ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛЇКАРСКОЇ СЕКЦИЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

Т. VII. — Випуск I.

ЧАСТЬ МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНА

під редакциєю

ІВАНА ВЕРХРАТСКОГО і ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦКОГО.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SECTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

B. VII. — Heft I.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHER THEIL

REDIGIRT VON

JOHANN VERCHRATSKYJ u. VLADIMIR LEVICKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1900.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З друкарнї Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарского.

ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛЇКАРСКОЇ СЕКЦИЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

Т. VII. — Випуск I.

ЧАСТЬ МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНА

під редакциєю

ІВАНА ВЕРХРАТСКОГО і ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦКОГО.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SECTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

B. VII. — Heft I.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHER THEIL

REDIGIRT VON

JOHANN VERCHRATSKYJ u. VLADIMIR LEVICKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1900.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З друкарнї Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарского.

2 р.

ЗМІСТ.

INHALT.

З ТЕОРИЇ РЯДІВ СТЕПЕННИХ*)

НАПИСАВ

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

В сій розвідці займаю ся такими рядами степенними, для яких *цілий обвід засягу збіжности* творить пантахию *точок особливих* (або є *лїнїєю особливою замкненою*). Квестия того рода рядів степенних є дуже трудна; яке таке сьвітло кидають на ню роботи Pringsheim'a, Fabry та Borel'a 1); тож в нинїшній розвідці я хочу лиш перевести доказ, що того рода ряди істнують, а опісля подати пару уваг, яке можуть кинути деяке сьвітло на істоту таких функций.

В тій цїли послугуюсь способом, що творить точку вихідну теорему Mittag-Leffler'a 2).

1. Най $f(x)$ буде аналїтичною функциєю, збіжною в колї $|x| = r$ і най єї точками особливими будуть місця a_s ($s = 1, 2, \cdots \infty$), де:

$$|a_s| = r, \quad a_s = re^{\varphi_s i} \quad (\varphi_s \text{ яке-небудь}).$$

В окруженю кождої точки a_s істнує розвинене:

$$f(x) = G_s\left(\frac{1}{x - a_s}\right) + \mathfrak{P}_s(x - a_s) \qquad 1).$$

де G_s є функция цїла рациональна або переступна, т. є.:

---

*) Розвідка ся буде поміщена в одним з дальших випусків журнала „Monatshefte fur Mathematik u. Physik“ Wien.

1) Пор. пр. Borel: Leçons sur la théorie des fonctions; також Annales de l'Ecole normale t. 16. Ту можна також зачислити дослїди Poincaré над функциями автоморфними, які істнують лиш в колї головнім.

2) Пор. пр. Biermann: Theorie der analytischen Functionen ст. 344 et sqts.

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\frac{c_{s1}}{x-a_s}+\frac{c_{s2}}{(x-a_s)^2}+\cdots\cdots \left\{\begin{array}{l}\text{скінчена}\\ \text{або}\\ \text{in inf.}\end{array}\right.$$

$$=-\frac{c_{s1}}{a_s\left(1-\frac{x}{a_s}\right)}+\frac{c_{s1}}{a_s^2\left(1-\frac{x}{a_s}\right)^2}-\cdots\cdots=\sum_{\mu=0}^{\infty}A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu},$$

де:

$$(-1)^{-\mu}A_{s\mu}=-\binom{-\mu-1}{0}\frac{c_{s1}}{a_s}-\binom{-\mu-1}{1}\frac{c_{s2}}{a_s^2}-\cdots\cdots \qquad 2).$$

Проте можна написати:

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\sum_{0}^{m_s}A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu}+\sum_{m_s+1}^{\infty}A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu} \qquad 3).$$

де m_s є яке-небудь число, але скінчене, додатне і ціле.

Впровадьмо тепер вираженє слїдуюче:

$$F_s(x)=\sum_{m_s+1}^{\infty}A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu} \qquad 4).$$

то єго беззглядна вартість (з узглядненем $|a_s|=r$) є:

$$\left|F_s(x)\right|\leqq\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{\mu}.$$

Збудуймо тепер безконечну суму $\sum\limits_{s=1}^{\infty}F_s(x)$, то:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left|F_s(x)\right|\leqq\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{\mu} \qquad 5).$$

Розслїдїм тепер сочинники $A_{s\mu}$, то на основі рівнаня 2). можна написати:

$$\left|A_{s\mu}\right|\leqq\sum_{v=1}^{\infty}\binom{-\mu-1}{v-1}\left|\frac{c_{sv}}{r^{v}}\right| \qquad |a_s|=r.$$

Наколи ряд:

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\sum\frac{c_{s\nu}}{(x-a_s)^\nu}$$

яко ряд безусловно збіжний має для окруженя точки a_s вартість:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|c_{s\nu}|}{|x-a_s|^\nu}=g_s\,,\quad |x-a_s|=\zeta_s$$

то після звісного твердженя Вейерштрасса¹):

$$\frac{|c_{s\nu}|}{|x-a_s|^\nu}\leqq g_s\,,\quad \text{або}\quad |c_{s\nu}|\leqq g_s\,\zeta_s^\nu\,.$$

Наколи вставимо за $|c_{s\nu}|$ ту більшу вартість, дістанемо:

$$\left|A_{s\mu}\right|\leqq g_s\sum_{\nu=1}^{\infty}\binom{-\mu-1}{\nu-1}\left|\frac{\zeta_s}{r}\right|^\nu$$

або:

$$\left|A_{s\mu}\right|\leqq g_s\,\frac{|\zeta_s|}{r}\,\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta_s|}{r}\right)^{\mu+1}}\,.$$

Доберім ζ_s так, щоби:

$$\frac{|\zeta_s|}{r}<\beta<1\,,\quad \text{то:}$$

$$|A_{s\mu}|<g_s\,\beta\,(1-\beta)^{-\mu-1}$$

сума та є проте скінчена.

Возьмім тепер в засягу зб. $\left|\frac{x}{r}\right|=\varepsilon\leqq 1$ суму:

$$\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^\mu,\quad \text{то та сума:}$$

$$\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^\mu=\left|\frac{x}{r}\right|^{m_s}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^\nu$$

---

¹) Biermann loc. cit. 142.

Але:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{v}<\sum_{v=1}^{\infty}g_s\,\beta\left(1-\beta\right)^{-(m_s+v+1)}\left|\frac{x}{r}\right|^{v}=$$

$$=\frac{g_s\,\beta}{\left(1-\beta\right)^{m_s+1}}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\beta\right)^{v}}\left|\frac{x}{r}\right|^{v}.$$

А що:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\beta\right)^{v}}\left|\frac{x}{r}\right|^{v}=\frac{\left|\frac{x}{r}\right|}{1-\beta}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1-\beta}\left|\frac{x}{r}\right|}=\frac{\varepsilon}{1-\beta-\varepsilon},$$

то:

$$\left|F_s(x)\right|\leqq\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{\mu}\leqq\left|\frac{x}{r}\right|^{m_s}\frac{g_s\,\beta}{\left(1-\beta\right)^{m_s+1}}\cdot\frac{\varepsilon}{1-\beta-\varepsilon}=$$

$$=\varepsilon^{m_s+1}\,\frac{\beta g_s}{(1-\beta)^{m_s+1}\,(1-\beta-\varepsilon)}.$$

Через вибір достаточно великого m_s можна зробити, що:

$$\left|F_s(x)\right|\angle\ \varepsilon_s \text{ (довільно мале)}$$

в засягу $\left|\frac{x}{r}\right|\angle\ 1.$

А що в тім засягу є і:

$$\left|F_{s+v}(x)\right|\angle\ \varepsilon_{s+v}\ \ (s=1,2,3,\text{-----})$$

то можна вибрати так велике v, щоби і $\sum_{s=1}^{\infty}F_s(x)$ була одностайно збіжна, т. є., щоби:

$$\sum\left|F_{s+v}(x)\right|\angle\ \delta \text{ (довільно мале).}$$

Тоді $\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x)$ буде одностайно збіжна і дасть ся розвинути на ряд в окруженю кождої точки a_s. В такім засягу та сума яко сума безконечно много рядів дасть ся упорядкувати після степенів арґументу [1]), отже:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left|F_s(x)\right| \leqq \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{\mu} = \sum_{s=1}^{\infty}\left\{\left|A_{s,m_s+1}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{m_s+1} + \right.$$

$$\left. + \left|A_{s,m_s+2}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{m_s+2} + \cdots\right\} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{x}{r}^{m_s+1}\left\{\left|A_{s,m_s+1}\right| + \left|A_{s,m_s+2}\right|\left|\frac{x}{r}\right| + \cdots\right\} =$$

$$= \left|\frac{x}{r}\right|^{m_s+1}\left\{\left|A_{1,m_s+1}\right| + \left|A_{1,m_s+2}\right|\left|\frac{x}{r}\right| + \cdots + \left|A_{2,m_s+1}\right| + \left|A_{2,m_s+2}\right|\left|\frac{x}{r}\right| + \cdots\right\} =$$

$$= \left|\frac{x}{r}\right|^{m_s+1}\left[\sum_{t=1}^{\infty}\left|A_{t,m_s+1}\right| + \left|\frac{x}{r}\right|\sum_{t=1}^{\infty}\left|A_{t,m_s+2}\right| + \left|\frac{x}{r}\right|^{2}\sum_{t=1}^{\infty}\left|A_{t,m_s+3}\right| + \cdots\right\}.$$

Отже можна написати:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left|F_s(x)\right| \leqq \left|\frac{x}{r}\right|^{m_s+1}\left[C_1 + C_2\left|\frac{x}{r}\right| + C_3\left|\frac{x}{r}\right|^{2} + \cdots\right] \qquad 6).$$

де кождий сочинник:

$$C_n == \sum_{t}\left|A_{t,m_s+n}\right|$$

має скінчену і означену вартість [2]).

В засягу $|x| = r$ мусить бути:

$$f(x) - \sum_{s=1}^{\infty} F_s(x) = G(x),$$

де $G(x)$ є цїлковита переступна функция; отже:

---

[1]) Пор. Biermann loc. cit. ст. 146.

[2]) Пор. ibid. ст. 146.

$$f(x) = G(x) + \sum_{s=1}^{\infty} F_s(x) \qquad 7).$$

Можна проте всегда збудувати аналїтичну функцию, яка на цїлім обводї засягу збіжности має самі точки особливі.

2. Що така функция має дїйсно такі власности, можна легко доказати.

Так як:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x) = h\left(\frac{x}{r}\right)^{m_s+1}\left[C_1 + C_2\frac{x}{r} + C_3\frac{x^2}{r^2} + \cdots\right],$$

де h є числом зложеним $\left(|h| \leqq 1\right)$, то:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s\left(re^{\varphi i}\right) = h\left(e^{\varphi i}\right)^{m_s+1}\left[C_1 + C_2e^{\varphi i} + C_3e^{2\varphi i} + \cdots\right] =$$

$$= h\left(e^{\varphi i}\right)^{m_s+1}\left[\sum_{\nu=0}^{n} C_{\nu+1}e^{\nu\varphi i} + R_n\right],$$

де перша сума є скінчена, а решта почавши від дуже далекого n:

$$R_n\, e^{n\varphi i}\left(C_{n+1} + C_{n+2}e^{\varphi i} + C_{n+3}e^{2\varphi i} + \cdots\right)_{n=\infty}$$

може приняти яку-небуть вартість, бо $\left.e^{n\varphi i}\right\}_{n=\infty}$ принимає всяку яку-небудь вартість.

Що було до доказаня. —

3. Погляньмо тепер, що дїє ся в середині кола збіжности.

Возьмім $x = r'e^{\varphi i}$ де $r' \angle r$,

то дістанемо:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s\left(r'e^{\varphi i}\right) = h\left(e^{\varphi i}\right)^{m_s+1}\left[C_1 + C_2\frac{r'}{r}e^{\varphi i} + \cdots + C_n\left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1}e^{(n-1)\varphi i} + \cdots\right]$$

отже-ж решта є ту:

$$R_n = \left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1} e^{(n-1)\varphi i} \left[C_n + C_{n+1}\frac{r'}{r}e^{\varphi i} + \cdots\right]_{n=\infty}$$

Так як $\frac{r'}{r} \angle 1$, то: $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1} = 0$, т. є. $R_n = 0$.

В середині кола збіжности є проте функция f(x) скінчена і одновартостна.

Є ту однак виїмки. Для $n = \infty$ може $e^{(n-1)\varphi i}$ приняти всяку можливу вартість; наколи ті вартости є скінчені, то решта $R_n = 0$; є однак і безконечно великі вартости того $e^{(n-1)\varphi i}$, отже в тім случаю має решта форму $0.\infty$, який то символ може мати якесь значінє. Наколи він має вартість скінчену, то і цїла функция є на тім місци скінчена, але не все одновартостна. Наколи символ сей має вартість безконечно велику, то і функция на тім місци стаєсь безконечно великою.

Можем проте сказати: Функция, яка має на обводї збіжности пантахию особливостий, може мати в серединї кола збіжности ту і там порозкидані особливі місця, де тратить скінченість і одновартостність.

Які се є місця і як в окруженю тих місць представляє ся функция f(x), сего не можу ближше розбирати, вказую лиш на можливість, що такі місця істнують.

4. Возьмім тепер функцию f(x) по за колом збіжности і розслїдім там єї поведенє.

Виберім на площи чисельній яку-небудь точку

$$x = Re^{\varphi i},$$

де $R > r$, то тодї дістанемо:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s\left(Re^{\varphi i}\right) = h\left(e^{\varphi i}\right)^{m_s+1}\left[C_1 + C_2\frac{R}{r}e^{\varphi i} + \cdots\right]$$

при чім решта:

$$R_n = \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} e^{(n-1)\varphi i} \left[C_n + C_n \frac{R}{r} e^{\varphi i} + \cdots\right]_{n=\infty}$$

Так як $\left(\frac{R}{r}\right) > 1$, то $\lim\limits_{n=\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} = \infty$, т. є. $R_n = \infty$;

поза колом збіжности функция f(x) в загалї не істнує (є безконечностию).

Але і ту є виїмки. Для $n = \infty$ може $e^{(n-1)\varphi i}$ приняти всяку можливу вартість; наколи ті вартости є скінчені або безконечно великі, то решта $R_n = \infty$; наколи однак якась з тих вартостий є 0, то решта дістане форму $\infty . 0$. Наколи сей символ має вартість скінчену, то решта R_n, а проте і $f(x)$ є на тім місци скінчене.

Можна проте сказати, що функция f(x) поза колом збіжности нїде не істнує кромі деяких ізольованих місць, де приймає вартість скінчену.

І ту не беру ся розслїджувати ближше тих місць, а вказую лиш на можливість їх істнованя.

5. Возьмім тепер ряд видїлений mod. m[1]) т. є.:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x, m) = h\left(\frac{x}{r}\right)^{m_s+1} \left[C_1 + C_{m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^m + C_{2m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{2m} + \cdots\right],$$

то ту решта R_n має вид:

$$R_n = C_{nm+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{nm} + C_{(n+1)m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{(n+1)m} + \cdots$$

або:

$$R_n = \left(\frac{x}{r}\right)^{nm} \left[C_{nm+1} + C_{(n+1)m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^m + \cdots\right]_{n=\infty}$$

Для $x = re^{\varphi i}$ маємо:

---

[1]) Що до таких рядів пор. Puzyna: O wartościach funkcyi etc. (Roz. krak. Akad. mat umiej. Wyd. T. 26); єго: Ueber eine methodische Bildung der anal. Ausdrücke (Monatshefte für Math. u. Phys. Bd. V). Левицкий: Про симетричні вираженя (Записки Наук. Тов. ім. Шевченка т. IV.).

$$R_n = e^{nm\varphi i}\left[C_{nm+1} + C_{(n+1)m+1}\left(e^{\varphi i}\right)^m + \cdots\right]_{n=\infty},$$

а для $x = Re^{\varphi i}$, $R \lesseqgtr r$ дістанемо:

$$R_n = \left(\frac{R}{r}\right)^{nm} e^{nm\varphi i}\left[C_{nm+1} + C_{(n+1)m+1}\left(\frac{R}{r}\right)^m e^{m\varphi i} + \cdots\right]_{n=\infty},$$

а се значить, що і функция виділена mod. d. з функциї f(x) є також функциєю о характері функциї f(x).

Возьмім тепер загальнїйший случай, а іменно виділену функцию:

$$\sum F_s(x,m) = h\left(\frac{x}{r}\right)^{m_s+1}\left[C_1 + C_{m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^m + C_{m_1+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{m_1} + \right.$$

$$\left. + C_{m_2+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{m_2} + \cdots\right], \qquad 8).$$

де:

$$m < m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$$

і де:

$$\begin{aligned} m &= m \\ m_1 &= m\, t_1 \\ m_2 &= m\, t_1\, t_2 \\ m_3 &= m\, t_1\, t_2\, t_3 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m_n &= m\, t_1\, t_2\, t_3 \cdots t_n, \end{aligned}$$

де m_s і t_s є числа цїлї і додатні; то решта того ряду має вид:

$$Rn = C_{m_n+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{m_n} + C_{m_{n+1}+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{m_{n+1}} + \cdots$$

або:

$$Rn = \left(\frac{x}{r}\right)\left[C_{m_n+1} + C_{m_{n+1}+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{(t_{n+1}-1)m_n} + \cdots\right],$$

а та решта для $n = \infty$ і для $x = Re^{\varphi i}$, $\left(R \gtreqless r\right)$ заховує ся як попередних случаях. Отже і така функция має вповні характер розслїдженої нами функциї f(x).

Очевидно то зістане і на случай, коли:

$$t_1 = t_2 = \cdots\cdots\cdots m,$$

т. є. коли:

$$m_n = m^n.$$

Зауважити вкінци треба, що ряд 8). на случай $r = 1$ був вже предметом дослїдів M. Lerch'a[1]).

Тернопіль, в червни 1900.

---

[1]) Acta matem. T. 10.

Дещо про лучі Бекереля (Becquerel)

написав

СОФРОН МАТВІЯС.

Не довго по відкритю лучів Рентґена (Röntgen) наука могла повеличатись новим здобутком. В роцї 1896 відкрив Бекерель, що уран і єго сполученя висилають лучі для ока вправдї неслїдні, котрі однак дїлають на плити фотоґрафічні замкнені в чорнім непрозрачнім для сьвітла папері рівно як сьвітло, хотяй значно слабше і розходять ся в лінїї простій. З початку була гадка, що уран сьвітить під впливом попередного, хотяйби короткого виставленя єго на лучі сьвітла через якийсь час, зовсїм так як тїла фосфоризуючі, хотяй в тім случаю уран висилає лучі значно довше, бо навіть і цїлі місяцї. Длятого з початку названо явище то надфосфоресценциєю. Однак докладнїйші дослїди виказали цїлком рішучо, що лучі ті не повстають під впливом сьвітла, бо уран і єго сполученя висилають лучі і тодї, коли умістимо їх в цїлковитій темнотї навіть через кілька лїт, а також не можна в жаден спосіб скріпити лучистости урану анї через сильне осьвітленє анї при помочи иньших внїшних впливів. Не має ся тут проте до дїла з фосфоресценциєю, але з лучами нового рода, котрі в засадї ріжнять ся також цїлковито і від лучів сьвітла.

По тім відкритю Бекереля мимоволї насувалось питанє, чи крім урану є иньші тїла, що мали би ту саму власність висиланя лучів о тих самих свійствах. Розвязкою сего питаня заняв ся між першими Др. Ґ. Шмідт, котрому удалось по численних пробах з ріжними елєментами відкрити, що тор заховуєсь подібно як уран. В дослїдах своїх над свійствами тих лучів спостеріг Шмідт, що металї вглитують лучі тору, а иньші тїла, як папір, желятина, шкло перепускають їх в тонких верствах. Бо коли покласти тор на фотоґрафічній плитї, завиненій в чорний непрозрачний папір, то по однім або двох днях плита та цїлковито счорніє, коли однак помістити якийсь металь під тором, то фіґура єго відібє ся цїлковито. Лучі ті дальше роблять з воздуха, що є діелектриком, слабий провідник електричности, в наслїдок чого розсївають ся набої тїл наелектризованих так додатно як від'ємно.

Силу лучів урану і тору або так званих лучів Бекереля можна розслїджувати в двоякий спосіб. Перша метода лежить в тім, що оцїнює ся дїланє фотоґрафічне лучів на закриту плиту, однак методою сею не можна дійти до докладних результатів. Далеко докладнїйшою є метода електрична, полягаюча на тім, що лучі ті переміняють воздух-діелектрик на добрий провідник, а вартість провідництва можна дуже докладно мірити.

Приряд той, якого уживала Curie-Склодовска, складає ся з конденсатора о двох плитках А і В. (Фіґ. I.). Тїло лучисте спорошковане розсипує ся на плитцї В і творить з воздуха містячого між плитками добрий провідник. До міреня сего провідництва підносить ся плитку В до високого потенциялу, коли получимо єї з одним біґуном сильної батериї електричної, а другий біґун злучимо з землею. Другу плитку А за помочию дроту CD лучимо з землею. Творить ся проте ріжниця потенциялів межи плитками, а що воздух між плитками стає ся провідником, проте кружить ток електричний між плитками. Потенциял плитки А вказує електрометер Е з нею злучений. Єсли прорвемо в С получене з землею, то плитка А отримує набій, котрий відхиляє електрометер. Скорість вихилу є пропорциональна до сили тока і може служити до єї зміреня. Лїпше є однак рівноважити набій плитки так, щоби електрометер зіставав на зеровій точцї. Набої ті суть натурально дуже слабі і можна їх зрівноважити за помочию кварцу пєзоелектричного Q, котрого одна окладка лучить ся з плиткою А, друга з землею. Ту бляшку кварцову обтяжає ся за помочию тягарку уміщеного на тарілцї завішеній до берегу долїшного кварцової бляшки. А уладжує ся то в той спосіб, що скількість електричности переходяча через кондензатор в кождій хвили рівнає ся скількости електричности, що достарчає кварц. Тим способом можна мірити безвзглядну вартість тої електричности, котра в протягу даного часу перепливає через кондензатор, або иньшими словами можна мірити силу тока. Чулість електрометру не має на помір жадного впливу.

Причина повставаня того тока до нині не зовсїм ясна. Анґлїйский учений Rutheford толкує, що лучі переходячі через воздух межи плитками кондензатора, причиняють ся до розділу частин ґазових на додатні і від'ємні йони, котрі перебігають в поли електричнім до плиток кондензатора і ту віддають їм свої набої. Наслїдком тої гіпотези було би, що ток є тим сильнїйший, чим більше творить ся тих йонів, а тих знова може тим більше творитись, чим сильнїйші лучі висилають ті тїла, а також коли би була однакова сила висиланя лучів, то сила тока залежить еще від ріжниції потенциялів між плитками кондензатора. Rutheford виказав відтак досьвідом правдивість своєї гіпотези а залежність між провідництвом електричним в наслїдок дїланя лучистих тїл а ріжницею потенциялів кондензатора представив ґрафічно кривою лїнією. Коли з початку збільшаєсь ріжниця потенциялів, росте і відхилене електрометру але до певної границї. Дальше крива та нагло загинає ся і є дальше рівнобіжною до оси потенциялів. І так має бути. Бо єсли при якійсь ріжници потенциялів межи плитками скорість частин ґазових стає ся так велика, що всї йони, що творять ся в однїй секундї, в тім часї добігають до плиток кондензатора, то тодї натурально і ток мусить бути сталий, проте і електрометер не може дальше відхиляти ся. Тодї ток, котрого сила найбільша, є пропорциональний до числа йонів, що творять ся в одиници часу, а ті знова приймаємо яко міру сили лучистости тїл.

Поміри тим прирядом виказали, що загальний характер лучів тору є той сам що урану, а сила тока взбуджена лучами тора є явищем атомовим, яке є звязане з материєю і не може зчезнути з зміною їх стану фізичного а навіть хемічного. Всї сполуки, що мають за складник тор або уран, посїдають тим самим власність висиланя лучів Бекереля і то тим сильнїйших, чим більша їх скількість в якій сполуцї. Після того не повинен жаден мінерал бути більше лучистий чим тор і уран. Однак досьвід показав що иньшого, а то що уранї чорний (пехблєнда) є чотири рази чиннїйший нїж уран металїчний. Длятого то Марія і Петро Curie впали на гадку, що в пехблєндї мусить бути матерія иньша, котра є більше лучиста нїж тор або уран і виказали навіть посредством звичайних метод хемії аналїтичної, що в пехблєндї суть материї, котрих лучистість є 100.000 разів енерґічнїйша нїж урана. Аналїза хемічна виказала, що в пехблєндї суть три ріжні елєменти, які дістали назву польон, рад і актин.

Польон є все разом з бізмутом і під взглядом аналїтичним до него подібний. Рад є зближений до бару і є з ним в пехблєндї, а актин є найбільше зближений до тору. Треба однак знати, що повисших тїл в пехблєндї надзвичайно мало. Щоби їх одержати в більшій скількости, треба переробити кілька тон відпадків фабрикациї урана з пехблєнди Цїла та праця є дуже довга', і при тім получена з великими коштами, бо з тисячий kg материялу добуває ся ледви кілька dg сих лучистих матерій.

Вправдї жадного з тих тїл не одержано єще доси відосібненого, проте тїла ті поки що трудно звати елєментами. Мимо найбільших старань не знайдено доси хемічноï реакциї, щоби можна було віддїлити рад від бару, польон від бізмута. Однак наука знає єще иньші средства, котрими можна виказати, що нові елєменти суть, а то аналїза спектральна і помір тягару атомового.

Demarçay виконав ряд помірів спектральних з новими тїлами, а радше тими тїлами, де они входять в їх склад. Фотоґрафуючи дуговину (спектр) хльорку барового лучистого, спостеріг він нову дуговину характеристичну, яка ставала що раз виразнїйша в міру, як росла лучистість. Дуговина раду містила в собі 15 добре схарактеризованих лїнїй не числячи слабших.

Подібні поміри роблені з польоном і актином не дали успішних результатів, чито тому, що метода спектральна не є так корисна або концентрация не вистарчаюча.

Означено також тягар атомовий бару лучистого і знайдено, що тягар збільшає ся з концентрациєю. Послїдні поміри дали число 146 яко тягар атомовий бару лучистого, підчас коли тягар атомовий звичайного бару виносить 138.

Однак тепер насунулось друге питанє, чи уран не посїдає длятого власности висиланя лучів Бекереля, що може міститъ в собі одно з тих тїл. І справдї найновійші працї виказали, що уран нїколи не є вільний від актину і що видобуваючи актин можна лучистість урана значно обнижити. А невідомо тілько, чи можна одержати уран зовсїм нечинний.

Послїдним питанєм, котре лишалось до розвязаня, було то, чи між лучами катодальними і Рентґена з одноï, а лучами Бекереля з другоï сторони нема що вспільного, а може навіть, чи ті послїдні лучі не суть нїчим иньшим як катодальними або иньшою відміною лучів Рентґена. Длятого зачато слїдити за свійствами нових лучів і порівнувати їх з лучами катодальними і Рентґена.

Відкрито, що лучі нових тїл лучистих можуть переходити через ріжні тїла, але лучі не всїх тїл переходять в однаковій мірі.

Лучі польону мало проникають, бо в воздусї перебувають они ледви кількацентиметрову дорогу, а через тїла цїнкі пр. металї переходять лиш через дуже тонку верству. Рад має два роди лучів, одні дуже мало проникливі як польону, але другі суть дуже проникливі, бо в воздусї переходять на метр і більше, а плита оловяна навіть кілька cm груба не в силї повздержати лучів другого рода. Актин заховуєсь в тім взглядї так як рад.

Дїлане фотоґрафічне раду і актину є дуже енерґічне. Лиш польон один не дїлає з віддаленя а дуже слабо тодї, коли плита фотоґрафічна є покрита чорним папером. Рад і актин дїлають з значного віддаленя а навіть тодї, коли плита є покрита чорним папером.

Лучі тих тїл викликують флюоресценцию в тїлах флюоризуючих а також причиняють ся до змін хемічних в тїлах виставлених на їх дїлане. Так пр. шкло і порцеляна виставлені на дїланя лучів раду, без взгляду на то чи з віддаленя чи безпосередно зіткнені, забарвляють ся на барву фіолєтову, брунатну або сїру, залежно від складу шкла або порцеляни.

Також послїдні досьвіди виказали, що тїла ті слабо озонізують воздух. Рівно-ж єсли лучі раду падають на пару виходячу з кітла, то єї скрапляють; в тім случаю йони, що повстають в воздусї в наслїдок дїланя тих лучів суть тими дрібними тїльцями, що служать яко осередки до згущеня пари водної.

Дальше лучі ті улекшують повставанє іскри електричної через те, що обнижають ріжницю потенциялів на двох провідниках, набитих нерівноіменною електричностию.

Також заходить зміна в силї лучистости тих тїл. І так лучистість сполук раду росте від хвилї, коли одержано ті сполуки в станї цїпким і доходить до певної граничної вартости, що буває 4 або 5 разів більше як первісна. Противно лучистість сполук польону зменьшає ся поволи але стало і не вертає вже нїколи до первісної початкової вартости.

Лучі раду і актину мають дальше то свійство, що побуджають другі тїла, на котрі падають, до висиланя лучів. Лучистість та так сказати-б, другорядна по усуненю раду і актину малїє а вкінци гасне цїлком.

Маючи на взглядї до тепер вичислені свійства лучів Бекереля можна їх так само добре заслити до лучів Рентґена як і катодальних, котрих істоту нинї толкує ся після W. Sutherland-a*) в спосіб дуже інтересний. То власне, що лучі катодальні не суть залежні

---

*) (Phil. Mag. 47, 269. 1899).

від рода ґазу, твердить Sutherland, каже приняти, що лучі ті не повстали з йонів ґазу але з „електронів“, де під „електроном“ треба розуміти можливо найменьшу скількість електричности, рід молекула електричного. Тих електронів є два роди, додатні і від'ємні; звичайно суть они сполучені в „neutron“, а тілько певні сили можуть єго розділити. Всяке провідництво електричности є тілько вандрівкою електронів; длятого мусить кождий провідник ділити „neutron“ на електрони, підчас коли непровідники сего не можуть. Порожня є ізорятором; аж електрична сила розділить неутрони, тоді стає ся она провідником в роді електроліта. Опісля відємні електрони враз з декотрими йонами ґазовими є відкидувані від катоди і творять лучі катодальні. Ті суть проте найпростшою формою електричного току. А що електрони суть надзвичайно малі, бо Sutherland обчисляє їх на одну міліонову молекула матеріяльного, то можуть проникнути в простор межимолекулярний. Многі з тих електронів відклонюють молекули з простолінійної дороги, і ті творять по переході листка алюмінїового лучі Ленарда. А так само як молекули матеріяльні, мають після гадки Sutherlanda і електрони внутрішну будову. Єсли ударяють на атоми тїл, то віддають они їм часть своєї енерґії в виді тепла; друга часть енерґії з'уживаєсь до внутрішних заворушень кождого електрона, а ті внутрішні колибаня творять в етері лучі Рентґена. Лучі X були би проте филями етеру і то в тім самім відношеню меньші як филї сьвітла, як електрони суть меньші від молекулів матеріяльних. А що они просторонь межимолекулярну легко переходять, не можуть ся анї відбивати анї заломлювати. І иньші свійства лучів Рентґена і катодальних можна пояснити на підставі тої теориї.

Лучі Бекереля можна зачислити до лучів катодальних і Рентґена тому, бо так само лучі X як і катодальні дїлають фотоґрафічно, флюоризуючо, не підлягають правам відбитя, заломленя анї поляризациї. За подібностию лучів X а Бекереля промовляє єще й то, що одні і другі не суть однородні. Ріжнородність лучів Рентґена є добре знана, що доказує хочби то, що в технїці відріжняє ся тверді і мягкі рурки Crookes'a, що служать до витвореня лучів Рентґена. Лучі виходячі з рурок твердих мають велику спосібність проиканя і задля тої причини дають на екранї не досить ясні образи пр. скелєту, бо ту і кости суть для них прозрачні. Рівно-ж і дуже мягкі суть невідповідні, бо знова вглитані мясними частями не відграничають ся остро на загальнім тлї. У лучів Бекереля відповідають твердим руркам лучі раду, а мягким лучі польону.

Однак між лучами Рентґена а Бекереля є і основна ріжниця, а то та, що лучі Рентґена не дізнають відхиленя в поли маґнетнім, підчас коли лучі Бекереля як і катодальні улягають діланю поля маґнетного, бо так і повинно бути на підставі теориї Sutherlanda. Curie знайшов в своїх дуже численних дослїдах, що рад має два роди лучів і то одні відхиляють ся, другі не відхиляють ся в поли маґнетнім та підлягають тим самим правам, що і лучі катодальні. Ріжнородність та зовсїм не псує анальоґії. Знаною є річею, що в рурках Крукса (Crookes-a) лучі Рентґена творять ся всюди там, де лучі катодальні спотикають поверхність цїпкого тїла. З другої сторони дослїди Sugnaca виказали, що коли лучі X напотикають поверхність сталу, поверхність та стає ся жерелом лучів, котрі після найновійших результатів Curie і Sagnaca принайменьше в части суть катодальними. Поверхність проте, коли єї спотикають лучі катодальні, видає лучі X і на відворот, так що в безпосереднім сусїдстві сталої поверхности не можуть бути одні лучі без других.

Що до істоти лучів Бекереля ставлено також ріжнородні гіпотези.

Марія Склодовска-Curie подає в одній з своїх розправ гіпотезу, що взагалї просторонь проникають лучі, подібні до лучів X, а ті падаючи на якісь тїла о високім тягарі атомовім, як тор, уран і т. д. улягають поглощеню; відтак висилають ті тїла лучі другорядні, котре власне суть лучами Бекереля. Однак дослї Elster-a і Geitla дають результати суперечні повисшій гіпотезї.

Вкінци лишаєсь питанє що до жерела енерґії тїл лучистих, котре доси поки що належить уважати за отверте. Відомо, що при висиланю тих лучів не заходить жадна в очи впадаючи зміна так в самих тїлах лучистих як і в оточеню. Длятого Марія Curie була тої гадки, що ті лучі суть винятком від права термодинамічного Карнота. Однак поки що нема причини анї рациї захитувати правом усталеним в науцї і добачувати в тих явищах незгоди з другою засадою термодинаміки, після котрої систем о температурі незмінній не може достарчити енерґії, єсли єї нї звідки не одержує, але радше треба припустити, що то освободжує ся енерґія в наслїдок змін хемічних, мимо що маса сама так мало тратить на тім, що треба би мілїонів лїт, щоби можна ту страту зміряти нашими прирядами. Бо і висилана ту скількість енерґії є незначна в порівнаню з тими, які висилають дрібні навіть процеси хемічні.

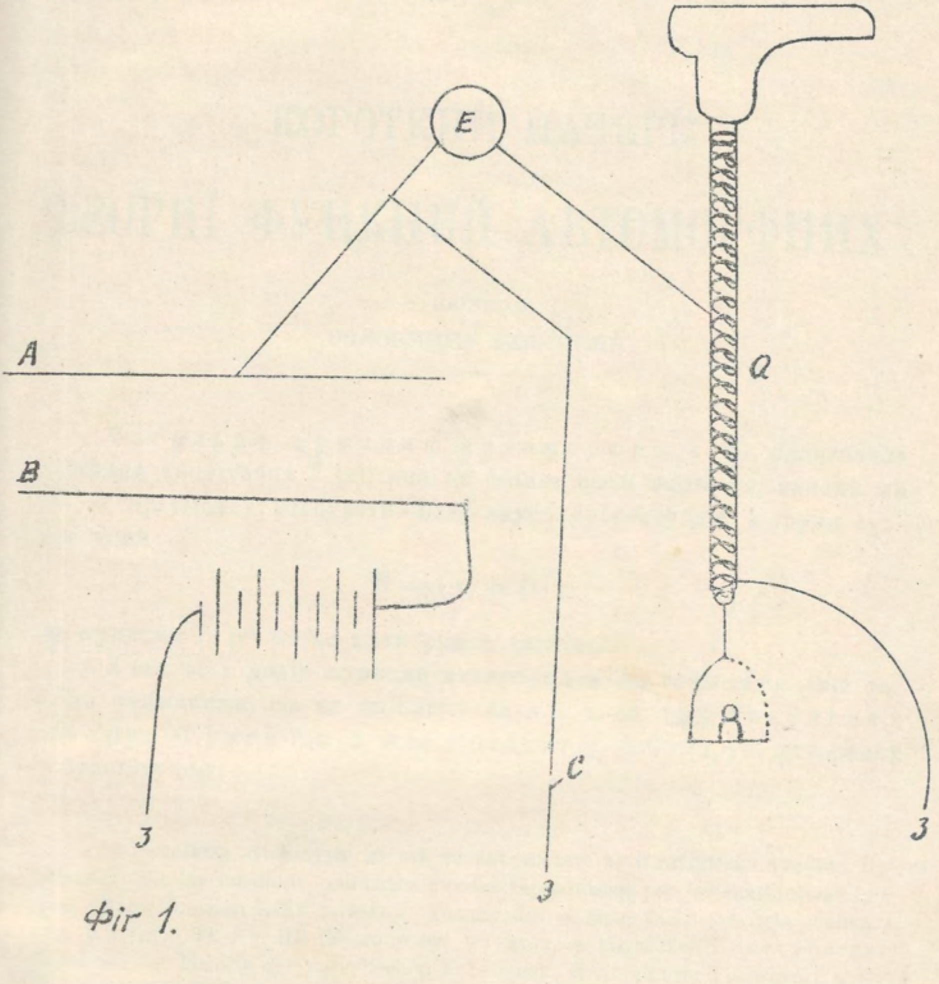
Теория матеріялїстична лучиста здає добре справу з тих явищ. Однак сли єї приняти, мусить ся приняти також, що матерія лучиста не є в звичайнім станї хемічнім. Атом в тім случаю не є неподільний, коли єго части суть висилані яко лучі. Матерія лучиста підлягає перемінї хемічній і та то переміна є жерелом енерґії лучистости, але не є то переміна хемічна звичайна, бо атом сам улягає змінї. Впрочім є ту ясним, що єсли лучистість є наслїдком переміни матерії, то перемінї підлягати мусить сам атом, наколи лучистість є явищем атомовим.

З короткого того зіставленя найновійших дослїдів над лучами Бекереля, видно, що як справа доси стоїть, трудно рішити ся за одною або другою теориєю тих нових лучів, бо аж дальше систематичне поглубленє власностий нових тих лучів буде становити справдїшний крок в перед: тілько тодї дасть ся пізнати залежність лучів катодальних з одної а лучів Бекереля і Рентґена з другої сторони в правдивім сьвітлї, а тим самим рішить ся питанє що до їх істоти і походженя.

Тернопіль в жовтни 1900.

Важнїйша лїтература.

M. Curie (Comptes rendus de l' Academie, Paris CXXIX, 714, 1899).
Demarçay (C. R. CXXIX, 716, 1899).
Bequerel (C. R. CXXIX, 996, 1205, 1899).
M. Curie (C. R. CXXX, 73, 76, 1900).
W. Sutherland (Phil. Mag. 47, 269, 1899).



Фиг 1.

КОРОТКИЙ НАЧЕРК
ТЕОРИЇ ФУНКЦИЙ АВТОМОРФНИХ*)

НАПИСАВ

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

Загальна функция автоморфна є то однозначна функция аналїтична F (z), яка не зміняє своєї вартости, наколи ми до єї арґументу стосувати-мем якусь субституцию з ґрупи субституций:

$$G = \left(z,\ f_\alpha (z) \right),$$

де функция f_α (z) може мати ріжне значінє.

З тих всїх родів функций автоморфних ми займем ся лиш такими функциями, що не зміняють ся для т. зв. **ґруп нетяглих** або **ґруп Фухса** (як їх зове Poincaré), себ-то ґруп, утворених з субституций:

---

*) Важнїйша лїтература до сеї теориї містить ся в слїдуючих творах: Poincaré: Sur les fonctions uniformes qui ses reproduisent par les substitutions linéaires (Math. Annalen XIX); той-сам: Théorie des groupes fuchsiens Acta matem. I. pag. 1. i pag. 193. i т. III. (Mémoire sur les groupes kleinéens). Rausenberger: Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen. Biermann: Theorie der analyt. Functionen ст. 409 et sqts.; той-сам: Zur Theorie der Fuchs'schen Functionen (Sitz. Berichte der k. Akad. der Wissensch. Bd. XCII, Abth. II). Picard: Traité d'Analyse т. I. ст. 435 et sqts. i т. II. ст. 268 et sqts. Klein-Fricke: Elliptische Modulfunctionen. Fricke u. Klein: Vorlesungen ü. Theorie der automorphen Functionen Bd. I, дальше ріжні розвідки Кляйна в Mathem. Annalen; Forsyth: Theory of Functions. Пор. також Левицкий: Ґрупа модулова (Справозданє академічної ґімназиї у Львові 1895) i Wstęp do teoryi elipt. funkcyj modułowych (Prace mat. fiz. XIII. Варшава)·

$$S_n z = \left(z, \frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n}\right),$$

де сочинники є числа дїйсні або зложені.

Очевидна є річ, що ґрупа G може бути утворена з ітераций одної лише субституциї $Sz = \left(z, \frac{az + b}{cz + b}\right)$, отже $G = (1, Sz, S^2 z, S^3 z, \cdots\cdots)$ і тодї маємо функцию з одною субституциєю основною, або ґрупа є утворена з двох субституций перемінних основних:

$$Sz = \frac{az + b}{cz + d}, \quad Tz = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1},$$

отже
$$G = \left(S^\alpha T^\beta z, T^\alpha S^\beta z\right), \quad \alpha \gtreqless \beta,$$

або таких основних субституций може бути більше, а тодї функция називаєсь після Poincaré функциєю Фухса.[1])

Заки приступимо до ґруп і функций, які не зміняють ся при субституциях даної ґрупи, перейдім по коротцї важнїйші свойства субституциї Sz.

Субституция $Sz = \left(z, \frac{az + b}{cz + d}\right)$,

де $z = x + iy$, а сочинники є числа дїйсні або мнимі.

Так як свойства ті подав я в наведених мною розвідках, проте повторю їх тут лиш дуже коротко.

1. Наколи напишемо субституцию сю в видї:

$$t = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad 1)$$

отже рівнанєм тим зважемо площу (t) і (z), то те підставленє відтворює одну площу в другу і то так, що обі ті площі є до себе подібні в елєментарних (безконечно малих) трикутниках, значить ся відтворенє є частинкове [conform] (доказ пор. в другій моїй розвідцї). Є оно далї ізоґональне, значить ся кут утворений між двома перетинаючими ся кривими на одній площі остає по відтвореню без зміни; є оно в кінци і колове, бо коло на одній площі переходить через сю субституцию на коло і на другій площі.

2. Наколи возьмем місто двох площий ту саму площу (z) і будем єї перетворювати в нїй самій, то кожда єї точка перейде в иньшу, лиш т. зв. точки подвійні, визначені рівнанєм:

---

[1]) Докладнїйшу дефініцию функций Фухса і Кляйна опісля подамо.

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

спадуть на себе; є се точки:

$$\alpha, \beta, = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4\,bc}}{2\,c} \qquad 2)$$

Таких точок є дві; лиш на случай:

$$(a - d)^2 + 4\,bc = 0 \qquad 3)$$

обі ті точки спадають на себе і маєм лиш одну точку подвійну.

При помочи тих точок подвійних можемо субституциї нашій надати вид (пор. згадану мною роботу [1]):

$$\frac{t - \alpha}{t - \beta} = K\,\frac{z - \alpha}{z - \beta}, \qquad 4)$$

де K є т. зв. множником субституциї:

$$K = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4\,bc}}{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4\,bc}}, \qquad 5)$$

або:

$$\frac{t - \beta}{t - \alpha} = K'\,\frac{z - \beta}{z - \alpha},$$

де:

$$\left(\sqrt{K} + \sqrt{K'}\right)^2 = \frac{(a + d)^2}{ad - bc} \qquad 6)$$

Наколи возьмем точки безконечно близькі точки α, т. є:

$$t = \alpha + \tau,\ \ z = \alpha + \zeta,$$

то по розвиненю в формі 4) дістанемо:

$$\frac{|\,\tau\,|}{|\,\zeta\,|} = \left|\,K\,\right|, \qquad 7)$$

в такім отже відношеню остають точки безконечно близькі до точки подвійної.

3. Наколи положимо:

$$Sz = t_1,\ \ S^2 z = t_2,\ \ \text{.........},\ \ S^m z = t_m \qquad 8)$$

то ітерация послїдна має значінє:

---

[1] Пор. Lewicki: Wstęp do teoryi funkcyj eliptycznych modułowych loc. cit.

$$\frac{t_m - \alpha}{t_m - \beta} = K^m \frac{z - \alpha}{z - \beta} \qquad 8)$$

Відворотна субституция дасть нам:

$$\frac{z - \alpha}{z - \beta} = \frac{1}{K} \frac{t - \alpha}{t - \beta} \text{ і т. д.}$$

або коли напишемо t_{-1} місто z, а z місто t, то дістанемо:

$$\frac{t_{-m} - \alpha}{t_{-m} - \beta} = \frac{1}{K^m} \frac{z - \alpha}{z - \beta} \qquad 9)$$

Наколи вернем до первісної точки, т. є.:

$t_m \equiv z$, $K^m = 1$, то субстисуция має період m, т. є.:

$$K = e^{\frac{2s\pi i}{m}}$$

Наколи: $K=1$, $\alpha = \beta$, $(a-d)^2+4\,bc=0$, субст.: є параболїчна.

„ $K>1$, $\alpha \gtrless \beta$, $(a-d)^2+4\,bc>0$, „ є гіперболїчна.

„ $K=e^{\sigma i}$, $|K|=1$, $(a-d)^2+4\,bc \angle 0$, „ є елїптична.

„ $K=re^{\sigma i}$, $r > 0$, субст.: є льоксодромічна.

Субституция елїптична, де:

$$\sigma = \frac{m}{n} 2\pi \left(\frac{m}{n} \text{ дроб істий} \right)$$

має період n, бо:

$$\frac{t_n - \alpha}{t_n - \beta} = \frac{z - \alpha}{z - \beta}, \quad t_n \equiv z,$$

наколиж $\frac{\sigma}{2\pi} = e$ (невиміриме), то:

$t_m \equiv z$ доперва для $m = \infty$ т. є. по довершеню безконечно многого числа ітераций; субституция елїптична є тодї інфінітезімальна.

Субституция гіперболїчна і льоксодромічна — як легко ся можна пересьвідчити — не є анї періодичні, анї інфінітезімальні, а в субституциї параболїчній, якій можна дати вид:

$$\frac{1}{t - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + \frac{4\,c}{2\,(a + d)} \qquad 10)$$

є $$t_m \equiv \alpha \Big\}_{m=\infty} \text{ і } t_{-m} \equiv \alpha \Big\}_{m=\infty}$$

т. є.: точки ті зміряють до точки подвійної α.

4. Ґрупа, де не входять субституциї еліптичні інфінітезімальні, є нетягла, т. є. наколи якусь точку $z = x + iy$ піддамо субституциї ґрупи, то ся точка перейде на иньшу, яка не лежить в окруженю даної точки. Точки, де ґрупа тратить нетяглість, є точками особливими ґрупи.

Наколи сочинники a, b, c, d є дійсні, то ґрупа тратить нетяглість на цілій оси перворядній і єї безпосередно близькім окруженю (пор. мою роботу про ґрупу модулову); всюди над осию xx є нетягла кромі ту і там порозкиданих точок, які належать до субституций еліптичних ґрупи.

5. В субституциї Sz можна все довести до того, щоби єї модул

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1; \text{ бо наколи:}$$

$$ad - bc = \mu', \ \mu' \lessgtr -1, \text{ то положім:}$$

$$\mu' = (\sqrt{\mu'})^2 = \mu^2; \text{ дістанем:}$$

$$\frac{a}{\mu}\,\frac{d}{\mu} - \frac{b}{\mu}\,\frac{c}{\mu} = 1 \text{ і ті вирази } \frac{a}{\mu}, \ \cdots\cdots \text{ берем за сочинники.}$$

Наколи $\mu' = -1$, то берем:

$$bc - ad = +1, \text{ т. є. берем субституцию:}$$

$$t' = \frac{cz + d}{az + b}.$$

6. Щоби перевести ґеометрично відтворенє точки z на точку t на тій самій площі, беремо:

$$z' = t - \frac{a}{c} = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} = \frac{bc - ad}{c^2\left(z + \frac{c}{d}\right)} = -\frac{1}{c^2\left(z + \frac{c}{d}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{c^2\,\zeta} = \frac{\mu^2}{\zeta}, \ \mu^2 = -\frac{1}{c^2}, \ \mu = k^2\, e^{2\gamma i}$$

Точкою зеровою площи ζ є 0; наколи маємо дану точку z (ζ), то дістанемо z', наколи поведемо через 0 просту *PP* під кутом γ (фіґ. I), а з 0 лучем k зачеркнемо коло; точку z відбиваємо в простій *PP* яко точку z_1 а далї відвертаємо z_1 через коло (k) на точку z'; а то $t = z' + \frac{a}{c}$, то наколи на площи (xy) маємо точку $\frac{a}{c}$, то з z' провадимо відтинок $\# \frac{a}{c}$ і дістанемо t. (Узасадненє сего способу конструкцї гл. мою розвідку про ґрупу модулову, де є подана конструкция для субституциї $-\frac{1}{z}$.)

Маємо ту отже три рухи: відбитє в простій PP, відверненє образа в колї і пересуненє, Poincaré доказав однак, що ті три рухи заступити можна двома відверненями в двох колах, але лиш для трох перших родів субституциї (для льоксодромічної нї).

7. Напишім субституцию $t = \frac{az + b}{cz + d}$ в формі:

$$ctz + dt - az - b = 0$$

і возьмім чотири пари відповідних точок t і z, то дістанем:

$$\begin{aligned} ct_1 z_1 + dt_1 - az_1 - b &= 0 \\ ct_2 z_2 + dt_2 - az_2 - b &= 0 \\ ct_3 z_3 + dt_3 - az_3 - b &= 0 \\ ct_4 z_4 + dt_4 - az_4 - b &= 0 \end{aligned}$$

а з відси через елїмінацию сталих a b c d дістанем:

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_4} \cdot \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} \qquad 11)$$

Виберім на площі z довільні точки $(\alpha\ \beta)$ і спряжені з ними $(\alpha'\ \beta')$, то на пл. t відповідять їм $(\gamma\ \delta)$ і спряжені $(\gamma'\ \delta')$. Наколи то вставимо в 11), дістанемо:

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \cdot \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'} = \frac{\gamma - \gamma'}{\gamma - \delta'} \cdot \frac{\delta - \delta'}{\delta - \gamma'},$$

а Poincaré значить се:

$$(\alpha\ \beta) = (\gamma\ \delta) \qquad 12)$$

Poincaré впроваджує еще одну реляцию. Наколи на пл. z возьмемо точки $(\alpha\ \beta)$ такі, що часть дїйсна

$$\Re\,(\alpha) \angle \Re\,(\beta)$$

і наколи через ті точки і спряжені з ними поведемо коло (Фіґ. II), яке вісь xx перетинає в точках h і k, то Poincaré творить вираженє:

$$\frac{\alpha - h}{\alpha - k} \cdot \frac{\beta - k}{\beta - h} = \Big[\alpha\ \beta\Big].$$

Наколи на колї возьмем єще точку γ, то дістанемо :

$$\Big[\alpha\ \gamma\Big] = \frac{\alpha - h}{\alpha - k} \cdot \frac{\gamma - k}{\gamma - h}$$

$$\Big[\gamma\ \beta\Big] = \frac{\gamma - h}{\gamma - k} \cdot \frac{\beta - k}{\beta - h},$$

а з відси:

$$[\alpha\ \gamma]\ [\gamma\ \beta] = [\alpha\ \beta] \qquad 13)$$

При помочи тих реляций найдемо :

$$(\alpha\ \beta) = \frac{4\ [\alpha\ \beta]}{\Big[1 + [\alpha\ \beta]\Big]^2},\ (\gamma\ \delta) = \frac{4\ [\gamma\ \delta]}{\Big[1 + [\gamma\ \delta]\Big]^2},$$

а що:

$$(\alpha\ \beta) = (\gamma\ \delta),$$

то дістанемо реляцию:

$$[\alpha\ \beta] = [\gamma\ \delta] \qquad 14)$$

8. Наколи $\alpha \equiv z$, $\beta \equiv z + dz$ (отже α і β безконечно близькі), то тодї:

$$\Big[z,\ z + dz\Big] = \frac{z - h}{z - k} \cdot \frac{z - k + dz}{z - h + dz} =$$

$$= \left(1 + \frac{dz}{z - k}\right)\left(1 - \frac{dz}{z - h} + \text{---}\right) = 1 + dz\left[\frac{1}{z - k} - \frac{1}{z - h}\right].$$

Наколи $\sphericalangle\ ho\alpha = \sphericalangle\ hoz = \varphi$, то:

$$dz = \Big|\ dz\ \Big|\ e^{\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)i} = -\ i\ \Big|\ dz\ \Big|\ e^{\varphi i},$$

а що:

$$\frac{1}{z - k} - \frac{1}{z - h} = -\ \frac{h - k}{(z - h)(z - k)} = -\ \frac{2\ r}{(z - h)\ (z - k)},$$

то:

$$\Big[z,\ z + dz\Big] = 1 + \frac{|\,dz\,|}{y}$$

Poincaré називає інтеґрал $\int_k \frac{|dz|}{y}$ браний по луку k якоїсь кривої, L тої кривої, а $\iint \frac{dxdy}{y^2}$, браний з огляду на часть площи, замкненої якимсь контуром, S того поля.

Наколи $z = x + iy$, $t = \xi + i\eta$, а луки k і k' кривих собі відповідають, то так як:

$$[z, z + dz] = [t, t + dt],$$

то також:

$$\int \frac{|dz|}{y} = \int \frac{|dt|}{\eta} \qquad 15)$$

і:

$$\iint \frac{dxdy}{y^2} = \iint \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} \qquad 16)$$

т. є.: два відповідні луки відповідних кривих мають однаке L, а два відповідні поля однаке S.

Наколи:

$$t = \xi + \eta i = \frac{az + b}{cz + d},$$

$$z = x + iy$$

то часть другорядна рівнає ся части другорядній, отже:

$$\frac{\eta}{y} = \frac{1}{(cx + d)^2 + c^2y^2}.$$

З другого боку:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(cz + d)^2},$$ отже по виконаню:

$$\left|\frac{dt}{dz}\right| = \frac{1}{\left[\sqrt{(cx + d)^2 + c^2y^2}\right]^2} = \frac{1}{(cx + d)^2 + c^2y^2},$$

отже:

$$\left|\frac{dt}{dz}\right| = \frac{\eta}{y}. \qquad 17)$$

9. Наколи возьмем ґрупу субституций утворену з ітераций та добутків одної або більше основних субституций, і ті всї субституциї

пристосуєм до всїх точок площи z, то покаже ся, що на площі (z) найде ся поле замкнене т. зв. фундаментальний (основний) район такий, що яка-небудь субституция примінена до якої-небудь точки єго випроваджує ту точку поза сей район; всї місця того району по приміненю одної субституциї ґрупи найдуть ся також всї в иньшім рівнож замкненім районї; по приміненю другої субституциї ґрупи всї точки району основного найдуть ся знов в иньшім замкненім районї і т. д., цїла площа розпаде ся на ряд відповідаючих собі районів, так що основний район зовсїм вистарчає до пізнаня і схарактеризованя ґрупи. — При такім подїлї площи на райони бере ся тілько додатну півплощу (горішну), бо все, що ся дїє під осию xx, повстає через відбитє горішної півплощи в оси xx.

Такий поділ для ґрупи модулової о двох основних субституциях з дїйсними та цїлковитими сочинниками перевів я в розвідцї про ґрупу модулову[1]; подібний подїл можнаби перевести для ґрупи з одною субституциєю основною (площа розпаде ся тодї на 3 райони рівноважні). Подїл представить ся дуже гарно, наколи по довершеню подїлу на площи xx відібємо єго — як Кляйн робить — на площи $t = \frac{az + b}{cz + d}$; тодї пр. для ґрупи модулової вісь xx перейде на коло, а в колї тим відтворить ся цїла півплоща.

По тих загальних увагах про райони основні перейдім до районів основних ґрупи зількома основними субституциями, с. є. ґрупи Фухса і їх властностий.

Райони специяльних ґруп Фухса.[2]

Специяльна ґрупа Фухса є утворена з кількох основних субституций типу $\left(z, \frac{a_s z + b_s}{c_s z + d_s}\right)$, де a_s, b_s, c_s, d_s є числа дійсні які-небудь, такі що їх модул $\begin{vmatrix} a_s & b_s \\ c_s & d_s \end{vmatrix} = 1$.

До такої ґрупи мусить належати район фундаментальний (основний), т. є. такий якийсь район замкнений, що кожда єго точка z за приміненєм якої небудь субституциї сеї ґрупи виходить поза сей район. Сей район, а проте і всї райони, які з него вийдуть через

---

[1] Пор. Левицкий: ґрупа модулова loc. cit.

[2] Цїла та теория в нарисї містить ся у Poincaré: Théorie des groupes fuchsiens (Acta mat. m. I.).

ріжні підставленя, будуть творити continuum; площа цїла (очевидно берем — як висше сказано — лиш додатну півплощу) розпаде ся на райони R_s ($s = 0, 1, 2, \cdots$) такі, що район R_s відповідає якійсь субстистуциї $f_s(z) = \frac{a_s z + b_s}{c_s z + d_s}$, ($a_s$, b_s, c_s, d_s дійсні).

1. Приймім R_0 (Фіґ. III) за район основний, то всї лінїї, які єго замикають, такі, що до них прибуває иньший район R_s, називають ся *боками* (пр. λ_p, λ_q, $\cdots$) і то *першої катеґориї* (рода, Poincaré), наколи они не є частями оси xx, а *другого рода* (катеґориї), наколи они є частями оси xx (пр. a b).

Наколи возьмемо якусь точку z на боцї λ_p, то она піддана субституциї $f_p(z)$ перейде на ограничене району R_p, отже $f_p(z)$ належить до обводу району R_p. Наколи тепер точку z (на боцї λ_p) зачислимо до району R_p і застосуємо до неї відворотну субституцию $\left[f_p(z)\right]^{-1} = f_{-p}(z)$, то дістанемо точку на боцї λ_{-p}; точка та буде належати і до R_0 і до району R_{-p}. Звідси слїдує, що до боку λ_p першого рода найде ся все в районї R_0 другий відповідний бік λ_{-p} такий, що $f_p(\lambda_{-p}) = \lambda_p$, а $f_{-p}(\lambda_p) = \lambda_{-p}$.

Такі два боки λ_p і λ_{-p} є після Poincaré *спряжені*.

Наколи $R_p \equiv R_{-p}$, т. є. $f_p(z) = f_{-p}(z)$, або $\left[f_p(z)\right]^2 = z$, або $\lambda_p \equiv \lambda_{-p}$, то субституция $f_p(z)$ є еліптична о періодї 2, а точка z на боцї λ_p через ту субституцию посуне ся лиш по тім самім боцї; з того слїдує, що *такий бік* (позаяк субституция є еліптична) *складає ся з двох боків, які творять лук кола* розділений точкою подвійною α; половина того боку з одної сторони точки α буде λ_p, половина з другої сторони точки α буде λ_{-p}; такий бік є проте лиш мнимо поєдинчий, бо точка α на ним є вершком району R_0. *Район R_0 має проте паристе число спряжених боків першого рода.*

Боки другого рода не є з собою спряжені; бік ab не може ніяким чином перейти в бік cd, бо колиб пр. точка z на ab відповідала точцї z' на cd, тоби і їх безпосередні окруженя δ і δ' відповідали собі (бо точки по над осию відповідають точкам по над осию), а се неможливо, бо в районї R_0 нема точок рівноважних.

Боки першого рода — а тих є число паристе $\lambda_1\ \lambda_2 \cdots \lambda_{2n}$ — можна подїлити на пари спряжені: λ_p і λ_{p+n} ($p = 1, 2, \cdots n$); тодї:

$$f_{n+p}(\lambda_p) = \lambda_{n+p}, \quad f_p(\lambda_{n+p}) = \lambda_p.$$

Субституциї f_p і f_{n+p} є проте відворотні. Вистане проте знати лиш половину субституций, які район R_0 перетворюють в райони сусідні. Вистане знати:

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \cdots\cdots\ f_n(z) \qquad (1)$$

то иньші субституциї є:

$$f_1^{-1}(z),\ f_2^{-1}(z),\ \cdots\cdots\ f_n^{-1}(z) \qquad (2)$$

При помочи субституций (1) можна район R_0 перемінити на який-небудь сусїдний район.

Не тяжко доказати, що субституциї ряду (1) є субституциями основними ґрупи, а що ґрупа — як ми заложили — має скінчене число субституций основних, проте n є числом скінченим, значить ся район має скінчене число боків I. рода.

В однім вершку сходить ся певне скінчене число районів; пр. в вершку S (Фіґ. IV) сходить ся R_0, R_1, R_2, —; найже R_0 перейде через субституцию $f_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}(z)$ в R_1, R_1 через $f_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}(z)$ в R_2, — і т. д. в кінци вернемо до R_0, отже:

$$f_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\ f_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}\ f_{\alpha_3}^{\varepsilon_3}\ \cdots\cdots\ f_{\alpha_\mu}^{\varepsilon_\mu}(z) = z \qquad 18)$$

Подібні вираженя дістанемо для кождого вершка в районї R_0 і дістанемо певну скількість реляций між основними субституциями ґрупи (т. зв. основні реляциї ґрупи) під заложенєм, що з R_0 безпосередно переходить ся до R_1, з R_1 до R_2 і т. д.

2. Наколи маємо район, якого боки є які-небудь лїнії, то можна район сей замінити на район обмежений самими луками коловими і то так, що боки другого рода остануть боками другого рода, а боки першого рода будуть луками о середоточках на оси xx. Се легко зрозуміти, бо 1^0 можна з одної сторони кавалок района відкинути, а з другого боку додати кавалок рівноважний, а 2^0 через кінцї одного боку можна завсїгди повести лук кола о середочцї на оси xx, а так само через кінцї відповідного спряженого боку; через се повстануть між одним боком спряженим а луком кола і між другим боком спряженим а другим луком рівноважні поля, з яких одно можна відкинути; сим способом район дістане самі колові обмеженя. В той сам спосіб можна район, якого боки ся перетинають самі, замінити на район о боках неперетинаючих ся.

Район так уформований є зложений з самих кіл нормальних, зве ся проте після Pincaré районом нормальним.

3. Возьмім тепер в так унормованім районі два боки спряжені $\lambda_p = AB$ і $\lambda_{-p} = CD$, то:

$$f_{-p}(\lambda_p) = \lambda_{-p}.$$

Точції z на боку λ_p відповідає на λ_{-p} точка t так, що:

$$t = f_{-p}(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \text{ дїйсне})$$

або як в уст. 5 попередного роздїлу:

$$z' = t - \frac{a}{c} = -\frac{1}{c^2}\frac{1}{z + \frac{d}{c}} = -k^2 \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

Наколи напишемо:

$$z + \frac{d}{c} = r_z\, e^{\varphi_z i}, \quad z' = r_t\, e^{\varphi_t i},$$

то:

$$r_z\, e^{\varphi_z i} = -k^2\, e^{-\varphi_t i}$$

а з відси — так як части другорядні мусять бути рівні — є:

$$\varphi_z = \pi - \varphi_t, \quad \pi = \varphi_t + \varphi_z.$$

З відси слїдує, що наколи z порушає ся від A до B, то на відворот t порушає ся від D до C, отже два спряжені боки відповідають собі напрямами противними; вершкови A відповість вершок D, вершкови B відповість вершок C.

4. Перейдім тепер до уґрупованя вершків (очевидно будем узглядняти лиш райони нормальні).

Возьмім якийсь район R_0 (Фіґ. V), то вершки, які розділяють два боки першого рода (пр. B, C, D) називаємо вершками першого рода; вершки на оси xx, де сходять ся два боки першого рода (пр. E) є вершками другого рода, а вершки, де сходять ся боки першого і другого рода (пр. F, G, H, A) є вершками третого рода.

Наколи ми вийдем від якогось вершка першого рода (пр. B) і зачнем іти по якімсь боцї в якімсь напрямі, то по спраженім боцї треба іти в напрямі противнім; відповідні вершки — як знаєм — відповідають собі в противнім порядку, тож переходячи так вершки першого рода вернем знов до початкового вершка. Ті вершки першого рода, які ми в тім окружаню району перейшли, утворять цикль першого рода, все замкнений.

Наколи вийдем від вершка другого рода (пр. E), то всї відповідаючі собі вершки є або другого або третого рода. Наколи вершків третого рода не ма зовсїм, то і ту цикль вершків — який буде зложений з самих вершків другого рода -- т є. цикль другого рода буде замкнений. Наколиж є вершки третого рода, то процес окружаня района мусить десь задержати ся, бо боки другого рода собі не відповідають. до початкового вершка не вернемо і дістанемо отвертий цикль третого рода.

Наколи боків другого рода є l, то боки ті мають 2l вершків, на цикль іде по два вершки, отже циклїв третого рода є тілько, кілько район має боків другого рода.

5. Перейдім тепер до кутів району і то до кутів при вершках першого рода $\left(\text{бо кут при вершку другого рода є } 0, \text{ при вершку третого рода } \frac{\pi}{2}\right)$.

Ту докажемо важне твердженє, яке подав Poincaré, а іменно, що сума кутів циклю першого рода в районї основнім мусить рівнати ся 2π, подїленому через число цїле.

Наколи в районї R_0 (Фіґ. VI) вершки першого рода є A_1, A_2, A_3, A_4, ---------, які творять цикль замкнений (A_1, A_2, A_3, A_4 ——— A_1), то бокови λ_α, який виходить з A_1 відповідати-ме спряжений бік $\lambda_{-\alpha}$, що кінчить ся в a_2, так що $f_\alpha(\lambda_{-\alpha}) = \lambda_\alpha$[1]; λ_α належить рівночасно до сусїдного району R_α (до котрого і A_1 належить). Наколи другий бік, що виходить з A_2, є λ_r, то він через субституцию f_α перейде на бік виходячий також з A_1, а належачий до району R_α, так що $f_\alpha(R_0) = R_\alpha$, причім $\sphericalangle A_2$ відтворить ся в районї R_α при вершку A_1, бо субституция є — як знаєм — ізоґональна.

Подібно через субституцию f_β перейде район R_0 на сусїдний район R_β, а третий кут при третім вершку цикля A_3 відтворить ся при вершку A_1 і т. д., аж вкінци по довершеню ряду субституций і по вихіснованю цїлого циклю вернем назад до S_0, так що $f_\alpha f_\beta f_\gamma ---- (R_0) = U(R_0) = R_0$.

Наколи перейшовши цїлий цикль (A_1, A_2, A_3 --- A_1) не дістанем R_0, але $U(R_0) = R_\mu$, де R_μ має вершок A_1, то будем доконувати тілько оборотів, аж прийдем до R_0, так що:

$$U^p(R_0) = R_0 . \qquad 19)$$

---

[1] Кляйн доказав, що субституция заміняюча λ_α на $\lambda_{-\alpha}$ мусить бути все параболїчна, а нїколи гіперболїчна.

Очевидно, що тепер — так як нїякі два кути не накривають ся — є:

$$(A_1 + A_2 + A_3 + — + A_n)\,p = 2\pi,$$

отже:

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu = \frac{2\pi}{p} \qquad 20)$$

і твердженє Poincaré є доказане.

6. З реляциї 19) виходить, що:

$$U^p = 1.$$

Є се реляция основна ґрупи; таких реляций є стілько, кілько циклїв першого рода є в основнім районї.

Субституция U є елїптична о періодї p, отже ґрупа в окруженю вершків першого рода не тратить нетяглости.

Для циклю другого рода є очевидно:

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu = 0 \quad \text{або:}$$

$$\left.\sum A_\nu = \frac{2\pi}{p}\right\}_{p=\infty},$$

с. з. що докола вершків другого рода маємо $pn = \infty$ районів, отже в окруженю вершків другого рода ґрупа тратить нетяглість.

Для циклю третого рода лиш кути скрайні є по $\frac{\pi}{2}$, кути середні (в вершках другого рода) є 0, отже для такого цикля

$$\sum A_\nu = \pi,$$

значить ся в кождім вершку є скінчене число районів, отже в окруженю вершків третого рода ґрупа задержує характер нетяглий.

7. Наколи зреасумуєм усе, то дістанемо ось-що:

Основний район специяльної ґрупи Фухса є обмежений луками кіл о середоточках на оси xx; декотрі з тих боків можуть бути відтінками оси xx або відтінками до неї прямовісними. Боки першого рода виступають в числї паристім і є парами спряжені (λ_p і λ'_{-p}), так що $f_p(\lambda_{-p}) = \lambda_p$. Така субституциа зміняє R_0 на R_p', віддїлений від R_0 боком λ_p. Вершки дїлять ся на циклї трох родів: в циклю першого рода сума кутів є $\frac{2\pi}{p}$, в циклю другого рода 0, третого рода π. Райони одержані з R_0 не прикривають анї R_0 анї себе (навіть в части), між ними нема перерви, а ґрупа, що належить до R_0, є нетягла над осию xx, а лиш там, де R_0 має цикль другого рода, тратить на оси xx в вершках того циклю нетяглість. Субституциї сеї ґрупи не нарушають оси xx, тож коли R_0 має вершки на оси xx, то і другі райони мусять мати вершки на оси xx; наколи R_0 не має вершків на оси xx, то і иньші райони не мають їх також.

Наколи будем мати якийсь район, котрого боки є луками кіл з середоточками на оси xx, а покаже ся, що хотяйби для одного циклю першого рода сума кутів була $\frac{2\pi}{p}$, але p не було би числом цїлим, то до такого району ґрупа не належить.

Загальні ґрупи Фухса.

Дотепер узглядняли ми ґрупи утворені з субституций основних: $S_\nu = \left(z, \frac{a_\nu z + b_\nu}{c_\nu z + d_\nu}\right)$, де $a_\nu\, b_\nu\, c_\nu\, d_\nu$ були числа дїйснї о модулї 1; (наколи числа ті були цїлї, ґрупа була модулова). Були се специяльні ґрупи Фухса. — Наколи тепер введемо посвоячене площ

21) $t = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, де $\alpha, \cdot \beta, \gamma, \delta$ є числа зложені і в повисшій ґрупі вставимо субституцию 21) за **z**, то дістанемо загальну ґрупу Фухса і площа z відтворить ся на площи t.

Наколи возьмем ґрупу утворену з субституций S_ν (ν і ту скінчене число), але що до сочинників a_ν, b_ν, c_ν, d_ν не зробимо нїякого застереженя (отже є се в загалї числа зложені) і до сеї ґрупи застосуєм субституцию 21), то дістанем зовсїм загальну ґрупу, яку Poincaré зве ґрупою Кляйна. Студия тих загальних ґруп є дуже трудна; перевів еї по части Poincaré при помочи метод анальоґічних до метод ґеометриї неевклїдової о трох розмірах[1]). В звязи з такими загальними ґрупами стоїть поділ півпросторони на райони

---

[1]) Пор. Poincaré: Mémoire sur les groupes kleinéens (Acta matem. m. III).

о трох розмірах[1]; но ми в се не входимо, а перейдем до загальних ґруп Фухса.

1. Очевидна є річ, що загальна ґрупа Фухса перетворює вісь xx на коло на площи t. Через добір $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ можна вісь xx замінити на коло о лучу 1, а о середоточцї $t = 0$ так, щоби $t = 0$ відповідало якійсь точцї над осию xx на площи z. Тодї райони R_0, R_1, ---- пл. z перейдуть на райони R_0', R_1', ---- , що ся будуть містити в серединї кола; коло се називає Фухс колом граничним, а Кляйн головним.

Ґрупа кола того не нарушує, лиш в єго серединї переводить подїл на райони; поза колом дістанемо подїл, який повстане через відбитє подїлу внутрішного в колї граничнім.

Кождий район R_0' R_1', ---- має боки колові, ортоґональні до кола головного; і тут R_0' має боки першого і другого рода і вершки першого, другого і третого рода; так само є ту циклї трох родів.

Після сих циклїв дїлить Poincaré ґрупи на 7 родин:

I.	родина:	R_0	має	лиш	циклї	$I^{ого}$	рода.
II.	„	R_0	„	„	„	$II^{ого}$	„
III.	„	R_0	„	„	„	$III^{ого}$	„
IV.	„	R_0	„	„	„	$II^{ого}$ і $III^{ого}$	„
V.	„	R_0	„	„	„	$I^{ого}$ і $III^{ого}$	„
VI.	„	R_0	„	„	„	$I^{ого}$ і $II^{ого}$	„
VII.	„	R_0	„	„	„	всїх трох	родів.

Наколи в родинї, де є циклї першого рода, є в всїх циклях $p = 1$, то родина є після Poincaré першого степеня, наколи хоч би одно $p > 1$, то родина є другого степеня.

Родини, де не ма циклїв II рода, нїде не тратять нетяглости, противно родини, де такі циклї є, тратять в деяких точках кола головного (зглядно оси xx) характер нетяглости.

2. Возьмім тепер район R_0 з родини I, II або VI, то спряжений з ним район R_0' лежить під осию xx і не має з ним вспільного боку, — бо район R_0 не має боків другого роду — R_0 і R_0' не творять проте цїлости.

R_0 має лиш 2n боків першого рода і q циклїв замкнених (першого і другого рода). Наколи-мем уважати R_0 за поверхню

---

[1] Пор. Picard: Traité d'Analyse I p. 451.

пластичну (Фіґ. VII), то можна єї позгинати і постягати так, щоби боки спряжені відповідними точками впали на себе (то два боки утворять одну лїнїю); дістанемо тодї поверхню, а на нїй n лїнїй, які утворять одно пасмо́ розгалужене незамкнене; точки, де сходять ся кілька лїнїй, є вершками, а є їх тілько, що циклїв. Лїнїя AB складаєсь з n гранок і q вершків, а що она є незамкнена, то поверхня, на яку перейшов район R_0, є поверхнею з одним ограниченєм (обмеженєм), а єї спійність (connexion) є:

$N = 2p + 1$ 1),

де p (число цїле) є рядом (клясою).

Зауважмо розширене твердженє Euler'a:

$S + W = K + 2 - 2p$ 2).

де S є число стін, K гранок, W вершків, то для R_0 $S = 1$, $K = n$ $W = q$, отже:

$$1 + q = n + 2 - 2p$$

$$p = \frac{n - q + 1}{2} \qquad 22)$$

Така є кляса родини I., II. і VI.

Для родини III., IV., V., VIII. район R_0 має боки другого рода, отже з районом спряженим R_0' творить одну цїлїсть; Poincaré бере тому R_0 і R_0' за один район і обчисляє єго клясу (ряд), анальоґічно як висше, з тою зміною, що ту лїнїя AB буде замкнена, отже $S = 2$, гранок K є $2n + m$ (n гранок з R_0, n з R_0', m боків другого рода), вершків W є ту $2q + m$ (q з R_0, q з R_0' і m циклїв третого рода); отже ту з твердженя Euler'a вийде:

$$p = \frac{2n - 2q}{2} \qquad 23)$$

і се є кляса (ряд) родин III., IV., V., VII.

3. Наколи возьмем район з родини I., який цїлий лежить над осию xx, то точки єго при помочи субституций ґрупи можна приближати без кінця до оси xx, так що в родинї I. райони дуже густо громадять ся над осию xx, але не на оси xx; вісь xx є протеціла лїнїєю особливою тої родини. Те саме буде і для ро-

---

1) Пор. Appell et Goursat: Théorie des fonctions algébriques, ст. 229.

2) ibid. ст. 231.

дини II. і VI., які лиш вершками другого рода дотикають оси, бо довкола вершків другого рода громадить ся безконечне число районів, а в партиях вільних можна також безконечно приближати ся до оси xx.

В иньших родинах, де є боки другого рода, є на оси xx точки особливі, але ті є лиш ізольовані, бо на боках другого рода не ма точок особливих.

Функциї Фухса.

Є се функциї автоморфні, що не зміняють ся, наколи до їх арґументу застосуєм субституциї загальної ґрупи Фухса. Анальоґічно функциї автоморфні з огляду на ґрупу Кляйна будуть *функциями Кляйна*.

1. Возьмім коло головне о середоточцї $z = 0$; в колї тім возьмім район R_0 і в нїм точку z, то наколи довкола того z зачеркнемо коло k_0 (в районї R_0), то єму в відповіднім районї R_s відповість k_s довкола відповідної точки z_s.

А що: $z_s = \frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}$, де $\begin{vmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ \gamma_s & \delta_s \end{vmatrix} = 1$,

то:
$$\frac{dz_s}{dz} = \frac{1}{(\gamma_s z + \delta_s)^2}, \text{ а:}$$

$$\frac{|\,dz_s\,|}{|\,dz\,|} = \frac{1}{|\,\gamma_s z + \delta_s\,|^2} = \mu_s \qquad 24)$$

де μ_s є *лїнїове збільшенє* елементарних лучків $|\,dz\,|$ і $|\,dz_s\,|$ через субституцию (z, z_s). Квадрати тих елементів є елементами поверхнї, начеркненої в z і z_s, отже $\mu_s{}^2$ є збільшенем елементів поверхний в відповідних точках. Наколи отжеж возьмем:

$$\min \mu_s = m_s ,$$

то поверхнї колес:

$$\frac{k_s}{k_0} > m_s{}^2. \qquad 25)$$

$z_s = \frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s} = \infty$ для $z = -\frac{\delta_s}{\gamma_s}$, отже субституция $\left(z = -\frac{\delta_s}{\gamma_s}\right)$ переносить точку в безконечність, а що $z_s = \infty$ лежить поза колом головним, а нїяка субституция ґрупи не переносить точки поза коло головне, то точка $z = \infty$ і точка $z = -\frac{\delta_s}{\gamma_s} = P_s$ лежить поза колом головним; до кождої субсти- S_s належить така точка P_s.

2. Возьмім коло головне (K) і коло k_0 (Фіґ. VIII) довкола точки z, а поза колом точку P_s, то тодї збільшене для точки z є:

$$\mu_s = \frac{1}{|\gamma_s|^2 \left| z + \frac{\delta_s}{\gamma_s} \right|^2} = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (z\, P_s)^2}$$

Для иньшої точки z' в колї k_0 є збільшене:

$$\mu_s' = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (z'\, P_s)^2},$$

а що лїнія PP_s з усїх подібних лїнїй є найбільша, то:

$$m_s = \min \mu_s = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (PP_s)^2},$$

а $$M_s = \max \mu_s = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (RP_s)^2},$$

отже: $$\frac{M_s}{m_s} = \frac{(PP_s)^2}{(RP_s)^2} \qquad 26)$$

Но понеже — як се очевидно —

$$\frac{PP_s}{RP_s} < \frac{GH}{JH} = \sqrt{c} \text{ (стала)},$$

то:

$$\frac{M_s}{m_s} \leqq c, \quad M_s \leqq m_s\, c,$$

$$\mu_s < M_s \leqq c m_s,$$

а вставивши відповідні вартости дістанемо:

$$\frac{1}{|\gamma_s z + \delta_s|^2} \leqq c m_s, \text{ або:}$$

$$\frac{1}{|\gamma_s z + \delta_s|^4} < c^2 \frac{k_s}{k_0},$$

а звідси:

$$\sum{}' \left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-4} \angle \frac{c^2}{k_0} \sum{}' k_s \quad (\gamma_s = 0 \text{ опускаєм}), \qquad 27)$$

а що сума по правім боцї дає поверхню майже цїлого кола головного K, то сума по лївім боцї, а тим більше сума $\sum{}' \left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-2m}$ $(m = 2, 3, 4, \text{----})$ є беззглядно збіжна.

Цїле те розумованє можна розширити і на случай $\gamma_s = 0$, т. є. для $P_s = \infty$ (якому в колї головнім відповість $z = 0$), а тодї повна сума

$$\sum_s \left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-2m}$$

є беззглядно збіжна для всїх точок кола K.

По за колом сума та стаєсь рівна ∞ в точках P_s, а в иньших точках $z \gtrless P_s$ сума та має значінє і є збіжна. Того доказувати не будем (се є майже очевидне, бо поодинокі вирази суми $\left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-2m}$ будуть для z по за колом k меньші як для z в колї).

На обводї кола K сума та єсть збіжна для родин III., IV., V., VII. кромі точок дїйсно особливих, де стає ся розбіжна, бо в їх безконечно близькім окруженю находять ся точки P_s. Що так є, легко можна доказати.

Най ξ буде вершком з циклю другого рода (на обводї кола K), то там збігає ся безконечно много районів; район R_0 переходить на R_s — як знаєм — через субституцию параболїчну (Кляйн) т. є.:

$$\frac{1}{t - \xi} = \frac{1}{z - \xi} + \alpha_\sigma \quad \sigma = 1, 2, 3, \text{----} \qquad 28)$$

Наколи субституцию ту будемо ітерувати, дістанемо з R_0 цїлий ряд районів, які всї мають вершок ξ. Для $t = \infty$ є $z = P_s$, а тодї з 28) слїдує:

$$z = P_s = \xi - \frac{1}{\alpha_\sigma}.$$

Наколи субституцию ітеруєм без кінця, то α_σ росте in inf., отже довкола ξ громадить ся безконечне число тих P_s. Q. e. d.

3. Poincaré узагальнює 1) сей ряд в сей спосіб, що бере довільну функцию рациональну H (z) о місцях ∞-них $a_1\ a_2$ ---- a_p.

---

1) Пор.: Math. Annalen, т. XIX.

Возьмім функцию H $\left(\frac{\alpha_s z+\beta_s}{\gamma_s z+\delta_s}\right)$, де $\frac{\alpha_s z+\beta_s}{\gamma_s z+\beta_s}$ є субституция ґрупи, то місця ∞-ні сеї функциї є:

$$a_\mu = \frac{\alpha_s z+\beta_s}{\gamma_s z+\delta_s} \quad \mu = 1, 2, --- p.$$

Наколи
$$\frac{\alpha_s z+\beta_s}{\gamma_s z+\delta_s} = f(z),$$
то навідворот:

$$z = \Big[f_s\,(a_\mu)\Big]^{-1} = f_{-s}\,(a_\mu).$$

f_{-s} є також субституция ґрупи. Функция H $\left(\frac{\alpha_s z+\beta_s}{\gamma_s z+\delta_s}\right)$ — а є їх безконечне число — утворена з огляду на всї субституциї ґрупи має місця ∞-ні $f_s\,(a_\mu)$.

Poincaré творить тепер функцию:

$$\Theta\,(z) = \sum_s H\left(\frac{\alpha_s z+\beta_s}{\gamma_s z+\delta_s}\right)\left(\gamma_s z+\delta_s\right)^{-2m} \qquad 29)$$

яку називає *функциєю* Θ — *Фухса* або *Кляйна* після того, чи ґрупа є ґрупою Фухса чи Кляйна.

На всїх місцях **z** і їх окруженях, таких що $z \gtrless a_\mu$, $z \gtrless f_s\,(a_\mu)$ і $z \lesseqgtr P_s$ функция ся є збіжна беззглядно і одностайно, бо все можна зробити, щоби решта від далекого s почавши була меньша як ε (довільно мале). Точки дїйсно особливі ґрупи (на обводї кола головного) є дїйсно особливими точками функциї $\Theta\,(z)$. — В деяких случаях можна точки a_μ і P_s так дібрати, щоби всї безконечности повідпадали, а тодї функция $\Theta\,(z)$ не має безконечностних місць анї в колї головнім анї по за ним.

Poincaré дїлить функциї Θ на *родини* після того, який район до них належить. Для функций Θ родини I., II., VI. є обвід кола головного *лїнїю особливою* — як каже Poincaré, для прочих родин находять ся на обводї кола головного лиш ізольовані місця особливі.

Возьмім функциї Θ родини I., II., VI.; функций тих по за коло перевести не можна, а що точцї **z** по за колом відповідає точка $\frac{1}{z}$ в колї, то маєм властиво дві функциї в колї K: $\Theta\,(z)_K$ і $\Theta\left(\frac{1}{z}\right)_K$.

Противно функциї Θ прочих родин можна переводити по за коло, а функция $\Theta(z)_z$ дефінїює одну функцию на площи z.

Наколи місце зерове функциї находить ся в районї R_0, то в R_0 не ма до него рівноважного місця зерового. Наколи місце зерове находить ся на боцї першого рода, то рівноважне місце лежить також на боцї першого рода; з таких двох місць зачисляєм до району лиш одно. Так само, коли місцем зеровим є вершок першого рода, а в ним сходить ся r районів, а місце зерове є степеня n, то до одного района зачисляєм місце зерове степеня $\frac{n}{r}$.

В загалї Poincaré приймає звичайно вершки першого рода за місця зерові, вершки другого рода за місця зерові першого степеня.

4. Возьмім функцию $\Theta(z)_K$ і належачий до неї район R_0, який обводу кола головного дотикає лиш в декотрих точках. Повідтинаймо на хвилю вершки R_0 маленькими лучками і приймім після Poincaré, що по боках району не ма місць зерових, то тодї остануть лиш ті місця зерові для функциї Θ, які лежать в самім районї. Тодї — як з теориї Cauchy звісно — є, наколи m_0 є слількість місць зерових, а m_∞ скількість місць безконечностних в контурі:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}\,dz = m_0 - m_\infty = E',$$

де за контур приймаєм R_0 з пообтинаними вершками. Наколиж в вершках району є ν місць зерових, то для функциї $\Theta(z)_K$ вийде ріжниця місць зерових і безконечностних:

$$E = E' + \nu,$$

що по обчисленю інтеґрала буде мало — після Poincaré — загальний вид:

$$E = m\left[n - 1 - \sum\frac{1}{p}\right] \qquad 30)$$

де m є число, що характеризує функцию Θ (пор. 29), n скількість пар боків спряжених, p число, відносяче ся до поодиноких циклїв (порівнай рівн. 20); сума відносить ся до всїх циклїв.

Для функциї $\Theta(z)_z$ (родин III., IV., V., VII.) за район треба брати — як знаєм — R_0 і спряжений з ним R_0', то ту ріжниця:

$$E = 2m\left[n - 1 - \sum\frac{1}{p}\right] \qquad 31)$$

5. Піддаймо функцию $\Theta(z)$ субституциї ґрупи:

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

то:

$$\frac{\alpha_s \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + \beta_s}{\gamma_s \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + \delta_s} = \frac{\alpha_\sigma z + \beta_\sigma}{\gamma_\sigma z + \delta_\sigma},$$

а тоді по підставленю в 29) випаде:

$$\Theta\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2m} \Theta(z) \qquad 32)$$

значить ся функция Θ є лиш функциєю псевдоавтоморфною.

Возьмім однак дві функциї Θ_1 і Θ_2, що належать до тої самої ґрупи, то:

$$\Theta_1\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2m} \Theta_1(z)$$

$$\Theta_2\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2m} \Theta_2(z).$$

Їх квот:

$$\frac{\Theta_1\left(\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)}{\Theta_2\left(\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)} = \frac{\Theta_1(z)}{\Theta_2(z)} = F(z) \qquad 33)$$

Та функция $F(z)$ є проте функциєю автоморфною.

Очевидно що і функциї автоморфні ділити ся будуть на родини, залежно від родини функций Θ.

Наколи з тої самої ґрупи возьмем функциї

$\Theta_1\ \Theta_2 \cdots \Theta_s$ з параметрами $m_1\ m_2 \cdots m_s$

і функциї $\overline{\Theta}_1\ \overline{\Theta}_2 \cdots \overline{\Theta}_s$ з параметрами $\overline{m}_1\ \overline{m}_2 \cdots \overline{m}_s$ і утворимо квот їх добутків, то:

$$\frac{\Theta_1\,\Theta_2 \cdots \Theta_s}{\overline{\Theta}_1\,\overline{\Theta}_2 \cdots \overline{\Theta}_s}\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2\left(\sum\limits_{\nu=1}^{s} m_\nu - \sum\limits_{\nu=1}^{s} \overline{m}_\nu\right)} \frac{\Theta_1\,\Theta_2 \cdots \Theta_s}{\overline{\Theta}_1\,\overline{\Theta}_2 \cdots \overline{\Theta}_s}(z)$$

Наколи доберемо $\Sigma m_\nu = \Sigma \overline{m}_\nu$, то сей квот станесь загальнійшою функциєю автоморфною.

Місця зерові чисельника і безконечностні знаменника є місцями зеровими функциї автоморфної, а місця безконечностні чисельника та зерові знаменника є єї місцями безконечностними.

До функциї Θ_ν належить E_ν, до $\overline{\Theta}_\nu$ $\overline{E}_\nu$,

де:
$$E_\nu = m_\nu \left[n - 1 - \sum \frac{1}{p}\right]$$
$$\overline{E}_\nu = \overline{m}_\nu \left[n - 1 - \sum \frac{1}{p}\right]$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{В чисельнику:} & \Sigma E_\nu = M_0 - M_\infty \\ \text{В знаменнику:} & \Sigma \overline{E}_\nu = \overline{M}_0 - \overline{M}_\infty \end{array}\right\}$$

де ті M мають значінє як повисше. Ріжниця:

$$\Sigma E_\nu - \Sigma \overline{E}_\nu = (M_0 + \overline{M}_\infty) - (\overline{M}_0 + M_\infty) =$$

= сума місць зерових — сума місць безконечностних =

$$= \left(n - 1 - \sum \frac{1}{p}\right) \left[\Sigma m_\nu - \Sigma \overline{m}_\nu\right] = 0.$$

Кожда функция має проте ту власність, що в районї R_0 сума місць зерових рівнає ся сумі місць безконечностних.

Кожда функция автоморфна приймає кожду якунебудь вартість в районї R_0 тілько разів, кілько вартість 0 або ∞.

Бо наколи $F(z)$ є функциєю автоморфною, то і $f(z) = F(z) - C$ є такою функциєю; $f(z)$ стаєсь тілько разів безконечностию що $F(z)$, пр. n разів, то і зером стає n разів, т. є. $F(z)$ приймає вартість C n разів.

6. Возьмім дві функциї автоморфні, що належать до тої самої ґрупи т. є. $F_1(z)$ і $F_2(z)$. Функция $F_1(z) = C$ на місцях $z_1\, z_2 \cdots z_m$ району R_0; на тих місцях приймає функция $F_2(z)$ вартости $C_1\, C_1 \cdots C_m$, ріжні між собою. Видко отже що до одної вартости функциї $F_1(z)$ належить m вартостий функциї $F_2(z)$, отже $F_2(z) = y$ є m-вартостнею функциєю функциї $F_1(z) = x$. Наколи сю залежність представимо рівнанєм:

$$y^m + g_1(x)\, y^{m-1} + \cdots + g_m(x) = 0.$$

то рівнане се буде альґебраічне, а y **буде альґебраічною функциєю** x. Відворотно до одної вартости y належить n вартостий функциї x, x **є проте альґебраічною функциєю** y.[1]

Між двома функциями автоморфними з тої самої ґрупи заходить проте все неприводне рівнанє альґебраічне:

$$G\left(x^{(n)}\, y^{(m)}\right) = 0. \tag{35)}$$

Так як всї вартости функций x і y находять ся в районї R_0, а функциї ті є однозначними функциями кождої точки z, а район R_0 дасть ся — як знаєм — замінити на поверхню ряду p, то після теориї поверхний Riemann'а мусить бути рівнанє 35) **ряду** p.

Наколи возьмем три функциї автоморфні тої самої ґрупи:

$$x = F_1(z),\; y = F_2(z),\; X = F_3(z),$$

то після попередного будуть істнувати реляциї:

$$G_1(Xx) = 0$$
$$G_2(Xy) = 0.$$

Рівнаня ті яко неприводні не мають повтаряючих ся коренів X; а коли так є, то сей корінь є рациональною функциєю сочинників обох рівнань, отже:

$$X = R(xy) \tag{36)}$$

Кожда автоморфна функция є проте рациональною функциєю яких-небудь двох функций автоморфних з тої самої ґрупи.

7. а. Возьмім тепер функцию явтоморфну:

$$F(t) = F\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = F(z),$$

то через ріжничкованє дістанемо $(\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$

$$\frac{F'(t)}{(\gamma z + \delta)^2} = F'(z)$$

а з відси:

$$\Big[\, F'(t) \,\Big]^m = \Big(\gamma z + \delta\Big)^{2m} \Big[\, F'(z) \,\Big]^m,$$

---

[1] Пор. Biermann: Zur Theorie der Fuchsschen Functionen (Sitz. Ber. der k. Akad. der Wiss. in Wien Bd. XCII, Abth. II).

а що:

$$\Theta(t) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2m} \Theta(z),$$

то квот:

$$\frac{\Theta(t)}{\left[F'(t)\right]^m} = \frac{\Theta(z)}{\left[F'(z)\right]^m} =$$

$$= R\left(F(z)\ F_1(z)\right)$$

(після 36), бо сей добуток є функцією автоморфною).

Отже функция псевдоавтоморфна виражає ся в сей спосіб через дві функциї автоморфні, що:

$$\Theta(z) = \left[F'(z)\right]^m R(F, F_1) \qquad 37)$$

б. Знаєм, що $G(F_1 F_2) = 0$.

Звідси через ріжничковане вийде:

$$\frac{\partial G}{\partial F_1} d F_1 + \frac{\partial G}{\partial F_2} d F_2 = 0,$$

або:

$$\frac{d F_2}{d F_1} = - \frac{\frac{\partial G}{\partial F_1}}{\frac{\partial G}{\partial F_2}} = R_1 (F_1 F_2),$$

де R_1 є функциєю рациональною, отже між двома функциями автоморфними заходять звязь:

$$\frac{d F_2}{d F_1} = R_1 (F_1 F_2) \qquad 38)$$

в. Для функциї автоморфної $F(z)$ маєм:

$$F'(t) = (\gamma z + \delta)^2 F'(z)$$

Наколи збудуємо вираженє:

$$\frac{F'''(t)}{F'(t)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(t)}{F'(t)}\right)^2,$$

яке Cayley назвав **шварцияном**, а яке Кляйн значить: $\left[F(t)\right]_t$, а Forsyth (Theory of Functions) через $\left\{F(t),\ t\right\}$ то дістанемо:

$$\frac{F'''(t)}{F'(t)}-\frac{3}{2}\left(\frac{F''(t)}{F'(t)}\right)^2=\left(\gamma z+\delta\right)^4\left[\frac{F'''(z)}{F'(z)}-\frac{3}{2}\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)^2\right],$$

а що:
$$\left[F'(t)\right]^2=\left(\gamma z+\delta\right)^4\left[F'(z)\right]^2,$$

то через поділене обох тих рівнань дістанемо:

$$\frac{\left[F(t)\right]_t}{\left[F'(t)\right]^2}=\frac{\left[F(z)\right]_z}{\left[F'(z)\right]^2} \qquad 39)$$

Шварциян функциї автоморфноï, поділений через квадрат походноï сеï функциї, є функциєю автоморфною.

А що між двома функциями артоморфними все заходить звязь альґебраічна, тому **кожда функция автоморфна сповняє рівнанє ріжничкове третого ряду:**

$$G\left(F(z),\ \frac{\left[F(z)\right]_z}{\left[F'(z)\right]^2}\right)=0. \qquad 40)$$

8. Poincaré впроваджує далї[1]) так звані **функциї** Z — **Фухса.** Називає він іменно n функций:

$$Z_1(z),\ Z_2(z),\ \cdots\cdots\ Z_n(z)$$

тодї функциями Z Фухса, наколи сповняють реляцию:

$$Z_\lambda\left(\frac{\alpha_s z+\beta_s}{\gamma_s z+\delta_s}\right)=\overset{(s)}{A}_{1\lambda}Z_1(z)+\overset{(s)}{A}_{2\lambda}Z_2(z)+\cdots\cdots+\overset{(s)}{A}_{n\lambda}Z_n(z) \qquad 41)$$

де визначник сталих рівнає ся 1, а дана субституция є взята з ґрупи G Фухса. (Наколи ґрупа є ґрупою Кляйна, то ті функциї будуть функциями Z-Кляйна).

Ґрупа H субституций лінїйних:

$$y'_\lambda=\overset{(s)}{A}_{1\lambda}y_1+\overset{(s)}{A}_{2\lambda}y_2+\cdots\cdots\ \overset{(s)}{A}_{n\lambda}y_n$$

є очевидно ізоморфна до ґрупи G Фухса.

---

[1]) Пор. Math. Annalen. т. XIX.

Возьмім тепер яке-небудь рівнане ріжничкове лїнїове:

$$\frac{d^n v}{dx^n} + P_{n-2}\frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + P_{n-3}\frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \cdots + P_1 \frac{dv}{dx} + P_0 v = 0. \qquad 42)$$

— де через відповідну трансформацию P_{n-1} ідентично стало ся 0 що всегда дасть ся зробити — і де сочинники P є функциї рациональні двох арґументів x і y, звязаних рівнанєм альґебраісним:

$$G(x\,y) = 0,$$

і приймім, що $a_1\ a_2 \cdots a_n$ є точками особливими рівнаня $G(xy) = 0$, а безконечностними виражень P.

Наколи положим $x = F(z)$, де $F(z)$ є функциєю Фухса, істнуючою лиш в колї K — що як передше сказано можна зробити, — то тодї і y є такою самою функциєю Фухса, а n інтеґралами рівнаня 42) є функциї $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \cdots \varphi_n(z)$, які є однозначні і які істнують лиш в колї K. Інтеґрали ті — так як і $F(z)$ — можна розвинути на ряди збіжні після арґументу $(z - z_0)$, а їх сочинники способом зворотним (recurrent) обчислити. Інтеґрали ті — як легко пізнати — є однак функциями Z-Фухса, маєм отже твердженє:

Кожде рівнанє ріжничкове лїнїове з сочинниками альґебраічними дасть ся з'інтеґрувати через функциї Z-Фухса (подекуди через функциї автоморфні Фухса).

Результат сей очевидно не є одинокий. Ми могли місто x вставити безконечне число иньших функций Фухса, а навіть функций Кляйна і булибисьмо дістали на інтеґрали рівнаня 42) безконечне число системів функций Z-Фухса або Z-Кляйна. Скількість інтеґралів рівнаня 42) за ужитєм нових змінних переступних стаєсь проте безконечно велика.

9. Постараймо ся тепер о представленє тих функций Z, анальоґічно як функциї Фухса представили ми при помочи фувкций Θ.

Най $$\overset{(s)}{a}_{1\lambda},\ \overset{(s)}{a}_{2\lambda},\ \cdots\cdots\ \overset{(s)}{a}_{n\lambda}$$

будуть мінорами визначника, утвореного з величин $\overset{(s)}{A}$.

Приймім тепер, що обі ґрупи G і H є дані і возьмім n функций рациональних $H_1(z), H_2(z), \cdots H_n(z)$ — як в уступі 3. сего роздїлу. Збудуймо після Poincaré n рядів:

$$\Phi_\lambda(z) = \sum_s \sum_{t=1}^{n} \overset{(s)}{a}_{\lambda t} H_t\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right)\left(\gamma_s z + \delta_s\right)^{-2m} (\lambda = 1, 2, \cdots n), \qquad 34)$$

то ті ряди для достаточно великого m є збіжні і мають очевидне свойство:

$$\Phi_\lambda\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right) = \sum_{t=1}^{n} \overset{(s)}{A}_{t\lambda} \, \Phi_t(z) \left(\gamma_s z + \delta_s\right)^{2m} \qquad 44)$$

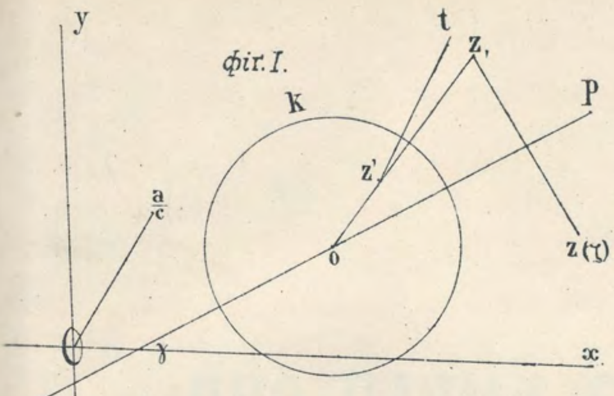
Наколи утворимо тепер n функций: $\frac{\Phi\lambda(z)}{\Theta(z)}$, де Θ є функциєю Θ-Фухса, то ті функциї будуть функциями Z-Фухса, так що:

$$Z\lambda(z) = \frac{\Phi\lambda(z)}{\Theta(z)} \qquad 45)$$

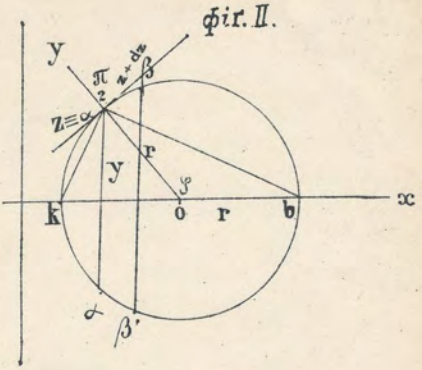
Наколи возьмем який-небудь систем функций Z, то можна доказати, що функциї ті дадуть ся всегда виразити рационально через певне число рядів анальоґічних до $\Theta(z)$ і рядів форми 43).

На тім кінчимо короткий перегляд сеї інтересноï теориї; очевидно сей начерк далекий є від точного та повного представленя теориї функций явтоморфних, а має лиш на цїли запізнати та впровадити читачів в самі ессенциональні єї моменти.

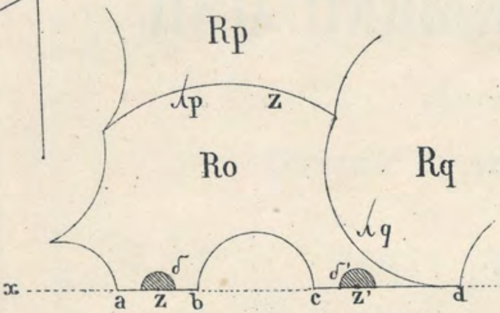
Тернопіль, в липню 1900.



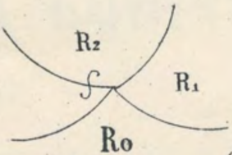
фиг. I.



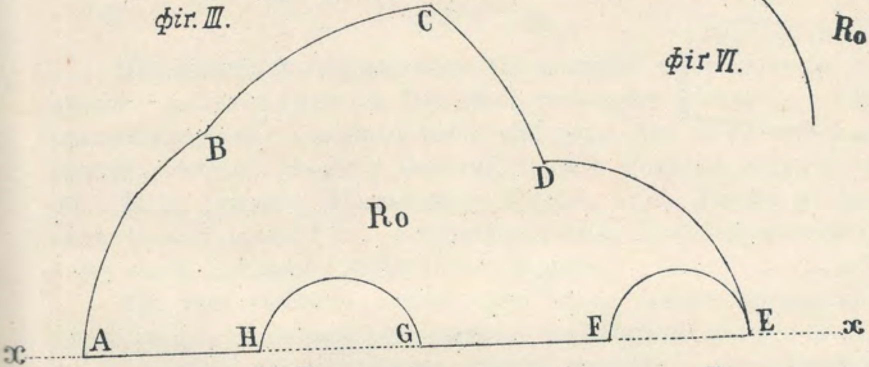
фиг. II.



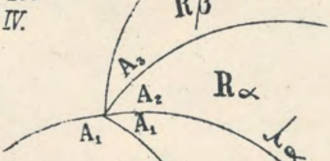
фиг. III.



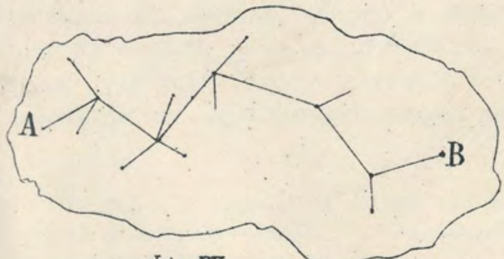
фиг. IV.



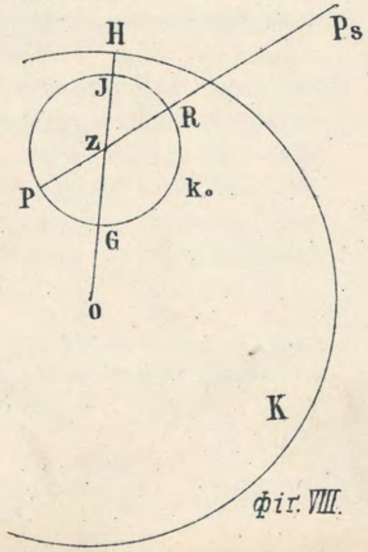
фиг. V.



фиг. VI.



фиг. VII.



фиг. VIII.

ПРО ПЛЯМИ СОНЇЧНІ

написав

Стефан Рудницкий*).

ЧАСТЬ ПЕРША.

ВСТУП.

Найраньше зі всїх небесних тїл звернуло сонце на себе увагу людий — сьвітлом і теплом. Що дуже вже давно пізнано єго велике значінє для житя, сьвідчить найлучше роля, яку має сонце в натуральних релїґіях. Озіріс у Єгиптян, Ваал у Семитів, Мітра у Іранців і Індів, Геліос і Апольльон у Греків, Хорс Дажбог у Словян були богами сонця і єго персоніфікациями. Дотепер находим сю божу честь для сонця у первісних народів.

Що такі релїґійні понятя суть певно більше оправдані чим многі иньші, не можем сумнїватись дивлячись на сю річ зі становища нинїшної науки. Сьміло можем нинї за старими Перуанами повторити, щосьмо дїти сонця.

Не можем тут розводитись над загальним значінєм сонця для нашої планети, помістимо в кількох тільки словах те, що наука тисячами лїт збирала: Сонце є материю землї, пхнуло єї в сьвітову просторонь, дало рух поступовий та оборотовий і від того часу силою ґравітациї водить єї довкола себе, осьвітлює і огріває. Сонце є пражерелом всїх чотирох жерел енерґії, що від часу повстаня

---

*) Почин до написаня сеї розвідки вийшов від Д-ра Антона Ремана, професора ґеоґрафії на львівскім унїверситетї. За сьвітлі ради і цїнні вказівки складаю тут Вп. професору щиру подяку.

землї впливають на образоване єї поверхнї. Ґравітация викликує приплив і відплив моря, воздуха і маґми. Оборот землї викликує зміни в напрямі течий атмосфери і моря. Внутрішне тепло землї є причиною вульканїзма, землетрясень, дісльокаций, підношеня і опаданя земскої кори. Наконець четверте жерело енерґії: самеж тепло, сьвітло і хемічне дїланє сонця своїм впливом на мінерали, воду і воздух викликує найбільші наслїдки. Під впливом сонця витворилось зі згаданих трох чинників житє ростинне і звіринне на земли, а в неорґанїчнім сьвітї панують вічні переміни. З нерівного розкладу тепла повстають вітри і морскі течи, безпосереднє дїланє теплоти викликує вічний обіг води і переміни єї видів. Всї ті прояви житя землї постоянно зміняють єї поверхню.

Сонце впливаючи на воду і воздух є посередною причиною дефляциї, денудациї і ерозиї, котрі поруч вітріня скал з теплоти сонїчної суть найважнїйшими причинами морфольоґічних змін на поверхнї земскої кори.

Пригадалисьмо велике значінє сонця для землї головно з тої причини, щоби тим лекше доказати важність того відділу астрофізики, що занимаєсь особливо головним тїлом нашої планетарної системи.

Наукові дослїди про сонце сягають глубоко в старинні віки. Они взагалї дали початок астрономічній науцї, бо обсервациї сонця нерівно були лекші чим обсервациї якого небудь другого небесного тїла. Але згадані дослїди обмежувались на бігу сонця. Єгож фізичний устрій аж до найновійших часів позістав родови людскому глубокою тайною. Се що ми тепер про будову сонїчної кулї знаєм, можем вважати лишь вступом і підставою до дальших праць в тім напрямі і мусим признатись за Секкім, що в борбі з природою о тайни сонїчного устрою не дісталась ще побіда в наші руки.

Хоть не похваляєм історичного способу трактованя природописних тем, подамо на вступі історию сонїчної фізики.

Клясична старинність, хоть під певними зглядами поставила астрономію досить високо, майже жадних відомостий про устрій сонця не мала. Єсли Анаксаґорас твердив, що сонце є розпаленою до білости кулею, то се виходило більш з причин телеольоґічних чим з переконаня потверджено дослїдами. І в середних віках не знали европейські народи нїчого про сонце. Дивна се може річ, але тепер вже на певно сконстатовано, що сучасно иньші народи в части навіть еґзотичні знали, що на сонци появляють ся часто плями. Арабскі астрономи нераз їх помічали, але й они не попали на добру дорогу — думали, що се Меркур або Венера, що переходять власне перед сонїшним кружком. Натомість добре понимали справу китайскі учені. В енцикльопедиї Ма-Тван-Лїн находим численні згадки про плями на сонїчнім кружку в видах дактелїв, сливок, качок, яєць і т. д. Тї згадки простирають ся на лїта 301—1205 нашої ери. (Williams Ma-Twan-Lin. Monthly Notices of Royal Astronomical Society vol. V. XXIII. пор. також Nature V. XX.)

Також Перуани замічали на поверхнї сонця плями. Huyana-Capac, Інка перуаньский († 1525) сумнївавсь навіть о божестві сонця з тої причини, що має нечисте обличє. (R. Wolf. Geschichte der Astronomie ст. 178. Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur т. I. ст. 565, Sirius, Zeitschrift für populäre Astronomie р. I. ст. 98. Про старинну астрономію в загалї мож много найти також в Mädler Geschichte der Himmelskunde т. I.)

Доперва в початках XVII віка, коли нововинайдені далековиди звернено на сонце, зараз завважали учені на єго поверхнї темні плями.

З помежи трох астрономів, що боролись о первеньство наукового відкритя сонїчних плям, належить І. Фабриция після найновійших дослїдів вважати властивим відкрителем. (Berthold: der Magister Johann Fabricius. Leipzig. 1894.) пор. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik hrg. v. H. Klein т. V. ст. 1. Sirius т. I. ст. 94. пор. також Newcomb. Engelmann. Populäre Astronomie II вид. ст. 285.) Він перший оголосив друком своє відкритє в 1611 р. і пізнав що плями находять ся на самій поверхнї сонця. Ґалїлєї мав єще вчаснїйше чим Фабриций помітити сонїчні плями, але відомість про них подав дещо пізнїйше. Протягом довгого часу вважано також єзуїта Хр. Шейнера відкрителем сонїчних плям, головно мабуть тому, що він перший обсервував їх докладнїйше і описав обширнїйше. (Rosa Ursina sive Sol. ch. Bracciano 1630.)

В перших роках по відкритю викликали сонїчні плями, як звичайно наукова новинка велике і загальне заінтересованє. Началась зараз полєміка, чи се суть дїйсні плями, чи тілько якісь нові інтрамеркуріяльні планети. Але коли ся переконано, що се дїйсні плями, цїкавість уступила місця рівнодушности і ледви деякий любитель астрономії вважав плями сонїчні гідними докладнїйшого розслїджуваня.

Доперва при кінци XVIII. віка начали знов деякі учені занимати ся ними а то пр. Горребов і Уільзен (Wilson). На початок XIX. віка припадають епохальні дослїди старшого Гершля. По них знов наступає деякий застій в обсервациї сонця. Аж при кінци першої половини XIX. віка, коли Швабе в 1843 р. замітив періодичність плями, коли в р. 1851 перший раз більшу увагу звернено на сонїчні протуберанциї, коли в 1852 р. Вольф, Сабін (Sabine) і Ґотє (Gautier) науково потвердили постереженє Швабого, началось будити між астрономами на ново зацїкавленє для фізичного устрою сонця.

Великаньскі поступи оптики доставили астрономам досконалих телєскопів, а потім спектроскопів, фотоґрафічних апаратів і иньших потрібних до розслїджуваня знарядів. На початок другої половини XIX. віка й належить покласти родини сонїчної фізики, инакше гелїоґрафії чи гелїольоґії.

Та нова наука находить ся дотепер ще в дитинячім віку. Хотяй цїла плеяда великих учених безнастанно працює над єї розвойом, збирає обсервацийний материял і ставляє научні теориї, то дотеперішних вислїдів не мож назвати великими. Однак величезні поступи фізики сонїчної в послїдних лїтах, осягнені іменно при помочи спектроскопа і фотоґрафічної камери дають нам право робити собі на будучність великі надії. Кождий рік приносить множество нових відкрить, дослїдів, теорий, причинків і поправок до давнїйших понять.

Задачею нашої розвідки є: коротко зібрати дослїди наукові над сонїчними плямами. Займемось тою частию гелїоґрафії головно з тої причини, що плями сонїчні є найбільш в очи впадаючою і найважнїйшою проявою внутрішної дїяльности сонця. Крім того суть сонїчні плями найцїкавійшим а заразом найменьше пізнаним явищем на поверхнї середоточного тїла нашої системи. Сонїчні походнї протуберанциї, що далеко пізнїйше звернули на себе увагу астрономів, суть вже тепер достаточно вияснені, коли тимчасом плями сонїчні якраз хиба по те приходять на стіл, щоб астронома повстидати.

Лїтература про сонїчні плями є величезна. На доказ вичислимо імена головнїйших учених, що про них писали. Зі старших авторів найважнїйші: Wilson, Herschel, Schwabe, Arago, Humboldt. З новійших: Wolf, Carrington, Warren de la Rue, Secchi, Faye, Spörer, Peters, Tacchini, Respighi, Zöllner, Vogel, Lohse, Lockyer, Huggins, Janssen, Young, Konkoly, Langley, Ricco і много иньших.

Межи творами згаданих учених без сумніву chef d'oeuvre'ом є книжка патра A. Secchi'ого п. т. Le Soleil видана в 1871 р. а переведена на нїмецке і доповнена Schellen'ом. (Die Sonne. Braunschweig 1872.) Але сей твір, хоч в своїм часї знаменитий, є вже перестарілий з огляду на зміст і може лишень служити яко підстава, на котрій треба будувати річ оперту на новійшихъ дослїдах.

Другий загальнїщого змісту твір про сонце C. A. Young: die Sonne. Leipzig 1883. є більше популярний і вимагає при користованю ся ним певної дози критики. Крім того Young за мало узгляднює новійші досліди іменнож европейских учених та всетаки хронольоґічно остає о кільканацять літ поза наукою. Те, що від сього часу в обсягу геліоґрафії зроблено, є порозкидане по астрономічних і загально-природописних публікациях або, що гірше, виходило осібними розвідками. Длятого не ціла література була мені доступна. Однак я старавсь тільки тоді відступати від користованя ся оригіналами, коли під рукою були достовірні витяги або змісти, поміщувані в чисто-наукових часописях чи в розвідках визначнійших учених.

Для лекшої ориєнтациї і перегляду поділимо річ на сім розділів. Перший розділ буде заниматись структурою поверхні сонця, другий структурою самих плям, в третім опишемо їх „житє", в четвертім подамо результати дослідів над їх дуговиною (спектром) і теплотою. Пятий і шестий розділи обіймуть їх власний рух і періодичність, послідний же розділ подасть учені теориї про істоту сонічних плям.

Про будову сонічної поверхні.

Коли дивимось на сонце крізь люнету, оно представить ся нам яко правильний кружок храпавий на поверхні. В ріжних місцях того кружка видимо звичайно більші або меньші, звичайно круглаві, часто получені в ґрупи темні плями. Не збуває сонічному кружкови також на місцях яснійших чим безпосередна їх околиця. Є се тз. сонічні походні. В разі цілковитого затьміня сонця моглибисьмо тоюж люнетою видіти ще два цікаві явища а то: протуберанциї т. є. огневі язики, що вистрілюють в гору довкола края сонічного кружка і корону, що в виді сьвітлої авреолї окружає затемнене сонце і висилає далеко свої лучі.

[Само собою розуміє ся, що люнета, щоби була придатною до розсліджуваня сонця мусить бути осмотрена відповідним окуляром. В опис тих тз. геліоскопічних окулярів, як також і в опис самих люнет, що їх уживає ся при обсервациях сонця, рівнож і в опис спектроскопів, полярископів, мікрометрів, фотометрів, фотогеліоґрафів не можемо ту входити і відсилаєм необзнакомленого з ними читача до творів Secchi'ого і Young'a, іменнож до діла N. v. Konkoly: Praktische Anleitung zur Austellung Astronomischer Beobachtungen mit besonderer Rücksicht auf Astrophysik. Braunschweig 1883., котре дуже добре представляє стан інструментальної техніки в 80-их роках. Про поступи від того часу мож поінформуватись в пізнїйших річниках чатописий Carls Repertorium für Experimentalphysik i Zeitschrift für Instrumentenkunde].

Всї ті згадані явища лучать ся межи собою звязями тоїж самої сили, що звязи, котрі лучать ріжні фізпольоґічні функциї пр. тїла людского. Однак ми, маючп на оці тільки сонїчні плями, не можем звертати рівної уваги на цїлу решту споріднених явищ і будем мусїли заниматись ними тільки принагідно, де завважимо близьку їх стичність з явищем плям.

Щобисьмо могли основно запізнатись з видом і істотою тих таємничих творів, мусим на перед розслїдити терен, де они являють ся.

Поверхня сонця, або як часто, а не цїлком науково говорять, фотосфера, представляєсь нам, як вже висше згадано, храпавою, навіть тодї, коли інструмент є малий а побільшенє незначне. Наколи ужиєм більшого інструмента і побільшеня, стане поверхня сонця ще більше храпавою, неправильною ба навіть филястою. Secchi порівнує єї з висохлим молоком, коли на него дивим ся крізь мікроскоп, Young з храпавим рисунковим папером або з зсїлим молоком. Коли наш інструмент є великий, а побільшенє дуже сильне, то здаєсь нам, що цїла поверхня сонця складаєсь з незміримої скількости ясних зеренець, що розсїяні по дещо темнїйшім тлї. Се явище звесь в астрофізицї ґрануляциєю поверхнї сонця. (Пор. Secchi Die Sonne ст. 50 сл. Young Die Sonne ст. 99 сл.)

Щоб ґрануляцию обсервувати, треба не тільки доброго інструмента, але заразом чистого воздуха та вправного обсерватора. Коли крім тих вимогів узгляднимо ще велику „делїкатність“ самогож явища, перестанем ся дивувати тому, що ґрануляция на ріжних учених ріжне зробила вражінє. Herschel порівнує зернята ґрануляциї з морщинами (wrinkles), Langley'еви видались они подібними до снїгових платків, що їх розсїяно густо по сїрім полотнї. Nasmyth знов виніс зі своїх постережень сонця в р. 1861 вражінє, що частинки ґрануляциї є подібні до довгих і вузких вербових листків. На єго розповсюднених рисунках поверхня сонїчного кружка представляєсь як сїтка сплетена зі сьвітячих ниточок. Але сей погляд Nasmyth'а не удержавсь. Перший виступив против него Dawes і запоречив рішучо їх істнованя. Stone і Secchi також не потвердили дослїду Nasmyth'а, бо мимо великої старанности в обсервациї, лїпшими інструментами та (іменно у Secchi'ого) чистїйшого воздуха не могли найти і слїду „вербових листків“. Huggins (On a cyclonic arrangement of Solar granules. Monthly Notices of Roy. Astr. Society vol. XXVIII. ст. 101 сл.) і Secchi впровадили натомість порівнане з зернятами рижу. На рисунках Huggins'а та й иньших учених дійсно можна сю подібність замітити.

При виємково прихильних обставинах удалось ще деяким ученим сконстатувати, що навіть самі зернятка ґрануляциї складають ся з певного числа ясних точок, котрі разом роблять вражінє цілости. Так оже маєм на поверхні сонця три формациї: 1) темнійші маси під сподом, 2) зерна ґрануляциї, 3) сьвітлі точки, що складають ся на витворенє згаданих зерен. (S. Newcomb. Populäre Astronomie üb. v. Engelmann Leipzig II. вид. 1892 ст. 282).

Величина зернят ґрануляциї є трудна до виміреня, головно задля їх дуже малого проміру. Secchi порівнує помір їх проміра з помірами мнимого проміра звізд сталих і находить порівнуванєм проміру зернят ґрануляциї з грубостию ниточок мікрометра, що він виносить ледви $^1/_4$, $^1/_3$ а дуже рідко $^1/_2$ секунди луку.

Розложенє зерен ґрануляциї на темнім тлї є дуже ріжне і змінне, а іменно в сусїдстві похідень і плям. В тих іменно околицях панує вічна рухливість та що хвиля лучають ся великі зміни. Безпосередна обсервация рухів фотосфери є при величезнім відаленю сонця дуже трудна, але фотоґрафія наглядно нам їх показує. Janssen умістив в Annuaire de Bureau des Longitudes за рік 1879 дві фотоґрафії тої самої околиці сонця. Они були зняті в астрофізичній обсерваториї в Meudon 1878 р. 1. червня. В промежутку 50 мінут наступили тут, як вже на перший погляд мож завважати, великі переміни. Зеренця ясні, що перед 50 мінутами були зібрані в одній околиці, пересунулись протягом того незначного часу громадно в цілком иньшу околицю, лишаючи по собі темнійше місце. І на відворот: місця перед тим темнійші, появились громадою ясних точок. Взагалї полягає змінність ґрануляциї на тім, що єї зернята збивають ся в громадки і скоро ся потім розходять.

Місцями укладають ся зерна фотосфери в той спосіб, що між ними творить ся меньш або більш виразний, округлий і темний отвір. Такі отвори називаєм порами. Зерна ґрануляциї принимають наоколо пори вид повздовжний і підлягають так виразним рухам, що їх не тільки при помочи фотоґрафії але і уважною обсервациєю мож замітити.

Виясните ґрануляцию сонїчну перший силкувавсь W. Herschel. Дотична єго розвідка находить ся в Philosophical Transactions з р. 1802. Він твердить, що зернята ґрануляциї суть стіжковими кінчиками фотосферних хмар. Темнійше тло складаєсь — на думку

Herschel'a — з „планетарних“ хмар, а через них переглядає темне внутро сонця.

Перша часть тої теориї є правдива і принимають єї дотепер майже всї учені. Дуже сильно промовляє за тою теориєю вигляд хмар земскої атмосфери, коли на них дивитись будем з високої гори. Однак друга часть теориї Herschel'а про планетарні хмари та земне внутро сонця упала разом з йогож теориєю про сонїчні плями.

Американьский учений Langley, один з найвизначнїйших гелїографів, дальше розвів те, що в гершлївскій теориї було доброго. Фотосфера складаєсь на єго думку з хмаристих стовпиків, що уложені прямовісно до поверхнї сонця. Їх горішні кінцї творять зернятка ґрануляциї. Фильованє сонїчної поверхнї в наслїдок місцевих заколотів є причиною вічних змін в положеню згаданих стовпиків, а нам здаєсь, що се зерната ґрануляциї порушають ся, віддаляють і приближають ся. (The American Journal of Science т. XV. ст. 297 сл.)

Подібний є також погляд славного францускому гелїографа Janssen'а. (Comptes rendus de l'Academie des Sciences т. LXXXV. ст. 1249.) По єго думцї струї в атмосфері сонця пориваютъ зі собою в гору части сьвітлих хмар фотосфери. Ті частинки збивають ся в хмарки ґльобулярного вида, що й представляють ся нам яко зернятка ґрануляциї, Чим сильнїйші струї в сонїчній атмосфері, тим виразнїйша ґрануляция. Темне тло об'ясниє Janssen тим, що сьвітло висших верств фотосфери є меньше ослаблене абсорпциєю сонїчної атмосфери чим сьвітло низших верств.

Позірно відмінна є теория Scheiner'а, хоч і она на тій самій підставі почиває. (Astronomische Nachrichten т. 137. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik Jg. VI. ст. 7 сл.) Scheiner признає також, що зерна ґрануляциї суть частями сьвітляної материї сонця, що винесені в висші реґіони. Але причини сего винесеня шукає Scheiner не в дїйснім піднесеню хмаринок фотосфери в гору, а в певнім родї ундуляцийного руху частинок сонїчної атмосфери. Славний фізик Helmholtz виказав (для земскої атмосфери), що коли дві верстви воздуха о ріжній температурі пересувають ся понад собою — тодї повстають воздушні филї. В вершках тих филь зменьшаєсь в наслїдок їх висшого положеня тисненє воздуха, наступає кондензация і творять ся хмарки. В долинках же филь, де тисненє буде сильнїйше, до кондензациї не приходить. Наколи вітер віє постоянно в ту саму сторону, повстануть при згаданих даних ряди білих хмаринок. Наколиж дві воздушні струї стрінуть ся віючи під кутом, то хмарки скрестять ся і змішають принимаючи характеристичний вигляд означений в метеорольоґії назвою cirrus.

Анальоґічних відносин шукає Scheiner і в сонїчній атмосфері. Ведений головно великою схожостию будови фотосфери і згаданих хмарок сей учений твердить, що ясні зерна фотосфери суть вершками филь сонїчного воздуха, котрі повстали в наслїдок інтерференциї та скрещуваня ся ріжних филястих системів.

Тільки одна з новійших теорий супротивляєсь висше поданим науковим вияснeням істоти ґрануляциї. Поставив єї в 1886 р. сербский учений Становвич. (Comptes rendus т. CII. ст. 813 сл.) Він вважає ціле явище ґрануляциї маною оптичною. Она походить з неправильного заломаня лучів сьвітла в вічнорухливій ґазовій атмосфері сонця. Головно звернувсь Становвич проти результатів сонїчної фотоґрафії в тім напрямі. Але ся теория Становвича не найшла нїгде відгомону і признаня, бо не була поперта научними виводами. (Порівняй думку про ню Janssen'а в Comptes Rendus т. CII. ст. 857.)

Про будову сонїчних плям.

Кожда нормально розвинена пляма складаєсь з двох частий. Вже на перший погляд можем у кождої такої плями замітити темнїйший осередок і яснїйшу пенумбру або притїнок, що єї концентрично окружає. В цїлости представляєсь сонїчна пляма звичайно яко лїйковате, на днї темне заглублене в ясній поверхнї сонця. Є се головно тому, що пенумбра складаєсь звичайно з вузеньких пасків сьвітляної материї, що суть всї звернені концентрично до осередка плями. Те вражінє, що сонїчна пляма є заглубленєм, відносимо навіть тодї, коли паски притїнка мають неправильний вид. Коли на пр. придивлятись мемо образови сонїчної плями, що нарисував Langley, безпохибно віднесемо вражінє, що осередок плями є заглубленєм, а над ним звисають пасочки пенумбри, закриваючи отвір — як корчі закривають вхід до печери. (Вислів Younga o. c. ст. 110. Рисунок Langley'а находить ся на вступі книжки Young'а, також в многих популярних астрономічних виданях пр. E. Weiss Bilderatlas der Sternenwelt і т. д.)

Той вигляд сонїчних плям викликав у многих учених думку, що они суть дїйсно лїйковатими заглубленями. Перший виступив з тою теориєю A. Wilson, (Observations on the solar spots. Philosophical Transactions. Vol. LXIV. (1774) ч. I. ст. 6-13. Пор. також Secchi o. c. ст. 67.) бо завважав зміну вида плям в міру як они змінювали місце в наслїдок обороту сонця. Wilson постеріг іменно, що в міру, як пляма зближалась до краю сонїчного кружка, пенумбра зі сторони, що блисша єго середини, почала ся щораз звужувати а в кінци цїлком з тої сторони плями зникла. Підчас того по другій сторонї плями, себто тій, що звернена до сонїчного края, ширина пенумбри майже незмінилась і доперва тодї зменьшилась і зникла, коли пляму щораз більше заслонювала кривина сонїчної поверхнї. Потім пляма цїлковито зникла за краєм, а коли по 14 днах указалась знов, вже по другій сторонї кружка, повторились згадані явища але в відворотнім порядку. Наперед видно було лиш ту часть притїнка, що звернена була до края сонця, потім показавсь постепенно осередок, пізнїйше і друга часть притїнка. Она була з початку дуже вузенька, потім щораз ширшала і аж в серединї сонїчного кружка прийняла симетричний вид.

Те спостереженє Wilson'а є підставою теориї сонїчних плям, що єї виставив W. Herschel. Понеже тая теория більш чим пів столїтя неподїльно панувала в науцї, нїхто не перечив правди спостереженя Wilson'а. Крім того нераз лучалось астрономам помічати, що коли яка велика пляма станула як раз на краю сонїчного кружка, повстала в тім місци щербина; замітив се вже в 1719 р. Rost (Wolf. Handbuch der Astronomie т. II. ст. 406.) Помічали се часто також Herschel, Warren de la Rue, Secchi і Tacchini. (Велика пляма з р. 1865. VII. 30). Розумієся вибирали они плями значної величини. (Secchi o. c. ст. 72.) Lohse найшов підчас такого переходу плями через край дорогою фотоґрафічною щербину велику на 2" луку.

Але небракло також учених, що скептично задивлювались на сей тз. „феномен Wilson'а". Ті сумнїви принесла мож сказати зі собою теория плям сонїчних Kirchhoff'а. Єї головний приклонник межи практичними гелїоґрафами Spörer виступив остро против Wilson'а і тих, що єго обсерваций потвердили. (Monatsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften J. 1865. ст. 350 сл. 589 сл.) Після власних обсерваций доказує Spörer, що положенє пенумбри зависить від відносин в околицї плями. Пенумбра від тоншої сторони є звичайно порозривана і змінює що хвиля свій вид. В околицях края сонїчного була абсорпция звичайно так сильна, що Spörer майже нїколи не міг розріжнити осередка від притїнка, хотяй єго інструмент нерівно висше стояв чим інструмент Wilson'а. Противно, Spörer замітив, що на пр. у двох плям, що лежать близько себе, притінки суть ширші по обох внїшних сторонах і заховують постоянно свій симетричний вигляд. З тих причин думає Spörer, що плями сонїчні не суть в дійсности заглубленями, а лишь видають ся бути. В виду обсервациї Lohse'ого заявляє Spörer, що і та щербина в краю сонїчнім є позірна. Одинокою причиною тої позірної щербини є те, що сьвітло фотосфери в околицях плями є так сильно ослаблене в наслїдок ґазів, котрі з неї добувають ся, що для ока а навіть для фотоґрафічної камери видаєсь тая околиця зовсїм темною. (Зри: Comptes Rendus т. CIX. ст. 363.) Не удалось однак Spörer'ови подати в сумнїв явища, що вже тілько разів було обсервоване. В послїдних часах піднявсь регабілїтациї Wilson'а італїйский астроном Riccо на підставі одинадцятьлїтних обсерваций плям (р. 1880—1890 в Палєрмо, р. 1892 в Катанїї). Число помічаних плям рахувалось на тисячі (17.456, з чого самостійних 3.224). З них вибрав Riccо тільки плями правильного округлого виду. Було їх всїх тільки 185. Межи тими плямами 131 т. є. величезна більшість поводились так, як се завважав Wilson, 36 заховувалось зовсїм індіферентно а тільки 18 прямо противно. Крім того находимо в обсерваціях Riccо многї случаї, коли пляма сонїчна, переходячи через край сонїчного кружка, творила в нїй щербину. (Rendiconti della reale Accademia dei Lincei р. 1897 з. 6. ст. 202 сл.) Тим способом доказав Riccо, що „феномен Wilson'a“ є оправданий. Заки перестанем займатись сею справою, мусим єще згадати про оден цїкавий дослїд. Warren de la Rue вложив в стереоскоп дві фотоґрафії сонця, що були взяті сучасно в двох місцях землї, віддалених від себе о 15 степенів луку. Коли вже на кождій фотоґрафії з осібна плями подобали на заглубленя, то вже в стереоскопі подібність кидалась в очи. (Secchi о. с. ст. 71 сл.)

До того, що сонїчна пляма представляєсь як заглублене, причиняєсь в дуже значній мірі також обставина, що околиця кождої майже плями є винесена понад нормальний уровень фотосфери в наслїдок великого числа сонїчних походень. (Що враженє заглубленя походить або бодай зміцнюєсь видом походень, що окружають пляму, завважав перший Howlett, Monthly Notices of R. A. S. v. 23. ст. 108.)

Походнї сонїчні представляють ся яко ясні плями, значно сьвітлїйші чим безпосередна їх околиця; видом неправильні. Young порівнує їх до купочок піни, що плавають по ріцї понизше водопада. (о. с. ст. 106.) Що до істоти сонїчних походень згоджують ся днесь всї учені на те, що они творять ся через піднесенє в гору значнїйших частий фотосфери. (E. Liais в Memoires de la societé scientifique de Cherbourg р. 1867. ст. 337. Hale в Himmel und Erde т. VI. р. 1894 ст. 381. пор. Secchi o. c. ст. 104.) Найдокладнїйше зайнявсь сею справою Zöllner. Він твердить, що походнї суть части фотосфери винесені в гору воздушними струями. Они сьвітять сильнїйше від свого окруженя, бо мають 1) висшу температуру, 2) в наслїдок значнїйшої грубости сьвітляної верстви, 3) в наслїдок зменьшеної абсорпциї. Вершки походень находять ся дуже високо понад уровенем фотосфери, над ними находить ся отже значно тонша верства атмосфери чим над їх окруженєм — абсорпция є отже дуже зменьшена. (Zöllner über das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten. Berichte der königlichen sächsischen Gesellschaft des Wissenschaften р. 1871. т. XXIII. ст. 89.)

Сонїчні походнї суть розсипані звичайно по цїлій поверхнї сонця і не тримають ся певних стреф, як се роблять сонїчні плями. Але все таки найбільше число походень збираєсь в околицях пятен. Найсильнїйше розвинені суть походнї звичайно по лївій (берем річ ґеоцентрично) сторонї плями. Завважали се вперве анґлійскі астрономи з Kew: Warren de la Rue, Balfour Stewart і Benjamin Loewy. Перша серия дотичних обсерваций виказала, що з числа 185 обсервованих плям, мало 158 походнї значнїйше розвинені по лївій сторонї, 21 по обох сторонах однаково розвинені, а тільки 6 виказувало нагромадженє походень по правій сторонї. (Comptes Rendus т. LX. ст. 140.) Друга серия обсерваций ще виразнїйше доказала, що спостереженє згаданих астрономів було правдиве. На 584 плям, що мали походнї по лївій сторонї, припали тільки 45, що мали їх по правій. (Ibidem т. LX. ст. 470.)

Походнї трудно замітити, сли они занимають місце недалеко від центра сонїчного кружка, бо тодї ріжниця абсорпциї лучів висланих через походнї і лучів висланих їх окруженєм є за мала, щоб викликала значну ріжницю в ясности. Походнї сьвітять тут майже таксамо ясно як фотосфера, що їх окружає, суть отже ледви замітні. Коли натомість походня находить ся недалеко края сонїчного кружка, ріжниця абсорпций стає значно більшою а разом з нею ріжниця ясности походень і їх окруженя. Тодї походнї виступають дуже виразно і можем докладно замітити, що з внї кожда пляма є окружена вінцем походень. Від него виходять в ріжні сторони ясні розвітвленя, що сягають дуже далеко і занимають просторонь 3—4 рази так велику як сама пляма. Все те суть утвори дуже змінні а їх вигляд є що пару мінут инакший. Загалом беручи образують походнї наоколо заглубленя плями видатну набренїлість. Іррадіяция еще ту видатність збільшає, так що пляма разом з походнями, що єї окружають, робить ся подібна до місячного кратера. (Secchi o. c. ст. 103).

Будова походень є в подробицях така сама як будова околичної фотосфери. Тілько що зерна ґрануляциї стоять ту далеко густїйше.

Колисьмо так вже розслїдили безпосередну околицю плями, перейдїм до опису єї самої.

Як се вже висше згадано, є осередок кождої плями в засадї окружений притїнком або пенумброю. Назву свою одержала та часть плями від того, що є значно яснїйша від самого осередка а дещо темнїйша від самої фотосфери. Будова притїнка є лише у плям цїлком круглих т. є. досить рідко, правильна в видї перстеня. Звичайно є пенумбра неодностайно ві всїх місцях широка та дуже часто цундрава. Загальний вид дуже ріжнородний, найчастїйше круглавий, рідше гранчастий. Дуже часто трапляють ся плями з загальним видом шестикутника. (Peters в Astronomische Nachrichten Nr. 1868. пор. Sirius IV. ст. 44).

Що ся тичить подробної структури, складає ся пенумбра також з зерен ґрануляциї. Але они суть тут рідкі і мають наклін лучитись в ниточки, котрі суть у правильної плями звернені концентрично до осередка. (Janssen в Comptes Rendus etc. т. CII. ст. 80.) Длятого то ниточки притїнка суть при єї внїшнїй границї в більших відступах уложені, а при внутрішнїй згущують ся так, що наоколо темного осередка творить ся ясний перстень рівнобіжний до перстеня походень, котрі як знаєм окружають притїнок у внї.

Лучаєсь часто, що ниточки притїнка суть на тім кінци, де зближають ся до осередка плями, згрубілі і мають вид булавочок або струй ляви. Те явище, що природно дуже помагає витворови сьвітляного перстеня наоколо властивого осередка плями, було помічене в перве Dawes'ом. Secchi (o. c. ст. 84.) мірив грубість тих ниточок пенумбри і найшов єї на грубшім кінци рівною $^1/_4$—$^2/_4$ секунди луку т. є. майже 200—400 km. На тоншім кінци грубість доходить тільки до половини того: $^1/_8$- $^1/_4$ секунди, 100—200 km. (Примічаєм, що на підставі новійших дослїдів над параляксою сонця відповідає однїй секундї луку на сонци довжина 720 km.) Грубість сих ниточок є на тоншім кінци нераз так мала, що тодї видим тільки грубші кінцї ниточок наоколо осередка. Від внїшного краю складаєсь тодї пенумбра з темної, мрачної маси.

Ниточки пенумбри не все мають той сам концентричний напрям. Часто они приймають поодиноко або і громадно найбільш ріжнородні напрями. Часом цїлі партиї ниточок займають зглядом иньших партий таке положенє, що їх напрями творять кути прямі.

(Secchi o. c. ст. 87.) Нераз певні партиї притінка вигнуть ся спірально в ту саму сторону і пляма тодї представляєсь як вир на водї. Той спіральний напрям обнимає або цїлу пляму або тільки поодинокі єї части. Нераз маєм в однїй плямі кілька центрів обороту та що дивнїйше напрям єї є в ріжних центрах часто ріжний. (Young o. c. ст. 121, 171. Langley в Comptes Rendus etc. т. LXXIX. ст. 75. пор. також Comptes Rendus т. XCV. ст. 1310. Після обсервацей Carrington'а і Secchi'ого виносить число плям з спірально уложеною пенумброю 2 - 3% всїх.)

Заким перейдем до описаня дальших частий плями не можем позабути про цїкаві явища ґрануляциї на ниточках пенумбри. Зеренця суть ту так виразні, що ниточка пенумбри представляєсь часто якби нитка жемчугів. Нераз є ниточка в ріжні сторони розгалужена так, що тодї виглядає она на вітку опунциї. (Secchi o. c. 79.)

Другою головною складовою частию сонїчної плями є осередок або центр. (Secchi o. c. ст. 88, Young o. c. ст. 113 сл.) Через контраст з сьвітячим окруженєм видаєсь нам осередок плями цїлком чорний. Приглядаючись їм з близка крізь тз. поляризацийні геліоскопи (Є се окуляри осібної конструкциї, де не треба між око а сочку збираючу вставлювати зеленого шкла, бо в наслїдок кількократного відбитя від кількох рівнобіжних плоских зеркал сьвітло сонїчне так ослаблюєсь, що людске око може єго вигідно знести.) постерегли деякі учені, що осередки плям мають барву темно-порфирову, багрову. Чи ся краска є дїйсна, трудно сказати, бо она може походити з другорядної дуговини у предметової сочки телескопа. Обсервовано іменно, що таку саму порфирову краску мав кружок планети Меркурия, коли переходила перед кружком сонїчним в 1878. роцї. Konkoly замітив також, що деколи осередки плям суть закрашені на темнофіолєтову барву. І она також сумнївна, бо може також походити з другорядної дуговини. (Beobachtungen angestellt am astrophysikalischen Observatorium in O'Gyalla. т. VI. ст. 129).

Хотяй в наслїдок контраста здають ся нам плями сонїчні дуже темними, то однак беззглядна їх ясність є значно більша чим прим. планетних кружків, коли їх видим перед сонцем і взагалї досить значна. Galilei справедливо завважав, що одна пляма сонїчна, єслиб сама сьвітила на небосклонї, видалаб сильнїйше сьвітло чим всї иньші тїла небесні разом. Нові дослїди фотометричні Langley'а виказали, що сьвітло плям є 500 разів сильнїйше місячного. (Newcomb.-Engelmann o. c. ст. 287.) Треба пригадати, що навіть дуже ясне сьвітло Drummond'а видаєсь темним, наколи єго держимо до сонїчного сьвітла. (Schellen. Die Spectralanalyse. вид. III. том II. ст. 75.)

Осередок плями не є ві всїх своїх частях однаково темний. Dawes замітив у многих плям в їх осередках округлі, дуже темні плямки. Їх ясність стоїть до ясности самого осередка в таким відношеню, як ясність осередка до ясности притїнка. В однім осередку мож найти нераз і кілька таких темних плямок. Они виглядають як отвори рур, що сягають ві внутро сонця і виглядають часто так, якби були спірально скручені. Названо їх центрами Dawes'а.

Крім тих темнїйших місць находим частенько в осередках плям також місця яснїйші. Згадуючи про них не маєм на думцї тих частин фотосфери, що при повставаню або заниканю плями єї осередок залягають, але говорим про иньші, цїкаві явища. Виглядають они як мраки білявої або часто рожевої краски. Замітили їх в перве Herschel і Dawes, а Secchi таки й часто обсервував. Secchi ідентифікує їх з протуберанциями задля рожевої краски і великої змінности — думає отже, що се вибухи розпаленого водня.

Займаюче явище внутр осередка сонїчної плями бачив Spörer 1884 р. VIII. 24. (Tageblatt der 57. Versammlung deutscher Naturforscher zu Magdeburg 1884. s. 145.) Він замітив в поранній годинї одно сильно сьвітяче місце на серединї центра значної плями. О першій годинї пополудни поверхня сьвітячого місця взагалї зменьшилась, але зате з головної маси вибігли дві ясні ниточки, що направились до западного берега плями. Вже о третій годинї сї ниточки майже цїлком зникли, а на слїдуючий день вже навіть і по самім головнім центрі ясного феномена не було слїду. Spörer думає, що розігріті маси сонїчного внутра, котрі находились під плямою, нагло піднеслись в гору та зараз потім опали. Подібні явища не так то дуже рідкі — видимо їх також на рисунках Secchi'ого (пр. о. с. ст. 77.).

Про повставане та заникане сонїчних плям.

Щоби пізнати істоту сонїчних плям, мусимо добре придивитись часови і способови їх повставаня і заниканя.

Щоби сонїчна пляма витворила ся і розвила, потреба дуже ріжного часу. Нераз і кілька днів уплине, заки пляма на стільки відокремить ся від свого окруженя, щоби єї виразно мож відріжнити. Часом же треба на се лишень кількох годин. Нїколи однак не лучить ся, щоби сонїчна пляма повстала нагло в тім щоденнім значіню сего слова т. є. в кількох мінутах.

Так само способи повставаня плям є дуже відмінні. Можна сьміло сказати, що майже кожда пляма йнакше повстає. Пару столїть обсервацийй сонїчної поверхнї доставило в тім напрямі чималого числа подробиць. Про сам спосіб повставаня сонїчних плям можнаб много паперу записати. Ми мусимо ся тут ограничити лиш на кілька висказів, нарисовуючи ними типічний спосіб повставаня плям.

Звичайно вже на кілька день перед повстанєм плями можем на поверхнї сонця замітити великий рух. Численні пори являють ся нагло і нагло зникають, цїла околиця звичайно покрита походнями. (Не можна однакож думати, що походнї правильно завсїгди перед повстанєм плями на єї місци ся являють. Думали се давнїйші учені але недавно виказав Perry в Monthly Notices of the Royal Astronomical Society vol. LII. (1891) ст. 104. що так не є. Пор. також Secchi o. c. 58. Young o. c. 117.) Серед тих пор і походень можем завважати часом дуже інтересні явища. Се сїраві плями, що роблять вражінє як справдешні сонїчні плями, але прикриті тонкою і ясною верствою фотосфери. Першим, що звернув увагу на сї явища був Trouvelot, (American Journal of Science. 1876. Marth ст. 82 сл. Young o. c. 129. Пор. Bulletin astronomique т. II. р. 1885. ст. 263, 364. 413. Sirius т. XIX. ст. 51. сл.) він і назвав їх замраченими плямами. Trouvelot постеріг, що ґрануляция над тими замраченими плямами є рідша і слабша що до сьвітла, але за те більше рухлива чим в иньших околицях фотосфери. В наслїдок тої великої рухливости зеренець ґрануляциї змінясь вигляд таких замрачених плям дуже часто, нераз в однїй або двох мінутах і то до непізнаня. Trouvelot думає, що згадані явища — се такі самі плями як звичайні, лиш сили, що їх витворили, є за слабі, щоби цїлком продерти зверхну верству фотосфери. Завважати однак належить, що ся думка не є надто оправдана, бо такі „замрачені“ плями можна подибати навіть в околицях сонїчного бігуна, куди звичайні плями нїколи не трафляють ся.

Сам акт повставаня плям є нам дотепер неясний і таємничий, позаяк нїхто єго виразно на власні очи не видїв. Підчас своїх 40-лїтних обсервацийй був R. Wolf кілька разів в тім щасливім положеню, що міг видїти дещо похоже на нагле повставанє сонїчних плям. Кілька разів в часї єго практики здавалось Wolf'ови, що на поверхнї сонця щось якби нагло пукло і повстала пляма сонїчна. Але навіть сам Вольф не посьмів з сих фактів робити якихнебудь заключень — тим меньше можем се ми робити. (Пор. Wolf Handbuch der Astronomie т. II. ст. 407. Було се в р. 1848.) Таксамо або і ще меньше маємо право вірити постереженю Brautner'а, хоч оно після єго оповіданя було дуже докладне. (Sirius XI. 1878. ст. 287) 1815 р. 26. вересня побачив він в одній околиці сонїчного кружка щось в роді хмари. По трох чи чотирох мінутах помітив Brautner серед сеї хмари сильне замішанє. Оно тревало може 50 секунд, а коли устало, виразно побачив Brautner велике число дрібних плямок, іменно в сусїдстві краю хмари. Серед сих маленьких плям тревали дальше великі переворотн. Центри плямок то никли — заливала їх брунатна мрака — то знов показувались. В кінци рух устав, а місце згаданої хмари заняла ґрупа плям значного розміру.

Є се як видим обсервация дуже цікава, але годї єї без'оглядно признати правдивою з двох причин: 1) Обсерватор не був фаховим астрономом, лиш ділєтантом, 2) Єго інструмент був так слабий в порівнаню з інструментами нинїшних обсерваторий, що не можем мати до него довіря, коли новійші астрономи нинїшними средствами не вспіли потвердити за такий довгий час обсервациї Brautner'а.

Взагалї треба завважати, що в місци яснім і чистім на сонїчнім кружку нїколи відразу не повстає ізольована пляма, а завсїгди цїла ґрупа. Дуже лиш рідко лучаєсь, що витворить ся відразу одинока пляма. Такий случай бачив в 1877 р. в цьвітни Janssen (Sirius X. 1877. ст. 157.) 14. того місяця була поверхня цїлого сонїчного кружка цїлком чиста, ґрануляция виступала дуже виразно. На другий день же явилась нагло ґрупа плям 2' проміру. Ту ненормальну прояву толкує Janssen тою обставиною, що тодї власне припадало періодичне minimum сонїчних плям. Плямотворча сила була отже дуже слаба, натомість наклін плям до заниканя дуже сильний.

Звичайно витворюєсь наперед цїла ґрупа плям. Она зложена звичайно лише з самих осередків Притїнок розвинений дуже слабо. Ті осередки є часто небільші як звичайні пори. Число їх що хвиля ся збільшає, бо прибувають щораз нові і зачинаєсь творити коло них притїнок зразу невиразний, неправильний, замазаний. Потім починає ся розвиток поодиноких центрів, они індивідуалїзують ся і повстає ґрупа самостійних плям. Подамо кілька примірів.

1865 р. в липни 29. побачив Secchi на сонїчній поверхнї три невеличкі, темні пори, котрих в попереднім дни не було на тім місци. 30. липня показалась на місци згаданих пор темна маса з чотирма осередками і дуже неправильним замазаним притїнком. Притїнок був в кількох місцях перерваний ясними огневими язиками. Межи згаданими чотирма центрами нагромадила ся сьвітляна материя. Она була в безперивнім руху, так що по кількох годинах всї подробиці, які мож було добачити, цїлковито ся зміняли. Тілько загальні черти полишились незмінними. 31. липня згадана сьвітляна маса розтягнулась повздовжно, та подїлила цїлу пляму на дві вузкі а довгі части. Они продовжували ся так наглядно, що за добу їх довгість подвоювалась. Середуща маса змінилась потім поволеньки в невиразьний обсипаний ясними зернами притїнок. Розвинулися поволи також центри і віддалились від себе. Але недовге було житє тій ґрупі. 17. вересня полишилось по нїй лише кілька пор і походень. (Secchi o. c. 60 сл.)

Подібні випадки зареєстрував Konkoly. 1873. 15. лютого показали ся при всхіднім краю сонїчного кружка три пори. Слїдуючого дня була вже на тім місци велика і досить добре виобразувана ґрупа з 9 осередками. Такий сам случай лучивсь межи 19. а 22. грудня 1873 р. (Konkoly. Beobachtungen angestellt am astrophysikalischen Observatorium in O'Gyalla. т. I. ст. 87.)

Від згаданих висше явищ не дуже ріжнить ся також явище обсервоване Spörer'ом в 1876 р. IX. 30. На дуже яснім полї витворили ся нагло в значній скількости невеличкі плями і окружили середну часть сего поля вінцем. В короткім часї зайшли в тій околиці великаньскі переміни, бо 2. жовтня згадану ясну середину занимала виобразована ґрупа плям, плями-ж що єї вінцем окружали, зникли. (Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Postdam т. I. Beobachtungen der Sonne von G. Spörer ст. 71.)

Ґрупа сонїчних плям або лишаєсь до кінця свого істнованя ґрупою, або зміняєся по певнім часї в одну більшу пляму. Звичайно творить ся правильна пляма з притїнком в західній части ґрупи (що при руху оборотовім сонця іде наперед). (Ibidem ст. 77.) Иньші осередки ґрупи в такім разї звичайно або никнуть цїлком або лишають ся ще якийсь час яко пори. (Ibidem ст. 69.) Сей процес заниканя поодиноких центрів в ґрупі, причім витворює ся на їх місци одна пляма, відбуває ся нераз дуже скоро і напрасно. Konkoly бачив 1873 р. 9. червня у певної ґрупи 9 осередків. До 13. червня всї они уступили місця одній правильній плямї. (Beobachtungen angestellt am. Astr. Obs. in N'Gyalla I. ст. 83.)

Такі переворотп відбувають ся в дуже ріжний спосіб, однакож Peters, Schwabe і Spörer вспіли в часї своїх довголїтних обсервацийдослїдити певні правила розміщеня, повставаня і заниканя плям в ґрупах. Дослїджено, що ґрупи розширюють ся через повстанє нових плям майже завсїгди в напрямі всхіднім. Всї більші плями повстають майже завсїгди в західній части ґрупи. Spörer помітив, що на 68 ґруп, які були обсервовані, заховувались 48 т. є. подавляюча більшість в висше згаданий спосіб. (Publicationen des astr. Obs. zu Potsdam т. I. ст. 77.) Позісталі плями в ґрупі уставляють ся тодї по всхідній сторонї головної плями і то дуже часто в напрямі сонїчних рівнобіжників. (Завважав се вже Schröter пор. Comptes Rendus etc. т. LXIV. ст. 375.) Наслїдком того мають деякі більші плями по своїй всхідній сторонї щось в родї хвоста. Сей „хвіст“ складаєсь з безчисленних малих плямок, що розсїяні по відповідно видовженім притїнку. За таким хвостом тягнуть ся звичайно в рядї поменьші плями ґрупи. Се явище бачив кілька разів Secchi (о. с. ст. 85). Коли така ґрупа начинає заникати, никнуть наперед звичайно західні плями, хибань що має витворитись в ґрупі яка більша пляма. Тодї бо західні плями полишають ся і беруть визначну участь в витвореню великої плями. Характерне є також виступованє плям парами.

В часї істнованя всякої сонїчної плями можем розріжнити три періоди: 1) період повставаня — про него власне скінчилисьмо говорити, 2) період супокійного побуту, 3) період заниканя.

Про період супокійного побуту, котрий випадає нам з порядку описати, не мож много сказати. Многі учені прямо заперечують, щоби він у всїх плям істнував, лиш деякі плями мають такий період. Що правда треває він у тих плям нераз дуже довго, бо кільканацять день і більше. Подибуєм сей період супокійного побуту звичайно лиш у плям, що мають вид округлий, а пенумбру дуже правильну.

Період заниканя начинає ся з тою хвилиною, коли сила, що витворила пляму, так ослабне, що вже не пляма на фотосферу, але фотосфера на пляму начинає мати рішучий вплив. Повстають в плямі нові види і від того часу начинають ся в нїдрі єго такі самі переворотн як в періодї повставаня, лишень в відворотнім напрямі.

Заникненє плями може послїдувати в двоякий спосіб: 1) коли огневі язики вдершись до середини, подїлять пляму на кілька частий, 2) коли сьвітляна материя начинає зі всїх боків поступати ідь серединї плями і в кінци єї заллє. Звичайно однак обі ті причини складають ся разом на погибель плями і суть зі собою в видній звязи. (Spörer Publicationen d. Astr. Obs. zu Potsdam т. I ст 79 Tageblatt der 57. Versammlung deutscher Naturforscher in Magdeburg 1884. ст. 184.)

Secchi замітив, що коли сонїчні плями дійдуть до певної стадиї свого розвою, начинає окружаюча їх фотосфера посувати ся до·

середини плями і висилає огневі язики т. з. мости, що ділять пляму на дві або більше частий.

Творенє таких мостів належить до найінтереснїйших явищ, які можем бачити на сонїчній поверхні. Peters пробуваючи в Неаполи в роках 1845 і 1846 звернув увагу на тую фазу сонїчних плям і описує єї в такий спосіб: Коли наближаєсь період заниканя плям, можна завважати серед притїнка вузенькі струйки сьвітла, котрі щораз то зближають ся до осередка плями а вкінци втискають ся таки в єго нїдро. Таких сьвітляних струй є звичайно кілька або й більше.

Коли дві такі струї йдучи з противних сторін зближуть ся достаточно до себе, витрискають нечаянно із кінців обох струй огневі язики. Зі скоростию блискавки они спотикають ся з собою, остають в злуцї якийсь час, але потім знов ся розділяють. Таке повтаряє ся кілька разів в протягу кількох хвилин. Вкінци огневі язики лучать ся постоянно і творить ся міст. Описане явище є о стільки цікавійше, що одного разу огневий кінчик струї наперед зіткнув ся з противлежним собі кінчиком а потім скрутив нагло в бік і зіткнув ся з другим. Всї ті рухи виглядають так, якби їх викликувала електрична сила і є надзвичайно скорі. Peters обчисляє їх скорість на 200.000 km. на секунду (minimum). (Proceedings of the American Association for the advancement of science т. IX. Відповідний уступ наведений в переводї з оригінала у Young'a o. c. ст. 118.)

За витворенєм моста не конче мусить зараз йти заникненє плями. Дуже часто наступає лишень т. н. сеґментация — поділ плями на дві або кілька частий. Міст може іменно мати трояку натуру. Або се є розпалена струя фотосферних хмарин понад плямою, або се є струя розжарених ґазів в самім уровени плями, або вкінци поступуюча ерупция серед походень, що окружають пляму. Коли міст є першого або другого рода, тодї пляма звичайно заникає, колиж він належить до третої катеґориї, тодї наступає сеґментация. Міст продїлює пляму на дві части, що мають зразу спільну пенумбру. Але вже в короткім часї обі ті части віддїлють ся цїлком від себе, кожда з них вироблює собі осібний притїнок і стає самостійною плямою. (Spörer. Tageblatt der 57 Versammlung deutscher Naturforscher zu Magdeburg 1884. ст. 145 сл. і в Publicationen des astr. Obs. zu Potsdam т. I ст. 78.)

Є се взагалї дуже трудна річ, побачивши на плямі міст осудити, чи она заникне, чи тілько ся поділить. Нераз лучить ся, що цїла пляма покрита мостами, а прецїнь не заникає, лишень ся дїлить. Такий случай обсервував Secchi (о. с. ст. 64) 1865 р. 29. мая. Пляма, котру він обсервував, була досить правильна на вид, але мала в середині ясну масу. Від неї розходило ся кілька мостів як сприхи при колесї. Були отже услівя, що моглиб довести до цілковитого заникненя плями; тимчасом сталось инакше. Мости поволи позникали, середна маса також, потім начавсь в притїнку оживлений рух і по кількох днях слїдувала сеґментация.

Звичайно однак можем ся сподївати, що пляма невдовзї щезне, коли замітимо, що численні мости єї середину залягають. Они стають іменно щораз виразнїйші, число їх збільшає ся, береги плями посувають ся їдь єго осередкови, аж в кінци сьвітляна маса покриває єго цїлком.

При описї повставаня і заникання плям виділи ми на кождім місци, що найвизначнїйшою може признакою сонїчних плям є їх велика змінність. Найлїпше пізнаємо єї в той спосіб, що придивимось величинї плям сонїчних і єї змінам.

Величина плям є так само ріжна, як і їх внїшний вигляд. Бо не тільки ріжні плями сонїчні мають ріжний розмір, але розміри тої самої плями в ріжних стадиях єї розвитку заєдно ся змінють. Найменьші між сонїчними плямами є пори, бо їх величина не доходить нераз до одної секунди луку. Хоч ся величина здаєсь нам дуже малою (позірний промір сонїчного кружка виносить 32'), бо секунда луку є для нашого зору майже невидима, то прецїнь она репрезентує на поверхнї сонця середно 725 km. Плямка сонїчна того проміру представляє ся навіть крізь сильний телєскоп яко дрібненька точка, а прецїнь єї поверхня виносить 412.388 km² т. є. майже ²/₃ поверхнї Австро-Угорщини.

Але пори суть надзвичайно малі в порівнаню з нормальними плямами, котрих середна величина виносить що найменьше кільканацять секунд в промірі. (Примічаєм, що наша земля, коли на єї дивимо ся з поверхнї сонця, виглядає як малий кружок 17.6" пересїчного проміру). Деякіж плями доходять до великаньских розмірів. Дуже інтересні дати подав в тім напрямі Schwabe, що мав в часї своїх довголїтних обсерваций велику нагоду видїти плями незвичайної величини. 1848 р. IX. 22. була на поверхнї сонця пляма проміру 147" отже 9 рази більшою чим земский. Поверхня сеї плями була 18 разів більша від поверхнї землї. 1842 р. VI. 30. бачив Швабе ще більшу пляму. Она мала 168" проміру. Найбільшаж з плям, які колинебудь бачено, явилась на сонїчній поверхнї 1850. IX. 5. Она мала промір 302" т. є. 21.400 km. а поверхню 35.100,000.000 km². Ті розміри перевисшають відповідні розміри нашої земскої кулї 17 і 69 разів. (Обсервациї Schwabe'ого поміщені в Astronomische Nachrichten від р. 1843 починаючи. Про великі плями пор. Himmel und Erde т. IV. (1892) ст. 484. і т. VI. (1894) ст. 38.)

Єще більші розумієся розміри мають ґрупи сонїчних плям. Schwabe видів в червни 1845 р. ґрупу 668" т. є. 468.000 km. проміру. Ґрупи такої величини не належать впрочім до рідкостий. Знаєм преціnь про численні случаї в старинности, коли сонїчні плями оглядано голим оком. (Wolf. Handbuch der Astronomie т. I. ст. 564 сл.) Правда що сонїчна пляма потребує після Schwabe'ого мати лиш 50" проміру, щоби єї було мож видїти голим оком (після Tissot'а навіть тільки 30"), але мусим признати, що иньша се річ видїти пляму, коли знаєм, що она є на поверхнї сонця, а иньша, коли про се не знаєм. Мусїли отже згадані плями бути дуже значної величини, коли простодушні і неупереджені люди старинности могли їх добачити.

Тілько позитивного про величину плям. Їх змінність найлучше пізнаєм на змінах їх величини. Щоби довго не розводитись, возьмем собі клясичний примір та придивимось ґрупі, що була послїдною між згаданими. 1845 р. VI. 14. довжина єї від всходу на захід виносила 668". По двох днях т. є. 16. червня она зменьшилась до 474" т. є. о 194" = 140.650 km. На оден день випадає отже для сего руху дорога 70.325 km. Є се скорість, супроти котрої скорість найстрашнїйшого оркану є марна. Єще більшу скорість руху можна було завважати у плями, що показалась в вересни 1850 р. 5. вересня єї промір виносив 302" луку, коли попередного дня т. є. 4. вересня лиш 93". В однім дни розширилась отже пляма лїнеарно о 209" т. є. о 151.525 km.

Під конець уступу про повставанє і заниканє сонїчних плям скажем кілька слів в справі їх тревалости. Про ню скажем хиба се, що як і иньші прикмети плям, так і она є дуже змінна. Взагалї завважано, що плями, котрі скоро повстали і розвинулись, також в короткім часї зникали. (Secchi o. c. 91. Young o. c. 114.) Лучало ся нераз, що плями вже в кількох днях по своїм повстаню зникали. Середна тревалість плями сонїчної виносить 2—3 місяцї, але трафляють са плями, що далеко довше перебувають на поверхнї сонця. В р. 1779. одна пляма через 6 місяців позіставала на сонїчнім кружку. Schwabe обсервував в р. 1840 одну пляму протягом $6^{1}/_{2}$ місяця, а в лїтах 1861/2 навіть через 18 місяців.

Належить однак замітити, що протягом сего часу плями звичайно і кілька разів навіть відновлюють ся. Частенько в хвилинї, коли пляма здає ся туй-туй счезне, родить ся в нїй нова сила і пляма замість счезнути єще розширяє ся. Secchi обсервував 1866 р. кілька плям середно тревалих, котрі находились вже в стадиї заникання, але потім знов „ожили“. Часто відродженє приходить за пізно, коли пляма вже зникне. Тодї повстає нова пляма в тім місци сонїчної поверхнї, деби находила ся давнїйша пляма, єслиб ще істнувала.

Дослїди над теплотою і спектральним виглядом плям.

Дослїди над зглядною теплотою сонїчних плям не дуже далеко поступили, бо сконструованє відповідних знарядів натрафило на великі трудности. Перші учені, що заняли ся тою правою Henry і Alexander найшли з 12 помірів, що плями дають тільки 0·8 тої теплоти, що єї дає їх ясне окруженє. (Fritz. Die Sonne ст. 9.) Але ті поміри були тільки першою пробою.

S. P. Langley, славний гелїольоґ, про котрого ми вже нераз згадували, перший винайшов докладні інструменти до таких помірів. При їх помочи одержав він в осени 1874 та на весну 1875 р. дуже важні результати. Протягом згаданого часу довершив Langley 36 помірів температури осередків плям а 32 поміри теплоти притїнків. Поверхню плям потрібну до обчисленя брав Langley з Researches of Solar Physics. (Є се розвідки Warren'a de la Rue, Balfour Stewart'a і Венїямина Loewy'ого, астрономів обсерваториї в Kew. Они поміщені в річниках Philosophical Transactions.) Положивши проміньованє фотосфери рівним одиниції найшов Langley, що осередки плям дають в порівнаню з нею тільки 0·54±0·05 сьвітла і тепла; притїнки тільки 0·80±0·01. (Sirius т. V. ст. 59—62.

Хотяй се може до нашої теми не дуже належить, подамо єще в коротких словах дальші виводи Langley'a, що тикають ся впливу плям на загальне проміньованє сонця і єго зміни, котрі знов відбивають ся на огріваню за осьвітлюваню землї. Середний розмір сонїчних плям є на підставі Kew'ских обсерваций слїдуючий: Підчас періодичного maximum занимають осередки сонїчних плям 0·000376 поверхнї одної сонїчної гемісфери, притїнкиж 0·001016. Підчас minimum ті числа виносять 0·000021, зглядно 0·000056. Наколи помножимо ті вартости, що означають обсяг плям через висше подану, зглядну їх теплоту, одержим числа, що виражають вплив плям на загальне проміньованє сонця. Ті числа будуть дуже скромні: для maximum 0·001016, для minimum 0·000055. Загальна отже зміна, яку могуть протягом свого періоду викликати сонїчні плями в проміньованю сонця, не буде більша як ріжниця обох тих чисел т. є. 0·000961.

Щоби означити вплив сонїчних плям на земску температуру, треба знати всї єї позасонїчні жерела. Понеже їх докладно не знаєм, старає ся Langley означити тільки границї, межи котрими лежить сей вплив сонїчних плям. Він находить яко найбільше імовірну на се вартість 0.063 °C. (Sirius т. V. ст. 62.)

Langley робив свої дослїди термоелектричним звеном. В новійших часах винайдено новий і докладнїйший інструмент до того рода помірів тз. радіомікрометер Boys'a. Тим інструментом довершив в 1893 р. дуже важних помірів Wilson. Він мірив наперед зглядну теплоту осередка, потім теплоту точки в околицї плями, (причім вважав, щоби він був рівно як осередок віддалений від середини сонїчного кружка) а вкінци теплоту самогож центра сонїчного кружка.

Результати дослїдів Wilson'a суть дещо відмінні від дослїдів Langley'a. 1893 р. 7. серпня найшов пр. Wilson, що єсли проміньованє осередка плями представим числом 1·31, то околиця плями дасть 4.49, а середина сонїчного кружка 4·57. Відношенє проміньованя осередка плями до проміньованя околичних частий фотосфери буде отже виносити: 0·292 respective 0·287.

Є се однак лишень мінїмальна вартість найдена Wilson'ом. Середна вартість з 20 обсервацій виносить 0·356 — є отже значне меньша від одержаної Langley'ом вартости 0·54. Wilson не скриває однак, що та ріжниця могла бути викликана не тільки улїпшенєм інструменту, але також дійсною ріжницею проміньованя плям в ріжних часах. Proceedings of the Royal Society 1894. LV. Nr. 333. ст. 246. пор. Naturwissenschaftliche Rundschau 1894. Nr. 14. і Jahrbuch für Astronomie und Geophysik V. Jhrg. ст. 5 сл.)

В найновійших часах кількох иньших визначних учених зайняло ся пильно сею справою, але їх дослїди до тепер не оголошені. Проте згадаєм тут єще лиш про відкритє Савелїєва Він найшов, що в тій самій мірі як росте число плям, росте також і температура околичної фотосфери. (Comptes Rendus. T. CXVIII. ст. 62.)

Спектроскопією плям не будемо ся обширно занимали, бо є се річ дуже специяльна і так сильно з загальною спектроскопією сонця злучена, що мусїлибисьмо і ту послїдну обширно трактувати. Подамо тілько найважнїйші результати учених дослїдів над тим предметом. Huggins, Lockyer, Secchi і Young найбільше ся на тім поли заслужили. (Secchi o. c. 539 сл. Young о. с. 125 сл. Schellen. Die Spectralanalyse т. II. ст. 63 сл.)

Коли направимо щілину спектроскопа на якусь пляму сонічну, побачимо, що ясна стяжка дуговини буде в напрямі повздовжнім перервана темним поясом. Сей пояс — се дуговина осередка плями. Она є ширша або вузша після того, чи сам осередок ширший чи вузший. По обох сторонах сего пояса тягне ся дуговина притїнка. Она є лишень троха темнїйша від дуговини сонїчної поверхнї.

Дуговина осередка є на цїлій своїй просторони в наслїдок абсорпциї сорозмірно дуже темна. Крім того можем завважати в нїй ріжні зміни на Фраунгоферівских лїніях. В горішній (прифіолетній) части дуговини межи лїнїями F а H є ті зміни дуже незначні. За те долїшна часть дуговини виказує значнї зміни.

В околици плям а іменнож над походнями суть лїнії водня завсїгди слабші, часто никнуть або підлягають відверненю — особливо лїнїя C. Навіть лїнія F, що лежить як згадалисьмо на граници горішної части дуговини, підлягає часто тій судьбі. Нераз трафляє ся, завважав се Lockyer, що замість неї являє ся ясна лїнїя. (Schellen die Spektralanalyse т. II. ст. 65.) Все те походить з того, що в околицях плями звичайно повно є протуберанций розпаленого водня, котрі компензують абсорпцию а нераз, коли суть дужé сильні, викликують навіть відвернене. В околицях сонїчного края ясні лїнії викликані протуберанциями зискують на силї і продовжують ся нераз в глуб темного пояса осередкової дуговини плям, іменнож великих.

Коли міст перериває пляму, або коли внутр єї находять ся яснїйші місця, тодї лїнїя C дуже ся ослабляє, ба навіть зникає. Се все сьвідчить про присутність водня.

Взагалї дуговина осередка плям підлягає дуже сильним змінам. Они не дадуть ся витолкувати загальним догадом, що ті всї зміни походять з недостачи сьвітла. Бо не тілько лїнії нормальної сонїчної дуговини в обсягу плями підлягають розширеню. Трафляє ся, що лїнії в звичайній дуговинї сильні суть в дуговинї плями дуже тонкі і майже зникають, а відворотно деякі лїнії, що ледви замітні в звичайній дуговинї, суть в дуговинї плям дуже виразні. Толкує ся се тим, що хмари розпалених металїчних ґазів, находячі ся в єї внутрі, дїлають на єї сьвітло абсорпцийно і то селективно. В сей спосіб та абсорпция, що вже істнує, дуже ся зміцнює. Кілька металїчних лїній підлягають в дуговинї плями дуже сильному розширеню. Кілька лїній в зеленій части дуговини, іменно лїнії вапня, желїза, тітану а особливож соду, розширюють ся 3—4 рази. Завважано, що діє ся се, коли пляма є округла і здаєсь глубока. Лінії соду заховують ся дещо відмінно від иньших, бо тратять точність границь і стають замазаними. Secchi припускає, що се вплив атмосферичних, земских відносин. (o. c. 545.)

З дальших власностий дуговини плям належить піднести, що абсорпцийні лінії стають при обох кінцях щораз то тонші і заострені. Зглядна ясність дуговини плям є цілком відмінна від ясности дуговини самогож сонця. Кривина дуговини плям має цілком иньший перебіг, як кривина властивої сонїчної дуговини. Та послїдна має перебіг дуже правильний — поволи ся підносить і десь від $^2/_3$ своєї довжини начинаючи, досить нагло опадає. Кривинаж дуговини плям має дуже неправильний перебіг. Має она чотири горбки. Три перші постепенно підносять ся і вершками своїми сягають до кривини властивої дуговини сонця. Від вершка третого горбка спадає кривина дуговини плям дуже напрасно, підносить ся еще раз але вже слабо і потім опадає досить скоро, так що еї зглядна довжина (мірена на оси X-ів) є о $^1/_4$ коротша як кривини головної дуговини.

Є в сонїчній дуговинї кілька лїнїй, що і в дуговинї плям позістають незмінні. Суть они тим інтересні, що суть розміщені по дуговинї в майже рівних віддаленях. Інтересно, що ті самі лїнії указують ся в дуговинї червоних звізд. Можемо отже припустити, що єслиб такі абсорбуючі верстви як над осередком плями находились на цілій поверхнї сонця, то оно булоб цілком червоне.

На увагу заслугує також відкрите лїнії водяної пари в дуговинї плям Секкім. Заперечив єму що правда Angström, але Janssen рішив, що поки що анї оден анї другий учений не може мати претенсиї до цілковитої певности. За Secchi'м є імовірність.

До дуже звичайних явищ в дуговинї плям належить також відвернене двох лїнїй соду т. є. D_1 і D_2. Дуже виразне явище того рода обсервував Young 1870 р. 22. вересня. Лїнії ті дуже виразні в дуговинї фотосфери і притїнка уступили в дуговинї осередка місця ясним лїніям.

Коли в самій плямі або в еї околиці трафляють ся вибухи або иньші заколоти, видимо се зараз в дуговинї плями. При тім деякі властиві дуговинї плям лїнії підлягають великим змінам — а иньші цілком ся не зміняють. З сего видим, що абсорбуючі ґази занимають ріжні положеня зі згляду на висоту. В наслїдок того їх рухи не могуть на себе безпосередно впливати. (Young o. c. 128.)

Розуміє ся, що спектральний вигляд плям є дуже ріжний після елементів, котрі переважають в ґазових хмарах, що суть причиною абсорпциї. Часто трафляють ся плями анормальні під тим зглядом пр. пляма обсервована в Greenwich 1877 р. в жовтни. (Schellen die Spectralanalyse т. II. ст. 69.)

Для нас цікаве, що плями інакше виглядають в спектроскопі підчас періодичного maximum а інакше підчас minimum. Perry і Cortie найшли, що скількість розширених металїчних лїнїй єсть далеко більша в minimum як в maximum. Се відношенє представляє ся для лїнії желїза як 27 : 8. Підчас maximum лучає ся часто, що кілька лїнїй виказує значне розширенє навіть в пенумбрі. (Monthly Notices of Royal Astronomical Society т. 49. 1899 ст. 410. пор. Jahrbuch für Astronomie und Geophysik. т. I. ст. 5.) Потвердились сї відкритя дослїдами слїдуючого року. (Monthly Notices etc. т. LI. ст. 1890. ст. 76.)

Подібні явища як в дуговинї поодинокої сонїчної плями можем також обсервувати в дуговинї цїлих ґруп. (Monthly Notices etc. т. LII. 1892. ст. 424.)

Результати спектральних дослїдів над сонїчними плямами мають дуже велику вагу для пізнаня їх істоти. Над тим предметом будем ся обширно застановляти в кінцевім уступі нашої розвідки. Тепер згадаєм лиш, що плями є районами поверхнї сонця, де специяльно абсорпция виступає з великою силою.

* * *

*

Бібліоґрафіа і хроніка математично-фізична.

J. Puzyna. Teorya funkcyj analitycznych. (Lwów, Altenberg p. 1900. том II. ст. XVI+693). ¹)

Наколи перший том сего твору був дуже інтересний і змістом і способом представленя, то другий том робить єще приємнійше враженє і є єще інтереснійший для тих, що розслїджують теорию функций способом, вказаним через незабутний ґенїй Веєрштрасса.

Том сей складає ся з вісьмох частий в 23 роздїлах.

Часть перша (про функциї елєментарні та функцию цїлковиту переступну без місць зерових) займає ся функциєю виложною, та функциями триґонометричними, які з неї виходять, далї єї періодами, функциями рационально утвореними $R(e^{cx})$ і їх теоремом додаваня (се є вступ до теориї функций еліптичних), далї походними безконечно високого ряду; маємо ту дальше відверненя функций виложної і триґонометричних, отже льоґаритм і луки, моноґенічність льоґаритму, функцию виложну яко добуток та загальну форму функциї одної та много змінних без місць зерових.

Часть друга занимає ся функциями однозначними зі скінченим або безконечним числом місць особливих. Маємо ту зібрану цїлу теорию Веєрштрасса таких функций, теореми Mittag-Leffler'a, ріжні функциї та вираженя аналїтичнї. В части третій маємо проблєм однозначного та многозначного відверненя рядів одної змінної, з чим ся лучить загальна теория т. зв. образу альґебраічного, теория окружаня всїляких точок особливих того образа, характер та дефініциї функций альґебраічних. Розслїди ґеометричні про криві долучені та рід (дефект) кривих — уступ в великій мірі ориґінальний — кінчать сю часть.

Часть четверта про функциї рациональні $R(xy)$ місця (xy) образу альґебраічного представляє нам незвичайно важний уступ

---

¹) Пор. Збірник мат. природ. Т. IV. з. II.

з теориї Вейерштрасса, будучий вступом до теориї інтеґралів Абелевих, тим важнійший, що сеї теориї покійний німецкий ґеометр ніде не публікував (була она лиш звісна з єго викладів). Тож за сю часть автору специяльна належить ся подяка. Є ту ціла теория функциї R(xy), є ту схарактеризовані функциї $H(xy)_\alpha$, $H'(xy)_\alpha$, H(xyx'y'), є подана метода твореня функциї R(xy) при помочи функций H, дефініция трох родів інтеґралів Абелевих; в кінци подані способи обчисленя роду ϱ — деякі способи знов зовсім ориґінальні автора — теория кривих о роді 0, 1, 2 та кривих гипереліптичних.

Часть пята подає деякі уступи з т. зв. „Analysis vitus“ та теорию поверхний Riemanna. Ся часть творить перехід до части шестої, де методи Вейерштрасса чисто аналітичні повязав автор дуже уміло з теориями більше ґеометричними Cauchy та Riemann'a. В сій части маємо теорию полишок (residua) Cauchy, значінє інтеґралів по замкнених лініях, лінії перерви для функций з одним та більше зложеними арґументами та епохальне твердженя Cousin'a про функциї однозначні много змінних. Далї маємо в тій части теорию інтеґралів Абелевих та еліптичних, теорию їх періодів, теореми додаваня, функциї E Вейерштрасса та представленє функциї рациональної R(xy) добутком функций E. З відверненя інтеґралів еліптичних приходить автор до теориї функций еліптичних Jacobi, які є ідентичні з функциями σ Вейерштрасса та функциєю p. Ту рівнобіжність обох теорий, які виходять з иньшої точки, а остаточно сходять ся з собою в вислідах, представив автор дуже наглядно. Уступи з загальної теориї функций еліптичних (розклад на елєменти прості, представленє їх через квоти функций σ і т. п.) кінчать сю інтересну часть.

Часть сема подає теорию функций гармонїчних і їх застосованя. Є ту схарактеризований теорем Green'a, засада Dirichlet'a, теория функций гармонїчних для обшарів замкнених (інтеґраґи Poisson'a), на поверхні Riemann'a, теория відтвореня многокутників в півплощи, а врешті метода вирівняна (alternierend) Schwarz'a та застосованє функций гармонїчних до обчисленя періодів інтеґралів Абелевих, їх відверненя тя ріжних відтворень. Як бачимо, ся часть книжки підходить вже більше до метод ґеометричних сучасної аналїзи.

На ґрунті чисто-ґеометричнім стоїть послїдна частина сеї книжки про функциї Schwarz'a та трикутника Маємо ту теорию походних Schwarz'a, рівнанє ріжничкове Gauss'a, та відтвореня ґеометричні при помочи функций трикутника та многостінників правильних, які входять до теорий аналїтично-ґеометричних Кляйна. Теория ґрупи модулової, незмінника $J(\tau)$ та поділ півплощи при помочи ґрупи модулової — що вже належить до теориї функций автоморфних — кіньчить частину осьму, а разом і послїдну сеї книжки.

Коли звернемо увагу на величезний материял, зібраний автором в сїй книжцї, на систематичний та сорозмірно легкий — о скілько се в загалї можливе — спосіб представленя, використанє всіх найважнійших, найновійших здобутків сучасної аналїзи математичної, то можемо автору висказати щиру подяку в імени всїх, що занимають ся і слїдять розвій наук математичних.

Wiadomości matematyczne (видає Dickstein, Варшава). Том IV. 1900.

До тепер вийшло 4 зошити сего тому в двох випусках. Перший випуск містить в собі ось-ті працї: M. Feldblum: Конструкциї ґеометричні. G. Loria: Уваги про сорядні біґунові. В. Левицкий: З теориї дробів тяглих. B. Danielewicz: В квестиї обчисленя резерви премійної від обезпечень на житє. R. Merecki: Обсерватория астрономічна ім. А. Ендржейевича в Варшаві. Спростованє до артикулу M. Hubera: Про сумованє чисел варияций. Перегляд лїтератури. Біблїоґрафія. Хронїка etc.

Зошит IV. містить в собі: W. Gosiewski: З царини рахунку імовірности. M. Ernst: Обчисленє дороги метеора, обсервованого дня 6. червня 1899 р.

H. A. Lorentz. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und der Anfangsgründe der analyt. Geometrie (übersetzt von Dr. C. C. Schmidt) Leipzig 1900, Verl. Johann Ambrosius Barth; 10 M. — ст. VIII+476.

Є се нїмецкий перевід з голендерского первовзору (додано лиш в нїмецкім переводі уступ про функциї триґонометричні); поміщено ту елементарний виклад в 14 роздїлах про рахунок ріжничковий зі вступом про ґеометрию аналїтичну просторони, далї слїдує виклад про поєдинчі та многократні інтеґрали та вступ до рівнань ріжничкових.

Ch. Sturm. Lehrbuch der Analysis (übersetzt von Dr. T. Gross). Berlin, Verl: Fischer; 2 томи (зі вступом про житє і дїла Sturma).

Є се перевід знаменитого твору Sturm'a: „Cours d'Analyse. Перший том (36 лекций) подає виклад рахунку ріжничкового з теориєю maxim'ів та minim'ів, застосованє рахунку ріжничкового до ґеометриї (теория стичних, луків, еволюти, кривина, криві подвійно криві, криві поверхнї, гелїсса, точки особливі кривих); від лекциї 27. до 32. є загальні взори рахунку інтеґрального (інтеґрали рациональних функций, інтеґрали означені); лекция 33. до 36. подає ґеометричне застосованє рахунку інтеґрального (отже квадратури, кубатури, многократні інтеґрали).

Том II. подає в лекциях 37. до 58. докінченє рахунку інтеґрального, отже ріжничкованє під знаком інтеґральним, інтеґрали Euler'а, далї теорию рівнань ріжничкових повних і часткових і їх ґеометричне застосованє та рахунок ріжниць; в лекциях 59. до 62. є поданий рахунок варияцийний. — В кінци подана збірка важнїйших формул з цїлої книжки.

Извѣстія физико-математическаго общества при императорскомъ казанскомъ университетѣ.

Вторая серія томъ IX. містить в собі: Випуск третий (Казань 1899): I. А. А. Марковъ: Отвѣтъ. Д. М. Синцовъ: Объ аналитическомъ параллелограммѣ Лагранжа-Ньютона. М. А. Грачевъ: О способѣ M. G. Bigourdan'a опредѣленія широты. II. Лѣтопись физ.-мат. Общества і научная хроныка. — Приложенія: 1) Памяти Софуса Ли. (Ту поміщений через Синцова спис усїх праць Ли.). 2) А. Котельниковъ: Проэктивная теорія векторовъ (вступ).

Випуск четвертий (Казань 1900): I. Д. Селивановъ: Объ уравненіяхъ, имѣющихъ всѣ корни вещественными. II. Лѣтопись физ.-мат. Общества і научная хроника. — Приложеніе: Д. Синцовъ: Bibliographia mathematica rossica (1898). Объявленія.

Вторая серія томъ X. містить в собі: Випуск перший (Казань 1900): I. W. H. L. Janssen van Raay: Opinions de quelques géométres hollandais sur la théorie des parallèles et sur la géometrie non-euclidienne. И. И. Аристовъ: Объ итераціи функцій. P. S. Poretzky: Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques. II. Лѣтопись физ.-мат. Общества. М. Леви: О трудахъ Евгенія Бельтрами. Объявленія.

Записки императорскаго харьковскаго университета подають слїдуючі статії:

Рік 1900 книга 2. Результаты наблюденій метеорологической станціи за 1899 г. В. Я. Данилевский: Изслѣдованія надъ физіологическомъ дѣйствіемъ электричества на разстояніи (ст. 97 - 208).

Книга 3. Результаты наблюденій метеорол: за 1899 г. В. Я. Данилевский: як висше (ст. 209—280).

Университетскія извѣстія (Кіевъ) подають між иньшими:

Nr. 3.: Наблюденія метеорологической обсерваторіи (юль-декабрь 1897). (ст. 1—44). Г. Сусловъ: Основы аналитической механики (ст. 145—176). Н. Бунге: Курсъ химической технологіи 1173—1210).

Nr. 4. (апрѣль): Г. Сусловъ: Основы аналитической механики (177 — 240). Н. Бунге: Курсъ химической технологіи (1211—1242).

Физико-математическія науки въ ходѣ ихъ развитія (журналъ исторіи, философіи і бібліографіи физико-математическихъ наукъ) издаваемый В. В. Бобынинымъ. Том первий — Nro. 1.

Основнія задачи теоріи дифференціяльныхъ уравненій. А. П. Пшеборскаго. Є то габілїтацийний виклад автора, в котрім подає розвій науки о функциях, як також деякі теореми.

Баронъ Плана. Очеркъ єго профессорской и учено-литературной дѣятельности; критика і бібліоґрафія.

Nr. 2. Второй международный съѣздъ математиковъ в Парижѣ в 1900 году. Первий русскій математическій журналъ. Критика і бібліоґрафія.

Nr. 3. Баронъ Плана. Очеркъ єго профессорской и учено-литературной дѣятельности (окончаніє). Первый русскій математическій журналъ (продолженіє). Юбилей г. дра Морица Кантора. Критика і бібліоґрафія.

Nr. 4. Второй международный съѣздъ математиковъ въ Парижѣ въ 1900 году. Матеріялы для Исторіи математической журналистики въ Россіи. Первый математическій журналъ научнаго характера. Критика і библіографія.

Sbornik Jednoty Českych Mathematiků v Praze. Čislo 1. Projektivná geometrie základných útvarů prvniho řádu. Napsal Eduard Weyr. v Praze 1898. ст. VIII+189.

Книжка ся складаєсь з 12 розділів. Містить она в собі виклад ґеометриї проєктивної або, як єї також називають, синтетичної, яку розвинули Staudt, Reye, Poncelet, Chasles, Steiner та пок. Омелян Weyr. З теориї жмутів простих та пунктів, з теориї ангармонічного поділу та інволюциї, проєктивних та перспективних метів виведені є ту усі важнійші тверджена нової ґеометриї. Теория бігунових, теория кривих другого степеня (взглядно другої кляси), тверджена Pascal'a, Brianchon'a, Desargues'a, теория гіпербольоіди та гіперболічної парабольоіди та їх построєнє при помочи жмутів точок та простих, є ту представлена дуже наглядно та елеґантно. А коли додамо до сего гарний вигляд зверхний та красні фіґури, то можем сказати, що книжка ся вповні відповідає цїли яко дуже добрий підручник до пізнаня метод синтетичної ґеометриї.

Вийшли з друку:

Rudolf Mewes. Licht-, Elektrizitäts- und X-Strahlen (2 Aufl. Berlin, Fischers technologischer Verlag, M. 1·50).

Rudolf Mewes. Die elementare Physik des Äthers (Kraft und Masse). 2 Theile. (Berlin ibidem). M. 5.

A. Righi. Die Optik der elektrischen Schwingungen (übers. von B. Dessau). Leipzig M. 6.

W. Weiler. Wörterbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Leipzig. M. 12.

H. Burkhardt. Funktionentheoretische Vorlesungen. 2 Theil. (Elliptische Functionen), Leipzig, Veit u. Co. 10 M.

L. Fuchs. Bemerkungen zur Theorie der associierten Differentialgleichungen. Berlin, Reimer.

M. Hamburger. Über die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung. Berlin, Reimer.

H. Dörrie. Das quadratische Resiprocitätsgesetz im quadratischen Zahlkörper mit der Klassenzahl 1. Göttingen. M. 2·40.

F. Schilling. Über neue kinematische Modelle sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Kurven. Halle M. 1·20.

Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Photographische Himmelskarte. Zone $+31^0$ bis $+40^0$ Deklination. I. Bd. Leipzig Engelmann. M. 25.

L. Boltzmann. Vorlesungen über Gastheorie. 2 Theil. Leipzig. J. A. Barth. M. 7.

F. Richarz. Neuere Fortschritte auf dem Gebiet der Elektrizität. Leipzig. B. G. Teubner. M. 1·15.

C. Schultz. Die Ursachen der Wettervorgänge. Wien. Hartleben. M. 2.

Виходить в зошитах Handwörterbuch der Astronomie. Breslau, Trewendt (зошит à M. 3·60; дотепер 20 зошитів).

В книгарні Gauthier-Villars (Paris, Quai des Grands-Augustins 55) вийшли послїдними часами слїдуючі книжки:

J. J. Thomson: Les décharges électriques dans le gaz (traduit par L. Barbillon), Paris 1900	5 fr.
E. Rouché et Ch. de Comberousse: Traité de Géométrie (I. partie — Géométrie plane, II. partie — Géométrie dans l'espace), Paris 1900	17 „
E. Spée: Région b-f du spectre solaire	40 „
F. Tisserand: Traité de Mécanique céleste (4 volumes) Tome I. 1889, Tome II. 1891, Tome III. 1894, Tome IV. 1896	103 „
P. Appell: Traité de mécanique rationnelle:	
Tome I. — Statique, dynamique du point, 1893	16 „
Tome II. — Dynamique des systèmes, Mécanique analytique 1896	16 „
Tome III. — Équilibre et mouvement des milieux continus 1900	15 „
E. Gérard: Leçons sur l'electricité:	
Tome I. 1899	12 „
Tome II. 1900	12 „

E. Gérard: Traction électrique. 1900 . . . . 3·50 fr.

E. Rouché et L. Lévy: Analyse infinitésimale a l'usage des ingénieurs:
Tome I. 1900 (VIII+557) . . . . 15·— „
Tome II. (sous presse)

L. Lévy: Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques, 1898 . . . . 7·50 „

F. Michel: Recueil de problèmes de géométrie analytique. 1900 6·— „

M. d'Ocagne: Traité de Nomographie; théorie des Abaques. 1899 (8⁰, 480 pp.) . . . . 14·— „

M. Servant: Essai sur les séries divergentes (4⁰, 59 pp.)

A. Witz: Thermodynamique, à l'usage des ingénieurs . . . 2·50 „

H. Fehr. Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géometrie infinitésimale. (Paris. Carré et Naud). 1899, 8⁰, 94 pp.

H. Poincaré: Cinématique et mécanismes. (Paris. Carré et Naud) 1889, 8⁰, 385 pp. 15 fr.

A. Turpain: Rechérchés expérimentales sur les oscillations électriques. (Paris. Hermann). 6 fr.

Вийшли в друку:

В. И. Курдюмовъ. Курсъ начертательной геометріи. Отд. I. II. Спб. 8⁰ 404 ст. Ц. 3 р. 50 к.

П. П. Гравс. О построеніи кривыхъ третьей степени. Казань. 8⁰. 400 ст. Ц. 4 р.

А. П. Котельниковъ. Проэктивная теория векторовъ. Казань. 8⁰. ст. 112.

В. Шиффъ. Сборникъ упражненій и задачъ по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ. Ч. I. Спб. 8⁰ ст. 326. Ц. 2 р.

П. К. Соколовъ. Метода аритметики. Спб. 8⁰ IV+136. Ц. 60 к.

В. Арбузовъ. Сборникъ аритм. задачъ для учениковъ средн. учебн. зав. Москва. 8⁰ ст. 85. Ц. 50 к.

Г. Лоренцъ. Элементы высшей математики (перев. В. И Шереметевскаго). Т. I. Москва. 12⁰ ст. 747. Ц. 3 р.

(Записано в „Bibliographia mathematica rossica“ за рік 1898., видаваної казаньским „Физико-математическим обществом; сей випуск вийшов в р. 1899. під редакциєю Д. Синцова).

А. Ивановъ. Теорія прецессіи. Спб. 1899. 8° ст. 123.

І. Косоноговъ. Атмосферное электричество и земной магнетизмъ. Кіевъ, 1899. 8°, 180 ст.+6 таблиць.

О. Д. Хвольсонъ. Курсъ физики. Т. III. Ученіе о теплотѣ. Спб. 1899. 8°, 682 ст. Ц. 5 р.

П. Л. Чебышевъ. Сочиненія, изданныя подъ ред А. А. Маркова и Н. Я. Сонина. Т. І. 8°, ст. 720. Спб. Ц. 7 р.

Г. Шульгинъ. Мореходная астрономія. 8°, ст. 520+2 карты. Спб.

Е. Пржевальскій. Аналитическая геометрія и собраніе задачъ изъ анал. геометріи Изд. 4. 8", ст. 340. Ц. 2 р.

Н. И. Лобачевскій. Біографическій очеркъ. Спб. ст. 56. Ц. 15 к.

С. Гуржеевъ. Прикладная механика. Изд. 3. Спб. 8°. X+446 ст.

А. Л. Корольковъ. Лекціи по электротехникѣ. Спб. ст. 365. Ц. 2 р. 50 к.

Вийшов VIII. том, часть II. звісного журнала бібліоґрафічного „Revue semestrielle des publications mathématiques“ (Amsterdam, Delsman en Nolthenius 1900).

---

23. серпня 1899 р. обходив знаний історик математики Д-р. Мориц Кантор, б. професор гейдельберского університета, 70. лїтну річницю своїх уродин. Єго приклонники відсьвяткували се торжество виданєм великого тома „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik“ яко додаток до журнала „Zeitschrift für Mathematik u. Physik“, видаваного під редакциєю Кантора. В виданю сего тома взяли між иньшими участь: московский професор Бобинин, Дікштайн, Eneström, Curtze, Loria, F. Meyer, Rudio, Tannery, Wertheim і и. — Найбільша заслуга Кантора почиває в виданю (побіч множества дрібнїйших праць) величавої працї „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“, виданої в Липску фірмою B. G. Teubner; праця ся вийшла в трох томах та обнимає історию математики від найдавнїйших часів до р. 1759.

В перших днях червня 1899 р. обходив 50-лїтний ювілей славний математик і фізик англїйский Жорж Стокс (Stokes) в Кембрідж (Cambridge).

Звізда першої величини α Aurigae (Capella), як ствердив W. Campbell в обсерваториї Licka і Newall в Cambridge (Анґлїя) при помочи обсерваций спектроскопійних, є звіздою подвійною. Як ствердили далї обсервациї ріжних обсерваторів від цьвітня до червня сего року, час обігу сего системы виносить 104 днїв, отже $3^1/_2$ оборотів в протягу нашого року; є се обіг найскорший з обігів пізнаних до тепер звізд подвійних. Віддаленє обох складових звізд є меньше більше таке, як Землї і Сонця, а маса цїлого системы майже сїм разів більша як маса Сонця.

(Comptes Rendus de l'académie Paris 1900)

Дня 23. червня 1900. відкрив Borelly в обсерваториї в Марсилїї нову комету; комета та представляла ся яко звізда 6—7 величини, єї ядро величини 9·5—10.

Основну розвідку про систем звізди Сірюс на основі найновійших обсервацийй Burnhama, Aitkena і Keelera в обсерваториї Lick'a подає H. I. Zwiers в „Proceedings of the section of sciences“ амстердамскої академії наук (том II. 1900 ст. 6—19).

Обсервуючи при помочи гелїометра три планетоіди Вікторию, Іріс і Сапфо на розї Доброї Надії, одержав Gill слїдуючі дати для паралякси сонця:

Вікторня: 8·8013″ ± 0·0061″
Іріс: 8·7981″ ± 0·0114″
Сапфо: 8·8120″ ± 0·0091″

отже пересїчно: 8·8038″ ± 0·046″. Яко послїдний вислїд приймає Gill: 8·802″ ± 0·005.

Абсолютна міра часу. Секунда, акої уживає ся до міреня одиниції часу, є $\frac{1}{86400}$ частию часу між одною а другою кульминациєю сонця; не є се отже абсолютна незмінна одиниця часу. Тому то G. Lippmann радить ужити ґравітациї до визначеня абсолютної одиниції часу. А іменно наколи за одиницю маси возьмем масу о обємі рівнім шестистінникови з гранкою = 1, а о густоті = 1 (густота води при 4° C), то одиницею часу буде час, якого та маса потребує, щоби тїлу в віддаленю = 1 надати прискоренє рівне одиниції. Наколи за одиницю маси возьмем ґрам, за одиницю довгости центіметер, то після сказаного одиниця часу буде рівнати ся 3862 секунд або $1^h\ 4^m\ 22^s$. Така одиниця не залежить від вибраної одиниці довгости.

(Zeitschrift f. physik. u. chem. Unterricht 1900).

Berthelot аналїзував вироби золоті, що походять з гробів староегипских; з аналізи випало;

проби з часів VI. династиї мають:

Au	92·3	92·2
Ag	3·2	3·9
материй орґанічних	4·5	3·9

Pb, Cu, Fe анї слїду.

проби з часів XII. династиї мають:

Au	90·5
Ag	4·5
материй орґанічних	5·0

проби з часів перских мають золота 99·8.

Значить ся Египтияне експлюатували до виробів давнїйше просте золото питоме, яке все має примішки срібла, а доперва в часах перских навчили ся відділяти золото від срібла.

(C. rendus 1900).

D. Berthelot означив на ново точку кипіня для цинку і кадму; з пять обсерваций випало для цинку 920°, для кадму (трох обсервацций) 778°C. Після нових обчислень нїмецкого хемічного товариства тягар атомовий кадму є 112·4.

G. Hinrichs обчисляє (Comptes rendus de l'acad. Paris 1900) склад атмосфери до єї границь; в тій цїли приймає він, що кождий складник воздуха творить для себе атмосферу независиму від иньших складників, а тодї на основі форми Ляпляса:

$$\log \frac{P}{p} = \frac{H}{K}$$

де p є тисненєм для кождого ґазу, H висота в міряметрах, K (стала) $= \frac{1·8400}{D}$, (де D є густота ґазу) дістає слїдуючий склад воздуха в напрямі прямовіснім:

	в $^0/_0$ на 100				
Високість в 10^4 m	CO_2	O	A (арґон)	N	H
0.	0·03	21·00	1·20	77·75	0·02
1.	0·02	18·43	0·75	80·74	0·06
2.	0·01	16·07	0·46	83·26	0·20
3.	0·00	13·90	0·28	85·18	0·64
4.	—	11·86	0·16	85·94	2·04
5.	—	9·83	0·12	83·94	6·11
6.	—	7·52	0·00	75·54	16·94
7.	—	4·7	—	56·20	39·1
8.	—	2·2	—	31·00	66·8
9.	—	0·7	—	12·9	86·4
10.	—	0·3	—	4·6	95·1

3рб

ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСКОЇ СЕКЦИЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

Т. VII. — Випуск II.

ЧАСТЬ МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНА

під редакциєю

ІВАНА ВЕРХРАТСКОГО і Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦКОГО.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SECTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

B. VII. — Heft II.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHER THEIL

REDIGIRT VON

JOHANN VERCHRATSKYJ u. Dr. VLADIMIR LEVYCKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1901.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарского.

ЗМІСТ.

INHALT.

ТЕОРИЯ ПЕРСТЕНЯ САТУРНА.

написав

Володимир Левицкий.

1. Одною з найцїкавійших прояв в нашій системі сонїчній є безперечно планета Сатурн. Величезна ся планета, віддалена від сонця в перігелїюм 1345 мілїонів, а в афелїюм 1504 мілїонів кільометрів, є по Юпітері найбільшим тїлом нашої системи; єї промір рівниковий виносить 119.300, а промір, що лучить оба бігуни 106.000 кільометрів. Поверхня Сатурна є проте яких 80, а обєм яких 730 разів більший, як відповідні елєменти Землї. Єго маса є 92 рази більша від маси Землї, за се густота є ледви $\frac{1}{8}$-ою густоти земскої, або 0·7, наколи густоту води положимо = 1. Єго обіг сидеричний докола сонця треває 29 лїт 166 днїв 23 годин 40 мінут, єго оборот докола оси треває лиш $10^h\ 29^m\ 17^s$. — Докола него кружить аж вісім місяців; з них найбільший Тітан, відкритий єще в р. 1655 через Huyghens'a, найменьший Гіперион, відкритий доперва в р. 1848 через Bond'a і Lassell'a.

Но найважнїйшою та найбільше інтересною прикметою Сатурна, якої нїяке друге зі знаних тїл небесних не має, є великий перстень, а зглядно систем перстенів, який уносить ся зовсїм свобідно в площи рівниковій планети. Вже Galilei постеріг в р. 1612 через люнету, яку що йно винайдено, що Сатурн має вид еліптичний або овальний і думав, що ся планета складає ся з трох злучених з собою тїл[1]; два з них після єго гадки були місяцями.

---

[1] Пор. пр. Littrow: Wunder des Himmels, ст. 484.

Дальші обсервациї Gassendi'го, Hevelius'а та Єзуіта Riccioli'ого над тим цікавим видом Сатурна не принесли нічо нового, аж доперва в р. 1659 розпізнав Huyghens, що докола Сатурна находить ся зовсім свобідний перстень овального виду. Пізнїйше в р. 1675 постеріг Cassini, що сей перстень складає ся властиво з двох перстенів співосередних з Сатурном, відділених від себе темною просторонию; ту темну просторонь названо опісля ділом Cassini'ого. В середині XIX столітя відкрито еще між ділом Cassini'ого а вніщним берегом перстеня еще один діл, який названо ділом Encke, а в пізнїйших часах бачили деякі астрономи, як Kater, Jakob, Bond, Struve і и. вузонькі, делїкатні співосередні лінїйки, так що видає ся, мовби перстень не був одноцїльним, лиш системом більшого числа перстенів.

Кромі того відкрив в р. 1850 Bond еще один, темний перстень між внутрішним ясним перстеньом а планетою; сей темний перстень є о стільки цїкавий, що після обсервацйй Dawes'а і Lassell'а є він прозрачний, так що через него видко кулю Сатурна. O. Struve бачив в р. 1851 в тім темнїм перстеню слїди дїлу, який пізнїйше зникнув, так що здає ся, мовби в перстеню Bond'а заходили еще якісь великі зміни. Сам Dawes приймав, що перстень Bond'а находить ся еще в станї плиннім. — В кінци треба примітити, що новійші обсерватори, як Schwabe, Harding, Herschel, South, Schiaparelli, Meyer і и. приймають, що ті перстені не лиш не є з Сатурном співосередні, але навіть самі з собою.

Розміри поодиноких перстенів є в приближеню ось такі[1]) (пор. фіґ. I; на тій фіґурі є лиш ясний перстень вніщний і внутрішний та діл Cassini'ого ED):

AF	вніщний луч вніщного перстеня	138.400	Km.
AE	внутрішний луч вніщного перстеня	121.900	„
AD	вніщний луч внутрішного перстеня	119.800	„
AC	внутрішний луч внутрішн. перстеня	89.800	„
AB	луч рівниковий Сатурна	62.100	„
EF	ширина вніщного перстеня	16.600	„
CD	ширина внутрішного перстеня	29.700	„
ED	ширина дїлу Cassini'ого	3.100	„
FC	ширина обох ясних перстенів	46.000	„
CB	ширина відступу між темним перстенем а Сатурном	27.700	„
	ширина темного перстеня	13.000	„

---

[1]) Пор. Weinek u. Schweiger-Lerchenfeld: Atlas der Himmelskunde, ст. 194.

Після точних помірів [1]), наколи назначимо луч Сатурна AB = r, дістанемо:

$$AF = 2{\cdot}23\ r, \qquad AC = 1{\cdot}48\ r.$$

Грубість перстеня є невелика, бо ледви 300 кільометрів, а маса его ледви виносить $\frac{1}{118}$ маси Сатурна. — Цїлий сей систем обертає ся докола Сатурна — як вказують обсервацві деяких замітних точок перстеня, роблені через Herschel'а, протягом $10^2/_5$ годин, отже около 0·44 дня земского. Після обсерваций Hall'а і Holden'а нахилене перстеня до еклїптики виносить 28°, а довгість вступаючого узла в еклїптицї є тепер 167°.

Перстень з причини висше наведеного нахиленя не все однако ся нам представляє; в певних положенях планети в его дорозї переходить площа перстеня через сонце і майже через землю; вид елїптичний зникає, а перстень представляє ся лиш в найлїпших телескопах яко дуже тонька лїнїя. В иньших положенях видко раз північну, раз полудневу площу перстенів; а еще дальше перстень вітворює ся для ока так широко, що покриває цїлком відповідну бігунову околицю планети. Систем перстенїв зникає для ока зовсїм, наколи сонце находячи ся в площи перстеня осьвічує лиш вузонький его берег, або наколи сонце осьвічує північну (полудневу) площу перстеня, а наше око дивить ся на полудневу (північну) площу перстеня.

Давнїйші постереженя Schröter'а, мовби перстень мав атмосферу та гори високі на 1.500 Km., показались невїрними. А наколи додамо еще, що після дослїдів Huggins'а дуговина перстеня анї на волос не ріжнить ся від дуговини Сатурна, яка знова після астрофізичних обсервацній в Почдамі є така сама як дуговина сонця, то будемо мали в загальних начерках все, що нам дає безпосередна обсервация перстенів.

2. Остає тепер квестия істоти перстенїв. Поминаючи сучасну Huyghens'ови гіпотезу Roberval'а, що перстень повстав через пари, які з поверхнї Сатурна виходять, гіпотезу Maupertuis, що перстень є останком хвоста якоїсь комети, далї гіпотезу, що се є атмосфера Сатурна, та иньші, які основують ся на більше або меньше фантастичних здогадах, перейдем до вислїдів чисто математичних, які принесли своїм творцям велику славу та подив наукового сьвіта. Ті вислїди Laplace'а, Maxwell'а, Poincaré та Софії Ковалевскої буду старав ся представити в моїй моноґрафії; лучать ся они з собою в безпрерывній звязи, так що одних без других годї трактувати.

---

[1]) Пор. F. Tisserand: Traité de mécanique céleste II. ст. 116.

Своєю елеґанциєю, прозорим та ясним способом розслїджуваня найтяжших проблемів механїки неба стали ті досліди вповнї клясичними; докинути до них по Poincaré'м єще щось нового майже неможливо, так що нинї теорию перстенів Сатурна можем уважати за викінчену. Тому то я приняв ся дуже вдячного завданя получити ті докази в одну цїлїсть, щоби дати читачам спроможність пізнати їх і подивляти ті глубокі методи, які позволили без обсерваций вглянути і розслідити природу одного з найтемнїйших феноменів вселенної.

З розслідів тих виходить, що перстень будучий в руху обороговім не може остояти ся в рівновазї, єсли приймем, що він є цїпкий, плинний або ґазовий, а до того однородний. В виду того стаєсь дуже імовірна гіпотеза Maxwell'a, що перстень складає ся з самих дрібних сателїтів (місяцїв), які кружать густою масою докола Сатурна так, що в нашім оцї творить ся вражінє тяглости; Maxwell перевів доказ, що такий систем може находити ся в тревалій рівновазї. Новійші обсерваций потверджують гіпотезу Maxwell'a.

Важнїйша лїтература про рівновагу тїл оборотових загально, а перстеня Сатурна специяльно, є ось така:

Laplace. Traité de mécanique céleste. II. 155. et sqts. (виданє з р. 1799).

Matthiessen. Über die Gleichgewichtsfiguren frei rotirender Flüssigkeiten. Kiel 1857.

Matthiessen. Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten, etc. Kiel 1857.

Matthiessen. Über Systeme kosmischer Ringe von gleicher Umlaufszeit als discontinuirliche Gleichgewichtsformen frei rotirenden Flüssigkeitsmasse. Leipzig 1865.

Maxwell. On the stability of the motion of Saturn'srings. Cambridge 1859.

Thomson u. Tait. Treatise on Natural Philosophy; 2. виданє т. I. ч. II. ст. 332 et sqts.

Poincaré. Bulletin Astronomique t. II. i Sur l'equilibre d'une masse fluide etc. (Acta mathematica t. VII. 259 et sqts.).

S. Kowalewski. Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnringe (Astronomische Nachrichten Bd. CXI. 1885).

Riemann. Über das Potential eines Ringes (Gesammelte Werke 407).

Hirn. Sur les conditions d' équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne. 1872.

G. H. Darwin. On figures of equilibrium of rotating masses of fluid (Philosophical Transactions 1887).

Basset. On the steady motion of an annular mass of rotating liquid (American Journal of Mathematics t. XI. 1889).

Надто росийска робота Лапунова про рівновагу елїпсоіди з р. 1884; зміст поданий через Radau в Bulletin astronomique; далї працї Radau і Callandreau в Bulletin astronomique том III, а врештї знаменитий підручник: F. Tisserand: Traité de mécanique céleste в чотирох томах, де теория перстеня Сатурна систематично представлена становить в великій мірі вихід нашої моноґрафії раз через змодернїзоване деяких давнїйших рахунків, а в друге через много ориґінальних гадок і способів аналїзи математичної.

По сих вступних увагах переходимо до властивої материї нинїшної розвідки.

Теория Ляпляса.[1])

1. Ляпляс приймає, що перстень Сатурна є коловий та співосередний з самою планетою, що складає ся з плинних та однородних частних перстенїв, та що відступ таких частних перстенїв є достаточно великий, так що можна зовсїм понехати взаїмне їх дїлане на себе. Приймає він дальше, що кождий з тих частних перстенїв повстав через оборот замкненої фіґури пр. елїпси докола планети; рух сей є одностайний та відбуває ся докола оси прямовісної до середного (рівникового) перекрою планети. Кожда точка поверхнї такого частного перстеня находить ся під дїланем трох сил, а се: притяганя Сатурна, притяганя цїлого перстеня та сили відосередної. Ляпляс шукає условин рівноваги перстеня в виду таких трох сил та форми (виду) перстенїв.

Най же буде перекройом полуденниковим одного такого частного перстеня елїпса AA′ BB′ (фіґ. II.) о півосях a і b. Вісь OX // AA′ най буде осию обороту сеї елїпси, а O середоточка Сатурна, де цїла его маса M є сконцентрована. Відступ OC = l, а сорядні якоїсь точки P на поверхнї перстеня є OR = ξ, RN = η, або коли положимо CS = x, SP = y, то:

$$\xi = x, \ \eta = l + y.$$

Наколи складові притяганя Сатурна на точку P є X_1 Y_1, складові притяганя перстеня на точку P є X_2, Y_2, а скорість кутова

---

[1]) Пор. Laplace: Traité de mécanique céleste II. ст. 155 et sqts; рік 1799.

ω (отже сила відосередна в віддаленю = 1 є ω^2, у Ляпляса g), то рівнане ріжничкове для рівноваги поверхні є [1]:

$$(X_1 + X_2)\, d\xi + (Y_1 + Y_2 + \omega^2\eta)\, d\eta = 0 \qquad 1)$$

Коли абстрагуєм від сплощеня Сатурна, то:

$$X_1\, d\xi + Y_1\, d\eta = f\, d\, V,$$

де f є чинник атракциї, а V потенциял притяганя Сатурна, а що:

$$V = \frac{M}{r},$$

то:

$$X_1\, d\xi + Y_1\, d\eta = f\, M\, d\left(\frac{1}{r}\right);$$

а що далї:

$$r = 0P = (l + y)^2 + x^2,$$

то:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2y}{l} + \frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{l} - \frac{y}{l^2} + \frac{y^2}{l^3} - \frac{x^2}{2\,l^3},$$

наколи пропустимо $\left(\frac{x}{l}\right)^3, \left(\frac{y}{l}\right)^3, \cdots\cdots$ яко дуже малї вирази. Тодї:

$$X_1\, d\xi + Y_1\, d\eta = fM\left[\left(\frac{2y}{l^3} - \frac{1}{l^2}\right) dy - \frac{xdx}{l^3}\right] \qquad 2)$$

Ляпляс приймає, що віддалене l є дуже велике в порівнаню з a і b, а кромі сего заступає притягане перстеня на точку P притяганєм безконечно довгого вальця о підставі елїптичній AB A'B', стичного до перстеня в точцї B і B', а о густоті ρ такій самій як перстень (пор. фіґ. II). Части E і E' можуть заступити дїлане частий F і F' перстеня, а дїлане дальших частий перстеня і так малїє надзвичайно з віддаленєм. Тодї складові X_2 і Y_2 дїланя перстеня можна заступити відповідними складовими дїланя безконечного вальця, а що ті складові є [2]:

$$X_2 = -4\,\pi\, f\, \rho\, x\, \frac{b}{a+b}, \quad Y_2 = -4\,\pi\, f\, \rho\, y\, \frac{a}{a+b},$$

а далї:

$$dx = d\xi,\ dy = d\eta, \qquad \omega^2\eta\, d\eta = \omega^2\,(l+y)\, dy,$$

проте рівнане 1) перейде на:

$$\left(\frac{fM}{l^3} + 4\pi f\rho\frac{b}{a+b}\right) xdx + \left(\frac{fM}{l^2} - \omega^2 l\right) dy + \left(4\pi f\rho\frac{a}{a+b} - \frac{2fM}{l^3} - \omega^2\right) ydy = 0. \qquad 3)$$

---

[1] Пор. пр. Franke: Mechanika teoretyczna, ст. 516.

[2] Пор. Tisserand: Traité de mécanique céleste II. ст. 54; також Laplace loc. cit. II. 160.

Рівнане перекрою перстеня є:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

або:

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} = 0,$$

отже рівнане 3) перейде на:

$$a^2\left(\frac{M}{l^3} + 4\pi\rho\frac{b}{a+b}\right) = b^2\left[\left(\frac{M}{l^3} - \frac{\omega^2}{f}\right)\frac{1}{y} + 4\pi\rho\frac{a}{a+b} - \frac{2M}{l^3} - \frac{\omega^2}{f}\right].$$

Рівнане то сповняє ся для якогонебудь y, отже:

$$\omega^2 = \frac{fM}{l^3} \qquad 4)\;[1]$$

і:

$$a^2\left(\frac{M}{l^3} + 4\pi\rho\frac{b}{a+b}\right) = b^2\left(4\pi\rho\frac{a}{a+b} - \frac{3M}{l^3}\right)$$

або:

$$\frac{M}{4\pi\rho l^3} = \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)(3\lambda^2+1)} = e \qquad 5)$$

де за Ляплясом значимо $\frac{b}{a} = \lambda$. А що $e = \frac{M}{4\pi\rho l^3}$ є додатне, то мусить бути $\lambda > 1$, або $b > a$; перстень мусить бути проте конче сплощений.

$e = 0$ для $\lambda = 1, +\infty$; в границях $(1 \cdots\cdots \infty)$ є всегда $e > 0$, отже бодай раз maximum; для maximum мусить бути:

$$\frac{de}{d\lambda} = \frac{-3\lambda^4 + 6\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda - 1}{(\lambda+1)^2(3\lambda^2+1)^2} = 0$$

або:

$$3\lambda^4 - 6\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Рівнане се має два корені додатні, оден меньший від 1, другий 2·594......; можна взяти сей корінь більший, для якого перстень буде більше сплощений. Тодї $e = 0{\cdot}0543026$.

Наколиб:

$$e = \frac{M}{4\pi\rho l^3} > 0{\cdot}0543026,$$

тоби рівнане 5) не мало анї одного кореня додатного; для:

$$e < 0{\cdot}0543026 \qquad 6)$$

---

[1] Рівнане 4) показує, що скорість кутова перстеня є рівна скорости сателїта, віддаленого від середоточки Сатурна о луч перстеня.

є два корені додатні. — Наколи луч Сатурна є R, густота середна Сатурна ρ_0, отже єго маса:

$$M = \frac{4}{3} R^3 \pi \rho_0 ,$$

то з нерівности 6) вийде:

$$\frac{\rho}{\rho_0} > 6{\cdot}14 \left(\frac{R}{l}\right)^3 \qquad 7)$$

Тодї для внутрішної границї перстенів отже для $l = 1{\cdot}48 R$ є $\frac{\rho}{\rho_0} > 1{\cdot}89$

а „ вн**ї**шної „ „ „ „ $l = 2{\cdot}23 R$ є $\frac{\rho}{\rho_0} > 0{\cdot}55$,

значить ся, щоби перстень плинний однородний находив ся в сталій рівновазї, мусить єго густота при березї внутрішнїм бути майже два рази так велика, а при березї внїшнім майже через половину така, як густота Сатурна. — Густота перстеня є нам правда незвісна, но границї Ляпляса є абсолютно за великі, щоби перстень міг удержати ся в тім видї, в якім єго розслїджує Ляпляс.

До загальнїйших вислїдів доходить Tisserand [1]. Після теорема Poincaré [2] рівновага течи в якім будь ґеометричнім видї стаєсь неможлива, наколи:

$$\omega^2 > 2\pi f \rho.$$

Отже наколи возьмем $\omega^2 < 2\pi f \rho$, то після рівнаня 4) буде:

$$\rho > \frac{M}{2\pi l^3}, \qquad \text{або:}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} > \frac{2}{3} \left(\frac{R}{l}\right)^3,$$

отже для границї внутрішної $\frac{\rho}{\rho_0} > \frac{1}{4{\cdot}9}$, для границї внїшної $\frac{\rho}{\rho_0} > \frac{1}{16{\cdot}6}$;

як бачим перстень о густотї меньшій не мігби ся удержати в нїякім видї і розпав би ся з великою силою на части, з яких кожда обертала би ся сама для себе докола Сатурна.

2. Ляпляс доказує далї [3], що перстень однородний в тім видї, в якім він єго приймає, находив би ся в рівновазї хиткій, яку найменьший вплив може заколотити, а тодї перстень впав би на поверхню Сатурна. Єго доказ є слїдуючий.

---

[1] Пор. Tisserand loc. cit. II. 121.

[2] Bulletin astronomique II. 117.

[3] Laplace loc. cit. II. 164.

Приймім, що перстень є лїнїєю коловою о лучу r, котрої середоточка не сходить ся з середоточкою Сатурна, але через якийсь вплив внїшний зістала віддалена від середоточки Сатурна о відступ l. Вислїдна з притяганя того кола через Сатурн мусить переходити через просту l, яка лучить обі середоточки.

Наколи луч r творить кут φ з продовженєм лїнїї l, то притяганє Сатурна на елемент $r d\varphi$ перстеня (рівнобіжне до l) буде:

$$-\frac{d}{dl}\int_{0}^{2\pi}\frac{M\,d\varphi}{\sqrt{r^2+l^2+2rl\cos\varphi}}=F.$$

А що:

$$(r^2+l^2+2rl\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r}\left(1+\frac{l}{r}e^{\varphi i}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{l}{r}e^{-\varphi i}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

то наколи розвинемо:

$$\left(1+\frac{l}{r}e^{\varphi i}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\alpha_1\frac{l}{r}e^{\varphi i}+\alpha_2\frac{l^2}{r^2}e^{2\varphi i}+\cdots\cdots$$

$$\left(1+\frac{l}{r}e^{-\varphi i}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\alpha_1\frac{l}{r}e^{-\varphi i}+\alpha_2\frac{l^2}{r^2}e^{-2\varphi i}+\cdots\cdots$$

і ти чинники помножимо, дістанемо:

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{r^2+l^2+2rl\cos\varphi}}=\frac{2\pi}{r}\left(1+\alpha_1^2\frac{l^2}{r^2}+\alpha_2^2\frac{l^4}{r^4}+\cdots\cdots\right),$$

а з відси:

$$F=-\frac{4\pi M l}{r^3}\left(\alpha_1^2+2\alpha_2\frac{l^2}{r^2}+\cdots\cdots\right)$$

F остає від'ємне для якогонебудь l; значить ся середоточка перстеня віддаляє ся від середоточки Сатурна і якийби був рух зглядний обох тих середоточок, крива, яку рух сей описує, є вигнута ку Сатурнови; середоточка перстеня мусить ся проте віддаляти що раз більше і більше від середоточки планети, аж єго обвід зіткне ся з поверхню Сатурна.

А що перстень однородний в усїх своїх частях складає ся з безконечного числа таких колес, як се, що ми розслїджували, проте середоточка перстеня зіставалаби відпихана через середоточку Сатурна, наколиб лиш троха були від себе віддалені, і перстень скінчив би своє істнованє, бо спавби на поверхню Сатурна.

Звідси вносить Ляпляс, що понеже тепер перстень є в рівновазї, то частні перстенї мусять мати вид неправильний, а також між ними мусять заходити взаїмні дїланя, які ми в попередних розслїдах пропустили.

Теория Maxwella.[1]

1. Maxwell займає ся квестиєю цїпкого перстеня однородного, симетричного з огляду на площу, що переходить через точку тяжести S Сатурна (фіґ. III). Наколи C є середоточка тяжести перстеня, M маса Сатурна, M' маса перстеня, G середоточка тяжести Сатурна і перстеня разом, то S, C, G лежати мусять все в одній лїнїї простій. Наколи $SC = r$, то:

$$SG = \frac{M'}{M+M'}\, r, \qquad CG = \frac{M}{M+M,}\, r.$$

Найже в перстеню буде лїнїя BCB' незмінна, SX сталий напрям, $\sphericalangle XSC = \vartheta$, $\sphericalangle DCS = \varphi$, $\sphericalangle XDC = \vartheta + \varphi$.

Maxwell обчисляє скількість енерґії кінетичної 2T для перстеня і планети разом в руху зглянім докола точки G. Рух віднесемо до двох осий прямовісних GX і GY (GX // SX).

Енерґія складає ся з трох частий:

а) енерґії маси M т. є.

$$M\left[\left(\frac{d}{dt}\,\frac{M'r}{M+M'}\right)^2+\left(\frac{M'r}{M+M'}\right)^2\frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right].$$

б) енерґії маси M', що є сконцентрована в C, т. є.

$$M'\left[\left(\frac{d}{dt}\,\frac{Mr}{M+M'}\right)^2+\left(\frac{Mr}{M+M'}\right)^2\frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right].$$

в) енерґії перстеня в руху зглянім докола середоточки тяжести C; рух сей є оборотовий докола оси прямовісної в точцї C до площі рисунку. Енерґія ся є:

$$M'k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

де $M'k^2$ є момент безвладности перстеня зглядом сеї оси. Цїла енерґія є проте:

$$2\,T = \frac{MM'}{M+M'}\left(\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\,\frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right)+M'k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Наколи функция сил, що походить з дїланя маси M, зібраної в S, на ріжні точки перстеня, і взаїмних притягань перстеня, є fMV, то — так як V залежне є лиш від r і φ, що визначають положенє точки S з огляду на перстень, а від ϑ не залежить — дістанемо:

$$\frac{MM'}{M+M'}\,\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{MM'}{M+M'}\,r\,\frac{d\vartheta^2}{dt^2}=fM\,\frac{\partial V}{\partial r}$$

---

[1] Maxwell. On the stability of the motion of Saturn'srings. Cambridge 1859. Цїлий сей уступ є представлений після Tisserand'a loc. cit. II, бо самого твору Maxwella годї дістати.

$$M'k^2 \frac{d^2(\vartheta+\varphi)}{dt^2} = fM \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{MM'}{M+M'}\, r^2 \frac{d\vartheta}{dt} + M'k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\right)\right] = 0.$$

або:

$$\left.\begin{aligned} M'k^2 \frac{d^2(\vartheta+\varphi)}{dt^2} &= fM \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ M' \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt}\right) &= -\, f\,(M+M') \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ M'\left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\,\frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right) &= f\,(M+M')\,\frac{\partial V}{\partial r} \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

Наколи пропустимо взаїмне ділане перстеня на себе — бо оно від r і φ не залежить — то V є потенциялом перстеня в точці S.

Наколи приймем, що середоточка Сатурна зглядом перстеня не зміняє свого положеня, можемо наложити $r = r_0$ (const.), $\varphi = \varphi_0$ (const.) і відповідно $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0$. Тоді рівнане 1) дасть:

$$M'k^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = fM \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0$$

$$M'r_0{}^2 \frac{d^2\vartheta}{dr^2} = -\, f\,(M+M')\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0$$

$$-\,M'r_0 \frac{d\vartheta^2}{dt^2} = f\,(M+M')\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0$$

З відси слідує:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} = \omega\ (\text{const.}), \quad \omega^2 = -\, f\,\frac{M+M'}{M'r_0}\left(\frac{\partial V}{\sigma r}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0 = 0, \qquad \vartheta = \omega t \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Бачимо проте, що луч SC обертавби ся одностайно докола точки S і потягавби з собою ціпкий перстень, так що єго кожда точка оставалаби стало віддалена від S.

Очевидно, що такий рух в дійсности не істнує; для правдивого руху, де виступають ріжні заколоти, треба покласти:

$$r = r_0 + r_1, \qquad \vartheta = \omega t + \vartheta_1, \qquad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1,$$

де $r_0\ \omega\ \varphi_0$ характеризують яко сталі стан початковий, $r_1\ \vartheta_1\ \varphi_1$ представляють невеликі зміни в пересуненю так, що їх квадрати мож залишити; є они функциями змінної t, так що походні $\frac{dr_1}{dt}\ \frac{d\vartheta_1}{dt}\ \frac{d\varphi_1}{dt}$ є дуже малі. Тоді рівнаня 2) дадуть:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = - \frac{\omega^2 M' r_0}{f\,(M+M')} + H r_1 + K \varphi_1\,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = K r_1 + L \varphi_1\,,$$

де:

$$H = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_0, \qquad K = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial \varphi}\right)_0, \qquad L = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right)_0 \qquad 3)$$

Рівнаня 1) дадуть:

$$\left.\begin{aligned} & M'\left(2\omega r_0 \frac{dr_1}{dt} + r_0^2 \frac{d^2\vartheta_1}{dt^2}\right) + f\,(M+M')\,(K r_1 + L\varphi_1) = 0. \\ & M'\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \omega^2 r_1 - 2\omega r_0 \frac{d\vartheta_1}{dt}\right) + f(M+M')\,(H r_1 + K\varphi_1) = 0. \\ & M'\,k^2\left(\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}\right) - f M\,(K r_1 + L\varphi_1) = 0. \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Щоби ті рівнаня з'інтеґрувати, підставмо — як звичайно:

$$r_1 = A e^{\nu t}, \qquad \vartheta_1 = B e^{\nu t}, \qquad \varphi_1 = C e^{\nu t}$$

(A, B, C, ν сталі); по підставленю дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} & A\left[2\omega r_0 \nu M' + f\,(M+M')\,K\right] + B r_0^{\,2} \nu^2 M' + C f\,(M+M')\,L = 0. \\ & A\left[(\nu^2 - \omega^2)\,M' - f\,(M+M')\,H\right] - 2B\omega r_0 \nu M' - C f\,(M+M')\,K = 0. \\ & - A f M K + B k^2 \nu^2 M' + C\,(k^2 \nu^2 M' - f M N) = 0. \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Елїмінуймо з відси A, B, C, то дістанемо рівнане 6) степеня форми:

$$\nu^2\,(P\nu^4 + R\nu^2 + S) = 0 \qquad 6)$$

де:

$$7) \begin{cases} P = M'^2 k^2 r_0^{\,2} \\ R = 3M'^2 k^2 r_0^{\,2} \omega^2 - f M'\,(M+M')\,H k^2 r_0^{\,2} - f M'\left[(M+M')\,k^2 + M r_0^{\,2}\right] L \\ S = M'\left[(M+M')k^2 - 3M r_0^{\,2}\right] f L \omega^2 + f^2 (M+M')\left[(M+M')k^2 + M r_0^{\,2}\right](HL - K^2) \end{cases}$$

Понеже рівнане 6) має двократний корінь $\nu = 0$, проте треба взяти:

$$r_1 = A + A't, \qquad \vartheta_1 = B + B't, \qquad \varphi_1 = C + C't.$$

Наколи се вставимо в 4) і зрівнаєм до зера части сталі і сочинники при t, дістанемо:

$$A' = 0, \qquad C' = 0, \qquad C = -\frac{K}{L}\,A,$$

$$B' = \frac{A}{2\omega r_0}\left(f\,\frac{M+M'}{M'}\,\frac{K^2 - HL}{L} - \omega^2\right),$$

а тоді:

$$\left.\begin{aligned} r_1 = A, \qquad \varphi_1 = -\frac{K}{L}A, \\ \vartheta_1 = B + \frac{A}{2\omega r_0}\left(f\,\frac{M+M'}{M}\,\frac{K^2 -- HL}{L} - \omega^2\right)t \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

о двох сталих A і B.

Дальші короні рівнаня 6) є ν_1, $\nu_2 = -\nu_1$, ν_3, $\nu_4 = -\nu_3$, і для них дістанемо на інтеґрали рівнань 4) вартости:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= A_1\, e^{\nu_1 t} + A_2\, e^{\nu_2 t} + A_3\, e^{\nu_3 t} + A_4\, e^{\nu_4 t} \\ \vartheta_1 &= \lambda_1\, A_1\, e^{\nu_1 t} + \lambda_2\, A_2\, e^{\nu_2 t} + \lambda_3\, A_3\, e^{\nu_3 t} + \lambda_4\, A_4\, e^{\nu_4 t} \\ \vartheta_1 &= \mu_1\, A_1\, e^{\nu_1 t} + \mu_2\, A_2\, e^{\nu_1 t} + \mu_3\, A_3\, e^{\nu_3 t} + \mu_4\, A_4\, e^{\nu_4 t} \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

де є чотири сталі довільні і де: $\lambda_s = \frac{B_s}{A_s}$, $\mu_s = \frac{C_s}{A_s}$.

З получення рівнань 8) і 9) дістанемо загальні інтеґрали рівнань 4) з 6 сталими. Сталі A і B представити буде можна через r_0 ϑ_0 φ_0 і ω на основі рівнань 8) та реляций $r = r_0 + r_1$, $\vartheta = \omega t + \vartheta_1$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$. Иньші сталі найдем, наколи дамо на r, ϑ, φ, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ при $t = 0$ певні вартости дуже малі; тоді дістанемо і на A_1, A_2, A_3, A_4 дуже малі вартости, наколи корені ν_1 і ν_3 мають вид αi, отже коли $e^{\nu_1 t}$, $e^{\nu_2 t}$, $e^{\nu_3 t}$, $e^{\nu_4 t}$ перейдуть на $\sin\psi$ та $\cos\psi$. Наколиб однак корені були дїйсні, то ті функциї виложні рослиб без кінця, а так само колиб они мали вид $a + bi$, то в r, ϑ, φ виступалиби чинники періодичні, яких сочинники зрасталиб без кінця. Щоб отже обі вартости ν^2 в рівнаню $P\nu^4 + R\nu^4 + S = 0$ були дїйсні і від'ємні (отже ν_1 і ν_3 форми αi), мусить бути:

$$PR > 0, \qquad PS > 0, \qquad R^2 - 4PS > 0.$$

2. Приноровимо ту теорию тепер до перстеня колового ріжнородного о безконечно малих поперечних перекроях.

Най (фіґ. IV) O буде середоточкою перстеня, C середоточкою тяжести, $OC = h$, s луч перстеня, ψ змінний кут, ρ густота перстеня в точці N. Тоді після теориї Fourier'a:

$$\rho = \frac{M'}{2\pi s}\left(\alpha_0 + 2\alpha_1\cos\psi + 2\beta_1\sin\psi + \frac{2\alpha_2}{3}\cos 2\psi + \frac{2\beta_2}{3}\sin 2\psi + \cdots\cdots\right) \quad 10)$$

α_i β_i сталі.

Елемент маси в N є $\rho s d\psi$, отже: $\int_0^{2\pi} \rho s d\psi = M'$.

Після твердженя о моментах з огляду на вісь OC і просту прямовісну до OC (в точцї O) дістанемо:

$$\int_0^{2\pi} s^2 \rho \cos\psi d\psi = M'h, \qquad \int_0^{2\pi} s^2 \rho \sin\psi d\psi = 0.$$

Наколи в тих трох інтеґралах вставимо за ρ вартість 10) і з'інтеґруємо, дістанемо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{h}{s}$, $\beta_1 = 0$.

Щоби найти потенциял перстеня, зауважим, що момент безвладности перстеня з огляду на вісь прямовічну до єго площи в точцї O є $M's^2$; момент з огляду на вісь, до тамтої рівнобіжну в точцї C, є $M'k^2$, отже:

$$M's^2 = M'k^2 + M'h^2,$$

або:

$$k^2 = s^2 (1 - \alpha_1^2).$$

Най $OS = r'$, $NS = \Delta$, $\sphericalangle BOS = \psi'$, тодї:

$$\Delta^2 = s^2 + r'^2 - 2sr'\cos(\psi' - \psi),$$

а звідси — наколи пропустимо висші степені $\frac{r'}{s}$ — дістанемо:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{s} \left\{ 1 + \frac{r'}{s} \cos(\psi' - \psi) + \frac{r'^2}{4s^2} + \frac{3r'^2}{4s^2} \cos 2(\psi - \psi') \right\}.$$

В виду того потенциял перстеня в точцї S, який є рівний:

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho s d\psi}{\Delta}$$

буде:

$$V = \frac{M'}{s} \left[1 + \alpha_1 \frac{r'}{s} \cos\psi' + \frac{r'^2}{4s^2} (1 + \alpha_2 \cos 2\psi' + \beta_2 \sin 2\psi') \right],$$

а що:

$$r' \cos\psi' = h - r\cos\varphi, \qquad r' \sin\psi' = r \sin\varphi,$$

де: $\sphericalangle SCO = \varphi$, $SC = r$, то:

$$V = \frac{M'}{s} \left[1 + \alpha_1 \frac{h - r\cos\varphi}{s} + \frac{h^2 + r^2 - 2hr\cos\varphi}{4s^2} + \alpha_2 \frac{h^2 - 2hr\cos\varphi + r^2\cos 2\varphi}{4s^2} + \beta_2 \frac{2hr\sin\varphi - r^2\sin 2\varphi}{4s^2} \right] \quad 11).$$

Наколи приймем, що з самого початку середоточка перстеня є схожа з середоточкою Сатурна, тодї $\varphi_0 = 0$, $r_0 = h = \alpha_1 s$, $k^2 = s^2 (1 - \alpha_1^2)$; тодї з 11) випаде:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0 = -\frac{M'\alpha_1}{s^2}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0 = 0. \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_0 = H = \frac{M'}{2s^3}(1+\alpha_2) \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r\, \partial \varphi}\right)_0 = K = -\frac{M'}{2s^3}\beta_2 r_0 = -\frac{M'}{2s^2}\alpha_1 \beta_2 \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}\right)_0 = L = \frac{M'}{2s^3} r_0^2 \left(1-\alpha_2+\frac{2s}{r_0}\alpha_1\right) = \frac{M'}{2s}\alpha_1^2 (3-\alpha_2)\end{array}\right\} \quad 12).$$

Після рівнаня 2) є:

$$\omega^2 = f\,\frac{M+M'}{s^3},$$

тож коли ті всї вартости вставимо в 7), дістанемо:

$$\frac{P}{M'^2 s^4 \alpha_1^2} = 1 - \alpha_1^2$$

$$\frac{R}{M'^2 s^4 \alpha_1^2} = \omega^2 \left[1 - \alpha_1^2 - \frac{1}{2}\,\frac{M}{M+M'}\,\alpha_1^2 (3-\alpha_2)\right].$$

$$\frac{S}{M'^2 s^4 \alpha_1^2} = \frac{\omega^4}{4}\left\{(1-\alpha_1^2)(9-\alpha_2^2-\beta_2^2) + \frac{M}{M+M'}\alpha_1^2(-15+8\alpha_2-\alpha_2^2-\beta_2^2)\right\}.$$

Наколи з огляду на се, що $\frac{M'}{M}$ є дуже мале, положимо $\frac{M}{M+M'}=1$, діетанемо місто рівнаня $P\nu^4 + R\nu^2 + S = 0$ рівнане:

$$(1-\alpha_1^2)\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^4 + \left(1-\frac{5}{2}\alpha_1^2+\frac{1}{2}\alpha_1^3\alpha_2\right)\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2 + \frac{1}{4}(9-24\alpha_1^2-\alpha_2^2-\beta_2^2+8\alpha_1^2\alpha_2) = 0. \quad 13)$$

Наколи перстень є однородний, тодї густота є стала, отже $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0$; тодї $P = R = S = 0$, а рівнаня 5) дадуть:

$$\nu^2 = \omega^2 + f\,\frac{M+M'}{2s^3}$$

т. є. ν^2 булоб дїйсне і додатне, а з того — як уже знаєм — виходить, що перстень цїпкий однородний не може бути тревалий.

Наколи тепер приймем в рівнаню 13) $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ $(\alpha_1 \gtrless 0)$, дістанемо:

$$(1-\alpha_1^2)\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^4 + \left(1-\frac{5}{2}\alpha_1^2\right)\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2 + \frac{9}{4} - 6\alpha_1^2 = 0.$$

ν^2 мусить бути від'ємне, отже P, R, S мусять мати той сам знак; щоби се було, мусить: $\alpha_1^2 \angle 0{\cdot}375$, або $\alpha_1^2 \nearrow 1$.

Щоби вартости на ν^{2} були дійсні, мусить:

$$71\,\alpha_1^4 - 112\,\alpha_1^2 + 32 \angle 0$$

або:

$$0{\cdot}37473 \angle \alpha_1^2 < 1{\cdot}20273.$$

Щоби отже була рівновага, мусить бути $\alpha_1{}^2$ замкнене або в границях 0·37473 і 0·375, або в границях 1 і 1·20273. Но се неможливо, бо густота:

$$\rho = \frac{M'}{2\pi s}\,(1 + 2\alpha_1 \cos\psi)$$

має бути додатна для всяких ψ; тимчасом для $\psi = \pi$ випаде $2\alpha_1 < 1$, $\alpha_1{}^2 \angle 0{\cdot}25$, що ся з попереднім не годить.

Треба проте в рівнаню 13) взяти $\alpha_2 \gtrless 0$ і $\beta \lesseqgtr 0$ і пересьвідчити ся, чи можна визначити сталі $\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_2$ так, щоби чотири корені ν мали вид bi, а ρ було для всяких ψ додатне. Того случаю не розслідив Maxwell, зробив се Radau[1]). Після єго обчислень випадає на случай рівноваги:

$$1{\cdot}317 \angle 2\alpha_1 \angle 1{\cdot}397, \qquad 0{\cdot}32 \angle \frac{2}{3}\,\alpha_1 \angle 0{\cdot}60, \qquad \frac{2}{3}\sqrt{\beta_2^2} \angle 0{\cdot}068,$$

$$0{\cdot}66 \angle \frac{h}{s} \angle 0{\cdot}70.$$

Бачимо проте, що вартість беззглядна сочинника β_2 в формулі на ρ має бути дуже мала, сочинника α_2 много більша. З відси слідує, що густота ρ в ріжних місцях перстеня (для ріжних ψ) дізнавалаби наглядних змін, що є незгідне з обсервациєю.

Maxwell розсліджував далї перстень коловий однородний, обтяжений якоюсь масою в однім точцї; є єго розслїдів виходить, що щоби була рівновага, мусїлаби та додаткова маса бути дуже значна; середоточка тяжести цїлости булаби віддалена від соредоточки фіґури в границях 0·8158s і 0·8279s. Но обсервация перстеня не вказує такої неправильности, в виду чого гіпотеву цїпких перстенїв треба відкинути.

3. Коли ж в сей спосіб доказав Maxwell, що гіпотеза цїпкого перстеня є неімовірна, то тепер бере під увагу перстень, що складає ся з великого числа дрібних сателїтів P_1, P_2, P_3, ...; наколи їх є много, то витворюють вражіне тяглого перстеня.

---

[1]) Пор. Tisserand loc. cit. II. 131.

Наколи возьмем один з них пр. P_1 о масї m_1 то він остає під впливом Сатурна (маса M) і прочих сателїтів P_2, P_3, ... (маси m_2, m_3, ...). Наколи приймем, що рухи усїх сателїтів відбувають ся в однїй площи (xy), а x_1 y_1 R_1, x_2 y_2 R_2, ... є сорядні та функциї пертурбацийні поодиноких сателїтів, та коли залишимо дїланя сателїтів на Сатурна, так як ті дїланя взаїмно ся зносять, дістанемо:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + fM\frac{x_1}{r_1^3} = \frac{\partial R_1}{\partial x_1}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + fM\frac{y_1}{r_1^3} = \frac{\partial R_1}{\partial y_1}$$

$$R_1 = f\sum\frac{m_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}};$$

(сума відносить ся до всїх P_2, P_3, ...)
або в сорядних бігунових $(x_\nu = r_\nu \cos v_\nu,\ y_\nu = r_\nu \sin v_\nu,\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\left.\begin{aligned} r_1\frac{dv_1^2}{dt^2} - \frac{d^2r_1}{dt^2} - \frac{fM}{r_1^2} &= -\frac{\partial R_1}{\partial r_1} \\ r_1\frac{d^2v_1}{dt^2} + 2\frac{dr_1}{dt}\frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{r_1}\frac{\partial R_1}{dv_1} \end{aligned}\right\} \quad 14)$$

$$R_1 = f\sum\frac{m_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(v_2-v_1)}}.$$

Приймім, що сателїти є з початку розміщені в вершках правильного многокутника вписаного в коло о лучу a, то наколи їх є p, а відповідний кут середоточний (що відповідає кождому з боків многокутника) є 2ϑ, то:

$$\vartheta = \frac{\pi}{p}.$$

Наколи пропустимо взаїмні пертурбациї сателїтів, то они відбувають рух по колї з однакою скоростию кутовою ω, а тодї для якогонебудь часу t є:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= a, & r_1 &= k + \omega t \\ r_2 &= a, & r_2 &= k + \omega t + 2\vartheta \\ r_3 &= a, & r_3 &= k + \omega t + 4\vartheta \\ &- - - & - - &- - \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

де k є сталий кут, який творить луч SP_1 в лучом рухомим.

Наколиж возьмем під увагу взаїмні діланя сателітів, дістанемо:

$$\left.\begin{array}{lll} r_1 = a\ (1+\rho_1) & v_1 = k+\omega t+\sigma_1 & \\ r_2 = a\ (1+\rho_2) & v_2 = k+\omega t+2\vartheta+\sigma_2 & v_2-v_1 = 2\vartheta+\sigma_2-\sigma_1 \\ r_3 = a\ (1+\rho_3) & v_3 = k+\omega t+4\vartheta+\sigma_3 & v_3-v_1 = 4\vartheta+\sigma_3-\sigma_1 \\ - \quad - \quad - & - \quad - \quad - \quad - & - \quad - \quad - \quad - \end{array}\right\} \quad 16)$$

ρ_ν σ_ν є величини, звязані з масою m_ν; величини ті останугь дуже малі, наколи рух відійде не много від стану означеного рівнанями 15). В виду того пропускаючи квадрати і добутки ρ_ν і σ_ν можем розвинути ряди і дістанемо:

$$-\frac{\partial R_1}{\partial r_1} = f \sum m_2 \frac{r_1 - r_2 \cos(v_2 - v_1)}{\left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{r_1}\frac{\partial R_1}{\partial r_1} = f \sum m_2 \frac{r_2 \sin(v_2 - v_1)}{\left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Але:

$$r_1 - r_2 \cos(v_2 - v_1) = 2a \sin^2\vartheta \left[1 + \frac{\rho_1 - \rho_2 \cos 2\vartheta}{2\sin^2\vartheta} - (\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{cotg}\vartheta\right]$$

$$r_2 \sin(v_2 - v_1) = 2a \sin\vartheta \cos\vartheta \left[1 + \rho_2 - (\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{cotg}\vartheta\right]$$

$$\left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1)\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8a^3 \sin^3\vartheta}\left[1 - \frac{3}{2}(\rho_1 + \rho_2) + \frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{cotg}\vartheta\right],$$

а дальше:

$$r_1 \frac{dv_1{}^2}{dt^2} - \frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{fM}{r_1^2} = a\left(\omega^2 + \omega^2 \rho_0 + 2\omega\frac{d\sigma_1}{dt} - \frac{d^2\rho_1}{dt^2} - fM\frac{1 - 2\rho_1}{a^3}\right)$$

$$r_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + 2\frac{dr_1}{dt} = a\left(\frac{d^2\sigma_1}{dt^2} + 2\omega\frac{d\rho_1}{dt}\right)$$

В виду того рівнаня 14) перейдуть на:

$$\omega^2 - \frac{fM}{a^3} + \left(\omega^2 + \frac{2fM}{a^3}\right)\rho_1 + 2\omega\frac{d\sigma_1}{dt} - \frac{d^2\rho_1}{dt^2} = \frac{f}{4a^3}\sum\frac{m_2}{\sin\vartheta}\left(1 - \rho_1 - \sigma_2 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\operatorname{cotg}^2\vartheta + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\operatorname{cotg}\vartheta\right)$$

$$2\omega\frac{d\rho_1}{dt} + \frac{d^2\rho_1}{dt^2} = \frac{f}{4a_3}\sum\frac{m_2\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\left[1 - \frac{3\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}(\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{cotg}\vartheta)\right]$$

Maxwell приймає, що маси сателітів є рівні, отже:

$$m_1 = m_2 = m_3 = \cdots\cdots = \mu M,$$

де M є маса Сатурна; отже без взаїмних ділань сателїгів буде: $\omega^2 = \frac{fM}{a^3}$, або $\frac{fm_2}{a^3} = \omega^2\mu$. Послїдні рівнаня можна написати:

$$17)\begin{cases} \omega^2-\frac{fM}{a^3}+3\omega^2\varrho_1+2\omega\frac{d\sigma_1}{dt}+\frac{d^2\varrho_1}{dt^2}=\frac{1}{4}\omega^2\mu\sum\left(1-\varrho_1-\varrho_2+\frac{\varrho_1-\varrho_2}{2}\operatorname{cotg}^2\vartheta+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\operatorname{cotg}\vartheta\right)\frac{1}{\sin\vartheta} \\ 2\omega\frac{d\varrho_1}{dt}+\frac{d^2\sigma_1}{dt^2}=\frac{1}{4}\omega^2\mu\sum\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\left[1-\frac{3\varrho_1+\varrho_2}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}(\operatorname{tg}\vartheta+2\operatorname{cotg}\vartheta)\right]. \end{cases}$$

В обох сумах, наколи переходимо від P_2 до P_3, ..., мусить ϑ переходити на 2ϑ, 3ϑ, ..., отже перебігати вартости:

$$\frac{\pi}{p},\ \frac{2\pi}{p},\ \cdots\cdots\ (p-1)\frac{\pi}{p} \qquad 18).$$

Треба тепер з'інтеґрувати систем 2p рівнань ріжничкових лініових 2-ого ряду 17) зі сталими сочинниками; в тій цїли треба покласти:

$$\rho_\nu = H_\nu\, e^{Nt}$$

$$\sigma_\nu = K_\nu\, e^{Nt}$$

(H_ν K_ν сталі).

Наколи се вставимо в рівняня, дістанемо наперед:

$$\omega^2-\frac{fM}{a^3}=\frac{1}{4}\,\omega^2\mu\sum\frac{1}{\sin\vartheta},$$

а далї дістанемо систем 2p рівнань однородних, з яких виелїмінуємо H_ν K_ν; їх визначник зрівнаний до зера дасть рівнанє на визначенє N. Рівнанє се буде степеня 4p; до кождого кореня належить одна розвязка з одною довільною сталою, а сума тих частних розвязок буде загальним інтеґралом в функциї часу і 4p довільних сталих. Щоби однак ρ_ν σ_ν позістали все малі, як з початку, мусять всї коренї рівнани на N мати вид $\pm$ ai.

Щоби дістати умови, в яких се ся дїє, уживає Maxwell слїдуючого способу. Кладе він яко частні розвязки:

$$\rho_\nu=A\cos(nt+\alpha+2\nu\gamma\vartheta),\ \sigma_\nu=B\sin(nt+\alpha+2\nu\gamma\vartheta)\ \ \nu=1,2,3,\cdots \qquad 19)$$

де A, B, n, α є сталі, а γ число цїле додатне.

Або:

$\rho_1 = A\cos u$, $\sigma_1 = B\sin u$

$\rho_2=A\cos u\cos 2\gamma\vartheta-A\sin u\sin 2\gamma\vartheta$, $\sigma_2=B\sin u\cos 2\gamma\vartheta+B\cos u\sin 2\gamma\vartheta$,

де $u = nt + \alpha + 2\gamma\vartheta$.

В виду того рівняня 17) дадуть:

$$\left.\begin{aligned} \omega^2-\frac{fM}{a^3}+\left[(3\omega^2+n^2)A+2\omega nB\right]\cos u=\Theta \\ -(2\omega nA+n^2B)\sin u=\Phi \end{aligned}\right\} \qquad 20)$$

де:

$$\left.\begin{aligned}
\Theta &= \frac{1}{4}\omega^2\mu \sum \frac{1}{\sin\vartheta}\Big[1-\cos u\Big(2A\cos^2\gamma\vartheta - A\sin^2\gamma\vartheta\,\mathrm{cotg}^2\vartheta + \frac{1}{2}B\sin 2\gamma\vartheta\,\mathrm{cotg}\,\vartheta\Big) + \\
&\qquad + \sin u\Big(A\sin 2\gamma\vartheta + \frac{1}{2}A\sin 2\gamma\vartheta\,\mathrm{cotg}^2\vartheta + B\sin^2\gamma\vartheta\,\mathrm{cotg}\,\vartheta\Big)\Big] \\
\Phi &= \frac{1}{4}\omega^2\mu \sum \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\Big\{1+\sin u\Big[\frac{1}{2}A\sin 2\gamma\vartheta + B(\mathrm{tg}\,\vartheta + 2\,\mathrm{cotg}\,\vartheta)\sin^2\gamma\vartheta\Big] - \\
&\qquad - \cos u\Big[\frac{3}{2}A + \frac{1}{2}A\cos 2\gamma\vartheta + \frac{1}{2}B(\mathrm{tg}\,\vartheta + 2\,\mathrm{cotg}\,\vartheta)\sin 2\gamma\vartheta\Big]\Big\}
\end{aligned}\right\} \text{21).}$$

В сумі перебігає ϑ вартости 18). Вартости 18) рівно віддалені від кінця сповняють ся до π, вираз середний сам є $\frac{\pi}{2}$. В виду того в 21) все ся знесе, кромі виразу, де $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (бо иньші вирази що два є рівні, але їх знаки є противні), так що:

$$\Theta = \omega^2\mu\,\Big[K + (AL\gamma - BM\gamma)\cos u\Big]$$

$$\Phi = -\omega^2\mu\,(AM\gamma + BN\gamma)\sin u,$$

де:

$$L\gamma = \sum_{\vartheta=\frac{\pi}{p}}^{(p-1)\frac{\pi}{p}} \left(\frac{\sin^2\gamma\vartheta\,\cos\vartheta}{4\sin^3\vartheta} - \frac{\cos^2\gamma\vartheta}{2\sin\vartheta}\right)$$

$$M\gamma = \sum \frac{\sin 2\gamma\vartheta\,\cos\vartheta}{8\sin^2\vartheta}$$

$$N\gamma = \sum \left(\frac{\sin^2\gamma\vartheta\,\cos^2\vartheta}{2\sin^3\vartheta} + \frac{\sin^2\gamma\vartheta}{4\sin\vartheta}\right)$$

$$K = \sum \frac{1}{4\sin\vartheta}$$

В виду того рівнаня 20) дадуть:

$$\omega^2 - \frac{fM}{a^3} - \omega^2\mu K + \Big[(3\omega^2 + n - \omega^2\mu L\gamma)A + (2\omega n + \omega^2\mu M\gamma)B\Big]\cos u = 0.$$

$$\Big[(2\omega n + \omega^2\mu M\gamma)A + (n^2 + \omega^2\mu N\gamma)B\Big]\sin u = 0.$$

То ся дїє для всяких u, отже:

$$\omega^2 - \frac{fM}{a^3} - \omega^2\mu\,K = 0, \qquad 22)$$

$$\left.\begin{aligned}(3\omega^2+n-\omega^2\mu\,L\gamma)\,A+(2\omega n+\omega^2\mu\,M\gamma)\,B=0.\\(2\omega n+\omega^2\mu\,M\gamma)\,A+(n^2+\omega^2\mu\,N\gamma)\,B=0.\end{aligned}\right\}\quad 23).$$

Видко з того, що дїйдемо до тих самих условин, наколи приймем, що рівнаня 19) сповняють рівнаня ріжникові руху сателїтів P_2. P_3, ------

Через елїмінацию A і B дістанемо з 23):

$$(n^2+3\omega^2-\omega^2\mu\,L\gamma)\,(n^2+\omega^2\mu\,N\gamma)-(2\omega n+\omega^2\mu\,M\gamma)^2=0. \qquad 24)$$

Се є рівнанє 4. степеня до визначеня n. Для кождого кореня остане стала A довільна, а $\frac{B}{A}$ обчислить ся на основі рівнань 23). Наколи тому γ дамо цїлий ряд вартостий цїлих, дістанемо спроможність одержаня загальних інтеґралів.

Заложім, що скількість сателїтів є париста: $p=2q$. Чотири коренї рівнаня 24) є: $n\gamma_1$ $n\gamma_2$ $n\gamma_2$ $n\gamma_4$; їм відповідає:

$$A\gamma_1\ A\gamma_2\ A\gamma_3\ A\gamma_4$$
$$B\gamma_1\ B\gamma_2\ B\gamma_3\ B\gamma_4.$$

Най δ буде одно з чисел 1, 2, 3, 4, і най:

$$B_{\gamma\delta}=A_{\gamma\delta}\,\lambda_{\gamma\delta},$$

де після 23):

$$\lambda_{\gamma\delta}=-\frac{n^2_{\gamma\delta}+3\omega^2-\omega^2\mu\,L\gamma}{2\omega n_{\gamma\delta}+\omega^2\mu\,M\gamma}.$$

Най ріжні вартости сталої α є $\alpha_{\gamma\delta}$; наколо положимо $\gamma=1, 2, \cdots q$ і возьмем суму відповідних частних розвязок, дістанемо:

$$\left.\begin{aligned}\rho_\nu&=\sum_{\gamma=1}^{q}\sum_{\delta=1}^{4}A\gamma\delta\cos\left(n_{\gamma\delta}t+\alpha_{\gamma\delta}+\frac{\gamma\nu\pi}{q}\right)\\\sigma_\nu&=\sum_{\gamma=1}^{q}\sum_{\delta=1}^{4}\lambda_{\gamma\delta}\,A\gamma\delta\sin\left(n_{\gamma\delta}t+\alpha_{\gamma\delta}+\frac{\gamma\nu\pi}{q}\right)\end{aligned}\right\}\quad 25).$$

Наколи будемо класти $\nu=1, 2, \cdots 2q$ дістанемо з огляду на рівнаня попередні вираженя на незвісні в функциї t і $4p=8q$ довільних сталих $A_{\gamma\delta}$, $\alpha_{\gamma\delta}$ і будуть се загальні інтеґрали.

Походні рівнань 25) дадуть:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\rho_\nu}{dt} &= \sum_{\gamma=1}^{q} \sum_{\delta=1}^{4} n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \sin\left(n_{\gamma\delta}t + \alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \\ \frac{d\sigma_\nu}{dt} &= \sum_{\gamma=1}^{q} \sum_{\delta=1}^{4} \lambda_{\gamma\delta}\, n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \cos\left(n_{\gamma\delta}t + \alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \end{aligned}\right\} \quad 26).$$

Щоби рівнаня 25) і 26) представляли інтеґрали загальні рівнань ріжничкових, треба визначити сталі довільні в сей спосіб, щоби положеня і скорости початкові сателїтів принимали якісь дані вартости. Приймім проте яко дані вартости 8q малих величин ρ_ν σ_ν $\frac{d\rho_\nu}{dt}$ $\frac{d\sigma_\nu}{dt}$ для $t = 0$ і при їх помочи обчислїм сталї $A_{\gamma\delta}$ і $\alpha_{\gamma\delta}$. Рівнаня 25) і 26) дадуть для $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \rho_\nu^0 &= \sum \sum A_{\gamma\delta} \cos\left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \\ \sigma_\nu^0 &= \sum \sum \lambda_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \sin\left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \\ -\left(\frac{d\rho_\nu}{dt}\right)_0 &= \sum \sum n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \sin\left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \\ \left(\frac{d\sigma_\nu}{dt}\right)_0 &= \sum \sum n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \cos\left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \end{aligned}\right\} \quad 27). \quad (\nu = 1, 2, \cdots 2q)$$

Незвісних $A_{\gamma\delta} \cos \alpha_{\gamma\delta}$ і $A_{\gamma\delta} \sin \alpha_{\gamma\delta}$ є тілько, що рівнань, можна отже незвісні обчислити.

4. Щоби перстень остояв ся в рівновазї, мусять ρ_ν і σ_ν, так як з початку, і далї остати дуже малими величинами; бо наколиб одна з величин σ_ν почала ся збільшати, мусїв би відповідний сателїт занадто приближити ся до другого сусїдного і насталаби колїзия. З того слїдує, що чотири коренї $n_{\gamma\delta}$ рівнаня 24) мусять бути дїйсні, що γ мусить містити ся між 0 а q. Наколиб так не було, то в інтеґралах виступалиби чинники виложні, якиби стреміли до усякої границї.

Наколи число усїх сателїтів є скінчене, можемо приняти масу кождого з них, отже і масу цїлого перстеня, достаточно малу, щоби усї коренї остали дїйсні. Величини $L\gamma$ $M\gamma$ $N\gamma$ можуть бути достаточно великі з причини малих знаменників $\sin\vartheta$, $\sin^2\vartheta$, $\sin^3\vartheta$, мимо того однак остають скінчені і означені. Отже для $n = 0$ лїва сторона в рівнаню 24) зведе ся до

$$\mu\omega^4\left[3N_\gamma-\mu\left(M_\gamma^2+L_\gamma N_\gamma\right)\right].$$

отже при достаточно малім μ буде се величина додатна.

З другої сторони рівнане 24) має форму:

$$n^2(n^2-\omega^2)+A\mu+B\mu^2;$$

вираженє се позістає відємне, наколи при достаточно малім μ є $0 \angle n^2 \angle \omega^2$. Наколи отже в лївій стороні рівнаня 24) будем класти за u вартости:

$$-\infty,\ -\frac{\omega}{\sqrt{2}},\ 0,\ +\frac{\omega}{\sqrt{2}},\ +\infty,$$

то та сторона прийме знаки:

$$+\ -\ +\ -\ +,$$

маємо отже чотири зміни знаків, отже при малім μ для всїх вартостий γ всї чотири корені є дїйсні.

З відси слїдує, що перстень зложений з рівних саселїтів може все остояти ся в рівновазї, наколи єго маса є достаточно мала в порівнаню з масою Сатурна.

Розходить ся тепер о се, як мале мусить бути μ, щоби рівновага ся остояла.

Понеже γ може бути якенебудь, возьмім:

$$\gamma=\frac{p}{2}=q.$$

Як знаєм:

$$\vartheta=\frac{h\pi}{p}=\frac{h\pi}{2q}\ (h=0,1,2,\cdots 2q-1);\ 2\gamma\vartheta=h\pi,$$ отже $\sin 2\gamma\vartheta=0$ або $M\gamma=0$; $\sin^2\gamma\vartheta$ і $\cos^2\gamma\vartheta$ приймають вартости 1, 0, 1, ---------; 0, 1, 0, ---------.

Наколи возьмем q непаристе, дістанемо:

$$L_q=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{\pi}{2q}}{\sin^3\frac{\pi}{2q}}+\frac{\cos^2\frac{3\pi}{2q}}{\sin^3\frac{3\pi}{2q}}+\cdots\cdots+\frac{\cos^2\frac{q-2}{2q}\pi}{\sin^3\frac{q-2}{2q}\pi}\right)-\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2q}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2q}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sin\frac{q-1}{2q}\pi}\right)$$

$$N_q=\left(\frac{\cos^2\frac{\pi}{2q}}{\sin^3\frac{\pi}{2q}}+\frac{\cos^2\frac{3\pi}{2q}}{\sin^3\frac{3\pi}{2q}}+\cdots\cdots+\frac{\cos^2\frac{q-2}{2q}\pi}{\sin^3\frac{q-2}{2q}\pi}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2q}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2q}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sin\frac{q-1}{2q}\pi}\right)$$

А що для $0 \angle x \angle \frac{\pi}{2}$ є:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6} x + \frac{7}{360} x^3 + \frac{31}{15120} x^5 + \cdots\cdots$$

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{40} x + \frac{163}{15120} x^3 + \cdots\cdots$$

то для достаточно великого q дістанемо:

$$L_q = 4\left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \left\{1 + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{(q-1)^3} - \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{q}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{q-2}\right) - \frac{1}{640}\left(\frac{\pi}{q}\right)^4 \left(1+3+\cdots+(q-2)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{163}{967680}\left(\frac{\pi}{q}\right)^6 \left[1+3^3+\cdots+(q-2)^3\right]\right\} - \frac{q}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{2}{q-1}\right) - \frac{1}{6}\frac{\pi}{q}\left(1+2+\cdots+\frac{q-1}{2}\right) -$$

$$- \frac{7}{360}\left(\frac{\pi}{q}\right)^3 \left(1 + 2^3 + \cdots\cdots + \left(\frac{q-1}{2}\right)^3\right) + \cdots\cdots\cdots$$

$$N_q - 2L_q = \frac{q}{\pi}\left[\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{q}\right) + 2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{2}{q-1}\right)\right] + \frac{\pi}{q}\left[\frac{1}{24}(1+3+\cdots+q) + \frac{1}{3}\left(1+2+\cdots+\frac{q-1}{2}\right)\right] +$$

$$+ \left(\frac{\pi}{q}\right)^3 \left\{\frac{7}{5760}(1+3^3+\cdots\cdots+q^3) + \frac{7}{180}\left(1+2^3+\cdots\cdots+\left(\frac{q-1}{2}\right)^3\right)\right\} + \cdots\cdots$$

а що:

$$1+3+\cdots\cdots+(q-2) = \frac{(q-1)^2}{4}, \quad 1^3+3^3+\cdots\cdots+(q-2)^3 = \frac{(q-1)^4 - 2(q-1)^2}{8},$$

то:

$$L_q = \left(\frac{2q}{\pi}\right)^3 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots\cdots\right) + \frac{W_1}{q^2} + \frac{W^2}{q^3} + \cdots\cdots\right]$$

$$N_q - 2\,L_q = \left(\frac{2q}{\pi}\right)^3 \frac{V_1}{q^2} + \frac{V_2}{q^3} + \cdots\cdots\cdots\cdots ;$$

отже в приближеню:

$$L_q = 0{\cdot}525 \left(\frac{2q}{\pi}\right)^3, \qquad N_q - 2\,L_q = 0{\cdot}0000 \left(\frac{2q}{\pi}\right)^3. \qquad 28)$$

Наколи тепер після 28) в рівнанє 24) за $L\gamma$ $M\gamma$ $N\gamma$ вставимо L_q, 0, $2L_q$, дістанемо:

$$\left(\frac{n}{\omega}\right)^4 - (1 - \mu\, L_q)\left(\frac{n}{\omega}\right)^2 + 2\mu\, L_q\,(3 - \mu\, L_q) = 0. \qquad 29)$$

Щоби оба корені були дійсні, мусить бути:

$$1 - \mu\, L_q > 0 \qquad 30)$$

i

$$1 - 26\,\mu\, L_q + 9\mu^2\, L_q^2 > 0.$$

З відси:

$$(\mu L_q - 2{\cdot}8499)\,(\mu L_q - 0{\cdot}0390) > 0$$

або після 30)

$$\mu L_q < 0{\cdot}039, \quad \mu < \frac{0{\cdot}039}{0{\cdot}525}\left(\frac{\pi}{2q}\right)^3.$$

Наколи відношенє маси перстеня з масою Сатурна є m, то:

$$m = 2\mu q = \mu p,$$

отже:

$$m < \frac{2{\cdot}30}{p^2}.$$

Наколиби отже було лиш 100 сателїтів, маса всїх їх — щоби рівновага перстеня могла бути тревала — мусїлаби бути меньша як $\frac{1}{4000}$-а часть маси Сатурна.

Но ми брали лиш $\gamma = q$; отже даймо тому γ вартости $(1, 2, \ldots\, q-1)$. L_γ, M_γ, N_γ мають вартости досить великі з причини малих знаменників $\sin^3\vartheta$, $\sin^2\vartheta$, $\sin\vartheta$; вартости ті зменьшать ся, наколи p є велике; тодї для першої вартости на ϑ $\left(\vartheta = \frac{\pi}{p}\right)$ в приближеню за $\sin^3\vartheta$, $\sin^2\vartheta$, $\sin\vartheta$ можна покласти: $\left(\frac{\pi}{p}\right)^3$, $\left(\frac{\pi}{p}\right)^2$, $\frac{\pi}{p}$, а тодї:

$$N_\gamma = 2L_\gamma\left(1 + \frac{S_1}{p^2}\right), \quad M_\gamma = L_\gamma\,\frac{S_2}{p},$$

а рівнанє 24) перейде на 29) (лиш за L_q прийде L_γ). Щоби чотири коренї були і ту дїйснї, треба і ту покласти:

$$\mu L_\gamma \angle 0{\cdot}039. \qquad 31)$$

А що після першого значіня на L_γ буде для всяких γ:

$$L_\gamma \angle \frac{1}{4}\sum\frac{\cos^2\vartheta}{\sin^3\vartheta},$$

а тим більше:

$$L_\gamma \angle \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\pi}\right)^3\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right) = 0{\cdot}0194p^3,$$

отже після 31):

$$\mu 0{\cdot}0194p^3 \angle 0{\cdot}039,$$

або:

$$\mu \angle \frac{2}{p^3}.$$

Нерівність 31) сповняє ся проте все. Можемо проте сказати, що наколи:

$$m \angle \frac{2}{p^2},$$

де p є число сателїтів, а m відношенє між масою цїлого перстеня а масою Сатурна, то рівновага перстеня остоїть ся.

5. Наколиби сателїти мали маси ріжні, то і тодї дійшлибисьмо до рівнань ріжничкових лїнїових зі сталими сочинниками; очевидно що рахунки будуть більше скомплїковані. Однак видко, що і ту при малих масах сателїтів дійдем до анальоґічного роздїлу сил, як в першім случаю, отже загальна конклюзия остане; зміни, які би ту виступали в положеню перстеня, будуть відбувати ся в дуже тїсних границях.

Maxwell бере дальше случай, що перстень складає ся з кусників метеоричних і доходить до заключеня, що єго густота мусїлаби бути меньша або рівна $\frac{1}{300}$ густоти Сатурна. Середна густота перстеня рівналаби ся в приближеню двократній густотї воздуха під сталим тисненєм, но очевидно густота в поодиноких місцях перстеня моглаби бути більша.

Maxwell доказує далї, що перстень плинний тяглий не мігби ся остояти, але мусївби роздїлити ся на множество малих сателїтів. Можна проте приняти, що перстень складає ся з окремих частий, які можуть бути сталі або плинні, але від себе не залежать (деякі сателїти є плинні, а деякі сталі). Стверджає се обсервация, бо через внутрішний берег перстеня можна обсервувати берег Сатурна, що булоб неможливе, наколиб лучі Сатурна переходили через тяглий перстень, бо тодї підлягалиби рефракциї.

Розслїди Ковалевскої.[1]

1. Ковалевска приймає подібно як Ляпляс, що перстень є однородний, утворений з плинної материї; повстав він через оборот кривої плоскої симетричної зглядом оси OY (фіґ. II.), та немного ріжної від елїпси.

---

[1] Пор. Zusätze und Bemerkungen zur Laplace'schen Untersuchung ü. d. Gestalt der Saturnringe (Astronom. Nachrichten Bd. CXI. 1885 ст. 37 et sqts.)

Щоби якась точка перстеня могла остоятись в рівновазї, треба, щобй для неї заходило рівнане таке, як в теориї Ляпляса

$$V + V_1 + \frac{1}{2}\omega^2\rho_1^2 = C \qquad 1)$$

де V і V_1 є потенциями перстеня і Сатурна, ω скоростию оборотовою, ρ_1 віддалене від оси оборотової, а C є стала.

Наколи маса Сатурна є сконцентрована в точцї тяжести, то:

$$V_1 = \frac{M}{\sqrt{\rho_1^2 + z_1^2}}$$

де z_1 є віддалене уважаної точки перстеня від площи рівникової, а ρ_1 віддалене єї від оси оборотової.

В обчисленю потециялу V відступає Ковалевска від способу Ляпляса; після неї спосіб Ляпляса, що дїлане перстеня заступає дїланем безконечно довгого вальця, не є вповні оправданий, бо годї з гори знати, чи блуд, який при тім підставленю виступає, є дїйсно такої величини, як думає Ляпляс. Також і се заложене Ляпляса, що вісь велика перстеня (розміри) є в порівнаню з перекройом елїпси дуже велика, не є також доконче оправдане.

З тої причини приймає Ковалевска, що рівнане згаданої кривої, мало-що ріжної від елїпси, в укладї ортоґональнім сорядних, де вісь OZ є осию обороту, є:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - a\cos t$$

$$z = a\,(\beta\sin t + \beta_1\sin 2t + \beta_2\sin 3t + \cdots\cdots) \qquad 2)$$

де t є дїйсна величина змінна в границях $(0 \cdots 2\pi)$, а $a\,\beta\,\beta_1 \cdots$ є сталі.

Приймаючи розміри кривої дуже невеликі, можем вважати a за малий дроб; а наколи крива мало ріжнити ся має від елїпси, мусять $\beta_1\ \beta_2 \cdots$ не лиш бути дуже малі, а також і сума

$$|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| + \cdots\cdots$$

мусить бути дуже мала в порівнаню з β.

Наколи тепер приймем, що $d\sigma$ є безконечно малий елємент поверхнї перстеня, P один пункт того елєменту, P_1 означений пункт поверхнї, для якого шукаєм потенциялу V, а Θ є кут, який творить внїшна нормальна в точцї P з простою PP_1, то після Gauss'а дістанемо на потенциял:

$$V = -\frac{1}{2}\iint \cos \Theta d\sigma. \qquad 3)$$

Наколи сорядні для P є (x y z), для P_1 $(x_1\ y_1\ z_1)$, відступ $PP_1 = r$, достави напрямні згаданої нормальної $\xi\ \eta\ \zeta$, то як звісно:

$$\cos \Theta = \frac{x_1 - x}{r}\xi + \frac{y_1 - y}{r}\eta + \frac{z_1 - z}{r}\zeta \qquad 4).$$

Наколи положимо:

$$\left.\begin{aligned}
&x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\psi, \quad y = \sqrt{x^2 + y^2}\sin\psi,\\
&\varphi(t) = \beta \sin t + \beta_1 \sin 2t + \cdots\cdots\\
&A = 4\left(1 - a\cos t\right)\left(1 - a\cos t_1\right)\\
&B = a^2\left[\left(\cos t - \cos t_1\right)^2 + \left(\varphi(t) - \varphi(t_1)\right)^2\right]\\
&C = 2a^2\left(1 - a\cos t\right)\left[\left(\cos t - \cos t_1\right)\varphi'(t) + \sin t\left(\varphi(t) - \varphi(t_1)\right)\right]
\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

дістанемо на потенциял:

$$V = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} \frac{C - Aa\varphi'(t)\sin^2\frac{1}{2}(\psi - \psi_1)}{\sqrt{B + A\sin^2\frac{1}{2}(\psi - \psi_1)}}d\psi,$$

або, наколи положимо:

$$\frac{1}{2}(\psi - \psi_1) = \vartheta,$$

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{C - Aa\varphi'(t)\sin\vartheta}{\sqrt{B + A\sin^2\vartheta}}d\vartheta \qquad 6)$$

дістанемо:

$$V = \int_0^{2\pi} W dt \qquad 7).$$

Наколи положимо:

$$\sqrt{A\sin^2\vartheta + B} = \sqrt{B}.s, \quad k^2 = \frac{B}{A + B} \qquad 8)$$

дістанемо:

$$W = \int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{C + Ba\varphi'(t) - Ba\varphi'(t)\, s^2}{\sqrt{A+B}\,.\,\sqrt{s^2-1}\ \sqrt{1-k^2 s}}\, ds, \qquad 9)$$

де k^2 є дуже мала величина.

Є се інтеґрал еліптичний, тому-то Ковалевска уживає ту формул Weierstrass'a: 1)

$$\int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\ \sqrt{1-k^2\xi^2}} = \frac{1}{2} K \log \frac{16}{k^2} - K_1$$

$$\int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 \xi\, d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\ \sqrt{1-k^2\xi^2}} = \frac{1}{2} I \log \frac{16}{k^2} - I_1$$

де:

$$\left\{\begin{aligned}
K &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k^4 + \ldots\ldots \\
K_1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \frac{7}{2\,.\,3}\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k^4 + \ldots\ldots \\
I &= \frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \ldots\ldots \\
I_1 &= -1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{13}{12}\,.\,\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

В виду того дістанемо:

$$W = W_1 \log \frac{16}{k^2} + W_2\,,$$

де:

$$W_1 = \frac{1}{2}\ \frac{C + aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}}\ K - \frac{1}{2}\ \frac{aB\varphi'(t)}{2\sqrt{A+A}}\ I$$

$$W_2 = -\ \frac{C + aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}}\ K_1 + \frac{aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}}\ I_1$$

Величини W_1 і W_2 можна розвинути після cos і sin величин t і t_1 в ряди, причім сочинники будуть рядами степенними вели-

---

1) Пор. Weierstrass: Theorie der Abelschen Functionen, Crelle's Journal т. 52. ст. 75 et sqts.

чин $a\ \beta\ \beta_1$, ------- , а що a є дуже мале, то ті ряди будуть сильно збіжні.

Інтеґрал $\int_0^{2\pi} W_2\, dt$ дає ся впрост обчислити в сей спосіб, що вираз ряду на W_2, незалежний від t, помножимо через 2π.

Труднїйша є справа з інтеґралом $\int_0^{2\pi} W_1 \log \frac{16}{k^2}\, dt$.

Позаяк в 5) величина B стає ся зером лиш тодї, коли $\cos t = \cos t_1$ або $\varphi(t) = \varphi(t_1)$, що з огляду на нашу криву може лиш тодї бути, коли $t = t_1 + 2m\pi$, де m є число цїле, то з сего слїдує, що B є подїльне через $1 - \cos(t - t)$, отже можем написати:

$$B = a^2 \left[1 - \cos(t - t_1)\right] B_1,$$

де B_1 дасть ся розвинути після cos і sin величин t і t_1.

Наколи заложимо, що $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = 0$, то в виду сего B_1 зводить ся на

$$\frac{1}{2}(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)\cos(t + t_1),$$

з чого слїдує, що для достаточно малих $\beta_1\ \beta_2 \cdots B_1$ не зникає для дїйсних вартостий $t\ t_1$.

Наколи тепер положимо:

$$B_1 = \left[\frac{1}{2}(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)\cos(t + t_1)\right](1 + B_2),$$

то:

$$\log B = 2\log a + \log\left[1 - \cos(t - t_1)\right] + \log\left[\frac{1}{2}(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)\cos(t + t_1)\right] + \log(1 + B_2).$$

В виду того складає ся $W_1 \log \frac{16}{k^2}$ з слїдуючих пятох частий:

$$W_1 \log 16\,(A + B)$$
$$-\ 2\, W_1 \log a$$
$$-\ W_1 \log\left[\frac{1}{2}(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)\cos(t + t_1)\right]$$
$$-\ W_1 \log\left[1 - \cos(t - t_1)\right]$$
$$-\ W_1 \log(1 + B_2)$$

Три перші части можна подібно як W_2 розвинути в ряди і впрост з'інтеґрувати. Четверта часть дає ся розвинути на ряд лиш для вартостий $t - t_1$, що лежать між 0 а 2π, но після теориї Fourier'a і ту дістанемо вартість інтеґрала $-\int_0^{2\pi} W_1 \log\Big[1 - \cos(t - t_1)\Big] dt$, наколи вираз від t незалежний через 2π.

Щоби обчислити інтеґрал $\int_0^{2\pi} W_1 \log(1 + B_2)\, dt$, треба наперед $\log(1 + B_2)$ розвинути в ряд після степений B_2; ряд сей із за дуже малих вартостий $\beta_1\ \beta_2, \cdots\cdots$ буде сильно збіжний; можна отже буде перевести інтеґроване.

Сим способом дістанем на V зовсім означений і сильно збіжний ряд форми:

$$V_0 + V_1 \cos t_1 + V_2 \cos 2\, t_1 + \cdots\cdots$$

Сочинники того ряду є з огляду на a, $\log a$, $\log(1 + \beta)$, β_1, $\beta_2 \cdots\cdots$ цілковити функциями (о безконечно много членах); їх сочинники є вимірмими дробовими функциями β; $\log a$ виступає лиш яко добуток в купі з якоюсь степеною a.

2. Перейдім тепер до потенциялу V_1:

$$V_1 = \frac{M}{\sqrt{\rho_1^2 + z_1^2}} = \frac{M}{\sqrt{(1 - a \cos t_1)^2 + a^2\, \varphi^2(t_1)}}$$

Вираженє се можна також розвинути на збіжний ряд:

$$m_0 + m_1 \cos t_1 + m_2 \cos 2\, t_1 + \cdots\cdots,$$

де $m_0\ m_1, \cdots\cdots$ є цілими функциями $a\ \beta\ \beta_1 \cdots\cdots$

В кінци:

$$\rho_1^2 = (1 - a \cos t_1)^2 = \frac{1}{2}\, a^2 - 2\, a \cos t_1 + \frac{1}{2}\, a^2 \cos 2\, t_1.$$

Наколи перстень має удержувати ся в рівновазї, треба величини ω, C, β, β_1, $\beta_2, \cdots\cdots$ так визначити, щоби -

$$\left\{\begin{array}{ll} V_0 + m_0 + \frac{1}{2}\, \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2}\, a^2\right) + C & = 0 \\ V_1 + m_1 - \omega^2 a & = 0 \\ V_2 + m_2 + \frac{1}{4}\, \omega^2 a^2 & = 0 \end{array}\right\} \quad 10).$$

а:

$$V_{s+2} + m_{s+2} = 0 \quad (s \text{ додатне}) \qquad 11).$$

Величин $\beta\ \beta_1\ \beta_2, \cdots$ є безконечно много і в кожде рівнанє входить їх безконечно много, отже неможливо їх визначити. Можнаби однак порадити собі в сей спосіб, що возьмем:

$$\varphi(t) = \beta^{(\mu)} \sin t + \beta_1^{(\mu)} \sin 2t + \cdots + \beta_\mu^{(\mu)} \sin (\mu + 1)\, t,$$

обчислимо сочинники V_λ, m_λ і визначимо: $\omega^{(\mu)}$, $C^{(\mu)}$, $\beta^{(\mu)}$, $\beta_1^{(\mu)}, \cdots \beta_\mu^{(\mu)}$ так, щоби $(\mu + 3)$ початкових рівнань 10) і 11) сповнило ся. Наколиби далї дало ся доказати, що ті величими для $\mu = \infty$ зближають ся до означених скінчених границь так, що сума беззглядних вартостий граничних виражень на $\beta_1\ \beta_2 \cdots$ булаб меньша як β, то можнаби з сего заключати, що рівнаня 10) і 11) сповнять ся, наколи за величини $\omega^{(\mu)}$, $C^{(\mu)}$, $\beta^{(\mu)}, \cdots$ вставимо граничні вартости ω, C, $\beta, \cdots$.

Се є однак лиш в теориї можливе. Щоби згадані величини з відповідним приближенєм обчислити, поступимо в слїдуючий спосіб. Положім:

$$\varphi = \beta \sin t + \beta_1 \sin 2t + \cdots + \beta_\mu \sin (\mu + 1)\, t$$

і приймім на разї, що $|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots + |\beta_\mu|$ є величиною того самого ряду, що а, та пропустїм в розвиненях на V_λ і m_λ всї величини ряду висшого як $(\mu + 2)$, причім $a^m \log a$ буде величиною ряду висшого як $(m - 1)$. Тодї з $(\eta + 3)$ початкових рівнань 10) і 11) вийде, що $\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_\mu$ є малими величинами $1^{\text{-ого}}$, $2^{\text{-ого}}, \cdots \mu^{\text{-ого}}$ ряду; можна отже покласти:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= a\gamma_1 \\ \beta_2 &= a^2\gamma_2 \\ &\;\vdots \\ \beta_\mu &= a^\mu \gamma_\mu \end{aligned}$$

Тодї з данних рівнань випадуть $\gamma_1\ \gamma_2 \cdots \gamma_\mu$ яко однозначні скінчені числа, а далї при так визначених величинах $\beta_1 \cdots \beta_\mu$ лїві сторони оставших ся рівнань 10) і 11) будуть величинами ряду висшого як $(\mu + 2)$.

3. З усего того виходить, що можна визначити в сей спосіб перекрій перстеня, щоби вираженє:

$$V + V_1 + \frac{1}{2}\omega^2\rho^2,$$

яке для поверхнї перстеня має мати сталу вартість, ріжнило ся від сталої лиш о величину ряду висшого як $(\mu + 2)$. А що $(\mu + 2)$ можна приняти так велике, як хочемо, то можем заключати, що дійсно істнує такий вид перекрою перстеня, для якого повисше вираженє на цілій поверхнї перстеня є стале.

Ковалевска переводить далї обчисленє для $\mu = 1$, щоби визначити вид перекрою перстеня з точностию третого ряду. Пропускаючи в висше наведених вираженях вирази ряду висшого як четвертий дістає она:

$$V = \pi a^2 (v_0 + v_1 \cos t_1 + v_2 \cos 2t_1 + v_3 \cos 3t_1),$$

де:

$$v_0 = \beta \left(\log \frac{256}{a^2 (1+\beta)^2} - 2 \right)$$

$$v_1 = a\beta \left(\frac{-11 + 9\beta - \beta^2 + 3\beta^3}{4(1+\beta)} + \log \frac{256}{a^2(1+\beta)^2} \right)$$

$$v_2 = -\beta \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

$$v_3 = -a\beta \frac{(1-\beta)(1+3\beta)}{6(1+\beta)^2} + \alpha\gamma \frac{-2 + 6\beta + 6\beta^2 + 6\beta^3}{3(1+\beta)^3}.$$

Далї є:

$$\frac{M}{\sqrt{\rho_1^2 + z_1^2}} = m_0 + m_1 \cos t_1 + m_2 \cos 2t_1 + m_3 \cos 3t_1,$$

$$m_0 = M$$

$$m_1 = aM \left[1 + a^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8} \beta^2 - \frac{1}{2} \beta\gamma \right) \right]$$

$$m_2 = a^2 M \frac{2 + \beta^2}{4}$$

$$m_3 = a^3 M \left[\frac{1}{8} (2 + 3\beta^2) + \frac{1}{2} \beta\gamma \right]$$

а в решті:

$$\frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} a^2 \right) - \omega^2 a \cos t_1 + \frac{1}{4} \omega^2 a^2 \cos 2t_1$$

Друге, трете і четверте з рівнань 10), які в нашім случаю є:

$$\pi a^2 v_1 + m_1 - a \omega^2 = 0.$$

$$\pi a^2 v_2 + m_2 + \frac{1}{4} a^2 \omega^2 = 0.$$

$$\pi a^2 v_3 + m_3 = 0.$$

мають тепер вартість:

$$\pi a^2\beta\left(\frac{-11+9\beta-\beta^2+3\beta^3}{4\,(1+\beta)}+\log\frac{256}{a^2(1+\beta)^2}\right)+a^2M\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\beta^2\right)+\left(2\pi\frac{1+\beta-\beta^2}{(1+\beta)^2}-\frac{1}{2}M\beta\right)a^2\gamma+M-\omega^2=0.$$

$$M\,(2+\beta^2)-4\,\beta\,\frac{1-\beta}{1+\beta}\,\pi+\omega^2=0. \qquad 12)$$

$$M\,\frac{2+3\beta^2}{8}-\pi\,\frac{\beta(1-\beta)(1+3\beta)}{6\,(1+\beta)^2}+\left(\frac{1}{2}M\beta+\frac{-2+6\beta+6\beta^2+6\beta^3}{3\,(1+\beta)^3}\right)\gamma=0.$$

З послїдного з тих рівнань виходить:

$$\gamma=\frac{1}{4}\;\frac{3M\,(2+3\,\beta^2)\,(1+\beta)^2-4\pi\beta\,(1-\beta)\,(1+3\beta)}{4-12\beta-12\beta^2-12\beta^3--3M\beta\,(1+\beta)^3}\;(1+\beta) \qquad 13)$$

а з першого:

$$\omega^2=M+a^2\,N \qquad 14)$$

де:

$$N=\pi\beta\left(\frac{-11+9\beta-\beta^2+3\beta^3}{4\,(1+\beta)}+\log\frac{256}{a^2(1+\beta)^2}\right)+M\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\beta^2\right)+\left(2\pi\,\frac{1+\beta-\beta^2}{(1+\beta)^2}-\frac{1}{2}M\beta\right)\gamma.$$

Друге з рівнань 12) провадить до рівняня:

$$M\,(3+\beta^2)-\frac{4\beta\,(1-\beta)}{1+\beta}\,\pi+a^2\,N=0 \qquad 15)$$

де за γ, яке входить в N, треба вставити вартість 13). Рівнанє 15) служити-ме до обчисленя β.

Наколи в рівнаню 15) пропустимо вираз при a^2, дістанемо:

$$M\,(3+\beta^2)-\frac{4\beta\,(1-\beta)}{1+\beta}\,\pi=0.$$

Як легко постеречи, є се то само рівнанє, що в теориї Ляпляса (рівнанє 5). Мусимо ту заложити, що β є додатне і не більше як 1. Далї як в теориї Ляпляса треба положити, що $\frac{M}{4\pi}<0{\cdot}0543$; при тім заложеню рівнанє має два додатні коренї. Наколи оден з них є β_0, то з рівняня 15) випаде з точностию до четвертого ряду:

$$\beta=\beta_0-\frac{a^2N_0}{2M\beta_0-3+\dfrac{8}{(1+\beta_0)^2}},$$

де $N_0=N\left.\vphantom{N}\right\}$ для β_0.

Ся вартість вставлена в 13) дозваляє обчислити з таким самим приближенєм і γ, а так само випаде і:

$$\omega^2=M+a^2N_0.$$

В кінци завважати треба, що тепер є:

$$\varphi(t) = \beta \sin t + a\gamma \sin 2t;$$

$$\varphi(t) < \beta \sin t, \quad \text{наколи } o < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi(t) > \beta \sin t, \quad \text{наколи } \frac{\pi}{2} < t < \pi.$$

Для меньшого кореня β z буде меньше, отже перекрій полуденниковий буде мав сильнїйшу кривину в точцї найблизше положеній до середоточки цїлого системy (фіґ. V. б), для більшого кореня β буде противно (фіґ. V. а).

Дослїди Poincaré над рівновагою перстеня з маси плинної однородної, якого частини притягають ся після закона Нютона, та який відбуває рух оборотовий.[1]

1. Приймім, що OX є осию обороту (фіґ. II.), C середоточка тяжести полуденникового перекрою ABA'B', CO = l. Най r = CM i $\sphericalangle \varphi$ = YCM будуть сорядними бігуновими точки M. Згадана крива, симетрична до оси OY, має після Poincaré[2]) рівнанє:

$$r = a(1 + \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \cdots\cdots) \qquad 1).$$

Poincaré приймає загальне рівнанє рівноваги:

$$\delta U = o,$$

де U є функция сил; в положеню, яке би відповідало рівновазї тревалій, мусить бути U maximum. Наколи dm і dm' є якісь два елєменти перстеня віддалені від себе о $\triangle$, то:

$$U = f\int \frac{dm\,dm'}{\triangle} + \frac{1}{2}\omega^2 \int y^2 dm,$$

де інтеґрал відносить ся до всїх точок маси, що обертає ся зі скоростию ω.

Найже:

$$\int \frac{dm\,dm'}{\triangle} = \frac{1}{2}\int\int \frac{dm\,dm'}{\triangle} = W, \quad \int y^2 dm = I, \qquad 2)$$

---

[1]) Пор. Poincaré: Bulletin astronomique т. II. ст. 109. і 405. і Acta mathematica т. VII. 259 et sqts.

[2]) Acta math. VII. ст. 284 sqts.

то:

$$U = fW + \frac{1}{2}\,\omega^2 I. \qquad 3).$$

W є енерґія потенцияльна перстеня, I єго момент безвладности з огляду на вісь обороту; W і I відносять ся до цілої маси перстеня. Наколи ті елєменти dm, що лежать між поверхнею рівноваги а поверхнею здєформованою безконечно близькою, назначимо через $d\mu$, а через V_μ і y_μ назначимо відповідні вартости потенциялу та віддаленя y (точки на поверхнї рівноваги), дістанемо:

$$\delta W = \int V_\mu d\mu, \quad \delta I = \int y_\mu^2 d\mu, \quad \int d\mu = 0,$$

отже:

$$\delta U = \int\left(fV_\mu + \frac{1}{2}\,\omega^2 y_\mu^2\right) d\mu = 0,$$

бо вираженє в скобках є стале для цілої поверхнї рівноваги.

Наколи маса перстеня є M, а густота ρ, то знанє маси M дозволить нам утворити якусь реляцию між a, l, β_1 β_2, ———, а се, що початок C лучів провідних є заразом середоточкою тяжести, дасть нам реляцию для β, і будемо могли визначити β_1 яко функцию величин (β_2 β_3, ———). Независимими параметрами будуть тодї a β_2 β_3 ———. Коли приймем, щосьмо найшли вираженє на U яко функцию тих параметрів, то з рівнаня $\delta U = 0$ випаде:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial U}{\partial \beta_2} = 0, \ \frac{\partial U}{\partial \beta_3} = 0, \text{———} \qquad 4)$$

і всї елєменти фіґури будуть визначені.

Вираженє W дасть ся легко обчислити ня сїй основі, що перстень є оборотовий.

Наколи dS і dS′ є елєментами поверхнї перекрою ABA′B′, y та y′ їх відступами від оси OX, h = x — x′, то оба ті елєменти утворять через оборот довкола оси OX два перстенї колові, яких енерґія потенцияльна є dW; наколи полуденники двох елєментів dm і dm′ тих елєментарних перстенїв творять з площею XOY кути ψ і ψ', а відступ тих елєментів є $\triangle$, то:

$$W = \int dW, \quad dW = \iint \frac{dm\, dm'}{\triangle},$$

а що:

$$dm = \rho dS y d\psi, \quad dm' = \rho dS' y' d\psi',$$

$$\Delta^2 = y^2 + y'^2 - 2yy' \cos(\psi' - \psi) + h^2,$$

то:

$$dW = \rho^2 yy' dS dS' \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{y^2 + y'^2 - 2yy' \cos(\psi' - \psi) + h^2}}.$$

Най: $\psi' - \psi = \psi''$, то узгляднюючи, що ψ остає стале при інтеґрованю зглядом ψ', дістанемо:

$$dW = 4\pi\rho^2 yy' dS dS' \int_0^{2\pi} \frac{d\psi''}{\sqrt{y^2 + y'^2 - 2yy' \cos \psi'' + h^2}},$$

або:

$$dW = 8\pi\rho^2 yy' dS dS' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(y + y')^2 + h^2 - 4yy' \sin^2 \vartheta}},$$

де $\psi'' = \pi - 2\vartheta$. Є се інтеґрал еліптичний першого рода, а єго модули є:

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= \frac{4yy'}{(y + y')^2 + h^2} \\ k'^2 &= \frac{(y - y')^2 + h^2}{(y + y')^2 + h^2} = \frac{\delta^2}{(y + y')^2 + h^2}; \\ &\text{отже:} \\ dW &= 8\pi\rho^2 \frac{yy'}{\sqrt{(y + y')^2 + h^2}} dS dS' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

де δ є відступом елементів dS і dS'.

Poincaré приймає, що розміри даної кривої є дуже малі в порівнаню з l; тоді $\frac{y}{l} - 1$, $\frac{y'}{l} - 1$, $\frac{h}{l}$ є величини першого ряду, а k'^2 другого ряду.

Наколи положимо $y = l + y_1$, $y' = l + y_1'$, де y_1 і y_1' є сорядні елементів dS і dS' з оглялу на вісь Cx_1, рівнобіжну до OX, тоді $h^2 = (x - x')^2$ і дістанемо розвиненя після $\frac{x}{l}, \frac{x'}{l}, \frac{y_1}{l}, \frac{y_1'}{l}$:

$$k' = \frac{\delta}{2l}\left[1 + \frac{y_1 + y_1'}{l} + \frac{(y_1 + y_1')^2 + (x - x')^2}{4l^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\delta}{2l}\left[1 - \frac{y_1 + y_1'}{2l} + \frac{(y_1 + y_1')^2}{4l^2} - \frac{(x - x')^2}{8l^2} + \cdots\right],$$

а що інтеґрал (анальоґічно як в теориї Ковалевскої):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2 \sin\vartheta}} = \left(1+\frac{\delta^2}{16l^2}+\cdots\right)\log\frac{8l}{\delta}+\frac{y_1+y_1'}{2l^2}-\frac{(y_1+y_1')^2}{8l^2}+\frac{(x-x')^2}{8l^2}-\frac{\delta^2}{16l^2}-\cdots,$$

$$\frac{yy'}{\sqrt{(y+y')^2+h^2}} = \frac{(l+y_1)(l+y_1')}{\sqrt{(2l+y_1+y_1')^2+(x-x')^2}} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{y_1+y_1'}{2l}-\frac{(y_1-y_1')^2}{4l^2}-\frac{(x-x')^2}{8l^2}+\cdots\right],$$

то дістанемо:

$$dW = 4\pi\rho^2 l\left[1+\frac{y_1+y_1'}{2l}-3\frac{(y_1-y_1')^2}{16l^2}-\frac{(x-x')^2}{16l^2}-\cdots\cdots\right]\log\frac{8l}{\delta}\,dSdS'+$$

$$+4\pi\rho^2 l\left[\frac{y_1+y_1'}{2l}+\frac{(y_1-y_1')^2}{16l^2}+\frac{y_1 y_1'}{2l^2}+\frac{(x-x')^2}{16l^2}+\cdots\cdots\right]dSdS'.$$

Най:

$$W_1 = 4\pi\rho^2 l\iint \log\frac{8l}{\delta}\,dSdS' \qquad 7)$$

а:

$$\left.\begin{aligned} W_2 = 4\pi\rho^2 l\iint\left[\frac{y_1+y_1'}{2l}-3\frac{(y_1-y_1')^2}{16l^2}-\frac{(x-x')^2}{16l^2}+\cdots\cdots\right]\log\frac{8l}{\delta}\,dSdS'+ \\ +4\pi\rho^2 l\iint\left[\frac{y_1+y_1'}{2l}+\frac{(y_1-y_1')^2}{16l^2}+\frac{y_1 y_1'}{2l^2}+\frac{(x-x')^2}{16l^2}+\cdots\cdots\right]dSdS', \end{aligned}\right\} 8)$$

то тоді:

$$W = W_1 + W_2 \qquad 9).$$

З висше наведених формул видно, що квот $\frac{W_2}{W_1}$ є величиною малою ряду $\frac{a}{l}$.

2. Щоби винайти W_1, підем способом Callandreau[1]).

Най-же:

$$f(\varphi) = 1 + \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \cdots\cdots\cdots \qquad 10)$$

і возьмім криві:

$$r_1 = uf(\varphi), \quad r_1 = (u+du)f(\varphi)$$
$$r_1' = u'f(\varphi'), \quad r_1' = (u'+du')f(\varphi'),$$

де u і u' є два параметри змінні в границях $(0\cdots\cdots a)$, $u' < u$.

Криві ті є гомотетичні зглядом кривої полуденникової (фіґ. VI).

---

[1]) Пор. Bulletin astronomique т. III. ст. 252, також Tisserand loc. cit. II.

Най елементом dS буде часть між кривими u, u + du, та лучами провідними, яким відповідають кути φ і $\varphi + d\varphi$; так само dS'. Дістанемо:

$$dS = u f^2(\varphi)\, du\, d\varphi, \quad dS' = u' f^2(\varphi')\, du' d\varphi'$$

$$\delta^2 = u^2 f^2(\varphi) + u'^2 f^2(\varphi') - 2u u' f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi').$$

Для даної вартости *u* будемо інтеґрувати зглядом u' від 0 до *u*, а для φ' від 0 до 2π так, щоби елемент dS' обнимав всї положеня в середині кривої u; далї u мае ся зміняти від 0 до a, а φ від 0 до 2π. Тодї можна буде написати:

$$\frac{W_1}{4\pi\rho^2 l} = \int_0^a u du \int_0^u u' du' \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log \frac{8l}{\sqrt{u^2 f^2(\varphi) + u'^2 f^2(\varphi') - 2uu' f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi')}} d\varphi d\varphi'.$$

u е в інтеґрованю зглядом u' стале, можна проте покласти:

$$u' = ux, \quad du' = udx,$$

а тодї:

$$\frac{W_1}{4\pi\rho^2 l} = \int_0^a u^3 \log \frac{8l}{u} du \int_0^1 x dx \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(\varphi)\, f^2(\varphi')\, d\varphi\, d\varphi' +$$

$$\text{11)} \quad + \int_0^a u^3 du \int_0^1 x dx \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log \frac{1}{\sqrt{f^2(\varphi) + x^2 f^2(\varphi') - 2x f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi')}} d\varphi d\varphi'.$$

Можна безпосередно інтеґрувати зглядом u; тодї:

$$\int u^3 \log \frac{8l}{u} du = \frac{1}{4} u^4 \log \frac{8l}{u} + \frac{1}{16} u^4 + \text{Const.}$$

$$\int_0^a \log \frac{8l}{u} du = \frac{1}{4} a^4 \left(\log \frac{8l}{a} + \frac{1}{4} \right);$$

дальше е:

$$\int_0^{2\pi} f^2(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} (1 + \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \cdots\cdots)^2 d\varphi = 2\pi(1 + c_0),$$

де:

$$c_0 = \frac{1}{2} \sum_1^\infty \beta_n^2$$

та де пропущено добутки третого степеня величин β_n.

Тепер дістанемо:

$$W_1 = \pi^3 \rho^2 a^4 l (1 + c_0)^2 \left(\frac{1}{2} + 2 \log \frac{8l}{a} \right) + \pi\rho^2 a^4 l \int_0^1 J x dx, \qquad 12)$$

де:

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log \frac{1}{\sqrt{f^2(\varphi) + x^2 f^2(\varphi') - 2x f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi')}} d\varphi d\varphi'.$$

Щоби обчислити J, положім:

$$f^2(\varphi) + f^2(\varphi') x^2 - 2x f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi') = \left[1 + x^2 - 2x\cos(\varphi - \varphi')\right](1 + H),$$

де:

$$H = \frac{f^2(\varphi) - 1 + x^2\left[f^2(\varphi') - 1\right] - 2x\left[f(\varphi) f(\varphi') - 1\right]\cos(\varphi - \varphi')}{1 + x^2 - 2x\cos(\varphi - \varphi')} \tag{13)}$$

Тепер дістанемо:

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 - 2x\cos(\varphi - \varphi')}} d\varphi d\varphi' -$$

14)
$$- \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log(1 + H)\, d\varphi d\varphi'.$$

Розвиваючи на ряд дістанемо:

$$\log \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 - 2x\cos(\varphi - \varphi')}} = \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n} \cos n(\varphi - \varphi').$$

Найже:

$$\sum_1^{\infty} \beta_n \cos n\varphi = \zeta, \quad \sum_1^{\infty} \beta_{n'} \cos n'\varphi' = \zeta',$$

то:

$$f(\varphi) = 1 + \zeta, \quad f(\varphi') = 1 + \zeta'.$$

Перший інтеґрал форми 14) прийме вид:

$$\sum \frac{x^n}{n} \int_0^{2} d\varphi \int_0^{2\pi} (1 + 2\zeta + 2\zeta' + \zeta^2 + \zeta'^2 + 4\zeta\zeta' + \cdots\cdots) \cos n(\varphi - \varphi')\, d\varphi'.$$

Щоби сей вислїд був ріжний від зера, треба виражене в скобках звести до $4\zeta\zeta'$, або до $4\Sigma\beta_n^2 \cos n\varphi \cos n\varphi' = 2\Sigma\beta_n^2 \cos n(\varphi - \varphi')$; інтеґрал прибере тодї вартість $4\pi^2\Sigma \frac{x^n}{n} \beta_n^2$.

Форма 13) дасть по виконаню:

$$H = \zeta + \zeta' + \zeta\zeta' + (\zeta - \zeta') \frac{1 + \zeta - (1 + \zeta')x^2}{1 + x^2 - 2x\cos\vartheta} \tag{15).}$$

А що се виражене є з огляду на β першого ряду, проте можна взяти:

$$\log(1+H) = H - \frac{H^2}{2},$$

а тоді:

$$J = 4\pi^2 \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} \beta_n^2 + \frac{1}{4} J_1 \qquad 16)$$

де:

$$J_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (H^2 - 2H)(1+\zeta^2)(1+\zeta')^2 \, d\varphi d\varphi'.$$

Наколи вставимо вартість за H, дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} J_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (-2\zeta - 2\zeta' - 3\zeta^2 - 3\zeta'^2 - 8\zeta\zeta')\, d\varphi d\varphi' + \\ + 2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta' - \zeta + \zeta'^2 - 2\zeta^2 + \zeta\zeta' + (\zeta - \zeta' - 2\zeta'^2 + \zeta\zeta')\, x^2}{1 + x^2 - 2x\cos\vartheta}\, d\varphi d\varphi' + \\ + (1-x^2)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta^2 + \zeta'^2 - 2\zeta\zeta'}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2}\, d\varphi d\varphi' \end{aligned}\right\} 17).$$

Положім:

$$18) \left\{\begin{aligned} & \zeta^2 = c_0 + \sum_1^\infty c_n \cos n\varphi, \quad \zeta'^2 = c_0 + \sum_1^\infty c_{n'} \cos n'\varphi', \quad c_0 = \frac{1}{2}\sum_1^\infty \beta_n^2 \\ & \frac{1}{1+x^2-2x\cos\vartheta} = A_0 + \sum_1^\infty A_{n''} \cos n''\vartheta \\ & \frac{1}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2} = B_0 + \sum_1^\infty B_{n''} \cos n''\vartheta \end{aligned}\right.$$

то дістанем:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \zeta\, d\varphi d\varphi' = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \zeta'\, d\varphi d\varphi' = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \zeta^2\, d\varphi d\varphi' = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \zeta'^2\, d\varphi d\varphi' = 4\pi^2 c_0.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \zeta\zeta'\, d\varphi d\varphi' = 0.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta\, d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta'\, d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=0.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^2\, d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta'^2\, d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=4\pi^2 c_0 A_0.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^2\, d\varphi d\varphi'}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta'^2\, d\varphi d\varphi'}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2}=4\pi^2 c_0 B_0.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta\zeta'\, d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=\pi^2\sum_1^{\infty} A_n\, \beta_n^2,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta\zeta'\, d\varphi d\varphi'}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2}=\pi^2\sum_1^{\infty} B_n \beta_n^2.$$

В виду того рівнанє 17) дасть:

$$J_1=8\pi^2c_0\Big[-3-A_0(1+x^2)+B_0(1-x^2)^2\Big]+2\pi^2\sum_1^{\infty}\Big[A_n(1+x^2)-B_n(1-x^2)^2\Big]\beta_n^2. \quad 19)$$

Наколи зріжничкуєм другий з взорів 18) і помножимо через x, дістанемо:

$$x\frac{dA_0}{dx}+\sum_1^{\infty}x\frac{dA_n}{dx}\cos n\vartheta=-A_0-\sum_1^{\infty}A_n\cos n\vartheta+(1+x^2)(B_0+\sum_1^{\infty}B_n\cos n\vartheta);$$

з відси слідує, що:

$$(1-x^2)B_0=A_0+x\frac{dA_0}{dx}$$

$$(1-x^2)B_n=A_n+x\frac{dA_n}{dx}.$$

В виду того:

$$J_1=8\pi^2c_0\Big[-3-2A_0x^2+x(1-x^2)\frac{dA_0}{dx}\Big]+2\pi^2\sum_1^{\infty}\Big[2A_nx^2-x(1-x^2)\frac{dA_n}{dx}\Big]\beta_n^2.$$

А що:

$$A_0=\frac{1}{1-x^2},\quad A_n=\frac{2x^n}{1-x^2},$$

то:

$$J_1=-24\pi^2c_0-4\pi^2\sum_1^{\infty}nx^n\beta_n^2.$$

Остаточно дістанемо після 16):

$$J = -6\pi c_0 + \pi^2 \sum_1^\infty \left(\frac{4}{n} - n\right) x^n \beta_n^2;$$

з відси:

$$\int_0^1 Jxdx = -3\pi^2 c_0 - \pi^2 \sum_1^\infty \frac{n-2}{n} \beta_n^2.$$

Наколи вставимо се в 12), дістанемо:

$$\frac{W_1}{\pi^3 \rho^2 a^4 l} = \left(1 + c_0\right)^2 \left(\frac{1}{2} + 2\log\frac{8l}{a}\right) + \sum_1^\infty \left(\frac{2}{n} - \frac{5}{2}\right) \beta_n^2 \qquad 20).$$

Положім:

$$a^2 (1 + c_0) = a_0{}^2 \qquad 21)$$

то:

$$2\log\frac{8l}{a} = 2\log\frac{8l}{a_0} + \log(1 + c_0) = 2\log\frac{8l}{a_0} + c_0,$$

а рівнане 20) дасть:

$$W_1 = \pi^3 \rho^2 a_0{}^4 l \left[\frac{1}{2} + 2\log\frac{8l}{a_0} + 2\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - 1\right) \beta_n^2\right] \qquad 22)$$

3. Наколи y є прямовісна поведена з елєменту dm до оси обороту, тодї:

$$dm = \rho y d\psi dS,$$

а інтеґрал:

$$I = \int y^2 dm = 2\pi\rho \int y^3 dS,$$

а що:

$$y = l + y_1,$$

то:

$$I = 2\pi\rho\left(l^3 \int dS + 3l^2 \int y_1 dS + 3l \int y_1{}^2 dS + \int y_1{}^3 dS\right) \qquad 23).$$

Точка C є средоточкою тяжести, отже:

$$\int y_1 dS = 0,$$

а що:

$$dS = a(1 + \zeta)^2 du d\varphi,$$

то:

$$\int dS = \int_0^a u du \int_0^{2\pi} (1+\zeta)^2 d\varphi = \pi a^2 (1 + c_0) = \pi a_0^{\,2} \qquad 24).$$

Отже $\pi a_0^{\,2}$ є полем полуденникового перекрою.

Дальше маєм:

$$\int y_1^{\,2} dS = \int_0^a u^3 du \int_0^{2\pi} (1+\zeta)^4 \cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + 4\zeta + \cdots\cdots) \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} \pi a_0 + \frac{1}{2} a^4 \int_0^{2\pi} \zeta \cos 2\varphi d\varphi \text{ (наколи добутки } \frac{a^2}{l^2} \text{ пропустимо)} =$$

$$= \frac{1}{4} \pi a^4 + \frac{1}{2} \pi a^4 \beta_2 = \frac{1}{4} \pi a_0^{\,4} + \frac{1}{2} \pi a_0^{\,4} \beta_2 \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad 25).$$

З виражень 23), 24) і 25) вийде з відповідним приближенєм:

$$I = 2\pi^2 \rho a_0^{\,2} l \left(l^2 + \frac{3}{4} a_0^{\,2} + \frac{3}{2} a_0^{\,2} \beta_2 \right) \qquad 26).$$

В виду взорів 3), 22) і 26) дістанемо тепер на функцию сил:

$$U = \pi^3 f \rho^2 l a_0^{\,4} \left[\frac{1}{2} + 2 \log \frac{8l}{a_0} + 2 \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \beta_n^2 \right] + \pi \omega^2 \rho l a_0^{\,2} \left(l^2 + \frac{3}{4} a_0^{\,2} + \frac{3}{2} a_0^{\,2} \beta_2 \right)$$

Маса перстеня є:

$$M = 2\pi^2 a_0^{\,2} l \rho,$$

отже:

$$a_0 l = \frac{M}{2\pi^2 \rho} \qquad 27)$$

а:

$$\frac{U}{\pi f \rho} = M a_0^{\,2} \left[\frac{1}{4} + \log \frac{8l}{a_0} + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \beta_n^2 \right] + M \frac{\omega^2}{2\pi f \rho} \left(l^2 + \frac{3}{4} a_0^{\,2} + \frac{3}{2} a_0^{\,2} \beta_2 \right) \qquad 28).$$

U є проте функциєю змінних независимих a_0 β_2 $\beta_3, \cdots\cdots$; β_1 не входить ту, бо для $n = 1$ є $\left(\frac{1}{n} - 1 \right) = 0$. — Щоби U було maximum або minimum, мусить бути:

$$\frac{dU}{da_0} = 0, \quad \frac{dU}{d\beta_2} = 0, \quad \frac{dU}{d\beta_n} = 0 \quad n > 2 \qquad 29).$$

З $\frac{dU}{d\beta_n} = 0$ вийде $\beta_3 = \beta_4 = \cdots = 0$, а з $\frac{dU}{d\beta_2} = 0$ дістанемо:

$$\beta_2 = \frac{3}{4}\,\frac{\omega^2}{\pi f\rho} \qquad 31).$$

З $\frac{dU}{da_0} = 0$ випаде:

$$\frac{\partial U}{\partial a_0} + \frac{\partial U}{\partial l}\,\frac{dl}{da_0} = 0$$

або після 27):

$$\frac{\partial U}{\partial a_0} - \frac{2l}{a_0}\,\frac{\partial U}{\partial l} = 0 \qquad 32).$$

З рівнаня 28) випаде:

$$\frac{1}{\pi f\rho M}\,\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{a_0{}^2}{l} + \frac{\omega^2 l}{\pi f\rho}$$

$$\frac{1}{\pi f\rho M}\,\frac{\partial U}{\partial a_0} = a_0\left(\frac{1}{2} + 2\log\frac{8l}{a_0} - \beta_2^2\right) - a_0 + \frac{\omega^2 a_0}{\pi f\rho}\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\beta_2\right).$$

В виду сего рівнанє 32) перейде (з пропущенєм ω^4) на:

$$-\frac{5}{2} + 2\log\frac{8l}{a_0} - \frac{2\omega^2 l^2}{\pi f\rho a_0{}^2} + \frac{3\omega^2}{4\pi f\rho} = 0$$

або:

$$\frac{\omega^2}{\pi f\rho} = \left(\frac{a_0}{l}\right)^2\left(\log\frac{8l}{a_0} - \frac{5}{4}\right) \qquad 33).$$

При помочи сего рівняня можна ся пересьвідчити, що U випаде maximum, значить ся рівновага буде тревала. Но тямити треба, що ми приняли перстень оборотовий і не сплощений; тревалість розслїдили ми проте лиш для таких змін, які фіґури оборотової не зміняють; найменьша зміна мусїлаб рівновагу знищити.

4. Poincaré подає далї ось які вислїди[1]) своїх теоретичних розслїдів. Елїпсоїди не є виключно фіґурами рівноваги, які приймає теч остаючи в повисшім руху оборотовім. Істнує противно безконечно много ріжних фіґур рівноваги, а всї они є симетричні з огляду на площу прямовісну до оси ротациї. Всї ті фіґури мають певну скількість площий симетриї (що найменьше одну), які переходять

---

[1]) Пор. Acta math. VII. ст. 378 sqts.

через вісь, а між ними є кілька площий обороту (революциї). Но між усїми тими фіґурами є лиш одна фіґура тревала; має она дві площи симетриї. Мет (проєкцию) сеї поверхнї на одну з площий симетриї і мет еліпсоїди, з якої поверхня ся повстала, представляє фіґ. VII. Еліпсоїда назначена точками, контури мету згаданої поверхнї і перекрою обох представляє лїнїя тягла. Тїнь представляє ту часть поверхнї, яку видко на поперек еліпсоїди.

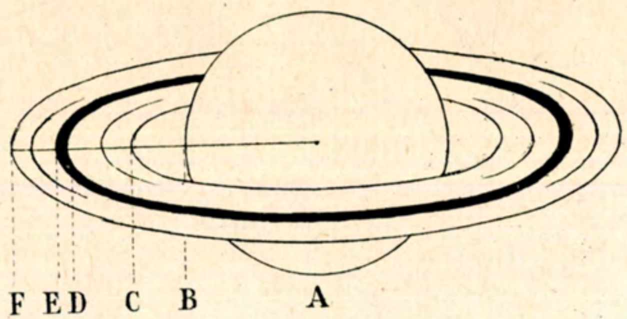
Еліпсоїди оборотові є тревалі, наколи їх сплощенє є меньше, як сплощенє еліпсоїди Jacobi, а еліпсоїди Jacobi є тревалі тодї, наколи є мало видовжені; в тім случаю рівновага остає, хотя би теч була клейка.

Подумаймо тепер масу плинну однородну, що відбуває рух оборотовий і помалу стягає ся, но не тратить однородности. Наколи маса та остигає дуже помалу, а тертє в внутрі єї є досить велике, тодї рух оборотовий остає в усїх частях маси. В сих умовах теч стремить до принятя сталої фіґури рівноваги, а момент гону (mv) остає const.

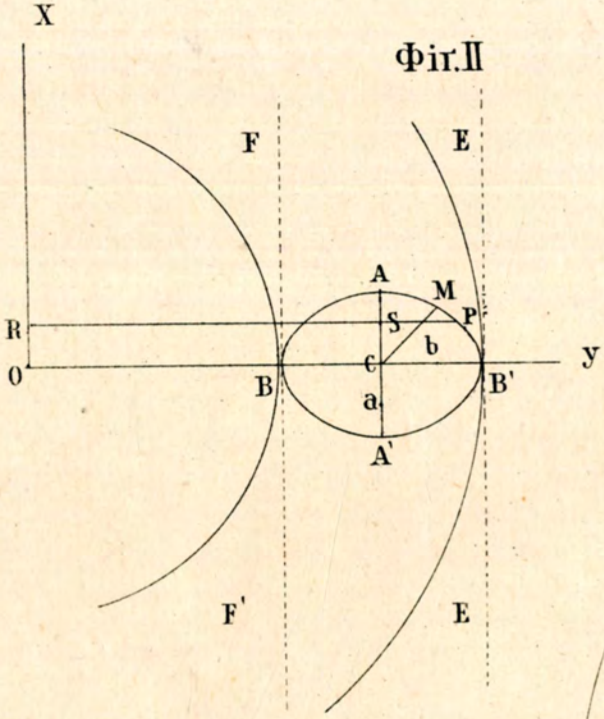
З початку, коли густота є невелика, маса приймає вид еліпсоди оборотової, що не много ріжнить ся від кулї. Наслідком руху оборотового наступає сплощенє, а коли оно дійде до $\frac{2}{5}$, еліпсоїда оборотова стаєсь еліпсоїдою Jacobi. Через дальше остиганє маса перестає бути еліпсоїдальною, стаєсь асиметричною зглядом площи yz і приймає вид представлений на фіґ. VII. Еліпсоїда здаєсь легко вгнута в середній своїй части, но більше близько одного з вершків оси більшої; найбільша часть материї стремить знову до того, щоби приняти вид кулї, а мала часть відлучає ся при однім з вершків оси більшої від еліпсоїди, мовби хотїла відірвати ся від маси головної. Наколи маса стигне єще далї і далї, то імовірно маса стаєсь щораз більше і більше вгнута в серединї, звужає ся і розпадає ся на два тїла.

Тернопіль в сїчню 1901.

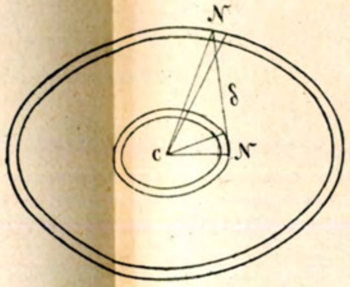
Фиг. I



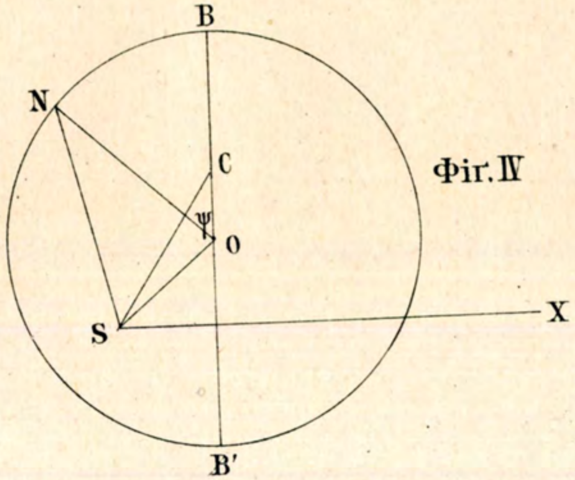
Фиг. II



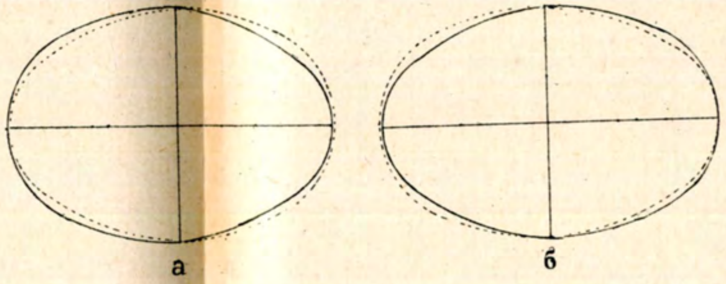
Фиг. VI



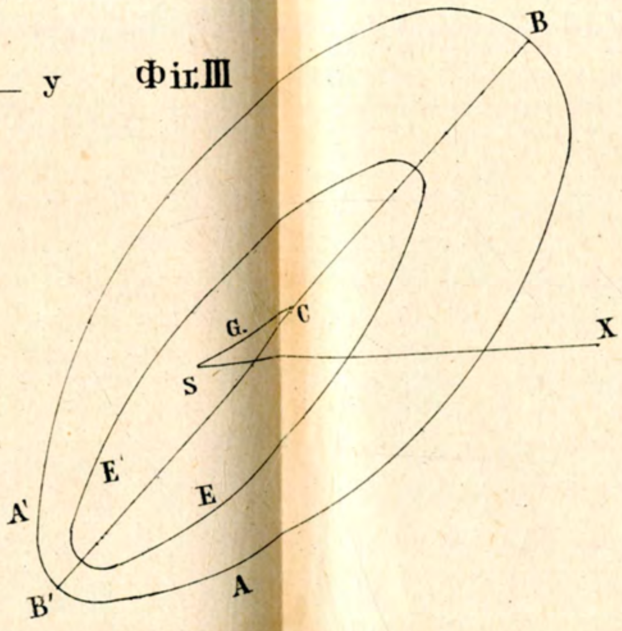
Фиг. IV



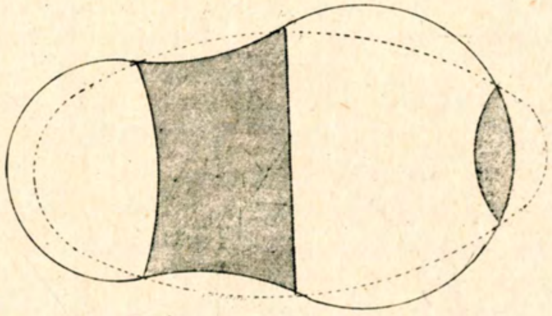
Фиг. V



Фиг. III



Фиг. VII



ПРО ПЛЯМИ СОНЇЧНІ

Написав

Стефан Рудницкий.

ЧАСТЬ ДРУГА.

Про дїйсний рух сонїчних плям.

Як кожде иньше тїло небесне мають плями сонїчні два роди руху; рух позірний і рух дїйсний. Рух позірний відбувають они разом з цїлою сонїчною кулею коло єї оси, рух дїйсний відбувають они сами для себе на сонїчній поверхнї. Назва „позірний“ не конче є ту оправдана, бо беручи річ беззґлядно рух, що названий нами позірний, є дїйсним. В наслїдок ротациї сонця плями змінюють прецїнь своє положенє для земского обсерватора. Уживаєм назви сеї лиш для відріжненя того руху від руху дїйсного. Вчинити се можем тим певнїйше, що сей рух є дїйсно в части позірний, бо підчас обсервациї єго наша земля зміняє своє положенє.

Позірний рух плям сонїчних представляє ся так. Плями являють ся на східнім краю сонїчного кружка і посувають ся по рівнобіжнику сонїчнім від сходу на захід. По 14 днях від часу, як ся показали, зникають плями поза західним краєм сонїчного кружка, щоби по такім самім часї знов ся показати, наколи розуміє ся за сей час не зникли. Сли відразу дві або більше плям укаже ся на сонїчнім кружку, дороги їх є звичайно рівнобіжні; те послужило в XVII. віцї доказом, що плями находять ся на самій поверхнї сонця а не поза нею. Розслїджуючи точнїйше позірний рух плям, вже рано помічено, що він не є рівномірний. На серединї кружка він є скорший, у края вільнїйший. Витолкованє легке. Бо позірно відбувають плями свій рух по площі, в дїйстности по кулистій поверхнї.

Криві лїнії, що їх описують плями в позірнім руху, мають дуже ріжний вид. Вісь сонця є нахилена о 7° 15' до площі еклїптики (після Carringtona для епохи 1850). В наслїдок ріжного положеня землї зглядом сонця в ріжних порах року зміняють свій вид лінії позірного руху плям. Коли сонце находить ся в котрій небудь абсидї, тодї дороги позірні плям є простими лініями нахиленими до склїптики. Дїє ся се 4. червня і 6. грудня, коли довжина сонця в еклїптицї виносить 74°30' і 254°30' Від червня зачинають ся ті прості лінії викривлювати і змінюють ся в видовжені елїпси, неповні, звернені внутрішною стороною до півночи Найбільше виразні суть ті елїпси в вересни, потім кривина їх меньшає, щоби 6. грудня зрівнати ся з зером. Від того часу дороги плям сонїчних знов починають ся викривляти, але в сторону прямо противну, вони є тепер звернені до полудневого бігуна. Maximum кривини припадає на марець, мінїмум же знов на 4. червня.[1])

Той позірний рух плям є важним явищем, бо послужив до означеня часу обороту сонця, що є елементом важним для дослїдів метеорольоґічних, а головно для маґнетних. Коли іменно запамятаєм собі час, в якім пляма находить ся в данім місцї сонїчного кружка, а також час, в якім пляма відбувши цїлий позірний рух знов в тім самім місцї стане, найдем з їх ріжницї час обороту сонця.

Є се розуміє ся час синодичний а не сідеричний. Бож через тих двацять кілька днїв, що сей час становлять, наша земля змінила своє положенє. Вже Scheiner, означуючи по раз перший час ротациї сонця в початках XVII. віка звернув на се увагу. Для часу синодичного обороту сонця одержав він 27½ дня. Зазначім собі тую вартість через τ. Маючи крім того дане $T = 365^1/_4$ днїв найдемо час сидеричного обороту в той спосіб:

$$\tau . \frac{1}{t} = 1 + \tau . \frac{1}{T}$$

$$\tau T - \tau t - Tt = 0 \text{ з того}$$

$$t (T + \tau) = T\tau$$

$$t = \frac{T\tau}{T + \tau} = \frac{365\frac{1}{4} . 27\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4} + 27\frac{1}{2}} = 25\tfrac{1}{2} \text{ дня}$$

В той спосіб означив Scheiner сидеричний час ротациї на 25½ дня. Є се природно тільки приближена вартість. Від XVII. в. аж до наших часів кільканацять разів означувано час ротациї сонця і одержувано иньші вартости, що дають ся сучасно озна-

---

[1]) Secch o. c. ст. 21. сл.

чити. Методи, що були притім уживані не є так прості як метода Scheinera, але займати ся ними не будем, подамо тільки висліди.[1])

Обсерватор	Час ротациї сид.	Нахилене оси	Довжина Ω	Епоха
Scheiner	25·33°	7°30’	69 – 70°	1634
Cassini	25·58°	7°30’	70°10’	1678
Lalande	25·42°	7°20’	78°	1776
Delambre	25·01°	7°19’	80°17’	1775
Böhm	25·52°	6°57’	76°47’	1833
Bianchi	25·35°	—	—	1839
Langier	25·34°	7·9’	75"8’	1840
Petersen	—	6°51’	73°29’	1841
Kysäus	25·09°	6°38’	76°38’	1841
Carrington	25·38°	7°15’	73°40’	1850
Wolf	25·182°	7°51’	80°33·3’	1854
Spörer	25·234°	6°57’	74°36’	1866

Видимо отже, що результати дослїдів над ротациєю сонця є межи собою дуже ріжні, іменно, коли порівнаєм ріжниції, які тут заходять між поодинокими обсерваторами, з ріжницями, які є можливі при иньших обсервациях астрономічних. Там они обертають ся що найбільше в секундах або їх частинах. Ту они є великі а походить се в части з занадто малого числа обсервацний а іменно в давнїйших часах, коли звичайно лише трох обсервацний вживано, щоби обрахувати час ротациї і иньші елементи.

В головній же мірі походять ті ріжниції з чого иньшого. Іменно плями сонїчні не остають стало на однім місци сонїчної поверхнї, але переносять ся щораз в иньші місця, бо відбувають крім позірного руху ще рух дїйсний або властивий.

Учені дуже пізно звернули увагу на дїйсний рух плям, головно тому, що раз їх відкривши дуже ся мало ними займали. Перший Olbers припускав істноване такого руху. Він виразив своє

---

[1]) Пор. Wolf. Handbuch der Astronomie etc. т. II. ст. 422 сл. Secchi o. c. ст. 126.

припущенє в листї до Zach'a з р. 1798. II. 4.[1]) Але понеже учені Французскі задивляли ся з великим скептицизмом на обсервациї сонїчних плям в загалї, то доперва в другій чверти XIX віка найшли ся люди, що заняли ся сею справою. Були се: Böhm, Langier і Peters. Böhm обсервуючи сонїчні плями в 1833 роцї, постеріг з немалим зачудуванєм, що з його обсервациї виходить иньший час ротациї дзя околиць під рівником, а иньший для иньших геліоґрафічних ширин. Подаємо ту коротву табельку його обсерваций. Она доказує, що Böhm був на добрій дорозї, але не умів осудити важности свого відкритя та й не впорядкував належито своїх обсерваций.[2]) Langier також завважав, що майже кожда пляма сонїчна дає иньший час ротациї сонця, але не оголосив друком розвідки, що був єї заповів в Comptes Rendus том XL. ст. 140. Потім занимав ся рухом плям також Peters, але свої дослїди робив він в часї дуже недогіднім, бо в лїтах 1845/6[3]) Так отже дїйсне відкритє властивого руху сонїчних плям приписати належить англійскому ученому Carrington-ови. Відмінно від давнїйших учених постановив він обсервувати плями систематично через довший час. Єго витревалість вже по кількох лїтах була нагороджена дуже важними результатами.[4]) Єго обсервациї зміряли до того, щоби визначити позицию кождої обсервованої плями. Найшовши єї, обраховував позициї для будучих епох. В тих самих епохах обсервував потім пляму і з ріжниць межи обрахованими а обсервованими позициями обчисляв емпіричні поправки і старав ся викрити якусь правильність. Протягом півосьма року доконав Carrington 5000 обсервацийна 954 ріжних ґрупах плям. Вислїди їх дадуть ся зібрати в кілька тез.

ч. ширини	ч. ротациї
8°	25·09 д.
24°	25·68 д.
21°	26·16 д.
26°	26·99 д.
31—33°	27·08 д.

---

[1]) Geographische Ephemeriden. I. Wolf Handbuch etc. II. 428.

[2]) Böhm. Beobachtungen von Sonnenflecken und Bestimmung der Rotationselemente der Sonne. Denkschriften der k. k. Akademie der Wissenschaften 7. V. ст. 150. сл. Comptes Cendes т. LX. ст. 319. сл.

[3]) Contributions to the Atmospherology of the Sun. Proceedings of American Assoc. of Science p. 1855.

[4]) Observations of the spots on the Sun from November 9, 1853 to March 24, 1861 made at Redhill by R. C. Carrington. London 1863. Менї недоступне. Пор. Comptes Rendus tome LX. p. 141 сл. Secchi o. c. 128 сл. Young o. c. 130 сл. Wolf Handbuch т. II. ст. 427 сл.

Передовсім сконстатував Carrington, що плями дуже рідко переходять в висші ширини гелїоґрафічні як 30^0 на північ і на полудне від сонїчного рівника. Рідко також можна їх подибати між рівником а 10^0 північної або полудневої гелїоґрафічної ширини.

Місцеве maximum плям не має однак сталого положеня і пересуває ся в ріжнї околиції пояса $\pm$ 10^0 до $\pm$ 30^0. Середно можна его шукати при $\pm$ 17^0 гел. ширини. В обсягу тих поясів, що були названі Scheiner'ом viae regiae, є також походнї яснїйші, численнїйші і виразнїйші, чим на иньших місцях сонїчної поверхнї. Взагалї число плям на ріжних півкулях сонїчних вирівнує ся підчас довших періодів, специяльно же майже завсїгди є нерівне.

Друге право Carrington'а відносить ся вже прямо до дїйсного руху плям і звучить: для ріжних гелїоґрафічних ширин час ротациї є ріжний. Значить се, що ріжні части поверхнї сонїчної кулї відбувають свій оборот в ріжних часах. Слїдує з того, що плями відбувають певний дїйсний рух на поверхнї сонця. Carrington найшов ту, що чисельні вартости для часу ротациї суть тим більші, чим дальше є пляма від рівника, котру обсервуєм в цїли означеня часу ротациї. Під рівником є отже ротация найскорша і виносить майже рівно 25 днїв. Вже під 20^0 ширини час ротациї є о 18 годин довший, в ширинї 30^0 виносить він вже 26·5 дня, а під 45^0 навіть 27·5 дня. Carrington впорядкував свої обсервациї зі згляду на змінну скорість обороту і на їх підставі уложив емпіричну формулу.

$$\xi = 865' - 165 \sin^{7}/_{4} \lambda,$$

де ξ означає денний лук ротациї, а λ гелїоґрафічну ширину. Примінивши ту формулу можем в більшости случаїв представити кожду обсервацию сонїчної плями.

Відкритя Carrington'а представить нам найлучше уложена ним самим табеля.[1]) В першій єї колюмнї находим середну гелїоґрафічну ширину обсервованих плям, в другій середний денний рух власний плями в довжинї. Єсли той рух є більший як 14^{0}11', то перед числом стоїть знак $+$ єслиж менший, знак —. (Carrington приймає за середний час ротациї сонця число 25·380 дня.) Трета колюмна обіймає числа, що означають власний рух плям в ширинї. Коли перед ними є знак $+$, значить се, що пляма посуває ся в на-

---

[1]) Observations of the spots on the sun p. 222.

прямі до бігуна, колиж знак —, то пляма посуває ся ідь рівникови. Четверта вкінци колюмна дає число обсервациї1).

Ширина геліоґрафічна північна	Рух денний в		Число обсервованих плям	Ширина геліоґрафічна полуднева	Рух денний в		Число обсервованих плям
	довжині	ширині			довжині	ширині	
+ 50°	— 64'	+ 11'	1	—	—	—	—
—	—	—	—	— 45°	— 92'	— 8'	2
37°	— 66'	— 17'	2	—	—	—	- -
—	—	—	—	36°	— 50'	+ 6'	2
34°	— 43'	+ 4'	12	34°	— 44'	— 1'	15
33°	— 33'	+ 7'	4	33°	— 36'	— 10'	2
32°	— 30'	— 2'	2	32°	— 52'	— 5'	2
31°	— 21'	+ 5'	15	—	—	—	—
30°	— 20'	— 1'	12	30°	— 33'	+ 4'	12
29°	— 36'	+ 6'	5	29°	— 34'	+ 1'	35
28°	— 28'	+ 8'	25	28°	— 35'	+ 1'	18
27°	— 27'	+ 2'	12	27°	— 40'	+ 0'	10
26°	— 21'	— 1'	43	26°	— 27'	+ 0'	17
25°	— 12'	+ 3'	4	25°	— 20'	+ 3'	27
24°	— 16'	+ 2'	23	24°	— 23'	+ 4'	14
23_0	— 19'	+ 1'	34	23°	— 17'	+ 3'	7
22°	— 12'	— 1'	33	22°	— 14'	— 0'	72
21°	— 14'	+ 0'	34	21°	— 18'	+ 5'	27
20°	— 9'	+ 1'	31	20°	— 12'	+ 2'	38
19°	— 11'	— 0'	47	19°	— 13'	+ 1'	18
18°	— 6'	— 1'	6	18°	— 6'	— 0'	45
17°	— 9'	— 1'	15	17°	— 10'	+ 1'	32
16°	— 5'	+ 2'	17	16°	— 6'	+ 0'	9
15°	— 0'	+ 2'	41	15°	— 10'	— 0'	27
14°	— 4'	— 1'	30	14°	— 4'	— 1'	28
13°	— 2'	— 2'	24	13°	+ 1'	0'	2
12°	+ 16'	— 4'	18	12°	+ 1'	— 0'	97
11°	+ 5'	— 0'	38	11°	+ 6'	— 1'	18
10°	+ 2'	— 1'	22	10°	+ 3'	+ 1'	22
9°	+ 8'	— 8'	13	9°	+ 12'	+ 1'	43
8°	+ 10'	— 0'	71	8°	+ 6'	+ 3'	38
7°	+ 8'	— 1'	53	7°	+ 21'	+ 0'	16
6°	+ 11'	— 2'	19	6°	—	—	—
5°	+ 31'	— 10'	5	5°	+ 24'	— 12'	— 1

---

*) Та табеля уміщена також у Secchio-го o. c. ст. 132 і у Zöllnera: Über das Rotationsgesetz der Sonne und der grosen Planeten. Sitzungsberichte der königl. Sächs. Ges. d. Wissenschaften, p. 1871 ст. 64.

Ширина геліоґрафічна північна	Рух денний в		Число обсервованих плям	Ширина геліоґрафічна полуднева	Рух денний в		Число обсервованих плям
	довжинї	ширинї			довжинї	жиринї	
4°	+ 15'	+ 2'	6	4°	+ 18'	4'	3
3°	+ 38'	— 2'	2	3°	+ 0'	1'	11
2°	—	—	—	2°	+ 17'	+ 9'	2
1°	—	—	—	1°	+ 4'	0'	2
0°	—	—	—	0°	+ 10'	— 6'	1

З тої головної табелї легко вивести табелю оборотових кутів для ріжних рівнобіжників сонїчних підчас двайцять чотирох годин середного часу.

Ширина	Денний кут обороту	Число обсервованих плям	Дерний рух в ширинї
+ 50°	787'	1	+ 11
+ 45°	—	—	—
+ 40°	—	—	—
+ 35°	806'	18	—
+ 30°	824'	59	+ 3·5'
+ 25°	831'	116	+ 2·8'
+ 20°	840'	151	+ 1·0'
+ 15°	851'	127	+ 0·2'
+ 10°	859'	142	— 1·0'
+ 5°	863'	85	— 2·4'
+ 0°	867'	5	+ 3·3'
— 5°	865'	31	— 1·6'
— 10°	856'	218	+ 1·0'
— 15°	845'	98	— 0·4'
- 20°	839'	200	+ 0·8'
— 25°	827'	75	+ 3·0'
— 30°	814'	67	+ 1·2'
— 35°	805'	19	— 5·3'
— 40°	—	—	—
— 45°	759'	2	8'
- 50°	—	—	—

З тої табелї виходить безпосередно, що рухи плям в довжинї є зависимі від того, як они віддаленї від рівника. Плями, що находять ся в висших ширинах, мають денний кут ротациї значно меньший чим плями, що лежать близько рівника. Длятого перші дають більші вартости на оборот сонця чим послідні.

Трете право Carringtona відносить ся до властивого руху плям в ширинї. Під тим взглядом не дали ся виставити так прості правила як для руху в довжинї. Але Carrington і ту найшов правильність головно на підставі послїдної колюмни своеї меньшої табелї. Именно: 1) плями, що лежать поза 20° північної або полудневої гелїографічної ширини, відбувають власний рух в ширинї в напрямі до бігунів. Дорога, котру відбувають они під впливом сего руху, не перевисшае межи 20° — 40° гел. ширини пересїчно 2' денно. 2) Межи рівнобіжниками 10° а 20° е рух в ширинї дуже малий, знак в загалї —, рух звернений в напрямі до рівника, виносить пересїчно на день 1'. 3) В стрефі підрівниковій межи + 10° а — 10° гел. ширини трудно е сконстатувати рух в ширинї, бо знаки + і — часто ся зміняють, а середнї вартости е дуже малі. Завважати треба також, що поза 35° ширини також трудно сконстатувати істноване і напрям власного руху плям, бо в такім відаленю від рівника они майже нїколи ся не являють.[1]

Вкінци ще пару слїв про елементи ротациї сонця, тодї на ново Carringtonом означені. Поступав він ту в слїдуючий спосіб. Означував ріжниці руху власного в ширинї у плям межи 8° а 18° ширини по обох сторонах рівника. Потім зіставлював парами зі собою завсїгди одну північну, а одну полудневу пляму. З утворених в той спосіб ґруп вирахував середні вартости для всїх елементів ротациї.

Довжиня Ω = 73°57'
Нахилене = 7°15'
Денний кут обороту = 14°18'
Час обороту (середно) 25·38 дня

Обсервациї Carringtona е важні не стілько для заключень, котрі він з них поробив. Ще може важнїйші они з тої причини, що показав иньшим дорогу, котрою належить поступити, щоби розслїдити проблем власного руху сонїчних плям. А вже найбільше заслужив ся він для науки тим, що его обсервациї стали предметом теоретичних студиїв дуже многих учених.

---

[1] Peters видів в р. 1846. VI. в Неаполи пляму під + 50°½ ширини, Langier видів одну аж під 40°, Lahire мав видїти одну аж під 70°. Тій послїдній обсервациї нїхто однак вже не вірить Secchi o. c ст. 128.

До астрономів практичних, що займали ся сонїчними плямами, належить зачислити наперед Peters'a, котрий заохочений приміром Carrington'a впорядкував свої обсервациї з 1845/6 року та найшов на їх підставі формулу:

$$\xi = 8{\cdot}582 + 5{\cdot}798 \cos d. \quad 1)$$

Другим був Ґустав Spörer, один з найбільших гелїольоґів. Від р. 1862 розпочав він на власну руку і власними навіть знарядами обсервациї сонїчних плям, потім покликаний до астрофізичної обсерваториї в Почдамі вів їх дальше аж до найновійших часів. (1893 р.) Обсервациї його порозкидані по дуже многих публїкациях і осібних розвідках. Обширні ті розслїди зберем ту коротенько.2)

Передовсїм належить ся Spörer'ови заслуга, що цїлком напевно доказав, що появлянє ся плям поза 40^0 гел. ширини належить до дуже рідких случаїв, коли протягом 30 лїт Spörer чогось подібного не завважав. Найбільші ним замічені ширини плям є:

$-38{\cdot}8^0$ р. 1872. II. 6; $+39{\cdot}7^0$ р. 1872. V. 7.
$-39{\cdot}9^0$ р. 1872. VII. 31.

Отже навіть до 40^0 гел. ширини не дїйшла жадна зі згаданих плям, котрі власне в тім роцї появили ся в незвичайно високих ширинах3) Свої погляди на ротацию сонця і дїйсний рух плям змінював Spörer кілька разів, що є певним доказом, що его дослїди були поважні та основні і не привязували ся до апріорних тез. Вже в 1861. роцї, т. є. еще заки Carrington оголосив друком свої обсервациї, найшов Spörer, що плями в околицях рівника скорше ся порушають чим плями, що находять ся в певнім від него віддаленю.4) Час ротациї означував зі звичайного рівнаня

$$L + (t + T).\ \xi = l,$$

---

1) Proceeding of the American Association of Science t. IX. Astronomical Notices of Ann Arbor observatory. March 1862.

2) Beobachtung von Sonnenflecken und daraus abgeleitete Elemente der Rotation der Sonne. Gymn. Progr. Anclam 1862. Die Stürme auf der Sonne. Anclam 1862. Скорочене w Poggendorfs Annalen т- 117. ст. 509—525, т. 128. ст. 269—291; Monatsberichte der Berliner Ak. I. Jahrg. 1865 ст. 337—351 і 589 сл. Beobachtungen deл Sonnenflecken zu Anclam. Publ. der astr. Ges. B. XIII. Resultate aus den Sonnenbeobachtungen. Tageblatt der 54, Vers. deutsch. Naturf. und Ärzte Salzburg 1881. Publicationen des astrophylicalischen Observatoriums zu Potsdam I, II, III, IV. і gqts.

3) Publicationen des astrophys. Observatoriums zu Potsdam т. I, ст. 15, 22, 32.

4) Astronomische Nachrichten 1861. VI. 13.

де L і T суть числа сталі на означенє часу і довжини геліоґрафічної обсервованої плями, ξ т. є ротацийний кут означає ся з рівнань виведених з обсерваций, наколи можливі блуди вислїміновано методою найменьших квадратів. За t можна підставити яку небудь вартість, щоби найти l, середну вартість зі всїх довжин. З того рівнаня обраховує ся геліоґрафічні довжини і означує ся опісля ріжниці межи ними а довжинами обсервацийними. Spörer зазначує ті ріжниці загально $\varDelta\xi$. Таку ріжницю належить після обставин додати або відіймити від одержаного ротацийного кута ξ. Подїлившиж 360° так справленим кутом ротацийним $\frac{360}{\xi \pm \varDelta \xi}$ одержимо час ротациї.

Spörer обрахував тим способом з численних ґруп сонїчних плям, що були в ріжних ширинах обсервовані, ріжні часи ротациї і уставив се в табелї.*)

Час обсервациї	Число періодів	Геліоґрафічна ширина	Денний кут обороту ξ	Випливає з того час обороту сонця = T
1861. VI. 15 — VII. 19.	$2._{11}$	+ 25°	13·783°	26·120 д.
1862. I 16. — II. 19.	$2._{8}$	+ 21°	13·877°	25·943 д.
1862. III. 9. — V. 8.	$3._{21}$	+ 15°	14·081°	25·566 д·
1862 VIII. 20.—IX. 26.	$2._{11}$	+ 14.7°	14·077°	25·574 д.
1861. III. 24.—VII. 18.	$5._{28}$	+ 14·3°	14·022°	25·674 д.
1862. IV. 2. — V. 6.	$2._{16}$	+ 13·2°	14·108°	25·517 д.
1861. IX. 27. — X. 29.	2_{12}	+ 12·5°	14·295°	25·184 д.
1860. XII. 3. — I. 2.	$2._{7}$	+ 8·3°	14·284°	25·204 д.
1860. XII. 3. — I. 4.	$2._{8}$	+ 6·2°	14·275°	25·220 д.
1862. IX. 19. — 25.	$1._{5}$	+ 5·0°	14·329°	25·150 д.
1861. VIII. 2. — 10.	$1._{7}$	+ 1·3°	14·669°	25·541 д.
1861. V. 4. — VI. 2.	$2._{7}$	— 4·3°	14·333°	25·118 д.
1862. V. 30. VII. 3.	$2._{10}$	— 6·0°	14·335°	25·113 д.
1862. III. 18. — VI. 12.	$4._{21}$	— 9·0°	14·215°	25·325 д.
1861. VII. 29. — X. 25.	$4._{20}$	— 12·7°	14·100°	25·532 д.
1861. VI. 26. - VII. 26.	$2._{6}$	- 13·9°	14·274°	25·220 д.
1861. VII. 2. — VI. 9.	$1._{8}$	— 30·4°	13·732°	26·216 д.

---

*) Poggendorfs Annalen der Physik und Chemie p. 1862. т. 117 ст. 510 дд. 516.

Оголошенє друком обсервацпй Carrington'а мало великий вплив на праці Spörer'а Передовсїм подобала ся йому у Carington'а метода обсервациї і їх обрахованя. За приміром Carrington'а і Peters'а тепер представив і Spörer свої обсервациї емпіричною формулою

$$\xi = 14{\cdot}8726^0 - 0{\cdot}217^0 \sqrt{b},$$

де b є шириною геліографічною.[1] Та формула відносить ся однакож лиш до обсервацпй з лїт 1861—1864. Коли Spörer втягнув в рахунок також дальші обсервациї до р. 1858, показала ся потреба нової формули

$$\xi = 1011' - 203' \sin(41{\cdot}13' + \varphi).$$

φ	ε	T
0^0	$14{\cdot}346^0$	25·09 д.
5^0	$14{\cdot}324^0$	25·13 д.
10^0	$14{\cdot}258^0$	25·25 д.
15^0	$14{\cdot}148^0$	25·44 д.
20^0	$13{\cdot}996^0$	25·72 д.
25^0	$13\ 803^0$	26·08 д.
30^0	$13{\cdot}569^0$	26·53 д.
35^0	$13{\cdot}297^0$	27 07 д.
40^0	$12{\cdot}989^0$	27·72 д.

Від тепер укладав Spörer що раз то нові формули в міру того, як прибувала слількість материялу. Відносини на сонци змінюють ся періодично, треба було отже для представленя нових обсервацпй укладати нові формули. Для плям з лїт 1861—1871 уложив Spörer дві головні формули.

$$\xi = 8{\cdot}529^0 \cos \varphi \text{ [2]) і}$$

$$\xi = 12{\cdot}7257^0 + 1{\cdot}6475^0 \cos 2\varphi. \text{ [3])}$$

А коли і ті формули не ві всїх случаях показали ся добрими, вибрав Spörer певне число плям, котрі відбули кілька ротацийних періодів. Обрахувавши їх обсервациї, утворив ще 4 формули. Найліпшою показала ся однак пята з ряду формула.

$$\xi = 8.548^0 + 5{\cdot}798^0 \cos\varphi.$$

При єї помочи дали ся всї обсервациї точно представити. В лїтах 1872 і 1873 ріжниці межи обрахованими а обсервованими позициями плям були майже ніякі і виступали виключно у плям, що лежали в західній части ґруп. З часом ріжниці ся збільшили, але maximum дійшло in plus до 1^0, in minus лиш до $\frac{1}{3}{}^0$.[4]) Пересїчний ротацийний кут для цїлої сонїчної кулї виносить після сеї формули $14{\cdot}2665^0$

---

[1]) Monatsberichte der königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin 1865 ст. 338.

[2]) Publ. der astr. Gesellschaft. т. XIII. ст. 151.

[3]) Publ. des astroph. Observatoriums zu Potsdam т. I. ст. 81.

[4]) Tagblatt der 54. Versammlung deut. Naturf. und Ärzte Salzbg. Beil s. 43

денно, отже час ротациї 25·234 дня. (Довжина $\Omega = 74^{0}37'$, нахилене $= 6^{0}57'$.) Згадаєм також про вислїди обсервацпй Spörer'а, о скільки они відносять ся до змін в гелїоґрафічній ширині.[1]) Він найшов, що: 1) в підрівникових полосах аж до ± 10^{0} ширини плями зближають ся ідь рівнику. 5) Межи 10^{0} а 15^{0} находим слабу течію в напрямі бігунів. 3) Поза 15^{0} течія та стає сильнїйшою. 4) Число, що виражає процент днїв, в котрих переважає напрям у плям ідь бігунови, росте правильно з шириною і доходить поза 25^{0} до 30%.

Крім тих двох великих обсерваторів Carrington'а і Spörer'а, що свої дослїди майже тілько дїйсному рухови плям посьвячали, займав ся явищами руху у плям принагідно також Secchi.

Як се вже загальний напрям єго дослїдів вказує звернув він найголовнїйшу увагу на відносини льокальні. Подамо ту кілька єго заміток.[2]) 1) В часї коли пляма ділить ся на дві або більші частини, видимо тодї завсїгди мовби скок в перед, дїйсний рух стає ся дуже скорий і напрасний. 2) Також великі і тревалі плями підлягають таким наглим скокам. Як вже висше було сказано, сила плямо-творча у таких плям проявляє ся кілька разів з ряду; за кождим таким „відмолодненєм" робить пляма скок наперед. Те цїкаве явище обсервував Secchi іменно на кількох плямах на весну і в лїтї 1870. 3) Округлі, правильні плями є загалом тревальші і одностайнїйші, як ті, котрих вид є неправильний. Рух правильних плям є правильний. 1) Малі плями т. з. пори відбувають дуже неправильні рухи; так само великі плями в періодї повстаня і заникання. 5) Сли коло плями вже істнуючої витворить ся пляма, хотяйби цїлком незалежно від неї, то перша пляма дізнає неначе перешкоди в руху і він стає ся неправильним. 6) Великі плями коли раз зникнувши знов ся появлять, показують ся завсїгди в місци, що є віддалене від місця, де зникнули, о таку просторонь, якої вимагає право ротациї сонця. Та просторонь є нераз дуже значна. Secchi згадує одну пляму, що зникнувши вирінула на поверхню сонїчної кулї, відбувши дорогу під нею на простороні 30^{0} гелїоґрафічної довжини. — До тих заміток можемо на підставі обсервациї Secchi'ого[3]) додати ще одно: 7) В обсягу одної і тої самої ґрупи ріжні плями відбувають в ріжнім напрямі і ріжною скоростию рухи.

---

[1]) Пор. табелю в Publ. des astr. Obs. zu Potsdam т. IV. ст. 416—418.

[2]) Secchi o. s. ст. 140.

[3]) о. с. ст. 142—146.

Обсервациї Carrington'a і Spörer'a не тілько самі собою мають велике значінє для сонїчної фізики, але як згадалисьмо також для того, що они стали ся підкладом до теоретичних дослїдів Faye'a і Zöllner'a. Faye вже від хвилї публїкациї обсервацый Carrington'a займав ся справою сонїчних плям дуже усердно і почавши від 1865 р. помістив в Comptes rendus париской академії много розвідок під загальним титулом: Sur la constitution physiqne du soleil, де представляв Академії свої власні погляди і обговорював чужі. По довшім розслїджуваню обсервацый Carrington'a замітив Faye, що належить зі зглядів теоретичних зм одифікувати формулу ротациї Carringtona. Коли она звучить $\xi = 865' - 165' \sin {}^7/_4 \lambda$, то Faye надав єї вид:

$$\xi = 862' - 186' \sin^2 \lambda.$$

В тім видї представляє формула Faye'a обсервациї Carrington'a лїпше ніж власна єго формула.[1]) Формулу тую змінив однак Faye пізнійше на слїдуючу:

$$\omega = 857{\cdot}6' - 157{\cdot}3' \sin^2 \lambda$$ [2])

Другою річию в англїйских обсервациях, на яку звернув увагу Faye, була певна постійна неправильність і ріжниця зглядом обсервацый Spörer'a. Faye замітив именно, що подані Carrington'ом чисельні вартости ріжнять ся постійно від таких у Spörer'a о 0·16 дня, або 3·84 годин in minus. Понеже ріжниця була занадто великою, щоби єї можна присудити обсервацийним блудам, думає Faye, що дїйсний рух плям зависить від епохи; інакший був в лїтах 1856/7, коли обсервував Carrington, а иньший в 1862—5, коли обсервував Spörer.[3]) Додаєм від себе, що новійші дослїди Spörer'a цїлковито оправдали се припущенє.[4])

Не так легко було Faye'ому витолкувати другу постійну неправильність в дїйснім руху плям. Полягає она от на тім: Луки заточені плямою в одним дни суть при східнім краю завсїгди більші, при західнім меньші, чим бути повинні. В міру як пляма і край сонїчного кружка зближають ся, росте та малїє та неправильність. Завввважав єї вже Carrington і обяснював єї рефракциєю сьвітла в сонїчній атмосфері.[5])

Нехай внутрішне коло нашої фіґури означає в меті сонїчну кулю, а вні́шне горішну границю сонїчної атмосфери. Земля най

---

[1]) Comptes rendus т. IX. ст. 147.

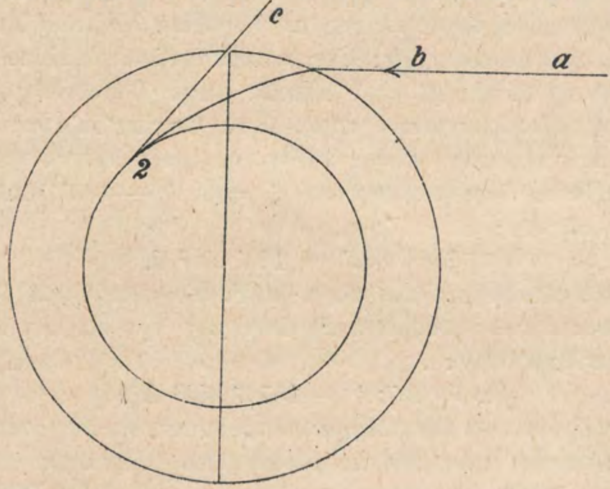
[2]) Newcomb Engelmann о. с. ст. 310.

[3]) Comptes rendus т. LX. 815. сл. LXI. 398 сл.

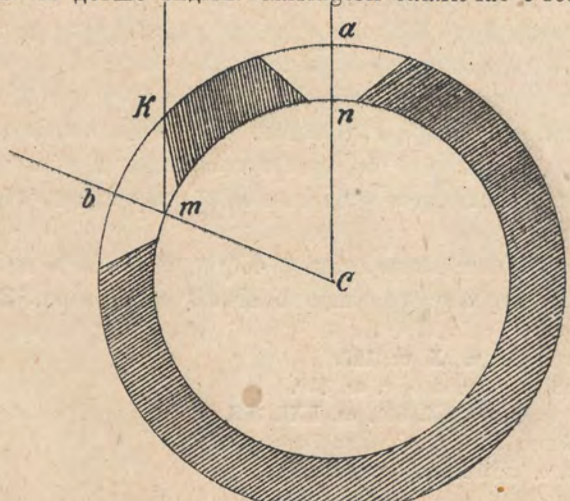
[4]) Publicationen des astr. Obs. zu Postdam т. IV.

[5]) Secchi о. с. ст. 161 сл.

буде в такім положеню, щоби обсерватор, находячий ся на нїй дивив ся на сонце в напрямі ab. Колиб на сонци не було атмосфери, то луч виходячий від точки q ішовби в напрямі c. Але понеже сонїчну кулю окружає атмосфера і лучі сьвітла мусять в нїй улягати рефракциї, проте сей луч не піде в напрямі qc, а заточивши



лїнію криву, піде лїнією b a до ока обсерватора земского. Без рефракциї обсерватор сеї точки не міг би видїти. В наслїдок сеї рефракциї ми видимо кожду точку сонїчної поверхнї еще, заки она мине дїйсний край сонїчного кружка т. е коло, що віддїлює видиму для нас сонїчну півкулю від невидимої. Отже при східнім краю сонця постережемо плями скорше чим повиннисьмо, при західнім же будемо їх довше видїти. Carrington заключає з того: Обставину,



що сонїчні плями у східного края за вчасно ся показують, а у західного за пізно никнуть, належить приписати рефракциї в сонїчнїй атмосфері. котра дїлає подібно як в земскій.

Faye найшов, що той спосіб толкованя є недостаточний. Він приписує тую неправильність т. з. параляксї глубини.[1]) Коли обсерватор дивить ся на осередок плями c, що находить ся припустім в лїйковім заглубленю, то відносить положенє єго до точки a, де єго луч виджeня протинає поверхню т. зв. фотосфери. Коли пляма находить ся в серединї сонїчного кружка, то луч виджeня проходить через спільний центр осередка і пенумбри. Колиж пляма находить ся недалеко края сонїчного кружка, тодї обсерватор не буде видїв осередка плями (m) в рівнім віддаленю від обох берегів плями, але в безпосередній близькости, ба часом навіть в одній лїнії з точкою k, що находить ся на краю заглубленя плями. В наслїдок того здає ся нам, що пляма о кусник bk, є близша осередкови сонїчного кружка, чим в дїйстности. В наслїдок того здає ся нам, що плями вчаснїйше показують ся на східнім краю кружка, а пізнїйше никнуть на західнім. Той вплив паралякси глубин на наші обсервациї руху плям означує Faye на підставі формули

$$\varepsilon = (B + p) \tan \varrho,$$

де ε означує сочинник рефракциї, p глубину, ϱ геліоцентричне віддаленє плями від осередка сонїчного кружка. Відворотно можна на підставі тої формули означити глубину сонїчних плям.

Faye означив єї з разу на 0·005 – 0·009 д. сонїчного луча т. є. 900—1600 миль.[2]) Але вартости одержані тим способом не причинили ся до потверджeня тої теориї, бо були за великі, щоби згодити ся з обсервациями, а іменно з давнїйшими. Длятого Faye втягнув в рахунок нові, дуже докладні обсервациї Secchi'ого з року 1866.[3]) і зредукував глубину плям на 0·36 до 0·57 земского луча. В виду тої зміни найшла його теория більше признаня.

З між многих иньших обсервайий і гіпотез Faye'ого звернем, увагу ще на одну річ. Faye припускає, що плями не мають правильного руху в ширинї, але підлягають лишень маятниковим осциляциам. Їх період є ріжний в довжинї, під 14⁰ геліоґрафічної ширини виносить 150—160 днїв. Понеже сучасно підлягають осциляциям в довжинї, то під впливом тих двох сил зачеркують плами своїм дїйсним рухом сінусоідальні криві загального виду еліпси, котрої

---

[1]) Sur l'inegatité du mouvement apparent des taches solaires, causée par leur profondeur. Comptes rendus т, LXI. 1082 сл.

[2]) l. c. 1089.

[3]) o. c. ст. 164.

велика вісь є рівнобіжна з сонїчним полуденником. Однак те твердженє Faye'ого, хотяй свого часу було в науковім сьвітї дуже популярне, не удержало ся довго, іменно в виду новійших дослїдів Spörera.

Другим теоретиком, що занимав ся дїйсним рухом плям, був Zöllner.[1]) Ішов він дорогою чисто теоретичною, виходячи з заложеня, що сонце є тїлом огнисто плинним, а плями жужлями, що витворили ся наслїдком льокального остудженя. Розслїдуючи теоретично оборот цїпкої кулї, окруженої плинною верствою, дїйшов Zöllner вкінци до формули:

$$\xi = \frac{A - B \sin \varphi}{\cos \varphi}\ ^{2})$$

за φ означає гелїоґрафічну ширину, а A і B сочинники, котрі належить означити з обсервациї. Zöllner сам не обсервував, але з'ужиткував обсервацийний материял Carrington'а і Spörer'а, узглядняючи також теоречичні дослїди Faye'ого. З обсерваций на обох сонїчних півкулях випровадив Zöllner методою найменьших крадватів вартости на A = 863·4 і B = 619·5.[3]) Формула прибрала отже вид:

$$\xi = \frac{863{\cdot}4 - 619{\cdot}5 \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Правдивість сеї формули випробував Töllner на обсервациях Carrington'а, Faye'ого і Spörera, узглядняючи формули двох перших учених. Беручи в рахунок всї обсервациї знайшов Zöllner, що коли можливі блуди при ужитю формули Carrington'а представимо числом 1118, а Faye'а числом 1448, то при ужитю формул єго їх число спаде до 806. Колиж не увзгляднемо плям занадто близьких та занадто віддалених від рівника, то відносини блудів будуть такі: C : F : Z = 132 : 192 : 149. То значить що коли блуди, слїдуючі з формули Carrington'а, означимо числом 132, то з формули Faye'ого буде 192, а Zöllner'а 149. Се говоримо про загальну формулу Zöllner'а. На тих самих засадах випровадив він однак ще окремі вартости на A і B для кождої сонїчної півкулї, заключаючи зі змінности знак ib на табелї Carrington'а, що право ротациї є однакове для обох півкуль. Обрахував отже окремо для півкулї північної вартости: A = 863 8, B = 613 2, для полудневої, A = 861·8, B = 620 5 і дїйсно одержав дуже добрі вислїди. Колиж

---

[1]) Über das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten. Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Bd. XXIII. 1871. ст. 49—113 де глянь математичні виводи.

[2]) l. c. ст. 61.

[3]) l. c. ст. 69.

прийняв A спільне для обох півкуль = 863·8, а B = 613·2 для півкулї північної і 631·1 для полудневої, то вислїди перейшли всї ожиданя.[1] Коли нпр. обчислене обсерваций Spörer'а єго власною формулою дало можливість блуду = 130·1, то обчислене їх методою Zöllner'а дало тільки 92·4.[2] Коли-ж усунемо плями занадто зближені або віддалені від рівника, то сума квадратів з блудів винесе при формулї Spörer'а 85·2, а при змодифікованій формулї Zöllner'а 44·8. Єго формула представляє отже обсервациї без сумніву найлїпше. Але многі учені зі згляду на заложенє Zöllner'а, що поверхня сонця є в станї плинним, не хотїли прийняти його вислїдів без значних застережень.

Додамо, що також славний француский астроном Tisserand уложив емпіричну формулу в цїли представленя своїх дволїтних обсерваций (1874—5). Є она дуже подібна до формули Faye-ого:

$$\xi = 857{\cdot}6' - 157{\cdot}3'\sin^2\lambda.$$[3]

Але жадна зі згаданих формул не показала ся безвзглядно доброю. Добре представляла она рух тільки тих плям, котрих обсервациї до єї уложеня послужили, а не надавала ся в більшій або меньшій мірі до представленя руху дїйсного плям в иньших часах. Дотепер не удалось отже навіть поверховно розслїдити дїйсного руху плям. Звідси найблисша консеквенция: час і спосіб ротациї сонця не суть нам докладно знані і длятого то вислїди поодиноких учених так дуже межи собою ся ріжнять. Дуже бистроумно виразив ся о сїй справі Secchi[4]: Ми находимось при означуваню ротациї сонця в тім самім положеню, що астроном селенїт, котрий хотїв би означити час ротациї землї, не маючи иньшої точки опертя, як лише хмари нашої атмосфери. Щоби з їх обсервациї дїйти до своїх цїлий, мусїв би він вперед пізнати як найдокладнїйше земску метеорольоґію. Так само мусимо ми пізнати метеорольоґію сонїчну, але понеже єї ще дуже мало знаємо, отже нинїшні наукові вислїди в тім напрямі належить уважати доперва за перші кроки.

Наше теперішне знанє про явища руху на сонїчній поверхнї дїлить їх на три кляси: 1) загальний рух сонїчних плям в наслїдок ротациї, котра має в ріжних ширинах ріжну скорість; 2) позірні рухи в наслїдок паралякси глубини, а може і рефракциї в сонїчній атмосфері; 3) неправильні рухи, що стоять в стислій звязи з самим

---

[1] Пор. табелї l. c. ст. 72.

[2] l. c. ст. 74.

[3] Comptes rendus т. LXXXII. ст. 766.

[4] O. c. 166 ст.

процесом повставаня плям. Про ті послїдні рухи додамо ту кілька слів. Цїкаве є у плям стремлїнє до того, щоби впорядкуватись вздовж рівнобіжників, при чім пляма, що іде передом, є найлїпше розвинена і ограничена, а иньші поступаючі за нею творять як би хвіст. Дальше дуже цїкавою проявою є взаїмне покриванє ся плям. Обсервував єго Raschig в Дрезнї 1813 р., Hallaschka 1819 р., Edmund Weiss 1864. II. 12, Haag 1869. IV. 21, Birmingham в Millbrook 1869. V. 6 і 7.[1] На увагу заслугує також оборотовий рух, який нераз помічано у плям. Dawes в 1852 р. I. 17 і 23 виразно видів, як одна пляма обернула ся на місци коло свого центра, не змінивши впрочім зверхного виду. Konkoly обсервував се явище досить часто. І так 1872. VI. 7–10. величезна пляма обернула ся від полудня до всходу о 90°.[2] В р. 1875. IV. 27. оден з осередків великої подвійної плями обернув ся о 100° ідь сходови.[3] Того-ж самого року VI. 22, сконстатував знов Konkoly оборот одної плями о 90°,[4] а 1879. VII. 12—15. обернула ся пляма від півночи на схід о 30°, а на другий день ще о 10°.[5] Такі явища помічав також Flammarion в роцї 1894. 3. серпня с. р. цїлий притїнок великої плями, що числила 25 центрів обернув ся sinistrorsum о 20°, а разом з нею всї центра. Визначний ротацийний рух мали іменно два осередки. Північний з них обернув ся з дня VIII. 2. на VIII. 3. о 32°, в днях VIII. 3—4. о 20°, в VIII. 4--5. о 22° т. є. 77° в трох днях. Полудневий осередок обернув ся в VIII. 2—3. о 50°, в VIII. 3—4. о 30°, в VIII. 4—5. о 60°, в VIII. 5--6 о 12° отже о 152° в 4 днях. Иньша пляма з VII. 20-22. обернула ся в двох днях о 34°; всї ті рухи ішли від лївої до правої.[6]

На тім кінчить ся розділ, що занимає ся дїйсним рухом плям. Можна би ту ще много подати подробиць іменно-ж з дослїдів Wilsing'a і Бєлопольского. Але представленє дослїдів сих двох учених належить радше до уступу про теориї сонїчних плям. Там єго помістимо, а тепер додамо дещо про означенє часу ротациї сонця иньшими дорогами, не вже через обсервацию плям. Обсервовано отже наперед походнї і з них означено час ротациї сонця. Wilsing найшов його рівним 25·23 днїв.[7] Дійшов він при тім до дуже цїкавого ви-

---

[1] Sirius II. 9. і XVI. 165.

[2] Beobachtungen angestellt am astrophys. Ob. in O Gyalla т. I. ст. 88.

[3] Ibidem т. I. ст. 104.

[4] Ibidem т. I. ст. 106.

[5] Ibidem т. II. ст. 37.

[6] Comptes rendus т. CXIX. ст. 532.

[7] Astronomische Nachrichten N. 2852 і Ableitung der Rotationsbewegung der Sonne aus Positionsbestimmungen von Fackeln. Publicationen des astr. Obs. zu Potsdam т. IV. часть 2.

слїду, бо спостеріг, що кутові скорости походень не є зависимі від гелїоґрафічної ширини, як се діє ся у плям. ξ одержане з обсервациї походень є після Wilsing'а рівне під кождою гелїоґрафічною шириною і виносить 14·270°. З того видко, що верства сонїчної атмосфери, в котрій находять ся походнї, не підлягає тим скомплїкованим рухам, що верства, в котрій находять ся плями. Є се вислїд тим дивнїйший, що найновійша метода означувати ротацию сонця, цїлком від попередних метод ріжна, дала результати цїлком анальоґічні результатам Carrington'а і Spörer'а. То метода спектроскопна, що полягає на обсервованю спектроскопом обох країв сонїчного кружка і примінюваню права Doppler'а. Запропонував єї перший раз Zöllner, а уживав Vogel.[1]) Але доперва H. Crew перевів сею методою дві довші сериї обсервацний і найшов з другої сериї для денного руху кутового формулу

$$\vartheta = 802' \,(1 - 0{\cdot}00206.\ \chi^0),$$

де χ є гелїоцентрична ширина в степенях. Під рівником найшов Crew час ротациї = 26·23 днів. Полишаючи дальші вислїди Crew'а на боцї,[2]) звернемо увагу на се, що взагалї спектроскопні обсервациї потвердили вислїди обсервацний плям. Говоримо „взагалї", бо перша серия обсервациї Crew'а вказувала б скорше на припізнене оборотового руху під рівником. Далеко виразнїйша та згідність, коли розсмотримо докладнїйші та цїннїйші обсервацві N. C. Dunér'а.[3]) Зі спостережень в ріжних гелїоґрафічних ширинах дійшов Dunér до переконаня, що закони Carrington'а відносять ся не тільки до руху сонїчних плям, але і до ротациї цїлої поверхнї сонця. Коли точка в околицях сонїчного рівника відбуває оборот в 25·46 днях, то під 45° час обороту винесе вже 30·03 днів, а під 75° аж 38·84 днів. Але мимо довших дослїдів не повело ся Dunér'ови вивести теоретичної формули для обороту з спектроскопних дослїдів, так само як не повело ся єї вивести з обсервациї плям.

Заключеня, що мож зробити з тих результатів, а навіть вже і по части зроблено, полишаємо до теорий сонїчних плям і скажемо тільки, що так великі ріжницї між поодинокими ученими в означеню часу ротациї сонця викликали деякий скептицизм. Виразив єго C. A. Schultz-Steinheil, критикуючи іменно Crew'а і Dunér'а. Ріжницї в вислїдах приписує він злому означеню і та Ω

---

[1]) Wolf. Handbuch etc. т. II. ст. 430.

[2]) American Journal of Science. 1889 т. 38. ст. 204, пор. Jahrbuch der Astronomie т. I. ст. 3.

[3]) Nova Acta Regiae Soc. Upsaliensis 3. пор. Vierteljahrschrift der astr. Ges. т. 27. ст. 36 sqts., також Jahrbuch der Astronomie т. III. ст. 1 дд.

(нахиленя сонїчної оси до еклїптики і довжини вступного узла.) Його виводи, що зміряють до вияснeня, в який спосіб можуть такі ріжницї походити з тих фалшивих заложень, не є однак дуже переконуючі.¹)

Вкінци ще дещо про означене часу ротациї сонця з телуричних явищ. Виходячи зі звязи явищ на сонци і явищ земского маґнетизму та з двацять-кількадневного періоду в них, означив Hornstein час ротациї сонця на 26·83 взглядно 24·55 днїв, Broun на 24·16, Liznar на 24·29, Bigelow на 24·86. Зі змін температури означили час ротациї за заохотою і взором Nervander'a (27·26 дней): Buys-Ballot на 25·682, Fritz на 25·74, Hornstein на 25·14, Broun на 24·13, Van der Stock на 24·10, Bezold (з бурий) на 24·12 день. Але ті означеня, іменно-ж зі змін метеорольоґічних є дуже непевні і мусять бути уживані cum grano salis.²)

Про періодичність сонїчних плям.

Одною з найпізнїйше пізнаних властивостий сонїчних плям є їх періодичність. Нею заниматись будемо в тім уступі.

Перші обсерватори сонїчних плям в XVII. віцї займали ся, як висше сказано, лиш так довго ними, аж поки не рішив ся спір, чи они находять ся на самій поверхнї сонця, чи є тїлами кружачими докола него. Єсли потім займали ся обсервациями плям які люде, то були се ділєтанти, без фахового образованя. Длятого трудно їм було дійти в сїй мірі до якихсь результатів.³) Першим, що впав на гадку, що сонїчні плями можуть бути періодичним явищем, був Християн Horrebow. Обсервував він плями від 1738 до 1775 р. та спостеріг, що в певних часах більше плям являло ся на сонїчнім кружку, а в иньших часах меньше.⁴) Але понеже не впорядкував методично своїх обсервацproperly після певних правил, тож і не міг виказати періодичности плям. Він слушно подає за причину того обставину, що дотепер астрономи за мало ся тою справою займали. Зіставив отже всї свої обсерваций і замітки в рукописи, а тимчасом учені іменно француські (Cassini, Lemonnier і иньші) сьміло висказували думку, „que les taches ne suivent pas aucune loi dans leurs apparitions.“ Але мимо того малого занятя сонїчними плямами знане

---

¹) Astronomische Nachrichten N. 3543 (т. 148. ст. 225).

²) Пор. Jahrbuch der Astronomie etc. т. I. ст. 3.

³) Вичисляє тих обсерваторів Wolf в своїй Sonnenfleckenlitteratur, поміщаний в Vierteljahrschrift der natur. Ges. in Zürich.

⁴) Wolf, Handbuch der Astronomie т. II. ст. 407.

було вже пр. при початку XIX. столїтя, що они раз в більшій, другий раз в меньшій скількости ся являють. William Herschel лучив змінність цїн збіжа зі змінностию числа сонїчних плям. Але о часї, в котрім наступують ті періодичні зміни, нїхто не мав докладного понятя аж до кінця першої половини XIX. віка.

Відкритє періодичности сонїчних плям належить признати Генрикови Schwabe'ому. І він не був астрономом з фаху, лиш з замилованя (був аптикарем в Dessau). Заохочений Harding'ом, відкрителем плянетоіди Юнони, взяв ся Schwabe в 1826 роцї до правильних обсерваций поверхнї сонця, сподїючись що найбільше відкрити інтрамеркурияльну планету. Але як сам пише, трафило ся єму те що Саулови, що вийшов шукати коров свого батька, а найшов корону. (I may compare myself to Saul, who went out to seek his fathers asses, and found a kingdom.[1]) По 17 лїтах щоденних обсерваций, що полягали тільки на зазначеню плям в окрузї нарисованого на папері кола проміру 6—7 центиметрів, дійшов Schwabe до дуже важних вислїдів. Доказав він, що виступуванє плям на поверхнї сонця не є неправильне, але привязане до періоду меньше більше десятилїтного.[2]) Табеля низше уміщеня представляє нам головні результати дослїдів Швабого. В першій рубрицї виражений рік, в другій число днів обсервациї, в третій число плям або цїлих ґруп видних тодї, а в четвертій число днів, в котрих на сонїчнім кружку не було видно жадної плями.

1826	285	118	25	1832	264	84	49	1838	203	282	0
1827	298	161	2	1833	257	33	**139**	1839	205	162	0
1828	290	**225**	0	1834	275	52	120	1840	263	152	3
1829	261	199	0	1835	239	173	18	1841	283	102	15
1830	214	190	1	1836	190	272	0	1842	306	68	64
1831	251	149	0	1837	170	**327**	0	1843	309	34	**147**

Видимо з тої табелї вже на перший погляд, що maxima числа плям припадали на роки 1828 і 1837, а minima на роки 1833 і 1843.

Однакож не найшов Schwabe признаня у сучасних учених. На мниме відкритє задивлювано ся дуже скептично, головно під впливом могучої ще тодї Францускої астрономії XVIII. віка і пануючої теориї сонїчних плям Herschel'а, котра вже по своїй природї не надто сприяла періодичности плям. А однак найшло ся кількох учених,

---

[1]) Monthly Notices of R. A. S. т. XVII. р. 1889 ст. 123.

[2]) Astronomische Nachrichten 1844. Nr. 495.

що не відкинули a limine припущеня Schwabe'ого, але занялись блисшим єго розслїдженєм. Між ними був Рудольф Wolf, директор астрономічної обсерваториї спершу в Бернї, а опісля в Цюріху.1)

Відкритє Швабого заняло єго від разу дуже. Розпочав отже зараз в роцї 1847 з одної сторони власну серию обсервацний сонїчних плям, з другої сторони стягав всї давнїйші обсервациї, які лиш міг дістати, щоби на довших сериях випробувати правди гіпотези Швабого. Та осторожність в оцїнюваню вислїдів роботи Швабого оплатила ся Вольфови. Застанавляючи ся іменно над ними, відкрив він сучасно, але независимо від Sabine'a і Gautier'a, згідність в рядах Schwabe'ого і Lamont'a, які представляють періодичні зміни в нахиленю маґнетної голки. Ходило єму тодї наперед о докладнїйше означенє довжини періоду сонїчних плям, бо обсервациї Швабого були занадто короткі і неточні, щоби можна було з них одержати докладні результати. Вольф скомбінував отже ряд Швабого з давнїйшими обсервациями Scheiner'a, Hevel'a, Rost'a, Zucconi'ого, Fritsch'a і Stark'a та означив на їх підставі, з можливим блудом 1 року, кілька епох, в котрих число плям дійшло до maximum або minimum. В своїй тогдашній розвідцї Neue Untersuchungen über die Periode der Sonnenflecken und ihre Bedeutung (Berner Mittheilungen 1852) потрафив Вольф означити слїдуючі maxima і minima:

1) Maxima: 1626·0 (Scheiner), 1717·5 (Rost), 1816·3 (Stark, Bode), 1829·5 (Stark, Schwabe), 1837·5±0·5 (Schwabe), 1848·6±0·5 (Schwabe).

2) Minima: 1645·0 (Hevel), 1755·5±0·5 (Zucconi), 1810·5 (Bode, Fritsch), 1823 2±0·5 (Stark, Biela), 1833·6±0·5 (Schwabe), 1844·0±0·5 (Schwabe).

Понеже ріжницї між чотирома послїдними епохами, що самі йшли одним тягом, виносили:

13·2, 8·0, 11·1 пересїчно отже 10·77 років,
12·7, 10·4, 10·4 „ „ 11·17 років,

то на середну довжину періоду випало 10·97 т. є. майже 11 лїт. Щоби дійти до тим певнїйших результатів, взяв Вольф під уваґу також давнїйші епохи. Порівнавши їх з новійшими, уложив Вольф слїдуючу порівняну табельку:

---

1) Працї Вольфа над тим предметом поміщені є в Berner Mittheilungen 1850—1856 і в Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1856—1893. Перегляд їх оголосив A. Wolfer п. т. Compte rendu des travaux de M. le prof. R. Wolf de Zurich dans la domaine de la physique solaire (Archives de Geneve 1891); те саме по нїмецки Wolfs Untersuchungen auf dem Gebiete der Sonnenphysik. Meteorologische Zeitschrift 1892. т. IX. ст. 201—219. Сам Wolf оголошував до р. 1892 короткі справоздaня зі своїх праць в Comptes rendus і в Astronomische Nachrichten.

1848·6 — 1626·0 = 222·6 = 19.11·72 = 20.11·13 = 21.10·60 літ.
1848·6 — 1717·5 = 131·1 = 11.11·92 = 12.10·93 = 13.10·08 „
1837·5 — 1626·0 = 211·5 = 18.11·75 = 19.11·13 = 20.10·57 „

Та дивна згідність в передпослїдній колюмнї навела Вольфа на здогад, що час треваня періоду сонїчних плям дуже є зближений до 11 лїт. Через порівнуваня, котрих взорець подалисьмо та увзглядненє всяких можливих блудів дійшов Вольф, що середна довжина періоду сонїчних плям виносить 11·111 ± 0·038 с. є. 11¹/₉ = 100 : 9 і вже був в спромо жности заповісти нове maximum на рік 1855.

На підставі розвідки з 1852 р. належить Вольфа вважати властивим відкрителем періодичности сонїчних плям. Швабе спостеріг єї без сумнїву перший, але уміло обробив се відкритє та навів доказів на його дїйсність доперва Вольф. Над Sabine'ом і Gautier'ом, що цїлком независимо від Вольфа, а може навіть дещо вчаснїйше звернули увагу на періодичність, має він ту перевагу, що брав річ виключно з астрономічної точки погляду. Sabine і Gautier доперва зі згідности періоду плям Швабого з періодами маґнетизма земского Lamont'а вивели періодичність самих плям.

Але подібно як відкритє Швабого, так і доказ Вольфа не відразу стрінув ся з прихильним принятєм в ученім сьвітї. Тих кілька епох не могло дати докладних результатів. В виду того почав Вольф з невтомимою робучостию збирати старі обсервациї зі всїх сторін Европи. Вичислимо ту лиш найважнїйші: Harriot'а 1611—1613, Kirch'а і єго рідні 1700—1748, Plantade'а 1705—1726, Rost'а 1718—1720, Hagen'а 1739—1751, Staudach'а 1749—1799, Horrebow'а 1738 (1767)—1776, Mallet'а 1773—1786, Bode'ого 1774—1821, Heinrich'а 1781—1818, Flaugergues'а 1788—1830, Tevel'а 1816—1836, Pastorff'а 1819—1833, Adams'а 1819—1823, Arago'а 1822—1830.[1]

Щоби в тім незміренім лябіринтї чисел завести порядок і уможливити користанє з него, впровадив Вольф тз. числа зглядні (Relativzahlen) чинности сонця. Та чинність після думки Вольфа є прямо пропорциональна числу ґруп плям g а дальше також числу поодиноких сонїчних плям f. Звязь тих двох чисел дасть нам образ чинности сонця в певнім протягу часу. Але число ґруп і число плям не є рівноважними чинниками. Далеко лекше є витворенє нової плями в істнуючій вже ґрупі, як повстанє нової ґрупи. Значінє чинника g в формулї мусить отже бути значно більше, як значінє f.

---

[1] І много иньших, вичислених в 600 числах Sonnenfleckenlitteratur. Пор Geschichte der Astronomie ст. 651. Handbuch т. II. ст. 410 дд.

Вольф приняв довільно, що відношенє $g : f$ є як 1 : 10. Є се відношенє дуже вигідне, бо зараз одержуємо формулу легку до обрахованя:

$$r = 10g + f.$$

Є се міра чинности сонця в якімсь часї, коли видних ґруп було g, а плям f. За одиницю часу приняв Вольф 1 день, противно як Швабе, що обраховував число плям і ґруп після місяців і літ. Середна з чисел зглядних всїх днїв в місяци дає число зглядне місячне, середна з місячних зглядних чисел — річне зглядне число. Формула подана є так проста, що иньші учені не думали, щоби зглядні числа могли бути беззглядно докладним висловом діяльности сонця. Secchi закидував їм недокладність по причинї, що не мають зглядy на поверхню плям; а она прецїнь мусить мати велике значінє до пізнаня сонїчної дїяльности.[1] Закид сей є однак несправедливий. Wolf доказав именно з рівнобіжних римских і мадритских обсервацций, що дістанемо майже цїлком ті самі результати, сли місто числа плям f введемо чинник f_1, що означає їх поверхню.[2] Wolf є навіть думки, що число плям є важнїйшим чинником при обчислюваню, чим їх поверхня, бо найбільшу розтяглість мають ґрупи плям тодї, коли є вже в станї супокою. Найбільше нових плям в ґрупах творить ся в бурнім періодї повставаня, коли сила плямотворча є найбільша. Крім того за ужитєм числа плям, а не їх поверхнї промавляє ся обставина, що давнїйші обсервациї обмежались виключно на численє ґруп і плям, бо означуванє їх поверхнї начало ся доперва в найновійших часах. Для одноцїльности приняв отже Вольф число плям місто їх поверхнї за міродайний чинник.

Формула Вольфа в єї найпростїйшім видї може бути ужита до редукциї обсерваций лише одного обсерватора. Коли хочемо зредукувати обсервациї кількох ріжних осіб, мусимо ввести в первісну формулу т. з. особистий сочинник k. Так змодифікована формула виглядати ме:

$$r = k\,(10g + f).$$

Той сочинник зависить не тілько від личности обсерватора, але і від єго знаряда. Вольф приняв для себе і для свого інструмента (далевид Fraunhofer'a з предметовою сочкою проміру 3 цалї,

---

[1] Secchi o. c. ст. 172.

[2] Astron. Mittheilungen Nr. 49 і 62 в Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich том XXIV. ст. 4, том XXIX. ст. 122 дд.

з огнисковою 4 стопи, побільшенє 64 разів,) k = 1.[1]) Для иньших сучасних обсерваторів означив Вольф k через порівнанє їх обсерваций зі своїми. Для давнїйших обсерваторів дiставав вiн k, порівнуючи щораз то давнїйші обсервациї від своїх власних почавши. Удалось се єму однак лиш для обсерванций від 1748 року. При помочи того сочинника уложив Вольф в р. 1877 неоцінену табелю зглядних чисел виведених з обсервациї т. з. beobachtete Relativzahlen.

1749	80·9	1779	125·9	1809	2·5	1839	85·8
1750	**83·4**	1780	84·8	1810	**0·0**	1840	63·2
1751	47·7	1781	68·1	1811	**1·4**	1841	36·8
1752	47·8	1782	38·5	1812	5·5	1842	24·2
1753	30·7	1783	22·8	1813	12·8	1843	**10·7**
1754	12·2	1784	**10·2**	1814	14·4	1844	15·0
1755	**9·6**	1785	24·1	1815	35·4	1845	40·1
1756	10·2	1786	82·9	1816	**46·4**	1846	61·5
1757	32·4	1787	**132·0**	1817	41·5	1847	98·4
1758	47·6	1788	130·9	1818	30·0	1848	**124·3**
1759	54·0	1789	118·1	1819	24·2	1849	95·9
1760	62·9	1790	89·9	1820	15·0	1850	66·5
1761	**85·8**	1791	66·6	1821	6·1	1851	64·5
1762	61·1	1792	60·0	1822	4·0	1852	54·2
1763	45·1	1793	46·9	1823	**1·8**	1853	39·0
1764	36·3	1794	41·0	1824	8·0	1854	20·6
1765	20·9	1795	21·3	1825	15·6	1855	6·7
1766	**11·4**	1796	16·0	1826	36·0	1856	**4·3**
1767	37·8	1797	6·4	1827	49·4	1857	22·8
1768	69·8	1798	**4·1**	1828	62·5	1858	54·8
1769	**106·1**	1799	6·8	1829	67·3	1859	93·8
1770	100·8	1800	15·3	1830	**70·7**	1860	**95·7**
1771	81·6	1801	34·0	1831	47·8	1861	77·2
1772	66·5	1802	55·0	1822	27·5	1862	59·1
1773	34·8	1803	71·2	1833	**8·5**	1863	44·0
1774	30·6	1804	**73·1**	1834	13·2	1864	46·9
1775	**7·0**	1805	47·6	1835	56·9	1865	30·5
1776	19·8	1806	28·9	1836	121·8	1866	16·3
1777	92·5	1807	9·4	1837	**138·2**	1867	**7·3**
1778	**154·4**	1808	7·7	1838	103·1	1868	37·3

---

[1]) Новійші дослїди Вольфа доказали, що навіть для того самого обсерватора і інструмента сочинник k зміняє ся в часї. Ті зміни стоять в відворотнім відношеню до самих зглядних чисел. Пор. Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich т. XXV. (1880) Mitth. 50 ст. 46 дд. і XXX (1885) Mitth. 65. ст. 230—242.

1869	73·9	1877	12·3	1885	52·2	1893	**84·9**
1870	**139·1**	1878	**3·4**	1886	25·4	1894	78·0
1871	111·2	1879	6·0	1887	13·1	1895	64·0
1872	101·7	1880	32·3	1888	6·8	1896	41·8
1873	66·3	1881	54·3	1889	**6·3**	1897	26 2
1874	44·6	1882	59·6	1890	6·8	1898	26·7
1875	17·1	1883	**63·7**	1891	35·6	1899	
1876	11·3	1884	63·5	1892	73·8	1900	

Обнимає она зглядні числа кождого місяця в роцї а крім того середне річне число зглядне. Не будемо єї подавали в цїлости, бо є дуже довга і широка та крім того легко доступна.[1]) Містимо тільки єї витяг, що дає яке таке понятє о періодичности сонїчних плям. Для науки має та табеля велике значінє, бо доперва по єї уложеню мож було докладно розслїджувати звязь ріжних періодичних явищ з періодичностию сонїчних плям. Вольф провадив свої обсервациї і обчислюванє зглядних чисел аж до смерти (1893 р.). Пізнїйші, з лїт по роцї 1877 зглядні числа уміщав він в своїх дотичних Mittheilungen, крім того в Astronomische Nachrichten, Meteorologische Zeitschrift і Comptes rendus. По єго смерти вів сю працю дальше єго асистент і наслїдник Wolfer.

Вольф не вдоволив ся однак тою табелею зглядних чисел, котру з таким накладом часу і працї уложив. Обсервовані числа зглядні виказують дуже часто великі колибаня в наслїдок блудів в обсервациї, атмосферних земских відносин і т. д. Ті колибаня сильно затемнюють перебіг періоду. До збільшеня амплїтуди тих колибань причиняє ся найбільше оборот сонця а в звязи з ним нерівне гелїоґрафічне розміщенє плям і короткі звідси слїдуючі кільканацятьденні періоди. Длятого постановив Вольф числа зглядні, виведені з обсервациї, вирівнати. Вирівнанє представляє ся в слїдуючий спосіб. Хотячи приміром обчислити зглядне число для місяця марта 1850 р., лучить Вольф обсервовані зглядні числа місяців від марта 1850 до лютого 1851 включно і бере з них середну аритметичну m_1. Потім бере таку саму середну аритметичну з місячних зглядних чисел від цьвітня 1850 до марта 1851 $= m_2$. Середна аритметична з m_1 і m_2 дає жадане число зглядне обчислене для місяця марта 1850 р. Так обчислив Вольф цїлу нову табелю тз.

---

[1]) Находить ся в Mitth. Nr. 42. р. 1877. Meteorologische Zeitschrift т. IX. 1892 ст. 205 дд. Jahrbuch der Astronomie т. III. 1892. ст. 14 дд.

чисел зглядних обчислених. Доперва та табеля, що стояла Вольфови чверть сотнї лїт тяжкої працї, уможливила а бодай дуже облегчила студиї над пробігом періоду сонїчних плям так середного, як і дїйсного. Поглянувши на ту табелю (поміщена низше) далеко виразнїйше бачимо періодичність плям, як се було можливе з табелї обсервованих чисел зглядних.¹)

1749	80·9	1784	**10·2**	1819	24·2	1854	20·6
1750	**83·4**	1785	24·1	1820	15·0	1855	6·7
1751	47·7	1786	82·9	1821	6·1	1856	**4·3**
1752	47·8	1787	**132·0**	1822	4·0	1857	22·8
1753	30·7	1788	130·9	1823	**1·8**	1858	54·8
1754	12·2	1789	118·1	1824	8·6	1859	93·8
1755	**9·6**	1790	89 9	1825	15·6	1860	**95·7**
1756	10·2	1791	66·6	1826	36·0	1861	77·2
1757	32·4	1792	60·0	1827	49·4	1862	59·1
1758	47 6	1793	46·9	1828	62·5	1863	44·0
1759	54·0	1794	41·0	1829	67 3	1864	46·9
1760	62·9	1795	21·3	1830	**70·7**	1865	30·5
1761	85 8	1796	16·0	1831	47·8	1866	16·3
1762	61·1	1797	6·4	1832	27·5	1857	**7·3**
1763	45 1	1798	**4·1**	1833	**8·5**	1868	37·3
1764	36·3	1799	6·8	1834	13·2	1869	73·9
1765	20·9	1800	15·3	1835	56·9	1870	**139·1**
1766	**11·4**	1801	34·0	1836	121·8	1871	111·2
1767	37·8	1802	55·0	1837	**138·2**	1872	101·7
1768	69·8	1803	71·2	1838	103·1	1873	66·3
1769	**106·1**	1804	**73·1**	1839	85·8	1874	44·6
1770	100·8	1805	47·6	1840	63·2	1875	17·2
1771	81·6	1806	28·9	1841	36·8	1876	11·3
1772	66·5	1807	9·4	1842	24·2	1877	12·3
1773	34·8	1808	7·7	1843	**10·7**	1878	**3·4**
1774	30·6	1809	2·5	1844	15·0	1879	6·0
1775	**7·0**	1810	**0·0**	1845	40·1	1880	32·3
1776	19·8	1811	1·4	1846	61·5	1881	54·2
1777	92·5	1812	5·5	1847	98·4	1882	59·6
1778	**154.4**	1813	12·8	1848	**124·3**	1883	**63·7**
1779	125·9	1814	14·4	1849	95·9	1884	63·4
1780	84·8	1815	35·4	1850	66·5	1885	52·2
1781	68·1	1816	**46·4**	1851	64·5	1886	25·4
1782	38·5	1817	41·5	1852	54·2	1887	12·6
1783	22·8	1818	30·0	1853	39·0	1888	7·0

---

[1] Та табеля уміщена в Mitth. Nr. 42 (1877) Vierteljahresschrift der naturf. Gesellschaft in Zürich 1877. і в Вольфа Handbuch der Astronomie т. I. ст. 675 дд.

На підставі табелї обсервованих зглядних чисел означив Вольф передовсїм всї maxima та minima від найдавнїйших до найновійших часів. Подані они в понизшій табельцї.

Minimum	Maximum	Minimum	Maximum
1610·8	1615·5	1745·0	1750·3
8·2	10·5	10·2	11·2
1619·0	1626·0	1755·2	1761·5
15·0	13·5	11·3	8·2
1634·0	1639·0	1766·5	1769·7
11·0	9·5	9·0	8·7
1645·0	1649·0	1775·5	1778·4
10·0	11·0	9·2	9·7
1655·0	1660·0	1784·7	1788·1
11·0	15·0	13·6	16·1
1666·0	1675·0	1798·3	1804·2
13·5	10·0	12·3	12·2
1679·5	1685·0	1810·6	1816·4
10·0	8·0	12·7	13·5
1689·5	1693·0	1823·3	1829·9
9·4	12·5	10·6	7·3
1698·9	1705·5	1833·9	1837·2
13·1	12·7	9·6	10·9
1712·0	1718·2	1843·5	1848·1
11·5	9·3	12·5	12·0
1723·5	1727·5	1856·0	1860·1
10·5	11·2	11·2	10·5
1734·0	1738·7	1867·2	1870·6
11·0	11·6	11·7	13·3
		1878·9	1883·9
		10·7	
		1889·6	
11·20 ± 2·11 ± 0·63	11·20 ± 2·06 ± 0·03	11·16 ± 1·54 ± 0·47	10·94 ± 2·52 ± 0·76

Епохи maxim'ів і minim'ів суть ту подїлені на дві ґрупи після своєї певности. Перша ґрупа обнимає епохи аж до 1749 р. Непевність доходить ту до 1 року. В другій ґрупі, що обнимає новійші часи, непевність є значно меньша і виносить пересїчно лиш кілька місяцїв. Перша і третя рубрика обнимає minima з промежутками, друга і четверта maxima також з промежутками. Під кождою рубрикою є на її підставі обрахована середна довжина періоду.

З поданих власне чисел можемо означити наперед середну довжину періоду, взявши середну вартість зі всїх ріжниць

$$p = \frac{\Sigma D}{n} \quad ^{1})$$

або подїливши ріжниці межи що двома остаточними епохами через число періодів, приміром:

$$p = \frac{(m_n - m_1) + (M_n - M_1)}{n},$$

де m означає minimum, M maximum, а n число періодів пр.:

$$p = \frac{(1878{\cdot}9 - 1610{\cdot}8) + (1883{\cdot}9 - 1615{\cdot}5)}{48}.$$

В той спосіб одержав Вольф на довжину періоду число 11·18 за середним ваганєм $= \pm$ 1·98 а середною непевностию $\pm$ 0·28 року. Ті вартости ріжнять ся як видимо дуже лиш мало від одержаних Вольфом вже в 1852 роцї вартостий ($11{\cdot}111 \begin{smallmatrix} \pm 2{\cdot}03 \\ \pm 0{\cdot}307 \end{smallmatrix}$). Числа, що находять ся коло цифри, що виражає довжину періоду, означують два блуди можливі при єї означеню. Зовуть ся они, як вже згадано, середним колибанєм (mittlere Schwankung) і середною непевностию (mittlere Unsicherheit). Середне колибанє повстає в слїдуючий спосіб. Таблиця епох показує нам іменно, що довжина ріжних періодів є дуже ріжна і колибає ся межи 8 а 16 лїтами. Є она отже видимо змінна, а число 1·98, що є обраховане з колибаня поодиноких періодів після звісної форми з теориї найменьших квадратів:

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n-1}}$$

дає середну вартість для того середного колибаня. Друге додане число означає тз. середну непевність (mittlere Unsichercheit). Походить она звідси, що обсервациї сонїчних плям, хотяй вже більше як півтретя столїтя тревають, не є ще достаточно довгі, щоби довжина періоду могла бути пізнана з більшою точностию як днесь т. є. на 4 місяцї. Середну непевність обчисляємо після формули:

---

[1] Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich т. XXVI. 1881. Mitth. Nr. 52. ст. 60.

$$\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n\ (n - 1).}}$$

Подані повисше вартости є то тз. епохи обсервовані. Бачили ми, що ріжниці в часї між поодинокими такими епохами є дуже великі; щоби отже дістати постійні точки для дальших теоретичних дослїдів, обчислив Вольф т. з. середні епохи. Спосіб рахунку покажесь найлїпше на примірі. Хотячи одержати пр. середне minimum, що припадало десь около половини XVIII. віка, додає Вольф до першого взагалї знаного minimum, що припадає на рік 1610·8, 12 нормальних періодів і нотує одержану суму (= 1745·0). Потім до другого знаного minimum 1619·0 додає 11 нормальних періодів, до третого знов десять і т. д. З одержаних тим способом епох бере середну вартість. Потім беручи XXIV-у з ряду епоху (1878·9), віднимає від неї 12 нормальних періодів, від XXIII-ої 11, від XXII-ої 10 і т. д. періодів. З одержаних епох знов бере другу головну середну вартість. Середня вартість зі згаданих двох головних середних дає нам жадану епоху.

Є ще иньший спосіб обрахованя довжини періоду і середних епох[1]) а то при помочи формул:

$$E_m = T_0 + x + nP \quad і$$

$$E_M = T_0 + y + nP,$$

де T_0 означає якунебудь епоху, від котрої виходимо, $T_0 + x$ представляє нормальну епоху minimum, $T + y$ нормальну епоху maximum, n рядове число періоду. Коли такі услівні рівнаня уложимо для кождого maximum і minimum, то одержимо при помочи методи найменьших квадратів дуже приближені вартости для x, y і P.

Табеля обсервованих і обрахованих епох.

Обсерв. Minimum	Обсерв. Maximum	Обрах. Minimum	Обрах. Maximum	$\triangle$
1610·8		1610·0		+ 0·8
	1615·0		1615·1	+ 0·4
1619·0		1621·2		— 2·2
	1626·0		1626·3	— 0·3
1634·0		1632·4		+ 1·6
	1639·5		1637·5	+ 2·0

---

[1]) Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich т. XXVI. Mitth. 52. ст. 60. Пор. Astronomische Nachrichten Nr. 2325.

Обсерв. Minimum	Обсерв. Maximum	Обрах. Minimum	Обрах. Maximum	△
1645·0		1643·6		+ 1·4
	1649·0		1648·6	+ 0·4
1655·0		1654·8		+ 0·2
	1660·0		1659·8	+ 0·2
1666·0		1665·9		+ 0·1
	1675·0		1671·0	+ 4·0
1679·5		1677·1		+ 2·4
	1685·0		1682·2	+ 3·2
1689·5		1688.3		+ 1·2
	1693·0		1693·4	— 0·4
1698·9		1699·5		— 0·6
	1705·5		1704·5	+ 1·0
1712·0		1710·7		+ 1·3
	1718·2		1715·7	+ 2·5
1723·5		1721·8		+ 1·7
	1727·5		1726·9	+ 0·6
1734·0		1733·0		+ 1·0
	1738·7		1736·1	+ 0·6
1745·0		1744·2		+ 0·8
	1750·3		1749·3	+ 1·0
1755·2		1755·4		— 0·2
	1761·5		1760·4	+ 1·1
1766·5		1766·6		— 0·1
	1769·7		1771·6	— 1·9
1775·5		1777·7		— 2·2
	1778·4		1782·8	— 4·4
1784·7		1788·9		— 4·2
	1788·1		1794·0	— 5·9
1798·3		1800·1		— 1·8
	1804·2		1805·2	— 1·0
1810·6		1811·3		— 0·7
	1816·4		1816·3	+ 0·1
1823·3		1822·5		+ 0·8
	1829·9		1827·5	+ 2·4
1833·9		1833·6		+ 0·3
	1837·2		1838·7	— 1·5
1843·5		1844·8		— 1·5
	1848·1		1849·9	— 1·8
1856·0		1856·0		+ 0·0
	1860·1		1861·1	— 1·0
1867·2		1867·2		+ 0·0
	1870·6		1872·2	— 1·6
1878·9		1878·4		+ 0·5
	1883·9		1883·4	+ 0·5

Та метода є по тій причині добра, що означуємо від разу x, y і P. Длятого уживав єї Вольф до обчисленя зглядних чисел. Додати треба, що уложив він осібні формули для обчисленя старших і новійших епох, формулу загальну і формулу до обчисленя нормальних епох.[1])

1) Для епох старших: Maxima обчисляють ся після формули
   $p = 1761{\cdot}968 + 11{\cdot}235.\ n$; для minimum
   $p = 1756{\cdot}437 + 11{\cdot}235.\ n$
2) для епох новійших:
   Maximum: $p = 1758{\cdot}362 + 11{\cdot}313.\ n$
   Minimum: $p = 1753{\cdot}912 + 11{\cdot}313.\ n$
3) загальна формула:
   Maximum: $p = 1760{\cdot}265 + 11{\cdot}082.\ n$
   Minimum: $p = 1755{\cdot}278 + 11{\cdot}082.\ n$
4) для епох нормальних:
   Maximum: $p = 1760{\cdot}342 + 11{\cdot}132.\ n$
   Minimum: $p = 1755{\cdot}364 + 11{\cdot}132.\ n$

Переходимо тепер до послїдного уступу дослїдів Вольфа, котрий дотичить т. з. дїйсного пробігу змін в відповідній скількости сонїчних плям. Щоби улекшити пізнане дальщих властивостий періода плям, можемо ужити ґрафічного способу. Коли іменно числа зглядні представимо на оси рядних, а час на оси відтятих, дістанемо криві, що виражають пробіг періоду сонїчних плям. Ті криві можуть бути двоякі після того, чи уживаємо до їх сконструованя обсервованих чи обрахованих зглядних чисел. Анї одна анї друга крива не має правильного виду, бо між поодинокими maxima'ми і minima'ми заходять в натузї (інтензивности) великі ріжниці, як се відразу можемо видїти з табелї зглядних чисел. Ріжниці будуть меньші, наколи возьмемо криву з середних вартостий. Та неправильність має свою причину раз в коротких періодичних колибанях внутр обсягу одного періода, а дальше в великих періодах, що обнимають по кілька або більше $11^1/_9$-лїтних періодів. Дрібні зубцї в кривій походять з короткого періодичного колибаня в числї сонїчних плям. Виносить оно дещо більше як $7^1/_2$ місяця і було через Вольфа сконстатоване цїлком певно, мимо великої трудности, що ішла з неточности обсервацийного материялу, з впливів геліоґрафічного розміщеня плям і з обороту сонця, який витворює кільканацятидневні позірні періоди. Так само певно доказав Вольф, що короткі періодичні ваганя

---

[1]) L. c. ст. 62.

мають більші амплїтуди підчас maximum, як підчас minimum. Коли споглянемо на криву, завважимо ту властивість зараз. Зубцї підчас maximum розходять ся, а підчас minimum зближають ся до себе.[1])

Ріжниця поодиноких періодів з огляду на довжину і висоту филь є дуже значна і видна раз з самого числа зглядного поодиноких maxim'ів і minim'ів, а потім з ріжницї треваня поодиноких періодів. Роздивившись в табелї яких небудь зглядних чисел, побачимо, що дїйсна довжина періоду вагає ся межи 8 а 16 лїтами. Вольф старав ся ріжними способами дослїдити, чи нема в тій мірі якої правильности, але міг лиш то сконстатувати, що в певних часах панують короткі періоди по 8, 9, 10, 11 літ, а в иньших довгі: від 12—16 літ. Та ріжниця виступує виразно також тодї, коли вмісто промежутків часу возьмемо самі епохи т. є. maxima і minima. В рубрицї Δ послїдної табелї Вольфа можемо постеречи деяку систематичність. Вольф занимав ся тою справою дуже довго. З початку здавало ся єму, що більша дїяльність сонця є звязана з короткими періодами та відворотно. Наслїдком сеї думки було тверджене, що діяльність сонця внутр періоду є величиною сталою. Пізнїйші дослїди не потвердили сеї думки, противно виказали, що сума місячних зглядних чисел межи двома по собі слїдуючими minima'ми є в ріжних періодах дуже ріжна.

Що до більших періодів, то істноване їх припускав Вольф вже в 1861 роцї.[2]) Вказує на них і то дуже виразно та обставина, що горбки і долинки періодичної кривої не лежать в однім горизонтальній лїнїї. Але мимо дослїдів кілька разів в тім напрямі пiдниманих, не дійшов Вольф до певних результатів. Він думав з початку, що довжина того великого періоду виносить $55^{1}/_{2}$ та 160 лїт.[3]) Але змінив своє переконане в р. 1889 при розслїджуваню дуже давних як знаємо китайских обсервацій. Они нотують дуже численні плями в лїтах 371 і 1371 по Христї. Тих 1000 лїт, що лежать межи ними, дадуть ся подїлити або на 12 періодів по $85^{1}/_{3}$ лїт, або 15 по $66^{2}/_{3}$ лїт, або на 90 по $11^{1}/_{9}$, або на 100 по 10, або врештї на 120 по $8^{1}/_{3}$ лїт. $(1000 = 12.83^{1}/_{3} = 15.66^{2}/_{3} = 90.11^{1}/_{9} = 100.10 = 120.8^{1}/_{3})$. Були отже до вибору дві дати $83^{1}/_{3}$ і $66^{2}/_{3}$ лїт. За першою цифрою промавляє ще та обставина, що в 1871 р. т. є. 500 $(= 6.83^{1}/_{3})$ лїт по 1371 роцї, припало дуже сильне maximum

---

[1]) Криві Вольфа є дуже розповсюднені пр. і у Secchi'ого ст. 177. Young ст. 144. Пор. Wolf, Handbuch т. II. ст. 412.

[2]) Astr. Mitth. Nr. 12. Vierteljahresschrift der nat. Ges. in Zürich 1861. Bd. VI.

[3]) Astr. Mitth. Nr. 19 і 20. Comptes rendus т. LXII. ст. 913.

а так само в роцї 1788 т. є. на 83 лїт перед 1871 роком. Але пізнїйше показало ся, що таку саму претензию до докладности мають і періоди по 100 і 170 лїт. Іменно послїдна величина має дуже много даних за собою, але Вольф не міг ще доказати істнованя так довгого періоду, бо від року 1750, відколи зачинає ся непреривний ряд обсервацций, не уплинуло ще 170 лїт. Треба отже сконстатоване того періоду полишити будучности.

Спосіб повстаня таких довготревалих періодичних колибань толкує Вольф сходом кількох коротких, другорядних періодів, котрі наслїдком нерівної довгости від часу до часу сходять ся, і як би через інтерференцию викликують підвисшенє филї.[1]) На ту гадку навели Вольфа рахунки, що їх був підприйняв, щоби на ново означити докладну довжину 11-лїтного періода. Полягали они на тім: Кожде вирівнане (обраховане) зглядне число місячне з лїт 1751—1870 (т. є. 1440 цифр) представив Вольф яко рядну. Опісля подїлив ті рядні на ґрупи з рівним числом складників і брав аритметичну середну наперед зі всїх перших, потім зі всїх других і т. д. цифр в кождій ґрупі. В наслїдок того ті рядні вирівнувались лиш в тім случаю, коли одна така ґрупа припадала на maximum або minimum якого періоду більшого від 11 лїт, а тодї виходила на верх періодичність функциї. Коли іменно обчислимо $\sqrt{\frac{\Sigma m^2}{n}}$ т. є. другий корінь з аритметичної середної квадратів середних вартостий, то та величина, тз. середна екскурзия принимає від часу до часу найбільшу вартість, сли істнує або довший, або коротший від нормального період, а беремо на увагу ґрупи з числом членів щораз то ріжним. Вольф подїлив тих 1440 зглядних чисел на ґрупи по 96, 98, 100, 102 і т. д. аж до 150 чисел та шукав періодів. Обчисливши висше згадану середну екскурзию, одержав він тз. місячні ріжницеві ряди (monatliche Differenzreihen). З них взявши середну обрахував такі самі річні ряди.[2]) З уміщеної там (ст. 197) табелї подамо ту витяг, доповнивши єї в зад після пізнїйших дослїдів Вольфа.[3])

---

[1]) Пор. Astr. Mitth. Nr. 57. Vierteljahresschrift d. nat. Ges. in Zürich 1882. Bd. 27. ст. 189 дд.

[2]) Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich 1882. Bd. 27. ст. 190—194.

[3]) Пор. Mitth. 60. Vierteljahresschrift der nat. Ges. in Zürich. Bd. 30, 1885. ст. 323 дд.

8^a 0^m	± 7·9	9^a 2^m	± 7·9	10^a 4^m	±10·0	11^a 6^m	±17·4
2	10·2	4	6·3	6	5·6	8	16·6
4	**12·2**	6	9·2	8	7·1	10	14·7
6	11·0	8	13·3	10	11·7	12^a 0	12·6
8	9·1	10	15·9	11^a 0^m	15·0	2	10·5
10	8·1	10^a 0^m	**16·4**	2	17·6	4	9·0
9^a 0^m	8 3	2	14·4	4	**18·2**	6	7·4

Видимо, що вартости максимальні припадають на $8^1/_3$, 10 і $11^1/_3$ лїт, що вказувалоб на істнованє трох підрядних періодів. З них оден довжиною дуже мало ся ріжнить від властивого, головного періода $11^1/_9$ лїт, иньші два виказують вже значнїйші ріжницї.

Ті дослїди Вольфа, які ми власне зібрали, не відразу приєднали собі признанє у учених. Деякі астрономи, іменно по першім виступі Вольфа, вважали його теореми мріями без вартости, иньші закидували єму недокладність та своєвільність. Найбільшим противником єго був Lamont, що виходив з періодів маґнетноï деклїнациï, означених ним на 10·43 лїт. Він хотїв ту довгість приписати реґрессивно також періодови сонїчних плям.[1] Але пізнїйші працї Вольфа та дослїди иньших учених виказали без сумнїву істнованє 11-лїтного періода. Carrington, заслужений дослїдник дїйсного руху сонїчних плям, станув відразу по стороні Вольфа і сконструував криву цїлком подібну до кривоï начертаноï Вольфом. Він то як знаємо постеріг, що наколи зближає ся minimum, ширина геліоґрафічна плям малїє, а по minimum являють ся они знов і то нагло, в значній ширинї, котра поволи ся зменьшає. Обясняє се найлїпше долучена табелька Carrington'a.

Ротациï сонця	Північні плями					Полудневі плями				
	0°—10°	11°—20°	21°—30°	31°—40°	Середна ширина	0°—10°	11°—20°	21°—30°	31°—40°	Середна ширина
1854 1—6	19	16	0	0	10·5°	16	8	0	0	8·7°
1854 7—13	14	15	0	0	10·7°	17	6	0	0	8·5°
1855 14—20	16	4	0	0	8·4°	13	5	0	0	7·8°
1855 21—27	11	1	0	0	6·5°	7	4	0	0	9·2°
1856 28—34	10	5	0	0	8·7°	2	1	2	1	20·3°
1856 35--40	1	0	0	3	25·5°	1	0	16	4	26·4°
1857 41—47	4	0	14	2	21·0°	0	0	29	11	28·4°
1857 48—53	8	13	47	5	22·0°	0	26	40	2	22·0°
1858 54—60	5	47	34	5	20·3°	2	60	67	9	21·7°

---

[1] Пор. полеміку в Poggendorfs Annalen р. 1862.

Carrington виказуючи вплив періодичности на дійсний рух плям, дуже ся прислужив Вольфови, бо через те відкрите дуже ся збільшила імовірність вислїдів Вольфа. Вольф звернув отже пильну увагу на праці Carringtona і переконав ся о справедливости єго теориї, коли в той сам спосіб впорядкував обсервациї Böhm'a. Одержав для лїт 1833, 1834, 1835 і 1836 середні ширини 9·9°, 25·0°, 22·6°, 16·7° і переконав ся, що в часї minimum 1833/4 панували ті самі відносини, що в р. 1855/6. Ще цїкавше те, що навіть обсервациї з попередного віку (XVIII) згоджувались з правом Carrington'a. До того відкритя дійшов Вольф посередно з порівнуваня часів обороту 20 ріжних означувань. Час обороту сонця на їх основі виносить 25·342 ± 0·243 днїв. Колиж Вольф на підставі своєї таблиці епох обчислив середну вартість для часу обороту сонця з обсервованих плям 1) по minimum, 2) в часї maximum, 3) перед слїдуючим minimum, то одержані вартости виносили:

ad 1 — T = 25·599 ± 0·068
ad 2 — T = 25·302 ± 0·051
ad 3 — T = 25·107 ± 0·068

і потвердили цїлковито теорию Carringtona, доказуючи разом, що теория Carringtona є правдива і що періодичність сонїчних плям іде за законами, що їх відкрив Вольф.

Праці Вольфа заохотили також астрономів з Kew: Warrena de la Rue, Balfour Stewart'a і Венямина Loewy'ого до розслїджуваня періодичности. Робили они се фотоґрафічною дорогою при помочи фотогелїоґрафа. De la Rue увзгляднив також обсервациї Schwab'ого і Carrington'a а обчисливши для них редукцийні сочинники, уложив табелї для лїт 1826—1870. Вислїди єго оголошені суть в Researches on Solar Physics (Philosophical Transactions лїт 1865—1870).[1] Warren de la Rue думав, що спосіб редукциї обсервацяй, якого вживав Вольф, занадто малу дає запоруку точности. Длятого взяв він за міродайний елємент поверхню плям. З доступних єму обсервацяй обчислив отже величину поверхнї, покритої плямами, в мілїонових частях видимої півкулї сонїчної. Щоби виелімінувати можливі похибки, обчисляв він осібно поверхню осередків, пенумбр і цїлих плям, узгляднюючи завсїгди перспективну — отже позірну зміну поверхнї плям.

---

[1] Подана понизше табеля находить ся в річниках 1869 ст. 1. і 1870 ст. 111. Secchi o. c. 172 сл.

Рік	Число днів обсервациї	Число днів без плям	Число плям в Kew	Число плям в Римі	Поверхня плям	Рік	Число днів обсервациї	Число днів без плям	Число плям в Kew	Число плям в Римі	Поверхня плям
1826	277	22	118	—	—	1849	285	0	238	—	755
1827	273	2	161	—	—	1850	308	2	186	—	583
1828	282	0	225	—	—	1851	308	0	141	—	658
1829	244	0	199	—	—	1852	337	2	125	—	522
1830	217	1	190	—	—	1853	299	4	91	—	350
1831	239	3	149	—	—	1854	334	65	67	—	198
1832	270	49	84	—	196	1855	313	146	38	—	82
1833	267	139	33	—	73	1856	321	193	34	—	40
1834	273	120	51	—	142	1857	324	52	98	—	227
1835	244	18	173	—	837	1858	335	0	202	—	763
1836	200	0	272	—	1407	1859	343	0	205	257	1390
1837	168	0	333	—	1236	1860	332	0	211	251	1343
1838	202	0	282	—	876	1861	322	0	204	251	1310
1839	205	0	162	—	817	1862	317	3	160	168	1165
1840	263	3	152	—	575	1863	330	2	124	165	749
1841	283	15	102	—	340	1864	325	3	130	97	815
1842	307	64	68	—	209	1865	307	26	93	86	542
1843	312	149	34	—	108	1866	349	76	45	81	199
1844	321	111	52	—	197	1867	312	195	25	32	188
1845	322	29	114	—	396	1868	301	12	101	92	449
1846	314	1	157	—	599	1869	179	0	—	198	—
1847	276	0	257	—	1127	1870	147	0	—	305	—
1848	278	0	330	—	1112						

З поданої табелї можемо вивести слїдуючі заключеня: 1) Довжина періоду колибає ся межи 10 а 12 лїтами, обнимаючи середно 11 лїт і якийсь дроб. Для об'ясненя подамо ту ще епохи обчислені Warren'ом de la Rue і порівнаємо їх з епохами обчисленими Вольфом.[1]

Minima Warren'a de la Rue	Minima Wolf'a	Maxima Warren'a de la Rue	Maxima Wolf'a
1833.XI.28 = 1833·91	1833·9	1836.XII.21 = 1836·97	1837·2
1843.IX.21 = 1843·72	1843·5	1847.XI.14 = 1847·87	1848·1
1856.IV.21 = 1856·30	1856·0	1859.IX.7 = 1859·67	1860·1
1867.II.14 = 1867·12	1867·2		

---

[1] Researches on Solar Physics Nr. 28. (Phil. Transactions p. 1870 ст. 115 дд.)

Довжину періода обчисляв de la Rue з проміжок обрахованих епох. Проміжка між першим а другим minimum виносила 9·81, між другим а третим 12·58, між третим а четвертим 10·82 літ. Середна вартість буде отже 11·07.

2) З більшої і меньшої табельки бачимо заразом, що maximum не лежить рівно в середині між двома сусідними minima'ми, але зближаєсь своїм положенєм дуже до попереджаючого єго minimum, так, що крива, представляюча період, скорше ся підносить до гори як опадає. Середно виносить проміжка між minimum а maximum 3·51 літ, між maximum а слїдуючим minimum аж 7·54 літ.

3) Видно слїди, що істнує друге другорядне maximum, що припадає пару лїт по головнім.

4) Поверхня плям підлягає майже тому самому законови, що їх скількість.

5) Плями навіть підчас maximum закривають лиш дуже малу часть сонїчної поверхнї. Она не доходить навіть до $^1/_{500}$ видимої півкулї.[1])

Справа періодичности сонїчних плям занимала також Spörer'а[2]) а іменно в пізнїйших часах його дослїдів. За приміром Вольфа взяв ся він до опрацьованя обсервацій почавши з 1750 року. До опрацьованя давнїйших обсервацій від 1750 — 1853 ужив він чисел зглядних Вольфа, а для лїт 1854 — 1878 обсервацій Carrington'а і своїх. Але мимо того, що уживав в другій части роботи материялу цїлком инакше впорядкованого, згідність з вислїдами Вольфа була велика. Признає се сам Spörer, хотяй не вірив в докладність і вагу давнїйших обсервацій.[3]) Найлїпше показує се табеля уміщена Spörer'ом в єго розвідцї. Перша єї рубрика обнимає епохи після обчислень Вольфа, друга і третя ті самі епохи, означені Spörer'ом на два способи: з кривих і на підставі осібної формули, означеної Spörer'ом числом 28. Взагалї думає Spörer, що при обрахованю періода сонїчних плям належить для ріжних епох послугуватись ріжними формулами.[4])

---

[1]) Для об'ясненя своїх обсервациї і їх вислїдів начертав також Warren de la Rue криву і опрацьовав єї дуже докладно. Єї находимо і у Secchi'ого о. c. ст. 179.

[2]) Astronomische Nachrichten р. 1880 Bd. 98. Nr. 2337 ст. 97 дд.

[3]) Пор. Vierteljahresschrift d. naturf. Ges. in Zürich т. XXVI. Mitth. Nr. 52. ст. 61 сл.

[4]) Astronomische Nachrichten Bd. 98. 1880. Nr. 2335, ст. 103.

Епохи Вольфа		Епохи Spörer'а з обчисленя кривих		Епохи Spörer'а середні	
Minimum	Maximum	Minimum	Maximum	Minimum	Maximum
1755·2	1761·5	1755·5	1761·0	1753·7	1758·5
1766·5	1769·7	1760·1	1770·1	1765·1	1769·9
1775·5	1778·4	1775·5	1778·7	1776·4	1781·2
1784·7	1788·1	1784·2	1788·6	1787·7	1792·5
1798·3	1804·2	1798·5	1804·0	1799·1	1803·8
1810·6	1816·4	1810·8	1817·3	1810·4	1815·2
1823·3	1829·9	1822·6	1829·9	1821·7	1826·5
1833.9	1837·2	1833·7	1837·1	1833·6	1837·8
1843·5	1848·1	1843·6	1848·6	1844·4	1849·1
1856·0	1860·1	1856·0	1860·4	1855·7	1860·5
1867·2	1870·6	1867·2	1870·8	1867·0	1871·8
1878·9		1878·9		1878·4	

В звязи з тими дослїдами, а іменно Вольфа, є одна дуже цікава проба (бо інакше сего годї назвати) Fritz'а, щоби означити maxima періодів сонїчних плям, котрі припали перед 1610 роком, т. є. перед властивим відкритєм сонїчних плям для науки. Fritz опер ся на рівнобіжности одинацятьлїтного періода сонїчних плям і полярної зорі, та скомбінувавши записані по лїтописях обсервациї полярної зорі з записками про незвичайні притемненя сонця, а навіть про дійсно обсервовані (Китайцями або Арабами) сонїчні плями, потрафив в приближеню означити много давних maxim'ів. Найбільше послужили єму записки згаданої китайскої енцикльопедиї Ma-Twan-Lin, що сягають часів ще передхристових. Отсе виказ тих давнїйших maxim'ів після Fritz'а:¹)

— 44, + 24, 188, 302, 321, 344, 354, 360, 372, 388, 397, 501, 535, 578, 626, 797, 807, 829, 839, 865, 874, 974, 1078, 1089, 1096, 1104, 1112, 1120, 1130, 1137, 1145, 1160, 1185, 1193, 1202, 1238, 1276, 1370, 1511, 1526, 1529, 1547, 1589, 1596, 1608.

Ріжницї між тими епохами дають середно дещо більше чим 11 лїт, згоджують ся отже цїлком з періодом прийнятим через Вольфа. Завважати однак належить, що часові притемненя сонїчного сьвітла, котрі брав Fritz за maxima сонїчних плям, могли мати свою причину в иньших явищах природи пр. довготревалій „сухій" мрацї, вульканїчних димах і попелах високо занесених воздушними

---

¹) Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich 1881 Bd. XXIV. ст. 259 дд.

струями, а може і хмарам метеоритів, що перелїтали між землею а сонцем.[1] Liais постеріг пр. в Бразилії 1860. IV. 11. так велике притемнене сонїчного сьвітла, що планета Венера, що тодї стояла дуже близько сонця, була видна в білий день.[2] В серпни 1883 року підчас вибуху вулькана Krakatau треба було на кораблях, що плили сундайским морем, в само полудне сьвітити лямпи. Сучасно в Батавії панувала 40-дневна темнота.

Для доповненя належить з між розвідок, що відносять ся до періодичности сонїчних плям, згадати ще про розвідки Korteweg'a і Remeis'a.

Korteweg[3] виступає против думки Вольфа, що істнують два періоди малі, котрі через інтерференцию викликують ваганя в довжинї і напрузї великого періода. Подїливши місячні зглядні числа на три секциї, з котрих одна обнимає час від 1751 до 1791, друга від 1792 до 1732, третя від 1833 до 1873, обчисляє Korteweg середне ваганє для пробних періодів, що обнимають 9 до 12½ року, і конструує на підставі тих обчислень т. з. комбінацийну криву. Обчисленями і дорогою ґрафічною представляє дальше Korteweg, що ріжні середні колибаня дають правильну криву з одним тільки maximum, котре припадає що 11¼ року. Десятилїтний період Вольфа є отже цїлком фікцийний. Деякі неправильности, що істнують в пробігу періода, належить приписати неправильному дїланю сонця.

Remeis[4] на підставі обсервацый Tacchini'ого звернув знов увагу на кільканацятиденні періоди в дїяльности сонця. Подамо ту тілька епох maxim'ів і minim'ів.

Minima	Ріжниця в часї	Maxima	Ріжниця в часї
1879. XII. 28.	13 день	1880. I. 10.	14 день
1880. I. 24.	14 „	1880. II. 7.	11 „
1880. II. 18.	19 „	1880. III. 9.	14 „
1880. III. 23.			

Істнованє так коротких періодів підлягає однак великим сумнївам. Та періодичність є лиш мнима, викликує єї оборот сонця.

---

[1] Secchi o. c. ст. 181.

[2] Comptes rendus t. 60. ст. 649 і 857 дд.

[3] Über die von Prof. Wolf vermuthete Doppelperiode der Sonnenfleckenhäufigkeit. Sitzungsberichte der kas. Akad. der Wissenschaften in Wien. Math. nat. Classe Bd. LXXXVIII. II. Abth. ст. 1004—1017.

[4] Sirius т. XIII. 1880. ст. 210.

На тім кінчимо розсмотрюванє періодичности сонїчних плям і мусимо ствердити, що працї Вольфа в тім предметї мусять бути узнані епохальними. Ріжні критики, що метались на них зі всїх сторін, не зможуть зменьшити їх значіня. Spörer уживав иньших метод, а одержав результати, котрі ріжнять ся від результатів Вольфа так незначно, що ті ріжницї містять ся в обсязї середного ваганя, яке Вольф подає для кождої своєї дати. Дослїди Warren'a de la Rue також згоджують ся в головних чертах з результатами Вольфа. А хотяй в деяких точках значно ся ріжнять від себе, то по нашій думцї Вольфови а не Warren'ови de la Rue належить признати слушність. Самі Kew'скі астрономи мусять признати, що взявши в рахунок поверхню ґруп і плям одержимо майже такий сам результат, якбисьмо взяли їх число. Крім того завважати належить, що Warren de la Rue обчисляє довжину періода з дуже коротких обсервацийий та ще до того в так первісний спосіб, як се робив Вольф ще в 1852 р. Що дотичить Korteweg'a, то він цїлком не порозумів Вольфа і хоче констатувати чи відкривати істнованє періода другорядного при помочи чисел зглядних виведених з рахунку, а не з обсервациї. Нема що отже дивувати ся, що досмотрив ся лише одинокого періода. На такім самім, тільки далеко грубшім непорозуміню Вольфа полягають закиди Duponchel'a, про котрі пізнїйше поговоримо.[1]

З періодичностию сонїчних плям получені є ріжні дуже цїкаві явища на сонци. Передовсїм завважали Rosa і Secchi, що промір сонця підлягає періодичним ваганям. Secchi вже в 1873 роцї мав те пересьвідченє, що промір сонця є змінний, іменно найбільший в часї minimum сонїчних плям. Право поставлене Ros'ою звучить: Наколи число плям і протуберанций є меньше, сонце має більший промір.[2] Над сею цїкавою справою розвела ся оживлена дискусия, в котрій взяли участь Respighi, Wagner, Auwers, Remeis та много иньших. Auwers доказав, що материял використаний Secchi'м не є достаточний, а Remeis виступив так переконуючо против Ros'и, що справа здавалась убитою.[3] Піднїс єї на ново Вольф на підставі обсервациї проміру сонця Maskelyne'a (1765—1800) і Hilfiker'a

---

[1] Comptes rendus tome XLIII. ст. 827 дд.

[2] Розвідки Ros'и: Sulle variazioni del diametro solare. Memorie rei spettroscopisti italiani. Anno 1872. Studii intorno ai diametri solari. Roma 1874.

[3] Пор. Sirius т. XII. 1879.

(1862—1883).[1] Він підніс, що найдені в них періодичні ріжниці не могуть походити виключно з обсервацийних та личних хиб. Дійсно: криві, що виражають зміну сонічного проміру, мають подібний пробіг, як криві, що виражають періодичність сонічних плям. Auwers, що за примірбм Вольфа зайняв ся знова сею справою, мусів признати, що пр. обсервациї Maskelyne'a з літ 1783 – 1790, коли було дуже много плям на поверхні сонця, виказують зменшенє сонічного проміру, а знов з літ 1791—1810, коли було плям дуже мало, виразно є видне збільшенє сего проміру. Але заразом доказав Auwers, що досліди иньших учених, що обсервували в новійших часах і нерівно лучшими інструментами (іменно Wagner) не потверджають вислідів Maskelyne'a і Hilfiker'a. 120-літний ряд ріжних обсерваций передискутований дуже пильно Auwers'ом не виказав найменьшої змінности проміру сонця. Досліди Сикори в послідних літах XIX віка[2]) виказали тільки деяке винесенє льокальне поверхні сонця в близькости плям.

Другим сонічним явищем, що ся дуже тривко лучить з періодичностию плям, є нерівність в їх виступуваню на ріжних півкулях сонічної кулі. Вже Швабе замітив підчас maxim'ів 1828 і 1848 року, що плями виступали майже виключно на одній з сонічних півкуль. Що більше замітив Швабе, що місце найсильніщого розвитку плям здає ся обходити сонце довкола і то в напрямі цїлком противнім до єго обороту. В р. 1858 сконстатував він цїлком певно, що півкуля полуднева через довший час була далеко богатша в плями як північна. По Швабе'ви звернув Carl увагу на те, що в лїтах 1859—1863 повстало і зникло далеко більше плям на півкулї сонця від нас відверненій, як на зверненій до нас. Крім того мож було дуже виразно помітити у плям змаганє, щоби щораз виключнійше витворюватись на одній з півкуль. Вже з дослїдів Carl'a можна заключити, що ся проява стоїть в звязи з періодичностию сонічних плям; іменно, коли число плям дійде до свого minimum, тодї на зверненій до нас півкулї сонця слїдує також minimum. Рівночасні і дещо пізнійші обсервациї Spörer'a доказали, що minima лїт 1856 і 1867 і maxima 1860 і 1875 виступили скорше на полудневій як на північній півкулї, а De la Rue, Stewart і Loewy скон-

---

[1]) Пор. Mitth. Nr. 39 i 61. Vierteljahresschrift d. nat. Ges. in Zürich рік 1873 і 1884.

[2]) Bulletin astronomique 1899 ст. 455.

статували також в тім часї кілька случаїв, котрі вказують на змаганє у плям виступати в певнім періодї на противних кінцях того самого проміру сонця.

Такими самими дослїдами занимав ся також Weber, та ствердивши у плям змаганє, щоби виступувати на поодиноких півкулях, звернув на те явище увагу Вольфа. Вольф вичислив стан плям осібно для обох півкуль в лїтах 1869—1881. Уложена ним таблиця[1]) вказала на те, що число плям від р. 1869 прибувало на полудневій півкулї скорше, як на північній. Потім північна півкуля дігнала в тім зглядї полудневу. Коло половини 1871 р. зачало загальне число плям опадати, але скорше на північній, як на полудневій півкулї. Вкінци однак знов полуднева півкуля перегнала північну. Сума середних зглядних чисел для обох півкуль не є дуже ріжна одна від другої і виносить для північної півкулї 557·9, для полудневої 559·0. Епохи періода т. є maxima і minima приходили на полудневій півкулї о три або чотири місяцї вчаснїйше, чим на північній. Можна се сказати именно про maximum року 1870 і minimum року 1878. Обсервацнї показали ся занадто короткими, щоби мож було відкрити більшу правильність.

Тим самим предметом заняв ся також Tacchini.[2]) Доказав він именно цїлковито, що 1) плями часто виступають виключно на однїй з півкуль сонця і то протягом довшого часу (пр. через три перші місяцї 1880 року), 2) деякі околицї сонїчної поверхнї специяльно сприяють розвиткови плям. В роцї 1880 плями звичайно показували ся в двох точках одного полуденника: під + 22° і — 20° гелїоґрафічної ширини.

На закінченє роздїлу скажемо дещо про причини періодичности сонїчних плям. Під тим зглядом можемо всїх астрономів подїлити на дві ґрупи. Одні приписують періодичність сонїчних плям періодичному дїланю внутрішних сил сонця, другі внїшним причинам. Про погляди першої ґрупи говорити будемо в слїдуючім роздїлї, що занимати ся буде природою сонїчних плям і ріжними теориями, які ріжні учені про ню виставили. Бож в такім разї внутрішні причини періодичности сонїчних плям будуть залежали від загального погляду кождого з тих учених на загальний устрій сонїчної кулї

---

[1]) Mitth. 55. Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich. Bd. 26, 1881. ст. 354 і 355.

[2]) Atti della reale Accademia dei Lincei 1881. Aprile S. 2. vol. 5. ст. 157, 200. Sirius XIII. 1880 ст. 210.

а специяльно на істоту сонїчних плям. О причинах внїшних можемо вже ту говорити.

Зараз по відкритю періодичности сонїчних плям, попали учені на думку, що причиною періодичности є планет Юпітер, котрий як знаємо окружає сонце в 11 лїтах 314·834 днях. Вольф в початках своїх дослїдів був приклонником сеї гипотези,[1]) а і в новійших часах не бракувало приклонників того способу толкованя періодичности плям пр. Faye, Sonrel[2]) і Duponchel. Сей послїдний в своїй розвідцї: Les taches solaires reglés par l'éxcentricité des mouvements planetaires Paris 1882,[3]) на підставі цїлком хибно понятих вислїдів Вольфа приходить до переконаня, що межи maxima'ми 1619 а 1856·2 року пройшло не 21 але 20 періодів, отже довжина періоду вино- 11·85 лїт т. є. майже цілком тілько само, що сидеричний рік Юпітера. Єго отже вважає Duponchel справником періодичности сонїчних плям. Абстрагуючи вже від сеї фатальної похибки, що всї виводи Duponchel'а робить неправдивими,[4]) толкованє періоду сонїчних плям ексцентричностию, отже раз сильнїйшим, другий раз слабшим притяганєм Юпітера, не веде до ніякого позитивного результата. Правда, що крива періоду сонїчних плям згоджуєсь в деяких місцях цїлком добре з кривою, що виражає змінне віддаленє Юпітера від сонця, але в иньших знов місцях мають ті криві цїлком відмінний і собі взаїмно противний пробіг. Пр. при початку XIX столїтя був Юпітер найблисший до сонця підчас minimum сонїчних плям, а в роцї 1870 підчас maximum.

Хотяй як бачимо не повело ся вияснити періодичности плям ексцентричностию орбіти Юпітера, то однак аж до найновійших часів не переставали учені мішати планети до періодичности сонїчних плям. Впроваджено однак вже і иньші планети в рахунок. Chacornac, толкуючи повставанє плям відпливом сьвітляної маси сонця, твердить, що найбільше їх витворюєть ся під лучистим впливом Венери, Землї і Юпітера з деяким співудїлом Сатурна і Меркура. Специяльно розвойови плям сприяє той час, коли стоять в квадратурі з одної сторони Земля і Сатурн, з другої Меркур, Венера і Юпітер.[5]) Також Вольф видячи, що згідність періода плям з часом обігу Юпітера не дасть ся удержати, пробував взяти в рахунок чо-

---

[1]) Mitth. Nr. 8. Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich 1859.

[2]) Comptes rendus tome 65 ст. 227 + 69 ст. 263.

[3]) Comptes rendus т. 93. ст. 827 дд.

[4]) Пор. рецензию Вольфа Mitth. 56. Vierteljahresschrift etc. т. 27. ст. 64 дд.

[5]) Comptes rendus tome 64 ст. 1196.

тири планети: Венеру, Землю, Юпітера і Сатурна.[1]) Уложив він вже в 1859 році формулу для кривої плям, в котрій приходили 4 періодичні члени, за котрі підставляв елементи чотирох згаданих планет. В кривій, що виражає зміну числа плям в часї і є виведена з обсервованих чисел зглядних, знаходить ся іменно кілька другорядних maxim'ів і minim'ів, котрі можна ввести в звязь з обігом Венери і Землї. Вольф припускає отже, що Юпітер викликує загальний вид кривої плям, Сатурн — зміни в довжині і висоті єї горбків і долинок, а Земля і Венера зубцї в тій кривій. Також астрономи з Kew, не могучи протягом довшого часу виробити собі ясного погляду на істоту плям, припускали, що істнує звязь між їх періодичностию і рухами планет. De la Rue і Stewart вивели зі своїх обсерваций ряд чисел, з котрих ся показує, що плями все тодї ся в більшім числї показують, коли з трох планет: Юпітера, Венери і Меркура дві стоять в одній лїниї. Застановлювали ся они над чотирома можливими случаями: 1) коли спільно дїлають Меркур і Венера, 2) Юпітер і Венера, 3) Юпітер і Меркур, 4) коли ся зближає або віддаляє сам Меркур. В двох послїдних случаях вплив є малий, а найбільший є в другім, коли Юпітер і Венера разом дїлають. Плями мають після Kew'ских обсерваций змаганє, щоби повставати напротив планети Венери. Віддаляючись від неї в наслїдок ротациї сонця, ростуть і осягають свою найбільшу величину, коли найдуть ся по прямо від Венери відверненій сторонї сонїчної кулї.[2]) З иньших, дуже численних дослїдів подамо на конець тільки вислїди Fritz'a, Kirkwood'a, Sellmeier'a, Loomis'a і Harrison'a.

Fritz звернув увагу на синодичні обіги планет, підчас коли дотепер зважано лишень на сидеричні. Найбільший вплив приписав він планетї Меркурови. Sellmeier противно узнав вплив Меркура мінїмальним, зазначуючи рівночасно, що Венера, Земля і Юпітер пересічно що 10.07 лїт находять ся для обсерватора уміщеного в середоточцї сонця, в полученю. Вплив тих планет викликує періодичність сонїчних плям в періодї 77·54 лїт. Підчас того періода міняють ся але неправильно періоди по 10·38 і 12 лїт довгі. Kirkwood на стільки є оригінальний, що вийшов від многократно обсервованого факту, що оден полуденник на поверхнї сонця особенно сприяє витвореню плям. Причин сего факту шукає Kirkwood в гипотезї, що згаданий полуденник є приступнїйший дїланю планет як

---

[1]) Handbuch der Astronomie т. II. ст. 414.

[2]) Comptes rendus т. 67 ст. 191. Secchi o. c. ст. 182. Young o. c. ст. 147.

иньші полуденники. Заложивши час обороту сего полуденника 24·826 днів, спровадив Kirkwood середний час треваня періода ($11\,^1/_9$ року) до впливів Меркура, а ріжні його ваганя і неправильности до пертурбаций через плянети взагалї, а Венеру і Землю спец936иально. Loomis приписує кон'юнкциям і опозициям Юпітера і Сатурна найбільше значінє для періодичности сонїчних плям. Він є приклонником 10-лїтного періода, виходячи від вагань земского маґнетизму, а обставина, що кождих 9·93 лїт припадає по черзї кон'юнкция і опозиция обох тих планет, здавала ся виразно вказувати на вплив тих планет. Але близше розслїдженє річи виказало, що підчас таких констеляций трафляли ся часом maxima, часом знов minima сонїчних плям. Згадаємо ту ще о однім цїкавім постереженю C. Harrisona.1) Постеріг він, що коли в формулї:

$$P = \Sigma \frac{pm}{d^2} : \Sigma \frac{m}{d^3}$$

підставимо за p, m, d, час обігу, масу і середне віддаленє вісьмох головних планет, одержимо для P (довжина періода) 11·29 лїт — величина, що майже цїлком згоджуєсь з середною довжиною періода плям сонїчних Вольфа. Ріжниця лежить в обсягу середної непевности.2)

Тепер не числять ся вже учені з впливом планет на сонїчні плями і шукають вияснення періодичности в змінній чинности сонця. Трудно собі іменно представити, в який спосіб могуть планети сорозмірно малі і так дуже від сонця віддалені, мати на него так сильний вплив. Тяжко припустити, що сила тяжести ту дїлає, бо пр. сила з якою притягає Венера поверхню сонїчну, є 750 разів меньша, як дїланє сонця на поверхню землї. Сила притяганя Юпітера і Меркура є вже 1000 разів меньша. Сонце само викликує на поверхнї землї в околицях рівника приплив около 30 cm. високий. Юпітер викликав би на поверхнї сонця, наколи би там була вода, приплив 0·3 mm., Венера приплив 0·4 mm. Хотяй бисьмо навіть приняли, що материя поверхнї сонця є безмірно лекша від води, то прецїнь трудно витолкувати впливами планет так великі заколоти, якими є плями. Зрештою само виступуванє плям досить нечаянне, подібне часом до експльозий і кождоразові в них зміни не дадуть ся погодити з рівномірним впливом планет.

---

1) Wolf. Handbuch der Astronomie т. II ст. 414. Philosophical Magarine 1889.

2) Розуміє ся, що також Фальб є приклонником впливу планет на сонїчні плями вже зі згляду на свою теорию. Пор. Sirius IV. 1871. ст. 48.

Пробувано виснити періодичність сонічних плям ще в оден спосіб. Оден учений американьский В. Peirce правдиво по американьски поставив теорию, що плями то дїри в фотосфері, викликані падаючими на сонце метеоритами. Вистарчить отже припустити, що ті метеорити окружають сонце довгим перстенем, котрий має в однім місци значнє згрубінє. Що 11·1 лїт приходить оно в околицю сонця, множество метеоритів спадає тодї на него і маємо maximum сонїчних плям.[1] Та теория не має однак наукових підстав. Супротивляють ся їй тревалість плям і гелїоґрафічне їх розміщенє. Єсли би тая теория була правдива, найбільше плям було б під бігунами сонця, де сила від'осередна є найменьша. Тимчасом, як знаємо, плями находять ся головно межи 10° а 35° гел. ширини.[2]

Про теориї сонїчних плям.

Пояснити істоту сонїчних плям пробувало дуже много учених і неучених людий. Те велике число ріжних поглядів легко витолкувати, бо сонїчні плями є дуже цїкавим, можна навіть сказати таємничим явищем природи. Могло б ся видавати, що те велике число ріжних теорий прецїнь причинило ся до якогось поступу в пізнаню натури сонїчних плям. Але на жаль так не є. Нинїшна астрономія стоїть перед сонїчними плямами як перед загадкою так само майже темною як в початках XVII віка. Поступ понять астрономії є на тім поли нескінчено меньший чим на иньших, хоч не бракувало проб посунути єї вперед. Причиною сего є занадто далеке запусканє ся в теорию і неуміле а повне претензиї і занадто аподиктичне пояснюванє річи у многих учених. Щоби пізнати явище сонїчних плям основно, треба довго самому обсервувати сонїчні плями і то найлучшими средствами, якими орудує теперішна наука. Лише теориї, що опирають ся на обсервациях, могуть мати вартість. Теориї оперті на анальоґіях і чисто теоретичних виводах, не могуть вдоволити обсерваторів. Такі теориї переносять результати дослїдів роблених по лябораториях на мікроскопійну міру в безконечні простори сонїчної кулї. Що вислїд сих проб не вдоволяє, легко зрозуміти. Коли ще до того нераз цїлком непокликані люди мішались до сонїчних плям, не дивно, що у фахових астрономів всї нові те-

---

[1] Young o. c. ст. 148.

[2] Запримітити належить, що властивим вітцем сеї гіпотези є John Herschel.

ориї сонїчних плям не роблять вражіня. Цїлий сей предмст на довгі літа здискредитований в їх очах. Найбільше характерною обставиною в тім напрямі є те, що великі обсерватори сонїчних плям, як Carrington, Spörer, Wolf не ставили нїколи своїх власних теорий, хиба лиш принагідно кинули пару слів, що признавали тїй або тамтїй теориї більшу імовірність. Навіть Secchi, хоч поставив сам кілька теорий, не держав їх ся так завзято як теоретики.

Погляди на істоту сонїчних плям представимо в порядку хронольоґічнім, щоби лїпше пізнати лїтературну полєміку в тім напрямі. Відступимо від сего порядку хиба для яснїйшого уґрупованя річи. Більшість теорий, котрі оглянемо, має вже лише історичну вартість.

Зараз по відкритю сонїчних плям в 1610 р. зачали тодїшні учені спорити ся над їх істотою. Одні зі зглядів фільософічних та догматичних заперечували, щоби сонце, око сьвіта і взорець чистоти, могло мати на собі чорні плями. В виду сконстатованого факту говорили они, що явище плям викликують малі тїла небесні, що окружають сонце в невеликім віддаленю від него. Так думав протягом довшого часу також Scheiner, перший науковий дослїдник поверхнї сонця. Він розповсюднив сю думку між своїми учениками.[1]) Tardé і Malapert надали навіть мнимим новим планетам назви. Перший назвав їх Sidera Borbonica, другий Sidera Austriaca. Але і сам Scheiner перехилив ся невдовзї до противної думки, що іменно плями сонїчні находять ся на поверхнї сонця, а не поза нею. Від початку приклонниками сего твердженя були: Galilei, Kepler, Fabricius — відкритель плям і Marius. Galilei, а з ним Kepler, вважали плями чимсь подібним до наших хмар. Kepler вносив вже навіть, що плями є независимі від сонїчної кулї, але мусять ся уносити над єї поверхнею. Заключав се він з неправильности руху плям. Видимо отже, що початки теориї хмар лежать ще в початках XVII віка. Так само давних часів сягає теория жужлів. Представителем єї був в тих часах Marius. Єго теория дасть ся звести в кілька слів: Плями сонїчні се жужлї, що видїлюють ся з палячого ся сонця, котре їх потім викидає в простори всесьвіта, щоби пізнїйше яснїйше сьвітило як сьвічка, коли обітнемо єї спалену часть ґнотика. Через певний час був і Scheiner пересьвідчений, що плями мають сталий стан зцїпненя.

---

[1]) Wolf. Handbuch der Astronomie т. I. ст. 567 дд.

Від тепер ніколи не бракло учених, котрі би не признавали плям жужлями. Пр. Aversa і Lahire вважали плями непрозрачними місцями плинної поверхнї сонця — отже жужелицями. Але пануючою теориєю стала невдовзї иньша. Scheiner під конець своїх дослїдів дійшов до переконаня, що плями не є хмарами. Внїшний їх вигляд вказував на що иньшого, іменно, що се є заглубленя в сьвітляній материї поверхнї сонця. Ті заглубленя відслонюють долїшну темну верству і через те витворюють явище плями. Тепер по перший раз виробило ся понятє фотосфери яко обволоки, що зложена з ясних хмар покриває зі всїх сторін кулю сонїчну, що сама для себе є цїлком темна.[1]) Певну модифікацию тої теориї подав в другій половинї XVII віка Домінїк Cassini. Він думав, що фотосфера підлягає припливови і відпливови та після того відкриває або закриває поодинокі гори, що находять ся на сонци.[2]) Та модифікация найшла многих приклонників, іменно межи француским ученими пр. De la Hire і Lalande, що вважав осередки плям верхами сонїчних гір а пенумбри їх склонами, котрі ми видимо крізь тонку верству фотосфери та до того на пів-прозрачну. Понеже иньші держались гадки, що плями є заглубленя, проте почалась довша полєміка між приклонниками пропастий і гір. Она тревала довший час, але вкінци стали переважати приклонники пропастий, іменно в другій половинї XVIII віка. Rost вже в першій половинї сего віка виставив теорию, що дими виходячі зі сонїчних вульканів продирають фотосферу і отвираючи нам вид на темний осередок сонця є причиною плям. Він також звернув увагу на се, що плями наближаючи ся до сонїчного края викликують в нїм заглубленє.[3])

Остаточне обаленє теориї гір належить приписати Wilson'ови, котрий, як се висше подалисьмо, відкрив,[4]) що осередки сонїчних плям стають зглядом своїх притїнків ексцентричними, наколи плями наближать ся до края сонїчного кружка. Те явище не згоджує ся з припущенєм, що плями, се гори, і тільки тодї дасть ся витолкувати, коли приймемо, що они є заглубленями. Те саме відкритє зробив в 1771 р. независимо від Wilson'а Schülen, а Bode витягнув навіть з тих обсерваций відповідні заключеня. Осередок плями є після Bod'ого куснем сонїчної поверхнї. В міру того, чи сей ку-

---

[1]) Wolf. Handbuch der Astronomie т. I. ст. 568. т. II. ст. 406.

[2]) Wolf. Geschichte der Astronomie ст. 650.

[3]) Wolf. Handbuch der Astronomie т. II. ст. 406.

[4]) Observations on the solarspots Philosophical Transactions т. 64. 1774. ст. 1 дд.

сень є скалистий, пісковатий або покритий водою, осередок плями є темнійший або яснійший. Притїнок витворюють темні хмари, що лежать між властивою поверхнею сонця а внїшною сьвітляною обволокою або фотосферою.

На тих дуже незначних підставах повстала перша наукова теория сонїчних плям, поставлена William'ом Herschel'ом в початках XIX столїтя.[1]) Не була се теория без упереджень. Herschel з релїґійно-фільософічних принципів думав, що сонце є придатне до замешканя і в дїйсности замешкане як і наша земля. Щоби се було можливе, мусїв Herschel припускати, що осередок сонця є зимним, отже темним тїлом. Усе сьвітло і тепло, яке сонце видїляє, походить після теориї Herschel'а лише від тз. фотосфери т. є. внїшної верстви сонїчної амосфери. Фотосфера має натуру наших земских хмар, але є розпалена до білости. Щоби однак таке горяче сусїдство не зашкодило мешканцям сонця, принимає Herschel, що безпосередно під фотосферою находить ся верства темних хмар, котра цїлковито віддїляє фотосферу від сонїчного нїдра.

Роздивімось тепер, яким способом толкує Herschel на підставі своєї теориї явища на сонци.

Передовсїм ґрануляция походить звідси, що долї̈шна темна верства хмар проглядає через фотосферу в многих місцях і справляє, що поверхня сонця виглядає рапаво. Походнї — се поодинокі хмарки фотосфери, унесені прямовими струями воздуха в гору. Плями толкує Herschel в той спосіб: Коли обі верстви хмар т. є. темна і ясна в наслїдок хотьби димів, що уносять ся з сонїчних вульканів, або в наслїдок иньших подібних причин прорвуть ся, тодї через повсталий отвір бачить земский обсерватор кусник темної поверхнї, властивого сонїчного нїдра. Сей видимий кусень сонїчного нїдра творить осередок плями. Притїнок же творить верства темних хмар, що роздерта укладає ся концентрично коло осередка. Цїла отже пляма представляє ся яко лїйковате заглублене, що своїм дном опирає ся о темне внутро сонїчної кулї.

Хотяй своєвільність теориї Herschel'а відразу кидала ся в очі, то все таки она удержала ся дуже довго і числила до своїх приклонників учених сеї міри, що Humboldt[2]) або Arago. Найважнїйшою причиною того довгого удержаня ся теориї Herschel'а була об-

---

[1]) Observations tending to investigate the Nature of the Sun Philosophical Transactions 1801. ст. 265 дд.

[2]) Kosmos вид. Stuttgart 1880 т. III. ст. 341.

ставина, що ніхто нової теориї протягом кількадесяти лїт не виставив — длятого, що не було жадних нових даних.

Теория Herschel'a є в історнї сонїчної фізики дуже важним явищем, бо замикає перший період істнованя сеї галузи астрономії. Перший сей період був дуже довгий — майже двіста лїт уплинуло від відкритя сонїчних плям до поставленя теориї Herschel'a — а можемо єго назвати дитинячим віком сонїчної фізики.

Про істоту плям маємо в тім часї лише голі гіпотези, а по двіста лїтах теорию прямо чудернацку і незгідну зі здоровим розсудком. Довгий час єї панованя найлучше сьвідчить про те, що сонїчна фізика находилась тодї ще в пеленках. Але за загальним поступом астрономії в першій половині XIX. віка мусїв піти поступ на тім поли. З початку зазначив ся він хиба тим, що щораз більше обсерваторів звертало свої інструменти на сонїчний круг. І зачали поволи родитись сумнїви. Найбільше впадала в очи неімовірність, щоби внутро сонця могло лишити ся темне і зимне в сусїдстві розпаленої фотосфери. John Herschel старав ся що правда через довший час боронити теориї свого батька. Приписував він именно тій темній верстві хмар особливу властивість: цїлковитої рефлексиї сьвітла, якої ще у жадного тїла на сьвітї не сконстатовано. Крім того хотїв він ввести теорию свого батька знов в моду, опираючись на припущеню Mayer'a, котре так виразив Leverrier: „que le soleil dejeune et dine des asteroïdes.“ Такі річи були тодї дуже популярні, Herschel хватив ся отже того і приписував творенє ся дїр в сонци паданю на него метеоритів. Потім попав на здогад, що ті отвори походять від воздушних труб на сонци, але всї проби ратувати гіпотезу батька не придались до нїчого. Найгрізнїйше оруже давала єї противникам в руки теория Kant'a і Laplace'a, що була тодї вже загально прийнята. А власне теория Herschel'a прямо їй ся супротивляла. Не бракувало їй що правда аж до найновійших часів приклонників, але мусїла перебути великі модификациї, так що лишилось з неї хиба те, що плями є заглубленя в фотосфері. Остаточний удар завдала гершлївскій гіпотезї спектральна аналїза. Відкритє Kirchhoffa і Bunsena, вияснюючи природу темних лїній Фраунгофера в сонїчній дуговинї, пхнуло сонїчну фізику на цїлком нові дороги. Майже всї добутки, що добуто в послїдних часах на тім поли, маємо завдячити спектральній аналїзї.

Першим, що на підставі спектральних дослїдів поставив нову теорию сонця був оден з відкрителїв спектральної аналїзи, G. Kirchhoff.[1])

---

[1]) Untersuchungen über das Sonnenspektrum und die Spektren der chemischen Elemente. Physikalische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften in

Щоби вияснити істноване лїнїй фраунгоферівских в сонїчній дуговинї, твердить Kirchhoff, що сонце складає ся з ядра сталого або плинного, розжареного до найбільшої степени. Само для себе те ядро безпосередно обсервоване дало би дуговину тяглу. Але окружаюча єго атмосфера значно холоднїйша, хотяй також розпалена, повна ріжних ґазів. Та атмосфера абсорбує деякі лучі ядрової дуговини і викликує в сей спосіб явище лінїй Fraunhofer'a.[1])

В дальших уступах своєї працї критикує Kirchhoff теорию Wilson'a і Herschel'a. Він думає, що та теория мусїла би навіть тодї упасти, наколиб жадної новійшої і лїпшої не виставлено. Супротивляє ся она іменно всяким правилам фізики. Удержанє ядра в станї темнім і зимнім є в сусїдстві так горячої фотосфери не можливе. Через провід розігрілаб ся наперед атмосфера а опісля і само ядро. Доставив на се практичного доказу Draper, теоретично розслїдив ще попередно сам Kirchhoff. В виду того конечна є нова теория сонїчних плям і єї виставляє автор. Она подібна до здогадів Galilei'ого та Кеплєра, але ріжнить ся від них о стілько, що здогад від науково виробленої теориї.[2])

Kirchhoff виходить з того заложеня, що в атмосфері сонця відбувають ся подібні явища як в атмосфері земскій. Льокальні обниженя температури поводують на сонци так само як і на земли творенє ся хмар. Сонїчні хмари розуміє ся є цїлком відмінної натури як земскі. Ті повстають з пари водної, тамті з пар металїчних в незміримо високій температурі. Наколи в атмосфері сонця повстане така хмара, то в лежачих над нею частях атмосфери послїдує відповідно значне остудженє. Хмара перегороджує їх іменно від жерела тепла, се є сонїчного осередка. Викликане нею остудженє буде тим значнїйше, чим она буде густїйша і більша. Найсильнїйше буде остудженє безпосередно понад хмарою і в ту сторону то є в гору она буде ся розширяти. Температура єї поволи опаде до тої степени, що она стане непрозорою і утворить тим способом осередок сонїчної плями. В деякім віддаленю понад сею долїшною хмарою витворить ся друга в місци, де стрінуть ся атмосферичні течії, що прямують до вирівнаня температури. Витворить ся ту знижка теплоти і ґази зближившись в тім місци до кондензацийного пункту витворять ту другу хмару, значнє рідшу від долїшної, бо в висших

Berlin. 1861 ст. 63—95 і 1862 ст. 227—240. Пор. оцїнки Faye'a в Comptes rendus т. LXIII. ст. 980 дд.

[1]) l. c. ст. 83.

[2]) l. c. ст. 86.

реґіонах атмосфери загальна єї густота є меньша. (Такі дві хмари, що лежать, над собою, можемо часто обсервувати і в земскій атмосфері.) Долїшна хмара дає початок осередкови плями, горішна, укладаючи ся концентрично до першої, творить притїнок. Також иньші явища, котрі бачимо на плямах, вияснює Kirchhoff на підставі своєї гіпотези, а іменно промінясте уложенє притїнка і розміщенє плям в двох стрефах по обох сторонах рівника. Льокальне остудженє в сонїчній атмосфері, що є репрезентоване плямою, викликує в безпосереднім сусїдстві хмари атмосферну течію в діл та заразом рівнобіжну єї внїшну течію в гору. Понад самою хмарою переходять ті течії взаїмно в себе. В наслїдок того повстають ту горизонтальні течії, що прямують з великою скоростию від середини на зверх. Длятого то притїнок виглядає промінясто. Материя хмари разом зі згаданими течіями стремить до віддаленя ся від середини та громадить ся при берегах хмари. Длятого ту пенумбра є темнїйша. Великаньска сила тих заколотів вияснює після Kirchhoff'а велику змінність плям цїлковито.[1]) Що до розміщеня плям, є оно випливом нерівної теплоти ріжних околиць сонїчної кулї. В наслїдок високої температури на сонїчнім рівнику повстає ту горяча течія і іде до бігунів, звідки знов приходить зглядно зимна течія до рівника. В місци, де ся ті дві атмосферні течії сходять, то є межи 10^0 а 35^0 гелїоґрафічної ширини, повстають найчастїйше плями. Вкінци займає ся ще Kirchhoff відносинами походень до плям. По єго думцї є се вибухи, а повстають в наслїдок реакциї температури в околицях плям. Стоять они з ними в тривкій звязи, бо ті вибухи себто походнї викликують стиканє ся верств ріжної температури, а через те творенє ся плям. З другої сторони плями здержуючи проміньованє тих околиць сонїчної поверхнї, що їх закривають, підносять їх температуру і стають ся причиною нових вибухів.

Теория Kirchhoff'а сама для себе не многих зискала собі приклонників. Перехилив ся на єї сторону в перших лїтах своєї наукової працї Spörer і застосував єї до вияснeня дїйсного руху плям. Сли пляма відбувала дїйсний рух до заходу, приписував се Spörer істнованю східного вітру (Oststurm), що уносить з собою хмару себто пляму. Сли пляма відбувала рух ідь сходови, припускав Spörer вплив вітру западного (Weststurm). Рухи плям в ширинї приписував Spörer також вітрам з відповідним напрямом.[2]) Але має теория Kirchhoff'а иньше велике значінє. Она перша ввела в науку

---

[1]) l. c. 89.

[2]) Пор. Comptes rendus т. 63. ст. 977.

властиве загальне понятє про будову сонця, оперте на аналїзї спектральній, котрої здобутки мусїли від тепер узгляднати всї учені, єсли хотїли виставляти нову теорию сонїчних плям. Причиною малого розповсюдненя теориї Kirchhoff'а була обставина, що она не толкувала, длячого плями представляють ся невпередженому навіть обсерваторови яко заглубленя. Приклонники сеї теориї старали ся що правда доказати, що той внїшний вигляд плям є оптичною маною. Spörer так виражавсь аж до недавнього часу. Але те нїкого не переконало так, що около 1865 р. знов ся збільшило значінє теориї Wilson'а і Herschel'а, підпертої в Анґлїї Herschel'ом молодшим а у Франциї головно Chacornac'ом, славним зі своїх щасливих „польовань на планети“.

John Herschel тепер по раз перший сформулував свою нову теорию, котра опирає ся на слїдуючих основах. Атмосфера сонця в наслїдок ротациї підлягає сплощеню в околицях бігунів, підчас коли в околицях рівника повстає набренїлість. Через проміньованє обнижає ся температура сонїчної поверхнї при бігунах, а при рівнику зглядно підвисшає ся, бо ту згрубіла верства атмосфери перешкаджає сильнїйшому проміньованю. В наслїдок тої ріжницї в сонїчній температурі, що є цїлком анальоґічна до таких же ріжниць в земскій атмосфері, повстають і на сонци пассати і дві полоси бур, котрі викликують повставанє отворів в фотосфері — отже плям. Повстають там именно цикльони в наслїдок зіткненя течії ідучої від рівника, з течією, що іде від бігуна.[1]

Chacornac держав ся ще чистїйшої теориї Herschel'а. Вважав він плями сонїчні наслїдком вульканїчних вибухів на сонци і шукав в їх розміщеню анальоґії до вульканїчних пасем Buch'а.[2] Опирав ся він на схожости сонїчних плям а вульканїчних кратерів.[3]

В тім часї (около 1865 р.) виступили однак на тім поли два учені, котрих погляд був протягом довшого часу в тих справах рішаючий. Були се: францускиий астроном Faye та італїйский патер Secchi. Поставили они рівночасно і від себе независимо в лїтах 1864 і 1866 майже цїлком ідентичні теориї.[4] Ось їх зміст.

Сонце є величезна куля зложена з розпалених ґазів. Внїшна єї обволока, що повстала в наслїдок остудженя, відгриває меньше

---

[1] Пор. Comptes rendus т. LX. ст. 94 Young o. c. ст. 166 дд.

[2] Comptes rendus том LX. ст. 62.

[3] Ibidem tome LXII ст. 1095.

[4] А не в 1868 як думає Young o. c. 167. Secchi оголосив свою теорию по раз першмй в Bolletino meteorologico Novembre 1865. Faye в Comptes rendus т. LX. (1865).

більше таку ролю як в штучних сьвітлах ті частинки сталих тїл, що жарять ся в полуміни пр. сьвітляного ґазу і дають много сильнїйше сьвітло, як би дав сам ґаз. Мимо того отже, що є холоднїйша, сьвітить фотосфера далеко сильнїйше, чим внутро сонця. В сонїчній атмосфері панують вічні течії в гору і в діл по лїніях прямовісних. Они викликують нитковату структуру у фотосфери і ґрануляцию. Де течії в гору будуть інтензивнїйші, материя фотосфери дїлить ся і творить отвір. Через сей отвір дивимо ся на масу ґазову сонїчного внутра, котра має слабу спосібність сьвіченя в порівнаню з фотосферою, що є наповнена жаріючими частинками металїв. Той отвір, крізь котрий видобувають ся на зверх розпалені ґази, представляє ся нам яко сонїчна пляма.

Faye толкує на підставі своєї теориї також дїйсний рух плям. Плями є іменно, як згадано, випливом течий, що ідуть з середини сонця прямовісно в гору. У свого жерела мають отже ті течії далеко меньшу лїнійну скорість оборотову, чим частинки сонїчної поверхнї під тою самою гелїоґрафічною шириною. Прибуваючи з тою меньшою скоростию на поверхню сонця мусять плями в загалї викликувати припізнене ротациї.[1])

Тая теория була так проста, що Young виражає свій жаль, що показала ся неправдивою. Звалили єї іменно анґлїйскі астрономи на підставі власне дальшого розвитку спектральної аналїзи. De la Rue, Stewart і Loewy а іменно N. Lockyer звернули увагу на обставину, що в разї правдивости гипотези Faye'ого і Secchi'ого дуговина осередка плями мусїлаб ся складати з кількох ясних лїнїй. Тим часом, як се і сам Secchi мав невдовзї спосібність бачити, дуговина плям є абсорпцийна.[2]) Астрономи анґлїйскі, особливож Lockyer, відкрили при помочи спектроскопа, що понад плямами лїнії водня підпадають пересуненю і вносили звідси на істноване там зступних течій „down rush“. Те робило їх приклонниками теориї Kirchhoff'a з тою модифікациєю, що причиною витвореня ся хмари вважали они сю зимну течію down rush, що мала викликувати льокальне остуджене отже і льокальне придушене сьвітла. Першій теориї Faye'a закинули єще й те, що він вважає внутро сонця горячійшим від фотосфери, а рівночасно темнїйшим. Тимчасом будучи горячійшим мусїло би се внутро бути прозрачне, отже пропускати сьвітляні лучі части фотосфери, що лежить напротив.

---

[1]) Comptes rendus tome 60. ст 143, 146, 470.

[2]) Sirius т. III. ст. 83.

Ті заміти анґлїйских астрономів дали знов теориї Kirchhoff'a на певний час перевагу, іменно коли Spörer подав до неї знов певну модифікацию. Після него є плями наслїдком сонїчних вибухів, котрі бачимо яко протуберациї. Ті вибухи водня підносять части фотосфери в гору. Понад ними повстають темні хмари з продуктів вибуху, котрі збирають ся в один комплекс під впливом течий атмосфери, що прямують з сусїдних зимнїйших місць в горячїйшу околицю вибухів. Цїла та хмара западає ся в глубину і внїшна єї часть своїм проміняєтим уложенем вказує істноване і напрям згаданих збіжних течий.

Але у Франциї теория Kirchhoff'a не була популярна і коли упали перші теориї Faye'ого і Secchi'ого, повстало через певний час велике замішанє понять в тім напрямі. Sonrel[1]) пропаґував погляди Warren'a de la Rue і товаришів, твердячи, що плями повстають під впливом течий зступних в сонїчній атмосфері, а їх рух походить з того, що атмосферні вири уносять їх в ріжних напрямах. Vicaire[2]) ще в 1872 р. пропонував вернути до гіпотези Wilson'a і Herschel'a з тою тілько зміною, що сонїчне ядро належить вважати огнисто-плинним або сталим, але розпаленим. Оно будучи далеко темнїйше від фотосфери витворює осередок плями. Дїйсний рух плям є імовірно наслїдком течий на плинній поверхнї сонця. Навіть Janssen, дуже визначний дослїдник в области сонїчної фізики, говорячи про устрій сонця цїлком не розбирав квестиї сонїчних плям, згадуючи лиш се, що они здають ся бути заглубленями чи отворами в зверхній околицї сонця.[3]) В тім часї зискала приклонників навіть та дуже первісна теория, що сонце палить ся, а продукти спаленя в родї углїв або попелу витворюють плями.[4])

Значний пролом зробило в тім замішаню велике дїло Secchi'ого під титулом Le soleil, котре мимо що вийшло підчас нїмецко-францускої війни, відразу звернуло на себе увагу учених. Є се перша книжка, що обняла цїлість нашого знаня про сонце, причинила ся она отже не мало до впорядкованя понятий і облегчила наукову дискусию. Дотепер треба було материяли до неї збирати з ріжних розвідок, часописий і самостійних творів. Для нас важний є твір Secchi'ого ще з тої причини, що находимо в нїм другу з ряду те-

---

[1]) Comptes rendus tome 69. ст. 527 дд.

[2]) Comptes rendus tome 75 ст. 528.

[3]) Comptes rendus tome 68 ст. 312 дд.

[4]) Пор. Reis. Die Sonne. Mainz 1869.

орию того ученого. Она розпочинає ряд теорий сонїчних плям, котрі повстали при початку осьмого десятка XIX. столїтя.[1])

Фотосфера складає ся після теориї Secchi'ого зі сконденсованих ґазів, котрі цїлком подібно заховують ся в розпаленій сонїчній атмосфері, як хмари зложені з пари водяної в земскій атмосфері. Їх вньїшний вигляд є цїлком однаковий, так само спосіб повставаня і т. д. На тій підставі вияснює Secchi наперед ту великаньску змінність плям. Не треба в цїли вияснення єї принимати, що цїлі плями з так великою скоростию відбувають свої зміни і рухи. Вистарчить прийняти тільки льокальну ріжницю в температурі, котра викликує в данім місци кондензацию ґазів, а поза ньм позваляє їм вернути до первісного стану. Анальоґічне явище становлять ті хмари, що мимо сильного вітру здають ся постійно перебувати коло ґірских вершків. В тім случаю воздух насичений водяною парою перебуває реґіон нисшої температури — заміняє ся отже в обсягу сего реґіона в хмару, щоби поза ним знов прийняти давний стан сцїпненя. Так само заховують ся сонїчні плями і творенє ся їх полягає на тій самій основі. В дальшім тягу своїх розслїдів застановлює ся Secchi над ріжними можливими теориями сонїчних плям. Плями можуть бути або 1) жужлї, що плавають по плинній поверхнї сонця, або 2) маси диму чи хмари, що в певній висоті уносять ся понад фотосферою, або 3) є се остуджені маси ґазів, тяжші від свого окруженя, котрі з тої причини западають ся до певної глубини в огнисту масу фотосфери. Четверта евентуальність булаб: плями є місця, де в наслїдок дуже високої температури ґазів, що добувають ся туди з сонїчного внутра, маси фотосфери переходять в стан ґазовий. Темнота тих місць походить звідси, що з одної сторони нема ту сьвітячої фотосферної маси, а з другої сторони, понеже находять ся ту слабосьвітячі ґази, що абсорбують майже все сьвітло, що іде з внутра сонця.

Перша евентуальність є неможлива. Супротивляє ся їй велика змінність величини і виду плям — незгідна зі сталим станом зцїпненя, дальше рухливість притїнка, що була б неможлива, наколиб фотосфера була плинна. Другу евентуальність зробив підставою своєї теориї Kirchhoff. Secchi закидує єму, що не толкує заглублень, які становлять найвиднїйшу цїху плями. Иньші закиди Secchi'ого[2])

---

[1]) Результати дослїдів Secchi'ого і єго теория находять ся на ст. 107 дд. і 552 дд. нїмецкого виданя.

[2]) о. с. ст. 112

полягають на недокладнім зрозуміню теориї Kirchhoff'а. Оставала би отже до вибору третя і четверта евентуальність. Secchi вибрав зразу четверту, бо здало ся єму неімовірним, щоби плями будучи центрами льокального остудженя могли ся так довго удержати мимо сусїдних, так горячих вибухів. Друга теория Secchi'ого звучить отже: Плями є місця горячійші чим околиції, що їх окружають. Горячо, що там панує, улетучує ясні хмари фотосфери цїлковито, так що они стають прозрачні, а абсорбуючи сьвітляні проміниї, що ідуть з внутра сонця, справляють, що пляма здає ся темною. Притїнок повстає в наслїдок течий в околичній атмосфері сонця, котрі концентрично прямують до місця горячійшого, провадячи з собою пірвані хмари фотосфери. Звідси пенумбра має промінясту будову. Принесений материял зміняє ся в наслїдок горяча в ґаз так довго, доки того горяча стане. Потім заливає холоднїйша фотосфера зі всїх сторін пляму.

Тій другій своїй теориї, що була тільки модифікациєю першої, вірив Secchi так сильно, що перечене єї правдивости клав рівним переченю очевидним обсервациям і всїм фізикальним анальоґіям. Але не припускав Secchi, хоч і як був досьвідчений, як капризною наукою є сонїчна фізика. По пару лїтах висказав він іменно цїлком противну, з ряду трету теорию. Але понеже на зміну поглядів Secchi'ого не малий мали вплив теориї, що повстали в тій кількалїтній промежутції часу, то мусимо найперше їх представити. Є се теориї: Zöllner'а, Faye'а (друга) і Reye'а. Хронольоґічним ладом начнемо від теориї Zöllner'а.

Теория єго належить до жужлевих, котрих праотцем є Симеон Marius, сучасний Galilei'ому і Scheiner'ови. В новійших часах найшла та теория приклонника в Gautier'і, що то відкрив звязь періода сонїчних плям з земским маґнетизмом. Виражав він єї кілька разів, але без блисшого научного виясненя.¹) Науково опрацював теорию жужлеву Фридрих Zöllner і вчинив се так основно, що єго теория сонїчних плям є зі всїх, які коли небудь були виставлені, найстараннїйше викінчена і опрацьована.²) Всї свої виводи опирає Zöllner

---

¹) Gautier. De la constitution du Soleil. Archives de Géneve т. XVIII. 209. XIX. 265. XXIV. 21.

²) Теория Zöllner'а представлена на підставі єго розвідок в Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft т. IV. ст. 172 дд., Über die Periodicität und heliographische Verbreitung der Sonnenflecken. (Berichte über die Verhandlungen der königlichen sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig. Math. phys. Classe т. XXII. 1870 ст. 338—350.) Über die Temperatur und physische Beschaffenheit der

на припущеню, що сонце є розпаленою кулею але не ґазовою, а огнисто-плинною. Температура сонця виносить після его дослїдів середно тільки 27700° C (Границї: 29.500° C і 26.000° C), щоби дїйсно промавляло за станом плинним сонїчного ґльоба. Навіть у внутрі, де температура після Zöllner'а має виносити 68.400° C, не могуть істнувати ґази задля великого тисненя. Понад тим розпаленим морем находить ся розпалена ґазова атмосфера, в котрій плавають розпалені металїчні хмари, що творять фотосферу. Значінє сеї атмосфери для льокальної температури на сонїчній поверхнї є під певним зглядом таке саме, як значінє атмосфери земскої для земскої температури. Де атмосфера сонця є припадково чиста і вільна від хмар, там зараз слїдує сильнїйше чим деинде проміньованє. За сильнїйшим проміньованєм іде льокальне остудженє, а в наслїдок него повстають на плиннїй поверхнї сонця жужлеві острови, що ся нам представляють яко сонїчні плями. Витворенє ся жужлїв є не тільки наслїдком, але і причиною остуджуваня ся околицї. Понад жужлевим островом повстають в сонїчній атмосфері забуреня, що переходять часом в нагальні бурі, котрі викликують понад плямою нові кондензациї, хмарної вже натури. Они представляють ся нашим очам яко притїнки.[1]

Повставши в сей спосіб, істнує пляма так довго, доки удержить ся се льокальне остудженє а враз з ним жужлевий остров. Поволи однак зачинає льокальне остудженє уступати, головно в наслїдок того, що жужлевий остров, що творить пляму, перешкаджає проміньованю верств, що під нею лежать і викликує в них великий зріст теплоти. Те підвисшенє температури безпосередно під жужлевим островом вакликує его розтопленє; потім знов слїдує рівновага в температурі околицї зайнятої недавно сонїчною плямою.

То є головний ескіз теориї Zöllner'а, котра, як вже на перший погляд бачимо, має много точок схожих з теориєю Kirchhoff'а. Але не висказав єї Zöllner так побіжно. Підприняв він глубокі математичні дослїди над стиканєм ся тїл ціпких і плинних взагалї і на тій підставі додав много доповнень до своєї теориї.

Що до внїшного вигляду і природи плям виступає Zöllner проти підставовому твердженю Kirchhoff'а, що плями є хмарами. Виходячи з дослїдів самогож Kirchhoff'а доказує іменно Zöllner,

---

Sonne. I (Ibidem ст. 103—123), II (Ibidem т. XXV (1773) ст. 158—194), Über den Aggregatzustand der Sonnenflecken (Ibidem т. XXV. 1873. ст. 505—527). Пор. також die Natur der Sonnenflecken Gaea т. IX. ст. 650—662.

[1] Über Periodicität etc. l. c. ст. 339.

1) що ті хмари не моглиб бути видимі, 2) що они не моглиб так довго остояти ся над поверхнею сонця при своїй нисшій температурі, а великій змінности і рухливости.¹) За найлїпший доказ против хмаристої природи плям вважає Zöllner брак на сонци поясів хмар, які бачимо пр. на Юпітері.²) Для вияснёня темної краски і довготревалости плям конечне є на думку Zöllner'а приняти, що осередки плям мають сталий стан сціпненя. Загальний вид плям вважає також Zöllner лїйковатим, вияснюючи тим способом явище обсервоване Wilson'ом. Думає він іменно, що в наслїдок обниженя температури понад осередком плями і в наслїдок воздушної течії з гори на діл, котра ся з тої причини витворює, хмари пенумбри похиляють ся з вні до осередка і витворюють над ним лїйковатий отвір. В наслїдок того вніший край притїнка лежить в ровени сьвітячої верстви хмар (фотосфери), сам же осередок значно нисше.

Дійсний рух плям толкує Zöllner також на підставі своєї теориї, а навіть уважає єго одною з головнїйших підпор єї правдивости. З табелї гелїоґрафічних ширин, уставленої Carrington'ом, видить Zöllner, що ротацийні кути двох точок на поверхнї сонця, котрих гелїоґрафічна ширина ріжнить ся о 1°, виказують ріжницю 1·6°. В наслїдок того мусїла би пляма 1° проміру, наколиб складала ся з хмар, змінитись вже по кільканацяти (12—13) днях в пояс довгий на 20°, а пляма 3° проміру змінила би ся по одноразовій ротациї в пояс довгий на 120°. Понеже такі случаї не трафляють ся, то і не можна говорити, що плями мають природу хмар.³) Плями після теориї Zöllner'а могуть бути тільки жужлями, що пливають по плинній поверхнї сонця. Рух власний плям викликують істнуючі в сонїчній атмосфері течії, що уносять жужлї независимо від ротациї в ріжні сторони. Ті течії можна взагалї подїлити на дві головні кляси: полуденникові і рівнобіжникові. Полуденникові дадуть ся знов подїлити на два роди. Одні з них ідуть від бігунів до рівника, а причиною їх є поверхневе терте течій, що йдуть в сонїчній атмосфері від бігунів до рівника.⁴) Другі полу-

---

¹) Über den Aggregatzustand der Sonnenflecke l. c. ст. 505 дд.

²) Über das Rotationsgesetz der Sonne etc l. c. ст. 93.

³) Über das Rotationsgesetz der Sonne l. c. ст. 93. Сей закид Zöllner'a Kirchhoff'ови полягає на похибцї. Zöllner проміняв ту степенї за мінути. Ріжниця межи кутами ротацийними місць о 1⁰ гелїоґрафічної ширини від себе віддалених виносить не 1·6⁰, а 1·6′. Отже пляма 3⁰ проміру змінила би ся в 120⁰ довгий пояс аж по 60 ротациях. Пор. Reye Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen ст. 177.

⁴) Rotationsgesetz l. c. ст. 58.

денникові струї йдуть від рівника до бігунів в наслїдок ріжниць температури. Атмосферні струї, що йдуть від бігунів до рівника, збочують в наслїдок ротациї сонця і стають східними вітрами, котрих скорість збільшає ся, чим більше они наближають ся до рівника і осягає maximum в єго околицях. Ті вітри викликують поверхневим тертєм припізненє в ротациї сонїчної поверхнї, котре в теориї булоб найсильнїйше на рівнику.[1] В теориї отже скорість обороту булаб на рівнику найменьша. Що річ має ся зовсїм противно, се справляє прямовісна воздушна течія при рівнику. В наслїдок висшої ту температури воздух уносить ся в гору. Та прямовісна струя рівноважить горізонтальну в цїлости так, що поверхневі верстви сонця зістають виключно під впливом своїх спідних верств, що порушають ся рівномірно але відносно скорше. Длятого скорість оборотова є у рівника найбільша, а меньшає в мірі, як зближаємо ся до бігунів. В часї maximum сонїчних плям бігунові струї є слабші в наслїдок тертя о численні плями, що находять ся тодї на поверхнї сонця. Длятого тодї сильнїйший є вплив долїшних верств, що відбувають скорший оборот, отже ротация взагалї скорша (як се вже нераз завважано).

Сонїчні плями відбувають рух власний не тільки під впливом струй сонїчної поверхнї, що їх уносять, але і під впливом вітрів. Вітри віючи в ту саму сторону, в котру іде течія, посувають жужлеві острови ще скорше, слиж віють в сторону противну, задержують в руху плями, а навіть самі течії, при чім плями дїлають як острови на ріках.[2] Найсильнїйшим може сей вплив стати підчас часового maximum т. є. під ± 17·5° геліоґрафічної ширини. Ті льокальні забуреня викликані вітрами є причиною незгідности обрахованих позиций плям з обсервованими. Дослїди Spörer'а доказують, що ті ріжницї власне найсильнїйше виступають підчас часового maximum і то в maximum місцевім.[3] Дїйсний рух плям залежить після Zöllner'а також від якости і степеня зануреня жужлевого острова, що творить осередок плями. Ті жужлї в наслїдок зглядно значної грубости і скоршого руху у долїшних чим у горішних верств принимають (іменно що грубші) скісне положенє, так що передня часть є правильно піднесена, а долїшна глубше занурена. Під впливом того великого тисненя стремить пляма, щоби ся перевернути. Часом бачимо без сумнїву таке явище, пляма зануряє

---

[1] Über das Rotationsgesetz etc. l. c. ст. 76.

[2] l. c. ст. 78 дд.

[3] l. c. ст. 81 дд.

ся та випливає в місци, де би ся находила, сли би ся була удержала на поверхні сонця. Часто пляма вказує ся дещо дальше, поза місцем призначеним законом, по причині більшої скорости ротациї внутрішних верств сонця. Те тиснене від переду викликує також дуже часто сеґментацию плями. Оно в полученю з сильними вітрами, що витворюють ся на побережах жужлевих островів, викликує вкінци часто розірване плями на кілька частий, котрі ідуть в ріжні сторони. Кожда з тих частий, сли не підпаде розтопленю, витворює над собою осібний притїнок і стає нормальною сонїчною плямою. Розірвані кусні ідуть в ріжні сторони під впливом згаданих льокальних вітрів з ріжними скоростями, бо є нерівно занурені в плинній масї сонїчної поверхнї.[1] Степень зануреня є важний також для дійсного руху цїлих плям. Він є змінний іменно підчас повставаня і заниканя плям, бо тоді жужлевий остров робить ся грубший або тоньший. А власне тоді, як доказали обсервациї, дійсний рух плям є дуже змінний. Грубість жужлевого острова є з початку мала, а іменно в відносинї до розтяглости. Потім она росте в наслїдок поступуючого в перед остудженя а також зглядно в наслїдок обтоплюваня ся задної части жужлевого острова, яка в наслїдок згаданого скісного положеня лежить в глубших і горячійших верствах. Коли ся зближає пора заниканя плями, жужлевий остров стає знов тоньшим в наслїдок приросту температури під ним.

Розгляньмо тепер, як толкує Zöllner на підставі своєї теориї розміщене плям по поверхнї сонця.

Наперед що до льокального розміщеня плям виводить Zöllner теоретично, що коло великої і вповразованої сонїчної плями не повинні повставати нові, бо околичні відносини сему не сприяють. Натомість в періоді повставаня плями або ґрупи може в тій самій околиці повстати більше плям. Теория стоїть ту як видимо в цїлковитій згоді з дійсностию. Загальне розміщене сонїчних плям є після теориї Zöllner'а условлене розміщенем атмосфери чистої і вільної від хмар, котра облегчає проміньоване. Zöllner доказує на підставі своєї теориї, що такі атмосферичні відносини панують меньше більше межи 10^0 а 35^0 гелїоґрафічної ширини. Сонце має після Zöllner'а огнисто-плинну поверхню. В наслїдок постійного проміньованя остуджує ся поверхня. Глубше лежачі, отже горячійші і специфічно легчі верстви сонїчної материї старають ся взнести ся в гору. Сли би сонїчна куля була в супочинку, відбувало би ся

---

[1] Ibidem ст. 88 дд.

таке кружене без перешкоди на кождім еї місци. Але сонце обертає ся коло своеї оси і та его ротация викликує зміни в напрузї сили тяжести, котра, як знаемо, є завсїгди функциею ширини. Під сонїчним рівником взносять ся отже постійно внутрішні горячі маси сонїчної материї в гору і відпливають ідь бігунам. Остудивши ся по дорозї в наслїдок проміньованя опадають і вертають до рівника. По дорозї через зіткнене ся зі спідними верствами знов ся огрівають і тим способом сей процес круженя постійно ся повторює. В висших ширинах сильнїйша ґравітация не позваляє на так сильну циркуляцию. Длятого рівникові околицї сонця, як се зрештою вже потвердили термоскопічні дослїди, є теплїйші, а полярні околицї зимнїйші. Наслїдки є такі самі як на земли. Повстають отже і на сонци по обох сторонах рівника в певнім від него віддаленю дві полоси сонїчних пассатів. В тих полосах, подібно як і земских полосах пассатів воздух визначує ся чистотою і ясностию. Длятого в стрефах сонїчних пассатів найчастїйше повстають плями.

Періодичність сонїчних плям вияснює Zöllner слїдуючим способом.

Вважає він пересїчне число і поверхню сонїчних плям, що в певнім періодї часу находять ся на поверхнї сонця, за число стале. В часї того періода може те число (сли не будемо узглядняти позасонїчних впливів) бути зависиме 1) від евентуальної зміни середної температури сонця, 2) від взаїмної зависимости плям від себе в відносинах льокальних тих околиць сонця, де плями виступають.[1] Можемо ту приняти, що середна температура сонця не зміняє ся анї in plus анї in minus а то тим більше, що маємо на думцї час 11 лїт, отже зглядно дуже короткий. Длятого можемо в рахунок брати лиш взаїмні відносини плям. Они є, як з попередного знаемо, дуже змінні, щоби отже середна скількість і поверхня плям могли бути сталою величиною, мусить їх дїйсна скількість колибати ся межи двома екстремами: maximum і minimum. Сли в тім колибаню заходить певна правильність, можемо сьміло число і величину сонїчних плям представити яко періодичну функцию часу. Після Zöllner'а є перехід від maximum до minimum сонїчних плям і на відворот нїчим иньшим, як тільки великим вирівнуванем тисненя і температури в сонїчній атмосфері. В часї maximum панують на цїлій майже поверхнї сонця відносини, що сприяють витвореню ся плям т. е. ясна і прозрачна атмосфера. Підчас minimum

---

[1] Über Periodicität etc. l. c. 342.

річ має ся цілком противно. Час того вирівнуваня є в обсягу певних границь ріжний; се зависить від спроможности проводженя, від рухливости і від маси тіл, що творять плями, т. є. самих жужлів і лежачої над ними сонїчної атмосфери. Середні вартости на означенє тих трох відносин будуть що найменьше для довших часів сталі, а з ними і період сонїчних плям. Розуміє ся, що по довших часах, коли ся теплота сонця зменьшить, змінить ся і час треваня періода. Довжина його буде щораз малїти, maxima будуть щораз скорше по собі наступали, аж вкінци цїла поверхня сонця покриє ся оболокою жужелиць, звіщаючи тим конець орґанїчному житю нашої планетарної системи.

Третою важнїйшою теориєю, що повстала при початку осьмого десятка лїт XIX. столїтя, є друга теория Faye'a. Як і иньші сучасні теориї цілком новою она не є. Вже John Herschel висказував думку, що плями є воздушні вири в атмосфері сонця. В виду закидів, іменно зі сторони анґлїйских астрономів з Kew піднесених проти першої єго теориї, попав Faye на другу і розвів думку J. Herschel'a на підставі новійших наукових здобутків на тім поли. Теория єго не від разу повстала. Много заміток і закидів з ріжних сторін піднешених зложило ся на сей кінцевий вид, що їй був наданий. Перший ескіз сеї другої теориї начертав Faye при кінци року 1872.¹)

Сонїчні плями є після нової теориї Faye'a цикльонами, що врізують ся з гори в глубину атмосфери сонця. Они повстають в слїдуючий спосіб: Фотосфера відбуває свій ротаційний рух в ріжних гелїоґрафічних ширинах з ріжною скоростию. Наслїдком того є численні вири в атмосфері сонця, котрі прямують до вирівнаня ріжних скоростий у ріжних полос фотосфери. Поводять ся они подібно як водні вири або вертнї воздушні нашої атмосфери і так само як наші цикльони ідуть за горішними течіями воздуха, так і сонїчні цикльони слїдують по течіях фотосфери. Рух в них є після Faye'a зступний, т. є. з гори в долину, длятого потягають они за собою в глубину сонїчного ґльоба околичні части горішних, отже зимнїйших верств сонїчної атмосфери, що головно складають ся з водня. В сей спосіб повстає в центрі вира придушенє сьвітла і теплоти на так довго, як довго треває awировий рух. Вкінци водень потягнений в глубину розгріває ся на ново, іде в гору і вибухаючи творить

---

¹) Comptes rendus т. 75 ст. 1664 дд. Ibidem т. 76 ст. 301 дд. Оригінальний уступ Faye'a у Newcomb-Engelmanna o. c. ст. 310—312 представляє, як виглядала єго теория в 1877 роцї.

протуберанциї. Пенумбра повстає з остужених, потягнених в діл частий фотосфери, иньші части виром відкинені на бік творять вінець походень, що окружає пляму.

В цїли дальшого уґрунтованя своєї теориї констатує Faye, що ріжниця в скорости ротациї є досить значна, щоби могла викликати вировий рух, бо виносить 24 m в 1 секундї на 1° гелїоґрафічної ширини. Таких вирів є на поверхні сонця незмірно много, дуже ріжної величини, бо не тільки плями, але і пори є такими вирами. Так само мають і земскі цикльони дуже ріжну величину. Сонїчні цикльони мають подібно як земскі напрям до діленя ся на два або більше центрів обороту. В той спосіб з одного вертня повстає два, або більше, котрі ся потім взаїмно відпихають. Дїйсні обсервациї слїдів вирового руху, пр. на уложеню ниточок притїнка, після Faye'а длятого є так рідкі і трудні, бо хмари притїнка закривають звичайно перед нами те, що ся дїє ві внутрі плями.

Періодичність сонїчних плям толкує Faye дуже замотано і неясно. Згадаємо тільки те, що він єї робить зависимою від ваганя в формі внутрішних верств, на котрі сконденвована материя фотосфери спадає в виді дощу. Такий рясний і тяжкий дощ мусить поволи змінити час ротациї тих верств.

Ахиллевою пятою теориї Faye'а була все та обставина, що з неї без сумнїву виходило, що сонїчні цикльони вертять ся на північній півкулї сонця в ту саму сторону, що і вказівки годинника, а на полудневій півкулї в сторону прямо противну. Через те саме мусїла б упасти анальоґія з земскими цикльонами, бо ті ведуть ся прямо противно. Длятого Faye перечить прямо в очи дотеперішним результатам метеорольоґічних дослїдів над цикльонами і уперто твердить, що земскі цикльони також на північній півкули обертають ся як вказівки годинника. Сучасно приписав Faye земским цикльонам цїлком неправдиву власність, що їх рух є зступний, бо того треба єму було, щоби перевести анальоґію з сонїчними цикльонами, себ-то плямами, в котрих без сумнїву виказали зступний рух спектроскопічні обсервациї. Також та теза стоїть в суперечности з законами метеорольоґії і надає теориї Faye'а характер великої довільности. Одинока ріжниця, яку найшов Faye межи сонїчними а земскими цикльонами, полягає на тім, що коли земскі цикльони мають рух проґресивний в ширинї і довжинї ґеоґрафічній, то сонїчні цикльони відбувають тільки еліпсоідальні осциляциї в 80—160 днях, амплїтуди 2°—4°. ¹)

---

¹) Пор. рисунки Faye'а Comptes rendus т. 76 ст. 389.

Вже від самого повстаня не бракувало теориї Faye'а численних і завзятих противників. Зараз з початком 1873 р. виступив против нього Secchi і підніс найважнїйший та дуже трафний закид, що іменно ротацийний рух є у плям лиш дуже рідко видимий. Пересїчно лиш 5—6 плям в роцї виконують ротацийнї рухи, або мають притїнок спіральної будови.[1] Під впливом власне того закиду додав Faye пізнїйше, що оборот сей закриває нам пенумбра зложена з нагромаджених хмар. Але Secchi знов виказав, що є се припущенє дуже довільне, котрого жадним способом не мож доказати. Острійше взяв ся до Faye'а француский фізик Vicaire.[2] Закинув він теориї Faye'а, що она не толкує неправильного і змінного виду плям, недостаточно толкує темну їх краску. Цїлком не толкує теория Faye'а явищ ґрануляциї, розміщеня плям, їх руху власного і т. д. Деякі иньші закиди Vicaire'а полягають що правда тільки на непорозуміню, але ті, що є узасаднені, не одержали від Faye'а достаточної відправи.

Так само дуже слабі є відповіди Faye'а на закиди Tacchini'ого. Звернув він їх проти Faye'а з тої самої точки погляду, що Secchi, іменно завважав підчас своїх довголїтних обсерваций, що спіральні рухи є у плям дуже рідкі а ротация їх коло оси відбуваєсь дуже часто в противнім напрямі, як сего теория Faye'а вимагає.[3] Faye жадного арґумента проти тим закидам не міг навести. При поновлюваню своєї теориї ограничив ся він лиш на вияснею ґрануляциї і періодичности. Ґрануляцию вияснює він приймаючи, що цїла поверхня сонця є покрита такими цикльональними вирами мінїмального проміру 1''. Становлять они тз. пори і своїм густим виступуванєм викликують явище ґрануляциї. В полосах сонїчної поверхнї, що тому сприяють, розширюють ся ті пори в плями — т. є. більші цикльони, котрих вісь однак завсїди ся находить в центрі первісної пори. Такий цикльон витворюючий пляму триває через певний час, потім знов зменьшає свій обвід та вертає до скромних розмірів пори.[4]) В той спосіб толкує Faye ґрануляцию, спосіб витолкованя періодичности цїлком анальоґічний до способу Zöllner'а.[5]

Найважнїйші однак закиди підніс против теориї Faye'а американьский учений Young. Правда що співчасно він вважає теорию

---

[1] Comptes rendus tome 76. 1873. ст. 254.

[2] Ibidem ст. 703 дд.

[3] Comptes rendus tome 77 ст. 606.

[4] Comptes rendus tome 77 ст. 626.

[5] Пор. Comptes rendus tome C. ст. 593 дд. Sirius т. XVIII ст. 121.

Faye'а найімовірнїйшою.[1]) Young'а разить передовсїм брак ротацийного руху у плям. Потім звертає він увагу на обставину, що навіть тоді, коли можна у плям сконстатувати ротацию, она не відбуває ся на тій самій півкулї в одну сторону, але противно часто ся лучає, що плями належачі до тої самої ґрупи, ба навіть поодинокі части складові тої самої плями відбувають оборот в прямо противні сторони. Дальше є ріжниця ротацийних скоростий рішучо за мала, щоби могла викликати ротацийний рух. Виносить она для двох точок сонїчної поверхнї, що лежать під 20⁰ гелїоґрафічної ширини і є від себе віддалені о сонїчну 1′ = 0·90 ґеоґрафічних земских миль на день. А прецїнь сонїчна мінута велика на 26·5 ґеоґрафічних миль.

Против теориї Faye'а піднесено ще з иньшої сторони закид — він є в звязи річевій з повстанєм нової цикльональної теориї плям. Іменно в р. 1873 Tarry, взагалї признаючи теориї Faye'а много імовірности, зробив єму в подробицях сей закид, що земскі цикльони є прецїнь получені з опаданєм барометра і рухом атмосфери з долу в гору а не з гори на діл.[2]) Faye відповів на те з великою певностию себе, що цикльони се явища цїлком ріжні від сонїчних цикльонів, а зрештою і межи земскими лиш певні роди мають рух воздуха в гору.[3])

Але невдовзї потім, переглядаючи найновійшу лїтературу попав Faye на книжку нїмецкого ученого Теодора Reye п. т. die Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen in der Erdatmosphäre mit Berücksichtigung der Stürme in der Sonnen-Atmosphäre, що була написана ще в початках 1872 р. Reye не знаючи анї про працї Faye'а анї про закид Tarry'ого, поставив самостійну теорию, що виясняє сонїчні плями подібно як теория Faye'а з модифікациєю, пропонованою Tarry'м з пильним узглядненєм теориї Kirchhoff'а та дослїдів Spörer'а.

Reye ставить на ст. 178 своєї книжки[4]) слїдуючу тезу: Плями сонїчні се хмаристі продукти кондензациї в глубших районах сонїчної атмосфери, котрі подібно як маси хмар наших земских цикльонів відновлюють ся від долу. А творять ся они в спосіб слїдуючий. В місцях, де температура поверхнї сонця осягає свої льо-

---

[1]) Comptes rendus т. 95 ст. 1310 пор. Young die Sonne ст. 170.

[2]) Comptes rendus т. 77 ст. 44 дд.

[3]) Comptes rendus т. 77 ст. 1122.

[4]) Пор. також Comptes rendus т. 77 ст. 5.

кальні maxima, взносять ся ґази і металїчні пари, що становлять сонїчну атмосферу, в гору, де ся остуджують і згущають творячи якби темну хмару, що абсорбує в значній мірі сьвітло і тепло, що приходить з долу від властивої поверхнї сонця. В наслїдок того стає ся там хмара осередком остудженя і темноти. Коло неї з подвійною скоростию вистрілюють в гору прямовісні течії. Они уносять з собою рештки скондензованих хмаринок і творять з них притїнок. Ротация сонця дїлаючи на такі хмари так само, як ротация землї ділає на земскі хмари, викликує оборотовий рух, замінюючи хмару в цикльон. По хмарі того не видко, як не видко і по земских хмарах, що товаришать цикльонови. Они як знаємо все є одностайні і нїколи не мають спірального уложеня. — Сонїчні цикльони викликують подібно як і земскі рух атмосфери в гору. Они повстають в двох стрефах по обох сторонах рівника з тої причини, що розложенє температури є на сонци таке саме, як на земли, а крім того понеже атмосфера є під сонїчним рівником значно висша як у бігунів. Про властивий рух сонїчних цикльонів не много може Reye сказати, бо і у земских цикльонів не пізнано його і до тепер. Сеґментанция відбуває ся і у одних і у других однаково. Тільки в способі заниканя є ріжниця. Плями заникають далеко скорше чим земскі цикльони.

Reye цїлком не має претензиї, щоби єго теория була ві всїх точках досконала, але мимо своєї скромности приписує головній своїй тезї: плями, се сонїчні цикльони, значінє більше чим звичайній гіпотезї.[1])

Переходячи всї важнїйші теориї сонїчних плям, що повстали в початках осьмого десятка лїт XIX. віка, належить вкінци звернути увагу на третю теорию Secchi'ого, котра появила ся як би на закінченє сьвітлого ряду тих теорий. Перші єї почини подав Secchi вже в 1873 роцї[2]) і держав ся єї до кінця житя. Був се отже мов би результат кількадесятилїтної працї — длятого належить сей послїдний вислів поглядів Secchi'ого обширно представити. Та теория сонїчних плям є властиво лиш частию загальної теориї сонця поставленої тодї Secchi'м, але єї цїлої представити ту не можемо і мусимо ся ограничити лиш на тих єї частях, що відносять ся до істоти самих сонїчних плям. Сонце після Secchi'ого не находить ся нїколи в станї цїлковитого супочинку. З ріжних причин повстають на єго

---

[1]) Reye. Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen ст. 185.

[2]) Comptes rendus т. LXXVI. ст. 250 дд., 519 дд. звязке а докладне представленє своєї теориї подав Secchi в Newcomb. Engelmann o. c. ст. 302–310.

поверхні заєдно вибухи. З них найліпше видимі є для нас протуберанциї, що складають ся з розпаленого водня. Але при тих вибухах з розпаленим воднем є часто змішані металї̈чні пари. Они мають більшу густоту і питимий тягар, длятого не могуть при вибуху досягнути тої висоти, що маси далеко лекшого водня. Ті металї̈чні пари складають ся головно з пар соду, маґну, желї̈за, вапня, котрі як знаємо викликують в сонї̈чній дуговинї явище лї̈нїй Fraunhofer'а. Коли отже така маса металї̈чних пар найде ся межи фотосферою а оком обсерватора, стає ся абсорпция сьвітла дуже визначною і обсерватор має вражінє темної плями на фотосфері. Абсорпцийні лї̈нії є в тій околиці ширші і меньше виразні, а коли маса є достаточно густа і високо в гору винесена, видимо нераз навіть відверненє абсорпцийних лї̈нїй. Відвертають ся найчастїйше лї̈нії водня, котрий доходить до найбільших висот, а також лї̈нії соду і маґну, бо пари тих металів є також досить легкі. З того виплива: Сонї̈чні плями повстають з металї̈чних, абсорбуючих пар, що добувшись з внутра сонця і умістивши ся межи фотосферою а оком обсерватора, задержують для него велику часть сьвітла фотосфери. Ті пари є тяжші, чим окружаючі їх верстви сонї̈чної атмосфери. Коли отже зможе ся сила вибуху, котра їх до такої висоти винесла, ті пари западають в глубину атмосфери і творять заглубленє, виповнене масою, що темнїйша і більше абсорбує чим єї околиця. Длятого виглядають плями як заглубленя. Коли вибух, що дає початок плямі, є наглий і коротко треває, хмара, що повстала з металї̈чних ґазів, під впливом горяча сусїдних околиць фотосфери невдовзї розгріває ся і пляма никне. Часто однак вибух треває пару місяців, тодї і пляма удержує ся на поверхнї сонця протягом кількох ротацийних періодів. Часом вибух, що як здавалось, вже кінчивсь, нараз відзискує свою силу і пляма, що туй-туй мала зникнути, знов росте і розвиває ся на ново. Змінність плям зависить від змінности вибухів, а ті, як знаємо з анальоґії вульканї̈чних вибухів на земли, є дуже капризні.[1])

Пляма складає ся з осередка і притїнка. Притїнок повстає з легких мрак і течій фотосферної материї, котрі старають ся заляти внутрішну темну масу і часом яко ясні мости прориваюгь єї на цїлій розтяглости. У кождої плями розріжняємо три періоди. В першім періодї: повставаня, темна хмара силою вибуху підно-

---

[1]) Щоби заховати звязь і хід думок Secchi'ого повторюємо ту много річий, які ми вже висше обговорювали.

сить ся в гору і прибирає в наслідок сильного заворушеня дуже неправильний, нераз дивовижний вид. Часом вибух приймає вид і властивости вихру, котрий виносить темну хмару дуже високо, та творить неправильну набреніліcть довкола осередка новоповсталої сонїчної плями. Она має тодї дуже неправильний притїнок, або і (що частїйше) цїлком його не має. Сила вибуху і викликані нею рухи відзначують ся незміримою скоростию і нагальностию. На просторі кількох квадратових степенів фотосфера є тодї в постійнім заворушеню. Але невдовзї начинає сила вибуху малїти і наступає другий період розвитку плями: період супокою. В тім періодї винесена в гору темна маса опадає в діл і старає ся прийняти меньше або більше округлий вид. Понеже она є тяжша від фотосфери, отже западає в єї глубину та творить лїйковате заглубленє. До сеї депресиї пливе зі всїх сторін фотосфера в формі концентричних струй, щоби єї залятн, але коли вибух триває дальше, то пляма удержує ся і прибирає круглий вид. Коли вибух переведе ся, начинає ся третий період: заниканя, струї фотосфери заливають темне внутро плями, горячо сусїдних околиць довершає дїла і пляма зникає. Істнованє тих трех фаз потверджають обсервациї. Коли пляма підчас першого періоду свого істнованя наближить ся до сонїчного края, а має при тім значний промір, то місце єї перебуваня зраджують вибухи металїчних пар, а іменно соду, желїза і маґну. Пляма в періодї супокою має звичайно круглий вид і є окружена красними походнями а також ясними огняними язиками водня і металїчних пар. Але ті язики є вже низькі та незначні. В періодї заниканя не показує пляма жадних металїчних вибухів, часом тільки незначні вибухи водня; фотосфера, що їх окружає, є знов в ненастаннім руху.

Сонїчні плями є отже тільки другорядним явищем. Їх повстанє і істнованє є зависиме 1) від сонїчних вибухів, котрі попереджають і витворюють пляму. 2) від спосібности абсорбованя сьвітла у хмар, котрі повстають в наслїдок тих сонїчних вибухів. Вибухи самого водня нїколи пр. не викликують сонїчних плям, лиш тільки походнї. Але плями, хотяй є тільки другорядним явищем, прецїнь дають нам найлїпше понятє про насильні рухи у внутрі сонця. Число плям відповідає числу вибухів, а оба ті явища разом взяті є внїшними признаками діяльности сонця. Плями як знаємо виступають по обох сторонах сонїчного рівника тільки до 30^0 гелїоґрафічної ширини і не виходить майже нїколи поза ту границю. (Завважати належить, що трицятий рівнобіжник дїлить кожду гемісферу на два, об'ємом рівні відтинки.) Полоси, в котрих найбільше плям ся знаходить, не мають сталого положеня, місцеві maxima плям відбувають рух від рівника до бігунів. Дійшовши до певної ширини, звичайно до 30°, плями зникають, наступає звичайно тодї часове minimum, а потім знов вказують ся плями, але вже в околицях рівника, та знов начинають свою мандрівку до бігунів. Слиж розважимо, що фотосфера має також власний рух в довжинї, котрий є найбільший під рівником, можемо з того заключити, що цїла фотосфера підлягає рухови вировому, що іде від рівника до бігунів в напрямі скіснім до полуденників. Теория тих рухів фотосфери не є дотепер звісна; Secchi думає, що они є в звязи зі способом повстаня і вобразуваня сонця. Дїяльність сонця підлягає значним флюктуациям в періодї $11^1/_3$ лїт. Она росте протягом 4 лїт, а малїє протягом 7 лїт, отже далеко повільнїйше. Она є получена зі змінами в земскім маґнетизмі в спосіб дотепер незнаний. Можна припускати, що істнує безпосередний електромаґнетний вплив сонця на нашу землю, або що він є посередний: тепло викликане на земли впливом сонця дїлає на еї маґнетизм. Можна з великою імовірностию прийняти, що етер, котрий наповняє простори нашої планетарної системи, не може бути зависимий від дїяльности сонця, бож оно є центральним тїлом тої системи. Були між ученими такі, що хотїли приписувати зміни в чинности сонця впливам планет, але ті послїдні є занадто малі, щоби могли мати подібні наслїдки. Наука доперва тодї потрафить виясннти причини періодичности на сонци, коли відкриє звязь тепла з електричностию, маґнетизмом та ґравітациєю.

Нову свою теорию розвинув Secchi систематично в осібнім письмі пересланім S. Newcomb'у, котрий пишучи в 1877 р. свій підручник астрономії, просив найславнїйших тодї гелїольоґів, щоби коротко сформулували свої погляди на будову сонця, для его книжки. Крім Secchi'ого прислали Young, Faye, Langley, а тогдашні погляди Newcomb'а зібрав також коротко видавець другого нїмецкого виданя его книжки: H. C. Vogel. Погляди Faye'a не змінились від часу поставленя его другої теориї аж до р. 1877 цїлковито, отже повторювати їх не будемо, але погляди иньших згаданих учених коротко перейдемо, понеже конець сїмдесятих лїт XIX віка є для гелїоґрафії дуже важною епохою, котру належить як найвиразнїйше схарактеризувати.

Young вважає річию безсумнївною, що плями є заглубленями в поверхнї фотосфери. Їх темна краска повстає в наслїдок абсорпцийного дїланя ґазів і пар, котрі наповняють їх внутро. Дуже часто, хотяй не завсїгди витрискує водень і металїчні пари довкола пенумбри. Понад осередком плями хромосфера є вгнута, імовірно істнує також зступна течія в серединї плями. Що ся тичить причини повставаня плям і їх вигляду, жадна дотеперішна теория не вдоволяє Young'a. Теория Faye'a видає ся єму найбільше до правди подібною, але приняти єї не може зі згляду на 1) брак систематичної ротациї у плям, 2) їх дуже ріжні види. Однак теория Faye'a має в собі якусь часть правди і може бути отвітно змодифікована, щоби вияснити згадані дві трудности. Young не пропонує на разї жадної модифікациї теориї Faye'a в тім напрямі, але всї планетарні впливи вважає a limine неімовірними. Так само не може Young собі вияснити, в який спосіб впливають на себе заворушеня на сонїчній поверхнї та земский маґнетизм.[1])

Langley думає, що тепер (т. є. в р. 1877) можна вже з евіденциєю видати суд про дотеперішні погляди на істоту сонїчних плям, чи се є жужелицї на плинній поверхнї (Zöllner), чи хмари (Kirchhoff). Але сей суд випадає у Langley'a дуже блїдо, ба навіть трудно його вирозуміти. Langley вважає фотосферу цїлковито ґазовою і зложеною з пар, котрі суть рідші і лекші чим найтоньші хмариночки (cirrus) нашої атмосфери. Обсервация плям вводить близьку звязь між телескопічними обсервациями фотосфери, а спектроскопічними хромосфери. Довели они, як думає Langley, до безсумнївного результату, що на цїлій поверхнї сонця дїлає одна велика система внутрішньої циркуляциї. Течії ведуть зі собою тепло витворене через кондензацию ві внутрі сонця на єго поверхню і забирають зі собою остуджений та сильно абсорбуючий материял. Та циркуляция сягає зглядно дуже глубоко і є в тривкій звязи з майже горизонтальними течіями, котрі безлїч разів обсервовано в горішних верствах фотосфери в сусїдстві плям. З обсервациї плям набрати мож на думку Langley'a прямо переконаня, що ту дїлає щось в родї цикльонів. А темні є плями тому, що в їх глубинї (єї вважає Langley дуже значною, ба незвичайною) находить ся „затемнююча атмосфера“, імовірно пірвана в діл згаданою прямовою циркуляциєю. Она то творить се шаре тло на котрім виглядають завішені хмари і хмарки фотосфери. Ся шара материя виповнює внутро плями і через него то дивимо ся в єї глубину, котра длятого видає ся так темною. В иньшім місци говорить Langley: Дотепер не поставлено ще жадної теориї устрою сонця, котра би вільна була від закидів. Але хотяй ще не найдено ключа до вияснення всїх сонїчних явищ, то прецїнь теория Faye'a найбільше дає пояснень

---

[1]) Newcomb. Engelmann o. c. ст. 314.

Видимо отже виразно тільки те, що Langley є рішучим противником теориї жужлів, а перехилює ся до теориї хмар і то на спосіб Faye'a. Не можемо отже говорити про яку небудь самостійну теорию Langley'a, бо він анї не пробував вияснити дїйсного руху або періодичности сонїчних плям.[1] Навіть те, що Langley сказав позитивно про сонїчні плями, є дуже невиразне, навіть несьміле і нерішуче. Таку саму побіжність і брак рішучости бачилисьмо уже у Young'a; Newcomb же перевисшає єще своїх американьских товаришів під тим зглядом, бо анї словом не зраджує своїх поглядів на істоту сонїчних плям та думає, що гелїольоґія чекає поки-що на свого Newton'a.[2]

Представивши тим способом погляди великих гелїольоґів подивимо ся і на погляди кількох „малих", що ту належать хиба зі зглядів хронольоґічних, бо на пробіг дискусиї над істотою сонїчних плям зовсїм они не вплинули.

До теориї Herschel'a навязує Lüdinghausen-Wolff. Думає він, що сонїчні плями се отвори в фотосфері. Крізь них ми дивимо ся на саме ядро сонця. Оно не є в звичайнім значіню слова темне, але так розпалене, що наше око не може захопити так коротких сьвітильних фильок.[3] Ту належить також висше згадана метеоритова гіпотеза B. Peirce'a. Твердить він, що плями повстають в наслїдок спаданя на сонце метеоритів, котрих перстень протинає єго дорогу і через згрубінє в однім місци викликує що 11 лїт maximum плям.[4] Тая гіпотеза хиба в такім разї мала б певну претензию до научного характера, слибисьмо прийняли, що не через безпосередне продерте фотосфери викликують метеорити повставанє сонїчних плям, але посередно, в наслїдок ріжниць температури, викликаних їх упаданєм. Для докладности додамо ще, що теория Reis'a найшла приклонника ві Франциї в Vicaire'ім, котрий також твердив, що сонце палить ся яко пальне тїло і продукти того спаленя творять плями; а також згадаємо про цїлком ориґінальну теорию електричну Planté'oго.[5] Видячи схожість межи внїшним виглядом сонїчних плям а наслїдків електричного тока з батериї 400 елєментів на поверхнї бібули до фільтрованя, що є напущена солоною водою, ставить Planté ту електричну теорию. Думає він,

---

[1] Newcomb. Engelmann o. c. ст. 314 дд.

[2] Ibidem ст. 302.

[3] Humboldt т. I ст. 347 дд.

[4] Young o. c. ст. 148.

[5] Comptes rendus т. 76 ст. 1541 дд. т. 77 ст. 40 дд.

що плями повстають наслідком електричних вибухів зі середини сонїчного ядра, котре є наладоване додатною електричностию. (Так заключає Planté на підставі власних дослїдів з розпаленими кулями). Сонце є для него тїлом ґазовим, що покрите плинною оболокою. Про ту гіпотезу не дасть ся більше сказати як те, що є ориґінальна. Треба іменно завважати, що переношенє досьвідів переведених в лябораториї в всесьвітні простори є річ що найменьше за сьміла.

Рік 1877, а в кождім разї найпізнїйше конець сїмдесятих лїт XIX. віка можна вважати епохою рівно важною, як поява теориї старшого Herschel'a при початку тогож віка. Межи тими двома епохами лежить другий період розвитку гелїольоґії взагалї, а специяльно нашої відомости про сонїчні плями. В тім періоді, дуже короткім, сли єго порівняємо з попереднім, зробила наука прямо великаньскі поступи. Представилисьмо їх вже деінде, ту звернемо лиш уваги на перед на великаньске число материялу, зискане в численних обсерваториях при помочи усовершених і уріжнороднених інструментів і помічних средств. З них найважнїйшим є без сумнїву нововинайдений спектроскоп. Розслїджено подрібно структуру фотосфери, плям, походень, відкрито протуберанциї та корону, пізнано хемічний склад сонця і в головних чертах його будову при помочи спектральної аналїзи. Наслїдки тих обсервацій та відкрить були для пізнаня явища сонїчних плям дуже важні. Те пізнанє придбало собі іменно много всесторонности і докладности. Дїйсний рух сонїчних плям і їх періодичність стають від тепер сталими добутками науки і на тих підставах повстає кілька наукових теорий сонїчних плям. Збирають они все знанє свого часу в тім напрямі і старають ся пояснити тайну сих явищ. Як в початках XVII віка, так і тепер двома головними дорогами пішли в своїх теориях учені. Одні вибрали теорию жужлеву — Zöllner і єго приклонники, другі теорию хмар — отже Kirchhoff, Secchi, а посередно також Faye і Reye, хотяй головну ролю в витвореню плям признають цикльонам. В критичне обговорюванє тих теорий запускатись ту не будемо та зазначимо тільки, що ті теориї на довгий час вичерпали зміст сонїчної фізики. Число і значінє теорий та гіпотез, що повстали по 1877 роцї, є так мале в порівнаню з тим материялом, що рік-річно виходить з астрономічних та астрофізичних обсерваторий, що кождий мусить признати, що як початок XIX. віка був під безперечним впливом гіпотези Herschel'a, так теперішні учені зістають під впливом ріжних теорий з перед 1877 року. Не можна що правда заперечити фактам повставаня пізнїйших теорий, але того значіня, що колись теориї Zöllner'а, Kirchhoff'а, Secchi'ого, Faye'а, Reye'а мали, не вспіла нїяка новійша теория осягнути.

Длятого то представляючи найновійші теориї та гіпотези сонїчних плям, будемо їх ґрупували після найважнїйших теорий другого періода нашого знаня про сонїчні плями.

Теория Zöllner'а найшла в короткім часї значне число приклонників, головно тому, що була зі всїх теорий найосновнїйше оброблена. Вже в лїтах 1870 і 1871 висказали ся за сею теориєю Respighi і Falb, у Франциї Gazan.[1] Крім того мали єї потому прийняти Бредихин, Lohse і Spörer. Так бодай можна вичитати в першім нїмецкім виданю астрономії Newcomb'а на ст. 314, а відомість ту повторив Günther.[2] Тимчасом є она лиш в части правдива. Бредихин дїйсно висказав про фізичний устрій сонця ті самі погляди, що Zöllner.[3] Але Lohse є приклонником теориї хмар на спосіб Secchi'ого, а навіть в певній мірі і Kirchhoff'а, бо в значній части опирає ся на Spörer'і, що є від Kirchhoff'а в теориї зависимий. Зміст теориї Lohse'ого такий: В наслїдок нарушеня рівноваги в атмосфері сонця з внїшних причин (може планетарних впливів) прориває ся верства металїчних пар і повстає вибух. Єго продукти остудивши ся опадають назад на поверхню фотосфери, викликують ту замішанє, вири і течії зі всїх сторін (звідси походить проміньоватість притїнка), котрі коли устане вибух, заливають пляму, що повстала з єго продуктів.[4] Так само Spörer нїде виразно не зазначив, що прихиляєть ся до теориї Zöllner'а. Повздержувала єго, як впрочім і других та обставина, що Zöllner приняв для сонця сталий стан сціпненя, та що за тим ішло, занадто низьку температуру. Подібність до Zöllner'івскої теориї бачимо лиш в вияснена періодичности і дїйсного руху плям.[5] На думку Spörer'а є періодичність викликана ріжницею в промінюваню рівникових а полярних

---

[1] Sirius т. VI, 1871 ст. 42 Comptes rendus т. 83. ст. 658 і 1188.

[2] Навіть в другім виданю своєї книжки Handbuch der Geophysik т. I ст. 76.

[3] Newcomb-Engelmann o. c. ст. 325.

[4] Beobachtungen angestellt auf der Sternwarte des Kammernherrn v. Bülow zu Bothkamp. Heft III. 1875. ст. 45 дд.

[5] Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam т. II. 1880. ст. 79 дд.

околиць сонця. Ті ріжниці в проміньованю викликує знов ріжна густота хмарної оболоки сонця. Під рівником температура є висша, а звідти густота поверхневих верств меньша. Ко бігунам температура обнижає ся, густота росте. Понеже проміньоване безнастанно треває, ріжниця в густоті стає щораз більша — вкінци мусить слїдувати вирівнане. Оно діє ся в той сам спосіб, що в наших земских морях т. є. посередством струй, але що сонце є ґазовим тїлом, то вирівнане начинає ся з більшою силою доперва тодї, коли ріжницї сильнїйше зростуть, а те вимагає довшого часу — на сонци над 11 лїт. Коли вирівнане доходить до кінця, тодї маємо часове minimum сонїчних плям; тимчасом в околицях бігунів відносини так ся змінили, що заходить потреба нового вирівнаня, котре ся також без проволоки начинає. Сам Spörer признає, що єго висказ є доперва ескізом теориї, але виразно вже бачимо вплив Zöllner'a.[1]) Дїйсний рух плям повстає після Spörer'a в наслїдок: 1) течій з внутра сонця, що приносять меньшу скорість ротацийну долїшних верств на поверхню, 2) атмосферних течій, що ведуть з собою знов більшу скорість горїшних верств. З глубини z приходить на поверхню сонця по усуненю опору скорість:

$$v = 2\pi\ (R-z)\cos b \frac{w}{360^{0\prime}}$$

де R = луч сонця, b = φ, w = кут оборотовий. З сеї формули можна вивести иньшу вигідну до обрахованя формулу:

$$R\xi = (R-z+h)\ w$$

в цїли обчисленя оборотового кута ξ, де h є висотою, з котрої приходять згадані атмосферні течії

Для доповненя поглядів Spörer'a мусимо додати, що в пізнїйших своїх публїкациях він начинає ся уже не признавати до теориї Kirchhoff'a. Именно вже від початку своїх почдамских публїкаций перестав Spörer виступати против правдивости явища Wilson'a, а вкінци навіть виразно сказав, що мусимо вважати деякі сонїчні плями заглубленями, та не заперечував, що є можливою річию, щоби всї сонїчні плями такими були.[2])

Теория Zöllner'a мала що правда дуже великий вплив на розвиток сонїчної Фізики, именно длятого, що до послїдного потягненя

---

[1]) Цїлком подібно вияснює періодичність і французский учений Lamey, що мабуть також стоїть під впливом Zöllner'a. Comptes rendus т. 82. ст. 1262 дд.

[2]) Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam т. IV. ст. 416 дд. Sirius т. XIX ст. 55.

пера була викінчена. Але власне задля того свого викінченя не найшов Zöllner учеників анї наслїдників. По теориї Zöllner'а не повстала жадна нова більша теория жужлів. Взагалї найшов Zöllner найбільше приклонників в Нїмеччинї. Всїм промовляла до серця основність і докладне викінчене його теориї. Голос Bauschinger'а можемо вважати в тім зглядї за міродайний.¹)

Натомість теориї хмар, що давали більше спосібности розвиненя індивідуальних поглядів, найшли в найновійших часах много приклонників. Можна се сказати іменно про теориї Secchi'ого, котрі дуже заохочували пізнїйших учених. Теория Kirchhoff'а не входить вже в рахунок в тім періодї, бо нема тепер хиба вже нїкого, хтоби заперечував, що плями є заглубленями, коли се так наглядно доказав Ricco.²) Тої самої думки є Trouvelot³) і Janssen,⁴) котрі поза тим твердженєм, що плями є заглубленями, нїчого позитивного про них не висказують.

Межи новійшими приклонниками теориї хмар вичислимо, йдучи хронольоґічним ладом, наперед Hastings'а професора в Baltimore. Підставою єго теориї є прямовісні течії з внутра сонця до єго поверхнї. Ту наступає в наслїдок експанзиї остуджене і кондензация в тих течіях і через те повстає ґрануляция. Скондензований материял остуджує ся дуже скоро в наслїдок значної спроможности проміньованя та творить рід диму, котрий поволи западає в вільні місця межи ґрануляциями, де в наслїдок більшого горяча знов ся улетучує. Той дим є власне темним тлом, на котрім тим виразнїйше відбиває ся ґрануляция. Коли в якім місци сонїчної поверхнї повстане зступна течія, то зі всїх сторін прямують до неї вітри, приносять з собою дуже много згаданого диму, та нагромадивши єго витворюють сонїчну пляму. Маса диму, що западає в глубину, творить осередок плями, промінистий притїнок витворюють доосередні вітри, що викликують збочене течій, котрі ідуть прямовісно в гору, на напрям поземий. На підставі сеї теориї вияснює Hastings, длячого пенумбра на внутрішній границї є найяснїйша. Пояснене буде найпростїйше, коли порівнаємо прямовісну течію з поземими. В течії прямовісній, що іде в гору, остуджує ся материял в наслїдок розширеня так довго, аж доки не дійде до кондензацийної точки. Тодї виділяє ся нагло цїлий материял, спосібний до

---

¹) Sirius т. XVII. ст. 152 дд.

²) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei р. 1897. 5. ст. 202 дд.

³) Sirius т. XIX. ст. 51. дд.

⁴) Comptes rendus т. 68 ст. 312.

кондензациї, причім виділене дещо ся припізнює в наслїдок увільненого при тім тепла. Безпосередно потім стають виділені части в наслїдок проміньованя зглядно темними. Цілком инакше поводять ся поземі течії. Ту остуджуе ся материял не через розширене, а через проміньоване. Понеже однак проміньоване сталої частинки є значно сильнїйше, чим проміньоване окружаючого єї ґазу, то остуджене поступае головно в наслїдок проміньованя сталих частинок. Коли отже покаже ся перша частинка, то мусить задержати своє сьвітло так довго, аж доки цїлий материял, з якого ся она складає, не згустить ся. Звідси виходить, що в такій поземій течії сьвітло поволи ся змагає, а потім відразу малїє, що ся цїлком згоджує з обсервованими фактами.[1])

Дальшим приклонником теориї хмар є Young. Він, як знаємо, був з початку за теорию Faye'а, але потім перехились на сторону Secchi'ого а навіть запропонував одну модифікацию до єго теориї. Думає він іменно, що плями могуть бути заглубленями в фотосфері, але що викликує їх не так тиснене вибухових продуктів з гори на дїл, як зменьшене тисненя з долу до гори, в наслїдок вибухів в сусїдних околицях сонїчної поверхнї. Фотосфера не є в кождім разї тяглою, одностайною обволокою, але є зглядно тяжка в порівнаню з парами і ґазами, котрі ся під нею находять. Відносини подібні як у наших земских дощевих хмар, що стисло беручи є питимо тяжші від воздуха, що їх уносить. На сонци фотосфера тисне з гори на атмосферу, що находить ся під нею, а та не будучи пружива тисне на фотосферу з долу. Коли в якім небудь місци фотосфери отворить ся усте для вибуху, то в околиці повстає в наслїдок зменьшеного тисненя з долу зовсім природно заглублене. Оно удержує ся так довго, доки в сусїдстві тревае вибух.[2])

Young подав в найновійших часах також свою теорию дїйсного руху сонїчних плям. Після єго думки належить шукати поясненя нинїшного дивного обороту сонця в єго минувшости. Прискорене під рівником є полишкою попередних ротацийних відносин сонця, а не випливом якихсь сил дїлаючих в теперішности. Противно — тепер всї сили сонця старають ся відносини ротацийні під ріжними геліоґрафічними ширинами вирівнати. Своя річ, той процес вирівнуваня іде зглядно так поволи, що ледво по кількох столїтях люди при дуже уважнім дослїджуваню могли б його сконстатувати. При-

---

[1]) Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences November 1880 і American Journal of Science Januar 1881. Young o. c. ст. 292 дд

[2]) Young o. c. ст. 172 дд.

чиною того прискореня вважає Young перстень з мраковинної матерії, що спустив ся перед віками на поверхню сонця.[1])

Взагалї теориї Secchi'ого з лїтами находили собі щораз то більше приклонників, бо були зглядно найменьше аподиктичні та легко давались в ріжні сторони нагинати. Великим здобутком для теориї Secchi'ого був передовсїм славний анґлїйский спектроскопіст Norman Lockyer, що отверто заявив свою згоду з нею.[2]) Другим ученим, що вже в найновійших часах, бо в послїднім десятилїтю прилучив ся до теориї Secchi'ого, був шведский спектроскопіст Dunér.[3]) Іменно в католицких кругах був Secchi дуже популярний. K. Braun, представляючи космоґонїю з християньского становища, подав свою теорию сонїчних плям, котра є дуже близко споріднена з теориями Secchi'ого, хотяй Günther думає, що Braun деякі свої принципи бере з теориї Reye'a.[4])

Рівновага в ґазовій атмосфері сонця є після Braun'a непостійна в напрямі прямовіснім. Верстви остужені в наслїдок проміньованя опадають на діл так довго, доки не зустрінуть верств більшої густоти. На їх місце взносять ся нові маси в гору. При остужуваню ся зступаючих верств повстане в сонїчній атмосфері щось в родї дощу зложеного з плинного бору, крему і угля. Пари, що зносять ся в гору, творять зерната ґрануляциї, верстви опадаючі темне тло. В той спосіб опаданєм одних верств а взнощенєм ся других вияснює Braun явище ґрануляциї. Крім того зглядного і правильного круженя ґазових мас тревають на сонци заєдно вибухи в родї вульканїчних і викидають металїчні пари далеко поза фотосферу. Там однак они удержатись не могуть і в наслїдок проміньованя. Остужуючись і згущаючись опадають они на діл і западають в глубину фотосфери, творячи лїйковаті заглубленя т. є. плями. Осередок їх творять ті остужені і загущені металїчні пари, котрі, як се очевидно видають слабше сьвітло, чим окружаюча їх фотосфера. Она будучи горячійша поволи знов огріває остужені пари, що творять пляму і зальлявши єї вкінци викликують явище походень, котрі як знаємо є звичайно наслїдним явищем плям.

---

[1]) Пор. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik т. IX. 1898. ст. 3—5.

[2]) Пор. Sirius т. XXVI. ст. 150 дд.

[3]) Nova acta regiae societatis Upsaliensis (3). 14. ст. 12. пор. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik IV. Jahrgang 1893. s. 6.

[4]) K. Braun. Über Kosmogonie vom Standpunkte christlicher Wissenschaft. München 1889. ст. 130 дд. Пор. S. Günther, Handbuch der Geophysik. II Auflage. т. I. ст. 75.

Але найважнїйшим наслїдком теорий Secchi'ого було се, що они були підставою дуже основно обробленої теориї Еґона Oppolzer'а.

Плями сонїчні а именно їх осередок є масами ґазів і пар, котрі в наслїдок своєї нисшої температури викликують сильну абсорбцию сьвітла висиланого фотосферою. Показують се наглядно дослїди Young'а і Duner'а над дуговиною сонїчних плям. Недвижність абсорпцийних лїний вказує на те, що ві внутрі плями в абсорбуючих масах панує великий спокій. Длятого Oppolzer разом з Dunèr'ом перехиляє ся на сторону теориї Secchi'ого, заразом признаючи се доказаним фактом, що плями є заглубленя в фотосфері. Але цїлком инакше виясняє Oppolzer, длячого льокальне остудженє треває так довго. Твердить він именно, що в заглубленю фотосфери понад осередком плями (зложеним з остужених продуктів сусїднього вибуху) находять ся ґази в дуже високій температурі, що не допускають кондензациї ґазів фотосфери в тім місци. Маємо отже в кождій плямі два великі екстреми температури, про що сьвідчать знов спектроскопічні і термоскопічні дослїди.[2] Причиною того істнованя коло себе таких екстремів температури є після Oppolzer'а течія в сонїчній атмосфері з гори на діл. (Є се щось в роді down rush, котрий анґлїйскі астрономи вважали причиною остуженя в плямах.) По дослїдам Hann'а температура такого опускаючого ся в діл стовпа воздуха в земскій атмосфері є в горі висша понад середну вартість. Аж при самім долї, де прямовісний рух переходить в повільний рух поземий, слїдує остуженє під впливом проміньованя, котре збільшає ще чистість і сушу лежачих під нею верств воздуха. На сонци ті ріжницї температури мусять бути безконечно більші, чим в земскій атмосфері, де їх наслїдком є тілько мраки. Така отже зступаюча течія удержує в горішних реґіонах лїйковатого заглубленя, що творить сонїчну пляму, велике горячо, котре не позваляє на тім місци загуститись фотосфері, а в долї викликує сильне остуженє, витворюючи в части і удержуючи в сей спосіб осередок в відповідно холодній температурі. Ті ріжницї теплоти мусять бути о стільки ще сильнїйші, що течії зступні також длятого є горячїйші, позаяк они є тілько наслїдком течий вступних

---

¹) Egon von Oppolzer. Über die Ursache der Sonnenflecken. Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, CII. II Abtheilung. a. ст. 375 дд. Astronomische Nachrichten т. 132.

²) Frost в Astronomische Nachrichten Nr. 3105/6 ст. 143 дд. виказав, що плями є нераз теплїйші як фотосфера, що їх окружає.

т. є. тих, що взносять ся в гору. Течії вступні заключають велике число пар іменно желїза, є отже анальоґічні земским течіям вохким. Піднесши ся високо аж до хромосфери тратять вступні течії свої пари і вертають назад на діл цїлком вже сухі, та дуже розігріті. Іменно заключені в них пари кондензують ся в наслїдок взношеня ся в гору і полученого з ним остуженя. Тепло увільнене наслїдком кондензациї є дуже значне. Коли отже така вертаюча з гори течія стріне ся з фотосферою, то улетучить скондензовані ту ґази.

Фотосфера стане отже прозрачною на просторі, що прибере в наслїдок згаданої течії вид лїйковатий. Вкінци течія прямовісна розвітвлить ся на кілька течій горизонтальних, а під місцем сего розвітвленя находячі ся ґази дуже сильно ся остужують по причинї значного проміньованя. Ґазова верства на днї лїйка буде для того зглядно дуже темна і утворить осередок плями. Стїни лїйка підпадають також впливам проміньованя, але так як они є до поверхнї сонця наклонені, отже остуженє і затемненє не буде так сильне як в осередка. Стїни лїйка становлять пенумбру.

Рух дїйсний, періодичність і розміщенє плям толкує Oppolzer в слїдуючий спосіб. Зступні течії вимагають отвітних течій в гору. Ті повстають в околицях бігунів і викликують в горі горизонтальні течії ко рівникови. Ті вітри стремлять в нисші ширини в довго розтягнених шрубових лїніях яко східні вітри і там, де ся спускають на поверхню сонця, повстає сонїчна пляма. Коли вступні течії під бігунами є сильнїйші, зступають вже в висших ширинах, число плям начинає рости і слїдує maximum. Коли ті течії є слабші, спускають ся аж під самим рівником — тодї припадає minimum. Ті течії викликують також характеристичну ротацию сонця. Приходячи з під бігунів, приносять они дуже малу ротацийну скорість. Длятого пропізнюють они позірно рух оборотовий сонця. В дїйсности так не є, бо спізняють ся самі плями, а властиво бігунові вітри, що їх витворюють. Те припізненє буде більше під висшими ширинами, бо ту вітри мають ще свою первісну скорість. В околицях близших рівника проявляє ся вже вплив тертя о поверхню, коли іменно згадані вітри зглядно поволи свою дорогу відбувають. Длятого під рівником ротация здає ся нам бути найскорійшою, а в міру як росте ширина, що раз то повільнїйшою.

Теория Oppolzer'а дасть ся звести в слїдуючім реченю: Плями се явища проміньованя, і відповідають барометричним звижкам нашої атмосфери (отже походнї барометричним знижкам). Понеже автор попер свої виводи основною, математичною аналїзою, отже теория его зробила в учених кругах деяке вражінє. Scheiner обговорюючи єї звертає увагу на се, що Oppolzer дуже совістно опирає ся на земску метеорольоґію. Scheiner думає, що кожда теория сонїчних плям заслугує на поважне трактованє, єли визискує анальоґії сонїчних явищ з явищами нашої атмосфери. На думку Scheiner'а війшов Oppolzer на добру дорогу, шукаючи на сонци анальоґії до так важних в нашій атмосфері барометричних звижок і знижок. Слибисьмо навіть з вислїдами праць Oppolzer'а ся не згодили, належить ся єму все таки заслуга, що показав дорогу, на котрій ведучи дальше дослїди можна дійти до вияснення тайни сонїчних явищ.[1] Так само з великим признанєм виражуєсь про теорию Oppolzer'а I. Fényi S. J. астроном з Kalocs'и, котрий подаючи свою теорию явищ сонїчних, без застережень принимає теорию плям Oppolzer'а і вважає навіть доказом своїх виводів се, що їх результати пр. що до сонїчних походень цїлком ся згоджують з Oppolzer'івскими,[2])

Сим кінчимо ряд теорий сонїчних плям, що приймаючи устрій сонця ґазоволетивим, вважають сонїчні плями атмосферними утворами в родї хмар. Приклонником тих теорий є також J. Wilsing, котрий не виставив жадної власної теориї анї за жадною з істнуючих виразно ся не висказав. Але дав він деякі вияснення, що дотичать періодичности і дїйсного руху сонїчних плям, а тих вияснень не мож промовчати. Отже подамо ті погляди Wilsing'а яко додаток до теориї хмар.

Wilsing[3]) думає, що періодичність сонїчних плям дасть ся вияснити механїчними процесами, котрі виходять з самоїж конституциї сонця. Wilsing твердить, що сонце не є анї сталою, анї огняно-плинною, але розпаленою ґазовою кулею. Розуміє ся однак, що ґаз під впливом тисненя зверхних верств находить ся в глубинах сонїчного ґльоба в цїлком відміннім станї як сей, щосьмо привикли приписувати ґазам. Young прирівнує стан зцїпненя ґазуві внутри сонця зі станом зцїпненя смоли. Коли на поверхнї сонця находять ся якісь заворушеня, (пр. ті течії внїшної оболоки сонця, що викликують дїйсний рух сонїчних плям) тодї повстають також і в руху ротацийнім деякі забуреня. Они справляють, що вісь симетриї не припадає вже на вісь обороту. Рухлива маса поверхнї сонця стараєсь знов прийти до рівноваги, підчас коли тертє тому ся супротивляє. Тим сильним дїланєм двох елементів повстає пе-

---

[1]) Astronomische Nachrichten т. 137 стор. 228 дд.

[2]) Astronomische Nachrichten Nr. 3355. Пор. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. Jahrgang VII. 1896. ст. 13.

[3]) Astronomische Nachrichten Nr. 3039. ст. 258. дд.

ріод, котрий проявляє ся в виступаню на поверхні сонця явищ, що стремлять до вирівненя сих двох впливів і заведеня знов стану рівноваги. Ті явища, як легко зрозуміти — се плями і протуберанциї. Ріжні обставини впливають на час треваня сих періодів, для того ріжниці часові є дуже великі. Доперва середні вартости з більшого числа обсерваций будуть могли мати претензию до точности.

Що до дійсного руху сонїчних плям твердить Wilsing, що сонце складає ся з двох інтеґральних частий: з внутра і зверхної обволоки. Внутро сонця обертає ся коло своєї оси так, якби мало сталий стан зціпненя. Частинки єго мають рівну кутову скорість. Зверхня обволока становить досить грубу верству і обертає ся довкола тої самої оси що і внутро, але має під ріжними рівнобіжниками ріжну кутову скорість. Оказують се дїйсні рухи сонїчних плям, котрі власне в тій зверхній верстві повстають. Є они відбитєм рухів зверхної верстви, що знов після Wilsing'а є полишкою течій, що давнійше істнували на поверхнї сонця. В наслїдок внутрішного тертя течії ті поволи заникають, але заник се такий повільний, що в часї тих парусот лїт, в котрих обсервовано ротацию сонця, не міг бути ще поміченим.[1])

Дві теориї, котрими закінчимо перегляд теорий сонїчних плям, недадуть ся навязати до жадної теориї попереднього періода. Конвенціональні жужлї, хмари і циклььони втратили вже дуже довірє. Длятого шукано нових доріг, ориґінальних способів вияснення сонїчних явищ. І позстали дві ориґінальні теориї — електрична Zenger'а і рефракцийна теория сонця A. Schmidt'а приноровлена до сонїчних плям Julius'ом.

Хід думок Zenger'а[2]) є слїдуючий:

Фотоґрафії сонця роблені ним самим при помочи фотографічного апарата, отже обнимаючі значні простори неба довкола сонця, дали дуже цїкаві результати. Кружок сонця на таких фотоґрафіях є тодї чисто відбитий на плитї, коли земска атмосфера є супокійна і коли нема заворушень в земскім маґнетизмі. Підчас атмосферичних або маґнетних заворушень сонїчний кружок є на фотоґрафії окружений шарими або білими плямами, котрі мають колистий або

---

[1]) Для доповненя вже тільки згадаєм ще про цїкаві дослїди Бєлопольського. Наповнив віи склянну кулю водою і окрушинами стеарини і вправив єї в повільний оборотовий рух. Коли сей рух потім поволи здержав, окрушки стеарини відбували рухи зовсїм анальоґічні до тих, що відбувають сонїчні плями. Пор. Astronomische Nachrichten Nr. 2954.

[2]) Die Meteorologie der Sonne und ihres Systemes von K. W. Zenger Wien, Pest, Leipzig 1886.

еліптичний вид. Коли забуреня на земли є дуже сильні, тоді ті утвори прибирають великі розміри і вид витягнених еліпс або клинів. Величина їх і види зміняють ся протягом кількох мінут цїлковито. Щоби витолкувати те явище, твердить Zenger,[1]) що викликують єго вири, котрі повстають в найвисших реґіонах земскої атмосфери і поволи ся спускають на поверхню землї, причім вісь вира поволи пересуває ся в просторі. Дальше вносить Zenger з пороблених собою дослїдів, що причиною тих вирів є електричні виладованя з всесьвітного простору до земскої атмосфери. В наслїдок тих виладовань начинають наперед голочки леду в найвисших верствах нашої атмосфери кружити, порываючи за собою частинки воздуха. З многих поменьших вирів повстає оден більший і зступним рухом спускає ся на поверхню землї, стримуючи в своїм обсязї актинїчні лучі сонця та викликуючі описані вже фотоґрафічні явища.[2])

Так як вже від давна Airy, Вильф і инші учені доказали, що атмосферичні і маґнечні забуреня на земли стоять в тривкій звязи з дїяльностию сонця т. є. з плямами і протуберанциями, отже Zenger думає, що електричні виладованя, котрі є причиною атмосферних вирів, мають своє жерело на сонци. Ту нераз вже помічано спіральні рухи в сонїчних плямах. Коли отже того тепер і инші обставини вимагають, мусимо признати (говорить Zenger), що плями сонїчні є електричні вертнї воздушні (elektrische Tromben). Повстають они в слїдуючий спосіб: Продукти вибухів сонїчних взносять ся як знаєм до дуже великих висот, бо сила вибухів є величезна. Серед атмосферних течий, викликаних вибухом, повстають цикльони. Сталі і ґазові частинки вируючи в них витворюють наслїдком тертя о ґазові маси фотосфери сильний електричний потенциял. Під впливом виру ґазові маси взносять ся в гору і та маса пар, котру мож назвати великаньским набитим електричностию акумулятором, виладовує їх з силою, що незмірно перевисшає силу виладовань електричности земскої.

Великі сонїчні плями є огнищами дуже сильних і нагальних виладовань електричних в напрямі протуберанций. Ті виладованя є жерелом велитенних вирів в межипланетарнім просторі, котрі за посередництвом розсїяних там метеоритів переносять ся нераз аж до атмосфер поодиноких планет.[3])

Видимо отже, що Zenger згоджує ся в значній части з вировою теориєю Faye'а. Твердить він навіть, що єго теория виповнює зна-

---

[1]) l. c. ст. 2.

[2]) l. c. ст. 5.

[3]) l. c. 9.

чну люку в Faye'івскій теориї цикльонів, поясняючи, звідкіля ся бере сила викликуюча вировий рух і проводяча єго далї. Але дорога, якою Zenger дійшов до своєї теориї і цїле єї переведенє так дуже оригінальне, не позволяє єго зачислити в ряд звичайних послїдувателїв теориї Faye'a. Іменно в дальшій части своїх виводів признає Zenger можливість теориї Kirchhoff'a а навіть Zöllner'a[1]), стараючись тим доказати, що його погляди не стоять в суперечности з теоретичними дослїдами тих учених.

Згадані висше метеорити, котрі разом взяті після Zenger'a перевисшають своєю масою маси плянет, відбувають дороги помотані, а для нас прямо не обчислимі і зближають ся часто до сонця. Понеже електричний потенциял сонця є в відношеню до окружаючої їх просторони, а іменно до метеоритових роїв, комет і плянет дуже значний, проте коли для сонця приймем електричність додатну зглядом тих тїл небесних, що ся до него зближають, зрозуміємо ті величезні вири і кондензациї на сонїчній поверхнї, які ся нам представляють як плями або протуберанциї.

Коли признамо плями електричними вертнями, що в їх внутрі приходить до кондензациї вибухових продуктів, впаде по думцї Zenger'a одинокий закид, котрий можна зробити теориї Kirchhoff'a, коли ся опирати будем на досьвідї. Принявши іменно теорию Zenger'a, легко вияснити причину льокального остуженя, не знану Kirchhoff'ови. Вировий рух викликує значне розрідженє ґазів, отже знижку температури ві внутрі вертня. Та знижка температури, а заразом згущаюча сила електричности витворює темний осередок плями. Коли пляма т. є. електричний вертень находить ся недалеко центра сонїчного кружка, тодї бачимо виразно єї осередок і пенумбру. Явище пенубри повстає через те, що вир творячий пляму має вид стіжка зверненого до нас підставою. Єго припідставна часть і наш кут видженя має у края підстави сего стіжка значно тоншу верству скондензованих ґазів перед собою, чим при єї осередку. Вільзенівске явище походить з того, що вісь сонїчного цикльона занимає зглядом лїнії видженя щораз то скіснїйше положенє по причинї обороту сонця.

Безчисленні пори сонїчної поверхнї є се після Zenger'a плями в мінятурі; фотосферну сїтку творять делїкатні прогалини в жужлевих (sic) островах, що плавають на поверхнї огняноплинного сонїчного ядра.

Періодичність сонїчних плям вияснює Zenger як легко ся дорозуміти, впливами плянет, які собі виображує як великаньскі

---

[1]) l. c. ст. 159.

маґнети. Але і ту є Zenger в значній мірі ориґінальний. Maxima плям слідують у него не тоді, коли плянети є найблизше сонця, лиш коли є найдальше, бо тоді сонце може найсильнїйше дїлати на близькі єму рої метеорів. Одинайцятилїтний період плям викликує плянета Юпітер, більші періоди спільне дїланє Юпітера,Сатурна і Урана.[1])

Теорию Zengera представилисьмо обширно лишень яко curiosum. В науковім сьвітї нїхто єї не брав поважно. Зараз по указаню ся книжки Zenger'a звернув Whipple w Quarterly Yournal англійского метеорольоґічного товариства увагу на обставину, що Kew'скі фотоґрафії сонця від кількох лїт стало що день знимані, нїколи не показували явищ, котрих досмотрює ся Zenger. Понеже Zenger на сей закид не реаґував, вважає Pernter підставу єго теориї за ману і похибку, а виказавши дальше єго невластиву методу, відмовлює теориї Zengera всякого наукового значіня.[2]) Осуд може за строгий, але закиди важні.

Так само ориґінальна, але на строгих научних підставах оперта є теория сонця Августа Schmidt'a [3]). Понеже він не занимає ся специяльно сонїчними плямами, проте вистарчить про ню тільки се сказати, що Schmidt не признає істнованя фотосфери яко зі всїх сторін ограниченої кулї і твердить, що сонце в дїйсности не посїдає ограничаючої єго поверхнї.

Отже сонїчний край, для обсерватора так виразний, є тільки явищем рефракциї в ґазовій атмосфері сонця. Schmidt вийшов від теоретичних дослїдів над рефракциєю Kummer'a і Seeliger'a та попер свою гіпотезу строгими математичними виводами. Єго виступленє супроти того, що протягом кількох столїть вважане було самозрозумілим, було в кождім разї дуже сильним кроком. До Schmidt'a прилучивсь лишень Knopf, що застосував єго теорию до методи спетроскопічних дослїдів над обротом сонця, Против Schmidt'a виступив Oppolzer, боронячи істнованя фотосфери і сонїчного края та маючи за собою більшість фахових учених[4]). Але видно теория Schmidt'a має за собою певні дані, коли в найновійших часах виступив W. H. Julius з виясненем сонїчних явищ на підставі сеї теориї і єї консеквенциї.[5])

---

[1]) l. c. ст. 147 дд.

[2]) Meteorologische Zeitschrift J. IV. 1887. Litteraturbericht ст. 13.

[3]) Die Strahlenbrechung auf der Sonne, ein geometrischer Beitrag zur Sonnenphysik Stuttgart 1891.

[4]) S. Günther. Handbuch der Geophysik. т. I. стор. 70.

[5]) Sonnenphänomene als Folgen anormaler Dispession des Lichtes betrachtet. Astronomische Nachrichten Bd. 153. 1900 Nr. 3673. ст. 433—446.

Заложім, що плямі відповідає та часть поверхнї сонця, де в наслїдок вирових рухів (Faye) або сильних течій прямовісних материя виказує великі ріжницї в густоті. Темноту плями і розширенє в єї дуговинї Фраунгоферівских лїній пояснювано дотепер ріжницями температури, меньшою спроможностию проміньованя, конденсациєю, сильнїйшою абсорбциєю в тім місци і т. и. Межи поодинокими теориями сонїчних плям панують з сеї причини великі ріжницї. Інакше ся річ представить, коли єї розсмотрювати будем зі становища теориї Schmidt'а. Після неї є край сонїчного кружка тілько оптичною маною, котра походить з правильного заломаня лучів сьвітла в ґазовій, знїкуди строго не ограниченій масї. Позірна поверхня фотосфери не може отже бути вважана границею тїла, а лиш критичною сферою, котрої луч рівняє ся лучеви кривини горизонтальних лучів сьвітла, що проходять через одну точку сеї сфери. О ріжнім станї зціпненя по обох сторонах сеї кулистої поверхнї не може бути бесїди. Також ві внутрі критичної сфери збільшає ся середня густота материй і єї спроможність до сьвіченя дуже поволи. Доперва в великих глубинах находять ся верстви, що висилають сьвітло з тяглою дуговиною.

Явище плям повстає, як заложилисьмо, в наслїдок льокальних ріжниць природи і є також оптичною маною. Іменно в наслїдок сих ріжниць густоти підлягають лучі сьвітла, що приходять з сонїчного внутра, анормальному заломаню. Ті роди лучів, котрих сочинник заломаня є надмірно великий або і надмірно малий, підлягають в наслїдок сих ріжниць далеко більшому розстріленю, чим ті, котрі правильно ся заломують і витворюють масу фотосфери. Длятого земский обсерватор, дивлячись в те місце сонїчної поверхнї де панують певні ріжницї в густотї, видить з сего ненормально заломаного сьвітла далеко меньше чим сьвітла заломаного нормально. Звідси є сї місця т. є. плями темні. Лучі, котрі на сонци підлягли анормальній діслерзиї, мусять в дуговинї плям по части недоставати, отже: лїниї Fraunhrfer'а ту ся розширюють.

Сам Julius признає, що єго вияснене плям удержуєсь і упадає разом з теориєю Schmidt'а, бо є від неї безпосередно зависиме. Безсторонному видасть ся се об'ясненє нїчим иньшим як бистрим aperçu, але не науковою теориєю. В нинїшних часах вияснене загального виду плям не старчить навіть за гіпотезу.

Видати критичний суд о теориях сонїчних плям випадалоб менї тепер, представивши їх читачам в порядку, що не много лиш ріжнить ся від хронольоґічного. Не є се однак легка річ, іменно коли ходить о короткість і ясність погляду. Іменно є тих теорий і гіпотез передовсїм значне число, а коли при тім ще майже кожда є з иньшої точки погляду виставлена, орыєнтация в тім лябіринтї є досить трудна. Длятого вже при їх подрібнім представленю збував я деякі теориї дуже коротко, застановляючи ся рівночасно над иньшими значно довше, щоби в той спосіб звернути увагу на деякі тільки теориї серед многих. Дальше вважали їх творцї, що на поли теорий сонїчних плям можна безкарно висказувати найдивнїйші ідеї. Часто поняти не можем, як могли учені, що мали нераз велику і справедливу славу, недавати своє імя теориї, що була неможлива до удержаня.[1])

В нинїшних часах від наукової теориї сонїчних плям вимагає ся дуже много. Передовсїм мусить она виясниги всї явища, котрі коли небудь обсервовано у сонїчних плям при помочи далевида. А тих явищ прибуло в кількох послїдних десятилїтях дуже много, зібрано іменно великаньский обсервацийний матеріял. Дальше мусить кожда теория виясннти значне вже числе явищ термо і спектроскопічних. Але се ще найлегчі задачі для теориї. Далеко труднїйше є вияснене дїйсного руху і періодичности сонїчних плям, бо ту мусить автор кождої теориї плям ставити свою власну теорию сонця, або застосовувати ся до иньших, бо всякі позасонїчні впливи днесь цїлком не мають популярности між ученими.

Коли від теорий сонїчних плям зажадаєм всіх згаданих условин, то на таку назву заслужать меньше більше лиш теориї: Kirchhoff'a, Secchi'ого, Oppolzer'a, Faye'a, Reye'a і Zöllner'a — иньшим признати можна що найвисше назву гіпотез.

Теория Kirchhoff'a яко найстарша, днесь може найменьше має за собою. Супротивляє ся она наперед загально вже тепер принятому фактови, що сонїчнї плями се заглубленя, і не може длятого витолкувати характерного вигляду пенумбри. Не толкує дальше Kirchhoff в який властиво спосіб повстають хмари, що творять плями, звідки походить конечна до їх повстаня льокальна знижка температури. Найсильнїйший удар завдає єї однак дїйсний рух і періодичність плям. Тих властивостий плям не може вияснити теория Kirchhoffa. Але она має се значінє, що вплинула дуже сильно на теорию Zöllner'a, бо творить подекуди єї підставу. Kirchhoff приймає іменно за найімовірнїйший стан сціпненя сонїчної поверхнї стан

---

[1]) Bauschinger: kritische Darstellung der Sonnefleckentheorien. Sirius т. XVII. стор. 124.

плинний, і дає тим субстрат теоретичним виводам Zöllner'a. Kirchhoff доказавши, що темний і зимний осередок сонця є нонсенсом і що він мусить бути тїлом розпаленим, що видає тяглу дуговину, положив тривку підставу під всї пізнїйші дослїди і теориї.

Теориї Secchi'ого цїлком иньший мають характер як теория Kirchhoff'a. Вияснають они дуже добре вигляд плям, але рештї вимогів, котрим повнина відповісти кожда теория сонїчних плям, теориї Secchi'ого не відповідають. Натомість оперта на них теория Oppolzer'a має за собою дуже много імовірности, бо опирає ся на відносинах в земскій атмосфері, те дає на всї майже вимоги досить вичерпуючі, оперті на математичній аналїзї відповіди. Але знов періодичність і дїйсний рух плям не є так вияснені, як би ся мож було того сподївати в виду иньших частий теориї Oppolzer'a. Полярні вітри, що стремлять ко рівникови в шрубових лїніях і своїм вступуванєм в ріжних ширинах викликуючі періодичність та дїйсний рух сонїчних плям, є досить неімовірні, хотяй далиб ся вивести теоретично, Впрочім не бачимо причини, чому сї вітри, викликуючі повставанє сонїчних плям, не зступають на ширших просторах, якби сего належало очікувати, а на деяких лиш точках поверхні сонця.

Теориї воздушних вертнів Faye'a і Reye'a представляють внїшний вигляд плям також доволї добре, але конечно для їх витвореня процесу майже нїколи не бачимо. Впрочім повставанє цикльонів при так малїй ріжници скорости сонїчного обороту на противположених місцях великих навіть сонїчних плям є що найменьше зачадочним явищем. Крім того, як вже згадалисьмо, супротивляє ся теория Faye,a основним законам прийнятим земскою метеорольоґією. Розміщенє і сеґментацию плям вияснюють вирові теориї цїлком добре, але вияснене дїйсного руху і періодичности є у Faye'a недостаточне.

Позістає ще тілько теория Zöllner,a, ґенїяльно подумана, як і иньші теориї сего ученого і дуже докладно виведена. Анї одної обсервациї не полишає она без вияснення і то опертого на основній математичній аналїзї. Визискавши уміло результати дослїдів Kirchoff'a, він перший звернув увагу на те, що причин місцевої і часової правильности в виступуваню плям належить шукати в самімже устрою сонця. І випровадив теорию розміщеня і періодичности плям так, як нїхто перед ним і по нім. Так само переконуючі є результати його дослїдів над теориєю обороту сонця. Одна тілько річ може бути у Zöllner'a заквестіонована, а то єго заложенє, що поверхня сонця є огнисто-плинна. Занадто низька температура поверхнї сонця, що є получена з тим станом зціпненя викликує поважні сумніви. Плинний стан сціпненя сонїчної поверхнї вимагав сталого стану сціпненя плям. І те викликало у учених сумнїви, але Zöllner виказав, що найповажнїйший закид Reye'а полягає на непорозуміню.[1]).

Так отже Ахиллевою пятою теориї Zöllner'а остала плинність сонїчної поверхнї і вимагана него низька єго температура. Але коли ся ліпше застановимо над тою слабою стороною теориї Zöllner'а, то закиди противників много сили стратять. Передовсїм вражає нас зглядно великий супокій в фотосфері при нагальних рухах плям і протуберанций. Звернув на се увагу Newcomb[2]) і почислив in plus теориї Zöllner'а. Деяке, хоч тільки неґативне значінє малиб ще і дві иньші обставини. Іменно вияснюючи відносини, що панують на сонци, можемо взагалї шукати анальоґії тілько в земских відносинах, що є як знаєм безмірно ріжні від сонїчних.

Дальше наші позитивні відомости про хемічний склад і устрій сонїчного внутра є майже нїякі. Аналїза спектральна відкрила нам іменно лиш склад атмосфери сонця, а про склад єго внутра позволила нам лишень на припущеня. Впрочім дослїди учених над поведенєм тїл в дуже високих температурах і під великим тисненєм не поступили ще так далеко, щобисьмо аподиктично могли твердити, що поверхня сонця, де панують відносини так відмінні від земских, не може бути плинною, наколи приймем для неї температуру хочби і кілька разів висшу від прийнятої Zöllner'ом.

На мою думку є отже теория Zöllner'а найлучшою зі всїх дотепер поставлених теорий сонїчних плям. Чи она є правдива, се инша річ, але в виду стаґнациї, що від певного часу панує на поли теорий плям, можна теориї Zöllner'а заповісти на будучність многих ще приклонників і значну тревалість.

* * *

---

[1]) Пор. Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen etc. ст. 177 і Zöllner über den Aggregatzustand der Sonnenflecke. l. c. ст. 522 дд.

[2]) Newcomb Engelmann o. c. ст. 323.

Причинки до історнї розвитку і інволюциї железн thymus у риб кістноскелетних (Teleostei).

Написав

ФЕДІР ПРИМАК.

(Інститут анатомії порівнательної ц. к. унїверситета у Львові).

Железа thymus була до недавна у низших зьвірят зовсїм незвісна. Вперве найдено єї і описано у чоловіка, а відтак у декотрих висших ссавців. Доперва Meckel¹) в початку XIX. віка викрив у водяних птахів орудє, котре назвав glandula thymus. Однак Haugstedt²) і Simon³) в основнїйших дослїдах доказали, що згадане орудє Meckel-a не було глезою (thymus), а лише звичайним нагромадженєм товщи, яке Meckel помітив і хибно описав яко thymus. На правдиве положенє gl. thymus у птахів вказав доперва Lucae⁴), хоч і опісля єще богато анатомів заперечували єствованє тої желези у птахів, а нинїшну глезу (gl. thymus) у тихже зьвірят уважали железою щитовою (Schilddrüse, thyroidea).

Тривку основу до дослїдів порівнательно-анатомічних глези (thymus) положив згаданий повисше Simon котрого погляди відтак

---

¹) Meckel, Abhandlungen aus der menschl. und vrgl. Anatomie u. Physiologie, Halle 1806.

²) Haugstedt, Thymi in homine ac per seriem animalium descript. anatom.-physiol. Havniae 1832.

³) Simon, A physiological Essay on the thymus gland. London 1845.

⁴) S. Lucae, Anatomische Untersuchungen der Thymus in Menschen u. Thieren, Frankfurt a/M. 1811—1812.

розширив і поглубив Ecker[1] і Leydig[2]. Simon розглядав анатомічну будову ріжних хребовців (Vertebrata) і прийшов до заключеня, що thymus питомою є лише зьвірятам, котрі віддихають легкими; він твердив, що риби і земноводники (Amphibia) [котрі також подібні до риб як пр. печеровець (Proteus), гущер (Siren)] не мають тої желези. Після него не мають thymus і пуголовиці Rana paradoxa, що також віддихають зявами. Однакож ті погляди Simona не удержали ся, бо, як вислідив Ecker, железа thymus находить ся також в тїлї пуголовиць віддихаючих зявами.

Викритє thymus у риб належить вже до найновійших здобутків науки. Іменно Stannius[3] винайшов у кругоротів (Cyclostomi) двійне орудє, що „находить ся по обох боках cardia тутже поза зявами“. У перекустих (Plagiostomi) а іменно у дерпана звичайного (Squatina vulgaris) описав Ecker thymus яко подовгасту, лопатовату масу, котра находить ся понад яминами зявними. Зовсїм подібно Stannius представляє thymus яко велику, сїру, мягку, лопатовату масу железову, котра, поміщена в горі над луками зявними, розширює ся ід передови, а з'ужує ід задови. Крім повисше згаданих вчених занимали ся дослїдами над thymus у риб також Leydig і Dohrn[4]. Іменно сей послїдний подав нам кілька дуже важних помічаний, дотикаючих розвитку thymus у Selachii-в. Відтак належить згадати оттут і Афанасіева[5] (професора з С.-Петербурга), котрий, розслїджуючи анатомічну будову thymus у ріжних хребовців, не виключаючи і риб, положив неоцїнені заслуги основними помічанями, дотикаючими передовсїм способу заниканя (інволюциї) сего орґана, о чім впрочім понизше обширнїйше поговоримо.

Приведена лїтература зовсїм єще не пояснює нам значіня і функциї фізиольоґічної gl. thymus для зьвіриного тїла. Железа thymus все ще являє ся для нас загадкою. А особливо у найнизших хребовців, то єсть у риб, єствованє єї для орґанізма буває ріжними ученими ріжно понимана. По нинїшний день нема одноцїльної гадки що до походженя тої желези: одні виводять єї з вніскірні (екто-

---

[1] Ecker, Bluttgefässdrüsen. Handwörterbuch der Physiologie von R. Wagner Bd. IV, 1853.

[2] F. Leydig, Lehrbuch der Histologie. Frankfurt a/M. 1857 pg. 429.

[3] Stannius, Lehrbuch der vergleichenden Anatomie der Wirbelthiere. Berlin 1846.

[4] Dohrn, Studien zur Urgeschichte des Wirbelthierkörpers IV. Mittheilungen aus der Zoolog. Station zu Neapel Bd. V. Heft 1.

[5] Afanassiew, Über Bau und Entwickelung der Thymus der Säugethiere. Archiv f. mikrosk. Anatomie. Bd. XIV. 1877.

дерми), иньші із середскірні (мезодерми). Fr. Maurer[1]), De Meuron[2]), Schaffer[3]) і J. Beard[4]), котрих студиї на тім поли належать до найновійших і найвартнїйших здобутків анатомії та фізийольоґії згаданого орудя, все ще виявляють великі недостачі, так що повставанє thymus, а особливо найважнїйша фаза в єї розвою поки-що не рішена.

Глеза (thymus) є лїмфатичним тїлом. Єї сїтчасту ткань заповняють незлїчимі левкоцити, котрих походженє, помимо, що они становлять головну складовину згаданого орудя, є поки-що неясним. Дослїди наші, посьвячені специяльно тій річи, наглядно нас переконали і в тій гадцї як найсильнїйше утвердили, що лїмфатичні клїтини thymus прямо з клїтин наболонних витворюють ся. Постереженє се являє ся нам фактом загальної морфольоґічної ваги і прінціпіяльного значеня, бо оно зовсїм перечить загально принятим поглядам що до специфічности листків зародочних та що до походженя лїмфатичних елементів з мезенхими.

Пригадаймо собі, який то приилеск з одної, а остру критику з другої сторони, викликала праця Retterer-а[5]), котрий доказував походженя левкоцитів і сїтчастої остроми (Netzwerk) в узликах лїмфатичних (Lymphknötchen) з наболони. Stöhr[6]), що саме накинув ся був з острою критикою на погляди Retterer-а, назвав також і дані Юлії Platt, Gronowitsch-а, Klaatsch-а, v. Kupffer-а і Фр. Maurer-а що до походженя лучнотканних і лїмфатичних тканий з енто- чи з ектодерми хибними і зовсїм не переконуючими. „Auf Irrthümern... beruht“ — каже він — „die grosse Mehrzahl der Arbeiten, welche die Lehre der Specifität der Keimblätter stürzen wollen, welche Bindegewebe und Leucocyten von Ekto- oder Entoderm abzuleiten versuchen“.

---

[1]) Fr. Maurer, Schilddrüse u. thymus der Teleostier. Morpholog. Jahrb., Bd. 11, 1885.

[2]) De Meuron, Recherches sur le devéloppement du thymus et de la glande thyroïde. Recueil Zool. Suisse, 1886.

[3]) Schaffer, Über den feinen Bau der Thymus u. deren Beziehungen zur Blutbildung. (Sitzungsberichte der kais. Akadem. der Wissenschafften CII. Bd. Abth. III. Jahrg. 1893. Heft I—X).

[4]) J. Beard, The Developement aud probable Function of the Thymus. Anat. Anzeiger, Bd. 9, 1894.

[5]) Retterer, Origine épithéliale des leucocytes et de lu charpente réticulée des follicules clos. Compt. rendus. Soc. Biol., 1897. Histogenése du tissu réticulé aux dépens de l'épithélium. Verhandl. der anat. Gesellschaft auf der 1'. Versammlung, 1897.

[6]) Stöhr, Über die Entwickelung der Darmlymphknötchen. Ibid. 1897.

Студиюючи препарати, які зладили ми до зовсїм иньших цїлий, іменно до слїдженя розвитку зародочного шарановавих (Cyprynoides) і лососоватих (Salmonides), завважали ми під мікроскопом образи, що нас споводували до помічаня розвитку лїмфатичних елементів желези thymus. З початку веденої роботи ми стояли по сторонї Stöhr-а, проте вже а priori всяку можливість повставаня лїмфатичних елементів з наболони ми цїлковито виключали. Однак по дуже основних обсервациях і студиях препаратів зладжених ми дійшли до результатів зовсїм противних. Тим паче, що подібні процеси відбувають ся також і в thymus жирунів (Selachii), як се бачимо з розвідки J. Beard-а[1]), що нам случайно в часї дослїдів попала в руки. Іменно J. Beard виводить також і у плахура (Raja) лїмфатичні клїтини thymus безпосередно з наболони.

Молодші стадиї слїдили ми на зародках пструга (salmo). Ми можемо вповнї потвердити дані Maurer-а, що перші пуплї thymus розвивають ся з наболонного згрубіня горішних кінців (dorsalen Enden) щелин зявних (Kiemenspalten). Що клїтини тих перших пуплїв суть клїтинами наболони, сего доказав Maurer нехибно, бо они переходять безпосередно в наболонні клїтини зяв; що під наболонию находить ся оболона властива (membrana propria), котра становить границю межи наболонию а находячою ся під нею тканию, на се цїлковито з Maurer-ом годимо ся. Але негодимо ся з ним в чім иньшім.

Іменно після Maurer-а, елементи розвиваючої ся глези (thymus) мають вже від першої хвилини повстаня питоменний визір, бо клїтини не мають ніяких границь, а ядра клїтинні є малі, точковаті, дуже густо побіч себе нагромаджені і закрашують ся інтензивнїйше, ніж ядра клїтин наболонних. Ті послїдні мають — після Maurer-а — в супротивцї до первістних елементів thymus виразні границї і овальні ядра, що красять ся блїдо і визначають ся виразною будовою ядристою (deutliche Kernstructur). котра в первістних елементах thymus має бути затертою. Ядра ті — після Maurer-а — „gleichen sofort den lymphoiden Elementen". Сей погляд Maurer-а зовсїм хибний, бо клїтини завязку thymus нічим непохожі на лїмфатичні елементи, але противно они мають дуже виразний характер наболонний і лишень мало-помалу переходять в лїмфатичні клїтини, о чім понизше основнїйше буде бесїда.

---

[1]) Beard, The True Function of the Thymus. Lancet, 1899.

У зародка пструга, що мав 63 днів, збита маса thymus складає ся — після Maurer-а — з однородних густо побіч себе нагромаджених ядер, що на краю наросту переходять непроривно в наболонні клїтини слизистої оболонки ямин зявних; однак вже й тепер покривова верства thymus складає ся з плоских і великих наболонних клїтин, так що все оруде має лишень одноверстну огортку наболонну, хоч всї его складові елементи суть витвором epithelium. Округлі ядра thymus „machen den Eindruck von lymphoiden Elementen“. В тій стадиї помічав Maurer всмикуванє лучноткани до завязка thymus. Лїмфатичні ядра, що становлять головну масу thymus, має він не за лучнотканні частини, тілько „für Elemente epithelialen Ursprunges“, котрі вибуяли на наболони (epitheliale Wucherung) із внїшної ткани. Іменно слїдуючим способом доказує Maurer наболонне походженє ядер лїмфатичних:

„Zunächst sind die Elemente alle vollkommen gleichartig. Ferner sind sie durch eine Membrana propria gegen das subcutane Bindegewebe abgegrenzt; diese Membran wird nur an den Stellen durchbrochen, an welchen die Bindegewebszellen in das Organ eindringen. Drittens gehen an der Grenze des Organs die lymphoiden Elemente direct in die Epithelzellen der Kiemenhöhlenschleimhaut über“. Maurer однакож, що найважнїйшим тут являє ся, не характеризував сего безпосередного переходу, так що з его опису зовсїм не виходить, що клїтини наболони дїйсно в лїмфатичні елементи перетворюють ся, хоч в самій основі гадки его зовсїм слушні.

Maurer уважає ті „lymphoide Elemente“ творами темпорарної натури і тому каже їм по часї назад в клїтини наболонні переміняти ся, причім знов не поясняє способу сеї переміни, що являє ся нам історьоґічним курийозом.

Вельми заслужений згаданий дослїдувач зве лїмфатичні елементи „lymphoide Kerne“. І справдї они виглядають як ядра, бо ослоняюча їх плязма є незвичайно тоненька і густо-часто лишень при дуже сильнім побільшеню мож еї ледви-заледви добачити. Maurer характеризує дуже поверхно сю дивоглядну переміну тих майже позбавлених плязми лїмфатичних елементів, котрі лежать або зовсїм свобідно побіч себе або розміщені посеред вроснутої тут зо вні лучноткани. Іменно, начеркнувши коротенько сї відносини у пструга, що мав вже 4 місяцї, говорить він так: „Die primären Thymuszellen (значить у него тільки що „die lymphoiden Elemente“) haben sich insofern verändert, als ihre Kerne grösser geworden sind, sich weniger intensiv färben und deutliche Structur erkennen lassen, kurz ein Verhalten zeigen, das man... als Beginn eines Rückfalles in ihren epithelialen Charakter bezeichnen darf“.

Принятє сего переображеня вспятного ядер лїмфатичних в наболонні клїтини є чистою ипотезою із сторони Maurer-а, видуманою — здаєть ся — на те, щоби якимось способом „lymphoide Elemente epithelialen Ursprunges“ з лїмфатичних складнїв дефінітивної глези (thymus) виключити, бо ті елєменти, одвітно загально принятій теориї, повинні з мезодерми походити.

Maurer принимає дальше, що лїмфатичні елєменти, які вийшли з наболони, так довго задержують свій характер, як довго они розростають ся і становлять головну масу thymus. Вправдї лучноткань, що безпосередно одягає thymus, вже вісїм днїв опісля, як появив ся завязок желези, починає вростати, всмикувати ся до thymus, однак она є лишень тканию остромною (руштованєм), що становить мовби подвижника для судин кровних. Але по двох-трох місяцях, каже дальше Maurer, наколи починають лїмфатичні елєменти мезодерматичного походженя до thymus вростати, переміняють ся лїмфатичні елєменти наболонного походженя назад в клїтини наболонні. „Die primären epithelialen Elemente allmählich in ihrer Proliferation erschöpft, verlieren ihr lymphoides Aussehen und nehmen auch äusserlich ihren epithelialen Charakter wieder auf“. Такий погляд Maurer-а є — як вже повисше сказано — зовсїм хибним. Понисше наведені дослїди доказують зовсїм недвузначно, що переміна клїтин наболонних в лїмфатичні елєменти дїйсно довершує ся і, що раз таким способом повсталі лєвкоцити свій характер задержують і нїяк не переміняють ся в клїтини наболонні. Противно они заховують ся в незміненій формі аж до найпізнїйших стадий і доперва по часї або роздроблюють ся на зернисту масу або перетворюють ся в червоні тїльця крови (еритроцити), як се впрочім понизше викажем.

Видумку Maurer-а що до вспятного розвитку лєвкоцитів в наболонні клїтини уже Beard скритикував зовсїм справедливо в „Anatom. Anzeiger“ l. c. 1894. А впрочім з дотичної розвідки Maurer-а годї дізнати ся, чи автор повсталі з наболони клїтини дїйсно за лїмфатичні елєменти уважає, чи лишень за творива, що похожі на лїмфатичні елєменти, бо раз (на сторонї 161) говорить він „an der Grenze des Organs gehen die lymphoiden Elemente direct in die Epithelzellen der Kiemenschleimhaut über“, на иньшім знов місци зве ті самі елєменти, „lymphoid aussehende Zellen der epithelialen Anlage“. Тож дуже трафно замітив Beard, коли сказав, що „The expression „lymphoid aussehende Zellen“ would seem indicate, that Maurer does not regard these cells as true lymph-cells“. Beard подібно в дослїдах над розвитком thymus у Raja дійшов до заключеня, що і тут „the lymph elements of the thymus are the direct offspring of the epithelial cells of a gill-cleft“. До того самого заключеня дійшов він на підставі поновлених помічаній над розвитком thymus у плахура (Raja), де лїмфатичні клїтини сего орудя мають виключно з наболони витворювати ся.

В пізнїйшій розвідцї о розвитку thymus у земноводників (Amphibia) припускає Maurer[1]), що тут лїмфатичні клїтини „durch Theilung aus den Epithelzellen hervorgehen können“ (через дїльбу з клїтин наболонних можуть повставати). В яйцеватім завязку thymus 17 mm довгої личинки жаби (пуголовача) виріжняє Maurer субстанцию стрижеву (Marksubstanz) і субстанцию корову (Rindensubstanz). „Die Zellen des Markes“ — каже він — „gleichen in ihrem Aussehen vollkommen den Epithelzellen der ersten Anlage, während die Genese der kleinen Rundzellen der Rindenschicht eine doppelte Deutung gestattet. Sie können nämlich ebenso gut durch Theilung aus Epithelzellen hervorgehen als auch mesodermaler Herkunft, d. h. mit den Gefässen hineingewuchert sein. Ich neige zur letzteren Annahme, da es mir nicht möglich war, neben den kleinen Rundzellen und den spärlichen dazwischenliegenden Epithelzellen der Rinde Theilungsfiguren oder sonstige Übergangsformen zu entdecken. Beide Zellenformen lagern scharf unterscheidbar neben einander, zwischen den verästelten Bindegewebszellen, welche das Organ durchsetzen“. Так говорить Maurer, і він має зовсїм слушність, коли на підставі власних помічаній (треба додати неосновних і поверхних) удержує походженє лїмфатичних ядер з клїтин наболонних кори лише за „möglich“, бо він не бачив анї подїлових фіґур (Theilungsfiguren) анї переходних форм (Übergangsformen). Однак сей погляд Maurer-а дотикаючий Amphibia є недостаточним, походячим або з несовістного студийованя препаратів або з неосновної методи консервованя материялу (через що імовірно лучноткань не задержала ся в природнім видї). В зовсїм відповідних стадиях розвоєвих thymus у риб кістноскелетних[2]) бачили ми не лиш численні карийокінетичні фіґури подїлові клїтин наболонних, але й також прегарні форми переходні між обома родами клїтин, що понизше буде основнїйше обговорено.

---

[1]) F. Maurer, Schilddrüse, Thymus u. die Kiemenreste bei Amphibien Morphol. Jahrbuch 1888.

[2]) Карийокінетичні фіґури в великій скількости обсервували ми також в thymus земноводників (Amphibia) а іменно на препаратах зладжених до постеріганя концентричних тїлець (Гассаля), о чім иньшим разом буде бесїда. — Автор.

Яко материял до дослїдів служили нам переважно зародки пструга (Salmo fario L.) і молодий карас звичайний і золотий (Carassius vulgaris і C. auratus), хоча малисьмо під рукою також препарати з ковблика (Gobio fluviatilis і з вюна (Cobitis fossilis) та слижа (Cob. barbatula). Обєкти утревалювалисьмо почасти в самім концентричнім сублїматї, по части в суміщцї концентричного сублїмату і 3 проц. квасу азотного (на половину); передовсїм сей послїдний плин явив ся дуже пригідним як до розмягчуваня ткани кістної, так і рівночасно також до нїжного утревалюваня всїх тканий. До крашеня уживали ми еозин-гематоксилїни і алькоголїчного розпусту сафранїни, що особливо достатчала образів інструктивних.

Погляди Maurer-а, що перші пуплини thymus пструга повстають з наболонних згрубілостий горішних кінців ямин зявних і що ті пуплини дуже вчасно з собою зливають ся, так що творять одно наболонне згрубінє горішної стїни ямини зявної, ми потверджаємо. Однак не годимо ся з Maurer-ом мовби то клїтини тих пуплїв уже від початку ріжнили ся від иньших клїтин наболони ямини зявної, і мовби то між ними не видно було границь та ядра їх були меньші. Ми бачили, що клїтини завязка thymus уже в найранших фазах розвитку виявляли видні границї, а ядра їх були зовсїм такої самої величини і зовсїм з тою самою окривою, що і ядра наболони на иньших місцях ямини зявної.

Перша зміна наболони завязка thymus починає ся уже в тім часї, коли lamella cutis єще нїгде не прорвана, і коли єще в завязку thymus нїяких слїдів лучноткани і судин кровних не мож добачити. Зміна починає ся в понизших партиях завязка, коли партиї верхнї, що переходять в наболонь ями зявної, єще зложені з зовсїм невиріжненої епітелїї (epithelium). Зміна розпочинає ся від того, що клїтини укладають ся свобіднїйше одна побіч одної, віддалюють ся від себе, розсувають ся, а межиклїтинні містки видовжують ся, тоншають і відтак зникають, лиш декотрі з них задержують ся. Нам видає ся дуже імовірним, що сї довгі нитки, які мовби узонькі кладки, лучать розвільнені клїтини, завдячують своє повстанє зільлятю певної скількости первістних, коротких і нїжних містків межиклїтинних.

Особливо виразне розсуванє (Lockerung) клїтин наболонних бачили ми на препаратах з зародків пструга, що були 1,2 cm довгі. Таке звільненє довершує ся в припідставних партиях thymus. Именно на верхнї (що яко горішна стїна зяв становить підставу для желези thymus) находить ся 2—3 верстви тїсно до себе прилягаючих клїтин наболонних, котрі дуже енерґічно множать ся, як сего доказують численні карийокінези і мітози, які ми в клїтинах тих партий в великій скількости бачили. Таким отже чином скількість молодих клїтин заєдно росте, коли число верстов індиферентних, більш доверхних клїтин наболонних, єще через довгий час те саме полишає ся. Сьвіжо повсталі клїтини, не маючи тут доволї місця, входять до середини завязка желези, де підлягають згаданому повисше розповільненю.

У зародків пструга, що мали 1,5 cm довготи, подибувалисьмо тут і там судинки кровні і лучнотканні елєменти, котрі мож дуже легко пізнати по їх подовгастім, веретеноватім і почасти волокнистім виді; елєменти ті, що вже на перший погляд ріжнять ся від розвільнених клїтин наболонних, всмикують ся тут і там через cutis lamella до наболонного завязка желези thymus. В тій стадиї бачили ми численні форми перехідні від індиферентних клїтин наболонних партий періферичних до згаданих повисше клїтин розвільнених, що з початку повязані з собою міжклїтинними містковатими висувками, а в дальшім розвою і тих послїдних позбувають ся і громадять ся як зовсїм свобідно побіч себе лежачі клїтини лїмфатичні.

Фіґ. 1 (гл. табл. I.) представляє нам частину стрілового перекрою (Sagittalschnitt) через завязок желези на 1,5 cm довгого зародка пструга. При вінїшній верхнї жел. thymus находимо битком побіч себе нагромаджені клїтини, що визначають ся блїдими, примінно великими, майже безхроматиновими, округлавими або овальними ядрами. В одній з тих клїтин, як також і в другій понизше лежачій бачимо хороші фіґури дїлитьби ядер. На препаратах утревалених в суміщцї сублїмату і 3 проц. HNO_3, а закрашених відтак сафраніною находилисьмо дуже богато мітоз. Поява мітотичних фіґур, що доказують дуже скорої множби клїтин наболонних, є для нас дуже великої ваги, бо се є сьвідоцтвом, що роля наболони при твореню елєментів thymus є активною, а дальше, що скількість клїтин епітельних завязка желези стало росте.

Елєменти, що повстали через дїлитьбу більших і єще індиферентних клїтин наболонних, суть меньші і замикають в собі також ядра меньші чим у клїтин матерних. Більшість тих енерґічним процесом дїлитьби поменшених ядер клїтинних задержує вже свої скупі розміри і переходить мало-помалу в лїмфатичні елєменти. Рівночасно зі скорим помножуванєм і зменшуванєм обєму клїтин йде рука в руку і їх розвільненє.

На повисшій (1) фіґурі бачимо наглядно дуже красно перехідні степени від несвобідних єще, більших, тїсно побіч себе лежачих клїтин наболонних до таких, що на обєм меньші, більш від себе віддалені, а довгими мiстковатими волокнами повязані. Ті послідні клітини характеризують ся маленькими ядрами і дуже вбогою плязмою, котра немовби тонесеньким пластком огортає ядра. Такі клітини майже вже зовсім мають характер лїмфатичних елементів, котрих однак спосіб (modus) розвоєвий, як також приналежність до клітин наболонних виявляє хочби ся обставина, що плязма їх лучить ся непроривно з сусїдними клітинами наболонними, а іменно за посередою довгих, нїжних, волокнистих містків. Із таких клїтин доволї розвільнених, але єще повязаних з собою обопільно бачимо знов ряд дуже ядерних образів переходових до зовсїм вже свобідних клїтин, що не лучать ся з собою; клїтини ті визначають ся нїжними, обводовими висувками, котрі виходять з плязми і очевидно представляють тут прочки (рештки) повисших міжклїтинних містків. А відтак доходимо до клїтинних форм, що, лишені всяких висувок, мають ледви слїди плязми і суть зовсїм перетворені в типові лїмфатичні елементи, значить ся, представляють малі, округлі ядра, котрі визначують ся так тонесенькою огорткою плязми, що єї не легко навіть і при сильних побільшенях мож доглядїти.

Ядра лїмфатичних елементів виріжняють ся від ядер індиферентних клітин наболонних, як також від блїдих, кужільоватих ядер клїтин лучнотканних, не лиш меншими розмірами, але також і тим, що они красять ся сафранїною дуже інтензивно, інтензивнїйше нїж ядра всяких иньших клїтин. Ту послїдну появу пояснює нам та обставина, що в ядрах лїмфатичних виступає субстанция хроматинова (она сильно поглитає сафранїну) в більшій скількости, нїж пр. в ядрах типових клїтин наболонних, а дальше, що та хроматина творить в них більше або менше густу сїть, коли ядра иньших клїтин (пр. наболонних або лучнотканних) посїдають дуже скупо хроматини, що виступає в них в видї зеренець. Так при крашеню препаратів сафранїною получали ми як найвиразнїйші переходи від більших, зовсїм блїдих (клїтин) ядер наболонних до менших засібнїйших в хроматину, інтензивнїйше закрашених, а навпослї до типових, повисше описаних лїмфатичних елементів.

До повного обговореня квестиї що до первістного жерела лїмфатичних елементів thymus, мусимо оттут з великим натиском дві важні обставини запримітити. Іменно: 1) в жаднім ядрі лїмфатичного елемента thymus не бачили ми мітоз або якихсь иньших форм дїлитьби, проте помножуванє тих елементів в дотичних стадиях слїдує не через дїлитьбу уже нагромаджених левкоцитів, але виходить завсїгди з індиферентних клїтин наболонних, причім в тих послїдних відбуває ся дуже скоре множенє на мітотичній дорозї; 2) в розвільненій піднаболонній лучноткани, в якій (в повисше описаній стадиї) бачили ми судини кровні і блїді, кужілеваті лучнотканні елементи, не було нї одного левкоцита, хоча в завязку thymus була їх вже велика скількість нагромаджена. Проте уже з тої причини виводженє лїмфатичних елементів thymus з піднаболонної лучноткани є виключене; таке виводженє не має нїякого наукового підкладу і видає ся нам дуже невдалим, особливо, коли зважимо повисші дані, де наведено ріжні форми переходові від індиферентних наболонних клїтин аж до типових тїлець лїмфатичних.

Зміни левкоцитів завязка thymus, як взагалї нїяких форм вспятних, щоб вказували перетворбу лїмфатичних елементів в наболонні клїтини, ми не бачили в жадних стадиях розвитку: анї на повисше описаних, анї на слїдуючих препаратах старших особнїв. Раз повставші левкоцити, котрих головну складовину становлять ядра, бо плязми на них лиш дуже скупо находить ся, задержують свій здіб (habitus) аж до дуже пізних стадий розвитку thymus. А навіть в стадиях далеко старших, як ті, що ми їх повисше описали, відбуває ся безнастанна трансформация клїтин наболонних в левкоцити. Так пр. на численних препаратах, де жел. thymus в декотрих місцях свого тїла починає вже хилити ся до інволюциї, бачили ми значнїйше розвільнюванє наболонних клїтин корових thymus, обнажуванє їх з плязми та прямованє до внутра, де відтак наступає повна їх переміна в левкоцити.

Дуже займаві і поучаючі образи в тім зглядї мали ми у караса (Carassius vulgaris), на 2·6 cm довгого. (Гл. фіґ. 2). Грушковата железа, як бачимо, є в тій стадиї еще з кришою зявної ямини безпосередно получена, хотяй відділюванє (відставанє) при підставі уже намітило ся. На стрілових перекроях засновок thymus найчастїйше має вид грушки (очевидно не у всїх риб та не у всїх стадиях), котрої чільна часть є уміщена в заглубі між кістьми лобиновими, а іменно замикають еї: з заду кости ушні (otica), з переду кости окоямні (ossa orbitalia). Підстава thymus переходить безпосередно в наболонь ямини зявної, котра в дотичній стадиї є ще сильно згрубіла. Thymus при підставі (basis) є розширена, іменно двома пластами (передним і задним) підставовими остає в тїсній, безпосередній звязи з наболонию горішної даховатої стїни зяв.

В повисшій стадиї (фіґ. 2) свобідно стремляча в гору железа thymus є окружена дуже нїжною, вільною і блїдою лучнотканию, в котрій находимо судини кровні без найменьшого слїду навкруг них лєвкоцитів. Зате появляють ся лєвкоцити в згаданій окружаючій (вільній) ніжній лучноткани, а іменно у тій єї частинї, що тїсно прилягає до тонесенької внїшної оболонки верхнї thymus. Оболонка та є на численних місцях просаджена судинами кровними, що вростають до середини железзи.

В підставовім платї thymus находять ся єще індиферентні клїтини наболонні, котрі чим висше ід горі переходять у вільнїйшу наболонь, яку майже на цїлій періфериї грушковатого виростка thymus находимо іменно під внїшною окриваючою єї ніжною оболонкою. Середину тїла thymus доповняє дуже велика скількість лїмфатичних елєментів, то єсть лєвкоцитів, поміж котрими добачуємо мірно розміщену лучноткань вільнїйшу, зложену з кужілеватих клїтин, поруч з сїтчастою дуже ніжною лучнотканию (reticulum). Судин кровних постерігаємо тут велику скількість. Вельми займавою і дуже важною являє ся тут та обставина, що і в тій, відносно уже так пізній, стадиї, все ще таки в клїтинах наболонних бачимо численні мітози і як найкрасші форми перехідні від таких клїтин наболонних, що енерґічно множать ся карийокінетичною дорогою, до щораз свобіднїйше укладаючих ся, а відтак до найхарактеристичнїйших типових білих тїлец крови (лєвкоцитів) доходимо.

Фіґ. 3. з'ображає нам частину прорізу стрілового через глезу (thymus) караса (Carassius vulgaris) повисшої стадиї при сильнім побільшеню. При сподї бачимо єще зовсїм індиферентну наболонь безпосередно в стїну ямини зявної переходячу; в тій наболони на лїво видно врослу судинку кровну і кілька кужілеватих клїтин лучнотканних. При самій долинї підстави бачимо дві фіґури мітози. Їх поява, що в наболони дотичних серий препаратів у великій скількости виступає, є — як зазначено повисше — сьвідоцтвом скорого розросту ткани — скажу спішного множеня клїтин наболонних. Входячи в середину thymus, бачимо, як клїтини наболонні ід внутрі свобіднїйшають. Многі з них вже зовсїм не вяжуть ся з собою міжклїтинними волокнистими містками, хоча многокутним своїм визором зраджують наглядно своє наболонне походженє. Дотична фіґура 3. ілюструє нам знаменито висше описаний перехід від розвільнених, єще получених з собою клїтин (на право ід серединї) аж до таких, що вже зовсїм свобідно побіч себе нагромаджені. Ядра тих послїдних, красять ся сафранїною інтензивнїйше, ніж ядра зовсїм єще індиферентних клїтин, котрі тутже при верхни находять ся. Ядра клїтин наболонних визначають ся грубою огорткою плязми, що тоншає в міру освободжуваня та посуваня клїтин до середини тїла thymus, так що у ядер лїмфатичних з неї остають ледви насчадкові слїди.

Повисше згадали ми, що наболонь в періферичних партиях thymus звичайно зложена з клїтин, що побіч себе в довгі ряди уставляють ся. Така стрічковата рядовитість клїтин увидняє ся навіть тодї, коли вже клїтини, тиснені нововитвореними клїтинами наболони, посунули ся до середини, поменшили свою огортку плязми і приймили удачу ядер лїмфатичних. Ряди ядер, що виглядають немовби шнурки доволї рідко нанизаних пацьорок, виступають на ріжних місцях thymus, найлучше однак се увиднене є в підставовій части желези, що граничить з наболонию ямини зявної; очевидно пізнїйше сей уклад ядер в ряди зникає, в міру як округлі, зовсїм вільні ядра свобідно розсувають ся по сїтчастій лучноткани. На фіґ. 4 бачимо такі довгі ряди ядер лїмфатичних, іменно по середині thymus, на місци граничнім з наболонию. Понисше маємо кілька верстов клїтин індиферентних, що ограничають ямину зяв, яко звичайна наболонь; зараз над наболонию типовою бачимо в ряди уложені клїтини, що правда, також наболонні, але вільнїйші, котрих границї майже затирають ся, так що плязма поодиноких клїтин немов зливає ся в одну масу. Дальше ід середині бачимо ряди лїмфатичних ядер, що мають свій початок в наболони.

Так отже на підставі повисше описаних помічаній приходимо отсе до рішучого заключеня, що велика скількість лїмфатичних елементів (ядер), які в незміненій формі (они відтак перетворюють ся в червоні тїлця крови, о чім понизше буде бесїда) мож і в найпізнїйших стадиях розвитку слїдити, виводять ся з наболони слизистої оболонки ямин зявних — значить походять прямо з ентодерми, що є фактом загальної, далекосяглої ваги теоретичної. Ми певні, що наболонь є одиноким жерелом лїмфатичних елементів желези thymus, а нїколи, як се навіть і до сегодня думають, лїмфатичні елементи thymus не походять з мезенхими; ми нїколи не бачили, щоби до тїла thymus входили лїмфатичні ядра з окружаючої лучноткани, але навпаки ми помічали — особливо вже у старших стадиях — дуже громадне вилучанє левкоцитів з тїла thymus до прилягаючої лучноткани, як се дуже добре бачити мож на фіґ. 5. Подібні образи бачити мусїв і Maurer. Жаль лише, що нїмецкий вчений в тім случаю заявив мало віри і певности в самого себе і в те, що бачив під мікроскопом, але, йдучи за загально пануючими поглядами, він тим вандрівникам казав іти в противнім вспятнім напрямі, то єсть сказав, що они йдуть з лучноткани до середини тїла thymus. „....nach mehreren Monaten — каже Maurer[1]) — fallen diese Zellen (epithelialen Ursprunges) in ihren epithelialen Charakter zurück, in dem ihre Proliferationsfähigkeit erschöpft ist. Zu gleicher Zeit brechen längs der Blutgefässe und Bindegewebszüge vom umgebenden Bindegewebe lymphoide Zellen in grossen Massen in die Thymus ein und etabliren sich in einer intermediären Zone, wo sie Lymphfollikel bilden“. Таке заключенє Maurer-а зовсїм нїчо нам не пояснює, а противно оно лиш затемнює належний погляд на справу. Maurer, що казав лїмфатичним елєментам перетворити ся назад в клїтини наболонні, був приневолений конечностию вияснити собі якимсь способом ту обставину, що лїмфатичні елєменти аж до найпізнїйших стадий розвою thymus, ба навіть тодї, коли вже железа thymus на добре подала ся до інволюциї, лїмфатичні ядра все ще таки становлять головну складову масу тїла thymus. Тому то сей образ, де він в дотичній стадиї бачив громадно розміщені лєвкоцити в безпосередно прилягаючій до желези лучноткани, був для него дуже пожаданим, бо він єму вказав нове жерело лїмфатичних ядер, котрі саме прямували „massenhaft in die Thymus hinein, wo sie sich in einer intermediären Zone etabliren ..“ Maurer нїколи не був би дійшов до подібних хибних результатів, наколи би він був a priori не приняв теориї специфічности листків зародочних, після котрої всякі елєменти лїмфатичні походять лише з мезенхими (а нїколи з енто- чи ектодерми).

Ми єсьмо в посїданю цїлих серий препаратів з всїляких стадий, котрі не лише нас як найосновнїйше переконують о неправдивости повисших гадок Maurer-а, але заразом насунули нам єще дальше сягаючі гадки. Іменно ми певні, що железа thymus в тїлї зьвіринім, а передовсїм у риб, над котрими отсе свої дослїди ведемо, становить одно з найперших огнищ лєвкоцитів. Ми розглядали кількократно дотичні препарати, почавши від наймолодших зародочних стадий, і завсїгди доходилисьмо до того самого заключеня, що: в нїякій части тїла пструга (Salmo fario L.) так довго не мож хочби й одного лєвкоцита бачити, як довго железа thymus єще находить ся в найраньших стадиях розвою, то єсть як довго в нїй лїмфатичні елєменти єще не появили ся. Ми не подибували нїколи лїмфатичних ядер в орґанїзмі ембриональних осібняків, у котрих thymus оказувала ся доперва лише яко наболонне згрубінє горішної

---

[1]) Fr. Maurer, Schilddrüse und Thymus der Teleostier. Стор. 170. Morphol. Jahrbuch XI. Bd. 1886.

стїни ямини зявної; натомість в великій скількости постерігали ми левкоцити в ріжних частях тїла особнів, що мали глезу (thymus) уже доволї розвинену, thymus з великим засобом лїмфатичних елементів у внутрі. В більшій мірі еще мож се було постерігати на препаратах трохи пізнїйших стадий (пр. фіґ. 5), на котрих, як бачимо, левкоцити цїлими масами виходять з грушковатого тїла желези і розходять ся по сусїдних тканях.

Такі образи нас конче удержують в вірі що железа thymus є для орґанїзма зьвіриного, а особливо у риб, мовби першою фабрикою левкоцитів, машиною, котра функционує лише до певного означеного часу, доки не витворять ся в орґанїзмі иньші огнища, як стриж кістний (у риб єго нема), селезїнь і иньші орудя лїмфатичні, що відтак переймають на себе ролю продукованя левкоцитів. Гадку сю висказуємо тим певнїйше, що і найновійші дослїди над глезою у Raj-а довели J. Beard-а[1]) до зовсїм таких самих здогадів. Таке заключенє — поки-що ипотеза, основана на дуже точних помічанях — пояснює нам заразом і прояв інволюциї сего орудя, що, сповнивши свою задачу для устрою орґанїзма, стає для него злишним, а яко такий мусить нидїти і загибати.

Глеза, як сказано є твором тимчасовим, твором, що у всїх зьвірят хребових до певної пори єствує, а відтак, у одних вчаснїйше, у других пізнїйше, зникає з орґанїзма. Заник (інволюция) глези, подібно як і єї розвиток, має ще богато обстанов не прояснених; тож, нашими дослїдами думаємо дати доволї важні причинки до пізнаня способу заниканя сего орґана.

У чоловіка, як взагалї у висших ссавців, глеза доходить до найвисшого розвою уже в часї внутрматерничого житя даного особня; очевидно затим, що і інволюция єї у тихже зьвірят розпочинає ся уже в матерницї або коротко, зараз по народженю. Інакше має ся річ з глезою риб. У них глеза починає розвивати ся з хвилею, як особень (individuum) вступає у фазу житя послїзародочного (постембрионального) то єсть доперва по вилязї. Тому то й єствованє єї у риб, навіть уже в дуже пізних стадиях, бо майже у зовсїм вже старих особнів, бодай незначними насчадками репрезентоване. У шаранів пр. понад три dcm довгих, ми находили глезу дуже сильно розвинену. Значить ся і інволюция єї у тих хребовців починає ся о много пізнїйше, нїж пр. у ссавців.

Першим характеристичним проявом інволюциї глези єсть повставанє в єї тїлї ямин, то єсть місць вільних від лїмфатичних ядер,

---

[1]) J. Beard, The Source of Leucocytes and the true Function of the Thymus. Anat. Anz. Bd. XVIII. 1900/901.

а заповнених звичайно ніжно-зернистою аморфною субстанциєю (detritus). Творба таких ямин (гл. фіґ. 5) в тілї, що перед тим визначало ся великою збитою масою левкоцитів, пояснює ся тою обставиною, що левкоцити старших стадий: одні виходять до судин кровних, другі взагалї виеміґровують, як се іллюструє фіґ. 5, а ще иньші або перемінюють ся в еритроцити або наконечно підлягають процесови розпаду і таким чином розсипають ся в згадану повисше мілку ніжно-зернисту масу (detritus) — одним словом левкоцити старших стадий виходять в великій скількости, а лиш дуже незначне число їх доповняє ся сьвіжими клїтинами лїмфатичними. Незначне їх число кажу, бо наболонь тепер стратила уже давну здібність енерґічно дїлити ся та витворювати дорогою мітотичною нові лїмфатичні елементи в колишній скількости.

Другою важною познакою знаменаючою глезу в фазї єї инволюциї, являють ся концентричні (соосередні) тїльця. Сї загадочні істольоґічні творива становлять до нинї квестию спірну в мікроскопній анатомії. Особливо у риб їх дуже мало помічано, а один впрочім дуже поважний вчений заперечує цїлковито їх єствованє в глезї риб: „Concentrische Körper“ — пише Schaffer[1]) — „wie sie als Reste der epithelialen Anlage (!) in der Marksubstanz der Säugethierthymus vorkommen, fehlen...“. Такий голословний висказ Schaffer-а є зовсїм хибним, як взагалї дотична єго розвідка являє ся надто поверхною і не науковою.

Наші дослїди дотично соосередочних тїлець глези нас переконали, що: 1) соосередні тїльця є примітною познакою инволюциї глези, 2) соосередні тїльця не суть останками клїтин наболонних, як се говорить Schaffer і як се взагалї подає ся нинї в підручниках істольоґічних і анатомічних, але, ми певні, що ті тїльця походять з дряхлїючих і заникаючих (облїтеруючих) судин кровних, як се понизше буде близше обговорено.

Ecker[2]) був першим, що назвав повисші творива соосередними (concentrische Körper), він, мож сказати, був першим, що науково розслїджував будову тих тїлець. До єго часів знано ті творива лише яко тїльця Hassal-а, а названі так від імени першого їх винахідника.

---

[1]) Schaffer, Über den feinen Bau der Thymus (der Fische) und deren Beziehungen zur Blutbildung. Kaiser. Akademie der Wissenschaften CII. Bd. Abth. III. Jahrg. 1893.

[2]) Ecker — Blutgefässdrüsen. Handwörterbuch der Physiologie von R. Wagner. Bd. IV. 1853.

Ґассаль¹) іменно перший їх помітив в крови серця. Після Гассаля ті творива складають ся з певного змісту, замкненого обгортною тобілкою з численних соосередно уложених міхурців (Bläschen). Такі творива бачив Гассаль і в глезї чоловіка і вважав їх за матерні клїтини, що замикають в собі численні клїтини і ядра дочерні. Зовсїм подібно описує розвій концентричних тілець і Ґінґсбурґ²), котрий однакож пізнанє будови сих творів посуває наперед, бо викриває, що одні з них є поєдинчі, а другі зложені. Берлїн³) пояснює значенє концентричних тілець в той спосіб, що, уважаючи їх за нормальну складову часть глези, каже їм по певнім часї виходити з тїла глези і переміняти ся в железові клїтини.

Основнїйші дослїди над змістом соосередних тїлець робив Брух⁴) і прийшов до пересьвіду, що ті творива зложені з самих міхурців (Bläschen), котрих клїтини саме підлягають вспятному переображеню. Сей погляд повторив відтак Фрідлєбен⁵) з більшим засобом наукових даних, в обширній моноґрафії о глезї. Фрідлєбен не привязує до появи сих творів нїякої фізиольоґічної ваги для інволюциї, а лише уважає їх виразом морфольоґічних змін, які появляють ся в глезї в часї єї найсильнїйшої функциї.

Противно згаданий вже повисше Екер появу соосередних тїлець удержує в тїсній звязи з інволюциєю глези. Він приймає повстванє концентричних тїлець через збиванє в купки (купкованє) железових (слизних) міхурців, котрі відтак перебувають товщеву переобразу; тїльця ті після повисшого автора найчисленнїйше появляють ся в перийоді інволюциї. Те саме стверджає відтак Гіс⁶), котрий однакож виключає звязь соосередних тїлець з інволюциєю. Сей послїдний толкує повставанє концентричних тїлець в той спосіб, що новоутворені клїтини (що се можуть бути за клїтини, се нам не відомо) глези через якусь перешкоду не можуть розходити ся і тому збивають ся в купки, приймають плоску форму і таким робом дають почин до

---

[1] Arthur Hill Hassal's microscopische Anat. d. menschl. Körpers. Aus dem englischen übersetzt von Dr. Kohlschütter 1852.

[2] Güngsburg, Notiz über die geschichteten Körper der Thymus, Zeitschr. für klin. Medicin. 1857. pg. 456.

[3] Berlin, Etwas über die Thymusdrüse. Arch. f. d. holländ. Beiträge zur Natur u. Heilkunde Bd. I, 1858.

[4] Bruch, Zeitschrift f. ration. Medicin. Henle und Pfeuffer. Bd. IX. 1850.

[5] Friedleben, die Physiologie d. Thymusdrüse etc. Frankfurt a. M. 1858.

[6] His, Beiträge zur Kenntniss der zum Lymphsystem gehörigen Drüsen. Zeitschrift f. wiss. Zoologie von V. Siebold und Kölliker. Bd. X. und XI. Leipzig 1860—62.

творби соосередних тілець, подібно, як се діє ся після Вірхова (Virchov. Archiv Bd. III. 222 стр.) у верствоватих канкроїдальних тілах. Для нас дуже важним є постережене Гісса, що ті елементи глези не легко дають ся випензлювати з ніжних прорізів, але звичайно лишають ся побіч судин в лучноткани.

Киллїкер, а відтак Єндрассік[1]) збивають погляди Екера і Бруха, мовби то ті творива глези походили з прямої метаморфози клітин і ядер, але натомість приймають они, що переміну клітин і ядер в соосередні тіла поводує мертва безподобна (аморфна) субстанция, котра доокола них (клітин і ядер) в великій скількости наспорює ся. Ендрассік іменно є гадки, що згадана аморфна субстанция осаджує ся головно наоколо тих клітин, котрі вже в певній мірі підлягли вспятній переобразї. Він подибував в концентричних тільцях і еритроцити в більше або меньше зміненій формі, що після єго думки походять з екстравазатів, подибуваних доволї в паренхимі глези. Єндрассік бачив ті концентричні творива лиш в часї інволюциї глези, а іменно з початком інволюциї бувало їх меньше, в дальших стадиях інволюцийних постерігав їх велику скількість. Порівнуючи соосередні фіґури з волосницями, прийшов до пересьвідченя, що концентричні тїльця, розростаючи ся, стискають волосниці, так що ті послїдні під натиском внїшним приневолені застановити чинність і підпадають здряхленю і заникови (облїтерациї). Таким способом хоче Єндрассік виснити брак судин кровних в тих партиях глези, де находить ся велика скількість соосередних тілець.

Відтак належить єще згадати про Паулїцкого[2]). Сей автор в своїх дослїдах прийшов до заключеня, що концентричні тїльця творять ся з новоутворених клїтин, маючих характер наболонний. Такі новоутворені клїтини — Павлїцки зовсїм не подає, в чім они ріжнять ся від звичайних клїтин наболонних — мають дуже скоро множити ся і таким чином повстають купки верствовато уложених клїтин, котрі завдяки внїшному натискови бувають сплощені і дають початок концентричним тїлам. Приймаючи повисший спосіб повставаня соосередних тілець, Павлїцки уважає їх патольоґічними новотворами, що в нормальній будові глези не появляють ся.

Найобширнїйша однак і по нашій думцї найосновнїйша студия над глезою, а в особливости над розвоєм тїл соосередних, є праця

---

[1]) Jendrassik, Anatom. Untersuchungen über den Bau d. Thymus. Sitzungsberichte der Kais. Akad. der Wissenschaften 1856. Bd. XXII. Wien 1857.

[2]) Paulitzky, Disquisitiones de stratis glandulae Thymi corpusculis. Halis 1863. Inaug. diss.

професора Афанассієва[1]). Афанассієв уважає концентричні тїльця яко судини кровні (в поперечнім прорізї), що, підпавши здряхленю і заникови (облїтерациї), застановили свою чинність допроваджуваня крови і таким чином поводують нидїнє глези. Тїльця соосередні становлять у Афанассієва вихідну точку інволюциї глези.

Те, що Афанассієв бачив в глезї чоловіка і висших ссавців, ми сконстатували і в глезї риб, а передовсїм у риб шарановатих (Cyprinoidei).

Концентричні (соосередні) тїльця появляють ся в глезї особня (у риб) в доволї ріжних перийодах житя зависимо від причин чисто індівідуальної натури. Ми порівнували препарати особнїв одні з другими, що на внїшний визір представляли ту саму стадию житя — той сам рід (species), та сама великість — однак анатомічні відносини в заникаючій глезї виявляли дуже відмінні признаки і то вже як в загальній зверхній формі так також в особливости в єї мікроскопній будові. На всякий случай однак соосередні тїльця постерігали ми лише в глезї, котра, що найменьше бодай тільки в декотрих мішчинках (фолїкулах), почала хилити ся до інволюциї. Іменно в тих партиях глези виступають соосередні тїльця, де лїмфатичні елєменти розсувають ся, приймають вільнїйше розміщенє, побільшають свою плязму і переміняють ся в червоні тїльця крови, як се о тім буде бесїда понизше. Визір тих концентричних тїл як також і величина їх бувають ріжні; звичайно однак они округлі, округлаві або овальні, подовговаті: зовсїм, під тим зглядом вже на перший погляд, пригадують нам судини кровні, які тут і там поперечно перекроєні мож постерігати. Здаєсь нам однакож, що визір тих тїлець зависить головно від часу, в якім ми їх студиюємо, значить, чи в часї розвитку, зрілости, чи в стадиї вспятної переобрази. Замітимо, що концентричні тїльця найінструктивнїйших образів достатчають в фазї розвитку, в стадиї, котру лиш щасливим трафом мож підхопити; тому то часто з поміж препаратів зроблених з кількох особнїв на око тої самої стадиї, лише декотрі пригідні до постеріганя соосередних тїлець, бо, як сказано повисше, із-за чисто індівідуальних причин у одних особнїв глеза вже на добре улягла інволюциї і тїльця концентричні виступили в великій скількости, у других інволюция того орудя ледви що розпочала ся і концентричні тїльця лиш в дуже скупім числї появили ся. Сей послїдний случай, де соосередні тїльця виступили в малім числї і де глеза ледви що по-

---

[1]) Afanassiew, Über die concentrischen Körper der Thymus. (Archiv. f. microscop. Anat. Bd. IV.)

чинає хилити ся до інволюциї, се як раз найлучша стадия до студийованя концентричних тілець, бо тут они саме находять ся в першім акті повставаня то єсть в розвою.

Розглядаючи препарати, на котрих глеза осягнула вже найвисший степень розвою, завважали ми в ній зміни, що попереджали безсумнївно зближаючу ся інволюцию глези. А іменно творба згаданих повисше ямин в тілї глези і доволї нагла зміна у визорі судин кровних становлять отту признаку інволюциї. Endothelia (внутроболони) судин кровних починають грубіти і витворюють велику скількість ядер, що, укладаючись соосередно, надають судинам концентричний визір. Велика скількість клітин (ядер) повязаних часто з собою межиклітинєм (фіґ. 6 d). зменьшає сьвітло судин, а часом зовсїм, особливо у волосниць, затикає проводи і тим чином поводує їх здряхленє і заник (облітерацию).

На фіґ. 6 бачимо цїлий ряд тілець соосередних, почавши від звичайних нормальних аж до таких судин, що вже не функционують, бо сьвітло їх зменьшене цїлковито, так що нїяким способом тїльця крови не можуть через них просмикувати ся. Фіґ. 6 *a*, представляє нам вельми цїкаву форму, котру на перший погляд сейчас пізнаєм яко судину, хотяй endothelium єї анормально згрубіле відріжнює єї від звичайних нормальних судин. Друга з черги форма (фіґ. 6 *b*), вправдї значно уже ріжнить ся від попередної, але все ще таки представляє нам судину, чого доказом хочби отті численні тїльця крови, які в єї сьвітлї добачуємо; однак сильно згрубіле endothelium та численні концентрично уложені ядра кажуть нам уважати сю форму нїчим иньшим як лиш концентричним тїльцем (Гассаля тїльцем). А вже тим певнїйше можемо те саме сказати про три слїдуючі форми під *c*, *d* і *e*, що нам вже зовсїм типові концентричні тїльця з'ображають. Для нас особливо займавою і переконуючою являє ся послїдна форма під *e*, де ми бачимо дуже хорошо заразом і типове концентричне тїльце і прилягаючу до него волосницю (в серединї єї находимо одно червоне тїльце крови), волосницю, котра також вже находить ся в стадиї твореня концентричного тїльця: endothelium починає грубіти і витворювати ядра імовірно дорогою звичайної дїлитьби, бо се найкоротший спосіб витворби нових клїтин, який довершує наглі морфольоґічні процеси клїтин і тканий, передовсїм процеси, що провадять до знидїня тканий. Ся фіґ. 6 *e*, є для нас ще з иньшого згляду дуже важною: іменно на нїй є наглядно увиднений факт, який ми в многих місцях констатували, а чого імовірно Афанассієв не постеріг, іменно, що множба ядер в концентричних тїльцях слїдує не лиш виключно на счот endothelium, але також і tunica accessoria причиняє ся в великій мірі до побільшеня числа ядер. Хочби отті чотири ядра, що прилягають зовні до концентричного тїльця і котрі ніяк не є продуктом endothelium, насувають нам повисшу гадку.

Концентричні тїльця в пізних стадиях зникають. Іменно їх клїтини ендотеліальні зливають ся мовби в одну безвиразну масу, що відтак приймає вид дрібно крупнистий і розпадає ся на дрібненькі зеренця. Найвчаснїйше однак підлягають процесови розпаду самі ядра, що відтак випадають з клїтин і осадовують ся в окружаючій ткани яко дрібно зерниста, мілка маса, що як раз прискорює патольоґічні зміни, а тим самим і нидїнє концентричних тїлець, колишних судин кровних. Очевидна річ, що в місце концентричних тїлець, як в загалї в місце усеї заникаючої глези являє ся слабка лучноткань, що тут розростає ся надзвичай швидко.

Казаринов[1]), що в своїй розвідцї о глезї силкує ся збити погляди Афанассієва, а сильно підпирає погляди Ґончарукова, мовби то концентричні тїла були останками клїтин наболонних, не знаходить в нас приклонників. Противно результати, до яких ми дійшли по дуже основних дослїдах над глезою риб, рішучо промавляють против Ґончарукова і Казаринова, а клонять ся на сторону Афанассієва[2]).

(Розвідку Казаринова хотїв я дістати в ориґіналї і робив всякі заходи, щоби єї получити. Коли однак мій труд в тім зглядї зістав без'успішним, бо навіть в Науковім Товаристві ім. Шевченка сказано менї, що годї... як нема єї в бібліотецї Товариства, я покористував ся тим, що попало в руки, а се є звітом професора Арнштайна (Arnstein) в „Jahresberichte für Anatomie und Entwickelungsgeschichte von G. Schwalbe. 1900“, що наводжу отсе в дословнім видї: „In dem adenoiden Gewebe der Follikel der Thymus findet der Autor epitheloide Zellen einzeln oder in Gruppen; nebenbei findet er häufig junge Hassal'sche Körperchen, die aus ähnlichen Zellen bestehen, daher verwirft der Autor die Ansicht von Afanassiew u. adoptirt die Ansicht von Gontscharukow (Russ. Archiv f. Pathol., clinische Medic. u. Bacteriologie 1895), laut welcher die Hassal'schen Körperchen Reste des ursprünglich epithelialen Bildungsmaterials darstellen).

---

[1]) Kasarinow G. Zur Anatomie der Gl. Thymus Dissertat. St Peterburg. 1899.

[2]) Affanassiew, Weitere Untersuchungen über den Bau und die Entwickelung der Thymus und der Winterschlafdrüse der Säugethiere. (Archiv f. microskop. Anat. Bd. XIV).

Дальшим дуже важним фактом, нами по раз перший взагалї сконстатованим, є переміна левкоцитів в червоні тїльця крови, що ми в глезї риб в перийодї єї інволюциї в великій мірі постерігали. Що глеза у риб є в можности витворювати червоні тїльця крови, сего нї котрий з повисше згадуваних авторів не слїдив. Schaffer[1]), котрого студиї в тім напрямі належать взагалї до найновійших дослїдів, прямо виключає участь глези (у риб) в твореню крови. „Der histologische Bau" — каже сей автор — „scheint meine Vermuthung, dass es sich auch hier um ein zur Bildung von Blutkörperchen in Beziehung stehendes Organ handle, nicht zu bestätigen und die einzige Analogie (роз. der Thymus der Fische) mit der Thymus der Säugethiere besteht in der innigen Verbindung von epithelialen und lymphoiden Zellen"... Ся гадка Шаффера, як також і повисше єго заперечене єствованя концентричних тїлець в глезї риб, зовсїм недоладні і доводять лише або злої методики в зладжуваню на ту цїль препаратів або взагалї доволї поспішної, поверхної роботи, що відтак довела єго до хибних результатів.

Ми на основі дуже точних помічаній дійшли до пересьвіду, що глеза gl. thymus риб не лиш тільки зовсїм гомольоґічна з глезою висших ссавців не винимаючи і чоловіка, але ми думаємо, що глеза риб, се є найнизших хребовців, задержала богато примітивних питомостий, яких вже годї добачити у висших звірят пр. у ссавців і через те она у риб представлає для помічателя більший інтерес науковий: морфольоґічні дослїди над глезою риб становлять властиву дорогу до пізнаня значеня і функциї сего орудя в тїлї зьвіринім взагалї.

Переміну левкоцитів в червоні тїльця крови бачили ми на многих препаратах; однак найвизначнїйші в тім зглядї образи получили ми з караса золотого (Carassius auratus) понад 6 cm довгого — особня, що находив ся в дуже пізній стадиї розвоєвій (се був примірник малий, що після запевнюваня торговця мав яких 7 лїт). Фіґ. 7 і 8, що зладжені саме із повисшої стадиї Carassius aur., на опак Шафферови — наглядно показують, „dass es sich hier um ein zur Bildung von Blutkörperchen in Beziehung stehendes Organ handelt".

Фіґ. 7. відрисована вірно при помочи camera lucida достатчає нам вельми богато материялу на піддержане нашої гадки. Іменно бачимо тут: 1) і типові левкоцити *a* і типові червоні тїльця крови *b*;

---

[1]) Гляди стор. 3.

2) як найвиразнїйші форми перехідні поміж обома повисшими типами клїтин: лїмфатичні ядра, означені буквою α, вправдї зовсїм ще похожі на типові лєвкоцити (a), але вже відріжняють ся від тих послїдних тонесеньким пластиком плязми; другі ядра, означені буквою β, побільшили уже значно свою плязму і через те у своїм видї далеко відійшли від лєвкоцитів, хоть ядро їх все ще таки виявляє свою ґенетичну звязь з типовими лїмфатичними ядрами; відтак клїтини γ, що вже наближають ся до червоних тїлець — а на послїдку типові вже еритроцити b.

Те саме бачимо і на Фіґ. 8, що представляє нам тож усї типи згаданих клїтин: з одної сторони (лєвкоцити) білі тїльця крови і червоні тїльця крови, з другої сторони посередні форми — усе те при сильнім побільшеню. Сей послїдний рисунок, зроблений також при помочи camera lucida, не з'ображає намоднотяглого поля, баченого в мікроскопі, але він є комбінациєю з кількох найхарактеристичнїйших партий, ілюструючих дуже наглядно найважнїйші етапи розвою червоних тїлець. Іменно, коли глядимо на глезу (під мікроскопом), почавши від долїшних, підставових верстов що-раз то висше в гору, пересуває ся перед нашими очима цїлий ряд перехідних форм, так що, вийшовши від уложених в ряди лєвкоцитів, що находять ся тут зараз при оболонцї горішної стїни ямини зявної, доходимо до як найкрасших типових форм червоних тїлець, залягаючих цїлими масами горішну полосу желези і прилягаючу (до неї) слабку лучноткань. (Замічу, що глеза в тій стадиї уже не виявляє жадної дефінїтивної форми, а лише представляє ся яко безподобна, з ріжних форм повисших клїтин зложена маса, котру наскрізь переростає сильно розвинена лучноткань).

Препарати дотичної стадиї (Фіґ. 7 і 8) специяльно для квестиї переміни червоних тїлець становлять для нас неоцїнену вартість, а то вже хочби тому, що прямо треба особлившого щастя, щоби підхопити сей розвоєвий момент, котрий — як сконстатувалисьмо — у глезї не довго треває. Іменно ми спрепарували дуже богато примірників, що на око видавали ся бути тої самої стадиї, що й повисша, однак в жаднім з них не получили ми так переконуючих і так інструктивних образів, бо всюди бачилисьмо глезу або у вчаснїйшій стадиї розвоєвій, де мала єще виразну грушковату чи палковату форму, або знов в стадиї значно пізнїйшій, де глеза ледви якимись насчадками питоменних елєментів була репрезентована.

З повисшою Фіґ. 8 єсть в тїсній звязи також і слїдуюча Фіґура 9, що нам представляє червоні тїльця крови в найпізнїйшій стадиї їх єствованя, а іменно в стадиї їх вже цїлковитого розпаду на мілку, дрібно зернисту субстанцию т. з. detritus. Сей образець, є також важним причинком до морфольоґії тілець крови взагалї, а особливо до морфольоґії тілець крови у риб, що для нас доселї є terra incognita.

Зібравши таким чином усе повисше сказане о глезї, а передовсїм, узглянивши усї три послїдні фіґури, відносячі ся до історії червоних тїлець крови, являє ся ось що:

Глеза риб становить один з найперших орудий, що в перийоді розвою свого (з наболони) витворює лєвкоцити і підмагає ними увесь орґанїзм. Коли однак виобразують ся в тілї риб иньші лїмфатичні орудя, що переймають на себе функцию глези, та послїдна стає для орґанїзма злишною і починає нидїти-заникати. Першим обявом нидїня еї є притуплене здібности клїтин наболонних в витворбі лїмфатичних клїтин, хотяй до послїдної хвилї інволюциї глези постерігаємо в тій послїдній значну скількість лєвкоцитів — значить ся: згадана здібність наболонних клїтин цїлком не уступила. Лїмфатичні клїтини одні входять до судин кровних, другі з них виходять взагалї (фіґ. 5), але без порівнаня більша їх скількість остає в тілї глези. Питанє затим, яка судьба жде тих позісталих лєвкоцитів в глезї? Отже слїдує відповідь: они перемінюють ся (те саме імовірно дїє ся і з лєвкоцитами, що увійшли до судин) в червоні тїльця крови, які в глезї в стадиї еї інволюциї цїлими збитими масами (комплєксами) наспорюють ся.

Афанасієв, котрий також помічав велику скількість червоних тїлець крови в нидїючій глезї, не могучи знайти иньшої відповіди на задаване собі питанє, звідки они тут в такій масї взяли ся, пояснює собі сю появу тим, що се як раз тїльця крови, котрі виступили з судин кровних, перемінених на концентричні тїльця. Таке заключенє Афанасієва є оправдане о стільки, що Афанасієв, не бачучи переміни лєвкоцитів в червоні тїльця крови, а лише спосіб перетворби судин кровних в концентричні тїла (де судини в наслїдок розросту endothelium поменьшують — часами цїлковито — своє сьвітло і таким чином утруднюють кружбу крови), міг зовсїм спокійно приймати, що „Der Untergang der Thymusdrüse und die Veränderungen der Intima derselben bringen ausser der Bildung der concentrischen Körper Störungen in der Blutcirculation zu Stande, die sich durch das Auswandern einer grossen Zahl weisser und rother Blutkörperchen manifestiren“. Ми рішучо сеї гадки Афанасієва не подїляємо. Після нашої гадки виступленє червоних тїлець крови з судин, котрих endothelium і tunica accessoria (оболонка прилучна) не лиш погрубшали але й скремезнїли, є прямо фізично неможливе.

Тим паче не можемо приймити повисшого погляду Афанасієва, що нам походжене червоних тілець крови, які помічаємо в глезї під кінець єї інволюциї у великих масах, є зовсім знане, як се повисше (фіґ. 7 і 8) доказано. Але натомість годимо ся вповнї з Афанасієвим, що „Die Anhäufung einer grossen Zahl angequollener (гл. фіґ. 8) und vergrösserter Blutkörperchen im Follikel kann nicht ohne Einfluss auf das betreffende Gewebe bleiben; das Reticulum sowie die Lymphelemente werden von Seiten dieser Gebilde einem Drucke ausgesetzt, atrophiren in Folge dessen und zerfallen“.

Замічу єще, що червоні тільця лише через певний час єствують в глезї в незміненій формі. По часї плязма їх і ядро приймають вид крупнистий і розпадають ся в мілкий зернистий detritus, котрий передовсїм приспішує до решти інволюцию глези, а поводує натомість скорий розріст лучноткани (роз. в місце глези).

Близші відомости що до анатомії і фізиольоґії глези (gl. thymus) подам в слїдуючій розвідцї, де будуть крім Cyprinoidei-в всякі иньші роди особливо риб морских узгляднені. Стация зоольоґічна в Терстї, куди отсе в половинї вересня с. р. під проводом ВП. професора дра О. Нусбавма в наукових цїлях виїзджаю, єсть спец্иально для сеї студиї догідним місцем; тож надїю ся зібрати богатий материял, щоби основнїйше підперти мої повисші заключеня та приспорити нових помічаний в тім предметї так займавім.

Повисша праця провожала ся в робітнї анатомії порівнательн о ц. к. унїверситета у Львові під наглядом мого Високоповажаного Професора Д-ра О. Нусбавма, котрому отсе складаю прилюдно щиро-сердечну подяку за ласкаві вказаня і інструкциї, якими підпомагав мене як в зладжуваню препаратів, так і в призбираню дотичної лїтератури. Руска термінольоґія і номенклятура тут ужита після проф. Івана Верхратского.

У Львові, дня 15. липня 1901.

Поясненя до таблиці.

Fig. 1. Часть стрілового проріза через засновок глези зарода пструга (1,5 cm. довгого). *c* cutis lamella. *r* в ряди уставлені, розповільнені клітини наболони. *l* білі тільця крови. Oc. 4, S. homog. Imm. $^{1}/_{15}$b. Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 2. Стріловий проріз через лївий засновок глези (thymus) молодого, 2,6 cm довгого караса звичайного. *b* розповільнена лучноткань. *k. e.* наболонь ями зявної. *k* хрястний завязок костий черепних. *m. m* мяз.

T Thymus. Oc. 2, S. 3. Mikr. Merk. u. Ebell. рисовано при camera lucida.

Fig. 3. Частина повизшого препарата (як фіґ. 2) з місця * при сильнїйшім побільшеню. *g* судинка кровна. *b* елєменти лучнотканні. *l* лєвкоцити (білі тілця крови). Oc. 4, S. homog. Imm. $^{1}/_{15}$ b. Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 4. Частина стрілового проріза через засновок глези Carass. vulg. 2,2 cm довгого. *k. e.* наболонь горішної стїни ямини зявної. *r* в ряди уложені клітини наболонні. *l* лєвкоцити. Oc. 2, S. hom. Imm. $^{1}/_{15}$ b. Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 5. Стріловий проріз через глезу 3 cm довгого караса золотого. *T* глеза. *b* вільна лучноткань. *k* кости черепні. *k. e* наболонь криші ями зявної. *l* лєвкоцити, що виступили громадно з глези і розсипались в окружаючій вільній лучноткани. *j* ямини повсталі в тїлї thymus, що знаменають початок єї інволюциї. *n* шпара, відділююча підставу thymus від наболони горішної стїни ями зявної. *p* підставові пласти thymus. *m* мяз. *x* місце, що виглядає як прірва межи підставою а горішною частию thymus, походить із-за того, що проріз через тїло глези є поведений більш лятерально, так що мікротом не дійшов еще до вузонької немов шийки thymus.

Oc. 2, S. homog. Immers. $^{1}/_{15}$ b. Mikroskop Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 6. Соосередні тільця a, b, c, d, e. Oc. 4, S homog. Imm. $^{1}/_{15}$ b. Mikr. Merk. u. Ebell. (tot. tubus.). Рисовано при camera lucida.

Fig. 7. Частина глези при підставі, з'ображаюча білі тільця крови (лєвкоцити) *a*, червоні тільця крови *b* і відтак всякі перехідні форми лїмфатичних клїтин в еритроцити α, β, γ. Oc. 2, S. homog. Imm. $^{1}/_{15}$ b. tot. tubus. Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 8. Зкомбінований рисунок, що нам з'ображає лєвкоцити *l*, перехідні форми лєвкоцитів в червоні тільця крови *l'*, *l''*, і відтак ріжні стадиї червоних тілец крови *r*, r', r'', r''', r''''. Oc. 4, S. hom. Imm. $^{1}/_{15}$ b. tot. tubus Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 9. Червоні тільця крови, що, осягнувши найвизшу ступінь розвитку, розпадають ся, творячи мілку нїжно крупнисту субстанцию (detritus). Oc. 2. S. hom. Imm. $^{1}/_{15}$ b. tot. tubus. Рисовано при camera lucida.

Fig. 1.

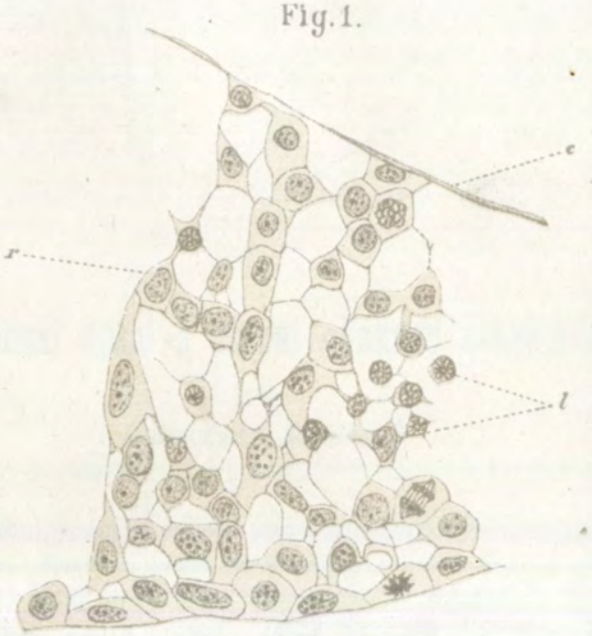


Fig. 2.

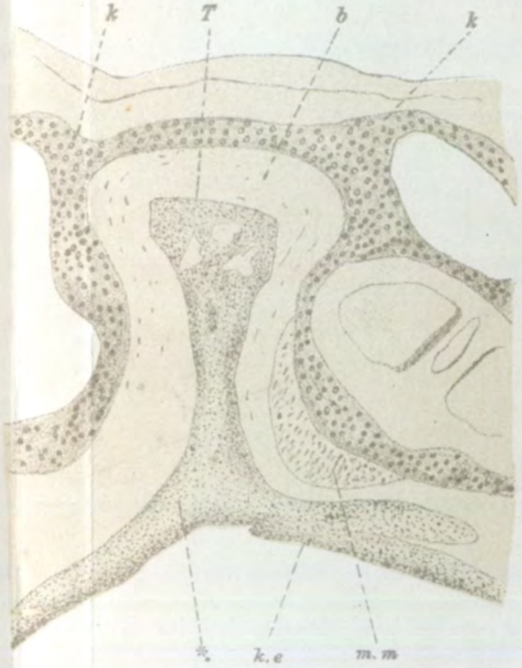


Fig. 3.

Fig. 4.

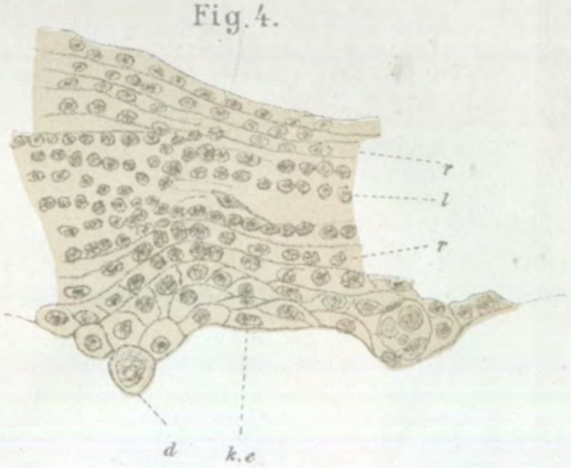


Fig. 5.

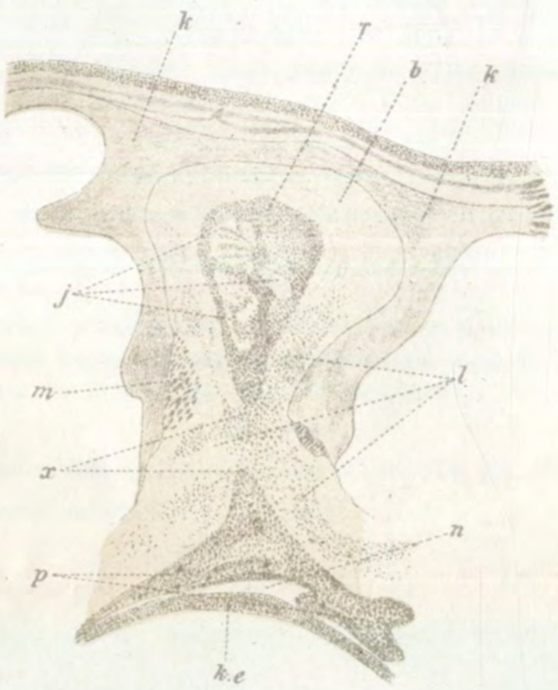


Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

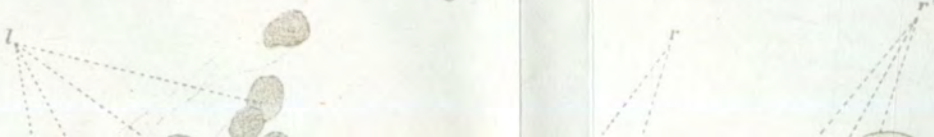


Fig. 9.

Fig. 5.

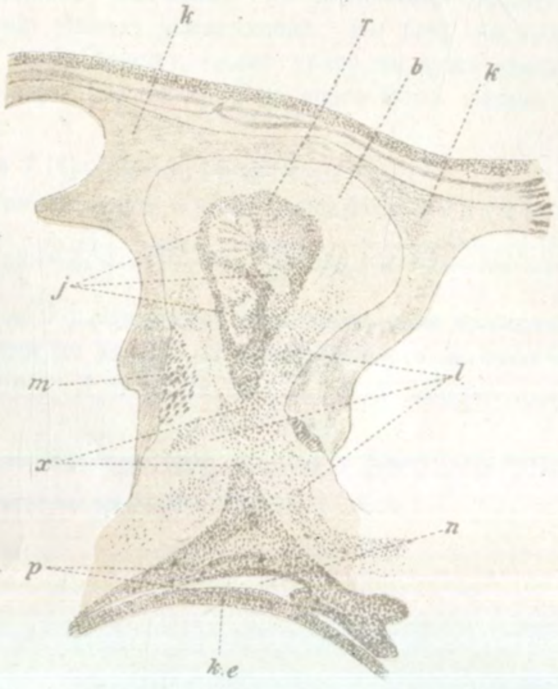


Fig. 6.

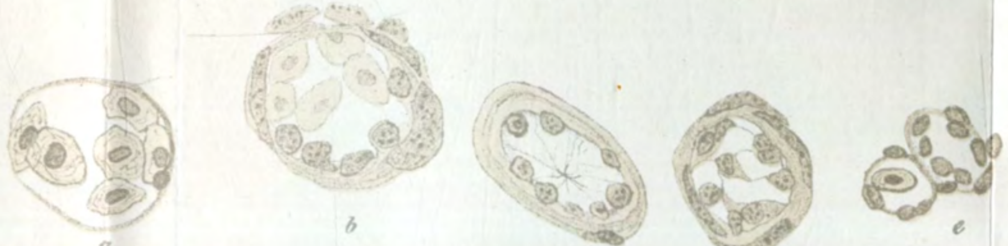


Fig. 7.

Fig. 8.

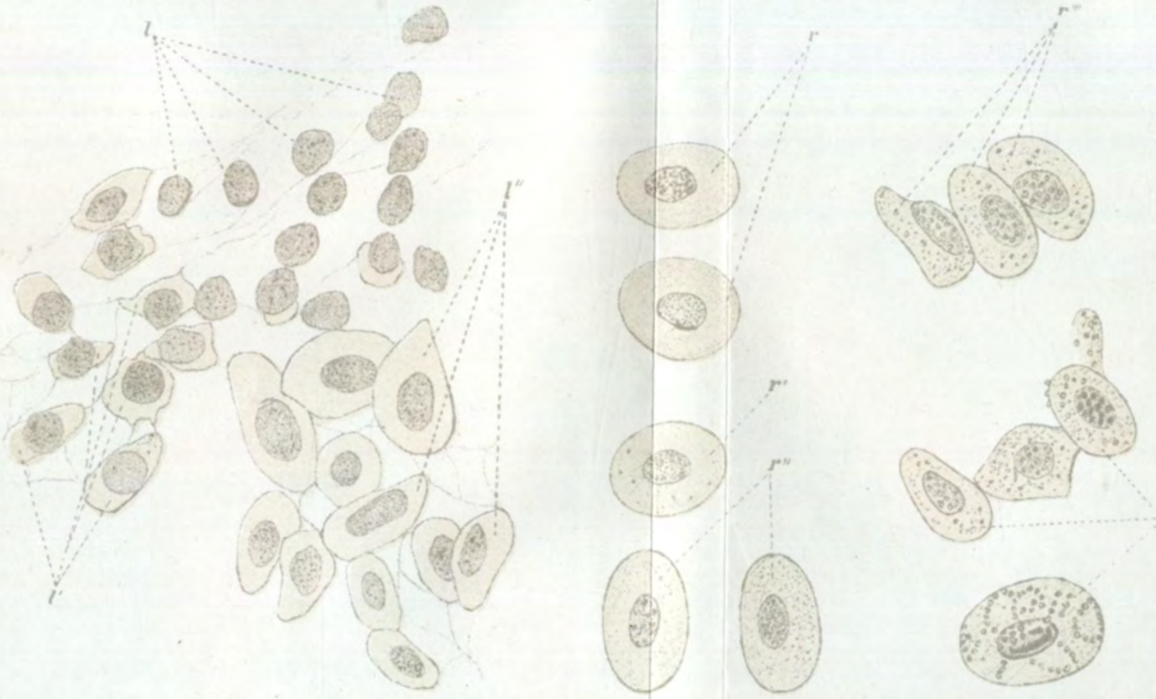
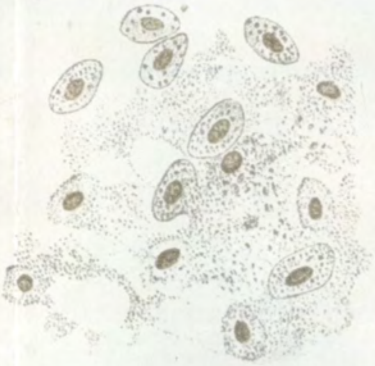


Fig. 9.



LIT. A. PRZYSZLAK LWÓW.

Найновійші праці з теориї функций аналїтичних

подав

Володимир Левицкий.

Найновійші праці в теориї рядів степенних обнимають головно три проблєми: значінє рядів розбіжних, узагальненє ряду Taylora та захованє ся ряду на обсягу збіжности. В послїдних двох роках появило ся дуже много цїнних праць, що обнимають згадані проблєми; найважнїйші є праці Borel'a, Fabry, Phragmén'a, Painlevé, Mittag-Leffler'a, Pringsheim'a та много иньших. З праць тих хочу звернути увагу головно на праці Mittag-Leffler'a та Pringsheim'a, що появились в р. 1900; но не можу нїяк поминути славної конкурсової роботи Borel'a: Mémoire sur les séries divergentes (Annales de l'École normale 1899. ст. 1—136), де сей знаменитий ґеометр займає ся значінєм рядів розбіжних і їх численними застосованями, особливо в теориї рівнань ріжничкових. Не беру ся зовсїм подавати змісту сеї праці, зверну однак увагу на дуже красне твердженє з теориї функций аналїтичних, до якого Borel дійшов в сїй роботї. Є оно таке:

Наколи $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots$

є функциєю аналїтичною, а еї долученою функциєю є функция

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \cdots + \frac{a_n z^n}{n!} + \cdots\cdots,$$

то доконечною і достаточною условиною, щоби функцию $f(z)$ можна було перевести по за лук $\alpha\beta$ кола збіжности, є, щоби істнувало число додатне $\varrho > 1$ таке, що для $|z| = \varrho$ добуток

$$e^{-a} F(az)$$

стремить одностайно до зера, наколи a росте in inf. Очевидно:

$$F(az) = a_0 + \frac{a_1 za}{1!} + \frac{a_2 z^2 a^2}{2!} + \text{-----------}$$

1. Mittag-Leffler впроваджує в своїй праці: „Sur la représentation analytique d' une branche uniforme d' une fonction monogène“ (Acta matem. т. XXIII. ст. 43—62 і т. XXIV. ст. 183—204 і ст. 205—244) нове понятє т. зв. звізди. На площі x маєм сталу точку a; з неї поведім луч (пів-луч) l і обернім єго раз довкола a та на кождім положеню луча зазначім однозначним способом таку точку a_1, що $|a_1 - a|$ є більше, як певне число додатне; $|a_1 - a|$ може бути навіть безконечно велике. Наколи $|a_1 - a|$ є скінчене, то з площі x вилучимо ту часть луча, яка іде від a_1 до безконечности. Той засяг, який остане, наколи поведемо всї тятя на пл. x, називає Mittag-Leffler звіздою; точка a є її середоточкою, a_1 вершками. Одна звізда є вписана в другу, наколи її всї точки лежать в другій, а вершки обох є спільні. Наколи маєм числа сталі: F(a), $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, ---------, що підлягають правилу Cauchy т. є. що границя $\left|\sqrt{\frac{1}{\mu!}F^{(\mu)}(a)}\right|$ є скінчена, то згадана звізда A є їх звіздою основною.

З даної звізди E можемо дістати нові звізди $E^{(n)}$, де n є якесь дане число додатне, слїдуючим способом. Возьмім число додатне r достаточно мале і на лучу l, що виходить з a, відмірмо (n—1)r; кожде коло зачеркнене з якої небудь точки того луча, заключає в собі часть звізди E. Наколи горішна границя для r є ϱ і наколи на l відміримо довгість $n\varrho$ і обернемо l раз довкола a, дістанемо звізду $E^{(n)}$. Звізда $E^{(1)}$ є колом, звізда $E^{(n+1)}$ обнимає звізду $E^{(n)}$, а всї звізди $E^{(1)}$, $E^{(2)}$,--------- творять часть звізди E.

До $E^{(n)}$ долучимо n иньших звізд $E_\mu^{(n)}$ ($\mu = 1, 2, \text{-----} n$) в сей спосіб, що положимо $\varrho_\mu = \alpha^\mu \varrho$, де $o < \alpha < 1$; конструкция є така, як в горі. Звізда $E_\mu^{(n)}$ лежить в $E_{\mu-1}^{(n)}$;. $E_0^{(n)} = E^{(n)}$.

Подібно як $E^{(n)}$, так само будуємо звізди $E^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ із звізди E о середоточцї a. На лучу l будуєм систем n колес о середоточках a $\eta_1\ \eta_2 \text{-----} \eta_{n-1}$; кожде коло переходить через середоточку попередного; їх лучі є r, r_1,----r_{n-1}. Середоточки $\eta_1\ \eta_2 \text{-----} \eta_{n-1}$ вибираєм в сей спосіб, щоби кожде коло перетинало попередне в точках стичности стичних ідучих з a, та щоби $|\eta_1 - a| = r_1 = r$. Наколи r є достаточно мале, то наш систем колес творить все часть звізди E;

наколи на l відміримо довгість $|\eta_{n-1} - a| + r_{n-1}$ і підставимо за r горішну границю ϱ та обернемо l раз довкола a, дістанемо звізду

$$E^{\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Наколи F(x) є функция аналїтична, то она є схарактеризована через елєменти $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, …… $F^{(\mu)}(a)$, ……, до яких стосує ся правило Cauchy, що границя $\left|\sqrt[\mu]{\frac{1}{\mu!}\,F^{(\mu)}(a)}\right|$ є скінчена. Галузь функциї F(x) є представлена через ряд степенний $\mathfrak{P}(x|a)$, а єї переведеня є в звіздї A одностайні і правильні. Галузь ту значить Mittag-Leffler для звізди A через FA(x) і випроваджує цїлий ряд важних теоремів, які ми низше подамо (без довгих та глубоких доказів M. Lefflera).

a) Галузь FA(x) можна всюда представити рядом $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu}(x)$, де $G_{\mu}(x)$ є функциєю цїлою:

$$G_{\mu}(x) = \sum_{\nu} c_{\nu}^{(\mu)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu};$$

сочинники $c_{\nu}^{(\mu)}$ є дані à priori независимо від вибору a і $F^{(\nu)}\left(\nu = 0,\ 1, \cdots \infty;\ F^{(0)}(a) = F(a)\right)$.

Ряд $\Sigma\, G_{\mu}(x)$ є збіжний в кождій точцї звізди A, а одностайно збіжний в кождім обсягу в серединї звізди A. Сочинники $c_{\nu}^{(\mu)}$ мають ту вид:

$$c_{\nu}^{(\mu)} = \frac{1}{\mu^{\nu}} \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda_1!\, \lambda_2! \cdots \lambda_n!},$$

a:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu}(x) = \lim_{n=\infty} G_n(x|a),$$

де:

$$G_n(x|a) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!\, \lambda_2! \cdots \lambda_n!}\, F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

Сей ряд $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu}(x)$ не є однак одностайно збіжний в continuum, яке обнимає в собі один з вершків звізди A. В внутрі звізди A галузь FA(x), здефінїована тим рядом, є правильна кромі вершків звізди і має власність:

$$\left(\frac{d^{\mu} FA(x)}{dx^{\mu}}\right)_{x=a} = F^{(\mu)}(a) \qquad \mu = 0, 1, 2, \text{.....}$$

Повисший ряд можна уважати за узагальненє ряду Taylor'a.

б) Ряд $G_n(x|a)$, де $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ... є величини, що підлягають праву Cauchy, інакше ся поводить для $n = 1, 2, 3$, а інакше для $n > 3$. В першім случаю істнує такий обсяг збіжности K — який одержимо через конструкцию звізди $E^{(n)}$ з огляду на A — що ряд є одностайно збіжний в кождім обсягу в внутрі K, но перестає бути збіжний для кождої точки вні K. Для $n > 3$ ряд не має такого обсягу K. В тім случаю можна через вибір величин $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ... зробити, що ряд буде збіжний в точцї x', а не є збіжний в точцї x'', що лежить на лучу, сполучаючім a з x'.

в) Наколи возьмем ряд:

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1 \lambda_2 .. \lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) (x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} = FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x),$$

де сочинники $c_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}$ не є залежні від F, a і x, то можна ті сочинники так вибрати, що ряд сей буде збіжний в певній звіздї $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ і представляє там галузь $FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x)$, а вні тої звізди є розбіжний. Та звізда є вписана в звізду основну величин $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ... і для $n \geq \overline{n}$, де $\overline{n}$ є число додатне достаточно велике, замикає сама в своїм внутрі обсяг скінчений, що належить до внутра звізди A. Звізда $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ є кромі сего вписана в звізду $A^{\left(\frac{1}{n'}\right)}$ для $n < n'$.— Висше наведений ряд стаєсь для $n = 1$ рядом Taylor'a.

г) Возьмім ряд:

$$G_m^{(n)}(x|a) = \sum_{\lambda_1=0}^{m} \sum_{\lambda_2=0}^{m^2} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{m^n} \frac{1}{\lambda_1!\, \lambda_2! \cdots \lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+..+\lambda^n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n},$$

то істнує звізда A_n вписана в A — одержимо єї так, як $E^{(n)}$ для

E — така, що $\lim\limits_{m=\infty} G_m^{(n)}(x|a)$ є одностайно збіжна для кождого обсягу в внутрі A_n і представляє там галузь $FA_n(x)$.

д) Найже функция $f_\alpha(x, y, z, ...)$ змінних $x, y, z, ...$ буде для безконечного числа вартостий α означена однозначно в обсягу K_α, так що кождий обсяг K_α стає ся тою самою частию обсягу K, наколи α зближає ся безконечно до границї α_0. Найже $(x, y, z, ...)$ представляє якусь точку в внутрі K і най кожде число додатне σ відповідає иньшому числу додатному δ такому, що функциї $f_{\alpha'}(x\ y\ z,...)$ і $f_{\alpha''}(x\ y\ z,...)$ мають значінє і що $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma$, наколи $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$. Тодї $\lim\limits_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x\ y\ z...)$ має точне значінє для кождої точки в внутрі, значить ся, є *одностайно збіжне в точцї* $(x\ y\ z...)$.

Наколи $\alpha_0 = \infty$, то $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$ заступаємо через $\left|\frac{1}{\alpha'}\right| < \delta$, $\left|\frac{1}{\alpha''}\right| < \delta$.

Наколи $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma$ в обсягу X, то кажемо, що $\lim\limits_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x\ y\ z...)$ є в тім обсягу одностайно збіжне.

е) Возьмім під увагу звізду A з середоточкою a і звізду $A^{(\alpha)}$ співосередну з нею і вписану в ню $(o < \alpha < 1)$, та най звізда $A^{(\alpha)}$ буде утворена через функцию творячу:

$$f(u|\alpha) = K\ u\ e \int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right] du \quad ,$$

де $\alpha = 1 - \beta$, $o < \alpha \leqq 1$, а K стала независима від u.

Можна ту функцию f все так вибрати, що при достаточно малім α звізда $A^{(\alpha)}$ заключає в своїм внутрі обсяг даний уміщений в A, так що для $\alpha = 1$ звізда $A^{(1)}$ переходить в коло співосередне з A і вписане в A.

Ту функцию $f(u|\alpha)$ можна далї вибрати так, що, коли A є основною звіздою для величин $F(a)$, $F^{(1)}(a)$..........., ряд

$$S_\alpha(x|a) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a),$$

де:

$$G_\nu(x-a) = \frac{h_{\nu-1}^{(1)}}{1!(\nu-1)!} \overset{(1)}{F}(a)(x - a) + \frac{h_{\nu-2}^{(2)}}{2!(\nu-2)!} \overset{(2)}{F}(a)(x - a)^2 + \cdots\cdots\cdots + $$

$$+ \frac{h^{(\nu-1)}}{(\nu-1)!\,1!} \overset{(\nu-1)}{F}(a)\ (x - a)^{\nu-1} + \frac{h_0^{(\nu)}}{\nu!\ a!} \overset{(\nu)}{F}(a)(x - a)^\nu$$

і де $h^{(\mu)}_{\nu-\mu}$ $\begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \cdots \nu \\ \nu = 1, 2, \cdots \infty\end{pmatrix}$ є сталі додатні означені, зависимі тілько від функциї творячої — ряд $S_\alpha(x|a)$ має звізду збіжности ідентичну з $A^{(\alpha)}$, так що в внутрі $A^{(\alpha)}$ є:

$$FA(x) = S_\alpha(x|a),$$

а для $\alpha=1$ S_α переходить в ряд Taylor'а.

$\lim\limits_{\alpha=0} S_\alpha(x|a)$ має звізду ідентичну зі звіздою A, а рівність

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} S_\alpha(x|a)$$

істнує всюди в внутрі A.

Дальше можна ту функцию $f(u|a)$ так вибрати, що:

1) Наколи α є дане, границя горішна вартостий $\left|\sqrt[n]{G_\nu(x-a)}\right|$ $(\nu = 1, 2, \cdots \infty)$ рівнає ся 1 для x в внутрі $A^{(\alpha)}$, а є більша як 1, коли x лежить вні звізди $A^{(\alpha)}$.

2) Наколи x лежить в основній звізді A, істнує все таке число $\alpha_0 < 1$, що для $\alpha < \alpha_0$ границя горішна $\left|\sqrt[n]{G_\nu(x-a)}\right| = 1$, а наколи x лежить вні A, границя та є більша як 1.

ж) Наколи E є звізда співосередна, гомотетична і в внутрі звізди $A^{(\alpha)}$, а x є точка на контурі E, а g границя горішна функций $|FA^{(\alpha)}(x)|$, коли x біжить по контурі, та наколи:

$$FA^{(\alpha)}(x) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a),$$

то:

$$|G_\nu(x-a)| < g \quad (\nu = 1, 2, \cdots \infty)$$

Най $\alpha = 1$, то наколи Є є коло збіжности, а r число додатне меньше як обсяг збіжности ряду Taylor'а:

$$F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \overset{(\alpha)}{F}(a)(x-a)^\nu,$$

та наколи g є границя горішна для $|F(x)|$ на колї о лучу r, а о середоточцї a, а точка x є на колї, то:

$$\left|\frac{1}{\nu!} \overset{(\nu)}{F}(a)(x-a)^\nu\right| < g \qquad \nu = 1, 2, \cdots \infty.$$

2. E. Phragmén в нотї: „Sur une extension d'un théorème de Mittag-Leffler“ (Comptes rendus CXXVIII 1899. 1. ст. 1434) розширяє початкові теореми Mittag-Leffler'а слїдуючим способом:

Маєм дану криву C правильну або утворену з кусників кривих правильних, яка не переходить анї через початок анї через безконечність, замкнену або нї; тятєм є луч від початку до одної якоїсь точки. Найже f(x) буде функция аналїтична правильна в всїх точках кривої C. Phragmén дефінїює обсяг B (анальоґічний до звізди M. Leffler'а). На кождім лучу, що іде з початку та перетинає криву C, відтинаєм по обох сторонах точки перетятя части тяглі, на яких функция f(x) остає правильна і то части можливо великі. Ті части луча задержуємо, решту відкидаємо; ті задержані части творять обсяг B.

Приймім, що по всїх дорогах в внутрі B f(x) дає ся інтеґрувати. Возьмім сталі:

$$c_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z^{\lambda+1}} \qquad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$$

і многочлени $G_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots\ldots$) такі, що $\lim G_\nu(x)$ стремить до границї $\frac{1}{1-x}$ в цїлім обсягу, в якім не ма точки, лежачої на оси дійсній між 1 і ∞ (incl. 1 і ∞).

Утворім символїчне вираженє:

$$G_\nu(xc) + \frac{1}{x\,c}\,G_\nu\left(\frac{1}{x\,c}\right),$$

де степенї c^λ треба заступити вираженями c_α; тодї

$$\lim \left[G_\nu(xc) + \frac{1}{xc}\,G_\nu\left(\frac{1}{xc}\right)\right]$$

представляє функцию f(x) в цїлім обсягу B і є одностайно збіжний в кождім обсягу в внутрі B.

2. Дослїди A. Pringsheima, поміщені в розправі: Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise“ (Sitz. Berichte der k. bayr. Akad. der Wissensch. in München 1900. ст. 37--100) займають ся захованєм ряду степенного на обводї кола збіжности, т. є. ряду:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\, x^\nu \qquad (a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu\, i)$$

для $X = Re^{\vartheta i}$, де R є луч кола збіжности.

Розслїди ті коротко зреасумуемо, а іменно наведемо вислїди, до яких Pringsheim доходить.

а. Наколи Σa_ν є властиво розбіжне, то границя $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X) = \infty$, де ϱ є дійсне додатне число меньше як 1. Властиву розбіжність ряду $\Sigma a_\nu = \Sigma(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ розуміти треба в сей спосіб, що що найменьше один з рядів $\Sigma\alpha_\nu$ і $\Sigma\beta_\nu$ є розбіжний до $\pm\infty$.

Наколи $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ для якогось місця X має означену вартість, то ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$ мусить бути або збіжний або невластиво розбіжний.

Сума $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{\nu\vartheta i}$ є тоді збіжна, наколи границя $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho e^{\vartheta i})$ має означену вартість для якогось місця $e^{\vartheta i}$, а члени $(\alpha_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta)$ мають для себе (що найменьше для $\nu \leqq n$) рівні знаки, а так само члени $(\alpha_\nu \sin\nu\vartheta + \beta_\nu \cos\nu\vartheta)$.

б. Наколи ряд $\mathfrak{P}(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} a_\nu x_\nu$ є збіжний для $|x| < r \leqq 1$, то істнують слїдуючі дві трансформациї:

$$\mathfrak{P}(x) = (1-x)\sum_{1}^{\infty} s^\nu x^\nu$$

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} s'_\nu x^\nu + (1-x)\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu+1} s'_\nu x^\nu,$$

де:

$$s_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\nu} a_\lambda, \qquad s'_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \lambda a_\lambda.$$

Наколи границя $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = 0$, де $s_n = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} a_\lambda$, то тоді є також:

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varrho^\nu = 0.$$

в. Конечною і достаточною условиною, щоби $\sum\limits_{1}^{\infty} a_\nu$ була збіжна, є условини:

$$\lim_{\varrho=1} \sum^{\infty} a_\nu \varrho^\nu = A \text{ (означене число)}$$

і:
$$\lim \frac{s'_n}{n} = 0. , \qquad \text{де } s'_n = \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda\, a_\lambda.$$

Обі ті умови подав вже давнійше Tauber (Monatshefte für Math. i Phys. 1897.) Можна їх розширити і виповісти дуже важний теорем.

Щоби ряд $\mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n x^n$ був збіжний для якогось місця $x = X$ (на обводї обсягу збіжности), є конечною і достаточною условиною, щоби границя $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ мала скінчену вартість, та щоби:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left(1\, a_1\, X + 2\, a_2\, X^2 + - + n\, a_n\, X^n \right) = 0.$$

Наколи $\lim\limits_{n=\infty} n\, a_n = 0$, то ряд $\mathfrak{P}(x)$ є збіжний для кождої точки $x = X$ такої, що $|X| = 1$, наколи там $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ має скінчену вартість.

Най $\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$ має коло збіжности $|x| = 1$, то для $|x| < 1$ дефінїює сей рад однозначну і тяглу функцию, яку назначимо $f(x)$. На обводї кола є:

$$f(X) = \lim_{\varrho=1} f(\varrho X) = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X).$$

Для такого місця X, де $\lim \mathfrak{P}(\varrho X)$ не істнує, є $f(X)$ неозначена. Pringsheim називає ту функцию $f(x)$ функциєю приналежною до $\mathfrak{P}(x)$ (zugehörig), а $f(X)$ приналежною функциєю крайною (zugehörige Randfunction).

Є можливий такий случай, що ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$ збіжний в колї $|x| = 1$ має на кождім лучу та здовж цїлого обводу скінчену та тяглу крайну функцию $f(X)$, а мимо того $f(x)$ в окруженю нїякого місця X не буде анї тягла анї скінчена. Пр. функция $f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x-1}\right)^4}$ є на кождім лучу та здовж цїлого обводу без винятку тягла, а мимо то не є анї тягла анї навіть скінчена для найменьшого окруженя точки x=1.

Вже давнійше доказав Pringsheim (Sitz. Ber. der k. bay. Akad. 1895. ст. 337), що ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$, який є еще в загалї збіжний і на місцях $X = Re^{\vartheta i}$, є в загалї рядом Fourier'а. Тепер на основі сего випроваджує нові тверджeня.

г. Наколи функция Fourier'а $f(x)$, яка належить до ряду $\mathfrak{P}(x) = \Sigma\, a_\nu x^\nu$, а також і квадрат єї беззглядної вартости, дає ся *в* колї збіжности і *на* нїм одностайно інтеґрувати, то тодї збіжний є ряд $\Sigma\, |a_\nu|^2$, а також ряд $\Sigma\, C_\nu^{-\frac{1}{2}}\, |a_\nu|$, де $\Sigma\, C_\nu^{-1}$ є який-небудь збіжний ряд з додатними членами.

З того слїдує дальше дуже важне тверджене:

Ряд степенний $\Sigma\, a_\nu x^\nu$ є також на обводї кола збіжности абсолютно збіжний, наколи приналежна до него функция Fourierа $f(x)$ (в колї 1) має в окруженю точок обводу збіжности єще в заґалї тяглу походну таку, що єї квадрат стає ся безконечностию що-найбільше на такій скількости тих точок ряду низшого як перший, яка ся дає зредукувати.

д. Далї займає ся Pringsheim рядами степенними, які є на обводї збіжности **без винятку** (ausnahmslos) збіжні, а мимо того **не є абсолютно** збіжні. Пр. така є функция $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$; $f(e^{\vartheta i})$ є скінчено-нетягла. Такі ряди, які без винятку, але услівно є збіжні на колї $|x| = 1$, мають вид:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} x^\nu ,$$

де ε_ν є відповідно ± 1, а M_ν є ряд додатних чисел, які одностайно ростуть в безконечність, так що $M_\nu > \nu$, а $\Sigma \frac{1}{M_\nu}$ є розбіжна; пр. $M_\nu = \frac{1}{\nu \log \nu}$. Можна одержати ряди, що ся заховують анальоґічно, наколи M_ν так виберем, що $\Sigma \frac{1}{M_\nu^2}$ є збіжна; а іменно виберем M_ν так, що:

$$M_\nu = \sqrt{\nu}\, m_\nu , \quad \text{де} \lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty ,$$

а:

$$\varepsilon_\nu = (-1)^{\sqrt{\nu}-1}$$

Тодї покаже ся, що конечною условиною, щоби ряд $\Sigma\, a_\nu$ був збіжний, де $a_\nu = (-1)^{\sqrt{\nu}-1} \frac{1}{\sqrt{\nu}\, m_\nu}$, є, щоби $\lim\limits_{\nu=\infty} m_\nu = \infty$, а достаточною, щоби m_ν росло одностайно, а $\Sigma \frac{1}{\nu\, m_\nu}$ була збіжна.

Тоді ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu X^\nu$, де a_ν має повисше значінє, а $|X| = 1$, є збіжний без винятку. Но ряд сей буде услівно збіжний, наколи m_ν так виберем, що вправдї $\Sigma \frac{1}{\nu\, m_\nu}$ є збіжна, але сума $\Sigma \frac{1}{\sqrt{\nu} . m_\nu}$ є розбіжна. Пр. вистарчить покласти:

$$m_\nu = (\sqrt{\nu})^\varepsilon,\quad (\lg\nu)^{1+\varepsilon},\quad \lg\nu\,(\lg\nu)_{\cdots\cdots}^{1+\varepsilon}, \text{ де } \varepsilon > 0.$$

Істнують отже ряди степенні $\mathfrak{P}(x) = \overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}\, a_\nu\, x^\nu$ з обсягом збіжности 1, які для $|x| = 1$ є еще збіжні без винятку, але услівно; противно $k = 2$ є найменьший виложник, для якого $\Sigma\, |a_\nu|^k$ є збіжна, отже сума $\Sigma\, a_\nu^k\, X^k$ є абсолютно збіжна.

e. В кінци займає ся Pringsheim звязею, яка заходить між дійсною а мнимою частию крайної функциї.

$$f(\varrho\, e^{\vartheta i}) = \Sigma\,(\alpha_\nu + \beta_\nu)\,\varrho^\nu\, e^{\nu\vartheta i} = \varphi(\varrho\vartheta) + i\,\psi(\varrho\vartheta) \qquad \varrho<1.$$

де:

$$\varphi(\varrho\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta)\,\varrho^\nu$$

$$\psi(\varrho\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\beta_\nu \cos\nu\vartheta + \alpha_\nu \sin\nu\vartheta)\,\varrho^\nu$$

Ряд $\varphi(\vartheta) = \Sigma\,(\alpha_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\vartheta)$ (отже для $\varrho=1$ на обводї обсягу) є збіжний або властиво розбіжний, після того, чи гранична вартість:

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{n=\infty}\int_0^\pi \Big\{\psi(\vartheta+\alpha) - \psi(\vartheta-\alpha)\Big\}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\,(1-\cos n\alpha)\,d\alpha$$

випаде скінчена, чи безконечно велика. Конечним і достаточним для збіжности ряду $\varphi(\vartheta)$ є, щоби

$$\lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+\alpha)-\psi(\vartheta-\alpha)}{\alpha}\,(1-\cos n\,\alpha)\,d\alpha$$

рівночасно з ε стреміло до зера.

Ряд $\varphi(\vartheta)$ є властиво розбіжний, наколи $\psi(\vartheta+\alpha) - \psi(\vartheta-\alpha)$ має для $\alpha < \varepsilon$ сталий знак, а для $\lim \alpha = 0$ стремить до зера не сильнїйше, як $\left(\lg_1 \frac{1}{\alpha}\, \lg_2 \frac{1}{\alpha} \cdots\cdots \lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-1}$ при так великім k, як хочемо.

Ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$, якого функция крайна $f(e^{\vartheta i})$ дає ся абсолютно, а при переході до обводу кола збіжности в загалї одностайно інтеґрувати, є властиво розбіжний на всїх місцях перерви функциї $f(e^{\vartheta i})$ (Sprungstellen). Місце перерви є таке, де:
$\underline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta+\alpha) > \overline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta-\alpha)$, або $\overline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta+\alpha) < \underline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta-\alpha)$.

Ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$, який для якогось тяглого кусника свого обводу є збіжний, ріжнить ся — яко ряд зложений з двох від себе залежних рядів Fourier'а — від звичайного ряду Fourier'а в своїй істотї через се, що єго сума [сума $\mathfrak{P}(x)$] нїколи не може мати скоків (перерв). За се не є виключене виступуванє нетяглости без скоків, т. є. такої, де:

$$\underline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta+\alpha) < \overline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta \quad \alpha)$$

і

$$\overline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta+\alpha) > \underline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta-\alpha).$$

Ряд $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ є збіжний на кождім місци ϑ, де дїйсна або мнима часть функциї $f(e^{\vartheta i})$ є тягла та має міру тяглости, яка сповняє (на право та лїво) умову:

$$|\psi(\vartheta \pm \alpha) - \psi(\vartheta)| \lesssim \left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \lg_2 \frac{1}{\alpha} \cdots \lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \left(\lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-\varrho} (\varrho > 0).$$

Göttingen, *в мартї 1901.*

Додаток до теориї дробів тяглих та ґрупи модулової.

(Друга нота.)

Написав

Володимир Левицкий.

1. В першій розвідцї[1] розслїджував я трансформациї модулові форми:

$$Uz = -\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cdots - \cfrac{1}{a+z}}}} = TS^a TS^a T\cdots TS^a z$$

де основні трансформациї мають вид:

$$Sz = z + 1, \quad Tz = -\frac{1}{z} \quad (z = x + iy)$$

і показав, як можна безпосередно обчислити таку *n*-кратну ітерацию без звиваня дроба тяглого. Взір, який я подав, дає спроможність повисший тяглий дроб обчислити без знаня вартостий приближених.

Тепер маю намір піддати розслїдам зовсїм загальний случай модулових трансформаций:

$$Uz = TS^{a_n} TS^{a_{n-1}} TS^{a_{n-2}} T\cdots TS^{a_1} z \qquad 1)$$

і

$$Uz = S^{a_n} TS^{a_{n-1}} TS^{a_{n-2}} T\cdots TS^{a_1} z \qquad 2)$$

---

[1] Збірник мат.-природ. т. IV. зош. 2.; також Monatshefte für Math. u. Phys. р. XI. ст. 118 sqts. (Wien).

(a_n, a_{n-1}, ····· числа цілі дійсні), отже розслїдити дроби тяглі форми:

$$Uz = -\cfrac{1}{a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \cdots - \cfrac{1}{a_1 + z}}}} ,$$

і

$$Uz = a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \cdots - \cfrac{1}{a_1 + z}}} .$$

Ті розслїди дадуть нам вигідні форми до обчисленя повисше наведених дробів тяглих, зглядно дадуть нам можність найти місце, до якого загальна модулова трансформация переносить точку z півплощі.

2. Наколи означимо дроб тяглий:

$$\cfrac{1}{a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \cdots - \cfrac{1}{a_1 + z}}}}$$

через $\varphi_n(z)$, дістанемо, як се очевидно, слїдуючу реляцию:

$$a_{n+1} - \varphi_n = \frac{1}{\varphi_{n+1}} \qquad 3)$$

Впровадьмо виражене:

$$\frac{1}{\varphi_n \varphi_{n-1} \varphi_{n-2} \cdots \varphi_1} = F_n(z) \qquad 4)$$

то після 3) дістанемо:

$$\frac{a_{n+1} - \varphi_n}{\varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_1} = F_{n+1}(z)$$

або, що на одно виходить,

$$a_{n+1} F_n - F_{n-1} = F_{n+1}(z) \qquad 5).$$

На основі сеї реляциї можем виписати слїдуючі рівнаня в числї (n—2):

$$\left.\begin{array}{llll}
a_n & F_{n-1} - F_{n-2} & = & F_n \\
a_{n-1} & F_{n-2} - F_{n-3} & = & F_{n-1} \\
a_{n-2} & F_{n-3} - F_{n-4} & = & F_{n-2} \\
a_{n-3} & F_{n-4} - F_{n-5} & = & F_{n-3} \\
\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\
a_3 & F_2 - F_1 & = & F_3
\end{array}\right\} \qquad 6).$$

3. Щоби з сих рівнань виелїмінувати величини F_{n-1}, F_{n-2}, $F_{n-3}, \cdots$, творимо слїдуючі вираженя:

$$\begin{array}{l}
a_n = C_n^{(0)}, \quad C_n^{(-1)} = 1 \\
a_{n-1}\, a_n - 1 = C_{n-1}^{(0)}\, C_n^{(0)} - C_n^{(-1)} = C_n^{(1)} \\
a_{n-2}\, C_n^{(1)} - a_n = C_{n-2}^{(0)}\, C_n^{(1)} - C_n^{(0)} = C_n^{(2)} \\
a_{n-3}\, C_n^{(2)} - C_n^{(1)} = C_{n-3}^{(0)}\, C_n^{(2)} - C_n^{(1)} = C_n^{(3)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n-t}\, C_n^{(t-1)} - C_n^{(t-2)} = C_{n-t}^{(0)}\, C_n^{(t-1)} - C_n^{(t-2)} = C_n^{(t)}
\end{array}$$

при чім треба покласти $n > t$; $n = 0, 1$ треба відкинути, бо в тім разї приходилоб в повисших вираженях a_0, отже член, якого в дробі тяглім нема.

Для $t = 0$ дістанемо з послїдного рівняня:

$$C_n^{(0)} = C_n^{(0)}\, C_n^{(-1)} - C_n^{(-2)},$$

отже $C_n^{(-2)} = 0$;

для $t = -1$ дістанемо:

$$C_n^{(-1)} = C_{n+1}^{(0)}\, C_n^{(-2)} - C_n^{(-3)},$$

отже:

$$C_n^{(-3)} = - C_n^{(-1)} = -1$$

і т. д.; загально дістанемо:

$$C_n^{(-2s)} = 0, \quad C_n^{(-(4s+1))} = 1, \quad C_n^{(-(4s+3))} = -1 \qquad (n > 1).$$

Очевидно: $C_{-n}^{(t)} = 0$.

Наколи помножимо рівняня 6) постепенно через:

$$\begin{array}{l}
1 \\
C_n^{(0)} \\
C_n^{(1)} \\
C_n^{(2)} \\
C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(0)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(-1)} \\
C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(1)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(0)} \\
C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(2)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(1)} \\
C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(3)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(2)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(n-8)}
\end{array}$$

і додамо, то дістанемо сейчас:

$$F_n = (a_3 F_2 - F_1)(C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}) - (C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-9)}) F_2 \quad 7)$$

а що:

$$\varphi_n = \frac{F_{n-1}(z)}{F_n(z)},$$

то дістанемо *форму, якої шукаємо:*

$$\varphi_n(z) = \frac{(a_3 F_2 - F_1)(C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-9)}) - (C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-9)} - C_n^{(1)} C_{n-5}^{(n-10)}) F_2}{(a_3 F_2 - F_1)(C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}) - (C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-9)}) F_2} \quad 8).$$

Ся форма має однак лиш значінє для $n > 5$, бо на случай $n = 5$ виступає C_0, що ми виключили; що так є, слїдує з відси, що ми доперва пяте рівнанє помножили через такий чинник, як прочі, підчас коли $\varphi_5 = \frac{F_4}{F_5}$.

Для $n \leq 5$, де отже скількість членів є дуже мала, можем від разу виписати слїдуючі очевидні форми:

$$\varphi_3 = \frac{F_2}{a_3 F_2 - F_1}, \quad \varphi_4 = \frac{a_3 F_2 - F_1}{(a_3 F_2 - F_1) C_4^{(0)} - F_2}, \quad \varphi_5 = \frac{(a_3 F_2 - F_1) C_4^{(0)} - F_2}{(a_3 F_2 - F_1) C_5^{(1)} - C_5^{(0)} F_2}.$$

На случай $n = 6$ виступають в загальній формі чинники $C_1^{(-4)}$ і $C_1^{(-3)}$, які ми висше вилучили. Наколи однак розважимо, що:

$$\varphi_6 = \frac{F_5}{F_6}$$

та порівнаємо вираженє:

$$F_5 = (a_3 F_2 - F_1) C_5^{(1)} - C_5^{(0)} F_2$$

з чисельником форми 8), то дістанемо сейчас:

$$C_1^{(-3)} = -1, \quad C_1^{(-4)} = -\frac{C_5^{(0)} + C_5^{(2)}}{C_5^{(1)}}$$

так що форма 8) дає ся застосувати для всїх тяглих дробів, де $n \geq 6$. Форма та є особливо догідна для висших n, як се сейчас на примірах побачимо.

Наколи в $\varphi_n(z)$ змінимо знак, дістанемо трансформацию модулову 1), наколи обчислимо $\varphi_{n-1}(z)$ та утворимо вираженє $a_n - \varphi_{n-1}(z)$, дістанемо трансформацию 3).

4) Тепер випробуєм вірність форми 8) на примірах.

а) Най:

$$\varphi_6(z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1+z}}}}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1+z}{z}}}}} =$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{z}{2z-1}}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{2z-1}{3z-2}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{3z-2}{4z-3}} = \frac{4z-3}{z-1}.$$

Рахунок є отже досить довгий, як бачимо; а тимчасом на основі форми 8) дістанемо:

$$F_1 = 1 + z, \quad F_2 = z$$

$$\varphi_6 = \frac{(2z-1)\left(C_5^{(2)} C_2^{(-2)} - C_5^{(1)} C_1^{(-3)}\right) - \left(C_5^{(2)} C_2^{(-3)} - C_5^{(1)} C_1^{(-4)}\right) F_2}{(2z-1)\left(C_6^{(2)} C_3^{(-1)} - C_6^{(1)} C_2^{(-2)}\right) - \left(C_6^{(2)} C_3^{(-2)} - C_6^{(1)} C_2^{(-3)}\right) F_2}.$$

А що:

$$C_2^{(-2)} = 0,\ C_2^{(-3)} = -1,\ C_5^{(1)} = 3,\ C_5^{(2)} = 7,\ C_6^{(1)} = 1,\ C_6^{(2)} = 1,\ C_3^{(-1)} = 1,$$
$$C_1^{(-3)} = -1,\ C_1^{(-4)} = -3,$$

то вийде сейчас:

$$\varphi_6 = \frac{(2z-1)\,3 - (-7+9)\,z}{(2z-1) - z} = \frac{4z-3}{z-1}.$$

Інакше: трансформация:

$$TSTS^2TS^2TS^3TSTSz$$

переносить точку z півплощі в точку $\frac{3-4z}{z-1}$ тоїже.

б)

$$\varphi_6 = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2+z}}}}}} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{2+z}{3+2z}}}}} =$$

$$= \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{3+2z}{10+7z}}}} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{10+7z}{27+19z}}} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{27+19z}{17+12z}} = \frac{17+12z}{7+5z};$$

а на основі 8) дістанемо:

$$F_1 = 2 + z, \quad F_2 = 3 + 2z$$

$$\varphi_6 = \frac{(10+7z)\left(C_5^{(2)} C_2^{(-2)} - C_5^{(1)} C_1^{(-3)}\right) - \left(C_5^{(2)} C_2^{(-3)} - C_5^{(1)} C_1^{(-4)}\right) F_2}{(10+7z)\left(C_6^{(2)} C_3^{(-1)} - C_6^{(1)} C_2^{(-2)}\right) - \left(C_6^{(2)} C_3^{(-2)} - C_6^{(1)} C_2^{(-3)}\right) F_2}.$$

А що:

$$C_2^{(-2)} = 0, \; C_2^{(-3)} = -1, \; C_3^{(-1)} = 1, \; C_5^{(1)} = 2, \; C_5^{(2)} = 4, \; C_6^{(1)} = 1, \; C_6^{(2)} = 1,$$

$$C_1^{(-3)} = 1, \; C_1^{(-4)} = -\frac{7}{2},$$

то дістанемо:

$$\varphi_6 = \frac{(10+7z)\,2 - (3+2z)}{(10+7z) - (3+2z)} = \frac{17+12z}{7+5z}.$$

в) Возьмім:

$$\varphi_9 = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1+z}}}}}}}}},$$

то обчисленє через досить довгий рахунок дає на вислїд:

$$\frac{18+41z}{7+16z}.$$

Тимчасом після нашої форми 6:

$$F_1 = 1 + z, \quad F_2 = 1 + 2z, \quad a_3 = 2.$$

$$\varphi_9 = \frac{(a_3 F_2 - F_1)\left(C_8^{(2)} C_5^{(1)} - C_8^{(1)} C_4^{(0)}\right) - \left(C_8^{(2)} C_5^{(0)} - C_8^{(1)} C_4^{(-1)}\right) F_2}{(a_3 F_2 - F_1)\left(C_9^{(2)} C_6^{(2)} - C_9^{(1)} C_5^{(1)}\right) - \left(C_9^{(2)} C_6^{(1)} - C_9^{(1)} C_5^{(0)}\right) F_2}.$$

А що:

$$C_8^{(1)} = 5, \; C_8^{(2)} = 18, \; C_5^{(0)} = 1, \; C_5^{(1)} = 0, \; C_4^{(0)} = 1, \; C_4^{(-1)} = 1, \; C_9^{(1)} = 1,$$

$$C_9^{(2)} = 2, \; C_6^{(1)} = 3, \; C_6^{(2)} = -1,$$

то дістанемо:

$$\varphi_9 = \frac{-(1+3z)\,5 - (18-5)(1+2z)}{-(1+3z)\,2 - (6-1)(1+2z)} = \frac{18+41z}{7+16z}.$$

г) Най:

$$\varphi_{10} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{5 + z}}}}}}}}}} = \frac{23 + 5z}{32 + 7z},$$

вислїд одержаний через довгий рахунок.

Тимчасом після форми 8) є:

$$a_3 = 2,\ F_1 = 5 + z,\ F_2 = 14 + 3z,$$

$$\varphi_{10} = \frac{(23 + 5z)\left(C_9^{(2)} C_6^{(2)} - C_9^{(1)} C_5^{(1)}\right) - \left(C_9^{(2)} C_6^{(1)} - C_9^{(1)} C_5^{(0)}\right) F_2}{(23 + 5z)\left(C_{10}^{(2)} C_7^{(3)} - C_{10}^{(1)} C_6^{(2)}\right) - \left(C_{10}^{(2)} C_7^{(2)} - C_{10}^{(1)} C_6^{(1)}\right) F_2}.$$

Ту є:

$$C_9^{(1)} = 0,\ C_9^{(2)} = -1,\ C_5^{(1)} = 1,\ C_5^{(0)} = 1,\ C_6^{(1)} = 0,\ C_6^{(2)} = -1,\ C_{10}^{(1)} = 1,$$
$$C_{10}^{(2)} = -1,\ C_7^{(1)} = 0,\ C_7^{(2)} = -1,\ C_7^{(3)} = -2;$$

отже:

$$\varphi_{10} = \frac{23 + 5z}{(23 + 5z)\,2 - (14 + 3z)} = \frac{23 + 5z}{32 + 7z}.$$

Значить ся: трансформация $TSTSTSTSTSTSTS^2TS^2TS^3TSz$ переносить точку *z* півплощі в точку — $\frac{23 + 5z}{32 + 7z}$.

Наколи всї члени $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_1 = a$ є рівні, маєм до діла з специяльним случайом, який я вже в першій розвідцї розібрав.

5. Хочемо тепер розслїдити граничний случай $\lim n = \infty$, с. є. безконечно-многократну ітерацию трансформациї модулової. В тій цїли напишім реляцию 8) в слїдуючім видї:

$$\frac{a_3 F_2 C_{n-1}^{(2)}\left(C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-4}^{(n-9)}\right) - C_{n-1}^{(1)}\left(C_{n-5}^{(n-10)} - C_{n-5}^{(n-9)}\right) F_2 - F_1\left(C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-9)}\right)}{a_3 F_2 C_n^{(2)}\left(C_{n-3}^{(n-7)} - C_{n-3}^{(n-8)}\right) - C_n^{(1)}\left(C_{n-4}^{(n-9)} - C_{n-4}^{(n-8)}\right) F_2 - F_1\left(C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}\right)}.$$

А що для $\lim n = \infty$ можна покласти:

$$\lim_{n=\infty} \left(C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-4}^{(n-9)}\right) = 0.$$

$$\lim_{n=\infty} \left(C_{n-5}^{(n-10)} - C_{n-5}^{(n-9)}\right) = 0.$$

$$\lim_{n=\infty} \left(C_{n-3}^{(n-7)} - C_{n-3}^{(n-8)}\right) = 0.$$

$$\lim_{n=\infty} \left(C_{n-4}^{(n-9)} - C_{n-4}^{(n-8)}\right) = 0.$$

проте дістанемо:

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = \frac{C^{(2)}_{n-1} C^{(n-8)}_{n-4} - C^{(1)}_{n-1} C^{(n-9)}_{n-5}}{C^{(2)}_{n} C^{(n-8)}_{n-3} - C^{(1)}_{n} C^{(n-8)}_{n-4}},$$

а се виражене дає, наколи в границї положимо:

$$\lim_{n=\infty} C^{(n-8)}_{n-4} = \lim_{n=\infty} C^{(n-8)}_{n-3} = \lim C^{(n-9)}_{n-5},$$

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = \frac{C^{(2)}_{n-1} - C^{(1)}_{n-1}}{C^{(2)}_{n} - C^{(1)}_{n}} = \lim_{n=\infty} \frac{(a_{n-1} a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1) - a_{n-1}}{(a_n a_{n-1} - 1)(a_{n-2} - 1) - a_n},$$

отже на всякий случай дїйсну величину; безконечно многократна ітерация Uz дасть проте:

$$\lim_{n=\infty} Uz = \lim_{n=\infty} \frac{a_{n-1} - (a_{n-1} a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1)}{a_n - (a_n a_{n-1} - 1)(a_{n-2} - 1)}$$

для трансформациї 1), а:

$$\lim_{n=\infty} Uz = \lim_{n=\infty} \left(a_n - \frac{a_{n-2} - (a_{n-2} a_{n-3} - 1)(a_{n-4} - 1)}{a_{n-1} - (a_{n-1} a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1)} \right)$$

для трансформациї 2).

С. є. Кожда зовсїм загальна модулова трансформация, зложена з безконечно многих ітераций основних трансформаций $S^n z$ і Tz (n цїлковите яке-небудь число), переносить *кожду* точку додатної півплощі z в безконечно близьке окружене одної з обох точок граничних, які все є дїйсні та лежать на перворядній оси. В тих точках тратить отже ґрупа модулова свою нетяглість; а що a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ······ є які-небудь дїйсні числа, то з того слїдує, що ґрупа модулова на цїлій дїйсній оси є нетягла, що вповнї годить ся з звісним свойством сеї ґрупи.

Берлїн, в червни 1901.

Бібліоґрафія та хроніка математично-фізична.

O. Stolz u. A. Gmeiner. Theoretische Aritmetik; I. Abth. Allgemeines, die Lehre von rationalen Zahlen (Leipzig, B. G. Teubner 1900, ст. IV + 98).

Є се один з підручників, які в послїдних часах фірма Teubner'а видає під заг. „Teubners Sammlung der Lehrbücher auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften". Підручник сей опертий є на поглядах Grassmann'а, Hankel'а, Hauber'а, Dedekind'а, Stolz'а і и., що в послїдних часах запанували в цїлій теориї чисел. Складаєсь він з чотирох частий; часть перша подає понятє величин і чисел, часть друга займає ся натуральними числами, часть трета обнимає аналїтичну, четверта синтетичну теорию чисел виміримих та теорию систематичних дробів. Книжочка ся може служити яко дуже добрий вступний підручник до висшої теориї чисел, а вартість єї підносять еще численні приміри, долучені до другої і четвертої части.

Max Simon. Euklid und die sechs planimetrischen Bücher (Leipzig, B. G. Teubner, 1901, ст. VIII + 141).

Є се переклад звісних „*στοιχεῖα*" Евклїда, але переклад критичний, осмотрений численними поясненями та увагами; на початку подані дати біо- та бібліоґрафічні про Евклїда та его твори. Книжка та добра для тих, що займають ся историєю математики та хотять пізнати близше того великого духа, якого вплив перетривав до нинїшного часу.

R. Fricke. Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik; analytisch-functionentheoretischer Theil. (Leipzig, B. G. Teubner, 1900, ст. X + 520).

Книжка ся є виплывом нового напряму в математиці, до якого почин дав головно Кляйн, а іменно, щоби вислїди теоретичні лучити по змозї з практикою (стосована математика). Сей напрям є консеквентно переведений в цїлій книжції, яка в 7 роздїлах подає найважнїйші вислїди сучасної аналїзи та стосує їх до практичних проблємів. Уступ перший посьвячений є рядам Fourier'a; є ту подана теория сочинників тих рядів, теорем їх збіжности (Dirichlet), інтеґрали Fourier'a та пристосоване сеї теориї до фізики. В другім уступі маємо теорию функций кулї та вальця, отже функциї Legendre'a P_n (μ), теорию коренів рівнаня P_n $(x) = 0$. Далї є теория розвиваня функциї $f(\vartheta\varphi)$ і якої-небудь функциї $\varphi(x)$ після функций кулї. Заслугує ту на увагу застосоване функций кулї до електростатики і задача Кеплєра, розвязана способом Bessel'a при помочи функций вальця. Роздїл третий обнимає теорию функций зложених арґументів, отже функциї аналїтичні, ряди степенні, теореми Cauchy і Laurent'a, теорию точок особливих, представлене функций аналїтичних через добутки, функцию Γ, теорию функций многозначних та поверхнї Riemann'a; кромі сего є ту стереоґрафічна проекция площи на кулю. В слїдуючім четвертім роздїлї є теория функций елїптичних після Jacobi і Weierstrass'a (отже функциї σ, ζ, p, Θ, sn, cn, трансформация Landen'a і и.); інтересне є ту відтворене площі u через функцию p. Пятий роздїл подає практичне застосоване функций елїптичних; отже многокутники Poncelet'a, лїниї ґеодетичні на елїпсоїдї оборотовій, поверхнї співогнискові 2. ряду, застосоване до теориї тепла, сферичний маятник, оборотовий рух тїла цїпкого і и. В роздїлї шестім є теория лїнїових рівнань ріжничкових о двох змінних; отже маємо ту теорем істнованя, систем основний інтеґралів, теорию обігу інтеґралів, рівнане ріжничкове гиперґеометричне і функциї Z_1 і Z_2, функцию $\eta(z)$ і відтворене півплощі z на коловий трикутник площі η та поверхнї Riemann'a, що належить до функциї $\eta(z)$, на сїть колових трикутників. В кінци послїдний уступ обнимає теорию рівнань ріжничкових I. ряду з кількома змінними; маєм ту теорию визначників функцийних, редукцию рівнань при помочи послїдного множника, рівнаня частні першого ряду та систем Jacobi. Далї є ту теория характеристичних поверхний (Developpable) рівнаня $f\ (x\,y\,z\,p\,q) = 0$, загальнїйші рівнаня ріжничкові $f\ (z\ x_1 \cdots\cdots x_n\ p_1 \cdots\cdots p_n\ ) = 0$, та теорем Poisson'a. Уступ сей кінчать рівнаня ріжничкові динаміки. Кромі сего є ту в відповідних місцях подані таблиці функций кулї та функций елїптичних.

Як з повисше поданого короткого змісту видно, книжка ся є дуже добрим підручником для тих, що хотять загально поінформувати ся про модерну теорию функций; вказує она також на се, що теориї аналїзи, на перший погляд нічим не звязані з практикою, можуть однак дуже користно придатись до розвязки практичних проблємів.

E. Borel. Leçons sur les fonctions entières. (Paris, Gauthier-Villars, 1900, ст. VI + 124).

Підручник сей представляє в коротких рамах теорию функций цїлих (переступних), до якої дав почин Weierstrass, а яку розширили в новійших часах Picard, Poincaré, Hadamard, Borel та иньші. Автор еї загально звісний учений, що послїдними часами розширив теорию функций аналїтичних знаменитими дослїдами над істотою рядів розбіжних, тому-то і єго книжка заслугує на тим більшу увагу. Складаєсь она з пятьох уступів. Перший представляє ідеї Weierstrass'a і єго теорию чинників первих, другий представляє ідеї Laguerre'a, отже понятє роду, функциї роду 0 і 1 та роду скінченого.

Третий уступ займає ся нерівностями Poincaré (Bull. soc. mat. 1883). Є ту три дуже важні теореми. 1) Наколи функция цїла:

$$F(z) = \left(1-\frac{z}{a_1}\right)\left(1-\frac{z}{a_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\cdots\cdots = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots\cdots$$

є ряду p, а M(r) є еї найбільша беззглядна вартість на обсягу збіжности, то:

$$M(r) < e^{\alpha r^{p+1}}$$

наколи α є число додатне (дане à priori) а r достаточно велике.

2) В тих обставинах $A_m \, \Gamma\left(\frac{m+h+1}{p+1}\right)$ стремить до зера, де Γ є знаною функциєю з рахунку інтеґрального, а h яке небудь число додатне.

3) Наколи r є достаточно велике, то:

$$|F(z)| < e^{r^{p+\varepsilon}}, \ |F(z)| < e^{\varepsilon r^{p}},$$

де ε є a priori дане.

В тім уступі впроваджує Borel понятє „майоранти“ себ то вираженя:

$$M(r) = |A_0| + |A_1| r + |A_2| r^2 + \cdots$$

Четвертий уступ є посьвячений розслїдам Hadamard'a (Journ. de Mathem. 1893), а особливо двом дуже важним теоремам тогож. Перший з них відносить ся до коренів функциї і їх границї, а другий є ось який: „Наколи G(z) є канонїчним добутком чинників первих ряду p, а число ε є додатне, то можна найти безконечну скількість колес, яких лучі безконечно ростуть, а на кождім з них заходить нерівність:

$$|G(z)| > e^{-r^{p+\varepsilon}}$$

Пятий роздїл подає звісний теорем Picard'a о вартостях, яких функция не може приняти; кромі сего подає ту Borel загальний теорем слїдуючий: „Наколи F(z) є функция цїла така, що

$$|F(z)| < e^{e^{r^m}}$$

(де m є стала), а $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$, $\psi(z)$, $\psi_1(z)$ є функциї цїлї ряду скінченого такі, що:

$$\varphi\psi_1 - \varphi_1\psi \lesseqgtr 0,$$

то наколи $\varphi F - \varphi_1$ та $\psi F - \psi_1$ є ряду скінченого, то і F є ряду скінченого.“

На кінци книжки є додані три ноти. В них занимає ся Borel функциями з правильним та неправильним ростом.

Функция цїла F(z) ряду скінченого є тодї функциєю з правильним ростом, наколи M(r) т. є. вартість безглядна найбільша функциї F(z) для $|z| = r$ містить ся в інтервалї

$$e^{r^\alpha} < M(r) < e^{r^\beta}$$

(α і β данї), а сей інтервал спадає до зера; в противнім случаю зріст функциї є неправильний.

Так представляє ся в короткім нарисї зміст сеї інтересної книжки.

E. Weber. Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Leipzig, B. G. Teubner, 1900, ст. XI + 622).

Не так легко подати справозданє з сеї книжки; тілько там материялу, зібраного після новійших теорий та дослідів Jacobi, Clebsch'a, Lie, Mayer'a, Frobenius'a та иньших ґеометрів, що теорию частних рівнань ріжничкових посунули вперед. Книжку ту подїлити можна на дві части; перша (розд. I—XI) обннмає т. зв. проблєм Pfaff'a, друга (розд. XII—XIV) обнимає теорию рівнань ріжничкових частних першого ряду нелїнїових.

В короткім вступі схарактеризований є проблєм Pfaff'a слїдуючим способом: „Визначити найзагальнїйший, зложений з m реляций систем рівнань зі змінними $z\, x_1\, x_2 \cdots x_m\, p_1\, p_2 \cdots p_m$, який можна розвязати що до тих змінних, та який сповняє повне рівнанє ріжничкове:

$$dz - \psi(z\, x_1\, x_2 \cdots x_m\, p_1 \cdots p_m)\, dx_1 - p_2\, dx_2 - \cdots - p_m\, dx_m = 0.$$

Pfaff доказав, що істнують всегда $2m$ функций

$$F_i\,(z\, x_1 \cdots x_m\, p_1 \cdots p_m) \text{ та } f_i\,(z\, x_1 \cdots x_m\, p_1 \cdots p_m) \quad (i = 1, 2, \cdots m),$$

таких, що:

$$dz - \psi dx_1 - p_2\, dx_2 - \cdots - p_m\, dx_m \equiv F_1\, df_1 + F_2\, df_2 + \cdots + F_m\, df_m\,.$$

Вираженє: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\,(x_1 \cdots x_n)\, dx_i = 0$ називає ся вираженєм Pfaff'a.

Виложивши коротко теорию визначників та матиць (Matrix), теорию скісно-симетричних визначників, твердженя Grassmann'a, Frobenius'a, Sylvester'a та и. переходить автор в розд. II. до теориї рівнань лїнїових частних першого ряду, т. є. до понятя інтеґралів, характеристик та характеристичних кривих, трансформаций безконечно малих Lie Xf одночастної ґрупи та множника Jacobi; дальше є теория p-частного системи рівнань:

$$\sum_{1}^{n} \xi_{ks}\,(x_1\, x_2 \cdots x_n)\, \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots p),$$

p-частного системи Jacobi та метода інтеґрованя Jacobi. До системи рівнань ріжничкових лїнїових частних долучає (ад'юнґує) автор систем рівнань Pfaff'a, який необмежено можна інтеґрувати т. є. систем, до якого можна пристосувати всї безконечно малі перетвореня долученої громади:

$$Xf \equiv \sum_{1}^{n} \xi_s\,(x_1\, x_2 \cdots x_n)\, \frac{\partial f}{\partial x_s}.$$

Роздїл сей кінчать точні (exakte) рівнаня Pfaff'a, т. є. такі рівнаня:

$$\nabla \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i\,(x_1\, x_2 \cdots x_n)\, dx_i = 0,$$

де ∇ може приняти вид:

$$\nabla \equiv \varrho (x_1 x_2 \cdots x_n) \, d \varphi (x_1 x_2 \cdots x_n),$$

та трансформация Mayer'a.

В слідуючім розділі (III) є здефініована кляса вираженя Pfaff'a.

Наколи: $$\Delta = \sum_1^n a_i \, (x_1 \, x_2 \cdots x_n) \, dx_i \, ,$$

то клясою того вираженя є ряд матиці:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{Vmatrix} \, , \text{ де } \quad a_{ik} \equiv - a_{ki} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \, .$$

Кляса та є незмінником (інвариянтою) для $\triangle$ з огляду на трансформациї:

$$\left. \begin{array}{l} y^i = \varphi_i \, (x_1 \, x_2 \cdots x_n) \\ x_i = \psi_i \, (y_1 \, y_2 \cdots y_n) \end{array} \right\} (i = 1, 2, \cdots n)$$

До кляси відносить ся слідуюче твердженє Frobenius'a:

Кляса k є для вираженя Pfaff'a париста або непариста після того, чи лінїове рівнанє:

$$a_1 \, \xi_1 + a_2 \, \xi_2 + \cdots + a_n \, \xi_n = 0$$

слідує з систему рівнань:

$$(\alpha) \qquad a_{i1} \, \xi_1 + a_{i2} \, \xi_2 + \cdots + a_{in} \, \xi_n = \xi_0 \, a_i \;\; (i = 1, 2, \cdots n)$$

чи ні. Кляса є непариста або париста після того, чи $\xi_0 = 0$ слідує з (α), чи ні.

Розділ IV. обнимає методи редукцийні Pfaff'a, Grassmann'a та Jacobi. Після твердженя Grassmann'a вираженє Pfaff'a Δ, наколи єго кляса $k = 2 \lambda$ (париста), тоді і лиш тоді дасть ся звести до форми:

$$1) \qquad z_{\lambda+1} \, dz_1 + z_{\lambda+2} \, dz_2 + \cdots + z_{2\lambda} \, dz_\lambda \, ,$$

де z є независимі функциї змінних ($x_1 \, x_2 \cdots x_n$). Наколи кляса $k = 2 \lambda - 1$ (непариста), то Δ дасть ся звести до форми:

$$\sigma \, (z_1 \, z_2 \cdots z_{2\lambda-1}) \, (dz_\lambda + z_{\lambda+1} \, dz_1 + \cdots + z_{2\lambda-1} \, dz_{\lambda-1}),$$

де z має значінє як висше, а σ є певна функция.

В разї, коли $k = 2 \lambda$, є тілько можлива редукция 1); коли $k = 2 \lambda - 1$, можна дістати редукцию:

$$2) \qquad dz_\lambda + z_{\lambda+1} \, dz_1 + z_{\lambda+2} \, dz_2 + \cdots + z_{2\lambda-1} \, dz_{\lambda+1}$$

Се є основне твердженє (Fundamentalsatz).

Два вираженя Pfaff'а:

$$\varDelta \equiv \sum_1^n{}_i\, a_i\ (x_1\ x_2 \cdots x_n)\ dx_i$$

$$\varDelta' \equiv \sum_1^n{}_i\, a'_i\ (x'_1\ x'_2 \cdots x'_n)\ dx'_i$$

є рівноважні, наколи мають ту саму клясу; кляса та є співзмінником (коваріянтою) для якої-небудь трансформациї змінних $(x_1\ x_2 \cdots x_n)$.

До кождого вираженя Pfaff'а кляси k належать повні системи V і W, а іменно:

$$\text{V)} \qquad X_s f \equiv \xi_1^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_n} \equiv 0$$

$$\text{W)} \quad X_h f \equiv \varPi_{1,2\lambda+1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \varPi_{2\lambda,2\lambda+h} \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda}} - P \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda+h}} = 0$$

$$(s = 0, 1, \cdots n - k;\ h = 1, 2, \cdots n - k),$$

де:

$$P \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)} \begin{pmatrix} F_1\ F_2 \cdots F_\lambda\ f_1\ f_2 \cdots f_\lambda \\ x_1\ x_1 \cdots\cdots\cdots x_{2\lambda} \end{pmatrix} \text{(визначник функцийний)}$$

$$\varPi_{k,\nu} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)} \begin{pmatrix} F_1 \cdots F_\lambda\ f_1 \cdots f_\lambda \\ x_1 \cdots x_{k-1}\ x_\nu\ x_{k+1} \cdots x_{2\lambda} \end{pmatrix}$$

Тими системами займає ся уступ V. нашої книжки:

V є (n—k+1)-частним повним системом з інтеґралами

$$\frac{F_1}{F_\lambda},\ \frac{F_2}{F_\lambda},\ \cdots\cdots \frac{F_{\lambda-1}}{F_\lambda},\ f_1\ f_2 \cdots f_\lambda$$

а W (n – k)-частним повним системом з інтеґралами $F_1\ F_2 \cdots F\lambda\ f_1\ f_2 \cdots f\lambda$.

Ті два системи V і W є співзмінниками до $\varDelta$.

Наколи для непаристого k знаємо інтеґрали повного системy V, то послїдний k-тий інтеґрал найдемо з W через ріжничкованє, елїминацию та ряд квадратур.

Далї ідуть дві методи редукцийні закриті (implicit) Clebsch'a та Lie (розд. VI). При їх помочи дістанемо нормальні форми ось-які:

для $k = 2\lambda$ є $\varDelta \equiv F_1\, df_1 + F_2\, df_2 + \cdots + F_\lambda\, df_\lambda$

для $k = 2\lambda - 1$ $\varDelta \equiv F_1\, df_1 + F_2\, df_2 + \cdots + F_{\lambda-1}\, df_{\lambda-1} + df_\lambda$

В уступі VII. про рівноважники інтеґралів рівнаня Pfaff'а находим тверджене:

Рівноважник інтеґралів рівнаня Pfaff'а

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_m\,dx_m = 0$$

обнимає що найменьше m рівнань. Найзагальнійший рівноважник, який не має виду:

$$p_1 = 0, \cdots\cdots p_m = 0$$

дістанемо, наколи до якого-небудь ν-частного систему рівнань виду:

$$\Psi_i\;(x_1\,x_2 \cdots x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots \nu)$$

долучимо тих $(m-\nu)$ рівнань, які повстають через елімінацию ϱ_i

з рівнань $p_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \varrho_k \dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \cdots m).$

Наколи кляса рівнаня Pfaff'а є 2λ (або $2\lambda - 1$), то кождий рівноважник інтеґралів, що обнимає меньше як λ рівнань, є конечно особливий.

Возьмім нормальне рівнанє Pfaff'а:

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \cdots\cdots - p_m\,dx_m = 0,$$

то трансформация:

$$\left.\begin{aligned} z' &= Z\;(z\,x_1\,x_2 \cdots x_m\,p_1\,p_2 \cdots p_m) \\ x_i' &= X_i\;(z\,x_1\,x_2 \cdots x_m\,p_1\,p_2 \cdots p_m) \\ p_i' &= P_i\;(z\,x_1\,x_2 \cdots x_m\,p_1\,p_1 \cdots p_m) \end{aligned}\right\}\; (i = 1, 2, \cdots m)$$

називає ся стичною, наколи по вставленю тих вартостий дістанемо:

$$dz' - p_1'\,dx_1' - \cdots - p_m'\,dx_m' \equiv \varrho(z\,x_1\,x_2 \cdots p_1 \cdots p_m)(dz - p_1\,dx_1 - \cdots - p_m\,dx_m),$$

де ϱ не є ідентично зером.

Теорию і значінє тих трансформаций подає уступ VIII.

В дальшім уступі (IX) є подана метода редукцийна відкрита (explicit). Редукция вираженя Δ провадить до слідуючих форм загальних. Наколи $f_1\,f_2 \cdots f_r\;(r < n)$ є які небудь независимі функциї, а матиця

$$\left\|\begin{matrix} a_{ik} & a_i & f_{hi} \\ -a_k & 0 & 0 \\ -f_{kh} & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$$

має ряд 2ϱ, то тоді і лиш тоді Δ можна представити в виді:

$$\Delta \equiv F_1\,df_1 + \cdots + F_r\,df_r + F_{r+1}\,df_{r+1} + \cdots + F_\varrho\,df_\varrho,$$

де $f_1\ f_2 \cdots f_\varrho$ є независимі, а в виді:

$\Delta = F_1\, d f_1 + \cdots + F_r\, d f_r + F_{r+1}\, d f_{r+1} + \cdots + F_{\varrho-1}\, d f_{\varrho-1} + df_\varrho$,

наколи $f_1\ f_2 \cdots f_\varrho\ F_{r+1} \cdots F_\varrho$ є з собою звязані.

Розділ X. стосує безконечно малу трансформацию до вираженя Pfaff'a. Наколи єго кляса k є непариста, а безконечно мала трансформация $X f = \Sigma \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ сповняє ідентично реляцию $X\Delta = \varrho \Delta$ та належить до громади безконечно малих трансформаций долучених до Δ, тоді є завсїгди $\varrho \equiv 0$, а $X f = \sum_{s=1}^{n-k} \varrho_s X_s f$, де:

$$X_s f = \xi_1^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (s = 1, 2, \cdots n - k);\ \ \xi_1^{(s)}, \cdots \xi_n^{(s)}$$

є розвязками рівнань $\Sigma \xi_k a_{ik} = 0,\ \ (i = 1, 2, \cdots n)$.

Наколи кляса є париста, то тоді $X f$ має вид $\varrho X_0 f + \varrho_1 X_1 f + \cdots + \varrho_{n-k} X_{n-k} f$, де $\varrho\ \varrho_1 \cdots$ є які небудь функциї, $X_s f$ має значінє, як висше, а $\xi_1^{(s)}, \cdots$ є розвязками рівняня $\Sigma \xi_k a_{ik} = \varrho a_i$.

Ідентичність Jacobi та Mayer'a кінчать сей уступ.

Далї іде (розд. XI) теория скінчених, однородних та неоднородних стичних трансформаций. При їх помочи маємо слїдуючу редукцию.

Наколи $2r - 1$ змінних $y_1\ y_2 \cdots y_r\ q_1 \cdots q_{r-1}$ є звязані реляциєю:

$$\varphi(y_1\ y_2 \cdots y_r\ q_1 \cdots q_{r-1}) = 0,$$

то вираженє Pfaff'a:

$$dy_r + q_1\, dy_1 + \cdots + q_{r-1}\, dy_{r-1}$$

можна звести до форми:

$$q_1'\, dy_1' + \cdots + q_{r-1}'\, dy_{r-1}' \text{ або } dy_r' + \sum_{s=1}^{r-2} q_s'\, dy_s'$$

після того, чи $\varphi = 0$ заключає в собі y_r чи нї.

Наколи же $2r$ змінних $y_1 \cdots y_r\ q_1 \cdots q_r$ є звязані реляциєю:

$$\varphi(y_1 \cdots y_r\ q_1 \cdots q_r) = 0,$$

то вираженє Pfaff'a:

$$q_1\, dy_1 + \cdots + q_r\, dy_r$$

можна звести до форми:

$$\sum_{s=1}^{r-1} q_s' \, dy_s' \quad \text{або} \quad dy_r' + \sum_{s=1}^{r-1} q_s' \, dy_s'$$

після того, чи φ є в q однородне чи нї.

Часть друга книжки (розд. XII—XIV) займає ся рівнанями частними першого ряду нелїнїовими: $F\left(z x_1 x_2 \cdots\cdots x_m \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial z}{\partial x_m}\right)=0$; є ту подана теория поверхний інтеґральних та характеристик, теория інволюций, застосоване трансформаций стичних, метода Lagrange'а вариациї сталих, методи Jacobi, Lie та Mayer'a, засада Hamilton'a (функция сил); далї іде теория ґруп функцийних, неоднородних, однородних, біґунових, r-частна ґрупа та інволюцийні системи ряду зерового; далї рівнанє Transon'a $F(p,q,x+pz,y+qz) = c$, а в кінци теория Bäcklunda особливих множіний інтеґральних.

Послїдний XV. роздїл подає історию рівнань ріжничкових частних (Pfaff, Gauss, Cauchy, Jacobi, Natani, Clebsch, Grassmann, Frobenius, Lie, Darboux, Engel).

Задержав ся я довше над тою книжкою, бо она обнимає теориї майже найновійші, які в будучности відіграють певно перворядну ролю. Автор сеї книжки хорошо вивязав ся зі своєї задачі та для сьвіта математичного своїм твором безперечно дуже ся прислужив.

R. Fricke u. F. Klein. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen (I. Bd. gruppentheoretische Grundlagen, Leipzig B. G. Teubner, 1897, ст. VIII+634).

Виклад сей обнимає теориї, до яких почин дали Schwarz та Poincaré, а які головно розвинув Klein. Складає ся він зі вступу та трох частий.

Вступ обнимає теорию провктивних означень мір (projektive Massbestimmungen), отже споріднене перекроїв стіжкових (Collineation), ґеометрию параболїчну, гиперболїчну та еліптичну і належні до них площі (згд. кулї), понятє ґруп руху та ґруп субституций лїнїових $\zeta' = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$.

Часть перша (теория нетяглих ґруп субституций лїнїових) подає наперед теорию ґруп циклїчних та ґруп тїл правильних, подїл площі еліптичної та гиперболїчної, теорию ґрупи та підґруп Picard'a і чотиростїнний (tetraedrisch) подїл півпростони ζ. Далї є теория ґруп нетяглих, які не мають безконечно малих субституций, понятє району нетяглости проєктивної площі в ґрупах оборотових, понятє ґруп належачих до головного кола, нормальний многостінник в просторони гиперболічній та нормальний район нетяглости на площі ζ та в просторони ζ, теория ґруп з кривими граничними. Всї ґрупи без субституций безконечно малих ділять ся на циклїчні ґрупи, ґрупи необоротові з двома граничними точками, ґрупи оборотові та ґрупи необоротові з безконечною скількостию точок граничних. Звязи між основними субституциями ґрупи, канонїчні райони нетяглости ґрупи многокутників, однородні субституциї та ґрупи кінчать часть першу.

Часть друга (вивід ґеометричної теориї ґрупи многокутників з субституций ζ) займає ся вперед ґрупою оборотовою на основі нормальних районів нетяглости, а іменно еліптичною та параболїчною ґрупою оборотовою і їх нормальними шестикутниками та параболїчною ґрупою оборотовою з субституциями еліптичними, далї ґрупою необоротовою з двома граничними точками, понятєм роду (Gattung) та поділом типів нормальних многокутників, а в кінци „натуральним“ районом нетяглости оборотової ґрупи гиперболічної. Далї ідуть канонїчні многокутники для ріжних родів та їх модули j_1 j_2 j_3 і модули ад'юнґовані (долучені), трансформациї системів модулових та модулові ґрупи поодиноких родів. В кінци подана теория чотирокутників колових без кола головного, сїм типів таких чотирокутників та їх незмінники, чотирокутник з кутами 0 і єго крива гранична; ґрупи необоротові 1. і 2. рода.

Часть трета (аритметичні способи дефінїованя властиво нетяглих ґруп з субституций ζ) займає ся в роздїлї „про ґрупи оборотові посеред ґрупи Picard'а“ формами Gauss'а, квадратовими формами Dirichlet'а та Hermite'а і їх ґеометричною інтерпретациєю, редукциєю і трансформациєю означених (definite) форм Hermite'а та Dirichlet'а, редукциєю неозначених (indefinite) форм Hermite'а, відтворяючими (reproducirend) ґрупами форм Hermite'а з визначником 5 та 7, та проєктивно-ґеометричною інтерпретациєю форм Gauss'а, ґрупи Picard'а, форм Dirichlet'а та Hermite'а. В дальшім уступі про відтворяючі ґрупи трійкових (ternär) та чвіркових (quaternär) форм квадратових є подана теория їх нетяглости, рівноважности, доказ істнованя ґрупи форм трійкових та чвіркових; теория Seling'а квадратових трійкових форм, дальші методи конструкцийні району нетяглости поодиноких ґруп з колом головним та приміри. Послїдний уступ обнимає специяльні случаї ґруп з колом головним та ґруп многостінників з цїлими альґебраічними сочинниками субституцийними; доказ, що такі ґрупи з сочинниками субституцийними дійсними та зложеними є нетяглі та три услівя властивої нетяглости.

Се є короткий зміст сеї дуже важної книжки; бажати би лиш треба, щоби друга часть тої книжки, с. є. функцийно-теоретична часть теориї функций автоморфних скоро вийшла з друку для ужитку всїх, що займають ся за Кляйном ґеометричною інтерпретациєю теориї функций.

E. Pascal. Die Variationsrechnung (übersetzt vom A. Schepp. Leipzig. B. G. Teubner 1899, ст. VI + 146).

Є се переклад книжки італїйского математика, якого численні підручники найшли в послїдних часах велике признанє. По історичнім вступі наступає понятє вариациї означених поєдинчих інтеґралів, основний проблєм рахунку вариацийного, канонїчні форми Lagrange'а та Weierstrass'а, проблєм Lagrange'а та Mayer'а, метода множника та проблєм ізоперіметричний; далї іде понятє другої вариациї та її трансформация, вариациї многократних інтеґралів (Остроградский, Delaunay), теория брахістохрони та найкоротшої лінії, поверхнї мінімальні, а в кінци застосованя.

E Pascal. Repertorium der höheren Mathematik (übers. von A. Schepp). I. Theil: Analysis (Leipzig, B. G. Teubner 1900 ст. XII + 638).

Книжка та — як каже сам автор — має ціль в короткім нарисї злучити найважнїйщі теориї новійшої математики; з кождої теориї подає она тілько, кілько треба, щоби читач міг ся в нїй з'орєнтувати, та вказує найважнїйші підручники. В 23 роздїлах подає автор найголовнїйші вислїди нової аналїзи від чисел зложених до знарядів ґрафічних. Є ту отже теория чисел зложених, кватерніонів, субституций, визначників, рядів; теория рівнань альґебраічних та теория Galois, рахунок ріжничковий, інтеґральний та рівнаня ріжничкові; ґрупи трансформаций, рахунок ріжниць та вариацийний, теория незмінників; функциї змінних зложених, функциї періодичні, модулові, автоморфні, альґебраічні, еліптичні, гипереліптичні, Abel'а, Euler'а, функция гиперґеометрична, функциї кулї, Bessel'а та Lamé, функциї аналїтичні; теория чисел, рахунок імовірности та номоґрафія. Словом є се мовби енциклопедия математична, де з кождої теориї піднесено найважнїйші моменти. Найбільша вартість книжки в численній лїтературі, яка до кождого уступу долучена.

Другий том сеї книжки (ґеометрия) анальоґічно зладжений вийшов доселї лиш по італїйски.

N. Herz. Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung. (Sammlung Schubert XIX. Leipzig, G. J. Göschensche Verlagshandlung 1900. ст. IV+381).

Підручник сей складає ся з шістьох уступів; пять перших обнимає рахунок імовірности, послїдний рахунок блудів. Подана є ту теория і дуже много задач практичних; отже дефініция імовірности беззглядної та зглядної, право великих чисел, зложена імовірність, імовірність причин, теореми Bernouilli, Bayes'a, Moivre'a та проблєм петерсбурский; моральна надїя. З застосовань заслугує на увагу теория гри, теория обезпечень та імовірність зізнань сьвідків, засудів та перечуть (се послїдне дуже інтересне). Послїдний уступ подає теорию блуду, блуду пересїчного та середного, теорию найменьших квадратів, вирівнанє обсерваций та рівнаня нормальні.

На кінци долучені таблицї смертности.

P. Appell. Eléments d' analyse mathématique à l' usage des ingénieurs et des physiciens (Paris, G. Carré et C. Naud 1898. ст. 719).

Як вже заголовок вказує, книжка та має ціль більше практичну; подає она в 24 уступах найважнїйші теориї аналїзи, а через многі приміри стосує теорию до практики. Є ту зібране все, що входить в теорию рахунку ріжничкового та інтеґрального, отже ріжничкованє усяких функций, інтеґрали неозначені та означені, кубатури брил оборотових та правило Guldin'a, ректифікациї кривих та поверхнї брил оборотових; далї ідуть інтеґрали рациональних функций, розвиванє функций в ряди, ріжничкованє та інтеґрованє рядів, ряд Mac-Laurin'a та Taylor'a, розвиванє функций на ряди триґонометричні, вираженя неозначені. Опісля слїдує теория стичних до кривих плоских, „maxima" та „minima" одної змінної, теория функций двох змінних, площа стична до поверхнї, „maxima" та „minima" функций двох змінних; кривинá кривих плоских та кривих подвійно кривих (крива шрубовá), кривина поверхнї, лїнїї кривинові, асимптотичні, ґеодетичні, напрями та сїти спряжені. Ріжничкованє під знаком інтеґрованя, інтеґрали вздовж кривих, інтеґрали многократні; рівнаня ріжничкові першого ряду, які мож через квадратури інтеґрувати, рівнанє Clairaut, рівнаня ріжничкові другого ряду і висших степенів, рівнаня ріжничкові другого ряду і висших степенів, рівнаня ріжничкові лїкїові та системи рівнань, рівнаня частні першого ряду і деякі другого ряду. Уступ про методи приближень, інтеґратори та інтеґрафи кінчить сей знаменитий та до того дуже елєґантно виданий підручник; впрочім само імя автора добре звісне, щоби розводити ся довго над прикметами єго твору.

A. Schoenflies. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (Leipzig, B. G. Teubner 1900. ст. V+251).

Книжка ся є рефератом, представленим нїмецкому товариству математичному. Обнимає она три части. Часть перша обнимає теорию множіний відчисельних (abzahlbäre Menge), понятє їх „сили“ (Mächtigkeit), понятє множіний невідчисельних та висші кляси чисельні. Часть друга обнимає теорию множіний точкових (Punktmenge), та їх „сили“, теорию множіний відграничених (abgeschlossen) та совершенних та зміст множіни точкової. Трета часть приноровлює повисші теориї до функций змінних дійсних; виступає ту проте понятє тяглости, функциї нетяглі та колибаючі ся (oscillirend), основне твердженє рахунку інтеґрального та теория збіжности рядів.

M. Voigt. Elementare Mechanik. (II. Auflage. Leipzig, Veit et Compagnie 1901. ст. X+578).

Є се підручник для початкових фізиків; но він вимагає знаня рахунку ріжничкового та інтеґрального; понятє скалярів, векторів, тензорів та операциї ними подає сам автор у вступі. Книжка складає ся з трох частий: механїки точок материяльних, механїки тїл ціпких та механїки тїл, які можна деформувати. Часть перша виходить з засади безвладности Ґалїлєя, дефінїює скорість та прискоренє, силу та условини рівноваги, подає теорию свобідного спаданя тїл, теорию рухів услівних (маятник сферичний), теорию тертя та опору воздуха, понятє живої сили, праці, потенциялу та енерґиї, теорию руху середоточного, ґравітациї, удару, моментів та рівнанє енерґиї. Друга часть оперує моментами оборотовими та безвладности, подає теорию рівноваги та обороту тїл, та теорию притяганя після закона Newton'а. Часть трета займає ся рівнанями руху ідеальних течий, рухами потенцияльними та вировими, дальше механїкою течий, що підлягають тертю, механїкою тїл пруживих, однородною деформациєю, комбінованою деформациєю, зginанєм вальця; дал слїдує теория филь плоских, дроганя напруженої нитки, поступ филь в осередках неограничених та ограничених, теория сопівок, струн, фуль кулистих; уступ про теорем Poisson'а кінчить часть трету, а разом і книжку.

L. Ambronn. Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde. (Berlin, Julius Springer; I. Bd. 1899. ст. IX+500; II. Bd. 1899. ст. VII + від ст. 503 до 1276.)

Величезний сей підручник обнимає технїчний опис найважнїйших інструментів астрономічних в 7 уступах. Уступ перший займає ся знарядами помічними в астрономії, отже шрубою, прямом, лїбельою, нонїом, та мікроскопами до відчитаня крисочок нонїя; уступ другий говорить про годинники, їх компензатори та реґулятори; уступ третий говорить про поодинокі части знарядів, отже про оси, люнети, об'єктиви, окуляри, рефрактори, зеркала, телєскопи Herschel'а, Newton'а, Gregory, Cassegrain'а, оптичні сталі знарядів, побільшенє та силу сьвітла; уступ четвертий говорить про колеса, машини до дїленя, полученє колес з інструментами, про мікрометри, подвійні мікрометри, гелїометри. Уступ пятий займає ся знарядами, що служать до особливих цїлий, отже знарядами проєкцийними, фотоґрафічними рефракторами, фотометрами, фотометром поляризацийним та знарядами спектральними. Шестий уступ говорить про цїлі знаряди, с. є. про секстант, октант, знаряди унїверзальні, альтазімути, колеса в мурах (Mauerkreis), телєскопи зенітальні, колеса прямові, знаряди до переходів (Durchgangsinstrumente), колеса полуденникові (Meridiankreise), хромоґрафи, рефрактори уставлені паралактично та люнети кометальні (Kometensucher). Послїдний уступ займає ся стовпами під ріжні знаряди та будовою ріжних обсерваторий.

Вартість книжки підносять численні хорошо виконані ілюстрациї.

T. Beck. Beiträge zur Geschichte des Maschinenbaues. (Berlin, J. Springer 1900. ст. 582.)

Книжка ся подає житє та зміст праць фізиків від найдавнїйших часів, які причинили ся до технїчного розвою механїки. Виступають ту перед нами особи старшого Герона, Паппуса, М. Вітрувія Польльона, С. І. Фронтіна, старшого Катона, Лєонарда da Vinci (три розвідки), Biringuccio, Ґ. Аґріколї, Єронима Ґардана, Й. Бессона, A. Ramelli, B. Lorini, Д. Фонтани (дуже інтересна істория ватиканьского обелїска), Сальомона Кауса, Ф. Верантія, J. de Strada, G. Branca, M. Mersenne'а, G. P. Harstörffera ta J. Watt'а (винахід машини парової).

В біблїотецї Ostwald'a: „Klassiker der exacten Wissenschaften“ вийшли в послїдних часах ось-які книжки:

Ч. 93. Euler. Drei Abhandlungen über Kartenprojection.
Ч. 103. J. L. Lagrange. Unbestimmte Analysis.
Ч. 107. Jakob Bernouilli. Wahrscheinlichkeitsrechnung (I. II. часть).
Ч. 108. То само (III. IV. часть).
Ч. 111. Abel: Abhandlungen über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen.
Ч. 112. A. Cauchy. Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen.
Ч. 113. Lagrange u. Cauchy. Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung.
Ч. 116. Lejeune-Dirichlet. Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinus-Reihen. P. Seidel. Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen.

Recueil de travaux offerts par les auteurs à H. A. Lorentz. (Haye, Martinus Nijhoff, 1900, ст. IX + 678).

Книжка ся присьвячена звісному фізикови Lorentz'ови, професорови унїверзитету в Leyden, по причинї 25-лїтних роковин єго докторату. Обнимає она працї визначнїйших фізиків, як Brunhes'a, Rayleygh'a, Pellat'a, Aubel'a, Farkas'a, Boltzmann'a, Kaufmann'a, Planck'a, Riecke, Duhem'a, Zeemann'a, Poincaré, Ramsay, Voigt'a, Wan der Waals'a, Berthelot'a, Cohn'a, Wiechert'a, Dorn'a, Wind'a, Des Coudres'a, Goldhammer'a та иньших в язицї француськім, нїмецкім та англїйскім.

Журнала бібліоґрафічного Revue semestrielle des publications mathématiques (під ред. P. H. Schoute, Korteweg etc. Amsterdam, Delsman en Nolthenius) том IX. часть I. 1901, вийшла з друку.

F. Klein u. E. Riecke. Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen (Leipzig, B. G. Teubner 1900, ст. VI + 252).

Є се виклади, які мали проф. Klein, Riecke, Schilling, Wiechert, Bohlmann, Des Coudres для учителїв шкіл середних в часї Великодних сьвят в р. 1900 в Ґетінґен. Відносять ся они до стосованої математики взагалї, технїчної механїки, начеркової ґеометриї, математики обезпечень, електротехнїки та ґеодезиї. Виклади сї обертають ся довкола слїдуючих питань: Що се є стосована математика та фізика та яке їх значінє для висших шкіл; в який спосіб може придбати собі учитель відповідні відомости через самоуцтво; в який спосіб треба доповнити напрями унїверзитетскі з огляду на потреби школи з одної, а зная з другої сторони.

Другу часть книжки займають деякі давнїйші розвідки Кляйна в повисшій материї.

F. Schilling. Über die Nomographie von D' Ocagne (Leipzig, B. G. Teubner, 1900, ст. 47).

Є се реферат на основі книжки „Traité de nomographie“ d' Ocagne'a (Paris, Gauthier-Villars 1899). Реферат сей обнимає понятє скалї функцийної, таблицї рахункові для рівнань о двох незвісних, для рівнань о трох незвісних, чотирох та більше незвісних, а вкінци теоретичні примітки.

Перегляд важнїйших журналів математичних.

Biblioteca mathematica (журнал присьвячений історії наук математичних під ред. G. Eneström'a, проф. в Штокгольмі; Leipzig, B. G. Teubner).

Трета серия, том II. зош. 1. р. 1901. ст. 1--176 містить працї з обсягу історії науки математичних Schmidt'a, Tannery, Suter'a, Curtze, Steinschneider'a, Braunmühl'a, Stäckel'a.

Acta mathematica (під ред. Mittag-Leffler'a в Штокгольмі). том 24. зошит 1. і 2. рік 1900 містять слїдуючі працї:

I. Bendixson: Криві визначені через рівнаня ріжничкові. H. Koch: Кілька квестий з теориї безконечних визначників. R. Lipschitz: Доказ звязи між чотирма осями оборотовими зміни довгости системи прямокутного, а „максимальним“ чотирокутником. H. Koch: Про розділ чисел первих. G. Mittag-Leffler: Представленє аналїтичне одностайної галузи функциї моноґенїчної (дві ноти).

Mathematische Annalen (під ред. Klein'а, Dyck'а, Mayer'а, а в послїдних часах Hilbert'а; Leipzig, B. G. Teubner).

Том 54-ий зошит 1. і 2. 1900 обнимає слїдуючі працї: C. Neumann: Про методу середної аритметичної, а особливо про усовершеня, яких дізнали дотичні досліди Poincaré в послїдних часах через працї A. Korn'а та E. R. Neumann'а. P. Stäckel: Friedrich Ludwig Wachter, додаток до істориї неевклїдової ґеометриї. P. Stäckel: Про вид кривих тору (Bahncurve) в певній клясї проблемів динамічних. H. Minkowski: Про приближенє до дійсної величини через виміримі числа. H. Ricci і Levi-Civita: Методи абсолютного рахунку ріжничкового і їх пристосованя. A. Hirsch: Про білїнїові реляциї між періодами інтеґралів відворотних громад форм. H. Richmond: Про поверхнї мінїмальні. K. Zindler: Про скількість особливих змінних в r-частній ґрупі трансформаций точкових.

Том 54-ий зошит 3. 1901: Geiser і Maurer: Elwin Bruno Christoffel. Windelband: В память E. B. Christoffel'а. Спис єго праць. E. Christoffel: Совершенна теория функциї Riemann'а. E. Pascal: Основи теориї системи рівнань ріжничкових другого ряду. M. Petrovitsch: Про спосіб розширеня теореми о середній вартости на рівнаня ріжничкові першого ряду. K. Hensel: Теория альґебраічної функциї одної змінної та інтеґралів Абелевих. H. E. Timerding: Про 16 подвійних площ поверхнї Kummer'а. P. Wolfskehl: Про одну задачу елементарної аритметики.

Journal für reine und angewandte Mathematik (оснований через Crelle, тепер редаґований через L. Fuchs'а; Berlin).

Том 123. зошит 1 (рік 1901) містить працї:

Zimmermann: Новий вивід рівнаня Plücker'а побіч кількох прямих визначень подвійних стичних плоских альґебраічних кривих якогобудь ряду (ст. 1—32). Grünfeld: Про кілька білїнїових ріжничкових виражень, що приходять в теориї рівнань ріжничкових (ст. 32—41). Jahnke: Ґрупа точкова, що належить до потрійно перспективних трикутників (42—47). Jahnke: Конструкция деяких точок в ґеометриї трикутника (48—53). R. Fuchs: Про лїнїові однородні рівнаня ріжничкові, які належать до того самого рода, що і їх долучені (54—65). Thomé: Про лїнїові рівнаня ріжничкові з альґебраічними сочинниками (66—88).

Bulletin de la Société mathématique de France, том 29. зошит I. (падолист та грудень 1900 р.) обнимає праці:

Duporcq: Про замітне уложенє двох параметрів. Touche: Про певну квестию d' Alembert'a. Rivereau: Незмінники лїнїових та однородних рівнань частних 2. ряду. Appell: Специяльна деформация тяглого осередка, вири ріжних родів. Bricard: Про певне свійство цилїндроіда. Borel: Про формули Rodrigues'a. Weill: Про точки основні жмутів лїнїових кривих альґебраїчних. Duporcq: Розширенє теорему Simson'а на просторонь. Sparre Застосованє функций еліптичаих до студіованя руху проєктилїв.. Demoulin: Про цилїндроід та про теорию жмутів комплєксів лїнїових. Hadamard: Про поступ филь.

Journal de l' école polytechnique, 2-а серия, 5-ий зошит 1900.

Caspari: Азимут, ширина та довжина через рівні висоти звізд. E. Maillet; Ґрупи кляси N-u степеня N що найменше (u—1) рази переходні (transitif). Lecornu: Рівновага пруживости стовпа. Appell: Рівновага пруживости пливака з плинним тягаром. Carvallo: Теория руху моноциклїв та біциклїв.

Transactions of the American Matematical Society volume 2. Nr. 1. 1901. містить ось-такі праці:

Wilczyński: Незмінники системy лїнїових рівнань ріжничкових. F. Cajori: Розбіжні та зглядно збіжні ряди, яких добуток є абсолютно збіжний. B. Porter: Твердженє про згідність точок неособливих та сизиґетичних жмутів. W. Strong: Нота про некватернїонні системи чисельні. J. C. Fields: Редукция загального інтеґрала Abel'a. D. Hilbert: Про поверхнї зі сталою кривиною. F. Blichfeldt: Нота про функцию $f(x) = \Phi(x) + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$, яка в данім інтервалї ріжнить ся довільно мало від зера.

American Journal of Mathematics, vol. 23. Nr. 1. 1901.

Kantor: Типи лїнїових комплєксів рациональних кривих в R_r. Wilczyński: Трансформация системy лїнїових рівнань ріжничкових. L. E. Dickson: Розділ трійкових лїнїових однородних субституций в тїлї Galois. J. C. Glashan: Визначенє та розвязка метациклїчних рівнань 5. степеня з рациональними сочинниками. E. O. Lovett: Конструкциї ґеометриї Евклїдової n-розмірової при помочи тяглих ґруп. Legh W. Reid: Таблицї кляс чисел для кубічних чисельних тїл. R. A. Roberts: О дояких свойствах площі кривої кубічної з огляду на колові точки в безконечности.

Annales of Mathematics (London) 2-а серия вол. 2. Nr. 2. (січень) 1901. містять праці:

R. E. Moritz. Розширенє дослїдів Hurwitz'а над переступом e на переступ числа π. A. Emch: Приноровленє функций елїптичних до рукояти Peaucellier'а. Ch. Augas Scott: Нота про стіжкові криві. R. A. Harris: Про дворозміровий рух течи etc. G. Miller: Про специяльну клясу ґруп Abel'а. M. Bôcher: Теория лїнїової зависимости. A. Hamilton: Особливі точки в родинї поверхний співосередних. D. Lehmer: Добутки совершенних чисел.

Annali di matematica pura ed applicata (журнал італїйский під редакциєю Bianchi, Cremona, Dini, Jung'а; Milano); серия III, том V. зош. 2. (січень 1901) містить твори:

Pagliano: Про ріжноманітність альґебраічну 3-розмірову утворену лиш через безконечну площу (ст. 72- 106). Bigiavi: Про зведенє рівнаня ріжничкового лїнїового з сочинниками подвійно періодичними (107—140). Інавґурация памятника для E. Brioschi (ст. 141—164).

El progresso matématico (журнал ішпаньский; Zaragossa): падолист та грудень 1900.

Aubry: Про певну ідентичність Euler'а (стор. 401—413). Ріжні квестиї та задачі (414 - 432'.

Математическій Сборникъ (Москва. 1900).

Том XXI. 1 зошит. С. Антаевъ: Виклад основних свойств рівнаня n ого степеня в зависимости від системи n рівнань з коренів даного рівнаня (продовженє, ст. 1—53). Е. Сабининъ: Застосованє рахунку вариацийного до доказу теорема зглядом суми кутів в ґеодезийнім трикутнику, нарисованім на поверхнї сталої кривини (ст. 54—61). З переписки академика Hermite'а з професором В. Анисимовим: о формі інтеґралів звичайних рівнань ріжничкових з сочинниками періодичними (ст. 62—67). П. А. Некрасовъ: Рахунок приближених виражень функций дуже великих чисел (ст. 68 - 224).

Том XXII. 2 зошит. П. А. Некрасовъ: продовженє попередної статї (ст. 225 334). Н. В. Бугаевъ: Звязь чисельних інтеґралів по дїльникам з чисельними інтеґралами по натуральним числам (ст. 335—350). Г. К. Сусловъ: До питаня про рух точки в осередку, який ся деформує (351—378). П. А. Некрасовъ: По причинї „Отвѣта“ акад. А. А. Маркова (ст. 379—386).

Будучі проблєми математичні. На послїднім міжнароднім конґресї математичнім в Парижи в р. 1900 піднїс D. Hilbert, професор унїверз. в Ґетінґен, цїлий ряд проблємів, якими після его погляду мусить ся математика зайняти, щоби тим успішнїйше могла дальше ся розвинути. На его погляд в математицї нема „Ignorabimus“; є проблєм, то можна его все розвязати при помочи чистого мисленя. Проблєми ті наведемо низше без довгих мотивів, які до них долучає Hilbert[1]).

В аритметицї є два такі проблєми:

1. дати безпосередний доказ на тверджене Cantor'а (якого до нинї не доказано): кождий систем безконечно много дїйсних чисел т. є. кожда безконечна множінь чисел є рівноважна або з множінию цїлих природних чисел 1, 2, 3, ---------, або з множінию всїх чисел дїйсних, а проте є рівноважна з continuum (пр. з точками лїнії); значить ся в дусї рівноважности є лише дві множінї чисел, відчисельна (abzählbar) і continuum.

2. доказати, що аритметичні аксіоми не є між собою суперечні, значить ся, що на їх основі при помочи скінченого числа заключень нїколи не дійдем до вислїдів суперечних між собою.

В ґеометриї маєм ось-такі проблєми:

3. подати два чотиростїнники о тїй самій підставі і висотї, яких в нїякий спосіб не можна розложити на пристайні чотиростїнники, та яких через додане пристайних чотиростїнників не можна доповнити до таких чотиростїнників, що для них є можливий розклад на пристайні чотиростїнники.

4. збудоване та систематичне оброблене можливих ґеометрий, (евклїдова, неевклїдова etc.)

5. розслїдити, о скілько поняте тяглої ґрупи перетворень Lie є доступне до наших дослїдів без заложеня, що функциї, які дефінїюють ґрупу $x'_i = f_i \; (x_1 \text{-----} x_n \; a_1 \text{-----} a_n)$ $(i = 1, 2, \text{-----} n)$, є тяглі і дають ся ріжничкувати (як у Lie).

До фізики відносить ся слїдуюча задача:

---

[1]) Пор. Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissensch. Göttingen 1900. Math. physik. Klasse Heft 3. ст. 253—297.

6. аксіоматичне обробленє — після взорів ґеометриї — тих частий фізики, в яких вже нинї математика відгриває велику ролю, с. є. в першій мірі рахунок вариацийний та механїка.

Теория чисел має ось-такі проблєми для будучих дослїдів:

7. Доказати, що наколи в трикутнику рівнораменнім відношенє кута при підставі до кута у вершка є альґебраічне (але не рациональне), то відношенє підстави і рамен трикутника є всегда переступне. Дальше доказати, що степень α^{β}, де α є число альґебраічне, а β альґебраічно невиміриме, є всегда числом переступним, або що найбільше невиміримим (irrational).

8. Доказати в теориї чисел первих твердженє Riemann'а, що всї місця зерові функциї:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \text{-----}$$

мають часть дійсну $\frac{1}{2}$. Коли ся вдасть се доказати, порішити, чи ріжниця між скількостию чисел первих понизше якоїсь величини x а льоґаритмічним інтеґралом x дійсно не є що до x безконечностию ряду висшого як $\frac{1}{2}$.

Перенести опісля вислїди одержані для роздїлу виміримих чисел первих на теорию роздїлу первих ідеалів в якімсь данім тїлї чисельнім K.

9. Доказати право відворотности (Reciprocitätsgesetz) l-тих решт степенних для якого небудь тїла чисельного

10. Подати спосіб, в який можна при помочи скінченого числа дїлань пізнати, чи рівнанє Діофанта має цїлі додатні розвязки.

11. Заняти ся теориєю форм квадратових з яким-будь числом змінних та якими-будь альґебраічними чисельними сочинниками.

12. Kronecker доказав, що кожде чисельне тїло Abel'а в обсягу чисел виміримих повстає через злоденє з тїл одиничних (утворених з коренів з одиниції). Розширити се твердженє на случай, наколи місто царини чисел вимірних або мнимої квадратової царини чисел приймем яко царини вимірности (Rationalitätsbereich) якенебудь альґебраічне тїло. Значить ся найти та дискутувати ті функциї, які для якогонебудь альґебраічного тїла мають ту саму ролю, як функция виложна для тїла чисел вимірних, а еліптичні модулові функциї для мнимого квадратового тїла.

В альґебрі виказує Hilbert слїдуючі квестиї:

13. Доказати, що рівнанє 7-ого степеня:

$$f^7 + x f^3 + y f^2 + z f + 1 = 0$$

не дасть ся розвязати при помочи яких небудь тяглих функций з двома тільки арґументами.

14. Наколи маєм систем:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = f_1 (x_1 \; x_2 \cdots\cdots x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_m = f_m (x_1 \; x_2 \cdots\cdots x_n) \end{array}\right\} \quad (S)$$

то кожде виміриме (рациональне) получене величин $(X_1 \cdots\cdots X_n)$ буде очевидно виміриною функциєю арґументів $(x_1 \cdots\cdots x_n)$; можуть однак істнувати такі виміримі дробові функциї величин $(X_1 \cdots\cdots X_m)$, які по зробленю субституциї (S) перейдуть на цїлі функциї арґументів $(x_1 \cdots\cdots x_n)$; такі функциї називає Hilbert зглядно цїлими. Рішити, чи все є можливо найти скінчений систем зглядно цїлих функций з арґументами $(X_1 \cdots\cdots X_m)$, які можна зложити рационально з кождої иньшої зглядно цїлої функциї арґументів $(X_1 \cdots\cdots X_m)$.

15-ий проблєм відносить ся до т. зв. рахунку відчисляня (Abzählungskathül), що єго сотворив Schubert (Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig, 1879). Доказати стисло ті ґеометричні услівя, які Schubert визначив на основі т. зв. засади специяльного положеня, та подати точні границї, в яких ті услівя є правдиві.

16-ий проблєм відносить ся до альґебраічних кривих і поверхний в просторони. Точно розслїдити взаїмне положенє найбільшої скількости віддїльно положених куснїв (Züge), яку крива альґебраічна n-ого ряду може мати, далї розслїдити скількість, вид та положенє плащів (Mantel), належачих до альґебраічної поверхнї в просторони. Далї визначити найбільшу скількість та положенє циклів граничних (cycles limites) Poincaré для рівнаня ріжничкового першого ряду і першого степеня виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

де Y та X є цїлі виміримі функциї n-ого степеня змінних (xyz), або в однороднім видї:

$$X\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + Y\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + Z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

де X, Y, Z є цїлі виміримі функциї однородні n-ого степеня змінних (x y z), а t параметр.

17. Розслїдити, чи кожда означена (definite) форма не дасть ся представити яко квот сум форм квадратових.

18. Розслїдити, чи також в просторони Евклїда о *n* розмірах істнує лиш скінчене число дійсно ріжних родів ґруп руху (Bewegungsgruppe) з основною цариною. Чи істнують також такі многостінники, які не виступають яко основні царини, а однак при їх помочи дає ся просторонь виповнити без перерви через відповідне уґруповане пристайних куснів.

Проблєми з теориї функций.

19. Розслїдити, чи кожде частне рівнанє ріжничкове правильного проблєму вариацийного (Lagrange'a) має яко розвязки лиш аналїтичні інтеґрали.

20. Розслїдити, чи кождий правильний проблєм вариацийний не дасть ся розвязати, наколи з огляду на данї услівя граничні сповняють ся деякі заложеня (а через се понятє розвязки конче дізнає розширеня).

21. Доказати, що всегда істнує рівнанє ріжничкове лїнїове кляси Фухса з даними особливими точками і даною монодромічною ґрупою.

22. Poincaré доказав, що яка небудь звязь альґебраічна між двома змінними дасть ся все перетворити через функцию автоморфну одної змінної; се значить, що коли є дане рівнанє альґебраічне двох змінних, то для них найдуть ся всегда такі однозначні функциї автоморфні одної змінної, що по підставленю рівнанє сповняє ся ідентично в тій одній незвісній. Но з сего не слїдує зовсїм, чи оно є можливо, ті однозначні функциї автоморфні нової змінної так вибрати, щоби — наколи та змінна перебігає правильний обсяг тих функций — через се був представлений також збір всїх правильних місць даного утвору аналїтичного (рівнаня). Проблєм 22-ий жадає проте розслїдженя того твердженя і тих наведених трудностий.

23. Ту не подає Hilbert нїякого специяльного проблєму, лиш висказує бажанє розширити і уґрунтувати дотеперішні теориї рахунку вариацийного.

Плинні кришталн. В послїдних часах занимали ся квестиєю плинних кришталів Reinitzer, Schenck, Abegg, Seitz, а головно O. Lehmann. Сей послїдний в двох викладах в „naturw. Verein-ї“ в Карльсруге в р. 1900 подав цікаві звістки про азоксианїсоль і азоксифенетоль. В відповідній температурі є се чисті, ясні течі;

наколи температура ся обнижає, теч стає каламутна, а опісля замерзає і стає кристалїчна. Та теч каламутна ломить сьвітло подвійно, а в сьвітлї споляризованім поводить ся зовсїм як кришталь, витворює чорний хрест, ясні перстенї і т. и. Згадані два тїла — а є їх еще більше — з причини їх власностий треба уважати за кришталп. Теч чиста є ізотропна (безподобна), каламутна стаєсь анїзотропна (статьна). В виду сего Lehmann подає таку дефінїцию кришталів: є се тїла статьні осмотрені дробинною напрямною силою; свойства, які до тепер лучено з понятєм кришталя, як пр. видержність, спроможність росту, однородність і пр., треба з того понятя усунути. Істнує проте цїла скаля тїл кристалїчних від твердого диямагнта до кристалїчних течий.

(Beibl. zu Wiedemanns Annal.)

Арґон і єго товариші. Дуже цікаві розслїди над тими тїлами перевели в минувшім роцї W. Ramsay і Morris W. Trawers. Після тих розслїдів метанеон не є елєментом, а всї прочі нові елєменти: гель, неон, арґон, криптон та ксенон є ґазами одноамотовими. Иньші свойства тих тїл вказує залучена табличка:

	Гель	Неон	Арґон	Критнон	Ксенон
Сочинник заломаня (воздух = 1)	0·1238	0·2345	0·968	1·449	2·364
Ґазова густота (0 = 16)	1·98	9·97	19·96	40·88	64
Точка випіня (тиснене 760 m/m)	?	?	86·9^0 abs.	121·33^{0}abs.	163·9^0 abs.

Після своїх свійств елєменти ті треба в системі періодичнім ось-так примістити:

H	Helium	Li	Be
1	4	7	9
Fl	Neon	Na	Mg
18	20	23	24
Cl	Argon	Ka	Ca
35·5	40	39	40
Br	Krypton	Rb	Sr
80	82	85	87
I	Xenon	Cs	Ba
127	128	133	137

(Proceed. Roy. Soc. **67** p. 329—333, 1901, Natur. **63** p. 165, 1900).

Енерґією лучів Рентґена та Becquerela займав ся в минувшім році E. Rutherford (Proc. Roy. Soc. 1900). З єго розслідів над діланєм тепляним лучів X виходить ось-що. Тверді рури, мірені больометром, давали лучі X, що відповідали 0·046 Watt, а найбільша емісия на секунду виносила 19·5 кальорий; енерґія та була отже 560 разів більша як сонїчна. Сочинник абсорпциї для лучів X при тисненю атмосферичнім був 0·000279, в CO_2 половину того. Взагалї абсорпция в ґазах росла пропорционально до тисненя.

Пересуненє вікове оси маґнетної земскої. W. van Bemmelen перевів рахунки над зміною положеня маґнетної оси земскої в часї від 1600 р. до 1885 р. З рахунків тих вийшло, що вісь маґнетна дізнала пересуненя в напрямі східно-західнім, при чім видним способом зрастало єї віддаленє від бігунів оборотових. Дорога точок оси лежить майже в ізохасмі с. є. лінїї рівночастого виступованя сьвітла полярного; здає ся проте, що вісь маґнетна відбуває оборот довкола бігуна сьвітла полярного, а не довкола бігуна ґеоґрафічного.

(Wiedem. Beiblätter 1901. Heft 2.)

Густота електрична на еліпсоїдї. Наколи скількість електричности на еліпсоїдї о осях 2a, 2b, 2c є M, p є нормальна з середоточки еліпсоїди до точки O, то густота електрична в точцї виражає ся після обчислень H. Dörrie взором:

$$\varrho = \frac{M p}{4 \pi a b c}$$

(Wiedem. Annal. 1901. Heft 3.)

Perrotin мірив в обсерваториї ніцейскій скорість сьвітла способом Fizeau. Після тих помірок скорість сьвітла є 299·90 ± 0·08 тисячів km.

(Comptes rendus **131**. 1900 p. 731—736.

На загальнім конґресї фізиків в Парижи подав Ch. Dufonr вислїди помірок при помочи сонїчного мікроскопа сили сьвітла деяких звізд в порівнаню з сонцем. Сьвітло місяця є 300.000, Арктура 33 мілїярдів, Антареса 132 мілїярдів, Атаіра 48 мілїярдів разів слабше як сьвітло сонця.

(Physikal. Zeitschrift 1901).

Щоби витворити в ґазї один йон, треба після Rutherforda при тисненю одної атмосфери середної енергії $1·90. 10^{-10}$ erg.; та „енерґія йонова“ є здаєсь для всїх ґазів однака.

Відступ поодиноких набоїв в йонах в однїй дробинї є після обчисленя Rutherforda $1·1. 10^{-9}$ cm., с. є. $^1/_{30}$ часть проміру атома; се згоджує ся з вислїдами I. I. Thomsona, що відємний йон є лиш маленькою частинкою дробини.

Скількість енерґії, яку висилає один ґрам окиса уранового протягом одного року, є 0·032 кальориї, яку висилає один ґрам радіюм, 3000 кальориї.

Виправа дуньска вислана минувшого року під проводом Paulsena до Ісляндиї в цїли розслїдженя сьвітла полярного доказала, що лїнії, які виступають в дуговинї того сьвітла, є ідентичні з лїніями катодальних лучів азота, так що навіть напруги зглядні лїнїй в обох дуговинах є однакі.

Виправа ся мірила елєктричність воздушну протягом 53 днів, однак лиш 11 днів серед сприяючих обставин. З помірок сих виходить, що потенциял воздушний зраставрастав від години 8 рано аж до 12—1 з полудня; опісля спадав аж до години 2 в ночи, та осягав minimum між 3 а 4 годиною рано.

(Verhandlungen der deutsch physik. Gesell. 1900 p. 218 sqts).

Нові лямпи елєктричні. Великим поступом в технїцї осьвітленя елєктричного є лямпа В. Нернста, професора університета в Ґетінґен. Нернст доказав іменно, що т. зв. дієлєктрики, що на зимно не перепускають елєктричного току, стають дуже добрими провідниками через достаточне огрітє. Такими тїлами є порцеляна та „рідкі землї“ (т. зв. тїла Нернста) пр. циркон. Лямпа Нернста складає ся з такого дієлєктрика, а довкола него в певнім відступі окручена є спіраля з плятини; до обох тих тїл ведуть провідні дроти. Наколи ток починає кружити, то в першій хвилї переходить він лиш через дріт Pt та розжарує єго до білого. Під впливом горяча перемінює ся однак тіло Нернста в дуже добрий провідник та розжарує ся і видає інтензивне сьвітло, а рівночасно автоматично ділаючий маленький електромаґнет вилучає дротик Pt з току електричного. — Ще простїйша відміна сеї лямпи є лямпа, де тїло Нернста огріває ся лямпкою спіритусовою, а опісля перепускає ток. В обох разах цїлий процедер заміни того тїла в провідник тревае кілька секунд. Користи сеї лямпи є наперед дуже інтензивне сьвітло, дуже зближене до сонїчного, далї се, що тїло Нернста не спалює ся в воздусї, отже не потреба до лямп Нернста грушок скляних безвоздушних, як в лямпах Едізона, а в кінци найважнїйша користь є та, що лямпа Нернста зуживає через половину тілько току, що лямпа Едізона однакої сили.

Засаду Нернста пристосував Е. Раш (Rasch) до лямп лукових: місто стовпчиків вугля уживає він стовпчиків з тїл Нернста, отже рідкі землї, маґнезию, вапно і т. п. Конструкция є анальоґічна, як у Нернста (побіч стовпчиків з тїл Нернста є — як звичайно — два стовпчики вугляні, які опісля відсуваються). Є ту о стілько вигіднїйше, як в лямпі Нернста, що як відомо сьвітло лукове повстає лиш між кінцями стовпчиків, отже висока температура 3000°—4000° C, яка є в лямпі Раша, не атакує та не нищить оправи мосяжної лямп. Дальша користь сеї лямпи є та, що краска сьвітла лежить в наших руках, бо она зависить від материялу. Наколи сьвітло лукове має закраску фіолетну, то сьвітло стовпчика цирконового або маґнезіового є зовсїм біле. Що до скількости електричности, яка є потрібна в лямпі Раша, найлїпше показує слїдуюче порівнане: один ват витворює в лямпі Едізона сьвітло $^1/_3$ сьвічки, в лямпі Нернста $^2/_3$ сьвічки, в лямпі луковій вуглевій 2 сьвічки, а в лямпі Раша 4 сьвічки.

Рівночасно обдумав звісний Auer von Welsbach нову лямпу жарову, де дротик вугляний заступив дротиком з осму; є се о стілько користне, що Os дуже є витревалий на ділане тепла, більше як Pt та C; лямпа така тревае 700 до 1200 годин, а опір нитки осмової є чотири рази меньший, як в дотеперішних лямпках жарових. До використаня токів електричних в дотеперішних закладах треба проте уставляти в ряд по чотири такі лямпки осмові. Сьвітло такої лямпки є дуже сильне, а на лямпцї заощаджує ся до 60% в порівнаню з лямпкою Едізона.

Цікаві розслїди над планетою Еросом (пор. попередні випуски Збірника) перевів Ch. André. З розслїдів тих показує ся, що Ерос є звіздою фотометричною і є системом подвійним; обі астероіди, з яких планета ся зложена, мають проміри в відношеню 3 : 2, а площа їх орбіт переходить через землю.

(Comptes rendus CXXXII. 1901. ст. 397.)

В найблизших двох роках мож обсервувати слїдуючі наворотні комети:

Комета	Час обігу (в лїтах)	Перехід через перігелїюм	Після обчислень
de Vico E. Swift	6·4	1901·1	Seares'a
Brorsen	5·5	1901·1	Lamp'a
1894 I (Denning)	7·4	1901·5	Gutesman'a
Encke	33.	1901·7	Иванова
1895 II Swift)	7·2	1902·8	Dickerman'a
Tempel$_3$-Swift	5·5	1902·9	Bossert'a.

(Vierteljahresberichte der astron. Gesellsch. 1900.)

Помер славний математик француский Шарль Hermite. Родж. в р. 1823 був професором школи полїтехнїчної та Сорбонни в Парижи. Від р. 1856 був членом Інституту, а в р. 1892 разом з покійним Pasteur'ом обходив ювілей своєї научної дїяльности. Яко математик займав дуже видне місце в сьвітї науковім; єго голосні розслїди над переступом числа e, працї над теориєю рівнаня пятого степеня та висших, в теориї ґруп та функций елїптичних та и. виробили єму почесне місце в історші розвою наук математичних та придбали єму безсмертне імя.

Конкурс академії париской на рік 1902. 1) Усовершити в важнїй точцї застосованє теориї ґруп тяглих до науки о рівнанях ріжничкових частних. 2) Розвинути і усовершити теорию поверхний, які ся стосують до парабольоіди оборотової.

Academia Pontaniana di Napoli розписує на рік 1901 слїдуючий конкурс: Виклад елєментарний основ аксонометричного рисунку з застосованями усякого рода.

Понятє тяглости. Фільозофічний факультет унїверзитету в Ґетінґен поставив в марти 1898 р. слїдуючу конкурсову задачу: „Через довгий час уважано за загальну засаду для математичного трактованя явищ природних засаду тяглости (Stetigkeit) або єще специяльнїйше представленє при помочи функций, які дають ся ріжничкувати без нїякого застереженя. Ту засаду ввели творцї рахунку ріжничкового та інтеґрального яко щось, що само через себе ся розуміє; поступи дослїдів математичних показали однак що раз то виразнїйше, що при тім tacite за основу принимано дуже велике число заложень, до котрих ми однак при все істнуючій неточности наших змислових постережень зовсім не є приневолені. То заложенє стоїть вже навіть заздалегідь в незгодї з приниманєм дробинної будови материї. Факультет бажав би собі працї о чисто-науковім характері, яка би питаня, що ту виступають, виложила в загально зрозумілий спосіб, зглядно піддала точному дослїдови хосенність звичайного представленя тої квестиї. Праця може мати більше характер математичний або фільозофічний та психольоґічний; історичні студиї є пожадані, але не вимагані“. — Наколи первісне сформулованє задачі задля єї короткости не зістало в властивий спосіб поняте -- три надіслані працї показали ся яко недостаточні до удїленя їм нагороди — оголошує факультет слїдуюче обширне поясненє сеї конкурсової квестиї:

Поставлене питанє толковано переважно, або бодай уважано за єго ядро, в слїдуючий спосіб: треба рішити, чи лїпше є уважати материю за збудовану в спосіб молєкулярний, чи за тяглу, та чи специяльно нові поступи наук природописних основують ся на тім, чи на тамтім поглядї.

Того рода вивід, піднятий з независимого становища та з дїйсним поглядом на найновійші поступи царин природописних, які ту входять в рахубу, не був би без заслуги. На кождий случай однак треба би при тім завважати, що ті два погляди власне в найновійших часах що раз то на перемін ся заступають. Наколи Maxwell в науцї елєктричности впровадив теорию тяглости (continuum), то тепер в тій науцї через студию лучів катодальних та елєктродинамічну теорию сьвітла звертаєм ся назад до атомістичного представленя річи. Фізикальна хемія, яка в науцї фаз Gibbs'а характеризує стан материї через скінчене число параметрів, отже за підставу здає ся принимати понятє тяглости, розвиває з другого боку атомістичну в своїй основі теорию йонів. В тім самім часї, в якім фізика змагає найлїпше зробити через виключно „феноменольоґічне“

представленє явищ, будує хемія науку про положенє атомів в просторони і т. д. — З другого боку треба піднести, що погляд атомістичний не конче потягає за собою ідею сил з віддаленя (Fernkraft), сей погляд можна злучити з ідеєю тяглого в просторони переношеня сил, наколи впровадимо електричні або материяльні атоми (як собі їх хто представляє) яко поодинокі (особливі) місця в осередку, що в тяглий спосіб виповняє просторонь.

Повисший вивід, хоч і як інтересний, не влучає однак властивої теми, поставленої через факультет, лиш давав би для неї тимчасовий материял. До тої теми зближимо ся дїйсно, наколи спитаємо: о скілько є в висше наведених примірах оба погляди (теория тяглости і теория дробинова) математично рівноважні для виясненя, або лїпше для представленя дослїджених фактів? Змисл теми сейчас ухопимо, наколи усунемо все гіпотетичне та спекулятивне, що ся відносить до самої істоти материї, та зовсїм загально розважимо се, що слїдує: Кождий впроваджує, скоро хоче осудити цїлковите дїланє розтяглих утворів, які є в малих розмірах неоднородні, однородні вартости середні; за ті впроваджує він залежности, які виражає через можливо просто дібрані функциї. Так пр. заступає сей, що рахує, в многих случаях сумованє через інтеґрованє і т. п. Первісний наклін до такого поступованя здаєсь лежить в натурі наших змислових постережень. Подумаймо пр., що купа снїгу, на яку дивимо ся з далека, або лїс, що замикає овид, здаєсь мати тяглий контур. З тим лучить ся дальше змаганє до можливо простого представленя. О скілько є сей спосіб математично оправданий? Специяльно, який змисл має, стосувати до залежностий, які ми уставляєм поміж однородними середними вартостями, правила рахунку ріжничкового та науки про ряди? А наколи ми через таке застосованє найдем правдиві вислїди, чи можемо опісля заключати назад на однородність або неоднородність субстрату? — Доперва наколи полагодимо або бодай зрозуміємо комплєкс так представлених питань, будемо могли вернути до проблєму поясненя натури. Тодї ся спитаємо, яке внутрішне значінє треба приписати заложеням тяглости (Stetigkeit), які ми привикли від давна робити, чи они є чимсь більше, як лиш средством помічним до лекшого переведеня математичних розслїдів, та в якім змислї мають вислїди, з тих заложень випроваджені, претенсию до обєктивного значіня.

Є неможлива річ, сказане ту єще основнійше поясняти. Звернемо лиш увагу на дуже простий примір (який принагідно Boussinesq розбирає). Кождий вчить ся, що потенциял тяжести в серединї якогось тїля сповняє рівнанє ріжничкове $\Delta V = 4\pi\varrho$. Яке значінє має се рівнанє ріжничкове, або: яке значінє хочемо величинам V і ϱ, що в рівнаню ріжничковім приходять, надати для тїла, яке в малих розмірах є неоднородне (як висше купа снїгу)? І як представляють ся ті питаня, наколи хочем приняти будову тіла з атомів, що мають форму точок? Очевидно в однім або другім случаю схочемо впровадити V і ϱ яко середні вартости; як обчислити ті середні вартости?

По над питанями та трудностями повисшого рода перейшли найвизначнїйші теоретики минувших десятків лїт до порядку. Перечитати лиш, як Cauchy або Poisson від погляду молекулярного переходить до ріжничкових рівнань математичної фізики. А сей наведений примір находить зі сторони великого числа нинїшних фізиків наслїдуванє без надумуваня ся. Очевидно входить ту в розважанє множество емпіричних елементів. Досьвід дає нам певність, що в загалї мала зміна преміс дуже мало зміняє вислїди. Правда не все ся се дїє (наколи заходить „нерівновага“, при вибухах і т. и.); природописцї спускають ся з огляду на питанє, чи в данім случаю заходить такий виняток, чи нї, на своє чутє або на експериментальну контролю; а як вислїд показує, слушно.

Но нинїшний математик, що роздумує про основи своєї науки, не може в нїякий спосіб так себе ограничати. Він не буде оспорювати хісна повисше наведеного поступованя — навіть з відси возьме охотно імпульс — но по за тим буде жадав точного математичного уґрунтованя та ограниченя такого поступованя. Для єго накліну до пізнаня міродайним є новітний розвій математики в напрямі критичнім. Той розвій уважають однак в загальнїйших кругах, так зі сторони фізикальної, як і фільософічної, радо за щось додаткового, що для цїлий поясненя натури властиво не входить в рахубу. Но однак нїколи не повинно бути задачею, відсувати неприємну критику на бік, але противно єї внутрішно (в єї істоті) побороти. З другої сторони вдоволило ся много математиків тим, нові основи в обсягу їх специяльної науки привести до значіня; они дуже рідко мали або шукали нагоди відповідно тому змінити відношеня до сусїдних царин. Тому будуть ту відповідні слїдуючі поясненя.

1. Розходить ся о такий розвій математики, який означуєм яко з'аритметизованє єї. Яко одиноку єго основу служить перегляд образу чисел (Zahlbild), згл. прав, після яких оперує ся числами; до тої основи треба звести всї иньші відношеня. Ідея тяглої змінної буде заступлена через загальнїйші сформулованя науки о множінях;

ідея функциї дізнасть відповідного перетвореня. Рахунок ріжничковий та інтеґральний будуть оперті виключно на стисле понятє границї; окаже ся правилом, а не винятком, що тягла функция не дасть ся зріжничкувати і т. д.

2. Істотною річею є, що змисловий погляд мірений на так з'аритметизованій математиці оказує ся яко щось неточного, означеного лиш на певну скількість десяточних. Мимо сего з'аритметизована математика буде точкою виходу для квантитативного опанованя сьвіта внїшного[1]). В якій формі се має ся стати? І на які улекшеня можна собі позволити, наколи жадає ся від вислїдів знов ограниченої точности? Се є центральне питанє, під яке підпорядковує ся все висше сказане.

3. В сказанім містить ся, що потрібне є до розвязаня повисших трудностий. Розходить ся о се, щоби математик та емпірик подали собі руку на вспільній царинї. Для математика повстає задача, на основі з'аритметизованої науки розвинути обширну науку про приближені методи, розвивати яко окрему науку се, що п. Heun в новійших часах слушно назвав математикою приближень (Approximationsmathematik).[2]) Знов же для емпірика буде розходити ся про се, щоби на всїх царинах, далеко більше як до тепер, установити степень точности, до якого (зверхні та внутрішні) обсервациї, з яких він виходить, є правдиві, або внутрі якого він хоче мати вірні (zuverlässig) вислїди.

Ся наведена проґрама не жадає в дїйсности нїчого нового, не достає лиш до тепер стислого єї переведеня. Рахмайстри прилучили ся до неї вже давно, а також в астрономії та ґеодезиї принято єї загально від часу робіт Gauss'a. З новійших чисто математичних робіт треба згадати працї Чебишева. Так само треба ту навести твердженє Вейерштрасса, що можна кожду в якімсь інтервалї подану функцию тяглу рівномірно приближити з довільною точностию через виміриму (рациональну) функцию скінченого степеня. Яко нове жаданє виступає ту лишень се, щоби висше наведене поставленє питаня більше висунути на перед яко властиву середоточку цїлої стосованої математики, та набрати пересьвідченя, що приближене представленє відносин між величинами далеко більше про-

---

[1]) В противнім случаю приходять нові трудности. Пор. вступну промову проф. Burkhardt'a: Mathemat. und naturwissen. Denken, Zürich 1897.

[2]) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung XI, 2 (1900).

никає наше ціле мисленє, як дотепер думано. Наші вискази про натуру річий стануть однак скромнїйші. Говорено давнїйше нераз, що в природї приходять лиш функциї аналїтичні. Сей вислав змінимо тепер о стілько, що може лиш через неточність нашого погляду на природу вистарчали функциї аналїтичні, і то дуже прості функциї аналїтичні. Через се не впадем однак єще в другий екстрем, який в найновійших часах заступає Boltzmann, ставлячи гіпотезу нетяглости явищ в природї — так сказати — яко конечність мисленя.

Значінє питаня конкурсового, поставленого через факультет, здаєсь тепер достаточно піднесене. Ходило о се, щоби комплекс квестий, які входять в рахубу, та понять в прозорій формі виложити і о скілько можна критично розібрати. Математик міг би рівночасно передприняти, науку про приближені методи перевести в специяльній царині, фільософ або психольоґ неточність нашого змислового постереженя в тім або иньшім напрямі точнїйше студиовати; згадаймо лиш на кінематоґраф, так залюбки наводжений через Boltzmann'а. Чого треба безусловно жадати з математичних відомостий, то лиш сего, щоби автор істоту з'аритметизованого знаня, як оно тепер виступає в письмах нинїшних міродайних математиків, в себе прийняв. До сего не вистарчить перечитати загальні вискази визначних авторів, які подробиць новійшої прецізийної математики нїколи не тикали, хотяй би се ходило про Гельмгольца або Кірхгоффа, Больцманна або Маха. Математики можна вивчити ся лиш через сконцентроване студиюм; в нїй нема нїякої „королївскої дороги“ (Königsweg).

Дальші свойства лучів Бекереля. Після дослїдів F. Giesel'a (Braunschweig) можна видїти лучі Бекереля, що виходять з препарату раду, держаного перед замкненим оком, навіть тодї, коли препарат (найлїпше хльорак або бромак) находить ся в скринцї зробленій з олова. Має ся тодї чутє, мов би цїле око було наповнене сьвітлом; око мучить ся тому дуже скоро. Навіть слїпий, хотяй у него сочка очна є закаламучена, дізнає під впливом лучів Бекереля вражіня сьвітла, що треба приписати фосфоресценциї, яка повстає в серединї ока. Ділане фотоґрафічних лучів Бекереля є таке, як лучів Рентґена, хотяй слабше. — Подібно, як лучі Рентґена, виладовують лучі Бекереля наладований електроскоп (через йонїзацию воздуха). Відмінне однак від лучів Рентґена є їх поведенє маґнетне; дізнають они, як лучі катодальні, збоченя маґнетного, чого нема у лучів Рентґена. — Мимо так сильного проміньованя частинки, які відривають ся від тїл лучистих, є так малі, що требаб міліона лїт, щоби рад стратив на вазї 1 mg.

F. Himstedt і W. Nagel стверджують дїланє лучів Бекереля на око, але лиш на око, яке в темноті випочало; для такого ока є лучі Рентґена і лучі позафіолєтні видимі.

Після обсерваций Himstedt'а дїлають лучі Бекереля на селєн в сей спосіб, що єго електричний опір зменьшає ся; рад замкнений в подвійну ослону паперову викликав зменьшенє опору в клїтинцї з селєну через верству воздуха грубу на 1 cm. о 1%. Єще сильнїйше дїлають лучі Рентґена, які викликують зменьшенє опору селєну о 50%. В сей спосіб дїлають і позафіолєтні лучі; противно позачервоні не дїлають на селєн зовсїм. — (Annal. der Physik 1901, 4, IV. 531).

В розвідцї „elektrische Leitfähigkeit in Gasen, die von Kathodenstrahlen durchsetzt sind“ доходить J. C Mc Lennan до слїдуючих вислїдів: 1. Спроможність проводу, яку в якімсь ґазї викликують лучі катодальні, є подібна до спроможности, викликаної через лучі Рентґена та Becquerel'а, так що можна приняти, що в обємі ґазу, на який трафляють лучі катодальні, повстають додатні та відємні йони. 2. Наколи лучі катодальні падуть на ізольовані металїчні провідники, окружені воздухом, то ті провідники, передше ненабиті, одержують малий набій; набої додатні остають знищені (наколи передше на провіднику були), а від'ємні зменьшають ся. Ся утрата набою походить від дїланя з'йонїзованого воздуху, окружаючого провідник. 3. Наколи катодальні лучі о певній силї переходять через ґаз, то скількість йонів витворених в однїм cm³ ґазу залежить лише від ґустоти ґазу, а не залежить від єго складу хемічного. 4. Йонїзация, походяча в ґазах від лучів о сталій натузї, є пропорциональна до тисненя, яке є в ґазї. 5. При лучах катодальних, подібно як при лучах Рентґена, стоїть число витворених йонів в ґазї в означенім відношеню до скількости з'абсорбованої лучистої енерґії.

(Zeitschr. für phys. Chemie 1901, зош. 5).

Нову методу до означеня тягарів атомових подає L. Benoist на основі своїх розслїдів над проникливостию материялів для лучів Рентґена. Після него питома проникливість елемента, яку міримо в означених простих условинах, є сталою, яка далеко простїйше зависить від тягару атомового, як питоме тепло. Ту сталу можна легко визначати і она надає елементови єго становище в ряді чисел, які виражають тягар атомовий. Возьмім пр. інд, якого тягар атомовий є після деяких хеміків 75·6, після иньших 113·4. Проникливість інду для лучів Рентґена дає сему елементови місце за сріблом (108) та кадмом (112); отже інд має тягар атомовий 113·4 (а не 75·6).

(Compt. rend. 1901, t. 132 p. 772).

Монахійскі хеміки K. A. Hoffmann та E. Strauss одержали з пехбленди, клєвсіту, самарскіту та евксенїту олово, яке є лучиво-чинне (як рад); одержали они лиш єго получення, як хльорак та сїркан. Тіла ті флюоризують під впливом лучів катодальних на синьо та дїлають в темнотї на плиту фотоґрафічну. Препарати ті ривалїзують що до сили лучистости з найлїпшими препаратами тору та урану. Вартостність того олова, як і єго тягар дробиновий здаєсь є більші як звичайного олова.

(Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. 1901, Jahrg. 34).

Розходженє ся дрогань Гертца в водї мірив C. Gutton в сей спосіб, що при помочи ексцитатора Гертца перепускав филї електричні здовж двох рівнобіжних дротів, які в віддалею 2·5 m від ексцитатора переходили через деревляне, парафіною виложене корито. Резонатор до викритя филь складав ся з колеса переломаного, зробленого з мідяного дрота, і стояв між рівнобіжними мідяними дротами. Поза резонатором переходили дроти через друге подібне корито та були злучені містком. Наколи пересувано місток, показувала іскра резонатора мініма та максіма, а відступ містка між одним мінімум та одним максімум давав довгість филї. Поміри роблено наперед в воздусї, опісля в водї (дроти і резонатор уміщувано в водї). Довгість филї в водї була така, як і в воздусї; не залежала она анї від положеня резонатора зглядом дротів, анї від розмірів та поємности ексцитатора. Наколи однак дроти уміщено в водї, а резонатор в воздусї, то филя була 8·3 рази меньша як тодї, коли дроти були в воздусї; с. є. сочинник заломаня води для филь електромаґнетних є 8·3, число, яке вже і передше найдено. З факту сего, що довгість филї остала така як в воздусї, наколи дроти і резонатор були рівночасно уміщені в водї, слїдує, що період дрогання резонатора мусить при тім 8·3 рази бути більший.

(Compt. rendus 1901 t. 132 p. 543).

Після найновійших обчислень сила, якої уживає ся тепер в печах електричних цілого сьвіта, виносить summa summarum до 230000 конїв парових; з того на фабрикацию карбіду відпадає 185000 (в самій Франциї над 60000) конів, на фабрикацию алюмінїюм 27000, міди 11000, а карборунду 2000 конїв.

(L'etincille électriqae, Paris 1901 Nr. 15).

Нові теориї полярного сьвітла. Після ученого шведского Сванта Arrheniusa є сьвітло полярне наслїдком від'ємного електричного виладованя сонця. Виладованя ті підлягають колибаням, які дають ся відчувати на планетах відповідно до їх положеня зглядом площі рівника сонїчного та їх віддаленя. Сильне виладоване перетворює ся в катодальні лучі, які є причиною полярного сьвітла. Лучі ті є розповсюднені по цілій землї, але бачити їх можна лиш коло бігуна, де они остають під більшим тисненем і через те сильнїйше сьвітять. Після Arrheniusa всї планети мають хвости утворені з частинок від'ємно електричних, но хвости ті не є так сильні, як у комет.

Дещо подібна є теория англїйского фізика J. J. Thomsona. Приймає він, що всї тїла, отже і сонце, підлягають делїкатному проміньованю, подібному до лучів Becquerel'a. Наколи такі сонїчні лучі увійдуть в засяг маґнетного притяганя землї, то они дізнають відклоненя в напрямі до обох біґунів, а наколи они в кінци осягнуть в атмосфері відповідну верству з відповідною густотою, тодї повстають прояви сьвітляні зорі полярної, подібні до лучів катодальних в рурках з розріжненим воздухом. — Теорию ту потверджують досьвіди Poulsen'a, після яких дуговина полярного сьвітла є схожа з катодальною дуговиною азота.

Нові акумулятори Едізона. Едізон побудував нові акумулятори, яких поємність трикратно перевисшає поємність дотеперішних акумуляторів з олова. Анодою є в них делїкатно розміщена металїчна мідь, катодою металїчний кадм, електролїтом 10%-овий розтвір NaOH; катода і анода відділені від себе перепоною асбестовою. При набиваню повстає CuO, при виладованю редукує ся CuO, а оксидує ся кадм. — В другім акумуляторі Едізона електролїтами є надокис желїза і надокис нїклю, електролїтом є KOH: при набиваню редукує ся надокис желїза, при виладованю дїє ся противно.

Продукция плятини на Уралю, де є головне жерело того рідкого металю, представляє ся так:

Видобуто:

Рік	kg	Рік	kg
1891	4226	1896	4930
1892	4570	1897	5649
1893	5094	1898	5978
1894	5208	1899	5946
1895	4406	1900	5438

Курс Pt був в 1900 р. 3500 fr. за 1 kg, кошта продукциї 1000—1800 fr.

(L'électricien 1901. Nr. 546).

Продукция алюмінїюм в тоннах метричних виносила в послїдних 12 лїтах:

Рік	Сполучені Держави Америки півн.	Иньші краї
1889	21·6	70·9
1890	27·9	165·3
1891	68·2	233·4
1892	118·1	487·2
1893	164·4	716·0
1894	250·0	1290·9
1895	417·8	1418·2
1896	590·9	1659·7
1897	1814·4	3394·4
1898	2358·7	4500 0
1899	2948·4	6000·0
1900	4000·0	7500·0

(L'étincille électrique, Paris 1901 Nr. 10).

Хотяй в природї дуже много витворюєсь метану (CH_4) (ґаз блотний), то однак майже нема єго в атмосфері. Толковано се в ріжний спосіб, а найчастїйше, що ґаз сей в міру, як ся творить, спалюєсь в атмосфері під впливом озону. Доперва V. Urbain впав на думку і ствердив се досьвідом, що ґаз сей абсорбують рослини, подібно як безводник квасу углевого (CO_2). Рослини замкнені щільно в начиню, яке було наповнене атмосферою богатою в метан, з'абсорбували протягом 6 до 11 днів $82^{0}/_{0}$ сего ґазу.

(Comptes rendus 1901. t. 132, p. 334).

Після найновійших помірок J. Dewar'a є середна температура кипіня плинного кисня — 182·5 C, а плинного водору — 252·5° C, значить ся 20·5° абсолютної скалї.

(Proceed. of the Royal Society 1901, vol. 68).

Нові означеня температури, при якій топить ся золото, переведені через L. Holborn'a та A. Day'a дали на вислїд 1063·5° C, наколи золото топлено в тиґлю, уміщенім в печи електричній, а 1063·9° C, наколи золотий дріт уміщено в термоелєментї в точцї злютованя сего елєменту та розгріто так сильно, що ся сей дріт стопив.

(Annal. der Physik 1901. F. 4. Bd IV).

Температура, в якій топлять ся ріжні мінерали та скали, є слїдуюча (після помірок C. Doelter'a, довершених при помочи плятино-родового пирометру): 1. мінерали: ортокляз 1145° C, альбіт 1100°, лябрадор 1119°, анортит 1125° C, авґіт 1075° C, дїальяґ 1035°, сподумен 925°, музовіт 1205°, біотит 1115°, нефелїн 1042°, лєвкіт 1300°, маґнетит 1140° C. 2. скали: ґраніт 1240°—1300°, монзоніт 1115°—1170, лїмбурґіт 995°, базальт 992°—1050°, лява з Етни 960°, лява з Везува 1030°—1090°, лєвцитіт 1400° C.

(Wiener akad. Anzeiger 1901).

Екстреми температур в XIX. столїтю. Після „Revue scientifique" температура обсервована в Парижи в лїтах 1801 до 1900 представляє ся ось так. Найнизша температура припала в 45 лїтах на сїчень, в 27 лїтах на грудень, в 21 лїтах на лютий, в 5 лїтах на март, а лиш в однім роцї на падолист. Лиш в двох роках впала температура низше 20°, а се 9. грудня 1871 р. (–21·3° C) та 10. грудня 1879 (—23,9°). Переважно (бо в 79 лїтах) minimum лежало між —5° а —15° C. — Найвисша температура випала в 49 лїтах на липень, в 33 на серпень, в 14 на червень, а в 2 на май та вересень. Найвисша температура випала на 9. липень 1874 р. (+38·4° C), 2. липень 1900 (+37·7° C), 8. серпень 1873 та 19. липень 1881 (+37·2° C). Пересїчне maximum (бо в 68 лїтах) лежало між +30° а +35° C.

(Die Natur 1901).

Зимне сьвітло відкрив R. Dubois, професор унїверзитету в Лїонї. Сьвітло се дає один рід бактерий т. зв. фотобактериї, наколи їх культуру годує ся на булїонї з соли морскої, ґліцерини, пентону та аспараґіни в начиню шкляннім. Сьвітло се є досить сильне, так що можна ним осьвітити цїлу салю, мов сьвітлом місяця в повни; треває оно досить довго і є зовсїм зимне (без слїду тепляних лучів).

В часї виправи Нанзена до бігуна північного робив численні поміри прискореня земского капітан Scott-Hansen при помочи маятника Штернека. Поміри ті порівнані з дотеперішними формулами на обчисленє прискореня потверджують правдивість другого взору берлїньского професора Гельмерта, так що нормальне прискоренє в ширинї ґеоґраф. φ дасть ся представити точно взором Гельмерта:

$$g_0 = 9{\cdot}78046\ (1 + 0{\cdot}005302\ \sin^2\varphi - 0{\cdot}000007\ \sin^2 2\varphi).$$

Physik. Zeitschrift 1901. N. 38).

Високість хмар мірено недавно в Анґлії при помочи фотоґрафії та одержано: для „cirrus“ 10200 m, „cirrocumulus“ 8600 m, вершок „cumulus“ 3000 m, підстава 1300 m, „cumulostratus“ 2200 m. Хмари осягають найвисшу високість коло 2—3 години з полудня, а опісля опадають.

(Nature).

Директорови обсерваториї Smith'a в Женеві (Ню-Йорк), Wiliam'ови R. Brooks'ови повело ся одержувати фотоґрафії при ужитю виключно сьвітла, яке походило від планети Венери. В найтемнїйшій порі нічній впускав він через отвір копули в обсерваториї до цїлком затемненої комнати лучі сеї планети та при ужитю виключно тих лучів фотоґрафував ріжні предмети; одержані фотоґрафії були надсподївано виразні та ясні.

(Prometheus 1901. Nr. 590).

На планетї Юпітер виступила 15° півн. ширини чорна пляма з слабою червоною примішкою (після обсервацій п. Solá в Барцельоні); пляма та має вид округлий і є в части оточена чорним перстеньом. Пляму ту спостережено 2. червня, а єще 31. мая Solá обсервуючи поверхню Юпітера не замітив на нїй нїчого нового. Пляма та є проте імовірно зовсїм нова.

(Astron. Nachricht. 1901 червень).

В послїдних 14 роках, т. є. від часу введеня фотоґрафії до астрономії, виступило після Pickering'a 8 нових звізд, а іменно

Nova Persei 1887, Nova Aurigae 1891, Nova Normae 1893, Nova Carinae 1895, Nova Centauri 1895, Nova Sagittarii 1898, Nova Aquilae 1899 і Nova Persei 1901.

(Die Natur 1901. Nr. 16).

E. Nichols розслїджував в обсерваториї Yerkes'а тепляне проміньоване деяких звізд та планет ири помочи дуже докладного радїометра; з розслїдів тих випали на зглядне тепляне проміньоване числа:

Веґа: Арктур: Юпітер = 1 : 2·2 : 4·7,

підчас коли їх ясність є:

Веґа: Арктур: Юпітер = 1 : 1 : 7·8.

Отже Арктур є сорозмірно теплїйший, а Юпітер яснійший, як другі тїла.

(Naturwiss. Rundschau 1901. Nr. 19).