

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Ю. Г. Козак, В. М. Мацкул

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ  
ТА МОДЕЛІ ДЛЯ МАГІСТРІВ  
З ЕКОНОМІКИ

ПРАКТИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

*Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
вищих навчальних закладів*

Київ  
«Центр учбової літератури»  
2017

УДК 330.4(075.8)  
ББК 65.050я73  
К 59

**Рецензенти:**

**С. А. Єрохін** – доктор економічних наук, професор, ректор ВНЗ «Національна академія управління»;

**С. О. Якубовський** – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри світового господарства і міжнародних економічних відносин Одеського національного університету;

**О. Г. Янковий** – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економіки підприємства Одеського національного економічного університету.

**Козак Ю. Г.** Математичні методи та моделі для магістрів з економіки.  
**К 59** Практичні застосування. [текст] Навч. посіб. / Ю. Г. Козак, В. М. Мацкул. – К.: Центр учбової літератури, 2017. – 254 с.

**ISBN 978-617-673-488-8**

Розглядаються математичні методи та моделі, які застосовуються у різноманітних сферах економіки (як на мікро, так і на макрорівнях). Наводяться приклади розбудови та аналізу математичних моделей для достатньо широкого кола прикладних задач економічного аналізу. Проведення числових розрахунків зорієнтовано на застосування сучасних ІТ технологій.

Магістрантам з економіки та науковцям, які займаються дослідженнями економічних явищ та процесів.

УДК 330.4(075.8)  
ББК 65.050я73

ISBN 978-617-673-488-8

© Козак Ю. Г., Мацкул В. М., 2017.  
© Видавництво «Центр учбової літератури», 2017.

## Зміст

Передмова.....	5
<b>Розділ 1. Основи математичного моделювання та прогнозування.....</b>	<b>8</b>
1.1. Логіка прикладного економіко-математичного моделювання. Економічні дані (інформаційна база моделі). ....	8
1.2. Розвідувальний аналіз даних за допомогою комп'ютерних технологій. Однорідність та типологія. Багатовимірне ранжування. Метод експертних оцінок.....	10
1.3. Сутність та види прогнозів.....	25
<b>Розділ 2. Методи та моделі багатовимірного факторного аналізу..</b>	<b>28</b>
2.1. Кластерні процедури класифікації. Дискримінантний аналіз. ....	28
2.2. Факторний аналіз. Метод головних компонент. Узагальнений метод головних компонент (пакетний PLS/PCA-R, SPC).....	61
<b>Розділ 3. Моделювання та прогнозування динаміки економічних процесів.....</b>	<b>74</b>
3.1. Основи моделювання динаміки.....	74
3.2. Основні типи трендів. Короткострокове прогнозування на основі ковзних середніх.....	78
3.3. Оцінювання сезонної компоненти. Моделі Холта-Вінтера та CENSUS X-II.....	82
3.4. Моделі авторегресії AR, ARIMA*ARIMAS, ARCH, GARCH. Динамічні факторні моделі DFM та DFMS (із марківськими перемиканнями). Фільтр Калмана. Векторні авторегресії VAR.....	85
<b>Розділ 4. Особливі випадки регресійного аналізу .....</b>	<b>130</b>
4.1. Нелінійна регресія, особливості аналізу панельних (просторово-часових) даних. Моделювання причинних комплексів (системи структурних регресій).....	130
4.2. Моделювання причинних комплексів (системи структурних регресій). Проекція на латентну структуру. Методи PLS-PM/PCA-PM. Логіт-регресія МакФаддена .....	139
<b>Розділ 5. Динамічні оптимізаційні моделі.....</b>	<b>160</b>
5.1. Модель Ерроу-Дебре. Прикладні моделі обчислюваної загальної рівноваги (CGE – computable general equilibrium) та динамічної рівноваги DSGE.....	160
5.2. Застосування моделей CGE, DSGE.....	167
5.3. Динамічна задача оптимального управління пакетом виробничих інвестицій.....	187

Розділ 6. Моделювання за допомогою нейронних мереж	
<b>Імітаційне моделювання</b> .....	195
6.1. Загальні принципи нейромережевого моделювання.	
Приклади.....	195
6.2. Системна динаміка та імітаційне моделювання. Приклади.....	213
Література.....	249

## Передмова

Останнім часом моделювання стало найефективнішим засобом пізнання законів і закономірностей навколишнього світу. Для сучасної математики характерне інтенсивне проникнення в інші галузі знань, зокрема, і в економічні науки. Економіка, як наука про об'єктивні закони розвитку суспільства, постійно користується різноманітними кількісними характеристиками, і тому вона акумулювала в собі низку математичних методів. А активність економічних досліджень стає рушійною силою для математиків у подальшому розвитку математичного інструментарію. Сьогодні в економічній науці на провідні позиції виходить математична модель як дієвий інструмент дослідження та прогнозування розвитку економічних процесів і явищ.

Математична модель - це внутрішньо замкнута система математичних співвідношень, яка є дієвим інструментом відтворення певного класу якісних або кількісних функціональних характеристик, властивих економічному процесу чи явищу, що вивчається. Тому для визначення характерних особливостей класу математичних моделей, які застосовуються в економіці, використовується термін «економіко-математичне моделювання». Можна стверджувати, що економіко-математичне моделювання за останні десятиліття сформувалося в окрему міждисциплінарну область знань із властивими їй об'єктами, підходами та методами дослідження.

Економіко-математичне моделювання полягає у заміні реального економічного об'єкта або процесу математичною конструкцією, яка відтворює основні, найістотніші (із позиції дослідника) риси досліджуваного явища або процесу, абстрагуючись від неістотних. Економіко-математичні моделі використовують для діагностики стану об'єктів, при вивченні масових соціально-економічних явищ та процесів, закономірності яких формуються під впливом багатьох факторів, у моніторингу економічної кон'юнктури, при прогнозуванні та прийнятті науково обгрунтованих управлінських рішень. Тому надзвичайно актуальним постає завдання підготовки спеціалістів-аналітиків, і саме тому до навчальних програм підготовки магістрів з економіки включено обов'язковий блок дисциплін «Економіко-математичне моделювання». Даний блок, очевидно, поєднує теорію трьох дисциплін – економіки, математики та інформатики. Зрозуміло, що економіко-математичне моделювання як методологія та інструментарій у жодному разі не заперечує згадані дисципліни і не конкурує з ними, а, навпаки, синтезує та доповнює їх. Тому кваліфікований аналітик, який використовує методи математичного моделювання у повсякденній практиці, певною мірою повинен бути:

а) економістом – щоб використовувати економічну теорію для аналізу емпіричних даних;

- б) математиком – щоб формулювати економічну теорію засобами математичної мови, зробивши її придатною для побудови формалізованих схем та перевірки їх коректності (адекватності емпіричним даним);
- в) спеціалістом у економічній статистиці – щоб володіти процесами формування інформаційної бази даних і вміти порівнювати у відповідності до економічної теорії реально виміряні макро- та мікроекономічні емпіричні показники;
- г) спеціалістом в математичній статистиці – щоб використовувати для аналізу емпіричних даних кількісні методи;
- д) спеціалістом із сучасних ІТ технологій – щоб використовувати комп'ютерну техніку та необхідні програмні продукти, без застосування яких сьогодні немислимий системний аналіз.

Отже, можна констатувати, що:

1. Економіка (як будь-яка теоретична наука) в якості інструментарію своїх досліджень використовує моделі, формалізованою мовою опису яких є математика. А наявний апарат математичних методів дає змогу знайти чисельні розв'язки побудованих моделей, спрогнозувати можливі сценарії розвитку, виконати імітаційні розрахунки.
2. Науково-дослідницькі розробки економічних проблем неможливі без використання досить складного й одночасно доступного математичного інструментарію. Інакше ці розробки будуть мати описовий характер або ж будуть звичайною економічною публіцистикою.

Перше твердження покликане захищати економіку (особливо економічні дисципліни) від насильницького наповнення їх абстрактним математичним апаратом. А друга теза відображає реальні вимоги до наукових досліджень у галузі економіки, загальноприйняті у всьому світі. Свідченням цього є факт, що більшість лауреатів Нобелівської премії з економіки, якою з 1969 року відзначають досягнення вчених-економістів, отримали це високе звання саме за активне використання та розвиток математичних методів і моделей. Міжнародна практика свідчить про високу ефективність застосування математичних методів при розв'язанні задач різних рівнів і напрямків економічного розвитку, при дослідженні механізмів функціонування фінансової, банківської та інших систем. А сам процес моделювання здійснюється за допомогою різноманітних спеціалізованих комп'ютерних програм.

Більшість світових університетів до навчальних планів підготовки магістрів з економіки включають дисципліни Мікро-, Макроекономіка, Економетрика I, II, III, в яких широко застосовуються економіко-математичне моделювання. Але програми цих дисциплін (як показує багаторічний авторський досвід викладання таких курсів) перенасичені досить складним математичним апаратом, який сприймається лише поодинокими магістрантами-економістами. Саме тому автори даного посібника поставили

собі за мету ознайомити читача із якомога більшим класом сучасних математичних методів та моделей економіки і, головне, надати економісту-досліднику практичних навичок із застосування сучасних ІТ технологій для економіко-математичного моделювання.

На завершення автори вважають своїм обов'язком висловити щирю вдячність рецензентам, а також студенту ОНЕУ Віктору Козакову за допомогу у створенні даного посібника.

## Розділ 1. Основи математичного моделювання та прогнозування

### 1.1. Логіка прикладного економіко-математичного моделювання

Прикладне економіко-математичне моделювання представляє собою циклічний процес, який можна розкласти на наступні етапи:

- 1) Характеристика мети та об'єкта моделювання.
- 2) Комп'ютерний розвідувальний аналіз даних.
- 3) Математична формалізація моделі у відповідності до економічної теорії.
- 4) Оцінювання параметрів моделі (за допомогою спеціалізованих комп'ютерних програм).

#### 5) Перевірка адекватності моделі.

6) Аналіз та інтерпретація результатів (якщо необхідно, виконати імітаційні прогони, провести уточнення математичної моделі – й до етапу 3)).

На першому етапі дослідником визначаються мета та об'єкт моделювання. Залежно від мети дослідження один і той самий економічний об'єкт або процес можна описати різними моделями. **Про кінцеву мету дослідження слід пам'ятати протягом усього процесу моделювання!**

1) Характеристика об'єкта моделювання включає такі моменти:

- вибір одиничного елемента сукупності — носія характерних (з точки зору дослідника) властивостей досліджуваного об'єкта;
- визначення просторових і часових меж об'єкта моделювання;
- формування ознакової множини моделі.

2) У якості бази моделювання виступає деяка статистична сукупність (множина об'єктів, значень характеристик тощо). Формально будь-яку сукупність можна представити у вигляді впорядкованого набору даних з параметрами:  $N$ , де  $N$  - кількість елементів сукупності ( $n = 1, 2, \dots, N$ );  $I$ , ( $i = 1, 2, \dots, I$ ) - кількість зареєстрованих у  $n$ -го елемента ознак;  $T$ , ( $t = 1, 2, \dots, T$ )  $T$  - календарний термін періоду з певними квантами часу (для економічних даних – це, як правило, рік, квартал, місяць, доба тощо). Отже, інформаційна одиниця об'єкта моделювання — значення  $i$ -ої ознаки у  $n$ -го елемента сукупності у  $t$ -му періоді. Якщо сукупність вивчається в статистиці, то інформація (дані) представляється матрицею розмірності  $N \times I$  (просторові дані), якщо в динаміці, то матрицею розмірності  $N \times I \times T$  (панельні дані).

При формуванні ознакової множини вирішальну роль відіграють оцінки значущості та інформативності окремих ознак, враховується можливість їх вимірювання (шкалювання) та належність до певних типів (неперервні, дискретні, рангові або категоріальні), діапазон варіації, трудомісткість збирання інформації тощо.

**Зауважимо, що в природі не існує абсолютно точних результатів вимірювань. Тому будь-які фактичні дані завжди розглядаються як випадкові реалізації стохастичного, непередбачуваного процесу. Це дає підстави для ймовірнісного оцінювання результатів моделювання. Завдання такого оцінювання - встановити, наскільки виявлена закономірність**



позбавлена випадкових впливів, наскільки вона характерна для того комплексу умов, у яких функціонує об'єкт моделювання, і ця процедура передбачає наступні кроки:

- статистичне описування об'єкта — визначення середніх, стандартних відхилень, інших характеристик розподілу;
- уніфікацію типів ознак (часто виконують стандартизацію даних), приведення їх до одного виду;
- тестування сукупності на однорідність, ідентифікацію аномальних (нетипових) спостережень (так званих викидів) і, при необхідності, їх виправленні;
- відтворення (при можливості) пропущених даних;
- оцінювання взаємозв'язків між ознаками.

3) Побудова моделі ґрунтується на основі певних правил та алгоритмів, які визначають порядок розрахунків і математичних дій, необхідних для обробки інформації. На цьому етапі обґрунтовується алгебраїчна форма розрахунків, відношення між властивостями процесу описуються символами та знаками, порядок розрахунків - блок-схемами.

4) Оцінювання параметрів моделі - це етап комп'ютерної обробки даних. На даний час розроблено цілу низку програмних продуктів, які надають користувачу унікальні можливості експериментування, розвідки, графічного відображення і поглибленого аналізу даних, у яких сучасні методи моделювання та прогнозування реалізовані з використанням новітніх комп'ютерних технологій (іноді, навіть, у автоматизованому режимі).

5) Перевірка адекватності моделі означає оцінювання ступеня відповідності параметрів моделі фактичним характеристикам об'єкта. На цьому етапі використовують різні процедури порівняння модельних висновків, перевірки статистичних гіпотез за допомогою статистичних критеріїв. **Перевірка адекватності моделі має сенс лише щодо мети дослідження і не може бути абстрактною.**

6) Заключний етап моделювання - один із найскладніших і найвідповідальніших. Складність його полягає у тому, що для інтерпретації результатів не існує готових алгоритмів чи рецептів. Єдина спільна для всіх моделей вимога - інтерпретація має узгоджуватися з первинними гіпотезами. Основні висновки формуються у змістовних термінах: зміст параметрів моделі, правильність перевірених гіпотез, оцінювання ступеня їх надійності. Таким чином, можна сформулювати два базових принципи економіко-математичного моделювання:

- 1) підпорядкованість меті дослідження на всіх етапах моделювання;**
- 2) забезпечення адекватності моделі.**

Ще раз нагадаємо, що єдино правильної, «ідеальної» моделі не існує. Вибір того чи іншого типу моделі залежить від мети дослідження, специфіки процесу (явища), масштабу об'єкта моделювання, наявної інформації, технічного та програмного забезпечення.

1.2. Розвідувальний аналіз даних за допомогою комп'ютерних технологій. Однорідність та типологія. Багатовимірне ранжування. Метод експертних оцінок

Статистична обробка даних реалізована у будь-якому пакеті прикладних статистичних програм (навіть в електронних таблицях MS Excel). Нижче розглянемо приклади розвідувального аналізу даних за допомогою системи Statistica. Її модулі генерують велику кількість вихідної інформації у вигляді електронних таблиць *Scrollsheet* і графіків. Таблиці *Scrollsheet* підтримують усі стандартні операції з виділеними блоками значень (копіювання, переміщення, вставка, екстраполяція, стандартизація даних тощо) і її можна відредагувати, зберегти як файл результатів (з розширенням *.scr*) або конвертувати у первинні дані (файл з розширенням *.sta*), можна експортувати в інші *Windows* додатки. Розглянемо наступний приклад аналізу даних про роботу  $n=15$  цукрових заводів за наступними показниками (ознаками – Variables):

Таблиця 1.1. Дані про роботу 15 цукрових заводів

Variables	Name	Long Name
VAR1	Якість	Цукристість буряка, %
VAR2	Втрати	Втрати сировини при транспортуванні та зберіганні, %
VAR3	Патока	Вміст цукру в патоці, %
VAR4	Ефект	Вихід цукру з 1 т цукрового буряка, %

Файл первинних даних по сукупності цукрових заводів RM.sta 4v\*15c:

Таблиця 1.2. Файл даних у системі Statistica

	VAR1 Якість	VAR2 Втрати	VAR3 Патока	VAR4 Ефект
1	15,1	0,99	2,5	9,78
2	15,41	1,06	2,68	9,13
3	15,22	0,98	2,19	10,46
4	15,16	0,95	2,06	10,69
5	15,43	1	2,05	10,58
6	15,41	1	2,06	10,84
7	15,15	0,97	2,34	10,87
8	16,06	0,9	2,24	12,24
9	15,95	0,92	2,27	11,94
10	15,59	0,95	2,13	11,26
11	15,52	0,93	2,26	11,01
12	15,33	0,97	2	11,88
13	15,48	0,91	2,2	11,53
14	15,18	0,98	2,23	11,03
15	15,17	0,98	2,18	10,37

Як приклад розглянемо порядок створення таблиці *Scrollsheet* у модулі *Basic Statistics/Tables* - Основні статистики і таблиці, який об'єднує методи розвідувального аналізу даних. На стартовій панелі модуля відкриваємо файл первинних даних (наприклад, *Таблиця 1.2* по сукупності цукрових заводів). На першому етапі аналізу даних використаємо процедури *Descriptive Statistics* - Описові статистики. Вибір ознак для аналізу здійснюється у вікні *Select the variables for the analysis*. Вибираємо одразу всі чотири ознаки: VAR1 - VAR4. З метою всебічного аналізу розподілу сукупності за цими ознаками скористаємося опцією *More Statistics* - Розширений набір описових статистик. З-поміж них виберемо: *Mean* - середню величину, *Median* - медіану, *Lower and Upper Quartiles* - нижній і верхній кватилі, *Standard Deviation* - стандартне відхилення, *Skewness* - коефіцієнт асиметрії та *Kurtosis* - коефіцієнт ексцесу.

Після команди на виконання процедури аналізу система створює електронну таблицю *Scrollsheet* з результатами розрахунку:

Таблиця 1.3. Описові статистики

Descriptive Statistics (RM.sta)							
Continue ...	Mean	Median	Lower Quartile	Upper Quartile	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis
VAR1	15,37	15,33	15,16	15,52	0,331	0,603	0,755
VAR2	0,97	0,97	0,93	0,99	0,041	0,384	0,817
VAR3	2,23	2,2	2,06	2,27	0,179	1,275	1,970
VAR4	10,91	10,87	10,46	11,53	0,820	-0,398	0,391

Як показують дані, розподіл сукупності цукрових заводів характеризується невисокою варіацією ознак (відношення стандартного відхилення до середньої не перевищує 10 %) і помітною асиметрією, особливо за рівнем втрат цукру при переробці сировини (VAR3); для виходу цукру з 1 т сировини характерна лівостороння асиметрія. Продовжуючи розвідувальний аналіз даних, з метою оцінювання взаємозв'язку між ознаками, виберемо на стартовій панелі модуля процедуру *Correlation matrices* - Кореляційні матриці. У вікні *Pearson Product-Moment Correlation* вибираємо тип матриці - *One variable list (square matrix)* - Один список ознак (квадратна матриця), а у вікні вибору ознак натисемо кнопку *Select all* - Усі ознаки. За командою на виконання процедури створюється нова таблиця, елементами якої є парні коефіцієнти кореляції:

Таблиця 1.4. Парні коефіцієнти кореляції

Variable	VAR1	VAR2	VAR3	VAR4
VAR1	1	-0,265	0,238	0,377
VAR2	-0,265	1	0,492	-0,726
VAR3	0,238	0,492	1	-0,573
VAR4	0,378	-0,726	-0,573	1

Для візуалізації взаємозв'язків необхідно вибрати тип графіка і вказати ознаки. Наприклад, зв'язок між цукристістю буряка (VAR1) і виходом цукру з 1 т сировини (VAR 4) представимо у вигляді двовимірної діаграми

розсіювання. Команда *Continue...* повертає до вікна процедури *Correlation matrices*. Вибираємо опцію *2D scatterplot*, і відповідний графік кореляційного поля з'являється на екрані:

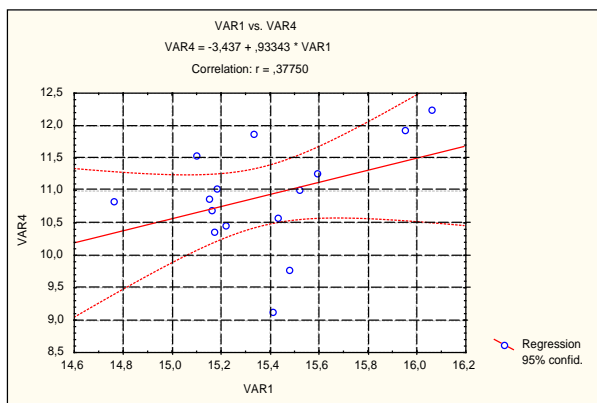


Рис. 1.1. Кореляційне поле.

Отже, за результатами розвідувального аналізу даних на екрані монітора послідовно виведено три документи:

- таблиця із статистичними характеристиками розподілу сукупності;
- кореляційна матриця;
- діаграма розсіювання (кореляційне поле).

Ці документи мають стандартні заголовки і для змістовної інтерпретації результатів аналізу потребують відповідного редагування. Специфікація даних таблиці *Scrollsheet* задається через команду контекстного меню: для стовпців - *Column Specs*, для рядків - *Row Name*, назва таблиці - командою *Titles*. Графіки редагуються за опціями редактора *Graphic Text Editor*.

Відредаговану числову, текстову та графічну інформацію можна експортувати в інші *Windows* додатки, на принтер, у текстовий файл або у спеціальний файл, який називається звітом. Параметри виведення інформації вказуються в діалоговому вікні *Page / Output Setup* - Параметри сторінки / Виведення. Для числової і текстової інформації вибирається команда *Text / Scrollsheets / Spreadsheets*, для графічної - *Graphs* (з подальшим уточненням формату та інших параметрів графіка). В рамці *Output Header* можна вказати заголовок, дату, час тощо.

*Zsm* - це один з документів системи *Statistica*, який створюється за опцією *Windows* (рамка *Output*) у розширеному текстовому форматі (*RTF*). Файл *RTF* можна редагувати безпосередньо в *Statistica* або у будь-якому іншому

текстовому процесорі, наприклад у *MS Word*. Система має блок опцій автоматичної підготовки звіту - *Auto-report*.

Однією з умов статистичного моделювання є однорідність сукупності. Лише в однорідній сукупності виявлені закономірності є сталими і їх можна застосувати до усіх одиниць сукупності. Поняття *однорідності* пов'язують з наявністю в усіх одиниць сукупності таких спільних властивостей і рис, які визначають їх однаковість, належність до одного й того ж типу. Оцінювання ступеня однорідності здійснюється за допомогою критеріїв математичної статистики, більшість з яких орієнтовано на аналіз форми одновершинних розподілів. Однорідними вважаються сукупності, яким властивий симетричний, нормальний розподіл. Звісно, в соціально-економічних явищах нормальний розподіл у чистому вигляді не зустрічається. Але він близький до інших одновершинних розподілів, його часто використовують як перше наближення при моделюванні. Деякі одновершинні розподіли приводяться до нормального виду перетворенням значень ознак, скажімо, заміною їх логарифмами. Лог-нормальною кривою можна описати низку асиметричних розподілів, передусім з правосторонньою асиметрією.

Основні властивості нормального розподілу:

- крива розподілу симетрична відносно максимальної ординати, яка відповідає значенню середньої арифметичної  $\bar{x}$ ;
- у межах  $\bar{x} \pm \sigma$  міститься 68,3 % усіх частот ряду розподілу, в межах  $\bar{x} \pm 2\sigma$  - 95,4 % частот, у межах  $\bar{x} \pm 3\sigma$  - 99,7 % частот;
- співвідношення стандартного відхилення  $\sigma$  і середнього модуля відхилень

$\bar{l}$  становить  $\frac{\bar{l}}{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0,8$  або  $\frac{\sigma}{\bar{l}} = 1,25$ . Значення його залежить від наявності в сукупності нетипових, аномальних спостережень і може слугувати індикатором її «засміченості»;

- третій центральний момент розподілу  $m_3 = 0$ , четвертий  $m_4 = 3m_2^2$ , звідси коефіцієнт асиметрії  $a_3 = m_3/\sigma^3 = 0$  і коефіцієнт ексцесу  $a_4 = m_4/m_2^2 = 3$ .

Завдяки цим властивостям нормальна крива застосовується як *стандарт* і відіграє значну роль при використанні методів вибіркового, регресійного, факторного аналізу.

У системі *Statistica* закономірність одномірного розподілу можна аналізувати за допомогою процедур *Distribution* стартової панелі *Descriptive statistics* (модуль *Basic Statistics and Tables*). Розподіл сукупності за варіаційною ознакою подається у вигляді таблиці *Frequency Table*, де вказуються інтервали групувань, частоти і частки розподілу по інтервалах, а також кумулятивні частоти і частки. Опція *Normal expected frequencies* додає в таблицю теоретичні частоти і частки (групові й кумулятивні). Перевірка на

нормальність розподілу здійснюється за опцією *K-S and Lilliefors test for normality*.

У наступній таблиці наведено розподіл 120 фірм, які брали участь у міжнародній виставці, за розміром витрат на рекламу (у % до загальної суми витрат) — VAR1. Основні характеристики розподілу:

Таблиця 1.5. Характеристики розподілу

Descriptive Statistics (s_____ sta)						
	Mean	Minimum	Maximum	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis
VAR1	2,295	0,7	3,9	0,6812	0,1361	-0,473

За даними групування:

Таблиця 1.6. Результати групування

K-S d = ,06713, p > .20; Lilliefors p > .20								
Continue...	Count	Cumul. Count	Percent of Valid	Cumul. % of Valid	Expected Count	Cumul. Expected	Percent Expected	Cumul. % Expected
,0 < x <= ,5	0	0	0	0	0,5	0,5	0,42	0,42
,5 < x <= 1,0	2	2	1,67	1,67	2,9	3,4	2,44	2,86
1,0 < x <= 1,5	15	17	12,50	14,17	11,2	14,6	9,29	12,15
1,5 < x <= 2,0	26	43	21,67	35,83	25,3	39,9	21,11	33,26
2,0 < x <= 2,5	38	81	31,67	67,50	34,3	74,2	28,57	61,83
2,5 < x <= 3,0	22	103	18,33	85,83	27,8	102,0	23,14	84,97
3,0 < x <= 3,5	13	116	10,83	96,67	13,4	115,4	11,19	96,16
3,5 < x <= 4,0	4	120	3,33	100	3,9	119,3	3,23	99,39

максимальне відхилення кумулятивних часток припадає на п'ятий інтервал і становить у %:  $|67,5 - 61,83| = 5,67$ , тобто  $d = 0,0567$ . Такий самий результат маємо при використанні кумулятивних частот:  $d = |81,0 - 74,2| : 120 = 0,0567$ . У таблиці у верхньому лівому куті наведено дещо відмінне значення критерію  $d = 0,06713$ . Розбіжності між ними зумовлені тим, що за процедурою *K-S and Lilliefors test for normality* розрахунок  $d$  здійснюється за незгрупованими даними. Проте обидва значення  $d$  значно менші за критичне  $(1,22 : \sqrt{120}) = 0,11$  при  $\alpha = 0,10$ , отже, гіпотеза про нормальний розподіл фірм за часткою витрат на рекламу не відхиляється. Узгодженість емпіричного розподілу фірм за рівнем витрат на рекламу з нормальним розподілом видно на рисунку:

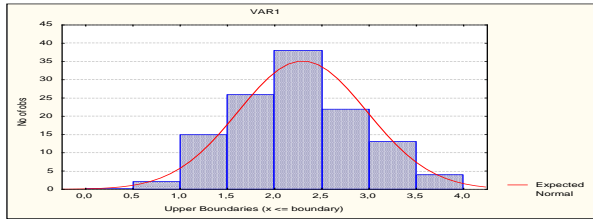


Рис.1.2. Емпіричний і теоретичний розподіл фірм за рівнем витрат на рекламу.

За критерієм  $\chi^2$  з імовірністю 0,95 підтверджує висновок про нормальний розподіл сукупності фірм за витратами на рекламу.

Якщо необхідно перевірити гіпотезу про узгодженість даних з іншими розподілами (лог-нормальним, експоненційним тощо), використовується модуль *Nonparametrics / Distribution* — Непараметричні статистики / Розподіли.

У складі сукупності можуть бути окремі одиниці, в яких значення варіюючої ознаки далеко віддалені від центра розподілу й нетипові для сукупності в цілому, *аномальні*. Це може бути максимальне  $x_n$  чи мінімальне  $x_1$  значення в упорядкованому ряду спостережень  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$ . Походження аномальних спостережень (їх називають викидами) різне. Вони можуть виникнути як наслідок: а) помилок спостережень; б) випадкового збігу різного роду обставин; в) порушення однорідності сукупності. Щоб прийняти об'єктивне рішення про вилучення таких спостережень з подальшого аналізу, необхідно їх ідентифікувати. Оцінити істотність відхилень від основної маси можна за допомогою критерію Граббса  $T_n$ , статистичною характеристикою якого є стандартизоване граничне відхилення аномального значення  $x_n$  ( $x_1$ ) від середньої  $\bar{x}$ . Якщо йдеться про максимальне значення  $x_n$ , то

$$T_n = \frac{x_n - \bar{x}}{\sigma},$$

де  $\bar{x}$  і  $\sigma$  визначаються для сукупності в цілому.

Якщо фактичне значення  $T_n$  менше за критичне, то відхилення з імовірністю  $(1 - \alpha)$  визнається випадковим, неістотним, а якщо перевищує критичне, то відхилення визнається істотним, а отже, значення — аномальним, нетиповим для сукупності в цілому. В такому разі це значення вилучається і критерій застосовується до  $x_{n-1}$  і т. д., доки не буде визнано, що викидів немає, а отже, сукупність однорідна.

Приміром, перевіримо на аномальність максимальний рівень витрат цукру при переробці сировини по сукупності цукрових заводів (див.вище). Саме за

цією ознакою (VAR3) коефіцієнт асиметрії виявився найбільшим (1,275). Максимальне значення ознаки  $x_n = 2,68$ , середня  $\bar{x} = 2,23$ ,  $\sigma = 0,179$ . Звідси

$$T_n = \frac{2,68 - 2,23}{0,179} = 2,51,$$

що менше за критичне  $T_{0,95}(15) = 2,705$ . Отже, максимальне значення ознаки неістотно відрізняється від основної маси, і сукупність визнається однорідною.

При описуванні об'єкта моделювання, окрім узагальнюючих характеристик по сукупності в цілому, важливо упорядкувати одиниці сукупності за певними властивостями (якостями, цінностями), визначити належність кожної з них до певного типу. Якщо властивість характеризується однією ознакою, то упорядкування одиниць сукупності здійснюється заміною значень цієї ознаки відповідними рангами. У системі *Statistica* це процедура *Rank Variables* меню *Vars*. У діалоговому вікні *Rank Order Values* вибираються ознаки, схема упорядкування (за зростанням чи зменшенням значень), умови обробки зв'язаних рангів, тип рангу: регулярний (від 1 до  $n$ ) чи фракційний (від 0 до 1).

Оскільки властивості соціально-економічних явищ характеризуються, як правило, множиною ознак ( $m \geq 2$ ), то при упорядкуванні одиниць сукупності виникає необхідність агрегування усіх ознак множини  $x_i$  в одну *інтегральну оцінку*  $G_j$ . Така оцінка геометрично інтерпретується як точка у багатовимірному просторі, координати якої вказують на масштаб або позицію  $j$ -ої одиниці. Алгебраїчно значення ознак для  $j$ -ої одиниці сукупності представляються вектором  $x_j = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ , а агрегування їх означає перетворення вектора в скаляр.

Агрегування ознак ґрунтується на так званій теорії «адитивної цінності», згідно з якою цінність цілого дорівнює сумі цінностей його складових. Такий підхід реалізовано при визначенні рейтингів на основі експертних оцінок, представлених рангами або балами. Якщо ознаки  $x_j$  множини  $X$  мають різні одиниці вимірювання, то адитивне агрегування потребує приведення їх до однієї основи, тобто попередньої *стандартизації*. Вектор первинних значень ознак  $x_j = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$  замінюється вектором стандартизованих значень  $z_j = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T$ .

Найчастіше інтегральна оцінка  $G_j$  визначається як середня арифметична стандартизованих значень ознак  $z_{ij}$ . Для  $j$ -ої одиниці сукупності

$$G_j = \frac{1}{m} \sum_1^m z_{ij}.$$



Якщо ознаки множини різновагомі, то кожній з них надається певна вага  $\omega_i$ , тобто інтегральна оцінка має форму середньої арифметичної зваженої:

$$G_j = \sum_1^m z_{ij} \omega_i, \text{ де } \sum \omega_i = 1.$$

Конструювання інтегральної оцінки передбачає чотири етапи:

- формування ознакової множини;
- вибір способу стандартизації показників;
- обґрунтування функції вагових коефіцієнтів;
- визначення процедури агрегування показників.

На етапі формування ознакової множини  $X$  вирішальну роль відіграє апіорний якісний аналіз суті явища. Так, для характеристики демографічної ситуації використовують такі показники, як: очікувана тривалість життя, сумарний коефіцієнт народжуваності, коефіцієнт дитячої смертності, демографічне навантаження працездатного населення, валовий міграційний рух тощо. Незважаючи на значущість показників середньодушового доходу чи забезпеченості населення житлом, до ознакової множини демографічної ситуації вони не включаються, оскільки за своєю суттю є характеристиками життєвого рівня населення. Щодо вагових коефіцієнтів, то вибір їх також ґрунтується на теоретичному аналізі суті явища і в кожному конкретному дослідженні  $\omega_i$  визначається експертно-статистичним методом.

При формуванні ознакового простору важливо забезпечити інформаційну односпрямованість показників  $x_i$ . Демографічна ситуація за інших рівних умов буде тим краща, чим більша тривалість життя і менша дитяча смертність. Тобто тривалість життя і дитяча смертність інформаційно різноспрямовані, і це необхідно враховувати при агрегуванні їх в одну оцінку. З метою забезпечення інформаційної односпрямованості показників їх поділяють на *стимулятори* та *дестимулятори*. Зв'язок між оцінкою  $G$  і показником-стимулятором  $x_{st}$  прямий, між оцінкою  $G$  і показником-дестимулятором  $x_{dst}$  - обернений. При агрегуванні дестимулятори перетворюються на стимулятори, наприклад,  $x_{st} = 1 - x_{dst}$  або  $x_{st} = 1/x_{dst}$ .

На практиці застосовують різні способи стандартизації. Усі вони ґрунтуються на порівнянні емпіричних значень показника  $x_{ij}$  з певною величиною  $a$ . Такою величиною може бути максимальне  $x_{\max}$ , мінімальне  $x_{\min}$ , середнє  $\bar{x}$  чи еталонне  $x_0$  значення показника. Результат порівняння можна представити відношенням  $\frac{x_{ij}}{a}$  або відхиленням  $\frac{x_{ij}-a}{q}$ , де  $q$  — одиниця стандартизації.

Наприклад, визначимо рейтинги інвестиційної привабливості компаній - постачальників електронного обладнання. Ознаковий простір представляють (%):  $x_1$  - рентабельність виробництва,  $x_2$  - ліквідність активів,  $x_3$  - частка

видатків на наукові дослідження. Найпростіший спосіб стандартизації — відношення  $\frac{x_{ij}}{a}$ , а оскільки всі зазначені показники є стимуляторами, то доцільно взяти  $a = x_{\min}$ , а отже,  $z_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_{\min}}$ .

Розраховані для трьох компаній рейтинги показують, що з-поміж них для інвесторів найбільш привабливою є Київстар:

Таблиця 1.7. Розрахунок інтегральної оцінки (рейтингу) компаній

Компанія	$x_{1j}$	$x_{2j}$	$x_{3j}$	$Z_{1j}$	$Z_{2j}$	$Z_{3j}$	$G_j$
Київстар	21	31	34	1,3125	1,1481	1,2143	1,225
Lifecell	16	32	28	1	1,1852	1	1,0617
WodafoneR	19	27	32	1,1875	1	1,1428	1,1101

Якщо існують стандарти, нормативи чи будь-які інші еталонні значення ознак  $x_{i0}$ , то, агрегуючи відношення  $\frac{x_{ij}}{x_{i0}}$ , можна оцінити ступінь відхилення від «еталона». Аби значення інтегральної оцінки  $G_j$  змінювалося в інтервалі від 0 до 1, розрахунок ведеться за формулою, в якій агрегуються і додатні, і від’ємні відхилення:

$$G_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left| \frac{x_{ij}}{x_{i0}} - 1 \right|,$$

Залежно від конкретної мети дослідження можна агрегувати лише додатні або лише від’ємні відхилення. Іноді усереднюють не модулі, а квадрати відхилень, використовуючи середню квадратичну.

Порівняльний аналіз у межах сукупності, в якій кожний показник має типовий середній рівень, здійснюється на основі агрегування відношень  $x_{ij}$  до середнього рівня  $\bar{x}$ :

$$G_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{x_{ij}}{\bar{x}}.$$

Очевидно, що при  $G_j > 1$  рівень розвитку явища в  $j$ -ої одиниці вищий за середній по сукупності, а при  $G_j < 1$  — нижчий. Таку узагальнюючу оцінку називають *багатомірною середньою*, за її значеннями здійснюють типологію одиниць сукупності, скажімо, автопідприємств за рівнем ефективності використання парку машин, агропідприємств - за рівнем забезпеченості ресурсами тощо.

Якщо ознаки множини різновагомі, то багатомірна середня розраховується як арифметична зважена

$$G_j = \sum_{i=1}^m \frac{x_{ij}}{\bar{x}} \omega_i, \text{ де } \omega_i - \text{вага } i\text{-ої ознаки, } \sum_{i=1}^m \omega_i = 1.$$

Скажімо, в агрогосподарствах регіону на 100 га сільськогосподарських угідь припадає в середньому: 13,5 працездатних, 0,85 ум. трактора і 23,8 корови. Середня оцінка якості ґрунтів - 51 бал. Оцінюючи ресурсний потенціал господарств, показникам якості ґрунтів і забезпеченості тракторами надається вага 0,3, показникам забезпеченості трудовими ресурсами і щільності поголів'я корів - 0,2. Якщо у  $j$ -му господарстві значення цих показників відповідно 13,8; 0,8; 29,9 і 62,7, то багатовимірна середня забезпеченості ресурсами становить

$$G_j = \frac{13,8}{13,5} 0,2 + \frac{0,8}{0,85} 0,3 + \frac{29,9}{23,8} 0,2 + \frac{62,7}{51,0} 0,3 = 1,106.$$

Тобто ступінь забезпеченості ресурсами вищий за середній по регіону.

Аналогічного змісту інтегральну оцінку можна обчислити і на основі часток

$$d_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_1^n x_{ij}},$$

де  $\sum_1^n x_{ij}$  - загальний обсяг значень  $i$ -ї ознаки по сукупності в цілому;

$x_{ij}$  - обсяг  $j$ -ї складової за цією ознакою. Очевидно, що  $\sum_1^n d_{ij} = 1$ , або 100%.

Формула інтегральної оцінки має такий вигляд:

$$G_j = \frac{n}{m} \sum_1^m d_{ij}.$$

Наприклад, на  $j$ -ий регіон ( $j = 1, 2, 3$ ) припадає: 25 % експорту продукції чорної металургії, 48 % - продукції машинобудування, 24 % - продукції хімічної промисловості та 32 % - продукції інших галузей промисловості. Рейтинг експортного потенціалу промисловості цього регіону становить

$$G_j = \frac{3}{4} (0,25 + 0,48 + 0,24 + 0,32) = 0,9675,$$

тобто нижчий за середній рівень по трьох регіонах.

У соціально-економічних дослідженнях широко використовують інтегральні оцінки, розраховані на основі відхилень ( $x_{ij} - a$ ), стандартизованих варіаційним розмахом ( $x_{\max} - x_{\min}$ ). При цьому для стимуляторів  $a = x_{\min}$ , для дестимуляторів  $a = x_{\max}$ .

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}; \quad z_{ij} = \frac{x_{\max} - x_{ij}}{x_{\max} - x_{\min}}.$$

Тобто  $z_{ij}$  показує відносну позицію  $j$ -ої одиниці сукупності в діапазоні варіації за  $i$ -ою ознакою. При високих значеннях  $i$ -ої ознаки  $z_{ij}$  наближається до 1, при низьких - до 0. Таку саму властивість має й інтегральна оцінка  $G_j =$

$\frac{1}{m} \sum_1^m \bar{z}_{ij}$ . Чим вищий рівень розвитку властивості, тим далі від нуля відхиляється значення  $G_j$ .

Класичним прикладом такого типу інтегральної оцінки є індекс людського розвитку за методикою Програми розвитку ООН. Ознакову множину цього індексу представляють:  $x_1$  - очікувана тривалість життя,  $x_2$  - досягнутий рівень освіти,  $x_3$  - реальний ВВП на душу населення. Одиниця стандартизації - теоретично можливий варіаційний розмах: для тривалості життя (років) - (85 - 25), для рівня освіти (%) (100 - 0), для ВВП на душу населення до 1997 р., (дол. США) - (5120 - 100). Якщо фактичний середньодушований дохід перевищував 5120 дол. США, то величина перевищення дисконтувалася за певною методикою. Визначимо індекс людського розвитку для країни, де очікувана тривалість життя - 69,4 року, рівень освіти - 87 %, ВВП на душу населення - 5010 дол. США:

$$G_j = \frac{1}{3} \left[ \frac{69,4 - 25}{85 - 25} + 0,87 + \frac{5010 - 100}{5120 - 100} \right] = 0,863.$$

Використання теоретично можливого варіаційного розмаху дає змогу провести порівняльний аналіз як у просторі, так і в часі. Якщо аналіз динаміки не передбачається, то за одиницю стандартизації можна взяти фактичний варіаційний розмах.

Відносну позицію  $j$ -ої одиниці сукупності у багатовимірному просторі характеризує також таксономічний показник рівня розвитку, розрахунок якого спирається на традиційний спосіб стандартизації відхилень від середньої:

$$\text{для стимуляторів } z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_i}{\sigma_i},$$

$$\text{для дестимуляторів } z_{ij} = \frac{\bar{x}_i - x_{ij}}{\sigma_i}.$$

Така стандартизація дає змогу позбутися одиниць вимірювання, але водночас відбувається вирівнювання середніх і дисперсій: для кожної ознаки  $\bar{z} = 0$ , дисперсія  $\sigma_z^2 = 1$ , а діапазон варіації  $z_{ij}$  згідно з правилом «трьох сигм» — від  $-3$  до  $+3$ .

При розрахунку інтегральної оцінки використовують стандартний діапазон варіації для всіх ознак на одному і тому самому рівні. Скажімо, на рівні двох стандартних відхилень (від  $-2$  до  $+2$ ). Відстань між верхньою ( $+2$ ) і нижньою ( $-2$ ) точками діапазону у багатовимірному просторі становить  $|C| = 2 z_0 \sqrt{m}$ , де  $z_0$  — точка, взята за базу порівняння. Якщо  $z_0 = -2$ , то для п'яти ознак  $|C| = 2(-2) \sqrt{5} = 8,94$ .

Позиція  $j$ -ої одиниці відносно бази порівняння  $z_0$  визначається як Евклідова відстань

$$G_{j0} = \left[ \sum_1^m (z_{ij} - z_0)^2 \right]^{1/2},$$

а відношення відстані  $G_{j0}$  до стандартного діапазону варіації  $|C|$  називають *таксономічним показником рівня розвитку*:

$$G_j = \frac{C_{j0}}{|C|}.$$

Значення його коливаються в межах від 0 до 1. Чим вищий рівень розвитку явища, тим більше значення  $G_j$ . Якщо координати умовного об'єкта визначити на рівні  $z_0 = +2$  (по верхній межі діапазону варіації), то таку інтерпретацію має відхилення  $(1 - G_j)$ .

Визначимо таксономічний показник розвитку країн за такими ознаками:  $x_1$  - ВВП на душу населення, тис. дол. США;  $x_2$  - зовнішній борг, % до ВВП;  $x_3$  - ступінь самозабезпеченості енергоресурсами, %. У наступній таблиці:

Таблиця 1.8. Розрахунок таксономічного показника розвитку

Країна, j	Первинні значення ознак, $x_{ij}$			Стандартизовані значення ознак, $z_{ij}$			$C_{j0}$	$G_j$
	$x_{1j}$	$x_{2j}$	$x_{3j}$	$z_{1j}$	$z_{2j}$	$z_{3j}$		
1	5,8	14	48	0,524	-1,259	0,481	4,811	0,538
2	4,7	22	55	-0,543	0,140	1,182	3,963	0,443
3	3,9	28	29	-1,319	1,189	-1,422	1,206	0,135

наведено абсолютні та стандартизовані значення цих ознак. Оскільки  $x_2$  - дестимулятор, то при розрахунку  $C_{j0}$  стандартизоване значення  $z_{2j}$  домножимо на (-1). Наприклад, для першої країни Евклідова відстань становить

$$C_{10} = \left[ (0,524 + 2)^2 + (1,259 + 2)^2 + (0,481 + 2)^2 \right]^{1/2} = 4,811,$$

а таксономічний показник  $G_j = \frac{4,811}{8,94} = 0,538$ .

У системі *Statistica* розрахунок інтегральних (багатовимірних) оцінок за будь-якою з розглянутих методик можна здійснити в модулі *Data Management*.

Основне призначення інтегральних оцінок — ранжування, типологія об'єктів. Проте, як і будь-який інший статистичний показник,  $G_j$  має певний соціально-економічний зміст, варіація його значень підпорядкована певним законам розподілу, а отже, правомірним є використання таких оцінок при вивченні закономірностей розподілу, взаємозв'язку й тенденцій розвитку.

Характерною особливістю моделювання та прогнозування соціально-економічних процесів є багатоваріантність, тобто можливість використання різних методів, моделей, інформаційного забезпечення, критеріїв оцінювання адекватності моделі тощо. Вибір між конкуруючими варіантами базується на

певній системі правил, що забезпечують надання обґрунтованих оцінок кожному варіанту.

Уважається, що експерт (лат. *expertus* - досвідчений) володіє цією системою правил і може порівняти варіанти, приписуючи кожному з них числа. Найчастіше перевага чи відносна значущість варіантів встановлюється за допомогою методів ранжування, попарних порівнянь або безпосереднього оцінювання. При *ранжуванні* експерт повинен розмістити варіанти (фактори, моделі, об'єкти тощо) у порядку, який вважає раціональним, і приписати кожному з них числа натурального ряду - ранги 1, 2, ...,  $n$ . Кількість рангів дорівнює кількості варіантів. Якщо експерт надає двом і більше варіантам однакові ранги, то кожному з цих варіантів приписується середній ранг, обчислений з відповідних чисел натурального ряду. При обґрунтуванні складних управлінських рішень в умовах невизначеності, при довгостроковому прогнозуванні розвитку науки, техніки, економіки використовують групові експертизи. Надійність групових оцінок залежить від узгодженості думок експертів, що потребує відповідної статистичної обробки інформації.

При *груповій експертизі* ( $n$  експертів) для кожного  $i$ -го варіанта визначається сума рангів  $\Sigma R_i$ , за якою упорядковуються варіанти. Скажімо, перший (найвищий) ранг надається варіанту, який набирає найменшу суму рангів, а останній варіанту з найбільшою сумою рангів. Результати опитування експертів оформляються у вигляді матриці.

Наприклад, за даними ранжування трьох варіантів п'ятьма експертами:

Таблиця 1.9. Результати ранжування

Варіант	Експерт					Сума рангів	$d$	$d^2$
	1	2	3	4	5			
A	2	1	1	1	1	6	-4	16
B	1	2	3	2	2	10	0	0
C	3	3	2	3	3	14	4	16
Разом	X	X	X	X	X	30	X	32

перший ранг надається варіанту А, для якого  $\Sigma R_i = 6$ , другий - варіанту В, третій - варіанту С. Слід зазначити, що ранги визначають лише місця варіантів поміж іншими, не враховуючи існуючих між ними відстаней.

Статистична обробка результатів ранжування передбачає оцінювання ступеня узгодженості думок експертів. Мірою узгодженості слугує *коефіцієнт конкордації*  $W$ , в основу розрахунку якого покладено відхилення  $d$  сум рангів за окремими варіантами  $\Sigma R_i$  від середньої суми рангів, яка становить  $\frac{1}{2} n (m + 1)$ . Коефіцієнт конкордації — це відношення суми квадратів названих відхилень  $S = \Sigma d^2$  до максимально можливої суми квадратів відхилень  $S_{max} = n^2 (m^3 - m) / 12$ . Якщо ранги не повторюються, то  $W = \frac{12S}{n^2(m^3 - m)}$ , де  $m$  — кількість варіантів;  $n$  — кількість експертів.

При неузгодженості думок експертів  $W = 0$ . Чим вищий ступінь узгодженості, тим більше значення  $W$  наближається до 1. За даними таблиці:

Таблиця 1.10. Перевірка ступеня узгодженості експертних думок

Варіант	A	B	C	Разом	$W_i$
A	0	4	5	9	0,60
B	1	0	4	5	0,33
C	0	1	0	1	0,07
Разом	1	5	9	15	1,00

середня сума рангів становить  $30 : 3 = 10$ , сума квадратів відхилень  $S = 32$ , а коефіцієнт конкордації  $W = (12 \cdot 32) / 5^2 (3^3 - 3) = 0,64$ , що свідчить про певні розбіжності в оцінках експертів щодо значущості варіантів.

Перевірка істотності коефіцієнта конкордації  $W$  здійснюється за допомогою критерію  $\chi^2$  з  $(m - 1)$  числом ступенів вільності (свободи). Статистична характеристика критерію розраховується за формулою  $\chi^2 = Wn(m - 1)$ . Для наведеного прикладу  $\chi^2 = 0,64 \times 5(3 - 1) = 6,4$ , що перевищує критичне значення  $\chi^2(2) = 5,99$ . Це дає підстави стверджувати з імовірністю 0,95, що значення  $W = 0,64$  не випадкове і думки експертів узгоджені.

При попарних порівняннях експерти використовують дві оцінки: 0 або 1. Більш вагомому варіанту надається оцінка 1, менш вагомому - 0. Результати попарних порівнянь оформляються у вигляді матриці, елементами якої є кількості наданих переваг  $a_{ij}$ . Діагональні елементи такої матриці представлені нулями. Одна із властивостей матриці  $a_{ij} + a_{ji} = n$ , де  $n$  - кількість експертів. Відношення кількості наданих відповідному варіанту переваг до загальної суми елементів матриці характеризує його вагомість. За даними таблиці, найвагомішим виявився варіант А, для якого  $\omega = 9 : 15 = 0,60$ .

Часто завданням експерта є не ранжування варіантів, а безпосереднє оцінювання рівнів певного явища чи окремих його властивостей, скажімо, якості продукції, конкурентоспроможності фірм тощо. У таких ситуаціях спершу визначається шкала (діапазон) оцінок, у межах якої експерт і оцінює явище (властивість) певним балом  $Z_{ij}$ , де  $i$  - властивість,  $j$  - елемент сукупності.

Для певної множини  $m$  властивостей одного явища визначається середній бал  $G_j = \frac{\sum z_{ij}}{m}$ . На таких методичних засадах ґрунтується більшість рейтингових систем. Так, всесвітньо відома рейтингова система CAMEL, якою користуються органи нагляду за банківською діяльністю, має 5-ти бальну шкалу оцінок: від 1(добре) до 5 (незадовільно). Для кожного банку оцінюється достатність капіталу, якість активів, ефективність менеджменту, прибутковість та ліквідність балансу. Середній бал  $G_j$  є рейтингом

фінансового стану  $j$ -го банку і від його значення залежить ступінь втручання органів банківського нагляду та комплекс заходів по усуненню недоліків.

Якщо властивості  $Z_{ij}$  не рівновагомі, то рейтинг визначається як середня арифметична зважена  $G_j = \sum d_i z_{ij}$ , де  $d_i$  - вага  $i$ -ої властивості. Саме так оцінюються комерційні, політичні та інші ризики. Наприклад, комерційний ризик, пов'язаний із інтернаціоналізацією банківської діяльності, оцінюється індексом Бері. Ознакова множина цього індексу включає 15 різновагомих показників, які характеризують політичну і економічну ситуацію в країні-партнера. Зокрема, політична стабільність (вага 12%), стан платіжного балансу (вага 6%), темп економічного розвитку (вага 10%) тощо. Сума ваг дорівнює 100%.

Одним із популярних методів формування групової експертизи є метод Делфи, основними принципами якого являються анонімність, врегульованість зворотного зв'язку та узгодженість групової оцінки.

Автономне опитування експерта проводиться у чотири тури і кожного разу експерт виражає свою думку певною оцінкою в межах визначеної шкали. Результати опитування упорядковуються; на основі даних визначаються медіана  $Me$  та квартилі оцінок: нижній  $Q_1$  верхній  $Q_3$ . Медіана розглядається як узагальнююча групова оцінка процесу; для характеристики варіації оцінок використовується інтерквартильний розмах  $R = Q_3 - Q_1$ , який використовують для зближення експертних думок. Ітераційна процедура упорядкування і узагальнення експертних оцінок робить групові оцінки надійнішими, але вирішальну роль тут відіграють компетентність експертів і досконалість програм опитування (відмітимо, що створення систем опитування являється серйозною науковою проблемою).

Стосовно програмного забезпечення, то слід відмітити, що комп'ютерні технології статистичного моделювання представлені цілою низкою різноманітних пакетів прикладних програм: Statistica, SPSS, E-Wiues, Statgraphics, SAS, MathLab тощо.



### 1.3. Сутність та види прогнозів

Одна з найскладніших проблем системи управління - передбачити майбутнє і знайти ефективні рішення в умовах невизначеності. Інструментом мінімізації невизначеності слугує *прогнозування*, а *прогнозом* називають науково обґрунтований висновок про майбутні події, про перспективи розвитку процесів, про можливі наслідки управлінських рішень.

За специфікою об'єктів прогнозування прогнози поділяють на науково-технічні, економічні, соціальні, військово-політичні тощо. Економічні прогнози, в свою чергу, класифікують за масштабністю об'єкта на глобальні (світові), макроекономічні, структурні (міжгалузеві та міжрегіональні), регіональні, галузеві, мікроекономічні.

Прогнозування передбачає систему наукових доведень, використання методів і прийомів з різним ступенем формалізації, узгодженість окремих висновків і оцінок щодо майбутнього розвитку процесу. В світовій практиці прикладного прогнозування використовують різні методи: статистичні (прогнозна екстраполяція), функціонально-ієрархічні (прогнозні сценарії), методи структурної аналогії, імітаційного моделювання, експертні оцінки. Кожен метод має свої особливості, позитивні якості й вади, свої межі використання.

При прогнозуванні соціально-економічних процесів перевага віддається статистичним методам, прогнозним результатом яких є очікувані у майбутньому значення характеристик процесу.

Очевидно, що майбутнє неможливо спостерігати, а очікуваний результат - виміряти, його можна лише передбачити за певних умов, скажімо, «...якщо тенденція не зміниться, то...» або «...якщо станеться подія А, то...» тощо. Якщо умови зміняться, то автоматично зміниться і результат прогнозування. Отже, статистичний прогноз, побудований за схемою «...якщо, то...», завжди є умовним.

Іншою особливістю статистичного прогнозу є визначеність його в часі. Часовий горизонт прогнозу називають *періодом упередження*. За тривалістю цього періоду вирізняють прогнози: короткострокові (до 1 року), середньострокові (до 5 років) і довгострокові (від 5 до 20 років і більше). Тривалість періоду упередження залежить від специфіки об'єкта прогнозування, інтенсивності динаміки, тривалості дії виявлених закономірностей та тенденцій.

Прогнозний результат на період упередження можна представити одним числом (точковий прогноз) або інтервалом значень, до якого з певною ймовірністю належить прогнозна величина (інтервальний прогноз).

Статистичні прогнози ґрунтуються на гіпотезах про стабільність значень величини, що прогнозується; закону її розподілу; взаємозв'язків з іншими величинами тощо. Основний інструмент прогнозування — *екстраполяція*.

Суть прогнозої екстраполяції полягає в поширенні закономірностей, зв'язків і відношень, виявлених в  $t$ -му періоді, за його межі. Залежно від гіпотез щодо механізму формування і подальшого розвитку процесу використовуються різні методи прогнозої екстраполяції. Їх можна об'єднати в дві групи:

- екстраполяція закономірностей розвитку - тенденцій і коливань;
- екстраполяція причинно-наслідкового механізму формування процесу - багатфакторне прогнозування.

Ці методи різняться не процедурою розрахунків прогнозу, а способом описування об'єкта моделювання. Екстраполяція закономірностей розвитку ґрунтується на вивченні його передісторії, виявленні загальних і усталених тенденцій, траєкторій зміни в часі. Абстрагуючись від причин формування процесу, закономірності його розвитку розглядають як функцію часу. Інформаційною базою прогнозування слугують одновимірні динамічні ряди.

При багатфакторному прогнозуванні процес розглядається як функція певної множини факторів, вплив яких аналізується одночасно або з деяким запізненням. Інформаційною базою виступає система взаємозв'язаних динамічних рядів. Оскільки фактори включаються в модель у явному вигляді, то особливого значення набуває апіорний, теоретичний аналіз структури взаємозв'язків.

Важливим етапом статистичного прогнозування є *верифікація прогнозів*, тобто оцінювання їх точності та обґрунтованості. На етапі верифікації використовують сукупність критеріїв, способів і процедур, які дають можливість оцінити якість прогнозу.

Найбільш поширене *ретроспективне оцінювання прогнозу*, тобто оцінювання прогнозу для минулого часу (ex-post прогноз). Процедура перевірки така. Динамічний ряд поділяється на дві частини: перша - для  $t = 1, 2, 3, \dots, p$  — називається ретроспекцією (передісторією), друга - для  $t = p + 1, p + 2, p + 3, \dots, p + (n - p)$  - прогнозним періодом.

За даними ретроспекції моделюється закономірність динаміки і на основі моделі розраховується прогноз  $Y_{p+v}$ , де  $v$  - період упередження. Ретроспекція послідовно змінюється, відповідно змінюється прогнозний період:

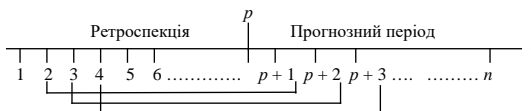


Рис.1.3. Схема ретроспективної перевірки точності прогнозу для  $v = 1$

Оскільки фактичні значення прогнозного періоду відомі, то можна визначити похибку прогнозу як різницю фактичного  $y_i$  і прогнозного  $Y_i$  рівнів:  $e_i = y_i - Y_i$ . Всього буде  $n - p$  похибок. Узагальнюючою оцінкою точності прогнозу слугує *середня похибка*: абсолютна  $\bar{e} = \frac{\sum |e_i|}{n - p}$ ; квадратична  $s = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n - p}}$ . Для порівняння точності прогнозів, визначених за різними моделями, використовують *похибку апроксимації* (%):

$$\bar{A} = 100 \frac{\sum \frac{|e_i|}{y_i}}{n - p}.$$

Якщо результат оцінювання точності прогнозу задовольняє визначені критерії точності, скажімо, 10 %, то прогнозна модель вважається прийнятною і рекомендується для практичного використання. Очевидно, що похибка прогнозу залежить від довжини ретроспекції та горизонту прогнозування. Оптимальним співвідношенням між ними вважається 3 : 1.

При оцінюванні та порівнянні точності прогнозів використовують також коефіцієнт розбіжності Тейла, який дорівнює нулю за відсутності похибок прогнозу і не має верхньої межі:

$$T = \frac{\sqrt{\sum (y_i - Y_i)^2}}{\sqrt{\sum y_i^2}}.$$

Існуючі методи верифікації прогнозів у більшості своїй ґрунтуються на статистичних процедурах, які зводяться до побудови довірчих меж прогнозу, себто до побудови інтервальних прогнозів.

При прогнозуванні процесів, розвиток яких повністю або частково не піддається формалізації (наприклад, розвиток науки і техніки, соціально-економічні та політичні наслідки прийняття певних управлінських рішень), використовують методи експертних оцінок. Вони ґрунтуються на мобілізації професійного досвіду та інтуїції експертів, які добираються за принципом компетентності.

## Розділ 2. Методи та моделі багатовимірного факторного аналізу

### 2.1. Кластерні процедури класифікації. Дискримінантний аналіз

Однією із форм неоднорідності сукупностей соціально-економічних явищ є їх внутрішня розшарованість. Це зумовлено нерівномірністю розвитку окремих одиниць сукупності (різні виробничі потужності, склад та кваліфікація персоналу, попит на випущену продукцію тощо) і своєрідністю умов, у яких вони функціонують (природних, технологічних тощо). Одні сукупності поділяються на чітко визначені, ізольовані класи (кластери, групи, типи), іншим властива латентна, прихована структура.

Поділ сукупності на однорідні класи (групи, кластери) називають *класифікацією*. Ідея класифікації ґрунтується на поняттях подібності і відмінності, а основний принцип класифікації базується на двох фундаментальних положеннях:

- в один клас об'єднуються подібні, схожі між собою одиниці сукупності;
- ступінь подібності, схожості одиниць, які належать до одного класу, вища, ніж ступінь подібності одиниць, віднесених до різних класів.

Оцінювання подібності здійснюється на основі однієї чи декількох ознак, які формують «образ класу». У традиційній схемі класифікації ці ознаки ієрархічно впорядковуються за своєю вагомістю. На кожному кроці поділу сукупності до уваги береться лише одна ознака, тобто відбувається послідовне формування, покрокове уточнення, описування класів. Але навіть у невеликих за обсягом сукупностях можливості використання такої схеми класифікації обмежені.

Друга схема класифікації використовує множину класифікаційних ознак одночасно. Будь-яка одиниця сукупності, описана множиною ознак, геометрично інтерпретується як точка у багатовимірному ознаковому просторі, а близькість двох точок розглядається як їх подібність, однорідність. Існують різні варіанти реалізації багатовимірної схеми класифікації, які можна об'єднати у два блоки:

- конструювання багатовимірних інтегральних оцінок (індексів, рейтингів), на основі яких проводиться класифікація за традиційною схемою (див.,напр., 1.2);
- автоматична багатовимірна класифікація методами кластерного аналізу, коли поняття однорідності задається певними метриками.

Зазначимо, що класифікація за будь-якою схемою є певною мірою суб'єктивною, оскільки її результати визначаються передусім множиною класифікаційних ознак та їхніми розмежувальними властивостями.

Далі розглянемо багатовимірну класифікацію методами кластерного аналізу.

*Кластер* - це група, клас однорідних одиниць сукупності. Основне завдання кластерного аналізу - формування таких груп у багатовимірному просторі. Однорідність сукупності задається правилом обчислення певної метрики, що характеризує ступінь подібності (схожості)  $j$ -ої та  $k$ -ої одиниць сукупності.

Такою метрикою може бути *відстань* між ними  $d_{jk}$  або *коефіцієнт подібності*  $r_{jk}$ . Близькі, схожі за вибраними метриками одиниці вважаються належними до одного типу, однорідними. Вибір метрики є вузловим моментом кластерного аналізу, від якого залежить кінцевий варіант поділу сукупності на класи.

На ознаках  $x_i$  метричної шкали формується *матриця відстаней* розміром  $n \times n$  з нульовими діагональними елементами. Використовують різні метрики відстані, серед яких найбільш уживаною є *Евклідова відстань* (довжина відрізка, що з'єднує точки-одиниці сукупності у багатовимірному просторі):

$$d_{jk} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_{ij} - z_{ik})^2},$$

де  $z_{ij}$  і  $z_{ik}$  - стандартизовані значення  $x_i$  ознаки у  $j$ -ої та  $k$ -ої одиниць сукупності.

У випадку різновагомості ознак  $x_i$ , розраховують зважені відстані. Наприклад, *зважена Евклідова відстань* з вагами  $\omega_i$ :

$$d_{jk} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \omega_i (z_{ij} - z_{ik})^2}.$$

На практиці використовують й інші метрики, зокрема, *Манхеттенську відстань*

$$d_{jk} = \sum_{i=1}^m |z_{ij} - z_{ik}|$$
 та інші.

Інформаційною базою кластерного аналізу є матриця відстаней. За способом кластеризації розрізняють ієрархічні та ітераційні процедури. Серед ієрархічних найбільш відома і вживана *агломеративна* (об'єднувальна) процедура, суть якої - послідовне об'єднання двох найближчих одиниць сукупності. У матриці відстаней це одиниці, що мають мінімальну відстань  $d_{jk}$ . На першому кроці об'єднання всі одиниці сукупності розглядаються як окремі кластери; після кожного кроку розмірність матриці зменшується на одиницю. Повна кластеризація  $n$  одиниць відбувається за  $(n - 1)$  кроків.

Іноді кластерні процедури вводять обмеження зверху на максимальну відстань між об'єктами одного класу. Таке обмеження називають *порогом*. Якщо при формуванні кластерів відстань між об'єктами перевищує поріг  $c_0$ , то ці об'єкти за певними правилами відносяться до різних кластерів. Порогове значення вибирається суб'єктивно або за певною схемою, може бути постійним або змінюватися, скажімо, монотонно зростаючи на кожному кроці формування кластерів.

Загальну схему агломеративної кластер-процедури із матрицею відстаней можна представити як повторення трьох операцій:

- 1) пошук мінімальної відстані між  $j$ -им і  $k$ -им кластерами;
- 2) об'єднання  $j$  та  $k$  в один кластер і надання останньому спільного індексу  $q$ ;
- 3) розрахунок відстаней від сформованого кластера  $q$  до інших одиниць сукупності  $d_{qs}$  за формулою  $d_{qs} = a_1 d_{js} + a_2 d_{ks} + a_3 d_{jk} + a_4 (d_{js} - d_{ks})$ .

Значення коефіцієнтів  $a_1, a_2, a_3, a_4$  залежать від алгоритму формування кластерів. Так, наприклад, за алгоритмом одиничного зв'язку (ближнього сусіда) одиниця  $s$  приєднується до кластера  $q$ , якщо вона близька до хоча б одного представника цього кластера. В алгоритмі повного зв'язку (далекого сусіда) відстань між кластером  $q$  і  $s$ -ою одиницею визначається як відстань до найвіддаленішого представника кластера  $q$ . Алгоритм середнього зв'язку використовує середню відстань між кандидатом на включення в кластер  $q$  і представниками існуючого кластера.

Результати ієрархічних процедур кластеризації оформляються у вигляді деревоподібних діаграм - *дендрограм*. На одній осі дендрограми зазначаються номери об'єктів (одиниць сукупності), на іншій - відстані, за якими відбувається об'єднання. Дендрограма відображає ієрархію структур: кожний кластер можна розглядати як елемент іншого, з більшим значенням відстані  $d_{jk}$ .

У системі *Statistica* ієрархічну процедуру класифікації - *Joining (Tree clustering)* - реалізовано в модулі *Cluster Analysis*.

Відмітимо, що у випадку, коли значення ознаки представлені двійковим кодом, для оцінювання ступеня близькості об'єктів використовують коефіцієнт подібності  $r_{jk}$ . Розрахунок його ґрунтується на співвідношеннях кількості ознак, значення яких збігаються чи не збігаються. Наприклад, оцінюється якість продукції за  $m$  параметрами. Кожна одиниця сукупності характеризується вектором значень цих параметрів якості. Для параметра, що відповідає стандарту,  $x = 1$ , для параметра, що не відповідає стандарту,  $x = 0$ :

Таблиця 2.1. Параметри якості

Одиниця сукупності	Параметр якості							
	а	б	в	г	р	д	е	є
$j$	0	1	1	0	1	0	0	1
$k$	0	0	1	1	1	1	0	1

Частоти однакових і різних пар значень ознак зручно подавати у вигляді чотириклітинкової таблиці:

Таблиця 2.2. Значення ознаки

Значення ознаки	1	0
1	$a$	$b$
0	$c$	$d$

У нашому прикладі кількість пар однакових значень ознаки: одиничних  $a(1, 1) = 3$ ; нульових  $d(0, 0) = 2$ . Кількість пар ознак, значення яких не збігаються:  $b(1, 0) = 1$ ;  $c(0, 1) = 2$ .

За умови, що одиничні та нульові ознаки рівновагомі, використовують відношення

$$r_{jk} = \frac{a+d}{a+b+c+d}.$$

Якщо значущими вважаються лише одиничні ознаки, то частоту  $a$  відносять або до загальної кількості ознак (коефіцієнт Рао) або до загальної кількості одиничних значень (коефіцієнт Жаккара):

$$r_{jk} = \frac{a}{a+b+c+d} ; \quad r_{jk} = \frac{a}{a+b+c} .$$

Іноді важливо надати подвійну вагу одиничним ознакам. Скажімо, коли «1» позначає відхилення  $i$ -го параметра від нормативу (коефіцієнт Дейка):

$$r_{jk} = \frac{2a}{2a+b+c} .$$

На практиці використовують багато інших оцінок ступеня подібності. Значення  $r_{jk}$  коливаються в межах  $0 \leq r_{jk} \leq 1$ . Очевидно, що різні коефіцієнти, розраховані для тих самих об'єктів, за величиною будуть різними. Вибір коефіцієнта  $r_{jk}$  визначається відносною значущістю одиничних і нульових ознак, важливістю порозрядного збігу чи незбігу їхніх значень, а отже, певною мірою є суб'єктивним.

У матриці коефіцієнтів подібності діагональні елементи представлено одиницями. Агломеративна процедура послідовно об'єднує найближчі об'єкти, що мають максимальний коефіцієнт  $r_{jk}$ .

Ієрархічна кластер-процедура досить проста і прийнятна для інтерпретації. Проте для численної сукупності вона виявляється громіздкою. У таких випадках перевагу віддають ітераційним процедурам.

На відміну від ієрархічної процедури, яка потребує розрахунку і збереження матриці подібності, ітераційна процедура оперує безпосередньо первинними даними; формуються кластери одного рангу, ієрархічно не підпорядковані. Основні риси ітераційних кластер-процедур розглянемо на прикладі алгоритму *k-середніх*, який реалізує ідею утворення груп за принципом «найближчого центра».

На першому кроці ітераційного процесу здійснюється орієнтовний поділ сукупності на класи і визначаються центри тяжіння (багатовимірні середні) цих класів.

На другому кроці визначаються відстані одиниць сукупності до центрів тяжіння виділених кластерів, і кожна з них відноситься до того кластера, центр тяжіння якого найближчий.

На третьому кроці розраховуються нові центри тяжіння кластерів.

Кроки 2 і 3 повторюються доти, доки склад кластерів не стабілізується. Ітерації за принципом *k-середніх* у явному вигляді не використовують критеріїв якості класифікації, проте неявно вони мінімізують внутрішньогрупові дисперсії, забезпечуючи тим самим однорідність сформованих кластерів.

Серед методів розпізнавання образів особливе місце посідає дискримінантний аналіз. На відміну від кластерного аналізу дискримінантний не утворює нових

класів, а допомагає виявити різницю між існуючими класами і віднести новий (нерозпізнаний) об'єкт до одного з них за принципом максимальної схожості. Наприклад, банк, спираючись на певну систему характеристик фінансового стану клієнтів, які звертаються за позиками, класифікує їх на дві категорії: надійні та ненадійні. Дискримінантний аналіз використовується в медичній діагностиці, при визначенні ризику відмови приладів у технічних системах тощо. Основна проблема — звести помилку класифікації до мінімуму.

*Дискримінантна функція* — це лінійна комбінація певної множини ознак, які називаються класифікаційними і на основі яких ідентифікуються класи. Особливість дискримінантної функції полягає в тому, що класи представляються шкалою найменувань, а класифікаційні ознаки  $x_i$ , де  $i = 1, 2, \dots, m$ , вимірюються метричною шкалою. Кількість останніх не може перевищувати  $(n-2)$ , де  $n$  — обсяг сукупності. Функціонально зв'язані та високорельовані ознаки до ознакового простору моделі не включаються.

Дискримінантна функція  $f_j$  визначається для кожного  $j$ -го класу ( $j = 1, 2, \dots, p$ ):

$$f_j = a_{0j} + a_{1j}\bar{x}_{1j} + a_{2j}\bar{x}_{2j} + \dots + a_{mj}\bar{x}_{mj},$$

де  $a_{ij}$  - коефіцієнти функції (змістовної інтерпретації не мають);  $\bar{x}_{ij}$  - середнє значення  $i$ -ої ознаки в  $j$ -му класі.

Коефіцієнти функції  $a_{ij}$  можна розрахувати за формулами:  $a_{ij} = (n-p) \sum_{k=1}^m b_{ik} \bar{x}_{kj}$ ,

де  $b_{ik}$  — елемент матриці, оберненої до внутрішньогрупової матриці сум попарних добутків  $W_{ik} = \sum_{j=1}^p \sum_{h=1}^{n_j} (x_{ijh} - \bar{x}_{ij})(x_{kjh} - \bar{x}_{kj})$ , а константа  $a_{0j} = -0.5 \sum_{k=1}^m a_{kj} \bar{x}_{kj}$ .

Геометрично  $f_j$  - це уявна точка  $m$ -вимірною Евклідового простору, координатами якої є середні значення класифікаційних ознак  $j$ -го класу. Значення  $f_j$  для  $p$  класів розглядаються як центри їх тяжіння і називаються *центроїдами*.

Процедура класифікації ґрунтується на геометричній близькості  $h$ -ої одиниці (з координатами значень ознак  $x_{ih}$ ) до центроїдів виділених класів. Належність її до того чи іншого класу визначається на основі *відстані Махаланобіса*, яку можна записати так:

$$D^2 = (n-p) \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m b_{ik} (x_{ijh} - \bar{x}_{ij})(x_{kjh} - \bar{x}_{kj}).$$

Дискримінантна функція максимізує різницю між класами і мінімізує дисперсію всередині класу. Критерієм оптимального поділу сукупності на класи є максимум відношення міжкласової варіації до внутрішньокласової.



Міжкласову варіацію характеризує квадрат різниці центрів  $(f_j - f_s)^2$ , а внутрішньокласову — середній квадрат відстаней між точками, що належать  $j$ -му класу  $x_{ijh}$ , і центроїдами цих класів  $f_j$ :

$$\sigma_f^2 = \frac{\sum_{j=1}^p \sum_{h=1}^{n_j} a_{ij} (x_{ijh} - \bar{x}_{ij})^2}{\sum_{j=1}^p n_j - p},$$

де  $n_j$  — кількість одиниць  $j$ -го класу.

Отже, критерій оптимального поділу на класи можна представити відношенням

$$D^2 = \frac{(f_j - f_k)^2}{\sigma_f^2},$$

яке називають *узгальненою міжкласовою відстанню Махаланобіса*.

Для оцінювання спроможності дискримінантної функції розпізнавати класи у багатовимірному ознаковому просторі використовують також  $\lambda$ -статистику Вількса (*Wilks lambda*):

$$\lambda = \prod_{j=1}^p \frac{1}{1 + \lambda_j},$$

де  $\lambda_j$  — характеристичні числа матриці коваріацій.

$\lambda$ -статистика враховує як відмінності між класами, так і однорідність кожного класу. Оскільки  $\lambda$  розраховується як обернена величина, то чим більше різняться центроїди, тим менше її значення, і навпаки, якщо центроїди збігаються, то  $\lambda$  прямує до 1. Отже, близькі до 0 значення  $\lambda$  свідчать про високу розпізнавальну спроможність дискримінантної функції. Істотність різниці значень центроїдів перевіряється також за допомогою критерію  $\chi^2$  чи дисперсійного  $F$ -критерію, які функціонально зв'язані з  $\lambda$ -статистикою.

У системі *Statistica* процедури дискримінантного аналізу об'єднані у модуль *Discriminant Analysis* - Дискримінантний аналіз. Використання модуля розглянемо на умовному прикладі професійної психодіагностики, методика якої передбачає дискримінацію претендентів на заміщення вакансій на дві групи: відповідають (група С) і не відповідають (група NC) вимогам професії. Діагностичні ознаки: VAR2 — оперативна пам'ять, VAR3 — концентрація уваги. Значення цих ознак у балах наведено у таблиці:

Таблиця 2.3. Значення ознак

	VAR1	VAR2	VAR3
1	С	72	75
2	С	57	70
3	С	59	62
4	С	67	72
5	С	75	59
6	С	62	73

7	NC	67	50
8	NC	56	59
9	NC	58	54
10	NC	47	60

За командами на стартовій панелі модуля проведемо селекцію ознак: незалежні (*independent variable list*) - VAR2 та VAR3; ідентифікатор груп (*grouping variable*) - VAR1; вкажемо метод аналізу - *Standart*. За результатами аналізу в інформаційній частині діалогового вікна вказується кількість класифікаційних ознак, значення  $\lambda$ -статистики та *F*-критерію:

*Discriminant Function Analysis Results*  
 Number of variables in the model: 2  
 Wilks' Lambda: .270128 approx.  $F(2,7)=9,45681$   $p < ,01024$ .

Згідно з даними дискримінантна функція спроможна визначити професійно придатних осіб з мінімальною ймовірністю помилки. Параметри дискримінантної функції за кожним з виділених класів визначимо за допомогою процедури *Classification functions*:

Таблиця 2.4. Коефіцієнти дискримінантних функцій

Classification Functions; grouping: VAR1 (new. sta)		
Continue...	C $p = ,60$	NC $p = ,40$
VAR2	1,9867	1,6938
VAR3	2,9689	2,4539
Constant	-167,0933	-117,5931

Установки аналізу *Distances between groups* і *Squared Mahalanobis distances* визначають міжкласову та внутрішньокласові відстані. Так, узагальнена міжкласова відстань Махаланобіса становить 11,258 (а також наводяться відстані окремих одиниць сукупності до центрів груп). Частка правильно класифікованих одиниць сукупності становить 90 % (одна неправильно класифікована одиниця маркірована):

Таблиця 2.5. Таблиця квадратів відстаней Махаланобіса та класифікацій

Squared Mahalanobis Distances from Group Centroids (new.sta)			
Incorrect classifications are marked with *			
Continue...	Observed Classif.	C $p = ,600$	NC $p = ,400$
1	C	3,180	22,786
2	C	1,227	6,898
*3	C	3,051	1,653
4	C	0,586	14,174
5	C	3,140	8,023
6	C	0,616	12,305
7	NC	11,076	2,004

8	NC	6,560	0,315
9	NC	10,313	0,090
10	NC	12,275	1,789

Нові, нерозпізнані об'єкти відносяться до того класу, для якого індивідуальні значення дискримінантної функції більші. Так, у нашому прикладі новий претендент на заміщення вакансії набрав 65 балів по тесту «оперативна пам'ять» і 68 балів по тесту «концентрація уваги». Значення дискримінантної функції для групи *C* становить 163,957, для групи *NC* - 159,39. Оскільки перше значення функції більше, то претендент належить до групи *C*.

Розглянуту процедуру класифікації можна використати й тоді, коли кількість класів  $m > 2$ . Важливо, щоб кількість одиниць у кожному класі була не менша 2. Іноді метою дискримінантного аналізу є не віднесення об'єктів до того чи іншого класу, а визначення апостеріорних імовірностей належності до цих класів. Результати такого аналізу дає установка *Posterior Probabilities*.

Далі розглянемо специфіку застосування методів та моделей класифікації на конкретних прикладах виконаних досліджень.

*Приклад. 2.1. Економіко-математичний аналіз готельних підприємств м.Одеса.*

Ефективність діяльності підприємств характеризується досить великою кількістю показників, часто взаємопов'язаних величин, тому для досліджень необхідно застосувати спеціальні методи та алгоритми багатовимірного статистичного аналізу.

Основним завданням даної роботи є дослідження сукупності підприємств (готелів), які характеризуються певними економічними характеристиками, та об'єднання їх у групи за рівнем ефективності функціонування. Метою дослідження є класифікація за ознакою «ефективність функціонування готельних підприємств» та економіко-математичний аналіз малих та середніх готелів міста Одеса. Для здійснення багатовимірного аналізу нами були використані наступні показники, які на наш погляд, характеризують ефективність функціонування малих та середніх готелів міста Одеса за 2012 рік:

- $x_1$  - середня завантаженість одного місця, одиниць
- $x_2$  - середня вартість ліжка-дня (людино-дня), грн.
- $x_3$  - дохідна ставка на одного клієнта, грн.
- $x_4$  - трудомісткість наданих послуг, коп.
- $x_5$  - матеріаломісткість наданих послуг, коп.

Зазначимо, що показник  $x_1$  – було розраховано, як відношення кількості ночівель до кількості місць у даному готелі; дані по показнику  $x_2$  були надані головним управлінням статистики в Одеській області;  $x_3$  – було розраховано як відношення чистого доходу підприємства до кількості розміщених осіб;  $x_4$  – як відношення витрат на оплату праці та відрахувань на соціальні заходи до чистого доходу підприємства;  $x_5$  – як відношення матеріальних витрат до чистого доходу підприємства.

Таблиця 2.6. Основні економічні показники діяльності підприємств

№	x1	x2	x3	x4	x5
1	54,12	109,0	276,06	63,04	18,53
2	60,59	1001	2561,70	10,37	48,04
3	41,88	420	985,01	25,37	37,84
4	11,92	380	861,02	31,55	56,70
5	92,64	227	479,44	61,76	13,14
6	27,50	140	636,36	22,20	70,00
7	51,28	2126	7145,54	13,51	14,28
8	9,68	551	1184,85	45,18	78,43
9	88,69	1297	2923,79	23,28	41,76
10	32,13	139	139,00	73,88	35,82
11	7,44	2085	4037,42	6,84	27,35
12	106,77	608	1285,78	11,51	16,68
13	69,72	900	1266,16	7,34	29,20
14	35,04	800	1616,73	39,43	32,16
15	71,36	1701	4636,11	9,55	96,32
16	78,79	1167	3526,30	15,62	36,98
17	2,89	522	3627,49	19,71	48,75
18	109,10	2363	2611,05	20,36	14,69
19	106,07	323	825,55	38,45	16,95
20	110,49	213	628,24	46,74	32,29
21	76,38	185	857,45	29,45	7,72
22	132,44	550	558,00	19,53	14,40
23	86,30	275	696,75	20,30	14,72
24	37,00	411	4156,46	1,33	0,75
25	172,69	70	238,11	8,42	86,04
26	42,17	150	1028,58	51,03	5,97
27	139,16	390	322,50	13,12	17,42
28	52,13	495	714,67	9,97	72,92
29	142,94	726	963,58	11,99	44,18
30	172,68	580	665,13	12,63	68,91
31	141,80	602	1390,52	7,72	75,41
32	120,75	239	320,14	2,75	10,85
33	10,14	1540	4037,42	6,84	23,35
34	27,14	300	367,87	21,34	29,81
35	64,17	394	1170,98	12,10	37,01
36	62,31	750	1312,22	21,49	32,95
37	31,00	350	7510,63	9,54	30,39
38	103,46	1457	3698,69	15,96	13,64
39	142,61	912	2218,65	15,94	13,69
середні	75,01	703,70	1884,15	22,49	35,03

Кластерний аналіз здійснюється на основі співвимірних та односпрямованих (стимулюючих або дестимулюючих) показників. Стимуляторами у нашому випадку є ознаки  $x1$  та  $x3$ , а дестимуляторами:  $x2$ ,  $x4$  та  $x5$ . Нами було приведено всі ознаки за їх впливом на результативний показник до стимуляторів (шляхом заміни значень дестимуляторів їх оберненими величинами) та стандартизацію ознак за формулами:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_i}{\sigma_i}$$

де  $x_{ik}$  - значення і-тої ознаки ( $i=1,5$ ) для j-ого об'єкта сукупності ( $j=1,39$ ),  $\bar{x}_i$  - її середнє значення,  $\sigma_i$  - стандартне відхилення і-тої ознаки ( $i=1,5$ ) по усім об'єктам сукупності.

Основним завданням кластерного аналізу є формування груп (класів) однорідних одиниць сукупності. Однорідність сукупності задається правилом обчислення певної метрики  $d_{jk}$ , яка характеризує ступінь схожості (подібності) j-тої та k-тої одиниць сукупності. У якості такої метрики виберемо найбільш поширену Евклідову відстань:

$$d_{jk} = \left[ \sum_{i=1}^5 (z_{ij} - z_{ik})^2 \right]^{1/2},$$

де  $z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_i}{\sigma_i}$  і  $z_{ik} = \frac{x_{ik} - \bar{x}_i}{\sigma_i}$  - стандартизовані значення і-тої ознаки ( $i=1,5$ ) для j-тої та k-тої одиниць сукупності ( $j, k=1,39$ ).

Економіко-математичне моделювання виконаємо на базі отриманої матриці стандартизованих значень ознак за допомогою програми Statistica. На першому етапі було використано ієрархічну агломеративну процедуру класифікації Joining (Tree clustering) – дерево кластеризації за алгоритмом об'єднання одиничного зв'язку («найближчого сусіда») Single Linkage (nearest neighbor) із Евклідовою відстанню (Euclidean distances) у якості метрики. В результаті першого етапу кластерного аналізу отримуємо дендрограму класифікації за обраними ознаками та графік схеми об'єднання (Рис. 2.1 та Рис. 2.2 відповідно). Аналіз результатів першого етапу багатовимірної класифікації дозволяє зробити висновок, що сукупність досліджуваних готелів можна поділити на 3 кластери.

Для уточнення класифікації на другому етапі була застосована ітераційна процедура – так званий метод К-середніх (K-Means), який проводить групування за принципом «найближчого центра», тобто кластери формуються навколо центроїдів (точок, координатами яких є групові середні за ознаками). При цьому нами було задано кількість кластерів рівною 3 (як показав попередній аналіз). Як відомо, ітерації методу К-середніх мінімізують внутрішньо групові дисперсії, забезпечуючи тим самим однорідність сформованих кластерів. В результаті готелі було об'єднано у три кластери (див. таблицю результатів нижче), де перший та сьомий стовпці – це номери об'єктів – готелів, другий-шостий стовпці відповідають стандартизованим даним, передостанній стовпець – номер кластера, до якого віднесено той чи інший готель, а останній стовпець – це відстані об'єктів від центроїдів відповідних кластерів.

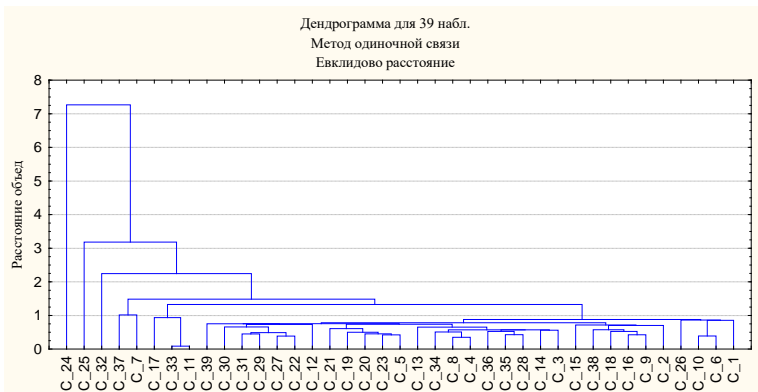


Рис. 2.1. Дендрограмма ієрархічної класифікації готелів за ознакою «Ефективність функціонування готельних підприємств»



Рис. 2.2. Графік схеми об'єднання по крокам

Таблица 2.7. Розподіл готельних підприємств за кластерами

Таблица ста								
	x1	x2	x3	x4	x5	НАБЛ_НО	КЛАСТЕР	РАССТ.
C_1	-0,44	2,23	-0,88	-0,60	-0,11	1	1	0,91
C_2	-0,30	-0,68	0,37	0,05	-0,27	2	2	0,20
C_3	-0,70	-0,19	-0,49	-0,41	-0,24	3	2	0,58
C_4	-1,33	-0,10	-0,56	-0,47	-0,29	4	2	0,71
C_5	0,37	0,53	-0,77	-0,59	-0,01	5	1	0,22
C_6	-1,00	1,51	-0,68	-0,36	-0,30	6	1	0,81
C_7	-0,50	-0,86	2,88	-0,13	-0,04	7	2	0,99
C_8	-1,37	-0,39	-0,38	-0,55	-0,31	8	2	0,65

C_9	0,29	-0,76	0,57	-0,38	-0,26	9	2	0,39
C_10	-0,90	1,52	-0,95	-0,62	-0,24	10	1	0,81
C_11	-1,42	-0,86	1,18	0,45	-0,20	11	2	0,54
C_12	0,67	-0,45	-0,33	-0,03	-0,08	12	1	0,45
C_13	-0,11	-0,64	-0,34	0,37	-0,21	13	2	0,55
C_14	-0,84	-0,59	-0,15	-0,52	-0,22	14	2	0,43
C_15	-0,08	-0,82	1,50	0,12	-0,32	15	2	0,45
C_16	0,08	-0,73	0,90	-0,21	-0,24	16	2	0,30
C_17	-1,52	-0,35	0,95	-0,32	-0,27	17	2	0,48
C_18	0,72	-0,88	0,40	-0,33	-0,05	18	2	0,60
C_19	0,65	0,07	-0,58	-0,52	-0,09	19	1	0,26
C_20	0,75	0,64	-0,69	-0,55	-0,22	20	1	0,24
C_21	0,03	0,89	-0,56	-0,45	0,25	21	1	0,34
C_22	1,21	-0,39	-0,72	-0,31	-0,04	22	1	0,52
C_23	0,24	0,26	-0,65	-0,33	-0,05	23	1	0,17
C_24	-0,80	-0,17	1,24	5,31	6,01	24	3	0,00
C_25	2,05	4,02	-0,90	0,23	-0,32	25	1	1,75
C_26	-0,69	1,34	-0,47	-0,57	0,43	26	1	0,72
C_27	1,35	-0,12	-0,85	-0,11	-0,10	27	1	0,49
C_28	-0,48	-0,31	-0,64	0,08	-0,31	28	1	0,57
C_29	1,43	-0,54	-0,50	-0,05	-0,26	29	1	0,64
C_30	2,05	-0,42	-0,67	-0,09	-0,30	30	1	0,82
C_31	1,40	-0,44	-0,27	0,32	-0,31	31	1	0,65
C_32	0,96	0,46	-0,85	2,20	0,07	32	1	1,08
C_33	-1,36	-0,80	1,18	0,45	-0,17	33	2	0,51
C_34	-1,01	0,15	-0,83	-0,35	-0,21	34	1	0,69
C_35	-0,23	-0,13	-0,39	-0,06	-0,24	35	1	0,43
C_36	-0,27	-0,56	-0,31	-0,35	-0,23	36	2	0,47
C_37	-0,93	-0,02	3,08	0,12	-0,21	37	2	1,12
C_38	0,60	-0,79	0,99	-0,22	-0,02	38	2	0,54
C_39	1,42	-0,64	0,18	-0,22	-0,02	39	1	0,75

У таблиці відображено віднесення готелів до того чи іншого кластеру по сукупності значень усіх 5 ознак. Отже, попередньо ми отримали такі результати: до першого кластера потрапили готелі 1, 5, 6, 10, 12, 18, 19-23, 25-32, 34, 35, 39;

до другого кластера потрапили готелі 2-4, 7-9, 11, 13-17, 33, 36-38;

до третього кластера (так званий *аномальний* кластер) потрапив готель 24.

Для того, щоб переконатись у стійкості (*робастності*) розбиття усієї сукупності об'єктів на кластери (правильності класифікації) ми скористались одним із результатів дискримінантного аналізу, а саме, таблицею так званих апостеріорних ймовірностей. За даними цієї таблиці нами було зроблено висновок, що розбиття усіх готелів на кластери за латентною ознакою «Ефективність функціонування готельних підприємств» здійснено практично достовірно.

Крім того, нами було отримано ще один результат дискримінантного аналізу – дискримінантні (класифікаційні) функції:

Таблиця 2.8. Віднесення підприємств у кластери за допомогою дискримінантної функції

Переменная	Функции классификации; группировка: х6 (Таблица.st)	
	G_1:1 p=,55263	G_2:2 p=,44737
x1	0,81639	-0,8857
x2	0,64565	-0,8247
x3	-0,81039	1,5696
x4	-0,56665	-0,7703
x5	-3,85831	-10,0819
Конст-та	-1,45822	-2,9284

Ці функції дозволяють проводити класифікацію (віднесення до того чи іншого кластера) нових об'єктів (готелів із аналогічним набором даних по таким самим 5 показникам), підстановкою стандартизованих значень показників до дискримінантних функцій:  $f_1 = -1,46 + 0,82z_1 + 0,65z_2 - 0,81z_3 - 0,57z_4 - 3,86z_5$ ;  $f_2 = -2,93 - 0,89z_1 - 0,82z_2 + 1,57z_3 - 0,77z_4 - 10,08z_5$ ; та порівнянням отриманих значень цих функцій.

Відмітимо, що прослідковується чітке групування трьох перших та двох останніх ознак (див. нижче наведену дендрограму ієрархічного об'єднання ознак). Ці ознаки можна охарактеризувати як симптоми дії двох факторів (головних компонент), наприклад: «експлуатаційно-виробничий фактор» та «ресурсний фактор».

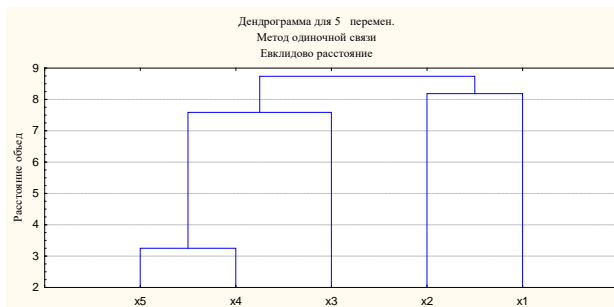


Рис.2.3. Групування ознак за ієрархічною процедурою

На наступному етапі нами було досліджено ступінь впливу тієї чи іншої ознаки на потрапляння готелів до певного кластера. Для цього було застосовано ще один із методів кластерного аналізу - подвійне об'єднання, підбираючи бар'єрне значення параметра таким, щоб отримати 3 блоки (кластери). Результати цього метода (Рис. 2.4) та перевпорядкована матриця подвійного об'єднання (Таблиця



2.9) дозволяють оцінювати впливи груп факторів-ознак на формування кластерів.

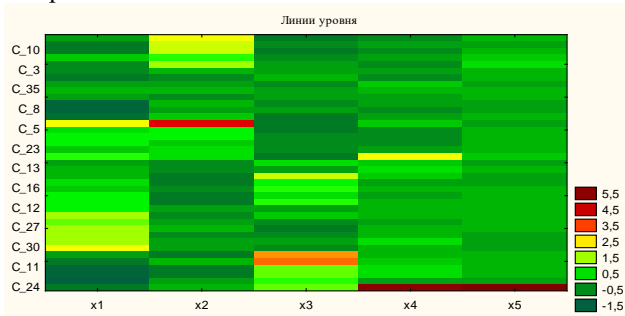


Рис.2.4. Варіації впливу ознак на формування кластерів.

Таблиця 2.9. Перевпорядкована матриця подвійного об'єднання

Перупорядоч.матрица (Таблица.ста)					
	x1	x2	x3	x4	x5
C_1	-0,43944	2,228370	-0,878933	-0,596801	-0,113389
C_6	-0,99929	1,506411	-0,682003	-0,362402	-0,302646
C_10	-0,90183	1,524674	-0,953844	-0,615493	-0,237627
C_21	0,02874	0,888938	-0,561162	-0,451500	0,247009
C_26	-0,69073	1,337178	-0,467627	-0,566795	0,428459
C_3	-0,69693	-0,185923	-0,491445	-0,407591	-0,244716
C_14	-0,84066	-0,587852	-0,146164	-0,520495	-0,222462
C_28	-0,48122	-0,314130	-0,639201	0,081387	-0,305374
C_35	-0,22806	-0,129168	-0,389796	-0,060646	-0,241891
C_36	-0,26716	-0,558236	-0,312602	-0,350394	-0,226009
C_4	-1,32697	-0,096853	-0,559211	-0,469626	-0,286660
C_8	-1,37407	-0,386747	-0,382218	-0,546442	-0,309972
C_34	-1,00680	0,152544	-0,828753	-0,347881	-0,210798
C_25	2,05448	4,016065	-0,899677	0,229321	-0,315350
C_5	0,37089	0,534886	-0,767775	-0,594154	-0,007893
C_20	0,74636	0,637977	-0,686444	-0,552371	-0,223087
C_19	0,65326	0,069895	-0,578600	-0,515315	-0,089439
C_23	0,23743	0,259299	-0,648999	-0,328504	-0,046734
C_32	0,96209	0,457391	-0,854842	2,199071	0,069005
C_2	-0,30330	-0,677055	0,370328	0,050089	-0,271500
C_13	-0,11116	-0,637212	-0,337776	0,369808	-0,207451
C_15	-0,07676	-0,823184	1,504135	0,116496	-0,321269
C_9	0,28773	-0,758017	0,568232	-0,379119	-0,256562
C_16	0,07943	-0,727557	0,897547	-0,209873	-0,241809
C_18	0,71697	-0,881692	0,397300	-0,329696	-0,046052
C_38	0,59832	-0,788087	0,991771	-0,220936	-0,021173
C_12	0,66800	-0,447278	-0,327050	-0,026121	-0,084805
C_39	1,42192	-0,642194	0,182827	-0,220462	-0,022312
C_22	1,20801	-0,385926	-0,724836	-0,313019	-0,039583

C_27	1,34935	-0,120833	-0,853551	-0,111978	-0,096945
C_29	1,42884	-0,542437	-0,503159	-0,054427	-0,262832
C_31	1,40484	-0,441741	-0,269803	0,315568	-0,307533
C_30	2,05443	-0,419348	-0,666278	-0,088300	-0,301571
C_7	-0,49906	-0,864910	2,875711	-0,129475	-0,036664
C_37	-0,92567	-0,016689	3,075255	0,117691	-0,213813
C_11	-1,42123	-0,861639	1,176909	0,449595	-0,196394
C_33	-1,36442	-0,801317	1,176909	0,449595	-0,166493
C_17	-1,51695	-0,351266	0,952853	-0,316786	-0,272944
C_24	-0,79938	-0,166340	1,241971	5,307980	6,007281

Наприклад, на формування «аномального» кластера 3, який складається лише з готеля з порядковим номером 24 найбільший вплив учинили значення четвертої та п'ятої ознак.

Виконавши економіко-математичний аналіз кожного із отриманих кластерів, для чого були розраховані середні значення економічних показників діяльності підприємств за кластерами по вихідним даним, ми можемо охарактеризувати отримані результати за кластерами.

*Таблиця 2.10. Середні значення економічних показників за кластерами*

<i>Ознаки кластери</i>	X1	X2	X3	X4	X5
1	97,83	454,00	836,11	26,10	32,60
2	46,01	1065,37	3183,19	18,85	40,51
3	37,00	410,50	4156,46	1,33	0,75

Так для кластера 1 (готелі 1, 5, 6, 10, 12, 18, 19-23, 25-32, 34, 35, 39) характерними є такі усереднені показники: середня завантаженість одного місяця становить 97,83 одиниць, середня вартість ліжко-дня (людино-дня) - 454 грн., доходна ставка на одного клієнта – 836,11 грн., трудомісткість наданих послуг – 26,1 коп., матеріаломісткість наданих послуг - 32,6 коп. Для кластера 2 (готелі 2-4, 7-9, 11, 13-17, 33, 36-38) характерними є такі усереднені показники: середня завантаженість одного місяця становить 46,01 одиниць, середня вартість ліжко-дня (людино-дня) – 1065,37 грн., доходна ставка на одного клієнта – 3183,19 грн., трудомісткість наданих послуг – 18,85 коп., матеріаломісткість наданих послуг - 40,51 коп.

Для 3-го кластера, до якого потрапило одне підприємство, характерними є такі усереднені показники: середня завантаженість одного місяця становить 37,0 одиниць, середня вартість ліжко-дня (людино-дня) – 410,5 грн., доходна ставка на одного клієнта – 4156,46 грн., трудомісткість наданих послуг – 1,33 коп., матеріаломісткість наданих послуг - 0,75 коп.

Враховуючи те, що до 3-го кластеру потрапило лише одне підприємство, вважатимемо його діяльність аномальною (аномальний кластер, який аналізується окремо) та в подальшому не включати його в дослідження. Враховуючи максимальні та мінімальні значення економічних показників

діяльності підприємств, а також отримані середні значення, охарактеризуємо ідентифіковані кластери.

Для 1-го кластеру характерна висока завантаженість одного місця, середня вартість ліжко-дня та середня доходна ставка на одного клієнта при цьому висока трудомісткість та низька матеріаломісткість.

Що стосується підприємств, які потрапили до 2-го кластера, то для них притаманні низька завантаженість одного місця, але висока середня вартість ліжко-дня та висока доходна ставка на одного клієнта, при цьому також є характерними низька трудомісткість, але висока матеріаломісткість.

Таким чином, ми можемо зробити висновок, що підприємства, як 1-го, так і 2-го кластерів досить чітко орієнтовані на певне коло клієнтів, тобто між ними існує спеціалізація. Підприємства 1-го кластера спеціалізуються на прийомі гостей з меншим рівнем платоспроможності, а підприємства 2-го кластера спеціалізуються на прийомі гостей високого рівня платоспроможності.

Зважаючи на те, що досліджувані підприємства функціонують в одній сфері бізнесу, виникає необхідність розгляду співвідношень, які охарактеризують ефективність їх діяльності та певною мірою можуть пояснити, яка із позицій підприємств є вигіднішою.

Основними критеріями оцінки ефективності діяльності підприємств даних кластерів, на нашу думку, є саме загальний ефект від функціонування підприємства, забезпечення ефективності використання ресурсів, зниження собівартості послуг без погіршення їх якості з метою максимізації прибутку та поліпшення фінансового стану підприємств даної галузі.

На основі результатів, отриманих з використанням методів багатовимірного статистичного аналізу можемо зробити наступні висновки:

- сукупність досліджуваних підприємств було поділено на три кластери за латентною ознакою «Ефективність функціонування готельних підприємств»;
- керуючись економічними показниками діяльності підприємств та результатами методів класифікації, отримані групи було ідентифіковано за якісними характеристиками, які дозволили виділити два основних кластери, які потребують дослідження;
- далі у рамках отриманих кластерів актуальними є питання дослідження динаміки основних показників діяльності підприємств;
- для підвищення ефективності функціонування підприємств даних груп виникає необхідність у подальшому розгляді співвідношень, що охарактеризують ефективність їх діяльності та певною мірою зможуть пояснити, яка з позицій підприємств є вигіднішою.

*Приклад 2.2. Кластерний аналіз адміністративно-територіальних одиниць України за латентною ознакою «привабливість ведення бізнесу продуктів дитячого харчування на плодово-овочевій основі»*

Використовуючи дані за 2009-2011 роки, було виконано кластерний аналіз адміністративно-територіальних одиниць (регіонів) України (у якості прикладу, нижче наводиться такий аналіз за 2011 рік):

Таблиця 2.11. Дані по АТО

номер регіону	Назва регіону (області)	Середньо-душовий дохід, грн	кількість дітей віком до 3 років	щорічна потреба у продукті, т	Придатність земель до вирощування сировини	обмеження на рівень рентабельності, %	обмеження на рівень торгівельних надбавок, %
c1	Автономна Республіка Крим	1549,13	108699	1542,32	1	25	25
c2	Вінницька	1556,66	69996	992,93	2	25	20
c3	Волинська	1365,9	59207	838,99	5	100	100
c4	Дніпропетровська	1977	143989	2040,21	1	100	100
c5	Донецька	2051,9	168048	2379,24	2	25	20
c6	Житомирська	1535,73	58429	829,46	2	15	15
c7	Закарпатська	1221,91	71430	1014,62	1	15	25
c8	Запорізька	1928,57	72364	1025,68	5	100	25
c9	Івано-Франківська	1436,53	66618	943,46	2	15	10
c10	Київська	2676,05	206632	2931,35	2	20	20
c11	Кіровоградська	1476,02	41677	591,18	2	20	25
c12	Лузька	1715,75	84544	1198,29	5	20	30
c13	Львівська	1603,35	114710	1626,26	6	100	25
c14	Миколаївська	1636,46	51483	730	4	100	25
c15	Одеська	1573,2	113734	1614,59	2	25	25
c16	Полтавська	1707,08	57137	809,69	2	25	25
c17	Рівненська	1420,01	67740	962,18	5	15	20
c18	Сумська	1591,75	41704	591,11	4	25	25
c19	Тернопільська	1334,28	47982	679,9	5	15	15
c20	Харківська	1785,09	105247	1491,68	5	25	20
c21	Херсонська	1434,2	48463	687,41	6	20	20
c22	Хмельницька	1532,18	57418	814,32	2	100	15
c23	Черкаська	1483,19	49129	697,12	2	10	25
c24	Чернівецька	1302,87	43383	616,29	3	100	15
c25	Чернігівська	1559,51	40097	568,72	2	10	20

Як і у попередньому прикладі у якості метрики для кластерного аналізу обираємо найбільш поширену Евклідову відстань, а ознаковий простір виберемо шестивимірним, причому, з огляду на мету нашого дослідження, ознаки обираємо наступними:

$x_{1j}$  - середньомісячний дохід (грн) на душу населення  $j$ -ого регіону ( $j=1,2,\dots,25$ ) за відповідний рік;

$x_{2j}$  - кількість дітей віком до 3 років (як потенційних споживачів продукції)  $j$ -ого регіону ( $j=1,2,\dots,25$ ) станом на відповідний рік;

$x_{3j}$  - науково обґрунтовані обсяги (тон) споживання продукції по  $j$ -ому регіону ( $j=1,2,\dots,25$ ) у розрахунку на відповідний рік;

$x_{4j}$  - придатність земель  $j$ -ого регіону ( $j=1,2,\dots,25$ ) для вирощування екологічно чистої сировини для виробництва продукції. Зауважимо, що статистичні дані по цьому категоріальному показнику були відсутні. Тому, базуючись на проведених дослідженнях, ми ввели наступні значення цієї ознаки: 1 – малопродатні; 2 – мало або обмежено придатні; 3 – обмежено придатні; 4 – обмежено придатні або придатні; 5 – змішані види придатності; 6 – придатні);

$x_{5j}$  - обмеження (у %) на рівень рентабельності виробництва продукції дитячого харчування, встановлені органами місцевого самоврядування  $j$ -ого регіону ( $j=1,2,\dots,25$ ). При відсутності регулювання ми встановили обмеження на рівні 100%;

$x_{6j}$  - обмеження (у %) на рівень торгівельних надбавок на продукцію дитячого харчування, встановлені органами місцевого самоврядування  $j$ -ого регіону ( $j=1,2,\dots,25$ ). При відсутності регулювання ми встановили обмеження на рівні 100%.

Зазначимо, що у більшості регіонів України, окрім міста Києва, АР Крим, Одеської та Миколаївської областей, статистичні дослідження показують, що фактичне споживання продукції дитячого харчування є значно меншим від необхідного за науково обґрунтованими нормами.

Як відомо, необхідними умовами застосування методів багатовимірного статистичного аналізу є однонаправленість показників (у нашому випадку всі ознаки є стимуляторами) та стандартизація ознак, яку проведемо, поклавши

$$z_{mj} = \frac{x_{mj} - \bar{x}_m}{\sigma_m}, \quad (m = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, 25),$$

де  $\bar{x}_m$  - середні значення відповідної ознаки, а  $\sigma_m$  - стандартні відхилення. Значення стандартизованих ознак по рокам утворюють матриці розмірності 25 на 6, у яких рядки  $c_1, c_2, \dots, c_{25}$  відповідають АТО, а стовпці – це відповідні значення ознак.

Економіко-математичне моделювання виконувалось на базі отриманих матриць стандартизованих значень ознак за допомогою програми Statistica із застосуванням модуля кластерного аналізу для кожного із 2009-2011 років. При цьому, на першому етапі використовувалась ієрархічна агломеративна процедура класифікації *Joining (Tree clustering)* – дерево кластеризації за алгоритмом об'єднання одиничного зв'язку («ближнього сусіда») *Single Linkage (nearest neighbor)* із Евклідовою відстанню (*Euclidean distances*) у якості метрики. В результаті першого етапу багатовимірного статистичного аналізу

отримуємо дендрограми класифікації по обраним ознакам та графіки схем об'єднання (див.,наприклад, наведені нижче діаграми, на яких зображені дендрограму класифікації регіонів та схема об'єднання по даним за 2011 рік).

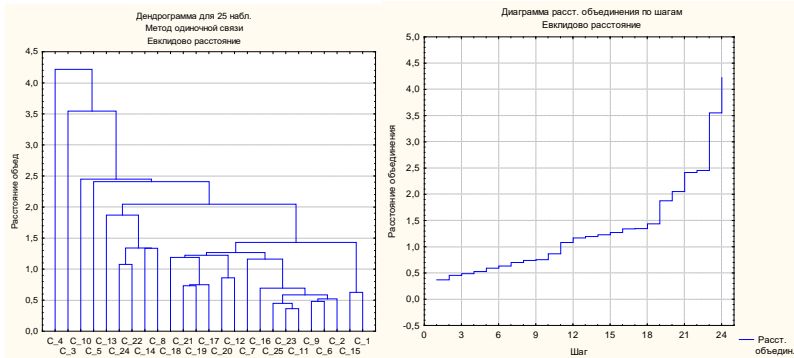


Рис. 2.5. Дендрограма ієрархічної класифікації та графік схеми об'єднання.

Аналіз результатів першого етапу багатовимірної класифікації дозволяє зробити висновок, що регіони України за обраним латентним показником можна поділити на 3 кластери (групи): 1) «лідери» - найбільш сприятливі для розвитку відповідного бізнесу; 2) «середняки» - сприятливі; 3) «аутсайдери» - менш сприятливі.

На другому етапі застосовувалась ітераційна процедура – так званий метод К-середніх ( *K-Means* ), який проводить групування за принципом «найближчого центра», тобто, кластери формуються навколо шестивимірних центроїдів (точок, координатами яких є групові середні по ознакам). При цьому ми задаємо кількість кластерів рівною 3 (як показав попередній аналіз). Як відомо, ітерації методу К-середніх мінімізують внутрішньогрупові дисперсії, забезпечуючи тим самим однорідність сформованих кластерів. В результаті класифікації цим методом регіони України за обраними ознаками протягом 2009-2011 років було об'єднано у 3 кластери (див. наведену нижче таблицю із результатами кластерного аналізу по відповідним ознакам за 2011 рік, у якій рядки відповідають регіонам, перші шість стовпців – значення стандартизованих ознак, п'ятий стовпець – номери регіонів, передостанній стовпець – номери кластерів, а останній стовпчик – евклідові відстані об'єктів - регіонів від центроїдів відповідних кластерів):

Таблиця 2.12. Результати кластерного аналізу

	Таблиця		
	1 НАБЛ НО	2 КЛАСТЕР	3 РАССТ.
C_1	1	3	0,75
C_2	2	3	0,26
C_3	3	2	1,26
C_4	4	1	1,26
C_5	5	1	0,61
C_6	6	3	0,30
C_7	7	3	0,65
C_8	8	2	0,57
C_9	9	3	0,35
C_10	10	1	0,96
C_11	11	3	0,43
C_12	12	3	0,62
C_13	13	2	0,81
C_14	14	2	0,28
C_15	15	3	0,69
C_16	16	3	0,39
C_17	17	3	0,51
C_18	18	3	0,44
C_19	19	3	0,62
C_20	20	3	0,80
C_21	21	3	0,79
C_22	22	2	0,65
C_23	23	3	0,37
C_24	24	2	0,65
C_25	25	3	0,45

Для того, щоб переконатись у правильності розбиття нашої сукупності на кластери, застосуємо один із методів дискримінантного аналізу. Уведемо групуючу змінну, значеннями якої для кожного об'єкту-регіону є номер кластеру, у який попав цей об'єкт. Правильність класифікації (стійкість розбиття або його робастність) підтверджується одним із результатів дискримінантного аналізу, а саме – наведеною нижче таблицею апостеріорних ймовірностей:

Таблиця 2.13. Результати дискримінантного аналізу

Наблюдение	Апостериорные вероятности (Таблица) Неправильные классификации отмечены *			
	Наблюд. Класс.	G_1:1 p=,12000	G_2:2 p=,24000	G_3:3 p=,64000
1	G_3:3	0,000000	0,000044	0,999956
2	G_3:3	0,000071	0,000000	0,999929
3	G_2:2	0,000000	0,999999	0,000001
4	G_1:1	1,000000	0,000000	0,000000
5	G_1:1	0,999536	0,000000	0,000464
6	G_3:3	0,000043	0,000000	0,999957
7	G_3:3	0,000000	0,000000	1,000000
8	G_2:2	0,000000	1,000000	0,000000
9	G_3:3	0,000060	0,000000	0,999940
10	G_1:1	1,000000	0,000000	0,000000
11	G_3:3	0,000071	0,000000	0,999929
12	G_3:3	0,000324	0,000000	0,999676
13	G_2:2	0,000000	1,000000	0,000000
14	G_2:2	0,000000	0,999998	0,000002
15	G_3:3	0,000013	0,000034	0,999954
16	G_3:3	0,000035	0,000000	0,999965
17	G_3:3	0,000002	0,000000	0,999998
18	G_3:3	0,004659	0,000000	0,995341
19	G_3:3	0,000006	0,000000	0,999994
20	G_3:3	0,035335	0,000000	0,964665
21	G_3:3	0,000000	0,000000	1,000000
22	G_2:2	0,000000	0,993147	0,006853
23	G_3:3	0,000014	0,000000	0,999986
24	G_2:2	0,000000	0,999926	0,000074
25	G_3:3	0,000057	0,000000	0,999943

Для отримання більш повної характеристики отриманих кластерів використаємо ще одну процедуру багатовимірної класифікації – метод подвійного об'єднання (*Two-way joining*). Цей метод полягає в одночасному групуванні як спостережень (об'єктів-регіонів), так і змінних (ознак). Чільне місце в алгоритмі займає бар'єрне значення параметра подвійного об'єднання, яке визначає, коли метод врахує одночасну близькість в обох характеристиках досліджуваної сукупності. Підбором параметра добиваємось виділення трьох блоків у просторі «об'єкти-ознаки». В результаті отримуємо наведену нижче перетворену матрицю даних (*Reordered date matrix*). Така блокова класифікація дозволяє отримувати додаткову інформацію про структуру кластерів у розрізі ознак, а саме, проводити порівняльну характеристику об'єктів-регіонів не тільки за належністю до певного кластеру, але і за значеннями тієї чи іншої ознаки.



Таблиця 2.14. Перевпорядкована матриця

Наблюд.	Переупорядоч.матриця (Таблиця)					
	z1	z2	z3	z4	z5	z6
C_1	-0,23055	0,680908	0,682747	-1,27225	-0,457073	-0,116734
C_15	-0,15018	0,798702	0,802034	-0,67213	-0,457073	-0,116734
C_7	-1,32324	-0,191008	-0,188265	-1,27225	-0,725939	-0,116734
C_2	-0,20541	-0,224556	-0,224066	-0,67213	-0,457073	-0,341221
C_16	0,29689	-0,525395	-0,526519	-0,67213	-0,457073	-0,116734
C_18	-0,08823	-0,886453	-0,887303	0,52811	-0,457073	-0,116734
C_6	-0,27530	-0,495169	-0,493887	-0,67213	-0,725939	-0,565709
C_9	-0,60656	-0,303585	-0,305721	-0,67213	-0,725939	-0,790197
C_11	-0,47469	-0,887085	-0,887188	-0,67213	-0,591506	-0,116734
C_23	-0,45075	-0,712744	-0,712325	-0,67213	-0,860372	-0,116734
C_25	-0,19589	-0,924049	-0,924260	-0,67213	-0,860372	-0,341221
C_22	-0,28716	-0,518821	-0,518877	-0,67213	1,559425	-0,565709
C_24	-1,05289	-0,847172	-0,845741	-0,07201	1,559425	-0,565709
C_8	1,03651	-0,169157	-0,170010	1,12823	1,559425	-0,116734
C_14	0,06107	-0,657671	-0,658054	0,52811	1,559425	-0,116734
C_13	-0,04950	0,821536	0,821296	1,72835	1,559425	-0,116734
C_12	0,32584	0,115797	0,114897	1,12823	-0,591506	0,107754
C_20	0,55739	0,600147	0,599161	1,12823	-0,457073	-0,341221
C_17	-0,66173	-0,277336	-0,274822	1,12823	-0,725939	-0,341221
C_19	-0,94800	-0,739578	-0,740748	1,12823	-0,725939	-0,565709
C_21	-0,61434	-0,728325	-0,728352	1,72835	-0,591506	-0,341221
C_3	-0,84242	-0,476967	-0,478157	1,12823	1,559425	3,250583
C_4	1,19823	1,506524	1,504555	-1,27225	1,559425	3,250583
C_5	1,44835	2,069388	2,064151	-0,67213	-0,457073	-0,341221
C_10	3,53257	2,972068	2,975454	-0,67213	-0,591506	-0,341221

Виконаємо економіко-математичний аналіз кожного із отриманих кластерів:

1) «перший кластер» - найбільш сприятливі для ведення бізнесу дитячого харчування регіони: Київська, Донецька та Дніпропетровська області. Відзначимо, що вирішальними при формуванні цього кластера виявились значення перших трьох ознак (як показує діаграма ліній рівня схеми подвійного об'єднання). Але для цих регіонів характерним є погані умови для вирощування необхідної сировини. Тому при бізнес-плануванні слід ураховувати вищезазначені фактори.

2) «другий кластер» - сприятливі для бізнесу регіони: Волинська, Запорізька, Львівська, Николаївська, Хмельницька та Чернівецька області. Головним фактором у цьому кластері виявилась придатність земель регіонів для вирощування екологічно чистої сировини та відсутність обмежень на рентабельність виробництва.

3) «третій кластер» : АР Крим, Вінницька, Житомирська, Закарпатська, Івано-Франківська, Кіровоградська, Луганська, Одеська, Полтавська, Рівненська, Сумська, Тернопільська, Харківська, Херсонська, Черкаська та Чернігівська області. Для цього кластера характерним є більш-менш рівномірний

вплив усіх факторів. Цей кластер показує, що більшість регіонів України є сприятливими для ведення бізнесу відповідного напрямку.

Проведене багатомірне моделювання дозволяє здійснювати стратегічне бізнес-планування у рамках виділених кластерів, урахуовуючи їх особливості, що дозволить не тільки зменшувати витрати, а й більш ефективно вести даний вид бізнесу.

*Приклад 2.3. Кластерний аналіз адміністративно-територіальних одиниць Миколаївської області за надходженнями від майнових податків до місцевих бюджетів*

Сьогодні особлива увага з боку політиків та науковців справедливо приділяється оподаткуванню майна, яке застосовується в Україні дещо невпевнено і об'єктивно розглядається як канал зростання надходжень до доходної частини бюджетів та цільових фондів. На даний момент (до введення Податкового Кодексу) оподаткування майна в Україні представлено податком на землю та податком з власників транспортних засобів та інших самохідних машин і механізмів. Майнові податки надходять безпосередньо до місцевих бюджетів і суттєво впливають на їх формування. Незважаючи на те, що частка надходжень від майнових податків у зведеному бюджеті України (близько 8%) та у місцевих бюджетах областей (близько 15%) є досить незначною, актуальною є задача дослідження їх структури, аналіз динаміки надходжень та прогнозування на підставі цього аналізу. У даній роботі виконується економіко-математичне моделювання надходжень від майнових податків до місцевих бюджетів адміністративно-територіальних одиниць (АТО) Миколаївської області за 2006-2009 роки.

Виконаємо кластерний аналіз адміністративно-територіальних одиниць (АТО) Миколаївської області за даними надходжень майнових податків (плати за землю і податку з власників транспортних засобів та інших машин і механізмів) до місцевих бюджетів (загального і спеціального фондів відповідно) за 2006-2009 роки.

Ознаковий простір виберемо чотирьохвимірним, причому:

$x_{1j}$  - обсяги надходжень (тис.грн) земельного податку до загального фонду місцевого бюджету  $j$ -ої АТО ( $j=1,2,\dots,24$ ) за відповідний рік;

$x_{2j}$  - обсяги надходжень (тис.грн) податку з власників транспортних засобів та інших самохідних машин і механізмів до спеціального фонду місцевого бюджету  $j$ -ої АТО ( $j=1,2,\dots,24$ ) за відповідний рік;

$x_{3j}$  - обсяги доходів (тис.грн) загального фонду місцевого бюджету  $j$ -ої АТО ( $j=1,2,\dots,24$ ) за відповідний рік;

$x_{4j}$  - обсяги доходів (тис.грн) спеціального фонду місцевого бюджету  $j$ -ої АТО ( $j=1,2,\dots,24$ ) за відповідний рік.

Зазначимо, що надходження безпосередньо до обласного бюджету ми не враховуємо як АТО, хоча їх частка у загальнообласних надходженнях є досить

суттєвою (для земельного податку- близько 25%, для транспортногo – понад 40%, до загального фонду – понад 23%, а до спецфонду – в середньому 25%).

Стандартизацію ознак проведемо, поклавши

$$z_{mj} = \frac{x_{mj}}{x_m} \quad (m = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, \dots, 24),$$

де  $x_m$  - загальнообласні обсяги надходжень від майнових податків та до відповідних фондів місцевих бюджетів за відповідний рік. Значення стандартизованих ознак по рокам утворюють матриці розмірності 24 на 4, у яких рядки  $c_1, c_2, \dots, c_{24}$  відповідають АТО, а стовці – це відповідні значення ознак.

Економіко-математичне моделювання виконувалось на базі отриманих матриць стандартизованих значень ознак за допомогою програми STATISTICA із застосуванням модуля кластерного аналізу для кожного із 2006-2009 років. При цьому, на першому етапі використовувалась ієрархічна агломеративна процедура класифікації *Joining (Tree clustering)* – дерево кластеризації за алгоритмом об'єднання одиничного зв'язку («ближнього сусіда») *Single Linkage (nearest neighbor)* із Евклідовою відстанню (*Euclidean distances*) у якості метрики. В результаті першого етапу кластерного аналізу (*Joining Results*) отримуємо дендрограми класифікації по обраним ознакам та графіки схем об'єднання (див.,напр., Рис. 2.6, на якому зображені дендрограма класифікації АТО та схема об'єднання за результатами надходжень за 2009 рік).

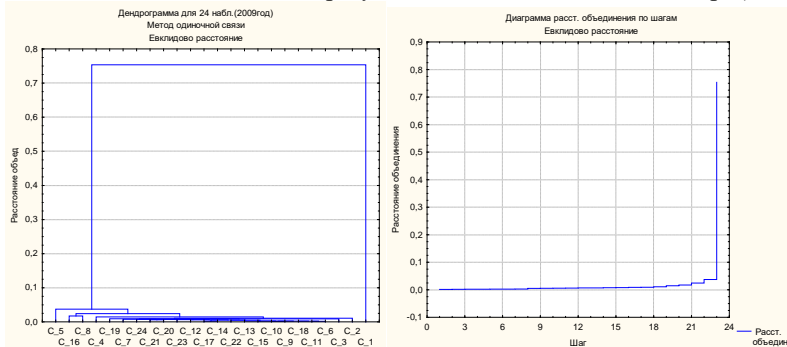


Рис. 2.6. Дендрограма ієрархічної класифікації та графік схеми об'єднання.

Аналіз результатів першого етапу багатовимірної класифікації дозволяє зробити висновок, що АТО поділяються на 4 кластери (групи): 1) місто Миколаїв (аномальний кластер); 2) «лідери»; 3) «середняки»; 4) «аутсайтери».

Для уточнення класифікації на другому етапі застосовується ітераційна процедура – так званий метод К-середніх (*K-Means*), який проводить групування за принципом «найближчого центра», тобто, кластери формуються навколо чотиривимірних центрів (точок, координатами яких є групові середні по ознакам). При цьому ми задаємо кількість кластерів рівною 4 (як показав попередній аналіз). Як відомо, ітерації методу К-середніх мінімізують внутрішньогрупові дисперсії, забезпечуючи тим самим однорідність

сформованих кластерів. В результаті класифікації цим методом АТО Миколаївської області за обраними ознаками протягом 2006-2009 років було об'єднано у чотири кластери (див. наведену нижче таблицю із результатами кластерного аналізу по відповідним ознакам за 2009 рік, на якій рядки відповідають АТО, перші чотири стовпці – значення стандартизованих ознак: частки від загальнообласних доходів від земельного податку, транспортного збору, загального та спецфондів відповідно, п'ятий стовпець – номери АТО, передостанній стовчик – номери кластерів, а останній стовпчик – евклідові відстані АТО від центроїдів відповідних кластерів):

Таблиця 2.15. Розподіл АТО за кластерами

	Таблиця.sta						
	1 mzem09	2 mtran09	3 mzf09	4 msf09	5 НАБЛ НО	6 КЛАСТЕР	7 РАССТ.
C_1	0,408995	0,340098	0,434206	0,445691	1	1	0,00
C_2	0,017839	0,022778	0,022628	0,022713	2	2	0,01
C_3	0,014482	0,005559	0,009686	0,024009	3	3	0,01
C_4	0,026343	0,032351	0,026356	0,01684	4	2	0,01
C_5	0,043439	0,021557	0,056919	0,009458	5	2	0,02
C_6	0,006481	0,00745	0,009188	0,003604	6	4	0,00
C_7	0,023889	0,013968	0,018086	0,006294	7	3	0,01
C_8	0,025698	0,008949	0,013791	0,044944	8	2	0,01
C_9	0,006861	0,005672	0,007379	0,002953	9	4	0,00
C_10	0,007034	0,004464	0,007132	0,002208	10	4	0,00
C_11	0,00685	0,008088	0,007602	0,003372	11	4	0,00
C_12	0,013454	0,007911	0,009661	0,01172	12	3	0,00
C_13	0,004783	0,005465	0,005755	0,003534	13	4	0,00
C_14	0,013673	0,008417	0,008613	0,003673	14	4	0,00
C_15	0,00898	0,004916	0,005828	0,003256	15	4	0,00
C_16	0,022842	0,017076	0,028796	0,046547	16	2	0,01
C_17	0,012489	0,007053	0,009325	0,002834	17	4	0,00
C_18	0,004682	0,008318	0,008458	0,002881	18	4	0,00
C_19	0,01834	0,0151	0,015863	0,019336	19	3	0,00
C_20	0,010347	0,012709	0,010831	0,007533	20	4	0,00
C_21	0,014118	0,014115	0,012615	0,011899	21	3	0,00
C_22	0,011018	0,005265	0,006709	0,007884	22	4	0,00
C_23	0,010565	0,009239	0,012121	0,01717	23	3	0,00
C_24	0,016798	0,011134	0,01623	0,006504	24	3	0,00

Для отримання більш повної характеристики отриманих кластерів використовуємо ще одну процедуру багатовимірної класифікації – метод подвійного об'єднання (*Two-way joining*). Цей метод полягає в одночасному групуванні як спостережень (об'єктів), так і змінних (ознак). Чільне місце в алгоритмі займає бар'єрне значення параметра подвійного об'єднання, яке визначає, коли метод врахує одночасну близькість в обох характеристиках досліджуваної сукупності. Підбором параметра добиваємось виділення трьох блоків у просторі «об'єкти-ознаки» (при використанні метода подвійного об'єднання виключаємо із розгляду кластер – місто Миколаїв, оскільки відстань від нього до центроїдів інших кластерів є досить суттєвою). В

результаті отримуємо діаграму – графік подвійного об’єднання та наведену нижче перетворену матрицю даних (*Reordered date matrix*). Така блокова класифікація дозволяє отримувати додаткову інформацію про структуру кластерів у розрізі ознак, а саме, проводити порівняльну характеристику об’єктів – АТО не тільки за належністю до певного кластеру, але і за значеннями тієї чи іншої ознаки.

Таблиця 2.16. Перевпорядкована матриця

Наблюд.	Переупорядоч. матриця (Таблиця ста)			
	mzem09	mzf09	mtran09	msf09
C_2	0,017839	0,022628	0,022778	0,022713
C_19	0,018340	0,015863	0,015100	0,019336
C_4	0,026343	0,026356	0,032351	0,016840
C_3	0,014482	0,009686	0,005559	0,024009
C_23	0,010565	0,012121	0,009239	0,017170
C_6	0,006481	0,009188	0,007450	0,003604
C_11	0,006850	0,007602	0,008088	0,003372
C_18	0,004682	0,008458	0,008318	0,002881
C_14	0,013673	0,008613	0,008417	0,003673
C_17	0,012489	0,009325	0,007053	0,002834
C_9	0,006861	0,007379	0,005672	0,002953
C_10	0,007034	0,007132	0,004464	0,002208
C_13	0,004783	0,005755	0,005465	0,003534
C_15	0,008980	0,005828	0,004916	0,003256
C_12	0,013454	0,009661	0,007911	0,011720
C_21	0,014118	0,012615	0,014115	0,011899
C_20	0,010347	0,010831	0,012709	0,007533
C_22	0,011018	0,006709	0,005265	0,007884
C_7	0,023889	0,018086	0,013968	0,006294
C_24	0,016798	0,016230	0,011134	0,006504
C_8	0,025698	0,013791	0,008949	0,044944
C_16	0,022842	0,028796	0,017076	0,046547
C_5	0,043439	0,056919	0,021557	0,009458

Виконаємо економіко-математичний аналіз кожного із отриманих кластерів:

1) місто Миколаїв, для якого надходження земельного податку становить майже 40,9% від загальнообласних (або 68689,191 тис.грн у абсолютному значенні), об’єми доходів від податку з власників транспортних засобів та інших самохідних машин і механізмів становлять 34% від зібраних по області (або 11798,764 тис.грн), доходи загального фонду – 43,4% обласних (або 553454,88 тис.грн), а спецфонду – 44,5% обласного (або 51082,157 тис.грн).

Відзначимо, що частка надходжень земельного податку серед доходів загального фонду коливається від 6,7% у 2007 році до 12,4% у 2009 році, а частка надходжень транспортних зборів серед доходів спеціального фонду коливається від 15,6% у 2008 році до 25,5% у 2006 році;

2) «лідери»: міста Вознесенськ, Первомайськ і Южноукраїнськ, Березанський та Жовтневий райони, для яких:

надходження земельного податку становлять в середньому 2,7% від загальнообласних і коливаються від 1,8% обласних (або 2995,936 тис.грн) для м.Вознесенськ до 4,3% обласних (або 7295,504 тис.грн) для м.Южноукраїнськ;

надходження податку з власників транспортних засобів та інших самохідних машин і механізмів становлять в середньому 2% обласних і коливаються від 0,9% обласних (або 310,464 тис.грн) для Березанського району до 3,2% обласних (або 1122,343 тис.грн) для м.Первомайськ;

об'єми доходів загального фонду становлять в середньому 2,9% від загальнообласних і коливаються від 1,4% обласних (або 17578,836 тис.грн) для Березанського району до 5,7% обласних (або 72551,353 тис.грн) для м.Южноукраїнськ;

об'єми доходів спеціального фонду становлять в середньому 2,8% від загальнообласних і коливаються від 0,9% обласних (або 1084,061 тис.грн) для м. Южноукраїнськ до 4,7% обласних (або 5334,928 тис.грн) для Жовтневого району.

Відзначимо, що для цього кластера частка надходжень земельного податку серед доходів загальних фондів за 2009 рік коливається від 10,4% по м.Вознесенськ до 24,6% по Березанському району, а частка надходжень транспортних зборів серед доходів спеціальних фондів коливається від 6% по Березанському району до 69% по м.Южноукраїнськ;

3) «середняки»: м.Очаків, Баштанський, Вознесенський, Миколаївський, Новоодеський, Первомайський та Снігурівський райони, для яких:

надходження земельного податку становлять в середньому майже 1,6% від загальнообласних і коливаються від 1,1% обласних (або 1774,357 тис.грн) для Первомайського району до 2,4% обласних (або 4012,102 тис.грн) для Баштанського району;

надходження податку з власників транспортних засобів та інших самохідних машин і механізмів становлять в середньому 1,1% обласних і коливаються від 0,6% обласних (або 192,842 тис.грн) для м.Очаків до 1,5% обласних (або 523,851 тис.грн) для Миколаївського району;

об'єми доходів загального фонду становлять в середньому 1,3% від загальнообласних і коливаються від 1% обласних (або 12314,647 тис.грн) для Вознесенського району до 1,7% обласних (або 23053,611 тис.грн) для Баштанського району;

об'єми доходів спеціального фонду становлять в середньому майже 1,4% від загальнообласних і коливаються від 0,6% обласних (або 721,407 тис.грн) для Баштанського району до 2,4% обласних (або 2751,724 тис.грн) для м.Очаків.

Для цього кластера частка надходжень земельного податку серед доходів загальних фондів за 2009 рік коливається від 11,5% по Первомайському району до 19,7% по м.Очаків, а частка надходжень

транспортних зборів серед доходів спеціальних фондів коливається від 7% по м.Очаків до 67,2% по Баштанському району;

4) «аутсайтери»: Арбузинський, Березнегуватський, Братський, Веселинівський, Врадіївський, Доманівський, Єланецький, Казанківський, Кривоозерський, Новобузький та Очаківський райони, для яких:

надходження земельного податку становлять в середньому 0,8% від загальнообласних і коливаються від 0,5% обласних (або 786,379 тис.грн) для Кривоозерського району до 1,4% обласних (або 2296,256 тис.грн) для Доманівського району;

надходження податку з власників транспортних засобів та інших самохідних машин і механізмів становлять в середньому 0,7% обласних і коливаються від 0,4% обласних (або 154,872 тис.грн) для Братського району до 1,1% обласних (або 440,912 тис.грн) для Новобузького району;

об'єми доходів загального фонду становлять в середньому майже 0,8% від загальнообласних і коливаються від 0,6% обласних (або 7335,501 тис.грн) для Врадіївського району до 1,1% обласних (або 13805,937 тис.грн) для Новобузького району;

об'єми доходів спеціального фонду становлять в середньому майже 0,4% від загальнообласних і коливаються від 0,2% обласних (або 223,274 тис.грн) для Братського району до 0,8% обласних (або 1655,863 тис.грн) для Очаківського району.

Відмітимо, що для цього кластера частка надходжень земельного податку серед доходів загальних фондів за 2009 рік коливається від 7,3% по Кривоозерському району до 21,6% по Очаківському району, а частка надходжень транспортних зборів серед доходів спеціальних фондів коливається від 20,2% по Очаківському району до 87,4% по Кривоозерському району.

Проведена багатовимірна класифікація дозволяє зробити наступні висновки:

- структура надходжень від земельного податку (збільшення частки орендної плати) є дещо «викривленою», і це призводить до того, що найбільші доходи надходять до місцевих бюджетів міст. В середньому по всім АТО доходи від земельного податку становлять 14,6% обсягів загальних фондів, причому, у більшості «лідерів» цей показник нижче середнього, а у інших, як правило, перевищує середній;

- при плануванні, прогнозуванні, моніторингу та контролі доходів від майнових податків слід враховувати визначені вище кластери. Так, наприклад, для «лідерів» планування здійснювати із урахуванням ризиків невикористаних можливостей (тобто, за оптимістичними прогнозами), зосереджуючи в поточній роботі увагу на контрольних функціях, а у «середняків» та «аутсайдерів» віддавати перевагу профілактичній роботі, розширенню бази оподаткування, вдосконаленню адміністрування тощо;

- надходження від податку з власників транспортних засобів та інших самохідних машин і механізмів становлять в середньому 44,6% від доходів спеціальних фондів, причому, для більшості «середняків» та «аутсайдерів» формують левову частку (до 87,4%) усіх доходів спецфондів;

- надалі виконувати економіко-математичне моделювання майнових податків у рамках визначених кластерів, що дозволить не тільки зменшувати витрати, а й отримувати більш точні результати (далі буде досліджено динаміку надходжень майнових податків у кластерах).

*Приклад 2.4. Кластерний аналіз рівня конкурентоспроможності підприємств харчової промисловості Одеського регіону*

Як відомо, діяльність будь-яких економічних об'єктів характеризується досить великою кількістю показників (ознак), які впливають на різні аспекти цієї діяльності. Окрім того, деякі із таких ознак не можуть безпосередньо вимірюватись (так звані «латентні» або приховані ознаки), але виявляють свою дію шляхом набуття значень декількома ознаками-симптомами. Одним із таких «латентних» показників можна вважати і рівень конкурентоспроможності (або ефективності ведення бізнесу) підприємств. Очевидно, що для дослідження та моделювання такого типу показників необхідно застосовувати методи багатовимірної статистичного аналізу. Розглядаються фактичні дані про діяльність 24 підприємств харчової промисловості Одеського регіону протягом 2008-2012 років за наступними показниками:

*Таблиця 2.17. Показники діяльності підприємств.*

<i>x1 - матеріаломісткість, %</i>
<i>x2 – коефіцієнт виробничої собівартості,</i>
<i>x3 – коефіцієнт валового доходу,</i>
<i>x4 – озброєність основними засобами,</i>
<i>x5 – коефіцієнт віддачі основних засобів,</i>
<i>x6 – коефіцієнт мобільності,</i>
<i>x7 – частка виробничого потенціалу в активах, %</i>
<i>x8 – коефіцієнт зносу,</i>
<i>x9 – коефіцієнт придатності,</i>
<i>x10 – коефіцієнт оновлення,</i>
<i>x11 – коефіцієнт вибуття,</i>
<i>x12 - коефіцієнт приросту основних засобів,</i>
<i>x13 - критична точка об'єму продажів,</i>
<i>x14 – виробничий леверидж,</i>
<i>x15 – зарплатоємність,</i>
<i>x16 – коефіцієнт затовареності готовою продукцією,</i>
<i>x17 – частка необоротних активів в активах, %</i>
<i>x18 – частка основних засобів в активах, %</i>
<i>x19 – частка основних засобів в необоротних активах, %</i>
<i>x20 – коефіцієнт продуктивності праці,</i>
<i>x21 – коефіцієнт внутрішнього рівня конкурентоспроможності,</i>
<i>x22 - коефіцієнт запасу конкурентоспроможності,</i>



x23 - коефіцієнт запаса фінансової стійкості,
x24 – коефіцієнт оборотності оборотних коштів (активів),
x25 – коефіцієнт оборотності запасів,
x26 – коефіцієнт оборотності активів,
x27 – коефіцієнт оборотності дебіторської заборгованості,
x28 - строк погашення дебіторської заборгованості,
x29 – коефіцієнт оборотності кредиторської заборгованості,
x30 - строк погашення кредиторської заборгованості,
y31 – коефіцієнт рентабельності продажів, %
y32 – коефіцієнт рентабельності виробництва, %
y33 - рентабельність оборотного капіталу, %
y34 – рентабельність власного капіталу, %
y35 – рентабельність основних засобів, %
y36 – рентабельність активів, %
x37 – коефіцієнт маневрованості власного капіталу,
x38 – коефіцієнт фінансової стійкості,
x39 – частка власних засобів у джерелах покриття запасів,
x40 – співвідношення дебіторської та кредиторської заборгованостей,
x41 – коефіцієнт абсолютної ліквідності,
x42 – коефіцієнт проміжної ліквідності,
x43 – коефіцієнт загальної ліквідності,
x44 – коефіцієнт автономії (незалежності),

Зауважимо, що частина ознак (а саме,  $x_j$ ) виступають як предиктори (фактори, регресори, факторні ознаки), а інша частина (а саме,  $y_j$ ) – як результативні (регресанти, результати).

Проведемо класифікацію (розбиття на класи або групи – кластери) наших підприємств за сукупністю результативних ознак  $y_j, j = \overline{31,36}$ . Спочатку знайдемо матрицю парних кореляційних коефіцієнтів між ознаками  $y_j, j = \overline{31,36}$  для усіх 24 підприємств за 2008-2012 роки:

Таблиця 2.18. Матриця парних коефіцієнтів кореляції

Переменная	Корреляции (Таблица.sta) Отмеченные корреляции значимы на уровне $p < 0,0501$ N=120 (Построчное удаление ПД)					
	y31	y32	y33	y34	y35	y36
y31	1,00	0,93	0,73	0,03	0,50	0,70
y32	0,93	1,00	0,82	0,02	0,52	0,69
y33	0,73	0,82	1,00	-0,05	0,64	0,79
y34	0,03	0,02	-0,05	1,00	0,11	0,04
y35	0,50	0,52	0,64	0,11	1,00	0,90
y36	0,70	0,69	0,79	0,04	0,90	1,00

Аналіз таблиці показує наявність досить тісного взаємозв'язку між факторами  $y_j, j = \overline{31,36}$  (окрім  $y_{34}$ ), а також певне їх групування. Цей факт потрібно враховувати при подальших дослідженнях. Далі розглядаються динамічні кластери, на які розбивається сукупність 24 підприємств по рокам. При кластеризації, враховуючи виявлений взаємозв'язок між ознаками, у якості

міри схожості (відстані  $d_{ps}$ ) між  $p$ -им та  $s$ -им підприємствами – об'єктами використовується метрика Махаланобіса (або так звана 1- $r$  Пірсона):

$$d_{ps} = (z_p - z_s) r^{-1} (z_p - z_s)^T,$$

де  $z_p, z_s$  - вектори-рядки об'єктів  $p$  та  $s$  у просторі стандартизованих ознак

$$\left( z_k = \frac{y_k - \bar{y}_j}{\sigma_j}, j = \overline{31,36} \right), \quad \bar{y}_j - \text{середні значення, } \sigma_j - \text{стандартні відхилення по}$$

всім об'єктам сукупності для  $j$ -тої ознаки, а  $r^{-1}$  - матриця,

обернена до матриці парних коефіцієнтів кореляції між ознаками.

Виконаємо розподіл нашої сукупності 24 підприємств на динамічні групи-кластери по рокам, застосовуючи ієрархічно-агломеративну процедуру кластеризації за критерієм Уорда (Варда, Ward's method), який базується на аналізі приростів внутрішньогрупової варіації ознак для усіх можливих варіантів об'єднання кластерів (що приводить до утворення кластерів приблизно однакових розмірів). При розрахунках користуємось модулем «Ієрархічний кластерний аналіз» програми Statistica. Нижче наведемо результати багатовимірного моделювання для 2008-2011 років:

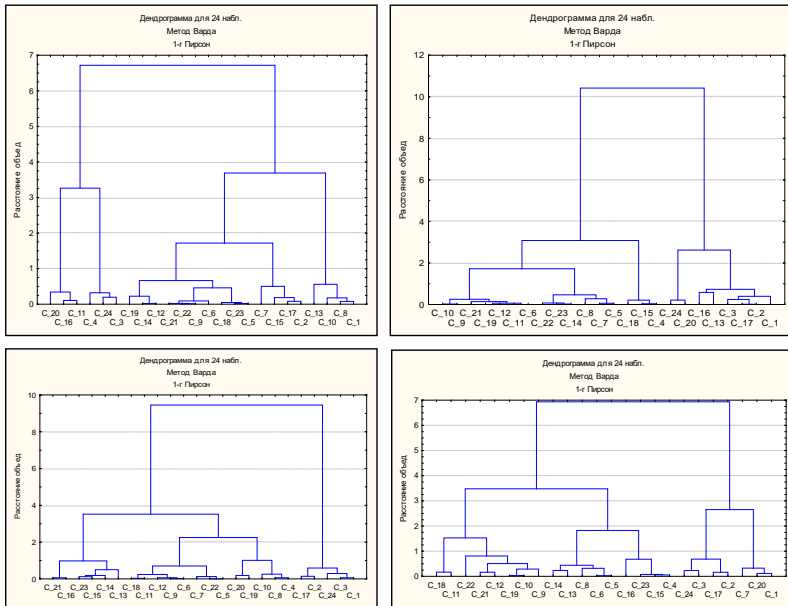


Рис. 2.7. Дендрограми розподілу підприємств на кластери за результатами їх діяльності (за результативними показниками  $y_j, j = \overline{31,36}$ ) протягом 2008-2011 років.

Аналіз застосування методу ієрархічного кластерного аналізу показує, що розглядувану сукупність 24 підприємств (об'єктів) можна розбити на 4 групи (кластери) за результативними ознаками  $y_j, j = \overline{31,36}$  - показниками їх діяльності. Окрім того, проведемо кластеризацію по усім рокам ознак  $y_j, j = \overline{31,36}$  (див. наступний рисунок):



Рис. 2.8. Дендрограма розподілу на групи показників діяльності підприємств за 2008-2012 роки.

Аналіз цих результатів показує, що показники можна поділити на три групи («прихованих», так званих латентних показників-факторів): перша ( $y_{34}$ ) – ефективність (рентабельність) власного капіталу; друга ( $y_{33}, y_{35}, y_{36}$ ) – ефективність операційної (фінансової) діяльності; третя ( $y_{31}, y_{32}$ ) – ефективність ведення бізнесу (господарчої діяльності).

Далі більш детально розглядаються показники діяльності підприємств за результатами 2012 року. Спочатку застосуємо процедуру ієрархічного кластерного аналізу:

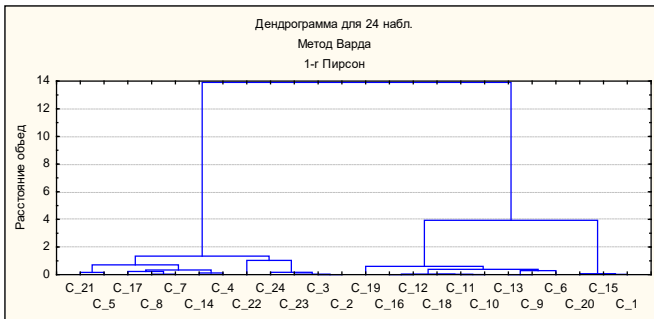


Рис. 2.9. Дендрограма розподілу сукупності підприємств на кластери за результатами 2012 року.

Потім, використовуючи метод К-середніх, отримуємо розбиття нашої сукупності 24 підприємств на 4 кластери-групи:

*Таблиця 2.19. Розподіл сукупності підприємств на кластери за результатами 2012 року*

Група (кластер)	Кількість підприємств	Галузь	Назва підприємства
group {1}	7	Виноробна	ПАТ «Долинка» (C_11)
			ПАТ «Одеський завод шампанських вин» (C_9)
			ПАТ «Южний» (C_12)
		Консервна	ПАТ «Арцизький завод продоварів» (C_16)
			ПАТ «Завод «Іллічівський» (C_18)
			ПАТ «Одеський консервний завод дитячого харчування» (C_19)
		М'ясо-молочна	ПАТ «Шкірсировинний завод» (C_20)
group {2}	5	Хлібопекарська	ПАТ «Одеський коровай» (C_1)
		Горілчана	ПАТ «Дністровський» (C_10)
			ПАТ «Виноградар» (C_13)
			ЗАТ «Одесавинпром» (C_15)
		Борошномельна	ПАТ «Білогород-Дністровський комбінат хлібопродуктів» (C_6)
group {3}	7	Хлібопекарська	ПАТ «Любашівський елеватор» (C_2)
		Консервна	ПАТ «ВО «Одеський консервний завод» (C_17)
		М'ясо-молочна	ПАТ «Ренійський м'ясокомбінат» (C_21)
			ПАТ «Одеський м'ясокомбінат» (C_22)
			АТЗТ «Комбінат» (C_23)
		Борошномельна	ПАТ «Роздільнянський елеватор» (C_5)
			ПАТ «Заплавське хлібоприймальне підприємство» (C_7)
group {4}	5	Хлібопекарська	ПАТ «Балтське хлібоприймальне підприємство» (C_3)
		Виноробна	ПАТ «Одеський коньячний завод» (C_8)
			ПАТ «Харчовик» (C_14)
		М'ясо-молочна	ПАТ «Янтар» (C_24)
		Борошномельна	ПАТ «Апіяське хлібоприймальне підприємство» (C_4)

Отже, досліджувану сукупність підприємств за латентним показником «рівень конкурентоспроможності» поділено на 4 кластери: «лідери» - group {2}, «вище середнього» - group {4}, «нижче середнього» - group {1} та «аутсайтери» - group {3}. Далі буде проведено більш глибоке дослідження даної множини об'єктів (методами так званого пакетного аналізу головних компонент).

## 2.2. Факторний аналіз. Метод головних компонент. Узагальнений метод головних компонент (пакетний PLS/PCA, SPC)

Досить часто при моделюванні складних причинних комплексів (факторному аналізі) виникає так зване «прокляття розмірності», тобто проблема, коли екзогенні (незалежні, зовнішньо задані) змінні  $x_i$  (предиктори), що формують ознаковий простір моделі, високорельовані (мультиколінеарні). Факторний аналіз, як сукупність математичних методів і моделей з латентними показниками покликаний вирішувати наступні задачі:

- 1) Зменшити кількість змінних, які описують описувані об'єкти.
- 2) Опосередковано кількісно оцінити латентні показники.
- 3) Класифікувати змінні разом із уведенням більш загальних змінних (*головних компонент*) шляхом агрегування первинних ознак.
- 4) створення або підтвердження структури досліджуваного масиву інформації, тобто, проведення пошукового або підтверджуючого структурного аналізу.
- 5) Перетворити вихідні дані до вигляду, зручного для використання або інтерпретації (напр., ортогоналізація змінних для подальшого кореляційно-регресійного аналізу).

Для вирішення цих проблем і забезпечення адекватності моделі, робиться перехід від вихідної множини ознак до множини некорельованих величин (*головних компонент*) суттєво меншої розмірності, які б зберігали всю інформацію щодо причинно-наслідкового механізму формування явища або процесу і не впливали на точність результатів аналізу. Інструментом такої заміни є *метод головних компонент (Principal Components Analysis - PCA)*. Мета методу головних компонент - виявити приховані (латентні) першопричини, які пояснюють кореляції між ознаками і змістовно інтерпретуються. Припускається, що ознаки  $x_i$  є індикаторами таких латентних властивостей, які безпосередньо не вимірюються. Першопричина кореляції ознак  $j$ -ї групи називається *компонентом*  $G_j$ . Ознаки, що належать до різних груп, некорельовані, а отже, і компоненти  $G_j$  незалежні (ортогональні). Суть методу головних компонент полягає у переході від великої кількості ознак  $x_i$  до мінімальної кількості максимально інформативних компонент  $G_j$ :

$$x_i \Rightarrow G_j, \text{ де } p \ll m.$$

$i=1, 2, \dots, m$        $j=1, 2, \dots, p$

Метод головних компонент розв'язує наступні задачі:

- ідентифікація компонент, тобто надання їм певного змісту. Ця задача, залежить від ознакової множини  $X$ . Як правило, її формують на основі теоретично обґрунтованої гіпотези щодо природи латентних властивостей

явища. Якщо така гіпотеза відсутня, то використовують максимальну кількість ознак, покладаючись на можливості методу виявити такі властивості. Але в такому разі інтерпретація компонент ускладнюється. Оскільки компоненти є гіпотетичними величинами, то виміряти їх можна лише опосередковано за допомогою спеціально сконструйованих моделей. У моделі головних компонент зв'язок між первинними ознаками і компонентами описується як лінійна комбінація

$$z_i = \sum_1^m a_{ij} G_j ,$$

де  $z_i$  — стандартизовані значення  $i$ -ої ознаки з одиничними дисперсіями; сумарна дисперсія дорівнює кількості ознак  $m$ ;  $a_{ij}$  - факторне навантаження  $j$ -ої компоненти на  $i$ -ту ознаку.

Навантаження  $a_{ij}$  характеризує щільність зв'язку між  $i$ -ою ознакою та  $j$ -ою компонентою і, як будь-яка міра щільності зв'язку, змінюється в межах проміжку  $[-1;1]$ .

У моделі головних компонент відсутні залишки (характерності), тобто, апіорі передбачається, що всі  $m$  компонент повністю пояснюють сумарну варіацію (дисперсію) ознакової множини. За умови ортогональності компонент квадрат факторного навантаження  $a_{ij}^2$  характеризує внесок  $j$ -ої компоненти у варіацію  $i$ -ої ознаки. Повний внесок  $j$ -ої компоненти у сумарну дисперсію  $m$  ознак становить  $\lambda_j = \sum_1^m a_{ij}^2$ . У процесі компонентного аналізу сумарна варіація  $m$  первинних ознак  $x_i$  перерозподіляється між компонентами  $G_j$  з дисперсіями  $\lambda_j$  - характеристичними числами кореляційно-коваріаційної матриці. Тобто сумарну дисперсію ознакової множини  $X$  можна представити як суму дисперсій компонент  $\sum_1^m \lambda_j$  або через факторні навантаження:

$$m = \sum_1^m \lambda_j = \sum_1^m \sum_1^m a_{ij}^2 .$$

Схема декомпозиції сумарної дисперсії ознакової множини  $X$  можна подати у вигляді матриці:

Таблиця 2.20. Декомпозиція дисперсії

$Z_i$	$G_1$	$G_2$	...	$G_m$	Дисперсія $z_i$
$z_1$	$a_{11}^2$	$a_{12}^2$	...	$a_{1m}^2$	1
$z_2$	$a_{21}^2$	$a_{22}^2$	...	$a_{2m}^2$	1
$z_3$	$a_{31}^2$	$a_{32}^2$	...	$a_{3m}^2$	1
...	...	...	...	...	...
$z_m$	$a_{m1}^2$	$a_{m2}^2$	...	$a_{mm}^2$	1
Дисперсія $G_j$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	...	$\lambda_m$	$m$

Аналіз матриці по рядках показує, які компоненти і з якою вагою формують варіацію  $i$ -ої ознаки. Кожній ознаці властива своя факторна структура. Чим

менше компонент навантажує ознаку, тим простішою вважається її факторна структура. Аналіз матриці по стовпцях показує, які ознаки є індикаторами  $j$ -ої компоненти. Компоненти упорядковуються за значеннями дисперсій (характеристичних (власних) чисел матриці парних кореляційних коефіцієнтів  $r_{ik}$ ):

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_m .$$

Незважаючи на те, що замість  $m$  ознак визначається така ж кількість компонент, внесок більшості з них у сумарну варіацію виявляється незначним. Левова частка сумарної варіації припадає на декілька перших компонент. Як показує досвід, кількість таких вагомих компонент становить 10—15% від кількості первинних ознак. Саме вони називаються *головними компонентами* і підлягають змістовній інтерпретації.

Таким чином, модель головних компонент трансформує  $m$ -вимірний ознаковий простір у  $p$ -вимірний простір компонент ( $p \ll m$ ). Сумарна дисперсія головних компонент суттєво менша за сумарну дисперсію ознакового простору, а

відношення  $\frac{\sum_1^p \lambda_j}{m}$  характеризує *повноту факторизації*. Тобто, пошук головних компонент є класичною задачею характеристичних чисел  $\lambda$  та відповідних їм векторів  $V$  кореляційної матриці  $R$ . Головними вважаються компоненти, для яких:

- за критерієм Кайзера  $\lambda_j > 1$ ;
- повнота факторизації не менша 70%.

Щоб задовольнити умову  $\lambda_j = \sum_1^m a_{ij}^2$ , характеристичний вектор нормується

$$a_{ij} = V_{ij} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\sum_1^m V_{ij}^2}} .$$

Отже, факторні навантаження  $j$ -ої компоненти є не що інше, як нормований характеристичний (власний) вектор матриці  $R$ .

Процедури методу головних компонент - *Principal components* - представлено в модулі *Factor Analysis* - Факторний аналіз. Інформаційною базою компонентного аналізу можуть бути як первинні дані (*Raw data*), так і кореляційна матриця (*Correlation matrix*).

У реальних багатовимірних сукупностях часто знаходять декілька головних компонент, навантаження яких на окремі ознаки перетинаються. Складна факторна структура робить важкою ідентифікацію компонент. Пошук *простой факторної структури* (коли  $a_{ij}$  наближається до 1 або 0) здійснюється за допомогою процедур ортогонального чи косокутного *обертання*, в процесі якого значення одних факторних навантажень зростають, а інших - зменшуються. Найчастіше використовують процедуру варімакс (*Varimax*), яка максимізує варіацію квадратів факторних навантажень для кожної компоненти, збільшуючи великі і зменшуючи малі значення  $a_{ij}$ .

- Отже, побудова моделі головних компонент здійснюється в три етапи:
- розрахунок кореляційної матриці  $R$ ;
  - знаходження головних компонент і розрахунок факторних навантажень;
  - ідентифікація головних компонент.

*Приклад 2.5. Результати соціологічного опитування 100 респондентів (із набору прикладів програми Statistica (Examples, factor.sta)) щодо ступеня задоволеності їх життям за наступними ознаками (Variables):*

*Var1 — самооцінка професійного статусу респондента;*

*Var 2 — оцінка умов праці;*

*Var 3 — оцінка рейтингу компанії;*

*Var 4 — оцінка можливостей самореалізації поза роботою;*

*Var 5 — ефективність відпочинку;*

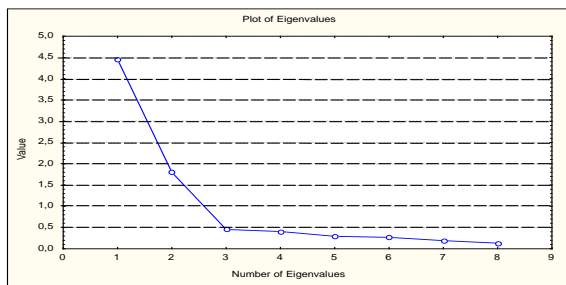
*Var 6 — оцінка матеріального добробуту сім'ї;*

*Var 7 — задоволеність соціальним статусом сім'ї;*

*Var 8 — оцінка навколишнього середовища.*

Викликавши модуль *Factor Analysis* (Факторний аналіз), після команди *OK* з'являється вікно *Define Method of Factor Extraction* (Визначити метод виокремлення факторів). У функціональній його частині серед запропонованих методів вибираємо *Principal components* (Головні компоненти). Праворуч розміщено поля для установки параметрів моделі: *Maximum no. of factors* (максимальне число факторів) і *Minimum eigenvalue* (мінімальне характеристичне число). За умовчування ці параметри становлять відповідно 2 і 1.

За командою на виконання програми з'являється вікно *Factor Analysis Results* - Результати факторного аналізу, в інформаційній частині якого вказується кількість ознак, метод аналізу, десятковий логарифм визначника кореляційної матриці, її характеристичні числа  $\lambda_j$  та кількість виділених факторів. Для детальнішого аналізу результатів скористаємося опціями функціональної частини вікна. Скажімо, для візуальної оцінки виділення головних компонент можна скористатися графічним критерієм «кам'янистий обвал» - *Scree plot* :



*Рис.2.10. Характеристичні числа кореляційної матриці*



Значення характеристичних чисел кореляційної матриці представлено на осі ординат. Як бачимо, ці значення стрімко зменшуються і лише два перших більші за одиницю.

За установкою *Eigenvalues* система видає таблицю значень характеристичних чисел, які є дисперсіями головних компонент, а також внесок кожної з них у сумарну варіацію ознакової множини - % *total Variance* . Внесок першої компоненти в сумарну дисперсію ознакової множини становить 55,6%, другої - 22,5%. Разом (*Cumul. %*) дві компоненти пояснюють 78,1% сумарної варіації, що свідчить про високий ступінь факторизації.

Таблиця 2.21. Характеристичні числа та їх внесок у загальну варіацію

<i>Eigenvalues (factor.sta)</i>				
Continue...	<i>Extraction: Principal components</i>			
Value	<i>Eigenval</i>	<i>% total Variance</i>	<i>Cumul. Eigenval</i>	<i>Cumul. %</i>
1	4,56	55,6	4,56	55,6
2	1,80	22,5	6,36	78,1

Серед процедур обертання факторів - *Factor rotation* вибираємо *Varimax normalized* (Варімакс нормалізований). За опцією *Factor loadings* маємо таблицю факторних навантажень, значення яких наближаються до 1 або до 0. Ознаки, які навантажують кожна компонента, виділено.

Таблиця 2.22. Результати обертання факторів

<i>Factor Loadings (Varimax normalized)</i> <i>(factor.sta)</i>		
Continue...	<i>Extraction: Principal components</i> <i>(Marked loadings are &gt; ,700000)</i>	
Variable	Factor 1	Factor 2
<i>WORK_1</i>	<b>0,8425</b>	0,0196
<i>WORK_2</i>	<b>0,9023</b>	0,0958
<i>WORK_3</i>	<b>0,8700</b>	0,1185
<i>HOBBY_1</i>	<b>0,7109</b>	0,6075
<i>HOBBY_2</i>	<b>0,7182</b>	0,5165
<i>HOME_1</i>	0,0834	<b>0,8438</b>
<i>HOME_2</i>	0,1213	<b>0,8971</b>
<i>HOME_3</i>	0,1415	<b>0,8538</b>

Перша компонента зв'язана з ознаками 1-5, її можна ідентифікувати як ступінь задоволеності роботою і дозвіллям; друга компонента навантажують ознаки 6-8, які характеризують матеріальний добробут і соціальний статус сімей респондентів. Наведені в останніх рядках таблиці характеристичні числа і внесок окремих компонент у сумарну дисперсію визначені за трансформованими факторними навантаженнями, а тому відрізняються від

первинних, проте сумарний їх внесок процедура обертання не змінює:  
 $Prp.Total. = 0,418 + 0,363 = 0,781$ .

*Приклад 2.6. Застосування методу головних компонент до оцінки конкурентоспроможності машинобудівних підприємств.*

На думку авторів, основними факторами, що впливають на конкурентоспроможність підприємств є: конкурентоспроможність товару, фінансовий стан підприємства, організація збуту товару. Тому пропонується для дослідження використати показники, які базуються на фінансових результатах діяльності підприємства, а саме:

- рентабельність активів (X1);
- коефіцієнт поточної ліквідності (X2);
- коефіцієнт фінансової автономії (X3);
- коефіцієнт загальної оборотності активів (X4);
- коефіцієнт забезпеченості обороту власними оборотними коштами (X5).

Для визначення коефіцієнта конкурентоспроможності машинобудівних підприємств були обрані заводи, що працюють у сфері залізничного машинобудування: ПАТ «Азовобшемаш», ПАТ «Днепроввагонмаш», ВАТ «Крюковский вагоностроительный завод», ВАТ «Холдинговая компания «Лугансктепловоз»», ВАТ «Стахановский вагоностроительный завод». На першому етапі на основі річної фінансової звітності за 2010 рік (П(С)БО 2 «Баланс» та П(С)БУ 3 «Звіт про фінансові результати» за допомогою *MS Excel* були розраховані показники конкурентоспроможності:

*Таблиця 2.23. Значення ознак*

Підприємство	X1	X2	X3	X4	X5
ПАТ «Азовобшемаш»	0	0,839	-0,158	1,668	-0,233
ПАТ «Днепроввагонмаш»	0,433	1,776	0,464	3,721	0,163
ВАТ «Стахановский вагоностроительный завод»	0,1	1,407	0,245	1,455	0,132
ВАТ «Холдинговая компания «Лугансктепловоз»»	0	0,734	-0,036	1,55	-0,256
ВАТ «Крюковский вагоностроительный завод»	0,222	3,001	0,727	2,407	0,22

Дані показники оброблялись за допомогою пакету *Statistica*.

*Таблиця 2.24. Статистичні показники змінних*

Фактори конкурентоспроможності	Середнє значення	Середньоквадратичне відхилення
X1	0,151137	0,182138
X2	1,551514	0,914716
X3	0,248564	0,361345
X4	2,040123	0,711232
X5	0,005131	0,230413

Тісноту зв'язку між змінними визначаємо за допомогою матриці коефіцієнтів кореляції

Таблиця 2.25. Кореляційна матриця

Змінна	X1	X2	X3	X4	X5
X1	1,000	0,606	0,757	0,946	0,767
X2	0,606	1,000	0,957	0,586	0,844
X3	0,757	0,957	1,000	0,682	0,925
X4	0,946	0,586	0,682	1,000	0,597
X5	0,767	0,844	0,925	0,597	1,000

Із таблиці випливає, що між змінними є тісні кореляційні зв'язки. Тому для зменшення числа змінних застосовуємо метод головних компонент. Спочатку визначаємо характеристичні числа (власні значення) кореляційної матриці:

Таблиця 2.25. Власні (характеристичні) числа

Головні компоненти	Власні значення	% загальної дисперсії
Компонента 1	4,074	81,480
Компонента 2	0,712	14,241
Компонента 3	0,195	3,903
Компонента 4	0,019	0,375

Із таблиці видно, що перша головна компонента пояснює 81,48% загальної варіації, тому, включаючи до розрахунку тільки першу компоненту, описуємо нею 81,48% зміни п'яти змінних. Цього цілком достатньо для практичного застосування. Визначаємо власні вектори кореляційної матриці, які визначають зв'язок між змінними та головними компонентами (факторами).

Таблиця 2.26. Власні вектори

Фактори Змінні	Фактор 1	Фактор 2	Фактор 3	Фактор 4
X1	-0,4457	0,4917	0,3042	-0,1416
X2	-0,4405	-0,4596	-0,5356	0,4093
X3	-0,4762	-0,2945	-0,1125	-0,7915
X4	-0,4153	0,6141	-0,3781	0,2154
X5	-0,4561	-0,2884	0,6819	0,3735

Для наочності можливості переходу від змінних  $X_i$  до головних компонент (факторів) на факторній площині зображаємо проекції змінних:

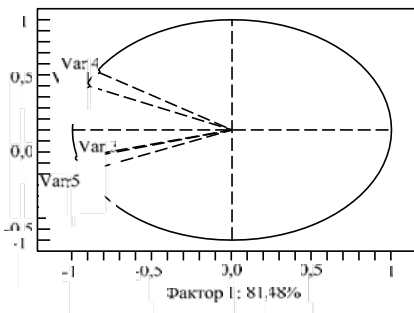


Рис.2.11. Проекція змінних на факторну площину

Оскільки компоненти ортогональні, вилучення останніх трьох факторів не призводить до зміни власних векторів перших факторів. Отримуємо рівняння першої головної компоненти:

$$F1 = -0,446 \cdot Z1 - 0,44 \cdot Z2 - 0,476 \cdot Z3 - 0,415 \cdot Z4 - 0,456 \cdot Z5,$$

де  $Zi$  – стандартизовані значення змінних  $Xi$ .

У якості показника конкурентоспроможності використовуємо першу головну компоненту, змінивши її знак на протилежний:

$$Kn = 0,446 \cdot Z1 + 0,44 \cdot Z2 + 0,476 \cdot Z3 + 0,415 \cdot Z4 + 0,456 \cdot Z5.$$

Переходячи до вихідних змінних  $Xi$ , отримуємо коефіцієнт конкурентоспроможності:

$$Kn = 2,447 \cdot X1 + 0,482 \cdot X2 + 1,318 \cdot X3 + 0,584 \cdot X4 + 1,979 \cdot X5 - 2,646.$$

Використовуючи  $Kn$ , обчислюємо конкурентоспроможність підприємств:

Таблиця 2.27. Коефіцієнт конкурентоспроможності досліджуваних підприємств

Підприємство	$Kn$
ПАТ «Азовобцешмаш»	-1,938
ПАТ «Днепровагонмаш»	2,025
ВАТ «Стахановский вагоностроительный завод»	-0,286
ВАТ «Холдинговая компания «Лугансктепловоз»»	-1,942
ВАТ «Крюковский вагоностроительный завод»	2,141

Як видно із таблиці, в 2010 році конкурентоспроможність підприємств змінювалась від 2,141 до -1,942, де 0 відповідає середньому по галузі, а зміни в більшу чи меншу сторону говорить про покращення чи погіршення конкурентоспроможності підприємства. Отже, розроблено метод оцінки конкурентоспроможності підприємства, який задовольняє наступним вимогам:

- не містить суб'єктивної оцінки при розрахунках остаточного значення або якого-небудь компонента;
- враховує 5 факторів, які впливають на конкурентоспроможність підприємства;
- інформація, на якій базуються розрахунки, знаходиться у бухгалтерській та фінансовій звітності, а отже, забезпечується доступ до даних підприємств-конкурентів.

Отримані залежності можуть застосовуватись для оцінки конкурентоспроможності машинобудівних підприємств України, а у перспективі є можливість прогнозувати конкурентоспроможність підприємства за допомогою розробленого метода.

Нижче (на конкретному прикладі виконаних досліджень) розглядається узагальнення звичайного методу головних компонент.

Узагальнений метод головних компонент (пакетний PLS/PCA).

*Приклад 2.7. Оцінка рівня конкурентоспроможності підприємств харчової промисловості Одеського регіону (за даними попереднього Прикладу 2.4).*

У вищезрозглянутому Прикладі 2.4 було проведено кластерний аналіз діяльності 24 підприємств харчової промисловості Одеського регіону протягом 2008-2012 років за латентною ознакою «рівень конкурентоспроможності». При цьому у якості предикторів (незалежних змінних, факторів) використовувались лише результативні показники діяльності підприємств -  $y_j, j = \overline{1, 36}$ . Далі розглядаються усі показники діяльності всіх 24 підприємств за 2008-2012 роки (120 спостережень), а також категоріальна ознака group, яка набуває чотирьох значень (group {1}, group {2}, group {3} та group {4}) і визначає належність підприємства до того чи іншого кластера. Як було зазначено, між усіма змінними (ознаками) спостерігаються досить тісні кореляційні зв'язки, причому, парні кореляційні коефіцієнти  $r_{ij}$  мало відрізняються один від одного. У таких особливих випадках кореляційна матриця погано обумовлена (її характеристичні (власні) числа  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$  за величиною мало відрізняються) і це суттєво затрудняє як виділяти, так і характеризувати (надавати економічну інтерпретацію) фактори – головні компоненти звичайним методом головних компонент (МГК/PCA).

Наприклад, якщо спробувати застосувати звичайний МГК до матриці предикторів  $X = (x_{ij})$  незалежних змінних-ознак (даних тільки за один рік), яка матиме розмірність 24x38 і буде сингулярною (ефект мультиколінеарності), то дістанемо наступні результати роботи відповідного модуля програми Statistica (використано узагальнену обернену матрицю):

*Таблиця 2.28. Власні числа та їх вклад у загальну варіацію*

Номер знач-я	Собственные значения матрицы корреляций (Таблица данны Только основные переменные			
	Собств. Зн	% общей дисперс.	Кумулятивн Собств. Зн	Кумулятивн %
1	7,696144	20,25301	7,69614	20,2530
2	5,788327	15,23244	13,48447	35,4854
3	4,360615	11,47530	17,84509	46,9608
4	4,156216	10,93741	22,00130	57,8982
5	3,105260	8,17174	25,10656	66,0699
6	2,215950	5,83145	27,32251	71,9013
7	2,046571	5,38571	29,36908	77,2871
8	1,928360	5,07463	31,29744	82,3617
9	1,532181	4,03205	32,82962	86,3937
10	1,247909	3,28397	34,07753	89,6777
11	0,982040	2,58432	35,05957	92,2620
12	0,828453	2,18014	35,88803	94,4422

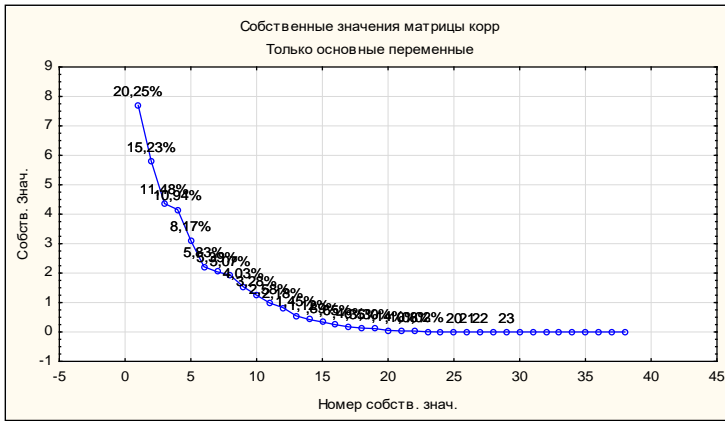


Рис.2.12. Графік «кам'янистого обвалу» власних чисел.

Якщо застосовувати критерій Кайзера (або графік кам'янистого обвалу), то потрібно виділяти мінімум 10 головних компонент, які незрозуміло як інтерпретувати (ідентифікувати).

Тому для визначення структури взаємозв'язків змінних застосовуємо алгоритм NIPALS (Nonlinear Iterative Partial Least Squares) регресійного (пакетного) методу головних компонент/узагальненої регресії найменших квадратів (PCR/PLSR) програми Statistica. Перед аналізом припустимо, що у просторі всіх ознак можна виділити чотири групи ознак (факторів, головних компонент):  $F_1$  – «рівень конкурентоспроможності» (попередньо, це результативні ознаки  $y_j, j = \overline{31,36}$ );  $F_2$  – «виробничий потенціал» (попередньо, це ознаки  $x_j, j = \overline{1,23}$ );  $F_3$  - «ділова активність» (попередньо, це ознаки  $x_j, j = \overline{24,30}$ );  $F_4$  - «фінансовий стан» (попередньо, це ознаки  $x_j, j = \overline{37,44}$ ).

Наступний результат PCR/PLSR методу показує, що визначені вище фактори дійсно являються головними компонентами, оскільки пояснюють понад 90% загальної дисперсії:

Таблиця 2.29. Характеристичні (власні) числа та процентний вклад головних компонент у загальну варіацію усіх ознак

Компонента	Метод Главных Компонент - Собственные Значения (Таблица)			
	Собственные значения	% Полная дисперсия	Кумулятивное собственное значение	Накопленный %
1	2,678720	39,76355	2,678720	39,76355
2	1,499577	26,66196	4,178296	66,42552
3	1,303247	14,48052	5,481544	80,90604
4	0,873215	9,70239	6,354759	90,60843

Ще один із результатів аналізу показує значимість ознак:

Таблица 2.30. Значимость признаков относительно выделенных главных компонент

Переменная	Значимость переменной (Таблица)			
	Число компонент = 4			
	Номер переменной	Значение категории	Мощность	Значимость
gpr {2}	45	2	0,995723	1
gpr {4}	45	4	0,989380	2
gpr {1}	45	1	0,981636	3
gpr {3}	45	3	0,978979	4
y36	44		0,737372	5
y33	41		0,600278	6
x42	36		0,590040	7
y31	39		0,586155	8
x43	37		0,571269	9
y35	43		0,560632	10
y32	40		0,555401	11
x21	21		0,547783	13
x22	22		0,547783	13
x26	26		0,416995	14
x29	29		0,394613	15
x24	24		0,390198	16
x41	35		0,387950	17
x30	30		0,332712	18
x40	34		0,276159	19
x1	1		0,272416	20
x37	31		0,245200	21
x3	3		0,225282	22
x39	33		0,224155	23
x2	2		0,198917	24
x25	25		0,177691	25
x16	16		0,177688	26
x7	7		0,171030	27
x18	18		0,163074	28
x13	13		0,149913	29
x17	17		0,149292	30
x23	23		0,132487	31
x44	38		0,131104	32
x15	15		0,115983	33
x14	14		0,115881	34
y34	42		0,114465	35
x5	5		0,111465	36
x27	27		0,110525	37
x4	4		0,108455	38
x38	32		0,108380	39
x12	12		0,086819	40
x28	28		0,084785	41
x10	10		0,069904	42
x6	6		0,053067	43
x8	8		0,038038	45
x9	9		0,038038	45
x20	20		0,033153	46
x11	11		0,024741	47
x19	19		0,013352	48

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок, що виконане вище розбиття сукупності підприємств на чотири групи-кластери підтверджується високою значимістю як категоріальної змінної group {}, так і результуючих ознак  $y_j, j = \overline{31,36}$ , окрім ознаки  $y_{34}$ .

Для знаходження остаточного факторного рішення далі застосовується метод обертання факторів «еквімакс нормалізований» (“Equamax normalized”). Результати застосування цього метода представлені у наступній таблиці:

Таблиця 2.31. Факторні навантаження (фрагмент).

Фактор нагрузки (Еквимакс нормаліз.) (Таблиця)				
Выделение: Главные компоненты (Отмечены нагрузки >,500000)				
Перемен.	Фактор 1	Фактор 2	Фактор 3	Фактор 4
x1	-0,050176	<b>-0,550176</b>	-0,076872	0,129953
x2	-0,068090	<b>-0,606809</b>	0,007235	0,399105
x3	0,065828	<b>0,658275</b>	-0,041053	-0,401433
x4	-0,073043	<b>0,893688</b>	-0,010557	<b>-0,089369</b>
x5	0,174232	<b>0,710635</b>	0,165346	0,224225
x6	0,055448	<b>0,856477</b>	-0,014518	0,114201
x8	-0,001289	<b>-0,661348</b>	-0,061348	-0,130897
x13	-0,061189	<b>-0,510370</b>	-0,001750	-0,099139
x14	-0,202389	<b>0,763932</b>	-0,164336	<b>0,106505</b>
x15	-0,196449	<b>-0,539281</b>	-0,485689	0,080605
x17	-0,133028	<b>0,878299</b>	0,096709	-0,210962
x18	-0,272515	<b>0,643590</b>	0,480535	-0,358268
x20	0,018074	<b>0,787981</b>	0,232835	-0,120776
x21	<b>0,858389</b>	0,118978	0,086623	0,045770
x22	<b>0,858389</b>	0,118978	0,086623	0,045770
x24	0,106633	-0,328232	<b>0,675252</b>	-0,170554
x28	0,062133	0,196467	<b>-0,593270</b>	0,078785
x29	0,261346	-0,204152	<b>0,613462</b>	-0,154382
x30	-0,168962	-0,108843	<b>-0,689617</b>	0,145087
x38	0,286478	-0,230255	0,069763	<b>0,741679</b>
x40	-0,256542	-0,123647	-0,457214	<b>-0,565425</b>
x42	0,357350	0,088261	-0,133270	<b>0,573499</b>
x43	0,223589	0,102925	-0,171811	<b>0,523589</b>
y31	<b>0,784943</b>	0,043039	0,170138	0,338086
y32	<b>0,800242</b>	-0,000651	0,144431	<b>0,564303</b>
y33	<b>0,641017</b>	0,035728	0,142188	<b>0,632655</b>
y35	<b>0,656406</b>	0,001401	0,061183	0,223350
y36	<b>0,702674</b>	0,002066	0,147798	0,242046
Общ. дис.	7,107102	4,773123	4,384467	4,087629
Доля общ	0,384252	0,208480	0,199647	0,192901

Таким чином, отримали:

- латентний результуючий фактор  $F_1$  – «рівень конкурентоспроможності», як очікувалось, досить суттєво «навантажують» результативні ознаки  $y_j, j = \overline{31,36}$  (окрім ознаки  $y_{34}$ ), а також ознаки-симптоми (предиктори)  $x_{21}, x_{22}$ . Тобто, маємо наближену рівність:  $F_1 \approx 0,78y_{31} + 0,80y_{32} + 0,64y_{33} + 0,65y_{35} + 0,70y_{36} + 0,85x_{21} + 0,85x_{22}$  ;



- латентний фактор  $F_2$  – «виробничий потенціал» суттєво «навантажують» ознаки-симптоми  $x_j, j = \overline{1,6}, 8, 13, 14, 15, 17, 18, 20$ , причому, знаки факторних навантажень узгоджені із економічним сенсом відповідних показників:  $F_2 \approx -0,55x_1 - 0,60x_2 + 0,65x_3 + 0,89x_4 + 0,71x_5 + 0,85x_6 - 0,66x_8 - 0,51x_{13} + 0,76x_{14} - 0,53x_{15} + 0,87x_{17} + 0,64x_{18} + 0,78x_{20}$ .

Відмітимо, що найбільший додатний вплив на фактор  $F_2$  здійснюють ознаки  $x_j, j = 4, 5, 6, 14, 17, 20$ , а досить суттєвий від'ємний вплив – від ознак-симптомів  $x_j, j = 1, 2, 8, 13, 15$ ;

- на третій фактор  $F_3$  - «ділова активність» спостерігається суттєвий стимулюючий вплив показників оборотності коштів  $x_{24}$ , активів  $x_{26}$  та кредиторської заборгованості  $x_{29}$ , а дестимулюючий вплив – строків погашення дебіторської  $x_{28}$  та кредиторської  $x_{30}$  заборгованостей:  $F_3 \approx 0,67x_{24} - 0,59x_{28} + 0,61x_{29} - 0,70x_{30}$ ;

- четвертий фактор  $F_4$  - «фінансовий стан» суттєво «навантажений» ознаками-симптомами  $x_{38,40,42,43}$ , серед яких відзначимо дестимулюючий вплив співвідношення дебіторської та кредиторської заборгованостей  $x_{40}$  та найбільший стимулюючий – коефіцієнта фінансової стійкості  $x_{38}$ :  $F_4 \approx 0,74x_{38} - 0,56x_{40} + 0,57x_{42} + 0,52x_{43}$ .

За значимістю впливу на «рівень конкурентоспроможності» (латентний результуючий фактор  $F_1$ ) незалежні латентні фактори розташовані в наступному порядку:  $F_4, F_3, F_2$ . А досліджувану сукупність підприємств за рівнем конкурентоспроможності поділено на 4 кластери: «лідери» - group {2}, «вище середнього» - group {4}, «нижче середнього» - group {1} та «аутсайтери» - group {3}. Оскільки факторний аналіз (як і практично будь-який багатовимірний) здійснюється при попередній стандартизації усіх даних (що приводить до нульових середніх та одиничних стандартних відхилень), то подальші дослідження та економічний аналіз проводиться переходом до значень ознак – симптомів  $x_j$  по кожному із отриманих раніше кластерів (груп підприємств).

Отже, у даному прикладі розроблено метод оцінювання конкурентоспроможності підприємства на основі пакетного методу головних компонент (PCR/PLSR), який не містить суб'єктивних оцінок та враховує якомога більше різноманітних показників діяльності підприємств. У перспективі даний метод можна застосовувати для дослідження та для прогнозування конкурентоспроможності будь-яких економічних об'єктів.

## Розділ 3. Моделювання та прогнозування динаміки економічних процесів

### 3.1. Основи моделювання динаміки

Динамічні ряди описують зміну деякого показника у часі. Ряди динаміки в залежності від часу бувають неперервні (в основному застосовуються в технічних галузях) та дискретні, коли відбувається фіксація показника через однакові проміжки часу (і саме такі динамічні ряди застосовуються в економічних дослідженнях). В залежності від числа досліджуваних показників можна виділити ізольовані, окремі (один показник) і комплексні, багатовимірні (система показників) ряди динаміки. Математичною основою моделювання динаміки є теорія випадкових процесів, яку (з огляду на її складність) намагатимемось, по можливості, опустити. Всюди надалі розглядаються лише економічні (а значить – дискретні) динамічні ряди, які представляються (і позначаються) як члени послідовностей. Відзначимо специфіку термінології: кажуть не «члени (значення) послідовності», а «рівні динамічного ряду». Економічні динамічні ряди характеризують процеси розвитку соціально-економічних явищ. Цим процесам властиві дві взаємопов'язані риси: динамічність та інерційність. Динамічність проявляється зміною рівнів і варіації показників, що характеризують процес, інерційність — сталістю механізму формування процесу, напрямку та інтенсивності динаміки протягом певного часу. Поєднуючи ці риси, динамічний ряд у будь-який момент  $t$  містить залишки минулого, основи сучасного і зародки майбутнього.

Діалектична єдність мінливості й сталості, динамічності й інерційності формує закономірність розвитку. Під впливом безлічі факторів довгострокової і короткострокової дії в одних рядах рівні протягом тривалого часу зростають або зменшуються з різною інтенсивністю, в інших зростання і зменшення рівнів чергуються з певною періодичністю (наприклад, одинадцятирічні цикли градових опадів, зумовлені циклами сонячної активності). З року в рік більш-менш регулярно повторюються сезонні піднесення і спади (використання виробничих потужностей і робочої сили, попит на ринку споживчих товарів тощо). Окрім закономірних коливань рівнів, динамічним рядам притаманні також випадкові коливання, пов'язані з масовим випадковим процесом.

Ряди, в яких рівні коливаються навколо постійної середньої, називаються стаціонарними. Економічні ряди, як правило, нестаціонарні. Для більшості з них характерна систематична зміна рівнів з нерегулярними коливаннями, коли підйоми і провали чергуються з різною інтенсивністю. Скажімо, економічні цикли (промислові, будівельні, фондового ринку тощо) повторюються з різною тривалістю і різною амплітудою коливань.

При моделюванні динамічних процесів причинний механізм формування властивостей у явному вигляді не враховується (на відміну від кореляційно-регресійного аналізу). Процес розглядається як функція часу, який акумулює комплекс постійно діючих умов і причин, які визначають цей процес.

У моделях динаміки процес умовно поділяється на чотири складові:

- довгострокову, детерміновану часом еволюцію — тренд  $f(t)$ ;
- періодичні коливання різних частот  $C_i$ ;
- сезонні коливання  $S_i$ ;
- випадкові коливання  $e_i$ .

Зв'язок між цими складовими представляється адитивно (сумою) або мультиплікативно (добутком):

$$y_t = f(t) + C_i + S_i + e_i,$$

$$y_t = f(t) C_i S_i e_i.$$

Така умовна конструкція дає змогу, залежно від мети дослідження, вивчати тренд, елімінуючи (вилучаючи) коливання, або вивчати коливання, елімінуючи тренд. При прогнозуванні здійснюється зведення прогнозів різних елементів в один кінцевий прогноз.

Характерною властивістю будь-якого динамічного ряду є залежність рівнів: значення  $y_t$  певною мірою залежить від попередніх значень:  $y_{t-1}$ ,  $y_{t-2}$  і т. д. Для оцінювання ступеня залежності рівнів ряду використовують коефіцієнти автокореляції  $r_p$  з часовим лагом  $p = 1, 2, \dots, t$ .

Коефіцієнт  $r_p$  характеризує щільність зв'язку між первинним рядом динаміки і цим же рядом, зсуненим на  $p$  моментів:

Таблиця 3.1. Зсуви динамічних рядів

Змінна часу $t$	Рівень ряду $y_t$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
1	$y_1$	—	—	—
2	$y_2$	$y_1$	—	—
3	$y_3$	$y_2$	$y_1$	—
...	...	...	...	...
$n-2$	$y_{n-2}$	$y_{n-3}$	$y_{n-4}$	$y_{n-5}$
$n-1$	$y_{n-1}$	$y_{n-2}$	$y_{n-3}$	$y_{n-4}$
$n$	$y_n$	$y_{n-1}$	$y_{n-2}$	$y_{n-3}$

У таблиці наведено зсунені ряди динаміки з лагами  $p = 1, 2, 3$ . Як видно, із збільшенням лага  $p$  кількість пар корельованих рівнів зменшується. Так, при  $p = 1$  довжина корельованих рядів менша за первинний ряд на один рівень, при  $p = 2$  — на два рівні і т. д. Через це на практиці при визначенні автокореляційної функції дотримуються правила, за яким кількість лагів

$$m \leq \frac{n}{2}.$$

Значення коефіцієнта автокореляції  $-1 \leq r_p \leq 1$  і визначається величиною лага  $p$ :

$$r_p = \frac{c_p}{c_0}, \text{ де } c_p = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-p} (y_t - \bar{y})(y_{t+p} - \bar{y}); \quad c_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2.$$

Послідовність коефіцієнтів  $r_p$  називають *автокореляційною функцією* і зображують графічно у вигляді автокорелограми, на якій прямокутниками зображаються значення коефіцієнтів  $r_p$ , а пунктирними лініями позначаються прямі, що визначають 95%-ні довірчі межі істотності  $r_p$ . Якщо  $r_p$  не виходить за довірчі межі, ряд вважається стаціонарним. За швидкістю згасання автокореляційної функції можна зробити висновок про характер динаміки. Найчастіше використовується значення  $r_1$ . Характеризуючи ступінь залежності двох послідовних членів ряду, коефіцієнт автокореляції є мірою неперервності цього ряду. Якщо  $r_1 \rightarrow 1$ , то ряду динаміки властива тенденція розвитку, якщо  $r_1 \rightarrow 0$ , то рівні ряду незалежні. Відносно високі значення коефіцієнта автокореляції при  $p = k, 2k, 3k \dots$  свідчать про регулярні коливання.

На відміну від детермінованої складової випадкова складова не пов'язана зі зміною часу. Аналіз цієї складової є основою перевірки гіпотези про адекватність моделі реальному процесу. За умови, що модель вибрано правильно, випадкова складова являє собою стаціонарний процес з математичним сподіванням  $M(e) = 0$  і дисперсією

$$s_e^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n (y_i - f_i)^2,$$

де  $m$  — число параметрів функції  $f_i$ .

Для оцінювання стаціонарності випадкової складової використовують циклічний коефіцієнт автокореляції першого порядку  $r_1$ . Корелюються ряди залишкових величин:  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$  та  $e_2, e_3, e_4, \dots, e_1$ .

Припускаючи, що  $\sum e_e = \sum e_{e+1} = 0$ , формула розрахунку спрощується:

$$r_1 = \frac{\sum_1^n e_i e_{i+1}}{\sum_1^n e_i^2}.$$

Існують таблиці критичних значень циклічного коефіцієнта автокореляції для додатних і від'ємних значень. Якщо фактичне значення  $r_1$  менше за критичне, автокореляція вважається неістотною, а випадкова складова — стаціонарним процесом (так званий «білий шум»). У разі, коли фактичне значення  $r_1$  перевищує критичне, можна зробити висновок про неадекватність детермінованої складової реальному процесу.

У системі *Statistica* моделювання та прогнозування динамічних процесів можна здійснити за процедурами модулів *Multiple Regression*, *Time Series / Forecasting*, *Nonlinear Estimation*. Моделювання трендів і трендова екстраполяція здійснюються за процедурами модулів *Multiple Regression* та *Nonlinear Estimation*; комплексний аналіз динамічних процесів, ідентифікація моделей, адаптивне прогнозування — за процедурами модуля *Time Series / Forecasting*, до якого входять методи обробки даних:

- *Arima & autocorrelation functions* — Модель авторегресії та проінтегрованої ковзної середньої;
- *Interrupted time series analysis* — Аналіз розірваного динамічного ряду (моделі інтервенції для *Arima*);
- *Exponential smoothing & forecasting* — Експоненційне згладжування та прогнозування;
- *Seasonal decomposition (1, 2)* — Сезонна декомпозиція 1 і 2 (помісячна й поквартальна);
- *Distributed lags analysis* — Аналіз розподілених лагів (регресійна модель для двох динамічних рядів);
- *Spectral (Fourier) analysis* — Спектральний (Фур'є) аналіз.

За необхідності вибраний для дослідження динамічний ряд можна трансформувати, використовуючи послідовність команд: *OK (transformations, autocorrelations, crosscorrelations, plots)* → *OK (Transform highlighted variable)* → *Transformations of variables*. У вікні *Time series transformations* пропонується широкий спектр трансформацій динамічного ряду, зокрема:

- *Add a constant* — додати константу до значень ряду;
- *Power* — піднести до степеня;
- *Inverse power* — добути корінь;
- *Natural log* — логарифмування за основою натурального логарифма;
- *Exponent* — піднесення до степеня за експонентою;
- *Mean subtract* — відхилення від середнього рівня;
- *Standardize* — стандартизація значень ознаки.

Усі варіанти трансформації застосовують послідовно один за одним лише для обраного динамічного ряду. В двох останніх варіантах можна вказати середні та стандартні відхилення або визначити їх автоматично, користуючись опцією *Estimate mean & std.dev.from data*.

Модуль трансформації передбачає усунення лінійного тренда *Trend subtract*, вводячи його параметри власноруч або використовуючи команду автоматичного розрахунку *Estimate a/b from data*. Аналогічно здійснюється усунення автокореляції з відповідним лагом за опцією *Autocorr*.

У групі опцій *Shift relative starting point of series* пропонується варіанти зсуення ряду вперед чи назад на певний лаг. Опція *Differencing* дає можливість визначити різниці між поточним  $y_t$  і зсуеним на лаг  $p$  рівнями ряду ( $y_t - y_{t+p}$ ).

Важливе значення має група опцій *Smoothing* (згладжування), яка при неодноразовому застосуванні дозволяє з'ясувати тип тренду. Усі трансформації висвічуються в інформаційній частині стартової панелі, максимальна їх кількість — дев'ять. Якщо та чи інша трансформація в подальшому аналізі не використовується, її можна вилучити за командою *Delete highlighted variable*. Команда *Save*, навпаки, зберігає визначені ознаки в окремому файлі.

### 3.2. Основні типи трендів. Короткострокове прогнозування на основі ковзних середніх

Важливою складовою динамічних процесів є тенденція середньої, тобто основний напрям розвитку. В аналізі динамічних рядів тенденцію представляють у вигляді плавної траєкторії та описують певною функцією, яку називають *трендом*  $Y_t = f(t)$ , де  $t = 1, 2, \dots, n$  — змінна часу. На практиці у якості трендів переважно використовують функції, параметри яких мають конкретну інтерпретацію залежно від характеру динаміки. Найбільш поширені поліноми (многочлени), різного роду експоненти та логістичні криві. Поліном 1-го ступеня, тобто лінійний тренд  $Y_t = a + bt$ , описує процеси, які рівномірно змінюються в часі і мають стабільні прирости рівнів. Поліном 2-го ступеня (парабола)  $Y_t = a + bt + ct^2$  здатний описати процес, характерною особливістю якого є рівноприскорене зростання або зменшення рівнів. Форма параболи визначається параметром  $c$ : при  $c > 0$  гілки параболи спрямовані вгору — парабола має мінімум, при  $c < 0$  гілки параболи спрямовані вниз — парабола має максимум. У полінома 3-го ступеня  $Y_t = a + bt + ct^2 + dt^3$  знак прирощення рівнів динамічного ряду може змінюватися один чи два рази.

Якщо характерною властивістю процесу є стабільна відносна швидкість (темпи приросту), такий процес описується експонентою, яка може набувати різних еквівалентних форм. Основна (показникова) форма експоненти

$$Y_t = ab^t,$$

де  $b$  — середня відносна швидкість зміни рівнів: при  $b > 1$  рівні зростають з постійним темпом, при  $b < 1$ , навпаки, зменшуються. Абсолютний приріст пропорційний досягнутому рівню.

Експоненту можна представити у формі

$$Y_t = ae^{\lambda t} \quad \text{або} \quad Y_t = e^{a+bt},$$

де  $\lambda = \ln b$ ,  $e = 2,718$  — основа натурального логарифма,  $\ln e = 1$ .

Оцінювання параметрів трендових рівнянь найчастіше здійснюється *методом найменших квадратів* (МНК), основною умовою якого є мінімізація суми квадратів відхилень фактичних значень  $y_t$  від теоретичних  $Y_t$ , визначених за трендовим рівнянням

$$\sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 \rightarrow \min .$$

Побудова трендових моделей МНК легко здійснюється у модулі *Multiple Regression*, а в електронних таблицях MS Excel при користуванні майстром діаграм є опція «Додати лінію тренда».

Виявлену тенденцію можна продовжити за межі динамічного ряду. Така процедура називається *екстраполяцією* тренду. Принципова можливість екстраполяції ґрунтується на припущенні, що умови, які визначали тенденцію у минулому, не зазнають істотних змін у майбутньому. Формально операцію екстраполяції можна представити як визначення функції

$$Y_{t+v} = f(Y_t^*, v),$$

де  $Y_{t+v}$  — прогнозне значення на період упередження  $v$ ;  $Y_t^*$  — база екстраполяції, найчастіше це останній, визначений за трендом рівень ряду. У модулі *Multiple Regression* екстраполяція здійснюється за опцією *Predict dependent var.* Для цього у вікні *Specify dependent for indep. vars.* треба вказати значення  $v$ . Екстраполяція тренду дає точковий прогноз. Очевидно, що «влучення в точку» малоімовірне. Адже тренду властива невизначеність, передусім через похибки параметрів. Джерелом цих похибок є обмежена сукупність спостережень  $y_t$ , кожне з яких містить випадкову компоненту  $e_t$ . Зсуення періоду спостереження лише на один крок веде до зсуення оцінок параметрів. Випадкова компонента буде присутня і за межами динамічного ряду, а отже, її необхідно врахувати. Для цього визначають довірчий інтервал, який би з певною ймовірністю окреслив межі можливих значень  $Y_{t+v}$ . Точковий інтервал перетворюється в інтервальний. Ширина інтервалу залежить від варіації рівнів динамічного ряду навколо тренду та ймовірності висновку  $(1 - \alpha)$ :

$$Y_{t+v} \pm t_{1-\alpha} s_p,$$

де  $s_p$  — середня квадратична похибка прогнозу, значення якої залежить від дисперсії тренду  $s_T^2$  та дисперсії відхилень від тренду  $s_e^2$ . Похибка прогнозу залежить від залишкової дисперсії  $s_e^2$ , довжини динамічного ряду (передісторії)  $n$  та періоду упередження  $v$ . Чим довший період передісторії, тим похибка менша, а збільшення періоду упередження, навпаки, веде до зростання похибки прогнозу.

Досить поширеним і простим методом аналізу динаміки є згладжування ряду. Суть його полягає в заміні фактичних рівнів  $y_t$  середніми за певними інтервалами. Варіація середніх порівняно з варіацією рівнів первинного ряду значно менша, а тому характер динаміки проявляється чіткіше. Процедuru згладжування називають фільтруванням, а оператори, за допомогою яких вона здійснюється, — фільтрами. На практиці використовують переважно лінійні фільтри, з-поміж яких найпростіший — *ковзна середня* з інтервалом

згладжування  $m < n$ . Для кожного з них визначається середня  $\bar{y}_t$ , яка припадає на середину інтервалу. Якщо  $m$  — непарне число, тобто  $m = 2p + 1$ , а ваги членів ряду в межах інтервалу однакові  $a_r = \frac{1}{(2p+1)}$ , то  $\bar{y}_t = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^{i+p} y_i$ ,

де  $y_i$  — фактичне значення рівня в  $i$ -й момент;  $i$  — порядковий номер рівня в інтервалі. При парному  $m$  середина інтервалу знаходиться між двома часовими точками і тоді проводиться додаткова процедура *центрування* (усереднення кожної пари значень). Ковзна середня з однаковими вагами  $a_r$  при згладжуванні динамічного ряду погашає не лише випадкові, а й властиві конкретному процесу періодичні коливання. Припускаючи наявність таких коливань, використовують зважену ковзну середню, тобто кожному рівню в межах інтервалу згладжування надають певну вагу. Способи формування вагової функції різні. В одних випадках ваги відповідають членам розкладання бінома  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2p}$ , при  $m = 3$ , скажімо,  $a_r = 1/4, 1/2, 1/4$ . В інших випадках до даних інтервалу згладжування добирається певний поліном, наприклад, парабола  $\bar{y}_t = a + b_i + c_i^2$ , де  $i = -p, \dots, p$ . Тоді вагова функція така:

$$\text{для } m = 5 \quad a_r = \frac{1}{35}(-3, 12, 17, 12, -3);$$

$$\text{для } m = 7 \quad a_r = \frac{1}{21}(-2, 3, 6, 7, 6, 3, -2) \text{ і т. д.}$$

Як видно з формул, ваги симетричні відносно центра інтервалу згладжування, сума їх з урахуванням винесеного за дужки множника дорівнює  $\sum a_r = 1$ .

Основна перевага ковзної середньої — наочність і простота тлумачення тенденції. Проте не слід забувати, що ряд ковзних середніх коротший за первинний ряд на  $2p$  рівнів, а отже, втрачається інформація про крайні члени ряду. І чим ширший інтервал згладжування, тим відчутніші втрати, особливо нової інформації. Окрім того, маючи спільну основу розрахунку, ковзні середні виявляються залежними, що при згладжуванні значних коливань навіть за відсутності циклів у первинному ряду може вказувати на циклічність процесу (ефект Слуцького).

У симетричних фільтрах стара і нова інформація рівновагомі, а при прогнозуванні важливішою є нова інформація. У такому разі використовують асиметричні фільтри. Найпростіший з них — ковзна середня, яка замінює не центральний, а останній член ряду (*адаптивна середня*):

$$\bar{y}_t = \bar{y}_{t-1} + \frac{y_t - y_{t-m}}{m}.$$

У наведеній формулі перший елемент характеризує інерцію розвитку, другий — адаптує середню до нових умов. Таким чином, середня  $\bar{y}_t$  з кожним кроком ніби оновлюється. Ступінь оновлення визначається



постійною вагою  $\frac{1}{m}$ . При використанні зважених асиметричних фільтрів вагова функція формується з урахуванням ступеня новизни інформації. Такою є середня з експоненційно розподіленими вагами:

$$Y_t = \sum_{r=0}^t a(1-a)^r y_{t-r},$$

де  $Y_t$  — експоненційна середня, тобто згладжене значення рівня динамічного ряду на момент  $t$ ;  $a(1-a)^r$  — вага  $(t-r)$ -го рівня;  $a$  — параметр згладжування, який визначає вагу  $t$ -го рівня, значення його коливаються в межах від 0 до 1.

Надаючи більшу вагу новій інформації, експоненційна середня адаптується до нових умов, що робить її досить ефективним і надійним методом *короткострокового прогнозування*.

Для розрахунку експоненційної середньої  $Y_t$  необхідно визначити початкові умови: початкову величину  $Y_0$  і параметр  $a$ . Як початкову величину можна використати середній рівень за минулий (до динамічного ряду) період, або за відсутності таких даних, перший рівень ряду, тобто  $Y_0 = y_1$ . Щодо параметра  $a$ , то на практиці найчастіше використовують його значення в інтервалі від 0,1 до 0,3. Оскільки від параметра  $a$  залежить сума вагових коефіцієнтів  $\sum a_r$  на певному часовому інтервалі  $m$ , то можна за наперед заданим значенням цих величин орієнтовно визначити параметр  $a$ :

$$a = 1 - \sqrt[m]{1 - \sum_1^m a_r}.$$

Наприклад, якщо часовий інтервал  $m = 10$  місяців, а сума ваг  $\sum a_r = 0,90$ , то  $a = 1 - \sqrt[10]{1 - 0,9} \approx 0,2$ . Тобто, при  $a = 0,2$  десять членів динамічного ряду визначають 90% величини експоненційної середньої.

У моніторингу валютного ринку використовують 12-денні й 26-денні експоненційні середні курсових цін закриття з параметрами згладжування відповідно 0,15 і 0,075. Вони розглядаються як швидка і повільна лінії тренду (лінії підтримки та опору). Значне відхилення між цими середніми свідчить про силу тренду, а перетинання дає сигнал про можливі його зміни. Якщо швидка середня перетинає повільну зверху, це сигналізує про народження нового спадного тренду, якщо знизу — про народження зростаючого тренду.

При прогнозуванні процесу вдаються до багаторазового згладжування. Якщо період упередження  $v = 1$ , то використовують подвійне згладжування. Експоненційна середня другого порядку  $Y_t^*$  визначається за такою ж самою рекурентною формулою на основі згладженого ряду  $Y_t$ :

$$Y_t^* = aY_t + (1-a)Y_{t-1}^*.$$

Якщо припустити наявність лінійного тренду, прогнозний рівень  $Y_{t+1}$  можна розрахувати за формулою

$$Y_{t+1} = \frac{(2-a)Y_t - Y_t^*}{1-a}.$$

### 3.3. Оцінювання сезонної компоненти. Моделі Холта-Вінтера та CENSUS X-11

Сезонні коливання формуються під впливом не лише природно-кліматичних, але й соціально-економічних факторів. Сила і напрям дії окремих факторів формує різну конфігурацію сезонної хвилі. За своїм характером сезонна компонента може бути адитивною або мультиплікативною. Для адитивної компоненти характерні сталі коливання навколо середнього рівня чи тренду, для мультиплікативної — зростання або затухання амплітуди коливань з часом (візуально нагадує конус).

Кожний рівень ряду  $y_t$  належить до певного сезонного циклу  $s$ , довжина якого становить 12 місяців, або 4 квартали. Відношення  $y_t$  до середнього рівня за цикл (у випадку мультиплікативної моделі) називається *індексом сезонності*:  $I_s = \frac{y_t}{\bar{y}}$  (а у випадку адитивної, *індекс сезонності* — це  $I_s = y_t - \bar{y}$ ).

За умови, що вплив несезонних факторів еліміновано, середня з індексів  $j$ -го циклу становить 1, або 100 %.

У нестационарних рядах замість середньої використовують лінію тренда  $Y_t = y(t)$ , яка плавно проходить через ряд динаміки і, як і середня, елімінує його нерівномірності. Сукупність індексів сезонності в межах циклу характеризує сезонний ритм.

Прогнозування сезонних процесів ґрунтується на декомпозиції динамічного ряду. Припускають, що у майбутньому збережеться тенденція і такий же характер коливань. За таких умов прогноз на будь-який місяць (квартал), визначений методом екстраполяції тренда, коригується індексом сезонності:  $Y_{t+v}^* = I_t \cdot Y_{t+v}$ , де  $v$  — період упередження. Скажімо, поквартальна динаміка обсягів імпорту пального (тис. т) за два роки ( $n = 8$ ,  $t_1 = -3,5$ ,  $t_n = 3,5$ ) описується трендом  $Y_t = 923,7 + 33,8t$ , за яким теоретичний обсяг імпорту у восьмому кварталі становить 1042,0 тис. т, а в 1-му кварталі наступного року ( $v = 1$ ) передбачається  $Y_{t+v} = 1042,0 + 33,8 \cdot 1 = 1075,8$ . Якщо середній індекс сезонності 1-го кварталу  $I_1 = 1,34$ , то скоригований на сезонність прогнозний рівень дорівнює  $Y_{t+1}^* = 1,34 \cdot 1075,8 = 1441,6$  тис. т.

Динаміка більшості показників не виявляє чітко вираженої тенденції розвитку. Через постійний перерозподіл впливу факторів, які формують динаміку процесу, змінюється інтенсивність динаміки, частота та амплітуда коливань. До таких фактичних даних більш еластичною виявляється ковзна середня, інтервал згладжування якої дорівнює сезонному циклу (4 або 12).

Коригування ковзної середньої на сезонність здійснюється так само, як коригування лінійного тренду.

На використанні експоненційної середньої *ґрунтується сезонно-декомпозиційна модель Холта-Вінтера*, в якій поєднуються моделі стаціонарності, лінійності та сезонності. Послідовність операцій така:

1. Визначаються індекси сезонності  $I_t$ .

2. Ряд динаміки фільтрується від сезонних коливань діленням  $u_t$  на коефіцієнт сезонності з лагом  $s$ ; ряд  $u_t = y_t : I_{t-s}$  називається декомпозиційним.

3. Перші різниці декомпозиційного ряду  $b_t = (u_t - u_{t-1})$  розглядаються як характеристики лінійного тренду.

Кожна з компонент моделі згладжується за допомогою експоненційної середньої. При комбінації лінійної та сезонно-адитивної моделей тренда:

$$u_t = A \frac{y_t}{I_{t-s}} + (1-A)(u_{t-1} + b_{t-1});$$

$$b_t = B(u_t - u_{t-1}) + (1-B)b_{t-1};$$

$$I_t = C \frac{y_t}{u_t} + (1-C)I_{t-s}.$$

Значення параметрів згладжування  $A$  (*Alpha*),  $B$  (*Delta*) і  $C$  (*Gamma*) в системі Statistica за умовчування визначаються на рівні 0,1 (і є можливість підібрати їх оптимальні значення за опцією «Пошук на сітці»).

За умови ізольованої оцінки трьох факторів прогноз на період упередження  $v$  визначається як скоригована на сезонність сума прогнозного рівня  $u_t$  і лінійного тренду:  $Y_{t+v}^* = (u_t + b_t v) I_{t-s+v}$ . При комбінації лінійного та сезонно-мультиплікативного трендів кінцевий прогноз визначається за формулою  $Y_{t+v}^* = u_t (1 + b_t v)^v I_{t-s+v}$ , де  $b_t = B \frac{u_t - u_{t-1}}{u_{t-1}} + (1-B)b_{t-1}$ .

Часто при моделюванні динамічних рядів із різноманітними сезонними компонентами використовують методи сезонної коригування (декомпозиції) X-II (або так звані методи CENSUS X-II- абревіатура від центрального статистичного бюро США). Ці методи базуються на численних практичних застосуваннях і дозволяють враховувати різноманітні особливості динаміки: викиди, різну кількість днів у місяцях, робочі та вихідні дні, проводити багатократні уточнення оцінок для остаточного отримання компонент тренд-циклічності, сезонності, нерегулярної складової, і самого часового ряду із сезонними поправками.

За наявності періодичних коливань ряду щомісячної динаміки використовують також моделі сезонної хвилі на основі *гармонійного аналізу*. Основними її характеристиками є: амплітуда, фаза, період і частота коливань.

*Амплітуда*  $A$  характеризує відстань від середнього рівня максимуму (мінімуму) сезонної хвилі, *період коливань*  $T$  — тривалість циклу, *частота*  $f$  —

кількість циклів в одиницю часу, тобто  $f = 1/T$ . Якщо  $T = 12$  місяців, то  $f = 1/12$  циклу в місяць. Відстань між початком відліку часу з точкою  $t = 0$  і найближчим піком називають *фазою*  $\Theta$ . Сезонну хвилю з періодом  $T$  можна описати функцією:  $Y = a + b \cos \omega t + d \sin \omega t$ , де  $\omega$  — кутова частота гармоніки; вимірюється радіанами в одиницю часу  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  і змінюється в інтервалі  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ ;  $b, d$  — коефіцієнти гармоніки, функціонально зв'язані з амплітудою:  $A = \sqrt{b^2 + d^2}$ . Коефіцієнти гармоніки визначаються методом найменших квадратів. Завдяки властивостям ортогональності функцій синуса і косинуса система нормальних рівнянь приводиться до тотожностей:

$$\sum y = an;$$

$$\sum y \cos \omega t = \frac{1}{2}nb;$$

$$\sum y \sin \omega t = \frac{1}{2}nd.$$

$$\text{Звідси: для } n = 12 \quad a = \frac{\sum y}{12}; \quad b = \frac{\sum y \cos \omega t}{6}; \quad d = \frac{\sum y \sin \omega t}{6}.$$

Отже,  $a$  — це не що інше, як середньомісячний рівень ряду. Коефіцієнти  $b$  і  $d$  визначають амплітуду коливань навколо середнього рівня.

Очевидно, що чим більша амплітуда коливань, тим вагоміший вклад гармоніки в загальну дисперсію процесу. Оцінкою такого вкладу слугує дисперсійне відношення  $R^2 = \frac{\delta^2}{\sigma^2}$ , де  $\delta^2 = 0,5A^2$  — дисперсія гармоніки,

$$\sigma^2 = \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n} \text{ — загальна дисперсія процесу.}$$

У модель гармонійного аналізу можна включити декілька гармонік з різними періодами коливань. Скажімо, перша гармоніка з періодом 12, друга — з періодом 6, третя — з періодом 4 і т. д.

Гармонійна функція розкладає часовий ряд на правильні періодичні хвилі — синусоїди. Адекватність її реальному процесу залежить від того, наскільки сталими є частота й амплітуда коливань. Відносно сталий характер внутрішньорічної динаміки притаманний ринку сезонних товарів. Наприклад, розглянемо щомісячну динаміку середньої ціни свіжих огірків (грн.):

Таблиця 3.2. Динаміка щомісячної ціни огірків

Місяць	Ціна, грн.	Місяць	Ціна, грн.	Місяць	Ціна, грн.
1	5,56	5	2,60	9	0,76
2	5,70	6	1,38	10	1,43
3	4,72	7	0,70	11	4,36
4	3,68	8	0,57	12	5,89

Для побудови гармонійної функції на стартовій панелі модуля «Часові ряди і прогнозування» ініціюємо кнопку Spectral (Fourier) analysis (Спектральний аналіз). У діалоговому вікні Fourier (Spectral) analysis

обираємо опцію Single series Fourier analysis (Аналіз Фур'є одиничного ряду). Отримаємо визначені за опцією Summary коефіцієнти гармонік:

Таблиця 3.3. Коефіцієнти гармонік

Spectral analysis: VAR3 (_____.sta)				
No. Of cases: 12				
Continue...	Frequency	Period	Cosine Coeffs	Sine Coeffs
0	0		-3,7E-17	-0
1	0,083	12	2,493	0,055
2	0,167	6	0,098	-0,678
3	0,25	4	-0,328	-0,456
4	0,333	3	-0,455	-0,037
5	0,417	2,4	-0,289	0,060
6	0,5	2	-0,176	-0

Найвагомішою виявилася перша гармоніка, яка з амплітудою  $A = \sqrt{2,493^2 + 0,055^2} = 2,494$  пояснює 76,5% варіації ряду. Друга гармоніка пояснює 5,8% варіації ряду. Внесок решти гармонік — 17,7%.

Визначену амплітуду коливань можна використати при прогнозуванні сезонного процесу.

### 3.4. Моделі авторегресії AR, ARIMA\*ARIMAS, ARCH, GARCH. Динамічні факторні моделі DFM та DFMS (із марківськими перемиканнями)

Як було зазначено вище, характерною особливістю багатьох рядів динаміки є наявність автокореляції його рівнів. Внутрішня структура динамічного ряду, залежність рівня  $y_t$  від попередніх його значень  $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}$  описується *авторегресійною функцією*:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + e_t,$$

де  $p$  — порядок авторегресії;  $a_p$  — коефіцієнт авторегресії.

Процес авторегресії порядку  $p$  (AR( $p$ )) функціонально зв'язаний з автокореляційною функцією

$$r_p = a_1 r_{p-1} + a_2 r_{p-2} + \dots + a_p,$$

де  $p = 1, 2, \dots, m$  — лаг автокореляції (зсування  $y_t$  на  $p$  значень назад);  $r_0 = 1$ .

Згідно з цим співвідношенням єдиний коефіцієнт авторегресії першого порядку  $y_t = a_1 y_{t-1} + e_t$  дорівнює коефіцієнту автокореляції першого порядку,

тобто  $a_1 = r_1$ . Для авторегресії другого порядку  $y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + e_t$  маємо систему рівнянь

$$r_1 = a_1 + a_2 r_1$$

$$r_2 = a_1 r_1 + a_2.$$

Звідси

$$a_1 = -\frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2}, a_2 = -\frac{r_2-r_1^2}{1-r_1^2}.$$

Отже, коефіцієнт авторегресії, як і коефіцієнт автокореляції, змінюється в межах від  $-1$  до  $+1$ .

При моделюванні нестационарних за своєю природою економічних процесів авторегресійна функція об'єднується з іншими методами аналізу динаміки: ковзною (експоненційною) середньою, трендом, сезонною хвилею. Об'єднання різних моделей в єдине ціле суттєво розширює сферу практичного їх використання. Окрім того, об'єднані моделі формуються на основі одних і тих же статистичних характеристик — автокореляційних функцій, розробляється один алгоритм розрахунку параметрів моделі і визначення прогнозів. Моделі такого класу називають *об'єднаними (інтегрованими) моделями авторегресії — ковзної середньої* або скорочено *ARIMA*. У моделі *ARIMA* рівень динамічного ряду  $y_t$  визначається як зважена сума попередніх його значень і значень залишків  $e_t$  — поточних і попередніх. Вона об'єднує модель авторегресії порядку  $p$  і модель ковзної середньої залишків порядку  $q$ . Тренд включається в *ARIMA* за допомогою оператора кінцевих різниць ряду  $y_t$ . У модулі *Time Series/Forecasting* для цього передбачено процедуру трансформації *Differencing* ( $x = x - x(\text{lag})$ ). Так, для фільтрації лінійного тренду використовують різниці першого порядку  $d_1 = y_t - y_{t-1}$  (лаг = 1), для фільтрації параболічного тренду — різниці другого порядку і т. д. Ще раз нагадаємо, що після таких трансформацій повинні отримувати стаціонарні ряди (коливання навколо константи).

Вид моделі *ARIMA*, адекватність її реальному процесу та прогнозні властивості залежать від порядку авторегресії  $p$  і порядку ковзної середньої  $q$ . Через те ключовим моментом моделювання вважається процедура *ідентифікації* — обґрунтування виду моделі. В стандартній методиці *ARIMA* ідентифікація зводиться до візуального аналізу автокорелограм і ґрунтується на принципі економії, за яким  $(p + q) \leq 2$ .

Модель *ARIMA* порядку  $(p, d, q)$  досить гнучка і описує широкий спектр несезонних процесів. За наявності сезонних коливань у моделі враховується їх періодичність з лагом  $s$  (для квартальних даних  $s = 4$ , для щомісячних  $s = 12$ ) і аналогічного змісту параметрами  $(P, D, Q)_s$ . Порядок мультиплікативної *ARIMA\*ARIMAS* становить  $(p, d, q) \cdot (P, D, Q)_s$ . Для ідентифікації моделі у діалоговому вікні *Single Series ARIMA* передбачено спеціальну групу опцій *Arima model parameters* (Параметри *ARIMA*):

$p$  — *Autoregressive* — параметр авторегресії (регулярний);  
 $P$  — *Seasonal* — сезонний параметр авторегресії;  
 $q$  — *Moving average* — параметр ковзної середньої (регулярний);  
 $Q$  — *Seasonal* — сезонний параметр ковзної середньої.

Необхідно вказати принаймні один із зазначених параметрів. Найпростіші види моделей *ARIMA*:

- (1, 0, 0) — авторегресійна функція;
- (0, 0, 1) — ковзна середня;
- (1, 0, 1) — комбінована модель авторегресії і ковзної середньої;
- (0, 1, 1) — експоненційна середня;
- (1, 1, 1) — нестационарний процес з лінійним трендом;
- (0, 1, 1) · (0, 1, 1) — мультиплікативна модель сезонного процесу.

Практична реалізація моделей можлива лише на рядах динаміки довжиною не менше 50-60 спостережень. Проілюструємо мультиплікативну модель *ARIMA\*ARIMAS* на прикладі із програми Statistica.

*Приклад 3.1. Моделювання щомісячної динаміки перевезень пасажирів (тис.чол.) у США протягом 1949-1960 (n=144).*

Візуальний аналіз графіка даного динамічного ряду дозволяє побачити чітко виражену річну (на лазі 12 місяців) сезонність, яка зростає «у конусі», а також основну тенденцію до сталого зростання – лінійний тренд. Якщо до первинного ряду застосувати трансформації: логарифмування *Natural Log*, а також взяття різниць *Difference* першого порядку на лазі 1, то дістанемо стаціонарний процес. Провівши процес ідентифікації моделі *ARIMA\*ARIMAS*, отримаємо наступні її параметри: (0, 1, 1) · (0, 1, 1)<sub>12</sub>. Параметри моделі оцінюються методом максимальної правдоподібності, необхідно лише в нижньому лівому куті діалогового вікна *Single series ARIMA* задати обчислювальну процедуру: *Approximate* — наближена чи *Exact* — точна. За командою *Begin parameter estimation* здійснюється ітераційна процедура визначення параметрів моделі і за умови їх прийнятності через команду *OK* відкривається вікно результату оцінювання:

```
Single Series ARIMA Results
Variable: SERIES, G: Monthly passenger totals (in 1000's)
Transformations: ln(x),D(1),D(12)
Model: (0,1,1)(0,1,1) Seasonal lag: 12
Nbr of obs: 131 InfitSS=273 FraSS=.163669(4) MS=.0014
Parameters (p)S-Autoregressive, q(Q)S-Moving aver.; p < .05
Estimate:      q(1)          Qs(1)
Std. Err.:     .09069       .07395
```

*Приклад 3.2. Моделювання 434-денної динаміки курсу акції компанії IBM за допомогою моделі ARIMA порядку (0, 1, 1).*

Результати моделювання (оцінки параметрів моделі) можна отримати за опцією *Parameters estimates*. Значення параметра  $q(1)$ , його асимптотична стандартна похибка,  $t$ -критерій та  $p$ -level — фактичний рівень істотності, представлені у наступній таблиці, свідчать про адекватність моделі:

Таблиця 3.4. Оцінки параметрів моделі

Input: VAR1(ibm1.sta)				
Continue...	Transformations: D(1) Model:(0,1,1) MS Residual=338.95			
Param.	Param.	Asympt. Std.Err.	Asympt. t (432)	p
q(1)	.60668	.03671	16.52	0.00

Для визначення прогнозів необхідно ініціювати кнопку *Forecast cases* — Прогнозні спостереження. Нижче наведено прогнозні рівні курсу акцій IBM із 90%-ми довірчими межами на період упередження  $v = 3$ :

Таблиця 3.5. Результати прогнозування

Forecasts: Model(0,1,1) Seasonal lag: 12 (ibm1.sta)			
Continue...	Input: VAR1 Start of origin: 1 End of origin:434		
Case No.	Forecast	Lower 90,0%	Upper 90,0%
435	351,5	321,1	381,8
436	351,5	318,9	384,1
437	351,5	316,7	386,2

Як видно з даних таблиці, точковий прогноз на період упередження не змінюється, проте довірчі межі його розширюються.

Для візуалізації результатів моделювання і прогнозування у діалоговому вікні *Single Series ARIMA Results* передбачено опції *Review and plot variables*.

Якщо характер динаміки стрімко змінюється під впливом зовнішніх факторів, то до такого ряду застосовують модель *Interrupted ARIMA* — Перервана *ARIMA* (із інтервенцією). Свої особливості має моделювання динамічних процесів з ефектом насичення, коли темпи зростання (зниження) уповільнюються і рівень наближується до певної межі (питомі витрати ресурсів, споживання продуктів харчування на душу населення тощо). Для їх описування використовують клас кривих, що мають горизонтальну асимптоту  $K \neq 0$ .

Найпростішою з-поміж них є модифікована експонента:  $Y_t = K + ab^t$ , де параметр  $a$  — різниця між ординатою  $Y_t$  при  $t = 0$  та асимптотою  $K$ . Якщо  $a < 0$ , асимптота знаходиться вище кривої, якщо  $a > 0$  — асимптота нижче кривої. Параметр  $b$  характеризує співвідношення послідовних приростів ординати. За умови рівномірного розподілу ординати по осі часу ці співвідношення є сталими:  $b = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t - Y_{t-1}} = const$ . Модифікована експонента

описує процеси, на які діє певний обмежувальний фактор, і вплив цього фактору зростає зі зростанням  $Y_t$ .

У разі, коли обмежувальний фактор впливає лише після певного моменту, до якого процес розвивався за експоненційним законом, то такий процес найкраще апроксимується  $S$ -подібною функцією з точкою перегину  $P$ ,



в якій прискорене зростання змінюється уповільненням. Наприклад, попит на новий товар попервах незначний; потім, після визнання споживачами, він стрімко зростає, але у міру насичення ринку темпи зростання уповільнюються, згасають. Попит стабілізується на певному рівні. Аналогічні фази розвитку мають процеси нововведень і винаходів, ефективність використання ресурсів тощо. Серед  $S$ -подібних кривих, що описують повний цикл розвитку, найпоширенішою є функція Перла-Ріда —

логістична крива:  $Y_t = \frac{K}{1 + be^{-at}}$ . Якщо показник процесу — частка, що змінюється в межах від 0 до 1, то формула логістичної функції спрощується:

$$Y_t = \frac{1}{e^{a+bt} + 1} \text{ або } \frac{1}{Y_t} = 1 + e^{a+bt}.$$

У страховій і демографічній статистиці використовують іншу  $S$ -подібну функцію — криву Гомперця:  $Y_t = Ka^{bt}$  (або в логарифмах  $\lg Y_t = \lg K + b' \lg a$ ). Тобто крива Гомперця приводиться до модифікованої експоненти, у якій сталими є відношення приростів ординат у логарифмах.

Оцінювання параметрів функцій, які мають асимптоти, порівняно з поліномами та експонентами значно складніше. Тут можливі два варіанти.

За першим варіантом асимптота у вигляді нормативу, стандарту тощо визначається апіорі —  $K^*$ . Тоді модифіковану експоненту можна представити у вигляді:  $(Y_t - K^*) = ab^t$ . Замінивши  $(Y_t - K^*)$  на  $z$  і прологарифмувавши рівняння, дістанемо лінійну функцію логарифмів  $\lg z = \lg a + t \lg b$ . Аналогічно приводиться до лінійного виду логістична функція  $1/Y_t = K^* + ab^t$ , яка при заміні  $(1/Y_t - K^*)$  на  $z$  у логарифмах набуває такого ж вигляду:  $\lg z = \lg a + t \lg b$ . Параметри приведених до лінійного виду функцій, як і параметри поліномів, можна оцінити методом найменших квадратів, використовуючи процедури модуля *Multiple Regression*. Прогноз та його довірчі межі визначаються традиційно, хоча довірчі межі прогнозу за кривими повного циклу мають умовний характер.

За другим варіантом асимптота невідома, отже, необхідно визначити усі три параметри:  $K$ ,  $a$ ,  $b$ . У літературі для кожної кривої запропоновано різні процедури, що реалізують МНК. Оскільки логістична крива і крива Гомперця приводяться до модифікованої експоненти, то доцільно розглянути універсальний для трьох функцій метод, описаний Бріантом (так званий метод трьох точок). За цим методом спершу визначається параметр  $b$ , а потім  $a$  та  $K$ . Наприклад, формули розрахунку параметрів модифікованої експоненти такі:

$$b = \frac{(n-1) \sum_1^{n-1} y_t y_{t+1} - \sum_1^{n-1} y_t \sum_1^{n-1} y_{t+1}}{(n-1) \sum_1^{n-1} y_t^2 - \left( \sum_1^{n-1} y_t \right)^2};$$

$$a = \frac{n \sum_1^n b^t y_t - \sum_1^n b^t \sum_1^n y_t}{n \sum_1^n b^{2t} - \left( \sum_1^n b^t \right)^2};$$

$$K = \frac{\sum_1^n y_t - a \sum_1^n b^t}{n}.$$

У системі Statistica розрахунок параметрів S-подібних кривих (як і інших нелінійних регресій) можна здійснити в модулі Nonlinear Estimation — Нелінійне оцінювання, скориставшись процедурою User-specified regression, яка передбачає визначення виду функції користувачем самостійно. Наприклад, застосуємо логістичну криву до даних ряду динаміки населення мегаполіса:

Таблиця 3.6. Щорічна динаміка чисельності населення мегаполісу

Рік	Млн. чол.	Рік	Млн. чол.	Рік	Млн. чол.
1950	3,48	1970	4,78	1990	6,14
1955	3,86	1975	5,13	1995	6,37
1960	4,17	1980	5,52	2000	7,04
1965	4,56	1985	5,90		

У діалоговому вікні *Estimated function & loss function* задамо вид функціонального виду кривої:  $v2 = b1 / (1 + b2 \cdot \exp(-b3 \cdot v1))$ . Параметри її означають:  $b1 = K$ ,  $b2 = a$ ,  $b3 = b$ . Щодо функції втрат, то можна обмежитися залишковою дев'ятою, яка визначається системою за умовчанням. Через кнопку *Variables* ідентифікуємо ознаку, динаміка якої моделюється (у даному прикладі —  $v2$ ), і метод оцінювання параметрів моделі (*Quasi-Newton*). По закінченні ітераційної процедури оцінювання параметрів за командою *OK* відкривається вікно *Results*. Значення індексу кореляції  $R = 0,997$  свідчить про високу апроксимуючу властивість моделі. Оцінки параметрів — *Parameter estimates* представлені нижче:

Таблиця 3.7. Оцінки параметрів моделі

Model: $v2 = b1 / (1 + b2 \cdot \exp(-b3 \cdot v1))$ (_____.sta)			
Final loss: ,0723 R=,997 Variance explained: 99,428%			
	B1	B2	B3
Estimate	12,37	2,79	0,114

Згідно з даними приріст населення мегаполісу за п'ятиріччя становить в середньому 11,4%, наближаючись до межі — 12,37 млн. чол.

Отже, клас моделей динаміки досить широкий, і вони описують різні процеси розвитку. Вибір типу моделі у конкретному дослідженні ґрунтується передусім на теоретичному аналізі специфіки процесу, його внутрішньої структури, взаємозв'язків з іншими процесами. На основі такого аналізу в загальних рисах визначається характер динаміки (рівномірний, рівноприскорений, з насиченням тощо) та окреслюється коло функцій,

здатних апроксимувати цей процес. Серйозною підмогою при виборі конкретної моделі слугують формальні методи. Скажімо, для поліномів — це аналіз послідовних різниць. Рівність різниць  $p$ -го порядку розглядається як симптом того, що процес описується поліномом  $p$ -го порядку. Якщо приблизно однакові різниці 1-го порядку  $\Delta'_t = y_t - y_{t-1}$ , використовують лінійний тренд, якщо однакові різниці 2-го порядку —  $\Delta''_t = \Delta_t - \Delta_{t-1}$ , — параболу і т. д. Певні складнощі можуть виникнути при виборі експоненти. Адже  $S$ -подібна крива до точки перегину описує експоненційний тренд, а сама точка перегину може бути за межами динамічного ряду. Отже, якщо межа насичення теоретично можлива і процес у майбутньому може згасати або існують певні обмеження для процесу (правові, матеріальних ресурсів, виробничих потужностей тощо), то перевага віддається  $S$ -подібній кривій.

Оскільки первинним рядам динаміки властива значна варіація рівнів  $y_t$ , то аналіз послідовних різниць більш коректно проводити на основі рядів ковзних середніх. У наступній таблиці наведено основні характеристики (ланцюгові прирости – різниці) такого аналізу (апріорні тести), за якими визначається конкретний тип моделі повного циклу:

Таблиця 3.8. Ланцюгові темпи (прирости)

Характеристика	Властивості характеристик	Тип трендової моделі
$\Delta'_t$	Приблизно однакові	Поліном 1-го ступеня
$\Delta''_t$	Лінійно змінюються	Поліном 2-го ступеня
$\Delta'_t/y_{t-1}$	Приблизно однакові	Експонента
$\lg \Delta'_t$	Лінійно змінюються	Модифікована експонента
$\lg \Delta'_t / (y_{t-1})^2$	Лінійно змінюються	Логістична крива
$\lg \Delta'_t / y_{t-1}$	Лінійно змінюються	Крива Гомперца

При зворотному напрямку тенденції різниці розраховуються, починаючи з кінця. За наявності від'ємних різниць логарифмування неможливе, тому необхідно збільшити інтервал згладжування ковзних середніх.

*Приклад 3.3. Моделювання та прогнозування надходжень ПДВ на мікро- та макроекономічних рівнях.*

На етапі реформування податкової системи України особливої актуальності набувають проблеми, пов'язані з такими функціями податкових органів, як аналітична та прогнозна. На державному рівні роль податкового прогнозування (планування) визначає аналіз надходжень податків, тенденцій і чинників, що приводять до змін бази оподаткування (зростання або зменшення), і на цій основі визначаються прогнозовані обсяги податкових надходжень до бюджету, передумови для змін до законодавчих та нормативних документів або введення нових. При моніторингу і контролі

встановлюються і документуються фактичні показники, порівнюються із плановими для аналізу й оцінки результатів діяльності із зазначенням причин відхилень від запланованого для застосування заходів з метою прийняття відповідних рішень. Податкове прогнозування здійснюється з метою оцінки податкового потенціалу держави в цілому та за окремими регіонами, окрім того, за допомогою прогнозування визначається ймовірність виникнення непередбачуваних подій соціального характеру та важкопрогнозованих фінансових, зокрема податкових ситуацій.

В умовах нестійкого характеру економічних процесів на практиці, по суті, можуть бути реалізовані лише два види прогнозів – оперативний (до одного місяця) та короткотерміновий (до одного року). У прогнозуванні податкових надходжень необхідно брати до уваги фактичні динамічні ряди надходжень податків за попередні періоди. Також варто ураховувати, що показники за минулі періоди потрібно у багатьох випадках коригувати, а це вимагає вивчення конкретних економічних особливостей даного періоду з урахуванням величини ставок оподаткування, зміни податкової бази тощо.

Метою прикладу є побудова моделей динаміки щомісячних надходжень ПДВ на мікрорівні (за даними Приморської ДПІ м. Одеси за період з 2005 по 2011 рр.) та на макрорівні (за даними Держкомстату України й інших джерел за період з 2007 по 2011 рр.) із виправленнями «викидів» та зі змінним або демпфованим трендом. На підставі отриманих адекватних моделей виконання прогнозування.

I. Спочатку розглянемо мікрорівень, тобто, надходження ПДВ по районній ДПІ. При моделюванні використовуємо наступні дані податкових надходжень до бюджету Приморського району м. Одеси:

Таблиця 3.9. Динаміка щомісячних надходжень ПДВ по Приморській ДПП м. Одеси за 2005-2011 роки (тис.грн)

Роки	2005	2006	2007	2008	2008	2010	2011
Місяці	ПДВ	ПДВ	ПДВ	ПДВ	ПДВ	ПДВ	ПДВ
1	9949,278	16722,58	20829,38	42686,98	21587,9	17634,8	60078,4
2	6828,165	10289,37	14043,34	15902,04	12054,5	14515,8	45384,5
3	10554,97	18059,67	12967,92	17969,49	22632,4	16492	63664,1
4	9687,427	13955,77	17624,91	23458,78	19021,4	17352,8	66547,9
5	11115,32	12869,36	18007,45	20621,95	16379,8	18471,2	53162,1
6	10858,56	13757,19	16871,61	20637,98	18298,4	19627,6	76498,3
7	10731,88	14440,41	18850,29	21330,15	22959	21850,2	85979,3
8	11947,37	14660,06	24756,63	21722,23	18948,4	22804,4	83397,7
9	13666,76	16533,46	18642,41	25945,56	24279,2	32101,8	94064,1
10	14272,88	16879,82	18539,1	25706,97	19213,1	46736,2	109826,8
11	13957,57	14843,69	20204,11	21033,23	20100	61695,4	109536,3
12	14764,04	15695,59	18433,3	21706,06	22396,9	56211,6	114792,4

Для наочності дані представляємо у вигляді діаграми:

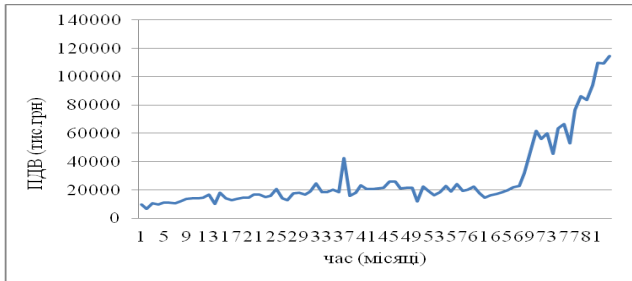


Рис.3.1. Динаміка щомісячних надходжень ПДВ по Приморській ДПП м. Одеси (тис.грн)

Варто зауважити, що спостерігається аномальне значення 42686,98 тис. грн. надходження ПДВ у січні 2008 року (так званий «викид»), яке є статистично не значимим (оскільки уряд змусив бізнес заплатити ПДВ наперед). Тому при подальшому моделюванні це значення замінимо на середньомісячне за 2008 рік – 23226,8 тис. грн. Візуальний аналіз ряду динаміки дозволяє зробити висновок, що йому притаманні певні характерні особливості:

а) прослідковується довгострокова, детермінована часом еволюція – тренд, який описується функцією часу  $f(t)$ ; б) сезонні коливання  $S_t$ ; в) випадкові коливання  $e_t$ .

Зв'язок між цими складовими динамічного ряду представляється у цьому випадку адитивно (сумою):

$$y_t = f(t) + S_t + e_t,$$

де  $y_t$  – рівень ряду динаміки у момент часу  $t = 1, 2, \dots, 84$ .

Така умовна конструкція дозволяє, залежно від мети дослідження, вивчати тренд, елімінуючи коливання, або вивчати коливання, елімінуючи тренд. При прогнозуванні здійснюється зведення прогнозів різних елементів в один кінцевий прогноз.

Відмітимо, що у цьому випадку спостерігається так званий «ламаний» лінійний тренд (у жовтні 2010 року надходження різко зросли). Це пояснюється зростанням бази оподаткування (з'явилися великі підприємства – платники ПДВ) та суттєвим покращенням адміністрування. Тому для пошуку рівнянь такого тренду використаємо модуль кусково-лінійної регресії нелінійного оцінювання програми Statistica:

Таблиця 3.10. Коефіцієнти моделі за результатами роботи програми Statistica

Модель: Кусково-лінійна регресія з точками розриву				
$N = 84, \quad R = 0,98019$				
$B_0$	$t$	$B_0$	$t$	Точка розриву
12160,91	151,64	-300818	4879,71	27885,35

У результаті, з ймовірністю понад 98% отримуємо, що рівняння ламаного лінійного тренду матимуть наступний вигляд:

$$f(t) = 12160,91 + 151,64t, \quad t = 1, 2, \dots, 38;$$

$$f(t) = -300818 + 4879,71t, \quad t = 39, 40, \dots, 84.$$

Характерною властивістю будь-якого динамічного ряду є залежність рівнів: значення  $y_t$  певною мірою залежить від попередніх значень:  $y_{t-1}$ ,  $y_{t-2}$  і т.д. Для оцінювання ступеня залежності рівнів ряду використовують коефіцієнти автокореляції  $r_p$  з часовим лагом  $p = 1, 2, \dots, m$ , які характеризують щільність зв'язку між первинним рядом і цим же рядом, зсуненим на  $p$  моментів. Послідовність коефіцієнтів  $r_p$  називають автокореляційною функцією. За швидкістю згасання автокореляційної функції можна зробити висновок про наявність автокореляції першого порядку на лазі 1. На відміну від детермінованої складової випадкова складова не пов'язана зі зміною часу. Аналіз цієї складової є основою перевірки гіпотези про адекватність моделі реальному процесу.

У результаті аналізу динаміки для моделювання застосовуємо адитивну модель ARIMA\*ARIMAS із інтервенцією в тренді на 39-му спостереженні і сезонним лагом 12:

$$y_t = p_{t-1}y_{t-1} + a + bt - q_{t-1}e_{t-1} + S_t,$$

де  $y_t$  – рівні ряду динаміки у моменти часу  $t = 1, 2, \dots, 84$ ;

$f(t) = a + bt$  – трендова компонента (з інтервенцією);

$p_{t-1}$  – коефіцієнт авторегресії першого порядку;

$q_{t-1}$  – коефіцієнт моделі ковзного середнього;

$e_{t-1}$  – іррегулярна компонента (випадкові відхилення або так званий «білий шум»).

Для знаходження сезонних коефіцієнтів застосовуємо згладжування ковзною середньою першого порядку:  $S_t = c + Q_{t-1}S_{t-1}$ . Параметри моделі оцінюємо із 95% рівнем довіри (або 5% ступенем ризику) за умови мінімізації

MSE – середнього квадрату похибки:  $MSE = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \tilde{y}_i)^2}{n}$ , де  $y_i$  – фактичні, а  $\tilde{y}_i$  – прогнозовані значення показника у  $i$ -му періоді.

Таблиця 3.11. Результати моделювання та прогнозування

Спостереження №	Прогнози. Модель: (1,1,1)(0,0,1); Сезон.: 12; 1 інтервенція; початкова SS=3212E6; заключна SS=2753E6 (85,69%); MS=3484E4; p<0,05			
	Прогноз	Нижній 90%	Верхній 90%	Стандартна похибка
85	115714,9	105890,5	125539,2	5902,7
86	107810,0	95881,1	119739,0	7167,2
87	118452,6	104573,9	132331,3	8338,7
88	119024,4	103453,9	134594,9	9355,2
89	111308,5	94211,2	128405,8	10272,5
90	123875,8	105377,5	142374,2	11114,3
91	129134,2	109333,7	148934,7	11896,6
92	127062,8	106040,6	148084,9	12630,6
93	132886,4	110709,8	155063,0	13324,3
94	136332,8	113058,9	159606,7	13983,5
95	132433,6	108111,9	156755,3	14613,1
96	137125,3	111799,1	162451,5	15216,6

Висока адекватність моделі підтверджується тим, що порівняння середньопрогнозованого за даною моделлю значення надходжень ПДВ у січні 2012 року 115714,9 тис. грн із фактичним 116056,1 тис. грн дає малу відносну

похибку прогнозування  $\delta = \frac{|116056,1 - 115714,9|}{116056,1} = 0,0029$  або близько 0,3%.

Зауважимо, що при середньостроковому прогнозуванні (на 2013-2015 роки) варто використовувати трендову модель, побудовану на річних фактичних надходженнях за минулі роки.

II. Виконаємо моделювання та прогнозування динаміки щомісячних надходжень (млрд.грн) ПДВ (PDVUK) на макрорівні (за даними Держкомстату України за період з 2007 по 2011 рр.):

Таблиця 3.12. Динаміка щомісячних надходжень ПДВ за 2007–2011 роки (млрд.грн)

Роки	2007	2008	2009	2010	2011
Місяці	ПДВ	ПДВ	ПДВ	ПДВ	ПДВ
1	4,7218	6,1866	6,3259	8,2303	9,5469
2	3,9682	7,1212	6,1968	4,7877	9,4425
3	5,0313	6,6084	9,6554	8,2598	10,3564
4	4,7422	9,3798	7,4880	10,054	11,2816
5	4,6714	8,7213	5,4998	7,1548	9,6094
6	5,2116	7,4539	4,8555	8,0634	9,2842
7	4,9334	8,3256	6,4424	9,5333	11,2136
8	4,8521	9,3311	6,0222	8,1873	12,9507
9	4,5546	9,3647	3,0412	7,8726	11,5065
10	5,672	8,7470	8,0639	9,2611	10,8824
11	5,4232	4,6886	8,1171	10,7776	11,0774
12	5,601	6,1544	12,9882	10,534	12,9422
За рік	59,3828	92,0826	84,6964	102,72	130,09

Для податку на додану вартість (ПДВ або PDVUK) аналіз динаміки щомісячних надходжень та динаміки за роками дозволяє виявити наявність вираженого лінійного тренду та сезонності із лагом 12:

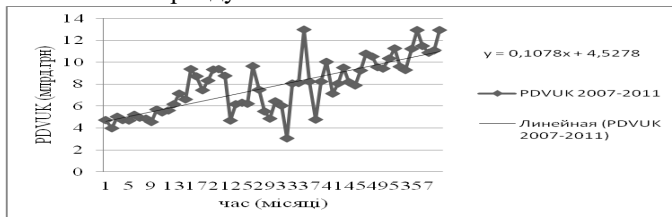


Рис.3.2. Динаміка щомісячних надходжень ПДВ за 2007–2011 роки (млрд.грн)

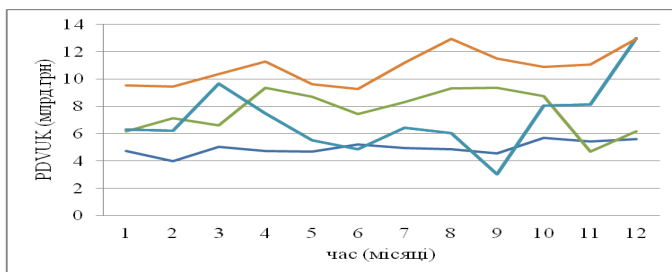


Рис.3.3. Динаміка щомісячних надходжень ПДВ за роками (млрд.грн)



Тому при моделюванні використовуємо адитивну модель Холта експоненційного згладжування з лінійним трендом та сезонністю 12:  $y_t = f(t) + S_t + e_t$ , де  $y_t$  – рівні ряду динаміки у моменти часу  $t = 1, 2, \dots, 70$ ;  $f(t)$  – тренд-циклічна компонента;  $e_t$  – іррегулярна компонента (випадкові відхилення або так званій «білий шум»).

Для знаходження тренд-циклічної компоненти застосовувалось експоненційне згладжування:  $f_t = \alpha f_t + (1 - \alpha) f_{t-1}$ , де параметр згладжування  $\alpha = 0,1$  вибирався за умовами найкращого наближення до емпіричних даних (за умовою мінімізації суми квадратів похибок SSE), а також урахувалось циклічне «демпфування» тренду за допомогою параметра  $\gamma = 0,1$ . Коли ця формула застосовується рекурсивно, кожне нове згладжене значення (яке є також прогнозом) обчислюється як зважене середнє поточного спостереження і згладженого ряду.

При знаходженні сезонних коефіцієнтів також застосовувалось експоненційне згладжування за формулою  $S_t = S_{t-p} + \delta(1 - \alpha)e_t$ , в якій параметр  $\delta = 0,1$ . Звертаємо увагу, що оцінка сезонної компоненти в момент  $t$  обчислюється як відповідна компонента на останньому сезонному циклі плюс похибка  $e_t$  (спостережуване мінус прогнозоване значення у момент  $t$ ). Стандартна похибка адитивної тренд-циклічної сезонної моделі  $y_t = f(t) + S_t + e_t$  становить  $\sigma = 0,075$ . Результати моделювання та прогнозування представлені у наступній таблиці:

Таблиця 3.13. Результати моделювання та прогнозування

Спостереження №	Експоненційне згладжування: Адитив сезон (12) $S_0=4,497$ ; $T_0=0,0752$ ; Альфа=0,100; Дельта=0,100; Гамма=0,100			
	PDVUK	Згладж. ряд	Залишки	Сезонні складові
1	4,72180	4,39545	0,32635	-0,176962
2	3,96820	3,70289	0,26531	-0,980652
3	5,03130	5,35457	-0,32327	0,563352
4	4,74220	5,89115	-1,14895	1,054347
5	4,67140	4,29806	0,37334	-0,490273
6	5,21160	4,31274	0,89886	-0,583093
7	4,93340	5,23880	-0,30540	0,17333
8	4,85210	5,01927	-0,16717	-0,091145
9	4,55460	4,21432	0,34028	-0,953803
10	5,67200	5,84308	-0,17108	0,563105
11	5,42320	5,19584	0,22736	-0,143145
12	5,60100	6,50444	-0,90344	1,064335
66	9,28420	9,46645	-0,18225	
67	11,21360	10,31627	0,89733	
68	12,95070	10,26001	2,69069	
69	11,50650	9,82415	1,68235	
70	10,88240	11,73559	-0,85319	
71		11,16136		
72		12,56185		
73		11,45848		
74		10,81256		
75		12,54480		
76		13,18181		
77		11,85066		
78		11,91138		
79		12,92076		
80		12,97137		

Зведенням прогнозів за кожною складовою в один виконується точкове прогнозування надходжень ПДВ у листопаді 2011 року ( $t = 71$ ), у грудні 2011 року ( $t = 72$ ) та на наступний 2012 рік. За нашою моделлю  $y_{71} = 11,1613$  (млрд.грн), а  $y_{72} = 12,5618$  (млрд.грн). Для інтервального прогнозування із 95% надійністю знайдемо граничну похибку:  $\Delta = 1,96\sigma = 0,145$ .

Таким чином, із 95% надійністю надходження ПДВ у листопаді 2011 року можуть становити від 11,018 млрд.грн (песимістичний прогноз) до 11,3063 млрд.грн (оптимістичний прогноз), а у грудні 2011 року – від 12,4068 млрд.грн (песимістичний прогноз) до 12,7068 млрд.грн (оптимістичний прогноз). Зауважимо, що фактичні надходження ПДВ у листопаді 2011 року становили 11,0774 млрд.грн, що наближається до середньоочікуваного за нашою моделлю прогнозування. Відносна похибка прогнозування надходжень ПДВ для листопада 2011 року становить

$$\delta = \frac{|11,0774 - 11,1613|}{11,0774} = 0,0075 \text{ (або 0,75\%)},$$

а для грудня 2011 року

$$\delta = \frac{|12,9422 - 12,7068|}{12,9422} = 0,018 \text{ (або 1,8\%)}.$$

Економіко-математичний аналіз рядів динаміки податкових надходжень дозволить побудувати адекватні математичні моделі та здійснити прогнозування обсягів цих надходжень. Результати прогнозування підтвердились фактичними даними. Відзначимо, що моделювання надходжень ПДВ по Приморській ДПП м.Одеси показало, як суттєво вплинуло на різке підвищення надходжень збільшення бази оподаткування та покращення адміністрування цього податку. Зауважимо, що кризові явища в економіці України суттєво впливають на обсяги надходжень доходів до державного бюджету (зокрема, надходжень ПДВ). Якщо у попередніх дослідженнях трендові тенденції за фактичними результатами надходжень ПДВ до 2008 року включно описувались зростаючою квадратичною функцією, то при моделюванні тенденції за 2007–2012 рр. із урахуванням кризи змусило застосовувати більш складні моделі експоненційного згладжування. Зауважимо також, що останніми роками спостерігається позитивна тенденція до ефективного адміністрування ПДВ (як показують дослідження, ефективним варто вважати адміністрування, при якому частка відшкодувань ПДВ не перевищує 30% загальних обсягів надходжень).

Отже, можна зробити висновок про необхідність постійного моніторингу за надходженнями до дохідної частини Держбюджету та оперативного аналізу, прогнозування, урахування ризиків. Результати досліджень можна використовувати як у практичній роботі фінансових органів, служб ДПАУ, так і при прийнятті науково обґрунтованих управлінських рішень.

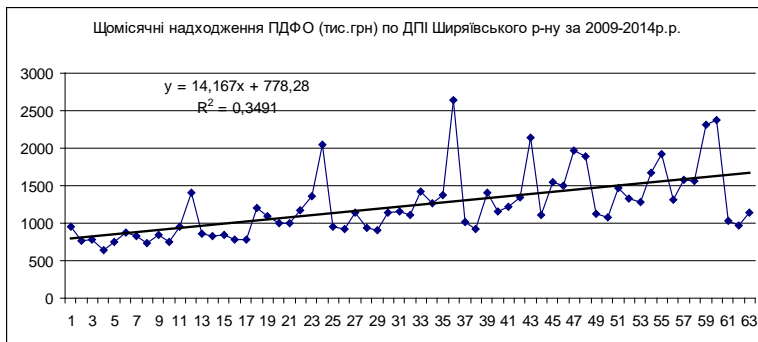
*Приклад 3.4. Моніторинг та прогнозування надходжень податку на доходи фізичних осіб*

Виконаємо економіко-математичне моделювання та прогнозування динаміки щомісячних надходжень ПДФО на мікрорівні (за даними ДПІ Ширяївського району за період з 2009 по 2014 р.р.). При розрахунках використовуються електронні таблиці MS Excel та спеціалізована програма Statistica. При оперативному короткостроковому моделюванні використовуємо наступні дані щомісячних податкових надходжень до бюджету Ширяївського району Одеської області:

*Таблиця 3.14. Динаміка щомісячних надходжень ПДФО (тис.грн) по Ширяївській ДПІ за 2009-2014 роки.*

Роки	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Місяці						
1	954,9	860,2	956,3	1010,5	1120,9	1029,4
2	764,3	831,9	927,2	928,7	1084,2	971,1
3	786,2	844,2	1138,9	1402,1	1462,9	1145,1
4	641,8	776,7	935,6	1157,9	1328,1	
5	756,6	775,5	904	1222,3	1274,8	
6	874,4	1209,9	1143,2	1337,8	1664,4	
7	821,1	1096,8	1152,6	2137,1	1927,1	
8	729,6	992,2	1116,1	1103,7	1315,1	
9	842,2	1003,6	1424,6	1541,3	1584,1	
10	751,3	1178,3	1258,3	1492,2	1563,4	
11	959,7	1365,9	1381,7	1961,7	2318,4	
12	1408,9	2043,1	2640	1889,1	2371,9	

Для наочності дані представляємо у вигляді наступної діаграми:



*Рис.3.4. Динаміка щомісячних надходжень ПДФО (тис.грн) по Ширяївській ДПІ за 2009-2014 роки.*

Візуальний аналіз ряду динаміки дозволяє зробити висновок, що йому притаманні наступні характерні особливості:

А) прослідковується довгострокова, детермінована часом еволюція – тренд, який описується функцією часу  $f(t)$ , причому, цей тренд – лінійний (;

Б) сезонні коливання  $S_t$ ;

В) випадкові коливання  $e_t$ .

Зв'язок між цими складовими динамічного ряду представляється у цьому випадку адитивно (сумою):

$$y_t = f(t) + S_t + e_t,$$

де  $y_t$  - рівень ряду динаміки у момент часу  $t = 1, 2, \dots, 64$ .

Для визначення сезонної складової побудуємо динаміку надходжень ПДФО по рокам:

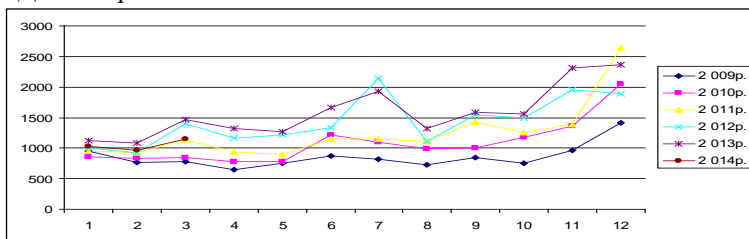


Рис.3.5. Динаміка надходжень (тис.грн) ПДФО по рокам.

Отримана діаграма дозволяє зробити висновок про наявність річної сезонності (на лозі 12).

Для оцінювання ступеня залежності рівнів ряду використаємо одразу графік частинної автокореляційної функції (ЧАКФ), бо він дає більш «чисту» картину:

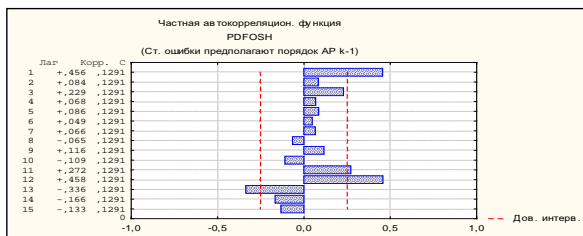


Рис.3.6. Графік ЧАКФ динамічного ряду.

За швидкістю згасання ЧАКФ можна зробити висновок про наявність автокореляції першого порядку на лозі 1. В результаті досліджень динаміки для моделювання застосовуємо адитивну модель ARIMA\*ARIMAS із сезонним лагом 12:

$$y_t = p_{t-1}y_{t-1} + a + bt - q_{t-1}e_{t-1} + S_t,$$

де  $y_t$  - рівні ряду динаміки у моменти часу  $t = 1, 2, \dots, 60$ ;  $f(t) = a + bt$  - трендова компонента;  $p_{t-1}$  - коефіцієнт авторегресії першого порядку;  $q_{t-1}$  - коефіцієнт моделі ковзного середнього;  $e_{t-1}$  - іррегулярна компонента (випадкові відхилення або так званий «білий шум»).

Для знаходження сезонних коефіцієнтів застосуємо згладжування ковзною середньою першого порядку:  $S_t = c + Q_{t-1}S_{t-1}$ . Параметри моделі оцінюємо із 95% рівнем довіри (або 5% ступенем ризику) за умови мінімізації

MSE – середнього квадрату похибки:  $MSE = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \tilde{y}_i)^2}{n}$ , де  $y_i$  – фактичні, а  $\tilde{y}_i$  – прогнозовані значення показника у  $i$ -му періоді.

Результати роботи модуля «Часові ряди та прогнозування» відображені нижче:

Перемінна: PDFOSH

Преобразованія: D(1)

Модель: (1,1,1)(0,0,1) Сезонный лаг: 12

Число набл.:59 Начальная SS=1154E4 Итоговая SS=5218E3 (45,21%) MS=93176,

Параметры (p/Ps-авторегрессии, q/Qs-скольз. средн.); выделение: p<.05

p(1) q(1) Qs(1)

Оценка: 1,3341 ,84900 -,5892

Ст.ошиб.: ,17522 ,09635 ,10904

Результати моделювання та прогнози на 2014 рік:

Таблиця 3.15. Результати моделювання (оцінки параметрів моделі ARIMA\*ARIMAS) та прогнози на 2014 рік

Исход.:PDFOSH (Таблица данных1) Преобразованія: D(1) Модель(1,1,1)(0,0,1) Сезонный лаг: 12 MS Остаток= 93176,						
Параметр	Парам.	Асимпт. Ст.ошиб.	Асимпт. t( 56)	p	Нижняя 95% дов.	Верхняя 95% дов.
p(1)	0,133412	0,175220	0,76140	0,449612	-0,217595	0,484420
q(1)	0,849005	0,096347	8,81197	0,000000	0,655999	1,042011
Qs(1)	-0,589198	0,109042	-5,40340	0,000001	-0,807636	-0,370760
Прогнозы; Модель:(1,1,1)(0,0,1) Сезонный лаг: 12 (Таблица.sta) Исход.:PDFOSH Начало исходных: 1 Конец исходн.: 60						
Набл. N	Прогноз	Нижний 90,0000%	Верхний 90,0000%	Ст.ошиб.		
61	1702,535	1152,001	2213,068	305,2477		
62	1609,682	1078,902	2140,462	317,3531		
63	1700,696	1261,222	2240,170	322,5510		
64	1660,858	1113,935	2207,780	327,0046		
65	1608,731	1054,600	2162,862	331,3146		
66	1803,099	1241,870	2364,327	335,5582		
67	1692,166	1123,931	2260,401	339,7474		
68	1688,968	1113,812	2264,124	343,8853		
69	1765,271	1183,276	2347,265	347,9741		
70	1708,595	1119,842	2297,349	352,0153		
71	2007,881	1412,445	2603,316	356,0107		
72	2272,265	1670,221	2874,309	359,9617		

Враховуючи складну політичну та економічну ситуацію в країні, при плануванні майбутніх щомісячних надходжень від ПДФО будемо користуватись песимістичними прогнозами із коригуванням (знижкою на 10%). Отже, із 95% надійністю за моделлю ARIMA\*ARIMAS, надходження ПДФО становитимуть: у січні 2014 року – 1152,001-115=1137,001 тис.грн; у лютому 2014 року – 1078,902-108=970,902 тис.грн; у березні 2014 року – 1261,222-126=1135,222 тис.грн тощо.

Висока адекватність моделі підтверджується тим, що порівняння прогнозованих за нашою моделлю значень надходжень ПДФО із фактичними значеннями за ці три місяці (за даними Ширяєвської ДПП) дають малі відносні похибки прогнозування: для січня  $\delta = \frac{|1137,001 - 1029,4|}{1029,4} = 0,007$  (або 0,7%), для лютого  $\delta = \frac{|970,902 - 971,1|}{971,1} = 0,0001$  (або 0,01%) а для березня 2014 року  $\delta = \frac{|1135,222 - 1145,1|}{1145,1} = 0,008$  (або близько 0,8%).

Зауважимо, що при середньостроковому прогнозуванні (на 2014-2015 роки) слід використовувати трендову модель, побудовану на річних фактичних надходженнях за минулі роки.

*Приклад 3.5. Моделювання та прогнозування надходжень від земельного податку в період кризи.*

Кризові явища в економіці України роблять особливо актуальними аналіз динаміки бюджетних надходжень та прогнозування, тобто науково обгрунтоване передбачення розвитку і визначення способів здійснення економічних процесів. На підставі прогнозованих обсягів податкових надходжень визначають планові обсяги, котрі, взагалі кажучи, припускаються дещо меншими, ніж середнє значення прогнозованого обсягу. У даному прикладі виконується економіко-математичне моделювання та прогнозування динаміки щомісячних доходів (в тис.грн) від земельного податку по м.Миколаїв за фактичними даними 2006-2010 років до місцевих бюджетів:

*Таблиця 3.16. Динаміка щомісячних надходжень земельного податку по м.Миколаїв за 2006-2010 роки, тис. грн.*

Місяць	Рік	2006	2007	2008	2009	2010
Січень		1817,373	2225,411	3035,49	4882,031	5 685,985
Лютий		2142,055	2279,155	4689,295	5127,666	6 106,084
Березень		2278,351	2592,851	4946,552	5604,887	6369,36
Квітень		2235,074	2555,564	4585,283	5546,829	6504,051
Травень		2141,123	2535,862	5697,631	5248,921	6202,084
Червень		2105,924	2507,074	5122,647	5862,397	6468,279
Липень		2314,499	2803,644	6251,629	5774,1	6757,276
Серпень		2312,657	2855,473	5088,097	6025,862	
Вересень		2181,483	2491,986	5425,88	6663,155	
Жовтень		2285,491	2673,041	4869,972	5612,597	
Листопад		2314,919	2646,355	4830,467	6346,807	
Грудень		2473,77	2989,209	5139,177	5993,939	

Аналіз ряду динаміки щомісячних надходжень дозволяє зробити висновок, що йому притаманні наступні характерні особливості: а) прослідковується довгострокова, детермінована часом еволюція – тренд, який описується функцією часу  $f(t)$ ; б) сезонні коливання  $S_t$ ; в) випадкові коливання  $e_t$ . Зв'язок

між цими складовими динамічного ряду представляється адитивно:  $y_t = f(t) + S_t + e_t$ , де  $y_t$  - рівень ряду динаміки у момент часу  $t = 1, 2, \dots, 54$ .

Для надходжень від земельного податку по м. Миколаїв аналіз динаміки щомісячних доходів (при моделюванні використовувалась програма Statistica) дозволяє виявити наступні особливості: а) прослідковується чітко виражена тенденція до зростання - лінійний тренд з інтервенцією (різке збільшення доходу) у лютому 2008 року; б) відносно незначний зв'язок між надходженнями у сусідні місяці, що підтверджується корелограмами – графіками АКФ та ЧАКФ:

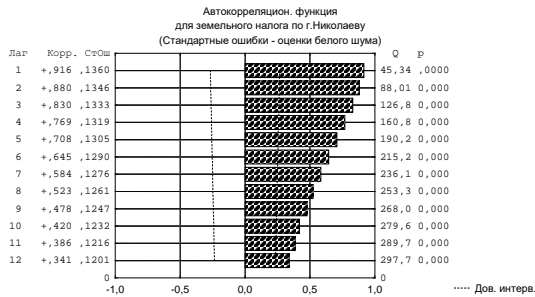


Рис.3.7. Автокорреляційна функція для земельного податку по м. Миколаїв

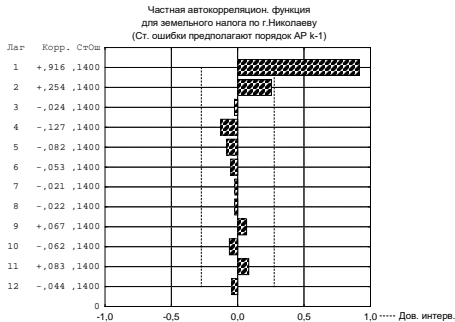


Рис.3.8. Частинна автокорреляційна функція для земельного податку

Це вказує на наявність сезонності з періодом 12 місяців і визначає перший порядок авторегресії. Такі особливості динаміки добре описує модель ARIMA\*ARIMAS із інтервенцією і сезонним лагом 12, причому для приведення процесу до стаціонарного вигляду використовуємо оператор різниці першого порядку. Основна модель ARIMA матиме вигляд:

$$y_t = p_{t-1}y_{t-1} + a + bt - q_{t-1}e_{t-1} ,$$

де  $y_t$  - рівні ряду динаміки у моменти часу  $t = 1, 2, \dots, 54$ ;  $f(t) = a + bt$  - тренд-циклічна компонента;  $p_{t-1}$  - коефіцієнт авторегресії першого порядку;  $q_{t-1}$  -

коефіцієнт моделі ковзного середнього;  $e_t$  - іррегулярна компонента (випадкові відхилення або так званий «білий шум»).

Для знаходження сезонних коефіцієнтів застосовувалось згладжування ковзною середньою першого порядку:

$$S_t = c + Q_{t-1} S_{t-1},$$

Параметри моделі оцінювались із 95% рівнем довіри (або 5% ступенем ризику) за умови мінімізації MSE – середнього квадрату похибки:

$$MSE = \sum_{i=1}^{54} \frac{(y_i - \tilde{y}_i)^2}{54}, \text{ де } y_i - \text{фактичні, а } \tilde{y}_i - \text{прогнозовані значення показника у } i\text{-му періоді.}$$

Переменная: *mykzem06*

Преобразование: *D(1)*

Модель: *(1,1,1)(0,0,1)* Сезон.: *12* Интервенции: *1*

Число набл.: *53* Начальная SS=*1201E4* Итоговая SS=*5560E3 (46.29%)* MS=*1135E2*

Параметры (p/Ps - авторегрессии, q/Qs-скользя. средн.); выделение: *p<.05*

*p(1) q(1) Qs(1) Om(1)*

Оценка: *-.5703, 10474, -2936 1739,2*

Ст.ошиб.: *.18242, .21928, .18143 271, 05*

Зведенням прогнозів по кожній складовій в один виконується точкове прогнозування надходжень від земельного податку у третьому кварталі (липні-вересні) 2010 року:

*Таблиця 3.17. Прогнозування надходжень від земельного податку у третьому кварталі (липні - вересні) 2010 року, тис. грн.*

Місяць	Прогноз	Нижній 90,0000 %	Верхній 90,0000%	Стандартна похибка
червень	6662,990	5768,675	6898,125	336,8374
серпень	6518,959	5925,169	7112,750	354,1736
вересень	6662,990	5946,523	7379,458	427,3462

Таким чином, із 90% надійністю середньоочікувані надходження від земельного податку по м.Миколаїв у липні 2010 року становлять 6662,99 тис.грн і коливаються від 5768,675 тис.грн (песімістичний прогноз) до 6898,125 тис.грн (оптимістичний прогноз). Зауважимо, що фактичні надходження земельного податку по м. Миколаїв у липні 2010 року становили 6757,276 тис.грн, що наближається до оптимістичного за нашою моделлю прогнозування. Відносна похибка прогнозування надходжень для липня 2010 року становить  $\delta = \frac{|6757,276 - 6662,99|}{6662,99} = 0,01415$  (або 1,4%), що свідчить про достовірність прогнозу.

Виконаємо прогнозування обсягів надходжень земельного податку із урахуванням ризику. Кількісна оцінка міри економічного ризику (зокрема, ризику податкових надходжень) є вектором, компоненти якого формуються залежно від мети дослідження, прийнятої системи гіпотез, суб'єктивного чинника, який характеризує ставлення суб'єкта ризику до невизначеності, конфліктності тощо. Одна група компонент цього вектора характеризує ризик як об'єктивну економічну категорію, решта – які враховують ставлення до



ризик суб'єкта прийняття рішень (СПР) – розглядаються як суб'єктивні складові міри ризику. У статистичному моделюванні та прогнозуванні за показник ступеня середнього ризику зазвичай обирається математичне сподівання квадрата різниці між розрахунковими і фактичними значеннями прогнозованого економічного показника. Мінімізація ступеня середнього ризику дозволяє найбільш обґрунтовано виявити закономірності і реально існуючі суттєві взаємозв'язки. Очевидно, що ступінь ризику (ймовірність) недовиконання планового обсягу податкових надходжень повинен бути якомога меншим. Відсоток недовиконання планових податкових надходжень, у свою чергу, може розглядатись як один із показників суб'єктивної оцінки міри ризику. Він може задаватись нормативно залежним від ставлення СПР до ризику та до обсягів прогнозованих величин, які задаються певним інтервалом значень (інтервальний прогноз). При цьому визначимо як одну із компонент вектора податкового ризику ймовірність можливого недовиконання планових податкових надходжень. Обчислимо ступінь ризику на 0,1%-му рівні можливого недовиконання середнього прогнозованого обсягу надходжень  $y_p$  земельного податку у липні 2010 року (надалі розглядаються щомісячні надходження по м. Миколаїв):

$$P(y \leq 0,999y_p) = 1 - \Phi\left(\frac{0,001y_p}{V}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0,001y_p}{\sigma}\right),$$

де  $V = \frac{\sigma}{y_p}$  - аналог коефіцієнта варіації;  $\sigma$  - похибка прогнозу (стандартне

відхилення), отримане на базовому інтервалі;  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  - інтегральна

функція нормального розподілу  $N(0;1)$ . Вважаючи, що плануватиметься середньоочікуваний рівень надходжень  $y_p = 6662,99$  (тис.грн), ймовірність 0,1%-го

недовиконання

становитиме

$$P(y \leq 0,999y_p) = 1 - \Phi\left(\frac{0,001y_p}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0,001 \cdot 6662,99}{20,66}\right) = 1 - \Phi(0,3225) = 0,374.$$

Як бачимо, ступінь ризику на 0,1%-му рівні можливого недовиконання середнього прогнозованого обсягу надходжень від земельного податку у липні 2010 є досить значним (понад 37%). Тому є сенс встановити планове значення надходжень дещо меншим від прогнозованого:  $y_{pl} = k \cdot y_p$ , де  $y_{pl}$  - плановий обсяг надходжень,  $k$  - коригуючий коефіцієнт (відношення обсягів планових надходжень до прогнозованих).

Розглянемо ризик на 0,1%-му рівні можливого недовиконання середнього прогнозованого обсягу податкових надходжень  $y_p$  у липні 2010 року, якщо плановий обсяг  $y_{pl}$  зменшити на 0,5% ( $k = 0,995$ ):

$$P(y \leq 0,995y_{pl}) = P(y \leq 0,995 \cdot 0,999y_p) = 1 - \Phi\left(\frac{0,006y_p}{\sigma}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{0,006 \cdot 6662,99}{20,66}\right) = 1 - \Phi(1,9334) \approx 0,0265 \text{ або } 2,65\%.$$

Як бачимо, ступінь ризику недовиконання запланованих надходжень суттєво знизився (із 37,4% до 2,65%).

Можна розглянути і обернену задачу: на якому рівні (меншому від середньопрогнозованого) потрібно встановити планові надходження, щоб зменшити ризик 0,1% недоотримання запланованих обсягів податкових надходжень до встановленого рівня. Такий підхід дозволяє за заданою величиною компоненти векторної оцінки міри ризику (ймовірності недовиконання надходжень) розрахувати величину планових надходжень як частку від їхнього прогнозованого обсягу.

Розрахуємо величину податкового ризику недовиконання планових надходжень при прогнозуванні на наступний місяць та його зниження введенням коригуючого коефіцієнта.

Для розрахунків використаємо формулу:

$$P(y') = P\left(y \leq \left(1 - \frac{y'}{100}\right) y_{pl}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{(1 - k + y'k/100) y_{pl}}{\sigma}\right),$$

де  $y'$  - величина недовиконання планових показників (в %).

Зведемо результати в таблицю:

*Таблиця 3.18. Ступінь ризику (ймовірність) недовиконання планових надходжень (при прогнозуванні на наступний місяць)*

% недо- вико- нання	$k = 1,000$	$k = 0,999$	$k = 0,998$	$k = 0,997$	$k = 0,996$	$k = 0,995$
0	0,500000	0,373534	0,259459	0,166642	0,098521	0,053423
0,1	0,373534	0,259564	0,166803	0,098689	0,053563	0,026592
0,2	0,259459	0,166803	0,098745	0,053634	0,026651	0,012088
0,3	0,166642	0,098689	0,053634	0,026671	0,012108	0,005009
0,4	0,098521	0,053563	0,026651	0,012108	0,005014	0,001889
0,5	0,053423	0,026592	0,012088	0,005009	0,001889	0,000648
0,6	0,026493	0,012047	0,004995	0,001885	0,000647	0,000202
0,7	0,011987	0,004972	0,001877	0,000645	0,000201	0,000057
0,8	0,004939	0,001866	0,000641	0,000200	0,000056	0,000014
0,9	0,001851	0,000636	0,000199	0,000056	0,000014	0,000003
1	0,000630	0,000197	0,000055	0,000014	0,000003	0,0000007

Як видно із таблиці ризику суттєво зменшуються при зменшенні запланованих обсягів надходжень. При збільшенні горизонту прогнозування

(наприклад, при прогнозуванні на наступний квартал або рік) ризики зростатимуть. Відмітимо, що ці розрахунки ризиків лише вказують на необхідність зменшення (у порівнянні із середньопрогнозованими) планових обсягів податкових надходжень для зниження ступенів ризику недовиконання плану.

Крім складової міри ризику як ймовірності недовиконання запланованого обсягу податкових надходжень, обчисленого на базі їхнього прогнозованого обсягу, можна увести інтегрований показник ступеня ризику:

$$R(k, s) = sR_1(ky_p, y_p^*) + (1 - s)R_2(ky_p),$$

де  $R_1(ky_p, y_p^*)$  - показник ступеня ризику невикористаних можливостей,  $y_p^*$  - оптимістична оцінка обсягів надходжень;  $R_2(ky_p)$  - показник ступеня ризику як ймовірність недовиконання планових надходжень (який розраховувався вище),  $y_p$  - середній прогнозований обсяг надходжень,  $k$  - коригуючий коефіцієнт. Величина  $0 \leq s \leq 1$  визначається залежно від пріоритетів, які вказують на те, що важливіше для СПР: не допустити недовиконання планових надходжень чи не запланувати занадто низький бюджет. Так, наприклад, значення  $s = 0,9$  характеризує відношення СПР до ризику як близького до «рожевого» оптиміста, який занадто сподівається на збільшення доходів за рахунок невикористаних можливостей. І навпаки, значення  $s = 0,1$  може характеризувати відношення СПР до ризику як песиміста, який не розраховує на підвищення доходів. А значення  $s = 0,5$  свідчить про нейтральне ставлення СПР до ризику.

При застосуванні інтегрованого показника необхідно розрахувати показник ступеня ризику невикористаних можливостей  $R_1(ky_p, y_p^*)$ . Для цього, наприклад, можна дослідити динаміку ухилянь або несвоєчасних сплат відповідних податків.

Економічно обґрунтоване моделювання та прогнозування податкових надходжень дозволяє зменшити ризики недовиконання бюджетів, що є запорукою сталого економічного розвитку як України в цілому, так і її окремих регіонів. Проведене нами моделювання та прогнозування надходжень від земельного податку до місцевих бюджетів в період кризи, дозволило зробити висновок про достовірність прогнозу, здійсненому за запропонованою моделлю, а також дозволило рекомендувати органам Державної податкової служби, керівниками фінансових управлінь міських рад використовувати зазначену модель у своїй практичній діяльності.

*Приклад 3.6. Моделювання та прогнозування індексу українських облігацій (UB).*

Дана задача виникла у зв'язку з дослідженнями, пов'язаними із розрахунками параметрів гібридних програмно-цільових (для реалізації крупних структурних проектів) облігацій (у фінансовій інженерії розглядаються гібридні фінансові інструменти, показники яких прив'язуються до різних фінансових ринків).

За результатами попередньо проведеного дослідження визначимо плаваючу купонну ставку гібридної облігації за умовою:  $q(t) = \max\{q_b; q_b + \Delta(t)\}$ ; де  $q(t)$  - купонна ставка на момент  $t$ ,  $q_b$  - базова ставка купону,  $\Delta(t)$  - купонна надбавка.

На наш погляд, показники для корегування доходності до моменту продажу (викупу) облігації (при емісії та обігу на вторинному ринку) та цін  $P_{buy}$  - придбання і  $P_{sell}$  - продажу облігації повинні відображати загальні тенденції щодо стану ринку відповідних цінних паперів, у даному випадку - облігацій. Пропонується використовувати індекси українських облігацій (UB), що знаходяться у біржовому списку. На українському фондовому ринку працюють вже чимало фондових бірж. Лідируюча роль у торгівлі державними облігаціями належить фондовій біржі «Перспектива», що займала 80% у структурі торгів 2013 року. За обсягами біржової торгівлі корпоративними облігаціями перше місце займає ПФТС (57 % торгів), частка біржі «Перспектива» у цьому сегменті фондового ринку склала у 2013 р. 24,2%. Показники індексу українських облігацій (UB) можуть використовуватися для корегування різних показників гібридно-цільових облігацій. Звичайно, більш зваженим підходом для вибору індексу облігацій є використання середньозваженого індексу, який враховуватиме зміни ринкових цін облігацій на різних торгових площах, причому, зважування індексів за різними біржами може проходити за показником обсягу торгів на певний період, але, на жаль, зазначені біржі використовують різні підходи до визначення індексу облігацій, що унеможлиблює їх використання як середньозважених для використання у розрахунках.

Показники доходності по корпоративним облігаціям повинні бути конкурентоспроможними порівняно з ОВДП, які мають значно менший ризик. За офіційними даними НБУ середньозважена дохідність за ОВДП за строком розміщення понад 5 років, що корелює з облігаціями під реалізацію інфраструктурних проектів, дорівнює 14,3%. Динаміка змін середньозваженої доходності за ОВДП за строком розміщення понад 5 років відображається за первинним розміщенням облігацій за кожний місяць звітного періоду та середньорічна, що створює інформаційно-облікову базу для визначення коефіцієнтів корегування.

Далі проведемо дослідження ринку цінних паперів, а саме, показник індексу українських облігацій (UB). Як вже відзначалось, лідируюча роль у торгівлі облігаціями належить фондовій біржі «Перспектива». Тому розглянемо щоденну динаміку за період з 2.01.2013 року по 30.05.2014 року:

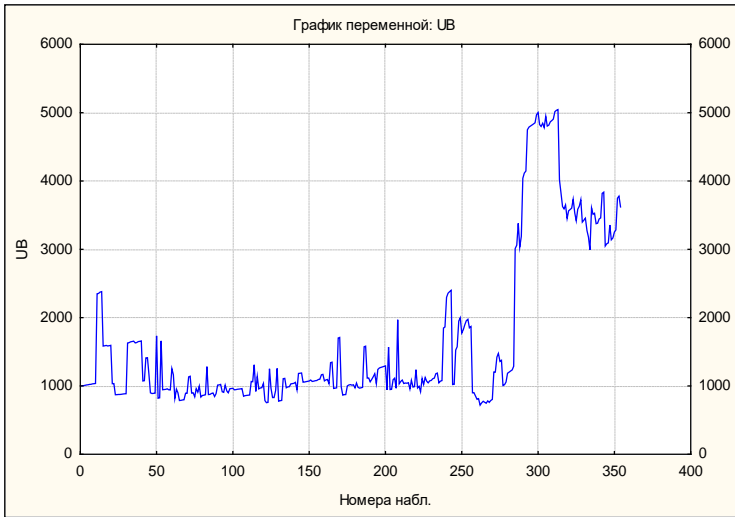


Рис.3.9. Щоденна динаміка індексу українських облігацій (UB) з 2.01.2013 по 30.05.2014.

Аналіз ряду динаміки дозволяє зробити висновок, що йому притаманні наступні характерні особливості: а) прослідковуються досить значні коливання навколо деяких констант; б) спостерігається стрибок індексу UB 18.02.2014 року (різке підвищення майже на 1730 пунктів); в) випадкові коливання  $e_t$ . Зазначимо, що згідно методики біржі «Перспектива» індекс  $UB_t$  на момент часу  $t$

розраховується за формулою:  $UB_t = UB_{t-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n R_{i,t} V_{i,t}}{\sum_{i=1}^n R_{i,t-1} V_{i,t}} \cdot Z_t$ , де  $t$  - поточний період

(момент, станом на який розраховується індекс);  $t-1$  - попередній період (момент закриття Торговельної сесії попереднього Торговельного дня);  $i$  - випуск облігацій у Списку;  $n$  - кількість випусків облігацій у Списку;  $R_{i,t}$  - ефективна доходність облігації  $i$ -го випуску у поточний момент, %;  $V_{i,t}$  - номінальна капіталізація (загальний номінальний обсяг)  $i$ -го випуску облігацій, грн.;  $Z_t$  -

поправочний коефіцієнт для поточного періоду. Очевидно, що відповідно вищезгаданий методиці стрибки індексу облігацій відбуваються при виході на біржу значних емісій популярних облігаційних серій (наприклад, за рахунок випусків ОВДП). Далі виконаємо моделювання та прогнозування динаміки індексу UB за так званою моделлю ARIMA або АРІКС – авторегресії та проінтегрованого ковзного середнього.

Як відомо, характерною властивістю будь-якого динамічного ряду є залежність рівнів: значення  $UB_t$  певною мірою залежить від попередніх значень:  $UB_{t-1}$ ,  $UB_{t-2}$  і т.д. Для оцінювання ступеня залежності рівнів ряду використовують коефіцієнти автокореляції  $r_p$  з часовим лагом  $p = 1, 2, \dots, m$ , які характеризують щільність зв'язку між первинним рядом і цим же рядом, зсуненим на  $p$  моментів. Послідовність коефіцієнтів  $r_p$  називають автокореляційною функцією (АКФ) і зображують графічно у вигляді автокорелограми. За швидкості згасання АКФ можна зробити висновок про характер динаміки (див. наступну діаграму):

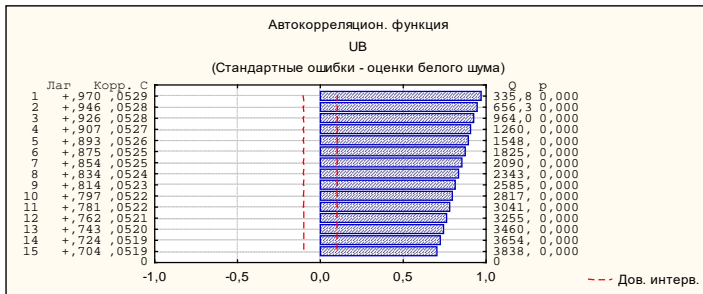


Рис.3.10. Графік та значення АКФ динаміки  $UB_t$ .

Графік АКФ свідчить про наявність автокореляції першого порядку на лазі 1. Для виявлення більш «чистої» картини (наявності або відсутності автокореляції більш високого порядку) проаналізуємо графік ЧАКФ (частинної автокореляційної функції), тобто кореляції зі зсувом ще на один крок:

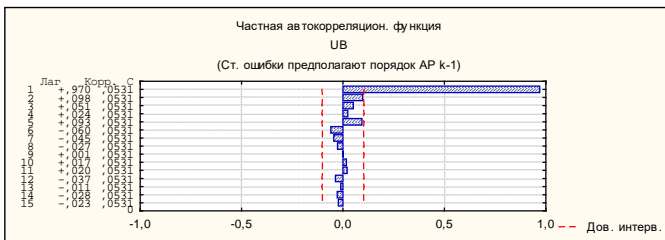


Рис.3.11. Графік та значення ЧАКФ динаміки  $UB_t$ .

Графік ЧАКФ підтверджує наявність лише автокореляції першого порядку. Для приведення процесу до стаціонарного виду застосовуємо до ряду  $UB_t$  оператор різниці першого порядку на ланці 1:  $d(1)=UB_t - UB_{t-1}$ . А при моделюванні та прогнозуванні динаміки  $UB_t$  використаємо модель ARIMA із інтервенцією на 285 рівні (18.02.2014 року).

Відмітимо, що для порівняння точності прогнозування обираємо при моделюванні лише 335 рівнів  $UB_t$  ( $UB1$ ), залишивши для прогнозу наступні рівні.

Отже, модель ARIMA матиме наступний вигляд:  $UB_t = const + p(1)UB_{t-1} - q(1)e_t$ ,

оцінки параметрів якої отримуємо із використанням модуля «Часові ряди та прогнозування» програми Statistica (див. наступну таблицю).

Таблиця 3.19. Оцінки параметрів авторегресійної моделі динамічного ряду

Исход.: UB1 (Таблица.sta) Преобразование: D(1) (Прерванная АРПСС) Модель(1,1,1) MS Остаток= 62513,								
Параметр	Парам.	Асимпт. Ст.ошиб.	Асимпт. t( 330)	p	Нижняя 95% дов.	Верхняя 95% дов.	Интерв. Набл. N	Интерв. Тип
Конст.	1,834	8,3897	0,218648	0,827059	-14,670	18,338		
p(1)	0,514	0,2374	2,165978	0,031029	0,047	0,981		
q(1)	0,705	0,2030	3,472670	0,000584	0,306	1,104		
Омега(1)	1838,109	261,2105	7,036887	0,000000	1324,261	2351,956	285	ск/уст

На відміну від детермінованої складової випадкова складова  $e_t$  не зв'язана зі зміною часу. Аналіз цієї складової є основою перевірки гіпотези про адекватність моделі реальному процесу (див. наступну діаграму):

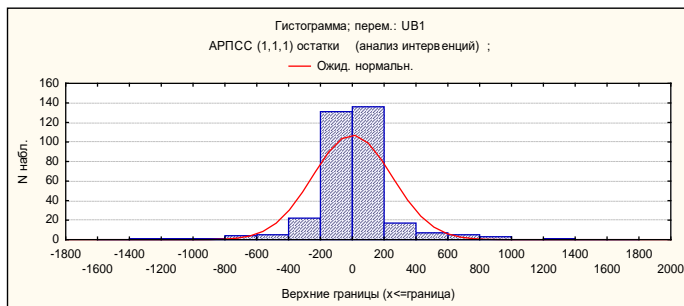


Рис.3.12. Графік залишків при моделюванні динаміки  $UB_t$  та порівняння їх із нормальним розподілом.

Робимо висновок про достатню адекватність моделі та виконуємо прогнозування на наступні періоди:

Таблиця 3.20. Прогнози  $UB_t$  за моделлю ARIMA

Набл. N	Прогнози; Модель:(1,1,1) 1 інтервенції (Таблиця.s Исход.:UB1 Начало исходных: 1 Конец исходн.: 335			
	Прогноз	Нижний 95,0000%	Верхний 95,0000%	Ст.ошиб.
336	3539,292	3047,445	4031,139	250,0266
337	3506,971	2874,260	4139,682	321,6338
338	3491,240	2768,297	4214,183	367,5024
339	3484,040	2691,435	4276,646	402,9150
340	3481,229	2629,367	4333,091	433,0375
341	3480,674	2575,655	4385,692	460,0593
342	3481,279	2527,132	4435,426	485,0332
343	3482,482	2482,138	4482,825	508,5170
344	3483,991	2439,748	4528,234	530,8327
345	3485,658	2399,415	4571,901	552,1831

Порівняємо результати прогнозування на травень 2014 року за моделлю ARIMA із фактичними значеннями:

Таблиця 3.21. Прогнози  $UB_t$  за моделлю ARIMA та фактичні значення

Прогнози	Факт
3539,292	3511,1209
3506,971	3525,3314
3491,240	3473,5498
3484,040	3479,4659
3481,229	3440,7611
3480,674	3457,0099
3481,279	3487,6691
3482,482	3455,5293
3483,991	3456,2835
3485,658	3479,0848

Як бачимо, максимальна відносна похибка прогнозування:

$$\delta_{\max} = \frac{\max |UB_t^{\text{прогноз}} - UB_t^{\text{факт}}|}{\min UB_t^{\text{факт}}} \leq \frac{40}{3440} = 0,011, \text{ тобто, не перевищує } 1,1\%, \text{ і це свідчить}$$

про можливість застосування ARIMA з інтервенцією для моделювання та прогнозування динаміки індексу  $UB_t$ .



Дослідження останніх років динаміки різноманітних фінансових показників, зокрема, біржових індексів, свідчать про необхідність застосування при моделюванні цих показників більш складних математичних моделей, а саме, моделей ARIMA із гетероскедастичною складовою (ARCH), узагальнених авторегресійних із гетероскедастичністю (GARCH), нейромережевих моделей тощо.

ARCH, GARCH моделі з авторегресійною умовною гетероскедастичністю.

У 2003 році американець Роберт Еngle (Robert R. Engle) отримав Нобелівську премію за розробку методів аналізу економічних часових рядів на основі математичної моделі з авторегресійною умовною гетероскедастичністю (ARCH). Дана модель дозволяє прогнозувати тенденції зміни фінансових індексів: ВВП, споживчі ціни, процентні ставки, біржові курси тощо, як на найближчий день, так і на тиждень і навіть на рік вперед.

Динамічні ряди зазвичай представляються у вигляді суми двох компонент, одна із яких змінюється випадково, а інша підкоряється певному закону. На фінансових ринках випадкові відхилення показника від постійного значення з плином часу (так звана волатильність – умовна варіація дохідності базового активу або тенденція змінюваності ціни) особливо важливі, оскільки застосування у ризик-менеджменті для VaR-оцінювання, вартість акцій, опціонів (зокрема, модель Блека-Шоулза європейського опціону «колл») та інших фінансових інструментів залежить від рівня їх ризиковості. Коливання можуть суттєво змінюватись у часі: періоди сильних змін чергуються із періодами незначних коливань. Не дивлячись на зміну волатильності, економісти застосовували статистичні методи, в яких передбачалось, що волатильність незмінна. У 1982 році Engle виявив, що модель ARCH дуже точно описує часові ряди, які зустрічаються в економіці. Його метод (а також різноманітні узагальнення) зараз активно використовується фінансовими аналітиками для оцінки вартості активів та ризиків портфельних інвестицій, змін цін акцій, валютних курсів, дохідності спекулятивних активів тощо.

Розглянемо, наприклад модель AR(1) (ARIMA(1)):  $y_t = \gamma y_{t-1} + e_t$ , де  $e_t$  - випадковий гаусівський процес із постійною дисперсією  $\sigma^2$  (а при стандартизації має нульове математичне сподівання та одиничну дисперсію). Процес  $e_t$  є авторегресійно умовно гетероскедастичним (ARCH - Autoregressive Conditionally Heteroskedastic), якщо умовне математичне сподівання дорівнює нулю, але умовна дисперсія є залежною від часу, наприклад за Engle:  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q e_{t-q}^2$ , де  $\omega > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0$  для того, щоб умовна дисперсія залишалась додатною з імовірністю 1. Великі за абсолютною величиною значення реалізації процесу в безпосередньому минулому тягнуть за собою збільшення умовної дисперсії в даний момент, і, значить, умовної ймовірності

появи знову великої по модулю реалізації  $e_t$ . Навпаки, відносно невеликі значення  $e_{t-1}, \dots, e_{t-q}$  призводять до зменшення цієї ймовірності. Таким чином, ARCH –процес характеризується інерційністю умовної дисперсії (або – кластеризації волатильності (clustering volatility – концентрації волатильності). Такий ефект відмічається для багатьох високочастотних економічних рядів динаміки: зміна цін акцій, валютних курсів, дохідностей спекулятивних активів.

Найпростіша ARCH(1) модель має вигляд:  $y_t = \sigma_t e_t$ ,  $\sigma_t^2 = a_0 + a_1 y_{t-1}^2$ , де  $e_t \in N(0,1)$ . Параметри  $a_0, a_1 \geq 0$  для невід'ємності дисперсії. Ефективні оцінки параметрів, як правило, отримують методом максимальної правдоподібності (ММП).

Успіх умовно-гаусівської моделі ARCH(q), яка дала пояснення цілому ряду феноменів у поведінці фінансових індексів (кластерність, важкі хвости щільності розподілу величин  $y_t$ ), породив цілу низку різноманітних узагальнень цієї моделі, що переслідували мету пояснити ряд інших феноменів.

Історично одним із перших узагальнень моделі ARCH(q) стала узагальнена ARCH-модель, або GARCH, запропонована Т.Боллерслемом (Т.Bollerslev) у 1986 році. Ця модель характеризується двома параметрами  $p$  та  $q$  і позначається GARCH(p,q). У цій моделі відносно формування волатильності передбачається, що  $\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$ , при цьому  $a_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$ .

Основною перевагою даної моделі є те, що при підгонці динамічного ряду GARCH(p,q)-моделями можна обмежитись невеликими значеннями  $p$  та  $q$ . У найпростішому варіанті GARCH(1,1):  $\sigma_t^2 = a_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$ , де  $a_0 > 0, \alpha_1 + \beta_1 < 1$  для обмеженості дисперсії.

Подальший аналіз фінансових часових рядів виявив наступний феномен: від'ємна кореляція величин  $y_{t-1}$  та  $\sigma_t$ :  $Cov(y_{t-1}, \sigma_t) < 0$ . Завдяки запропонованому економічному поясненню, цей феномен дістав назву левевердж-ефект (leverage effect). Пониження ринкової вартості акціонерного капіталу збільшує частку позичкових коштів до власних і, відповідно, підвищує ризиковість вкладень у фірму (а, як наслідок, збільшується волатильність). В результаті, майбутні значення волатильності від'ємно корелюють із поточною віддачею. Нельсон (Nelson) у 1991 році описував цей феномен наступним чином: «Від'ємні іновації, або «погані новини» - ситуація, коли фактична віддача нижче очікуваної – призводить до збільшення волатильності. Навпаки, додатні іновації («добрі новини» - фактична віддача вища за очікувану) ведуть до зниження волатильності». На практиці, при малій волатильності ціни поводять себе так, щоб їх зростання або падіння продовжувалось якомога довше. Аналогічно, при великій волатильності ціни немовби уповільнюють своє зростання або падіння, намагаючись повернути рух у протилежному напрямку. Цей ефект асиметрії

неможливо пояснити в рамках моделей ARCH та GARCH, оскільки в них волатильність не чутлива до знаку минулих рівнів динамічного ряду.

Для пояснення ефекту асиметрії Нельсоном (Nelson D.B.) у 1991 році запропонував модель EGARCH(p,q) (Exponential GARCH), в якій логарифм умовної дисперсії визначається за допомогою деякої функції стандартизованих похибок:  $\ln \sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i g(e_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2$ , в якій леввередж-ефект врахований за рахунок функції  $g(e_t) = \theta e_t + \gamma (|e_t| - E|e_t|)$ . Таким чином, в EGARCH-моделі  $\sigma_t^2$  залежить і від величини, і від знаку  $y_t$ , що дозволяє їй асиметрично реагувати на несподівані підйоми та спади ринку. Відзначимо дослідження різноманітних фондових індексів у роботах Bollerslev, Engle, Nelson за допомогою вищенаведених моделей та їх узагальнень.

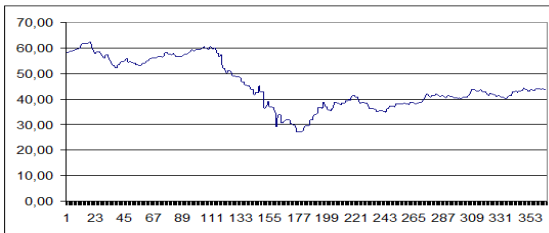
Залежність між очікуваною доходністю та ризиком є центральним аспектом теорії фінансових ринків. Традиційна модель ціноутворення капітальних активів (Capital Asset Pricing Model) та її динамічна модифікація Р.Мертон, арбітражна теорія ціноутворення С.Росса вказують на пропорційну залежність між очікуваною надлишковою доходністю ринкового портфеля і його умовною дисперсією. Природним інструментом для вивчення цієї проблеми в динаміці є ARCH-М (ARCH in Mean) модель, коли віддача та умовна дисперсія розвиваються у часі. Ці моделі передбачають явну функціональну залежність умовного середнього випадкової величини  $y_t$  від власної умовної дисперсії. Як правило, використовується лінійна залежність  $E(y_t / y_t) = \tau + \delta \sigma_t$ , яка має наступну інтерпретацію: очікувана доходність ринкового портфеля розпадається на дві компоненти – безризиковий дохід  $\tau$  та премію за ризик  $\delta \sigma_t$ . Економічні агенти очікують збільшення доходності у зв'язку зі наростанням невизначеності, коефіцієнт чутливості очікуваної доходності до змін умовного стандартного відхилення пов'язаний із мірою відносного несприйняття ризику (relative risk aversion) і передбачається додатним.

ARCH-М модель використовувалась для ідентифікації премії за ризик у часовій структурі процентних ставок та у зв'язку з гіпотезою ефективності валютного ринку. Під часовою структурою процентних ставок розуміється співвідношення між доходністю цінних паперів з різними строками погашення. Така структура ілюструється кривою доходу і демонструє менший дохід для короткострокових цінних паперів і більший – для довгострокових. Зростання ставок при русі від коротко- до довгострокових паперів можна пояснити зростаючим ризиком інвестування. Engle, Lilien, Robins моделювали різницю в доходності 6-ти та 3-х місячних казначейських векселів, використовуючи щоквартальні дані за період 1960-1984. Динаміка понаддоходності відносно більш довгих паперів (excess holding yield) виявила значиму компоненту, пов'язану зі зміною умовної дисперсії, але середнє значення цієї компоненти складає лише 0,14% за квартал. Гіпотеза ефективності валютного ринку

стверджує, що форвардний валютний курс є кращим незсуненим прогнозом майбутнього курсу готівкової валюти. Але практичні спостереження ставлять під сумнів ефективність валютного ринку у цьому сенсі. Зміщеність форвардного курсу не обов'язково свідчить про нераціональність учасників ринку і може бути маніфестацією премії за ризик. Емпірично тестувались (Kendall, McDonald) різноманітні апроксимації премій за ризик безпосередньо пов'язані з умовною дисперсією курсу спот і показали суперечливі результати відносно адекватності ARCH-М моделі, тому розробляються інші специфікації ARCH-моделей (IGARCH – інтегрована модель GARCH, CHARMA – модель ARMA з умовною гетероскедастичністю, RCA – авторегресійна модель із випадковими коефіцієнтами, SV – модель стохастичної волатильності тощо).

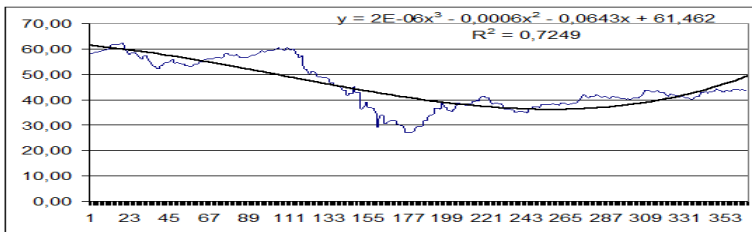
*Приклад 3.7. Моделювання та прогнозування курсу акцій компанії British Petroleum.*

Для моделювання використано дані ([www.bp.com](http://www.bp.com)) про динаміку курсу акцій компанії British Petroleum за період з 1 січня по 31 грудня 2010 року:



*Рис.3.13. Динаміка зміни курсу акцій British Petroleum у 2010 році*

Шляхом додавання на діаграмі лінії тренду з'ясовано, що найкращим виявився параболічний (третього порядку) тренд:



*Рис.3.14. Поліном третього ступеню у порівнянні з динамікою вихідного ряду*

Тому перетворимо вихідний ряд шляхом взяття кінцевих різниць третього порядку на ланці 3:  $x_t = y_t - 3y_{t-1} + 3y_{t-2} - y_{t-3}$



Рис.3.15. Графік третіх кінцевих різниць

Отримали майже стаціонарний ряд (математичне очікування – нульове, але спостерігаємо кластери дисперсії). Дійсно, проводячи різноманітні тести (Дікі-Фуллера, Сіджела-Тьюкі, Акайке, Шварца), з'ясуємо, що дисперсія похибки апроксимується моделлю ARCH(5):

$\sigma^2(e_t) = 0,199459 + 0,186017 \cdot e_{t-1}^2 + 0,099732 \cdot e_{t-2}^2 + 0,027316 \cdot e_{t-3}^2 + 0,279598 \cdot e_{t-4}^2 + 0,261907 \cdot e_{t-5}^2$ , причому усі коефіцієнти в моделі дисперсії похибки задовольняють умови Енгле (додатні, в сумі менші 1), тобто, модель зменшує дисперсію процесу.

Повертаючись до вихідного динамічного ряду, остаточно отримуємо модель AR(2)ARCH(5):  $y_t = 3 \cdot y_{t-1} - 3 \cdot y_{t-2} + y_{t-3} + e_t - 1,958e_{t-1} + 0,958e_{t-2}$ . У відповідності до отриманої моделі розрахуємо дані для вихідного ряду. В наступній таблиці представлені результати для останньої декади 2010 року:

Таблиця 3.22. Змодельований та фактичний курс акцій British Petroleum за 22-31 грудня 2010 року

Дата	Фактичні дані	Модель
22.12.2010	43,61	43,61142431
23.12.2010	44,00	43,68235904
24.12.2010	44,00	44,08660048
25.12.2010	44,00	44,08395011
26.12.2010	44,00	44,08141926
27.12.2010	43,97	44,07900268
28.12.2010	44,11	44,04544419
29.12.2010	43,95	44,18913526
30.12.2010	43,89	44,02015424
31.12.2010	44,17	43,95574309

Більш наочно представлені фактичні та змодельовані рівні динамічного ряду на графіку:

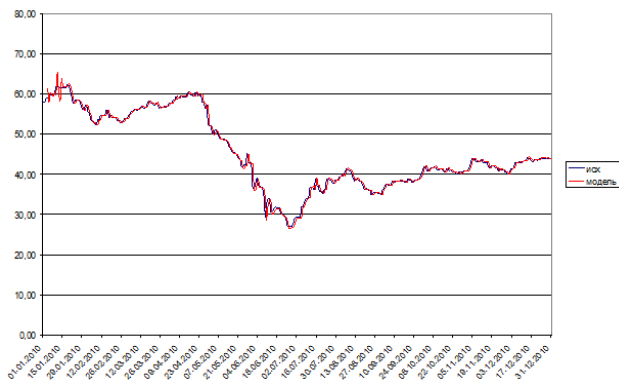


Рис.3.16. Змодельований та фактичний курс акцій British Petroleum за 2010 рік

За отриманою моделлю виконаємо прогнозування курсу на 1.01.2011 та 2.01.2011:

Таблиця 3.23. Прогнози

Дата	Прогноз	Фактичне значення
01.01.2011	44,2457091	44,17
02.01.2011	44,3224263	45,15

Як видно із таблиці, прогноз виявився досить точним. Фактична абсолютна похибка прогнозу на перше січня склала  $-0,0757$ , а на друге січня  $0,82757$ . Відносні похибки не перевищують  $1,8\%$ .

Динамічні факторні моделі DFM та DFMS (із марківськими перемикуваннями).

Динамічні факторні моделі DFM останнім часом посідають одне із чільних місць серед сучасних моделей короткострокового прогнозування різноманітних економічних показників. Розглянемо одразу узагальнення DFM – динамічну факторну модель з марківськими перемикуваннями на прикладі її застосування для розрахунку короткострокового прогнозу показників соціально-економічного розвитку РФ (у рамках ЄЄП: Республік Белорусь, Казахстан та Російської Федерації).

*Приклад 3.8. Модель короткострокового прогнозування показників соціально-економічного розвитку РФ.*

Побудована комп'ютерна модель короткострокового прогнозування показників соціально-економічного розвитку РФ, яка складається із двох компонент: перша – це прогноз за DFM моделлю; друга – за DFMS. DFMS модель, яку можна розглядати як комбінацію стандартної DFM і моделі для одного часового ряду з марківськими переключеннями (Hamilton). Основним

припущенням DFM є те, що динамічна поведінка усіх макроекономічних часових рядів, які спостерігаються, визначається відносно невеликою кількістю спільних факторів, які не спостерігаються (латентні або головні компоненти). Кожна змінна (латентна), таким чином є лінійною комбінацією факторів плюс ідіосинкратичний шум, обумовлений, наприклад, похибкою вимірювання. Потенційно DFM можуть містити досить велику кількість спостережуваних факторів, але це не призводить до «прокляття розмірності», як у випадку векторних авторегресій (VAR). Завдяки накладеній факторній структурі число оцінюваних параметрів зростає лінійно, а не квадратично, як у випадку VAR. Обґрунтована оцінка спільних неспостережуваних факторів може бути отримана за допомогою методу головних компонент (Stock and Watson). DFM із марківськими переключеннями (DFMS) базується на DFM більш раннього покоління, які оперували з відносно малою кількістю спостережуваних змінних (Stock and Watson), що дозволяло оцінювати їх методом максимальної правдоподібності (ММП). Ідею неспостережуваних марківських переключень між режимами вперше запропонував Hamilton, який застосував її для економетричної моделі часового ряду темпів росту ВВП. Під неспостережуваним режимом тут, як правило, розуміється фаза ділового циклу: пожвавлення або рецесія. На практиці має сенс казати про неспостережуваний стантьєкономіки як про режим і про ймовірність того, що вона знаходиться в одному із двох режимів. Якщо, наприклад, у якості змінної використати зростання реального ВВП, то просту модель із марківським переключенням можна розглядати як авторегресію першого порядку для зростання реального ВВП, у якій вільний член – випадкова величина, що набуває два значення: високе в режимі пожвавлення та низьке в режимі рецесії (тобто має сенс середнього темпу росту у відповідній фазі ділового циклу).

DFMS в усіх відомих специфікаціях (із опублікованих робіт: Chauvet, 1998; Kim and Nelson, 1999; Chauvet and Hamilton, 2006; Chauvet and Potter, forthcoming 2013) містить тільки один фактор, який інтерпретується як стан ділової активності. Передбачається, що динамічна поведінка цього неспостережуваного (латентного) фактору підкоряється простій марківській моделі з марківськими переключеннями між режимами – пожвавленням і рецесією. Для оцінки цього латентного фактора «ділова активність» зазвичай беруть 4 часових ряди, відносно яких існує консенсус про те, що кожен із них змінюється в одній фазі з латентним (coincident indicator), а не є упереджуваним (leading) або запізнюючим (lagging). Як правило в якості таких рядів використовують реальні доходи, рівень зайнятості, обсяг продажів у промисловості та торгівлі, а також індекс промислового виробництва (саме на ці змінні потім накладається факторна структура). Якщо параметри рівняння авторегресії для фактора «ділова активність» і рівнянь, які зв'язують спостережувані ряди із цим фактором відомі, то сам

фактор можна оцінити за допомогою фільтру Калмана (у припущенні нормальності похибок), а самі параметри можна оцінити ММП.

У якості вхідних даних використовуються короткострокові показники економічного розвитку, а також дані опитувань та індикатори фінансового і сировинного ринків. Розглядалися специфікації прогнозної моделі з різною кількістю факторів (від одного до трьох). Для кожної специфікації розраховувалась середньоквадратична похибка прогнозу, яка є критерієм якості моделі. Середньоквадратична похибка прогнозу розраховується на історичних даних у процесі прогнозування за межі вибірки оцінювання (out-of-sample forecasting), який відтворює прогнозування у реальному режимі часу. Прогнози розраховуються на підставі інформації, наявної на кінець першого, другого та третього місяців відповідного кварталу. При цьому кожного разу відтворюється ситуація, коли станом на дату побудови прогнозу різні дані доступні на різному рівні (так званий нерівний край вибірки). Горизонти прогнозування – поточний квартал (nowcast), а також один та два квартали вперед. Використовується 92 серії. Перший місяць спостереження – грудень 1995 року. Результати прогнозування за моделлю DFM:

*Таблиця 3.24. Середньоквадратична похибка прогнозу росту реального ВВП РФ (в % до попереднього кварталу, з корегуванням на сезонність) на основі інформації станом на кінець першого місяця відповідного кварталу, процентні пункти*

	Поточний квартал	Один квартал вперед	Два квартали вперед
Один фактор	1.9	1.8	3.2
Два фактори	1.7	1.8	3.2
Три фактори	1.4	1.6	3.1

*Таблиця 3.25. Середньоквадратична похибка прогнозу росту реального ВВП РФ (в % до попереднього кварталу, з корегуванням на сезонність) на основі інформації станом на кінець другого місяця відповідного кварталу, процентні пункти*

	Поточний квартал	Один квартал вперед	Два квартали вперед
Один фактор	1.7	1.7	3.1
Два фактори	1.6	1.7	3.1
Три фактори	1.6	1.6	3.1

*Таблиця 3.26. Середньоквадратична похибка прогнозу росту реального ВВП РФ (в % до попереднього кварталу, з корегуванням на сезонність) на основі інформації станом на кінець третього місяця відповідного кварталу, процентні пункти*

	Поточний квартал	Один квартал вперед	Два квартали вперед
Один фактор	1.4	1.6	3.1
Два фактори	1.1	1.7	3.1
Три фактори	1.1	1.6	3.0



Act. (squares) and nowcast (circles) real GDP, Russia, %QoQ s/a

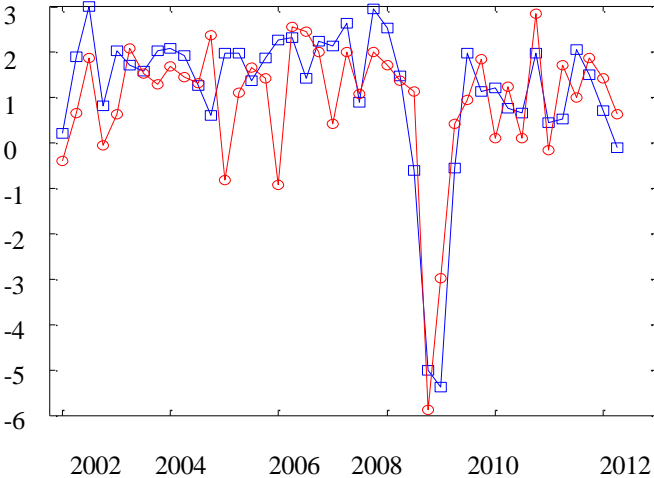


Рис.3.17. Фактичні (квадрати) та прогностні (круги) значення росту реального ВВП РФ, в % до попереднього кварталу з корегуванням на сезонність. Прогноз – на основі інформації за станом на кінець третього місяця відповідного кварталу. Прогнозна модель - DFM із трьома факторами. Горизонт прогнозування – поточний квартал.

Прогнозування за моделлю DFMS.

Модель DFMS побудована на основі Chauvet and Humilton із використанням чотирьох індикаторів ділової активності. Передбачається існування агрегованого циклічного фактора  $F_t$ , динаміка якого описується рівнянням:

$$F_t = \alpha^{(S_t)} + \phi F_{t-1} + e_t, \quad S_t = 1, 2,$$

де  $e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$  і  $\alpha^{(S_t)} = \alpha^{(1)}$ , коли економіка знаходиться у стані поживлення ( $S_t = 1$ ), і  $\alpha^{(S_t)} = \alpha^{(2)}$ , коли економіка знаходиться у стані спаду ( $S_t = 2$ ).

Також припускається, що темп росту кожного із чотирьох місячних індикаторів  $y_{rt}$  задовольняє співвідношенню:

$$y_{rt} = \lambda_r F_t + v_{rt}, \quad r = 1, 2, 3, 4.$$

де ідіосинкратична компонента місячного індикатора  $v_{rt}$  підкоряється авторегресійному процесу першого порядку:  $v_{rt} = \theta_r v_{r,t-1} + \varepsilon_{rt}$ .

Таким чином, збільшення (зменшення) агрегованого фактору  $F_t$  на  $\Delta$  призводить до збільшення (зменшення) кожної змінної місячного індикатора  $y_{it}$  на величину  $\lambda_r \Delta$ ; чим більший коефіцієнт  $\lambda_r$  (факторне навантаження), тим сильніше індикатор  $r$  піддається впливу коливань у агрегованому факторі  $F_t$ . Індикатор  $r$  також піддається впливу ідіосинкратичного шоку  $v_{rt}$ , який не впливає на інші індикатори.

Модель DFMS передбачає, що неспостережувана компонента  $S_t$ , яка відповідає за фазу ділового циклу, підкоряється марківському ланцюгу, тобто:

$$P(S_t = j / S_{t-1} = i, S_{t-2} = k, \dots, Y_{t-1}) = p_{ij},$$

де  $Y_{t-1}$  описує всю історію реалізацій чотирьох індикаторів  $y_{it}$  до моменту  $t-1$  включно. Описану систему динамічних рівнянь можна подати у вигляді простору станів із марківським переключенням. У цьому випадку вектор станів  $\bar{f}_t = (F_t, v_{1t}, v_{2t}, v_{3t}, v_{4t})^T$  містить 5 компонент і його динаміка характеризуватиметься рівнянням (transition equation):

$$\bar{f}_t = \alpha^{(S_t)} \bar{e}_5 + \Phi \bar{f}_{t-1} + \bar{a}_t,$$

де  $\bar{e}_5 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$ ,  $\bar{a}_t = (e_t, \varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{3t}, \varepsilon_{4t})$ ,  $\Phi = \text{diag}\{\phi, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ .

При стандартних обмеженнях (нормальності законів розподілу похибок) усі величини та параметри моделі обчислюються (оцінюються) рекурсивно за допомогою фільтру Калмана методом (квазі-)максимальної правдоподібності.

Для РФ використовується чотири серії, найбільш близькі до тих, що використовуються NBER для виявлення рецесії. Це реальний обсяг роздрібною торгівлі (аналог обсягу продажів у промисловості та торгівлі), перша головна компонента із наявного реального доходу і реальної зарплати (аналог реального наявного доходу), перша головна компонента із норми безробіття і потреби підприємств у робітниках (аналог зайнятості поза аграрним сектором) та індекс промислового виробництва. Перший місяць спостережень – грудень 1995 року.

Activity factor in boom (squares) and recession (circles) regimes

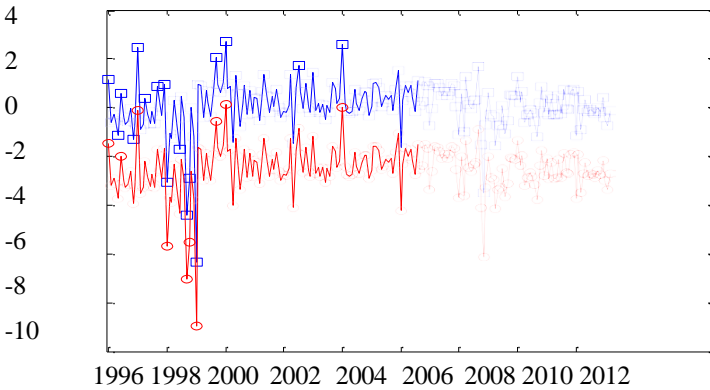


Рис.3.18. Оцінений фактор активності у стані бума (квадрати) і рецесії (круги) для РФ

Posterior probability of recession regime

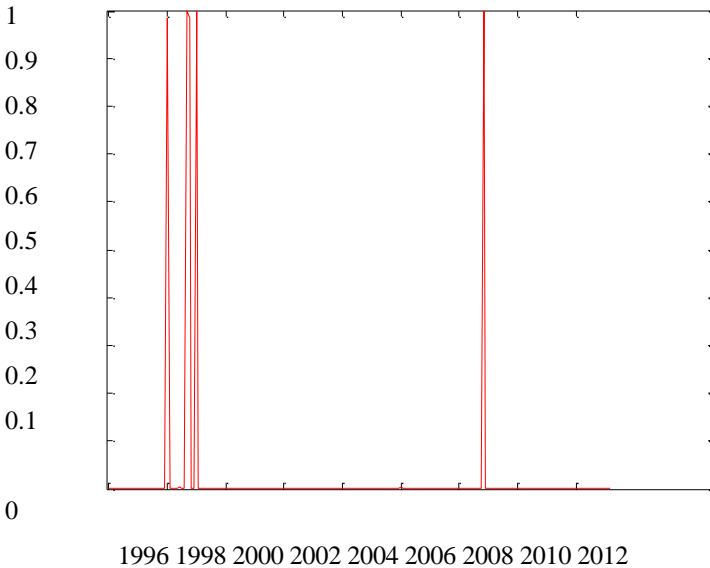
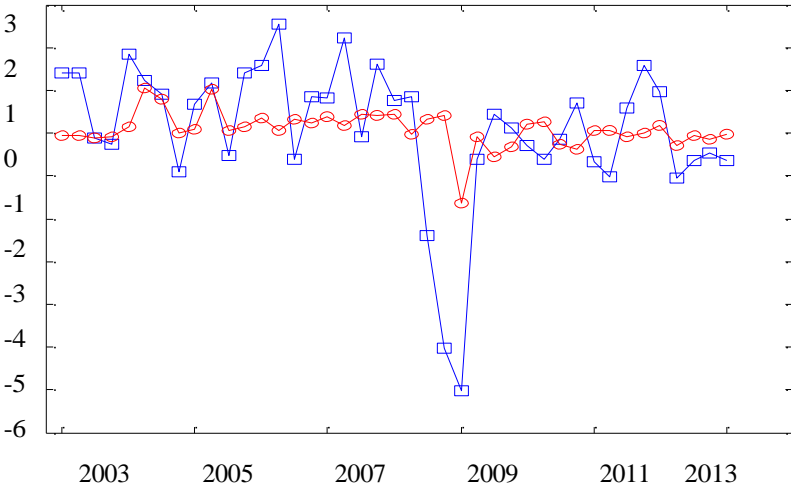


Рис.3.19. Апостеріорна ймовірність рецесії для РФ

На рисунку видно, що за 1996- 2013 гг. РФ мала тільки два випадки рецесії з імовірністю, близькою до 1. Це криза кінця 1990-х років та остання фінансово-економічна криза 2007-2009 років. Наостанок виконується прогнозування на поточний квартал:

Act. (squares) and forecast 1 qtr ahead (circles) real GDP, Russia, %QoQ s/a 4



*Рис.3.20. Фактичні (квадрати) і прогностні (круги) значення росту реального ВВП РФ, в % до попереднього кварталу з корегуванням на сезонність. Прогноз – на основі інформації за станом на кінець третього місяця відповідного кварталу. Прогнозна модель — DFMS. Горизонт прогнозування – поточний квартал.*

#### Фільтр Калмана.

Багато економетричних моделей (регресія зі змінними коефіцієнтами, модель ковзного середнього, авторегресійний процес, сезонна модель з шумом, динамічна факторна модель тощо) можна подати у вигляді моделей простору станів. Опишемо процес. Нехай:

$X_k$  – неспостережувана змінна (стан),  $k=1,2,\dots,N$ .

$Y_k$  – спостережувана змінна,  $k=1,2,\dots,N$ .

$X_{k+1}=A_k X_k +V_{k+1} \in R^m$ ,  $k=0,1,\dots$  (рівняння станів)

$Y_k =C_k X_k +W_k \in R^d$ ,  $k=0,1,\dots$  (рівняння спостережень)

$A_k$  -  $(m \times m)$ ,  $C_k$  -  $(d \times m)$ .

$V_k$  - модельний шум.  $V_k \text{ iid } N(0, Q_k)$ ,  $W_k$  - шум спостережень,

$W_k \text{ iid } N(0, R_k)$ ;  $X_0 \sim N(\mu, \Sigma)$ ;  $E[V_k W^*] = 0$ .

$V_k, W_l$  і  $X_0$  - незалежні.

Позначимо:  $Y_k = \sigma\{Y_0, \dots, Y_k\}, k=0, 1, 2, \dots, N$ .

$$\hat{X}_{k|k} = E[X_k | Y_k]; \Sigma_{k|k} = E[(X_k - \hat{X}_{k|k})(X_k - \hat{X}_{k|k})^* | Y_k];$$

$v_k$  - інновації (innovations);  $N_k$  - дисперсія інновацій;

$G_k$  - підсилення Калмана (Kalman Gain).

Опишемо принцип роботи фільтру Калмана. Нехай відомі (задані):  $\theta_k = [\mu, \Sigma, A_k, C_k, Q_k, R_k, S_k]$ . Необхідно знайти:  $\hat{X}_{k|k} = E[X_k | Y_k]$ ;  $\Sigma_{k|k} = E[(X_k - \hat{X}_{k|k})(X_k - \hat{X}_{k|k})^*]$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ ,  $X_0 \sim N(\mu, \Sigma)$ ;  $Y_0 = C_0 X_0 + W_0$ ;

Використовуючи властивість багатовимірної нормального розподілу:

$$\hat{X}_{0|0} = \mu + \Sigma C_0^* (C_0 \Sigma C_0^* + R_0)^{-1} (Y_0 - C_0 \mu);$$

$$\Sigma_{0|0} = \Sigma - \Sigma C_0^* (C_0 \Sigma C_0^* + R_0)^{-1} C_0 \Sigma.$$

Потім припустимо, що на моменті  $k$ , нам відомі  $\hat{X}_{k|k}$  та  $\Sigma_{k|k}$ . Прогнозуємо, використовуючи рівняння:  $\hat{X}_{k+1|k} = A_k \hat{X}_{k|k}$ ;  $\Sigma_{k+1|k} = A_k \Sigma_{k|k} A_k^* + Q_{k+1}$ . Надходить нове спостереження  $Y_{k+1}$  і починається «корегування»:  $\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + G_{k+1} v_{k+1}$ ;  $\text{cov}(\theta, \theta|\xi) = \Sigma_{k+1|k+1}$ .

Рівняння прогнозування:  $\hat{X}_{k+1|k} = A_k \hat{X}_{k|k}$ ;  $\Sigma_{k+1|k} = A_k \Sigma_{k|k} A_k^* + Q_{k+1}$ .

Рівняння інновацій:  $v_{k+1} = Y_{k+1} - C_{k+1} \hat{X}_{k+1|k}$ ;

$$N_{k+1|k} = C_{k+1} \Sigma_{k+1|k} C_{k+1}^* + R_{k+1}.$$

Підсилення Калмана:  $G_{k+1} = \Sigma_{k+1|k} C_{k+1}^* N_{k+1|k}^{-1}$ .

Рівняння корегування:  $\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + G_{k+1} v_{k+1}$ ;

$$\Sigma_{k+1|k+1} = (I - G_{k+1} C_{k+1}) \Sigma_{k+1|k}.$$

Опишемо алгоритм оцінювання параметрів моделі простору станів методом максимальної правдоподібності (ММП):

Крок 1: задається початковий набір (вектор) параметрів  $\theta(0)$ .

Крок 2: за допомогою фільтру Калмана обчислюється  $v_k(\theta(0))$  і  $N_{k+1}(\theta(0))$  для  $k=1, 2, \dots, N$ . Обчислюється функція правдоподібності.

Крок 3: Отримана функція максимізується по вектору параметрів  $(\theta)$ .

Крок 4: Отримуємо новий вектор параметрів  $\theta(1)$ .

Крок 5: Маючи новий вектор параметрів, повторюються кроки 2-4 до збіжності.

### Векторні авторегресії VAR.

Досить часто (особливо у фінансовому аналізі) з позицій економічної теорії випливає, що часові ряди повинні бути взаємопов'язаними (у тому числі, і через волатильність). Наприклад, короткострокові та довгострокові процентні ставки; валютні курси двох валют, які виражаються через третю валюту; курси акцій компаній, що залежать від одного ринку тощо. Окрім взаємозв'язку часових рядів, їх умовні сумісні коваріації можуть змінюватись у часі. Такого типу випадки зустрічаються у моделюванні оптимального портфелю інвестицій. Тому багатовимірні моделі авторегресійної умовної гетероскедастичності є природнім розширенням одновимірних моделей.

Загальне визначення багатовимірного ARCH-процесу не викликає жодних ускладнень: розглядається  $m$ -вимірний спостережуваний випадковий вектор  $x_n$ ,  $m$ -вимірний вектор його умовного математичного сподівання та умовна коваріаційна матриця розмірності  $m \times m$ . У сучасній літературі пропонується багато подібних моделей різного ступеня складності. Як правило, основні труднощі пов'язані із необхідністю оптимізації великої кількості невідомих параметрів цих моделей. Тому у прикладних дослідженнях віддають перевагу тим моделям, які допускають значне зменшення (редукцію) змінних. Так, наприклад, намагаються застосовувати метод головних компонент і переходити до одно-, двовимірних динамічних рядів. У той же час для таких компактних моделей (зокрема, для факторних моделей волатильності) може не існувати явної формули для функції правдоподібності, що додає додаткові складності при оцінюванні.

У 2003 році разом із Робертом Енглем (Robert Fry Engle) Нобелівська премія з економіки була присуджена англійському економісту Клайву Гренджеру (Sir Clive William John Granger) за методи аналізу часових рядів із спільними трендами (коінтегрованих часових рядів). Дослідження Енгла та Гренджера дозволили нарешті перебороти помітну кризу у розвитку методів аналізу макроекономіки та фінансових ринків. Їхні моделі були фундаментально обгрунтовані та могли застосовуватись на практиці, що дозволяло відкривати нові області для подальших досліджень. Гренджер у своїх роботах досліджував стаціонарні та нестаціонарні часові ряди і зміг довести, що методи, які застосовувались для аналізу стаціонарних рядів (а в макроекономічних дослідженнях застосовувались до тих пір лише такі ряди), можуть приводити до хибних висновків при застосуванні їх до нестаціонарних часових рядів.

Основний зміст наукових досягнень Гренджера полягає у тому, що певні комбінації нестаціонарних часових рядів можуть проявляти ознаки стаціонарності, достатні для отримання статистично коректних результатів.

Цей феномен отримав назву «коінтеграції». Оскільки більшість економічних досліджень показали, що багато із показників відносяться саме до інтеграційних процесів, у кінці 1970-их років назріли серйозні протиріччя між економікою та економетрикою. Економічна теорія передбачала і демонструвала наявність численних зв'язків між економічними показниками, а економетрика відмітала їх, називаючи ці залежності результатами неправильного оцінювання існуючих моделей. Те, що Гренджер зумів обґрунтувати існування економічних моделей з інтегованими процесами у якості змінних, стало проривом у розвитку економетричної та економічної наук. На даний час є ціла низка тестів, які дозволяють виявляти наявність коінтеграційних зв'язків між випадковими процесами і оцінити коінтеграційні співвідношення. Першу і найбільш просту процедуру тестування на наявність коінтеграції запропонували Гренджер і Енгл в спільній роботі «Коінтеграція та корекція помилками. Представлення, оцінювання та перевірка». Подібна дво-крокова процедура відноситься до так званих методів тестування на наявність коінтеграції на основі одного рівняння (single-equation methods).

Сьогодні моделі, які включають коінтеграційні співвідношення, активно використовуються вченими у своїх дослідженнях, а поняття коінтеграції стало базовим у теорії часових рядів. Гренджер запропонував методи, незамінні у системах, у яких довготермінові тенденції впливають на короткострокову динаміку і в яких пропорції економічного розвитку стримують довгострокову динаміку розвитку процесів. Наприклад, співвідношення добробуту і споживання, курсу валют і рівня цін, короткострокових і довгострокових ставок процента. Особливо ефективні методи Гренджера в системах, де короткострокова динаміка показує суттєві дестабілізуючі фактори, а в довгостроковій перспективі система обмежена економічними співвідношеннями рівноваги. Гренджер і Енгл почали співпрацювати із середини 70-их років у Каліфорнійському університеті і допомогли створити одну із самих відомих програм із вивчення економетрики. Незважаючи на те, що роботи цих вчених доповнюють і розвивають одна одну, Гренджер і Енгл завжди підкреслювали, що їхні дослідження фокусувались на різних ідеях.

Останнім часом, відходячи від стандартних методів оцінювання (зокрема, найбільш поширеного метода максимальної правдоподібності) вчені все частіше застосовують узагальнений метод моментів (Generalized method of moments GMM) Ларса Пітера Хансена (Lars Peter Hansen). Більшість людей намагаються інвестувати вільні грошові кошти у перспективні активи (зростаючі акції відомих компаній, престижну нерухомість тощо). Визначальним фактором успіху тієї чи іншої інвестиції є визначення справедливої вартості та очікуваної доходності активу. Дослідженнями цих питань займалось багато економістів. У 2013 році Нобелівську премію з економіки отримали Юджин Фама (Eugene Francis 'Gene' Fama), Ларс Пітер

Хансен та Роберт Шиллер (Robert J. Shiller) за «емпіричний аналіз цін на активи» або «за вклад у вивчення фінансових ринків». Юджин Фама висловлювався про неможливість прогнозування дохідності активів. Його колега, Роберт Шиллер, вважав, що більш точно спрогнозувати дохідність можливо лише у довгостроковому періоді. У свою чергу, Ларс Хансен розробив надійний аналітичний апарат для оцінки різноманітних моделей ціноутворення активів. Його узагальнений метод моментів став значним внеском в економетрику фінансів і вперше врахував тонкощі взаємозв'язків між різними невідомими параметрами в довгострокових моделях ціноутворення активів. По суті, GMM – це модифікована версія економетричних підходів попередників Хансена: Кріса Сімса та Тома Саргента, яка базується на законі великих чисел, тобто на збіжності середнього вибіркового до математичного сподівання:  $WLLN: \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \xrightarrow{p} E[Y]$ , і потребує менше припущень, ніж стандартні методи оцінювання. Зокрема, GMM-метод не спирається на припущення, критично важливі для адекватності процедури, а саме про нормальність, гомоскедастичність та відсутність автокореляції залишків у факторних моделях (див. вище). Перевага методу Хансена полягає в можливості його застосування до нелінійних моделей оцінки активів, наприклад, споживчої моделі оцінки активів (Consumption-based Capital Asset Pricing Model: C-CAPM).

Алгоритм застосування GMM-методу (спрощено):

1. Підбираються такі моментні умови (у тому числі з використанням інструментальних змінних), за допомогою яких можна оцінити параметри.
2. Моментні умови формулюються таким чином, щоб їх математичне сподівання дорівнювало нулю.
3. Теоретичні моменти апроксимуються емпіричними моментами.
4. Знаходяться оцінки, які мінімізують зважену відстань емпіричних моментів до нуля. Стандартні похибки розраховуються з урахуванням коваріації емпіричних моментів.

Кроки 1-4 дозволяють отримати консистентні, але не обов'язково ефективні оцінки параметрів. Якщо кількість умов більше, ніж кількість параметрів, то для отримання ефективних оцінок необхідно виконати подальші кроки 5-6.

5. Матриця ваг обновлюється із урахуванням коваріації емпіричних моментів.
6. Кроки 4-5 повторюються до конвергенції (збіжності).



Використання коваріаційної матриці емпіричних моментів при розрахунку стандартних похибок на кроці 4 дозволяє адекватно врахувати як можливу гетероскедастичність, так і автокореляцію залишків.

Головна особливість GMM-методу Хансена полягає у частковій специфікації моделі. Це зручно із наступних причин. З'являється можливість вивчити пріоритетну частину динамічної моделі, без зупинок на деталях тієї частини моделі, що залишилась. Це дозволяє економістам з'ясувати конкретику питання, що вивчається. Щоправда, існує ймовірність того, що звернення до специфікації в значній мірі обмежить коло питань, на які може відповісти емпіричне дослідження (з'являється ризик невірних умов деталізації моделі, або іншими словами, помилки специфікації).

GMM-метод останнім часом також широко застосовується при роботі з панельними даними в моделях, які враховують динаміку залежної змінної. Оскільки панельні дані поширені в міжнародній та регіональній економіці, в економіці праці тощо, то застосування GMM-методу вийшло далеко за межі економіки фінансів.

Відзначимо, що вклад Хансена в економетрику не обмежується розробкою GMM-методу. У 1991 році він, разом із Раві Джаганатаном, продовжив вивчати споживчу модель оцінки активів і вивів теоретичні межі для співвідношення премії за ризик і неохильності інвесторів до ризику. Авторами було виявлено, що для дотримання меж на емпіричних даних по акціям необхідна висока неохильність до ризику. Причиною цього (за попередніми висновками) могло бути те, що макроекономічна статистика не у повному обсязі охоплює динаміку споживання індивідумів. Поряд із цим, автори позначили так звані межі Хансена-Джаганатана, які дозволяють тестувати моделі для цін активів на узгодженість із емпіричними даними. Вчені показали, що так званий коефіцієнт Шарпа, що визначається як величина перевищення доходності актива над доходністю безризикового активу на одиницю волатильності активу, являється нижньою межею для волатильності дисконтуючого множника:

$$\frac{\sigma(m_{t+1})}{E(m_{t+1})} \geq \frac{E(R_{t+1}^e)}{\sigma(R_{t+1}^e)},$$

де  $m_t$  - дисконтуючий множник,  $R_t^e$  - очікувана доходність активу без доходності безризикового активу.

## Розділ 4. Особливі випадки регресійного аналізу

4.1. Нелінійна регресія, особливості аналізу панельних (просторово-часових) даних. Моделювання причинних комплексів (системи структурних регресій)

Часто при моделюванні нелінійних взаємозв'язків (особливо, на динамічних рядах даних) широко використовують відносні величини, зокрема, різноманітні індекси (темпи). Їх поведінка характеризується більшою сталістю в часі у порівнянні з абсолютними величинами. Окрім того, здійснюється перехід до безрозмірних величин, а також з'являється можливість виключити мультиколінеарність та автокореляцію залишків. Досить поширеною на практиці є модель так званої виробничої регресії:

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_m, t),$$

де  $Y$  – результат виробництва,  $x_1, x_2, \dots, x_m$  – виробничі фактори,  $t$  – час. Класичним прикладом такого типу нелінійної функції є виробнича функція (регресія) Кобба-Дугласа-Тінбергена, яка описує співвідношення між факторами і результатом виробництва на будь-якому рівні економічної діяльності (фірма, галузь, регіон, економіка в цілому):

$$Y = A x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} \dots x_m^{b_m} e^{\lambda t},$$

де  $b_i$  – коефіцієнт еластичності, який показує, на скільки % у середньому зміниться  $Y$  зі зміною  $x_i$  на 1 % за умови незмінності інших факторів (тобто, коефіцієнт еластичності – це відносний ефект впливу  $i$ -го фактору на  $Y$ ), а тренд результату, зумовлений дією інших, неекстенсивних (невиробничих) факторів, враховується в моделі змінною часу  $e^{\lambda t}$ . Степенева функція логарифмуванням зводиться до лінійної, а тому її параметри можна визначати методом найменших квадратів.

Наприклад, розглянемо макроекономічну функцію Кобба-Дугласа-Тінбергена США, Великобританії та Японії  $Q = A K^\alpha L^\beta e^{\lambda t}$  (тут  $Q$  – валовий національний продукт;  $K$  – основні фонди,  $L$  – трудові ресурси;  $\lambda$  характеризує темп приросту функції за рахунок неекстенсивних факторів), побудованої за даними періоду 1950-1977 рр. Застосувавши до неї логарифмічне диференціювання, дістанемо модель, яка описує взаємозв'язок темпів приросту:

$$q = \alpha k + \beta l + \lambda,$$

де  $q, k, l$  – темпи приросту відповідно результату, капіталу й трудових затрат:

Таблиця 4.1. Оцінки параметрів регресії темпів

Країна	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$
США	0,447	0,553	1,34
Великобританія	0,506	0,494	0,53
Японія	0,397	0,603	4,66

На основі такої моделі можна визначити внесок екстенсивних та інтенсивних факторів у розвиток процесів відтворення:

$$d_{\text{екс}} = (\alpha k + \beta l) / q;$$

$$d_{\text{інт}} = \lambda / q.$$

За значеннями параметрів функції можна зробити висновки про особливості економічного розвитку кожної з цих країн у повоєнні роки. Так, досягнення НТП найінтенсивніше впроваджувалися в економіці Японії: параметр  $\lambda$  вищий порівняно із США в 3,5 рази, порівняно з Великобританією - у 9 разів. Водночас японська економіка характеризується найнижчою капіталоємкістю ( $\alpha=0,397$ ) і відносно високим рівнем ефективності використання трудових ресурсів ( $\beta=0,603$ ). Для американської економіки характерна збалансованість співвідношення еластичностей по капіталу і труду. Середньорічні темпи приросту в США у повоєнні роки становили (у %): валового національного продукту - 3,38, основних фондів - 2,79, трудових ресурсів - 1,46. Звідси внесок факторів у формування динаміки ВВП :

$$\text{екстенсивних } d_{\text{екс}} = \frac{0,447 \cdot 2,79 + 0,553 \cdot 1,46}{3,38} = 0,625;$$

$$\text{інтенсивних } d_{\text{інт}} = \frac{1,34}{3,38} = 0,375.$$

На практиці використовують різні модифікації виробничої функції. Наприклад, розділивши обидві її частини на  $L$ , отримаємо функцію продуктивності праці:

$$W = AF^\alpha e^{\lambda t},$$

де  $W$  — продуктивність праці;  $F$  — фондоозброєність праці.

У темпах приросту ця функція записується так:

$$w = \alpha f + \lambda = \alpha (k - l) + \lambda.$$

Внесок екстенсивних та інтенсивних факторів у динаміку продуктивності праці визначається аналогічно:

$$d_{\text{екс}} = \alpha (k - l) / w;$$

$$d_{\text{інт}} = \lambda / w.$$

До темпів приросту застосовують класичну регресію.

Степеневою функцією описується також взаємозв'язок між попитом  $C$ , середньодушовим доходом населення  $D$  і цінами на товар  $P$ . Тренд попиту, зумовлений звичками, модою тощо, вводиться в модель змінною часу  $e^{\lambda t}$ :

$$C = A D^\alpha P^\beta e^{\lambda t},$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  — коефіцієнти еластичності попиту залежно від доходу та цін.

*Приклад 4.1. Моделювання впливу підвищення кваліфікації працівників на результати економічної діяльності.*

Останнім часом багато досліджень економістів у всьому світі присвячується впливу так званого «людського капіталу» на зростання

економіки. Зокрема, Нобелівський лауреат Дж.Стігліц пише, що людський капітал є важливим фактором економічного зростання. Згідно оцінкам низки спеціалістів, підвищення тривалості освіти на один рік призводить до збільшення ВВП на 5-15%. Зараз теорія людського капіталу – це вже новий напрямок досліджень, нова проблематика – відтворення робочої сили, її формування та використання. Загальною економічною характеристикою інвестицій у людський капітал є те, що їх ефективність набагато перевищує прибутковість вкладень у фізичний капітал. Це стало теоретичним підґрунтям безпрецедентного розвитку сфери освіти, підготовки та перепідготовки кадрів у розвинених країнах. А американський вчений Е.Денісон кількісно оцінив вплив зростання різних економічних факторів на зростання ВВП США за 1929-1982 р.р. За його оцінками покращення якості робочої сили визначило 14% приросту ВВП.

Вважатимемо, що ВВП моделюється функцією Кобба-Дугласа-Тінбергена:

$$Q = AK^\alpha L^\beta e^{\lambda t},$$

де  $Q$  — ВВП (результат виробництва);  $K$  — основний капітал;  $L$  — трудові затрати (кількість зайнятих);  $e^{\lambda t}$  описує так званий нейтральний технічний прогрес.

Параметри  $\alpha$  і  $\beta$  — коефіцієнти еластичності:  $\alpha$  характеризує відносний приріст ВВП на одиницю приросту капіталу при  $L = const$ , а  $\beta$  — відносний приріст ВВП на одиницю приросту трудових затрат при  $K = const$ . Капітал і трудові затрати розглядаються як фактори екстенсивного розвитку (залучення нових ресурсів). Параметр  $A$  приводить масштаб (розмірність) факторів до масштабу результату. При використанні індексів  $A=1$ , а тренд результату - ВВП, зумовлений дією інших, неекстенсивних факторів, враховується в моделі змінною часу  $e^{\lambda t}$  ( $\lambda$  характеризує темп зростання ВВП за рахунок неекстенсивних факторів: вдосконалення технології, зростання кваліфікації робітників тощо).

Застосувавши до функції Кобба-Дугласа-Тінбергена логарифмічне диференціювання  $((\ln f)' = \frac{f'}{f})$ , дістанемо лінійну модель, яка описує взаємозв'язок темпів зростання:  $q = \alpha k + \beta l + \lambda$ , де  $q, k, l, \lambda$  — темпи зростання відповідно ВВП, капіталу, трудових затрат і рівня кваліфікації робітників. Всюди надалі під темпом зростання показника розумітимемо відношення наступного його рівня до попереднього:  $\frac{f_i}{f_{i+1}}$ . Така модель дозволяє визначити внесок екстенсивних та інтенсивних факторів у ВВП. Очевидно, що аналогічний підхід можна застосовувати до моделювання темпів зростання валивих продуктів окремих секторів економіки.

Дослідимо спочатку вплив загальної кількості робітників, які підвищили кваліфікацію (educ) протягом 2004-2014 років на ВВП (vvr) України:

Таблиця 4.2. Кількість осіб, які підвищили кваліфікацію (тис. осіб) та ВВП (млн. грн) та темпи їх зростання

Рік	Кількість осіб, які підвищили кваліфікацію, тис. осіб	ВВП, млн. грн	Темпи зростання кваліфікації	Темпи зростання ВВП
2004	930,3	345113		
2005	976	441452	1,049124	1,279152
2006	994,5	544153	1,018955	1,232644
2007	994,5	720731	1	1,324501
2008	1071,2	948056	1,077124	1,315409
2009	1022,7	913345	0,954724	0,963387
2010	943,9	1082569	0,922949	1,185279
2011	978,4	1316600	1,03655	1,216181
2012	1016,5	1408889	1,038941	1,070096
2013	976,9	1454931	0,961043	1,03268
2014	804,1	1566728	0,823114	1,07684

Для наочності побудуємо діаграму цієї залежності:

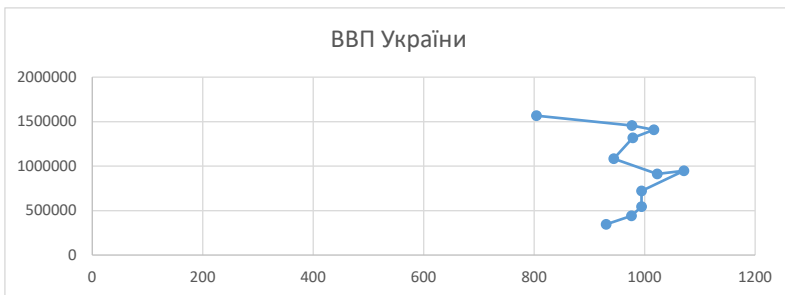


Рис. 4.1. Залежність ВВП України (млн.грн) від кількості осіб, які підвищили кваліфікацію (тис.осіб).

Аналізуючи діаграму, робимо висновок про нелінійність досліджуваної залежності. Тому переходимо до темпів зростання кваліфікації (ted) та ВВП (tvvp), залежність між якими зображено на наступному рисунку:

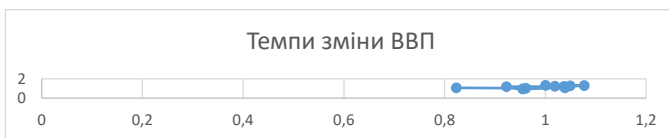


Рис. 4.2. Залежність зміни темпів ВВП України від темпів зміни кваліфікації.

Отримана залежність близька до лінійної, а більш точно – до кусочно-лінійної. Тому при моделюванні використовуємо модуль «Кусочно-лінійна регресія» спеціалізованої програми Statistica.

В результаті отримуємо:

Таблиця 4.3. Результати моделювання впливу темпу зростання кваліфікації (ted) на темпи зростання ВВП (tvvp)

Модель: Кусочно-лин. регрессии с точками разрыва (Таблица данных1) Завис. переменная: tvvp Потери: Наименьшие квадраты Итоговые потери: ,018007158 R= ,93512 Объяснён. дисперс.: 87,					
N=10	B0	ted	B0	ted	Т. разр.
Оценка	1,135363	-0,105470	0,614574	0,633237	1,169617

Отже, дістали наступну модель:

$$tvvp=1,135363-0,10547ted, \text{ протягом } 2009, 2012-2014 \text{ років};$$

$$tvvp=0,614574+0,633237ted, \text{ протягом } 2005-2008, 2010, 2011 \text{ років}.$$

Порівняємо результати моделювання з фактичними даними:

Таблиця 4.4. Порівняння результатів моделювання впливу темпу зростання кваліфікації (ted) на темпи зростання ВВП (tvvp)

	Таблица данных1			
	1 ted	2 tvvp	3 ПРЕДСКА	4 ОСТАТКИ
1	1,049	1,279	1,28	0,00
2	1,019	1,233	1,26	-0,03
3	1,000	1,325	1,25	0,08
4	1,077	1,315	1,30	0,02
5	0,955	0,963	1,03	-0,07
6	0,923	1,185	1,20	-0,01
7	1,037	1,216	1,27	-0,05
8	1,039	1,070	1,03	0,04
9	0,961	1,033	1,03	-0,00
10	0,823	1,077	1,05	0,03

Проаналізуємо залишки на відсутність автокореляції та гетероскедастичності (виконання умов теореми Гауса-Маркова):

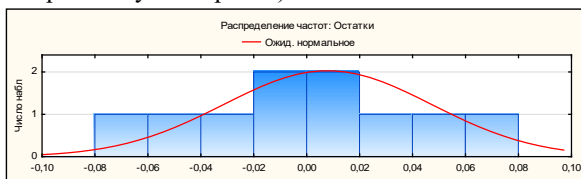


Рис.4.3. Діаграма нормального розподілу залишків моделі.

Часто замість цієї діаграми використовується графік нормального розподілу залишків (про нормальність розподілу свідчить розташування точок-відхилень, близьке до нормальної імовірнісної прямої):

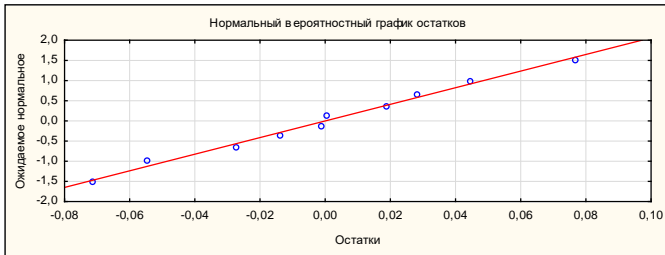


Рис.4.4. Графік нормальності розподілу залишків моделі.

На підставі графіка робимо висновок про відсутність гетероскедастичності та автокореляції. Про достатньо високу адекватність побудованої моделі свідчить близьке до 1 значення коефіцієнта кореляції  $R=0,93512$ . За даною моделлю можна проводити прогнозування: наприклад, якщо у 2015 році кількість осіб, які підвищили кваліфікацію зменшиться на 5% у порівнянні з 2014 роком (враховуючи тенденцію останніх років), тобто,  $ted_{2015}=0,95$ , то за побудованою моделлю  $tvvp_{2015}=1,135363-0,10547(ted_{2015}=0,95)=1,0351665$ , тобто, ВВП України (номінальний) зросте в 2015 році у порівнянні із 2014 роком приблизно на 3,5%.

Досить часто інформаційна база регресійної моделі представлена рядами динаміки, що викликає певні труднощі, спричинені залежністю рівнів, їх автокореляцією. Наявність останньої порушує одну із вимог (незалежність спостережень) регресійного аналізу і це може викривити результати моделювання. На практиці застосовують різні способи усунення автокореляції. Найпростішим є спосіб різницьових перетворень, коли замість первинних рівнів взаємозв'язаних рядів динаміки  $y_t, x_t$  використовують кінцеві різниці ( $\Delta_y = y_t - y_{t-1}, \Delta_x = x_t - x_{t-1}$  і так далі), або спосіб відхилень від тенденції, коли первинні рівні  $y_t, x_t$  замінюються відхиленнями від тренду  $d_y = y_t - f(t); d_x = x_t - f(t)$ . Усуненню автокореляції сприяє також уведення фактору часу  $t$  у рівняння регресії  $Y = f(x, t)$ . Навантаження на змінну  $t$  залежить від комплексу включених у модель факторів. Зміст параметрів такої моделі розглянемо на прикладі взаємозв'язку динаміки імпорту нафти  $y_t$  і цін за барель нафти  $x_t$  на світовому ринку. Наприклад, обсяги імпорту нафти в країну систематично зменшувалися, що зумовлено як зміною цін, так і внутрішніми факторами. Зв'язок між цими показниками можна подати лінійною функцією

$$Y = a + bx + ct,$$

де  $b$  - середній приріст результативної ознаки  $Y$  на одиницю приросту факторної ознаки  $x$ ;  $c$  - середній щорічний приріст  $Y$  під впливом зміни неідентифікованих факторів, які рівномірно змінюються в часі.

Таблиця 4.5. Аналіз динаміки показників

Порядковий номер року	Імпорт нафти, $y_t$ , млн. барелів	Ціна за 1 барель, $x_t$ , дол.	$Y_t$	$c_t = y_t - Y_t$
1	1749	13,48	1808	-59
2	1702	14,76	1743	-41
3	1769	18,92	1653	116
4	1600	22,97	1562	38
5	1431	30,29	1442	-11
6	1325	34,66	1349	-24
7	1302	30,77	1332	-30
8	1341	29,36	1292	49
9	1232	28,07	1251	-19
10	1180	26,40	1213	-33
11	1162	27,79	1147	15
Разом	15793	$x$	15793	0

Модель імпорту нафти описується (модель побудовано за допомогою програми Statistica) рівнянням:

$$Y = 1984,340 - 2,497x - 52,986t$$

$$(27,97) \quad (-2,50) \quad (-6,99).$$

Наведені в дужках значення  $t$ -критерію перевищують критичне  $t_{0,95}(8) = 2,31$ , що дає підстави з імовірністю 0,95 вважати вплив кожного фактору на обсяги імпорту істотним. Згідно зі значеннями коефіцієнтів регресії підвищення ціни одного бареля нафти на 1 долар зменшує імпорт нафти в країну приблизно на 2,5 млн. барелів. За рахунок інших факторів (наприклад, енергозбереження), імпорт нафти щорічно зменшується приблизно на 53 млн. барелів. Значення коефіцієнта детермінації  $R^2 = 0,951$  та дисперсійного критерію  $F(2,8) = 77,48$  свідчать про адекватність моделі.

Отже, за наявності лінійної тенденції в рядах у модель вводиться змінна часу

$$Y = a_0 + \sum_1^m b_i x_i + ct,$$

де  $b_i$  - чистий ефект впливу  $i$ -го фактору на  $Y$ ;  $c$  - ефект неідентифікованих факторів, які формують тенденцію динамічного ряду.

Зауважимо, що у динамічній моделі можна відобразити не лише тенденцію, а й більш складні компоненти ряду, скажімо, періодичні чи сезонні коливання, розривність процесу (інтервенції) тощо.



Особливістю регресійного аналізу динамічних рядів є оцінка автокореляції залишкових величин  $e_t = y_t - Y_t$ . Якщо автокореляція істотна, значить включені в модель фактори не повністю розшифровують механізм формування процесу, модель визнається неадекватною. Перевірку істотності автокореляції можна здійснити на основі циклічного коефіцієнта першого порядку  $r_1$ . У програмних засобах для перевірки істотності автокореляції частіше використовують критерій Дарбіна-Ватсона, характеристика якого  $D$  функціонально зв'язана з  $r_1$ :

$$D = \frac{\sum_1^n (e_t - e_{t+1})^2}{\sum_1^n e_t^2} = 2(1 - r_1).$$

За відсутності автокореляції між суміжними членами ряду значення  $D$  становить приблизно 2, при високій додатній автокореляції  $D$  наближається до 0, при високій від'ємній автокореляції - до 4. Визначені критичні межі його значень: нижня  $D_L$  і верхня  $D_U$ , на основі яких приймається або відхиляється гіпотеза про відсутність автокореляції (початкова або нульова гіпотеза  $H_0: r_1 = 0$ ). При перевірці гіпотези можливі три висновки:

- $D > D_U$  - автокореляція відсутня;
- $D < D_L$  - гіпотеза про відсутність автокореляції відхиляється;
- $D_L \leq D \leq D_U$  - висновок залишається невизначеним.

Критичні межі  $D$  залежать від кількості членів ряду  $n$  і кількості параметрів моделі  $m$ . Перевірка від'ємної автокореляції проводиться на основі значень (4– $D$ ). У модулі *Multiple Regression* для перевірки істотності автокореляції залишкових величин у вікні *Residual Analysis* передбачена опція *Durbin-Watson stat.* У нашому прикладі  $D = 1,831$ , що потрапляє в інтервал допустимих значень гіпотези  $H_0: r_1 = 0$ , а отже, істотність автокореляції не доведено. Аналогічний висновок дає перевірка гіпотези за допомогою циклічного коефіцієнта автокореляції, значення якого  $r_1 = 0,085$  значно менше за критичне  $r_{0,95}(11) = 0,353$ . Відсутність автокореляції залишків підтверджує адекватність моделі.

Характерною рисою механізму формування варіації та динаміки соціально-економічних показників є запізнення впливу факторів, коли причина і наслідок розірвані в часі (наприклад, інвестиції). Часові лаги зумовлені тривалістю виробничого циклу, інерційністю процесів, наявністю зворотного зв'язку тощо. Для оцінювання ефектів запізнення впливу  $i$ -го фактору в модель вводиться лагова змінна  $x_{i,p}$ . Фактори, що мають два і більше лагів (*розподілений у часі лаг*), вводяться в модель блоками лагових змінних. Загальний вигляд моделі з розподіленими лагами:

$$Y = a_{00} + \sum_{i=1}^m \sum_{p=0}^k b_{i,p} x_{i,p},$$

де  $p = 0, 1, \dots, k$  - лаги;  $m$  - кількість включених у модель факторів.

Теоретично модель із розподіленими лагами можна узагальнити на будь-яку кількість факторів, проте практична реалізація такої моделі натикається на труднощі, зумовлені обмеженістю динамічних рядів і складністю внутрішньої їх структури. Як правило, в модель включаються такі лагові змінні, для яких лаги обґрунтовано теоретично і перевірено емпірично. Інструментом визначення лагів слугує взаємкореляційна функція, яка є множиною коефіцієнтів кореляції між рядами  $x_i$  та  $y$ , зсуненими відносно один до одного на лаг  $p$ . Зі збільшенням лага взаємкореляційна функція згасає.

Через обмеженість динамічних рядів соціально-економічних явищ неможливо врахувати в моделі усі особливості розвитку процесу. Аби розширити інформаційну базу моделі, практикують об'єднання просторових і динамічних рядів. Скажімо, описується залежність  $Y = f(x_1, x_2, x_3)$  за даними по 10 об'єктах за п'ять років. Можливі різні варіанти використання такої змішаної статично-динамічної (панельної) інформації. Розглянемо два з них.

1. *Динамізація просторових моделей.* Наприклад, для кожного  $t$ -го року із 5 визначається статична модель  $Y_t = f(x_1, x_2, x_3)$ . Коефіцієнти регресії статичних моделей утворюють динамічні ряди. Якщо ефект впливу  $i$ -го фактору змінюється у часі, то така зміна виявиться трендом ряду  $b_i$ . Методом екстраполяції тренду можна визначити очікуваний ефект впливу на період упередження  $v$ . Водночас визначається прогностичний рівень самого фактору  $x_{i,t+v}$ . Поєднання цих прогнозів дає прогноз функції  $Y$ :

$$Y_{t+v} = a_{0,t+v} + b_{1,t+v} x_{1,t+v} + b_{2,t+v} x_{2,t+v} + b_{3,t+v} x_{3,t+v}.$$

Прогнозування ефектів впливу факторів та їх рівнів можна здійснити у будь-який спосіб, обґрунтувавши функціональний вид прогностичної моделі (звичайно, зберігаючи достатність інформації як для динамічного, так і просторового ряду).

2. *Модель об'єкто-періодів.* Часто просторові та динамічні ряди об'єднуються в один інформаційний масив, одиницею якого є об'єкто-період. Наприклад, для 10 об'єктів і п'яти років маємо  $10 \cdot 5 = 50$  об'єкто-періодів. Такий підхід до об'єднання просторово-динамічних рядів значно розширює інформаційну базу моделі, водночас наділяє її особливими властивостями. Головна особливість статично-динамічної інформації (панельних даних) - залежність спостережень. Залежними виявляються не лише рівні динамічних рядів, але й ряди в цілому (і просторові, і часові), оскільки належність рівнів до того чи іншого ряду фіксована. Так, залежність між рядами динаміки - це результат просторової варіації, яка через інерційність процесів зберігається певний час. Залежність просторових рядів відбиває синхронність динаміки показників по окремих об'єктах, зумовлену спільними умовами розвитку. Ігнорування цих особливостей інформаційної бази моделювання призводить до помилкових висновків.

Особливості просторової варіації враховуються в моделі за допомогою структурних змінних окремих об'єктів  $u_j$ . Властивий усім об'єктам тренд функції  $Y$  фільтрується за допомогою змінної часу  $t$ . Проте через

нерівномірність розвитку окремих об'єктів сукупності поряд зі спільним трендом можуть виявитися істотними індивідуальні тренди. Для їх фільтрації можна використати змінні *динамічної взаємодії*: для факторів -  $x_i t$ , для об'єктів -  $u_j t$ . Із урахуванням усіх цих особливостей регресійну модель для сукупності об'єкто-періодів можна записати так:

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^m b_i x_i + \sum_{i=1}^m c_i x_i t + \sum_{j=1}^{n-1} a_j u_j + \sum_{j=1}^{n-1} d_j u_j t + f t,$$

де параметри моделі  $b_i$  - чистий, елімінований від взаємозв'язків у межах моделі, ефект впливу фактору  $x_i$ ;  $c_i$  - зміна ефектів впливу  $b_i$  у часі;  $a_j$  - різниця між значеннями функції на  $j$ -му об'єкті та в цілому по сукупності;  $d_j$  - зміна цих відмінностей у часі;  $f$  - спільний для всіх об'єктів сукупності тренд - вплив неідентифікованих у моделі факторів;  $a_0$  - вільний член рівняння. Для кожного  $j$ -го об'єкта вільний член рівняння дорівнює сумі  $(a_0 + a_j)$ ; на відміну від  $a_0$  сума має економічний зміст - вимірює вплив факторів, які визначають специфіку цього об'єкта.

Отже, модель об'єкто-періодів включає дві групи параметрів. Одна з них представляє оцінки ефектів впливу факторів і зміну їх у часі, друга - особливості сукупності, специфіку розвитку окремих об'єктів. Уникнути перевантаження моделі і зберегти максимум інформації для оцінки параметрів можна, скориставшись, наприклад, алгоритмом покрокового регресійного аналізу. А останніми роками все частіше у таких випадках застосовуються методи і моделі регресії на латентних структурах (на головних компонентах) або регресію частинних найменших квадратів (PLS-R, PCA-R, PLS-PM методи).

#### 4.2. Моделювання причинних комплексів (системи структурних регресій).

##### Логіт-регресія МакФаддена

Складність і багатогранність взаємозв'язків, наявність зворотного впливу зумовлюють необхідність використання моделей у вигляді системи взаємозалежних (симультаивних) рівнянь. Розрізняють два типи таких систем. В одних системах рівняння описують послідовний ланцюг причинно-наслідкових зв'язків, що робить можливим послідовне їх розв'язування. Іншим системам притаманні зворотні зв'язки, коли одна й та сама змінна одночасно виступає і як причина, і як наслідок. У такому випадку доводиться рівняння розв'язувати одночасно. Схема побудови будь-якої системи рівнянь включає формування логічного каркасу моделі та специфікацію рівнянь. Логічний каркас моделі можна представити геометрично у вигляді *графа зв'язку* або у вигляді таблиці - *матриці суміжності*.

Важливим етапом модельної специфікації є розподіл змінних, що формують структуру моделі, на ендогенні та екзогенні. *Ендогенні* (внутрішні або взаємозалежні) змінні зумовлені внутрішньою структурою процесу і є предметом аналізу. Кількість їх дорівнює кількості рівнянь і тотожностей

моделі. Включені в модель незалежні змінні (зовнішні) називаються *екзогенними*. Саме вони спричиняють зміни в системі взаємозв'язків, не зазнаючи на собі зворотного впливу. Класифікація змінних на ендогенні та екзогенні досить умовна і залежить від природи й суті явища, яке вивчається, та від мети дослідження. В динамічних моделях з'являються *лагові* змінні. Наприклад, взаємозв'язок усіх типів змінних представимо такою системою рівнянь:

$$Y_{1,t} = f_1(y_{3,t}, y_{2,t-1}, x_{1,t})$$

$$Y_{2,t} = f_2(y_{1,t}, y_{3,t-1}, x_{2,t})$$

$$Y_{3,t} = f_3(y_{2,t}, y_{1,t-1}, x_{3,t}).$$

У системі стільки рівнянь, скільки ендогенних змінних ( $y_{1,t}, y_{2,t}, y_{3,t}$ ). Усі вони взаємозалежні, і кожна з них окремо зазнає впливу як незалежних (екзогенних) змінних ( $x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}$ ), так і ендогенних із запізненням ( $y_{2,t-1}, y_{3,t-1}, y_{1,t-1}$ ). Лаговим змінним властиві такі ж риси, як і екзогенним, тому вони об'єднуються в один клас *визначених наперед* змінних  $z_j$ . Так, окреме  $i$ -те рівняння системи можна записати у вигляді:

$$y_i = Y_i a_i + Z_j b_j + e_i,$$

де  $Y_i$  - вектор ендогенних змінних  $i$ -го рівняння ( $i=1, 2, \dots, k_i$ );  $a_i$  - коефіцієнти при ендогенних змінних, що входять в  $i$ -те рівняння;  $Z_j$  - вектор екзогенних і лагових змінних  $i$ -го рівняння ( $j=1, 2, \dots, m_i$ );  $b_j$  - коефіцієнти при змінних  $z_j$  в  $i$ -му рівнянні. Модель відображає структуру взаємозв'язків між змінними і тому називається *структурною*. Оскільки одні й ті ж самі ендогенні змінні входять до різних рівнянь моделі, то це призводить до залежності залишків від ендогенних змінних, що ускладнює оцінювання параметрів моделі класичним МНК. Щоб виключити кореляцію залишків, структурну модель трансформують, приводять до скороченої, *приведеної* форми. У приведеній формі всі ендогенні змінні виражені виключно через визначені наперед (екзогенні та лагові) змінні:  $y_i = Z_j r_j + v_i$ , де  $r_j$  - коефіцієнти приведенної форми при змінних  $z_j$ , оцінюються класичним МНК;  $v_i$  - залишок.

Проблема оцінювання параметрів структурної моделі і можливості її перетворення пов'язані з поняттям *ідентифікації моделі*. Модель називають ідентифікованою, якщо рівняння структурної форми однозначно описують зв'язок. Умова ідентифікації перевіряється для кожного  $i$ -рівняння за критерієм:  $(k_i - 1) \leq (m - m_i)$ . В *ідентифікованому* рівнянні різниця між загальною кількістю екзогенних і лагових змінних усієї системи  $m$  і кількістю таких змінних в  $i$ -му рівнянні  $m_i$  на одиницю більша за кількість ендогенних змінних цього рівняння  $k_i$ . Кожне рівняння ідентифікованої системи відображає певну систему взаємозв'язків, не дублює і не може бути заміненим ніякою комбінацією інших рівнянь.

Коли  $(m - m_i) > (k_i - 1)$ , оцінки параметрів моделі не можуть бути визначені однозначно, система вважається *надідентифікованою*. Якщо для  $i$ -го рівняння  $(m - m_i) \leq (k_i - 1)$ , то така система є *неідентифікованою*, і

визначити параметри статистичними методами неможливо. Перевіримо ідентифікованість наведеної вище системи рівнянь, у якій загальна кількість екзогенних і лагових змінних  $m = 6$ . Перше рівняння містить дві ендogenous і дві визначені наперед змінні  $z_j$ , тобто,  $k_i - 1 = 2 - 1 = 1$ , а  $m - m_i = 6 - 2 = 4$ , що свідчить про надідентифікованість рівняння. Аналогічно можна довести надідентифікованість другого і третього рівнянь.

Оцінювання параметрів надідентифікованих рівнянь здійснюється *двокроковим* МНК. На першому кроці (1) визначаються параметри приведеної системи рівнянь і теоретичні значення ендogenous змінних; на другому (2) - в системі структурних рівнянь значення ендogenous змінних замінюються значеннями, розрахованими в рамках приведеної системи. Для лінійної моделі:

$$1. \hat{y}_i = \sum_1^{m_i} r_j z_j ;$$

$$2. Y_i = \sum_1^{k_i} a_i \hat{y}_i + \sum_1^{m_i} b_j x_j .$$

Побудовані у такий спосіб рівняння розглядаються як звичайні рівняння регресії, параметри їх визначаються МНК і використовуються при прогнозуванні. Якщо специфікація моделі не відповідає вимогам математичного апарату та емпіричним даним, а система рівнянь виявляється неідентифікованою, то можливі три шляхи модифікації моделі:

- виключити з моделі деякі ендogenous змінні;
- ввести в модель додаткові екзогенні або лагові змінні;
- замінити певну множину взаємозалежних змінних багатовимірними оцінками, скажімо, головними компонентами.

У системі *Statistica* методи структурного моделювання реалізовано в модулі *Seopath*. Досить потужний математичний апарат модуля ефективний при побудові економетричних моделей. Ми розглянемо системи рівнянь, представлених однозначними причинними ланцюгами. Такі системи називаються рекурентними (рекурсивними). *Рекурентна* модель це система рівнянь, у якій залежна змінна  $i$ -го рівня виступає як незалежна в рівнянні  $i + 1$  рівня. Скажімо, ознакова множина моделі містить  $m-1$  ендogenous змінних  $Y_i$  та екзогенну змінну  $Z_i$ . Тоді система рівнянь має вигляд:

$$Y_1 = b_{10} + a_1 Z_1$$

$$Y_2 = b_{20} + b_{21} Y_1 + a_2 Z_2$$

$$Y_3 = b_{30} + b_{31} Y_1 + b_{32} Y_2 + a_3 Z_3$$

$$Y_4 = b_{40} + b_{41} Y_1 + b_{42} Y_2 + b_{43} Y_3 + a_4 Z_4$$

.....

$$Y_m = b_{m0} + b_{m1} Y_1 + b_{m2} Y_2 + b_{m3} Y_3 + b_{m4} Y_4 + \dots + b_{m-1} Y_{m-1} + a_m Z_m.$$

Розрахунок коефіцієнтів регресії рекурентної моделі здійснюється послідовно для кожного рівняння класичним МНК. Матриця коефіцієнтів регресії трикутна, тобто

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Основа на принципах послідовного розкладання процесу за причинами його формування, рекурентна модель уможливує оцінювання для кожної з них *повного ефекту* впливу. Останній дорівнює сумі *прямого* та *опосередкованого* впливів.

#### 4.2. Проекція на латентну структуру. Методи PLS-PM/PCA-PM. Логіт-регресія МакФаддена

Методи PLS-PM (Partial Least Squares Path Modeling або Project on Latent Structures Path Modeling) почали широко застосовуватись у різноманітних прикладних дослідженнях із 70-их років XX століття дякуючи роботам Германа Волда та його сина Свена (Herman Wold and Sven Wold), у яких було закладено базові принципи методики моделювання PLS-PM. PLS-PM – це інструмент для моделювання взаємозв'язків між латентними змінними. Методика PLS-PM призначена для аналізу даних великої розмірності в умовах погано структурованого середовища. Вона широко застосовується, зокрема, в економіці для оцінки таких латентних показників як корисність, рівень економічного розвитку тощо.

Задачу моделювання за допомогою PLS-PM можна записати так: нехай  $X$  – матриця даних розмірності  $n \times p$ :

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix},$$

де  $n$  – кількість спостережень (об'єктів), а  $p$  – кількість змінних (ознак).

Матрицю  $X$  можна поділити на  $J$  блоків:  $X_1, X_2, \dots, X_j$ , кожен із яких пов'язаний з латентною змінною  $L V_j$ , оцінку якої позначимо:

$$\widehat{L V}_j = Y_j \quad .$$

Усі зв'язки між змінними можна поділити на два типи: зв'язки між латентними змінними та відповідними блоками  $X_j$  (ці зв'язки утворюють зовнішню

модель) і зв'язки латентних змінних одна з одною (ці зв'язки утворюють внутрішню модель).

Внутрішня модель може бути записана у вигляді системи лінійних рівнянь:

$$LV_j = \beta_0 + \sum_{i \rightarrow j} \beta_{ji} LV_i + in\_error_j,$$

де  $LV_i$  – це всі латентні змінні, що впливають на латентну змінну  $LV_j$ ; коефіцієнти  $\beta_{ji}$  – структурні (маршрутні) коефіцієнти, які характеризують силу та напрямок зв'язку між латентними змінними  $LV_i$  та  $LV_j$ ;  $\beta_0$  – вільний член;  $in\_error_j$  – випадкове відхилення внутрішньої моделі. На внутрішню модель накладаються наступні вимоги:

1. Система лінійних рівнянь повинна бути рекурсивною, тобто, повинна відповідати графу без контурів (петель).
2. Внутрішня модель являється регресійною, тобто, виконується вимога:

$$E(LV_j | LV_i) = \beta_{0i} + \sum_{i \rightarrow j} \beta_{ji} LV_i$$

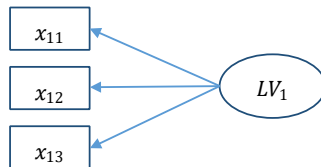
3. Випадкові відхилення незалежні від пояснювальних змінних, тобто, виконується вимога:

$$cov(LV_j, error_j) = 0$$

Таким чином, при моделюванні за допомогою методу проєкції на латентну структуру відсутні вимоги до статистичних розподілів змінних та випадкових відхилень.

Зовнішня модель характеризує зв'язок між латентними та явними змінними, який буває двох типів (напрямоків): рефлексивний і формативний.

Рефлексивний («відображаючий») тип – найбільш розповсюджений тип зовнішніх моделей, при якому латентна змінна є «причиною» явних змінних, тобто явні змінні відображають латентну. Граф зовнішньої моделі рефлексивного типу має вигляд:

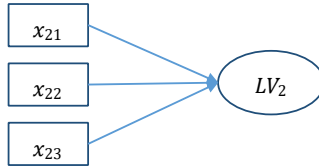


Зовнішня модель може бути записана у вигляді системи лінійних рівнянь:

$$X_{jk} = \lambda_{0jk} + \lambda_{jk} LV_j + out\_error_{jk},$$

де  $\lambda_{jk}$  – коефіцієнти навантажень,  $\lambda_{0jk}$  – вільні члени,  $out\_error_{jk}$  – випадкові відхилення зовнішньої моделі.

Формативний тип – це тип зовнішньої моделі, коли явні змінні є «причиною» латентної змінної, тобто «формує» латентну. Граф зовнішньої моделі формативного типу має вигляд:



Зовнішня модель формативного типу може бути записана у вигляді системи лінійних рівнянь:

$$LV_j = \lambda_{0j} + \lambda_{jk}X_{jk} + out\_error_j,$$

де  $\lambda_{jk}$  – коефіцієнти навантажень,  $\lambda_{0j}$  – вільні члени,  $out\_error_j$  – випадкові відхилення зовнішньої моделі.

Латентні змінні безпосередньо не вимірюються. Тому вводять поняття оцінки латентної змінної  $\widehat{LV}_j$ , яка є лінійною комбінацією відповідних явних змінних:

$$\widehat{LV}_j = Y_j = \sum_k w_{jk}X_{jk},$$

де  $w_{jk}$  – зовнішні ваги (вагові множники) моделі.

Таким чином, змінні  $LV_j$  та  $Y_j$  характеризують одну й ту саму сутність, але використовуються у різних цілях: перша – для теоретичних, друга – для практичних.

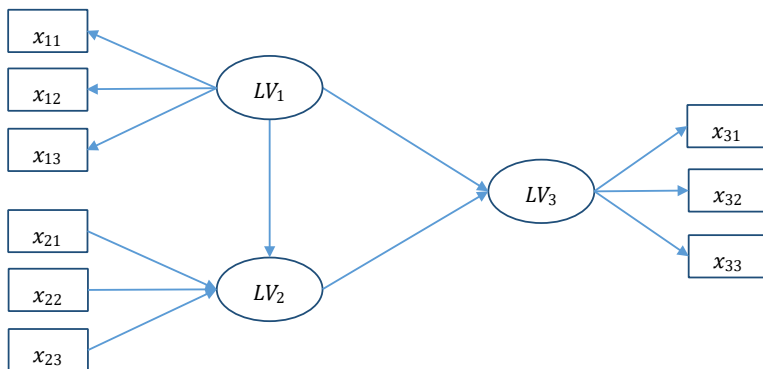
Моделювання PLS-PM представляє собою алгоритм, який можна поділити на три основних етапи:

- а) обчислення зовнішніх ваг  $w_{jk}$  для отримання оцінок латентних змінних;
- б) обчислення структурних коефіцієнтів  $\beta_{ji}$  внутрішньої моделі;
- в) розрахунок навантажень  $\lambda_{jk}$  зовнішньої моделі.

Перший етап – це ключовий (і самий складний) методології PLS-PM, який є ітераційним процесом, метою якого являється обчислення значень зовнішніх ваг  $w_{jk}$ , як наслідок, оцінок  $Y_j$ . В результаті реалізації цього етапу абстрактні латентні змінні матеріалізуються. Другий етап заключається у розв’язуванні системи лінійних рівнянь методом найменших квадратів, третій – обчислення кореляцій.

Розглянемо просту модель з трьома латентними змінними та відповідних їм блоків:





Кожна латентна змінна зв'язана з трьома явними змінними, тому зовнішня модель може бути представлена у вигляді системи рівнянь:

$$X_{1k} = \lambda_{01k} + \lambda_{1k}LV_1 + out\_error_{1k}, \quad k = 1, 2, 3$$

$$X_{2k} = \lambda_{02k} + \lambda_{2k}LV_2 + out\_error_{2k}, \quad k = 1, 2, 3$$

$$LV_3 = \lambda_{03} + \sum_k \lambda_{jk}X_{3k} + out\_error_{3k}, \quad k = 1, 2, 3$$

Внутрішню модель можна записати у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} LV_2 = \beta_{02} + \beta_{21}LV_1 + in\_error_1 \\ LV_3 = \beta_{03} + \beta_{31}LV_1 + \beta_{32}LV_2 + in\_error_2 \end{cases}$$

Перший етап моделювання PLS-PM є ітераційним процесом для отримання значень оцінок латентних змінних.

Спочатку задаються початкові значення зовнішніх вагових коефіцієнтів  $w_{jk}$ .

Крок 1: Обчислення значень латентних змінних  $Y_j$  на основі зовнішньої моделі.

Крок 2: Обчислення внутрішніх ваг  $e_{ij}$ .

Крок 3: Розрахунок значень латентних змінних  $Z_j$  на основі внутрішньої моделі.

Крок 4: Обчислення нових значень зовнішніх ваг  $w_{jk}$ .

Далі кроки 1-4 повторюються до необхідного ступеня конвергенції (збіжності) зовнішніх ваг.

Ітераційний процес починається із задання деяких значень зовнішнім вагам. Нехай для простоти усі ваги дорівнюють 1:

$$\tilde{w}_1 = (\tilde{w}_{11} = 1, \tilde{w}_{12} = 1, \tilde{w}_{13} = 1)$$

$$\tilde{w}_2 = (\tilde{w}_{21} = 1, \tilde{w}_{22} = 1, \tilde{w}_{23} = 1)$$

$$\tilde{w}_3 = (\tilde{w}_{31} = 1, \tilde{w}_{32} = 1, \tilde{w}_{33} = 1)$$

Тут знак тильди вказує на те, що значення ваг є умовними. Переходимо до кроку 1 моделювання і обчислюємо значення латентних змінних за формулою:

$$Y_k \propto X_k \tilde{w}_k, \quad k = 1, 2, 3$$

Для демонстраційної моделі отримаємо систему:

$$Y_1 \propto 1X_{11} + 1X_{12} + 1X_{13}$$

$$Y_2 \propto 1X_{21} + 1X_{22} + 1X_{23}$$

$$Y_3 \propto 1X_{31} + 1X_{32} + 1X_{33}$$

Знак  $\propto$  використовуємо замість знака рівності (деякі автори цим знаком позначають нормалізацію змінних), бо у даному випадку є залежність змінних  $Y$  від змінних  $X$ , але відсутня рівність правих та лівих частин виразів, зважаючи на наближені значення зовнішніх ваг.

На кроці 2 переходимо до внутрішньої моделі з метою перерахунку значень оцінок латентних змінних, але іншим способом, ніж на першому кроці: використовуючи внутрішню, а не зовнішню модель. Тобто, замість обчислення оцінок  $Y_j$  як лінійних комбінацій явних змінних, необхідно обчислити значення оцінок латентних змінних  $Z_j$  як лінійних комбінацій оцінок інших латентних змінних, пов'язаних із  $LV_j$  співвідношенням:

$$Z_j = \sum_{i \leftrightarrow j} e_{ij} Y_i,$$

де подвійна стрілка вказує, що сумуються оцінки  $Y_i$  лише тих латентних змінних  $LV_i$ , які зв'язані з  $j$ -тою латентною змінною. Значення  $e_{ij}$  називаються внутрішніми вагами і обчислюються за формулою:

$$e_{ji} = \begin{cases} \text{cor}(Y_j, Y_i), & i \leftrightarrow j \\ 0, & i \nleftrightarrow j \end{cases}$$

Таким чином, внутрішні ваги характеризують напрямок і силу зв'язку між латентними змінними. Отримавши значення внутрішніх ваг, можна обчислити оцінки латентних змінних на основі внутрішньої моделі:

$$Z_1 = \sum_{i \leftrightarrow 1} e_{i1} Y_i = e_{21} Y_2 + e_{31} Y_3$$

$$Z_2 = \sum_{i \leftrightarrow 2} e_{i2} Y_i = e_{12} Y_1 + e_{32} Y_3$$

$$Z_3 = \sum_{i \leftrightarrow 3} e_{i3} Y_i = e_{13} Y_1 + e_{23} Y_2$$

Четвертий крок – перерахунок значень зовнішніх ваг. Для рефлексивного типу зовнішньої моделі використовують формулу:

$$\tilde{w}_{jk} = (Y_j' Y_j)^{-1} Y_j' X_{jk},$$

а для формативного типу - формулу:

$$\tilde{w}_j = (X_j' X_j)^{-1} X_j' Y_j.$$

На кожній ітерації ( $S = 1, 2, 3 \dots$ ) обчислюється ступінь конвергенції зовнішніх ваг, тобто зовнішні ваги на ітерації  $S$  порівнюються із зовнішніми вагами на ітерації  $S-1$ . Ступінь конвергенції (збіжності) вважається достатньою, якщо:

$$|w_{jks-1} - w_{jks}| < 10^{-5}.$$

Другий етап моделювання – обчислення структурних коефіцієнтів  $\widehat{\beta}_{ji} = B_{ji}$ , які розраховуються за допомогою МНК для множинної регресії  $Y_j$  від  $Y_i$  за формулою:

$$Y_j = \sum_{i \rightarrow j} \widehat{\beta}_{ji} Y_i$$

Структурні коефіцієнти за МНК:

$$B_{ji} = (Y_i' Y_i)^{-1} Y_i' Y_j$$

Третій етап моделювання – обчислення навантажень  $\lambda_{jk}$ . Для простоти і зручності навантаження розраховуються як коефіцієнти кореляцій між латентними і явними змінними:

$$\widehat{\lambda}_{jk} = \text{cor}(X_{jk}, Y_j)$$

Кінцева мета PLS-PM моделювання – отримати оцінки латентних змінних для реалізації подальших процедур прогнозування.

#### Приклад 4.2. Побудова PLS-PM моделі стійкого розвитку туризму.

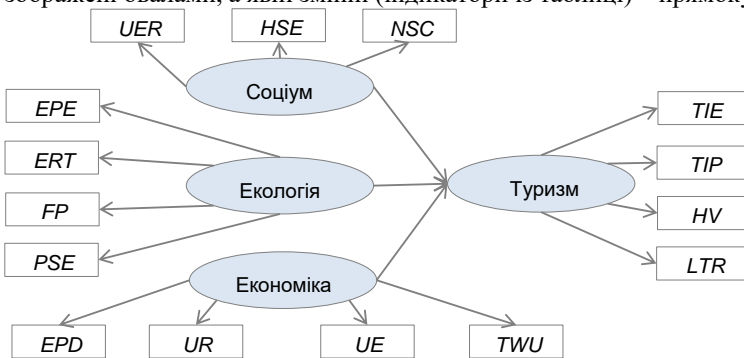
У наступній таблиці представлено індикатори стійкого розвитку туризму, запропоновані Грінвудом (Greenwood J.B.) для моделі Плімсолла (Plimsole) для регіону із розвиненим туристичним сектором:

Таблиця 4.6. Індикатори стійкого розвитку туризму

Індикатор	Опис індикатора	Позначення в моделі
Кількість робочих місць в туриндустрії	Загальна чисельність усіх робочих місць в туриндустрії за календарний рік	TIE
Фонд заробітної платні туриндустрії	Фонд заробітної платні туриндустрії за календарний рік	TIP
Вартість житла	Середня вартість дитлової нерухомості (ділянка не більше 10 акрів + будинок на одну сім'ю)	HV
Податкові надходження від туриндустрії	Загальна сума податкових надходжень від туриндустрії за календарний рік	LTR
Кількість дітей, що отримують субсидії на лікування	Кількість дітей, що отримують субсидії на лікування, за рік	NSC

Держвитрати на соціальні послуги для населення	Сума держвитрат на охорону здоров'я та інші соціальні послуги за рік	HSE
Рівень безробіття, %	Частка загальної кількості безробітних до економічно активного населення	UER
Держвитрати на охорону оточуючого середовища	Сума держвитрат на охорону оточуючого середовища за календарний рік	EPE
Частка робочих місць в туридустрії, %	Частка робочих місць в туридустрії у загальному об'ємі робочих місць	ERT
Кількість бідних сімей	Кількість сімей з рівнем доходу менше прожиткового мінімуму	FP
Держвитрати на охорону суспільної безпеки	Сума держвитрат на охорону суспільної безпеки (поліція, пожежна служба, служба порятунку тощо)	PSE
Держвитрати на економічний розвиток	Сума держвитрат на планування та економічний розвиток (підвищення зайнятості населення та інше)	EPD
Держдоходи за комунальні послуги	Сума грошових надходжень від населення за комунальні послуги	UR
Витрати комунальних служб	Сума держвитрат на надання комунальних послуг населенню	UE
Загальний об'єм спожитої води	Середньодобовий об'єм спожитої населенням води із усіх доступних джерел за календарний рік	TWU

Вихідна модель представлена на наступному рисунку (латентні змінні зображені овалами, а явні змінні (індикатори із таблиці) – прямокутниками).



Взаємозв'язок латентних змінних є внутрішньою моделлю, а зв'язки між латентними та явними змінними представляють зовнішню модель. Запишемо ці моделі в аналітичному вигляді.

Внутрішня модель:

$$LV_{tourism} = \beta_0 + \beta_1 LV_{social} + \beta_2 LV_{ecologic} + \beta_3 LV_{economic} + error_{tourism},$$

де  $LV_{tourism}$ ,  $LV_{social}$ ,  $LV_{ecologic}$ ,  $LV_{economic}$  – латентні змінні,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  – структурні коефіцієнти, які характеризують силу та напрямок зв'язку між латентними змінними,  $\beta_0$  – вільний член,  $error_{tourism}$  – залишок.

Зовнішня модель має вигляд наступної системи:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{TIE} = \lambda_{0TIE} + \lambda_{1TIE}LV_{tourism} + error_{TIE} \\ X_{TIP} = \lambda_{0TIP} + \lambda_{1TIP}LV_{tourism} + error_{TIP} \\ \dots \\ X_{UER} = \lambda_{UER} + \lambda_{1UER}LV_{social} + error_{UER} \\ X_{HSE} = \lambda_{0HSE} + \lambda_{1HSE}LV_{social} + error_{HSE} \\ \dots \\ X_{EPD} = \lambda_{0EPD} + \lambda_{1EPD}LV_{economic} + error_{EPD} \\ X_{UR} = \lambda_{0UR} + \lambda_{1UR}LV_{economic} + error_{UR} \\ \dots \\ X_{EPE} = \lambda_{0EPE} + \lambda_{1EPE}LV_{ecologic} + error_{EPE} \\ X_{ERT} = \lambda_{0ERT} + \lambda_{1ERT}LV_{ecologic} + error_{ERT} \end{array} \right.$$

де  $X_{TIE}, X_{TIP}, \dots, X_{ERT}$  – явні змінні,  $\lambda_{1TIE}, \lambda_{1TIP}, \dots, \lambda_{1ERT}$  - коефіцієнти навантажень,  $\lambda_{0TIE}, \lambda_{0TIP}, \dots, \lambda_{0ERT}$  - вільні члени,  $error_{TIE}, error_{TIP}, \dots, error_{ERT}$  – залишки. Нагадаємо, що при моделюванні структурних коефіцієнтів за допомогою частинних найменших квадратів (ЧНК або PLS) використовують оцінки латентних змінних:

$$\widehat{LV}_j = Y_j = \sum_k w_{jk} X_{jk}$$

Для нашої моделі ці оцінки можна представити у вигляді наступної системи рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{LV}_{tourism} = Y_{tourism} = w_{TIE}X_{TIE} + w_{TIP}X_{TIP} + w_{HV}X_{HV} + w_{LTR}X_{LTR} \\ \widehat{LV}_{social} = Y_{social} = w_{UER}X_{UER} + w_{HSE}X_{HSE} + w_{NSC}X_{NSC} \\ \widehat{LV}_{ecologic} = Y_{ecologic} = w_{EPE}X_{EPE} + w_{ERT}X_{ERT} + w_{FP}X_{FP} + w_{PSE}X_{PSE} \\ \widehat{LV}_{economic} = Y_{economic} = w_{EPD}X_{EPD} + w_{UR}X_{UR} + w_{UE}X_{UE} + w_{TWU}X_{TWU}, \end{array} \right.$$

де  $w_{TIE}, w_{TIP}, \dots, w_{TWU}$  - зовнішні ваги моделі.

Етапи моделювання PLS-PM, пов'язані з оптимізацією моделі та обчисленням усіх параметрів, реалізовані у програмному середовищі R (для аналізу використані наступні інструменти: пакет для компонентного аналізу – Plsdepot; пакет для аналізу методом найменших частинних квадратів – Plspm; пакет для роботи з файлами Microsoft Excel - Excel.link). Для попередньої перевірки моделі проведено компонентний аналіз за допомогою пакету Plsdepot. На рисунку представлені візуалізовані кореляції явних змінних із двома першими головними компонентами:

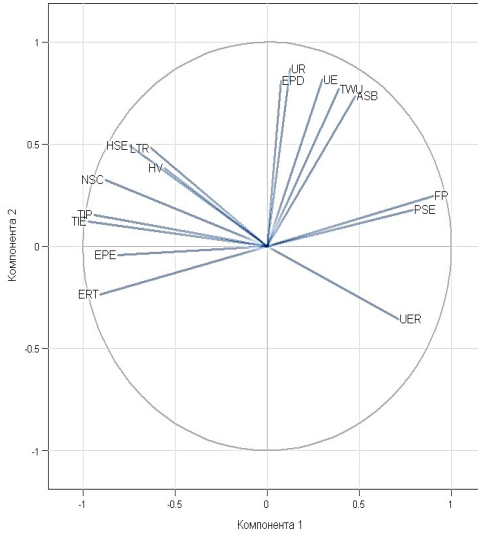


Рис.4.5. Діаграма кореляцій у просторі перших двох головних компонент.

Компонентний аналіз підтверджує правильність розбивки змінних по секторам: туризм – соціум – екологія – економіка).

Аналіз моделі за допомогою пакета Plspm включає наступні пункти: а) перевірка внутрішньої узгодженості у блоках; б) перевірка значимостей змінних у зовнішній моделі; в) перевірка перехрестних кореляцій змінних блока із латентними змінними зі змінними інших блоків; г) перевірка внутрішньої моделі; д) перевірка якості моделі за індексом відповідності моделі даним; е) оптимізація моделі.

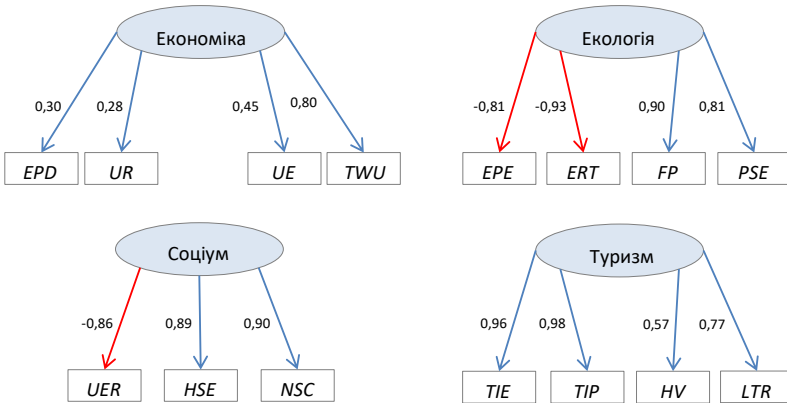
а) Для перевірки внутрішньої узгодженості в блоках у пакеті Plspm використані наступні критерії: коефіцієнт  $\alpha$  Кронбаха; коефіцієнт  $\rho$  Діллона-Гольдштейна; величини власних значень матриці кореляцій явних змінних.

Таблиця 4.7. Перевірка внутрішньої узгодженості в блоках

Блок	Альфа Кронбаха, $\alpha_K$	$\rho$ Діллона-Гольдштейна, $\rho_{DG}$	Власне значення, $\lambda_1$	Власне значення, $\lambda_2$
Економіка	0,88	0,91	3,41	0,72
Екологія	0,00	0,00	2,98	0,73
Соціум	0,00	0,58	2,37	0,38
Туризм	0,85	0,90	2,84	0,70

Таблиця показує, що два блока («Економіка» та «Туризм») мають досить високі значення коефіцієнтів  $\alpha_K$  і  $\rho_{DG}$ . А блоки «Екологія» та «Соціум» характеризуються поганою внутрішньою узгодженістю ( $\alpha_K < 0,7$  і  $\rho_{DG} < 0,7$ ).

На рисунку представлені коефіцієнти кореляцій явних та латентних змінних (по блокам):



У блоці «Екологія» дві змінних (*ERT* і *EPE*) мають від’ємну кореляцію із латентною змінною. У блоці «Соціум» також присутня змінна з від’ємною кореляцією (*UER*). Це призводить до внутрішньої неузгодженості в блоках. Після модифікацій змінних (*FP*, *PSE*, *UER*) отримуємо показники узгодженості зовнішньої моделі, представлені у наступній таблиці:

Таблиця 4.8. Показники узгодженості зовнішньої моделі

Блок	Альфа Кронбаха, $\alpha_K$	Ро Ділпона-Гольдштейна, $\rho_{DG}$	Власне значення, $\lambda_1$	Власне значення, $\lambda_2$
Економіка	0,88	0,91	3,41	0,72
Екологія	0,88	0,94	1,78	0,22
Соціум	0,85	0,93	1,74	0,26
Туризм	0,85	0,90	2,84	0,70

Усі три критерія узгодженості після модифікацій задовольняють необхідним умовам ( $\alpha_K > 0,7$ ,  $\rho_{DG} > 0,7$ ,  $\lambda_1 > 1$ ,  $\lambda_2 < 1$ ). На рисунку 4.6 представлені кореляційні схеми:

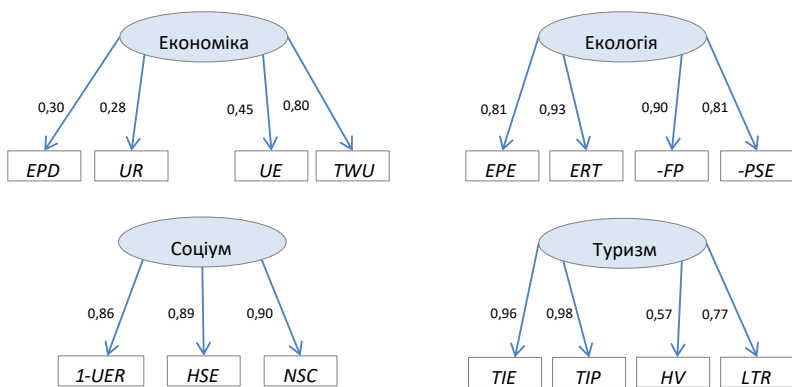


Рис.4.6. Кореляційні зв'язки.

Другий етап – перевірка зовнішньої моделі:

Таблиця 4.9. Значення коефіцієнтів зовнішньої моделі

Блок	Змінна	Зовнішня вага, $w_j$	Навантаження, $\lambda_{1j}$
Економіка	UR	0,53	0,28
	TWU	-0,34	0,84
	UE	-0,45	0,45
	EPD	0,36	0,31
Екологія	ERT	0,34	0,93
	EPE	0,30	0,81
	-FP	0,29	0,90
	-PSE	0,23	0,81
Соціум	HSE	0,34	0,90
	NSC	0,42	0,91
	1-UER	0,36	0,86
Туризм	TIP	0,38	0,98
	LTR	0,23	0,78
	HV	0,12	0,57
	TIE	0,40	0,96

Змінні вважаються значимими, якщо коефіцієнт навантаження  $\lambda_{1j} > 0.7$ . За результатами перевірки із моделі слід виключити змінні UR, UE, EPD, HV. Після виключення незначимих змінних отримуємо наступні результати перевірки зовнішньої моделі:

Таблиця 4.10. Значення коефіцієнтів зовнішньої моделі після модифікації

Блок	Змінна	Зовнішня вага, $w_j$	Навантаження, $\lambda_{1j}$
Економіка	TWU	0,39	0,91
Екологія	ERT	0,33	0,93
	EPE	0,30	0,81
	-FP	0,29	0,90



	-PSE	0,23	0,81
Соціум	HSE	0,34	0,90
	NSC	0,42	0,91
	1-UER	0,36	0,86
Туризм	TIP	0,41	0,99
	LTR	0,22	0,77
	TIE	0,44	0,97

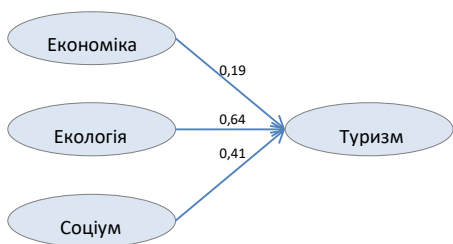
Після перевірки коефіцієнтів навантаження  $\lambda_{1j}$ , тобто після перевірки зв'язаності явних змінних із латентною змінною відповідного їм блока, необхідно перевірити перехресні навантаження, тобто визначити силу зв'язку між явними змінними і латентними змінними інших блоків. Це дозволить виключити такі індикатори, сила зв'язку яких із латентною змінною іншого блоку більша ніж із латентною змінною відповідного їм блоку:

Таблиця 4.11. Значення коефіцієнтів перехресного навантаження

Блок	Змінна	Блок			
		Економіка	Екологія	Соціум	Туризм
Економіка	TWU	0,91	-0,50	-0,09	-0,13
Екологія	ERT	-0,49	0,93	0,58	0,81
	EPE	-0,33	0,81	0,58	0,73
	-FP	-0,63	0,90	0,65	0,72
	-PSE	-0,48	0,81	0,64	0,56
Соціум	HSE	-0,04	0,58	0,90	0,69
	NSC	-0,11	0,75	0,91	0,84
	1-UER	-0,08	0,52	0,86	0,72
Туризм	TIP	-0,24	0,84	0,80	0,99
	LTR	0,09	0,43	0,68	0,77
	TIE	-0,29	0,89	0,85	0,97

Із таблиці видно, що сила зв'язку усіх явних змінних із латентними змінними відповідних їм блоків більша, ніж із латентними змінними інших блоків, тобто усі змінні "лояльні" своїм блокам.

Четвертий етап – перевірка якості внутрішньої моделі. На рисунку представлено графічне зображення внутрішньої моделі з указаними значеннями структурних коефіцієнтів:



У таблиці наведені оцінки  $\beta_i$  із рівняння структурної моделі, а також результати критерія t-статистики:

Таблиця 4.12. Оцінки параметрів структурної моделі

	Оцінка $\beta_i$	Стандартна похибка, $SE_{\beta_i}$	t-статистика	$Pr(>  t )$
Вільний член	2,1628E-17	0,085354054	2,53403E-16	1
«Економіка»	0,19028279	0,119057102	1,598248144	0,1249264
«Екологія»	0,64313833	0,167063135	3,849672335	0,00093012
«Соціум»	0,41436382	0,139606488	2,968084329	0,00733725

Критерій t-статистики виконується для блоків «Екологія» та «Соціум» ( $Pr(> |t|) < 0,05$ ), але не виконується для блока «Економіка» ( $Pr(> |t|) > 0,05$ ). На етапі оптимізації даний блок можна виключити із моделі.

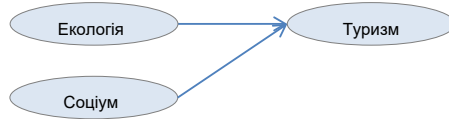
Таблиця 4.13. Сумарна статистика внутрішньої моделі

Блок	$R^2$	Частка відтворюваної варіації, BC	Частка вилученої дисперсії, AVE
Економіка	0,00	0,89	0,89
Екологія	0,00	0,74	0,74
Соціум	0,00	0,79	0,79
Туризм	0,85	0,84	0,84

Показник  $R^2$  для цільового блоку «Туризм» більше 80%. Частка відтворюваної варіації характеризує частку варіації блока, яка відтворюється латентною змінною цього блока. Для всіх блоків цей показник набагато перевищує 50%, що позитивно характеризує модель. В останньому стовпці надано показник, що характеризує частку вилученої дисперсії (середня частка дисперсії індикаторів блока, що пояснюється латентною змінною блока, у загальній дисперсії, яка містить похибку вимірювань). Показник AVE для всіх блоків перевищує 50%, тому за цим критерієм внутрішню модель також вважається задовільною.

П'ятий етап – розрахунок єдиного коефіцієнта якості відповідності моделі даним - GoF (Goodness-of-Fit). Коефіцієнт характеризує якість як внутрішньої моделі системи, так і зовнішньої, і слугує показником прогнозної надійності моделі (прогнозна надійність моделі вважається високою, якщо коефіцієнт  $GoF > 70\%$ ). Для нашої моделі коефіцієнт  $GoF = 82\%$ .

Шостий етап – оптимізація моделі. Усі критерії якості моделі виконуються, окрім критерія t-статистики для блока «Економіка» у внутрішній моделі. Тому виключаємо цей блок із системи і виконаємо усі етапи перевірки оновленої моделі, внутрішня (структурна) частина якої буде такою:



Перший етап – перевірка внутрішньої узгодженості в блоках:

Таблиця 4.14. Перевірка внутрішньої узгодженості в блоках (після оптимізації)

Блок	Альфа Кронбаха, $\alpha_k$	Ро Діплона-Гольдштейна, $\rho_{DG}$	Власне значення, $\lambda_1$	Власне значення, $\lambda_2$
Екологія	0,88	0,92	2,98	0,73
Соціум	0,87	0,92	2,37	0,38
Туризм	0,90	0,94	2,53	0,45

На Рисунку 4.7 представлені кореляційні схеми після виключення блока D:

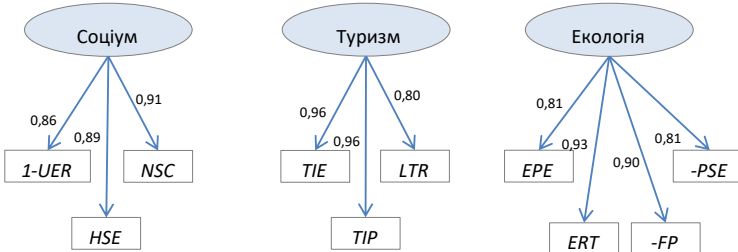


Рисунок 4.7. Коефіцієнти навантажень змінних у зовнішній моделі (після оптимізації)

Другий етап – перевірка значимості змінних у зовнішній моделі:

Таблиця 4.15. Значення коефіцієнтів зовнішньої моделі (після оптимізації)

Блок	Змінна	Зовнішня вага, $w_j$	Навантаження, $\lambda_{ij}$
Екологія	ERT	0,33	0,93
	EPE	0,30	0,81
	-FP	0,29	0,90
	-PSE	0,23	0,81
Соціум	HSE	0,34	0,90
	NSC	0,42	0,91
	1-UER	0,37	0,86
Туризм	TIP	0,39	0,98

	LTR	0,27	0,80
	TIE	0,42	0,96

Третій етап – перевірка перехресних кореляцій змінних блока із змінними інших блоків:

Таблиця 4.16. Значення коефіцієнтів перехресного навантаження (після оптимізації)

Блок	Змінна	Блок		
		Екологія	Соціум	Туризм
Екологія	ERT	0,93	0,58	0,80
	EPE	0,81	0,58	0,73
	-FP	0,90	0,65	0,71
	-PSE	0,81	0,64	0,55
Соціум	HSE	0,58	0,90	0,69
	NSC	0,75	0,91	0,84
	1-UER	0,52	0,86	0,73
Туризм	TIP	0,84	0,80	0,98
	LTR	0,43	0,68	0,80
	TIE	0,89	0,85	0,96

Четвертий етап – перевірка внутрішньої моделі:

Таблиця 4.17. Статистика внутрішньої моделі (після оптимізації)

	Оцінка $\beta_i$	Стандартна похибка, $SE_{\beta_i}$	t-статистика	$Pr(> t )$
Вільний член	1,7726E-17	0,090808067	1,95203E-16	1
«Екологія»	0,433665664	0,127880991	3,391165947	0,002626084
«Соціум»	0,54539304	0,127880991	4,264848383	0,000315956

Таблиця 4.18. Сумарна статистика внутрішньої моделі (після оптимізації)

Блок	Тип блока	R2	Частка відтвореної варіації, BC	Частка вилученої дисперсії, AVE
Екологія	Екзогенний	0	0,743174071	0,743174071
Соціум	Екзогенний	0	0,787916914	0,787916914
Туризм	Ендогенний	0,818585688	0,84015712	0,84015712

П'ятий етап – перевірка якості моделі за індексом відповідності моделі даним: у новій моделі коефіцієнт GoF = 86%. Отже, усі необхідні умови якості для нової моделі виконані.

Проаналізуємо отримані результати. Внутрішня модель має вигляд рівняння:

$$LV_{tourism} = 0,55LV_{social} + 0,43LV_{ecologic} + error_{tourism} .$$

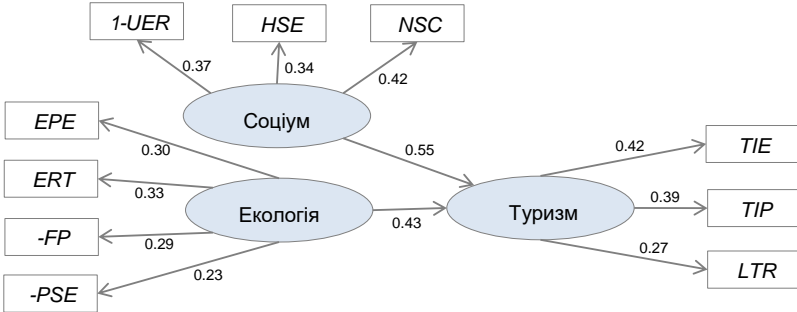
Оцінки латентних змінних у вигляді системи рівнянь:

$$LV_{tourism} = 0,42XTIE + 0,39XTIP + 0,27XLTR$$

$$LV_{social} = 0,37(1 - XUER) + 0,34XHSE + 0,42XNSC$$

$$LV_{ecologic} = 0,3XEPE + 0,33XERT - 0,29XFP - 0,23XPSE$$

Отримані результати можна зобразити у вигляді графа, на якому вказані структурні коефіцієнти для внутрішньої моделі та зовнішні ваги для зовнішньої моделі:



Суттєво впливають на рівень розвитку туризму в регіоні із розвиненим туристичним сектором дві характеристики: «Рівень соціального комфорту» і «Рівень готовності спільноти займатися охороною оточуючого середовища» із силою впливу 0,55 та 0,43 відповідно. Окрім того, дослідження виявило достатньо слабкий вплив рівня економічного розвитку на розвиток туризму. Можна припустити, що стійкий розвиток туризму можливий як в економічно розвиненому регіоні, так і в тому, що розвивається. Оцінити рівень соціального комфорту можна за трьома факторами:

- рівень зайнятості населення (частка людей, що мають постійну роботу, в загальній кількості економічно активного населення);
- сума державних витрат на охорону здоров'я та інші соціальні послуги;
- кількість дітей, які отримують субсидії на лікування.

Рівень формування системи екологічних цінностей в суспільстві – за 4 факторами:

- сума державних витрат на охорону оточуючого середовища;
  - частка робочих місць в туристичній індустрії у загальному об'ємі робочих місць;
  - кількість сімей з рівнем доходу нижче прожиткового мінімуму (зворотня залежність);
  - сума державних витрат на охорону суспільної безпеки (зворотня залежність).
- Оцінка рівня розвитку туризму залежить від трьох факторів:

- кількість робочих місць в туристичній індустрії;

- фонд зарплатні туріндустрії;
- сума податкових надходжень від туріндустрії.

За моделлю можна розраховувати латентні індекси для кожного року і створити стимулятор для прогнозування майбутніх значень. Стійкість розвитку можна оцінювати шляхом порівняння значень оцінок блоків для різних періодів. Наприклад, якщо оцінки латентних змінних/блоків (Економіка, Екологія, Соціум) поточного періоду не менші оцінок попереднього періоду, то відповідний блок вважається стійким. Або для кожного блока можна визначити базовий рівень, з яким проводити порівняння.

### Логіт-регресія МакФаддена.

У 2000 році Нобелівською премією з економіки були відзначені досягнення вчених Джеймса Хекмана та Деніела МакФаддена (Daniel L. McFadden), які зробили значний вклад у розвиток теорії та методів аналізу дискретного вибору. Хекман дослідив методологічні проблеми формування статистичної вибірки, а МакФадден розробив моделі дискретного вибору. Роботи МакФаддена присвячені мікроекономічному аналізу, демографічним процесам, попиту, методам моделювання, теорії вибору. Серед його публікацій відмітимо: Структурний аналіз дискретних моделей та економетричні застосування (Structural analysis of discrete data with econometric applications, разом із Ч.Манкі); Переваги, невизначеність і оптимальність (Preferences, uncertainty and optimality); Посібник з економетрики (Handbook of econometrics, разом із Н.Енглум) та інші. В них створив економетричні методи для оцінки виробничих технологій та дослідження факторів, які лежать в основі попиту фірм на капітал і робочу силу. Основним його досягненням вважається розвиток економічної теорії та економетричних методів для аналізу дискретного вибору. У 1974 році розробив так звану логіт-модель, яку застосував для прогнозування ефективності будівництва транспортних ліній у Каліфорнії на основі аналізу даних по вибору місцевими жителями способу поїздок на роботу. В 90-их роках доповнив методологію імітаційними моделями, що дозволяло базувати дослідження на більш загальних засадах. В результаті моделювання дискретного вибору отримало більшу реалістичність і точність.

Часто мікродані відображають дискретний вибір, тобто, вибір із скінченної множини альтернатив (наприклад, інформація про заняття індивідуумів, їх постійне місце проживання, спосіб пересування або подорожування тощо). В економічній теорії традиційний аналіз попиту передбачав, щоіндивідуальний вибір описується неперервними змінними, але така трактовка не відповідає практиці досліджень поведінки дискретного вибору. Методологія дискретного вибору МакФаддена виходить із аналізу умовного логіту, суть якої полягає у тому, що в житті кожної особи з'являються конкретні альтернативи: X-характеристики, пов'язані з кожною

альтернативою, та Y-характеристики осіб, які дослідник може спостерігати за допомогою реальних даних. Для вивчення, наприклад, вибору способів поїздки, де альтернативами можуть бути автомобіль, автобус або метро, X-характеристики можуть охоплювати інформацію про час та витрати, а Y-характеристики містять дані про вік, доходи та освіту. Але відмінності між індивідуумами і альтернативами інші, ніж між X та Y. Не дивлячись на те, що вони не помітні для дослідника, вони визначають індивідуальний максимально корисний вибір. Такі характеристики представлені випадковими «векторами похибок».

У стандартній логіт-моделі корисність є лінійною функцією властивостей альтернативи:  $u_{ij} = \sum_{i=1}^k x_{ij}\beta_{ij} + \varepsilon_{ij}$ ,  $x_{ij} - k \times 1$  вектор, який містить характеристики споживача  $i$  та альтернативи  $j$ ,  $\beta_{ij} - k \times 1$  вектор параметрів, а змінні  $\varepsilon_{ij}$ ,  $j=1,2,\dots,J$ , передбачаються випадковими і такими, які мають незалежні стандартні розподіли екстремальних значень, кумулятивна функція розподілу яких дорівнює  $F(\varepsilon_{ij}) = \exp(-\exp(-\varepsilon_{ij}))$ , а функція щільності розподілу:  $f(\varepsilon_{ij}) = \exp(-\varepsilon_{ij}) \cdot \exp(-\exp(-\varepsilon_{ij}))$ . МакФадден припустив, що випадкові похибки мають певну статистичну дистрибуцію (розподіл) серед населення, яку назвав дистрибуцією екстремального значення. При цих умовах він показав, що ймовірність того, що особа  $i$  обиратиме альтернативу  $j$ , дорівнює

$$p_{ij} = \frac{\exp\left(\sum_{i=1}^k x_{ij}\beta_{ij}\right)}{\sum_{j=1}^J \left(\exp\left(\sum_{i=1}^k x_{ij}\beta_{ij}\right)\right)}$$

- ймовірність того, що споживач  $i$  обирає продукт  $j$  для

усіх споживачів. Отже, це ймовірність того, що продукт  $j$  купується на ринку. Ця величина на ринку з великою кількістю споживачів дорівнює частці ринку продукту  $j$ .

В логіт-моделі використовується CDF логістичного розподілу:  $p(x) = 1 - \exp(-x^{Tb}) / (1 + \exp(-x^{Tb})) = \frac{\exp(x^{Tb})}{1 + \exp(x^{Tb})}$ . Також при розрахунках використовується коефіцієнт детермінації МакФаддена

$$McFadden R^2 = 1 - \frac{\ln L_1}{\ln L_0}, w_1 = \frac{1}{n} \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

$$Predicten R^2 = 1 - \frac{w_1}{w_0}, w_0 = \begin{cases} 1 - \hat{p}_i, \hat{p} > 0,5, \hat{p} = \frac{n_1}{n} \\ \hat{p}_i, \hat{p} \leq 0,5 \end{cases}$$

Логіт-моделі застосовуються на транспорті у дослідженнях попиту на міські перевезення, для вивчення ефективності політичних дій, соціальних реформ, змін оточуючого середовища тощо. Наприклад, ці моделі пояснюють, як зміни у цінах товарів впливають на їх доступність, на демографічну ситуацію, на об'єми перевезень. Застосовуються вони і в дослідженнях вибору житла, місця проживання або освіти тощо.

## Розділ 5. Динамічні оптимізаційні моделі

### 5.1. Модель Ерроу-Дебре. Прикладні моделі обчислюваної загальної рівноваги (CGE – computable general equilibrium) та динамічної рівноваги DCGE

Загальна економічна рівновага (ЗЕР) визначається як стан економіки, при якому кожен економічний агент діє у відповідності зі своєю цільовою функцією, і усі ринки одночасно знаходяться в рівновазі. Засновник теорії ЗЕР Леон Вальрас довів, що загальна рівновага сумісна з економічною системою, в якій на кожному ринку виконуються умови досконалої конкуренції. В моделі Вальраса загальна рівновага визначається як результат розв'язку системи рівнянь за умови, що ринковий попит на товар дорівнює його початковому запасу і випуску (при рівноважних цінах). Як показав Вальрас, така система рівнянь має розв'язок, якщо кількість незалежних рівнянь співпадає із кількістю невідомих. Але ця умова є лише необхідною, а не достатньою для існування розв'язків системи. Нобелівські лауреати з економіки К.Ерроу та Г.Дебре (Arrow, K.J., and G. Debreu) довели принципову можливість існування ЗЕР, застосувавши теореми про нерухому точку, отримані в математиці.

Неокласичні по-суті моделі ЗЕР здатні допомагати оцінювати ефекти від тих чи інших значимих змін в параметрах економічної політики або зовнішньої кон'юнктури з урахуванням реально існуючої структури економіки. Саме інерційність цієї структури дозволяє казати про принципову можливість застосування концепції ЗЕР в якості інструменту аналізу структурних зсувів в умовах перехідної економіки.

Опишемо модель ЗЕР Ерроу-Дебре. Припускається, що в економіці існують  $N$  споживачів і  $S$  фірм (фіксована кількість), але достатньо велика кількість, тобто фірми і споживачі не здійснюють достатньо значимого впливу на ціни. В економіці виробляється  $K$  товарів, серед яких немає суспільних благ (насправді ввести в модель суспільні блага достатньо легко, оскільки для них додається лише умова Самуельсона про рівність суми індивідуальних оцінок корисності споживачів від споживання суспільного блага вартості його виробництва).

Кожен споживач здійснює задачу вибору споживчого набору  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{ik})$ ,  $x_{ij} \geq 0$ , із потенційної споживчої множини  $X_i$ , який максимізував би його функцію корисності  $U_i(X_i)$ , що описує переваги споживача (про властивості функції корисності можуть робитись припущення виходячи із емпіричних даних або зі зручності знаходження оптимального розв'язку). Основною властивістю функції корисності в усіх випадках є відсутність зовнішніх ефектів у споживанні (тобто, коли вибір одного із споживачів не впливає на споживчий вибір інших). Споживач, окрім того, володіє початковим запасом товарів і виробничих факторів  $w_i$ . Споживачі також є власниками усіх фірм в економіці, причому  $\alpha_{ij}$  - частка капіталу фірми



$j$ , що знаходиться у власності споживача  $i$ . Це дозволяє споживачу приймати участь у розподілі прибутку фірми  $\pi_j$  пропорційно його частці в капіталі.

Умовою повного розподілу прибутків є рівність  $\sum_{i=1}^N \alpha_{ij} = 1$ . Досить часто модель

Ерроу-Дебре формулюється з умовою існування постійної віддачі від масштабу в усіх секторах економіки, що в кінці кінців призводить до нульового прибутку компаній у довгостроковому періоді.

Задача, яку розв'яже споживач в моделі Ерроу-Дебре можна сформулювати у наступному вигляді:

$$\begin{cases} U_i(x_i) \rightarrow \max_{x_i} \\ x_i \in X_i \\ p \cdot x_i \leq p w_i + \sum_{j=1}^S \alpha_{ij} \pi_j \end{cases}, (*)$$

де  $p$  - вектор цін товарів. Із рішення цієї задачі визначається в першу чергу функція індивідуального попиту споживача на кожне благо, яке вироблене в економіці. Функція ринкового попиту є сумою індивідуальних функцій попиту всіх споживачів. Часто припускають, що споживачі ідентичні, і це дозволяє шляхом уведення репрезентативного агента у більш простому вигляді описати ринковий попит і пропозицію. У найпростішій моделі Ерроу-Дебре поведінка репрезентативного агента відповідає процесу колективного прийняття рішень споживачами і державою.

Вважається, що фірми вирішують задачу вибору оптимального вектору  $y_j \in Y_j$ , де  $Y_j$  - потенційна виробнича множина, з метою максимізації свого прибутку  $\pi_j$ . Елементи вектора  $y_j \in (y_{j1}, \dots, y_{ji}, \dots, y_{jK})$  можуть бути як більші, так менші нуля, оскільки смисл  $y_{ji}$  - це випуск продукту  $i$  фірмою  $j$  за відрахуванням його виробничого споживання даною фірмою:

$$\begin{cases} \pi_j = p_j \cdot y_j \rightarrow \max_{y_j} \\ y_j \in Y_j \end{cases} (**)$$

Одразу відзначимо, що модель Ерроу-Дебре описує конкурентну поведінку економічних агентів, кожен із яких діє виходячи тільки із своїх власних інтересів.

Повертаючись до моделі Ерроу-Дебре, сформулюємо умову балансу попиту і пропозиції для усіх товарів в економіці:

$$\sum_i w_i + \sum_j y_j \geq \sum_i x_i \quad \forall k. (***)$$

Зазвичай припускають, що функція попиту є однорідною нульового ступеня, а функція прибутку лінійно однорідна відносно цін. В результаті, як і в моделі Вальраса, абсолютний рівень цін не впливає на рівновагу в даній моделі.

Набір  $(\bar{x}, \bar{y})$  називається станом рівноваги економічної системи, а ціни

$\bar{p}$  - рівноважними цінами, якщо:

1. При ціні  $\bar{p}_i$  розв'язком системи (\*) є  $\bar{x}_i \quad \forall i$ .

2. При векторі цін  $\bar{p}$  розв'язком задачі (\*\*) є  $\bar{y}_j \quad \forall j$ .

3. Співвідношення (\*\*\*) виконується при  $\bar{x}_i$  і  $\bar{y}_j$ . Або, якщо (\*\*\*) привести

до виду відомого закону Вальраса, то 
$$\left( \bar{p}, \sum_j \bar{y}_j + \sum_i w_i - \sum_i \bar{x}_i \right) = 0.$$

Рівновага в даній моделі являється оптимальною за Парето, якщо передбачити локальну ненасиченість споживчих переваг.

Перехід від теоретичної постановки задачі знаходження ЗЕР до прикладного аналізу насамперед був пов'язаний із необхідністю дати відповідь на питання про те, як на практиці державі слід здійснювати вибір оптимальної економічної політики. Тому у практичних застосуваннях виникли два великих класи моделей ЗЕР:

1) *Аналіз питань оподаткування*. Даний клас моделей використовують для моделювання усієї множини податків, які є частиною сучасних податкових систем (подходні податки, податки на прибутки корпорацій, майнові податки, акцизи тощо). На відміну від реальної ситуації, часто замість специфічних податкових ставок у моделях використовуються еквівалентні їм аквалорні еквіваленти. Основним напрямком використання даних моделей є вивчення викривляючих ефектів, які створюють податки і вироблення оптимальної з точки зору економічної ефективності податкової політики.

2) *Аналіз проблем міжнародної торгівлі*. На відміну від моделювання податкової політики, цей клас моделей менш однорідний за своєю структурою, оскільки в основі моделей часто лежать різні варіанти теорії міжнародної торгівлі. Деякі моделі розглядають декілька країн або регіонів у їхній торгівельній взаємодії. Інші представляють собою моделі однієї економіки, в якій інший світ представлений лише функціями попиту на експорт даної країни і пропозицією імпорту. А деякі моделі зорієнтовані виключно на аналіз питань міжнародної торгівлі, для інших – може передбачатись можливість сценарного моделювання фіскальної політики держави.

Прикладні моделі ЗЕР дозволяють перейти від теорії до кількісної оцінки проведення того чи іншого варіанту економічної політики в конкретній економіці. Використання такої детальної картини економіки, якою вона представлена у системі національних рахунків, дозволяє не тільки кількісно верифікувати теоретичні гіпотези, а й дослідити те, яким чином структура конкретної економіки (зазвичай досить далека від неокласичного ідеалу) може впливати на наслідки економічної політики. Значний прогрес у застосуванні прикладних моделей ЗЕР відбувся після появи мови програмування GAMS (General Algebraic Modelling System), який був спеціально розроблений Всесвітнім Банком для економістів, що займаються кількісним аналізом проблем економічної політики. GAMS надає досліднику можливість обирати обчислювальні алгоритми для розрахунків рівноважних станів і спрямований

саме на розв'язування економічних задач. Окрім вибору надійних чисельних методів знаходження рівноважних станів економіки при зміні параметрів економічної політики, ще однією формальною задачею, яка виникає при використанні прикладних моделей ЗЕР є задача визначення параметрів використаних у моделях функціональних форм. Як правило, для цього застосовується процедура калібровки (полягає у визначенні оцінок параметрів функцій моделі на підставі статистичних даних за базовий період часу, зазвичай – рік). Тому прикладні моделі ЗЕР називають CGE – Computable General Equilibrium або DCGE – Dynamic Computable General Equilibrium. На наш погляд, процес побудови прикладної моделі ЗЕР повинен складатись із наступних етапів:

1. *Загальна концепція.* Базуючись на аналізі питань економічної політики, які цікавлять дослідника, і наявних статистичних даних обрати необхідний рівень деталізації основних змінних аналізу: регіони, споживачі, виробники, уряд.
2. *Поведінка економічних агентів.* Необхідно визначити цільову функцію для кожного економічного агента. Ця функція може бути досить простою (як, наприклад, у уряду, який збирає податки і пред'являє попит на суспільні товари та послуги), так і досить складною (як, наприклад, у споживача, який розподіляє дохід між альтернативними товарами у відповідності до своїх переваг).
3. *Функції попиту і пропозиції.* Потрібно визначитись із функціональними формами, які описують поведінку кожного економічного агента в моделі (зазвичай, ці форми отримують у процесі розв'язування оптимізаційних задач із п.2).
4. *Визначення параметрів.* На даному етапі на підставі емпіричних даних перевіряється гіпотеза про сумісність спостережуваних даних і поведінкових передбачень. Потім визначаються фактичні значення параметрів поведінкових функцій.
5. *Програмування моделі та комп'ютерні розрахунки.*
6. *Відтворення вихідної рівноваги.* Якщо параметри виробничих функцій та функцій корисності були визначені на підставі вихідних даних, то при вихідних значеннях екзогенних параметрів модель повинна відтворити вихідний стан рівноваги, який описується початковими даними.
7. *Тестування моделі.* Тести можуть полягати в оцінці простих змін в економічній політиці (таких, наприклад, як податкова реформа), а також можуть включати діагностичні розрахунки (наприклад, визначення податкового навантаження з метою порівняльного аналізу ефективності різних податкових інструментів).

Моделі CGE використовуються у багатьох країнах світу (США, Данія, Норвегія, Нідерланди, Франція, Швеція, Австралія, Бразилія, Аргентина, Індія, Таїланд, Швейцарія, РФ та ін.) офіційними властями для оцінки наслідків змін у державній економічній політиці. В Австралії за допомогою моделі ORANI приймалися рішення про приватизацію залізниць, електроенергетики, зниження рівня державної підтримки, змін в регулюванні

ринку праці, прийнятті окремих галузевих мiр, в торгiвельнiй полiтицi. На даний час Центр полiтичних дослiджень (органiзацiя, що пiдтримує та розроблює моделi CGE: ORANI, MONASH, MMRF, TERM) надає послуги по розробцi CGE моделей для окремих країн i проводить навчальнi курси для багатьох країн, що розвиваються. Центр приймав участь у розробцi моделi CGE для США сумiсно з Мiжнародною торгiвельною комiсiєю США (модель USAGE). На сайтi Центра представлена учбова модель (<http://www.monash.edu.au/policy/minimal.htm>). Моделi CGE активно застосовувались для оцiнки наслiдкiв утворення рiзних iнтеграцiйних утворень. Наприклад, за допомогою KPMG, USITC оцiнювали вплив утворення НАФТА на екoномiку США (основне питання стосувалося впливу утворення на зайнятiсть у зв'язку з загрозою напливу мiгрантiв). У Європi моделi CGE застосовуються для оцiнки наслiдкiв змiн у торгiвельних вiдносинах мiж ЄС та iншими країнami, наслiдкiв розширення ЄС, для моделювання окремих екoномiчних питань (наприклад, єдина аграрна полiтика) тощо. Вiдзначимо модель OECDTAX-model, в якiй взаємозв'язок країн дослiджувалася через торгiвельнi потоки, потоки прямих iноземних iнвестицiй та дiяльнiсть транснацiональних корпорацiй.

Багато моделей CGE (останнiм часом одним з стандартiв вважається модель GLOBE) реалiзується у рамках проекту GTAP (Global Trade Analysis Project - «Проект аналізу свiтової торгiвлi»), який координується Центром аналізу свiтової торгiвлi при факультетi сiльськогосподарської екoномiки Унiверситету Пердью, мiсто Уест-Лафайетт, штат Iндiana США). Опишемо основнi принципи побудови моделi GLOBE.

1. Модель повинна включати блоки, що описують екoномiчнi процеси в дослiджуваному рeгiонi та країнax – основних торгiвельних партнерах, якi здiйснюють суттєвий вплив на розвиток свiтової екoномiки.

2. В моделi повиннi бути описанi усi основнi сектори екoномiки: споживчий сектор (домогосподарства), виробничий сектор, держава.

3. Поведiнку кожного сектору необхідно описувати у явному виглядi. Сектор домогосподарств для кожного рeгiону моделюється на основi поведiнки репрезентативного споживача, переваги якого описуються функцiєю корисностi Стоуна-Джерi (Stone-Geary utility function), що залежить вiд сукупного споживання. Сукупне споживання домашнiх господарств складається з споживання вiтчизняних i iмпортних товарiв i задається в моделi за допомогою функцiї з постiйною еластичностiю заміщення (CES-function). Параметри цiєї функцiї, а також величини наявного доходу, визначаються з матриць соціальних рахункiв, з об'ємiв торгiвлi вiтчизняними та iмпортними споживчими товарами, а також з об'ємiв податкiв. З розв'язування задачі домашнього господарства виводиться попит домогосподарств на вiтчизнянi та iмпортнi товари. Вiдповiдно попит на iмпорт для однiєї країнi повинен вiвноважуватися пропозицiєю експорту усiх iнших країн свiту.

Дiяльнiсть уряду моделюється за допомогою бюджетного обмеження держави. Попит уряду на товари та послуги в моделi є екзогенною

(фіксованою) часткою від загального споживання. Фінансується державне споживання за рахунок різноманітних податків: податків на експорт (якщо вони є в країні) та імпорт (тобто, мито і тарифи), податку з продажів, податку на додану вартість, податку на фактори виробництва, податку на доходи домогосподарств, а також різних непрямих податків.

Сукупні збереження країни в моделі визначаються як сума збережень домогосподарств (задаються як екзогенна частка від наявного доходу домогосподарств), державних збережень і збережень інших держав (запозичень), що приходять до держави. Попит на інвестиції є екзогенною величиною, що визначається із «капітального» рахунку матриці соціальних рахунків (причому, в моделі є механізм екзогенної зміни цієї кількості).

Виробничий сектор в моделі складається з фірм, які працюють в умовах досконалої конкуренції, мінімізують витрати і тим самим максимізують свій прибуток. Передбачається, що виробнича функція складається із кількох рівнів і має постійну віддачу від масштабу. На самому верхньому рівні відбувається CES-агрегування двох «кошиків»: кошик основних факторів виробництва і кошик проміжних товарів. Кожний із таких кошиків, у свою чергу, представляє собою агрегат. Кошик основних факторів є CES-агрегат від двох видів труда (кваліфікованого і некваліфікованого), а також капіталу, землі та природних ресурсів. Параметри виробничої функції, пов'язані з основними факторами виробництва, калібруються по даним для кожного фактора із матриці соціальних рахунків (з урахуванням усіляких податків). Кошик проміжних товарів представляє собою агрегат, що складається з енергії, сировини та інших товарів, які використовуються у виробництві. Ця агрегація здійснюється за допомогою функції Леонтєва на основі даних по матриці соціальних рахунків.

Для замикання моделі виконуються наступні кроки: 1) фіксується баланс капіталу (відповідно обмінний курс вважається гнучким); 2) фіксуються збереження домогосподарств; 3) фіксуються податки (відповідно витрати уряду також фіксовані); 4) передбачається повна зайнятість і повна мобільність усіх факторів виробництва, окрім некваліфікованого труда, для якого передбачається можливість безробіття; 5) пропозиція факторів виробництва фіксується (відповідно ціни факторів гнучкі і можуть змінюватись); 6) технологія виробництва визначена і зафіксована, продуктивність факторів незмінна.

4. В моделі для кожної країни повинні бути виділені основні галузі (види діяльності), наприклад: сільське господарство; видобування вугілля; видобування нафти; видобування газу; видобування інших корисних копалин; харчова промисловість; текстильна промисловість; хімічна промисловість; металургія; інша обробна промисловість; виробництво електроенергії; торгівля; сфера послуг тощо. Облік галузевої структури необхідний, бо це дозволяє прослідкувати вплив різних подій на окремі галузі/види діяльності, що у подальшому дозволяє своєчасно розробити і провести необхідні корегуючі заходи з боку держави.

5. Модель повинна будуватись на офіційних даних. Оскільки для реалізації моделі знадобляться великі масиви даних, то в якості такої бази даних може виступати база даних GTAP. Ця база даних на сьогодні є самою повною колекцією даних про економіки різних країн світу та про світову торгівлю. Її перевага полягає також у тому, що в ній містяться дані, які зазвичай використовуються в моделях. Ця база даних GTAP в останній 8-ій версії охоплює 57 секторів економіки 129 регіонів світу і містить дані про торговельні потоки між регіонами, про економіки країн (матриці соціальних рахунків, дані про податки, мито, субсидії, тарифи тощо).

б) Модель краще будувати засобами GAMS.

## 5.2. Застосування моделей CGE, DSGE

*Приклад 5.1. Статична обчислювана модель ЗЕР для РФ (Alekseev A.V. A Diversified Computable General Equilibrium Model. / Working paper # WP/2007/217. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2007).*

Дана модель є статичною моделлю ЗЕР. В ній представлені 5 регіонів, у кожному із яких моделюється 3 агенти, і 15 галузей у кожному регіоні. Таким чином, в моделі визначено 15 економічних агентів.

Перший репрезентативний споживач має функцію корисності з постійною еластичністю заміщення і обирає оптимальний споживчий набір при умові виконання бюджетного обмеження.

Другий вид агента – виробник моделюється за допомогою виробничої функції з постійною віддачею від масштабу. Передбачається, що усі ринки є ринками із досконалою конкуренцією, Тому для виробника виконана умова нульового прибутку.

Третій вид агента – держава моделюється у неявному вигляді. А саме, єдина функція, яку виконує держава, це збір податків і тарифів за екзогенно заданим ставкам і переадресація податкової та тарифної виручки у вигляді трансфертів від виробників до споживачів. Таким чином, про державу в даній моделі можна казати як про агента, який наділений специфічною цільовою функцією, яка передбачає, що повний перерозподіл податкової та тарифної виручки максимізує його цільову функцію. Прикладом такої функції може бути будь-яка гладка опукла функція від розміру трансфертів. Необхідно підкреслити, що більш деталізоване моделювання держави не є необхідним, оскільки інструменти впливу на економіку, такі як податки, тарифні та нетарифні засоби регулювання, являються екзогенними параметрами в даній моделі.

Дана модель є міжрегіональною моделлю, побудованою для оцінки торгівельних сценаріїв. Тому необхідно використовувати пропозицію Армінгтона, яка означає, що однакові товари, вироблені у різних регіонах, розглядаються як різні товари. В корисності споживача дані товари агрегуються в один узагальнений товар за допомогою відповідних еластичностей заміщення (Армінгтонові еластичності). В моделі використовуються рівні еластичностей Армінгтона для РФ, що і в роботах Земницького, Ballard, Faini, Piggot. Еластичності Армінгтона для усіх регіонів, окрім РФ, встановлено на рівні 0,9. Дана оцінка широко розповсюджена в літературі, але для того, щоб зрозуміти, наскільки це впливає на отримані результати, було проведено тестування моделі на стійкість по відношенню до вибору рівнів еластичностей Армінгтона, які показали, що результати моделювання виявляються стійкими по відношенню до змін еластичностей Армінгтона. Потім розв'язуються оптимізаційні задачі репрезентативних споживачів, визначаються відносні ціни споживачів і виробників, знаходяться рівноважні умови моделі та доводиться існування та єдиність рівноваги в моделі.

### Змінні моделі (екзогенні та ендогенні).

Найбільш важливими екзогенними змінними в даній моделі є еластичності заміщення та еластичності Армінгтона. Інші параметри функції споживання і виробничої функції являються ендогенними і калібруються в рівновазі. Окрім того екзогенно задаються тарифи, еквівалентні ставки нетарифних заходів регулювання, а також податкові ставки.

Також необхідно відзначити, що на етапі калібрування екзогенними параметрами виступають: споживання, виробництво, торгівельні потоки. Після того, як знайдені параметри функцій виробництва і споживання, тобто на етапі тестування сценаріїв, оптимальне споживання, виробництво і торгівельні потоки розраховуються всередині моделі.

#### Попит репрезентативного споживача.

Споживачі представлені дворівневою корисністю з постійною еластичністю заміщення на кожному із рівнів. Структура попиту споживачів у кожному із регіонів можна описати наступною схемою:

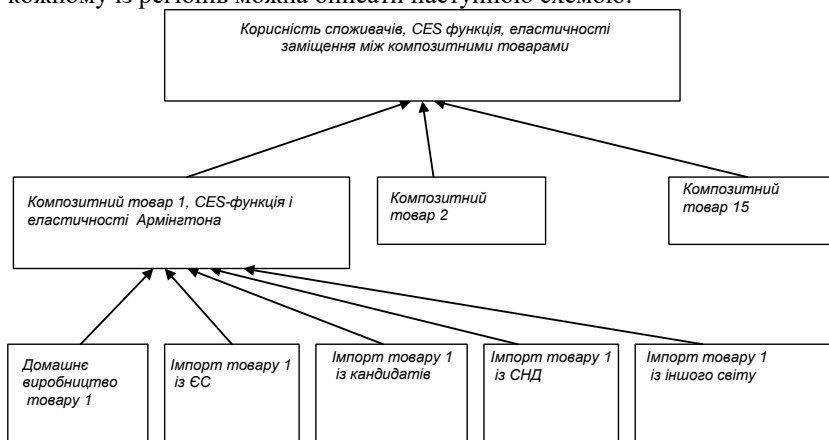


Рис.5.1. Попит споживачів.

На другому рівні корисності споживачів використовується наступна, більш детальна функція:

$$U_j = \left[ \sum_{i=1}^{15} \gamma_{ij} C_{ij}^{\frac{\sigma_{ij}-1}{\sigma_{ij}}} \right]^{\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{ij}-1}} \quad (1)$$

У даній формулі  $U_j$  - це корисність у регіоні  $j$ , яка складається із композитних товарів  $C_{ij}$ , і ці композитні товари зважені з параметрами  $\gamma_{ij}$  ( $\sum_{j=1}^{15} \gamma_{ij} = 1$ ), які теж калібруються в моделі,  $\sigma_{ij}$  - це еластичності заміщення між композитними товарами.



На першому рівні дані композитні товари розраховуються, виходячи із даних про споживання відповідних товарів всередині заданого регіону. Тобто, композитний товар складається із однакових товарів, але вироблених у різних регіонах, а потім імпортованих в один регіон, і для кожного регіону розраховується об'єм споживання деякого композитного товару. Композитний товар позначаємо:

$$C_{ij} = \left[ \sum_{k=1}^5 \beta_{ijk} C_{ij}^k \frac{\sigma^{\sigma_{arm}-1}}{\sigma^{\sigma_{arm}}} \right]^{\frac{\sigma^{\sigma_{arm}}}{\sigma^{\sigma_{arm}-1}}} \quad (2)$$

$\sigma^{\sigma_{arm}}$  - це Армінгтонова еластичність;  $C_{ij}^k$  - споживання товару, виробленого у регіоні  $k$  і спожитого у регіоні  $j$ ; коефіцієнти  $\beta_{ijk}$  ( $\sum_{k=1}^5 \beta_{ijk} = 1$ ) являються параметрами моделі і калібруються у рівновазі. Таким чином,  $\gamma_{ij}$  і  $\beta_{ijk}$  калібруються у рівновазі, в той час як еластичність і споживання задані у початковому стані економіки.

Споживач розв'язує наступну оптимізаційну задачу:

$$\begin{cases} U_j \rightarrow \max \\ \text{s.t. } I_j = \sum_i P_{ij} C_{ij} \end{cases}, \quad (3)$$

де  $P_{ij}$  - ціна композитного товару  $i$  в регіоні  $j$ ;  $I_j$  - доход споживача. Коротко опишемо розв'язок задачі споживача:

$$\frac{\partial L}{\partial C_{ij}} = \left[ \sum_{j=1}^{15} \gamma_{ij} C_{ij} \frac{\sigma^{\sigma_{arm}-1}}{\sigma^{\sigma_{arm}}} \right]^{\frac{\sigma^{\sigma_{arm}}}{\sigma^{\sigma_{arm}-1}}} \cdot \gamma_{ij} \cdot C_{ij}^{-1/\sigma^{\sigma_{arm}}} - \lambda_j \cdot P_{ij} = 0, \quad (4)$$

Таким чином, отримуємо попит на композитний товар  $i$  в регіоні  $j$ :

$$C_{ij} = \frac{\gamma_{ij}^{\sigma^{\sigma_{arm}}} \cdot I_j}{P_{ij}^{\sigma^{\sigma_{arm}}} \cdot \sum_j \gamma_{ij}^{\sigma^{\sigma_{arm}}} P_{ij}^{1-\sigma^{\sigma_{arm}}}} \quad (5)$$

Для знаходження попиту на споживання у регіоні  $j$  товару  $i$ , який поставляється із регіону  $k$ , розв'язується наступна задача споживача:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \left[ \sum_{k=1}^5 \alpha_{ijk} \cdot C_{ijk} \frac{\sigma^{\sigma_{arm}-1}}{\sigma^{\sigma_{arm}}} \right]^{\frac{\sigma^{\sigma_{arm}}}{\sigma^{\sigma_{arm}-1}}} \rightarrow \max \\ \text{s.t. } P_{ji} \cdot C_{ji} &= \sum_{k=1}^5 P C_{jik} \cdot C_{jik} = I_j - \sum_{m \neq j} P_{mj} \cdot C_{mj}, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $PC_{jik}$  - ціна товару  $i$  у регіоні  $j$ , який поставляється із регіону  $k$ . Розв'язком цієї задачі є попит на споживання у регіоні  $j$  товару  $i$ , що поставляється із регіону  $k$ :

$$C_{jik} = \frac{\gamma_{ijk}^{\sigma^{am}} \cdot I_j - \sum_{m \neq j} P_{mj} \cdot C_{mj}}{PC_{jik}^{\sigma^{am}} \cdot \sum_{k=1}^5 \gamma_{ijk}^{\sigma^{am}} \cdot PC_{jik}^{1-\sigma^{am}}}. \quad (7)$$

*Пропозиція репрезентативного виробника.*

У якості виробничої функції використовується функція із постійною еластичністю заміщення виробництва між галузями:

$$Y_j = \left[ \sum_{i=1}^{15} \beta_{ij} S_{ij}^{\frac{\sigma_{ij}^i - 1}{\sigma_{ij}^i}} \right]^{\frac{\sigma_j^i}{\sigma_j^i - 1}}. \quad (8)$$

В даній формулі  $i$  та  $j$  представляють товари і регіони відповідно,  $i$  може змінюватись від 1 до 15, а  $j$  - від 1 до 5.  $Y_j$  - загальне виробництво в регіоні  $j$ , яке будується наступним чином: зважується виробництво ( $S_{ij}$ ) 15 товарів, вироблених у заданому регіоні  $j$  ( $i$  змінюється від 1 до 15), разом із вагами  $\beta_{ij}$  ( $\sum_{i=1}^{15} \beta_{ij} = 1$ ), де  $\sigma_{ij}^i$  - відповідні еластичності заміщення. Параметри  $\beta_{ij}$ , за допомогою яких зважується виробництво по галузям, калібруються в моделі, еластичності фіксовані, а виробництво дано у початковій рівновазі.

Задача виробника запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned} & PP_{ij} \cdot S_{ij} \rightarrow \max, \\ \text{s.t.: } & Y_j = \left[ \sum_{i=1}^{15} \beta_{ij} S_{ij}^{\frac{\tau_{ij}^i - 1}{\tau_{ij}^i}} \right]^{\frac{\tau_j^i}{\tau_j^i - 1}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут - ціна виробника товару  $i$  у регіоні  $j$ . Коротко розв'язування даної задачі:

$$\frac{\partial L}{\partial S_{ij}} = PP_{ij} - \lambda_j \cdot \left[ \sum_{j=1}^{15} \beta_{ij} \cdot S_{ij}^{\frac{\tau_{ij}^i - 1}{\tau_{ij}^i}} \right]^{\frac{\tau_j^i}{\tau_j^i - 1}} \cdot \beta_{ij} \cdot S_{ij}^{-\frac{1}{\tau_{ij}^i}} = 0, \quad (10)$$

Розв'язком задачі є пропозиція товару  $i$  в регіоні  $j$ :

$$S_{ij} = \frac{\beta_{ij}^{\tau_{ij}^i} \cdot Y_j}{PP_{ij}^{\tau_{ij}^i} \cdot \left[ \sum_{i=1}^{15} \beta_{ij}^{\tau_{ij}^i} \cdot PP_{ij}^{1-\tau_{ij}^i} \right]^{\frac{\tau_j^i}{\tau_{ij}^i - 1}}}. \quad (11)$$

### Податки та тарифи.

Із урахуванням податку на виробництво продукту  $i$  у регіоні  $j$  ( $\tau_{ij}$ ) і тарифу  $tar_{ijk}$  на продукт  $i$ , імпортованого регіоном  $j$  із регіону  $k$ , ціна в регіоні  $j$  товару  $i$ , поставленого із регіону  $k$ , має наступний вигляд:

$$PC_{jik} = PP_{ij} \cdot 1 + tar_{ijk} \cdot 1 + t_{ij}. \quad (12)$$

Таким чином, отримуємо дохід від збору податків і тарифів у регіоні  $j$ :

$$REV_j = \sum_{i=1}^{15} \sum_{j=1}^5 tar_{ijk} + t_{ij} + tar_{ijk} \cdot t_{ij} \cdot PP_{ij} \cdot C_{jik} \quad (13)$$

Цей дохід перерозподіляється у вигляді паушального трансферту споживачеві. Таким чином, дохід споживача має вигляд:

$$I_j = \sum_{i=1}^{15} PP_{ij} \cdot S_{ji} + REV_j + AID_j \cdot PCINDEX_j, \quad (14)$$

де  $AID_j = \sum_i C_{ijk}^B - \sum_i S_{ij}^B$  - торгівельний дисбаланс в регіоні  $j$  у базовому році

(індекс  $B$  означає «базовий рік»),  $PCINDEX_j = \frac{\sum_i \sum_k PC_{ijk} \cdot C_{jik}^B}{\sum_i \sum_k PC_{jki}^B \cdot C_{jik}^B}$  - індекс цін в регіоні.

### Рівновага.

Рівновага визначається набором рівноважних цін виробників (а оскільки тарифи та податки задані екзогенно, то й ціни споживачів однозначно визначаються у рівновазі). Окрім того, у рівновазі задається оптимальне виробництво і оптимальне споживання усіх товарів на всіх ринках.

Рівноважні умови:

1) рівність попиту і пропозиції на усіх 15 ринках, що описується рівнянням

$$\sum_{k=1}^5 C_{ijk} = S_{ij}; \quad (15)$$

2) стійкість торгівельного балансу у кожному із регіонів

$$\sum_{i=1}^{15} (PP_{ik} \cdot S_{ik} - C_{ikk}) - \sum_{i=1}^{15} \sum_{m \neq k} PP_{im} \cdot C_{imk} - AID_k \cdot PCINDEX_k = 0, \quad (16)$$

яке свідчить, що дисбаланс у знайденій рівновазі повинен дорівнювати торгівельному дисбалансу в базовій рівновазі.

### Калібровка моделі

Спочатку необхідно визначити вагові коефіцієнти  $\beta_{ij}, \gamma_{ij}, \gamma_{ijk}$ , які б відповідали рівновазі у базовому році. Із (11) отримуємо вирази для  $\beta_{ij}$ :

$$\beta_{ij} = \frac{PP_{ij} \cdot S_{ij}^{1/\tau}}{\left[ \frac{Y_j}{\sum_k \beta_{jk}^\tau \cdot PP_{jk}^{1-\tau/\tau-1}} \right]^{1/\tau}}. \quad (17)$$

Використовуючи умову  $\left( \sum_{j=1}^{15} \beta_{ij} = 1 \right)$ , знаходимо:

$$\beta_{ij} = \frac{PP_{ij}^B \cdot S_{ij}^{1/\tau}}{\sum_{i=1}^{15} \left( PP_{jk}^B \cdot S_{ij}^{1/\tau} \right)}. \quad (18)$$

Из (5) отримуємо вираз для  $\gamma_{ij}$ :

$$\gamma_{ij} = \frac{P_{ij} \cdot C_{ij}^{1/\sigma}}{\left( \frac{I_j}{\sum_i \gamma_{ij}^\sigma P_{ij}^{1-\sigma}} \right)^{1/\sigma}}. \quad (19)$$

Використовуючи умову  $\sum_{i=1}^{15} \gamma_{ij} = 1$ , знаходимо:

$$\gamma_{ij} = \frac{P_{ij}^B \cdot C_{ij}^{1/\sigma}}{\sum_i \left( P_{ij}^B \cdot C_{ij}^{1/\sigma} \right)}. \quad (20)$$

Из (7) отримуємо вираз для  $\gamma_{ijk}$ :

$$\gamma_{ijk} = \frac{PC_{ijk} \cdot C_{ijk}^{1/\sigma}}{\left( \frac{I_j - \sum_{m \neq i} P_{mj} \cdot C_{mj}}{\sum_k \alpha_{ijk}^\sigma \cdot C_{ijk}^{1-\sigma}} \right)^{1/\sigma}}. \quad (21)$$

Використовуючи умову  $\sum_{i=1}^{15} \gamma_{ijk} = 1$ , знаходимо:

(22)

Підставляючи в обмеження задачі (6) формули (5) і (7), отримуємо:

$$\gamma_{ijk} = \frac{P_{ijk}^B \cdot C_{ijk}^{1/\sigma}}{\sum_i \left( PC_{ijk}^B \cdot C_{ijk}^{1/\sigma} \right)}. \quad (23)$$

Вираз у дужках є  $\gamma_{ij}$  згідно (19). Отже, отримуємо формулу для ціни композитного товару  $i$  у регіоні  $j$ :

(24)

Формула (24) входить в систему рівнянь моделі. Ця формула використовується для калібровки моделі.

Останній параметр, який слід визначити для базового року – споживання композитного товару  $i$  у регіоні  $j$ :

(25)

Як видно із отриманих співвідношень, рівноважні ціни не можна отримати у явному вигляді і повинні бути розраховані у рівновазі за допомогою обчислювальних процесів. Розрахунки в моделі проводились за допомогою пакету із застосуванням оптимізаційного алгоритму . Даний алгоритм є узагальненням зведеного градієнтного алгоритму Вольфа. Метод базується на скороченні розмірності задачі за допомогою представлення усіх змінних через множину незалежних змінних (а у всьому іншому метод аналогічний стандартному градієнтному методу).

### *Існування та єдиність розв'язку*

Існування та єдиність розв'язку впливає із формулювання оптимізаційної задачі. А саме, в даній задачі оптимізації споживачі оптимізують опуклі функції корисності при опуклих обмеженнях (3). Виробники, у свою чергу представлені опуклою виробничою функцією і також обмежені у своїх діях опуклим бюджетним обмеженням (9). Таким чином, у даній оптимізаційній задачі відбувається максимізація опуклих функцій на опуклих множинах. Отже, розв'язок існує і єдиний.

Відзначимо, що із самого початку функції в моделі вибирались таким чином, щоб не виникало ускладнень з існуванням та єдиністю розв'язку.

### *Галузі та регіони*

Дана модель калібрувалась на даних за 2000р. і включає 5 географічних регіонів, кожен із яких моделюється як окрема економіка: 1) РФ; 2) 15 країн ЄС (ЄС-15: Бельгія, Данія, Германія, Греція, Іспанія, Франція, Ірландія, Італія, Люксембург, Нідерланди, Австрія, Португалія, Фінляндія, Швеція та Сполучене Королівство); 3) 10 країн, що вступають до ЄС (СК-10: Кіпр, Чеська Республіка, Естонія, Латвія, Венгрія, Литва, Мальта, Польща, Словачія та Словенія); 4) 11 країн Співдружності Незалежних Держав (СНД-11: Армения, Азербайджан, Білорусія, Грузія, Казахстан, Киргизстан, Молдова, Таджикистан, Туркменістан, Україна та Узбекистан); 5) весь інший світ.

У кожному із регіонів моделюється 15 галузей: електроенергетика, нафтовидобувна і газова промисловість, інша паливна промисловість, чорна металургія, кольорова металургія, хімічна та нафтохімічна промисловість, машинобудування та металообробка, легка промисловість, харчова промисловість, інші галузі, сільське і лісове господарство, будівництво, транспорт і зв'язок, інші послуги, фінанси, банківська справа і страхування.

### Обчислювальні експерименти

Модель використовувалась для оцінки ефектів на економіку РФ від різних сценаріїв лібералізації Російської торгівлі, зокрема, оцінювався вплив розширення ЄС на російську економіку, а також економіки низки інших країн. Сценарії не включали нетарифні заходи регулювання і моделювали процеси розширення, передбачаючи, що країни, які вступають у ЄС, адаптують тарифні ставки, що застосовують старі члени ЄС. Спочатку калібрується базова модель, яка є рівновагою в економіці до розширення ЄС. Потім змінюються тарифні ставки, які застосовували країни, що вступають до ЄС, встановлюючи їх на рівні, який застосовується старими членами ЄС. Відмітимо, що між цими тарифними ставками існує велика різниця. Так для РФ найпотужніший сектор експорту – «нафта і газ»: ЄС застосовує тарифну ставку близьку до нульової, а країни, які вступають до ЄС (за нашими оцінками), застосовують тарифну ставку близько 2,08%.

Ще відзначимо суттєві розбіжності у тарифних ставках у таких секторах, як продовольство, хімічна галузь та галузь по обробці нафтопродуктів: 17,69% - старі члени ЄС і 6,8% - країни, що вступають до ЄС. Модельні оцінки сценаріїв показують, що торговельні потоки змінюватимуться очікуваним чином: торгівля між старими і новими членами ЄС суттєво пришвидшується – на 4,73%, але погіршується торгівля з країнами інших регіонів, куди входить РФ, країни СНД та інший світ. Тобто, спостерігається як ефект створення торгівлі, так і ефект заміщення торгівлі (див. наступні діаграми):

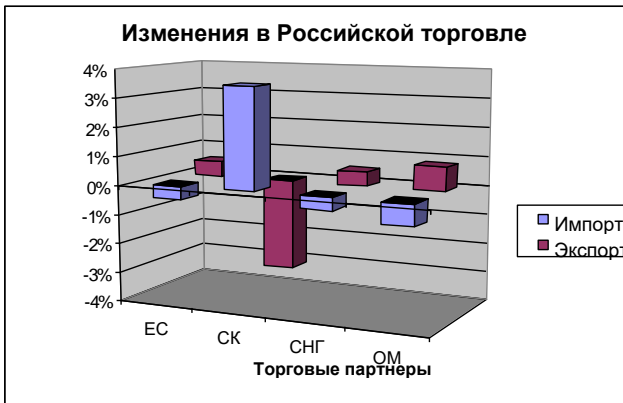
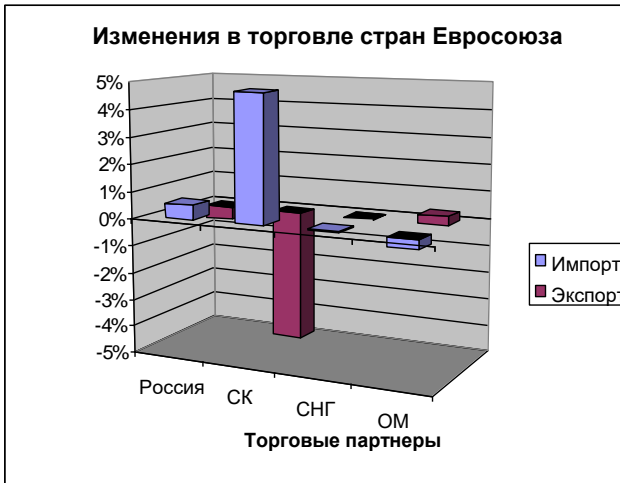
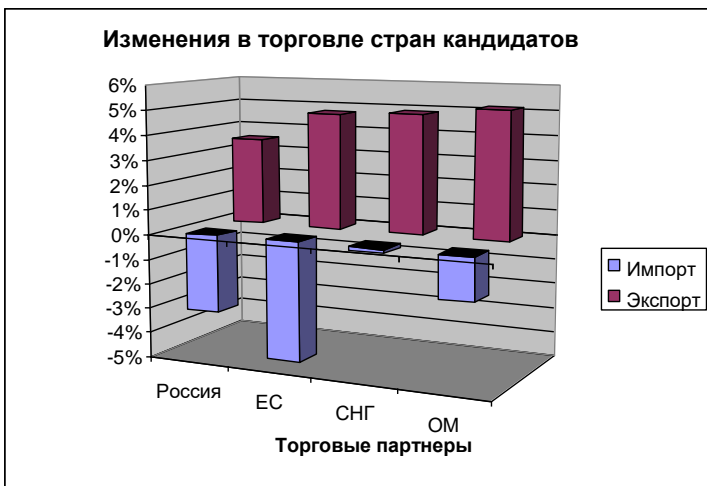


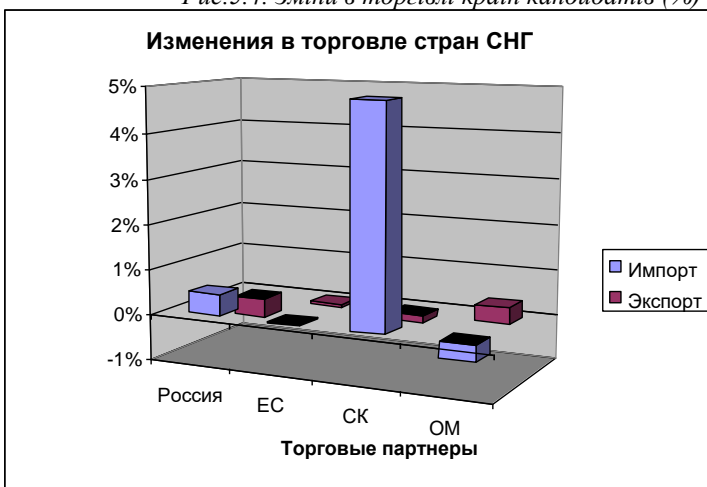
Рис. 5.2. Зміни в Російській торгівлі (%)



*Рис. 5.3. Зміни в торгівлі країн ЄС (%)*



*Рис.5.4. Зміни в торгівлі країн кандидатів (%)*



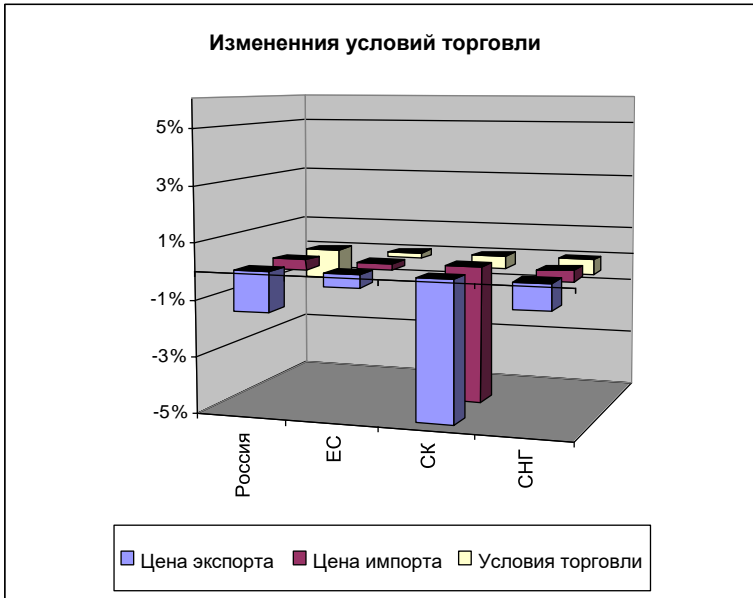
*Рис.5.5. Зміни в торгівлі країн СНД (%)*

Очевидний факт: торгівля між країнами, які вступають до ЄС, і РФ, а також країнами СНД збільшується після розширення Єврозони. Це є результатом знижки тарифів, що застосовуються країнами, які вступають у ЄС, до рівня тарифів, що застосовуються старими членами ЄС. РФ також зазнає значне зниження рівня експорту до країн, які вступають у ЄС, і наявний експорт до країн ЄС частково заміщується експортом із країн бувшого



Євросоюзу. З іншого боку, РФ починає експортувати більше в інші регіони, що означає більшу ступінь диверсифікації торгівлі для РФ, оскільки до розширення більша частина експорту РФ йшла до країн, які вступають у ЄС. Імпорт, у свою чергу, змінюється в протилежну сторону. Країни, які вступають до ЄС, починають більше експортувати в РФ, у той час як треті регіони – менше.

Для того, щоб мати загальну картину зміни торгівельних потоків, необхідно дослідити умови торгівлі, так звані terms of trade:



*Рис.5.6. Умови торгівлі за регіонами*

Рисунок 5.6 показує, як зміни тарифів, що відбудуться внаслідок розширення ЄС, впливають на зміни terms of trade. Російські умови торгівлі погіршуються в середньому на 1%. Важливо відмітити, що ці зміни є відносними. Наприклад, падіння на 0,2% в умовах торгівлі для країн, які вступають до ЄС, повинно розглядатись як падіння набагато меншого розміру, ніж погіршення умов торгівлі для РФ і країн СНД. Причиною, по якій умови торгівлі погіршуються в ЄС і країнах, що вступають до ЄС, являється той факт, що після розширення ЄС ціни виробників у значній мірі падають, і це падіння переважає зростання цін завдяки покращенню торгівельних можливостей.

Графік показує, що тією країною, яка найбільше втрачає у термінах terms of trade, насправді являється РФ.

У розглянутому сценарії добробут у країнах, які вступають до ЄС, падає на 2,3% після вступу в Євросоюз. Єдиний фактор, що може пояснити такий ефект – це зміна умов торгівлі. Добробут РФ теж падає, але тільки на 0,07%. Оскільки в моделі фіксується ВВП, то саме умови торгівлі призводять до даного ефекту.

Наступні Рисунок 5.7 і 5.8 показують виробництво РФ, експорт та імпорт у базовій рівновазі, а також ілюструють процентну зміну виробництва при сценарії розширення.

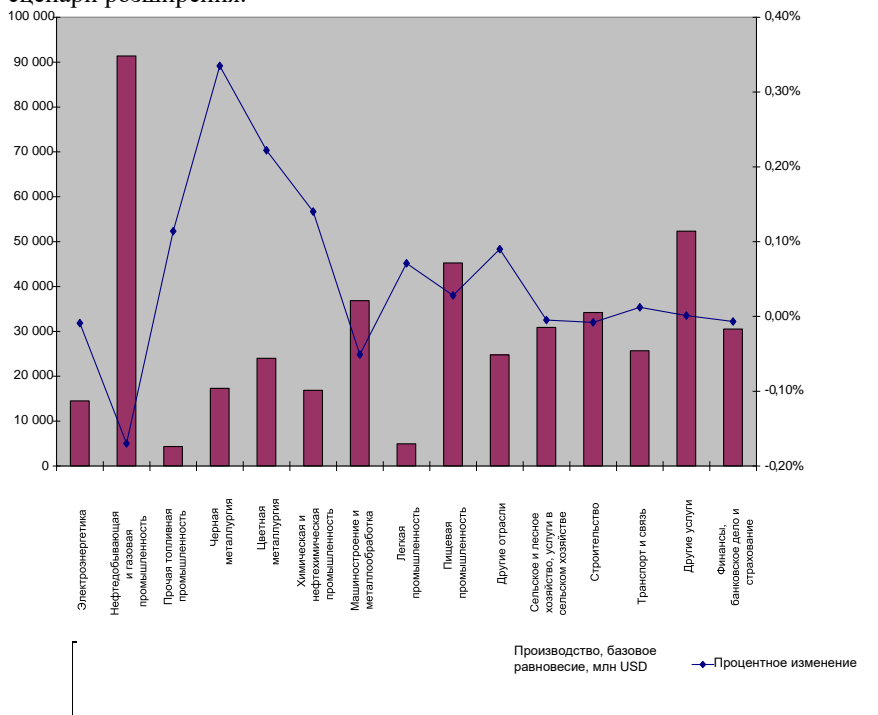


Рис. 5.7. Зміни російського виробництва

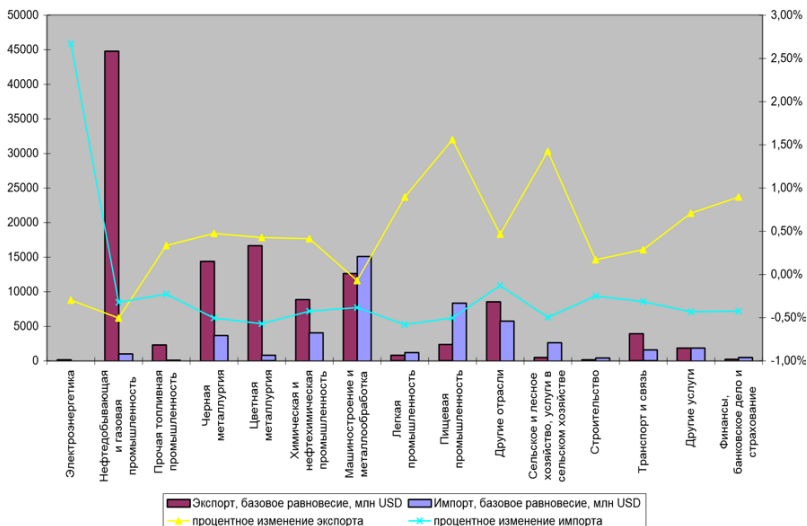


Рис. 5.8. Зміни російської торгівлі

Структура змін торговельних потоків цілком очевидна. Експорт в основному збільшується, а імпорт зменшується. Єдиний сектор, де імпорт збільшується – це сектор «електрика і тепло», але номінальні обсяги невеликі, бо РФ майже не імпортує електрику. Скоріш за все це можуть бути похибки моделі. Продовольча галузь та сільськогосподарська і лісова галузь зазнають найбільших змін у експорті. Як вже було сказано, це саме ті сектори, де країни-кандидати мають відносно високий рівень тарифних ставок. Тому в цих секторах РФ стикається з більш високою конкуренцією з боку країн, що вступають до ЄС, і це є тією причиною, яка пояснює чому саме у цих галузях РФ зазнає найбільших втрат.

У даному сценарії також відбувається незначна диверсифікація російського виробництва, а саме: в найбільшій галузі «нафта і газ» рівень виробництва падає на 0,17%, тоді як в інших галузях він в середньому зростає (тому можна казати про диверсифікацію, але незначну).

### Висновки

Побудована обчислювана модель загальної рівноваги (із використанням Global v.1), яка дозволяє оцінювати вплив змін торговельної політики на економіку окремо взятої держави, зокрема, дослідити галузеві зміни і є досить гнучким інструментом для отримання числових експериментів.

На відміну від моделей часткової рівноваги, таких як авторегресійний аналіз (за виключенням векторних регресій), ця модель дозволяє дослідити не тільки прямі зміни яких-небудь певних тарифів або податків, але й спроможна оцінити опосередковані ефекти. Окрім того, дана модель не може мати проблем ендогенності (на відміну від моделей часткової рівноваги).

За допомогою моделі показано, що розширення ЄС не вигідне для РФ, але Росія виграє в термінах добробуту.

До недоліків моделі слід віднести припущення про ринки із досконалою конкуренцією, що насправді невірно для низки дуже монополізованих галузей (типу «нафта і газ»). Можна було б включити галузі зі зростаючою віддачею від масштабу, але потрібно знати галузеві коефіцієнти концентрації, а це дуже проблемно для російської дійсності.

*Приклад 5.2. Динамічна стохастична модель загальної економічної рівноваги Росії («DYNAMIC STOCHASTIC MODEL OF RUSSIA'S GENERAL ECONOMIC EQUILIBRIUM» D.L. Andrianov, D.N. Shultz, I.A. Oshchepkov Вестник НУИм.Лобачевского. Серия: Социальные науки, 2015, №2(38), с.18-25).*

Останнім часом важливе місце в аналізі, моделюванні та прогнозуванні макроекономічних процесів займають динамічні стохастичні моделі загальної економічної рівноваги (DSGE-моделі). Даний підхід до моделювання зародився у рамках так званого нового неокласичного синтезу – нового напрямку економічної думки, який став продуктом синтезу неокласики та неокейнсіанства. У DSGE-моделях є можливість врахувати вплив технологічних факторів і такі недосконалості реальних ринків, як жорсткі ціни і зарплати, недосконалу інформацію та недосконалу конкуренцію. DSGE-моделювання застосовується в практиці державного регулювання США, Канади, Великобританії, Швеції, Чилі, Нової Зеландії та інших. Розглядається DSGE-модель російської економіки із урахуванням поточних реалій.

Будь-яка DSGE-модель включає 3 обов'язкові компоненти: 1) динамічний варіант рівняння IS для моделювання національного доходу; 2) нова кейнсіанська крива Філіпса – для інфляції; 3) правило Тейлора – для моделювання процентної ставки. Останнє рівняння є важливим в умовах переходу Банку Росії до політики таргетування. Вважатимемо необхідним включити в систему рівняння для обмінного курсу на основі непокритого паритету процентних ставок, а також окремо виділити рівняння для інфляційних очікувань. Окрім указаних ключових рівнянь моделі, також знадобиться допоміжні рівняння для виокремлення тренд-циклічних компонент, розрахунку короткострокових відхилень від рівноваги, розрахунку дефльованих змінних тощо.

Таким чином, на погляд авторів, мала DSGE-модель Росії повинна включати 4 ендегенні змінні: ВВП, інфляцію, ставку процента і обмінний курс. Екзогенними змінними традиційно виступають змінні, що визначають динаміку російської економіки: світові ВВП, інфляція і ставка процента. Взаємозв'язок між цими показниками покажемо на рисунку:

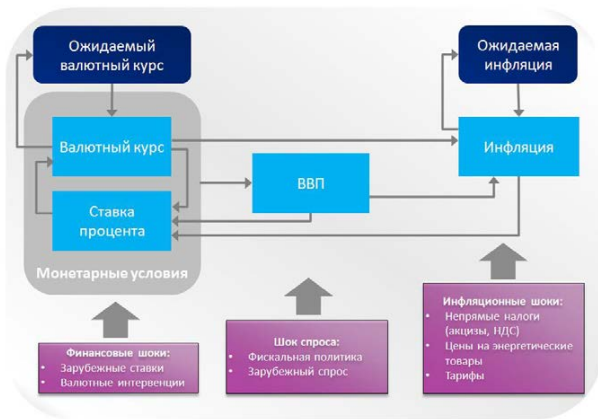


Рис. 5.9. Граф взаємодії показників DSGE-моделі Росії

Розглянемо більш детально ключові рівняння системи. Як було сказано вище, для моделювання ВВП використовується динамічний варіант кривої IS:

$\hat{y}_t = \alpha_1 \hat{y}_{t-1} - \alpha_2 mci_t + \alpha_3 \hat{y}_t^* + \varepsilon_t^y$ , де  $\hat{y}_t$  - відхилення (розрив) випуску від рівноважного (довготривалого) рівня в момент часу  $t$ ;  $mci_t$  - індекс монетарних умов в момент часу  $t$ , розрахований за формулою  $mci_t = a_4 \hat{r}_t + (1 - a_4)(-\hat{z}_t)$ ;  $\hat{y}_t^*$  - відхилення світового випуску від рівноважного рівня в момент часу  $t$ ;  $\varepsilon_t^y$  - шок попиту в момент часу  $t$ ;  $\hat{r}_t$  - відхилення реальної ставки процента від рівноважного значення в момент часу  $t$ ;  $\hat{z}_t$  - відхилення реального курсу від рівноважного значення в момент часу  $t$ ;  $\alpha_1$  - коефіцієнт інерційності відхилень випуску;  $\alpha_2$  - коефіцієнт впливу монетарних умов на реальну економіку;  $\alpha_3$  - коефіцієнт впливу закордонного попиту на відхилення випуску;  $\alpha_4$  - коефіцієнт значимості ставки процента в монетарній політиці.

Ці рівняння дозволяють врахувати наступні особливості економіки: - інерційність зміни випуску; - вплив монетарної політики на реальну економіку, насамперед процентної ставки, і немонетарних факторів; - вплив зовнішнього попиту на вітчизняну економіку; - вибір споживачів між сьогодишнім та майбутнім споживанням; - вибір споживачів між вітчизняними та імпортованими товарами.

Особливістю DSGE-моделей є застосування фільтрів для виокремлення тренд-циклічної складової. При цьому результати фільтрації залежать від обраного методу, параметрів згладжування тощо. Тому, коли нове керівництво Банку Росії об'явило, що при формуванні монетарної політики керуватиметься DSGE-підходом, у економістів це викликало певну настороженість. Показано,

що різні процедури згладжування можуть давати досить суперечливі сигнали про фази економічного циклу в Росії. В даній моделі для виділення тренд-циклічної складової використано фільтр Ходрика-Прескотта на періоді з 1 кварталу 2000р. по 1 квартал 2014р. зі стандартним параметром згладжування 1600 для квартальної динаміки. Результати фільтрації представлені на рисунку:



Рис. 5.10. Застосування фільтру Ходрика-Прескотта до темпів приросту реального ВВП Росії

Для моделювання інфляції використовувались наступні рівняння:  $\pi_t = b_1 \pi_{t+1}^s + (1 - b_1) \pi_{t-1} + b_2 rmc_t + \varepsilon_t^\pi$ , де  $\pi_t$  - інфляція в момент часу  $t$ ;  $\pi_{t+1}^s$  - очікувана інфляція в момент часу  $t+1$ ;  $rmc_t$  - реальні граничні витрати в момент часу  $t$ , що розраховуються за формулою  $rmc_t = b_3 \hat{y}_t + (1 - b_3) \hat{z}_t$ ;  $\varepsilon_t^\pi$  - шок інфляції в момент часу  $t$ ;  $b_1$  - коефіцієнт інерційності інфляції;  $b_2$  - коефіцієнт впливу реальної економіки на інфляцію;  $b_3$  - частка вітчизняної продукції. Дана специфікація відображає наступні характеристики економіки: - наявність інфляційних очікувань; - вплив реальної економіки на монетарні процеси; - жорсткість (інерційність) номінальних показників; - немонетарний аспект інфляції, в тому числі вплив тарифів природних монополій; - ефект імпортованої інфляції.

Теоретичною основою DSGE-моделей є концепція раціональних очікувань. Згідно даній концепції: а) економічним агентам доступна повна інформація, як і державі; б) інформація використовується максимально ефективно; в результаті – в) економічні агенти володіють досконалим передбаченням, тобто можуть точно прогнозувати фактичні значення майбутньої інфляції, обмінного курсу тощо.

На сьогодні гіпотеза раціональних очікувань ставиться під сумнів багатьма економістами як нереалістична. Для Росії мабуть більш реалістичною є гіпотеза адаптивних очікувань. В рамках гіпотези адаптивних очікувань від економічних агентів не вимагається досконалого передбачення, достатньо того, щоб урахувались попередні помилки. Іншими словами, формування адаптивних очікувань виглядає наступним чином:  $\pi_{t+1}^s = \pi_t^s + \lambda_\pi (\pi_t - \pi_t^s)$ , де  $\lambda_\pi \in (0;1)$  - швидкість корегування інфляційних очікувань.

Традиційно в DSGE-моделях використовується правило Тейлора:

$i_t = (\pi_t + i_t^n) b_1 \pi_{t+1}^\delta + f_1 (\pi_t - \pi_t^T) + f_2 \hat{y}_t + \varepsilon_t^i$ , де  $i_t$  - номінальна ставка процента в момент часу  $t$ ;  $i_t^n$  - реальна довгострокова ставка процента в момент часу  $t$ ;  $\pi_{t+1}^\delta$  - цільовий рівень інфляції в момент часу  $t+1$ ;  $\varepsilon_t^i$  - шок номінальної ставки процента в момент часу  $t$ ;  $f_1$  - чутливість процентної ставки до відхилення інфляції від цільового рівня;  $f_2$  - чутливість процентної ставки до відхилення випуску від рівноважного стану.

Ідея Тейлора полягала у наступному: розробити контрциклічне правило поведінки Центробанку, яке б охолоджувало економіку при перегріві (тобто коли інфляція перевищує цільовий рівень і коли національний дохід перевищує потенційний рівень) і стимулюючий при спаді. Але для нафтодобуваючих, експортно-орієнтованих країн правило Тейлора виявляється не зовсім адекватним. Центробанки таких країн змушені слідкувати не тільки за інфляцією, а і, можливо, навіть в більшій мірі, - за обмінним курсом. Правило Тейлора для Росії було ідентифіковано економістами Центру макроекономічних досліджень наступним чином:

$i_t = f_1 i_{t-1} + (1-f_1) (i_t^n + f_2 (\pi_{t+1}^s - \pi_t^T) + f_3 \hat{y}_t + f_4 \hat{z}_t) + \varepsilon_t^i$ , де  $f_1$  - ступінь інерційності номінальної ставки процента;  $f_4$  - чутливість процентної ставки до відхилень реального валютного курсу від рівноважного стану.

Окрім того, складним виявилось питання вибору процентної ставки. В деяких DSGE-моделях використовується ставка міжбанківського кредитування, але у процесі переходу до інфляційного таргетування ЦБ РФ уніфікував процентну політику, звівши все до єдиної «ключової ставки», яка і була обраною у якості змінної  $i_t$ .

Для моделювання валютного курсу використовується рівняння:  $s_t = e_1 s_t^T + (1-e_1) (s_{t+1}^\delta + (i_t^s - i_t + prem_t)/4) + \varepsilon_t^\delta$  де  $s_t$  - темп росту номінального курсу в момент часу  $t$ ;  $s_{t+1}^\delta$  - очікуваний темп росту номінального курсу в момент часу  $t+1$ ;  $s_t^T$  - цільовий темп росту номінального курсу в момент часу  $t$ , що визначається як  $s_t^T = s_{t-1} + (\bar{\pi}_t - \bar{\pi}_t^* + \bar{z}_t)/4$ ;  $i_t^s$  - світова номінальна ставка процента в момент часу  $t$ ;  $prem_t$  - премія за ризик в момент часу  $t$ ;  $\varepsilon_t^\delta$  - шок валютного курсу в момент часу  $t$ ;  $\bar{\pi}_t$  - рівноважний стан інфляції в момент часу  $t$ ;  $\bar{\pi}_t^*$  - рівноважний стан зарубіжної інфляції в момент часу  $t$ ;  $\bar{z}_t$  - рівноважний стан реального валютного курсу в момент часу  $t$ ;  $e_1$  - коефіцієнт гнучкості валютного ринку.

Дана специфікація відображає наступні характеристики економіки: - цільовий і очікуваний рівень валютного курсу; - вплив валютних інтервенцій на валютний курс; - вплив внутрішньої та зарубіжної ставки процента на

валютний курс; - гнучкість валютного курсу; - вплив внутрішньої і зарубіжної інфляції на валютний курс.

Для валютних очікувань застосовувалась гіпотеза адаптивних очікувань:  $s_{t+1}^{\delta} = \lambda_{\delta} s_t^{\delta} + (1 - \lambda_{\delta}) s_t^{\delta}$ , де  $\lambda_{\delta} \in (0; 1)$  - параметр згладжування валютних очікувань.

Розроблена DSGE-модель була реалізована в Prognoz Platform. У порівнянні із популярною Dynare, Prognoz Platform має ряд переваг: інтегрованість із базами даних міжнародної і російської соціально-економічної статистики; наявність зручного інтерфейсу для роботи з DSGE-моделями; відсутність необхідності знання синтаксису мови програмування. В Prognoz Platform була проведена калібровка параметрів моделі. При цьому враховувались діапазони значень параметрів, рекомендовані у попередніх дослідженнях:

Таблиця 5.1. Значення параметрів DSGE-моделі Росії

Параметр	Опис	Діапазон зміни	Значення
<i>Моделювання відхилень від ВВП (Рівняння IS)</i>			
$a_1$	Постійність відхилень ВВП	[0.1; 0.95]	0.7
$a_2$	Вплив монетарних умов на реальну економіку	[-0.5; -0.1]	-0.2
$a_3$	Вплив зарубіжного попиту	[0.1; 0.5]	0.48
$a_4$	Значимість ставки процента в монетарній політиці	[0.3; 0.8]	0.4
<i>Моделювання інфляції (Крива Філіпса)</i>			
$b_1$	Інерційність цін	[0.4; 0.9]	0.5
$b_2$	Вплив витрат	[0.05; 0.4]	0.15
$b_3$	Частка вітчизняної продукції	[0.3; 0.9]	0.6
$\lambda_{\pi}$	Згладжування інфляційних очікувань	[0; 1]	0.34
<i>Моделювання ставки процента (Правило Тейлора)</i>			
$f_1$	Інерційність процентної ставки	[0; 0.8]	0.75
$f_2$	Вплив відхилення очікуваної інфляції від цільового рівня	[0.3; 1]	0.7
$f_3$	Вплив відхилення ВВП від стійкого стану	[0.3; 1]	0.3
$f_4$	Вплив відхилення валютного курсу від стійкого стану	[0.3; 1]	0.3
<i>Моделювання обмінного курсу (Непокритий паритет процентних ставок)</i>			
$e_1$	Гнучкість валютного ринку	[0; 0.9]	0.05
$\lambda_{\delta}$	Згладжування валютних очікувань	[0; 1]	0.45

На основі відкаліброваної DSGE-моделі були розраховані прогнози по ключовим економічним показникам на 3 роки вперед при збереженні



економічної кон'юнктури (рис. 5.11 та у агрегованому представленні по рокам – таблиця 5.2):

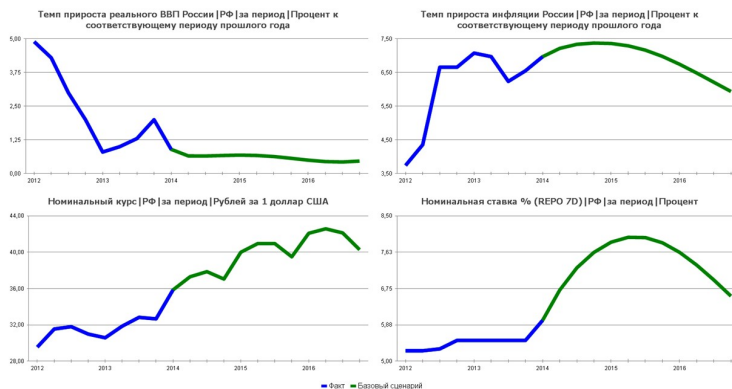


Рис. 5.11. Прогноз по основним економічним показникам Росії

Таблиця 5.2. Прогноз по основним економічним показникам Росії

<b>Змінна</b>	<b>2014</b>	<b>2015</b>	<b>2016</b>
Темп приросту реального ВВП, % до відповідного періоду попереднього року	0.72	0.64	0.46
Темп приросту інфляції, % до відповідного періоду попереднього року	7.23	7.21	6.35
Курс рубля до долара США, рублів за 1 доллар США	37.02	40.36	41.78
Ставка REPO 7D, %	6.89	7.92	7.12

Відзначимо, що в 2013 році відбулись масштабні події, які неможливо було передбачити на момент прогнозування на початку року і які внесли суттєвий вклад у підсумкові значення макро-економічних показників у 2014 році: - західні санкції, накладені на основні сектори російської економіки, які не дозволяють використовувати у виробництві сучасні іноземні технології та обмежують доступ фінансових установ на закордонні ринки капіталу; - зворотні контрсанкції на імпорт сільськогосподарської продукції; - стрімке падіння цін на нафту.

Західні санкції викликали додаткове зменшення ВВП, контрсанкції проявились у прискореному зростанні цін, а падіння цін на нафту викликало масштабну девальвацію національної валюти. Але незважаючи на все вищезазначене, модель дозволила точно упіймати тенденції розвитку економіки Росії на якісному рівні. Наприклад, вдалося правильно передбачити уповільнення економічного зростання на фоні девальвації рубля і прискорення інфляції (стагфляцію); природну для подібних умов реакцію Центробанку у вигляді підвищення ставки процента. Також у наступні періоди часу на фоні

послаблення інфляційних очікувань і уповільнення інфляції відбулося очікувана знижка ставки процента. Таким чином, модель підтверджує тезу про те, що економічні проблеми РФ носять внутрішній характер, а зовнішні шоки тільки збільшили їх масштаб. Тому все частіше виникають дискусії про проведення структурних реформ і про пошук нової моделі розвитку російської економіки. Відомо багато пропозицій від економістів по прискоренню середньострокового економічного зростання: замороження тарифів природних монополій, збільшення державних видатків (в тому числі і за рахунок Фонду національного добробуту), зниження ставки процента, стабілізація або подальша девальвація обмінного курсу тощо.

Саме для оцінки ефектів від різних інструментів державної економічної політики, від зовнішніх шоків DSGE-моделі містять в усіх рівняннях змінні  $\varepsilon$ , (шоки або інновації). За допомогою побудованої моделі оцінюється вплив 1% змін екзогенних змінних на модельовані змінні: ВВП, інфляцію, обмінний курс і процентну ставку:

Таблиця 5.3. Еластичності зміни модельованих показників до змін управляючих впливів

Шок	Показник	Початкові	2014	2015	2016
Шок інфляції (-1%)	Темп приросту реального ВВП, % до відповідного періоду попереднього року	0.09	0.14	0.45	0.66
	Темп приросту інфляції, % до відповідного періоду попереднього року	-1	-0.86	-1.1	-0.64
	Курс рубля до долара США, рублі за 1 доллар США	0.03	0.08	0.64	1.84
	Ставка REPO 7D, %	-0.05	-0.15	-0.72	-0.77
Фіскальний шок (+1%)	Темп приросту реального ВВП, % до відповідного періоду попереднього року	1	0.52	0.12	-0.06
	Темп приросту інфляції, % до відповідного періоду попереднього року	0.1	0.09	0.1	0.03
	Курс рубля до долара США, рублі за 1 доллар США	-0.03	-0.05	-0.2	-0.43
	Ставка REPO 7D, %	0.08	0.09	0.15	0.07
Шок валютного курсу (+1%)	Темп приросту реального ВВП, % до відповідного періоду попереднього року	0.11	0.11	0.17	0.05
	Темп приросту інфляції, % до відповідного періоду попереднього року	0.08	0.1	0.21	0.28
	Курс рубля до долара США, рублі за 1 доллар США	0.83	0.62	1.24	1.58
	Ставка REPO 7D, %	0.08	0.12	0.36	0.46
Шок ставки процента (-1%)	Темп приросту реального ВВП, % до відповідного періоду попереднього року	0.12	0.19	0.51	0.36
	Темп приросту інфляції, % до відповідного періоду попереднього року	0.04	0.08	0.49	0.66
	Курс рубля до долара США, рублі за 1 доллар США	0.35	0.46	1.59	2.54
	Ставка REPO 7D, %	-1	-0.88	-0.65	0.33

Проаналізуємо отримані результати.

Одномоментний від'ємний шок інфляції (наприклад, викликаний заморожуванням тарифів) здійснить стимулюючий вплив на економічне

зростання, в тому числі через зниження ставки процента (ефект Кейнса). При цьому особливо звертає на себе увагу те, що відповідно до моделі, зниження інфляції викликає не зміцнення, а ослаблення рубля з огляду на зниження ставки процента. Дійсно, в сучасних умовах РФ потоки капіталу чинять більш значимий вплив на обмінний курс, ніж торгівельний баланс.

Аналіз часових лагів дозволяє стверджувати, що ефект від заморожування тарифів проявиться не в коротко-, а в середньостроковій перспективі. А ось одномоментний додатний фіскальний шок (наприклад, збільшення державних видатків) як раз має короткостроковий характер – практично весь підйом ВВП локалізується у першому році. Також збільшення державних видатків призведе до невеликого зростання інфляції, і як наслідок – до зростання ставки Центробанку.

Одномоментне зростання обмінного курсу (девальвація рубля) збільшує і ВВП і інфляцію. При цьому прискорення економіки відбувається навіть не дивлячись на зростання номінальної процентної ставки, пов'язане з прискоренням інфляції. Тобто у даному випадку додатний зовнішньоекономічний ефект переважає від'ємний ефект від зростання процентної ставки.

Нарешті, одномоментне зниження процентної ставки приведе до прискорення економічного зростання не дивлячись на прискорення інфляції. Знову максимальний приріст ВВП очікується в середньостроковій перспективі. Ефект від зниження процентної ставки підсилюється за рахунок обезцінювання національної валюти.

Звертає на себе увагу те, що при зниженні процентної ставки відбувається прискорене зростання інфляції. Як результат, Центробанк, який переслідує цілі монетарної стабільності, рано чи пізно буде змушений знову підвищувати ставку процента, що призведе до уповільнення економічної активності. Судячи з цього, саме це міркування, а також очевидний девальваційний ефект стримує регулятор від зниження ключової ставки в умовах стагнації.

### 5.3. Динамічна задача оптимального управління пакетом виробничих інвестицій

Оскільки створення та функціонування вільних (або спеціальних) економічних зон (ВЕЗ або СЕЗ) у першу чергу передбачає залучення до них інвестицій, то, цілком природно, що надзвичайно актуальними будуть задачі ефективного управління інвестиційними процесами в ВЕЗ. А для вирішення таких задач необхідне застосування економіко-математичних методів та моделей, розрахунків за цими моделями, прогнозування за ними і видача рекомендацій для прийняття економічно ефективних, науково обґрунтованих рішень. Сучасні економічні реалії ставлять перед керуючими

(координуючими) органами проблеми управління не тільки окремими інвестиціями, а й задачі акумуляції значних фінансових ресурсів і ефективного управління цими ресурсами за рахунок реалізації комплексу інвестиційних проектів. Зазначимо, що однією із головних проблем становлення та розвитку ВЕЗ в Україні, як показує низка досліджень, була відсутність на місцях у цих зонах органів управління інвестиціями. Суб'єктами, що приймають рішення (СПР) були органи центральної влади, а це не сприяло ефективній роботі у самих зонах. Саме тому науковці виступають за створення у ВЕЗ спеціальних органів, які б займались інвестиційними питаннями.

Зуважимо, що дослідженню процесів управління портфелями фінансових інвестицій (так званими «портфоліо» або пакетами різних фінансових інструментів) присвячено достатньо багато робіт різних авторів. Але задачі оптимізації управління пакетами виробничих інвестицій або комплексами бізнес-проектів, якщо і розглядалися, то дуже рідко.

Поставимо наступну економічну задачу.

Реалізуються  $n \geq 3$  інвестиційних проектів, для яких попередньо розраховані наступні параметри: об'єми необхідних інвестицій  $Inv_i(t), i=1,2,\dots,n-1$ ; дисконтовані терміни окупності  $t_{ok}$ ; показники ефективності (внутрішні норми прибутковості  $R_i(t)$ ) та ризиковості  $r_i(t)$  даних виробничих інвестиційних проектів. Розглядається також залишок наявного об'єму капіталу  $Inv_n(t)$ , який вважається безризиковим ( $r_n(t)=0$ ) інвестиційним проектом із внутрішньою нормою прибутковості рівною ставці банківського депозиту (або інших безризикових фінансових інструментів). Як у більшості економічних процесів, спостереження за станом реалізації комплексу проектів та їх управління (коригування) відбувається через деякі фіксовані проміжки часу. Тому вважатимемо, що час змінюється дискретно з лагом 1, тобто,  $t=0,1,2,\dots$ . Окрім того, необхідні для реалізації кожного проекту інвестиції не «поглинаються» миттєво у повному обсязі, а надходять певними траншами. З огляду на ці припущення і виникає задача оптимального управління пакетом інвестицій, а саме: необхідно для кожного моменту часу  $t=0,1,2,\dots$  визначити обсяги фінансування проектів (транші)  $Inv_i(t)$ , які забезпечували б максимальну ефективність (норму прибутковості) усього пакету  $R_p(t)$  при заданому обмеженні  $S_p$  на його ризик.

Для побудови математичної моделі уведемо наступні позначення:

$$w_i(t) = \frac{Inv_i(t)}{\sum_{i=1}^n Inv_i(t)}$$

- частки інвестицій у дані проекти (які легко переводяться у

об'єми фінансування - транші),  $R_i(t)$  - внутрішні норми прибутковості (IRR), а  $r_i(t)$  - ризиковості проектів на момент часу  $t$ . У якості ризиковості розуміється стандартне відхилення норми прибутковості від середньоочікуваної  $R_i(t)$ , тобто,  $r_i(t) = \sqrt{VarR_i(t)}$ . У загальному випадку окремі проекти можуть бути взаємопов'язаними (залежними один від одного), тому

позначимо  $r_{ij}(t) = \text{Cov} R_i(t)R_j(t)$  - коваріації між ними. Якщо задати обмеження на ризик пакета інвестицій  $S_p$ , то математичною моделлю даної задачі буде наступна оптимізаційна задача:

Необхідно максимізувати ефективність (прибутковість) пакета

$$R_p(t) = \sum_{i=1}^n w_i(t)R_i(t) \rightarrow \max$$

при заданому обмеженні на його ризик

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2(t)r_i^2(t) + \sum_{i \neq j} w_i(t)w_j(t)r_{ij}(t)} \leq S_p$$

та виконанні очевидних обмежень на частки інвестицій

$$w_i(t) \geq 0, i = \overline{1, n}; \quad \sum_{i=1}^n w_i(t) \leq 1.$$

За отриманою моделлю легко розраховуються оптимальні розміри траншів на кожний із моментів часу  $t = 0, 1, 2, \dots$ . За результатами розрахунків приймаються управлінські рішення щодо керування ходом реалізації пакетів інвестиційних проєктів.

В обмеженнях умови на частки інвестування  $w_i(t) \geq 0, i = \overline{1, n}$ ; означають, що деякі, як правило високоефективні, проєкти фінансуються ( $w_i(t) > 0, i = \overline{1, p}$ ), а для інших, зазвичай малоприбуткових, фінансування призупиняється ( $w_i(t) = 0, i = \overline{p+1, n}$ ). Тому при необхідності обов'язкової реалізації деякого проєкту (який, можливо, не достатньо ефективний економічно, але є соціально значимим) обмеження можна модифікувати, накладаючи додаткову умову  $w_k(t) > 0$ .

У якості ілюстрації розглянемо приклад пакету реальних інвестиційних проєктів, які реалізовувались у м.Одеса за розробленими бізнес-планами.

Маємо наявний капітал об'ємом 200000 тис. \$, який будемо розподіляти у пакеті, що складається із 12 виробничих інвестиційних проєктів та залишку наявного об'єму капіталу, який вважається безризиковим інвестиційним проєктом із внутрішньою нормою прибутковості рівною ставці банківського депозиту (у нашому випадку  $R_{13} = 8\%$ ), параметри яких наведені у наступній таблиці:

Таблиця 5.4.  
Основні показники інвестиційного пакету

№ проекту	Дисконтований термін окупності $t_{ок}$ (місяців)	Необхідний об'єм інвестицій $Inv$ (тис. \$)	Внутрішня норма дохідності $R$ (%)	Ризиковість $r$ (%)
1	35	9740	59	10,4
2	34	10280	38	8,3
3	85	11690	20	6,5
4	24	6495	28	7,3
5	46	3255	35	8
6	38	793	39	8,4
7	50	55697	55	10
8	29	3750	56	10,1
9	78	2055	15	6
10	60	4469	24	6,9
11	103	5200	16	6,1
12	89	3750	24	6,9
13	-	82826	8	0

Розрахунки проводились для початкового моменту часу ( $t=0$ ). Окрім того, проекти реалізовувались незалежно один від одного, тому, коваріації між ними  $r_{ij} = Co var R_i R_j = 0, i \neq j$ . Початкові частки інвестицій

(транші) визначались, як  $w_i = \frac{Inv_i}{\sum_{i=1}^{13} Inv_i} = \frac{Inv_i}{200000}$ .

Дістаємо спрощену оптимізаційну задачу пошуку  $w_i^{opt}$ , що максимізують прибутковість інвестиційного пакету

$$R_p = \sum_{i=1}^{13} w_i R_i \rightarrow \max$$

при заданих обмеженнях на його ризик

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{13} w_i^2 r_i^2} \leq S_p,$$

за умови

$$\sum_{i=1}^{13} w_i \leq 1.$$

За допомогою сервісної програми MS Excel «Пошук розв'язку» були проведені імітаційні розрахунки за вищенаведеною математичною моделлю, у яких змінювалось обмеження на ризик пакета інвестицій  $S_p$  від 0,6% до 6% з кроком 0,2%. У результаті розрахунків отримували таблиці оптимальних часток фінансування інвестиційних проектів, які забезпечують максимальні прибутковості пакету при заданих обмеженнях на його ризик.

Нижче розглянемо найбільш цікавий, на наш погляд, фрагмент розрахунків за оптимізаційною моделлю, а саме, випадок, коли обмеження на ризик пакета коливається від 1,8% до 3%, а прибутковість – від 26,47% до 41,77%.

Таблиця 5.5. Результати розрахунків оптимальних часток пакету інвестицій при обмеженнях на його ризик від 1,8% до 3%.

№ проекту	Ризик пакету (%)	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
	Прибутковість пакету (%)	28,64	30,93	33,23	35,52	37,81	39,90	41,77
Оптимальні частки								
1		0,0740	0,0823	0,0904	0,098	0,1077	0,1229	0,1364
2		0,0684	0,0759	0,0836	0,0911	0,0988	0,1059	0,1123
3		0,0446	0,0495	0,0545	0,0594	0,0623	0,0508	0,0408
4		0,0589	0,0653	0,0719	0,0784	0,0842	0,0833	0,0823
5		0,0662	0,0735	0,0808	0,0882	0,0955	0,1006	0,1052
6		0,0689	0,0766	0,0843	0,0920	0,0997	0,1074	0,1144
7		0,0737	0,0819	0,0901	0,0983	0,1073	0,1214	0,1342
8		0,0737	0,0819	0,0901	0,0983	0,1074	0,1218	0,1348
9		0,0305	0,0339	0,0373	0,0407	0,0410	0,0200	0,0008
10		0,0526	0,0585	0,0644	0,0702	0,0748	0,0691	0,0640
11		0,0337	0,0375	0,0413	0,0450	0,0460	0,0270	0,0101
12		0,0528	0,0585	0,0644	0,0702	0,0748	0,0691	0,0641
13		0,3015	0,2241	0,1463	0,0688	0	0	0

Для наочності подамо дані розрахунків у вигляді діаграми:

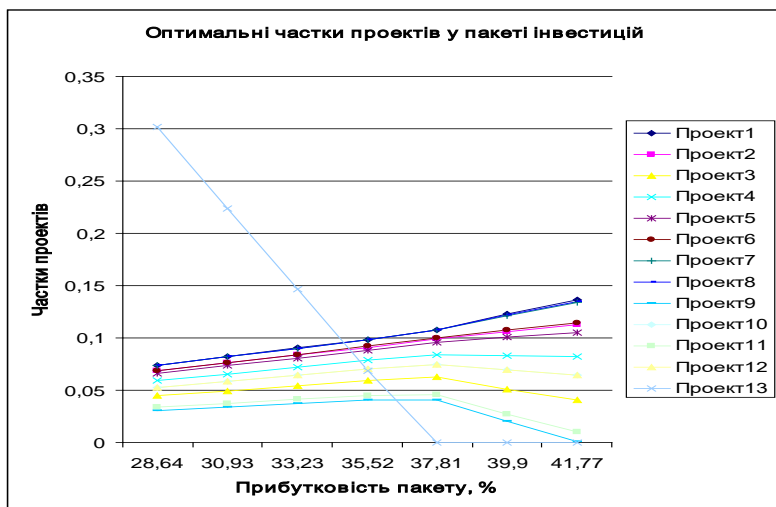


Рис.5.12. Профілі оптимальних часток фінансування проектів

Аналіз вищенаведених результатів та діаграми показує, що ризик пакету цілком прийнятний, а прибутковість є високою (наближається до найбільш рентабельних інвестиційних проектів). У випадку, коли ризик не перевищує 2,4-2,6% ефективність пакету коливається у межах 35,3-37,8% , а частки інвестицій розподіляються практично рівномірно. Окрім того, коли прибутковість пакету перевищує 35,3% усі фінансові ресурси спрямовуються виключно у реальні інвестиції (частка безризикової складової, тобто, залишку інвестиційного капіталу – обнуляється). Зауважимо, що при збільшенні прибутковості пакету понад 41,77% також припиняється фінансування деяких низькорентабельних проектів. Суб'єкт, що приймає рішення (СПР), здійснюючи моніторинг пакету інвестицій через деякі проміжки часу, в залежності від ситуації та свого ставлення до співвідношення ефективність-ризик може приймати оптимальні рішення по управлінню інвестиційними проектами (коригуючи їх фінансування). Запропонована модель дозволяє враховувати ситуацію, коли у рамках пакету інвестицій є проекти, фінансування яких здійснюється пріоритетно (наприклад, якісь значимі для соціально-економічного розвитку регіону, але неприбуткові). Тоді, як відзначалось вище, до умови невід'ємності часток усіх інвестицій необхідно додати для такого проекту умову  $w_k > 0$ .

Часто у ВЕЗ законодавчо встановлюються пільги на певні види діяльності (наприклад, пільговий режим експортно-імпортних операцій, повне або часткове звільнення від оподаткування прибутку тощо). Припустимо, що для наших інвестиційних проектів встановлюється певний пільговий режим. Це, очевидно, призведе до збільшення (за рахунок пільг) чистих грошових потоків повернення коштів від інвестиційних вкладень, що потягне за собою покращення основних показників виробничих інвестиційних проектів, зокрема, їхні  $R_i(t)$  - внутрішні норми прибутковості (IRR) при незмінних показниках ризиковості проектів. Нехай для розглянутого вище прикладу усі виробничі інвестиційні проекти реалізуються у пільговому режимі. Проведемо імітаційні розрахунки знаходження оптимальних часток фінансування проектів (які максимізують прибутковість пакету інвестицій при заданих обмеженнях на його ризиковість), збільшуючи  $R_i, i = 1, 2, \dots, 12$ ; на 1%, 3%, 5%, 7%, 9%. При цьому для без ризикової складової, очевидно,  $R_3 = 8\%$  - залишиться незмінною. Для порівняльного аналізу наведемо наступну таблицю:



Таблиця 5.6. Розрахунки із врахуванням пільг

Ризик пакету (%)	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
Прибутковість пакету (%) без пільг	28,64	30,93	33,23	35,52	37,81	39,90	41,77
Прибутковість пакету (%) з 1% пільгою	29,34	31,71	34,09	36,46	38,81	40,90	42,77
Прибутковість пакету (%) з 3% пільгою	30,77	33,31	35,84	38,37	40,81	42,90	44,77
Прибутковість пакету (%) з 5% пільгою	32,24	34,93	37,62	40,32	42,81	44,90	46,77
Прибутковість пакету (%) з 7% пільгою	33,72	36,58	39,44	42,30	44,81	46,90	48,77
Прибутковість пакету (%) з 9% пільгою	35,23	38,25	41,28	44,29	46,81	48,90	50,77

Аналізуючи отримані дані, бачимо, що при тих самих обмеженнях на ризик інвестиційного пакету від 1,8% до 3% з кроком 0,2% ефективності (прибутковості) пакету зростають приблизно на таку саму кількість відсотків,

на яку збільшуються ефективності проектів за рахунок пільг. Окрім того, раніше «пропадає» безризикова складова. Нижче наведемо діаграму, на якій зображено профілі оптимальних часток фінансування проектів інвестиційного пакету при зростанні ефективностей проектів на 9% за рахунок пільг.

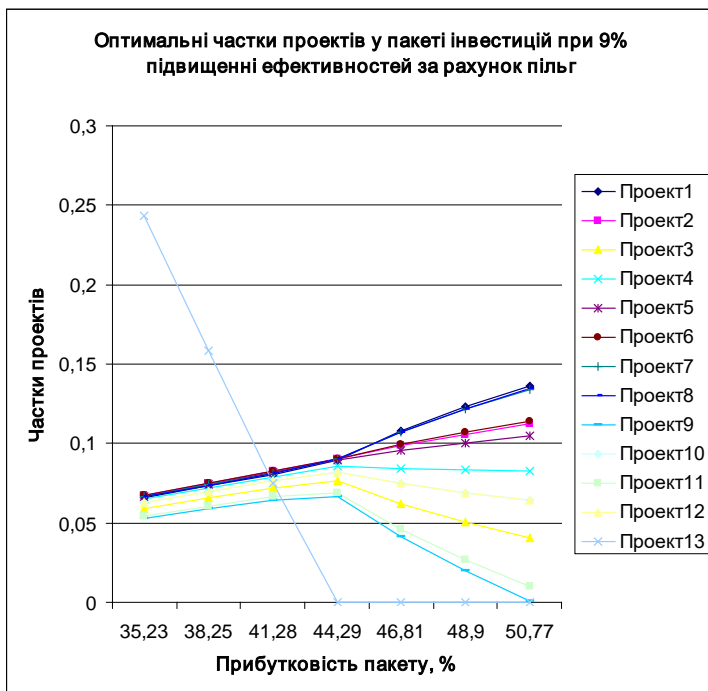


Рис.5. 13. Профілі оптимальних часток фінансування проектів

## Розділ 6. Моделювання за допомогою нейронних мереж. Імітаційне моделювання

### 6.1. Загальні принципи нейромережевого моделювання. Приклади

Штучні нейронні мережі – математичний інструментарій, що є універсальним відтворювачем складних нелінійних функціональних залежностей та ґрунтується на принципах роботи біологічних нейронних структур. Цей інструментарій застосовується в таких різноманітних розділах моделювання, як аналіз даних, прогнозування часових рядів, обробка сигналів, розпізнавання образів та багатьох інших завдяки такій важливій особливості, як здатність до навчання на реальній статистиці за участю вчителя або без нього. Тобто нейронні мережі спроможні виявляти закономірності у наявній інформації навіть без відомостей щодо можливих значень результативного показника завдяки своїй здатності до самоорганізації.

Придатність нейронних мереж до розв'язання широкого спектра задач, пов'язаних із пошуком прихованих закономірностей у досліджуваних даних, сприяла бурхливому розвитку цього інструментарію та створенню значного різноманіття видів штучних нейромережевих структур. Причому для кожного окремого виду нейронних мереж розроблено індивідуальні методи оптимізації параметрів, що враховують їх структуру та особливості функціонування. Так само і мозок людини володіє здатністю до організації власних структурних компонентів – нейронів, аби вони могли виконувати конкретні завдання. Штучні нейронні мережі за аналогією з природними нервовими системами складаються з нейронів (*neuron*), які поєднуються між собою міжнейронними зв'язками (*connected link*). Міжнейронний зв'язок, який є аналогом синапсів (*synapse*) у природних нейронах, здійснює добуток сигналу, що йде до нейрона, на ваговий коефіцієнт, який характеризує силу зв'язку.

Структурно штучний нейрон складається із суматора та функціонального перетворювача. Суматор (*adder*) здійснює додавання зважених сигналів, які надходять по міжнейронних зв'язках від інших нейронів або зовнішніх входних сигналів. Функціональний перетворювач здійснює трансформацію виходу суматора за характеристичною функцією (функцією активації – *activation function*) заданого виду. У загальному випадку функція активації є нелінійною, що зумовлює нелінійну природу нейронної мережі та, відповідно, здатність до ефективного відтворювання складних нелінійних функціональних залежностей. Структуру штучного нейрона графічно подано на рис. 6.1.

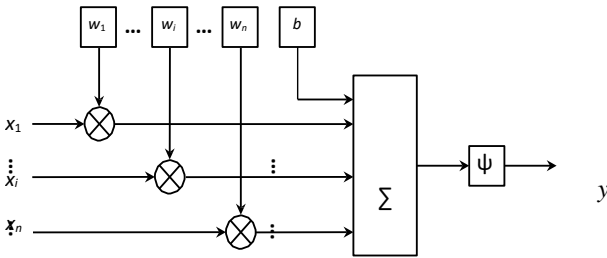


Рис.6.1. Блочна структура штучного нейрона

На рисунку:  $y$  – вихідний сигнал нейрона;  $n$  – кількість входів даного нейрона;  $x_i$  –  $i$ -ий вхідний сигнал;  $w_i$  – вага  $i$ -го входу нейрона;  $b$  – параметр зміщення (*bias*) суматора;  $\psi(\cdot)$  – характеристична функція (функція активації) нейрона.

Функція активації є принципово важливою складовою нейрона. За її участю кожен нейрон здатен підсилювати чи послаблювати сигнал, отриманий на вході (за аналогією з природними нейронами, що реалізують збуджувальний чи гальмівний ефект нейроімпульсу). Здатність до підсилення чи послаблення імпульсу регулюється сигналами, які проходять через нейрон. Як природні, так і штучні нейрони можуть навчатися залежно від активності процесів, які в них відбуваються. Також у результаті навчання змінюються і ваги міжнейронних зв'язків, що впливає і на поведінку відповідного нейрона.

Для побудови штучної нейронної мережі доцільно здійснювати аргументований вибір функцій активації залежно від поставленого завдання. Зауважимо, що часто виникає потреба у застосуванні різних видів функцій активації для різних нейронів – тобто, зовсім не обов'язково використовувати один тип характеристичної функції для усіх нейронів мережі.

*Найбільш поширені види функцій, що використовуються як функціональні перетворювачі нейронів:*

- 1) Лінійна функція активації (linear function).

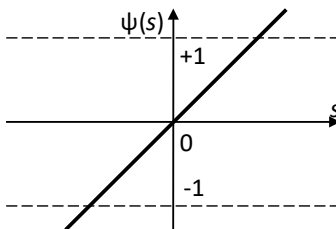


Рис. 6.2. Лінійна функція активації

Такий тип функції активації доречно використовувати, наприклад, для нейронів вихідного шару перцептрона, якщо результуюча змінна не має обмежень і може набувати будь-яких значень. Якщо такий вид функції активації застосувати, скажімо, для всіх нейронів перцептрона, то буде втрачено таку важливу властивість нейронних мереж, як нелінійність. Зауважимо, якби нейрони були лінійними елементами, то будь-яка послідовність нейронів здійснювала б загальне лінійне перетворення інформації та, відповідно, вся нейронна мережа була б еквівалентна одному лінійному нейрону. Нейронна мережа у такому разі просто набула б характеру лінійної регресійної моделі, не здатної відтворювати складні нелінійні залежності в досліджуваних об'єктах та процесах.

## 2) Кусочно-лінійна функція активації (piecewise-linear function).

Кусочно-лінійна функція активації (piecewise-linear function) може використовуватись, коли моделюється деяка величина, що не повинна виходити за встановлені обмеження (наприклад, при прогнозуванні часу до настання якоїсь події, який не може бути від'ємним). Різновидом кусочно-лінійних функцій активації є трикутна функція, яка відображає переваги деякого одного значення змінної над її іншими можливими значеннями.

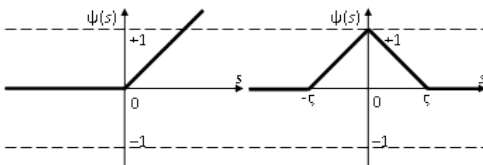


Рис. 6.3. Лінійна з обмеженнями та трикутна функції активації

За потреби можна збільшити кількість параметрів функції активації, зокрема змістити координату вершини трикутника або встановити різні координати по осі абсцис для лівого та правого кутів основи трикутника. Так само можна додавати параметри і для інших функцій активації. За аналогією з лінійними функціями активації без обмежень такі функції доцільно застосовувати також лише для нейронів вихідного шару перцептрона. З метою підвищення ефективності процесу оптимізації параметрів нейронної мережі, замість лінійних функцій активації, варто використовувати диференційовані функції.

3) *Пороговий тип функції активації (threshold function)* доцільно застосовувати у випадку, коли результуюча змінна може набувати тільки двох значень  $-1$  і  $+1$  (сигнатурна або сигнум-функція) чи  $0$  і  $+1$  (функція Хевісайда або одиничного стрибка), наприклад, у задачах класифікації або на рекурентному шарі в мережах асоціативної пам'яті.

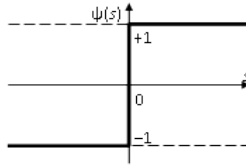


Рис.6.4. Порогова функція активації (сигнатурна)

Виятком є нейронні мережі асоціативної пам'яті, де подібний тип функції активації застосовується на внутрішньому шарі, нейрони якого мають зворотні зв'язки із собою. Доцільність використання порогових функцій зумовлюється принципами функціонування асоціативних нейронних мереж, що ґрунтуються на теоретичних засадах взаємодії магнітних моментів атомів у спінових системах (наприклад, нейронні мережі Хопфілда).

4) Сигмоїдна функція активації (*sigmoid function*). Будуючи нейронну мережу, важливо забезпечити її здатність до ефективного налаштування параметрів, що можна зробити із застосуванням диференційованих функцій активації. Одна з базових функцій, що часто використовується у конструюванні штучних нейронних мереж, є сигмоїдна:

Гіперболічний тангенс  $\psi(s) = \frac{2}{1 + e^{-ks}} - 1$ ;

Логістична  $\psi(s) = \frac{1}{1 + e^{-ks}}$ .

Тут  $k$  - коефіцієнт стиснення-розтягування функції вздовж осі абсцис

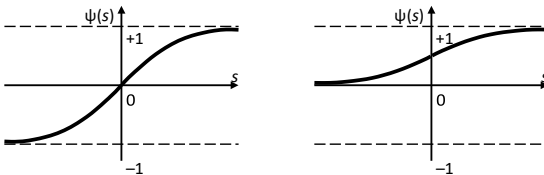


Рис. 6.5. Сигмоїдні функції активації: гіперболічний тангенс та логістична

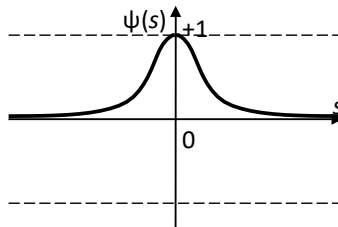
Коефіцієнт стиснення-розтягування може використовуватися як параметр підсилення. Перевагою застосування сигмоїдної функції як нелінійного елементу є те, що вона має обмеження подібно до порогової функції активації та демонструє поведінку, схожу з природним нейроном. Так, зі зменшенням значення коефіцієнта стиснення-розтягування функція активації стає більш пологою (у граничному випадку (при  $k = 0$ ) набуваючи вигляд прямої на рівні 0 для гіперболічного тангенсу або на рівні 0,5 для логістичної). Зі збільшенням коефіцієнта  $k$  сигмоїдна функція все більше стискається, прямуючи до порогової функції активації. При цьому залишається можливість її диференціювання, що

дозволяє використовувати градієнтні методи для оптимізації параметрів моделі (зокрема, метод зворотного поширення помилки).

5) *Радіально-базисна функція активації (radial-basis function)* також є диференційованою, проте характеризується відмінними від сигмоїдних функцій властивостями та, відповідно, використовується для розв'язання інших задач. Вона визначається за формулою:

$$\psi(s) = \exp(-ks^2)$$

Графічно радіально-базисну функцію активації подано на рис. 6.6.



*Рис. 6.6. Радіально-базисна функція активації*

Подібна функція активації може використовуватися для розв'язання задач, де значення змінних розподілені за нормальним законом, або в радіально-базисних нейронних мережах. Також ця функція може застосовуватися у картах самоорганізації для зменшення впливу вектора вхідних даних на нейрони, які є більш віддаленими від нейрона-переможця.

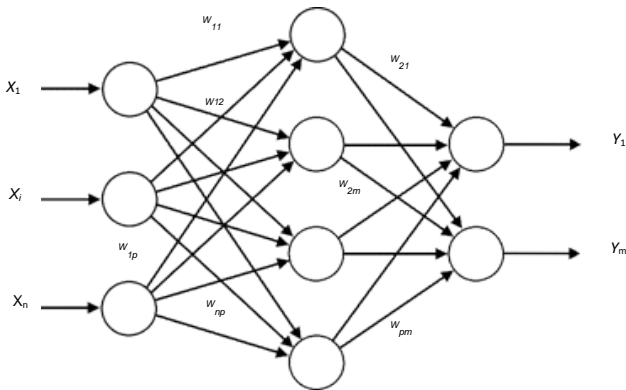
#### *Багатошаровий перцептрон Розенблата.*

Зовнішній вигляд нейромеревих моделей можна значно спростити, якщо скористатися теорією графів проходження сигналів. Граф передачі сигналу – це мережа спрямованих зв'язків, що поєднують окремі вузли. Так, спрямований зв'язок починається в одному вузлі і закінчується в іншому. Поведінка міжнейронного зв'язку визначається добутком вхідного сигналу зв'язку  $x_i$  на синаптичну вагу  $w_i$ . Результуючий сигнал вузла (нейрона) дорівнює алгебраїчній сумі сигналів вхідних зв'язків (та параметра зміщення суматора, який на графі не відображається), перетвореній згідно із заданою функцією активації.

Найпоширенішим різновидом нейронних мереж можна вважати модель типу багатошаровий перцептрон. Кожен нейрон у такій мережі здійснює перетворення вхідних сигналів на вихідний згідно зі спеціальною функцією. Усі нейрони перцептрона поєднані в шари. Міжелементні зв'язки в такій мережі утворюються лише між нейронами сусідніх шарів: окремо взятий нейрон може з'єднуватися з одним, кількома або всіма нейронами сусіднього шару (в останньому випадку така нейронна мережа називається

повнозв'язною). При цьому на входи того чи іншого нейрона надходять сигнали від нейронів попереднього шару (або ззовні), а результуючий сигнал нейрона передається на входи нейронів у наступному шарі (або на вихід мережі, якщо нейрон належить вихідному шару).

У моделях типу перцептрон перший шар нейронів слугує для введення вхідних даних, останній – для виведення результатів розрахунків мережі, а приховані (один або декілька) – для обробки вхідних сигналів та збереження інформації про внутрішню структуру об'єкта, що моделюється. Кількість входів та виходів мережі визначається кількістю пояснювальних та залежних параметрів досліджуваного об'єкта, явища, процесу тощо. На відміну від зовнішніх шарів, число нейронів прихованих шарів встановлюється емпіричним шляхом. Тобто кількість прихованих шарів та їх нейронів вибирається виходячи з того, чи прийнятною є точність моделювання. На рисунку 6.7 представлено модель багатозарового перцептрона, що містить три шари:



*Рис. 6.7. Структура нейронної мережі типу перцептрон*

Перцептрон здійснює розрахунок результативних показників шляхом послідовного перетворення у нейронах з першого по останній шари сигналів, поданих на входи цих нейронів ззовні або з нейронів попереднього шару, які зважені на вагові коефіцієнти міжнейронних зв'язків. Нейронна мережа типу перцептрон може функціонувати в одній із двох фаз – робочій та навчальній. При функціонуванні нейронної мережі в робочій фазі здійснюється обробка інформації визначеним чином. Поведінка нейронної мережі в робочій фазі детермінована, тобто для кожної конкретної комбінації вхідних сигналів на виході завжди буде той самий результат (за даного налаштування). Упродовж робочої фази нейронна мережа не навчається. Це важливо, оскільки система у такому випадку не буде схильною до екстремальної поведінки.



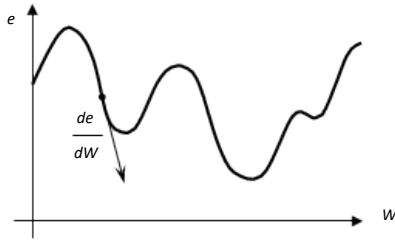
Налаштування параметрів нейромережі здійснюється в іншій фазі – навчальній. Під час навчання використовуються еталонні значення пар «входи – виходи», які дозволяють надати певні характеристики поведінки нейронній мережі. Навчальний алгоритм модифікує параметри окремих нейронів мережі та ваги міжнейронних зв'язків так, щоб поведінка мережі відповідала бажаній. Так, у результаті налаштування нейронна мережа розраховуватиме вихідні сигнали на рівні, близькому до еталонних даних при відповідних вхідних сигналах.

Оптимізацію параметрів нейронних мереж персептронного типу можна здійснити за допомогою спеціально розроблених алгоритмів, серед яких найпопулярнішим є метод, що називається узагальненим дельта-правилом або алгоритмом зворотного поширення помилки (*Error Back-Propagation Algorithm*).

В основу алгоритму зворотного поширення помилки покладено метод градієнтного спуску, що полягає у розрахунку частинних похідних критерію оптимальності за всіма параметрами моделі, які підлягають налаштуванню, для заданих значень вектора вхідних даних  $x = \{x_1, \dots, x_n, \dots, x_m\}$ . За такий критерій оптимальності часто береться величина, яка є пропорційною квадрату різниці між реальними значеннями результуючих змінних та розрахунком мережі на підставі вектора вхідних даних.

Сутність алгоритму зворотного поширення помилки полягає в налаштуванні параметрів нейронної мережі шляхом мінімізації похибки моделювання. Для різних комбінацій параметрів нейронної мережі її похибку можна відобразити точкою у багатовимірному просторі (кількість вимірів дорівнює кількості параметрів моделі плюс один – для відображення похибки). Усі такі точки утворюють деяку гіперповерхню – поверхню станів. Метою навчання нейронної мережі є знаходження найнижчої точки на цій багатовимірній поверхні станів. Відштовхуючись від випадково обраної точки на гіперповерхні (від початкової конфігурації параметрів нейронної мережі), алгоритм навчання поступово відшукує найближчий мінімум шляхом розрахунку вектора градієнта поверхні похибок. Цей вектор складається з частинних похідних, які вказують напрям найкоротшого спуску по поверхні станів із заданої точки. Частинні похідні дозволяють дослідити залежність функції похибки моделювання від одного аргументу. Якщо змінювати значення параметра налаштування у напрямі, у якому похідна за цим параметром є від'ємною, то, відповідно, зменшується загальна похибка моделювання – відбувається мінімізація критерію оптимальності. У цьому методі зворотного поширення помилки є реалізацією методу градієнтного спуску у просторі параметрів нейронних мереж прямого поширення (таких як на рис. 6.7).

Графічно залежність похибки моделювання  $e$  від значень параметра моделі  $w$  можна представити на площині. Приклад такої залежності та графічна інтерпретація частинної похідної для довільно обраного значення параметра налаштування  $w$  зображені на рис. 6.8:



*Рис. 6.8. Залежність похибки моделювання від значень одного параметра*

Зрештою, оптимізаційний алгоритм зупиняється у нижній точці поверхні станів (часткові похідні тут дорівнюватимуть нулю), що може виявитися лише локальним мінімумом. Тому важливо дослідити якомога більшу частину гіперповерхні шляхом пошуку мінімуму функції похибки моделювання, починаючи з різних початкових наближень.

Зауважимо, що в класичній реалізації алгоритму зворотного поширення помилки та подальших відомих його вдосконаленнях здійснюється оптимізація лише ваг міжнейронних зв'язків персептрона. Однак ряд науковців указують на те, що при конструюванні нейронної мережі необхідно намагатися мінімізувати її розміри, при цьому забезпечивши здатність вирішувати поставлену задачу на належному рівні. На можливість зменшення розмірності коннекціоністської мережі вказував Уільям Бечтел, запропонувавши у процесі навчання корегувати не тільки ваги зв'язків, але й рівні активації нейронів мережі.

Розглянемо основні етапи побудови та функціонування самонавчаючих алгоритмів, які складають основу нейромережі: 1) Комплексний аналіз інформаційної бази; 2) Вибір програмного нейроімітатора та методів навчання нейромережі; 3) Формування аналітиком навчальної вибірки з допомогою нейроімітатора; 4) Вибір аналітиком структури нейромережі та навчання її на навчальній вибірці за допомогою нейропакета; 5) Автоматичний аналіз з допомогою нейропакета відібраної на попередніх етапах інформації з використанням натренованої мережі; 6) Якщо параметри результатів задовольняють початковим вимогам, то відбувається інтеграція нейромоделі в інформаційну систему для подальшого прикладного використання її.

Серед багатьох програмних продуктів нейронних мереж відмітимо пакет Statistica Neural Networks, який містить великий арсенал статистичних методів, реалізований у ньому потужний генетичний алгоритм і всі види нейромереж.

Сьогодні багато фінансових аналітиків використовують програмний продукт нейронних мереж для прогнозування цін акцій на основі множини чинників. Наприклад, поведінка у минулому цін тих чи інших акцій у

сукупності з різними іншими макроекономічними показниками.

Математичний апарат програмних продуктів нейронних мереж дає можливість не тільки отримувати шукані параметри в дискретному вигляді, але й мати функціональне представлення вихідного параметра від вхідного при умові незмінності інших, тобто вияв якісного співвідношення між ними.

Завдяки своїй універсальності мережі можна використовувати для визначення оптимальних структур портфелів цінних паперів і інвестицій, прогнозу банкрутства фінансових і виробничих структур, визначення кредитних ризиків, кредитоспроможності позичальників, прогнозування інфляційних процесів, курсів валюти, ліквідності комерційних банків, податкових надходжень до бюджету та інших економічних показників. Наприклад, при наданні кредиту банк володіє певною базою знань про особу, яка звернулася за кредитом. Це може бути її вік, освіта, професія, власність та інше. Навчивши нейромережу на цій базі, аналітик може визначити найсуттєвіші характеристики клієнта і на цій основі віднести його до певної категорії кредитного ризику. Для кількісної оцінки альтернативних рішень можна також використати дискримінантний або кластерний аналіз.

Важливим напрямком використання нейромережевих технологій є розробка цінового механізму в розвитку ВЕС. Ціна – дуже важливий елемент у бізнесі. Вона має бути тісно пов'язаною з виробничою програмою і товарним асортиментом фірми, тобто стратегією підприємства. Для оптимізації процесу інвестування необхідно мати в наявності імітаційну модель, яка дасть можливість визначити попит на ринку у відповідності до кон'юнктури та економіки регіону.

Визначити функцію попиту – завдання досить складне, оскільки вона має фрактальні властивості. Проте економетричну залежність між найбільш важливими мезо- та мікроекономічними показниками, що моделюють економічні стани регіону, можна визначити. Для розв'язку такого типу задач можна використати нейромережевий підхід.

На вхід нейронної мережі подаються показники, що характеризують і одночасно визначають ринок регіону для заданого виду продукції чи наданих послуг. Окреслена вхідна інформація може бути поділеною на ряд блоків: блок макро- та мезоекономічних і соціальних показників регіону; блок даних витрат на рекламу; блок даних, які характеризують вартість і якісь послуг; блок даних стосовно кон'юнктури ринку та блок статистичної інформації внутрішнього характеру. Для практичної реалізації даного підходу з допомогою нейронної мережі нам необхідно визначити: вхідні та вихідні змінні, принцип функціонування та вигляд мережі. Виконання цієї процедури дозволить, змінюючи ціни та витрати на рекламу, досягти необхідних показників попиту у відповідності з прийнятою стратегією підприємства. Поряд з цим нейронна мережа дає можливість визначити кількісні значення для вхідних показників. Зазначена методика є досить ефективною при використанні в окремих маркетингових заходах на конкретних ринках збуту. Одночасно вона допоможе звести до мінімуму витрати на рекламу та створити максимальний зовнішній ефект впливу на величину попиту. Нейронні мережі

є добрим програмним продуктом для розв'язання задачі прогнозування інвестиційного потенціалу регіону. Його можна визначити як здатність до отримання максимально можливого обсягу інвестиційної складової валового регіонального продукту, яка реалізується через використання інвестиційного фактору економічного росту. Цій задачі властиві особливі ознаки: великий обсяг вхідної інформації; неповнота або надлишок даних, їх зашумленість і часткове протиріччя; відсутність однозначного формалізованого алгоритму прогнозування. Для вирішення поставленої задачі необхідно побудувати модель, яка буде аналізувати поступлення інформації відносно кількісної оцінки потенціалу, виявляти в ній закономірності, враховувати неоднорідність та невизначеність даних і виконувати прогноз. Для практичної реалізації розробленої моделі необхідно розв'язати задачі: - зформуванню інформаційну базу і на її основі виділити навчальну і тестову вибірки; - провести попередню обробку вибірки: нормування, кодування даних, конструювання мережі (вибір топології мережі, функції активації нейронів, алгоритм навчання); - здійснити навчання мережі на основі ретроспективних даних; - оцінити функціонування розробленої моделі та якість навчання мережі.

Інструментарій нейронних мереж можна використати при виконанні процедури оцінки ліквідності та надійності комерційних банків на основі інтегрального показника (правил рішень). Для знаходження цього показника в нейромережах виконуються такі процедури вибору: - системи кодування вхідного значення чи їх множини; - топології або архітектура мережі, тобто число елементів і структура зв'язків (входи, шари, виходи); - функції активації; - алгоритму навчання мережі. Для отримання правила рішень, яке визначає категорію банку («надійний» або «проблемний»), за допомогою процедури «класифікація з учителем» отримуємо декілька сценаріїв залежно від поставленої мети: - передбачення групи проблемних банків за критерієм Національного банку України; - прогнозування банкрутства банку; - вибір надійних контрагентів при кредитуванні. Тут основна роль відводиться навчальній вибірці, яка формується для кожного із перелічених випадків за своїми правилами на основі нормативної та статистичної бази.

Ще одним прикладним застосуванням нейронних мереж є податкова та митна система. Так, наприклад, для відбору платників податку – кандидатів для проведення податкових перевірок на вхід навчальної мережі подається послідовність векторів, компонентами яких є параметри цих платників. Нейронна мережа відбирає тих платників податку, які володіють тими самими характеристиками, що й навчальна вибірка. Алгоритм будується таким чином, що він буде розбивати податкові декларації, відносно проведення перевірок, на два класи: - можуть дати великі дорахування; - дорахування малоімовірні. Для навчання нейромережі розпізнавання класів декларацій використовується навчальний файл, який містить інформацію відносно результатів попередніх перевірок і дані з податкових декларацій перевірених платників податку. Після виконання процедури навчання мережі, її можна використовувати для класифікації податкових декларацій, для яких

такі перевірки ще не проводилися. Податкові декларації, відібрані мережею як потенційно продуктивні, в подальшому розглядаються експертом-аналітиком, який і приймає остаточне рішення: варто їх проводити чи ні, і якщо варто, то на які питання необхідно в першу чергу звернути увагу. Окреслену методику можна використовувати як метод виявлення зв'язків між значеннями, які вказуються в конкретних пунктах декларацій, і імовірнісним ухиленням сплати податків, тобто як попередню процедуру відбору для економетричного моделювання процесів оподаткування з допомогою регресійного та дискримінантного аналізів. Аналогічні процедури моделювання за допомогою нейромереж можна застосовувати до кількісного аналізу та прогнозування економічних показників у митній справі.

*Приклад 6.1. Моделювання за допомогою нейромереж курсу українських облігацій (за даними прикладу 3.6).*

Розглядається щоденна динаміка курсу українських облігацій (UB) за період з 2.01.2013 року по 30.05. 2014 року (Рис. 6.9):



*Рис.6.9. Щоденна динаміка індексу українських облігацій (UB) з 2.01.2013 по 30.05. 2014.*

Для налаштування нейромережових моделей (формування навчальних, контрольних та тестових вибірок) оберемо динамічний ряд  $UB_1$ , тобто, перші 334 рівні ряду динаміки індексу  $UB$ . За допомогою «Майстера рішень» модуля «Нейронні мережі» програми Statistica здійснюємо пошук найбільш оптимальної моделі динамічного ряду  $UB_1$ . Наведемо фрагмент цього процесу (результати роботи 5 найкращих моделей) у вигляді наступної таблиці, в якій перші стовпці – це змодельовані рівні динамічного ряду, а другі – похибки моделей):

Таблиця 6.1.

## Результати пошуку оптимальних моделей (фрагмент)

Остатки (1-5) (Таблиця.ста)								
	ub1.1	Ост.ub1.1	ub1.2	Ост.ub1.2	ub1.3	Ост.ub1.3	ub1.4	Ост.ub1.4
1	1033,535	33,535	1028,040	28,040	1000,004	0,00359	1000,003	0,003321
2	1034,768	32,637	1029,344	27,213	1002,135	0,00418	1002,133	0,002312
3	1037,783	30,453	1032,536	25,206	1007,335	0,00520	1007,330	-0,000344
4	1040,896	28,217	1035,831	23,153	1012,684	0,00565	1012,676	-0,002310
5	1042,422	27,128	1037,448	22,153	1015,300	0,00565	1015,292	-0,002687
6	1045,776	24,751	1040,999	19,974	1021,030	0,00519	1021,023	-0,001972
7	1046,781	24,043	1042,064	19,326	1022,743	0,00493	1022,737	-0,001403
8	1050,808	21,227	1046,328	16,748	1029,584	0,00334	1029,582	0,001603
9	1052,324	20,175	1047,935	15,786	1032,151	0,00252	1032,152	0,002656
10	1053,852	19,119	1049,553	14,821	1034,734	0,00157	1034,736	0,003460
11	2204,845	-142,139	2268,063	-78,921	2346,602	-0,38247	2346,808	-0,176824
12	2211,985	-141,218	2275,470	-77,733	2352,991	-0,21203	2353,054	-0,149032
13	2234,202	-138,285	2298,499	-73,988	2372,785	-0,29812	2372,428	-0,058725
14	2241,561	-137,292	2306,121	-72,732	2379,312	0,45943	2378,825	-0,027717
15	1441,908	-140,562	1462,924	-119,546	1581,918	-0,55258	1582,375	-0,095487
16	1445,503	-141,290	1466,759	-120,034	1586,215	-0,57745	1586,699	-0,093960
17	1448,973	-141,984	1470,461	-120,495	1590,360	-0,59645	1590,865	-0,091538
18	1443,120	-140,809	1464,217	-119,712	1583,368	-0,56155	1583,834	-0,095089
19	1446,625	-141,516	1467,957	-120,184	1587,557	-0,58414	1588,048	-0,093275
20	1450,162	-142,219	1471,730	-120,651	1591,780	-0,60181	1592,291	-0,090508
21	1051,722	20,592	1047,297	16,167	1031,134	0,00286	1031,133	0,002262
22	1053,271	19,520	1048,937	15,187	1033,752	0,00194	1033,753	0,003192
23	961,369	91,896	951,835	82,363	869,465	-0,00713	869,475	0,003056
24	962,453	90,929	952,977	81,454	871,514	-0,00975	871,524	0,000745
25	963,638	89,876	954,226	80,464	873,750	-0,01195	873,760	-0,001791
26	963,990	89,564	954,597	80,171	874,414	-0,01246	874,423	-0,002504
27	965,186	88,505	955,857	79,176	876,668	-0,01370	876,677	-0,004647
28	967,380	86,572	958,169	77,361	880,795	-0,01389	880,802	-0,006856
29	968,585	85,515	959,439	76,369	883,057	-0,01289	883,063	-0,006873
30	969,799	84,455	960,718	75,374	885,332	-0,01114	885,338	-0,006004
31	1479,923	-147,754	1503,475	-124,202	1627,135	-0,54180	1627,634	-0,042092
32	1483,650	-148,400	1507,450	-124,600	1631,541	-0,50896	1632,016	-0,034336
33	1494,520	-150,226	1519,042	-125,704	1644,361	-0,38487	1644,734	-0,011501
34	1498,361	-150,850	1523,137	-126,074	1648,879	-0,33177	1649,208	-0,003574
35	1502,233	-151,469	1527,265	-126,437	1653,428	-0,27386	1653,706	0,004243
36	1480,754	-147,899	1504,361	-124,291	1628,117	-0,53493	1628,612	-0,040374
37	1485,308	-148,684	1509,218	-124,774	1633,499	-0,49271	1633,961	-0,030857
38	1496,911	-150,616	1521,591	-125,936	1647,175	-0,35234	1647,521	-0,006549
39	1500,844	-151,248	1525,784	-126,308	1651,797	-0,29512	1652,094	0,001462
40	1504,486	-151,824	1529,667	-126,643	1656,072	-0,23826	1656,319	0,008691
41	1075,660	4,530	1072,671	1,541	1071,114	-0,01658	1071,128	-0,003050

У результаті прогонів (епох) ітераційним шляхом, за методом зворотного поширення помилки, знайдено оптимальну модель, що показала найменші похибки на навчальних, контрольних та тестових вибірках. Такою моделлю виявився тришаровий перцептрон із одним прихованим шаром, що складається з 5 нейронів, та радіально-базисною функцією активації нейронів  $\psi(s) = \exp(-ks^2)$ ,

де  $s \in R$ , а  $k > 0$  - параметр підсилення сигналів (коефіцієнт стиснення-розтягування):

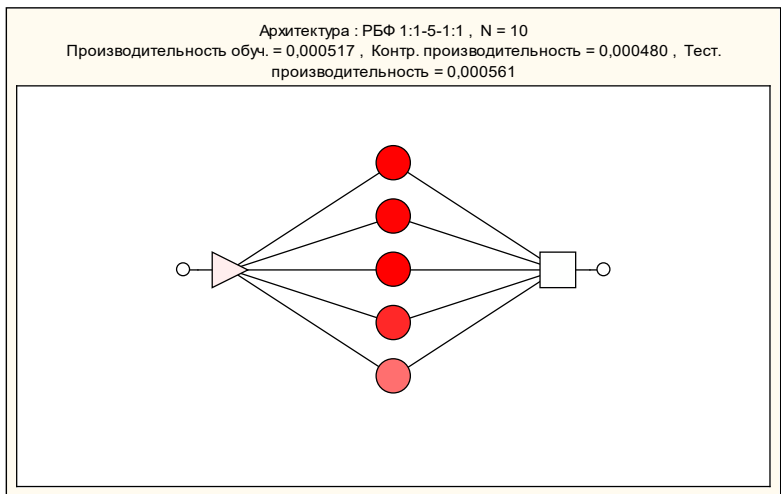


Рис.6.10. Архитектура нейронерезевої моделі динамічного ряду  $UB$ ,

Для наочності за результатами моделювання побудуємо на одній діаграмі графіки вихідного ряду динаміки ( $UB$ ) та змодельованого ( $UB$ ; прбр.):



Рис.6.11. Графіки рядів динаміки ( $UB$  - вихідний та  $UB$ ; прбр. – оптимальна модель).

Візуально можемо спостерігати досить високу точність побудованої моделі, та й результати прогнозування за цією моделлю кращі, ніж за моделлю ARIMA (1,1,1) з інтервенцією:

Таблиця 6.2.

Прогнози  $UB_t$  за моделлю ARIMA, нейромережею та фактичні значення

Прогнози (ARIMA)	Прогнози (нейромережа)	Факт
3539,292	3509,562	3511,1209
3506,971	3526,361	3525,3314
3491,240	<b>3481,346</b>	<b>3473,5498</b>
3484,040	3480,745	3479,4659
3481,229	3441,269	3440,7611
3480,674	3460,074	3457,0099
3481,279	3485,379	3487,6691
3482,482	3452,982	3455,5293
3483,991	3453,591	3456,2835
3485,658	3480,058	3479,0848

Як бачимо, відносна похибка прогнозування для ARIMA з інтервенцією:

$$\delta_{\max} = \frac{\max |UB_t^{\text{прогноз}} - UB_t^{\text{факт}}|}{\min UB_t^{\text{факт}}} \leq \frac{40}{3440,7611} = 0,011,$$

тобто, не перевищує 1,1%, то для нейромережі:

$$\delta_{\max} = \frac{\max |UB_t^{\text{прогноз}} - UB_t^{\text{факт}}|}{\min UB_t^{\text{факт}}} \leq \frac{8}{3440,7611} = 0,002,$$

тобто, не перевищує 0,2%.

Ще раз нагадаємо, що порівняно невеликий об'єм вибірових даних при нейромережевому моделюванні може призводити до так званого «ефекту перенавчання».

*Приклад 6.2. Прогнозування податкових надходжень за допомогою багатofакторних моделей та нейромережевих технологій.*

Для ефективного стабільного соціально-економічного розвитку країни важливим є збільшення надходжень коштів до бюджетів усіх рівнів, що сприятиме стабільності функціонування і розвитку фінансової системи та підвищенню економічної безпеки держави. І у зв'язку з цим набуває особливої актуальності питання підвищення ефективності формування дохідної частини бюджету, яке безпосередньо пов'язано з прогнозуванням бюджетних надходжень та розподілом бюджетних призначень за різними типами податків у розрізі регіонів із урахуванням галузевих особливостей.



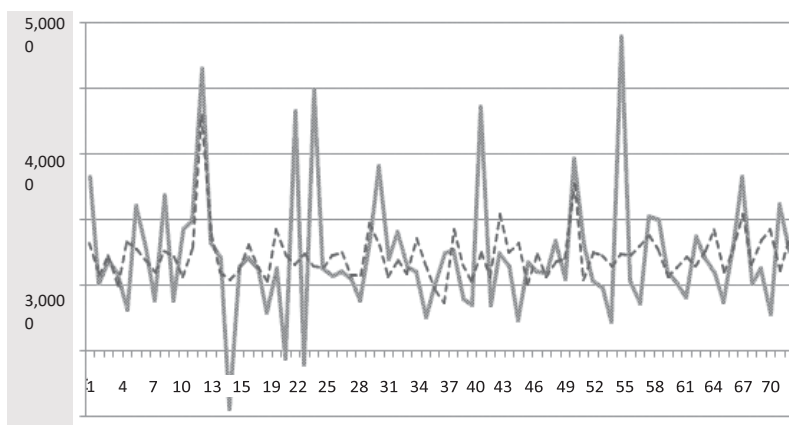
Зауважимо, що основною особливістю прогнозування макропоказників (до яких можна віднести і бюджетні надходження за окремими видами податків) є те, що будь-яка макрозмінна визначається безліччю компонентів і має тенденцію до меншого відхилення від середньої, ніж кожна з її складових. Відповідно, навіть за наявності репрезентативної вибірки, сталих тенденцій розвитку економіки та принципів функціонування податкової системи, з метою зменшення загальної похибки розрахунків не варто здійснювати спроби визначати потенційну податкову спроможність окремих платників податків, а моделювати надходження за кожним типом податку в розрізі регіонів або України в цілому.

З огляду на нестаціонарність та відсутність статистичної однорідності відповідних часових рядів в умовах української економіки виключається можливість здійснення адекватного прогнозування на основі економетричних моделей. Зокрема, при прогнозуванні податкових надходжень було вирішено відмовитись від використання ARIMA або інших однофакторних моделей. У дослідженні зроблено вибір на користь багатфакторного прогнозування. А з метою збільшення статистичної вибірки одночасно аналізуються багато різних часових рядів надходжень податку за різними регіонами України через незначну кількість статистичних даних. Відповідно, у такому разі здійснювати прогнозування часових рядів шляхом їх екстраполяції вже не вдається.

При виконанні дослідження перш за все будуємо економетричну модель прогнозування податкових надходжень регресійного типу. Це доречно зробити з метою отримання можливості порівняння якості прогнозування із більш складними моделями (хоча вище і було обґрунтовано проблематичність застосування економетричних моделей). А далі здійснимо побудову нелінійних моделей прогнозування податкових надходжень, що не вимагатимуть дотримання випадковими величинами пояснюючих змінних гіпотези щодо нормального розподілу та будуть ґрунтуватись на методах теорій нейронних мереж.

Побудуємо відповідні економіко-математичні моделі та проведемо порівняльний аналіз їх ефективності на прикладі статистичних рядів надходжень податку на додану вартість у розрізі регіонів. Спочатку було побудовано значну кількість економетричних моделей прогнозування надходжень ПДВ, які ґрунтувались на різних множинах пояснюючих змінних, та, зважаючи на брак статистичної інформації, налаштовувались на даних щодо цих змінних за різними роками. Тобто, для деяких моделей брались статистичні дані лише за 2006 рік (для тих пояснюючих змінних, для яких була наявна статистика тільки за 2006 рік), відтворюючи при цьому надходження ПДВ у відповідних кварталах 2007 року. Деякі моделі будувались на статистиці за 2004 – 2005 рр., прогнозуючи надходження ПДВ у 2005 – 2006 рр., відповідно. Також було побудовано економіко-математичні моделі і на інших часових інтервалах. Усі побудовані економетричні моделі показали коефіцієнт детермінації на рівні до 0,15 та

відповідні низькі значення  $F$ -критерію (які значно нижчі за відповідні табличні значення), що вказує на їх недостатню придатність для прогнозування надходжень податку на додану вартість. Нормалізована середньоквадратична помилка прогнозу для цих моделей була у межах від 0,9 до 1,0 (прогноз виявився не набагато кращим, ніж звичайне середнє арифметичне). Порівняльний аналіз точності відтворення надходжень ПДВ на основі декількох пояснюючих змінних попередніх періодів найбільш адекватними виявились економіко-математичні моделі, що будувались на основі статистики за роками з 2002 по 2005 для показників «Надходження ПДВ», «Втрати від надання податкових пільг», «Відшкодування ПДВ», «Обсяг експорту», «Обсяг імпорту», «Індекс споживчих цін», «Збір ПДВ» та «Переплата». На *рис. 6.12* показано реальний ряд відносних змін надходжень ПДВ за регіонами (суцільна лінія) та його відтворення (штрихова лінія) по першому кварталу наступного року (з 2003 по 2006 рр.) із застосуванням зазначеної економетричної моделі.



*Рис. 6.12. Відтворення відносних змін надходжень ПДВ за регіонами по першому кварталу із застосуванням лінійної моделі*

Із *рис. 6.12* видно, наскільки сильно прогноз надходжень ПДВ, отриманий на підґрунті регресійних моделей, розходиться із реальними даними. Подібна ситуація з прогнозування, як зображено на *рис. 6.12*, спостерігається і для інших кварталів. Практично всі побудовані економетричні моделі виявились нездатними відтворювати надходження

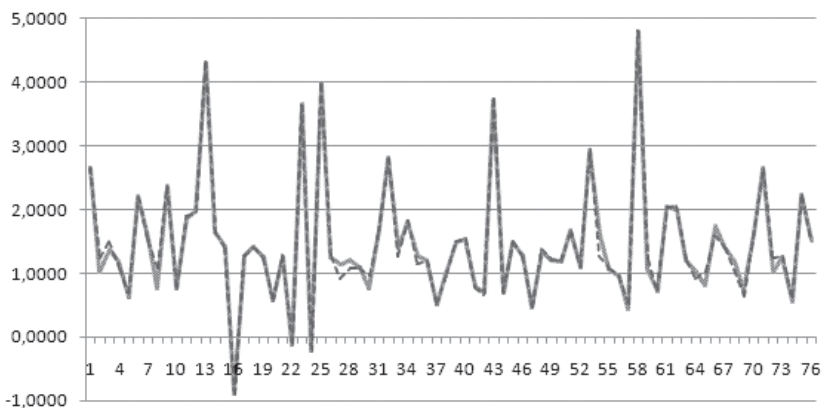
ПДВ на підгрунті значень низки різних показників попереднього періоду. І пояснити це можна низькою залежністю вихідної змінної «Надходження ПДВ» від змін інформативних факторів. Високі коефіцієнти кореляції між вхідними та вихідною змінними з'являються лише у абсолютних величинах, що пояснюється загальною тенденцією зростання усіх фінансових та економічних показників, пов'язаною із загальним розвитком економіки країни та супутніми інфляційними процесами. Відповідно, можливість моделювання податкових надходжень із застосуванням класичного економетричного інструментарію викликає значні сумніви.

Здійснимо відтворення надходжень ПДВ із застосуванням економіко-математичних моделей, побудованих із застосуванням нейронних мереж типу персептрон на цій же статистиці та з відібраними до регресійних моделей пояснюючими змінними.

Формування моделей на нейронних мережах зводиться до вибору оптимальної конфігурації нейронних мереж (визначення кількості внутрішніх шарів мереж та нейронів у цих шарах), виду функцій активації різних нейронів та обґрунтування рекомендацій щодо попередньої обробки даних перед їх поданням на входи мережі. Для конструювання нейромережових моделей було відібрано ті пояснюючі змінні, за якими будувались останні економетричні моделі, оскільки для них є найбільш повна статистика за всіма регіонами. Зазначимо, що обсяг навчальної вибірки особливо важливий для коректного налаштування нейронної мережі, щоб уникнути ефекту перенавчання. При побудові нейромережових моделей прогнозування надходжень ПДВ за кожним кварталом відбиралась така нейронна мережа, що найбільш точно відтворює статистику, але має більш просту структуру та уникає ефекту перенавчання.

У результаті проведення експериментів з моделювання надходжень податку на додану вартість із застосуванням інструментарію нейронних мереж найбільш адекватною було визначено модель із такою конфігурацією:

повноз'язна нейронна мережа типу багатошаровий перцептрон з одним внутрішнім шаром, що складається з шести нейронів; перший шар складається з восьми нейронів за кількістю вхідних змінних моделі та один нейрон вихідного шару. Перша ж побудована нелінійна модель на підґрунті інструментарію нейронних мереж виявила високу точність відтворення вихідної змінної на основі множини вхідних показників. Це підтверджується і значенням нормалізованої середньоквадратичної помилки прогнозу  $\sigma_{norm} = 0,095$ . Результат відтворення показника «Надходження ПДВ» для першого кварталу із застосуванням цієї моделі можна спостерігати на *рис. 6.13*.



*Рис.6.13. Відтворення відносних змін надходжень ПДВ по першому кварталу із застосуванням нейромережевої моделі*

Отримані результати відтворення надходжень ПДВ із застосуванням методів нейронних мереж підтверджують високу ефективність даного інструментарію та доцільність його використання для розв'язання задачі прогнозування податкових надходжень

## 6.2. Системна динаміка та імітаційне моделювання. Приклади

### Основні поняття та особливості імітаційного моделювання

Розвиток засобів обчислювальної техніки став основною запорукою появи нового наукового напрямку в дослідженні складних процесів функціонування та розвитку економічних систем – імітаційного моделювання.

При керуванні виробничо-економічними системами (ВЕС) дуже часто приходится мати справу з випадковими факторами: ринковим попитом, відмовою обладнання, потребою у фінансових ресурсах і т.д. Для оцінки наслідків роботи ВЕС за таких умов часом проводять штучний експеримент, під час якого замість проведення складних випробувань із реальними об'єктами робляться спеціальні дослідження на математичних моделях. Такі дослідження називаються імітаційним моделюванням, а їх основу складає імітаційна модель.

Імітаційні моделі є особливим класом математичних моделей і відрізняються від аналітичних тим, що в їх реалізації головну роль беруть на себе ПК. Потужність засобів обчислювальної техніки, сучасне програмне забезпечення дає можливість ефективно організувати діалоговий режим роботи в рамках імітаційних систем.

Ідея методу імітаційного моделювання полягає в тому, що замість аналітичного опису взаємозв'язків між вхідними і вихідними станами та показниками будується алгоритм, який відображає послідовність розвитку процесів у середині об'єкта дослідження, а потім імітується поведінка цього об'єкта на ПК.

Імітаційне моделювання – це поширений різновид аналогового моделювання, що реалізується з допомогою сукупності математичних інструментальних засобів, спеціальних імітуючих програмних продуктів і технологій, який з допомогою процесів-аналогів дозволяє провести цілеспрямоване дослідження структури та функцій реального процесу в діалоговому режимі, а також провести оптимізацію деяких його параметрів.

Імітаційна система – сукупність імітаційних моделей, що вивчають внутрішні та зовнішні функціональні характеристики явищ і процесів ВЕС.

Імітаційна модель – обчислювальна процедура, що формалізовано описує об'єкт дослідження й імітує його поведінку. При її побудові немає необхідності спрощувати опис явища чи процесу, часом відкидаючи навіть суттєві частинки для того, щоб ввести його в рамки моделі, придатної для використання тих або інших відомих математичних методів. Для імітаційного моделювання характерна імітація елементарних явищ, які складають основу процесу дослідження, із збереженням їх логічної структури, послідовності відбуття в часі, характеру та складу інформації про стан процесу. Модель за своєю формою є логіко-математичною (алгоритмічною).

Відносно класифікаційних ознак імітаційні моделі поділяються на: статичні та динамічні; детерміновані та стохастичні; дискретні та неперервні. Кожний клас задач ставить певні вимоги до імітаційної моделі. Так, наприклад, при статичній імітації розрахунок повторюється декілька разів для різних умов проведення експерименту, тобто досліджується поведінка об'єкта у визначено короткий період часу. При динамічній імітації моделюється поведінка системи протягом тривалого періоду часу. При стохастичній імітації до моделі вводять випадкові величини з відомим законом розподілу, а при детермінованій – вони відсутні.

Порядок побудови імітаційної моделі та її дослідження аналогічний аналітичним моделям. Проте для імітаційних моделей існує ряд своїх особливостей, тому доцільно заново описати основні етапи імітації:

1. Визначення системи – встановлення допустимих функцій конкретних параметрів, обмежень і кількісних оцінок ефективності системи дослідження.
2. Формулювання моделі – перехід від реального опису системи до певної логічної (абстрактної) схеми.
3. Формування інформаційної бази – збір нормативних і статистичних даних і подання їх у відповідній формі.
4. Трансляція моделі – опис моделі на мові, доступній програмній системі.

5. Оцінка адекватності – отримані на основі моделі результати повинні з достатнім рівнем упевненості бути коректними стосовно реальної дійсності.
6. Стратегічне планування – планування експерименту, що має дати необхідну інформацію.
7. Тактичне планування – визначення способу проведення кожної серії імітації, що передбачаються планом проведення експерименту.
8. Експериментування – процес здійснення імітації з метою отримання бажаних результатів і проведення аналізу чутливості.
9. Інтерпретація – побудова висновків за даними, які отримані шляхом імітації.
10. Реалізація – практичне використання моделі та результатів моделювання.

Як бачимо, особлива увага приділяється етапам планування експериментів з моделлю, адже імітація на персональному комп'ютері (ПК) – це експеримент, аналіз і знаходження оптимальних розв'язків алгоритмічних моделей (імітаційні моделі належать до цього класу моделей) з допомогою тих або інших методів експериментальної оптимізації на ПК. Єдина відмінність імітаційного експерименту від експериментів з реальним об'єктом полягає в тому, що імітаційний експеримент проводиться на моделі реальної системи, а не з самою системою.

Імітаційне моделювання економічних процесів переважно використовується у двох випадках:

- для управління складним бізнес-процесом, при якому імітаційна модель керованого економічного об'єкта використовується як інструментальний засіб в контурі адекватної системи управління, що створюється з допомогою комп'ютерних технологій;
- при проведенні експериментів з дискретно-неперервними моделями складних економічних об'єктів для отримання та дослідження їх динаміки в ситуаціях, пов'язаних із ризиком.

Можна виділити такі типові задачі, які розв'язуються засобами імітаційного моделювання при керуванні економічними процесами:

- моделювання процесів логістики для визначення часових і вартісних параметрів;

- керування процесом реалізації інвестиційного проекту на різних етапах його життєвого циклу з урахуванням можливих ризиків і тактики виділення фінансових ресурсів;
- прогнозування фінансових результатів діяльності ВЕС на конкретний період часу та ін.

Наведений перелік задач є неповним і охоплює тільки ті приклади моделей, які найбільш повно описані в літературі.

Система імітаційного моделювання, що забезпечує створення моделей для розв'язку перерахованих задач, повинна мати такі властивості:

- можливість застосування імітаційних програм разом із спеціальними економіко-математичними моделями та методами, що базуються на теорії управління;
- характеризуватися інструментальними методами проведення структурного аналізу складного економічного процесу;
- здатність дії в діалоговому режимі.

### Моделюючий алгоритм

#### і формалізована схема процесу

Для імітаційного моделювання процесу чи явища на ПК необхідно перетворити їх математичну модель у спеціальний моделюючий алгоритм, відповідно до якого буде формуватись інформація в ПК і описуватись елементарні явища процесу дослідження з урахуванням їх зв'язків і взаємних впливів. Певна частина опрацьованої інформації виводиться на друк і використовується для визначення тих функціональних характеристик процесу, які необхідно отримати в результаті моделювання (рис.6.14).

Центральною складовою моделюючого алгоритму, власне, буде імітаційна модель – формалізована схема процесу. Формалізована схема процесу – це формальний опис процедури функціонування складного об'єкта дослідження і дає можливість прорахувати відповідні їм числові значення вихідних характеристик  $\bar{y}$  для довільно заданих значень вхідних факторів моделі (змінних –  $\bar{x}$ , детермінованих –  $\bar{a}$ , випадкових –  $\bar{y}$ ).

Інші моделі (рис.6.14) є зовнішнім математичним забезпеченням процесу імітації.

Моделі входів забезпечують задання тих або інших значень вхідних факторів. Статичні моделі детермінованих входів – це



елементарні масиви значень констант, які відповідають певним параметрам моделі. Динамічні моделі входів забезпечують зміну значень детермінованих факторів у часі відповідно до закону  $\bar{a}(t)$ .

Моделі випадкових входів (формувачі випадкових чисел) імітують поступлення на вхід об'єкта дослідження випадкових змінних із заданими законами розподілу  $p(\bar{y})$ .

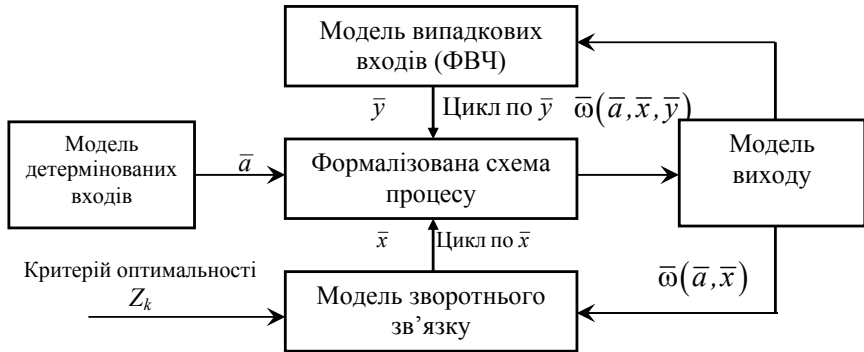


Рис.6.14. Структура моделюючого алгоритму оптимізаційної моделі з випадковими факторами.

Динамічні моделі випадкових входів враховують те, що закони розподілу випадкових величин є функціями часу, тобто для кожного періоду часу форма чи характеристика закону розподілу (математичне сподівання, дисперсія та ін.) будуть властивими тільки їм.

У зв'язку з тим, що результат, який отриманий при відтворенні однієї реалізації через наявність випадкових факторів, не може характеризувати процес дослідження в цілому, доводиться аналізувати велике число таких реалізацій. Оскільки тільки в такому випадку за законом великих чисел отримані оцінки набувають статистичної стійкості, то вони можуть бути з певною точністю прийнятими за оцінки шуканих величин. Модель виходу забезпечує нагромадження, обробку та аналіз отриманої множини випадкових результатів. Для цього з її допомогою організовується багаторазовий розрахунок значень вихідних характеристик при постійному значенні факторів  $\bar{a}, \bar{x}$  і різних значень факторів  $\bar{y}$  (відповідно до заданого закону розподілу) – «цикл по  $\bar{y}$ ». Тому модель виходу містить програми тактичного планування експерименту на ПК – визначення процедури проведення кожної серії розрахунків, які відповідають конкретним значенням  $\bar{a}, \bar{x}$ .

Окрім цього, окреслена модель розв'язує задачу обробки випадкових значень вихідних характеристик, у результаті чого вони позбуваються впливу випадкових факторів і поступають на вхід моделі зворотного зв'язку. Тобто модель виходу виконує процедуру зведення стохастичної задачі до детермінованої з допомогою методу «осереднення за результатом».

Модель зворотного зв'язку дає можливість на основі аналізу отриманих результатів моделювання змінити значення змінних управління і тим самим реалізувати функцію стратегічного планування імітаційного експерименту. При використанні методів теорії оптимального планування експерименту однією з функцій моделі зворотного зв'язку є представлення результатів моделювання в аналітичному вигляді – визначення рівняння функції відгуку. При оптимізації модель виходу на основі значень вихідних характеристик  $\bar{\omega}$  розраховує значення цільової функції  $Z(\bar{\omega})$  і з допомогою відповідного числового методу оптимізації змінює значення змінних керування для вибору значень, які найвигідніші з точки зору цільової функції.

Процедура розробки формалізованої схеми складається з структурного розкладу об'єкта на моделі, вибору математичної схеми для формалізованого опису роботи кожного модуля, формування вхідної та вихідної інформаційної бази для кожного модуля, розробка блок-схеми керування моделі для відображення в ній взаємодії окремих модулів.

У процесі реструктуризації проводиться розподіл складного об'єкта на порівняно автономні частини – модулі. Далі фіксуються зв'язки між ними. Структуризацію об'єкта при моделюванні доцільно виконувати таким чином, аби розв'язання складної проблеми звелось до розкладу на множину більш простих модулів із урахуванням математичного інструментарію. Отримана структурна схема об'єкта може в подальшому коректуватися з точки зору набутого досвіду чи зручності інформаційного забезпечення алгоритму.

Далі для кожного побудованого модуля проводиться вибір методу математичного опису, на основі якого буде будуватися відповідна модель операції.

Наступним кроком є формування необхідного забезпечення відповідно до наявних методів математичного опису. Об'єднання модулів в єдину модель здійснюється на основі моделей операцій і інформаційно-процедурних моделей, описаних на етапі постановки

задачі. Це питання вирішується з допомогою побудови керованої блок-схеми моделі, яка впорядковує послідовність операцій розв'язку задачі.

Після побудови керованої блок-схеми деталізується зміст окремих модулів, де вказується не тільки те, що слід виконати, а й як його треба виконати. Даються більш детальні та однозначні вказівки відносно виконання тих або інших процедур.

Таким чином, побудована формалізована схема містить керовану блок-схему процесу, опис кожного модуля, опис правил передачі керування від одного до іншого модуля та кінцевий перелік шуканих величин і функціональних характеристик. Формалізована схема процесу служить основою для подальшої формалізації імітаційної моделі та побудови програмного продукту для розв'язку на ПК.

### *Принципи побудови імітаційних моделюючих алгоритмів*

Імітаційна модель є, як правило, динамічною моделлю, що відображає послідовність настання елементарних процесів і взаємодію окремих елементів відносно часу  $t^M$ .

Процес функціонування об'єкта протягом певного часового інтервалу  $T$  можна представити як випадкову послідовність дискретних моментів часу  $t_i^M$ . Для кожного з цих моментів настає зміна станів елементів об'єкта, а в проміжках між ними жодних змін станів не відбувається.

При побудові формалізованої схеми процесу повинно виконуватися таке рекурентне правило: подія, що настає в момент часу  $t_i^M$ , може моделюватися тільки після того, як відбудеться процес моделювання всіх подій, які відбулися в момент часу  $t_{i-1}^M$ . У протилежному випадку результат моделювання може бути неправильним.

Реалізація цього правила може проводитися такими способами.

1. Періодичне моделювання з детермінованим кроком («принцип  $\Delta t'$ »). Для періодичного моделювання з детермінованим кроком алгоритм одночасно перевіряє всі елементи системи через досить малі проміжки часу (крок моделювання  $\Delta t$ ) і аналізує всі можливі взаємодії між елементами. Для цього визначається мінімальний інтервал часу  $\Delta t$ , протягом якого не може змінитися стан жодного елемента системи.

Метод моделювання з детермінованим кроком складається з сукупності багаторазового повтору процедур:

- на  $i$ -му кроці в момент  $t_i$  переглядаються всі елементи об'єкта та визначаються ті, що змінюють свій стан на даний момент;
- моделюються всі зміни стану, що відбуваються на момент  $t_i$ ;
- здійснюється перехід до  $(i+1)$ -го кроку, який відбувається в момент часу  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ .

«Принцип  $\Delta t$ » є найбільш універсальним принципом побудови алгоритмів і включає в себе досить широкий клас реальних складних об'єктів та їх елементів дискретного і неперервного характеру.

2. Періодичне моделювання з випадковим кроком (моделювання «за особливими станами»). При вивченні більшості складних систем можна виявити два типи станів системи:

- звичайний стан, у якому система знаходиться більшу частину часу;
- особливий стан, характерний для системи в певні моменти часу, що співпадають із моментом дії на систему зовнішніх впливів, вихід однієї з характеристик системи за межі існування і т.д. Наприклад, верстат працює – звичайний стан, верстат вийшов з ладу – особливий стан. Будь-яка стрибкоподібна зміна стану об'єкта може розглядатися при моделюванні як перехід до нового «особливого» стану.

Періодичне моделювання з випадковим кроком (від події до події) полягає в тому, що моделюючий алгоритм розглядає моделі елементів системи тільки в ті моменти часу, при яких стан дослідної системи змінюється. У ті моменти часу, в яких модель якого-небудь елемента системи повинна змінити свій стан, відбувається огляд моделі саме цього елемента. Далі враховуються взаємозв'язки цих елементів, і коректується стан моделі всієї системи. У цьому випадку крок  $\Delta t$  є випадковою величиною.

3. Моделювання на основі заявок. При моделюванні процесів обробки послідовного поступлення заявок будується моделюючий алгоритм у якому спостерігається проходження кожної заявки від її входу до виходу із системи. Після цього алгоритм передбачає перехід до розгляду наступної заявки.

Моделюючі алгоритми можуть будуватися за декількома принципами одночасно. Наприклад, загальна структура моделюючого алгоритму ґрунтується на принципі особливих станів. Між особливими станами моделювання здійснюється на основі заявок.

## *Метод Монте-Карло та перевірка статистичних гіпотез*

Можливість моделювання випадкових величин і процесів певним чином може бути використаною для імітації деяких реальних економічних явищ та виробничих ситуацій. При цьому спостереження незначного числа відбуття випадкових величин навряд чи принесе нам користь, а спостереження великого їх числа дає можливість зробити правильні висновки відносно їх середніх характеристик. Такий підхід лежить в основі методу Монте-Карло, який використовує різні граничні співвідношення теорії ймовірності – закони великих чисел і граничні теореми.

Статистичне випробування за методом Монте-Карло є імітаційним моделюванням за повної відсутності будь-яких правил поведінки. Отримання вибірок за методом Монте-Карло – основний принцип імітаційного моделювання систем, які містять стохастичні чи імовірнісні елементи.

Відповідно до методу Монте-Карло аналітик може моделювати та досліджувати функціонування великого числа складних систем або поведінку системи відносно часового горизонту на віддалену перспективу.

Без доведення сформулюємо теорему, яка складає принципову основу використання методу Монте-Карло для обчислення математичного сподівання випадкової величини на основі незалежних випробувань.

*Теорема.* Для того, щоб середнє арифметичне незалежних випробувань випадкової величини  $\xi$  збіглося з імовірністю 1 до її математичного сподівання необхідно й достатньо, щоб це математичне сподівання існувало.

Метод Монте-Карло – числовий метод, який дає можливість моделювати майбутні значення змінної з допомогою її поведінки на часовому горизонті.

У різних задачах, які трапляються при побудові та функціонуванні складних економічних систем, можуть використовуватися величини, значення яких визначається випадковим чином. Прикладами таких величин є: випадкові моменти часу, протягом яких поступають замовлення на фірму; завантаження виробничих ділянок або інших елементів ВЕС; зовнішні дії (вимоги

або зміни законів, штрафні санкції та ін.); оплата за кредит; поступлення коштів від замовника та ін.

Відповідними змінними можуть бути використане число, множина чисел, вектор або функція. Одним із варіантів методу Монте-Карло для числового розв'язку задач із випадковими змінними є метод статистичних випробувань, який полягає в моделюванні випадкових подій.

Метод Монте-Карло ґрунтується на статистичних випробуваннях і за своєю природою є екстремальним і може використовуватися для розв'язання повністю детермінованих задач, таких як обернення матриць, розв'язок диференціальних рівнянь у частинних похідних, знаходження екстремумів і числове інтегрування. При обчисленнях методом Монте-Карло статистичні результати отримують завдяки повторним випробуванням. Імовірність того, що ці результати відрізняються від дійсних не більше, ніж на вказану величину, є функцією кількості випробувань.

В основі обчислень за методом Монте-Карло лежить випадковий вибір чисел із заданого ймовірносного розподілу. Для практичних розрахунків ці числа беруть із таблиць або отримують шляхом певних операцій, результатами яких є псевдовипадкові числа з тими ж властивостями, що й числа, отримані шляхом випадкової вибірки. Існує велика кількість обчислювальних алгоритмів, які дають можливість отримувати деякі послідовності псевдовипадкових чисел.

Використання методу Монте-Карло може дати значимий ефект при моделюванні розвитку процесів, звичайне спостереження котрих небажане чи неможливе, а інші математичні методи застосування до цих процесів або нерозроблені, або ж непридатні через велику кількість припущень, які здатні привести до серйозних похибок або неправильних висновків. Тому необхідно не тільки спостерігати розвиток процесів у бажаних напрямках, а й оцінювати гіпотези відносно небажаних ситуацій.

Існують різноманітні методи перевірки статистичних гіпотез, серед яких на практиці досить часто використовують такі критерії: згоди  $\chi^2$ ; Крамера фон Мізеса; Колмогорова-Смірнова.

Критерію  $\chi^2$  віддають перевагу у випадку, якщо обсяги вибірок  $N$ , для яких проводиться аналіз, досить великі ( $N > 100$ ). Проте для аналізу економічних ситуацій часом буває досить важко чи зовсім неможливо знайти 100 однакових процесів, які розвиваються з

різними вхідними даними. При відносно малих обсягах вибірок даний критерій не можна застосовувати.

Критерій Крамера фон Мізеса дає добрі результати при малих обсягах вибірок ( $N < 10$ ). Однак слід відзначити дві обставини:

1) для  $N < 10$ , яким би методом не користуватися, питання стосовно довірчої ймовірності при перевірці статистичної гіпотези вирішується погано (ця ймовірність мала при значних розмірах довірчих інтервалів);

2) метод Монте-Карло використовується якраз для того, щоб відсутні дані зібрати з допомогою спеціального моделюючого алгоритму.

Для більшості випадків реальний обсяг вибірок, які можна отримати, знаходиться в межах  $10 \leq N \leq 100$ . Для цих меж добрі результати дає критерій Колмогорова-Смірнова. Він застосовується в тих випадках, при яких перевіряючий розподіл неперервний і відомі середні значення та дисперсія перевіряючої сукупності.

Процес моделювання методом Монте-Карло можна розділити на етапи:

1. Визначення стохастичної природи вхідної змінної. Це дає можливість вибору розподілу, який необхідний для виконання моделювання. Більшість програмних продуктів, призначених для моделювання методом Монте-Карло, містить меню розподілу ймовірностей. Також вони мають можливість побудувати розподіл ймовірностей, який ґрунтується на висновках самого аналітика, оскільки сучасні комп'ютери мають генератори випадкових чисел, які дають можливість отримувати рівноймовірні числа від 0 до 1.

2. Імітація руху вхідних змінних з допомогою багаторазового генерування випадкових чисел, які корегуються з таким розрахунком, щоб мати такий розподіл імовірностей, як і основна змінна. Мається на увазі перетворення випадкових чисел з рівномірним розподілом, генерованими комп'ютером, у випадкові змінні, призначені для моделювання. Скореговані випадкові змінні є вхідними.

3. Виконання моделювання – об'єднання вхідних змінних згідно з логікою системи, яка описує яким чином зв'язані вхідні змінні і як формуються вихідні. На основі багаторазового

генерування випадкових чисел ми отримуємо майбутні значення шуканої змінної.

4. Багаторазове повторення процесу дає можливість знайти середнє серед отриманих значень. Це середнє – майбутнє (сподіване) значення модельованої змінної. Далі для визначення нинішньої вартості модельованої змінної на майбутнє значення дисконтуються за відповідною дисконтною ставкою.

5. Застосування техніки контролю розкиду або методів зменшення значення дисперсії для підвищення точності результатів, отриманих під час моделювання.

### Питання для самоконтролю

1. Дайте тлумачення імітаційного моделювання.
2. Сформулюйте основні класифікаційні ознаки імітаційних моделей.
3. Опишіть основні етапи імітаційного моделювання.
4. Охарактеризуйте основні напрямки використання імітаційного моделювання.
5. Опишіть структуру моделюючого алгоритму оптимізаційної моделі.
6. Опишіть основні принципи та процедури імітаційних моделюючих алгоритмів.
7. Що складає основу методу Монте-Карло?
8. Дайте тлумачення статистичних гіпотез і опишіть основні критерії перевірки.
9. Опишіть основні етапи процесу моделювання методом Монте-Карло.



## Прикладні аспекти імітаційного моделювання

### *Імітаційне моделювання в бізнес-плануванні*

Методи імітаційного моделювання можна використовувати при розробці бізнес-планів. Розглянемо сценарії розрахунку прибутковості та рентабельності роботи підприємства відносно імітації показників попиту і витрат з допомогою таких методик.

Перша методика полягає у виконанні таких кроків.

1. Вивчається попит на деякий товар з допомогою показника – обсяг продажу. Фіксуються всі обсяги продажу товару за певний робочий період часу (день, декаду чи місяць) протягом року у вигляді таблиці.

2. За табличними даними будується крива розподілу обсягів продажу. На осі абсцис відкладаємо величини обсягу продажу, а на осі ординат – кількість випадків продажу заданого обсягу. Наприклад, продаж товару до 100 од. фіксувався 5 разів, обсяг від 101 до 200 од. – 30 разів, від 201-300 од. – 50 разів і т.д.

3. Аналогічно до попередніх пунктів будується крива розподілу для витрат на одиницю товару.

4. Розігрується випадкове число і тим самим імітується значення обсягів продажу та розмірів витрат. Процес повторюється  $k$  разів для  $k$  днів (декад, місяців) даного періоду. У результаті отримуємо два масиви:

- масив обсягів продажу  $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$ ;
- масив собівартості одиниці товару  $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ .

5. Задається ціна одиниці товару. Якщо вона змінюється в часі, то формується відповідний масив  $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ .

6. На основі імітації обсягів продажу та собівартості для  $k$ -го дня (декади, місяця) розраховуємо показники роботи підприємства:

- виручку від реалізації  $B_i = Q_i \cdot U_i, i = \overline{1, k}$ ;
- сумарні витрати  $S_i = Q_i \cdot C_i, i = \overline{1, k}$ ;
- рентабельність  $R_i = \frac{P_i}{S_i}, i = \overline{1, k}$ ;

7. На основі результатів п.6 формуються масиви:

$$\{t_1, t_2, \dots, t_l\}, \{B_1, B_2, \dots, B_k\}, \{S_1, S_2, \dots, S_k\},$$

$$\{P_1, P_2, \dots, P_k\}, \{R_1, R_2, \dots, R_k\}.$$

8. Будується графік зміни цих показників у часі:

$$B = f_B(t), S = f_S(t), P = f_P(t), R = f_R(t).$$

9. Проводиться аналіз графіків. У випадку необхідності повторюється розрахунок для інших цін, витрат або обсягів продажу.

10. За результатами аналізу графіків (п.9) і, враховуючи інші фактори, приймається остаточне рішення відносно вигідних на товар цін, планується виробнича діяльність, розраховуються розміри поставок і збуту.

Друга методика полягає в наступному.

1. Формується інформаційна база про обсяги за минулий рік. Статистичні дані по місяцях (днях, кварталах) зводяться в таблиці.

2. Аналогічно формуються статистичні дані про витрати.

3. З допомогою економетричних методів робиться прогноз про реалізацію товарів і витрат.

4. На основі отриманих прогнозів імітується динаміка обсягів реалізації, витрат і цін в часі.

5. Аналогічно попередній методиці розраховується виручка, сумарні витрати, прибуток і рентабельність роботи підприємства.

6. Будуються графіки зміни розрахованих показників у часі.

При дослідженні сезонних коливань попиту більш доцільно використовувати другу методику.

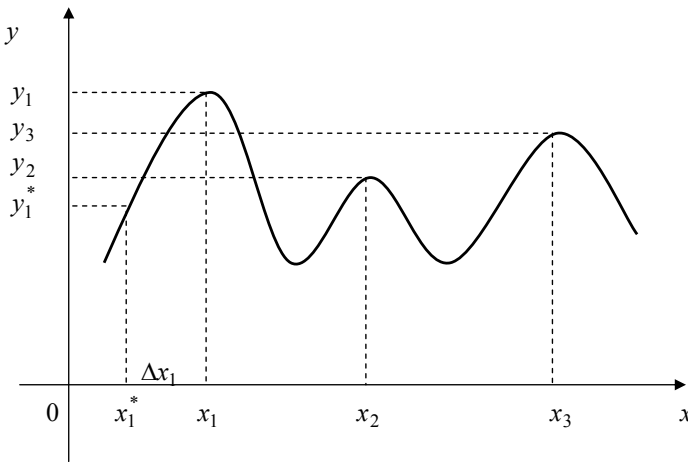
### *Імітаційне моделювання інвестиційних процесів у виробничо-економічних системах*

Обсяг і якість виробництва продукції визначається множиною суттєвих факторів, серед яких важливе місце посідає розмір інвестиційних вкладень, рівень забезпечення енергоносіями та їх оптимальне використання. Для вирішення цієї проблеми можна застосувати математичний апарат кількісних методів.

Практичний досвід розв'язку задач з допомогою математичного моделювання свідчить про те, що використання тільки прямих результатів оптимізації є однією з причин, яка гальмує процес впровадження отриманих оптимальних розрахунків у діяльність виробничо-економічної системи (ВЕС). Відомо, що під впливом зовнішніх і внутрішніх випадкових факторів у ВЕС суттєво змінюються умови виробництва, внаслідок чого складаються ситуації,

в яких виникає завдання оцінити ефективність варіантів планів, а також їх стійкості. Тобто нам слід не тільки отримати оптимальний бізнес-план розвитку підприємства, а й з допомогою методів імітації вивчити їх функціональні характеристики. До основних функціональних характеристик бізнес-плану відносять: ефективність, маневреність, еластичність, напруженість, надійність і т.д.

Розглянемо функцію, що наочно відображає допустимі варіанти плану виробництва продукції та його ефективність (рис.6.15).



*Рис.6.15. Схематичне відображення варіантів бізнес-плану та його ефективність*

У наведеному прикладі для заданої функції існує три точки  $x_1, x_2, x_3$ , в яких вона досягає свого екстремального максимального значення. Оптимальним планом буде той, який має найбільший рівень ефективності, тобто  $x_1$ . Проте навіть несуттєва зміна  $\Delta x_1$  умов реалізації плану  $x_1$ , які виникають у результаті диспропорцій нестійкості ресурсної бази, призводить до формування дійсного плану  $x_1^*$ . При цьому його ефективність  $y_1^*$  значною мірою нижча від оптимальної ( $y_1^* < y_1$ ). Варіанту плану  $x_2$ , який має найбільш стійкий характер, відповідає рівень ефективності  $y_2$ , проте  $y_2 < y_1$ . У той же час існує варіант плану  $x_3$  з ефективністю  $y_3$ , яка набагато відрізняється від  $y_1$  і одночасно  $y_3 > y_2$ . Проте цей бізнес-план стійкіший стосовно можливих змін, а через це він більш еластичний.

Під еластичністю бізнес-плану виробництва продукції розуміємо його здатність до певних «деформацій» без суттєвих втрат потенційної можливості реалізації кінцевої мети, а також ступеню досягнення планових показників з урахуванням зміни початкових умов.

Якщо відомий механізм формування оптимального бізнес-плану виробництва продукції, то, як наслідок, існує й певний зв'язок між недовиробництвом  $i$ -го виду продукції і недопоставкою (дефіцитом)  $j$ -го виду ресурсу. Такий зв'язок можна представити таким чином:

$$\varphi\left(\frac{\Delta A_i}{A_i}; \frac{\Delta B_j}{B_j}\right) = 0, \quad (6.1)$$

де  $i$  – індекс виду продукції,  $i \in I$ ;  $I$  – множина видів продукції;  $j$  – індекс виду ресурсу,  $j \in J$ ;  $J$  – множина видів ресурсів;  $A_i$  – планове завдання виробництва  $i$ -го виду продукції;  $\Delta A_i$  – обсяг недовиконання планового завдання виробництва  $i$ -го виду продукції;  $B_j$  – обсяг запасу  $j$ -го виду ресурсу;  $\Delta B_j$  – обсяг недопоставки  $j$ -го виду ресурсу.

Тому залежність між відносним недовиробництвом  $i$ -го виду продукції  $\left(\frac{\Delta A_i}{A_i}\right)$  і відносною недопоставкою  $j$ -го виду ресурсу  $\left(\frac{\Delta B_j}{B_j}\right)$  розглядається як характеристика еластичності (жорсткості) бізнес-плану виробництва продукції. Тобто для кожного значення окресленого зв'язку існує співвідношення  $\varepsilon_{ij} = \frac{\Delta B_j}{B_j} : \frac{\Delta A_i}{A_i}$ , яке характеризує еластичність, а обернене до нього  $q_{ij} = \frac{1}{\varepsilon_{ij}}$  – жорсткість плану.

Отже, бізнес-план виробництва продукції ВЕС повинен бути не тільки оптимальним із позиції випуску продукції чи втрат ресурсів, а й одночасно сприятливим з точки зору функціональних характеристик. Ось чому при розробці прогнозних сценаріїв бізнес-планів розвитку виробництва, необхідно здійснити оцінку їх якості. Важливими характеристиками бізнес-плану виробництва продукції є інерційність і маневреність, які суттєво впливають на рівень його еластичності, надійності та напруженості. Маневреність слід розглядати як реакцію ВЕС на зовнішні та внутрішні зміни, що виникають у процесі реалізації бізнес-планів.

Маневрені якості бізнес-планів виробництва продукції можна визначити на основі імітації на ПК процесу дослідження для кожного структурного елемента, що входить до складу ВЕС, з допомогою економіко-математичної моделі. Нам необхідно знайти такий розв'язок  $\{x_{ikl} \geq 0, i \in I, k \in K, l \in L_k\}$ , який би забезпечив максимум функції:

$$Z = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{l \in L_k} C_{ikl} x_{ikl} - \sum_{i \in I} C_i \Delta A_i \rightarrow \max, \quad (6.2)$$

при виконанні умов:

- 1) з випуску продукції з урахуванням ринкового попиту (6.3)

$$\sum_{k \in K} \sum_{l \in L_k} a_{ikl} x_{ikl} \geq A_i - \Delta A_i, \quad i \in I;$$

- 2) з ресурсного забезпечення бізнес-плану

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{l \in L_k} b_{iklj} x_{ikl} \leq B_j - \Delta B_j, \quad j \in J; \quad (6.4)$$

- 3) з граничних меж маневреності бізнес-плану

$$\alpha_{ikl} \leq x_{ikl} \leq \beta_{ikl}, \quad i \in I, k \in K, l \in L_k, \quad (6.5)$$

де  $k$  – індекс структурного підрозділу ВЕС,  $k \in K$ ;  $K$  – множина виробничих підрозділів (підприємств), які входять у ВЕС;  $l$  – індекс технологічного способу виробництва,  $l \in L_k$ ;  $L_k$  – множина видів технологічних способів виробництва, що має в наявності  $k$ -й структурний підрозділ;  $a_{ikl}$  – вихід  $i$ -го виду продукції від одиниці інтенсивності  $l$ -го технологічного способу виробництва для  $k$ -го підприємства;  $A_i$  – величина ринкового попиту (планове завдання) на  $i$ -ий вид продукції;  $x_{ikl}$  – невідома величина, що відображає інтенсивність використання  $l$ -го технологічного способу виробництва  $i$ -го виду продукції в  $k$ -му підприємстві;  $\Delta A_i$  – обсяг недовиконання планового завдання (недопоставка на ринок)  $i$ -го виду продукції;  $b_{iklj}$  – затрати  $j$ -го виду ресурсу на одиницю інтенсивності використання  $l$ -го технологічного способу виробництва  $i$ -го виду продукції в  $k$ -му підприємстві;  $C_{ikl}$  – кількісна оцінка ефективності одиниці інтенсивності використання  $l$ -го технологічного способу виробництва  $i$ -го виду продукції в  $k$ -му підприємстві;  $C_i$  – величина штрафної санкції за недовипуск одиниці  $i$ -го виду продукції;  $B_j$  – загальний плановий обсяг поставки  $j$ -го виду ресурсу;  $\Delta B_j$  – обсяг недопоставки  $j$ -го виду ресурсу;  $\alpha_{ikl}, \beta_{ikl}$  – відповідно нижня та верхня межі

маневреності інтенсивності використання  $l$ -го технологічного способу виробництва  $i$ -го виду продукції в  $k$ -му підприємстві.

Під впливом некерованих і випадкових факторів на процес виробництва продукції зазнають суттєвих змін параметри:  $C_{ikl}, a_{ikl}, x_{ikl}, b_{iklj}$  та  $\Delta B_j$ , яким властивий випадковий характер.

Виконуючи процедуру імітації для побудованої економіко-математичної моделі (6.2) – (6.5), отримаємо множину  $M$  оптимальних розв'язків з урахуванням різних рівнів забезпеченості ресурсами. Після цього проводимо процедуру економіко-математичного аналізу отриманих планів і, як результат, маємо вигідний нам бізнес-план випуску продукції. Функція еластичності вигідного бізнес-плану може бути визначеною при допомозі економетричних методів таким чином:

$$\frac{\Delta A_i}{A_i} = \varphi \left( \frac{\Delta B_j}{B_j} \right), i \in I, j \in J. \quad (6.6)$$

Залежність виду (6.6) в подальшому буде використано для розрахунку вигідних виробничих програм з урахуванням показника еластичності для бізнес-планів.

Однак мають місце випадки, для яких при побудові бізнес-плану неможливо задати норму еластичності. У зв'язку з цим пропонуємо методику побудови еластичних бізнес-планів виробництва продукції.

Припускаємо, що нами отримано оптимальний бізнес-план відповідно до якого пропонується виробляти  $i$ -ий вид продукції обсягом  $A_i^{opt}$ . Для цього використовуються  $B_j$  одиниць  $j$ -го виду ресурсу. Нехай у результаті реалізації бізнес-плану умови виробництва змінилися, тобто має місце недопоставка  $j$ -го виду ресурсу для випуску  $i$ -го виду продукції обсягом  $\Delta B_{ij}$ . Через недопоставку  $j$ -го виду ресурсу знизиться рівень виробництва, тобто можна встановити такий зв'язок:

$$A_i^* = \varphi(\Delta B_{ij}), i \in I, j \in J,$$

де  $A_i^*$  – рівень виробництва  $i$ -го виду продукції при недопоставці  $j$ -го виду ресурсу обсягом  $\Delta B_{ij}$ .

На рис.6.16 відображений зв'язок між обсягом випуску  $i$ -го виду продукції при недопоставці  $j$ -го ресурсу.

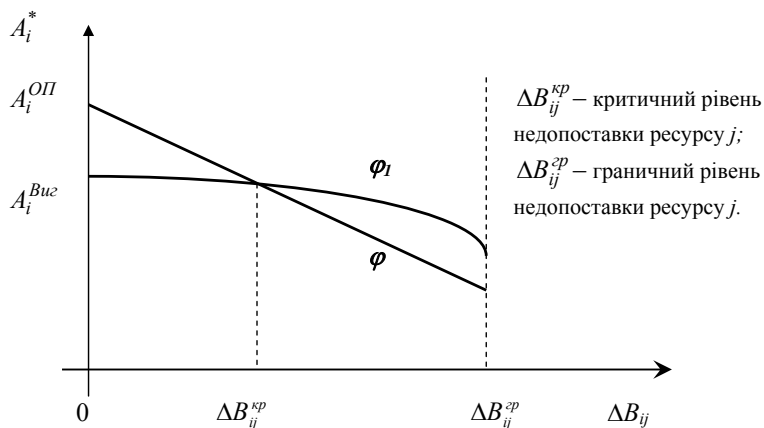


Рис. 6.16. Схема взаємозв'язку випуску продукції  $i$  недопоставки ресурсів

Якщо план виробництва  $i$ -го виду продукції знизити від оптимального рівня до вигідного ( $A_i^{Buz}$ ), то при недопоставці  $j$ -го виду ресурсу обсягом  $\Delta B_{ij}$  отримуємо залежність:

$$A_i^{Buz} = \varphi_i(\Delta B_{ij}), \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (6.7)$$

Аналізуючи рис. 21.2.2, бачимо, що на відрізку недопоставки  $j$ -го виду ресурсу  $(0, \Delta B_{ij}^{sp})$  при оптимальному плані виробник отримує більше продукції, ніж при вигідному, тобто при  $\Delta B_{ij} \in (0, \Delta B_{ij}^{sp})$  має місце  $A_i^{OP} > A_i^{Buz}$ . Проте на відрізку  $(\Delta B_{ij}^{sp}, \Delta B_{ij}^{gp})$  спостерігається зворотна картина. Отже, чим ближчий розв'язок задачі до оптимального при одних умовах, тим більше він може відхилитися від нього за інших. Тому виникає необхідність виконання процесу оптимізації бізнес-планів виробничих систем з урахуванням можливих недопоставок ресурсів. Кожному рівневі недопоставки  $j$ -го виду ресурсу відповідає певний обсяг випуску продукції  $i$ -го виду, яку можна задати у вигляді послідовності  $\{A_{ij}^{\phi}, \phi \in T\}$ , де  $\tau$  – індекс варіанта обсягу інвестиційних вкладень;  $T$  – множина варіантів обсягів інвестиційних вкладень. Тоді для кожного  $A_{ij}^{\tau}$  можна побудувати економетричну модель:

$$A_i^{\tau} = \varphi_{\tau}(\Delta B_{ij}), \quad i \quad (6.8)$$

Для кількісного вираження цієї функції нам необхідно з допомогою імітаційного моделювання розв'язати оптимізаційну задачу розрахунку бізнес-плану виробництва продукції при різних значеннях  $\Delta B_{ij}$ . Основу моделюючого алгоритму процесу імітації складає модель (6.2)-(6.5).

Використовуючи математичний апарат економетричних методів і результати імітації, отримуємо  $T$  залежностей виду (6.8). Далі знаходимо величину сподіваного (математичне сподівання) обсягу випуску продукції  $i$ -го виду для кожного заданого  $A_i^\tau$  за умови недопоставки  $j$ -го виду ресурсу, тобто:

$$M(A_i^\tau) = \int_0^{\Delta B_{ij}^{sp}} \varphi_\phi(\Delta B_{ij}) d\Delta B_{ij}, \quad i \in I, j \in J, \phi \in T. \quad (6.9)$$

Після цього знаходимо:

$$A_i^{Buz} = \max_{\tau} \left\{ M(A_i^\phi) \right\}, \quad i \in I, \tau \in T, \quad (6.10)$$

де  $A_i^{Buz}$  – вигідний варіант бізнес-плану випуску  $i$ -го виду продукції при еластичному плані.

У запропонованій методиці припускалося, що рівні недопоставки  $j$ -го виду ресурсу рівноймовірні. Однак це припущення не відповідає дійсності. Великі недопоставки малоймовірні й, навпаки, менші недопоставки мають більшу ймовірність. Припустимо, що відома функція густини розподілу ймовірностей недопоставки  $j$ -го виду ресурсу  $f_j(\Delta B_{ij})$ . Тоді сподівану величину випуску продукції можна знайти з формули:

$$M(A_i^\phi) = \int_0^{\Delta B_{ij}^{sp}} f_i(\Delta B_{ij}) \varphi(\Delta B_{ij}) d\Delta B_{ij}, \quad i \in I, j \in J, \phi \in T. \quad (6.11) \in$$

Іншими функціональними характеристиками, які описують властивості стійкості бізнес-плану виробництва продукції ВЕС, виступають надійність і напруженість. Зменшення запасів  $j$ -го виду ресурсу не впливає на випуск кінцевої продукції у випадку, якщо воно не перевищує за розміром установлений резерв. На основі еластичності можна розрахувати зниження продукції  $i$ -го виду, яке при цьому виникає. При цьому можна знайти математичне сподівання обсягу недовиконання бізнес-плану виробництва продукції  $i$ -го виду:

$$H_i = 1 - \frac{M(\Delta A_i)}{A_i}, \quad (6.12)$$

де  $H_i$  – рівень надійності бізнес-плану виробництва продукції  $i$ -го виду.



Отже, надійність визначається як потенціальна ймовірність виконання плану, а напруженість – відповідно, ймовірність його невиконання. Існує оптимальний рівень цих показників, тобто максимальній надійності бізнес-плану відповідає мінімальна напруженість.

Розглянемо побудову надійних бізнес-планів виробництва на прикладі ВЕС регіону. Така ВЕС може бути представленою у вигляді ієрархічних структур з досить великим числом вертикальних і горизонтальних зв'язків.

Для простоти будемо розглядати дворівневу ієрархічну ВЕС регіону, що складається з підсистем, а остання – з елементів. Виділити елемент підсистеми – не означає, що його неможливо розкласти. Просто для даної задачі немає необхідності чи можливості подальшого розкладу. Стан ВЕС визначається її структурою та зовнішнім середовищем. Припустимо, що ми маємо можливість управляти структурою систем та підсистем, їх складом, будовою, властивостями, відношенням елементів і підсистем, а також ВЕС в цілому та її зв'язками з оточуючим середовищем.

Насамперед нам необхідно визначити надійність показників бізнес-плану заданої господарської структури. Враховуючи, що в зазначений час відновлюються розвинуті раніше процеси інтеграції, ВЕС можна представити у вигляді паралельно-послідовних з'єднань підсистем і їх елементів. Для визначення надійності показників бізнес-плану функціонування виробничих систем можна використати математичний інструментарій теорії надійності технічних систем, які на даний час достатньо розроблені. Звідси виникає необхідність побудови структурної схеми ВЕС та визначення ймовірнісних характеристик для окремих елементів і зв'язків.

Якщо виробнича система представляє собою послідовне з'єднання окремих елементів, то її надійність знаходимо за формулою:

$$H = \prod_{r \in R} H_r, \quad (6.13)$$

де  $r$  – індекс елемента системи,  $r \in R$ ;  $R$  – множина елементів системи;  $H_r$  – надійність  $r$ -го елемента;  $H$  – надійність системи в цілому.

При паралельному з'єднанні окремих елементів надійність системи визначиться за формулою:

$$H = 1 - \prod_{r \in R} (1 - H_r). \quad (6.14)$$

У прикладних дослідженнях, насамперед у системі, виділяють ділянки, які складаються тільки з послідовних з'єднань елементів. Для таких ділянок розраховують значення надійності (6.13). Потім ці ділянки замінюємо еквівалентними зі знайденими для них значеннями надійності. Виконавши це перетворення, в новій системі виділяємо ділянки, що складаються тільки з паралельно з'єднаних елементів. Для цих ділянок визначаємо показник надійності (6.14), потім замінюємо їх еквівалентними елементами з розрахованими кількісними характеристиками.

Далі знову виділяємо нові ділянки послідовно з'єднаних елементів і таким же чином замінюємо їх еквівалентними і т.д. Така процедура послідовного спрощення вихідної економічної системи продовжується до того часу, поки все не зведеться до єдиного еквівалентного елемента. Розраховані при цьому значення будуть шуканим показником надійності бізнес-плану ВЕС в цілому.

З метою підвищення рівня адекватності процесу моделювання величини  $H_r$  для кожного елемента системи визначають шляхом імітації на ПК процесу його функціонування з допомогою стохастичної економіко-математичної моделі. Це означає, що параметри моделі (6.2)-(6.5), зокрема, значення цільової функції, деякі коефіцієнти розглядаються як випадкові величини, тобто вони є функціями випадкових параметрів.

Нехай  $\theta$  – вимірний простір, тобто  $\theta$  – множина елементарних подій  $\theta$  із заданою на ній системою  $F$  її підмножин, які утворюють  $\sigma$ -алгебру. Тоді економіко-математична модель (6.2)-(6.5) у стохастичній постановці, з урахуванням вище прийнятих позначень і випадкового параметра  $\theta$ , матиме вигляд:

$$M \left( \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{l \in L_k} C_{ikl}(\theta) x_{ikl}(\theta) - \sum_{i \in I} C_i \Delta A_i \right) \rightarrow \max, \quad (6.15)$$

за умови:

$$1) P \left\{ \theta \cdot \sum_{r \in K} \sum_{r \in L_k} a_{ikl}(\theta) x_{ikl}(\theta) \geq A_i - \Delta A_i \right\} \geq \alpha_i, \quad i \in I; \quad (6.16)$$

$$2) P \left\{ \theta \cdot \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{l \in L_k} b_{iklj}(\theta) \leq B_j \right\} \geq \beta_j, \quad j \in J, \quad (6.17)$$

$$3) P \left\{ \theta \cdot x_{ikl}(\theta) \geq 0 \right\} \geq \gamma_{ikl}, \quad \Delta A_i \geq 0, \quad i \in I, \quad k \in K, \quad l \in L_k, \quad (6.18)$$

де  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_{ikl}$  – імовірності виконання відповідних обмежень.

У подальшому (6.15)-(6.18) можна використати для імітації процесу дослідження, результатом якого буде отримання еластичного оптимального бізнес-плану функціонування ВЕС регіону, з урахуванням імовірнісних характеристик.

Розв'язок задачі (6.15)-(6.18) дає можливість отримати множину  $M_T$  оптимальних планів, яку розкладемо на дві підмножини  $M_{1r}$  та  $M_{2r}$  ( $M_T = M_{1r} \cup M_{2r}$ ).

До множини  $M_{2r}$  включимо ті плани, для яких виконуються умови:

$$\sum_{k \in K} \sum_{l \in L_k} a_{ikl}(\theta) x_{ikl}(\theta) \geq A_i, \quad i \in I. \quad (6.19)$$

Усі інші плани включаємо до множини  $M_{1r}$ .

Допустимо, що множини  $M_{1r}$  та  $M_{2r}$  мають відповідно  $k_{1r}$  і  $k_{2r}$  елементів. Тоді:

$$H = \frac{k_{2r}}{k_{1r} + k_{2r}}, \quad r \in R. \quad (6.20)$$

На основі наведеної процедури завжди можна визначити рівень надійності виробничої системи і надалі здійснювати керування нею. Практика показує, що для економічних систем можна визначити вигідний рівень надійності за рахунок оптимізації структури виробництва, еластичності бізнес-плану, резервів ресурсів і т.д. Має місце твердження, що надійність знаходиться в тісному зв'язку з показником еластичності бізнес-плану, який може виступати регулятором надійності. Тобто має місце залежність:

$$H_i = 1 - \frac{\sum_{j \in J} M(\Delta B_j)}{\sum_{j \in J} B_j \varepsilon_{ij}^*}, \quad i \in I, \quad (6.21)$$

де  $M(\Delta B_j)$  – математичне сподівання недопоставки  $j$ -го виду ресурсу;  $\varepsilon_{ij}^*$  – середнє значення коефіцієнта еластичності для випуску  $i$ -го виду продукції при рівні недопоставки  $j$ -го виду ресурсу в інтервалі  $(0; \Delta B_j^N)$ .

Звідси, загальна надійність при випуску всіх видів продукції (множина  $I$ ) буде характеризуватися вектором надійності  $\bar{H} = (H_i)$ , кожна складова якого шукається за формулою (6.21).

При цьому надійність виконання бізнес-плану для валового випуску продукції у вартісному виразі ( $H_B$ ) у цілому для ВЕС буде визначатися формулою:

$$H_B = 1 - \frac{\sum_{j \in J} M\left(\frac{\Delta B_j}{B_j}\right) \cdot \sum_{i \in I} \frac{\bar{C}_i A_i}{\varepsilon_{ij}^*}}{\sum_{i \in I} \bar{C}_i A_i}, \quad (6.22)$$

де  $M\left(\frac{\Delta B_j}{B_j}\right)$  – математичне сподівання відносної недопоставки  $j$ -го виду ресурсу;  $\bar{C}_i$  – вартість одиниці продукції  $i$ -го виду.

Рівень надійності бізнес-плану виробництва  $i$ -го виду продукції можна розрахувати за формулою:

$$H_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } A_i^{Buz} \geq A_i^{Pln} \\ \frac{A_i^{Buz}}{A_i^{Pln}}, & \text{якщо } A_i^{Buz} < A_i^{Pln}, \end{cases} \quad i \in I, \quad (6.23)$$

де  $A_i^{Pln}$  – планове завдання виробництва  $i$ -го виду продукції.

З показником надійності бізнес-плану тісно взаємопов'язаний показник напруженості, який можна розрахувати за формулою:

$$N_i = B(1 - H_i), \quad i \in I, \quad (6.24)$$

де  $N_i$  – напруженість бізнес-плану виробництва  $i$ -го виду продукції;  $B$  – коефіцієнт бальності, з допомогою якого надійність бізнес-плану виробництва продукції переводиться в бальну оцінку напруженості.

Підвищуючи рівень напруженості бізнес-плану, тим самим ми знижуємо рівень його надійності. Надійність бізнес-планів, як маневреність і еластичність, можна значно покращити резервуванням, тобто формуванням запасів.

*Приклад 6.3.* Для практичної реалізації розглянутої методики нами проведена імітація бізнес-плану виробництва на основі математичної моделі (6.2) – (6.5), де вхідними параметрами взято обсяг інвестицій (3550, 3500, 3450 і 3350 тис. грн.) в околі оптимального значення 3619 тис. грн., вкладених у виробничий процес і рівень незабезпеченості енергоносіями (0 %, 1 %, ..., 25 %).

У результаті імітаційного моделювання отримана множина оптимальних варіантів бізнес-планів виробництва продукції (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Розмір інвестицій, тис. грн.	Випуск валової продукції (млн. грн.) при рівні незабезпеченості енергоносіями (%)						
	0%	1%	5%	10%	15%	20%	25%
<b>3619</b>	18,02	17,95	17,49	<u>16,89</u>	16,25	15,48	14,68
<b>3550</b>	17,52	17,47	17,19	16,85	<u>16,46</u>	<u>16,03</u>	<u>15,42</u>
<b>3500</b>	17,41	17,35	17,07	16,74	<u>16,32</u>	<u>15,88</u>	<u>15,26</u>
<b>3450</b>	17,01	16,96	16,71	16,41	16,04	<u>15,64</u>	<u>15,12</u>
<b>3350</b>	16,45	16,41	16,24	16,08	15,76	15,41	<u>14,98</u>

Аналіз результатів імітації (табл. 6.1) показує, що для кожного рівня незабезпеченості енергоносіями існує вигідний розмір обсягу інвестицій. Так, при незабезпеченості енергоносіями до 10 % вигідний обсяг інвестицій становить 36,19 тис. грн. Якщо показник незабезпеченості перевищує 10 %, то вигідним розміром вкладень стає 3550 – 3500 тис. грн., оскільки випуск продукції (16,46 та 16,32 млн. грн.) при цих варіантах інвестицій перевищує оптимальне значення (16,25 млн. грн.) і т.д.

Отже, ставиться питання про вибір еластичного бізнес-плану серед множини існуючих, з урахуванням при цьому імовірнісного характеру стану забезпеченості ВЕС енергоносіями.

Проведений нами економетричний аналіз результатів імітаційного моделювання дає можливість зробити висновок, що між обсягом виробництва продукції та рівнем незабезпеченості енергоносіями для певного варіанта обсягу інвестицій існує залежність, яку можна виразити таким чином:

$$\varphi_{\tau} \Delta B(\quad)_{0\tau} = b_{\tau} + b_{\tau} \Delta B \quad (6.25)$$

де  $\Delta B$  – рівень незабезпеченості енергоносіями (%);  $\tau$  – індекс варіанта розміру інвестиційних вкладень,  $\tau = \overline{1,5}$ ;  $\varphi_{\tau}(\Delta B)$  – обсяг випуску продукції при варіанті розміру інвестицій  $\tau$ ;  $b_{0\tau}, b_{1\tau}$  – параметри економетричної моделі для варіанта інвестицій  $\tau$ .

З допомогою програмного продукту STADIA для відповідних розмірів інвестицій отримуємо такі економетричні моделі:

$$3619 \text{ тис. грн.: } \varphi_1(\Delta B) = 18,146 - 0,139\Delta B, \quad R = 0,992;$$

$$3550 \text{ тис. грн.: } \varphi_2(\Delta B) = 17,601 - 0,086\Delta B, \quad R = 0,986;$$

$$3500 \text{ тис. грн.: } \varphi_3(\Delta B) = 17,491 - 0,087\Delta B, \quad R = 0,985;$$

$$3450 \text{ тис. грн.: } \varphi_4(\Delta B) = 17,082 - 0,077\Delta B, \quad R = 0,987;$$

$$3350 \text{ тис. грн.: } \varphi_5(\Delta B) = 16,528 - 0,059\Delta B, \quad R = 0,977.$$

Враховуючи запропоновану методичу побудови бізнес-планів виробництва продукції, необхідно визначити математичне сподівання функції обсягів випуску продукції  $\varphi_r(\Delta B)$  випадкової величини  $\Delta B$  з густиною розподілу  $f(\Delta B)$ , яка для випадку нормального закону розподілу має вигляд:

$$f(\Delta B) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta B - a)^2}{2\sigma^2}},$$

де  $a$  – математичне сподівання рівня незабезпеченості енергоносіями;  $\sigma$  – його середньоквадратичне відхилення.

При цьому математичне сподівання обраховується за формулою:

$$M[\varphi_r(\Delta B)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r(\Delta B) f(\Delta B) d\Delta B. \quad (6.26)$$

Для визначення шуканого математичного сподівання в формулі (6.26) треба замінити  $\varphi(\Delta B)$  на конкретні математичні моделі з вищенаведених вище та врахувати реальні межі інтегрування. Отримуємо:

$$\begin{aligned} M[\varphi_r(\Delta B)] &= \int_0^{25} (b_{0r} + b_{1r}\Delta B) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta B - a)^2}{2\sigma^2}} d\Delta B = \\ &= \frac{b_{0r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{25} e^{-\frac{(\Delta B - a)^2}{2\sigma^2}} d\Delta B + \frac{b_{1r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{25} \Delta B e^{-\frac{(\Delta B - a)^2}{2\sigma^2}} d\Delta B = \quad , \quad (6.27) \\ &= b_{0r} \left[ \Phi\left(\frac{25 - a}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \right] + \frac{b_{1r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{25} \Delta B e^{-\frac{(\Delta B - a)^2}{2\sigma^2}} d\Delta B \end{aligned}$$

де  $\Phi(y)$  – інтегральна функція Лапласа від параметра  $y$ .

Нам залишається знайти інтеграл:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{25} \Delta B e^{-\frac{(\Delta B - a)^2}{2\sigma^2}} d\Delta B.$$

Для цього покладемо  $x = \frac{\Delta B - a}{\sigma}$  і прийемо  $x$  за нову змінну.

Звідси маємо, що  $\Delta B = x\sigma + a$ , причому  $d\Delta B = \sigma dx$ . Після заміни змінних маємо:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{25} \Delta B e^{-\frac{(\Delta B - a)^2}{2\sigma^2}} d\Delta B = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-a/\sigma}^{(25-a)/\sigma} (x\sigma + a) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\
& = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a/\sigma}^{(25-a)/\sigma} x\sigma e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a/\sigma}^{(25-a)/\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\
& = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a/\sigma}^{(25-a)/\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(-\frac{x^2}{2}\right) + a \left[ \Phi\left(\frac{25-a}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \right] = (6.28) \\
& = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(25-a)^2}{2\sigma^2}} \right] + a \left[ \Phi\left(\frac{25-a}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \right].
\end{aligned}$$

Таким чином, ми отримали кінцеву формулу для знаходження шуканих математичних сподівань випуску продукції:

$$\begin{aligned}
M_\tau = M[\varphi(\Delta B)] = & b_{0\tau} \left[ \Phi\left(\frac{25-a}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \right] + \\
& + b_{1\tau} \left\{ a \left[ \Phi\left(\frac{25-a}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \right] + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left( e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(25-a)^2}{2\sigma^2}} \right) \right\}. \quad (6.29)
\end{aligned}$$

Наприклад, знайдемо це значення для варіанта  $\tau=1$ , тобто коли розмір інвестиційних вкладень становить 3619 тис. грн.,  $a=12,8$ ,  $\sigma=6,7$ ,  $b_{01}=18,146$ ,  $b_{11}=-0,319$ . Маємо:

$$\begin{aligned}
M_1 = & 18,146 \left[ \Phi\left(\frac{25-12,8}{6,7}\right) + \Phi\left(\frac{12,8}{6,7}\right) \right] - 0,139 \left\{ 12,8 \left[ \Phi\left(\frac{25-12,8}{6,7}\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \Phi\left(\frac{12,8}{6,7}\right) \right] + \frac{6,7}{\sqrt{2\pi}} \left( e^{-\frac{12,8^2}{2 \cdot 6,7^2}} - e^{-\frac{(25-12,8)^2}{2 \cdot 6,7^2}} \right) \right\} = 15,35.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
M^{EJL} = \max\{M_1; M_2; M_3; M_4; M_5\} = & \max\{15,35; 15,47; 15,38; 15,09; 14,79\} = \\
= & 15,47 \text{ млн.грн.}
\end{aligned}$$

Максимальним серед розрахованих значень математичних сподівань буде значення  $M_2 = 15,47$  млн. грн. Це означає, що при врахуванні стохастичного характеру системи постачання, для отримання вигідного еластичного бізнес-плану необхідно, щоб розмір інвестицій становив 3550 тис. грн.

Запропонована економетрична модель (6.25) є найпростішого виду. Ось чому на перспективу представляє інтерес вибору функції більш складного виду, наприклад, параболічної:

$$\varphi_r(\Delta B) = b_{0r} + b_{1r}\Delta B + b_{2r}\Delta B^2. \quad (6.30)$$

Окрім цього, для більш адекватного відображення процесу моделювання доцільно розглянути процедуру побудови компромісних еластичних бізнес-планів з використанням векторної оптимізації.

В якості критеріїв оптимальності можна прийняти такі економічні показники: прибуток, валова чи товарна продукція, затрати, рівень рентабельності та ін.



*Приклад 6.4. Моделі оцінки економічної спроможності страхової компанії з використанням сучасних технологій імітаційного моделювання.*

Реальні умови функціонування страхової компанії вимагають об'єктивного і всебічного аналізу процесів страхової діяльності, необхідність якого обумовлена проблемами управління фінансами, плануванням грошових потоків, обґрунтуванням інвестиційних проєктів. Успішне функціонування страхової компанії значною мірою залежить від її економічної спроможності. Економічна спроможність страхової компанії – це важлива характеристика її ділової активності і надійності.

Дослідження економічної спроможності представляє інтерес для всіх учасників економічного процесу - страхувальників, керівництва і акціонерів страхової компанії, державних органів. Важливість оцінки фінансової стійкості страхової компанії обумовлена, перш за все, специфікою діяльності страховика, пов'язаною із чинниками стохастичного характеру, що потребує постійного контролю та управління платоспроможністю бізнесу. Обґрунтована оцінка фінансового стану страхової компанії дозволяє визначити реалії ведення бізнесу з перспективою на майбутнє. Для керівництва і власників компанії - це спосіб отримання достовірної якісної інформації про її реальні можливості. Особливо це важливо для розробки стратегії виживання в нових економічних умовах, які викликані кризовими явищами сьогодення.

Саме тому актуальності набувають дослідження теоретикометодологічних та організаційно-методичних питань забезпечення економічної спроможності страхових компаній і розробка системи аналітичних засобів та інструментів її оцінки.

Аналіз останніх публікацій показав, що автори надають перевагу оцінці платоспроможності страхової компанії в цілому, не проводячи кількісної оцінки конкурентних переваг страхової послуги та подальшого визначення конкурентоспроможності страхової компанії.

Описані в літературі результати досліджень свідчать про незначну кількість моніторингу стану економічної спроможності страхових компаній та у зв'язку з цим відсутність даних щодо зміни її динаміки, а отже, і висновків про взаємозв'язок економічної спроможності страхових компаній із забезпеченням їхнього успішного функціонування. Отже, сьогодні існує необхідність комплексного дослідження питань, пов'язаних із дослідженням економічної спроможності страхових компаній.

Своєчасне визначення «вузьких місць» у роботі страхової компанії та її конкурентних переваг є основою для прийняття менеджерами страхової компанії управлінських рішень відносно подальших умов та раціональності

надання страхової послуги. Таким чином, оцінка економічної спроможності страхової компанії на базі сучасних технологій комп'ютерного моделювання є актуальним завданням, яке й обумовило вибір теми дослідження та його мету.

Дослідимо сучасний стан фінансової стійкості, платоспроможності та надійності страхової компанії, що займається ризиковими видами страхування, та розробимо моделі управління економічною спроможністю страхової компанії з використанням сучасних інформаційних технологій імітаційного моделювання.

Однією із методик визначення фінансового стану з боку держави є оцінка діяльності страховика, що базується на так званих «тестах раннього попередження». Такий аналіз фінансового стану проводиться за допомогою аналізу відносних коефіцієнтів, їх динаміки, а також динаміки ключових абсолютних показників (платоспроможності, рентабельності, ліквідності та ін.).

Більшість науковців використовують поняття фінансової стійкості, як головного індикатора економічної спроможності страхової компанії, тобто спроможності виконувати свої зобов'язання перед страхувальниками в умовах негативного впливу різних зовнішніх і внутрішніх чинників.

На сьогодні в Україні майже немає комплексних спеціальних досліджень, пов'язаних з проблемами фінансової надійності страхових компаній та методам її підвищення. Фінансова стійкість – це одна із найважливіших характеристик поведінки будь-якої організації в ситуації зовнішніх і внутрішніх змін. Від правильності визначення факторів фінансової стійкості залежить точність кількісних та якісних показників діяльності страхових організацій. На сьогодні немає чіткого визначення поняття фінансової стійкості. Найчастіше стійкість стосується одного, двох або декількох чинників.

До складу фінансових коефіцієнтів, що пропонуються для використання, різні компанії використовують свою групу показників. Вони розраховуються на матеріалах звітного (або аналітичного) балансу підприємства, прості для розрахунку і практичного використання. Основним недоліком такого підходу є статичність оцінки. Страхові компанії, як правило, не розглядають можливість виникнення ситуацій банкрутства як результат розвитку кризи підприємства.

У проведеному дослідженні запропоновано для визначення економічної спроможності страхової компанії проводити дослідження виникнення ризику банкрутства страхової компанії, використовуючи як статичні, так і динамічні оцінки. Такий підхід заснований на:

- системі фінансових коефіцієнтів;
- спеціальних узагальнюючих показниках загрози банкрутства.

Необхідно зупинитися на системі фінансових коефіцієнтів, які регулюються законодавством. У Законі України «Про страхування» одним із

основних індикаторів фінансової стійкості страхової компанії являється платоспроможність. З точки зору державного регулювання діяльності страхових компаній проблематиці забезпечення платоспроможності страхових компаній, тобто унеможливлення доведення компанії до банкрутства приділяється особлива увага органами державного регулювання різних країн. Це актуально, оскільки неспроможність страховика покрити страховий ризик може призвести до порушення безперервності проведення процесу страхування, спричинити банкрутство.

Необхідно відзначити і той факт, що в міжнародній страховій практиці навіть за умови стабільної макроекономічної ситуації заходи з забезпечення платоспроможності страхових компаній періодично переглядаються та регулярно підвищуються вимоги до їхньої фінансової стійкості. Описані в літературі результати досліджень свідчать про недостатність моніторингу стану платоспроможності страхових компаній.

Суть механізму оцінки платоспроможності в страхуванні полягає у співставленні фактичної маржі платоспроможності з нормативним її значенням. При цьому, нормативна маржа платоспроможності відображає той мінімальний розмір власних коштів, який повинна мати страхова компанія з врахуванням прийнятих зобов'язань, а фактична маржа платоспроможності відображає фактично наявну величину власних вільних коштів. Згідно з представленою моделлю страховик, який займається страхуванням, іншим ніж страхування життя вважається платоспроможним, якщо фактичний запас платоспроможності перевищує нормативний. Чим більшим є таке перевищення, тим вища платоспроможність страхової компанії.

У закордонній страховій практиці для характеристики платоспроможності страховика використовується показник рівня достатності покриття власними коштами (Capital Adequacy Ratio або CAR). У розробленій імітаційній моделі оцінюється діяльність страхової компанії розрахунком показників платоспроможності, які відповідають як законодавству України, так і закордонній практиці. Для закордонних страховиків, які здійснюють ризикове страхування, рекомендовані параметри оцінювання платоспроможності наведено у наступній таблиці:

*Таблиця 6.2. Інтегральне якісне оцінювання платоспроможності страховика*

Значення CAR, %	Оцінка покриття
<0	Недостатнє
від 0 до 25	Нормальне
від 26 до 50	Добре
від 51 до 75	Надійне
>75	Зразкове

Фрагмент імітаційної моделі для оцінки платоспроможності наведено на рис.6.17:

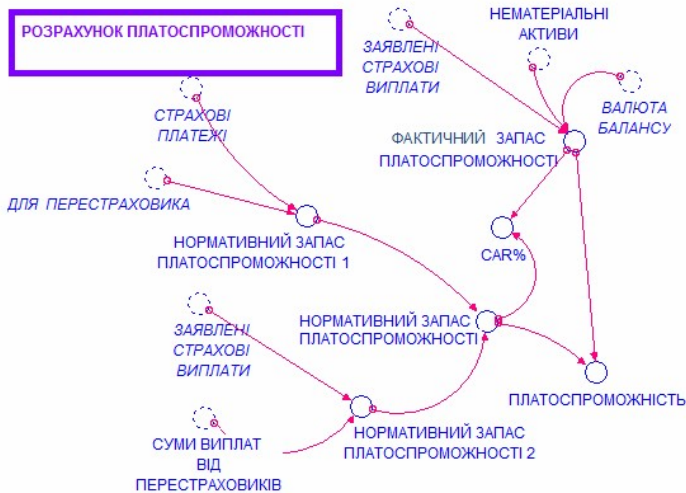


Рис.6.17. Фрагмент імітаційної моделі оцінки платоспроможності страхової компанії

Наведені на рис.6.17 показники визначаються так:

- 1) Фактичний запас платоспроможності = Валюта балансу – Нематеріальні активи – Заявлені страхові виплати.
- 2) Нормативний запас платоспроможності 1 = (Страхові платежі – Для перестраховика \* 0,5) \* 0,18.
- 3) Нормативний запас платоспроможності 2 = (Заявлені страхові виплати – Суми виплат від перестраховиків \* 0,5) \* 0,26.
- 4) Нормативний запас платоспроможності = MAX (Нормативний запас платоспроможності 1, Нормативний запас платоспроможності 2).
- 5) Платоспроможність = Фактичний запас платоспроможності – Нормативний запас платоспроможності.
- 6) CAR% = ((Фактичний запас платоспроможності – Нормативний запас платоспроможності) / Нормативний запас платоспроможності) \* 100.

Побудова імітаційної моделі та експерименти здійснено у середовищі Ithink. За результатами проведених досліджень та аналізу діяльності страховиків можна зробити висновок, що платоспроможність українських страховиків знаходилася на достатньо високому рівні. Цей факт також підтверджують експерименти на обраних страхових компаніях. Виходячи з алгоритму визначення платоспроможності, очевидне те, що величина показника платоспроможності залежить, у першу чергу, від величини активів страховика. Це свідчить про те, що українські страховики можуть нести набагато більшу страхову відповідальність. Переваги використання розробленої імітаційної моделі полягають у тому, що вона може надати оцінку реальної платоспроможності та фінансової стійкості страховика з врахуванням стохастичного характеру діяльності та здійснити прогноз на майбутнє.

Тому для проведення оцінки економічної спроможності тасвоєчасного виявлення ознак погіршення фінансового стану страхової компанії, особливо в умовах фінансової кризи, запропоновано доповнити наведену групу показників оцінкою ризику банкрутства. Така оцінка представляє собою комплексну оцінку групи фінансових показників страхової компанії, дозволяє виявити «вузькі місця» в роботі страхової компанії, причини їх виникнення і на основі отриманих результатів виробити конкретні рекомендації щодо покращенню ситуації.

Як в зарубіжних, так і вітчизняних літературних джерелах існує декілька загальноновизнаних методів і методик оцінки ризику банкрутства підприємства. Доцільно розглянути найбільш поширені методики оцінки ризику банкрутства страхової компанії:

1) Найбільш відомою і широко вживаною є методика професора Альтмана. Z – модель Альтмана є статистичною моделлю, яка на основі оцінки показників фінансового стану і платоспроможності компанії дозволяє оцінити ризик банкрутства.

Модель Альтмана побудована з використанням апарату мультиплікативного аналізу дискримінанта (Multiple-discriminant analysis МДА), який дозволяє підібрати такі показники, дисперсія яких між групами була б максимальною, а всередині групи - мінімальною.

Модель Альтмана дає достатньо точний прогноз ймовірності банкрутства з тимчасовим інтервалом 1–2 роки.

На основі моделі Альтмана існують модифікації для конкретних країн – модель Спрингейта, Таффлера, Р. Ліса, Р. С. Сайфуліна, Г. Г. Кадирова – це прогнозні моделі платоспроможності, які дозволяють дати картину фінансового стану підприємства, тобто можуть бути використані для оцінки ризику банкрутства.

2) Оцінка фінансового стану страховика та ймовірності банкрутства на основі останніх досягнень в області ІТ-технологій. Для аналізу фінансових процесів, рішення задач прогнозування і класифікації, оцінки фінансової

інформації застосовуються нейромережеві технології. Метою таких досліджень є визначення оптимальної структури штучної нейромережі для оцінки фінансового стану страхової компанії.

Сутність такого підходу полягає в тому, що формується набір показників, які дозволяють зробити обґрунтований аналіз фінансової діяльності страховика в сучасних умовах і визначити рівень його фінансового стану. Серед різноманітності фінансових показників обираються такі, які мають особливо важливе значення для визначення позиції компанії і можуть бути використані для аналізу стратегічних проблем.

Для аналізу можна вибрати різні структури нейронних мереж, серед найбільш поширених: нелінійна авторегресійна нейронна мережа зі зворотними зв'язками (NARX), нейронна мережа прямого розподілу (Feedforward Neural Network), нейронна мережа Елмана (Elman Neural Network) та ін.

Більшість програмних продуктів, розроблених для підтримки нейромережевого моделювання, дозволяють формувати кількість шарів і кількість елементів в шарах в залежності від потреб у моделі. У всіх структурах нейронних мереж можна застосовувати необхідну кількість нейронів прихованого шару, різноманітні активаційні функції. Вибір кількості шарів нейронної мережі і кількості нейронів кожного шару представляє компроміс між швидкістю навчання нейронної мережі і точністю отримуваних результатів.

Для того, щоб отримувати достовірні дані нейромережу необхідно навчати. Для навчання нейронних мереж необхідно узяти вибірку даних вхід-вихід по страхових компаніях, одні з яких стабільні, а інші – банкрути. На навчній нейронній мережі можливо проводити оцінку фінансового стану страхової компанії, судити про фінансову стабільність, визначити ступінь стабільності або банкрутства.

Нейромережеве прогнозування дозволяє виявляти тенденції до погіршення або поліпшення фінансового стану страхової компанії і внести зміни до

стратегії розвитку страхової компанії. На думку автора, цей підхід можна використовувати для початкових, загальних вивчень соціально-економічних систем, оскільки нейромережа є «чорним ящиком» і принципово не може давати однозначні висновки.

3) Для дослідження рівня фінансової стійкості та діагностики ризику банкрутства використовується апарат нечіткої логіки, за допомогою якого можливо урахувати усю наявну інформацію про об'єкт дослідження (зокрема, експертні знання), проводити ефективне налагодження моделей на базі реальних статистичних даних, приймати рішення щодо банкрутства в умовах невизначеності. Основні переваги цього апарату полягають у такому:

1) можливість використання, окрім кількісних, якісних чинників;

2) облік неточної, приблизної інформації про значення чинників.

Прогноз можливостей банкрутства – це багатокритеріальна задача. На ймовірність банкрутства страхової компанії впливають різноманітні фактори, велика частина яких належить до класу якісних (дія яких може бути лише слабо формалізована або зовсім не підлягає формалізації). Багато факторів носять неекономічний характер.

Серед методів нечіткої математики, які можуть бути використані для оцінки ризику банкрутства можна віднести метод максимінної згортки, адитивної згортки, методу лінгвістичних векторних оцінок, метод нечіткого логічного висновку, метод аналізу ієрархій, евристичний підхід. Усі наведені методи реалізують різні підходи до прийняття рішень, тому дають різні результати. Кожен підхід має свої обмеження та особливості.

Основною проблемою багатокритеріального вибору з використанням нечітких моделей є, на погляд автора, надання інформації про взаємодію між критеріями і способи обчислення інтегральних оцінок. Більшість нечітких методів прийняття рішень показують слабку стійкість результатів відносно вхідних даних, тому потребують розвитку комбінованих методів прийняття рішень з використанням нечітких представлень, теоретичних підходів до опису складних взаємовідносин між критеріями, широкого використання інтелектуальних методів на основі нечіткої логіки.

4) Визначення ймовірності банкрутства, як міри платоспроможності страхової компанії, заснованої на теорії ризику у фінансах та страхуванні описується в моделі Крамера-Лундберга, О. П. Віноградова. Це моделі, які дозволяють розглянути проблему платоспроможності та виникнення ризику банкрутства в комплексі з використанням математичного апарату та теорії ризику у фінансах та страхуванні.

Для першого етапу оцінки ризику банкрутства в імітаційній моделі використовується модель Крамера-Лундберга. Мотивами такого вибору є:

1) модель Крамера-Лундберга вивчає ймовірність банкрутства страхової компанії у якості міри впливу на ризик в ситуаціях, коли процес отримання страхових премій (платежів) має складну структуру з урахуванням різних факторів фінансових та страхових ризиків;

2) усі вхідні параметри (потоки страхових платежів та страхових виплат у динаміці) моделі Крамера-Лундберга вивчаються, досліджуються і оцінюються в імітаційній моделі;

3) модель Крамера-Лундберга дозволяє використовувати початковий капітал страхової компанії з урахуванням інвестиційних стратегій компанії.

На розробленій імітаційній моделі запропоновано проводити процедуру визначення ймовірності банкрутства страхової компанії в два етапи:

- проведення імітаційних експериментів на базі модельного комплексу з використанням класичної моделі Крамера-Лунберга теорії ризику у фінансах та страхуванні;
  - перевірка гіпотези  $H_0$  - банкрутство і альтернативної гіпотези  $H_1$ - економічна спроможність на основі теорії планування імітаційних експериментів.
- Фрагмент моделі, за допомогою якого проводиться розрахунок ймовірності банкрутства, наведено на рис.6.18.

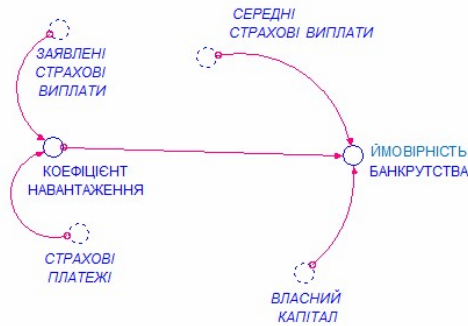


Рис.6.18. Фрагмент імітаційної моделі для оцінки ризику банкрутства страхової компанії

Ймовірність банкрутства =  $1 - (1 - (1 / (1 + \text{Коефіцієнт навантаження})) * \text{EXP} (- \text{Коефіцієнт навантаження} * \text{Власний капітал} / ((1 + \text{Коефіцієнт навантаження}) * \text{Середні страхові виплати})))$ .

Змінна «СТРАХОВІ ПЛАТЕЖІ» описує величину зібраних страхових платежів у момент часу  $t$  – це конвертер; змінна «ЗАЯВЛЕНІ СТРАХОВІ ВИПЛАТИ», тобто очікуваним страховим виплатам у момент часу  $t$ . Математичне сподівання страхових виплат – це змінна «СЕРЕДНІ СТРАХОВІ ВИПЛАТИ». У якості початкового капіталу страхової компанії використовується змінна «ВЛАСНИЙ КАПІТАЛ», яка обчислюється з урахуванням як початкового капіталу, так і інвестиційної політики, яку проводить страхова компанія.

Таким чином, висновок відносно економічної спроможності страхової компанії в імітаційній моделі здійснюється як на базі стандартних фінансових показників, так і за наслідками проведених імітаційних експериментів (рис.6.19).





*Рис.6.19. Структурологічна схема оцінки економічної спроможності страховика*

Сучасний менеджмент страховика розглядає процес управління як комплекс заходів, що охоплюють усі сфери управлінської діяльності: фінанси, маркетинг, відносини з клієнтами та ін. На державному рівні розроблені методики комплексного аналізу показників діяльності страхової компанії, що максимально відображають фінансовий стан за допомогою системи збалансованих показників (платоспроможності, коефіцієнту забезпеченості власними коштами, рентабельності страхової послуг та ін.), які дозволяють оперативню і максимально точно реагувати на щонайменші зміни в поточних показниках. Але такі оцінки діяльності страховика, як правило, носять статичний характер, не враховують стохастичний характер та оцінку платоспроможності на майбутнє.

Проаналізовано методи та моделі оцінки економічної спроможності страхової компанії, які можуть характеризувати фінансовий стан, слабкі місця в її діяльності і оцінити ймовірність її банкрутства. Розглянуто методи оцінки ризику банкрутства страхових компаній: багатофакторна модель Альтмана, оцінка ймовірності банкрутства страхових компаній з використанням методів нечіткої математики, нейронних мереж, моделі ризикового аналізу в фінансах і страхуванні Крамера-Лунберга. Розроблено модель оцінки економічної спроможності страховика із застосуванням

показника «ймовірність банкрутства». Вибір цього показника був мотивований метою та специфікою страхування – це забезпечення платоспроможності за рахунок створення грошових фондів, тобто, здатність компанії у будь-який із прогнозованих періодів виконувати зобов'язання із укладених договорів страхування у разі виникнення страхових випадків.

Оскільки всі імітовані процеси носять стохастичний характер, то висновок про ступінь банкрутства конкретної страхової компанії можна зробити на базі представницької статистичної сукупності отриманих результатів імітаційних експериментів, причому, у кожному конкретному випадку сукупність може бути різною. З урахуванням цих причин розроблено серію планів імітаційних експериментів для зупинки і постімітаційного аналізу результатів експериментів математичною основою яких є послідовна теорія плануванні експерименту. Зокрема, використовуються дві основні процедури Полсона (перевірка гіпотези про середнє) і оцінки математичного сподівання представлені в роботі за матеріалами низки страхових компаній. Основні гіпотези, що перевіряються:

- 1) близькість страхової компанії до банкрутства;
- 2) економічна спроможність, як альтернатива до банкрутства.

## Література

1. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов: Прогноз и управление. Вып. 1 / Пер. с англ. — М.: Мир, 1974. — 405 с.
2. Джон Ф.Маршалл, Випул К.Бансал Финансовая инженерия. Пер. с англ.- М.: Наука,1996, 854с.
3. Єріна А.М. Статистичне моделювання та прогнозування: Навч. посібник/ А.М.Єріна. – К.: КНЕУ, 2001. – 170с.
4. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник /За ред. О.Т.Івашука.- Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008.-704 с.
5. Кендюхов А.В. Использование метода главных компонент для оценки конкурентоспособности машиностроительных предприятий / А.В. Кендюхов, Д.О. Толкачев // Маркетинг і менеджмент інновацій.- 2013.- № 4.- С. 219-227.
6. Клепікова О.А. Розробка моделей оцінки економічної спроможності страхової компанії з використанням сучасних технологій імітаційного моделювання / О.А.Клепікова // Вісник соціально-економічних досліджень.- 2013, випуск 2 (49), ч. 1.-с.32-39.
7. Ковальова О.М. Венчурне фінансування на засадах державно-приватного партнерства: дис...канд. екон. наук: 08.00.08, Одеса, 2015.- 196с.
8. Матвійчук А.В. Прогнозування податкових надходжень на основі інструментарію нейронних мереж / А.В.Матвійчук // БІЗНЕСИНФОРМ.- 2010.-№4(1).-С.63-66.
9. Мацкул В.М., Кирилова Л.О. Моделювання та прогнозування ПДВ на мікро- та макрорівнях / В.М.Мацкул // Вісник соціально-економічних досліджень.-ОНЕУ, 2014,№54.-с.27-34.
10. Мацкул В.М., Подвальна Н.Е. Економіко-математичний аналіз готельних підприємств м.Одеса / В.М.Мацкул – Економіка: реалії часу. Науковий журнал.- 2014.-№4(14).-с.53-62.
11. Плюта В. Сравнительный многомерный анализ в эконометрическом моделировании. Пер. с польск.- М.: Финансы и статистика,1989.-175с.
12. Подвальна Н.Е. Аналітичне обґрунтування ефективності функціонування готельних підприємств: дис....канд. екон. наук: 08.00.09, Одеса, 2014.- 164с.
13. Інтелектуальні технології моделювання в інформаційно-аналітичній системі державної податкової служби : монографія / за заг.ред. Л.Л.Тарангул.- К.: Алерта, 2010.- 358с.
14. Хазова Д.С. Математическое моделирование устойчивого развития туризма: дис....канд. екон. Наук: 08.00.13, Москва, 2014.- 126с.
15. Шуліченко Т.В. Механізм майнового оподаткування в Україні: дис....канд. екон. наук: 08.00.08 , Одеса, 2012.- 148с.
16. Многомерный анализ в системе STATISTICA: монографія / А.Г.Янковой.- Одесса: «Оптимум», 2001,Вып.1.-216 с., Вып.2.-326 с.
17. Конкурентоспроможність підприємства: оцінка рівня та напрями підвищення; за заг. ред. О.Г. Янкового.- Одеса: Атлант, 2013.- 470 с.
18. Янковий О.Г. Латентні ознаки в економіці: монографія.- Одеса: Атлант,

2015.- 168 с.

19. Balisteri E.J., Rutherford T.F. (2011) “Computing General Equilibrium theories of Monopolistic Competition and Heterogeneous Firms” // Chapter prepared for the Handbook of Computable General Equilibrium Modeling edited by Dixit P.B. and Jorgenson D.W.

20. Draper N.R., Smith H. *Applied Regression Analysis*. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons; 1998.

21. Engle R.F. Autoregressive conditional Heteroscedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom inflation / R.F. Engle // *Econometrica*. – 1982. – V . 50. – P . 987– 1007.

22. Geladi, P., & Kowalski B. (1986). Partial least square regression: A tutorial. *Analytica Chimica Acta*, **35**, 1–17.

23. Nelson D.B. Conditional heteroscedasticity in asset pricing: a new approach / D.B. Nelson // *Econometrica*. – 1990. – V . 59. – P . 347–370.

24. Piazalo D. (2000) “Poland’s Membership in the European Union: An Analysis with a Dynamic Computable General Equilibrium (CGE) Model” // LICOS Discussion Papers, №8900

25. Statistica. Системный подход к анализу данных [Электронный ресурс].- StatSoftRussia.- Режим доступа: <http://www.statsoft.ru>.

26. Sanchez, G. *PLS Path Modeling with R (Моделирование PLS-PM с помощью программной среды R)* / Gaston Sanchez. – Berkeley, California, 2013. – 210 p.

27. Sanchez, G. *Plsdepot: Partial Least Squares Data Analysis Methods (Пакет Plsdepot: анализ данных с помощью метода наименьших частных квадратов)* [Electronic source] / Gaston Sanchez. – R package version 0.1.17. – 2012. – Режим доступа: <http://CRAN.R-project.org/package=plsdepot> (дата обращения: 15.10.2014).

28. Sanchez, G. *Plspm: Tools for Partial Least Squares Path Modeling (Пакет Plspm: инструменты моделирования PLS-PM)* [Electronic source] / Gaston Sanchez, Laura Trinchera, Giorgio Russolillo. – R package version 0.4.1. – 2013. – Режим доступа: <http://CRAN.R-project.org/package=plspm> (дата обращения: 15.10.2014).

29. Stock, J.H. and M.W. Watson (2004), “Combination forecasts of output growth in a seven-country data set”, *Journal of forecasting* 23, 405-430

30. Tenenhaus, M. (1998). *La régression PLS*. Paris: Technip.

31. Wold, H. Estimation of principal components and related models by iterative least squares / H. Wold // In P.R. Krishnaiah (Ed.), *Multivariate Analysis II*. . – New York: Academic Press, 1966. – pp. 391-420.

32. H. Wold // In P.R. Krishnaiah (Ed.), *Multivariate Analysis II*. New York: Academic Press, 1973. – pp. 383-407.

33. Wold S. PLS for multivariate linear modelling. In: van de Waterbeem H, ed. *QSAR: Chemometric Methods in Molecular Design, Methods and Principles in Medicinal Chemistry, Vol. 2*, Weinheim, Germany: Verlag Chemie; 1995.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Юрій Георгійович КОЗАК  
Валерій Миколайович МАЦКУЛ

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ  
ТА МОДЕЛІ ДЛЯ МАГІСТРІВ  
З ЕКОНОМІКИ

ПРАКТИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

*Друкується в авторській редакції.*

Підписано до друку 20.09.2016 р. Формат 60x84 1/16.  
Друк лазерний. Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.  
Ум. друк. арк.14,29.

ТОВ «Центр учбової літератури»  
вул. Лаврська, 20 м. Київ

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру  
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції  
ДК № 2458 від 30.03.2006 р.