Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк,
В. В. Мазуренко, О. О. Власій

УЗАГАЛЬНЕНІ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ДРОГОБИЧ ○ КОЛО ○ 2011

ББК 22.161.6
УДК 517.926
MSC 34A30, 34A36, 34A37

Рекомендовано до друку Вченою радою Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (протокол №6 від 29.06.2011 р.)

Рецензенти:

Каленюк П. І., доктор фіз.-мат. наук, професор, директор Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету "Львівська політехніка";

Лазакович М. В., доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри функціонального аналізу Білоруського державного університету;

Радино Я. В., член-кореспондент НАН Білорусі, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри функціонального аналізу Білоруського державного університету;

Сухорольський М. А., доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої математики Національного університету "Львівська політехніка".

Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Мазуренко, О. О. Власій. – Дрогобич: Коло, 2011. – 302 с.

ISBN 978-966-2405-84-2

Монографія є першим систематичним викладом теорії узагальнених квазідиференціальних рівнянь, яка активно розвивається впродовж двох-трьох останніх десятиліть. Побудова теорії ведеться на основі розвитку концепції квазіпохідних, що дозволяє звести до мінімуму вимоги на гладкість коефіцієнтів рівнянь. Кращому розумінню теоретичного матеріалу монографії сприяє значна кількість детально розібраних прикладів, окремі з яких мають чітко виражений прикладний характер.

Для науковців, аспірантів і студентів, що спеціалізуються у галузі диференціальних рівнянь, механіків та інженерів, що мають справу з дискретно-неперервними моделями.

ISBN 978-966-2405-84-2
9 789662 405842

© Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Мазуренко, О. О. Власій, 2011.

Зміст

Передмова 6

Вступ 12

Перелік умовних позначень 36

Розділ 1. Узагальнені інтегральні і диференціальні системи 39

§1. Функції обмеженої варіації та міри 39

§2. Матричний некласичний інтеграл Рімана–Стільтьєса 48

§3. Однорідне матричне інтегральне рівняння 56

§4. Неоднорідне матричне інтегральне рівняння 61

§5. Спряжене матричне інтегральне рівняння 64

§6. Про добуток розподілів і первісні мір 67

§7. Лінійні диференціальні системи з мірами 70

§8. Існування і єдиність розв'язку початкової задачі 74

Розділ 2. Основи концепції квазіпохідних 76

§9. Попередні зауваження 76

§10. Початкова задача для квазідиференціального рівняння з мірами 84

§11. Спряжене квазідиференціальне рівняння з мірами 90

§12. Лінійна теорія узагальнених квазідиференціальних рівнянь 96

§13. Структура фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння з мірами 101
§14. Конструкція елементів фундаментальної матриці 106
§15. Неоднорідне квазідиференціальне рівняння з розподілами 111
§16. Узагальнене звичайне диференціальне рівняння 119

Розділ 3. Векторні і матричні узагальнені квазідиференціальні рівняння 130
§17. Початкові задачі для векторних квазідиференціальних рівнянь з мірами 130
§18. Лінійна теорія матричних узагальнених квазідиференціальних рівнянь 137
§19. Структура фундаментальної матриці 142
§20. Конструкція елементів фундаментальної матриці 149
§21. Неоднорідне векторне квазідиференціальне рівняння з розподілами 155

Розділ 4. Структура розв'язків узагальнених квазідиференціальних рівнянь 162
§22. Системи диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами і δ-особливостями 162
§23. Побудова фундаментальної матриці 163
§24. Структура розв'язку неоднорідної диференціальної системи 171
§25. Рекурентне представлення розв'язку 177
§26. Зведення крайової задачі до початкової 190

§27. Квазідиференціальні рівняння з кусково-неперервними коефіцієнтами і δ-особливостями 195

§28. Частково вироджені квазідиференціальні рівняння 204

§29. Вироджені квазідиференціальні рівняння 210

Розділ 5. Наближене розв'язування узагальнених квазідиференціальних рівнянь 220

§30. Точне рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння другого порядку 220

§31. Точне рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння довільного порядку 232

§32. Точна двоточкова рекурентна формула 243

§33. Апроксимація розв'язків квазідиференціальних рівнянь 246

§34. Приклади побудови наближених розв'язків 257

Бібліографія 274

Іменний покажчик 297

Предметний покажчик 299

Передмова

Ідея написання цієї монографії виникла у перших двох авторів доволі давно. Однак сама книга в тому вигляді, котрий вона має зараз, з'явилася до певної міри випадково. Навесні 1994 року вийшов з друку препринт з однойменною назвою [**97**] як результат роботи семінару "Дискретно-неперервні крайові задачі" при кафедрі вищої математики Львівської політехніки. У ньому переважно в декларативній формі була викладена концепція квазіпохідних та побудована загальна теорія скалярних і векторних квазідиференціальних рівнянь з коефіцієнтами-мірами і правими частинами — узагальненими похідними вищих порядків від функцій локально обмеженої варіації. Викладена теорія стала основою подальших наукових досліджень в цьому напрямі [**17**–**20**, **58**–**61**, **64**–**68**, **70**, **71**, **89**–**97**, **99**–**113**, **165**, **166**], результати яких доповідалися на численних наукових конференціях, та була покладена в основу лекцій, котрі у вигляді спеціальних курсів читалися авторами впродовж останніх десяти років в Національному університеті "Львівська політехніка", Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника, Львівському державному університеті безпеки життєдіяльності, Університеті Казимира Великого (Польща), Люблінській Політехніці (Польща).

Невеликий тираж (100 примірн.) згаданого препринту швидко розійшовся і за якийсь час це видання стало бібліографічною рідкістю. Відтак виникла нагальна потреба опублікувати його розширений варіант. Однак з огляду на причини об'єктивного

і суб'єктивного характеру така публікація затримувалась. Водночас за ті 17 років, що промайнули з часу опублікування препринту, викладена в ньому теорія збагатилась новими важливими результатами, котрі гармонійно доповнюють попередні дослідження, з огляду на що не включити їх в цю монографію було б недоречним.

Основну частину монографії складають результати, отримані авторами безпосередньо чи у співавторстві. З решти результатів наведені (часом без строгих математичних доведень, але з вказанням джерел, де їх можна знайти) лише ті результати, котрі мають безпосереднє відношення до питань, що розглядаються в цій монографії. Це стосується насамперед параграфа, присвяченого мірам Стільтьєса і функціям обмеженої варіації, що їх породжують, а також нерівності Гронуолла—Беллмана та її узагальненням.

Монографія складається зі вступу і п'яти розділів. У вступі читач матиме першу нагоду познайомитись з основним об'єктом монографічного дослідження — *квазідиференціальним рівнянням* (КДР). Сподіваємось також, що завдяки зробленому там короткому огляду робіт, присвячених теорії КДР (починаючи від рівнянь з непрервними та сумовними за Лебегом коефіцієнтами і закінчуючи рівняннями з розподілами у коефіцієнтах) читач матиме змогу краще зорієнтуватись в сучасних питаннях цієї теорії. Відразу відзначимо, що з широкого спектру літератури ми зосередили увагу лише на тих роботах, котрі тісно дотикаються або ідейно близькі до тематики цієї монографії.

У першому розділі дається означення некласичного інтеграла Рімана–Стільтьєса і вивчаються його властивості (умова стрибка,

теорема про підстановку, формула Діріхле і формула інтегрування частинами), на основі яких досліджуються лінійні матричні інтегральні рівняння та відповідні системи диференціальних рівнянь з мірами. Важливою проблемою, що виникає при дослідженні останніх є той факт, що простір узагальнених функцій не є алгеброю — у ньому не можна визначити множення, яке б успадкувало основні властивості множення неперервних функцій. Саме тому в окремому параграфі (див. § 6) обговорюється питання про добуток міри на функцію обмеженої варіації і з'ясовуються умови, за яких такий добуток є коректним в узагальненому сенсі. Безпосереднім наслідком такого обговорення є побудова спеціального допустимого класу функцій, в якому існує єдиний розв'язок початкової задачі для диференціальної системи з мірами, котрий зображається у формі Коші за допомогою фундаментальної матриці і справджує певні умови стрибка в точках розривів коефіцієнтів системи.

Другий розділ присвячений розвиткові концепції квазіпохідних та побудові лінійної (елементарної) теорії КДР з коефіцієнтами-мірами і правими частинами — узагальненими похідними вищих порядків від функцій локально обмеженої варіації. Тут, зокрема:

шляхом накладання певних умов на коефіцієнти рівняння виділений широкий клас коректних узагальнених КДР, при дослідженні яких не виникає проблема множення функціоналів, та вказана процедура зведення таких рівнянь до диференціальних систем з мірами;

введене поняття розв'язку вихідного і спряженого до нього КДР та вказаний спосіб визначення їх квазіпохідних, котрі володіють властивістю взаємообумовленості в тому сенсі, що в разі,

коли квазіпохідні одного з рівнянь визначені, то квазіпохідні іншого рівняння визначаються однозначно;

для однорідних взаємно спряжених КДР з коефіцієнтами-мірами сформульовані в термінах відповідних квазіпохідних і доведені теореми існування та єдиності розв'язків початкових задач, а також вказана характеристика їх (розв'язків) гладкості;

введене поняття квазівронскіана розв'язків вихідного і спряженого рівнянь, для кожного з рівнянь отриманий аналог формули Ліувілля-Остроградського-Якобі, введене поняття фундаментальної системи розв'язків і з'ясована структура загального розв'язку;

встановлений максимальний порядок узагальненої похідної від функції локально обмеженої варіації у правій частині неоднорідного КДР, при якому рівняння залишається коректним навіть за умови, що точки сингулярностей коефіцієнтів рівняння і правої частини співпадають.

Одним з центральних результатів другого розділу є структура фундаментальної матриці, що відповідає КДР з коефіцієнтами-мірами. Як з'ясувалося, її вдається побудувати за допомогою лише однієї "функції Коші" та її мішаних квазіпохідних в сенсі вихідного і спряженого рівнянь. Це дозволило встановити тісний зв'язок між розв'язками цих рівнянь, а також отримати зображення функції Коші та її мішаних квазіпохідних через фундаментальну систему розв'язків. Відзначимо, між іншим, що позаяк для звичайних диференціальних рівнянь (так само, як і для квазідиференціальних) має місце той факт, що їх квазіпохідні в сенсі вихідного і спряженого рівнянь, взагалі кажучи, не збігаються, то структура фундаментальної матриці досі не була відома навіть для диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Елементи лінійної теорії узагальнених КДР у просторі вектор-функцій читач знайде в третьому розділі монографії.

У четвертому розділі вивчаються узагальнені диференціальні системи з кусково-неперервними коефіцієнтами і δ-особливостями та тісно пов'язані з ними два спеціальні класи узагальнених КДР — так звані, вироджені і частково вироджені рівняння. Специфічна структура коефіцієнтів останніх дозволяє не тільки явно знаходити вигляд відповідної матриці Коші, але й конструктивно зображати розв'язки цих рівнянь у вигляді сплайнів. Практичний інтерес до таких рівнянь викликаний, зокрема, їх застосуванням при наближеному розв'язуванні КДР загального вигляду.

Наближеним методам розв'язування узагальнених КДР та диференціальних систем з мірами якраз і присвячено заключний п'ятий розділ монографії. Спершу для КДР з узагальненими коефіцієнтами вводиться поняття і запропонована процедура побудови точних рекурентних співвідношень, котрі є аналогами точних різницевих схем [**115**, **117**] для звичайних диференціальних рівнянь. Далі з використанням одного спеціального узагальнення нерівності Гронуолла–Беллмана встановлені умови, за яких наближений розв'язок диференціальної системи з мірами можна отримати апроксимацією функцій, що породжують ці міри. Нарешті, на прикладі узагальненого КДР довільного порядку розглянуті такі два практично важливі способи апроксимації коефіцієнтів, як L-апроксимація (лінеаризація) і D-апроксимація (дискретизація), котрі при відносно незначній обчислювальній трудомісткості дозволяють отримувати результати з потрібною точністю.

Усі розділи монографії автори старались викласти достатньо детально, з повними доведеннями і зауваженнями, ілюстративними, контрольними і модельними прикладами (зокрема, теоретичний матеріал останніх двох розділів постійно ілюструється прикладами) так, щоб зміст монографії був зрозумілий не лише спеціалістам, але й аспірантам і студентам старших курсів, які вже займаються чи лише цікавляться (квазі)диференціальними рівняннями, а також механікам та інженерам, котрі на практиці мають справу з подібними задачами.

Слід відзначити, що викладена в цій монографії загальна теорія узагальнених КДР лягла в основу теорії дискретно-неперервних самоспряжених і несамоспряжених крайових задач [**18**–**20**, **58**–**61**, **64**–**68**, **70**, **71**, **102**, **103**, **106**–**108**, **111**, **112**, **165**, **166**] та створення наближених методів їх розв'язування [**17**, **90**, **99**, **100**, **109**]. Цим проблемам ми сподіваємося найближчим часом присвятити окремі монографії.

Вважаємо своїм приємним обов'язком висловити щиру подяку академіку НАН України *Анатолію Михайловичу Самойленку* і член-кореспонденту НАН Білорусі *Якову Валентиновичу Радино* за незмінну підтримку цього наукового напрямку.

Львів, лютий 2011 р. *Автори*

Вступ

A major task of mathematics to-day is to harmonize the continuous and the discrete, to include them in one comprehensive mathematics, and to eliminate obscurity from both.

Головним завданням математики наших днів є досягнення гармонії між континуальним і дискретним, включення їх в одне математичне ціле і виключення з них всього незрозумілого.

E.T. Bell, Men of Mathematics, I
Penguin Books, London, 1953.

Дослідження різноманітних фізичних процесів, котрі враховують природну єдність дискретного (зосереджені величини) і неперервного (розподілені величини), приводять до необхідності створення адекватних математичних моделей. Багато з них описуються диференціальними рівняннями, що містять доданки вигляду $\left(p(x)y^{(m)}\right)^{(n)}$ [**22**, **42**, **47**, **76**]. За умови недостатньої гладкості коефіцієнта $p(x)$ такі рівняння вже не можна звести (за допомогою операції n-кратного диференціювання) до звичайних диференціальних. Щоб підкреслити цей важливий факт, у науковій літературі їх називають *квазідиференціальними* рівняннями (КДР).

Вперше термін "*квазідиференціальне рівняння*" зустрічається в роботах Д. Шина [**124**–**126**]. Власне, йому й належить ідея введення квазіпохідних (хоча сам термін "*квазіпохідна*" він не

вживає), яка дозволяє відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів чи звести їх до мінімуму. У своїх роботах [**127**, **128**] автор розглядав доволі загальні КДР вигляду

$$f^{[n]} - lf = 0, \quad \operatorname{Im} l \neq 0, \quad a < x < b, \tag{0.1}$$

де

$$f^{[0]} = P_{00} f, \quad f^{[k]} = iP_{kk} \frac{d}{dx} f^{[k-1]} + \sum_{\nu=0}^{k-1} P_{k\nu} f^{[\nu]}, \ k = \overline{1,n}, \ i = \sqrt{-1},$$

і спряжені до них

$$g^{\{n\}} - lg = 0, \quad \operatorname{Im} l \neq 0, \quad a < x < b, \tag{0.2}$$

де

$$g^{\{0\}} = Q_{00} g, \quad g^{\{k\}} = iQ_{kk} \frac{d}{dx} g^{\{k-1\}} + \sum_{\nu=0}^{k-1} Q_{k\nu} g^{\{\nu\}}, \ k = \overline{1,n},$$

$$Q_{k\nu} = \overline{P_{n-\nu,n-k} P^{-1}_{n-\nu,n-\nu} P_{n-k,n-k}}, \quad \nu \leqslant k, \quad k, \nu = \overline{0,n},$$

за умов, що комплекснозначні функції $P_{k\nu}(x)$, $\nu \leqslant k$, $k, \nu = \overline{0,n}$, визначені і вимірні на (a,b), а функції $P^{-1}_{kk}(x)$, $k = \overline{0,n}$, та $P_{k\nu}(x)$, $\nu < k$, $k = \overline{1,n}$, $\nu = \overline{0,n-1}$, квадратично сумовні (за Лебегом[1)]) на кожному скінченному замкненому проміжку $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. При цьому функції $f(x)$ і $g(x)$ вважаються розв'язками рівнянь (0.1) і (0.2) відповідно, якщо вирази $f^{[k]}(x)$ і $g^{\{k\}}(x)$, $k = \overline{0,n-1}$, є абсолютно неперервними і задовольняють рівності (0.1) і (0.2) майже всюди на (a,b).

В роботі [**127**] для рівнянь (0.1) і (0.2) доведено теореми про існування і єдиність розв'язків початкових задач і встановлено зв'язок між їх розв'язками. Показано також, що диференціальні

[1)] Лебег Анрі Леон (Lebesgue Henri Leon, 1875–1941) — французький математик, професор Паризького університету, член Паризької АН (1922), іноземний чл.-кор. АН СРСР (1929).

вирази $f^{[n]}$ і $g^{\{n\}}$ є самоспряженими (за Лагранжем[2)]), якщо і тільки якщо функції $P_{k\nu}(x)$, $\nu \leqslant k$, $k, \nu = \overline{0, n}$, майже всюди на (a, b) задовольняють рівності

$$\overline{P_{n-\nu,n-k} P^{-1}_{n-\nu,n-\nu} P_{n-k,n-k}} = P_{k\nu}, \quad \nu \leqslant k,$$

$$k = \overline{0, n-[n/2]}, \ \nu = \overline{0, [n/2]}.$$

Зрозуміло, що за таких умов $Q_{k\nu} = P_{k\nu}$, $\nu \leqslant k$, $k, \nu = \overline{0, n}$, і $f^{[k]} = g^{\{k\}}$. Узагальнюючи відомі результати Г. Вейля[3)] [**183**] і В. Віндау [**186**] про кількість розв'язків, сумовних з квадратом, для диференціальних рівнянь другого і четвертого порядків на КДР вигляду (0.1), Д. Шин отримав такі результати:

(A) *кількість m лінійно незалежних розв'зків рівняння* (0.1), *що належать до $L_2(0, \infty)$, при $n = 2k$ і $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, задовольняє нерівність $m \geqslant k$.*

(B) *має місце альтернатива: або $m = k$, або $m = n$.*

Згодом І. М. Глазман [**23**] показав, що результат (*B*) як у В. Віндау, так і у Д. Шина є дещо помилковим і що насправді m задовольняє нерівність $k \leqslant m \leqslant n$.

В роботі [**128**] дається застосування теорії необмежених симетричних операторів до КДР (0.1) та (0.2) подібно до того, як

[2)] Лагранж Жозеф Луї (Lagrange Joseph Louis, 1736–1813) — французький математик і механік, професор Артилерійської школи в Турині, Нормальної і Політехнічної шкіл в Парижі, член Берлінської АН (1759), Паризької АН (1772), іноземний член Петербурзької АН (1776).

[3)] Вейль Герман (Weyl Hermann, 1885–1955) — німецький математик і фізик, учень Д. Гільберта, професор Цюріхського технологічного інституту, Гьоттінгенського університету, Принстонського інституту перспективних досліджень, член Національної АН США, нагороджений Міжнародною премією ім. М. І. Лобачевського (1927).

це раніше зробив М. Стоун[4] [**178**] для рівнянь другого порядку. Принагідно відзначимо, що сингулярні КДР є не лише однією з основних областей застосування цієї теорії, але й одним із джерел її виникнення і розвитку. Так, дослідження Вейля вперше дозволило виявити характерні риси майбутньої теорії необмежених симетричних операторів. Після створення цієї теорії результати Вейля були протлумачені з більш загальної точки зору Стоуном. Як відомо, вихідним пунктом теорії Вейля є альтернатива: випадок "граничного круга" (Grenzkreisfall) — випадок "граничної точки" (Grenzpunktfall). Аналогічна альтернатива була виявлена при вивченні проблеми моментів на осі в роботах Н. І. Ахієзера[5] і М. Г. Крейна[6] [**4**, **6**]. З погляду ж теорії операторів в гільбертовому просторі обидві ці альтернативи мають спільну природу.

Ідеї Шина виявились достатньо плідними і згодом були розвинені в різних аспектах у працях М. Г. Крейна [**50**, **51**], Н. І. Ахієзера і І. М. Глазмана [**5**, **24**], М. А. Наймарка [**72**], С. А. Орлова [**77**–**79**], А. В. Штрауса [**129**–**132**], В. І. Когана, Ф. С. Рофе-Бекетова і А. М. Холькіна [**44**, **45**, **82**] та інших авторів.

---

[4] Стоун Маршалл Гарві (Stone Marshall Harvey, 1903–1989) — американський математик, професор Колумбійського, Гарвардського, Єльського, Чикагського і Массачусетського університетів, член Національної АН США (1938), президент Американського математичного товариства (1943, 1944).

[5] Ахієзер Наум Ілліч (1901–1980) — український математик, працював в навчальних закладах і науково-дослідних інститутах в Києві, Ніжині, Харкові, Алма-Аті, Москві, професор Харківського університету, чл.-кор. АН УРСР (1934), голова Харківського математичного товариства (з 1947), лауреат премії ім. П. Л. Чебишева АН СРСР (1949), нагороджений медаллю Л. Ейлера АН СРСР (1957).

[6] Крейн Марк Григорович (1907–1989) — український математик, працював в навчальних закладах і науково-дослідних інститутах в Донецьку, Одесі, Куйбишеві, Харкові, Києві, професор Одеського інженерно-будівельного інституту, член-кор. АН УРСР (1939), член Харківського, Московського і Американського математичних товариств, лауреат премії ім. М. М. Крилова.

Так, окремі розділи фундаментальних робіт [**5**, **50**, **72**] присвячені самоспряженому квазідиференціальному виразу парного порядку

$$l(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(p_{n-k}(x) y^{(k)} \right)^{(k)} \tag{0.3}$$

і відповідному КДР

$$l(y) = f(x) \tag{0.4}$$

з вимірними на інтервалі (a, b) і локально сумовними на цьому інтервалі (тобто сумовними на кожному його компактному підінтервалі) коефіцієнтами $p_0^{-1}(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ і правою частиною $f(x)$. Для виразу (0.3) вводяться квазіпохідні

$$y^{[k]} = \frac{d^k y}{dx^k}, \ k = \overline{0, n-1}; \quad y^{[n]} = p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n};$$

$$y^{[n+k]} = p_k(x) \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} - \frac{d}{dx} y^{[n+k-1]}, \ k = \overline{1, n-1}$$

і ставиться початкова задача

$$y^{[k]}(x_0) = c_k, \ k = \overline{0, 2n-1}, \tag{0.5}$$

що має єдиний розв'язок у класі абсолютно неперервних функцій разом зі своїми похідними до $(2n-1)$-го порядку включно. Доведення цього факту (який залишається правильним також для рівнянь $l(y) - \lambda y = f(x)$ з довільним комплексним параметром λ) грунтується на зведенні задачі (0.4), (0.5) за допомогою вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[2n-1]}\right)^\top$ до вигляду

$$Y' = A(x)\, Y + f(x), \tag{0.6}$$

$$Y(x_0) = Y_0, \ x_0 \in I,$$

з вимірними та локально сумовними на інтервалі (a, b) функціональними матрицею $A(x)$ і вектором $f(x)$, та подальшим

застосуванням методу послідовних наближень Пікара.[7)] Крім того, в роботах побудовано теорію самоспряжених розширень симетричних операторів, що породжені самоспряженим квазідиференціальним виразом (0.3), та проведено спектральний аналіз таких операторів.

Відзначимо, що теорія операторів відіграє важливу роль в сучасній математиці і фізиці. Спектральний аналіз диференціальних операторів, тобто дослідження спектра і розвинення заданої функції за власними функціями диференціального оператора, є основним математичним апаратом при розв'язуванні задач теорії коливань, квантової механіки, атомної фізики, акустики, фізики твердого тіла, механіки рідин. При цьому особливо важливим є дослідження сингулярних диференціальних операторів, н-д, операторів, заданих на нескінченному інтервалі. Такі оператори можуть мати не лише дискретний, але й неперервний спектр, внаслідок чого розвинення за їх власними функціями зображається у вигляді інтегралу Стільтьєса[8)] (по спектральній функції розподілу оператора).

Питання, пов'язані з конструкцією резольвент і спектральних функцій, а також зі з'ясуванням кратності спектру самоспряжених квазідиференціальних операторів парного порядку, вивчались в роботах [**78**, **79**, **129**–**132**].

[7)] Пікар Шарль Еміль (Picard Charles Émile, 1856–1941) — французький математик, професор Сорбонни і Вищої нормальної школи в Парижі, член Паризької АН (1889), іноземний чл.-кор. Петербурзької АН (1895), член Лондонського королівського товариства (1909), Французької АН (1924), почесний член АН СРСР (1925).

[8)] Стільтьєс Томас Йоаннес (Stieltjes Thomas Joannes, 1856–1894) — голландський математик, працівник Лейденської обсерваторії, професор університету в Тулузі, чл.-кор. Петербурзької АН (1894).

Для диференціальних рівнянь $l(y) = \lambda y$ довільного парного чи непарного порядку m з неперервними операторними коефіцієнтами загальний вигляд самоспряжених крайових задач на скінченному проміжку $[0, b]$ отримано у статті [**82**]. Застосований в ній метод грунтується на понятті ермітового бінарного відношення, що введене у довільному гільбертовому просторі. Виявляється, що задання такого відношення еквівалентне визначенню певних крайових умов, що описують самоспряжені розширення для операції $l(y)$. Операції, що розглядались у цитованій роботі, задаються виразом

$$l(y) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \Big\{ \big(p_{n-k}(x) y^{(k)}\big)^{(k)} - \\ - i\Big[\big(q_{n-k}(x) y^{(k)}\big)^{(k-1)} + \big(q_{n-k}(x) y^{(k-1)}\big)^{(k)}\Big] \Big\} + p_n(x) y$$

у випадку парного m та виразом

$$l(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Big\{ i\Big[\big(q_{n-k}(x) y^{(k)}\big)^{(k+1)} + \big(q_{n-k}(x) y^{(k+1)}\big)^{(k)}\Big] + \\ + \big(p_{n-k}(x) y^{(k)}\big)^{(k)} \Big\},$$

коли m непарне. До того ж відзначено, що умови неперервності коефіцієнтів можна послабити, якщо розглядати $l(y)$ як квазідиференціальну операцію. Власне, так вона розуміється у роботі Ф. Волкера [**182**], де скалярні коефіцієнти припускаються сумовними, а операція непарного порядку визначається виразом

$$l(y) = (-1)^n \Big\{ i\Big[q_0(x)\big(q_0(x) y^{(n)}\big)'\Big]^{(n)} + \big(p_0(x) y^{(n)}\big)^n \Big\} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\Big\{i\Big[\big(q_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k+1)}+\big(q_{n-k}(x)y^{(k+1)}\big)^{(k)}\Big]+$$
$$+\big(p_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k)}\Big\}.$$

Шляхом застосування теорії систем першого порядку в монографії [**3**] отримані двосторонні оцінки для розмірності $N(\lambda)$ лінійного многовиду розв'язків з $L_2\big([0,\infty];\omega(x)dx\big)$ рівняння $l(y)=\lambda\omega(x)y$ з локально сумовною на інтервалі (a,b) ваговою функцією $\omega(x)>0$ майже всюди на (a,b), а також встановлено, що, якщо при деякому значенні комплексного параметра λ усі розв'язки цього рівняння належать до $L_2\big([0,\infty];\omega(x)dx\big)$, то цей факт має місце для всіх λ. Подібні питання для рівнянь з матричними коефіцієнтами різними методами досліджувались в [**14**,**45**], а для рівнянь з комплексними коефіцієнтами — в [**44**].

Монографія [**172**] присвячена, насамперед, дослідженню зв'язків між спектральними і осциляційними властивостями нескінченних систем диференціальних рівнянь довільного порядку, які можуть бути представлені у формі диференціального рівняння з операторнозначними (обмеженими) коефіцієнтами. На додачу автори розглядають також багато питань (наприклад, побудова фундаментальної системи розв'язків операторного диференціального рівняння з крайовими умовами на безмежності, опис самоспряжених розширень для нескінченних систем диференціальних рівнянь на скінченному чи нескінченному інтервалі з використанням вже згадуваного методу бінарних відношень, тощо), котрі не тільки відіграють ключову роль при висвітленні головної проблематики книги, але й становлять самостійний інтерес.

Серед робіт зарубіжних математиків з теорії квазідиференціальних операторів, окрім цитованої роботи [**182**], відзначимо також праці К. Кодаіри[9] [**157**], Й. Вайдмана [**184**, **185**], А. Зеттла, В. Еверітта, Л. Маркуса [**138**–**144**, **187**].

Так, в [**138**] можна знайти огляд ряду результатів стосовно проблеми індексів дефекта операторів, починаючи з фундаментальної роботи Вейля за 1910 р. і до 1976 р. включно. У статті [**184**] в гільбертовому просторі $L^2_r(a,b)$ функцій, інтегровних з квадратом на інтервалі (a,b) відносно ваги $r(x)$, вивчається спектральна теорія операторів, породжених диференціальними виразами вигляду

$$l(y)=\frac{1}{r(x)}\Big\{-\frac{d}{dx}p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y\Big\}$$

з вимірними на (a,b) і локально сумовними на цьому інтервалі коефіцієнтами $p^{-1}(x)$, $q(x)$ і $r(x)$, причому $p(x)>0$ і $r(x)>0$ майже всюди на (a,b). В роботі [**185**] ці дослідження розвинені на випадок формально самоспряжених квазідиференціальних виразів довільного порядку

$$l(y)=\frac{1}{r(x)}\Bigg\{\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j\big(p_j(x)y^{(j)}\big)^{(j)}+ \\ +\sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^j\Big[\big(q_j(x)y^{(j)}\big)^{(j+1)}-\big(q_j^*(x)y^{(j+1)}\big)^{(j)}\Big]\Bigg\}$$

з вимірними на (a,b) матричними коефіцієнтами $r(x)$, $p_j(x)$ і

[9] Кодаіра Куніхіко (Kodaira Kunihiko, 1950 р.н.) — японський математик, професор Токійського, Гарвардського і Стенфордського університетів, професор Принстонського інституту перспективних досліджень, член Національної АН США (1978), лауреат золотої медалі і премії Дж. Філдса (1954).

$q_j(x)$ такими, що $r(x)$ додатно визначена для майже всіх $x \in (a,b)$ матриця, $p_j(x)$ — ермітові матриці. Крім того, у випадку парного $n=2k$ припускається, що матриця $p_k(x)$ є регулярною для всіх $x \in (a,b)$, а функції $|p_k^{-1}|$, $|p_{k-1} - q_{k-1}^* p_k^{-1} q_{k-1}|$, $|p_k^{-1} q_{k-1}|$, $|p_j|$, $j = \overline{0,k-2}$, $|q_j|$, $j = \overline{0,k-2}$, $|r|$ — локально сумовними на (a,b); у випадку ж непарного $n=2k+1$ вимагається, щоб матриця $q_k(x)$ була абсолютно неперервною на (a,b), $\hat{q}_k(x) = q_k(x) - q_k^*(x)$ — регулярною для всіх $x \in (a,b)$, а $|\hat{q}_k^{-1}|$, $|\hat{q}_k^{-1} q_{k-1}|$, $|\hat{q}_k^{-1}(p_k + q_k')|$, $|p_j(x)|$, $j = \overline{0,k-1}$, $|q_j(x)|$, $j = \overline{0,k-1}$, $|r(x)|$ — локально сумовними на (a,b).

Для $m = 1$ подібний клас квазідиференціальних виразів вивчався у роботах [**139**, **143**, **187**], де

$$l(y) = \left(y^{[n-1]}\right)' - \sum_{i=1}^{n} f_{ni}(x) y^{[i-1]},$$

причому $y^{[0]} = y$, $y^{[i]} = f_{i,i+1}^{-1}(x)\left[\left(y^{[i-1]}\right)' - \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij}(x) y^{[j-1]}\right]$, а функції $f_{ij}(x)$ визначені і локально сумовні на інтервалі (a,b), $f_{ij}(x) = 0$ майже всюди на (a,b) при $2 \leqslant i+1 < j$, а $f_{i,i+1}(x) \neq 0$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Деякі додаткові зауваження стосовно лінійних КДР зроблені в [**142**]. Квазідиференціальні вирази, що містять лише члени парного порядку $\left(p_j(x) y^{(j)}\right)^{(j)}$ вивчались в [**157**]. Питання факторизації (розкладу на множники) квазідиференціальних операторів розглянуто в [**141**]. У статті [**144**] досліджені диференціальні вектор-оператори, породжені зліченним числом квазідиференціальних виразів на дійсній осі. Вивченню крайових задач для звичайних диференціальних і квазідиференціальних операторів присвячено роботу [**140**].

В роботах В. Я. Дерра [**34**–**36**] досліджуються подібні до (0.1) КДР вигляду

$$q_P^n x \equiv p_{nn}(t)\frac{d}{dt}q_P^{n-1}x + \sum_{k=0}^{n-1} p_{nk}(t)q_P^k x = f(t), \qquad (0.7)$$

де

$$q_P^0 x = p_{00}(t)x, \quad q_P^k x = p_{kk}(t)\frac{d}{dt}q_P^{k-1}x + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_{k\nu}(t)q_P^\nu x, \ k = \overline{1,n},$$

$$P = \{p_{ik}\}, \quad p_{ik} = 0, \ k > i,$$

з дійснозначними коефіцієнтами $p_{ik}(t)$, $k \leqslant i$, і локально сумовними на інтервалі (a,b) функціями $p_{ii}^{-1}(t)$, $p_{ik}(t)p_{ii}^{-1}(t)$, $f(t)p_{nn}^{-1}(t)$. На випадок таких рівнянь переносяться основні факти теорії неосциляції, вводиться поняття узагальненої задачі Валле-Пуссена[10)], розв'язок якої шукається в класі функцій з кусково абсолютно неперервними квазіпохідними. В [**37**] розв'язок звичайного диференціального рівняння з узагальненими функціями в коефіцієнтах визначається як розв'язок відповідного КДР.

Відзначимо також, що суттєві результати в теорії КДР на графах отримані Ю. В. Покорним та його учнями. Повне уявлення про їх досягнення і актуальні питання в цьому напрямку можна отримати з монографії [**38**].

Позаяк ми зачепили вже КДР з узагальненими функціями[11)] в коефіцієнтах, то буде доречним згадати також про роботи зі

[10)] Валле-Пуссен Шарль Жан де Ла (de La Vallee-Poussin Charles Jean, 1866–1962) — бельгійський математик, професор Лувенського університету, член Бельгійської АН (1909).

[11)] Локально інтегровні функції і δ-функції описують розподіли (щільності) мас, зарядів, сил і т. і., тому узагальнені функції називають ще *розподілами* (Л. Шварц, 1950).

звичайних диференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами. Як відомо, крайові задачі для таких рівнянь успішно вивчаються математиками і механіками віддавна. До введення поняття δ-функції точкові сингулярності з'являлись в задачах у формі специфічних умов спряження для розв'язку і його похідних у точках, котрі з погляду сучасної теорії належать до сингулярних носіїв коефіцієнтів рівняння. Такі дослідження здебільше мали частковий характер, бо стосувались рівнянь конкретного вигляду. Рівняння, коефіцієнти яких містять імпульсні особливості типу δ-функції та її похідних, описують процеси у фізичних системах з дискретно-неперервним розподілом параметрів — стрижні, пластини, оболонки із зосередженими в точках, на лініях, окремих поверхнях масами і моментами інерції, несучими пластами нульової товщини тощо.

Суттєвий поштовх для розвитку ця тематика отримала завдяки фундаментальним роботам М. Г. Крейна та І. С. Каца (див. додаток II монографії [**3**] і бібліографію там) стосовно диференціальних рівнянь другого порядку, що моделюють вільні коливання струни, маса якої допускає окрім неперервного, ще й точковий розподіл. З математичної точки зору дослідження пов'язані з узагальненим диференціальним виразом

$$l_{MQ}(y) = -\frac{d}{dM(x)}\left[y^{+}(x) - \int\limits_{c+0}^{x+0} y(s)dQ(s)\right], \qquad (0.8)$$

де $M(x)$ — неспадна на деякому скінченному чи нескінченному інтервалі функція, $Q(x)$ — різниця двох неспадних функцій, $y^{+}(x)$ — правостороння похідна функції $y(x)$. У випадку,

коли $M(x)$ та $Q(x)$ абсолютно неперервні і майже всюди на інтервалі $M'(x)=\rho(x)$, $Q'(x)=q(x)$, диференціальне рівняння $l_{MQ}(y)-\lambda y=0$ рівносильне рівнянню

$$-y''+q(x)y-\lambda\rho(x)y=0.$$

Диференціальний вираз (0.8) для $Q(x)=\mathrm{const}$ вивчався В. Феллером[12)] [**146–148**]. Його робота [**146**] цікава тим, що в ній дається внутрішнє аксіоматичне визначення операції $-\dfrac{d}{dM(x)}y^{+}(x)$. Завдяки Феллеру такі диференціальні операції почали застосовуватись в теорії марковських процесів. Однак, автор визначав операцію так, що вона втрачала сенс за наявності у функції $M(x)$ інтервалів постійності. Внаслідок цього його результати виявились недостатньо загальними, бо не охоплювали важливий випадок дискретних марковських процесів таких, як наприклад, процеси розмноження і загибелі [**43**] (їх дослідження приводить до диференціальної операції, пов'язаної зі стільтьєсівською струною [**3**, §13]).

Зі спектральною теорією неоднорідної навантаженої струни тісно пов'язана (див. [**75**]) ще одна спектральна теорія — теорія операторів Шредінґера[13)] з сингулярними (а саме, зосередженими

[12)] Феллер Вільям (Feller William, 1906–1970) — американський математик, працював в Стокгольмі консультантом з математичних методів в статистиці, економіці і біології, професор Корнеллського і Принстонського університетів, член Національної АН США (1960), редактор журналу "Mathematical Reviews"(1939–1945).

[13)] Шредінґер (Шрьодінґер) Ервін (Schrödinger Erwin, 1887–1961) — австрійський фізик-теоретик і математик, один із засновників квантової механіки, працював у Вищих технічних школах в Штутгарті, Бреслау, Цюріху, професор Віденського, Єнського, Берлінського, Оксфордського і Грацького університетів, директор Інституту вищих досліджень в Дубліні, почесний член АН СРСР (1934), лауреат Нобелівської премії (1933).

на дискретній множині точок $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$) потенціалами

$$L_{X,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta(x-x_k), \quad L_{X,\beta} = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta'(x-x_k),$$

де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ — інтенсивності точкових взаємодій[14)]. Такі оператори є точно розв'язуваними (в тому сенсі, що їх резольвенти будуються явно, відтак вдається обчислити спектри і характеристики розсіяння) математичними моделями квантово-механічних систем [**134**, **180**]. Історію дослідження одновимірних операторів Шредінґера з точковими взаємодіями можна знайти в монографіях [**134**, **135**], які містять також достатньо повну бібліографію з цієї тематики. Пізнішим дослідженням в цьому напрямку присвячені роботи [**26**–**29**, **74**, **149**, **151**, **152**, **156**, **158**, **167**–**169**, **173**–**175**, **188**–**190**].

В останні роки інтенсивно зростає кількість публікацій (як теоретичного, так і прикладного характеру) з теорії диференціальних рівнянь і систем рівнянь з розподілами у коефіцієнтах, що свідчить про актуальність постановок задач, які поєднують континуальність з дискретністю. Багато задач математичної фізики, електротехніки, теорії автоматичного керування, квантової механіки, атомної фізики приводять до необхідності створення достатньо розвиненої теорії таких рівнянь. Інтерес до диференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами пояснюється ще й тим, що в рамках цієї теорії видається можливим з єдиної точки зору досліджувати як звичайні диференціальні рівняння, так і диференціальні рівняння з особливостями імпульсного типу та

[14)] В точних моделях квантової механіки стосовно похідної δ' розрізняють два фізичні феномени: δ'-взаємодія і точкова дипольна взаємодія (δ'-потенціал) [**179**].

різницеві рівняння. В монографії О. Ф. Філіппова [**119**] зроблено огляд робіт вітчизняних і зарубіжних авторів, де досліджуються різні класи диференціальних рівнянь з узагальненими функціями, що входять у рівняння у вигляді доданків, в тому числі диференціальні рівняння з імпульсами, лінійні (і найпростіші нелінійні) рівняння з узагальненими функціями в правій частині, лінійні системи, що не розв'язані відносно похідних і володіють розривними розв'язками, розглядаються також диференціальні рівняння, що містять узагальнені функції в коефіцієнтах. Вказано деякі класи рівнянь і систем, які за допомогою заміни змінних зводяться до систем Каратеодорі[15)], що дозволяє довести існування і дослідити властивості розв'язків. Розглядаються різні граничні переходи від диференціальних рівнянь з неперервними правими частинами до рівнянь з узагальненими функціями. В монографії наводиться численна бібліографія, що дає повне уявлення про стан досліджень (зрозуміло на момент опублікування монографії) в цьому напрямку. Що стосується досліджень із загальної і спектральної теорій узагальнених КДР, які з'явились впродовж двох-трьох останніх десятиліть, звернемо увагу на роботи [**17**–**19**, **30**, **31**, **58**, **61**, **67**, **68**, **70**, **71**, **89**, **90**, **92**, **95**, **97**, **99**, **100**, **102**–**110**, **113**, **165**, **166**].

Ще одним важливим напрямом в плані узагальнень звичайних диференціальних рівнянь є дослідження динамічних систем з розривними траєкторіями або, як їх ще називають, диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Такі задачі виникли на зорі нелінійної механіки і зацікавили фізиків можливістю адекватно

[15)] Каратеодорі Констянтин (Carathéodory Constantin, 1873–1950) — німецький математик, професор Ганноверського, Ґьоттінгенського, Берлінського, Мюнхенського і Афінського (ректор з 1939) університетів.

описувати процеси у нелінійних коливальних системах. Система рівнянь з імпульсною дією описується

а) системою диференціальних рівнянь, що характеризує еволюцію розглядуваного процесу

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}; \tag{0.9}$$

б) деякою множиною $\mathcal{F}_t$ розширеного фазового простору $M \times \mathbb{R}$;

в) оператором $\mathcal{A}_t$, що визначений на множині $\mathcal{F}_t$ і відображає її на множину $\widetilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{A}_t \mathcal{F}_t$ розширеного фазового простору.

У компактнішій формі це виглядає так:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad (t,x) \notin \mathcal{F}_t, \quad \Delta x\big|_{(t,x)\in\mathcal{F}_t} = \mathcal{A}_t x - x. \tag{0.10}$$

Під розв'язком задачі (0.10) розуміється функція $x = \varphi(t)$, яка (у звичайному сенсі) задовольняє систему рівнянь (0.9)) поза множиною $\mathcal{F}_t$ і має розриви першого роду у тих точках t, для яких $(t,x) \in \mathcal{F}_t$. Величина стрибка розв'язку обчислюється за формулою

$$\Delta x = \varphi(t+0) - \varphi(t-0) = \mathcal{A}_t \varphi(t-0) - \varphi(t-0).$$

За останні 30 років з'явилась велика кількість робіт із дослідження диференціальних рівнянь з імпульсною дією у різних математичних школах як у нашій країні, так і за її межами [**40**, **85**, **122**, **145**, **170**]. Однак, найбільш систематичні й глибокі дослідження було здійснено київською школою нелінійної механіки, представники якої успішно розвивають такі напрямки, як загальні питання, теорія стійкості і теорія керування, крайові і багатоточкові задачі, методи чисельно-аналітичного й асимптотичного інтегрування тощо [**7**, **8**, **80**, **83**–**85**, **87**, **88**, **133**].

Відомо [**98**], що будь-яке лінійне КДР за допомогою введення квазіпохідних вдається звести до лінійної диференціальної системи першого порядку вигляду

$$Y' = C'(x)\, Y + F'(x). \tag{0.11}$$

Якщо $C(x)$ і $F(x)$ абсолютно неперервні [**3**], то система (0.11) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} dC(t)Y(t) + F(x) - F(x_0) \tag{0.12}$$

з інтегралом Лебега. Така ситуація має місце для квазідиференціальних рівнянь із сумовними коефіцієнтами; при цьому (0.11) є системою типу Каратеодорі і допускає запис у вигляді (0.6). Еквівалентність зберігається й тоді, коли $C(x)$ абсолютно неперервна, а $F(x)$ має обмежену варіацію [**122**] або, коли $C(x)$ і $F(x)$ неперервні функції обмеженої варіації [**160**]. При цьому диференціювання і рівність в (0.11) розуміються в сенсі теорії узагальнених функцій і, крім того, в останньому з цих випадків у рівнянні (0.12) фігуруватиме класичний інтеграл Рімана–Стільтьєса[16)].

Усе це не узагальнюється безпосередньо на випадок, коли $C(x)$ є розривною функцією обмеженої варіації, навіть за умови $F(x) \equiv 0$. У цьому випадку розриви матриці-функції $C(x)$ обов'язково породжують розриви розв'язку $Y(x)$ і до того ж в одних і тих самих точках. Тому інтеграл Стільтьєса у рівнянні (0.12) може не існувати (див. [**73**, с. 214]). Теорія узагальнених функцій тут також не допомагає, бо, наприклад, добуток δ-функції

[16)] Ріман Ґеорґ Фрідріх Бернхард (Riemann Georg Friedrich Bernhard, 1826–1866) — німецький математик, професор Ґьоттінгенського університету.

Дірака[17)] на її невизначений інтеграл (функцію Гевісайда[18)]) не існує (див. §6). В результаті не визначений також добуток матричної міри Стільтьєса [**122**, с. 160] $C'(x)$ на функцію обмеженої варіації.

Однак, якщо для функцій обмеженої варіації розрізняти значення $Y(x)$, $Y(x-0)$, $Y(x+0)$ і окремо розглядати лівий $Y(x)-Y(x-0)$ та правий $Y(x+0)-Y(x)$ стрибки, то вдається визначити інтеграл у рівнянні (0.12), коли $C(x)$ та $Y(x)$ є розривними функціями обмеженої варіації. При різних припущеннях (наприклад, коли $Y(x) = Y(x-0)$ або $Y(x) = Y(x+0)$ чи $Y(x) = [Y(x-0) + Y(x+0)]/2$ тощо) отримуються різні умови існування розв'язку рівняння (0.12) і відповідно системи (0.11), відрізняються й самі розв'язки. У книгах [**40**, **119**] відзначено, що відомі означення розв'язку системи (0.11) у такій ситуації реалізуються в рамках трьох основних підходів.

Перший підхід пов'язаний зі спробами формалізації цієї системи в рамках теорії розподілів і зводиться до проблеми множення узагальнених функцій на розривні. Спочатку на основі секвенціального підходу [**2**] вводиться означення добутку міри на функцію обмеженої варіації, а потім відповідним чином дається означення розв'язку системи (0.11) [**40**, **136**, **160**, **161**]. Вельми

[17)] Дірак Поль Адрієн Морис (Dirac Paul Adrien Maurice, 1902–1984) — англійський фізик-теоретик, один із засновників квантової механіки, професор Кембріджського університету, член Лондонського королівського товариства (1930), іноземний член АН СРСР (1931), лауреат Нобелівської премії (1933).

[18)] Гевісайд Олівер (Heaviside Oliver, 1850–1925) — англійський фізик та інженер, член Лондонського королівського товариства (1891).

цікавими є також роботи [**1**, **39**, **81**, **137**, **162**], в яких досліджуються

диференціальні рівняння у просторах "нових"[19)] узагальнених функцій.

Другий підхід започаткований у роботі Я. Курцвейля [**159**] і передбачає формальний перехід до інтегрального рівняння (0.12), в якому інтеграл розуміється у сенсі Перрона–Стільтьєса[20)], Лебега–Стільтьєса чи як некласичний інтеграл Рімана–Стільтьєса [**9**, **154**, **171**, **176**, **177**]. При такому підході, зрозуміло, стрибки розв'язку залежатимуть від значень функції $C(x)$ у точках розриву.

Третій підхід базується на ідеї апроксимації елементів матриці $C(x)$ послідовностями гладких функцій [**56**], [**40**, с. 148]. При цьому розв'язок системи (0.11), що визначається границею своїх гладких наближень, збігається з розв'язком інтегрального рівняння (0.12).

Для ілюстрації описаних вище підходів розглянемо початкову задачу

$$y' = \frac{1}{2}\delta(x)y, \quad y(-1) = y_0, \tag{0.13}$$

де $\delta(x)$ — функція Дірака (див. с. 47). На підставі результатів роботи [**40**] розв'язок задачі (0.13) має вигляд

$$y(x) = y_0 \exp\left\{\frac{1}{2}H_+(x)\right\}, \tag{0.14}$$

[19)] Нові узагальнені функції, як і розподіли, визначаються як границі послідовностей гладких функцій, однак принципова відмінність їх від розподілів полягає в тому, що при цьому "запам'ятовується" сам спосіб апроксимації.

[20)] Перрон Оскар (Perron Oscar, 1880–1975?) — німецький математик, професор Мюнхенського і Гейдельберзького університетів.

де $H_+(x)$ — функція Гевісайда неперервна зліва (розривна справа) в точці $x=0$: $H_+(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

Розв'язком цієї ж задачі, що розуміється у сенсі робіт [**136**, **160**, **161**] є функція

$$y(x)=y_0\left[\frac{2}{3}H_+(x)+1\right],$$

яка, очевидно, не збігається з функцією (0.14).

У рамках другого підходу задачі (0.13) слід поставити у відповідність інтегральне рівняння

$$y(x)=y_0+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x}y(t)\;d[\alpha H_+(t)+(1-\alpha)H_-(t)], \qquad (0.15)$$

де $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, а $H_-(x)$ — функція Гевісайда неперервна справа (розривна зліва) в точці $x=0$: $H_-(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$.

Зрозуміло, що при різних значеннях α розв'язки рівняння (0.15) визначаються по-різному: при $\alpha=1$ (цей випадок відповідає тому, що розв'язки задачі (0.13) apriori є неперервними зліва)

$$y(x)=y_0\left[1+\frac{1}{2}H_+(x)\right];$$

при $\alpha=0$ (розв'язки за означенням повинні бути неперервними справа)

$$y(x)=y_0\left[1+\frac{1}{2}H_-(x)\right];$$

якщо вважати, що $\alpha=1/2$ (наприклад, з міркувань симетрії, або приймаючи за означенням розв'язки такими, що задовольняють

умову $y(x) = [y(x-0) + y(x+0)]/2$), то

$$y(x) = y_0\Big\{1 + \frac{1}{4}\big[H_+(x) + H_-(x)\big]\Big\}.$$

Нарешті, нехай $H_k(x)$ — послідовність абсолютно неперервних функцій, що поточково збігається на проміжку $[-1, 1]$ до функції $H_+(x)$. Поставимо їй у відповідність послідовність функцій $y_k(x) = y_0 \exp\{\frac{1}{2}H_k(x)\}$, які є розв'язками початкових задач

$$y_k' = \frac{1}{2}H_k'(x)y_k, \quad y_k(-1) = y_0. \tag{0.16}$$

Тут $H_k'(x)$ є δ-послідовністю, що апроксимує δ-функцію Діра-ка, тому задачу (0.16) можна вважати гладкою апроксимацією початкової задачі (0.13). Очевидно, що послідовність $y_k(x)$ поточково збігається до функції (0.14) і не залежить від вибору апроксимуючої послідовності $H_k(x)$.

Як бачимо, поняття розв'язку для диференціальних рівнянь з розподілами не однозначне і головною причиною цього є той факт, що простір узагальнених функцій не є алгеброю — у ньому не можна визначити множення, яке б успадкувало основні властивості множення неперервних функцій. Відтак, при виборі того чи іншого означення розв'язку потрібно більш повно враховувати характер граничного переходу, що приводить до розглядуваного рівняння. Цього недоліку позбавлений підхід, що прийнятий в роботі [**98**] і якого ми дотримуватимемось тут. В рамках цього підходу під розв'язком системи (0.11) розуміється вектор-функція обмеженої варіації, що задовольняє систему в сенсі теорії розподілів, причому вказуються ефективні (в термінах матриць $C(x)$ і $F(x)$) умови, за яких система (0.11) є

коректною, тобто при її дослідженні не виникає проблеми множення функціоналів.

В заключному розділі монографії розглядаються також наближені методи розв'язування узагальнених квазідиференціальних рівнянь і диференціальних систем з мірами. Зокрема, один із підходів полягає у побудові для таких рівнянь точних рекурентних співвідношень (ТРС), що є аналогами точних різницевих схем. Точні різницеві схеми для звичайних диференціальних рівнянь з кусково-гладкими коефіцієнтами вперше були отримані А. М. Тіхоновим[21)] і О. А. Самарським[22)] [**114**–**116**]. Ними ж був апробований алгоритм наближеної реалізації точних різницевих схем — відсічені схеми m-го рангу. Останні мають максимальний порядок точності $O\left(h^{2(m+1)}\right)$, де h — величина кроку сітки, відтак за рахунок вибору достатньо великого m можна отримати триточкові схеми довільного порядку. Згодом ці результати були поширені на системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку [**62**], диференціальні рівняння четвертого порядку [**15**], нелінійні звичайні диференціальні рівняння другого

[21)] Тіхонов Андрій Миколайович (Тихонов Андрей Николаевич, 1906–1993) — російський математик і геофізик, професор Московського університету (декан факультету обчислювальної математики і кібернетики з 1970 по 1990), працював в Інституті теоретичної геофізики АН СРСР, заступник директора (з 1953) і директор (з 1978) Інституту прикладної математики АН СРСР, чл.-кор. (1939) і академік (1966) АН СРСР, лауреат Сталінської (1953), Державної (1976) і Ленінської (1966) премій, премії ім. М. В. Ломоносова (1963), нагороджений золотою медаллю М. В. Келдиша (1990).

[22)] Самарський Олександр Андрійович (Самарский Александр Андреевич, 1919–2008) — російський математик, учень А. М. Тіхонова, зав. відділу в Інституті прикладної математики АН СРСР, професор Московського університету, директор Інституту математичного моделювання РАН (з 1990), чл.-кор. (1966) і академік (1976) АН СРСР, лауреат Державної (1954, 1999) і Ленінської (1962) премій.

порядку [**53**–**55**, **150**], задачі з виродженням і задачі Штурма-Ліувілля[23)] [**10**, **11**, **63**].

В цих роботах досліджувались питання існування і єдиність точних схем, їх зведення до дивергентного вигляду і точність відсічених різницевих схем для задач з кусково-гладкими коефіцієнтами. Точні різницеві схеми для звичайного диференціального рівняння $2m$-го порядку вивчались в роботі [**49**].

В працях [**163**, **164**] розглядається проблема побудови точної двоточкової (компактної) різницевої схеми та її реалізації через двоточкові схеми довільного порядку точності для системи диференціальних рівнянь першого порядку з додатковими двоточковими крайовими умовами.

Роботи [**25**, **117**] присвячені побудові і дослідженню однорідних різницевих схем для одновимірної крайової задачі

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u(x) = -f(x), \quad x \in \Omega \equiv (0;1), \tag{0.17}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{0.18}$$

де $k(x)$ — вимірна функція і $0 < M_1 \leqslant k(x) \leqslant M_2 < \infty$; $q(x) = Q'(x)$, $Q(x) \in W_p^{\lambda}(\Omega)$ $(p \geqslant 2,\ 0 < \lambda \leqslant 1)$, причому $\int\limits_0^1 Q(x)v'(x)dx \geqslant 0$ для довільної функції $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $v(x) \geqslant 0$; $f(x) = F'(x)$, $F \in W_q^s(\Omega)$ $(q \geqslant 2,\ 0 < s \leqslant 1)$. Коефіцієнти $q(x)$ і $f(x)$ рівняння (0.17) є узагальненими похідними від функцій з

[23)] Штурм Жак Шарль Франсуа (Sturm Jacques Charles François, 1803–1885) — швейцарський математик, професор Сорбонни і Політехнічної школи в Парижі, член Паризької АН (1836) та іноземний чл.-кор. Петербурзької АН (1836).

Ліувілль Жозеф (Liouville Joseph, 1809–1882) — французький математик, професор Політехнічної школи і Колеж де Франс в Парижі, член Паризької АН (1839) та іноземний чл.-кор. Петербурзької АН (1840). Засновник журналу "Journal de mathématiques pure et appliquée"(1883).

простору Соболєва[24)] W_p^λ $(0<\lambda\leqslant 1,\ 2\leqslant p\leqslant\infty)$. Сюди, зокрема, входять випадки, коли коефіцієнти — δ-функції $(p\lambda<1)$ і кусково-неперервні функції $(p=\infty,\ \lambda=1)$.

На основі властивостей шаблонних функцій, котрі є розв'язками в узагальненому (слабкому) сенсі певних задач Коші для рівняння (0.17), у цих роботах побудовано точну триточкову різницеву схему для задачі (0.17), (0.18), встановлено її єдиність і можливість зображення у дивергентному вигляді, досліджено консервативність різницевої схеми, що є необхідною і достатньою умовою її (схеми) збіжності, запропоновано алгоритм наближеного відшукання шаблонних функцій. Крім того, за допомогою відсічених шаблонних функцій побудована відсічена триточкова різницева схема m-го рангу, що має точність $O\bigl(h^{2(m+1)-n}\bigr)$, причому величина n втрати порядку точності залежить від гладкості коефіцієнтів. В міру зростання цієї гладкості зростає також і швидкість збіжності відсіченої схеми. Зокрема, коли коефіцієнти кусково-гладкі, отримані в [**25**, **117**] результати збігаються з результатами робіт [**114**–**116**].

[24)] Соболєв Сергій Львович (Соболев Сергей Львович 1908–1989) — російський математик, працював в Сейсмологічному інституті АН СРСР, Математичному інституті ім. В. А. Стєклова АН СРСР, Інституті атомної енергії, професор Московського і Новосибірського університетів, директор Інституту математики Сибірського відділення АН СРСР, академік АН СРСР (1939), почесний член Московського математичного товариства (1987).

Перелік умовних позначень

(i) $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множини натуральних, дійсних і комплексних чисел відповідно.

(ii) $[a,b]$, $I=(\alpha,\beta)$ — відповідно замкнений і відкритий інтервали дійсної осі $\mathbb{R}$.

(iii) $\overline{1,n}$ — набір цілих чисел від 1 до n: $\{1,2,\ldots,n\}$

(iv) $\omega_\nu=\{a\leqslant x_0<x_1<\ldots<x_\nu\leqslant b\}$ — сітка на відрізку $[a,b]$; для рівномірної сітки $x_k=kh$, $k=\overline{0,\nu}$, $h=\frac{b-a}{\nu}$.

(v) $\mathbb{C}^{p\times q}$ — лінійний простір комплексних $(p\times q)$-матриць $A=\big(a_{ij}\big)_{i,j=1}^{p,q}$ з нормою $|A|=\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{q}|a_{ij}|$; $\mathbb{C}^{p\times 1}=\mathbb{C}^p$, $\mathbb{C}^1=\mathbb{C}$.

(vi) $A^\top$, $\overline{A}$, A^{-1} — матриці відповідно транспонована, комплексно спряжена та обернена до матриці A.

(vii) $A^*=\big(\overline{A}\big)^\top$ — матриця ермітово спряжена до матриці A.

(viii) $\det A$ — визначник (детермінант) квадратної матриці A.

(ix) $\operatorname{tr}A=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{pp}$ — слід квадратної матриці A.

(x) δ_{ij} — символ Кронекера[25)]: $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

(xi) $E=(\delta_{ij})_{i,j=1}^{p}$ — одинична матриця розміру $p\times p$. Якщо є потреба вказати порядок матриці, то використовуємо позначення E_p.

[25)] Кронекер Леопольд (Kronecker Leopold, 1823–1891) — німецький математик, професор Берлінського університету, член Берлінської АН (1861), іноземний чл.-кор. Петербурзької АН (1872).

(xii) 0 — нульовий елемент: число, вектор чи матриця. При потребі для нульової $(p\times p)$-матриці використовуємо позначення O_p.

(xiii) $\Theta_M(x)$ — характеристична функція множини M:

$$\Theta_M(x)=\begin{cases}1, & x\in M;\\ 0, & x\notin M.\end{cases}$$

(xiv) $C_{p\times q}(I)$, $AC_{p\times q}(I)$ — простори матричних функцій $A\colon I\to\mathbb{C}^{p\times q}$, усі елементи $a_{ij}(x)$ яких є відповідно неперервними та обсолютно неперервними на I скалярними функціями; $C_{p\times 1}(I)=C_p(I)$, $AC_{p\times 1}(I)=AC_p(I)$ і $C_1(I)=C(I)$, $AC_1(I)=AC(I)$.

(xv) $\bigvee\limits_a^b(A)$ — повна варіація матриці-функції $A(x)$, що дорівнює сумі повних варіацій усіх її елементів $a_{ij}(x)$:

$$\bigvee_a^b(A)=\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^q\sup_\sigma\sum_{k=1}^n\bigl|a_{ij}(x_k)-a_{ij}(x_{k-1})\bigr|$$

(тут $\sigma\colon a\leqslant x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n\leqslant b$ — довільне розбиття відрізка $[a;b]$). У випадку відкритого інтервалу I будемо вважати, що $A(x)$ має обмежену варіацію на I, якщо $A(x)$ має обмежену варіацію на довільному замкненому підінтервалі $[a,b]\subset I$ і варіації $\bigvee\limits_a^b(A)$ обмежені в їх сукупності: $\bigvee\limits_I(A)=\sup\limits_{b\geqslant a}\bigvee\limits_a^b(A)<\infty$.

(xvi) $BV_{p\times q}[a,b]$ — простір матриць-функцій $A\colon I\to\mathbb{C}^{p\times q}$, усі компоненти $a_{ij}(x)$ яких є функціями обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$, з нормою $\|A\|_{BV}=|A(a)|+\bigvee\limits_a^b(A)$; $BV_{p\times 1}[a,b]=BV_p[a,b]$ і $BV_1[a,b]=BV[a,b]$. Якщо $A(x)$ додатково неперервна справа, то використовуємо позначення $BV^+_{p\times q}[a,b]$, $BV^+_p[a,b]$, $BV^+[a,b]$.

(xvii) $BV^{+,loc}_{p\times q}(I)$ — простір матриць-функцій $A\colon I\to\mathbb{C}^{p\times q}$, усі компоненти $a_{ij}(x)$ яких є неперервними справа функціями локально обмеженої на інтервалі I варіації, тобто $a_{ij}\in BV^{+}[a,b]$ для довільного $[a,b]\subset I$; $BV^{+,loc}_{p\times 1}(I)=BV^{+}_{loc,p}(I)$ і $BV^{+}_{loc,1}(I)=BV^{+}_{loc}(I)$.

(xviii) $\Delta A(x)=A(x)-A(x-0)$ — стрибок матриці-функції $A\in BV^{+,loc}_{p\times q}(I)$ у точці x.

(xix) $L^{2,loc}_{p\times q}(I)$ — простір матриць-функцій $A\colon I\to\mathbb{C}^{p\times q}$, усі елементи $a_{ij}(x)$ яких є локально сумовними з квадратом модуля за Лебегом на інтервалі I скалярними функціями; $L^{2,loc}_{p\times 1}(I)=L^{2}_{loc,p}(I)$ і $L^{2}_{loc,1}(I)=L^{2}_{loc}(I)$.

(xx) $A_\nu(x)\rightrightarrows A(x)$ на $[a,b]$ — рівномірна збіжність послідовності матриць-функцій $\{A_\nu(x)\}_{\nu=1}^{\infty}$, яка означає, що $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sup\limits_{x\in[a,b]}|A(x)-A_\nu(x)|=0$.

(xxi) $\overline{\mathcal{D}}_0(I)$ — простір неперервних векторних функцій $I\to\mathbb{C}^p$ з компактним носієм (основних функцій), спряжений до якого є простором $\overline{\mathcal{D}}_0{}'(I)$ векторних розподілів (узагальнених функцій).

(xxii) (f,φ) — значення функціоналу f на основній функції $\varphi(x)$: $(f,\varphi)=\sum_{i=1}^{p}(f_i,\varphi_i)$ для $\varphi\in\overline{\mathcal{D}}_0(I)$, $f\in\overline{\mathcal{D}}_0{}'(I)$.

(xxiii) $H(x-x_s)$ — зміщена функція Гевісайда:

$$H(x-x_s)=\begin{cases}0, & x<x_s,\\ 1, & x>x_s.\end{cases}$$

(xxiv) $\delta(x-x_s)$ — δ-функція Дірака з носієм у точці x_s.

(xxv) КДР — квазідиференціальне рівняння.

(xxvi) ФСР — фундаментальна система розв'язків.

(xxvii) ТРС — точне рекурентне співвідношення.

(xxviii) ТДФ — точна двоточкова формула.

1

Узагальнені інтегральні і диференціальні системи

§ 1. Функції обмеженої варіації та міри

В цьому параграфі коротко подамо означення і твердження, які стосуються двох важливих класів функцій, що знадобляться нам при викладі основного матеріалу книги, — це функції обмеженої варіації та міри [**3**, **48**, **73**, **122**].

Означення 1.1. Дійсна або комплекснозначна скалярна функція $f(x)$, що визначена на скінченному відрізку $[a,b]$ дійсної осі $\mathbb{R}$, називається *функцією обмеженої варіації* на цьому відрізку, якщо вираз

$$V_\sigma(f)=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)| \tag{1.1}$$

допускає фіксовану верхню межу для будь-якого $n\in\mathbb{N}$ і довільного розбиття σ відрізка $[a,b]$: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Найменшу спільну верхню межу усіх таких виразів називають *повною варіацією* функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначають

$$\bigvee_a^b(f)=\sup_\sigma\{V_\sigma(f)\}.$$

Інколи для повної варіації зручно використовувати вираз

$$\bigvee_a^b(f) = \int_a^b |df(x)|,$$

де інтеграл справа природно тлумачити як границю суми (1.1) за умови, що $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(x_{k+1}-x_k)\to 0$.

Важливим прикладом функції обмеженої варіації є *зміщена функція Гевісайда* (*одинична сходинка*)

$$H(x-x_s)=\begin{cases}0, & x<x_s,\\ 1, & x>x_s.\end{cases}$$

Навпаки, функція $f(x)=x\sin\frac{\pi}{2x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$ (очевидно, $f(0)=0$) не є функцією обмеженої варіації. Дійсно, якщо в якості точок розбиття σ відрізка $[0,1]$ вибрати точки

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\frac{1}{2n-2}<\ldots<\frac{1}{2}<1,$$

то, легко бачити, що

$$V_\sigma(f)=\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n-3}+\ldots+2>1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n},$$

звідки $\bigvee\limits_0^1(f)=+\infty$.

Наслідком обмеженості варіації є той факт, що для довільної точки x_s $(a<x_s<b)$ існують обидві односторонні границі $f(x_s+0)$ і $f(x_s-0)$. Якщо при цьому

$$f(x_s+0)=f(x_s)=f(x_s-0), \tag{1.2}$$

то, як звичайно, в точці x_s функція $f(x)$ неперервна. Точки, в яких порушується хоча б одна з рівностей (1.2), утворюють щонайбільше зліченну множину, бо $\sum\limits_s|\Delta f(x_s)|\leqslant\bigvee\limits_a^b(f)$, тобто

стрибки $\Delta f(x_s) = f(x_s+0) - f(x_s-0)$ функції $f(x)$ утворюють абсолютно збіжний ряд. Звідси випливає, що множина точок неперервності всюди щільна в тому сенсі, що будь-який інтервал додатної довжини містить принаймні одну з них.

Лінійний простір функцій обмеженої на відрізку $[a,b]$ варіації позначаємо $BV[a,b]$. Відзначимо декілька важливих властивостей функцій з цього простору [**73**, гл. 8-9]:

1) якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ монотонна, або задовольняє умову Ліпшиця, або має обмежену похідну, то $f \in BV[a,b]$;
2) якщо $f \in BV[a,b]$, то $f(x)$ обмежена на $[a,b]$ функція, причому $|f(x)| \leqslant |f(a)| + \bigvee\limits_a^b(f)$;
3) якщо $f \in BV[a,b]$ і $a < c < b$, то $\bigvee\limits_a^b(f) = \bigvee\limits_a^c(f) + \bigvee\limits_c^b(f)$;
4) якщо $f \in BV[a,b]$, то $v(x) = \bigvee\limits_a^x(f) \in BV[a,b]$, причому $v(x)$ неспадна на $[a,b]$ функція; більше того, якщо $f(x)$ неперервна справа на $[a,b)$, то $v(x)$ також володіє цією властивістю;
5) функція $f \in BV[a,b]$, якщо і тільки якщо її можна зобразити у вигляді різниці двох неспадних функцій;
6) якщо $f \in BV[a,b]$, то майже всюди на $[a,b]$ існує скінченна похідна $f'(x)$, що є сумовною функцією;
7) якщо $f \in BV[a,b]$, то мають місце зображення Жордана[1)]

$$f(x) = f_c(x) + f_d(x),$$

[1)] Жордан Марі Енмон Каміль (Jordan Marie Ennemond Camille, 1838–1922) — французький математик, член Паризької АН (1881), іноземний чл.-кор. Петербурзької АН (1895), видавець "Journal de mathematiques pures et appliquees" (1885–1921).

та Лебега

$$f(x) = f_{ac}(x) + f_s(x) + f_d(x),$$

де $f_c(x)$ — неперервна складова, $f_d(x) = \sum\limits_{x_s \leqslant x} \Delta f(x_s)$ — функція стрибків (дискретна складова), $f_{ac}(x)$ — абсолютно неперервна складова[2)], $f_s(x)$ — сингулярна складова[3)].

В разі, якщо $f(x)$ має розриви в точках a та b, зазвичай, вважають, що $f(a-0) = f(a)$ і $f(b+0) = f(b)$, маючи на увазі можливість неперервного продовження функції $f(x)$ ліворуч від точки a і праворуч від точки b. Функції $f, g \in BV[a,b]$ вважаються еквівалентними, якщо вони співпадають всюди, за винятком хіба що не більш, ніж зліченної множини точок з інтервалу (a,b). В кожному класі еквівалентності простору $BV[a,b]$ існує функція, неперервна справа на $[a,b]$. Простір неперервних справа функцій обмеженої на $[a,b]$ варіації позначимо $BV^+[a,b]$.

У випадку відкритого інтервалу I будемо вважати, що $f(x)$ має обмежену варіацію на I, якщо $f(x)$ має обмежену варіацію на довільному компактному підінтервалі $[a,b] \subset I$ і усі варіації $\bigvee\limits_a^b(f)$ обмежені в їх сукупності, тобто $\bigvee\limits_I(f) = \sup\limits_{b>a} \bigvee\limits_a^b(f) < \infty$. Клас усіх таких функцій, що додатково неперервні справа на I, позначимо $BV^+_{loc}(I)$; при цьому, очевидно, $BV^+_{loc}(I) \subset BV^+[a,b]$.

[2)] Визначену на відрізку $[a,b]$ функцію $f(x)$ називають *абсолютно неперервною* на цьому відрізку, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що для довільної скінченної системи диз'юнктних інтервалів $(a_1,b_1), (a_2,b_2), \ldots, (a_n,b_n)$, кожен з яких міститься в $[a,b]$ і $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, справджується нерівність $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\left[f(b_k) - f(a_k)\right]\right| < \varepsilon$.

[3)] Відмінну від сталої неперервну функцію обмеженої варіації, похідна якої майже всюди дорівнює нулеві, називають *сингулярною функцією*.

Попередні означення поширюються також на випадок, коли $f(x)$ — квадратна матриця-функція, або прямокутна матриця-функція, або вектор-функція. В такому разі, говорячи що $f(x)$ має обмежену варіацію на інтервалі, мають на увазі, що кожен окремий елемент матриці $f(x)$ є функцією обмеженої варіації у звичайному скалярному сенсі. При цьому повна варіація матриці-функції $f(x)$ дорівнює сумі повних варіацій усіх її елементів.

Лінійний простір $BV[a,b]$ є банаховим відносно норми $\|f\|_{BV} = |f(a)| + \bigvee\limits_a^b(f)$, тобто, якщо для послідовності функцій $f_n \in BV[a,b]$ маємо $\lim \|f_n - f_m\|_{BV} = 0$, то існує така функція $f \in BV[a,b]$, що $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{BV} = 0$. Взагалі, у просторі $BV[a,b]$ поняття збіжності можна вводити різними способами [**155**]. Ми відзначимо наступні:

1) Щойно згадана *збіжність за нормою*: $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{BV} = 0$. Вважається сильним типом збіжності: з останньої умови та її очевидного наслідку $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$ на основі нерівності

$$\begin{aligned}\big|f_n(x) - f(x) - [f_n(a) - f(a)]\big| \leqslant \\ \leqslant |f_n(a) - f(a)| + \int\limits_a^x \big|d\big(f_n(t) - f(t)\big)\big| \leqslant \|f_n - f\|_{BV}\end{aligned}$$

випливає, що $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$; зі ще однієї нерівності

$$\left|\int\limits_a^x |df_n(t)| - \int\limits_a^x |df(t)|\right| \leqslant \int\limits_a^x \Big|d\big(f_n(t) - f(t)\big)\Big| \leqslant \int\limits_a^b \Big|d\big(f_n(x) - f(x)\big)\Big|$$

маємо також, що $\bigvee\limits_a^x(f_n) \rightrightarrows \bigvee\limits_a^x(f)$ на $[a,b]$. Однак, можливими на $[a,b]$ є збіжності $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ і $\bigvee\limits_a^x(f_n) \rightrightarrows \bigvee\limits_a^x(f)$, загалом, без

наявності $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{BV} = 0$. Дійсно, нехай на відрізку $[0,1]$ маємо

$$f_n(x) = \begin{cases} m/n, & \frac{m-1}{n} < x \leqslant \frac{m}{n}\ (m = \overline{1,n}), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Відтак $f_n(x)$ є невід'ємною і монотонно неспадною на цьому відрізку, $\bigvee\limits_0^x(f_n) = \int\limits_0^x |df_n(t)| = f_n(x)$ і $f_n(x) \rightrightarrows x$ на $[0,1]$, але $\bigvee\limits_0^1(f_n - f) = \int\limits_0^1 |d(f_n(x) - f(x))| = 1$.

2) *Рівномірні збіжності*: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ і $\bigvee\limits_a^x(f_n) \rightrightarrows \bigvee\limits_a^x(f)$ на $[a,b]$. Слід відзначити, що рівномірна збіжність послідовності функцій обмеженої варіації $f_n(x)$ до $f(x)$, загалом, не передбачає, що $f(x)$ обов'язково має обмежену варіацію на $[a,b]$. Для прикладу, кожна функція з послідовності

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n}, \\ x\sin\frac{\pi}{2x}, & \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

має обмежену варіацію на відрізку $[0,1]$, $f_n(x)$ збігаються рівномірно до $f(x) = x\sin\frac{\pi}{2x}$, яка, однак, не є функцією обмеженої варіації на відрізку $[0,1]$ (див. с. 40).

3) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всіх $x \in [a,b]$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\bigvee\limits_a^b(f_n) = \bigvee\limits_a^b(f)$, відтак і $\lim\limits_{n\to\infty}\bigvee\limits_a^x(f_n) = \bigvee\limits_a^x(f)$ для всіх $x \in [a,b]$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всіх $x \in [a,b]$; $\bigvee\limits_a^b(f_n)$ обмежена по n. Остання умова означає, що послідовність $f_n(x)$ має рівномірно обмежену варіацію. У цьому типі збіжності гранична функція $f(x)$ обов'язково є функцією обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$, тобто цей тип збіжності діє в межах простору $BV[a,b]$. Його

іноді називають слабкою збіжністю. У зв'язку з цією збіжністю виникає важлива на практиці теорема Хеллі (див. §33).

5) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ за винятком зліченної множини точок з відрізка $[a,b]$; $\bigvee\limits_a^b(f_n)$ обмежена по n і $\bigvee\limits_a^b(f) < \infty$.

З функціями обмеженої варіації тісно пов'язаний спеціальний клас узагальнених функцій (розподілів Шварца[4)]), породжених мірами. В теорії узагальнених функцій[5)] під *мірою* на $I = (\alpha, \beta)$ розуміють лінійний неперервний функціонал на просторі $\mathcal{D}^0(I)$ неперервних функцій $I \to \mathbb{C}$ з компактним носієм. Міра Стільтьєса dg [**48**, гл.VI, §6], що визначається функцією $g \in BV^+_{loc}(I)$, є мірою саме в такому розумінні. Одночасно

[4)] Шварц Лоран (Schwartz Laurent, 1915–2002) — французький математик, професор Паризького університету, професор Політехнічної школи в Парижі, член Паризької АН (1975), лауреат золотої медалі і премії Дж. Філдса (1950).

[5)] Відзначимо, що теорію узагальнених функцій можна будувати на основі різних підходів. Історично першим був запропонований С. Соболєвим (1936) і незалежно Л. Шварцом (1950) *функціональний підхід* [**16**], котрий полягає у розгляді узагальнених функцій як лінійних неперервних функціоналів на просторі "основних" функцій. Цей підхід вимагає глибокого знання функціонального аналізу, що робить теорію важкодоступною для неспеціалістів. Запропонований згодом Я. Мікусінським і Р. Сікорським (1957) *секвенціальний підхід* [**2**] полягає у розгляді узагальнених функцій як слабких границь послідовностей звичайних, локально сумовних, функцій. Такий підхід (він подібний до того, що використовується при розширенні множини раціональних чисел до множини дійсних чисел за Кантором, але, якщо метою введення поняття дійсного числа є бажання (чи необхідність) зробити можливими такі операції над числами, як, н-д, обчислення коренів чи логарифмів, то введення поняття узагальненої функції дозволяє зробити завжди здійсненною операцію диференціювання функцій) є дещо простішим і ближчим до інтуїтивних уявлень фізиків. Зрештою, загальновизнаним вважається той факт, що кожній узагальненій функції у функціональному підході відповідає єдина узагальнена функція в секвенціальному підході, і навпаки. Відтак, кожна теорема стосовно узагальнених функцій, що доведена функціональним методом, може бути доведена й секвенціальним методом. Котре з доведень простіше залежить від конкретного випадку. Окрім функціонального і секвенціального підходів, існують й інші можливості введення узагальнених функцій (див. [**39**]).

за теоремою Ріcса[6)] для довільної міри μ на I існує функція $g \in BV_{loc}(I)$ така, що має місце зображення

$$(\mu, \varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dg(t), \quad \varphi \in \mathcal{D}^0(I).$$

В якості $g(x)$ можна взяти функцію

$$g(x) = \begin{cases} \mu[x_0, x], & x \in [x_0, \beta), \\ -\mu[x, x_0], & x \in (\alpha, x_0), \end{cases}$$

де $x_0 \in I$ — точка нульової μ-міри, а $\mu[a, b]$ означає μ-міру відрізка $[a, b]$. Якщо від функції $g(x)$ вимагати додатково неперервності справа на I, тобто $g \in BV^+_{loc}(I)$, то міра μ визначатиме $g(x)$ однозначно з точністю до адитивної сталої. Тісний зв'язок між функціями обмеженої варіації та мірами виявляє

Лема 1.2 [122, с. 161]. *Для того, щоб узагальнена похідна g' деякої функції $g(x)$ була мірою на I необхідно і досить, щоб $g \in BV^+_{loc}(I)$. Якщо ця умова виконується, то похідна g' є мірою Стільтьєса dg, що визначається функцією $g(x)$; при цьому $g(x)$ неперервна в точці $x_s \in I$ тоді і тільки тоді, коли dg-міра точки x_s дорівнює нулеві.*

Згідно наведеної вище властивості 6) функція $g \in BV^+_{loc}(I)$ майже всюди на I має звичайну похідну (позначимо її $g'_{кл}(x)$), причому остання локально сумовна. З іншого боку на підставі леми 1.2 узагальнена похідна g' цієї функції є мірою Стільтьєса dg, що породжена функцією $g(x)$. Розподіли $g'_{кл}$ і g', загалом, є різними. Для прикладу, зміщена функція Гевісайда $H(x - x_s)$

[6)] Ріcc (Рiс) Фрідьєш (Riesz Frigyes, 1880–1956) — угорський математик, професор університетів в Клужі, Сегеді, Будапешті, член Угорської АН (1916).

має звичайну похідну $H'_{кл}(x-x_s)=0$ для $x\neq x_s$, так що $H'_{кл}$ — нульовий розподіл, та узагальнену похідну $H'(x-x_s)=\delta(x-x_s)$, де $\delta(x-x_s)$ — *функція Дірака з носієм в точці* x_s (*одиничний імпульс*), що є мірою на I, до того ж *сингулярною* узагальненою функцією, та діє за правилом

$$\big(\delta(x-x_s),\varphi(x)\big)=\int_I\varphi(x)dH(x-x_s)=\varphi(x_s),\quad \varphi\in\mathcal{D}^0(I).$$

Однак, для абсолютно неперервних функцій узагальнена похідна співпадає зі звичайною похідною, точніше справджується наступна

Лема 1.3 [122, с. 162]. *Похідна g' розподілу g на I є локально сумовною на I функцією, якщо і тільки якщо $g(x)$ абсолютно неперервна функція на довільному компактному підінтервалі з I. Якщо ця умова виконується, то $g'=g'_{кл}$.*

Таким чином, наведені леми дозволяють з'ясувати структуру міри $g'=dg$, якщо відома структура функції $g(x)$. Зокрема, якщо $g(x)$ кусково неперервно-диференційовна на I функція, яка в точках $\{x_s\}$ має розриви першого роду зі стрибками $\Delta g(x_s)$, тобто

$$g(x)=g_c(x)+\sum_s\Delta g(x_s)H(x-x_s),$$

то

$$g'=g'_c(x)+\sum_s\Delta g(x_s)\delta(x-x_s),$$

де $g'_c(x)$ співпадає зі звичайною похідною $g'_{кл}(x)$, котра існує майже всюди на I (за винятком точок $\{x_s\}$).

Попередні леми залишаються в силі також для векторних розподілів зі значеннями з простору $\mathbb{C}^p$ [122, с. 253].

§ 2. Матричний некласичний інтеграл Рімана–Стільтьєса

Розглянемо матриці-функції $F \in BV^{+,loc}_{m\times k}(I)$ і $G \in BV^{+,loc}_{k\times n}(I)$. Тоді на підставі властивості 7) з §1 правильними є зображення:

$$F(x) = F_c(x) + F_d(x), \quad G(x) = G_c(x) + G_d(x),$$

де $F_c(x)$ і $G_c(x)$ — неперервні складові функцій $F(x)$ і $G(x)$, а $F_d(x)$ і $G_d(x)$ — їх функції стрибків:

$$F_d(x) = \sum_{y\leqslant x}[F(y) - F(y-0)], \quad y \in I,$$

$$G_d(x) = \sum_{y\leqslant x}[G(y) - G(y-0)].$$

Для довільного замкненого інтервала $[a, b] \subset I$ визначимо інтеграл наступним чином:

$$\int_a^b dF(x)G(x) \stackrel{df}{=} \int_a^b dF_c(x)G(x) + \sum_{a<x\leqslant b}[F(x)-F(x-0)]G(x-0). \quad (2.1)$$

Легко переконатися, що інтеграл (2.1) можна визначити і як границю інтегральної суми [**3**], а саме

$$\int_a^b dF(x)G(x) = \lim_{\max|x_k-x_{k-1}|\to 0} \sum_{k=1}^{n}\big[F(x_k - F(x_{k-1}))\big]G(x_{k-1}), \quad (2.2)$$

де $\sigma\colon a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leqslant b$ — довільне розбиття відрізка $[a, b]$.

Відзначимо, що у зв'язку з некомутативністю операції множення матриць інтеграл

$$\int_a^b G(x)dF(x) \stackrel{df}{=} \int_a^b G(x)dF_c(x) + \sum_{a<x\leqslant b} G(x-0)[F(x) - F(x-0)],$$

взагалі кажучи, не співпадає з інтегралом (2.1).

Вкажемо деякі важливі властивості інтеграла (2.1) чи (2.2).

1. Справджується білінійне співвідношення

$$\int_a^b [c_1 dF_1 + c_2 dF_2][k_1 G_1 + k_2 G_2] = c_1 k_1 \int_a^b dF_1 G_1 + \\ + c_1 k_2 \int_a^b dF_1 G_2 + c_2 k_1 \int_a^b dF_2 G_1 + c_2 k_2 \int_a^b dF_2 G_2,$$

яке випливає з означення інтеграла (2.1), або (2.2).

2. Матриця-функція $\mathcal{I}(x) = \int_a^x dF(t)G(t)$, $x \in I$ є неперервною справа функцією обмеженої варіації, а в точці розриву x_0 функції $F(x)$ її стрибок $\Delta\mathcal{I}(x_0)$ дорівнює

$$\Delta\mathcal{I}(x_0) = \Delta F(x_0) G(x_0 - 0). \tag{2.3}$$

Дійсно, для довільного розбиття σ інтервала $[a, b]$ маємо

$$\sum_i \left|\mathcal{I}(x_{i+1}) - \mathcal{I}(x_i)\right| = \sum_i \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} dF(t)G(t) \right| \leqslant \\ \leqslant \sum_i \sup_{t\in[x_i, x_{i+1}]} \left|G(t)\right| \bigvee_{x_i}^{x_{i+1}}(F) \leqslant \sup_{t\in[a,b]} \left|G(t)\right| \bigvee_a^b (F),$$

тобто варіація матриці-функції $\mathcal{I}(x)$ обмежена на довільному замкненому підінтервалі з I. Нехай $x \in I$, а $s < x$. Тоді

$$\left|\mathcal{I}(x) - \mathcal{I}(s)\right| \leqslant \sup_{t\in[s,x]} \left|G(t)\right| \bigvee_s^x (F),$$

а оскільки $F(x)$ неперервна справа, то $\lim\limits_{x\to s+0} \bigvee\limits_s^x (F) = 0$, тобто матриця $\mathcal{I} \in BV^{+,loc}_{m\times n}(I)$. Співвідношення (2.3) випливає з означення інтеграла (2.1), чи (2.2), що й завершує доведення властивості 2.

3. *Теорема про підстановку.* Якщо $\mathcal{I}(x) = \int_a^x dF(t)G(t)$, то

$$\int_a^b d\mathcal{I}(x)K(x) = \int_a^b dF(x)G(x)K(x).$$

Дійсно, використовуючи представлення

$$\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}_c(x) + \sum_{y \leqslant x} \Delta\mathcal{I}(y), \quad y \in I$$

функції $\mathcal{I} \in BV^{+,loc}_{m\times n}(I)$ через її неперервну і дискретну складові та формулу (2.3) стрибка цієї функції в довільній точці $y \in I$, маємо

$$\int_a^b d\mathcal{I}(x)K(x) = \int_a^b dF_c(x)G(x)K(x) +$$

$$+ \int_a^b d\left[\sum_{a<y\leqslant x} \Delta F(y)G(y-0)\right]K(x) = \int_a^b dF_c(x)G(x)K(x) +$$

$$+ \sum_{a<x\leqslant b} \Delta F(x)G(x-0)K(x-0) = \int_a^b dF(x)G(x)K(x).$$

4. *Формула інтегрування частинами* для інтеграла (2.1), або (2.2), має вигляд

$$\int_a^b dF(x)G(x) + \int_a^b F(x)dG(x) =$$

$$= F(x)G(x)\Big|_a^b - \sum_{a<x\leqslant b} \Delta F(x)\Delta G(x). \quad (2.4)$$

Зауважимо, що

$$\int_a^b dF(x)G(x) = \int_a^b dF(x) \int_a^x dG(y) + F(b)G(a) - F(a)G(a),$$

$$\int_a^b F(x)dG(x) = -\int_a^b \left(\int_y^b dF(x)\right) dG(y) - F(b)G(a) + F(b)G(b).$$

Тому формулу (2.4) можна переписати у вигляді

$$\int_a^b dF(x) \int_a^x dG(y) = \int_a^b \left(\int_y^b dF(x)\right) dG(y) - \sum_{a<x\leqslant b} \Delta F(x)\Delta G(x). \tag{2.5}$$

Запишемо ліву частину формули (2.5), зобразивши матриці-функції F і G у вигляді суми неперервної та дискретної компонент, що породжує чотири інтеграли

$$\int_a^b d\big[F_c(x) + F_d(x)\big] \int_a^x d\big[G_c(y) + G_d(y)\big] = \int_a^b dF_c(x) \int_a^x dG_c(y) +$$
$$+ \int_a^b dF_c(x) \int_a^x dG_d(y) + \int_a^b dF_d(x) \int_a^x dG_c(y) + \int_a^b dF_d(x) \int_a^x dG_d(y). \tag{2.6}$$

Аналогічно для інтеграла в правій частині (2.5) отримуємо вираз

$$\int_a^b \left(\int_y^b dF_c(x)\right) dG_c(y) + \int_a^b \left(\int_y^b dF_c(x)\right) dG_d(y) +$$
$$+ \int_a^b \left(\int_y^b dF_d(x)\right) dG_c(y) + \int_a^b \left(\int_y^b dF_d(x)\right) dG_d(y). \tag{2.7}$$

Перші три інтеграли у виразах (2.6) і (2.7) співпадають, оскільки це класичні матричні інтеграли Рімана-Стільтьєса (насправді — сукупності таких скалярних інтегралів [**3**, с. 492]) і для

них справджується формула інтегрування частинами. Запишемо четвертий інтеграл у виразі (2.6):

$$\int_a^b dF_d(x)\int_a^x dG_d(y)=\sum_{a<x\leqslant b}\Delta F_d(x)\int_a^{x-0} dG_d(y)=$$
$$=\sum_{a<x\leqslant b}\Delta F_d(x)\sum_{a<y\leqslant x-0}\Delta G_d(y)=\sum_{\substack{a<x\leqslant b\\ a<y<x}}\Delta F_d(x)\Delta G_d(y). \quad (2.8)$$

Зауважимо, що в останню суму не входять добутки виду $\Delta F_d(x)\Delta G_d(x)$ при $y=x$. Аналогічно запишемо четвертий інтеграл у виразі (2.7)

$$\int_a^b\left(\int_y^b dF_d(x)\right)dG_d(y)=$$
$$=\sum_{a<y\leqslant b}\left(\int_{y-0}^b dF_d(x)\right)\Delta G_b(y)=\sum_{a<y\leqslant b}\sum_{y\leqslant x\leqslant b}\Delta F_d(x)\Delta G_d(y)=$$
$$=\sum_{\substack{a<y\leqslant b\\ y<x\leqslant b}}\Delta F_d(x)\Delta G_d(y)+\sum_{a<x\leqslant b}\Delta F_d(x)\Delta G_d(x). \quad (2.9)$$

Порівнюючи (2.8) і (2.9) приходимо до формули (2.5), а відтак до формули інтегрування частинами (2.4).

Слід зауважити, що коли сума в (2.4) зникає (а це може відбутись за умови $\Delta F(x)\Delta G(x)=0\ \forall x\in(a,b]$), то формула інтегрування частинами набуває "класичного" вигляду. Відзначимо також, що формула інтегрування частинами (2.4) є частинним випадком наступної формули Діріхле[7] [**154**].

[7] Діріхле Петер Ґустав Лежьон (Dirichlet Peter Gustav Lejeune, 1805–1859) — німецький математик, професор Берлінського і Ґьоттінгенського університетів, член Берлінської АН, іноземний чл.-кор. Петербурзької АН (1837), член Паризької АН (1854) і Лондонського королівського товариства (1855).

4. *Формула Діріхле.* Якщо $(k\times k)$-матриця-функція $K(x,y)$ обмежена в прямокутнику $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$ і є неперервною справа функцією обмеженої варіації за змінною x для довільного $y\in[a,b]$, то справджується формула

$$\int\limits_a^b dF(x)\int\limits_a^x K(x,y)dG(y)=\int\limits_a^b\Big(\int\limits_y^b dF(x)K(x,y)\Big)dG(y)-$$
$$-\sum_{a<x\leqslant b}\Delta F(x)K(x-0,x-0)\Delta G(x),\quad (2.10)$$

яка доводиться за аналогією до (2.5).

Поклавши в (2.10) $K(x,y)=E_k$, прийдемо до (2.5).

На завершення параграфу доведемо лему про одне узагальнення інтегральної нерівності Гронуолла–Беллмана[8)], яка знадобиться в останньому розділі при розгляді теореми про збіжність. Нагадаємо класичну нерівність Гронуолла–Беллмана [**33**, **121**].

Лема 2.1 (Гронуолл-Беллман)**.** *Нехай $f(x)$, $g(x)$ — невід'ємні функції, неперервні на $[a,b]$, $c\geqslant 0$ — деяка стала, причому*

$$g(x)\leqslant c+\int\limits_{x_0}^x g(t)f(t)dt,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Тоді справджується нерівність

$$g(x)\leqslant c\cdot\exp\int\limits_{x_0}^x f(t)dt,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Зокрема, якщо $c=0$, то $g(x)\equiv 0$.

[8)] Беллман Річард Ернест (Bellman Richard Ernest, 1920–1984) — американський математик, професор Стенфордського університету і Університету Південної Каліфорнії, працював математиком в наукових лабораторіях в Сан-Дієго, Лос-Аламосі, корпорації RAND.

В роботі Ф. Аткінсона [**3**, с. 516] отримане безпосереднє узагальнення цієї леми на випадок інтеграла Рімана–Стільтьєса.

Лема 2.2. *Нехай* $g(x) \in BV^+_{loc}(I)$, $g(x) \geqslant 0$, *а функція* $f(x)$ *не спадає на* $[a,b] \subset I$. *Якщо для будь-якого* $x \in [a,b]$ *виконується нерівність*

$$g(x) \leqslant c_0 + c_1 \int_a^x g(t)df(t), \tag{2.11}$$

де c_0, c_1 — *деякі додатні сталі, то*

$$g(x) \leqslant c_0 \cdot \exp\Big\{c_1\big[f(x) - f(a)\big]\Big\}, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Позаяк розриви функцій $f(x)$ і $g(x)$ можуть співпадати, то інтеграл в (2.11), взагалі кажучи, не існує в класичному сенсі, але існує в сенсі означення (2.1) чи (2.2). Розглянемо дещо інший варіант цієї леми, який не вимагає монотонності $f(x)$.

Лема 2.3. *Нехай* $f(x), g(x) \in BV^+_{loc}(I)$ *і* $g(x) \geqslant 0$ *на* $[a,b] \subset I$. *Якщо для довільного* $x \in [a,b]$ *має місце нерівність*

$$g(x) \leqslant c_0 + c_1 \int_a^x g(t)\,|df(t)| \tag{2.12}$$

з деякими додатними сталими c_0, c_1, *то*

$$g(x) \leqslant c_0 \cdot \exp\Big\{c_1 \bigvee_a^x (f)\Big\}. \tag{2.13}$$

Доведення. Замінивши в (2.12) інтеграл границею послідовності інтегральних сум, отримаємо

$$g(x) \leqslant c_0 + c_1 \lim \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)\,|f(t_{k+1}) - f(t_k)|, \tag{2.14}$$

де $a=t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_n=x$ — довільне розбиття відрізка $[a,x]$, а границя береться при $n\to\infty$ і $\max|t_{k+1}-t_k|\to 0$.

Внаслідок відомих властивостей варіації маємо

$$|f(t_{k+1})-f(t_k)|\leqslant \bigvee_{t_k}^{t_{k+1}}(f)=\bigvee_{a}^{t_{k+1}}(f)-\bigvee_{a}^{t_k}(f).$$

Підставляючи цю оцінку в праву частину нерівності (2.14), приходимо до нерівності

$$g(x)\leqslant c_0+c_1\lim\sum_{k=0}^{n-1}g(t_k)\left[\bigvee_{a}^{t_{k+1}}(f)-\bigvee_{a}^{t_k}(f)\right]$$

або

$$g(x)\leqslant c_0+c_1\int_a^x g(t)d\bigvee_a^t(f). \tag{2.15}$$

Оскільки $\bigvee\limits_a^t(f)$ — неспадна функція і неперервна справа на відрізку $[a,b]$, то з нерівності (2.15) на основі леми 2.2 випливає нерівність

$$g(x)\leqslant c_0\cdot\exp\left\{c_1\bigvee_a^x(f)-\bigvee_a^a(f)\right\}=c_0\cdot\exp\left\{c_1\bigvee_a^x(f)\right\},$$

що й треба було довести. ■

Нерівність (2.13) називатимемо *узагальненою нерівністю Гронуолла–Беллмана*.

§ 3. Однорідне матричне інтегральне рівняння

Розглянемо інтегральне рівняння

$$Y(x) = Y(x_0) + \int_{x_0}^{x} dC(t)Y(t), \tag{3.1}$$

де $Y(x)$ — n-вимірний вектор, $C \in BV_{n\times n}^{+,loc}(I)$, $x_0 \in I$.

Як відомо [**3**], це рівняння має єдиний розв'язок $Y(x)$, який належить простору $BV_{loc,n}^{+}(I)$, і стрибки якого визначаються формулою

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x)Y(x-0) \quad \forall x \in I. \tag{3.2}$$

Це твердження еквівалентне тому, що інтегральне рівняння

$$Y(x) = \int_{x_0}^{x} dC(t)Y(t),$$

має лише нульовий розв'язок.

Введемо матрицю-функцію двох змінних $B(x,s)$ як розв'язок матричного інтегрального рівняння

$$B(x,s) = E + \int_{s}^{x} dC(t)B(t,s). \tag{3.3}$$

Очевидно, що таке матричне рівняння має також єдиний розв'язок за змінною x у просторі $BV_{loc,n}^{+}(I)$, оскільки кожний її стовпець має таку властивість.

Матрицю $B(x,s)$ називатимемо *фундаментальною матрицею*, або *матрицею Коші* [9)], інтегрального рівняння (3.1). Їй притаманні властивості, що виражаються такими теоремами.

[9)] Коші Оґюстен Луї (Cauchy Augustin Louis, 1789–1857) — французький математик, викладав в Паризькому університеті, в Політехнічній школі і Колеж де Франс, член Паризької АН (1816), іноземний член Петербурзької АН (1831).

Теорема 3.1. *Розв'язок інтегрального рівняння* (3.1) *зображається у вигляді*

$$Y(x) = B(x, x_0)Y(x_0). \tag{3.4}$$

Доведення. Для доведення цього факту покладемо в (3.3) $s = x_0$ і помножимо обидві частини цього рівняння праворуч на $Y(x_0)$. Тоді матимемо

$$B(x, x_0)Y(x_0) = Y(x_0) + \int_{x_0}^{x} dC(t)\,B(t, t_0)Y(x_0),$$

звідки й випливає зображення (3.4). ■

Теорема 3.2. *Матриця Коші* $B(x, s)$ *має такі властивості:*

(a) *Для довільних* x', x'', $x''' \in I$

$$B(x''', x'')B(x'', x') = B(x''', x');$$

(b) *Для довільних* x', $x'' \in I$

$$B(x', x'')B(x'', x') = E;$$

(c) $B(x, s)$ *— неперервна справа матриця-функція обмеженої варіації як за змінною* x*, так і за змінною* s*;*

(d) $B(x, s) = \big[E + \Delta C(x)\big]\,B(x-0, s)$;

(e) $B(x, s) = B(x, s-0)\big[E + \Delta C(s)\big]^{-1}$.

Доведення. (a) Покажемо, що матриця

$$B(x''', x'')B(x'', x') - B(x''', x')$$

є розв'язком інтегрального рівняння

$$Y(x) = \int_{x''}^{x} dC(t)Y(t),$$

тобто дорівнює нульовій матриці. Дійсно

$$B(x''',x'')B(x'',x')-B(x''',x')=B(x'',x')+$$
$$+\left(\int\limits_{x''}^{x'''}dC(t)B(t,x'')\right)B(x'',x')-E-\int\limits_{x'}^{x'''}dC(t)B(t,x')=$$
$$=E+\int\limits_{x'}^{x''}dC(t)B(t,x')+\int\limits_{x''}^{x'''}dC(t)B(t,x'')B(x'',x')-$$
$$-E-\int\limits_{x'}^{x''}dC(t)B(t,x')-\int\limits_{x''}^{x'''}dC(t)B(t,x')=$$
$$=\int\limits_{x''}^{x'''}dC(t)\,[B(t,x'')B(x'',x')-B(t,x')],$$

що й доводить властивість (a).

(b) Поклавши у попередній властивості $x'''=x'$, отримуємо

$$B(x',x'')B(x'',x')=B(x',x')=E.$$

(c) Для довільних x_1, $x_2\in I$ маємо

$$\big|B(x_2,s)-B(x_1,s)\big|=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}dC(t)B(t,s)\right|\leqslant M\bigvee_{x_1}^{x_2}(C),$$

де $M=\prod\limits_{x}\Big(1+|\Delta C(x)|\Big)\exp\Big\{\bigvee\limits_{a}^{b}(C_c)\Big\}$ [**154**], а $C_c(x)$ — неперервна складова матриці-функції $C(x)$, звідки негайно випливає обмеженість варіації $B(x,s)$ за змінною x.

З інтегрального рівняння (3.3) отримуємо умову стрибка за (першою) змінною x

$$\Delta_x B(x,s)=\Delta C(x)B(x-0,s),\tag{3.5}$$

а неперервність справа випливає з властивості 2 §2.

Доведемо обмеженість варіації функції $B(x,s)$ за змінною s. Для довільних $x_1, x_2 \in I$ розглянемо рівність

$$B(x,x_2) - B(x,x_1) = \int\limits_{x_2}^{x} dC(t)\,B(t,x_2) - \int\limits_{x_1}^{x} dC(t)\,B(t,x_1) =$$

$$= \int\limits_{x_2}^{x} dC(t)\big[B(t,x_2) - B(t,x_1)\big] - \int\limits_{x_1}^{x_2} dC(t)\,B(t,x_1)$$

як інтегральне рівняння відносно функції

$$Y(x) = B(x,x_2) - B(x,x_1),$$

де

$$-\int\limits_{x_1}^{x_2} dC(t)\,B(t,x_1) = E - E - \int\limits_{x_1}^{x_2} dC(t)\,B(t,x_1) = B(x_2,x_2) -$$

$$- \left(E + \int\limits_{x_1}^{x_2} dC(t)\,B(t,x_1)\right) = B(x_2,x_2) - B(x_2,x_1) = Y(x_2).$$

Отже, розв'язок $Y(x)$ за теоремою 3.1 можна подати у вигляді

$$Y(x) = B(x,x_2)Y(x_2) = -B(x,x_2)\int\limits_{x_1}^{x_2} dC(t)B(t,x_1),$$

звідки маємо

$$\big|B(x,x_2) - B(x,x_1)\big| \leqslant M^2 \bigvee_{x_1}^{x_2}(C).$$

Це й доводить обмеженість варіації функцій $B(x,s)$ за змінною s, а неперервність справа доводиться за аналогією до попереднього випадку.

(d) На основі формули (3.5)

$$B(x,s) - B(x-0,s) = \Delta C(x) B(x-0,s),$$

звідки й отримуємо

$$B(x,s) = \big[E + \Delta C(x)\big] B(x-0,s).$$

(e) З інтегрального рівняння (3.1)

$$Y(x) = Y(x_0-0) + \int\limits_{x_0-0}^{x} dC(t) Y(t),$$

звідки за теоремою 3.1 маємо

$$Y(x) = B(x, x_0-0) Y(x_0-0). \tag{3.6}$$

З іншого боку, на основі (3.2) отримуємо

$$Y(x_0-0) = \big[E + \Delta C(x_0)\big]^{-1} Y(x_0). \tag{3.7}$$

На підставі (3.6) і (3.7) маємо

$$Y(x) = B(x, x_0-0)\big[E + \Delta C(x_0)\big]^{-1} Y(x_0),$$

тому

$$B(x, x_0) = B(x, x_0-0)\big[E + \Delta C(x_0)\big]^{-1},$$

звідки після заміни x_0 на s випливає властивість (e). ■

З властивості (e) випливає аналогічна до (3.5) умова стрибка фундаментальної матриці $B(x,s)$ за (другою) змінною s:

$$\Delta_s B(x,s) = B(x, s-0)\Big\{\big[E + \Delta C(s)\big]^{-1} - E\Big\}.$$

Більше того, за додаткової умови $\big[\Delta C(x)\big]^2 = 0 \;\; \forall\, x \in I$ стрибок буде обчислюватися за формулою

$$\Delta_s B(x,s) = -B(x, s-0)\Delta C(s). \tag{3.8}$$

Дійсно, за цієї умови справджується тотожність

$$\big[E+\Delta C(x)\big]^{-1}\equiv E-\Delta C(x), \tag{3.9}$$

бо $\big[E+\Delta C(x)\big]\cdot\big[E-\Delta C(x)\big]=E-\big[\Delta C(x)\big]^2\equiv E$. Тому

$$\Delta_s B(x,s)=B(x,s{-}0)\Big\{\big[E-\Delta C(s)\big]-E\Big\}=-B(x,s{-}0)\Delta C(s).$$

§ 4. Неоднорідне матричне інтегральне рівняння

Розглянемо неоднорідне інтегральне рівняння

$$Y(x)=\int\limits_{x_0}^{x} dC(t)\,Y(t)+U(x),\quad U(x_0)=Y(x_0), \tag{4.1}$$

де $C\in BV^{+,loc}_{n\times n}(I)$, $U\in BV^{+}_{loc,n}(I)$, $x_0\in I$.

Теорема 4.1. *Розв'язок неоднорідного рівняння* (4.1) *можна подати у вигляді*

$$Y(x)=B(x,x_0)U(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}B(x,t)dU(t)-\\ -\sum_{x_0<y\leqslant x}B(x,y)\Delta C(y)\Delta U(y), \tag{4.2}$$

де сума розповсюджується на ті точки $y\in I$, в яких матриці $C(x)$ і $U(x)$ мають розриви одночасно.

Доведення. Покажемо, що вираз, який стоїть праворуч в (4.2), справджує інтегральне рівняння (4.1).

Дійсно,

$$\int_{x_0}^{x} dC(t)Y(t) = \int_{x_0}^{x} dC(t)B(t,x_0)U(x_0) + \int_{x_0}^{x} dC(t) \int_{x_0}^{t} B(t,s)dU(s) - \\ - \int_{x_0}^{x} dC(t) \sum_{x_0<y\leqslant t} B(t,y)\Delta C(y)\Delta U(y). \quad (4.3)$$

Використовуючи рівняння (3.3), отримаємо

$$\int_{x_0}^{x} dC(t)\, B(t,x_0)U(x_0) = \big[B(x,x_0) - E\big]U(x_0), \quad (4.4)$$

а з формули Діріхле випливає

$$\int_{x_0}^{x} dC(t) \int_{x_0}^{t} B(t,s)dU(s) = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{s}^{x} dC(t)\, B(t,s) \right) dU(s) - \\ - \sum_{x_0<y\leqslant x} \Delta C(y)B(y-0,y-0)\Delta U(y). \quad (4.5)$$

До того ж, безпосередньою перевіркою переконуємось, що

$$\int_{x_0}^{x} dC(t) \sum_{x_0<y\leqslant t} B(t,y)\, \Delta C(y)\, \Delta U(y) = \\ = \sum_{x_0<y\leqslant x} \int_{y}^{x} dC(t)\, B(t,y)\, \Delta C(y)\, \Delta U(y). \quad (4.6)$$

На основі співвідношень (4.4), (4.5) і (4.6) рівність (4.3) можна записати у вигляді

$$\int_{x_0}^{x} dC(t)Y(t) = \big[B(x,x_0) - E\big]U(x_0) + \int_{x_0}^{x} \left(\int_{s}^{x} dC(t)\, B(t,s) \right) dU(s) -$$

$$- \sum_{x_0<y\leqslant x} \Delta C(y)\Delta U(y) - \sum_{x_0<y\leqslant x} \int_y^x dC(t)\, B(t,y)\Delta C(y)\Delta U(y).$$

Оскільки

$$\int_y^x dC(t)\, B(t,y)\Delta C(y)\Delta U(y) = \big[B(x,y) - E\big]\Delta C(y)\Delta U(y) =$$

$$= B(x,y)\Delta C(y)\Delta U(y) - \Delta C(y)\Delta U(y),$$

то

$$\int_{x_0}^x dC(t)Y(t) = B(x,x_0)U(x_0) - U(x_0) + \int_{x_0}^x B(x,t)dU(t) -$$

$$-U(x)+U(x_0)- \sum_{x_0<y\leqslant x} \Delta C(y)\Delta U(y)- \sum_{x_0<y\leqslant x} B(x,y)\Delta C(y)\Delta U(y)+$$

$$+ \sum_{x_0<y\leqslant x} \Delta C(y)\Delta U(y),$$

або

$$\int_{x_0}^x dC(t)Y(t) = B(x,x_0)U(x_0) + \int_{x_0}^x B(x,t)dU(t) -$$

$$- \sum_{x_0<y\leqslant x} B(x,y)\Delta C(y)\Delta U(y) - U(x).$$

З останньої рівності випливає, що функція

$$Y(x) = B(x,x_0)U(x_0) + \int_{x_0}^x B(x,t)dU(t) - \sum_{x_0<y\leqslant x} B(x,y)\Delta C(y)\Delta U(y)$$

справджує інтегральне рівняння

$$\int_{x_0}^x dC(t)Y(t) = Y(x) - U(x),$$

що й доводить теорему. ■

Зауваження 4.2. У формулі (4.2) сума зникає не лише у випадку, коли матриці $C(x)$ і $U(x)$ мають розриви в різних точках, але й тоді, коли

$$\Delta C(x)\Delta U(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

§ 5. Спряжене матричне інтегральне рівняння

Як відомо з § 3, функція Коші $B(x,s)$ за змінною x справджує рівняння (3.3). Відповідь на те, яке рівняння справджує функція $B(x,s)$ за змінною s, дає наступна

Теорема 5.1. *Функція $B(x,s)$ за змінною s справджує інтегральне рівняння*

$$B(x,s) = E + \int_s^x B(x,t)d\widehat{C}(t), \tag{5.1}$$

де

$$\widehat{C}(x) = C(x) - \sum_{s\leqslant y\leqslant x} \big[E + \Delta C(y)\big]^{-1}\big[\Delta C(y)\big]^2. \tag{5.2}$$

Доведення. Перепишемо рівняння (3.1) у вигляді

$$B(x,s) - E = \int_s^x dC(t)\big[B(t,s) - E\big] + C(x) - C(s). \tag{5.3}$$

Застосовуючи до (5.3) формулу (4.2) розв'язку неоднорідного рівняння, приходимо до рівності

$$B(x,s) = E + \int_s^x B(x,t)dC(t) - \sum_{s\leqslant y\leqslant x} B(x,y)\big[\Delta C(y)\big]^2. \tag{5.4}$$

Перепишемо (5.4), використовуючи властивість (e) теореми 3.2:

$$B(x,s) = E + \int_s^x B(x,t)dC(t) - \\ - \sum_{s\leqslant y\leqslant x} B(x,y-0)\big[E+\Delta C(y)\big]^{-1}\big[\Delta C(y)\big]^2.$$

Це переконує, що функція $B(x,s)$ за змінною s є розв'язком інтегрального рівняння (5.1), де $\widehat{C}(t)$ має вигляд (5.2), що й доводить теорему. ■

Зауваження 5.2. У випадку, коли $\big[\Delta C(x)\big]^2 = 0 \ \forall x \in I$, матриця-функція $B(x,s)$ за змінною s справджує рівняння

$$B(x,s) = E - \int_x^s B(x,t)dC(t),$$

тобто її *рядки* справджують векторне інтегральне рівняння

$$Z(x) = Z(x_0) - \int_{x_0}^x Z(t)dC(t), \tag{5.5}$$

яке називається *спряженим* до рівняння (3.1).

Нехай $\widetilde{B}(x,s)$ — фундаментальна матриця спряженого інтегрального рівняння (5.5), тобто

$$\widetilde{B}(x,s) = E - \int_s^x \widetilde{B}(t,s)dC(t). \tag{5.6}$$

Використовуючи очевидну рівність

$$\int_s^x \widetilde{B}(t,s)dB(t,s) + \int_s^x d\widetilde{B}(t,s)\,B(t,s) = 0$$

та формулу інтегрування частинами (2.4), отримуємо

$$\widetilde{B}(t,s)B(t,s)\Big|_s^x - \sum_{s\leqslant y\leqslant x} \Delta_y \widetilde{B}(y,s)\Delta_y B(y,s) = 0.$$

Далі врахуємо умову стрибка (3.5) і аналогічну умову

$$\Delta_x \widetilde{B}(x,s) = -\widetilde{B}(x-0,s)\Delta C(x),$$

що випливає з інтегрального рівняння (5.6). Тоді

$$\widetilde{B}(x,s)B(x,s) = E - \sum_{s\leqslant y\leqslant x} \widetilde{B}(y-0,s)\big[\Delta C(y)\big]^2 B(y-0,s)$$

Нарешті, домножуючи обидві частини останньої рівності справа на матрицю $B(s,x)$ і використовуючи властивість (b) теореми 3.2, маємо

$$\widetilde{B}(x,s) = B(s,x) - \sum_{s\leqslant y\leqslant x} \widetilde{B}(y-0,s)\big[\Delta C(y)\big]^2 B(y-0,x). \qquad (5.7)$$

Формула (5.7) встановлює зв'язок між $\widetilde{B}(x,s)$ і $B(s,x)$. Якщо, зокрема, $\big[\Delta C(x)\big]^2 = 0 \ \forall\, x \in I$, то з формули (5.7) випливає, що

$$\widetilde{B}(x,s) = B(s,x). \qquad (5.8)$$

Рівність (5.8) показує, що інтегральне рівняння (3.1) з матрицею-функцією $C \in BV^{+,loc}_{n\times n}(I)$ у випадку $\big[\Delta C(x)\big]^2 \equiv 0$ зберігає властивості, притаманні інтегральним рівнянням з неперервною матрицею $C(x)$.

За такої умови, зокрема, стрибок (за змінною s) розв'язку інтегрального рівняння (5.1) має вигляд

$$\Delta_s B(x,s) = -B(x,s-0)\Delta C(s)$$

і, як бачимо, збігається з отриманим раніше результатом (3.8).

§ 6. Про добуток розподілів і первісні мір

При дослідженні диференціальних рівнянь з мірами в коефіцієнтах природним чином виникає проблема множення узагальнених функцій (розподілів Шварца). Як відомо [**16**, с. 37], добуток довільних двох узагальнених функцій f і g не завжди існує. Для визначення такого добутку потрібно, щоб функції f і g, грубо кажучи, володіли властивістю: наскільки f "нерегулярна" в околі довільної точки, настільки g повинна бути "регулярною" в цьому околі, і навпаки. З цієї точки зору невизначений (*некоректний*) добуток функції Хевісайда на її узагальнену похідну — міру Дірака.

Відповідно до секвенціального підходу [**2**, с. 274], добуток узагальнених функцій f і g існує на інтервалі I, якщо послідовність добутків згорток $(f * \delta_n)\cdot(g * \delta_n)$ збігається (в узагальненому сенсі) на I для довільної δ-послідовності δ_n. Ця (слабка) границя й називається добутком узагальнених функцій f і g:

$$(f\cdot g,\varphi) = \lim_{n\to\infty}\big((f * \delta_n)\cdot(g * \delta_n);\varphi\big), \quad \varphi\in\mathcal{D}(I).$$

В рамках цього означення згаданий добуток $H(x-x_s)\cdot\delta(x-x_s)$ не існує (некоректний), бо його значення залежать від вибору послідовності δ_n.

Для того, щоб дослідити коректність добутків $F'(x)G(x)$ та $F(x)G'(x)$, де $F'(x)$, $G'(x)$ — узагальнені похідні функцій $F(x)$ і $G(x)$, припустимо, що $F\in BV^{+,loc}_{m\times k}(I)$ і $G\in BV^{+,loc}_{k\times n}(I)$. Запишемо дискретні складові F_d і G_d функцій $F(x)$ і $G(x)$ у вигляді

$$F_d(x)=\sum_{x_s\leqslant x}\big[F(x_s+0)-F(x_s-0)\big]=\sum_s \Delta F(x_s)H(x-x_s),$$
$$G_d(x)=\sum_{x_s\leqslant x}\big[G(x_s+0)-G(x_s-0)\big]=\sum_s \Delta G(x_s)H(x-x_s), \tag{6.1}$$

де $\Delta F(x_s)$ і $\Delta G(x_s)$ — стрибки у точці x_s матриць F і G відповідно.

Враховуючи зображення (6.1) і той факт, що узагальнена похідна функції Хевісайда є міра Дірака, отримуємо

$$F'(x) = F'_c(x) + \sum_s \Delta F(x_s)\delta(x-x_s),$$
$$G'(x) = G'_c(x) + \sum_s \Delta G(x_s)\delta(x-x_s). \tag{6.2}$$

Використовуючи зображення (6.2), запишемо формально добутки $F'(x)G(x)$ і $F(x)G'(x)$:

$$F'G=F'G_c+F'_cG_d+\sum_{r,p}\Delta F(x_r)\Delta G(x_p)\delta(x-x_r)H(x-x_p),$$
$$FG'=FG'_c+F_cG'_d+\sum_{r,p}\Delta F(x_r)\Delta G(x_p)\delta(x-x_p)H(x-x_r). \tag{6.3}$$

Добутки під знаками сум в (6.3), взагалі кажучи, не існують в сенсі теорії узагальнених функцій, оскільки

$$\delta(x-x_r)H(x-x_p)=\begin{cases}\delta(x-x_r), & \text{якщо } x_r>x_p,\\ 0, & \text{якщо } x_r<x_p.\end{cases}$$

а для $x_r=x_p$ такий добуток не однозначний. Ці міркування вимагають такого означення.

Означення 6.1. Добутки $F'(x)G(x)$ і $F(x)G'(x)$ назвемо *коректними*, якщо для довільного $x\in I$ виконується умова

$$\Delta F(x)\Delta G(x)=0. \tag{6.4}$$

Враховуючи означення 6.1, добутки (6.3) за умови (6.4) можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} F'G &= F'G_c + F'_cG_d + \sum_{r>p} \Delta F(x_r)\Delta G(x_p)\delta(x-x_r), \\ FG' &= FG'_c + F_cG'_d + \sum_{p>r} \Delta F(x_r)\Delta G(x_p)\delta(x-x_p), \end{aligned} \tag{6.5}$$

де позначено $\sum\limits_{r>p} \overset{df}{=} \sum\limits_{r}\sum\limits_{p}$ за умови $x_r > x_p$ чи навпаки.

Позначимо через $H(x)$ і $Z(x)$ первісні мір $F'(x)G(x)$ і $F(x)G'(x)$ відповідно, тобто

$$H'(x) = F'(x)G(x), \quad Z'(x) = F(x)G'(x).$$

Теорема 6.2. *Нехай $F \in BV^{+,loc}_{m\times k}(I)$, $G \in BV^{+,loc}_{k\times n}(I)$ і добутки $F'(x)G(x)$ і $F(x)G'(x)$ коректні, тобто зображаються у вигляді* (6.5). *Тоді*

1) $H(x) = \int\limits_{x_0}^{x} dF(t)G(t) + H_0, \quad Z(x) = \int\limits_{x_0}^{x} F(t)dG(t) + Z_0,$

   де $x_0, x \in I$, H_0, Z_0 — довільні сталі матриці, а інтеграли справа розуміємо в сенсі означення (2.1);

2) *$H(x)$ і $Z(x)$ належать до простору $BV^{+,loc}_{m\times n}(I)$;*

3) $\Delta H(x) = \Delta F(x)G(x-0)$, $\Delta Z(x) = F(x-0)\Delta G(x) \quad \forall x \in I$.

Доведення теореми 6.2 проводиться за аналогією до доведення властивості 2 з §2.

Зауваження 6.3. За умови (6.4) коректності добутків $F'(x)G(x)$ і $F(x)G'(x)$ для довільних $a, b \in I$ інтеграли $\int\limits_a^b dF(x)G(x)$ і $\int\limits_a^b F(x)dG(x)$ є класичними матричними інтегралами Рімана–Стільтьєса.

§ 7. Лінійні диференціальні системи з мірами

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \quad x \in I, \tag{7.1}$$

де $Y(x)$ — невідома n-вимірна вектор-функція, $C(x)$ — матриця-функція з простору $BV^{+,loc}_{n\times n}(I)$, $C'(x)$ — її узагальнена похідна (відтак диференціювання і рівність в (7.1) розуміються в узагальненому сенсі).

Слід зауважити, що стрибки матриці-функції $C(x)$ породжують також стрибки розв'язку $Y(x)$ рівняння (7.1) і до того ж в одних і тих самих точках, а тому добуток $C'(x)Y(x)$, взагалі кажучи, неоднозначний (див. §6).

Означення 7.1. Вважатимемо, що вектор Y належить до *допустимого класу*, який позначимо $\mathfrak{D}^n_C(I)$, якщо:

1) $Y \in BV^{+}_{loc,n}(I)$,

2) $\Delta C(x)\Delta Y(x) = 0 \quad \forall\, x \in I.$

Означення 7.2. Під *розв'язком рівняння* (7.1) будемо розуміти вектор-функцію $Y(x)$ з допустимого класу $\mathfrak{D}^n_C(I)$, що задовольняє це рівняння в узагальненому сенсі:

$$(\varphi, Y') = (\varphi, C'Y) \quad \forall \varphi \in \overline{\mathcal{D}}_0(I).$$

Для системи (7.1) поставимо задачу Коші про відшукання розв'язку, який задовольняє початкову умову

$$Y(x_0) = Y_0, \quad x_0 \in I. \tag{7.2}$$

Теорема 7.3. *В класі функцій* $\mathfrak{D}_C^n(I)$ *задача* (7.1), (7.2) *та інтегральне рівняння*

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} dC(t)Y(t), \quad x_0, x \in I, \tag{7.3}$$

еквівалентні.

Доведення. Дійсно, нехай $Y \in \mathfrak{D}_C^n(I)$. Тоді права частина рівняння (7.1) є мірою, первісна якої

$$Y(x) = P + \int_{x_0}^{x} dC(t)Y(t), \tag{7.4}$$

де P — довільний сталий вектор. Поклавши в (7.4) $P = Y_0$, задовольняємо початкову умову (7.2) і приходимо до інтегрального рівняння (7.3).

Нехай тепер вектор-функція $Y \in \mathfrak{D}_C^n(I)$ і задовольняє інтегральне рівняння (7.3), де початкова умова (7.2) вже виконана. Тоді права частина цього рівняння є первісною міри $C'(x)Y(x)$, що після (узагальненого) диференціювання й приводить до рівняння (7.1). ■

Згідно з результатами роботи [**3**] рівняння (7.3) має єдиний розв'язок $Y(x) \in BV_{loc,n}^{+}(I)$. Умова ж

$$\Delta C(x)\Delta Y(x) \equiv 0$$

приналежності цього розв'язку до допустимого класу не є ефективною, оскільки виражена в термінах стрибка самого розв'язку. Наступне твердження дає ефективний критерій приналежності розв'язку до класу $\mathfrak{D}_C^n(I)$.

Теорема 7.4. *Для існування розв'язку* $Y(x)$ *рівняння* (7.3) *в класі* $\mathfrak{D}_C^n(I)$ *необхідно і досить виконання умови*

$$\left[\Delta C(x)\right]^2 = 0 \quad \forall\, x \in I. \tag{7.5}$$

Доведення. *Достатність.* Стрибок розв'язку $\Delta Y(x)$ рівняння (7.3) визначається формулою (див. §3)

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x) Y(x-0). \tag{7.6}$$

Домноживши обидві частини (7.6) ліворуч на $\Delta C(x)$, отримуємо

$$\Delta C(x)\Delta Y(x) = \left[\Delta C(x)\right]^2 Y(x-0), \tag{7.7}$$

звідки в силу (7.5) й слідує умова $\Delta C(x)\Delta Y(x) = 0 \ \ \forall x \in I$.

Необхідність. Якщо $\Delta C(x)\Delta Y(x) = 0 \ \ \forall x \in I$, то з (7.7) отримуємо

$$0 = \left[\Delta C(x)\right]^2 Y(x-0) = \left[\Delta C(x)\right]^2 B(x-0, x_0) Y_0,$$

де $B(x, x_0)$ — матриця Коші рівняння (7.3), а Y_0 — довільний початковий вектор. В зв'язку з цією довільністю випливає, що

$$\left[\Delta C(x)\right]^2 B(x-0, x_0) = 0,$$

звідки в силу оборотності матриці $B(x-0, x_0)$ випливає умова (7.5). ■

Означення 7.5. При виконанні умови (7.5) однорідне рівняння (7.1) називатимемо *коректним*.

Розглянемо тепер початкову задачу для неоднорідної системи

$$Y'(x) = C'(x)Y(x) + F'(x) \tag{7.8}$$

$$Y(x_0) = Y_0, \tag{7.9}$$

де $F(x) \in BV_{loc}^{+}(I)$, і відповідне інтегральне рівняння

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} dC(t)Y(t) + F(x) - F(x_0). \tag{7.10}$$

Умова (7.5) ще не забезпечує приналежності розв'язку цього рівняння до класу $\mathfrak{D}_C^n(I)$ через наявність доданка $F(x) - F(x_0)$, але справджується наступне твердження.

Теорема 7.6. *Якщо однорідна система* (7.1) *коректна, то для існування розв'язку рівняння* (7.10) *в класі* $\mathfrak{D}_C^n(I)$ *необхідно і достатньо виконання умови*

$$\Delta C(x)\Delta F(x) = 0 \quad \forall\, x \in I. \tag{7.11}$$

Доведення. Дійсно, стрибок розв'язку рівняння (7.10)

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x)Y(x-0) + \Delta F(x),$$

що після множення зліва на $\Delta C(x)$ приводить до рівності

$$\Delta C(x)\Delta Y(x) = \big[\Delta C(x)\big]^2 Y(x-0) + \Delta C(x)\Delta F(x),$$

звідки й випливає доведення. ■

Зауваження 7.7. При виконанні системи умов (7.5), (7.11) неоднорідне рівняння (7.8) також доцільно назвати *коректним*.

§ 8. Існування і єдиність розв'язку початкової задачі

Метод зведення початкових задач для (коректних) систем диференціальних рівнянь з мірами до еквівалентних інтегральних рівнянь дозволяє в повній мірі використати отримані в попередніх параграфах результати для побудови елементів лінійної теорії: досить у відповідних формулах покласти $\Delta C(x)\Delta Y(x)=0$, $[\Delta C(x)]^2=0$ та $\Delta C(x)\Delta F(x)=0$ $\forall x\in I$. Такий підхід є певною мірою альтернативним до результатів робіт [**93**], [**98**].

Теорема 8.1. *За умови* (7.5) *існує єдиний розв'язок* $Y\in\mathfrak{D}_C^n(I)$ *початкової задачі* (7.1), (7.2), *стрибок якого виражається формулою*

$$\Delta Y(x)=\Delta C(x)Y(x). \tag{8.1}$$

Цей розв'язок допускає зображення у вигляді

$$Y(x)=B(x,x_0)Y(x_0), \tag{8.2}$$

де $B(x,s)$ *— фундаментальна матриця, що за змінною* x *є розв'язком системи* (7.1) *і при* $x=s$ *задовольняє умову* $B(s,s)=E$.

Існування і єдиність розв'язку випливають з теорем 7.3 і 7.4. Представлення розв'язку (8.2) є наслідком теореми 3.1. Умову ж стрибка (8.1) легко отримати, якщо врахувати формули (3.2), (3.7), (3.9) і умову (7.5):

$$\Delta Y(x)=\Delta C(x)Y(x-0)=\Delta C(x)\big[E+\Delta C(x)\big]^{-1}Y(x)=$$
$$=\Delta C(x)\big[E-\Delta C(x)\big]Y(x)=\Delta C(x)\Delta Y(x).$$

Очевидно, фундаментальна матриця $B(x,s)$ системи (7.3) зберігає властивості, описані в теоремі 3.2, з таким уточненням внаслідок умови (7.5) останньої властивості:

$$B(x,s) = B(x,s-0)\big[E - \Delta C(s)\big].$$

Теорема 8.2. *Матриця $B^*(x,s)$ за змінною s є розв'язком спряженої до (7.1) диференціальної системи*

$$Z'(s) = -[C'(s)]^* Z(s), \quad s \in I. \tag{8.3}$$

Доведення. Згідно зауваження 5.2 матриця $B(x,s)$ за змінною s справджує рівняння

$$B(x,s) = E - \int_x^s B(x,t)dC(t),$$

що внаслідок узагальненого диференціювання по s приводить до системи $B'_s(x,s) = -B(x,s)C'(s)$, а після спряження — до системи $B^*(x,s)'_s = -[C'(s)]^* B^*(x,s)$. ■

Наслідок 8.3. *Фундаментальна матриця $\widetilde{B}(x,s)$ спряженої диференціальної системи (8.3) задовольняє тотожність*

$$\widetilde{B}(x,s) = B^*(s,x) = [B^{-1}(x,s)]^*.$$

Теорема 8.4. *За умов (7.5) та (7.11) початкова задача (7.8), (7.9) має єдиний розв'язок $Y \in \mathfrak{D}_C^n(I)$, що зображається у формі Коші*

$$Y(x) = B(x,x_0)Y(x_0) + \int_{x_0}^x B(x,s)dF(s). \tag{8.4}$$

Доведення випливає з теорем 7.6 і 4.1.

2

Основи концепції квазіпохідних

§ 9. Попередні зауваження

Перш, ніж перейти до визначення основних понять, розглянемо деякі приклади скалярних диференціальних рівнянь.

1. Диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' - a_1(x)y = 0, \tag{9.1}$$

де $y(x)$ — невідома функція від дійсної змінної $x \in I$, $a_1(x) = b_1'(x)$, причому $b_1 \in BV^+_{loc}(I)$, звичайним чином зводиться до диференціальної системи першого порядку

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \tag{9.2}$$

де

$$Y = (y, y')^\top, \quad C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Позаяк

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta b_1(x) & 0 \end{pmatrix},$$

то, вочевидь, $\left[\Delta C(x)\right]^2 = 0$ для довільного $x \in I$ і, таким чином, система (9.2) коректна.

Якщо під розв'язком диференціального рівняння (9.1) розуміти першу координату $y(x)$ вектора $Y(x)$, то це рівняння і система (9.2) еквівалентні (в узагальненому сенсі). Ця обставина дозволяє не лише побудувати лінійну (елементарну) теорію рівняння (9.1), але й вивчити локальні властивості його розв'язку $y(x)$ і похідної $y'(x)$.

2. Багато задач математичної фізики приводять до дослідження диференціального рівняння

$$l_2[y] \equiv \left(a_0(x)y'\right)' - a_1(x)y = 0, \tag{9.3}$$

де $a_0^{-1}(x)$ — локально обмежена і вимірна на інтервалі I функція, а функція $a_1(x) = b_1'(x)$, де $b_1 \in BV_{loc}^{+}(I)$, є мірою Стільтьєса на інтервалі I (узагальненою функцією нульового порядку).

Зовнішня "близькість" рівнянь (9.1) і (9.3) оманлива. Суттєва відмінність між ними полягає в тому, що при наведених умовах на коефіцієнти $a_0(x)$ і $a_1(x)$ лінійну теорію рівняння (9.3), на відміну від рівняння (9.1), неможливо, залишаючись в рамках класичної теорії узагальнених функцій, побудувати в термінах розв'язку $y(x)$ і його похідної $y'(x)$. Іншими словами, в загальному випадку (коли $a_0^{-1}(x)$ обмежена і вимірна функція) за допомогою вектора $Y(x) = (y(x), y'(x))^{\top}$ це рівняння *не зводиться до коректної системи першого порядку*.

Дійсно, виконуючи в (9.3) формально операцію диференціювання, приходимо до диференціального рівняння

$$a_0(x)y'' + a_0'(x)y' - a_1(x)y = 0,$$

або

$$y'' + a_0^{-1}(x)a_0'(x)y' - a_0^{-1}(x)a_1(x)y = 0.$$

Нехай, для прикладу, $a_0(x)$ — східчаста функція, що не перетворюється в нуль на довільному компакті з I. Тоді $a_0^{-1}(x)$ теж східчаста функція (очевидно, обмежена і вимірна), точки розривів якої співпадають з точками розривів $a_0(x)$. Це означає, що добутки $a_0^{-1}(x)a_0'(x)$ і $a_0^{-1}(x)a_1(x)$ в загальному випадку не визначені. Вони існують, якщо, скажімо, $a_0(x)$ неперервна функція локально обмеженої на I варіації, але таке припущення сильно обмежує можливість дослідження цілих класів реальних фізичних процесів (поздовжні коливання стрижнів з кусково-змінним перерізом, крутильні коливання валів змінної жорсткості, температурні задачі з кусково-змінним коефіцієнтом теплопровідності, тощо). Цих ускладнень можна уникнути, якщо скористатись наступним прийомом.

Розглянемо вираз $y^{[1]} \equiv a_0(x)y'$, котрий назвемо *квазіпохідною* диференціального виразу $l_2[y]$. Легко переконатися, що за допомогою вектора $Y = (y, y')^\top$ рівняння (9.3) зводиться до системи вигляду (9.2) з матрицею

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & a_0^{-1}(x) \\ a_1(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Ця система коректна, оскільки знову $\left[\Delta C(x)\right]^2 = 0$ для довільного $x \in I$. Відтак ми отримали можливість побудувати лінійну теорію рівняння (9.3), котре надалі називатимемо *квазідиференціальним*, в термінах розв'язку $y(x)$ і його квазіпохідної $y^{[1]}(x)$.

3. Ідея введення квазіпохідних поширюється також на рівняння вищих порядків. Тут ми обмежимося її ілюстрацією у випадку КДР четвертого порядку

$$l_4[y] \equiv \left(a_0(x)y''\right)'' - \left(a_1(x)y'\right)' + a_2(x)y = 0. \qquad (9.4)$$

Якщо від коефіцієнтів $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, вимагати, щоб вони належали до простору $C^{2-i}(I)$ функцій неперервно диференційовних $(2-i)$ разів , то, виконуючи операції диференціювання, отримаємо рівняння четвертого порядку з неперервними коефіцієнтами, розв'язок якого слід шукати у класі $C^4(I)$. Втім, такі вимоги надто жорсткі, бо рівняння (9.4) зберігає сенс і без припущення про гладкість $a_0(x)$, $a_1(x)$ та вимоги $y \in C^4(I)$.

Позначимо через

$$y^{[0]} = y, \quad y^{[1]} = y', \quad y^{[2]} = a_0(x)y'', \quad y^{[3]} = a_1(x)y' - \big(a_0(x)y''\big)'$$

квазіпохідні функції $y(x)$ в сенсі диференціального рівняння (9.4). Якщо рівняння (9.4) тлумачити, скажімо, як рівняння поперечного згину балки (без врахування зовнішніх факторів), котре отримується внаслідок відокремлення змінних у відповідному рівнянні із частинними похідними [**76**], то введені квазіпохідні несуть цілком реальний механічний зміст, а саме: $y^{[0]}$ означає згин балки, $y^{[1]}$ — кут повороту, $y^{[2]}$ — згинальний момент, $y^{[3]}$ — поперечна сила. В разі, якщо коефіцієнти $a_0^{-1}(x), a_i(x)$, $i = 1, 2$, рівняння (9.4) локально сумовні за Лебегом на інтервалі I, то рівняння матиме сенс, якщо від функції $y(x)$ вимагати абсолютної неперервності на I разом з квазіпохідними до третього порядку включно; при цьому, очевидно, $y(x)$ задовольняє рівняння (9.4) майже всюди на I.

Однак, в цьому напрямку можна піти ще дальше, якщо припустити, що $a_0^{-1}(x)$ — локально обмежена і вимірна на інтервалі I функція, а коефіцієнти $a_i(x) = b_i'(x)$, де $b_i \in BV^+_{loc}(I)$, $i = 1, 2$, є мірами Стільтьєса на I. Легко бачити, що за допомогою вектора $Y = \big(y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]}\big)^\top$ рівняння (9.4) зводиться до системи

вигляду (9.2), причому

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & a_1(x) & 0 & -1 \\ a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

і тому

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta b_1(x) & 0 & 0 \\ \Delta b_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси для довільного $x \in I$ випливає рівність $\left[\Delta C(x)\right]^2 = 0$, тобто коректність еквівалентної рівнянню (9.4) системи першого порядку. Відтак рівняння (9.4) має сенс, якщо від функції $y(x)$ вимагати, щоб вона разом зі свої першою квазіпохідною $y^{[1]}(x)$ належали до $AC(I)$, а квазіпохідні $y^{[2]}(x)$ та $y^{[3]}(x)$ були функціями з $BV^+_{loc}(I)$; при цьому диференціювання і рівність в (9.4) розуміються в сенсі теорії узагальнених функцій, тобто як диференціювання і рівність функціоналів. Цей випадок характеризується тим, що балка несе на собі, окрім неперервно розподілених, ще й зосереджені в деяких точках x_s, маси і моменти, при переході через які (точки) згинальний момент $y^{[2]}(x)$ і поперечна сила $y^{[3]}(x)$ змінюються стрибкоподібно, в той час, як згин $y^{[0]}(x)$ і кут повороту $y^{[1]}(x)$ — неперервно.

Наведені приклади показують, що для кожного конкретного випадку слід вводити свої квазіпохідні, які (окрім випадку "звичайних" похідних) тісно пов'язані з коефіцієнтами відповідного диференціального виразу. Надалі, без обмеження загальності, усі

(звичайні) диференціальні вирази і відповідні їм диференціальні рівняння називатимемо квазідиференціальними.

Нехай далі $l_n[y]$ — квазідиференціальний вираз n-го порядку і

$$l_n[y] = 0 \tag{9.5}$$

відповідне КДР, що за допомогою вектора

$$Y = \left(y, y^{[1]}, \dots, y^{[n-1]}\right)^\top$$

зводиться до коректної диференціальної системи

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \quad \left[\Delta C(x)\right]^2 = 0 \quad \forall\, x \in I. \tag{9.6}$$

Означення 9.1. Функції $y^{[k]}(x),\ k = \overline{0, n-1}\ \left(y^{[0]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} y(x)\right)$ називатимемо *квазіпохідними* в сенсі КДР (9.5).

Зокрема квазіпохідними в сенсі рівняння $y^{(n)} - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} = 0$ є звичайні похідні $y^{(k)}(x),\ k = \overline{0, n-1}$.

Означення 9.2. КДР (9.5) називатимемо *коректним*, якщо коректна відповідна йому система (9.6).

Як показує приклад із КДР (9.3), невдалий підхід до вибору координат вектора $Y(x)$, тобто квазіпохідних, може привести до некоректної системи і навпаки. Більше того цей приклад показує, що при зведенні до системи слід уникати виконання операції диференціювання коефіцієнтів.

Означення 9.3. Під *розв'язком КДР* (9.5) будемо розуміти першу координату $y(x)$ вектора $Y(x)$ диференціальної системи (9.6), що задовольняє його *в узагальненому сенсі*, тобто, коли диференціювання і рівність в (9.5) розуміються в сенсі теорії узагальнених функцій: $\left(l_n[y], \varphi\right) = 0,\ \varphi \in D^0(I)$.

Розглянемо тепер спряжену до (9.6) систему

$$Z'(x) = -\big(C'(x)\big)^* Z(x). \tag{9.7}$$

Нехай $Z = \big(z^{\{n-1\}}, z^{\{n-2\}}, \dots, z\big)^\top$ — невідома вектор-функція.

Означення 9.4. КДР

$$l_n^*[z] = 0,$$

котрому на підставі еквівалентної системи (9.7) в узагальненому сенсі задовольняє остання координата $z(x)$ вектора $Z(x)$, називатимемо *спряженим* до КДР (9.5). При цьому функції $z^{\{k\}}(x)$, $k = \overline{0, n-1}$ $\big(z^{\{0\}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} z(x)\big)$ називаються *квазіпохідними* в сенсі спряженого КДР.

Всюди далі через $y^{[\cdot]}$ і $z^{\{\cdot\}}$ ми позначатимемо *квазіпохідні в сенсі вихідного і спряженого КДР* відповідно. Цим ми дотримуємося позначень, вперше введених Д. Шином [**124**–**127**]. Відзначимо, що в разі, коли квазіпохідні $y^{[k]}(x)$ в сенсі КДР (9.5) визначені, то квазіпохідні $z^{\{k\}}(x)$ в сенсі спряженого КДР, як далі буде показано, визначаються однозначно і навпаки. Ці квазіпохідні в загальному випадку не співпадають.

Для ілюстрації розглянемо КДР

$$\big(a_0(x)y''\big)' - a_1(x)y' - a_2(x)y = 0, \tag{9.8}$$

для якого квазіпохідні визначимо так: $y^{[1]} = y'$, $\quad y^{[2]} = a_0(x)y''$. В результаті прийдемо до диференціальної системи першого порядку

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) \\ a_2(x) & a_1(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \end{pmatrix}. \tag{9.9}$$

Якщо припустити, що $a_0^{-1}(x)$ — обмежена і вимірна на інтервалі I функція, $a_i(x) = b_i'(x)$, де $b_i \in BV_{loc}^{+}(I)$, $i = 1, 2$, то для довільного $x \in I$

$$\left[\Delta C(x)\right]^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta b_2(x) & \Delta b_1(x) & 0 \end{pmatrix}^2 = 0,$$

тобто система (9.6), а разом з нею і КДР (9.8), є коректними.

Спряжена до (9.9) система має вигляд (тут для дещо більшої загальності функції $a_0(x)$, $b_1(x)$, $b_2(x)$ вважаємо комплекснозначними)

$$\begin{pmatrix} z^{\{2\}} \\ z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}' = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overline{a}_2(x) \\ 1 & 0 & \overline{a}_1(x) \\ 0 & \overline{a}_{00}^{\text{ß}-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\{2\}} \\ z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}.$$

З цієї системи випливають узагальнені рівності

$$z' = -\overline{a}_{00}^{\text{ß}-1} z^{\{1\}}, \quad \left(z^{\{1\}}\right)' = -z^{\{2\}} - \overline{a}_1(x) z, \quad \left(z^{\{2\}}\right)' = -\overline{a}_2(x) z,$$

звідки $z^{\{1\}} = -\overline{a}_0(x) z', \quad z^{\{2\}} = -\left(z^{\{1\}}\right)' - \overline{a}_1(x) z$ і

$$\left(\overline{a}_0(x) z'\right)'' - \left(\overline{a}_1(x) z\right)' + \overline{a}_2(x) z = 0. \tag{9.10}$$

Таким чином, $y^{[k]}(x) \neq y^{\{k\}}(x)$, $k = 1, 2$, а спряжене до (9.8) рівняння має вигляд (9.10).

§ 10. Початкова задача для квазідиференціального рівняння з мірами

Розглянемо квазідиференціальний вираз

$$L_{mn}[y] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\big(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\big)^{(m-j)}, \quad m,n\in\mathbb{N}, \quad (10.1)$$

де $y(x)$ — функція, визначена на деякому інтервалі I дійсної осі $\mathbb{R}$. Квазідиференціальні вирази вигляду (10.1) з достатньо гладкими, а також локально сумовними за Лебегом на інтервалі I коефіцієнтами $a_{ij}(x)$ в різних аспектах досліджувались багатьма авторами (див. бібліографію в [**72**]). Ми ж послаблюємо вимоги до коефіцієнтів квазідиференціального виразу (10.1) і всюди далі вважаємо, що виконуються такі припущення:

(I) $a_{00}^{-1}(x)$ — локально обмежена і вимірна на I функція;

(II) $a_{i0}, a_{0j}\in L^2_{loc}(I),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$;

(III) $a_{ij}(x)=b'_{ij}(x)$, де $b_{ij}\in BV^{+}_{loc}(I),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$.

З наведених умов видно, що у виразі (10.1) виконувати операцію $(m-j)$-кратного диференціювання не можна через недостатню гладкість його коефіцієнтів. Якщо, навіть, спробувати і провести диференціювання в узагальненому сенсі, то від розв'язку $y(x)$ диференціального рівняння

$$L_{mn}[y]=0 \quad (10.2)$$

ми змушені будемо вимагати достатньої гладкості для того, щоб операції множення в лівій частині цього рівняння були законними (а не лише формальними) з точки зору теорії узагальнених функцій. Усіх цих труднощів вдається уникнути, якщо стати на шлях концепції введення квазіпохідних.

Означення 10.1. *Квазіпохідними* функції $y(x)$ в сенсі КДР (10.2), назвемо функції $y^{[k]}(x)$, $k=\overline{0,n+m}$, що визначаються формулами

$$\begin{aligned} &y^{[i]}=y^{(i)}, \quad i=\overline{0,n-1}; \quad y^{[n]}=\sum_{i=0}^{n} a_{i0}(x)y^{(n-i)}; \\ &y^{[n+j]}=-\left(y^{[n+j-1]}\right)'+\sum_{i=0}^{n} a_{ij}(x)y^{(n-i)}, \quad j=\overline{1,m}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Легко бачити, що за допомогою квазіпохідних (10.3) квазідиференціальний вираз (10.1) можна записати у вигляді

$$L_{mn}[y]\equiv y^{[n+m]}. \tag{10.4}$$

З відомих уже причин зрозуміло, що початкову задачу ("задачу Коші") для рівняння (10.2) з початковими значеннями в точці $x_0\in I$ є сенс ставити лише в термінах квазіпохідних:

$$y^{[k]}(x_0)=y_0^k, \quad k=\overline{0,q-1}, \tag{10.5}$$

де $q=m+n$, а y_0^k, $k=\overline{0,q-1}$, — задані числа. Проблему розв'язності цієї задачі вирішує наступна теорема.

Теорема 10.2. *За умов (I)–(III) існує єдиний розв'язок $y(x)$ початкової задачі (10.2), (10.5) такий, що квазіпохідні $y^{[i]}(x), i=\overline{0,n-1}$, належать простору $AC(I)$, а квазіпохідні $y^{[n+j]}(x), j=\overline{0,m-1}$, — простору $BV^{+}_{loc}(I)$ і в точках x_s розривів функцій $b_{ij}(x)$ мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\Delta y^{[n+j]}(x_s)=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta b_{n-i,j+1}(x_s)y^{(i)}(x_s), \quad j=\overline{0,m-1}. \tag{10.6}$$

Доведення. Зведемо КДР (10.2) до диференціальної системи першого порядку. З вигляду квазіпохідних (10.3) випливає, що справджуються такі узагальнені рівності:

$$\left(y^{[i-1]}\right)' = y^{(i)}, \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$\left(y^{[n-1]}\right)' = a_{00}^{-1}(x)y^{[n]} - \sum_{i=1}^{n} a_{00}^{-1}(x)a_{i0}(x)y^{[n-i]};$$

$$\left(y^{[n+j-1]}\right)' = -y^{[n+j]} + a_{0j}(x)a_{00}^{-1}(x)y^{[n]} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \left[a_{ij}(x) - a_{0j}(x)a_{00}^{-1}(x)a_{i0}(x)\right]y^{[n-i]}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Якщо використати їх разом з рівністю $y^{[n+m]} = 0$, котра, очевидно, є наслідком (10.4) і (10.2), то задачу (10.2), (10.5) можна переписати у вигляді

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \tag{10.7}$$

$$Y(x_0) = Y_0, \tag{10.8}$$

де $Y = \left(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[q-1]}\right)^\top$ — невідома вектор-функція, визначена на інтервалі I, $Y_0 = \left(y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{q-1}\right)^\top$ — заданий вектор початкових значень, $C'(x)$ — матриця коефіцієнтів системи, що має блокову структуру, вказану на с. 88.

Відзначимо, що умови на коефіцієнти (I)–(III) дозволяють тлумачити $C'(x)$ як матричну міру. Крім того, ці умови є достатніми для коректності системи (10.7), бо з них випливає, що матриця стрибків $\Delta\mathcal{C}(x)$ має вигляд

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta b_{n1} & \Delta b_{n-1,1} & \cdots & \Delta b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta b_{n2} & \Delta b_{n-1,2} & \cdots & \Delta b_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta b_{nm} & \Delta b_{n-1,m} & \cdots & \Delta b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{10.9}$$

Звідси безпосередньою перевіркою легко переконатися, що

$$\big[\Delta C(x)\big]^2 = 0 \ \ \forall\, x \in I. \tag{10.10}$$

Але тоді за теоремою 7.3 задача (10.7), (10.8) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$Y(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)Y(t), \tag{10.11}$$

звідки вже згідно теореми 7.4 випливає існування та єдиність її розв'язку $Y(x)$ з допустимого класу

$$\mathfrak{D}_C^q(I) = \Big\{ Y \in BV_{loc,q}^+(I) \,\Big|\, \Delta C(x)\Delta Y(x) = 0 \ \ \forall x \in I \Big\}.$$

Оскільки відповідно до означення 9.3 під розв'язком квазідиференціального рівняння (10.2) розуміємо першу координату $y(x)$ вектора $Y(x)$ диференціальної системи (10.7), то звідси випливає також існування і єдиність розв'язку початкової задачі (10.2), (10.5).

Доведемо тепер другу частину теореми. Умова стрибка розв'язку інтегрального рівняння (10.11) в точці $x_s \in I$ має вигляд

$$\Delta Y(x_s) = \Delta C(x_s)Y(x_s). \tag{10.12}$$

$$
C' = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{n} \\ \\ \\ \\ \\ \boldsymbol{m} \\ \\ \\ \end{array}
\overset{\begin{array}{cccc} \boldsymbol{n} & & & \end{array}}{\left(\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-a_{00}^{-1}a_{n0} & -a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & \cdots & -a_{00}^{-1}a_{10} & a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
a_{n1}-a_{01}a_{00}^{-1}a_{n0} & a_{n-1,1}-a_{01}a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & \cdots & a_{11}-a_{01}a_{00}^{-1}a_{10} & a_{01}a_{00}^{-1} & -1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,m-1}-a_{0,m-1}a_{00}^{-1}a_{n0} & a_{n-1,m-1}-a_{0,m-1}a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & \cdots & a_{1,m-1}-a_{0,m-1}a_{00}^{-1}a_{10} & a_{0,m-1}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & -1 \\
a_{nm}-a_{0m}a_{00}^{-1}a_{n0} & a_{n-1,m}-a_{0m}a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & \cdots & a_{1m}-a_{0m}a_{00}^{-1}a_{10} & a_{0m}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \boldsymbol{m} \end{array}
$$

Але тоді на основі структури (10.9) матриці стрибків $\Delta C(x)$ можна зробити висновок, що $\Delta y^{[i]}(x_s)=0$ при $i=\overline{0,n-1}$, тобто розв'язок $y(x)$ і його квазіпохідні $y^{[i]}(x)$ до $(n-1)$-го порядку включно принаймні неперервні. Більше того, оскільки з (10.11) і (10.3) випливають рівності

$$y^{[i]}(x)=y_0^i+\int\limits_{x_0}^{x}y^{[i+1]}(t)dt=y_0^i+\int\limits_{x_0}^{x}y^{(i+1)}(t)dt,\quad i=\overline{0,n-2},$$

де інтеграл розуміється в сенсі Лебега, то квазіпохідні $y^{[i]}(x)$ при $i=\overline{0,n-2}$ належать простору $AC(I)$. При $i=n-1$ аналогічна рівність також справджується, однак не є такою очевидною, як попередні. Дійсно,

$$y^{[n-1]}(x)=y_0^{n-1}-\int\limits_{x_0}^{x}\left[\tfrac{a_{n0}(t)}{a_{00}(t)}y(t)+\tfrac{a_{n-1,0}(t)}{a_{00}(t)}y^{[1]}(t)+\ldots+\tfrac{a_{10}(t)}{a_{00}(t)}y^{[n-1]}(t)\right]dt+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}a_{00}^{-1}(t)y^{[n]}(t)dt=y_0^{n-1}-\int\limits_{x_0}^{x}a_{00}^{-1}(t)\sum_{i=1}^{n}a_{i0}(t)y^{(n-i)}(t)dt+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}a_{00}^{-1}(t)\sum_{i=0}^{n}a_{i0}(t)y^{(n-i)}(t)dt=y_0^{n-1}+\int\limits_{x_0}^{x}y^{(n)}(t)dt.$$

Крім того, $Y\in\mathfrak{D}_C^q(I)$, тому $y^{[n+j]}\in BV_{loc}^+(I)$ для $j=\overline{0,m-1}$. Рівності (10.6) випливають із (10.12), структури матриці $\Delta C(x)$ і того факту, що згідно (10.3) квазіпохідні до $(n-1)$-го порядку включно збігаються зі звичайними похідними. ■

Слід підкреслити ту властивість коректних КДР з мірами, що стрибки квазіпохідних їх розв'язків однозначно диктуються структурою їх коефіцієнтів і це виражається формулами (10.6). Ці формули можна трактувати також як *умови спряження* при практичній побудові розв'язків КДР вигляду (10.2).

§ 11. Спряжене квазідиференціальне рівняння з мірами

Щоб отримати вигляд спряженого до (10.2) КДР, а також вирази для його квазіпохідних, розглянемо згідно означення 9.4 спряжену до (10.7) узагальнену диференціальну систему

$$Z'(x) = -\big(C'(x)\big)^* Z(x). \tag{11.1}$$

Використовуючи конкретний вигляд (стор. 88) матриці $C'(x)$, приходимо до наступних означень.

Означення 11.1. *Спряженим* до (10.1) називається квазідиференціальний вираз

$$L^*_{mn}[z] \equiv \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \big(\overline{a}_{ij}(x) z^{(m-j)}\big)^{(n-i)}. \tag{11.2}$$

Означення 11.2. *Квазіпохідними* функції $z(x)$ в сенсі спряженого рівняння (11.2) назвемо функції $z^{\{k\}}(x)$, $k = \overline{0,q}$, що визначаються виразами

$$\begin{aligned} &z^{\{j\}} = z^{(j)}, \quad j = \overline{0, m-1}; \quad z^{\{m\}} = -\sum_{j=0}^{m} \overline{a}_{0j}(x) z^{(m-j)}; \\ &z^{\{m+i\}} = -\big(z^{\{m+i-1\}}\big)' - \sum_{j=0}^{m} \overline{a}_{ij}(x) z^{(m-j)}, \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{11.3}$$

При цьому, легко бачити, що $z^{\{q\}} \equiv -L^*_{mn}[z]$. Відзначимо також, що в разі, коли визначені квазіпохідні (10.3), то квазіпохідні (11.3) визначаються однозначно із системи (11.1).

Розглянемо тепер початкову задачу

$$L^*_{mn}[z] = 0, \tag{11.4}$$

$$z^{\{k\}}(x_0) = z_0^k, \quad k = \overline{0, q-1}, \tag{11.5}$$

де z_0^k, $k = \overline{0,q-1}$, — задані числа.

Проблему розв'язності цієї задачі вирішує наступна теорема.

Теорема 11.3. *За умов (I)–(III) існує єдиний розв'язок $z(x)$ початкової задачі (11.4), (11.5) такий, що квазіпохідні $z^{\{j\}}(x), j = \overline{0,m-1}$, належать простору $AC(I)$, а квазіпохідні $z^{\{m+i\}}(x)$, $i = \overline{0,n-1}$, — простору $BV^{+}_{loc}(I)$ і в точках x_s розривів функцій $b_{ij}(x)$ мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\Delta z^{\{m+i\}}(x_s) = -\sum_{j=0}^{m-1} \Delta b_{i+1,m-j}(x_s) z^{(j)}(x_s), \quad i = \overline{0,n-1}. \quad (11.6)$$

Доведення. Проведемо за схемою доведення теореми 10.2. Видається ймовірним, що КДР (11.4) за допомогою квазіпохідних (11.3) зводиться до системи (11.1), бо вигляд (11.2) спряженого квазідиференціального виразу $L^{*}_{mn}[z]$ отримувався зворотнім шляхом. Дійсно, з формул (11.3) випливає, що справджуються такі узагальнені рівності:

$$\left(z^{\{j-1\}}\right)' = z^{(j)}, \quad j = \overline{1,m-1};$$

$$\left(z^{\{m-1\}}\right)' = -\overline{a}_{00}^{ß-1}(x) z^{\{m\}} - \sum_{j=1}^{m} \overline{a}_{00}^{ß-1}(x)\overline{a}_{0j}(x) z^{\{m-j\}};$$

$$\left(z^{\{m+i-1\}}\right)' = -z^{\{m+i\}} + \overline{a}_{i0}(x)\overline{a}_{00}^{ß-1}(x) z^{\{m\}} -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \left[\overline{a}_{ij}(x) - \overline{a}_{i0}(x)\overline{a}_{00}^{ß-1}(x)\overline{a}_{0j}(x)\right] z^{\{m-j\}}, \quad i = \overline{1,n},$$

причому в останній з них $z^{\{q\}} = 0$ на підставі (11.4). Відтак за допомогою вектора $Z = \left(z^{\{q-1\}}, z^{\{q-2\}}, \ldots, z\right)^{\top}$ КДР (11.4) зводиться до системи (11.1). Початкові ж умови (11.5) можна переписати у вигляді

$$Z(x_0) = Z_0, \quad (11.7)$$

де $Z_0 = \left(z_0^{q-1}, z_0^{q-2}, \ldots, z_0\right)^\top$ — заданий вектор початкових значень. Система (11.1), вочевидь, коректна, бо

$$\left(\Delta\left[-C^*(x)\right]\right)^2 = \left(-\left[\Delta C(x)\right]^*\right)^2 = \left(\left[\Delta C(x)\right]^2\right)^* \equiv 0,$$

Тому задача (11.1), (11.7) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$Z(x) = Z_0 - \int\limits_{x_0}^{x} dC^*(t)\, Z(t). \tag{11.8}$$

Звідси на підставі зауваження 5.2 відразу випливає існування і єдиність її розв'язку $Z(x)$ з допустимого класу $\mathfrak{D}_C^q(I)$, а відтак і розв'язку $z(x)$ початкової задачі (11.4), (11.5).

Для доведення другої частини теореми використаємо умову стрибка розв'язку інтегрального рівняння (11.8) в точці $x_s \in I$

$$\Delta Z(x_s) = -\Delta C^*(x_s) Z(x_s) \tag{11.9}$$

і структуру (10.9) матриці стрибків $\Delta C(x)$. Тоді $\Delta z^{\{j\}}(x_s) = 0$ для довільного $j = \overline{0, m-1}$, тобто розв'язок $z(x)$ і його квазіпохідні $z^{\{j\}}(x)$ до $(m-1)$-го порядку включно щонайменше неперервні. Позаяк на підставі (11.8) і (11.3) справджуються рівності

$$z^{\{j\}}(x) = z_0^j + \int\limits_{x_0}^{x} z^{(j+1)}(t)dt, \quad j = \overline{0, m-1},$$

де інтеграл розуміється в сенсі Лебега, то квазіпохідні $z^{\{j\}}(x)$ при $j = \overline{0, m-1}$ є абсолютно неперервними на I. Крім того, $Z(x) \in \mathfrak{D}_C^q(I)$, тому квазіпохідні $z^{\{m+i\}}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, належать $BV_{loc}^+(I)$. Рівності (11.6) випливають з (11.9), структури матриці $\Delta C(x)$ і того факту, що згідно (11.3) квазіпохідні (в сенсі спряженого рівняння) до $(m-1)$-го порядку включно збігаються зі звичайними похідними. ■

На завершення, проілюструємо теореми 10.2 і 11.3 **на прикладі** КДР другого порядку

$$L_{11}[y] \equiv -\big(a_{00}(x)y'\big)' + a_{01}(x)y' - \big(a_{10}(x)y\big)' + a_{11}(x)y = 0, \quad (11.10)$$

де $a_{00}^{-1}(x)$ — локально обмежена і вимірна на деякому інтервалі $I \subset \mathbb{R}$ функція, $a_{10}, a_{01} \in L_2(I)$, $a_{11}(x) = \alpha_{11}'(x)$, $\alpha_{11} \in BV_{loc}^{+}(I)$.

Тут $m = n = 1$, тому згідно виразів (10.3) квазіпохідні визначаються так:

$$y^{[0]} \stackrel{\text{def}}{=} y, \quad y^{[1]} = a_{00}(x)y' + a_{10}(x)y,$$

$$y^{[2]} = -\big(y^{[1]}\big)' + a_{01}(x)y' + a_{11}(x)y,$$

причому, дійсно, $y^{[2]} \equiv L_{11}[y]$.

Еквівалентна диференціальна система першого порядку

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a_{00}^{-1}a_{10} & a_{00}^{-1} \\ a_{11} - a_{01}a_{00}^{-1}a_{10} & a_{01}a_{00}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix} \quad (11.11)$$

є системою вигляду (10.7). Розв'зок цієї системи, що задовольняє початкову умову $\big(y(x_0), y^{[1]}(x_0)\big)^{\top} = \big(y_0, y_0^1\big)^{\top}$ є розв'язком векторного інтегрального рівняння вигляду (10.11), точніше такої системи інтегральних рівнянь типу Вольтерра-Стільтьєса:

$$y(x) = y_0 - \int_{x_0}^{x} \frac{a_{10}(t)}{a_{00}(t)}\, y(t)dt + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{a_{00}(t)}\, y^{[1]}(t)dt;$$

$$y^{[1]}(x) = y_0^1 - \int_{x_0}^{x} \frac{a_{01}(t)a_{10}(t)}{a_{00}(t)}\, y(t)dt + \quad (11.12)$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \frac{a_{01}(t)}{a_{00}(t)}\, y^{[1]}(t)dt + \int_{x_0}^{x} y(t)d\alpha_{11}(t).$$

Його стрибок в довільній точці $x_s \in I$ визначається рівністю

$$\begin{pmatrix} \Delta y(x_s) \\ \Delta y^{[1]}(x_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta\alpha_{11}(x_s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x_s) \\ y^{[1]}(x_s) \end{pmatrix}. \tag{11.13}$$

Звідси $\Delta y(x_s) = 0 \ \forall\, x_s \in I$, тому функція $y(x)$ принаймні неперервна. Але з першого рівняння системи (11.12), якщо пригадати вигляд квазіпохідної $y^{[1]}(x)$, випливає, що

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} y'(t)dt.$$

Це означає, що функція $y(x)$ відновлюється за своєю похідною і є локально абсолютно неперервною на інтервалі I.

Друге ж рівняння цієї системи можна переписати так:

$$y^{[1]}(x) = y_0^1 + \int\limits_{x_0}^{x} a_{01}(t)y'(t)dt + \int\limits_{x_0}^{x} y(t)d\alpha_{11}(t),$$

звідки випливає, що перша квазіпохідна $y^{[1]}$ належить $BV^{+}_{loc}(I)$. Її ж стрибок в точці $x_s \in I$ на підставі (11.13) обчислюється за формулою

$$\Delta y^{[1]}(x_s) = \Delta\alpha_{11}(x_s)\, y(x_s).$$

Спряжена до (11.11) система має вигляд

$$\begin{pmatrix} z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \overline{a}_{10}\overline{a}_{00}^{ß-1} & \overline{a}_{10}(x)\overline{a}_{00}^{ß-1}\overline{a}_{01} - \overline{a}_{11} \\ -\overline{a}_{00}^{ß-1} & -\overline{a}_{00}^{ß-1}\overline{a}_{01} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}. \tag{11.14}$$

З другого рівняння

$$z' = -\overline{a}_{00}^{ß-1}(x)z^{\{1\}} - \overline{a}_{00}^{ß-1}(x)\overline{a}_{01}(x)z$$

цієї системи отримуємо вираз для першої квазіпохідної

$$z^{\{1\}} = -\overline{a}_{00}(x)z' - \overline{a}_{01}(x)z,$$

котрий, очевидно, збігається з виразом (11.3) для $m = 1$. Підставивши його замість $z^{\{1\}}$ у перше рівняння

$$\left(z^{\{1\}}\right)' = \overline{a}_{10}(x)\overline{a}_{00}^{\text{ß}-1}(x)z^{\{1\}} + \left[\overline{a}_{10}(x)\overline{a}_{00}^{\text{ß}-1}(x)\overline{a}_{01}(x) - \overline{a}_{11}(x)\right]z$$

системи (11.14), маємо

$$\left(-\overline{a}_{00}(x)z' - \overline{a}_{01}(x)z\right)' = -\overline{a}_{10}(x)z' - \overline{a}_{11}(x)z$$

і, отже, спряжене до (11.10) КДР

$$-\left(\overline{a}_{00}(x)z'\right)' + \overline{a}_{10}(x)z' - \left(\overline{a}_{01}(x)z\right)' + \overline{a}_{11}(x)z = 0$$

є частинним випадком (при $m = n = 1$) рівняння (11.2).

Міркуючи, як і вище, бачимо, що стрибок розв'язку системи (11.14) в довільній точці $x_s \in I$ визначається рівністю

$$\begin{pmatrix} \Delta z^{\{1\}}(x_s) \\ \Delta z(x_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\bar{b}_{11}(x_s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\{1\}}(x_s) \\ z(x_s) \end{pmatrix},$$

звідки

$$\Delta z^{\{1\}}(x_s) = -\Delta\bar{b}_{11}(x_s)z(x_s), \quad \Delta z(x_s) = 0 \quad \forall x_s \in I,$$

причому так само, як і вище для розв'язку $y(x)$, можна показати, що $z \in AC(I)$.

§ 12. Лінійна теорія узагальнених квазідиференціальних рівнянь

На основі отриманих вище результатів тепер можна будувати лінійну теорію однорідних КДР з мірами аналогічно тому, як це робиться, наприклад, для певних класів КДР з сумовними коефіцієнтами.

Нехай функції $\varphi_k(x), k = \overline{1,q},$ і $\psi_l(x), l = \overline{1,q},$ є розв'язками вихідного

$$L_{mn}[y] = 0 \tag{12.1}$$

і спряженого

$$L^*_{mn}[z] = 0 \tag{12.2}$$

КДР відповідно. Складемо матриці-функції

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_q(x) \\ \varphi_1^{[1]}(x) & \varphi_2^{[1]}(x) & \cdots & \varphi_q^{[1]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{[q-1]}(x) & \varphi_2^{[q-1]}(x) & \cdots & \varphi_q^{[q-1]}(x) \end{pmatrix}$$

та

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \cdots & \psi_q(x) \\ \psi_1^{\{1\}}(x) & \psi_2^{\{1\}}(x) & \cdots & \psi_q^{\{1\}}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{\{q-1\}}(x) & \psi_2^{\{q-1\}}(x) & \cdots & \psi_q^{\{q-1\}}(x) \end{pmatrix}$$

Визначники

$$W(x) \equiv W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_q(x)] = \det \Phi(x)$$

та

$$V(x) \equiv V[\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_q(x)] = \det \Psi(x)$$

називатимемо *квазівронскіанами*[1)] розв'язків $\varphi_k(x)$ і $\psi_l(x)$, $k, l = \overline{1, q}$, відповідно.

Мають місце наступні аналоги формул Ліувілля–Остроградського–Якобі[2)].

Теорема 12.1. *Для довільної точки $x_0 \in I$ квазівронскіани $W(x)$ і $V(x)$ обчислюються за формулами*

$$W(x) = W(x_0) \exp\left\{ \int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_{01}(t) - a_{10}(t)}{a_{00}(t)} dt \right\}, \tag{12.3}$$

$$V(x) = V(x_0) \exp\left\{ \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\overline{a}_{01}(t) - \overline{a}_{10}(t)}{\overline{a}_{00}(t)} dt \right\}. \tag{12.4}$$

Доведення. Зрозуміло, що $\Phi(x)$ задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\Phi'(x) = C'(x)\Phi(x), \tag{12.5}$$

де матриця $C'(x)$ визначена в явному вигляді на стор. 88. Це рівняння в свою чергу еквівалентне матричному інтегральному рівнянню

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)\Phi(t).$$

[1)] Вронський (Гьоне-Вронський) Юзеф Марія (Hoene-Wroński Józef Maria, 1776–1853) — польський математик і філософ, професійний військовий.

[2)] Остроградський Михайло Васильович (1801–1861) — український і російський математик, один із засновників Петербурзької математичної школи, академік Петербурзької АН (1830).

Якобі Карл Густав Якоб (Jacobi Carl Gustav Jacob, 1804–1851) — німецький математик, професор Кьонігсберзького університету, іноземний почесний член Петербурзької АН (1833), член Лондонського королівського товариства (1833), Берлінської АН (1836), Паризької АН (1846).

Нехай $B(x,s)$ — фундаментальна матриця системи (12.5). Тоді довільний її розв'язок з початковим значенням $\Phi(x_0)$ зображається у вигляді $\Phi(x) = B(x,x_0)\Phi(x_0)$. Відтак згідно [**154**]

$$W(x) = W(x_0)\det B(x,x_0) =$$
$$= W(x_0)\cdot\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x}\operatorname{tr}\left[dC_c(t)\right]\right\}\cdot\prod_s \det\left[E_q+\Delta C(x_s)\right],$$

де $C_c(x)$ — неперервна компонента матриці-функції $C(x)$.

Зі структури (10.9) матриці $\Delta C(x)$ випливає, що для довільної точки розриву $x_s\in I$ матриці $E_q+\Delta C(x_s)$ мають трикутний вигляд з одиницями на головній діагоналі. Тому

$$\prod_s \det\left[E_q+\Delta C(x_s)\right] = 1.$$

Крім того, $\operatorname{tr}\left[C'(x)\right] = a_{01}(x)a_{00}^{-1}(x) - a_{00}^{-1}a_{10}(x)$. Оскільки $a_{00}^{-1}(x)$ — локально обмежена і вимірна на інтервалі I функція, $a_{01}, a_{10}\in L_2(I)$, то $\operatorname{tr}\left[C'(x)\right]\in L(I)$, і ми приходимо до формули (12.3). Доведення формули (12.4) ідентичне. ■

Наслідок 12.2. *Якщо* $\operatorname{tr}\left[C'(x)\right] = \operatorname{tr}\left[C'(x)\right]^*$, *то*

$$W(x)V(x) = \operatorname{const}\quad \forall x\in I.$$

Означення 12.3. Розв'язки $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, квазідиференціального рівняння (12.1) називаємо *лінійно незалежними*, якщо рівність

$$\sum_{k=1}^{q} c_k\varphi_k(x) = 0$$

при деяких сталих c_k справджується лише тоді, коли $c_k=0$ для всіх $k=\overline{1,q}$, і *лінійно залежними*, якщо хоча б одна зі сталих c_k відмінна від нуля.

Означення 12.4. Довільну лінійно незалежну систему розв'язків $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, квазідиференціального рівняння (12.1) називаємо *фундаментальною системою розв'язків* (ФСР) цього рівняння.

Зрозуміло, що для побудови будь-якої ФСР достатньо для рівняння (12.1) розв'язати q "задач Коші" з початковими умовами $\varphi_j^{[i-1]}(x_0) = c_{ij}$, $i,j = \overline{1,q}$, де числа c_{ij} вибрані так, що $\det\{c_{ij}\} \neq 0$.

Теорема 12.5. *Якщо розв'язки $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, квазідиференціального рівняння (12.1) лінійно залежні, то квазівронскіан $W(x)$ цих розв'язків тотожно рівний нулеві на інтервалі I. Навпаки, якщо $W(x)=0$ хоча б в одній точці $x_0 \in I$, то розв'язки $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, рівняння (12.1) лінійно залежні.*

Доведення. Якщо розв'язки $\varphi_k(x), k = \overline{1,q}$, рівняння (12.1) лінійно залежні, то серед чисел c_k знайдеться хоча б одне відмінне від нуля таке, що $\sum\limits_{k=1}^{q} c_k\varphi_k(x) = 0$ для довільного $x \in I$. Взявши квазіпохідні від обох частин цієї рівності, приходимо до однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих c_k:

$$\sum_{k=1}^{q} c_k\varphi_k^{[i-1]}(x) = 0, \quad i = \overline{1,q}. \tag{12.6}$$

Оскільки система (12.6) має нетривіальний розв'язок (бо не всі сталі c_k дорівнюють нулеві), то її визначник $W(x) \equiv 0$ на I.

Навпаки, нехай існує точка $x_0 \in I$, в якій $W(x_0)=0$. Тоді при $x=x_0$ існує нетривіальний розв'язок алгебраїчної системи (12.6), причому функція

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_q\varphi_q(x)$$

є розв'язком КДР (12.1), що задовольняє початкові умови

$$y^{[i-1]}(x_0) = 0, \quad i = \overline{1,q}.$$

Оскільки рівняння (12.1) однорідне, то за теоремою існування і єдиності такий розв'язок тотожно рівний нулеві, тобто

$$\sum_{k=1}^{q} c_k\varphi_k(x) \equiv 0.$$

Якщо взяти до уваги, що серед чисел c_k існує хоча б одне відмінне від нуля (бо розв'язок системи (12.6) при $x = x_0$ нетривіальний), то згідно означення 12.3 розв'язки $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1,q}$, лінійно залежні. ■

Наслідок 12.6. *Якщо $W(x) \neq 0$ хоча б в одній точці $x_0 \in I$, то розв'язки $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1,q}$, квазідиференціального рівняння (12.1) утворюють ФСР.*

Наслідок 12.7. *Загальний розв'язок КДР (12.1) є лінійною комбінацією розв'язків $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1,q}$, довільної фіксованої ФСР:*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{q} c_k\varphi_k(x), \quad c_k = \text{const}\,.$$

Зрозуміло, що усе сказане після наслідку 12.2 природним чином поширюється і на випадок спряженого КДР (12.2) з тією лише різницею, що замість квазіпохідних $\varphi^{[\cdot]}$ і квазівронскіана $W(x)$ фігуруватимуть $\psi^{\{\cdot\}}$ і $V(x)$.

§ 13. Структура фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння з мірами

Наведені в цьому параграфі результати не вимагають конкретного вигляду КДР і є, так би мовити, наслідком деяких загальних положень концепції квазіпохідних. Більше того, встановлена нижче структура фундаментальної матриці, що відповідає абстрактному КДР, переконує в тому, що така концепція — в самій природі звичайних диференціальних рівнянь. Нехай

$$l_n\big[y(x)\big] = 0 \tag{13.1}$$

коректне КДР n-порядку, що зводиться до еквівалентної узагальненої диференціальної системи першого порядку

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \quad \big[\Delta C(x)\big]^2 = 0 \ \forall\, x \in I, \tag{13.2}$$

де $Y = \big(y, y^{[1]}, \dots, y^{[n-1]}\big)^\top$ — невідома вектор-функція, а $y^{[i]}(x),\ i = \overline{0, n-1},$ — деяким чином введені квазіпохідні.

Означення 13.1. Матрицю-функцію $B(x,s)$, яка за змінною x задовольняє систему (13.2) і в точці $x = s \in I$ початкову умову $B(s,s) = E_n$, назвемо *фундаментальною матрицею, що відповідає КДР* (13.1).

Означення 13.2. *Функцією Коші* КДР (13.1) назвемо функцію $K(x,s)$, котра за змінною x є розв'язком цього рівняння і в точці $x = s \in I$ задовольняє початкові умови

$$K^{[i]}(s,s) = 0,\ \ i = \overline{0, n-2}, \qquad K^{[n-1]}(s,s) = 1. \tag{13.3}$$

Нехай також

$$l_n^*[z(x)] = 0 \tag{13.4}$$

спряжене КДР, а $z^{\{j\}}(x),\ j = \overline{0, n-1},$ — відповідні квазіпохідні.

Означення 13.3. Для достатньо гладкої комплекснозначної функції $f(x,s)$, що визначена на декартовому добутку $I\times I$ вираз $f^{[i]\{j\}}(x,s)$ називаємо *мішаною квазіпохідною* $(i+j)$*-го порядку*, якщо спочатку береться i-та квазіпохідна по (першому аргументу) x в сенсі вихідного КДР (13.1), а потім від отриманого результату — j-та квазіпохідна по (другому аргументу) s в сенсі спряженого рівняння (13.4).

Наступне твердження відображає той факт, що для функції Коші $K(x,s)$ результат змішаного квазідиференціювання не залежить від порядку його виконання.

Лема 13.4. *Якщо $K(x,s)$ — функція Коші КДР (13.1), то*

$$K^{[i]\{j\}}(x,s)=K^{\{j\}[i]}(x,s). \tag{13.5}$$

Доведення. Оскільки за означенням 13.2 функція $K(x,s)$ є розв'язком КДР (13.1), то має місце зображення

$$K(x,s)=\sum_{k=1}^{n}c_k(s)\varphi_k(x), \tag{13.6}$$

де $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,n}$, — деяка ФСР рівняння (13.1), а $c_k(s)$ — сталі за змінною x функції, що однозначно визначаються при фіксованому s початковими умовами (13.3). Враховуючи лінійність операції обчислення квазіпохідної і вираз (13.6), маємо

$$K^{[i]\{j\}}(x,s)=\left(\sum_{k=1}^{n}c_k(s)\varphi_k^{[i]}(x)\right)^{\{j\}}=\sum_{k=1}^{n}c_k^{\{j\}}(s)\varphi_k^{[i]}(x)=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}c_k^{\{j\}}(s)\varphi_k(x)\right)^{[i]}=K^{\{j\}[i]}(x,s).$$

■

Теорема 13.5. *Фундаментальна матриця $B(x,s)$, що відповідає КДР* (13.1)*, має таку структуру:*

$$B(x,s)=\begin{pmatrix} K^{\{n-1\}}(x,s) & \cdots & K^{\{1\}}(x,s) & K(x,s) \\ K^{\{n-1\}[1]}(x,s) & \cdots & K^{\{1\}[1]}(x,s) & K^{[1]}(x,s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{\{n-1\}[n-1]}(x,s) & \cdots & K^{\{1\}[n-1]}(x,s) & K^{[n-1]}(x,s) \end{pmatrix} \tag{13.7}$$

Доведення. Позначимо елементи матриці $B(x,s)$ через $\beta_{ij}(x,s)$, $i,j=\overline{1,n}$. Зрозуміло, що згідно означень 13.1 і 13.2 елементами останнього її стовпця є функція Коші та її послідовні квазіпохідні до $(n-1)$-го порядку включно в сенсі КДР (13.1), тобто $\beta_{in}=K^{[i-1]}(x,s)$, $i=\overline{1,n}$. Відтак маємо

$$B(x,s)=\begin{pmatrix} \beta_{11}(x,s) & \beta_{12}(x,s) & \cdots & \beta_{1,n-1}(x,s) & K(x,s) \\ \beta_{21}(x,s) & \beta_{22}(x,s) & \cdots & \beta_{2,n-1}(x,s) & K^{[1]}(x,s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1}(x,s) & \beta_{n2}(x,s) & \cdots & \beta_{n,n-1}(x,s) & K^{[n-1]}(x,s) \end{pmatrix}.$$

Якщо далі врахувати комутативність операції комплексного спряження і квазідиференціювання, то

$$B^*(x,s)=\begin{pmatrix} \overline{\beta}_{11}(x,s) & \overline{\beta}_{21}(x,s) & \cdots & \overline{\beta}_{n1}(x,s) \\ \overline{\beta}_{12}(x,s) & \overline{\beta}_{22}(x,s) & \cdots & \overline{\beta}_{n2}(x,s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\beta}_{1,n-1}(x,s) & \overline{\beta}_{2,n-1}(x,s) & \cdots & \overline{\beta}_{n,n-1}(x,s) \\ \overline{K}(x,s) & \overline{K}^{[1]}(x,s) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]}(x,s) \end{pmatrix}.$$

Але на підставі зауваження 5.2 матриця $B^*(x,s)$ за змінною s є розв'язком спряженої системи

$$\begin{pmatrix} z^{\{n-1\}} \\ \vdots \\ z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}' = -\big(C'(s)\big)^* \cdot \begin{pmatrix} z^{\{n-1\}} \\ \vdots \\ z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix},$$

а це означає, що всі рядки цієї матриці (точніше, їх елементи), починаючи з передостаннього є послідовними квазіпохідними останнього рядка по s в сенсі спряженого рівняння (13.4). Тому

$$B^*(x,s)=\begin{pmatrix} \overline{K}^{\{n-1\}}(x,s) & \overline{K}^{[1]\{n-1\}}(x,s) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]\{n-1\}}(x,s) \\ \overline{K}^{\{n-2\}}(x,s) & \overline{K}^{[1]\{n-2\}}(x,s) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]\{n-2\}}(x,s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{K}^{\{1\}}(x,s) & \overline{K}^{[1]\{1\}}(x,s) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]\{1\}}(x,s) \\ \overline{K}(x,s) & \overline{K}^{[1]}(x,s) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]}(x,s) \end{pmatrix} \tag{13.8}$$

Виконуючи повторно операцію спряження і враховуючи рівність (13.5), приходимо до формули (13.7). ■

Наслідок 13.6. *Якщо $\widetilde{B}(x,s)$ — фундаментальна матриця, що відповідає спряженому до* (13.1) *КДР* (13.4)*, то*

$$\widetilde{B}(x,s) \equiv \big(B^{-1}(x,s)\big)^* = B^*(s,x) = \\ = \begin{pmatrix} \overline{K}^{\{n-1\}}(s,x) & \overline{K}^{[1]\{n-1\}}(s,x) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]\{n-1\}}(s,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{K}^{\{1\}}(s,x) & \overline{K}^{[1]\{1\}}(s,x) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]\{1\}}(s,x) \\ \overline{K}(s,x) & \overline{K}^{[1]}(s,x) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]}(s,x) \end{pmatrix},$$

якщо при цьому скористатися (13.8).

Останній результат дозволяє встановити тісний зв'язок між розв'язками вихідного і спряженого КДР.

Означення 13.7. *Функцією Коші спряженого КДР* (13.4) називаємо функцію $\widetilde{K}(x,s)$, яка за змінною x задовольняє це рівняння і в точці $x=s$ початкові умови

$$\widetilde{K}_x^{\{j\}}(s,s)=0,\ \ j=\overline{0,n-2},\qquad \widetilde{K}_x^{\{n-1\}}(s,s)=1.$$

(тут індекс "x" вказує на те, що квазіпохідна в сенсі спряженого рівняння береться за змінною x).

Зі структури матриці-функції $\widetilde{B}(x,s)$ відразу випливає, що

$$\widetilde{K}(x,s)\equiv\overline{K}(s,x).$$

Наслідок 13.8. *Функції* $K^{\{j\}}(x,s),\ j=\overline{0,n-1}$, *утворюють нормальну в точці* $x=s$ *фундаментальну систему розв'язків КДР* (13.1).

Наслідок 13.9. *Функція* $\overline{K}(s,x)$ *та її послідовні квазіпохідні* $\overline{K}^{[i]}(s,x), i=\overline{1,n-1}$, *за змінною* s *в сенсі вихідного рівняння* (13.1) *утворюють нормальну в точці* $x=s$ *фундаментальну систему розв'язків спряженого КДР* (13.4).

§ 14. Конструкція елементів фундаментальної матриці

У попередньому параграфі для довільного абстрактного КДР ми описали за допомогою однієї лише функції Коші $K(x,s)$ та її змішаних квазіпохідних в сенсі вихідного і спряженого рівнянь структуру нормальної при $x=s$ фундаментальної матриці $B(x,s)$, що відповідає цьому рівнянню. Однак, при дослідженні задач як прикладного, так і теоретичного характеру не менш важливо знати також конструкцію елементів цієї матриці, тобто вміти конструктивно будувати саму функцію Коші та її мішані квазіпохідні. Спосіб їх побудови через ФСР якраз і є предметом розгляду цього параграфу.

Якщо користуватись означенням (13.2), то для побудови функції Коші $K(x,s)$ КДР (13.1) необхідно розв'язати неоднорідну систему n лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k^{[i]}(s) = 0, \quad i = \overline{0, n-2}; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k^{[n-1]}(s) = 1, \end{cases}$$

де φ_k, $k = \overline{1,n}$, — довільна ФСР рівняння (13.1). Якщо це робити, н-д, методом Крамера[3)], то потрібно обчислити $n+1$ визначників n-го порядку.

Наступне твердження зводить процес побудови функції Коші (так само її мішаних квазіпохідних) до обчислення лише двох визначників n-го порядку.

[3)] Крамер Ґабріель (Cramer Gabriel, 1704-1752) — швейцарський математик, учень Й. Бернуллі, професор Женевської академії.

Теорема 14.1. *Нехай* $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,n}$, *— довільна фундаментальна система розв'язків КДР* (13.1), *а* $W(x)$ *— її квазіврон-скіан, тобто*

$$W(x)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1^{[1]}(x) & \varphi_2^{[1]}(x) & \cdots & \varphi_n^{[1]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{[n-1]}(x) & \varphi_2^{[n-1]}(x) & \cdots & \varphi_n^{[n-1]}(x) \end{vmatrix}.$$

Тоді функція Коші цього рівняння $K(x,s)$ *та її мішані квазіпохідні* $(i+j)$*-го порядку* $(i,j=\overline{0,n-1})$ *мають вигляд*

$$K^{[i]\{j\}}(x,s)=\frac{1}{W(s)}\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi_1^{[1]}(s) & \varphi_2^{[1]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[1]}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{[n-j-2]}(s) & \varphi_2^{[n-j-2]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[n-j-2]}(s) \\ \varphi_1^{[i]}(x) & \varphi_2^{[i]}(x) & \cdots & \varphi_n^{[i]}(x) \\ \varphi_1^{[n-j]}(s) & \varphi_2^{[n-j]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[n-j]}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{[n-1]}(s) & \varphi_2^{[n-1]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[n-1]}(s) \end{vmatrix}, \quad (14.1)$$

де рядок $\left(\varphi_1^{[i]}(x)\ \varphi_2^{[i]}(x)\ \ldots\ \varphi_n^{[i]}(x)\right)$ *має номер* $n-j$ *(або* $j+1$*, рахуючи знизу).*

Доведення. Нехай

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1^{[1]}(x) & \varphi_2^{[1]}(x) & \cdots & \varphi_n^{[1]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{[n-1]}(x) & \varphi_2^{[n-1]}(x) & \cdots & \varphi_n^{[n-1]}(x) \end{pmatrix}$$

інтегральна матриця диференціальної системи (13.2), котра

відповідає КДР (13.1). Тоді, як відомо [**52**, с. 271], фундаментальна матриця цієї системи

$$B(x,s)=\Phi(x)\Phi^{-1}(s)=\Phi(x)\frac{A(s)}{W(s)}, \tag{14.2}$$

де

$$A(s)=\begin{pmatrix} A_{11}(s) & A_{21}(s) & \cdots & A_{n1}(s)\\ A_{12}(s) & A_{22}(s) & \cdots & A_{n2}(s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n}(s) & A_{2n}(s) & \cdots & A_{nn}(s)\end{pmatrix}$$

— матриця, складена з алгебраїчних доповнень $A_{ik}(s)$, $i,k=\overline{1,n}$, до елементів $\varphi_k^{[i-1]}(s)$ інтегральної матриці $\Phi(s)$. Виконуючи множення матриць у правій частині рівності (14.2) і використовуючи структуру (13.7) фундаментальної матриці, маємо

$$K^{[i]\{j\}}(x,s)=\frac{1}{W(s)}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{[i]}(x)A_{n-j,k}(s),\quad i,j=\overline{0,n-1}.$$

Вираз справа в останній рівності якраз і є розкладом визначника (14.1) за елементами $(n-j)$-го рядка. ■

З рівності (14.1) випливає, що функція Коші КДР (13.1)

$$K(x,s)=\frac{1}{W(s)}\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \cdots & \varphi_n(s)\\ \varphi_1^{[1]}(s) & \varphi_2^{[1]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[1]}(s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1^{[n-2]}(s) & \varphi_2^{[n-2]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[n-2]}(s)\\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x)\end{vmatrix}. \tag{14.3}$$

Цей вираз є "квазідиференціальним" аналогом відомої формули для функції Коші звичайного диференціального рівняння [**46**, с. 100].

З наслідку 13.8 і рівності (14.1) випливає також, що функції

$$K^{\{j\}}(x,s)=\frac{1}{W(s)}\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \cdots & \varphi_n(s)\\ \varphi_1^{[1]}(s) & \varphi_2^{[1]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[1]}(s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1^{[n-j-2]}(s) & \varphi_2^{[n-j-2]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[n-j-2]}(s)\\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x)\\ \varphi_1^{[n-j]}(s) & \varphi_2^{[n-j]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[n-j]}(s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1^{[n-1]}(s) & \varphi_2^{[n-1]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[n-1]}(s)\end{vmatrix},$$

де $j=\overline{0,n-1}$, утворюють нормальну в точці $x=s$ фундаментальну систему розв'язків КДР (13.1).

Приклад 14.2. Побудуємо функцію Коші звичайного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y''+py'+qy=0. \tag{14.4}$$

▼ Відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,$$

а його дискримінант $D=p^2-4q$. Відтак розглянемо три випадки:

1) $p^2-4q<0$. В цьому випадку характеристичне рівняння має пару комплексно спряжених коренів $\lambda_{1,2}=-\frac{p}{2}\mp i\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$, тому фундаментальну систему розв'язків рівняння (14.4) утворюють функції

$$\varphi_1(x)=e^{-\frac{p}{2}x}\cos\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}x,\quad \varphi_2(x)=e^{-\frac{p}{2}x}\sin\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}x.$$

На рівняння (14.4) можна дивитись як на КДР, для якого квазіпохідними є звичайні похідні. Відтак (квазі)вронскіан розв'язків $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ має вигляд (тут для зручності запису позначено

$\alpha \equiv -\frac{p}{2}$, $\beta \equiv \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$)

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}\left(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x\right) & e^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x\right)\end{vmatrix}=\beta e^{2\alpha x}.$$

Тоді за формулою (14.3) маємо

$$K(x,s)=\frac{1}{W(s)}\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \varphi_2(s)\\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x)\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\beta e^{2\alpha s}}\begin{vmatrix} e^{\alpha s}\cos\beta s & e^{\alpha s}\sin\beta s\\ e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x\end{vmatrix}=\frac{e^{\alpha(x-s)}\sin\beta(x-s)}{\beta}$$

або остаточно

$$K(x,s)=\frac{e^{-\frac{p}{2}(x-s)}\sin\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}(x-s)}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}}. \qquad (14.5)$$

2) $p^2-4q=0$. В цьому випадку достатньо здійснити граничний перехід при $p^2-4q\to 0$ у формулі (14.5) і використати першу визначну границю. В результаті функція Коші матиме вигляд

$$K(x,s)=(x-s)e^{-\frac{p}{2}(x-s)}.$$

3) $p^2-4q>0$. Для отримання вигляду функції Коші в цьому випадку модифікуємо формулу (14.5), використавши відому рівність $\sin ix=i\,\mathrm{sh}\,x$. Тоді

$$K(x,s)=\frac{e^{-\frac{p}{2}(x-s)}\sin i\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}(x-s)}{i\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}}=\frac{e^{-\frac{p}{2}(x-s)}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}(x-s)}{\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}}.$$

▲

§ 15. Неоднорідне квазідиференціальне рівняння з розподілами

Розглянемо неоднорідне КДР

$$L_{mn}[y] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\bigl(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\bigr)^{(m-j)} = \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1}f_k^{(k+1)}(x), \tag{15.1}$$

коефіцієнти $a_{ij}(x)$ якого справджують вказані в §10 припущення (I)–(III), а права частина задовольняє умову

(IV) $f_k \in BV^{+}_{loc}(I),\ k=\overline{0,l}\,.$

Найперше поставимо собі за мету з'ясувати, при якому найбільшому значенні l рівняння (15.1) є коректним. Відповідь на це питання дає наступне твердження.

Теорема 15.1. *Якщо $l\leqslant m-1$, то за умов (I)–(IV) КДР (15.1) коректне, тобто зводиться до коректної диференціальної системи.*

Доведення. Вважаючи, що $0\leqslant l\leqslant m-1$, введемо квазіпохідні $y^{[\nu]}(x)$, $\nu=\overline{0,q}$, в сенсі КДР (15.1) у такий спосіб:

$$\begin{aligned}
&y^{[i]}=y^{(i)},\ i=\overline{0,n-1};\quad y^{[n]}=\sum_{i=0}^{n}a_{i0}(x)y^{(n-i)};\\
&y^{[n+j]}=-\bigl(y^{[n+j-1]}\bigr)'+\sum_{i=0}^{n}a_{ij}(x)y^{(n-i)},\ j=\overline{1,m-l-1};\\
&y^{[n+j]}=-\bigl(y^{[n+j-1]}\bigr)'+\sum_{i=0}^{n}a_{ij}(x)y^{(n-i)}+f'_{m-j}(x),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j=\overline{m-l,m}.
\end{aligned} \tag{15.2}$$

Відзначимо, що при цьому $y^{[q]}\equiv L_{mn}[y]-\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1}f_k^{(k+1)}(x)\,.$

Як і при доведенні теореми 10.2, за допомогою вектора

$$Y = \left(y, y^{[1]}, \dots, y^{[q-1]}\right)^\top$$

зведемо тепер вже неоднорідне КДР (15.1) до узагальненої диференціальної системи першого порядку

$$Y'(x) = C'(x)Y(x) + F'(x), \tag{15.3}$$

де матриця-міра $C'(x)$ та сама, що і вище (див. с. 88), а

$$F'(x) = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{q-l-1}, f_l'(x), f_{l-1}'(x), \dots, f_0'(x)\right)^\top. \tag{15.4}$$

Оскільки відповідна однорідна диференціальна система (10.7) коректна (бо справджується умова (10.10)), то за теоремою 7.6 для коректності системи (15.3) достатньо виконання умови

$$\Delta C(x)\Delta F(x) = 0 \quad \forall\, x \in I, \tag{15.5}$$

яка перевіряється безпосередньо з врахуванням структури (10.9) матриці стрибків $\Delta C(x)$, вигляду вектора стрибків

$$\Delta F(x) = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{q-l-1}, \Delta f_l(x), \Delta f_{l-1}(x), \dots, \Delta f_0(x)\right)^\top \tag{15.6}$$

і того факту, що $l \leqslant m-1$.

Якщо тепер спробувати збільшити верхню межу для l хоча б на одиницю і покласти $l = m$, то модифікувавши для цього випадку квазіпохідні (15.2) за правилом

$$\begin{aligned} &y^{[i]} = y^{(i)}, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad y^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} a_{i0}(x)y^{(n-i)} + f_m'(x); \\ &y^{[n+j]} = -\left(y^{[n+j-1]}\right)' + \sum_{i=0}^{n} a_{ij}(x)y^{(n-i)} + f_{m-j}'(x), \ j = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{15.7}$$

прийдемо до системи вигляду (15.3), де вектор

$$F'(x) = \big(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, -a_{00}^{-1}(x) f'_m(x), f'_{m-1}(x), \dots, f'_0(x)\big)^\top.$$

Тоді вектор стрибків $\Delta F(x)$ має вигляд

$$\Delta F(x) = \big(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, -a_{00}^{-1}(x) \Delta f_m(x), \Delta f_{m-1}(x), \dots, \Delta f_0(x)\big)^\top$$

і, очевидно, без додаткових обмежень на функцію $f_m(x)$ або коефіцієнти $a_{1j}(x)$, $j = \overline{1, m}$, умова коректності (15.5) виконуватись не буде. ■

З цієї теореми випливає, що порядок найстаршої похідної у правій частині КДР (15.1) не може перевищувати числа m. Інакше (тобто, коли $l > m$) для виконання умови (15.5) необхідно накласти додаткові обмеження (типу неперервності) або на функції $f_k(x)$, або на коефіцієнти $a_{ij}(x)$. Тому квазідиференціальні рівняння вигляду (10.1) при $l > m$ є *умовно коректними*.

Для прикладу розглянемо КДР 3-го порядку

$$y''' + \big(a_{10}(x)y'\big)' - a_{11}(x)y' + \big(a_{20}(x)y\big)' - a_{21}(x)y = \\ = f'_0(x) - f''_1(x), \quad (15.8)$$

де $a_{i1}(x) = b'_{i1}(x)$, $b_{i1}, f_{i-1} \in BV^+_{loc}(I)$, $a_{i0} \in L(I), i = 1, 2$.

Перепишемо рівняння (15.8) у вигляді

$$\big(y'' + a_{10}(x)y' + a_{20}(x)y + f'_1(x)\big)' - \big(a_{11}(x)y' + a_{21}(x)y + f'_0(x)\big) = 0.$$

Звідси видно, що квазіпохідні доцільно ввести таким чином (див. також (15.7)):

$$y^{[1]} = y', \quad y^{[2]} = y'' + a_{10}(x)y' + a_{20}(x)y + f'_1(x).$$

З їх допомогою рівняння (15.8) перепишемо у вигляді диференціальної системи першого порядку

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_{20}(x) & -a_{10}(x) & 1 \\ a_{21}(x) & a_{11}(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_1'(x) \\ f_0'(x) \end{pmatrix}.$$

Далі внаслідок накладених на коефіцієнти вимог маємо

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta b_{21}(x) & \Delta b_{11}(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta f_1(x) \\ \Delta f_0(x) \end{pmatrix}.$$

Відтак умова (10.10) справджується, а умова (15.5) виконується, якщо і тільки якщо $\Delta b_{11}(x) \cdot \Delta f_1(x) = 0 \ \forall\, x \in I$, тобто, коли принаймні одна з двох функцій $b_{11}(x)$ і $f_1(x)$ неперервна.

Початкову задачу для рівняння (15.1) слід ставити в термінах квазіпохідних (15.2):

$$y^{[\nu]}(x_0) = y_0^\nu, \quad \nu = \overline{0, q-1}, \quad x_0 \in I, \tag{15.9}$$

де y_0^ν, $\nu = \overline{0, q-1}$, — задані числа.

Теорема 15.2. *За умов (I)–(IV) для довільного $0 \leqslant l \leqslant m-1$ існує єдиний розв'язок початкової задачі (15.1), (15.9), який зображається у вигляді*

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{q-1} K^{\{\nu\}}(x, x_0) y_0^{q-\nu-1} + \sum_{k=0}^{l} \int_{x_0}^{x} K^{\{k\}}(x, s) df_k(s) \tag{15.10}$$

(тут $K(x,s)$ — функція Коші однорідного КДР $L_{mn}[y] = 0$) і такий, що квазіпохідні $y^{[i]}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, належать простору $AC(I)$, а квазіпохідні $y^{[n+j-1]}(x)$, $j = \overline{1, m}$, — простору $BV^+_{loc}(I)$ та в точках x_s розривів функцій $b_{ij}(x)$ і $f_k(x)$

мають стрибки, що визначаються формулами

$$\begin{aligned}\Delta y^{[n+j-1]}(x_s)&=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta b_{n-i,j}(x_s)y^{(i)}(x_s),\ \ j=\overline{1,m-l-1},\\ \Delta y^{[n+j-1]}(x_s)&=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta b_{n-i,j}(x_s)y^{(i)}(x_s)+\Delta f_{m-j}(x_s),\\ &\qquad\qquad j=\overline{m-l,m}.\end{aligned}\tag{15.11}$$

Доведення. Початкова задача (15.1), (15.9) еквівалентна початковій задачі для неоднорідної диференціальної системи першого порядку (15.3) з початковою умовою $Y(x_0)=Y_0$, де $Y_0=\left(y_0,y_0^1,\dots,y_0^{q-1}\right)^\top$ — заданий вектор початкових значень. За умов (10.10) і (15.5) остання задача в свою чергу рівносильна (див. §7) неоднорідному інтегральному рівнянню

$$Y(x)=Y_0+\int\limits_{x_0}^{x}dC(t)\,Y(t)+F(x)-F(x_0),\tag{15.12}$$

розв'язок якого за теоремою 4.1 (з врахуванням при цьому умови (15.5)) єдиним чином зображається у вигляді

$$Y(x)=B(x,x_0)Y_0+\int\limits_{x_0}^{x}B(x,s)dF(s),\tag{15.13}$$

де $B(x,s)$ — фундаментальна матриця, що відповідає КДР

$$L_{mn}[y]=0.$$

Якщо врахувати структуру (13.7) цієї матриці, вигляд (15.4) вектора $F(x)$, а також наслідок 13.8, то рівність (15.13) для першої координати $y(x)$ вектора $Y(x)$ співпадає із зображенням (15.10).

При нагоді відзначимо, що рівність (15.13) для решти координат вектора $Y(x)$ дає зображення квазіпохідних розв'язку (15.10).

Оскільки, крім цього,

$$\Delta Y(x_s) = \Delta C(x_s)Y(x_s) + \Delta F(x_s), \tag{15.14}$$

то, використовуючи (10.9) і (15.6), після покоординатного запису матричної рівності (15.14) приходимо до умов стрибків (15.11) і умов неперервності квазіпохідних $y^{[i]}(x)$ для $i = \overline{0, n-1}$.

Нарешті, на підставі (15.12), (15.4) і (15.2) для l $(0 \leqslant l \leqslant m-1)$ справджуються рівності

$$y^{[i]}(x) = y_0^i + \int\limits_{x_0}^{x} y^{(i+1)}(t)dt, \quad i = \overline{0, n-1},$$

де інтеграл розуміється в сенсі Лебега, а тому квазіпохідні $y^{[i]}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, є абсолютно неперервними на інтервалі I функціями. ■

Важливим з прикладної точки зору є неоднорідне КДР

$$L_{mn}[y] = (-1)^{k+1}\delta^{(k+1)}(x - x_0), \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1, \tag{15.15}$$

де $\delta^{(k+1)}(x-x_0)$ — $(k+1)$-ша узагальнена похідна від δ-функції Дірака з носієм у точці $x_0 \in I$.

Теорема 15.3. *За умов (I)–(III) розв'язок КДР (15.15), який задовольняє нульові початкові умови, має вигляд*

$$y(x) = K^{\{k\}}(x, x_0)H(x-x_0). \tag{15.16}$$

Доведення. У розглядуваному випадку вектор $F(x)$, що фігурує в узагальненій диференціальній системі (15.3), має вигляд

$$F(x) = \big(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{q-k-1}, H(x-x_0), \underbrace{0,0,\ldots,0}_{k}\big)^{\top}.$$

Оскільки при $Y_0 = 0$ розв'язок (15.13) цієї системи

$$Y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} B(x,s)dF(s) =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} K^{\{q-1\}}(x,s) & \cdots & K^{\{k\}}(x,s) & \cdots & K(x,s) \\ \vdots & & \ldots & & \vdots \\ K^{[q-1]\{q-1\}}(x,s) & & \ldots & & K^{[q-1]}(x,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dc_1 \\ \vdots \\ dH(s-x_0) \\ \vdots \\ dc_q \end{pmatrix},$$

то перша координата $y(x)$ вектора $Y(x)$ набуде вигляду

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K^{\{k\}}(x,s)dH(s-x_0) \equiv K^{\{k\}}(x,x_0)H(x-x_0),$$

що співпадає з (15.16). ■

За аналогією доводяться два наступні твердження, доведення яких ми залишаємо читачеві.

Теорема 15.4. *За умов (I)–(III) неоднорідне КДР*

$$L^{*}_{mn}[z] \equiv \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\big(\overline{a}_{ij}(x)z^{(m-j)}\big)^{(n-i)} = \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1}g_k^{(k+1)}(x), \tag{15.17}$$

де $g_k \in BV^{+}_{loc}(I)$, $k = \overline{0,l}$, *є коректним, якщо* $l \leqslant n-1$.

Теорема 15.5. *За умов (I)–(III) для довільного* $0 \leqslant l \leqslant n-1$ *існує єдиний розв'язок КДР* (15.17)*, який задовольняє початкові умови*

$$z^{\{\nu\}}(x_0) = z_0^\nu, \quad \nu = \overline{0, q-1}, \quad x_0 \in I,$$

де z_0^ν, $\nu = \overline{0, q-1}$, *— задані числа.*

Цей розв'язок зображається у вигляді

$$z(x) = \sum_{\nu=0}^{q-1} \overline{K}^{[\nu]}(x_0, x) z_0^{q-\nu-1} + \sum_{k=0}^{l} \int_{x_0}^{x} \overline{K}^{[k]}(s, x) dg_k(s),$$

причому квазіпохідні $z^{\{j\}}(x)$, $j = \overline{0, m-1}$, *належать до простору* $AC(I)$*, а квазіпохідні* $z^{\{m+i-1\}}(x), i = \overline{1, n}$, *— до простору* $BV_{loc}^{+}(I)$ *і в точках* x_s *розривів функцій* b_{ij} *і* $g_k(x)$ *мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\Delta z^{\{m+i-1\}}(x_s) = -\sum_{j=0}^{m-1} \Delta \bar{b}_{i,m-j}(x_s) z^{(j)}(x_s), \ i = \overline{1, n-l-1},$$

$$\Delta z^{\{m+i-1\}}(x_s) = -\sum_{j=0}^{m-1} \Delta \bar{b}_{i,m-j}(x_s) z^{(j)}(x_s) + \Delta g_{n-i}(x_s), \ i = \overline{n-l, n}.$$

Відзначимо лише, що квазіпохідні $z^{\{\nu\}}(x), \nu = \overline{0, q}$, у випадку КДР (15.17) доцільно вводити у такий спосіб:

$$z^{\{j\}} = z^{(j)}, \quad j = \overline{0, m-1}; \quad z^{\{m\}} = -\sum_{j=0}^{m} \overline{a}_{0j}(x) z^{(m-j)};$$

$$z^{\{m+i\}} = -\big(z^{\{m+i-1\}}\big)' - \sum_{j=0}^{m} \overline{a}_{ij}(x) z^{(m-j)}, \quad i = \overline{1, n-l-1};$$

$$z^{\{m+i\}} = -\big(z^{\{m+i-1\}}\big)' - \sum_{j=0}^{m} \overline{a}_{ij}(x) z^{(m-j)} + g'_{n-i}(x), \quad i = \overline{n-l, n}.$$

§ 16. Узагальнене звичайне диференціальне рівняння

Для математиків цікавим (як з теоретичної, так і з практичної точок зору) є звичайний диференціальний вираз

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{16.1}$$

з узагальненими коефіцієнтами

$$a_i(x) = b_i'(x),\ b_i \in BV^+_{loc}(I),\ i = \overline{1, n}.$$

На перший погляд видається, що диференціальний вираз $L_n[y]$ є частинним випадком квазідиференціального виразу $L_{mn}[y]$ вигляду (10.1), якщо в останньому покласти $m = 0$, $a_{00}(x) \equiv 1$, $a_{i0}(x) \equiv -a_i(x)\ \forall\, i = \overline{1, n}$. Однак, в такому частинному випадку ми б отримали диференціальний вираз із сумовними[4)] за Лебегом коефіцієнтами, в той час, як у диференціальному виразі (16.1) умови на коефіцієнти суттєво послаблені. Тим не менше, результати §§ 10–15 легко адаптувати для випадку диференціального виразу (16.1), маючи згідно (10.3) на увазі, що квазіпохідні $y^{[i]}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, диференціального виразу $L_n[y]$ збігаються зі звичайними похідними $y^{(i)}(x)$.

Найперше з'ясуємо, яке додаткове обмеження потрібно накласти на функцію $b_1(x)$, щоб диференціальне рівняння

$$L_n[y] = 0 \tag{16.2}$$

було коректним.

[4)] Зі структури матриці $C'(x)$ (див. с. 88) видно, що за рахунок гладкості функції $a_{00}(x) \equiv 1$ умову (II) можна замінити на умову $a_{i0} \in L(I)$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 16.1. *Для коректності диференціального рівняння* (16.2) *необхідно і досить виконання рівності*

$$\Delta b_1(x) = 0 \quad \forall\, x \in I. \tag{16.3}$$

Доведення достатності. Рівняння (16.2) звичайним чином зводиться до еквівалентної узагальненої диференціальної системи першого порядку

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_n(x) & a_{n-1}(x) & a_{n-2}(x) & \cdots & a_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{16.4}$$

Матриця стрибків для цієї системи має вигляд

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta b_n(x) & \Delta b_{n-1}(x) & \Delta b_{n-2}(x) & \cdots & \Delta b_1(x) \end{pmatrix} \tag{16.5}$$

і, очевидно, за виконання умови (16.3) справджує рівність

$$\left[\Delta C(x)\right]^2 = 0 \;\; \forall\, x \in I, \tag{16.6}$$

тобто є коректною (разом з рівнянням (16.2)).

Доведення необхідності. Навпаки, з умови (16.6) відповідно до структури (16.5) матриці стрибків $\Delta C(x)$ випливають рівності

$$\Delta b_1(x)\Delta b_i(x) = 0 \quad \forall\, i = \overline{1,n}, \quad \forall\, x \in I, \tag{16.7}$$

звідки з необхідністю $\Delta b_1(x) \equiv 0$ на I. ■

З цієї теореми випливає, що міра $a_1(x)$ не повинна містити на I дискретної компоненти або, іншими словами, $b_1(x)$ — неперервна функція локально обмеженої на I варіації. Всюди далі умову (16.3) вважаємо виконаною.

Для диференціального рівняння (16.2) має сенс задача Коші, поставлена в точці $x_0 \in I$ в термінах звичайних похідних:

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^i, \quad y_0^i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{0, n-1}, \tag{16.8}$$

Теорема 16.2. *За умови* (16.3) *існує єдиний розв'язок* $y(x)$ *задачі Коші* (16.2), (16.8) *такий, що похідні* $y^{(i)}(x)$, $i = \overline{0, n-2}$, *належать простору* $AC(I)$, *а похідна* $y^{(n-1)}(x)$ — *простору* $BV^+_{loc}(I)$ *і в точках* $x_s \in I$ *розривів функцій* $b_i(x)$, $i = \overline{2, n}$, *має стрибки, що визначаються формулою*

$$\Delta y^{(n-1)}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-2} \Delta b_{n-i}(x_s) y^{(i)}(x_s).$$

Доведення цього твердження практично ідентичне доведенню теореми 10.2 і ми його опускаємо.

Для встановлення вигляду спряженого до (16.2) рівняння, як і раніше (див. §§ 9,11), спочатку побудуємо спряжену до (16.4) диференціальну систему першого порядку:

$$\begin{pmatrix} z^{\{n-1\}} \\ z^{\{n-2\}} \\ z^{\{n-3\}} \\ \vdots \\ z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}' = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \overline{a}_n(x) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \overline{a}_{n-1}(x) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \overline{a}_{n-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \overline{a}_2(x) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \overline{a}_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\{n-1\}} \\ z^{\{n-2\}} \\ z^{\{n-3\}} \\ \vdots \\ z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}. \tag{16.9}$$

Покординатний запис приводить до такої системи узагальнених рівностей:

$$\begin{aligned} z' &= -z^{\{1\}} - \overline{a}_1(x)z \\ \left(z^{\{1\}}\right)' &= -z^{\{2\}} - \overline{a}_2(x)z \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(z^{\{n-2\}}\right)' &= -z^{\{n-1\}} - \overline{a}_{n-1}(x)z \\ \left(z^{\{n-1\}}\right)' &= -\overline{a}_n(x)z \end{aligned} \tag{16.10}$$

Звідси отримуємо вирази для квазіпохідних $z^{\{i\}}(x)$, $i = \overline{1, n-1}$, в сенсі спряженого рівняння $\left(z^{\{0\}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} z(x)\right)$:

$$z^{\{i\}} = -\left(z^{\{i-1\}}\right)' - \overline{a}_i(x)z, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{16.11}$$

Остання у (16.10) рівність

$$\left(z^{\{n-1\}}\right)' + \overline{a}_n(x)z = 0,$$

записана в розгорнутому вигляді

$$L_n^*[z] \equiv (-1)^n z^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \left(\overline{a}_i(x)z\right)^{(n-i)} = 0, \tag{16.12}$$

якраз і є, як бачимо, спряженим до (16.2) квазідиференціальним рівнянням. При нагоді відзначимо, що, поклавши у КДР (11.2) $m = 0$, $a_{00}(x) \equiv 1$, $a_{i0}(x) \equiv -a_i(x)$ $\forall\, i = \overline{1, n}$, ми отримаємо рівняння із сумовними за Лебегом коефіцієнтами, котре (лише формально) збігається з КДР (16.12).

Якщо тепер до рівняння (16.12) приєднати початкові умови

$$z^{\{i\}}(x_0) = z_0^i, \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{16.13}$$

де z_0^i, $i = \overline{0, n-1}$, — задані числа, то має місце аналог теореми 11.3.

Теорема 16.3. *За умови* (16.3) *існує єдиний розв'язок* $z(x)$ *початкової задачі* (16.12), (16.13), *який є неперервною на інтервалі* I *функцією локально обмеженої варіації, а його квазіпохідні* $z^{\{i\}}(x)$, $i=\overline{1,n-1}$, *належать простору* $BV^{+}_{loc}(I)$ *і в точках* x_s *розривів функцій* $b_i(x)$, $i=\overline{2,n}$, *мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\Delta z^{\{i\}}(x_s) = -\Delta\bar{b}_{i+1}(x_s)z(x_s), \quad i=\overline{1,n-1}.$$

Зауваження 16.4. Для диференціального рівняння (16.2) із сумовними коефіцієнтами вирази (16.11) для квазіпохідних $z^{\{i\}}(x)$, фактично, зустрічаються в [**52**, с. 277], де показано також зв'язок спряженого рівняння зі спряженою системою першого порядку.

Зауваження 16.5. Якщо $b_1\in AC(I)$ (тобто коефіцієнт $a_1(x)$ локально сумовний за Лебегом), то розв'язок спряженого рівняння (16.12) $z\in AC(I)$. В загальному ж випадку (коли $a_1(x)$ містить сингулярну компоненту) розв'язок $z(x)$ є лише неперервною функцією локально обмеженої на інтервалі I варіації.

Нехай $\det W(x)$ — (квазі)вронскіан диференціального рівняння (16.2), а $\det V(x)$ — (квазі)вронскіан спряженого рівняння (16.12). Зі структури матриці $C'(x)$ диференціальної системи (16.4) бачимо, що

$$\operatorname{tr} C'(x) = a_1(x), \quad \operatorname{tr}\bigl(-C^{*\prime}(x)\bigr) = -\overline{a}_1(x),$$

$$\det\bigl[E_n+\Delta C(x_s)\bigr] = \det\bigl[E_n-\Delta C^{*}(x_s)\bigr] \equiv 1 \quad \forall\, x_s\in I,$$

тому аналоги (12.3), (12.4) формули Ліувілля-Остроградського-Якобі у цьому випадку мають вигляд

$$\det W(x) = \det W(x_0) \cdot \exp\Big\{ \int\limits_{x_0}^{x} db_1(x) \Big\},$$

$$\det V(x) = \det V(x_0) \cdot \exp\Big\{ - \int\limits_{x_0}^{x} d\bar{b}_1(x) \Big\}.$$

Далі нехай $K(x,s)$ — класична функція Коші диференціального рівняння (16.2). Відповідно до результатів §12, що мають місце для коректного КДР довільного вигляду, справджуються наступні твердження.

Теорема 16.6. *Фундаментальна матриця $B(x,s)$, що відповідає диференціальному рівнянню (16.2), має таку структуру:*

$$B(x,s) = \begin{pmatrix} K^{\{n-1\}}(x,s) & \cdots & K^{\{1\}}(x,s) & K(x,s) \\ K^{(1)\{n-1\}}(x,s) & \cdots & K^{(1)\{1\}}(x,s) & K^{(1)}(x,s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n-1)\{n-1\}}(x,s) & \cdots & K^{(n-1)\{1\}}(x,s) & K^{(n-1)}(x,s) \end{pmatrix},$$

де квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння (16.12) визначаються виразами (16.11).

Наслідок 16.7. *Функція Коші $K(x,s)$ та її послідовні квазіпохідні до $(n-1)$-го порядку включно в сенсі спряженого рівняння (16.12) утворюють нормальну в точці $x = s$ фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (16.2).*

Наслідок 16.8. *Фундаментальна матриця $\widetilde{B}(x,s)$, що відповідає спряженому диференціальному рівнянню (16.12), має таку структуру:*

$$\widetilde{B}(x,s)=\begin{pmatrix}\overline{K}^{\{n-1\}}(s,x) & \overline{K}^{(1)\{n-1\}}(s,x) & \cdots & \overline{K}^{(n-1)\{n-1\}}(s,x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{K}^{\{1\}}(s,x) & \overline{K}^{(1)\{1\}}(s,x) & \cdots & \overline{K}^{(n-1)\{1\}}(s,x)\\ \overline{K}(s,x) & \overline{K}^{(1)}(s,x) & \cdots & \overline{K}^{(n-1)}(s,x)\end{pmatrix}.$$

Наслідок 16.9. *Функція $\overline{K}(s,x)$ та її послідовні похідні за змінною s утворюють нормальну в точці $x=s$ фундаментальну систему розв'язків спряженого диференціального рівняння* (16.12).

Розглянемо тепер неоднорідне диференціальне рівняння

$$L_n[y]=f^{(k)}(x) \tag{16.14}$$

і з'ясуємо, при якому значенні k гарантується коректність цього рівняння.

Покладемо $k=1$. Тоді диференціальне рівняння (16.14) звичайним чином зводиться до неоднорідної узагальненої диференціальної системи першого порядку

$$\begin{pmatrix}y\\ y'\\ \vdots\\ y^{(n-2)}\\ y^{(n-1)}\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ y'\\ \vdots\\ y^{(n-2)}\\ y^{(n-1)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ f'\end{pmatrix}. \tag{16.15}$$

Оскільки $\Delta F(x)=\big(0,0,\ldots,0,\Delta f(x)\big)^{\top}$, а матриця стрибків $\Delta C(x)$ має вигляд (16.5), то за умови (16.3), безперечно, справджується рівність

$$\Delta C(x)\Delta F(x)=0\ \ \forall\, x\in I. \tag{16.16}$$

Ця рівність разом з рівністю (16.6) означають, що система (16.15), а відтак і рівняння (16.14), є коректними. Покажемо, що без додаткових обмежень значення $k = 1$ не можна збільшити.

Для цього розглянемо приклад диференціального рівняння четвертого порядку

$$y^{(4)} - a_2(x)y'' - a_3(x)y' - a_4(x)y = f''(x),$$

де

$$a_i(x) = b_i'(x),\ b_i, f \in BV^+_{loc}(I),\ i = 2, 3, 4.$$

Перепишемо рівняння у вигляді

$$\big(y''' - f'(x)\big)' - a_2(x)y'' - a_3(x)y' - a_4(x)y = 0$$

і введемо квазіпохідні у такий спосіб:

$$y^{[1]} = y', \qquad y^{[2]} = y'', \qquad y^{[3]} = y''' - f'.$$

В результаті прийдемо до диференціальної системи першого порядку

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_4(x) & a_3(x) & a_2(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f'(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Далі внаслідок накладених на коефіцієнти вимог маємо

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta b_4(x) & \Delta b_3(x) & \Delta b_2(x) & 0 \end{pmatrix},\ \Delta F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta f(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Відтак умова (16.6) справджується, а умова (16.16) виконується,

якщо і тільки якщо

$$\Delta b_2(x)\Delta f(x) = 0 \quad \forall\, x \in I,$$

тобто, коли хоча б одна з двох функцій $b_2(x)$ і $f(x)$ неперервна.

З цього прикладу видно, що значення $k = 1$ в (16.14) не можна збільшити без додаткових обмежень на коефіцієнти $a_i(x)$ чи функцію $f(x)$. Тому далі розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння

$$L_n[y] = f'(x) \tag{16.17}$$

з початковими умовами (16.8), для якої справджується аналог теореми 15.2.

Теорема 16.10. *За умови* (16.3) *існує єдиний розв'язок* $y(x)$ *задачі Коші* (16.17), (16.8), *що зображається у вигляді*

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} K^{\{n-i-1\}}(x, x_0)y_0^i + \int_{x_0}^{x} K(x, s)df(s)$$

і такий, що похідні $y^{(i)}(x)$, $i = \overline{0, n-2}$, *належать простору* $AC(I)$, *а похідна* $y^{(n-1)}(x)$ *— простору* $BV^+_{loc}(I)$ *і в точках* x_s *розривів функцій* $b_i(x)$, $i = \overline{2, n}$, *та* $f(x)$ *має стрибки, що визначаються формулою*

$$\Delta y^{(n-1)}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-2} \Delta b_{n-i}(x_s)y^{(i)}(x_s) + \Delta f(x_s).$$

Цікавим в плані обмежень на праві частини є також неоднорідне КДР

$$L_n^*[z] = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k+1} g_k^{(k+1)}, \tag{16.18}$$

де $g_k \in BV^+_{loc}(I)$, $k = \overline{1, l}$.

Як і вище, з'ясуємо, при якому значенні l рівняння (16.18) залишається коректним. Для цього введемо квазіпохідні $z^{\{i\}}(x),\ i=\overline{0,n}\ \ \big(z^{\{0\}}(x)\overset{\text{def}}{=}z(x)\big)$ у такий спосіб:

$$\begin{aligned} z^{\{i\}} &= -\big(z^{\{i-1\}}\big)' - \overline{a}_i(x)z, \quad i=\overline{1,n-l-1};\\ z^{\{i\}} &= -\big(z^{\{i-1\}}\big)' - \overline{a}_i(x)z + g'_{n-i}(x), \quad i=\overline{n-l,n}; \end{aligned} \tag{16.19}$$

Зрозуміло, що при цьому

$$z^{\{q\}} \equiv L_n^*[z] - \sum_{k=1}^{l}(-1)^k g_k^{(k)}.$$

Далі рівняння (16.18) за допомогою квазіпохідних (16.19) зведемо до неоднорідної узагальненої диференціальної системи першого порядку

$$Z'(x) = -\big(C'(x)\big)^* Z(x) + G'(x),$$

де вектор $Z(x)$ і матриця $-\big(C^*(x)\big)'$ ті самі, що і в рівнянні (16.9), а

$$G'(x) = \big(g'_0(x), g'_1(x), \ldots, g'_l(x), \underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-l-1}\big)^\top.$$

Відразу зауважимо, що

$$\Big(\Delta\big[-C^*(x)\big]\Big)^2 = \Big(-\big[\Delta C(x)\big]^*\Big)^2 = \Big(\big[\Delta C(x)\big]^2\Big)^* \equiv 0,$$

бо справджується рівність (16.6). Оскільки

$$\Delta G(x) = \big(\Delta g_0(x), \Delta g_1(x), \ldots, \Delta g_l(x), 0, 0, \ldots, 0\big)^\top,$$

а матриця $\Delta C(x)$ має вигляд (16.5), то умова

$$\Delta\big[-C^*(x)\big]\cdot\Delta G(x) = 0$$

буде виконуватись для довільного $x\in I$, якщо $l\leqslant n-2$.

Таким чином, КДР (16.18) коректне при $l \leqslant n-2$, тобто, коли порядок найстаршої похідної у правій частині рівняння не перевищує $n-1$.

З наведених міркувань зрозуміло також, що КДР (16.18) при $l=n-1$ буде коректним лише за додаткових умов

$$\Delta\bar{b}_i(x)\Delta g_{n-1}(x)=0 \quad \forall\, x\in I,\ i=\overline{2,n}. \tag{16.20}$$

Оскільки вирази $L_n[y]$ та $L_n^*[z]$ взаємно спряжені, то цікаво порівняти отриманий результат з відповідним результатом (див. стор. 127) для диференціального рівняння (16.14), а також з подібними результатами для КДР (15.1) і (15.17).

На завершення цього параграфа розглянемо початкову задачу для рівняння (16.18) з початковими умовами (16.13).

Теорема 16.11. *За умови* (16.3) *задача* (16.18), (16.13) *при* $l<n-1$ *має єдиний розв'язок* $z(x)$, *що зображається у вигляді*

$$z(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\overline{K}^{(i)}(x_0,x)z_0^{n-i}+\sum_{k=0}^{l}\int_{x_0}^{x}\overline{K}^{(k)}(s,x)dg_k(s)$$

та є неперервною на I *функцією локально обмеженої варіації, а його квазіпохідні* $z^{\{i-1\}}(x)$, $i=\overline{2,n}$, *належать до простору* $BV^+_{loc}(I)$ *і в точках* x_s *розривів функцій* $b_i(x)$, $i=\overline{2,n}$, *і* $g_k(x)$, $k=\overline{0,l}$, *мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\Delta z^{\{i-1\}}(x_s)=-\Delta\bar{b}_i(x_s)z(x_s),\quad i=\overline{2,n-l-1};$$

$$\Delta z^{\{i-1\}}(x_s)=-\Delta\bar{b}_i(x_s)z(x_s)+\Delta g_{n-i}(x_s),\quad i=\overline{n-l,n}.$$

Доведення цієї теореми залишаємо читачеві в якості вправи.

3

Векторні і матричні узагальнені квазідиференціальні рівняння

§ 17. Початкові задачі для векторних квазідиференціальних рівнянь з мірами

Розглянемо однорідне векторне КДР

$$L_{mn}[\bar{Y}] \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \big(A_{ij}(x) \bar{Y}^{(n-i)}\big)^{(m-j)} = 0, \qquad (17.1)$$

де $\bar{Y} : I \to \mathbb{C}^p$ — невідома вектор-функція, $A_{ij} : I \to \mathbb{C}^{p\times p}$ — задані матричні функції, стосовно яких вимагаємо виконання таких умов:

(V) $A_{00}^{-1}(x)$ — локально обмежена і вимірна на інтервалі I;

(VI) $A_{i0}, A_{0j} \in L^{2,loc}_{p\times p}(I),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$;

(VII) $A_{ij}(x) = B'_{ij}(x)$, де $B_{ij} \in BV^{+,loc}_{p\times p}(I),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$.

Поруч з векторним рівнянням (17.1) розглянемо також операторне (матричне) КДР

$$L_{mn}[Y] \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \big(A_{ij}(x) Y^{(n-i)}\big)^{(m-j)} = 0, \qquad (17.2)$$

де тепер $Y\colon I\to\mathbb{C}^{p\times p}$. Це КДР називаємо *асоційованим* до рівняння (17.1). Відзначимо, що операторне рівняння (17.2) є, фактично, системою p квазідиференціальних рівнянь q-го порядку (нагадаємо, що $q=n+m$). Між векторним рівнянням (17.1) і асоційованим до нього рівнянням (17.2) існує тісний зв'язок, а саме: якщо матриця-функція $Y(x)$ є розв'язком операторного рівняння (17.2), а c — довільний сталий вектор, то поклавши $\bar{Y}(x)=Y(x)c$, отримаємо розв'язок векторного рівняння (17.1).

У прикладних задачах, як правило, зустрічаються векторні КДР. В той же час лінійну теорію матричних рівнянь будувати простіше, бо вона до певної міри аналогічна відповідній теорії для скалярних КДР. Відтак вказаний вище зв'язок між векторними і асоційованими до них матричними рівняннями дозволяє поширити усі результати цієї теорії на випадок векторних КДР.

Означення 17.1. *Квазіпохідними* матричної функції $Y(x)$, що відповідають матричному квазідиференціальному виразу $L_{mn}[Y]$, називаємо матриці-функції $Y^{[k]}(x)$, $k=\overline{0,q}$, що визначаються формулами

$$\begin{aligned} &Y^{[i]}=Y^{(i)},\quad i=\overline{0,n-1};\quad Y^{[n]}=\sum_{i=0}^{n}A_{i0}(x)Y^{(n-i)};\\ &Y^{[n+j]}=-\bigl(Y^{[n+j-1]}\bigr)'+\sum_{i=0}^{n}A_{ij}(x)Y^{(n-i)},\quad j=\overline{1,m}, \end{aligned} \tag{17.3}$$

причому $Y^{[q]}\equiv L_{mn}[Y]$.

Як і в скалярному випадку, за допомогою квазіпохідних (17.3) матричне КДР (17.2) зводиться до еквівалентної узагальненої диференціальної системи першого порядку

$$\mathcal{Y}'(x) = \mathcal{C}'(x)\mathcal{Y}(x), \tag{17.4}$$

де $\mathcal{Y} = \left(Y, Y^{[1]}, \ldots, Y^{[q-1]}\right)^\top : I \to \mathbb{C}^{qp\times p}$, а $\mathcal{C}'(x)$ — матриця коефіцієнтів системи, що має блокову структуру (див. с. 133). Відзначимо, що умови (V)–(VII) на коефіцієнти дозволяють тлумачити $\mathcal{C}'(x)$ як матричну міру Стільтьєса.

Крім того, ці умови є достатніми для коректності системи (17.4), бо з них випливає, що матриця стрибків $\Delta\mathcal{C}(x)$ має вигляд

$$\Delta\mathcal{C}(x) = \begin{pmatrix} O_p & O_p & \cdots & O_p & O_p & \cdots & O_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_p & O_p & \cdots & O_p & O_p & \cdots & O_p \\ \Delta B_{n1} & \Delta B_{n-1,1} & \cdots & \Delta B_{11} & O_p & \cdots & O_p \\ \Delta B_{n2} & \Delta B_{n-1,2} & \cdots & \Delta B_{12} & O_p & \cdots & O_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta B_{nm} & \Delta B_{n-1,m} & \cdots & \Delta B_{1m} & O_p & \cdots & O_p \end{pmatrix}, \tag{17.5}$$

внаслідок чого згідно із правилом множення блокових матриць [**21**, с. 54] маємо

$$\left[\Delta\mathcal{C}(x)\right]^2 = 0 \ \ \forall\, x \in I. \tag{17.6}$$

Означення 17.2. Під *розв'язком матричного КДР* (17.2) розуміємо перший блок $Y(x)$ прямокутної блокової матриці $\mathcal{Y}(x)$, що задовольняє це рівняння в узагальненому сенсі.

Зрозуміло, що початкову задачу для рівняння (17.2) в довільній точці $x_0 \in I$ є сенс ставити лише в термінах квазіпохідних:

$$Y^{[k]}(x_0) = Y_0^k, \quad k = \overline{0, q-1}, \tag{17.7}$$

де Y_0^k, $k = \overline{0, q-1}$, — задані сталі матриці розміру $p \times p$.

$$
C' = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{np} \\ \\ \\ \\ \boldsymbol{mp} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
\overset{\boldsymbol{np}}{O_p} & E_p & \cdots & O_p & \overset{\boldsymbol{mp}}{O_p} & O_p & \cdots & O_p \\
O_p & O_p & \cdots & O_p & O_p & O_p & \cdots & O_p \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
O_p & O_p & \cdots & E_p & O_p & O_p & \cdots & O_p \\
-A_{00}^{-1}A_{n0} & -A_{00}^{-1}A_{n-1,0} & \cdots & -A_{00}^{-1}A_{10} & A_{00}^{-1} & O_p & \cdots & O_p \\
\hline
A_{n1}-A_{01}A_{00}^{-1}A_{n0} & A_{n-1,1}-A_{01}A_{00}^{-1}A_{n-1,0} & \cdots & A_{11}-A_{01}A_{00}^{-1}A_{10} & A_{01}A_{00}^{-1} & -E_p & \cdots & O_p \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_{n,m-1}-A_{0,m-1}A_{00}^{-1}A_{n0} & A_{n-1,m-1}-A_{0,m-1}A_{00}^{-1}A_{n-1,0} & \cdots & A_{1,m-1}-A_{0,m-1}A_{00}^{-1}A_{10} & A_{0,m-1}A_{00}^{-1} & O_p & \cdots & -E_p \\
A_{nm}-A_{0m}A_{00}^{-1}A_{n0} & A_{n-1,m}-A_{0m}A_{00}^{-1}A_{n-1,0} & \cdots & A_{1m}-A_{0m}A_{00}^{-1}A_{10} & A_{0m}A_{00}^{-1} & O_p & \cdots & O_p
\end{pmatrix}
$$

Як і в скалярному випадку, має місце наступна теорема про існування та єдиність розв'язку початкової задачі (17.2), (17.7).

Теорема 17.3. *За умов (V)–(VII) існує єдиний розв'язок $Y(x)$ початкової задачі (17.2), (17.7) такий, що квазіпохідні $Y^{[i]}(x)$, $i=\overline{0,n-1}$, належать простору $AC_{p\times p}(I)$, а квазіпохідні $Y^{[n+j]}(x)$, $j=\overline{0,m-1}$, — простору $BV^{+,loc}_{p\times p}(I)$ і в точках x_s розривів функцій $B_{ij}(x)$ мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\Delta Y^{[n+j]}(x_s)=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta B_{n-i,j+1}(x_s)Y^{(i)}(x_s),\quad j=\overline{0,m-1}. \tag{17.8}$$

Доведення. Початкова задача (17.2), (17.7), очевидно, еквівалентна диференціальній системі (17.4) з початковою умовою

$$\mathcal{Y}(x_0)=\mathcal{Y}_0, \tag{17.9}$$

де $\mathcal{Y}_0=\left(Y_0,Y_0^1,\dots,Y_0^{q-1}\right)^\top$ — задана матриця початкових значень розміру $qp\times p$, а відтак за теоремою 7.3 і матричному інтегральному рівнянню

$$\mathcal{Y}(x)=\mathcal{Y}_0+\int\limits_{x_0}^{x}d\mathcal{C}(t)\mathcal{Y}(t). \tag{17.10}$$

Внаслідок умови (17.6) за теоремою 7.4 рівняння (17.10) має єдиний розв'язок в допустимому класі

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{C}}^{p\times p}(I)=\left\{\mathcal{Y}\in BV^{+,loc}_{p\times p}(I)\,\middle|\,\Delta\mathcal{C}(x)\Delta\mathcal{Y}(x)=0\ \ \forall x\in I\right\},$$

що й доводить існування та єдиність розв'язку початкової задачі (17.2), (17.7).

Умова стрибка розв'язку інтегрального рівняння (17.10) в

точці $x_s \in I$ має вигляд

$$\Delta\mathcal{Y}(x_s) = \Delta\mathcal{C}(x_s)\mathcal{Y}(x_s), \tag{17.11}$$

звідки на основі структури (17.5) матриці стрибків $\Delta\mathcal{C}(x)$ випливає, що $\Delta Y^{[i]}(x_s) = 0$ для довільного $i = \overline{0, n-1}$. Це означає, що розв'язок $Y(x)$ і його квазіпохідні $Y^{[i]}(x)$ до $(n-1)$-го порядку включно принаймні неперервні. Крім того, на підставі формул (17.10) і (17.3) справджуються рівності

$$Y^{[i]}(x) = Y_0^i + \int_{x_0}^{x} Y^{(i+1)}(t)dt, \quad i = \overline{0, n-1},$$

де інтеграл розуміється в сенсі Лебега, тому квазіпохідні $Y^{[i]}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, є абсолютно неперервними на I, тобто належать до простору $AC_{p\times p}(I)$.

Нарешті, розписуючи рівності (17.11) покомпонентно, приходимо до формул (17.8). ■

Розглянемо тепер спряжене до (17.2) матричне КДР

$$L^*_{mn}[Z] \equiv \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\big(A^*_{ij}(x)Z^{(m-j)}\big)^{(n-i)} = 0. \tag{17.12}$$

Означення 17.4. *Квазіпохідними* матричної функції $Z(x)$ в сенсі спряженого рівняння (17.12) назвемо матриці-функції $Z^{\{k\}}(x)$, $k = \overline{0, q}$, що визначаються у такий спосіб:

$$\begin{aligned} &Z^{\{j\}} = Z^{(j)}, \quad j = \overline{0, m-1}; \quad Z^{\{m\}} = -\sum_{j=0}^{m} A^*_{0j}(x)z^{(m-j)}; \\ &Z^{\{m+i\}} = -\big(Z^{\{m+i-1\}}\big)' - \sum_{j=0}^{m} A^*_{ij}(x)Z^{(m-j)}, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{17.13}$$

причому $Z^{\{q\}} \equiv -L^*_{mn}[Z]$.

За аналогією до скалярного випадку квазіпохідні (17.13) визначаються однозначно, якщо визначені квазіпохідні (17.3) і навпаки. Відзначимо також, що для векторного КДР (17.1) квазіпохідні отримуються внаслідок формальної заміни $Y^{[k]}$ на $\bar{Y}^{[k]}$ у виразах (17.3) (див. §21). Це зауваження стосується також квазіпохідних (17.13).

Розглянемо далі початкову задачу про відшукання такого розв'язку рівняння (17.12), який задовольняє початкові умови

$$Z^{\{k\}}(x_0) = Z_0^k, \quad k = \overline{0, q-1}, \tag{17.14}$$

де Z_0^k, $k = \overline{0, q-1}$, — задані сталі матриці розміру $p \times p$.

Теорема 17.5. *За умов (V)–(VII) існує єдиний розв'язок $Z(x)$ початкової задачі (17.12), (17.14) такий, що квазіпохідні $Z^{\{j\}}(x)$, $j = \overline{0, m-1}$, належать до простору $AC_{p\times p}(I)$, а квазіпохідні $Z^{\{m+i\}}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, — до простору $BV^{+,loc}_{p\times p}(I)$ і в точках x_s розривів функцій $B^*_{ij}(x)$ мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\Delta Z^{\{m+i\}}(x_s) = -\sum_{j=0}^{m-1} \Delta B^*_{i+1,m-j}(x_s) Z^{(j)}(x_s), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Доведення цієї теореми, яка, очевидно, є узагальненням на матричний випадок теореми 11.3, проводиться за аналогією до доведення попередньої теореми 17.3, тому ми залишаємо його читачеві.

На завершення, відзначимо, що після формальної заміни $Y^{[k]}$ на $\bar{Y}^{[k]}$ і $Z^{[k]}$ на $\bar{Z}^{[k]}$ теореми 17.3 і 17.5 про існування та єдиність розв'язків початкових задач справджуються також для відповідних векторних КДР.

§ 18. Лінійна теорія матричних узагальнених квазідиференціальних рівнянь

Нехай матриці-функції $\Phi_i(x)$, $k=\overline{1,q}$, та матриці-функції $\Psi_j(x)$, $l=\overline{1,q}$, є розв'язками вихідного

$$L_{mn}[Y]=0 \tag{18.1}$$

і спряженого $L^*_{mn}[Z]=0$ матричних КДР відповідно. Складемо блокові матриці

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} \Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \cdots & \Phi_q(x) \\ \Phi_1^{[1]}(x) & \Phi_2^{[1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[1]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{[q-1]}(x) & \Phi_2^{[q-1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[q-1]}(x) \end{pmatrix}$$

та

$$\Psi(x)=\begin{pmatrix} \Psi_1(x) & \Psi_2(x) & \cdots & \Psi_q(x) \\ \Psi_1^{\{1\}}(x) & \Psi_2^{\{1\}}(x) & \cdots & \Psi_q^{\{1\}}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_1^{\{q-1\}}(x) & \Psi_2^{\{q-1\}}(x) & \cdots & \Psi_q^{\{q-1\}}(x) \end{pmatrix}$$

Визначники цих матриць $\mathcal{W}(x)=\det\Phi(x)$ і $\mathcal{V}(x)=\det\Psi(x)$ назвемо *квазівронскіанами* розв'язків $\Phi_k(x)$ і $\Psi_k(x)$ відповідно.

Теорема 18.1. *Для довільної точки $x_0\in I$ квазівронскіани $\mathcal{W}(x)$ і $\mathcal{V}(x)$ справджують рівності*

$$\mathcal{W}(x)=\mathcal{W}(x_0)\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x}\operatorname{tr}\left[A_{01}(t)A_{00}^{-1}(t)-A_{00}^{-1}(t)A_{10}(t)\right]dt\right\}, \tag{18.2}$$

$$\mathcal{V}(x)=\mathcal{V}(x_0)\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x}\operatorname{tr}\left[A^*_{10}(t)A^{*-1}_{00}(t)-A^{*-1}_{00}(t)A^*_{10}(t)\right]dt\right\}. \tag{18.3}$$

Доведення. Доведемо лише формулу (18.2), бо доведення формули (18.3) аналогічне. Блокова матриця $\mathcal{W}(x)$ задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\Phi'(x) = \mathcal{C}'(x)\Phi(x), \tag{18.4}$$

де матриця $\mathcal{C}'(x)$ визначена в явному вигляді на стор. 133. Це рівняння в свою чергу еквівалентне матричному інтегральному рівнянню

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} d\mathcal{C}(t)\Phi(t).$$

Нехай $B(x,s)$ — фундаментальна матриця системи (18.4). Тоді довільний розв'язок цієї системи з початковим значенням $\Phi(x_0)$ зображається у вигляді $\Phi(x) = B(x,x_0)\Phi(x_0)$, причому [**154**]

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(x_0)\det B(x,x_0) =$$

$$= \mathcal{W}(x_0)\cdot\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x}\operatorname{tr}\left[d\mathcal{C}_c(t)\right]\right\}\cdot\prod_s \det\left[E_{qp}+\Delta\mathcal{C}(x_s)\right],$$

де $\mathcal{C}_c(x)$ — неперервна компонента блокової матриці $\mathcal{C}(x)$. Зі структури (17.5) матриці $\Delta\mathcal{C}(x)$ випливає, що для довільної точки розриву $x_s \in I$ усі матриці $E_{qp}+\Delta\mathcal{C}(x_s)$ мають трикутний вигляд з одиницями на головній діагоналі. Тому

$$\prod_s \det\left[E_{qp}+\Delta\mathcal{C}(x_s)\right] = 1.$$

Неперервна ж компонента $\mathcal{C}_c(x)$ матриці $\mathcal{C}(x)$ містить на головній діагоналі лише елементи головних діагоналей матриць $A_{01}(x)A_{00}^{-1}(x)$ і $-A_{00}^{-1}A_{10}(x)$. Таким чином, ми приходимо до формули (18.2). ■

Наслідок 18.2. *Якщо матриці-функції* $A_{01}(x), A_{10}(x)$ *і* $A_{00}^{-1}(x)$ *такі, що справджуються умови*

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left[A_{01}(x)A_{00}^{-1}(x)\right] &= \operatorname{tr}\left[A_{00}^{*-1}(x)A_{01}^{*}(x)\right], \\ \operatorname{tr}\left[A_{00}^{-1}(x)A_{10}(x)\right] &= \operatorname{tr}\left[A_{10}^{*}(x)A_{00}^{*-1}(x)\right], \end{aligned} \tag{18.5}$$

то

$$\mathcal{W}(x)\mathcal{V}(x) = \operatorname{const} \quad \forall x \in I.$$

Відразу відзначимо, що умови (18.5) виконуються принаймні, коли матриці-функції $A_{01}(x)$, $A_{00}(x)$, $A_{10}(x)$ дійснозначні.

Означення 18.3. Розв'язки $\Phi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, матричного КДР (18.1) називаємо *лінійно незалежними*, якщо матрична рівність

$$\sum_{k=1}^{q} \Phi_k(x)C_k = O_p$$

при деяких сталих матрицях C_k справджується лише тоді, коли $C_k = O_p \ \forall\, k = \overline{1,q}$, і *лінійно залежними*, якщо хоча б одна з цих матриць відмінна від нульової.

Означення 18.4. Будь-яку лінійно незалежну систему розв'язків $\Phi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, матричного КДР (18.1) називаємо *фундаментальною системою розв'язків* (ФСР) цього рівняння.

Для того, щоб побудувати довільну фундаментальну систему розв'язків достатньо для рівняння (12.1) розв'язати q початкових задач з початковими умовами

$$\Phi_j^{[i-1]}(x_0) = C_{ij}, \quad i,j=\overline{1,q},$$

де сталі $(p\times p)$-матриці C_{ij} вибрані так, що визначник блокової матриці $\left(C_{ij}\right)_{i,j=1}^{q}$ відмінний від нуля.

Теорема 18.5. *Якщо розв'язки* $\Phi_k(x),\ k=\overline{1,q},$ *матричного КДР* (18.1) *лінійно залежні, то квазівронскіан* $\mathcal{W}(x)$ *цих розв'язків тотожно рівний нулеві на інтервалі* I. *Навпаки, якщо* $\mathcal{W}(x)=0$ *хоча б в одній точці* $x_0\in I$, *то розв'язки* $\Phi_k(x),\ k=\overline{1,q},$ *рівняння* (18.1) *лінійно залежні.*

Доведення. Дійсно, якщо розв'язки $\Phi_k(x),\ k=\overline{1,q},$ лінійно залежні, то згідно означення 18.3

$$\sum_{k=1}^{q}\Phi_k(x)C_k=0\quad\forall x\in I,$$

причому хоча б одна зі сталих матриць C_k відмінна від нульової. Взявши квазіпохідні від обох частин цієї рівності, приходимо до однорідної системи лінійних матричних рівнянь відносно невідомих C_k:

$$\sum_{k=1}^{q}\Phi_k^{[i-1]}(x)C_k=0,\quad i=\overline{1,q}. \tag{18.6}$$

Оскільки система (18.6) має нетривіальний розв'язок (бо не всі C_k є нульовими матриці), то її визначник $\mathcal{W}(x)\equiv 0$ на I.

Навпаки, нехай існує точка $x_0\in I$, в якій $\mathcal{W}(x_0)=0$. Тоді при $x=x_0$ існує нетривіальний розв'язок алгебраїчної системи (18.6), причому функція

$$Y(x)=\Phi_1(x)C_1+\Phi_2(x)C_2+\ldots+\Phi_q(x)C_q$$

є розв'язком матричного КДР (18.1), що задовольняє початкові умови

$$Y^{[i-1]}(x_0)=0,\quad i=\overline{1,q}.$$

Оскільки рівняння (18.1) однорідне, то за теоремою існування і єдиності такий розв'язок тотожно рівний нулеві, тобто

$$\sum_{k=1}^{q} \Phi_k(x) C_k \equiv 0.$$

Якщо взяти до уваги, що серед сталих матриць C_k існує хоча б одна ненульова матриця (бо розв'язок системи (18.6) при $x = x_0$ нетривіальний), то згідно означення 18.3 розв'язки $\Phi_k(x),\ k = \overline{1,q},$ лінійно залежні. ■

Наслідок 18.6. *Якщо $\mathcal{W}(x) \neq 0$ хоча б в одній точці $x_0 \in I$, то розв'язки $\Phi_k(x),\ k = \overline{1,q},$ матричного КДР (18.1) утворюють ФСР.*

Наслідок 18.7. *Якщо матриці-функції $\Phi_k(x),\ k = \overline{1,q},$ утворюють ФСР матричного КДР (18.1), то його загальний розв'язок зображається у вигляді*

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{q} \Phi_k(x) C_k,$$

де C_k — довільні сталі матриці.

Наслідок 18.8. *Якщо $\bar{C}_k$ — довільні сталі вектори, то загальний розв'язок векторного КДР (17.1) зображається у вигляді*

$$\bar{Y}(x) = \sum_{k=1}^{q} \Phi_k(x) \bar{C}_k.$$

Ця формула показує, що для отримання загального розв'язку векторного КДР (17.1) найперше потрібно побудувати будь-яку ФСР асоційованого до нього матричного рівняння (17.2).

Усе сказане вище природним чином поширюється і на випадок спряжених матричного і векторного КДР з тією лише різницею, що замість квазіпохідних $\Phi^{[\cdot]}$ і квазівронскіана $\mathcal{W}(x)$ фігуруватимуть $\Psi^{\{\cdot\}}$ і $\mathcal{V}(x)$.

§ 19. Структура фундаментальної матриці

Нехай

$$L_{mn}\big[Y(x)\big] = 0 \tag{19.1}$$

та

$$L^*_{mn}\big[Z(x)\big] = 0 \tag{19.2}$$

коректні матричні КДР, які за допомогою деяким чином введених квазіпохідних $Y^{[k]}$, $k = \overline{0,q}$, і однозначно визначених при цьому квазіпохідних $Z^{\{k\}}$ (або навпаки) зводяться до еквівалентних узагальнених диференціальних систем першого порядку

$$\mathcal{Y}'(x) = \mathcal{C}'(x)\mathcal{Y}(x) \tag{19.3}$$

та

$$\mathcal{Z}'(x) = -\big(\mathcal{C}'(x)\big)^*\mathcal{Z}(x)$$

відповідно, де

$$\mathcal{Y} = \big(Y, Y^{[1]}, \dots, Y^{[q-1]}\big)^\top, \quad \mathcal{Z} = \big(Z^{\{q-1\}}, \dots, Z^{\{1\}}, Z\big)^\top,$$

причому $Y, Z : I \to \mathbb{C}^{p\times p}$.

Означення 19.1. Матрицю-функцію $\mathcal{B}(x,s)$, яка за змінною x задовольняє систему (19.3) і при $x = s \in I$ початкову умову $\mathcal{B}(s,s) = E_{qp}$, називаємо *фундаментальною матрицею, що відповідає матричному КДР* (19.1).

Означення 19.2. *Матричною функцією Коші* операторного КДР (19.1) називаємо матрицю-функцію $\mathcal{K}(x,s)$, котра за змінною x є розв'зком цього рівняння і в точці $x = s \in I$ задовольняє початкові умови

$$\mathcal{K}^{[i]}(s,s) = O_p, \quad i = \overline{0,n-2}, \qquad \mathcal{K}^{[n-1]}(s,s) = E_p. \tag{19.4}$$

Лема 19.3. *Якщо $\mathcal{K}(x,s)$ — матрична функція Коші операторного КДР (19.1), то*

$$\mathcal{K}^{[i]*\{j\}*}(x,s) = K^{*\{j\}*[i]}(x,s), \tag{19.5}$$

де вираз $\mathcal{K}^{[i]*\{j\}*}(x,s)$ означає, що над матрицею $\mathcal{K}(x,s)$ виконуються наступні операції в такому порядку (зліва направо): квазідиференціювання i разів по (першому аргументу) x в сенсі рівняння (19.1), ермітове спряження, квазідиференціювання j разів по (другому аргументу) s в сенсі спряженого рівняння (19.2) та знову спряження.

Доведення. Якщо $\Phi_k(x)$, $k = \overline{1,q}$, — ФСР матричного КДР (19.1), то відповідно до наслідку 18.7 має місце зображення $\mathcal{K}(x,s) = \sum\limits_{k=1}^{q} \Phi_k(x) C_k(s)$, де $C_k(s)$ — сталі за змінною x матриці-функції, що однозначно визначаються при фіксованому s початковими умовами (19.4). Але тоді з одного боку

$$\mathcal{K}^{[i]*\{j\}*}(x,s) = \left\{ \left[\left(\sum_{k=1}^{q} \Phi_k^{[i]}(x) C_k(s) \right)^* \right]^{\{j\}} \right\}^* =$$

$$= \left\{ \left[\sum_{k=1}^{q} C_k^*(s) \Phi_k^{[i]*}(x) \right]^{\{j\}} \right\}^* = \sum_{k=1}^{q} \Phi_k^{[i]}(x) C_k^{*\{j\}*}(s),$$

а з іншого боку

$$\mathcal{K}^{*\{j\}*[i]}(x,s) = \left\{ \left[\left(\sum_{k=1}^{q} C_k^*(s) \Phi_k^*(x) \right)^{\{j\}} \right]^* \right\}^{[i]} =$$

$$= \left\{ \left[\sum_{k=1}^{q} C_k^{*\{j\}}(s) \Phi_k^*(x) \right]^* \right\}^{[i]} = \sum_{k=1}^{q} \Phi_k^{[i]}(x) C_k^{*\{j\}*}(s),$$

що й доводить рівність (19.5). ■

Теорема 19.4. *Фундаментальна матриця $\mathcal{B}(x,s)$, що відповідає КДР (19.1), має таку блокову структуру:*

$$\mathcal{B}(x,s)=\begin{pmatrix} \mathcal{K}^{*\{q-1\}*}(x,s) & \cdots & \mathcal{K}^{*\{1\}*}(x,s) & \mathcal{K}(x,s) \\ \mathcal{K}^{*\{q-1\}*[1]}(x,s) & \cdots & \mathcal{K}^{*\{1\}*[1]}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]}(x,s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{K}^{*\{q-1\}*[q-1]}(x,s) & \cdots & \mathcal{K}^{*\{1\}*[q-1]}(x,s) & \mathcal{K}^{[q-1]}(x,s) \end{pmatrix} \quad (19.6)$$

Доведення. Позначимо $(p\times p)$-блоки матриці $\mathcal{B}(x,s)$ через $\beta_{ij}(x,s)$, $i,j=\overline{1,q}$. На підставі означень 19.1 і 19.2 легко зрозуміти, що

$$\beta_{iq}=K^{[i-1]}(x,s), \quad i=\overline{1,q},$$

тобто

$$\mathcal{B}(x,s)=\begin{pmatrix} \beta_{11}(x,s) & \beta_{12}(x,s) & \cdots & \beta_{1,q-1}(x,s) & \mathcal{K}(x,s) \\ \beta_{21}(x,s) & \beta_{22}(x,s) & \cdots & \beta_{2,q-1}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]}(x,s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{q1}(x,s) & \beta_{q2}(x,s) & \cdots & \beta_{q,q-1}(x,s) & \mathcal{K}^{[q-1]}(x,s) \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\mathcal{B}^{*}(x,s)=\begin{pmatrix} \beta^{*}_{11}(x,s) & \beta^{*}_{21}(x,s) & \cdots & \beta^{*}_{q1}(x,s) \\ \beta^{*}_{12}(x,s) & \beta^{*}_{22}(x,s) & \cdots & \beta^{*}_{q2}(x,s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^{*}_{1,q-1}(x,s) & \beta^{*}_{2,q-1}(x,s) & \cdots & \beta^{*}_{q,q-1}(x,s) \\ \mathcal{K}^{*}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]*}(x,s) & \cdots & \mathcal{K}^{[q-1]*}(x,s) \end{pmatrix}.$$

Але згідно зауваження 5.2 матриця $\mathcal{B}^{*}(x,s)$ за змінною s є розв'язком спряженої системи

$$\begin{pmatrix} Z^{\{q-1\}} \\ \vdots \\ Z^{\{1\}} \\ Z \end{pmatrix}' = -\big(\mathcal{C}'(s)\big)^* \cdot \begin{pmatrix} Z^{\{q-1\}} \\ \vdots \\ Z^{\{1\}} \\ Z \end{pmatrix},$$

а це означає, що всі блокові рядки цієї матриці (точніше кажучи самі їх блоки), починаючи з передостаннього, є послідовними квазіпохідними останнього блокового рядка по s в сенсі спряженого матричного КДР (19.2). Тому

$$\mathcal{B}^*(x,s) = \begin{pmatrix} \mathcal{K}^{*\{q-1\}}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]*\{q-1\}}(x,s) & \dots & \mathcal{K}^{[q-1]*\{q-1\}}(x,s) \\ \mathcal{K}^{*\{q-2\}}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]*\{q-2\}}(x,s) & \dots & \mathcal{K}^{[q-1]*\{q-2\}}(x,s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}^{*\{1\}}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]*\{1\}}(x,s) & \dots & \mathcal{K}^{[q-1]*\{1\}}(x,s) \\ \mathcal{K}^{*}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]*}(x,s) & \dots & \mathcal{K}^{[q-1]*}(x,s) \end{pmatrix}.$$

Виконуючи повторно операцію спряження і враховуючи рівність (19.5), приходимо до формули (19.6). ■

Наслідок 19.5. *Фундаментальна матриця $\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)$, що відповідає спряженому матричному КДР* (19.2)*, має вигляд*

$$\widetilde{\mathcal{B}}(x,s) \equiv \big(\mathcal{B}^{-1}(x,s)\big)^* = \mathcal{B}^*(s,x) = \\ = \begin{pmatrix} \mathcal{K}^{*\{q-1\}}(s,x) & \mathcal{K}^{[1]*\{q-1\}}(s,x) & \dots & \mathcal{K}^{[q-1]*\{q-1\}}(s,x) \\ \mathcal{K}^{*\{q-2\}}(s,x) & \mathcal{K}^{[1]*\{q-2\}}(s,x) & \dots & \mathcal{K}^{[q-1]*\{q-2\}}(s,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}^{*\{1\}}(s,x) & \mathcal{K}^{[1]*\{1\}}(s,x) & \dots & \mathcal{K}^{[q-1]*\{1\}}(s,x) \\ \mathcal{K}^{*}(s,x) & \mathcal{K}^{[1]*}(s,x) & \dots & \mathcal{K}^{[q-1]*}(s,x) \end{pmatrix},$$

де квазідиференціювання в сенсі рівняння (19.1) *проводиться за змінною s, а в сенсі рівняння* (19.2) *— за змінною x.*

Наслідок 19.6. *Матриці-функції* $\mathcal{K}^{*\{j\}*}(x,s)$, $j=\overline{0,q-1}$, *утворюють нормальну в точці* $x=s$ *ФСР матричного КДР* (19.1).

Наслідок 19.7. *Матриця-функція* $\widetilde{\mathcal{K}}(x,s)\equiv\mathcal{K}^{*}(s,x)$ *та її послідовні квазіпохідні* $\widetilde{\mathcal{K}}^{*[i]*}(x,s)\equiv\mathcal{K}^{[i]*}(s,x)$, $i=\overline{1,q-1}$, *по* s *в сенсі вихідного рівняння* (19.1) *утворюють нормальну в точці* $x=s$ *ФСР спряженого матричного КДР* (19.2).

Зі схеми доведення теореми 19.4 видно, що конкретний вигляд (17.2) КДР (19.1) жодним чином не впливає на структуру фундаментальної матриці (19.6). Іншими словами, твердження цієї теореми справджується для будь-якого коректного матричного КДР порядку q. Важливо лише вміти будувати матричну функцію Коші $\mathcal{K}(x,s)$ для такого рівняння. Спосіб її побудови якраз і стане предметом розгляду наступного параграфу. Ми ж на завершення цього параграфу зупинимося на питанні про гладкість елементів матриць $\mathcal{B}(x,s)$ і $\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)$, а також в якості простого прикладу побудуємо фундаментальну матрицю для системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Твердження 19.8. *Фундаментальні матриці* $\mathcal{B}(x,s)$ *і* $\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)$, *що відповідають матричним КДР* (19.1) *і* (19.2), *за кожною зі змінних* x,s *належать простору* $BV^{+,loc}_{qp\times qp}(I)$. *Більше того, до простору* $AC_{p\times p}(I)$ *належать за змінною* x *елементи блокових рядків матриці* $\mathcal{B}(x,s)$ *до* n*-го порядку включно і елементи блокових рядків матриці* $\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)$, *починаючи з* $(n+1)$*-го, а також елементи блокових стовпців матриці* $\mathcal{B}(x,s)$, *починаючи з* $(n+1)$*-го, і елементи блокових стовпців матриці* $\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)$ *до* n*-го включно.*

Доведення. Дійсно, оскільки "породжуючими" блоками фундаментальних матриць $\mathcal{B}(x,s)$ і $\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)$ є відповідно матриці $\mathcal{K}(x,s)$ і $\widetilde{\mathcal{K}}(x,s)\equiv\mathcal{K}^*(s,x)$, котрі є розв'язками матричних КДР (19.1) та (19.2), то на основі теорем 17.3 та 17.5 можна стверджувати, що за змінною x матричні функції $\mathcal{K}^{[i]}(x,s)$, $i=\overline{0,n-1}$, і $\widetilde{\mathcal{K}}^{\{j\}}(x,s)$, $j=\overline{0,m-1}$, локально абсолютно неперервні на I. З іншого боку, за змінною s такою властивістю володіють матриці-функції $\mathcal{K}^{*\{j\}*}(x,s)$, $j=\overline{0,m-1}$, і $\widetilde{\mathcal{K}}^{*[i]*}(x,s)$, $i=\overline{0,n-1}$. Решта квазіпохідних по x і s належать до простору $BV^{+,loc}_{p\times p}(I)$. ■

Приклад 19.9. При дослідженні проблеми стійкості (на згин) валу довжини l зі сталою жорсткістю α під дією стискаючої сили P і крутильного моменту M виникає система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами [**47**, с. 27]

$$\begin{cases} -\alpha z'' = Pz - My', \\ -\alpha y'' = Py + Mz'. \end{cases} \tag{19.7}$$

▼ За допомогою вектора $\bar{Y}=(z,y)^\top$ і матриць

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{M}{\alpha} \\ \frac{M}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} \frac{P}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{P}{\alpha} \end{pmatrix}$$

систему (19.7) можна записати у вигляді

$$\bar{Y}''+A_1\bar{Y}'+A_2\bar{Y}=0. \tag{19.8}$$

Це векторне звичайне диференціальне рівняння і його перша квазіпохідна збігається зі звичайною похідною, тобто $\bar{Y}^{[1]}=\bar{Y}'$. Однак, квазіпохідна в сенсі спряженого рівняння

$$\bar{Z}''-(A_1^*\bar{Z})'+A_2^*\bar{Z}=0 \tag{19.9}$$

має вигляд $\bar{Z}^{\{1\}}=A_1^*\bar{Z}-\bar{Z}'$ і, очевидно, не дорівнює $\bar{Z}'$.

Матрична функція Коші асоційованого до (19.8) операторного рівняння, як буде показано у наступному параграфі (на разі в цьому легко переконатися безпосередньою перевіркою), визначається виразом

$$\mathcal{K}(x,s)=\frac{2\alpha}{\sqrt{M^2+4P\alpha}}\sin\left\{\frac{\sqrt{M^2+4P\alpha}}{2\alpha}(x-s)\right\}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\cos\frac{M}{2\alpha}(x-s) & \sin\frac{M}{2\alpha}(x-s)\\ -\sin\frac{M}{2\alpha}(x-s) & \cos\frac{M}{2\alpha}(x-s)\end{pmatrix}.$$

Тоді фундаментальна матриця $\mathcal{B}(x,s)$, що відповідає рівнянню (19.8), має таку блокову структуру:

$$\mathcal{B}(x,s)=\begin{pmatrix}\mathcal{K}^{*\{1\}*}(x,s) & \mathcal{K}(x,s)\\ \mathcal{K}^{*\{1\}*[1]}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]}(x,s)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\mathcal{K}(x,s)A_1-\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{K}(x,s) & \mathcal{K}(x,s)\\ \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}(x,s)A_1-\frac{\partial^2}{\partial s\partial x}\mathcal{K}(x,s) & \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}(x,s)\end{pmatrix}.$$

Якщо взяти до уваги, що $A_1^*=-A_1$, $\mathcal{K}^*(s,x)=-\mathcal{K}(x,s)$, то фундаментальна матриця $\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)$, що відповідає спряженому рівнянню (19.9), виглядатиме так:

$$\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)=\mathcal{B}^*(s,x)=$$
$$=\begin{pmatrix}A_1\mathcal{K}(x,s)+\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}^*(x,s) & A_1\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{K}(x,s)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial s}\mathcal{K}(x,s)\\ -\mathcal{K}(x,s) & -\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{K}(x,s)\end{pmatrix}.$$

▲

§ 20. Конструкція елементів фундаментальної матриці

Для матричного КДР (19.1) довільного порядку q опишемо аналогічний до запропонованого в §14 спосіб побудови матриці-функції Коші $\mathcal{K}(x,s)$ та її мішаних квазіпохідних через фундаментальну систему розв'язків $\Phi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, цього рівняння.

Теорема 20.1. *Нехай* $\varphi_{kl}^{ij}(x)$ *— елемент, розташований на перетині* k*-го рядка та* l*-го стовпця* $(p\times p)$*-матриці* $\Phi_j^{[i-1]}(x)$, $k,l=\overline{1,p}$, $i,j=\overline{1,q}$, *а*

$$\mathcal{W}(x)=\det\left(\Phi_j^{[i-1]}(x)\right)_{i,j=1}^{q}\equiv\det\left(\left(\varphi_{kl}^{ij}(x)\right)_{k,l=1}^{p}\right)_{i,j=1}^{q}$$

— квазівронскіан ФСР. Тоді функція Коші $\mathcal{K}(x,s)$ *матричного КДР* (19.1) *та її мішані квазіпохідні* $\mathcal{K}^{*\{j\}*[i]}(x,s)$ *є матрицями розміру* $p\times p$, *кожний елемент яких зображається у вигляді відношення двох функціональних визначників*

$$K_{kl}^{*\{j\}*[i]}(x,s)=\frac{\mathcal{W}_{kl}^{ij}(x,s)}{\mathcal{W}(s)},\quad k,l=\overline{1,p},\quad i,j=\overline{0,q-1},$$

де кожен з визначників $\mathcal{W}_{kl}^{ij}(x,s)$ *відрізняється від квазівронскіана* $\mathcal{W}(s)$ *лише єдиним "нестандартним" рядком*

$$\left(\varphi_{k1}^{i+1,1}(x)\ \ldots\ \varphi_{kp}^{i+1,1}(x)\ \ldots\ldots\ \varphi_{k1}^{i+1,q}(x)\ \ldots\ \varphi_{kp}^{i+1,q}(x)\right),$$

котрий має номер $(q-j-1)p+l$.

Доведення. Нехай

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \cdots & \Phi_q(x)\\ \Phi_1^{[1]}(x) & \Phi_2^{[1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[1]}(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \Phi_1^{[q-1]}(x) & \Phi_2^{[q-1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[q-1]}(x)\end{pmatrix}$$

інтегральна матриця диференціальної системи (19.3), що відповідає матричному КДР (19.1). Тоді фундаментальна матриця системи (19.3) обчислюється за формулою

$$\mathcal{B}(x,s)=\Phi(x)\Phi^{-1}(s). \tag{20.1}$$

Враховуючи блокову структуру (19.6) цієї матриці, співвідношення (20.1) можна записати у вигляді q^2 матричних рівностей

$$\mathcal{K}^{*\{j\}*[i]}(x,s)=\frac{1}{\mathcal{W}(s)}\sum_{\nu=1}^{q}\Phi_{\nu}^{[i]}(x)\mathcal{A}_{q-j,\nu}(s),\quad i,j=\overline{0,q-1}, \tag{20.2}$$

де

$$\mathcal{A}_{ij}(s)=\begin{pmatrix}\mathcal{A}_{11}^{ij}(s) & \mathcal{A}_{21}^{ij}(s) & \dots & \mathcal{A}_{p1}^{ij}(s)\\ \mathcal{A}_{12}^{ij}(s) & \mathcal{A}_{22}^{ij}(s) & \dots & \mathcal{A}_{p2}^{ij}(s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathcal{A}_{1p}^{ij}(s) & \mathcal{A}_{2p}^{ij}(s) & \dots & \mathcal{A}_{pp}^{ij}(s)\end{pmatrix},\quad i,j=\overline{1,q},$$

— матриця, складена з алгебраїчних доповнень $\mathcal{A}_{kl}^{ij}(s)$, $k,l=\overline{1,p}$, до елементів $\varphi_{kl}^{ij}(s)$ матриці $\Phi_{j}^{[i-1]}(s)$ у визначнику $\mathcal{W}(s)$.

Розписуючи матричні рівності (20.2) поелементно в результаті отримаємо

$$\mathcal{K}_{kl}^{*\{j\}*[i]}(x,s)=\frac{1}{\mathcal{W}(s)}\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{\mu=1}^{p}\varphi_{k\mu}^{i+1,\nu}(x)\mathcal{A}_{l\mu}^{q-j,\nu}(s)=\frac{\mathcal{W}_{kl}^{ij}(x,s)}{\mathcal{W}(s)}, \tag{20.3}$$

що й треба було довести. ■

Зауваження 20.2. З формули (20.3) видно, що для побудови функціонального визначника $\mathcal{W}_{kl}^{ij}(x,s)$ потрібно замінити l-ий рядок $(q-j)$-ої смуги (що має розмір $p\times q$) квазівронскіана $\mathcal{W}(s)$ "нестандартним" залежним від x k-им рядком $(i+1)$-ої смуги квазівронскіана $\mathcal{W}(x)$.

Для прикладу побудуємо різними способами (а відтак переконаємось у тотожності отриманих результатів) фундаментальну матрицю, що відповідає диференціальному рівнянню другого порядку

$$Y'' - Y = 0, \tag{20.4}$$

де Y — матриця розміру 2×2. Це рівняння, очевидно, є частинним випадком ($m = n = 1$, $p = q = 2$) матричного КДР (19.1).

Рівняння (20.4) звичайним чином зводимо до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{C}\mathcal{Y},$$

де $\mathcal{Y} = (Y, Y')^\top$, а блокова матриця $\mathcal{C}$ має вигляд

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ E_2 & O_2 \end{pmatrix}.$$

Інтегральну матрицю $\Phi(x)$ цієї системи можна обчислити за допомогою матричної експоненти

$$\Phi(x) = e^{\mathcal{C}x} = E_4 + \mathcal{C}x + \frac{\mathcal{C}^2}{2!}x^2 + \frac{\mathcal{C}^3}{3!}x^3 + \frac{\mathcal{C}^4}{4!}x^4 + \dots.$$

Оскільки

$$\mathcal{C}^2 = E_4, \mathcal{C}^3 = \mathcal{C}^2\mathcal{C} = \mathcal{C}, \mathcal{C}^4 = (\mathcal{C}^2)^2 = E_4, \mathcal{C}^5 = \mathcal{C}^4\mathcal{C} = \mathcal{C}, \dots,$$

то

$$\Phi(x) = E_4 + \mathcal{C}x + \frac{E_4}{2!}x^2 + \frac{\mathcal{C}}{3!}x^3 + \frac{E_4}{4!}x^4 + \frac{\mathcal{C}}{5!}x^5 + \dots = \\ = E_4 \operatorname{ch} x + \mathcal{C} \operatorname{sh} x. \tag{20.5}$$

Тоді

$$\Phi^{-1}(s) = e^{-\mathcal{C}s} = E_4 - \mathcal{C}s + \frac{E_4}{2!}s^2 - \frac{\mathcal{C}}{3!}s^3 + \frac{E_4}{4!}s^4 - \frac{\mathcal{C}}{5!}s^5 + \dots = E_4 \operatorname{ch} s - \mathcal{C} \operatorname{sh} s.$$

Відтак фундаментальна матриця

$$\mathcal{B}(x,s)=\Phi(x)\Phi^{-1}(s)=E_4\operatorname{ch}x\operatorname{ch}s-\mathcal{C}^2\operatorname{sh}x\operatorname{sh}s+$$
$$+\mathcal{C}(\operatorname{sh}x\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}x\operatorname{sh}s)=E_4\operatorname{ch}(x-s)+\mathcal{C}\operatorname{sh}(x-s)=$$
$$=\begin{pmatrix}E_2 & O_2\\ O_2 & E_2\end{pmatrix}\operatorname{ch}(x-s)+\begin{pmatrix}O_2 & E_2\\ E_2 & O_2\end{pmatrix}\operatorname{sh}(x-s)=$$
$$=\begin{pmatrix}E_2\operatorname{ch}(x-s) & E_2\operatorname{sh}(x-s)\\ E_2\operatorname{sh}(x-s) & E_2\operatorname{ch}(x-s)\end{pmatrix} \tag{20.6}$$

З вигляду (20.5) інтегральної матриці $\Phi(x)$ випливає, що матриці-функції

$$\Phi_1(x)=E_2\operatorname{ch}x,\quad \Phi_2(x)=E_2\operatorname{sh}x$$

утворюють ФСР рівняння (20.4). (Квазі)вронскіан цієї системи

$$\mathcal{W}(s)=\begin{vmatrix}\Phi_1(s) & \Phi_2(s)\\ \Phi_1'(s) & \Phi_2'(s)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s & 0\\ 0 & \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix}=1.$$

Далі за теоремо 20.1 матриця-функція Коші має вигляд

$$\mathcal{K}(x,s)=\begin{pmatrix}\mathcal{W}_{11}^{00}(x,s) & \mathcal{W}_{12}^{00}(x,s)\\ \mathcal{W}_{21}^{00}(x,s) & \mathcal{W}_{22}^{00}(x,s)\end{pmatrix}.$$

Для обчислення функціонального визначника $\mathcal{W}_{11}^{00}(x,s)$ скористаємось зауваженням 20.2, на підставі якого $\mathcal{W}_{11}^{00}(x,s)$ утворюється з визначника $\mathcal{W}(s)$, якщо в останньому 1-ий рядок 2-ої смуги $(l=1,\ q-j=2)$ замінити 1-им рядком 1-ої смуги $(k=1,\ i+1=1)$ визначника $\mathcal{W}(x)$.

В результаті маємо

$$\mathcal{W}_{11}^{00}(x,s)=\begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{ch}x & 0 & \operatorname{sh}x & 0\\ 0 & \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix}=\operatorname{ch}x\begin{vmatrix}0 & \operatorname{sh}s & 0\\ \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix}+$$

$$+\operatorname{sh}x\begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & \operatorname{sh}s\\ 0 & \operatorname{sh}s & \operatorname{ch}s\end{vmatrix}=\operatorname{ch}x(-\operatorname{sh}s)+\operatorname{sh}x\operatorname{ch}s=\operatorname{sh}(x-s).$$

За аналогією

$$\mathcal{W}_{12}^{00}(x,s)=\begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s & 0\\ \operatorname{ch}x & 0 & \operatorname{sh}x & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$\mathcal{W}_{21}^{00}(x,s)=\begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ 0 & \operatorname{ch}x & 0 & \operatorname{sh}x\\ 0 & \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix}=0,$$

$$\mathcal{W}_{22}^{00}(x,s)=\begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}x & 0 & \operatorname{sh}x\end{vmatrix}=\operatorname{sh}(x-s).$$

Отже,

$$\mathcal{K}(x,s)=\begin{pmatrix}\operatorname{sh}(x-s) & 0\\ 0 & \operatorname{sh}(x-s)\end{pmatrix}.$$

Подібним чином обчислюємо мішану квазіпохідну

$$\mathcal{K}^{*\{1\}*}(x,s)=\left(\begin{array}{c|c}\begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s & 0\\ 0 & \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s & 0\\ 0 & \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix}\\ \hline \begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s & 0\\ 0 & \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s & 0\\ 0 & \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix}\end{array}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}(x-s) & 0\\ 0 & \operatorname{ch}(x-s)\end{pmatrix}.$$

Щоб не складати і обчислювати ще 8 визначників для відшукання матриць $\mathcal{K}^{[1]}(x,s)$ та $\mathcal{K}^{*\{1\}*[1]}(x,s)$, скористаємось тим, що роль квазіпохідних в сенсі рівняння (20.4) відіграють звичайні похідні. Відтак

$$\mathcal{K}^{[1]}(x,s)=\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}(x,s)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}(x-s) & 0\\ 0 & \operatorname{ch}(x-s)\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{K}^{*\{1\}*[1]}(x,s)=\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}^{*\{1\}*}(x,s)=\begin{pmatrix}\operatorname{sh}(x-s) & 0\\ 0 & \operatorname{sh}(x-s)\end{pmatrix}.$$

На основі блокової структури (19.6) фундаментальної матриці остаточно отримуємо такий результат:

$$\mathcal{B}(x,s)=\left(\begin{array}{cc|cc}\operatorname{ch}(x-s) & 0 & \operatorname{sh}(x-s) & 0\\ 0 & \operatorname{ch}(x-s) & 0 & \operatorname{sh}(x-s)\\ \hline \operatorname{sh}(x-s) & 0 & \operatorname{ch}(x-s) & 0\\ 0 & \operatorname{sh}(x-s) & 0 & \operatorname{ch}(x-s)\end{array}\right),$$

котрий, очевидно, збігається з (20.6).

§ 21. Неоднорідне векторне квазідиференціальне рівняння з розподілами

Розглянемо векторний аналог неоднорідного КДР

$$L_{mn}[\bar{Y}] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\big(A_{ij}(x)\bar{Y}^{(n-i)}\big)^{(m-j)} = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}\bar{F}_k^{(k+1)}(x), \tag{21.1}$$

де матричні коефіцієнти $A_{ij}(x)$ задовольняють вказані в §17 умови (V)–(VII), а права частина справджує умову

(VIII) $\bar{F}_k \in BV^{+}_{loc,p}(I)$, $k=\overline{0,m-1}$.

Означення 21.1. *Квазіпохідними* векторної функції $\bar{Y}(x)$ в сенсі КДР (21.1) назвемо вектор-функції $\bar{Y}^{[k]}(x)$, $k=\overline{0,q}$, що визначаються за правилом

$$\bar{Y}^{[i]} = \bar{Y}^{(i)}, \quad i=\overline{0,n-1}; \quad \bar{Y}^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} A_{i0}(x)\bar{Y}^{(n-i)};$$

$$\bar{Y}^{[n+j]} = -\big(\bar{Y}^{[n+j-1]}\big)' + \sum_{i=0}^{n} A_{ij}(x)\bar{Y}^{(n-i)} + \big(\bar{F}_{m-j}(x)\big)', \ j=\overline{1,m}.$$

За допомогою квазіпохідних векторне КДР записується в еквівалентному вигляді

$$\mathcal{Y}'(x) = \mathcal{C}'(x)\mathcal{Y}(x) + \mathcal{F}'(x), \tag{21.2}$$

де $\mathcal{Y} = \big(\bar{Y}, \bar{Y}^{[1]}, \dots, \bar{Y}^{[q-1]}\big)^{\top}$, блокова матриця-міра $\mathcal{C}'(x)$ та сама, що й вище (див. с. 133), а

$$\mathcal{F}' = \big(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n}, \bar{F}'_{m-1}(x), \bar{F}'_{m-2}(x), \dots, \bar{F}'_0(x)\big)^{\top}.$$

Зрозуміло, що узагальнена диференціальна система (21.2) коректна, бо виконуються умови (17.6) і

$$\Delta\mathcal{C}(x)\Delta\mathcal{F}(x) = 0 \quad \forall\, x \in I.$$

Теорема 21.2. *За умов (V)–(VIII) векторне КДР (21.1) має єдиний розв'язок $\bar{Y}(x)$, що задовольняє початкові умови*

$$\bar{Y}^{[\nu]}(x_0) = \bar{Y}_0^{\nu}, \quad \nu = \overline{0, q-1}, \quad x_0 \in I, \tag{21.3}$$

із заданими сталими векторами $\bar{Y}_0^{\nu}$ $(\nu = \overline{0, q-1})$; цей розв'язок зображається у вигляді

$$\bar{Y}(x) = \sum_{\nu=0}^{q-1} \mathcal{K}^{*\{\nu\}*}(x, x_0)\bar{Y}_0^{q-\nu-1} + \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_0}^{x} \mathcal{K}^{*\{k\}*}(x, s)d\bar{F}_k(s), \tag{21.4}$$

де $\mathcal{K}(x, s)$ — матрична функція Коші асоційованого до (21.1) однорідного КДР (17.2), причому квазіпохідні $\bar{Y}^{[i]}(x)$, $i=\overline{0,n-1}$, належать до простору $AC_p(I)$, а квазіпохідні $\bar{Y}^{[n+j-1]}(x)$, $j=\overline{1,m}$, — до простору $BV^{+}_{loc,p}(I)$ і в точках розривів x_s матриць-функцій $B_{ij}(x)$ і вектор-функцій $\bar{F}_k(x)$ мають стрибки, що визначаються формулами

$$\Delta\bar{Y}^{[n+j-1]}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta B_{n-i,j}(x_s)\bar{Y}^{(i)}(x_s) + \Delta\bar{F}_{m-j}(x_s), \quad j = \overline{1,m}.$$

Доведення. Існування та єдиність розв'язку $\bar{Y}(x)$ початкової задачі (21.1), (21.3) випливає з того, що така задача еквівалентна відповідній задачі для узагальненої диференціальної системи (21.2), для якої справджується теорема про існування та єдиність розв'язку (див. §7).

Перший доданок у формулі (21.4) є лінійною комбінацією фундаментальної системи розв'язків, якою згідно наслідку 19.6 є система функцій $\mathcal{K}^{*\{j\}*}(x, s)$, $j = \overline{0, q-1}$. Наявність другого доданку базується на принципі суперпозиції (накладання) для лінійних неоднорідних рівнянь [**86**, с. 227]. Оскільки, частинний розв'язок

диференціальної системи (21.2) зображається за допомогою матриці $\mathcal{B}(x,s)$ у вигляді $\mathcal{Y}(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\mathcal{B}(x,s)d\mathcal{F}(s)$, то, розписуючи цю формулу покомпонентно і використовуючи при цьому структуру (19.6) блокової матриці $\mathcal{B}(x,s)$ і вказаний вище вигляд блокових векторів $\mathcal{Y}(x)$ та $\mathcal{F}(x)$, якраз і отримаємо другий доданок у виразі (21.4). Нарешті, доведення теореми в тій частині, що стосується степеня гладкості квазіпохідних і формули для обчислення стрибків, проводиться подібно до того, як це робилося при доведенні теореми 17.3. ■

Теорема 21.3. *За умов (V)–(VIII) існує єдиний розв'язок спряженого до (21.1) векторного КДР*

$$L^*_{mn}[\bar{Z}]\equiv\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\big(A^*_{ij}(x)\bar{Z}^{(m-j)}\big)^{(n-i)}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\bar{G}_k^{(k+1)}(x), \tag{21.5}$$

де $\bar{G}_k\in BV^+_{loc,p}(I)$, який задовольняє початкові умови

$$\bar{Z}^{\{\nu\}}(x_0)=\bar{Z}_0^{\nu},\quad \nu=\overline{0,q-1},\quad x_0\in I;$$

цей розв'язок зображається у вигляді

$$\bar{Z}(x)=\sum_{\nu=0}^{q-1}\mathcal{K}^{[\nu]*}(x_0,x)\bar{Z}_0^{q-\nu-1}+\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_0}^{x}\mathcal{K}^{[k]*}(s,x)d\bar{G}_k(s),$$

причому квазіпохідні $\bar{Z}^{\{j\}}(x)$, $j=\overline{0,m-1}$, належать до $AC_p(I)$, а квазіпохідні $\bar{Z}^{\{m+i-1\}}(x)$, $i=\overline{1,n}$, — до $BV^+_{loc,p}(I)$ і в точках розривів x_s матриць-функцій $B_{ij}(x)$ і вектор-функцій $\bar{G}_k(x)$ мають стрибки, що визначаються формулами

$$\Delta\bar{Z}^{\{m+i-1\}}(x_s)=-\sum_{j=0}^{m-1}\Delta B^*_{i,m-j}(x_s)\bar{Z}^{(j)}(x_s)+\Delta\bar{G}_{n-i}(x_s),\ i=\overline{1,n}.$$

Доведення цієї теореми проводиться за аналогією, тому ми залишаємо його читачеві; відзначимо лише, що квазіпохідні $\bar{Z}^{\{\nu\}}(x)$, $\nu=\overline{0,q}$, для спряженого рівняння (21.5) потрібно вводити у такий спосіб:

$$\bar{Z}^{\{j\}}=\bar{Z}^{(j)},\quad j=\overline{0,m-1};\quad \bar{Z}^{\{m\}}=-\sum_{j=0}^{m}A_{0j}^{*}(x)\bar{Z}^{(m-j)};$$

$$\bar{Z}^{\{m+i\}}=-\big(\bar{Z}^{\{m+i-1\}}\big)'-\sum_{j=0}^{m}A_{ij}^{*}(x)\bar{Z}^{(m-j)}+\bar{G}'_{n-i}(x),\quad i=\overline{1,n}.$$

Зрозуміло, що подібні до 21.2 і 21.3 теореми мають місце також для відповідних асоційованих КДР

$$L_{mn}[Y]=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}F_k^{(k+1)}(x)\quad\text{та}\quad L_{mn}^{*}[Z]=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}G_k^{(k+1)}(x),$$

де тепер $F_k,G_k\in BV_{p\times p}^{+,loc}(I)$, і в цьому сенсі вони узагальнюють результати §17. Практичний інтерес, зокрема, становить неоднорідне матричне КДР

$$L_{mn}[Y]=(-1)^{k+1}E_p\delta^{(k+1)}(x-x_0),\quad 0\leqslant k\leqslant m-1,\qquad(21.6)$$

де $\delta^{(k+1)}(x-x_0)$ — $(k+1)$-ша узагальнена похідна від δ-функції Дірака з носієм у точці $x_0\in I$. На основі теореми 21.2 розв'язок рівняння (21.6), що задовольняє нульові початкові умови, має вигляд

$$Y(x)=\mathcal{K}^{*\{k\}*}(x,x_0)H(x-x_0).$$

Варто відзначити, що наведені вище результати для квазідиференціальних рівнянь у просторі вектор-функцій, особливо в частині виконання критерію коректності, не відрізняються аж надто

суттєво від їх скалярних аналогів. Однак, векторне звичайне диференціальне рівняння

$$L_n[\bar{Y}] \equiv \bar{Y}^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\bar{Y}^{(n-i)} = 0 \tag{21.7}$$

з узагальненими матричними коефіцієнтами $A_i(x) = B_i'(x)$, де $B_i(x) \in BV^{+,loc}_{p\times p}(I)$, $i = \overline{1,n}$, все ж має певну специфіку. Раніше нами було показано, що його скалярний аналог — диференціальне рівняння (16.1) — коректне, якщо і тільки якщо справджується умова (16.3), тобто $b_1(x)$ — неперервна функція локально обмеженої на I варіації. Внаслідок формальної заміни $b_i(x)$ на $B_i(x)$ зі структури матриці (16.5) і умови (16.6) легко отримуємо необхідню і достатню умову коректності векторного диференціального рівняння (21.7):

$$\Delta B_1(x)\Delta B_i(x) = 0 \quad \forall\, x \in I \quad (i = \overline{1,n}). \tag{21.8}$$

Однак, завдяки тому, що ці рівності матричні, а не числові, умова (21.8), на відміну від її скалярного аналогу (16.7), не вимагає від матриці-функції $B_1(x)$ її неперервності. Таким чином, маючи справу з векторним диференціальним рівнянням, маємо можливість допустити в коефіцієнті $A_1(x)$ наявність дискретної компоненти (міри).

Цікавим з цієї причини стає і спряжене диференціальне рівняння

$$L_n^*[\bar{Z}] \equiv (-1)^n \bar{Z}^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i}\big(A_i^*(x)\bar{Z}\big)^{(n-i)} = 0, \tag{21.9}$$

розв'язок якого є, взагалі кажучи, розривною вектор-функцією, причому стрибки в точках x_s розривів матриці-функції $B_1(x)$

дорівнюють

$$\Delta\bar{Z}(x_s) = -\Delta B_1^*(x_s)\bar{Z}(x_s). \tag{21.10}$$

На перший погляд це видається малоймовірним, бо в рівнянні (11.12) присутні добутки матриць-мір $A_i^*(x)$ на розривну вектор-функцію $\bar{Z}(x)$, які можуть мати особливості в одних і тих самих точках $x_s \in I$. Насправді, з точки зору теорії узагальнених функцій тут усе законно. Дійсно, добутки $A_i^*(x)\bar{Z}(x)$ існують, якщо і тільки якщо

$$\Delta B_i^*(x_s)\Delta\bar{Z}(x_s) = 0 \quad \forall x_s \in I.$$

Але ця рівність безпосередньо випливає з (21.10) і (21.8):

$$\Delta B_i^*(x_s)\Delta\bar{Z}(x_s) = -\Delta B_i^*(x_s)\Delta B_1^*(x_s)\bar{Z}(x_s) = \\ = -\big(\Delta B_1(x_s)\Delta B_i(x_s)\big)^*\bar{Z}(x_s) = 0. \tag{21.11}$$

Що стосується порядку узагальнених вектор-функцій у правих частинах неоднорідних КДР

$$L_n[\bar{Y}] = \bar{F}^{(k)}(x) \tag{21.12}$$

та

$$L_n^*[\bar{Z}] = \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1}\bar{G}_k^{(k+1)}, \tag{21.13}$$

то тут попри аналогію зі скалярним випадком також є свої особливості. Так, для коректності векторного КДР (21.12) при $k = 1$, на відміну від його скалярного аналогу (16.14), потрібно додатково (окрім умови (21.8)) вимагати виконання рівності $\Delta B_1(x)\Delta\bar{F}(x) = 0 \ \ \forall\, x \in I$. Це обумовлено тим, що умова (21.8) є слабшою у порівнянні з умовою (16.7), відтак не забезпечує коректності одразу неоднорідного рівняння.

Аналогічна ситуація має місце для $k>1$. Для ілюстрації розглянемо векторне диференціальне рівняння

$$\bar{Y}'' - B_2'(x)\bar{Y} = \bar{F}''(x), \tag{21.14}$$

де $\bar{Y} \in \mathbb{C}^p$, $B_2 \in BV^{+,loc}_{p\times p}(I)$, $\bar{F} \in BV^{+}_{loc,p}(I)$.

Позначивши

$$\bar{Y}^{[1]} = \bar{Y}' - \bar{F}'(x),$$

перепишемо рівняння (21.14) у вигляді диференціальної системи

$$\begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{Y}^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} O_p & E_p \\ B_2'(x) & O_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{Y}^{[1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{F}(x) \\ \bar{0} \end{pmatrix}',$$

котра, очевидно, коректна, якщо і тільки якщо

$$\Delta B_2(x)\Delta\bar{F}(x) = 0 \quad \forall\, x \in I.$$

Що стосується коректності рівняння (21.13) при $l=n-1$, то вона має місце лише за таких додаткових умов (порівняйте з умовами (16.20)):

$$\Delta B_i^*(x)\Delta\bar{G}_{n-1}(x) = 0 \quad \forall\, x \in I \quad (i=\overline{1,n}).$$

4

Структура розв'язків узагальнених квазідиференціальних рівнянь

§ 22. Системи диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами і δ-особливостями

Нехай на інтервалі I задано деяку скінченну впорядковану множину точок $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$. Розглянемо неоднорідну узагальнену диференціальну систему вигляду

$$Y' - \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=1}^{N} C_k\delta(x-x_k) \right) Y = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} R_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=1}^{N} S_k\delta(x-x_k), \quad (22.1)$$

де $Y(x)$ — невідома p-вимірна вектор-функція, $\Theta_k(x)$ — характеристична функція проміжка $I_k = [x_k, x_{k+1})$, а коефіцієнти задовольняють такі умови:

(I) $A_k(x) \in C_{p\times q}(I_k), \quad k = \overline{0, N-1}$;

(II) $C_k \in \mathbb{C}^{p\times p}, \quad k = \overline{1, N}$;

(III) $R_k(x) \in C_p(I_k), \quad k = \overline{0, N-1}$;

(IV) $S_k \in \mathbb{C}^p, \quad k = \overline{1, N}$.

Через ω^* будемо позначати множину носіїв узагальнених коефіцієнтів системи (22.1). Для цієї системи поставимо початкову умову

$$Y(x_0) = Y_0. \tag{22.2}$$

Відзначимо, що система (22.1) є системою вигляду (7.8). Відтак для неї справджується теорема 8.1, яку тепер можна переформулювати у такий спосіб.

Теорема 22.1. *Для існування єдиного розв'язку $Y(x)$ із допустимого класу $\mathfrak{D}_C^p(I)$ початкової задачі (22.1), (22.2) необхідне і достатнє виконання умов*

$$C_k^2 \equiv 0, \quad C_k S_k \equiv 0, \quad k = \overline{1, N}. \tag{22.3}$$

Цей розв'язок допускає зображення у формі Коші (8.2), а його стрибки в точках $x_k \in \omega^*$ виражаються формулою

$$\Delta Y(x_k) = C_k Y(x_k - 0) + S_k = C_k Y(x_k) + S_k. \tag{22.4}$$

Надалі будемо розглядати лише коректні системи вигляду (22.1), тобто вважатимемо умови (22.3) виконаними.

§ 23. Побудова фундаментальної матриці

Означення 23.1. Однорідну систему

$$Y'(x) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k(x) \Theta_k(x) \right) Y(x),$$

що відповідає системі (22.1), називатимемо *визначальною*.

Фундаментальну матрицю визначальної системи на проміжку I_k, тобто матрицю Коші системи $Y' = A_k(x)Y$, будемо позначати $\widetilde{B}_k(x,s)$ і вважати *відомою* для довільного $k = \overline{0, N-1}$. Варто відзначити, що надалі ми часто будемо користуватися неперервним продовженням праворуч матриці $\widetilde{B}_k(x,s)$ для $x = x_{k+1}$, тобто такою рівністю

$$\widetilde{B}_k(x_{k+1}, s) = \widetilde{B}_k(x_{k+1} - 0, s). \tag{23.1}$$

Для зручності введемо позначення $\widetilde{C}_k = E + C_k$.

Теорема 23.2. *Фундаментальна матриця $B(x,s)$ однорідної узагальненої диференціальної системи*

$$Y'(x) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=1}^{N} C_k\delta_k(x) \right) Y(x) \tag{23.2}$$

при $x \in [x_0, x_N)$, $s = x_0$ має вигляд

$$B(x, x_0) = \sum_{k=0}^{N-1} B_k(x, x_0)\Theta_k(x), \tag{23.3}$$

де матриці $B_k(x, x_0)$ обчислюються за рекурентними формулами

$$\begin{gathered} B_0(x, x_0) = \widetilde{B}_0(x, x_0), x \in I_0, \\ B_k(x, x_0) = \widetilde{B}_k(x, x_k)\widetilde{C}_k B_{k-1}(x_k - 0, x_0), x \in I_k, k = \overline{1, N-1}, \end{gathered} \tag{23.4}$$

а при $x = x_N$:

$$B(x_N, x_0) \equiv B_N(x_N, x_0) = \widetilde{C}_N B_{N-1}(x_N - 0, x_0). \tag{23.5}$$

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції по N. Перевіримо правильність твердження для $N = 1$, тобто у випадку, коли множина носіїв узагальнених коефіцієнтів диференціальної системи (23.2) містить лише одну точку: $\omega^* = \{x_1\}$.

На проміжку $I_0 = [x_0, x_1)$ рівняння (23.2) не містить узагальнених коефіцієнтів, а тому $B(x, x_0) = \widetilde{B}_0(x, x_0)$, тобто справджуються формули (23.3), (23.4) при $N=1$. Для значення фундаментальної матриці $B(x, x_0)$ в точці $x = x_1$ на підставі властивості (d) матриці Коші (див. теорему 3.2) і рівності $\Delta C(x_1) = C_1$, маємо формулу вигляду (23.5)

$$B(x_1, x_0) = (E + C_1)B(x_1 - 0, x_0) = \widetilde{C}_1 B_0(x_1 - 0, x_0).$$

Далі припустимо, що формули (23.3)–(23.4) справджуються для деякого $N = q > 1$, тобто нехай для довільного $x \in [x_0, x_q)$ має місце зображення

$$B(x, x_0) = \sum_{k=0}^{q-1} B_k(x, x_0)\Theta_k(x),$$

де

$$\begin{gathered} B_0(x, x_0) = \widetilde{B}_0(x, x_0), x \in I_0, \\ B_k(x, x_0) = \widetilde{B}_k(x, x_k)\widetilde{C}_k B_{k-1}(x_k - 0, x_0), x \in I_k, k = \overline{1, q-1}, \end{gathered} \tag{23.6}$$

а при $x = x_q$

$$B(x_q, x_0) = B_q(x_q, x_0) = \widetilde{C}_q B_{q-1}(x_q - 0, x_0). \tag{23.7}$$

Доведемо їх правильність для $N = q + 1$. Для продовження фундаментальної матриці на проміжок $I_q = [x_q, x_{q+1})$ скористаємось властивістю (a) з теореми 3.2:

$$B_q(x, x_0) = B_q(x, x_q)B_q(x_q, x_0).$$

При $x \in I_q$ $B_q(x, x_q) = \widetilde{B}_q(x, x_q)$, а згідно припущення (23.7)

$$B_q(x_q, x_0) = \widetilde{C}_q B_{q-1}(x_q - 0, x_0),$$

і тому для $x \in I_q$ маємо

$$B_q(x, x_0) = \widetilde{B}_q(x, x_q)\widetilde{C}_q B_{q-1}(x_q - 0, x_0). \tag{23.8}$$

В такому разі фундаментальну матрицю $B(x, x_0)$ на проміжку $[x_0, x_{q+1})$ можна подати у вигляді

$$B(x, x_0) = \sum_{k=0}^{q} B_k(x, x_0)\Theta_k(x), \tag{23.9}$$

де матриці $B_k(x, x_0)$ для $k = \overline{1, q-1}$ обчислюються за рекурентними формулами (23.6),а $B_q(x, x_0)$ – за формулою (23.8). Отже, формули (23.3)–(23.4) правильні і для $N = q + 1$. Очевидно, формула (23.9) не охоплює значення фундаментальної матриці в точці $x = x_{q+1}$. Формулу

$$B(x_{q+1}, x_0) = \widetilde{C}_{q+1} B_q(x_{q+1} - 0, x_0)$$

для обчислення цього значення отримуємо, використавши безпосередньо властивість (d) матриці Коші.

Відтак на основі принципу математичної індукції твердження теореми справджується для довільного натурального N, що й треба було довести. ■

Зауваження 23.3. Відзначимо, що в разі, коли $x_N \notin \omega^*$, то $C_N = 0$ і за формулою (23.5) маємо

$$B(x_N, x_0) = (E + C_N)B_{N-1}(x_N - 0, x_0) = B_{N-1}(x_N - 0, x_0).$$

Це означає, що фундаментальна матриця $B(x, x_0)$ неперервна зліва в точці $x = x_N \notin \omega^*$, відтак її значення в цій точці можна включити у вираз (23.3), трактуючи $\Theta_{N-1}(x)$ як характеристичну функцію відрізка $[x_{N-1}, x_N]$.

Наслідок 23.4. *Для фундаментальної матриці* $B_k(x,s)$ *диференціальної системи* (23.2) *при* $s=x_0$, $x\in I_k=[x_k,x_{k+1})$, $k=\overline{1,N-1}$, *має місце мультиплікативне представлення*

$$B_k(x,x_0)=\widetilde{B}_k(x,x_k)\prod_{j=0}^{k-1}\widetilde{C}_{k-j}\widetilde{B}_{k-j-1}(x_{k-j},x_{k-j-1}). \tag{23.10}$$

Наслідок 23.5. *Для довільного* $x\in I_k$, $k=\overline{1,N-1}$, *при* $x_q<x_k$ *справджується зображення*

$$B_k(x,x_q)=\widetilde{B}_k(x,x_k)\prod_{j=0}^{k-q-1}\widetilde{C}_{k-j}\widetilde{B}_{k-j-1}(x_{k-j},x_{k-j-1}), \tag{23.11}$$

звідки

$$B_k(x_k,x_q)=\prod_{j=0}^{k-q-1}\widetilde{C}_{k-j}\widetilde{B}_{k-j-1}(x_{k-j},x_{k-j-1}),$$

а відтак

$$B_k(x,x_q)=\widetilde{B}_k(x,x_k)B_k(x_k,x_q). \tag{23.12}$$

Приклад 23.6. На відрізку $[0,1]$ побудуємо фундаментальну матрицю $B(x,0)$ однорідної узагальненої диференціальної системи

$$Y'=\begin{pmatrix}\Theta_0(x)-\Theta_1(x) & \delta\left(x-\frac14\right)\\ -\delta(x-1) & 2\Theta_0(x)+\Theta_1(x)\end{pmatrix}Y, \tag{23.13}$$

де $\Theta_0(x)$ і $\Theta_1(x)$ — характеристичні функції проміжків $\left[0,\frac14\right)$ та $\left[\frac14,1\right)$ відповідно.

▼ Задана система є системою вигляду (23.2) з матричними коефіцієнтами

$$A_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}$$

і множиною носіїв узагальнених коефіцієнтів $\omega^*=\left\{x_1=\frac14,x_2=1\right\}$.

Переконаємося у коректності заданої системи, тобто у виконанні умов $C_k^2 = 0, k = 1, 2$:

$$C_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv 0, \quad C_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Визначальна система для системи (23.13) має вигляд

$$Y' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Theta_0(x) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Theta_1(x) \right] Y. \tag{23.14}$$

Знайдемо фундаментальні матриці цієї системи $\widetilde{B}_0(x, s)$ та $\widetilde{B}_1(x, s)$ на проміжках $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ і $\left[\frac{1}{4}, 1\right)$ відповідно.

На інтервалі $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ маємо систему

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y. \tag{23.15}$$

Це звичайна диференціальна система зі сталими коефіцієнтами, фундаментальну матрицю якої шукаємо методом Ейлера у матричній формі (див., н-д, [**41**, с. 156]). Складемо характеристичне рівняння для системи (23.15)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

і знайдемо його розв'язки $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$.

Для кореня $\lambda_1 = 1$ шукаємо розв'язок системи у вигляді

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} e^x.$$

Після підстановки $Y_1(x)$ у вихідну систему (23.15) і домножування обидвох її частин на e^{-x} одержимо

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ 2C_2 \end{pmatrix},$$

звідки C_1 — довільна стала, а $C_2 = 0$. Покладемо, наприклад, $C_1 = 1$, тоді

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

За аналогією шукаємо розв'язок, що відповідає кореню $\lambda_2 = 2$:

$$Y_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Запишемо інтегральну матрицю системи (23.15):

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Для побудови фундаментальної матриці цієї системи скористаємося формулою [**52**, с. 271]

$$\widetilde{B}_0(x, s) = \Phi(x)\Phi^{-1}(s). \tag{23.16}$$

Оскільки $\det \Phi(x) = e^{3x}$, то

$$\Phi^{-1}(s) = e^{-3s} \begin{pmatrix} e^{2s} & 0 \\ 0 & e^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix},$$

і згідно формули (23.16) фундаментальна матриця визначальної системи (23.14) на проміжку $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ має вигляд

$$\widetilde{B}_0(x, s) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x-s} & 0 \\ 0 & e^{2(x-s)} \end{pmatrix}. \tag{23.17}$$

На інтервалі $\left[\frac{1}{4}, 1\right)$ визначальна система (23.14) має вигляд

$$Y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y. \tag{23.18}$$

Матрицю Коші $\widetilde{B}_1(x,s)$ даної системи шукаємо за аналогією до того, як це робилося на проміжку $\left[0,\frac{1}{4}\right)$. Легко переконатися, що

$$\widetilde{B}_1(x,s)=\begin{pmatrix} e^{-(x-s)} & 0 \\ 0 & e^{x-s}\end{pmatrix}. \tag{23.19}$$

Для побудови фундаментальної матриці $B(x,s)$ вихідної системи (23.13) скористаємося теоремою 23.2. За рекурентними формулами (23.4) маємо

$$B_0(x,0)=\widetilde{B}_0(x,0)=\begin{pmatrix} e^{x} & 0 \\ 0 & e^{2x}\end{pmatrix},\quad x\in\left[0,\tfrac{1}{4}\right),$$

$$B_1(x,0)=\widetilde{B}_1\left(x,\tfrac{1}{4}\right)\widetilde{C}_1B_0\left(\tfrac{1}{4},0\right)=\begin{pmatrix} e^{-\left(x-\frac{1}{4}\right)} & 0 \\ 0 & e^{x-\frac{1}{4}}\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\left(\frac{1}{4}-0\right)} & 0 \\ 0 & e^{2\left(\frac{1}{4}-0\right)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-x+\frac{1}{2}} & e^{-x+\frac{3}{4}} \\ 0 & e^{x+\frac{1}{4}}\end{pmatrix},\quad x\in\left[\tfrac{1}{4},1\right).$$

Відтак фундаментальна матриця $B(x,0)$ вихідної системи (23.13) на проміжку $[0,1)$ має вигляд

$$B(x,0)=\begin{pmatrix} e^{x} & 0 \\ 0 & e^{2x}\end{pmatrix}\Theta_0(x)+\begin{pmatrix} e^{-x+\frac{1}{2}} & e^{-x+\frac{3}{4}} \\ 0 & e^{x+\frac{1}{4}}\end{pmatrix}\Theta_1(x). \tag{23.20}$$

Відзначимо, що у зв'язку із наявністю у вихідній системі (23.13) коефіцієнта $-\delta(x-1)$ з носієм $x=1\in\omega^*$, фундаментальну матрицю цієї системи у точці $x=1$ потрібно обчислювати за формулою (23.5), тобто

$$B(1,0)=\widetilde{C}_2B_1(1-0,0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-1+\frac{1}{2}} & e^{-1+\frac{3}{4}} \\ 0 & e^{1+\frac{1}{4}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}} & e^{-\frac{1}{4}} \\ -e^{-\frac{1}{2}} & e^{\frac{5}{4}}-e^{-\frac{1}{4}}\end{pmatrix}. \tag{23.21}$$

▲

§ 24. Структура розв'язку неоднорідної диференціальної системи

Теорема 24.1. *Розв'язок задачі* (22.1), (22.2) *на проміжку* $[x_0, x_N)$ *подається у вигляді*

$$Y(x)=\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\sum_{j=0}^{k} B_k(x,x_j)Z_j+\int\limits_{x_k}^{x}\widetilde{B}_k(x,s)R_k(s)ds\right\}\Theta_k(x), \quad (24.1)$$

де

$$Z_0=Y_0, \quad Z_j=\widetilde{C}_j\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\widetilde{B}_{j-1}(x_j,s)R_{j-1}(s)ds+S_j,\ j\geq 1. \quad (24.2)$$

У точці $x=x_N$ *значення розв'язку обчислюється за формулою*

$$Y(x_N)=\sum_{j=0}^{N}B_N(x_N,x_j)Z_j. \quad (24.3)$$

Доведення. Розв'язок задачі (22.1), (22.2) на проміжку $[x_0, x_N)$ шукаємо у вигляді

$$Y(x)=\sum_{k=0}^{N-1}Y_k(x)\Theta_k(x), \quad (24.4)$$

де $Y_k(x)$ — розв'язок цієї задачі на проміжку $I_k=[x_k, x_{k+1})$.

На інтервалі (x_k, x_{k+1}) система (22.1) має вигляд

$$Y_k'=A_k(x)Y_k+R_k(x) \quad (24.5)$$

і відповідною їй фундаментальною матрицею є $\widetilde{B}_k(x,s)$. Розв'язок системи (24.5) можна записати у формі Коші (8.4):

$$Y_k(x)=\widetilde{B}_k(x,x_k)P_k+\int\limits_{x_k}^{x}\widetilde{B}_k(x,s)R_k(s)ds, \quad (24.6)$$

де P_k — деякий невідомий p-вимірний вектор.

За аналогією на проміжку (x_{k-1}, x_k) розв'язок системи (24.5) подається у вигляді

$$Y_{k-1}(x) = \widetilde{B}_{k-1}(x, x_{k-1})P_{k-1} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x} \widetilde{B}_{k-1}(x, s)R_{k-1}(s)ds \qquad (24.7)$$

з невідомим вектором P_{k-1}. Згідно теореми 22.1 розв'язок задачі Коші (22.1), (22.2) належить до класу $BV^{+}_{loc,p}(I)$ і в точці $x = x_k$ виконується умова стрибка (22.4), звідки

$$Y(x_k) = (E + C_k)Y(x_k - 0) + S_k = \widetilde{C}_k Y(x_k - 0) + S_k. \qquad (24.8)$$

Враховуючи рівність (24.7), а також той факт, що $Y(x_k)$ та $Y(x_k - 0)$ обчислюються за формулами (24.6) і (24.7) відповідно, після спрощення маємо

$$P_k = \widetilde{C}_k \widetilde{B}_{k-1}(x_k, x_{k-1})P_{k-1} + \widetilde{C}_k \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{B}_{k-1}(x_k, s)R_{k-1}(s)ds + S_k$$

або згідно позначення (24.2)

$$P_k = \widetilde{C}_k \widetilde{B}_{k-1}(x_k, x_{k-1})P_{k-1} + Z_k, \quad 1 \le k \le N - 1.$$

Вибираючи у цьому рекурентному співвідношенні початкове значення $P_0 = Y_0$ і враховуючи мультиплікативне представлення (23.10), методом математичної індукції отримаємо, що

$$P_k = B_k(x_k, x_0)Y_0 + \sum_{j=1}^{k} B_k(x_k, x_j)Z_j, \quad 1 \le k \le N - 1.$$

Більш того, якщо додатково покласти $Z_0 = Y_0$, то матимемо

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} B_k(x_k, x_j)Z_j, \quad 0 \le k \le N - 1.$$

Підставляючи отриманий вираз у формулу (24.6) і враховуючи

рівність (23.12), одержимо розв'язок початкової задачі (22.1), (22.2) на проміжку I_k:

$$Y_k(x)=\sum_{j=0}^{k} B_k(x,x_j)Z_j+\int_{x_k}^{x}\widetilde{B}_k(x,s)R_k(s)ds, \tag{24.9}$$

котрий після підстановки його в (24.4) приводить до зображення (24.1)–(24.2).

Оскільки в точці $x=x_N$ розв'язок системи має розрив, то формула (24.1) не охоплює значення розв'язку в цій точці. Формула (24.4) для обчислення цього значення випливає з рівності (24.8) при $k=N$, якщо взяти до уваги отримане зображення розв'язку (24.1), (24.2) і рівності

$$B_N(x_N,x_j)=\widetilde{C}_N B_{N-1}(x_N-0,x_j),\quad j=\overline{0,N-1}, \tag{24.10}$$

котрі є наслідками властивості (d) матриці Коші (див. теорему 3.2). Дійсно, тоді

$$\begin{aligned}Y(x_N)&=\widetilde{C}_N Y(x_N-0)+S_N=\\ &=\widetilde{C}_N\left[\sum_{j=0}^{N-1}B_{N-1}(x_N-0,x_j)Z_j+\int_{x_{N-1}}^{x_N}\widetilde{B}_{N-1}(x_N,s)R_{N-1}(s)ds\right]+S_N=\\ &=\sum_{j=0}^{N-1}B_N(x_N,x_j)Z_j+Z_N=\sum_{j=0}^{N}B_N(x_N,x_j)Z_j.\end{aligned}$$

■

Зауваження 24.2. Якщо $x=x_N\notin\omega^*$, то значення розв'язку в цій точці обчислюється за формулою

$$Y(x_N)=\widetilde{C}_N Y(x_N-0)+S_N=Y(x_N-0).$$

Таким чином, розв'язок $Y(x)$ неперервний зліва в точці $x=x_N$

і його значення в цій точці можна включити у вираз (24.1), якщо $\Theta_{N-1}(x)$ тлумачити як характеристичну функцію відрізка $[x_{N-1}, x_N]$.

Наслідок 24.3. *Розв'язок задачі* (22.1), (22.2) *на проміжку* $[x_k, x_{k+1})$, $k = \overline{1, N-1}$, *можна зобразити також у вигляді*

$$Y_k(x) = B_k(x, x_0)Y_0 + \sum_{j=1}^{k} B_k(x, x_j)\left[\widetilde{C}_j \mathcal{I}_{j-1}(x_j) + S_j\right] + \mathcal{I}_k(x), \quad (24.11)$$

де $\mathcal{I}_k(x) = \int\limits_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s)R_k(s)ds$.

Наслідок 24.4. *Розв'язок однорідної* ($R_k \equiv 0$ *і* $S_k \equiv 0$ *для всіх* k) *задачі* (22.1), (22.2) *має вигляд:*

$$Y^0(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{N-1} B_k(x, x_0)Y_0\Theta_k(x), & x \in [x_0, x_N); \\ B_N(x_N, x_0)Y_0, & x = x_N. \end{cases}$$

Наслідок 24.5. *Розв'язок задачі Коші* (22.1), (22.2) *при нульовій початковій умові* ($Y_0 = 0$) *має вигляд*

$$Y^*(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum\limits_{j=1}^{k} B_k(x, x_j)Z_j + \int\limits_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s)R_k(s)ds \right\} \Theta_k(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in [x_0, x_N); \\ \sum\limits_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)Z_j, \qquad x = x_N. \end{cases}$$

або, враховуючи (24.11):

$$Y^*(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum\limits_{j=1}^{k} B_k(x, x_j)\left[\widetilde{C}_j \mathcal{I}_{j-1}(x_j) + S_j\right] + \mathcal{I}_k(x) \right\} \Theta_k(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in [x_0, x_N); \\ \sum\limits_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)\left[\widetilde{C}_j \mathcal{I}_{j-1}(x_j) + S_j\right], \qquad x = x_N. \end{cases}$$

Наслідок 24.6. *Розв'язок початкової задачі* (22.1), (22.2) *допускає зображення* $Y(x) = Y^0(x) + Y^*(x)$.

Приклад 24.7. На відрізку $[0,1]$ знайдемо розв'язок початкової задачі для неоднорідної системи:

$$Y' - \begin{pmatrix} \delta\left(x-\frac{1}{2}\right) & \delta\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ -\delta\left(x-\frac{1}{2}\right) & -\delta\left(x-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -2\delta\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ 2\delta\left(x-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}, \tag{24.12}$$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{24.13}$$

▼ Для системи (24.12) маємо:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{24.14}$$

Оскільки

$$C_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то система (24.12) коректна. Для неї $\omega^* = \left\{x_1 = \frac{1}{2}\right\}$.

Визначальна система для (24.12) на всьому розглядуваному проміжку матиме вигляд

$$Y' = 0.$$

Відтак фундаментальна матриця обчислюється за формулою

$$\widetilde{B}(x,s) = \widetilde{B}_0(x,s) = \widetilde{B}_1(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{24.15}$$

Розв'язок початкової задачі (24.12), (24.13) на відрізку $[0,1]$ (правий кінець включаємо на підставі зауваження 24.2) шукаємо

у вигляді (24.4), тобто

$$Y(x) = Y_0(x)\Theta_0(x) + Y_1(x)\Theta_1(x),$$

де $\Theta_0(x), \Theta_1(x)$ — характеристичні функції проміжків $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ та $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ відповідно.

На проміжку $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ розв'язок задачі (24.12), (24.13) обчислюємо за формулою $Y_0(x) = \widetilde{B}(x, 0)Y(0)$, відтак

$$Y_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Нехай $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Тоді згідно формули (24.9) і з врахуванням мультиплікативного представлення (23.11) запишемо розв'язок

$$Y_1(x) = \left[B_1(x, 0)\, Z_0 + B_1(x, \tfrac{1}{2}) Z_1\right] = \widetilde{B}\left(x, \tfrac{1}{2}\right) \left[\widetilde{C}_1 \widetilde{B}\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) Y(0) + S_1\right],$$

звідки на підставі (24.14), (24.15) і виразу $\widetilde{C}_1 = E + C_1$, маємо

$$Y_1(x) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

На завершення переконаємось, що виконується умова (22.4) стрибка розв'язку задачі (24.12), (24.13) в точці $x = \frac{1}{2}$. Дійсно, оскільки

$$\Delta Y\left(\tfrac{1}{2}\right) = Y_1\left(\tfrac{1}{2}\right) - Y_0\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$C_1 Y\left(\tfrac{1}{2} - 0\right) + S_1 = C_1 Y_0\left(\tfrac{1}{2}\right) + S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

то в точці $x = \frac{1}{2}$ справджується умова

$$\Delta Y\left(\tfrac{1}{2}\right) = C_1 Y\left(\tfrac{1}{2} - 0\right) + S_1.$$

▲

§ 25. Рекурентне представлення розв'язку

Відзначимо, що на практиці для відшукання розв'язку задачі (22.1), (22.2) замість громіздких формул (24.1)–(24.3) доцільніше користуватися описаними нижче, в теоремі 25.1, рекурентними формулами, котрі для побудови розв'язку на кожному наступному проміжку $[x_k, x_{k+1})$ вимагають додаткового обчислення лише значення розв'язку на попередньому проміжку $[x_{k-1}, x_k)$ в єдиній точці $x_k - 0$.

Теорема 25.1. *Розв'язок задачі* (22.1), (22.2) *можна знайти за такими рекурентними формулами:*

$$Y_0(x) = \widetilde{B}_0(x, x_0)Y_0 + \int_{x_0}^{x} \widetilde{B}_0(x, s)R_0(s)ds, \quad x \in [x_0, x_1), \tag{25.1}$$

$$Y_k(x) = \widetilde{B}_k(x, x_k)\left[\widetilde{C}_k Y_{k-1}(x_k - 0) + S_k\right] + \\ + \int_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s)R_k(s)ds, x \in [x_k, x_{k+1}), \quad k = \overline{1, N-1}, \tag{25.2}$$

$$Y_N(x_N) = \widetilde{C}_N Y_{N-1}(x_N - 0) + S_N. \tag{25.3}$$

Доведення. При $k = 0$, тобто на проміжку $[x_0, x_1)$, система (22.1) не містить жодних узагальнених компонент, а є системою із неперевними коефіцієнтами. Відтак для її розв'язку на цьому проміжку справджується формула Коші (25.1).

При $k = 1$, тобто на інтервалі $[x_1, x_2)$, розв'язок системи (22.1) можна записати у формі Коші з невідомим початковим вектором Y_1:

$$Y_1(x) = \widetilde{B}_1(x, x_1)Y_1 + \int_{x_1}^{x} \widetilde{B}_1(x, s)R_1(s)ds. \tag{25.4}$$

Використаємо умову спряження (22.4) для розв'язку узагальненої системи (22.1) в точці $x = x_1$, тобто умову

$$Y(x_1) = \widetilde{C}_1 Y(x_1 - 0) + S_1.$$

Враховуючи, що $Y(x_1) = Y_1(x_1) = Y_1$, а $Y(x_1 - 0) = Y_0(x_1 - 0)$, маємо, фактично, вираз для початкового вектора Y_1 розв'язку системи (22.1) на проміжку $[x_0, x_1)$. Після його підстановки в (25.4) отримуємо формулу (25.2) для $k = 1$:

$$Y_1(x) = \widetilde{B}_k(x, x_1)\big[\widetilde{C}_1 Y_0(x_1 - 0) + S_1\big] + \int_{x_1}^{x} \widetilde{B}_1(x, s) R_1(s) ds.$$

Для довільного $k > 1$ доведення проводиться з використанням методу математичної індукції. ■

Зауваження 25.2. Відзначимо, що тепер формулу (24.1) легко отримати як наслідок із теореми 25.1.

Зауваження 25.3. В разі, коли $x_N \notin \omega^*$, маємо $C_N = 0$, $S_N = 0$ і тоді за формулою (25.3)

$$Y_N(x_N) = (E + C_N) Y_{N-1}(x_N - 0) + S_N = Y_{N-1}(x_N - 0),$$

тобто розв'язок $Y(x)$ неперервний зліва в точці $x = x_N \notin \omega^*$ (порівн. із зауваженням 24.2).

Приклад 25.4. На відрізку $[0, 1]$ знайдемо розв'язок неоднорідної початкової задачі

$$Y' - \begin{pmatrix} \Theta_0(x) - \Theta_1(x) & \delta\left(x - \frac{1}{4}\right) \\ -\delta(x-1) & 2\Theta_0(x) + \Theta_1(x) \end{pmatrix} Y = \\ = \begin{pmatrix} \Theta_1(x) + \frac{1}{2}\delta\left(x - \frac{1}{4}\right) \\ x\Theta_0(x) + e^x \Theta_1(x) + \frac{1}{4}\delta(x-1) \end{pmatrix}, \quad (25.5)$$

$$Y(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{25.6}$$

де $\Theta_0(x)$ і $\Theta_1(x)$ — характеристичні функції інтервалів $\left[0,\frac14\right)$ та $\left[\frac14,1\right)$ відповідно.

▼ Система (25.5) є системою вигляду (22.1) з коефіцієнтами

$$A_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\ R_0=\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix},\ R_1=\begin{pmatrix}1\\e^x\end{pmatrix},$$

$$C_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix},\ S_1=\begin{pmatrix}\frac12\\0\end{pmatrix},\ S_2=\begin{pmatrix}0\\\frac14\end{pmatrix}$$

і множиною носіїв $\omega^*=\left\{x_1=\frac14, x_2=1\right\}$. Неважко переконатися у коректності заданої системи.

Зауважимо, що відповідна (25.5) визначальна система збігається із визначальною системою (23.18), розглянутою в прикладі 23.6. Відтак фундаментальна матриця системи (25.5) на проміжку $[0,1)$ має вигляд (23.20), а в точці $x=1$ набуває значення (23.21).

Перший спосіб. Знайдемо розв'язок задачі (25.5), (25.6) на проміжку $[0,1)$ за формулою (24.1):

$$Y(x)=\left[B_0(x,0)Z_0+\int_0^x\widetilde{B}_0(x,s)R_0(s)ds\right]\Theta_0(x)+$$

$$+\left[B_1(x,0)Z_0+B_1\left(x,\tfrac14\right)Z_1+\int_{1/4}^x\widetilde{B}_1(x,s)R_1(s)ds\right]\Theta_1(x).$$

На підставі формул (23.17), (23.19), (23.20) маємо

$$\widetilde{B}_0(x,s)=\begin{pmatrix}e^{x-s}&0\\0&e^{2(x-s)}\end{pmatrix},\quad \widetilde{B}_1(x,s)=\begin{pmatrix}e^{-(x-s)}&0\\0&e^{x-s}\end{pmatrix},$$

$$B_0(x,0)=\begin{pmatrix} e^{x} & 0\\ 0 & e^{2x}\end{pmatrix},\quad B_1(x,0)=\begin{pmatrix} e^{-x+\frac12} & e^{-x+\frac34}\\ 0 & e^{x+\frac14}\end{pmatrix},$$

$$B_1(x,\tfrac14)=\widetilde{B}_1(x,\tfrac14)=\begin{pmatrix} e^{-x+\frac14} & 0\\ 0 & e^{x-\frac14}\end{pmatrix},$$

а згідно (24.2):

$$Z_0=Y_0=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$Z_1=\widetilde{C}_1\int\limits_{x_0}^{x_1}\widetilde{B}_0(x_1-0,s)R_0(s)ds+S_1=$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\int\limits_0^{\frac14}\begin{pmatrix} e^{\frac14-s} & 0\\ 0 & e^{2\left(\frac14-s\right)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\s\end{pmatrix}ds+\begin{pmatrix}\frac12\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac12\int\limits_0^{\frac14}sd\left\{e^{2\left(\frac14-s\right)}\right\}+\frac12\\ -\frac12\int\limits_0^{\frac14}sd\left\{e^{2\left(\frac14-s\right)}\right\}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac12\left[se^{2\left(\frac14-s\right)}+\frac12e^{2\left(\frac14-s\right)}\right]\Big|_0^{\frac14}+\frac12\\ -\frac12\left[se^{2\left(\frac14-s\right)}+\frac12e^{2\left(\frac14-s\right)}\right]\Big|_0^{\frac14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac14e^{\frac12}+\frac18\\ \frac14e^{\frac12}-\frac38\end{pmatrix}.$$

Запишемо формулу для обчислення розв'язку:

$$Y(x)=\left[\begin{pmatrix} e^{x} & 0\\ 0 & e^{2x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\int\limits_0^{x}\begin{pmatrix} e^{x-s} & 0\\ 0 & e^{2(x-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\s\end{pmatrix}ds\right]\Theta_0(x)+$$

$$+\left[\begin{pmatrix} e^{-x+\frac12} & e^{-x+\frac34}\\ 0 & e^{x+\frac14}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e^{-x+\frac14} & 0\\ 0 & e^{x-\frac14}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac14e^{\frac12}+\frac18\\ \frac14e^{\frac12}-\frac38\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1/4}^{x}\begin{pmatrix} e^{-(x-s)} & 0\\ 0 & e^{x-s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\e^{s}\end{pmatrix}ds\right]\Theta_1(x)=$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} + \int\limits_0^x s e^{2(x-s)} ds \end{pmatrix} \Theta_0(x) + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} e^{-x+\frac{3}{4}} + \frac{1}{8} e^{-x+\frac{1}{4}} + \int\limits_{1/4}^x e^{-x+s} ds \\ \frac{5}{4} e^{x+\frac{1}{4}} - \frac{3}{8} e^{x-\frac{1}{4}} + \int\limits_{1/4}^x e^x ds \end{pmatrix} \Theta_1(x).$$

Звідки після обчислення інтегралів та зведення подібних доданків отримаємо

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \left[\frac{5}{4} e^{-x+\frac{3}{4}} - \frac{7}{8} e^{-x+\frac{1}{4}} + 1\right] \Theta_1(x) \\ \left[\frac{5}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\right] \Theta_0(x) + \left[\frac{5}{4} e^{x+\frac{1}{4}} - \frac{3}{8} e^{x-\frac{1}{4}} + \left(x - \frac{1}{4}\right) e^x\right] \Theta_1(x) \end{pmatrix}.$$

Значення розв'зку задачі (25.5), (25.6) в точці $x = 1$ обчислимо за формулою (24.3):

$$Y(1) = B_2(1,0) Z_0 + B_2\left(1, \tfrac{1}{4}\right) Z_1 + B_2(1,1) Z_2.$$

Врахуємо, що $B_2(1,1) = E_2$, та знайдемо за формулою (24.10)

$$B_2(1,0) = \widetilde{C}_2 B_1(1-0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}} & e^{-\frac{1}{4}} \\ 0 & e^{\frac{5}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}} & e^{-\frac{1}{4}} \\ -e^{-\frac{1}{2}} & e^{\frac{5}{4}} - e^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix},$$

$$B_2\left(1, \tfrac{1}{4}\right) = \widetilde{C}_2 B_1\left(1-0, \tfrac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{3}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{3}{4}} & 0 \\ -e^{-\frac{3}{4}} & e^{\frac{3}{4}} \end{pmatrix}$$

і за формулою (24.2)

$$Z_2 = \widetilde{C}_2 \int\limits_{x_1}^{x_2} \widetilde{B}_1(x_2, s) R_1(s) ds + S_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \int\limits_{1/4}^{1} \begin{pmatrix} e^{-1+s} & 0 \\ 0 & e^{1-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^s \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \int\limits_{1/4}^{1} e^{s-1} ds \\ \int\limits_{1/4}^{1} \left(e - e^{s-1}\right) ds + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\frac{3}{4}} \\ \frac{3}{4}(e-1) + e^{-\frac{3}{4}} \end{pmatrix}.$$

Відтак знаходимо значення розв'язку задачі (25.5), (25.6) в точці $x=1$:

$$Y(1)=\begin{pmatrix} e^{-\frac12} & e^{-\frac14} \\ -e^{-\frac12} & e^{\frac54}-e^{-\frac14}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e^{-\frac34} & 0 \\ -e^{-\frac34} & e^{\frac34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac14 e^{\frac12}+\frac18\\ \frac14 e^{\frac12}-\frac38\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}1-e^{-\frac34}\\ \frac34(e-1)+e^{-\frac34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac54 e^{-\frac14}-\frac78 e^{-\frac34}+1\\ \frac54 e^{\frac54}+\frac34 e-\frac38 e^{\frac34}-\frac34-\frac54 e^{-\frac14}+\frac78 e^{-\frac34}\end{pmatrix}.$$

Другий спосіб. Знайдемо розв'язок задачі (25.5), (25.6) на відрізку $[0,1]$ за рекурентними формулами (25.1)–(25.3).

На проміжку $\left[0,\frac14\right)$ розв'язок подається формулою

$$Y_0(x)=\widetilde B_0(x,0)Y_0+\int\limits_0^x \widetilde B_0(x,s)R_0(s)ds=$$
$$=\begin{pmatrix}e^x & 0\\ 0 & e^{2x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\int\limits_0^x\begin{pmatrix}e^{x-s} & 0\\ 0 & e^{2(x-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ s\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}0\\ \frac54 e^{2x}-\frac12 x-\frac14\end{pmatrix},$$

на проміжку $\left[\frac14,1\right)$ — формулою

$$Y_1(x)=\widetilde B_1\left(x,\tfrac14\right)\left[\widetilde C_1 Y_0\left(\tfrac14-0\right)+S_1\right]+\int\limits_{1/4}^x \widetilde B_1(x,s)R_1(s)ds=$$
$$=\begin{pmatrix}e^{-x+\frac14} & 0\\ 0 & e^{x-\frac14}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac54 e^{\frac12}-\frac38\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac12\\ 0\end{pmatrix}\right]+$$
$$+\int\limits_{1/4}^x\begin{pmatrix}e^{-(x-s)} & 0\\ 0 & e^{x-s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ e^s\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}\frac54 e^{-x+\frac34}-\frac78 e^{-x+\frac14}+1\\ \frac54 e^{x+\frac14}-\frac38 e^{x-\frac14}+\left(x-\frac14\right)e^x\end{pmatrix},$$

а в точці $x=1$ обчислюється наступним чином:

$$Y_2(1)=\widetilde C_2 Y_1\left(1-0,\tfrac14\right)+S_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac54 e^{-\frac14}-\frac78 e^{-\frac34}+1\\ \frac54 e^{\frac54}-\frac38 e^{\frac34}+\frac34 e\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \frac14\end{pmatrix},$$

звідки

$$Y(1)=Y_2(1)=\begin{pmatrix}\frac{5}{4}e^{-\frac14}-\frac{7}{8}e^{-\frac34}+1\\ \frac{5}{4}e^{\frac54}+\frac34 e-\frac38 e^{\frac34}-\frac34-\frac54 e^{-\frac14}+\frac78 e^{-\frac34}\end{pmatrix}. \tag{25.7}$$

Відтак розв'язок початкової задачі (25.5), (25.6) на всьому проміжку $[0,1)$ зображається у вигляді

$$Y(x)=\begin{pmatrix}\left[\frac54 e^{-x+\frac34}-\frac78 e^{-x+\frac14}+1\right]\Theta_1(x)\\ \left[\frac54 e^{2x}-\frac12 x-\upsilon\frac14\right]\Theta_0(x)+\left[\frac54 e^{x+\frac14}-\frac38 e^{x-\frac14}+\left(x-\frac14\right)e^x\right]\Theta_1(x)\end{pmatrix},$$

а в точці $x=1$ набуває значення (25.7). ▲

Приклад 25.5. На відрізку $[0,\pi]$ знайдемо розв'язок задачі:

$$Y'-\begin{pmatrix}\Theta_1(x) & 2\Theta_0(x)-\Theta_1(x) & -\Theta_1(x)\\ \Theta_1(x)-\delta(x-\pi) & \Theta_0(x)+\Theta_1(x) & \Theta_0(x)\\ 3\Theta_1(x) & \delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right) & \Theta_0(x)+\Theta_1(x)\end{pmatrix}Y=$$

$$=\begin{pmatrix}2\Theta_0(x)-\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\ (x+1)\Theta_0(x)-\Theta_1(x)+\delta(x-\pi)\\ \Theta_0(x)+\Theta_1(x)+\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2\delta(x-\pi)\end{pmatrix}, \tag{25.8}$$

$$Y(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \tag{25.9}$$

де $\Theta_0(x),\Theta_1(x)$ — характеристичні функції проміжків $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ та $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ відповідно.

▼ Система (25.8) є системою вигляду (22.1) з такими коефіцієнтами:

$$A_0=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix},\ R_0=\begin{pmatrix}2\\x+1\\1\end{pmatrix},\ R_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$C_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, C_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, S_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, S_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},$$

для якої $\omega^*=\left\{x_1=\frac{\pi}{2}, x_2=\pi\right\}$. Легко переконатися, що задана система є коректною.

Знайдемо розв'язок задачі (25.8), (25.9) на проміжку $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, на якому визначальна система має вигляд

$$Y'=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}Y \tag{25.10}$$

і є системою диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Для відшукання її фундаментальної матриці знову (див. приклад 23.6) скористаємось методом Ейлера у матричній формі. Складемо характеристичне рівняння для системи (25.10)

$$\begin{vmatrix}-\lambda&2&0\\0&1-\lambda&1\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)^2=0$$

і знайдемо його корені $\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=1$ (власні значення матриці A_0).

Для простого кореня $\lambda_1=0$ частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\widehat{Y}_1(x)=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}e^{\lambda_1 x}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$$

з невизначеними коефіцієнтами $\alpha_k\in\mathbb{R},\ k=\overline{1,3}$. Після підстановки його у визначальну систему (25.10) отримаємо систему

алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2\alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

що має розв'язки вигляду $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Вибравши, скажімо, $\alpha_1 = 1$, отримаємо власний вектор $(1, 0, 0)$ матриці A_0, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = 0$, і відповідний частинний розв'язок системи (25.10)

$$\widehat{Y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для двократного кореня $\lambda_{2,3} = 1$ частинні розв'язки слід шукати у вигляді

$$\widehat{Y}_{2,3}(x) = \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} x \right] e^x,$$

що після підстановки у рівняння (25.10), скорочення на e^x і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x приводить до наступної системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \beta_1 = 0, \\ \beta_1 - 2\beta_2 = 0, \\ \alpha_3 - \beta_2 = 0, \\ \beta_3 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи маємо

$$\alpha_1 = 2(C_1 - C_2),\ \alpha_2 = C_1,\ \alpha_3 = \beta_2 = C_2,\ \beta_1 = 2C_2,\ \beta_3 = 0,$$

де $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Вибравши спочатку $C_1 = 1,\ C_2 = 0$, а потім навпаки, отримаємо ще два частинні розв'язки визначальної системи (25.10):

$$\widehat{Y}_2(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x, \quad \widehat{Y}_3(x) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} e^x.$$

Для перевірки того, що вектори $\widehat{Y}_1(x), \widehat{Y}_2(x), \widehat{Y}_3(x)$ утворюють лінійно незалежну систему, достатньо обчислити їх вронскіан у будь-якій точці, н-д, при $x = 0$:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 2e^x & 2(x-1)e^x \\ 0 & e^x & xe^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix}_{x=0} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Таким чином, інтегральна матриця $\Phi(x)$ визначальної системи (25.10) має вигляд

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2e^x & 2(x-1)e^x \\ 0 & e^x & xe^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}.$$

Побудуємо фундаментальну матрицю системи (25.10) [**52**]:

$$\widetilde{B}_0(x,s) = \Phi(x)\Phi^{-1}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 2e^x & 2(x-1)e^x \\ 0 & e^x & xe^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & e^{-s} & -se^{-s} \\ 0 & 0 & e^{-s} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2\left(e^{x-s}-1\right) & 2(x-s)e^{x-s} - 2\left(e^{x-s}-1\right) \\ 0 & e^{x-s} & (x-s)e^{x-s} \\ 0 & 0 & e^{x-s} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо тепер розв'язок $Y_0(x)$ задачі (25.8), (25.9) на проміжку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ за формулою

$$Y_0(x) = \widetilde{B}_0(x,0)Y_0 + \int\limits_0^x \widetilde{B}_0(x,s)R_0(s)ds.$$

Таким чином отримаємо

$$Y_0(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2(e^x-1) & 2xe^x-2(e^x-1) \\ 0 & e^x & xe^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+\int\limits_0^x \begin{pmatrix} 1 & 2(e^{x-s}-1) & 2(x-s)e^{x-s}-2(e^{x-s}-1) \\ 0 & e^{x-s} & (x-s)e^{x-s} \\ 0 & 0 & e^{x-s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ s+1 \\ 1 \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2xe^x \\ (x+1)e^x \\ e^x \end{pmatrix} + \int\limits_0^x \begin{pmatrix} 2xe^{x-s}-2s+2 \\ (x+1)e^{x-s} \\ e^{x-s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 4xe^x-x^2+1 \\ 2(x+1)e^x-x-1 \\ 2e^x-1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$Y_0(x) = \begin{pmatrix} 4xe^x - x^2 + 1 \\ 2(x+1)e^x - x - 1 \\ 2e^x - 1 \end{pmatrix}, x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right). \tag{25.11}$$

Знайдемо розв'язок $Y_1(x)$ задачі (25.8), (25.9) для $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Визначальна система на цьому проміжку

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y \tag{25.12}$$

є системою диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2+4\right] = 0$$

має корені $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$, яким відповідають (пропонуємо читачеві переконатися в цьому самостійно) частинні розв'язки

$$\widehat{Y}_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x, \widehat{Y}_2(x) = \begin{pmatrix} 2\sin 2x \\ -\cos 2x \\ -3\cos 2x \end{pmatrix} e^x, \widehat{Y}_3(x) = \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix} e^x.$$

Відтак будуємо фундаментальну матрицю визначальної системи (25.12):

$$\widetilde{B}_1(x,s) = \begin{pmatrix} 0 & 2e^x\sin 2x & 2e^x\cos 2x \\ e^x & -e^x\cos 2x & e^x\sin 2x \\ -e^x & -3e^x\cos 2x & 3e^x\sin 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2e^s\sin 2s & 2e^s\cos 2s \\ e^s & -e^s\cos 2s & e^s\sin 2s \\ -e^s & -3e^s\cos 2s & 3e^s\sin 2s \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2e^x\sin 2x & 2e^x\cos 2x \\ e^x & -e^x\cos 2x & e^x\sin 2x \\ -e^x & -3e^x\cos 2x & 3e^x\sin 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4}e^{-s} & -\frac{1}{4}e^{-s} \\ \frac{1}{2}e^{-s}\sin 2s & -\frac{1}{4}e^{-s}\cos 2s & -\frac{1}{4}e^{-s}\cos 2s \\ \frac{1}{2}e^{-s}\cos 2s & \frac{1}{4}e^{-s}\sin 2s & \frac{1}{4}e^{-s}\sin 2s \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{x-s}\cos 2(x-s) & -\frac{1}{2}e^{x-s}\sin 2(x-s) & -\frac{1}{2}e^{x-s}\sin 2(x-s) \\ \frac{1}{2}e^{x-s}\sin 2(x-s) & \frac{1}{4}e^{x-s}[\cos 2(x-s)+3] & \frac{1}{4}e^{x-s}[\cos 2(x-s)-1] \\ \frac{3}{2}e^{x-s}\sin 2(x-s) & \frac{3}{4}e^{x-s}[\cos 2(x-s)-1] & \frac{1}{4}e^{x-s}[3\cos 2(x-s)+1] \end{pmatrix}.$$

Далі за формулою (25.2) запишемо розв'язок вихідної задачі (25.8), (25.9) на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$:

$$Y_1(x) = \widetilde{B}_1\left(x, \tfrac{\pi}{2}\right)\left[\widetilde{C}_1 Y_0\left(\tfrac{\pi}{2}-0\right) + S_1\right] + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \widetilde{B}_1(x,s) R_1(s)\,ds \quad (25.13)$$

Нагадаємо, що $\widetilde{C}_1 = E_4 + C_1$. Підставивши в (25.13) відповідні матриці і виконавши усі необхідні обчислення, отримаємо

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} \big[-2\pi\cos 2x + (\pi+3)\sin 2x\big]e^x + \\ + \big[\frac{\pi^2}{4}\cos 2x - \frac{\pi+2}{2}\sin 2x\big]e^{x-\frac{\pi}{2}}; \\ \big[-\frac{\pi+3}{2}\cos 2x - \pi\sin 2x + \frac{\pi+1}{2}\big]e^x + \\ + \big[\frac{\pi+2}{4}\cos 2x + \frac{\pi^2}{8}\sin 2x - \frac{\pi+6}{4}\big]e^{x-\frac{\pi}{2}} + 1; \\ \big[-\frac{3\pi+9}{2}\cos 2x - 3\pi\sin 2x - \frac{\pi+1}{2}\big]e^x + \\ \big[\frac{3\pi+6}{4}\cos 2x + \frac{3\pi^2}{8}\sin 2x + \frac{\pi+6}{4}\big]e^{x-\frac{\pi}{2}} - 1 \end{pmatrix} \tag{25.14}$$

Остаточно, розв'язок задачі (25.8), (25.9) на проміжку $[0, \pi)$ зображається у вигляді

$$Y(x) = Y_0(x)\Theta_0(x) + Y_1(x)\Theta_1(x),$$

де $Y_0(x), Y_1(x)$ виражені формулами (25.11) і (25.14) відповідно.

У точці $x = \pi \in \omega^*$ значення розв'язку слід обчислювати за окремою формулою (25.3):

$$Y(\pi) = \widetilde{C}_2 Y_1(\pi - 0) + S_2 = \begin{pmatrix} -2\pi e^\pi + \frac{\pi^2}{4}e^{\frac{\pi}{2}} \\ (2\pi - 1)e^\pi - \frac{\pi^2+4}{4}e^{\frac{\pi}{2}} + 2 \\ -(2\pi + 5)e^\pi + (\pi + 3)e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \end{pmatrix}.$$

▲

§ 26. Зведення крайової задачі до початкової

Доведемо твердження, на якому ґрунтується один спеціальний метод розв'язування крайових задач для системи (22.1), що полягає у зведенні крайової задачі до початкової.

Систему (22.1) розглянемо разом з крайовими умовами:

$$PY(x_0) + QY(x_N) = U, \tag{26.1}$$

де $P, Q \in \mathbb{C}^{p\times p}$, $U \in \mathbb{C}^p$.

Теорема 26.1. *Якщо*

$$\det\left[P + QB_N(x_N, x_0)\right] \neq 0, \tag{26.2}$$

то за умов коректності (22.3) *існує єдиний розв'язок крайової задачі* (22.1), (26.1), *який зображається у вигляді* (24.1)–(24.3) *або* (25.1)–(25.3), *де початковий вектор обчислюється за формулою*

$$Y_0 = \left[P + QB_N(x_N, x_0)\right]^{-1}\left[U - Q\sum_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)Z_j\right]. \tag{26.3}$$

Доведення. Згідно (24.3) маємо

$$Y(x_N) = B_N(x_N, x_0)Y_0 + \sum_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)Z_j,$$

звідки

$$QY(x_N) = QB_N(x_N, x_0)Y_0 + Q\sum_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)Z_j.$$

Враховуючи крайову умову (26.1), одержимо рівність:

$$U - PY_0 = QB_N(x_N, x_0)Y_0 + Q\sum_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)Z_j,$$

звідки випливає формула (26.3). Виконання умови (26.2) забезпечує існування оберненої матриці $\left[P+QB_N(x_N,x_0)\right]^{-1}$, а відтак і початкового вектора Y_0.

Таким чином, розв'язування крайової задачі (22.1), (26.1) звелося до знаходження розв'язку початкової задачі (22.1), (26.3), котрий згідно теореми 22.1 існує та єдиний. ■

Приклад 26.2. Нехай задана узагальнена система

$$Y' - \begin{pmatrix} 0 & 4\Theta_0(x)+2\Theta_1(x) \\ -\Theta_0(x)-2\Theta_1(x)-\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \end{pmatrix} Y = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 5\Theta_0(x)+\sin x\Theta_1(x)-20\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (26.4)$$

де $\Theta_0(x)$, $\Theta_1(x)$ – характеристичні функції проміжків $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ та $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ відповідно.

Знайдемо розв'язок цієї системи, який задовольняє крайові умови

$$PY(0)+QY(1)=0, \quad P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (26.5)$$

▼ Система (26.4) є системою вигляду (22.1) з такими коефіцієнтами:

$$A_0(x)=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ A_1(x)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_0(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},\ R_1(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix},\ S_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix},\ S_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $C_1^2=C_2^2=0$, $C_1S_1=C_2S_2=0$, то система (26.4) є коректною. Зауважимо, що $\omega^*=\left\{x_1=\frac{\pi}{2}\right\}$.

Для системи (26.4) визначальна система

$$Y' = \left(\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Theta_0 + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Theta_1 \right) Y$$

на кожному із проміжків $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ та $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ є диференціальною системою із сталими коефіцієнтами. Неважко переконатися, що відповідні фундаментальні матриці матимуть вигляд

$$\widetilde{B}_0(x,s) = \begin{pmatrix} \cos 2(x-s) & 2\sin 2(x-s) \\ -\frac{1}{2}\sin 2(x-s) & \cos 2(x-s) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{B}_1(x,s) = \begin{pmatrix} \cos 2(x-s) & \sin 2(x-s) \\ -\sin 2(x-s) & \cos 2(x-s) \end{pmatrix}.$$

Перевіримо умову (26.2) існування єдиного розв'язку для задачі (26.4), (26.5). Враховуючи, що $x = \pi \notin \omega^*$, на підставі зауваження 23.3 і наслідку 23.4 маємо

$$B_2(\pi,0) = B_1(\pi-0,0) = \widetilde{B}_1\left(\pi-0,\tfrac{\pi}{2}\right)\widetilde{C}_1\widetilde{B}_0\left(\tfrac{\pi}{2}-0,0\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B_2\left(\pi,\tfrac{\pi}{2}\right) = B_1\left(\pi-0,\tfrac{\pi}{2}\right) = \widetilde{B}_1\left(\pi-0,\tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник

$$\det\left[P+QB_2(\pi,0)\right] = \det\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Оскільки $\det\left[P+QB_2(\pi,0)\right] \neq 0$, то за теоремою 26.1 розв'язок крайової задачі (26.4), (26.5) буде обчислюватися за формулами (24.1)–(24.3) або (25.1)–(25.3), початковий вектор для яких

визначатиметься згідно (26.3). Таким чином маємо

$$Y_0 = -\big[P + QB_2(\pi, 0)\big]^{-1} Q\big[B_2\big(\pi, \tfrac{\pi}{2}\big) Z_1 + Z_2\big].$$

Для відшукання векторів Z_1 і Z_2 використаємо співвідношення (24.2):

$$Z_1 = \widetilde{C}_1 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{B}_0\big(\tfrac{\pi}{2}, s\big) R_0(s)\,ds + S_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos(\pi - 2s) & 2\sin(\pi - 2s) \\ -\frac{1}{2}\sin(\pi - 2s) & \cos(\pi - 2s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\pi - 2s)\,ds \\ 5 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi - 2s)\,ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix},$$

$$Z_2 = \widetilde{C}_2 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \widetilde{B}_1(\pi, s) R_1(s)\,ds + S_2 =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \begin{pmatrix} \cos 2(\pi - s) & \sin 2(\pi - s) \\ -\sin 2(\pi - s) & \cos 2(\pi - s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin s \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2s \sin s\,ds \\ \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2s \sin s\,ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Y_0 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{61}{12} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись тепер рекурентними формулами (25.1)–(25.3) з початковим вектором Y_0, запишемо розв'язок крайової задачі (26.4), (26.5).

На проміжку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ розв'язок матиме вигляд

$$Y_0(x) = \widetilde{B}_0(x,0)Y_0 + \int_0^x \widetilde{B}_0(x,s)R_0(s)ds = \begin{pmatrix} \cos 2x & 2\sin 2x \\ -\frac{1}{2}\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{61}{12} \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^x \begin{pmatrix} \cos 2(x-s) & 2\sin 2(x-s) \\ -\frac{1}{2}\sin 2(x-s) & \cos 2(x-s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\cos 2x + 5 \\ -\frac{1}{24}\sin 2x \end{pmatrix}.$$

Запишемо розв'язок крайової задачі при $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$:

$$Y_1(x) = \widetilde{B}_1\left(x, \tfrac{\pi}{2}\right)\left[\widetilde{C}_1 Y_0\left(\tfrac{\pi}{2} - 0\right) + S_1\right] + \int_{\frac{\pi}{2}}^x \widetilde{B}_1(x,s)R_1(s)ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2x-\pi) & \sin(2x-\pi) \\ -\sin(2x-\pi) & \cos(2x-\pi) \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{12}\cos 2x + 5 \\ -\frac{1}{24}\sin 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix}\right] +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^x \begin{pmatrix} \cos 2(x-s) & \sin 2(x-s) \\ -\sin 2(x-s) & \cos 2(x-s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin s \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin 4x - \frac{1}{8}\cos^2 2x - 5\cos 2x + \frac{1}{24} \\ \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{3}\cos^2 2x + 5\sin 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{2}{3}\sin x \\ \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{3}\sin 2x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin 4x - \frac{1}{8}\cos^2 2x - \frac{13}{3}\cos 2x + \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{24} \\ \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{3}\cos^2 2x + \frac{16}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\cos x \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язок крайової задачі (26.4), (26.5) зображається у вигляді

$$Y(x) = Y_0(x)\Theta_0(x) + Y_1(x)\Theta_1(x), \tag{26.6}$$

де

$$Y_0(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\cos 2x + 5 \\ -\frac{1}{24}\sin 2x \end{pmatrix},$$

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin 4x - \frac{1}{8}\cos^2 2x - \frac{13}{3}\cos 2x + \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{24} \\ \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{3}\cos^2 2x + \frac{16}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\cos x \end{pmatrix}.$$

▲

§ 27. Квазідиференціальні рівняння з кусково-неперервними коефіцієнтами і δ-особливостями

Розглянемо узагальнене КДР

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(m-j)} = \sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}f_r^{(r+1)}(x) \quad (27.1)$$

з коефіцієнтами вигляду

1) $a_{00}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{00}^{k}(x)\Theta_k(x)$,

2) $a_{ij}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{ij}^{k}(x)\Theta_k(x),\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m},\ i\cdot j=0$;

3) $a_{ij}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{ij}^{k}(x)\Theta_k(x) + \sum\limits_{k=1}^{N}a_{ij}^{k}\delta_k(x),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$,

4) $f_r(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}_r^{\,k}(x)\Theta_k(x) + \sum\limits_{k=1}^{N}f_r^{k}\delta_k(x),\ r=\overline{0,m-1}$,

де $y\colon I\to\mathbb{C}$ — невідома функція, $\widetilde{a}_{ij}^{k}(x)$, $\widetilde{f}_r^{\,k}(x)$ — неперервні на проміжку $I_k=[x_k,x_{k+1})$ функції, a_{ij}^{k}, f_r^{k} — дійсні числа.

Для КДР (27.1) квазіпохідні вводяться на основі формул (15.2) з урахуванням випадку $l=m-1$, а саме:

$$y^{[i]}=y^{(i)},\ \ i=\overline{0,n-1};\qquad y^{[n]}=\sum_{i=0}^{n}a_{i0}(x)y^{(n-i)};$$

$$y^{[n+j]}=-\left(y^{[n+j-1]}\right)'+\sum_{i=0}^{n}a_{ij}(x)y^{(n-i)}+f'_{m-j}(x),\ j=\overline{1,m}.$$

Тоді КДР (27.1) зводиться до системи виду (22.1):

$$Y'-\left(\sum_{k=0}^{N-1}A_k(x)\Theta_k(x)+\sum_{k=1}^{N}C_k\delta(x-x_k)\right)Y=$$
$$=\sum_{k=0}^{N-1}R_k(x)\Theta_k(x)+\sum_{k=1}^{N}S_k\delta(x-x_k),$$

де $Y(x)=\left(y(x),y^{[1]}(x),\dots,y^{[q-1]}(x)\right)^{\top}$ — невідома вектор- функція, вектори R_k і S_k мають вигляд

$$R_k(x)=\left(0,\dots,0,\widetilde{f}^{\,k}_{m-1}(x),\dots,\widetilde{f}^{\,k}_{1}(x),\widetilde{f}^{\,k}_{0}(x)\right)^{\top},\qquad(27.2)$$

$$S_k=\left(0,\dots,0,f^{k}_{m-1},\dots,f^{k}_{1},f^{k}_{0}\right)^{\top},\qquad(27.3)$$

а кожна з матриць $A_k(x)$ і C_k розміру $q\times q$ має таку блокову структуру:

$$A_k(x)=\begin{pmatrix}A^k_{11}(x) & A^k_{12}(x)\\ A^k_{21}(x) & A^k_{22}(x)\end{pmatrix},\quad C_k=\begin{pmatrix}O_{nm} & O_n\\ C^k_{21} & O_{mn}\end{pmatrix},\qquad(27.4)$$

де

$$A^k_{11}(x)=\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\\ -\frac{\widetilde{a}^k_{n0}(x)}{\widetilde{a}^k_{00}(x)} & -\frac{\widetilde{a}^k_{n-1,0}(x)}{\widetilde{a}^k_{00}(x)} & \dots & -\frac{\widetilde{a}^k_{10}(x)}{\widetilde{a}^k_{00}(x)}\end{pmatrix},\qquad(27.5)$$

$$A_{12}^k(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{27.6}$$

$$A_{21}^k(x)=\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{n1}^k(x)-\frac{\widetilde{a}_{01}^k(x)\widetilde{a}_{n0}^k(x)}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} & \dots & \widetilde{a}_{11}^k(x)-\frac{\widetilde{a}_{01}^k(x)\widetilde{a}_{10}^k(x)}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{n,m}^k(x)-\frac{\widetilde{a}_{0,m}^k(x)\widetilde{a}_{n0}^k(x)}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} & \dots & \widetilde{a}_{1,m}^k(x)-\frac{\widetilde{a}_{0,m}^k(x)\widetilde{a}_{10}^k(x)}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} \end{pmatrix}, \tag{27.7}$$

$$A_{22}^k(x)=\begin{pmatrix} \frac{\widetilde{a}_{01}^k(x)}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\widetilde{a}_{0,m-1}^k(x)}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} & 0 & \dots & -1 \\ \frac{\widetilde{a}_{0,m}^k(x)}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{27.8}$$

$$C_{21}^k=\begin{pmatrix} a_{n1}^k & a_{n-1,1}^k & \dots & a_{11}^k \\ a_{n2}^k & a_{n-1,2}^k & \dots & a_{12}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nm}^k & a_{n-1,m}^k & \dots & a_{1m}^k \end{pmatrix}. \tag{27.9}$$

Відзначимо, що вигляд матриць C_k і векторів S_k, $k=\overline{1,N}$, гарантує виконання умов коректності (22.3) для системи (22.1).

Відповідна їй визначальна система еквівалентна КДР

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{ij}^k(x)\Theta_k(x)\ y^{(n-i)}\right)^{(m-j)}=0. \tag{27.10}$$

Квазідиференціальне рівняння (27.10) будемо називати *визначальним* для відповідного КДР (27.1).

Відзначимо, що фундаментальну матрицю $\widetilde{B}_k(x,s)$ визначальної системи на I_k, $k=\overline{0,N-1}$, можна знайти за формулою (13.7), щойно буде відома функція Коші КДР (27.10) на цьому

проміжку, тобто функція Коші $\widetilde{K}_k(x,s)$ рівняння

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\big(\widetilde{a}_{ij}^{k}(x)y^{(n-i)}\big)^{(m-j)}=0.$$

Для КДР (27.1) поставимо початкові умови

$$y^{[\nu]}(x_0)=y_0^{\nu},\ \ y_0^{\nu}\in\mathbb{R},\ \ \nu=\overline{0,q-1}. \tag{27.11}$$

Якщо умови (27.11) записати у векторному вигляді

$$Y(x_0)=\Big(y_0,y_0^1,\dots,y_0^{q-1}\Big)^{\top}, \tag{27.12}$$

то початкова задача (27.1), (27.11) буде еквівалентною задачі (22.1), (22.2) з початковим вектором (27.12). Розв'язавши останню, отримаємо вираз для розв'язку $y(x)$ початкової задачі (27.1), (27.11) та його квазіпохідних.

Приклад 27.1. Розглянемо задачу про вимушені поздовжні коливання закріпленого на кінцях стрижня довжиною π кусково-сталого перерізу $f(x)$ із зосередженою масою та узагальненим зовнішнім навантаженням:

$$\big(f(x)y'\big)'+4\big[f(x)-\delta\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big)\big]y=$$
$$=5\Theta_0(x)+\sin x\Theta_1(x)-20\delta\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big), \tag{27.13}$$
$$y'(0)=y^{[1]}(\pi)=0, \tag{27.14}$$

де $\Theta_0(x),\Theta_1(x)$ — характеристичні функції проміжків $\big[0,\frac{\pi}{2}\big)$ та $\big[\frac{\pi}{2},\pi\big]$ відповідно,

$$f(x)=\frac{1}{4}\Theta_0(x)+\frac{1}{2}\Theta_1(x), \tag{27.15}$$

а $y^{[1]}(x)=f(x)y'(x)$ — так звана квазіпохідна.

▼ Запишемо для КДР (27.13) множину носіїв його узагальнених коефіцієнтів: $\omega^* = \{x_1 = \frac{\pi}{2}\}$. За допомогою вектора $Y = \big(y, y^{[1]}\big)^\top$ КДР (27.13) зводимо до системи

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & f^{-1}(x) \\ -4f(x) - \delta\big(x - \frac{\pi}{2}\big) & 0 \end{pmatrix} Y + \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ 5\Theta_0(x) + \sin x \Theta_1(x) - 20\delta\big(x - \frac{\pi}{2}\big) \end{pmatrix}. \quad (27.16)$$

Враховуючи (27.15), маємо $f^{-1}(x) = 4\Theta_0(x) + 2\Theta_1(x)$. Відтак система (27.16) є системою вигляду (26.4). Крайові умови (27.14) запишемо у векторному вигляді

$$PY(0) + QY(1) = 0, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ми отримали задачу (26.4), (26.5), розв'язок якої подається сплайном (26.6), перша координата котрого й дає розв'язок задачі (27.13), (27.14):

$$y(x) = \big(5 + \tfrac{1}{12}\cos 2x\big)\Theta_0(x) + \\ + \big(-\tfrac{1}{6}\sin 4x - \tfrac{1}{8}\cos^2 2x - \tfrac{13}{3}\cos 2x + \tfrac{2}{3}\sin x + \tfrac{1}{24}\big)\Theta_1(x).$$

▲

Приклад 27.2. Знайдемо розв'язок крайової задачі

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k(x)\Theta_k(x)\; t'\right)' = \sum_{k=0}^{N-1} r_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=1}^{N-1} s_k\delta(x - x_k), \quad (27.17)$$

$$t(x_0) = t_0, \quad t(x_N) = t_N, \quad (27.18)$$

де $t(x)$ — невідома функція, $\Theta_k(x)$ — характеристична функція проміжка $I_k = [x_k, x_{k+1})$ [1)], $\lambda_k, r_k \in C[x_k, x_{k+1})$, $s_k \in \mathbb{R}$.

[1)] $\Theta_{N-1}(x)$ — характеристична функція відрізка $[x_{N-1}, x_N]$.

▼ Задача (27.17), (27.18) є математичною моделлю розподілу одновимірного стаціонарного температурного поля в багатошаровій нескінченній плиті з кусково-змінним коефіцієнтом теплопровідності за наявності неперервно розподілених і точкових джерел тепла. Відтак $\lambda_k(x)$ — коефіцієнт теплопровідності на проміжку $[x_k, x_{k+1})$, $r_k(x)$ — функція розподілу джерела тепла на $[x_k, x_{k+1})$, s_k — інтенсивності точкових джерел тепла. Крайові умови означають, що на зовнішній поверхні плити задано температурний режим.

Квазіпохідна в цьому випадку визначається виразом

$$t^{[1]}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k(x)\Theta_k(x) \cdot t'(x).$$

За допомогою вектора $Y = \left(t, t^{[1]}\right)^\top$ задачу (27.17), (27.18) запишемо у матричній формі

$$Y' - \begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_{k=0}^{N-1} \dfrac{\Theta_k(x)}{\lambda_k(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{N-1} r_k(x)\Theta_k(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{N-1} s_k \delta(x - x_k) \end{pmatrix}, \tag{27.19}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y(x_0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y(x_N) = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_N \end{pmatrix}. \tag{27.20}$$

Остання задача є задачею вигляду (22.1), (26.1), якщо позначити

$$A_k(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_k(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; R_k(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ r_k(x) \end{pmatrix}, \; S_k = \begin{pmatrix} 0 \\ s_k \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_N \end{pmatrix}.$$

Визначальною для диференціальної системи (27.19) є система

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{\Theta_k(x)}{\lambda_k(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y.$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що фундаментальна матриця $\widetilde{B}_k(x,s)$ цієї системи на проміжку I_k, тобто фундаментальна матриця системи

$$Y_k' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_k(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y_k, \quad k = \overline{0, N-1},$$

має вигляд

$$\widetilde{B}_k(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & b_k(x,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{27.21}$$

де для зручності запису позначено

$$b_k(x,s) = \int\limits_s^x \frac{d\tau}{\lambda_k(\tau)}.$$

Одразу відзначимо, що добуток матриць вигляду (27.21) є матрицею такого ж вигляду:

$$\widetilde{B}_k \cdot \widetilde{B}_l = \begin{pmatrix} 1 & b_k + b_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{27.22}$$

Тоді фундаментальна матриця $B(x,x_0)$ системи (27.19) будується за формулами (23.3), (23.4), причому згідно зауваження 23.3

$$B_N(x_N, x_0) = B_{N-1}(x_N - 0, x_0),$$

а на підставі (23.1) маємо $b_k(x-0,s) = b_k(x,s)$.

Далі, враховуючи формулу (23.10), вигляд матриць P, Q, C_k, $\widetilde{B}_k(x,s)$, а також властивість (27.22), обчислимо

$$\det\bigl[P + QB_N(x_N,x_0)\bigr] = \det\bigl[P + QB_{N-1}(x_N - 0, x_0)\bigr] =$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\prod_{i=0}^{N-1}\begin{pmatrix}1 & b_{N-i-1}(x_{N-i}, x_{N-i-1})\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sum\limits_{i=0}^{N-1} b_{N-i-1}(x_{N-i}, x_{N-i-1})\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & \sum\limits_{i=0}^{N-1} b_i(x_{i+1}, x_i)\end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\tau}{\lambda_i(\tau)}.$$

Отже,

$$\det\left[P + QB_N(x_N, x_0)\right] = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\tau}{\lambda_i(\tau)}. \tag{27.23}$$

Відтак на підставі теореми 26.1 за умови

$$\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}-0} \frac{d\tau}{\lambda_i(\tau)} \neq 0$$

існує єдиний розв'язок крайової задачі (27.19), (27.20), який зображається у вигляді (24.1), тобто

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{N-1}\left\{\sum_{j=0}^{k} B_k(x, x_j)Z_j + \int_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s)R_k(s)ds\right\}\Theta_k(x). \tag{27.24}$$

Найперше обчислимо інтеграл у правій частині (27.24):

$$\int_{x_k}^{x}\widetilde{B}_k(x, s)R_k(s)ds = \int_{x_k}^{x}\begin{pmatrix}1 & b_k(x, s)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ r_k(s)\end{pmatrix}ds = \begin{pmatrix}\mathcal{I}_k(x)\\ \mathcal{I}_k^{[1]}(x)\end{pmatrix}, \tag{27.25}$$

де для зручності запису позначено

$$\mathcal{I}_k(x) = \int_{x_k}^{x} b_k(x, s)r_k(s)ds, \quad \mathcal{I}_k^{[1]}(x) = \int_{x_k}^{x} r_k(s)ds.$$

Тепер, враховуючи (27.25), знайдемо Z_j, $j \geq 1$, згідно (24.2):

$$Z_j = \widetilde{C}_j \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \widetilde{B}_{j-1}(x_j, s) R_{j-1}(s) ds + S_j =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{j-1}(x_j) \\ \mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{j-1}(x_j) \\ \mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j) + s_j \end{pmatrix}. \quad (27.26)$$

Використовуючи мультиплікативне представлення (23.11), властивість (27.22) і вигляд (27.26) вектоів Z_j, обчислимо тепер суму $\sum\limits_{j=1}^{k} B_k(x, x_j) Z_j$ для $k = \overline{1, N-1}$:

$$\sum_{j=1}^{k} B_k(x, x_j) Z_j = \sum_{j=1}^{k} \widetilde{B}_k(x, x_k) \prod_{i=0}^{k-j-1} \widetilde{C}_{k-i} \widetilde{B}_{k-i-1}(x_{k-i}, x_{k-i-1}) Z_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \begin{pmatrix} 1 & b_k(x, x_k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{i=0}^{k-j-1} b_{k-i-1}(x_{k-i}, x_{k-i-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{j-1}(x_j) \\ \mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j) + s_j \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{j-1}(x_j) + \left[\mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j) + s_j\right] \left[b_k(x, x_k) + \sum\limits_{i=j}^{k-1} b_i(x_{i+1}, x_i)\right] \\ \mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j) + s_j \end{pmatrix}.$$

Нарешті, знайдемо початковий вектор $Z_0 = Y_0$ за формулою (26.3), взявши до уваги (27.23) і щойно отримане зображення для $\sum\limits_{j=1}^{k} B_k(x, x_j) Z_j$:

$$Z_0 = \Big[P + Q B_N(x_N, x_0)\Big]^{-1} \Big[U - Q Z_N - Q \sum_{j=1}^{N-1} B_{N-1}(x_N - 0, x_j) Z_j\Big] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \sum\limits_{i=0}^{N-1} b_i(x_{i+1}, x_i) \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} t_0 \\ t_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{I}_{N-1}(x_N) \end{pmatrix} -\right.$$

$$-\sum_{j=1}^{N-1}\left(\begin{array}{c}0\\ \mathcal{I}_{j-1}(x_j)+\left[\mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j)+s_j\right]\sum\limits_{i=j}^{N-1}b_i(x_{i+1},x_i)\end{array}\right)\Bigg].$$

Після нескладних перетворень, пов'язаних з обчисленням оберненої матриці і матричного добутку, маємо

$$Z_0=\left(\begin{array}{c}t_0\\ \dfrac{t_N-t_0-\sum\limits_{j=1}^{N}\mathcal{I}_{j-1}(x_j-0)-\sum\limits_{j=1}^{N-1}\left(\mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j-0)+s_j\right)\sum\limits_{i=j}^{N-1}b_i(x_{i+1}-0,x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{N-1}b_i(x_{i+1}-0,x_i)}\end{array}\right). \qquad (27.27)$$

Підставивши вирази (27.25)–(27.27) у формулу (27.24) і спростивши, отримаємо остаточний розв'язок крайової задачі (27.19), (27.20), перша координата якого є розв'язком $y(x)$ крайової задачі (27.17), (27.18), а друга – його квазіпохідною. ▲

§ 28. Частково вироджені квазідиференціальні рівняння

Розглянемо один спеціальний клас квазідиференціальних рівнянь.

Означення 28.1. *Частково виродженим квазідиференціальним рівнянням* назвемо рівняння вигляду (27.1)

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(m-j)}=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}f_r^{(r+1)}(x) \qquad (28.1)$$

з такими припущеннями стосовно коефіцієнтів і правої частини:

1) $a_{ij}(x)=\sum\limits_{k=0}^{N-1}a_{ij}^k\Theta_k(x),\ a_{ij}^k\in\mathbb{R},\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m},i\cdot j=0;$

2) $a_{ij}(x)=\sum\limits_{k=1}^{N}a_{ij}^k\delta(x-x_k),\ a_{ij}^k\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m};$

3) $f_r(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} f_r^k \Theta_k(x),\ f_r^k \in \mathbb{R},\ r = \overline{0, m-1}.$

Очевидно, частково вироджене КДР вказаним вище способом зводиться до узагальненої диференціальної системи з кусково-сталими коефіцієнтами

$$Y'(x) - \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k \Theta_k + \sum_{k=1}^{N} C_k \delta_k(x) \right) Y(x) = \sum_{k=1}^{N} S_k \delta_k(x), \quad (28.2)$$

де матриці A_k, C_k та вектори S_k визначаються відповідно формулами (27.4)–(27.7) та (27.3) з врахуванням рівностей

$$\widetilde{a}_{ij}^k(x) = \begin{cases} a_{ij}^k, & i \cdot j = 0; \\ 0, & i \cdot j \neq 0, \end{cases} \qquad \widetilde{f}_r^{\,k}(x) = 0.$$

За теоремою 24.1 розв'язок системи (28.2), що задовольняє початкову умову $Y(x_0) = Y_0$, має вигляд

$$Y(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left(B_k(x, x_0) Y_0 + \sum\limits_{j=1}^{k} B_k(x, x_j) S_j \right) \Theta_k(x), x \in [x_0, x_N), \\ B_N(x_N, x_0) Y_0 + \sum\limits_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j) S_j,\ x = x_N, \end{cases}$$

зокрема відповідно до зауваження 24.2 в разі, якщо $x = x_N \notin \omega^*$, розв'язок для $x \in [x_0, x_N]$ матиме вигляд

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(B_k(x, x_0) Y_0 + \sum_{j=1}^{k} B_k(x, x_j) S_j \right) \Theta_k(x), \quad (28.3)$$

де $\Theta_{N-1}(x)$ — характеристична функція відрізка $[x_{N-1}, x_N]$.

Тоді розв'язок відповідного частково виродженого КДР з початковою умовою

$$y^{[\nu]}(x_0) = y_0^\nu,\ \nu = \overline{0, q-1},$$

зображається у формі

$$y(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\Bigg(\sum_{i=0}^{q-1}K_k^{\{i\}}(x,x_0)y_0^{[q-i-1]}+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{m+1}K_k^{\{i\}}(x,x_j)f_i^j\Bigg)\Theta_k(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\in[x_0,x_N), \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{q-1}K_k^{\{i\}}(x,x_0)y_0^{[q-i-1]}+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{m+1}K_k^{\{i\}}(x,x_j)f_i^j,\ x=x_N.\end{cases}$$

де $K_k^{\{i\}}(x,x_j)$ — i-та квазіпохідна (в сенсі спряженого рівняння) функції Коші цього частково виродженого КДР для $x\in I_k$.

Приклад 28.2. На відрізку $[0,\pi]$ знайдемо розв'язок початкової задачі для частково виродженого КДР

$$y''+\left[1+\tfrac{1}{6}\delta\big(x-\tfrac{\pi}{4}\big)+\tfrac{1}{8}\delta\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big)\right]y=\delta\big(x-\tfrac{\pi}{4}\big)+2\delta\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big), \quad (28.4)$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1. \quad (28.5)$$

▼ Для частково виродженого КДР (28.4) множина носіїв узагальнених коефіцієнтів $\omega^*=\left\{x_1=\frac{\pi}{4},x_2=\frac{\pi}{2}\right\}$, а квазіпохідна функції $y(x)$ збігається зі звичайною похідною: $y^{[1]}(x)=y'(x)$.

Задача (28.4), (28.5) еквівалентна початковій задачі

$$Y'-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\left[1+\frac{1}{6}\delta\big(x-\frac{\pi}{4}\big)+\frac{1}{8}\delta\big(x-\frac{\pi}{2}\big)\right] & 0\end{pmatrix}Y=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ \delta\big(x-\frac{\pi}{4}\big)+2\delta\big(x-\frac{\pi}{2}\big)\end{pmatrix}, \quad (28.6)$$

$$Y_0=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad (28.7)$$

котра є задачею вигляду (22.1), (22.2), де $Y=(y,y')^\top$,

$$A_0=A_1=A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\frac{1}{6} & 0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\frac{1}{8} & 0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$R_0 = R_1 = R_2 = S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Диференціальна система

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y \tag{28.8}$$

є визначальною для системи (28.6).

Покажемо, як можна побудувати фундаментальну матрицю системи (28.8), використовуючи теорему 13.5. Із врахуванням вигляду вектора Y та квазіпохідної $y^{[1]} = y'$, маємо, що ця система рівносильна визначальному КДР для вихідного рівняння (28.4), тобто рівнянню $y''+y = 0$. Оскільки квазіпохідна в сенсі вихідного рівняння співпадає із звичайною похідною, то функцію Коші $\widetilde{K}(x, s)$ цього рівняння можна знайти класичним способом:

$$\widetilde{K}(x, s) = \sin(x-s)$$

Враховуючи вигляд квазіпохідних в сенсі вихідного і спряженого рівнянь, маємо

$$\widetilde{K}^{[1]}(x, s) = \frac{\partial \widetilde{K}(x, s)}{\partial x} = \cos(x-s),$$

$$\widetilde{K}^{\{1\}}(x, s) = -\frac{\partial \widetilde{K}(x, s)}{\partial s} = \cos(x-s),$$

$$\widetilde{K}^{[1]\{1\}}(x, s) = -\frac{\partial^2 \widetilde{K}(x, s)}{\partial x \partial s} = -\sin(x-s),$$

Відтак за теоремою 13.5 фундаментальна матриця визначальної системи на кожному з проміжків $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ і $[0, \pi]$ має вигляд

$$\widetilde{B}_k(x, s) = \begin{pmatrix} \cos(x-s) & \sin(x-s) \\ -\sin(x-s) & \cos(x-s) \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2. \tag{28.9}$$

Запишемо розв'язок задачі (28.6), (28.7) за формулою (28.3):

$$Y(x) = B_0(x,0)Y_0\Theta_0(x) + \big[B_1(x,0)Y_0 + B_1\big(x,\tfrac{\pi}{4}\big)S_1\big]\Theta_1(x) + \\ + \big[B_2(x,0)Y_0 + B_2\big(x,\tfrac{\pi}{4}\big)S_1 + B_2\big(x,\tfrac{\pi}{2}\big)S_2\big]\Theta_2(x). \quad (28.10)$$

Використовуючи вирази (23.4), (23.11) і (28.9), обчислимо необхідні значення фундаментальної матриці:

$$B_0(x,0) = \widetilde{B}_0(x,0) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix},$$

$$B_1\big(x,\tfrac{\pi}{4}\big) = \widetilde{B}_1\big(x,\tfrac{\pi}{4}\big) = \begin{pmatrix} \cos\big(x-\frac{\pi}{4}\big) & \sin\big(x-\frac{\pi}{4}\big) \\ -\sin\big(x-\frac{\pi}{4}\big) & \cos\big(x-\frac{\pi}{4}\big) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x & -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \end{pmatrix},$$

$$B_1(x,0) = \widetilde{B}_1\big(x,\tfrac{\pi}{4}\big)\widetilde{C}_1\widetilde{B}_0\big(\tfrac{\pi}{4},0\big) = \\ = \begin{pmatrix} \cos\big(x-\frac{\pi}{4}\big) & \sin\big(x-\frac{\pi}{4}\big) \\ -\sin\big(x-\frac{\pi}{4}\big) & \cos\big(x-\frac{\pi}{4}\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{13}{12}\cos x - \frac{1}{12}\sin x & \frac{1}{12}\cos x + \frac{11}{12}\sin x \\ -\frac{1}{12}\cos x - \frac{13}{12}\sin x & \frac{11}{12}\cos x - \frac{1}{12}\sin x \end{pmatrix},$$

$$B_2\big(x,\tfrac{\pi}{2}\big) = \widetilde{B}_2\big(x,\tfrac{\pi}{2}\big) = \begin{pmatrix} \cos\big(x-\frac{\pi}{2}\big) & \sin\big(x-\frac{\pi}{2}\big) \\ -\sin\big(x-\frac{\pi}{2}\big) & \cos\big(x-\frac{\pi}{2}\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix},$$

$$B_2\big(x,\tfrac{\pi}{4}\big) = \widetilde{B}_2\big(x,\tfrac{\pi}{2}\big)\widetilde{C}_2\widetilde{B}_1\big(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{4}\big) = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{2}}{16}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x & -\frac{7\sqrt{2}}{16}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{9\sqrt{2}}{16}\sin x & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{7\sqrt{2}}{16}\sin x \end{pmatrix},$$

$$B_2(x,0)=\widetilde{B}_2\big(x,\tfrac{\pi}{2}\big)\widetilde{C}_2\widetilde{B}_1\big(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{4}\big)\widetilde{C}_1\widetilde{B}_0\big(\tfrac{\pi}{4},0\big)=$$

$$=\begin{pmatrix}\sin x & -\cos x\\ \cos x & \sin x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{8} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{6} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{103}{96}\cos x-\frac{1}{12}\sin x & \frac{19}{96}\cos x+\frac{11}{12}\sin x\\ -\frac{1}{12}\cos x-\frac{103}{96}\sin x & \frac{11}{12}\cos x-\frac{19}{96}\sin x\end{pmatrix}.$$

Після підстановки цих матриць в (28.10) маємо розв'язок початкової задачі (28.6), (28.7)

$$Y(x)=\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}\Theta_0(x)+\begin{pmatrix}\frac{1-6\sqrt{2}}{12}\cos x+\frac{11+6\sqrt{2}}{12}\sin x\\ \frac{11+6\sqrt{2}}{12}\cos x-\frac{1-6\sqrt{2}}{12}\sin x\end{pmatrix}\Theta_1(x)+$$

$$+\begin{pmatrix}-\frac{173+42\sqrt{2}}{96}\cos x+\frac{11+6\sqrt{2}}{12}\sin x\\ \frac{11+6\sqrt{2}}{12}\cos x+\frac{173+42\sqrt{2}}{96}\sin x\end{pmatrix}\Theta_2(x).$$

Зрозуміло, що перша координата вектора $Y(x)$ є розв'язком початкової задачі (28.4), (28.5), тобто

$$y(x)=\sin x\,\Theta_0(x)+\Big(\tfrac{1-6\sqrt{2}}{12}\cos x+\tfrac{11+6\sqrt{2}}{12}\sin x\Big)\Theta_1(x)+$$

$$+\Big(-\tfrac{173+42\sqrt{2}}{96}\cos x+\tfrac{11+6\sqrt{2}}{12}\sin x\Big)\Theta_2(x).$$

▲

§ 29. Вироджені квазідиференціальні рівняння

Слідом за частково виродженими КДР розглянемо ще один спеціальний клас квазідиференціальних рівнянь.

Означення 29.1. *Виродженим квазідиференціальним рівнянням* назвемо рівняння вигляду

$$(-1)^m\Big(a_{00}(x)y^{(n)}\Big)^{(m)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m-j}\Big(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\Big)^{(m-j)}= \\ =\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}f_r^{(r+1)}(x) \quad (29.1)$$

з такими припущеннями стосовно його коефіцієнтів і правої частини:

1) $a_{00}(x)=\sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{00}^k(x)\Theta_k(x), a_{00}^k(x)\in C(I_k),\ k=\overline{0,N-1}$;

2) $a_{ij}(x)=\sum\limits_{k=1}^{N}a_{ij}^k\delta(x-x_k),\ a_{ij}^k\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$;

3) $f_r(x)=\sum\limits_{k=1}^{N}f_r^k\Theta_k(x),\ f_r^k\in\mathbb{R},\ r=\overline{0,m-1}$.

На основі формул (15.2) запишемо квазіпохідні, відповідні виродженому КДР (29.1), із врахуванням специфіки його коефіцієнтів:

$$y^{[i]}=y^{(i)},\ i=\overline{0,n-1};\qquad y^{[n]}=a_{00}(x)y^{(n)};$$
$$y^{[n+j]}=-\big(y^{[n+j-1]}\big)'+\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(x)y^{(n-i)}+f'_{m-j}(x),\ j=\overline{1,m}. \quad (29.2)$$

За допомогою цих похідних вироджене КДР (29.1) звичайним чином зводиться до узагальненої диференціальної системи вигляду (28.2), причому матриці C_k і вектори S_k залишаються тими ж, а матриці $A_k(x)$ мають таку структуру:

$$A_k(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (\widetilde{a}_{00}^k(x))^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Лема 29.2. *Функція Коші $\widetilde{K}(x,s)$ рівняння, визначального для КДР* (29.1)*, має вигляд*

$$\widetilde{K}(x,s)=\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{K}_k(x,s)\Theta_k(x), \tag{29.3}$$

де

$$\widetilde{K}_k(x,s)=\frac{(-1)^{m-1}}{(n-1)!(m-1)!}\int\limits_s^x\frac{(x-t)^{n-1}(t-s)^{m-1}}{\widetilde{a}_{00}^k(t)}\,dt,\quad x\in I_k.$$

Доведення. Запишемо КДР, визначальне для (29.1) на інтервалі I_k:

$$\left(\widetilde{a}_{00}^k(x)y^{(n)}\right)^{(m)}=0, \tag{29.4}$$

Спочатку переконаємося, що функція $\widetilde{K}_k(x,s)$ за змінною x задовольняє рівняння (29.4). Застосовуючи n разів формулу диференціювання по параметру [**120**, с. 667], маємо

$$\left(\widetilde{K}_k(x,s)\right)_x^{(n)}=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{\widetilde{a}_{00}^k(x)}.$$

Підставимо знайдене значення у ліву частину рівняння (29.4), тоді

$$\left(\widetilde{a}_{00}^{k}(x)\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{\widetilde{a}_{00}^{k}(x)}\right)^{(m)}=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\Big((x-s)^{m-1}\Big)^{(m)}\equiv 0.$$

Отримана тотожність означає, що функція $\widetilde{K}_k(x,s)$ за змінною x задовольняє КДР (29.4).

Далі покажемо, що функція $\widetilde{K}_k(x,s)$ задовольняє також початкові умови (13.3). Слід наголосити, що КДР (29.4) розглядається не як самостійне рівняння, а як визначальне для квазідиференціального рівняння (29.1). Саме тому квазіпохідні для КДР (29.4) вводяться в контексті квазіпохідних відповідного виродженого КДР, які визначаються за формулами (29.2), а саме для КДР (29.4) квазіпохідні вводимо у такий спосіб:

$$y^{[i]}=y^{(i)},\ \ i=\overline{0,n-1};\qquad y^{[n]}=a_{00}(x)y^{(n)};$$
$$y^{[n+j]}=-\big(y^{[n+j-1]}\big)',\ \ j=\overline{1,m}.$$

Відтак функція $K(x,s)$ як розв'язок рівняння (29.4) має такі квазіпохідні:

$$\Big(\widetilde{K}_k(x,s)\Big)_x^{[i]}=\frac{(-1)^{m-1}}{(n-i-1)!(m-1)!}\int\limits_s^x\frac{(x-t)^{n-i-1}(t-s)^{m-1}}{\widetilde{a}_{00}^{k}(t)}dt,$$
$$i=\overline{1,n-1};$$

$$\Big(\widetilde{K}_k(x,s)\Big)_x^{[n]}=\widetilde{a}_{00}^{k}(x)\Big(\widetilde{K}_k(x,s)\Big)_x^{(n)}(x,s)=$$
$$=\widetilde{a}_{00}^{k}(x)\left(\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{\widetilde{a}_{00}^{k}(x)}\right)=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}(x-s)^{m-1};$$
$$\Big(\widetilde{K}_k(x,s)\Big)_x^{[n+j]}=\frac{(-1)^{m-1+j}}{(m-j-1)!}(x-s)^{m-j-1},\quad j=\overline{1,m-1};$$
$$\Big(\widetilde{K}_k(x,s)\Big)^{[n+m-1]}\equiv 1.$$

Звідси випливає, що

$$\widetilde{K}_k^{[i]}(s,s)=0,\ \ i=\overline{0,q-1},\quad \widetilde{K}_k^{[n+m-1]}(s,s)=1.$$

Таким чином, функція $\widetilde{K}_k(x,s)$ згідно означення 13.2 дійсно є функцією Коші КДР (29.4). ■

Позначимо

$$\mathcal{I}_{ij}(x,s)=\frac{1}{i!j!}\int\limits_s^x\frac{(x-t)^i(t-s)^j}{a_{00}(t)}dt,\quad i=\overline{0,n-1},\ \ j=\overline{0,m-1}.$$

Тоді з теореми 13.5 і леми 29.2 випливає наступне твердження:

Лема 29.3. *Фундаментальна матриця системи, що відповідає однорідному виродженому КДР* (29.1)*, має вигляд*

$$\widetilde{B}(x,s)=\begin{pmatrix}
1 & x-s & \dots & \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} & \mathcal{I}_{n-1,0}(x,s) & \dots & (-1)^{m-1}\mathcal{I}_{n-1,m-1}(x,s)\\
0 & 1 & \dots & \frac{(x-s)^{n-2}}{(n-2)!} & \mathcal{I}_{n-2,0}(x,s) & \dots & (-1)^{m-1}\mathcal{I}_{n-2,m-1}(x,s)\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & 1 & \mathcal{I}_{00}(x,s) & \dots & (-1)^{m-1}\mathcal{I}_{0,m-1}(x,s)\\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & (-1)^{m-1}\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}$$

Приклад 29.4. Знайти розв'язок крайової задачі

$$y^{IV}-\left(\delta\left(x-\tfrac12\right)y'\right)'+2\delta(x-1)y=-5\delta\left(x-\tfrac12\right)+2\delta'(x-1),\quad (29.5)$$

$$y(0)=y'(0)=y''(1)=0,\quad y'''(1)-2\delta\left(\tfrac12\right)y'(1)=2\delta(0),\quad (29.6)$$

яка моделює вимушені поперечні коливання стрижня із зосередженими дисками і масами та з узагальненим зовнішнім навантаженням без врахування розподіленої маси.

▼ Зауважимо, що для цієї задачі множина носіїв узагальнених коефіцієнтів $\omega^* = \{x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1\}$.

Введемо квазіпохідні функції $y(x)$ у такий спосіб:

$$y^{[1]}(x) = y'(x), \quad y^{[2]}(x) = y''(x),$$
$$y^{[3]}(x) = 2\delta(x-1) - y'''(x) + 2\delta\big(x-\tfrac{1}{2}\big)y'.$$

Тоді крайові умови (29.6) можна записати у вигляді

$$y(0) = y^{[1]}(0), \quad y^{[2]}(1) = y^{[3]}(1) = 0. \tag{29.7}$$

За допомогою вектора $Y = \big(y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]}\big)^\top$ задачу (29.5), (29.7) зводимо до крайової задачі

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta\big(x-\frac{1}{2}\big) & 0 & -1 \\ 2\delta(x-1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\eta(x-1) \\ 5\eta\big(x-\frac{1}{2}\big) \end{pmatrix}, \tag{29.8}$$

$$\begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 \end{pmatrix} Y(0) + \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & E_2 \end{pmatrix} Y(1) = 0. \tag{29.9}$$

Остання є задачею вигляду (22.1), (26.1) з коефіцієнтами

$$A_0 = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_0 = R_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \; S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

і крайовими матрицями

$$P = \begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & E_2 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Визначальною системою для (29.8) є система

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y,$$

що еквівалентна диференціальному рівнянню

$$y^{IV} = 0.$$

Функція Коші цього рівняння згідно леми 29.2 матиме вигляд

$$\widetilde{K}(x,s) = -\frac{(x-s)^3}{6}.$$

На основі леми 29.3 побудуємо фундаментальну матрицю визначальної системи:

$$\widetilde{B}(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & x-s & \frac{(x-s)^2}{2} & -\frac{(x-s)^3}{6} \\ 0 & 1 & x-s & -\frac{(x-s)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -(x-s) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо початковий вектор, відповідний крайовій задачі (29.8), (29.9), використовуючи теорему 26.1. Перевіримо виконання умови (26.2). Для цього обчислимо $B(1,0)$. За теоремою 23.2 маємо

$$B(1,0)=\widetilde{C}_2\widetilde{B}\left(1,\frac{1}{2}\right)\widetilde{C}_1\widetilde{B}\left(\frac{1}{2},0\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1-\frac{1}{2}&\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{2}&-\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}{6}\\0&1&1-\frac{1}{2}&-\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{2}\\0&0&1&-\left(1-\frac{1}{2}\right)\\0&0&0&1\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}-0&\frac{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}{2}&-\frac{\left(\frac{1}{2}-0\right)^3}{6}\\0&1&\frac{1}{2}-0&-\frac{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}{2}\\0&0&1&-\left(\frac{1}{2}-0\right)\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{9}{8}&\frac{9}{16}&-\frac{35}{192}\\0&\frac{3}{2}&\frac{5}{4}&-\frac{9}{16}\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{9}{8}\\2&\frac{9}{4}&\frac{9}{8}&\frac{61}{96}\end{pmatrix}.$$

Перевіримо виконання умови (26.2):

$$P+QB(1,0)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{9}{8}&\frac{9}{16}&-\frac{35}{192}\\0&\frac{3}{2}&\frac{5}{4}&-\frac{9}{16}\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{9}{8}\\2&\frac{9}{4}&\frac{9}{8}&\frac{61}{96}\end{pmatrix}.$$

Звідки

$$\det\bigl(P+QB(1,0)\bigr)=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{9}{8}\\2&\frac{9}{4}&\frac{9}{8}&\frac{61}{96}\end{vmatrix}=\frac{71}{32}\neq 0.$$

Шукатимемо початковий вектор, відповідний крайовій задачі (29.8), (29.9), за формулою (26.3):

$$Y_0=(P+QB(1,0))^{-1}\left[-Q\left(B_2(1,1)Z_2+B_2\left(1,\frac{1}{2}\right)Z_1\right)\right].$$

За формулами (24.2) маємо $Z_2 = S_2$, $Z_1 = S_1$. Згідно наслідку 23.5 обчислимо $B_2\left(1, \frac{1}{2}\right) = \widetilde{C}_2 \widetilde{B}\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Тоді

$$Y_0 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{8} \\ 2 & \frac{9}{4} & \frac{9}{8} & \frac{61}{96} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2} & \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{2} & -\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}{6} \\ 0 & 1 & 1-\frac{1}{2} & -\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\left(1-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right].$$

Обчислиши, отримаємо:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{487}{213} \\ -\frac{248}{71} \end{pmatrix}.$$

Потрібно зауважити, що ми отримали вектор, перші дві компоненти якого задовольняють крайову умову $y(0) = y^{[1]}(0) = 0$. На практиці це дає можливість впевнитися у правильності розрахунків.

Записавши розв'язок задачі (29.8), (29.9) згідно теореми 25.1 і виписавши перший рядок, отримаємо розв'язок крайової задачі (29.5), (29.6).

На проміжку $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ маємо

$$Y_0(x)=\widetilde{B}(x,0)Y_0=\begin{pmatrix}1 & x-0 & \frac{(x-0)^2}{2} & -\frac{(x-0)^3}{6}\\ 0 & 1 & x-0 & -\frac{(x-0)^2}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -(x-0)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{487}{213}\\-\frac{248}{71}\end{pmatrix},$$

звідки

$$Y_0(x)=\begin{pmatrix}\frac{124}{213}x^3-\frac{487}{426}x^2\\ \frac{124}{71}x^2-\frac{487}{213}x\\ \frac{248}{71}x-\frac{487}{213}\\ -\frac{248}{71}\end{pmatrix}.$$

Якщо $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$, то

$$Y_1(x)=\widetilde{B}\left(x,\frac{1}{2}\right)\left(\widetilde{C}_1Y_0\left(\frac{1}{2}-0\right)+S_1\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & x-\frac{1}{2} & \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2} & -\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}{6}\\ 0 & 1 & x-\frac{1}{2} & -\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\left(x-\frac{1}{2}\right)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{124}{213}\cdot\frac{1}{8}-\frac{487}{426}\cdot\frac{1}{4}\\ \frac{124}{71}\cdot\frac{1}{4}-\frac{487}{213}\cdot\frac{1}{2}\\ \frac{248}{71}\cdot\frac{1}{2}-\frac{487}{213}\\ -\frac{248}{71}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\5\end{pmatrix}\right],$$

звідки в результаті обчислень отримаємо

$$Y_1(x)=\begin{pmatrix}-\frac{107}{426}x^3-\frac{35}{142}x^2-\frac{463}{1704}x+\frac{9}{568}\\ -\frac{107}{142}x^2-\frac{355}{71}x-\frac{463}{1704}\\ -\frac{107}{71}x-\frac{35}{71}\\ \frac{107}{71}\end{pmatrix}.$$

Оскільки точка $x=1$ належить множині ω^*, то розв'язок задачі (29.8), (29.9) потрібно шукати в цій точці окремо. Щоб записати розв'язок крайової задачі (29.5), (29.6) для рівняння, можна скористатися лише властивістю неперервності цього розв'язку.

Для наглядності запишемо розв'язок крайової задачі (29.8), (29.9) для системи в точці $x=1$:

$$Y_2(1)=\widetilde{C}_2Y_1(1-0)+S_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{107}{426}-\frac{35}{142}-\frac{463}{1704}+\frac{9}{568}\\-\frac{107}{142}-\frac{355}{71}-\frac{463}{1704}\\-\frac{107}{71}-\frac{35}{71}\\\frac{107}{71}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$Y_2(1)=\begin{pmatrix}-\frac{107}{142}\\-\frac{2587}{1704}\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Аналогічно, як і для початкового вектора, на правильність розрахунків вказує те, що дві останні компоненти вектора $Y_2(1)$ задовольняють крайову умову $y^{[2]}(1)=y^{[3]}(1)=0$.

Таким чином, розв'язок вихідної задачі (29.5), (29.6) можна записати у вигляді

$$y(x)=\left(\frac{124}{213}x^3-\frac{487}{426}x^2\right)\Theta_0(x)+\\+\left(-\frac{107}{426}x^3-\frac{35}{142}x^2-\frac{463}{1704}x+\frac{9}{568}\right)\Theta_1(x),$$

де $\Theta_0(x),\Theta_1(x)$ — характеристичні функції інтервалів $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ та $\left[\frac{1}{2},1\right]$ відповідно. Зауважимо, що правий кінець інтервалу для функції $\Theta_1(x)$ можна включити, враховуючи неперервність функції $y(x)$ в цій точці. ▲

5

Наближене розв'язування узагальнених квазідиференціальних рівнянь

§ 30. Точне рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння другого порядку

Розглянемо початкову задачу

$$(a_{00}(x)y')' + (a_{10}(x)y)' - a_{01}(x)y' - a_{11}(x)y = f'(x), \qquad (30.1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (a_{00}y' + a_{10}y)\Big|_{x=x_0} = y_0^1, \quad x_0 \in I, \qquad (30.2)$$

вважаючи, що коефіцієнти КДР (30.1) задовольняють такі припущення:

(I) $a_{00}^{-1}(x)$ — обмежена і вимірна на I функція;

(II) $a_{10}, a_{01} \in L_2(I)$;

(III) $a_{11}(x) = \alpha_{11}'(x)$, де функція $\alpha_{11}(x)$ належить $BV_{loc}^{+}(I)$ і має розриви першого роду у скінченній кількості точок;

(IV) $f(x) \in BV_{loc}^{+}(I)$.

Введемо довільним чином сітку

$$\omega_\nu = \{x_k \in I,\ k = \overline{0,\nu} \,:\, x_0 < x_1 < \ldots < x_\nu\}. \qquad (30.3)$$

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що множина ω^* носіїв узагальненого коефіцієнта $a_{11}(x)$ міститься у множині ω_ν, бо інакше до останньої можна приєднати точки з ω^* і впорядкувати вузли новоутвореної сітки за зростанням.

Побудуємо деяке триточкове рекурентне співвідношення (тричленну рекурентну формулу) для початкової задачі (30.1), (30.2):

$$\alpha_k u(x_{k+1}) + \beta_k u(x_k) + \gamma_k u(x_{k-1}) = \eta_k, \quad k = \overline{1, \nu-1}, \tag{30.4}$$

$$u(x_0) = \varphi, \quad u(x_1) = \psi, \tag{30.5}$$

де $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \eta_k$ — деякі фунукціонали на просторі $BV^+_{loc}(I)$, а φ, ψ — деякі сіткові[1)] функції.

Означення 30.1. *Точним рекурентним співвідношенням* (ТРС), або *еквівалентною рекурентною формулою*, для початкової задачі (30.1), (30.2) називаємо співвідношення вигляду (30.4), (30.5), для яких справджуються умови:

1) $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \eta_k$ — функціонали від коефіцієнтів рівняння (30.1), причому η_k — лінійний відносно $f(x)$ функціонал;
2) $u(x) = y(x)$, $x \in \omega_\nu$, де $y(x)$ — розв'язок початкової задачі (30.1), (30.2), а $u(x)$ — розв'язок задачі (30.4), (30.5).

Подамо функцію $\alpha_{11}(x) \in BV^+_{loc}(I)$ у вигляді суми неперервної $\alpha^c_{11}(x)$ та дискретної $\alpha^d_{11}(x) = \sum\limits_{y \leqslant x} \Delta\alpha_{11}(y)$, $y \in \omega^*$ складових, тобто $\alpha_{11}(x) = \alpha^c_{11}(x) + \alpha^d_{11}(x)$.

Через $\widetilde{K}(x, s)$ позначимо функцію Коші КДР

$$(a_{00}(x)y')' + (a_{10}(x)y)' - a_{01}y' - (\alpha^c_{11})'\, y = 0, \tag{30.6}$$

[1)] *Сітковою* функцією називають функцію, визначену у вузлах сітки [**118**, с. 67].

визначального для рівняння (30.1). Позначимо

$$M_k = \begin{cases} \Delta\alpha_{11}(x_k), & x_k \in \omega^*; \\ 0, & x_k \in \omega_\nu \backslash \omega^*. \end{cases} \tag{30.7}$$

Виберемо будь-які три послідовні вузли $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ сітки ω_ν. При цьому, як було обумовлено вище, на інтервалі (x_{k-1}, x_{k+1}) немає розривів функції $\alpha_{11}(x)$, окрім хіба що точки x_k.

Теорема 30.2. *За умов (I)–(IV) точне рекурентне співвідношення для початкової задачі* (30.1), (30.2) *має вигляд*

$$\frac{1}{\widetilde{K}_{k+1,k}} u_{k+1} - \left(M_k + \frac{\widetilde{K}^{\{1\}}_{k+1,k}}{\widetilde{K}_{k+1,k}} + \frac{\widetilde{K}^{[1]}_{k,k-1}}{\widetilde{K}_{k,k-1}} \right) u_k + \\ + \left(\frac{\widetilde{K}^{[1]}_{k,k-1} \widetilde{K}^{\{1\}}_{k,k-1}}{\widetilde{K}_{k,k-1}} - \widetilde{K}^{[1]\{1\}}_{k,k-1} \right) u_{k-1} = \\ = \frac{1}{\widetilde{K}_{k+1,k}} \mathcal{I}_{k,k+1} - \frac{\widetilde{K}^{[1]}_{k,k-1}}{\widetilde{K}_{k,k-1}} \mathcal{I}_{k-1,k} + \mathcal{I}^{[1]}_{k-1,k}, \quad k = \overline{1, \nu-1}, \tag{30.8}$$

$$u_0 = y_0, \quad u_1 = \widetilde{K}^{\{1\}}_{1,0} y_0 + \widetilde{K}_{1,0} y^1_0 + \mathcal{I}_{0,1}, \tag{30.9}$$

де

$$u_k = u(x_k),$$

$$\widetilde{K}^{[i]\{j\}}_{k,k-1} = \widetilde{K}^{[i]\{j\}}(x_k - 0, x_{k-1}), \quad i, j \in \{0, 1\}, \tag{30.10}$$

$$\mathcal{I}^{[i]}_{k-1,k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{K}^{[i]}(x_k - 0, t) df(t), \qquad i \in \{0, 1\}. \tag{30.11}$$

Доведення. За допомогою вектора $Y = \left(y, y^{[1]}\right)^\top$, де квазіпохідна $y^{[1]} = a_{00}(x)y' + a_{10}(x)y$, початкова задача (30.1), (30.2)

зводиться до задачі вигляду (7.8), (7.9):

$$Y'=\begin{pmatrix} -a_{00}^{-1}(x)a_{10}(x) & a_{00}^{-1}(x) \\ a_{11}(x)-a_{01}(x)a_{00}^{-1}(x)a_{10}(x) & a_{01}(x)a_{00}^{-1}(x) \end{pmatrix} Y+\begin{pmatrix} 0 \\ f'(x) \end{pmatrix}, \quad (30.12)$$

$$Y(x_0) = \left(y_0, y_0^1\right)^\top.$$

Нехай $B(x,s)$ — фундаментальна матриця однорідної $(f(x)\equiv 0)$ диференціальної системи (30.12). Тоді справджується формула Коші (8.2), поклавши в якій $x=x_k$, $s=x_{k-1}$, отримаємо

$$Y(x_k) = B(x_k, x_{k-1})Y(x_{k-1}) + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} B(x_k, s)dF(s). \quad (30.13)$$

За властивістю (d) фундаментальної матриці (див. теор. 3.2):

$$B(x_k, x_{k-1}) = \left[E + \Delta C(x_k)\right] B(x_k-0, x_{k-1}) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ M_k & 1 \end{pmatrix} \widetilde{B}(x_k-0, x_{k-1}), \quad (30.14)$$

де $\widetilde{B}(x,s)$ — фундаментальна матриця визначальної для (30.12) системи, тобто системи, еквівалентної рівнянню (30.6). Якщо врахувати структуру (13.7) цієї матриці, то в позначеннях (30.10) рівність (30.14) запишеться у вигляді

$$B(x_k, x_{k-1})=\begin{pmatrix} \widetilde{K}_{k,k-1}^{\{1\}} & \widetilde{K}_{k,k-1} \\ \widetilde{K}_{k,k-1}^{\{1\}[1]} + M_k\widetilde{K}_{k,k-1}^{\{1\}} & \widetilde{K}_{k,k-1}^{[1]} + M_k\widetilde{K}_{k,k-1} \end{pmatrix}. \quad (30.15)$$

Нехай $y_k = y(x_k)$. Підставляючи (30.15) у формулу (30.13) і записуючи останню покоординатно, отримаємо, врахувавши позначення (30.11), рекурентні співвідношення

$$y_k = \widetilde{K}_{k,k-1}^{\{1\}}y_{k-1} + \widetilde{K}_{k,k-1}y_{k-1}^{[1]} + \mathcal{I}_{k-1,k}, \quad (30.16)$$

$$y_k^{[1]} = \left(\widetilde{K}_{k,k-1}^{\{1\}[1]} + M_k \widetilde{K}_{k,k-1}^{\{1\}}\right) y_{k-1} + \left(\widetilde{K}_{k,k-1}^{[1]} + M_k \widetilde{K}_{k,k-1}\right) y_{k-1}^{[1]} + \\ + \mathcal{I}_{k-1,k}^{[1]} + M_k \mathcal{I}_{k-1,k} \quad (30.17)$$

для $k = \overline{1,\nu}$. Зі співвідношення (30.16) знаходимо

$$y_{k-1}^{[1]} = \frac{y_k - \widetilde{K}_{k,k-1}^{\{1\}} y_{k-1} - \mathcal{I}_{k-1,k}}{\widetilde{K}_{k,k-1}}, \quad k = \overline{1,\nu}. \quad (30.18)$$

Далі, замінюючи k на $k+1$, маємо також

$$y_k^{[1]} = \frac{y_{k+1} - \widetilde{K}_{k+1,k}^{\{1\}} y_k - \mathcal{I}_{k,k+1}}{\widetilde{K}_{k+1,k}}, \quad k = \overline{0,\nu-1}. \quad (30.19)$$

В результаті підстановки виразів (30.18) і (30.19) у рівність (30.17), отримаємо для $k = \overline{1,\nu-1}$ співвідношення

$$\frac{y_{k+1} - \widetilde{K}_{k+1,k}^{\{1\}} y_k - \mathcal{I}_{k,k+1}}{\widetilde{K}_{k+1,k}} = \left(\widetilde{K}_{k,k-1}^{\{1\}[1]} + M_k \widetilde{K}_{k,k-1}^{\{1\}}\right) y_{k-1} + \\ + \left(\widetilde{K}_{k,k-1}^{[1]} + M_k \widetilde{K}_{k,k-1}\right) \frac{y_k - \widetilde{K}_{k,k-1}^{\{1\}} y_{k-1} - \mathcal{I}_{k-1,k}}{\widetilde{K}_{k,k-1}} + \mathcal{I}_{k-1,k}^{[1]} + M_k \mathcal{I}_{k-1,k}.$$

В позначеннях

$$u_k = y_k, \quad \alpha_k = \frac{1}{\widetilde{K}_{k+1,k}}, \quad \beta_k = -M_k - \frac{\widetilde{K}_{k+1,k}^{\{1\}}}{\widetilde{K}_{k+1,k}} - \frac{\widetilde{K}_{k,k-1}^{[1]}}{\widetilde{K}_{k,k-1}},$$

$$\gamma_k = \frac{\widetilde{K}_{k,k-1}^{[1]} \widetilde{K}_{k,k-1}^{\{1\}}}{\widetilde{K}_{k,k-1}} - \widetilde{K}_{k,k-1}^{[1]\{1\}}, \quad \eta_k = \frac{\mathcal{I}_{k,k+1}}{\widetilde{K}_{k+1,k}} - \frac{\widetilde{K}_{k,k-1}^{[1]}}{\widetilde{K}_{k,k-1}} \mathcal{I}_{k-1,k} + \mathcal{I}_{k-1,k}^{[1]}$$

маємо триточкове рекурентне співвідношення вигляду (30.4). Позаяк функція Коші $\widetilde{K}(x,s)$ залежить від коефіцієнтів рівняння (30.1), то $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \eta_k$ — функціонали від цих коефіцієнтів, причому η_k залежить лінійно від функції $f(x)$. Початкові умови (30.9) легко отримати, якщо врахувати початкові умови (30.2) і співвідношення (30.16). Відтак на підставі означення 30.1 отри-

мане рекурентне співвідношення є точним для задачі (30.1), (30.2), що й треба було довести. ■

Наслідок 30.3. *ТРС для однорідної* $(f(x)\equiv 0)$ *початкової задачі* (30.1), (30.2) *має вигляд*

$$\frac{1}{\widetilde{K}_{k+1,k}}u_{k+1}-\left(M_k+\frac{\widetilde{K}^{\{1\}}_{k+1,k}}{\widetilde{K}_{k+1,k}}+\frac{\widetilde{K}^{[1]}_{k+1,k}}{\widetilde{K}_{k,k-1}}\right)u_k+$$
$$+\left(\frac{\widetilde{K}^{[1]}_{k,k-1}\widetilde{K}^{\{1\}}_{k,k-1}}{\widetilde{K}_{k,k-1}}-\widetilde{K}^{[1]\{1\}}_{k,k-1}\right)u_{k-1}=0,\ k=\overline{1,\nu-1}, \quad (30.20)$$

$$u_0=y_0,\quad u_1=\widetilde{K}^{\{1\}}_{1,0}y_0+\widetilde{K}_{1,0}y^1_0. \quad (30.21)$$

Зауваження 30.4. Якщо (30.1) є КДР із кусково-неперервними коефіцієнтами і δ-особливостями (див. §27), тобто має вигляд (27.1) при $n=m=1$, то у виразах (30.10), (30.11) $\widetilde{K}^{[i]\{j\}}(x_k-0,x_{k-1})=\widetilde{K}^{[i]\{j\}}_{k-1}(x_k,x_{k-1})$, де $\widetilde{K}_{k-1}(x_k,x_{k-1})$ — функція Коші визначального для (30.1) КДР на інтервалі $[x_{k-1},x_k)$, а $\widetilde{K}^{[i]\{j\}}_{k-1}(x_k,x_{k-1})$ — її мішані квазіпохідні.

Зауваження 30.5. Позаяк $u_k=u(x_k)=y(x_k)=y_k$, то всюди далі в ТРС будемо писати y_k замість u_k, бо це, фактично, і є значення розв'язку вихідної початкової задачі в точці x_k.

Приклад 30.6. Побудуємо ТРС для таких задач:

$$y''+\sum_{j=1}^{N}c_j\delta(x-x^*_j)y=c_0e^x,\quad y(a)=0,\ y'(a)=1; \quad (30.22)$$

$$\left(\sqrt{1+x}y'\right)'+\sum_{j=1}^{N}c_j\delta(x-x^*_j)y=0,\quad y(a)=1,\ y'(a)=0, \quad (30.23)$$

де $N\in\mathbb{N}$, $c_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,N}$, $x^*_j\in(a,b]$, $a\geqslant -1$, $c_0\in\mathbb{R}$.

▼ Введемо сітку $\omega_\nu = \{x_k \in [a,b] : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_\nu = b\}$ так, щоб $x_j^* \in \omega_\nu$. Виберемо будь-які три послідовні вузли сітки $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ і побудуємо ТРС вигляду (30.8), (30.9).

Для обох початкових задач за формулою (30.7) знаходимо

$$M_k = \begin{cases} -c_j, & x_k = x_j^*; \\ 0, & x_k \neq x_j^*, \end{cases} \qquad k = \overline{0,\nu},\ j = \overline{1,N}. \tag{30.24}$$

Спершу для задачі (30.22) обчислимо функцію Коші визначального рівняння $y'' = 0$ та її мішані квазіпохідні. Для цього використаємо теорему 14.1. Відзначимо, що для визначального рівняння квазіпохідна $y^{[1]}(x)$ співпадає зі звичайною похідною $y'(x)$, а ФСР утворюють функції $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$. Обчислимо (квазі)вронскіан розв'язків

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді за формулою (14.1) маємо

$$\widetilde{K}(x,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s \\ 1 & x \end{vmatrix} = x - s$$

Зауважимо, що ідентичний вираз для функції Коші можна отримати, якщо скористатися лемою 29.2.

За тією ж формулою (14.1) знаходимо

$$\widetilde{K}^{[1]}(x,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\widetilde{K}^{\{1\}}(x,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\widetilde{K}^{[1]\{1\}}(x,s)=\frac{1}{W(s)}\begin{vmatrix}\varphi_1'(x) & \varphi_2'(x)\\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Далі за формулою (30.11) обчислюємо

$$I_{k-1,k}=\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k-t)\,d(c_0e^t)=c_0\big[e^{x_k}-(1+h_k)e^{x_{k-1}}\big],$$

$$I_{k,k+1}=c_0\big[e^{x_{k+1}}-(1+h_{k+1})e^{x_k}\big],$$

$$I^{[1]}_{k-1,k}=\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}1\,d(c_0e^t)=c_0\big[e^{x_k}-e^{x_{k-1}}\big],$$

де $h_k=x_k-x_{k-1},\ k=\overline{1,\nu}$.

Початкові значення y_0,y_1 для ТРС знаходимо, скориставшись формулами (30.21):

$$y_0=y(a)=0;\quad y_1=\widetilde{K}^{\{1\}}(x_1,a)y(a)+\widetilde{K}(x_1,a)y'(a)=x_1-a.$$

Відтак ТРС (30.8), (30.9) для задачі (30.22) набуде вигляду

$$y_{k+1}-\left[M_kh_{k+1}+\frac{h_{k+1}+h_k}{h_k}\right]y_k+\frac{h_{k+1}}{h_k}y_{k-1}=$$

$$=c_0\left[e^{x_{k+1}}-\frac{h_{k+1}+h_k}{h_k}e^{x_k}+\frac{h_{k+1}}{h_k}e^{x_{k-1}}\right],\quad k=\overline{1,\nu-1},$$

$$y_0=0,\quad y_1=x_1-a.$$

Якщо носії узагальненого коефіцієнта КДР в задачі (30.22) розміщені так, що на відрізку $[a,b]$ вдається ввести рівномірну сітку $\omega_\nu=\{x_k=kh,\ k=\overline{0,\nu}\}$ з кроком $h=x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{\nu}$, то в такому разі $h_1=h_2=\ldots=h_\nu=h$ і ТРС матиме вигляд

$$y_{k+1}-(2+M_kh)y_k+y_{k-1}=c_0\big[e^{x_{k+1}}-2e^{x_k}+e^{x_{k-1}}\big],\qquad(30.25)$$

$$y_0=0,\quad y_1=h,$$

де $k=\overline{1,\nu-1}$. Зокрема, у випадку, коли ω^* збігається з множиною внутрішніх вузлів рівномірної сітки ω_ν, $c_0=0$, а c_j рівні λh $(\lambda\in\mathbb{R},\ j=\overline{1,\nu})$, співвідношення (30.25) співпадає зі скінченно-різницевим рівнянням

$$y_{k+1}-(2-\lambda h^2)y_k+y_{k-1}=0\ ,\quad k=\overline{1,\nu-1},$$

котре є класичною різницевою апроксимацією (другого порядку) на триточковому шаблоні x_k-h, x_k, x_k+h звичайного диференціального рівняння $y''+\lambda y=0$ [**118**, с. 112].

Для задачі (30.23) функцію Коші визначального рівняння

$$\left(\sqrt{1+x}y'\right)'=0 \tag{30.26}$$

та її мішані квазіпохідні (квазіпохідна функції $y(x)$ в сенсі рівняння (30.26) визначається тепер виразом $y^{[1]}=\sqrt{1+x}y'$) обчислюємо за аналогією. Пропонуємо читачеві самостійно переконатися, що

$$\widetilde{K}(x,s)=2\big(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+s}\big),$$
$$\widetilde{K}^{[1]}(x,s)=\widetilde{K}^{\{1\}}(x,s)=1,\quad \widetilde{K}^{[1]\{1\}}(x,s)=0.$$

З вигляду квазіпохідної $y^{[1]}(x)$ випливає, що для задачі (30.23) друга початкова умова $y'(a)=0$ еквівалентна умові $y^{[1]}(a)=0$. Отже, ТРС (30.20), (30.21) для задачі (30.23) матиме вигляд

$$y_{k+1}-\left[2M_k\big(\sqrt{1+x_{k+1}}-\sqrt{1+x_k}\big)+\frac{\sqrt{1+x_{k+1}}-\sqrt{1+x_{k-1}}}{\sqrt{1+x_k}-\sqrt{1+x_{k-1}}}\right]y_k+$$
$$+\frac{\sqrt{1+x_{k+1}}-\sqrt{1+x_k}}{\sqrt{1+x_k}-\sqrt{1+x_{k-1}}}y_{k-1}=0\ \big(k=\overline{1,\nu-1}\big),\quad y_0=y_1=1.$$

▲

Приклад 30.7. Обчислимо значення $y(e)$ розв'язку початкової задачі

$$(a_0(x)y')' + 2\delta(x-2)y = 0, \tag{30.27}$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 3, \tag{30.28}$$

де $a_0 = \begin{cases} 1, & x \in [1,2); \\ x, & x \in [2,e]. \end{cases}$

▼ *Перший спосіб.* Обчислимо значення $y(e)$, побудувавши ТРС для задачі (30.27), (30.28). Для узагальненого КДР (30.27) множина носіїв $\omega^* = \{x_1^* = 2\}$. Побудуємо сітку

$$\omega_2 = \{x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = e\}.$$

Обчислимо функцію Коші визначального для (30.27) КДР

$$\left(a_0(x)y'\right)' = 0$$

та її мішані квазіпохідні.

На початковому проміжку $x \in [1,2)$ маємо визначальне рівняння $y'' = 0$, функція Коші якого та її мішані квазіпохідні знайдені у попередньому прикладі і мають вигляд

$$\widetilde{K}_0(x,s) = x - s, \ \widetilde{K}_0^{[1]}(x,s) = \widetilde{K}_0^{\{1\}}(x,s) = 1, \ \widetilde{K}_0^{[1]\{1\}}(x,s) = 0.$$

На проміжку $[2,e]$ визначальне рівняння має вигляд:

$$(xy')' = 0. \tag{30.29}$$

Позаяк це рівняння є виродженим КДР, то його функцію Коші легко обчислити на підставі леми 29.2, використовуючи формулу (29.3) при $k = m = n = 1$, $\widetilde{a}_{00}^k(x) = x$:

$$\widetilde{K}_1(x,s) = \int_s^x \frac{dt}{t} = \ln\frac{x}{s}.$$

Якщо далі врахувати, що квазіпохідна в сенсі вихідного рівняння (30.27), а відтак і визначального рівняння (30.29), обчислюється за формулою $y^{[1]}=xy'$, а функції $\varphi_1(x)=1$, $\varphi_2(x)=\ln x$ утворюють ФСР рівняння (30.29), то за формулою (14.1) можна знайти

$$\widetilde{K}_1^{[1]}(x,s)=\widetilde{K}_1^{\{1\}}(x,s)=1,\quad \widetilde{K}_1^{[1]\{1\}}(x,s)=0.$$

Таким чином, для довільного $s\in[1,e]$ маємо

$$\widetilde{K}(x,s)=\begin{cases}x-s, & x\in[1,2);\\ \ln\frac{x}{s}, & x\in[2,e],\end{cases} \tag{30.30}$$

$$\widetilde{K}^{[1]}(x,s)=\widetilde{K}^{\{1\}}(x,s)=1,\quad \widetilde{K}^{[1]\{1\}}(x,s)=0. \tag{30.31}$$

Очевидно, для задачі (30.27), (30.28) друга початкова умова $y'(1)=3$ еквівалентна умові $y^{[1]}(1)=3$, а $M_1=-2$. Тому, враховуючи зауваження 30.4, ТРС (30.20), (30.21) для цієї задачі матиме вигляд

$$\frac{1}{\ln\frac{e}{2}}y_2+\left(1-\frac{1}{\ln\frac{e}{2}}\right)y_1+y_0=0,\quad y_0=0,\ y_1=3,$$

звідки легко обчислити $y(e)=y_2=3\ln\frac{e}{2}\left(\frac{1}{\ln\frac{e}{2}}-1\right)=3\ln 2$.

Другий спосіб. Знайдемо розв'язок задачі (30.27), (30.28), використовуючи теорему 25.1. За допомогою вектора $Y=\left(y,y^{[1]}\right)^\top$ зводимо вихідну задачу до вигляду (22.1), (22.2):

$$Y'=\begin{pmatrix}0 & \Theta_0(x)+\frac{1}{x}\Theta_1(x)\\ -2\delta(x-2) & 0\end{pmatrix}Y, \tag{30.32}$$

$$Y(1)=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \tag{30.33}$$

де $\Theta_0(x), \Theta_1(x)$ — характеристичні функції проміжків $[1,2)$ та $[2,e]$ відповідно. Для цієї задачі маємо

$$A_0(x)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ A_1(x)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{x}\\0&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}0&0\\-2&0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$R_0(x)=R_1(x)=S_1=S_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

На основі виразів (30.30), (30.31), отриманих для функції Коші $\widetilde{K}(x,s)$ та її мішаних квазіпохідних, знаходимо фундаментальні матриці визначальної для (30.32) системи $Y'=A_k(x)Y$ на кожному з проміжків:

$$\widetilde{B}_0(x,s)=\begin{pmatrix}1&x-s\\0&1\end{pmatrix},\quad \widetilde{B}_1(x,s)=\begin{pmatrix}1&\ln\frac{x}{s}\\0&1\end{pmatrix}$$

Відтак для знаходження розв'язку задачі (30.32), (30.33) скористаємося рекурентними формулами (25.1)–(25.3).

На проміжку $x\in[1,2)$ розв'язок матиме вигляд

$$Y_0(x)=\widetilde{B}_0(x,1)Y_0=\begin{pmatrix}1&x-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-3\\3\end{pmatrix}.$$

При $x\in[2,e]$ отримаємо

$$Y_1(x)=\widetilde{B}_1(x,2)\widetilde{C}_0Y_0(2-0)=$$
$$=\begin{pmatrix}1&\ln\frac{x}{2}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\cdot2-3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-3\ln\frac{x}{2}\\-3\end{pmatrix},$$

звідки $y(e)=y_1(e)=3-3\ln\frac{e}{2}=3\ln 2$. ▲

§ 31. Точне рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння довільного порядку

Розглянемо початкову задачу для КДР порядку $q\ (=m+n)$:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\big(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\big)^{(m-j)}=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}f_k^{(k+1)}(x), \quad (31.1)$$

$$y^{[r]}(x_0)=y_0^r, \quad r=\overline{0,q-1}, \quad x_0\in I, \quad (31.2)$$

де коефіцієнти $a_{ij}(x)$ і $f_k(x)$ задовольняють вказані в §10 і §15 припущення (I)–(IV), а квазіпохідні $y^{[r]}(x)$ визначаються виразами (15.2).

Введемо сітку ω_ν вигляду (30.3) і побудуємо для початкової задачі (31.1), (31.2) деяке $(q+1)$-точкове рекурентне співвідношення

$$\alpha_k^0u(x_k)+\alpha_k^1u(x_{k+1})+\ldots+\alpha_k^qu(x_{k+q})=\eta_k, \quad k=\overline{0,\nu-q}, \quad (31.3)$$

$$u(x_0)=\varphi_0,\ u(x_1)=\varphi_1,\ \ldots\ ,\ u(x_{q-1})=\varphi_{q-1}, \quad (31.4)$$

де $\alpha_k^i,\ i=\overline{0,q}$, η_k — деякі фунукціонали на просторі $BV_{loc}^+(I)$, а $\varphi_j,\ j=\overline{0,q-1}$, — деякі сіткові функції.

Означення 31.1. Співвідношення вигляду (31.3), (31.4) назвемо *точним рекурентним співвідношенням* (ТРС), або еквівалентною рекурентною формулою для початкової задачі (31.1), (31.2), якщо справджуються наступні умови:

1) $\alpha_k^j,\ j=\overline{0,q}$, η_k — функціонали від коефіцієнтів рівняння (31.1);

2) $u(x)=y(x),\ x\in\omega_\nu$, де $y(x)$ — точний розв'язок початкової задачі (31.1), (31.2), а $u(x)$ — розв'язок задачі (31.3), (31.2).

Введемо такі позначення:

$$\beta_{p,r}^{ij} = K^{[i-1]\{q-j\}}(x_p, x_r),\ i,j = \overline{1,q},\ x_p, x_r \in I;$$

$$\beta_{p,r}^{i0} = \sum_{j=k+1}^{q} \int_{x_p}^{x_r} K^{[i-1]\{q-j\}}(x,t)df_{q-j}(t). \tag{31.5}$$

Теорема 31.2. *Нехай справджуються умови (I)–(IV). Тоді для початкової задачі* (31.1), (31.2) *існує єдине ТРС, яке має вигляд:*

$$\Delta_k^0 \cdot u_k + \Delta_k^1 \cdot u_{k+1} + \ldots + \Delta_k^q \cdot u_{k+q} = \Delta_k^{q+1}, \tag{31.6}$$

$$y_0 = y_0^0, \quad y_s = \sum_{j=1}^{q} \beta_{s0}^{1j} y_0^{j-1} + \beta_{0s}^{10} \ \ (s = \overline{1,q}), \tag{31.7}$$

де $u_j = u(x_j)$,

$$\Delta_k^0 = \begin{vmatrix} \beta_{k+1,k}^{11} & \beta_{k+1,k}^{12} & \ldots & \beta_{k+1,k}^{1,q} \\ \beta_{k+2,k}^{11} & \beta_{k+2,k}^{12} & \ldots & \beta_{k+2,k}^{1,q} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \beta_{k+q,k}^{11} & \beta_{k+q,k}^{12} & \ldots & \beta_{k+q,k}^{1,q} \end{vmatrix}, \tag{31.8}$$

$$\Delta_k^{q+1} = -\begin{vmatrix} \beta_{k,k+1}^{10} & \beta_{k+1,k}^{12} & \ldots & \beta_{k+1,k}^{1q} \\ \beta_{k,k+2}^{10} & \beta_{k+2,k}^{12} & \ldots & \beta_{k+2,k}^{1q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k,k+q}^{10} & \beta_{k+q,k}^{12} & \ldots & \beta_{k+q,k}^{1q} \end{vmatrix}, \tag{31.9}$$

а Δ_k^i, $i = \overline{1,q}$, *— взяті з протилежним знаком алгебраїчні доповнення до елементів першого стовпця визначника* Δ_k^0.

Доведення. За допомогою вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[q-1]}\right)^\top$ із квазіпохідних (15.2) початкову задачу (31.1), (31.2) зведемо до початкової задачі (7.8), (7.9), де матриця-міра $C'(x)$ визначена на с. 88, $F'(x)$ має вигляд (15.4), а $Y_0 = \left(y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{q-1}\right)^\top$. Розв'язок останньої задачі допускає зображення у формі Коші

(див. (15.13) або (8.4)):

$$Y(x) = B(x, x_0)Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} B(x, t)dF(t).$$

Виберемо будь-які $q+1$ послідовних вузлів сітки ω_ν:

$$x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{k+s-1} < x_{k+s} < \ldots < x_{k+q}.$$

Поклавши у формулі Коші $x = x_{k+s}$, $x_0 = x_k$, в позначеннях $Y_k = Y(x_k)$, $B_{k+s,k} = B(x_{k+s}, x_k)$ отримаємо

$$Y_{k+s} = B_{k+s,k}Y_k + \int\limits_{x_k}^{x_{k+s}} B(x_{k+s}, t)dF(t), \quad s = \overline{1, q}. \tag{31.10}$$

Враховуючи структуру (13.7) фундаментальної матриці, перші рівняння систем (31.10) в позначеннях (31.5) запишемо так (звертаємо увагу, що вектор $F'(x)$ має вигляд (15.4)):

$$y_{k+s} = \sum_{j=1}^{q} \beta_{k+s,k}^{1j} y_k^{[j-1]} + \beta_{k,k+s}^{10}, \quad s = \overline{1, q}. \tag{31.11}$$

Утворимо визначник

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} y_k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ y_{k+1} - \beta_{k,k+1}^{10} & \beta_{k+1,k}^{11} & \beta_{k+1,k}^{12} & \ldots & \beta_{k+1,k}^{1q} \\ y_{k+2} - \beta_{k,k+2}^{10} & \beta_{k+2,k}^{11} & \beta_{k+2,k}^{12} & \ldots & \beta_{k+2,k}^{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+q} - \beta_{k,k+q}^{10} & \beta_{k+q,k}^{11} & \beta_{k+q,k}^{12} & \ldots & \beta_{k+q,k}^{1q} \end{vmatrix}.$$

Домноживши j-ий стовпець цього визначника на $y_k^{[j-2]}$ для $j = \overline{2, q+1}$, внаслідок (31.11) отримаємо, що перший стовпець цього визначника є лінійною комбінацією решти стовпців і, отже, $\Delta_k = 0$. Звідси випливає рівність

$$\begin{vmatrix} y_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ y_{k+1} & \beta^{11}_{k+1,k} & \beta^{12}_{k+1,k} & \dots & \beta^{1q}_{k+1,k} \\ y_{k+2} & \beta^{11}_{k+2,k} & \beta^{12}_{k+2,k} & \dots & \beta^{1q}_{k+2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+q} & \beta^{11}_{k+q,k} & \beta^{12}_{k+q,k} & \dots & \beta^{1q}_{k+q,k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta^{10}_{k,k+1} & \beta^{11}_{k+1,k} & \beta^{12}_{k+1,k} & \dots & \beta^{1q}_{k+1,k} \\ \beta^{10}_{k,k+2} & \beta^{11}_{k+2,k} & \beta^{12}_{k+2,k} & \dots & \beta^{1q}_{k+2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^{10}_{k,k+q} & \beta^{11}_{k+q,k} & \beta^{12}_{k+q,k} & \dots & \beta^{1q}_{k+q,k} \end{vmatrix}.$$

Якщо тепер визначник зліва розкласти за елементами першого стовпця і використати позначення (31.8)–(31.9), отримаємо рекурентне співвідношення (31.6). В позначеннях

$$u_k = u(x_k) = y(x_k) = y_k, \quad k = \overline{0, \nu},$$

$$\alpha^j_k = \Delta^j_k, \quad \eta_k = \Delta^{q+1}_k, \quad k = \overline{0, \nu-q}, \quad j = \overline{0, q},$$

співвідношення (31.6) є $(q+1)$-точковою рекурентною формулою вигляду (31.3). Оскільки функції (31.5) залежать від коефіцієнтів рівняння (31.1), то визначники Δ^i_k, $i = \overline{0, q+1}$, є функціоналами від цих коефіцієнтів.

Для відшукання явного вигляду φ_j, $j = \overline{0, q-1}$, в умовах (31.4) використаємо початкові умови (31.2) і рівності (31.11) при $k = 0$. В результаті отримаємо формули (31.7). Таким чином, на підставі означення 31.1 отримане рекурентне співвідношення (єдиність якого випливає з побудови) є точним для задачі (31.1), (31.2), що й треба було довести. ■

Наслідок 31.3. *ТРС для однорідної* $(f_r(x) \equiv 0, \ r = \overline{0, m-1})$ *початкової задачі* (31.1), (31.2) *має вигляд*

$$\Delta^0_k y_k + \Delta^1_k y_{k+1} + \ldots + \Delta^q_k y_{k+q} = 0, \quad k = \overline{0, \nu-q}. \tag{31.12}$$

$$y_0 = y^0_0, \quad y_s = \sum_{j=1}^{q} \beta^{1j}_{s0} y^{j-1}_0, \quad s = \overline{1, q}. \tag{31.13}$$

На завершення зауважимо, що k-точкові рекурентні співвідношення для узагальнених КДР є аналогами різницевих схем[2)] для звичайних диференціальних рівнянь. Однак, якщо в класичній теорії різницеві схеми для звичайних диференціальних рівнянь будуються шляхом заміни коефіцієнтів рівняння, невідомої функції та її похідних як функцій неперервного аргумента x значеннями цих[3)] функцій у вузлах сітки, то у випадку узагальнених КДР такий підхід до побудови рекурентних співвідношень принципово неможливий з тієї причини, що узагальнені функції, взагалі кажучи, *не мають значень в окремих точках* [**16**, с. 25], [**2**, с. 46].

Приклад 31.4. В якості ілюстративного прикладу побудуємо ТРС для звичайного диференціального рівняння

$$y^{IV} - 5y'' + 4y = 0, \quad x \geqslant 0. \tag{31.14}$$

з початковими умовами

$$y(0) = y'(0) = 0, \ y''(0) = y'''(0) = 1. \tag{31.15}$$

▼ Поглянемо на рівняння (31.14) як на КДР

$$(y'')'' - (5y')' + 4y = 0$$

і введемо квазіпохідні за формулами (10.3):

$$y^{[1]} = y', \quad y^{[2]} = y'', \quad y^{[3]} = -y''' + 5y'. \tag{31.16}$$

Фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (31.14) утворюють функції

[2)] *Різницевою схемою* називають сукупність різницевих рівнянь, які апроксимують задане диференціальне рівняння і додаткові умови (початкові, крайові тощо) [**118**, с. 86].

[3)] При цьому похідні невідомої функції апроксимуються з певним порядком значеннями самої невідомої функції у вузлах сітки.

$$\varphi_1(x)=e^x,\ \varphi_2(x)=e^{-x},\ \varphi_3(x)=e^{2x},\ \varphi_4(x)=e^{-2x}.$$

Функцію Коші цього рівняння та її мішані квазіпохідні знайдемо, використовуючи формулу (14.3). Спершу обчислимо квазівронскіан розв'язків

$$W(s)=\begin{vmatrix} e^s & e^{-s} & e^{2s} & e^{-2s}\\ e^s & -e^{-s} & 2e^{2s} & -2e^{-2s}\\ e^s & e^{-s} & 4e^{2s} & 4e^{-2s}\\ 4e^s & -4e^{-s} & 2e^{2s} & -2e^{-2s}\end{vmatrix}=-72.$$

Тоді для функції Коші маємо формулу

$$K(x,s)=-\frac{1}{72}\begin{vmatrix} e^s & e^{-s} & e^{2s} & e^{-2s}\\ e^s & -e^{-s} & 2e^{2s} & -2e^{-2s}\\ e^s & e^{-s} & 4e^{2s} & 4e^{-2s}\\ e^x & e^{-x} & e^{2x} & e^{-2x}\end{vmatrix}=\frac{2\operatorname{sh}(x-s)-\operatorname{sh}2(x-s)}{6}.$$

Інші квазіпохідні функції $K(x,s)$ обчислюємо за аналогією:

$$K^{\{1\}}(x,s)=\frac{-\operatorname{ch}(x-s)+\operatorname{ch}2(x-s)}{3},$$

$$K^{\{2\}}(x,s)=\frac{-\operatorname{sh}(x-s)+2\operatorname{sh}2(x-s)}{3},$$

$$K^{\{3\}}(x,s)=\frac{4\operatorname{ch}(x-s)-\operatorname{ch}2(x-s)}{3},$$

$$K^{[1]}(x,s)=\frac{\operatorname{ch}(x-s)-\operatorname{ch}2(x-s)}{3},$$

$$K^{[1]\{1\}}(x,s)=\frac{-\operatorname{sh}(x-s)+2\operatorname{sh}2(x-s)}{3},$$

$$K^{[1]\{2\}}(x,s)=\frac{-\operatorname{ch}(x-s)+4\operatorname{ch}2(x-s)}{3},$$

$$K^{[1]\{3\}}(x,s)=\frac{4\,\mathrm{sh}(x-s)-2\,\mathrm{sh}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{[2]}(x,s)=\frac{\mathrm{sh}(x-s)-2\,\mathrm{sh}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{[2]\{1\}}(x,s)=\frac{-\,\mathrm{ch}(x-s)+4\,\mathrm{ch}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{[2]\{2\}}(x,s)=\frac{-\,\mathrm{sh}(x-s)+8\,\mathrm{sh}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{[2]\{3\}}(x,s)=\frac{4\,\mathrm{ch}(x-s)-4\,\mathrm{ch}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{[3]}(x,s)=\frac{4\,\mathrm{ch}(x-s)-\mathrm{ch}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{[3]\{1\}}(x,s)=\frac{-4\,\mathrm{sh}(x-s)+2\,\mathrm{sh}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{[3]\{2\}}(x,s)=\frac{-4\,\mathrm{ch}(x-s)+4\,\mathrm{ch}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{[3]\{3\}}(x,s)=\frac{16\,\mathrm{sh}(x-s)-2\,\mathrm{sh}\,2(x-s)}{3}.$$

Якщо для зручності записів позначити $t=x-s$, то фундаментальна матриця, що відповідає диференціальному рівнянню (31.14), матиме вигляд $B(x,s)=B(x-s)=B(t)$, причому за теоремою (13.5) отримаємо

$$B(t)=\begin{pmatrix}
\frac{4\,\mathrm{ch}\,t-\mathrm{ch}\,2t}{3} & \frac{-\,\mathrm{sh}\,t+2\,\mathrm{sh}\,2t}{3} & \frac{-\,\mathrm{ch}\,t+\mathrm{ch}\,2t}{3} & \frac{2\,\mathrm{sh}\,t-\mathrm{sh}\,2t}{3}\\
\frac{4\,\mathrm{sh}\,t-2\,\mathrm{sh}\,2t}{3} & \frac{-\,\mathrm{ch}\,t+4\,\mathrm{ch}\,2t}{3} & \frac{-\,\mathrm{sh}\,t+2\,\mathrm{sh}\,2t}{3} & \frac{\mathrm{ch}\,t-\mathrm{ch}\,2t}{3}\\
\frac{4\,\mathrm{ch}\,t-4\,\mathrm{ch}\,2t}{3} & \frac{-\,\mathrm{sh}\,t+8\,\mathrm{sh}\,2t}{3} & \frac{-\,\mathrm{ch}\,t+4\,\mathrm{ch}\,2t}{3} & \frac{\mathrm{sh}\,t-2\,\mathrm{sh}\,2t}{3}\\
\frac{16\,\mathrm{sh}\,t-2\,\mathrm{sh}\,2t}{3} & \frac{4\,\mathrm{ch}\,t+4\,\mathrm{ch}\,2t}{3} & \frac{-4\,\mathrm{sh}\,t+2\,\mathrm{sh}\,2t}{3} & \frac{4\,\mathrm{ch}\,t-\mathrm{ch}\,2t}{3}
\end{pmatrix}.$$

На півосі $\mathbb{R}_+$ побудуємо рівномірну сітку

$$\omega_h=\{x_k=kh,\ \ k=0,1,2,\ldots\}$$

і виберемо будь-які п'ять послідовних вузлів

$$x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < x_{k+3} < x_{k+4}.$$

Поклавши $s = x_k$, $x = x_{k+i}$, отримаємо, що

$$B(x_{k+i}, x_k) = B(x_{k+i} - x_k) = B(ih), \ i = \overline{1,4}.$$

Далі із перших рядків матриць $B(ih)$, $i = \overline{1,4}$, утворимо визначник Δ_k^0 та обчислимо його, а відтак — і визначники Δ_k^i, $i = \overline{1,4}$ (див. теорему 31.2). Отримаємо такі коефіцієнти ТРС (31.12) для диференціального рівняння (31.14):

$$\Delta_k^0 = \Delta_k^4 = \frac{3\operatorname{ch} h - 2\operatorname{ch} 2h - 2\operatorname{ch} 3h + 2\operatorname{ch} 6h - \operatorname{ch} 7h}{72},$$

$$\Delta_k^1 = \Delta_k^3 = \frac{-2 + \operatorname{ch} h - \operatorname{ch} 2h - \operatorname{ch} 3h + 2\operatorname{ch} 4h + \operatorname{ch} 5h}{72} + \\ + \frac{\operatorname{ch} 6h - 2\operatorname{ch} 7h - \operatorname{ch} 8h + \operatorname{ch} 9h}{72},$$

$$\Delta_k^2 = \frac{2 + 2\operatorname{ch} h - 4\operatorname{ch} 3h + \operatorname{ch} 6h - \operatorname{ch} 8h + 2\operatorname{ch} 9h - \operatorname{ch} 10h}{72}.$$

Поділивши обидві частини побудованого ТРС на Δ_k^0, маємо наступне співвідношення

$$y_{k+4} - 2(\operatorname{ch} h + \operatorname{ch} 2h)y_{k+3} + 2(1 + \operatorname{ch} h + \operatorname{ch} 3h)y_{k+2} - \\ - 2(\operatorname{ch} h + \operatorname{ch} 2h)y_{k+1} + y_k = 0, \quad k = 0, 1, 2 \ldots \quad (31.17)$$

З початкових умов (31.15) на основі (31.13) маємо

$$y_0 = 0, \quad y_1 = -\frac{e^h}{3} + \frac{e^{2h}}{4} + \frac{e^{-2h}}{12}, \\ y_2 = -\frac{e^{2h}}{3} + \frac{e^{4h}}{4} + \frac{e^{-4h}}{12}, \quad y_3 = -\frac{e^{3h}}{3} + \frac{e^{6h}}{4} + \frac{e^{-6h}}{12}. \quad (31.18)$$

Для контролю пропонуємо читачеві знайти значення розв'язку задачі (31.14), (31.15), наприклад, у точках $x_1 = 0.04$ та

$x_2 = 1$ будь-яким з відомих методів, а також за допомогою ТРС (31.17), (31.18) (підказка: для цього достатньо знайти y_4, вибравши $h_1 = 0,01$ та $h_2 = 1$). ▲

Приклад 31.5. Побудуємо ТРС для початкової задачі

$$y^{IV} - 5\left(\sum_{j=1}^{N} h\delta(x-x_j^*)y'\right)' + 4\sum_{j=1}^{N} h\delta(x-x_j^*)y = 0, \qquad (31.19)$$

$$y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = y'''(0) = 1. \qquad (31.20)$$

де $N \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_1^* < x_2^* < \ldots < x_N^*$, $h = x_{j+1}^* - x_j^* = \text{const}$.

▼ Рівняння (31.19) є виродженим КДР із множиною носіїв узагальнених коефіцієнтів $\omega^* = \left\{x_j^*,\ j = \overline{1,N}\right\}$.

Введемо квазіпохідні згідно формул (29.2) при $n = m = 2$:

$$y^{[1]} = y',\ y^{[2]} = y'',\ y^{[3]} = -y''' + 5\sum_{k=1}^{k} h\delta(x-x_k)y'. \qquad (31.21)$$

Тоді рівняння (31.19) зведеться до диференціальної системи першого порядку

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=1}^{N} 5h\delta(x-x_k) & 0 & -1 \\ \sum\limits_{k=1}^{N} 4h\delta(x-x_k) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}. \qquad (31.22)$$

Запишемо матрицю стрибків її коефіцієнтів

$$C_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5h & 0 & 0 \\ 4h & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,N}.$$

Визначальне для (31.17) диференціальне рівняння має вигляд

$$y^{IV} = 0. \tag{31.23}$$

Зауважимо, що рівняння (31.23) потрібно трактувати як КДР, квазіпохідні для якого вводяться в контексті формул (31.21).

Обчислимо функцію Коші $\widetilde{K}(x,s)$ визначального рівняння (31.23) та її мішані квазіпохідні. Для цього вкотре скористаємось теоремою 14.1, де фундаментальна система розв'язків визначального рівняння складається, очевидно, з функцій $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = x^2$, $\varphi_4(x) = x^3$. Неважко переконатися, що

$$\widetilde{K}(x,s) = -\frac{(x-s)^3}{6}, \quad \widetilde{K}^{\{1\}}(x,s) = -\widetilde{K}^{[1]}(x,s) = \frac{(x-s)^2}{2}$$
$$\widetilde{K}^{\{2\}}(x,s) = \widetilde{K}^{\{1\}[1]}(x,s) = x-s, \widetilde{K}^{[2]}(x,s) = -(x-s)$$
$$\widetilde{K}^{\{3\}}(x,s) = \widetilde{K}^{\{2\}[1]}(x,s) = \widetilde{K}^{\{1\}[2]}(x,s) = \widetilde{K}^{[3]}(x,s) = 1,$$

усі решта мішані квазіпохідні дорівнюють нулеві. Тоді за теоремою 13.5 фундаментальна матриця, що відповідає визначальному рівнянню (31.23), матиме вигляд

$$\widetilde{B}(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & x-s & \frac{(x-s)^2}{2} & -\frac{(x-s)^3}{6} \\ 0 & 1 & x-s & -\frac{(x-s)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -(x-s) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На півосі $\mathbb{R}_+$ побудуємо рівномірну сітку

$$\omega_h = \{x_k = kh,\ k = 0,1,2,\ldots\} \ni x_j^*,\ j = \overline{1,N},$$

і виберемо будь-які п'ять послідовних вузлів

$$x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < x_{k+3} < x_{k+4}.$$

На підставі властивості (d) (див. теорему 3.2) для фундаментальної матриці системи (31.22) справджується рівність $B(x_{k+1},x_k)=(E+C_k)\widetilde{B}(x_{k+1},x_k)$, звідки

$$B(x_{k+1},x_k)=\begin{pmatrix}1 & h & \frac{h^2}{2} & -\frac{h^3}{6}\\ 0 & 1 & h & -\frac{h^2}{2}\\ 0 & 5h & 1+5h^2 & -h-\frac{5}{2}h^2\\ 4h & 4h^2 & 2h^3 & 1-\frac{2}{3}h^4\end{pmatrix}. \tag{31.24}$$

Оскільки матриця $B(x_{k+i},x_k)$ не залежить від k, то за властивістю (a) з тієї ж теореми маємо

$$B(x_{k+i},x_k)=\prod_{r=0}^{i-1}B(x_{k+i-r},x_{k+i-r-1})=\big(B(x_{k+1},x_k)\big)^i,\ \ i=\overline{1,4}.$$

Обчислимо визначники Δ_k^i, $i=\overline{0,4}$, скориставшись теоремою 31.2:

$$\Delta_k^0=\Delta_4^0=-h^6-\frac{5}{3}h^8-\frac{25}{48}h^{10},$$
$$\Delta_k^1=\Delta_k^3=4h^6+\frac{35}{3}h^8+\frac{39}{4}h^{10}+\frac{215}{144}h^{12}-\frac{25}{72}h^{14},$$
$$\Delta_k^2=-6h^6-20h^8-\frac{539}{24}h^{10}-\frac{815}{72}h^{12}-\frac{25}{6}h^{14}-\frac{125}{144}h^{16}.$$

Початкові умови для рекурентного співвідношення обчислимо на підставі формул (31.13). Тоді ТРС (31.12), (31.13) для початкової задачі (31.19), (31.20) матиме вигляд

$$y_{k+4}-\left(4+5h^2-\frac{2}{3}h^4\right)y_{k+3}+\left(6+10h^2+\frac{8}{3}h^4+\frac{5}{3}h^6\right)y_{k+2}-$$
$$-\left(4+5h^2-\frac{2}{3}h^4\right)y_{k+1}+y_k=0,\quad k=0,1,\ldots$$

$$y_0 = 0,\ y_1 = \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6};\ y_2 = 2h^2 + \frac{4h^3}{3} + \frac{5h^4}{2} + \frac{5h^5}{4} - \frac{h^6}{3} - \frac{h^7}{9};$$
$$y_3 = \frac{9h^2}{2} + \frac{9h^3}{2} + 15h^4 + 10h^5 + \frac{17h^6}{2} + \\ + \frac{161h^7}{36} - \frac{25h^8}{6} - \frac{5h^9}{3} + \frac{2h^{10}}{9} + \frac{2h^{11}}{27}.$$

▲

§ 32. Точна двоточкова рекурентна формула

Розглянемо тепер початкову задачу (7.8), (7.9). Вибравши два довільні вузли $x_k < x_{k+1}$ сітки (30.3), на основі зображення (8.4) розв'язку початкової задачі у формі Коші отримаємо двоточкову рекурентну формулу вигляду (31.10):

$$Y_{k+1} = B_{k+1,k}Y_k + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} B(x_{k+1}, t)dF(t),\ k = \overline{0, \nu - 1}, \qquad (32.1)$$

де Y_0 визначається з початкової умови (7.9). Рекурентна формула (32.1) є точною для задачі (7.8), (7.9) у тому сенсі, що обчислені за цією формулою значення $Y_k,\ k = \overline{0, \nu}$, співпадають зі значеннями точного розв'язку $Y(x)$ початкової задачі (7.8), (7.9) у вузлах $x_k,\ k = \overline{0, \nu}$, сітки ω_ν.

Очевидно, для однорідної початкової задачі (7.1), (7.2) точна двоточкова (двочленна) формула (ТДФ) має вигляд

$$Y_{k+1} = B_{k+1,k}Y_k,\ k = \overline{0, \nu - 1}. \qquad (32.2)$$

Зауваження 32.1. Варто відзначити, що двоточкова рекурентна формула (32.1) є точною також для початкової задачі (31.1), (31.2) (яка еквівалентна задачі (7.8), (7.9)), причому

у тому розумінні, що компоненти $y_k^{[i]}$, $i=\overline{0,q-1}$, $k=\overline{0,\nu}$, вектора Y_k співпадають зі значеннями точного розв'язку $y(x)=y^{[0]}(x)$ цієї задачі та його квазіпохідних $y^{[i]}(x)$, $i=\overline{1,q-1}$, у вузлах сітки $x=x_k\in\omega_\nu$.

Побудуємо ТДФ (32.1) для неоднорідного частково виродженого КДР (28.1) з початковими умовами

$$y^{[i]}(x_0)=y_0^i,\quad y_0^i\in\mathbb{R},\ i=\overline{0,q-1}, \tag{32.3}$$

Оскільки

$$f_r(x)=\sum_{j=1}^{N} f_r^j\Theta_j(x),\quad f_r^j\in\mathbb{R},\ r=\overline{0,m-1},$$

то вектор $F'(x)$ матиме вигляд

$$F'(x)=\sum_{j=1}^{N} S_j\delta(x-x_j),$$

де $S_j=\Big(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n},f_{m-1}^j,f_{m-2}^j,\ldots,f_0^j\Big)^\top$. Тоді

$$Y_{k+1}=B_{k+1,k}Y_k+\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} B(x_{k+1},t)\,d\Big\{\sum_{j=1}^{N}S_j\Theta_j(t)\Big\}$$

і позаяк

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} B(x_{k+1},t)\,d\Big\{\sum_{j=1}^{N}S_j\Theta_j(t)\Big\}=B(x_{k+1},x_{k+1})S_{k+1}=S_{k+1},$$

то ТДФ для частково виродженого КДР (28.1) з початковими умовами (32.3) виглядатиме так:

$$Y_{k+1}=B_{k+1,k}Y_k+S_{k+1},\quad Y_0=(y_0^1,y_0^2,\ldots,y_0^{q-1})^\top.$$

Наостанок, варто відзначити, що використання ТДФ, на відміну від $(q+1)$-точкового ТРС, дозволяє отримувати не лише значення розв'язку початкової задачі для узагальненого КДР у вузлах сітки, але й значення його (розв'язку) квазіпохідних у цих точках.

Приклад 32.2. Побудуємо ТДФ для початкової задачі

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5\sum\limits_{k=1}^{N} h\delta(x-x_k) & 0 & -1 \\ 4\sum\limits_{k=1}^{N} h\delta(x-x_k) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y,$$

$$Y_0 = (0,0,1,-1)^\top.$$

▼ Для обчислення $B_{k+1,k} = B(x_{k+1}, x_k)$ у формулі (32.1) скористаємося виразом (31.24). Тоді

$$Y_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2} & -\frac{h^3}{6} \\ 0 & 1 & h & -\frac{h^2}{2} \\ 0 & 5h & 1+5h^2 & -h-\frac{5}{2}h^2 \\ 4h & 4h^2 & 2h^3 & 1-\frac{2}{3}h^4 \end{pmatrix} Y_k,\ k = \overline{0, \nu-1}, \tag{32.4}$$

$$Y_0 = (0,0,1,-1)^\top. \tag{32.5}$$

Зауважимо також, що ТДФ (32.4), (32.5) є точною і для початкової задачі (31.5), (31.19) на підставі зауваження 32.1. ▲

§ 33. Апроксимація розв'язків квазідиференціальних рівнянь

В задачах апроксимації і, зокрема, при наближеному розв'язуванні інтегральних та диференціальних рівнянь важливу роль відіграють теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Рімана–Стільтьєса.

Нагадаємо деякі відомі результати. Як і у випадку інтегралів Рімана, справджується

Теорема 33.1 [155, с. 69]. *Нехай* $g \in BV[a,b]$, *а послідовність функцій* $f_n(x)$ *така, що інтеграл* $\int\limits_a^b f_n(x)dg(x)$ *існує для* $n \in \mathbb{N}$ *і* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a,b]$. *Тоді інтеграл* $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ *теж існує і*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Інший варіант теореми, що не вимагає рівномірної збіжності $f_n(x)$ на відрізку $[a,b]$ виглядає так.

Теорема 33.2 [155, с. 71]. *Нехай* $g \in BV[a,b]$, *а послідовність функцій* $f_n(x)$ *має рівномірно обмежену варіацію на відрізку* $[a,b]$, *тобто* $\bigvee\limits_a^b(f_n) \leqslant V$ *при* $n \in \mathbb{N}$, *і для кожного* $x \in [a,b]$ *границя* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. *Якщо існують інтеграли* $\int\limits_a^b f_n(x)dg(x)$ *при* $n \in \mathbb{N}$ *та* $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Стосовно інтеграла Рімана–Стільтьєса цікавою є також інша постановка питання: задана послідовність функцій $g_n(x)$ з обмеженою варіацією на відрізку $[a,b]$; за яких умов для фіксованої функції $f(x)$ під знаком інтеграла

$$\int_a^b f(x)dg_n(x)$$

можливий граничний перехід?

Тут мають місце наступні теореми [**48**, **73**].

Теорема 33.3 (Перша теорема Хеллі)**.** *Нехай функції $g_n(x)$ з обмеженою на відрізку $[a,b]$ варіацією збігаються в кожній точці цього відрізка до деякої функції $f(x)$, причому повні варіації функцій $g_n(x)$ обмежені в сукупності, тобто $\bigvee\limits_a^b(g_n) \leqslant V$ при $n \in \mathbb{N}$. Тоді гранична функція $g(x)$ також має обмежену варіацію і для довільної неперервної функції $f(x)$ справджується рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dg_n(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Якщо перша теорема Хеллі встановлює умови, за яких під знаком інтеграла Рімана–Стільтьєса можливий граничний перехід по деякій послідовності функцій $g_n(x)$ з обмеженою варіацією, то друга теорема з'ясовує, коли можна гарантувати саме існування послідовності $\{g_n(x)\}$, що задовольняє умови першої. Точніше кажучи, друга теорема Хеллі дозволяє обійти питання про збіжність послідовності функцій обмеженої варіації, опираючись при цьому на простіші властивості рівномірної обмеженості і рівномірно обмеженої варіації.

Теорема 33.4 (Друга теорема Хеллі)**.** *Нехай на відрізку* $[a,b]$ *задана нескінченна множина функцій* $G=\{g(x)\}$*. Якщо усі функції множини рівномірно обмежені і рівномірно обмежені їх варіації, тобто*

$$|g(x)|\leqslant M,\quad \bigvee_a^b(g)\leqslant V$$

(*сталі* M *і* V *однакові для всіх* $g\in G$)*, то з множини* G *можна виділити послідовність* $\{g_n(x)\}$*, яка в кожній точці відрізка* $[a,b]$ *збігається до деякої функції* $g(x)$ *з обмеженою варіацією.*

Розглянемо дещо інші варіанти першої теореми Хеллі, котрі не вимагають неперервності функції $f(x)$ і в якійсь мірі є "симетричними" до теорем 33.2 і 33.1.

Теорема 33.5. *Нехай* $f\in BV[a,b]$*, а послідовність функцій* $g_n(x)$ *така, що* $\bigvee\limits_a^b(g_n)\leqslant V$ *при* $n\in\mathbb{N}$ *і* $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=g(x)$ *для кожного* $x\in[a,b]$*. Тоді за умови існування інтегралів* $\int\limits_a^b f(x)dg_n(x)$ *при* $n\in\mathbb{N}$ *та* $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ *справджується рівність*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)dg_n(x)=\int_a^b f(x)dg(x).$$

Доведення цієї теореми проводиться за схемою доведення першої теореми Хеллі [**48**, с. 366] з використанням того факту [**181**], що для довільної функції $f\in BV[a,b]$ існує послідовність східчастих функцій $f_n^d(x)$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n^d-f^d\|_{BV}=0$, а відтак (див. с. 43) $f_n^d(x)\rightrightarrows f^d(x)$ на $[a,b]$, де $f^d(x)$ — дискретна складова функції $f(x)$.

Теорема 33.6. *Нехай* $g_n \in BV[a,b]$ *при* $n \in \mathbb{N}$ *і* $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$ *на* $[a,b]$. *Тоді для довільної функції* $f \in BV[a,b]$ *за умови існування інтегралів* $\int\limits_a^b f(x)dg_n(x)$ *при* $n \in \mathbb{N}$ *та* $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ *справджується рівність*

$$\int\limits_a^x f(t)dg_n(t) \rightrightarrows \int\limits_a^x f(t)dg(t) \text{ на } [a,b].$$

Що стосується доведення цієї теореми, то зішлемось на роботу [**153**], де аналогічний результат отриманий для інтеграла Курцвейля–Стільтьєса, що є загальнішою конструкцією, ніж інтеграл Рімана–Стільтьєса, і охоплює його [**57**].

Розглянемо можливість відшукання наближених розв'язків задачі Коші для узагальнених диференціальних систем першого порядку вигляду

$$Y' = C'(x)Y + F'(x), \tag{33.1}$$

$$Y(a) = Y_0, \tag{33.2}$$

де $Y(x)$ — невідома p-вимірна вектор-функція, $C \in BV^+_{p\times p}[a,b]$, $F \in BV^+_p[a,b]$, а диференціювання і рівність розуміються в узагальненому сенсі. З цієї причини розглядатимемо лише коректні системи вигляду (33.1), для яких справджуються умови

$$[\Delta C(x)]^2 = 0, \quad \Delta C(x)\Delta F(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b], \tag{33.3}$$

котрі гарантують, що при дослідженні таких систем не виникатиме проблема множення розподілів.

Нехай в результаті деякої апроксимації коефіцієнтів системи (33.1) маємо наближену узагальнену диференціальну систему

$$Y'_\nu = C'_\nu(x)Y_\nu + F'_\nu(x) \tag{33.4}$$

з початковою умовою

$$Y_\nu(a) = Y(x_0) = Y_0. \tag{33.5}$$

Якщо припустити, що початкова задача (33.4), (33.5) може бути ефективно розв'язана, то природно виникає питання, за яких умов її розв'язок "близький" до розв'язку задачі (33.1), (33.2) і в якому сенсі розуміється ця близькість.

Теорема 33.7. *Нехай для матриць* $C(x) = \big(c_{ij}(x)\big)_{i,j=1}^{p}$, $C_\nu(x) = \big(c_{ij}^\nu(x)\big)_{i,j=1}^{p}$ *і векторів* $F(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x),\big)^\top$, $F_\nu(x) = \big(f_1^\nu(x), f_2^\nu(x), \dots, f_p^\nu(x),\big)^\top$ *справджуються такі умови:*

1) *Для кожного фіксованого* ν *і довільного* $x \in [a,b]$

$$[\Delta C_\nu(x)]^2 = 0, \quad \Delta C_\nu(x)\Delta F_\nu(x) = 0;$$

2) *Для кожного фіксованого* ν *і довільного* $x \in [a,b]$

$$\Delta C_\nu(x)\Delta C(x) = 0, \quad \Delta C_\nu(x)\Delta F(x) = 0;$$

3) $f_j^\nu(x) \rightrightarrows f_j(x)$ *на* $[a,b]$ *для* $j = \overline{1,p}$;

4) $c_{ij}^\nu(x) \rightrightarrows c_{ij}(x)$ *на* $[a,b]$ *для* $1, j = \overline{1,p}$;

5) *Для кожного фіксованого* ν

$$\bigvee_a^b (C_\nu) \leqslant V = const.$$

Тоді

$$Y_\nu(x) \rightrightarrows Y(x) \text{ на } [a,b].$$

Доведення. При виконанні умов коректності (33.3) початкова задача (33.1), (33.2) в класі функцій $\mathfrak{D}_C^{\mathbb{C}^p}(I)$ еквівалентна інтегральному рівнянню (див. §7)

$$Y(x) = Y_0 + \int_a^x dC(t)Y(t) + F(x) - F(a), \tag{33.6}$$

причому інтеграл у правій частині на підставі зауваження 6.3 є класичним матричним інтегралом (насправді, набором скалярних інтегралів) Рімана–Стільтьєса. Перша умова теореми забезпечує коректність систем (33.4) для кожного фіксованого ν, а тому задача (33.4), (33.5) в $\mathfrak{D}_C^{\mathbb{C}^p}(I)$ еквівалентна інтегральному рівнянню

$$Y_\nu(x) = Y_0 + \int_a^x dC_\nu(t)Y_\nu(t) + F_\nu(x) - F_\nu(a).$$

Розглянемо різницю

$$Y(x) - Y_\nu(x) = \int_a^x dC(t)Y(t) - \int_a^x dC_\nu(t)Y(t) +$$

$$+ \int_a^x dC_\nu(t)[Y(t) - Y_\nu(t)] + F(x) - F_\nu(x) + F_\nu(a) - F(a),$$

яка, очевидно, матиме сенс (а не буде лише формальною!) за умови існування інтеграла $\int_a^x dC_\nu(t)Y(t)$. Для встановлення цього факту достатньо показати, що добуток $C'_\nu(x)Y(x)$ коректний в узагальненому сенсі. Дійсно, на підставі другої умови теореми

$$\Delta C_\nu(x)\Delta Y(x) = \Delta C_\nu(x)\big[\Delta C(x)Y(x) + \Delta F(x)\big] = 0.$$

Перехід до норм приводить до нерівності

$$\begin{aligned}\big|Y(x)-Y_\nu(x)\big| \leqslant \left|\int\limits_a^x dC(t)Y(t) - \int\limits_a^x dC_\nu(t)Y(t)\right| + \\ + \int\limits_a^x \big|dC_\nu(t)\big|\big|Y(t)-Y_\nu(t)\big| + \big|F(x)-F_\nu(x)\big| + \\ + \big|F(a)-F_\nu(a)\big|. \quad (33.7)\end{aligned}$$

Із третьої умови теореми випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число $N_1(\varepsilon)$, що для всіх $\nu > N_1(\varepsilon)$ і довільного $x \in [a,b]$ виконуються нерівності

$$\big|f_j(x)-f_j^\nu(x)\big| < \frac{\varepsilon}{3p}, \quad j = \overline{1,p}.$$

Тоді, враховуючи вигляд норми вектора, отримаємо

$$\big|F(x)-F_\nu(x)\big| = \sum_{j=1}^p \big|f_j(x)-f_j^\nu(x)\big| < p\cdot\frac{\varepsilon_1}{3p} = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (33.8)$$

За аналогією маємо

$$\big|F(a)-F_\nu(a)\big| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (33.9)$$

Оцінимо перший доданок в нерівності (33.7):

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_a^x dC(t)Y(t) - \int\limits_a^x dC_\nu(t)Y(t)\right| = \sum_{i=1}^p \left|\int\limits_a^x \sum_{j=1}^p y_j(t)dc_{ij}(t) - \right. \\ \left. - \int\limits_a^x \sum_{j=1}^p y_j(t)dc_{ij}^\nu(t)\right| \leq \sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^p \left|\int\limits_a^x y_j(t)dc_{ij}(t) - \int\limits_a^x y_j(t)dc_{ij}^\nu(t)\right|.\end{aligned}$$

На основі теореми 33.6 для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число $N_2(\varepsilon)$, що для всіх $\nu > N_2(\varepsilon)$ і довільного

$x \in [a,b]$ справджуються нерівності

$$\left| \int_{x_0}^{x} d[c_{ij}(t) - c_{ij}^{\nu}(t)] y_j(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3p^2}, \quad i,j = \overline{1,p},$$

тоді

$$\left| \int_{a}^{x} dC(t)Y(t) - \int_{a}^{x} dC_{\nu}(t)Y(t) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{33.10}$$

Таким чином, якщо врахувати оцінки (33.8)–(33.10) і вибрати $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, то з нерівності (33.7) отримаємо

$$|Y(x) - Y_{\nu}(x)| \leqslant \varepsilon + \int_{x_0}^{x} |dC_{\nu}(t)||Y(t) - Y_{\nu}(t)|.$$

На підставі узагальненої леми Гронуолла–Беллмана (див. §2) для $\nu > N(\varepsilon)$ і $x \in [a,b]$ маємо оцінку

$$|Y(x) - Y_{\nu}(x)| \leqslant \varepsilon \exp\left(\bigvee_{a}^{x} (C_{\nu}) \right),$$

звідки згідно п'ятої умови теореми випливає

$$\sup_{x \in [a,b]} |Y(x) - Y_{\nu}(x)| \leqslant \varepsilon e^{V}.$$

Остання нерівність внаслідок довільності вибору ε якраз і означає рівномірну збіжність $Y_{\nu}(x)$ до $Y(x)$ на $[a,b]$. ■

Щойно отриманий результат можна використовувати і для наближеного розв'язування КДР. На відрізку $[a,b]$ розглянемо початкову задачу для КДР порядку $q\ (= m+n)$:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \left(a_{ij}(x) y^{(n-i)} \right)^{(m-j)} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+1} f_k^{(k+1)}(x), \tag{33.11}$$

$$y^{[r]}(a) = y_0^r, \quad r = \overline{0, q-1}, \tag{33.12}$$

де коефіцієнти $a_{ij}(x)$ і $f_k(x)$ задовольняють вказані в §10 і §15 припущення (I)–(IV), а квазіпохідні $y^{[r]}(x)$ визначаються виразами (15.2).

Нехай в результаті деякої апроксимації коефіцієнтів рівняння (33.11) одержане узагальнене КДР

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}(a_{ij}^{\nu}(x)y_{\nu}^{(n-i)})^{(m-j)}=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}(f_k^{\nu})^{(k+1)}(x) \tag{33.13}$$

з початковими умовами

$$y_{\nu}^{[r]}(a)=y_0^r,\quad r=\overline{0,q-1}, \tag{33.14}$$

За допомогою векторів

$$Y=\left(y,y^{[1]},\dots,y^{[q-1]}\right)^{\top},\quad Y_{\nu}=\left(y_{\nu},y_{\nu}^{[1]},\dots,y_{\nu}^{[q-1]}\right)^{\top},$$

початкові задачі (33.11), (33.12) та (33.13), (33.14) можна звести до задач вигляду (33.1), (33.2) та (33.4), (33.5) відповідно. В цьому випадку теорема 33.7 забезпечуватиме збіжність не лише розв'язку $y_{\nu}(x)$ до $y(x)$, але й усіх його квазіпохідних $y_{\nu}^{[k]}(x), k=\overline{0,q-1}$, до $y^{[k]}(x)$.

На завершення, розглянемо два важливі на практиці способи апроксимації функцій $c_{ij}, f_j\in BV^{+}[a,b]$ з теореми 33.7.

Нехай $g\in BV^{+}[a,b]$, тоді $g(x)=\varphi(x)+h(x)$, де $\varphi(x)$ — неперервна складова функції $g(x)$, а $h(x)$ — її функція стрибків (дискретна складова). Виберемо довільне розбиття ω_{ν} відрізка $[a,b]$, тобто сітку на $[a,b]$:

$$\omega_{\nu}=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_{\nu}=b\}.$$

На кожному відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ застосуємо до $\varphi(x)$ *лінеаризацію*:

$$\varphi(x) \approx \varphi_\nu^k(x) = \frac{\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k}\, x + \varphi(x_k), \quad k = \overline{0, \nu-1}. \tag{33.15}$$

Тоді на всьому відрізку $[a, b]$ функція $\varphi(x)$ апроксимується кусково-лінійною функцією:

$$\varphi(x) \approx \varphi_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(\frac{\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k}\, x + \varphi(x_k) \right). \tag{33.16}$$

Таку апроксимацію назвемо *L-апроксимацією.* Тоді

$$g'(x) \approx \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k}\, \Theta_k(x) + h'(x). \tag{33.17}$$

Отже, при такій апроксимації функцій $c_{ij}(x)$, $f_j(x)$ диференціальне рівняння (33.4) буде щонайгірше рівнянням з кусково-сталими коефіцієнтами і δ-особливостями.

В рамках альтернативного способу апроксимації, застосуємо до $\varphi(x)$ *дискретизацію*, тобто на кожному півінтервалі $[x_k, x_{k+1})$ наблизимо $\varphi(x)$ сталою функцією:

$$\varphi(x) \approx \varphi_\nu^k(x) = \varphi(x_k), \quad k = \overline{0, \nu-1}; \tag{33.18}$$

Відтак на всьому заданому відрізку $[a, b]$ функція $\varphi(x)$ апроксимується кусково-сталою (східчастою) функцією:

$$\varphi(x) \approx \varphi_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \varphi(x_k)\Theta_k(x). \tag{33.19}$$

(зауважимо, що для строгості подальших записів апроксимуюча функція продовжена праворуч від точки b на інтервал $(b, x_{\nu+1})$). Таку апроксимацію назвемо *D-апроксимацією.* Тоді, враховуючи, що функція $\varphi_\nu(x)$ в точці x_k має стрибок

$\Delta\varphi_\nu(x_k)=\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})$, отримаємо

$$g'(x)\approx\sum_{k=1}^{\nu-1}\Delta\varphi_\nu(x_k)\delta(x-x_k)+h'(x), \tag{33.20}$$

Отже, в результаті такої апроксимації функцій $c_{ij}(x)$, $f_j(x)$ диференціальне рівняння (33.4) буде рівнянням лише з δ-функціями в коефіцієнтах.

Щоправда, варто мати на увазі, що D-апроксимацію можна реалізувати лише за умов $[\Delta C_\nu(x)]^2=0$, $\Delta C_\nu(x)\Delta F_\nu(x)=0$ на $[a,b]$, тобто, загалом, не для всіх елементів $c_{ij}(x)$, $f_j(x)$.

У попередньому розділі було наведено конструктивні формули для відшукання розв'язків узагальнених диференціальних систем вигляду (22.1), однак за умови, що відома фундаментальна матриця відповідної визначальної системи. Зрозуміло, що таку матрицю не завжди вдається побудувати точним способом. Відтак, застосовуючи до елементів матриць $A_k(x)$ описані вище L- і D-апроксимації чи, можливо, деякі інші способи апроксимації (важливим при цьому є дотримання умов теореми 33.7), можна при відносно незначній обчислювальній трудомісткості отримувати (що, власне, й проілюстровано на конкретних прикладах в останньому параграфі монографії) наближені розв'язки з потрібною точністю.

§ 34. Приклади побудови наближених розв'язків

Приклад 34.1. Для ілюстрації методу D-апроксимації побудуємо наближений розв'язок звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y^{IV} - 5y'' + 4y = 0 \tag{34.1}$$

і початковими умовами

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 1, \tag{34.2}$$

та обчислимо наближене значення розв'язку цієї задачі в точці $x = 1$.

▼ *Перший спосіб.* Спочатку знайдемо наближено значення $y(1)$ розв'язку задачі Коші (34.1), (34.2) за допомогою ТДФ, в процесі побудови якої якраз і використаємо D-апроксимацію коефіцієнтів (точніше, їх первісних) диференціального рівняння (34.1).

За допомогою вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]}\right)^\top$, де квазіпохідні введені, як і раніше у прикладі 31.4, — за формулами (31.16), задача Коші (34.1), (34.2) легко зводиться до початкової задачі

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y, \tag{34.3}$$

$$Y(0) = (0, 0, 1, -1)^\top. \tag{34.4}$$

Введемо на відрізку $[0, 1]$ рівномірну сітку

$$\omega_\nu = \{x_k = kh, \ k = \overline{0, \nu}\}$$

з кроком $h = x_{k+1} - x_k = 1/\nu$. Застосуємо до коефіцієнтів $C_{32} = 5$ і $C_{41} = 4$ (точніше, до їх первісних $c_{32} = 5x + \text{const}$ і $c_{41} = 4x + \text{const}$) D-апроксимацію. Тоді за формулою (33.20) маємо

$$C_{32} \approx \sum_{k=1}^{\nu-1} (5x_k - 5x_{k-1})\,\delta(x - x_k) = 5\sum_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k), \quad x \in [0,1],$$

$$C_{41} \approx \sum_{k=1}^{\nu-1} (4x_k - 4x_{k-1})\,\delta(x - x_k) = 4\sum_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k), \quad x \in [0,1].$$

Відтак наближеною до диференціальної системи (34.3) буде узагальнена диференціальна система

$$Y_\nu' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5\sum\limits_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k) & 0 & -1 \\ 4\sum\limits_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_\nu. \tag{34.5}$$

Початковий вектор для наближеної системи вибираємо відповідно до початкової умови (34.4), тобто $Y_\nu(0) = Y(0)$.

Система (34.5) є системою вигляду (31.22) і, отже, для неї справджується ТДФ (див. приклад 32.2)

$$Y_\nu(x_{k+1}) = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2} & -\frac{h^3}{6} \\ 0 & 1 & h & -\frac{h^2}{2} \\ 0 & 5h & 1 + 5h^2 & -h - \frac{5}{2}h^2 \\ 4h & 4h^2 & 2h^3 & 1 - \frac{2}{3}h^4 \end{pmatrix} Y_\nu(x_k), \quad k = \overline{0, \nu-1},$$

причому

$$Y_\nu(0) = (0, 0, 1, -1)^\top. \tag{34.6}$$

Задаючи різну кількість точок поділу, знайдемо наближене значення розв'язку задачі (34.1), (34.2) в точці $x = 1$, яке буде першою

координатою вектора $Y_\nu(x_\nu)$. Отримані значення наведені в 2-му стовпці таблиці 1.

Другий спосіб. Розв'яжемо наближено задачу (34.1), (34.2) за допомогою ТРС.

Отриманій в результаті застосування D-апроксимації узагальненій диференціальній системі (34.5) відповідає вироджене КДР

$$y_\nu^{IV} - 5\left(\sum_{k=1}^{\nu} h\delta(x-x_k^*)y_\nu'\right)' + 4\sum_{k=1}^{\nu} h\delta(x-x_k^*)y_\nu = 0, \qquad (34.7)$$

яке є наближеним для рівняння (34.1).

З вигляду квазіпохідних (31.16) і початкового вектора (34.6) легко отримати такі початкові умови для рівняння (34.7):

$$y_\nu(0) = y_\nu'(0) = 0, \quad y_\nu''(0) = y_\nu'''(0) = 1. \qquad (34.8)$$

Використовуючи результати прикладу 31.5, маємо, що ТРС для початкової задачі (34.7), (34.8) виражається формулою (тут $\widetilde{y}_k = y_\nu(x_k),\ k = \overline{0,\nu}$)

$$\widetilde{y}_{k+4} - \left(4 + 5h^2 - \frac{2}{3}h^4\right)\widetilde{y}_{k+3} + \left(6 + 10h^2 + \frac{8}{3}h^4 + \frac{5}{3}h^6\right)\widetilde{y}_{k+2} -$$
$$- \left(4 + 5h^2 - \frac{2}{3}h^4\right)\widetilde{y}_{k+1} + \widetilde{y}_k = 0, \quad k = \overline{0,\nu-4},$$

$$\widetilde{y}_0 = 0,\ y_1 = \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6},\ \widetilde{y}_2 = 2h^2 + \frac{4h^3}{3} + \frac{5h^4}{2} + \frac{5h^5}{4} - \frac{h^6}{3} - \frac{h^7}{9},$$

$$\widetilde{y}_3 = \frac{9h^2}{2} + \frac{9h^3}{2} + 15h^4 + 10h^5 + \frac{17h^6}{2} + \frac{161h^7}{36} - \frac{25h^8}{6} - \frac{5h^9}{3} + \frac{2h^{10}}{9} + \frac{2h^{11}}{27}.$$

Результати, отримані цим способом при різній кількості точок поділу наведені у 4-му стовпці таблиці 1. У цій таблиці для порівняння наведені також результати (див. 6-ий стовпець), отримані при розв'язанні задачі (34.1), (34.2) класичним методом скінченних різниць. Крім того, у 3-му, 5-му і 7-му стовпцях цієї таблиці

Таблиця 1. *Наближене значення $y(1)$ розв'язку задачі* (34.1), (34.2)

ν	ТДФ	ε_1	ТРС	ε_2	МСР	ε_3
100	0.95240307	$4.495\cdot10^{-5}$	0.95240307	$4.495\cdot10^{-5}$	0.94704780	$5.40022\cdot10^{-3}$
200	0.95243678	$1.124\cdot10^{-5}$	0.95243678	$1.124\cdot10^{-5}$	0.94976818	$2.67984\cdot10^{-3}$
400	0.95244521	$2.81\cdot10^{-6}$	0.95244527	$2.75\cdot10^{-6}$	0.95111322	$1.33480\cdot10^{-3}$
800	0.95244732	$7.0\cdot10^{-7}$	0.95244670	$1.32\cdot10^{-6}$	0.95178198	$6.6604\cdot10^{-4}$
1600	0.95244785	$1.8\cdot10^{-7}$	0.95244996	$1.94\cdot10^{-6}$	0.95212856	$3.1946\cdot10^{-4}$

для зручності вказані абсолютні похибки ε_1, ε_2, ε_3 відповідно для точної двоточкової формули (ТДФ), точного рекурентного співвідношення (ТРС) і методу скінченних різниць (МСР). Відзначимо, що точне значення розв'язку задачі Коші (34.1), (34.2)

$$y(1) = -\frac{1}{3}e + \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{12}e^{-2} = 0.95244802218267.$$

▲

Приклад 34.2. Розглянемо шарнірно обіпертий на двох кінцях $x=0$ і $x=\pi$ стиснутий стрижень довжини $l=\pi$ і змінної жорсткості $g(x) = \frac{c}{1+\sin x}$ $(c>0)$. Для відшукання критичного навантаження $P_{\text{кр}}$ потрібно розв'язати задачу на власні значення

$$y'' + p(1+\sin x)y = 0, \quad p = P/c, \tag{34.9}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{34.10}$$

перше власне значення якої $p_1 = P_{\text{кр}}/c$ якраз і дасть потрібний результат.

▼ *Перший спосіб.* Для відшукання наближеного розв'язку крайової задачі (34.9), (34.10) використаємо D-апроксимацію. На

відрізку $[0,\pi]$ введемо рівномірну (для зручності) сітку

$$\omega_\nu = \{x_k = kh,\ \ k = \overline{0,\nu}\}$$

з кроком $h = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{\nu}$.

Застосуємо до первісної $\alpha(x) = x - \cos x + \text{const}$ коефіцієнта $a(x) = 1 + \sin x$ дискретизацію, тобто на півінтервалі $[x_k, x_{k+1})$ апроксимуємо її сталою функцією:

$$\alpha(x) \approx \alpha(x_k) = x_k - \cos x_k + \text{const}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}).$$

Тоді на відрізку $[0,\pi]$ первісна $\alpha(x)$ апроксимується східчастою функцією вигляду (33.18):

$$\alpha(x) \approx \alpha_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu} (x_k - \cos x_k + \text{const})\Theta_k(x), \quad x \in [0,\pi].$$

Знайдемо стрибок функції $\alpha_\nu(x)$ в точці $x_k = kh$ $(k = \overline{1,\nu})$:

$$\Delta\alpha_\nu(x_k) = \alpha_\nu(x_k) - \alpha_\nu(x_{k-1}) = x_k - \cos x_k + \text{const} - \\ - (x_{k-1} - \cos x_{k-1} + \text{const}) = h - \cos kh + \cos(k-1)h.$$

Відтак згідно (33.20) маємо

$$a(x) \approx \alpha'_\nu(x) = \sum_{k=1}^{\nu} [h - \cos kh + \cos(k-1)h]\,\delta(x - x_k). \quad (34.11)$$

Тоді вироджене КДР

$$y''_\nu + p\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_\nu^k \delta(x - x_k) y_\nu = 0,$$

де

$$\alpha_\nu^k = h - \cos kh + \cos(k-1)h = \frac{\pi}{\nu} - \cos\frac{\pi k}{\nu} + \cos\frac{\pi(k-1)}{\nu}, \quad (34.12)$$

є, очевидно, наближеним для рівняння (34.9).

Отримане КДР має вигляд рівняння з прикладу 30.6 (див. задачу (30.22)), в якому

$$c_0 = 0, \quad c_k = p\alpha_\nu^k, \ x_k^* = x_k \ (k = \overline{1, N}, \ N = \nu).$$

Тому ТРС для цього рівняння визначається формулою (30.25), де на підставі (30.24) $M_k = -c_k = -p\alpha_\nu^k$, відтак співвідношення (30.25) запишеться у вигляді (тут $\widetilde{y}_k = y_\nu(x_k), \ k = \overline{0, \nu}$)

$$\widetilde{y}_{k+1} - (2 - ph\alpha_\nu^k)\widetilde{y}_k + \widetilde{y}_{k-1} = 0, \quad k = \overline{1, \nu-1}. \tag{34.13}$$

З крайової умови на лівому кінці $y(0) = 0$ маємо $\widetilde{y}_0 = 0$. Вибравши $\widetilde{y}_1$ рівним довільній ненульовій константі [4)] (н-д, $\widetilde{y}_1 = 1$), із рекурентної формули (34.13) знайдемо $\widetilde{y}_\nu = y_\nu(\pi)$, яке, очевидно, залежатиме від p, тобто $\widetilde{y}_\nu = \widetilde{y}_\nu(p)$. Тоді з крайової умови $y(\pi) = 0$ отримаємо *характеристичне рівняння* $\widetilde{y}_\nu(p) = 0$, корені якого (тобто власні значення p) можна знайти, н-д, методом поділу відрізка навпіл.

У таблиці 2 для порівняння наведені результати, отримані (при $\nu = 1600$) різними методами: МВ — *метод Вайнштейна*, МФ — *метод Фікера*, МР — *метод Рітца*, MD — *метод D-апроксимації.*

Другий спосіб. Для порівняння побудуємо наближений розв'язок крайової задачі (34.9), (34.10), використовуючи інший спосіб апроксимації коефіцієнтів — L-апроксимацію.

Застосуємо до функції $\alpha(x) = x - \cos x + \text{const}$ лінеаризацію, тобто на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ наблизимо її відрізком прямої, що

[4)] Позаяк власні функції визначаються з точністю до сталого множника.

Таблиця 2. *Власні значення задачі* (34.9), (34.10); $\nu = 1600$

p	МВ	МФ	МР	MD
p_1	0.54031883	0.54031789	0.54031885	0.54031883
p_2	–	–	–	2.37174805
p_3	5.4486360	5.4477473	5.4486362	5.4486358
p_4	–	–	–	9.762195318
p_5	15.312608	15.292913	15.312608	15.3120518

проходить через точки $\big(x_k, \alpha(x_k)\big)$ і $\big(x_{k+1}, \alpha(x_{k+1})\big)$. Тоді на підставі формули (33.17) маємо

$$a(x) \approx \alpha'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{h - \cos(k+1)h + \cos kh}{h}\, \Theta_k(x)$$

або в позначеннях (34.12)

$$a(x) \approx \alpha'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\, \Theta_k(x). \tag{34.14}$$

Тоді вихідне рівняння (34.9) апроксимується КДР

$$y''_\nu + p \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\, \Theta_k(x) y_\nu = 0, \tag{34.15}$$

Останнє є частинним випадком рівняння (30.1), а тому ТРС для нього матиме вигляд (30.20)–(30.21). Для побудови функції Коші $\widetilde{K}_\nu(x,s)$ КДР (34.15) на проміжку $[x_k, x_{k+1})$, тобто рівняння

$$y''_\nu + p\, \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\, y_\nu = 0,$$

скористаємось результатами прикладу 14.2. Оскільки на відрізку $[0, \pi]$ функція $\cos x$ монотонно спадає, то $\cos x_{k+1} < \cos x_k$. Тоді,

враховуючи, що $p>0$, маємо

$$p\,\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}=p\,\frac{h-\cos(k+1)h+\cos kh}{h}>0,$$

тому за формулою (14.5) знаходимо

$$\widetilde{K}_\nu(x,s)=\sqrt{\frac{h}{p\alpha_\nu^{k+1}}}\sin\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s).$$

Позаяк квазіпохідні в сенсі рівняння (34.15) і спряженого до нього рівняння (див. §11) визначаються за формулами

$$y_\nu^{[1]}(x)=y_\nu'(x),\quad z_\nu^{\{1\}}(s)=-z_\nu'(s),$$

то

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]}(x,s)=\frac{\partial\widetilde{K}_\nu(x,s)}{\partial x}=\cos\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s),$$

$$\widetilde{K}_\nu^{\{1\}}(x,s)=-\frac{\partial\widetilde{K}_\nu(x,s)}{\partial s}=\cos\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s),$$

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]\{1\}}(x,s)=-\frac{\partial^2\widetilde{K}_\nu(x,s)}{\partial x\partial s}=-\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}\sin\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s).$$

Тоді

$$\widetilde{K}_\nu(x_{k+1},x_k)=\widetilde{K}_\nu(x_k,x_{k-1})=\sqrt{\frac{h}{p\alpha_\nu^{k+1}}}\sin\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}},$$

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]}(x_{k+1},x_k)=\widetilde{K}_\nu^{[1]}(x_k,x_{k-1})=\cos\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}},$$

$$\widetilde{K}_\nu^{\{1\}}(x_{k+1},x_k)=\widetilde{K}_\nu^{\{1\}}(x_k,x_{k-1})=\cos\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}},$$

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]\{1\}}(x_k,x_{k-1})=-\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}\sin\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}}.$$

Підставивши останні вирази у формулу (30.20) і врахувавши на підставі (30.7), що $M_k=0$, після спрощення отримаємо

$$\widetilde{y}_{k+1} - 2\cos\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}}\widetilde{y}_k + \widetilde{y}_{k-1} = 0, \quad k = \overline{1, \nu-1},$$

де, як і раніше, $\widetilde{y}_k = y_\nu(x_k)$, $k = \overline{0, \nu}$.

Далі для відшукання власних значень задачі (34.9), (34.10) так само, як і в першому способі, побудуємо за допомогою аналогічної процедури характеристичне рівняння і використаємо метод поділу відрізка навпіл.

У таблиці 3 наведено результати наближеного відшукання першого власного значення за допомогою L- і D-апроксимації (див. таблицю 2).

Таблиця 3. *Перше власне значення задачі* (34.9), (34.10)

ν	*D-апроксимація*	*L-апроксимація*
100	0.54031183	0.54057761
200	0.54031710	0.54038353
400	0.54031842	0.54033503
800	0.54031875	0.54032290
1600	0.54031883	0.54031987

▲

Зауваження 34.3. Задачу (34.9), (34.10) можна розв'язати також і за допомогою точної двоточкової формули, побудованої для відповідної наближеної системи, котру можна отримати шляхом як D-, так і L-апрокисмації. Пропонуємо читачеві розв'язати задачу цими методами самостійно і порівняти отримані результати зі значеннями, наведеними у таблиці 3.

Наступний модельний приклад ілюструє необхідність використання L-апроксимації.

Приклад 34.4. Розглянемо систему диференціальних рівнянь, що описує вал в слабко деформованому стані під дією стиску і скруту [**47**, с. 26]

$$\begin{cases} -g(x)z'' = Pz - My', \\ -g(x)y'' = Py + Mz', \end{cases} \tag{34.16}$$

де $g(x) = (1+\sin x)^{-1}$ — жорсткість на згин, P — стискаюча сила, M — крутильний момент. Для валу довжини $l=\pi$ із закріпленими кінцями крайові умови для системи (34.16) мають вигляд

$$z(0) = z(\pi) = 0; \quad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{34.17}$$

Відомо, що під дією достатньо великого крутильного моменту M вал може втрачати стійкість у формі гвинтоподібної лінії: зі зростанням крутильного моменту спочатку має місце лише скручування, а далі при певному критичному крутильному моменті вісь гвинтоподібно деформується. Якщо вал до того ж зазнає впливу з боку осьової стискаючої сили $(P>0)$, то ця гвинтоподібна деформація наступає раніше, тобто при меншій величині крутильного моменту. Навпаки, поява розтягуючої осьової сили $(P<0)$ збільшує критичний момент, підвищуючи тим самим стійкість валу.

Використовуючи D- і L-апроксимацію, знайдемо співвідношення між параметрами P і M, яке, власне, й слугуватиме умовою стійкості валу.

▼ Введемо матрицю

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тоді крайову задачу (34.16), (34.17) можна записати у векторному вигляді наступним чином:

$$\bar{Y}'' + A(x)\bar{Y}' + B(x)\bar{Y} = 0, \tag{34.18}$$

$$\bar{Y}(0) = \bar{Y}(\pi) = 0,$$

де $\bar{Y} = (z, y)^\top$, $A(x) = M(1 + \sin x)J$, $B(x) = P(1 + \sin x)E_2$. Далі розглянемо матричне диференціальне рівняння, асоційоване до рівняння (34.18) (див. §17),

$$Y'' + A(x)Y' + B(x)Y = 0, \tag{34.19}$$

разом з крайовими умовами

$$Y(0) = Y(\pi) = O_2. \tag{34.20}$$

За допомогою вектора $\mathcal{Y} = (Y, Y')^\top$ рівняння (34.19) зведемо до узагальненої диференціальної системи першого порядку

$$\mathcal{Y}' = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ -B(x) & -A(x) \end{pmatrix} \mathcal{Y}. \tag{34.21}$$

Введемо на відрізку $[0, \pi]$ рівномірну сітку

$$\omega_\nu = \{x_k = kh,\ k = \overline{0, \nu}\}$$

з кроком $h = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{\nu}$. Щоб знайти наближений розв'язок системи (34.21), застосуємо D-апроксимацію до елемента $B(x)$. Позаяк

$$B(x) = \begin{pmatrix} P(1 + \sin x) & 0 \\ 0 & P(1 + \sin x) \end{pmatrix}$$

і $P=\text{const}$, то дискретизацію застосовуємо до первісної для функції $1+\sin x$. При цьому скористаємось отриманою в прикладі 34.2 апроксимацією (34.11):

$$1+\sin x \approx \sum_{k=1}^{\nu}[h-\cos kh+\cos(k-1)h]\delta(x-x_k).$$

Тоді

$$B_\nu(x) \approx \begin{pmatrix} P\sum\limits_{k=1}^{\nu}\alpha_\nu^k\delta(x-x_k) & 0 \\ 0 & P\sum\limits_{k=1}^{\nu}\alpha_\nu^k\delta(x-x_k) \end{pmatrix} = \\ = P\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_\nu^k\delta_k(x-x_k)\cdot E_2, \quad (34.22)$$

де $\alpha_\nu^k = h-\cos kh+\cos(k-1)h$.

До елемента $A(x)$ застосувати D-апроксимацію не вийде, бо при цьому матриця стрибків наближеної системи мала б вигляд

$$\Delta\mathcal{C}_\nu(x) = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ -\Delta B_\nu & -\Delta A_\nu \end{pmatrix}$$

і, очевидно, не задовольняла б умову коректності (див. (17.6)):

$$\left[\Delta\mathcal{C}_\nu(x)\right]^2 = 0 \quad \forall\, x\in[0,\pi].$$

Саме тому застосуємо до елемента $A(x)$ L-апроксимацію. Позаяк

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -M(1+\sin x) \\ M(1+\sin x) & 0 \end{pmatrix},$$

то лінеаризувати будемо знову первісну функції $1+\sin x$. Лише тепер застосуємо отриману в прикладі 34.2 апроксимацію (34.14):

$$1+\sin x \approx \sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x).$$

Тоді

$$A_\nu(x) \approx \begin{pmatrix} 0 & -M\sum\limits_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x) \\ M\sum\limits_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= M\sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x)\cdot J. \quad (34.23)$$

Використовуючи вирази (34.22) та (34.23), запишемо диференціальну систему

$$\mathcal{Y}'_\nu = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ -P\sum\limits_{k=1}^{\nu} \alpha_\nu^k \delta(x-x_k)\cdot E_2 & -M\sum\limits_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x)\cdot J \end{pmatrix} \mathcal{Y}_\nu, \quad (34.24)$$

яка, очевидно, є апроксимацією системи (34.21).

Нехай $\mathcal{B}_\nu(x,s)$ — фундаментальна матриця системи (34.24). За аналогією до (32.2) побудуємо ТДФ

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k) = \mathcal{B}_\nu(x_k, x_{k-1})\mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}), \quad k=\overline{1,\nu}. \quad (34.25)$$

На підставі властивості (d) фундаментальної матриці (див. теорему 3.2) і структури матриці стрибків системи (34.24)

$$\Delta\mathcal{C}_\nu(x_k) = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ -P\alpha_\nu^k E_2 & O_2 \end{pmatrix}$$

маємо

$$\mathcal{B}_\nu(x_k, x_{k-1}) = (E_4 + \Delta\mathcal{C}_\nu(x_k))\,\mathcal{B}_\nu(x_k-0, x_{k-1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ -P\alpha_\nu^k E_2 & E_2 \end{pmatrix} \widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x_k, x_{k-1}), \quad (34.26)$$

де $\widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x,s)$ — фундаментальна матриця визначальної системи на проміжку $[x_{k-1},x_k)$, тобто системи

$$\mathcal{Y}_\nu' = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ O_2 & -M\frac{\alpha_\nu^k}{h}\cdot J \end{pmatrix}\mathcal{Y}_\nu. \tag{34.27}$$

Підставляючи вираз (34.26) у ТДФ (34.25), отримаємо співвідношення

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k)=\begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ -P\alpha_\nu^k E_2 & E_2 \end{pmatrix}\widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x_k,x_{k-1})\mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}),\ k=\overline{1,\nu}. \tag{34.28}$$

Побудуємо фундаментальну матрицю $\widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x,s)$, використовуючи теорему 19.4. Для цього знайдемо матрицю-функцію Коші $\widetilde{\mathcal{K}}_\nu^{k-1}(x,s)$ КДР

$$Y_\nu'' + M\frac{\alpha_\nu^k}{h}JY_\nu' = 0, \quad 1\leqslant k\leqslant \nu, \tag{34.29}$$

що еквівалентне системі (34.27). Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що функція Коші цього КДР визначається виразом

$$\widetilde{\mathcal{K}}_\nu^{k-1}(x,s) = \left(J_\nu^k\right)^{-1}\left[E_2 - e^{-J_\nu^k(x-s)}\right],$$

де $J_\nu^k = M\frac{\alpha_\nu^k}{h}J$, $k=\overline{1,\nu}$. Врахуємо також, що квазіпохідні в сенсі рівняння (34.29) і спряженого до нього рівняння відповідно до (17.3) та (17.13) мають вигляд

$$Y_\nu^{[1]}(x) = Y_\nu'(x), \quad Z_\nu^{\{1\}}(s) = -Z_\nu'(s) + J_\nu^k Z_\nu(s).$$

Тоді на підставі теореми 19.4 фундаментальна матриця системи (34.27) має вигляд

$$\widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x,s)=\begin{pmatrix} E_2 & \left(J_\nu^k\right)^{-1}\left[E_2 - e^{-J_\nu^k(x-s)}\right] \\ O_2 & e^{-J_\nu^k(x-s)} \end{pmatrix},$$

звідки

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\nu}^{k-1}(x_k, x_{k-1}) = \begin{pmatrix} E_2 & \left(J_\nu^k\right)^{-1}\left[E_2 - e^{-J_\nu^k h}\right] \\ O_2 & e^{-J_\nu^k h} \end{pmatrix}$$

Підставляючи цю матрицю у формулу (34.28), отримаємо ТДФ для системи (34.24) (яка водночас є наближеною для системи (34.21)):

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k) = \begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ -P\alpha_\nu^k E_2 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & \left(J_\nu^k\right)^{-1}\left[E_2 - e^{-J_\nu^k h}\right] \\ O_2 & e^{-J_\nu^k h} \end{pmatrix} \mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}). \quad (34.30)$$

Можна показати (див., н-д, [**33**, с. 54]), що

$$e^{-tJ} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

тому

$$e^{-J_\nu^k h} = e^{-M\alpha_\nu^k J} = \begin{pmatrix} \cos M\alpha_\nu^k & \sin M\alpha_\nu^k \\ -\sin M\alpha_\nu^k & \cos M\alpha_\nu^k \end{pmatrix} =$$

$$= \cos M\alpha_\nu^k \cdot E_2 - \sin M\alpha_\nu^k \cdot J.$$

Обчислимо також $\left(J_\nu^k\right)^{-1}$:

$$\left(J_\nu^k\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -M\frac{\alpha_\nu^k}{h} \\ M\frac{\alpha_\nu^k}{h} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h}{M\alpha_\nu^k} \\ -\frac{h}{M\alpha_\nu^k} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{h}{M\alpha_\nu^k} J.$$

Якщо ці вирази підставити в (34.30) і виконати множення блокових матриць, то ТДФ набуде вигляду

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k) = \begin{pmatrix} E_2 & G_\nu^k \\ -P\alpha_\nu^k \cdot E_2 & H_\nu^k \end{pmatrix} \mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}), k = \overline{1, \nu}, \quad (34.31)$$

де

$$G_\nu^k = \frac{h}{M\alpha_\nu^k}\left[\sin M\alpha_\nu^k \cdot E_2 - \left(1 - \cos M\alpha_\nu^k\right) \cdot J\right],$$

$$H_\nu^k = \left[\cos M\alpha_\nu^k - \frac{Ph}{M}\sin M\alpha_\nu^k\right]E_2 - \\ - \left[\sin M\alpha_\nu^k - \frac{Ph}{M}\left(1-\cos M\alpha_\nu^k\right)\right]J.$$

З крайової умови (34.20) на лівому кінці випливає, що перша компонента блокового вектора $\mathcal{Y}_\nu(0)$ дорівнює O_2. Вибравши другу компоненту цього вектора рівною довільній ненульовій (скажімо, одиничній) матриці, так що $\mathcal{Y}_\nu(0) = (O_2, E_2)^\top$, за рекурентною формулою (34.31) знайдемо $\mathcal{Y}_\nu(\pi)$, яке, очевидно, залежатиме від параметрів P і M. Тоді з крайової умови (34.20) на правому кінці отримаємо рівняння

$$\det \mathcal{Y}_\nu^1(P, M) = 0,$$

де $\mathcal{Y}_\nu^1(P, M)$ — перша блокова компонента вектора $\mathcal{Y}_\nu(\pi; P, M)$.

Це і є *характеристичне рівняння* для визначення P та M. Послідовно задаючи значення крутильного моменту M, будемо обчислювати значення осьової стискаючої сили P. При $M=0$ чи $P=0$ вихідна задача значно спрощується і тому розв'язується окремо. В таблиці 4 наведені числові результати, а на рис. 1 — крива залежності значень P від значень M.

Наостанок зауважимо, що у випадку, коли вал має сталий поперечний переріз і відтак $g(x) = \text{const}$, задача (34.16), (34.17) досліджувалась у роботі [**13**], де отримано умову стійкості у вигляді співвідношення

$$\frac{M^2}{4g^2} + \frac{P}{g} = \frac{\pi^2}{l^2}.$$

▲

Таблиця 4. *Залежність між параметрами P і M*

M	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
P	0.540	0.539	0.536	0.530	0.522	0.512	0.499	0.484
M	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75
P	0.467	0.448	0.426	0.402	0.376	0.347	0.317	0.283
M	0.8	0.85	0.9	0.95	1	1.05	1.09	
P	0.248	0.210	0.170	0.128	0.083	0.036	0	

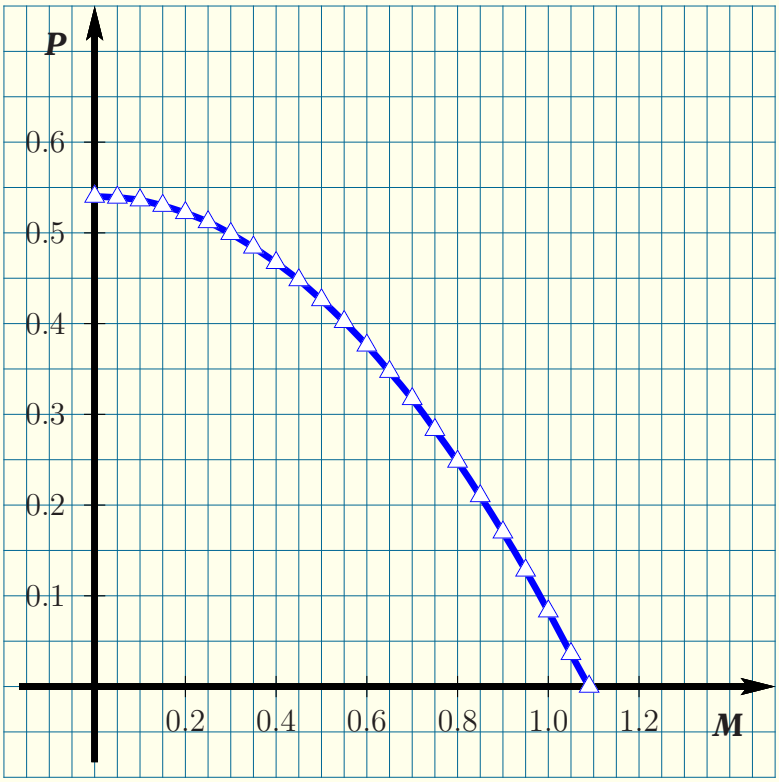

Рис. 1. Крива залежності стискаючої сили від крутильного моменту

Бібліографія

[1] Антоневич А. Б., Радыно Я. В. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 318, №2. – С. 267–270. 30

[2] Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций: Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 311 с. 29, 45, 67, 236

[3] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 749 с. 19, 23, 24, 28, 39, 48, 51, 54, 56, 71

[4] Ахиезер Н. И. Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов // Успехи мат. наук. – 1941. – №9. – С. 126-–156. 15

[5] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 544 с. 15, 16

[6] Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории моментов. – Х.: ГНТИУ, 1938. – 265 с. 15

[7] Ахметов М. У., Перестюк Н. А., Тлеубергенова М. А. Управление линейными импульсными системами // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, №3. – С. 307–314. 27

[8] Ахметов М. У., Сеилова Р. Д. Ранговые признаки управляемости для краевой задачи линейной системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №6. – С. 723–730. 27

[9] Ашордиа М. Т. О задачи Коши для системы обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. ин-та прикл. матем. – Тбил. ун., 1987. – №22. – С. 5–41. 30

[10] Багмут И. Г. Разностные схемы высокого порядка точности для уравнений типа Лежандра // Вычислит. матем. и матем. физика. – 1972. – Т.12, №3.34

[11] Балоян Н. М., Молокович Ю. М. К вопросу о разностных схемах высокого порядка точности для обыкновенных дифференциальных уравнений с регулярной особенностью // Изв. ВУЗов. Математ. – 1975. – №7. – С. 10–18. 34

[12] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений: Пер. с англ. – М.: Изд. ИЛ, 1954. – 216 с.

[13] Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика: Пер. с нем. – Т.1. – М.: Гостехиздат, 1950. – 900 с. 272

[14] Брук В.М. О числе линейно независимых, квадратично интегрируемых решений систем дифференциальных уравнений // Функц. анализ. – 1975. – 5. – С. 25–33. 19

[15] Бурханов Ш. А., Макаров В. Л. О точных и усеченных разностных схемах для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, №9. – С. 1502–1514. 33

[16] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с. 45, 67, 236

[17] Власій О. О. Про збіжність наближених розв'язків квазідиференціальних рівнянь // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2005. – №540. – С. 62–64; 6, 11, 26

[18] Власій О. О., Мазуренко В. В. Крайові задачі для системи квазідиференціальних рівнянь з розподілами у коефіцієнтах // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643. – С.73–86. 6, 11, 26

[19] Власий О. О., Мазуренко В. В., Таций Р. М. Об одном классе дискретно-непрерывных краевых задач для векторных квазидифференциальных уравнений // Актуальные проблемы современного анализа: Сб. научн. Трудов. – Гродно: ГрГУ им. Я. Купалы, 2009. – С.19–36. 6, 11, 26

[20] Власій О. О., Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2009. – №.660 – С.34–38; 6, 11

[21] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с. 132

[22] Гащук П., Зорій Л.-М. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Укр. технол., 1999. – 372 с. 12

[23] Глазман И. Об индексе дефекта дифференциальных операторов // ДАН СССР. – 1949. – Т.64, №2. – С. 151–154. 14

[24] Глазман И. М. К теории сингулярных дифференциальных операторов // Успехи. мат. наук. – 1950. – Т.5, №6(40). – С. 102–135. 15

[25] Годев К. Н., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А. Однородные разностные схемы для одномерных задач с обобщенными решениями // Матем. сборник. – 1986. – Т. 131(173), №2(10). – С. 159–184. 34, 35

[26] Головатий Ю. Д., Манько С. С. Оператор Шредінґера з δ'-потенціалом // Доповіді НАН України. – 2009. – №5. – С. 16–21. 25

[27] Головатий Ю. Д., Манько С. С. Точні моделі для операторів Шредінґера з δ'-подібними потенціалами // Укр. матем. вісник. – 2009. – Т. 6, №2. – С. 173–207. 25

[28] Голощапова Н. И., Заставный В. П., Маламуд М. М. Положительно определенные функции и спектральные свойства оператора Шрёдингера с точечными взаимодействиями // Мат. заметки. – 2011. – V. 90, №1. – P. 151–156. 25

[29] Голощапова Н. И., Оридорога Л. Л. Одномерный оператор Шрёдингера с δ- и δ'-взаимодействиями // Мат. заметки. – 2008. – V. 84, №1. – P. 127–131. 25

[30] Горюнов А. С., Михайлец В. А. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов четного порядка // Доклады НАН Украины. – 2009. – №4. – С. 19–24. 26

[31] Горюнов А. С., Михайлец В. А. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов нечетного порядка // Доклады НАН Украины. – 2009. – №9. – С. 27–31. 26

[32] Гохман Э. Х. Интеграл Стильтьеса и его приложения. – М.: ГИФМИ. – 1958.

[33] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с. 53, 271

[34] Дерр В. Я. Квазидифференциальные уравнения: неосцилляция решений. – Ижевск, 1984. – 54 с. – Деп. в ВИНИТИ, №1749. 22

[35] Дерр В. Я. Квазидифференциальные уравнения: сопряженные краевые задачи. – Ижевск, 1984. – 40 с. – Деп. в ВИНИТИ, №2994. 22

[36] Дерр В. Я. К обобщенной задаче Валле-Пуссена // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23, №11. – С. 1861–1872. 22

[37] Дерр В. Я. К определению решения линейного дифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэфициентах // Доклады АН СССР. – 1988. – Т.298, №2. – С. 269–272. 22

[38] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с. 22

[39] Егоров Ю. В. К теории обобщенных функций // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45, вып. 5(275). – С. 3–40. 30, 45

[40] Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы, модели и приложения. – М.: Наука, 1991. – 256 с. 27, 29, 30

[41] Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник / Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М. та ін. – Львів: Вид.-во НУ"ЛП 2001. – 244 с. 168

[42] Исследование сложных непрерывно-дискретных ситстем / Кухта К.Я. и др. – Киев: Наук. думка, 1981. – 272 с. 12

[43] Кац И. С. Спектральная теория струны и патологические процессы размножения и гибели // Функц. анализ и его прил. – 2005. – Т. 39, №2. – С. 74–78. 24

[44] Коган В. И., Рофе-Бекетов Ф. С. К вопросу о дефектных числах симметрических дифференциальных операторов с комплексными коэффициентами // Матем. физ. и функц. ан. – 1971. – 2. – С. 45–60. 15, 19

[45] Коган В. И., Рофе-Бекетов Ф. С. О квадратично интегрируемых решениях симметрических систем дифференциальных уравнений произвольного порядка: Препр. / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низк. температур. – Харьков, 1973. – 60 с. 15, 19

[46] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд. ИЛ, 1958. – 474 с. 108

[47] Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями: Пер. с нем. – М.: Наука, 1968. – 503 с. 12, 147, 266

[48] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с. 39, 45, 247, 248

[49] Корнеев В. Г. О точных сеточных схемах // Вычислит. матем. и матем. физика. – 1982. – Т. 22, №3. – С. 646–654. 34

[50] Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, I, II // Матем. сборник. – 1947. – Т. 20(62), №3. – С.431–495; Т. 21(63), №3. – С. 365–404. 15, 16

[51] Крейн М. Г. Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале $(0, \infty)$ // Доклады АН СССР. – 1950. – Т. 74, №1. – С. 9–12. 15

[52] Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Еругин Н.П., Штокало И.З., Бондаренко Г.С. и др. – К.: Вища шк., 1974. – 472 с. 108, 123, 169, 186

[53] Кутнів М. В. Про точність триточкових різницевих схем m-го рангу для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Вісник Львів. унів. Серія прикл. матем. та інформ. – 2000. – Вип. 2. – С. 43–49. 34

[54] Кутнів М. В. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами третього роду // Вісник Львів. унів. Серія прикл. матем. та інформ. – 2002. - Вип. 4. – С. 61–66. 34

[55] Кутнив М. В., Макаров В. Л., Самарский А. А. Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39, № 1. – С. 45–60. 34

[56] Левин А. Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения // Вестн. Ярославского унив. – 1974. – Вып. 8. – С. 122–144. 30

[57] Лукашенко Т. П., Скворцов В. А., Солодов А. П. Обобщенные интегралы. – 2-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2011. – 280 с. 249

[58] Мазуренко В. Про коливання балок з дискретно-неперервним розподілом параметрів // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. – Львів. – 2000. – Т. 2. – С. 255–259. 6, 11, 26

[59] Мазуренко В. В. Про звідність дискретно-неперервної крайової задачі до узагальненої схеми Аткінсона // Доповіді НАН України. – 2001. – №8. – С. 19–22. 6, 11

[60] Мазуренко В. В., Таций Р. М. О разрешимости неоднородной граничной задачи для дифференциальной системы с мерами // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, №3. – С. 328–336. 6, 11

[61] Мазуренко В. В., Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Про властивості матриці Ґріна систем з дискретно-неперервним розподілом параметрів // Вісник Прикарпатського університету: Математика. Фізика. – 2007. – Вип. 3. – С. 21–29. 6, 11, 26

[62] Макаров В. Л., Макаров И. Л., Приказчиков В. Г. Точные разностные схемы и схемы любого порядка точности для систем дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравн. – 1979. – Т. 15, №7. – С. 1194–1205. 33

[63] Макаров В. Л., Гаврилюк И. П., Лужных В. М. Точные и усеченные разностные схемы для задачи Штурма-Лиувилля с вырождением // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, №7. – С. 1265–1275. 34

[64] Махней О. В. Асимптотика власних значень і власних функцій сингулярного диференціального оператора на скінченному інтервалі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 2. – С. 17–25. 6, 11

[65] Махней О. В. Узагальнений несамоспряжений оператор другого порядку на півосі // Вісник Львів. нац. універ. Сер. мех.-мат. – 2002. – Вип. 60. – С. 92–101. 6, 11

[66] Махней О. В. Функція Гріна сингулярного диференціального оператора та її властивості // Математичні студії. – 2002. – Т. 18, № 2. – С. 147–156. 6, 11

[67] Махней О. В. Функція Ґріна крайової задачі для сингулярного квазідиференціального рівняння // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643. – С.64–72. 6, 11, 26

[68] Махней А. В., Таций Р. М. Асимптотика собственных значений и собственных функций сингулярного квазидифференциального оператора // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, №8. – С. 1044–1051. 6, 11, 26

[69] Махней О. В., Тацій Р. М. Розвинення за власними вектор-функціями у випадку простих власних значень сингулярного квазідиференціального оператора // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, №3. – С. 16–27. 6, 11, 26

[70] Махней О. В., Тацій Р. М. Разложение по собственным функциям в случае простых собственных значений сингулярного квазидифференциального оператора // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, №2. – С. 179–187. 6, 11, 26

[71] Махней О. В., Тацій Р. М. Асимптотична поведінка власних значень і власних функцій крайової задачі для сингулярного квазідиференціального рівняння // Математичні студії. – 2007. – Т. 29, №2. – С. 165–174. 6, 11, 26

[72] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1954. – 352 с. (2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 528 с.) 15, 16, 84

[73] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с. 28, 39, 41, 247

[74] Нижник Л. П. Одномерный оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями в пространствах Соболева // Функц. ан. и его прил. – 2006. – V. 40, №2. – С. 74–79. 25

[75] Нижник Л. П. Оператор Шрёдингера с δ'-взаимодействием // Функц. ан. и его прил. – 2003. – V. 37, №1. – С. 85–88. 24

[76] Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. – М.: Машиностроение, 1973. – 659 с. 12, 79

[77] Орлов С. А. Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 92, №3. – С. 483–486. 15

[78] Орлов С. А. К теории резольвенты одномерной регулярной краевой задачи // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 111, №3. – С. 538–541. 15, 17

[79] Орлов С. А. Конструкция резольвент и спектральных функций одномерных линейных самосопряженных сингулярных дифференциальных операторов $2n$-го порядка // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 111, №6. – С. 1175–1177. 15, 17

[80] Перестюк Н. А., Остапенко Е. В. Управляемое импульсное воздействие в играх с фиксированным временем окончания // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №8. – С. 1112–1118. 27

[81] Радыно Н. Я. О решениях линейных дифференциальных уравнений в алгебре мнемофункций, содержащих медленно растущие распределения // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. н. – 1999. – №1. – С. 18–22. 30

[82] Рофе-Бекетов Ф. С. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функц. анализ и их приложения. – 1969. – 8. – С. 3–24. 15, 18

[83] Самойленко А. М., Бойчук А. А. Линейные нётеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, №4. – С. 564–568. 27

[84] Самойленко А. М., Илолов М. К теории неоднородных по времени эволюционных уравнений с импульсным воздействием // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 319, №1. – С. 63–67. 27

[85] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Наукова думка, 1987. – 287 с. 27

[86] Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: Підручник. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – 600 с. 156

[87] Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Трофимчук С. И. Проблема “биений” в импульсных системах: Препр. / АН УССР. Ин-т мат. – 1990. – №11. – С. 1–46. 27

[88] Слюсарчук В. Е. Общие теоремы о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №7. – С. 954–964. 27

[89] Стасюк М. Ф. Структура розв’язків звичайних диференціальних і квазідиференціальних рівнянь з кусково-змінними коефіцієнтами // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 12. – С. 33–36. 6, 26

[90] Стасюк М. Ф., Власій О. О. Рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння другого порядку // Вісник НУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 2000. – №407. – С. 82–87; 6, 11, 26

[91] Стасюк М. Ф., Таційй Р. М. До дослідженя коливань і стійкості систем з кусково-змінним розподілом параметрів // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 5. – С. 43–47. 6

[92] Стасюк М. Ф., Таций Р. М. Структура решений обобщенного квазидифференциального уравнения 2-го порядка //

Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. – 1984. – №182. – С. 120–122. 6, 26

[93] Стасюк М. Ф., Таций Р. М. Корректные дифференциальные системы с мерами // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. – 1988. – №222. – С. 89–90. 6, 74

[94] Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Про одну систему завантажених інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: Диференц. рівн. та їх застосування. – 1990. – №242. – С. 91–92. 6

[95] Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Диференціальні рівняння з коефіцієнтами – узагальненими функціями вищих порядків // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: Диференц. рівн. та їх застосування. – 1991. – № 251. – С. 111–113. 6, 26

[96] Стасюк М., Тацій Р. Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами // Вісник НУ "Львів. політех.": Фіз.-мат. науки. – Вип. 566. – 2006. – С. 33–40. 6

[97] Тацій Р. М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння: Препр. / АН України ІППММ. – 1994. – №2-94. – С. 1–54. 6, 26

[98] Тацій Р. М. Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Львів. Держ. ун-т ім. І.Франка. - Львів, 1994. – 37 с. 28, 32, 74

[99] Тацій Р. М., Власій О. О. Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння 4-го порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, №4. – С. 49–55. 6, 11, 26

[100] Тацій Р. М., Власій О. О. Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння та її застосування // Доповіді НАН України. – 2007. – №9. – С. 17–20. 6, 11, 26

[101] Тацій Р. М., Кісілевич В. В., Стасюк М. Ф., Пахолок Б. Б. Про аналітичну залежність розв'язків лінійного диференціального рівняння з мірами від параметра // Волинськ. матем. вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 165–167. 6

[102] Тацій Р.М., Мазуренко В.В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, №1. – С. 43–53. 6, 11, 26

[103] Тацій Р. М., Мазуренко В. В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь непарного порядку // Математичні студії. – 2001. – 16, №1. – С. 61–75. 6, 11, 26

[104] Тацій Р. М., Пахолок Б. Б. О структуре фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1989. – №4. – С. 25–28. 6, 26

[105] Тацій Р. М., Пахолок Б. Б. Про порядок узагальнених функцій в правих частинах квазідиференціальних рівнянь // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1991. – №1. – С. 16–19. 6, 26

[106] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Власій О. О., Живічинські М. Частково вироджені та вироджені квазідиференціальні рівняння // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2007. – №601. – С. 18–27; 6, 11, 26

[107] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Про спектральні властивості однієї дискретно-неперервної крайової задачі // Вісник ДУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 1996. – №229. – С. 165–170. 6, 11, 26

[108] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Неоднорідна дискретно-неперервна крайова задача для векторного КДР // Вісник ДУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 1998. – №346. – С. 120–124. 6, 11, 26

[109] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Про апроксимацію розв'язків дискретно-неперервних крайових задач // Вісник ДУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 1999. – №364. – С. 163–173. 6, 11, 26

[110] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Конструкція елементів фундаментальної матриці квазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2004. – №518. – С. 30–35. 6, 26

[111] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В., Мазуренко В. В. Узагальнені дискретно-неперервні крайові задачі для векторного квазідиференціального рівняння четвертого порядку // Вісник НУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 2000. – №407. – С. 21–27; 6, 11

[112] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В. Про порядок зростання розв'язків звичайного диференціального рівняння з узагальненими коефіцієнтами як функцій параметра // Вісник НУ "Львів. політех.": Прикладна матем. – 2000. – №411. – С. 311–317; 6, 11

[113] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В. Моделювання дискретно-континуальних систем. Основи концепції квазіпохідних // Фіз.-мат. моделювання та інформац. технології. – 2009. – №10. – С. 7–37. 6, 26

[114] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 131, №3. – С. 514–517. 33, 35

[115] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Вычислит. математика и матем. физика. – 1961. – Т. 1, №1. – С. 5–63. 10, 33, 35

[116] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // Вычислит. математика и матем. физика. – 1961. – Т. 1, №3. – С. 425–440. 33, 35

[117] Самарский А. А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями: Уч. пособ. – М.: Высш. шк., 1987. – 296 с. 10, 34, 35

[118] Самарский А. А. Теория разностных схем: Уч. пособ. – М.: Наука, 1977. – 656 с. 221, 228, 236

[119] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с. 26, 29

[120] Фихтегольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 2 – М.: Физматлит, 2001. – 810 с. 211

[121] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1970. – 720 с. 53

[122] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем: Пер. с рум. – М.: Мир, 1971. – 312 с. 27, 28, 29, 39, 46, 47

[123] Шилов Г. Е. Математический анализ. 2-й спец. курс. – М.: Изд.МГУ, 1984. – 201 с.

[124] Шин Д. Теорема существования квази-дифференциального уравнения n-го порядка // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18, №8. – С. 515–518. 12, 82

[125] Шин Д. О решениях самосопряженного дифференциального уравнения $u^{[n]} = lu, I(l) \neq 0$, принадлежащих к

$L_2(0,\infty)$ // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18, №8. – С. 519–522. 12, 82

[126] Шин Д. О квази-дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18, №8. – С. 523–526. 12, 82

[127] Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сборник. – 1940. – Т. 7(49), №3. – С. 479–527. 13, 82

[128] Шин Д. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Матем. сборник. – 1943. – Т. 13(55), №1. – С. 39–70. 13, 14

[129] Штраус А. В. О спектральных функциях дифференциальных операторов // Известия АН СССР. Серия математ. – 1955. – 19. – С. 201–220. 15, 17

[130] Штраус А. В. О спектральных функциях дифференциального оператора четного порядка // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 115, №1. – С. 67–70. 15, 17

[131] Штраус А. В. Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка // Известия АН СССР. Серия математ. – 1957. – 21. – С. 785–808. 15, 17

[132] Штраус А. В. О кратности спектра самосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Доклады АН СССР. – 1964. – Т. 155, №4. – С. 771–774. 15, 17

[133] Чуйко С. М. Обобщенный оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, №8. – С. 1132–1135. 27

[134] Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. Solvable models in quantum mechanics. With an appendix

by Pavel Exner. – 2nd revised ed. – Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2005. – 488 p. 25

[135] Albeverio S., Kurasov P. Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators. – Cambridge: Univ. Press, 2000. 25

[136] Antosik P., Ligeza J. Products of measures and functions of finite variations // Generalized functions and operational calculus: Proc. Conf. Varna, 1975. Sofia, 1979. – P. 20–26. 29, 31

[137] Colombeau J. F. New generalized functions and multiplication of distributions. – Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1989. – 372 p. 30

[138] Everitt W. N. On the deficiency index problem for ordinary differential operators 1910-1976 // Differential Equations (Proceedings of The 1977 Uppsala International Conference). – P. 62–81, 20

[139] Everitt W. N. Linear ordinary quasi-differential expressions. – Proceedings of the 1983 Beijing Symposium on Differential Equations and Differential Geometry. – Science Press, University of Beijing, P.R. China, 1986. – P. 1–28. 20, 21

[140] Everitt W. N., Markus L. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators // Math. Surveys and Monographs. – Vol. 61. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. 20, 21

[141] Everitt W. N., Muldowhey I. S., Thandi N. Factorization of quasi-differential operators // Proc. Amer. Math. Soc. – 1991. – Vol. 113, No. 1. – P. 93–98. 20, 21

[142] Everitt W. N., Race D. Some remarks on linear ordinary quasi-differential expressions // Proc. London Math. Soc. – 1987. – Vol. 3-54, No. 2. – P. 300–320. 20, 21

[143] Everitt W. N., Zettl A. Generalized symmetric ordinary differential expressions I: the general theory // Nieuw Arch. Wiskunde. – 1979. – Vol. 27, No. 3. – P. 363–397. 20, 21

[144] Everitt W. N., Zettl A. Differential operators generated by a countable number of quasi-differential expressions on the real line // Proc. London Math. Soc. – 1992. – Vol. 3-64, No. 3. – P. 524–544. 20, 21

[145] Fang H. The existence of periodic solutions of impulsive differential equations of mixed type // Appl. Math. and Mech. Engl. Ed. – 2000. – Vol. 21, No. 3. – P. 291–296. 27

[146] Feller W. On second order differential operators // Ann. Math. – 1955. – Vol. 61. – P. 90–105. 24

[147] Feller W. Generalized second order differential operators and their lateral conditions // Ill. J. Math. – 1957. – Vol. 1, No. 4. – P. 459–504. 24

[148] Feller W. The birth and death processes as diffusion processes // Journ. Math. Pur. Appl. – 1959. – Vol. 38. – P. 301–345. 24

[149] Frayer C., Hryniv R. O., Mykytyuk Ya. V., Perry P. A. Inverse scattering for Schrödinger operators with Miura potentials: I. Unique Riccati representatives and ZS-AKNS systems // Inverse Problems. – 2009. – Vol. 25, No. 11. – 115007 (25 p). 25

[150] Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., Makarov V. L. Three point difference schemes of variable order for nonlinear BVPs on the half axis. Technical Report // Friedrich Schiller University Jena, Department of Mathematics and Computer Science; 05 04, 2005. – P. 1–37. 34

[151] Goloschapova N., Oridoroga L. On the Negative Spectrum of One-Dimensional Schrödinger Operators with Point Interactions // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2010. – Vol. 67. – P. 1–14. 25

[152] Golovaty Yu. D., Hryniv R. O. On norm resolvent convergence of Schrödinger operators with δ'-like potentials // J. Phys. A: Math. Theor. – 2010. – Vol. 43, No. 15. – 155204 (14 p). 25

[153] Halas Z., Tvrdý M. Continuous dependence of solutions of generalized linear differential equations on a parameter // Funct. Differ. Equ. – 2009. – Vol. 16, No. 2. – P. 299–313. 249

[154] Hildebrandt T. H. On systems of linear differentio-Stiltjes-integral equations // Illinois Journ. Math. – 1959. – Vol. 3, No. 3. – P. 352–373. 30, 52, 58, 98, 138

[155] Hildebrandt T. H. Introduction to the theory of integration. – Academic Press, New York – London, 1963. – 385 p. 43, 246

[156] Hryniv R. O., Mykytyuk Ya. V. Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville operators with singular potentials // J. Funct. Anal. – 2006. – Vol. 238, No. 1. – P. 27–57. 25

[157] Kodaira K. On ordinary differential equations of any even order and the correponding eigenfunction expansions // Amer. J. Math. – 1950. – Vol. 72. – P. 502–544. 20, 21

[158] Kostenko A. S., Malamud M. M. 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set // J. Differ. Equatios. – 2010. – Vol. 241, No. 2. – P. 253–304. 25

[159] Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations // Czech. Math. J. – 1958. – Vol. 8, No. 3. – P. 360–388. 30

[160] Ligeza J. Cauchy's problem for system of linear differential equations with distributional coefficients // Coloq. math. – 1975. – Vol. 33, No. 2. – P. 295–303. 28, 29, 31

[161] Ligeza J. On distributional solution of some systems of linear differential equuatios // Casop. pro pestov. mat. – 1977. – Vol. 102, No. 1. – P. 37–41. 29, 31

[162] Ligeza J. Generalized solutions of ordinary linear differential equations in the Colombean algebra // Math. Bochem. – 1993. – Vol. 118, No. 2. – P. 123–146. 30

[163] Makarov V. L., Gavrilyuk I. P., Kutniv M. V., Hermann M. A two point difference scheme of arbitrary given accuracy order for BVPs for systems of first order nonlinear ODEs // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 4, No. 4. – P. 464–493. 34

[164] Makarov V. L., Gavrilyuk I. P., Kutniv M. V., Hermann M. A two point difference scheme of arbitrary given accuracy order for BVPs for systems of first order nonlinear ODEs // Jenaer schriften zur mathematik und informatik. Eingag: 03.03. – 2003. – P. 1–24. 34

[165] Makhney O. V., Tatsiy R. M. The Structure of Cauchy Function of a Vector Quasidifferential Equation // Matematychni Studii. – 2004. – Vol. 21, No. 1. – P. 221–224. 6, 11, 26

[166] Mazurenko V., Stasyuk M., Tatsiy R. On boundary value problem for the system of ordinary differential equations with distributions as coefficients // Matematychni Studii. – 2009. – Vol. 31, No. 1. – P. 65–74. 6, 11, 26

[167] Mikhailets V., Molyboga V. One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Methods Funct. Anal. Topol. – 2008. – Vol. 14, No. 2. – P. 184–200. 25

[168] Mikhailets V., Molyboga V. Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Methods Funct. Anal. Topol. – 2009. – Vol. 15, No. 1. – P. 31–40. 25

[169] Ogurisu O. On the number of negative eigenvalues of a Schrödinger operator with point interactions // Lett. Math. Phys. – 2008. – Vol. 85. – P. 129–133. 25

[170] Pandit S. G. Differential systems with impulsive perturbations // Pacific J. Math. – 1980. – Vol. 86, No. 2. – P. 553–560. 27

[171] Pandit S. G., Deo S. G. Differential systems involving impulses / Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 954. – Springer-Verlag, Berlin, 1982. – 102 p. 30

[172] Rofe-Beketov F. S., Kholkin A. M. Spectral Analysis of Differential Operators. Interplay Between Spectral and Oscillatory Properties. – USA: World Scientific, 2005. – 438 p. 19

[173] Savchuk A. M., Shkalikov A. A. On the eigenvalues of the Sturm–Liouville operator with potentials from Sobolev spaces // Math. Notes. – 2006. – Vol. 80, No. 6. – P. 814–832. 25

[174] Savchuk A. M., Shkalikov A. A. On the properties of mappings associated with inverse Sturm-Liouville problems // Proc. Steklov. Inst. Math. – 2008. – Vol. 261. – P. 218–237. 25

[175] Savchuk A. M., Shkalikov A. A. Inverse Problems for Sturm–Liouville Operators with Potentials in Sobolev Spaces: Uniform Stability // Func. Analysis and Its Applications. – 2010. – Vol. 44, No. 4. – P. 270–285. 25

[176] Schwabik S., Tvrdy M., Vejvoda O. Differential and Integral Equations. – Praha: Academia, 1979. – 249 p. 30

[177] Stallard S. Functions of bounded variations as solutions of differential systems // Proc. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 13. – P. 366–373. 30

[178] Stone M. H. Linear Transformation in Hilbert Space and Their Applications to Analysis. – New York: A.M.S., 1932. – 622 p. 15

[179] Šeba P. Some remarks on the δ'-interaction in one dimension // Rep. Math. Phys. – 1986. – Vol. 24, No. 1. – P. 111–120. 25

[180] Titchmarsh E. C. A problem in relativistic quantum mechanics // Proc. London Math. Soc. – 1961. – Vol. 3-11, No. 1. – P. 169–192. 25

[181] Tvrdý. Differential and integral equations in the space of regulated functions // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 25. – P. 1–104. 248

[182] Walker Ph. W. A vector-matrix formulation for formally symmetric ordinary differential equations with applications to solutions of integrable square // J. London Math. Soc. – 1974. – Vol. 9, No. 1. – P. 151–159. 18, 20

[183] Weyl H. Über gewönliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugenhörigen Entwicklungen Willkürlicher Funktionen // Math. Ann. – 1910. – 68. – S. 220-269. 14

[184] Weidmann J. Zur Spektraltheorie von Sturm-Liouville-Operatoren // Math. Zeitschr. – 1967. – Vol. 98, No. 4. – S. 268–302. 20

[185] Weidmann J. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators / Lecture Notes in Mathematics, 1258. – Springer-Verlag, 1987. – 303 p. 20

[186] Windau W. Über lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung mit Singularitäten und die dazugehörigen Darstellungen willkürlicher Funktionen // Math. Ann. – 1921. – 83. – S. 256–279. 14

[187] Zettl A. Formally self-adjoint quasi-differential operators // Rocky Mount. Journal of Math. – 1975. – Vol. 5. – P. 453–474. 20, 21

[188] Zolotaryuk A. V., Christiansen P. L., Iermakova S. V. Scattering properties of point dipole interactions // J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. – Vol. 39. – P. 9329–9338. 25

[189] Zolotaryuk A. V. Two-parametric resonant tunneling across the $\delta'(x)$ potential // Adv. Sci. Lett. – 2008. – Vol. 1. – P. 187–191. 25

[190] Zolotaryuk A. V. Boundary conditions for the states with resonant tunnelling across the δ'-potential // Phys. Lett. A. – 2010. – Vol. 374, No. 15-16. – P. 1636–1641. 25

Іменний покажчик

Аткінсон (Atkinson F.V.), 54
Ахієзер Н.І., 15

Белл (Bell E.T.), 12
Беллман (Bellman R.E.), 53

Вайдман (Weidmann J.), 20
Валле-Пуссен (Vallee-Poussin Ch.J. de La), 22
Вейль (Weyl H.), 14, 15
Віндау (Windau W.), 14
Волкер (Walker Ph.W.), 18
Вронський (Wroński J.M.), 97

Глазман І.М., 14, 15

Дерр В.Я., 22
Дірак (Dirac P.A.M.), 29
Діріхле (Dirichlet P.G.L.), 52

Еверітт (Everitt W.N.), 20

Жордан (Jordan M.E.C.), 41

Зеттл (Zettl A.), 20

Каратеодорі (Caratheodory C.), 26
Кац І.С., 23
Коган В.І., 15
Кодаіра (Kodaira K.), 20
Коші (Cauchy A.L.), 56
Крамер (Cramer G.), 106
Крейн М.Г., 15, 23
Кронекер (Kronecker L.), 36
Курцвейль (Kurzweil J.), 30

Лагранж (Lagrange J.L.), 14
Лебег (Lebesgue H.L.), 13
Ліувілль (Liouville J.), 33

Маркус (Markus L.), 20
Мікусінський (Mikusiński J.), 45

Наймарк М.А., 15

Орлов С.А., 15
Остроградський М.В., 97

Перрон (Perron O.), 30
Пікар (Picard Ch.E.), 17
Покорний Ю.В., 22

Ріман (Riemann G.F.B.), 28
Ріс (Riesz F.), 46
Рофе-Бекетов Ф.С., 15

Самарський О.А., 33
Сікорський (Sikorski R.), 45
Соболєв С.Л., 34, 45
Стільтьєс (Stieltjes Th.J.), 17
Стоун (Stone M.H.), 15

Тіхонов А.М., 33

Феллер (Feller W.), 24
Філіппов О.Ф., 26

Гевісайд (Heaviside O.), 29
Хеллі (Helly E.), 45
Холькін А.М., 15

Шварц (Schwartz L.), 22, 45
Шин Д., 12, 14, 82
Шредінґер (Schrödinger E.R.), 24
Штраус А.В., 15
Штурм (Sturm J.Ch.F.), 33

Якобі (Jacobi C.G.J.), 97

Предметний покажчик

δ-послідовність, 32

D-апроксимація, 255

L-апроксимація, 255

альтернатива
– гранична точка, 15
– граничний круг, 15

блокова структура, 196

величини
– зосереджені, 12
– розподілені, 12

вираз
– квазідиференціальний, 20
– ∼ з мірами, 84
– ∼ непарного порядку, 18
– ∼ парного порядку, 16, 18
– ∼ спряжений, 90

добуток розподілів, 67
– коректний, 68
– некоректний, 67

еквівалентна рекурентна формула, 221, 232

ермітове бінарне відношення, 18

задача
– Валле-Пуссена
– ∼ узагальнена, 22
– Коші, *див.* задача початкова
– крайова, 190
– початкова, 85, 90, 99, 114, 118, 121, 122, 127, 132, 136

згин, 79, 80

згинальний момент, 79, 80

зображення
– Жордана, 41
– Лебега, 42

інтеграл
– Перрона-Стільтьєса, 30
– Рімана-Стільтьєса, 30
– ∼ некласичний, 30, 48

квазівронскіан, 97, 123, 137

квазіпохідна, 12, 16, 78, 81, 82, 85, 131, 155, 196
– мішана, 102
– спряжена, 82, 90, 118, 135

кут повороту, 79, 80

лінійна незалежність розв'язків, 98

матриця

– Коші, 56, 101, 142
– фундаментальна, *див.* матриця Коші
– ∼ структура, 103, 104, 124, 144, 145, 213
міра, 39, 45
– Стільтьєса, 29, 45, 77
мультиплікативне представлення, 167

нерівність Гронуолла-Беллмана, 53
– узагальнена, 55

одинична сходинка, *див.* функція Хевісайда
одиничний імпульс , *див.* функція Дірака
оператор
– Шредінґера
– ∼ з сингулярним потенціалом, 25
– ∼ з точковими взаємодіями, 25

первісна міри, 69
підхід
– секвенціальний, 45
– функціональний, 45
повна варіація, 39
поперечна сила, 79, 80
проблема моментів, 15
рівняння
– асоційоване, 131
– векторне квазідиференціальне
– ∼ неоднорідне, 155
– ∼ однорідне, 130
– ∼ спряжене, 157
– диференціальне з імпульсною дією, 26
– інтегральне матричне
– ∼ неоднорідне, 61
– ∼ однорідне, 56
– ∼ спряжене, 65
– квазідиференціальне, 12, 13, 22, 81
– ∼ асоційоване, 158
– ∼ вироджене, 210
– ∼ коректне, 81, 111, 117
– ∼ на графі, 22
– ∼ неоднорідне, 111, 116, 127
– ∼ однорідне, 84
– ∼ спряжене, 13, 82, 117
– ∼ умовно коректне, 113
– ∼ частково вироджене, 204
– матричне квазідиференціальне
– ∼ неоднорідне, 158
– ∼ однорідне, 130
– ∼ спряжене, 135
– узагальнене диференціальне, 119, 159

– $\sim$ коректне, 120
– $\sim$ неоднорідне, 125
– $\sim$ спряжене, 122, 159
розподіл, *див.* функція узагальнена

система рівнянь
– визначальна, 163
стільтьєсівська струна, 24

теорема
– про підстановку, 50
– Рісса, 46
– Хеллі, 45
– $\sim$ друга, 248
– $\sim$ перша, 247
точна різницева схема, 33
точне рекурентне співвідношення
– $(q+1)$-точкове, 232
– триточкове, 221

узагальнена система рівнянь
– коректна, 32, 72, 73, 78, 81, 126, 155
– лінійна неоднорідна, 72, 162
– лінійна однорідна, 70
– спряжена, 82, 90
умови спряження, 89

факторизація оператора, 21
формула
– Діріхле, 53
– інтегрування частинами, 50
– Ліувілля–Остроградського–Якобі, 97, 123
– точна двоточкова, 243
фундаментальна система розв'язків, 99, 105, 124, 125, 139, 146
функція
– абсолютно неперервна, 42
– вагова, 19
– Дірака, 29, 30, 38, 47, 116, 158
– Коші, 101, 105, 142, 211
– $\sim$ конструкція, 107, 108, 149
– обмеженої варіації, 39
– сингулярна, 42
– стрибків, 42, 48
– узагальнена, 22, 45, 67
– $\sim$ нова, 30
– $\sim$ сингулярна, 47
– Хевісайда, 29, 40
– $\sim$ зміщена, 38
– характеристична, 162

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

Роман Мар'янович Тацій
Марта Федорівна Стасюк
Віктор Володимирович Мазуренко
Олеся Орестівна Власій

УЗАГАЛЬНЕНІ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Дизайн обкладинки *Олеся Тацій*
Технічні редактори *Віктор Мазуренко, Олеся Власій*
Головний редактор *Василь Слюсарчук*

Підписано до друку 23.08.2011. Формат видання 60×84/16.
Папір офсетний. Друк офсетний. Ґарнітура «CM PsCyr».
Умовн. друк. арк. 17,4. Наклад 300 прим.

Видавництво «Коло»
Свідоцтво ДК №498 від 20.06.2001
вул. Бориславська, 8, м. Дрогобич, Україна, 82100
тел./факс: (03244) 2-90-60
e-mail.: koloopera@gmail.com