сторонї 34., материя знаходить ся в критичнім станї, отже температура, тиск і обєм називають ся критичними (Tk), (Pk), (Vk). Обчислїм условя того стану, отже вперед рівнанє ван дер Вальса напишім в формі

$$V^3 - \left(b + \frac{RT}{P} \right) V^2 + \frac{a}{P} V - \frac{ab}{P} = o$$

При температурах низше А маємо три корінї $V = V_1$, $V = V_2$, $V = V_3$, чому відповідає $(V - V_1)(V - V_2)(V - V_3) = o$. При самім А тії корінї є рівні: $V_1 = V_2 = V_3 = Vk$ а тоді $(V - Vk)^3 = V^3 - 3Vk^2 + 3Vk^2 V - Vk^3 = o$, отже $b + \frac{RTk}{Pk} = 3Vk$ (1), $\frac{a}{Pk} = 3Vk^2$ (2) $\frac{ab}{Pk} = Vk^3$ (3), наконець:

$$Vk = 3b \text{ з (2) і (3)}$$
$$Pk = \frac{a}{27b^2} \text{ з (2)}$$
$$Tk = \frac{8a}{27bR} \text{ з (1)}$$

$$a = 3Vk^2 Pk$$
$$b = \frac{1}{3} Vk$$
$$R = \frac{8Vk\ Pk}{3Tk}$$

Коли тепер в рівнаню $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$ тиск, обєм і температуру будемо виражати у відповідних критичних вартостях як одиницях, отже: $P = \alpha Vk$, $V = \beta Vk$, $T = \gamma Tk$, а відтак виелїмінуємо a, b, і R то дістанемо

$$\left(\alpha Pk + \frac{3Pk}{\beta^2} \right) \left((\beta Vk - \frac{Vk}{3} \right) = \frac{8\gamma\, Vk\, Pk}{3} \text{ або}$$

$$\left(\alpha + \frac{3}{\beta^2} \right)(3\beta - 1) = 8\gamma \text{ рівнанє зредуковане.}$$

Оно представляє систем зредукованих критичних ізотерм, що є ідентичні для кождої материї без згляду на еї хемічну будову (хоч з другої сторони для тої самої материї не є правдиве).

На кождий случай видимо, що всяка хемічна сполука є збудована після того самого ідеального пляну. Що відповідаючі собі місця на такій кривинї для ріжних утворів є в звичайних условях окружаючої нас природи, лиш ріжно супроти себе положені, в слід за чим мають ріжні аґреґатні форми на нашім обсервацийнім нїво, котрим перетнемо систем із всіх знаних материй. Місця переходу тих форм в себе для кождої материї з окрема є в звичайнім укладї сорядних p, v, t, ріжно положені, через зміну условий обсервациї ми їх можемо здовільно пересувати.

Пригадаймо собі тепер з примірів давнїйше наведених, що кождий з основних трех аґґреґатних форм, має відповідно до перемоги будь то аттракцийної, будь то термічної енерґії цїлком иншу ролю в хемічнім реаґованю.

I. Що в ґазовій фазї можуть мішати ся з собою фізично найріжнїйші материї, що її поле еґзистенциї в порівнаню з тамтими двома є дуже широке, бо від тиску O аж до ∞ як лиш температура буде висша від критичної. Дальше, що тая фаза є одна одинока, хочби як много містила в собі хемічних складнїв, отже по поводу свого питомого енерґетичного темпераменту потрафить єствувати з найріжнїйшими гетероґенїчними системами, а ново впроваджена в них викликати нераз основні переміни.

II. Що відношеня рівноваг комплїкують ся найбільше в плинних фазах, де обі енерґії перехрещують ся. Число тих плинних фаз, що навіть поруч себе єствують, може бути вже доволї велике, а активна вартість складнїв не є незмінна, як при сталих творах (Horstmann), анї навіть не є пропорциональна до концентрациї як при ґазах (див. теория Noyes'a), з виключенєм рідких розчинів (теория van't Hoff'a).

З того видимо, що на внішний вигляд хемічної рівноваги впливають найбільше два чинники енерґетичні то є температура і тиск, бо від їх укладу та зміни буде в першій лїнії залежати всякий міжмолекулярний та міжатомний рух материї та її системів, бо всяка хемічна материя має в їх укладї своє поле єствованя обмежене (крім хемічних елементів) віддїлене різко аґґреґатними та альотропними (або ізомерними) фазами.

Видимо також, що при чисто ґазових системах зміна атмосферного тиску, має найбільше значенє, при сталих та плинних висотах температури (бо в них міждробинний тиск обчисляє ся в тисячах кільоґрамів на 1 cm^2). Як з тої точки погляду розберемо славну реґулу фаз, випроваджену термодинамічно Джібсом з рівнаня $d\varepsilon = \tau d\eta - pd\nu + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2$ [де dε означує зміну цїлої енерґії, $\tau d\eta$ ентропії (припустїм енерґії термічної), $-pd\nu$ зміну праці а $\mu_1\, dm_1 +$ ………… і т. д. зміну хемічної енерґії,] то видимо, що там оба роди енерґії, про котрі ту цїлий час говорено є поруч себе зіставлені з противним знаком.

Отже вплив температури і тиску (або енерґії притяганя) є ту зіставлені поруч впливу хемічного середовища і зсумовані разом. Але найцікавійше, що при деяких системах можна один з механічних впливів навіть хемічним заступити.

Пр. етер мішає ся з водою і дає дві фази плинні, що верствують ся одна на другій. В міру того, як їх взаїмний сочинник розчинюваня підносить ся враз з температурою, зникають обі, та зближують ся до критичної точки, в котрій цїлком змішають ся. Але зовсїм те саме явище можна викликати при сталій температурі степенним додаванєм алькоголю, котрий розпускаючись в обох фазах, побільшує в них оба попередні сочинники способом тим самим.

На таке справдне, поки що, з’унїтаризоване сил, котре в реґулї фаз видимо, а навіть як в тім случаю міримо, хотїв я звернути увагу.

Юлїян Гірняк.

Відношенє ґеометриї метричної до метової.

написав

Др. Володимир Левицкий.

1. В ґеометриї можливі є дві точки виходу; або опираємо ся на незмінности т. зв. метричних властностий фіґур (пр. незмінність віддаленя двох точок, постійність кута, замкненого двома простими і т. п.), або можемо станути на становиску загальнїйшім і оперти ся на незмінности т. зв. метових властностий фіґур (пр. постійність відношеня подвійного подїлу). Звичайно робить ся так, що вперед розслїджує ся власности метричні фіґур, а від них переходить ся до властностий метових; но та дорога не конче є потрібна. Можна здвигнути цїлу будівлю ґеометриї метової при помочи виключно її питомих аксіомів без відкликуваня ся до помочи ґеометриї метричної.[1]

В так построєній ґеометриї метовій остають без зміни усякі власности метові при якій-небудь колїнеациї (посвояченю), якої виразом є формули (в сорядних однородних):

$$\left.\begin{aligned} \varrho x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \\ \varrho x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \\ \varrho x_3' &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 \\ \varrho x_4' &= a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 \end{aligned}\right\} \qquad 1).$$

Ту маємо 15 сочинників, значить ся маємо в трирозміровім просторі ∞^{15} посвоячень, отже ґеометрия метова займаєсь такими відношенями фіґур, які остають без зміни для 15-частної ґрупи G_{15}.

---

[1] Пор. Enriques: Geometria projettiva. Bologna 1897.

2. Приймім отже, щосьмо здвигнули вже ґеометрию метову і спитаймо, як тепер на відворот від тої загальнійшої ґеометриї перейти до специяльнійшої т. є метричної ґеометриі.

В ґеометриї метовій не робить ся ніякої ріжниці між поодинокими площами, бо они всї є рівноважні, за се ґеометрия елементарна виріжняє площу безконечно далеку. Наколи отже хочем перейти від ґеометриї метової до елементарної, мусимо вперед *долучити до неї площу безконечно далеку*. Через се мусимо з поміж усїх ∞^{15} посвоячень вибрати такі, що площі безконечно далекої не нарушають, при яких отже площа та сама в себе переходить. Будуть се — в звичайних простокутних сорядних — посвояченя подібні:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \end{aligned}\right\} \qquad 2).$$

Сочинників є тут 12, отже посвоячень маєм ∞^{12}, а ґрупа G_{15} спаде через долученє безконечно далекої площи на G_{12}.

Але через се ми не дійшли єще до ґеометриї елементарної, в якій фіґури уважаєм тодї за рівноважні, наколи они переходять в себе через рух (отже є пристайні), або через відбитє (пристайність відворотна), або через перетвореня подібні (подібність). Ті всї перетвореня дають ґрупу G_7 (т. є. ∞^6 рухів, ∞^1 відбить і перетворень подібних); наколи до неї хочемо дійти, щоби ся найти в царинї ґеометриї елементарної, мусимо долучити до ґеометриї метової попри площу безконечно далеку єще *якийсь утвір* з 5 сталими; сей утвір остати мусить без зміни при усяких колїнеациях. Твором з 5 сочинниками є *крива другого степеня* (переріз стіжковий; значити єго будем через C_2). Понеже ми долучили до ґеометриї метової безконечно далеку площу, то і долучена крива C_2 лежати мусить в тій безконечно далекій площи і бути уявна (мнима). Таку криву C_2 називає Кляйн і Lie *колом кулистим* (Kugelkreis). Щоби єго дістати, треба перерізати кулю, дану в сорядних однородних:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_{11}tx + 2a_{12}ty + 2a_{13}tz + a_{14}t^2 = 0$$

(t звичайно $= 1$, наколи берем сорядні неоднородні) площею безконечно далекою; дістанем тодї рівнанє кола кулистого:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \qquad t = 0. \qquad 3).$$

В сорядних Plückera (площи) $u\,v\,w$ дістанемо — як Кляйн доказує — рівнанє сего утвору:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Наколи отже хочемо перейти від ґеометриї метової до елементарноï, мусимо долучити до неї площу безконечно далеку і кулисте коло.

В ґеометриї на площи річ о стілько упрощує ся, що місто безконечної площи треба брати просту безконечно далеку $t = 0$ і утвір $x^2 + y^2 = 0$; оба они разом дають т. зв. мнимі точки колові; прості $x + iy = 0$ та $x - iy = 0$ перетинають ся проте в двох безконечно далеких точках колових. Ті точки колові відповідають кулистому колу в просторі.

[Ту мусимо додати, що сам утвір $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ є стіжком мінімальним (стіжок, що з него остав лиш вершок); его творячі є простими мінімальними. На площи є $x + iy = 0$ і $x - iy = 0$ простими мінімальними, а кут між двома простими на площи є рівний:

$$\varphi = \frac{1}{2} \log DV \qquad 4),$$

де DV є стосунок подвійного поділу між тими двома простими, а мінімальними, що ідуть з вершка сего кута — як се Laguerre[1]) доказав. Се вираженє на кут буде нам дальше потрібне].

Загальнїйше можна розвязати квестию переходу від ґеометриї метової до елементарної в площи, долучаючи не мнимі точки колові, але долучаючи після Cayley'а[2]) який небудь переріз стіжковий C_2, який назвем абсолютним перерізом стіжковим. Дістанемо тодї три ріжні евентуальности:

1) берем абсолютний C_2 мнимий.

2) „ „ C_2 дїйсний.

3) „ мниму пару точок.

Ґеометрию з долученим мнимим C_2 назвем за Кляйном елїптичною, з долученим дїйсним C_2 гіперболїчною, з долученою парою точок мнимих параболїчною. Та послїдна є, як се відразу видко, ідентична з ґеометриєю, що повстала з метової через долученє точок колових.

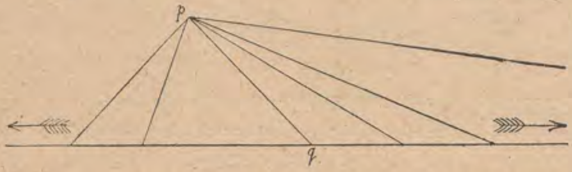
3. Побачимо тепер, яка заходить звязь між тими трома рядами ґеометриї Cayley'а а т. зв. ґеометриєю неевклїдовою; підем ту дорогою, вказаною через Кляйна в его викладах про ґеометрию метову в зимовім семестрі р. 1900/01 в Ґетінґен.

Як відомо, в ґеометриї евклїдовій на перший плян висуваєсь т. зв. аксіом лїнїй рівнобіжних.

---

[1]) Пор. Nouvell. Annal. 1853.

[2]) Пор. Philos. Transact. 1859.



Возьмім якусь лїнїю і получім точку q на нїй з якоюсь точкою p; най же та точка q посуваєсь постійно на право, то тодї граничне положенє луча pq назвем *положенєм рівнобіжним*. Чи можливе є тілько одно таке положенє? В дійсности точка q може посуватись і на лїво до положеня граничного і тодї можливе є друге положенє рівнобіжне. Заходить отже квестия, чи оба ті положеня є одним і тим самим, чи нї, т. є. чи через точку p переходять дві, чи одна рівнобіжна. Ґеометрия евклїдова приймає лиш одну рівнобіжну; наколи однак приймем дві рівнобіжні ідучі через p, не станемо в суперечности з льоґікою, а дійдем до ґеометриї, якої вислїди будуть відмінні від вислїдів ґеометриї евклїдової. Тою дорогою пішли J. Bolyai[1]) і Лобачевский[2]) і сотворили *перший рід ґеометриї неевклїдової*, де через кожду точку переходять дві рівнобіжні.

Але можлива є еще і друга евентуальність, на яку звернув увагу Riemann[3]). Заложенє, що істнує граничне положенє для лїниї, що іде через точку p, містить в собі заложенє, що дана лїнїя є безконечно довга. В дійсности (пр. в сьвітї фізичнім) не повинно ся говорити про лїнїю безконечно довгу; можна говорити, що лїнїя є необмежена, дуже, дуже довга, але не нескінчена (так пр. в ґеометриї метовій кожда проста є замкнена). В виду сего не може істнувати і положенє граничне, але що найбільше асимптотичне; нема отже і лїнїй рівнобіжних.

Приходим через се до *другого рода ґеометриї неевклїдової*, вповнї льоґічної, як і перша; ту в просторі нема зовсїм лїнїй рівнобіжних, а кожда проста є замкнена і скінчена. А що анальоґічний случай заходить на кулї, де кожда лїнїя вертає сама в себе, проте ґеометрия Riemann'а носить також назву *ґеометриї сферичної*; можемо собі з'уявити певну кулю о лучу R, де вивиступають анальоґічні відносини, як в ґеометриї Riemann'а; тодї є $\frac{1}{R^2}$ мірою кривини кулї, а разом мірою кривини простору

---

[1]) Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens etc. (пор. W. Bolyai: Tentamen 1832).

[2]) Exposition des principes de la géométrie, Kasan 1826. недруковане; опісля 1829.

[3]) Über die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen (Riemann's Werke) надруковане по смерти R.

Riemann'a. (В дїйсности є два роди сеї ґеометриї, на що увагу звернув доперва Klein[1]); один рід, де дві прості перетинають ся в однїй точцї, а через дві точки переходить одна проста; є се поєдиньча ґеометрия. Другий рід, де дві прості перетинають ся в двох точках, де отже через дві точки переходить безконечно много простих, є т. т. зв. подвійною ґеометриєю R. Та в се близше не входимо). Анальоґічно перший рід ґеометриї неевклїдової назвати можем ґеометриєю псевдосферичною; їй відповідає куля о лучу iR, отже мірою кривини сеї ґеометриї є $-\frac{1}{R^2}$; та о тім далї буде обширнїйше бесїда. – Очевидно для ґеометриї евклїдової є $R = \infty$, отже міра кривини виносить 0.

4. Вернїм тепер до ґеометриї метової, то побачимо, як тїсна звязь заходить між нею, а трома що-йно наведеними родами ґеометриї метричної. Покаже ся, що ґеометрия параболїчна відповідає звичайній ґеометриї евклїдовій, гіперболїчна ґеометриї Лобачевского, а елїптична ґеометриї Riemann'a. На се перший звернув увагу Кляйн[2]).

Переходу довершимо в слїдуючий спосіб. Наколи маєм два лучі о сорядних лїнїових $(x_1 \, x_2 \, x_3)$ і $(x_1' \, x_2' \, x_3')$, то кут між ними виражує ся, як відомо, формулою:

$$\omega = \arc\cos \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}} \qquad 5),$$

а кут між двома площами о сорядних площи $(u_1 \, u_2 \, u_3)$ і $(u_1' \, u_2' \, u_3')$ виражує ся формулою:

$$\varphi = \arc\cos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,\sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2}} \qquad 6),$$

де $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ представляє в сорядних лїнійних, а $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$ в сорядних площ рівнанє стіжка мінімального.

Місто мінімального стіжка приймім за підставу після теориї Cayley'a абсолютний переріз стіжка C_2 в сорядних однородних; через се обмежимо ся до площи.

Наколи сорядні $x_1 : x_2 : x_3$ представляють в площи точку, або в точцї луч, а сорядні $u_1 : u_2 : u_3$ на площи просту, або в точцї площу, то рівнанє безглядної кривої C_2 буде:

$\Omega(x_1 \, x_2 \, x_3) = 0$ в сорядних точкових, а
$\Phi(u_1 \, u_2 \, u_3) = 0$ в сорядних лїнї простої.

---

[1]) Math. Annal. 4. p. 604.

[2]) Math. Annal. 4. 6.

Узагальняючи за Кляйном рівнаня 5) та 6) дістанемо на відступ двох точок $(x_1\, x_2\, x_3)$ і $(x_1{}'\, x_2{}'\, x_3{}')$ форму:

$$\omega = c.\arc\cos \frac{1}{2} \frac{x_1{}' \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + x_2{}' \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} + x_3{}' \frac{\partial \Omega}{\partial x_3}}{\sqrt{\Omega(x_1\, x_2\, x_3)}\, \sqrt{\Omega(x_1{}'\, x_2{}'\, x_3{}')}} \qquad 7),$$

де в чисельнику виступає пів бігунової; стала c є довільна, бо від нас зависить вибір одиниць мірничих. Кут між двома простими означимо рівнанєм:

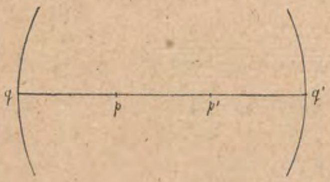
$$\varphi = \arc\cos \frac{1}{2} \frac{u_1{}' \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + u_2{}' \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + u_3{}' \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}}{\sqrt{\Phi(u_1\, u_2\, u_3)}\, \sqrt{\Phi(u_1{}'\, u_2{}'\, u_3{}')}} \qquad 8).$$

Місто формул триґонометричних впровадимо форми Lagnerre'a:

$$\omega = c \frac{i}{2} \log DV, \qquad \varphi = \frac{i}{2} \log D_1V,$$

де DV є відношенє подвійного поділу. Се відношенє означимо в слїдуючий спосіб:

$$DV = \frac{pq \cdot p'q'}{pq' \cdot p'q}$$

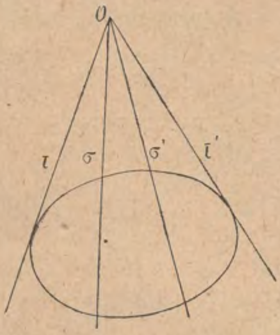


де $p(x_1\, x_2\, x_3)$ і $p'(x_1{}'\, x_2{}'\, x_3{}')$ є точки дані, що їх відступу шукаємо, а q і q' точки, де лінія pp' перетинає безглядну криву C_2.

Анальоґічно є:

$$D_1V = \frac{(\sigma\tau)(\sigma'\tau')}{(\sigma\tau')(\sigma'\tau)},$$

де σ і σ' є дані прості, а τ і τ' стичні, поведені до C_2 з точки, з якої ідуть прості σ та σ'. Очевидно значать $(\sigma\tau)$, ······ sinus'и відповідних кутів.



Перейдїм тепер до поодиноких случаїв.

5. Най крива C_2 буде мнима, отже маєм случай ґеометриї еліптичної.

Наколи криву C_2 віднесемо до трикутника спряженого з самим собою, дістанемо:

$$\Omega = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2$$

$$\Phi = u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2$$

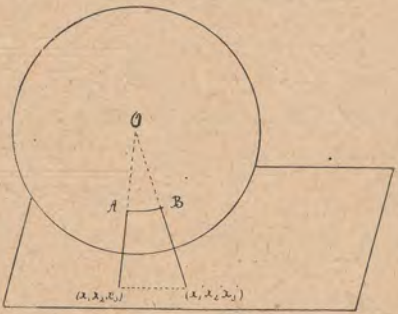
(сорядні однородні). Тоді дістанемо після формул 7) і 8) на відступ двох точок:

$$\omega = c \arc \cos \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}}$$

а на кут між двома простими:

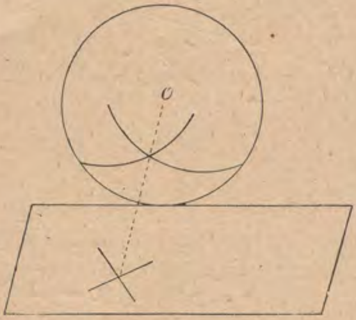
$$\varphi = \arc \cos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2}}.$$

В порівнаню з формулою 5) бачимо, що відступ двох точок є c рази так великий, як кут між простими, що ідуть через точку O, а кут між двома лучами є рівний кутови між двома площами, що ідуть через O. Наколи отже з O (поза площею Cayley'а) зачеркнемо кулю лучом R = c і з O поведемо лучі до даних точок $(x_1 x_2 x_3)$ і $(x_1' x_2' x_3')$, то відступ точок, в яких лучі ті перебивають кулю, є c рази так великий, як кут середоточний, що ті лучі его замикають. Можна проте сказати: Відступ двох точок на площи Cayley'а є рівний елементарному відступови їх образів A і B на кулї о лучу c.



Друга формула порівнана з 6) каже нам, що кут Cayley'а між двома простими на площи є рівний кутови, який творять відповідні найбільші кола на кулї о лучу c, зачеркненої довкола точки O.

В загалї можна сказати: Відношеня метричні ґеометриї елїптичної є впрост метом відповідних відношень, які істнують на кулї, зачеркненої з точки O. Тямити при тім треба, що відношенє метове між кулею а площою є дво-однократне, бо два кінцї проміру дають все на мет лиш одну точку.



Проста в ґеометриї елїптичній є скінчена, бо їй відповідає на кулї найбільше коло, а се має довготу $2R\pi = 2\pi c$; проста має проте довготу о половину меньшу, т. є. $\pi c = \pi R$. Як з сего бачимо, R є сталою характеристичнею, стисло звязаною з одиницею довготи (c).

Понеже проста є скінчена, тому в ґеометриї еліптичній нема граничного положеня, нема проте рівнобіжної. — Як з сего видко, ґеометрия еліптична Cayley'а веде просто до ґеометриї неевклїдової Riemann'а о просторі необмеженім, але не нескінченім.

6. Возьмім случай другий, т. є. криву беззглядну C_2 дїйсну; через се маєм ґеометрию гіперболїчну.

Наколи і ту рівнанє кривої C_2 віднесемо до трикутника спряженого з самим собою, дістанемо:

$$\Omega = x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2$$
$$\Phi = u_1{}^2 + u_2{}^2 - u_3{}^2.$$

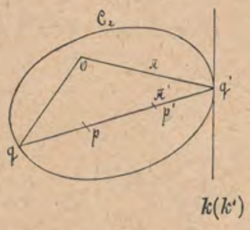
Відступ двох точок є ту:

$$\omega = c \arccos \frac{x_1 x_1{}' + x_2 x_2{}' - x_3 x_3{}'}{\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2}\sqrt{x_1{}'^2 + x_2{}'^2 - x_3{}'^2}}$$

а кут між двома простими:

$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u_1{}' + u_2 u_2{}' - u_3 u_3{}'}{\sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 - u_3{}^2}\sqrt{u_1{}'^2 + u_2{}'^2 -- u_3{}'^2}}.$$

C_2 є дїйсне, можна проте її нарисувати; тодї всї наші операциї відбувати ся будуть в серединї C_2. Що дотикає кута φ між двома простими, то і ту остає то само, що передше, бо стичні, що ідуть з точки перетинаня ся обох простих (а прості берем в внутрі кривої) до кривої C_2, є мнимі. — Иньша річ є з відступом обох простих.



Понеже:

$$\omega = c\,\frac{1}{2}\log DV,$$

а

$$DV = \frac{pq \cdot p'q'}{pq' \cdot p'q}$$

має дїйсну вартість, а кромі сего відступ обох точок має бути дїйсний, то мусить бути конче:

$$c = -iR,$$

де $-\frac{1}{R^2}$ буде мірою кривини ґеометриї гіперболїчної.

Що ся дїє в безконечности? Покажемо, що обвід кривої C_2 представляє безконечно далеке, що проте проста має дві безконечно далекі точки, або що через одну точку ідуть дві віддїльні рівнобіжні.

І справді в внутрі C_2 є $DV = \frac{pq' . p'q'}{pq' . p'q}$, а $\omega = \frac{R}{2} \log DV$. Як довго находить ся p' в внутрі C_2, так довго є DV дійсне. Наколи p' паде в q або q' (отже на C_2), то DV станесь рівне 0 або ∞, $DV = \pm \infty$, отже віддалене $pp' = \pm \infty$. Наколи p' вийде поза C_2, то $DV < 0$, отже відступ pp' стане мнимий. Кожда проста має проте дві дійсні безконечно далекі точки, а се точки пересїчи єї з C_2. Наколи возьмемо в C_2 точку O і получимо єї з p', то наколи p' стремить до q і q', дістанемо дві рівнобіжні Oq і Oq' до pp'. В ґеометриї гіперболїчній називаємо проте рівнобіжними такі лінїї, які ся перетинають в точках обводу кривої беззглядної C_2.

Бачимо проте, що ґеометрия гіперболїчна вяже ся з ґеометриєю Лобачевского.

Який кут замикають дві рівнобіжні?

Наколи тї рівнобіжні є π і π', а через їх точку пересїчи поведем стичні k і k' до C_2, то тї стичні спадають разом ($k = k'$). Тодї:

$$DV = \frac{\sin \pi k . \sin \pi' k'}{\sin \pi k' . \sin \pi' k} = 1, \quad \log DV = 0,$$

отже: дві рівнобіжні перетинають ся в точках беззглядної кривої C_2 під кутом зеро.

З сего слїдує дуже цїкаве свійство трикутників вписаних в криву C_2; в кождім такім трикутнику всї кути рівнають ся зеру, а боки є до себе рівнобіжні.

Бачили ми, що ґеометрию еліптичну можна інтерпретувати на кулї, або в загалї на поверхнї о сталій додатній кривинї в звичайнім нашім просторі. Завважити треба, що і ґеометрию гіперболїчну можна інтерпретувати в звичайнім просторі на певних поверхнях псевдосферичних зі сталою кривиною відємною. Поверхнї такі розслїджував перший Minding[1]), на їх значінє для ґеометриї неевклїдової звернув однак увагу доперва Beltrami[2]). Він доказав, що ґеометрия на таких поверхнях зовсїм згоджує ся з ґеометриєю Лобачевского. Вже Minding[3]) постеріг, що наколи на таких

---

[1]) Crelle's Journal Bd. 19. 20. 1839. 1840.

[2]) Saggio di Interpretazione della Geometria non-Euclidea (Giorn. di Matem VI. 1868). Иньші працї про тї поверхнї є: Dini: Comptes rendus I. 1865, Enneper: Götting. Nachr. 1868. Bianchi: Dissertat. (Pisa 1879). Lie: Nouv. Archiv für Math. Bd. 4 – 5. 1879—1880. Backlund: Math. Annal. 19. (1882). Bianchi: Lezioni di Geomet. differenziale (1886).

[3]) loc. cit.

поверхнях уважати будем трикутники утворені через лінії ґеодетичні, то в тих трикутниках будуть мали значінє усї форми триґонометриї сферичної, наколи в них місто луча R вставимо — iR. Такі форми дістав сучасний до Minding'а Лобачевский в своїй ґеометриї, але схожість їх з ґеометриєю на поверхнях псевдосферичних постеріг доперва Beltrami.

7. Возьмім тепер третий случай ґеометриї Cayley'а т. є. ґеометрию параболїчну, де абсолютна крива C_2 деґенерує ся в мниму пару точок.

Пара точок колових є:

$$u_1^2+u_2^2=0,$$

но ми ідучи за Кляйном, напишемо се рівнанє в загальнїйшім виді:

$$u_1^2+u_2^2+\lambda u_3^2=0,$$

де λ може принимати вартости додатні, відємні та зеро. Для $\lambda>0$ є абсолютна крива C_2 мнима (случай ґеометриї еліптичної), для $\lambda<0$ є C_2 дійсна (ґеометрия гіперболїчна); $\lambda=0$ дає случай граничний, який тепер розбираємо.

В сорядних точок напишім рівнанє загальне абсолютної кривої C_2 в виді:

$$\lambda(x_1^2+x_2^2)+x_3^2=0.$$

Для $\lambda=0$ є $x_3^2=0$, т. є. маємо подвійну безконечно далеку площу.

Кут між двома простими в розуміню Cayley'а буде тепер:

$$\varphi=\arccos\frac{u_1u_1'+u_2u_2'+\lambda u_3u_3'}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+\lambda u_3^2}\sqrt{u_1'^2+u_2'^2+\lambda u_3'^2}};$$

з відси випаде для $\lambda=0$:

$$\varphi=\arccos\frac{u_1u'_1+u_2u_2'^2.}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{u_1'^2+u_2'^2}}$$

т. є. дістаєм відразу вираженє на кут таке саме, як в ґеометриї евклїдовій.

Розслїдім, чи і на відступ двох точок випаде для $\lambda=0$ таке саме вираженє, як в ґеометриї евклїдовій.

Для $\lambda=0$ випаде на віддаленє двох точок:

$$\omega=c\arccos\frac{u_3u_3'}{u_3u_3'}=c\arccos 1=0;$$

то само дає і log DV. Но побачимо, що річ випаде інакше, наколи в иньший спосіб перейдем до границі. Возьмім іменно: місто arc cos arc sin на основі рівнаня:

$$\text{arc sin}=\text{arc}\left(\sin=\sqrt{1-\cos^2}\right);$$

тоді дістанемо на відступ двох точок взагалї:

$$\omega = c \arcsin \sqrt{\frac{(\lambda x_1{}^2+\lambda x_2{}^2+x_3{}^2)(\lambda x_1'^2+\lambda x_2'^2+x_3'^2)-(\lambda x_1 x_1'+\lambda x_2 x_2'+x_3 x_3')^2}{(\lambda x_1{}^2+\lambda x_2{}^2+x_3{}^2)(\lambda x_1'^2+\lambda x_2'^2+x_3'^2)}}.$$

Приймім λ дуже мале і розвиньмо повисшу форму після степений λ; дістанемо:

$$\omega = c \arcsin \sqrt{\frac{\lambda(x_1{}^2 x_3'^2+x_2{}^2 x_3'^2+x_1'^2 x_3{}^2+x_2'^2 x_3{}^2-2x_1 x_1' x_3 x_3'-2x_2 x_2' x_3 x_3'+\lambda^2(\cdots\cdots)}{x_3{}^2 x_3'^2+\lambda(\cdots\cdots)}}.$$

Наколи пропустимо вирази з λ^2 в чисельнику, а з λ в знаменнику, дістанемо:

$$\omega = c \arcsin \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{(x_1 x_3'-x_1' x_3)^2+(x_2 x_3'-x_2' x_3)^2}{x_3{}^2 x_3'^2}}.$$

Перейдім до сорядних неоднородних, отже положім:

$$x_1 = x,\quad x_2 = y,\quad x_3 = x_3' = 1,$$

то дістанемо:

$$\omega = c \arcsin \sqrt{\lambda} \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}.$$

Для $\lambda = 0$ перейшов би сей вираз в зеро, наколиб не стала c, якої вибір лежить в наших руках. Виберім проте c так, щоби все $c\sqrt{\lambda} = 1$, а кромі сего положім за sinus сам лук (се можливе з огляду на безконечно мале λ); тоді дістанемо:

$$\omega = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

а се є відступ двох точок, виражений взором ґеометриї аналїтичної.

Бачимо проте, що **ґеометрия параболїчна** Cayley'а відповідає **ґеометриї евклїдовій**.

З причини висше подачих відношень між ґеометриями Cayley'а а трома родами ґеометриї елементарної перенїс Кляйн назви: ґеометрия параболїчна, гіперболїчна і елїптична на ґеометрию Евклїда, Лобачевского і Riemann'a.[1])

Тернопіль, в лютім 1903.

---

[1]) Пор лїтературу (крім висше поданої): W. Killing: Die nichteuklidischen Raumformen 2 Bde (Paderborn); Clebsch-Lindemann: Geometrie Bd. 2. 1 Leipzig 1891 F. Klein: Nichteuklidische Geometrie (автоґрафоване) Göttingen 1893 (I. II). F. Klein: Projective Geometrie (в манускриптї в бібліотецї семінара математичного в Göttingen) 1901.

Фізична ґеоґрафія при кінци XIX. столїтя.

(Наукова хронїка за 1898, 1899 і 1900 р.).

Написав *Др. Стефан Рудницкий.*

Нинїшня розвідка не хоче бути нїчим иньшим, як лиш *науковою хронїкою* в области фізичної ґеоґрафії за пару послїдних лїт минувшого що-йно столїтя. Рік тому рішив ся я приступити до зладженя огляду важнїйших праць в тій царинї. Я почав роботу, але она за пару місяцїв так у мене під руками виросла, що я вагував ся навіть поміщати єї в „Науковій Хронїцї“ Збірника.

Але через осібний титул моя теперішня праця не затратила цїх наукової хронїки, хоч я подекуди старавсь єї нагнути до загально прийнятого шабльона розвідки. Сей хронїкарский характер треба менї виразно зазначити.

Я старавсь ту обняти і коротенько зібрати всї важнїйші поступи фізичної ґеоґрафії в лїтах 1899 і 1900, узгляднивши при тім що найважнїйші прояви з 1898 р. Що цїлковите вичерпанє лїтератури було менї не можливе — не подивує ся нїхто, бо у львівских біблїотеках дуже малу лиш скількість ґеоґрафічних і споріднених публїкаций мож було найти. Часто мусїв я брати материял з другої руки, що впрочім в того рода розвідках, як теперішня, невеликою ще є провиною.

Зібраний материял я подїлив на кілька ґруп після частий фізичної ґеоґрафії. Ідучи за приміром многих підручників я поставив на переді метеорольоґію та клїматольоґію разом з земским маґнетизмом, дальше океаноґрафію, а потім вже динаміку та морфольоґію суші. Ґеоґрафії ростин і зьвірят в нинїшній хронїцї я не узгляднив, бо ті два дїли радше зачисляти належить до біоґеоґрафії, як до фізичної ґеоґрафії в тїснїйшім значіню.

Заки приступимо до метеорольоґічної части, належить менї подати звістку про підручники обіймаючі цілість фізичної ґеоґрафії. На згадку заслугують ту передовсім два: Wagner’a і Günther’a.

Компендия фізичної ґеоґрафії Ваґнера находить ся в першім томі єго „Lehrbuch der Geographie (Hannover und Leipzig, Hahn, 1900)“, де обнимає книгу II. (ст. 228—561). Вправдї не так знаменито, як математична ґеоґрафія в тім самім підручнику, є все таки і фізична ґеоґрафія ту дуже добре, а іменнож ориґінально оброблена. Вплив Richthofen'a, Supan'a і Penck'a особливо в морфольоґічній части є виразний, але зовсїм самостійний погляд на цїлість предмету надає творови Ваґнера дуже велику вартість. Хоч оно до річи не належить, додам, що перший том Lehrbuch'a, обнимаючий загальну ґеоґрафію, є дійсно епохальним явищем і буде з певностию на цїлі десятки лїт підставою ґеоґрафічних студий. Головно цїкавий є методичний вступ, а вже по вік остане характерною для розвитку науки ґеоґрафії (особливож єї фізичної части) величезна ріжниця, яка заходить між теперішним обробленєм Ваґнера загальної ґеоґрафії (1900) а такимже обробленєм в послїднїм виданю (1883) сего підручника, де ще попри імя Ваґнера фіґурувало імя Ґутого. Ту наглядно видимо, як змінивсь цїлий характер ґеоґрафічної дисциплїни в нецїлих 20-ох лїтах, як скоро она поступила від сухої топоґрафічної систематики до ґенетики.

Другою дуже знаменною для поступу ґеоґрафії фізичної книжкою є Günther: Handbuch der Geophysik II. Aufl. Stuttgart, Enke. I. Bd. 1897, II. Bd. 1899.

Се в своїм родї без сумнїву chef d'oeuvre і підручник конечний для того, що хоче в ґеофізицї працювати. В історичнім вступі автор дуже уміло розграничає ґеофізику від споріднених з нею наук: фізики, астрономії та ґеольоґії, призначаючи їй землю на поле ділана. Перша книга обрабляє космічне становиско землї, друга єї величину, вид, густоту і рухи в просторі та картоґрафію; трета внутрішне тепло землї, вулканїзм і землетрясеня; четверта маґнетні за електричні явища; пята атмосферольоґію: шеста океаноґрафію; сема відносини моря і суші між собою, послїдна морфольоґію земскої кори. Очитанє автора велике, отже звід лїтератури величезний. І ту порівнанє другого виданя сеї книжки з першим (1884/5) як не мож лїпше поучує, як сильно в послїдних лїтах зросла фізична ґеоґрафія і як розширивсь єї обсяг.

З иньших книжок, що обнимають цїлість або більші уступи з фізичної ґеоґрафії, треба згадати про другі виданя знаменитих підручників француского ґеольоґа Lapparent'a. Єго Traité de géologie (тепер II. ed. Paris Masson 1899, 1900) визначуєсь тим, що на кождім кроцї узглядняє потреби ґеоґрафа і їх нераз дуже уміло заспокоює. Leçons de géographie physique Paris, Masson 1898. того самого автора збогатились в другім виданю новими розділами: про море і (дуже важним) про клясифікацию гір.

Занотувати належить також друге видане фізичної ґеольоґії Мушкетова (Ст. Петербург, Єрлих, 1899), що важна з огляду на российскі і азийскі відносини там представлені (часто на підставі автопсиї).

В звісній збірці Göschen'а вийшла коротенька книжочка Günther'а Physische Geographie (Leipzig, Göschen 1899), що в 11 розділах подає елементи нашої науки в досить приступний спосіб.

В Анґлії виходить від 1899 р. дуже широко закроєний атляс до фізичної ґеоґрафії: Bartholomew's Physical Atlas. Вийшов дотепер лиш IV. том: Atlas of Meteorology, Westminster, Constable 1899, 35 карт. Однак, хоч публїкация ся дуже коштовна і на позір дуже поважна, то не може бути навіть для р. 1899 вважана останним словом науки, бо не узглядняє дуже многих і важних новійших метеорольоґічних праць. Проте і карти сего атлясу в многих місцях остають поза наукою.

В серпни 1899 відбувсь в Берлинї VII-ий міжнародний конґрес ґеоґрафів. Ту обмежусь лиш згадкою, що занимавсь він дуже многими квестиями фізичної ґеоґрафії. Про головнїйші реферати сего конґресу подам звістку на иньшім місци Збірника.

I. Метеорольоґія і клїматольоґія*)

Склад і обсяг атмосфери.

Відкритє незнаного дотепер ґазу арґону, що входить попри кисень і азот в склад нашої атмосфери, навело учених на думку, чи нема в нїй ще иньших незнаних дотепер ґазових складників. І дійсно вже в 1898 р. удало ся Ramsay'еви і Travers'ови відкрити три нові ґази, що входять в склад воздуха: Криптон, Неон і Метарґон[1]). Відкритє послїдувало дорогою спектроскопічною. В дальших розслїдах показало ся, що метарґон властиво не істнує, натомість відкрили згадані учені ще один ґаз, а се ксенон. Всї ті ґази є одно-

---

*) [Пор. Meinardus, Bericht über die Fortschritte der geographischen Meteorologie. Geographisches Jahrbuch XXIV. 1901. I. H.].

[1]) Zeitschrift für phys. Chemie XXXVI. 564.

атомні. Криптон і ксенон відзначують ся значним атомним тягаром (81·6 згл. 128·0, Neon має лиш 20·0). Скількість її̈х всіх разом в воздусї є так мала, як скількість золота в морскій воді, не може отже практично в рахунок входити[1]. Киснем воздуха занимавсь Leduc і найшов, що скількість єго в атмосфері в ріжних підсонях і висотах колибаєть ся лиш між 23·11 а 23.23$^0/_0$ тягару[2]. Дослїди над тимсамим ґазом робив Stoney і порівнуючи скількість кисня в атмосфері зі скількостию єго в земскій корі дійшов до результату, що на $2^1/_2$ m. груба верства земскої кори має тількож само кисня, що цїла атмосфера[3]. Stoney думає, що водень і гель в наслїдок рухливости своїх частинок втікли з земскої атмосфери, але се є мабудь неправдиве, бо істноване геля є доказане, а сьвіжо найшов Gautier, що па 10.000 частий сухого воздуха при 0^0 э всегда $1^1/_2$ частий водня[4].

Скількість квасу вугляного в воздусї означив St. Maurice de Thierry на двох стацвях в висотї 1080 m. і 3050 m. на склонах Монбляна і рівночасно в Парижи. Вислїд був: скількість вугляного квасу меньшає ідь горі, але дуже слабо[5].

Levy і Henriet виказали, що по при квас вугляний є в воздусї ще і иньші ґази заключаючі вуголь пр. окис угля (CO)[6]

Gautier думає, що всї ті ґази заключаючі вуголь походять з процесів хемічних в ростиннім і зьвірячім сьвітї, бо аналїза морского воздуха нї слїду їх не показала[7].

Тойсам учений виказав також, що в воздусї істнує йод, що правда не яко ґаз, а в видї сталім. Походить він мабуть з нисших орґанїзмів живучих в мори, бо морский воздух показав єго найбільшу скількість (на 1000 l — 0·167 mg). Воздух міский виказав єго 13 разів меньше, подібнож воздух гірский і лїсовий, з висотою зростає і скількість йоду, бо орґанїчний пил, що єго заключає, іде горою[8]. Морский воздух заключає також сіль кухонну (0·022 g. на 1 m^3)[9].

---

[1] Пор. Proceedings of Roy. Soc. LXIII. 405. LXVII. 329. Comptes Rendus CXXVI. 1610. Nature LVIII. 127. Annuaire pour l'an 1900 publié par le Bureau des Longitudes. 1899 ст. 15.

[2] Comptes Rendus CXXVI. 413.

[3] Philosophical Magazine XLVII. 565. Met. Zeitschrift 1899. 371.

[4] Comptes Rendus CXXVII. 693.

[5] Comptes Rendus CXXIX. 315.

[6] Comptes Rendus CXXIII. 125. CXXVI. 1651. CXXVII. 353

[7] Comptes Rendus CXXXI. 13 і 86.

[8] Comptes Rendus CXXIX. 9.

[9] Ibidem CXXVIII. 715.

На підставі 20-лїтних обсервацнй в Парижи сконстатував Albert Levy, що скількість озону виносить пересїчно 1·65 mg. на 100 m³. Maximum припадає в червни (2·03), minimum в падолистї (1·34)¹).

Паданями пороху пассатового занимаєть ся від певного часу нїмецка морска обсерватория²). В лїтах 1894 і 1895 їх майже не було, за се дуже часті були они в 1898 р.³).

Ту можнаб також примістити досліди над блукаючими огниками Müller'a⁴). В який спосіб они повстають, дотепер властиво незвісно. Є се фосфоризуючий воздух, але для чого він фосфоризує, не знаєм, чи в наслїдок примішки фосфорного водня, чи ньших ґазів.

Причинок до пізнаня висоти атмосфери подає Denning. Він находить, що лиш в дуже рідких случах запалюють ся метеорити висше чим в 240 km. від поверхнї землї⁵).

Проміньоване.

Проміньоване сонця є так трудне до близшого пізнаня, що мимо дуже довгих старань не удалось і до нинї докладно означити т. з. сталої сонїчної. Який є стан дослїдів над сею справою, найхарактернїйше показує конкурс, що єго розписала берлїньска академія наук тепер вже по раз другий. Задачию конкурсовою є: означити сталу сонїчну так докладно, щоби в єї обсервациях протягом року видний був вплив ріжного в афелї і перігелї віддаленя землї від сонця.

Актінометричні дослїди на горі Monte Rosa навели Ricco на гадку, що з одної стациї не можна докладно означити сонїчної сталої, а треба єї означити на кількох стациях мало від себе віддалених в поземім напрямі, а значно в прямовіснім. На горі Rocciamelone над долиною Susa вибрав він отже 4 стациї в висотах 501 m, 1722 m, 2834 m і 3537 m. Від 2—6 вересня 1898 роблено обсервациї актінометром Violle'a і Ricco найшов з них, що стала

---

[1] Ciel et Terre XIX. 291.

[2] Пор. Segelhandbuch für den Nordatlantischen Ocean. Hamburg 1899 133 sqts.

[3] Annalen der Hydrographie XXVI. 1898. 246.

[4] Gaea 1900. 541.

[5] Ciel et Terre XIX. 158 д.

сонїчна виносить 2·5 кальорий на 1 cm^2 і мінуту1). Дещо пізнійша дискусия иньших вислїдів і формул не змінила переконаня Ricco'a і він узнав за найлїпшу вартість на сталу сонїчну 2·5—2·6 кальорий2). Є се вартість без сумніву за мала. Pernter з обсерваций ріжних учених на Монблянї і Monte Rosa приняв за сонїчву сталу 4 кальорий3).

Дотична розвідка Schreiber'a заключає лиш формули4); так само розвідка Steiner'a5).

Peucker вказує на вагу тїни гір на клїматичні, біольоґічні і гиґієнічні відносини місцевостий, положених в долинах. Іменно ходить ту о се, що гори закриваючи части небозводу зменьшають час сонїчного проміньованя і єго скількість. Для кількох місцевостий в Альпах і в Нїмеччинї P. обчисляє сей вплив6).

Ясність і поляризацию сьвітла неба в зенїтї обсервував 1894 1896 Jensen фотометром Вебера. Показало ся, що нормальний дневний хід поляризациї в зенїтї є функциєю висоти сонця. Minimum припадає на час кульмінациї сонця, maximum тодї, коли оно стоїть о 2^0 нисше овиду. Коло полудня і пізно пополудни хід поляризациї заколочуєсь. В лїтї поляризация є зглядно мала, в зимі зглядно велика. Дим, мрака і хмари дуже шкодять нормальному єї ходови7).

Абсорбцию зьвіздяного сьвітла розслїджували Müller і Kempf рівночасно в Катанії і на Етнї. Дослїди не довели до рішучого результату, бо воздух в Катанії був наслїдком довгої посухи і множества пороху так непрозорий, що зьвізди раз о 0·24, другий раз аж о 0·53 кляси показувались слабші, чим на Етнї8). Проміньованє сонця підчас цїлковитого затьміня 1898 I. 22. розслїдив на підставі 154 стаций в Індиях Eliot і найшов, що так натуга проміньованя, як і температура слїдували досить докладно за змінами величини сонїчного кружка9).

---

1) Memorie della società degli spettroscopisti italiani 1898. XXVII. 10

2) Memorie della Reale Accademia di Torino 1898. Ser. II. XLVII. 319.

3) Meteorologische Zeitschrift 1896. 105 д.

4) Abhandlungen des Sächsichen met Instituts. 1899. H. 4.

5) Meteorologische Zeitschrift 1898. 193 д

6) Verhandlungen des XII. deutschen Geographentages in Jena. 225 д

7) Beiträge zur Photometrie des Himmels. Schriften des natur. Vereins f. Schleswig.-Holstein XI. 1899. H. 2. 281 д.

8) Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam XI. Nr. 38. 211.

9) Indian Meteorological Memoire XI. 1898. 1 д.

Цїкаві дослїди про абсорбцию сонїчного тепла в атмосфері робив Angström на трох стациях розміщених на ріжних висотах вулькана Pico de Teyde. Показало ся, що загальна сила проміньованя росте підчас дня від висоти 0—3700 m. близько о 30%, а прямовісна сила проміньованя о 22%. Той приріст проміньованя з ростучою висотою є тим скорший, чим більша зенїтальна віддаль сонця. Сочинник прозорости показавсь значним[1]). Müller[2]) найшов, що натуга проміньованя сонця є найменьша в липни. Кривина вказувалаб на minimum в грудни або сїчни. Другостепенного maximum в вересни не сконтатовано.

Заки покину справу проміньованя, мушу ще згадати теорию Svante Arrhenius'а. Він на підставі обсерваций проміньованя старає ся вияснити вікові клїматичні періоди[3]). Він обчисляє, що зменьшенє скількости вугляного квасу о $^2/_3$, викликалоб під +55° ширини обниженє температури о 3°, під +20° о 4·1°. Побільшенє скількости сего ґазу в атмосфері викликалоб підвисшенє температури о 3·3°, зглядно 4·4° і ослабленє денних і річних колибань температури.

Температура воздуха.

а) Проміньованє, абсорбция і роздїл тепла.

Абсорбцию сонїчного тепла в атмосфері розслїджував математично Schreiber і обрахував для ріжних ґеоґрафічних ширин теплоту, яку дістають, коли приймем за сонїчну сталу 3 кальориї, а за вартість абсорбцийну 0·4. Вислїди одержані є зовсїм відмінні від результатів Langley'а, Violle'а[4]) та иньших.

Liznar обчислив на підставі права проміньованя Stefan'а температури рівнобіжників морских і сухопутних[5]), котрі згоджують ся дуже близько з дїйсно обсервованими, а инакше обчисленими температурами.

Про роздїл температури в атмосфері уложив Köppen зовсїм ориґінальні тези. Поземний роздїл температури робить Köppen зави-

---

[1]) Nova acta regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. 1900 Серія II.

[2]) Aktinometerbeobachtungen im Observatorium zu Katharinenburg, Извѣстія императорской Академіи наук. XI. 1899. 61.

[3]) Ciel et Terre XX. 389 g. 411 д

[4]) Abhandlungen des kgl. sächs. meteorol. Institutes 1899 H. 4.

[5]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 36 д.

симим від 1) ріжниць в проміньованю 2) термічних ріжниць моря і суші ї 3) від вітрів та струй морских. З сего виводить він 9 головних засад: 1) Середні температури меньшають разом з сумою проміньованя від рівника до бігунів. 2) Ріжниці температурні пір року більшають в тім самім напрямі. 3) Захмарене в день, в літї і в низьких ширинах знижає, в ночи, в зимі і в високих ширинах підвисшає температуру. 4) Середні річні температури від рівника ко бігунам меньшають скорше на суші, чим на мори. 5) Ріжниці температурні пір року і дня є більші на суші чим на мори. 6) Вода покрита грубим ледом поводить ся як суша, а суша покрита снїгом показує свойства суші ексцессивно. 7) Вітри, наколи не віють постійно в одну сторону, вирівнують ріжниці температури, слиж віють постійно, то пересувають температурні відносини в своїм напрямі. 8) Таксамо пересувають морскі струї температурні відносини в тім напрямі, в котрім течуть. 9) Наколи гори стримують вітри, клїмат дістає льокальні властивости.

До прямовісного розділу температури подає Köppen чотири тези: 1) Температура сухого воздуха обнижає ся о 10^0 на 1 km. зміни висоти, бо кождий ґаз остуджуєсь при меньшаню тиску. 2) Єсли воздух є вохкий, то при остудженю повстають хмари, теплота при тім увільнена зменьшає при дальшім взношеню остуджене о половину. Слиж впаде дощ, то він приносить з собою низшу температуру з гори, а сам паруючи єще єї обнижає. 3) Рухи прямовісні воздуха є досить рідкі — не ма їх, коли воздух в певній висотї є мало що зимнїйший або і теплїйший як на долинї. Тодї прямовісна зміна температури є не 10^0 а лиш $4—5^0$ на 1 km. 4) Абсолютна висота температури є означена тою температурою, при котрій на поверхнї суші або моря є рівновага між одержаним а виділеним теплом[1]). З нових ґрафічних представлень розділу температури згадати треба про новий „Physical Atlas“ Bartholomew'a і Herbertson'a, (Westminster 1899. Constable), котрий однак ориґінальних карт не подає.

б) Температуру над ріжними родами ґрунту розслїджував Jaubert і виказав, що температура є висша над деревяним бруком або бітумінїчним ґрунтом, чим над муравою. Над камінним ґрунтом температурне колибанє є ві всїх порах року меньше[2]). Mellish виказав, що в легкім ґрунтї в глубинї 1 стопи є температура о 1^0 F

---

[1]) Köppen Klimalehre. Leipzig 1899. Meteorologische Zeitschrift 1900. 183 д.

[2]) Comptes Rendus CXXVI. 1405 д.

висша чим температура воздуха, в тяжкім же ґрунті лиш о 0·2⁰, що зависить мабуть від інсоляциї. Max. ріжниці випадає в жовтни, min. в марті[1]).

в) Вплив ліса на температуру воздуха і землї не перестає цїкавити учених, іменно, що ся квестия до тепер не рішена. Schubert оголосив дуже цїкаву студию про температуру ґрунту і воздуха в лїсах[2]). В зимі є ґрунт лїсовий дещо теплїйший, як поза лїсом, в лїті холоднїйший, середно також дещо холоднїйший. Подібно, лиш меньше виразно, поводить ся температура воздуха.

Не меньше знаменна є друга розвідка про сю справу, що впрост дотичить питаня впливу лїса на клїмат: Schreiber. die Einwirkung des Waldes auf Klima und Witterung. Dresden, Schönfeld 1899. S. розслїджував всї метеорольоґічні стациї Саксонії і прийшов до вислїду, що ріжниції в клїматі між тими стациями походять лиш з ріжної висоти понад поверхнею моря. Анї ґеоґрафічна ширина та довжина, анї льокальне положенє не мають великого впливу. Лїс також впливає дуже мало на температуру, бо цїлком лїсиста околиця є річно лиш о 0·4—0·8⁰ холоднїйша як околиця цїлком позбавлена лїса. Ще меньший, ба навіть дуже сумнївний, є вплив лїса на вохкість і висоту опарів.

г) Температура снїгової оболоки була предметом дослїдів В. Саткого в Тернополи (1896—1898). Взагалї є поверхня снїгова о 0·4⁰ холоднїйша чим воздух, в 5 cm глубини температура є о 1·9⁰, в 10 cm. о 2·3⁰ висша чим на поверхни[3]).

д) Температура в містах є завсїгди висша чим в околици. Hann сконстатував в Ґрацу, що температура міста є середно висша о 1·4⁰. Max. 1·7⁰ припало в жовтни, min. 1·0⁰ в цьвітни. Також колибаня температури є значно меньші в місті[4]).

е) Неперіодичні колибаня температури.

Про наглі приморозки і способи, щоби їх шкідливий вплив на веґетацию зменьшити, говорить Trabert на підставі студиї Hammon'a[5]). Головні средства є: зменьшенє проміньованя штучними заслонами, підвисшенє точки топленя через паленє гною та мокрої соломи,

---

[1]) Quarterly Journal of R. Met. Society. XXV. 1899. 238 дд.

[2]) Über den jährlichen Gang der Luft und Bodentemperatur im Freien und in Waldungen etc. Berlin 1900.

[3]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 97 д.

[4]) Sitzungsberichte der Wiener Academie. Math. nat. Cl. CVII. II a. 167 д.

[5]) Meteorolog. Zeitschrift 1899. 529 д.

доставлюванє тепла воздухови через малі огники, відпроваджуванє зимного воздуха з гори в долину через аспірацию викликану паленєм огня в долинах.

Hazen розслїджував хід температури і вохкости перед приходом наглого зимна. Він найшов, що зглядна вохкість тодї сильно зменьшаєсь і осягає свій найнизший степень на пару годин, заки температура стане опадати. Чим низше спаде вохкість, тим низше спаде температура[1].

Наглі і великі горяча в Австралії 1896 I. обговорює Todd. Іх причиною були знижки барометричні, що допроваджували до полудневої Австралії північні жаркі вітри. По переходї знижки температура нагло опала. (Melbourne 1896 I. 23 : V^{a} $14{\cdot}3^{0}$, IV^{p} $42{\cdot}2^{0}$, V^{p} 26^{0})[2].

Справа маєвих приморозків і т. з. зимних сьвятих займала знов многих учених, іменно, що повстаня тих приморозків дотепер не вияснено. Bezold, на підставі дослїдів Müttrich'а, сконстатував уже на певно, що дни 11—13 мая є завсїгди під зглядом температури анормально холодні[3]. Hennig пробує вияснити сю справу на підставі синоптичних карт. Характерне є для маєвих приморозків те, що сучасно на западї або північнім западї виступає високе тисненє. Спад температури слїдує по переходї знижки, коли прийде антіцикльона[4].

Зовсїм нову дорогу до вияснення сего явища подав найновійший час. Постановлено розслїджувати сей проблєм (враз з многими иньшими) через рівночасне пусканє в ріжних сторонах Европи бальонів з інструментами, що самі реєструють. Таке міжнародне пущенє бальонів відбуло ся 1897. V. 13. і переконало всїх, що бодай в тім случаю обниженє температури в западній Европі походило з того, що 10 km. груба струя полярного воздуха дісталась аж туда. Над східною Европою віяла струя рівникового теплого воздуха. Hergesell думає отже, що маєві приморозки повстають наслїдком великих воздушних струй, що ідуть від бігуна[5].

є) *Прямовісний розділ температури* є тепер дуже актуальним предметом розслїдів. Бальони і змії пускані в ріжних сторонах сьвіта показали, що відносини в горішних районах атмосфери є

---

[1] Monthly Weather Review. XXVI. 1899. 291 д.

[2] Meteorologische Zeitschrift 1899. 518 дд.

[3] Meteorologische Zeitschrift 1899. 114 дд.

[4] Wetter XV. 1898. 85 g. 105 g. 131 g. 145 д.

[5] Meteorologische Zeitschrift 1900. 15 g. Petermanns Mittheilungen 1900. 111 д.

нам майже незнані а дуже цікаві. Обсервациї на дуже високо положених стацпях також недавно лиш розпочато так, що ціла та віть метеорольоґії є дуже молоденька. Тим не меньше єї розвиток поступає дуже скоро і каже надіятись щораз то красших результатів[1].

Температура високих гір розслїджує ся в Европі головно в Альпах, де є кілька дуже високо положених стаций.

В долїшно австрийских Альпах (Raxalpe, Schneeberg) розслїджував Trabert меньшанє температури з висотою. Він найшов передовсїм велику ріжницю сторони під і за вітром. Між висотами 200 а 800 є сторона за вітром середно в роцї о 1^0 теплїйша — ріжниця росте з висотою і доходить іменно в лїтї до 2^0. В загалї малїє температура в найнизших реґіонах в лїтї дуже скоро, в зимі же дуже поволи. Чим висше йдем — тим скорше приходить лїтне maximum і зимове minimum[2].

Температуру верхів Sonnblick (3106 m) і Obir (2140 m) обробив Hann. Замітна є ту аномалія денного ходу температури з другорядним maximum о 4^a a minima-ми о 11^p і 7^a. Дати річного ходу температури є: Obir рік $-0{\cdot}2^0$, січень $-7{\cdot}4^0$, липень $+8{\cdot}3^0$; Sonnblick рік $-6{\cdot}3^0$, лютий $-12{\cdot}9^0$, липень $1{\cdot}2^0$. Середне убуванє теплоти з висотою є середно $0{\cdot}60^0$ на 100 m., в грудни $0{\cdot}51^0$, в серпни $0{\cdot}69^0$. Цїкава є температурна ріжниця між Obir-ом а Целївцем. В лїтї є ту ріжниці $0‘65^0$ на 100 m., в зимі $0{\cdot}1^0$ на 100 m.[3].

Прямовісний роздїл температури в середнонїмецких горах опрацював Kremser[4]. Температура малїє з висотою в тих горах (Ґарц, Карконоші, Erzgebirge, Thüringerwald) значно скорше по полудневій чим по північній їх стороні, іменнож на весну. Середний річний убуток теператури є $0{\cdot}57^0$.

На шпилю штрассбурской вежі (136 m) виносить денна амплїтуда температури $4{\cdot}8^0$, на долинї 7^0. Maximum приходить на горі $3^h\ 50^m_p$, на долї $2{\cdot}48^m_p$. Minimum $6^h\ 5^m_a$, зглядно $4^h\ 50^m_a$.

Результати сїмох міжнародних бальонових злетів 1897—1899, котрі дали 32 температурні ряди, опрацював Hergesell. Отсе єго

---

[1] Загальну оріентацию що до тих розслїдів подає книжка Fonvielle: Les ballons sondes etc. Paris. Gauthier-Villars 1898.

[2] Meteorologische Zeitschrift 1898. 249 д.

[3] Anzeiger der k. k. Akademie der Wisenschaften 1898. XIII.

[4] Klimatische Verhältnisse des Elbstromgebietes, Berlin 1899. 26 д. SA. з Elbstromwerk.

[5] Petermanns Mittheilungen 1900. 28 д.

вислїди: 1) Денна кривина температури зі зростаючою висотою скоро пласне. Денні колибаня температури є вже в висотї 800 m. навіть в погідних днях ледви 3—4^0. 2) Горішні верстви атмосфери не підлягають так сильному проміньованю як долїшні, длятого в ночи температура в міру підношеня в гору росте. Атмосфера виказує ві всїх висотах аж до 10000 m. колибаня температури, котрі доходять або переходять 40^0. Місцеві ріжниці в температурі є також дуже значні і в великих висотах навіть при малім віддаленю (100 km.) доходять до 30—40^0. 4) Маєві приморозки повстають мабуть в наслїдок великих рухів в атмосфері, що спроваджують обширні струї полярного походженя. Температура вільної атмосфери

буде середно	8^0	4^0	0^0	—7^0	—13^0	—18^0	—26^0	- 33^0	—40	—48^0	—54^0
для вис. (в km.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10[1])

Ту згадати також належить працї: о убутку температури з висотою Assmann'a[2]), що займає ся єго колибанєм; і о положеню ізотерми 0^0 Illes'a v. Edvi jr.[3])

Teisserenc de Bort випускав від р. 1898 в Trappes много необсаджених бальоників, з тих декотрі дійшли до 14000 m. висоти. Вислїди: Температура ріжних висот показує в протягу року значні колибаня, о яких дотеперішні бальонові злети не давали понятя. Пр. ізотерма —25^0 мала протягом 16 місяцїв колибаня, що доходили до 5000 m., ізотерма —50^0 колибалась о 4000 m. З сего показуєсь, що аж до висоти 10000 m. є тенденция до річного колибаня температури. Змінчивість теплоти не убуває, як дотепер думано, з висотою. Противно аж до найзначнїйших висот повно ту коротких і довгих колибань[4]).

З тих обсерваций Teiserenc'a пробував обчислити Abbe середні відносини температури в атмосфері.

Они представляють ся так:

Висоти	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 km.
Температура	9	5	0	—4	—9	—16	—21	—29	—38	—42	—51 ^{0}C
Убуток еї на 1 km.		4	5	4	5	7	5	8	9	4	9 ^{0}C[5]).

В Америцї роблять дослїди над горішними реґіонами атмосфери при помочи зміїв, що несуть в воздухи термо- і бароґрафи. Frankenfield опрацював розультати таких помічань на 17 стациях Сполу-

---

[1]) Petermanns Mitheilungen 46. 1900. 97 д. Meteorol. Zeitschrift 1900. 1 дд

[2]) Meteorol. Zeitschrift 1899. 266 д.

[3]) Ibidem 157 д.

[4]) Comptes Rendus et CXXIX. 417 д.

[5]) Monthly Weather Review XXVII. 1899. 415 д.

чених держав. Прямовісний убуток температури після Abbe був на перших 1000 „feet“ 3·7°, на слідуючих тисячках 3°, 2·8°, 3° і 5·6° F. Коли небо було захмарене, убуток тепла був значно меньший, часом навіть підвисшалась температура1)

Сей убуток температури з висотою є обчислений для літних місяців. (V—X). Середний убуток температури в році є 5° F. на 1000 feet. Ґрадієнт був найбільший до 1000 feet =7·4° F. Відси аж до 5000 f. зменьшавсь постійно аж до 3·8°, звідси в гору знов почав ся убуток збільшати2).

Убуток денного колибаня температури з висотою розслїджував Clayton в Blue Hill Observatory при помочи змiїв. Коли в висоті 0 m. колибанє денне виносило 11·6°, то в висоті 500 m. оно спало до 2·4°, а в висоті 1000 m. до 0·2°.3)

Після анальоґічних дослідів Hergesella для Штрасбурґа було колибанє температури на поверхнї землї в ночи 4·6°, на висоті 800 m. (ballon captif) лиш 0·7°; в день 12·8°, зглядно 3·9°. Minimum температури було на долї між IV^{h} а V$^{h}_{a}$; в горіж межи I^{h} а II$^{h}_{a}$4).

Дуже важнї замітки про зміни прямовісного ґрадієнта температури обнимає нова праця Bezold'a „die klimatologische Bedeutung der Lehre von den auf-und absteigenden Luftströmen“5) Она належить однак радше до теоретичної чим до ґеоґрафічної метеорольоґії.

Тиснене воздуха.

Роздїл тисненя представлений в новім Atlas of Meteorology подібно як температура на підставі застарілих дещо праць Buchan'a.

Тиснене воздуха на 20 великобританьских стациях опрацювали всесторонно і дуже методично Pearson і Lee6).

Найвисше дотепер сконстатоване тиснене воздуха було 1900 I. 23. в Барнаулї в томскій ґубернії. Барометр показував о 7 годинї рано 789·2 mm, т. є. спровадивши сю вартість до позему моря 808.7 mm. В Іркутску було вже в 1896 р. одно maximum лиш

---

1) U. S Weather Bureau Bulletin. 1899. 1 д. пор. Cleveland Abbe Monthly Weather Review XXVII. 1899. 413 д.

2) Nature 1900. LXIII. 199 д.

3) Meteorologische Zeitschrift 1898. 25 д.

4) Meteorologische Zeitschrift 1898. 49 д.

5) Sitzungsberichte der kgl. preuss. Akademie der Wisensschaften. Berlin1 900.

6) Philosophical Transactions Vol. 190. 1898. 423 дд.

дуже мало що меньше, бо 808·4 mm. Повідомляючи о тім подає Воейков також найвисші тисненя без редукциї на позем моря. В депресиї Люкчун в середній Азиї одержано 796 mm. Для озера Боджанте-кул, що лежить там —130 m. низше поверхні моря, випадало-б яко maximum 812 mm, тількож для позему Мертвого моря (—384 m)[1]).

В своїх розслідах над температурою вільної атмосфери зайнявсь Hergesell також відносинами тисненя воздуха до розділу температури в значних висотах. Великі температурні ріжниці, що виступають в тих горішних реґіонах, викликують також великі ріжниці в тисненю, так що наслїдок динамічних впливів є в порівнаню з наслїдком температурних впливів мінїмальний. Злети бальонів доказали, що розділ воздушного тисненя в поземі моря є зовсїм льокальним, другорядним явищем, що викликане великими температурними заколотами в горі[2]).

Про денний період *колибаня воздушного тисненя* оголосив обширну розвідку Hann[3]). Він розріжняє цїлоденне або террестричне колибанє, т. з. південу осциляцию і трикратну денну осциляцию. Цїлоденне колибанє підлягає великим місцевим і часовим заколотам, є сильнїйше в погідні дни, чим в хмарні, зависить мабуть від денного колибаня теплоти і має на мори меньшу амплїтуду, чим на суші. Амплїтуда меньшає, коли ширина ґеоґрафічна росте. Південня осциляция не стоїть під впливом погоди і є в амплїтудї та фазовім часї така як космічні явища, т. є., що її зависимість від пори року і ґеоґрафічної ширини є дуже правильна. Причиною сеї осциляциї є щоденно повторюючі ся колибаня температури. Головні maxima припадають на еквінокциї, головне minimum на червень і сїчень. Є ще трикратна денна осциляция, котрої амплїтуда меньшає разом з ґеоґрафічною шириною. Про иньші поменьші працї над денними колибанями воздушного тисненя диви Meteorologische Zeitschrift 1898 і 1899.

Довші чим денні, а коротші чим річні колибаня воздушного тисненя вже від давна замічено і приписувано їх впливам місяця.

Börnstein зібрав значний матеріял обсервацийний з великого числа стаций, щоби найти звязь між тисненєм воздуха а деклїнациєю

---

[1]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 207 д.

[2]) Petermanns Mittheilungen 1900. 109 д.

[3]) Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien CVII. IIa. 1898. 63—159.

місяця. З бароґрамів берлиньских, маґдебурских і почдамских показало ся, що протягом сидеричного місяця підлягає тиснене воздуха одноразовому колибаню, котрого maximum припадає на 12-ий, а minimum на 23-ий день по північнім lunistitium. Не так виразне є згадане колибане в Відни, ще слабше в Upsala, San Fernando, і Port au Prince; зовсім нема его в Батавії. Колибане се є виразнійше в зимі чим в літї і виступало властиво лиш в р. 1884—1898 не є отже постійним явищем. Подібне колибане відкрив Börnstein і для синодичного місяця¹).

Вітри.

Hildebrandsson i Teisserenc de Bort видали книжку під т. Les bases de la meteorologie dynamique etc., де подають історичний, дуже основний огляд підстав нинїшної метеорольоґії — отже давнїйших розслідів над загальною циркуляциєю атмосфери, пізнїйших над бурями тропічними і нашими. Дальше слїдують уступи про метеорольоґічну орґанізацию межинародну, про дальші роботи над циклонами і т. д.²).

Теориї рухів атмосфери не належать властиво до ґеоґрафії, тому вичислю лиш найважнїйші праці. Schreiber подає гидродинамічні рівнаня ріжничкові і термодинамічні формули з дотичними обсервацийними вислїдами³). A. Schmidt оброблює умови рівноваги тепла в атмосфері після кінетичної теориї ґазів⁴). Одна з головнїйших засад Schmidt'a є, що при підносячих ся струях воздуха головну ролю відграває праця підношеня. Bezold доказує знов, що найважнїйша ту є праця експанзії⁵). Bjerknes впроваджує новий прінціп в теоретичну метеорольоґію, беручи в рахунок не тільки вже ріжницї тисненя, але ріжницї густоти⁶).

Загальна атмосферна циркуляция. Перегляд єї умов робить Köppen подаючи кілька нових гадок⁷). Davis занимає ся причинами загальної циркуляциї, а головно впливом воздушних струй на ти-

---

[1] Meteorologische Zeitschrift 1900. 420.

[2] Paris, Gauthier-Villars 1898—1900.

[3] Abhandlungen des kgl. sächs. Meteorol. Instituts III. 1898. 24.

[4] Beiträge zur Geophysik. IV. 1899.

[5] Meteorologische Zeitschrift 1898. 441 д.

[6] Svenska Weten. Akad. Handl XXXI. Nr. 4. 35 д.

[7] Annalen der Hydrographie XXVII. 1899. 563 д.

сненє[1]). Mägis представляє натугу загальної циркуляциї воздуха яко функцию спадку температури від рівника до бігуна[2]).

Цикльонічні і антицикльонічні рухи атмосфери. Köppen розслїджує з теоретичного становища відносини припли:ву і відпливу воздуха в цикльонах і антицикльонах[3]).

Таксамо переважно теоретична є студія Polis'а про воздушні струї в цикльонах і антицикльонах на підставі 10-лїтних синоптичних табель. Причини пересуваня цикльонів є переважно механїчні. Напрям посуваня ся спадає з найбільшим кутом відклоненя, котрий звичайно лежить висше чим 1000 m[4]).

Роздїл і колибанє температури в цикльонах розслїджував Dechevrens. Температура в цикльонах загалом підносить ся, в антіцикльонах опадає. Високу температуру цикльонів треба приписати збіжности воздушних струй, що зійшовшись в центрі цикльони, підносять ся в гору; низьку температуру антіцикльонів тому, що воздух в їх центрі уступає і переходить в розбіжні струї[5]).

Van Bebber доказує, що погода в середній Европі є зависима від положеня барометричних максімів, причім розріжняє 5 головних типів[6]).

Kassner виказує для европейских стаций велике захмаренє підчас цикльони, мале підчас антіцикльони. Азийскі стациї пр. Тифлїс ведуть ся відмінно[7]).

Erk сконстантував, що поздовж підніжа баварских Альп лежить шлях малих знижок, що мають значний вплив на фени і бурі[8]).

На підставі обсервацій зроблених на бальонах в Росиї вивів Поморцев важні заключеня про прямовісну зміну скорости і напряму вітрів в цикльонах і антіцикльонах. В антіцикльонах скорість вітру росте постійно від поверхнї землї в гору. В цикльонах також росте з початку скоро, потім зменьшаєсь дуже в реґіонах хмар „cumuli“ 500—1500 m., потім же знов росте. Зміна напряму вітрів

---

[1] Quarterly Journal of Meteorological Society XXV. 1890. 160 д. Wetter XVI. 1899. 201 д.

[2] Meteorologische Zeitschrift 1898. 157 д.

[3] Meteorologische Zeitschrift 1898. 161 д.

[4] Meteorologische Zeitschrift 1899. 337 д.

[5] Memorie della Academia Pontificia dei Nuovi Lincei 1898. 14. На ті елюкубрациї впрочім трудно згодитись; диви Meteorologische Zeitschrift 1898. (59).

[6] Archiv der deutschen Seewarte XXII. 1899. 26.

[7] Meteorologische Zeitschrift 1899. 242 д.

[8] Meteorologische Zeitschrift 1898. 173 д.

є також від долу найбільша, висше она зменьшає ся іменно в цикльонах і є звернена на право. Рух хмар „cumulus“ і напрям ізобари на земли є завсїгди в тривкій звязи. Визначна звязь є також між скоростию руху хмар пірястих (cirrus) а повстанем і напрямом цикльонів. Чим скорше посувають ся хмари пірясті по небі, начинає барометр зараз опадати, так що їх скорий рух є признаком наближеня ся цикльони[1]).

Важні причинки до загального пізнаня цикльонів дали згадані вже дослїди, що роблять їх в Америцї при помочи паперових зміїв осмотрених самопишучими апаратами, що летять нераз до дуже значних висот (max. 3679 m.). Clayton вивів з тих дослїдів, що майже всї властивости цикльонів дадуть ся вивести з температурних відносин ріжних воздушних верств.[2]).

Про тропікальні западно індийскі *цикльони* з. з. Hurrican'и пише найлучший доселї їх знаток Vines, що в них є напрями вітрів в ріжних висотах дуже ріжні, в низших верствах майже рівнобіжні до ізобар, а в висших зовсїм розбіжні. Дальше розслїджує V. положенє вершка параболїчних доріг цикльонів. Оно пересуває ся, йдучи від червня до серпня, коли є maximum hurrican'ів, щораз дальше на північ (+18° ....33° ширини), а потім знов вертає ся на південь. Цїкавий є викритий V-ом закон, що hurrican'и ходять тими самими дорогами, що хмари cirrus, їх параболїчні дороги є отже наслїдком горішних воздушних струй[3]).

Про східноазийскі гураґани тз. *тайфуни* оголосив Doberck книжку: The Lawss of Storms. Hongkong 1898. Тайфуни повстають з слабих знижок, що появляють ся над Фїлїпінами і полудневокитайским морем. Першим їх признаком є легкі хмарки cirrus, що йдуть від сходу на північ. Красна погода і висока температура панують на побережах згаданого моря. Коли центр тайфуна наближить ся на 1000 km., зачинають показуватись хмари cumulus, на мори починаєсь місцями сильне фильованє, викликане сильними вітрами, що віють довкола тайфунового центра. На полудни від него виступають бурі з громами. Коли центр начне ся приближати, стає дуже парно і барометр паде (досить впрочім поволи 2·5 mm. на добу); колиж тайфун віддалений вже лиш о 500 km., повстають на

---

[1]) Annalen der Hydrographie 1898. 173 д.

[2]) Blue Hill Met. Obs. Bull. 1899. Nr. 1.

[3]) Vines. Investigation of the cyclonic circulation etc. Washington, Weather Bureau 1898.

мори сильні филї, потім небо зовсім затягаєсь хмарами і разом з барометром опадає і температура. Коли тайфун вже лиш о 300 km. віддалений, начинає ляти дощ і вихор та морска буря зачинають щораз більшати, аж вкінци доходять до страшної сили. На кільканацять km. довкола центра в тз. оці тайфуна панує цїлковита тишина воздуха, але боввани морскі є ту страшні. Найнизше тиснене не припадає на саме „око“ тайфуна, але випереджує єго пересїчно о 30 km. Часто є в тайфунї і поза єго „оком“ значні простори, де зовсім нема вітру. Взагалї більшу шкоду роблять филї чим вітер, так на берегах суші, як і на мори. Відносини впрочім не завсїгди є такі схематичні, як подано. Doberck представляє їх подрібно, годї однак докладнїйше ту ними займатись[1]). Важні подробиці про тайфуни подає також розвідка Froe'го[2]). Підчас тайфунів в вересни 1897 р. завважано раз, що в 75 мінутах опало тиснене воздуха о 31·8 mm., а потім в 40 мінутах піднеслось о 35·7 mm. Абсолютне maximum скорости вітра було 205·2 km. на годину. Дотепер найдені скорости вітра при бурях є значно меньші[3]). Тайфунами з р. 1895 і 1896 займаєсь Doyle[4]).

Звязь межи африканьскими „Tornados“ а приливом і відпливом моря припускає Oriola, замітивши, що властива торнадам конфіґурация облаків підчас припливу не зміняє свого зиду на небозводї, а підчас відпливу з великою скористю посуваєсь вперед[5]).

Про *воздушні труби* (вертнї) стрічаєм в послїдних часах кілька розвідок. Jansson описує таку воздушну трубу, що знищила лїс коло Borås в Швециї 3. липня 1899 р.[6]). Haltermann помічав цїкаві малі вертнї в обсягу ґольфштрема[7]). Miethe, видїв як повставали малі вертнї при пожарі торфяника ґіфгорнского і завважав і ту також, що вертїлись відворотно годинниковій вказівцї[8]). Russell подає відомісти про великі вертнї водні (промір при основі 100 стіп), що в маю 1898 р. появились на побережах Нової Полудневої Валїї[9]).

---

[1]) Пор. Meteorologische Zeitschrift 1898. 332 д.

[2]) Ibidem 1899. 145 д.

[3]) Пор. зіставлене Köppen'a в Archiv der deutschen Selewarte. XXI. Nr. 5. 17 д.

[4]) Tifones del archipiélago filipino y mares circunvecinos 1895 y 1896. Manila 1899. Petermanns Mittheilungen 1900 [82].

[5]) Annalen der Hydrographie 1900. 258 д.

[6]) Bihang till k. svenska Vet. Ak. Handlingar. 26. Afd. I. Nr. 3.

[7]) Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. 1900. März. 218 дд.

[8]) Prometheus X. 795 д.

[9]) Journal of Royal Society of New South Wales XXXII. 1898 18 с.

Льокальним вітрам присьвячує новійша метеорольоґія много працї. Особливо-ж вітрами, що є подібні до альпейского фену, займають ся учені дуже визначно і відкривають їх в ріжних околицях землї.

Billwiller доказує, що фен може повстати не тільки через те, що струя воздушна перейде через хребет гірский і зступаючи долї, динамічно огріваєсь. Фен може також повстати через зступленє на поверхню землї одного з вітрів антіцикльональної системи[1]).

Фен, що приходить з півночи, обсервував Klein в Tragöss (Стирія)[2]).

Воейков описує вітри зовсїм подібні до Фену в Кримі і на Кавказї[3]).

Анальоґічні з феном є також вітри Чінук (Chinook winds) в Скельних горах[4]).

Над явищем Гарматтана в нїмецкій кольонїї Тоґо робили в новійших часах дослїди Gruner, Mischlich, Seefried і Danckelman. Сей горячий вітер виступає в сухій порі року, що триває від жовтня до цьвітня. В часї, коли віє Гарматтан, наповняєсь воздух пилом і є дуже сухий. Ранками температура сильно обнижуєсь. Гарматтан походить мабуть з північного Судану і полуднево-західної Сагари[5]).

Помірами *сили вітрів* займаєсь Schreiber, порівнуючи ріжні анемометри. Köppen порівнує анемометричну скалю Beaufort'а з дїйсною скоростию вітрів і становить редукцийну скалю для західної Европи[6]).

Прямовісний роздїл сили вітру пізнано в послїдних часах при помочи бальонів і зміїв значно докладнїйше, чим дотепер. Clayton уставив таку табелю приросту скорости вітру:

Висота 50 – 150 – 250—350 – 450 – 950 m.
Середний приріст
скорости вітра 0·8 1·0 1·3 1·6 1·9 m. на секунду[7]).

Hellmann виказує, що денний хід анемометру є в значній мірі функциєю висоти уставленя сего приладу. Щоби отже збутись блудів і ріжниць, радить він приняти міжнародно уставленє ане-

---

[1] Meteorologische Zeitschrift 1899. 204 д.

[2] Ibidem 1898. 61.

[3] Ibidem 1898. ст. 430.

[4] Ibidem 1898. 63.

[5] Mittheilungen aus den deutschen Schutzgebieten XII. 1899. 1 д.

[6] Archiv der deutschen Seewarte XXI. 1898. 21 с.

[7] Meteorologische Zeitschrift 1898. (25) д

мометру на 20 m. над землею на осібнім руштованю[1]). Hann, оброблюючи обсервациї денної періоди скорости вітра на штрасбурских вежах, редукує обсервациї не на позем улиць, а на позем дахів 20 m. над землею[2]).

Coeurdevache найшов, що денний період скорости вітра в Perpignan є в прямім відношеню до прямовісного ґрадієнта температури між Perpignan а Pic du Midi (в Піренеях 2859 m. висоти)[3]).

Опади.

Про *пароване* води морскої робив дослїди Mazelle і найшов, що вода морска при 3·73% засоленя парує повільнїйше, чим вода солодка, в відношеню меньшаючім враз зі скількостию пdescribed пароване[4]).

Coeurdevache представляє пароване яко функцию температури, скорости вітру і зглядної вохкости. Зі зростом температури о 5° збільшає ся пароване о 1 mm, о тількож само більшає оно, коли зменьшить ся зглядна вохкість о 5%. Коли скорість вітру збільшить ся о 1 m., може збільшитись пароване навіть о 0·9mm.[5]).

З розвідок про *вохкість воздуха* згадаю працю про денний період зглядної вохкости в Полї, E. Mazelle[6]). Maximum зглядної вохкости припадає середно на 5. годину рано, minimum на першу по полудни. В погідних днях припадають екстреми скорше, в хмарних пізнїйше. Амплїтуда в погідні дні є в зимі 9 раз, в лїтї 3 разів більша, чим в хмарні.

Frankenfield на підставі обсерваций зібраних зміями найшов, що середна вохкість скорше меньшає в гору, чим випадалоб з теоретичних формул Hann'а[7]).

Про *хмари* дали послїдні роки XIX. столїтя велику лїтературу, бо власне тодї зачались публїкувати результати тз. міжнародного року хмар. (Internationales Wolkenjahr 1896 V. 1 до 1897. VI. 1.).

---

[1]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 546.

[2]) Ibidem 1899. 457 д.

[3]) Annales de la Société Meteorologique XLVII. 1899. 41 д.

[4]) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien CVII. 1898. 280 д.

[5]) Ann. Soc. Mét. de France. XLVII. 1899. 186 д.

[6]) Sitzungsberichte der Akad. Wien. II. a. CVIII. 1899. 42.

[7]) Monthly Weather Revier XXVII. 1899. 413 д.

Образи хариктеристичних хмар находимо в атлясї: Polis. Wolkentafeln. Karlsruhe. Braun 1899. Кілька цїкавих фотоґрафій хмар є поміщених в Monthly Weather Review XXVI. 1899. 59 д. Дуже красні фотоґрафії хмар пороблено на обсерваториї Фляммаріона в Juvisy[1]).

Цїкаві обсервациї хмар роблять ся в бальонах. Süring обсервував 1899. X. 3. динамічне повстанє хмар „cumulus“ в розбурханих вихром верствах воздуха підчас своєї воздушної плавби[2]). Розличні хмари над Альпами бачив ґеольоґ Heim, коли переїжджав в жовтни 1898 бальоном Веґа понад Альпами. Єго помічаня є дуже важні для пізнаня загального захмареня над горами[3]).

З розвідок про *захмаренє* назвем слїдуючі важнїйші:

Études internationales des nuages 1896–1897. Upsala 1898 і 1899. Hildebrandsson, Lundal і Westman обговорюють там форму, висоту, напрям, скорість і т. д. хмар. У всїх з виїмком „altocumulus“ і „Cirrocumulus“ при висшій температурі є і висота більша. Скорість росте особливо в зимі і напрям тодї є блисший взагалї до північного. В лїтї мож завважати і денний період.

В часї міжнародного року хмар робив обсервациї в Manila Algué[4]).

Про вплив рік на хмари, що над ними находять ся, подає цїкаві замітки Erk. Підчас воздушної плавби бальоном замітив він, що на хмарах ясно рисувались напрями рік Інну і Сальцах[5]).

Kassner доказує, що коли в хмарах cirrus і cirrostratus повстають хмарні филї, то в 65 случаях на 100 слїдує по 24 годинах дощ, в 75 на 100 по 48 годинах[6]).

Про *дощ і єго розміщенє* оголошено при кінци XIX. віку много праць.

Meissner подає на підставі почдамских обсервацпй, що імовірність дощу і єго скількість є найбільші, коли тисненє воздуха перестає опадати, а начинає підноситись[7]).

---

[1]) Knowledge 1900. 174 д. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik XI. 1900. табл. V.

[2]) Meteorologische Zeitschrift. 1900. 177 д.

[3]) Die Fahrt der Wega, Basel. 1899. 66 д.

[4]) Las nubas en archipiélago Filipino. Manila 1899.

[5]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 216 д.

[6]) Das Wetter XVI. 1899. 265 д.

[7]) Das Wetter XVI. 1899. 129 д.

Ule оцінює середну річну скількість опаду так. Австралія має 520 mm., Азия 555 mm., Европа 615 mm., північна Америка 630 mm., Африка 825 mm., полуднева Америка 1670 mm.[1]).

Дуже цїкавий виклад про походжене дощу мав підчас VII. міжнародного конґресу ґеоґрафів E. Brückner. Він доказує, що хибною є річию уважати океан одинским, або хочби переважним жерелом водяної пари в воздусї, а eo ipso і опадів. Дві третини річної скількости дощу походить з пароване континентів, а лиш $^1/_3$ з пароване океана, бо відповідну скількість води віддають океанови ріки. Частинка води, що прийшла з моря крізь атмосферу на сушу, пересїчно три рази опадає ту яко дощ, заки знов не поверне до океана. Однак майже нїколи не трафляєсь, щоби вода випарувавши в однім місци, впала тамже яко дощ. Звичайно несуть єї вітри дуже далеко. Потверджають гадку Брікнера обставини, що лїтні дощі елєвацийні, дощі при бурях антіциклььональних і дощі в многих великаньских просторах, пр. в краях над Мараньоном, можуть походити лиш в маленькій части з океанів. Лиш континентальним походженєм дощів дадуть ся витолкувати посухи, що обіймають так великі простори, як пр. в 1893. роцї[2]).

Про розділ дощу на просторах океанів пише Supan[3]). Прилучена карта показує, що дощеві полоси в загалї є анальоґічні роздїлови воздушного тисненя понад океанами. Лиш над індийским океаном показує ся певного рода аномалїя, бо рівникова дощева полоса розтягаєсь ту аж до 20^0 полудневої ширини.

Hildebrandsson оголосив дальшу розвідку про головні центри дїяльности в атмосфері та про неперіодичні колибаня опадів на поверхнї землї. Цїкаві є відкриті ним компензацї пр. Азорів і Ісляндиї в зимі, опадів в зимі на Сибіри і лїтних монсунових дощів в Індиях[4]).

Про денний хід лїтних дощів вийшла обширна розвідка Less'а на підставі берлиньских обсервацийй. Дни зі зливами ведуть ся зовсїм інакше, чим дни зі звичайними дощами. Великі ріжницї приносить також напрям вітру. Мимо того можна на підставі зібраних даних уставити проґнозу, іменно коли ся має синоптичну карту перед

---

[1]) Ann. de la Société météorologique de France XLVI. 1898. 149.

[2]) Bericht des VII. Internat. Geographen-kongresses in Berlin 1899. II. 412 д. Berlin 1901.

[3]) Petermanns Mittheilungen 1898. 179 д. Meteorologische Zeitschrift 1899. 183 д

[4]) Kong. Svenska Vetenskaps. Ak. Handlingar XXXII. 1899. Nr. 4.

собою. В звичайних днях maximum припадає 12—1 р., minimum о 3—4 а. Колиж прийде злива, то денне maximum припадає о 5—6 р, а minimum 6—7 а.[1]).

Про вплив ліса на водні опади згадати належить лиш розвідку Weise'ого[2]). Він твердить, що лїс в загалї ме може анї збільшити анї зменьшити скількости опаду, але льокально може мати деякий вплив, механїчно спиняючи рух воздуха[3]).

Великі *зливи* в короткім часї були також предметом студий. Клясичним їх тереном є тропічні полоси. Під Камеруньскими горами в Debundja впало в червни 1896. і 7. середно 1524 mm., в серпни 1562 mm., а в Bibundi в роцї 1897 – 10485·5 mm.[4]) В Nedunkeni на острові Ceylon впало 1896. XII. 15—16 в 24 годинах 807 mm[5]).

Але і в нашім умірковані̇м клїматї могуть трафитись величезні зливи. І так 1899. IX. 13. впало в Reichenhall 222 mm. дощу, а в пяти сусїдних днях 485 mm.[6]). В Jewell (Maryland) впало 1897. VI. 26 – 27 в 18 годинах 375 mm.[7]). В Рецї (Fiume) 1898. X. 19. впало від години 9·35 до 12·50 в ночи 222 mm., з того в 50 мінутах 200 mm[8]). Навіть на Сагарі занотовано в 1899. IV. 12. страшенну зливу. 800 m. широка зовсім висохла Wadi Urirlu наповнила ся водою на хлопа високо, так нагло, що францускa военна експедиция стратила 6 людий, що ся втопили і ледви спаслась від загибелї[9]). Після Symons'a бувають в Льондонї дни, в котрих впаде до 13% річної скількости опаду[10]).

Снїг. В новійших часах много дослїдів роблено над видом сніжних хрусталів. Bentley, Perkins і Nordenskiöld зробили кількасот фотоґрафій ріжних цікавих видом хрусталиків снїжних.

Про покриву снїжну не було в послїдних часах важнїйших праць з виїмкою росийскої Гейнца про опади, скількість снїгу і пароване в річних бассейнах европейскої Росиї[11]).

---

[1]) Meteorologische Zeitschrift. 1900. 49—71.

[2]) Wetter 1899. XVI. 186 д.

[3]) Великі працї Hamberg'a, що вийшла ще в 1896. годї нам згадувати, хоч реферат про ню вийшов в Meteorologische Zeitschrift доперва в 1898. р.

[4]) Mittheilungen aus deutschen Schutzgebieten. XI. 3.

[5]) Meteorologische Zeitschrift, 1898. 360.

[6]) Ibidem 1899. 521.

[7]) Ibidem 1899. 36.

[8]) Ibidem 1898. 439

[9]) Petermanns Mittheilungen 1899. ст. 174 д.

[10]) Meteorologische Zeitschrift. 1899. 26.

[11]) Розвідка менї на жаль не доступна, реферат в Meteorologische Zeitschrift 1899. 46 д.

Написана ся розвідка на підставі 15-лїтних обсервацпй (1887—1895) в 94 стацпях. З доданих карт розділеня скількости снїгу виходить, що $^1|_3$—$^1|_5$ всїх опадів річно в Росиї становить снїг. Від грудня до марта снїг творить 75—100$^0|_0$ опадів (з виїмком лиш полудневої Росиї). Maximum скількости снїгу припадає в північно-східній Росиї на жовтень, а чим дальше на південний захід, тим припізнюєсь аж до марта. В більшій части краю припадає однак maximum на грудень і сїчень.

Про густоту снїгу на Монблянї робив дослїди Vallot. В висотї 3020 m. була густота снїгу 0·48, в висотї 4350 m. 0·40. Фірн на висотї 4792 m. в 15 m. глубини мав густоту 0·86, лїд ледівцевий в висотї 3020 m.- 0·88, в висотї 1850 m—0·91. Щоби снїг перейшов в лїд ледівцевий, потреба 12—15 лїт[1]).

Про *град* оголосив Trabert розвідку, де представляє критично всї дотеперішні теориї про єго повстанє. Дві квестиї ставить він на передї 1) яка є причина спливу води, з котрої творить ся градове зерня 2) яка причина так сильного обниженя температури. Першою причиною є мабудь електричність, другої дотепер не знаємо. Є лиш гіпотези[2]).

1897. VII. 1—4 трафлялись підчас дуже сильних градів в Стириї і Каринтиї градові зерна до 1 kg. ваги, а до 15 cm. проміру[3]). Величина граду в Індиї є ще більша. 1894 I. 1. падали куснї леду до 2 kg. тяжкі[4]).

В послїднім десятку лїт XIX. столїтя уряджувано дуже численні проби, щоби розганяти градові тучі вистрілами з моздїрів. Іменно в Стириї і Італїї занимають ся тепер сею справою дуже живо. Лїтература до сего вельми богато. Так пр. італїйский професор Бомбіччі публїкує що рік кілька статий про стрілянє до туч.

Воздушна електричність і бурі.

Про розсїянє електричности в вільній атмосфері робили дослїди Elster і Geitel[5]). Оно є сильно зависиме від мраки, опаду і тодї

---

[1]) Meteorologische Zeitschrift. 1899. 294.

[2]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 433.

[3]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 29—32.

[4]) Indian Meteorological Memoire VI. 1899. Meteorol. Zeitschrift. 1900. 524 дд.

[5]) Versammlung deutscher Naturforscher in München 1899. Abth. für Physik und Meteorologie. 2. Sitzung am 19. September.

є меньше. Сила вітру і абсолютна вохкість не мають видного впливу. В горах в ясних днях росте розсїяне електричности зі зростом висоти. Загальний погляд на воздушну електричність у обох учених такий: Воздух містить в собі частинки самостійно наладовані додатною і відемною електричностию в майже рівнім числї. Електричні напруги воздуха повстають, коли більше частинок є наладованих одною з двох електричностий[1]).

Причинок до теориї воздушної електричности подає Trabert[2]) обговорюючи проби Pellat'а виказати втрату електричности у паруючої води[3]). Trabert перечить вислїдам Pellat'а, що вода тратить електричність до своєї пари при пapoваню. На тій тезї, котру хотїв Pellat боронити, опираєсь в значній мірі теория електричности воздушної Exner'а. Trabert доказує рахунком, що скількість електричности, котра би прийшла в земску атмосферу з парою водною тодї, коли би цїла земля була покрита одностайно водою, є дуже маленька в порівнаню зі скількостию електричности земскої поверхнї. Після теориї Exner'а мусїлиб обі скількости бути рівні.

Le Cadet робив цїкаві дослїди над атмосферною електричностию при земли і в бальонї. Він замітив, що понад 1000 m. висоти хід густоти додатної електричности воздуха і хід абсолютної вохкости є зовсїм згідні. В низших реґіонах тої згідности нема. Le Cadet вважає впрочім не водяну пару, а вугляний квас розносчиком додатної електричности[4]).

Elster і Geitel найшли, що воздушні опади містять в собі значні дози додатної або відемної електричности питомої. Коли так нераз оден рід електричности з опадами сплине на землю, приходить в воздусї другий рід до переваги[5]).

Деннї колибаня воздушної електричности обсервував Chauveau вже від 1891 на вежи Ефля і в иньших кількох француских місцевостях; він найшов два типи сего колибаня: лїтний і зимовий, анальоґічні такимже лиш сильнїйшим періодам відкритим в зимнім і горячім підсоню[6]).

---

[1]) Пор. Terrestrial Magnetism. 1899. IV. 213 д.

[2]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 377 д.

[3]) Journal de Physique. III. Ser. 8. 1899. 253 д.

[4]) Ref. Meteorologische Zeitschrift 1898. (67 д.).

[5]) Terrestrial Magnetism IV. 1899. 15 д.

[6]) Ciel et Terre. XX. 523 д.

Coeurdevache виказує на обсерваціях в Perpignan і на Pic du Midi, що денний хід атмосферної електричности має тим більшу амплїтуду, чим меньша ріжниця температури[1]).

Про *огонь св. Ельма* написав Arendt ґрунтовну студию. Се явище є взагалї частійше підчас бурливої, чим підчас супокійної погоди, але природа єго ще не досить вияснена[2]).

Лискавки удалось в послїдних лїтах кілька разів відфотоґрафувати. Rümker відфотоґрафував стяжкову лискавку в Гамбурзї і найшов єї дїйсну ширину 10 m. Вітер має на форму таких лискавок великий вплив[3]).

Статистику перунів опрацьовують тепер в ріжних краях дуже пильно і она дала вже много цїкавих вислїдів. Bezold, що працює над сим предметом від довшого часу, найшов, що пр. в Баварийї від 1833. до 1897. число перуном трафлених будинків зросло шість разів. Що цїкавійше — число таких домів підлягає певним коливаням, що є згідні в своїм ходї з зглядними числами сонїчної діяльности (Вольфа). В лїтах мінїмів сонїчних плям перуни роблять меньше шкоди, ще меньше в лїтах максімів[4]). Подібну статистику зробив Kassner для пруської Саксониї та Ангальту в лїтах 1887—1897. Вислїди анальоґічні — зріст небезпеченьства від перунів виніс в 10 лїтах 33·7%[5]). Zeller виказує подібний зріст числа перунів в Віртембергиї, але думає, що сей зріст є лиш позірний, викликаний лиш чисто технїчними та социяльними причинами: будованем високих домів, збільшенем їх простору і т. д.[6]).

Так само значний зріст небезпеченьства перунів сконстатував Arendt в північній Нїмеччинї, але виказав заразом, що сей зріст має свою причину в зростї числа бурий в загалї[7]). Притім доказали Arendt і Hellmann, що число бурий не є найбільше підчас припливу моря, як загально думають над північним морем[8]).

Stearns опрацював річний період бурий на островах і побережах, іменно в западній та полудневій Европі. Бурі тра-

---

[1]) Ann. de la Société méteorol. de France. XLVII. 1899. 43 д.

[2]) Wetter XV. 1898. 2. 37. 49.

[3]) Himmel und Erde. XI. 134.

[4]) Sitzungsberichte der kgl. preuss. Akad. der Wiss. Berlin. 1899. 291 д.

[5]) Über Blitzschläge in der Provinz Sachsen und Hzm. Anhalt 1887—97. Merseburg 1898.

[6]) Gaea. 1900. 663.

[7]) Wetter. XVI. 1899. 1. 32.

[8]) Veröffentlichungen des Preussischen Meteorol. Instituts. Berlin 1899. Meteorologische Zeitschrift 1898. 85 д.

фляють ся ту частїйше в зимі, чим в лїтї, та приходять звичайно в ночи[1]).

Бурю без громів обсервовано 1899. VIII. 14. в Шанґаю. Була она дуже сильна і відразу по кілька лискавок являлось на небі, а грому не чути було ніякого[2]).

Оптичні явища в атмосфері.

Про *барву сонця* при горизонтї на пустинї і на мори пише Franceschi. В пустинї, коли є мрака або сильний вітер, сонїчний кружок є цїлком білий без проміня. Колиж нема вітру нї мраки, є сонїчний кружок червонявий і то звичайно горішня єго часть є слабше, долїшна сильнїйше червона. Иньших барв не бачив Fr. ніколи. Такіж самі барви має сонце і на мори. Т. з. зелений промінь є на думку Fr. явищем „інтраоптичним“, що викликане контрастом між жовтою чи оранжевою фарбою сонця, а синявою неба[3]).

Блимане зьвізд толкує See фильованєм воздуха. Оно є викликане атмосферними струями. Ті воздушні филї дїлають подібно як сочки, відклонюють та розкладають білі лучі на барвні. Коли довжина фильок меньша, чим промір сочки телескопа, тодї блимане зьвізд меньшає або і зовсїм гине[4]).

Дуже цікаві є звістки, що їх збирає Maurer про т. з. *земне сьвітло* (Erdlicht)[5]). Оно проявляєсь в тім, що деякі ночи є нерівно яснїйші чим другі, хоч атмосферні і космічні відносини є зовсїм однакові. В такі ясні ночи мож бачити вздовж цїлого горизонта слабше чи міцнїйше сяєво, що ідь зенїтови щораз слабне. Бачили се сьвітло вже Saussure, Humboldt і Bessel, котрий вважає се сьвітло анальоґічним до сьвітла нічної сторони плянети Венери. 1871. XI. 14. було се сьвітло в Halle так ясне, що мож було на дворі коло півночи навіть звичайний друк читати, хоч місяця не було, а небо було захмарене. В загалї се сьвітло є найсильнїйше звичайно в пізній осени, але від 1895 - 99, коли єго в Швайцариї докладнїйше обсервують, припадали єго maxima на ріжні пори року. В лютім

---

[1]) Monthly Weather Review. XXVI. 1898. 452.

[2]) Wetter 1899. 264.

[3]) Bulletin de l' Institut égyptologique. Serie 3. Nr. 7.

[4]) Astronomische Nachrichten Nr. 3450.

[5]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 257.

1899 р. явилось се сьвітло в невиданій доси силї. Дуговини єго дотепер не знаєм, тож трудно сказати дещо певного про натуру земного сьвітла.

Незвичайну *воздушну ману* бачив Mack 1890. XII. 3. На західнім небі близько горизонту була вузка смуга хмар cumulostratus. Сонце находилось понад нею, а під нею появилось друге позірне сонце в тім самім прямі. Оно було якийсь час яснїйше, чим дійсне сонце, потім однак се послїдне пояснїйшало. По кількох мінутах явище щезло. Мана ся повстала наслїдком воздушних верств з сочинником зломаня, що меньшав ідь долови[1]).

Про *круги досонїчні і домісячні* говорить розвідка Messerschmitt'a[2]). Від часу заведеня самопишучих апаратів по стациях метеорольоґічних не обсервуєсь тих явищ так докладно, як давнїйше. М. розріжнює два роди кругів 1) малі круги, інакше звані сьвітляними вінцями, 2) великі круги або перстенї. Світляні вінцї окружають сонце, місяць, або і яснїйші зьвізди барвистими кругами аж до віддали 1—6°. Они суть діфракцийними явищами — сьвітло угинаєсь в водних баньочках і показує дуговинні барви. Великі круги мають 22° луча і виступають часто в товаристві ще більших кругів з лучем 46° і 90°, позірних сонць зглядно місяців, прямовісних стовпів і т. д. Дуговинні барви є при тім більше або меньше виразні. Великі круги повстають через зломанє сьвітла в ледових хрусталиках. Виразистість їх є ріжна — в загалї домісячні круги лекші до заміченя, чим досонїчні. В загалї що до місцевого роздїленя видно більше кругів досонїчних і домісячних в висших ґеоґрафічних ширинах, чим в околицях близьких рівника. Що до часового роздїлу, найбільше сонїчних кругів є на весну, а місячних в зимі. Денне maximum досонїчних кругів припадає коротко перед полуднем, домісячних же по півночи та (другостепенне) о 8-ій вечером. М. находить також певну звязь між виступованєм кругів, а 11-лїтним періодом сонїчної дїяльности.

Цїкаве явище пятикратної дуги обсервував Berger в Schweidnitz. Дві верхні дуги були зовсїм нормально впорядковані після фарб. Трета, четверта і пята мали барви так само уложені, як друга від гори[3]).

---

[1]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 187.

[2]) Annalen der Hydrographie. 1900. 32.

[3]) Gaea 1900. 122.

Про зміни і колибаня клїмату.

Ekholm виходить з заложеня, що теплота сонця є від найдавнїйших починів житя орґанїчного постійна, а всякі зміни клїматичні мають иньші причини. Для вияснення колибань ґеольоґічних клїматів уживає він гіпотези Arhenius'а, що приписує колибаня теплоти в ґеольоґічних епохах колибаням скількости вугляного квасу в воздусї. Обниженє температури підчас ледової епохи бачить Ekholm в тій обставинї, що скількість вугляного квасу в атмосфері тодї значно зменьшилась. Колибаняж знов в тій скількости Е. виводить з постепенного корченя ся землї. З початку земска кора скорше корчилась, чим земске ядро, тому попукала і вульканп, що виросли на прогалинах, ввели в атмосферу много вугляного квасу. Той квас маючи власність задержувати сонїчне тепло, підвисшив температуру атмосфери а також і земскої кори, так що та послїдна знов розтяглась. Анорґанїчні і орґанїчні процеси в дальшім розвитку землї знов проглинули много вугляного квасу (іменно в карбонї) і температура знов обнижалась аж до пермскої ледової епохи. Тепер знов кора корчилась сильнїйше як ядро, знов попукала і цїлий круговорот почавсь на ново. В кенозоічній епосї знов було найтеплїйше, потім прийшла ледова епоха, а тепер знов скількість вугляного квасу, а з ним і температура росте.

Другорядні колибаня клїмату приписує Е. ріжному в часї наклоненю земскої оси до еклїптики. Оно змінясь в періодї 40000 лїт. Про треторядні колибаня в історичних часах виражає ся Е, що цїла ріжниця полягає в більшім континенталїзмі клїмату в давнїйших часах[1]).

З між всїх вікових колибань клїмату найбільшу лїтературу має тз. *ледова епоха.* До величезної скількости істнуючих вже теорий сеї епохи прибуває що рік кілька нових, більше або меньше імовірних. Подам ту лиш пару найновійших.

Harboe шукає причини ледової епохи в великій вульканїчній дїяльности при кінци кенозоічної епохи, котра множеством викиненої водної пари викликала сильні опади і остуженє поверхнї землї[2]).

Hull приписує все Gulf-Stream'ови. При кінци плїоцену наступило в Америцї винесенє поверхнї землї, котре відтяло ґольфову

---

[1]) Ekholm: Om klimatets ändringar i geologisk och historisk tid samt deras orsaker. Ymer 1899. 353.

[2]) Zeitschrift der deutschen Geol. Gesellschaft. 1898. 441.

струю від мексиканьского моря. Она стратила в наслїдок того 10^0 теплоти, а крім того прибрала иньший напрям і не обливала так як тепер берегів Европи, що також значно ся була піднесла.

Chamberlin хотївби майже усе приписати винесеням і западаням земскої кори з узгляднене́м ріжних метеорольоґічних елементів як: відмінного складу атмосфери, ріжного розкладу воздушного тисненя etc.[1]).

В 1891 р. поставив Dubois теорию, після котрої колибаня клїмату в послїдних тисячках лїт є наслїдками відповідних змін сонїчної температури. Scheiner, славний гелїольоґ найновійших часів, доказує, що ся теория є імовірна. Обниженє середної температури земскої атмосфери о 10^0 вимагалоб обниженя проміньованя сонця о $^1/_9$. Scheiner приймає після найновійших дослїдів, що температура сонця лежить межи 5000^0 а 10000^0, отже після права проміньованя Stephan'а зменьшенє проміньованя сонця о $^1/_9$ значилоб обниженє его температури о 3% т. є. 150^0—300^0. Такі зміни температури не могуть бути зовсїм дивні, коли зважимо, як великі зміни що хвилька відбувають ся в фотосфері. По думцї Scheiner'а скорше належить дивуватись, що при таких обставинах температура землї є так постійна. Слиб отже завели телюричні теориї, теория Dubois'а може їх місце заступити[2]).

Про *зміни клїмату в історичних часах* і про малі періоди клїматичні прибуло в послїдних роках богато нових матеріялів.

Zumoffen потверджає еще раз вислїди Fischer'а і иньших, що в історичних часах воздушні опади ві всїх краях над середземним морем (також в Сирії і Палестинї) значно ся зменьшили[3]).

35. лїтний період клїматичний Брікнера потверджуєсь в такім процентї випадків, в якім і не потверджуєсь. Mac Dowall потвердив его істнованє в вирівнаних обсервациях воздушного тисненя в Льондонї (від 1876), в тім напрямі, що зимно-вохкі періоди мають низше, теплі і сухі висше тисненє[4]). Натомість Кремзер не найшов в температурі і опадах ельбского бассейна 35 лїтних періодів[5]).

11. лїтний період сонїчних плям находить все многих приклонників. Frank Very виводить з него період проміньованя сонця,

---

[1]) Petermanns Mittheilungen. Bd. 46. LB. 81.

[2]) Astronomische Nachrichten. CXLIX. (1899) Nr. 3561. 161.

[3]) Bulletin de la Société de géographie. XX. 344 д.

[4]) Nature 1898. LIX. 175.

[5]) Klimatische Verhältnisse des Elbstromgebietes. Separatabdruck aus dem Elbstromwerk. Berlin, 1899, 48. 87.

заворушень в енерґії загальної циркуляциї та остаточно період маґнетний і клїматичний[1]).

Mac Dowall працює над 11-лїтним періодом від кількох лїт дуже витревало, на жаль оброблюючи материял обсервацийний лиш немногих стаций. Він находить, що для Greenwich 1841–96. припадають на minima плям холодні лїта і острі зими, на maxima теплі лїта і лагідні зими[2]). Люстри коло maxim'ів плям є загалом теплїйші чим повинні бути, люстри коло мінїмів холоднїйші[3]). В роздїлї опадів 11-лїтний період меньше виразний[4]).

André находить, що в роках 1864—71 і 1879–95 maxima температури Lyon'у припадають на maxima сонїчних плям, minima на minima. В часї між 1771—1879 річ має ся зовсїм відворотно[5]).

Flammarion порівнуючи період сонїчних плям з температурою Парижа, фенольоґічними явищами тамже і поворотом перелетних птиць до середної Франциї 1853–98, прийшов до заключеня, що на maxima плям випадають: висша температура, скорший розвиток ростин і скорше прибутє птиць[6]).

Взагалї погоня за періодами в метеорольоґії тепер процвитає. Mac Dowall замічає, що в Greenwich 1841—99 теплі лїта припадають на другу половину десятилїть, холодні на першу[7]). Rocquigny Adanson находить, що в середній Франциї наступають що року XI. 24—30. дуже сильні атмосферні заворушеня[8]). Hazen „відкриває" температурну періоду 12·96 дневну в Omaha[9]). Рибкін завважав, що атмосферні явища в Росиї повторюють ся з великою правильностию що 3—7 днїв[10]). Royer пробує поставити тижневий і місячний період бурий[11]).

Хоть *вплив місяця на погоду* є від довшого часу як здавалось „ein überwundener Standpunkt", то все таки находять ся учені, що старають ся місяцеви єго значінє для погоди знов реституувати.

---

[1]) Astrophysical Journal. VII. 1898. 255.

[2]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 473.

[3]) Nature LIX. 77.

[4]) Ibidem 583.

[5]) Ciel et Terre XIX. 45.

[6]) Ciel et Terre XIX. 342.

[7]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 381.

[8]) Ciel et Terre XVIII. 497.

[9]) Report of Chief Weather Bureau 1897/8. 323.

[10]) Bulletin de l' Academie des Sciences de St. Pétersbourg 1898. 5 ser. IX. 273.

[11]) Annales de la Société météor. de France XLVI. 1898. 76.

Barthe доказує, що в Німеччині температура коротко перед повнею є о 2° низша, чим перед новом[1]). Mac Dowall прямо противний вислїд дістав з Ґриніцких обсервацний, Helm Clayton згідний[2]).

Börnstein доказує, що в сидеричнім місяци тиснене воздуха відбуває виразний (в Берлині, Маґдебурґу і Почдамі) період з максімами 10. і 17. дня[3]).

Ekholm і Svante Arrhenius доказавши істноване впливу місяця на воздушну електричність, старають ся доказати его вплив на полярне сяєво і бурі. Бурі виказують в Швеції 1880—95 виразний період рівний тропічному місяцеви з maximum на 5 днів перед, minimum 6 днів по полудневім lunistitium[4]).

Про *звязь клїматольоґічних елементів між собою* і їх вплив на погоду призбируєсь що року щораз більше матеріялу, бо ся справа має велику вагу для предсказуваня погоди.

Дуже важні досліди над впливом метеорольоґічних відносин над північним атлянтийским океаном на зимову температуру западної і середної Европи поробив Meinardus[5]).

Вислїди ось такі: Сли в місяцях XI—I. температура Gulf-Stream'a є висока (низька), то температура в Европі буде в місяцях II—IV. висока (низька). Також: сли ріжниці в тисненю між північно-атлянтійским minimum, а контитентальним maximum тоді є великі, то температура Европи буде висока; слиж малі — низька.

Lesshaft займаєсь впливом колибань теплоти ґольфштрема на дороги і виступуванє знижок в Росиї. Коли є в ґольфштремі maximum температури, знижки ідуть понад Росию на SO, в иньших зимах на NO. Істнує також дволїтний період, іменно в зимах років паристих (пр. 1873/4) йшли знижки на SO і температура була лагідна, в непаристих противно. Причини тих явищ належить шукати в температурних відносинах ґольфштрема та колибанях великої воздушної струї полярної[6]).

Hellmann займаєсь лагідними зимами з нагоди, що послїдними часами зими в середущій Европі були дивно лагідні. Зиму зовем лагідною, коли грудень і січень є теплїйші чим середно. Тоді зви-

---

[1]) Wetter XVI. 61.

[2]) Symons Monthly Meteor. Magazine XXXIV. 1899. 20. 68.

[3]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 420.

[4]) Kong. Svenska Veten. Ak. Handlingar XXXI. 2. 1899.

[5]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 85. i Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde 1898. 183.

[6]) Meteorologische Zeitschrift 1899 539.

чайно вже падолист і лютий є теплі та мала імовірність (0.15%), що марець буде зимний. Зате такі зими є вохкі і бурливі. Лїто потім звичайно горяче[1]).

Причини холодних лїт Европи середної і западної шукає Madsen в ледових горах, що являючись від часу до часу на Атлянтийскім океанї сильно остуджують воздух. В 1890. роцї їх число було дуже велике, тож і липень сего року належав до дуже зимних[2]).

Справа *проґнози погоди* на кілька днів наперед занимає від 1896, коли van Bebber написав про се книжку, учених. Bebber винайшов в погодї середної Европи 5 головних типів і після них хоче проповідати погоду на кілька днів наперед головно для хлїборобів. Свої погляди розвинув він на ново в часописи Wetter, 1899. 217 д. і позискав собі приклонника в Grossmann'ї, що теоритично доказує можливість таких проґноз. Натомість Klein рішучо виступає против тих проґноз, що на єго думку можуть лиш ще більше здискредитувати метеорольоґію в очах ширших кругів. Він доказує, що Bebber властиво нїчого нового не подав, а обсервациї навіть льокальні, єли узгляднюють відносини висших реґіонів атмосфери, дають лїпші результати, чим проґнози на підставі засад Bebber'а[3]).

Специяльна клїматольоґія.

Не може она бути предметом нашої хронїки, бо виказує множество матеріялу, що лиш для льокальних відносин ріжних країв може мати вагу. Тому то і я відсилаючи до XXIV. тому часописи Geographisches Jahrbuch, де на ст. 120 дд. є цїла важнїйша лїтература подана та в части обговорена, ограничу ся лиш на деяких річах важнїйших, та на деякі матеріяли важні для клїматольоґії руских земель.

В полярнім підсоню треба згадати обсервациї фену в западній Ґренляндиї і дуже низьку температуру, яку найшла бельґійска експедиция в полудневім полярнім підсоню. Абсолютне minimum виносило —43·1°, середна температура лїта лиш —1·5°.[4]).

---

[1]) Wetter XV. 25. Meteorologische Zeitschrift 1899. 58.

[2]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 125 д.

[3]) Annalen der Hydrographie 1900. 273. Gaea 1900. 258. 475.

[4]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 75.

Воейков вивів з порівнаня обсервацыий бельґійских і обсервацыий Нансена, що морский клїмат під полудневим бігуном є значно зимнїйший, чим морский клїмат арктичний. Supan вносить з тих низьких температур лїта, що коло полудневого бігуна є ледом покрита суша, з котрої вітри в лїтї несуть зимно на море[1]).

В клїматольоґії Европи заслугують на згадку дальші працї Mohn'а над клїматом Норвеґії, Hamberg'а над воздушним тисненем в Швециї, Dickson'а про температуру морскої поверхнї і єї вплив на клїмат В. Британїї, Scott'а над числом опадів тамже і Mellish'а про температуру почви в Анґлії і Шкоциї, вкінци Buchanan'а над клїматом гори Ben Nevis. У Франциї Plumandon зібрав висоту опадів і число днів з опадами в краю. Появилось велике число льокального матеріялу. В Нїмеччинї заслугують на увагу працї: du Mont'а над роздїлом воздушної вохкости в північній Нїмеччинї, Grossmann'а про бурі на берегах нїмецких морий, публїкация дощевих карт пруских провінций Hellmann'а, робота Kremser'а про клїмат ельбского бассейна і т. д.

З австрийского клїматольоґічного матеріялу мусим згадати кілька новійших праць, що в части відносять ся до клїматольоґії руских земель.

Про повени 1897 р. поміщена в „Beiträge zur Hydrographie Österreich-Ungarns herausgegeben vom k. k. hydrographischen Centralbureau II. Heft. 1898. 170 ст.“ обширна розвідка.

K. Szulc. Ogólny zarys stref klimatycznych Galicyi. Lwów. (Nakładem wydziału krajowego 1898. 24+29 ст. 1. карта) пробує подати начерк клїматольоґії Галичини, головно оглядаючись на потреби хлїборобства. Нарис є дуже побіжний і не грішить ориґінальностию методи. Матеріял ужитий сягає лиш до 1894 р. і браний часто з другої руки. Автор розріжнює в Галичинї, 5 головних клїматичних стреф. I. стрефа обнимає північно-западний кут Галичини на полудне аж по Підгірє, на схід аж меньше більше по полуденник устя Сяну, II. стрефа области Сяну, Буга і Стира, III. стрефа північне Поділє, Опілє і область горішного Днїстра (виключаючи гори і Підгірє) на схід аж по устє Стрия. IV. полоса обнимає полудневе Поділє і Покутє, V. полоса галицкі Карпати від Шлеска аж по Буковину і є подїлена на три підрядні округи.

До клїматольоґії угорскої Руси подають угорскі публїкациї в новійших часах значні причинки, сїть метеорольоґічних стаций

---

[1]) Petermanns Mittheilungen 1899. 283 д.

значно зростає. Raum опрацьовуючи опади Угорщини найшов в Мармароских Карпатах опад до 1520 mm. річно[1]. Hegyfoky обробив захмаренє угорских країв 1871 – 95[2], Hejas бурі в тімже періодї[3].

Для клїматольоґії україньских земель під російским панованєм важні є гидро-метеорольоґічні обсервациї видані метеорольоґічним віддїлом гидроґрафічного уряду в Петербурзї 1898 р. Они обнимають місячні і річні вартости стану води, напряму і сили вітру та температури моря 1890—1896 в 10 стациях над Чорним і Азовским морем. Дуже важна є також публїкация Клоссовского[4], що подає весь клїматольоґічний матеріял України і Запорожа (для Кієва пр. від 1812 р.).

З матеріялів до *клїматольоґії Азиї* згадаєм працї: Воєйкова і Івіцкого над середними температурами східного Сибіру, Тілля над клїматом люкчунскої депресиї, Elliot'а про гради в Индиї і Ганна про клїмат маляйского півострова.

В *Африцї* збиранє клїматольоґічного матеріяла йде дуже швидко вперед і число (хоч коротких нераз) обсервацийних рядів щораз зростає. Danckelmann відкрив в Камеруні (Bibundi) друге по Чера Пунджі місце з незвичайно високом опадом (10486 mm. річно), de Martonne обробив обсервациї опадів над горішним Нілем, Struben такіж обсервациї в Капляндії і краю Oranje.

В *Америцї* — як легко зрозуміти — найбільше клїматольоґічного матеріяла достачують Сполучені Держави. Report of Chief Weather Bureau 1897/8. ст. 269. Washington 1899. приніс нове представленє середних температур Сполучених Держав на 14 картах. Riemer і Abbe обчислили число градових днів, Henry видав карту середного часу осьвітленя сонїчного, Maryland Weather Service видало дуже красний нарис клїматольоґії сего краю. З клїматольоґічних матеріялів иньших частий Америки назву: розвідку Abbot'а про клїмат панамского істму, Bailey'а про клїмат Перу, Hanna про клїмат арґентиньских Андів.

---

[1] A magyar korona országainak csapadek viszonyai. Витяг Meteorologische Zeitschrift 1898. 471.

[2] Пор. Ibidem 1899. 559.

[3] Пор. Ibidem 1899. 182.

[4] Matériaux pour la climatologie du Sud.-ouest de la Russie. Одеса 1899. 32+336+104. 7. карт.

З *австралїйского* матеріяла згадаю працї: Russel'а про опади в New South Wales, Hann'а про клїмат авклендских островів і Danckelmann'а про клїмат Нової Ґвінеї.

II. Земский маґнетизм.

Земский маґнетизм може похвалитись в послїдних лїтах XIX. столїтя досить значними поступами, хоч єго істота і до тепер не є напевно знана. Той дїл ґеофізики находить ся (як впрочім і деякі иньші) в періодї збираня матеріялів обсервацийних.

Збиранє се відбуваєсь дуже пильно по ріжних сторонах земского ґльоба і поволи орґанїзуєсь в цивілїзованих державах цїла сїть обсерваторий. На кождім кроцї констатують учені, що орґанїзация одноцїльної системи обсерваторий маґнетних по цїлій земли зовсїм моглаб змінити вигляд науки про маґнетизм землї.

Маґнетний стан землї для епохи 1885·0 представив A. Schmidt[1]) опираючись на зведених Neumayer'ом маґнетних складових для 1800 місцевостий землї. Обсервацийний матеріял походить з ріжних часів і далекий є від повноти, треба було часто екстраполювати для великих частий землї, звідки не було обсервацкий. Тому праця Schmidt'а може бути названа лиш пробою в тім напрямі, важною для будучих робітників.

Тілло розкладає земску кулю під маґнетним зглядом на дві гемісфери. Перша між 90° а 270° східної довготи від Greenwich визначуєть ся додатним знаком на загальну натугу, позему натугу і єї північну складову. Знов півкуля між 130° а 310° східної довготи має додатну деклїнацию і східну складову поземої натуги. Порівнуючи по черзї півкулї між 0° а 180°, між 10° а 190°, 20° а 200° і т. д. між собою з огляду на маґнетні елєменти, середні річні температури та розміщенє на них землї і води, вислїдив Тілло, що всяка півкуля з низшою середною температурою року відзначуєть ся більшою натугою поземої сили і деклїнациї. Зновуж півкуля океанїчна, що обнимає між иньшими цїлий Тихий океан, визначуєть ся в виду континентальної півкулї далеко меньшою загальною натугою[2]).

---

[1]) Archiv der deutschen Seewarte XXI. Nr. 2.

[2]) Terrestrial magnetism and atmospheric electricity 1899. IV. ст. 237 дд.

Зріст скількости маґнетних обсервацитй виказав, що не всї в новійших часах обсервовані маґнетні явища дадуть ся витолкувати давними теориями. Liznar замітив пр., що сила земского маґнетизму зі зростаючою висотою малїє і то три рази скорше, як се виходилоб з теориї Ґаусса. З сего вносить Liznar, що маґнетні явища земскі не дадуть ся витолкувати самим намаґнетизованем землї. Атмосфера земска мусить ту також грати визначну ролю[1]).

На звязь земского маґнетизму з електричностию в земскій атмосфері задивлюєсь в подібний спосіб і Trabert. Вислїд єго роботи над сим предметом[2]) є сей, що проти звязи земского маґнетизму з електричними проявами в атмосфері не мож навести нїякого важного арґументу.

Земский маґнетизм і атмосферна електричність найкрасше проявляють свою звязь в полярнім сьвітлї.

Працї про полярне сьвітло є в загалї численні в новійших часах, тому і при кінци XIX. віка не бракує цїнного материялу, щоб на него менї звернути увагу. Передовсїм мушу звернути єї на епохальну розвідку про полудневе полярне сьвітло:

Boller: das Südlicht[3]). Автор збирає і списує всї обсервациї полудневого сьвітла, які до тепер колинебудь зроблено і виводить з них слїдуючі висновки: 1) полудневе сьвітло, таксамо як і північне вказує своїм виступованем на 11-лїтний період. 2) полудневе сьвітло виступає найчастїйше в обводї кола, що є 38⁰ віддалене від полудневого маґнетного бігуна. 3) і в обсягу того кола є райони, де полудневе сьвітло частїйше виступає, іменно в Австралїї і на полудне від неї.

Значні причинки до пізнаня полудневого сьвітла дали також обсервациї Арцтовского підчас бельґійскої полярної виправи. Мимо неприхильних атмосферних обставин обсервовано підчас зими 1898 сьвітло 62 рази. Оно представлялось звичайно яко одноцїльний лук 8—12⁰ винесений понад овид. Денний період має maximum між 9 а 10ʰ р.; річний період невиразний — maximum натуги припадало на еквінокциї[4]).

Дуговину полярного сьвітла фотоґрафував Paulsen і відкрив та змірив 16 нових лїній[5]). Підчас російскої експедициї на Шпіцберґи

---

[1]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften IIa. CVII.

[2]) Meteorologische Zeitschrift XV. 1899. 401 д.

[3]) Beiträge zur Geophysik. III. 56 дд. 550 дд.

[4]) Comptes Rendus. CXXX. 1900. 1276.

[5]) Comptes Rendus CXXX. 1900. 653.

в цїли зміреня степеня полуденника фотоґрафував дуговину і саме сьвітло Сикора впрочім без важнїйших нових результатів[1]. Невеликі результати дали також фотоґрафії в Harvard College[2].

Докладні помірки полярного сьвітла з 1898. IX. 9. зробив Reimann. Він найшов, що східний конець луку припадав дещо на схід від лїнїї Мемель-Лїбава ($\varphi=+56^0$, $\lambda=+39^0$), західний же на океан Атлянтийский на запад від Ірляндиї. Висота лучів доходила до 66 миль, ширина смуги 60 миль[3].

Про *періодичність* в виступаню полярного сьвітла вже від давна знає наука. Є се однак справа не дуже ще вияснена, тому що року появляють ся працї в тім напрямі. Mossmann збирає всї обсервациї північної зорі в Анґлїї 1797—1895 і укладає їх табелярично. Вікова періодичність є невиразна і позваляє лиш розріжнити періоди з численними і нечисленними появами сьвітла. Річний період виказує maxima підчас еквінокций, minima підчас сольстіций[4].

Про вплив місяця на полярне сьвітло робили дослїди Ekholm і Arrhenius. Дискусия матеріяла 1722—1896 виказала значний вплив деклїнациї місяця на розвиток полярного сьвітла. Межи тим тропічним періодом а періодом колибаня воздушної електричности показуєсь цїлковитий паралелїзм. Maxima, minima і амплїтуди припадають на той сам час. З тої згідности вносять автори, що при полярнім сьвітлї наступає електричне виладоване між висшими а визшими верствами атмосфери. Натуга сего виладованя є пропорціональна до атмосферного потенціялу. Місяць є подібно як і земля електрично наладований, а що найвисші верстви атмосфери мають електричність відємну, то она мусить підлягати колибанем в міру змін деклїнациї місяця. Maxima осягає она на північній півкулї тоді, коли місяць стоїть в найбільше полудневій деклїнациї, minima, коли місяць має найбільшу північну деклїнацию. Ті колибаня потенциялу воздушної електричности справляють тропічний період полярного сьвітла[5].

Крім того місячного періоду виказали Ekkolm і Arrhenius ще істноване дещо коротшого періоду полярного сьвітла, що виносить 25·929 днів. Він є дуже виразний в Скандинавії і під полудневим

---

[1] Astronomische Nachrichten Nr. 3649.

[2] Ciel et Terre 1898. 144.

[3] Meteorologische Zeitschrift 1899. 230.

[4] Пор. Meteorologische Zeitschrift 1898. 307.

[5] Kongl. Svenska Vet. Ak. Handlingar. XXXI. Nr. 2.

бігуном. Сего періоду не вдалось вивести з періоду оборотового сонця і єго причини тому трудно авторам дошукатись[1]).

Щоб винайти незнані до тепер причини маґнетних бур в загалї, виходить A. Schmidt від сконстатованя, що маґнетні бурі є се сильні і довготревалі заколоти маґнетних елементів. Они мають своє жерело в льокальних відносинах, бо такі бурі впливають що правда на маґнетні елементи по цїлій землї, але виразно виступають в більше або меньше ограничених полосах. Дальшою властивостию тих заколотів є їх поступовий рух. В виду того Schmidt держить ся що правда дотеперішної гадки, що токи електричні викликують такі колибаня, але вводить ту новість, що принимає істнованє мандруючих вертнів, зложених з електричних токів, і пропонує таке саме синоптичне поступованє в царинї земского маґнетизму, яке водить ся вже від давна в метеорольоґії[2]).

З льокальних обсервацийелементів земского маґнетизму заслугують на увагу: маґнетні елементи Почдаму обчислені Eschenhagen'ом[3]), обсервациї Schück'а в околицях гамбурского заливу[4]), означеня Moureaux'а маґнетних елементів в Parc St. Maur, Perpignan і Nizza[5]), маґнетну карту Сіцилії Palazzo і Christoni'ого[6]), нові помірки льокального впливу вульканїчних скал на елементи маґнетні в Італії[7]).

Маґнетні дослїди Eschenhagen'а в горах Гарц виказали значний паралєлїзм між маґнетними аномалїями і відхиленями пряма. З того вносить Eschenhagen, що маґнетні дослїди можуть ґеольоґови дати немалі поясненя що до будови і складу глубших верств землї[8]).

Маґнетні дослїди в нїмецкій східній Африцї перевів Maurer. Они виказали, що денні колибаня в деклїнациї ростуть з ґеоґрафічною шириною, підчас коли колибаня поземої натуги і інклїнациї сильно малїють[9]).

Pochettino мірив в Італії, як зменьшувалась натуга поземої складової земского маґнетизму і найшов на 1000 m. зменьшенє

---

[1]) Пор. Meteorologische Zeitschrift 1899. 383.

[2]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 385 дд.

[3]) Wiedemanns Annalen der Physik 65. 951.

[4]) Magnetische Beobachtungen an der Hamburger Bucht. Hamburg 1898.

[5]) Comptes Rendus CXXVI. 234. CXXX. 65.

[6]) Terrestrial Magnetism and Atmospheric electricity 1899. June. 87.

[7]) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. VIII. 2 Semestre. Seria 5 a. 1899.

[8]) Forschungen zur deutschen Landes und Volkskunde XI. H. 1.

[9]) Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. X. 1899. 170.

о 0·0005 C. G. S. т. є. дещо більше як теоретично найшов Liznar, а змірив на Monte Rosa Sella[1]).

На границях україньско-руської території в ґубернії курскій найдено дуже цікаві відносини в земскім маґнетизмі. Істнує ту льокальний маґнетний бігун в Кочетовці, де інклїнация виносить 90°. Коли від того місця віддаляєм ся, зменьшає ся інклїнация що 20 m. о 1°. Ся точка є для деклїнациї індіферентна, але за те є дві иньші точки, що віддалені від себе о 2 km. мають деклїнацию —34° і +96°. В двох иньших точках віддалених від себе о 422 m. виносять деклїнация — 11° і +45°. Позема натуга доходила до 0·59, підчас коли на рівнику, де она є найбільша, доходить звичайно лиш до 0·40[2]).

В маґнетно-нормальних околицях Італїї, іменно над морем коло Fiumicino і понад фуциньским озером мірив Folgheraiter льокальні маґнетні заколоти. Він приписує їх вульканїчним шутрам і піскам, що містять між иньшими складовими частями також маґнетит[3]).

Денний хід змін земского маґнетизму в полярних сторонах розслїджував Lüdeling і виелїмінувавши ріжні льокальні і часові заколоти заключив, що денну зміну мож вважати наслїдком системи сил, що окружає правильно землю що 24 годин[4]). Згадані заколоти мають денний хід зовсїм відмінний від ходу в иньших полосах землї[5]).

Нові правильности в денній зміні елементів земского маґнетизму старавсь винайти Nippoldt на основі гармонїчної аналїзи. З результатів сеї цікавої студиї наведемо хиба те, що дїлаючі ту другостепенні сочинники підлягають на цїлій землї одному законови і вказують на річний і чотиромісячний період, що походять безпосередно або посередно з положеня землї в всесьвіті[6]).

Малі колибаня земского маґнетизму обсервував Van Bemmelen в Батавії. Они виказують: 1) Піврічний період з maxim'ами в мартї і вересни, minim'ами в червни і сїчни. 2) Денний період з maximum

---

[1]) Atti della Reale Accademia dei Lincei 1899. VIII. Ser. V. 204.

[2]) Comptes Rendus 126. 138 дд. Nature 57. 323 дд.

[3]) Frummenti concernenti la geofisica dei pressi de Roma 1900. Nr. 9.

[4]) Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1898. 524.

[5]) Ibidem 1899. 236.

[6]) Annalen der Hydrographie 1898. 267 дд.

о 3-ій, а minimum о 13-ій годині. 3) Звязь з сонїчними плямами. 4) Згідність з періодичними колибанями полярного сьвітла[1]).

Про річний період сили земского маґнетизму каже Schwalbe ось таке: Дотепер був річний період майже нерозслїджений по причинї малої своєї амплїтуди і конечного дуже докладного знаня сочинника температури маґнета. Длятого є обсервация річного періоду можлива лиш в дуже немногих великих обсерваториях.

Schwalbe вносить з почдамских обсервацій, що слїдує: 1) Істнує виразний річний період, так що складові маґнетної сили дадуть ся представити яко функция довготи сонця. 2) Прямовісна натуга має minimum на північній півкулї в лїтї, maximum в зимі. Западне відклонене і позема натуга виказують на північній півкулї maximum в лїтї, minimum в зимі, другорядне maximum безпосередно перед minimum т. є. в сїчни. На полудневій півкулї поводить ся позема натуга прямо противно, т. є. має maximum в часї, коли на північній півкулї зима, minimum в часї, коли на північній півкулї лїто. 3) Лїнїї рівноваги мусять мати в лїтї тенденцию близшого присуваня ся до себе і по при се збільшаня нахиленя, яке мають в напрямі NO—SW.

За причину річного періоду можна вважати електромаґнетні токи, що порушають ся в зимній атмосфері понад поверхнею землї[2]).

Про довші періоди земского маґнетизму наведу слїдуючі розвідки:

Звязь періоду сонїчних плям з маґнетними колибанями ще раз розслїдив Ellis на підставі маґнетних обсервацій в Greenwich в лїтах 1841—1896. Результати тих дослїдів лиш потвердили істноване такої звязи. Ellis виказав, що навіть неправильности в довготї періоду плям виступають рівночасно з такими самими неправильностями в маґнетних періодах. Так само натуги maxim'ів і minim'ів, а навіть і епохи малих долинок в кривих зовсїм гармонїзують з собою[3]).

Опираючись на властивости гончарскої глини, що при випалюваню приймає під впливом маґнетизму земского питомий маґнетизм і задержує єго на всегда, пробував Folgheraiter означити маґнетну інклїнацию в дуже давних часах. Він брав з італїйских музеїв старинні вази та мірив їх маґнетизм, щоби опісля з него

---

[1]) Kon. Akademie van Wetenschappen. Te Amsterdam 1899. 22 дд.

[2]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 449 дд.

[3]) Proceedings of Royal Astronomical Society vol. 63. ст. 64 дд.

означити в приближеңю елементи земского маґнетизму в тих часах, коли ті начиня випалювано. Вислїди є дуже цїкаві. З дослїдів над начинями, що походять з пятого, шестого і семого столїтя перед Христом, виходить, що істнувала епоха, в котрій маґнетна інклїнация виносила в Грециї 0. Епоха та припадає меньше більше на початок шестого столїтя. Перед тим т. є. в семім столїтю перед Христом була маґнетна інклїнация навіть полуднева. Від початку шестого столїтя інклїнация дуже скоро стає північною, а при кінци пятого столїтя виносить вже около 20°. Дослїдам своїм навіть сам Folgheraiter не приписує великої певности, бо хронольоґія начинь є дуже непевна, але виходить з них без сумнїву, що був час, коли маґнетний рівник переходив через Грецию, ба навіть на північ від неї[1]).

Fritsche обчисляє елементи земского маґнетизму для епох 1600, 1650, 1700, 1780, 1842 і 1885 зі всїх можливих до ужитку обсерваций з того часу. На підставі того материялу обчисляє Fritsche таблиції основних величин для згаданих шести епох після теориї Gaussa, признаючи новійші теориї і формули недостаточними. З так обчислених основних величин заключає Fritsche, що в елементах земского маґнетизму зайшли значні вікові зміни. І так пересунулись північний маґнетний бігун, точка maximum ідеального розміщеня земского маґнетизму в північній Америцї і тамошна точка maximum цїлковитої натуги від NW до SO. Пересунене те виносило для лїт 1650—1836 8° в ширинї, а 17° в довготї ґеоґрафічній. А знов полудневий маґнетний бігун і дві иньші анальоґічні до попередних максімальні точки полудневої півкулї відбули від 1650. до 1836. рух від SO на NW о 8° в ширинї, а 27°—43° в довготї. Причини тих вікових змін шукає Fritsche в змінах температури[2]).

Wild: Über den säculären Gang der Inclination und Intensität des Erdmagnetismus in St. Petersburg-Pawlowsk. (Записки. Імп. Ак. Наук. по физ. мат. отдѣленію IX. Nr. 7).

Дотичні дати є перед 1828. р. так нечисленні і непевні, що проба Вільда розтягнути криву вікового ходу земскогою маґнетизму в зад аж до половини XVIII. столїтя граничить з мало імовірностию. Між 1828. а 1870, р. є обсерваций поземої і загальної натуги у зем-

---

[1]) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei 1899. Seria 5. 8. (1) ст. 69, 121, 176, 269.

[2]) Die Elemente des Erdmagnetismus für die Epochen 1600, 1650, 1700, 1780. 1842 und 1885 ihre säkulären Aenderungen. Petersburg 1899.

ского маґнетизму також ще рідкі і неточні, так що крива Вільда, котра відносить ся до того протягу часу, зовсім непевна. Доперва від 1870 р. можна вважати обсервациї вдоволяючими. Віковий хід маґнетних елементів для Павловска є від того часу зовсім напевно сконстатований і позволяє Вільдови на слідуюче сформулованє своїх вислідів: Віковий хід маґнетних елементів в Павловску, а мабуть і всюди инде, не є постійний, але звязаний з такою скількостию малих неправильностий, що представленє його звичайною формулою можна вважати лиш грубим приближенєм до дійсности.

III. Океаноґрафія.

З поміж ріжних частий фізичної ґеоґрафії одною з наймолодших є без сумніву океаноґрафія. Она повстала властиво доперва в сїмдесятих роках девятнайцятого столїтя, коли то специяльні корабельні експедициї назбирали велику скількість матеріялу, що вперве роз'яснив найголовнійші питаня науки про море. Сей матеріял опрацьовувано через кілька лїт з ріжних точок погляду і океаноґрафія за той короткий час з слабої вітки виробилась на дуже обширну галузь фізичної ґеоґрафії.

Від того часу океаноґрафія розвивалась досить статочно, хотяй заперечити не можна, що в відкритях океаноґрафічних слїдувала певна стаґнация. Именно морфольоґія морского дня остала на 20 лїт в головних чертах тасама, яка була в сїмдесятих роках уложена на підставі сондовань кораблїв Challenger'a, Tuscarora, Gazelle'i. Доперва в девятьдесятих роках начали нові океаноґрафічні експедициї приносити множество нового, важного матеріялу. Від кількох лїт знов океаноґрафія швидко поступає в перед, бо не тілько специяльні експедициї збирають нові океаноґрафічні дати, але і всякі иньші наукові виправи бодай принагідно докидають камінець за камінцем до дальшого розвитку науки про океани. Рівночасно і лїтературна праця над проблємами океаноґрафії іде рівнобіжно в перед і начинає входити в ґенетичний напрям.

З представлень обнимаючих загал океаноґрафії згадаю короткий підручник Luigi Hugues: Oceanografia. Torino, Bocca 1901, відповідні уступи в: Köppen'a: Grundlinien der maritimen Meteorologie. Hamburg 1899, Willi Ule'a: Grundriss der allgemeinen Erdkunde, Leipzig 1900, Milla The International Geography by seventy autors. London 1899, дальше начерк історії океанографічних дослідів Gottschaldt'a[1]) і цікаву книжку Chun'a: Aus den Tiefen des Weltmeeres Jena 1900.

В огляді океанографії за послідні роки XIX. віку найперше поміщу праці загального змісту, потім перейду поодинокі океани та їх побічні моря.

В морфольоґії океанічних просторів є одною з найвизначнійших праць незначна що правда об'ємом, але дуже богата змістом розвідка Supan'a: Die Bodenformen des Weltmeeres[2]). Она старає ся завести одноманїтність в клясифікациї та номенклятурі просторів морского дна. Автор виходить з чисто ороґрафічної основи, що релєф морского дна зависить в першій лїнії не від абсолютної, а від зглядної глубини. Дно всїх океанів складаєсь після Supan'a з двох частий; з континентальної полоси і з властивого дна моря. Континентальна полоса (Kontinentalrand) складає ся знов з двох частий: з континентальної площі (Kontinentalplateau), що є плоским слабо нахиленим продовженєм побережа і має над собою maximum 200 m. води, та з континентальної збочи (Kontinentalböschung), що опадає більше або меньше стрімко, а часто порогами до властивого дна морского.

Форми властивого морского дна є до тепер досить мало пізнані та розслїджені. Винесеня з положистими збочами назвати мож підморскими порогами (Schwellen), винесеня, що мають збоча стрімкійші, зовем підморскими високорівнями (Plateaus), а єсли розпостирають ся поздовж, підморскими хребтами (Rücken). Підморскі високорівнї та хребти, єсли носять на собі острови, зовем островними хребтами чи високорівнями. Крім тих обширних винесень морского дна розріжнює Supan підморскі гори, що сховані зовсїм в глубинї, підморскі лави, що вже підходять під саму поверхню моря, і островні гори, що вистають вже понад поверхню моря.

Попри винесеня морского дна важні є і заглубленя в нїм. Найбільша часть дна морского є зовсїм плоска з мінімальними ріжницями від площі. Таку часть дна зовемо плоским дном (Flachgrund). — Оно може лежати в більшій або меньшій глубинї. В тім

---

[1]) Progr. Realschule in Kiel. 1900.

[2]) Petermanns Mittheilungen т. XLV. 1899. ст. 177 дд.

плоскім дні можуть бути ріжні заглубленя тз. підморскі доли. З них без сумнїву найхарактернїйші є тз. рови (Graben, давнїйше звані Rinnen). Они всї лежать на краях континентів і то здовж фалдових гір та виказують найбільші глубини, які коли-небудь в морях висондовано. Запропонувавши в той спосіб одноманїтні назви ріжних морфольоґічних явищ морского дна пропонує Supan, щоби номенклятура підморских вивисшень і заглублень була також одноцїльна, щоби іменно надавано їм чисто ґеоґрафічні назви, а не як до тепер імена кораблїв або осіб.

Друга часть розвідки Supan'a є властиво об'ясняючим текстом до виданої ним рівночасно оглядової карти будови дна морского. Подамо коротко єї зміст, бо она дуже добре дає нам пізнати, що предприняті в послїдних часах океаноґрафічні дослїди дають нам зовсїм иньший погляд на плястику дна океанів, як був сей, що панував доселї.

Після новійших дослїдів будова дна індийского океана не є така проста, як думали до недавна. Є ту в західній і полудневій части пять підморских вивисшень: Хребет островів Chagos, поріг Маскаренів, Мозамбіка, Crozet і Kerguelen. Найглубші місця є на полудни від малих Сундів (над 6200 m.) як се вже давно було звісно, але дуже значні глубини відкрито також на полудне від австралїйского континенту та між порогами Crozet а Kerguelen, в полудневій части океана, де давнїйше припускано незначні лиш глубини. Будова Великого океана натомість показує ся значно простійшою, чим давнїйше думано. Тихий океан має дві великі заглубини: властиву пацифічну заглубину і заглубину чілїйско-перуаньску. Дїлить їх від себе тз. поріг острова Великодного (Waihu). Заглубина пацифічна похиляє ся до заходу і має найбільші глубини по окраїнах. Є се ідучи від півночи на полудне: рів алеуцкий, рів японьский з глубиною Tuscarora вважаною до недавна за найбільшу на земли (8513 m.), рів каролїньский, рів Tonga і рів Kermadec, де висондовано найбільшу до тепер знану глубину 9427 m. Чілїйско-перуаньска заглубина опадає противно до сходу, де при самім побережу Америки лежить рів Atacama. Для плястики Тихого океана дуже важний також обширний поріг гавайский та численні заглубини, пороги і високорівнї в прибережних та середземних морях, що належать до того океана. Новійші дослїди в деяких місцях зовсїм обертають дотеперішні погляди. — Атлянтийский океан переділений на цїлій довжинї т. н. атлянтийским хребтом і виказує проте дві заглубини. Они тягнуть ся від хребта, що лучить Ісляндию з британьскими островами аж мабуть далеко в антарктичний океан. Незначна підморска набренїлість дїлить кожду з тих довгих заглубин на дві части, разом отже на чотири: північно-американьску (найглубшу, де висондовано найбільшу глубину в Атлянтийскім океанї 8341 m.), бразилїйску, північно-африканьску і полудневоафриканьску. На північ від ісляндского хребта лежить тз. північна заглубина, віддїлена тз. арктичним порогом від арктичної заглубини, що занимає в арктичнім океанї місце між Ґренляндиєю а Шпіцберґами. Дуже цікаві кон'єктури подає Supan що до полудневого Атлянтика і дуже основно переходить всї належачі до него прибережні та середземні моря.

Термінольоґією і номенклятурою підморских форм терену занимавсь також міжнародний ґеоґрафічний конґрес в Берлїнї 1899. Однак внесенє Wagner'а і Krümmel'а, щоб завести чисто ґеоґрафічну номенклятуру, не стрінулось з загальним признанєм[1]).

Про підморскі долини річні, часті на западно-европейских побережах, пише Hull. Він вважає їх за ерозийні витвори рік ледової епохи, що в деяких прихильних відносинах вдержались перед замуленєм. В многих разах однак їх істнованє вважати належить проблєматичним задля малого числа сондовань[2]).

Такі підморскі долини відкрито в послїдних часах в многих околицях, де они були причиною ломаня ся підморских телєґрафічних каблїв.

Про відложеня на днї океанів працює від довшого часу Thoulet. На конґресї ґеоґрафів в Берлїнї подав він цілу клясифікацию тих відложень[3]), представив їх розміщенє картоґрафічно[4]) і займавсь ґрунтовно їх механїчною аналїзою, котра може бути дуже важна для пізнаня давнїйших ґеольоґічних відложень[5]). Важне є також відкритє Thoulet'а, що пороваті скали пр. пумекс, вапняк втягають в себе дуже мілкі частинки ілів[6]), та єго досліди над впливом підморских вульканїчних вибухів на рід і форму глубинних відложень[7]).

Wrangell займаєсь відложенями річними при морских берегах российских рік[8]).

---

[1]) Verhandlungen des 7. int. Geogr. Kongr. Berlin 1899. I. 164 д. II. 350 д.

[2]) Geographical Journal. XIII. 1899. 285 д.

[3]) Verhandlungen des 7. intern. Geogr. Kongresses II. 354.

[4]) Bulletin de la Société de géographie. XX. 1899. 182.

[5]) Annuaire des Mines 1900. avril.

[6]) Comptes Rendus CXXX. 1900. 1639.

[7]) Revue Maritime. CXLVI. 1900. 55.

[8]) Записки по гидрографіи 1900. т. XXI. 105.

Murray опрацював розміщене вугляну вапна ($CaCO_3$) на дні океанів і найшов, що 42·5% поверхні дна всїх морий покривають відложеня заключаючі більше чим 25% сего вугляну[1].

З хемічних дослідів над морскою водою занотую розвідку Thoulet'a про примішки мінеральних і ґазових частий в морскій воді[2], і Gautier'a про йод в воді морскій. В неорґанічних сполуках є его лиш 0·2—0·5 mg. в літрі води, в орґанічних доходить він до 2·4 mg.

Brandt доказав, що бактериї, котрих є дуже в морскій воді, виділюють з азотинів (MNO_2) і амоняку азот, що входить в воздух находячий ся в морскій воді[3].

Про температуру моря в загалі оголосив важну розвідку Murray. Цікавий є розділ температури при морскім дні. 5·2% поверхні морского дна має температуру висшу чим 10°, 2·5% має 10° до 4·4°, 48·9% має 4·4° до 1·7°, 40·6% має 1·7° до 1·1°, меньше чим 1·1° виносить температура при дні на 2·8% поверхні дна. Середна температура води при дні =2·6°.[4]

Ізотерми і ізаномалї морскої поверхні розслідив в послідних часах Köppen головно зі згляду на знану симетрию, з якою держать ся на північній півкулї теплі струї західних берегів континентів, а зимні східних (на полудневій прямо противно)[5].

Цікаві дані про пароване води морскої та прісної дали досліди, що їх перевели в Терсті Mazelle і Faidiga евапоріметрами Wild'a. Вода морска мала соли 3·73%, солодку брали з омброметра. Показало ся, що вода солона і солодка не завсїгди однако ся заховують. Пароване води солодкої є правильно більше, чим солоної. Коли однак загальне пароване збільшаєсь, зменьшає ся рівночасно квот чисел виражаючих пароване солодкої і солоної води. Коли температура підносить ся, збільшає ся і пароване обосторонно, але скорше у солодкої, як у солоної води. Так само має ся річ, коли росте середна скорість вітру. Колиж середна вохкість воздуха росте, зменьшаєсь евапорация обосторонно, але вже зовсїм однаково[6].

---

[1] Geographical Journal XIV. 1899. 426.

[2] Revue maritime CXLV. 1900. 37.

[3] Über den Stoffwechsel im Meere. Kiel. 1899.

[4] Geographical Journal XIV. 1899. 34.

[5] Annalen der Hydrogaphie 1898. ст. 356 дд.

[6] Anzeiger der kais. Akademie der Wiss. in Wien 1898. Nr. 7. Sitzungsberichte der k. k. Akad. d. Wiss. in Wien. Mat. nat. Klasse. т. 107. IIa. ст. 270. Annalen der Hydrographie 1899. ст. 469.

Про барву води морскої іде спір між Abbegg'ом, що переносить на море теорию Tyndall'а про синяву неба[1]) і Spring'ом, що синю барву моря виводить з ріжних хемічних причин[2]).

Прозорість морскої води також не є дотепер докладно пізнана. Цїкаве питанє, як далеко заходить сьвітло в морскі глубини, не є дотепер рішене. Теоретично заходить оно в найбільші глубини, але практичні досліди показали, що так не є. Способом Secchi'ого т. є. через занурюванє в море округлого білого кружка, найдено, що сьвітло сонця доходить лиш до 50 m. глубини, а при дуже великій прозорости до 100 m. В дуже многих морях сьвітло не доходить і до 50 m. Виправа австрийского корабля Pola доказала, що прозорість кінчить ся в Сходнім Романьскім мори недалеко 40 m. під зеркалом, в Еґейскім 36 m., в Червонім вже 24 m. Далеко докладнїйша є фотоґрафічна метода. Плиту фотоґрафічну занурює ся до певної глубини і виставляє ся на дїланє сьвітла. Потім закриває ся єї знов, витягає ся і розслїджує. До недавна міродайні були в тім напрямі вислїди Fol'а і Chun'а, що виказали останні слїди сьвітла в 400, зглядно 500 m. глубини. Luksch підчас виправи Pol'і найшов їх ще в 600 m., але нисше не виказували вже плити якої небудь зміни. Щож однак робити з обставиною, що н. пр. найдено многі ростини в глубинах більших чим 1000 m. Яка є натуга сонїчного сьвітла в глубинах моря, також нїчого не знаємо. Одні кажуть, що в глубинї 170 m. є лиш так ясно як у нас підчас зоряної ночи, другі твердять, що ще в 4000 m. глубини є так ясно, як підчас повні. Дальше не знаєм, які роди сьвітляних лучів найглубше заходять. В поверхневих верствах найсильнїйші є фіолетні, але хто знає, як є в більших глубинах. Досліди над тою справою повинні бути тепер на ново підняті, коли відкрито лучі Röntgena[3]).

Рух филястий води морскої представлений аналїтично в книжцї Wien: Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig 1900.

Теорию повставаня филь Helmholtz'а популярно представив Baschin[4]).

---

[1]) Prometheus X. 1899. 305.

[2]) Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie 1899. II. 99.

[3]) Про вислїди Luksch'а пор. Denkschriften der kais. Akademie der Wissensch. in Wien Bd. LXIX. 1900. Mittheilungen der kais. königl. Geogr. Gesellschaft in Wien т. XLIV. 1901. ст. 189 дд. пор. також Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1898. Nr. 30.

[4]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde. XXXIV. Berlin 1899. 408.

Vaughan Cornish хоче утворити під назвою кіматольоґії окрему науку, що занималаб ся нетілько океанїчними филями, але і всїми витворами подібними до филь зі снїгу, піску, навіть на земскій корі¹).

На мареоґрафі в Sydney реґістровано часто високі филї з дуже довгою, майже півгодинною проміжкою між двома горами филї. Вважано їх за сейсмічні, бо є дуже до них подібні, але Russell виказав, що они є чисто метеорольоґічного походженя. Іменно в часї барометричного minimum в тих околицях підносить ся зеркало моря дещо, а се вже справляє льокальні струї вздовж S і E побережий. Ті струї лучать ся в проливі Bass'а і витворюють там згадані великі стоячі филї, що відбивають ся на сиднейскім мареоґрафі²). Подібні стоячі филї обсервував Dawson на побережах Нової Шкоциї³).

Великі филї, що повстали 1896. VI. 15. в наслїдок землетрясеня в Kamaishi, обговорив Davison. Они перейшли в поперек весь Великий океан. На Гавайских островах доходили ті филї по висоти 2·5 m. понад звичайний позем припливу і наробили шкоди. В St. Francisco була їх висота ще доволї значна⁴).

Явище припливу і відпливу моря опрацював теоретично Lévy⁵). Представленє формул Newton'а з модифікациями льорда Kelvin'а, формул Laplace'а, Darwin'а і Airy'ого та гармонїчної аналїзи є дуже основне і ясне. Нових доріг однак Lévy не вказує.

Важні причинки до обчислюваня неправильностий филь припливу подав Boergen⁶) і Harris⁷).

Thoulet виказав експериментально в околиці Brest'а, що струї повстаючі при припливі і відпливі мають в ріжних глубинах ріжний напрям⁸).

---

¹) Verhandlungen des VII. Internat. Geographen-Kongresses Berlin 1899. II. 207.

²) Revue Scientifique 1898. Nr. 24. Petermanns Mittheilungen 1899. LB. 862.

³) Proceedings of Royal Society of Kanada II. Ser. 5. Sect. III. 1899/1900. 23 д. Petermanns Mittheilungen 1900. LB. 484.

⁴) Philosophical Magazine. L. 1900. 579. Naturwissenschaftliche Rundschau 1901. 115.

⁵) Leçons sur la théorie des marées professées au College de France I. Paris 1898.

⁶) Verhandlungen des VII. Intern. Geogr. Kongresses in Berlin. II. 132.

⁷) Nature. LXII. 1900. 258.

⁸) Meteorologische Zeitschrift 1899. 313.

Перегляд розміщеня морских струй цїлої землї подає карта, видана британиским гидроґрафічним урядом.

Повставанє морских струй представив теоретично Bjerknaes, вважаючи їх причиною ріжницї тисненя і густоти[1]).

Witte вияснюює появу зимної води при побережах морских відклонюючим дїланєм обороту землї та відосередної сили струй пливучих луком. Вітер по єго думцї має дуже малий на се вплив[2]).

Про подвійні струї в проливах робив Макаров пильні дослїди в Босфорі, Bab el Mandeb, проливі Gibraltar'a, Formosa, La Pérouse. Перші три проливи мали дві струї, що ішли над собою. В проливі Формози ішли дві противні струї поруч себе, бо температура і питомий тягар морскої води є при китайскім березї значно меньші, як при формозаньскім. Подібно є в проливі La Pérouse'a, де рамя великої теплої струї Kuro-Siwo пливе на північ, а поруч него від NW—SE струя зимна[3]). Wharton противно приписує повставанє таких струй впливам вітру і сильно полемізує з Ма́каровом[4]).

Pettersson виказав, що при топленю ся пливучих ледів повстають наслїдком обниженя температури і густоти води морскої прямовісні струї[5]).

Перегляд поодиноких океанів, їх середземних та прибережних морий начну від атлянтийского океана і зверну увагу на тз. Segelhandbuch виданий для него в друге інститутом Deutsche Seewarte.

Океан атлянтийский.

Північно-атлянтийский океан належить до найлїпше пізнаних морий. Від него начались властиві океаноґрафічні дослїди і ведуть ся від пятьдесятих років минувшого столїтя постійно. Іменно в 1895. і 1896. роцї працювали ту ріжні експедициї, що принесли много нового, хоч працювали без злуки, а тимсамим без спільного пляну.

Даньска експедиция на корабли Ingolf мала головною цїлию зоольоґічні та хемічні дослїди, які мають велике значінє для океаноґрафії. З важнїйших ґеоґрафічних здобутків вкажемо на сконстатованє підморскої вульканїчної лави на SW від Reykjanes (на

---

[1]) Meteorologische Zeitschrift. 1899. 313.

[2]) Grogr. Gymn. Brieg. 1900.

[3]) Proceedings of Royal. G. Society Edinburgh 1899. т. 22. Nr. 4.

[4]) Nature LX. 1899. 261., 316., 544. LXI. 1900. 29.

[5]) Petermanns Mittheilungen 1900. 84.

Ісляндиї), що колись мабуть виставала понад поверхню моря. В 1578. р. бачив Frobisher в тім місци остров, що тепер не істнує[1]). Експедиция зібрала також важні дані про полярну струю, що йде на сході від Ісляндиї на південь і стикаєсь з Golfstream'ом на підморскій лаві між Ісляндиєю а островами Faröer. Обі струї взаїмно спиняють ся в своїм бігу. Ґольфштрем бере завсїгди верх і лиш часами при сильних північних вітрях відклонюєсь в полудневу сторону. Полярна струя западає звичайно під єго теплі води і помішавшись з ними значно підвисшає свою температуру. Лишень в немногих місцях удає ся зимній бігуновій воді не змішавшись проникнути на полудне[2]).

Над тими відносинами робила дослїди також анґлїйска експедиция на корабли „Research". Важні суть крім того дослїди анґлїйского рибацкого уряду, що випустив кілька тисячів порожних фляшок і корків. Ті, що їх випущено між островами Faröer і Shetland більше до сходу, поплили на схід, а потім на полудне і були виловлені на Шетляндах, Оркадах та східних побережах Британиї. Ті, що їх випущено більше на захід, заніс Ґольфштрем на побережа Норвеґії, але лиш в дуже малій скількости. Фляшки випущені на нїмецкім мори виказали, що водна циркуляция на тім мори є з малими виїмками цикльонїчна[3]).

Данїя вистачила ще одну виправу в ті сторони. Корабель „Diana" осмотрював в практичних цїлях важні для рибальства а небезпечні задля мраки і непевної погоди води Ісляндиї і Фарерских островів. Пильними сондованями (1898 і 1899) вспіла експедиция докладно зняти всї нерівности морского дна тих околиць і спорудити докладні мапи[4]).

Карту глубин околиці Азорів головно після сондовань князя Monaco спорудив Thoulet. З глубини 3100 метрів видобуто під +47° ширини, а 29°40' W довжини від Парижа кілька обломків каміня. Хемічна аналїза виказала, що се є рід базальтового скла тз. трахиліта — отже вульканїчну породу найдено в віддаленю 500 миль від Азорів в напрямі Ісляндиї[5]).

Новійші дослїди переведені в заливі Fundy Bay, де як звісно приплив моря є найбільший на цїлій земли, бо доходить підчас ви-

---

[1]) Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900 ст. 1 дд.

[2]) Про иньші результати „Ingolf'a" пор. Naturwiss. Wochenschrift 1900 ст. 249.

[3]) Ibidem. ст. 30 дд.

[4]) Geografisk Tidskrift. XV. ч. 3—4.

[5]) Comptes Rendus т. 128. ст. 849. 1471. Petermanns Mittheilungen 1900. Lb. 481.

сокого припливу середно до 27·1 m. виказали, що однак середна висота припливу є меньша, чим в заливї св. Лаврентия[1]).

Струям північно-атлянтийского океана присьвячені є дві спецuяльні розвідки: Wegemann'a i Pettersson'a. Wegemann опрацьовує головно історичну сторону предмету[2]), Pettersson поступає більше конструктивно і стараєсь на підставі давнїйших і новійших дослїдів завести лад в замотаних дотепер наших відомостях про струї сеї части океана. Розріжнює він отже наперед властивий Ґольфштрем, що заточує велике півколо довкола моря Sargasso і лучить ся з рівниковими струями від тз. Golfstromtrift, ґольфової струї, що виповнює своїми раменами північноатлянтийский океан.

Цїлий сей простор можна подїлити на чотири заглубини: дві західні 1) межи Labrador'ом а Ґренляндиєю 2) межи Ґренляндиєю а хребтом Reykjanes; та дві східні 3) між хребтом Reykjanes а хребтом Rockall 4) між хребтом Rockall а хребтом Wyville Thomson'a. Конфіґурация морского дна дуже впливає на циркуляцию води. Важнїйші вітви ґольфової струї є ось ті. В заглубинї першій іде одна галузь теплої води аж до 55° ширини верхом, потім пливе під водою аж в пролив Davis'a і топить там ледові гори, в другій заглубинї, званій Ірмінґерским морем, маєм лиш одну другорядну галузь теплої води, що прибувши з третої заглубини обливає зі заходу Ісляндию, а стрінувшись з зимною східно-ґренляндскою струєю в даньскім проливі, западає під ню і пливе дальше на північ.

Далеко більша є дїяльність ґольфової струї в обох східних заглубинах. Маємо ту два великі рамена, від котрих розходить ся много меньших галузий. Перше з тих двох рамен іде здовж хребта Reykjanes на північний схід і на лаві, що лучить Ісляндию з островами Faröer, стикає ся з зимною східно-ісляндскою струєю. Скручує отже на полудне, а повернувши круто довкола Faröer'ів іде на північ, переходить понад другим раменем східно-ісляндскої зимної струї та прямує просто до Шпіцберґів. На захід від них входить головна галузь сего рамени під воду і, як виказав Nansen, заходить дуже далеко на північ. Від сего рамени виходять на лїво три головні галузи, на право дві. З тих, що виходять на лїво, одна є згадана вже галузь, що входить в ірмінґерске море. Друга лїва галузь прямує до острова Ян Маєн, трета виходить під 72° на північний

---

[1]) Annalen der Hydrographie 1900. ст. 181 д.

[2]) Archiv der deutschen Seewarte т. XXII. ч. 4.

запад до берегів Ґренляндиї. З правих галузий одна виходячи під 68° обливає північні кінчини Европи і сягає аж до Нової Землї, друга обливає полудневі кінчини Шпіцберґів[1]).

Новійші досліди про Ґольфштрем збирає Вранґель[2]).

Звідки походить вода Ґольфштрема, розслїджував Cleve на основі обсервацпй плянктона і прийшов до вислїду, що плянктон іде тою самою дорогою, що і пливучі більші маси пр. дерево, і походить з тих самих місць[3]).

Для пізнаня струй океанїчних є дуже важні дороги ріжних предметів, відданих їм зовсїм на поталу. Найбільше користає океаноґрафія з решток розбитих кораблїв та з т. з. почт фляшкових. Пр. розбитий корабель Yale від 1899. X. 30. до 1900. III. 24. заточив круг від рога Hatteras попри острови Бермуди до островів Bahama. З фляшок, що їх в послїдних часах викинено, одна з $\varphi=-10^0$, $\lambda=-28^0 56'$ оплила ріг Roque і приплила до Haiti; друга від Канарийских островів через полосу пассатів і ґольфштрем заплила до Ірляндиї[4]).

Плаваючі ледові гори появлялись коло New Foundland в великім числї в р. 1898. Рік 1899. був специяльно богатий в ледові гори[5]).

Побічні т. є. середземні і прибережні моря атлантийского океана піддає ся також дуже докладним розслїдам, так як они обливають культурні краї, що в інтересї безпеченьства плавби, рибальства, при закладаню підморских телеґрафів і т. д. не залишують нагоди розслїдити їх науково.

Струї заливу св. Лаврентия опрацював Bell Dawson[6]). В американьскім середземнім мори переведено при закладаню телеґрафів цїлу серию сондовань.

На европейскім середземнім мори маєм до занотованя також кілька робіт.

Каблевий корабель Amber найшов на схід від Сицилії глубини до 3950 m., а на підморскій височинї Barka дуже неправильний профіль. Фляшковою почтою сконстатовано полуднево-західну струю

---

[1]) Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900. ст. 61 дд. 81 дд.

[2]) Записки по гидрографіи. XXI. 1900. 44.

[3]) Geographisches Jahrbuch. XXII. 1899. 19.

[4]) Geographisches Jahrbuch. XXIV. 173.

[5]) Ibidem 171.

[6]) The Currents in the Gulf of St. Lawrence. Ottawa 1900.

з лїоньского заливу до рога Пальос[1]). В проливі мессиньскім сконстатовано часами так сильні струї, що великі пароходи на слухали керми[2]).

Розслїди над Чорним морем переведені в р. 1890. і 1891. тепер доперва опрацьовуєсь. Шпіндлєр і Врангель оголосили про сї дослїди обширну роботу в приложеню до 20 тома „Записокъ по гидрографіи"[3]). Обрахована ту на ново середна глубина Чорного моря на 1197 m. З фляшкової почти на Чорнім мори вносить Врангель, що панує ту цикльонїчна циркуляция на поверхнї води, викликана пануючими вітрами[4]).

Видобуті підчас розслїдів проби відложень на днї моря Чорного і Азовского обробив Murray[5]).

Прямовісним подїлом температури в Чорнім і Каспійскім мори занимаєсь Köppen[6]). В Чорнім мори, як взагалї в слабо засолених середземних морях, що стоять в звязи з більше засоленими, є розклад температури в лїтї ось такий: Від поверхнї, що є тепла, зменьшаєсь температура дуже скоро, а осягнувши з невеликій (меньшій звичайно як 100 m.) глубинї своє minimum, зростає потім статочно, хоч поволи. В зимі температура від поверхнї статочно знижаєсь аж до згаданої глубини, потім же знов підвисшаєсь. Причини сего явища належить шукати в тім, що долїшні верстви води Чорного моря походять з моря Середземного, є отже більше солоні і густі. Верхні верстви води є в наслїдок великого числа впадаючих в се море великих рік сильно засолоджені, отже рідші. Між ними а долїшними верствами нема нїякої виміни, вода з долу не дістаєсь майже нїколи на поверхню, не має проте кисня, а натомість містить в собі великі скількости сїрководня. В зимі поверхнева вода остудившись неможе опасти на дно моря, а лиш до певної глубини — она то творить ту посередню, в лїтї найзимнїйшу верству. В Каспійскім мори є відносини зовсім иньші. Оно не лучить ся з нїяким иньшим більше засоленим морем, проте опадає ту температура в лїтї одностайно аж до дна.

В каналї La Manche переведено також важні океанографічні дослїди. Thoulet водав дуже цікаві лїтольогічні карти сего

---

[1]) Annalen der Hydrographie 1899. 288. 1900. 498.

[2]) Ibidem 1899. 568.

[3]) Петербург 1899. 100 ст.

[4]) Записки по гидрографіи XX. 1899. 233.

[5]) Scottish Geographical Magazine XVI. 1900. 673.

[6]) Annalen der Hydrographie 1899. ст. 468.

каналу в розмірі 1:100000. Британска комісия ґеодетична означила середний позем сеї части моря о 0·04 m. низший від означеного в 1859[1]).

Явища припливові і відпливові в Каналї і полуднево-западній части нїмецкого моря обговорює подрібно Börgen. Велика ріжнородність в часї і натузї тих явищ толкуєсь, як знаєм, інтерференциєю припливових филь[2]).

Море нїмецке (північне) має бути в початкових лїтах XX. столїтя ґрунтовно розслїджене ві всїх напрямах після пляну поставленого на міжнародній конференциї морскій в Штокгольмі 1899. Ледові відносини сего моря в р. 1899. і 1900 обробив Herrmann[3]). Крім того важні є дослїди над припливовими і відпливовими струями в тім мори Simpson'a, Buchan'a, Phaff'a.

Море балтийске представив коротко Rein з фізичного і біольоґічного огляду[4]). Прецизийна нївеляция переведена пруским ґеодетичним інститутом на побережах Балтийского моря показала, що давний погляд на неправильности зеркала сего моря є неоправданий. До недавна думали, що се зеркало лежить коло Клайпеди (Memel) 30 cm. висше, чим в Kiel. Тепер виказано, що та ріжниця виносить ледви кілька центиметрів і має своє жерело в постійнім віяню западних вітрів[5]).

Про струї балтийского моря оголосив розвідку Engelhardt. Він виказує в нїм цикльонїчний рух, іменно при полудневім і східнім побережу струю на північ, при шведскім березї на полудне[6]). Струї в Белтах обробив Knudsen[7]).

Океан Індийский розслїджували в остатних роках XIX. столїтя численні кораблї анґлїйскі. Однак їх сондованя є меньше важні в порівнаню до вислїдів наукової експедициї нїмецкої, що плавала в р. 1898. і 1899. на корабли Valdivia[8]).

---

[1]) Geographical Journal XIV. 1899. 571.

[2]) Annalen der Hydrographie 1898. ст. 414. 462.

[3]) Annalen der Hydrographie 1900. 536.

[4]) Sb. niederrh. Ges. f. Nat. Bonn 1899.

[5]) Veröffentlichungen des königl. Preuss. Geodätischen Instituts. N. F. Nr. 4. Postdam 1900. Пор. Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1899. Nr. 47.

[6]) Aus dem Archiv der deutschen Seewarte XXII. 1899. Nr. 6.

[7]) Пор. Petermanns Mittheilungen. 1900. LB. 482

[8]) Вислїди еї представив більше популярно Chun в книжцї: Aus den Tiefen des Weltmeeres. Jena 1900. 550 с.

Valdivia під научним проводом Chun'a працювала (1898/9) наперед в північно-атлянтийскім океані, де стверджено звязь між питомим тягаром вод морскої, а плавними знарядами ростинок плянктону. В полудневоатлянтийскім океані відкрито цікаву підводну лаву (25°S, 6°E) і глубину до 5000 m. на запад від лави рога Agulhas. Найважнійшим результатом експедиції є однак відкрите значної глубини (над 5000 m.) на границях антарктичного та індийского океану, де перше припускано дуже незначну глубину. В тропічних частях індийского океана переконали ся океанографи Valdivi'ї, що тз. австральско-індийска заглубина несягає так далеко на полудневий захід, як дотепер припускано. Температури глубинні в цілім індийскім океані показали ся дуже низькі. В глубині 5000 m. температура нїгде не доходить до 2°C навіть під рівником, на границі антарктичного океана була всюди низша 0°. Дуже характерні є відносини температурні в полудневій части індийского океана (пр. 63°S, 54°E). На поверхні води температура виносила —1° до —1·5°. Між 100 а 200-метровою ізобатою температура води підносила ся висше 0° і статочно підвисшала ся в міру, як глубина росла. Аж меньше більше від 3000° m. глубини температура знов стала низшою від 0°. Цікаве є також відкрите, що тропічне сонце успіває огріти лиш тонку зверхну верству моря, так що в глубині 200 m. температура тропічних морий дуже мало ся ріжнить від температури морий умірковано̂ї полоси. З тим получене є ще иньше цікаве явище, яке трафляєть ся в більших озерах прісно-водних, а не в морях. Іменно до глубини 50—100 m. маємо в тропічнім індийскім океані температуру, що дуже мало ріжнить ся від температури поверхні моря. Потім слідує нагле (на просторі 20—25 m.) обнижене температури часто о 8°—9° і від тоді вже термометр аж до дна морского постійно опадає. Причина того цікавого явища лежить на думку Chun'a в тім, що горішна верства моря є під впливом інсоляциї сильно огріта. Вода, що під нею лежить, підлягає сильним льокальним струям, але в загалі остає завсїгди в країні монсунів і проте находить ся все в одній глубині та має низьку температуру.

Крім тих важних відкрить поробила експедиция ще много иньших поменьших пр. розслїдила вплив морских струй на фізичні і хемічні відносини морскої води, наново віднайшла остров Bouvet'a і означила єго положене, обсервувала антарктичні ледові гори і т. д.[1]).

---

[1]) Пор. також Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. Bd. XXXIV. 1899 Nr. 2. 75 дд.

Вийшла нова частина голяндского великого атлясу індийского океана. Она обнимає ізотерми поверхнї моря, температури воздуха, напрям струй і многі метеорольоґічні дані для червня, липня і серпня[1]). Анґлїйска урядова публїкация Meteorogical Charts of Southern Ocean etc. London 1899. представляє в 20 картах температури поверхнї моря і струй між 40° а 45° полудн. ширини, 10° а 180° східної довготи.

Побічні моря индийского океана.

Австрійска експедиция на корабли „Pola" (1897/8) розслїджувала Червоне море. Она занималась більше хемічними та біольоґічними дослїдами, але і морфольоґічні відносини сего моря були докладнїйше як дотепер розсмотрені. В полудневій части відкрито шість депресий, що ідуть рядом. З них найглубша є та, що лежить під 22° північної ширини. Там висондовано найбільшу глубінь Червоного моря (2190 m.). В проливі Bab el Mandeb найдено максимальну глубину 300 m. Температури і густота води є в тім мори дуже значні. Температура є висша в полудневій части моря, де найдено maximum =32·5°C, густота, т. є. скількість соли, більша в північній части, де найдено maximum =4·08% соли. Такі відносини вказували на істноване в проливі Bab el Mandeb сильної струї поверхневої від океана до Червоного моря та глубинної струї в противнім напрямі. Такі струї і виказали анґлїйскі дослїди 1898. року[2]). Від глубини 700 m. аж до дна панує в Червонім мори температура 21·5°. Прозорість води є значно більша в північній, як в полудневій части. Занурена біла таблиця зникала для ока обсерватора там в 50 m. глубини, тут в 39 m. Замітна є велика скількість кисня в долїшних верствах води і нерівно значнїйша скількість орґанічних субстанций в намулї Червоного моря, чим пр. в намулї моря Середземного[3]).

Друга важнїйша океаноґрафічна експедиция в обсязї индийских морий плавала в лїтах 1899. і 1900. по морях австральско-азийского

Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. 1898. Nr. 10 ст. 517 дд. Petermanns Mittheilungen Bd. XLV. 1899 ст. 24, 48, 72, 128. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. Bd. X. 226 дд.

[1]) Waarnemingen in den Indischen Ocean etc. Amsterdam 1900. 22 карти.

[2]) Annalen der Hydrographie 1898. ст 520. дд.

[3]) Wiener Akad. Anzeiger 1898. 13. Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien Bd. XLII. ст. 47 д.

архіпеляґа на голендерскім судні „Siboga“ під научним проводом Weber'a. Властива еї ціль була розслідити морску фауну і фльору того архіпеляґа; але і для ґеоґрафії є вислїди сеї експедициї дуже важні.

Віддавна було вже знаною річию, що в згаданім архіпелязї находить ся між численними островами кілька значних заглубин. Але до близшого розслїдженя дуже замотаних в тих околицях відносин було ще дуже далеко. Длятого могла голяндска експедиция много нового принести. Сконстатовано наперед, що істнують ту дві независимі від себе заглубини: море Banda і Celebes'a. Море Banda не є так глубоке, як дотепер думано на підставі одного з давнїйших помірів, що виказав для него максимальну глубину 7800 m. Siboga не висондовала на тім місци анї в єго околици більшої глубини як 4000 m., найшла за те в иньшім місци 5684 m. Море Banda стоїть в звязи з глубоким (4000 m.) морем коло острова Ceram і заглубинами коло островів Halmahera, Flores, Bali і Savu, де висондовано також значні глубини. Експедиция відкрила також цїкавий підморский хребет, що названо хребтом Siboga. Він передїлює море Banda на дві части. Море Celebes є також розмірно дуже глубоке, бо виказує глубини понад 5000 m.

Знаною вже віддавна було річию, що море Banda від глубини 1600 m. аж до дна має температуру +3°C, підчас коли пр. Індийский та Тихий океани на своїм днї мають температуру 1° зглядно 1·8°. Витолковувано се вже давнїйше теоретичним припущенєм, що між тими океанами а морем Banda є підморский вал, на котрім найбільша глубина виносить 1600 m. Правду сего припущеня сьвітло потвердили сондованя Sibog'i, доказуючи рівночасно, що зимна вода 3° в мори Banda не походить з Індийского океана, де віддїлюючий хребет значно висше ся взносить, але з Тихого через молюцкий пролив. Подібно море Celebes має від 1300 m. до дна температуру 3·7°. І она походить мабуть з Тихого океана, але наглядно сего виказати не могла експедиция, бо не могла найти жаданого підморского хребта. Натомість стверджено, що пролив між островами Bali а Lombok не є глубокий, як давнїйще по недокладних сондованях думано, а плиткий. Тим самим сильно підтятий є роздїл Wallace'a, що з зооґеоґрафічних зглядів поклав тут границю між Азиєю а Австралїєю. (На Lombok найдено крім того одного Cyprinoid'a в солодкій водї, що також промовляє против теориї Wallace'a).

Дуже важні є дослїди експедициї над складом морского дна і над біольоґією морских глубин. Ту піднесемо тільки те, що мимо великої глубини тих середземних морий, дно не тільки не має океанїчного характеру, але навіть і пеляґічного годї єму призвати. Навіть в найбільших глубинах подибувано прибережні осади, рештки ростин, ба навіть цїлі пнї дерев, овочі і листє пальми etc., що мабуть становлять поживу для жиючих там ростин і звірят. Океанїчні осади т. є намул з форамініферами, діятомеами, Radiolaria'ми і т. д. були досить рідкі. З характерних проявів глубинної фауни і фльори належить назвати Rhizamnina algaeformis (належить до Rhizopoda), зьвіря що своїми руровидними раменами покриває дно в великих глубинах (maximum в 2798 m. глубини) і глїн: Lithotamnium, що творить там цїлі лави в малих глубинах (2—40 m.)[1].

Тихий океан і єго побічні моря.

Найбільшу дотепер знану глубину на тім океанї і на всїх морях висондував в осени 1899 р. американьский корабель Nero. В +12°40′ північної ширини та 145°40′ східної довготи сонда трафила на дно доперва в 9636 m. глубини[2]).

Важна є також експедиция на Тихий океан, що в 1899. і 1900. роках підприйняв Agassiz. Виконала она дуже много сондовань, сконстатувала на північ від островів Marquesas депресию до 5770 m. глубоку, виміряла SO від островів Tonga глубину 8303 m. і найшла недалеко острова Guam (Лядрони) глубину 8802 m. Біольоґічні вислїди були досить малі, дно моря в таких глубинах покривали одностайно грудки піролюзиту. Волоки не витягнули майже ніяких орґанїчних єств з тих глубин на поверхню моря. Agassiz каже, що найінтереснїйші результати дали дослїди над коралевими островами, але належить сумнїватись, чи потрафить Agassiz на їх основі захитати теорию Darwin'а в користь своєї теориї по славних верченях на острові Funafuti в 1897. р., що так сьвітло доказали єї імовірність[3]).

Agassiz найшов, що поодинокі атолї островів Каролїньских, Маршальских і Ellice підносять ся із значних глубин на ізольованих горах і хребтах. На увагу заслугує велике розповсюднене на днї великих глубин бульб піролюзитових (MnO_2) в дуже значній скіль-

---

[1]) Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900. ст. 182 дд.

[2]) Geographische Zeitschrift 1899. 509.

[3]) Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900. ст. 72, 172.

кости. Піролюзит має дуже значний питомий тягар (=5·0), тому то і маятникові обсервациї виказують таку надвижку маси в земскій корі під океанїчними глубинами[1].

Важні сондованя і поміри денної температури виконано в лїтах 1898–1900 на кораблях Egeria, Penguin, Retriever і Pathfinder.

Bell Dawson опрацював табелї припливу і відпливу для побережий британскої Колюмбії, Hegemann для Нової Зеляндиї. Вранґель представив дотеперішні наші відомости про струю Kuro Shivo[2].

Dinklage звернув увагу, що в лїтї 1897/8 і 1898/9 пливучі леди показувались часто під 48°—50° полудневої ширини на Тихім океанї[3].

Також в прибережних морях сего океана роблено замітні дослїди. Колчак оброблює обсервациї росийских кораблїв Рурик і Крейсер над питомим тягаром і температурою води в мори японьскім[4].

В тім самім мори робив такіж самі дослїди нїмецкий корабель Deutschland[5].

Росийский гидроґрафічний уряд опублїкував обсервациї часу замерзаня і таяня в росийских пристанях над японьским та охоцким морем.

В мори Behring'a роблено обсервациї над станом леду на веснї[6]. Температуру в сїм мори опрацював Girard[7].

Відносинами в тім мори займає ся також розвідка Lindenkohl'a[8]. В мори Behring'a пр. густота росте рівномірно аж до дна. Температура також опадає, але не рівномірно. Она обнижає ся скоро від поверхнї аж до 100 або 150 m., потім підносить ся незначно до глубини 400 m. Між 500 а 800 m. маєм майже однаку температуру, а звідси она знов опадає аж до дна. Тепла верства між 150 а 409 m. походить ту без сумнїву з північного Тихого океану, бо більша густота сеї верстви не позваляє припускати, щоб она походила з поверхнї моря. І в охоцкім мори густота стало росте з глубиною, але теплота є інакше розложена. Під тонкою (50 m.)

---

[1] American Journal of Science. CLXI. 1900. 33, 109, 143, 369.

[2] Записки по гидрографія. XX. 1899. 398.

[3] Annalen der Hydrographie. 1899. 398.

[4] Записки по гидрографіи. XX. 1899. 95.

[5] Annalen der Hydrographie 1899. 226.

[6] United States Hydrographical Office. Publ. Nr. 116.

[7] Comptes Rendus de la Sociéte Géographique 1899. 79.

[8] Petermanns Mittheilungen т. XLV. 1899. ст. 4 дд.

поверхневою верствою теплої води є ту в літї температура між 50 а 200 m. низша від 0°, заразом є ту вода густїйша і більше солона. Сю зимну верству складає на думку автора вода, що в зимі була при поверхнї моря, ту остудилась, а через витворенє ся леду, сильнїйше засолилась. Низше 1500–1800 m. аж до найбільшої глубини (3370 m.) констатовано всюди 2·2°, що вказувалоб на те, що нїякий з проливів, що лучать Охоцке море з океаном, не є глубший над 1500–1800 m.

Lindenkohl занимаєсь також температурою і густотою середної части Пацифіка. Густота в полудневій сторонї є ту більша, як в північній, бо ту впадає богато знатних рік. В загалї густота меньшає до +550 m., а звідси доперва росте. Се приписує L. в части воздушним опадам, в части струї зі сходу, що приносить рідшу та зимнїйшу воду. L. акцентує також важний факт, що коли стрінуть ся рівно густі маси води, з котрих одна є зимнїйша і меньше засолена, а друга теплїйша та більше засолена, то послїдна має тенденцию западати під першу.

Північний ледовий океан є именно в частях прилягаючих Европі постійно розслїджуваний, хоч більших експедиций туда не висилано.

Weber представляє в своїй книжцї про розвиток фізичної ґеоґрафії арктичних країв також розвиток їх океаноґрафії[1]).

Nathorst виказав, що найдена Nordenskiöld'ом 1868. р. межи Шпіцберґами а Ґренляндиєю глубина 4850 m. не істнує. Nathorst висондовав там лиш 2697 m. а в сусїдстві 3145 m.[2]).

Hjort, Gran і Dahl робили 1898–1900 важні дослїди на европейскій части Ледового океана. Брав в них участь також Nansen.

Росия кинулась в послїдних роках XIX. віку до використаня свого мурманьского побережа, що облите в части вітками Ґольфштрома має вільні від леду пристани. Туди хоче Росия повести нову комунїкацийну лїнїю. Тому маєм завдячувати кілька важних праць про тутешне море.

Голицин подав розвідку про границї Ґольфштрома, що після него сягає в лїтї аж до Нової Землї[3]).

---

[1]) Münchener Geographische Studien. 1898. IV. 250 ст.

[2]) Geographical Journal XIV. 1899. 64.

[3]) Записки Имп. Академіи наукъ. IX. 1898. 321.

Андреєв подає перегляд давнїйших праць над Ґольфштромом 1899 - 1893. і карту сеї струї в тих околицях в р. 1889[1]). Книпович на корабли „Андрей Первозванний“ перевів дослїди над Ґольфштромом важні о стілько, що їх підпринимав в зимі. Та струя дїлить ся в тім мори на кілька рамен, між котрими є зимна полярна вода. В зимі тепла вода западає під поверхневі зимні верстви[2]).

На полудневім ледовім океанї поробила принагідно бельґійска антарктична експедиция досить важні океаноґрафічні дослїди. На полуднє від Огняної землї найдено наглий опад дна з 300 на 1800 m., а потім на 4000 m., котра то глубина оставала постійною аж до берегів антарктичних островів. На днї тих глубин находились на диво численні камінцї, ба і більше каміне, без сумнїву террестричного походженя. Близші дослїди виказали, що сей матеріял був принесений ледяними горами з антарктичної суші. Те навело учених експедиций на думку, що ледові гори антарктичного океана мають те саме походжене, що ледові гори північного океана, а не витворились з морского леду, як припускає Heim. Близші розслїди антарктичних земель доказали вповнї, що ся думка оправдана. Границя вічного снїгу сягає ту аж до зеркала моря, не треба отже і гір, щоби ледівцї ся утворили[3]).

IV. Загальні математичні і фізичні свійства землї.

Про нові поступи в пізнаню математичного виду землї реферував на VII. міжнароднім конґресі ґеоґрафів в Берлїнї 1898. Helmert. Новійші поміри показують місцями дуже великі ріжницї від обчислених елементів величини землї. Іменно тз. поміри степенів довжини ґеоґрафічної виказали в новійших часах незгідність з вартостями для сплощеня землї, обчисленими Clarke'ом. Навіть вартість подана Bessel'ом показалась в виду поміру 52° рівнобіжника за великою.

---

[1]) Записки Имп. Русс. Географическаго Общества. XXXIV. Nr. 1.

[2]) Записки Имп. Акад. Наук. XII. 1900. 419.

[3]) Gaea 1900 ст, 754. Bulletin de l' Academie de Belgique. 1899. 642.

Тих ріжниць величин обчислених і обсервованих годі віднести до обсервацийних блудів. Они мають реальну дійсність.

Дуже важне в тім напрямі є питанє: які зміни нормального виду землї повстають через контраст континентальних мас а океана і через вплив великих гірских мас пр. в Азиї? Listing приймав, що контраст континентів і океанів може довести до 1000-метрових депресий на океанї. Helmert вислїдив, що они доходити можуть лиш до ± 500 m. і пр. на островах океанїчних є явищами лиш льокальними. На єго думку сила тяжести землї є на океанах і на континентах в приближеню рівно велика в наслїдок підземної компензациї мас. Льокальні забуреня можуть бути дуже значні, именно при стрімких побережах. Таку дуже велику неправильність обсервовано на Гавайских островах.

В виду таких неправильностий має ґеоід дуже неправильний вид. Однак новійші дослїди показали, що пр. в Европі ріжниці прямовісні елїпсоіда і ґеоіда доходять в maximum до ±100 m.[1]).

В загалї добре обчисленє величини землї буде можливе доперва по укінченю великих ґеодетичних робіт і їх докладнім обчисленю. З поміж помірів полуденника початих і проєктованих при кінци XIX. віку згадаю: шведско-росийский помір на Шпіцберґах, новий помір полуденника коло Quito. Дуже визначний именно в наслїдок великих розмірів є 50-степеневий лук полуденника від полудневих берегів Мехика аж до берегів Ледового океана і в двоє більший лук африканьский, що після проєкту Gill'а має іти з Каплянду до Египту, а звідси через Малу Азию получитись з луком Struv'ого в европейскій Росиї. Лук сей обнимати буде отже над 100° ширини. З помірів рівнобіжників є важний докінчений вже помір рівнобіжника 39° в Сполучених Державах Америки північної[2]).

Добрий загальний погляд на міжнародні поміри землї дає розвідка Orff'а: Über die Hilfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung. München 1899. Franz.

Новий спосіб означена проміру землї видумали Dufour і Groll, именно зі зміни положеня образів тїл земских або небесних відбитих в водї, котру-то зміну викликує закривленє плинної поверхнї води[3]).

---

[1]) Geographische Zeitschrift. 1900. з. 1. Naturwissenschaftliche Wochenschrift. XIV. 505 д.

[2]) Geographisches Jahrbuch XXIV. 1901. 5.

[3]) Gaea 1900 с. 696.

З тих дослїдів виходить вже майже певно, що вартість на загальне сплощене землї буде дещо більша як вартість Bessel'а $(^1/_{299})$, так що буде виносила меньше більше $^1/_{297}$. З тою ж вартостию зґоджує ся також нова формула довжини маятника секундового обчислена Івановом:

$L = 99{\cdot}0997 + 0{\cdot}5240 \sin^2\varphi' - 0{\cdot}0016 (\sin\varphi' - \frac{5}{3} \sin^3\varphi')$, де $\varphi' =$ ґеоцентричній ширинї місця[1]).

Постійна сили тяжести землї не є ще на думку Krigar-Menzel'а достаточно означена, бо ріжні методи дають ту ріжні результати[2]).

Льокальні поміри сили тяжести землї ведуть ся при кінци XIX. віку з великою пильностию.

Sterneck сконстатував, що сила тяжести землі в австрійских копальнях росте в глубину мабуть рівномірно з температурою, т. є. коли прибуване температури є інтензивнійше, росте також і сила тяжести сильнїйше. Ся цікава проява не є однак ще на певно розслїджена[3]).

На бажане Janssena довершив Hansky на шпилю Монбляна помірів тяжести при помочи Sterneck-івского маятника.

В Meudon $g = 9{\cdot}8099$, на шпилю Монбляна $g = 9{\cdot}7947$[4]). Таким самим приладом означено силу тяжести в Копенгаґенї на 9 81579 і сконстатовано на острові Bornholm'і великі надвижку маси[5]). Для Христіянії одержано 9·81945, Гельсинґфорса 9·81992, Пулкови 9·81934[6])·

Відклонів пряма сконстатовано в послїдних часах дуже много. В Ферганї они викликують між ґеодетично а астрономічно одержаною ґеоґрафічною шириною ріжницї 50″[7]). Дуже великі є відклони в Льомбардиї, бо до 28·7″ в φ а до 35·9″ в λ. В Гарцу они є сорозмірно невеликі[8]), а в середній і північній Швайцариї показались они так малї, що ріжниця між ґеоїдом а елїпсоідом є ту майже ніяка[9]).

---

[1]) Verhandlungen der Generalkonferenz der Erdmessung in Stuttgart 1898. Berlin 1899. пор. Petermanns Mittheilungen 1898. з. XII.

[2]) 72. Vers. deutscher Naturforscher in Aachen. 1900. IX. 17.

[3]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenchaften Bd 108.

[4]) Comptes Rendus t. CXXVII. 942.

[5]) Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. IX. 92.

[6]) Astronomische Nachrichten. Nr. 3547 і 3583.

[7]) Comptes Rendus т. 124. 815.

) Gaea, 1900. 541.

[9]) Das Schweizersche Dreiecksnetz etc. VIII. bearb. v. Messerschmitt. Zürich 1898.

Справа колибаня земскої оси, що занимала свого часу так дуже учених астрономів і ґеофізиків, не є ще дотепер належито вияснена. Дорогу, яку земский бігун заточив в часї від 1890—1898, показує наглядно рисунок Albrecht'a[1]). З него видимо, що амплїтуда явища значно змалїла, але ще не дійшла до зера[2]). В виду тих фактів, виведених безсторонно з обсервацийних рядів, трудно прилучитись до думок: Gonnessiat'a, що бачить в змінности ґеофрафічної ширини дві періоди 14. і 12. місячну[3]), або Chandler'a, що принимає 14-місячну але змінну періоду, або Van de Sande Backhuyzen'a, що числить 431 днів[4]). На думку Albrecht'a[5]) істноване таких періодів трудно припустити, бо сконстатовано, що кривина сего руху земскої оси не вертає в себе по 7 лїтах, як думано.

До прихильників 14-місячного періода колибаня земскої оси належить також Doolittle. Найважнїйшим результатом єго працї є однак лиш нове означене постійної вартости для обсервациї (20·580″), що є значно більша від принятої Struve'м і париською астрон. конференциєю[6]).

Всї дотеперішні методи і результати дослїдів над густотою землї збирає Wawrzik[7]).

Ріжні теориї про стан внутра землї збирає Toula[8]).

Wiechert обчисляє, що земля складаєсь з желїзного ядра проміру 10,000.000 метрів, котре є окружене корою скальною на 1,500.000 метрів грубою. Обєми ядра і кори є майже рівні, відношеня їх мас =5 : 2[9]).

Про внутрішну температуру землї пише в тім часї много учених. Дуже важні вислїди для пізнаня денної виміни тепла між землею а небом і ві внутрі почви дала розвідка Homén'a[10]). Не меньше значінє мають і дослїди Вільда над температурою почви

---

[1]) Jahrbuch der Astronomie und Geophysik IX. табл. 4.

[2]) Astronomische Nachrichten Nr. 3333.

[3]) Comptes Rendus т. 126. 710.

[4]) Astron. Journal Nr. 406. ст. 446. Bulletin de l' Akademie des Sciences d'Amsterdam 1898.

[5]) Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation am Schlusse des Jahres 1899 Berlin 1900.

[6]) Results of observations with the zenith telescope of the Flower astronomical observatory. Philadelphia 1899.

[7]) Gymn. Progr. Oppeln 1898.

[8]) Verschiedene Ansichten über das Innere der Erde. Wien 1899.

[9]) Naturwissenschaftliche Rundschau 1898. 215.

[10]) Пор. реф. Маурера в Meteorologische Zeitschrift 1898. Lb. 31.

і єї поверхнї, коли она покрита ростинностию або снїгом, чи нї[1]). Але обширнїйше займатись ту ними не можу, бо обі сї епохальні працї вийшли ще в 1897. р.

При будові сибірскої желїзницї розслїджував Сергѣевъ теплоту почви і найшов, що в Чітї 1. липня почва розмерзла до глубини 2·45 m., а звідси аж до глубини 6·30 була замерзла. В Трансбайкалїї замерзає почва в зимі на 0·70—4·26 m. глубоко. Під тою верствою, котра в лїтї розмерзаєсь, є стало замерзла верства до глубини 3·28—9·28, що зависить від ґеольоґічних відносин і висоти положеня. Снїжна покрива дїлає на почву дуже отепляючо[2]).

Підземні відложеня леду в Америцї описує Balch. В териториї Yukon'а найдено замерзлу землю в верстві 30 m. грубій, в славних мінах Klondike є почва на 8—10 m. в глубину замерзла. В Огняній земли найдено ляву і лїд в поперемінних верствах аж в великі глубини, на горі Chimborasso є великі маси леду покриті піском значно низше лінії вічних снїгів. Друга часть розвідки присьвячена ледовим печерам, котрих є в Америцї значна скількість[3]).

Scheimpflug і Holler змірявши докладно температури в копальнях ртути в Ідриї потвердили дотеперішні здогади, що там панує анормально висока температура. Але лиш простір 450—600 m. висоти визначуєсь температурою до 27° C.; всюди довкола виносить температура 10—14° C[4]).

Денний хід температури почви в Тифлїсї 1891—1895 обчислив Hann[5]).

VI. Вульканїзм.

Ся царина, спільна в цїлости фізичній ґеоґрафії і ґеольоґії, не може однак повеличатись в послїдних роках XIX. віку якоюсь більшого значіня роботою, що зміняла б погляди і отвирала нові дороги. Всї майже дотичні розвідки займають ся більше або меньше льокальними відносинами, тому-то я зґрупую материял після частий сьвіта.

---

[1]) Пор. реф. Naturwissenschaftliche Rundschau 1898. Nr. 8.

[2]) Извѣстія имп. русс. геогр. Общества XXXIV. 463.

[3]) Petermanns Mittheilungen 46. LB. 215.

[4]) Sitzungsberichte der k. Ak. der Wissenschaften in Wien. Math. phys. Klasse. CVIII. 950.

[5]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 281.

Загальних праць про вульканізм маю до записаня лиш дві важнїйші. На взір иньших француских учених, що конечно хотять в розміщеню вульканів і дисльокаций бачити фіґури ґеометричні, старає ся Michel Lévy (впрочім досить довільно) великі вульканічні пояси землї спровадити на 6 великих колес, що відповідають гранам вписаного в кулю землї чотиростїнника¹).

Ґеоґрафічне розміщенє вульканів представив Wägler²).

Він розріжняє три головні реґіони вульканїчної діяльности: пацифічний, індийско-антарктичний і атлянтийский.

Пацифічний реґіон є ограничений: американьскими Кордилєрами, Алєутами, Камчаткою, Курилями, японьскими островами, Філїпінами, Молюками, Новою Ґвінеєю, островами Сальомонами, Новими Гебридами, Viti, Tonga, Kermadec, Новою Зеляндиєю. Подїлити мож сей простір на дві части: північну і полудневу, а кожду з них дїлить автор на поменьші вульканїчні країни. Індийско-антарктичний реґіон обнимає індийский і антарктичний океан, східну Африку по центрально-африканьский рів, Абісинїю, Палєстину і Арменїю, Іран і Індию. Цїлу решту землї обіймає третий реґіон: атлянтийский.

Що до загального погляду на вульканізм вважає автор єго за наслїдок виключно корченя ся землї. Чи ядро землї є цїпке, плястичне чи плинне — цїпкі маси земскої кори тиснуть на него. Коли в наслїдок корченя ся кори она пукне, підземні маси увільнені від тисненя, розширяють ся і підносять викликуючи вульканічні явища.

Вульканн Европи є зовсїм природно найлїпше знані зі всїх вульканів. Ісляндскі вульканн, що лежать в околицях майже незаселених, не часто виступають в періодичних наукових публїкациях, зате італїйскі вулькани остають під тревалим доглядом учених.

Над вульканїзмом Везувія роблять ся в послїдних часах постійні дослїди, котрих головним центром є обсерватория збудована під шпилем гори. Результати тих дослїдів є для ґеофізики дуже важні і що хвиля приносять наукові часописи розвязку давно вже поставлених в вульканїзмі проблємів або ставлять нові, власне на основі помічань дїяльности Везувія.

---

¹) Bulletin de la Société Géologique de France 1898. XXVI. 105.

²) Mittheilungen des Vereins für Erdkunde in Leipzig 1900. 1.

Послїдна дещо більша еруиция того вулькана випала на 1895. рік, коли на північно-західній сторонї повстали нові прогалини, з яких зачала випливати в великих скількостях лява з множеством ґазів.

Підчас того вибуху Везувія обсервував Matteucci вульканїчні огнї, що виходили з великим шумом з одної в повставших прогалин та вистрілювали і до 50 m. висоти. Того явища дотепер не обсервовано на Везувію, хиба лиш малі, супокійні огники, що є зате дуже тревалі. Згадані великі огнї, потрівавши кільканацять день, також перейшли в стадию малих і супокійних. Дуговина того полумя, що без сумнїву походить з ґазів, що містять ся в маґмі, є дивним робом тягла[1]).

Се одна цїкава проява. Другою ще цїкавійшою є отся. Вже в липню 1895. року перестала лява виходити зі всїх прогалин з виїмком одної, що находить ся у стіп головного стіжка вулькана в т. з. Atrio del Cavallo. Ту витворила ся з ляви гарна копула, що заєдно росла під впливом щораз нових струй ляви, що над єї вершком ся розпростирали. Коли беззглядна висота копули дійшла до 835 m. (лютий 1898. р.), не могли вже струї ляви досягнути єї вершка і зачали бочити на право і на лїво. Сама копула представлялась досить імпозантно і значно вже зміняла загальний вид Везувія. В серединї она ще не цїлком простигла, та від часу до часу добувалась з єї боків горяча маса і творила нові струї. Але висота копули не остала на диво незмінною, хотяй лява не могла вже по єї вершку розливатись та єго висоту збільшати. По місяци постережено зі здивованєм, що копула зросла в висоту о 15 m., а близші розслїди Mateucci'ого показали, що причиною того побільшеня висоти є внутрішне піднесенє цїлої маси ляви через інтрузию справдїшнього лякколїта. Сей лякколїт піднїс верхні верстви ляви, так само як американьскі лякколїти піднесли седіментарні верстви, які спинили ляву, щоби ся не розплила. Таке вульканїчне явище обсервовано ту вперве; оно показує, що теория Buch'a не зовсїм є хибна.

В другій половинї 1898. р. мав Везувій другостепенний вибух. З під згаданої копули виплили нові струї ляви, при чім головний кратер в части запавсь і зачав викидати попіл та жужелицї, а потім і ляву. Своє maximum осягнув вибух в другій половинї вересня,

---

[1]) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. 1898. Ser. 5. 7. (1). ст. 314 дд.

але ніяких шкід не зробив. Від того часу стала дїяльність вулькану меньшати і вказувала взагалї тип дїяльности, котрий Mateucci зве типом Stromboli[1]). Середину головного кратеру займала лява озерцем на 10 метрів широким, а коли задля великого опору під копулою не могла тамтуди вийти, піднеслась в кратері до 100 m. понад свій давнїйший позем і в тій висотї (1060 m.) виплила та зараз значно опала. Висота Везувія по новійших вибухах виносить 1240 m. — Semmola розслїджував звязь дїяльности Везувія з фазами місяця протягом двох лїт, від липня 1895. до липня 1897. Показало ся, що підчас тих самих фаз вулькан зовсїм ріжно ся заховував, з чогоб виходило, що притягане місяця зовсїм на вульканїчні явища не впливає[2]).

Крім Везувія нї один з полудneво-европейских вульканів не мав в послїдних часах більшого вибуху. На Етнї мож було помічати лиш невеликі огнї в кратері, що повстали зі спаленя ґазів, та дещо димів. Volcano є тепер лиш сольфатарою. Stromboli має тепер сїм кратерів; з них виходять раз жужлї і пари, то знова дим з піском або і малі струї ляви. В мартї 1899. р. два кратери з сїмох получились в один. На острові Santorin приготовлює ся на думку Matteucci'ого новий великий вибух, подібний до сего, що приключивсь перед трицятьма роками. Хотяй головний кратер все лиш пару видїляє, наступили ту значні обниженя терену, іменно того, що в часї послїдного вибуху виринув над морску поверхню. Порт св. Юрія розширивсь, а недалеко него цїлий островець зник під водою[3]).

Дослїди над вульканами в иньших частях сьвіта поза Европою є більше принагідні, хоч в послїдних лїтах ведуть ся в дуже многих місцях.

В Азиї відкрито в 1898. р. новий вульканїчний терен, збудований з базальтових ляв в полудневій Арабії[4]). Попри европейскі вулькани розслїджують ся тепер докладно вулькани на острові Яві (Java), головно завдяки там осїлому голендерскому ґеольоґови Verbeek'ови. Він і представив їх коротким начерком[5]).

---

[1]) Пор. Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1899. ст. 425. Gaea 1898. ст. 752.

[2]) Comptes Rendus т. 126. ст. 926.

[3]) Пор. Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. 1899. Ser. V. 8. ст. 168.

[4]) Wiener akademischer Anzeiger 1898. ст. 277.

[5]) В Petermanns Mittheilungen 1898 р. 25 д.

Вулькани се найвисші гори острова і їх ряд становить скелет Яви. У більшости запавсь кратер, є се отже вже руїни вульканів нераз дуже великі. Найбільший Ringgit має кратер 21 km. проміру. Зате вулькани, що в них задержавсь первісний невеличкий кратер, є висші. Найвисші є Sĕmeru (3676 m.). Число всїх вульканів на Яві є 121, з них однак мабуть лиш 14 вибухало в історичних часах. Лява являлась у них досить рідко. Вулькани Яви розміщені звичайно на одній лїнії поздовж острова. Є також поперечні та і рівнобіжні до головного напряму побічні лїнїї. Уклад місцями дуже замотаний, бо в западених вже руїнах вульканів повставали нові вибухові стіжки, а ерозия сильно позмінювала зверхний вид руїн. Замітив ту Verbeek і те цїкаве явище, що лявіни з каміня повидовбували в збочах вульканів широкі долини зі стрімкими стїнами. Петроґрафічний склад дуже одностайний. Вульканїчні скали, богаті ортоклязом, дали по звітріню дуже плідну почву. Подрібно описав один з вульканів Яви званий Lamongan, визначний своїми правильними, в ночи дуже гарними вибухами Fürst[1]).

З иньших вульканїчних околиць полудневої Азиї розслїджували в послїдних часах Bücking і Rinne півостров Minahassa на острові Celebes. Є се край сильно вульканїчний і від XVII. до першої половини XIX. віку нераз траплялись вибухи з тамошних численних вульканів, що зрештою сягають ледви 2000 m. висоти. Тепер дїяльність їх всїх зійшла до сольфатарового стану. Много в краю фумароль, болотних вульканів і горячих жерел[2]). Niemeyer описує вулькани височини Idjen ві всхідній Яві, де довкола великого кратерового перстеня взносять ся численні вулькани понад 2000—3000 m. висоти. Відносини дуже цїкаві. Ріки пливуть нераз попід струями застиглої ляви, є много земних пірамід в мягкім туфі, стїни кратерів зложені з пестрих порід скальних[3]).

Вулькани австралїйских островів, хоч дуже численні, є сорозмірно мало розслїджені з виїмком хиба вульканів на островах Hawaii. В найновійших часах відкрили цїкаве вульканїчне явище брата Friedländer'и на лявах острова Ninafo'ou в ґрупі Tonga. Є се

---

[1]) Пор. Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1898. ст. 112 дд.

[2]) Пор. Petermanns Mittheilungen aus J. Perthes geographischer Anstalt. Bd. XLV. 1899. ст. 249 дд, Zeitschrift der deutschen Geologischen Gesellschaft т. LII 1900. ст 327.

[3]) Tijdschrift van het Kon. Nederl. Aardrijkskundig Genootschap 1900. Nr. 5—6.

рури з ляви, висоти до 2 m. зі стінами грубими на 8—15 cm. з отвором в середині, на 25 cm. широким. Повстали они мабуть тоді, коли тамошня дуже рідка лява облила пні кокосових пальм[1]).

Середноамериканьскі вулькани розсліджував зі згляду на їх розміщене Sapper, причім відкрив много нових вульканів і виказав, що кілька гір вважаних давнійше вульканами, ними не є. Середноамериканьскі вулькани не є розміщені на одній поздовжній прогалині, але на більшій скількости коротших прогалин, що є зглядом себе попересувані; се іменно нікараґуаньска зглядом костаріканьскої. Ніяка з тих прогалин не є прямолінійна, всї є більше або меньше позаломлювані. Кожда прогалина тягне ся в напрямі істнуючих вже молодих вибухових пасм і то або на їх хребтї, або на збочи, або й здовж підніжий. Вулькани дотепер діяльні лежать або на згаданих поздовжних прогалинах, або на коротких поперечних; вулькани, що лежать на боцї від головної прогалини, є вже вигаслі. Число коротких поперечних прогалин є в північній части (San Salvador, Guatemala) більше, в полудневій части (Nicaragua, Costarica) меньше. Там є вулькани також тіснійше коло себе розміщені, ту рідше. Там, де много поперечних прогалин, а вулькани близько себе стоять, видає ся, що они є розкинені ґрупами. Найвисші зглядні і беззглядні висоти подибуєм на обох кінцях цїлої вульканїчної системи[2]).

Sapper оголосив також специяльні розвідки про поодинокі вулькани в Guatemal'i, San Salvador і Nicaragua, що їх сам розслїдив 1897. р. Між иньшими ходив він на вулькан Pacaya, що визначуєсь своєю дуже скомплїкованою будовою, вулькан Las Flores, майже виключно збудований з ляв, вулькан Suchitan з червоним жужлевим стіжком Cerro Colorado і великаньским ($2^1/_2$ km. проміру) мааром Retana. На вулькані San Miguel замітив Sapper значні зміни в порівнаню з єго описом з 1866. року. Великі партиї кратеру запались мабуть наслїдком вибуху, що склавсь в початках девятьдесятих років. На увагу заслугує також богатий в кратери вулькан Las Pilas в Nicaragua, що мав вибухи 1850. і 1867. року[3]). Досліди Sappera в 1895. і 1897. роцї подвоїли майже число знаних

---

[1]) Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1898. ст. 413 дд.

[2]) Zeitschrift der deutschen Geologischen Gesellschaft. т. 49. ст. 672 дд.

[3]) Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900. ст. 149 дд. Zeitschrift der deutschen Geologischen Gesellschaft LI. ст. 578 дд.

вульканів в тамтих сторонах. На вульканї Popocatepetl в Мехику сконстатовано істнованє сїмох сольфатар і озера, що повстало зі скондензованя фумарольових пар[1]).

В околицях золотих рудників Klondike над озером A-Tlin вибух в осени 1898. р. незнаний доселї вулькан. Ясність в ночи була притім так сильна, що помагала при роботї гірнякам[2]).

VII. Землетрясеня.

Наколиб хто порівнав нинїшні способи розслїджуваня землетрясень і випливаючі з того погляди на їх істоту з поглядами, що панували трицять лїт тому назад, найшов би дуже велику ріжницю. Ріжниця походить головно з того, що перше майже лиш самі ґеольоґи розслїджували землетрясеня і то лиш значнїйші, тепер же взялась до того предмету ґеофізика з так точними і чулими знарядами, що не лиш сильнїйші, але і дуже навіть слабі землетрясеня, можна тепер розслїджувати. Ті знаряди, що як й давнїйше зовуть ся сейсмометрами, показали, що поверхня землї находить ся властиво в постійнім дроганю[3]). Славний анґлійский сейсміст Milne поділив ті дроганя землї на чотири головні кляси: 1) Властиві землетрясеня з великою амплїтудою і скорим наслїдством по собі по одиноких товчків. 2) Пульзациї землї з великою амплїтудою, але повільним наслїдством товчків. 3) Властиві дроганя землї з малою амплїтудою та скорим наслїдством. 4) Довготревалі осциляциї почви з малою амплїтудою і великими проміжками часу. Дуже многі методичні уваги подав в тім зглядї Gerland[4]), що розслїджує кожде землетрясенє з трех сторін: 1) з прояв упругости т. є. з огляду на рід, вид, творенє і рух филь землетрясеня, 2) з наслїдків филь на земскій корі і 3) що до єго властивого походженя і причини єго повстаня.

---

[1]) Memorias de la Scientifica Sociedad Antonio Alzate Mexico. X. ст. 185.

[2]) Geographische Zeitschrift. V. 1899. ст. 53.

[3]) Всї що важнїйші сейсмометри описані і критично розсмотрені Ehlert'ом в обширній розвідцї, що добре орієнтує про сю квестию. Beiträge zur Geophysik т. III ст. 350 дд.

[4]) Verhandlungen des 12. deutschen Geographentages ст. 101 дд.

Тремтїня землї з малою амплїтудою походять після згідної думки многих учених від рухів в атмосфері, і то почасти від вітрів, почасти від змін в тисненю воздуха. Пульзациї землї не є дотепер достаточно вияснені. Milne і Rebeur приписували значний вплив льокальним барометричним ґрадієнтам, Ehlert виказав, що они являють ся тільки в тім часї, коли земля находить ся в перігелї, і то в ночи. Тому то він думає, що оселя тих пульзаций находить ся в найвисших верствах земскої маґми. Ehlert розслїджував також довготревалі осциляциї і сконстатував у них істноване ріжних періодів. Є ту іменно 1) денний період, ще має maximum коло 7-ої години рано, а minimum коло 6. вечером. Єго причиною є бодай в части інсоляция, що розширяє і випучує поверхню землї, коли тимчасом внутрішні верстви поволїйше ся огрівають. Другий період є місячний і повстає під впливом притяганя місяця. Є ще і иньші періодичні рухи пр. рух тзв. точки зерової в поземім маятнику, що дадуть ся звести до впливу річних змін сонїчного тепла[1]).

Про землетрясеня властиві, що мають велику амплїтуду, має Gerland зовсїм відмінні погляди, як учені, що виключно з ґеольоґічної точки погляду хотїлиб їх вияснити. Він констатує вперед, що коли пр. в якійсь дуже віддаленій околиці, що може лежати і по противній сторонї земскої кулї, лучить ся землетрясенє, то надовго, заки ще властива його филя дійде до обсерватора і заколибає єго інструментом, замітити можна маленький рух в інструментї, з дуже слабкою амплїтудою, але зовсїм того самого виду, що великий рух інструменту, як се можна переконатись з фотоґрамів. Такі маленькі рухи (tremors) переходять землю зі скоростию 10—20 km. на секунду. Виходячи з того і опираючись на теориї A. Schmidt'a думає Gerland, що головною причиною землетрясень не є тектонїчні заворушеня в сусїдстві земскої поверхнї, а експльозиї на границях 1) сталої земскої кори з маґмою і 2) маґми з ґазовим ядром землї. Так думали вже Zöppritz, а по части Daubrée, думка Gerland'a не є проте зовсїм нова, але дуже вїродостойна. Головною слабою точкою т. зв. тектонїчних теорий землетрясень є те, що навіть в такій Японії, де щорічно лучаєся тілько землетрясень, не видно додатного руху морского позему. А прецїнь так великі землетрясеня, наколиб мали тектонїчну причину, мусїлиб мати такий наслїдок. Так само не бачимо додатного руху позему адрійского моря, хоч Hörnes приписує всї землетрясеня в єго око-

---

[1]) Beiträge zur Geophysik III. 131 дд. IV. 68 дд.

лицях тз. періадрійским обломам, т. є. западаню ся куснїв земскої кори над згаданим морем[1]). В загалї тепер морям приписують великий вплив на землетрясеня. Milne думає, що більшість японьских землетрясень походить з пересувань тиснень на сусїднім морскім днї[2]).

З дальших загальних дослїдів над землетрясенями згадаємо слїдуючі:

Mazelle обсервував денні періодичні колибаня ґрунту в Терстї. Вийшли для трох обсервованих маятників одиничні колибаня лиш з одним maximum і minimum в місяцях лїтних (цьвітень – жовтень) і подвійні денні колибаня з двома денними maxim'ами і minim'ами в зимових місяцях (падолист — марець). Mazelle найшов також періодичні рухи у камяного стовпа, на котрім стояв прилад. Ті рухи показують в своїх амплїтудах згідність з річним ходом колибань температури[3]).

Про підземні шуми, що їх чути в часї землетрясень, написав дуже поважну річ Davison[4]). Супроти думки многих учених, пр. Gerland'а думає Davison, що з тих голосових явищ при землетрясенях мож буде витягнути важні дати для пізнаня самого землетрясеня. Ті шуми видають на думку Davison'а підземні скальні маси пересуваючись попри себе.

T. Suess старає ся вияснити, чому підчас великого землетрясеня в Лїсбонї 1755 р. перестали плисти теплицкі терми. Він толкує се впливом филь земскої кори па зеркало заскірної води[5]).

Теориєю землетрясень займає ся Rudzki в двох розвідках[6]). В першій автор розслїджує позірну скорість, з якою розширяють ся землетрясеня, розпроваджуючи математично теорию Schmidt'а про криволїнійні лучи землетрясень, причім вислїди математичні автора цїлком згоджують ся з обсервованими фактами. В другій R. досліджує вид пружиних филь в камени і доходить до результату, що він є дуже скомплїкований. Вислїд практичний: Один удар ві внутрі землї може викликати кілька потрясень на єї поверхнї. В рухових явищах при землетрясенях відкрив R. явище анальоґічне до оптичного розщіпленя.

---

[1] Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik т. XX. ст. 565 д.

[2] The Geographical Journal X. ст. 129 д.

[3] Wiener akademischer Anzeiger 1900. ст. 149.

[4] Philosophical Magazine 1900. Ser. V. т. XLIX. ст. 31 дд.

[5] Mittheilungen des k. k. geologischen Reichanstalt 1900. 2. ст. 55.

[6] Поміщені в Gerland'a Beiträge zur Geophysik 1898. III. 495 дд. і 519 дд.

Montessus de Ballore пробує подїлити цїлу земску поверхню на сейсмічні реґіони і їх після ріжних точок погляду склясифікувати[1]).

Заворушеня поземого маятника в Николаєві над Богом в лїтах 1897, 1898. і 1899. списує Кортаззи, не виводячи однак з сих обсерваций нїяких загальних висновків[2]).

Rudolph: über submarine Erdbeben und Eruptionen[3]) описує і розслїджує наслїдки штучних вибухів під морскою поверхнею, щоби вивести з тих дослїдів обясненя проявів природних вульканічних вибухів та землетрясень на мори і єго побережах.

На думку Harboe'го було велике землетрясенє в Загребі (1880. XI. 9.) викликане секулярним обниженєм і поземим здавленєм земскої кори. Те здавленє було причиною землетрясеня[4]).

Gerland описує цїсарско-нїмецку головну стацию для розслїдів над землетрясенями, обговорюючи при тім загальні задачі сучасної сейсмольоґії[5]).

Новий прилад до обсервованя землетрясень винайшов японьский учений Omori[6]).

Про урядженє власної взірцевої обсервациї в Гамбурзї з поземем маятником Ehlert'a реферує Schütt[7]).

Специяльну сейсмічну лїтературу, що є в теперішнім вже часї дуже богата, перейдем лиш в загальнім оглядї після частий сьвіта, в котрих лучались обговорювані в лїтературі землетрясеня.

В Европі було в послїдних лїтах досить мало значнїйших землетрясень. Одним з европейских країв, де найрідше они приключають ся, є без сумнїву україньско-руска територия. В Галичинї пр. від кількох лїт нїякого хочби слабшого землетрясеня не сконстатовано. Взагалї цїла Австрия з виїмком хиба Країни є тереном дуже супокійним[8]). Два австрийскі землетрясеня з послїдних лїт були науково оброблювані: землетрясенє в Grasslitz (1897. X. 25 — 1897. XI. 7.) і в Sinj (1898. VII. 2.). Із землетрясень сусїд-

---

[1]) Beiträge zur Geophysik IV. 331 дд.

[2]) Beiträge zur Geophysik. IV. 383 дд.

[3]) Beiträge zur Geophysik III. 273 дд.

[4]) Beiträge zur Geophysik IV. 406 дд.

[5]) Beiträge zur Geophysik IV. 427 дд.

[6]) Гл. Petermanns Mittheilungen 1900. 46. LB. 8.

[7]) Beiträge zur Geophysik IV. 220 дд.

[8]) Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft. XLI. ст. 757.

них країв европейских розслїдив саксоньскі землетрясеня (1889—1897) Credner. Він замітив, що їх причина не є горотворче тиснене, а щось иньше і сконстатував, що землетрясеня підлягають двом періодичним змінам: 1) виступають частїйше в зимових місяцях, а іменно в жовтни, падолисті і грудни, 2) трафляють ся частїйше в ночи 8^h — 20^h, чім в день; найчастїйше від 12^h — 20^h. Вияснювати тої періодичности не берєсь ще однак Credner[1]). Ся осторожність зовсїм на місци, бо пр. грецкі землетрясеня з лїт 1893.—1898. мають maximum в весняних місяцях, іменно в маю, а minimum в жовтни. Деяке maximum ту також припадає в ночи над раном; сю обставину приписує Eginitis тому, що в часї денної праці много землетрясеня проходять незаміченими. Місячне maximum припадає на повню, minimum на нів зовсїм противположно теориї Perrey'a; перігей і апогей місяця мало що вплинули на ті землетрясеня. Они до того були частїйші в афелю, чім в перігелю землї.

З иньших европейских країв лише Ісляндия в послїдних роках потерпіла від землетрясень. Всї они є вульканїчного походженя. Дуже сильне було землетрясенє 1896. VIII. 26 — IX. 10. Много гір обвалилось, земля в многих місцях сильно потріскала[2]). Меньшу натугу мало землетрясенє 1899. II. 27. в околицях Reykjavik[3]). Землетрясеня в Норвегії з лїт 1894. і 1895, хоч досить численні, були що до натуги дуже слабі[4]).

В позаевропейских частях сьвіта є Японїя клясичним краєм землетрясень. Чужі та за ними в новійших часах і японьскі учені розслїджують пильно численні землетрясеня сего краю. Головно заслуживсь коло студий над тим предметом Sekiya, що зладив катальоґ японьских землетрясень від 416. до 1867. року. Начислив він їх 1898, з них 222 було дуже сильних, що справили великі спустошеня. Найбільша скількість тих тзв. руйнуючих землетрясень припадає на лїтні місяцї, найменьша на зиму. Maximum всїх землетрясень разом взятих припадає однак на весну. Руйнуючі землетрясеня виступали в Японїї залюбки ґрупами, так що нераз в кількох лїтах було їх много, а потім протягом певного часу не було їх зовсїм. Являлись они головно на внїшній пацифічній сторонї лука, що становить головну морфольоґічну лїнїю японьского

---

[1]) Abhandlungen der königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften т. XXIV.

[2]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. Nr. 5.

[3]) Jahrbuch der Astronomie und Geophysik X (1899) ст. 195 дд.

[4]) Пор. Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik XX. 1898. ст. 369.

архіпеляґа[1]). З сильнїйших землетрясень, що в послїдних часах навістили Японію, описує Yamasaki те, що приключилось 1896. VIII. 31.[2]).

З иньших країв Азиї може хиба лиш нідерляндска Індия порівнатись з Японїєю так що до числа землетрясень, як і що до їх обсервацийи. Montessus de Ballore ще в 1896. р. розслїдив, як часто землетрясеня являють ся в ріжних околицях нїдерляндскої Індиї, і найшов, що найбільше землетрясень явилось пересїчно в околицях островів Aru. Від довшого часу ведуть ся ту в Батавійскій обсерваториї докладні дослїди над землетрясенями. В 1898. замічено там, що найбільше число (71), ба більше чим $^1/_3$ всїх землетрясень, лучилось в падолистї[3]). Землетрясеня 1899. р. є значно рівномірнїйше на місяцї роздїлені і не виказують нїякого так сильного maximum. Найсильнїйше землетрясенє в тім роцї було в ночи IX. 29--30 на острові Ceram. До 4000 людий тодї погибло, а тремтїня дійшли аж до Европи і обсервовано їх на маятниках в Штрассбурзї та на острові Wight[4]).

В Азиї обсервовано поза тими теренами значні землетрясеня на малоазийскім півострові в 1895 і 1896[5]). В 1899. р. IX. 21. було сильне землетрясенє в околицях Смирни, що наробило великої шкоди[6]). Але найбільше лиха накоїло велике індийске землетрясенє 1897. VI. 12., що мало звязь з дальшим образованєм ся Гімаляїв і було без сумніву тектонїчне. Потрясений терен обнимав 4 мілїони km^2, між иньшими і середну Европу, де сейсмоґрафи сильно єго відчули.

В Африцї і Австралїї не записано в послїдних лїтах нїяких більших землетрясень. В Америцї були більші землетрясеня на острові Гаіті 1897. XII. 29., що обізвалось аж в Николаєві над Богом, що віддалений о цїлий квадрант обводу землї[7]), та в Калїфорниї 1898. III. 30. значно меньше[8]).

---

[1]) The Journal of the College of Science, Imperial University of Tokyo 1899. XI. ст. 389 дд.

[2]) Petermanns Mittheilungen XLVI. 1900. ст. 249 дд.

[3]) Naturkundig Tijdschrift voor Nederl. Indië LIX. 1899.

[4]) Ibidem т. LX. 1900.

[5]) Beiträge zur Geophysik III. 337 дд., 541 дд., IV. 118 дд.

[6]) Gaea 1900 ст. 57.

[7]) Atti della Reale Accademia dei Lincei. 1898. S. V. 7. 316 дд.

[8]) Petermans Mittheilungen XLIV. 1898. ст 117.

VIII. Будова земскої кори взагалї і дислокациї.

Участь ріжних хемічних елементів в складі доступних для нас частий земскої кори представив в процентах Rosenbusch[1]). Margmann старавсь експериментальною дорогою розслїдити повставанє верствованих скал. Єго досьлїди виказали: 1) Коли піддамо вохкі або і плинні скальні маси, що містять ґази, тисненю, так що ґази не можуть зовсїм уходити або лиш дуже поволи, тодї плинна маса робить ся верствована або лупаковата. 2) В природї можуть верствовані скали повстати в той спосіб, що або осадові верстви дістають ся під тисненє ґазове і зміняють ся в лупаки або вульканічні ляви стають цїпкими під сильним тисненем ґазів і тодї творять ся кристалїчні породи пр. ґнайс, лосняковий лупак, амфіболїт і т. д. 3) З експериментів показуєсь, що верствованє може повстати і у скал вульканїчних[2]). В загалї ґеольоґія експериментальна виказує в послїдних часах поступи важні для фізичної ґеоґрафії[3]).

Середну висоту суші означив в 1891. р. Heiderich на 744 m., а в роцї 1894. на 735 m. Wagner означаючи єї в 1895. р. скритикував остро методу і роботу Heiderich'а та означив середну висоту суші на 709, оклугло 700. Heiderich відповів аж 1899 р.[4]). узнаючи вартість найдену Wagner'ом рішучо низькою, а проте нездалою. Тимчасом Wagner, опертись на розвідцї Haack'а, що найшов середну висоту полудневої Америки значно меньшою, як принимано дотепер (580 m. супроти 650 і 760 m.), виказав наглядно, що середна висота континентів виносить 701 m[5]).

Підношенями і опаданями земскої кори занимаєсь Lapparent[6]) і полємізує з теоремом Suess'а, що опаданє земскої кори є первостепенним явищем, а фалдованє та льокальні піднесеня другостепенним і подає численні приміри піднесень ві Франциї, Скандинавії та Мелянезиї, причім однак пересаджає знов вагу підношень.

Найлекше обсервувати такі підношеня і опаданя земскої кори над морем. Кількома дотичними працями займемось в уступі про побережа.

---

[1]) Elemente der Gesteinslehre 1898.

[2]) Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1898. 441.

[3]) Пор. новий підручник: Meunier, La géologie experimentale. Paris 1899. Alcan.

[4]) Beiträge zur Geophysik IV. 26 дд.

[5]) Beiträge zur Geophysik IV. 116.

[6]) Soulevements et Affaissements. Revue des questions scientifiques 1898.

Дуже цікаву справу порушив Kahle. З ріжних місць Німеччини доношено, що предмети з даної місцевости давнійже невидимі нагло ставали видні. Kahle радить докладно фотоґрафувати околицю і винаходить ріжні способи вияснення віродостойних фактів, щоби не бути зневоленим прийняти льокальних обнижень або підвисшень земскої кори[1]).

Таксамо завважав Repkewitz маленькі колибаня в беззглядній висоті деяких сталих точок уміщених в Шарльотенбурзі[2]).

Messerschmitt порівнуючи зі собою ріжні прецизийні нївеляциї приходить до переконаня, що такі зміни безглядної висоти дїйсно істнують[3]). І так знак висоти в Bregenz обнижився в послїдних часах о 0·1 m. Подібні лиш дещо меньші обниженя (max. 37 mm.) констатовано на східних побережах женевского озера. Ті обниженя легко витолкувати укладанем ся сипкого материялу нанесеного над озера ріками. Цікавійші є зміни висоти в околицях, де лиш тектонічні зміни можуть їх вияснити. А є вказівки, що такі зміни істнують пр. в француский та швайцарский Юрі, в Турингії, Віртембергзї і т. д. Пізнано се з виразного розширеня овиду деяких місцевостий. Такі зміни є наслїдком тектонїчних рухів земскої кори, іменно при землетрясенях.

Про рухи земскої кори появилось в Journal of Geology Chicago 1898. VI. кілька розвідок. Powell звертає увагу на ріжні услівя тисненя, під котрим остають маси каміня і розважає, що коли в однім місци слїдує винесенє, то слїдуюча зараз денудация справляє на данім місци зменьшенє тягару, а потім винесенє, підчас коли опаденє земскої кори потягає за собою через седіментацию збільшенє тягару і дальше опаданє. Van Hise старає ся придумати спосіб обчисленя, о скільки скорчилась земля через повстанє гір, причім вказує на ріжні чинники, які конечно належить узглянити, а котрих при дотеперішних обчисленях не узглянювано. Slichter занимає ся тисненем ві внутрі землї і находить, що зміна часу обороту викликалаби великі зміни в тім тисненю.

Тектонїчну карту полудняво-західної Німеччини (1:500.000) видав горішно-реньский ґеольоґічний кружок[4]). Карта виказує два головні дислькокацийні напрями: SO—NW т. з. герциньский і SW—NO т. з. варисцийский[5]).

---

[1]) Petermanns Mittheilungen 45. 1899. 218 дд.

[2]) Zeitschrift für Vermessungswesen 1898. 16.

[3]) Schweizerische Bauzeitung XXXIV. Nr. 8—10.

[4]) Gotha, Perthes 1898.

[5]) Petermanns Mittheilungen 1899. Lb. 19.

Знана від 1890 р. депресия Люкчун в середній Азиї має від кількох літ свою метеорольоґічну стацию. З єї обсервацяй Тілло вивів в послїдних часах, що найнизше в тій депресиї положені місця Боянтетура і Таштура лежать 112, зглядно 130 m. під поземом моря[1]).

IX. Вітрінє і праця вітру.

Реґіони, де переважає вітрінє над механїчною деструкциєю, зовем як відомо пустинями. Проблєм повставаня і розвитку пустинь не так то дуже давно близше розслїджений. Доперва в послїдних десятках літ XIX. віку наука близше пізнала механїчні і хемічні процеси, що відбувають ся в таких околицях.

В послїдних лїтах XIX. віку розпочав професор єненьский Walther ґрунтовні свої студиї над проблємами повставаня пустинь і їх морфольоґії. Дві важні працї були овочем єго дослїдів: про форми азийскої пустинї і про закон повставаня пустинь.

Форми азийскої пустинї помічав Walther підчас своїх подорожий в закаспійский край і Бухару. Тамошня пустиня представляє цїкаві явища вітріня і ерозиї вітру. Що хвиля подибуєсь там великі каменюкі в серединї зовсїм порожні, що складають ся лиш з кори кілька центиметрів грубої. В скалах творять ся заглубини, про котрі напевно знаємо, що не є водою вимиті. Ізольовані скали прибирають по певнім часї форму великаньских грибів. Поодинокі камінцї мають форму заокруглену і часто зміняють ся прямо в правильні кулї.

Всї ті явища є випливом вітріня. Веґетация не хоронить почви перед палячим проміне сонця. Скальне підложе нагріваєсь тому дуже сильно. В ночи наслїдком дуже сильного проміньованя температура обнижаєсь значно, часто низше зера і наслїдки є великі. Поверхня каміня огрівшись сильно розширяєсь так, що відлупуєсь як кусник кори. Є се тз. лущенє каміня або десквамация. Колиж камінь нагрітий в день остудить ся в ночи, тодї пукає єго зверхня кора, або і цїлий камінь. Великий вплив має ту обставина, чи скала містить в собі сіль, чи нї.

Вітрінє достарчає материялу, вітер пустинї бере сей материял і переносить єго з місця на місце. Єго працю зве Walther дефляциєю. Всї кусничкя каміня, які лиш під єго силу, пориває вітер,

---

[1]) Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. XI. 1900. 15

тре їх о себе на пісок або і порох і мете єго потім, підносячи великаньскі до 300 m. високі хмари пороху і піску. Де лиш є на земли яка мала перепона, творить ся зараз плоска купа піску в виді переверненого щита. Є се засновок будучої піскової видми. Нагромаджена купка піску становить іменно значну перешкоду для летячого з вітром понад землю піску і задержуючи єго в дорозї росте щораз більше. По певнім же часї видма прибирає вид серпа вигнутого проти вітру. Видма ся підносить ся в профілю дуже слабо по сторонї вітру (max. 10⁰), але за вітром творить стрімкий (до 35⁰) гребінь і маємо типового туркестаньского бархана. Часто лучать ся такі бархани в довгі ряди. Але їх істноване не довге. Найбільше творить ся їх в лїтї при вітрі північно-північно-східнім. Колиж в жовтни настане вітер полудневий, обертають ся серпи барханів на північ. Але лїтний вітер все таки є сильнїйший і жене бархани що року о кілька метрів на південь, засипуючи закаспійску желїзницю. Найбільше барханів є в славній пустини Каракум. Они переходять навіть ріку Амударию в той спосіб, що ріка підриває видми правого берега і осаджує пісок на лївім, де єго вітер знов хватає.

На полудни вздовж спаду іраньскої височини уложились значні маси ріни і каміня, нанесеного дощевими водами з гір. На північ від сего пояса тягнесь пояс пустинї з глиняним підложем. Ту губить ся значна часть спливаючих з гір потоків і осаджують ся розпущені в їх водї соли. Солених озерець, мокляків, типових солончаків і солоних степів повно в тій полосї. До якости почви приноровлюєсь і веґетация. Поза тою другою полосою простягаєсь на північ безмежна піскова пустиня[1]).

Свої студиї зроблені за Каспієм розширив Walther на иньші пустинні простори і узглядивши обсервациї иньших учених видав обширну книжку п. т. Das Gesetz der Wüstenbildung in Gegenwart und Vorzeit. Berlin 1900. Займавий спосіб представленя, ясність і точність знаменують сю дуже визначну роботу Вальтера. Автор обговорює ту передовсїм вітрінє в єго ріжних проявах кладучи великий натиск на значінє розчинів сільних, що роблять камінь в серединї крихким. Дефляция є після W. головним чинником, що моделює поверхню пустинї. В перших стадиях розвитку має пустиня гори і долини з часів, коли більше було вохкости і вода могла ще дїлати. Потім лишаєсь вітрінє, котре з найбільшою силою

---

[1]) Naturwissenschaftliche Wochenschrift. 1898. Nr. 21.

ділає в долинах. Рідкі але сильні хмароломи прятають від часу до часу нагромаджений вітрінєм материял, а в проміжках часу ділають з повною силою вітріне і дефляция. Через доокружну денудацию зміняєсь височина пустинна порізана ярами в рівнину засіяну відосібненими горами — неначе „сьвідками“. Також депресиї, в котрих лежать оази, вважає W. продуктом дефляциї.

Наслідком малої скількости опадів позем ґрунтової води є дуже низький і она є солона. При кождім більшім дощи збираєсь вода в депресиях і розпускаючи в собі сіль, що вицвила на поверхню землї, стаєсь солоною. Такі озера є періодичні і періодично зміняють ся в солончаки. Осаджанє соли в таких безвідпливових озерах ріжно відбуваєсь і добре пізнавши єго можна би многі проблєми повставаня покладів соли вияснити.

Відложеня, що повстають в пустинях, є ріжні. В депресиях громадять ся великі скількости піску, ілу, шутру, каміня і т. д. і творять конґльомерати. Найважнїйшим однак продуктом діланя сил природи в пустини є піски, що творять видми і засипуючи часто солені озера витворюють поперемінність покладів соли і пісківця, знану з многих залежий соли.

Осібні уступи посьвячає W. ростинности і зьвірячому сьвітови пустинь.

Египетско-арабску пустиню між Нїлем а Червоним морем розслїджував 1897. р. Fraas. Широка полоса кристалїчних гір тягнесь поздовж Червоного моря, переходячи на западї в крейдову і еоценьску полосу, що складаєсь головно з пісковцїв. В кристалїчних горах замітив Fraas, що вітер малу ту відгриває ролю — більшу вода. Натомість на високорівнях західних збудованих з нубійского пісківця панують неподільно: вітріне і вітер, хоч Fraas замітив у вітру дуже слабу силу зглядом піску[1]).

До реґіонів, де діяльність вітру доходить до великого значіня, зачислити належить деякі надморскі околицї покриті пісковими видмами. Дві такі надморскі околицї власне в кінцевих лїтах XIX. віку описано: куроньску косу і побережа Ґасконії.

Куроньска коса пересїчно 1—1½ km. широка, а недалеко 100 km. довга, є в цїлости вкрита білими мов снїгові заспи видмами. Всї ті видми мандрують постійно від моря на схід до куроньского гафу, котрий поволи засипують. Многі видми мають форму півмісяця, подібно як бархани. Річний поступ видм виносить пересїчно

---

[1]) Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft. LII. 569 д.

до 5 m. Численні лїси і селитьби людий пали жертвою піску і по пересуненю вітром видми дальше знов показують ся в руїнах. Лиш нечисленні села вспіли удержатись і щоб їх ратувати, обсаджено ряд надморских видм ріжними пісковими травами, щоб задержати пісок в руху, а потім обсадити лїсом видми, що лежать одалїк від берега[1]).

Подібні явища, лиш в значно більших розмірах, подибуємо на берегах біскайского заливу в Ґасконїї. Видми тягнуть ся від устя Адура на північ 240 km. далеко і доходять до висоти 89 m. Простір занятий ними обчисляють на 85000 ha, місцями занимають полосу лиш 100—200 m. широку, але місцями ширина сеї полоси доходить до 8 km. Поза полосою видм надморских, що до тепер мандрують, тягнуть ся нераз прямовісно до них уложені старі видми порослі лїсом. В старинности лїс стояв на видмах аж до моря, але в перших початках середних віків винищено лїси, видми заворушились і зачали йти в глубину краю. Численні заливи, що були ту від давних часів, пісок віддїлив косами від моря і замінив наперед на гафи, а потім на прибережні озера. Ті озера перті видмами цофались щораз то дальше в глубину суші, заливаючи села. Потім приходив пісок і засипував усе. В той спосіб много місцевостий погибло. Видми, заступаючи Адурови устє, викликували часті зміни русла сеї ріки роблячи через те також много шкоди. Доперва в XIX. столїтю задержано видми в поході і обсаджено в части лїсом[2]).

X. Підземна діяльність води: жерела і печери.

Про вплив лїсів на підземні води і жерела оголосив обширну студию Отоцкий[3]) Він відкрив вже в р. 1891, що верченя в лїсї не давали води навіть тодї, коли вільний простір окружаючий лїси, однаково збудований під зглядом ґеольоґічним, всюди давав воду. 1893. р. сконстатував О., що лїс не тільки є біднїйший в підземну воду, як доокружні степи, але також позем заскірної води лежить в лїсах значно глубше, чим в степах.

---

[1]) Zweck, Litauen, Stuttgart 1900.

[2]) Le Mang в Deutsche Geographische Blätter XXII. 235. Gaea 1900. зош. 5 і 6.

[3]) Annales de la Science agronomique francaise et étrangère. II. 1898. пор. Meteorologische Zeitschrift 1898. Lb. (70).

Осібна гидрольоґічна експедиция вислана 1895. р. в ґубернїї воронежску, херсоньску і саратівску, потвердила ті обсервациї. Показалось, що пр. в воронежскій ґубернїї (лїс Шипова) число жерел і керниць є в лїсї значно меньше, як в околичнім степі. Глубина водоносних верств була в лїсї 2 до 3 разів більша, як в поли. В т. з. Чорнім лїсї херсоньскої ґубернїї показали верченя такий самий результат. Цїкаве, що під невеличким полем, лежачим в глубинї лїса, висота підземної води значно піднеслась, в центрі поля стала найвисше, а в напрямі ідь лїсови на всї сторони опадала.

При устю Рейна до Боденьского озера відкрито жерела болотного ґазу, що є зовсїм анальоґічні знаним Mudlumps в дельтї Mississippi та сьвідчать про творенє ся в тих місцях торфу1).

В теплих жерелах Італїї відкрито в послїдних часах арґон і гель. Скількість арґону доходить місцями до 3%, геля до 1·5%2)

Над рікою Songwe (доплив Sambesi) відкрили Fülleborn і Glauning в вульканічній околицї кілька дуже богатих горячих жерел. Температура їх доходить до 70°. Красні тераси білого жерелинця окружають ті жерела, в котрих живуть численні гліни. Крім пяти великих горячих жерел є ту ще кілька поменьших, яких температура доходить лиш до 43°. Вода і містить зате в собі велике число алькаліїв і вугляного квасу. В околицї дуже много великих печер з красними сталяктитами і сталяґмітами3).

Jaggar переводить клясифікацию ґейзирів на стоячі і переливаючі ся. В ті послїдні напливає деколи з верхних верств зимна вода і справляє, що їх вибухи є неправильні4).

Наука про печери від'окремилась вже на осібну специяльну дисциплїну. Новий єї підручник вийшов власне п. з. Martel, La spéléologie ou science des Cavernes. Paris, Carré 1900. Ся наука будить великий інтерес не тілько у ґеольоґів і палеонтольоґів, але і археольоґів та туристів вже від давна. В Парижи виходить осібна часопись п. т. Spelunca, Bulletin de la Société de spléoléogie, котра містить розвідки про жерела, вертепи, безоднї і печери.

Т. з. замкову печеру в долинї Пункви (Морави) описав Trampler. Она дуже богата звіринними скелетами з четверторядної епохи5).

---

1) Natur 1898. ст. 202.

2) Chemisches Centralblatt 1898. I. 917.

3) Mittheilungen aus deutschen Schutzgebieten 1900. 18.

4) American Journal of Science 1898. V. 323.

5) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XX. 529 д.

Печеру Wind-Cave в південній Дакотї описала Miss Owen. Єї довжина — о скілько дотепер пізнана — виносить 97 англ. миль. Зміни стану барометру викликують великі протяги. Печера повстала мабуть через витворенє ся численних прогалин в скалах при піднесеню гір Black Hills[1]).

Печеру Сибіллї кото Кірхгайм в Віртембергї розслїдив ґеольоґічно і палеонтольоґічно Fraas. Она повстала через вимите водою лїясових вапняків швабскої Юри[2]).

1891. відкрито велику бічну печеру в знаній постойненьскій печері. Она творила після дослїдів Müllera (1899 р.) давнїйше ложище ріки Пивки і має дуже богато красних сталяктитів[3]).

Дуже цікаву методично і річево розвідку оголосив Crammer про деякі ледові печери долїшної Австриї. Специяльну увагу звернув С. на печеру звану Tablerloch і витягнув з тих дослїдів ось які загальні замітки:

Температура печери зависить від єї будови. Сли печера западає постійно своїм напрямом в діл, воздух в нїй буде дуже холодний, в зимі творить ся лїд, котрий топить ся в лїтї та осени, але звичайно не в цілости. Сторона сьвіта, до якої обернений вхід до печери, та єго висота беззглядна не мають значіня, зате мають єго льокальні відносини. Дуже часто купи каміня, що обсипалось з гори і в части заслонило вхід до печери, роблять зі звичайної печери ледову. В лїтї росте температура в ледових печерах в наслїдок підвисшеня температури земної поверхнї і заскірної води. Печери, котрі підходять в гору, мають все високу температуру. Температура вітрових ям, що є по обох сторонах отверті, є в лїтї зглядно низька, бо струя воздуха, що переходить крізь печеру, віддає єї стїнам своє тепло, в зимі зглядно висока, бо стїни знов своєю чергою віддають воздухови своє тепло. І ту відносини льокальні дуже много значать[4]).

В Мехику з давна знані дуже численні печери в дуже там розповсюднених кретацейских вапняках, що викликують в многих околицях краю чисто красові явища[5]).

Нову голубу печеру, подібну до Капрейскої, лиш дещо меньшу, відкрито на острові Занте[6]).

---

[1]) Bulletin de la Société de Spéléologie. III. Nr. 9. i 10.

[2]) Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft. LI. 1899. 75 д.

[3]) Mittheilungen des deutschen und österreichischen Alpenvereines 1899. Nr. 20.

[4]) Eishöhlen und Windröhren-Studien. Abhandlungen der k. k. Geographischen Gesellschaft in Wien. Band. I. Heft. 1 д 15—76.

[5]) Beiträge zur Geologie und Paläontologie der Republik Mexico. 1899.

[6]) Globus т. LXXVII. ст. 134.

XI. Ріки.

Загальний перегляд праць про ріки і иньші области гидроґрафії подає Ule[1]).

Вплив ростинної покриви на стан води в ріках опрацював Wollny[2]). Вислїди его працї ось які: 1) Поверхнї покриті рістнею допроваджують рікам в загалї меньше води, чим простори безростинні. 2) Живучі ростини управильняють доплив води до рік, здержуючи еї ріжними способами в дорозї. 3) Ростини спиняють в дуже значнім розмірі розмиванє землї, шутру, піску і т. д. вяжучи корінем сипкі маси і здержуючи сучасно струю води доплиаючої до ріки. В рівнинах вплив рістнї на стан води в ріках не є значний, хиба лиш на дуже пропускальнім ґрунтї. Зате в околицях нерівних вплив сей є великий і збоча гір треба конечно залїсити або замінити в пасовиска, щоби доплив дощевої води до рік управильнивсь і она терену не розмивала. Рільну культуру в таких околицях треба рішучо закинути, бо она є там мало видатна, а терену не хоронить, бо рільні ростини лиш короткий час веґетують.

Области позаевропейских рік обчислив пляніметрично Bludau[3]).

Belloc виказав, що Ґаронна не випливає під шпилем Малядетти, лиш в долинї Aran, що значно зміняє положенє головного дїлу европейских вод в тих сторонах[4]).

Густотою річної сїти в Шварцвалдї занимає ся Neumann, і находить в загально методичнім розслїдї, що она прямо зависить від воздушних опадів, крім того від пропускальности почви, беззглядної висоти, від часу, як довго лежить снїг, дуже много від будови гір, а також від способу вітріня, ерозиї і денудациї скал[5]).

Цїкаві прояви річної ерозиї дослїдив Brunhes на однім з реґуляцийних каналів ріки Savine, часово порожнім. Витворились там в місцях, де були вири, глубокі дїри в литій скалї місцями понад 1 m. глубокі[6]).

Гидроґрафічні відносини горішного Нїля опрацював по найновійшим відкритям de Martonne, виказуючи, що горішний Ніль скла-

---

[1]) Die Gewässerkunde im letzten Jahrzehnt. Geographische Zeitschrift. VI. 97 д. 148 д.

[2]) Meteorologische Zeitschrift. 1900. 187 д.

[3]) Petermanns Mittheilungen 1898. 107 д.

[4]) Globus LXXIII. 19.

[5]) Beiträge zur Geophysik IV. 219 д.

[6]) Naturwissenschaftliche Rundschau 1898. 255.

дає ся з кількох самостійних річних системів, подібно як і многі иньші африканьскі ріки. Є се наслїдком браку оротрафічного вию-бразованя африканьского континенту¹). В цїлій Африцї в загалї міняють ся навіть в тій самій рiцї пороги і водопади з місцями, де спадок ріки є мінїмальний, та через те повстають острови і озера. Кожда нова виправа в незвісні околицї Африки приносить правильно вісти про нові пороги і озера. І так розслїджуючи головну жерельну ріку Kong'a Luapula, найшов Weatherley величаві водопади, названі ним водопадами Johnston'a²)

Великі водопади ріки Lule-Elf, подабаючі в дечим на Няґару в зменьшеню, описав Lorenzen³).

Дуже цїкавим проблемом зайняв ся J. Walther. Розслідив він іменно, чи Oxus (Амудария) висилав коли одно своє рамя до каспійского моря, як се до недавна припускано, рисуючи навіть на мапах ложбище, що его колись сей рукав мав занимати. Результат є зовсім неґативний. Walther виказує наперед історично, що звістка з XVI. віку про сей рукав є фальшива, а потім ґеольоґічно доказує, що мниме старе ложбище Амударнї є звичайним пустинним wadi, що не мало ніколи нічого спільного зі згаданою рікою⁴).

Повстало оно як і всї wadi через нагальні зливи, переобразував его вплив вітру, витворюючи топоґрафічну звязь, там де причинової ніколи не було. Найлучшим доказом сего є цїлковитий брак відложень річного намулу вздовж мнимого ложбища Оксуса та его мнимого устя в Каспій. Амудария є незмірно богата в намул і всюди, куди тече, осаджує его в великій скількости. Тимчасом навіть глубші верченя не показали й слїду сего намулу над Каспійом.

Від давна було знаною річию, що Дунай в своїм горішнім бігу коло місточок Immendingen і Möhringen тратить много води, що западає ся ту в землю. Пересїчно 77 днїв на рік, головно в лїтних місяцях (VII– X), вся вода Дунаю западає тут в глубину землї, так що доперва нові доплив творять на ново ріку. Помічано вже віддавна навіть отвори лїйковатого виду, котрими вода витїкає. Околичні мешканцї припускали, що дунайска вода показує ся на поверхню землї в великім жерелї річки Hegauer Aach, що вливає до Боденьского озера. Опирались они на тім, що коли на Дунаю

---

[1] Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin. XXXII. ст. 303 дд.

[2] Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik т. XXI. ст. 381 д. Globus т. LXXVI. ст. 343 дд.

[3] Natur 1898. 152.

[4] Petermanns Mittheilungen т. XLIV. ст. 204 дд.

повінь, тоді з того жерела пливе мутна вода. Виказали се наглядно досліди Кпор'а, що велїв кинути до Дунаю велику скількість соли і невдовзї замітив засолене в згаданім жерелї. Endriss припускає отже істноване підземного каналу, що однак дуже поволи задля численних перешкод проводить дунайску воду в область Рейна[1].

На взір недавно перед тим явившої ся моноґрафії ріки Одри видала комісия реґуляцийна Ельби в Маґдебурзї велику книгу про сю ріку[2]. Щоби запобічи грізним повеням Ельби, постановила згадана комісия розслїдити всесторонно клїматичні, ґеольоґічні і ороґрафічні відносини бассейна сеї ріки. Книга нею видана обнимає много важного материялу для ґеоґрафа. Іменно много нового приносить Elbstromwerk про відносини ділювіяльних рік північної Німеччини до нинїшної Ельби, про повені на тій ріцї і вплив припли(sic) ву та відпливу моря на стан води в еї устю. Усте Ельби, що є властиво дельтою, описує Henz[3]. Водопади судетских рік, що належать в значній части до области Ельби, описав Herden[4].

Marinelli розслїджував дельту ріку Ро і прийшов до вислїду, що зріст сеї дельти виносить річно 76 гектарів, а від 1300 р. зросла она о 513 квадратових кільометрів. З сего слїдує, що по 12000 лїтах триєстиньский залив буде озером[5]. Дельта Міссіссіпі натомість, хоч значно розширяєсь на простір, то рівночасно западаєсь пересїчно о 1 стопу на 20 лїт під поверхню моря. Причина тому є вибудоване вздовж рукавів ріки там і гробель. Они не позволяють ріцї заливати своєї дельти і підвисшати еї ровени осадками, підчас коли істнуюча вже дельта зложена з нетривкого материялу постійно западаєсь.

Ріку Madeira описує Lamberg[6].

Ольсуфієв подає обширну опись ріки Анадир[7].

Ріку Hwang-Ho розслїджував Gaedertz головно з огляду на реґуляцийні працї, підняті китайским урядом[8].

---

[1] Naturwissenschaftliche Wochenschrift. 1900. ст. 320.

[2] Der Elbstrom, sein Stromgebiet und seine wichtigsten Nebenflüsse. Berlin 1899, Reimer. 3 томи і атляс.

[3] Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik 1900. XXII. 24 д.

[4] Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik 1900. XXII. 202.

[5] Rivista geographica italiana т. V. ст. 24 дд, 65 дд.

[6] Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XXIII. 20.

[7] Витяг в Petermanns Mittheilungen 1899. 26.

[8] Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. ст. 402 дд.

XII. Озера.

Серед ріжних галузий гидроґрафії дуже красно розвинулась в послїдних часах лїмнольоґія. З невеликих початків, які виказувала ще перед пару десятками в тім взглядї ґеоґрафічна наука, зросла лїмнольоґія до дуже значних розмірів. Найлїпший примір, що вказує, як далеко вже зайшла та галузь ґеоґрафії, дає двотомовий опис женевского озера, що зладив в девятьдесятих роках XIX. столїтя Forel. І як вже той єго твір, хоч специяльно одному лиш озеру присьвячений, мав величезний методичний вплив на пізнїйші лїмнольоґічні праці, так теперішна видана ним книжка п. т. Handbuch der Seenkunde. Stuttgart, 1900. обіцює стати підставовим дїлом лїмнольоґії на довший час. Опираючись на дослїдах над озерами умірковаиої полоси в Европі і Америцї, обговорює Forel озера зі всїх можливих точок погляду. Не ту місце подавати хочби в скороченю численні здобутки для лїмнольоґії, що виходять з мітких помічань Forel'a. Належить однак згадати, що Forel попри загальні ґеоґрафічні впливи добачує велике значінє також льокально-клїматичних елєментів. Дуже важні замітки подав Forel до історнї чи житєписи озер, дїлячи час істнованя кождого озера на фази: молодости, зрілости, старости, та дві послїдні фази, коли озеро стає калужею, а опісля багном. Потім переводить Forel клясифікацію озер по ріжним точкам погляду. Хемічні і термічні відносини озер оброблює Forel дуже основно, присьвячуючи потім дуже цікавий уступ теренови, до тепер майже нетиканому т. є. явищам рефракцийним над озерами. Forel найшов иньші рефрекцийні явища, коли вода озера є зглядом воздуха зимна, а иньші, коли она є тепла. Коли температура води є висша від температури воздуха, видаєсь нам, що овид став вузший і стоїть низше та близше нас; поверхня озера видаєсь сильно випуклою. Филї озера видають ся висші, як є дійсно. Часто повстає міраж. Коли температура води є зглядно низша від воздушної, тодї: овид є піднесений високо і здає ся ширшим, поверхня озера видаєсь вглубленою, висота филь виглядає меньша, як є.

Forel розслїдив також загально колибаня температури озер европейских і порівнавши їх прийшов до переконаня, що річне колибанє температури озерної води є під рівником найменьше, під бігунами найбільше. Озера солодководні ведуть ся в тім зглядї далеко правильнїйше, чим моря, бо є замкнені і не мають струй[1]).

---

[1]) Comptes Rendus. CXXXII. 1089.

Взірцеву лїмнольоґічну моноґрафію подав Lorenz v. Liburnau описуючи Гальштатске озеро[1]). Є се майже типічне озеро між озерами Salzkammergut'а; цікаві є лиш прибережні жерела, що в часї дощів значними водопадами спадають до озера. Взагалї в Австриї лїмнольоґія процвитає. На озері Травнскім (Traunsee) викрив Richter т. зв. Seiches т. є. колибаня цїлого зеркала озера[2]). Озера ческого лїса опрацював Wagner[3]) і подав значний причинок до розвязки т. зв. Kar'ового проблєму т. є. як ледівцї витворили під вершками гір заглубини нинї покриті озерами. Плодом ледникової ерозиї є в значній части також альпейскі озера коло провала Reschenscheideck, котрі розслїдив Müller[4]). Угорске ґеоґрафічне товариство покінчило вже розслїджуванє Болотного озера, що виказало дуже малу єго глубину (пересїчно 3—5 m. maximum 11 m.) і притім Seiches. Деякі озера поменьші в полудневих Альпах описав Damian[5]). Озеро Sviča в Хорватиї, описане Граниловичем, є озером красовим майже циркницкого типу і показує цікаві темпера-турні відносини[6]). Того самого типу є озера Плїтвіцкі, також в Хорватиї положені, які опрацював Umlauft[7]). Красові озера в Хорватиї, Істриї і Дальматиї вимірив Gavazzi і оголосив результат своїх помірів[8]).

Періодичні колибаня зеркала штарнберского озера відкрив і розслїдив Ebert. Стоячі филї (Seiches) істнують в тім озері безсумнївно і відбувають ся зовсїм гармонїчно як рух маятника після права сінусів. Головна филя має час періоду рівний 25 мінутам і є одноузлова. Через ті стоячі филї повстають сильні підводні струї. Крім головної стоячої филї є ще друга, що приходить що 15·75 мінут. Через інтерференцию тих филь повстають ріжні филеві рухи поверхнї. Метеорольоґічні відносини, а іменно наглі зміни воздушного тисненя, мають на явище стоячих филь великий вплив[9]).

---

[1]) Mittheilungen der k. k. Geogr. Gesellschaft in Wien 1898. Bd. 41. ст. 1 дд

[2]) Petermanns Mittheilungen Bd 45. 1899 ст. 41.

[3]) Wissenschaftliche Veröffentlichungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig. 4. 1899.

[4]) Pencks Geographische Abhandlungen т. 1900. зош. 1.

[5]) Abhandlungen der k. k. Geogr. Gesellschaft. I. ст. 79 дд.

[6]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. Bd. 23. ст. 108.

[7]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik Bd. 21. ст. 22.

[8]) Mittheilungen des k. k. Geogr. Gesellschaft in Wien XLI. 1891. ст. 315.

[9]) Sitzungsberichte der Münchner Akademie der Wissenschaften. 1900. 435 д.

Про французскі озера написав славний лїмнольоґ Delebecque більшу книжку, відзначену академією наук[1]), що приносить дуже много нових даних. Подїл Delebecque'а є независимий від подїлів Forel'а: за критерию приймає він, чи озеро є заглублене в родимій скалї, чи повстало через природну греблю. Узглядено всї озера в цїлій Франциї і замітити належить, що автор відкрив і розслїдив в самих Піренеях 22 озер, дотепер в науцї незнаних.

Для озер Шварцвальда виказав Halbfass, що они є наслїдком ледової епохи[2]). Озеро Eichen, що там лежить, показує явища красових озер пр. циркницкого. Після Knierer'а діє ся се з тої причини, що оно лежить в полосї тріясового вапняка, могли ся отже красові явища розвинути[3]). Halbfass розслїдив також озеро Dratzig на Поморю, що є озером мореновим, отже також полишкою ледової епохи[4]).

Дослїди над озерами ведуть ся також в Італїї дуже пильно. Стан розслїдів подає Agostini[5]).

Мертве море розслїдив в послїдних роках XIX. віку Gautier. Хибна є думка, що вода сего озера є в вічнім супокою. Підчас бурий піднимають ся на нїм великаньскі боввани. Не правдиве є також оповідане, що птахи не можуть пролїтати над озером, або що ростини над ним рости не можуть. Де лиш є троха солодкої води, там корінить ся буйна веґетация. Що околицї Мертвого моря є пустинні, винна тому лиш велика спека і посуха тамошнього клїмату. Півостров Ель Мезра'а дїлить Мертве море на дві части, північну більшу до 399 m. глубоку і полудневу плитку (3—4 m). Цїла гора соли і численні соляні стовпи находять ся на полудневім побережу. Місцями добуваєсь тут сїрководень, а на днї моря лежать поклади ріжних бітумів — головно асфальту, що по бурях пливають кригами по поверхни озера[6]). В послїдних часах начинаєсь уровень Мертвого сильно підносити. Значна часть дельти Йордану і сусїдні острівцї залиті вже водою. Уровень не обнижає ся в лїтї, тому мож виясни ти те явище або сильнїйшим допливом води в остатних часах, або піднесенем дна озера[7]).

---

[1]) Les lacs français. Paris 1898.

[2]) Petermanns Mittheilungen Bd. 44. 1898. ст. 241.

[3]) Monatsblätter des badischen Schwarzwaldvereines Bd. 2. з. 11.

[4]) Globus 1900. ст. 1.

[5]) Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1899. ст. 490.

[6]) Le Globe 1900. Natur 1901. 210.

[7]) Geographical Journal, 1900. 10.

Озеро Кукунор і єго околиці описав Futterer, котрий розслїджував се озеро підчас своєї подорожи поперек Азиї. Він думає, що на тім місци в дуже недавній ґеольоґічній минувшинї було велике озеро ділювіяльне. Найнизше місце низини, окружаючої Кукунор, не занимає се озеро, се місце є не далеко него над невеличкою річкою без відпливу (висота н. п. м. 3110 m. Кукунор 3300.)[1].

Берґ і Іґнатов занимались колибанями позему озер середної Азиї і западної Сибіри. Загалом він опадав від найдавнїйших історичних часів. Однак від 1880. р. даєсь замітити дуже значне підвисшенє позему. Озеро Араль, що до сего року стало опадало, піднеслось дотепер загалом о 3 m., так що на рік випадає пересїчно 178 mm. Ріка Сирдария несе тепер значно більші маси води, чим давнїйше. Также иньші озера кірґіских степів, а іменно в ґуберніях Омскій і Акмолиньскій, піднесли свій позем досить значно. Чи се, як думають автори, є викликане другостепенним періодом вохкости, чи яким більшим ґеольоґічним періодом, що власне розпочавсь, годї сказати[2].

Моноґрафію солоних озер з околиць Омска подали Берґ, Ельпатевский і Іґнатов[3]. Є їх три більших, а кожде з них инакшого характеру. Озеро Селети-Денніс, два рази більше від женевского, є дуже плитке (3 m.), гірко-солоне, з водою дуже прозорою зеленої краски. Озеро Кизиль-как є зовсїм насичене солею і має від одного наливочника червону барву. І озеро Теке є насичене, а на днї видїлюють ся постійно великі шестистїнні кристали соли; має оно брудно-молочну краску і заносить фіялками.

Озеро Урмія — також солоне — є тим замітне, що єго зеркало в послїдних часах зачало дуже сильно підноситись, так що залило околичні урожайні землї. В виду того, що западний берег сильнїйше зістав залитий, чим східний, припускає R. Günther, що маєм ту до дїла з льокальним западанєм земскої кори[4].

В Гімалаях повстало значне озеро через пересипанє долини великаньским обвалом сусїдної гори[5].

Африка була завсїгди клясичним краєм озер і що хвиля відкривано там незнані дотепер, а замітні чи то величиною, чи по-

---

[1] Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. XXXV. 297 далї

[2] Извѣстія Имп. Русс. Геогр. Общ. XXXVI. 111.

[3] Извѣстія императорскаго русскаго географическаго общества. т. 35. 1899.

[4] Petermanns Mittheilungen Bd. 45 1899. ст. 297.

[5] Nature 1898. ст. 70.

ложенєм, чи і иньшими обставинами озера. І тепер не мине рік, щоби чого цїкавого про африканьскі озера не появилось в научній літературі. Послїдні літа XIX. столїтя принесли новість, що два значні африканьскі озера зникли з поверхнї землї. І так озеро Леопольда або Rikwa, що лежить на схід від озера Tanganyika, змінилось в лїсистий степ, що лиш в дощевій порі місцями покриває ся водою[1]). Є се звістка впрочім не в цїлости правдива. Другим згаданим озером є часто згадуване в ґеоґрафії озеро Ngami в полудневій Африцї. Єго доплив затканий пливучими островами очерету зовсїм обмілїв і на місци давного великого озера простягаєсь рівнина поросла шуваром[2]).

З поміж иньших африканьских озер розслїджувано послїдними часами озеро Nyassa. Як вже давнїйше думали, повстало те озеро через западенє ся земскої кори. Озеро Nyassa становить полудневу часть великого африканьского рова. Сьвіжі слїди того западеня земскої кори видно на обривистих берегах озера. За сим сьвідчить і єго значна глубина. Morre висондував ту 785 m. Краска вод озера голуба, прозрачність дуже значна. В околици находить ся много иньших озер, впрочім зовсїм иньшого характеру і походженя. Лежить там згадане вже висше озеро Rikwa (Rukva, Rukuga, озеро Леопольда), котре в 1899. р. Fülleborn найшов плитким, але не ствердив постереженя Langheld'a, що те озеро від 1891. р. цїлком висохло. Fülleborn відкрив ще кілька вульканїчних озер в краю Konde[3]). В озері Tanganyika сконстатовано істнованє деяких морских мякунів, що вказувалоб на колишне передюрайске получене того озера з Червоним морем[4]). Розяснено тепер також, чому содові озерця Лїбійскої пустинї мають червону краску. Dewitz найшов именно в їх водї велике число бактерий, що видїлюють червону орґанїчну субстанцию[5]).

Топоґрафію египетских содових озер опрацювали Schweinfurth і Lewin. Они лежать в депресиї, що повстала через западенє плити нумулїтового вапняка. В рові, що повстав через сей залом, лежать

---

[1]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik т. 20. ст. 283.

[2]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1899. ст. 198.

[3]) Пор. Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. 1899. (24) ст. 197 і 441. 1900 (25). ст. 332. Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. т. 20. ст. 283.

[4]) Geographische Zeitschrift V. 109.

[5]) Zoologischer Anzeiger Bd. 32. ст. 53.

ті озера. Скількість їх вод періодично змінюєсь і зависить від стану води в Нїлю і від дощів в околици[1]).

Великі австралїйскі озера Lake Eyre і Lake Amadeus находять ся від певного часу в стадиї цїлковитого висиханя. Причиною є брак більших притоків і великі маси піску, котрі вітер постійно в них навіває[2]).

Велике озеро солоне в Utah хотїв американьский уряд зарибити, але показало ся, що скількість соли навіть для морских риб і устриць за велика[3]).

Озера Патаґонії описує Hatcher. Він розрізняє три роди тих озер: тектонїчні, ґляцияльні і рештків. Н. твердить, що послїдний рід озер повстав через значне піднесенє суші при кінци треторядної епохи. Тодї значні простори соленої води відділились від моря і зістали по нинїшний день озерами[4]).

Про болота і багна занотувати можем з послїдних років XIX. століття лиш кілька розвідок меньшого значіня. Є се царина, де много ще лишаєсь робити.

Опис торфяного багна Ecsed над Самошем і Красною та его осушеня подав Czirbusz[5]). Осушенє Полїских болот є вже фактом довершеним[6]). Про використуванє нїмецких торфяників подав Immendorff дуже цїкаву статю[7]). Вказавши на їх великий простір, радить I. використувати торфяники, через замінене їх в плодовиту почву, а противить ся копаню торфу.

Болотний вулькан доселї незнаний відкрив Ludwig на Llanos Венецуелї[8]). Він належить до цїкавших явищ серед болотних вульканів в загалї.

Славні, а до недавна лиш дуже мало знані болота Фльориди, звані Everglades, розслїдив Willonghby. Є се великаньскі багна порослі кипрійскою травою. Вода стоїть в них пересїчно 1—2 стопи глубоко. Біфуркациї відпливів дуже часті, тому W. говорить про плинний дїл водний в тих багнищах[9]).

---

[1] Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. 33. 37 д.

[2] Petermanns Mittheilungen Bd. 44.1898. ст. 7.

[3] Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XXI. ст. 333.

[4] Bulletin of the Geographical Society of Philadelphia. 1900. зош. XII.

[5] Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. Bd 21. ст. 503.

[6] Огляд підринятих там робіт в Geographische Zeitschrift VI. 222.

[7] Deutsche geographische Blätter т. 33. 1900. ст. 71 дд.

[8] Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. Bd. XX. ст. 394.

[9] Petermanns Mittheilungen. 1899. LB. 61.

Т. з. глиняні панви Австралії розслїдила експедиция Horn'а Се плиткі заглубини в глинястім підложи звичайно округлого виду без нїякої веґетациї докола. Їх промір лежить межи пару стопами а 12 km.; глубина найбільша $1\frac{1}{2}$m. Они повстають через сплив води з околичного терену до плоских заглубин. Вода зразу всякає в підложе, але потім, коли шпарки затикають ся намулом, остаєсь пару місяців в панві, поки не випарує. Відпливу не має ні одно з тих болотнистих озерець[1]).

XIII. Ледівцї.

Який є загальний стан наших відомостий про ледівцї і які нові проблєми висувають ся для ґеоґрафії на тім поли, представляє Richter[2]), переходячи коротким загальним поглядом роботу кількох послїдних десятків лїт. Заявившись за теориєю реґеляциї вважає Richter теперішними проблємами науки в тій царинї 1) означенє відносин між пробігом посуненя ся в перед ледівця а скоростию руху леду, 2) оброблене фізично термічних питань, а іменно виясненє ріжних термінів дотичних пр. оґів, білих і синих полос в леді і т. д.

В 1894. р. повстала на цюрихскім ґеольоґічнім з'їздї міжнародна ледникова комісия, що постановила собі за головну задачу розслїджувати колибаня ледівців. Вже трилїтні, спільними силами ведені, дослїди дали деякі результати, котрі доповняють давнїйші вислїди. Коротко збирає їх Richter[3]) Ледівцї альпейскі найлїпше дотепер пізнані держать ся досить виразно 35-лїтних періодів Brückner'а, причім однак многі ледівцї перескакують нераз цїлий період колибаня, щоби аж в слїдуючім його тим сильнїйше зазначити. І так перескочили альпейскі ледівцї мокрі роки коло 1880. Ледви деякі ледівцї в западних Альпах зачали рости, а по десятьох або і 20 лїтах і деякі в східних, але многі тимчасом дальше зменьшились.

Є се явище дуже цїкаве — Richter вважає его важним проблємом.

Таксамо невиразно як альпейскі заховувались в послїдних часах також і піренейскі ледівцї. Натомість ледівцї країн полярних,

---

[1]) Petermanns Mittheilungen 1898. 8.

[2]) Neue Ergebnisse und Probleme der Gletscherforschung. Abhandlungen der k. k. Geogr. Gesellschaft in Wien т. I. ст. 1 дд.

[3]) Petermanns Mittheilungen т 45. 1899.

Скандинавії, Кавказу і центральноазийских гір загально подають ся в зад. З того заключає Richter: Понеже в континентальних просторах ледівцї тепер виразно уступають, а в океанїчних стоять на місци або заховують ся неясно, то легко буде мож ті їх колибаня вияснити за Brückner'ом. По єго теориї на тепер т. є. на конець XIX. столїтя випадає період посухи, отже уступаня ледівцїв. Слиж они тільки в континентальних просторах виразно уступають, то потверджає се вповнї теорию Brückner'a. Она голосить, що всякі колибаня клїмату лиш в континентальних околицях виразно можуть виступати, в океанїчних лиш невиразно.

Межинародна ледникова конференция зібралась в серпни 1899. р. і розслїдивши ледники Родану і Unteraar, впорядкувала клясифікацию і номенклятуру морен та подала многі методичні уваги для дальших дослїдів над ледниками[1]).

Götz розслїджував центральний Балкан в цїли сконстатованя там ледівцевих слїдів. Дослїди показали, що ледівцїв ту нїколи не було, хотяй є много слїдів, подабаючих на ледівцеві слїди. Götz виказує, що слїди ті дають ся без натяганя звести до ерозиї і вітріня. Доперва по ледовій епосї з причини значної висоти опадів наступили в илястицї тутешнього терену значні зміни[2]). Натомість в горах тз. динарскої системи в західній части балканьского півострова сконстатував Cvijić значні слїди давних ледівцїв, як моренові вали і кари. Находять ся они на горах Treskavica, Prenj, Čvrsnica, Volujak, Durmitor і иньших, що лежать в Боснї, Герцеґовинї і Чорногорі[3]). Гори Rila розслїджувані тим самим ученим виказали також много карів, моренових озерець, а навіть малих фірнових просторів[4]).

Положенє ледівцїв ґляцияльної епохи в долинах рік Mur і Mürz розслїджував Böhm. По єго думцї цїла долина ріки Mur аж по Judenburg була покрита одним великим ледівцем до 800 m. грубим, що стояв в звязи з иньшими ледівцями, наповняючими долини горішної Анїзи і горішної Драви. Гори над річками Liesing і Mürz були також покриті ледом, але їх долини були від него

---

[1]) Petermanns Mittheilungen 46. Bd. 1900. 77.

[2]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. 35. 1900. ст. 127.

[3]) Abhandlungen des k. k. Geographischen Gesellschaft in Wien. II. 1900. 195 дд. III. 1901. Nr. 2. ст. 1 дд.

[4]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. Nr. 7. 331. дд.

свобідні. Висота фірнової лїнії припадала, між 1300 m. а 1600 m. і подібно як нинї більшала, чим дальше до середини гір[1]).

Кегр в подорожи до скандинавских країв замітив, що ледова епоха мала для тих країв велике морфольоґічне значінє впливаючи моренами і абразією на єї плястику. Єї вплив належить однак вважати корисним, бо власне на ледникових наносах розвинулась в полудневій Швециї і в Данїї дуже плодовита почва[2]).

Цїла північно-нїмецка низина є — як звісно — покрита ґляцияльними відложенями, подібно як і значна часть східної Европи. Ті відложеня пізнано досить пізно. Коло половини XIX. столїтя Agassiz перший поставив здогад, що находжені на ерратичних камінях риси походять від ледівцїв, що колись покривали цїлу північну Европу, виходячи від самого північного бігуна. Але ту здорову гадку закинено невдовзї, а то задля тз. дріфтової теориї Lyell'a. Она припускала істнованє моря на місци північної Нїмеччини, по котрім плавали ледові гори відорвавшись від скандинавских ледівцїв. Каміня, шутер і пісок, що находились на тих ледівцях при їх топленю ся опадали на дно моря і потворили дуже великі відложеня піску, глини, шутру, що зовсїм змінили характер плястики тих околиць.

Та теория, принята задля великої наукової поваги єї творця, не сприяла дальшому розвиткови науки. Мимо того льокальні дослїди поступали скоро вперед і добували щораз то більше даних, котрі знов щораз труднїйше було дріфтовою теорию вияснити. Коли проте Torrell, найшовши ледівцеві шрами на матерних скалах, висказав 1875. р. теорию, що ледівцї скандинавскі сягали в ледовій епосї аж на північно-німецку рівнину, та що ґляцияльні відложеня є лищень рештками ґрунтових, начільних або бокових морен, значінє дріфтової теориї заколибалось. Виказано дальші шрами на матерних скалах та ідентичність ґляцияльних відложень північно-німецких з моренами нинїшних ледівців, помічано заворушеня в горішних верствах під впливом напору леду. Що найголовнїйше звернено увагу на ерозийну дїяльність так самих ледівців, як вод, що з їх стопленя повстали, відкриваючи щораз то нові системи долин, куди ті води спливали до моря. Дальші дослїди, головно стратиґрафічні, довели — як звісно — до виказаня трох ледових а двох інтерґляцияльних епох і занимались тим проблємом протягом дуже

---

[1]) Abhandlungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. Bd. II. 1900. ст. 91 дд.

[2]) Geographische Zeitschrift VI. 128 дд.

довгого часу. Доперва недавно звернулись нїмецкі ґеольоґи до розслїджуваня моренних та гидроґрафічних системів ледової епохи. Відкрито великий систем кінцевих морен від Шлесвиґу до східних Прус, що є продуктом довготревалої епохи супочинку ледів, і вияснено тепер повстанє озеровин надбалтийских ерозиєю або насипанями. Дослїди над моренами вияснили також дуже много точок з ґляцияльної гидроґрафії, поясняючи витворенє ріжних великих східно-західних долин річних ріжним станом леду[1].

Студиями над ледовими відложенями в північній Нїмеччинї занимає ся від певного часу невпинно Keilhack, що поставив собі задачею розслїдити напрям ділювіяльних рік. Опираючись на давнїйших відкритях вносить Keilhack, що великі системи плитких долин, що тягнуть ся в північній Нїмеччинї від сходу на захід, служили в ледовій епосї до того, щоб воду зі стоплених ледівців відпровадити до нїмецкого моря. Ті долини повстали при граници ледів, можемо отже з їх положеня вивести, де ледовець на довший час позіставав в незміннім положеню. До сих виводів маєм три критериї: 1) кінцеві морени т. є. вали шутру і ерратичних камінїв 2) ґрунтові морени, сильно погорблені, повні озер і мочарищ 3) верствовані, верхом рівні річно-ледові відложеня тз. Sandr, осаджені струями зі стоплених ледників.

Найбільшою на полудне висуненою долиною пливуть до нинї горішна Одра і долїшна Лаба. Друга долина йде від Калиша через Берлїн до західного Мекленбурґа. Трета значнїйша долина зовесь Берлїньско-варшавскою. В нїй пливуть до нинї по части Варта, Обра, Одра, Спрея і Гавеля. Четверту головну долину зове Keilhack торуньско-еберсвальдскою. В нїй пливе Нотець, долїшна Варта, Одра в т. з. Oderbruch і находить ся Фіновский канал. В тій долинї місцями потворились значні озера в наслїдок заставленя води масами леду. Такі були коло Торуня і коло Франкфурта над Одрою.

Коли ледівцї ще дальше на північ поступили і ще раз задержались на довше, повстала послїдна більша ділювіяльна долина тз. pommersches Urstromthal. Она йшла зовсїм рівнобіжно до нинїшного балтийского побережа в віддаленю пару миль від него. І в тій долинї потворило ся кілька озер, але не велике лиш число води збирало ся в тій долинї. Леди зачали ся знов подавати в зад, лишаючи на Поморю кілька окрайних долин, нинїшне устє Одри стало вільне і води східної части нїмецкої рівнини поплили туди

---

[1] Zeitschrift der deutschen geolog. Gesellschaft 50. 1899. ст. 54 дд.

в Балтик. Одра стала самостійною від Лаби, потім визволилась і Висла[1]).

Zache припускає, що велика долина Нотець-Варта-Одербрух повстала наслїдком льокального западеня старших верств в тім місци. Повсталий рів послужив догідним відпливом для стоплених вод уступаючого ледівця скандинавского[2]).

Типічною ґляцияльною околицею північної Нїмеччини є т. з. Fläming. Се є височина покрита мов кертовинами безладними горбками, що доходять лиш до 200 m. висоти. Все покриває пісок повний наметняків. Місцями показують ся видми і характерні безводні долини. На границї Лужиць є много безвідпливових ставів і озерець[3]).

Т. з. сухопутні леди арктичних сторін є в послїдних часах предметом пильних розслїдів, щоб на підставі одержаних результатів мож було лїпше порозуміти рухи ледів европейских підчас ледової епохи. Берлїньске ґеоґрафічне товариство нарочно вислало наукову виправу в Ґренляндию, котра розслїджувала рухи, будову і зміни великого ледівця, що сей остров вкриває, его температуру, творенє гір ледових і т. д.[4]).

Drygalski найшов підчас згаданої експедициї в ґренляндских ледниках великі анальоґії з ледами, що колись вкривали цїлу північну Европу. Ледники ґренляндскі повстають на горах східного побережа і посувають ся на запад, як се виказали поміченя при вистаючих понад лїд скалах (nunatak). Крім того поземого руху сконстатовано і прямовісний; лїд підносить ся іменно при зіткненю з вистаючими горами. Власне сей рух ділювіяльних ледників полишив такі слїди з европейских землях. Всякі рухи леду стремлять завсїгди до вирівнаня тисненя, так що пр. з місця, де лїд є грубший, йде рух туда, де він є тоньший, хочби се друге місце висше лежало, чим перше. Дуже важні замітки подає Drygalski також про жолобленє озер ледниками. Після него ледники головно вичищують істнуючі вже заглубленя і можуть їх розширити. Найлїпші услівя для тої роботи ледників є при їх сходженю з гір, де ріжницї в грубости леду великі[5]).

---

[1]) Jahrbuch der k. preuss. geol. Landesanstalt Berlin 1899. ст. 90. дд. Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft. 51. ст. 77 дд.

[2]) Naturwissenschaftliche Wochenschrift v. Potonié. 1898. 313.

[3]) Schöne, der Fläming. Leipzig 1898. Duncker & Humblot.

[4]) Richter, Geographische Zeitschrift. V. 126. д.

[5]) Petermanns Mittheilungen т. 44. 1898. ст. 55 дд.

Про колибаня ледників в північних реґіонах землї робив критичні дослїди Rabot[1]). Обняв він Скандинавію, Jan Mayen, Ісляндию, Ґренляндию, Шпіцберґи і край Франц-Йосифа. Rabot замітив, що перед XVIII. віком ледівцї від кількох столїть вже були меньші. Підчас XVIII. столїтя і в початках XIX. зачали они дуже сильно рости і дійшли до такого розвитку, якого не мали від ледової епохи. В XIX. столїтю трудно рішити, чи слїдував зріст чи зменьшене ледівцїв, бо ріжні околицї ріжно ся поводять. В Альпах послїдувало велике меньшане, в Скандинавії мале, в арктичних сторонах поводились ледівцї нерішучо. Не можна ту було також відкрити таких кількадесять-лїтних періодів, як в Альпах. Натомість виразні є у арктичних ледівцїв короткі осциляциї та колибаня в звязи з порами року. Звязи колибань арктичних ледівцїв з колибанями клїмату немож було задля браку материялу виказати, коли для Альп зроблено се вже давно.

Який вплив можуть мати такі маси леду на вид землї, застановлювались Hergesell, Drygalski, Woodward і Rudzki. Дїлювіяльні морскі бережні лїнії доказують, що позем моря був тодї висший. Дослїди H., D. і W. виказали, що трудно сего підвисшеня позему моря в цїлости приписати льокальному притяганю мас леду. D. виказав, що верстви остуджуючись під ледом мусїли скорчитись і заняти низше положенє. Rudzki обчислив для обниженя температури о 15° обниженє позему суші о 7·21 стопи. Колиж возьмем під уваґу охолоджуючий вплив води натопленої з ледівця, котра входить в землю, одержим після R. 21·3 стіп обниженя суші. Rudzki взяв крім того в рахунок великий тягар леду і принявши землю за так цїпку і ізотропну, як сталь, найшов рахунком, що она могла під тягаром ледів ледової епохи так здеформуватись, що наступити могли льокальні обниженя о 500 m. (докладно 497·8 m.) в разї, єсли тілько одна гемісфера переходила ледову епоху. Коли обі півкулї мали єї рівночасно, деформация могла сягнути лиш до 347·1 m. Підчас істнованя ледових обволок докола бігунів деформация землї і зміни поверхнї моря, викликані притяганєм ледових мас, невтралїзували ся, але коли лїд начав ся топити і много стратив на масї, тодї деформациї ще не уступили і море залило здеформовані простори сягаючи до великих висот[2]).

---

[1]) Розвідки в Archives des sciences physiques et naturelles. 1899, 1900. 7. 8. 9.

[2]) Bulletin International de l' Académie des sciences de Cracovie 1899. Avril. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. XI. 1900. 232.

Вже давно знані були ледівцї на горі Kilima-Ndscharo, однак великі маси леду відкрив доперва 1898. р. H. Meyer на західнім склонї сего вулькану. Є там великаньске фірнове поле, а з него спускають ся ледові язики. Крім того відкрив Meyer значні слїди давних ледівцїв і припускає, що і в екваторияльній Африцї була колись епоха великих воздушних опадів, відповідаюча ледовій епосї Европи. Тодї і ледівцї були значно більше розвинені, як тепер, коли они находять ся в стадиї постійного меньшаня[1]).

Великаньский ледовець Malaspina розслїдила експедиция князя Савойского на горі сьв. Ілиї в північній Америцї. Ширина єго доходить до 100 km., але єго величина значно зменьшилась від XVIII. віка[2]).

Буш розслїдив до 190 ледівцїв Кавказа і найшов, що всї ледівцї з північної сторони гір находять ся в рішучім відворотї від 20 лїт[3]).

XIV. Морфольоґія країн плосковерствованих.

Про велику російску площу занотувати треба в послїдних лїтах XIX. віку дві важні роботи Philippsona і Павлова.

Philippson призбирав материял до своєї розвідки, будучи в Росиї підчас ґеольоґічного конґресу 1897. Хоч єго замітки зраджують подекуди недокладність, то прецїнь загальний погляд Philippson'a на морфольоґічні відносини російскої площі має значну вартість.

Майже на цїлім просторі европейскої Росиї є верстви уложені поземо або дуже мало нахилено. Від дуже давних ґеольоґічно часів нїякі заколоти не змінили сего поземого положеня. Процес фалдованя карбоньских гір над Донцем не відбувсь — як думають многі російскі ґеольоґи — при кінци мезозоїчної, а з початком кенозоїчної епохи, а (після Phil.) перед пермскою. Лиш зверхні впливи моделювали від найдавнїйших часів сю великаньску скибу.

Властиві низини значних розмірів є досить рідкі в Росиї, бо всюди річна ерозия вспіла вже порізати терен на горбовату-фалисту

---

[1]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin т. 26. 1899. д. 88 дд.

[2]) Die Forschungsreise S. K. H. des Prinzen Ludwig Amadeus von Savoyen nach dem Eliasberge etc. Leipzig 1900.

[3]) Извѣстія Імп. Русскаго Географического Общества XXXIV. 1898. ст. 519 дд.

рівнину винесену 200 до 300 m. понад позем моря. В загалї однак ся рівнина не є властивою тафлею. Ріжні формациї виходять в ріжних місцях на поверхню землї, вказуючи, що вид рівнини завдячує Росия ерозиї і денудациї. Ріки і сухопутні леди давнїйшої ледової епохи сего довершили. В північній части Росиї заслонюють ледівцеві відложеня властиве підложе цїлковито, так що ледви в деяких річних долинах мож єго добачити. В полудневій Росиї ролю покривала відграває лєс, значно впрочім тонше осаджений, як ґляцияльні відложеня. На ґляцияльних відложенях розвинулась худа піскована почва: подсол, а на лєсовім підложи південної Росиї славний чорнозем. Природною ростинною формациєю подсола є ліс, чорнозему степ.

Північна часть росийскої площі, грубо покрита ледниковими відложенями і полуднева часть, що є без сумнїву лиш деструкцийною поверхнею, переходять в себе незамітно і мають меньше більше ту саму беззглядну висоту. Річні долини є молодші як сама площа і завдячують своє повстанє лиш ерозиї. Показують се: 1) рівна висота площі по обох сторонах долини, 2) значні кітловини, що переривають долини річні, 3) асиметрия річних долин, що показуєсь в високих правих берегах великих рік пручих на право.

Дальші елюкубрациї Р. не нові для всякого, хочби дещо лиш обізнаного з ґеоґрафією України-Руси, а часто хибно поняті і переведені, поминаю, а згадаю лиш про єго погляди на повстанє лиманів. Се є долини рік і річок впадаючих до Чорного моря. В найновійших ґеольоґічних часах обнизивсь берег моря так, що оно залило долини глубоко ві внутро суші. Филї морскі висипали при вилетї сих долин піскові коси і так витворились лимани. Лиш більші ріки змогли пробити собі через косу дорогу до моря. Лимани меньших рік є зовсїм замкнені і через парованє вода морска сильно сконцентрувалась¹).

Дещо інакше представляє собі проблєм морфольоґії рівнин Павлов. На всїх рівнинах, а не найслабше на росийскій, виступає яко дуже важний динамічний елємент жолобляча дїяльність підземної води, котру то дїяльність зове П. суффозиєю. Она викликує льокальні западаня поверхнї, отже нерівности різьби. Другу важну діяльність води на рівнинах зове П. аккумуляциєю — ріки заповнюють нерівности своїми алювіями. Аккумуляцийним материялом

---

¹) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. XXXIII. 37 дд. Petermanns Mittheilungen XLV. 269 дд.

є в північній Росиї головно пісок. Осібне становиско визначує П. т. з. делювіюм, що повстало лиш під впливом вітріня і дїланя атмосферичних опадів і лиш під їх впливом зміняє своє положенє, стараючись рівнож вирівнати нерівности терену. Се делювіюм противставляє П. алювієви і елювієви.

Як алювіюм і делювіюм працюють над вирівнанєм терену, так ерозия працює над витворенєм і виобразуванєм нерівностий. Ерозийні явища представляє П. дуже обширно, занимаючись між иньшим докладно ярами. Так часту асиметрию долин в Росиї поясняє П. не правом Бера, а тектонїчними причинами. Він звертає увагу на частий ізоклїнїзм верств, через що одно збоче долини є стрімке, а друге положисте. Між иньшими сконстатував П. такі відносини у рік в околицях Курска і Харкова[1].

Нову хронольоґічну одиницю вводить Davis під назвою „ґеоґрафічний цикль“. Є се час потрібний на се, щоби ново утворена височина змінилась під внїшними впливами в низину[2].

Важні причинки до ґеоґрафії балтійского щита дали праці Hult'а і Immanuel'а.

Hult описує країну Nyland в полудневій Фінляндиї. Цїла та околиця складаєсь з високорівний і врізаних в них долин. Високорівнї складають ся з ґранїту і стрімко стоячих кристалїчних лупаків, але поверхнї високорівний є плоскі і більше або меньше вкриті ґрунтовою мореною. Збоча долин є 30–50 m. високі і дуже стрімкі. Долини є по обох кінцях отверті і лучать ся з собою в своєрідну сїть. Їх підошва рівна, не дасть ся нїяк витолкувати ерозиєю рік, хиба лиш леду. Але їх напрям вказує також на те, що они повстали з давних щілин в скалї, котрі розширились під дїланєм леду в ледовій епосї. Другий рід долин має збоча дуже положисті і неправильні черти. Се є мабуть преґляцияльні заглубленя, повсталі через вітрінє. Третий рід долин узкий зі значно нахиленою підошвою вказує на нормальне ерозийне повстанє, але ще перед ледовою епохою. Різьба Nyland'у є отже передледникова. Леди лиш забрали або замінили в ґрунтову морену продукти вітріня і ерозиї, а поверхню по своему змоделювали[3].

Дещо відмінна, але в загальних чертах анальоґічна, є будова півострова Kola описаного Immanuel'ом. Є се високорівня з ґранїту

---

[1] Землевѣдѣніе 1898. 91 дд. Ref. Petermanns Mittheilungen 1900. ст. 7.

[2] Geographical Journal 1899. 481.

[3] Meddelelser Geogr. Föreningen Finnland. IV. 1899.

і ґнайсу, яка є однак місцями попереривана слабо розвитими ланцюхами горбків і скал, що є звичайно заразом вододілами. Лиш Хибиньский хребет взносить ся дещо висше, бо до 760 m. Впрочім є Коля фалистою високорівнею 100—150 m. високою з численними заглубинами. В тих заглубинах находять ся плиткі озера, багна, торфяники і тундри. Побереже зване мурманьским є стрімке, скалисте, богате в заливи і острови. Клїмат тутешний, досить в зимі лагідний, і вплив Ґольфштрема справляють, що кілька тутешних пристаний зовсїм не замерзає. Тому звернула Росия на мурманьский берег в послїдних часах пильну увагу[1]). Ґеольоґічну будову сего пів'острова розслїджував Ramsay і найшов, що ту так само, як і в Фінляндиї, ерозийні форми походять з часів перед ледовою епохою[2]).

По північній части Лябрадору подорожував Low. Морфольоґічний характер сего півострова дуже подібний до характеру описаних власне країн: височина досить низька з слабими пасмами горбків і скал. Підложе ґранітове ляврентийскої формациї, місцями виступає кварцитовий дольоміт і ілолупак камбрийский. Шрами ледівцеві виразні[3]).

XV. Масові і фалдові гори.

Північну півкулю уважає Suess асиметричною. Є іменно значна відмінність в структурі Азиї а північної Америки. Азийскі фалди уложились луками, котрих вигнене є звернене на полудне і схід. Фалдуючий рух йде з нутра континенту на вні і почав творити ті луки вже в камбрийскім періодї. В північній Америцї є рух фалдовий звернений проти старинної маси канадийского щита. Фалди окружають сей щит докола, звернені своїми вигненями на вні. Европейскі фалдові гори творять перехід від американьскої до азийскої будови. Сей фалдовий рух в Америцї доосередний, в Азиї відосередний вказує на асиметрию північної півкулї[4]).

---

[1]) Petermanns Mittheilungen 1899. 134.

[2]) Fennia. XVI. Nr. 1. 1898. Petermanns Mittheilungen 1899. Lb. 38.

[3]) Nature 1899. 301. Globus 75. 435.

[4]) Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften. Math. nat. Klasse. LVII. 89.

Паралелїзмом в напрямах гір занимає ся Gukassian і стараєсь єго виказати для деяких гірских пасм герциньскої системи[1]).

Майже всї нинїшні високі гори походять з другої половини кенозоїчного періоду, коли вульканїчні вибухи і морщеня земскої кори були дуже сильні. Перша половина того періоду і цїлий мезозоїчний період були під тим зглядом спокійні, натомість при кінци палеозоічного періоду виступили дуже сильні заворушеня в земскій корі. Тим творенем гір в палеозоічнім періодї занимає ся Frech і находить, що істнує безпосередна звязь між ґеоґрафічним положенем і иньшими власностями вуглянних залежий, а розкладом і часом повстаня сучасних фалдових гір. Рівночасно з фалдами повстали дисльокациї, а з ними вульканїчні вибухи і випливи ляви. Повстали тодї 1) гори армориканьскі, що ішли від NW—SE через північно-західну Францию і пд. зах. часть Анґлїї 2) гори варисцийскі що тягнуть ся від середно-францускої височини на NE, окружаючи великим луком нинїшну ческу кітловину 3) гори палеокарпійскі, котрі прямо на всхід продовжувались аж над Донець яко 4) гори полуднево-росийскі. Рівнобіжно з 4) йшли 5) гори арменьскі, відділені від полуднево-росийских обширним заглубленем, де пізнїйше витворивсь Кавказ. Високі гори повстали тодї також в центральній Азиї (Kwen-lun), на Суматрі, тодї піднеслись Ураль і Alleghanies, а також значна часть гір полудневої Африки[2]).

Добру моноґрафію найвисшого гнїзда гір Hart тз. Kalmit'у подає Mehlis[3]). Є то ґрупа гірска, що належить до маси Воґезів, лежить в їх продовженю і складаєсь з пестрого пісківця.

Французский „Massif central“ описує Friederichsen[4]). Се є в значній части властиво лиш рештка двох, кілька тисяч метрів високих гір, що сходились в тім місци в карбоньскій епосї. Море поступаючи від заходу проти сих гір стерло їх майже зовсїм з лиця землї і утворило великаньску абразийну поверхню. Центральний масив французский треба отже зачислити до кадовбових гір.

В часї, коли Альпи фалдувались, пережила ся верховина великі зміни. Цїлі системи обломів і прогалин перерізали єї, а з щілин видобулись вульканїчні маси, котрі до нинї остали важним динамічним і морфольоґічним елементом сеї околицї. Вигаслі вулькани

---

[1]) Wiss. Veröffentlichungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig 1899. 195.

[2]) Geographische Zeitschrift V. 563 дд.

[3]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XXII. 255.

[4]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. 514.

Овернії походять з тих часів. Два великі вулькани Mont Doré і Cantal, що лежать на полудне від оверньского вульканічного реґіону, не мають з ним нічого спільного, повстали нерівно давнїйше і визначують ся промінисто уложеними долинами, над котрих виобразуванєм працювали між иньшими чинниками також ледівцї. Они вкривали два рази верхи тих двох гір.

На полудни массива лежать т. з. Causses — вапнякова верховина майже поземо верствована з численними ярами і красовими явищами.

Про бритийский массив занотую працї Hull'а і Codrington'а. Они розслїдили запалі під зеркало моря долини в Уельсї, Девонї і Корнуельсї, котрих дно покрите ледниковими відложенями. З сего вносить Hull, що в треторядї і при початку ледовоі епохи бритийский массив був сильно винесений і сягав аж до Ісляндиї¹).

Для ґеоґрафії Альп мала дуже велике значінє подорож бальоном, що єї відбув понад сими горами цюрихский ґеольоґ Heim 1898. X. 3.²). Він сконстатував, що релїєф гір представляєсь дуже слабим, коли находим ся в бальонї високо понад ними. Гори видають ся дивно плоскими, так що наші мапи представляючі гори нерівно виразнїйше представляють плястику терену, чим погляд з бальона. Пр. гори Юра не виглядали зовсїм на гори і тілько смуговате уложенє лук і лїсів вказували на ріжницю висот. Зате, коли бальон перелетїв понад Альпами і находивсь значно на північ, розвинулась перед воздушними пловцями чудова панорама Альп. Виглядали як заледенїлі филї велитенного моря, гори Юра зате лиш як незначні морщини. Головні черти ґеольоґічної будови були на причуд виразні, але подробицї зовсїм затирались.

Моноґрафію Віденьского лїсу подав Paul. Будова сих гір така сама, як в більшости пасем в східних Карпатах флїшевих: долїшна крейда, горішна крейда, гієроґліфові верстви старого треторяду³).

До многих давнїйших поділів Альп прибув тепер новий, знов на чисто ґеольоґічних підставах опертий Diener'а. Дїлить він именно Альпи східні і то на пять головних полос. Від півночи перша є флїшова полоса, сильно пофалдована, подібна до карпатскої. Друга полоса, що без визначної ороґрафічної границї припирає до тамтої

---

¹) Quarterly Journal of the Geological Society. 1898. LIV. 251. Geological Magazine 1898. V. Nr. 8. 353 дд

²) Die Fahrt der Wega. Basel 1899. 55.

³) Jahrbuch der k. k. Geologischen Reichsanstalt 1898. XLVIII. 53 д.

від полудня, є північна вапнякова полоса, також значно пофалдована, обмежена від полудня довгими поздовжними долинами. Слїдуюча центральна полоса виказує пару тектонїчних лїнїй; коло неї ґрупують ся старокристалїчні маси. Від полудня окружає ту полосу тз. періадріятийский окрайний лук (periadriatischer Randbogen) зложений з вибухових скал. Вздовж ріки Драви тягне ся четверта полоса т. зв. дравска, що складаєсь з двох поменьших. Найбільше на полудне висунена і заразом найширша є полуднева вапняна полоса, що переходить в Крас і стикаєсь там з босаньско-герцеґовиньскою флїшовою полосою. Відносини в східних Альпах є отже досить скомбіновані і про симетричність їх не може бути мови[1].

Ґеотектонїчну загадку будови ґлярненьских Альп, де як звісно молодші верстви лежать під старшими, вияснив Heim лежачою подвійною фалдою. Rohtpletz по 20-лїтних дослїдах дійшов до гадки, що сей проблєм дасть ся вияснити лиш тим, що при фалдованю сеї части Альп верстви попукали і повстали куснї пересунулись оден на другий. Місцями і три такі плити збудовані нормально з юри, крейди і еоцену, положились одна на другій[2].

Річні проломні долини в північних Альпах вапняних обговорює Diener[3]. Первісно дїлила одноцїльна поздовжна долина північні вапняні Альпи від центральних. Нинї она подїлена на кілька частий проломами рік: Inn, Chiemseer Ache, Saalach, Salzach, Enns. Всї ті проломи є ерозийні і сягають ще в крейду, але початок всїх був все таки тектонїчний. І так пр. пролом Інну повстав там, де фалди троха відхилились на північ. Пролом Салях і Сальцах лежить на тектонїчній лїнїї, а Анізї зробили дорогу гакуваті обломи в верствах.

В босаньских, герцеґовиньских і чорногорских горах робив дальші морфольоґічні дослїди Cvijić. Головні елєменти пластики динарского системи зводить він до трех головних елєментів. Се є 1) широкі хребти і високорівні, що переходять з динарского напряму (NW-SO) до т. з. метохийского (NO—SW). Їх поверхня є сильно порізана красовими явищами і ґляцияльними впливами 2) Яри подібні до каньонів, що повстали наслїдком ерозиї рік Ніва, Тарра, Неретва і їх допливів. 3) Т. з. polja, великі зі всїх сторін ограничені кітловини – специяльна властивість динарского системи[4].

---

[1] Petermanns Mittheilungen т. 45. р. 1899. ст. 204 дд.

[2] Rothpletz, das geotektonische Problem der Glarner Alpen Jena 1898. Fischer. Naturwissenschaftliche Rundschau 1899 286.

[3] Mittheilungen der k. k. Geogr. Gesellschaft in Wien 1899. XLII. 140.

[4] Abhandlungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien 1900. II. 149 дд.

Свої дослїди над Балканом (від 1895. р.) укінчив Toula 1899. р. і подав докладний образ морфольоґії сих гір[1]). Подїлити мож їх на дві части. Західну і північно-західну часть творять чисто фалдові гори, східну часть тектонїчні. Значну анальоґію має будова Балкану з будовою Карпат. По полудневій сторонї Балкану маєм такі самі обломи, як на полудне від Карпат (і Альп). Таксамо в східній части тих обломів виплили великаньскі маси вибухові, як се видим у Карпат. Як на північ від Карпат, так і на північ від Балкану лежить велика крейдова тафля.

Істория розвитку Балкану є на думку Тулї така: Був ту старокристалїчний континент, що обломавсь і запавсь майже в цїлости в палеозоїчнім періодї. В триясї було ту плитке море, а по перерві, ріжно в ріжних місцях довгій, глубше море, що від лїясу аж по еоцен заливає сї околиції. Вже при кінци крейди начинають ся ту андезитові вибухи. Від оліґоцену є Балкан і его околиця сушею а в старшім міоценї відбуває ся головне фалдоване его верств.

Гори Sierra Nevada були предметом дослїдів і опису Rein'a. Характеристичними моментами морфольоґії сих гір є: Остре відграничене на півночи і полудни, рамена виходять від виразного острого хребта в той спосіб, що рамени відповідає всегда з другого боку хребта кітловата долина. Тутешнї кари мають дуже стрімкі збоча, а в серединї малі плиткі озерця. Їх відпливи спершу пливуть між плоскими берегами, потім стають береги дуже стрімкі і долина переходить в форму звану Barranco. Повстане тутешних карів не приписує Rein ледівцевій ерозиї, а вітріню і дїяльности пливучої води. Цїлї гори дїлить Rein з чисто ороґрафічних засад на три части: західну, центральний массив з найвисшими шпилями і східну[2]).

З поїздки в Угаль підчас ґеольоґічного конґресу в Росиї 1898. повстало пару розвідок: Credner'a, Frazer'a, Friederichsen'a Tietze'ого і Philippsona, що вийшли в 1898. р. Всюди констатують ся: односторонність і асиметрия. Tietze вважає еї тектонїчною, Philippson позірною, викликаною абразийними явищами[3]).

В Кавказї маєм до занотованя три працї учених, що робили ту дослїди в р. 1897. і 1898. Dechy подорожував по східнім Кавказї, а іменно в дотепер майже незнаних Хевсурийских горах. Они скла-

---

[1]) Denkschriften der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien. Math. nat. klasse LXIII.

[2]) Abhandlungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. I. зош. 2 і 3.

[3]) Petermanns Mittheilungen 1899. Lb. 39.

дають ся головно з лупака ілового. Долини каменисті безлїсні, ледівцїв майже нема, бо гори, хоч і високі та стрімкі, так що нема місця на утворенє фірну[1]). Буш розслїджував північно-західний Кавказ, іменно склони ґрупи Elbrus. 190 ледівців, між тим 100 незнаних, розслїдив Буш і сконстатував, що ледівцї північного склону від 20 лїт постійно меньшають. Ботанїчні дослїди показали велику ріжницю між веґетациєю полудневого а північного склону; на полудневім в наслїдок більших опадів веґетация буйнїйша[2]).

Найважнїйші вислїди дала однак найкоротша, бо лиш 4 дни треваюча подорож поперек Кавказу по грузиньскій військовій дорозі Heim'а. Сей, найбільший може знаток Альп, зладив на підставі своїх заміток порівнуючий образ Кавказу і Альп. Кавказ не може мірятись з Альпами красотою і імпозантностию видїв, хоч є висший. Кавказкі пригіря є дуже монотонні, бо верстви підносять ся лиш поволи ідь горам, а в Альпах фалди є перевернені на північ — проте пригіря є стрімкі і мальовничі. Західна а східна часть Кавказу дуже ся ріжнять в своїм зверхнім виглядї. Східні кінцї гір є каменистою, сильно порізаною горбовиною. Західні окраї гір є лїсисті, зближені видом до Апенїнів. Долини слабо розвинені, діяльність моря випереджує ту значно ерозию пливучих від. Лишень осередок гір, а особливо ґранїтова полоса, має альпейский вигляд, но і ту недостає ріжнообразности Альп. Долини середної части гір є подібні до альпейских, але не так мальовничі. З причини браку долинових ступенїв мало є водопадів. Брак озер в долинах також зменьшає красоту видів Кавказу.

Впрочім тектонїчні і ерозийні явища представляють много анальоґій. Такі самі ту потоки, явища вітріня, форми хребтів і верхів, ледівцї, морени, насипи і т. д., а іменно в центральній части гір.

Що до ґеольоґічного складу верств є Кавказ тим цїкавий, що нема ту зовсїм кристалїчних лупаків і триясу. Підложе палеозоічне складаєсь головно з ілових лупаків. Юрайскі відложеня подібні як в Альпах; крейда слабо заступлена, зате треторяд, а в нїм сарматскі верстви, займають много місця.

Найзначнїйше ріжнить ся Кавказ від Альп тим, що в єго центрі появляють ся вульканн. Є ту еруптивний дуже старий ґраніт. Найновійші вибухові скали, що творять черен велитнїв — вульканів

---

[1]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. Nr. 7. ст. 331.

[2]) Извѣстія имп. русскаго географическаго Общества. XXXIV. 1898. 519 дд.

Ельбруса і Казбека, є андезитами. Оба они вже вигасли і в історичних часах не чувати про їх вибухи, але струї ляви тих вулканів походять що найвчаснїйше з ледової епохи або і початків алювіяльної. Ті вульканїчні прояви зближають Кавказ до Андів.

Тектонїка Кавказу значно простїйша, як Альп. Є одна центральна кристалїчна полоса, а по обох її боках йдуть симетрично: палєозоїчні лупаки, ліяс, доґґер, мальм, треторяд. Нема ту пр. кількох центральних кристалїчних массивів, кількох крейдяних і юрайских полос, треторядом виповнених кітловин і т. д. Тектонїчні явища, як фалди, обломи і т. д. значно меньших розмірів. Головне фалдоване припадає на плїоцен і було одноразове — Кавказ є отже того самого віку, що Альпи. Але пізнїйші судьби обох гір були иньші. Підчас дилювіяльної епохи Альпи дещо запались і їх долини затопили озера, підчас коли сучасно в Кавказї вибухли андезитові вульканн. Кавказ має проте висші шпилї, але Альпи є стратиґрафічно, петроґрафічно і тектонїчно далеко ріжнороднїйші і величнїйші. Они повстали через далеко сильнїйший фалдовий рух, як Кавказ[1]).

Морфольоґію Тіен шану обробив Friederichsen. Здогад Richthofen'а, що істнує цїлий тіеншаньский систем, новійші дослїди в тих околицях вповнї виправдують. Властивий Тіеншан ограничити треба після Friederichsen'а від півночи пасмом Тарбаґатай, а від полудня памірским Аляєм, котрий однак враз з Гіндукушем і памірскими хребтами без сумнїву належить зачислити до Тіеншаньскої системи в ширшім значїню[2]).

Richthofen займаєсь рядом східно-азийских обломів, що тягнучись від місця, де Янґтсекянґ виступає з гір, через останні вирости Квенлюна, вздовж западного спаду високорівнї Шансі, а в кінци вздовж Хінґану мають для морфольоґії східної Азиї велике значінє[3]).

В Манджуриї відкрив Cholnoky базальтову тафлю велику як Галичина, много базальтових решток вульканів і велику абразийну площу, що обнимає мабуть простір від Мукдена аж поза Гоанґго. Продукта колишньої абразиї змішані з воздушними утворили після Ch. китайский лятерит[4]).

Дуже важні причинки до ґеольоґії і ґеоґрафії полудневої Сибіри дали дослїди підприняті російскими інженерами і гірняками

---

[1]) Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1898. XLIII. 25 д.

[2]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. 1899. 1 дд.

[3]) Sitzungsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1900. XL. 888 дд.

[4]) Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. 8 дд.

при нагодї будови великої сибірскої желїзницї. Іменно в Трансбайкалії відкрито множество цїкавих тектонїчних явищ[1]).

Ґеотектонїчні відносини Трансваля і близьких єму країн представив Schenck на підставі своїх трилїтних дослїдів в тім краю. Південну Африку порівнує він з переверненою мискою, якої краї становлять: ґнайсова плита краю Дамара і Намаква, Капланд і височини Oranje і Трансваль; середину занимає пустиня Kalahari. Schenck звернув увагу на се, що Zwarte Berge є властиво фалдовими горами. Тафлї Karroo дає S. дуже великий простір, зачисляючи до неї цїлий східний і північний Капланд і цїлу височину Oranje. Він є також приклонником теориї Rehmann'a, що на побережу Наталю наступив в юрайскій епосї великий облом західного краю полуднево-африканьскої височини. Подїл Трансваля на морфольоґічні країни тойсам, що у Ремана: Hooge Veld, Boshveld, височина над Лїмпопо, долина Лїмпопо[2]).

Високорівню (puna) Atacama в Кордилєрах південної Америки розслїдив Darapsky. Она не має відпливу, тому єї річки гублять ся, є много солончаків і солених озер. Цїкаві є кітловини зовсїм висохлі. Від сходу припирає та височина до Кордилєрів, що в тих околицях є сильно вульканїчні. І сама височина (в найнизшім місци 2100 m. висока) є перерізана многими рядами відосібнених гір часто вульканїчних і має много термів. Слїди колишних ледівцїв досить значні[3]).

Верховину Antioquia в північно-західній Колюмбії розслїдив Regel. Она складаєсь головно з кристалїчних скал. Ґнайси і кристалїчні лупаки є сильно пофалдовані, а часто зметаморфізовані. Від півночи і сходу ограничають верховину обломи, від заходу она припирає до Кордилєрів, котрих будова є дуже в тім місци замотана[4]).

XVI. Діяльність моря — береги і острови.

1. Бігун т. з. континентальної півкулї означив новою методою Krümmel'a Beythien. Лежить він після него при устю Льоари під

---

[1]) Petermanns Mittheilungen 1899. Lb. 42.

[2]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. 60 дд

[3]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. XXXIV. 281.

[4]) Sitzungsberichte der phys. med. Gesellschaft zu Würzburg. 1900. Nr. 4.

$\varphi=+47{\cdot}5^0$, $\lambda=-2{\cdot}5^0$. З того виходить для сеї континентальної півкулї 47·8% суші, 52·2% води. Для океанїчної півкулї вийшло 6·4% суші, 93·6% води[1]. Завважати належить, що Penck є за тим, щоби прийняти два бігуни для континентальної півкулї, які можуть припасти на Бретанїю або Foix після того, чи Японїю зачислимо до морскої чи сухопутної півкулї землї.

Про морфольоґію побережий взагалї написав обширну студию Gulliver[2].

Побережа нїмецкого моря, о скілько належать до нїмецкого цїсарства, описав Haage. Підчас оліґоцену була цїла північна Нїмеччина покрита морем — оно відтягнулось підчас міоцену так, що в пліоценї лиш низина над устєм Рену була під водою. В ледовій епосї части північно-західної нїмецкої низини були від часу до часу заливані морем. В алювіяльній епосї сконстатувати можна лиш додатні пересуненя берегу, дотепер пр. над Долялртом досить значні. Дуже цїкаві данї наводить H. про вплив приливу і відпливу на побережа та про замерзанє моря при березї і річних усть. Що до квестиї повстаня маршів і ваттів занимає H. посереднє становище припускаючи значний вплив річним осадам, але головну ролю віддаючи хемічній та механїчній працї моря, що витворює намул і пісок та єго громадить. Що до повстаня фризийских островів і т. з. галліґів думає H., що колись суша сягала на захід аж поза нинїшні острови і була вкрита пісковими видмами. Поза видмами лежали депресиї, подібно як днесь в Голяндиї. Наслїдком додатного пересуненя берегу море вдиралось в устя рік. Они вимивали і утворили ляґуни прибережні. Поволи наслїдком западаня ся набережа розширились горла річні, ляґуни получились разом і з давнїйшого края суші остали лиш острови і острівцї[3].

Докладнї обсервациї, підприняті на нїдерляндскім побережу, виказали для північної Голяндиї пересуненє лїнії високого, а головно низького стану води в некористь моря, хоча филї значно підгризли підніже берегової видми. На острові Texel і побереже і видма значно пересунулись ідь морю і зискали на просторі. І хоч

---

[1] Beythien. Eine neue Bestimmung des Pols der Landhalbkugel. Kiel 1898. Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. LB. ст. 3.

[2] Proceedings of the American Academy XXXIV. 151 дд.

[3] Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. 35 дд. Petermanns Mittheilungen 1899. 269–271.

в деяких місцях показавсь убуток суші, то в переважнім числї случаїв суша приростає постійно¹).

Що утрата суші може наступити не тілько в наслїдок додатного руху моря, але і під впливом незвичайно сильних филь морских, сьвідчать найлїпше западні береги Франциї. Ту море посуваєсь що року в деяких околицях о 1 метер. Побережа зложені з більше відпорних скал пр. з вапняка меньше підлягають абразиї, але все таки кілька дециметрів здобуває щорік море. Лекше прийдесь нам вірити в се, коли возьмем на увагу великаньску силу поодиноких бовванів. Один такий вспів в млї ока перевернути желїзну сиґналову вежу коло Biarritz 45 m. високу²).

Ще один дуже важний доказ, що східне побереже Італії щораз то приростає, прибув в послїдних часах. Коло місточка Adria — 31 km. від берега морского — найдено було при копаню два староримскі кораблї з многими иньшими старинностями³).

Дуже важну розвідку про розвій побережий полудневої Америка оголосив Arldt. Она визначуєсь головно тим, що увзгляднює дуже визначно вплив ґеольоґічного розвитку континенту на єго контури. Порівнуванє Пешля Африки з південною Америкою є зовсїм неумістне, бо контури побережий полудневої Америки зависимі є пр. на западї від фалдових гір, яких в Африцї майже нема. Найбільше анальоґій має полуднева Америка з північною: На западї великі фалдові гори, на сходї старі масові гори, в серединї низина. Така будова має великий вплив на контури континенту. Західні побережа полудневої Америки відповідають в повнї правилам пацифічного типу побережий, східні показують тип атлянтийский — обломів, що стають більші і обширнїйші ідь полудневи. Тим обломам належить приписати заостренє континентів до полудня⁴).

Западно-патаґоньске фйордове побереже представив на підставі власних подорожий Steffen⁵). Від 41^0 полудневої ширини аж до свого кінця є побережні Кордилєри Патаґонії порозривані фйордами, тим більшими і виразнїйшими, чим дальше на полудне. Під $46^1/_2{}^0$ ширини сягають ледівцї аж до позему моря, впливаючи значно на

---

¹) Tijdschrift K. Ned. Aardrijkskundig Genootschap Amsterdam 1898. XV. 760. Petermanns Mittheilungen 1899. 40.

²) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. Bd. XXII. 1900 ст. 425.

³) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. ст. 290.

⁴) Mittheilungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig. 1900. 32 дд.

⁵) Veröffentlichungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. 204 д.

морфольоґію побережа. Вже Darwin виказав, що оно поволи підносить ся і явища підношеня ся суші є в многих місцях дуже виразні, хоч місцями можна їх віднести до діяльности води і ледівцїв, що своїми моренами підвисшили в многих місцях побереже і утворили численні мілини в морю.

2. Досліди над островами мають для ґеоґрафії дуже велику вартість, так з морфольоґічного, як і біольоґічного боку. До того ще дотичній части ґеоґрафії досить далеко до систематичности і суцїльности. Досліди в тім напрямі ведуть ся досить пиняво.

В послїдних часах дуже заслуживсь коло тої занедбаної галузи ґеоґрафічної науки архикнязь Людвиґ Сальватор, що об'їжджає Середземне море і описує острови дотепер в науцї мало знані. Про кождий з них видає він опісля осібну моноґрафію. І так в р. 1898. видав описи островів Alboran (на схід від проливу Ґібральтар між Іспанією а Африкою) і Ustica (на Тиреньскім морі на NE від Палермо) і в 1900. р. остров Giglio (SE від острова Ельби). З них Ustica є збудована з вульканічних скальних пород, Alboran є молодою решткою колишнього континентального мосту між Африкою а Іберийским півостровом, а Giglio складаєсь майже виключно з ґраніту[1]).

Остров Bornholm описав Goerke[2]), не подаючи однак нічого нового про цїкаві тамошні відносини ґеольоґічні. Остров Медвежий розслїджував недавно Kessler шукаючи там камінного угля. Але поклади угля є там за малі, щоб виплатились[3]).

З описів азийских островів можна згадати про опис Філїпінів Le Monnier'a[4]) і островів Batan і Babuyan (між Люзоном а Формозою) Blumentritt'a[5]), що є тим важне, що ті в части вульканічні острови були дотепер дуже мало знані. Остров Різдвяний (Christmas Island на полудне від Яви) є тим цїкавий, що повстанє своє він рівночасно завдячує і вульканїзмови і кораля[6]). На увагу заслугує також опис острова Formos'и Японьця Yamasaki[7]) з тої причини, що подає нові клїматольоґічні дати вже за японьского пановaня зібрані в 5 ріжних обсерваториях острова. До ґеоґрафії острова

---

[1]) Пор. Mittheilungen der k. k. geogr. Gesellschaft. Wien 1899. ст. 105 д. 107 д.

[2]) Himmel und Erde 1898 ст. 225.

[3]) Geographische Zeitschrift. VI. 1900. ст. 176.

[4]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XXI. ст. 1 дд.

[5]) Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien XLI. ст. 593.

[6]) Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. ст. 292.

[7]) Petermanns Mittheilungen XLVI. 1900. ст. 221 дд.

Celebes прибув важний причинок в розвідцї про его ґеольоґічні відносини[1]). Ся розвідка відносить ся головно до тамошних вульканів. В тій розвідцї описані є також острови Sangir, славні страшним вибухом тамошнього вулькана в 1892. р., що розмірами нагадував Krakatau'ску катастрофу. Близько лежить остров Miangas, вважаний через довший час неістнуючим. Тепер Wichmann доказав его істнованя[2]).

Острови Океанії були від довшого часу предметом розслїдів, яко головний клясичний терен коралевих лав. В 1897. р. був на островах Fiji Agassiz, щоби зібрати на тамошнїх атолях нові дані на доперте своєї нової теориї повстаня таких коралевих рифів. Він виступив був ще давнїйше проти теориї атолїв Darwin'а, приписуючи їх повстанє не западаню ся суші, як сей, але дїяльности прибоя. Тої теориї обширнїйше представляти ту не будем, лиш завважаєм, що она є занадто скомплїкована. Єї недостаточність підносить Dahl головно що до коралевих лав архіпеляґа Бісмарка, обговорюючи загально коралеві теориї[3]). А вже найсьвітлїйше задокументували правдивість теориї Darwin'а верченя на коралевім острові Funafuti, де в глубинї 300 м. ще верчено в коралевих скалах, котрі могли в виду того повстати лиш при западаню ся підстави, на якій поселили ся коралї[4]). В теперішних часах трудно є на островах Океанії безпосередно сконстатувати їх западанє під поверхню моря (по Suess'івскій термінольоґії: додатний рух моря). Bülow мав в послїдних часах відкрити такий рух додатний моря на островах Samoa[5]), але Krämer доказує, що він помиливсь, та що на певно такого руху там сконстатувати не можна[6]).

З африканьских островів описаних послїдними часами є острови Aldabra типовим атольом[7]). Они лежать рядом з Маскаренами, Амірантами, Seychell'ами на найвисших шпилях підморского хребта, що є рештою давного великого континенту на Індийскім Океанї. Seychell'ї описав Zaffauk[8]) яко оден з найкрасших закутків землї.

---

[1]) Bücking в Petermanns Mittheilungen XLV. 1899 ст. 249. дд. 273 дд.

[2]) Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. ст. 290 дд.

[3]) Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1900. ст. 136.

[4]) Mittheilungen der k. k. geogr. Gesellschaft in Wien XLII. 1899. ст 44 Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. 46 д.

[5]) Globus т. LXXV. ст. 198 дд.

[6]) Petermanns Mittheilungen XLVI. ст. 8 дд.

[7]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XX. 1898. ст. 319.

[8]) Mittheilungen der k. k. geogr. Gesellschaft in Wien 1899. ст. 163 дд.

Они складають ся з старих кристалїчних скал і западають поволи під поверхню індийского океана. До вичислених архіпелягів можна би також зачислити вульканїчні Комори, з котрих одну: Mayotte описав Couarde[1]. Обширну монографію східно-африканьских островів подає Keller[2].

Вульканїчний архіпеляг Marquesas описує Steinen[3].

З американьских островів описав Barbados (Острови за вітром) Mayer[4], а Бермуди Verill[5] виказуючи, що они не є коралевого походженя, а складають ся з вапняка, що повставав з інфільтрованого піску з мушлями. Опісля остров в наслїдок додатного руху морского зеркала прийняв вид подабаючий на атоль.

Тернопіль, в грудни 1902.

---

[1] Ibidem т. XLII. 1899. ст. 263.

[2] Die ostafrikanischen Inseln. Berlin. Schall 1898. в Bibliothek der Länderkunde.

[3] Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin т. XXV. ст. 489 дд.

[4] Annalen der Hydrographie 1900. ст. 6.

[5] American Journal of Science Ser. IV. т. IX. ст. 399.

Очні хиби у новобранців*).

Написав

Др. Михайло Кос.

Хочу подати зіставленє очних хиб у новобранців в 655 случаях, про які я особисто видав ореченє за посьлїдні три роки. Сам материял походить в части ($^1/_6$) з військового шпиталю в Ярославі, де залога виносить около пять тисячів людий, по части з великого військового шпиталю в Перемишли, де залога сягає до десять тисячів жовнїрів. Найбільша частина новобранців, пiдданих ореченю, прийшла була до шпиталю виразно в тій цїли, щоби означити у них рефракцию ока і бистроту зору; незначна частина прийшла була з иньшими хибами, але про них запало остаточне ореченє на підставі очної хиби, котра була міродайною до адміністрацийної клясифікациї. Зовсїм не згадує ся в отсих стрічках про тих хорих, що прийшли до шпиталю лїчити ся зі своєї очної недуги.

Передовсїм треба мати на увазї те, що означити функцию очий у новобранців є значно тяжше, чим у клїнїчних хорих, де можна брати всї вискази огляданих хорих майже все за правдиві. Противно новобранцї мають важні причини робити такі вискази, що вони часто зовсїм не годять ся з дїйсностию. Вони мають вже наперед готовий плян туманити лїкаря, ще заки він почав їх оглядати; вони рішили причинювати справдїшну хибу або удавати таку, якої зовсїм не мають або знова зменчувати тоту хибу, яку мають. Проте мусить оглядаючий лїкар все тямити на се, що новобранець не піде єму на руку при огляданю очий, але противно він буде

---

*) Виклад виголошений 3. цьвітня 1902 в науковім товаристві військових лїкарів в Перемишли.

старати ся робити лїкареви всякі трудности. Тому треба й справдї назвати користним і лехким такий случай, де оглядане і означене очної хиби скінчить са в протягу одної години, хотяй така робота у клїнїчних хорих може покінчити ся вигідно в 10—15—20 мінутах. У новобранців мусить лїкар провірювати найпростїйші справи, щоби через контролю знайти потверджене раз найдених фактів. Коли два або три методи означуваня певних змін в оцї дадуть лїкареви той самий вислїд, то аж тодї він сьміє сам собі завірити. З тим усїм нераз такой годї собі в повнї довіряти та треба полишити остаточне порішене на пізнїйше; аж в той спосіб переконає ся лїкар, на жаль, не один раз, що така осторожність не була злишна. Тодї хвалить ся пословиця: ὁ χρόνος βέλτιστος ἰατρός.

Оглядане клїнїчних пацієнтів відбуває ся звичайно в той спосіб, що найперше означує ся функция ока. При тім дізнає ся лїкар, щó око видить і яка єго рефракция, на підставі особистих висказів оглядаього. Опісля дивимо ся до ока очним зеркалом і означуємо обєктивно рефракцию і тоті можливі патольоґічні зміни, які суть причиною найденої обниженої бистроти зору. Така дорога у наших новобранців була би занадто довга! Бо новобранцї мають звичайно собі властивий спосіб поведеня при допитах їх очий, от менче більше такий: коли емметроп має замір удавати, що не довиджує, то каже, що не видить добре без окулярів, або ще радикальнїйше, що „нїчого“ не видить. Вгнуте скло або й вигнуте о силї 1·0 діоптриї нїби то не має впливу на єго око, єму „всьо одно“. Скло о силї +2·0 D або —2·0 D нїби-то збільшає де-що бистроту зору; через скло о силї +3·0 D або —3·0 D нїби-то видить новобранець ще лїпше, але дивним дивом бистрота зору не є нїколи лїпша, чим $^6/_{24}$! Коли новобранець слабо приготовив ся до кампанії дуреня, то лехко дає ся зловити і каже, що видить добре окулярами, коли ся зложить два скла противного дїланя а однакової сили рефракцийної, пр. +3.0 D і —3.0 D, так що їх дїлане зносить ся взаімно і око дивить ся наче крізь віконне скло. Загально держать ся оглядані тої засади, що скла малої вартости діоптричної нїби-то не дїлають на їх око, а скла висшої вартости аж до певної границї, котрими очевидно гірше видять, нїби-то поправляють їх бистроту зору. Коли подасть ся їм ще висші окуляри то вони не видять „нїчогісїнько“. Майже все вистерігають ся они видїти більше, чим $^6/_{24}$, або сказавши ще простїйше, вони старають ся своїм поведенєм вмовити в лїкаря, що вони годні читати лишень три горішні рядки букв на таблицях Снеллєна. Тут очевидно мусів їх хтось поучити, — ще заки вони прийшли до військового шпиталю, — що такий новобранець неспосібний до військової служби, коли він в силї читати не більше, як три горішні рядки букв на таблицях, уживаних звичайно до означуваня бистроти зору. Коли такому новобранцеви каже ся читати букви Снеллєна з ріжних віддалень, то покаже ся, що єго мудрість тут вже кінчить ся. Тодї дістає ся в протягу кількох мінут нераз вартости для бистроти зору, котрі ріжнять ся від себе в десятеро. Такі вислїди осягаємо найчастїйше тодї, коли оглядане повторяємо через кілька днїв, слїдуючих по собі. Ледви чи треба осібно о тім згадувати, що такі дослїди забирають дуже багато часу і вимагають від оглядаючого лїкаря нераз надлюдської терпеливости. Деякі новобранцї суть в силї витревати навіть десять недїль при своїм фанатичнім замірі!

Короткозорий приходить звичайно з показьними, грубими окулярами на носї о силї 10·0 — 13·0 — 14·0 D, навіть тодї, коли єго короткозорість сягає ледви 1·0 — 3·0 D. Можна подибати й емметропів з окулярами —13.0 D, і то не так дуже рідко. Той род новобранців присягає ся, що без окулярів не видить „нїчогісїнько“, але зато видять нїби-то лїпше через скло о силї +1·0 D, або +2·0 D а навіть +3·0 D; кажуть, що висшими склами не видять „нїчогісїнько“. Так само не видять „нїчогісїнько“ або дуже слабо вгнутими склами о силї 1·0 до 8·0 або 10·0 діоптрий. Через тото скло, до якого навикли через вправу, видять навіть $^6/_6$, а суть тому так неосторожні, бо вони очевидно тої гадки, що не спосібні до військової служби вже тим самим, що видять через „таке грубе“ скло. Бідні дурисьвіти ще не знають, що лїкарі означують рефракцию незалежно від новобранця, без єго помочи а навіть против єго волї, між тим вони подали на „своє лихо“, що видять дуже добре або бодай на стілько, скілько потрібно до військово-адмінїстрацийних цїлий. Однако такі случаї належать ще до добрих. Звичайно старають ся короткозорі не показувати лїпшої бистроти зору, чим непоколибимі $^6/_{24}$, а лїкар мусить тодї взяти до помочи ріжні віддаленя, щоби дійти до цїли, бо межи новобранцями ледви котрий розуміє ся ва численю дробами.

Надзорі поводять ся так само, як емметропи.

Астиґматики держать ся найчастїйше недалеко правди; декотрі робять навіть бездоганні клїнїчні уваги і вискази, котрі годять ся з прикметами ока, які можна теоретично предвидїти. Всьо то поясняє ся тим робом, що висші степенї астиґматизму вже самі собою обнижають бистроту зору так сильно, що новобранцї з нею не суть спосібні до оружної служби. Малі степенї астиґматизму не впливають на поведенє новобранців, котрі поступають відповідно до своєї рефракциї. При означуваню астиґматизму давала менї скіяскопія так добрі результати, що вони зближали ся найбільше до субєктивних але певних висказів огляданих новобранців.

Головні меридіяни дають ся означити тим методом вже після кілька секундового огляданя і тому повторюю увагу, яку я зробив вже на иньшім місци[1]), що кождий військовий лїкар повинен присвоїти собі той метод огляданя ока. Означенє степеня астиґматизму при помочи скіяскопії вагає ся в тїсних границях з причини мимовольної аккомодациї огляданого підчас скіяскопованя; коли огляданий нарочно аккомодує, що впрочім також лучає ся, то границї вагають ся ще більше. Тому-то обходжу ся дуже нерадо без кератоскопу Javal'a і Schiötz'a, котрий дає результати функционально вправдї троха за високі але за те дуже точні. Але тим знаменитим інструментом не суть наразї випосажені навіть більші військові шпиталї, до яких безперечно належить і ґарнізоновий шпиталь в Перемишли. Означуванє рефракциї головних меридіянів в прямім образї дає при короткозорости де-що за високі вартости, а при надзорости за низкі в порівнаню з вартостями осягненими через функциональне означенє, бо оглядаючий дає ся легко звести на манївцї і аккомодує, приневолений до того в загалї не точним образом дна ока. Тим часом виключенє аккомодациї є при огляданю в прямім образї беззглядним услівєм.

При скаламученях прозорки стрічаємо ся часто з такими висказами, котрі можна опрокинути лишень через велику терпеливість і часте огляданє ока. Особливо не треба вірити висказам новобранця, коли обєктивне слїдженє дна ока при помочи очного зеркала не находить поважнїйших перепон в заломлюючих частях ока а огляданий каже, що є цїлком сьлїпий. Лїкар мусить научити ся оцїнювати в приближеню бистроту зору після степеня точности, з якою видить дно сьлїдженого ока, а опісля нехай старає ся, піднести субєктивну бистроту зору новобранця до означеної висоти. Лехко зрозуміти, що засада „$^6/_{24}$“ бистроти зору має на скаламученій прозорцї дуже широке поле до попису.

Недуги і зміни в сочцї, в склянім тїлї, в нервівцї, в судинници і в зоровім нерві суть майже не знані у новобранців. Ту годить ся по найбільшій части висьлїд обєктивного сьлїдженя з субєктивними висказами огляданого, котрий звичайно і сам не знає, чому не видить добре. Новобранцї з недугами тих частий ока жалують ся зовсїм поважно та справедливо на свою недолю.

---

[1]) Лїкарський Збірник, 1899. Про скіяскопію.

Новобранці, яких менї лучало ся оглядати, поводились всїляко відповідно до того, чи належали до тутешного (галицького) сільського населеня, чи до інтелїґенциї; дальше, чи се були Русини та Поляки або знова Жиди.

Коли Русин або Поляк удає якусь очну хибу, котрої не має, то поступає звичайно при тім так наівно, незручно і примітивно, що і без значнїйшого труду можна вислїдити правду і подїлитись нею з новобранцем. Коли то зробить ся, то новобранець приходить звичайно вскорі до переконаня, що єму проба не удала ся, що єго приловили на удаваню і він перестає удавати. Але не так робить Жид-новобранець! Він попадає з одного противеньства в друге, твердить діяметрально противні річи, на пр., що ніби-то видить, хотяй емметроп, найлїпше через окуляри о силї +3·0 D або – 3·0 D підчас того самого сьлїдженя, він видить очевисто, що пізнали ся на нїм, а мимо те не відступає нераз цїлими тижнями від свого твердженя. Такого новобранця може поконати лиш такий лїкар, котрий є так певний в обєктивнім сьлїдженю ока, що може сам собі завірити і котрий має на стільки терпеливости, що нею переможе навіть найзавзятїйшу упертість новобранця.

Сьлїдуюча таблиця на стор. 6. і 7. дає перегляд загального числа огляданих, з неї видно якість очних хиб і їх клясифікацию після урядового „припису для лїкарських оглядин новобранців“.

Неправильности на зовнїшних частинах ока суть дуже скупо заступлені (6 людей = 0.9%), бо їх можна лехко дозріти вже підчас бранки; як раз противно має ся річ з хибами в рефракциї, котрих не можна провірити без очного зеркала, а на се нема часу підчас бранки. Хиби в рефракциї становили проте більшу частину огляданих, числом 369 людий (56.3%). Найбільшу сьлїдуючу позицию чисельно становлять скаламученя прозорки і єї скалки (115 людий, 17.5%), потому слїдують внутрішні части ока: промінниця, нервівка, судинниця і зоровий нерв, разом 97 людий (14.8%), дальше сочка (35 людий, 5.3%). Зизоокість і дрожанє очий (Nystagmus) мало 32 людий (4.8%), помежи зизуючими на вні було троє люда з надзорою рефракциєю, коли противно анї оден короткозорий не зизував до середини. В кінци був оден анофтальмус.

Із загального числа 655 сьлїджених новобранців мало найбільше з них (313 людий) короткозорість, що відповідає 47.7%; емметропію мало 247 людий (37.7%), а надзорість 95 людий (14.5%).

Загальне число	E	My	Ht	Часть ока	Род хиби	Спосібний до всякої військової служби
1	3	—	—	Внїшні части ока 6	Ectropion	—
3	1	—	—		Blenorrhoe sacci lacr.	—
1	1	—	—		Ptosis oc. utr.	—
1	—	—	1		Symblepharon posterius	—
115	84	25	6	Прозорка 115	Maculae corneae et leucoma adherens	29
4	3	1	—	Сочка 35	Membra pupillaris perseverans	3
11	8	1	2		Cataracta traumatica	—
9	4	5	—		C. corticalis partialis	1
5	2	1	2		C. polaris anter., poster., fusiformis	—
1	1	—	—		Cataracta mollis	—
5	4	1	—		Luxatio lentis	—
14	11	1	2	Промінниця, Нервівка, Судинниця і Зоровий Нерв 97	Iridocyclitis	1
2	2	—	—		Arteria hyaloidea perseverans	—
7	3	2	2		Retinitis pigmentosa	—
2	2	—	—		Retinitis proliferans	—
8	6	2	—		Ablatio retinae	—
4	2	—	2		Neuropapillitis	1
34	23	6	5		Atrophia Nervi optici	1
8	5	2	1		Retinochorio ditis	1
4	3	1	—		Ruptura chorioideae	—
1	—	1	—		Coloboma chorioideae	—
13	1	10	2		Coloboma при вступі N. opt.	3
63	63	—	—	Рефракция 369	Emmetropia	63
223	—	233	—		Myopia	51
49	—	—	49		Hypermetropia	21

Спосібний до запасової служби помічної	Неспосібний до оружної служби	Неспосібний до ніякої служби у війську	УВАГИ
—	1	—	—
—	3	—	1 раз з фістулою (слизьною)
—	1	—	—
—	1	—	—
18	64	4	—
1	—	—	1 раз також retino-chorioiditis
—	11	—	—
—	6	2	1 раз також Microcornea o. u. 1 „ „ Astigmatismus mixtus
—	5	—	1 раз також Strabismus convergens 1 „ „ „ divergens
—	1	—	—
—	5	—	1 раз також Nystagmus horizontalis
—	13	—	1 раз виконано enucleatio bulbi
—	2	—	1 раз також Cataracta polar. ant. et post. тай membrana pupil. persev.
—	6	1	1 раз також Cataracta polaris posterior
—	2	—	—
—	8	—	—
2	—	1*)	*) Abscessus cerebri
1	27	5	13 разів на однім оці 21 разів на обох очах; між тим було еще 1 раз Cataracta polaris anterior 1 раз поражене 3 прямих мяснїв 2 рази Strabismus convergens 2 „ „ divergens
—	5	2	1 раз після уразу, з полишенєм зеленавих слїдів з кровотоку 1 раз також поражене всїх мяснїв порушаючих очну галину, тай Atrophia N. optici
—	4	—	1 раз також Ablatio retinae
—	1	—	також Strabismus divergens
3	7	—	—
—	—	—	1 раз нервові волокна з товщом
19	148	15	1 раз Insufficientia M. M. rect. ext.
7	20	1	19 разів до 5·0 D { 1 раз microcornea o. u.; 1 раз нервові волокна з товщом } 26 разів до 10·0 D 4 рази до 12·0 D

Загальне число	E	My	Hт	Часть ока	Р о д х и б и	Спосібний до всякої військової служби
9	—	9	—	Refraction 369	Astigmatismus myopicus simplex	3
5	—	5	—		Astigmatismus myopicus compositus	2
1	—	—	1		Astigm. hypermetropicus simplex	—
7	—	—	7		Astigm. hypermetropicus compositus	2
2	—	1	1		Astigmatismus mixtus	1
11	3	—	8	Хиби положеня 32	Strabismus convergens	—
8	2	3	3		„ divergens	2
13	9	3	1		Nystagmus	—
1	1	—	—	Брак ока 1	Anophthalmus	—
655	247	313	95	655	—	185

Дотично клясифікациї треба те піднести, що більшу частину всїх сьлїджених треба було признати неспосібними до військової служби, а іменно було 385 новобранцїв (58.7$^{0}/_{0}$) неспосібних до оружної служби, а 31 (4.7$^{0}/_{0}$) неспосібних до нїякої служби, разом 416 новобранцїв (63.4$^{0}/_{0}$) неспосібних. Супротив того стоїть 185 людий (28·2$^{0}/_{0}$) зовсім спосібних до служби і 54 (8.2$^{0}/_{0}$) спосібних до запасової служби помічної (Ersatzreserve), разом проте було спосібних 239 огляданих новобранцїв (36.4$^{0}/_{0}$).

Про найбільшу частину сьлїджених 63 емметропів, признаних спосібними, треба сказатя, що вони позволили собі на зовсім злишне означенє функциї і рефракциї ока в надїї, що притім омануть лїкаря і на тім дещо скористають. Велика частина сих новобранцїв належала до почитателїв сакраментальної бистроти зору $^{6}/_{24}$. Ще певнїйше дасть ся то само сказати про тих „короткозорих“ (51 + 19 = 70), котрих признано спосібними до служби, бо вони

Спосібний до запасової служби помічної	Неспосібний до оружної служби	Неспосібний до ніякої служби у війську	УВАГИ
1	5	—	1 раз також Strabismus divergens
—	3	—	1 раз також Coloboma при вступі N. optic.
—	1	—	—
1	4	—	1 раз також Strabismus convergens 1 „ „ Microcornea o. u.
—	1	—	—
—	11	—	1 раз paralyticus
1	5	—	—
—	13	—	9 разів horizontalis 1 раз verticalis 1 раз rotatorius et horizontalis; притім було: 1 раз також Atrophia N. optici 1 „ „ Strabismus convergens 1 „ „ „ divergens
—	1	—	—
54	385	31	—

мали в малім степени своєї хиби неначе сказівку, як мають поступати, щоби не мусїли познакомити ся близше з військовою службою, то є: наложити окуляри о силї —13·0 D замість —1·0 або —3·0 D і того тримати ся постійно!

У короткозорих неспосібних до військової служби (148+15=163, т. є 69.9% всїх слїджених міопів) була міродайною при клясифікациї головно високість короткозорости, котра переходила 5·0 D; найбільша частина з них мала кромі того ще ось які хиби: вигнутє заднього бігуна ока (Staphyloma posticum Scarpae), зміни в нервівцї і судинници задля запаленя (retino-chorioiditis), скаламученя скляного тїла — і тоті-то хиби були власне причиною, що 15 сьлїджених короткозорих (6.4%) мали так ниську бистроту зору, що вона не досягала навіть $^1/_6$ на лїпшім оцї, через що тих новобранцїв треба було признати неспосібними до ніякої служби у війску.

В переділці „Увага“ є записані деякі значнійші хиби, найдені на очах по-при других більших і міродайних до клясифікациї, ось деякі з них: 3 рази microcornea, 2 рази волокна зорового нерву з товщом (markhaltig), 2 рази пораженє мяснїв, порушаючих очну галину, 1 раз ослабленє (інсуффіцієнция) простих мяснів вн\u0456шних при короткозорости з подвійними образами лежачими по тім самім боцї.

Переміна материї при акромеґалії.

Написав

Др. Вячеслав Морачевський.

Помимо дуже численних розправ[1]) про акромеґалїю находимо розмірно мало даних про переміну материї при тій недузї. Праця A. Schiff'a[2]) подає нам вправдї найбільше що о тім звістно, однак не може мати значіня дослїду над переміною материї в стислім значіню того слова. Проте підняв ся я за принукою ВП. Пр. А. Ґлюдзїнського випрацьовати білянс найважнїйших складових частин видїлюваня, аби подати причинок до пізнаня тої інтересної недуги.

Дослїджуванє корму і видїлюваня переводив я в спосіб мною все примінюваний, що є описаний обширно в моїх попередних працях над переміною материї.

Всї складники корму аналїзовано наново, а введені в рахунок числа суть середні вартости з добре згоджуючих ся означень.

В першім рядї дослїдів обсервувалисьмо недужого через 18 днїв, потім наступила перерва на один місяць, а опісля ми почали другий ряд дослїдів що тревав 24 дни.

З анамнези недужого треба піднести, що він походить з околицї, в якій панує воле (struma). Перед 4 роками почув він сильні болї голови, а рівночасно зауважав він значну пухлинину кінчин, лиця і язика. То побільшенє мало тревати через 3 роки.

---

[1]) Pineles Fr. Sammlung klinischer Vorträge Nr. 242. — Sternberg M. Spezielle Pathol. u. Therapie von Nothnagel, Band VII 1897.

[2]) A. Schiff. Wiener klin. Wochenschrift 1897 Nr. 12 pag. 279.

Коли хорий перестав працювати (він є сїльский робітник), пухлинина уступила, але остало згрублене кінчин. В короткім часї по тім зауважав хорий, що єго зір погіршив ся, здавало ся єму, що поле видженя зменьшило ся. Спрага щораз більшала. Він пив 8 лїтрів води денно і їв дуже богато. Мимо того єго сили ставали що раз меньші а наклін половий зовсім заник.

Status praesens подає значне побільшене носа, уст і язика, а також ніг і рук. Також обобічна геміянопсія. Моч виказує 2—3% цукру, денна скількість єго виносить 2—4 лїтри. Внутрішні орґани кров і зміст жолудка не виказують нїчого неправильного.

Диєта складала ся з:

		N	Cl	P	Ca
1 лїтра молока,	що відповідає	5·050 gr	0·912 gr	1·286 gr	1·628 gr
450 gr булки	„	6·117	1·535	0·565	0·182
250 cm булїону	„	0·499	0·816	0·310	0·053
298 gr beafsteak-у	„	13·329	5·096	0·884	0·078
304 gr бульби	„	0·784	0·156	0·214	—
81 gr яєць (2 шт.)	„	1·707	0·134	0·188	0·048
65 gr масла	„	0·142	0·012	0·051	0·021
800 gr содової води	„	—	0·028	—	0·025
4 gr кухонної соли	„	—	2·430	—	—
		27·635 gr	11·415 gr	3·478 gr	1·606 gr

Ми поставилисьмо собі за задачу в першім рядї дослїдів зобразити відносини виділюваня. Тому увзгляднено в мочи побіч азоту, хльору, фосфору і вапу, котрих білянс обраховано, ще і найважнїйші складники мочи. Означилисьмо проте мочник, кислоту мочову, ксантинові засади, амоняк, мінеральну сїрчану кислоту, орґанїчну сїрку, сїрчану кислоту естрів, орґанїчний фосфор, звязаний з алькаліями, і з квасними фосфатами, вкінци соли потасові, содові і маґнезіові.

З огляду, що денне означуванє усїх складників вимагало богато часу, ми означали деякі з них лиш від часу до часу, так що на кождий період випадало що найменьше одно означенє.

Крім того зволив ВП. студ. мед. Райхенстайн виконати під моїм проводом означенє амідового азоту, а також монамінового і діамінового в мочи методом впровадженим Hausmann'ом[1]) а примінениим Pfandler'ом[2]) до мочи.

---

[1]) Hausmann: Zeitschr. f. physiol Chemie B 27 p. 95.

[2]) Pfandler: Idem B. 30 p. 75.

Перший ряд дослїдів подїлив я на 6 періодів: Перший, що тревав 6 днів, служив до ориєнтациї і виказав видїлюванє 3.325 cm^3 мочи денно з 24.108 gr азоту.

Азот в калї 0·532 gr pr. d.	22·442	мочник
	0·4293	мочова кислота
	0·0978	ксантинові засади
	0·9275	амоняк

Роздїл азоту після Pfandler'а (l. c.)	1·277 N.	що дає ся тяжко віддїлити (осад
	12 961 F.	„ „ „ „ „ (процїд)
	1·307 n.	що дає ся легко віддїлити (осад)
	7·589 f.	„ „ „ „ „ (процїд)

Хльораки в калї 0·006 gr	8·991	хльораки обчислені як Cl
Сульфати	1·434	мінеральна сїрчана кислота як S
	0·4656	орґанїчна S
	0·1094	сїрчана естрова кислота як S

Фосфати 0·244 gr в калї	1·7037	мінеральний фосфор як P
	0·8474	квасний „ „ P
	1·3802	алькалїчний „ „ P

Металї 0·526 в калї 0·037 gr	6·442	соли потасові як K
	7.334	соли содові як Na
	0 3295	вап
	0·1941	маґн

З того видно, що в мочи не знайдено сильно впадаючих в око змін. Орґанїчна сїрка виходить троха за високо 24.5% а так само і соли потасові значно побільшені. Порівнаймо видїлений азот, хльор, фосфор і вапно з тими в спожитім кормі, то помітимо дуже значне затриманє в орґанїзмі усїх названих складників а іменно:

азот	2.947	11%	спожитого
хльораки	2.754	26%	
фосфор	2.530	45%	
вап	0·751	47%	

Відношенє азоту до иньших складників в кормі представляло ся як:

N : Cl : P : Ca = 100 : 41.3 : 12.6 : 5.9

в видїлинах = 100 : 36.5 : 7.9 : 3.5

Видїлена в калї скількість виносила для фосфору 8%, для вапу 30%, підчас коли 50% фосфору з корму а 20% солий вапнових відійшло через нирки.

Подане відношенє остало незмінне підчас першого ряду обсервациї.

Поданє таблєт тироідину не спровадило навіть збільшеня вилюваня азоту. Обсервоване A. Schiff'ом виділюванє фосфору в калї моглисьмо вправдї констатувати, але лише в дуже малім ступни. Аж подаванє 9 таблєт денно справдило збільшенє видїлюваня азоту, так що тепер орґанїзм затримував лиш 1.3 до 0.8 gr pro die, що виносить 5—3% спожитої скількости.

Зменьшенє задержаня фосфору можна було нотувати як при 3 таблєтах денно так особливо при 9 таблєтах, але зато росла через цїлий час подаваня тироідину скількість задержуваного вапна аж до 60% спожитої скількости. — При подаваню тироідину занотовано зменьшенє тяжко віддїляючого ся азоту і то даючого ся здрулити фосфоро-вольфрамовою кислотою і не даючого ся; значно збільшений був тоже легко віддїляючий ся не даючий ся здрулити фосфоро-вольфрамовою кислотою азот (мочник etc.). Легко віддїляючий ся даючий ся здрулити остав без зміни.

При подаваню таблєт з гіпофізи моглисьмо вправдї спровадити утрату азоту, що йшла рівнобіжно з збільшеним видїлюванєм води і хльору, але фосфати і вапневі соли остали при тім незмінені. Збільшене видїлюванє азоту відносило ся до усїх сполук азоту рівномірно: так було видїлюванє амоняку, мочової кислоти і т. д. без зміни в відношеню до азоту. Числа Pfandler'а показували те характерне, що тепер тяжко розкладаючий ся, не даючий ся здрулити PWr кислотою азот ішов в гору в противеньстві до видїлюваня фосфору, підчас коли прочі оставали без зміни. — Видїлюванє цукру ішло рівнобіжно з скількостию мочи.

З першого проте ряду дослїдів, довідалисьмо ся, що акромеґалїя побіч азоту і хльору затримує фосфор і вап; перші два дають ся виділити через таблєти тироідину і гіпофізи, але фосфор а особенно вапневі соли упірно задержують ся.

По сконстатованю того звернулисьмо нашу увагу на вапневі соли і старалисьмо спровадити їх видїлюваня. З наших попередних досьвідчень[1]) пізналисьмо кисень і азотан срібла як середники, що побуджують видїлюванє вапна і старалисьмо ся дослїдити тут їх

---

[1]) W. Moraczewski: Virchow: Archiv f. all. Path. B 151 p. 22 u. 50 Zeitschrift f. klin. Med. $^5/_6$ B 33 p. 1.

вплив. Побіч тих середників дослїджувалисьмо фосфор на єго дїланє, що як звісно має значінє для зросту костий, і пробувалисьмо тоже недавно впровадженого aphrodisiacum Yochinbin Дра Зінґера. Послїдного примінювалисьмо тому, що акромеґалїя майже все провадить до імпотенциї, а також і в нашім випадку половий наклін заник зовсїм.

Цікаво було видїти, який буде мати вплив та побуджуюча субстанция на переміну материї. — А що головним предметом наших дослїдів були вапневі соли, то ми переводилисьмо аналїзу калу з найбільшою старанностию. Єго дослїджувано зовсїм сьвіжо, а в кождім періодї ряду дослїдів роблено одну аналїзу калу.

Означенє ограничилисьмо в мочи і калї до 4 складників N, Cl, P і Ca.

В першім періодї сконстатувалисьмо ще раз, що хорий оказує сильне задержанє всїх названих складників: N 16% P 46% Ca 60%. Притім видїлено 50% P через нирки, 7% з калом, Ca 8% через нирки, а 35% з калом.

Коли ми опісля далисьмо хорому через три днї вдихати кисень, задержанє всїх складників зменьшило ся. Соли вапневі видїлювали ся як через нирки (15% спожитої скількости) так і з калом обильнїйше. Видїлюванє фосфору з калом зменьшило ся, але з мочию видїлило ся кілька % більше так що білянс фосфору випав иньший.

О много скуточнїйшим оказав ся азотан срібла, подаваний в дозах 0.03 gr 6 разів денно, отже 0.18 gr pro die. При тім збільшило ся видїлюванє азоту і хльору (ретенция азоту виносила тепер 7%). Фосфати являли ся 60% в мочи а 8% в калї, вапневі соли 26% в мочи а 60% в калї. Через нирки видїлювана скількість вапна досягла в тім періодї своє maximum.

Дїланє фосфору було о стілько несподїване, що можна було надїяти ся нагромадженя вапна і фосфору в орґанїзмі. Тимчасом єго дїланє оказало ся дещо подібним як азотану срібла а в деякім взглядї ще сильнїйшим. Подаванє 0.005 gr фосфору денно споводувало збільшене видїлюванє калу, що мало рішаюче значінє для білянсу фосфору і вапна, а також страту азоту, що виносила 5% спожитої скількости, подібно і страта хльору виносила 24%. Ретенция фосфору спала до 20%, вапневі соли були в рівновазї, підчас коли досї жаден середник до того не допровадив. Так відходило в тім періодї 18% фосфору з калом, а 60% через нирки, а з вапневих солий 80% з калом, а 20% через нирки; отже при вапневих солях виходить виразне зменьшенє.

По кількох днях, в котрих виділюване вернуло до давного типу, подавано через два дні 5 пастильок Yochinbin’у. То справдило значне збільшенє виділюваня води а заразом і хльору, азоту і фосфору з мочию, — а соли вапневі остали ненарушені.

Пересїчні числа виділюваня в часї названих 5 періодів пояснюють те що сказалисьмо:

	I.		II.		III.		VI.		V.	
	Моч	Кал	Моч	Кал	Моч	Кал	Моч	Кал	Моч	Кал
Авот	25.87	0.70	26.37	0.78	28.76	0.84	29 27	2.08	28.57	0.49
Хльор	9.79	0.01	10.76	—	10.72	—	11.76	0.01	11.43	—
Фосфор	2.02	0.287	2.167	0.209	2.39	0.311	2.56	0.70	2.39	0.58
Вап	0.178	0.710	0.321	0.776	0 57	1.24	0.45	1.72	0.38	1.54

Задержане

	+		+		+		—		—	
Азот	5.47	16%	4.89	15%	2.44	8%	1.74	—5%	0.64	—2%
							—		—	
Хльор	2.07	18%	1.11	9%	1.06	8%	2.68	—20%	2.38	—20%
							+		+	
Фосфор	1.98	46%	1.89	40%	1.59	39%	0.91	+20%	1.18	+-30%
							—		+	
Вап	1.27	60%	1.07	50%	0.35	17%	0.0005	—	0.228	+11%

З того видно, що подаванє кисеня а особенно азотану срібла має великий вплив на виділюванє вапневих солий а особенно азотан срібла не дає ся нїякому середникови перевисшити. Хотяй навіть білянс вапна при подаваню фосфору випав майже неґативний, то всеж таки учить погляд на табличку, що виділюванє вапна через нирки при подаваню срібла дійшло до maximum.

Ті спостереженя повинні давати причинок до лїченя акромеґалії і ствердити факт, що через кисень, фосфор і азотан срібла в виділюваню наступають зміни, котрі повинно спровадити т. зв. специфічне лїченє але часом не спроваджує. В тім однак нїчо нема сказано о клїнічнім значіню ужиткованих нами середників.

Наші досліди тревали лиш що 4 днї і мали лиш оказати хемічне ділане. Про вплив на нервові забуреня на субєктивне почуванє, що може головно має за ціль подаванє тироідину і гіпофізи не можемо при уживаних нами середниках висказати ся.

Найважнїйші вислїди коротко зібрані суть ось які: 1^0 при акромеґалії затримує орґанїзм в собі азот, фосфор і вапневі соли; 2^0 таблєти тироідину побуджують збільшене виділюванє азоту, хльору і фосфору; 3^0 таблєти гіпофізи лиш — азоту і хльору; 4^0 кисень і азотан срібла всїх названих складників.

Лїченє трахоми і других запалень злучниці іхтарґаном.

Написав

Др. Михайло Кос.

Від часів Еберсового папіруса, се є від 16. віку до Христа, шукають люди за ліком на трахому — все безуспішно, або бодай не з таким успіхом, як би того бажалось, так що ще й нинї найлїпшими суть ляпіс і синий камінь. Сей послїдний згадує ся вже в папірусї, отже перетревав півчверта тисяча літ. Послїдні десятки літ принесли нам лїченє трахоми сублїматом, витисканєм зерен фоллїкулів) пенсетою Кнапа або нїхтями, дальше витинанєм переходової фалди злучниці тай йодовою тинктурою. Очевидно уживає ся також ляпісу, всяких вод з борною кислотою, з цинковими солями і багато дечого другого. До послїдних проб треба зачислити лїченє трахоми ляріґіном, протарґолем і іхтарґаном. Всї ті три ліки суть солями срібла з білковиною і суть нїби-то покликані заступити ляпіс. Про іхтарґан висказав ся дуже похвально Фальта[1]) і задля того поручило міністерство війни перевести пробне лїчен трахоми сим ліком в військових шпиталях.

Іхтарґан є злукою зрібла з іхтиолем, представляє брунатний порошок зі слабим запахом іхтиолю; в нім є 30% срібла, коли пр. в ляріґінї срібла є всего 11%. Іхтарґан розпускає ся легко в водї і дає брунатно-червонаву течу; по довшім часї (4—6 недїль) творить ся чорний осад в течі, се знак, що треба зробити на ново

---

[1]) Dr. Marczel Falta: Trachomhehandlung mit Ichthargan; Knapp und Schweigger's Archiv für Augenheilkunde, XLIII Band 1901.

розчин іхтарґану. Після Авфрехта[1]) ділає іхтарґан на тканину глубше, чим ляпіс; також більша є спосібність іхтарґану забивати бактериї, чим ляпісу.

Від цьвітня до кінця вересня 1902 р. переводив я проби з іхтарґаном на очнім відділї ґарнізонового шпиталю в Перемишли при слїдуючих недугах:

1. при трахомі,

2. при запаленю злучниці з сильним розвитком кульочок (фоллїкулів) (conjunctivitis follicularis),

3. при звичайнім нежиті злучниці (conjunctivitis simplex),

4. при своєріднім острім нежиті злучниці, при чім злучниця була сильно почервонїла, опухла і виділювала багато слизи. Цїлий процес тревав звичайно лишень кілька днїв і був властивий минувшому лїтови. В шпитальних записках ведено єго окремо пі іменем Ophthalmia catarrhalis,

5. при запаленях злучниці з витворенєм ґузків (conjunctivitis eczematosa, phlyctaenulosa, scrophulosa),

6. при Blenorrhoea neonatorum.

Я уживав 1% і 2% розчинів іхтарґану, ті розчини держали ся в темних фляшках і запускали ся до очий інстіллятором по однїй капли на горішні повіки, обернені попередно злучницею на верх; надмір течі обсушовало ся ватою. При тім вистерігав ся я терти ватою по поверхни злучниці, щоби не зривати механїчно поверховних верстов наболони, як се роблю також при стосованю ляпісу при очних недугах. З тої-то причини не уживано пензлїв, лишень інстиллятора і сему маю завдячити, що злучниця не підпадає темному закрашеню (argyrosis) навіть по кількамісячнім лїченю ляпісом або іхтарґаном. Розчин іхтарґану пече значно менше, чим одвітний розчин ляпісу і значно коротше. Можна сказати, що іхтарґан пече шість разів коротше, чим розчин ляпісу. Межи 1% а 2% розчином іхтаґану нема в тім зглядї значнїйшої ріжниці. Однакож деякі хорі відчувають печенє іхтарґану як раз міцнїйше, чим ляпісу; сї виємки суть індівідуальні і рідкі.

Ділянє іхтарґану при одиноких формах запаленя злучниці було ось яке:

1. При трахомі з pannus'ом і сильно розвиненим виділюванєм слизи ділав іхтарґан нераз дуже корисно і то в короткім часї, бо в протягу кількох днїх. Pannus з численними і добре розвиненими

---

[1]) Dr. Aufrecht, Ueber Ichthargan; Deutsche med. Wochenschrift 1900, No 31.

кровними судинами блїдїв за 3—5 днїв а видїлюванє слизи уставало або бодай зменшувало ся дуже значно. Але таке корисне дїланє не було постійне, ба навіть в однім случаю трахоми з pannus'ом обох прозорок був іхтарґан прямо шкідний, так що треба було по двох пробах перестати запускати іхтарґан. Іхтарґан показав взагалї слабший вплив в тих случаях трахоми, де ходило головно о погрубілу злучницю з бородавковатими наростями на ній, або знов, де були дуже розвинені кульочки (фоллїкули). Коли кульочки дали ся витиснути (все пальцями), то вплив іхтарґану на дальший перебіг трахоми був значно енерґічнійший. Однако іхтарґан нїколи не вистарчав в тих случаях, щоби осягнути бажаний успіх, так що треба було перейти до других лїків, а іменно до ляпісу або синього каменя. Всїх лїчених трахомів було 37, межи ними було 7 з pannus'ом одного або обох очий, при чім навіть цїлї прозорки були заняті.

2. Нежит злучницї з сильно розвиненими кульочами (conjunctivitis follicularis), при чім однако кульочки були взагалї менше розвинені, чим при трахомі, підлягав корисному впливови іхтарґану лишень в тих случаях, де, так сказати-б, був наклін кульочок до уступленя, так що цїле лїченє не тревало довше, чим 2—3 недїлї. Коли треба було довше уживати іхтарґану, то виступало розпульхненє і увяленє злучницї, так що цїлий образ недуги виглядав досить некорисно, хотяй з початку під впливом іхтарґану видно було значний добрий успіх.

3. При звичайнім нежитї (conjunctivitis simplex) без кульочок в злучници, де ходило головно о незначнє видїлюванє слизи, о зачервененє і згрубінє злучницї, дїлав іхтарґан корисно також лишень в тих случаях, де цїле лїченє не тревало довго, бо інакше тратила злучниця гладкість і напруженє, властиве здоровій тканинї, пульхнїла і червонїла, так що треба було перейти до ляпісу.

4. Численні случаї острого запаленя (Ophthalmia catarrhalis) злучницї, зі значним видїлюванєм слизи, значним зачервененєм злучницї і вразливостию на сьвітло, які були властиві лїтови 1902-ого року, були дуже мало приступні для лїченя іхтарґаном, так що треба було майже все перейти до ляпісу, а сей дїлав так корисно, що всї згадані прикрі прикмети уступали в протягу 3—5—7 днїв.

5. Conjunctivitis eczematosa, phlyctaenulosa, scrophulosa не давали ся з успіхом лїчити іхтарґаном, з виємком одинокого случаю, де pannus обох прозорок виступав на ріжних частях прозорок, часто уступав і знов повертав, нераз занимав цїлї обі прозорки і уступав лише під впливом іхтарґану, коли противно всї иньші лїки,

як кальомель, ляпіс, zincum sulfuricum, acidum boricum і т. д., ділали некорисно.

Число всїх случаїв належачих до точки 2, 3, 4 і 5 виносило 316.

6. В одім случаю blenorrhoea neonatorum показав ся іхтарґан без впливу.

В загалї можна сказати, що іхтарґан є корисним приростом серед ліків в очних недугах, однако він не в силї зробити злишними иньші ліки, уживані до тепер при трахомі і при инших запаленях злучниці. Особливо треба піднести, що ділане ляпісу є енерґічнїйше, певнїйше і значно ширше, чим ділане іхтарґану.

Начерк термінольоґії хемічної

зладив

Др. Володимир Левицкий.

В твореню термінів хемічних треба узглянити не лиш сторону язикову, але також і сторону мериторичну, се є треба звернути увагу на будову даної сполуки. Через се творять ся усякі трудности; запобічи їм не така легка справа, бо через се або одна або друга сторона термінольоґії хемічної може понести шкоду. З огляду однак на істоту даних сполук і на одноцільність самої термінольоґії треба мериторичну сторону висунути на перший плян і послугуватись подекуди термінами штучно утвореними. В тім начерку подаєм пробу термінольоґії хемічної і то головно в части хемії, що зовесь неорґанічною; в хемії орґанічній термінольоґія не представляє великих трудностий раз з огляду на більшу систематичність, а друге, що терміни є ту з малими виняткам чужі і можна їх лишити без зміни (пр. метан, кетони, естри, етери, ґлюкози, алькальоіди і т. п., а навіть і терміни зложені, як пр. трихльорометан, трифенїльокарбіноль і т. д. можна оставити без зміни). Деякі знов терміни сеї хемії, що дадуть ся перекласти на руску мову (пр. углеводень, хльороуглеводень і т. д.), можна кождої хвилї утворити на основі термінів хемії неорґанічної. Важнїйші з тих термінів зазначені при відповідних елементах.

Для одноцільности термінольоґії подаєм тут кілька основ, на яких треба єї оперти; основи ті приняла і затвердила секция мат. природ. лїк. Наук. Тов. ім. Шевченка.

Досить часто уживане слово „кислота“ заступити треба словом **квас**; анальоґічно сполуки окисів металїчних з водою назвати треба

засадами (нїм. Base). Соли дїлити треба на **повні**, де вже H нема, **квасні** і **засадові**.

Ґрупу OH, що характеризує засаду, рішила секция назвати „**водне-кисень**“; анальоґічні ґрупи, як NH_4 (амон), CH_3 (метиль), C_2H_5 (етиль) і т. п. називати ся муть **роднями** (sing. родень).

Як звісно, деякі елементи творять цїлий ряд квасів і солий; кваси ті рішено означати так: кваси найвисші, де і O і H приходять в найбільшій скількости, означити треба прикметником, окінченим на **овий** (згл: евий), кваси низші прикметником, окінченим на **авий**[1]). Анальоґічно до того соли тих квасів дістануть окінченє **ан**, згл. **ин**.

Пр. $HClO$=квас підхльоравий; єго соли $MClO$=підхльорини[2]).
$HClO_2$=квас хльоравий; єго соли $MClO_2$=хльорини.
$HClO_3$=квас хльоровий; єго соли $MClO_3$=хльорани.
$HClO_4$=квас надхльоровий; єго соли $MClO_4$=надхльорани.

Лиш квас H_2SO_4 можна назвати сїрковим або сїрчаним, а гіпотетичний квас H_2CO_3 квасом углевим або углянним.

Кваси без кисня означено через додаток **водень**; пр. HCl хльороводень, H_2S сїрководень. Соли тих квасів дістають окінченє **ак**; пр. FeS сїрчак желїзовий, $AgCl$ хльорак срібловий.

Сполуку металю з киснем називати треба **окисом** (дву=, три=, над=) або **кисняком**; сполуку окису з елементом, що за доданєм води стаєсь квасом, можна назвати або окисом або **безводником**. Де нема потреби робити подїлу на сполуки **ові** (**еві**) та **аві**, можна місто прикметника лишити genitivus відповідного елементу.

Пр. BaO окис бару або баровий, CO окис угля, але NO окис азотовий (а не азоту), Hg_2O окис ртутавий, HgO окис ртутовий (ртутний); PbO окис оловавий, PbO_2 окис олововий (оловяний); N_2O_3 безводник азотавий, CO_2 безводник угля або двуокис угля (углевий).

Квас N_3H назвем квасом **азотоводевим**; єго соли є **азотаки** пр. N_3Na азотак соду або содовий.

Елемент Ca назвати треба **вап**, Na **сод**, Al **глин**, Si **крем**.

Родень CN або Cy назвати треба **цианом**; єго сполуки є пр. CNH цианoводень (квас пруский), соли того квасу є **цианяки** (пр. KCN = цианяк потасовий).

---

[1]) Такий сам подїл на сполуки „аві“ відносить ся до елементів, що творять два ряди солий і окисів.

[2]) M означає тут і дальше металї.

Елементи дїлимо на ґрупи: **хльорники** (Fl, Cl, Br, J), **кисневцї** (O, S, Se, Te), **азотники** (N, P, As, Sb, Bi), **угольники** (C, Si, Ti, Zr, Ce, Th), **хромники** (Cr, Mo, W, Ur), **ванадники** (Vd, Nb, Ta), **оловники** (Ge, Sn, Pb), **глинники** (B, Al, Ga, In, Tl) **скандники** (Sc, Y, Sa, Yb), **берильники** (Be, Mg, Zn, Cd, Hg), **вапники** (Ca, Sr, Ba), **мідники** (Cu, Ag, Au), **потасники** (Si, Na, K, Rb, Cs), **желїзники** (Mn, Fe, Co, Ni) і **плятинники** (Ru, Rh, Pd, Os, Ir, Pt).

По тих загальних увагах перейдім до поазбучного перегляду усїх елементів та їх важнїйших сполук.

Азот *(Nitrogenium)* N.

амоняк NH_3.

амон (родень) NH_4.

хльорак амоновий (сальмяк) NH_4Cl; анальоґічно сїрчан, азотан і т. д. амоновий.

сїрководень амоновий NH_4SH.

трихльорак азотовий NCl_3.

безводник підазотовий N_2O; соли підазотини MNO.

окис азотовий NO.

двуокис азотовий NO_2.

безводник азотавий N_2O_3; він дає квас азотавий HNO_2, якого соли є азотини MNO_2.

безводник азотовий N_2O_4.

квас азотовий HNO_3; єго соли азотани MNO_3.

квас азотоводевий N_3H; єго соли азотаки MN_3.

гидроксилямін H_3NO.

киснехльорак азотавий NOCl.

киснехльорак азотовий NO_2Cl.

вода королївска (aqua regis) $HNO_3 + 3HCl$.

гидразін (двуамід) N_2H_4.

сїрчак азотовий N_2S_2.

циан CN (Cy).

циановодень (квас пруский) HCN; єго соли є цианяки MCN, пр. KCN цианяк потасовий.

сїркоциановодень HCNS; єго соли є сїркоцианяки MCNS, пр. KCNS сїркоцианяк потасовий.

квас циановий CONH; єго соли цианяни MNCO.

квас циануровий $C_3N_3O_3H_3$; єго соли цианурани пр. $C_3N_3O_3M_3$.

квас желїзоциановий H_4FeCy_6.

цианяк желїзовопотасовий K_4FeCy_6.

цианяк желїзавопотасовий K_3FeCy_6.

хлорак циановий CNCl; анальоґічно бромак і йодак.

цианяки орґанічні (нітрилї $C_nH_{2n+1}C \equiv N$).

хльорак цианавий $(CNCl)_3$; анальоґічно бромак.

сполуки нітрові (з ґрупою NO_2; пр. нітрометан $CH_3(NO_2)$, нітроуґлеводень, нітроальдегид і т.п.).

сполуки нітрозові (сполуки орґанічні є ґрупою NO).

аміни (перворядні, другорядні, треторядні, многократні, гидроаміни (з ґрупою OH і NH)), іміни, аміди, амідокваси, амідини і т. п.

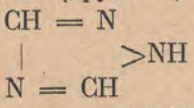
мочник (карбамід) NH_2CONH_2.

анїліна $C_6H_5NH_2$.

анїлїди; пр. $C_6H_5NH(COCH_3)$.

сполуки азові, пр. двуазові, гидроазові (з ґрупою N_2H_2), оксиазові (з ґрупою N_2O) і т. п.

азолї (друазолї, триазолї); пр.



піридина C_5H_5N і єї походні алькальоіди.

білок (альбумін), протеіни, протеіди.

Антимон *(Stibium)* Sb.

триводень антимоновий SbH_3.

безводник антимонавий Sb_2O_3.

соли антимонаві (пр. хльорак антимонавий $SbCl_3$).

безводник антимоновий Sb_2O_5; до него належить квас антимоновий (метаантимоновий $HSbO_3$ і пироантимоновий $H_4Sb_2O_7$); єго соли антимонани.

антимонїль (родень) SbO.

соли антимонїльові (з ґрупою SbO); пр. хлорак антимонїльовий SbOCl.

трисїрчак антимоновий Sb_2S_3.

пятисїрчак антимоновий Sb_2S_5.

сїркоантимонани M_3SbS_4.

Арґон A.

Арсен (*Arsenum*) As.

триводень арсеновий AsH_3.

трихльорак арсеновий $AsCl_3$.

безводник арсенавий (аршеник) As_2O_3; до него належить квас арсенавий H_3AsO_3, а єго соли є арсенини M_3AsO_3.

безводник арсеновий As_2O_5; єго квас арсеновий H_3AsO_4 (квас ортоарсеновий; квас метаарсеновий є $HAsO_3$, пироарсеновий $H_4As_2O_7$). Соли тих квасів є орто-, мета-, пироарсенани (M_3AsO_4, $MAsO_3$, $M_4As_2O_7$).

два-, три-, пяти-сїрчак арсеновий (As_2S_2, As_2S_3, As_2S_5).

сїркоарсенини M_3AsS_3.

сїркоарсенани M_3AsS_4.

Бар *(Barium)* Ba.

окис бару (баровий) BaO.

надокис бару (баровий) BaO_2.

воднекисень баровий $Ba(OH)_2$.

хльорак бару (баровий) $BaCl_2$.

сїрчак бару (баровий) BaS.

сїрчан бару (баровий) $BaSO_4$.

углян бару (баровий) $BaCO_3$.

азотан бару (баровий) $Ba\ (NO_3)_2$

Бариль *(Berylium)* Be.

окис берильовий (берилю) BeO.

хльорак, сїрчан берильовий і т. п.

Бор *(Borium)* B.

триводень боровий BH_3.

трифлюорак боровий BFl_3.

квас флюороборовий $HBFl_4$; єго соли флюороборани $MBFl_4$.

трихльорак боровий BCl_3.

безводник боровий B_2O_3; тут належить квас боровий H_3BO_3 і єго соли борани, далї квас метаборовий HBO_2 (соли метаборани) і пироборовий $H_2B_4O_7$ (соли пироборани, пр. $Na_2B_4O_7$ = пироборан содовий або боракс).

азотак боровий BN.

сірчак боровий B_2S_3.

трихльорак боровий BCl_3.

Бром *(Bromum)* Br.

бромоводень HBr; єго соли бромаки MBr.

квас підбромавий HBrO; єго соли підбромини MBrO.

квас бромовий $HBrO_3$; єго соли бромани $MBrO_3$.

бромини $MBrO_2$.

бромоформ $CHBr_3$.

бромометан CH_3Br.

бромак метилєну CH_2Br_2.

Ванад *(Vanadium)* V.

квас ванадовий H_3VO_4; єго соли ванадани.

Вап *(Calcium)* Ca.

окис ваповий CaO.

воднекисень ваповий $Ca(OH_2)$.

флюорак ваповий $CaFl_2$.

хльорак, сірчан і т. п. ваповий ($CaCl_2$ $CaSO_4$ і т. п.).

фосфоран триваповий $Ca_3(PO_4)_2$.

фосфоран двуваповий $CaHPO_4$.

углян ваповий $CaCO_3$.

Візмут *(Bismuthum)* Bi.

окис візмутавий Bi_2O_3.

соли візмутаві (пр. хльорак візмутавий $BiCl_3$).

воднекисень метавізмутавий $HBiO_2$.

безводник візмутовий Bi_2O_5.

квас візмутовий (мета-, орто-) $HBiO_3$ і $H_4Bi_2O_7$.

сїрчак, трисїрчак візмутовий Bi_2S_2,Bi_2S_3.

засадові соли візмутові, пр. засадовий азотан візмутовий $Bi(NO_3)(OH_2)$.

Водень *(Hydrogenium)* H.

вода H_2O; вода окиснена (надокис водневий) H_2O_2.

Вольфрам *(Wolframium)* W.

безводник вольфрамовий WO_3; єго квас вольфрамовий H_2WO_4, соли вольфрамани M_2WO_4.

Гель *(Helium)* He.

Глин *(Aluminium)* Al.

флюорак глину (глиновий) $AlFl_3$.

хльорак глину (глиновий) $AlCl_3$.

окис глину (глиновий) Al_2O_3.

воднекисень глину (глиновий) $Al(OH_3)$.

сїрчан, сїрчак і т. д. глиновий ($Al_2(SO_4)_3,Al_2S_3$ і т. д.).

алуни, пр. звичайний (сїрчан глинопотасовий) $K_2SO_4+Al_2(SO_4)_3+24H_2O$.

амоновий, содовий і т. п.

кремани глину (глинові), пр. ортокляз, каолїн і и.

глинани пр. $KAlO_2$, $NaAlO_2$.

Ґадолїн *(Gadolinium)* Gd.

Ґаль (*Gallium*) Ga.

хльорак ґальовий (ґалю) $GaCl_3$.

Ґерман *(Germanium)* Ge.

окис ґерману (ґермановий) GeO

надокис ґерману (ґермановий) GeO_2.

сїрчак ґерману (ґермановий) GeS.

двусїрчак ґерману (ґермановий) GeS_2.

чотирохльорак ґерману (ґермановий) $GeCl_4$.

Ерб (*Erbium*) Er.

Желїзо (Зелїзо) (*Ferrum*) Fe.

окис желїзавий FeO.

окис желїзовий Fe_2O_3.

безводник желїзовий FeO_3.

надокис желїзовий Fe_3O_4.

сїрчан желїзавий $FeSO_4$.

сїрчан желїзовий $Fe_2(SO_4)_3$.

воднекисень желїзавий $Fe(OH)_2$.

воднекисень желїзовий $Fe(OH)_3$.

хльорак желїзавий $FeCl_2$.

хльорак желїзовий $FeCl_3$.

сїрчак желїзавий FeS.

двусїрчак желїзовий FeS_2.

Золото (*Aurum*) Au.

окис золотавий Au_2O.

окис золотовий Au_2O_3.

хльорак золотавий $AuCl$.

хльорак золотовий $AuCl_3$.

сїрчак золотовий Au_2S_3.

воднекисень золотовий $Au(OH)_3$.

золотани; пр. золотан потасовий $KAuO_2$, сїркозолотан содовий $NaAuS_2$.

Йод (*Jodum*) J.

йодоводень HJ; єго соли йодаки (пр. йодак потасовий KJ.).

безводник йодовий J_2O_5; єго квас йодовий HJO_3, соли йодани MJO_3.

квас підйодавий HJO; єго соли підйодини MJO.

квас надйодовий HJO_4; єго соли надйодани MJO_4.

йодометан (йодак метилю) CH_3J.

двуйодометан CH_2J_2.

трийодометан (йодоформ) CHJ_3.

чотиройодометан CJ_4.

Інд (*Indium*) In.

хльорак інду (індовий) $InCl_3$.

Ірид (*Irydium*) Ir.

Ітерб (*Ytterbium*) Yb.

Ітр (*Yttrium*) Y.

Кадм (*Cadmium*) Cd.

окис кадмовий (кадму) CdO.

воднекисень кадмовий $Cd(OH)_2$.

сїрчак, хльорак, йодак, сїрчан кадмовий і т. д.

Кисень (*Oxygenium*) O.

озон O_3.

Кобальт (*Cobaltum*) Co.

окис кобальтавий CoO.

надокис кобальтавий Co_3O_4.

сїрчан кобальтавий $CoSo_4$.

воднекисень кобальтавий $Co(OH)_2$.

арсенан кобальтавий $Co_3(AsO_4)_2$.

окис кобальтовий Co_2O_3.

Крем (*Silicium*) Si.

кремоводень (кремометан) SiH_4.

Флюорак крему (кремовий) $SiFl_4$.

квас флюорокремовий H_2SiFl_6; єго соли флюорокремани M_2SiFl_6.

хльорак кремовий $SiCl_4$.

двусїрчак кремовий SiS_2.

безводник (надокис) кремовий SiO_2.

кваси кремові: ортокремовий H_4SiO_4 (соли ортокремани M_4SiO_4), метакремовий H_2SiO_3 (соли метакремани M_2SiO_3).

много-кремани, пр. $Mg_3Si_2O_7$, $Al_2Be_2Si_2O_9$ і т. д.; тут належить і скло (ваповопотасове, ваповосодове, оловопотасове, вапоглинопотасове і т. д.).

Криптон Kr.

Ксенон Ks.

Лянтан (*Lanthanum*) La.
Лїт (*Lithium*) Li.
окис лїту (лїтовий) Li_2O.
воднекисень лїту (лїтовий) $Li(OH)$.
углян лїту (лїтовий) Li_2CO_3
фосфоран лїту (лїтовий) Li_3PO_4.
Маґн (*Magnesium*) Mg.
окис маґновий (маґну) MgO (маґнезия).
воднекисень маґновий $Mg(OH)_2$.
хльорак маґновий $MgCl_2$.
сїрчан маґновий $MgSO_4$.
фосфоран маґновий $Mg_3(PO_4)_2$.
фосфоран амономаґновий $(NH_4)MgPO_4$.
углян маґновий $MgCO_3$; углян маґновий засадовий $(MgCO_3)_n(Mg(OH)_2)_m$.
кремани маґнові (Mg_2SiO_4, $Mg_3Si_2O_7$ і т. п.).
фосфорак маґновий Mg_3P_2.
Манґан (*Manganum*) Mn.
окис манґанавий MnO.
сїрчан манґанавий $MnSO_4$.
углян манґанавий $MnCO_3$.
воднекисень манґанавий $Mn(OH)_2$.
окис манґановий Mn_2O_3.
воднекисень манґановий $Mn(OH)_3$.
надокис манґановий Mn_3O_4.
двуокис манґановий (піролюзит) MnO_2
безводник манґановий MnO_3.
безводник надманґановий Mn_2O_7.
хльорак манґанавий $MnCl_2$.
хльорак манґановий $MnCl_4$.
манґанини M_3MnO_3.
манґанани M_2MnO_4 (пр. манґанан потасовий K_2MnO_4).
квас надманґановий $HMnO_4$; єго соли надманґанани (пр. надманґанан потасовий $KMnO_4$).
сїрчак манґанавий MnS.
сїрчак манґановий MnS_2.
соли манґанові MnX_4.
Мідь (*Cuprum*) Cu.
окис мідавий CuO.
воднекисень мідавий $Cu(OH)_2$.
хльорак мідавий $CuCl_2$.
сїрчан мідавий $CuSO_4$.
азотан, креман і т. д. мідавий
окис мідавий Cu_2O.
хльорак мідевий Cu_2Cl_2.
воднекисень мідевий $Cu_2(OH)_2$.
Молїбден (*Molybdaenum*) Mo.
хльорак (дву-, три-. чотиро-, пяти-) молїбденовий $MoCl_2$, $MoCl_3$, $MoCl_4$, $MoCl_5$.
безводник молїбденовий MoO_3.
квас молїбденовий H_2MoO_4; єго соли молїбденани M_2MoO_4.
Неодим (*Neodymium*) Nd.
Неон Ne.
Нїкель (*Niccolum*) Ni.
окис нїклявий NiO.
воднекисень нїклявий $Ni(OH)_2$.
сїрчан нїклявий $NiSO_4$.
хльорак нїклявий $NiCl_2$.
окис нїклевий Ni_2O_3.
Нїоб (*Niobium*) Nb.
Олово (*Plumbum*) Pb.
хльорак оловавий $PbCl_2$.
сїрчак оловавий $PbSO_4$.
окис оловавий (ґлейта) PbO.
воднекисень оловавий $Pb_2O(OH)_2$.
сїрчак оловавий PbS.

воднекисень олововий (оловяний) $Pb(OH)_2$.
хльорак олововий (оловяний) $PbCl_4$.
углян олововий (оловяний) $PbCO_3$.
хроман олововий (оловяний) $PbCrO_4$.
окис олововий (оловяний) PbO_2.
оловани M_2PbO_3 (пр. олован потасовий K_2PbO_3).
чотироокис олововий (мінїя) Pb_3O_4.
триокис олововий (оловяний) Pb_2O_3.
Осм *(Osmium)* Os.
чотироокис осмовий (осму) OsO_4.
османи M_2OsO_4.
Паляд (*Palladium*) Pd.
хльорак палядавий $PdCl_2$.
йодак палядавий PdJ_2.
хльорак палядовий $PdCl_4$.
хльоропалядани M_2PdCl_6 (пр. хльоропалядан потасовий K_2PdCl_6).
Плятина (*Platinum*) Pt.
хльорак плятинавий $PtCl_2$.
хльорак плятиновий $PtCl_4$.
квас хльороплятиновий H_2PtCl_6; соли хльороплятинани M_2PtCl_6.
воднекисень плятиновий $Pt(OH)_4$.
окис плятинавий PtO.
окис плятиновий PtO_2.
Потас (*Kalium*) K.
воднекисень потасу (потасовий) їдкий потаж KOH.
хльорак, бромак, йодак потасу (потасовий) KCl, KBr, KJ.
підхльорин потасу (потасовий) KClO.
хльоран потасовий $KClO_3$.
надхльоран потасовий $KClO_4$.
сїрчан потасовий K_2SO_4.
азотин потасовий KNO_2.
азотан потасовий (салїтра индийска) KNO_3.
углян потасовий (потаж) KCO_3.
метаарсенин потасовий $KAsO_2$.
Празеодим (*Praseodymium*) Pr.
Рад (*Radium*) Rd.
Род (*Rodium*) Rh.
окис родавий RhO.
окис родовий RhO_2.
Ртуть (*Hydrargyrum*) Hg.
окис ртутавий Hg_2O.
хльорак ртутавий (кальомель) Hg_2Cl_2.
йодак ртутавий Hg_2J_2.
окис ртутовий (ртутний) HgO.
хльорак ртутовий (ртутний) $HgCl_2$ (сублїмат)
йодак, сїрчак, сїрчан і т. д. ртутовий (ртутний) HgJ_2, HgS, $HgSO_4$.
Рубід (*Rubidium*) Rb.
Рутен (*Ruthenium*) Ru.
чотироокис рутеновий RuO_4.
рутенани M_2RuO_4.
Самар (*Samarium*) Sa.
Селєн (*Selenium*) Se.
селєноводень SeH_2; єго соли селєнаки M_2Se (пр. селєнак потасовий K_2Se).
безводник селєнавий SeO_2; єго квас селєнавий H_2SeO_3, соли селенини M_2SeO_3.
квас селєновий H_2SeO_4; соли селєнани M_2SeO_4.
Сїрка (*Sulphur*) S.
сїрководень H_2S, єго соли сїрчаки M_2S.

многосїрчак водня H_2S_n.

хльорак сїрки S_2Cl_2.

двухльорак сїрки SCl_2.

чотирохльорак сїрки SCl_4.

безводник сїрковий (сїрчаний) SO_3.

триокис сїрки S_2O_3.

квас підсїркавий H_2SO_2; єго соли підсїрчини M_2SO_2 (повні і квасні; пр. підсїрчин содовий Na_2SO_2).

квас сїркавий H_2SO_3; єго соли сїрчини M_2SO_3 (повні і квасні).

квас сїрковий або сїрчаний H_2SO_4; єго соли сїрчани M_2SO_4 (повні і квасні).

квас надсїрковий або надсїрчаний HSO_4; єго соли надсїрчани MSO_4.

квас нїтрозильосїрковий (сїрчаний) SO_5NH.

квас пиросїрковий (сїрчаний) $H_2S_2O_7$; єго соли пиросїрчани $M_2S_2O_7$.

квас тіосїрковий (сїрчаний) $H_2S_2O_3$; єго соли тіосїрчани $M_2S_2O_3$.

квас дву-, три-, чотиро-, пяти-тіосїрковий (сїрчаний) $H_2S_2O_6$, $H_2S_3O_6$, $H_2S_4O_6$, $H_2S_5O_6$; їх соли дву-, три-, чотиро-,пяти-тіосїрчани $M_2S_2O_6$, $M_2S_3O_6$, $M_2S_4O_6$, $M_2S_5O_6$.

меркаптани (сїркоалькоголї) пр. $C_nH_{2n+1}SH$.

сїркоальдегиди і сїркокетони.

сульфони пр. $(C_nH_{2n+1})_2SO$.

воднекисень сулфіновий пр. $(C_nH_{2n+1})_3S(OH)$.

сульфональ $(CH_3)_2\,C(SO_2C_2H_5)_2$.

сїрковкваси товщеві, пр. квас сїркооцтовий CH_3COSH.

квас трисїркоуглевий (угляний) H_2CS_3.

сїркофенолї пр. C_6H_5SH.

Сканд (*Scandium*) Sc.

Сод (*Natrium*) Na.

воднекисень соду (содовий, їдка сода) NaOH.

хльорак, бромак, йодак содовий NaCl, NaBr, NaJ.

підхльорин содовий NaClO.

сїрчан содовий $NaSO_4$.

азотан содовий (салїтра чілїйска) $NaNO_3$.

фосфоран одно-, дву-, три-содовий NaH_2PO_4, Na_2HPO_4, Na_3PO_4.

пироборан содовий (боракс) $Na_2B_4O_7$.

углян содовий (повний, сода) Na_2CO_3.

углян содовий (квасний) $NaHCO_3$.

кремани содові і т. д.

Срібло (*Argentum*) Ag.

окис, хльорак, сїрчак, сїрчан, азотан (ляпіс) срібла (срібловий) Ag_2O, AgCl, Ag_2S, Ag_2SO_4, $AgNO_3$.

Стронт (*Strontium*) Sr.

окис стронту (стронтовий) SrO.

двуокис стронту (стронтовий) SrO_2.

воднекисень стронту (стронтовий) $Sr(OH)_2$.

хльорак стронту (стронтовий) $SrCl_2$.

Таль (*Thallium*) Tl.

хльорак талявий $TlCl_3$.

окис талявий Tl_2O_3.
хльорак талевий TlCl.
окис талевий Tl_2O.
Танталь (*Tantalium*) Ta.
Телюр (*Tellurium*) Te.
телюроводень TeH_2; єго соли телюраки TeM_2.
безводняк телюравий TeO_2.
квас телюравий H_2TeO_3; єго соли телюрини M_2TeO_3.
безводник телюровий TeO_3.
квас телюровий H_2TeO_4; єго соли телюрани M_2TeO_4.
Терб (*Terbium*) Tb.
Тітан (*Titanium*) Ti.
чотирохльорак тітановий $TiCl_4$.
двуокис тітановий TiO_2.
квас ортотітановий H_4TiO_4; єго соли тітанани M_4TiO_4.
Тор (*Thorium*) Th.
Туль (*Thulium*) Tu.
Уголь (*Carbonium*) C.
ацетилєн C_2H_2.
метан (ґаз болотний) CH_4.
окис угля (углевий) CO.
безводник (двуокис, двукисняк) угля (углевий) CO_2.
квас угляний або углевий H_2CO_3; єго соли угляни повні M_2CO_3 і квасні $MHCO_3$.
двусірчак угля (углевий, угляний) CS_2.
киснесірчак угля (углевий, угляний) COS.
сполуки товщеві (ланцові, алїфатичні) і ароматичні (циклїчні, перстеневі).
углеводень (plur. углеводнї); пр. насичені C_nH_{2n+2} (метан, етан і т. д.), ненасичені (етени або етилєни) C_nH_{2n}, ацетилєни (етіни) C_nH_{2n-2}, ароматичні (бензоль C_6H_6, і т. д.).
роднї: метиль CH_3, етиль C_2H_5, пропиль C_3H_7 і т. д.
алькоголї; одноатомові, двуатомові (ґлїколї), триатомові (ґлїцерини), чотироатомові і т. д., насичені, ненасичені, ароматичні, фенолї і т. д.
етери (прості і мішані); пр. етер етильовий (сїрчаний) $(C_2H_5)_2O$.
альдегиди (пр. муравельний HCOH, оцтовий CH_3COH і т. д).
кетони; пр. ацетон $(CH_3)_2CO$.
кваси товщеві і ароматичні (характеристична ґрупа карбоксиль COOH), одно-, дву-, засадові, насичені, ненасичені. пр.
квас муравельний HCOOH; соли муравляни MCOOH.
квас оцтовий CH_3COOH; соли оцтани (повні і квасні) пр. $MC_2H_3O_2$.
квас масловий $C_4H_8O_2$; соли масляни.
квас олійний $C_{18}H_{34}O_2$; соли олїяни.
квас молочний; соли молочани.
квас щавовий $(COOH)_2$; соли щавани.
квас бурштиновий; соли бурштинани.
квас яблочний $C_4H_6O_5$; соли яблокани.
квас винний $C_4H_6O_6$; соли винани.

квас бензоесовий C_6H_5COOH; соли бензоесани.

квас салїцильовий; соли салїциляни.

квас мочевий $C_5H_4N_4O_3$; соли мочани.

квас фталевий і т. д. і т. д.

фенолькокваси, двуфенолькокваси, алькогольокваси, кваси кетонові, сїркокваси, оксисїркокваси, кваси сульфонові (соли сульфонати) і т. д. і т. д.

естри; неорґанічні (повні і квасні), пр. хльораки, бромаки, йодаки, сїрчани (метильовий, етильовий і т. д.), азотани пр. азотан ґлїцерини або нїтроґліцерина $C_3H_5(ONO_2)_3$) і т. д.; орґанічні (пр. муравлян етильовий, оцтан етильовий і т. д.).

хінони (оксихінони, антрахінони пр. алізарина).

углеводани; ту належать ґлїкози $C_6H_{12}O_6$ (пр. цукор грозновий, ґалятоза, сорбіноза), тростинники або сахарози $C_{12}H_{12}O_{11}$ (пр. цукор тростиновий, молочний і мучки $(C_6H_{10}O_5)_n$ (мучка, крохмаль, целюльоза, декстрина)[1]).

Уран (*Uranium*) Ur.

окис уранавий UrO_2.

окис урановий UrO_3.

ураніль (родень) UrO_2.

соли уранаві, уранові і уранїлеві (пр. хльорак уранїлевий UrO_2Cl_2).

уранани, пр. двууранани $M_2Ur_2O_7$.

живиця уранова (пехбленда).

Флюор (*Fluorum*) Fl.

флюороводень HFl; его соли флюораки NFl (пр. флюорак ваповий $CaFl_2$).

Фосфор (*Phosphorus*) P.

триводень фосфоровий (фосфору) PH_3.

фосфон (родень) PH_4.

фосфазін P_2H_4.

пятихльорак фосфоровий PCl_5.

трихльорак фосфоровий PCl_3.

киснехльорак фосфоровий $POCl_3$.

безводник фосфоровий P_2O_5.

квас (орто) фосфоровий H_3PO_4; его соли фосфорани M_3PO_4.

квас пирофосфоровий H_4PO_7; его соли пирофосфорани (повні і квасні).

квас метафосфоровий HPO_3; его соли метафосфорани MPO_3.

безводник фосфоравий P_4O_6.

квас фосфоравий H_3PO_3; его соли фосфорини (однометалеві MH_2PO_3 і двуметалеві M_2HPO_3).

безводник фосфораво фосфоровий P_2O_4.

квас підфосфоровий $H_4P_2O_6$; его соли підфосфорани $M_4P_2O_5$ і $M_2H_2P_2O_6$.

Хльор (*Chlorum*) Cl.

хльороводень HCl (з водою квас сільний); его соли хльораки MCl (пр. хльорак глиновий $AlCl_3$, баровий $BaCl_2$, маґно-

---

[1] Иньші сполуки орґанічні творити можна анальоґічно (після правил термінольоґії неорґанічної); всїх неможливо тут виписувати.

вий $MgCl_2$, сріблловий $AgCl$ і т. д.).
безводник пїдхльоравий Cl_2O.
квас підхльоравий $HClO$; єго соли пілхлорини $MClO$.
безводник хльораво-хльоровий Cl_2O_4.
квас хльоравий $HClO_2$; соли хльорини $MClO_2$.
квас хльоровий $HClO_3$; єго соли хльорани $MClO_3$ (пр. хльоран потасовий $KClO_3$).
квас надхльоровий $HClO_4$; єго соли надхльорани $MClO_4$.
хльороуглеводні пр. $C_nH_{2n+1}Cl$.
трихльорометан (хльороформ) $CHCl_3$.
хльорак етилєну $(CH_2Cl)_2$.
квас хльоромуравельний $ClCOOH$.
квас трихльорооцтовий CCl_3COOH.
хльорак оцтовий CH_3COCl.
Хром (*Chromium*) Cr.
безводник хромовий CrO_3.
квас хромовий H_2CrO_4; соли хромани M_2CrO_4 і многохромани $M_2CrO_4+xCrO_3$.
квас двухромовий $H_2Cr_2O_7$; єго соли двухромани M_2CrO_7 (пр. двухроман потасовий $K_2Cr_2O_7$).
окис хромовий Cr_2O_3.
хльорак хромовий $CrCl_3$.
сїрчан хромовий $Cr_2(SO_4)_3$.
воднекисень хромовий $Cr(OH)_3$
окис хромавий CrO.
воднекисень хромавий $Cr(OH)_2$
хльорак хромавий $CrCl_2$.
Цез (*Caesium*) Cs.
Цер (*Cerium*) Ce.
Цина (*Stannum*) Sn.
окис цинавий SnO.
воднекисень цинавий $Sn(OH)_2$.
соли цинаві, пр. хльорак цинавий $SnCl_2$.
окис циновий SnO_2.
квас циновий H_2SnO_3; соли цинани M_2SnO_3 (пр. цинан содовий Na_2SnO_3).
соли цинові, пр. хльорак циновий $SnCl_4$, флюорак циновий $SnFl_4$.
сїрчак цинавий SnS.
сїрчак циновий SnS_2.
Цинк (*Zincum*) Zn.
воднекисень цинковий $Zn(OH)_2$.
хльорак цинковий $ZnCl_2$.
сїрчан цинковий $ZnSO_4$.
углян цинковий $ZnCO_3$.
креман цинковий Zn_2SiO_4.
Циркон (*Zirconium*) Zr.
чотирофлюорак цирконовий (циркону) $ZrFl_4$.
двуокис цирконовий ZrO_2.
воднекисень цирконовий ZrH_2O_3.
сїрчан цирконовий $Zr(SO_4)_2$.
цирконани, пр. цирконан потасовий K_2ZrO_3.
креман цирконовий $ZrSiO_4$.

Тернопіль, март—цьвітень 1903.

Біблїоґрафія і хронїка математично-фізична.

A. Kneser: Lehrbuch der Variationsrechnung (Braunschweig, Vieweg u. Sohn 1900. ст. XIV.+311).

Від часу виданя кижки Moigno-Lindelöf'а не вийшов протягом 30 лїт анї в Нїмеччинї анї у Франциї нїякий підручник рахунку варияцийного. Та за сей час теория сего рахунку, завдяки Вейерштрасови і єго ученикам (в першій мірі Zermelo), значно поступила в перед і тому то автор прислужив ся дуже публїцї математичній через виданє сего підручника. В книжцї тій, що обіймає вісїм роздїлів і численний спис лїтератури, автор стоїть вповнї на становиску Вейерштрасса.

1. Шуканє максімів та мінімів (або — як автор каже — екстремів) інтеґралів зводить ся до шуканя екстремів інтеґралу:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x\, y\, x'\, y')\, dt \qquad \big(x = \varphi(t),\, y = \psi(t)\big).$$

де F є однородною функциєю першого степеня що до x' і y', а єї характеристична власність є:

$$F(x,\, y,\, \alpha x',\, \alpha y') = \alpha\, F(x\, y\, x'\, y').$$

Конечною умовою, щоби істнував екстрем, є:

$$\delta J = 0.$$

Ся умова є рівноважна з рівнанями:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{dx'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{dy'}\right) = 0$$

Криву, що сповняє ті умови, називає автор „Extremale“ інтеґрала J.

Дальші істнованя екстрему дає друга вариация інтеґралу: $\delta^2 J$, яку можна написати в виді (після Вейерштрасса):

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[F_1 \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 + F_2 \omega^2 \right],$$

або:

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} F_1 \left[\frac{d\omega}{dt} + \frac{u\omega}{F_1} \right]^2 dt,$$

де:

$$\left(F_2 + \frac{du}{dt} \right) F_1 - u^2 = 0.$$

Звідси слїдує, що про знак другої вариациї $\delta^2 J$, отже про се, чи буде інтеґрал мав максімум або мінїмум, рішає знак на F_1.

Щоби однак всї ті умови були і конечні і достаточні, треба, щоби в інтервалї (t_0 ----- t_1) не було точок спряжених, т. є. таких точок, де в їх окруженю криві сусїднї перетинають первісну криву (умова Jacobi та Вейерштрасса). Умовою на се, є щоби певне рівнанє:

$$D(t_0\ t) = 0$$

в інтервалї (t_0 ----- t_1) не мало иньших корінів, як лиш $t = t_0$.

2. Того рода досліди (дослїди про беззглядні екстреми) обнимають ст. 1.—116. книжки. Дальшу єї часть часть посьвятив автор т. зв. зглядним екстремам, т. є. найденю умов, коли інтеґрал:

$$J = \int F(x\ y\ x'\ y')\, dt$$

має максімум або мінімум, наколи другий інтеґрал:

$$K = \int G(x\ y\ x'\ y')\, dt$$

має приписану вартість (загальнїйша задача ізоперіметрична). Ту конечними умовами являють ся: 1) умова Jacobi, щоби рівнанє $D(t_0\ t) = 0$ не мало в інтервалї (t_0 ----- t_1) иньших корінїв, як лиш $t = t_0$, при чім:

$$\left. \frac{\partial D(t_0\ t)}{\partial t} \right]_{t=t_0} \lesseqgtr 0$$

2) постійність знаку вираженя:

$$E\left(x\,y\,x'\,y'\,\frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt}\right),$$

де:

$$E\left(x\,y\,x'\,y'\,\frac{dx}{d\tau}\,\frac{dy}{d\tau}\right)=\frac{\partial F}{\partial x'}\,\frac{dx}{d\tau}+\frac{\partial F}{\partial y'}\,\frac{dy}{d\tau}-F\left(x\,y\,\frac{dx}{d\tau}\,\frac{dy}{d\tau}\right)$$

($x=\varphi(\tau)$, $y=\psi(\tau)$, τ параметр, що належить до дороги, по якій ся інтеґрує).

3) можливість т. зв. конструкциї Веєрштрасса кривих екстремальних (ст. 132 sqts).

3. В дальшім тягу розбирає автор *нетяглі розвязки*, т. є. розбирає можливість, коли можна інтеґрал J привести до абсолютного екстрему при помочи кривої, що складаєсь зі скінченого числа кусників (лїнїя ломана), з яких кождий має свойства приписувані давнїйше цїлій кривій; т. є. x і y є здовж кождого кусника тяглі функциї параметру t, а так само їх перші і другі походні. Показує ся, що і ту остають вислїди виведені для безглядних екстремів.

Розслїди розширає автор дальше на случаї, коли в інтеґрал входять і висші походні, т. є. коли інтеґрал має форму:

$$J=\int F\left(x\,x'\,x''\cdots x^{(n)},\;y\,y'\,y''\cdots y^{(n)}\right)dt.$$

В тім случаю криву екстремальну дають рівнаня $P=0$, $Q=0$, де в загалї:

$$P_m=\sum_{\alpha}^{0,\,n-m}(-1)^{\alpha}\,\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\,\frac{\partial F}{\partial x^{(m+\alpha)}}$$

$$Q_m=\sum_{\alpha}^{0,\,n-m}(-1)^{\alpha}\,\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\,\frac{\partial F}{\partial y^{(m+\alpha)}}$$

при чім: $P=P_0$, $Q=Q_0$. Сї умови можна заступити в случаю, коли положимо:

$$x=t,\quad F\,dt=f\left[x\,y\,y'\cdots y^{(n)}\right]dx$$

рівнанєм:

$$Q(f)=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\,\frac{\partial f}{\partial y'}+\cdots\cdots+(-1)^{n}\,\frac{d^{n}}{dx^{n}}\,\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}=0,$$

яке екстремальні криві також сповняти мусять.

Другу умову для екстрему дає знак функциї E (analoґічно, як в горі).

І ту можна ввести загальну ізопериметричну задачу, т. є. шукане зглядного екстрему інтеґралу J, наколи другий інтеґрал:

$$K = \int G\,(x\, x' \cdots x^{(n)}\, y\, y' \cdots y^{(n)})\, dt$$

має приписану вартість.

4. Опісля переходить автор до зовсім *загальної* задачі. Най $y_0\, y_1 \cdots y_{n-1}$ є незвісні функциї x, які сповняють (r+1) рівнань:

$$\Phi_\alpha \left(x\, y_0\, y_1 \cdots y_{n-1}, \frac{dy_0}{dx}\, \frac{dx_1}{dx} \cdots \frac{dy_{n-1}}{dx}\right) = 0 \quad (\alpha = 0, 1, \cdots r)$$

Вартости величин $y_0\, y_1 \cdots y_{n-1}$ є дані для $x = x_0$, а деякі з них є дані і для $x = x_1$. Визначити незвісні функциї так, щоби вартість y_0 для $x = x_1$ була екстремом. — Очевидно, що квестия визначеня екстремів є ту о много більше скомплїкована і вимагає більше умовних рівнань, як передше. Рівнаня ті є типу:

$$\Omega = \sum_{\alpha}^{0,r} \varphi_\alpha\, \lambda_\alpha = 0$$

і:

$$\Omega_\gamma \Big|^{t_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_\beta} - \frac{d\Omega_\beta}{dt} = 0,$$

де:

$$\Omega_\beta = \frac{\partial \Omega}{\partial y'_\beta};$$

$\varphi_\alpha\, (y_0\, y_1 \cdots y_n, y_0'\, y_1' \cdots y_n') = 0$ є то рівнаня Φ_α, де місто x написано y_n, наколи x, y_0, y_1, $\cdots$ y_n є тяглі функциї параметру t здовж даного n-розмірового твору.

5. Послїдна часть книжки обнимає максіма і мініма двократних інтеґралів:

$$J = \int_\sigma \int \Phi\,(x\, y\, z\, x_u\, y_u\, z_u\, x_v\, y_v\, z_v)\, du\, dv$$

здовж поверхні σ, де x y z є функциї двох параметрів u, v і де:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = x_v.$$

Конечною умовою істнованя екстремів є істнованє трох рівнань:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_v}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \Phi}{d y_v}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_v}\right) = 0.$$

Очевидно, що і ту кромі беззглядних екстремів істнувати можуть і екстреми зглядні, наколи інтеґрал J є звязаний з анальоґічним інтеґралом:

$$K = \int_\sigma \int \Psi(x\ y\ z\ x_u\ y_u\ z_u\ x_v\ y_v\ z_v)\, du\, dv.$$

Про достаточні умови рішає друга вариация; умови ті подав Brunacci. Ту виступає анальоґічна функция E, як в горі, якої знак рішає.

Так отже коротко подали ми зміст сеї книжки і дорогу, якої придержував ся автор. Для доповненя треба додати, що автор цїлий виклад ілюстрував численними примірами; з них опрацював він дуже обширно 15 задач, які представляють будь-то історичний, будь теоретичний інтерес. Згадаю приміром теорию найкоротшої лїнїї, чи то на площи, чи на поверхнях (лїнїї ґеодетичні) задачі ізопериметричні, брахістохрону, лїнїю ланцову, фіґуру рівноваги пружини, вид каплї etc. Автор узгляднив численну лїтературу (аж до хвилї виданя книжки); новійших дослїдів Гільберта і Osgood'а книжка ся не узгляднює, так само, як не згадує між численною лїтературою роботи Остроґрадского з р. 1834.

Книжка представляє ся під кождим зглядом дуже хорошо і надає ся дуже добре яко підручник, тим більше, що заповнює велику люку, яка істнувала в лїтературі математичній на поли рахунку вариацийного через кілька десяток лїт. Люку ту в части заповнив твір Pascal'а з 1899, а побіч него сьміло стати може твір Кнезера (професора унїверзитету в Юрєві); за сей твір авторови належить ся зі сторони публїки математичної велика подяка. *В. Л.*

K. Hensel u. G. Landsberg. Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen (Leipzig, B. G. Teubner 1902. ст. XVI.+707).

До значного числа підручників про функциї альґебраічні прилучуєсь новий підручник; при оцїнї єго рішає в першій мірі становиско, на якім стоять автори та яке зазначують самі у вступі. В послїдних лїтах, завдяки працям Вейерштрасса, Кронекера т. и. взяв гору погляд, що теорию функций альґебраічних найлекше розслїджувати при помочи аритметичних розважань та при помочи результатів з теориї функций, яку Вейерштрасс і так заритметизував; через сей погляд теория функций альґебраічних стала посвоячена з загальною теориєю альґебраічних чисел і поверхний. На такім функцийно-чисельнім становиску станули в тій книжцї оба єї автори, беручи під увагу всї функциї альґебраічні одної Рімановської кляси або тіла, а рівночасно уживаючи до помочи аналїтичних метод переведеня функций. Велику ролю має ту понятє подїльности, якого розширенє позваляє в повнї опанувати збір всїх функций альґебраічних одного тіла.

Книжка складає ся з шістьох части: 1. розпросторенє функций альґебраічних на поверхнї Рімана (8 викладів). 2. тїла альґебраічних функций (5 викладів). 3. альґебраічні подїльники і теорем Рімана-Роха (9 викладів). 4. альґебраічні криві і твори (5 викладів). 5. кляси альґебраічних творів (4 виклади). 6. альґебраічні реляциї між інтеґралами Абеля (6 викладів). На кінци книжки доданий коротенький начерк теориї функций альґебраічних від часів Абеля і Jacobi до аритметичних метод Дедекінда і Вебера. В серединї представленя теориї функций альґебраічних, довкола якої цїлий виклад ся обертає, стоїть теория подїльників; з неї випливає чисто аритметичне узасадненє теорему Рімана-Роха і пливуче з сего узасадненє теорему Абеля, теориї інтеґралів Абеля і їх періодів, уступи, що виповняють трету часть підручника; теорем Рімана-Роха випроваджений раз на основі розслїдів тіла альґебраічного K(z u) і єго родини, другий раз яко вислїд реляций, що істнують між інтеґралами Абеля. Теорем Абеля і теория інтеґралів ведуть до проблємів відверненя тих інтеґралів т. є. до функций Абелевих, що — як легко ся догадати — творять послїдний уступ сеї дуже інструктивної книжки. Книжка ся не лишає анї одної квестиї і єї вислїдів, бо як самі автори зазначують, змаганєм їх було представити цїлу теорию без нїяких т. зв. улекшень і подати такі методи, які би надавали ся і до случаїв загальних і до специяльних так, щоби в данім разї дїйсно можна було і рахунки перевести. Через се книжка стала обємиста, але і пожиточна, особливо до т. зв. „Selbststudium“.

В. Л.

P. Barbarin. La géométrie non euclidienne. (Paris, C. Naud, 1902. ст. 79).

Книжка ся належить до видань т. зв. видавництва „Scientia“, про яке була згадка в Збірнику мат. прир. VIII. 2. — Великий розвиток та значінє ґеометриї неевклїдової, яке завдячує она ученим тої міри, що Лобачевський, Bolyai, Riemann, Beltrami, Helmholtz, Tilly, Klein, Cayley, Lie, Poincaré т. и., та значінє, яке ґеометрия та має для нас під зглядом теориї пізнаня, вимагає, щоби бодай в загальних начерках єї вислїди стали власностию цїлої суспільности; подекуди, пр. в Швайцариї, є она предметом науки шкіл середних. Найбільше значінє єї в тім, що она показує, що доґматичне пониманє простору, яке до нинї усюди панує, не є одиноке, та хто знає, чи оно є дійсно правдиве. Та подати в начерку погляд на метаґеометрию є дуже тяжко, а найбільша трудність є як раз у в тім, що чоловік так привик до нинїшного погляду просторного, до теориї лїній рівнобіжних, що не так легко дасть ся переконати, що і иньші погляди є можливі. В невеличкій своїй книжочцї автор щасливо поборов сю трудність, показавши історично, яку судьбу переходила справа рівнобіжности лїній від часів ґенія старинного сьвіта Евклїда до великанів нинїшного математичного сьвіта, як Лобачевский та Riemann.

Сей трактат не є вправдї так основний, як пр. великий трактат Кляйна, але яко елєментарний трактат можна його ставити на рівнї з трактатом Mansiona. Виклад дуже інструктивний, украшений відбиткою з „елєментів“ Евклїда та деякими портретами; одна лиш є хиба, а се, що автор піднїс високо заслуги Tilly’ого (Француза), а промовчав імена такі, як Beltrami, Helmholtz та Lie, що немало причинили ся до поступу метаґеометриї. Місто тяжких термінів „géométrie lobatschewskienne“ та „riemannienne“ лїпше уживати термінів Кляйна „ґеометрия гіперболїчна“ та „елїптична“ (ґеом. евклїдова = ґеом. параболїчна).

В. Л.

G. Loria. Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. (Leipzig, B. G. Teubner 1902. XXI+744 ст.+17 таблиць); übers. von F. Schütte.

В прекраснїй сїй книжцї подав знаменитий італїйский учений перегляд всїх кривих плоских, альґебраічних та переступних, які в протягу віків увійшли в ґеометрию. Книжка ся обіймає сїм великих роздїлів, з яких кождий розпадаєсь на кілька або й кільканацять уступів. Найкоротший є роздїл перший, що в трох уступах обіймає просту, коло та криві стіжкові, та і то більше з историчного становиска; очевидно автор не думав тих творів розбирати ближше, тому, що до тих творів маємо нинї множество усяких підручників. За се тим основнїйше представив всї иньші криві, що звичайно в підручниках ґеометриї лиш принагідно є трактовані. Я не маю цїли розбирати основно цїлого змісту сеї книжки, згадаю лиш коротко, що роздїл другий обнимає криві третого порядку (в 14 уступах), роздїл третий криві четвертого порядку (16 уступів), роздїл четвертий специяльні криві висшого порядку (6 уступів), пятий специяльні альґебраічні криві якого небудь порядку (19 уступів), шестий криві переступні (25 уступів), роздїл семий криві виведені (12 уступів). Кождий роздїл починаєсь загальною теориєю і подїлом відповідних кривих, а опісля слїдують описи поодиноких кривих даної ґрупи та їх власности. Нема дословно кривої, яка-б не найшла в тій книжцї своєї моноґрафії, без огляду на се, чи крива та представляє математичний інтерес, чи лиш може фізикальний; тому то по при криві, що мають інтерес математичний, як пр. конхоіди (що виступають в квестиї подїлу кута на три части), находимо ту криві Lissajous, герпольгодиї, криві електромаґнетні etc. Книжку кінчить короткий погляд на історичний розвиток теориї кривих плоских, шкіц справдї прекрасний, як в загалї всї історично математичні начерки заслуженого автора, та погляд на т. зв. криві панальґебраічні; так називає автор криві інтеґральні незведимого рівнаня ріжничкового першого порядку:

$$F(x\,y\,y') \equiv \sum_{r=0}^{r=n} f_r\,(x\,y)\,y'^{\,n-r} = 0.$$

Автор показує, що ті криві мають ряд свойств анальоґічних до свойств кривих альґебраічних.

Книжку кінчить спис імен та річий і збірка 17 таблиць з 174 хорошо викінченими фіґурами (з показчиком). Зверхна єї форма (з німецкім переводї увійшла она в збірку підручників математичних, видаваних звісною фірмою B. G. Teubner в Липску) дуже гарна. Взагалї книжка ся робить незвичайно миле і додатне вражінє і подивляти треба працю автора, що підняв ся опрацьованя так обширного материялу і що так красно свою цїль осягнув. *В. Л.*

E. Borel. Leçons sur les séries à termes positifs. (Paris, Gauthier-Villars 1902. VI+91).

Се з черги четверта книжка француского математика, що відносить ся до теориї функций (згадки про три попередні порівнай

Збірник мат. пр. том VI. 2 et sqts); обіймає она в шістьох розділах виклади, що їх автор читав в р. 1900/01 в „Collège de France“.

Розділ перший говорить про збіжність рядів, зложених зі сталих членів (мова ту, як взагалї в цїлій книжочці, виключно про ряди з членами додатними); автор розбирає ту критерия збіжности першого і другого виду (першого, де виступає лиш один член, пр. $\sqrt[n]{u_n}$ (Cauchy), другого, де виступають два члени $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (d' Alembert)) Cauchy, d' Alembert'a, Bertrand'a i тереми P. du Bois-Reymond'a та Hadamard'a; тереми ті показують, що наколи маєм ряд дуже слабо збіжний (розбіжний), то можна єго все зробити дуже добре збіжним (розбіжним), наколи ся помножить єго через величини, які необмежено ростуть (малїють). Щоби в случаю збіжности було:

$$\lim_{n=\infty}\left[\varphi(n)\,u_n\right] = 0,$$

де $\varphi(n)$ є величина необмежено ростуча, вистане (і се є необходима вимога збіжности), щоби було:

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Розділ другий займаєсь збіжностию інтеґралів. Ту виступають слїдуючі критерия збіжности. Наколи маєм функцию малїючу $f(x)$ (все додатну), то щоби інтеґрал $\int_a^\infty f(x)\,dx$ був збіжний, є конечне, щоби:

$$\lim_{x=\infty} x\,f(x) = 0.$$

Дальші критерия подав Єрмаков. Інтеґрал $\int_a^\infty f(x)\,dx$ є збіжний, наколи для дуже великого x є постійно:

$$e^x f(e^x) < k\,f(x),\ \ k < 1;$$

на случай $e^x f(e^x) > k\,f(x),\ \ k > 1$

інтеґрал сей є розбіжний. З сего виходить далї теорем, який подав єще Cauchy, а котрий звучить:

Після сего, чи є збіжний чи нї інтеґрал:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx,$$

є збіжний, або ні, ряд:

$$f(1) + f(2) + \cdots\cdots + f(n) + \cdots\cdots$$

В розділї третім розбирає автор теорию росту функций (croissance). Ту творить автор вперед функцию $g(x)$, що для безконечно много вартостий змінної дуже мало ся ріжнить від e^x, а для безконечно много иньших вартостий x дуже мало ся ріжнить від e^{e^x}. Функция така росте – як кажемо — дуже неправильно. Противно функция росте правильно, наколи єї вартости ростучі дадуть ся порівнати з функциями простими (прим. коли $e^{x^\varrho} > \varphi(x) > e^{x^{\varrho'}}$, $\varrho > \varrho'$, то $\varphi(x)$ росте правильно).

Розділ четвертий подає критерия збіжности рядів подвійних і інтеґралів многократних. І так ряд

$$\sum \sum v_{\alpha\beta}$$

є збіжний, наколи:

$$v_{\alpha\beta} < \frac{1}{(\alpha + \beta)^{2+\varrho}} \qquad \varrho > 0$$

а розбіжний, наколи:

$$v_{\alpha\beta} > \frac{1}{(\alpha + \beta)^2}.$$

Критерию сю можна узагальнити в сей спосіб, що згаданий ряд буде збіжний для:

$$v_{\alpha\beta} < \frac{1}{\alpha^\sigma + \beta^{\frac{1}{2}\sigma}} \quad . \quad \sigma > 3.$$

Для інтеґралів істнують такі критерия: інтеґрал

$$J = \int^\infty \int^\infty \frac{dxdy}{x^\alpha + y^\beta}$$

є збіжний тодї, коли:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1.$$

Для інтеґралу многократного:

$$K = \int^\infty \int^\infty \cdots\cdots \int^\infty \frac{dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_n}{x_1^{\alpha_1} + x_2^{\alpha_2} + \cdot - \cdots + x_n^{\alpha_n}}$$

звучить ся критерия (конечна і достаточна):

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} < 1.$$

Пятий розділ обіймає теорию збіжности рядів степенних з одною змінною.

Наколи маємо ряд:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots \quad (0 < x < 1)$$

та назначимо:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \varphi(n) = n^p$$ (p додатне, виміриме або нї)

де p називає ся степенем сочинників, то степень функциї f(x) є $\omega\left(\frac{1}{p}\right)_x$ (де ω є степень функциї e^x; степень $\log x$ є ω^{-1}[1]), символ $\left(\frac{1}{p}\right)$ значить число зближене до $\frac{1}{p}$, $\omega\left(\frac{1}{p}\right)$ є степень функциї $e^{x^{\frac{1}{p}}}$).

Відворотну квестию, зі знаного степеня функциї f(x) найти степень єї сочинників розвязали Poincaré і Hadamard; показує ся, що ріст сочинників функциї може бути дуже неправильний, хотяй сама функция росте правильно.

Наколи маєм ряд:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots \quad (a \text{ додатне}, \quad 0 < x < 1)$$

а ряд: $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ є розбіжний, так що точка $+1$ є особлива для функциї f(x), а возьмем (після Cesàro та Apell'a) для порівнаня другий такий ряд:

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots\cdots + b_n x^n + \cdots\cdots \quad 0 < x < 1,$$

де $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n + \cdots\cdots$ є рядом розбіжним, то всегда буде в окруженю точки особливої:

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha,$$

де:

$$\alpha = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

---

[1] Прим. степень функциї $y = x^p$ є p, функциї $y = x^p . x^q$ є $(p + q)$, функциї $e^{x}. x^n$ є $(\omega + n)$.

Теорем сей узагальняє ся так, що берем ряди $\frac{f(x)}{1-x}$ і $\frac{g(x)}{1-x}$ і тодї:

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta, \quad \text{де} \quad \beta = \lim_{n=\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots\cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots\cdots + b_n}.$$

Hadamard творить далї слїдуючі операциї:

$$f(x) = D^0 f(x)$$

$$\int_a^x f(x)dx = D^{-1}f(x)$$

$$\int_a^x \left[D^{-1}f(x)\right]dx = D^{-2}f(x)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

а через інтеґроване випаде:

$$D^{-m}f(x) = \int_a^x \frac{(x-z)^{m-1}}{(m-1)!} f(z)\,dz$$

Друга операция є D; єї значінє є:

$$D^{\alpha} x^m = m^{\alpha} x^m$$

$$D^{\alpha} f(x) = \sum a_m m^{\alpha} x^m.$$

При їх помочи доходимо до твердженя: Наколи функция f(x) є скінчена і тягла, то ряд утворений з єї сочинників є або безглядно зглядний, або (наколи би ряд не був збіжний) можна єго звести до збіжности, наколи місто f(x) положимо $D^{-\varepsilon}f(x)$ (ε достаточно мале).

В роздїлї шестім розбирає автор ряди о **більшій скількости змінних**. Тут заслугують на увагу слїдуючі теореми: Порядком функциї цїлковитої F(z) є число ϱ таке, що

$$|F(z)| < e^{r^{\varrho+\varepsilon}}$$

де ε достаточно мале, а $|r| = z$ достаточно велике. Порядком цїлковитим функциї

$$f(xy) = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} A_{mn} x^m y^n$$

є порядок функциї f(zz) в z; наколи сей порядок в x є для $f(xy_0)$ (y_0 дана вартість додатна) ϱ, то він остає і для $f(xy_1)$, де y_1 є також число цїлковите яке-небудь.

Наколи $f(xy_0)$ має порядок ϱ, а $f(x_0 y)$ порядок ϱ', то цїлковитий порядок для f(xy) є що найбільше $\varrho + \varrho'$.

Розділ сей кінчать деякі уваги про спряжені лучі збіжности (лучі r і r' є спряжені, наколи ряд f(xy) є абсолютно збіжний для всїх вартостий (xy) таких, що x є взяті з кола r, y з кола r') і про ряди синтаґматичні (Cauchy). Щоби дати понятє про того рода ряди, возьмім ряд: $\frac{1}{1-x-y}$; він дасть ся упорядку-в три способи:

$$а)\quad 1 + \cdots + \frac{n!}{p!\,q!}\,x^p y^q + \cdots \qquad (p+q=n)$$

$$б)\quad 1 + (x+y) + \cdots + (x+y)^n + \cdots$$

$$в)\quad \frac{1}{1-x} + \frac{y}{(1-x)^2} + \cdots.$$

а) є збіжне для $|x| + |y| < 1$, б) для $|x+y| < 1$,

в) для: $\left|\frac{y}{1-x}\right| < 1, \ |x| < 1.$

Ряди того рода є синтаґматичні; в обсягах, де они є **збіжні** в разї уґрупованя в), є они **розбіжні** на случай уґрупованя а) або б). Ся увага Cauchy має незвичайну вагу в найновійших розслїдах Mittag-Leffler'а. *В. Л.*

E. Borel. Leçons sur les fonctions méromorphes. (Paris, Gauthier-Villars, 1903. VI. + 122).

В пятій з черги книжцї, що належить до циклю „Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions“, подає автор виклад теориї функций аналїтичних мероморфних, с. є. функций аналїтичних, що мають бігуни (точки особливі) не лиш в безконечности, як т. зв. функциї цїковиті, але і в скінченім віддаленю. Книжка складає ся з чотирох роздїлів і чотирох нот.

Перший уступ подає загальні уваги про функциї аналїтичні змінної зложеної, про точки особливі і про спосіб представленя тих функций в окруженю точок особливих; головну часть сего уступу обнимає звісний теорем Mittag-Leffler'а про представленє функциї аналїтичної з скінченим або безконечним числом точок особливих, т є. форму:

$$f(z) = \varphi(z) + \sum R_i(z) \qquad (z = x + iy)$$

де:

$$R_i(z) = P_i\left(\frac{1}{z - a_i}\right) + Q_i(z)$$

наколи a_i є бігуни функциї f(z). Наколи G(z) є функция цїла з місцями зеровими a_k, то представити єї можна після теорему Вейерштрасса добутком функций первих:

$$G(z) = G(o)\, e^{\Gamma(z)} \prod \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k} + \cdots\cdots + \frac{z^p}{p a_k^p}}$$

наколи функция є порядку p, т. є. коли сума $\sum \frac{1}{|a_k^{p+1}|}$ є збіжна.

Звідси слїдує важне твердженє, що кожду функцию мероморфну можна представити яко квот двох функций цїлих:

$$f(z) = \frac{F(z)}{G(z)}.$$

Другий роздїл займає ся рядом Taylor'а. Подавши коротко теорию збіжности ряду:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots$$

отже теорию Cauchy, Pringsheim'а, Lecornu (після якого відворотність границї $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ для $n = \infty$ дає луч збіжности) та Hadamard'а (луч збіжности є $\frac{1}{l}$, де l є горішна границя вираженя $u_n = \left|\sqrt[n]{a_n}\right|$ для $n = \infty$, отже для функций цїлковитих є $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$), переходить автор до студиованя функциї на самім колї збіжности. Наколи функция мероморфна, представлена рядом Taylor'а, має на своїм колї лиш один бігун α, то істнує тодї границя така, що

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{a};$$

наколи би істнували два бігуни $\frac{1}{\alpha}$ і $\frac{1}{\beta}$, то тодї границя:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha\beta.$$

Наколи функция має бігуни $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \cdots \frac{1}{\alpha_p}$, то тодї вираженє $\sqrt[n]{\Delta_n^p}$ стремить до границї $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p$, де:

$$\Delta_n^p = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+p-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+p-1} & a_{n+p} & \cdots & a_{n+2p-2} \end{vmatrix}$$

Анальоґічно границя $\sqrt[n]{|\Delta_n^{p+q}|}$ є рівна $\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_p \varrho^q$; де:

$$\Delta_n^{p+q} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+p+q-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n+p+q-1} & & \cdots & a_{n+2p+2q-2} \end{vmatrix}$$

$\frac{1}{\varrho}$ луч кола, в якім функция має лише бігуни прості $\frac{1}{\alpha_1}, \cdots \frac{1}{\alpha_p}$, а $\varrho_i = |\alpha_i|$, при чім:

$$\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \varrho_3 \geqq \cdots > \varrho_p > \varrho.$$

Горішна границя:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|\Delta_n^r|} = R$$

де:

$$\Delta_n^r = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+r-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n+r-1} & & \cdots & a_{n+2r-2} \end{vmatrix}$$

а: $\quad R = \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{p-h} \varrho_p^{r-p-h}, \quad p - h + 1 \leqq r < p.$

Ті твердженя що до границь бігунів подав Hadamard. Теореми ті стосує автор до функций мероморфних з цїлковитими сочинниками, при чім розслїджує по при функцию:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

функцию:

$$F(z) = E(a_0) + \frac{E(10a_1)}{10} z + \cdots + \frac{E(10^{n^2} a^n)}{10^{n^2}} z^n + \cdots,$$

де $E(a)$ є число цїлковите, що містить ся в a. Наколи $f(z)$ напишемо в формі:

$$f(z) = \sum \frac{b_n}{c_n} z^n,$$

то показує ся, що:

$$\sum \frac{b_n}{c_n} z^n \text{ і } \sum \frac{E(b_n)}{c_n} z^n$$

мають ті самі особливости.

Дальшим незвичайно важним застосованєм вислїдів Hadamard'а є шуканє місць зерових функций цїлих. Метода та опирає ся на звіснім твердженю Cauchy: „Наколи маєм многочлен і відворотність єго розвяжемо на ряд Taylor'а (або возьмем походну льоґаритмічну), то луч збіжности сего ряду дає беззглядну вартість найменьшого з корінїв даного многочлена". Методу ту застосували Runge і Hadamard до функциї цїлої:

$$G(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \quad (c_0 \gtrless 0)$$

через розслїджуванє відворотної функциї:

$$\frac{1}{G(z)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

яка є мероморфна і якої бігуни є зерами функциї G(z).

Уступ третий присьвятив автор теоремови Picard'а, який — як звісно — звучить:

„Наколи маєм функцию цїлу G(z) і дві сталі a, b $(a \gtrless b)$, то, наколи рівнаня:

$$G(z) = a \quad \text{і} \quad G(z) = b$$

не мають корінїв, G(z) зводить ся до сталої".

Теорем сей розширює Borel на функциї мероморфні. Наколи G(z) є функция мероморфна, а три рівнаня:

$$G(z) = a, \; G(z) = b, \; G(z) = c \quad (a \gtrless b \gtrless c)$$

мають обмежену скількість корінїв, то G(z) зводить ся до виміримого дроба. Рівнаня, що мають обмежену скількість зер, називає автор винятковими (exceptionel); показуєсь, що функция цїла має що найбільше одно, мероморфна два рівнаня виняткові. Далї доказує автор, що функция цїла має лишь одно рівнанє виняткове, наколи єї порядок є числом цїлим, наколиж порядок не є числом цїлим, нема рівнаня виняткового.

Наколи маєм функцию мероморфну:

$$f(z) = \frac{G(z)}{F(z)}$$

порядку ϱ, і яку небудь иньшу функцию мероморфну $\varphi(z)$ порядку низшого і возьмем рівнанє:

$$f(z) = \varphi(z),$$

то взагалї не будем мати нїяких рівнань виняткових, а наколи они будуть, то не може бути їх більше, як два.

Роздїл пятий займаєсь рядами дробів вимірених. Автор розбирає вперед ряд дробів, розложених на елементи прості, форми:

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n};$$

ряд сей представляє функцию мероморфну тодї, єсли a_n росте неозначено (т. є. не стремить до означеної границї) і єсли ряд $\sum \left| \frac{A_n}{a_n} \right|$ є збіжний. Наколи ряд $\sum \frac{A_n}{z - a_n}$ не є збіжний, то можна зробити єго збіжним через долученє певного многочлену до кождого єго члена. Через долученє многочлена, що повстає з перших виразів розвиненя функциї f(z) після степений z, дістанем ряд канонїчний (кождий єго поодинокий елемент буде функциєю вимірною одного бігуна); в случаю бігунів однократних буде ряд канонїчний мати форму:

$$f(z) = \sum \left[\frac{A_n}{z - a_n} - \left(\frac{A_n}{z - a_n} \right)_{\lambda n} \right],$$

де $\left(\frac{A_n}{z - a_n} \right)_{\lambda n}$ значить перших λn членів розвиненя $\frac{A_n}{z - a_n}$;

або:
$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{\lambda n}.$$

Як звісно, ряди такі мають перворядну ролю в теорию Mittag-Leffler'а. Ряд такий є збіжний для всїх вартостий z, ріжних від a_n.

Наколи маєм функцию мероморфну:

$$f(z) = \frac{G(z)}{F(z)},$$

де F і G є порядку ϱ, то кажем, що розміщенє зер функциї F(z) є звичайне, наколи:

$$|F'(a_n)| > e^{-n^{1+\varepsilon}},$$

а надзвичайне, наколи:

$$|F'(a_n)| < e^{n^{1+\varepsilon}}.$$

Автор доказує, що на случай звичайного розміщеня, коли бігуни є a_n, а резідуа $A_n = \frac{G(a_n)}{F'(a_n)}$, можна представити функцию мероморфну f(z) в виді:

$$f(z) = f_1(z) + H(z),$$

де $f_1(z)$ є ряд канонїчний:

$$f_1(z) = \sum \frac{A_n z^{\lambda_n}}{(z-a_n) a_n^{\lambda_n}},$$

а $H(z)$ функция цїла порядку ϱ.

Методи, якої автор уживає, можна ужити і тодї, коли ряд дробів вимірних не представляє функциї мероморфної (отже случай загальнїйший).

Автор вводить далї понятє т. зв. кривих збіжности. Наколи маєм функцию мероморфну:

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z-a_n}$$

з однократними бігунами і заложимо $|a_n| = r_n$, то все буде можна утворити контур многокутний з ограниченою скількостию вершків, який по черзї перетинає скінчене число колес r_n, та якого всї точки є віддалені від певної кривої C о віддаленє меньше, як дане число ε. Такий контур є кривою збіжности. Функция $f(z)$ є на такім контурі рівномірно збіжна і дає ся інтеґрувати член за членом.

Дальше переходить автор до дробів нерозложених на елементи прості пр.

$$\sum \frac{A_n}{(z-a_n)(z-b_n)}.$$

Наколи маєм ряд таких дробів:

$$f(z) = \sum \frac{P_n(z)}{Q_n(z)},$$

де степень P є меньший, як Q, і наколи ряд є збіжний для $z = \alpha$, і положимо:

$$z = \alpha + \frac{1}{Z},$$

то все буде можна написати:

$$f(z) = \sum \left[\frac{P_n\left(\alpha + \frac{1}{Z}\right)}{Q_n\left(\alpha + \frac{1}{Z}\right)} - \frac{P_n(\alpha)}{Q_n(\alpha)} \right] + f(\alpha)$$

і покаже ся, що ряд дробів вимірних буде рівномірно збіжний.

В решті переходить автор до случаю надзвичайного розміщеня бігунів функциї мероморфної:

$$\frac{G(z)}{F(z)} \text{ порядку } \varrho.$$

Наколи a є бігуном сеї функциї, отже $F(a) = 0$, то істнує твердженє слідуюче:

„Єсли маєм рівнанє форми:

$$\varphi(x) + \psi(x) = 0,$$

де:

$$\varphi(x) = F'(a) + \frac{x}{2} F''(a)$$

$$\psi(x) = \frac{x^2}{3!} F'''(a) + \frac{x^3}{4!} F^{IV}(a) + \cdots\cdots$$

і контур C, де є постійно:

$$|\psi(x)| < |\varphi(x)|,$$

то се рівнанє має в контурі C такуж саму скількість зер, що і рівнанє $\varphi = 0$.“

Книжку кінчать чотири ноти:

1) про зера функций цїлих, де автор подає теорем Lindelöf'a: Наколи сочинники ряду цїлковитого:

$$\Sigma c_n z^n$$

сповняють нерівність:

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{\left[A_n (\log n)^{\alpha_1} \cdots\cdots (\log_\nu n)^{\alpha_\nu}\right]^{\frac{1}{\varrho}}} \qquad (\log_\nu n = \underset{(\nu \text{ рази})}{\xrightarrow{\log\log\log\cdots\cdots\log}} n)$$

то почавши від певного індексу n, будемо мати (якенебудь буде ε):

$$M(r) < e^{\frac{1+\varepsilon}{Ae\varrho^{\alpha_1+1}} r^{\varrho}(\log r)^{-\alpha_1} \cdots\cdots (\log_\nu r)^{-\alpha_\nu}}$$

наколи r (луч збіжности) перейде певну границю.

2) про порядок суми двох функций цїлковитих (теорем P. Boutroux).

3) про суму резідуів функциї мероморфної; ту маєм теорем Helge von Koch'a: „функцию мероморфну можна представити рядом многочленів, збіжним на цїлій площи (кромі точок особливих).“

4) про функциї quasi-цїлі і quasi-мероморфні (після Maillet'a).

Наколи $\psi_1(t), \psi_2(t), \cdots\cdots \psi_n(t)$ є функциї цїлі t, то функция

$$f(z) = \psi_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right) + \psi_2\left(\frac{1}{z - a_2}\right) + \cdots\cdots + \psi_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$$

називає ся (після Maillet'a) quasi-цїла з сущно особливими точками $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$; наколи $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots \psi_n$ є мероморфні, то $f(z)$ є функция quasi-мероморфна.

До тих функций, як показав Maillet, можна віднести много свійств функций цїлих і мероморфних, специяльно теорем Picard'а і его узагальненя.

Так отже в скороченю подали ми перегляд тверджень і теорий, що ся містять в тій книжцї; не уступає она що до змісту і легкого та ясного представленя, властивого Borel'ови, попереднім чотиром частям викладів автора; тож з нетерпеливостию ожидаєм заповідженої вже шестої части, що містити буде виклади про ряди многочленів. *В. Л.*

Dr. Pl. Dziwiński. Wykład matematyki. Kurs I. Zasady geometryi analitycznej i analizy wyższej. Tom I. (Lwów 1902. XIX + 928).

Книжка ся є одним з томів видавництва п. заг. „Biblioteka politechniczna“, що виходить у Львові заходом збору учительского школи політехнїчної. Подає она в 61 викладах, ілюстрованих численними примірами та вправами, материял математики висшої в тім обсягу, як его потребує молодїж технїчна. Тому-то книжка ся не подає одної якоїсь специяльної партиї аналїзи математичної, всесторонно обробленої, але подає головно ті уступи математики, які технїкови є потрібні в дальших его студиях чисто технїчних. Нинїшний том подає в головнім начерку теориї і методи ґеометриї аналїтичної в площи та просторі, початки аналїзи висшої, рахунок ріжничковий та теорию визначників; велику часть книжки обнимає теория кривих стіжкових та їх специяльні свійства. Виклад є незвичайно прозорий, ясний, попертий численними примірами, так що можна справдї винести з сеї книжки велику користь. Про вартість сеї книжки промавляє найбільше сей факт, що автор оголосив сю книжку яко вислїд кільканацятилїтних викладів в львівскій політехнїцї, отже з досьвіду знав, які уступи і який спосіб викладу є для технїчної молодїжи найвідповіднїйші. Під зглядом зверхним видана є книжка бездоганно. *В. Л.*

K. Weierstrass. Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten. (Mathem. Werke von Weierstrass. Bd. IV. bearbeitet von G. Hettner u. J. Knoblauch, Berlin, Mayer u. Müller 1902) ст. XIV. + 631.

Величезний сей том обіймає виклади покійного математика нїмецкого про функциї Абеля і їх основи (отже теорию образу альґебраїчного, функциї виміримої пари (xy), теорию інтеґралів і функций Абеля, теорию функций Θ і ϑ). Цїлий виклад опирає ся на зовсїм ориґінальних основах, як впроваджене і застосоване функций $H(xy)_\alpha$, $H'(xy)_\alpha$, $H(xy\,x'y')$, функций перiодів $E(xy)$ і $E(xy\,x_1y_1\,x_0y_0)$, що при їх помочи дасть ся представити кожда вимірима функция $F(xy)$ та інтеґрали абелеві трох родів. Ідеї ті великого ґеометра нїмецкого до тепер звісні були лиш ученикам покійного і їх ученикам, а не були нїгде оголошені друком. Дещо свого часу оголосив був O. Biermann, а в послїдних часах опер проф. львівского унїверзитету Др. Пузина свій виклад двотомовий функций аналїтичних (особливо том другий) на теориї Weierstrass'а. Тому-то оба впорядчики сего тому (оба професори унїверзитету берлїньского) через видане сего тому прислужили ся дуже для науки, бо присвоїли загалови математичному ідеї вітця новійшої аналїзи. Великий in 4⁰ виданий том подає цїлу теорию в 34 розділах; зазначити треба, що том сей почав ся друкувати еще за житя покійного, але зараз з розпочатєм друку (1897.) Weierstrass помер. — Книжка видана, як і попередні томи, бездоганно. *В. Л.*

B. Riemann: Gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausg. von M. Noether u. W. Wirtinger. (Leipzig. B. G. Teubner 1902. ст. VIII. + 116).

Від часу, коли перед 10 роками вийшло друге видане творів великого математика нїмецкого, найшло ся еще дещо нового материялу в виді додатків до его викладів. Сї материяли вийшли тепер друком; они обнимають виклади про загальну теорию інтеґралів альґебраічних рівнань ріжничкових (р. 1861/2), інтеґрали лїнійних рівнань ріжничкових другого порядку в точцї розгалуженя (нота з р. 1856/7), додатки до викладу про ряд гиперґеометричний (р. 1858/9) і усякі математичні ноти (про форми тета, про періоди гипереліптичних інтеґралів etc.) *В. Л.*

Dr. Siegmund Günther, Astronomische Geographie, Leipzig, Göschen 1902. 170, 16⁰.

Дуже добра книжочка зі знаної збірки маленьких компендиїв Göschen'а. Подає в коротцї всї важнїйші дані з астрономічної ґеоґрафії, всюди беручи згляд на історичний розвиток науки. Важнїйші триґонометричні формули подані. На увагу заслугує коротке, але повне, зібране метод означуваня ґеоґрафічної ширини і довжини, та паралякс тїл небесних. Послїдні уступи посьвячені сьвітовим системам та праву ґравітациї. Книжочка грішить, подібно як і більші книжки Günther'а тим, що представлене проблемів не є анї елементарне анї par excellence наукозе, а таке посередне становиско, як у Günther'а звичайно, обнижає вартість материялу так совістно зібраного. *С. Р.*

H. Andoyer, Théorie de la lune. Paris, Naud, 1902. (Scientia, Phys.-Math. 17.) 86, 8⁰.

Заключає она коротке представлене уступів небесної механїки, що відносять ся до місяця. Особливу увагу посьвячує автор т. зв. сонїчній теориї руху місяця, де виходить ся з заложеня, що сьвіт складаєсь лиш з сонця, землї і місяця, а иньші тїла небесні мають лиш другостепенне значінє. Вивівши рівнаня сего проблєму трох тїл автор обчисляє ґеометрично головні неправильности довжини, ширини і паралякси місяця методою неозначених сочинників, подаючи коротко істоту рівнаня осередка, рівнаня річного, вариациї, евекциї і рівнина параляктичного. В IV., V. і VI. уступі автор обговорює другостепенні нерівности руху місяця, єго нерівности періодичні і нерівности вікові. Книжочка мабуть призначена лиш для орієнтациї математикам, бо не подає нових теорий анї способів обчисленя, опираючись головно на працях Hansen'а, Newcomb'а Delaunay'а, Brown'а, Hill'а, Tisserand'а, Poincaré і т. д. *С. Р.*

Dr. Wacław Laska. Astronomia sferyczna. Lwów, 1901. 87 вел. 8⁰.

Є се підручник уложений для слухачів політехніки. На увагу заслугує. елементарне, але прозоре, представлене трансформациї сорядних і велике число практичних вказівок до обчислюваня обсервацпй та уживаня ефемеридів. Уступ про час і єго означенє також ясний, лиш прим. на стор. 20. на жаль зовсїм зле переведений, бо через недогляд введено одну злу вартість. Взагалї в книжцї дещо більше похибок друкарских і недрукарских, як пристало на академічний підручник. Теория інструментів звязла і ясна, річ дуже добре представляєсь. Натомість автор не зібрав разом способів означеня довжини і ширини ґеоґрафічної, що дужеб ся придало. Разить дещо виписуванє примірів зі старших підручників (прим. стор. 80), та хочби таке твердженє, що призматове колесо тепер майже виключно уживаєсь вмісто секстанта. Славний Jordan, великий практик, не дуже одушевляєсь прикметами сего колеса, а моряки по старому й до тепер в переважній більшости вживають секстанта. *С. Р.*

A. Gleichen. Lehrbuch der geometrischen Optik. (B. G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern, Leipzig u. Berlin 1902). ст. XIV. + 511.

Книжка ся подає виклад ґеометричної оптики в 20 обширних розділах і то виклад не лиш теоретичний, але ілюстрований примірами практичними, як описом люпи, люнет, мікроскопів і знарядів фотоґрафічних. Становиско автора найлекше пізнати з вступних єго слів, де каже між иньшим ось-що: „я старав ся тримати правила, якого правдивість яко учитель стократно пізнав, а се, що погляд — то мати усякого зillegible; і тому-то я старав ся виходити все від простого конкретного случаю, а аж опісля навязував до сего загальну теорию“. Через се вправді книжка стала більше обємиста, але зискала на вартости яко підручник науковий. Перейдім коротко зміст сеї книжки.

В перших чотирох розділах (ст. 1.–44.) виводить автор на основі теориї фильованя права відбитя і заломаня сьвітла на случай, коли гранична поверхня є плоска (під заложенєм, що жмуток лучів сьвітла є астиґматичний[1])), та теорию призмату і системів призматів на случай, коли сьвітло є однородне (отже найменьше збоченє, положенє образу — теоретично і на примірах)

Слідуючі чотири розділи (ст. 46.–109.) обнимають теорию та права відбитя на случай поверхний кулистих (одної або системы сконцентрованих поверхний) і теорию сочок (автор відріжняє сочки додатні і відємні); всї тї розділи опрацьовані дуже гарно і інструктивно.

Розділ девятий подає теорию аберацийі першого порядку (аберация поверхнї кулистої, тонької сочки, теорию Euler'a і Abbe, найменьша аберация), розділ десятий займає ся астиґматизмом і комою при заломаню на поверхнях кулистих, одинайцятий штучним розширенєм царини відтвореня (Abbildungsgebiet), дванайцятий ортоскопиєю (ідеальний і правдивий біг лучів), тринайцятий розщіпленєм сьвітла, чотирнайцятий кривиною образів, пятьнайцятий правами фотометриї, а шіснайцятий оком людским.

Слїдуючі три розділи, що обнимають другу половину книжки (ст. 270.–511.) подають теорию і практику найважнїйших знарядів оптичних, а се теорию і практику люнет і люп, мікроскопів, обєктивів фотоґрафічних (сей розділ залюбки через автора трактований), спектроскопів і фотометрів. В тих уступах подані уваги історичні

---

[1]) Астиґматизмом називаєм власність сьвітляної филї *не*концентрованя ся в однїй точцї (така концентрация має пр. місце в филї кулистій).

та численні рахункові приміри, так що автора можна подивляти за величезний наклад праці, яку вложив в ту часть книжки; видно се особливо в розділї про обєктиви фотоґрафічні, де автор розібрав велике число усяких знаних та уживаних системів.

Коли в кінци додамо, що до зрозуміня теоретичних виводів сеї книжки вистарчають початки рахунку висшого, що виклад усюди прозорий і педаґоґічно ведений, то можем сьміло сказати, що сю книжку можна поставити на рівні з знаними підручниками Чапского, Heath'а т. п. -- Зверхний вигляд книжки хороший. *В. Л.*

C. Arldt. Die Funkentelegraphie. (Leipzig, T. Thomas 1903. ст. 72).

В виду поступів, які зробила телеґрафія без дроту від часу перших проб Marconi'ого, книжочка Арльдта є дуже актуальна. Є се властиво виклад, що єго автор читав в німецкім „Flotten-Verein" в Берлїнї, а попереджає єго (на 6 сторонах друку) вступ професора полїтехнїки берлїньскої Flamm'а про значінє сеї телеґрафії для новійшої маринарки. Сам автор подає вперед теорию іскри електричної і єї дрогань, теорию кондензатора, індуктора, прoривачів (прoривач молотковий, ртутьний, турбіновий, Wehnelt'а), резонатора Гертца та рурки Branly'го, теорию математичну дрогань в дротї, далї описує перші проби Marconi'ого і складові части єго апарату, систем Braun'а та актуальний нинї систем Slaby-Arco, телеґрафію многократну та переносну, а врештї уряджeня ріжних стаций німецких (Берлїн, Cuxhaven, Bremerhaven і т. п.) та кораблїв. Цїкаву книжочку кіньчить погляд на теперішний стан телеґрафії бездротної; єї вартість підносить 75 хорошо виконаних ілюстраций. *В. Л.*

A. Voller. Elektrische Wellentelegraphie. (Hamburg, L. Voss 1903. ст. 52, 17 ілюстраций).

Є се популярний виклад про ту саму квестию, яку розбирає попередна брошура; автор виголосив єго на 72. з'їздї лїкарів і природописцїв нїмецких в Гамбурзї. Виклад украшений 17 ілюстрациями. *В. Л.*

H. Kayser. Die Elektronentheorie. (Bonn, Röhrscheid u. Ebbecke 1903. ст. 32).

Є се виклад, що єго автор читав в авлї універзитету в Бонн в день імянин цїсаря Вільгельма (27. I. 1903.). В нїм подає короткий начерк теориї електронів і поглядів, що ся з сею новою теориєю фізичною вяжуть. *В. Л.*

Dr. Karl Hofmann: Die radioactiven Stoffe nach dem gegenwärtigen Stande der wissenschaftlichen Erkenntniss. (Leipzig 1903. Verl. J. A. Barth стор. 1—54).

Сю невелику книжочку видав автор в тій цїли, щоби познакомити ширші круги з лучистими тїлами і їх дїланями. Вправдї до тепер не бракло в тім зглядї праць, що мали рівнож то само на цїли, однак були то працї, що займали ся тілько декотрими тїлами або доказували декотрі їх свійства. Длятого автор уважає за потрібне подати цїлість здобутків на тім поли і то тим більше, що ся наука в послїдних часах надзвичайно скоро поступила вперед. Відкритє лучів X дало спонуку дослїдникам до шуканя за лучами, що не лишень суть випливом розброєня електричного, але що їх висилають якісь сталі тїла. Автор зіставляє коротко стараня дослїдників і їх здобутки на тім поли. Відтак переходить по черзї відкриті лучисті тїла і описує їх свійства стверджені многими ученими. І так описує насамперед свійства урану, відтак вісмуту, раду, олова і тору. Відтак застановляє ся над лучистостию індукованою в загалї, а вкінци над лучистостию в воздусї атмосферичнім. Вкінци зіставляє всї дотеперішні гіпотези про причину дїланя лучистих тїл, а не заявляючи ся за жадною з них стверджує лишень то, що відкритє лучистих тїл становить важний крок на цїлком передтим незнанім поли фізики і хемії. *С. М.*

Jan Biłyk: Soczewki jako podwójne zwierciadła. (Sprawozdanie c. k. gimnazyum w Kołomyi 1902 ст. 1—30).

В сїй розвідцї старає ся автор доказати, що погляд, який подекуди стрічає ся, якоби в просторі за сочкою лежачім з противної сторони предмету повставали виключно образи дїйсні, а по сторонї, де находить ся предмет, лишень образи мнимі, є неправдивий. Рівночасно виказує, що в першім і другім просторі могуть повставати так образи дїйсні, як і мнимі. Ся розвідка складає ся з трох частий; в першій розбирає автор теоретично залучаючи відповідні фіґури повставанє образів в зеркалах двуплоских, вгнутоплоских і випуклоплоских, в другій части є мова о зеркалах вгнутих, а в третій о зеркалах випуклих. Розвідка та доволї ясно написана; немило лишень вражає брак спису лїтератури, котрою покористував ся автор. Додати треба, що єсли ся розвідка вийшла накладом автора, то лїпше був би зробив автор, наколи-б був видав єї перевівши на язик руский, бо тим збогатив би до нинї на жаль дуже убогу руску лїтературу. *С. М.*

Д-р Іван Пулюй: Непропаща сила. (У Львові, літер. наукової бібліотеки ч. 5. ст. 53. р. 1901).

Є се передрук викладу звісного нашого вченого, проф. політехніки праскої, викладу, що давнійше вийшов накладом тов. „Просьвіта“. Змінена лиш правопись, а подекуди язик (змінила се здаєсь редакция літ. наук. біблїотеки). Про зміст не беру ся судити, раз тому, що се передрук, друге, що імя шановного автора само говорить про стійність сеї популярної книжочки. Завважу лиш се, що ліпше місто терміну „непропаща сила“, що колись за причиною Гельмгольтца був в моді, ужити було загально принятого терміну „непропаща енерґія“. Говорячи про „непропащу силу“ автор повинен був може також згадати про єї „тїнь“, енерґію страчену (ентропію); та се очевидно ні троха не обнижає вартости сеї книжочки. Редакция лїтер. наукової біблїотеки видаючи в друге сю книжочку та змінючи єї язик повинна була в першій мірі звернути увагу на наукову термінольоґію; такі терміни, як „електрика“, „углерід“ (місто вуголь), „квасорід“ (місто кисень), „вугляний квас“, „пластинка“, „шпулька“, „ключовий дріт“, „електрико-маґнетичний“, „роздає гук“ і и. не повинні являтись в другім виданю книжочки. На ст. 12. пояснює редакция слово „еквівалент“ словом „рівнобіжник“, що очевидно є зовсїм хибне (рівнобіжник = Parallelogramm, еквівалент = рівноважник). *В. Л.*

Михайло Рибачек. „Льоґічна будова математичних доказів“. (Коломия 1902. стор. 26).

В звіті руської ґімназиї в Коломиї за 1901/2 р. шк. подає п. Р. по кількох замітках загальнійших про науку математики, а особливо про ґеометрию Евклїда, подрібнійші замітки про прикмети і роди доказів, а опісля основно поясняє будову доказів синтетичних і аналїтичних. При першій ґрупі наведено і пояснено докази невпрост, а при другій докази зі схожости і через унаочнене, а закінчено розвідку поясненями про формальну сторону математичних тверджень. Розвідка визначаєсь ясним викладом предмету і чистотою мови. *Я. М.*

Ю. Гірняк. Ненастанна деґрадация енерґії — конечна проява і причина всякого руху і житя в природї. (Літер. Наук. Вістник, том XXI. р. 1903. ст. 73.—83).

В короткім начерку говорить ту автор про переміни та деґрадацию енерґії, сего „spiritus movens“ усего руху та житя в природї. Деґрадация енерґії відбуваєсь без перерви, а єї вислїд, то перехід в тепло одностайно розміщене в просторі, т. зв. ентропію, що стало стремить до „maximum“. Та хотя автор в двох місцях говорить про ентропію, но не пояснює сего понятя як слїд; очевидно для фахового фізика справа ся вповнї ясна, але чи нефаховий профан — а для таких статя ся писана — зрозуміє пр. уступ третий з долини ст. 82., річ бодай для мене сумнївна. Згадуючи на ст. 77. імена великих фізиків, що завдяки їм засада захованя енерґії приняла ся загально і прибрала виразьну форму в цїлій фізицї, пропустив автор імя одного з найбільших, льорда Кельвіна. Автор опирає ся на ст. 80 et sqts. на перестарілих обчисленях Ремайса з р. 1881, де температура сонця подана на 50000° C.; та новійші поміри показують, що температура та, хоть і як висока, не досягає повисшого числа (пор. пр. J. Scheiner: Strahlung u. Temperatur der Sonne 1899. ст. 58. sqts). — Та по при сї хиби артикул написаний дуже живо і читаєсь єго з заінтересованєм; а що він збільшає у нас так мало єще розвинену популярну природописну лїтературу, то авторови за єго труд належить ся щире признанє. *В. Л.*

„Деякі практичні правила подїльности чисел“ подав: Др. Володимир Левицкий. В 3. числї „Учителя“ з 1903. р. подав др. Вол. Лев. правила подїльности чисел через 7, 13, 17, 19, розумієсь не вдаючись в їх математичне виведенє і узасадненє, бо ходило о поданє лиш тих правил, які можуть віддати в практицї користні прислуги. — Для пізнаня, чи число подїльне через 7, наведено три правила, два перші з них, хотяй можуть бути примінені до більшециферних чисел, оказують ся найнаручнїйшими при трициферних, — трете, подане за італ. математиком G. Loria, примінити мож до чисел більших. — Для пізнаня подїльности через 13, 17 і 19 подано по одному правилу. *Я. М.*

„Проба девяткова“. Подає др. Володимир Левицкий. В семім числї тої самої часописи з 1903. р. подає др. Л. простий спосіб, як можна провірити, чи вислїд додаваня, відниманя, множеня або дїленя звичайними числами єсть вірний. Проба ся основуєсь на фактї, що кожде число подїлене через 9 дає таку саму решту, як єго поперечна сума, а в практицї надаєсь сеся проба особливо до провірюваня сум в касових книгах. — На тій самій засадї сказати можна, яку цифру счеркнув хтось з ріжницї двох чисел уложених з таких самих цифр. *Я. М.*

Перегляд важнїйших журналїв математичних[1]).

Archiv der Mathematik und Physik. Серия трета, том II. зошит 1.—4. (1901. і 1902). Зміст: R. Schüssler: Про кола подвійно стичні до перерізів стіжкових. M. Hamburger: Новий вивід функций кулї. G. Mittag-Leffler: Про обсяг збіжности ряду Bernouilli. E. Phragmén: Про останки ряду Taylor'а в формі Cauchy та Lagrange'а. H. Heun: Значінє засади d' Alembert'а для системів цїпких та для механїзмів вязевих. R. Funck: Конфіґурация (15_6, 20_3), єї аналїтичне представленє та відношенє до певних альґебраічних поверхний. L. Matthiessen: Розвязка ґоніометрична альґебраічних рівнань перших чотирох степенів. E. Czuber: Про обводню кривих і площий. P. Mansion: Доказ теорему Legendre'а. R. Lehman-Filhés: Аналїтичний вивід твердженя про рівнобіжник сил. L. Müller: Про твердженє Steiner'а і єго відношенє до конфіґурациї двох вписаних і описаних чотиростїнників. K. Zindler: Про скрут лїнїй ґеодетичних в точцї поверхнї. W. F. Meyer: Доповненя до тв. Fermat'а і Wilson'а. C. Stephanos: Уваги до теориї сил осередних. E. Janisch: Увага до теорему п. Цвойдзіньского. O. Lummer: Нота до розвідки про важність права Дрепера. O. Lummer: Права чорного проміньованя і їх практичне значінє. W. Nernst: Значінє метод і теорий електричних для хемії. P. Stäckel: Про збіжність рядів триґонометричних. H. Hertzer: Період дроба десяточного для $\frac{1}{p}$, де p є число перве. E. Lampe: Два листи C. G. J. Jacobi. G. Loria: Про деякі елементарні проблеми ґеометриї начеркової о 3 і 4 розмірах. A. Kneser: Додаток до питаня про найвлучнїйший вид кінців куль. H. Schubert: Умови рівноваги для чотирох сил, що ділають прямовісно до цїпкої простої. K. Schwering: Скорочена розвязка задачі Ейлеревої: $x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = 0$. K. Schwering: Застосованє теорему Абеля до розвязки рівнань діофантових: $x^3 + Ay^3 = z^3$ і $x^3 + y^3 = z^3$. G. Majcen: Про конструкцийне випровадженє циклїчних площ для стіжка і вальця. K. Hensel: Аритметичні свойства факториялів. T. J. I. Bromwich: Потенциял простої поверхнї. S. Jolles: Синтетична теория моментів відосередних і безвладности плоского кусника поверхнї. R. Müller: Історичні і критичні уваги про понятє подібних і подібно положених перерізів стіжкових. Рецензиї, примітки.

---

[1]) Пор. Збірн. мат. прир. т. VIII. 2.

Яко додаток долучені до того тому звіти матем. берлїньского товариства. Їх зміст: J. Weingarten: Одно твердженє гидродинаміки. A. Kneser: Нове узасадненє науки про пропорциї та подібність незалежно від аксіому Архімеда і понятя неспівмірности. E. Lampe: Про одно питанє з теориї середних вартостий ґеометричних. F. Kőtter: Доказ теорему Jacobi про зложенє руху кружала з інверзий двох рухів Poinsot'a. K. Heun: Про механїку Гертца.

Серия трета, том III, зошит 1.—4. (1902). Зміст: V. Kommerell: Рівнанє і свойства поверхний рурових. L. Grossmann: Нові звязи в царинї двочленних сочинників. Fr. J. Studnička: Додаток до науки про відворотні рівнаня. C. Koehler: Про клясифікацию кривих і поверхний другого степеня. A. Rotth: Фізикальні проблєми машини з одностайним током. L. Ripert: Конструкция ґеометроґрафічна осий еліпси, наколи є звісні що до величини і положеня два проміри спряжені. J. Neuberg: Посвояченє між простою а єї метом в віднесеню до трикутника. C. Koehler: Про клясифікацию кривих і поверхний другого степеня (конець). K. Vahlen: Про кубічні конструкциї. G. Hessenberg: Про докази твердже́нь о точцї перерізу. L. Heffter: До теориї вислїдників двох лїнїйних однородних рівнань ріжничкових. F. G. Teixeira: Про криву виложничу. F. Fitting: Дальший додаток до узагальненої задачі коникової (в шахах). G. Landsberg: Одна задача пермутацийна. M. Hamburger: Промова в память І. Л. Фухса. P. Stäckel: До ґеометриї неевклїдової. A. Massfeller: Проста розвязка проблєму Апольонія в площи. R. Güntsche: Додаток до ґеометроґрафії. R. Sterneck: Про скількість розкладів цілого числа на шість додатників. W. Ludwig: Про ϑ-криві гіпербольоіда з одною поволокою і гіперболїчного парабольоіда. P. Kokott: Теорем додаваня функций еліптичних в формі ґеометричній. E. Lemoine: Перетворенє тягле в трикутнику. E. Lemoine: Перетворенє тягле в чотиростїннику. C. Isenkrahe: Нові твердженя про корінї рівнань альґебраічних. O. Lummer: Правила чорного проміньованя і їх застосованє. Рецензиї, примітки.

Звіти мат. берлїньского товариства, долучені до сего тому, містять: F. Müller: Про значінє часописий для математичної лїтератури і для математично-історичних розслїдів. M. Hamburger: Представленє двоперіодичних функций яко квоти функций тета. E. Budde: Коротка увага до теориї вирів Helmholtz'a. M. Koppe: Рух кружала. A. Adler: До теориї знарядів рисункових. Письмо привітне мат. тов. при ювілейнім обходї докторскім Дедекінда. K. Hensel: Про аналїтичні функциї і альґебраічні числа. G. Hauck: Про невластиві мети. H. Reissner: Механїчна анальоґія до пруживости. E. Budde: Про ґрупу звичайних рівнань ріжничкових другого порядку між двома змінними. R. Rothe: Уваги про специяльний криволїнійний систем сорядних. H. Opitz: Питанє про огнищеві лїнії дуже тонкого астиґматичного жмутку лучів. G. Hessenberg: Про рівнанє лїній ґеодетичних. R. Skutsch: Ґрафічний розклад сили на шість складових з приписаними лїніями діленя. J. Knoblauch: Доказ співзмінности Christoffel'a.

Mathematische Annalen. Том 55. зошит 3. і 4. р. 1902. містить: M. Noether: Ch. Hermite. E. Weber: Теория систему рівнань Pfaff'a. H. Koch: Про Рiманна функцию чисел первих. M. Dehn: Про обєм. E. Wendt: Про специяльну клясу ґруп. N. Nielsen: Нота про збіжність ряду Neumann'a функций вальцевих. E. Christoffel: Теория перерізів. F. Dalwigk: Уваги про твердженє о подвійних рядах Веєрштрасса і про теорию рівномірно збіжних рядів. L. E. Dickson: Ґрупи надортоґональні. D. Francesco: Рух тїла ціпкого в просторі з постійною кривиною. K. T. Vahlen: Про рухи і числа зложені. P. Muth: До ґеометричного значіня незмінників плоских посвоячень. J. Kürschák: Відмірюванє довжин. M. Brendel: Увага до артикулу про інтеґрованє частне.

Том 56. зошит 1. 2. 3. р. 1902. містить: P. Gordan: Співчасний систем двох квадратових чвіркових форм. E. Neumann: До інтеґрованя рівнаня потенцияльного при помочи методи C. Neumann'a середної аритметичної. D. Mirimanoff: Коріні кубічнї чисел первих і множенє зложенє в функциях еліптичних. W. Jacobsthal: Асимптотичне представленє розвязок лїнійних рівнань ріжничкових. J. Kürschák: Про перетворенє частних рівнань ріжничкових в рахунку варияцийнім. S. Epsteen: Ґрупи, що спадають з їх ґрупами долученими. A. Kneser: Додатки до теориї і приміненя рахунку варияцийного (II. часть). A. Markoff: Про неозначені форми квадратові трійкові. W. Dyck: Промова C. G. J. Jacobi, найдена в паперах F. Neumann'a. H. Kühne: Співчасні незмінники двох до себе противзмінних системів і їх приміненє до згинаня множіний. G. Kolosoff: Про певне свійство рівнань ріжничкових обороту тяжкого тїла довкола сталої точки в случаю С. Ковалевскої. W. Anisimoff: Нота про інтеґрованє рівнань ріжничкових при помочи зложених змінних. J. Mollerup: Наука про ґеометричні пропорциї. D. Hilbert: Про основи ґеометриї. J. H. Graf: Додаток до розвязки рівнань ріжничкових другого порядку. L. Lachtin: Розвязник ріжничковий альґебраїчного рівнаня 6. степеня. E. Netto: Про зложенє субституций з транспозиций. P. Stäckel: Лїнійні громади лїній ґеодетичних. K. T. Vahlen: Про скінченорівні многостїнники. Примітки, лїтература.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Том 46. зошит 4. (1901.) містить: A. Francke: Сила двиганя стовпів при зміннім перерізї. W. Kutta: Додаток до приближного інтеґрованя цїлковитих рівнань ріжничкових. S. Jolles: До ґеометричної теориї параболїчних двигарів. A. Grusinzew: Теория волосности і гидростатики. A. Denizot: Про певний проблєм маятниковий Ейлєра. R. Mehmke: До обчисленя корінїв рівнань квадратових і кубічних при помочи звичайних абаків.

Том 47. зошит 1.–4. містить: V. Fischer: Анальоґії до термодинаміки. A. Francke: Лук з пруживо звязаними підпорами. A. Francke: Двигарі з острими луками з пруживо звязаними підпорами. E. Doležal: Проблєм пятох і трох лучів в фотоґраметриї. R. Skutsch: Про ваги рівнань. K. Heun: Захованє віріялу і моменту постійного системи сил при руху цїпкого тїла. F. Rudio: До кубатури оборотового параболоїду. L. Burmester: Кінематично-ґеометрична теория руху посвоячено-змінних системів. L. Krüger: До вирівнаня многокутників і вязки трикутників. C. Rodenberg: Про криву пересїчи двох пристайних поверхний перстеневих і розпад єї на кола. C. Rodenberg: Про точки пересїчи еліпси з елїпсою або гіперболею з нею співосевою. E. Zermelo: Гидродинамічні розслїди про рухи вирові в поверхнї кулистій. F. Klein: До теориї шруби R. Ball'a. H. Timerding: Теория вартостий Bernouilli. D. Bobylew i T. Friesendorff: Про періметричне точенє ся кружала. J. Kübler: Єще раз правдива форма згибаня. F. Schuh: Крива гороптеру. J. Horn: До теориї малих скінчених дрогань системів зі степенем свободи. O. Fischer: Про зведені системи і головні точки членів механїзму вязевого. O. Unger: Про конструкцийний прінціп і єго застосованє при означеню тїни на поверхнях оборотових. R. Mayr: Про тїла з кінетичною симетриєю. R. Mehmke: „Rechenschieber" в Нїмеччинї.

Том 48. зошит 1. містить: R. Gans: Про індукциї в обертаючих ся провідниках. M. Radakovič: Про рух мотору з узглядненєм пруживости єго фундаменту. L. Matthiessen: Про безконечні множіни місць діоптричних основних точок в сочках і в системах точок. A. Grünwald: Лінійні царини шрубові R. S. Ball'a. F. Jung: До ґеометричного розслїду вирівнаня маси в машинах корабельних з чотирома корбами. H. Heimann: Видержність плоских плит при нормальнім сталім обтяженю. R. Mehmke: Давний примір анаморфози. Примітки, лїтератури.

Acta mathematica, том 25. зошит 1. 2. за р. 1901. і 3. 4. за р. 1902. містить: P. Painlevé: Про рівнаня ріжничкозі другого порядку і висших, яких інтеґрал загальний є правильний. E. Picard:

Дїяльність наукова Ch. Hermite'а. S. Kantor: Найбільший ряд кривих альґебраїчних в R_r. E. Picard: Рівнаня лїнїйні з частними походними і узагальненє проблєму Dirichlet'а. Hj. Mellin: Звязь між лїнїйними рівнанями ріжничковими а ріжницевими. Hj. Mellin: Формула на льоґаритм переступних функций скінченого ряду. U. Dini: Метода наступаючих по собі приближень в рівнанях з походними частними другого порядку. J. Hurwitz: Редукция двійкових квадратових форм зі зложеними сочинниками і змінними. W. S. Burnside: Про чотири обороти, що зміняють систем ортоґональний осий в иньший. Ch. Riquier: Про степень якогонебудь систему ріжничкового. I. O. Bendixson: Про корінї рівняня основного. A. Hirsch: Про корінї рівняня основного. P. Stäckel: Аритметичні свойства функций аналїтичних.

Journal für reine und angewandte Mathematik (тепер під редак. Hensel'а) том 124. зошит 2. 3. 4. містить: S. Gundelfinger: Про віроятне повстанє тверджень Аронгольда про незмінник S. S. Gundelfinger: До обчисленя льоґаритмів Ґаусса для малих вартостий B. V. Fischer: Приміненє теориї кватернїонів до рівнань термодинамічних. P. Hoyer: Про дефінїцию і розслїди ґруп перехідних. E. Landau: Твердженє про розклад лїнїйних виражень ріжничкових на незведимі чинники. H. Kühne: Відношенє між функциями більше незвісних, що ведуть до прав відворотности. F. Grünfeld: Додатки до теориї рівнань ріжничкових, долучених до рівняня ріжничкового n.-ого порядку. H. Lemke: Про рівновагу космічних мас ґазових. L. W. Thomé: Про асимптотичне представленє функций. J. B. Goebel: Розділ елєктричности на двох проводячих кулях. P. Kokott: Дослїди над перетворенєм Ляндена. J. C. Fields: Теорем Рімана-Роха і єго незалежність від долучених умов на случай певних кривих. L. Koenigsberger: Основи механїки для більшого числа независимих змінних. L. Fuchs: Про границї, в яких певні означені інтеґрали задержують приписаний знак. L. Schlesinger: До теориї лїнїйних рівнань ріжничкових в звязи з проблємом Рімана (друга нота).

Monatshefte für Mathematik und Physik, том XIII. квартал 1. 2. 3. 4. (р. 1902) містять: C. Lorenz: Властиві трикратні інтеґрали. J. Plemelj: Про лїнїйні рівнаня ріжничкові з перемінною основою ґрупи монодромічної. E. Janisch: Ґеометричні уваги. E. Kohl: Про розширенє розвиненя Стефана рівнань Maxwell'а для ріжнородних середовищ. A. Schwarz: Розслїди кривини стіжкових перерізів. E. Oekinghaus: Математична статистика в узагальненім розвитку і розширеню на формальну теорию населеня. O. Biermann: Про умови, в яких цїла вимірима функция має многократні місця зерові. L. Klug: Деякі твердженя про посвоячені і подібні поля. — Перегляд бібліоґрафічний математичної лїтератури.

Annales de l'école normale supérieure, серия 3. том 18. зошит 10.—12. (1901) містить: W. Anisimoff: О теориї кривих ґеодетичних. E. Picard: Про інтеґрал цїлковитих ріжничок третого рода в теориї поверхний альґебраічних. Ch. Riquier: Про системи ріжничкові, яких інтеґрованє розтягає ся на інтеґрованє рівнань ріжничкових цїлковитих. Яко додаток: H. Hancock: Системи модулові Кронекера.

Том 19. зош. 1.—9 (1902) містить: P. Cousin: Про функциї періодичні. W. Anisimoff: Додаток до мемуара про криві ґеодетичні. E. Picard: Про періоди двократних інтеґралів в теориї функций альґебраічних двох змінних. E. Picard: Про періоди двократного інтеґралу функциї виміримої. E. Picard: Про число умов, що виражають, що деякі двократні інтеґрали є другого рода. M. Stauff: Уваги про деякі заложеня Hermite'a. E. Delassus: Про системи скісні. H. Padé: Нові дослїди над роздїлом вимірених дробів приближених функциї. W. A. Stekloff: Про основні проблеми математичної фізики. R. Alezais: Про певну клясу функций гіпер-Фухса і певні субституциї лїнійні, що ся до них відносять. L. Bianchi: Про системи циклїчні, яких площі обводять кулю. R. le Vavasseur: Ґрупи ряду p^2q^2, де p є число перве, більше як число перве q.

Journal de l'école polytechnique, серия 2. зошит 7. (1902). L. Lecornu: Про пруживі волянти. O. Callandreau: Про рахунок чисельний сочинників в розвиненю функциї пертурбацийної. F. Combebiac: Рахунок трикватерніонів. Честь віддана через школу полїтехнїчну кольонельови Мангеймови.

Journal de Liouville, серия 5. том VII. (1901), зошит 2. і 3. Jouguet: Теорем вирів в механїцї. E. O. Lovett: Про ґеометрию n-розмірову. G. Brunel: Про два системи трійок трийцятох елементів. P. Duhem: Про сталість рівноваги зглядної плинної маси, вправленої в рух оборотовий. L. Autonne: Ґрупи чвіркові правильні скінченого порядку. G. Humbert: Про звичайну трансформацию функций абелевих. E. Maillet: Про корінї рівнань переступних з вимірими сочинниками.

Том VIII. (1902). зошит 1.—3. P. Duhem: Про рівновагу систему, що ся находить в руху оборотовім, на случай яких-небудь заколотів. E. Maillet: Про катеґорию функций переступних і рівнань ріжникових вимірених. S. Zaremba: Про інтеґрованє рівнаня $\Delta u + \xi u = 0$. P. J. Suchar: Про рівнаня ріжничкові лїнїові другого порядку з сочинниками альґебраїчними. A. Zoukis: Про повний гексакориф. H. Poincaré: Про циклї альґебраїчних поверхний. P. Duhem: Про сталість рівноваги зглядної. G. Pirondini: Симетрия стичних з огляду на поверхню оборотову. J. de Séguier: Про рівнаня певних ґруп. H. Laurent: Про ряди многочленів.

Bulletin de la Société mathématique de France. Том 29. зошит 4. (1901) обнимає працї: E. Cartan: Про інтеґрованє певних системів Pfaff'a другого рода. M. Petrovitch: Уваги про зера рядів Taylor'a. J. de Séguier: Крива заповняюча шестистїнник о n розмірах. G. Combebiac: Про живу силу корисну. L. Rispert: Три свойства шістьох точок стіжкової кривої. A. Pellet: Метода приближень Нютона.

Том 30. зошит 1. і 2. (1902) містить: G. Combebiac: Про систем чисельний зложений, що представляє ґрупу перетворень частинкових простору. E. Goursat: Про проблєм, що ся відносить до лїнїй асимптотичних. M. Servant: Про деформацию квадрик. G. Humbert: Визначенє кривих альґебраїчних даного степеня, які можна повести на поверхнї филястій. R. de Montessus: Про дроби тяглі альґебраїчні. J. Clairin: Про певні рівнаня з частними походними другого порядку. J. Hadamard: Про походні функций лїнїй. E. Delassus: Про уклади з точковим стиканєм ся. H. Poincaré: Про певні поверхнї альґебраїчні. L. Lecornu: Про малї рухи тяжкого тїла. M. d'Ocagne: Про барицентра циклїчні в кривих альґебраїчних. M. Servant: Про розширенє формул Ґаусса. J. Clairin: Про певну клясу перетворень рівнань з частними походними другого порядку. L. Raffy: Про деформацию поверхний і певні перетвореня рівнань з частними походними другого порядку. G. Combebiac: Про загальні рівнаня пруживости. J. Hadamard: Про умову, яку можна приписати поверхнї.

American Journal of Mathematics. XXIV. зошит 1.—4. (р. 1902). L. E. Dickson: Циклїчні підґрупи простої трійкової лїнїйної дробової ґрупи в тїлї Galois. J. G. Hardy: Криві з потрійною кривиною. H. Hancock: Певні функциї більше змінних і узагальненє важного теорему Дедекінда. R. A. Roberts: Певні свойства плоскої кубічної кривої в звязи з коловими точками в безконечности. H. E. Hawkes: Оцїнка ассоциятивної лїнїйної альґебри Peirce'a. G. A. Miller: Ґрупи здефінїовані через ряд двох ґенераторів і ряд їх добутків. L. E. Dickson: Канонїчна форма лїнїйного однородного перетвореня в довільнім обсягу вимірности. H. B. Newson: Нова теория посвоячень і їх ґрупи Lie. L. P. Eisenhart: Безконечна мала деформация поверхний. S. Kantor: Типи лїнїйних комплєксів кривих елїптичних в R_r. R. E. Moritz: Узагальненє процесу ріжничкового. H. D. Thompson: Прості пари рівнобіжних поверхний. W. M. Bôcher: Системи лїнїйних рівнань ріжникових першого порядку. T. M. Putnam: Чвіркові лїнїйні дробові ґрупи. A. N. Whitehead: Числа головні. G. A. Miller: Метода конструкциї ґруп порядку p^m. H. E. Stecker: Неевклїдові свойства плоских кубічних і їх перша і друга бігунова.

Transactions of the American Mathematical Society. II. зош. 4. (1901). E. J. Wilczynski: Ґеометрия сучасних системів двох лїнїйний однородних ріжничкових рівнань другого порядку. L. E. Dickson: Теория лїнїйних ґруп в довільнім тїлї. W. H. Metzler: Певні аґреґати підвизначників. A. Pringsheim: Примінєнє правила множеня Cauchy до рядів умовно збіжних або розбіжних. A. Pringsheim: Про доказ Goursat'а твердженя інтеґрального Cauchy. O. Bolza: Новий доказ теорему Osgood'а в рахунку вариацийнім. M. Bôcher: Певні пари переступних функций, яких коріні можна віддїлити. J. H. Mc Donald: Систем двійкових, кубічних і квадратових і редукция гіпереліптичних інтеґралів ряду другого на еліптичні інтеґрали через перетворенє четвертого степеня. E. H. Moore: Теоря невластивих означених інтеґралів. E. B. van Vleck: Збіжність і характер тяглого дроба $\cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \cdots}}$

Том III. зошит 1.—3. (1902) містить: J. I. Hutchinson: Кляса автоморфних функций. H. F. Stecker: Істнованє поверхний, що надають ся до частинкового відтвореня на площи того рода, де лїнїї ґеодетичні відтворюють ся на з гори означений систем кривих. O. Stolz: До вияснення довготи луку і обєму кривої поверхнї. L E. Dickson: Ґрупи Steiner'а в проблємі контакту. A. S. Hathaway: Простор кватерніоновий. E. J. Wilczyński: Відворотний систем лїнїйних рівнань ріжничкових. C. N. Haskins: Незмінники квадратових ріжничкових форм. E. Mc Clintock: Натура і примінєнє функций ужитих в розпізнаню квадратових полишок. E. B. van Vleck: Означенє числа дїйсних і мнимих корінів ряду гіперґеометричного. G. A. Bliss: Друга варияция означеного інтеґралу, де одна границя є змінна. E. H. Moore: Метові аксіоми ґеометриї. E. W. Brown: Малі дїльники в теориї місяця. J. W. Young: Гольоморфізм ґруп. F. R. Moulton: Проста не-desargues'ова плоска ґеометрия. M. Bôcher: Дїйснї розвязки системів двох однородних лїнїйних ріжничкових рівнань першого порядку. Ch. A. Scott: Нова метода поступованя при перерізах кривих плоских. E. V. Huntington: Повна збірка постулятів для теориї додатних цїлих і додатних виміримих чисел. L. E. Dickson: Ґрупа означена для кождого даного тїла. O. Stolz: Додаток до артикулу „До вияснення довготи etc.“ O. Bolza: Доказ достаточности умов Jacobi для незмінности знаку другої вариацыї в проблємах ізоперіметричних. H. E. Hawkes: Надзложений систем чисел. W. B. Fite: Ґрупи метаабелеві. L. P. Eisenhart: Спряжені простолїнїйні конґруенциї. D. N. Lehmer: Конструкцийна теория однобіжної кубічної методами синтетичними. L. E. Dickson: Ґрупа Steiner'а в проблємах контакту (друга нота).

Annals of Mathematics (Harvard University), серия 2. том 3. число 1.—4. (1901. і 1902) обнимає слїдуючі працї: E. B. van Vleck: Збіжність тяглого дробу Ґаусса і иньших тяглих дробів. M. B. Porter: Ріжничкованє безконечних рядів вираз за виразом. J. H. Whitemore: Нота про кола ґеодетичні. W. F. Osgood: Нота про функциї здефінїовані через ряди безконечні, що їх вирази є аналїтичними функциями змінної зложеної. Ch. L. Bouton: Певна гра і єї математична теория. G. A. Miller: Ґрупи з двома операторами ряду третого, яких добуток є також третого ряду. W. A. Granville: Незмінники чотирокутника з найбільшою підґрупою, маючою точки сталі, загальної ґрупи метової на площи. M. Bôcher: Деякі примінення методи скороченого знакованя. M. B. Porter: Корінї функций, що є злучені лїнїйними зворотними звязями другого порядку. F. S. Woods: Простор зі сталою кривиною (дві части). W. H. Roever: Ясні точки і їх місця. W. F. Osgood: Проблєми безконечних рядів і означених інтеґралів. H. B. Newson: Нота про добуток лїнїйних субституций. H. S. White: Нота про криві оборотові піддані інволюциї пар точок на площи. R. E. Allardice: Деякі криві звязані з системом подібних стіжкових. J. Westlund: Нота про многократні совершенні числа. W. R. Ransom: Механїчна конструкция стіжкових співогнищевих. P. F. Smith: Представленє S. Lie мнимих в плоскій ґеометриї. G. A. Miller: Нота про ґрупи ізоморфні з ґрупою ряду p^m. L. D. Ames: Визначенє вартостий рядів дуже слабо збіжних.

Annali di matematica, серия 3. том VI. (1901.) містить: A. dall' Acqua: Теория конґруенций кривих в якійбудь трирозміровій множіни. N. Nielsen: Нове обчисленє неозначених інтеґралів і рядів безконечних, що обнимають функцию вальцеву. L. Bianchi: Деформация конґруенций якоїнебудь кляси поверхний розвивних. G. Castelnuovo e F. Enriques: Про певну основну квестию з теориї альґебраїчних поверхний. C. A. dell' Agnola: Ряд многочленів, що представляє галузь моноґенічної функциї аналїтичної. A. Pensa: Поверхня вимірима 5. степеня. G. Lauricella: Деформация кулї пруживої рівнозворотної. N. Nielsen: Про клясу безконечних рядів, анальоґічних до рядів Schlömilch'а, ідучих після функций вальцевих.

Том VII. (1902.) містить: E. Pascal: Вступ до теориї незмінників рівняня ріжничкового цїлковитого загального типу другого порядку. E. O. Lovett: Перетвореня стичні основних елєментів простору. R. Marcolongo: Теория тяжкого симетричного ґіроскопа. C. Somigliana: Про пруживий потенциял. M. Gebia: Типова деформация цїпкого пруживого тїла. H. Lebesgue: Інтеґрал, довгота, поле.

Том VIII. зошит 1. (1902.): E. Ciani: Скінчені ґрупи чвіркових посвоячень, ізоморфних з ґрупами правильних многостїнників. G. Fubini: Про простор, що допускає ґрупу тяглу рухів.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Том XVI. зошит 1.—5. (1902.) містить: U. Amaldi: Типи потенциялів, що подїлені через певну сталу функцию, стають залежні лиш від двох змінних. G. Loria: „Радіялї" кривих плоских. G. Vitali: Про рівняня ріжничкові лїнїйні однородні з альґебраїчними сочинниками. U. Barbieri: Визначенє всїх поверхний розвивних на дану поверхню. G. Torelli: Про певні теореми Poincaré про ідеали перві. L. Autonne: Про „гермітїян". F. Gerbaldi: Про ґрупи 360 посвоячень плоских. Th. de Donder: Студия про інтеґральні незмінники. F. Giudice: Істнованє, обчисленє і ріжниця корінїв рівнань чисельних. C. Burali-Forti: Про „радїялї". P. Paci: Узагальненє певного теорему Ґаусса. V. Martinetti: Уваги про конфіґурацию Куммера. G. B. Guccia: Про криву альґебраїчну плоску. E. Veneroni: Про певні системи кубічних скісних. R Marcolongo: Про функцию Green'а степеня n. на кули. G. Ferretti: Про зведенє найменьшого порядку лінійного систему кривих плоских незвидимих ряду p. D. Gigli: Про суму n ріжних додатників. G. B Guccia: Про поверхню альґебраїчну.

Prace matematyczno-fizyczne. Том XIII. 1902. обнимає розправи: A. Denizot: Про певний проблєм Ейлєра що до маятника. J. Zawidzki: Досьвіди над пружливостию і складом подвійних мішанин течий. K. Żorawski: Про свойства певного інтеґралу многократного, що є узагальненєм двох тверджень з теориї вирів. G. A. Miller: Про ізоморфізм ґруп абелевих (по анґлїйски). A. Przeborski: Деякі приміненя теориї конґруенций лїнїйних. S. Dickstein: Переписка Коханьского і Лєйбніца (докінченє). R. Merecki: Обсервациї мікрометричні мраковин (ч. I). M. P. Rudzki: Право розкладу температур в внутрі тїла небесного ґазового. Ł. E. Böttcher: Засади рахунку ітерацийного (ч. III). Справозданя бібліоґрафічні з польскої лїтератури матем. фіз. за рік 1899 (конець).

Wiadomości matematyczne. Том. VI. зошит 6. (1902): L. Sylow: Бесїда проголошена на обходї роковин Абеля в Християнії (5. IX. 1902). M. T. Huber: З теориї визначників. W. F. Osgood: Функциї означені через безконечні ряди. — Перегляд лїтератури, хронїка.

Журнала біблїоґрафічного Revue semestrielle des publications mathématiques (під ред. P. H. Schoute, Korteweg etc. Amsterdam) вийшов том X. часть I. і II. р. 1902. і том XI. часть I. 1903. Кромі сего вийшов показчик до пятьох томів сего журнала (отже до томів за час 1898.–1902. р.).

Помер знаменитий математик англійский George G. Stokes 1. лютого 1903. в 84. роцї житя. Єго працї математичні та теоретично-фізикальні зробили єго імя голосним в сферах математичних; епохальні є єго роботи над флюорисценциєю, гидродинамікою і пруживостию.

Нове унґрунтоване ґеометриї Bolyai-Лобачевского.

Д. Гільберт виказав свого часу (в письмі „Grundlagen der Geometrie“, Leipzig 1899.), що ґеометрию евклїдову можна оперти виключно на аксіомах, що ся відносять до площи, без помочи аксіомів тяглости (Архімеда). В найновійшій розправі п. з. Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie (Math. Annal. 57. том, зош. 2. 1903.) виказує знаменитий ґеометр ґетінґеньский, що можна і ґеометрию Bolyai-Лобачевского на площі оперти виключно на основі плоских аксіомів без помочи аксіомів тяглости, наколи лиш аксіом рівнобіжности заступимо через відповідні заложеня ґеометриї Лобачевского. Метода автора є зовсїм иньша, як у Bolyai і Лобачевского, що послугувались граничною кулею, та як у Кляйна, що уживає метод метових.

Ідеї Д. Гільберта хочу в тій нотї коротко представити.

1. Вперед збирає автор разом чотири аксіоми, що ними послугував ся в письмі „Grundlagen der Geometrie“. Є они слїдуючі:

I. Аксіоми злученя. (Axiome der Verknüpfung).

I. 1. Дві ріжні точки A і B визначають всегда одну просту.

I. 2. Дві якінебудь ріжні від себе точки простої визначають ту просту.

І. 3. На кождій простій находять ся що найменьше дві точки. Є що найменьше три точки, що не лежать на простій.

ІІ. Аксіоми уложеня (Axiome der Anordnung).

ІІ. 1. Наколи A, B, C є точки простої, а B лежить між A і C, то B лежить також між C і A.

ІІ. 2. Наколи A і B є дві точки одної простої, що істнує бодай одна точка C, що лежить між A і B, і бодай одна точка D така, що B лежить також між A і D.

ІІ. 3. Між трома точками простої істнує все одна і лиш одна точка, що лежить між двома осталими.

Дефініция: Точки, що лежать між двома точками A і B, називаєм точками довжіни AB або BA.

ІІ. 4. Най A, B, C є три точки, що не лежать на простій, а **a** проста, що не іде через нїяку з точок A, B, C; наколи та проста переходить через одну точку довжіни AB, то она переходить певно і через одну точку довжіни BC або довжіни AC.

ІІІ. Аксіоми пристайности (Axiome der Congruenz).

Дефініция: Кожду просту ділить яканебудь з єї точок на дві півпрості або половини.

ІІІ. 1. Наколи A, B є дві точки простої **a**, а A' є точка простої a', то можна на даній половині простої a' від A' все найти одну і лиш одну точку B' таку, що довжінь AB (або BA) є пристайна або рівна довжіни A'B':

$$AB \equiv A'B'.$$

Кожда довжінь є пристайна до себе, отже $AB \equiv AB$ і $BA \equiv AB$.

ІІІ. 2. Наколи $AB \equiv A'B'$, і $AB \equiv A''B''$, то є $A'B' \equiv A''B''$.

ІІІ. 3. Наколи AB і BC є дві довжіни без спільних точок на **a**, а далї A'B' і B'C' дві довжіни без спільних точок на a', то єсли $AB \equiv A'B'$, а $BC \equiv B'C'$, то і $AC \equiv A'C'$.

Дефініция: Дві півпрості h і k, що ідуть з тої самої точки A і не творять разом одної простої, називаєм кутом; знак на се є $\sphericalangle(hk)$ або $\sphericalangle(kh)$.

Точки площи, що з огляду на h лежать по тій самій сторонї, що k, а з огляду на k лежать по тій самій сторонї що h, називаєм полем кута $\sphericalangle(hk)$ (Winkelraum).

ІІІ. 4. Маємо кут (hk), просту **a** і означену сторону простої a'. Най h' означає півпросту простої a', що іде з точки O; тодї істнує одна і лиш одна півпроста k', така що:

$$\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k') \text{ (пристайні)}$$

і що рівночасно всї точки поля кута $\sphericalangle(h'k')$ лежать по даній сторонї a'.

Очевидно кут кождий є до себе пристайний ($\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(hk)$ і $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(kh)$.

III. 5. Наколи $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k')$, і $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h''k'')$, то і $\sphericalangle(h'k') \equiv \sphericalangle(h''k'')$.

III. 6. Наколи в двох трикутниках ABC і $A'B'C'$ є:

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C' \text{ і } \sphericalangle BAC \equiv B'A'C',$$

то всегда є: $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$ і $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$.

З аксіомів I.—III. слїдують твердженя про пристайність трикутників, про трекутник рівнораменний і можливість конструкций, як построєнє прямовісної, подїл простої та кута на дві половини; а далї слїдує твердженє, що сума двох кутів в трикутнику є більша, як кут третий.

IV. Аксіом про прості, що перетинають ся і не перетинають ся (аксіом, що заступає в ґеометриї Bolyai-Лобачевского аксіом рівнобіжности).

Наколи **b** є дана проста, а A точка, що на нїй не лежить, то через A ідуть все дві півпрості a_1 і a_2, що не творять одної і тої самої простої і простої **b** не перетинають, наколи кожда півпроста, що іде через поле кута ($a_1 a_2$) з точки A, просту **b** перетинає.

Дефініция: Най проста **b** (Фіґ. I.) розпадає ся (від точки B) на дві півпрості b_1 і b_2, і най прості a_1 b_1 лежать з одної, a_2 b_2 з другої сторони простої AB; тодї кажем, що півпроста a_1 є рівнобіжна до півпростої b_1, a_2 до b_2, а далї кажем, що півпрості a_1 і a_2 є рівнобіжні до простої b, як також і прості, яких половинами є a_1 і a_2.

З відси слїдує, що дві півпрості, рівнобіжні до третої, є до себе рівнобіжні.

Дефініция: Кожда півпроста визначає конець (Ende); всї півпрості, що до себе є рівнобіжні, визначають один конець. Проста має проте два кінцї; наколи они є α і β, то просту значимо знаком (α β).

Дефініция: Наколи з одної точки поведемо прям на просту і продовжимо єго по за єго основу о таку саму довжінь, то конець сего продовженя називає ся образом первісної точки (Spiegelbild des ursprünglichen Punktes) в даній простій.

Образи точок простої лежать знов на простій, яка є образом первісної простої.

2. По тих засадничих аксіомах випроваджує Гільберт пять помічних тверджень (подамо їх ту без доказу):

Твер. 1. Наколи дві прості перетинають трету під рівними кутами, то они певно не є до себе рівнобіжні.

Твер. 2. Наколи маємо дві прості a і b, що ся анї не перетинають, анї не є до себе рівнобіжні, то істнує все трета проста, що до обох є рівночасно прямовісна.

Твер. 3. Наколи маємо які-небудь дві півпрості, то істнує все проста, що має два приписані кінцї α і β.

Твер. 4. Наколи маємо дві рівнобіжні прості **a** і **b** і точку O в части площи між ними (Фіґ. II); наколи O_a є образ точки O в **a**, а O_b образ точки O в **b**, а M є середина довжіни $O_a\ O_b$, тодї півпроста построєна в M, що є рівнобіжна і до **a** і до **b**, є прямовісна в M до простої $O_a\ O_b$.

Твер. 5. Наколи a, b, c є три прості, що мають той самий конець ω, а їх образи в тій самій простій є S_a, S_b, S_c, то все істнує проста d з тим самим кінцем ω така, що постепенне застосоване відбить (образів) в простих a, b, c є рівнозначне з відбитєм в простій d, що значимо:

$$S_c\, S_b\, S_a = S_d\,.$$

3. З черги переходить Гільберт до додаваня кінців (Addition der Enden). В тій цїли бере просту $(0, \infty)$, отже з кінцями 0 і ∞, (Фіґ. III) вибирає на ній точку O і построює в O прям, якого кінцї називає $+1$ і -1; опісля дефінїює суму двох кінцїв в слїдуючий спосіб:

Наколи α, β є два кінцї, O_α є образ точки O в простій $(\alpha \infty)$, O_β образ точки O в простій $(\beta \infty)$, то наколи середину довжіни $O_\alpha\, O_\beta$ получимо з кінцем ∞, то другий конець так построєної простої буде сумою обох кінцїв α і β (знак на ту суму є: $\alpha + \beta$).

Наколи півпросту з кінцем α відібєм в простій (0∞), то повстає півпроста з кінцем $-\alpha$.

Дістаєм ту рівнаня:

$$\alpha + 0 = \alpha$$

$$1 + (-1) = 0$$

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

Послїдне рівнанє є виразом правила переміни додаваня двох кінцїв.

Наколи S_0, S_α, S_β є відбитя в простих (0∞), $(\alpha \infty)$, $(\beta \infty)$, то на основі помічних тверджень випаде:

$$S_{\alpha+\beta} = S_\beta\, S_0\, S_\alpha$$

Наколи γ є також якийсь конець, то дістанем:

$$S_{\alpha+(\beta+\gamma)} = S_{\beta+\gamma} S_0 S_\alpha = S_\gamma S_0 S_\beta S_0 S_\alpha,$$

$$S_{(\alpha+\beta)+\gamma} = S_\gamma S_0 S_{\alpha+\beta} = S_\gamma S_0 S_\beta S_0 S_\alpha,$$

або:

$$S_{(\alpha+\beta)+\gamma} = S_{\alpha+(\beta+\gamma)}$$

або:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

т. є. право сполучуваня додаваня кінців.

Наколи просту (α, ∞) відібєм в простій (β, ∞), то — як Гільберт виказує — дістанем просту $(2\beta - \alpha, \infty)$.

4. Перейдім тепер до добутку кінцїв. Ту вперед подає Ґільберт дефініцию: Наколи конець лежить з тої сторони простої $(0, \infty)$, що конець $+1$, то сей конець назвем додатним, наколиж лежить з тої сторони простої $(0, \infty)$, що конець -1, то сей конець назвем відємним.

Возьмім тепер два кінцї α, β, ріжні від 0 і ∞ (Фіґ. IV.). Обі прості $(\alpha, -\alpha)$ і $(\beta, -\beta)$ стоять прямовісно на простій $(0, \infty)$ і перетинають єї в A і B. Відітнїм довжінь OA від точки B до C на простій (0∞) так, щоби на (0∞) напрям від O до A був той сам, що від B до C: опісля постройно в C на простій (0∞) прямовісну і назвім додатний або відємний конець сеї простої добутком $\alpha\beta$ обох кінцїв α, β, після сего, чи оба кінцї є додатні або оба відємні, або один додатний, а другий відємний. — Рівночасно закладаєм, що:

$$\alpha . 0 = 0 . \alpha = 0.$$

На основі аксіомів III. випадуть правила переміни і сполучуваня множеня кінцїв:

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

Також найдем формули:

$$1 . \alpha = \alpha, \ (-1)\alpha = -\alpha,$$

а коли α і β є кінцї простої, що іде через O, то:

$$\alpha\beta = -1.$$

Ту можливе є і дїлене; до кождого додатного кінця π належить додатний (до відємного відємний) конець такий, що єго квадрат є рівний π; він сам є $\sqrt{\pi}$.

Врештї, як не тяжко доказати, істнує ту і трете право множеня (розлучуваня), а іменно:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma).$$

5. В послїднім уступі розбирає Гільберт рівнанє точки; при тім робить увагу, що наколи для рахунку кінцями випали нам такі самі правила, як для рахунку числами, то дальше построєнє ґеометриї не представить ніяких трудностий.

Коли ξ і η є кінцї якоїсь простої, то кінцї:

$$u = \xi\eta, \quad v = \frac{\xi + \eta}{2}$$

називає Гільберт сорядними тої простої. Ту істнує основне твердженє. Наколи α, β, γ є три кінцї такі, що конець $4\alpha\gamma - \beta^2$ є додатний, то всї прості, що їх сорядні u, v сповняють рівнанє:

$$\alpha u + \beta v + \gamma = 0$$

ідуть через одну точку.

Доказ сего твердженя переводить Гільберт в сей спосіб, що построює кінцї:

$$\varkappa = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}, \quad \lambda = \frac{\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}$$

і сим способом спроваджує повисше лїнїове рівнанє до форми:

$$(k\xi + \lambda)(k\eta + \lambda) = -1.$$

Опісля доказує, що форми:

$$\xi' = k\xi + \lambda$$
$$\eta' = k\eta + \lambda$$

представляють кінцї такої простої, яка повстає з простої о кінцях $\xi\eta$ через оборот площи, залежний лиш від k і λ. А що рівнанє $(k\xi + \lambda)(k\eta + \lambda) = -1$ дає $\xi'\eta' = -1$, то на основі правила, яке подали ми при множеню, мусять дотичні прості переходити через точку O, отже твердженє є доказане.

Бачимо отже, що рівнанє точки в сорядних лїнії є лїнїйне; звідси легко можна вивести тв. Pascal'a для пари простих і тв. Desargues'a для трикутників, положених перспективічно, як також всї иньші твердженя ґеометриї Bolyai-Лобачевского — а через се дїйсно можна оперти ту ґеометрию на чотирох ґрупах аксіомів, що їх Гільберт впровадив.

В. Л.

В новонайденім творі старинного математика египского Агмеса находять ся цїкаві вислїди: 1) находить ся таблиця, де дроби

$$\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \cdots\cdots \frac{2}{99}$$

виражені є яко сума дробів з чисельником 1, пр.

$$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$$

2) поверхня кола рівнає ся поверхні квадрату, якого бік є рівний $\frac{8}{9}$ проміру; звідси слідує:

$$\pi=3{\cdot}1605\ \ldots\ldots\ldots$$

(Nouvel. Annal. de Mathémat. tome III. April 1903).

Поступи фізики і хемії в р. 1902. Хотяй р. 1902. не приніс ніяких нових епохальних відкрить, то однак опрацьованє материялу з літ попередних починає кидати деяке нове сьвітло на основи науки. Головний імпульс дало до сего відкритє т. зв. лучів тілесних (Körperstrahlen), які виходять від т. зв. лучистих тїл, лучів відкритих перед пару роками, а які все еще є предметом точних дослїдів. І так славний хемік Berthelot, що в послїдних часах посьвятив особливу увагу лучистим тїлам, а головно радови, постеріг, що лучі раду, подібно як лучі сьвітла, розкладають навіть в темноті (хотяй помалу) сполуки йоду і кисня та квас азотовий; дальше сконстатував факт, що хемічне дїланє тих лучів є иньше, як току електричного. Нїмецкий учений Giesel постеріг знов, що від впливом раду звичайна вода та воздух на якийсь час стають лучиво-чинні, щоби промовляло за сим, що лучі раду не є лиш виключно частинками материї.

Велике вражінє зробив реферат Vignon'а, предложений париській академії, про славне простирало туриньске, в яке мало бути завинене тїло Ісуса Христа, та на якім виступав образ Спасителя; Berthelot фантом сей вважав містифікациєю, но Vignon пригадав звісний впрочім факт, що деякі тяжші олїї (а такими могло бути тїло Христа набальсамоване) мають власність висиланя лучів.

Пізнанє ближше лучистих властностий деяких тїл в части захолибало теорию атомістичну, бо показує, що атоми в загалї не є найменьшими частинками тїл; після погляду деяких фізиків ті лучі є проявою якихсь „субатомістичних“ хемічних дїлань в материї. Rutherford іде еще дальше і висказує погляд, що лучистість, яка виступає у ріжних тїл, походить в дїйсности від одного, покищо незвісного первня, та сей погляд не має много приклонників. Більшість фізиків принимає істнованє електронів, що є підставою згаданих лучів, а уліпшенє метод досьвіду доходить до сего, що позваляє мірити величину тих електронів (в приближеню електрон є що до величини $\frac{1}{700}$. частиною атому водня).

По при праці над тілами лучистими заслугують на увагу праці над низькими температурами; ту важні є головно роботи J. Dewara, що в своїх дослїдах над плинним воднем дійшов до температури 13^0 абсолютної скалї. Покищо один гель не дав ся привести до стану плинного, так що після погляду Ольшевского і Dewara єго точка критична лежить понизше 9^0 абсолютної скалї. І ті дослїди виказали цїкаву прояву, що наколи в температурі плинного воздуху і водня хемічні дїланя слабнуть, то вплив так низьких температур на бактериї та ріжні зародники є дуже невеликий, отже як раз противно, як можна ся було надїяти. На жаль J. Dewar не має надїї осягнути абсолютне зеро, хотяй осягненє єго мало-би для науки первостепенне значінє. Осягненє що-раз то низших температур є так тяжке і коштовне, що погляд Dewar'a здаєсь вповнї оправданий. До того приймає Dewar, що хотя би навіть вдало ся гель замінити в плин, то найдуть ся єще лекші ґази, що їх єще тяжше буде замінити в стан плинний.

Важні є далї роботи над хемічними елементами, яких скількість в послїдних роках так значно зросла через відкритє арґону, гелю, криптону etc.; та ті роботи мають більше вже специяльний характер. За се з другого боку виринає квестия, чи много тїл, які ми до тепер вважали елементами, є ними, чи нї. Вже в р. 1900. висказав N. Lockyer на основі обсервацний спектральних зьвізд сталих сумнів, чи желїзо є елементом, чи ні, а тепер такий сам сумнів підніс T. Gross що до другого, дуже в природї розповсюдненого елементу, крему (Si).

З иньших робіт р. 1902. заслугує на увагу праця американьского фізика Niphera, що на основі обсервацний в часї вибухів вульканічних на Антилях стараєсь дошукати звязи між сильними потрясенями воздуха а филями етеру.

(Central-Zeitung für Optik u. Mech. XXIV. 2).

Moissan і Dewar замінили флюор в р. 1897. при температурі — 187^0 в теч; тепер удало ся єго в температирі — 252·5^0 замінити в тїло цїпке. Наколи в тім станї зіткнув ся він з плинним воднем, то оба они лучили ся з собою серед сильної експльозиї, при чім цїла маса сильно ся розгрівала, так що водень ся запалював.

(Compt. rendus 136. 1903. ст. 641—643).

J. Traube заняв ся звісним законом van der Waals'a:

$$RT = (v-b)\left(p + \frac{v^2}{a}\right),$$

обчислив сталі **a** і **b** для великого числа елєментів і найшов, що се рівнанє задержує своє значінє і для цїпкого стану. Дальші обчисленя автора показують, що наколи цїпкому чистому металю доповаджує ся тепло, то $\frac{1}{3}$-часть того тепла зуживає ся на поборенє внутрішного тиску, а $\frac{2}{3}$ підвисшає молєкулярну енерґію атомів. Далї показуєсь, що для одноатомових металїв (отже для всїх) і для многоатомових метальоідів (кромі ґальоґенів) сочинник (v—b) має в приближеню вартість $\frac{1}{273}$. Обчислені зі сталих **a** і **b** рівнаня van der Waals'a середні довготи доріг атомів згоджують ся що до порядку величини з цифрами Meyer'a (т. є. 10^{-9}), які він обчислив при помочи дифузиї. А вкінци: внутрішне молєкулярне тепло улетученя є у всїх елєментів пропорциональне до сочинника розширеня.

(Zeitschr. für Elektrochemie, IX. Jahrg. 1903. ч. 21).

H. T. Baanes обчисляє наймовірнїйшу вартість на **механїчний рівноважник тепла** [відносно до 16°-кальориї (15,5—16,5°)] і находить єго вартість $= 4{,}1832 \times 10^7$ ерґів.

(Canada Transact. 8, sect. III. 1902. p. 141).

Поляризация лучів X. До тепер не можна було лучів X споляризувати; доперва R. Blondlot завдав собі питанє, чи лучі X не є вже відразу в хвилї, коли опускають рурку, споляризовані. Здогад сей опер Blondlot на фактї, що луч X повстає з луча катодального, так що оба они творять одну площу; а через кождий луч X, що виходить з рурки, іде площа, в якій луч може мати специяльні свойства (була би отже диссиметрия, будуча умовою поляризациї). І дійсно Blondlot'ови вдало ся виказати сю поляризацию, наколи ужив невелику іскру за аналїзатор. Знаряд ним ужитий був слїдуючий (Фіґ. V.):

P рурка Рентґена, до якої провадять дроти 1 і 2, обложені ґутаперхою, від індуктора; друга пара дротів, рівнож обложених ґутаперхою, має перерву в α, яку можна збільшати або зменьшати — дроти ті заложені в C і D на 1 і 2, віддїлені від них валочками шкляними. AB є плита з Al на се, щоби перерву α охоронити від впливу лучів Рентґена.

Берем уклад 3 осий: OY спадає з довготою рурки, отже з напрямом лучів катодальних, OX спадає з напрямом луча X, OZ до них прямовісна. В часї виладованя індуктора (отже повстаня лучів X) повстає через індукцию іскра в α; наколи напрям сеї іскри є рівнобіжний до OX, то іскра під впливом лучів X збільшає ся, наколи прямовісний до OY, вплив лучів X гине. Отже лучі X мають чинну площу, що іде через кождий луч X і луч катодальний, що єго витворює. Наколи перерву α обертаємо довкола оси OX (отже рівнобіжно до пл. YOZ), то маємо одно maximum в поземім, одно в прямовіснім положеню (анальоґічно, як коли обсервуєм споляризований жмуток лучів через ніколь і ніколь обертаєм). Іскра в α відгриває проте ролю аналізатора, но она мусить бути коротка і слаба.

Кварц, цукор і и. скручують площу поляризациї лучів X в тім самім змислї, що у сьвітла (Blondlot діставав скрученя до 40°); також і вторичні лучі S є споляризувані — цукор і и. скручують їх площу поляризациї в противнім змислї, як у сьвітла (Blondlot діставав скрученя до 18°).

(Comptes rendus 136, 284. 1903. р.).

Угинанє лучів Рентґена. H. Haga і C. H. Wind (Амстердам) сконстатували, що лучі Р. підлягають угинаню так, як лучі сьвітла. Лучі Р. переходили через дві шпари, першу широку на 15 μ, і другу (віддалену від першої о 75 cm), широку в горі на 25 mm до долини вузшу; за другою шпарою в віддаленю 75 cm находилась плита фотоґрафічна. Фотоґрафії, довершені при помочи лучів Р., що мусїли переходити через ті дві шпари, мали на долїшнім краю, що відповідав звуженій части другої шпари, розширенє в формі пендзля — проява, яку можна толкувати лиш угинанєм лучів Р.

(Elektrotechnische Zeitschr. 1903. № 25).

В послїдних часах розвинулась ширша дискусия на тему, чи тїла лучивочинні абсорбують в части енерґію ґравітацийну чи нї. Приклонником погляду абсорбциї є R. Geigel, що оголосив в „Annalen der Physik“ в лютім 1903. р. розвідку експериментальну, де доказує, що мала куля з олова стає через осьвітленє лучивочинними тїлами лекша, і доказує, що причиною сего є абсорбция енерґії ґравітацийної через тїла лучисті. Погляд сей викликав досить живу дискусию зі сторони иньших фізиків, як Forch і Kučera, що старають ся заперечити поглядом Geigel'a; дискусия та на разї єще не замкнена, отже і квестия піднесена Geigel'ом покищо не рішена.

(Physik. Zeitsch. 4. № 11. sqts).

A. Heydweiller розслїджував зміни тягару лучистих материй. В тій цїли замкнув 5 g такої матерiї в рурцї шкляній і порівнував цїлими тижнями тягар сеї рурки з руркою наповненою кусниками шкла, яка мала такий сам тягар і обєм. Показала ся постійно зростаюча ріжниця тягару, меньше більше 0·02 mg в 24 годинах. Так як після Becquerel'а 1 cm² поверхнї лучистої матерiї виділяє під видом лучів, які маґнет відклонює, 5 ерґів на секунду, то 5 g, які мав Heydweiller, о поверхнї 20 cm² виділяти повинні 100 ерґів на секунду або 10^7 ерґів на добу (в таких лучах); сконстатована зміна тягару 0·02 mg відповідає $1{\cdot}2 \times 10^7$ ерґів потенциальної енерґії ґравітацийної в поли земскім, отже число того порядку, що число Becquerel'а. Звідси насувала би ся гадка, що при лучистости наступає безпосередна переміна потенциальної енерґії ґравітацийної в енерґію лучисту. (Що до сеї послїдної гадки пор. висше дискусию між Geigel'ом, Forch'ом а Kučer'ою).

(Physik. Zeitschr. Jahrg. IV. 1902. ст. 81).

S. J. Allen виказав, що сьвіжо впалий снїг є — так як і дощ — лучивочинний; но та лучистість дуже скоро уступає. Вже по 30 мінутах лучистість снїгу стає о половину меньша. Наколи такий снїг стопимо та воду відпаруємо, то остає полишка, то є лучивочинна. Рівночасно постеріг Mc Lennan, що дріт наряджений відємно по впаденю снїгу є меньше чинний, як перед впаденем; здаєсь, що снїг в части усуває чинний складник атмосфери.

(Naturwiss. Rundschau. XVIII. 1903. № 16).

Між лучами, що виходять з тїл лучистих, виріжнювано т. зв. лучі α, що не підлягають маґнетному відклоненю та що мають велику спроможність проникання. В послїдних часах розслїджував ті лучі Rutherford і сконстатував, що і они підлягають відклоненю маґнетному та електричному і то в сей спосіб, що можна їх вважати (анальоґічно як лучі ситові — Kanalstrahlen) скорими двигарами додатних електричних нарядів. H. Becquerel потвердив своїми досьвідами над радом погляд Rutherford'а та порівнує лучі α раду з лучами ситовими, що уносять з собою додатні наряди з більшими масами, а меньшими скоростями, як лучі катодальні.

(Comp. rendus 1903. т. 146. ст. 199).

Дальші дослїди H. Becquerel'а над польоном виказали, що єго лучі є імовірно ідентичні з лучами α раду, так що ріжні лучі, висилані лучистими тїлами, можна подїлити в сей спосіб: 1. уран висилає дуже сильні відємно наряджені і сильно проникаючі лучі. 2. польон висилає лиш лучі з додатною електричностию, які легко підлягають абсорбциї. 3. тор і рад висилають оба роди лучів. Кромі сего висилає рад еще лучі сильно проникаючі та не підлягаючі відклоненю, що доперва по довгій експозициї лишають слїд на плитї фотоґрафічній; є они так слабі, що здаєсь через се не можна їх було викрити у иньших тіл.

Кромі сего зробив Becquerel еще иньші постереженя на лучах раду. Вже давнїйше постеріг він, що через плиту Al грубу 0·1 mm переходять лучі раду, що мало підлягають відклоненю, без зміни (без огляду на кут паданя), лучі, що троха більше підлягають відклоненю, переходять вправдї через плиту, але опускаючи єї витворюють лучі вторичні; у лучів, що можуть еще більше відкланятись, вступає на їх місце жмуток лучів вторичних; а врештї лучі, що відклоненю найсильнїйше підлягають, плита задержує, а на їх місце повстають від сторони впаданя дуже сильні вторичні лучі. То само виступає, коли місто плити Al возьмем плиту парафіни, грубу 2—8 mm.

(Comptes rendus 1903. т. 146 ст. 431).

Еманация фосфору. В послїдних часах висказав G. C. Schmidt гадку, що при повільній оксидациї фосфору не можна виказати присутности йонів в воздусї, бо хотяй він в часї оксидациї фосфору стаєсь добрим провідником, то се дїє ся завдяки продуктам оксидациї, подібним до мраки. Погляд сей попер автор дослїдом над кусником фосфору, замкненім в начиню склянім; наколи введено силу електромоторичну, то хмари, окружаючі фосфор, підносили ся до гори і укладали ся здовж лїній сили. Се дїє ся тому, що продукти оксидациї фосфору наряджують ся на днї начиня і звідси на основі прав електростатичних підносять ся до гори. Досьвід сей толкує ся дуже просто, наколи приймем гіпотезу Schmidt'а, толкованє єго на основі теориї електронів справляє велику трудність.

(Naturwissensch. Wochenschrift, том XVIII. ч. 33).

Давнїйші розслїди показали, що селєн (Se) зменьшає свій опір електричний під впливом лучів Рентґена і лучів раду (анальоґічно, як під впливом лучів сьвітла). Нові розслїди E. van Aubel'a показують, що клїтинка Se в темнотї в присутности начиня з надокисом водня ($H_2 0_2$), а також в присутности олїйку терпентинового зменьшає свій опір елєктричний. Дїє ся то тому, що обі ті субстанциї є також лучивочинні, анальоґічно як рад; вистане між клїтинкою Se а начинєм з одним з тих тїл вставити плиту металеву, щоби Se знов вернув до попередного стану, т. є. щоби єго опір елєктричний зріс до попередної величини.

(Compt. rend. 1903. CXXXVI. p. 929).

Ogden N. Rood мірив при помочи специяльно збудованого елєктрометру опори елєктричні деяких дуже сильних діелєктриків, і то окремо опір внутрішний, а окремо зверхний. Ось єго вислїди (числа відносять ся до одиниці о перерізї 1 cm^2, а грубости 1 mm):

опір внутрішний:	
кварц	$86.10^4\Omega$
ґутаперха	$60{\cdot}5.10^5\Omega$
ебоніт	$55.10^6\Omega$
міка	$133.10^6\Omega$

опір зверхний (на 1 cm^2):	
звичайне скло (шиба в вікнї)	$159.10^4\Omega$
скло кобальтове	$22.10^6\Omega$
міка	$5076.10^4\Omega$
ґутаперха	$432.10^6\Omega$
кварц	$521.10^6\Omega$
ебоніт	$2.10^9\Omega$

(Americ. Journal of Science 1902. ser. 4. vol. XIV. 161).

Поміри елєктричного опору в діяманті робив A. Arton на 30 екземплярах при температурі 15^0; питомий елєктричний опір випав між $0{\cdot}183177.10^{12}$ а $1{\cdot}280370.10^{12}\Omega$, отже є того самого ряду, що опір скла ($0{\cdot}76.19^{12}\Omega$), а перевисшає 10^{15} разів опір ґрафіту. Опір сей меньшав під впливом лучів Рентґена о половину, по усуненю тих лучів зростав до первісної висоти.

(Atti della R. Academia di Torino 1902. XXXVII. 667).

Ртутьна лямпа Hewitt'а. В новій тій лямпі елєктричній жарить ся пара ртути; сьвітло сеї лямпи є дуже ориґінальне, бо нема в нїм червоних лучів. Урядженє сеї лямпи є слїдуюче: є се шкляна рура, довга пересїчно на 1·2 m, проміру 25 mm, з якої усунено воздух; катодою є кулька, наповнена Hg, втоплена в один конець рури, анодою є острий сталевий дріт на другім кінци рури. Лямпа ся є дуже тревала, бо ще по 2000 годинах не видко великої зміни в натузї сьвітла. Відповідно до розмірів лямпи (75 mm — 4 m) треба уживати і відповідної ріжниці потенциялів і відповідної сили току; звичайно на сьвічку іде 0·3—0·5 ватів (при середній натузї сьвітла). Щоби лямпу розсьвітити, треба з початку ужити більшої ріжниці потенциялів; в тій цїли залучує ся апарат індукцийний, а через перерване току наступає так сильна ріжниця потенциялів, що між електродами перескакує іскра. Hewitt найшов, що в его лямпі ток все іде від кінця сталевого до ртути, а нїколи противно; з сеї причини можна лямпи сеї уживати при токах перемінних, наколи хочем, щоби ток ішов опісля в однім і тім самім напрямі. — Як здаєсь, буде можна лямпи сеї уживати з добрими результатами в фотоґрафії та при лїченю хоріб скірних.

(Central-Zeitung f. Optik u. Mechanik. Jahrg. XXIV. Heft 7. 1903).

Нїяґара яко мотор. Сила води водопаду Нїяґари є майже необмежена, бо скількість спадаючої води виносить 300000 стіп^3 на секунду; а коли возьмем під увагу висоту спаданя 165 стіп, то дістанем яких 10 мілїонів HP. Щоби той величезний запас енерґії використати, заложено вже перед 11 роками величаві машини, що енерґію сего водопаду перетворюють в енерґію електричну. Тодї построєно там динамомашини з двофазовим током перемінним, кожда о силї 5000 HP, 150 оборотів на мінуту, о ріжниці потенциялів 2200 Volt; зміна току наступала що 25 оборотів на секунду. Ті машини получено з прямовісними турбінами, осадженими на осях 136 стіп довгих, які поміщено в водї водопаду. Тепер приступлено до побільшеня тих закладів. На березї канадийскім мають утворити централю з силою до 100000 HP; в централї тій мають помістити три динамомашини, кожда о силї 10000 HP, отже два рази так сильні, як дотеперішні. Машини ті мають бути трифазові з ріжницею потенциялів 12000 Volt; ток електричний буде ся переносити з величезною напругою 60000 Volt (напруга та перевисшає о 10000 Volt найбільшу дотепер уживану напругу в Калїфорнії).

(Elektrochemische Zeitschr. Jahrg. X. 1903. ч. 2).

Вплив бурей на систем нервовий. Як відомо дїлає буря вже на великі віддаленя на систем нервовий вражливих осіб; ся обставина навела F. Larroque'а на думку, що се дїлане походить імовірно від филь Гертца, які повстають в місци розряджень електричних (отже там, де є буря) і розходять ся на всї сторони. Larroque сконстатував сей здогад при помочи уряджења, анальоґічного до відбирача при бездротнім телеґрафі; в відбирачу виступали дїйсно іскорки, які можна було впрост обсервувати оком. Се явище промавлялоб на користь здогаду Larroque'а.

(Meteorol. Zeitschr. 1903. Heft 5).

Кататипія. Звісний хемік Ostwald (в Липску) і єго асистент Dr. Gross винайшли спосіб репродукциї фотоґраций на дорозї чисто хемічній *без помочи сьвітла*; спосіб сей назвали они „фотоґрафованєм без сьвітла“ або „кататипією“. Сей спосіб оперли автори на знаній в хемії *каталїзї*, яка полягає на тім, що деякі реакциї хемічні відбувають ся далеко скорше в присутности певних тїл т. зв. каталїзаторів, які самі однак не улягаютъ нїякій змінї. І так пр. надокис водня (H_2O_2) в присутности делїкатного порошку срібного (каталїзатора) розкладає ся на водень і кисень. Наколи отже клїшу, покриту бромаком срібла і желятиною, на якій вже образ вхоплено, потягне ся 3%-овим розтвором етеру і надокису водня, то при улетученю ся етеру осяде H_2O_2 в рівномірній верстві на клїши і розложить ся на місцях насьвітлених, де отже видїлив ся делїкатний порошок срібний, а на місцях ненасьвітлених остане без зміни. Сим способом дістанемо невидний „додатний“ образ H_2O_2. Наколи тепер приложимо до клїши папір потягнений желятиною, то H_2O_2 всякає в него протягом кількох секунд, а образ так перенесений на папір можна в розтворі сїркану зелїза викликати. Сей образ зелїзний, що є слабо жовтавий, можна фарбувати на ріжний спосіб (в ріжних нюансах) в відповідних розчинах; пр. в квасї ґалюсовім на фіолетно, в бренцкатехіні на темнозелено, в зелязистім цианку потасовім на синьо і т. и. Сей новий кататипічний спосіб репродукциї має кромі великої вигоди, дешевости і зиску на часї єще сю добру сторону, що копії так одержані є далеко більше тревалі, як копії отримувані давним способом. Всї подробицї оригіналу віддає копія дуже виразно, як се можна розпізнати при помочи люпи. Авторам вдало ся також тою дорогою одержати і иньші вислїди, як пр. фотоґрафію в трох красках (т. зв. Dreifarbendruck) і т. д., але близших подробиць про ті методи поки-що автори не оголосили.

(Himmel u. Erde, Jahrg. XV. 1903. зош. 8).

Скорість поступу ґравітациї означив теоретично P. Gerber; при тім вийшов він з заложеня C. Neumann'a при означеню потенцияла двох частии будучих в руху, що потенциял на одну масу мусить вийти від другої маси скорше о час $\frac{r}{c}$, т. є. час потрібний до перебутя віддаленя обох мас. В виду сего виходить з обчисленя автора величина потенциялу рівна:

$$\frac{1}{r}\left\{1+\frac{2}{c}\frac{dr}{dt}+\frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\},$$

а дїлаюча сила випаде:

$$\frac{1}{r^2}\left\{1-\frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{6r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right\}.$$

З порівнаня з заколотом, якого дізнає Меркур в перігелю, а який виносить 41″ (на 100 лїт), випадає з повисших формул на скорість ґравітациї:

$$c = 3.10^{10}\frac{c}{s},$$

отже величина того самого ряду, що скорість сьвітла, вислїд тим більше цїкавий, що — як звісно — з обчислень Ляпляса виходило би с безконечно велике.

(Physik. Zeitschr. 4. № 12).

Про спосіб, в який повстають мітли комет, оголосив цїкавий артикул П. Лебедев з Москви; в коротцї подаємо єго зміст. Вже Кеплєр висказав в р. 1608. погляд, що мітли комет завдячують своє походженє частинкам, що відривають ся від єї ядра під впливом відпихаючої сили сонця; но погляд сей пішов скоро в забутє особливо завдяки теориї Нютона загального притяганя. Та в послїдних часах завдяки електромаґнетній теориї сьвітла Maxwell'а справа ся стала знов актуальна; теория Maxwell'а і Bartoli обчисляє, що лучі сьвітла сонїчного тиснуть з силою, яка в віддаленю землї виносить 0·5 mg на 1 m². Теоретичні ті вислїди ствердили в нових часах експериментально Лебедев, Nichols і Hull. Лебедев доказав, що наколи силу притяганя приймем за одиницю, то для тїла кулистого о лучу r cm, а густоті δ (густота води = 1), якого розміри є дуже великі в порівнаню до филь сонїчного проміньованя, випаде вислїдна притяганя і відпихаsuccession:

$$F = 1 - \frac{1}{10000}\frac{1}{r\delta}$$

Для тїла о розмірах більших як 1 m є збоченє (послїдний дроб) від права Нютона зникаючо мале; але для ядра комет, зложеного з метеоритів, що є меньші як 1 cm, се збоченє є вже досить велике і дасть ся виказати. Наколи сї метеорити є маленькі, але нерівні, то у кождого з них збоченє є иньше; така громада що раз більше ся деформує і комета ся розсипує (пр. Белїди). — Після дослїдів Schwarzschild'а та відпихаюча сила осягає для певних розмірів тїла своє maximum, для розмірів меньших, пр. меньших як 0·001 mm, отже ряду того, що довгота филї, сила та що раз то більше меньшає.

(Physikal. Zeitschr. 4. Jahrg. № 1).

Що повстанє мітли у комет дїйсно вяже ся з тиском лучів сьвітла, ілюструє дослїд E. F. Nichols'a і G. H. Hull'a. Оба ті автори взяли рурку, де воздух розріджено до можливих границь; рурка мала вид клепсидри (годинника піскового). Рурку наповнено порошком (мішанина шміґлю і ростинних спорів); наколи порошок пересипує ся з одної части рурки до другої і на сей луч порошку пущено жмуток сьвітла лукового, то легонькі частинки порошку заховувались так, як би їх сьвітло відтручало; повстало явище зовсїм подібне до мітли комет, а діланє було такої величини, як се, що теоретично з обчисленого тиску сьвітла випадало.

(Science, vol. XVII. p. 181. 1903).

Нову зьвізду відкрив фотоґрафічно Turner в Оксфорді дня 25. III. в Близнятах ($\alpha = 6^h 37^m 8$, $\delta = + 30^0 2'6$); єї дуговина показує ясні лїнії, головно H.

(Naturwissensch. Wochenschr. № 29. 1903).

В послїдних часах відкрито слїдуючі подвійні зьвізди при помочи методи спектроскопічної:

o Persei (Adams 1902) о періодї 4.29 днїв після Vogel'a; єї скорість з огляду на сонце колибаєсь між $+110$ а -110 km.

η Orionis о періоді 8 днїв (Adams); скорість зглядом сонця між $+180$ а -110 km.

ε Aurigae (H. C. Vogel); скорість між 30 а 40 km.

Θ Aquilae (Deslandres) о періодї 16·7 днїв.

φ Persei (Campbell).

δ Ceti 10 km
ν Eridani 24 km
π^5 Orionis 108 km
π^4 Orionis 15 km
ζ Tauri 32 km
η Virginis 10 km

Числа km означають найбільші обсервовані ріжниці скорости в лінії видженя.

(Naturwiss. Wochenschr. № 30. 1903).

Часу обороту внїшних планет не можна було до тепер в нїякий спосіб означити, бо на поверхнї Урана та Нептуна не можна було винайти точок, яких рух давав би якусь вказівку що до обороту самої планети. Тепер подав Deslandres в Meudon нову методу означеня часу обороту сих планет. Він обсервує ріжницю пересунень, які в спектроскопі показують противні кінцї рівника;

они пересувають напрям рівника троха зглядом нормального положеня, так що щит планети не виступає в дуговинї яко коло, але яко троха наклонена еліпса. Величина сего наклоненя є залежна від скорости обороту. Автор провірив сю методу вперед на Юпітері, а коли она оказалась вірна, застосував єї до Урана. Показало ся, що ся планета має рух вспятний, так як і єї місяцї, факт що стоїть в суперечности з теориєю Канта-Ляпляса.

(Himmel u. Erde XV. 1903. Heft 7).

Зьвізда 85 Pegasi є 6. величини і має в віддаленю $1''$ товариша 11. величин; сю пару відкрив Burnham в р. 1878. і найшов час єї обігу 25·7 літ. Тепер найшов G. C. Comstock на маси обох тих зьвізд стосунок 2 : 3, так що темнїйша зьвізда має більшу масу, хотяй єї сьвітло рівнає ся всего $\frac{1}{100}$ сьвітла яснїйшої зьвізди. Сей вислїд стоїть в суперечности з загальним поглядом, що темнїйший складник зьвізди подвійної є близший загасненя, як єго товариш, бо він з причини меньшої маси скорше перейшов розвиток, що провадить до загасненя.

(Naturwiss. Rundschau XVIII. 1903. № 17).

B. Weinberg, доцент фізики в унїверзитетї в Одесї, зіставляє всї дотеперішні сбчисленя паралякси сонїчної і випроваджує з них на основі теориї найменьших квадратів найімовірнїйшу вартість сеї величини. З обчислень єго випадає величина паралякси:

$$p = 8''8004 \pm 0''00243.$$

(Astronom. Nachrichten т. 162. № 3866).

H. Liebmann оголосив розвідку п. заг. Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raume (Berichte der kön. Gesel. der Wiss. zu Leipzig Bd. 54.1902). З розслїдів єго виходить, що наколи-б простор наш був гіперболїчний (Лобачевского), то:

1) Закон притяганя Нютона треба би заступити через:

$$\frac{1}{\sinh^2 r}, \quad (\sinh = \text{sinus hyperbolicus})$$

но ріжниця від закону $\frac{1}{r^2}$ була-б лиш величиною другого порядку.

2) перший закон Кеплєра, що планети порушають ся по перерізах стіжкових, де в огнищу находить ся сила осередна, остає без зміни.

3) Закон збереженя поверхні піль не остаєсь тут, а місто него є:

$$\frac{d\varphi}{dt}\sinh^2 r = \mathrm{const.}$$

но ріжниця є ту лиш другого порядку і то тим меньша, чим більше дорога зближаєсь ся до кола.

4) трете право Кеплєра також змінює свій вид на:

$$T = 2\pi \cosh a \ (\sinh a)^{\frac{3}{2}}$$

(T час обігу, a половина великої оси); але і та зміна є лиш зміною другого порядку.

Гелїоцентричні сорядні (довгота і ширина) планет в р. 1903.

(що 30 днїв).

1903	Меркур	Венера	Земля	Марс	Юпітер	Сатурн
5. сїчня	336°2 −6°6	305°2 −2°6	104°0	150°9 +1°8	325°8 −0°9	299°7 −0°3
4. лютого	142°9 +7°0	352°7 −3°4	134°5	164°0 +1°7	328°5 −1°0	
6. марта	248°6 −2°6	40°5 −2°0	164°7	177°2 +1°4	331°2 −1°0	
5. цьвітня	334°8 −6°2	88°8 +0°8	194°5	190°7 +1°1	333°9 −1°1	302°4 −0°4
5. мая	153°0 +6°7	137°5 +3°0	223°8	204°5 +0°8	336°6 −1°1	
4. червня	254°2 −3°2	186°2 +3°2	252°7	218°9 +0°3	339°3 −1°1	
4. липня	353°9 −5°6	234°3 +1°2	281°3	233°9 −0°2	342°0 −1°2	305°2 −0°5
3. серпня	162°5 +6°3	281°9 −1°5	310°0	249°7 −0°7	344°7 −1°2	
2. вересня	259°8 −3°8	329°4 −3°3	338°8	266°3 −1°1	347°4 −1°2	
2. жовтня	3°6 −4°8	17°1 −2°9	8°1	283°8 −1°5	350°1 −1°2	308°0 −0°6
1. падолиста	171°3 +5°8	65°1 −0°6	37°9	302°1 −1°8	352°9 −1°3	
1. грудня	265°4 −4°3	113°6 +2°1	68°1	320°8 −1°8	355°6 −1°3	
31. грудня	13°9 −3°9	162°3 +3°4	98°6	339°9 −1°7	358°4 −1°3	310°7 −0°8

Середне наклонене еклїптики на рік 1903,0 є: 23°27′6″60.

Перехід сонця (час середноевропейский) через:

точку рівноденну весняну
21. марта $20^h\ 15^m$

точку пересиленя лїтну
22. червня $16^h\ 5^m$

точку рівноденну осїнну
24. вересня $6^h\ 44^m$

точку пересиленя зимову
23. грудня $1^h\ 20^m$

(0^h = північ, 12^h = полудне).

(Zeitschr. für physik. u. chem. Unterricht XVI. Heft 1).

Мраковини в окруженю Нової Persei. В р. 1901. (в вересню) відкрив Ritchey (обсерватория Yerkes'а) фотоґрафічно перстеневі мраковини в окруженю сеї зьвізди. Опісля постеріг Perrine (обсерватория Licka'а) в падолисті 1901. такі зміни в тих мраковинах що до розмірів, положеня і вигляду, що з огляду на величезне віддалене сеї зьвізди (паралякса 0''1) треба було приняти скорість тих мас рівну скорости сьвітла. В виду сего Kapteyn поставив гіпотезу, що Nova при своїм розсьвіченю вислала филї сьвітляні, які відбивають ся постепенно від щораз то дальше положених частий окружаючих мраковин; мали би ми отже т. зв. ехо сьвітляне. Гіпотезу сю попер математично Seeliger, а спосіб єї переведеня є так інтересний, що в коротцї єго ту подамо.

Після заложеня Seeliger'а розсьвічене нових зьвізд походить звідси, що великі маси передирають ся через космічні хмари, через що їх рух трафляє на перепони і наступає анальоґічне явище, як тодї, коли метеор передирає ся через земску атмосферу; ріжниця та, що при розсьвіченю зьвізди відбуває ся усе в величезних розмірах і кольосальних віддаленях. Наколи час розсьвіченя зьвізди є короткий (пару день, як у нової Persei), тодї місцем ґеометричним тих частинок окружаючої мраковини, від яких відбите сьвітло до нас рівночасно доходить, мусить бути параболоід оборотовий (Фіґ. VI.); єго огнищем є нова зьвізда S, а напрям єго оси є звернений до нас. Зі звісних свойств параболї слїдує, що дороги сьвітла SP_1Q_1, SP_2Q_2, SP_3Q_3 і т. д. є всї рівні дорозї $SP = PR$. Наколи на луку начеркненої параболї находять ся частинки маси, від яких сьвітло може ся відбити, то обсерваторови, що ся безконечно далеко находить, буде видавати ся, що всї ті частинки рівночасно ся розсьвітили, бо сьвітло відбите від точок сеї параболї рівночасно дістає ся до лїнїї PP', а звідси іде яко плоска филя до нас. Через оборот сеї параболї довкола лїнїї SE повстане згаданий парабольоід; для ріжних часів дістанем громаду співогнищевих парабольоідів, яких параметри є пропорциональні до часів, що минули від хвилї розсьвітленя зьвізди.

Возьмім під увагу плоску верству мраковинну, то она лиш тодї розсьвітить ся (в оцї обсерватора), наколи перетинає парабольоід, що даній хвилї відповідає; тим робом легко витолкувати собі повстане перстеневих ясних лїнїй з пересуненєм відосередним, як се фотоґрафія виказує. З розслїджуваня найдальше від осередка положених мраковинних перстенів заключає Seeliger, що найяснїйше місце нової лежить по сторонї відверненій від сонця, наколи противно мраковина зближає ся до нас. — Наколи приймемо в масї мраковинній утвори подібні до поясів о переважно лінійній розтяглости, то поверхнї перерізи тих поясів з ріжними (відповідно до часу) парабольоідами мусїли-б виступити яко ясні ізольовані плями, що не зміняли би свого виду, а за се від нової зьвізди віддаляли ся та показували скручене кута положеня (позицийного). Такі плями дїйсно найдемо в фотоґрафіях нової. Теорию свою розвинув Seeliger в Astrophysical Journal Nov. 1902.

Рівночасно зібрав Perrine в тім самім зошитї Astrophysic. Journ. явища, які фотоґрафія нової показує; ось єго постереженя:

В лютім 1902. р. істнували дві виразьні области мраковинні, а се перстень о промірі 15′, і перстень слабший вніщний о промірі 30′. Луч внутрішного перстеня ріс що дня о 1″4, вніщного о 2″8, з чого слїдує, що оба они мусїли зачати розвивати ся в хвилї розсьвіченя нової т. є. в лютім 1901. р.

Найвиразнїйші місця в тих перстенях показують кромі сего рух оборотовий в части згідно, в части незгідно з рухом вказівки годинника; як раз ся обставина промавляє за правдивостию гіпотези Kapteyn'a-Seeliger'a. Внутрішний перстень взагалї стає меньше, вніщний більше ясний.

В сьвітлї мраковини не викрив Perrine поляризациї; се є трудність, з якою гіпотеза Kapteyn'a-Seeliger'a зустрічає ся, но се можна приписати дуже слабому сьвітлу, так що трудно викрити в відбитім сьвітлї поляризацию.

(Zeitschr. für physik. u. chem. Unterricht XVI. Heft 2).

Інтересний планетоід. З поміж планетоідів, відкритих в р. 1902., найінтереснїйший є планетоід 1902. KX, відкритий через Вольфа в Гейдельберзї. Час єго обігу тревае майже вісім лїт, найбільше віддалене від сонця 4,84 лучів орбіти земскої, відосередність майже четверту часть єго середного віддаленя. В найбільшім віддаленю від сонця зближає ся сей планетоід на 60 мілїонів km до Юпітера; сонце представляє ся тодї на тім планетоіді під кутом 400″, а за се Юпітер під кутом 480″. Така позиция тревае більше як два роки, і в тім часї переходить Юпітер о півночи через полуденник і є 100 рази яснїйший, як у нас; по тім періодї він що раз більше меньшає і слабне. Чотири давні місяцї Юпітера видають ся на планетї KX першої, пятий (Барнарда з р. 1892.) осьмої величини. Що таке зближене до Юпітера потягне і потягає за собою великі зміни в дорозї сего планетоіда, то річ очевидна, яка має велике теоретичне значінє.

(Das Weltall, 3. Jahrg. 16. Heft).

Величезний метеорит відкрив проф. H. A. Ward в Мехіку недалеко міста Bokubirito; він є довгий на 4·23 m, широкий 1·85 m, грубий 1·60 m, вага єго 50800 kg. Єго внутрішна будова показує структуру кристалїчну і дуже гарні фіґури Widmannstätt'a. Питомий тягар 7·69, склад хемічний 88% Fe з примішкою Ni і Co. Метеорит сей находить ся тепер в природописнім музею в Ню-Йорку.

(Die Umschau VII. 1903. № 8).

Періодичні прояви в неорґанічній материї. Періодичні прояви, що є дуже розповсюднені в сьвітї орґанічнім (сон, віддиханє, рух серця etc.), виступають дуже рідко у материї неорґанічній. В своїм часї зробило велике враженє постереженє Ostwalda, що хром металїчний розпускає ся в квасах з перемінною (періодичною) скоростию; через пару хвиль витворюють ся численні баньки ґазу, опісля витворюванє ґазу уставало на пару хвиль, знову виступало сильно і т. д. Сеї власности не має кождий кусник металїчного хрому. — Анальоґічне поведенє викрили недавно Bredig і Weinmayr у ртути. Наколи на чисте годинникове скло (о промірі 1·3—2 cm) наляти пару cm³ Hg, а на Hg до 10 cm³ 10%-ового розтвору чистого двоокису двоводня (H_2O_2), то ртуть покриває ся в температурі звичайній дуже скоро болонкою барви бронзово-золотої, а H_2O_2 виділяє баньочки кисня; по 5 40 мінутах устає нараз виділюванє ґазу, а опісля по пару секундах зачинає ся на ново. Такі періодичні прояви виступають раз у раз нераз через цїлу годину. Явище те стоїть імовірно в звязи зі зміною напруги поверхневої, але покищо не є ще точно вияснене.

(Zeitschr. f. physik. Chemie 1903. XLII. 5).

В ґазах, що видобувають ся з вулькану Mont Pelée, викрив славнозвісний париский хемік Moissan H, CO_2, CO, H_2S, CS, CH_4, C_2H_2, N, NH_3, A і He. Тепер же виказав Gautier, що наколи скалу в просторі безвоздушнім розігріти до червоного жару, то з неї дістають ся величезні маси повисших ґазів. Пр. шестистінник ґранїтовий о грани 1 km в тих обставинах дасть тілько ґазів, що через їх спаленє повстає 31 мілїонів тон води. З сего слїдує, що до вибухів вульканічних не конче є потрібний приступ морскої води до розпаленого внутра землї.

(Compt. rendus 136. 16).

Фірма F. Schmidt і Haensch в Берлїнї построїла дуже простий апарат проекцийний, що не лиш служить до киданя на екран образів прозрачних предметів (діяпозитивів), як се роблять до тепер уживані скіоптикони і апарати проекцийні, але позваляє також діставати на екранї образи непрозрачних предметів, як книжок, рисунків, металїв, анатомічних препаратів в начинях, кристалїзацийних прояв, лїнїй сили, фіґур Chladni'ого (положених поземо) etc. Близший опис сего нового та пожиточного знаряду находить ся в

Deutsche Mechaniker Zeitung 1903. № 5.

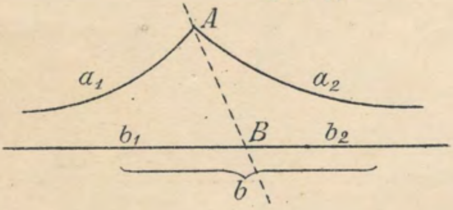
Проф. Newcomb (Washington) оголосив недавно в книжцї: The Stars. A Study of the Universe. (London 1901. 8⁰ ст. 320 + 6 таблиць) свої погляди про вселенну; погляди ті, поперті і математичною аналїзою і фільозофічними спекуляциями, можна зібрати ось-так: Наколи приймем за одиницю просторну кулю, що єї промір рівнає ся 200000 віддаленям землї від сонця, то пересїчно випадає на 8 таких одиниць одна зьвізда. Наша вселенна є царинoю, просторно обмеженою, але з сего ще не слїдує, щоби далеко за нею не істнували єще иньші „острови всесьвітні", про які ми нічо не знаєм, бо там вже сила наших телескопів та фотоґрафічних плит не сягає. Вїшна границя нашої вселенної є доволї неправильна; на нїй зьвізди є рідше розміщені, як у вселенній самій. Віддаленє сеї границї від нас є більше, як 3000 лїт сьвітла; єї розміри в площі, визначеній через дорогу чумацку, є більші, як в напрямі до тої площі прямовісній. Число зьвізд, що належить до нашої вселенної, виносить сотки мілїонів. — Ті погляди автора в істоті ріжнять ся де в чім від поглядів Seeliger'а, Kapteyn'а та Schiaparelli.

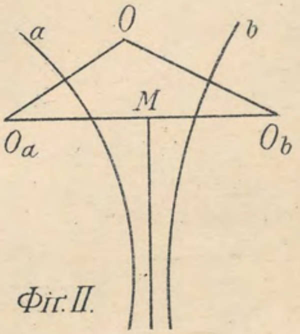
(Himmel u. Erde, Jahrg. XV. 1903. зош. 8).

Звідки взяв ся термометр Фаренгайта? Скаля сего термометру походить від Нютона, що в р. 1701. приняв температуру крови за точку вихідну своєї скалї; єго термометр був руркою скляною, наповненою олїйом льняним, найнизшою єго точкою була точка замерзаня. Точка, відповідаюча температурі крови, мала число 12 після тодї уживаного систему; відступ між точкою замерзаня а точкою температури крови був поділений на 12 частий, так що точка кипіня води випадала при 30 степенях. Опісля Fahrenheit пересьвідчив ся, що степенї Нютона за далеко від себе стоять, і тому з початку подїлив кождий з них на дві части, так що температура крови виносила 24⁰. Пізнїйше взяв він озябляючу мішанину соли і леду, якої температура лежала після єго скалї 8^{0} під точкою замерзаня. Від сеї точки до точки температури крови подїлив скалю на 24 частий, так що точка замерзаня мала 8^{0}, точка кипіня води 53^{0}. А коли зайшла потреба мірити ще низші температури, подїлив кождий степень на чотири части, так що точка замерзаня випала $4 \times 8 = 32^{0}$, точка температури крови $4 \times 24 = 96^{0}$, а точка кипіня води $4 \times 53 = 212^{0}$.

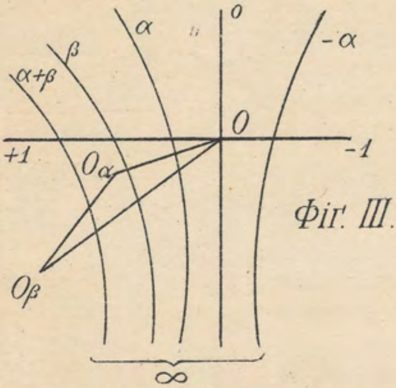
(Prometheus 4. 1903. ст. 16).

Фіг. I.

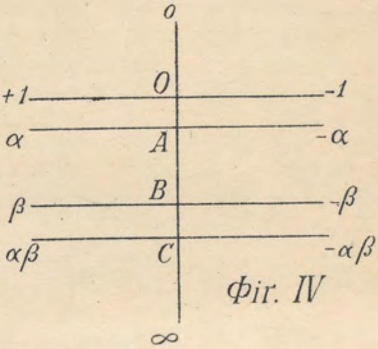




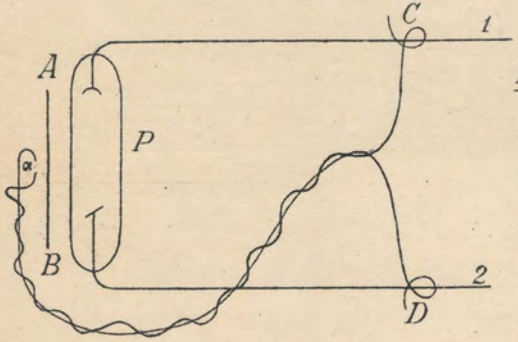
Фіг. II.



Фіг. III.



Фіг. IV.



Фіг. V.

Фіг. VI.