

1975

ЗБІРНИК

С Е К Ц І Ї

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСЬКОЇ

НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА ІМЕНІ ШЕВЧЕНКА.

Т. II.

ПІД РЕДАКЦІЄЮ

Івана Верхратського і Володимира Левицького.



У ЛЬВОВІ, 1897.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

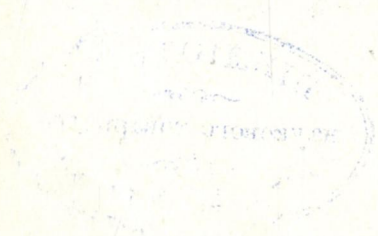
З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарського.

БІБЛІОТЕКА
Наукового Товариства імени Шевченка
у Львові.

Знак: ~~1975. II~~

III. ~~VII~~ II. ~~7~~

Т. в. 2296.



и. 47373/2

ЗБІРНИК

С Е Ю Ц І

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСЬКОЇ

НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА ІМЕНІ ШЕВЧЕНКА.

Т. II.

ПІД РЕДАКЦІЮ

Івана Верхратського і Володимира Левицького.



У ЛЬВОВІ, 1897.

Накладом Наукового Товариства імені Шевченка.

З друкарні Наукового Товариства імені Шевченка
під зарядом К. Беднарського.

37.

ЗЕРЬНІЕ

ІНВЕНТ

МАТРИЦА ПЕРИОДИЧНО-ЖУРНАЛЬНИХ ВИПУСКІВ

МАТРИЦА ПЕРИОДИЧНО-ЖУРНАЛЬНИХ ВИПУСКІВ

Львівська бібліотека
Л.І. УРСР
№ И 47344

Бібліотека Львівського університету



МАТРИЦА ПЕРИОДИЧНО-ЖУРНАЛЬНИХ ВИПУСКІВ

Львівський національний університет імені Шевченка

Львівський національний університет імені Шевченка

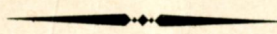
т. 2 1897

З М І С Т.

	стор.
1. Рівняне пятого степеня. Нап. Клим Глібовицкий	1—36
2. Причинок до поділу рівнянь другого степеня. Нап. В. Левицкий	1—6
3. Електромагнетна теорія сьвітла і філії електричні. Нап. В. Левицкий	1—72
4. Бактеріологічні вислідки посмертні а диягноза клінічна недуг інфекційних. Нап. Др Ос. Дакура	1—14
5. Заклад лічебний для сухотників в Аллянд. Нап. Др. О. Дакура	1—8
6. VII. інтернаціональний геологічний з'їзд у Петербурзі. Нап. Др. О. Ч.	1—4
7. З'їзд британської Асоціяції Наук. Нап. Др. О. Ч.	1—3
8. Осафат Петрик (Некрольог)	1—2

I N H A L T.

1. Die Gleichung des fünften Grades. Von Cl. Hlibowickij	1—36
2. Beitrag zur Classification der Gleichungen des zweiten Grades. Von W. Lewickij	1—6
3. Elektromagnetische Theorie des Lichtes und elektrische Wellen. Von W. Lewickij	1—72
4. Postmortale, bakteriologische Forschungen und die klinische Diagnose der Infectionskrankheiten. Von Dr. J. Dakura	1—14
5. Die Heilanstalt für Lungensüchtige in Alland. Von Dr. J. Dakura	1—8
6. VII. internationaler Congress der Geologen in Petersburg. Von Dr. O. Č.	1—4
7. Congress der britischen Association der Wissenschaften. Von Dr. O. Č.	1—3
8. Josaphat Petryk (Nekrolog)	1—2



3
M I O T

- 1-38
- 1-37
- 1-36
- 1-35
- 1-34
- 1-33
- 1-32
- 1-31
- 1-30
- 1-29
- 1-28

1
I N H A L T

- 1-30
- 1-29
- 1-28
- 1-27
- 1-26
- 1-25
- 1-24
- 1-23
- 1-22
- 1-21
- 1-20
- 1-19
- 1-18
- 1-17
- 1-16
- 1-15
- 1-14
- 1-13
- 1-12
- 1-11
- 1-10
- 1-9
- 1-8
- 1-7
- 1-6
- 1-5
- 1-4
- 1-3
- 1-2
- 1-1

Рівнянє пятого степеня

написав

КЛИМ ГЛІБОВИЦКИЙ.

ВСТУП.

Великі успіхи, якими повінчались розсліди італійських математиків середних віків, як Ferro'a, Tartagli-и, Cardano'a, Ferrari'ого і и. в квестії розвязки рівнянь третого і четвертого степеня, навели їх на гадку, щоби сеї методи ужити і до розвязки висших рівнянь, а передовеїм до розвязки рівнянь пятого степеня. Та минуло яких сто літ, а справа не посунулась ані троха вперед. Правда, в році 1683. подав Tschirnhaus в розвідці „Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data equatione“ новий метод, який в спосіб незвичайно легкий веде до розвязки рівняня другого та третого степеня, однак вже при рівнянях бікватратних жадає много роботи, а вже при рівняню пятого степеня не дає ся пристосувати; тому-то Tschirnhaus не силував ся свого методу стосувати до сих рівнянь, а лиш — як тоді було звичайом — індукційно доказав правдивість свого твердження. В XVIII. століттю справа ся виринає на ново; підносять єї так знамениті мужі, як Euler, Bézout, Lagrange, Vandermonde та Malfatti, однак безуспішно. Закидувано твердженю Tschirnhaus'a лож, бо хоча резольвента 24. степеня, до якої провадив метод Tschirnhaus'a, дала ся заступити резольвентою 6. степеня, однак дальша редукція була вже неможлива, а проте ставалась неможлива розвязка рівняня пятого степеня.

В виду того починає виринати гадка, що рівнянє пятого степеня альгебраїчно розвязати ся не дасть, а перший, що підніє єю

гадку, був італійський математик Ruffini. Однак його розвідка в сій квестиї¹⁾ є так тяжка та скомплікована, що тяжко сказати, чи ті конклюдії є всі правдиві, чи ні. Квестию сю підняв на ново Abel, один з найбільших математиків усіх часів. Заложив він — що було одиноко раціональне — що всі рівняня пятого степеня можна альгебраїчно розвязати, і як раз се заложене довело його до висліду, що рівняня загальні, яких степенъ є висший як четвертий, не мають розвязки альгебраїчної. Однак доказ сей не видавав ся йому самому зовсім простий, тому-то вже два роки пізнійше 1826. р. подав²⁾ він новий доказ, що є вже більше простий та ясний.

Та всеж таки довгий час ще тревала у деяких математиків віра, що рівняне пятого степеня можна розвязати; навіть такий математик як Hamilton не хотів признати доказу Abel'a. Та Abel'ови годї вже було доказ свій представити в виді зовсім ясным та зрозумілим, бо вже в 27. році життя зійшов з того світа; се зробили Wantzel та Kronecker.

Рівночасно з Abel'ом підняв квестию рівняня пятого степеня 20. літний незвичайно остроумний Galois та доказав, що з поміж рівнянь неприводних дадуть ся альгебраїчно лиш ті розвязати, що мають таке свойство, що всі коренї дадуть ся раціонально представити через якінебудь два із тих коренів; загальні же рівняня альгебраїчно розвязати ся не дадуть, як се слідно при помочи теорії груп. Та наколи докази Abel'a не є прозорі, то тим менше можна се сказати про докази Galois'a, бо він найтруднійші досліди подавав в формі дуже короткій, а часто і без доказу; та не стало йому і часу на блисші поясненя, бо помер еще скорше як Abel в 21. році життя.

Колиж отже доказано, що рівняня загальні альгебраїчно розвязати ся не дадуть, лишала ся квестія, як — хоча і неальгебраїчно — розвязати рівняне пятого степеня. Зробив се Hermite 1858. р., та зовсім незалежно від него Kronecker, при помочи функцій еліптичних.

В нинішній розвідці подано всі ті розсліди та змаганя, та іменно в першій часті поданий є доказ Abel'a та доказ Galois'a, в другій часті є представлені досліди Hermite'a.

1) Teoria generale delle equazioni algebrache generali di grado superiore al quarto. Bologna 1799.

2) Crelle's Journal t. I. p. 66.

ЧАСТЬ ПЕРША.

Досліди Abel'a.¹⁾

1. Возьмім скінчене число яких-небудь величин:

$$x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n,$$

і най p' , p'' , --- будуть раціональними функціями тих величин, то:

$$p_1 = f(x_1 \ x_2, \dots \sqrt[p']{p'}, \sqrt[p'']{p''}, \dots),$$

f функція раціональна, а p' , p'' , --- числа перші — то p_1 називати ся ме функцією альгебраїчною першого ряду,

$$p_2 = f(x_1 \ x_2, \dots \sqrt[p']{p'}, \sqrt[p'']{p''}, \dots \sqrt[p_1']{p_1'}, \sqrt[p_1'']{p_1''}, \dots)$$

є функція альгебраїчна другого ряду і т. д.

Загально функція альгебраїчна μ -того ряду має вид:

$$v = f(r' \ r'', \dots \sqrt[p']{r'}, \sqrt[p'']{r''}, \dots),$$

де r' r'' , --- є функції ряду $(\mu-1)$, а r' r'' , --- є функції ряду $(\mu-1)$, або і нижшого.

Очевидно, що ніяка з величин $\sqrt[p']{r'}$, $\sqrt[p'']{r''}$, --- не дасть ся представити раціонально через нижші того самого виду, як і через r' , r'' , ---, бо тоді число тих $\sqrt[p']{r'}$ в функції f зменшилоби ся о одиницю, і в сей спосіб через редукцію дійшлибисьмо до вираження:

$$v = f(r', r'', \dots),$$

що є ряду $(\mu-1)$, наколи v мало бути ряду μ .

Функція ряду μ дасть ся також написати:

$$v = f(r', r'', \dots \sqrt[p]{r}),$$

де r є функція альгебраїчна ряду $(\mu-1)$, а r' , r'' , --- є функціями ряду μ , або і нижшого. А як кожда функція раціональна дає ся представити яко квот двох функцій цілковитих, то:

¹⁾ Поп. Crelle's Journal loc. cit. т. I., Abel: Oeuvres complètes т. II. та Maser: Abhdlgn. ü. algebraische Auflösung der Gln von Abel u. Galois.

$$v = \frac{t_0 + t_1 p^{\frac{1}{n}} + \dots + t_m p^{\frac{m}{n}}}{v_0 + v_1 p^{\frac{1}{n}} + \dots + v_{m'} p^{\frac{m'}{n}}} = \frac{T}{V},$$

де T і V є раціональні цілі функції. Помножимо чисельник і знаменник через V_1, V_2, \dots, V_{n-1} , де ті V_s представляють $(n-1)$ -ї степені функції V , наколи в ній за $p^{\frac{1}{n}}$ положимо $z^s p^{\frac{1}{n}}$ ($s=1 \dots n-1$), де z є первісний корінь рівняння $z^n - 1 = 0$, то дістанемо:

$$v = \frac{T V_1 V_2 \dots V_{n-1}}{V V_1 V_2 \dots V_{n-1}}.$$

Знаменник є цілковита раціональна функція величин r', r'', \dots і p , а чисельник функція цілковита величин $r', r'', \dots, p^{\frac{1}{n}}$, проте:

$$v = \bar{q}_0 + \bar{q}_1 p^{\frac{1}{n}} + \bar{q}_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + \bar{q}_r p^{\frac{r}{n}},$$

де $\bar{q}_0, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_r$ є раціональні функції величин p, r', r'', \dots , що дасть ся ще через підставлене $\mu = ap + z$ (a і z числа цілі) — чого не перепроводжуємо — привести до виду:

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \quad 1)$$

де $p^{\frac{1}{n}}$ не дасть ся раціонально представити через $p, q_0, q_2, \dots, q_{n-1}$.

2. Приймим, що виражене:

$$y = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \quad 2)$$

сповняє рівнянє:

$$c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_r y^r = 0, \quad 3)$$

яке по вставленю y перейде на:

$$r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0, \quad 4)$$

де r_s є раціональні функції, утворені з $p, q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$.

Рівнянє 4) сповняє ся однак лиш для

$$r_0 = r_1 = r_2 = \dots = r_{n-1} = 0,$$

бо наколиби так не було, то положивши $p^{\frac{1}{n}} = z$ дістанемо рівнянє:

$$z^n - p = 0, \quad 5)$$

яке з рівнянєм 4) має що найменше один корінь спільний.

Наколи рівняня 4) і 5) мають k коренів спільних, то можна утворити рівнянє степеня k , якого коренями є ті k коренів, а якого сочинники є раціонально утворені з $p, q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$; коли рівнянє се є:

$$s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \dots + z^k = 0, \quad 6)$$

і оно є приводне, то наколи його розложимо на чинники неприводні, дістанемо один з них:

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \dots + z^\mu = 0, \quad 7)$$

де t_s є такі самі функції, як s або r . Крім сего бачимо, що $\mu \geq 2$, бо інакше $p^{\frac{1}{n}} = z$ дало би ся раціонально представити через $p, q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$, а се неможливо. Рівнянє 7) має μ коренів спільних з 5), а що всі коренї рівняня 5) мають вид:

$$p^{\frac{1}{n}}, \alpha p^{\frac{1}{n}}, \alpha^2 p^{\frac{1}{n}}, \dots, \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} \quad (x^n + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0),$$

то 7) мусить ся сповнити для вартости αz , або:

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \dots + z^\mu \alpha^\mu = 0 \quad 8)$$

а з відси:

$$t_0 (1 - \alpha^\mu) + t_1 (z - \alpha^\mu) z + \dots + t_{\mu-1} (z^{\mu-1} - \alpha^\mu) z^{\mu-1} = 0. \quad 9)$$

Се рівнянє має такий самий вид, як 7), а що 7) є неприводне, то 9) мусить бути ідентично зером, т. є.

$$t_0 (1 - \alpha^\mu) = 0;$$

$t_0 = 0$, бо 7) є неприводне, отже мусїлоб $1 - \alpha^\mu = 0$, а се неможливо, бо α є коренєм первісним рівняня $x^n - 1 = 0$ ріжним від одиниці.

Мусить проте в рівняню 4) бути:

$$r_0 = r_1 = r_2 = \dots = r_{n-1} = 0. \quad 10)$$

3. На основі 10) сповняє ся рівнянє 4), наколи за $p^{\frac{1}{n}}$ будемо класти $\alpha^s p^{\frac{1}{n}}$ ($s=0 \dots n-1$); дістанемо тоді ряд:

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} \alpha^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

.....

а з відси:

$$q_0 = \frac{1}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

Наколи дальше помножимо y_2 через α^{n-1} , y_3 через α^{n-2} , y_n через α , а ошісля y_2 через α^{n-2} , y_3 через α^{n-3} , дістанемо:

$$\begin{aligned} p^{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{n} (y_1 + \alpha^{n-1} y_2 + \dots + \alpha y_n) \\ q_2 p^{\frac{2}{n}} &= \frac{1}{n} (y_1 + \alpha^{n-2} y_2 + \dots + \alpha^2 y_n) \end{aligned} \quad 10'$$

а з відси буде можна кожду з величин $p^{\frac{1}{n}}$ q_0 q_2 q_{n-1} виразити раціонально через корені рівняня 3).

Н. пр:

$$q_\mu p^{\frac{\mu}{n}} = \frac{1}{n} (y_1 + \alpha^{n-\mu} y_2 + \alpha^{n-2\mu} y_3 + \dots + \alpha^{n-(n-1)\mu} y_n),$$

а з відси:

$$q_\mu = \frac{n^{\mu-1} (y_1 + \alpha^{-\mu} y_2 + \alpha^{-2\mu} y_3 + \dots + \alpha^{-(n-1)\mu} y_n)}{(y_1 + \alpha^{n-1} y_2 + \alpha^{n-2} y_3 + \dots + \alpha y_n)^\mu}.$$

Бачимо проте, що наколи рівняне якесь дає ся альгебраїчно розвизати, то на кождий корень рівняня дістанемо виражене таке, що кожда функція, яка входить в се виражене, є раціональною функцією коренів даного рівняня (I.)

4. Переходим тепер до другої части розслідів Abel'a, себ-то до його розслідів субституційних.

Най v буде раціональна функція змінних независимих x_1 x_2 x_n . Число всіх можливих пермутацій тих величин є μ . Наколи A_1 A_2 A_μ є μ тих різних перемін, то всі можливі вартости функції v представляє ряд:

$$v \left(\begin{matrix} A_1 \\ A_1 \end{matrix} \right), v \left(\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \right), \dots, v \left(\begin{matrix} A_1 \\ A_\mu \end{matrix} \right).$$

Може ся видарити, що функція v є менше чим μ — вартостева, т. є. що між повнешими підставленнями є н. пр. m таких, що лишают вартість v без зміни, отже:

$$v \left(\begin{matrix} A_1 \\ A_1 \end{matrix} \right) = v \left(\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \right) = \dots = v \left(\begin{matrix} A_1 \\ A_m \end{matrix} \right) \quad 11)$$

Наколи ту возьмемо підставленє $\left(\begin{matrix} A_1 \\ A_{m+1} \end{matrix} \right)$, дістанемо:

$$v \left(\begin{matrix} A_1 \\ A_{m+1} \end{matrix} \right) = v \left(\begin{matrix} A_1 \\ A_{m+2} \end{matrix} \right) = \dots = v \left(\begin{matrix} A_1 \\ A_{2m} \end{matrix} \right).$$

Наколи підемо так далше, доки не возьмемо всіх підставлень, дістанемо p різних рядів по m рівних вартостей, т. є. число всіх вартостей функції v є $p \cdot m$.

Звідси слідує твердження (II.):

Число вартостей, які функція p величин через всі перmutації тих величин може дістати, є подільником добутка p^m .

5. Наколи підставленє $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix} \right)$ дає через ітерацію ряд вартостей:

$v \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix} \right)^0, v \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix} \right)^1, v \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix} \right)^2, \dots, v \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix} \right)^{p-1}, v \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix} \right)^0$, а p є найбільше число перве менше від n , то наколи число тих різних вартостей v є менше як p , то тоді між тими p вартостями якесь:

$$v \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix} \right)^r = v \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix} \right)^{r'}, \quad \text{а з відси:}$$

$$v \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix} \right)^{r+p-r} = v \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix} \right)^{r'+p-r}$$

а як:

$$v \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix} \right)^p = v, \quad \text{то:}$$

$$v = v \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix} \right)^s, \quad s=r'+p-r;$$

позаяк p є число перве, то дасть ся утворити рівність:

$$sz - p\beta = 1,$$

$$v = v \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix} \right)^{p\beta+1}, \quad \text{отже:}$$

$$v = v \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_m \end{smallmatrix} \right),$$

т. є. вартість функції v не зміняє ся через наворотне (recurrent) підставленє ряду p , а проте не змінить ся, наколи пристосуємо два такі підставлення ряду p_1 утворені з тих самих букв n . пр.:

$$\left(\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\ \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \end{array} \right) \quad \text{і} \quad \left(\begin{array}{cccc} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \gamma & \alpha & \beta & \delta \\ \delta & \alpha & \beta & \delta \\ \varepsilon & \alpha & \beta & \delta \end{array} \right)$$

Ті оба підставлення можна заступити через підставленє $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \end{smallmatrix} \right)$, а що підставленє з трох букв дасть ся представити через дві переставки (транспозиції), проте v не змінить ся, наколи до него

пристосуємо паристе число переставок; а наколи так, то знова всі вартости v , як півстали через ужитє непаристого числа переставок, є між собою рівні. Позаяк далі кожде підставленє дає ся заступити через певне число переставок, проте v є що найбільше двовартостеве, а проте вид його, як усіх функцій двовартостевих, є:

$$\varphi = S + S_1 \sqrt{\Delta^2},$$

де S і S_1 є функції симетричні, а Δ є дискримінантом величин x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\Delta = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n) \dots (x_{n-1} - x_n).$$

Звідси слідує:

Число різних вартостей, які функція v величин може приймати, не може бути менше, як найбільше число перве менше від n , так як в противнім разі зведе ся до 2, або до 1. (III.)

Нема проте функції 5 величин, яка би мала 3 або 4 вартости.

6. Пошукаймо тепер загального виду п'ятивартостевої функції п'ятих величин.

Найже v буде функція 5 величин x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , яка не змінє вартости при перемінї величин x_2, x_3, x_4, x_5 . Яко функція симетрична тих величин дасть ся представити раціонально через сочинники рівняня:

$$(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = x^4 - px^3 + qx^2 - gx + s,$$

але:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e,$$

з відси:

$$a = p + x_1, \quad b = q + px_1, \quad c = r + qx_1, \quad d = s + rx_1, \quad e = sz_1,$$

отже:

$$p = a - x_1$$

$$q = b - ax_1 + x_1^2$$

$$r = c - bx_1 + ax_1^2 - x_1^3$$

$$s = d - cx_1 + bx_1^2 - ax_1^3 + x_1^4;$$

функція v дає ся проте представити раціонально через x_1, a, b, c, d, e :

$$v = \frac{t}{\varphi(x_1)},$$

де t і $\varphi(x_1)$ є раціональні функції x_1 ; утворім:

$$v = \frac{t\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\varphi(x_5)}{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\varphi(x_5)} = \bar{r}_0 + \bar{r}_1 x_1 + \dots + r_m x_1^m \quad (12)$$

де $\bar{r}_0, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_m$ є раціональні функції з огляду на a, b, c, d, e , бо знаменник є симетрична функція величин x_1, x_2, \dots, x_5 , а тим самим цілковита функція сочинників a, b, c, d, e , а чисельник яко цілковита функція p, q, r, s є функція цілковита величин x_1, a, b, c, d, e .

При помочи рівняня:

$$x_1^5 = ax_1^4 - bx_1^3 + cx_1^2 - dx_1 + e \quad (13)$$

можна привести v до виду:

$$v = r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 + r_3 x_1^3 + r_4 x_1^4 \quad (14)$$

бо наболи помножимо x_1^5 поступенно через $x_1, x_1^2, \dots, x_1^{m-5}$, дістанемо $(m-4)$ рівнянь, з яких на $x_1^5, x_1^6, \dots, x_1^m$ дістанемо вираження виду:

$$\alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 + \delta x_1^3 + \epsilon x_1^4.$$

Сочинники r_0, r_1, \dots в вираженю 14) є раціональні з огляду на a, b, c, d, e , а тим самим симетричні з огляду на x_1, x_2, \dots, x_5 . Само v є симетричне що до x_2, x_3, x_4, x_5 , а що яко функція п'ятох величин не може мати трох або чотирох вартостей, і що далі не є двовартостева, тому v може бути лиш або п'ятивартостева або симетрична.

7. Приймім проте, що маємо якусь функцію v , що має п'ять вартостей: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , і возьмім функцію $x_1^m v$. Наколи в ній поміняти між собою x_2, x_3, x_4, x_5 на всі способи, то ся функція мусить мати оден з видів:

$$x_1^m v_1, x_1^m v_2, x_1^m v_3, x_1^m v_4, x_1^m v_5.$$

Но ті 5 вартостей не можуть бути усі ріжні, бо тоді наколибсьмо переміняли поступенно x_1 з x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , дісталибсьмо функцію 5 величин, що має 25 вартостей, а се неможливе на основі твердження (I.).

Число вартостей, які може v прийняти, коли в ній поміняти x_2, x_3, x_4, x_5 на всі можливі способи, мусить бути:

$$\mu = 1, 2, 3, 4.$$

Для $\mu = 1$ є v симетричне що до x_2, x_3, x_4, x_5 , має проте вид 14).

Для $\mu = 4$ є $v_1 + v_3 + v_3 + v_4$ функція виду 14), а з відси: $v_5 = \underbrace{(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5)}_{\varphi \text{ симетр.}} - (v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$ має вид 14)

Для $\mu = 2$ є:

$$v_1 + v_2 = r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 + r_3 x_1^3 + r_4 x_1^4 = \varphi(x_1),$$

а коли поміняти x_1 з x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 , дістанемо:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 + v_2 = \varphi(x_1) \\ v_2 + v_3 = \varphi(x_2) \\ \dots\dots\dots \\ v_{m-1} + v_m = \varphi(x_{m-1}) \\ v_m + v_1 = \varphi(x_m) \end{array} \right\} m = 2, 3, 4, 5.$$

Для $m = 5$ малибисьмо $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, а се неможливе, бо $\varphi(x_1)$ має мати пять вартостей:

Для $m = 3$ маємо:

$v_1 + v_2 = \varphi(x_1)$, $v_2 + v_3 = \varphi(x_2)$, $v_3 + v_1 = \varphi(x_3)$,
а з відси:

$$2v_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_3).$$

Права сторона сього рівняня має більше, чим 5 вартостей, проте $m = 3$ треба відкинути.

Для $m = 4$

$v_1 + v_2 = \varphi(x_1)$, $v_2 + v_3 = \varphi(x_2)$, $v_3 + v_4 = \varphi(x_3)$, $v_4 + v_1 = \varphi(x_4)$,
а з відси:

$$2v_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_3) - \varphi(x_4);$$

се треба відкинути, бо права сторона має більше чим пять вартостей.

Для $m = 5$ маємо:

$$2v_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_3) - \varphi(x_4) + \varphi(x_5);$$

се є більше, чим п'ять вартостей, проте $m = 5$ треба відкинути.

$\mu = 2$ треба проте відкинути.

Для $\mu = 3$ дістанемо $v_1 + v_2 + v_3$, а звідси і

$$v_4 + v_5 = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5) - (v_1 + v_2 + v_3),$$

а се є функція виду 14). Подібно як для $\mu = 2$ і ту показати можна, що $\mu = 3$ треба відкинути.

Звідси слідує, що кожда функція п'ять вартостей має вид:

$$g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + g_4x^4 \quad (15)$$

де g_0 g_1 g_2 g_3 g_4 є функції симетричні, а x є одна з п'ятьох величин.

Наколи v є функція раціональна, що може приймати m різних вартостей v_1 v_2 ... v_m , то наколи утворимо добуток:

$$(v - v_1)(v - v_2) \dots (v - v_m) = q_0 + q_1v + q_2v^2 + \dots + q_mv^m = 0, \quad (16)$$

то q_0 q_1 ... q_m є симетричні функції вартостей v_1 v_2 v_m ...

Наколибсьмо прийняли, що v є коренем рівняня нижшого степеня, н. пр. рівняня:

$$t_0 + t_1 v + t_2 v^2 + \dots + v^\mu = 0 \quad \mu < m \quad (17)$$

де t є симетричні функції, то наколи v_1 є одна з вартостей, що сповняє рівняне 17), то дістанемо:

$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \dots + t_0 = (v-v_1)P_1.$$

Поміняймо елемента функції між собою, то дістанемо:

$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \dots + t_0 = (v-v_2)P_2$$

$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \dots + t_0 = (v-v_m)P_m.$$

$(v-v_1), (v-v_2), \dots, (v-v_m)$ є проте чинники рівняня 17), або $m=\mu$; а з відси тверджене:

Наколи функція кількох величин має m різних вартостей, то можна найти рівняне m -того степеня, що його сочинники є симетричними функціями, а коренями його є як раз ті вартости, но не найде ся рівняне нижшого степеня, що моглоби мати за корені одну або більше з тих вартостей (IV.).

8. Тепер можемо уже приступити до доказу, що загальне рівняне пятого степеня альгебраїчно розвизати ся не дасть.

Наколи загальне рівняне пятого степеня:

$$x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = 0$$

має мати розвизку альгебраїчну, то в склад його кореня ввійдуть функції виду $v = R^{\frac{1}{m}}$, де R є раціональна функція сочинників рівняня, а m є число перве, так як кождий корень, що його виложник є числом зложеним, можна розділити на два або більше коренів, яких виложники є числами первими. v є на основі твердження (I.) функція раціональна коренів. Маємо проте рівняне:

$$v^m - R = 0.$$

Степеня сього рівняня звизити не можна, як се слідує з попередних розслідів, проте v має на основі твер IV. m різних вартостей. А так як се є функція пятох величин x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , то m мусить бути подільником добутку $5!$, а що m є число перве, то оно мусить бути рівне 1, 2, 3, 5; но ми знаємо, що не ма функції 5 величин, якаби мала три різні вартости, дальше m не може бути 1, бо корень рівняня не може бути раціональною функцією сочинників (як було више сказано), тому лишає ся $m = 5$, або $m = 2$.

Возьмім $m = 5$.

Загальний вид функції п'ятивартостевої п'ятох величин є:

$$\sqrt[5]{R} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 \quad (18)$$

Наколи се мемо степенувати, а рівночасно представимо кожде x^m , де $m > 4$, в виді (на основі 18):

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon$$

то дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[5]{R} - r_0 &= r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 \\ \sqrt[5]{R} - r_0' &= r_1' x + r_2' x^2 + r_3' x^3 + r_4' x^4 \\ \dots\dots\dots \\ \sqrt[5]{R} - r_0''' &= r_1''' x + r_2''' x^2 + r_3''' x^3 + r_4''' x^4 \end{aligned} \right\}$$

а з відси:

$$x = s_0 + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}}$$

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} (x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5), \quad \alpha^5 = 1.$$

Права сторона має 120 вартостей, наколи $s_1 R^{\frac{1}{5}}$ є коренем рівняня п'ятого степеня:

$$z^5 - s_1^5 R = 0;$$

треба проте відкинути $m = 5$ і лишає ся $m = 2$.

Кожда функція двовартостева має вид:

$$v = \alpha + \beta \sqrt{s^2},$$

де α і β є функції симетричні, а $s = \Delta$ є дискримінант величин $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$.

Але кореня не буде можна представити через таку функцію, так як він є п'ятивартостевий, проте мусить бути:

$$\sqrt[m]{\alpha + \beta \sqrt{s^2}} = v,$$

де $\alpha, \beta \neq 0$, а v є раціональна функція коренів.

$$v_1 = \sqrt[m]{\alpha + \beta s}, \quad v_2 = \sqrt[m]{\alpha - \beta s},$$

$$v_1 v_2 = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2},$$

де вираженє під коренєм є функція симетрична. Наколи $\sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$ не є симетричний, то на основі попередно сказаного $m = 2$, але

тоді: $v = \sqrt[m]{\alpha + \beta \sqrt{s^2}}$ має чотири вартости, що не може бути, бо функція δ величин не може бути 4-вартостева. Мусить проте бути

$\gamma = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$ функція симетрична, отже:

$$v_1 v_2 = \gamma, \quad \text{а з віден:}$$

$$v_1 + v_2 = \sqrt[m]{\alpha + \beta \sqrt{s^2}} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{\alpha + \beta \sqrt{s^2}}} = p$$

$$v_1 + v_2 = \sqrt[m]{R} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{R}} = p.$$

Найже p_1, p_2, \dots, p_m є вартости, які дістанемо з p , наколи за $R^{\frac{1}{m}}$ положимо $R^{\frac{1}{m}}, \alpha R^{\frac{1}{m}}, \alpha^2 R^{\frac{1}{m}}, \dots, \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}$, ($\alpha = \sqrt[n]{1}$), то наколи утворимо рівняне:

$$(p-p_1)(p-p_2) \dots (p-p_m) = p^m - A_1 p^{m-1} + \dots \pm A_m = 0,$$

то в сочинники A_1, A_2, \dots, A_m увійдуть самі цілковиті степені R , бо в сочинниках при дробових степенях виїде яко чинник сума коренів одиниці, а та сума є зером. А коли так, то A_1, A_2, \dots є симетричні функції коренів x_1, x_2, \dots, x_5 , а так як функція δ величин не може бути 3-, або 4-вартостева, а не є 2-вартостева, то не може мати виду $\alpha + \beta \sqrt{s^2}$ і не є симетрична, а може бути лиш 5-вартостева, т. є. має вид:

$$\sqrt[5]{R} + \frac{\gamma}{\sqrt[5]{R}} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 = p,$$

а з віден:

$$x = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + s_3 p^3 + s_4 p^4.$$

А що $p = R^{\frac{1}{5}} + \frac{\gamma}{R^{\frac{4}{5}}}$, то дістанемо:

$$x = t_0 + t_1 R^{\frac{1}{5}} + t_2 R^{\frac{2}{5}} + t_3 R^{\frac{3}{5}} + t_4 R^{\frac{4}{5}},$$

де t_0, t_1, \dots є раціональні функції R і сочинників рівняня.

Звідси:

$$t_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} (x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) = p',$$

$$t^2 R = p'^5 = u + u' \sqrt{s^2}$$

$$(p'^5 - u)^2 = u'^2 s^2.$$

Як бачимо рівнянє се є 10. степеня що до p' , сочинники є симетричні, отже p' малоби 120 вартостей, т. в. дісталибисьмо суперечність.

Функцій, що входять в склад кореня, не можна представити проте рационально через корені тогож рівняня, що все дасть ся зробити в рівняню, яке має розвизанє альгебраїчне; з відси отже слїдує, що рівнянє пятого степеня, а тим самим і висших степенів, з загальними сочинниками не мають розвизки альгебраїчної.

В сей спосіб маємо переведений доказ Abela о рівнянях висших степенів.

Досліди Galois.¹⁾

Galois перевів свої глибокі досліди на основі групи рівняня. Ті його розсліди представимо ту в скороченю.

Возьмїм рівнянє степеня n :

$$f(x, R', R'', \dots) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n = 0 \quad (1)$$

та заложїм, що сочинники c_1, c_2, \dots, c_n належать до обсягу чисел рациональних (R', R'', \dots) та що $f(x)$ є неприводне.

Знаємо, що рівнянє дає ся розвизати альгебраїчно тоді, коли сповняє ся тотожно, наколи за x вставити вираженє, утворене з елементів обсягу рациональности, при помочи слїдуючих операцій альгебраїчних: додаваня, відниманя, множеня, діленя, цілковитого степенюваня і витяганя кореня з виложником, що є числом первим. Ряд ділань потрібних до утвореня такого вираженя альгебраїчного зводть ся до:

1°. утвореня функцій рациональних з елементів обсягу:

$$F_r (R', R'', \dots).$$

2°. витяганя кореня v_r , що його виложник є числом первим, з тої функції, при чім закладаємо, що F_r не є точна степень ряду p_r ніякої функції з нашого обсягу, бо тоді v_r само вже належалоби до того обсягу. Проте мусить бути:

$$v_r^{p_r} = F_r (R', R'', \dots).$$

¹⁾ Ноп. Maser op. cit. Netto: Substitutionentheorie; Vogt: Leçons sur la résolution algébrique des équations.

3°. долученя v_r до обсягу раціональності та утвореня функції раціональної $F_{r-1}(v_r R' R'' \dots)$ і витягненя з неї кореня v_{r-1} о виложнику p_{r-1} ; F_{r-1} не може бути точною степенною ряду p_{r-1} ніякої функції з нового обсягу $(v, R' R'' \dots)$, отже:

$$v_{r-1}^{p_{r-1}} = F_{r-1}(v_r R' R'' \dots)$$

4°. долученя v_{r-1} до попереднього обсягу раціональності, утвореня функції $F_{r-2}(v_{r-1} v_r R' R'' \dots)$, раціональної в новім обсягу, і т. д.

Можна проте представити утворене функції алгебраїчної, про яку бесіда, т. є. такої, що сповняє тотожно рівнянє 1), при помочи ряду рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} v_r^{p_r} &= F_r(R' R'' \dots) \\ v_{r-1}^{p_{r-1}} &= F_{r-1}(v_r R' R'' \dots) \\ v_{r-2}^{p_{r-2}} &= F_{r-2}(v_{r-1} v_r R' R'' \dots) \\ \dots & \\ v_1^{p_1} &= F_1(v_2 v_3 \dots v_r R' R'' \dots) \\ x_1 &= F_0(v_1 v_2 v_3 \dots v_r R' R'' \dots) \end{aligned} \right\} 2)$$

де F є функції раціональні, а p числа беззглядно перші.¹⁾

Наколи G є група рівняннє 1) і має ряд зложеня:

$$G, G_1, G_2, \dots, G_\mu, 1,$$

а $e_1, e_2, \dots, e_\mu, e_{\mu+1}$ є відповідні чинники зложеня, то даве рівнянє дасть ся розв'язати при помочи поступенного розв'язаня рівнянь степенів $e_1, e_2, \dots, e_{\mu+1}$; рівняннє ті мають се свойство, що кожде є неприводне в обсягу раціональності, розширенім через долучене до него коренів попередних рівнянь і що в тім новім обсягу корені виражають ся раціонально через один із них; група рівняннє зводить ся через поступенне долучанє одного кореня кожного із тих рівнянь на групи:

$$G_1, G_2, \dots, G_\mu, 1. \quad 2)$$

Як бачимо існує повна аналогія між тими рівняннями а рівняннями 2). Очевидна проте річ, що поступенне долучанє нераціональностей v зводить групу рівняннє G на ряд груп $G, G_1, G_2, \dots, G_\mu, 1$, які творять ряд зложеня групи G ; їх чинники зложеня є точно рівні степеням повисших біноміальних рівнянь. Група G мусить

¹⁾ Поп. Netto loc. cit. ст. 236, Vogt: loc. cit. ст. 107.

²⁾ Netto ibid. ст. 274 і 275, Vogt ibid. ст. 191.

проте бути зложена і мати чинники зложена, що є числами першими, наколи рівняне має ся дати розв'язати альгебраічно.

Ся умова є необхідима, але і достаточна. Бо приймім, що она ся сповнила, що проте чинники зложена групи рівняня є числа перві. Приймім дальше, що групу рівняня G звелисьмо через долучене функції рациональної коренів, що є означені через одну або більше резольвент, на групу G_n , яка належить до ряду зложена. Наколи G_{n+1} є дальша група в ряді, а p_k є число перве, що означає відношене груп G_n і G_{n+1} , то¹⁾ можна утворити функцію коренів, яка ся відносить до групи G_{n+1} і яка має для підставлень групи G_n p_k вартостей коренів рівняня біноміяльного, що його сочинники належать до групи G_n . Наколи долучимо одну з тих вартостей т. є. один корень рівняня біноміяльного о виложнику p_k , то група зведе ся на групу G_{n+1} . Наколи в сей спосіб будемо поступати почавши від G_1 , то будемо могли утворити ряд рівнянь біноміяльних, які ведуть поступенно до розв'язаня рівняня.

Можна проте сказати, що необхідимою та достаточною умовою, щоби рівняне мало розв'язку альгебраічну, є, щоби чинники зложена групи рівняня були числами першими.

Рівняня загальні 3. та 4. степеня сповняють сю умову, так як група першого має чинники зложена 2 і 3, група другого 2, 3, 2, 2. Група симетрична — а такою є група загального рівняня²⁾ — п елементів на случай $p > 4$ має чинники зложена 2 і $\frac{n!}{2}$, а що сей другий не є числом первим, проте:

Рівняне загальне степеня $p > 4$ не має розв'язки альгебраічної.

¹⁾ на основі твердження: Наколи група G ряду r є групою частною групи G' ряду mr (m число безглядно перве), то існують функції, що ся відносять до групи G , такі, що їх m вартостей для підставлень групи G' є коренями рівняня біноміяльного степеня m . (Vogt loc. cit. ст. 40).

²⁾ Vogt loc. cit. ст. 79.

ЧАСТЬ ДРУГА.

Досліди Hermite'a.

Розсліди Abel'a, Ruffini'ого та Galois'a показали, що годї на дорозї альгебраїчній шукати розвязки рівняня пятого степеня; тому то Hermite¹⁾ почав шукати, чи би не дало ся представити коренїв рівняня пятого степеня при помочи якихсь функцій, щоби відноесли ся до нових помічних змінних. Тим помічним елементом показались як раз функції еліптичні. Hermite розвязку свою пристосував до рівняня пятого степеня в видї Bring-Jerrarda:

$$x^5 + x + b = 0,$$

бо до такого виду дає ся звести загальне рівняне пятого степеня на основі трансформації Tschirnhaus'a.

1. Заким приступимо до перетвореня загального рівняня пятого степеня, муємо ввести помічне твердження. Функцію цілковиту однородну другого степеня о n змінних можна все представити яко суму ν функцій першого степеня, де $\nu \leq n$.³⁾

Наколи функція ν є цілковита однородна другого степеня о n змінних (x_1, x_2, \dots, x_n) і має в собі квадрат одной з тих змінних n . пр. x_1^2 , то можна єї представити в видї:

$$\nu = \alpha x_1^2 + 2Qx_1 + R,$$

де α є стала, ріжна від зєра, Q функція першого, а R другого степеня що до $(n-1)$ змінних (x_2, \dots, x_n).

Положим:

$$x_1 + \frac{Q}{\alpha} = X_1, \quad R - \frac{Q^2}{\alpha} = \nu_1, \quad \text{то:}$$

$$\nu = (X_1 \sqrt{\alpha})^2 + \nu_1,$$

де V_1 є функція цілковита однородна другого степеня $(n-1)$ аргументів.

Наколи ν не має в собі квадратів, а лиш добутки, то:

$$\nu = \beta x_1 x_2 + Qx_1 + Rx_2 + S,$$

1) Comptes rendus том 46 рік 1858.

2) Поп. Weber: Lehrbuch der Algebra т. I. ст. 175; також Klein: Vorlesungen über das Ikosaëder ст. 143.

3) Поп. Zajączkowski: Zasady algebry wyższej ст. 101.

де значінє β , Q , R , S є очевидне.

$$v = \beta \left(x_1 + \frac{R}{\beta} \right) \left(x_2 + \frac{Q}{\beta} \right) + S - \frac{QR}{\beta},$$

$$\text{а наколи: } X_1 = \frac{1}{2} \left(x_1 + x_2 + \frac{Q+R}{\beta} \right), \quad X_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 - x_2 - \frac{Q-R}{\beta} \right),$$

$$v_2 = S - \frac{QR}{\beta},$$

$$\text{то: } v = (x_1 \sqrt{\beta})^2 + (x_2 \sqrt{\beta})^2 + v_2,$$

де v_2 є функція цілковита однородна другого степеня $(n-2)$ змінних, а $x_1 x_2$ є функції степеня 1 о n змінних $(x_1 x_2 \dots x_n)$.

Наколи так дальше будемо поступати з $v_1 v_2$, представимо вкінці v яко суму квадратів, яких число не може бути більше як n .

Твердженє є проте доказанє.

2. Возьмім тепер рівнянє пятого степеня :

$$x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = 0 \quad 1)$$

та ужиймо підставлення :

$$u = a_0 + a_1x + \dots + a_4x^4 \quad 2)$$

де $a_0 a_1 \dots$ є числа сталі на разі незвісні. Піднесім 2) до степенів 2, 3, 4, та обнижім рівночасно при помочи рівняня 1) вложники змінної так, щоби нїде не були вишні як 4; дістанемо :

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= b_0 + b_1x + \dots + b_4x^4, & u^3 &= e_0 + e_1x + \dots + e_4x^4 \\ u^3 &= c_0 + c_1x + \dots + c_4x^4 \\ u^4 &= d_0 + d_1x + \dots + d_4x^4 \end{aligned} \right\} 3)$$

де $b_0 b_1 \dots c_0 c_1 \dots d_0 d_1 \dots e_0 e_1 \dots$ є функції цілковиті однородні степеня 2, 3, 4 що до сталих $a_0 a_1 \dots a_4$.

Означім через $s_1 s_2 \dots s_5$ суми перших, других, ----- пиятих степеней коренів рівняня 1), а через $S_1 S_2 \dots S_5$ суми перших, ----- пиятих степеней коренів рівняня з аргументом u , то тоді рівняня 2) і 3) дадуть :

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 5a_0 + a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + a_4s_4 \\ S_2 &= 5b_0 + b_1s_1 + b_2s_2 + b_3s_3 + b_4s_4 \\ \dots & \\ S_5 &= 5e_0 + e_1s_1 + e_2s_2 + e_3s_3 + e_4s_4 \end{aligned} \right\} 3')$$

Возьмім похідну рівняня :

$$f(x) = x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx + e \equiv (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5),$$

то дістанемо:

$$5x^4 - 4ax^3 + 3bx^2 - 2cx + d = \frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{(f)x}{x-x_2} + \dots + \frac{f(x)}{x-x_5}. \quad 4)$$

Але:

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = x^4 + (x_1-a)x^3 + (x_1^2 - ax_1 + b)x^2 + (x_1^3 - ax_1^2 + bx_1 - c)x + (x_1^4 - ax_1^3 + bx_1^2 - cx_1 + d)$$

$$\frac{f(x)}{x-x_5} = x^4 + (x_5-a)x^3 + (x_5^2 - ax_5 + b)x^2 + (x_5^3 - ax_5^2 + bx_5 - c)x + (x_5^4 - ax_5^3 + bx_5^2 - cx_5 + d);$$

Наколи се вставимо в 4), дістанемо:

$$5x^4 - 4ax^3 + 3bx^2 - 2cx + d = 5x^4 - (s_1 + 5a)x^3 + (s_2 - as_1 + 5b)x^2 + \dots + (s_4 - as_3 + bs_2 - cs_1 + 5d),$$

а з відси:

$$\left. \begin{aligned} 4a &= s_1 + 5a \\ 3b &= s_2 - as_1 + 5b \\ 2c &= s_3 - as_2 + bs_1 - 5c \\ d &= s_4 - as_3 + bs_2 - cs_1 + 5d \end{aligned} \right\} 5)$$

З відси обчислимо s_1, s_2, \dots , дальше з 3') S_1, S_2, \dots , а тоді дістанемо на основі взорів аналогічних до 5) сочинники рівняня аргументу u .

Найже се нове рівняне має вид:

$$u^5 + q_1 u^4 + q_2 u^3 + q_3 u^2 + q_4 u + q_5 = 0. \quad 6)$$

Щоби усунути з того рівняня u^4, u^3, u^2 , треба визначити сталі a_0, a_1, \dots в рівняню 2) так, щоби:

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0.$$

Перше з тих рівнянь є першого степеня що до тих сталых, друге другого, а третє третого степеня.

В тій цілі виражим з рівняня $q_1=0$ сталу a_0 через a_1, a_2, a_3, a_4 , і одержану вартість вставмо в рівняня $q_2=0, q_3=0$. Ті два рівняня перейдуть тоді на $q'_2=0$ і $q'_3=0$.

$q'_2=0$ є тепер функція цілковита однородна степеня другого що до a_1, a_2, a_3, a_4 , можна її проте після в горі поданого твердження представити в виді:

$$f^2 + g^2 + h^2 + k^2 = 0,$$

де f, g, h, k є функції першого степеня.

То рівнянє сповнить ся, наколи положимо $f=gi$, $h=ki$. Виразім з тих двох послїдних рівнянь, які є степеня 1, сталї a_1 і a_2 через a_3 і a_4 і вставмо ті вартости в $q'_3=0$, то дістанемо рівнянє $q_3''=0$, що є однородне і третього степеня що до a_3 і a_4 . Наколи одно з тих чисел возьму після виодоби, дістанемо друге через розв'язанє рівняня 3. степеня. А тоді рівнянє 1) перейде на:

$$u^5 + pu + q = 0 \quad 7)$$

а наколи положу $u = \rho t$, $p = -\rho^4$, то:

$$t^5 - t - A = 0. \quad 7')$$

Се є форма Bring-Jerrard'a. — Наколи так, то приступимо тепер до розв'язаня того рівняня при помочи функцій еліптичних.

3. Між модулами функцій еліптичних k і k' , де:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{k} &= 2 \sqrt{q} \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}} \right)^2 = \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1-p^{2m-1}}{1+p^{2m-1}} \right)^2, \\ \sqrt{k'} &= \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}} \right)^2 = 2 \sqrt{p} \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1+p^{2m}}{1+p^{2m-1}} \right)^2 \end{aligned} \right\} 8)$$

і де:

$$q = e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi i} = e^{e\pi i}, \quad p = e^{\frac{-\pi i}{e}},$$

і де k відносьть ся до періодів (ω, ω') , k' до періодів $(\frac{\omega}{n}, \omega)$, істнує звязь:¹⁾

$$\sqrt{k'} = \sqrt{k^n} \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{cn^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{dn^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}.$$

Наколи означимо через ε одну з $(n+1)$ величин $\frac{2\omega}{n}$, $\frac{\omega'+16t\omega}{n}$ для $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$, то та звязь для модулів буде:

$$\sqrt{k_\varepsilon} = \sqrt{k^n} \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{cn^2(p\varepsilon)}{dn^2(p\varepsilon)}.$$

Положим: $\sqrt{k} = u^2$, $\sqrt{k_\varepsilon} = v^2$, то $(n+1)$ вартостей v дістанемо з рівняня:

$$v = u^n \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{cn(p\varepsilon)}{dn(p\varepsilon)} \quad 9)$$

¹⁾ Пор. Briot-Bouquet: Théorie des fonctions elliptiques et. 318, 542, 624.

а що:¹⁾

$$\operatorname{cn}(z) = \frac{\Theta_2(0)}{\Theta_2(z)} \frac{\Theta_2(z)}{\Theta_2(0)}, \quad \operatorname{dn}(z) = \frac{\Theta_3(0)}{\Theta_3(z)} \frac{\Theta_3(z)}{\Theta_3(0)},$$

а:²⁾

$$\frac{\Theta_3(0)}{\Theta_2(0)} = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \text{то дістанемо:}$$

$$\begin{aligned} v &= u^n \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\operatorname{cn}(p\varepsilon)}{\operatorname{dn}(p\varepsilon)} = u \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Theta_2(p\varepsilon)}{\Theta_3(p\varepsilon)} = \\ &= u \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega} (2mp\varepsilon + m^2\omega')}}{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega} (2m+1)p\varepsilon + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 \omega'}} \end{aligned} \quad 10)$$

а з відси:

$$\xi = \frac{v}{u^n} = \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\operatorname{cn}(p\varepsilon)}{\operatorname{dn}(p\varepsilon)}. \quad 11)$$

Наколи в вираженню:⁴⁾

$$\frac{\operatorname{cn}(nz)}{\operatorname{dn}(nz)} = \frac{\operatorname{cn}(z) \prod \left[1 - \frac{\operatorname{dn}^2(0)}{\operatorname{cn}^2(0)} \operatorname{sn}^2(z) \right]}{\operatorname{dn}(z) \prod \left[1 - k^2 \frac{\operatorname{cn}^2(0)}{\operatorname{dn}^2(0)} \operatorname{sn}^2(z) \right]}$$

положимо: $\frac{\operatorname{cn}(nz)}{\operatorname{dn}(nz)} = 1$ дістанемо на $\frac{\operatorname{cn}(z)}{\operatorname{dn}(z)}$ функцію дробову раціональну що до k^2 і $\operatorname{sn}^2(z)$. А наколи положимо $z = p\varepsilon$ дістанемо ξ яко функцію симетричну $\frac{n-1}{2}$ величин:

$$\operatorname{sn}^2(\varepsilon), \operatorname{sn}^2(2\varepsilon), \dots, \operatorname{sn}^2\left(\frac{n-1}{2}\varepsilon\right) \quad 12)$$

ті величини відтворюють ся в певнім порядку, наколи заступимо ε через $a\varepsilon$, де a є число перве менше від n , а наколи кожду з тих величин 12) виразити раціонально через $\operatorname{sn}^2(\varepsilon)$ і k^2 , то дістанемо ξ яко функцію раціональну що до $\operatorname{sn}^2(\varepsilon)$ і k^2 :

$$\xi = F\left(\operatorname{sn}^2(\varepsilon), k^2\right).$$

1) Briot-Bouquet loc. cit. ст. 356.

2) ibidem ст. 319.

3) ibidem ст. 115.

4) ibidem ст. 519, 520.

Позаяк ξ є симетричне що до вартостей 12), а ті вартости відтворюють ся в певнім порядку, наколи за ε положу $a\varepsilon$, то :

$$F(\operatorname{sn}^2(a\varepsilon), k^2) = F(\operatorname{sn}^2(\varepsilon), k^2),$$

а наколи заступимо поступенно ε через $\varepsilon, 2\varepsilon, \dots, \frac{n-1}{2}\varepsilon$, то дістанемо :

$$\xi = \frac{2}{n-1} \sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} F(\operatorname{sn}^2(p\varepsilon), k^2);$$

а як ε має $(n+1)$ ріжних вартостей, то і ξ буде мало $(n+1)$ вартостей ріжних, буде проте коренем рівняня $(n+1)$ степеня що до ξ , а в сочинники того рівняня увійде k^2 . Наколи ξ заступити через

$\frac{v}{u^n}$, дістанемо рівняне між u і v степеня $(n+1)$ що до v , а се рівняне назве ся модуловим рівнянем. — Наколи заступимо u через $e^{\frac{2h\pi i}{8}}$, то вартости на ξ не змінять ся, отже v відтворює ся з чинником $e^{\frac{2h\pi i}{8}}$.

З взорів 8) слідно, що \sqrt{k} , $\sqrt{k'}$, а також $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ є однозначні функції величини ρ , наколи s в вираженю :

$$\rho = r + si$$

є додатне і ріжне від зера; можна проте положити :

$$\sqrt[4]{k} = \varphi(\rho), \quad \sqrt[4]{k'} = \psi(\rho),$$

де φ і ψ є функції однозначні. Функції ті мають слідующий вид :

$$\left. \begin{aligned} \psi\left(-\frac{1}{\rho}\right) &= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{2m-1}{e}\pi i}}{1 + e^{-\frac{2m-1}{e}\pi i}} = \varphi(\rho) \\ \varphi\left(-\frac{1}{\rho}\right) &= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - e^{(2m-1)q\pi i}}{1 + e^{(2m-1)q\pi i}} = \psi(\rho) \\ \psi(\rho + 1) &= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - e^{(2m-1)(q+1)\pi i}}{1 + e^{(2m-1)(q+1)\pi i}} = \\ &= \prod \frac{1 + e^{(2m+1)q\pi i}}{1 - e^{(2m-1)q\pi i}} = \frac{1}{\psi(\rho)} \end{aligned} \right\} 13)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \psi(\rho + 2) &= \frac{1}{\psi(\rho+1)} = \psi(\rho) \\
 \varphi(\rho + 1) &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi \rho i}{8}} e^{\frac{\pi i}{8}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1+e^{2m\pi \rho i}}{1-e^{(2m-1)\pi \rho i}} = e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)} \\
 \varphi(\rho + 2) &= e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi(\rho+1)}{\psi(\rho+1)} = e^{\frac{2\pi i}{8}} \varphi(\rho) \\
 \varphi(\rho + 2h) &= e^{\frac{2h\pi i}{8}} \varphi(\rho)
 \end{aligned} \right\} (13)$$

4. З $(n+1)$ вартостей на v , які дістанемо з взору 9), найвартість V відносить ся до періодів $(\frac{\omega}{n} \omega')$, а v_t до періодів $(\omega' \frac{\omega' + 16t\omega}{n})$.

Вартости ті виразять ся взорами:

$$V = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(n\rho), \quad v_t = \varphi \frac{\rho + 16t}{n}. \quad (14)$$

Покажемо, що так дійсно є.

Рівнянє 10) дає всі вартости v яко однозначні функції аргументу ρ і наколи приймемо $\rho = si$, то на основі розвинень:¹⁾

$$\Theta_3(p\varepsilon) = \varphi(q) \prod_{m=1}^{\infty} \left[1 + q^{2m-1} \cos \frac{2\pi p\varepsilon}{\omega} + q^{2(2m-1)} \right]$$

$$\Theta_2(p\varepsilon) = 2 \sqrt{q} \varphi(q) \cos \frac{\pi p\varepsilon}{\omega} \prod_{m=1}^{\infty} \left[1 + q^{2m} \cos \frac{2\pi p\varepsilon}{\omega} + q^{4m} \right]$$

бачимо, що в обох вираженнях маємо під знаком добутка величину додатну та дійсну, отже кват $\frac{\Theta_2}{\Theta_3}$ буде також дійсний, а знак його буде такий, який має $\cos \frac{\pi p\varepsilon}{\omega}$; а що до V належить $\varepsilon = \frac{2\omega}{n}$, то знак буде такий, як у $\cos \frac{2\pi p}{n}$, де $p = \left(1 \dots \frac{n-1}{2}\right)$. Наколи $\frac{n-1}{2}$ є паристе і рівне $2n'$, то наколи n' перших чинників є додатні, а n' слідуючих від'ємні, то V буде мало знак $(-1)^{n'}$; наколи

¹⁾ ibidem ст. 315.

$\frac{n-1}{2}$ є непаристе, рівне $2n'-1$, то наколи $n'-1$ чинників є додатних, а n' від'ємних, то V має знак $(-1)^{n'}$; се значить, що V має все знак $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$, а так як $\varphi(n\rho)$ є додатне і дійсне, то:

$$V = \sqrt{2} e^{n\pi \frac{\omega'}{\omega} i} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - e^{\frac{2mn\omega'}{\omega} \pi i}}{1 + e^{\frac{2mn\omega'}{\omega} \pi i}} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(n\rho);$$

отже перший з взорів 14) є правдивий.

Щоби дістати v_t , треба покласти: $\varepsilon = \frac{\omega' + 16t\omega}{n}$, або:

$$\frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{\rho + 16t}{n}$$

$$v = u \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega'} (2mp\varepsilon + m^2\omega')}}{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega'} (2m+1)p\varepsilon + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 \omega'}};$$

а наколи положимо $\rho + 16t = \rho'$, дістанемо на основі 13):

$$u = \varphi(\rho' - 16t) = \varphi(\rho').$$

Оно є дійсно додатне для $\rho' = s'i$, а також і:

$$v'_t = \varphi(\rho') \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi \rho' i \left[\frac{2m+1}{n} p + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 \right]}}{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi \rho' i \left[\frac{2mp}{n} + m^2 \right]}}$$

буде дійсне і додатне для $\rho' = s'i$; так само $\varphi\left(-\frac{\rho'}{n}\right)$, як і v_t буде дійсне та додатне:

$$v_t = \sqrt{2} e^{\frac{\omega' + 16t\omega}{8n\omega} \pi i} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + e^{\frac{2m\omega' + 16t\omega}{n\omega} \pi i}}{1 + e^{\frac{(2m-1)\omega' + 16t\omega}{n\omega} \pi i}} = \varphi\left(\frac{\rho + 16t}{n}\right);$$

отже і другий з взорів 14) є правдивий.

5. В склад v входить ω та ω' , означені рівнянями:¹⁾

$$\omega = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad \omega' = 2i \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}$$

їх точки особливі є $u=0$ та $u=e^{\frac{2h\pi i}{8}}$.

Треба розслідити проте, як ся поводить v в окруженю тих точок.

Возьмім точку $u=0$.

ω та ω' сповняють рівняне:²⁾

$$\omega \frac{d\omega'}{dk} - \omega' \frac{d\omega}{dk} = - \frac{2\pi i}{k^2 k^2};$$

з відси:

$$\frac{d\rho}{dk} = - \frac{2\pi i}{\omega^2 k(1-k^2)},$$

а так як:

$$\omega = \pi \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \dots \right)^3$$

то:

$$\frac{d\rho}{dk} = \frac{2}{\pi i} \left(\frac{1}{k} + Ak + \frac{Bk^3}{2} + \dots \right), \quad \text{а з відси } (k^2=u^2):$$

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{\pi i} \left(8 \log \frac{u}{u_0} + A(k^2 - k_0^2) + \frac{B}{2} (k^4 - k_0^4) + \dots \right).$$

Наколи $u=u_0$ описує коло довкола точки зерової, то:

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{\pi i} 8 \cdot 2\pi i \log \frac{u_0 e}{u_0}, \quad \text{або:}$$

$$\rho = \rho_0 + 16.$$

В остає проте і дальше однозначне і представляє ся яко ряд степенний аргументу u : $(\alpha = \frac{n^2-1}{8})$.

$$\begin{aligned} V &= (-1)^\alpha \varphi(n\rho) = (-1)^\alpha \sqrt{2} e^{\frac{n\rho\pi i}{8}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1+e^{2m\rho\pi i}}{1+e^{(2m-1)\rho\pi i}} = \\ &= (-1)^\alpha \sqrt{2} u^\alpha \quad \text{II} \quad 15) \end{aligned}$$

¹⁾ ibidem ст. 363, 364.

²⁾ ibidem ст. 450.

³⁾ Пор. н. пр. Schwarz: Formeln u. Lehrsätze z. Gebr. der ellipt. Funct. ст. 53.

а $v_t = \varphi\left(\frac{\rho + 16t}{n}\right)$ переходить на $\varphi\left(\frac{\rho_0 + 16(t+1)}{n}\right) = v_{t+1}$;

проте n інших вартостей v творить довкола точки зєрого систем циклічний (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}), а їх розвиненє є:

$$v = \sqrt{2} e^{\frac{\pi \rho i}{8n}} \prod \frac{1 + e^{\frac{2m \rho \pi i}{n}}}{1 + e^{\frac{(2m-1)\rho \pi i}{n}}} = \sqrt{2} u^{\frac{1}{n}} \Pi. \quad (16)$$

Возьмім другу точку особливу:

$$u = e^{2\pi i} = 1.$$

Функція еліптична, що ся відносить до модулу k' , має періоди:

$$\omega_1 = -\omega'_1, \quad \omega'_1 = \omega_1, \quad \text{з відси } \rho' = -\frac{1}{\rho}.$$

ρ' захує ся так як ρ і має розвиненє:

$$\frac{d\rho'}{dk'} = \frac{2}{\pi i} \left(\frac{1}{k'} + Ak' + \frac{B}{2} k'^3 + \dots \right),$$

а з відси:

$$\rho' - \rho'_0 = \frac{1}{\pi i} \left[\log \left(\frac{k'}{k'_0} \right)^2 + A(k'^2 - k'^2_0) + \frac{B}{2} (k'^4 - k'^4_0) + \dots \right].$$

Наколи змінна u зробиє коло довкола точки $e^{2\pi i}$, очевидно в напрямі додатнім, та не обійме ніякої иншої точки особливої, то $[\psi(\rho)]^8 = k'^2$ змінить аргумент о 2π , а:

$$\rho' - \rho'_0 = \frac{2\pi i}{\pi i} \log \frac{k'^2_0 e}{k'^2_0} = 2,$$

отжеж: $\rho' = \rho'_0 + 2$, а що $\rho_0 = -\frac{1}{\rho'_0}$, то:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - 2\rho_0}.$$

$v_0 = \varphi\left(\frac{\rho}{n}\right) = \psi\left(-\frac{n}{\rho}\right) = \psi(n\rho')$ дійсне та додатне на відтинку (0 --- 1) остає однозначне, наколи змінна зробиє коло довкола точки 1 на основі взорів 14).

V перейде по однім обороті докола точки 1) перейде на $(-1)^\alpha \varphi\left(\frac{n\rho_0}{1 - 2\rho_0}\right)$, а по γ оборотах на $(-1)^\alpha \varphi\left(\frac{n\rho_0}{1 - 2\gamma\rho_0}\right)$, а так як $\varphi(\rho') = \pm \varphi(\rho)$, наколи заїде умова:¹⁾

¹⁾ Пор. Briot-Bouquet loc. cit. ст. 629.

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= \frac{8a' + (4b' + 1)\rho}{(4a + 1) + 2b\rho} \quad \text{та:} \\ (4a + 1)(4b' + 1) - 16ba' &= 1 \end{aligned} \right\} 17)$$

то у нас буде:

$$\frac{\rho_0 + 16t}{n} = \frac{8a'(1 - 2\gamma\rho_0) + (4b' + 1)n\rho_0}{(4a + 1)(1 - 2\gamma\rho_0) + 2bn\rho_0} = \frac{[8a' + (4b' + 1)n - 16a'\gamma]\rho_0}{4a + 1 + 2[bn - (4a + 1)\gamma]\rho_0}$$

при чім:

$$4(a + 1)(4b' + 1) - 16ba' = 1.$$

Щоби сповнити ті умови, положім:

$$bn - (4a + 1)\gamma = 0,$$

$$\frac{b}{4a + 1} = \frac{\gamma}{n}.$$

Позаяк після умови b є перве зглядом $(4a + 1)$, то $b = \pm \gamma$, $4a + 1 = \pm n$, при чім беру або оба знаки горішні або долішні; n є число перве і непаристе, може проте мати вид:

$$n = 4n' + 1, \quad \text{або} \quad n = 4n' - 1.$$

Наколи $n = 4n' + 1$, то беру $n' = a$, $b = \gamma$ і дістану умову:

$$\rho_0 + 16t = 8a' + [(4b' + 1)n - 16a'\gamma]\rho_0;$$

наколи положимо $a' = 2t$, дістанемо вартости на $(4b' + 1)$ і на t з взору:

$$n(4b' + 1) - 32\gamma t = 1 \quad 18)$$

а так як між $\varphi \left(\frac{n\rho_0}{1 - 2\gamma\rho_0} \right)$ і $\varphi \left(\frac{\rho_0 + 16t}{n} \right)$ є звязь $(-1)^a$, то V перейде на v_t . Взір 18) показує, яке t належить до певної вартости γ . Наколи $\gamma = (1, 2, \dots, n-1)$, то на t дістанемо тих самих $(n-1)$ вартостей в певнім порядку.

Дістанемо проте докола точки $u = e^{2\pi i} = 1$ систем коловий вартостей $(V, v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$, а v_0 остає однозначне.

Возьмім дальше точку $u = e^{\frac{2\pi i}{8}}$.

Наколи аргумент u перейде осьму часть обводу, тоді:

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{\pi i} 8 \log \frac{u_0 e^{\frac{2\pi i}{8}}}{u_0}, \quad \text{або:}$$

$$\rho = \rho_0 + 2,$$

отже V перейде на :

$$(-1)^{\alpha} \varphi(n\rho_0 + 2n) = e^{\frac{2n\pi i}{8}} V,$$

а v_t на :

$$\varphi\left(\frac{\rho_0 + 16t + 2}{n}\right) = \varphi\left(\frac{\rho_0 + 16(t-\alpha) + 2n}{n}\right) = e^{\frac{2n\pi i}{8}} V_{t-\alpha}.$$

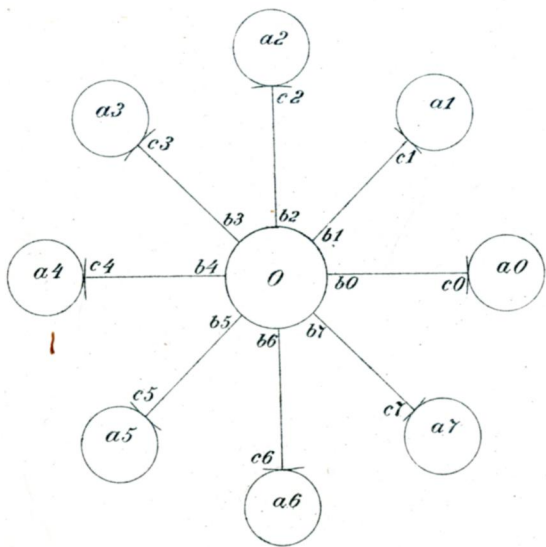
Наколи вийдемо з b_0 з вартостю v , то зачеркнувши осьму часть обводу в напрямі додатнім дістанемо в точці b_1 вартість $e^{\frac{2n\pi i}{8}} V$, отже на лінії $b_1 a_1$ V буде мало вартости такі, як в відпо-відних точках на осн xx , помножені через $e^{\frac{2n\pi i}{8}}$. Звідси наколи перейдемо $b_1 a_1$ γ разів та дістанемо в точці b_1 якесь $v_{t\gamma}$, то наколи вернемо до b_0 (т. є. окружимо точку $e^{\frac{2n\pi i}{8}}$), дістанемо $v_{t\gamma+\alpha}$; наколи хочемо звідси дістати v , яке відповідає γ окруженням точки $e^{\frac{2n\pi i}{8}}$, треба найти індекс, який відносить ся до γ окружень точки 1 та додати до нього α .

Коли возьмемо загальною точку $e^{\frac{2h\pi i}{8}}$, то будемо її окружати по луку $b_0 b_1 \dots b_h = \frac{h}{8}$ части обводу, простій $b_h c_h$, колі, що є окруженєм тої точки, з поворотом по $c_h b_h$ і $b_{h-1} \dots b_0$ (гл. фіг.).

Наколи аргумент зачеркне $\frac{h}{8}$ частий обводу, то ρ перейде на $\rho_0 + 2h$, а V на $e^{\frac{2hn\pi i}{8}} V$, а v_t на $e^{\frac{2nh\pi i}{8}} v_{t-h\alpha}$. Наколи вийдемо з точки b_0 з вартостю V , перейдемо γ разів $b_h a_h$, дістанемо в b_h $e^{\frac{2hn\pi i}{8}} v_{t\gamma}$, а коли повернемо до b_0 , дістанемо $v_{t\gamma+\alpha h}$. Вистане проте найти індекс, що ся відносить до γ окружень точки $e^{2\pi i}$ і додати до нього hz , а дістанемо індекс v , що ся відносить до γ окружень точки $e^{\frac{2h\pi i}{8}}$.

6. Функція еліптична о модулі відворотнім має періоди $\omega_1 = \omega - \omega'$, $\omega_1' = \omega'$, а звідси звязь, яка є між ρ та ρ_1 , представить ся :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho} - 1, \quad u_1 = \varphi(\rho_1) = \psi\left(-\frac{1}{\rho_1}\right) = \frac{1}{\psi\left(-\frac{1}{\rho}\right)} = \frac{1}{u}.$$



Наколи в рівняню модулів заступимо u через $\frac{1}{u}$, то корені нового рівняня (v) будуть відворотні до коренів рівняня першого в якимсь порядку.

Зауважм:

$$\begin{aligned} (v) = (-1)^\alpha \psi \left(-\frac{1}{n\rho_1} \right) &= \frac{(-1)^\alpha}{\psi \left(-\frac{1}{n\rho_1} - 1 \right)} = \frac{(-1)^\alpha}{\psi \left(-\frac{1+(n-1)\rho}{n\rho} \right)} = \\ &= \frac{(-1)^\alpha}{\varphi \left(\frac{n\rho}{1+(n-1)\rho} \right)}; \end{aligned}$$

він буде відворотний до якогось кореня $v\delta$, наколи:

$$\frac{\rho + 16\delta}{n} = \frac{8a' + [(4b'+1)n + 8a'(n-1)]\rho}{(4a+1) + [2bn + (4a+1)(n-1)]\rho}$$

під умовою:

$$(4b'+1)(4a+1) - 16ba' = 1.$$

Положм: $2bn + (4a+1)(n-1) = 0$, або:

$$\frac{2b}{4a+1} = -\frac{n-1}{2n}, \text{ де } 2b \text{ є перве до } (4a+1).$$

Наколи $n=4n'+1$, положу $a=n'$, $b=-2n'$, $a'=2\delta$, а годї дістанемо b' і δ з умови:

$$16(n-1)\delta + n(4b'+1) = 1 \quad \text{або:}$$

$$16\delta + 5b' = -1, \quad \text{отже } \delta = 4, \quad \text{або:}$$

$$(V) = \frac{1}{v_4}.$$

Возьмім инше (v) н. пр. (v_t), то:

$$\begin{aligned} (v_t) &= \psi \left(-\frac{n}{\rho_1 + 16t'} \right) = \frac{1}{\psi \left(-\frac{n}{\rho_1 + 16t'} - 1 \right)} = \\ &= \frac{1}{\psi \left(-\frac{n(1-\rho)}{\rho + 16t' - 16t'\rho} - 1 \right)} = \frac{1}{\psi \left(-\frac{16t' + n - (16t' - 1)\rho}{16t' - (16t' - 1)\rho} \right)} = \\ &= \frac{1}{\psi \left(\frac{16t' - (16t' - 1)\rho}{16t' + n - (16t' - 1)\rho} \right)}. \end{aligned}$$

Корень сей буде відворотний до v_t , наколи: 19)

$$\frac{\rho + 16t}{n} = \frac{8(16t' + n)a' + 16t'(4b' + 1) - [(16t' - 1)(4b' + 1) + 8(16t' + n - 1)a] \rho}{(16t' + n)(4a + 1) + 32t'b - [(16t' + n - 1)(4a + 1) + 2(16t' - 1)b] \rho}$$

з умовою:

$$(16t' - 1)(4b' + 1) + 8(16t' + n - 1)a' = -1.$$

$$(16t' + n - 1)(4a + 1) + 2b(16t' - 1) = 0.$$

$$\frac{4a + 1}{2b} = -\frac{16t' - 1}{16t' + n - 1}, \text{ де } (4a + 1) \text{ є перве до } 26.$$

В рівнянню 19) знаменник правої сторони зведе ся до n , наколи положу $a = 4t'$, $b = 8t' + \frac{n-1}{2}$; тоді:

$$t = (16t' + n) \frac{a'}{2} + t'(4b' + 1) = \frac{2a' + b'}{4};$$

a' має бути просте паристе, b' мноюкратною 4; кладу тому:

$$a' = 2a'', \quad b' = 4b'', \quad \text{то:}$$

$$(16t' + n)a'' + t'(16b'' + 1) = a'' + b''$$

$$(16t' + n - 1)a'' + t(16t' - 1)b'' = -t' \quad a'' + b'' = t$$

$$(16t' - 1)t + na'' = -t'.$$

Для $t' = 0$ $-t = -5a''$; наколи $a'' = 1$, то $t = 5$, або:

$$(v_0) = \frac{1}{v_0}.$$

Для $t' = 2$ $31t + 5a'' = -2$; звідси $t = 3$, а:

$$(v_2) = \frac{1}{v_3}.$$

Для $t' = 3$ $47t + 5a'' = -3$; звідси $t = 1$, а:

$$(v_3) = \frac{1}{v_1}.$$

Для $t' = 4$ $63t + 5a'' = -4$, $t = 2$, а:

$$(v_4) = \frac{1}{v_2}.$$

Остає (v_1) , яке в тім случаю рівнає ся $\frac{1}{V}$.

Для $n=5$ дістанемо 5 вартостей на v , іменно:

$$V, v_0, v_1, v_2, v_3, v_4.$$

7. Утворім функцію півсиметричну $(v_\alpha v_\beta)$ двох з тих величин, дальше таку функцію двох других та двох послідних з тих величин

та возьмім функцію симетричну U тих трох функцій півсиметричних :

$$U = (V-v_0)(v_1-v_4)(v_2-v_3).$$

Докола особливої точки $u=0$ дістає та функція 5 вартостей :

$$U_0 = (V-v_0)(v_1-v_4)(v_2-v_3)$$

$$U_1 = (V-v_1)(v_2-v_0)(v_3-v_4)$$

$$U_2 = (V-v_2)(v_3-v_1)(v_4-v_0)$$

$$U_3 = (V-v_3)(v_4-v_2)(v_0-v_1)$$

$$U_4 = (V-v_4)(v_0-v_3)(v_1-v_2)$$

так як докола тої точки V' остає без зміни, а v_t переходить на v_{t+1} та маємо систем коловий $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Докола точки $u=e^{2\pi i} v_0$ остає однозначне, а пять прочих величин творить систем коловий. Порядок індексів дістаєм з взору :

$$32 \gamma t - n(4b'+1) = -1, \quad \gamma = 1, 2, 3, 4.$$

Для $\gamma = 1$ $8t - 5b' = 1$, звідси: $t = 2$.

Для $\gamma = 2$ $16t - 5b' = 1$, звідси: $t = 1$.

Для $\gamma = 3$ $24t - 5b' = 1$, $t = 4$.

Для $\gamma = 4$ $32t - 5b' = 1$, $t = 3$;

дістанемо проте систем коловий (V, v_2, v_1, v_4, v_3) , а вартости на U є :

$$(v_2 - v_0)(v_4 - v_3)(v_1 - V) = U_1$$

$$(v_1 - v_0)(v_3 - V)(v_4 - v_2) = U_3$$

$$(v_4 - v_0)(V - v_2)(v_3 - v_1) = U_2$$

$$(v_3 - v_0)(v_2 - v_1)(V - v_4) = U_4$$

$$(V - v_0)(v_1 - v_4)(v_2 - v_3) = U_0.$$

U приймає проте в окруженю точки особливої $u=e^{2\pi i}$ ті самі вартости, що докола точки зерової, а що вартости v докола всіх інших точок особливих зводять ся до вартостей докола точки $u=0$ і $u=e^{2\pi i}$, тому U має лише 5 вартостей на цілій площі чисельній, отже сповняє рівнянє альгебраїчне між u і U пятого степєня що до U .

8. Утворім се рівнянє, а вперед розслїдїм його свойства.

v є скінчене для усіх скінчених вартостей u , звідси і U є для всіх скінчених вартостей u скінчене. Для $u=\infty$ має V таку саму

вартість, як $\frac{1}{v}$ для $u = \frac{1}{\infty}$.

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{u^5} \prod \frac{1+u^{16(m-1)}}{1+u^{16m}}$$

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{\sqrt{2} u^5} + \dots, \quad V = \sqrt{2} u^5 + \dots,$$

отже V є безконечностю 5. степеня, а 5 прочих v є безконечно-стиями степеня $\frac{1}{5}$. Звідси U_0 (наколи пропустимо висші степені) є:

$$\begin{aligned} U_0 &= (a_0 u^5 - a_1 u^{\frac{1}{5}}) (a_2 u^{\frac{1}{5}} - a_3 u^{\frac{1}{5}}) (a_4 u^{\frac{1}{5}} - a_5 u^{\frac{1}{5}}) = \\ &= (b_0 u^{\frac{26}{5}} - b_1 u^{\frac{2}{5}}) (a_4 u^{\frac{1}{5}} - a_5 u^{\frac{1}{5}}) = c_0 u^{\frac{27}{5}} + c_1 u^{\frac{3}{5}} + \dots, \end{aligned}$$

U є проте безконечностю $\frac{27}{5}$ степеня Сума рядів від'ємних функцій U є 27.¹⁾

З того побачимо, якого степеня що до u є наше рівняне. Найже рівняне $f(zu) = 0$ буде степеня m що до z_1 а степеня m' що до u . Сума рядів u — яке є функцією z на цілій площі чисельній — є зером, або сума рядів додатних рівнає ся сумі рядів від'ємних. Наколи в рівняню місто u возьмемо $u_0 + u'$, де u_0 є стала якабудь, то так як сума рядів від'ємних є та сама для функцій u і u' , то і сума рядів додатних остане та сама, т. є. не зависить від сталої u_0 . Можна проте u_0 так дїбрати, що не буде ся відносило до ніякого систему (u, z) або $(u, \frac{1}{z})$, який сповняє рівняня $f(zu) = 0$ та $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$, і що для $u = u_0$ сочинник при $z^{m'}$ не стає ся зером. В кожній з точок корінних рівняня m' -того степеня $f(zu_0) = 0$ ряд функцій u' що до z рівнає ся степенези рівняня що до z (очевидно при рівняня незведенім). Звідси наше рівняне буде степеня 27. що до u .

¹⁾ Наколи возьму якусь функцію $f(z)$ в точці t на площі, то все існує таке число ціле n , (додатне або від'ємне), що квот $\frac{f(z)}{(z-t)^n}$ не є в точці t ані 0 ані ∞ . То n називає ся рядом функції (Lagrange). Наколи $f(z)$ не стає ся в точці t ані 0 ані ∞ , то ряд функції є 0, наколи стає ся 0, ряд є додатний, наколи стає ся ∞ , ряд є від'ємний.

Малосьмо $\xi = \frac{v}{u^5}$; положім тепер:

$$\Phi = \frac{U}{u^5} = (\xi - \xi_0) (\xi_1 - \xi_4) (\xi_2 - \xi_3).$$

Сочинники рівняня аргументу ξ були функціями цілковитими що до k^2 або u^8 , отже такі будуть і сочинники рівняня Φ , а що Φ стає ся ∞ лише для $u=0$, то рівняне буде мало вид:

$$u^{8\beta_0} \Phi^5 + \sum_{p=1}^4 u^{8\beta_p} (a_p + b_p u^8 + c_p u^{16} + \dots) \Phi^{5-p} + (a_5 + b_5 u^8 + c_5 u^{16} + \dots) = 0.$$

Наколи положимо $\Phi = \frac{U}{u^5}$ та помножимо через u^3 , дістанемо:

$$u^{8(\beta_0-9)} U^5 + \sum_{p=1}^4 u^{8(\beta_p-9)+15p} (a_p + b_p u^8 + \dots) U^{5-p} + u^3 (a_5 + b_5 u^8 + \dots) = 0.$$

Для вартостей u дуже малх є всі вартости U дуже малі степеня $\frac{3}{5}$.

Сочинник при U^5 положім $= 1$, то $\beta_0 = 9$. Позаяк дальше сочинники є функції цілковиті що до u^8 , проте $\beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots$ мусять бути додатні, а $8(\beta_p - 9) + 15p > 3$, або:

$$\beta_p \geq 10 - 2p.$$

Рівняне має бути дальше степеня 27. що до u , проте в вираженнях в скобках підемо до такої степені u^8 , що повний степень сочинника не буде більший як 27. Наколи возьмемо $\beta_p = 10 - 2p$, дістанемо рівняне:

$$20) \quad U^5 + \sum_{p=1}^4 u^{2-2p} (a_p + b_p u^8 + c_p u^{16}) U^{5-p} + u^3 (a_5 + b_5 u^8 + c_5 u^{16} + d_5 u^{24}) = 0.$$

Се буде рівняне жадане, в якім треба єще визначити сочинники.

9. В тій цілі возьмім функцію:

$$(U) = [(V) - (v_0)] [(v_1) - (v_4)] [(v_2) - (v_3)],$$

де аргумент є $\frac{1}{u}$.

$$(U) = \frac{-1}{V v_0 v_1 v_2 v_3 v_4} (V - v_2) (v_3 - v_1) (v_4 - v_0) = \frac{U}{u^6}$$

на основі 15) і 16); отже наше рівняння не змінить ся, наколи в нїм положу $\frac{1}{u}$ за u , і $\frac{U}{u^6}$ за U ; дістанемо тоді:

$$\frac{U^5}{u^{30}} + \sum_{p=1}^4 u^{p-8} (a_p + b_p u^{-8} + c_p u^{-16}) \frac{U^{5-p}}{u^{6(5-p)}} +$$

$$+ u^{-3} (a_5 + b_5 u^{-8} + c_5 u^{-16} + d_5 u^{-24}) = 0.$$

або:

$$U^5 + \sum_{p=1}^4 (a_p + b_p u^{-8} + c_p u^{-16}) U^{5-p} + u^3 (d_5 + c_5 u^{-8} + b_5 u^{-16} + a_5 u^{-24}) = 0. \quad (21)$$

Наколи порівнаєм 20) і 21), дістанемо для $p=1$:

$u^{-1}(a_1 + b_1 u^{-8} + c_1 u^{-16}) = u^7(a_1 + b_1 u^8 + c_1 u^{16})$; се не може бути, тому сочинник при U^4 є зером.

Для $p=2$: $u^6(a_2 + b_2 u^{-8} + c_2 u^{-16}) = u^6(a_2 + b_2 u^8 + c_2 u^{16})$, т. є. $b_2 = c_2 = 0$.

Для $p=3$: $a_1 u^{13} + b_3 u^{15} + c_3 u^{-3} = a_3 u^5 + b_3 u^{13} + c_3 u^{21}$, т. є. $a_3 = b_3, c_3 = 0$.

Для $p=4$: $a_4 u^{20} + b_4 u^{12} + c_4 u^4 = a_1 u^4 + b_4 u^{15} + c_4 u^{23}$, т. є. $c_4 = a_4$;

а так само $d_5 = a_5 = c_5 = b_5$. Рівняння перейде проте на:

$$U^5 + a_2 u^6 U^3 + a_3 u^5 (1 + u^8) U^2 + u^4 (a_4 + b_4 u^8 + a_4 u^{16}) U +$$

$$+ u^3 (a_5 + b_5 u^8 + b_5 u^{16} + a_5 u^{24}) = 0.$$

Для $u=1, v_0=1$, а пять иньших вартостей v дасть -1 , а всі вартости U є рівні зеру, проте і сочинники при степенях U мусять бути зером для $u=1$; т. є. $a_2 = 0, a_3 = 0, b_4 = -2a_4, b_5 = -a_5$, а рівняння перейде на:

$$U^5 + a_4 u^4 (1 - u^8) U + a_5 u^3 (1 - u^8)^2 (1 + u^8) = 0.$$

Треба проте визначити еще тільки a_4 і a_5 .

Вартости u дійсній додатній та дуже малій відповідає $\rho = si$, де s є додатне, дуже мале; звідси $e^{\rho \pi i} = q$ є додатне, дійсне та дуже мале:

$$u = \sqrt{2} q^{\frac{1}{8}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + q^{2m}}{1 + q^{2m-1}} = \sqrt{2} q^{\frac{1}{8}} (1 - q^{2m-1} + \dots).$$

Для $m=1$ (наколи пропустимо дальші вирази) дістанемо:

$$u = \sqrt{2} q^{\frac{1}{8}} (1 - q)$$

$$v_0 = \sqrt{2} q^{\frac{1}{5} \cdot 8} \prod \left(\frac{1+q^{\frac{2m}{5}}}{1+q^{\frac{2m-1}{5}}} \right) = \sqrt{2} q^{40} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right)$$

$$v_1 = \sqrt{2} q^{40} \left(e^{\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{\pi i}{5} \cdot 18} \right); \quad e^{\frac{\pi i}{5} \cdot 18} = e^{\frac{\pi i}{5} \cdot 20} e^{-\frac{2\pi i}{5}}$$

$$v_1 = \sqrt{2} q^{40} \left(e^{\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{-\frac{2\pi i}{5}} \right);$$

так само дістанемо:

$$v_2 = \sqrt{2} q^{40} \left(e^{\frac{4\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{-\frac{4\pi i}{5}} \right).$$

$$v_3 = \sqrt{2} q^{40} \left(e^{-\frac{4\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{4\pi i}{5}} \right).$$

$$v_4 = \sqrt{2} q^{40} \left(e^{-\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{2\pi i}{5}} \right).$$

$$v_1 - v_4 = i 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{2\pi}{5} q^{40} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right).$$

$$v_2 - v_3 = i 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{4\pi}{5} q^{40} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right).$$

Звідси:
$$U_0 = 2^{\frac{3}{2}} 5^{\frac{1}{2}} q^{40} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right).$$

Підставмо се в рівнянє:

$$\begin{aligned} 2^{\frac{15}{2}} 5^{\frac{5}{2}} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right) + a_4 \left(2^2 q^{\frac{1}{8}} (1-q^8)^2 2^{\frac{3}{2}} 5^{\frac{1}{2}} q^{40} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right) \right) + \\ + a_5 2^{\frac{3}{2}} (1-q^8) (1-u^8)^2 (1+u^8) = 0. \end{aligned}$$

Вільний вираз:

$$2^{\frac{15}{2}} 5^{\frac{5}{2}} + a_5 2^{\frac{3}{2}} = 0, \quad a_5 = -2^6 5^{\frac{5}{2}}.$$

Сочинник при $q^{\frac{1}{5}}$: $5 \cdot 2^{\frac{15}{2}} 5^{\frac{5}{2}} + a_4 \cdot 2^2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} 5^{\frac{1}{2}} = 0$, т. є.
 $a_4 = -2^4 5^3$, а наше рівнянє буде:

$$U^5 - 2^4 5^3 u^4 (1-u^8)^2 U - 2^6 5^{\frac{5}{2}} u^5 (1-u^8)^2 (1+u^8) = 0.$$

А се в форма Bring-Jerrard'a, треба лиш положити:

$$U = 2 \sqrt[4]{5^3} u \sqrt{1-8^8} t, \quad \text{дістанемо:}$$

$$t^5 - t - \frac{2}{4 \sqrt[4]{5^3}} \frac{1+u^8}{u^2 (1-u^8)^{\frac{1}{2}}} = 0;$$

проте:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}} \frac{1 + u^8}{u^2 (1 - u^8)^{\frac{1}{2}}} = A.$$

Положім:

$$\frac{\sqrt[4]{5^3} A}{2} = a, \quad \text{то дістанемо:}$$

$$1 + 2u^8 + u^{16} = a^2 u^4 - a^2 u^{15}, \quad \text{а що } u^4 = k, \text{ то:}$$

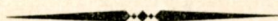
$$k^4 + a^2 k^3 + 2k^2 - a^2 k + 1 = 0.$$

Рівнянє се дає ся альгебраїчно розв'язати; знаєм k , то можемо найти відповідну йому якусь вартість q з взору:

$$q = \frac{1}{16} k^2 + \frac{1}{32} k^4 + \frac{21}{1024} k^6 + \frac{31}{2048} k^8 + \dots,$$

а звідси ρ (бо $q = e^{\rho u}$). Наколи маємо ρ , дістанемо 5 вартостей v , а дальше належачі до них 5 вартостей U ; а наколи кожду з тих вартостей поділимо через $2\sqrt[4]{5^3} u \sqrt{1-u^8}$, дістанемо розв'язку загального рівняня пятого степеня.

Тернопіль в маю 1897. р.



Причинок до поділу рівнянь другого степеня

написав

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

Математика знає цілу групу інтересних kwestій, які ведуть до зовсім противних, подекуди і противорічних вислідів, після того, з якої точки розбирати мем таку kwestію. Тут зачислити треба много інтересних kwestій з рахунку імовірности,¹⁾ які ведуть до різних результатів, а се можна би витолкувати в той спосіб, що відповідно до точки виходу змінюють ся і самі założеня.

Дальше треба зачислити тут розеліди, які відносять ся до безконечности; показують они, що не все одно, на якій дорозі переходимо з коечности до безконечности; що не все одно, чи ми уважати будемо ту безконечність за границю тої або иньшої фігури плоскої.

Вже англійський математик Cayley подав примір на се, що спосіб переходу з коечности до безконечности має вплив на вислід.

Наколи іменно возьмемо інтеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi,$$

то інтеграл сей є границею квадрату о середоточці в початку систему сорадних; коли перетворимо сей інтеграл на сорадні бігунові (полярні):

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{якобіан} = r,$$

¹⁾ Пор. Poincaré: Calcul des probabilités ст. 94 et sqts.

а через се станемо уважати безконечність яко границю кола, дістанемо на вартість інтегралу:

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r \sin(r^2) dr d\varphi = \pi \int_0^{\infty} \cos(r^2),$$

отже результат зовсім неозначений.

І нинішня kwestія, яку будемо розбирати, веде до різних вислідів, наколи єї розбирати-мемо на дорозі чисто-геометричній; тому-то вкінці переводимо еще аналізу на дорозі алгебраїчній, а через се входимо подекуди і в царину чисел надскінченних (transfinit) G. Cantora.

1. Річ, що є предметом нинішньої розвідки, розбирає слідуєче питання:

Винайти відношене всіх рівнянь 2. ст., які в границях ($z_0 \dots z_1$) незвісної мають 0, 1, 2 коренів дійсних, до числа всіх рівнянь 2. ст.¹⁾

Маємо рівняне 2-го степеня виду:

$$f(z) = z^2 - 2az + b = 0 \quad (a, b \text{ дійсні}).$$

Дискримінант того рівняня зведений до зера дає нам параболу $a^2 - b = 0$

в сорядних (a, b) о вершку (о, о). Рівняне $f(z) = 0$ представляє при зміннім параметрі z цілу множинь (Mannigfaltigkeit) стичних, що їх обводній (Envelope) є параболу $a^2 - b = 0$.

Возьмім дві вартости параметру z т. є. z_0 і z_1 , то до них належати-муть стичні (Fig. I):

$$z_0^2 - 2az_0 + b = 0.$$

$$z_1^2 - 2az_1 + b = 0.$$

Они перетинають ся в точці М ($a = \frac{z_0 + z_1}{2}$, $b = z_0 z_1$), а кут, під яким перетинають ся, є:

$$\vartheta = \arctg \frac{2(z_1 \infty z_0)}{1 + 4z_0 z_1},$$

де знак ∞ показує, що величину меншу треба від більшої відняти.

¹⁾ Гадку зайняти ся тим питанням подав мені Др. Жоравский, проф. універс. краківського.

Ті стичні стикають ся з параболою в точках:

$$A (a = z_0, b = z_0^2), \quad B (a = z_1, b = z_1^2).$$

Площа розпала ся тепер на слідуючі часті:

I.) $(A+A')$ представляє таку множинь вартостей змінних a і b , що для них рівняне $f(z)=0$ в границях $(z_0 \dots z_1)$ не має ані одного дійсного кореня.

II.) $(C+C')$ представляє такі рівняня, що в границях $(z_0 \dots z_1)$ мають один корень дійсний.

III.) B характеризує рівняня, що в границях $(z_0 \dots z_1)$ мають оба корені дійсні.

Так як площа (ab) представляє при змінюючих ся a і b цілу безконечну множинь рівнянь 2. ст., проте є річ очевидна, що згадані відношеня, що їх означимо через S_0, S_1, S_2 , будуть:

$$S_0 = \frac{A + A'}{\text{Ціла пл.}}, \quad S_1 = \frac{C + C'}{\text{Ціла пл.}}, \quad S_2 = \frac{B}{\text{Ціла пл.}}.$$

Ті відношеня дадуть нам рівночасно імовірність, що в даних границях якесь рівняне буде мати 0, 1, 2 дійсних коренів.

Вже з гори бачимо, що при скінчених z_0 і z_1 , S_2 буде величина безконечно мала, бо B є дуже мала часть площі (ab) :

$$B = \frac{1}{4} z_0 z_1 (z_0 + z_1) + \frac{1}{12} (z_1^3 + z_0^3),$$

як не тяжко обчислити.

Наші відношеня обчислимо наперед при скінчених A, A', C, C' , а опісля розширимо їх до безконечности.

Переходити до безконечности можна в ріжний спосіб. Спосіб переходу, який ту відразу насуває ся, є перехід при помочи кола.

Наколи зачеркнемо сорозмірно великим лучем коло з точки M (Фіг. I.), так щоби в собі заключало обі точки стичности, дістанемо — як се очевидно — при скінчених A, A', C, C' :

$$s_0 = \frac{2r^2\delta - B}{r^2\pi}, \quad s_1 = \frac{2r^2(\pi - \delta)}{r^2\pi}, \quad s_2 = \frac{B}{r^2\pi};$$

а коли возьмемо:

$$\lim r = \infty,$$

отже так, що в порівняню з $r^2 B$ можна пропустити, дістанемо:

$$S_0 = \frac{\delta}{\pi}, \quad S_1 = \frac{\pi - \delta}{\pi}, \quad S_2 = 0.$$

Відношеня ті при великім r не є від r залежні. Наколи проте r розширимо до безконечности, то дістанемо при узглядненю вартости δ відношеня:

$$S_0 = \frac{\text{arc tg } \frac{2(z_1 \infty z_0)}{1 + 4z_0 z_1}}{\pi}, \quad S_1 = \frac{\pi - \text{arc tg } \frac{2(z_1 \infty z_0)}{1 + 4z_0 z_1}}{\pi}, \quad S_2 = 0.$$

2. Інший вислід дістанемо, наколи перейдемо до безконечности при помочи прямокутника.

Нарисуємо прямокутник так великий, щоби заключав в собі точки А, В, М (фіг. II). Обчислім тут частини А', А, С, С' (при чім берім лиш безглядні вартости сорадних).

Отже:

$$A = \frac{1}{2} (a + a') (b + z_0 z_1) - B.$$

Щоби обчислити А', мусимо знати сорадні точок N і P; они випадуть з перетинаня лінії $z_0^2 - 2az_0 + b = 0$ з лінією $b = -b$, отже:

$$N \equiv \left(-b, a = \frac{z_0^2 - b}{2z_0} \right), \quad P \equiv \left(-b, a = \frac{z_1^2 - b}{2z_1} \right).$$

Проте:

$$\overline{NP} = \frac{z_1^2 - b}{2z_1} - \frac{z_0^2 - b}{2z_0} = \frac{(z_1 - z_0)(b + z_0 z_1)}{2z_0 z_1},$$

а часть А':

$$A' = \frac{(b^2 - z_0 z_1)(z_1 - z_0)}{4z_0 z_1}.$$

Цілий прямокутник є:

$$2b(a + a'),$$

отже при скінчених А, А', С, С' наші відношеня є:

$$s_0 = \frac{\frac{1}{2} (a + a') (b + z_0 z_1) + \frac{1}{4z_0 z_1} (b^2 - z_0^2 z_1^2) (z_1 - z_0) - B}{2b(a + a')},$$

$$s_1 = \frac{2b(a + a') - \frac{1}{2} (a + a') (b + z_0 z_1) + \frac{1}{4z_0 z_1} (b^2 - z_0^2 z_1^2) (z_1 - z_0)}{2b(a + a')},$$

$$s_2 = \frac{B}{2b(a + a')}.$$

Перейдім до безконечности:

$$\lim a = \lim a' = \lim b = \infty,$$

то дістанемо по переведеню відповідних скорочень:

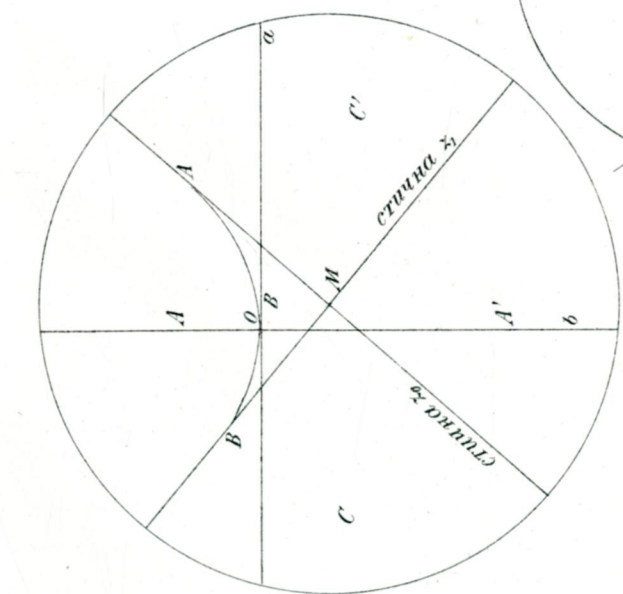
$$S_0 = \frac{z_1 + 4z_0 z_1 - z_0}{16z_0 z_1},$$

$$S_1 = \frac{z_0 + 12z_0 z_1 - z_1}{16z_0 z_1},$$

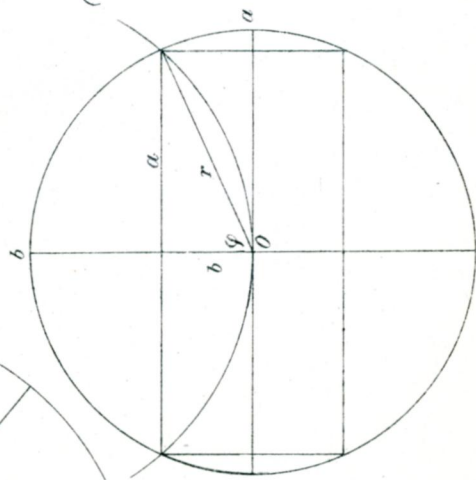
$$S_2 = 0.$$

Маємо проте вислід зовсім инший, як при переході до безконечности при помочи кола.

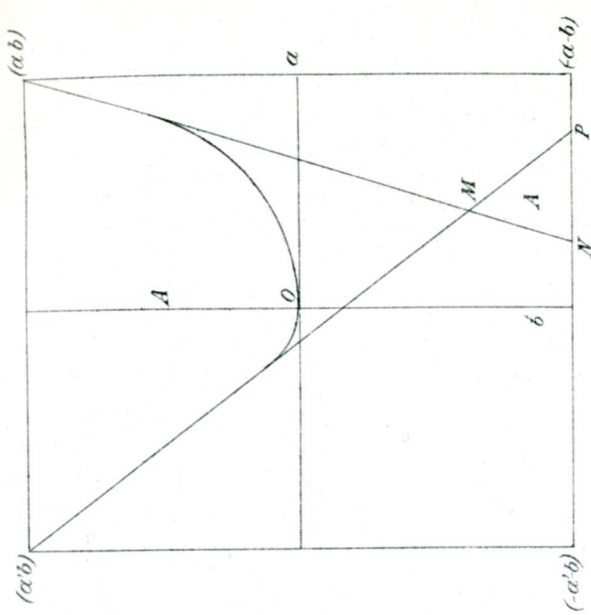
Котрий з тих вислідів є імовірнійший?



φίγ I



φίγ III



φίγ II

Ми випрваджували наші відношеня для яких-небудь скінчених вартостей аргументу z . Мусять они проте остати і для $z_1 = z_0$. Для тих вартостей маємо, наколи возьмем коло:

$$S_0 = 0, \quad S_1 = 1,$$

а наколи возьмемо прямокутник:

$$S_0 = \frac{1}{4}, \quad S_1 = \frac{3}{4}.$$

В першій разі значить се, що в точці $z_0 = z_1$ (яка лежить на параболі) не ма зовсім рівнянь о коренях спряжених, а всі рівняня мають один (отже і оба) корінь дійсний; в другім случаю, що в сій точці є і такі і такі рівняня, а се є неможливе, бо в границях ($z_0 \dots z_0$) є лиш рівняня 2 ст., які власне мають корінь z_0 , і то корінь дійсний (бо z_0 є дійсне). Перший вслід є проте імовірнійший, так як він каже, що імовірність, що рівняне 2. ст. для дійсної вартости z_0 має один корінь дійсний, рівнає ся певности, а се є і без того очевидне.

3. Однак тих відношень не можна розширити для z_0 і z_1 безконечно великих, бо наколи $z_0 = z_1 = \infty$, то середочка кола M посує ся в безконечність; обі стичні стануть асимптотами, а так як параболя має лиш одну асимптоту, цілу в безконечности, то дістанемо місто двох стичних одну асимптоту в безконечности і наша основна фігура не має значіня.

Наколи однак іде нам о відношенє всіх рівнянь 2 степеня з 0, 2 коренями дійсними до всіх рівнянь (в границях $-\infty \dots +\infty$), то возьмем за Кляйном (Klein) фігуру III., де параболя відповідає рівняням о 0 коренях, а проча часть площі рівняням о двох дійсних коренях.

Возьмім тут коло, яке опієся розширимо до безконечности.

Часть параболі, замкнена луком кола, має поле — як легко обчислити — :

$$\frac{1}{3} a^3 + (a^2 + a^4) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{a},$$

отже відношенє:

$$S_0 = \frac{\frac{1}{3} a^3 + (a^2 + a^4) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{a}}{(a^2 + a^4) \pi},$$

яке для $\lim a = \infty$ дає:

$$S_0 = 0,$$

що є очевидно абсурдом.

Колиж до безконечности перейдем при помочи прямокутника, дістанемо:

$$S_0 = \frac{\frac{4}{3} a^3}{4a^3} = \frac{1}{3},$$

а се відношенє не залежить від a і є сталою величиною.

Очевидно:
$$S_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

4. Зовсім инакше представляє ся річ з точки аналізи альтебраічної.

Маємо рівнанє:

$$x^2 - 2ax + b = 0,$$

то:

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - b}.$$

Рівнаня мають розвязки дійсні для всіх від'ємних вартостей b , та для $a^2 > b$, наколи b є додатне, отже:

корені дійсні $\left\{ \begin{array}{l} b = (0 \dots - \infty) = (1) \end{array} \right.$

є для: $\left\{ \begin{array}{l} b = (0 \dots a^2) = (2), \end{array} \right.$

спряжені для: $b = (a^2 \dots + \infty) = (3).$

Вартостей (1) є безконечно много, так само (2) і (3), но очевидно, що множинь (1) є:

$$(1) \equiv (2) + (3),$$

а позаяк:

$$(3) = (a^2 \dots + \infty) = (a^2 \dots 2a^2) + (2a^2 \dots 3a^2) + \dots \text{in inf.}$$

а:

$$(2) = (0 \dots a^2) \sim (a^2 \dots 2a^2),$$

то (3) є безконечно рази більше, чим (2), отже:

$$(3) \equiv \infty (2),$$

а проте:

$$(1) \equiv (2) + \infty (2) = (\infty + 1) (2).$$

Бачимо проте, що рівнань з розвязкою дійсною є безконечне число, так само рівнань з розвязками спряженими, но наколи множинь рівнань з розвязками спряженими є першим числом надскінченим,¹⁾ то множинь рівнань з розвязками дійсними є другим числом надскінченим, проте є більше рівнань з розвязками дійсними.

Тернопіль 20. жовтня 1897. р.

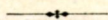
¹⁾ Пор. н. пр. Dickstein: Pojęcia i metody matematyki I. str. 37.

Електро-магнетна теорія світла і філії електричні

написав

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

(Посвячую пам'яті мого бл. п. брата Маріяна).



В С Т У П.

В розвою теоретичної оптики відріжняємо три головні фази: теорію впливу (еманації), теорію фильованя (ундуляції) та теорію електромагнетну. Дві перші повстали майже рівночасно, а сотворили їх два найбільші корифеї фізики XVII. віку, Newton і Huyghens. В критичний розбір обох тих теорій не будемо входити, так як наука про них давно вже висказала свою гадку; пригадуємо лише, що перша з них т. в. теорія впливу, завдяки великому авторитетови женіяльного Newton'a серед сучасних, остоялась еще й в перших десятках нашого століття, а прихильниками єї були навіть так критичні уми, як Laplace та Poisson. Змаганя Eulera, щоби теорії фильованя вибороти побіду, прогомоніли без сліду і доперва глибокі розсліди Fresnel'a, Young'a, Foucault'a, F. Neumann'a та других рішили цілу kwestію в користь теорії ундуляції. Теорія ся розвинулась дуже успішно, а завдяки теоретичним роботам Hamilton'a над стіжковим заломанем (конічна рефракція), яке опісля дорогою досвїду викрив Lloyd, набралась що раз більшої імовірности.

В теорії фильованя є однак деякі сумніви, що їх досвїд чисто оптичного характеру не був в силі рішити. Такою сумнівною кве-

стиею була н. пр. квестія площі поляризації. Як звісно Fresnel приймав, що площа дрогоань є прямова (нормальна) до площі поляризації а що через се густота етеру є змінна; противнож F. Neumann приймав, що обі ті площі є тотожні, що отже густота етеру є стала, а змінна є за те его пруживість в ріжних напрямках. Обі ті гіпотези зовсім добре виясняють прояви, які виступають в середовищах однородних, проте квестія, чи гіпотеза Fresnel'a чи Neumann'a є імовірнійша, лишалась поки-що непорішена.

Та в половині нашого столітя настала зміна в толкованю проявів фізичних. Завдяки епоховим роботам R. Mayer'a та Joule'a вдерла наука природі найважнійший закон, точно висказаний Clausius'ом та Helmholtz'ом, закон, під який можна підтягнути усі прояви природи; є се засада захованя енергії. Се епохальне відкритє муєло навести на здогад, що всі роди енергії, які доси відріжняла наука серед явищ природи, є остаточно формою одної і тої самої енергії. За правдивостию того погляду промовляти почала ся обставина, що одну форму енергії можна перетворити в другу; і дійсно побачено, що існує звязь між працею механічною а теплом. Звернено ся тепер до звязи між світлом та електричностю, а сї змаганя видали вскорі великі овочі.

Гадка, що між проявами оптичної та електричної природи є звязь, проявлялась вже по части в умі Gauss'a, Weber'a, Riemann'a а головно L. Lorenz'a та Faraday'a, що викрив навіть скрученє площі поляризації під впливом току. Однак першим, що потрафив вивести звязь поміж тими обома з виду ріжними і групами явищ, був James Clerk Maxwell (1865). Сей, ведений критичним та глибоким умом, дав при помочи математичної аналізи засновок до нової будівлі, що її назвав електромагнетною теорією світла. Права, що їх теоретично випровадив Maxwell, potwierдили та стверджають дорогою досвідю його численні наслідники. Роботи ті дали доказ, що світло є проявою електромагнетною.

Чи через се стратила що теорія фильованя? Зовсім ні; наука дістала лиш один доказ більше, що енергія є лиш одна, а проявляти ся може під ріжними а ріжними видами. Сама теорія світла віднесла лиш через се хосен, бо проявилось у ній много квестий сумнівних.

Теорія Maxwella глядить причину явищ електричних та магнетних в дрогоанях поперечних; правдивість сього погляду виказав дорогою досвідю померший перед часом фізик з Вонн, Гейнріх Hertz, а його роботи над філями електричними творять, як каже V. Lang, епоху в сучасній фізиці.

Завданням нашим буде подати висліди електромагнетної теорії світла, а також показати шляхи, на які повела фізику згадана теорія. Заким однак перейдемо до самої електромагнетної теорії світла, мусимо бодай коротко розібрати права піль магнетних, так як на них основуєсь ціла теорія Maxwell'a. Та хоча висліди теорії піль магнетних Maxwell'a згоджують ся вповні з вислідами, до яких дішли Helmholtz, Weber, Neumann та Thomson, однак точка, з якої вийшов Maxwell, є зовсім иньша, як у тамтих вчених. Тому-то в наших розелідах будемо майже виключно узглядняти гіпотези та теорії Maxwell'a, так як ті до зрозуміння теорії світла є необхідно потрібні.

ЧАСТЬ ПЕРША.

Теорія піль магнетних.

Значіне діелектриків в теорії Maxwell'a.

1. В давнійших теоріях електричних мале лишень або і жадного не приписувано значіня ізоляторам, або як їх назвав Faraday, діелектрикам. Весь процес, що виступав в прояві електричним, відбувався в самім провіднику, а сам ізолятор поводився зовсім пасивно. Явище індукції приписувано просто діланю на віддаль (actio in distans). Були правда умн, що ніяк не могли погодити ся з гадкою, що можливе є якесь ділане на віддаль. Такими були Poisson та Mosotti, що бодай в части признали діелектрикам значіне в проявах електричних.¹⁾ Рівнож і Faraday відкидав „actio in distans“, а введене ним понятє піль магнетних (зглядно електричних) та ліній сил, хоч не толкує істоти явищ електричних, то однак бодай кидає сьвітло на ділання, які виступають в тих явищах. Дперва Maxwell виступив з поглядом, що не провідники, але як раз діелектрики є місцем збірним для енергії електричної, що проте їм треба приписати перворядне значіне; се тверджене було основою, на якій Maxwell опер свою теорію. Після Maxwella цілий діелектрик є наповнений матерією легкою, нетяжкою, що поводить ся так як сьвітляний етер; сю течь після Poincaré називати мем течію індукційною (хоча Maxwell називає її просто електричністю). Наколи всі провідники, розміщені в діелектрику однороднім, находять ся в стані нормальнім, то течь індукційна находить ся в рівновазі нормальній; наколиж провідники будуть наелектризовані, но з причини індукції електростатичної маси електричні

¹⁾ Глянъ н. пр. Poincaré: Electricité et l'optique т. I. розд. II.

розміщені на них найдуться в рівновазі, то течь індукційна перейде після Maxwell'a в стан, званий рівновагою напруги, або як говорять німецькі фізики, в стан поляризації діелектричної.

Наколи дробина течь індукційної зістане вихилена з положення нормальної рівноваги, то після Maxwell'a знайде ту т. зв. електричне пересуненє. Складові того пересунення f , g , h є після Maxwell'a:

$$1) \quad f = -\frac{K \frac{\partial \psi}{\partial x}}{4\pi}, \quad g = -\frac{K \frac{\partial \psi}{\partial y}}{4\pi}, \quad h = -\frac{K \frac{\partial \psi}{\partial z}}{4\pi},$$

де ψ є потенціал електричний в уважаній точці (xyz) діелектрика, а K є т. зв. сочинником діелектричним (питома спроможність індукційна (Vermögen).¹⁾ Рівняня ті подає Maxwell а priori, правдивість їх показує деінде.

З рівнянь 1) можна вивести просто величину складових сили, що ділає на елемент $dx dy dz$ течь індукційної, яка знаходиться в стані поляризації. Позаяк, як звісно, похідні потенціалу дають величину повисших складових, то, коли ті складові є ξ , η , ζ :

$$2) \quad \xi = -\frac{4\pi}{K} f, \quad \eta = -\frac{4\pi}{K} g, \quad \zeta = -\frac{4\pi}{K} h,$$

з відки слідує, що складові тої сили є пропорціональні до складових електричного пересунення.

Позаяк зі зміною набою якогось провідника, що знаходиться в діелектрику, змінюєся потенціал ψ , проте змінюються і складові f , g , h пересунення; наколи проте електричність на провідниках знаходиться в руху, то течь індукційна не може оставати в супокою. Maxwell доказує,²⁾ що електричність та течь індукційна поводять

¹⁾ Так як в теорії електромагн. світла стала K має дуже велике значінє, тому подаємо точну її дефініцію після Faraday'a: Стала K діелектрика в огляду на воздух, уважавий за одиницю, є рівна відношеню (Verhältniss) поємности (Capacität) кондензатора, що має в собі сей діелектрик, до поємности другого кондензатора, що має ту саму величину та той сам вид, а є наповнений воздухом. Пор. н. пр. Tumlirz: Elektromagnetische Theorie des Lichtes ст. 15.

²⁾ Maxwell доходить іменно до рівняня: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0$, яке є характеристичне після правил гідромеханіки для течь нестисних, Глянь н. пр. Thomson u. Tait: Theoretische Physik т. I. ч. I. ст. 141. 3 і ст. 256, 6.

ся як дві течі нестисні, т. є. що скількість течі індукційної, яка в дашім моменті вийшла через поверхню, є рівна скількості електричності, яка в тім самім часі там увійшла. Течь індукційна визначуєсь проте великою пруживостію.

Обчислимо тепер енергію потенціальну, яку представляє систем провідників, набитих електричністю та розміщених в діелектрику. Виражене на ту енергію можна одержати, або наколи зведемо енергію на працю, яку виконують маси з причини взаїмного відшнхання та притягання тих мас електричних, або просто з пруживости течі індукційної, яку виведено зі стану нормальної рівноваги.

Елемент праці, що є виконана при пересуненю електричності в елементі просторони $dx dy dz$, яке то пересунене має складові δx , δy , δz , є очевидно:

$$- \rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta z \right] dx dy dz,$$

де ρ є густота електричності, а $\rho dx dy dz$ маса елемента $dx dy dz$. Цілковита праця зі знаком противним рівнає ся очевидно зростови енергії потенціальної W ; проте:

$$\delta W = \int \int \int \rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta z \right] dx dy dz.$$

Звідси при помочи цілого ряду перетворень, які основують ся на звіснім твердженю Gauss'a¹⁾:

$$\int \int F \cos(Y, N) dx dz = \int \int \int \frac{\partial F}{\partial y} dx dy dz,$$

та розширенім твердженю Poisson'a:

$$\sum \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = - 4\pi\rho,$$

дійдемо до вираженя:

$$\delta W = \delta \int \int \int \frac{K}{8\pi} \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx dy dz,$$

отже:

$$W = \int \int \int \frac{K}{8\pi} \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx dy dz. \quad 3)$$

¹⁾ Поп. и. пр. Lang: Einleitung in die theoretische Physik ст. 163.

²⁾ Поп. Maxwell: Lehrbuch der Electricität u. Magnetismus (перев. Weinstein) т. I. стор. 132.

Стала інтегрована є зером, бо енергія потенціяльна для стану нормального є зером.

При помочи рівнянь 1) можна послідне вираженє представити в формі:

$$W = \int \int \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) dx dy dz. \quad 3')$$

2. Будова діелектриків однородних мусіла навести Maxwell'a на здогад, що в загалі в укладі електричнім, який є зложений з провідників та діелектриків, існують виключно токи замкнені.

В звичайній теорії електричності відріжняємо іменно токи замкнені і отверті, які устають тоді, коли різниця потенціалів стане рівна силі електромоторичній жерела електричного (н. пр. коли бігуни елемента електричного сполучимо з обома обкладками кондензатора або з двома ізольованими кондукторами); Maxwell противно приймає лиш токи замкнені. Бо возьмім т. зв. ток отвертий, який повстає тоді, коли бігуни елемента гальванічного получимо з двома ізольованими кондукторами. Кондуктор, що електризує ся додатно, мусить після теорії унітарної прийати більше течі електричної, як тоді, коли був в стані нормальнім, на другім кондукторі, що електризує ся від'ємно, мусить зменшити ся скількість плинн електричного. Позаяк однак в теорії Maxwell'a електричність є течь нестисна, проте єї густота мусить остати стала; не може проте в одній точці наступати згущенє, а в другій розрідженє. Тому-то сей надмір електричності на однім кондукторі випихає з него часть течі індукційної, яка виповняє усю просторовь; ся знова течь потручає дальші дробини течі індукційної, що виповняє діелектрик, а що та течь є нестисна, то на другий кондуктор мусить ввійти така сама скількість течі індукційної, яка з першого уступила. З тої причини одержуєм ток замкнений через діелектрик, а так як дробини течі індукційної пересувають ся подовж ліній сил, як показують рівняня 1), проте можна сказати, що токи отверті замикають ся в теорії Maxwell'a подовж ліній сил.

В теорії Maxwell'a існують проте виключно токи замкнені.

3. Токи замкнені ділить Maxwell на токи двох категорій: токи проводу та токи пересуненя. Токи проводу є то токи замкнені, що перебігають провідник (злучник), токи пересуненя повстають через пересуненє дробин течі індукційної. Наколи маємо до діла з т. зв. током отвертим звичайної теорії, то очевидно ток сей складає ся з току проводу та току пересуненя. Очевидна є також річ,

що в теорії Maxwell'a можуть існувати також замкнені токи, які є виключно токами пересунення; токи ці мають велике значінє в електромагнетній теорії сьвітла.

Є річ природна, що в теорії Maxwell'a токи проводу мусять підчинятись законам, опертим на досьвідах, себ то законам Ohm'a,¹⁾ Joule'a, Ampère'a та законам індукції. Що до токів пересунення, то

¹⁾ З огляду на се, що законом Ohm'a прийдець нам нераз в дальшій тягу покористуватись, подаємо той закон в виді троха иньшим, як ся звичайно подає. Наколи провідник є лінійний та однородний, а сила електромоторична є чинна лиш поміж його кінцями, дальше наколи опір його є R, натуга току є i, різниця потенціалів є $\psi_1 - \psi_2$, то дістанемо звичайне вираженє на закон Ohm'a: $Ri = \psi_1 - \psi_2$.

Позаяк de facto і в самім провіднику в ріжних місцях виступає сила електромоторична (з причин термічних, хемічних etc.), тому наколи сума тих сил електромоторичних є ΣE , дістанемо закон Ohm'a:

$$Ri = \psi_1 - \psi_2 + \Sigma E.$$

Але опір $R = \frac{l}{Cdw}$, де l є довжина злучника, dw перекрій, а C т. з. сочинник проводу питомого; прото:

$$\frac{li}{Cdw} = \psi_1 - \psi_2 + \Sigma E.$$

Наколи возьемо безконечно малий елемент злучника o довготі dx та назначимо різницю потенціалів на його кінцях через $-d\psi$, а через Xdx зміну сили електромоторичної кожного иньшого провсходження в тім елементі, дістанемо:

$\frac{i}{Cdw} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + X$; $\frac{i}{dw} = u$ (скорість перепливу електричності), прото:

$\frac{u}{C} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + X$ і се є закон Ohm'a. Для провідників o трох розмірах є очевидно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{C} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} + X \\ \frac{v}{C} &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} + Y \\ \frac{w}{C} &= -\frac{\partial\psi}{\partial z} + Z \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{де } u, v, w \text{ є складові скорости,} \\ \text{а } X, Y, Z \text{ складові сили електромоторичної довільного по-} \\ \text{ходження в елементі об'єму} \\ \text{dxdydz.} \end{array}$$

Очевидно, що:

$$u = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t},$$

де t є час.

Maxwell приймає, що і они підчиняють ся законови Амперè'а та законам індукції, за те не мож однак відносити до них законів Joule'а і Ohm'а, вже із за того, що токи ті мусять при своїм поставаню поборювати опір, який є вислідом пруживости течі індукційної, а опір сей є очевидно иньший, чим опір провідника.

Існують еще і дальші ріжницї між токами проводу а токами пересуненя. Після Maxwell'а має течь індукційна, що виповняє діелектрик, наклін порушати ся під впливом сил електричних, подібно як електричність, що виповняє провідник, так як обі ті течі яко нестнені взаїмно ся вишпахують. Рух дробин течі індукційної устає дуже скоро з причини противділаючої сили пруживости, якою ся теч в високій мірі визначуєсь, а в другім разі рух не устає, бо — як Maxwell доказує — теч, що находит ся в внутрі проводячого середовища не має зовсім сил пруживости. Звідси походить, що токи пересуненя можуть тревати лиш короткий час, якого треба, щоби рівновагу назад спровадити; токи проводу можуть тревати так довго, як довго з причини ділань внїшних існує на обох кінцях провідника ріжниця потенциялів (сила електромоторична).

Для токів проводу існують на основі розширеного закону Ohm'а рівняня :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= X - \frac{u}{C} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= Y - \frac{v}{C} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= Z - \frac{w}{C} \end{aligned} \right\} 4)$$

Для складових сил, які ділають на елемент діелектрика, малисьмо рівняня 2); наколи крім сили електромоторичної о складових $\xi = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\eta = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\zeta = \frac{\partial \psi}{\partial z}$, яка дає ся звести до ділань електростативних, виступлять еще иньші сили електромоторичні, які ділають індукційно на діелектрик, а які назвалисьмо ΣE о складових X, Y, Z, то рівняня 2) приймуть тепер для токів пересуненя вид :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= X - \frac{4\pi}{K} f \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= Y - \frac{4\pi}{K} g \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= Z - \frac{4\pi}{K} h \end{aligned} \right\} 5)$$

Бачимо проте, що токи пересуення залежать від великості пересуення (т. є. від f, g, h), а токи проводу від $u = \frac{\partial f}{\partial t}$
 $v = \frac{\partial g}{\partial t}$, $w = \frac{\partial h}{\partial t}$ т. є. від скоростий пересуення.

Токи проводу підлягають крім сього ще звіненому закону Кірхгоффа, після якого в точці, де сходять ся більше провідників (лінійних або о трох вимірах) сума натуг всіх токів є зером. Виразом сього закона є рівняне:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,^1)$$

бо натуги токів є пропорціональні до скоростий u, v, w .

Закон сей є доказом, що електричність є теч нестисна без огляду на се, чи ся находить в стані статичнім чи ні.

В сей отже спосіб навели ми коротко головні свойства діелектриків після теорії Махвелла. Тепер перейдемо до головних прав явищ маґнетних, електромаґнетних та електромаґнетної індукції, або в загалі до прав піль маґнетичних, о скілько они остають в генетичній звязи з теорією сьвітла.

Правила піль маґнетних (в тїснійшій значіно).

1. Наколи натуга або степень намаґнесованя магнета є I , а єї складові в напрямках осий x, y, z є A, B, C ($I = (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}$), то величина потенціалу в якійсь точці P поза маґнетом представляє ся взором:

$$\Omega = \int \frac{lA + mB + nC}{r} d\omega - \iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) \frac{1}{r} dx dy dz \quad 1)$$

де l, m, n є напрямні *cosinus*'у кутів, що їх творить елемент поверхневий $d\omega$ маґнета з вісьми x, y, z .²⁾

1) Рівняне се можна легко вивести з 4). Наколи рівняня сї зріжнучемо та додамо, то з огляду на се, що X, Y, Z, C є сталі, та з огляду на рівняне Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

дістанемо се рівняне Кірхгоффа.

2) Гл. н. пр. Poincaré loc. cit., також Maxwell loc. cit. т. II, ст. 13.

2. Складові сили магнетної, яка ділає на одиничний додатний бігун магнетний, що лежить по z за магнетом, є очевидно похідними потенціалу зі знаком від'ємним, тому то складові ті є:

$$\alpha = - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \beta = - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \gamma = - \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \quad 2)$$

3. Щоби винайти величину сили, що ділає на одиничний бігун магнетний, який знаходиться в внутрі магнета, мусимо зробити в магнеті малу заглибину і там вложити пробний магнет. Тоді магнет розділиться на дві частини, одну частину зовнішню зглядом бігуна P , до якої відносять ся рівняння (2), та частину, в якій міститься бігун P (фіг. I.); ділане вислідне сеї частини на бігун P най буде R . Через се однак змінює ся ділане магнета, а зміна та залежить від форми заглибини. Щоби отже обчислити силу в якійсь точці заглибини, треба знати її вид.

Maxwell бере один лиш випадок,¹⁾ що заглибина має вид валця; на випадок коли довгість валця в порівнянню з грубостію тогож є дуже велика, дістанемо $R=0$, на випадок що довгість валця є в порівнянню з грубостію тогож дуже мала, дістанемо після Maxwell'a:²⁾

$$R = 4\pi I.$$

I має складові A, B, C , R буде мало проте складові $4\pi A, 4\pi B, 4\pi C$, отже в тім випадку цілковите ділане маси магнетної на одиничний бігун магнетний, що ся знаходить в внутрі магнета, має складові:

$$\left. \begin{aligned} a &= - \frac{\partial \Omega}{\partial x} + 4\pi A = \alpha + 4\pi A \\ b &= - \frac{\partial \Omega}{\partial y} + 4\pi B = \beta + 4\pi B \\ c &= - \frac{\partial \Omega}{\partial z} + 4\pi C = \gamma + 4\pi C \end{aligned} \right\} \quad 3)$$

Складові a, b, c , називає Maxwell складовими магнетної індукції в внутрі магнета.

4. Між індукцією магнетною а силою магнетною існує проте різниця; се вже слідно й з того, що так як α, β, γ , є похідними потенціалу, то:

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = - d\Omega \text{ (цілковита різниця);}$$

¹⁾ Maxwell loc. cit. II. ст. 28.

²⁾ Maxwell loc. cit. II. ст. 29.

а тим часом для складових магнетної індукції є зв'язь не існує зовсім.¹⁾

Деякі тіла, як пр. залізо, коли найдуться в полі магнетнім, дістають свойства магнетні з причини індукції магнетної; після Poisson'a складові магнетизму, індукваного в якійсь точці такого тіла, є пропорціональні до складових сили магнетної в тій точці, отже складові ті є:

$$A = kx, \quad B = k\beta, \quad C = k\gamma,$$

де k є натуга бігуна магнетного, який творить довкола себе згадане поле магнетне. Після сказаного складові індукції в указаній точці будуть:

$$a = x + 4\pi A = (1 + 4\pi k) x$$

$$b = \beta + 4\pi B = (1 + 4\pi k) \beta$$

$$c = \gamma + 4\pi C = (1 + 4\pi k) \gamma,$$

де — як се з елементарного курсу про магнетизм звісно — $4\pi k$ представляє скількість ліній сили магнетної, що виходять з бігуна магнетного о натузі k .²⁾

Наколи положимо $\mu = 1 + 4\pi k$, дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} a &= \mu x \\ b &= \mu \beta \\ c &= \mu \gamma \end{aligned} \right\} \quad 4)$$

μ називає Maxwell магнетною спроможністю індукційною.³⁾

Так як стала діелектрична K була характеристична для діелектриків, так μ характеризує тіла, що ся знаходять в полі магнетнім. Для тіл парамагнетних є $\mu > 1$, для порожні $\mu = 1$, для тіл діамгнетних є $\mu < 1$.

В повисше наведених розслідах приймали ми, що маємо до діла з магнетами сталими, у яких є сила відпорна $=\infty$, та з магнетами індукваними, у яких та сила є $=0$; в дійсности (коли

¹⁾ Для складових індукції магнетної існує зв'язь:

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

Гл. н. пр. Poincaré ut supra.

²⁾ Neumann називає k сочинником намагнесованія через індукцію.

³⁾ μ називають також сочинником проникання (Permeabilitätsconstante).

н. пр. взяти сталь) сила та не може бути ані 0, ані ∞ . Далше k і μ також не є сталі, но в загалі:

$$k = \varphi(I) = \varphi \left[(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}} \right];$$

а μ є стале лиш для слабих силъ, а для сильних меншає після помірок Ewing'a.

Правила піль електромагнетних.

1. Перейдем тепер до прав піль електромагнетних.

Після дослѣдів Faraday'a та Colladon'a сила, з якою ділає ток на бігун магнетний (чи то природний чи індукований) є прямо пропорціональна до натуги току т. є. скількости електричности, що в одиниці часу перепливає через перекрій злучника.

Коли потенціал провідника, через який переходить ток, назначаемо через Ω , то складові сили, яка ділає на одиничний бігун магнетний, находячий ся в поли електричнім, є:

$$\alpha = - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \beta = - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \gamma = - \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \quad 1)$$

В теорії електромагнетизму найбільше значіне мають т. зв. токи колові; як звісно поводять ся они зовсім так само, як магнет о розмірах рівних поверхні, замкненої током коловим, а о дуже малій грубости, т. є. так як т. зв. бляшка магнетна. Потенціал бляшки магнетної є $\Omega = \Phi \varphi$,¹⁾ де Φ є сила бляшки (добуток з степеня намагнесованія бляшки та грубости), а φ є кут, під яким з уважаної точки видно бляшку; добуток Ω треба брати додатно або від'ємно після того, чи уважана поверхня бляшки є додатна, чи від'ємна. З причини сеї рівноважности току колового та бляшки є електромагнетний потенціал току колового:

$$\Omega = \varphi i, \quad 2)$$

де i є натуга току, вірена в таких одиницях, що чинник пропорціональности є 1; ту одиницю називаємо електромагнетною одиницею натуги. Знак φi залежить від напрямку току; додатна сторона току колового є та, яка находить ся по лівій руці пливача, що пливе в тоці та споглядає в внутр тока колового.

¹⁾ Гл. Poincaré loc. cit. т. I.

2. Так як:

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = d\Omega,$$

де в α, β, γ знак уже узгляднений, проте зміна потенціалу тока при переході з одної точки до другої по довільній дорозі буде:

$$\int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz),$$

де інтеграл відносить ся до цілої відбутої дороги. На основі рівняння 2) та зміна буде:

$$\int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = \pm 4\pi i.^1)$$

Інтеграл відносить ся до дороги, яку відбуде бігун під впливом току.

Наколи маємо до діла з кількома токами, то праця електромагнетна є тоді:

$$\int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = 4\pi \Sigma \pm i. \quad 3)$$

Наколи складові скорости електричності є u, v, w , перекрій злучника є $d\omega$, напрямні $\cosinus'u$ пряму до того елемента є l, m, n , то дістанемо на скількисть електричності, що перепливає через поверхню S :

$$\Sigma i = \Sigma (lu + mv + nw) d\omega = \int_S (lu + mv + nw) d\omega.$$

Наколи порівнаємо се рівняне з рівнянем 3), дістанемо:

$$\int_C (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = 4\pi \int_S (lu + mv + nw) d\omega,$$

де перший інтеграл відносить ся до кривиці, по якій порушає ся бігун, другий до поверхні, через яку ток переходить.

Перший інтеграл перетворює Maxwell в інтеграл поверхневий — в що блисше годі тут входити — так що в кінци дістанемо:

$$\int_S \left[l \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \right] d\omega \equiv 4\pi \int_S (lu + mv + nw) d\omega;$$

¹⁾ Гл. Maxwell loc. cit. II. 344. Сей інтеграл — як з теорії потенціалу слідно — дає міру роботи, яку зроблять сили електромагнетні при пересуенню бігуна одиничного.

оба інтеграли є ідентичні, тому :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \\ v &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \\ w &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} 4)$$

Рівняня ті дають нам зв'язь межи скоростями (u v w) електричності а складовими (α β γ) сили електромагнетної. Відносять ся они так до токів проводу, як і до токів пересунення, так як ті послідні підлягають також законови Амперè'a.

Права явищ електродинамічних.

1. Подібно як ток коловий і магнет заховують ся два токи колові; права дїлання двох токів колових на себе є загально звісні.— Наколи маємо систем токів сталих, що дїлають на рухомий ток коловий о натузі i , то електродинамічний потенціал того току буде:

$$T = i \int (\alpha l + \beta m + \gamma n) d\omega, \quad 1)$$

де інтеграл відносить ся до цілої поверхні, яка є замкнена током коловим; α , β , γ , l , m , n мають аналогічне значіне як в попереднім уступі. Наколи T представимо в виді аналогічним як рівняне 3) попередного уступу, то дістанемо в загалї:

$$T = i \int (Fdx + Gdy + Hdz),$$

де F , G , H не є поки що блисше означені; а наколи сей інтеграл замінимо на поверхневий, дістанемо в кінци (як попередно):

$$T = i \int \left[l \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] d\omega.$$

Наколи се порівнаємо з 1) дістанемо на складові α , β , γ сили, з якою дїлає систем сталих токів на одиницю тока:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \\ \beta &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \\ \gamma &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned} \right\} 2)$$

1) Гл. Poincaré loc. cit. т. I.

Maxwell називає величини F, G, H складовими електромагнетного момента або складовими потенціалу векторного після теорії кватерніонів і векторів, яких уживає в своїх розслідах.

Наколи різнювати мем рівняня 2) що до x, y, z і додамо ті рівняня дістанемо:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Аналогічне рівняне існує для складових a, b, c індукції магнетної (ut supra), але не існує для складових сили магнетної.

Наколи проте хочемо рівняня 2) віднести до явищ магнетних, то треба в них місто складових сили ввести складові індукції магнетної і дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \\ b &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \\ c &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned} \right\} 3)$$

2. Обчислім складові F, G, H момента електромагнетного. Очевидна є річ, що рівняня 2) до визначеня F, G, H не вистануть, бо найзагальнійшим розвизанем тих рівнянь є функції $F + \frac{\partial \chi}{\partial x}$, $G + \frac{\partial \chi}{\partial y}$, $H + \frac{\partial \chi}{\partial z}$, де χ є яканебудь функція змінних x, y, z . Тому то Maxwell бере єще додаткову умову:

$$I = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \equiv 0. \quad 4)$$

та на основі рівнянь 4) попередного уступу доходить до рівняня:

$$4\pi u = \frac{\partial I}{\partial x} - \Delta F, \quad \text{де:}$$

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2},$$

а що: $\frac{\partial I}{\partial x} = 0$, то:

$$\Delta F + 4\pi u = 0.$$

Є се рівнянє такого типу, як рівнянє Poisson'a, тому-то його найзагальнійший інтеграл буде функція, що має вид потенціалу; отже:

$$F = \iiint \frac{u}{r} dx dy dz,$$

де u є складова скорости тока в напрямі осі x в точці тяжести елементу $dx dy dz$, а r є відступ тогож елементу від уважаної точки (xyz) просторони.

Аналогічно:

$$G = \iiint \frac{v}{r} dx dy dz, \quad H = \iiint \frac{w}{r} dx dy dz.$$

Як легко ся пересвідчити, інтеграли ті сповняють рівняня 2) та 3); інтегрованє відносить ся до всіх елементів просторони.

Наколи маємо до діла з середовищем магнетним, в якім ток дізнає пересуненя, то рівняня 3) сповнять ся, як легко мож побачити, для слідуючих вартостей на F, G, H :

$$\left. \begin{aligned} F &= \mu \iiint \frac{u}{r} dx dy dz \\ G &= \mu \iiint \frac{v}{r} dx dy dz \\ H &= \mu \iiint \frac{w}{r} dx dy dz \end{aligned} \right\} 5)$$

де μ має значінє вже згаданє.

3. Подамо єще вираженє на величину електродинамічних потенціалів. На електродинамічний потенціал малисьмо слідуюче вираженє:

$$T = i \int (F dx + G dy + H dz).$$

Вираженє се перетворює Maxwell в спосіб, якого тут не подаємо блише, на вираженє:

$$T = \iiint (Fu + Gv + Hw) dx dy dz.$$

Перейдім до вираженя на т. зв. самопотенціал тока. Можемо собі уявити, що ток коловий складаєсь з безконечного множества токів колових о безконечно малих перекроях. Кождий з тих токів має електродинамічний потенціал з огляду на иньші елементарні токи; сума тих елементарних потенціалів творить т. зв. самопотенціал тока. — Наколи возьмемо два елементи тока коло-

вого $dx dy dz$ і $dx' dy' dz'$ о скоростях (uvw) і $(u'v'w')$, то як Maxwell докажує, самопотенціал тока буде:

$$T = \frac{1}{2} \int \int \int (Fu + Gv + Hw) dx dy dz.$$

Наколи возьмемо рівняне 4) попереднього, а 2) і 3) теперішнього уступу, дійдемо в кінці до слідующих виражень на самопотенціал:

а) наколи систем токів находить ся в середовищи немагнетнім, то самопотенціал є:

$$T = \frac{1}{8\pi} \mu \int \int \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) dx dy dz. \quad 6)$$

б) наколи же систем токів находить ся в середовищи магнетнім, то самопотенціал є:

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \int \int (\alpha a + \beta b + \gamma c) dx dy dz. \quad 7)$$

Наколи возьмемо два токи колові лінійні (отжеж не о трох вимірах) о натугах i_1 і i_2 , то електродинамічний потенціал того систему токів буде¹⁾ лінійна однородна функція другого ряду величин i_1 і i_2 , отже після Maxwell'a має вид:

$$T = \frac{1}{2} (Li_1^2 + 2Mi_1 i_2 + Ni_2^2), \quad 2)$$

де L , M , N залежні є від виду та взаімного положеня обох токів.

Можна доказати, що L є самопотенціалом першого тока на случай, що другого нема, N самопотенціалом другого тока, коли першого нема, а M потенціалом одного тока на другий.

4. Веї ті взори вивели ми в заложеню, що натуга тока є стала. Однак при руху токів колових, або токів колових та магнетів, виступають єще додаткові токи, що їх відкрив Faraday, а які називаємо токами індукованими; токи ті повстають хвиливо в провідниках, а їх натуга додає ся до натуг поодиноких токів. Повставанє тих токів відносимо до електромоторичних сил індукції.

З дослідів над індукцією виходить, що коли натуги i_1 і i_2 двох нерухомих токів колових C_1 і C_2 збільшать ся в елементі часу dt о величини di_1 і di_2 , то сила електромоторична індукції, що повстане в C_1 , має вартість:

$$A \frac{di_1}{dt_1} + B \frac{di_2}{dt_2},$$

¹⁾ Maxwell loc. cit. II. 271 і 274.

²⁾ Гл. н. пр. Lang: Einleitung in die theoretische Physik стр. 422.

а сила електромоторична індукції, що повстала в C_2 , має вартість :

$$B \frac{di_1}{dt} + C \frac{di_2}{dt}.$$

Звичайна теорія електричності, що єї розвинули Helmholtz та Thomson, обчисляє сочинники A, B, C на основі засади заховання енергії¹⁾ та доходить до звязи:

$$A = -L, \quad B = -M, \quad C = -N,$$

де L, M, N мають значіне, як в горі.

Maxwell же виводить права індукції просто з рівнань Lagrange'a, так що єї рівняня відносьть до руху дробин нетяжкої течі індукційної. В тій цілі ставить Maxwell дві гіпотези:

а) Сорядні дробин неважкої течі залежать від сорядних материяльних дробин тіла, які беруть участь в проявах електричних, а разом від сорядних гіпотетичної течі, яка зве ся електричністю; по права сеї зависимости не знаємо.

б) Електродинамічний потенціал систему токів представляє разом енергію кінетичну течі індукційної.

На сих гіпотезах доходить Maxwell при помочи рівнань Lagrange'a з одной сторони до взорів Helmholtz'a, а з другої до слідуючих вислідів.

5. Праця сил електродинамічних, яка є потрібна до пересуненя тока колового рухомого рівнає ся зміні функції:

$$\frac{1}{2} (Li_1^2 + 2Mi_1i_2 + Ni_2^2)$$

т. є. зміні потенціалу електродинамічного T (рівнанє 1), або рівнає ся:

$$i_1 \delta \int (la + mb + nc) dw,$$

де a, b, c, l, m, n мають значіне, *ut supra*. — Наколи $Xdx dy dz, Ydx dy dz, Zdx dy dz$ є складові сили електродинамічної, що ділає на елемент $dx dy dz$, а походить з ділання тока C_1 на ток C_2 , а елемент тока C_2 пересунув ся під впливом тої сили о $\delta x, \delta y, \delta z$, то елементарна праця, яка зістала виконана при тім пересуненю, виносьть:

$$(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) dx dy dz.$$

Ціла проте праця сил електродинамічних, що ділають на C_2 , через яку ток коловий пересуне ся або змінить вид, буде:

$$\int \int \int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) dx dy dz.$$

¹⁾ Гл. и. пр. Poincaré loc. cit. том I.

Наколи порівнаємо се вираженє з попередним вираженєм на працю, дійдемо по перетворенях до загальних рівнань на складові сили електродинамічної:¹⁾

$$\left. \begin{aligned} X &= cv - bw \\ Y &= av - cu \\ Z &= bu - av \end{aligned} \right\} 8)$$

Рівняня 8) остають і тоді, коли маємо якунебудь скількість токів; але тоді величини a, b, c є складовими вислідної індукції магнетної всіх токів.

6. На основі взорів Helmholtz'a, що сила електромоторична індукції, яка вивязуєсь в току C_1 при діланю на ток коловий C_2 , є:

$$E = - \frac{d}{dt} (Li_1 + Mi_2),$$

наколи означимо складові тої електромоторичної сили індукції через P, Q, R , дійдемо при помочи перетворень до взорів:²⁾

$$\left. \begin{aligned} P &= c \frac{dy}{dt} - b \frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ Q &= a \frac{dz}{dt} - c \frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ R &= b \frac{dx}{dt} - a \frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \right\} 9)$$

де ψ є яканебудь однородна функція аргументів хуз.

Рівняня 9) остають також і для якогонбудь числа токів.

Що до сеї функції ψ , котра може бути яканебудь, то Maxwell приймає, що функція та представляє електростатичний потенціал, який походить від якихєсь мас, що існують в поли. — Таке заложєнє все можна зробити. Бо величини F, G, H визначили ми лиш під тою умовою, що они сповняють рівнанє ріжничкове:

$$I = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \equiv 0.$$

Наколи однак сю умову відкинемо, то цієля того, що ми в горі сказали, дістанемо на F, G, H слідуючі загальні вираженєня:

$$\begin{aligned} F &= \iiint \frac{u}{r} dx dy dz + \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ G &= \iiint \frac{v}{r} dx dy dz + \frac{\partial \chi}{\partial y} \\ H &= \iiint \frac{w}{r} dx dy dz + \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{aligned}$$

де χ є якабудь функція сорядних.

¹⁾ Maxwell loc. cit. II. 297.

²⁾ Пор. н. пр. Poincaré loc. cit. т. I.; також Lang loc. cit. et. 462.

Найзагальніші проте рівняння на вираженє складових P, Q, R будуть:

$$\left. \begin{aligned} P &= c \frac{dy}{dt} - b \frac{dz}{dt} - \iiint \frac{du}{dt} \frac{1}{r} dx dy dz - \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ Q &= a \frac{dz}{dt} - c \frac{dx}{dt} - \iiint \frac{dv}{dt} \frac{1}{r} dx dy dz - \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ R &= b \frac{dx}{dt} - a \frac{dy}{dt} - \iiint \frac{dw}{dt} \frac{1}{r} dx dy dz - \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \right\} 10)$$

Всегда можна проте через відповідний вибір сеї функції χ зробити се, що функція ψ , яка входить в ті рівняння, отже і в рівняння 9) представляє електростатичний потенціал.

Зреасумуймо еще раз всі вислїди, якісьмо розібрали в усіх попередних розділах.

Загальні рівняння поля магнетного.

1. Рівняння поля магнетного.

Дісталисьмо рівняня:

$$\left. \begin{aligned} a &= \mu \alpha \\ b &= \mu \beta \\ c &= \mu \gamma \end{aligned} \right\} \text{I)}$$

де α, β, γ є складові сили магнетної в точці середовища магнетного, a, b, c є складові магнетної індукції в тій точці.

Наколи u, v, w є складові скорості електричности, то:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi u &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \\ 4\pi v &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ 4\pi w &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \end{aligned} \right\} \text{II)}$$

Дальше мали ми для складових магнетного момента рівняня:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \\ b &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \\ c &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned} \right\} \text{III)}$$

та:

$$\left. \begin{aligned} F &= \mu \iiint \frac{u}{r} \, dx dy dz + \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ G &= \mu \iiint \frac{v}{r} \, dx dy dz + \frac{\partial \chi}{\partial y} \\ H &= \mu \iiint \frac{w}{r} \, dx dy dz + \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \text{IV)}$$

Складові сили електромоторичної, що походить від електромагнетної індукції та має електричних, що ся знаходять в стані статичнім, буля:

$$\left. \begin{aligned} P &= c \frac{dy}{dt} - b \frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ Q &= a \frac{dz}{dt} - c \frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ R &= b \frac{dx}{dt} - a \frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \text{V)}$$

2. Рівняня токів проводу.

В рівнянях II) є u, v, w складові скорості електричності без огляду на рід руху: провід або пересунене. Наколи йде о токи проводу, то складові (u, v, w) мусять крім сего сповняти рівняне Ohm'a т. в.

$$\frac{u}{C} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} + X \quad \text{і т. д.},$$

де C є електрична спроможність проводу середовища, а X складова всіх сил електромоторичних на одиницю довготи. — Наколи приймем, що ті електромоторичні сили є тільки силами індукції, що їх викликала зміна натуги або пересуненє токів, або магнетних і електричних має, то права сторона того рівняня рівнає ся P .

Складові скорості електричності в тоці проводу є проте:

$$\left. \begin{aligned} u &= CP \\ v &= CQ \\ w &= CR \end{aligned} \right\} \text{VI)}$$

3. Рівняня токів пересуненя.

Токи єї — як знаємо — не підчиняють ся праву Ohm'a, за те підчиняють ся законам електродинамічним та електромагнетним Амперè'a сповняють проте рівняня III). Однак крім тих рівнянь існують для токів пересуненя ще три рівняня характеристичні.

Величина складової електричного пересуення є після наших попередніх розслідувань:

$$f = - \frac{K}{4\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - X \right),$$

де X має то само значінє, що при токах проводу. Наколи отже приймем, що сили електромоторичні походять виключно з різниці електростатичного потенціалу, як також з індукції магнетів та токів, які находять ся в поли, то:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - X = - P,$$

а тоді:

$$\left. \begin{aligned} f &= - \frac{K}{4\pi} P, \\ g &= - \frac{K}{4\pi} Q, \\ h &= - \frac{K}{4\pi} R \end{aligned} \right\} \text{VII)}$$

А так як походні f, g, h зглядом часу є складові скорости, проте через зріжничкованє послїдних рївнань зглядом часу дістанемо на складові скорости електричного пересуення рївнянє:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K}{4\pi} \frac{dP}{dt} \\ v &= \frac{K}{4\pi} \frac{dQ}{dt} \\ w &= \frac{K}{4\pi} \frac{dR}{dt} \end{aligned} \right\} \text{VIII)}$$

4. Рївнянє для токів в середовищи лиш в части діелектричній.

Рївнянє VI) відносять ся до середовищ, що добре проводять, н. пр. металї, рївнянє VIII) до повних ізоляторів. — Наколи тїла не є вповні ізольовані, то Maxwell¹⁾ приймає для них рївнянє:

$$\left. \begin{aligned} u &= CP + \frac{K}{4\pi} \frac{dP}{dt} \\ v &= CQ + \frac{K}{4\pi} \frac{dQ}{dt} \\ w &= CR + \frac{K}{4\pi} \frac{dR}{dt} \end{aligned} \right\} \text{IX)}$$

¹⁾ Maxwell loc. cit. II. ст. 306.

після яких u, v, w складають ся з суми складових току проводу і пересуненя.

Но ся гіпотеза Maxwell'a представляє на погляд Poincaré'ого¹⁾ деякі слабі сторони. Так як середовище має свойства посередні між провідниками а ізоляторами, то на погляд Poincaré'ого сила електромоторична, що викликає ток, мусить побороти опір двоякого рода, один аналогічний до опору металів ($\frac{1}{C}$, бо C є спроможність проводу), другий опір ізоляторів. Звідси мусілоб слідувати, що як раз против рівнань Maxwell'a натуга тока,¹⁾ а звідси і величини u, v, w повинні були менші, як в провіднику або в повнім ізоляторі. Тому-то більше рациональною є гіпотеза, що єї поставив Potier. Приймає він, що сила електромоторична в якійсь точці згаданого середовища рівнає ся сумі тої сили, що єї викликає ток проводу, і тої, що єї викликає пересуненє. Після Potier'a дістанемо проте на вираженє складових сили електромоторичної в півізоляторах рівняня :

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{u}{C} + \frac{4\pi}{K} f, \\ Q &= \frac{v}{C} + \frac{4\pi}{K} g, \\ R &= \frac{w}{C} - \frac{4\pi}{K} h, \end{aligned} \right\} \text{ X)}$$

Рівняня IX) та X) зводять ся до рівнань токів проводу, наколи $K = 0$, зглядно $K = \infty$. Провідник має проте після Maxwell'a спроможність індукційну зеро, після Potier'a безконечно велику.

В сей спосіб подав я коротко закони явищ електричних та магнетних, так як они сліднують з заложеня Maxwell'a, і то подав я такі лишень права, які будуть необходимо потрібні, щоб зрозуміти магнетну теорію сьвітла. — Права ті можна в головній мірі найти в звичайних теоріях явищ електричних. І инакше не може бути, бо в виводі прав якихесь явищ що найбільше відмінна може бути метода, но нїяк вислїди, наколи ті права мають згоджуватись з дійсностю.

¹⁾ Poincaré loc. cit. том I.

ЧАСТЬ ДРУГА.

Електромагнетна теорія світла.

Найважнішим вислідом теорії Maxwell'a є згода, яка заходить поміж свойствами світляного етеру, що після теорії Фільованя переносить світло, а свойствами течі індукційної, що після Maxwell'a є причиною ділань електромагнетних. Згода та, що єї потвердив досвід та теорія, промавляє за правдивостию того погляду, що існує лиш одна течь, яка переносить енергію. Так як етер і течь Maxwell'a мають ті самі свойства, проте світло дає ся уважати за явище електромагнетне, а рух дрогаючий етеру, що викликає в наших очах вражінє світла, мусить мати причину в паворотних (періодичних) дуже скорих заколотах поля магнетного; або — наколи скажемо коротко — в дроганях електромагнетних. Наколи так є, то можна на основі загальних рівнянь того поля вивести поясненє явищ світла. Сей спосіб поясненя називаєсь електромагнетна теорія світла; є річ очевидна, що та теорія мусить вести до звязи між сталими оптичними та електричними. Звязь ту, як також права сеї зависимости двох ріжних на погляд частий фізики (оптики та електричності) представимо тепер. А іменно займем ся вперед правами електромагнетної теорії світла для діелектриків безподобних (isotrop), дальше для півізоляторів, діелектриків статных (anisotrop) а вкінци для добрих провідників.

Рівняня для дрогань магнетних в діелектриках безподобних.¹⁾

До таких тіл безподобних (isotrop) належать всі тіла прозорі (наколи не берем під увагу електролітичних розчинів). Такими тілами займем ся тепер.

¹⁾ Тіло безподобне є таке, що в усіх напрямх має ті самі свойства фізичні; є они звичайні некристалні, отже безподобні; противно тіла статні, яких свойства є ріжні в усіх напрямх; є они майже все кристалльні; звідси і їх назва.

1. Наколи приймем, що материяльні дробини середовища, яке проводить магнетні забуреня, є в супокою, або що їх скорости $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$ є зером, то загальні рівняня V. перейдуть на:

$$\left. \begin{aligned} P &= - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ Q &= - \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ R &= - \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

Електростатичний потенціал ψ походить від мас електричних, які не змінюють ані своєї вартости ані положеня, тому так ψ , як і його похідні не залежать від часу, а проте:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= - \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} 1)$$

Так як магнетні заколоти відбувають ся в діелектрику, то складові скорости u, v, w електричности є злучені зі складовими сили електромоторичної рівнянями VIII. Наколи вставимо 1) в VIII., дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi u &= - K \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \\ 4\pi v &= - K \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \\ 4\pi w &= - K \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} 2)$$

Наколи дальше злучимо з собою рівняня I. і III., дістанемо виражене на μ_x, μ_y, μ_z , а наколи возьмемо похідні тих виражень що до x, y, z (μ constant) і підставимо одержані вартости в II., дістанемо:

$$\begin{aligned} 4\pi\mu_x u &= \frac{\partial I}{\partial x} - \Delta F, \\ 4\pi\mu_y v &= \frac{\partial I}{\partial y} - \Delta G, \\ 4\pi\mu_z w &= \frac{\partial I}{\partial z} - \Delta H, \end{aligned}$$

причїм:

$$I = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z},$$

а Δ представляє символ Lagrange'a длх других похідних.

Наколи з тих рівнянь вислімінуємо u, v, w при помочи рівнянь 2), то дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} K_{\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \Delta F - \frac{\partial I}{\partial x} \\ K_{\mu} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= \Delta G - \frac{\partial I}{\partial y} \\ K_{\mu} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= \Delta H - \frac{\partial I}{\partial z} \end{aligned} \right\} 3)$$

В тїй формї є ті рівняня подібні до рівнянь руху дробин в середовищі пруживім,¹⁾ отже і до рівнянь руху етеру; маємо ту проте перший доказ на згоду електромагнетних заколотів з дроганнями етеру.

2. Филї плоскі. Приїмїм, що явища електромагнетні, які виступають в діелектрику, залежать виключно від часу і від сорядної з уважаной точки. В тїм случаю усї точки цїлої площї рівнобїжної до пл. (xy) найдуть ся в однім і тїм самїм часї в тїй самїй фазї, а затїм магнетні заколоти (дроганя) творають филї плоскі. Тодї складовї електромагнетного момента не залежать від x і y , т. є.

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y} = 0$; тоді з рівняня $I=0$, випаде також $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$, а рівняня 3) зведуть ся на рівняня:

$$\left. \begin{aligned} K_{\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \\ K_{\mu} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \\ K_{\mu} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} 4)$$

Наколи з'їнтегруємо сей систем рівнянь, дістанемо:

$$\begin{aligned} F &= F_1 \left(z - \frac{1}{\sqrt{K_{\mu}}} t \right) + F_2 \left(z + \frac{1}{\sqrt{K_{\mu}}} t \right) \\ G &= F_3 \left(z - \frac{1}{\sqrt{K_{\mu}}} t \right) + F_4 \left(z + \frac{1}{\sqrt{K_{\mu}}} t \right) \\ H &= B_1(z) + B_2(z)t, \end{aligned}$$

¹⁾ Гл. н. пр. Thomson u. Tait: Theoret. Physik том I. 2. ст. 222; також Lang loc. cit. ст. 92.

де $F_1, F_2, F_3, F_4, V_1, V_2$ є якінебудь функції. Наколи так є,¹⁾ то H або зовсім від часу не залежить, або змінє ся пропорціонально з часом, не має проте ніякого впливу на поступ филь, бо ми беремо лишень наворотні заколоти (дроганя).

Рівняня III.) дадуть тоді для филь плоских :

$$a = - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad c = 0,$$

а се є доказом, що напрям індукції магнетної припадає на верхню филь. То саме відносить ся і до скорости електричности, бо тоді $v=0$ (рівняня 2), і до сили електромоторичної, бо тоді $R=0$.

Можна проте як в теорії фильованя (при дрогоанях етеру) сказати, що електромагнетні дрогоаня є поперечні.

Приймім, що²⁾ $G=0$, тоді і $v=0$, т. є. електричність має напрям рівнобіжний до осі x ; по тоді складова індукції магнетної $a=0$, остає лиш складова b о напрямі рівнобіжним до осі y ; площа дрогоань електричних є тоді пряма до площі індукції магнетної. Така филья вповні відповідає лучеви сьвітла, що є споляризований простолнійно. Но покищо не рішаєм, котра з площій відповідає площі поляризації.

Наколи возьмемо $F=0$, то дійдем в сей спосіб до филь, що єї напрям скорости електричности (тока) є рівнобіжний до осі y .

Загальний случай, де і $F \geq 0$ і $G \leq 0$, можемо уважати за зложений із згаданих двох случаїв, або можемо всегда филью плоску розложити на два до себе прямові дрогоаня споляризовані, як се ся дїє і в звичайній теорії ундуляційній.

Наколи н. пр. положимо :

$$F = C \sin \left(z - \frac{1}{\sqrt{K\mu}} t \right), \quad G=0,$$

де C є стала, то повишєші відношеня можна предетавити графічно в слїдуючий спосіб.³⁾ В фіг. II. предетавляють сорядні вартости індукції магнетної і сили електромоторичної в якійсь означеній хвилі, фіг. III. предетавляє вартости для скорости електричности і індукції магнетної (сінусоїда і косінусоїда).

¹⁾ Maxwell loc. cit. II. ст. 546.

²⁾ Поп. н. пр. Tumlirz loc. cit. ст. 74.

³⁾ Tumlirz loc. cit. ст. 75.

3. Скорість поступу філі плоскої поперечної.

Наколи положимо $V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}$, то рівняня 4) перейдуть на:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$$

Як звісно, такі рівняня представляють в звичайній теорії пруживости складові пересуєня дробини в середовищі пруживім на случай, коли рух відбуває ся поперечними філями плоскими, причім V є скоростію. Можем проте і ту сказати, що електромагнетні дробіа поєтують в діелектрику зі скоростію:

$$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}.$$

4. Величина тої скорости в порожній. Позаяк магнетна сироможність індукційна в системі одиниць електромагнетних для порожній є 1, проте скорість поступу филь плоских в порожній виносить $\frac{1}{\sqrt{K}}$, де K треба мірити в системі одиниць електромагнетних.

Ми обчиселимо ту величину способом, що його подав Poincaré (loc. cit. том I).

Як звісно екладова електричного пересуєня в напрямі оси xx є:

$$f = - \frac{K}{4\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

K не має в укладі електростатичним ніякого виміру, тому вимір пересуєня буде рівний квотови вимірів потенцялу та довгости, або скількості електричности та квадрату довгости. Звідси слідує, що при переході з системи електростатичної одиниць до системи електромагнетної — так як одиниця довгости остає в обох системах та сама — числа, що мірять пересуєне в обох укладах, стоять до себе в тім відношеню, що числа, які виражають ту саму скількість електричности. Наколи отже означимо через V' відношенє одиниці електростатичної скількості електричности до електромагнетної одиниці скількості електричности, то вимір:

$$\left[f \right]_{em} = \frac{1}{V'} \left[f \right]_{es},$$

де кляври зі значками значать вимір в відповідній системі.

З другої однак сторони, як з елементарного курсу про електричність звісно, одиниці сили електромоторичної в обох укладах мають ся до себе відворотно, як виміри скількості електричності.

Сила електромоторична є $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, проте:

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{em} = V' \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{es},$$

де скобки зі значками мають значіне, як в горі.

Звідси слідує, що квот:

$$\left[\frac{f}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \right]_{em} = \frac{1}{V'^2} \left[\frac{f}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \right]_{es}, \text{ а що:}$$

$$\left[\frac{f}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \right] = [K], \text{ бо } [4\pi] = 0,$$

то:

$$[K]_{em} = \frac{1}{V'^2} [K]_{es}.$$

Позаяк для порожні в системі електростатичній $K=1$, то:

$$K = \frac{1}{V'^2} \text{ в системі електромагнетній.}$$

Проте на скорість поступу дробань (заколотів) електромагнетних в порожні дістаєм:

$$V' = \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{V^2}}} = V.$$

А що світло є після теорії Maxwell'a лиш заколотом електромагнетної природи, проте скорість розходження ся світла мусить бути нумерично рівна відношенню електростатичної одиниці скількості електричності до електромагнетної одиниці скількості електричності.

Погляньмо, о скілько досвід стверджує сей результат магнетної теорії світла.

Скорість світла мірили Fizeau, Bradley, Foucault, а в нових часах Cornu. Вислїди їх помірив є ось-які:¹⁾

¹⁾ Tumlirz loc. cit. ст. 65.

Fizeau	$3 \cdot 14 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
Поміри астрономічні Bradley'а та других	$3 \cdot 08 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
Foucault	$2 \cdot 9836 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
Cornu	$3 \cdot 004 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}^1)$

Відношене одиниць електричних зовсім незалежно від попередніх pomірів означали Weber, Maxwell, Thomson, а в новітших часах Klemenčič, Himstedt і E. B. Rosa. Ось виследи їх pomірів:

Weber	$3 \cdot 1074 \cdot 10^{10}^2)$
Maxwell	$2 \cdot 88 \cdot 10^{10}^3)$
Thomson	$2 \cdot 82 \cdot 10^{10}^2)$
E. B. Rosa	$3 \cdot 0140 \cdot 10^{10}^1)$

Найновітші виследи, які дістав Rosa, згоджують ся майже зовсім з pomірами Cornu. Різниця, які в загальні заходять між числами, треба віднести до того, що ані одна, ані друга величина не є поки-що точно означена; в кождім однак разі обі ті величини є величинами того самого ряду. — Доказав се в кінці Hertz, що викликав в воздуху Філі електроманетні о скорості до $3 \cdot 20 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

5. Зв'язь між сочинником заломаня діелектрика а сталою діелектричною. Возьмім тепер під увагу якийсь діелектрик, то скорість поступу дробань електроманетних є в нїм:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}, \text{ де } K \text{ є стала діелектрична.}$$

Для тїл прозорих μ дуже мало різнить ся від 1, проте скорість v_1 в системі електроманетній для даного діелектрика є після сказаного:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{K}{V^2}}} = \frac{V}{\sqrt{K}}, \text{ де } V \text{ має значіне подане в горі.}$$

Скорість для порожні в системі електроманетній є V , тому то:

$$\frac{V}{v_1} = \sqrt{K}.$$

1) Poincaré loc. cit. том I.

2) Tumlirz loc. cit. ст. 65.

3) Maxwell loc. cit. II. ст. 543.

Но теорія фильованя каже, що відношенє скоростей $\frac{V}{V_1}$ є безглядним сочинником заломаня (n) уважаного середовища, тому :

$$n = \sqrt{K}, \quad K = n^2.$$

Електромагнетна теорія світла жадає проте, щоби безглядний сочинник заломаня рівнав ся кореневи квадратому сталої діелектричної.

При тім робить однак Maxwell слѣдуючу примітку.¹⁾ Як звісно, сочинник заломаня змінє ся з довжиною филі; послѣдне рівнанє може проте сповнитися лиш тоді, коли K і n відносять ся до явищ того самого навороту (періоду). Тому-то мусимо вибрати такий сочинник заломаня, який відповідає филлям о дуже довгім навороті, бо лиш ті можна порівнувати з сорозмірно довго треваючими явищами, яких уживаємо до визначеня сталої діелектричної.

Погляньмо тепер, о скілько досвід годить ся з теоретичним вислѣдом Maxwell'a.

В часі, як Maxwell виступив зі своєю теорією, була звісна лиш стала діелектрична для парафіни; обчислили її Gibson і Barclay.²⁾ Виносить она 1.975, отже $\sqrt{K} = 1.405$; а сочинник заломаня для парафіни (для филі о дуже довгім навороті) є після помірив Gladstone'a 1.422; вислѣд відповідав проте в приближеню праву Maxwell'a.

Пізнійше зроблено цілий ряд помірив сталої діелектричної для ріжних тіл, іменно для тіл сталих крім Gibson'a та Barclay'a обчисляли сталу K Boltzmann, Wüllner, Gordon та Hopkinson; для течий Силів та Hopkinson, для газів Boltzmann, Ayrton та Perry. Дуже прецізно ведені помірки Boltzmann'a³⁾ (1874—1875) показалу велику згоду між \sqrt{K} та n для газів. Ось дати, які одержав Boltzmann:

	\sqrt{K}	n
воздух:	1.000295	1.000294
CO ₂ :	1.000473	1.000449
H ₂ :	1.000132	1.000138
CO:	1.000345	1.000340
CH ₄ :	1.000472	1.000443

¹⁾ Maxwell loc. cit. II. 544.

²⁾ Maxwell loc. cit. II. 544.

³⁾ Гл. н. пр. Tumlirz loc. cit. ст. 67 et sqts.

Також для много течій дати для \sqrt{K} і n досить добре ся згоджують, як доказали поміри Силова та Hopkinson'a.

Много однак тіл сталих та течій (передовеїм вода та олій рициновий) не хотіли підчинитись тому закону. Но нові дуже основні розеліди Ayrton'a, Rubens'a, Cohn'a, Heerwagen'a та иньших доказали, що і ті тіла дають ся підтягнути під закон Maxwell'a.

Ось головнійші дати,¹⁾ що відносять ся до декотрих тіл сталих та течій:

Діелектрик	Поміри робили	K	n	n ²	
Скло	Winkelmann	6.5—7.4			
	Elsas	6.4—7.5			
	Lecher	6.5—7.31			
	Doule	6.88—7.76			
	Arons і Rubens		2.33—2.49	5.42—6.20	
Парафіна	Winkelmann	2.2			
	Doule	2.31			
	Arons і Rubens	стала	1.96	1.43	2.05
		твердіюча	2.04	1.47	2.16
плинна		2.07	1.48	2.19	
Нафта	Winkelmann	2.1			
	Lecher	2.42			
	Arons і Rubens	2.07	1.4	1.96	
	Waitz		1.3—1.45	1.69—2.10	
Ксильоль	Arons і Rubens	2.34	1.5	2.25	
Олива	Arons і Rubens	3.06	1.77	3.13	
Олій рициновий	Arons і Rubens	4.66	2.05	4.20	
Альгоголь	Ellinger		4.9	24.01	
	Doule	24.29			
Вода	Cohn	73.5	8.57	73.44	
	Cohn і Arons	76	8.72	76.03	
	Heerwagen	79.56			

¹⁾ Порів. Petryk: Krytyczny przegląd prac dokonanych nad falami elektrycznymi, Kosmos XX. рік 1895.

Не вільно нам нині уже перецінювати значіня права Maxwell'a, но на основі досвідів мусимо прийняти, що наколи \sqrt{K} не рівнає ся точно сочинникови заломаня, то творить бодай його найважнійшу часть складову.¹⁾

6. Напря́м електричного пересуненя в середовищи безподобнім (діелектрику). Возьмі́м плоску філю електромагнетну, рівнобіжну до пл. ху, та виберім на напрям момента електромагнетного лінію рівнобіжну до оси х. Тоді $G=N=0$. Вираженє на F залежить лиш від природи заколоту; можемо проте функції F_1 і F_2 в наших інтегралах так вибрати, що:

$$F = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - Vt).$$

На основі рівнянь III. дістанемо тоді для складових індукції магнетної:

$$a = 0, \quad c = 0, \\ b = -A \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z - Vt).$$

Магнетна індукція має проте напрям оси Y, отже є прямова до напрямку електромагнетного момента. То само відносить ся до сили магнетної, бо єї складові ріжнять ся — як знаєм — від складових індукції лиш чинником μ .

Наколи знаємо складові індукції, то можемо на основі рівнянь II. обчислити складові скорости пересуненя; найдемо дуже легко:

$$4\pi u = \frac{A}{\mu} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} (z - Vt) \\ 4\pi v = 0, \quad 4\pi w = 0.$$

Бачимо проте, що скорість пересуненя, так як і момент електромагнетний, має напрям рівнобіжний до оси х. Очевидно відносить ся се і до напрямку самого пересуненя, а після рівнянь VII. і до напрямку сили електромоторичної, що викликає то пересуненє. Проте в кожній точці філі плоскої електричне пересуненє, сила електромоторична і момент електромагнетний мають той сам напрям; сила електромагнетна і індукція мають напрям до згаданого напрямку прямовий; все однак лежить в площі філі.

¹⁾ Maxwell loc. cit. II. 544.

В звичайній теорії фильованя енергія кінетична, як се є очевидне, має вартість:

$$\frac{1}{2} \int \int \int \rho \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz,$$

де ρ є густина етеру, а ξ η ζ сорадні дробини етеру — отже похідні дають скорість. Після Maxwell'a енергія кінетична рівнає ся електродинамічному потенціалови систему токів, що находять ся в середовищи; наколи приймемо, що се середовище є магнетне, то на основі рівн. 7) (права явищ електродинамічних) дістанемо на ту енергію:

$$\frac{1}{8\pi} \int \int \int (\alpha a + \beta b + \gamma c) dx dy dz,$$

або коли виразимо складові індукції через складові сили електромагнетної:

$$\frac{1}{8\pi} \mu \int \int \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) dx dy dz.$$

Щоби існувала згода між теоріями фильованя та Maxwell'a, мусимо прийняти, що в обох теоріях вираження на енергію є тотожні; мусимо проте покласти:

$$\rho = \frac{\mu}{4\pi}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \alpha, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \beta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \gamma,$$

отже складові індукції мають той сам напрям, що дробанє частинки етеру.

7. Відбите і заломанє дрогоань електромагнетних на границі двох безподобних діелектриків.¹⁾ Щоби показати згуду електромагнетної теорії світла з теорією фильованя, займем ся основно поведенєм дрогоань електричних на границі двох середовищ.

Філя плоска (фіг. IV.) на границі двох середовищ розділяє ся на дві філі, відбиту та заломану. Поверхня, яка розділяє оба середовища, най буде пл. ух, а прям впаданя вісь х. Приймем до того, що площа впаданя спадає з площею ху.

Наколи скорість поступу дрогоань в першім середовищи є V, в другім V', кут впаданя α , відбитя α' , заломаня α'' , сталі діеле-

¹⁾ Пор. Tumlirz loc. cit. ст. 87.

тричні в обох середовищах K і K' (очевидно $V = \frac{1}{\sqrt{K_\mu}}$, $V' = \frac{1}{\sqrt{K'_\mu}}$), то, як Tumlriz доказує:¹⁾

$$\alpha' = \pi - \alpha, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''} = \frac{V}{V'}. \quad 1)$$

Треба ту відрізнити два случаи:

1) Електричні дробаня відбувають ся прямою до площі паданя, отже рівнобіжно до осн z .

2) Електричні дробаня відбувають ся в площі паданя, отже прямою до осн z .

Назначім наші функції для филі впадаючої, відбитої та заломаної:

$$\begin{array}{ccc|ccc} u & v & w & F & G & H \\ u' & v' & w' & F' & G' & H' \\ u'' & v'' & w'' & F'' & G'' & H'' \end{array}$$

Приймім крімь сього, що фаза всіх трох филъ на площі розділяючій є та сама.

I. случай. Найже филя впадаюча буде означена рівнянями:

$$\left. \begin{array}{l} F = 0, \quad G = 0, \\ H = \Phi \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{V} - t \right) \end{array} \right\} 2)$$

Приймім дальше, що так в филі відбитій, як і в заломаній дробаня є рівнобіжні до осн z ; тоді:

$$u' = v' = u'' = v'' = 0,$$

а проте і: $F' = G' = F'' = G'' = 0,$

а H' і H'' най мають вид:

$$\left. \begin{array}{l} H' = a\Phi \left(\frac{-x \cos \alpha + y \sin \alpha}{V} - t \right) \\ H'' = a'\Phi \left(\frac{x \cos \alpha'' + y \sin \alpha''}{V} - t \right) \end{array} \right\} 3)$$

де a і a' є сочинники покищо не визначені блище.

Φ є функція яка-небудь (як се знаєм з попередних розслідів), а аргументи тої функції в рівнянях 2) і 3) є лиш перетворенєм аргументу $(z - Vt)$ давнійших наших рівнянь.

¹⁾ Tumlriz loc. cit. ст. 60 і 88.

Наколи в якійсь точці площі розділяючої поведемо прям і по обох сторонах тої площі оберемо дві безконечно близькі точки, то так, як H і її похідні є функція тягла, бо H має — як знаєм — вповні свойства потенціалу, отже при переході з одної точки до сусідної безконечно мало ся змінить, тому:

$$\left. \begin{aligned} H + H' &= H'' \\ \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H'}{\partial x} &= \frac{\partial H''}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H'}{\partial y} &= \frac{\partial H''}{\partial y} \end{aligned} \right\} \text{в точці } x = 0.$$

Наколи вставимо ту вартости 1), 2), 3), то дістанемо по переведеню операцій:

$$\left. \begin{aligned} a &= - \frac{\sin(\alpha - \alpha'')}{\sin(\alpha + \alpha'')} \\ a' &= \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha''}{\sin(\alpha + \alpha'')} \end{aligned} \right\} 4)$$

II. случай. Найже филія впадаюча буде означена рівнянями:

$$\left. \begin{aligned} F &= \sin \alpha \Phi \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{V} - t \right) \\ G &= - \cos \alpha \Phi \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{V} - t \right) \\ H &= 0 \end{aligned} \right\} 5)$$

Приймім, що так для филії відбитої, як і заломаної, дробганя електричні відбувають ся в площі впаданя; тоді дістанемо:

$$w' = w'' = 0, \quad H' = H'' = 0.$$

Функції F' , G' , F'' , G'' , мають вид:

$$\left. \begin{aligned} F' &= a \sin \alpha \Phi \left(\frac{-x \cos \alpha + y \sin \alpha}{V} - t \right) \\ G' &= a \cos \alpha \Phi \left(\frac{-x \cos \alpha + y \sin \alpha}{V} - t \right) \\ F'' &= a' \sin \alpha'' \Phi \left(\frac{x \cos \alpha'' + y \sin \alpha''}{V'} - t \right) \\ G'' &= - a' \cos \alpha'' \Phi \left(\frac{x \cos \alpha'' + y \sin \alpha''}{V'} - t \right) \end{aligned} \right\} 5')$$

При переході через площу розділяючу змінюють ся функції F , G та їх похідні способом тяглим. Дістанемо проте рівняня:

$$\left. \begin{aligned} F + F' &= F'' \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial x} &= \frac{\partial F''}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F'}{\partial y} &= \frac{\partial F''}{\partial y} \\ G + G' &= G'' \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G'}{\partial x} &= \frac{\partial G''}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G'}{\partial y} &= \frac{\partial G''}{\partial y} \end{aligned} \right\} \text{ в точці } x = 0.$$

Коли ту вставимо рівняня 5) і 5'), дістанемо по переведеню відповідних перетворень слідууючі звязи:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\operatorname{tg}(x - \alpha'')}{\operatorname{tg}(x + \alpha'')} \\ a' &= \frac{2 \sin \alpha'' \cos \alpha}{\sin(x + \alpha'') \cos(x - \alpha'')} \end{aligned} \right\} 6)$$

III. Пошукаймо тепер відношення на туг луча впадаючого, відбитого та заломаного. В тій цілі подумаймо собі поброений в напрямі філі впадаючої валець (фіг. V) о перекрою ω і зауважім в нім рух між двома прямовими площами A і B . В площі розділяючій ділить ся сей рух на відбитий та заломаний, з яких перший переходить в валець о перекрою ω між площами A' і B' , другий в валець о перекрою ω' між площами A'' і B'' . Найжеж t представляє час, в яким відбуває ся рух між площами A і B , t' час, в яким відбуває ся рух між площами A' і B' , A'' і B'' . Очевидно, що:

$$\frac{\omega}{\cos z} = \frac{\omega'}{\cos \alpha''};$$

найже $AB = A'B' = \Lambda$, то:

$$A''B'' = \Lambda \frac{\sin \alpha''}{\sin z}.$$

Енергія кінетична руху впадаючого ділить ся на енергію кінетичну руху відбитого та заломаного. Так перша, як і друга, складаєть ся з енергії електростатичної та електродинамічної. Електростатична є зером, наколи приймем потенціал всюди рівний зеру; остає тільки енергія електродинамічна. Дістанемо проте:

$$\int \int \int (Fu + Gv + Hw) dx dy dz = \int \int \int (F'u' + G'v' + H'w') dx' dy' dz' + \\ + \int \int \int (F''u'' + G''v'' + H''w'') dx'' dy'' dz'',$$

де інтеграли відносять ся до просторони поміж А і В, А' і В', А'' і В''.

Приймім, що дробаня є лнійно споларизовані та що $\cosinus'u$ напрямні дробань впадаючих, відбитих та заломаних є:

$$\lambda, \mu, \nu \\ \lambda', \mu', \nu' \\ \lambda'', \mu'', \nu'',$$

та возьмім для функцій F, G, H вид:

$$F = \lambda \Phi \left(\frac{x \cos z + y \sin z}{V} - t \right), \quad G = \mu \Phi \left(\frac{x \cos z + y \sin z}{V} - t \right), \\ F' = b \lambda' \Phi \left(\frac{-x' \cos z + y' \sin z}{V} - t' \right), \quad G' = b \mu' \Phi \left(\frac{-x' \cos z + y' \sin z}{V} - t' \right), \\ F'' = b \lambda'' \Phi \left(\frac{x'' \cos z'' + y'' \sin z''}{V'} - t' \right), \quad G'' = b \mu'' \Phi \left(\frac{x'' \cos z'' + y'' \sin z''}{V'} - t' \right), \\ H = \nu \Phi \left(\frac{x \cos z + y \sin z}{V} - t \right), \quad H' = b \nu' \Phi \left(\frac{-x' \cos z + y' \sin z}{V} - t' \right), \\ H'' = b \nu'' \Phi \left(\frac{x'' \cos z'' + y'' \sin z''}{V'} - t' \right),$$

де b і b' є сталі; в обох попередних случаях дають они a і a'.

Дістанемо тепер на енергію кінетичну по перетворенях вираженє:¹⁾

$$\frac{1}{V^2} \iiint \Phi \left(\frac{x \cos z + y \sin z}{V} - t \right) \Phi'' \left(\frac{x \cos z + y \sin z}{V} - t \right) dx dy dz = \\ = \frac{b}{V^2} \iiint \Phi \left(\frac{-x' \cos z + y' \sin z}{V} - t' \right) \Phi'' \left(\frac{-x' \cos z + y' \sin z}{V} - t' \right) dx' dy' dz' + \\ + \frac{b'^2}{V'^2} \iiint \Phi \left(\frac{x'' \cos z'' + y'' \sin z''}{V'} - t' \right) \Phi'' \left(\frac{x'' \cos z'' + y'' \sin z''}{V'} - t' \right) dx'' dy'' dz''.$$

Рух, що ся находить в часі t в точці C(xy), дійде в часі t' до C'(x'y') та C''(x''y'').

¹⁾ Пор. Tumlriz loc. cit. ст. 39 і 95.

Положимо $DC=E$, $D'C'=E'$, $D''C''=E''$, $DO=\Delta$, $OD'=\Delta'$, $OD''=\Delta''$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді: } \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha &= -\Delta + E. \\ -x' \cos \alpha + y' \sin \alpha &= \Delta' + E'. \\ x'' \cos \alpha'' + y'' \sin \alpha'' &= \Delta'' + E''. \end{aligned}$$

$$t' = t + \frac{\Delta + \Delta'}{V} = t + \frac{\Delta}{V} + \frac{\Delta''}{V''}.$$

Заступимо елементи $dx dy dz$, $dx' dy' dz'$, $dx'' dy'' dz''$ через ωdE , $\omega dE'$, $\omega' dE''$, то дістанемо слідуєче виражене для енергії:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Lambda'} \Phi \left(\frac{E-\Delta}{V} - t \right) \Phi'' \left(\frac{E-\Delta}{V} - t \right) dE = \\ & = b^2 \int_0^{\Lambda} \Phi \left(\frac{E'-\Delta}{V} - t \right) \Phi'' \left(\frac{E'-\Delta}{V} - t \right) dE' + \\ & + b'^2 \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha} \frac{V^2}{V'^2} \int_0^{\Lambda \frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha}} \Phi \left(\frac{E''}{V'} - \frac{\Delta}{V} - t \right) \Phi'' \left(\frac{E''}{V'} - \frac{\Delta}{V} - t \right) dE''. \end{aligned}$$

Положимо:

$$\frac{E''}{V'} = \frac{y}{V'}, \quad \text{то: } dE'' = \frac{V'}{V} dy,$$

а тоді горішня границя і в третім є також Λ . Дістанемо проте виражене:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Lambda} \Phi \left(\frac{E-\Delta}{V} - t \right) \Phi'' \left(\frac{E-\Delta}{V} - t \right) dE = \\ & = b^2 \int_0^{\Lambda} \Phi \left(\frac{E'-\Delta}{V} - t \right) \Phi'' \left(\frac{E'-\Delta}{V} - t \right) dE' + \\ & + b'^2 \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha} \frac{V}{V'} \int_0^{\Lambda} \Phi \left(\frac{y-\Delta}{V} - t \right) \Phi'' \left(\frac{y-\Delta}{V} - t \right) dy. \end{aligned}$$

Всі три інтеграли мають ту саму вартість, дістанемо проте на основі рівняня 1):

$$1 = b^2 + b'^2 \frac{\cos \alpha'' \sin \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha''}. \quad 7)$$

А затім натуги руху філястого впадаючого, відбитого та заломаного мають ся так, як :

$$1 : b^2 : b'^2 \frac{\cos \alpha'' \sin \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha''}.$$

Припоровім сей вислід до наших двох головних случайв, то на случай, що дробаня відбувають ся прямовісно до площі впаданя, дістанемо на відношене натуг :

$$1 : \frac{\sin^2(\alpha - \alpha'')}{\sin^2(\alpha + \alpha'')} : \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha''}{\sin^2(\alpha + \alpha'')}, \quad 8)$$

а на случай, що дробаня відбувають ся в площі впаданя, дістанемо :

$$1 : \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \alpha'')}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \alpha'')} : \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha''}{\sin^2(\alpha + \alpha'') \cos^2(\alpha - \alpha'')}. \quad 9)$$

Рівняня 4) 6) 8) 9) є зовсім ідентичні з тими, що їх в теорії фильованя¹⁾ подав Fresnel під заложенем, що площа дробань є прямова до площі поляризації.

Очевидно, що і дальші заключеня, що їх на основі тих рівнянь вивів Fresnel, остають і тут, отже права повного відбитя, величина кута поляризації (закон Brewster'a) etc. В се вже не входимо подрібно. — Зазначимо лиш, що наколи площа дробаня з площею впаданя творить кут ріжний від зєра і від $\frac{\pi}{2}$ (т. є. коли не на жадного з розбираних случайв), то кожде дробанє можна розложити на два: одно рівнобіжне до площі впаданя, друге до неї перпендикулярне; а такі два дробаня підчиняють ся законам, щосьми їх вже вивели.

8. Енергія проміниста. В теорії фильованя енергія середовища, через яке переходить світло, складає ся з енергії потенціальної та кінетичної; перша походить з деформації середовища, яке уважаєм за пруживе, друга з руху дробаючого. Ціла енергія елементу об'єму остає стала, бо енергія потенціальна збільшаєсь о стілько, о скілько зменшаєсь кінетична, і на відворіть.

В магнетній теорії світла приймаємо також, що енергія середовища є в части потенціальна, в части кінетична. Енергія потенціальна, що походить з явищ електростатичних, є — як знаєм :

$$W = \iiint \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) dx dy dz,$$

¹⁾ Гл. II. пр. Lang loc. cit. (Optik), Wüllner: Lehrbuch der Experimentalphysik том II. 456 et sqts.

а енергія кінетична, що є електродинамічним потенціалом систему токів, який знаходить ся в середовищі, є:

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint (za + \beta b + \gamma c) dx dy dz.$$

Обчислїм обі ті величини для филї плоскої, рівнобіжної до пл. XY, що єї момент електромагнетний має напрям рівнобіжний до осі x. Тодї, як знаєм:

$$G=H=0, Q=R=0, g=h=0, \alpha=\beta=\gamma=0, a=c=0,$$

а вираженя на енергії є:

$$W = \iiint \frac{2\pi}{K} f^2 dx dy dz$$

$$T = \iiint \frac{1}{8\pi\mu} b^2 dx dy dz.$$

З рівнянь VII. і III. слїдує, що:

$$f = \frac{K}{4\pi} P = - \frac{K}{4\pi} \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$b = \frac{\partial F}{\partial z},$$

отже:

$$dW = \frac{K}{8\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 dx dy dz, \quad dT = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 dx dy dz.$$

Но F сповняє рівняне різничкове:

$$K\mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

що його інтегралом є:

$$F = f(z - Vt), \quad V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}};$$

проте маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - Vf'(z - Vt), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f'(z - Vt),$$

отже:

$$K \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2,$$

т. є. $W=T$; вартости обох енергій є проте рівні; наколи одна з них росте, то і друга росте о ту саму скількість, і противно. Се заключенє не годить ся з заключенями звичайної теорії світла.

Внутрішня енергія середовища є проте в половині електростатична, в половині електрокінетична. — Найжеж безглядна вартість кожної з тих половин буде p ; з причини істновання енергії електростатичної, а крім сього понеже з сили електромоторичної існує лиш складова в напрямі x , то — як Maxwell доказує¹⁾ — існує рівнобіжно до осі x тяг о величині p і прямо до него в напрямі осі y і z тиск²⁾ о величині p . Однак з причини істновання енергії електрокінетичної, а відтак задля того, що з індукції магнетної остала лиш складова в напрямі осі y , існує в напрямі осі y тяг о величині p , а прямо до него в напрямі осі x і z тиск також о величині p . Цілий проте ефект ділання електростатичного та електрокінетичного в діелектрику є тиском о величині $2p$ в напрямі поступу філі т. в. в напрямі осі z (так як тиск і тяг в напрямі осі y і x зносить ся). А що ціла скількість енергії, віднесена до одиниці об'єму, вносить також $2p$, проте:

В середовищі, в яким поступає філя, існує в напрямі поступу руху тиск, який в уважанім місці є чисельно рівний цілковитій енергії, яка є віднесена до одиниці об'єму.

Maxwell обчислив³⁾ величину тиску, якого дізнає поверхня освітлення від сонця. Наколи приймем, що видатність світла, яке випромінює сильний луч сонця, на метер квадратний, вносить:

$$124 \cdot 1.9 \cdot 81 \cdot 10^5 \frac{\text{erg}}{\text{sec}},$$

то енергія, яка містить ся в однім метрі кубічнім, є менше більше:

$41 \cdot 36.9 \cdot 81 \cdot 10^{-3} \text{ erg}$; середній тиск на метер квадратний є проте $0.004136.9 \cdot 81 \text{ g}$.

Тиск сей ділає лиш на поверхню освітлену, Maxwell надїє ся проте, що дуже тонька бляшка металічна, наколи єї завіємо в порожні, порушать ся під впливом міцно зібраних лучів світляних.

¹⁾ Maxwell loc. cit. I. ст. 156 et sqts.

²⁾ Істнованє тягу та тиску легко можна витолкувати в слїдуючий спосіб. Показали ми, що для філі плоскої сила електромоторична має той сам напрям, що момент електромагнетний; проте лїнії сили електромоторичної біжуть рівнобіжно до осі xx , тому елемент, що стоїть прямо вісно до осі xx , дізнає нормального тягу. До повісного напрямку є прямовісним напрям сили магнетної, отже лїнії сили магнетної стоять прямовісно до лїній сили електромоторичної, а проте рівнобіжно до уважаного елементу, що з тої причини дізнавати ме нормального тиску.

³⁾ Maxwell loc. cit. II. ст. 548.

Позаяк половина цього тиску є рівна електростатичній, зглядно електродинамічній енергії, проте можемо легко найти вартість сили електромоторичної, віднесеної до одиниці довгости, та сили електродинамічної сонця. Maxwell обчислив, що сила електромоторична, вносить до 600 вольтів, а сила електромагнетна до 0.193 одиниць (em), отже троха більше, як $\frac{1}{10}$ складової поземої магнетизму земского в Англії.

Maxwell подав дуже цікаве пояснене того тиску.¹⁾ Так як електродинамічну енергію $\int \int \int \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{8\pi} dx dy dz$ можна уважати за кінетичну, то можна прийняти, що середовище, в яким відбувають ся явища електродинамічні, складаєсь з дробин, що відбувають рухи оборотові (вирові). Наколи $\alpha' \beta' \gamma'$ є складові оборотової скорости дробини, яку вважаємо за свобідну, то енергія кінетична, яка збудилась через оборот, є пропорціональна до $\frac{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}{2}$. Можемо проте виражене на енергію електродинамічну з'ідентифікувати з вираженем на енергію середовища, що ся находить в вирі, наколи приймем, що складові обороту є пропорціональні до складових сили електромагнетної. Напря тої сили сходить ся з осню обороту дробини.

Наколи приймем, що дробина має вид кулі, то через оборот дробина старає ся сплосити на бігунах, а видовжитись на рівнику. На кождий елемент прямовий до осн обороту ділає сила з напрямом до середини дробини; на кождий елемент на рівнику, рівнобіжний до осн ділає сила тягу на виї. Позаяк вісь обороту має той сам напрям, що сила магнетна, проте на елемент прямовісний до тої сили ділає тяг, на елемент рівнобіжний тиск.

Поступ Дрогань магнетних в діелектриках статьних (anisotrop).

1. Діелектрики такі проводять дрогоаня електромагнетні в кождім напрямі в виьший спосіб, мусямо проте прийняти, що в кождім напрямі стала діелектрична має пньшу вартість; назвім ті вартости в трох до себе прямовісних напрямях K, K', K'' , то складові електричного пересуненя є ту:

¹⁾ Гл. пр. Poincaré loc. cit. том I.

$$\begin{aligned}
 f &= -\frac{K}{4\pi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - X \right) \\
 g &= -\frac{K'}{4\pi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - Y \right) \\
 h &= -\frac{K''}{4\pi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} - Z \right)
 \end{aligned}$$

ψ є електростатичний потенціал, X, Y, Z складові електромоторичної сили, що походять з якої-небудь причини. Приймім, що та сила електромоторична походять з індукції, що єї викликали токи і магнети поля, то рівняня наші будуть:

$$\left. \begin{aligned}
 f &= \frac{K}{4\pi} P \\
 g &= \frac{K'}{4\pi} Q \\
 h &= \frac{K''}{4\pi} R
 \end{aligned} \right\} 1)$$

А аналогічні рівняня до рівнянь 3) попереднього уступу є: 1)

$$\left. \begin{aligned}
 K_{\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \Delta F - \frac{\partial I}{\partial x} \\
 K'_{\mu} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= \Delta G - \frac{\partial I}{\partial y} \\
 K''_{\mu} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= \Delta H - \frac{\partial I}{\partial z}
 \end{aligned} \right\}$$

а наколи розвинемо $\Delta, \frac{\partial I}{\partial x}, \dots$,

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial x} &= K_{\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= K'_{\mu} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} &= K''_{\mu} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}
 \end{aligned} \right\} 2)$$

при чім:

$$I = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

1) Властиво треба би писати μ, μ_1, μ_2 , но для середовища прозорого є μ у всіх напрямках майже однаке.

Приймім, що заколоти електричні поступають яко філя плоска, що єї рівняне є:

$$lx + my + nz - Vt = d,$$

де l, m, n є \cosinus 'и напрямні пряму тої філї, V скорість поступу, а d відступ площі філї від початку системи сорядних в часї $t=0$.¹⁾

Так як послїдне рівняне представляє зависимість між x, y, z, t , проте мож уважати функції F, G, H яко функції самого d ; отже:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial d} \frac{dd}{dx} = l \frac{\partial F}{\partial d} = lF'$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = lF'' \quad \text{і т. д.}$$

Наколи се вставимо в рівняня 2) дістанемо:²⁾

$$\left. \begin{aligned} \left(m^2 + n^2 - \frac{V^2}{a^2} \right) F'' - lmG'' - nH'' &= 0. \\ - lmF'' + \left(n^2 + l^2 - \frac{V^2}{b^2} \right) G'' - nmH'' &= 0. \\ - nF'' - mnG'' + \left(l^2 + m^2 - \frac{V^2}{c^2} \right) H'' &= 0. \end{aligned} \right\} 3)$$

де для скороченя:

$$K_{\mu} = \frac{1}{a^2}, \quad K'_{\mu} = \frac{1}{b^2}, \quad K''_{\mu} = \frac{1}{c^2}.$$

Рівняня єї є співчасні що до F'', G'', H'' , проте їх визначник мусить бути зером, т. є.:

$$\begin{vmatrix} m^2 + n^2 - \frac{V^2}{a^2} & -lm & -nl \\ -lm & n^2 + l^2 - \frac{V^2}{b^2} & -mn \\ -nl & -mn & l^2 + m^2 - \frac{V^2}{c^2} \end{vmatrix} = 0,$$

а звідси випаде рівняне:

$$\frac{l^2}{V^2 - a^2} + \frac{m^2}{V^2 - b^2} + \frac{n^2}{V^2 - c^2} = 0. \quad 4)$$

¹⁾ Пор. Tumlirz loc. cit. ст. 76.

²⁾ Пор. Maxwell loc. cit. II. ст. 550.

Таке саме рівняння дістаєм в теорії Fresnel'a для скорости поступу двох филь плоских (при подвійнім заломаню),¹⁾ що походять від одної і тої самої филь впадаючої.

Филь електромагнетна підлягає проте в діелектрику статьнім подвійному заломаню.

Наколи порівняти се рівняне з аналогічним рівнянем в теорії фильованя, побачимо, що скорости поступу филь в напрямках трох осей сорядних в середовищах статьних мають ся до себе відворотно як коренї квадратів з спроможностей індукційних $K K' K''$ в напрямках тих осей (μ приймаємо за одиницю), або — що є то само — що ті коренї квадратів є пропорціональні до сочинників заломаня в напрямі трох осей пруживости середовища.

Зв'язь ту справджено для кількох тїл статьних, як пр. сїрки кристалічної найшов Boltzmann²⁾ слїдуючі спроможности індукційні в напрямі трох осей пруживости:

$$4.773, 3.970, 3.811;$$

коренї квадратів тих чисел є:

$$2.184, 1.99, 1.95.$$

Числа ті є зближені дуже до сочинників заломаня в тих трох напрямках, які є:

$$2.143, 1.96, 1.99.$$

В блисший розбір рівняня Fresnel'a та Maxwell'a не будемо входили, так як се належить вже до звичайної теорії фильованя; а нам йде лиш о се, щоби справдити згоду обох теорій, зглядно вивести нові права.

2. Аналогічно, як в уступі попереднім, дістанемо ту рівняня:

$$4\pi\mu u = -F''(m^2 + n^2) + G''lm + H''ln$$

$$4\pi\mu v = F''ml - G''(n^2 + l^2) + H''mn$$

$$4\pi\mu w = F''nm + G''nl - H''(l^2 + m^2),$$

або на основі рівнянь 3):

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\mu u &= -\frac{V^2}{a^2} F'' \\ 4\pi\mu v &= -\frac{V^2}{b^2} G'' \\ 4\pi\mu w &= -\frac{V^2}{c^2} H'' \end{aligned} \right\} 5)$$

¹⁾ Гл. пр. Lang loc. cit. die Optik.

²⁾ Пор. Poincaré loc. cit. том I.

Назначім вислідну скорість електричного дробана через i о \cosinus 'ах напрямних λ, μ, ν , то:

$$u = \lambda i, \quad v = \mu i, \quad w = \nu i, \quad \text{отже:}$$

$$\lambda : \mu : \nu = \frac{F''}{a^2} : \frac{G''}{b^2} : \frac{H''}{c^2}, \quad 5')$$

а наколи помножимо 5) поступенно через l, m, n та додамо, дістанемо:

$$4\pi\mu i (l\lambda + m\mu + n\nu) = -V^2 \left(\frac{F''l}{a^2} + \frac{G''m}{b^2} + \frac{H''n}{c^2} \right);$$

а наколи рівняня 2) помножимо поступенно через l, m, n і додамо, дістанемо:

$$\frac{F''l}{a^2} + \frac{G''m}{b^2} + \frac{H''n}{c^2} \quad 6)$$

отже:

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0 \quad 7)$$

т. є. що дробаня електричні відбувають ся в площі Филі.

З рівнянь 5'), 6), 7) слідує звязь:¹⁾

$$\frac{1}{\lambda} (b^2 - c^2) + \frac{m}{\mu} (c^2 - a^2) + \frac{n}{\nu} (a^2 - b^2) = 0. \quad 8)$$

Рівняня 4), що його досвідками ствердив Boltzmann, 7) та 8) дістав Fresnel.

Очевидна є річ, що дальші заключеня теорії фильованя о напрямі Филі та її виді оставати мусять без зміни.

Поступ дробань електромагнетних в середовищі півдіелектричнім. Абсорбоване дробань.

В природі виступають найчастійше тіла посередні, що не є ані повними діелектриками, ані повними провідниками. Такими тілами займем ся тепер та виведемо для них права поступу дробань світляних, або — що є то само — права поступу плоских филь електромагнетних, які при дуже скорих дробанях викликають вражінє світла.

¹⁾ Гл. Maxwell loc. cit. II. 522.

Для таких тіл можемо вибрати або рівняння Maxwell'a IX.) або Potier'a X.) — Приймім, що площа Філі є рівнобіжна до пл. XY, а напрям електромагнетного момента є рівнобіжний до осі xx, то тоді $G=H=0$, а рівняня 1) (з першого уступу другої часті) зведуть ся до рівняня :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

а звідси, наколи при інтегрованю пропустимо сталу, так як та для заколотів наворотних мусить бути зером, дістанемо :

$$P = - \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Наколи се вставимо в перше з рівнянь IX.), т. є. в рівнянє :

$$u = CP + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial P}{\partial t},$$

дістанемо :

$$u = - C \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{K}{4\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad 1)$$

Но рівняня I.), II.), III.) дадуть :

$$4\pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \left[- \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right],$$

а так як з причини вибору срядних F не залежить від y, то :

$$4\pi u = - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

Наколи з того рівняня та з 1) вилімінуємо u, то дістанемо :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \mu K \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 4\pi \mu C \frac{\partial F}{\partial t}. \quad 2)$$

Як показує теорія рівнянь ріжничкових, інтегралом того рівняня є наворотна функція часу t виду :

$$F = e^{i(nt-mz)}, \quad i = \sqrt{-1},$$

де m і n — як се очевидно¹⁾ — є получені рівнянем :

$$m^2 = \mu K n^2 - 4\pi \mu C n i.$$

Так як n має вартість $\frac{2\pi}{T}$, де T є наворотом функції, то та вартість мусить бути дійсна, проте m^2 , отже і m, мусить бути величиною зложеною :

$$m = p - qi.$$

¹⁾ Вистане вставити в 2) за F вартість.

Наколи се вставимо в рівнянє на m^2 та зрівнаємо части пер-
ворядні і другорядні, дістанемо рівняня:

$$\left. \begin{aligned} q^2 - p^2 &= \mu Kn^2. \\ 2pq &= 4\pi\mu Cn. \end{aligned} \right\} 3)$$

Функція наворотна, що сповняє рівнянє 2), дає ся тоді напи-
сати в видї:

$$F = e^{-pz} e^{i(nt-qz)};$$

но:

$$e^{i(nt-qz)} = \cos(nt-qz) + i \sin(nt-qz).$$

Дійсна часть функції, яка є для нас важна з огляду на до-
свід, є тепер:

$$F_1 = e^{-pz} \cos(nt-qz).$$

Наколи не узгляднимо змін, які походять від $\cos(nt-qz)$, то
последнє вираженє показує, що вартість електромагнетного момента
зміняє ся так як e^{-pz} . — Рівнянє:

$$2pq = 4\pi\mu Cn$$

показує, що p і q мають той сам знак; наколи проте філя плоска
поступає в напрямі додатного z , то p і q є додатні і e^{-pz} меншає
з зростаючим z . Вартість електромагнетного момента
меншає проте в міру, як філя вникає глубше в від-
повіднє середовище.

Таке саме відношенє існує поміж електричним пересуненєм
а силою електромагнетною; величини ті є іменно звязані з вартос-
тями електромагнетного момента системом рівнянь ріжничкових
першого ряду, які проте мусять в собі заключати e^{-pz} . p називає
ся сочинником абсорбції. Наколи проте дробаня магнетні
відбувають ся так скоро, що можуть викликати явище сьвітла, то
натуга сьвітла, пропорціональна до квадрату з се-
редної скорости дробини етеру, мусять меншати
в спосіб e^{-2pz} .

На случай, що середовище має дуже малу спроможність ін-
дукційну K , а μ майже рівне 1, перейдуть рівняня 3) на:

$$\left. \begin{aligned} q^2 - p^2 &= 0, \quad \text{або} \quad p = q; \\ 2p^2 &= 4\pi Cn; \end{aligned} \right\}$$

p є проте майже пропорціональне до кореня квадратого з спро-
можности проводу C . Звідси слїдує, що натуга сьвітла, яке перехо-
дить через таке тіло, є тим менше, чим менше C ; або тіло є тим
менше прозоре, чим лїпше проводить електричність.

В дійсності є много виїмків від того права. В загалі однак тіла щільні прозорі є добрими діелектриками, а провідники є майже зовсім непрозорі. — Крім сього, як Curie постеріг,¹⁾ табеля тих тіл, впорядкована після зростаючої спроможности про-
воду, є майже тотожна з табелькою, впорядкованою після мен-
шаючої діатерманзії.

Подаєм ту табельку Curie :

Елект. провід зраст.	Діатерм. менш.
Стрка	Сіль кухонна
Сіль кухонна	Стрка
Флюорит	Флюорит
Спат ісландський	Спат ісландський
Кварц	Кварц
Барит	Скло
Алун	Барит
Скло	Турмалін
Турмалін	Алун

Від загального закону Maxwell'a відступають електродіти, що є добрими провідниками, а однак є в загалі прозорі. Maxwell толкує се в той спосіб, що спроможність проведу у електродітв є иншого рода, чым у металів. У металів є дробини матерії в су-
покою, а лиш електричність відбуває рух; у електродітв противно порушають ся йони від одної електроди до другої, отже перехід електричности відбуває ся через йони, що несуть з собою електричність. — Крім сего подає Maxwell²⁾ еще друге поясненє. Енергія абсорбована при переході филі мусить ся конче віднайти під иншим видом. У металів перетворюєсь она в тепло, у електродітв служить до розділення йонів. Однак напрям руху йонів залежить від руху електричного (тока); отже ефект, викликаний через перехід певної скількоети електричности в однім напрямі, зносить ся через перехід рівної скількоети електричности в противнім напрямі; через се токи перемінні, що по собі наступають, та що походять від заколотів, які викликають світло, не можуть викликати ніякого розкладу електродітв. Енергія не зістає проте зовсім з'абсорбована, а натуга світла мусить при виході з електродіта бути майже рівна натугі світла, що впадає до електродіта.

¹⁾ Гл. Poincaré loc. cit. т. I.

²⁾ Гл. Maxwell loc. cit. II. 553.

Дрoгання електромагнетні в добрих провідниках.

1. Добрі провідники характеризують ся після Maxwell'a тим, що їх спроможність індукційна K в порівнянню до спроможности проводу C є дуже мала; з рівнянь Potier'a слідує противно, що для провідників $K = \infty$.

Приймім гіпотезу Maxwell'a, то тоді — як легко ся переко-
нати¹⁾ — дістанемо з рівнянь V.) та VI.) рівняня ось такі:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\mu C \frac{\partial F}{\partial t} + \Delta F &= 0. \\ 4\pi\mu C \frac{\partial G}{\partial t} + \Delta G &= 0. \\ 4\pi\mu C \frac{\partial H}{\partial t} + \Delta H &= 0. \end{aligned} \right\} 1)$$

Кожде з тих рівнянь має зовсім такий сам вид, як рівняня, що їх подав Fourier для прав поступу тепла в добрих провідниках.²⁾

Наколи отже возьмем під увагу перше з тих рівнянь, то скла-
дова F електромагнетного момента змінити ся буде з положенєм та часом так само, як зміняє ся температура тіла цїпкого, одно-
родного, наколи умови граничні в обох случаях подамо ті самі та
наколи величина $4\pi\mu C$ буде чисельно рівна відворотности термічній
спроможности проводу матерії.³⁾ — З тої причини можна всі про-
блеми, що їх розслідив Fourier, перенести на случай поступу дро-
гань електромагнетних в провідниках; однак треба тямити, що на-
коли F, G, H є величини напрямні (вектори після теорії кватер-
ніонів), температура є скаляром (отже від напряму не зависить).

Maxwell бере під увагу лиш один случай,⁴⁾ а іменно, наколи
дрoганє електромагнетне відбувати ся ме в середовищи о безконечно

¹⁾ Р зведе ся до: $P = -\frac{\partial F}{\partial t}$, бо в середині провідника $\psi = \text{Const.}$, а індукція магнетна рівнає ся веру; так само I (Maxwell II. 554) є лиш лінійна функція часу t , отже $\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial I}{\partial z} = 0$.

²⁾ Глянь пр. Lang loc. cit. ст. 920 рівнянє 73.

³⁾ Термічна спроможність проводу є то скількість одиниць об'ємних матерії, яка (скількість) зістане оґріта о 1°C через тепло, що переходить через одичичну кістку матерії, якої дві противлежачі стінки мають ріжницю температури 1°C , а прочі стінки тепла не перепускають.

⁴⁾ Maxwell loc. cit. II. ст. 555.

малих розмірах, при чім на початку часу стан даного середовища є точно опredілений.

Повний інтеграл наших рівнянь різнничкових є тоді після Fourier'a:

$$v = \iiint \frac{dx dy dz}{2^3 \sqrt{K^3 \pi^3 t^3}} \cdot e^{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4Kt}} f(x, y, z)$$

де v є одна з трох величин F, G, H ; K є у Fourier'a спроможність проводу, отже у нас $K = \frac{1}{4\pi\mu C}$; $f(x, y, z)$ є у Fourier'a функція, що дає на місці (x, y, z) величину температури, у нас вартість одної із величин F, G, H на місці (x, y, z) середовища.

2. Возьмім тепер случай, що ток перепливає через лінійний злучник, який є окружений середовищем о невеликій спроможности проводу. — Як знаєм ток, що пливе через провідник, викликає довкола себе в середовищі ток індукований. Ток індукований має напрям протилежний, як ток індукуючий. Натуга такого тока індукованого маліє з причини опору середовища а вкінці зовсім гине. Однак заким згине сей ток індукований в близькості провідника, викликає він в безпосереднім своїм окруженю також ток індукований (другорядний), що рівнож з часом гине, викликаючи в дальших частях середовища токи індуковані. Так отже індукція розширяє ся через ціле середовище, засяг тока індукованого розширяє ся щораз більше, а його натуга щораз більше маліє.

Наколи мем ток головний удержувати стало на тім самім потенціалі, то токи індуковані, що він їх викличе, розходять ся через середовище і десь в ним гинуть. По за ними остає середовище в стані попередної (нормальної) рівноваги. Для того стану рівноваги маємо, як легко зрозуміти:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

отже на основі рівнянь 1):

$$\Delta F = \Delta G = \Delta H = 0. \quad 2)$$

Рівняня ті відносять ся до всіх точок середовища; а для точок току головного маємо (після рівнянь першого уступу другої часті):

$$\left. \begin{aligned} \Delta F &= -4\pi\mu u \\ \Delta G &= -4\pi\mu v \\ \Delta H &= -4\pi\mu w \end{aligned} \right\} 3)$$

Рівняня 2) і 3) разом показують, що наколи ток о сталій натузі пливе від довшого часу в провіднику, то в середовищи, що окружає сей провідник, нема ніяких дрогань (заколотів); ток існує лиш в провіднику, отже діланы електромагнетні в цілїм середовищи треба віднести виключно до тока, що пливе через провідник. — Скорість, з якою наступає сей стан кінцевий, є при тім всім так велика, що єї при ужитю наших дотеперішних средств не можем вимірити.

Так отже перейшли ми коротко основні закони та заключеня електромагнетної теорії світла. Як ми уже нераз зазначили, та схожість свойств, яку показують дроганя етеру з одної, а ті заколоты електромагнетні поперечні, що виступають в діелектрику, через яквій світло переходить, з другої сторони, була так велика, що сейчас насунула ся гадка, чи ті дрoганя (заколоты) поперечні не дадут ся відкрити досьвідом. В тій квестії рішучий крок зробив фізик німецкий Гейнріх Hertz, а за ним пішли другі, так що нині маємо теорію, що опирає ся на досьвідах, т. є. теорію филь електричних. Тими то філями електричними займем ся тепер.

ЧАСТЬ ТРЕТА.

Филі електричні.

Розсліди Hertz'a.

В р. 1879 оголосила академія наук у Берліні конкурс на роботу експериментальну, якаби виказала дорогою досвідом зв'язок між силами електродинамічними а поляризацією діелектричною діелектриків. Тою темою заняв ся молодий фізик німецький Гейнріх Hertz, однак — як сам каже¹⁾ — перші його проби були безуспішні, так що доперва в р. 1886 повело ся йому викрити філястий характер поступу филь електричних.

Правда, вже скорше W. Bezold в р. 1870 в своїй роботі про виладованя електричні²⁾ послуговуєсь такими поняттями, як филь електрична, інтерференція, відбиванє филь etc., но ся робота не збудила більшого інтересу і для Hertz'a була вповні незвісна, так що йому треба признати право, що перший відкрив досвідом филь електричні.

Займем ся тепер згаданими досвідами Hertz'a.

1. В досвідах своїх уживав Hertz слідуячого знаряду (фіг. VI.). Цівка індукційна Ruhmkorff'a довготи 52 см., о перекрою 20 см., або т. зв. перворядний провідник (вібратор, ексцитатор) був получений дротами dd', а звідси кулями bb' і дротами ll' з двома кулями цинковими SS' або плитами квадратними мосяжними довгими 40 см., що їх віддалене було 1 м.

Приймім вперед, що ми відлучили обі кулі від цівки та набили до ріжних потенціалів; наколи та ріжниця потенціалів вистане,

1) Hertz: Ueber die Ausbreitung der elektrischen Kraft ст. 2.

2) ibidem ст. 59.

щоби викликати искру між b і b' , то між S і S' слідує виладована, які мають характер дрібаючий, наколи існує нерівність:

$$R^2 < \frac{4L}{C}, \quad ^1)$$

де R представляє опір, C pojemність, L величину самоіндукції (самопотенціяла). Прилад Hertz'a сповняв ту нерівність, проте слідував в ній ряд осциляцій (дрібгань), отже і коротко тревалих заколотів електричних о навороті $2\pi\sqrt{LC}$ (після взору Thomson'a). L і C є в одиницях (em) дуже малі, тож і наворот осциляцій є дуже короткий; треба проте S і S' раз у раз набивати; функцію ту сповняє цівка P , яки достатчає токів перемінних о навороті 10^{-5} sec. (після Bernstein'a та Mouton'a) так, що ексцитатор Hertz'a набивав ся до 10^5 разів на секунду.

Наколи умістити коло ексцитатора другий (другорядний) провідник т. є. майже замкнене коло злучникове з перервою, що має ледви частинку m/m , тоді в місці перерви бачимо в хвилі ділання ексцитатора гру искорок, що змінює ся після виду та розміру злучника R . Для кожного (н. пр. колового) виду R існує якийсь розмір, що для нього искра показує максимум ясности та довгости. Є тут аналогія з проявами в акустиці, де резонатор воздушний тоді лиш починає дрогати під впливом тону о означенім навороті, наколи його промір має відповідну величину. Тому-то другорядний провідник назвав Hertz резонатором; є він достроєний до ексцитатора, наколи що до величини та виду є такий, що має максимум искор.

2. Так як ексцитатор є симетричний що до простої, яка лучить середоточки обох куль, то мусять виступати однакові явища в усіх площях, що через ту вісь переходять. Но площа прямова, поведена через середину ексцитатора, є площею симетрії того знарядя; площа та перетинає позем в лінії, що єї Hertz називає лінією головною; є она також осію симетрії, встане проте розслідити му чвертку площі, що лежить між осію ексцитатора а лінією головною.

З ряду досвідів вивів Hertz²⁾ слідуючі заключеня:

I. Наколи площа резонатора є **прямовісна**, а знаряд обертаємо докола його середоточки так, що промір, який переходить через

¹⁾ Доказ гл. Poincaré loc. cit. том II. ст. 124.

²⁾ Hertz loc. cit. ст. 39—54, 87—101. Пор. також Poincaré loc. cit. том II.

перерву, (т. зв. вісь симетрії резонатора) описує новий лук коловий, то тоді искри змінюють довготу; в обох положеннях, при яких вісь симетрії має напрям прямовісний, показують искри максимум довготи; протилежно зовсім гинуть, наколи та вісь лежить позома; в положеннях посередних довгота искор є тим більша, чим більше вісь симетрії наближаєсь до пряму.

II. Довгота искор в часі їх максимум залежить для одного і того самого положення середоточки резонатора від азимута площі резонатора. Се мож доказати в сей спосіб, що обертаємо резонатор довкола його осі симетрії, яка стоїть прямовісно; в часі цілого обороту виступають два максимум'а і два мінімум'а искор. Азимути для максимум'ів (мінімум'ів) є віддалені о π^0 ; різниця азимуту для максимум і мінімум є $\frac{\pi}{2}$.

III. В яким положенню резонатора (фіг. VII.) мають виладованя максимум'а та мінімум'а, залежить се від положення середоточки резонатора з огляду на ексциатор. Назначім через α кут між осію SS' ексциатора а простою OC, що лучить середоточку тої простої з середоточкою резонатора, а через β кут нахлоненя площі резонатора та простої OC в хвилі мінімум, то коли $\alpha = \left(0 \text{ --- } \frac{\pi}{2}\right)$, то $\beta = \left(-\frac{\pi}{2} \text{ --- } \pi\right)$, наколи віддаленє OC виносить троха менше як 3 м. При дальших віддаленях є положеня резонатора в хвилях мінімум до себе майже рівнобіжні та прямовісні до SS'. В кождім віддаленю мінімум'а є зером, наколи середоточка резонатора найде ся на лінії головній Oy, а його площа спаде з тою головною лінією.

IV. Наколи площа резонатора є **позема**, то довгість искор зависить також від положеня осі симетрії. — В віддаленю до 3 м. від ексциатора маємо цілий ряд точок, що творять неначе замкнений пояс, в яким не ма ані максимум ані мінімум без огляду на се, яке положенє займе площа резонатора та його вісь симетрії.

Ті вислїди показують наглядно на дрогаючий характер заколотів електричних, які виступають в обох провідниках. Заколоти ті поступають через воздух та інтерферують між собою; заколоти ті назвемо проте дроб'ганнями електричними.

3. На перебіг явища має вплив істнованє провідників в окруженю ексциатора; сей вплив приписати треба діланю, яке викликають на резонатор токи індуквані, що їх викликав ексциатор в тих провідниках. Но після теорії Maxwell'а і токи пересуненя,

що повстають в діелектрику, так як токи проводу, мусять викликати діланє індукційне. Дійсно доказав сього Hertz¹⁾ в сей спосіб, що побіч ексцитатора поміщував ріжні діелектрики, як папір, асфальт, нафту, смолу, дерево, сірку, парафіну etc.; maximum'a та minimum'a искор виступали в кождім случаю в иньшій положеню резонатора, що можна було виключно приписати діланю діелектриків, отже істнованю токів пересуненя.

4. Поступ филь в дротах металевих. Hertz доказав в дальших своїх досьвідах,²⁾ що скорість поступу дробань електричних в дротах металевих є скінчена. До того ужывав ексцитатора з плитами прямовісними (філ. VIII.); за тими плитами поміщав плиту R о таких самих розмірах та получив єї злучниками m і n з дротом ізольованим, 12 м. довгим, поміщеним в прямовісній площі симетрії, 40 см. понад осю AA'. Резонатор R був так поміщений, що його середоточка находила ся на лінії головній, а його перерва в горі; його прямовісна площа переходила через дріт. Наколи дрота не було, то — як з попередних дослїдів Hertz'a слїдує — не мігби ексцитатор в тій позиції збудити искор в резонаторі. Искри однак виступають, що може походити лиш виключно з діланя дрота. Наколи будемо резонатор пересувати в тій самій площі від вільного кінця дрота до ексцитатора, то побачимо, що искри не повстають на кінці дрота і на всїх місцях віддалених о многократи 2·8 m від кінця; точки єї назвав Hertz узлами. В иньших місцях повстають искри, осягають в деяких точках maximum, а меншають, коли ся наближаєм до узлїв. — Наколи дрот перетнемо в точці, де є узол, то явище зовсім ся не змінить; повстануть узли і maxima в обох кусниках дрота в тих самих місцях, що і передше. Дріт представляє проте анальоїю до струни; но та анальоїя стане ся дійсна, наколи приймем, що скорість поступу дробань електричних в дроті є скінчена. Узли повстають через інтерференцію филь, які поступають через дріт, та филь відбитих від кінця дрота. Скорість поступу филь найдемо, наколи звїсний нам буде наворот дробань. Hertz приймає сей час яко рівний $1\cdot4\cdot10^{-8}$ sec. (після взору Thomson'a, який ми вже раз подали), а що пів довготи филь є 2·8 m, проте скорість поступу филь електричних в дроті булаби сірка 200000 Km. Однак Poincaré звернув увагу³⁾ на похибку в обчисленю

1) Hertz loc. cit. ст. 111.

2) ibidem ст. 115 et sqts.

3) Poincaré: Contribution à la theorie des expériences de Hertz. Comptes rendus 111 ст. 322 пік 1891.

Hertz'a та доказав, що вислід Hertz'a є за малий в відношенню $1: \sqrt{2}$, а через се правдива скорість поступу дробань електричних в провідниках простолнійних випадє 288000 Km, отже є величиною того самого ряда, що скорість світла. Скорість та не залежить ані від перекрою дрота ані від матеріялу.

5. Скорість поступу в воздуху. Дальше розслїдив Hertz явища, що виступають в безконечно довгїм дротї (при чїм відпадає відбиванє ся филь); досвїд сей зрєалїзував Hertz в сей спосїб, що дрїт, уживаний в попередних досвїдах, продовжив о 60 m та закопав по за салею досвїдїв в землю.

Наколи помїстимо резонатор в площї поземїй, яка переходить через дрїт, так що перерва найде ся в горї, а середотчка резонатора лежить на головній лїнїї зняряду, тодї на резонатор дїлає виключно дрїт. Наколи в тїй позицїї обернемо резонатор о 90° довкола його прямовїсної осї, то дїланє дрота устає, бо резонатор є прямовий до дрота; в тїм положеню лиш ексцитатор викликує искри. Дїланє дрота і ексцитатора на середотчку резонатора мусить бути проте одваке, наколи искри в тих двох до себе прямовїсних положенях мають однуку довготу. Сю умову легко дїстанемо, наколи плиту P приєунимо або віддалимо від плити A. — Для посередних положень резонатора дають оба дїланя дїланє вислїдне і довгота искор мусить бути для певного положеня maximum, для иньшого minimum. — Наколи резонатор пересуваємо вздовж дрота, то бачимо, що maximum'a зміняють свою величину та не відповідають одному і тому самому кутови між прямом площї резонатора а лїнїєю головною. При деяких частях дрота виступають maximum'a, наколи прям має напрям до A'. Однакові maximum'a виступають для точок, віддалених від себе о 7·5 m. Явище показує ту саму натугу що 7·5 m, но при рїзних положенях пряму зглядом головної осї. Яка тому причина?

Як звїсно в дротї половина довгости филь є 2·8 m; отже двї точки дроту віддаленї о 2·8 m, показують противне дїланє. Наколиб скорість поступу дїланє ексцитатора була безконечно велика, то тодї зміна напрямку пряму в положенях maximum'їв залежалаб виключно від дрота і ся зміна мусїлаб виступати що 2·8 m. То само мусїлоб заходити, наколиб скорість поступу в воздуху була та сама, що в дротї. Досвїд дає однак иньші вислїди; мусимо проте приняти, що скорість поступу в воздуху є скінчена і рїзна від скорости в металах. Дослїдженї явища мусимо приписати інтерференцїї филь, що переходять через воздух, та филь, що переходять через дрїт.

Звідси найдем скорість поступу дрогоань електричних в воздуху, треба лиш узгляднити, що інтерференції стало змінюють знак, наколи один з рухів випередив другий о пів довготи филї. Наколи λ є половиною филї в воздуху, λ' половиною филї в дроті, а d найдена довгість, то:

$$n\lambda = (n + 1)\lambda' = d.$$

$\lambda' = 2.8$ m, $d = 7.5$ m, проте $\lambda = 4.5$ m; а наколи приймем той сам наворот дрогоаня, що попередно, дістанемо на скорість поступу дрогоань електричних в воздуху 320000 km, отже величину того самого ряду, що скорість світла.

6. Відбиванє филь. В дальших своїх досвідах відбивав Hertz филї та силував їх до інтерференції з фильями поступними. До того уживав він бляхи з цинку о великих розмірах, що є помістив в означенім віддаленю, та злучав з землею. Екситатор був від тої бляхи (зеркала) віддалений о 13 m. Наколи середоточку резонатора помістимо на прями зеркала, який переходить через екситатор, т. є. на т. зв. прями впаданя, а площу резонатора помістимо прямо до того прями, то тоді бачимо, що в безпосереднім окруженю зеркала не виступають зовсім искри або лиш дуже слабї без огляду на напрям осн симетрії, так само в віддаленю 4.1 m і 8.5 m; є то проте узли.

Наколи пересуваємо резонатор від зеркала рівнобіжно до первісного положеня, так що його середоточка лежить на прями впаданя, побачимо слабї искорки, які що раз більше зростають та стають в віддаленю 1.72 m maximum; дальше меншають, гинуть при 4.10 m, знов зростають і мають maximum при 6.30 m; однакові прояви виступають проте що 4.5 m. — Так само виступають maxima що 4.5 m, наколи резонатор помістимо в площі прямовісній, що переходить через прями впаданя і уставимо вісь симетрії рівнобіжно до прями впаданя, а опісля пересуваємо резонатор рівнобіжно до первісного положеня почавши від зеркала. Звідси слїдує, що довжинь филь в воздуху виносить 4.50 m, отже в воздуху рівнає ся скорости світла.

7. Лучі електричної сили. Так як заколоти електричні мають характер фильний, проте мож говорити о лучах сили електричної, так як говоримо о лучах світла. Hertz доказав, що лучі ті підлягають тим самим законам відбиваня та заломаня, що лучі світла, а через се дав один доказ більше на правдивість електромагнетної теорії світла. Доказав він се в слїдуючий спосіб.

Кулі SS' ексцилятора умістив він на лнії огнищевій зеркала параболічного зробленого з бляхи цинкової о висоті 2 m, а о промірі 1·2 m. Резонаторови дав вид прямокутника (фіг. IX.) та помістив його так, що оба дроти прямовісні резонатора стали в площі огнищевій другого зеркала параболічного о таких самих розмірах, як перше зеркало, а оба дроти поземі резонатора переходили через зеркало так, що перерва (мікрометер) для искор була за зеркалом. Таким знярядом доказав Hertz простолнійний поступ, поляризацию, відбиване та заломане дрогоань електричних.

а) Простолнійний поступ дрогоань. Лучі, які виходять з ексцилятора, відбиті від зеркала розходять ся простолнійно. Доказали сього численні досєвіди; і так искри резонатора меншали, наколи площа симетрії зеркала, що до него належало, не спадала з площею симетрії першого зеркала; коли обі площі впали на себе, отже коли оба зеркала були рівнобіжні, а між ними помістив Hertz плиту металеву (цинкову) високу на 2 m, а широку на 1 m, то искри гинули; так само гинули, коли між зеркалом став чоловік; а противно не гинули, коли між зеркалами вставив Hertz ізолятор (н. пр. дошку).

б) Поляризация. З причини виду ексцилятора відбувають ся дрогоаня лучів електричних в площі, що заключає в собі сей луч. Луч такий має такі свойства, як луч світла лнійно споларизований.

Наколи друге зеркало обернемо довкола оси поземої, то искри слабнуть і гинуть, наколи площі симетрії є до себе прямові (зовсїм так, як се дієсь у лучів світляних лнійно споларизованих).

Наколи між обома зеркалами, що є уставлені рівнобіжно, вставимо рамку з дерева, на якій є порозпнані рівнобіжні металеві дротики, то наколи ті дротики стоять прямо до лнії огнищевих, то искри не меншають; противно гинуть, наколи дротики стоять до тих лній рівнобіжно. Є ту анальоґія до плитки з турмаліну, яка є вирізана рівнобіжно до оси оптичної.

в) Відбиване дрогоань. Hertz поставив оба зеркала так, що їх площі симетрії перетинали ся в віддаленю 3 m; на лнії перетинання помістив він плоске зеркало з цинку, що його площа стояла прямо до двосїчної кута, який замикали обі площі симетрії. Тоді виступали в резонаторі искри (кут впаданя був проте рівний куту відбитя), котрі гинули, наколи Hertz обернув зеркало плоске о 15° довкола оси прямовісної.

г) Заломане. Щоби вкрити заломане лучів сили електричної, уживав Hertz призмату асфальтового о висоті 1·5 m, а о куті

ломлячїм 30°; призмат стояв в віддаленю 2·6 m від ексциатора. Тодї давав резонатор найбільші искри, коли його площа симетриї творила з площею симетриї ексциатора кут 22°. Що переносене дробань (луча) відбувало ся виключно через призмат, доказав Hertz в сей спосіб, що некри гинули, наколи перед або за призматом уставив на дорозі луча кусень бляхи металевої, від якої — як знаєм — луч ся відбиває.

Теория Poyting'a i Heaviside'a.

Сї досьвіди Hertz'a відкрили та доказали філястий характер дробань електричних, отже виказали анальоїю між явищами електричними та оптичними. Но Hertz пішов еше дальше в своїх розслїдах, бо доказав правдивість теорії Poynting'a та Heaviside'a, яка відносить ся до поступу енергії електричної, коли дробаня є дуже скорї.

1. Представимо тепер теорію тих двох учених англійських, а дальше представимо дослїди Hertz'a, які доказують, що та теорія є правдива. Poynting i O. Heaviside поставили свою теорію в роках 1884 i 1892, а основали єї на рівнянях Maxwell'a.¹⁾ I так Poynting поставив слїдуюче твердження:²⁾

В поли електромагнетичнім порушає ся енергія в якійсь точці просторони прямо до поверхні, яка заключає в собі лїнії сили магнетичної та електричної, що переходять через ту точку; беззглядна вартість енергії, яка переходить через одиницю тої поверхні в одній секундї, є $\frac{1}{4\pi}$ -ою добутка з натуг обох сил (електричної та магнетичної) та $\sinus'u$ кута замкненого через обї ті сили.

Твердження се докажемо тепер та виведемо з нього заключеня.

Як знаєм, ціла енергія поля є:

$$T + W = \iiint \left(\frac{\mu}{8\pi} \Sigma z^2 + \frac{2\pi}{K} \Sigma f^2 \right) dx dy dz,$$

а так як:

$$f = \frac{K}{4\pi} P, \quad \text{то:}$$

¹⁾ Гл. Poincaré loc. cit. II. 207 et sqts.

²⁾ Поп. Föppl: Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Electricität ст. 301.

$$T + W = \frac{1}{8\pi} \int \int \int (\mu \Sigma z^2 + K \Sigma P^2) dx dy dz,$$

де перший вираз представляє величину енергії електромагнетної, другий енергію електростатичну.

Наколи в скількості або розміщеню енергії настане зміна, то величина сеї зміни в одиниці часу буде:

$$\frac{d(T+W)}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int \int \int \left(\mu \Sigma z \frac{dz}{dt} + K \Sigma P \frac{dP}{dt} \right) dx dy dz. \quad 1)$$

Но з рівнянь IX. слідує, що:

$$\frac{K}{4\pi} \frac{dP}{dt} = u - CP = u - p, \quad p = CP,$$

а даліше:

$$P = c \frac{dy}{dt} - b \frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = cy' - bz' + P',$$

отже другий вираз правої сторони в 1) буде:

$$\frac{K}{4\pi} \int \int \int \Sigma P \frac{dP}{dt} dx dy dz = \int \int \int \left[\Sigma (cy' - bz') u + \Sigma P' u - \Sigma P p \right] dx dy dz.$$

Наколи узглядимо рівняня II., дістанемо по перерібках:

$$\begin{aligned} \frac{K}{4\pi} \int \int \int \Sigma P \frac{dP}{dt} dx dy dz + \int \int \int \Sigma X x' dx dy dz + \int \int \int \Sigma P p dx dy dz = \\ = \frac{1}{4\pi} \int \int \int \Sigma \left(R' \frac{\partial \beta}{\partial x} - Q' \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

А звіден, наколи введемо інтеграл поверхневий, де прям елемента поверхні $d\omega$ має напрямні $\cosinus'u$ l, m, n , дістанемо по перетворенях рівняне 1) в видї:

$$\begin{aligned} \frac{K}{4\pi} \int \int \int \Sigma P \frac{dP}{dt} dx dy dz + \frac{\mu}{4\pi} \int \int \int \Sigma z \frac{da}{dt} dx dy dz + \int \int \int X x' dx dy dz + \\ + \int \int \int \Sigma P p dx dy dz = \frac{1}{4\pi} \int \Sigma l (R' \beta - Q' \gamma) d\omega. \quad 2) \end{aligned}$$

В тім рівняню представляє:

1. вираз по лівій стороні зрієт енергії електростатичної на секунду
2. " " " " " " " електромагнетної " "
3. " " " " роботу сил електродинамічних " " (т. є. енергію тока, перетворену в рух).
4. " " " " зрієт тепла Joule'a,¹⁾ енергії хемічної etc.

¹⁾ бо після права Joule'a скількість тепла, яка повстає в часї dt в провіднику є $\frac{1}{C} dt \int \int \int \Sigma u^2 dx dy dz$, а $p = CP$, $u = CP$ (для провідників); глянь рівняня VI. Пор. Poincaré loc. cit. том I.

Ціла ліва сторона представляє проте цілий зріст енергії на секунду в внутрі замкнутої поверхні. Енергія та переходить через поверхню, а при тім кожний елемент поверхні доставляє зросту енергії, вираженого через праву сторону рівняня 2). Ту праву сторону перетворимо.

Найже вислідна з P', Q', R' буде E' , а вислідна з α, β, γ буде H , а дальше най напрямні вислідних E' і H твоять кут ϑ , то положенє площі, яка заключає в собі E' і H , є представлене — як се є очевидне — через рівняне:

$$L = \frac{R'\beta - Q'\gamma}{E'H \sin \vartheta},$$

де L, M, N є *cosinus*'u напрямні пряму тої площі. Тепер права сторона рівняня 2) перейде на:

$$-\frac{1}{4\pi} \int E'H \sin \vartheta (Ll + Mm + Nn) d\omega.$$

Сей зріст є maximum, коли:

$$Ll + Mm + Nn = 1,$$

т. є. енергія пливе прямовісно до площі ($E'H$) і має для елемента $d\omega$ вартість $E'H \sin \vartheta$, згідно з теорією Poynting'a.

Всюди проте, де рівночасно виступають сили магнетні та електромоторичні, пливе енергія по кривизнях, які походять з перетинання ся електромагнетних та електромоторичних поверхнній позему.

Після теорії Poynting'a переносять проте енергію не провідники, но противно діелектрики. Енергія входить в усіх случаях з внї через поверхню до провідників і то менше або більше глибоко після того, чи маємо до діла з токами сталими, чи з токами, що скорше або помалійше ся зміняють, та там перетворюєсь в тепло. При дуже скорих токах перемінних (дрóганя Hertz'a) енергія остає зовсім на верхній, а в середині провідників є повний супокій.

2. Що теория Poynting'a є вповні правдива, доказав рішучо Hertz в слідуючий спосіб.

В комбінації знарядів, що їх уживав до міреня скорости поступу филь електричних в дротах, зробив Hertz в довгім провіднім дроті перерву, що давала искру на 6 mm. Перерву ту ословив кліттинкою в виді валця (фіг. X.), яка була зложена з двох плит металевих, полученных 24 тонькими дротиками, що були натягнені рівнобіжно до головного дрота так, щоби можна бачити ту перерву;



Fig. I.

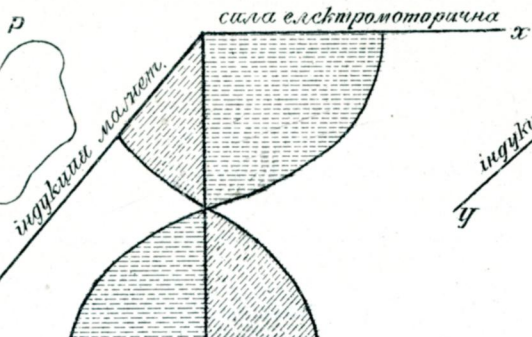


Fig. II.

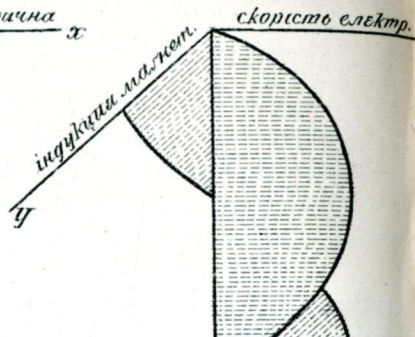


Fig. III.

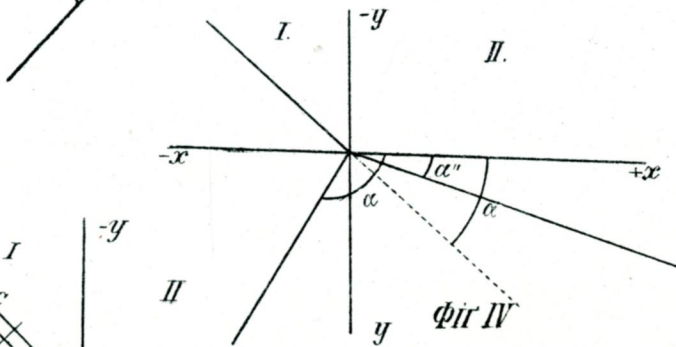


Fig. IV.

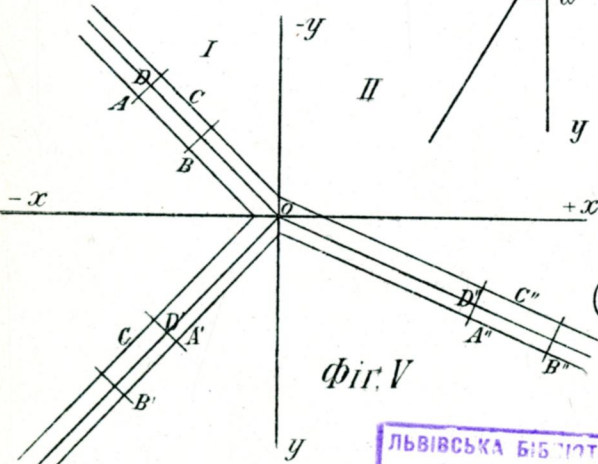


Fig. V.

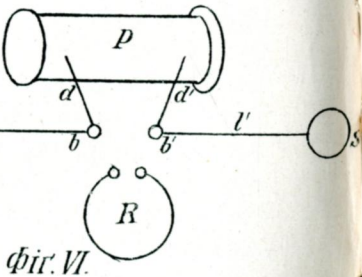


Fig. VI.

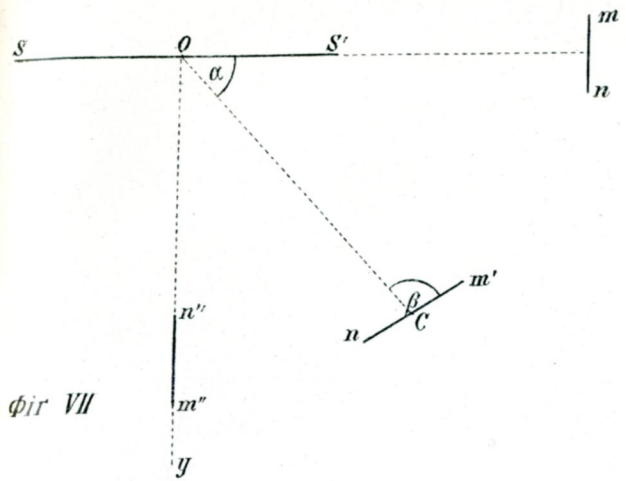


Fig. VII.

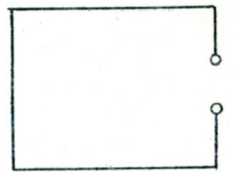


Fig. IX.

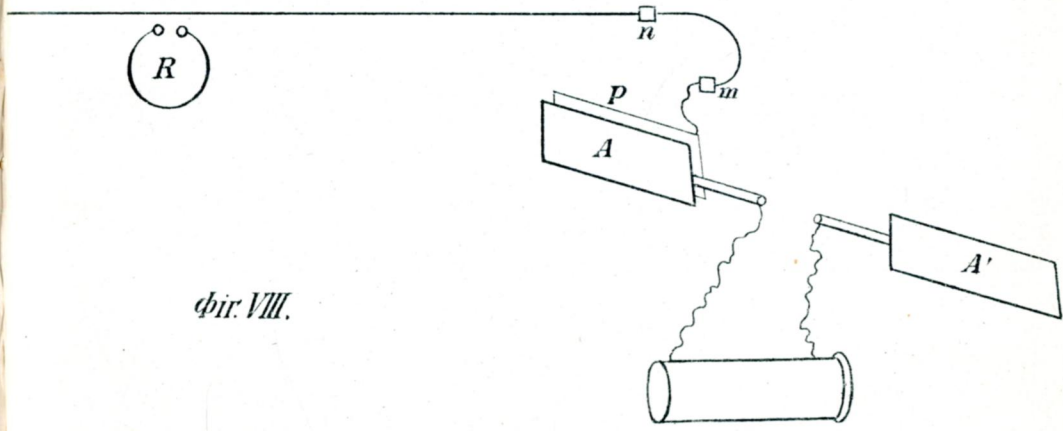


Fig. VIII.

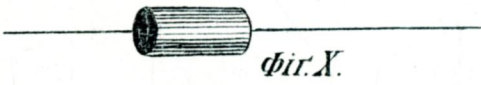


Fig. X.

ЛВІВСЬКА БІБЛІОТЕКА
АН УРСР
№ II

ЛВІВСЬКА БІБЛІОТЕКА
АН УРСР
№ II

тоді іскри зовсім не виступали, хоча опір клітки був більший, чим опір провідного дрота. Наколи місто 24 дротів було їх всього 8, іскри мали довгість 0.1 mm, наколи був лиш один дротик, довгість іскор була 3 mm.

Щоби розслідити, яку грубість має мати дрот натягнений на клітинці, щоби енергія електрична не могла увійти до її середини, ізольовав Hertz плитку сеї клітинки, відвернену від ексцигатора в сей спосіб, що вирізав в тій плиточці округлий отвір (так що плитка не дотикала дрота); в сей отвір заложив рурку скляну, довгу так на 1.5 m, так що головний дріт провідний ішов через ту рурку. Та скляна рурка була осмотрена в покривку металеву о ріжній грубости; покрива та лучила ся одним кінцем з плиткою клітинки, другим кінцем з провідним дротом. Тоді в перерві дрота не виступали іскри. Наколи однак зірвано контакт між сею металевою покривою а провідним дротом, тоді виступали іскри на доказ, що енергія електрична через отвертий тепер кінець рурки скляної входила до її середини. Донерва як грубість покриви металевої була менша чим 0.01 mm, виступали іскри в перерві, хоча був контакт між покривою металевою а провідним дротом. Проте при дуже скорих дробанях вже в глибині 0.01 mm під верхнею в провіднім дроті не ма зовсім руху.

Короткий перегляд розслідів над філями електричними.

1. Появленє робіт Hertz'a, що так рішучо виказали характер дробаючий заколотів електричних, а тим самим ствердили правдивість теорії Maxwell'a, викликали серед ученого світа велике заінтересованє. Нічо отже дивного, що много фізиків кинуло ся до розслідженя явищ, відкритих Hertz'ом, а хоча ті розсліди мали з початку майже виключно характер якостний, то однак в засаді доказали они правдивість поглядів Hertz'a. Перші розсліди мали ціль ствердити досліди Hertz'a, засада їх була проте така, як в роботах Hertz'a, а ріжнили ся они лиш деякими модифікациями самої методи. Очевидно, що ті роботи не лиш потвердили погляди Hertz'a, но відкрили еще много інтересних фактів.

Не наша є річ представляти подрібно веї ті роботи, ми подамо лиш характеристику деяких головнійших.

Важні є в першій мірі роботи Wiedemann'a та Ebert'a, а пізнійше Hallwachs'a, що займають ся впливом світла на електричні

виладованя. З розслідів їх слїдує, що тіла електризовані від'ємно тратять під впливом сьвітла свій набій скорше, як серед звичайних умов, а крім сього роботи ті доказали, що через освітлене на плитах металевих можна викликати набій додатний. Є се неначе „pendant“ до електромагнетної теорії сьвітла: електричне пересу-нене викликає сьвітло, сьвітло викликає дробаня електричні.

Як сказано, перші автори модифікували лиш досьвіди Hertz'a. І так Dragoumis заступив резонатор рурками Geissler'a, Bartonick лямшкою жаровою з переломаним дротиком, Ritter удом жаби і т. п. Ту згадати треба Lodge'a, що збирав филї електричні при помочи сочки зі смоли земної. Всі ті роботи потвердили лиш погляд, що заколоти електричні є поперечні та дробаючі.

2. Многократний відзвук. Дуже важною була робота Sarasin'a і de la Rive'a, що появилася в р. 1890 в Archive de Genève.¹⁾ При розслїдах інтерференції филь електричних постерегли они, що довгість филь залежить від розмірів резонатора, а не залежить майже зовсім від ексцилятора. Явище то назвали они многократним відзвуком та старали ся пояснити його ось як: Ексцилятор не викликає ані одного дробаня о точно означенім навороті, ані означеного ряду ріжних гармонійних тонів горішних; його спектр — як би можна сказати — не складавби ся ані з одної одинокої лїнії (як пр. спектр соду), ані з цілого ряду віддільних лївій, лиш бувби се тягкий сніпок з неясними берегами. Резонатор з усіх тих дробань, які висилає ексцилятор, скріпляв би лиш ті, які згоджують ся з його наворотом, отже розміри резонатора впливалиби в сей спосіб на довжінв филь.

Сей спосіб толкованя відкинули Hertz та Poincaré, що подає иньше пояснене; спосіб толкованя того женіяльного математика подамо ось тепер.

При дробаню, що його висилає ексцилятор, треба після Poincaré відріжнити дві річи: наворот та льогаритмічний декремент. Poincaré приймає, що сей декремент є більший для ексцилятора, чим для резонатора. Натуга дробань, що виходять з ексцилятора, буде проте меншати скорше, так що дробаня ті будуть короткотревалі та мало спосібні до інтерференції. Тимчасом з дробанями резонатора справа є иньша; іменно в резонаторі будить ексцилятор дробаня, накопи їх навороту є мало ріжні. Резонатор починає дробати тоді, як

¹⁾ Гл. Poincaré loc. cit. II. 201 et sqts.

ексцигатор буде уже в супокою, але він буде дробгати з своім власним наворотом і як раз достережи можеи ті дробганя, бо они є довшетревалі, отже спосібні до інтерференції.

Се толкованє поясняє еше Poincaré слідуючими розелідами аналігичними.

Дробганє, яке слабе в якийнебудь спосіб, можна всегда пред- ставити рівнанєм рїжничковим другого ряду :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\alpha \frac{dy}{dt} + \beta y = 0,$$

де y є змінна відповідно вибрана, t час, α , β сталі.

Загальним інтегралом того рівнаня є функция :

$$y = e^{-\alpha t} (A \cos mt + B \sin mt),$$

де: $m = \sqrt{\beta - \alpha^2}$; m є проте наворотом, α декрементом. Наколи α можна опустити (приймеи, що се вільно зробити для резонатора), то тоді :

$$\alpha = 0, \quad \beta = m^2, \quad \text{а тоді:}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + m^2y = 0 \quad 1)$$

звідси інтеграл :

$$y = C \cos mt + D \sin mt.$$

Наколи тепер на дробганя резонатора впливати муь дробганя, що виходять з ексцигатора, для якого декремент та наворот залежать від якихсь двох чисел a і n , то тоді — як приймеи Poincaré :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + m^2y = Ae^{-at} \cos nt + Be^{-at} \sin nt;$$

через інтегрованє дістанемо :

$$y = A_1 e^{-at} \cos nt + B_1 e^{-at} \sin nt + C \cos mt + D \sin mt \quad 2)$$

де сочинники A_1 і B_1 сповняють рівнаня :

$$\left. \begin{aligned} A_1 (m^2 + a^2 - n^2) - 2anB_1 &= A \\ B_1 (m^2 + a^2 - n^2) + 2anA_1 &= B \end{aligned} \right\} \quad 3)$$

Приймїи, що на початку часу $y \Big|_{t=0} = \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = 0$, то тоді з 2)

$$A_1 + C = 0;$$

а наколи зрїжничкуємо 2) дістанемо під умовою $y \Big|_{t=0} = \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = 0$:

$$-aA_1 + B_1 n + Dm = 0,$$

По довшім часі гинуть усі вирази, що мають e^{-at} , остає:

$$y = C \cos mt + D \sin mt;$$

розмах (амплітуда) дробань буде пропорціональний до $\sqrt{C^2 + D^2}$, отже після 1) буде залежати просто від резонатора, як се і досвід показує. Наколи a є дуже мале, а m мало різнить ся від n , то послідне вираженє мало буде ся різнити від:

$$\sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{(m^2 + a^2 - n^2)^2 + 4a^2n^2}} \quad (\text{на основі 3}).$$

Наколи розмах дробаня, яке походить від ексцитатора (т. є. $\sqrt{A^2 + B^2}$) є сталий, то розмах вислідного дробаня є відворотно пропорціяльний до $\sqrt{(m^2 + a^2 - n^2)^2 + 4a^2n^2}$. Наколи m є змінне, то корінь є minimum, отже розмах вислідного дробаня maximum, для $m^2 = n^2 - a^2$. То minimum кореня (отже maximum розмаху) відповідає гармонійному резонаторови. Наколи $a=0$, то minimum кореня є 0, отже розмах $=\infty$, т. є. гармонійний резонатор має тоді — як каже Hertz — тисячі рази сильнійші дробаня, як всі прочі резонатори.

Таке толкованє многократного відзвука подає Poincaré, однак він не каже, мовби се поясненє було вже вповні правдиве, так як kwestія та мусить покищо оставати еще отверта. — На се поясненє Poincaré годить ся вповні і Hertz.

3. Коли стверджено якостно характер дробаючий заколотів електричних, висунулась гадка глядіти метод до помірів на скількість (Quantität) дробань в провіднику другоряднім. Очевидно, що того рода поміри є дуже тяжкі, так як дробаня електричні є за слабі, щоби в перебігу через дроти могли викликати діланя, якіби можна мірити. В опис ріжних метод не будемо ту входить, нагадаємо лиш імена Rubens'a і Ritter'a, що до помірів уживали больо-метру,¹⁾ дальше Wiedemann'a, Ebert'a, Colson'a, що уживали телефону, а вкінци Klemenčica, що уживав термоелементу з Pt і Ni, та Bjerkes'a, що при помірах уживав електрометру квадрантового.

Поміри, які вказують основні закони Maxwell'a, що ся відносять до скорости світла та електричности, як і звязь між сталою діелектричною та сочинником заломаня, подали ми уже передше. Тут лише скажемо, що новійші розсліди вказали згідність скоростий филь світляних та електричних, і се не лиш для филь поступаючих в діелектриках, но і для филь поступаючих в провідниках.²⁾

¹⁾ Гл. Poincaré loc. cit. том II.

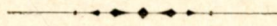
²⁾ Отже де в чім відмінно від вислідів Hertz'a.

Поміри роблено при помочи комбінації дротів, що єї впровадив Lecher, а з помірив тих слїдує, що скорість поступу филь електричних в провідниках містить ся в границях між $2 \cdot 97 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ (Blondlot) та $3 \cdot 009 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ (Pellat), що се є проте величини того самого ряду, що скорість світла. Та дивна на перший погляд обставина, що скорість поступу не залежить від природи провідника, а є схожа зі скоростію світла і скоростію филь електричних в воздуху, етаєв від разу ясна, наколи приймем теорію Poynting'a, що єї потвердив досьвідами Hertz, а опісля Waitz, що енергія електрична уєїх дроговань розходить ся не в дроті, но по дроті, отже через діелектрик.

Очевидна є річ, що сей короткий нарис не представляє навіть в приближеню вєїх робіт, які послїдними часами появились в єїй квестіі. Роботи ті множать ся раз у раз і цїлий ряд учених звернув ся на нове поле дослїдів, яке показали досьвіди Hertz'a. Між ними визначуєсь норвежский фізик Bjerknæs, що його роботи над уставанем та абсорбцією дроговань електричних та многократним відзвуком є клясичні, дальше Klemenčič, Wiedemann, Ebert, Birkenland і и., а теоретично розвинули нову теорію Cohn, Lodge, Poincaré, а послїдними часами Heaviside, що за приміром Maxwell'a впровадив до теорії филь електричних теорію кватерніонів.¹⁾

Годї нам нинї говорити вже про значіне тих уєїх робіт та змагань, годї нам предсказати мету, до якої дійдемо в дальшїм розвою тих вєїляких метод та теорій, но се можемо сказати, що Maxwell своєю епохальною теорією електричности та світла, а Hertz епохальними досьвідами показали фізикам нові царини розслїдів, царини, що нам — як сього мож надїятись — відкриють много інтересних, незвісних покищо проявів природи та кинуть нове світло на явища, які вже нинї є розслїжені, а може й відкриють бодай в части їх причини.

Тернопіль в маю 1897. р.



¹⁾ Пор. Föppl: loc. cit.


Додатки до термінології електричної та оптичної.

Азимут Azimuth — ампер Ampère — неподобний isotrop¹⁾ — бігун одиничний Einheitspol — бляшка магнетна magnetische Schale — боліометер Bolometer — виладованє, Entladung — відбите Reflexion — відзвук Resonanz — вісь оптична optische Axe — вольт Volt — діелектрик, ізолятор Dielectricum, Isolator — діаманетний diamagnetisch — достроїти stimmen — електричність Elektrizität — електрода Elektrode — електроліт Elektrolyt — електроліза Elektrolyse — електромагнетизм Elektromagnetismus — електрометр Elektrometer — електрометр безглядний absolutes Elektrometer — електрометр квадрантовий Quadrantenelektrometer — електрична спроможність проводу elektrische Leitungsfähigkeit — елемент (звено) гальванічний galvanisches Element — заглибина Vertiefung — заколот Störung — заломанє, переломанє Brechung — заломанє подвійне Doppelbrechung — заломанє стіжкове konische Refraction — йон Ion — індукція Induction — індукція електро-статична elektrostatische Induction (Influenz) — інтерференція Interferenz — кондензатор Condensator — кульомб Coulomb — кут від-

¹⁾ *Примітка.* В „Матеріялах до фіз. термін.“ Записки тов. Шевч. том XI. є подані хибні терміни на слово „isotrop“ та „anisotrop“. На се звернув я вже увагу в нинішній роботі, а тепер звертаю увагу еще другий раз; оба ті терміни треба справити так, як тут подано.

битя Reflexionswinkel — кут впаданя Einfallswinkel — кут ломлячий (в призмі) Brechungswinkel — кут поляризації Polarisationswinkel — лінія сил Kraftlinie — луч світла Lichtstrahl — луч відбитий reflectirter Strahl — луч впадаючий einfallender Strahl — луч заломаний gebrochener Strahl — луч споларизований polarisirter Strahl — луч звичайний ordentlicher Strahl — луч надзвичайний ausserordentlicher Strahl — лампа жарова Glühlichtlampe — магнет Magnet — магнетизм Magnetismus — магнетний magnetisch — магнетна спроможність індукційна (социник провиканя) magnetisches Inductionsvermögen (Permeabilitätsconstante) — момент електромагнетний elektromagnetisches Moment — набій, наряд Ladung — наворот Periode — наворотний periodisch — натуга Intensität — непрозорий undurchsichtig — нестисний incompressibil — одиниця електростатична (електромагнетна) elektrostatische (elektromagnetische) Einheit — ом Ohm — опір Widerstand — оптика Optik — парамагнетний paramagnetisch — пересуєне електричне — elektrische Verschiebung — площа впаданя Einfallsebene — площа огнищева Brennebene — площа розділяюча Grenzebene — поємність Capacität — поле електричне (магнетне) elektrisches (magnetisches) Feld — поляризация Polarisation — порожня Leere — поступ Fortschreiten — потенціал Potential — провід Leitung — провідник, злучник (кондуктор) Leiter — прозорий durchsichtig — призма Prisma — прониканє Permeabilität — прям впаданя Einfallslath — резонатор Resonator — різниця потенціалів Potentialdifferenz — розчин Lösung — самопотенціал Selbstpotential — сила магнетна (електродинамічна) magnetische (elektrodynamische) Kraft — скрученє площі поляризації Drehung der Polarisationsebene — сніпіб лучів Strahlenbündel — социник заломаня (беззглядний) Brechungsexponent (absoluter) — сочка Linse — спектр Spectrum — спроможність питома діелектрика (стала діелектрична) spezifisches Vermögen des Dielectricums (Dielectricitätsconstante) — стьтний anisotrop — степенє намагнесованя Magnetisirungsintensität (M. stärke) — теорія впливу Emanationstheorie — теорія фильованя Undulationstheorie — термічна спроможність проводу termisches Leitungsvermögen — термоелемент Thermoelement — течь індукційна Inductionsfluidum — ток Strom — ток замкнений geschlossener Strom — ток індукований (індукційний) inducirter Strom — ток коловий Kreisstrom — ток отвертий ungeschlossener Strom — ток пересуєненя Verschiebungsstrom — ток перемінний Wechselstrom — ток проводу Leitungsstrom — тон го-

рішній Obertrom — угване світла Beugung des Lichtes — узол
Knoten — фарад Farad — филя впадаюча einfallende Welle —
филя електрична elektrische Welle — филя світляна (світільна)
Lichtwelle — цівка Spule — ясність Helligkeit — якостний quali-
tativ.



Бактериологічні вислідки посмертні а диягноза клінічна недуг інфекційних.

(Тимчасове донесене).

Заслуги бактериологів взагалі а спеціяльно в медицині — безперечно не аби-які. Они своїми просто геніяльними слідженнями відкрили і унаочнили нам цілий незваний перед тим чудесний, новий світ животин, нове царство дрібоньких творів природи, що займають все і всюди ся находять. Тайну їх життя, розродження і прочих функцій фізіологічних старають ся учені бактериологи не віднині видерти природі. Призирають ся їх формі, величині, рухам під мікроскопом, культурі мікроорганізмів на ріжнородних підложах (сировать крови, агар, буллон, желатина, картоплі і т. д.), дають в приближеню образ, як скоро і в якій скількості розвивають ся они, а цілий арсенал найрозмаїтших фарб підпомагає слідителів там, де иньшими методами або не можливо, або не так точно вказати мож присутність бактерій (прутень туберкулічний Коха, гонококи Найсера). Розслідам бактериологічним завдячуємо в значній мірі об'явлене процесів ферментаційних, гнитя і всякого розкладу тіл органічних. Бактериологія научила нас винайти навіть між мікробами-галапасами твори пожиточні, ба нераз конечні до життя виших створів — чоловіка передовсім — а фізіологія тіла людского від бактериологів переняла іпотезу: що тепер уважаєсь майже вже за аксіом — бактерії беруть визначну коли не перемагаючу участь в травленю побраного корму і присвоєню єго через організм людський. Мало того, на науці бактериології почивають головні засади новішої гіієни, а доказана невидержимість мікробів на вишу теплоту або зимно, брак або надмір кисня і світла, їх

слаба відпорність на діланє kwasів, алькалій і всякого рода жручих сполук хемічних — поклала тверді підвалини під нову зовсім науку дезінфекції, антисептики, асептики, що таку вагу мають в нинішній хирургії, положенярстві. Дальше подали бактериольоги правила профіляктики на підставі пороблених досвідчень, відки і якими дорогами дістають ся заразні хоробові до організму людського.

Они вконець підняли за сьмілу задачу, довести, що причиною таки всіх недуг є не що иньше, як бактерії найрозличнійші. Годї не признати їм навіть успіху в тім напрямі. При теперішних уліпшених способах слідження, оден учений поперед другого стараєсь викрити і сьвіту показати того виновника хороби. Єли ще в якій хоробі не нашли бактериольоги доси одвітного заразня, то єго ся там догадують і надійють ся з часом при ще точнійшій улучшеню теперішних метод, взглядно через винайденє нових — викрити властивого споводника хороби і заздальгідь диктують від себе передо всім інтервістам поділ недуг після етиольогії на основі бактериольогічній. Не дасть ся заперечити, що велику поміч і підпору при розпізнаню многих недуг мають клініцисти в дослідах бактериольогічних. Нераз прим. довго не мож на певне розпізнати туберкульози легких, фізикальні обяви невизразні лишають лікаря в сумніві; винайденє прутнів (бацилів) Коха справу від разу рішає. А що єсть певнійшим доказом загаженя зимохою, як присутність амеб в тільцях сьвіжої крові під дрібновидом? Всі ті однак розеліди бактериольогічні вимагають великого заходу праці, вправи, терпеливости, а при конечности многих приладів і відчинників хемічних, якими упосажуєсь лябораторню хемічно-бактериольогічну, майже не можливі до переведеня кождому поодинокому, практичному лікарєви. Тай мимо того всеє не все удають ся они, як прим. в тифі кишковім за життя хорого. В тій недузї заатаковані суть межі иньшими органами витворюючі кров, селезінка, желези, сама кров хоробово змішана а мимо того майже ніколи не удало ся викрити прутня Еберта в крові за життя недужого.

Рівнож велике значінє првнесують бактериольоги розелідам бактериольогічним посмертним. Вигодують з якогось то органу мертвого тіла чоловічого (з кишок, селезінки, печінки і т. д.) певні мікроби, хотьби прим. тифові, ронні, *bacterium coli* чи які другі от і мають готову диягнозу недуги, на яку відносний чоловік помер. Тут і попадають бактериольоги часто в конфлікт з клініцистами що до властивого розпізнаня і осудженя хороба. Після них не може організм людский занемочи без уділу бактерий. Нічим для них

клівничий пробіг недуги, різні важні і дрібніші об'яви, що таку ва- ртість мають для клівниста, без значіння для них стан сил відносної одиниці і умове, серед яких хорий проживав — они *stricte* відді- люють хворобу взглядно мікробів-споводників єї від організму недужо- го, для них міродайною єсть приеутність заразиїв, після котрих недугу іменують. Що за життя недужого не все приходять до таких самих результатів, приисують в головній мірі недостаточним поки що способам слідження. Дальше свої твердження скріпляють еще тим, що виприсненем годівлі викритих при автосиї заразиїв, викликають занедужанє або бодай відповідну реакцію на експериментальних звїрятах.

Тай не тільки в діягнозі хвороб зуміли придбати собі бакте- риології таку важну участь; они взяли і за друге діло, не менше важний діл медицини, т. е. терапію. Початок добрий зробив Пастер, а тепер попри сьвітлі результати єго методи лїчної, хіба не мож замовчати про успіхи терапії апітоксеною Берінга-Ру-а, щоб о нинь- ших пробах в тім наурямі не згадувати. Тож нема чому дивува- тись, що бактериології піднеслись до такого значіння на полі наук природи, що заволоділи медициною, патологією експериментальною і з гордостю певноти заповідають, що до них належить в будуч- ности розвязанє многих ще проблемів науки лїкарско-природописеної. Тепер вже годї не то лїкареви обходитись без науки бактериології, не слїдити дальшого єї розвою і не користуватись єї винаходками, відкриттями — нинї вже стало модою, може навіть потребою, кож- дому чоловікови з інтелігенції, бодай дещо знати про ті невидимі а часто так страшні бактерії, і дбати про заведенє обовязкової науки ігієни в школах публичних. Насупроти наведених тверджень бакте- риологів в деяких случаях досьвідченя випадають инакше. І так, коли бактериології удержують, що рошіня викликати можуть лише спеціальні бактерії імено сукровичники (дїплинок, *streptococcus* і грестиннок, *staphylococcus*), доведено (Grawitz, Kreibom і Rosenbach, Christmas, Steinhaus, Kaufmann, Roger і Bonnet), що може оно по- встати і без удїлу тих мікробів, чисто впливами лише хемічними. Годї рівнож вдоволитись, чому поветає досить часто у людей запа- ленє рошне колїна, лїктя по ударі механїчнім, мимо того, що нема найменшої ранки поверхної — таким об'ясненєм: В тілі людскім, особливо в проводі кормовім проживає множество розличних мі- кробів. Як лише найдесь в організмі якеєь місце менше опірне, не зовсім здорове (*locus minoris resistentiae*), зараз мандрують туди бактерії з лїмфою чи кровю і осїдають там. Через удар отже взглядно ушкоджене механїчне має поветати *locus minoris resistentiae*,

а се вже дає добру нагоду розвиватись мікроорганізмам. Дальше переконали ся патологіи, що запаленє легких спрощають не лише специфічні пневмококи Fränkla, Weichselbauma, Friedländera, але і инші бактерії можуть викликати такі самі зміни патологічні в ткани легких. Отже після таких досвідчень не оправдувалоби ся твердженє бактериологіів, що кожда хвороба організму людського має свого окремого, специфічного заразця. Дальше ще більше захитує тоє їх правило виказувана часто присутність мікроорганізмів ропних на мікдаликах недужих на гарицю (scarlatina), дифтерію, що прецінь мають свої окремі бацілі. В острім ревматизмі суставнім (два) нераз приходить до ропня, а прецінь цілий пробіг сеї недуги такий характеристичний, такий відмінний від руаємі-ї чи sepsis, що хіба мусить бути якийсь инший галапас мікроб, споводник ревматизму а не strepto- і staphylococcus. Хоч суть знов патологіи, що за причину ревматизму уважають коки ропні, лише змодифіковані, менше розвинені, не маючі такої сили жизненної (viruleur) коли знов у дифтерії, гариці, тифі кишковім (де приходить нераз до зропня желез зачеревних, або ропного запаленя уха) видять мішану інфекцію лише, чим покривають твердженє бактериологіів.

Цілком відмінної є гадки Міллер а за ним Хвостек. Іменно з натиском висказує Міллер свій погляд, що тоті самі бактерії можуть викликати ріжні зміни патологічні, ріжні хвороби залежно від рода організму звіриноного, дальше від розличних тканей того самого звіряти. Приписують отже тканям організму даного звіряти сеї головний „специфічний“ вплив на повстанє недуги. В доказ того наводить Хвостек примір, де бактерії ропні спрощають ропне запаленє шпіку кістного — osteomyelitis — а тоті самі мікроорганізми перенесені на окістницю, витворюють лише запаленє окістниці сироватне (periostitis serosa). В той сам спосіб толкують процеси ропні в пробігу тифу черевного, рожі, чим сильно оспорують правдивість твердження о специфічнім діланю бактерий. Деякі інтерністи (Тельг) ідуть ще дальше і не вагають ся висказати, що тоті самі бактерії через ріжні впливи організму звіриноного, взглядно людского, підлягають ріжним переінам і викликати можуть справи патологічні, що виступають під образом розличних недуг. Ба — суть навіть учені (Бухнер), що прямо заперечують участи бактерий, прим. в ферментації, приписуючи їх чисто процесам хемічним, тай відмовляють (Тельг) мікроорганізмам

¹⁾ Chvostek Wiener klinische Wochenschrift Nr 49, 1896.

виключне викликане якоїсь хвороби уважаючи їх присутність в організмі лише за річ побічну, випадкову, а за властиву правдоподібну причину недуги вважають ушкоджене, некрозу певного числа клітин в тканих організму наслідком якихсь незаних процесів хемічних, забурень в правильній перемінї матерії, цілковито без участі мікробів.

Нюерре¹⁾ бачить рішучо причину повставаня недуг в самих тканих і соках організму звіриногo без участі бактерій під впливом ріжних шкідливих моментів. Се вже давнїйше експериментами старавсь довести Rossbach,²⁾ що за вприсненем папайотини звіряти знаходив в його крові мікроорганізми. Wyssokowitsch³⁾ виказав, що вприсненем ферментів під шкіру, або в жилу так ослабляє відпорність організму на бактерії, що они місто вигинути і не бути шкідливими — як то є звичайно — розмножились що раз численнїйше. Gottstein⁴⁾ убивав морскі свинки (морщаки) курячою холерою, коли їм рівночасно вприснув отруї в маленьких дозах, не дуже шкідливих, коли вприснене самої культури холери курячої в нічїм звіряткам не зашкодило. Загально знаве також досвідчене з карміном, котрого вприснене крілїковнї спровадило у него туберкульозу. Взагалї всяке занедужанє, слабшу відпорність на інфекцію організму звіриногo, взаглядно людєкого спроваджує гіршїй стан відживленя, голод, утрата крові, утрата води, надмірна праця, зимно.

Пастер а оїсїля Ваїнер потрапили кури заразити карбункулом лише простим остиуджуванєм. До тих самих результатів дійшов Савченко, Ліпарі. В найновїйшїм часї займав ся тим питанєм Lode⁵⁾ і вповнї потверджує погляди наведених авторів, кажучи, що охолодженє організму чи то тревале чи хвилеве прискорює і улєкшує інфекцію.

Вконець і впливи психічні не без значїня на стан відпорности тіла чоловіка. Кілько то разів особи по стратї дорогих членів родини попадають з жалю і смутку в тиф кишковий, запалене мозку. Так само страх і гризота бувають нераз причиною тяжкої інфекційної хвороби (холера).

¹⁾ Huelpe: Naturwissenschaftliche Einführung in die Bacteriologie. Wiesbaden 1896.

²⁾ Rossbach: Centrallblatt für die Medicin. Wissenschaft. 1882.

³⁾ Wyssokowitsch: Deutsche medicinische Wochenschrift. 1890, Nr. 24.

⁴⁾ Gottstein: Deutsche medicinische Wochenschrift. 1890, Nr. 24.

⁵⁾ Lode: Archiv für Hygiene. 1897.

В останніх місяцях захитана досить сильно етіологія тифу черевного досвідченнями Val de Gras'a, що найшов прутні Еберта-Гафкого в левкемії — далше Remlinger і Schneider,¹⁾ подибали тоті самі бацилі тифові в febris intermittens, gastroenteritis, а що найважнійше, пили воду занечишену мікробами тифу і не заразили ся. Супроти тих фактів ставлять приклонники бактериології іпотезу, що не всі люде мають диспозицію улячи інвазії заразнів і занедужати серед відповідних об'явів властивих якомусь роду мікробів. Взагалі справа тотя ціля дуже тепер неясна, погляди ріжних учених pro і contra такі ріжнородні і противорічні а мимо того, що число досвідчень в обох напрямках чим раз то більше, що раз то новими доказами, годї осудити на разї, який буде кінець тої борби межы бактериологіїю а хемією.

Згадано вже було, що бактериології на підставі вислїдків по смертних, виводять етіологію даної хвороби. Противлять ся тому клініцисти; так межы иньшими каже Ляйбе²⁾: „Знайденє мікробів на мерці залежить від процесу розкладового самого трупа, правдоподібним видаєсь, що мікроорганїзми, котрі подибуємо на многих частях тіла людского за житя, по смерті чоловіка без ушину розпросторюють ся по цілім організмі. Тому відповідні вислїдки на мощах мають лише малу вартість, хотьби виконати їх скоро після смерті, значить перед вступленєм гнитя і при захованю всіх мір осторожности“.

Розенбах³⁾ думає, що великої ваги до посмертних розслїдів крови не мож привязувати.

Beck⁴⁾ знаходив в трупах мікроорганїзми в ріжнім часї по смерті а походженє їх відносить до кишок.

Baumgarten⁵⁾ з нагоди правильного знаходженя грестинків (staphylococcus) в ямах ронних по смерті каже, що з великою резервою належить прийняти твердженє, будьто би образ розросту круплинок (коків) по смерті відповідав дійстному стану за житя. Те саме удержує він і о прутнях тифових.

Рівнож і Trombetta⁶⁾ не дуже радить довіряти вислїдкам бактериологічним по смерті, а то з причини, що під впливом бакте-

¹⁾ Annal de l'Institut. Pasteur N. 1. 1897.

²⁾ Leube: Zeitschrift für klinisch. Medicin III. pag. 233.

³⁾ Rosenbach: Mikroorganismen bei Wundinfectionem після Chvostek'a.

⁴⁾ Beck: Arbeiten aus dem pathologisch-anatomischen Institut. Tübingen 1891, після Chvostek'a.

⁵⁾ Baumgarten: Lehrbuch der Mykologie. Braunschweig 1890, після Chvostek'a.

⁶⁾ Trombetta: Centralblatt für Bacteriologie, 1891, II. pag. 664.

рий гнильних, виступають зміни в мертвім організмі і в наслідок того мож викрити в крові і ріжних частях тіла мікроорганізми, що з властивою хворобою не мають жадної звязи. Він стараєсь тому означити час і граніцію, коли починаєсь процес гнитя, взглядно, як довго вільна кров і пьнші органи від бактерій гнильних. Після него, зависить сесе від теплоти і величини звьїрати. При звичайній теплоті комнатній виступає гнить у миши по 19 годинах, у кріліків в 16 годин. Чим виша (до певної міри) теплота і чим більше звьїра, тим скорше виступає процес гнитя. Вирочім залежить се також від стану проводу кормового. Кров звичайно довше опираєсь гнитю.

Переважна часть авторів німецких (Rindfleisch, Zahn, Meissner, Hauser і др.) за правило почитує, що в здоровім організмі чоловічим жадних патогенічних мікробів за життя нема. Єлиж отже найдуть ся они по смерті в тканях організму, головно в крові, то заключують з сего, що були они вже там за життя, значить, що організм був хорий, а на потвердженє того приводять досьвідченя, будьто цілі, здорові стїни судин кровоносних, навіть кишок, не пропускають бактерій. Що найбільше скількість їх може по смерті збільшитись, але локалізация остає тотя сама, або иньшими словами, мікроби держать ся лише хорих органів тіла і нікуди віден не розходять ся.

У відповідь тому навести годить ся численні розвідки другьх авторів, котрим за життя хорих не удавалось, або лише дуже рідко викрити певні заразиї, а по смерті тих мали результати позитивні. Petruszky¹⁾ на 14 случаїв туберкульози легких найшов по смерті хорих в крові 8 разів цілинки (streptococci), а за життя в иньших знов 8 случаях сухот легких бачив лише оден раз. Frosch²⁾ на 14 випадків дифтерії найшов при автопсії прутні Лєфлера 10 разів, а за життя анї разу. Так само Смирнов³⁾ і много иньших. Отже слїдители сесї висказують гадку, що годї собі витолкувати присутність бактерій в організмі по смерті самим лише розмноженєм їх, мусять тут в гру входити і иньші причини, передовсім припускають, що з хорих органів тіла post mortem розпросторонюють ся заразиї ріжними дорогами по організмі. Більшої ще стїйности набирають їх погляди розвідами над bacterium colli. Галапас (паразит) сесї викритий Escherich-ом⁴⁾

¹⁾ Petruszky: Deutsche medicinische Wochenschrift, 1893, Nr. 14.

²⁾ Frosch: Zeitschrift für Hygiene XIII. після Chvostek'a.

³⁾ Smirnow: Diss. Petersburg 1889. Ref. Baumgartens Jahresb. 1889, після Chvostek'a.

⁴⁾ Escherich: Fortschr. des Medicin 1885, Nr. 16 і 17.

(1855) в кишках новородка, подибуєсь стало в кишці грубій чоловіка як здорового так і в недузї. Їму взагалі приписували з початку дуже малу pathogenitas; доперва Laruelle¹⁾ (1889) бачив в двох случаях peritonitis perforativa bacterium coli в exudat-ї. Їму також удалось вщипленем культури сего галапаса викликати на звїрятах peritonitis. Дальші розселїди патольогїв виказали, що мікроб сей може стати причиною острого запаленя кишок, ропнїв в печінці, а навіть послїдними часами підозрївають єго о викликанє тифу кишкового, а бодай о значну співучасть при тїй недузї. При здоровім станї проводу кормового має бути цілковито не шкїдливий, а набирає сили хороботворчої доперва серед якихєш ушкоджень стїн кишок.

Отже сей то мікроорганїзм знаходять патольогїв дуже часто в коротці по смерті в многих органах, як в печінці, сележїнці, почках, в случаях де не було і гадки о жадній інфекції, тим самим о евентуальній присутности їх вже за житя хорих серед тих органів. За условє переходу bacterium coli через стїну кишок подають Marfan,²⁾ Nann,³⁾ Marot,⁴⁾ Lesage,⁵⁾ стан хоробовий проводу кормового прим. сильні розвільненя, ulcera в наслїдок дисентерїї. Boenecken⁶⁾ удержує, що до переходу мікроорганїзмів не потреба навіть таких великих змін патольогїчних в структурї стїн кишок, вистарчить сильїйша іперемія (hyperaemia, перекровленє), застїй жильний, а Levin і Posner⁷⁾ знаходили bacterium coli на очеревнї по осторожнім перевязаню кишки відходової, в наслїдок чого кажуть, що і стїни цілковито здорового проводу кормового пропускаяють мікроорганїзми. Тото само твердят о стїнах судин кровопроводних Pernice-Scagliosi,⁸⁾ Biedl-Kraus,⁹⁾ а передовсїм Chvostek,¹⁰⁾ що по вирисненю культури галапасів (паразитів) до дорїг кровосних вже в 16 годин знаходив їх в течї сугастів.

Взагалї випадалоби з тих досвідчень, що мікроорганїзми подибуванї по смерті в розличних тканях тїла, в кровї — виходять

¹⁾ Laruelle: Cf. Baumgarten's Bakt. Jahresbericht 1889.

²⁾ Marfan: Rev. mens. des metod. de l'enfance, 1892, після Chvostek'a.

³⁾ Nann: " " " " " " " " " "

⁴⁾ Marot: Arch. de méd. experim. 1895, Nr. 7 pag. 25 " "

⁵⁾ Lesage і Macaique " " 1892, pag. 350 " "

⁶⁾ Boenecken: Virchows Archiv. Nr. 120 pag. 7.

⁷⁾ Levin і Posner: Berliner klinische Wochenschrift 1894 Nr. 32.

⁸⁾ Pernice Scagliosi: Deutsche medicinische Wochensch. 1892.

⁹⁾ Biedl. Kraus: Centralblatt für innere Med. 1896, Nr. 29

¹⁰⁾ Chvostek: Wiener klinische Wochenschrift 1896 Nr. 49.

головно з проводу кормового, правдоподібно також з міхурця жовчного. Розходилоб ся тепер ще о рішенє питаня, коли іменно мікроби ткани ті займають, коли опускають своє звичайне місце пробуваня. Після авторів німецьких не буває сесе навіть по смерти, бож они удержують, що бактерії ті по части були вже в тих тканях за житя, а по смерти лише їх скількість збільшилась. Інакше твердять французські автори, они розелідами своїми сплудють ся доказати, що мікроби дістають ся до сусідних органів і до крові ще за житя, в атонії. В тім напрямі працювали Wurtz і Hermann, Lesage і Mecaïque, Lion, Marfaud, Letienne, Gilbert і довели, що прим. *bacterium colli* найти мож зараз по смерти в селезені, печінці, почках і міхурці жовчним, куди дісталось оно з проводу кормового. Malvoг викривав вже в кілька годин після смерти бактерії в селезені і печінці мертвих тїл. Приняти таке, що бактерії дістались туди доперва по смерти, можна би що найвисше для присутности на очеревній, печінці, але цілковито оправдати не дасть ся, що так само і в тім самім часі дістануть ся до селезінки, до осердя (*pericardium*) і т. д.

Більше ще переконуючими суть розеліди Bouchard'a,¹⁾ котрий заморожував крілики і вже підчас атонії находив мікроорганізми в їх крові. Так само випали досьвідченя Wurtz'a, що по замороженю кріликів так однако, що серце звїрят ще било, сподибував на чотири случаї оден раз мікроорганізми; у морських свинок на 14 проб вісім разів, а на 15 случаях у мишей дванайцять разів. Він находив попри иньші мікроби проводу кормового *bacterium colli*, *proteus vulgaris* і *streptococci* в крові серця. Такиж самі результати одержав він, коли душив звїрята. Коли убивав звїрята голодом — проби випадали єму уємно. Він заключає, що зимно уможливяє і прискорює вандрівку бактерій проводу кормового до очеревної і судин кровопроводних в послїдних хвилях житя і бачить причину того з'явища в конґестийних змінах стїн кишок, без удїлу тяжких ушкоджень, ульцераций і т. д.

Charrin²⁾ потверджує перехід мікробів з кишок до печінки, почок, крові, підчас коли він певні, означені бактерії впроваджує до проводу кормового і відтак тоті самі при розелїдах виказати може. Дезінфекция проводу кормового спиняє вихід мікроорганізмів, а при вилученю кишки грубої одержував результати уємні.

¹⁾ і ²⁾ Bouchard і Wurtz цитовані у Chvostek'a.

²⁾ Charrin цитовані в Chvostek'a

Wurtz¹⁾ затроював звір'ята аршеніком, що сам через себе вєсть тілом убиваючим бактерії — і викривав мікроорганізм вже в передсмертю в exudat-ї очеревної, в крові в осердю (pericardium) і на олегочній (pleura). Після него, чим довше тревало конанє, тим обильнійше було число бактерий. При тім вивосила температура тіла звір'ят лише 33°, 34°. При температурі ще 35° мав результати лихі. Вєсо²⁾ уживав до затроюваня звір'ят аршеніку, кантеридини і tartarus stibiatus і мав такі самі наслідки. Констатує тільки, що коли задавав звір'ятам великі данки отруї, так що звір'ята сейчас гинули, не находив бактерий навіть в 24 годин, ба і по 9 днях зовєсім, і каже, що коли мікроби не дістануть ся ще за життя звір'яти в аґонії до дороги кровної, то по єго смерті або цілковито вже бактерії не дістають ся або дуже поволи і в малій кількості.

На велику скалю перевів свої досвідченя Chvostek³⁾ з крїлками, білими мишами. Поперед уживав він методи заморожуваня головно з тої причини, що звір'я довго конає а по друге, що представляє найменше можливости ушкодження слизниць кишок. Він саджав звір'ята до відповідних судин скляних і морозив їх при температурі 10—12 С. Коли запримітив аґонію звір'яти, отвирав сейчас звір'я і брав кров з серця, коли ще оно товкло ся, серед вєїх можливих осторожностей і щепив нею рурки з аґаром. Рівночасно убивав він звір'ятка того самого рода через прорване стрижка продовженого (medulla oblongata) і з них націплював кров в той самий спосіб на аґарі, а кромі того для контролі брав рурки з чистим лише аґаром і вєї три роди рурок вєтавляв тепер до термостату. Проби єго випали так: на 13 заморожених крїликів найшов бактерії чотири рази. В крові звір'ят ужитих для контролі не найшов мікробів ані разу. Культури єго на аґарі представлялись переважно яко круплянки (cocci) вєякого рода (staphylococcus albus et aureus, bacterium colli). Відтак до дальших розвідок брав білі миши. Кормив їх перед тим молоком а відтак уживав нараз до досвідчаня по троє звір'яток. Одно з них убивав через знищенє стрижка продовженого (medulla oblongata), другі двоє заморожував на смерть. Відтак брав з них кров з серця, з воротниці (vena portae) і націплював на відповіднім підложу. З одной миши замороеної брав кров в часі аґонії, а другу полишав по смерті в комнатній теплоті через кілька-кілька-

¹⁾ Wurtz цитовані є Chvostek'a.

²⁾ Beco Anual. de l'Institut Paster 1895 Nr. 3.

³⁾ Chvostek: Wiener klinische Wochenschrift 1897 Nr. 3.

найцять годнн, щоби переконатись, чи дійсно дістають ся мікроорганізми до тканин тіла звіриноного по его смерті. Ужив до того взагалі 150 мишей. Він найшов у мишей морожених, і зараз в атонії секціонованих на 50 случаїв 22 разів бактерії, у звірят заморожених а отворених доперва по кількох годинах найшов на таке саме число лише 8 разів а у звірят убиваних іно для контролі подибаєв мікроби всего 3 рази. У Хвостка кольонії бактерий видні були вже по 24 годинах, рідше виступали они на вид по 48—60 годнах. Після него великий вплив на результати досвідчень має спосіб живлення звірят. Звірята кормлені молоком надавали ся найліпше до тих розслїдів, коли лихе їх відживлюване прим. сухим хлібом давало менший процент результатів добрих. На 14 случаїв звірят голоджених а відтак убитих через заморожене, найшов лише оден раз бактерії. Замітити при тім належить, заморожене у мишей тревало около 40 мінут.

Крім того ужив ще Хвостек до своїх дальших досвідчень 31 мишей убитих через удушенє. Веї проби ті виконаєв серед атонії звірят при бючїм ще серци. Бактерії найшов у 6 мишей. При тім підносить сам автор, що результат мав тим певнійший, чим довше звіря кovalo.

На підставі тих дослїдів доходить Хвостек згідно з французькими ученими до переконаня, що, на перекір загально узнаним дотеперішним поглядам бактериологів і патологів, мікроорганізми можуть дістатись серед певних обставин з проводу кормового головно до обігу крови і до тканин ріжних органів тіла звіриноного, що отже вислїдки посмертні не відповідають патологічній локалізації бактерий за життя, котрих будьто лише на числі прибуває.

Варто тепер застановитись над питанєм, в який спосіб впливає зимно, удушенє, голод і т. д. на вихід мікробів в ткани органїзму звіриноного. Зимно, як відомо, спроваджує зміни в судинах кровоносних, отже єсть причиною забурень в круженю. І Wurtz виходячи з того заложєня каже, що зимно спроваджує іперемію в кишках, котра улекшує переступ мікроорганїзмів через стїни кишок до сусїдних тканин і до обігу крови. Відтак розвіди Uschinsk-ого виказали, що під впливом сильного зимна виступають зміни в істологічній будові тканин, що потягає за собою ослабленє, коли не цілковите знесенє функцій фізіологічних відповідних тканин. В кождім разі живненість клітин даної ткани значно терпить, тратить на силї, а тим самим не мають вже ані клітини самі, ані

Їх соки, ані відтак кров тої могутости опиратись діланю бактерій. І Хвостек є гадки, що інвазію мікроорганізмів до тканин тіла споводовують два моменти, іменно перше: в наслідок зимна виступає анемія верхні тіла, а іперемія органів внутрішніх, межі ними і кишок, а друге: через зимно тратять ткани організму силу відпорну супроти мікробів.

Дальше стараєсь автор сей вияснити, чому скорше, частійше знаходив бактерії в крові при секції звірят зараз безпосередно по смерті їх, ніж у звірят розбраних доперва в щілька годин. Толкує то так: мікроорганізми вже в атонії, значить, перед смертю, входять до обігу крові, до серця. Тож кров взята з серця — це серед того як оно ся товче — буде мати більше бактерій і скорше культура удасть ся, як кров з серця, що вже давно застигло. Бо в першій случаю кружене крові ще в часті удержане, отже з новою філею крові настигають вже сьвіжі маси бактерій, коли кров в серці в спочинку безупинно ділає на ті самі мікроби своєю ще лишившою ся силою антибактеріологічною і убиває їх, а нові вже дальші ряди мікроорганізмів не прибувають. Противне відношене заходить в иньших тканях організму пр. на очеревній, в печінці, в міхурці жовчнім. А то знов тому, що відпорність клітин і їх соків в наслідок шкідливих впливів (зимна) слабне в атонії ще більше, а в якийсь час по смерті устає, отже бактерії без опору жадного переходять до них і щораз більше розмножують ся.

Щоби ще більше упевнитись що до осудженя вартости вислідків бактеріологічних посмертних, виконав Хвостек ще 28 досвідчень на мишах, котрі убивав через морожене і зничене стрижя продовженого (*medulla oblongata*), так само, як в попередних пробах і лишав їх по смерті через 12 годин в температурі комнатній. А було се лїтом. У мишей заморожених найшов лише в 8 случаях бактерії, а у звіряток убиваних прорванем *medulla oblongata* мав в 14 припадках позитивні результати.

Відмінний сей від попередних вислідок своїх досвідчень не об'яснює після него погляд Trombett-и, що гниє не рівночасно виступає ві всіх органах тіла, а радше за правдоподібне уважає, що зимно, котре ушкоджує організм звіриний, спиняє також розвиток тояжків (бактерій). До того причиняє ся в часті сесе, чи кишки порожні чи наповнені екскрементами, що приспішують гниє. В наслідок зимна при мороженю віддають звірята много калу і мочі, — чого нема у звірят убиваних прорванем стрижя продовженого (*medulla oblongata*), — а що в послїднім случаю через

скорше виступаючи гнилизну улекшує розмножене розродитв мікробових.

Рівночасно з пробами крові виконані проби на очеревній дали Хвостекови майже однакові результати. Лише у зьвірят убиваних через зничене стрижа продовженого (*medulla oblongata*) досвідчення зроблені зараз *post mortem*, а в 12 годин пізнійше, ріжнять ся процентово 18⁰/₀—70⁴/₀. Дальше за інвазією мікробів за життя зьвіряти до ріжних тканей промовляють розвіди Ribbert-а і Bizzozzer-а,²⁾ що находили в фолїкулах нормальної стїни кишок у кріликів мікроорганїзмами і то лише в веретвах кишки поверховних. В глубших веретвах стїни знаходив Ribbert образ, що після него свідчив о смерті многих бактерій, котрі улягли тут діланю антибактеріологічному тканей зьвіряти. За правдоподібне почитуєсь також, що мікроби ресорбовані бувають підчас травлення корму через стїни кишок разом з соками кормовими.

Що до того, як і куди дістають ся бактерії з проводу кормового, то перемагає між ученими гадка, що дїєсь сесе на підставі правил фізикальних осмоси і трансфузії і в сей спосіб займають они найближші сусїдні тенеса, а в дальші части орґанїзму заносить їх лімфа і кров.

Результати всіх тих ріжнородних а так численних розелїдів виконаних через визначних учених в свїті лікарскім мож менше-більше в коротці так представити:

1. На перекір дотеперішним загально знаним правилам головно школи німецкої — можлива єсть інвазия бактерій до тканей орґанїзму зьвіриноґо вже за життя іменно в аґонії.

2. Посмертні вислїдки бактеріологічні не відповїдають лише льокалізації мікробів за життя зьвіряти, авї мнимому їх тільки розмноженю.

3. Інвазию мікроорґанїзмів в аґонії уможливяє і прискорює зимно, отруї і нївші шкїдливї впливи на орґанїзм зьвіриний.

4. Бактерії переходять навіть через здорові і неушкоджені стїни проводу кормового і судин кровопроводних.

5. Головним місцем пробуваня і виходу мікробів єсть провід кормовий.

6. Зменшена відпорність тканей орґанїзму зьвіриноґо підпомагає і улекшує вихід мікроорґанїзмів.

¹⁾ Ribbert: Deutsche medicinische Wochenschrift 1885, pag. 197.

²⁾ Bizzozero: Centralblatt für med. Wissenschaften 1885 pag. 801.

7. На підставі вислїдків бактериольогїчних посмертних не все мож заключати диягнозу клїнїчну недужого.

8. На відворот культури бактерий по смерти можуть тїлько потвердити поставлену диягнозу клїнїчну у хорого за життя.

Результати з моїх власних досвідчень в тїм напрямї подам в своїм часї.

У Відни 6. IV. 1897. р.

Др Осип Дакура.



Заклад лічебний для сухотників в Аллянд.

Хвіба нема чому довго розводитись і доказувати, яку вагу має для недужого добре, належите відживлюване і свіжий воздух. Чинники тоті оба становлять бодай чи не важнійшу часть теперішної, рациональної терапії і кождий лікар практичний по при ліки аптичні, цілковито слушно поручає дбати головно про сили хорого і старатись для него о чистий, добрий воздух. Річ на сповид така проста, природна, лік такий таний (?), а однак як тяжко перевести се в практиці, про се може мати належите виображенє лише той, хто знає жите наших бідних людей по містах, місточках, не вагаюсь сказати і по селах. Потреба таних, здорових мешкань для люду робучого, для бідного населеня, стає з дня на день щораз більше пекучою головно зі взглядів гігієнічних і нині вже за взорами великих фабричних міст англійських, американських, по части німецьких починають і у нас на разі по більших містах роздумувати над рішенєм сего вельми важного питання. Як доси воно є, то тяжко і чудуватись сумним відносинам що до стану здоровля тих найнищих верств нужденної суспільности людскої, сій великій смертльности у них, коли зважить ся, серед яких то обставин нуждарі сесї вік свій коротають. В недостатку найперших і найважнійших потреб життя вже від самого уродження, серед журб, клопотів вічних і терпінь моральних, заселяють они сутерени і піддашя по містах, а курні, холодні хати без помосту по селах — гуртом в купі мале з великим, без ріжницї пола, одна родина з другою або і більше разом, оттак, щоби було всіх кілька-кільканайцять люда, та щоби місця стало на кухню, балію, колицку, машину „панни швабки“, якийсь варстат шевеквий або кравецкий, а дуже частенько

найде приміщенє курка або яке иньше пожиточне сотворіне. Не дай Боже тепер немочи в такій хаті! Деж тут може бути бесіда о потрібнім для хорого супокою, вигоді і догляді належитім. Як тут ізолювати недужого від здорових, та відки взяти для него свіжого, чистого воздуха?! До шпиталю всіх хорих не приймуть, раз тому, що за мале число шпиталів, щоби всіх помістити, а по друге є певне число недуг, що вимагають постоянного леженя в ліжку і заживаня ріжних ліків медицинських, а радше зміни способу житя, місця пробуваня на якийсь час, доброго відживлюваня, свободи ума і багато-багато сонця, тепла воздуха. Межи ті недуги в першій лінії належать скрофули у дітей і туберкули особливо в самих початках. Лікарі висилають таких хорих в околиці зі шпильковими лісами, в гірські сторони на жентицю, до місць купельних, над море, в теплійші сторони о лагіднім кліматі; кажуть шукати веселого товариства і не жалувати собі нічого, але все те вимагає великих видатків, так ліччись можуть лише люде заможні, що з бідаками зробити? Краківекій шпиталь дитячий св. Людвига висилає рік річно партиями по кількадесять дітей шкрофулічних на кілька тижней до Рабки чи Риманова і успіхи того ліченя суть часто дуже вдоволяючі; але про якийсь сталий лічебний заклад для хорих на груди не було доси чути не то в Галичині, але і в цілій Австро-Угорщині і то не тільки для убогих, але навіть для людей богатих, щоби готові були оплачуватись.

Заклади такі суть що іно в Англії, має їх кілька публичних Німеччина іменно Рупертгайн (Rupertshain) в Тавнусі заходами Детвайлєра, дальше в Альбертсберґ в Саксонії і Андреасберґ в Гарци будуть імовірно сего року віддані на ужиток публичний. Крім того є кілька приватних закладів для недужих на груди як пр. Вольфа в Райбольдсґрін, Вайкера в Герберсдорф, Лядендорфа в Ст. Андреасберґ, дальше берлінські заклади в Малькові і Бляккенфельд, дальше заклад червоного хреста в ліснєстїй околиці при Грабовзе біля Оранієнбурґа.¹⁾ Крім того провктованих є ще багато иньших закладів, котрі з часом вїдуть в житє.

Росія має до тепер всего оден рядовий заклад в Галіля в Фінляндії. Найвисше під тим взглядом стоїть Швайцарія, де майже кождий кантон будує для себе такий заклад. Базилєя має їх два. З посеред них визначають ся особливо два знаменитим добром місця, будовою і урядженєм після найновїших приписів і потребуваній

¹⁾ Dr. Alexander Ritter v. Weismayr: Wiener klinische Wochenschrift, 1897, Nr. 2.

ігієнічних і терапії взагалі і суть упосажені всякими вигодами для терплячих, недужих. Один з них є в Гайлїгеншвенді коло Турнера в кантонї берненьскім, а другий має Базилєя в місцевости Давос-Дорф. Перший з них має на разї 120 хорих другий прийати може до 80 недужих. Всїх місць для хорих по викінченю всїх закладів Швайцарнї буде тисяч кілька сот, число поважне, однак після обчисленя Ляйдена, котрий каже, що на 1000 мешканців повинно бути бодай 1 ліжка для туберкулїчних — навіть на Швайцарию за мале (2,909,000). Вконець здобула ся і Австрія низша на оден такий заклад в Аллянд, підчас коли гадка ще перед літами побудувати подібну санаторню в Угорщинї по нинї не осущилась.

В цїлі доконаня сего філантропійного дїла завязало ся у Віднї свого часу товариство з людей переважно найвищих верств інтелїгенції, аристокрації і плютокрації. Першим протектором сего товариства був бл. п. архикнязь Кароль Людвик. Тепер числить оно 941 членів звичайних а 101 членів основателїв. Протекторат обняв Єго Величество цїсар Франц Йосиф I а заступником своїм іменував архикнязя Оттона. Головою союзу є тепер гр. Юрій Штокав. Товариство поставило собі за задачу не іно вибудуване і удержанє одного закладу в Аллянд, але заєдно старатись збирати що раз то більше грошей і будувати такі заклади в як найбільшїм числї. Збиранєм складок грошових займаєсь головно окремиї дамський комітет під протекторатом архикнягинї Марїї Йосифи. Послїднї загальнї збори товариства відбули ся дня 28. марта сего року і зі справозданя скарбника Ернеста Перайфера довідуємо ся, що розпоряджає оно тепер маєтком 539.641 зр. 41 кр. Заразом учули зібранї члени і гостї тоту радієну вість, що вже сего року під осїнь Аллянд приймати буде в свої мури перших недужих. Директором управителем цїлого закладу лічебного іменовано Дра Олександра Вайсмайр клінічного асистента проф. Шретера.

Товариство згадане, котрого душею є проф. Шретер, містопредсїдатель союзу, мало з початку до побореня великі трудности, раз з причини браку потрібного капїталу, а відтак годї було де набути потрібного в відповідній скількості ґрунту. З часом поволи найшли ся і гроші головно в дорозї складок публичних, датків ріжних високопоставлених осіб (при чім гідно уваги жертволюбивість шляхти німецької, і так: баронова Райнелът офірувала на сю цїль 5000 зр., Ад. Бідерман 1000 зр., От. Кубїньскї 1000 зр. і цїлий ряд імен більше або менше знаних родин шляхоцких фігурує зі значними сумами), концертів, фестинів, представлєнь аматорських і т. д. Як се дїє ся звичайно, ходило вже лише о се, де би вишукати відповідне

місце під заклад лічебний, де би хорі пробували через цілий рік, а відтак також оречи після якого взору має ся его ставити. Шпретер знав з особистих подорожей подібні заклади в Англії, нинші члени виділу товариства їздили до Німеччини до Герберсдорф, Фалькенштайн, Штернберґ, щоби придивитись будові і урядженням тамошних закладів. Др. Вайсмайр відбув прогульку наукову в тій цілі до швайцарских санаторій.

Рівночасно донитувано за ґрунтом під шпиталь. Звернено ся поперед до державних дібр, монастирских посілостей, ріжних товариств наукових, до географічного інститута, закладу метеорологічного — на дармо, не було відповідного кусня землі. Відтак навязано зносини з товариством туристів, ріжними властителями дібр, аґентіями купна і продажі, відбувано мандрівки по цілій Австрії низшій аж до границі стирийскої, але нігде якось не удалось нічого властивого найти. На добавку всего стрічено всюди неохоту і страх людей перед таким закладом. Жадна майже оселя не хотіла згодитись на сусідство шпитала сухотників. В кінець по великих трудах і пересправах нашли члени сего добродійного товариства спорий кусень землі біля Аллянд, але і тут ледви по великих вговорюванях і представлень згодилась людність сеї місцевости на виставлене закладу для недужих на груди.

Аллянд лежить у підніжжя північного Альп в околиці горбоватій всего 16 кільометрів від міста Баден. З Баден веде до Аллянд дорога долиною Швехату. З Медлінгом получена ся місцевість битим гостинцем що веде через Бріль, а від Рекавінкель, стації западної желізниці віденської, віддалений Аллянд всего 26 кільометрів. Впрочім удержує ся проєкт получить Баден з західною желізницею через Аллянд, в таким случаю було би безпосередне получене желізницею сего закладу з Віднем. До того желізняця полуднева обіцяла товариству всякі знижки і полекші в перевезеню як недужих, так і всяких тягарів. Інший знов добродій подарив товариству відповідно уряджений віз до перевезеня недужих.

Заклад властивий побудовано 2 кільометри від Аллянд в малій місцевости Гройсбах. Місце сесе представляєсь невеличкою кітліною, що отверта на полудне, а від півночі, заходу і входу окружають єї невисокі горбки. Від північного веходу замикають єї горби звані Гехерберґе високі 680 м. Ґрунт цілий, що належить до закладу обіймає 150 морґів по части залісеній, в части представляєсь яко орна ріля, сїножати. Через згадані горби заслонена ся кітлина на вітри північні, а навіть має сесе вплив і на цілу температуру. Мірено іменно теплоту в Аллянд зимою і порівнувано з теплотою

Відня і Гріс коло Баден в полудневім Тиролю і показалось, що в Аллянд майже так само тепло як в Гріс, а без порівняня лагіднійший там клімат ніж у Відні.

Нема в поближю жадних більших фабрик, нема отже диму, не заносить углем камінним, воздух чистий, здоровий. Нема і пороху, бо гостинець мало уживаний, та й лежить оподалік від закладу, а до того посідає тая ціла посілість таку скількість власної води, що не лише заосмотритись може обильно цілий заклад, господарство, але і вистарчить на точне, кількаразове на день скроплене доріг і доріжок. З разу був клопіт власне з водою. Веї більші жерела витрискують по північній стороні хребта Гехерберту і спливають в північнім напрямі, мала лише скількість і то дрібнійших жерел зрошув полудневі стоки горбів і кітліну, так що справді заходила обава, що бракне води для закладу. Зараджено сему в сей спосіб, що по одержаню даром від барона Шель-Вітінґофа північних жерел, заложено великий резервоар і водопроводи — рури подарив бл. п. архикнязь Альбрехт — коштом зверх 17.000 зр., так що цілий заклад з господарством заосмотрено знаменитою жерельною водою.

До удержаня чистого воздуха причиняють ся дальше роскинені по горбках невеличкі ліси шпилькові мішані з иньшою деревиною. Крім того належить до закладу хороший сад і великий огород яринний, що разом з луками і полями становить красну посілість, котра сама собою богато причинить ся до удержаня санаторії.

Що до будинків закладу самого, то крім хорошої вілі, призначеної на мешканє для лікаря управителя, канцелярню закладову і антику, дальше кількох будинків господарских, сам заклад лічебний ще не вповні готов. Принято систем будованя павильоновий — бо сей показав ся найпрактичнійший — і рішено побудувати то менші то більші домвки так на 20—25 ліжок в ріжних місцях сеї посілости в міру, як буде прибувати засобів грошевих. Головний будинок закладовий має обіймати просторонь, деб ся містило 300 хорих. Виставлений є на три поверхи і має становити осередок, докола котрого поґрупують ся пізнійше приставлені домики. Сего року буде мож умістити около 108 хорих. Цілий будинок звернений фронтом на полудне обіймає в самій середині величезну салю 11 метрів широку, 8·70 м. глибоку, де хорі мають пробувати за дня серед непогоди. Дальше ідуть комнати до спаня поділені переділами, так що в кождім переділї містить ся 8 ліжок. Крім того дві сенаратки по 2 ліжка, так що на кождім поверсі містить ся

всього 36 ліжок, а в цілїм домку 108 ліжок. Цїлковито ізольованих комнат для поодиноких осіб нема, бо знана річ з досвідченя по клініках, де хорі замкнені осібно в „ліпших сепаратках“ нудять ся звичайно, не можуть вилежати і просять, щоби їх умістити на салї загальній разом з другими хорими.

Заклад сей не буде місцем притулку для немочних старців, хорих і здоровіючих, не буде також шпиталем для поміщеня тяжко хорих, а буде лише закладом догляданя домашнього, закладом ліченя недужих. Тому будуть лише приймати до закладу таких хорих, у котрих можливе буде або вилічене, або бодай значна поправа цілого стану здоровля. Отже передовсім знайдуть поміщене люде з початками туберкулїв, котрих недуга через плеканє належите або дасть ся застановити, або бодай дасть ся піднести їх стан сил, їх загальне відживленє і скріпленє організму. З сеї то причини поки що не буде в тім закладї цілковито комнат хорих. Недужі за дня будуть пробувати в згданій великій салї, або в хороших отвертих галях уміщених по обох сторонах комнат спальних на кождім поверсі, або в великій салї на долині, що представляти буде рід огорода зимовото (оранжерїї). Розуміє ся, що найбільше звертати увагу будуть на се, щоби хорі як найбільше пробували на отвертім воздусї, уживали богато руху, а навіть будуть призначували їм на взір швайцарских закладів якесь занятє, якусь роботу фізичну, оттак для приятности хорого, цієля єго змоги, щоби виробляти поволи єго сили, гартувати єго легкі, та приспішувати в єго організмі перемїну матерїї, заострювати апетит до їди, будити охоту до житя. Зараз по прийнятю недужого має взяти віч купіль для очищеня. Комната тая купельна — уміщена від сторони північної будинку — буде служити до ріжних процедур ідротерапевтичних. До щоденного ужитку призначено покоїки купельні біля спальні. При брамі буде окрема саля, де хорі мають здїяти чоботи чи черевики, а убирати рід пантофлїв, щоби комнат мешкальних не занечищати і порохів не робити.

На долині в партері знаходить ся велика комната де будуть робити ся всякі інгаляції (взїваня), а на двох поверхах по однім мешканю для лікарів-секундарів. При салї хорих має свою комнатку послугачка для недужих. Спосіб огріваня цілого будинку центральний, освітленє електричне, телефон в місці.

Кухня побудована окремо припирає до будинку. Крім мешкань для всякої служби, має велику салю їдальню, де нараз може обідати 100 недужих. Віддалене кухні від санаторїї а не поміщанє єї в еутеренах, як то дуже часто по шпиталях буває, має тую добру

сторону, що не буде заносити так до саль хорих димом, спалениною з кухні а в додатку через споживанє страв в салях, де недужі лежать, набирає цілий воздух того властивого, шпитального, неприємного запаху, перед чим прецінь хорих на груди стеречи належить. Подальше від головного будинку, а не далеко дороги буде поміщена пральня, саля секційна а над нею відповідні лябораторії для лікарів.

Хорих відповідних буде ся приймати у Відні за порозумінєм з більшими шпиталями на разі зі шпиталем загальним при Альзерштрассе і зі шпиталем на Віденю. Пацієнти мають наперед відбути трехтижневу пробу, і коли окажесь в їх здоровлю якась поправа, то лишать ся дальше на цілі три місяці, а если ні, то вислані будуть знов до відповідного шпиталю, або випущені домів.

Сей час пробуваня хорого в закладі ужие ся на приноровленє всяких можливих способів лічення, найновіших метод і заходів лікарских, щоби лише хоробу усунути, єї перемочи як також єї студивати. Будуть виконані на недужих всякі проби, примінювані по иньших заграничних закладах, як приміром: чи вплине на стан здоровля хорого, полишенє єго на вільнім воздуху навіть серед зимна 15—20° хотьби і до ночи, праця, снацери. В тій цілі суть в Аллянд пороблені числені доріжки і стежки, по цілій посілости, а всі сходять ся в самім закладі, дальше для охочих до роботи будуть до вибору хідники до чищення, сад, огород, поле, на годину, дві або довше, скільки котрий схоче і зможе.

Догляд лікареский сповняти буде на разі оден лікар-управитель і двох секундарів. Они будуть мали за задачу не то занятись ліченням властивим, але також подавати недужим докладні указки що до веденя способу житя, їди, занятя, видавати їм відповідні розпоряди, а відтак наглядати і донильнувати їх виконаня.

Особливша увага звернена буде на приучуванє хорих до чистоти, особливо, як обходитись мають з плювиною. Заведені будуть фляшочки до плютя Детвайлєра. Тоту фляшочку має хорий з собою носити замість хустки до носа, до неї плювати і щільно заткати. Лише в спальни будуть сплювачки шклянні. Анї на підлогу, анї до хусток плюти не буде вільно.


Заклад сей буде дальше місцем науки, студий над туберкульозою. Будуть відповідно уряджені лябораторії істольогічні, бактериольогічні, хемічні на услуги лікарів, що схотять працювати для науки.

За дозорницї хорих ужиті будуть сестри милосердні, котрі знов мати будуть своє мешканє окремо.

Вигляди сего закладу суть як найліпші, всюди стрічає ся він у публіки з великою симпатією, а як потрібний він, свідчать о тім вже цілі стоси листів писаних вже від довшого часу через ріжних пацієнтів до проф. Шрєтера¹⁾ з запитанєм, коли заклад отворить ся і з прошенєм о прийняте до него. Розвиватись має він куди, місяця досить, коли іно добросердні люде більше гроша зложать. Він має станути дальше взором, для санаторий в иньших краях Австро-Угорщини, щоби як найбільше людей могло з сего користати, своєї недуги позбутись, або полекші дізнати, щоби ті заклади стали дійстно добром, спасенєм бідного люду, так як голосить напись на санаторії в Аллянд: „Armen Kranken zum Heile“.

¹⁾ Prof. Schrötter: Wiener klinische Wochenschrift, 1896, Nr. 3.

Др Осип Дакура.



VII. Інтернаціональний геологічний з'їзд у Петербурзі.

У серпні 1897 р. відбувся в Петербурзі VII. інтернаціональний конгрес; 17/29 серпня в залах нового зоологічного музею академії наук відкрито конгрес. Після сего члени конгреса обзирали геологічну виставу, уряжену віце-головою проф. Іностранцевим, що містила у собі різні карти, фотографії, роди скал і т. н. Особливу увагу звернула на себе Японія, котра представила прегарними штуфами свої мінерали, а теж карти, що свідчать про енергічне вивчення сеї сторони, ще до недавніх часів terra incognita. Теж добре представлена геологія Фінляндії і Скандинавії, тут звертали на себе увагу штучні мінерали, здобуті гельсінфорським проф. Шультеном. Німецькі фабриканти виставили різні інструменти геологічні.

На другий день був зроблений спробунок улаштувати стратиграфічну номенклатуру і класифікацію, але після деяких дебатів виявилось, що питання се тепер не має змоги бути розв'язаним, але хоч для усієї землі класифікація не була встановлена, проте така класифікація повинна бути заснована на історичних і палеонтологічних ознаках, а для утворення принципів такої класифікації встановлено улаштувати особливу комісію.

З рефератів вкажемо на реферат Мене про свої досвіди, аби з'ясувати деякі орографічні питання. Він з початку намалював історію розвою орографії верхньої земної і далі показав власні апарати. Вони складають ся з товстого кавчука, що єго натягнуто на сферичну фігуру, кавчук помазано товстим шаром гіпсу; коли кавчук скорочуєть ся, то гіпс зморщуєть ся і на сферичній верхній утворюють ся штучні гори, які роблять ся усе вищі, чим далі од полюсів (бі-

гунів). Далі Санко виступив з рефератом про орографію землі. Згожуючись з іпозезою про огнево-рідку магматичну первітню натуру землі, треба визнати при охоложеню зменшеня обсяга. Найхолоднійша частина верхні землі, не може слідувати за скороченням решти обсяга землі, і мусить утворити складки. Вивчення остатніх показує, що з архейскої ери, обсяг землі дуже зменшив ся. Скороченя землі утворило первітні континенти, які суть тільки скелетами сучасних. Сусідні міста дали початок океанічним ямам. Масиви сі утворились в два періоди: каледонський, що відповідає переважно архейській ері; сі утвореня дужче зруйновані слідующим другорядними процесами, і герциньский, більш захований, его відкладеня периферично прилягають до відкладень каледонського періода. Первітними масивами після термінольоїї референта будуть: масиви африканський, арабський, мадагаскарський, індійський, каледонський, сибірський, австралійський, антарктичний, бразильський, гвіанський, північно-американсько-гренландський.

Скороченя обсягу землі буде існувати, поки земля цілком не охолоне, даючи початок сучасним орогенічним зонам, напр.: альпійські, апенінські, океанічні. Далі був демонстрований глобус, який мусів ілюстровати ідеї референта.

Реферат Принца стосував ся до орогенеза. Він звернув увагу на те, що фігури континентів умовляють ся пересіченням двох систем майже перпендикулярних ліній і почав говорити про свої досвіди над ріжними плястичними матеріями, які він разом скручував і здушував. Наслідком сего були фігури, зовсім схожі з фігурами континентів. Форель говорив про періодичні варіяції ледняків; запрошуючи членів конгреса реєструвати усї переміни в становищі ледняків усього світа. Тоді можливо буде визнати, чи залежать сі переміни од астрономічних причин, коли переміна в становищі одної півкулі землі буде відповідати переміні у другій півкулі, колиж такої відповідности нема, значить переміни залежать од причин атмосферичних. Рід говорив про напрямок течії ледняків і про походження деяких морен. При вивченю руху ледняків звертали увагу тільки на горизонтальну складаючу руху, референт звернув увагу теж і на вертикальну, сеж робив і Агассіц, але він не зробив справедливих конклюдій, бо, млячись, думає, що поверховий шар леду рушає швидче ніж нижній. Вивчення ліній течії з'ясовує походження деяких морен і ясно вказує, що фронт ледняка має нестійну рівновагу, що з'ясовує деякі неретельности постережені в переміні довжини ледняка.

В засіданню 20. серпня було покладено обрати спеціальну комісію до вивчення принципів хронологічної класифікації осадових утворень. Було обрано місцем VIII. інтернаціонального конгреса р. 1890 Париж; теж було розглядано питання про заведення нових стратиграфічних термінів і запровадження інтернаціональної номенклатури. Далі проф. Вальтер виклав принципи класифікації скаловин. М'єне реємував свої досвіди, що дозволили йому виявити в загальних рисах мінералогічну натуру а теж структуру ґрунтового рода плятини з Нижнього Тагіля на Уралі. Усі мінерали породи можна дістати при нагріванню до червоного кольору відповідної пари в фарфоровій дудочці. Реакція в даному випадку мабуть подібна до тої, яка маєть ся при утворенню метеоритів і утворюєть ся мабуть тепер в фотосфері сонця. Виводи сеї роботи дозволяють порівняти об'єкти геологічного вивчення з об'єктами астрофізичними. Тіло говорив про видатну барометричну депресію в середній Азії, винайдену братами Грум-Гржімайло, потім Півцовим, Обручовим, Роборовским, Козловим. На стації в Люкшуні середнє річне давленє барометра 766.₅, а maximum 796.₆. Референт каже, що для цілковитого вивчення сего з'явища потрібна геометрична нівеліровка починаючи з Семіпалатинська. Другий реферат стосував ся до магнетної аномалії, дуже інтензивно виявленої в центральній Росії. Лебедінцев говорив про наслідки експедиції в Карабугазську затоку Каспійського моря. Перш думали, що дно затоки вкрито сіллю, а тепер виявилось, що гіпсом разом з иньшими сульфатами. З'ясовуєть ся се тим, що відносини сульфатів до хлоридів в воді Каспійського моря 2.₅:1.₀, а в океані 11:1. Відкриття сульфатів опріч практичного значіння має значне теоретичне, як одинокий приклад сучасного відкладання гіпсу. Ердман реємував свою працю про ієтнованє азота в первітних горних породах (скаловинах). Відкритє азота і гелія в скандинавських породах примусило референта дослідити спектроскопно ряд горних пород. Азот тут ієтнує в хемічній сполуці і єго можна перевести в аміак (амоняк). Азот тут не має органічного походження. 22. серпня Андрусов говорив про потребу мати особливого корабля, що на єго удержанє постачалиб кошти усі європейскі уряди; метою такого удержаня має бути дослідженя відкладень моря, ознаємитись з якими як і з сучасною діяльністю моря при сучасних обставинах дослїду дуже трудно. Колиж буде такий інтернаціональний корабель, геологи легко можуть ознаємитись з морем що до сїєї справи. Форель прочитав відчит інтернаціональної леднякової комісії. Нікітін про інтернаціональну бібліографічну комісію. Мурлов представив перші випуски геологічної

бібліографії. Марфері представив французский переклад розправи Зюса „Обличчя землі“. Маковський зробив відчит про істнованє людини разом з великими ділювіяльними ссавцями (*mammalia* пр. носорогач, мамонт) на підставі матеріялів зібраних в льоссі (в суглинку) Брюна (Моравія). Зелей говорив про викопуваних рептілій Пермскої і Володарскої губерній. Вони стоять близько до знайдених в Африці, Індії, Шотляндії, Сполучених державах. Відкриття Амаліцкого в Вологодській губ. рептілій разом з рослинами (*glossopteris*) і п'явшниками (раковинами) має особливу вагу, бо вказує на великий розвиток озер в Пермску епоху. Рептілії сї відносять ся до *Anomodontia*, близьких до *Labyrinthodonta* (Перевоиникозубі) і *Monotremata* (Стекуни). Далі була розмова про петрографічну номенклятуру і систематику і нарешті було поставлено скласти розв'язаня сього питання на комісію обрану в Цюриху. Засіданя 23. серпня було присвячене стратіграфічним і палеонтологічним працям. Фрех говорив про контінентні моря палеозойскої ери і демонстрував карти. Стефанеску говорив про *dinotherium gigantissimum* Steph., знайденого в Румунії. Майор Еймор казав про історію середземного моря, починаючи з найдавніших часів.



З'їзд британської асоціації наук.

Британські натуралісти і лікарі складають з себе свою наукову асоціацію і вона сего року зробила свій з'їзд в серпні од 5/17—12/24 дати в місті Торонто (Канада). Головою товариства обрано Джона Сванса, спеціаліста по вивченню доісторичної археології. Більшість англійських вчених виїхала з Ліверпуля на одному пароході; на єму увесь час функціонувала антропометрична лабораторія, а позаду єго тяглась увесь час сітка, що ловила усяких маленьких тварей, що пливають на верхні океана.

Усіх членів з'їзда було 1.362. В засіданню 5/17 серпня виявило ся, що британський уряд, відповідно бажанню асоціації, визначив комісію для утворення проєкта засновання національної фізичної лабораторії, а уряд британського музею визначив потребу засновання при музеї етнологічного бюро для британської імперії. Грошеві справи асоціації добрі, вона визначила багато стипендій за різні досліди: напр. 100 фунт. за вивчення перемін звязаних з діяльністю клітин нервних; 125 ф. за антропологічні і натурально історичні досліди коло Торресової протоки, 75 ф. за вивчення біології озера Онтаріо, 50 ф. метеорологічні обсерваторії в Монреалі і т. и. 7/19 серпня празникове зібрання Торонтського університета, в якому був піднесений почесний диплом лорду Кельвіну, лорду Лістеру, серу Дж. Свансу і ин. В вечері проф. Роберт Остен зробив доклад про металі Канади з ріжними цікавими досьвідами. 8/20 Форбе прочитав популярну лекцію для ремесників: „Британська Нова Гвінея, сторона і народ“, а 10/22 проф. Мільн про вулкани. З'їзд був сполучений з ріжними гулянками, обідами і т. и. Містом будучого з'їзда визначено Брістоль.

Вступна промова сэра Джона Сванса була присвячена новим здобуткам палеонтології і доісторичної археології. Референт думає, що містом з'явлення першої людини було на тропічному півдні, де знайдено найбільш близьку до людини форму (*Pithecanthropos erectus*) і де: в Індії, на Евфраті, в Сомалі, в Єгипті стріли камінні орудя палеолітичної епохи, дуже схожі з знайденими в Західній Європі. Ся найдавніша палеолітична епоха повинна була тягти ся безліч часу, за який людина розселилась на далеку просторінь, пристосувалась до помірнього і навіть холодного клімата леднякового періода в Західній Європі і значно перемінила ся, що до свого фізичного типа і перших стадій культури. Палеолітичний період змінив ся на неолітичний, але досі ще нема досить доказів, що ся переміна стала ся помалу через культурний розвій тих самих мешканців. Певнійше, що ся нова культура занесена новими народами з півдня, де напр. в Єгипті було знайдено слід сеї епохи в період за 3500—4000 років до нашої ери. Далі референт вказав на вагу вивчення доісторичної культури і антропологічного вивчення рас і настоював на заснованню етнологічного бюро в Великобританії на взірець такого же закладу в Сполучених Державах. Форсайт говорив про потребу засновання національної фізичної лабораторії і ваги теоретичних праць. Рамзай присвятив свою промову ще „незнайденому газу“, який повинен зайняти місце між аргоном і гелієм. Атомна вага сего елемента на 16 одиниць вища гелія і на 20 нижча аргона теж 20, густина рівна половині атомної ваги і він, як аргон і гелій повинен бути індиферентним (неімавим) що до сполучення з другими елементами. Рамзай зробив довгу серію досвідів з дифузією гелія (ні гелій, ні аргон не можливо злучити з иншими елементами, то дифузія є єдиним засобом ізолювати новий газ), але референт знайшов поки що тільки примішаний аргон, хоч не стратив надії одрізнити новий газ, коли тільки знайде матерію де его буде чимало. Даусон говорив про найдавніші гарні породи Північної Америки. Проф. Мейяль говорив про потребу вивчення живих тварей при їх натуральних условинах життя, вказавши на Дарвіна, багато користних ідей якого виникло од дослідження живої природи, од подорожей і т. и. Особливе значіння має у сему вигляді засновання біологічних станцій. Зоологія в сучасній формі не тільки знаємьт нас з розличностю форм тварей, а і взагалі досліджує багато найважніших біологічних питань. Вона значно розширює краєвид фізіолога, даючи більш широкий і ясний погляд на варіації і стадії розвою ріжних органів і їх функції. Вивчення тварей показує, що єсть форми, крови ток яких міняєть ся у різні періоди життя або

в визначені моменти, єть твари з очами ззаду, з очами на раковині, на ногах, в середині мозка, єть багато очей без кристалика і у виді простих пігментних плям; що орган чуття — ухо може розвивати ся на ногах, хвості або глибоко в середині тіла і не має навіть дірки, щоби провести хитання звука. Єть твари з двома хвостами, з двома тулубами, що зрослись; деякі несуть 2 або 3 роди яєць, несуть яйця, які дають початок 2 зародкам і навіть 8. У деяких творів самці живуть, як галапаси (паразити) на самках і навіть в горлі самім міняють свою форму до 18 раз. Самці деяких тварей уявляють з себе тільки мішки з сперматозоїдами (заплінками), а самки других форм тільки мішки яєць. Усі такі факти значно міняють наші погляди про ролю органів і відносини між собою мужеских і женьских осібняків. Референт особливо спинив ся на з'явици перемежного розпложення, коли снастне розпложене дає місце пупкованню в звязку з приміненнем до околишнього світу і натуральним вибором. Дікон в секції механіки говорив про здобутки в сфері будованя кораблів. Турнер в секції антропології говорив про деякі особистості будови людского тіла. Референт спинив ся особливо на різниці в будові хребта спинного, ніг і рук, черепа, мозку людини, рівняючи до висших тварей. Характерна для людини форма хребта спинного, схожа на римське *S* стрічаєть ся в більш або меньш розвиненому становищі і у антропоморфних малп; з другого бока і у людей єть переходні форми хребта. В секції фізіологічній говорив Фостер, який вказав на поспіх фізіології за 10—13 років; на поспіх фізіологічної хемії, на поспіх в вивченю нижчих форм жита і фізіологічних функций клітини, на поліпшення метода дослідження укладу нервного (метод. Гольджі).

Осафат Петрик.

(Некрольоґ).

І знов зменшилось число труженників на полі наук математично-фізичних; і знов громада наша стратила чоловіка, що міг стати окрасою науки та заняті колись непослїдне місце між невеликою у нас єще гореткою людей, що старають ся посунути вперед науки математично-природописні, які є так важним нинї чинником культурним...

Осафат Петрик уродив ся в Криниці в р. 1867. Син бідного селянина-Лемка перебывавсь від дитинячого віку о власних силах через сьвіт. А кілько стоїть та борба з судьбою, кілько она вимагає накладу сили та волї, знають добре ті, що з судьбою боротись мусїли та мусять так, як він. Та мимо сього він все виходив з сеї борби з побїдою; один з перших учеників гімназї в Новім Санчи зложив іспит зрілости з відзначенєм та перенїс ся на університет у Львові, де вкортці став одним з найлїпших учеників професора Пузини. Ум тверезий, критичний, знав він, що ми лиш наукою зможем дійти до тої уровни, на якій стоять другї народи Европи. Тож з правдивим пожертвованєм віддавав ся науцї через увесь час своїх студїїв, а в головній мірі посєвчавував цїлий свій час улюбленій своїй науцї, фізицї. Вже яко студент дав ся пізнати ширшим кругам, коли на з'їзді математиків у Львові в р. 1894 виступив з роботою про филї електричні, яка удостоїлась признаня ученого тої міри, як варшавський математик Дікштайн. Роботу ту оголосив він пізнійше друком під заголовком: „Krytyczny przegląd prac dokona-pnych dotychczas nad falami elektrycznymi. Kosmos, том XX“. (Пор. також Записки тов. Шевченка том IX).

По укінченю університета обняв місце заступника учителя в гімназї Франц-Йосифа у Львові, а опісля в Перемишлї та Ста-

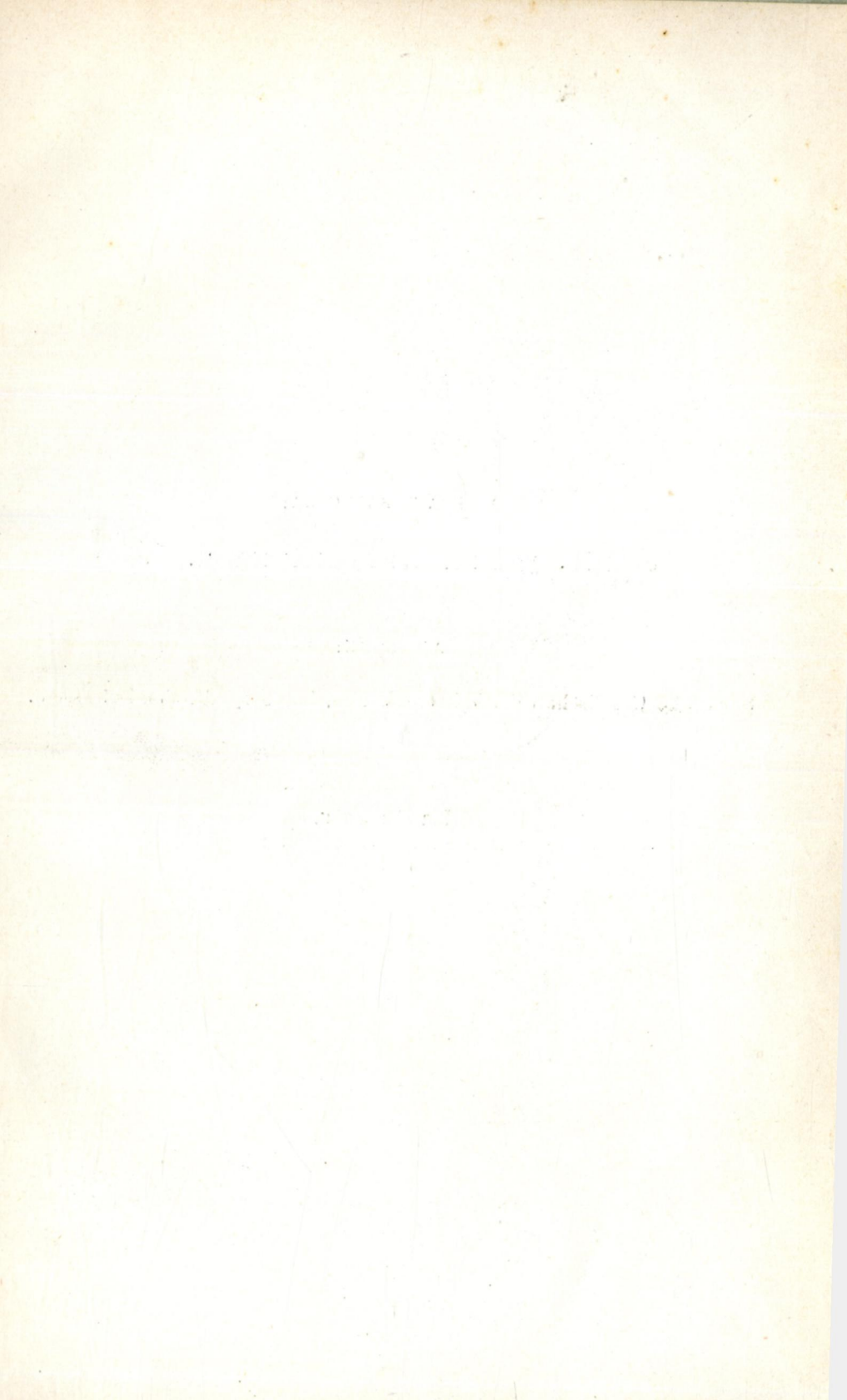
нславові. В рік по укінченю студіїв зложив іспит на учителя математики та фізики з поступом знаменитим (1894 р.). В Станиславові належав до діяльнійших членів громади рускої, став секретарем філії Просьвіти, та попри тяжку роботу в гімназії і в громаді не залишав праці фахової. Доказом сего його популярні статті в Зорі р. 1896. про відкрите Рентгена; в своїй статті вказав він на заслуги професора Пулюя, славнозвісного нашого ученого. Іменованний в р. 1896 дійсним учителем математики та фізики в рускій гімназії в Коломиї охотно прийняв ся сього нового труду; а труд се був тим більший, що перший професор нової нашої гімназії мусїв занятись утворенєм музея фізикального, якого доселі і не було. Щиро взяв ся за ту роботу, переписував ся в тій справі навіть з зарядом музею фізикального на університеті у Львові; та судьба не дозволила йому довести сего діла до кінця. Набавившись на виравах війскових яко лейтнант артилерії тяжкої недуги мусїв вже в грудні 1896. р. виїхати до Мерану, а опісля до рідного села — Криницї, де й помер на чахотку 19. н. ст. падолиста 1897.

З ним пішов у могилу чоловік талановитий, щирий, сердечний товариш, великий приклонник нашого народа, один з найліпших синів України-Руси. Чоловік тихий, не рвав ся ніколи вперед, але і по задї не оставав; а хоч не много зділав, бо коротке було его житє, однак те, що зділав, не вмре, не поляже!

В. Левицкій.

Справ похибок печатних.

	місто:	має бути:
В 5. статті, стор. 2., стр. 8. з долу незвичайного ма- лого самчика		незвичайно малого самчика
» 6. » » 12., » 12. » При опаді матер- ниці		при обниженю ма- терниці (descen- sus uteri).



АДРЕСА ТОВАРИСТВА:

Львів, уличя Академічна ч. 8.

ADRESSE:

Šewčenko-Gesellschaft der Wissenschaften, Lemberg, Akademiestrasse 8.

~~~~~  
Ціна 3 корони. —  
~~~~~