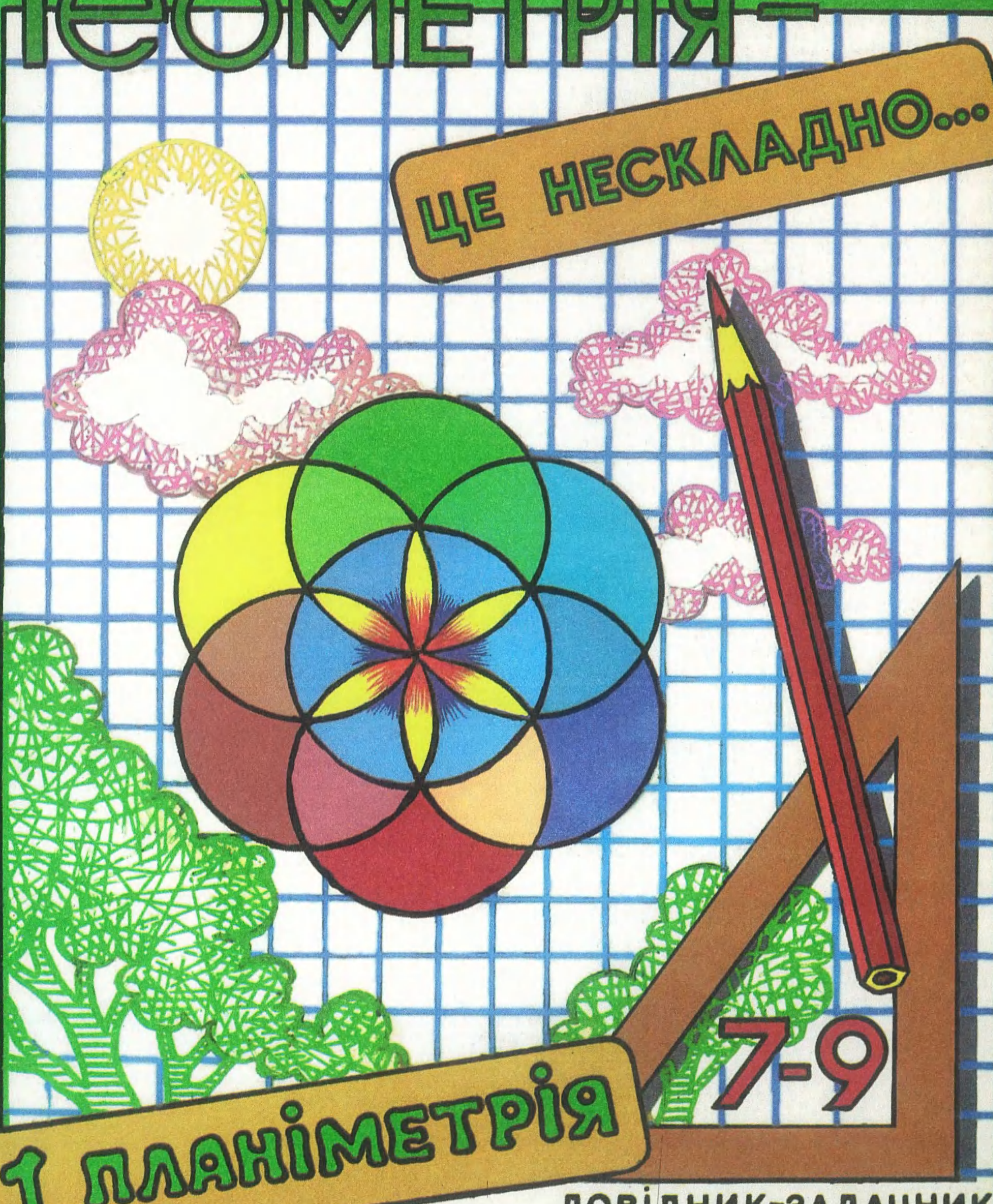
О. ГАЙШТУТ, Г. ЛИТВИНЕНКО

Геометрія — це нескладно...



1 планіметрія

7-9

ДОВІДНИК-ЗАДАЧНИК

Творча спілка вчителів України
Асоціація вчителів математики

О.Г. Гайштут
Г.М. Литвиненко

ГЕОМЕТРІЯ — ЦЕ НЕСКЛАДНО
Планіметрія

Навчально-методичний посібник

Рекомендовано Головним управлінням
загальної середньої освіти
Міністерства освіти України

Київ
«Магістр-S»
1997

ББК 22.1
Г14

О.Г.Гайштут, Г.М.Литвиненко.
Геометрія — це нескладно. Планіметрія. Навчально-методичний посібник. — К.: «Магістр-S», 1997 — 112 с.: іл.

ISBN 966-557-030-7

Рекомендовано Головним управлінням загальної середньої освіти Міністерства освіти України

Навчально-методичний посібник у вигляді довідника-задачника з планіметрії ГЕОМЕТРІЯ — ЦЕ НЕСКЛАДНО відповідає шкільному курсу геометрії і призначений для учнів 7-9 класів, вчителів, абітурієнтів та студентів педагогичних вузів.

ББК 22.1

ISBN 966-557-030-7

ПЕРЕДМОВА

Задачник містить понад 1000 задач, різних за тематикою і рівнем складності. Система розміщення матеріалу, форма оформлення і довідковий матеріал вигідно вирізняє його серед інших аналогічних задачників.

Мета посібника — допомогти учневі систематизувати навички з розв'язування геометричних задач за курс основної школи, а також ознайомитися з методами їх розв'язування. Наявність основних теорем, знання яких необхідне для розв'язування задач з планіметрії, дає змогу використовувати посібник, не вдаючись до підручників. Більша частина задач складена авторами з таким розрахунком, щоб задачник задовільняв широке коло читачів.

Розв'язування однієї частини оригінальних, нескладних завдань дає змогу набути навичок розв'язування задач з різних розділів геометрії. Розв'язування другої частини розвиває мислення, але не потребує громіздких перетворень.

Задачі, споріднені за ідеєю розв'язання, згруповано. Для перших задач кожної групи даються детальніші розв'язки, ніж для наступних. Другорядні моменти розмірковувань та обчислень опущено, щоб не обмежувати самостійності учня. Навпаки, питанням, що, на думку авторів, є суттєвими для розв'язування задач, приділено більше уваги.

В окремий розділ виділено задачі для гурткової і факультативної роботи. Їх розв'язування хоч і потребує більших зусиль, але, вважаємо, доступне читачеві. До задач цього розділу, як і деяких інших, в кінці посібника подано розв'язки.

Порівнюючи власний розв'язок з авторським, треба звертати увагу на недоліки або помилки, допущені в ньому, щоб уникнути їх у подальшому. Задачі цього розділу, багато з яких підвищеної складності, зовсім не обов'язково розв'язувати всі. Але тим, хто любить математику і бажає в ній удосконалюватися, звичайно, треба прагнути самостійно розв'язати всі задачі.

Слід застерегти тих, хто користуватиметься посібником, що наведені записи розв'язків частин задач не є зразками і не претендують на повноту обгрунтувань. Вони містять, як правило, у згорнутому вигляді лише опорні логічні кроки, що, на думку авторів, має спонукати учнів до самостійних розмірковувань і пошуків способів розв'язування задач.

Особливу увагу приділено методиці і методам розв'язуванання задач на побудову.

Складання задач читачем, хай навіть нескладних, — сходинка до творчості. У параграфах 7 і 12 автори пропонують прийоми такої роботи з використанням однієї ідеї. Вважаємо, що одна правильно складена задача варта двох десятків розв'язаних.

Автори сподіваються, що збірник допоможе кожному, хто опрацює його, зробити суттєвий крок до оволодіння складнішою математичною літературою.

ПЛАНІМЕТРІЯ. Довідковий матеріал

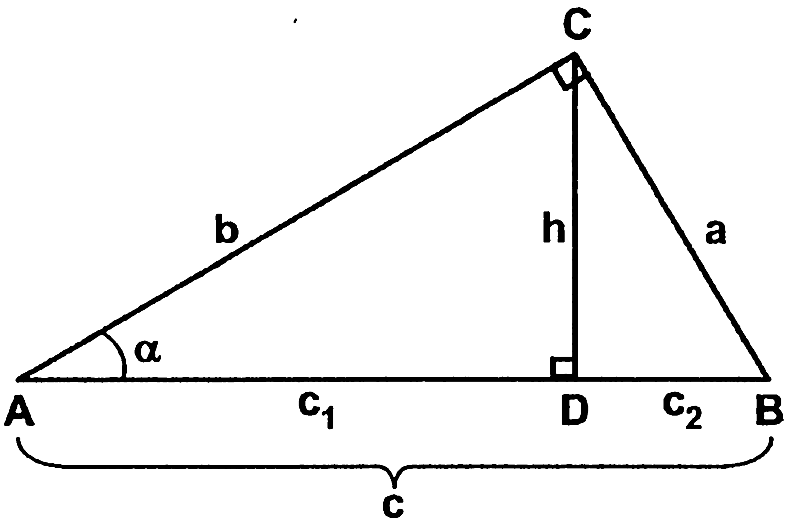
Прямокутний трикутник

$b^2 = c \cdot c_1$

$a^2 = c \cdot c_2$

$h^2 = c_1 \cdot c_2$

$a^2 + b^2 = c^2$



1. Катет — середнє пропорційне між гіпотенузою та проекцією цього катета на гіпотенузу.
2. Висота, опущена з вершини прямого кута на гіпотенузу, — середнє пропорційне між відрізками, на які вона ділить гіпотенузу.
3. Сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи.

Якщо $\alpha = 30°$, то $c = 2a$

$R = \frac{c}{2}$

$r = \frac{a+b-c}{2}$

$r = \frac{S}{p}$

$S = \frac{1}{2} c \cdot h$

$S = \frac{1}{2} a \cdot b$

4. Проти кута в 30° лежить катет, що дорівнює половині гіпотенузи.
5. Радіус описаного кола визначається за формулою $R = \frac{c}{2}$.
6. Радіус вписаного кола визначається за формулами

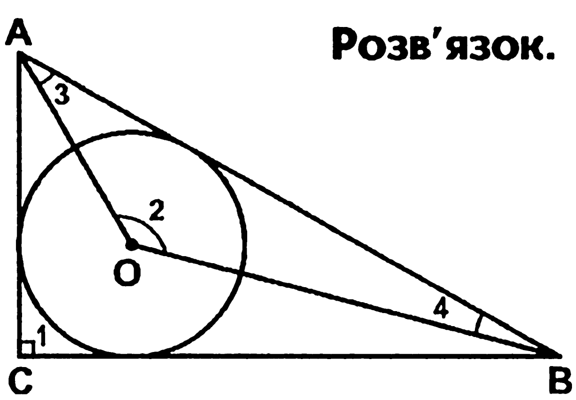
$$r = \frac{a+b-c}{2} \text{ та } r = \frac{S}{p}.$$

7. Площа визначається за формулами

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h \text{ та } S = \frac{1}{2} a \cdot b.$$

Зразок розв'язку задачі

Дано: O — центр кола, вписаного в ΔABC. $\angle 1 + \angle 2 + \angle CAB = 285°$.
Знайти: $AC : AB$.



Розв'язок.

$\left.\begin{array}{l}\angle 1 = 90°,\ AO \text{ та } BO \text{ —} \\ \text{бісектриси}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle 3 + \angle 4 = 45°$, значить,

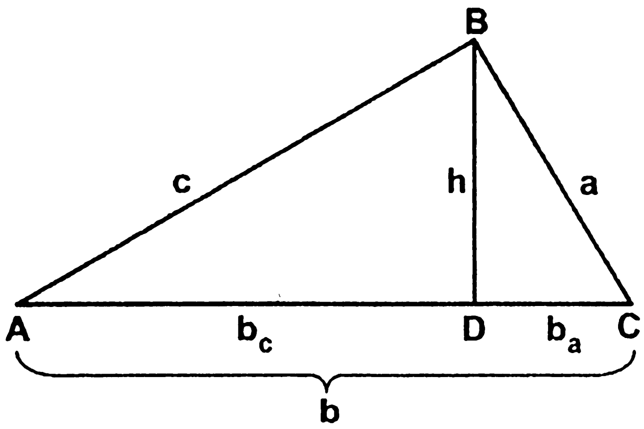
$$\underline{\angle 2} = 180° - (\angle 3 + \angle 4) = \underline{135°}.$$

За умовою $\angle 1 + \angle 2 + \angle CAB = 285°$, звідки $\angle CAB = 285° - (\angle 1 + \angle 2) = 285° - 225° = 60°$, $\angle B = 30°$ та $AC : AB = 1 : 2$ (теорема 4).

Відповідь: 1:2.

$p = \frac{a+b+c}{2}$, r, R — радіуси вписаного та описаного кіл.

Косокутний трикутник



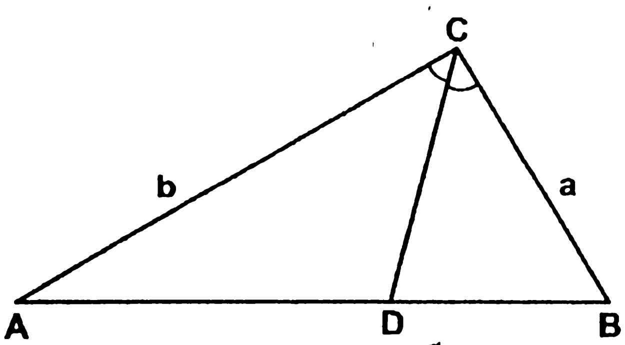
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot b_a$$
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2b \cdot b_c$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

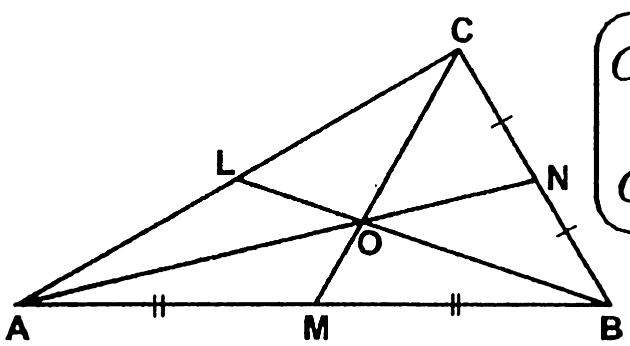
$r = \dfrac{S}{p}$, де S — площа,
p — напівпериметр

$R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4S}$, де S — площа



CD — бісектриса

$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}$$



AN, BL, CM — медіани

$$OM = \frac{1}{3} CM$$
$$OC = \frac{2}{3} CM$$

8. Квадрат сторони, що лежить проти гострого кута, дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутоку основи на проекцію другої бічної сторони на основу.
9. Площа визначається за формулами:

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h,$$

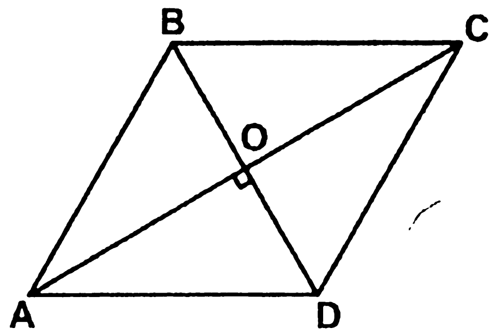
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

10. Центр вписаного кола лежить в точці перетину бісектрис, а радіус вписаного кола визначається за формулою: $r = \dfrac{S}{p}$.
11. Центр описаного кола лежить в точці перетину перпендикулярів до середин сторін, а радіус описаного кола визначається за формулою: $R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4S}$.
12. Бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить основу на частини, пропорційні прилеглим сторонам.
13. Медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 2:1, починаючі від вершини.

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$, r, R — радіуси вписаного та описаного кіл.

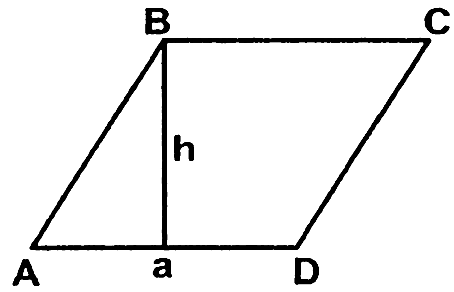
Ромб

$$AC \perp BD$$
$$\angle OAD = \angle OAB$$



14. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і ділять кути навпіл.

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$
$$S = a \cdot h$$



15. Площа визначається за формулами:

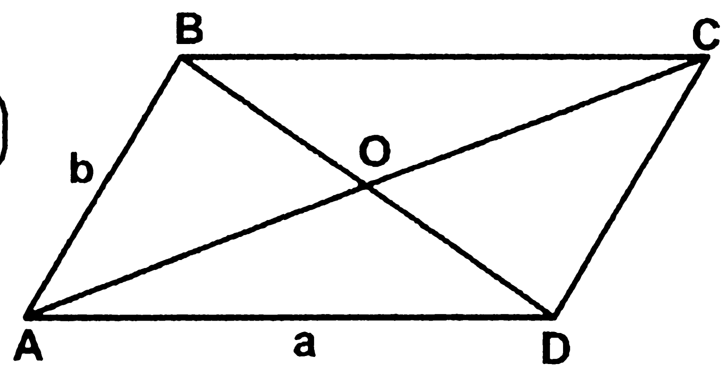
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

$$S = a \cdot h.$$

Паралелограм

$$AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$S = a \cdot h$$



16. Сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.
17. Площа визначається за формулою:

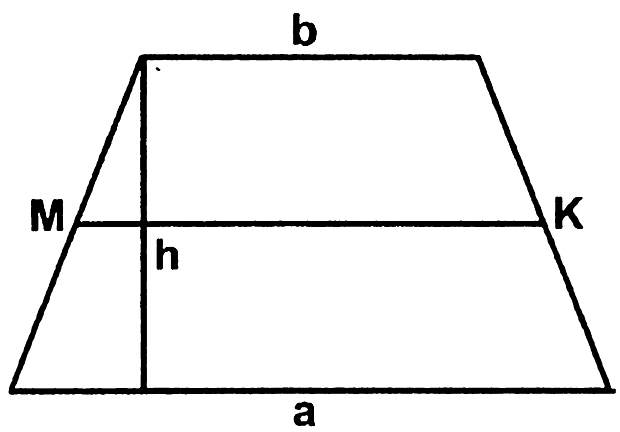
$$S = a \cdot h.$$

Трапеція

$$MK = \frac{a+b}{2}$$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$a + b = c + d$$

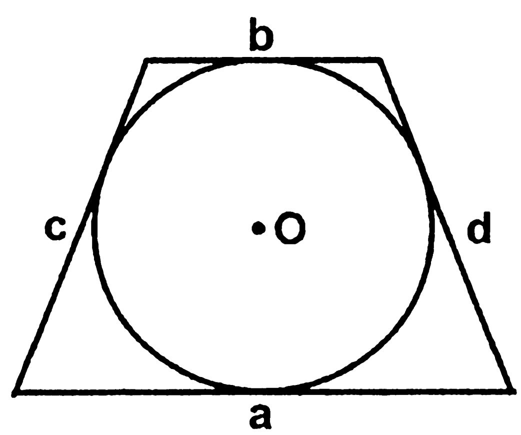


18. Середня лінія дорівнює напівсумі основ:

$$MK = \frac{a+b}{2}.$$

19. Площа визначається за формулою:

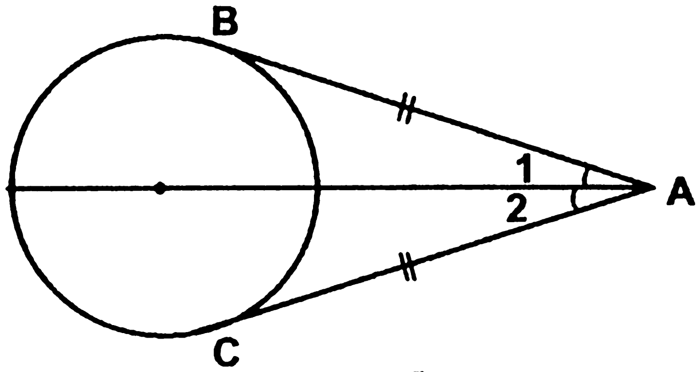
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$



20. Якщо в трапецію вписано круг, то сума основ трапеції дорівнює сумі бічних сторін.

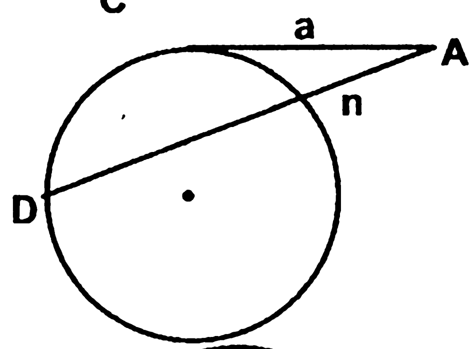
Коло і круг

$$\boxed{\begin{gathered} AB = AC \\ \angle 1 = \angle 2 \end{gathered}}$$



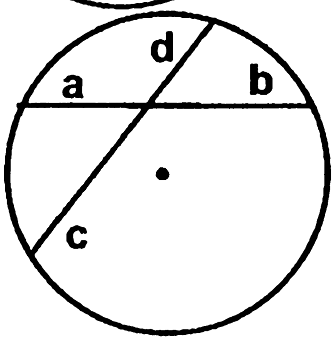
21. Якщо з однієї точки, що лежить поза колом, провести до нього дві дотичні, то
   а) довжини відрізків від даної точки до точок дотику рівні;
   б) кути між кожною дотичною та січною, що проходить через центр круга, рівні.

$$\boxed{a^2 = AD \cdot n}$$



22. Якщо з однієї точки, що лежить поза колом, провести до нього дотичну та січну, то квадрат дотичної дорівнює добутку січної на її зовнішню частину.

$$\boxed{a \cdot b = c \cdot d}$$



23. Якщо дві хорди перетинаються в одній точці, то добуток відрізків однієї хорди дорівнює добутку відрізків іншої.

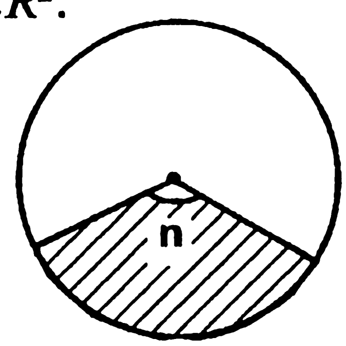
24. Довжина кола $C = 2\pi R$.

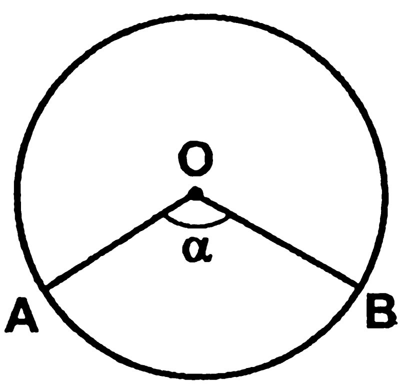
25. Довжина дуги $C_\partial = \dfrac{\pi R n}{180°}$.

26. Площа круга $S = \pi R^2$.

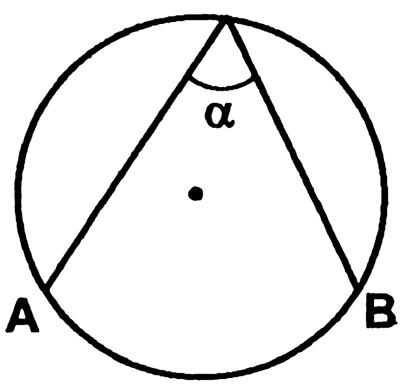
27. Площа сектора

$$S_c = \frac{\pi R^2 n}{360°}.$$

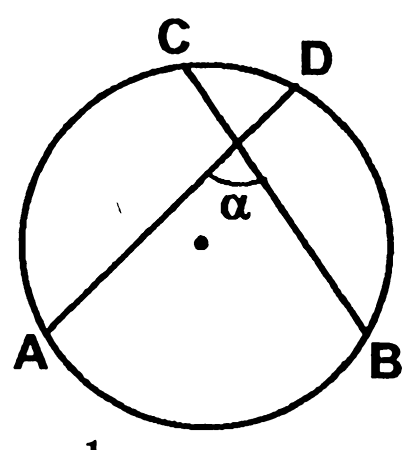




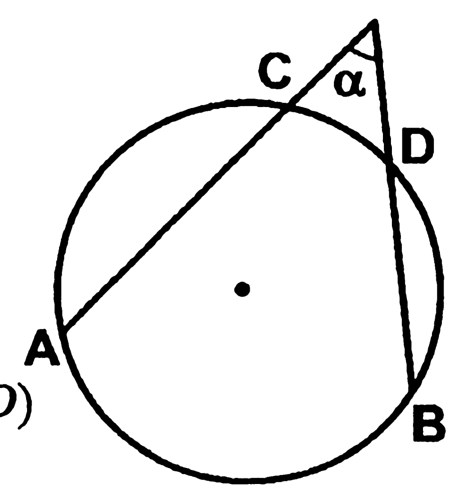
$\alpha = \smile AB$



$\alpha = \dfrac{1}{2} \smile AB$



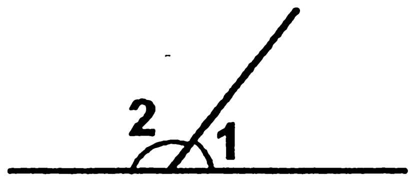
$\alpha = \dfrac{1}{2}(\smile AB + \smile CD)$



$\alpha = \dfrac{1}{2}(\smile AB - \smile CD)$

S_c — площа сектора, S — площа круга, C — довжина кола, C_∂ — довжина дуги, $\smile AB$ — кутова величина дуги.

Вертикальні та суміжні кути



1. $\angle 1 = 43°$.
Знайти $\angle 2$.

2. $\angle 2 = 4\angle 1$.
Знайти $\angle 1$.

3. $\angle 2 - \angle 1 = 20°$.
Знайти $\angle 1$.

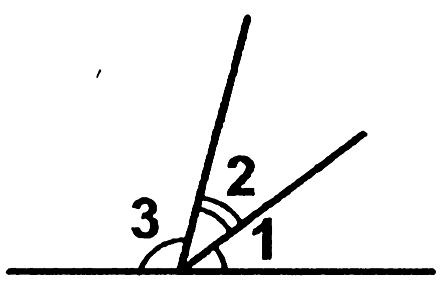
4. $\angle 2 : \angle 1 = 7 : 3$.
Знайти $\angle 2 - \angle 1$.

5. $\angle 1 = \frac{2}{7}\angle 2$.
Знайти $\angle 1$.

6. $\angle 1 = 20\%\ \angle 2$.
Знайти $\angle 2$.

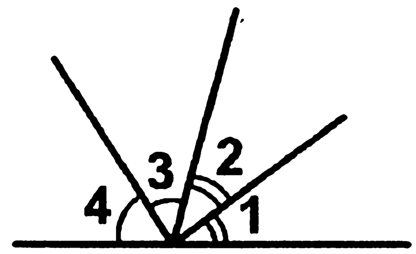
7. $(\angle 2 - \angle 1) : \angle 1 = 2 : 1$.
Знайти $\angle 2$.

8. $\angle 2 = 5\angle 1$.
Довести, що $\angle 2 - \angle 1 = 120°$.



9. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 + \angle 1 = 160°$.
Знайти $\angle 3$.

10. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 - \angle 1 = 135°$.
Знайти $\angle 1$.



11. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 1 = 17°$.
Знайти $\angle 3$.

12. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 1 = 19°$.
Знайти $\angle 4 - \angle 2$.

13. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.
Довести, що $\angle 3 + \angle 2 = 90°$.

14. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 4 - \angle 2 = 50°$.
Знайти $\angle 2$.

15. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,

$$\angle 4 - 2\angle 2 = 45°.$$

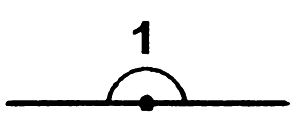
Знайти $\angle 3$.

16. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,

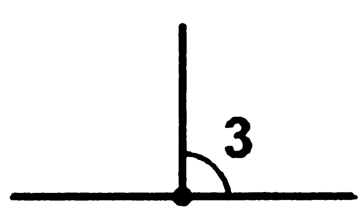
$$\angle 4 + \angle 3 + \angle 2 = 170°.$$

Знайти $\angle 4$.

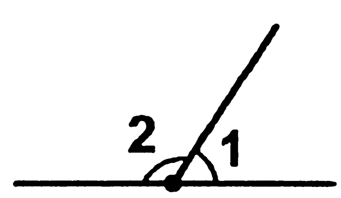
Довідковий відділ



$\angle 1 = 180°$
розгорнутий

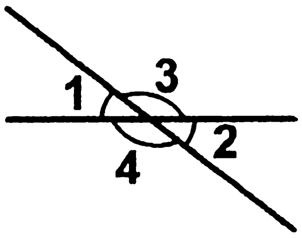


$\angle 3 = 90°$
прямий



$\angle 1 + \angle 2 = 180°$
$\angle 1$ і $\angle 2$ — суміжні

Паралельні прямі

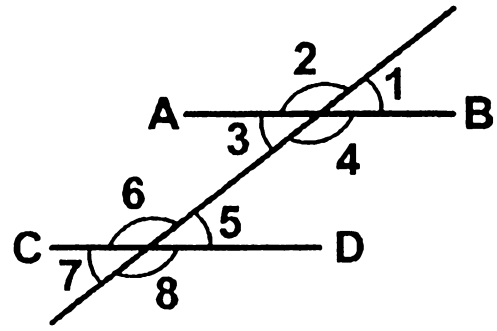


17. $\angle 3 = 75°$.
Знайти $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 4$.

18. $\angle 3 - \angle 2 = 20°$.
Знайти $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

19. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 250°$.
Знайти $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

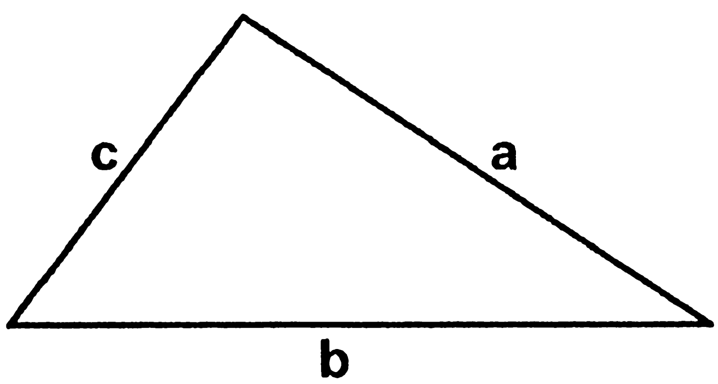
20. $\angle 1 + \angle 2 = 80°$.
Знайти $\angle 3$.



21. Чи паралельні прямі AB і CD, якщо:
а) $\angle 6 = 8\angle 1$, $\angle 7 = 20°$,
б) $\angle 1 = \angle 8 - 144°$, $\angle 2 = 162°$,
в) $\angle 2 - \angle 5 = 154°$, $\angle 3 = 14°$.

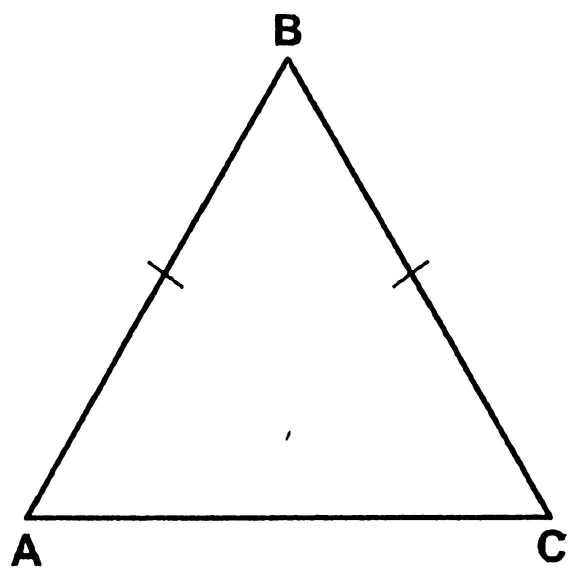
22. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 258°$,
$\angle 5 + \angle 7 = 156°$.
Довести, що $AB \parallel CD$.

Співвідношення між сторонами та кутами в трикутнику



23. Визначити вид трикутника, якщо:
а) $P_n = 28$, $b = 10$, $c = 8$,
б) $P_n = 42$, $b = \frac{1}{3}P_n$, $c + b = 28$.

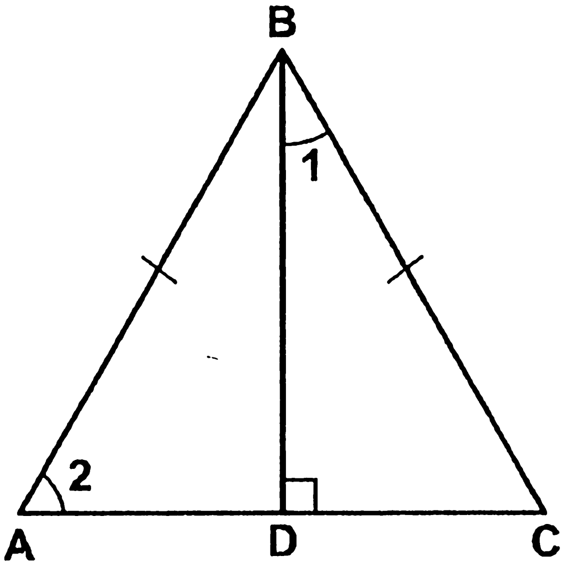
24. $AB = BC$, $P_n = 48$, $AC = 18$.
Знайти AB.



25. $AB = BC$, $P_n = 18$, $AB - AC = 3$.
Знайти AB.

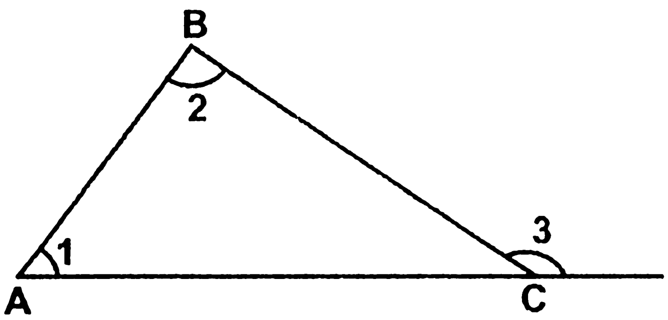
26. $AB = BC$, $P_n - AC = 36$,
$AB - AC = 6$.
Знайти AC.

27. $AB = BC$, $P_n = 48$, $AB = \frac{3}{2}AC$.
Знайти AC.



28. ΔABC, $AB = BC$, $BD \perp AC$,
$P_{ABC} = 20$, $P_{ABD} = 16$.
Знайти BD.

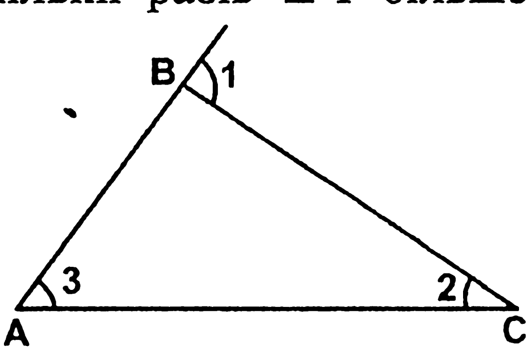
29. ΔABC, $AB = BC$, $BD \perp AC$,
$AB = 2AD$.
Знайти $2\angle 2 - \angle 1$.



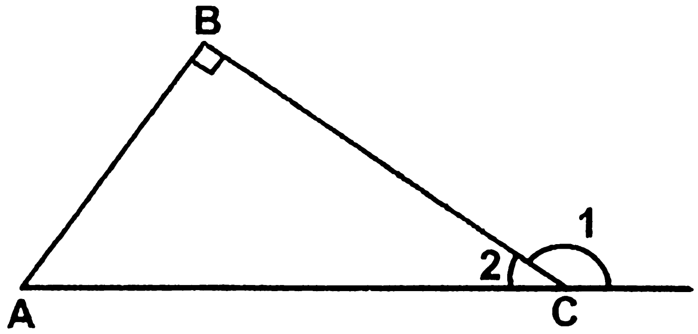
30. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 + \angle 1 = 153°$.
Знайти $\angle 2$.

31. $\angle 2 = \angle 1 + 20°$, $\angle 3 = 100°$.
Знайти $\angle 1$.

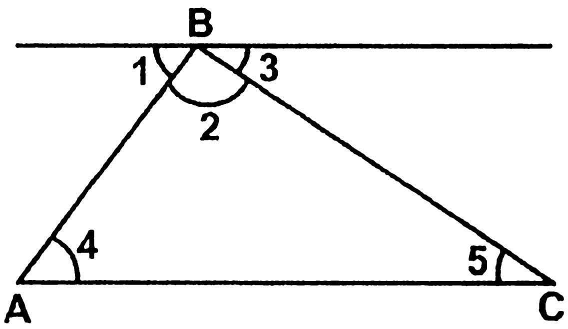
32. $\angle 3 = 2(\angle 1 - \angle 2)$.
У скільки разів $\angle 1$ більше $\angle 2$?



33. $\angle 2 = 3\angle 3$, $\angle 1 = 80°$.
Знайти $\angle 2$.



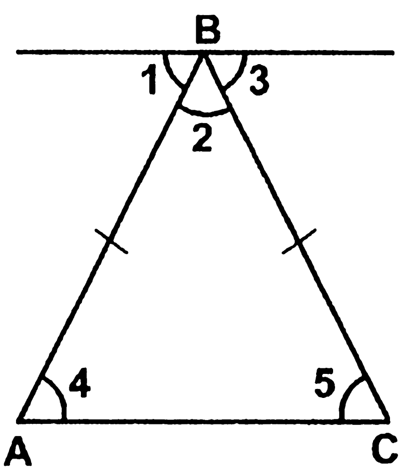
34. $\angle C = 90°$, $\angle 1 = 3\angle A$.
Знайти $\angle A$.



35. $AC \parallel BD$,
$\angle 1 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 220°$.
Знайти $\angle 2$.

36. $AC \parallel BD$, $\angle 1 + \angle 5 = 112°$.
Знайти $\angle 2$.

37. $AC \parallel BD$, $\angle 2 = 90°$.
Знайти $\angle 1 + \angle 5$.



38. $AB = BC$, $AC \parallel BD$, $\angle 2 = 2\angle 4$.
Знайти $\angle 1$.

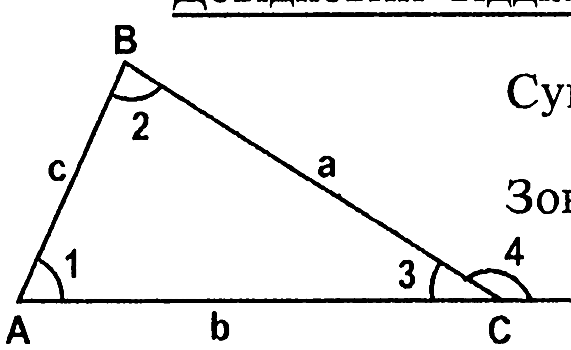
39. $AB = BC$, $AC \parallel BD$, $\angle 1 = 4\angle 2$.
Знайти $\angle 4$.

40. $AB = BC$, $AC \parallel BD$, $\angle 1 + \angle 3 = 80°$.
Знайти $\angle 5$.

Довідковий відділ

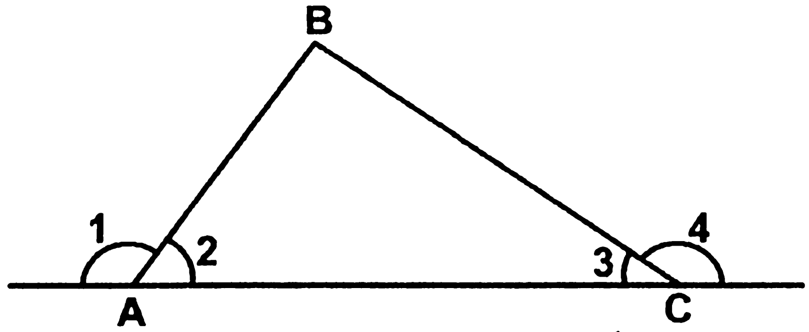
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

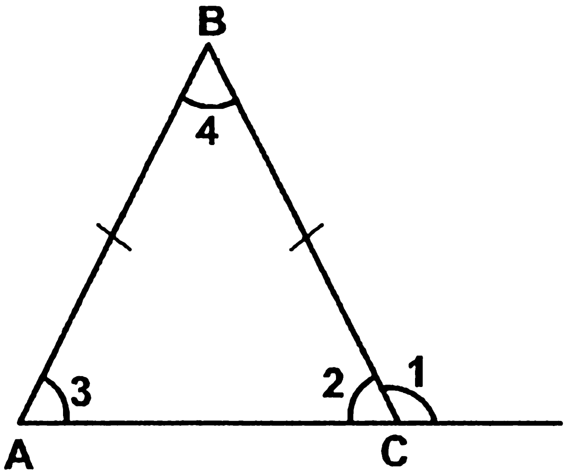


Сума внутрішніх кутів дорівнює 180°.

Зовнішній кут дорівнює сумі двох внутрішніх, не суміжних з ним.

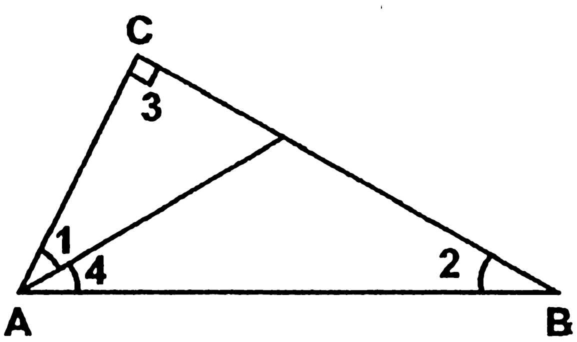


41. $\angle B = 150°$, $\angle 4$ на $10°$ більше $\angle 1$.
Знайти $\angle 2$.

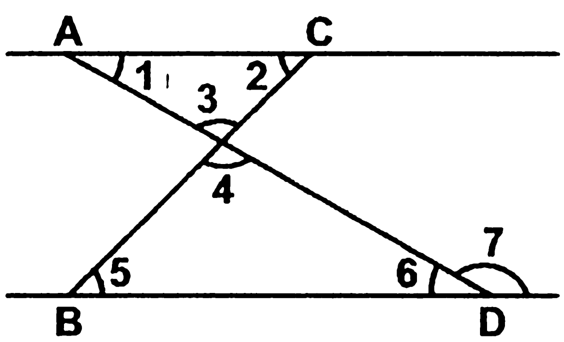


42. $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 3 + 20°$.
Знайти $\angle 3$.

43. $AB = BC$, $\angle 1 = 2\angle 3$.
Знайти $\angle 4$.



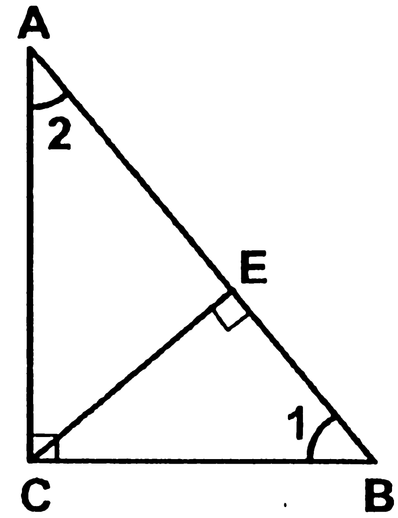
44. $\angle 3 = 90°$, $\angle 1 = \angle 4$,
$\angle CAB = \angle 2 + 70°$.
Знайти $\angle 1$.



45. $AC \parallel BD$, $\angle 4 + \angle 5 = 146°$,
$\angle 1 + \angle 2 = 84°$.
Знайти $\angle 5$.

46. $AC \parallel BD$, $\angle 7 = 136°$, $\angle 4 = 102°$.
Знайти $\angle 2$.

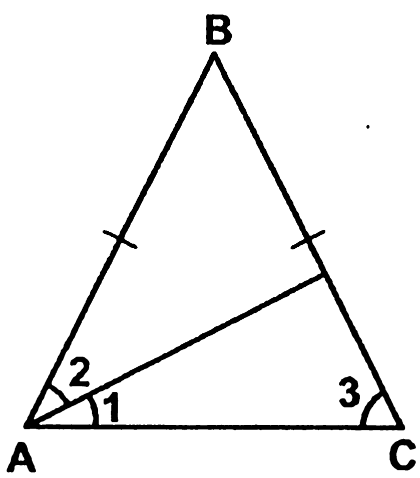
47. $AC \parallel BD$, $\angle 1 = 50°$, $\angle 4 = 70°$.
Знайти $\angle 5$.



48. $\angle ACB = 90°$, $CE \perp AB$, $\angle 1 = 2\angle 2$,
$AC + CE = 3$.
Знайти CE.

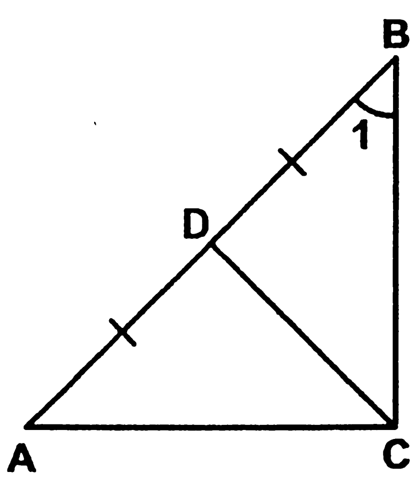
49. $\angle ACB = 90°$, $CE \perp AB$, $\angle A = 30°$,
$AB + BC = 9$.
Знайти BE.

50. $\angle ACB = 90°$, $CE \perp AB$,
$\angle ECB = 30°$, $BE = 1$.
Знайти AE.

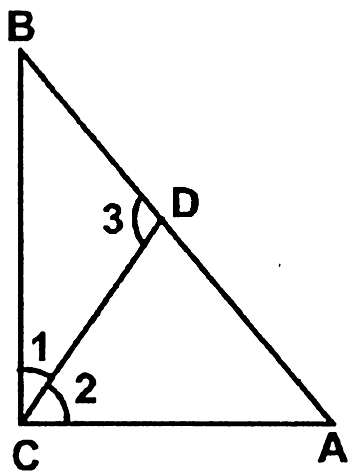


51. $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$,
$\angle 1 + \angle 3 = 45°$.
Знайти $\angle B$.

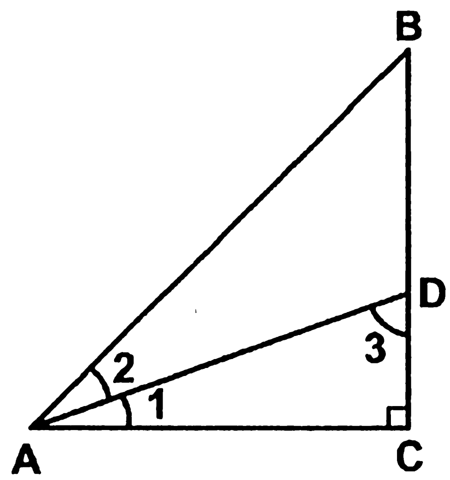
52. $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle B = 80°$.
Знайти $\angle 1 + \angle 3$.



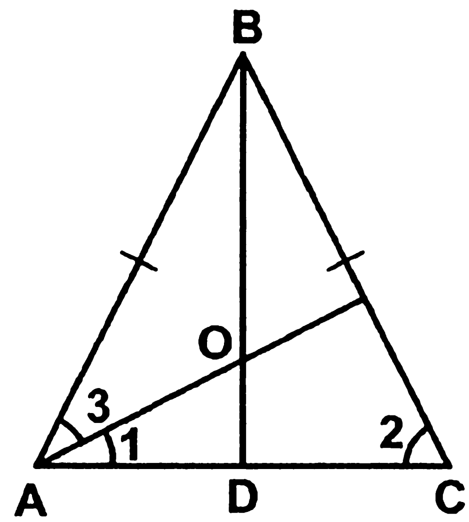
53. $\angle ACB = 90°$, $AD = DB$,
$\angle 1 = 50\% \angle ACB$.
Знайти $\angle CDB$.



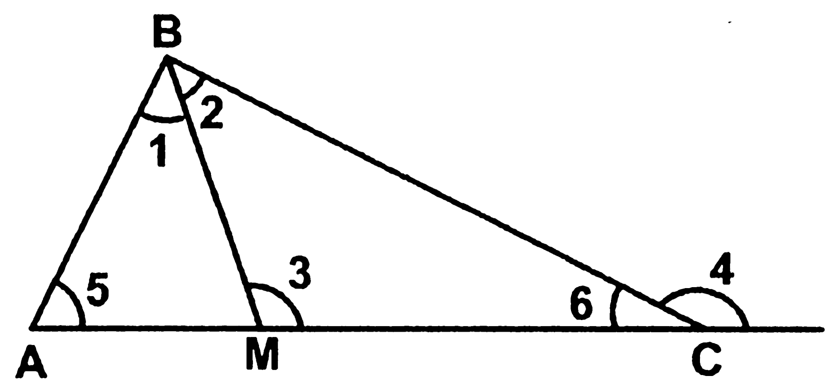
54. $\angle ACB = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = 105°$.
Знайти $AC : AB$.



55. $\angle ACB = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$, $AB = 2BC$.
Знайти $\angle 3$.



56. $AB = BC$, $AC \perp BD$, $\angle 1 = \angle 3$,
$\angle AOD - \angle 2 = 21°$.
Знайти $\angle B$.



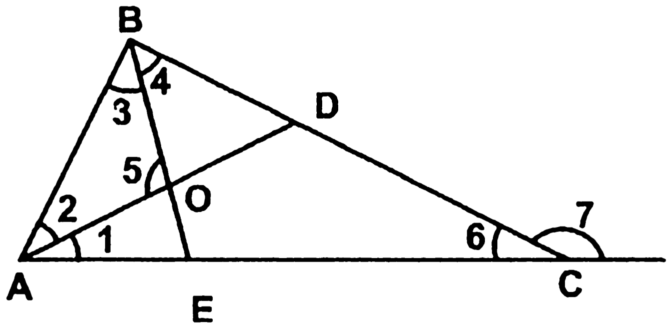
57. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 6 = 10°$, $\angle 3 = 100°$.
Знайти $\angle 5$.

58. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = 100°$, $\angle 4 = 135°$.
Знайти $\angle ABC$.

1. Вчись складати геометричні задачі

1. Визнач тему, на яку хочеш скласти задачу.
2. Знайди ідею, яку будеш використовувати при складанні задачі.
3. Корисно складати задачі, обернені складеним.
4. Складаючи одну задачу, шукай, як, використавши цю ідею, скласти наступну. Назвемо цей прийом ***нанизуванням*** на одну ідею серії задач.

Приклади складання серії задач за однією ідеєю



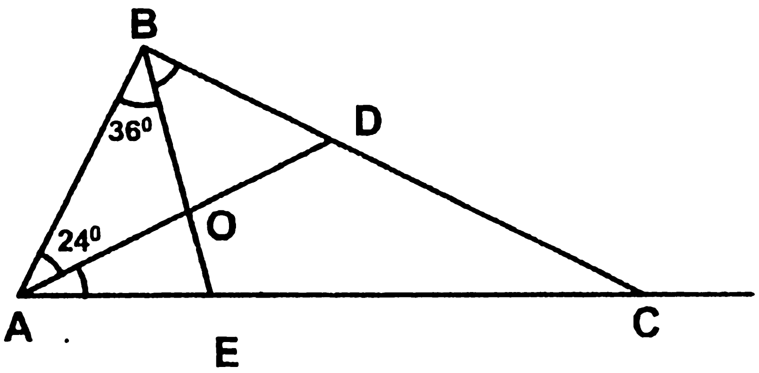
59. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = 116°$.
Знайти $\angle 6$.

Розв'язок.

$$\left(\begin{array}{l}\angle 2 + \angle 3 + \angle 5 = 180° \\ \angle 5 = 116°\end{array}\right) \Rightarrow (\angle 2 + \angle 3 = 64°)$$

$$\left(\begin{array}{l}\angle A + \angle B + \angle C = 180° \\ \angle A + \angle B = 2\,(\angle 2 + \angle 3) = 128°\end{array}\right) \Rightarrow (\angle C = 52°).$$

Складання задач від оберненого за етапами



1 етап.

Дано ΔABC. BE і AD — бісектриси. Введемо довільні позначення: $\angle 3 = 36°$, $\angle 2 = 24°$. Позначимо їх значення на малюнку (задача 59).

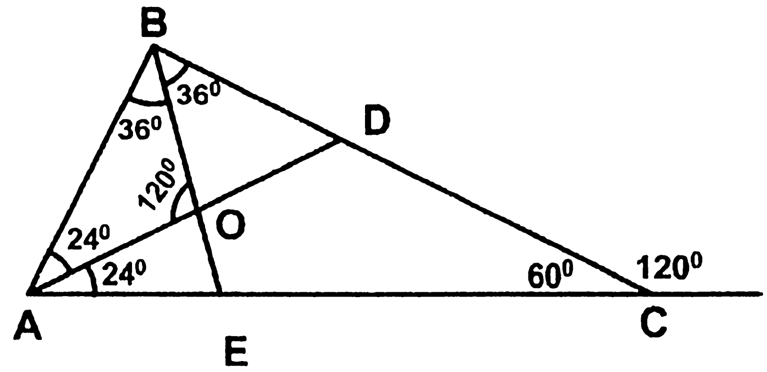
2 етап.

Знаходимо решту елементів трикутника і позначимо їх на малюнку.

$$\angle 5 = 180° - (36° + 24°) = 120°.$$

$$\angle 6 = 180° - 2\,(36° + 24°) = 60°.$$

$$\angle 7 = 180° - 60° = 120°.$$



3 этап.

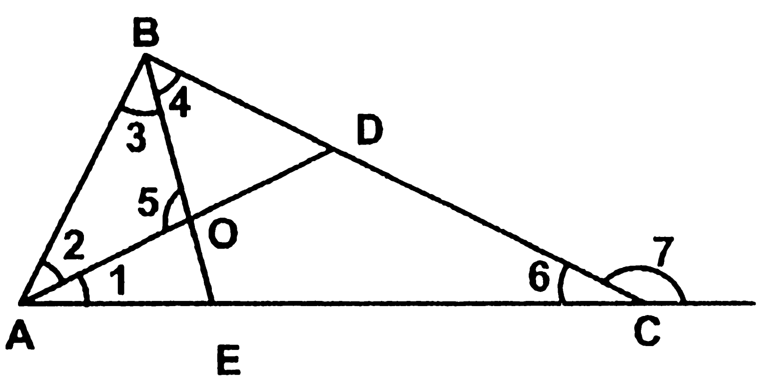
Складання задач з використанням знайдених співвідношень.

59а. $\angle 2 : \angle 3 = 2 : 3$, $\angle 7 = 120°$.
Знайти $\angle 5$.

59б. $\angle 7 = \angle 5$.
Знайти $\angle 6$.

59в. $\angle 2 + \angle 6 = 84°$, $\angle 3 + \angle 6 = 96°$.
Знайти $\angle 5$.

Приклади складання серії задач за заданою ідеєю



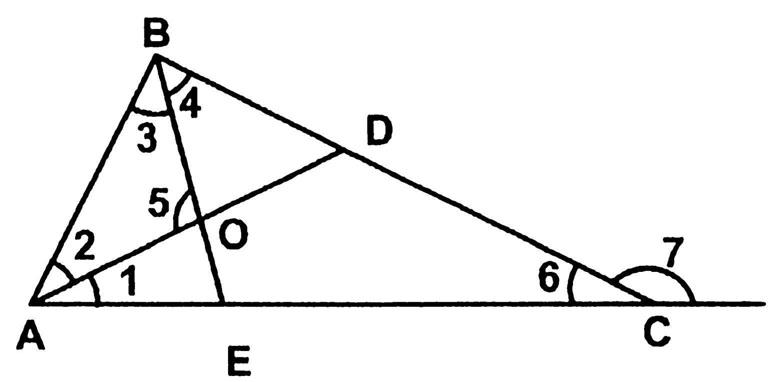
60. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 6 = 48°$.
Знайти $\angle 5$.

61. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 7 = 134°$.
Знайти $\angle 5$.

62. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle AOE = 52°$.
Знайти $\angle 7$.

63. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,
$\angle 1 : \angle 3 : \angle 6 = 1 : 2 : 3$.
Знайти $\angle AOE$.

64. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,
$\angle 1 : \angle ABC = 1 : 5$, $\angle 7 = 140°$.
Знайти $\angle AOE$.



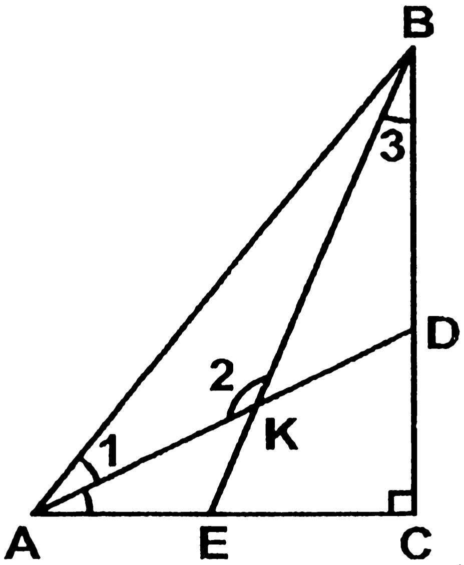
65. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,
$\angle 6 : \angle 3 = 2 : 3$, $\angle 1 = \angle 4 - 15°$.
Довести, що ΔABC — прямокутний.

66. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,
$\angle 1 : \angle 7 = 1 : 7$, $\angle 7 - \angle 4 = 81°$.
Довести, що ΔABC — прямокутний.

67. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,
$\angle 5 - \angle 6 = 72°$.
Знайти $\angle 7$.

68. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,
$\angle 5 + \angle 6 = 144°$.
Знайти $\angle 5$.

Приклади складання серії задач за заданою ідеєю



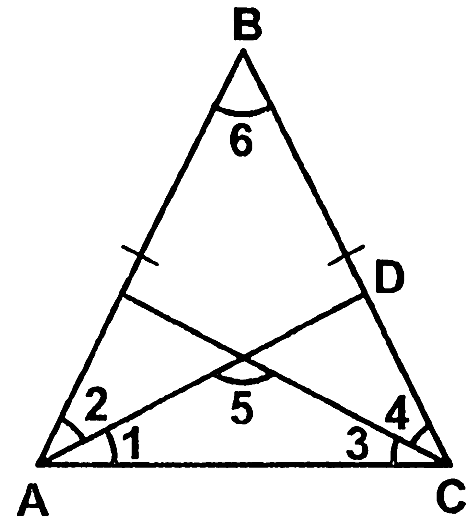
69. $\angle ACB = 90°$, AD і BE — бісектриси. *Довести*, що $\angle AKB = 135°$.

70. $\angle ACB = 90°$, AD і BE — бісектриси. $\angle EKD + \angle ABC = 195°$. *Знайти* $\angle ADC$.

71. $\angle ACB = 90°$, AD і BE — бісектриси. $\angle 2 + \angle 3 = 161°$. *Знайти* $\angle BAC$.

72. $\angle ACB = 90°$, AD і BE — бісектриси. $\angle 1 : \angle 2 = 1 : 9$, $AB = 14$. *Знайти* BC.

73. $\angle ACB = 90°$, AD і BE — бісектриси. $\angle BAC = \angle BKD$. *Довести*, що ΔABC — рівнобедрений.



74. $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = 3\,\angle 6$. *Довести*, що $\angle 1 = \angle 6$.

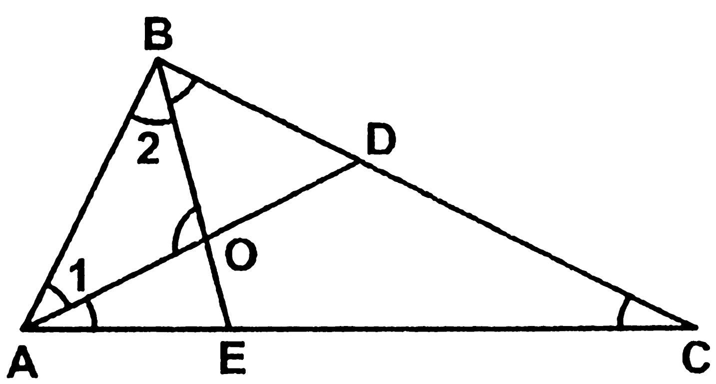
75. $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 1 : \angle 6 = 2 : 1$. *Знайти* $\angle 5$.

76. $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = 120°$, $DC = 7$. *Знайти* BC.

77. $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 4 + \angle 5 = 155°$. *Знайти* $\angle 6$.

78. $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 - \angle 6 = 46°$. *Знайти* $\angle 5$.

Складання залежностей між елементами трикутника



79. AD і BE — бісектриси. *Знайти* залежність між $\angle AOB$ і $\angle C$.

Розв'язок.

$$\angle AOB + \angle 1 + \angle 2 = 180°,$$

$$2\angle AOB + \underbrace{2(\angle 1 + \angle 2)}_{\angle A + \angle B} = 360°,$$

$$2\angle AOB = 360° - \underbrace{(\angle A + \angle B)}_{180° - \angle C},$$

$$2\angle AOB = 360° - 180° + \angle C,$$

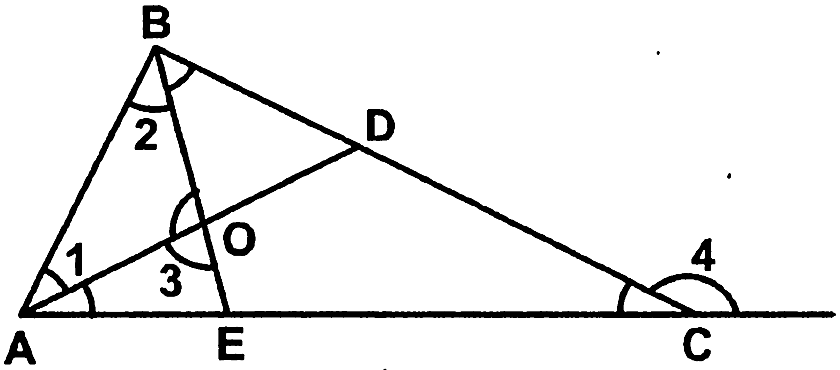
$$2\angle AOB = 180° + \angle C.$$

Відповідь: $2\angle AOB = 180° + \angle C$.

Одержана формула

$$2\angle AOB = 180^\circ + \angle C \qquad (*)$$

полегшує складання задач за заданою ідеєю.



80. AD і BE — бісектриси.
Довести, що $\angle AOB > 90^\circ$.

Розв'язок.
За формулою (*)

$$\angle C = 2\angle AOB - 180^\circ$$

$$(\angle C > 0) \Rightarrow (2\angle AOB - 180^\circ > 0),$$

звідки випливає, що $\angle AOB > 90^\circ$.

81. AD і BE — бісектриси,

$$\angle C : \angle AOB = 1 : 2.$$

Знайти $\angle C$.

Розв'язок.
Позначимо $\angle C = x$, тоді

$$\angle AOB = 2x.$$

Використовуючи формулу (*), дістанемо $4x = 180^\circ + x$, звідки $x = 60^\circ$.

Відповідь: 60°.

82. AD і BE — бісектриси,

$$\angle C : \angle AOB = 1 : 3.$$

Знайти $\angle 4 - \angle 3$.

Розв'язок.
Позначимо $\angle C = x$, тоді

$$\angle AOB = 3x.$$

Використовуючи формулу (*), дістанемо $6x = 180^\circ + x$, звідки

$$x = 36,\ \angle C = 36^\circ,\ \angle AOB = 108^\circ,$$

$$\angle 4 - \angle 3 = (180^\circ - \angle C) - (180^\circ - \angle AOB) = 72^\circ.$$

Відповідь: 72°.

83. AD і BE — бісектриси,

$$\angle AOB - \angle C = 58^\circ.$$

Знайти $\angle AOB + \angle C$.

Розв'язок.

$$2\angle AOB = 180^\circ + \angle C, \qquad (*)$$

$$\angle AOB + \underbrace{(\angle AOB - \angle C)}_{58^\circ} = 180^\circ,$$

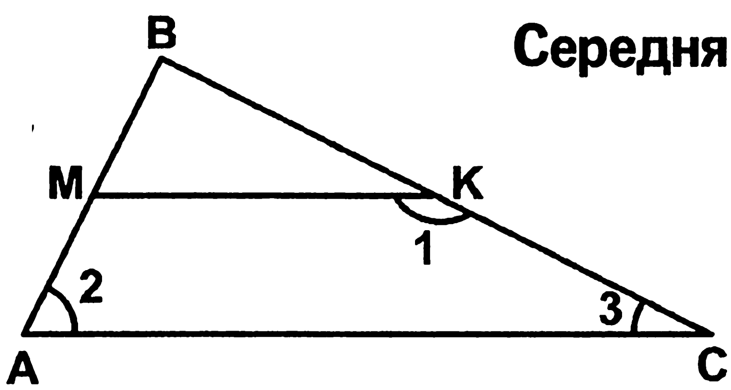
звідки $\angle AOB = 122^\circ$.

$$\angle C = 122^\circ - 58^\circ = 64^\circ,$$

$$\angle AOB + \angle C = 122^\circ + 64^\circ = 186^\circ.$$

Відповідь: 186°.

Середня лінія трикутника



84. $AM = MB,\ BK = KC,\ AB + BC = 8,\ KM = 2.$
Знайти P_{ABC}.

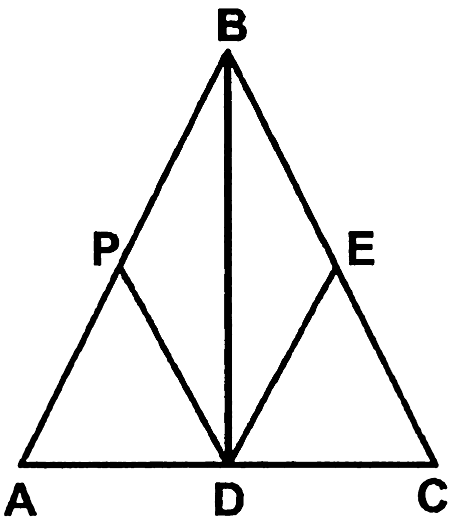
85. $AM = MB,\ BK = KC,\ BK = AM + 2.$
Знайти $BC - AB$.

86. $AM = MB,\ BK = KC,\ BM = 17,\ BK = 20,\ P_{ABC} = 116.$
Знайти MK.

87. $AM = MB,\ BK = KC,\ MB : BK : MK = 6 : 7 : 8,\ P_{ABC} = 168.$
Знайти AC.

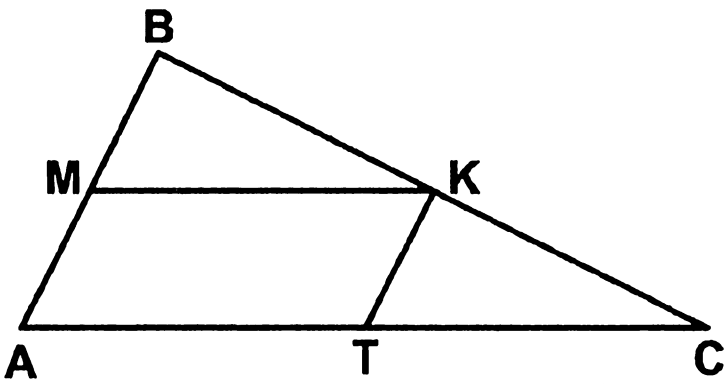
88. $AM = MB,\ BK = KC,\ \angle 1 : \angle 2 = 5 : 2,\ \angle 3 = 30^\circ,\ MB = 4.$
Знайти $AC + AB$.

89. AK — медіана, $MK \parallel AC$, $AB + AC = 40,\ P_{AMK} = 43.$
Знайти AK.

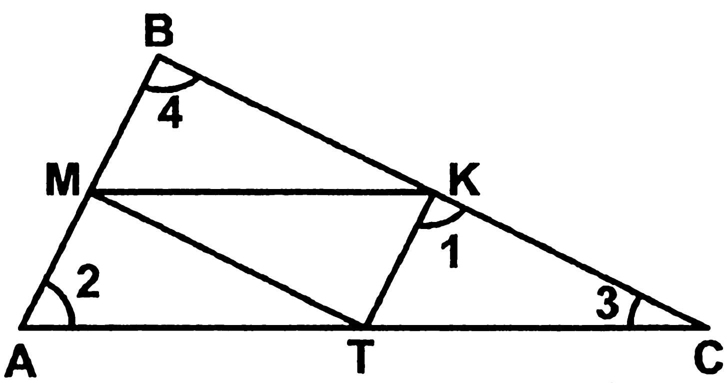


90. $AB = BC$, $AD = DC$, $BE = EC$, $DE + AB + BC + EC = 6$.
Знайти DE.

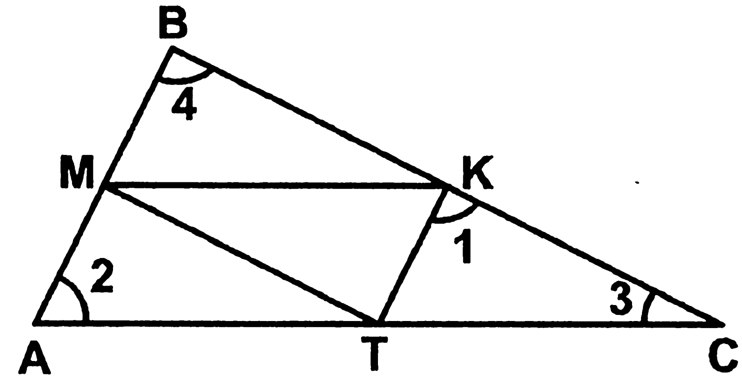
91. $AB = BC$, $BE = EC$, $AP = BP$, $BD \perp AC$, $DP + DE = 2$, $AC = 0{,}6$.
Знайти P_{ABC}.



92. $AM = MB$, $BK = KC$, $KT \parallel AB$, $BC = 12$, $P_{ABC} = 40$.
Знайти P_{AMKT}.



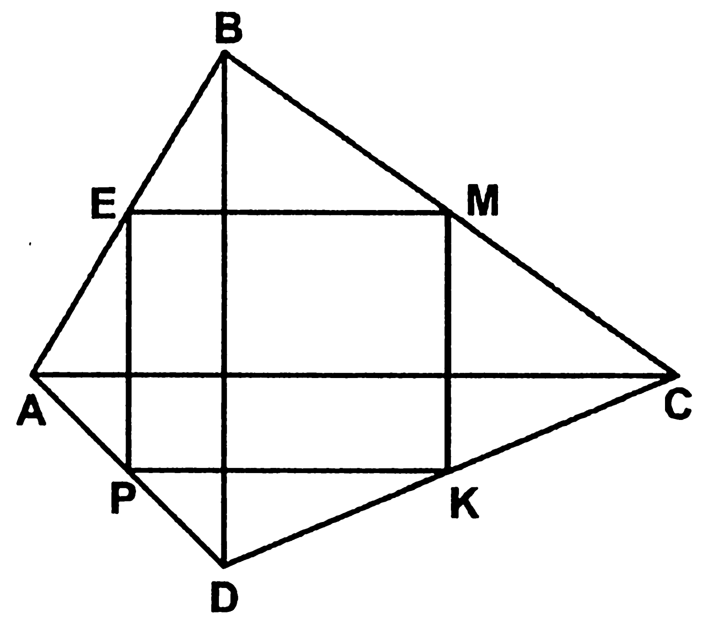
93. $AM = MB$, $BK = KC$, $KT \parallel AB$, $P_{ABC} = 42$.
Знайти P_{MKT}.



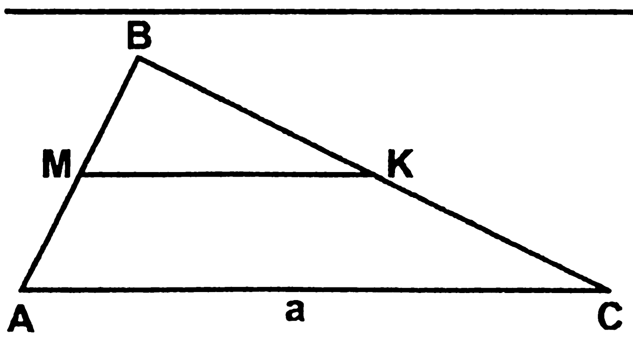
94. $AM = MB$, $BK = KC$, $KT \parallel AB$, $MK = KT$, $MT = 16$, $\angle MKT = 60°$.
Знайти P_{ABC}.

95. $AM = MB$, $BK = KC$, $KT \parallel AB$, $MK = KT$, $\angle 2 = 60°$.
Знайти $\angle 1$.

96. $AM = MB$, $BK = KC$, $KT \parallel AB$, $BC = 18$, $MK : MT : KT = 5 : 6 : 7$.
Знайти AB.

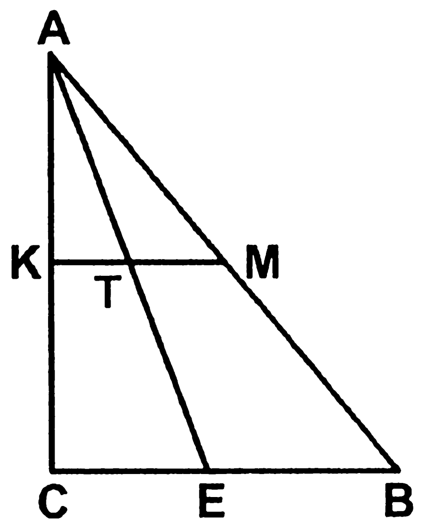


97. $ABCD$ — чотирикутник.
$AE = BE$, $CM = BM$, $AP = DP$, $CK = DK$, $BD \perp AC$.
Довести, що $PEMK$ — прямокутник.

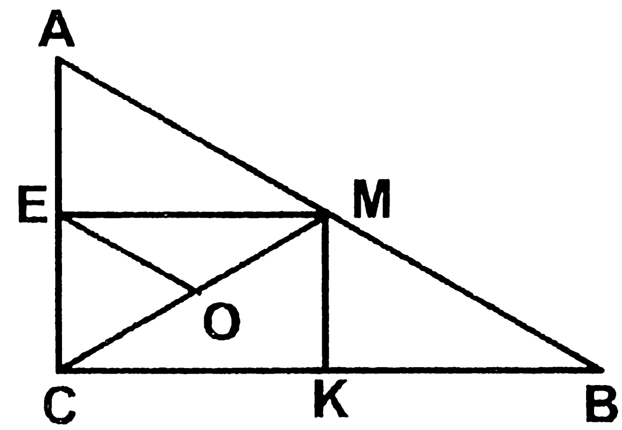


Довідковий відділ

1. Середня лінія трикутника — відрізок прямої, що сполучає середини двох сторін.
2. $MK = \frac{1}{2}a$, $MK \parallel AC$.

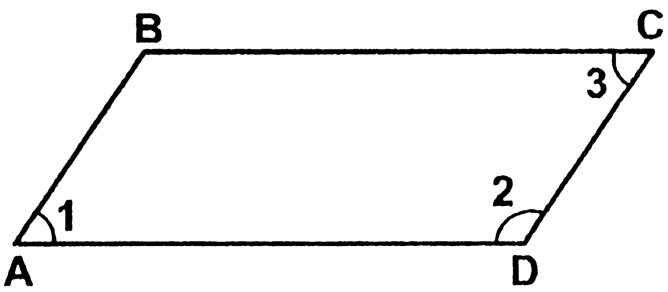


98. ΔABC, $\angle ACB = 90°$, $AC = BC$, $CE = BE$, $AT = TE$, $AK = KC$, $TM = 6$.
Знайти AC.



99. ΔABC, $\angle ACB = 90°$, $AM = MB$, $AE = CE$, $CO = OM$, $CO + AB = 5$.
Знайти $CM + EO$.

Паралелограм



100. $\angle 2 - \angle 1 = 24°$.
Знайти $\angle 1$.

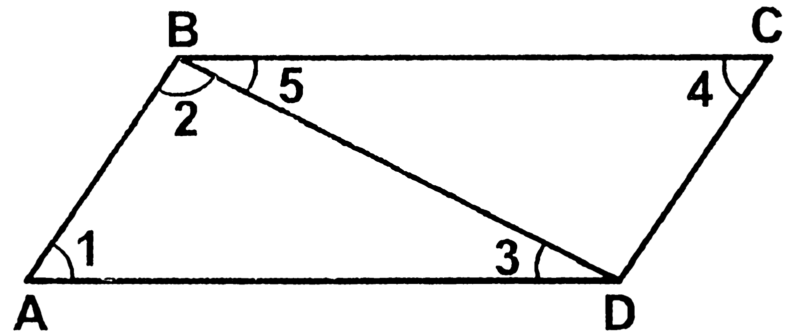
101. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 250°$.
Знайти $\angle 2 - \angle 1$.

102. $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2$.
Знайти $\angle 1$.

103. $AD = AB + 3$, $P_{ABCD} = 34$.
Знайти AD.

104. $AD = 3AB$, $P_{ABCD} = 72$.
Знайти AD.

105. $AD + AB = 11$, $AD - 2AB = 2$.
Знайти $AD - AB$.

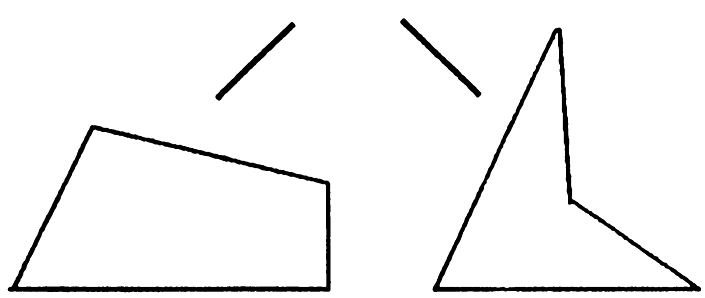


106. $\angle 1 + \angle 3 = 80°$,
$\angle 4 + \angle 2 = 140°$.
Знайти $\angle 1$.

107. $\angle ABC - \angle 1 = 60°$,
$\angle 2 = 2\angle 5$.
Знайти $\angle 1 - \angle 5$.

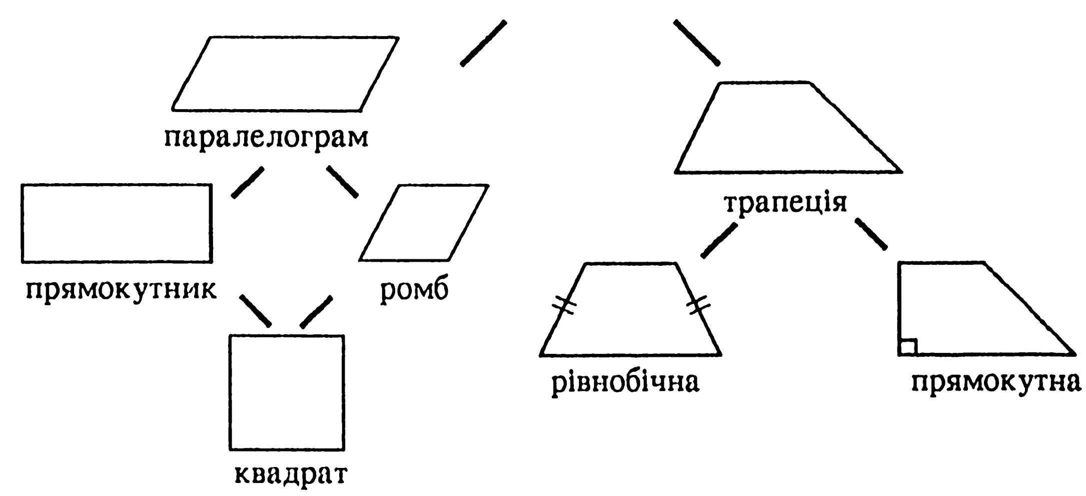
Довідковий відділ

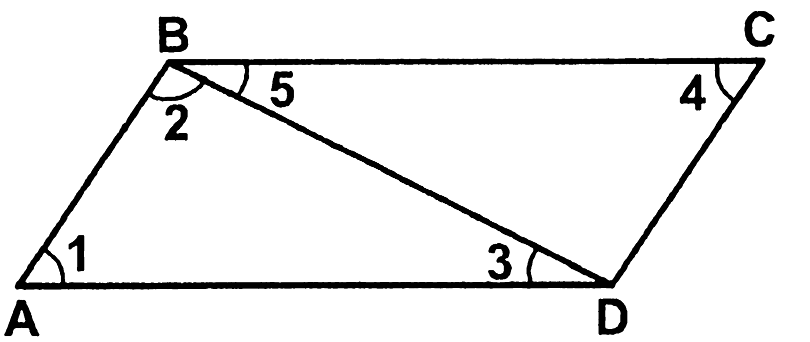
ЧОТИРИКУТНИКИ



опуклі неопуклі

Класифікація опуклих чотирикутників





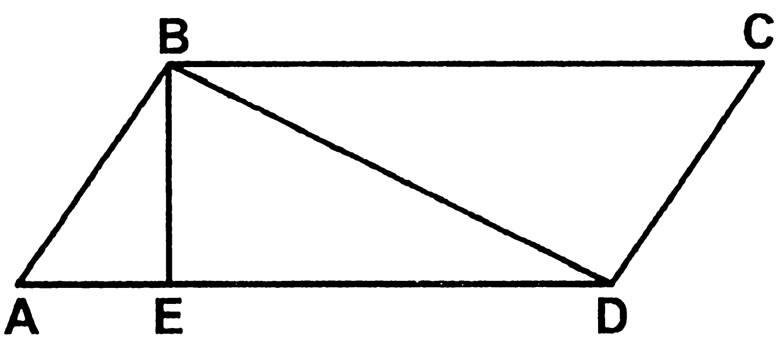
108. $\angle 2 - \angle 3 = 70°$, $\angle 2 - \angle 1 = 80°$.
Знайти $\angle 1$.

109. $BD \perp AB$, $\angle 1 = 20°$.
Знайти $\angle 5$.

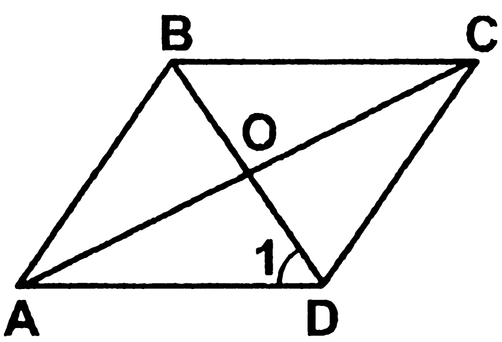
110. $BD \perp AB$, $\angle 3 = 29°$.
Знайти $\angle 1 + \angle 5$.

111. $BD \perp AB$, $AB = BD$.
Знайти $\angle 1 + \angle 2 + \angle ADC$.

112. $\angle ABC + \angle A + \angle 2 = 270°$.
Знайти $\angle A + \angle 5$.

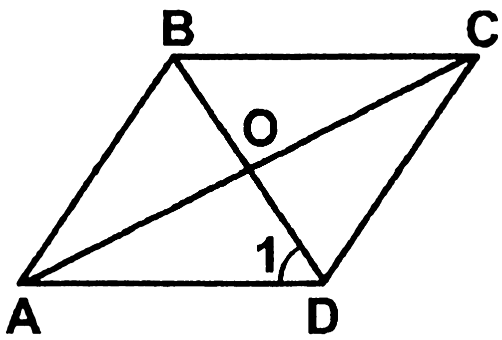


113. $BE \perp AD$, $\angle ABC = 150°$,
$P_{ABCD} = 24$, $BE = 2$.
Знайти BC.



114. $P_{ABCD} - P_{ACD} = 8$, $AO = 2$.
Знайти P_{ABCD}.

115. $P_{ABO} - P_{BOC} = 6$.
Знайти $AB - BC$.



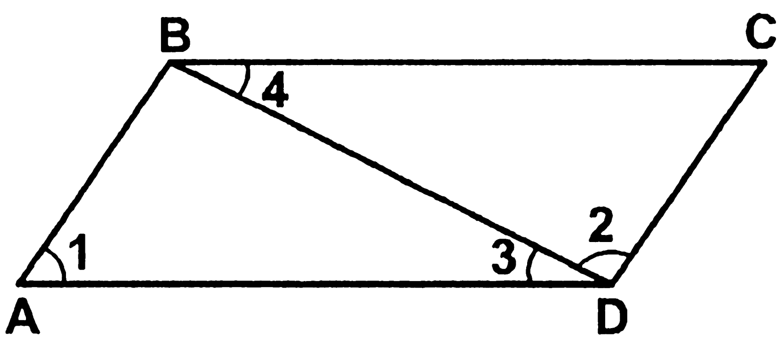
116. $AC + BD = 20$,
$AD + BC = 16$.
Знайти P_{AOD}.

117. $P_{ABCD} = 38$, $AO = 12$.
Знайти P_{ADC}.

118. $BD \perp AC$, $AB = 2BO$.
Знайти $\angle BAC + \angle ADC$.

119. $\angle 1 + \angle ABC = 180°$,
$2AB + AD = 12$.
Знайти P_{ABD}.

120. $P_{AOB} = P_{AOD}$.
Знайти $\angle AOD$.



121. $\angle 1 = 29°$, $\angle 2 = 93°$.
Знайти $\angle 4$.

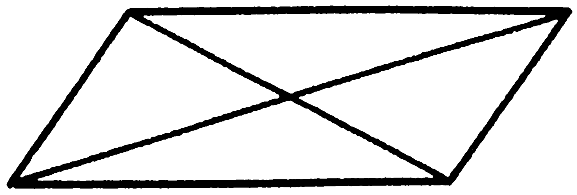
122. $2\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$.
Знайти $\angle 3$.

123. $\angle 4 : \angle 2 : \angle 1 = 5 : 18 : 13$.
Довести, що $BD \perp AB$.

124. $P_{ABCD} = 70$, $P_{ABD} = 60$.
Знайти BD.

125. $P_{ABCD} - P_{ABD} = 18$, $AB = 18$.
Довести, що ΔABD — рівнобедрений.

Довідковий відділ



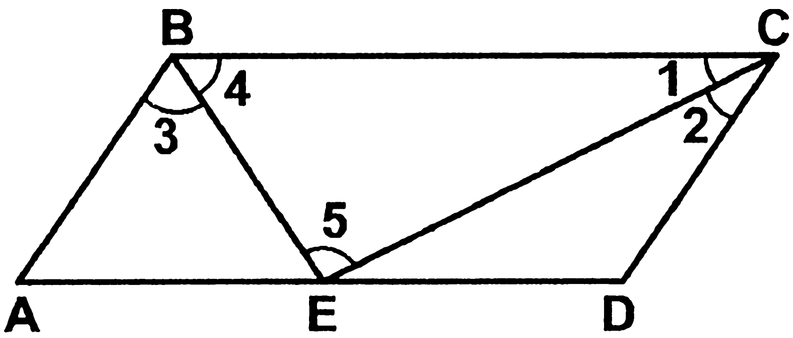
паралелограм

Протилежні сторони попарно паралельні.
Діагоналі у точці перетину діляться пополам.
Сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°.

2. Вчись складати геометричні задачі

Продовжуємо використовувати прийом нанизування на одну ідею серії задач.

Паралелограм



126. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.
Довести, що $\angle 5 = 90°$.

Розв'язок.

$$\angle B + \angle C = 180°,$$

$$2(\angle 4 + \angle 1) = 180°,$$

звідки $\angle 4 + \angle 1 = 90°$,

$$\angle 5 = 180° - (\angle 4 + \angle 1) =$$

$$= 180° - 90° = 90°.$$

127. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,
$\angle 5 + \angle 3 = 150°$, $BC = 12$.
Знайти BE.

Розв'язок.

Якщо $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, то $\angle 5 = 90°$ (задача 126).

$$\begin{pmatrix} \angle 5 + \angle 3 = 150° \\ \angle 5 = 90° \end{pmatrix} \Rightarrow (\angle 3 = \angle 4 = 60°.$$

$$\angle 1 = 90° - \angle 4;\ \angle 1 = 30°.$$

$$\begin{pmatrix} \angle 5 = 90° \\ \angle 1 = 30° \end{pmatrix} \Rightarrow \left(BE = \frac{1}{2} BC = 6\right).$$

128. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,
$\angle 3 - \angle 2 = 20°$.
Знайти $\angle A$.

Розв'язок.

Якщо $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, то $\angle 5 = 90°$.

$$\begin{cases} \angle 4 - \angle 1 = 20°, \\ \angle 4 + \angle 1 = 90°, \end{cases} \Rightarrow (2\angle 4 = 110°).$$

$$\angle A = 180° - 110° = 70°.$$

129. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AD = 20$,
$BE = 10$, $DC + BC = 34$.
Знайти ED.

Розв'язок.

$$DC + BC = 34,\ BC = AD = 20$$

за умовою.

$$DC = AB = 14.\ \angle 4 = \angle 3 = \angle BEA.$$

ΔABE — рівнобедрений.

$$AE = AB = 14.$$

Тоді $ED = AD - AE = 20 - 14 = 6$.

Відповідь: 6.

130. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = 6$,
$\angle A : \angle 5 = 2 : 3$.
Знайти P_{ABCD}.

Розв'язок.

Якщо $\angle 1 = \angle 2$ та $\angle 3 = \angle 4$, то $\angle 5 = 90°$ (задача 126). За умовою $\angle A : \angle 5 = 2 : 3$. Позначимо

$$\angle A = 2x,\ \angle 5 = 3x.\ 90° = 3x,$$

звідки $x = 30°$, $\angle A = 60°$.

$$\angle 3 = \angle 4 = \angle BEA = 60°.$$

$$\begin{cases} AB = BE = 6, \\ \angle 1 = 30°, \\ \angle 5 = 90° \end{cases} \Rightarrow (BC = 2BE = 12),$$

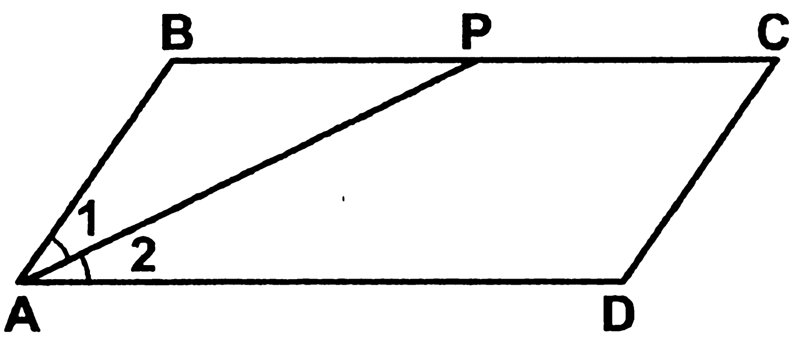
$$P_{ABCD} = 36.$$

Відповідь: 36.

131. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.
Довести, що $\angle A = 2\angle CED$.

132. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,
$\angle 2 : \angle 3 = 1 : 2$, $AD = 14$.
Знайти P_{ABE}.

133. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = 5$,
$\angle BEA - \angle 1 = \angle 2$.
Знайти ED.



134. $\angle 1 = \angle 2$, $BP = 7$, $PC = 3$.
Знайти P_{ABCD}.

135. $\angle 1 = \angle 2$, $AP = 15$, $DC = 9$.
Знайти P_{ABP}.

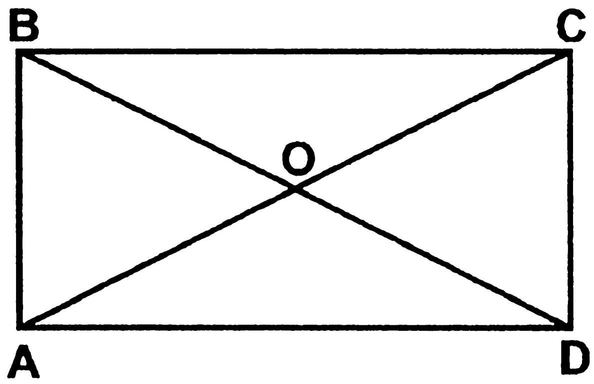
136. $\angle 1 = \angle 2$, $P_{ABCD} = 52$,
$PC = AD - 8$.
Знайти AD.

137. $\angle 1 = \angle 2$, $P_{ABCD} = 20$, $AD = 3PC$.
Знайти AD.

138. $\angle 1 = \angle 2$, $AD = AB + 2$,
$AB = PC - 1$.
Знайти P_{ABCD}.

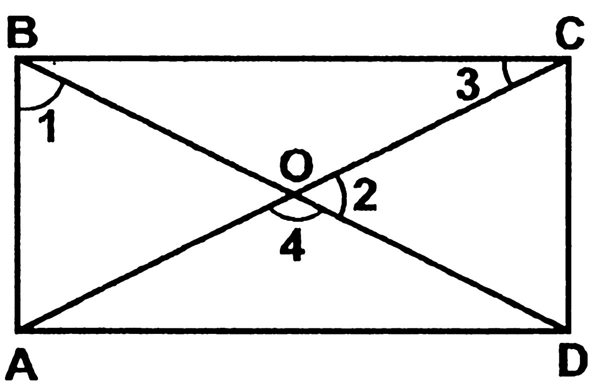
139. $\angle 1 = \angle 2$, $AP = AB + 3$,
$AD = AP$, $P_{ABCD} = 26$.
Знайти P_{APCD}.

Прямокутник



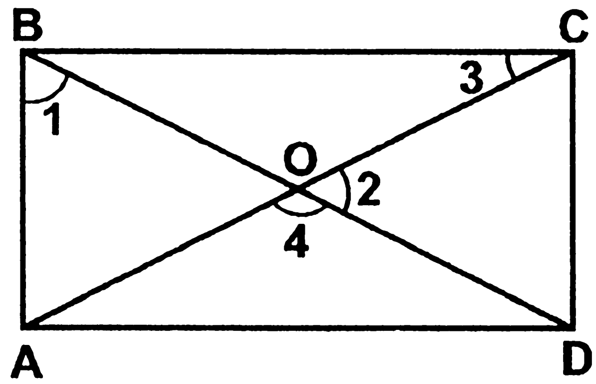
140. $P_{ABD} - P_{AOD} = 4$.
Знайти AB.

141. $P_{AOD} + P_{BOC} = 64$, $AD + BC = 24$.
Знайти AC.



142. $\angle 1 = 57°$.
Знайти $\angle 2$.

143. *Довести,* що $\angle 1 + \angle 3 = 90°$.



144. $\angle 2 + \angle 3 = 63°$.
Знайти $\angle 1$.

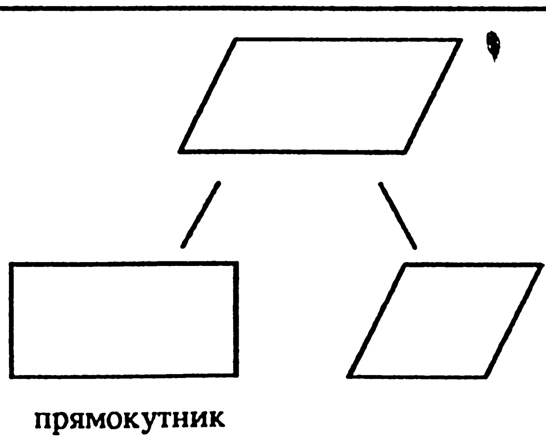
145. $\angle 4 = 4\angle 2$.
Знайти $\angle 1$.

146. $\angle 3 : \angle 4 = 1 : 4$.
Довести, що ΔAOB — рівносторонній.

147. $\angle 4 - \angle 3 = 90°$, $AC = 10$.
Знайти P_{COD}.

148. $\angle 1 + \angle 2 = 120°$, $P_{AOB} = 12$.
Знайти AB.

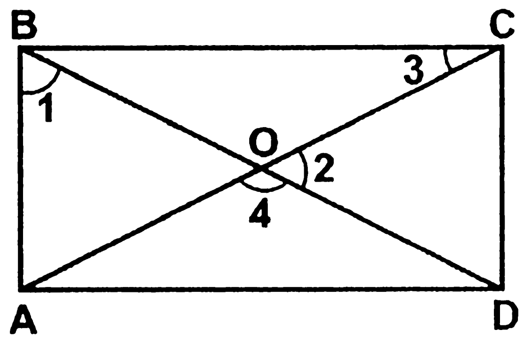
149. $\angle 4 = 3\angle 3$.
Знайти $\angle 1$.



Довідковий відділ

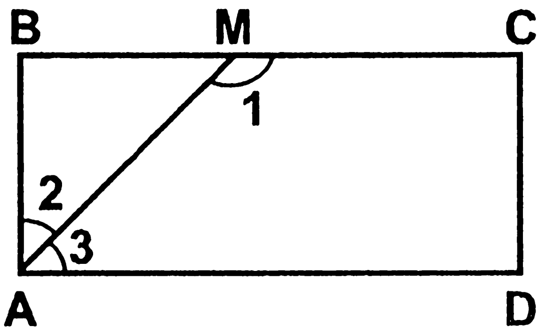
Прямокутник — паралелограм, у якого є прямий кут.

Діагоналі прямокутника рівні.



150. $\angle 1 : \angle 3 = 7 : 2$.
Знайти $\angle 4$.

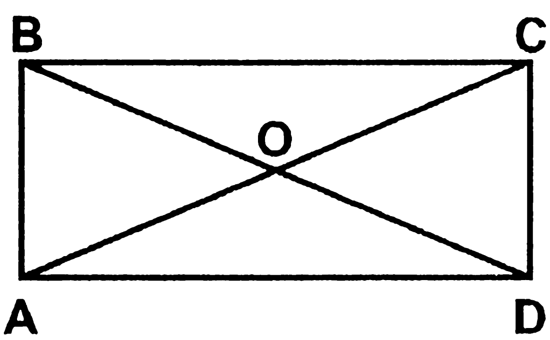
151. $AC : CD = 2 : 1$.
Довести, що $\angle 1 = \angle 2$.



152. $AB = BM$.
Знайти $\angle 1$.

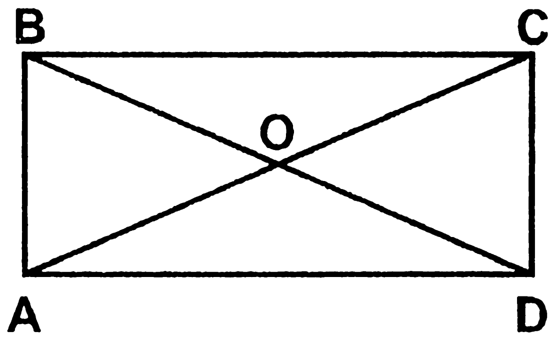
153. $AB = BM$, $\angle 1 + \angle D = 225°$, $AD = 10$.
Знайти $AB + MC$.

154. $\angle 3 = \angle 2$, $BM = 3$, $MC = 7$.
Знайти P_{ABCD}.

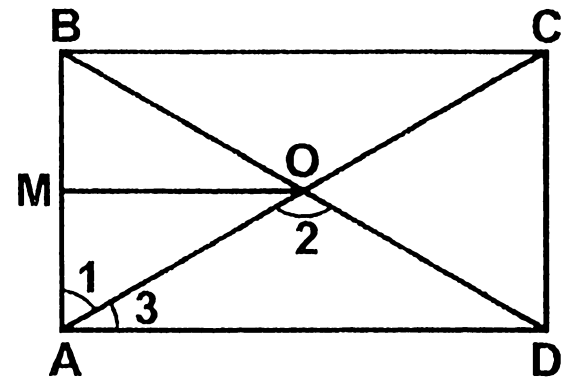


155. $P_{AOD} = 18$, $AC + BD = 22$.
Знайти BC.

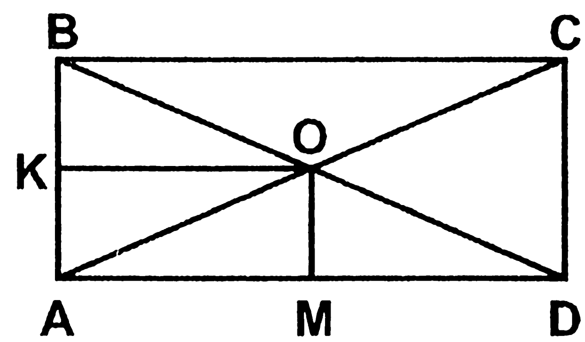
156. $P_{ACD} = 49$, $P_{ABCD} = 62$.
Знайти AO.



157. $P_{COD} = 30$, $AC + BD = 40$.
Знайти $\angle AOD$.



158. $AM = MB$, $\angle 1 + \angle 2 = 198°$.
Знайти $\angle 3$.



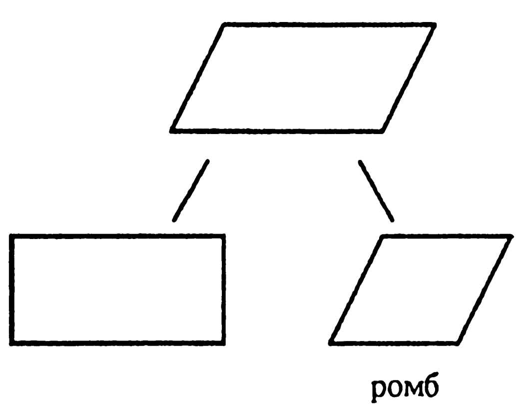
159. $OM \perp AD$, $OM = 7$, $AD = 17$.
Знайти P_{ABCD}.

160. $OM \perp AD$, $P_{OMD} = 18$, $P_{ABCD} = 48$.
Знайти AC.

161. $OM \perp AD$, $OK \perp AB$, $P_{ABCD} = 100$.
Знайти $OM + OK$.

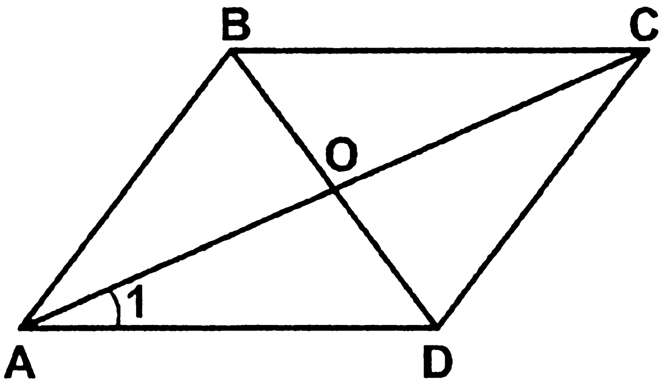
162. $OM \perp AD$, $OK \perp AB$,
$OK : OM = \frac{1}{6} : \frac{1}{8}$, $AD = 24$.
Знайти P_{ABCD}.

Довідковий відділ



Ромб — паралелограм, у якого усі сторони рівні. Діагоналі взаємно перпендикулярні і ділять кути навпіл.

Ромб



163. $P_{ABCD} = 40$, $BD + AC = 28$.
Знайти P_{AOB}.

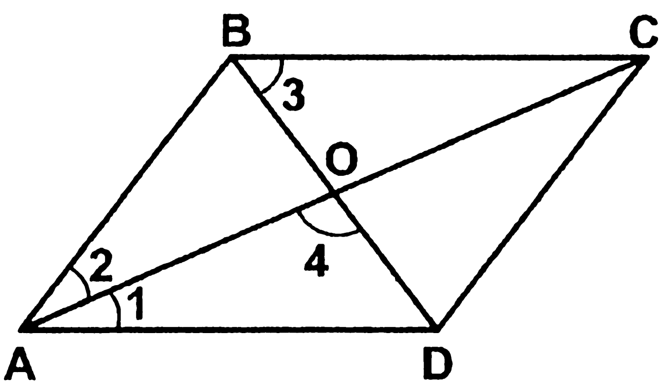
164. $P_{AOB} = 36$. $BD + AC = 42$.
Знайти AD.

165. $P_{AOD} = 14$, $P_{ACD} = 20$.
Знайти BD.

166. $\angle ADC = 7\angle 1$.
Знайти $\angle BAD$.

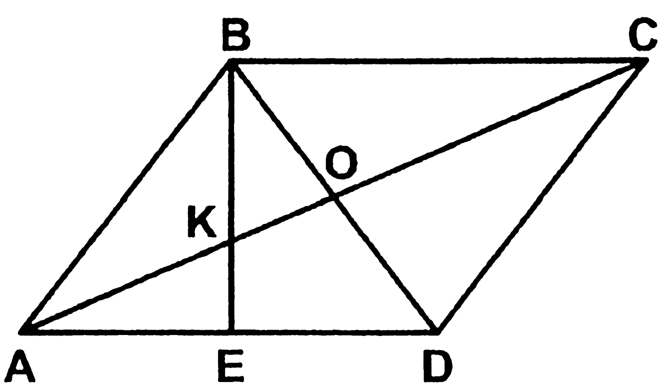
167. $P_{ABCD} - BD = 3AD$.
Знайти $\angle BAD$.

168. $P_{ABC} - P_{AOD} = 6$.
Знайти $AB + AO - DO$.



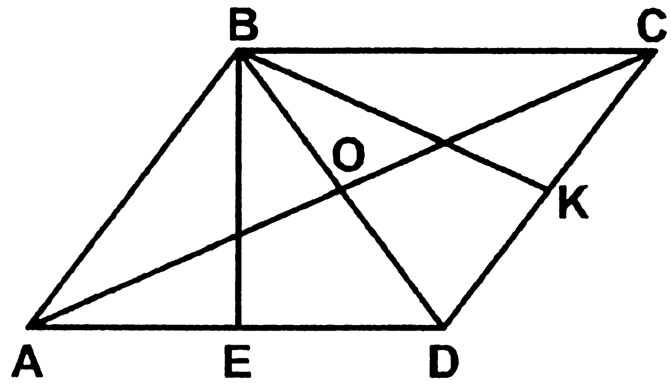
169. $\angle BAD = 28°$.
Знайти $\angle 3$.

170. *Довести*, що $\angle 1 + \angle 3 = \angle 4$.

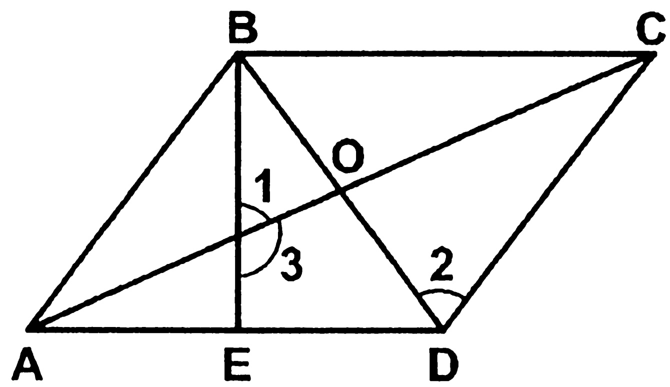


171. $BE \perp AD$, $AC = 2BE$, $DE = 2$.
Знайти P_{ABCD}.

172. $BE \perp AD$, $\angle BKO + \angle ABC = 180°$.
Знайти $\angle BKA$.



173. $BE \perp AD$, $BK \perp DC$,
$P_{ABCD} = 4\,(BE + BK)$.
Знайти $\angle KBE$.



174. $BE \perp AD$, $\angle 1 = 57°$.
Знайти $\angle ABC$.

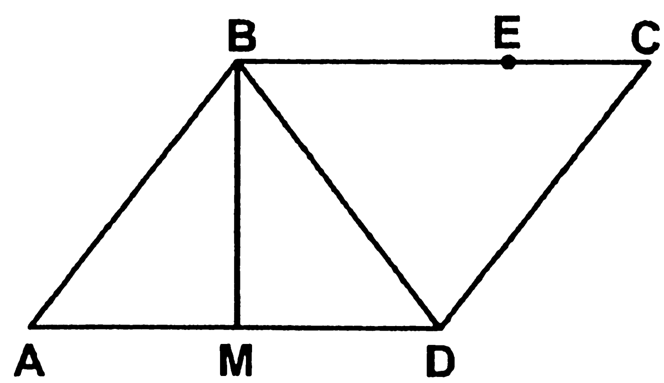
175. $BE \perp AD$, $\angle ADC = 2\angle 1$.
Довести, що ΔABD — рівносторонній.

176. $BE \perp AD$, $\angle 3 = 3\angle 1$.
Довести, що ΔAOD — рівнобедрений.

177. $BE \perp AD$, $AB = BD$.
Знайти $\angle 1$.

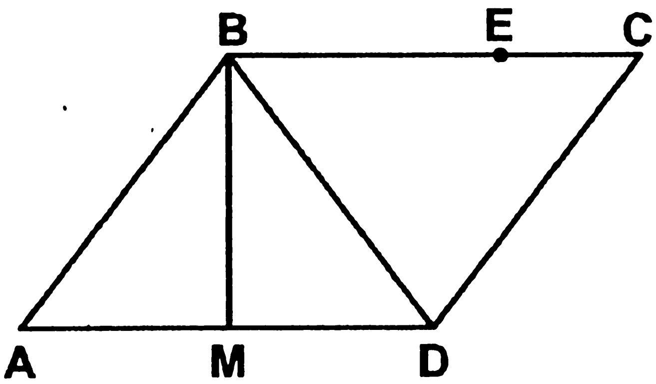
178. $BE \perp AD$, $\angle 2 = 60°$.
Знайти $\angle 1$.

179. $BE \perp AD$, $\angle 3 = 123°$.

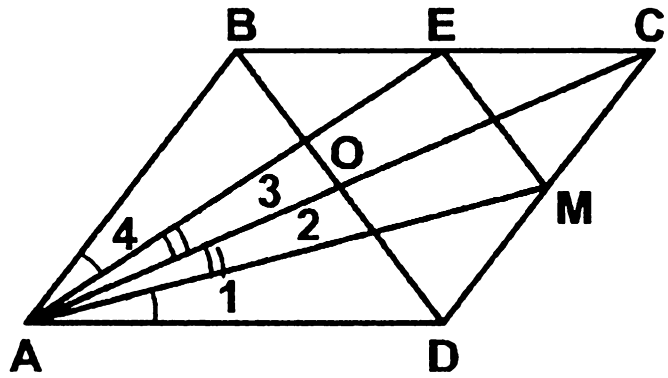


Знайти $\angle ADC$.

180. $BM \perp AD$, $CE : BE = 1 : 3$,
$P_{ABCD} - CE = 45$, $BD = 4EC$.
Знайти MD.

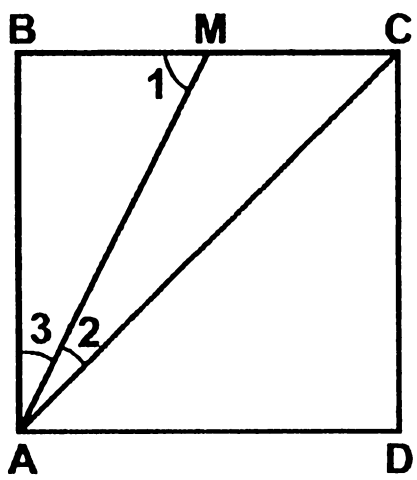


181. $BM \perp AD$, $CE : BE = 1 : 6$,
$BM = 3{,}5\ CE$.
Знайти $\angle ABD$.



182. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,
$\angle ABC = \dfrac{7}{4} \angle AEM$.
Знайти $\angle ABC$.

Квадрат



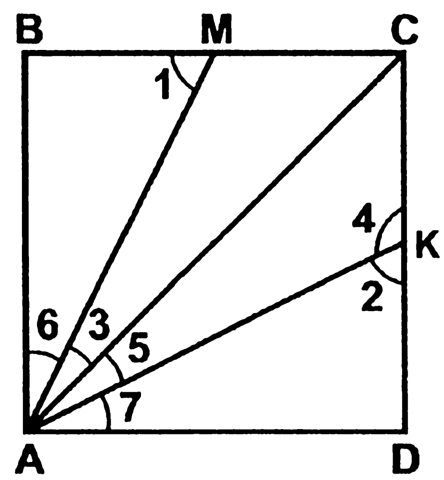
183. $\angle 1 = 72°$.
Знайти $\angle 2$.

184. *Довести*, що $\angle 1 - \angle 2 = 45°$.

185. $AM = 2BM$.
Знайти $\angle 2$.

186. $\angle 2 : \angle 1 = 1 : 4$, $AM = 3$.
Знайти BM.

187. $\angle 1 : \angle 2 = 11 : 2$.
Знайти $\angle 3$.



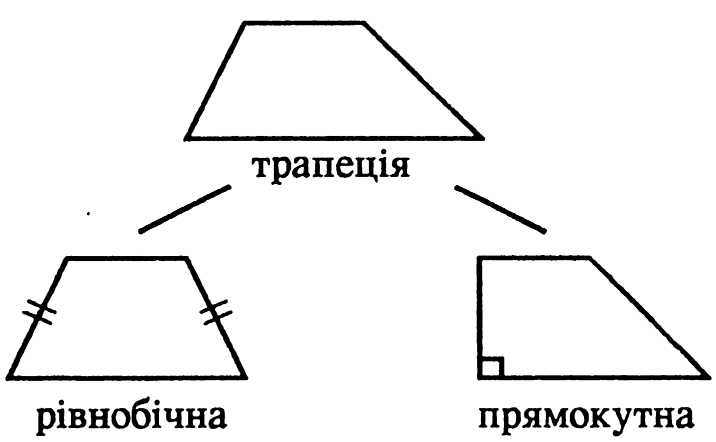
188. $BM = DK$, $\angle MAK = 62°$.
Знайти $\angle 4$.

189. M і K — точки, що належать сторонам BC і CD. $\angle 1 = 75°$, $\angle 2 = 63°$.
Знайти $\angle MAK$.

190. $\angle 3 = 4\angle 5$, $\angle 7 = 7\angle 6$.
Знайти $\angle 2$.

191. M і K — точки, що належать сторонам BC і CD.
$\angle 1 : \angle 5 = 2 : 1$, $\angle 3 = 21°$.
Знайти $\angle 2$.

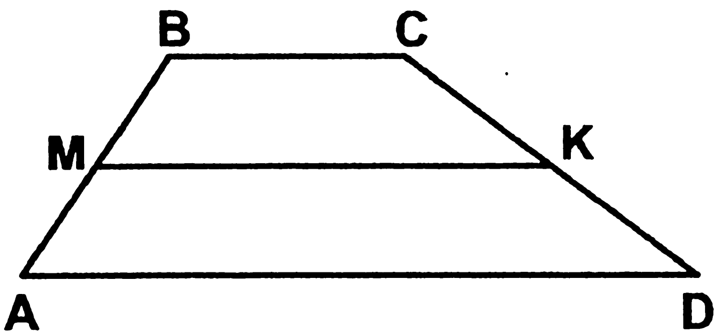
Довідковий відділ



Трапеція — чотирикутник, у якого дві протилежні сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Сума кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°.

Трапеція



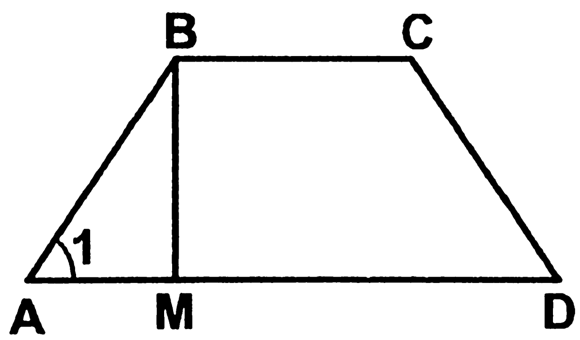
192. $BM = MA$, $CK = KD$, $MK = 5$, $BC = 2$.
Знайти AD.

193. $BM = MA$, $CK = KD$, $AD = 4BC$, $MK = 10$.
Знайти BC.

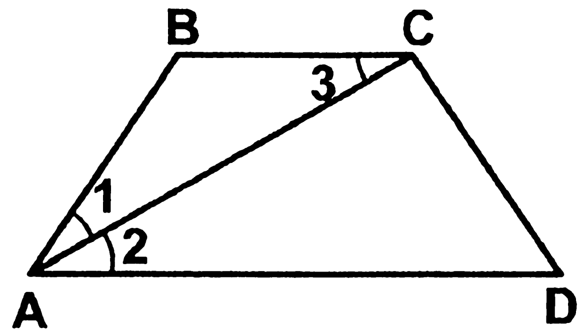
194. $BM = MA$, $CK = KD$, $BC : AD = 1 : 3$, $MK = 16$.
Знайти AD.

195. $BM = MA$, $CK = KD$, $2MK - AD = 1$.
Знайти BC.

196. $BM = MA$, $CK = KD$, $MK : AD = 5 : 8$, $AD - BC = 12$.
Знайти MK.

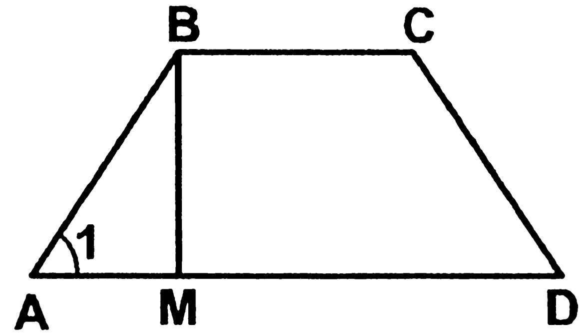


197. $AB = CD$, $BM \perp AD$, $\angle 1 = 45°$, $AD + BC = 24$, $BM = 5$.
Знайти BC.



198. $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 18$, $AB = 14$.
Знайти довжину середньої лінії трапеції.

199. $AB = BC = CD$, $\angle 1 + \angle D = 90°$.
Знайти $\angle B$.



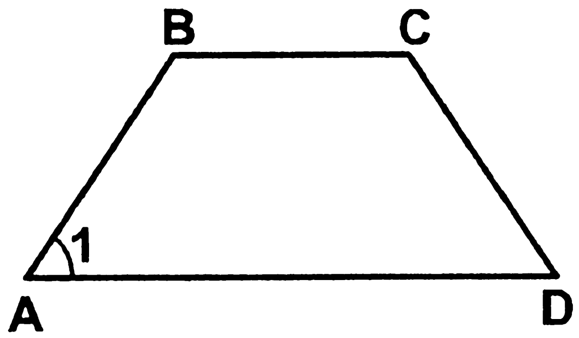
200. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $BM = MA$, $CK = KD$.
Довести, що $DE = MK$.

201. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $BM = MA$, $CK = KD$, $DE = 6AE$.
Знайти $MK : BC$.

Довідковий відділ


трапеція

Сума кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°.
Середня лінія дорівнює напівсумі основ.
У рівнобічної трапеції кути при основі рівні.
Якщо кути при основі рівні, то трапеція рівнобічна.



202. $AB = CD$, $\angle 1 = 60°$, $AD = 19$, $BC = 13$.
Знайти P_{ABCD}.

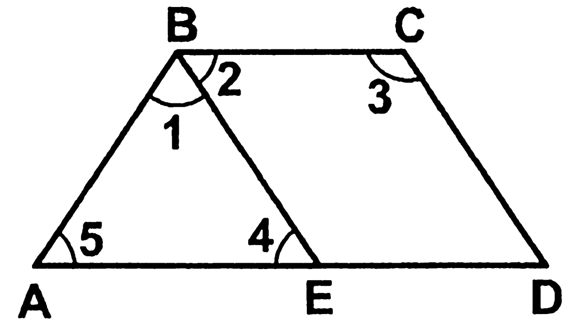
203. $AB = CD$, $\angle 1 = 60°$, $AD = 10$, $P_{ABCD} = 27$.
Знайти BC.

204. $AB = CD$, $\angle B = 120°$, $AD = a$, $BC = b$.
Довести, що $P_{ABCD} = 3a - b$.

205. $AB = CD$, $AB - BC = 4$, $\angle C = 2\angle 1$, $P_{ABCD} = 47$.
Знайти CD.

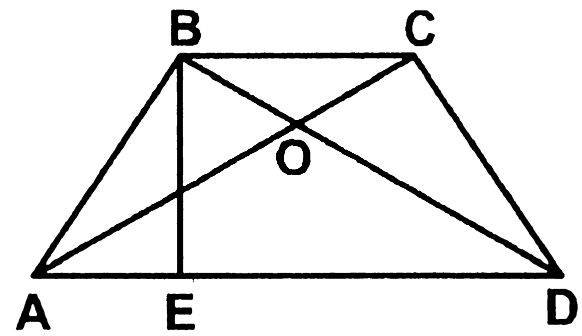
206. $AB = CD$, $\angle D : \angle B = 1 : 2$, $P_{ABCD} = 13$, $AB = 3$.
Знайти BC.

207. $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 2 : 4 : 5 : 1$, $AB = 3$, $AD = 16$.
Знайти BC.



208. $AB = CD$, $BE \parallel CD$, $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle 3$.
Знайти $\angle 5$.

209. $AB = CD$, $AD - BC = 24$, $\angle BCD = 2\angle BAD$.
Знайти AB.



210. $AB = CD$, $AC \perp BD$, $BE = 2$, $BE \perp AD$.
Знайти $AD + BC$.

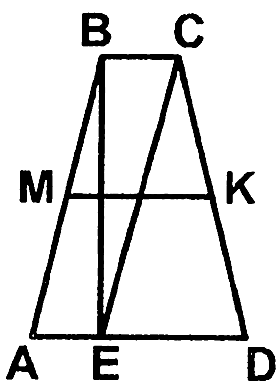
211. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $BC = 2BE - AD$.
Знайти $\angle AOD$.

212. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $\angle ABO + \angle BAO = 90°$, $AD = 8 - BC$.
Знайти $BE + DE$.

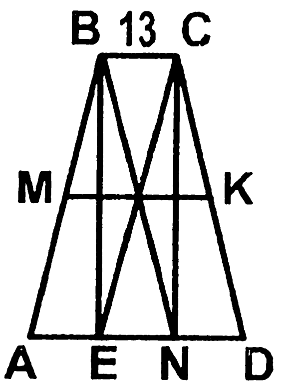
3. Вчись складати геометричні задачі

Використовуємо прийом нанизування на одну ідею серії задач.

Трапеція



213. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $CE \parallel AB$, $BC = 13$, MK — середня лінія.
Знайти MK.



Розв'язок.

$AE = 13$ ($ABCE$ — паралелограм).
$EN = 13$ ($EBCN$ — прямокутник).
$ND = 13$ ($NBCD$ — паралелограм).

$$AD = AE + EN + ND = 39.$$

$$MK = \frac{AD + BC}{2} = \frac{39 + 13}{2} = 21.$$

214. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $CE \parallel AB$, $MK = 20$.
Знайти BC.

Розв'язок.

Позначимо $BC = x$, тоді $AD = 3x$ (див. задачу 213).

Оскільки $MK = \dfrac{AD + BC}{2}$, то

$$20 = 2x, \; x = 10.$$

Відповідь: 10.

215. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $CE \parallel AB$, $AB = 16$, $\angle A = 60°$.
Знайти MK.

Розв'язок.

$\angle ABE = 30°$. З ΔABE маємо

$$AE = \frac{AB}{2} = 8. \; AD = 3AE = 24,$$

$$BC = AE = 8 \text{ (див. задачу 213).}$$

$$MK = \frac{AD + BC}{2} = 16.$$

Відповідь: 16.

216. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $AE = BC$, $AB = 9$, $P_{ABCD} = 38$.
Знайти AD.

Розв'язок.

$AE = BC$. Позначимо $BC = x$, тоді

$$AD = 3x \text{ (див. задачу 213).}$$

За умовою $AD + BC + 2AB = 38$,

$$3x + x + 18 = 38,$$

звідки $x = 5$, $AD = 3x = 15$.

Відповідь: 15.

217. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $AE = BC = 5$, $AB = AD - 7$.
Знайти P_{ABCD}.

Розв'язок.

$$AE = BC = 5, \; AD = 3AE = 15$$

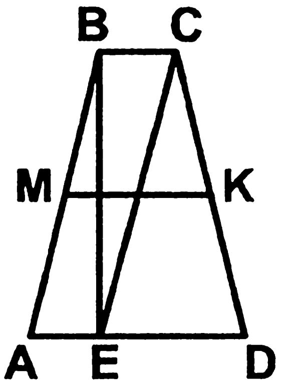
(див. задачу 213).

$$AB = 15 - 7 = 8.$$

$$P_{ABCD} = AD + BC + 2AB =$$
$$= 15 + 5 + 16 = 36.$$

Відповідь: 36.

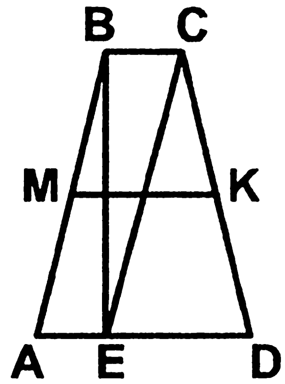
218. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $CE \parallel AB$, $AE = 6$, $AB + AD = 25$.
Знайти P_{ABCD}.



219. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $CE \parallel AB$, $AD = 54$. $AB : AE = 7 : 6$.
Знайти P_{ABCD}.

220. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $CE \parallel AB$, $BC = 14$, $AD = AB + 26$.
Знайти AB.

221. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $CE \parallel AB$, $BC = 7$, $P_{\Delta ECD} = 32$.
Знайти P_{ABCD}.

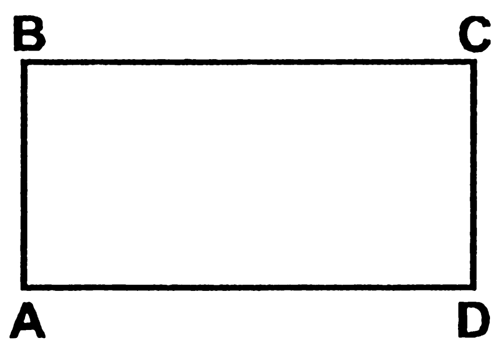


222. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $CE \parallel AB$, $P_{ABCD} - P_{\Delta ECD} = 11$.
Знайти AD.

223. $AB = CD$, $BE \perp AD$, $CE \parallel AB$, $BE = 3$, $\angle C - \angle A = 90°$.
Знайти $AD + BC$.

Площі фігур

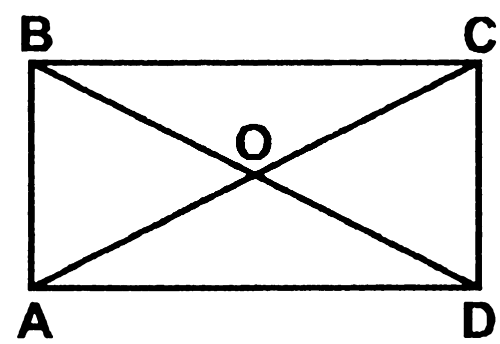
Прямокутник



224. $S_{ABCD} = 48$, $CD = 3$.
Знайти AD.

225. $P_{ABCD} = 40$, $AD = 3CD$.
Знайти S_{ABCD}.

226. $S_{ABCD} = 32$, $AD = 2AB$.
Знайти P_{ABCD}.



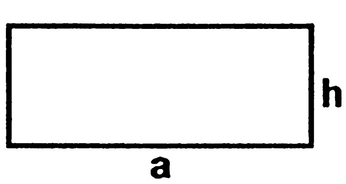
227. *Довести*, що $S_{AOD} = S_{DOC}$.

228. $AD = 20$, $S_{DOC} = 60$.
Знайти CD.

229. $AD = 8$, $S_{COD} = 18$.
Знайти CD.

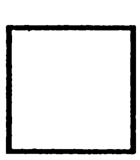
230. $S_{ACD} = 28$, $AB = AD + 1$.
Знайти P_{ABCD}.

Довідковий відділ



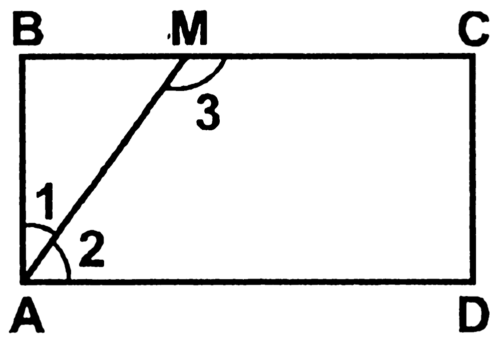
Площа прямокутника дорівнює

$$S = a \cdot h.$$



Площа квадрата дорівнює $S = a^2$ або

$$S = \frac{1}{2} d^2 \ (d \text{ — діагональ}).$$



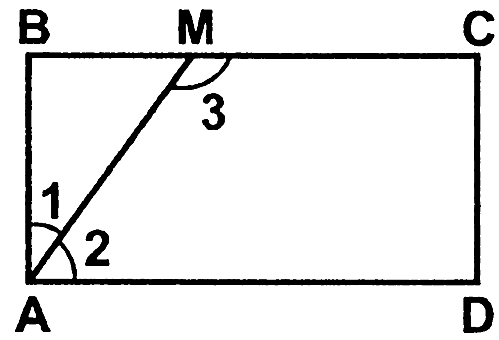
231. $\angle 1 = \angle 2$, $BM = 5$, $MC = 4$.
Знайти S_{ABCD}.

232. $\angle 1 = \angle 2$, $AB = MC$, $P_{ABCD} = 48$.
Знайти S_{ABCD}.

233. $\angle 1 = \angle 2$, $AB : MC = 1 : 2$,
$P_{ABCD} = 40$.
Знайти S_{ABCD}.

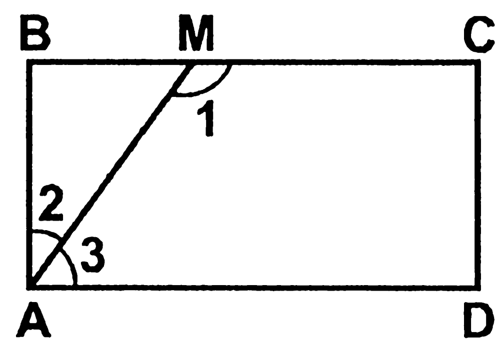
234. $\angle 1 : \angle 3 = 1 : 3$, $MC = AB + 7$,
$P_{ABCD} = 44$.
Знайти S_{ABCD}.

235. $\angle 1 = \angle 2$, $MC = AB + 7$,
$P_{AMCD} - P_{ABM} = 24$.
Знайти AD.



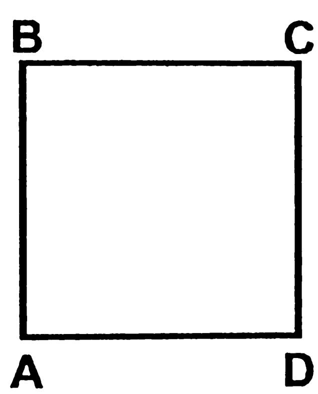
236. $\angle 1 = \angle 2$, $AD : MC = 5 : 2$,
$P_{ABCD} = 80$.
Знайти S_{ABCD}.

237. $\angle 1 = \angle 2$, $S_{ABM} = 162$,
$P_{ABCD} = 80$.
Знайти AD.



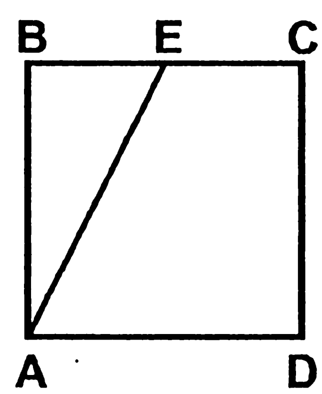
238. $\angle 3 : \angle 1 = 1 : 3$, $MC = AB + BM$,
$S_{ABM} = 32$.
Знайти S_{ABCD}.

Квадрат



239. $P_{ABCD} = 40$.
Знайти S_{ABCD}.

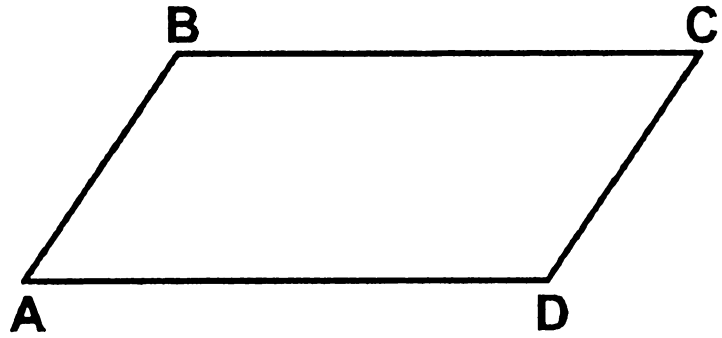
240. $S_{ABCD} = 64$.
Знайти P_{ABCD}.



241. $BE = EC$.
Знайти $S_{ABCD} : S_{ABE}$.

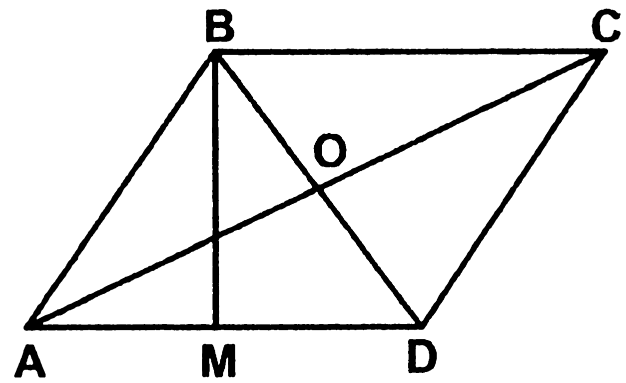
242. $BE = EC$.
Знайти $S_{ABE} : S_{AECD}$.

Паралелограм



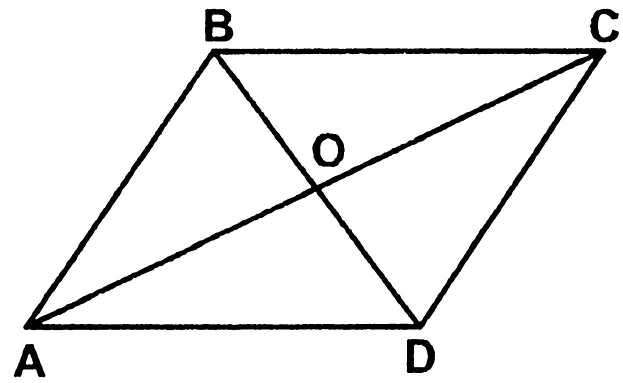
243. $\angle A = 30°$, $AB : BC = 3 : 7$, $P_{ABCD} = 120$.
Знайти S_{ABCD}.

Ромб



244. $BM \perp AD$, $S_{DOC} = 10$, $BM = 8$.
Знайти P_{ABCD}.

245. $S_{DOC} = 96$, $BM \perp AD$, $AD = 20$.
Знайти BM.



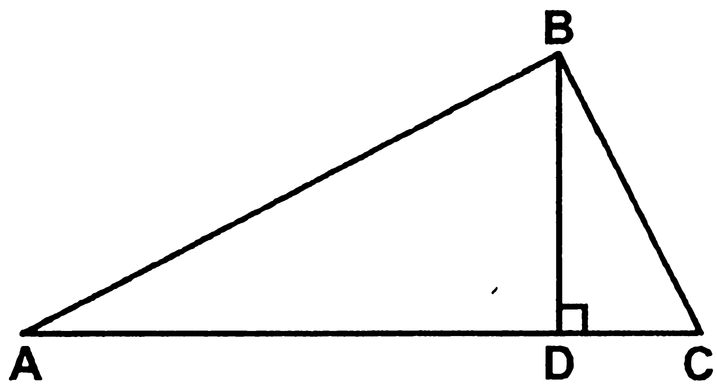
246. $AC = 20$, $BD = 10$.
Знайти S_{ABCD}.

247. $\angle BAD = 30°$, $P_{ABCD} = 24$.
Знайти S_{ABCD}.

248. *Довести*, що $S_{AOD} = S_{DOC}$.

249. $S_{DOC} = 32$.
Знайти S_{ABCD}.

Трикутник



250. $BD \perp AC$, $S_{ABC} = 20$, $BD = 4$.
Знайти AC.

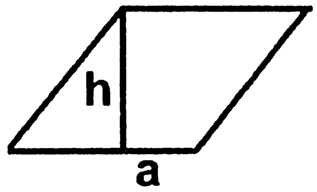
251. $BD \perp AC$, $S_{ABC} = 16$, $AC : BD = 2 : 1$.
Знайти BD.

252. $BD \perp AC$, $AC = 27$, $BD : AD : DC = 3 : 2 : 7$.
Знайти S_{ABC}.

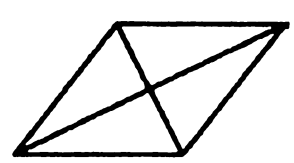
253. $BD \perp AC$, $BD = 2$, $AC = 4DC$, $AD = 3$.
Знайти S_{ABC}.

254. $BD \perp AC$, $BD = 9$, $DC = AD + 4$, $\angle A : \angle C : \angle ABC = 9 : 10 : 17$.
Знайти S_{ABC}.

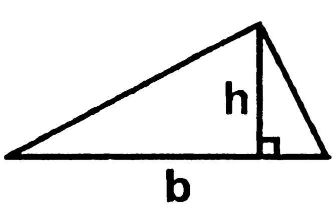
Довідковий відділ



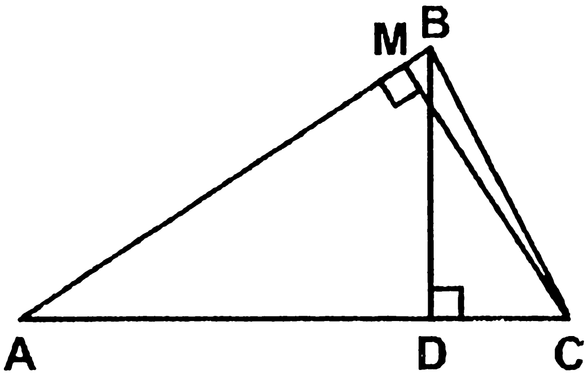
$S = a \cdot h$



$S = a \cdot h$ або $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$ (d_1 і d_2 — діагоналі ромба).

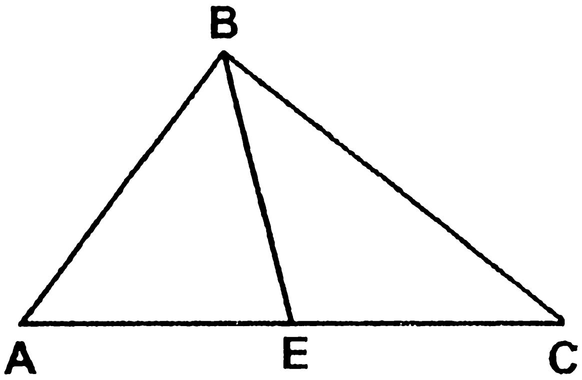


$S = \frac{1}{2} b \cdot h$ або $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$

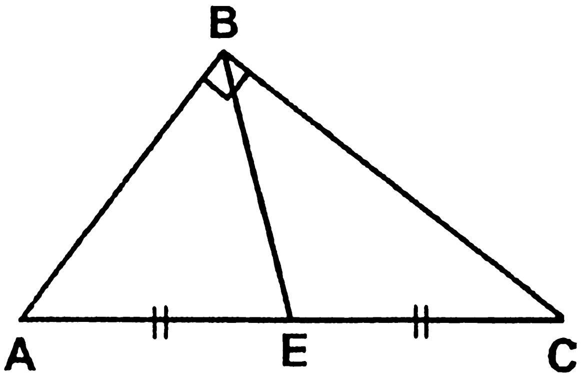


255. $BD \perp AC$, $CM \perp AB$.
Довести, що $AC : AB = MC : BD$.

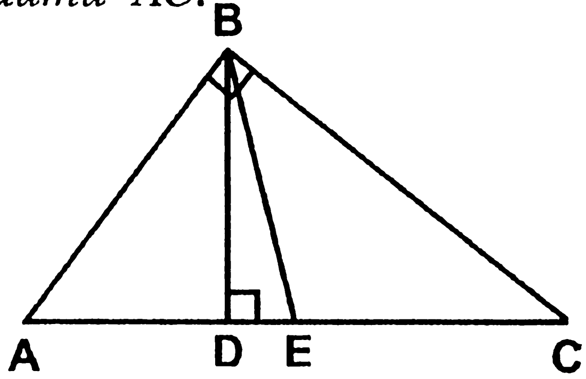
256. $BD \perp AC$, $CM \perp AB$,
$BD : MC = 5 : 8$, $AB = 40$.
Знайти AC.



257. $AE = EC$.
Знайти $S_{ABC} : S_{BEC}$.



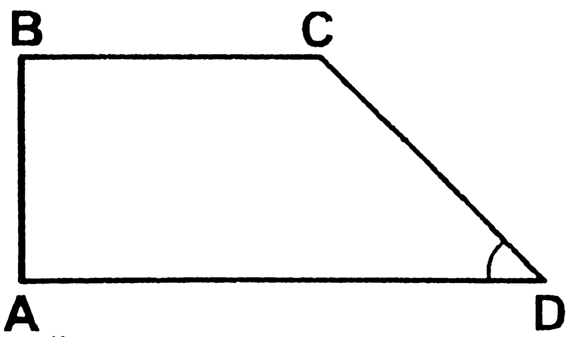
258. $AE = EC$, $\angle ABC = 90°$, $BE = 8$.
Знайти AC.



259. $AE = EC$, $\angle ABC = 90°$, $BD \perp AC$,
$\angle BEA = 30°$, $AC = 16$.
Знайти S_{ABC}.

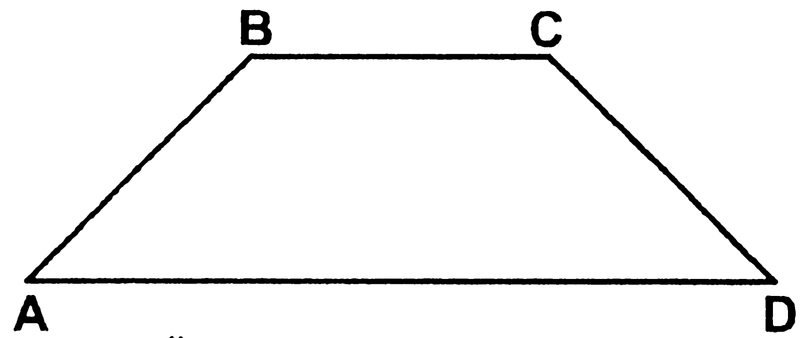
260. $AE = EC$, $\angle ABC = 90°$, $BD \perp AC$,
$S_{ABC} = 72$, $BE = 12$.
Знайти $\angle DBE$.

Трапеція



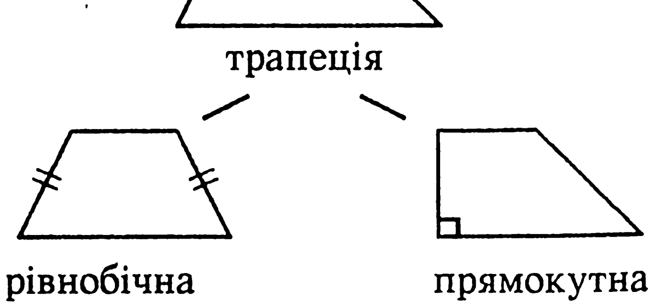
261. $AD \parallel BC$, $BA \perp AD$, $BC = 2$,
$AD = 8$, $\angle D = 45°$.
Знайти S_{ABCD}.

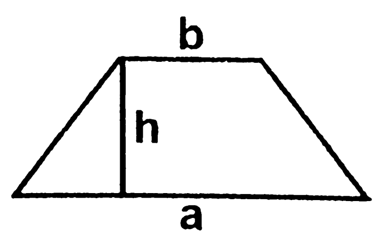
262. $AD \parallel BC$, $BA \perp AD$,
$AD : BC = 5 : 1$, $\angle D = 45°$,
$S_{ABCD} = 48$.
Знайти AD.



263. $AD \parallel BC$, $AB = CD$, $AD = 17$,
$\angle D = 45°$, $BC = 9$.
Знайти S_{ABCD}.

Довідковий відділ





$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Повторення. Задачі різні

264. Кути *AOC* і *COB* суміжні, *OD* — бісектриса кута *AOC*, *OE* — бісектриса кута *COB*. *Знайти* кут *DOC*, якщо

$$\frac{\angle AOD + \angle DOE + \angle COA}{\angle DOC + \angle COE + \angle EOB} = \frac{3}{2}.$$

265. *O* — точка перетину прямих *AB* та *CD*. *Знайти* кут *AOD*, якщо

$$\angle DOB - \angle COB = 80°.$$

266. *BD* — висота рівнобедреного трикутника *ABC*, *AB = BC*. *O* — точка перетину висот *BD* і *AK*, $\angle AOD = 60°$.
Довести, що ΔABC — рівносторонній.

267. Вершини *B* і *D* двох прямокутних трикутинків *ABC* і *ADC* лежать по різні боки від їхньої спільної гіпотенузи *AC*.

$$\angle BAC + \angle ACD = 90°,\ BC = 20.$$

Знайти CD.

268. *BD* — висота трикутника *ABC*,

$$AB = BC,\ AB - AD = 2,$$
$$AC = 1{,}2AB.$$

Знайти периметр трикутника *ABC*.

269. *AE* — бісектриса трикутника *ABC*. *AB = BC*, $\angle CAE = 10°$. *Знайти* $\angle ABC$.

270. *K* — точка перетину бісектрис *AE* і *CD* трикутника *ABC*,

$$\angle ABC = 30°.$$

Знайти кут *AKC*.

271. *BD* — медіана трикутника *ABC*, в якому *AB = BC*. *K* — точка перетину медіани *BD* та бісектриси *AE*. *Знайти* кут *ABC*, якщо

$$\angle AKD - \angle BCA = 75°.$$

272. *BD* — медіана рівнобедреного трикутника *ABC*, в якому *AB = BC*. *K* — точка перетину бісектрис *BD* і *AE*. $AT \perp BC$, *M* — точка перетину прямих *BD* і *AT*. *Знайти* кут *AMD*, якщо

$$\angle AKD = 50°.$$

273. *BD* — медіана рівнобедреного трикутника *ABC*, в якому *AB = BC*. *DM* і *DE* — бісектриси кутів *ADB* і *CDB*. *Знайти* кут *BMD*, якщо

$$\angle ABC + \angle EDM = 120°.$$

274. *M* і *T* — точки перетину двох паралельних прямих *AB* і *CD* третьою прямою *MT*. *Знайти* $\angle AMT$, якщо

$$\angle AMT + \angle MTD - \angle TMB = 30°.$$

275. Через вершину *B* трикутника *ABC* проведено пряму $MT \parallel AC$. *Знайти* кут *ABC*, якщо

$$\angle MBA + \angle BCA = 100°.$$

276. Через вершину *B* рівнобедреного трикутника *ABC*, *AB = BC*, проведено пряму $MT \parallel AC$. *Знайти* кут *BAC*, якщо

$$\angle MBA + \angle CBT = 80°.$$

277. Через вершину *C* прямокутного трикутника *ABC*, $\angle ACB = 90°$, проведено пряму $MT \parallel AB$. *Знайти* $\angle MCA + \angle CBA$.

278. *BD* — бісектриса трикутника *ABC*. *Знайти* $\angle BAC$, якщо

$\angle BCD = 10°$, $\angle BDA = 80°$.

279. У трикутнику ABC

$$\angle A = \angle B + \angle C.$$

Визначити кут A.

280. Точка E міститься на продовженні сторони AC трикутника ABC.
У скільки разів кут BAC більший від кута ABC, якщо

$$\angle BCE = 2\,(\angle BAC - \angle ABC)?$$

281. Точка E міститься на продовженні сторони AC рівнобедреного трикутника ABC, $AB = BC$.
Знайти $\angle ABC$, якщо

$$\angle BCE = 2\,\angle BAE.$$

282. Точка E міститься на продовженні гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC.
$\angle ACB = 90°$.
Знайти $\angle CAE$, якщо

$$\angle CBE = 3\angle CAE.$$

283. AK — бісектриса прямокутного трикутника ABC, $\angle ACB = 90°$.
Знайти $\angle KAB$, якщо

$$\angle CAB = \angle CBA + 70°.$$

284. CK — бісектриса прямокутного трикутника ABC, $\angle ACB = 90°$.
Знайти $CB : AB$, якщо
$\angle AKC = 105°$.

285. CD — висота рівнобедреного трикутника ABC, $AC = CB$,

$$\angle ACB = 90°,\ DE \perp CB,\ DE = 6.$$

Знайти AC.

286. CD — висота прямокутного трикутника ABC, $\angle ACB = 90°$,
$\angle BAC = 30°$.
Знайти BD, якщо $AB + BC = 9$.

287. M — точка перетину бісектрис AD і BE гострих кутів прямокутного трикутника ABC,
$\angle ACB = 90°$.
Знайти $\angle ABC$, якщо

$$\angle EMD + \angle ABC = 195°.$$

288. CD — висота прямокутного трикутника ABC, $\angle ACB = 90°$.
Знайти AD, якщо

$$\angle DCB = 30°,\ DB = 1.$$

289. O — точка перетину діагоналей AC і BD паралелограма $ABCD$ $(AC > BD)$.
Знайти P_{ABCD}, якщо $AD = 3$ і

$$\angle OAD : \angle DBC : \angle AOB = 2 : 7 : 9.$$

290. BD — менша діагональ паралелограма $ABCD$.
Знайти P_{ABD}, знаючи, що

$$\angle ADB + \angle ABC = 180° \text{ і}$$
$$2AB + AD = 12.$$

291. O — точка перетину діагоналей AC і BD паралелограма $ABCD$ $(AC > BD)$.
Знайти $AC - BD$, якщо

$$P_{ABC} - P_{ABD} = 12.$$

292. AE — бісектриса, проведена з вершини гострого кута паралелограма $ABCD$.
Знайти P_{ABCD}, знаючи, що

$$BE = 4,\ EC = 1.$$

293. На стороні AD паралелограма $ABCD$ побудовано рівний йому паралелограм $AMED$.
Знайти $\angle BAD$, якщо

$$\angle CDE = \angle ABC.$$

294. AE — бісектриса, проведена з вершини гострого кута паралелограма $ABCD$.
Довести, що

$$P_{ABCD} = 4BE + 2EC.$$

295. Бісектриси кутів ABC і BCD паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці E, що належить основі пара-

лелограма AD.
Знайти $\angle BAE$, якщо

$$\angle ABE : \angle ECD = 5 : 4.$$

296. З вершини тупого кута B ромба $ABCD$ проведено $BE \perp AD$ та $BK \perp DC$.
Довести, що $\Delta ABE = \Delta BKC$.

297. AD — спільна сторона ромба $ABCD$ і рівнобедреного прямокутного трикутника ADE, що лежать по різні боки від AD. $AD = DE$, $\angle ADE = 90°$. Точки B і E сполучено.
Знайти $\angle BAE$, якщо

$$\angle DBE = \angle BED.$$

298. AD — спільна сторона двох рівних ромбів $ABCD$ і $ADEM$, що лежать по різні боки від AD.
Знайти $\angle CAM$, якщо

$$\angle BAM + \angle ADC = 240°.$$

299. AD — спільна сторона двох рівних ромбів $ABCD$ і $ADEM$, що лежать по різні боки від AD. O і O_1 — точки перетину їх діагоналей.
Знайти $\angle CDE$, якщо
$\angle ODO_1 = 100°$.

300. AD — спільна сторона двох різних ромбів $ABCD$ і $ADEM$, що лежать по різні боки від AD. O і O_1 — точки перетину їх діагоналей.
Знайти $\angle EDC$, якщо
$\angle OAO_1 = 110°$.

301. AD — спільна сторона ромба $ABCD$ і прямокутного трикутника ADE, що лежать по різні боки від AD. $\angle DAE = 90°$.
Знайти $\angle AED + \angle BAD$, знаючи, що $ED \parallel AB$.

302. BD — діагональ прямокутника $ABCD$.
Знайти CD, якщо

$$\angle BDA = 30°, \ AB + BD = 18.$$

303. O — точка перетину діагоналей AC і BD прямокутника $ABCD$.
Знайти AD, якщо

$$P_{BOC} = 16, \ AC + BD = 20.$$

304. $ABCD$ — прямокутник. AE — бісектриса кута BAD.

$$BE = 3, \ EC = 4.$$

Знайти P_{ABCD}.

305. E — точка, що міститься на стороні BC прямокутника $ABCD$ так, що $AB = 4CE$ і $\angle AEC + \angle ADC = 225°$.
Знайти $P_{ABCD} : AB$.

306. Виразити площу квадрата через його периметр.

307. E — точка, щоналежить стороні BC квадрата $ABCD$ так, що $DE = 2EC$.
Знайти $\angle EDB$.

308. AD — спільна сторона квадрата $ABCD$ і рівностороннього трикутника ADM, що лежать по різні боки від AD. O — точка перетину діагоналей квадрата. E — точка перетину відрізків OM і AD.
Знайти OE, якщо
$P_{ABCD} + P_{ADM} = 14$.

309. AD — спільна сторона квадрата $ABCD$ і ромба $ADET$, що лежать по різні боки від AD. O — точка перетину діагоналей квадрата, $OM \perp AD$.
Знайти $\angle DAE$, якщо $DT = 2OM$.

310. DE — середня лінія трикутника ABC ($DE \parallel AC$).
Знайти BC, якщо

$$\angle BED = \angle BAC, \ AD = 8.$$

311. BD — висота трикутника ABC ($AB = BC$), $DE \parallel AB$, $DP \parallel BC$.
Знайти P_{ABC}, якщо

$$DP + DE = 2, \ AC = 0{,}6.$$

312. $ABCD$ — чотирикутник.
$AE = EB$, $BM = MC$, $CK = KD$, $DP = PA$.
Довести, що чотирикутник $EMKP$ — паралелограм.

313. $ABCD$ — чотирикутник, в якому діагоналі рівні між собою і взаємно перпендикулярні. $AE = BE$, $BM = MC$, $CT = TD$, $DP = PA$.
Знайти $\angle MPT$.

314. MT — середня лінія трапеції $ABCD$, $AD \parallel BC$, $BC : AD = 1 : 3$, $MT = 16$.
Знайти AD і BC.

315. BE — висота рівнобічної трапеції $ABCD$, $AB = CD$, $AD \parallel BC$.
Знайти BE, якщо

$$AD = 8,\ BC = 2,\ \angle ABC = 135^\circ.$$

316. $ABCD$ — трапеція, в якій $AB = CD$, $AD \parallel BC$, AC ділить кут BAD навпіл.
Знайти середню лінію трапеції, якщо $AD = 10$, $AB = 4$.

317. $ABCD$ — трапеція, $AB = CD$, $AD \parallel BC$, BD ділить кут ABC навпіл. MT — середня лінія трапеції.
Довести, що $MT = (BC + AB) : 2$.

318. В рівнобедреній трапеції $ABCD$, в якій $AD \parallel BC$, проведено висоту BE.
Знайти відношення площі трикутника ABE до площі трапеції $ABCD$, якщо відомо, що

$$AD = 4BC.$$

319. Виразити площу рівнобедреного прямокутного трикутника через висоту, опущену на гіпотенузу.

320. Виразити площу рівнобедреного прямокутного трикутника через його гіпотенузу.

321. Виразити площу рівнобедреного прямокутного трикутника через його катет.

322. Точки M, T і K є серединами сторін прямокутного трикутника ABC.

$$\angle ACB = 90^\circ,\ AC = 14,\ BC = 18.$$

Знайти площу трикутника MTK.

323. Точки M, T і K є серединами відповідних сторін AB, BC і AC трикутника ABC.

$$BD \perp AC,\ AC = 24,\ BD = 16.$$

Знайти площу трикутника MTK.

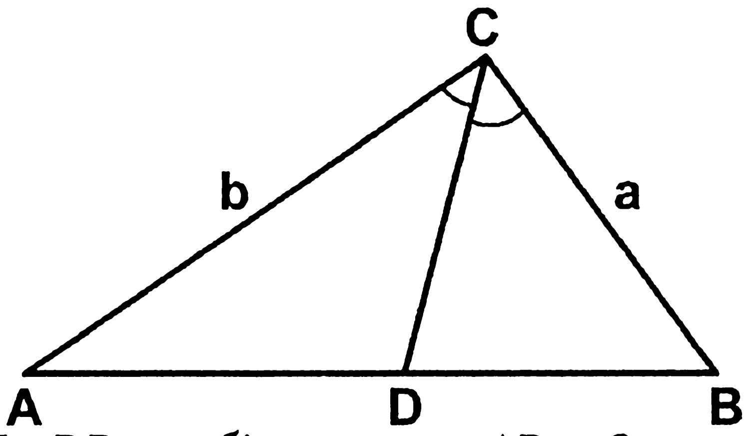
324. Діагоналі AC і BD рівнобічної трапеції $ABCD$ взаємно перпендикулярні. Точки M, T, K і P є серединами відповідних сторін AB, BC, CD і AD. $AC = 10$.
Знайти площу чотрикутника $MTKP$.

Запитання для повторення

1. Наука геометрія:
   планіметрія,
   стереометрія.
2. Побудова геометрії:
   невизначувані поняття,
   означення,
   аксіоми,
   теореми.
3. Пряма, промінь, відрізок, ламана.
4. Кут:
   розгорнутий,
   прямий,
   гострий,
   тупий.
5. Кути:
   суміжні,
   відповідні,
   різносторонні,
   односторонні,
   з відповідно паралельними сторонами,
   з взаємно перпендикулярними сторонами.
6. Перпендикуляр та похила.
7. Паралельні прямі:
   означення,
   аксіома паралельності,
   ознаки паралельності.
8. Види трикутників.
9. Основні лінії трикутника: висота, медіана, бісектриса.
10. Властивості рівнобедреного трикутника.
11. Середня лінія трикутника.
12. Залежність між сторонами і кутами трикутника.
13. Ознаки рівності трикутників.
14. Сума кутів трикутника.
15. Зовнішній кут трикутника.
16. Осьова симетрія фігур.
17. Центральна симетрія фігур.
18. Чотирикутник.
19. Паралелограм.
20. Властивості паралелограма.
21. Ознаки паралелограма.
22. Прямокутник.
23. Властивості прямокутника.
24. Ромб.
25. Властивості ромба.
26. Квадрат.
27. Властивості квадрата.
28. Трапеція.
29. Середня лінія трапеції.
30. Рівновеликі фігури.
31. Площа прямокутника.
32. Площа паралелограма.
33. Площа трикутника.
34. Площа ромба.
35. Площа квадрата.
36. Площа трапеції.

Розділ 2

Бісектриса



325. BD — бісектриса. $AB = 2$, $BC = 8$, $AD = 1$.
Знайти AC.

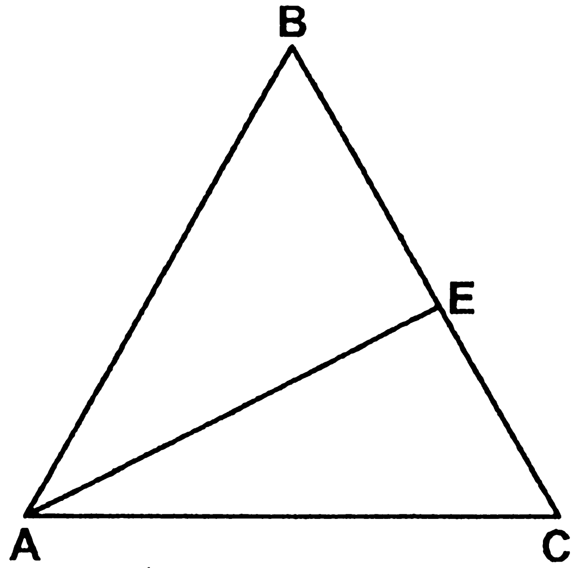
326. BD — бісектриса. $AB = 4$, $BC = 12$, $AC = 20$.
Знайти AD, DC.

327. BD — бісектриса.
$AB + BC = 12$, $AD = 2$, $DC = 8$.
Знайти AB.

328. BD — бісектриса. $BC - AB = 3$, $DC = 8$, $AD = 6$.
Знайти BC.

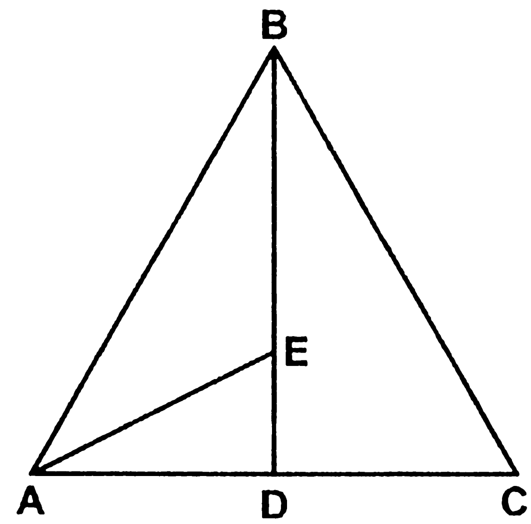
329. BD — бісектриса.
Довести, що $\dfrac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \dfrac{AB}{BC}$.

330. BD — бісектриса. $AD = 7$, $DC = 5$, $P_{ABD} - P_{BCD} = 6$.
Знайти AB.



331. AE — бісектриса. $AB = BC$, $AB = 5$, $AC = 6$.
Знайти BE, CE.

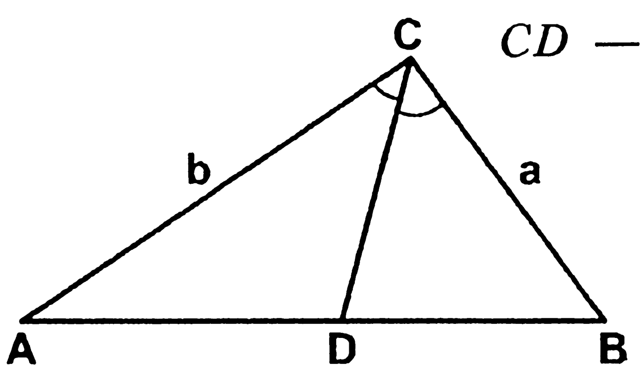
332. AE — бісектриса. $AB = BC$, $AB \cdot EC = 4$.
Знайти $AC \cdot BE$.



333. $AB = BC$, $BD \perp AC$, AE — бісектриса. $BE : ED = 17 : 15$, $AC = 60$.
Знайти P_{ABC}.

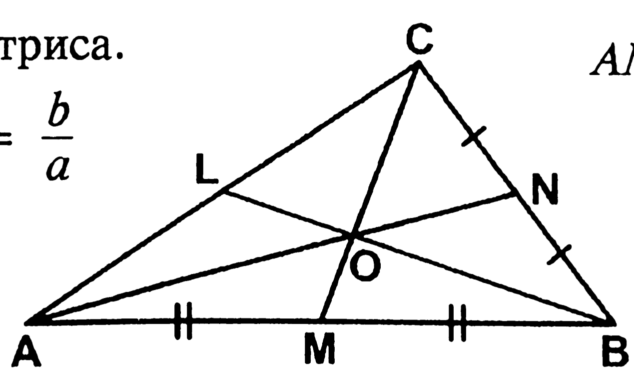
334. $AB = BC$, $BD \perp AC$, AE — бісектриса. $BE:ED = 13 : 12$, $P_{ABC} = 250$.
Знайти AB.

Довідковий відділ



CD — бісектриса.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}$$

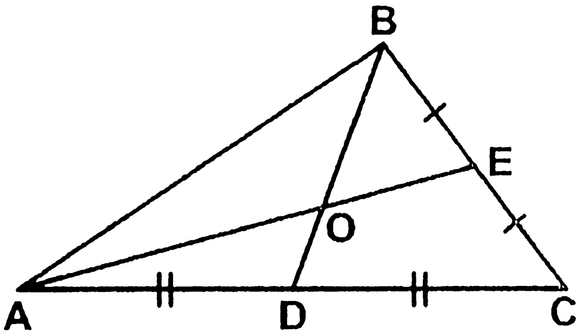


AN, CM — медіани.

$$OM = \frac{1}{3}CM,$$

$$OC = \frac{2}{3}CM.$$

Медіана



335. $CE = BE$, $AD = DC$, $AE = 9$, $BD = 12$.
Знайти $AO + DO$.

336. $CE = BE$, $AD = DC$, $OE + OD = 2$.
Знайти $AE + BD$.

337. $CE = BE$, $AD = DC$, $AE = 6$, $BD = 9$, $AC = 12$.
Знайти P_{AOD}.

338. $CE = BE$, $AD = DC$, $AE = 8$, $BD = 10$, $AB = 9$.
Знайти $P_{\Delta OED}$.

339. $CE = BE$, $AD = DC$, $P_{\Delta OED} = 31$.
Знайти $P_{\Delta AOB}$.

340. $CE = BE$, $AD = DC$, $\angle ABC = 90°$, $OD = 1$.
Знайти $BO + AC$.

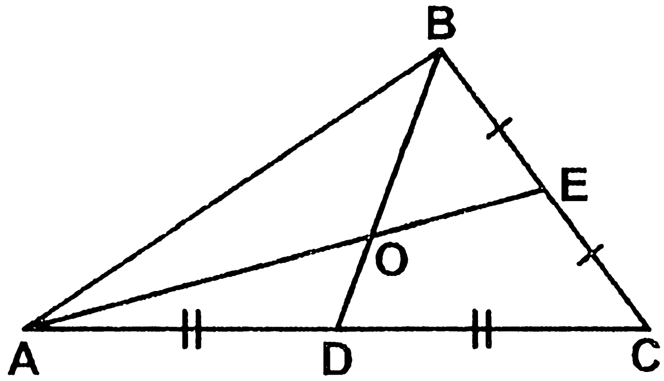
341. O — точка перетину медіан.
Довести, що $S_{AOB} = \frac{1}{3} S_{ABC}$.

342. O — точка перетину медіан.
Довести, що $S_{AOD} = \frac{1}{6} S_{ABC}$.

343. O — точка перетину медіан.
Довести, що $S_{AOC} = S_{BOC}$.

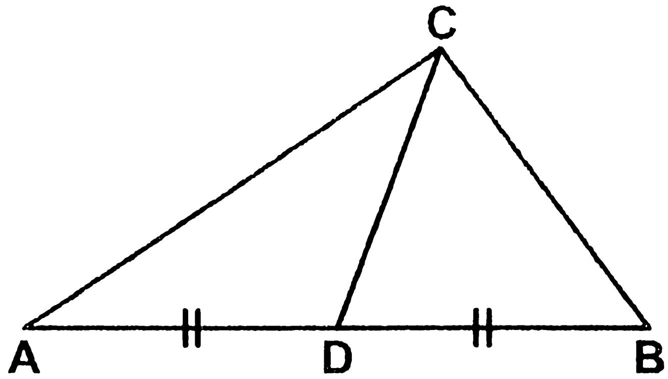
344. O — точка перетину медіан.
Знайти $S_{AOD} : S_{ABO}$.

345. O — точка перетину медіан.
Знайти $S_{AOD} : S_{ABD}$.

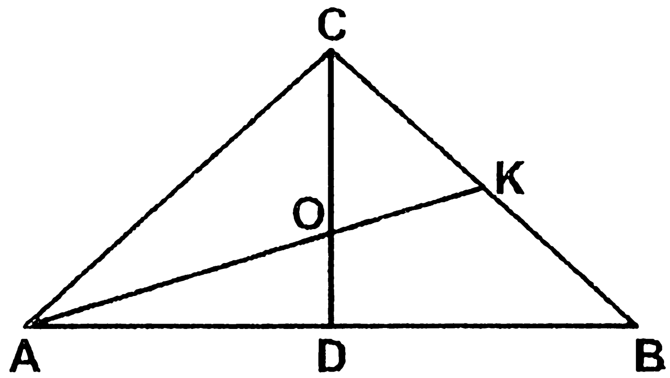


346. O — точка перетину медіан.
Знайти $S_{ABO} : S_{ABD}$.

347. O — точка перетину медіан.
Знайти $S_{DOEC} : S_{ABC}$.



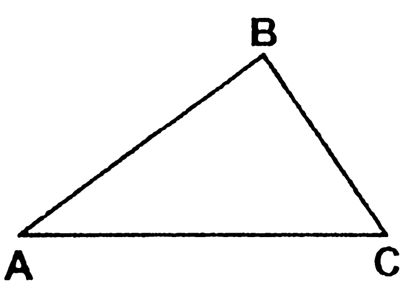
348. $\angle ACB = 90°$, $AD = DB$, $CD = 2$.
Знайти AB.

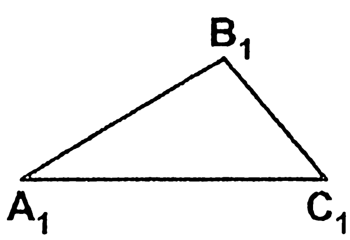


349. $\angle ACB = 90°$, $AC = CB$, O — точка перетину медіан, $CO = \frac{2}{3}$.
Знайти S_{ABC}.

350. $\angle ACB = 90°$, $AC = CB$, O — точка перетину медіан, $OD = 2$.
Знайти S_{AOD}.

Довідковий відділ



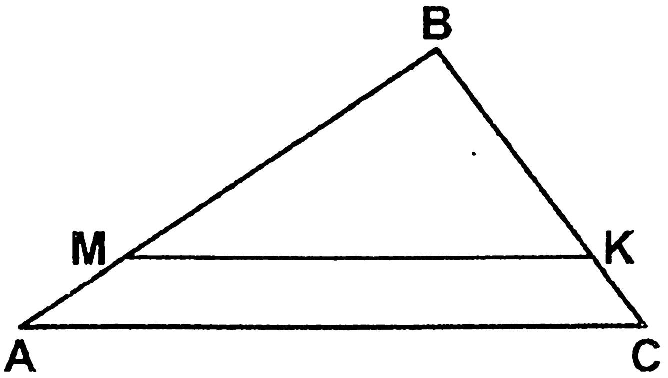


$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$

Два трикутники називаються подібними, якщо кути одного трикутника відповідно дорівнюють кутам другого.

Подібні трикутники



351. $MK \parallel AC$, $MK = 3$, $AC = 15$, $KC = 4$.
Знайти BC.

352. $MK \parallel AC$, $AM = 8$, $MK = 5$, $AC = 15$.
Знайти AB.

353. $MK \parallel AC$, $BK = 2$, $KC = 6$, $AC = 12$.
Знайти MK.

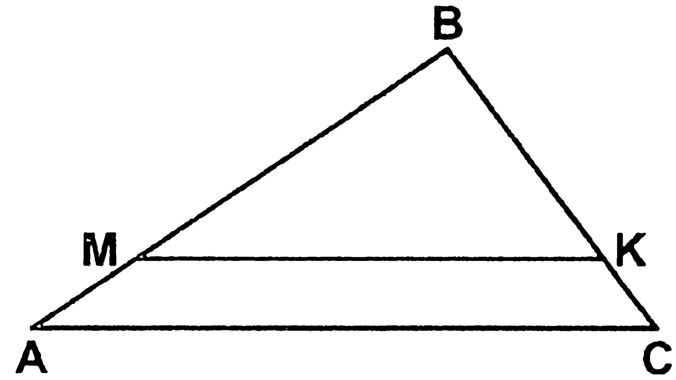
354. $MK \parallel AC$, $BK = 3CK$.
Знайти $MK : AC$.

355. $MK \parallel AC$, $BK = 1$, $P_{MBK} = 2$, $P_{ABC} = 12$.
Знайти BC.

356. $MK \parallel AC$, $S_{MBK} = 2$, $S_{ABC} = 32$.
Знайти $\frac{BK}{BC}$.

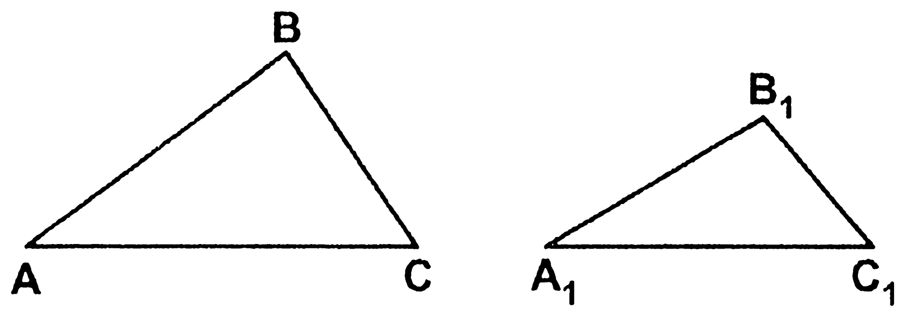
357. $MK \parallel AC$, $S_{MBK} = 6$, $S_{ABC} = 54$, $MK = 4$.
Знайти AC.

358. $MK \parallel AC$, $S_{MBK} = 1$, $S_{AMKC} = 8$, $BC + BK = 5$.
Знайти KC.



359. $MK \parallel AC$, $S_{MBK} = 5$, $BK = 1$, $CK = 2$.
Знайти S_{ABC}.

360. $MK \parallel AC$, $AM = MB$.
Знайти $S_{MBK} : S_{AMKC}$.

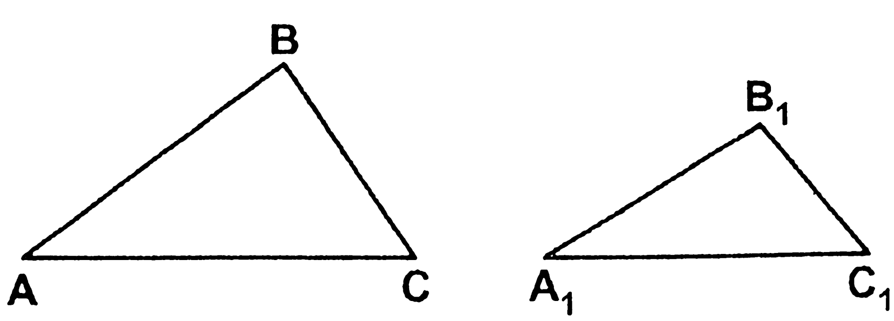


361. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $P_{A_1B_1C_1} = 45$, $AB : BC : AC = 4 : 5 : 6$.
Знайти A_1C_1.

362. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB : BC = 3 : 5$, $P_{A_1B_1C_1} = 36$, $A_1C_1 = 12$.
Знайти A_1B_1.

363. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $P_{A_1B_1C_1} = 48$, $AB : BC : AC = 7 : 8 : 9$, $A_1C_1 = AC - 2$.
Знайти P_{ABC}.

Довідковий відділ



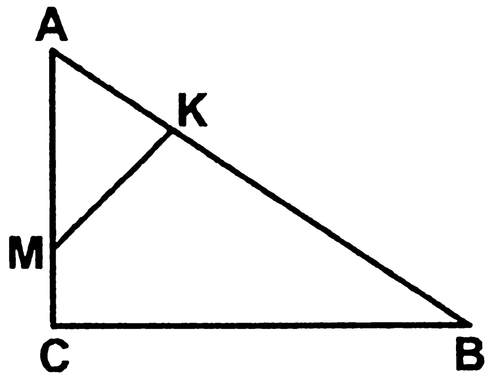
$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$, якщо:

1) два кута одного відповідно дорівнють двом кутам другого;

2) дві сторони одного пропорційні двом сторонам другого і кути, утворені цими сторонами, рівні;

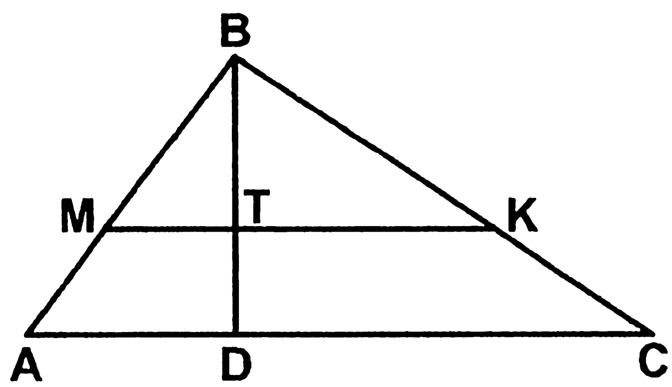
3) три сторони одного відповідно пропорційні трьом сторонам іншого.

Подібні трикутники



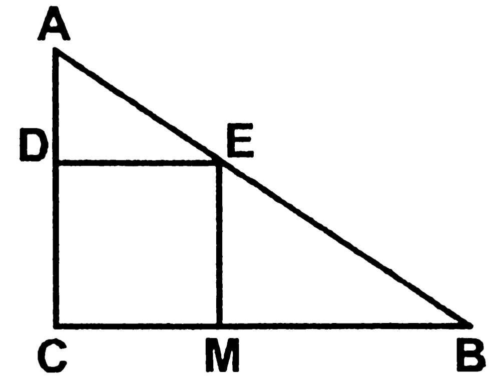
364. $\angle ACB = 90°$, $MK \perp AB$.
Довести, що $MK \cdot AB = CB \cdot AM$.

365. $\angle ACB = 90°$, $MK \perp AB$,
$CB = MK + 10$, $AK : AC = 1 : 3$.
Знайти CB.



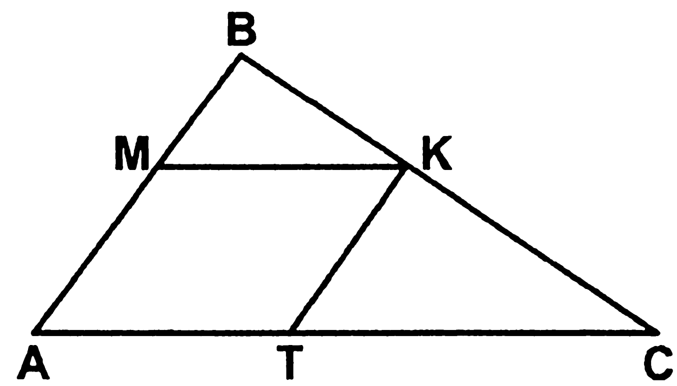
366. $MK \parallel AC$, $BD \perp AC$, $BT = 3$,
$TD = 4$, $S_{MBK} = 18$.
Знайти S_{ABC}.

367. $MK \parallel AC$, $BD \perp AC$,
$MK : AC = 2 : 5$.
Знайти $S_{AMKC} : S_{ABC}$.



368. $\angle ACB = 90°$, $CB = 4$, $CDEM$ — квадрат, $AC = 3$.
Знайти CM.

369. $\angle ACB = 90°$, $AD = DE + 4$,
$CDEM$ — квадрат, $CM : AD = 3 : 7$.
Знайти AC.



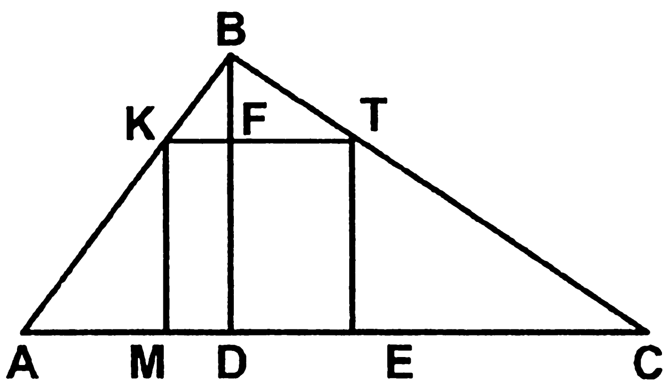
370. $AMKT$ —паралелограм,
$TK : MK = 6 : 5$, $AB = 20$, $AC = 25$.
Знайти AT.

Довідковий відділ

$$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$$

Теореми

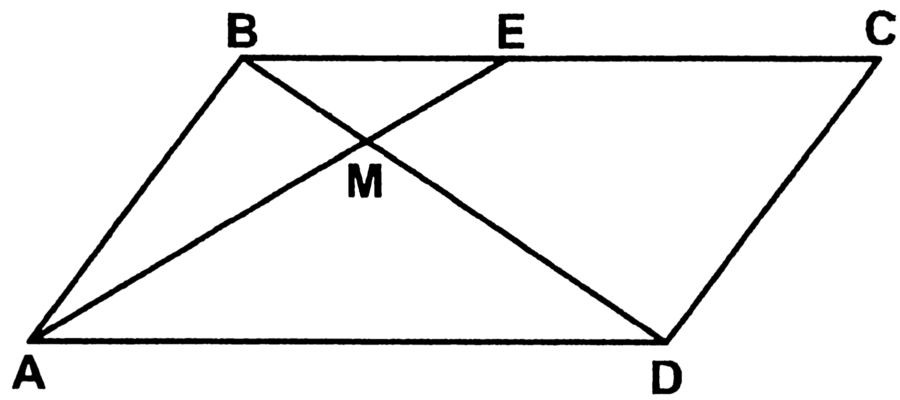
1. У подібних трикутниках відповідні сторони пропорційні відповідним висотам.
2. Периметри подібних трикутників відносяться як відповідні сторони.
3. Площі подібних трикутників відносяться як квадрати відповідних сторін.



371. $MKTE$ — квадрат, $BD \perp AC$, $AC = 6$, $BD = 2$.
Знайти ME.

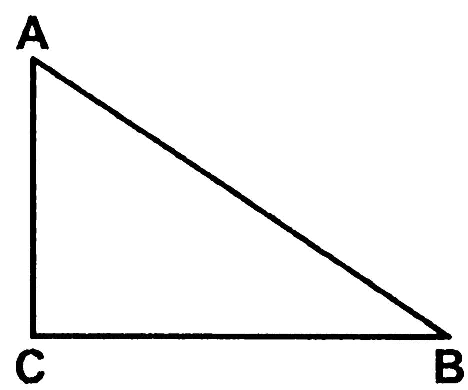
372. $MKTE$ — квадрат, $BD \perp AC$, $BF = 2$, $AC = ME + 12{,}5$.
Знайти P_{MKTE}.

373. $MKTE$ — прямокутник, $BD \perp AC$, $MK : ME = 5 : 9$, $AC = 48$, $BD = 16$.
Знайти KM і ME.



374. $ABCD$ — паралелограм. E належить стороні BC, $DM = 2$, $BE : EC = 1 : 4$.
Знайти BD.

Метричні співвідношення між елементами трикутника



375. $\angle ACB = 90°$, $AC = 12$, $AB = 13$.
Знайти P_{ABC}.

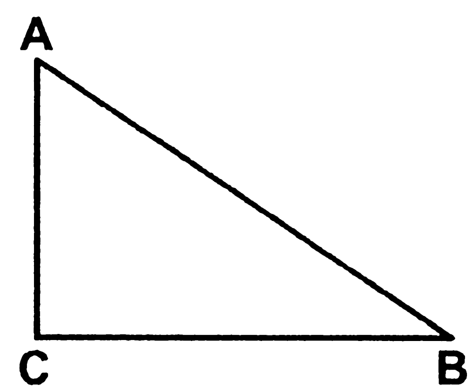
376. $\angle ACB = 90°$, $BC = 7$, $\angle A = 30°$.
Знайти S_{ABC}.

377. $\angle ACB = 90°$, $BC = 12$, $S_{ABC} = 54$.
Знайти P_{ABC}.

378. $\angle ACB = 90°$, $P_{ABC} = 90$, $AB : BC = 13 : 5$.
Знайти S_{ABC}.

379. $\angle ACB = 90°$, $S_{ABC} = 180$, $AB : BC = \sqrt{106} : 9$.
Знайти AC.

380. $\angle ACB = 90°$, $\angle B = 60°$, $AC = 3\sqrt{3}$.
Знайти AB.



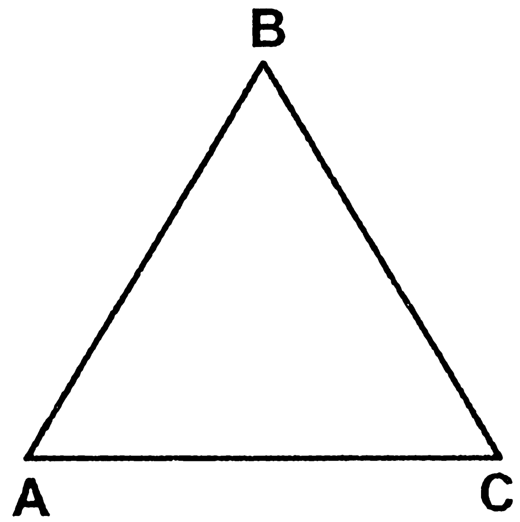
381. $\angle ACB = 90°$, $CB = AC + 3$, $AB = CB + 3$.
Знайти CB.

382. $\angle ACB = 90°$, $AC = AB - 2$, $CB = AB - 1$.
Знайти P_{ABC}.

383. $\angle ACB = 90°$, $S_{ABC} = 24$, $AB : CB = 5 : 3$.
Знайти AC.

384. Визначити вид трикутника відносно його кутів, якщо:
а) $CB = \sqrt{45}$, $AB = \sqrt{107}$, $AC = 8$.

б) $CB = \sqrt{53}$, $AC = \sqrt{74}$, $AB = 12$.
в) $CB = 14$, $AB = \sqrt{557}$, $AC = 19$.
г) $CB = \sqrt{24}$, $AB = 7$, $AC = 5$.
д) $CB = 19$, $AB = 28$, $AC = 23$.



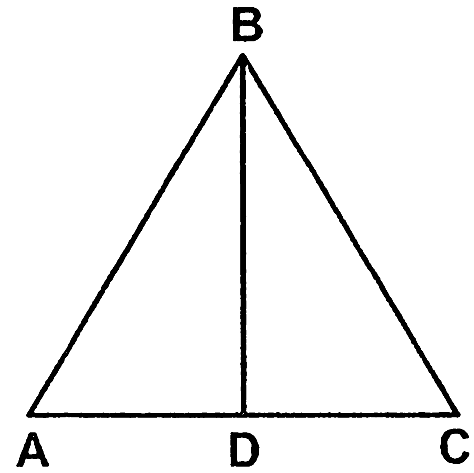
385. $AB = BC$, $AB = 17$, $AC = 16$.
Знайти S_{ABC}.

386. $AB = BC$, $AB = 10$, $\angle A = 30°$.
Знайти S_{ABC}.

387. $AB = BC$, $AB = 25$, $P_{ABC} = 80$.
Знайти S_{ABC}.

388. $AB = BC$, $AC = AB - 1$, $P_{ABC} = 50$.
Знайти S_{ABC}.

389. $AB = BC$, $AB : AC = 3 : 4$, $S_{ABC} = 8\sqrt{5}$.
Знайти P_{ABC}.



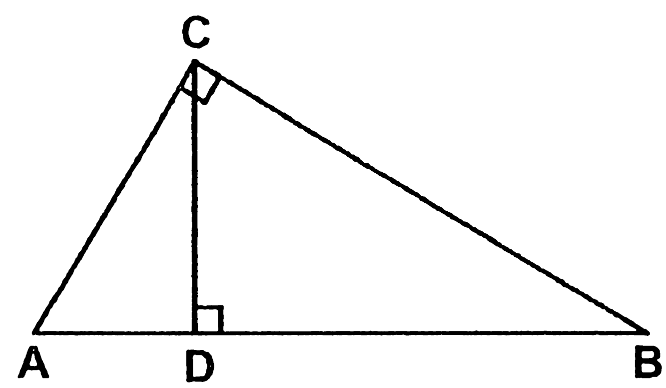
390. $AB = BC$, $BD \perp AC$, $AB = 4$, $\angle A = 45°$.
Знайти BD.

391. $AB = BC$, $BD \perp AC$, $BD = 35$, $AC : AB = 48 : 25$.
Знайти P_{ABC}.

392. $AB = BC$, $BD \perp AC$, $BD = AB - 2$, $AC = 4\sqrt{6}$.
Знайти AB.

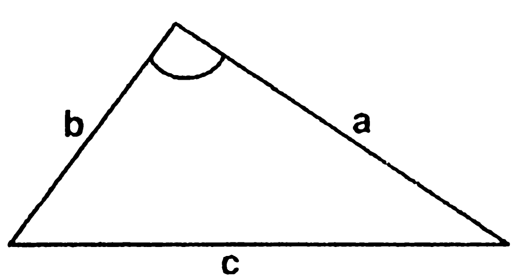
393. $AB = BC$, $BD \perp AC$, $AC = BD + 4$, $AB = \sqrt{61}$.
Знайти AC.

394. $AB = BC$, $BD \perp AC$, $BC : AC = 3 : 4$, $S_{ABC} = 2\sqrt{5}$.
Знайти P_{ABC}.



395. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $CD = 8$, $DB = 16$.
Знайти AD.

Довідковий відділ



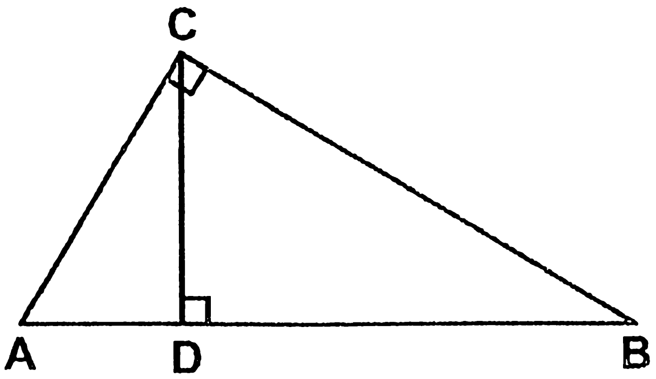
прямокутний $a^2 + b^2 = c^2$

гострокутний $a^2 + b^2 > c^2$

тупокутний $a^2 + b^2 < c^2$

(c — найбільша із сторін)

$P = a + b + c$
(периметр)



396. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $AC = 8$, $AD = 2$.
Знайти BD.

397. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $AC = 15$, $CB = 20$.
Знайти CD.

398. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $AD = 4$, $DB = 9$.
Знайти S_{ABC}.

399. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $CB = 6$, $DB = 3{,}6$.
Знайти S_{ABC}.

400. $\angle ACB = 90°$, $AB = 3$, $CB = 2{,}4$.
Знайти P_{ABC}.

401. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $AD = 9$, $S_{ACD} = 27$.
Знайти AB.

402. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $AC : CB = 7 : 3$, $CD = 42$.
Знайти AD.

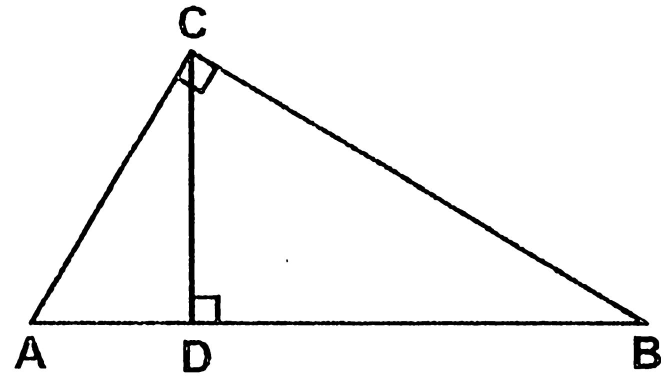
403. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$.
Довести, що $\dfrac{AC^2}{CB^2} = \dfrac{AD}{BD}$.

404. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $AC : CB = 3 : 4$, $DB = AD + 2$.
Знайти AB.

405. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $AB = 10$, $CD = 3$.
Знайти $S_{ACD} \cdot S_{BCD}$.

406. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $CB = AC + 2$, $AB = CB + 2$.
Знайти CD.

407. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $AD = CD - 1{,}2$, $BD = CD + 1{,}6$.
Знайти AB.

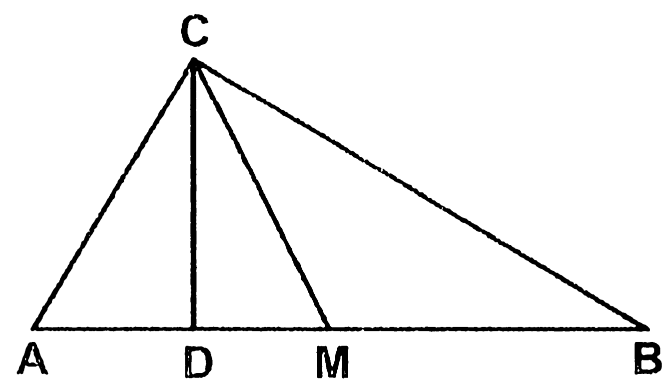


408. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $\angle CBA = 30°$, $DB = 7\sqrt{3}$.
Знайти AB.

409. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $\angle ACD = 30°$, $S_{ABC} = 32\sqrt{3}$.
Знайти AC.

410. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $S_{ACD} : S_{ABC} = 16 : 25$, $AD = 28$.
Знайти AC.

411. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $S_{ACD} : S_{BCD} = 9 : 16$, $CB = 20$.
Знайти CD.

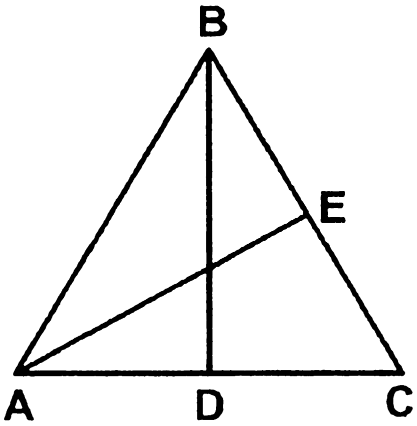


412. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, CM — медіана, $AD = 4$, $DB = 16$.
Знайти P_{CDM}.

413. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, CM — медіана, $AC = CM + 2$, $CB = AC + 4$.
Знайти AC.

414. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, CM — медіана, $AC = 6$, $CM = 5$.
Знайти CB.

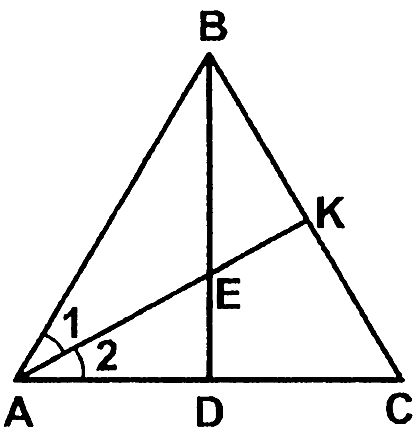
415. $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, CM — медіана, $CM : AC = 5 : 6$, $P_{ABC} = 48$.
Знайти S_{ABC}.



416. $AB = BC$, $AE \perp BC$, $BD \perp AC$, $BE = 3$, $EC = 2$.
Знайти AC.

417. $AB = BC$, $AE \perp BC$, $BD \perp AC$, $AE = 4$, $DC = 2{,}5$.
Знайти S_{ABC}.

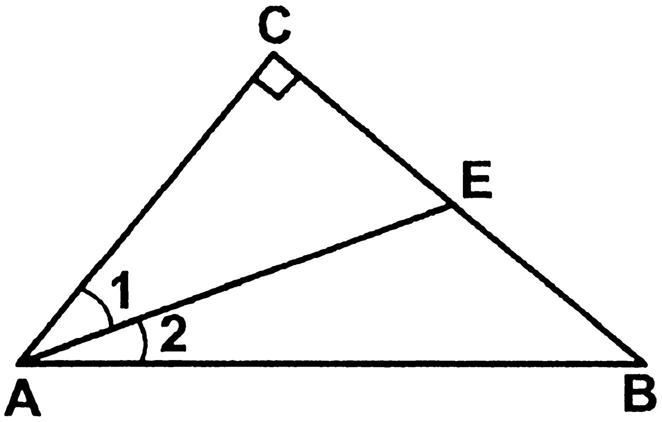
418. $AB = BC$, $AE \perp BC$, $BD \perp AC$, $S_{ABC} = 48$, $AC = 12$.
Знайти EC.



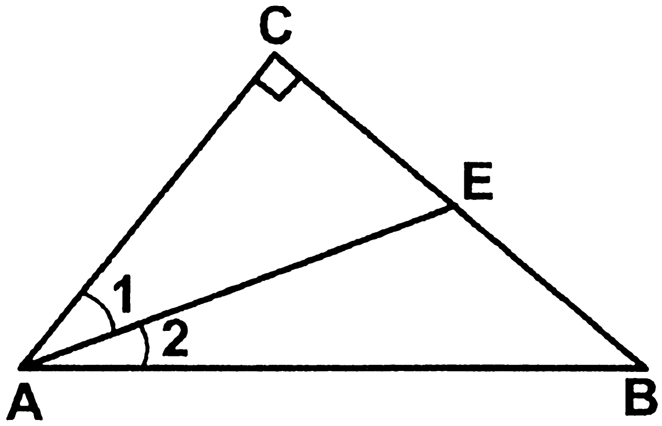
419. $AB = BC$, $BD \perp AC$, $\angle 1 = \angle 2$, $AB = 39$, $AC = 30$.
Знайти ED.

420. $AB = BC$, $BD \perp AC$, $\angle 1 = \angle 2$, $S_{ABC} = 48$, $AC = 12$.
Знайти ED.

421. $AB = BC$, $BD \perp AC$, $\angle 1 = \angle 2$, $BK : KC = 13 : 10$, $S_{ABC} = 540$.
Знайти P_{ABC}.

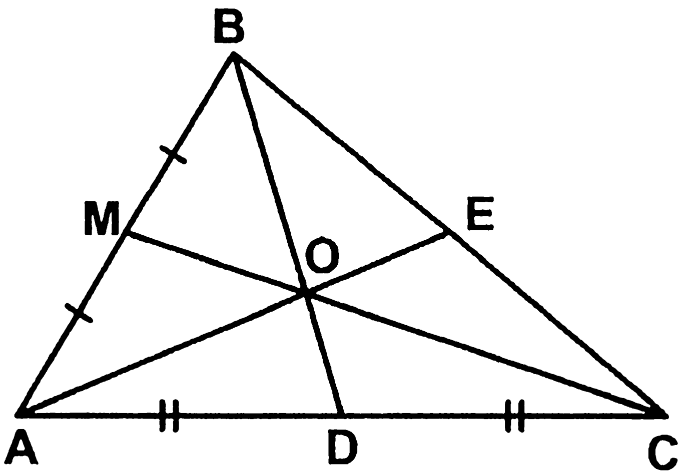


422. $AB = BC$, $\angle ACB = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$.
Знайти $CE : BE$.



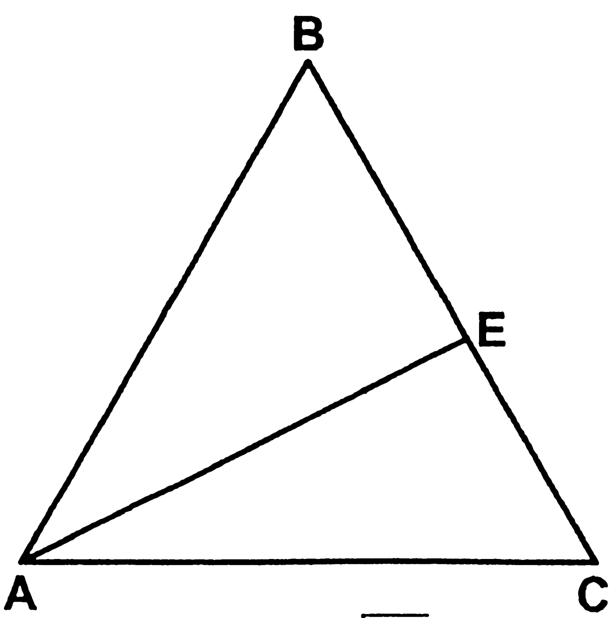
423. $AC = BC$, $\angle ACB = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$, $AC = 2$.
Знайти AE.

424. $AC = BC$, $\angle ACB = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$, $CE = \sqrt{2} - 1$.
Знайти AB.

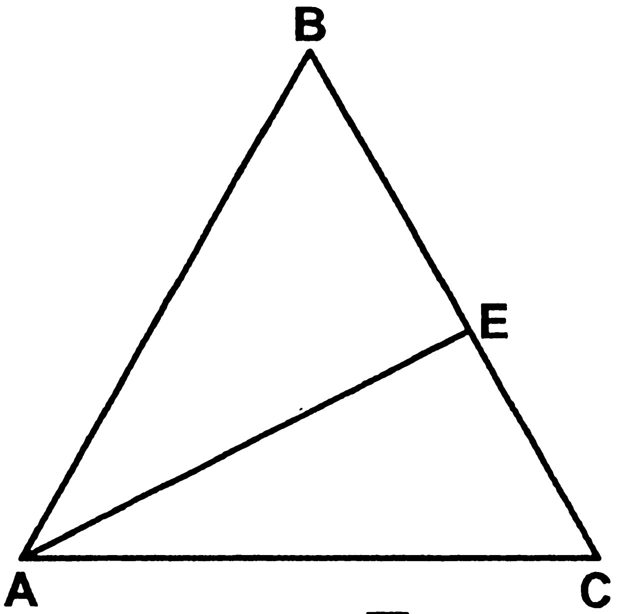


425. AE, BD і CM — медіани. $AE = 12$, $BD = 9$, $AB = 10$.
Довести, що $BD \perp AE$.

426. AE, BD і CM — медіани. $AE = 9$, $BD = 6$, $AB = \sqrt{55}$.
Знайти CM.



427. $AB = BC$, $AB = \sqrt{14}$, AE — медіана. $AC = 5$.
Знайти AE.



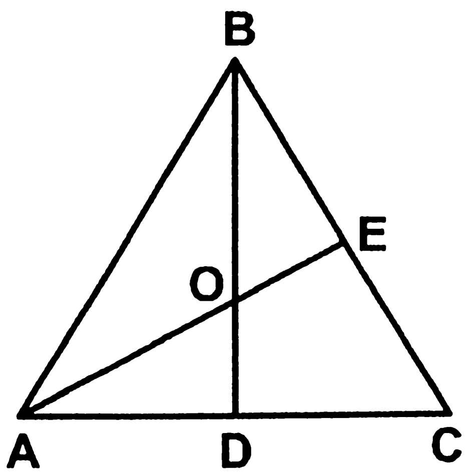
428. $AB = BC$, $AC = 4\sqrt{3}$, AE — медіана.
$AE = 7$.
Знайти AB.

429. $AB = BC$, $AB = AC + 3$, AE — медіана. $AE = 4{,}5$.
Знайти AB.

430. $AB = BC$, AE — медіана.
$AB = AE + 2{,}5$, $AC = AE - 0{,}5$.
Знайти AC.

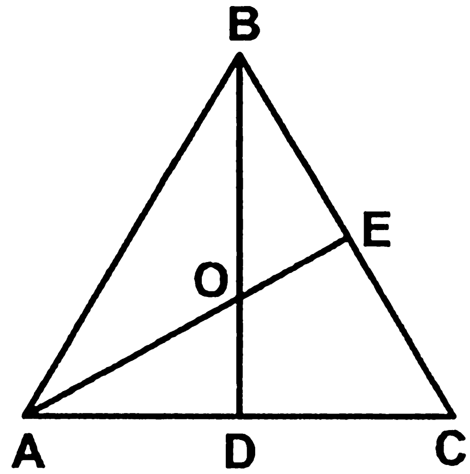
431. $AB = BC$, $AB = \sqrt{14}$, AE — медіана.
$AE : AC = 4 : 5$.
Знайти AC.

432. $AB = BC$, AE — медіана.
$AB : AE = \sqrt{2} : 1$.
Довести, що $AE = AC$.



433. $AB = BC$, AE і BD — медіани.
$AB = 15$, $AC = 18$.
Знайти OD.

434. $AB = BC$, AE і BD — медіани.
$AB = 10$, $AC = 16$.
Знайти AO.

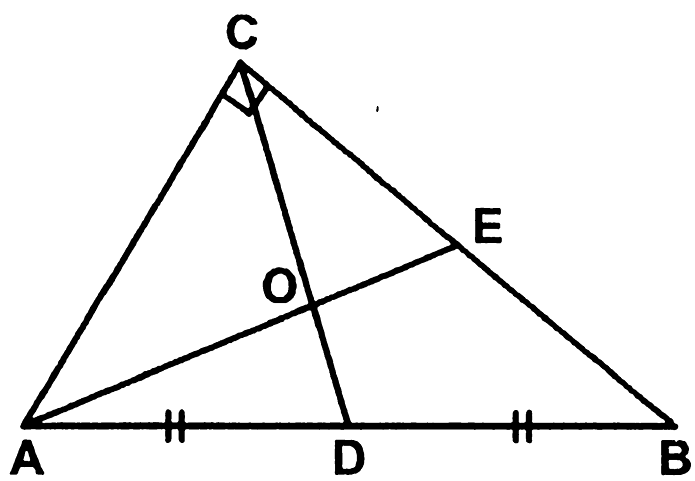


435. $AB = BC$, AE і BD — медіани.
$AB = 10$, $AD = OD + \frac{10}{3}$.
Знайти OD.

436. $AB = BC$, AE і BD — медіани.
$OE = 2{,}5$, $AC = 8$.
Знайти BD.

437. $AB = BC$, AE і BD — медіани.
$AE = 7{,}5$, $AD = OD + 1$.
Знайти S_{ABC}.

438. $AB = BC$, AE і BD — медіани.
$OD = OE + 1$, $AD = AO - 2$.
Знайти AC.

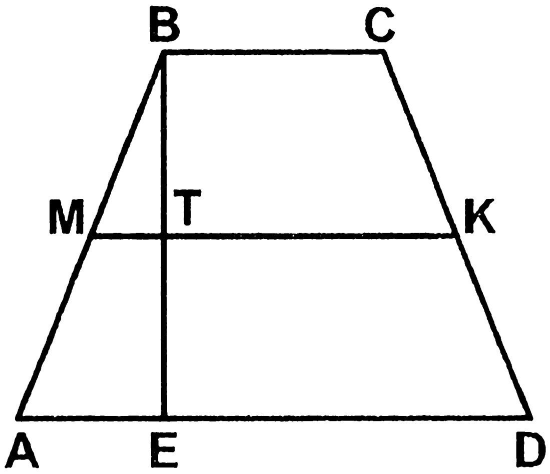


439. AE і BD — медіани.
$\angle ACB = 90°$, $CD = \sqrt{117}$, $AC = 12$.
Знайти AO.

440. AE і BD — медіани.
$\angle ACB = 90°$, $CB = 24$, $AC = 18$.
Знайти CO.

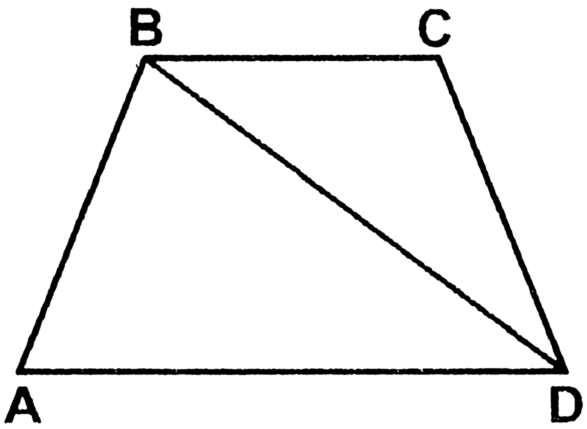
441. AE і BD — медіани.
$\angle ACB = 90°$, $CB = 8$, $AC = 6$.
Знайти S_{AOB}.

Співвідношення трапеції



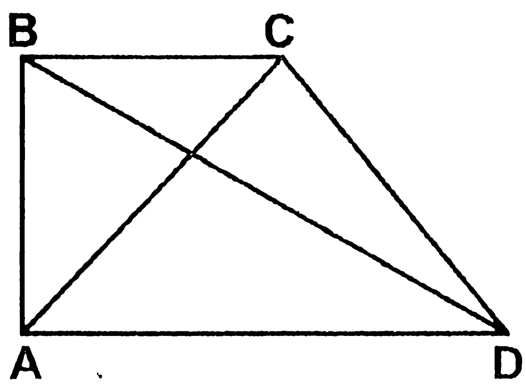
442. $BC \parallel AD$, $AB = CD$, $BE \perp AD$, MK — середня лінія.
Довести, що

$$\boxed{MK = ED.}$$



443. $BC \parallel AD$, $AB = CD$.
Довести, що

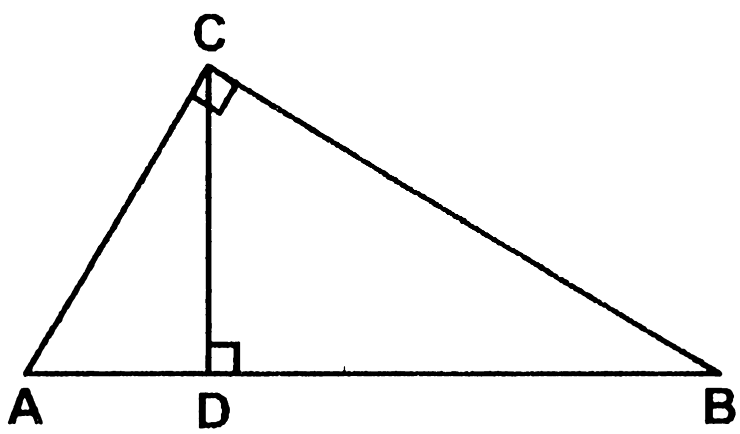
$$\boxed{BD^2 = AB^2 + AD \cdot BC.}$$



444. $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$.
Довести, що

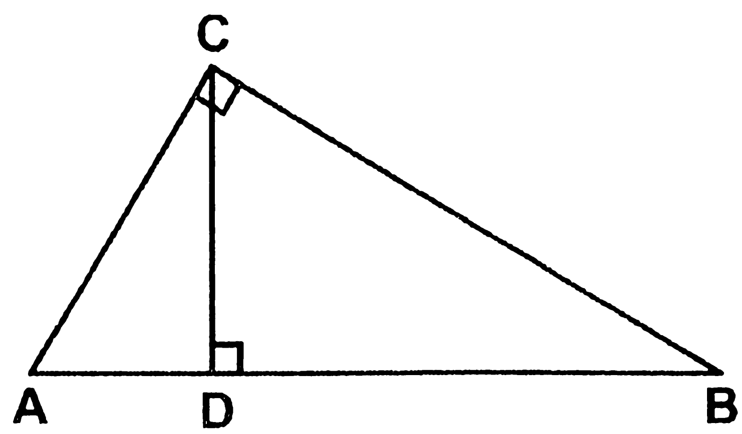
$$\boxed{BD^2 - AC^2 = AD^2 - BC^2.}$$

Співвідношення між сторонами і кутами в прямокутному трикутнику



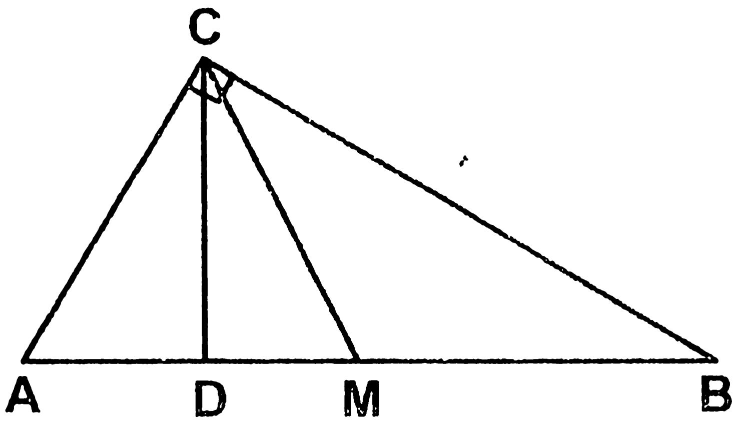
445. $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = b$, $\angle B = \beta$.
Знайти S_{ABC}.

446. $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$.
Знайти S_{ABC}.



447. $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$.
Знайти S_{ABC}.

448. $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$.
Знайти CD.

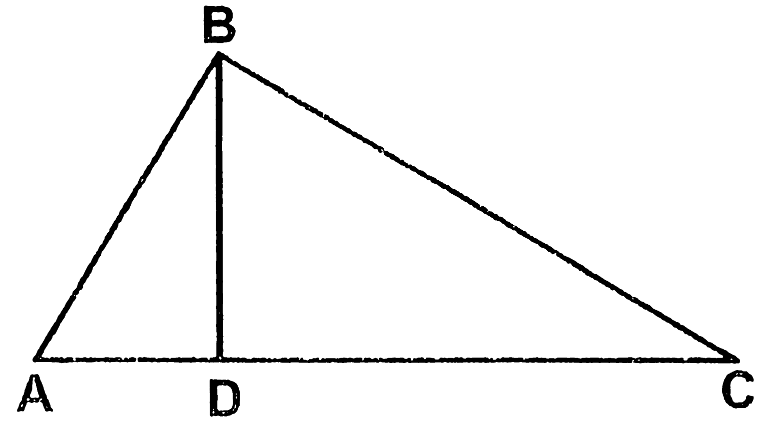


449. $\angle ACB = 90^\circ$, $CM = m_c$, CM — медіана, $\angle B = \beta$.
Знайти AC.

450. $\angle ACB = 90^\circ$, $CM = m_c$, CM — медіана, $\angle A = \alpha$.
Знайти S_{ABC}.

451. $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, CM — медіана, $CM = m_c$, $\angle DCM = \alpha$.
Знайти S_{ABC}.

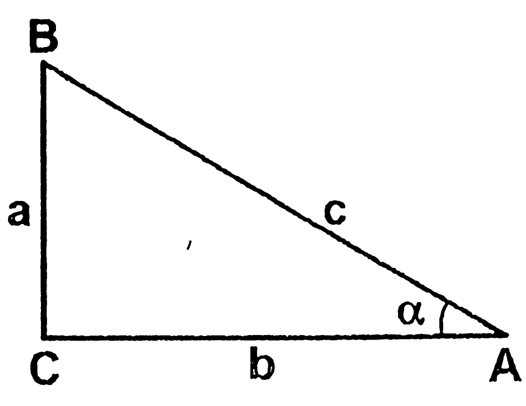
452. $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, CM — медіана, $CD = h$, $\angle DCM = \alpha$.
Знайти S_{ABC}.

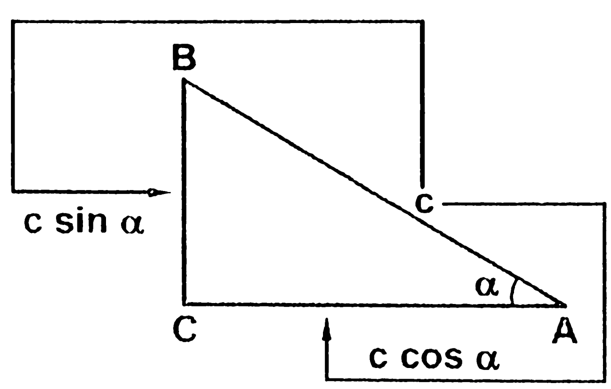


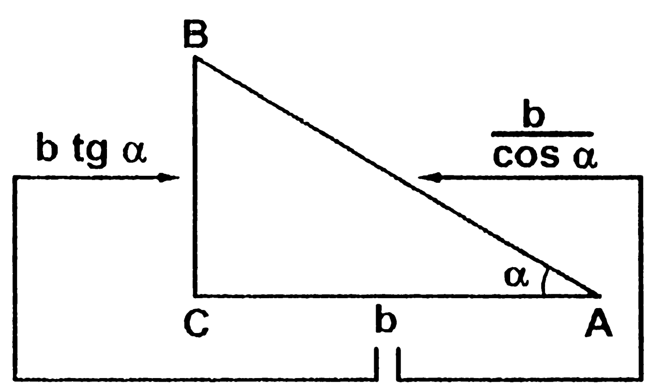
453. $BD \perp AC$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, $BD = h_c$.
Знайти AC.

454. $BD \perp AC$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, $AB = c$.
Знайти AC.

Довідковий відділ



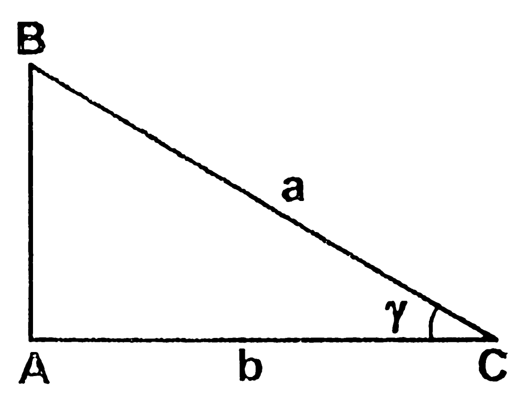




$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$,	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$,	$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$

Площа трикутника дорівнює половині добутку двох сторін на синус кута між ними.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma.$$



Коло і круг. Вписані та деякі інші кути.

455. Точки A, B, C належать колу з центром в точці O. $\angle AOB = 80°$. *Знайти* $\angle ACB$.

456. Точки A, B, C належать колу з центром в точці O. $\angle AOB + \angle ACB = 180°$. *Знайти* $\angle ACB$.

457. Точки A, B, C належать колу з центром в точці O. $\angle AOB - \angle ACB = 30°$. *Знайти* $\angle AOB$.

458. Точки A, B, C належать колу з центром в точці O. $\angle AOC = 150°$, $\angle BOC = 120°$. *Знайти* $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$.

459. ΔABC — гострокутний. O — центр описаного кола. $\angle BAC + \angle ACB = 100°$. *Найти* $\angle AOC$.

460. ΔABC — гострокутний. O — центр описаного кола. $\angle AOC = 160°$, $\angle A : \angle B = 3 : 4$. *Знайти* $\angle C$.

461. ΔABC — гострокутний. O — центр описаного кола. $\angle AOC = 100°$, $\angle AOB = 120°$. *Знайти* $\angle BAC$.

462. ΔABC вписаний в коло. $\angle A : \angle B : \angle C = 4 : 5 : 6$, BM — дотична. *Знайти* $\angle MBA$ і $\angle MBC$.

463. ΔABC вписаний в коло. $\smile AB : \smile BC : \smile CA = 2 : 3 : 4$. *Знайти* $\angle B - \angle A$.

464. $ABCD$ — чотирикутник, вписаний в коло з центром в точці O. $AB = 3$, $AD = \sqrt{7}$,

$\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile AD = 2 : 3 : 3 : 4$.

Знайти OC.

465. AB — хорда, BM — дотична до кола та центра O. $\angle AOB + 3\angle MBA = 100°$. *Знайти* $\angle MBA$.

466. AB — хорда, BM — дотична до кола та центра O. $\angle AOB - \angle MBA = 50°$. *Знайти* $\angle AOB + \angle MBA$.

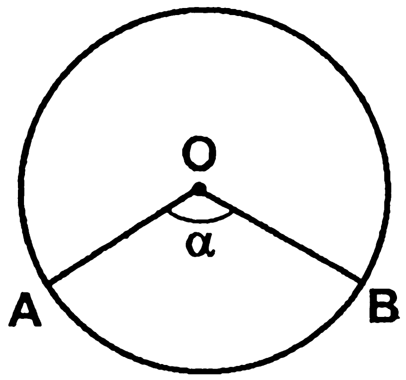
467. Точки A, B, C, D, E послідовно розміщено на колі. $\smile AED = 60°$. *Знайти* $2\angle ABD + 3\angle ACD$.

468. E — точка перетину хорд AB і CD. $\smile DB = 200°$, $\smile AC = 80°$. *Знайти* $\angle AED$.

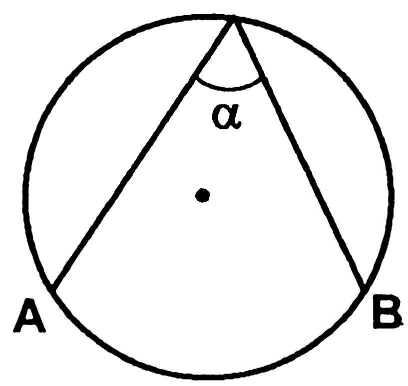
469. E — точка перетину хорд AB і CD. $\smile BC = 20°$, $\smile AD = 70°$. *Знайти* $\angle AEC$.

470. E — точка перетину хорд AB і CD. $\angle AED = 80°$, $\smile BC = 20°$. *Знайти* $\smile AD$.

Довідковий відділ



$\alpha = \smile AB$



$\alpha = \frac{1}{2} \smile AB$

Центральний кут вимірюється дугою, на яку спирається.

Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

471. ΔABC вписаний в коло з центром O. MB — дотична, B — точка дотику, K — точка перетину прямої BO з колом, $\angle MBA + \angle ACB = 140°$.
Знайти $\angle ABK$.

472. A, K, M, B — точки, що належать колу. C — точка перетину січних AM і BK.
$5\smile MK = \smile AB$, $\angle ACK = 24°$.
Знайти $\smile MK$.

473. ΔABC вписаний в коло з центром O, AD — дотична.
$\angle DAB + \angle AOB + \angle ACB = 240°$.
Знайти $\angle ACB$.

474. AC — діаметр кола з центром O. Точки B і D лежать на колі по одну сторону від діаметра.
Знайти
$\angle BAC + \angle BCA + \angle DAC + \angle DCA$.

475. Точки A, B і C лежать на колі з центром O.

$$\angle AOC = \frac{5}{2}\angle OAC,$$

$$\angle BCA = \angle ABC + 10°.$$

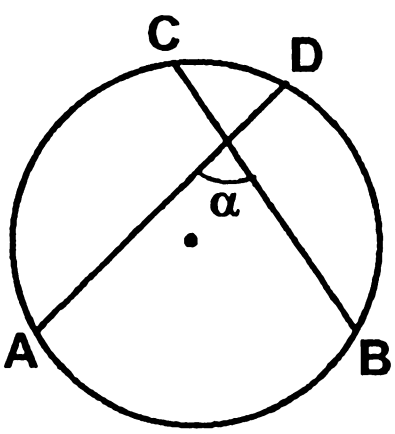
Знайти $\angle BAC$, $\angle ACB$, $\angle CBA$.

476. Точки A, B, C належать колу з центром в точці O.

$$\angle AOC = \angle ABC + 60°, \ \angle BAO = 25°.$$

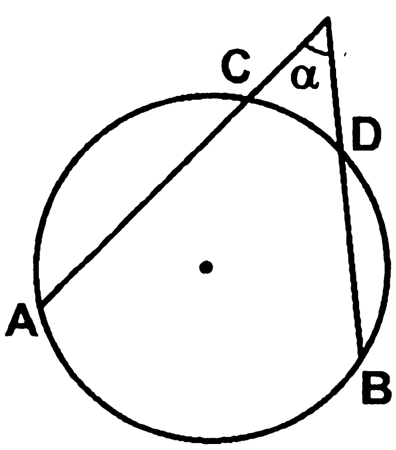
Знайти $\angle BAC$, $\angle ACB$, $\angle CBA$.

Довідковий відділ



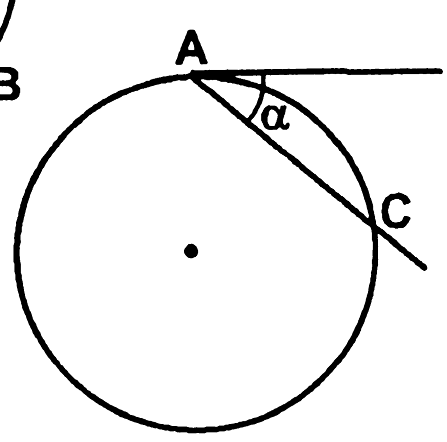
$$\alpha = \frac{1}{2}(\smile AB + \smile CD)$$

Кут, вершина якого лежить всередині круга, вимірюється півсумою двох дуг, одна з яких знаходиться між його сторонами, а друга — між продовженнями сторін.



$$\alpha = \frac{1}{2}(\smile AB - \smile CD)$$

Кут, вершина якого лежить поза кругом, вимірюється піврізницею двох дуг, що знаходяться між його сторонами.



$$\alpha = \frac{1}{2}\smile AC$$

Кут, утворений дотичною та хордою, вимірюється половиною дуги, що знаходиться всередині нього.

Вписані та описані кола

477. *Дано*: ΔABC, $BC = AC = AB = a$.
Знайти r.

478. *Дано*: ΔABC, $BC = AC = AB$,
O — центр описаного кола.
Знайти $R : AC$.

479. *Дано*: ΔABC, $BC = AC = AB$,
$S = 9\sqrt{3}$.
Знайти r.

480. *Дано*: ΔABC, $BC = AC = AB$,
$r = 2$.
Знайти S.

481. *Дано*: ΔABC, $BC = AC = AB$,
$r = 5$.
Знайти R.

482. *Дано*: ΔABC, $BC = AC = AB$,
$AC = a$.
Знайти R.

483. *Дано*: ΔABC, $BC = AC = AB$, O — центр описаного кола,
$OB = R$.
Знайти AC.

484. *Дано*: ΔABC, $AB = BC$, $BD \perp AC$,
O — центр вписаного кола,
$OD = 6$, $OB = 10$.
Знайти периметр трикутника.

485. *Дано*: ΔABC, $AB = BC$, $BD \perp AC$,
O — центр вписаного кола,
$P_{ABC} = 18$, $BD = 3$.
Знайти r.

486. *Дано*: ΔABC, $AB = BC$, $BD \perp AC$,
M — точка дотику вписаного кола зі стороною AB,
$AC : MB = 3 : 1$, $BD = 20$.
Знайти r.

487. *Дано*: ΔABC, $AB = BC$, $BD \perp AC$,
O — центр вписаного кола,
$OD : OB = 3 : 5$, $AB = 10$.
Знайти r.

488. *Дано*: ΔABC, $AB = BC$, $BD \perp AC$,
O — центр вписаного кола, M — точка дотику кола зі стороною BC,
$BM = AD$, $AO = 4$.
Знайти AB.

489. *Дано*: ΔABC, $AB = BC$, $BD \perp AC$,
O — центр вписаного кола,
$OB : OD = 13 : 5$, $S_{ABC} = 60$.
Знайти r.

490. *Дано*: ΔABC, $\angle C = 90°$, $AB = 15$,
$r = 3$.
Знайти P_{ABC}.

491. *Дано*: ΔABC, $\angle C = 90°$,
$P_{ABC} = 37$, $r = 3{,}5$.
Знайти AB.

492. *Дано*: ΔABC, $\angle C = 90°$,
$BC + AC = 14$, $AB = 10$.
Знайти r.

Довідковий відділ

Центр вписаного кола лежить в точці перетину бісектрис, а радіус вписаного кола визначається за формулою: $r = \dfrac{S}{p}$, де $p = \dfrac{a + b + c}{2}$.

Центр описаного кола лежить в точці перетину серединних перпендикулярів до середин сторін, а радіус описаного кола визначається за формулою:
$R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4S}$.

493. *Дано*: ΔABC, $\angle C = 90°$, $S = 96$, $AC + CB = 28$.
Знайти r.

494. *Дано*: ΔABC, $\angle C = 90°$, $S = 6$, $AB = 5$.
Знайти r.

495. *Дано*: ΔABC, $\angle C = 90°$, M — точка дотику вписаного кола до гіпотенузи AB. $BM = 6$, $AM = 4$.
Знайти r.

496. *Дано*: ΔABC, $\angle C = 90°$, M — точка дотику вписаного кола до гіпотенузи AB. $AB = 5$, $r = 1$.
Знайти S_{ABC}.

497. *Дано*: ΔABC, M, T, K — точки дотику вписаних кіл до сторін AB, BC і AC.
$AC : MB = 12 : 1$, $P_{ABC} = 78$.
Знайти AC.

498. *Дано*: ΔABC, $AB = BC$, $AC = 24$, $R = 13$.
Знайти S_{ABC}.

499. *Дано*: ΔABC, $AB = BC$, $BD \perp AC$, $AC = 24$, $BD = 24$.
Знайти R.

500. *Дано*: ΔABC, $AB = BC$, O — центр описаного кола.
$OB : AC = 5 : 8$, $BD \perp AC$,
$S_{ABC} = 128$.
Знайти R.

501. *Дано*: ΔABC, $AB = BC$, O — центр описаного кола. $BD \perp AC$,
$OM \perp BC$, $OC : BC = \sqrt{5} : 4$,
$P_{OBM} = 5 + 3\sqrt{5}$.
Знайти AC.

502. *Дано*: ΔABC, $AB = 14$, $AC = 13$, $BC = 15$.
Знайти R.

503. *Дано*: ΔABC, $BC = 12$, $AC = 20$, $AB = 16$.
Знайти r.

504. *Дано*: ΔABC,
$BC : AC : AB = 9 : 10 : 17$, $S = 144$.
Знайти R, r.

505. *Дано*: ΔABC,
$BC : AC : AB = 29 : 25 : 6$,
$P_{ABC} = 60$.
Знайти R, r.

506. Виразити сторону a_n правильного n-кутника через радіус описаного навколо нього кола.

507. Виразити сторону a_n правильного n-кутника через радіус вписаного в нього кола.

508. $ABCD$ — прямокутник, O — центр описаного кола,
$AB : BC = 5 : 12$, $BC + AB = 51$.
Знайти R.

509. $ABCD$ — прямокутник, O — центр описаного кола,
$AD - DC = 7$, $R = 6{,}5$.
Знайти P_{ABCD}.

510. $ABCD$ — прямокутник, O — центр описаного кола, C — точка дотику кола до прямої MK.
$\angle BCM + \angle BAC = 90°$.
Знайти $\angle BAC + \angle AOD$.

Довідковий відділ

Сума внутрішніх кутів опуклого n-кутника, дорівнює $180° \cdot (n - 2)$.

Сума зовнішніх кутів опуклого многокутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює $360°$.

Периметри правильних n-кутників відносяться як радіуси описаних навколо них кіл.

511. $ABCD$ — прямокутник, O — центр описаного кола. Точка M належить дузі BC. $AB : BC = 1 : \sqrt{3}$.
Знайти $\angle AMB$.

512. $ABCD$ — прямокутник, O — центр описаного кола. M належить дузі BC. $S_{ABCD} = \sqrt{3}$. $R = 1$.
Знайти $\angle AMB$.

513. $ABCD$ — трапеція, вписана в коло з центром O, $AD \parallel BC$,
$\angle AOB = 90°$, $BD = 4\sqrt{2}$.
Знайти S_{ABCD}.

514. $ABCD$ — трапеція. O — центр описаного кола. $\angle OAB = \angle OAD$,
$\angle AOB = 120°$, $AD = 7$, $BC = 5$.
Знайти P_{ABCD}.

515. *Знайти* площу трикутника ABC, вписаного в коло, радіус якого дорівнює 2, а
$\smile AB : \smile BC : \smile CA = 3 : 4 : 5$.

516. O — центр описаного навколо трикутника ABC кола,
$\angle AOB = 120°$, $AB = BC = 5$.
Знайти R.

517. O — центр описаного навколо трикутника ABC кола, радіус якого дорівнює 2, $\angle A = 15°$,
$\angle B = 60°$.
Знайти площу трикутника ABC.

518. O — центр описаного кола навколо трапеції $ABCD$.
$\angle BAC = \angle CAD$, $\angle ABO = 60°$,
$AB + BC = 4$.
Знайти BO.

519. В рівнобедрений трикутник вписано коло з центром O. D — точка дотику, що належить стороні AB.
$AD : DB = 5 : 8$, $P_{ABC} = 180$.
Знайти r.

520. Рівнобедрений трикутник ABC вписано в коло з центром O.

$$AB = BC,\ BD \perp AC,$$
$$AO = 9,\ OD = \frac{1}{3} BO.$$

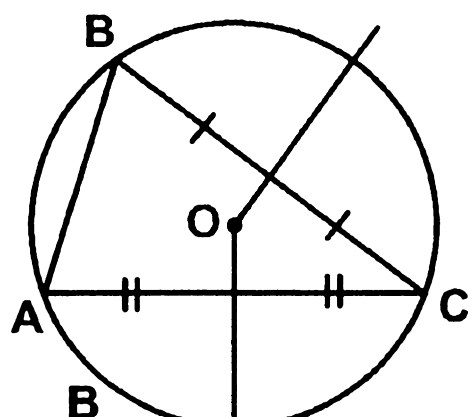
Знайти AB.

521. DA і DB — дотичні до кола з центром O.

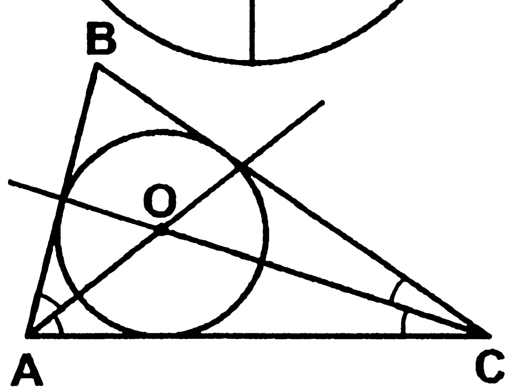
$$\angle ADB = 120°,\ DO = 16.$$

Знайти AD.

Довідковий відділ



Центр кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину перпендикулярів, проведених до середин його сторін (серединних перпендикулярів).



Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис.

522. DA і DB — дотичні до кола з центром O. $\angle ADB = 60°$, $DA + DB = 8$.
Знайти OD.

523. DA і DB — дотичні до кола з центром O. $\angle AOB = 120°$.
Знайти радіус кола, якщо площа чотирикутника $OADB$ дорівнює $9\sqrt{3}$.

524. A — точка дотику кола з прямою BC.
Знайти радіус кола з центром O, якщо $AB = AC$, $\angle BOC = 120°$, $BO = 6$.

525. Точки A, B і C лежать на колі з центром O. $\angle ABC = 30°$, $P_{AOC} = 15$.
Знайти AO.

526. Точки A і B лежать на колі з центром O.
Знайти периметр трикутника AOB, якщо $\angle AOB = 60°$, $AB = 4$.

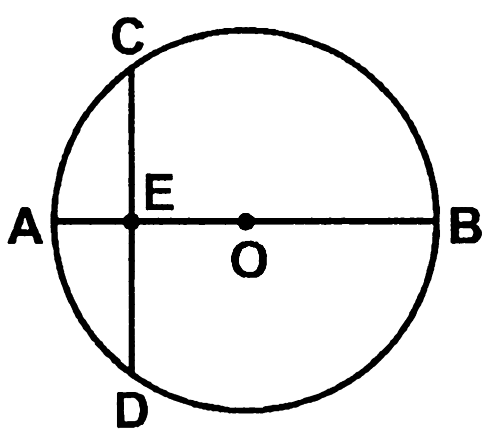
527. O — центр вписаного в трикутник ABC кола.
Знайти його радіус, якщо $\angle AOC = 120°$, $AB = BC$, $P_{ABC} = 3$.

528. O — центр кола, вписаного в квадрат $ABCD$. E і T — точки перетину кола з діагоналлю квадрата AC.
Знайти AE, якщо $P_{ABCD} = 4$.

529. E, M, P, K — точки дотику вписаного в ромб $ABCD$ кола.
Знайти кути ромба, якщо $AE = 3$, $DK = 1$.

530. $ABCD$ — ромб, описаний навколо кола, радіус якого дорівнює 3. $\angle ABC = 150°$.
Знайти P_{ABCD}.

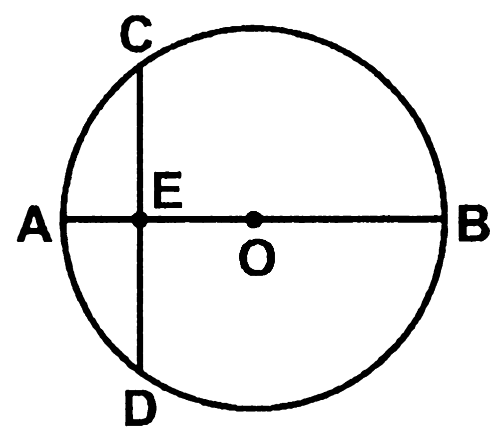
Пропорційні відрізки в крузі



531. O — центр кола. E — точка перетину хорди CD та діаметра AB. $CD \perp AB$, $OA = 10$, $CE = 8$.
Знайти AE.

532. E — точка перетину хорди CD та діаметра AB. $CD \perp AB$, $CE + AE = 5$, $BE = 16$.
Знайти CD.

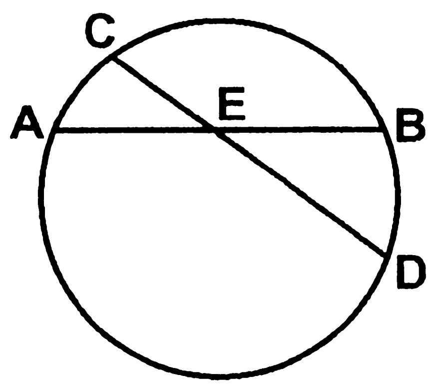
533. E — точка перетину хорди CD та діаметра AB. $CD \perp AB$, $AB + CD = 9$, $BE = 4AE$.
Знайти CD.



534. E — точка перетину хорди CD та діаметра AB. $CD \perp AB$, $CE = 2AE$, $BE = AE + 6$.
Знайти CB.

535. E — точка перетину хорди CD та діаметра AB. $CD \perp AB$, $AE = EC + 2$, $AC = AE + 2$.
Знайти BE.

536. E — точка перетину хорди CD та діаметра AB. $CD \perp AB$, $AE + EC = 7$, $CE + BE = 17,5$.
Знайти BE.



537. E — точка перетину хорд CD та AB. $AE = 4$, $AB = 10$, $CE : ED = 1 : 6$.
Знайти CD.

538. E — точка перетину хорд CD та AB. $AB = 17$, $CD = 18$, $ED = 2CE$.
Знайти AE і BE.

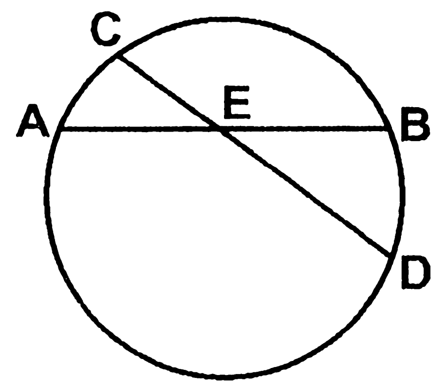
539. E — точка перетину хорд CD та AB. $AB = 10$, $CD = 11$, $BE = CE + 1$.
Знайти CE.

540. E — точка перетину хорд CD та AB. $ED = 2AE$, $CE = DE - 1$, $BE = 10$.
Знайти CD.

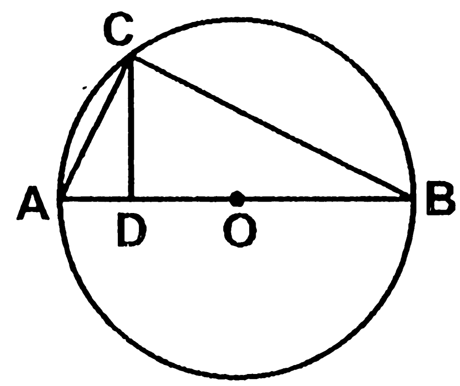
541. E — точка перетину хорд CD та AB. $BE = CE + 4$, $AE = CE - 2$, $AB - CD = 1$.
Знайти $AE : DE$.

542. E — точка перетину хорд CD та AB. $CE = 2AE$, $ED = AE + 4$, $AB = 17$.
Знайти CD.

543. E — точка перетину хорд CD та AB. $CM \perp AB$, $DK \perp AB$, $AB = 21$, $CM = 4\sqrt{3}$, $DK = 5\sqrt{3}$, $\angle AEC = 60°$.
Знайти AM і KB.



544. E — точка перетину хорд CD та AB. $DK \perp AB$, $DK = 2CE$, $\angle DEK = 30°$, $AE = CE + 1$, $AB = 13$.
Знайти KB.

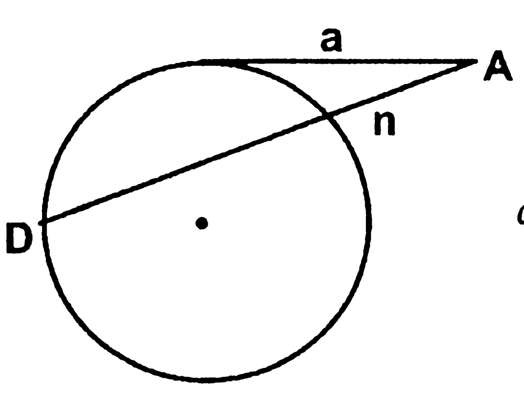


545. O — центр кола, описаного навколо ΔABC, $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $AD : DC = 3 : 4$, $OC = 12{,}5$.
Знайти CD.

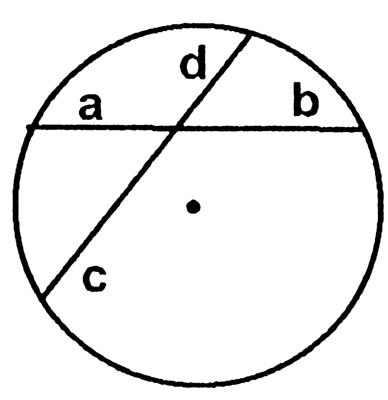
546. O — центр кола, описаного навколо ΔABC, $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $CD = 12$, $AD : DB = 9 : 16$.
Знайти R.

547. O — центр кола, описаного навколо ΔABC, $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $S_{ABC} = 150$, $AB : AC = 5 : 4$.
Знайти CD.

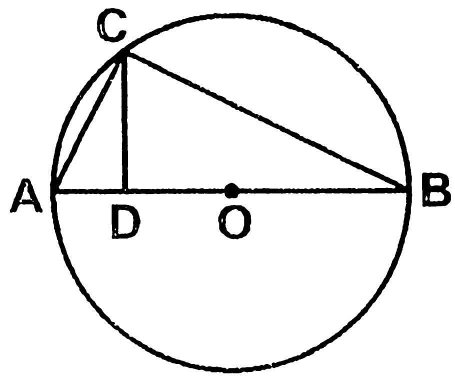
Довідковий відділ



$$a^2 = AD \cdot n$$



$$a \cdot b = c \cdot d$$



548. O — центр кола, описаного навколо ΔABC, $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $CD + CB = 32$, $AC : AB = 3 : 5$.
Знайти CD.

549. O — центр кола, описаного навколо ΔABC, $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $CB = 24$, $AC : CO = 6 : 5$.
Знайти CD.

550. O — центр кола, описаного навколо ΔABC, $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $OA = 20$, $CD = 3AD$.
Знайти DB.

551. O — центр кола, описаного навколо ΔABC, $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $AB = 10$, $AD : CB = 1 : 2\sqrt{5}$.
Знайти AD.

552. *Знайти* периметр трикутника ABC ($AB = BC$), якщо E, M, D — точки дотику вписаного кола зі сторонами AB, BC, AC. $4AE + 2BE = 17$.

553. *Знайти* периметр прямокутного трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 1, а радіус описаного — 2,5.

554. Діаметр круга поділено на відрізки $AC = 18$ і $CB = 8$. З точки C проведено до нього перпендикуляр CD заданої довжини. Яке положення займає точка D відносно круга, якщо CD дорівнює: *а*) 12, *б*) 10, *в*) 14?

555. З однієї точки проведені до кола дотична та січна. Дотична дорівнює 6, січна — 18. *Визначити* внутрішній відрізок січної.

556. З однієї точки проведені до кола дотична та січна.
Знайти січну, якщо вона менша за внутрішній відрізок січної на 4 і більша за зовнішній відрізок на 4.

557. З точки до кола проведено дотичну та січну.
Знайти січну, якщо внутрішній її відрізок відноситься до зовнішнього як 3:1, а довжина дотичної 12.

558. З однієї точки проведені до кола дотична та січна.
Знайти зовнішній відрізок січної, якщоо внутрішній її відрізок дорівнює 12, а довжина дотичної 8.

559. Дотична та січна, що виходять з однієї точки, відповідно дорівнюють 12 і 24.
Знайти радіус кола, якщо січна віддалена від центра на 12.

560. З точки до кола проведено дотичну та січну.
Знайти довжину дотичної, якщо її сума з внутрішнім відрізком січної дорівнює 10, а зовнішній відрізок січної на 4 менший від внутрішнього.

561. До кола радіуса 5 з однієї точки проведені дотична та січна.
Знайти довжину дотичної, якщо відомо, що вона більша від зовнішнього відрізку січної на 2, а січна віддалена від центру на 3.

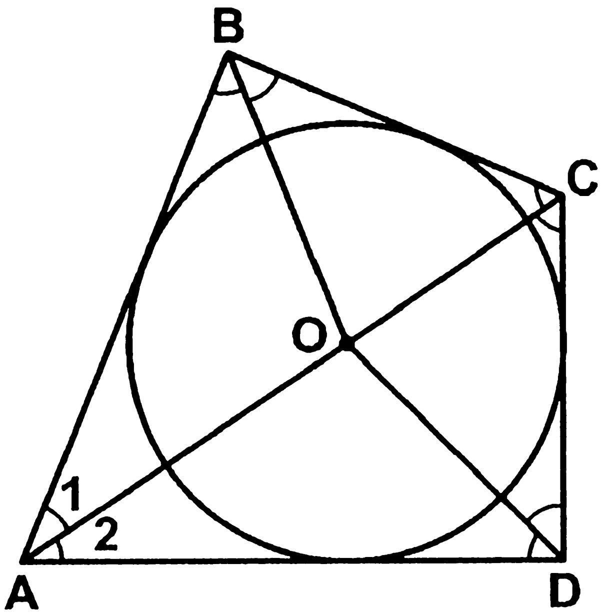
562. З точки до кола проведено дві січні, внутрішні відрізки яких відповідно дорівнюють 8 і 16. Зовнішній відрізок другої січної на 1 менший від зовнішнього відрізка першої.
Знайти довжину кожної січної.

563. З точки до кола проведено дві січні. Зовнішній відрізок першої січної відноситься до свого внутрішнього як 1:3. Зовнішній відрізок другої січної на 1 менший від зовнішнього відрізка першої і відноситься до свого внутрішнього відрізка як 1:8.
Знайти довжину кожної січної.

564. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола. $AB = CD$,

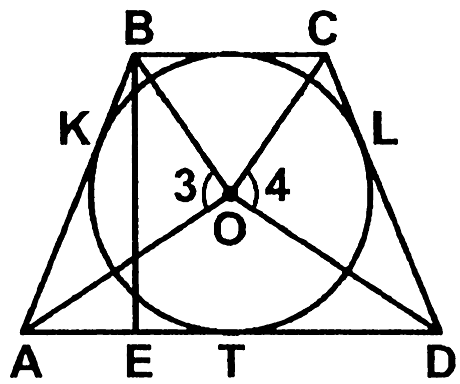
Чотирикутник, описаний навколо кола

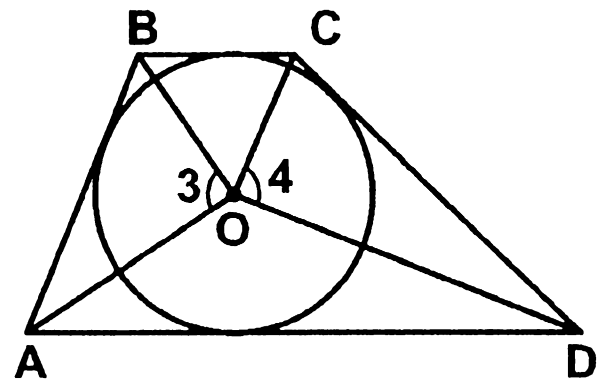
Ключові задачі



Трапеція

рівнобічна — різностороння





$AB + CD = AD + BC$

$\angle 1 = \angle 2$

. . . . .

. . . . .

$\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$

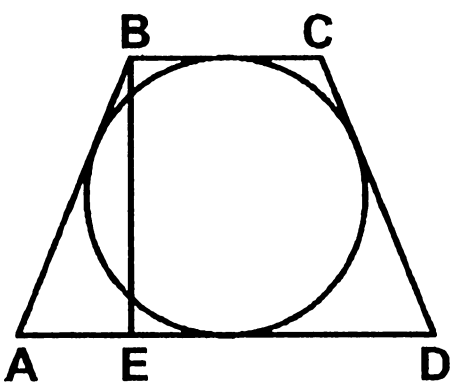
$ED = AB$

$\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$

Доведення.

$$\begin{pmatrix} \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ, \\ BO \text{ і } AO \text{ — бісектриси} \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\angle OAB + \angle OBA = 90^\circ$$
$$\Downarrow$$
$$\angle 3 = 90^\circ,$$

$$\begin{pmatrix} BK = BM = ET \\ KA = LD = DT \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} BK = ET \\ KA = DT \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$ED = AB.$$

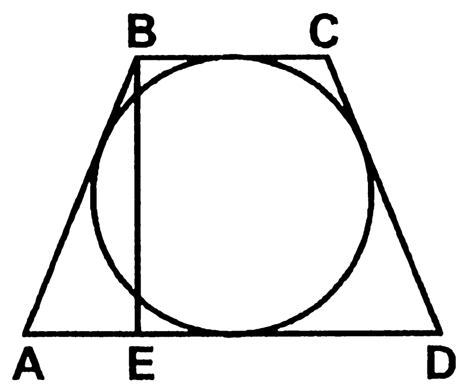


$BE \perp AD$.

Довести, що $ED > BE$.

565. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола. $AB = CD$,
$BE \perp AD$, $AD = 3BC$.
Знайти $\angle BAE$.

566. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола. $AB = CD$,

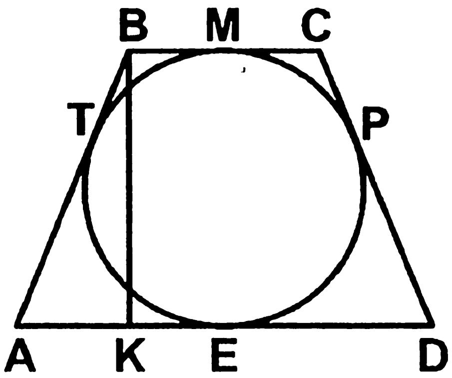


$BE \perp AD$.

Довести, що $S_{ABCD} = AB \cdot BE$.

567. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола. $AB = CD$,
$S_{ABCD} = 2$, $\angle ABC = 150^\circ$.
Знайти P_{ABCD}.

568. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола. $AB = CD$, T, M, P, E — точки

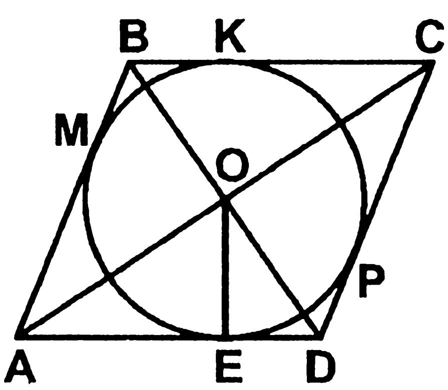


дотику вписаного кола, $BT = 2$, $AE = 8$.
Знайти S_{ABCD}.

569. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола. $AB = CD$, T, M, P, E — точки дотику вписаного кола, $AT = 8$, $S_{ABCD} = 80$.
Знайти BT.

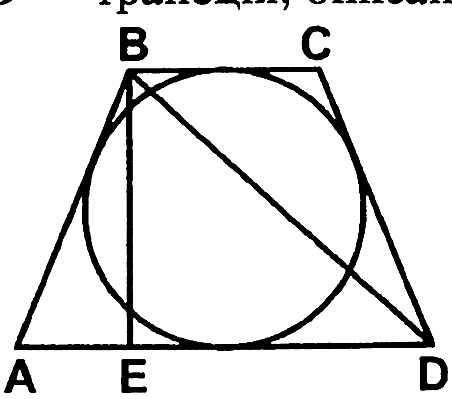
570. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола. $AD + BC = 8$.
Знайти P_{ABCD}.

571. $ABCD$ — ромб. M, K, P, E —

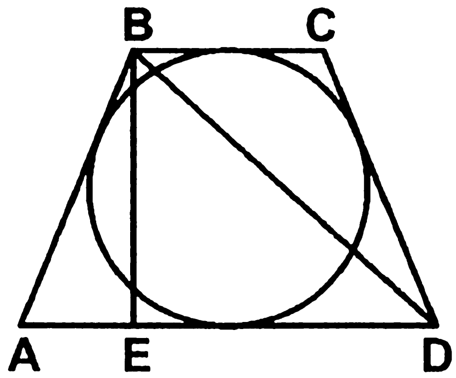


точки дотику вписаного кола з центром O. $AM \cdot DP = 2$.
Знайти $S_{круга}$.

572. $ABCD$ — трапеція, описана навколо



кола. $AB = CD$,
$BE \perp AD$.
Довести, що $S_{ABCD} = 2S_{BED}$.



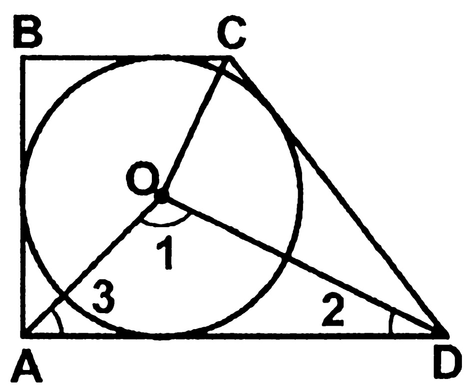
573. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола. $AB = CD$,
$P_{ABCD} = 16$, $BD = 5$.
Знайти S_{ABCD}.

574. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола. $AB = CD$, $BD = 5$,
$S_{ABCD} = 12$.
Знайти P_{ABCD}.

575. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола. $AB = CD$,
$P_{ABCD} = 16$, $S_{ABCD} = 12$.
Знайти BD.

576. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола. $AB = CD$.
Довести, що

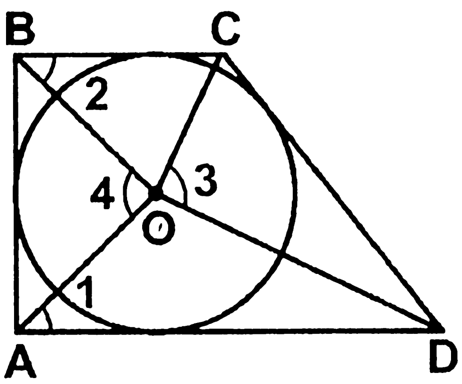
$$\sin \angle BAD = \operatorname{tg} \angle ADB.$$



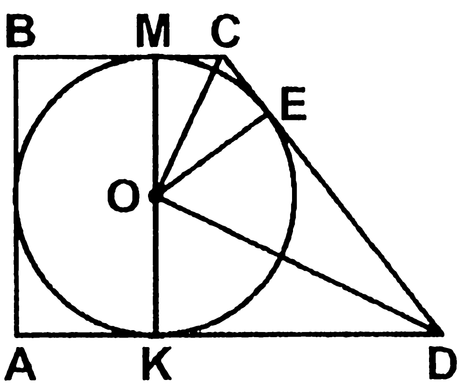
577. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола з центром O.
$BA \perp AD$, $\angle BCD = 2\angle CDA$.
Знайти $\angle 1$.

578. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола з центром O.
$BA \perp AD$, $\angle 1 = 105°$.
Довести, що $\angle BCD = 2\angle CDA$.

579. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола з центром O.
$\angle BCD = 2\angle CDA$, $\angle 1 = 105°$.
Довести, що $BA \perp AD$.



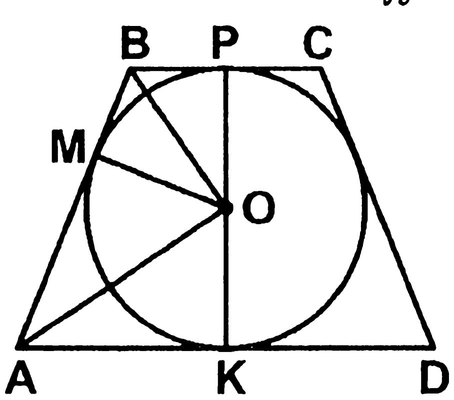
580. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола з центром O.
$BA \perp AD$.
Знайти $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$.



581. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола з центром O.
$BA \perp AD$.
Довести, що $S_{ABCD} = AD \cdot BC$.

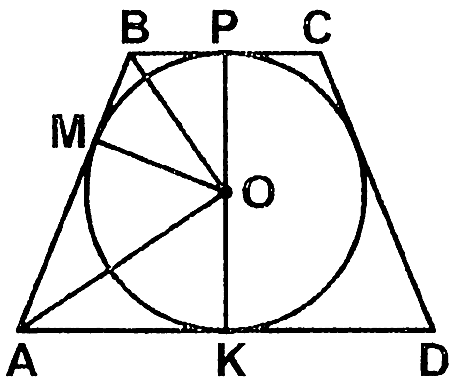
582. $ABCD$ — трапеція. E — точка дотику описаного кола з центром O. $OC = 6$, $OD = 8$.
Знайти S_{ABCD}.

583. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола з центром O та площею S. E — точка перетину прямих CO і AD, $BA \perp AD$.
Довести, що $S_{ABCD} = \dfrac{2S}{\pi} + r \cdot DE$.



584. $ABCD$ — трапеція. M, P, K — точки дотику вписаного кола з центром O. $AB = CD$,
$BO = 3$, $AO = 4$.
Знайти PK.

585. $ABCD$ — трапеція. M, P, K — точки дотику вписаного кола з цен-



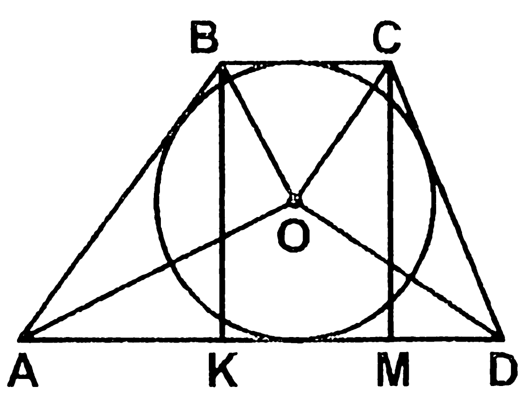
тром O. $AB = CD$,
$AO = 4$, $PK = 4{,}8$.
Знайти BO.

586. $ABCD$ — трапеція. M, P, K — точки дотику вписаного кола з центром O. $AB = CD$,
$PK = 4$, $BM = 1$.
Знайти BD.

587. $ABCD$ — трапеція. M, P, K — точки дотику вписаного кола з центром O. $AB = CD$, $BE \perp AD$.
Знайти $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{AOB}}$.

588. $ABCD$ — трапеція. M, P, K — точки дотику вписаного кола з центром O. $AB = CD$.
Знайти $\dfrac{S_{AOB}}{S_{PCDK}}$.

589. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола з центром O.
$\angle AOB = 3\angle BAD$.
Знайти $\dfrac{r}{AB}$.



590. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола радіуса r.
$\angle BAD = 30°$, $\angle ADC = 45°$, $r = 1$.
Знайти P_{ABCD}.

591. $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола з центром O.
Знайти

$$\angle AOB + \angle DOC + \angle BAD + \angle ABC.$$

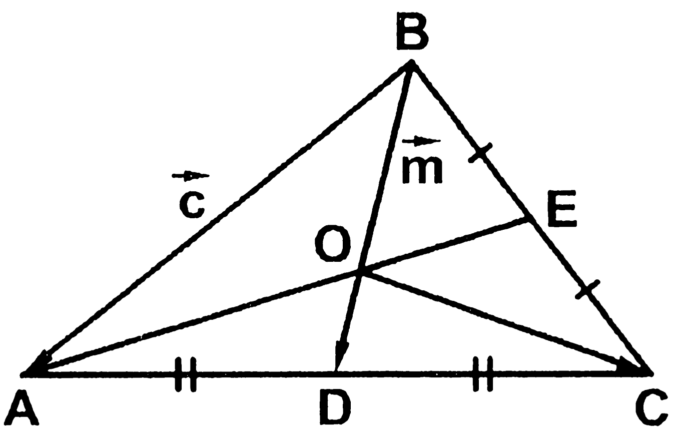
Вектори

592. *Знайти* суму векторів:

а) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$;
б) $\overline{BA} + \overline{AD} + \overline{DC}$;
в) $\overline{DA} + \overline{CD} + \overline{AB}$;
г) $\overline{AC} + \overline{BD} + \overline{CB}$;
д) $\overline{BC} + \overline{BD} + \overline{CD}$;
е) $\overline{AB} + \overline{DB} + \overline{BD}$;
ж) $\overline{AB} + \overline{CA} + \overline{BD} + \overline{DC}$.

593. *Знайти*:

а) $\overline{AB} - \overline{AD}$;
б) $\overline{CB} - \overline{CD}$;
в) $\overline{AC} + \overline{CD} - \overline{AM}$;
г) $\overline{AB} - \overline{CD} - \overline{AC} + \overline{BE}$;
д) $\overline{AK} + \overline{DE} - \overline{BC} + \overline{KD} - \overline{AB}$;
е) $\overline{MT} - \overline{KE} - \overline{MK} + \overline{AT} - \overline{AE}$;
ж) $\overline{AC} + \overline{CD} - \overline{KM} + \overline{DM} - \overline{AK}$;
з) $\overline{DK} - \overline{EA} - \overline{AB} + \overline{KB} - \overline{DB}$.



594. *O* — точка перетину медіан. $\overline{BA} = \overline{a}$, $\overline{BD} = \overline{m}$.
Виразити $\overline{OC}$ через задані вектори.

Розв'язок.

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} =$$
$$= -\overline{BA} + \overline{BD} = -\overline{c} + \overline{m}.$$
$$\overline{DC} = \overline{AD} = -\overline{c} + \overline{m}.$$
$$OD = \frac{1}{3} BD = \frac{1}{3}\overline{m}.$$
$$\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{DC} = \frac{1}{3}\overline{m} - \overline{c} + \overline{m} = \frac{4}{3}\overline{m} - \overline{c}.$$

Довідковий відділ

$\overline{AB}$ — вектор.

$|\overline{AB}|$ — модуль вектора.

ВЕКТОРИ

однаково напрямлені (співнапрямлені)

$\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ — $\overline{a}$ →, $\overline{b}$ →

протилежно напрямлені

$\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ — $\overline{a}$ →, $\overline{b}$ ←

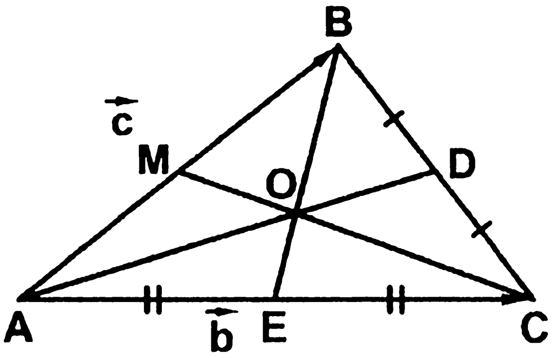
колінеарні

Рівність, додавання та віднімання векторів

$\boxed{\overline{a} = \overline{b},}$ якщо $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, $|\overline{a}| = |\overline{b}|$

$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}}$
правило трикутника

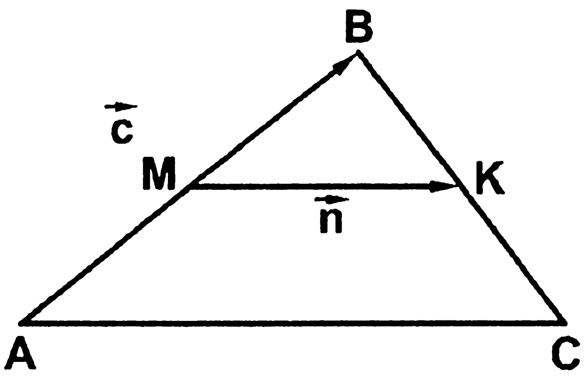
$\boxed{\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}}$



595. O — точка перетину медіан. AD — медіана, $\overline{AB} = \overline{c}$, $\overline{AC} = \overline{b}$.

Виразити через дані вектори:

а) $\overline{BC}$; *б)* $\overline{OA}$; *в)* $\overline{OD}$; *г)* $\overline{AB} - \overline{OC}$.



596. MK — середня лінія трикутника ABC. $\overline{AB} = \overline{c}$, $\overline{MK} = \overline{n}$.

Виразити через дані вектори:

а) $\overline{BC}$; *б)* $\overline{AK}$.

597. MK — середня лінія трикутника ABC. $\overline{AB} = \overline{c}$, $\overline{MK} = \overline{n}$.

Виразити через задані вектори:

а) $\overline{CM}$; *б)* $\overline{AM} - \overline{KB}$.

598. O — точка перетину медіан ΔABC. $\overline{AB} = \overline{c}$, $\overline{AC} = \overline{b}$.

Знайти $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

599. O — точка перетину діагоналей AC і BD паралелограма $ABCD$. $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$.

Виразити через задані вектори:

а) $\overline{OB}$; *б)* $\overline{OA} + \overline{OD}$; *в)* $\overline{AB} - \overline{OB}$.

600. O — точка перетину діагоналей AC і BD паралелограма $ABCD$. Точки M, N, K, L — середини сторін AB, BC, CD, AD відповідно. $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$.

Виразити через задані вектори:

а) $\overline{MN} + \overline{NK}$; *б)* $\overline{OB} + \overline{BK}$;

в) $\overline{KN} + \overline{KM}$.

601. Точки M, N, K, L — середини сторін AB, BC, CD, AD прямокутника $ABCD$. $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$.

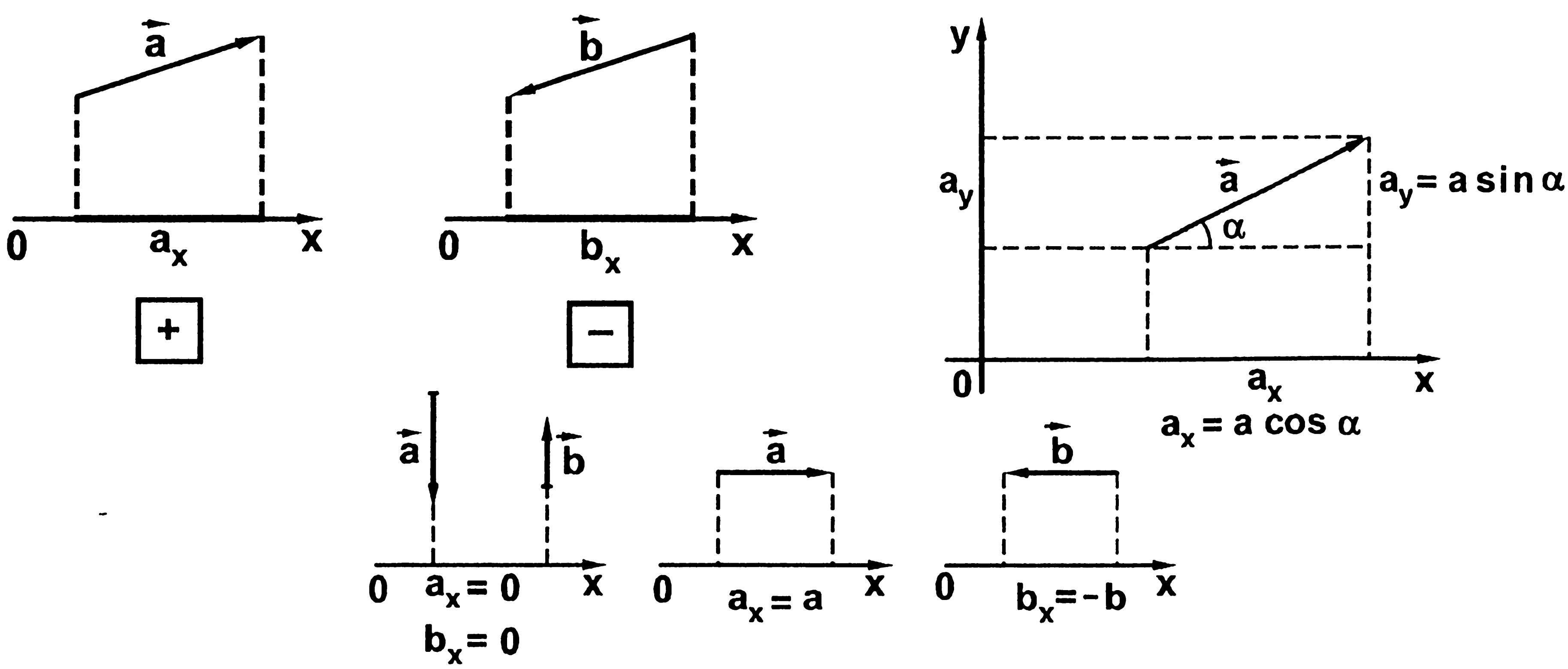
Виразити через задані вектори:

а) $\overline{AM} + \overline{AN}$;

б) $\overline{AM} - \overline{AN}$.

Довідковий відділ

Проекція вектора на координатні осі



602. $ABCD$ — трапеція, $AD \parallel BC$, $AD = 4BC$. $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$.

Виразити через задані вектори: *а*) $\overline{CD}$; *б*) $\overline{AC}$; *в*) $\overline{BD}$; *г*) $\overline{AC} - \overline{BD}$.

603. $ABCD$ — трапеція, $AD \parallel BC$. Точки M, N, K — середини відповідних сторін AB, CD, AD. $\overline{BA} = \overline{c}$, $\overline{BC} = \overline{b}$.

Виразити через задані вектори: $\overline{KM} + \overline{KN}$.

604. $ABCD$ — трапеція, $AD \parallel BC$, $\overline{AC} = \overline{m}$, $\overline{DB} = \overline{n}$.

Виразити через задані вектори: $\overline{AD} + \overline{BC}$.

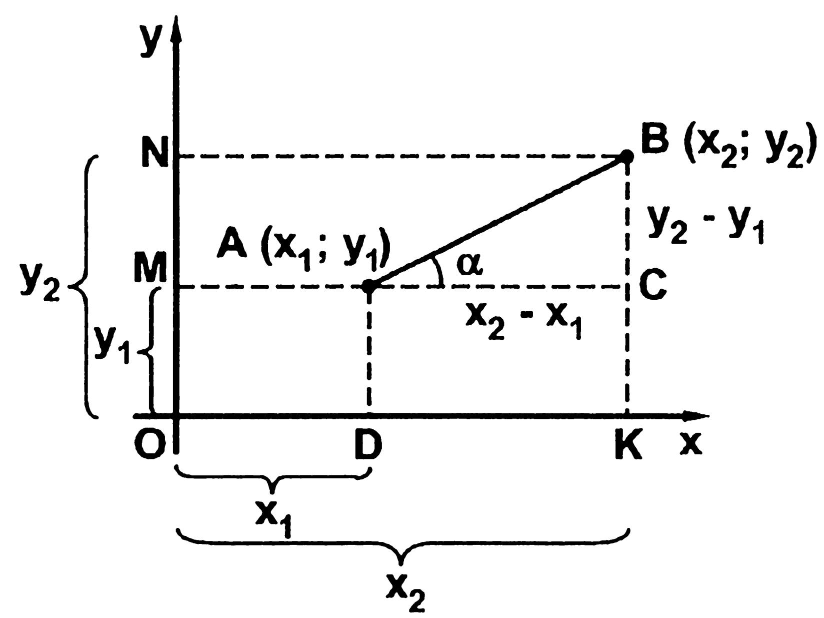
605. $ABCD$ — трапеція, $AD \parallel BC$, $\overline{BA} = \overline{b}$, $\overline{CD} = \overline{c}$.

Виразити через задані вектори: $\overline{AD} - \overline{BC}$.

Довідковий відділ

Знаходження відстані між двома точками

Знаходження кута нахилу відрізка до осі Ox



Знайти відстань між точками $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ — це виразити відстань AB через координати точок A і B.

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}.$$

$$AC = |A_1B_1| = |x_2 - x_1|,$$

$$BC = |y_2 - y_1|,$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

d — відстань між даними точками на площині

Тангенс кута нахилу відрізка AB до осі OX.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Координати середини відрізка.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Кожна координата середин відрізка дорівнює напівсумі його кінців

606. *Побудувати* точку, симетричну точці $A\ (3;\ -5)$, відносно:
а) осі Ox; *б*) осі Oy;
в) початку координат.

607. *Побудувати* точку, симетричну точці $A\ (x;\ y)$, відносно:
а) осі Ox; *б*) осі Oy;
в) початку координат.

608. *Знайти* відстань між точками A і B, якщо:
а) $A\ (-5;\ 2)$, $B\ (-2;\ 3)$.
б) $A\ (3;\ 6)$, $B\ (1;\ -1)$.
в) $A\ (0;\ -3)$, $B\ (-5;\ 1)$.

609. *Визначити*, яка з заданих точок $A\ (3;\ -4)$, $B\ (-\sqrt{7};\ 3)$ і $C\ (-\sqrt{3};\ -1)$ більш віддалена від початку координат.

610. *Показати*, що трикутник з вершинами $A\ (5;\ 2)$, $B\ (3;\ -4)$ і $C\ (-3;\ -2)$ рівнобедрений.
Знайти основу трикутника.

611. *Довести*, що трикутник з координатами вершин $A\ (5;\ 1)$, $B\ (1;\ -3)$ і $C\ (-1;\ -1)$ — прямокутний.

612. На осі абсцис знайти точку M, рівновіддалену від двох даних точок $A\ (8;\ 7)$ і $B\ (-1;\ 2)$.

613. Точки $A\ (-7;\ 4)$ і $B\ (x;\ y)$ лежать на прямій, паралельній осі Ox.
Знайти координати точки B, якщо $AB = 5$.

614. Точки $A\ (-3;\ -1)$ і $B\ (x;\ y)$ лежать на прямій, паралельній осі Oy.
Знайти координати точки B, якщо $AB = 7$.

615. Точки $A\ (-3;\ -1)$ і $B\ (x;\ y)$ лежать на бісектрисі першого координатного кута.
Знайти координати точки B, якщо $AB = 2\sqrt{2}$.

616. *Визначити* вид трикутника відносно його сторін, вершини якого
а) $A\ (6;\ 0)$, $B\ (2;\ 3)$, $C\ (7;\ -4)$,
б) $A\ (-3;\ -3)$, $B\ (-3;\ 2)$, $C\ (-3;\ -1)$,
в) $A\ (-5;\ 1)$, $B\ (-2;\ 7)$, $C\ (2;\ -5)$,
г) $A\ (-2;\ 0)$, $B\ (3;\ 2)$, $C\ (2;\ -3)$.

617. *Знайти* координати точки C — середини відрізка, що сполучає точки:
а) $A\ (-6;\ 2)$, $B\ (-4;\ 8)$;
б) $A\ (3;\ 5)$, $B\ (1;\ -1)$;
в) $A\ (0;\ -3)$, $B\ (-8;\ 1)$.

618. *Знайти* координати кінця B відрізка, якщо другий кінець відрізка — точка $A\ (-5;\ -7)$, а середина відрізка — $C\ (-9;\ -12)$.

619. *Знайти* координати кінця B відрізка, якщо другий кінець відрізка — точка $A\ (-4;\ 2)$, а середина відрізка — $C\ (-6;\ 5)$.

620. Дано вершини трикутника.
Знайти координати середин його сторін:
а) $A\ (-7;\ 4)$, $B\ (-5;\ 2)$, $C\ (6;\ -3)$;
б) $A\ (-4;\ 6)$, $B\ (-8;\ 9)$, $C\ (5;\ -6)$.

621. Точки $A\ (2;\ 4)$, $B\ (-3;\ 7)$ і $C\ (-6;\ 6)$ — три вершини паралелограма, причому A і C — протилежні вершини.
Знайти координати четвертої вершини.

622. Три вершини паралелограма мають координати $A\ (-6;\ -4)$, $B\ (-4;\ 8)$, $C\ (-1;\ 5)$, причому A і C — протилежні вершини.
Знайти координати четвертої вершини паралелограма.

623. *Дано*: ΔABC, AM — медіана, $A\ (2;\ -6)$, $B\ (5;\ 3)$, $C\ (1;\ 1)$.
Знайти AM.

624. *Дано:* ΔABC. $A\ (-7;\ -3)$, $B\ (4;\ 5)$, $C\ (-2;\ 1)$. O — точка перетину медіан.
Знайти AM.

625. *Дано*: ΔABC, $AB = BC$, $A\ (-9;\ -2)$, $B\ (-3;\ 6)$, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $AD = 9{,}6$.
Знайти BE.

626. *Дано*: ΔABC, BE — бісектриса, $A\ (-5;\ -3)$, $C\ (10;\ -3)$, $AB = 8$, $BC = 12$.
Знайти BE.

627. *Дано*: ΔABC, BD — бісектриса, $A\ (-5;\ -3)$, $D\ (-1;\ -3)$, $C\ (5;\ -3)$, $AB + BC = 15$.
Знайти AB.

628. *Дано:* ΔABC, BD — бісектриса, $A\ (-1;\ -10)$, $D\ (-1;\ 0)$, $C\ (-1;\ 12)$, $BC - AB = 4$.
Знайти AB.

629. *Дано:* ΔABC, AE — бісектриса, $A\ (-4;\ -4)$, $C\ (-4;\ 12)$, $B\ (12;\ 8)$.
Знайти CE.

630. *Дано:* ΔABC, $AB = BC$, AE — бісектриса, $A\ (1;\ -10)$, $B\ (25;\ 8)$, $\cos \angle CAB = 0{,}8$.
Знайти $EC - BE$.

631. *Дано:* ΔABC, $\angle ACB = 90°$, CE — бісектриса, $A\ (2;\ -6)$, $E\ (8;\ -6)$, $B\ (16;\ -6)$.
Знайти P_{ABC}.

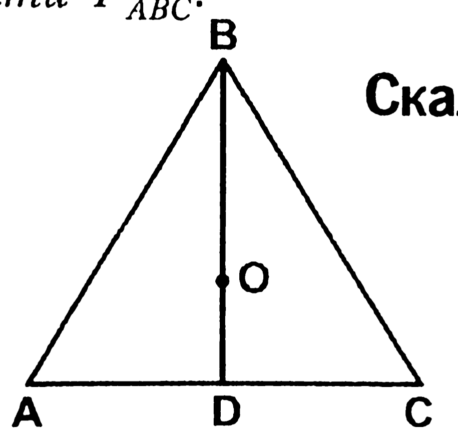
632. *Дано:* ΔABC, $\angle ACB = 90°$, BM — бісектриса, $C\ (-5;\ -3)$, $M\ (-5;\ 0)$, $\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$.
Знайти S_{ABC}.

633. *Дано:* ΔABC, $AB = BC$, E — точка перетину висоти BD з бісектрисою AE. $\sin \angle ABD = \frac{5}{13}$, $A\ (-15;\ -2)$, $C\ (35;\ -2)$.
Знайти радіус вписаного кола.

634. ΔABC, $\angle ACB = 90°$, $CE = BE$, $E\ (0;\ 12)$, $O\ (6;\ 8)$ — точка перетину медіан, $AC = 9$.
Знайти AB.

635. $ABCD$ — трапеція. $BC \parallel AD$, $BA \perp AD$, $A\ (-2;\ 2)$, $C\ (4;\ 26)$, $D\ (14;\ 2)$, $\sin \angle D = \frac{12}{13}$.
Знайти S_{ABCD}.

Скалярний добуток векторів



636. *Дано:* ΔABC, $AB = BC$, $AD = DC$, $AC = 7$, O — точка перетину медіан.
Знайти $\overline{AO} \cdot \overline{AC}$.

Розв'язок.

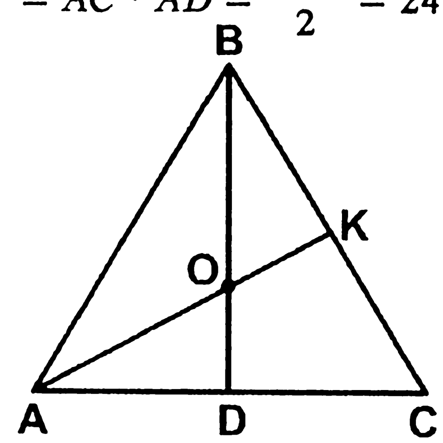
Нехай $\angle OAC = \alpha$.

$$\overline{AO} \cdot \overline{AC} = AO \cdot AC \cdot \cos\alpha.$$

З ΔOAD маємо: $\cos\alpha = \frac{AD}{AO}$. Тоді

$$\overline{AO} \cdot \overline{AC} = AO \cdot AC \cdot \frac{AD}{AO} =$$

$$= AC \cdot AD = \frac{AC^2}{2} = 24{,}5.$$



637. *Дано:* ΔABC, $AB = BC$, $AD = DC$, $AC = 8$, $AB = 10$. AK — точка перетину бісектрис.
Знайти $\overline{CA} \cdot \overline{BK}$.

Довідковий відділ

Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між ними.

Розв'язок.

Нехай $\Delta OAC = \alpha$.

$$\overline{CA} \cdot \overline{BK} = CA \cdot BK \cdot \cos\alpha,$$

$$\angle BCD = 180^\circ - \alpha.$$

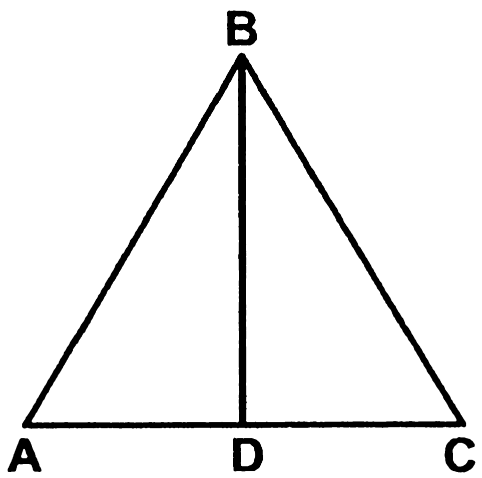
З ΔBCD маємо: $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{DC}{BC}$, звідки $\cos\alpha = -\frac{DC}{BC}$.

$$\overline{CA} \cdot \overline{BK} = -\,CA \cdot BK \cdot \frac{DC}{BC} =$$

$$= -\,8BK \cdot \frac{4}{10} = -\frac{16}{5}BK.$$

Але $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{4}$ (за теоремою про бісектрису внутрішнього кута трикутника). $BK = 5x$, $KC = 4x$ (x — коефіцієнт пропорційності). Оскільки $BK + KC = BC$, то маємо $5x + 4x = 10$, звідки $x = \frac{10}{9}$. $BK = 5x = \frac{50}{9}$. Отже,

$$\overline{CA} \cdot \overline{BK} = -\frac{16}{5}BK = -\frac{16}{5} \cdot \frac{50}{9} = \frac{160}{9}.$$



638. *Дано:* ΔABC, $AB = BC$, $AD = DC$, $AC = 8$.
Знайти $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$.

639. *Дано:* ΔABC, $AB = BC$, $AD = DC$, $AC = 5$.
Знайти $\overline{AD} \cdot \overline{BC}$.

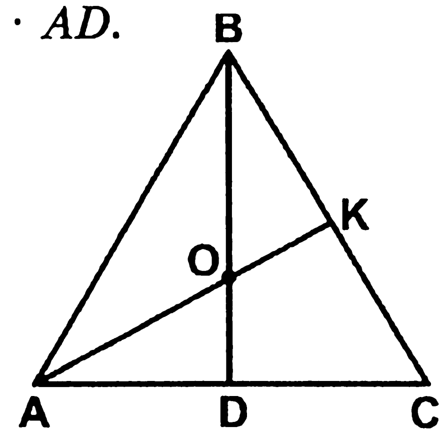
640. *Дано:* ΔABC, $AB = BC$, $AD = DC$, $AC = 3$.
Знайти $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$.

641. *Дано:* ΔABC, $AB = BC$, $AC = 4$, $AB = 5$.
Знайти $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$.

642. *Дано:* ΔABC, $AB = BC$, $AD = DC$, $BD = 11$.
Знайти $\overline{BA} \cdot \overline{BD}$.

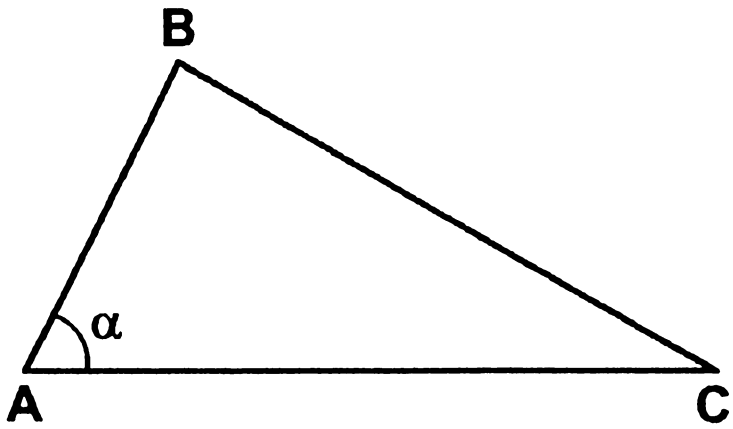
643. *Дано:* ΔABC, $AB = BC$, $AD = DC$, $AD = 9$, O — точка перетину медіан.
Знайти $\overline{AO} \cdot \overline{CD}$.

644. *Дано:* ΔABC, $AB = BC$, $AD = DC$, $BM = MC$, $AC = 2$.
Знайти $\overline{BM} \cdot \overline{AD}$.

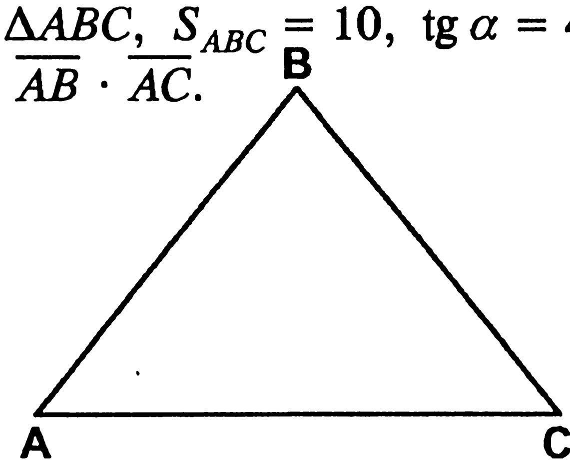


645. *Дано:* ΔABC, $AB = BC$, $AD = DC$, $AB = 10$, $AC = 16$, AK — бісектриса, O — точка перетину бісектрис.
Знайти $\overline{OD} \cdot \overline{KC}$.

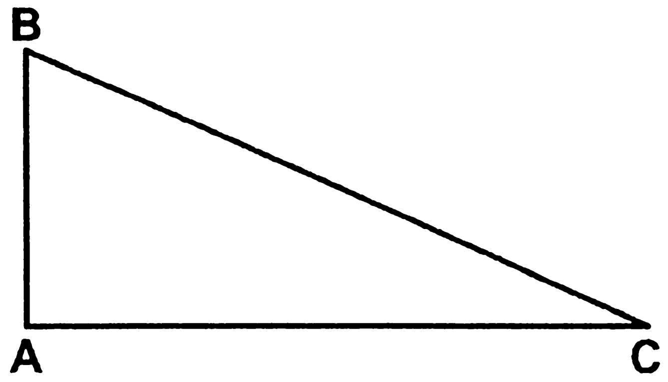
646. *Дано:* ΔABC, $AB = BC$, $AD = DC$, $AB = 5$, $AC = 6$, AK — бісектриса, O — точка перетину бісектрис.
Знайти $\overline{OD} \cdot \overline{KB}$.



647. *Дано:* ΔABC, $S_{ABC} = 10$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 4$.
Знайти $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

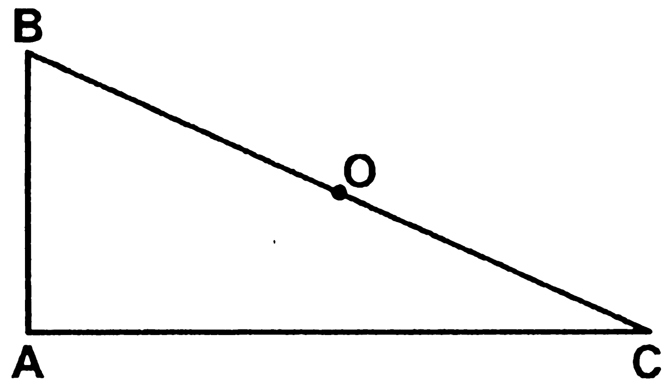


648. *Дано:* ΔABC, $AB = BC$, $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2$.
Знайти AC.



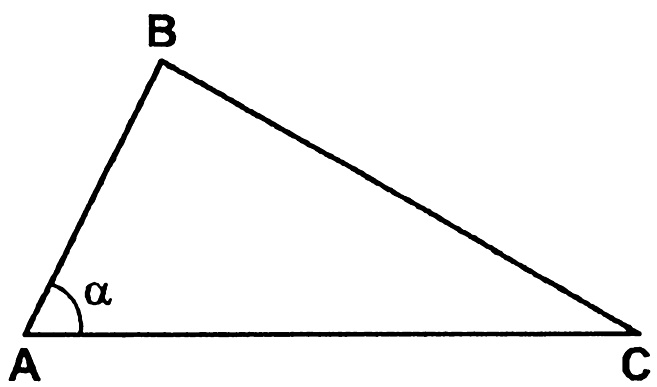
649. *Дано:* ΔABC $(\angle ACB = 90°)$.
Довести, що $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AC^2$.

650. *Дано:* ΔABC $(\angle ACB = 90°)$,
$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 144$, $S_{ABC} = 30$.
Знайти AB.

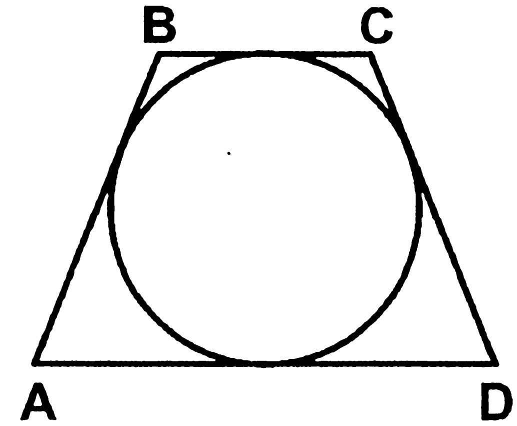


651. *Дано:* ΔABC $(\angle ACB = 90°)$,
$AO = OB$.
Довести, що $\overline{CA} \cdot \overline{CO} = \frac{1}{2} AC^2$.

652. *Дано:* ΔABC $(\angle ACB = 90°)$,
$AO = OB$, $\overline{CA} \cdot \overline{CO} = 8$,
$\overline{CO} \cdot \overline{CB} = 4{,}5$.
Знайти CO.



653. *Дано:* ΔABC, $\angle BAC = \alpha$,
$S_{ABC} = S$.
Довести, що $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2S \operatorname{ctg} \alpha$.



654. *Дано:* $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола, $BC = 2$, $AD = 8$.
Знайти $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$.

655 (обернена). *Дано:* $ABCD$ — трапеція, описана навколо кола,
$AD = 8$, $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 24$.
Знайти BC.

656. *Знайти* значення
$(\overline{a} - \overline{b})(3\overline{a} - 2\overline{b})$, знаючи, що
$\overline{a} \perp \overline{b}$, $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$.

657. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $60°$.
Знайти значення

$$(\overline{a} + \overline{b})(\overline{a} - 2\overline{b}),$$

знаючи, що $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 3$.

658. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $120°$.
Знайти значення $(3\overline{a} + \overline{b})^2$, знаючи, що $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 5$.

659. *Знайти* значення

$$(\overline{a} + \overline{b} - \overline{c})(\overline{a} - \overline{b}),$$

знаючи, що вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ утворюють між собою кути $120°$, $|\overline{a}| = 6$,
$|\overline{b}| = 2$.

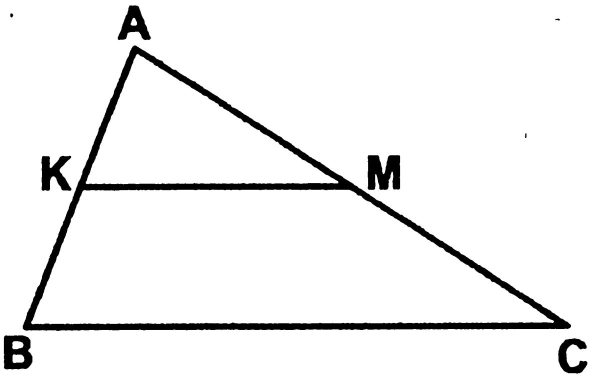
Застосування векторів при розв'язуванні задач

660. *Довести* за допомогою векторів теорему «середня лінія трикутника паралельна основі і дорівнює її половині».

Дано: ΔABC, $AK = KB$, $AM = MC$.

Довести, що

$KM \parallel BC$, $KM = \frac{1}{2}BC$.



Доведення.

З умови $AK = KB$ випливає

$$\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

З умови $AM = MC$ випливає

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC}.$$

Але $\overline{KM} = \overline{AM} - \overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB} =$

$$= \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AB}) = \frac{1}{2}\overline{BC}.$$

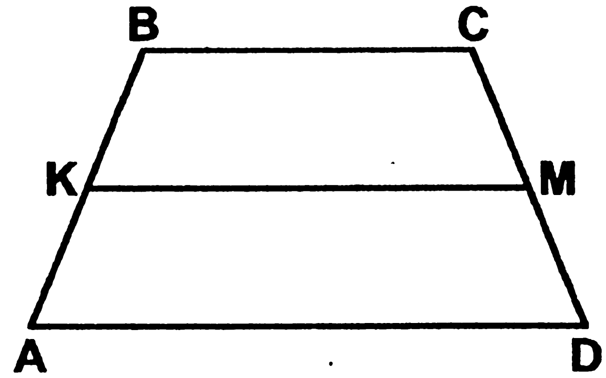
З одержаної рівності випливає: $KM \parallel BC$ і $KM = \frac{1}{2}BC$, що і треба було довести.

661. *Довести* за допомогою векторів теорему «середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі».

Дано: $ABCD$ — трапеція, $BC \parallel AD$, $BK = KA$, $CM = MD$.

Довести, що $KM \parallel BC \parallel AD$,

$$KM = \frac{1}{2}(AD + BC).$$



Доведення.

$$+\begin{cases}\overline{KM} = \overline{KB} + \overline{BC} + \overline{CM},\\ \overline{KM} = \overline{KA} + \overline{AD} + \overline{DM},\end{cases}$$

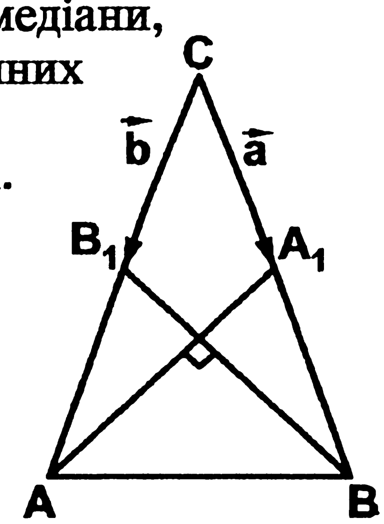
$$2\overline{KM} = \underbrace{(\overline{KB} + \overline{KA})}_{0} + \underbrace{(\overline{CM} + \overline{DM})}_{0} + \overline{BC} + \overline{AD},$$

звідки маємо $\overline{KM} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD})$.

Оскільки вектори $\overline{AD}$ і $\overline{BC}$ співнапрямлені, то вектори $\overline{KM}$ і $\overline{AD}$ також співнапрямлені, а довжина вектора $(\overline{BC} + \overline{AD})$ дорівнює $BC + AD$. Звідси випливає, що

$$KM \parallel AD \text{ і } KM = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

662. *Знайти* косинус кута, що лежить проти основи рівнобедреного трикутника, якщо медіани, проведені до бічних сторін, взаємно перпендикулярні.



Розв'язок.

Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою AB. AA_1 і BB_1 — медіани, проведені до бічних сторін. Позначимо $\overline{CA_1} = \overline{a}$, $\overline{CB_1} = \overline{b}$, $CA_1 = CB_1 = a$, тоді

$$\overline{AA_1} = \overline{CA_1} - \overline{CA} = \bar{a} - 2\,\bar{b},$$

$$\overline{BB_1} = \overline{CB_1} - \overline{CB} = \bar{b} - 2\,\bar{a}.$$

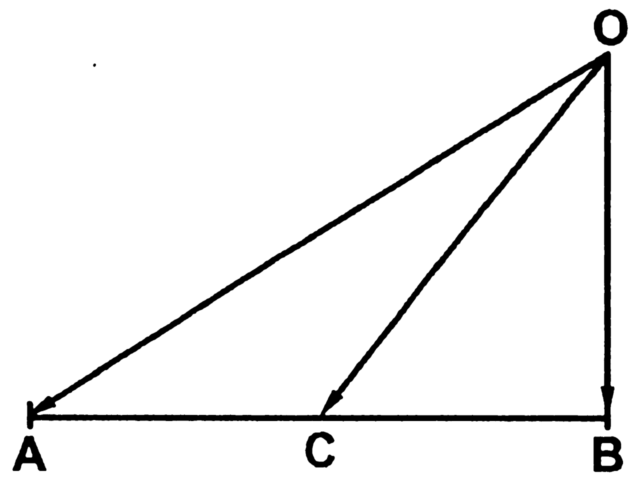
$$\overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1} = (\bar{a} - 2\,\bar{b})(\bar{b} - 2\,\bar{a}) =$$
$$= 5\,\bar{a} \cdot \bar{b} - 2\,\bar{a} \cdot \bar{a} - 2\,\bar{b} \cdot \bar{b} =$$
$$= 5a^2 \cos C - 4a^2.$$

За умовою $\overline{AA_1} \perp \overline{BB_1}$, отже,

$\overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1} = 0$. $5a^2 \cos C - 4a^2 = 0$,

звідки $\cos C = 0{,}8$.

663. Якщо точка C — середина відрізка AB, а O — довільна точка площини, то $\overline{OC} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$. *Довести.*



Розв'язок.

$$+\begin{cases} \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}, \\ \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC}. \end{cases}$$

$$2\,\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} + (\overline{AC} + \overline{BC}),$$

звідки $\overline{OC} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{OB})$ ($\overline{AC} + \overline{BC} = \bar{0}$, оскільки точка C — середина відрізка AB).

Розв'язування трикутників

Будь-який трикутник визначається трьома основними елементами, причому хоча б один з них має бути лінійним. Нехай в трикутнику ABC

$$AB = c,\ AC = b,\ BC = a.$$

664. *Дано*: a, b, $\angle C$.
Знайти c, $\angle A$, $\angle B$.

Розв'язок.

За теоремою косинусів знаходимо

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C,$$

звідки $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C}$.

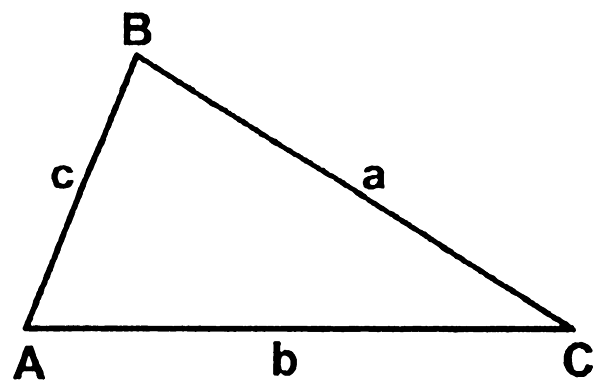
Величину кута B також знаходимо за теоремою косинусів:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B,$$
$$\cos\angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Значення кута B знаходимо, використовуючи таблицю значень функції $\cos\alpha$, або мікрокалькулятор.

Знаходимо величину кута A:

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C).$$



665. *Дано:* b, $\angle A$, $\angle C$.
Знайти: a, c, $\angle B$.

Розв'язок.

Знаходимо $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$,

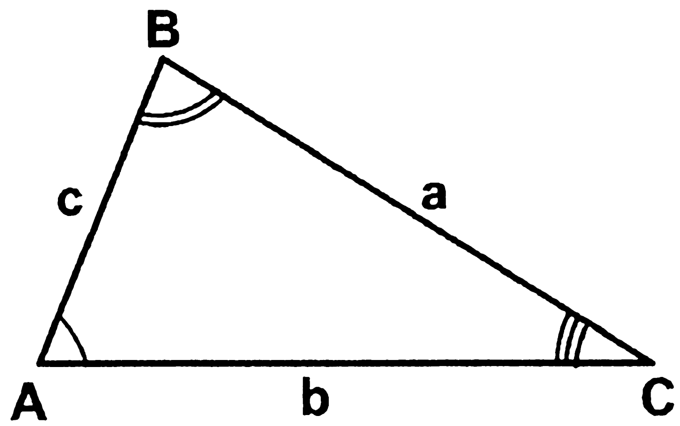
$$\frac{b}{\sin\angle B} = \frac{a}{\sin\angle A},$$

звідки $a = \dfrac{b\sin\angle A}{\sin\angle B}$.

Аналогічно

$$\frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C},$$

звідки $c = \dfrac{b\sin\angle C}{\sin\angle B}$.



666. *Дано:* a, b, c.
Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Розв'язок.

За теоремою косинусів знаходимо:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C,$$

звідки $\cos\angle C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Аналогічно

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A,$$

звідки $\cos\angle A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

З допомогою таблиці значень функції $\cos\alpha$ знайдемо величини кутів A і C:

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C).$$

667. *Дано:* a, b, $\angle A$.
Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$.

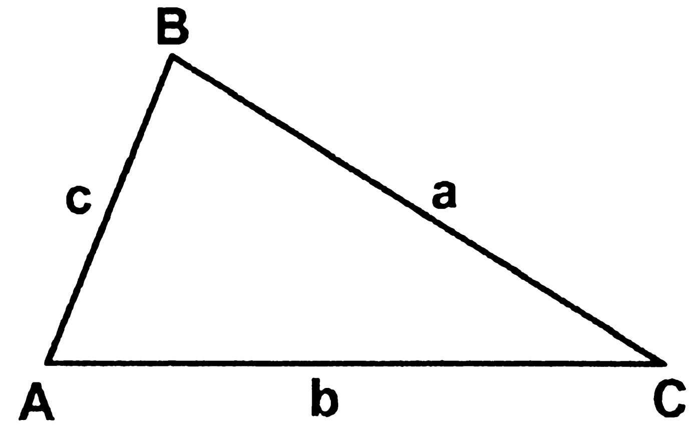
Розв'язок.

За теоремою синусів знаходимо:

$$\frac{b}{\sin\angle B} = \frac{a}{\sin\angle A},$$

звідки $\sin\angle B = \dfrac{b\sin\angle A}{a}$.

З допомогою таблиці знайдемо $\angle B$. (Якщо $a > b$, то кут B — гострий, його величина визначається однозначно. При $a < b$ кут B може бути гострим або тупим, тому із знайденого значення $\sin\angle B$ можна знайти два значення кута B).



668. *Дано:* ΔABC, $BC = 10$, $AC = 8$, $S_{ABC} = 20$.
Знайти: $\angle C$.

669. *Дано:* ΔABC, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $AC = 6\sqrt{6}$.
Знайти: BC.

670. *Дано:* ΔABC, $\angle A = 1{,}5\angle C$, $\angle B = \angle A + 60^\circ$, $AB = 9\sqrt{2}$.
Знайти: BC.

671. *Дано:* ΔABC, $\cos\angle B = \dfrac{4}{5}$, $\sin\angle C = \dfrac{14}{25}$, $AC = 15$.
Знайти: AB.

672. *Дано:* ΔABC, $AB = 12$, $AC = 10$, $\sin\angle A = \dfrac{3}{5}$.
Знайти: BC.

673. *Дано:* ΔABC, $\operatorname{tg}\angle C = \dfrac{5}{12}$, $BC = 13$, $AC = 12$.
Знайти: S_{ABC}.

674. *Дано:* ΔABC, $AC = 13$, $S = 60$, $\sin\angle C = \dfrac{12}{13}$.
Знайти: AB.

675. *Дано:* ΔABC, $\angle A = 120^\circ$, $BC = 26$, $AB : AC = 7 : 8$.
Знайти: P_{ABC}.

676. *Дано:* ΔABC, $\angle B = 60^\circ$, $AC = 7$, $AB + BC = 13$.
Знайти: S_{ABC}.

Розділ 3

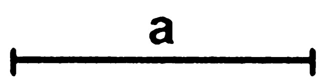
Розв'язування задач на побудову

Греки часів Евкліда вважали пряму лінію і коло основними лініями в геометрії і тому вимагали, щоб кожна геометрична побудова виконувалась за допомогою лише тех інструментів, якими креслять ці лінії.

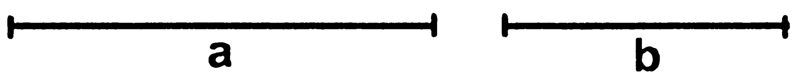
Надалі всі побудови будуть виконуватися лише за допомогою циркуля та лінійки.

Найпростіші геометричні побудови

677. Побудувати відрізок, що дорівнює даному.

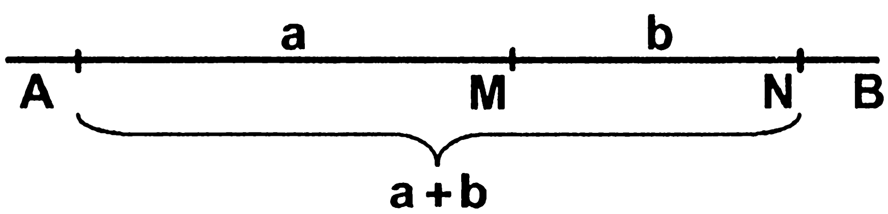


678. Побудувати відрізок, що дорівнює сумі двох даних відрізків a і b.



Розв'язок.

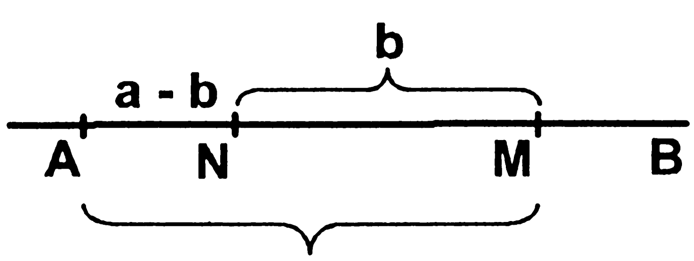
На довільній прямій AB відкладемо від точки A відрізок $AM = a$, потім відрізок $MN = b$ в той же бік від M, тоді $AN = a + b$.



679. Побудувати відрізок, що дорівнює різниці двох даних відрізків a і b.

Розв'язок.

На довільній прямій AB відкладемо від точки A відрізок $AM = a$, потім відрізок $MN = b$ в протилежний бік від M, тоді $AN = a - b$.

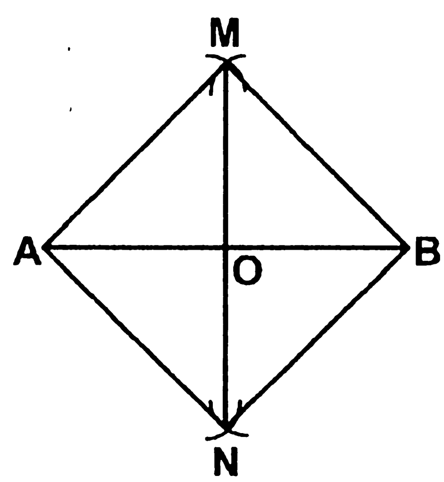


680. Поділити відрізок пополам.

Розв'язок.

З кінців A і B, як з центрів, радіусом, більшим за половину AB, опишемо два кола, які перетнуться в точках M і N; сполучимо M і N, перетин AB і MN — шукана точка O.

Фігура $AMBN$ є ромбом, і тому $AO = OB$.



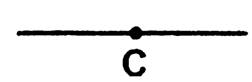
681. Поділити даний відрізок на 4, 8, 16, ... 2^n рівних частин.

Розв'язок.

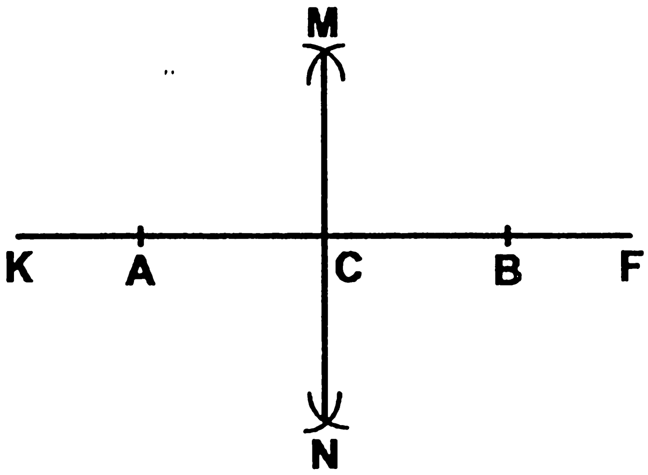
Поділивши відрізок AB пополам, кожну половину поділимо ще раз пополам, кожну чверть знову пополам і т.д.

682. До прямої KF провести перпендикуляр у заданій точці C.

Розв'язок.

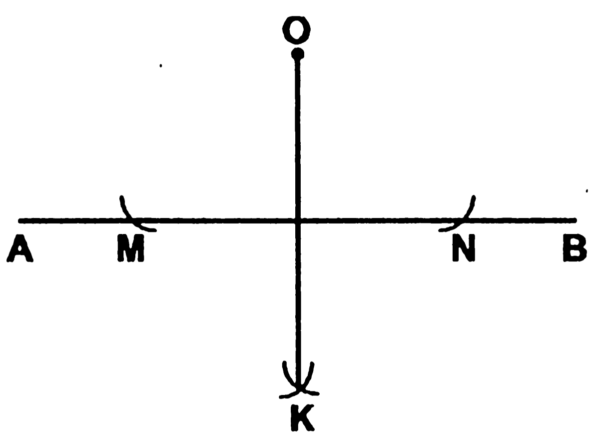


Відкладемо від точки C на прямій KF відрізок $CA = CB$ так, щоб точка C знаходилась між точками A і B. З кінців A і B, як з центрів, радіусом, більшим за половину AB, опишемо два



кола, що перетнуться в точках M і N; сполучимо M і N. Фігура $AMBN$ є ромбом, тому $CM \perp AB$.

683. З даної точки O, що лежить поза прямою AB, опустити на цю пряму перпендикуляр.

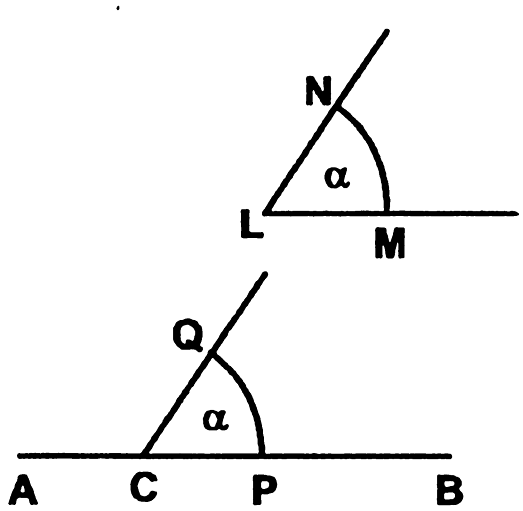


Розв'язок.

З центра O опишемо довільним радіусом дугу, що перетинає AB в точках M і N; з центрів M і N опишемо дуги тим же радіусом.

OK — шуканий перпендикуляр, тому що фігура $OMKN$ є ромбом.

684. В точці C прямої AB побудувати кут, що дорівнює заданому куту α.

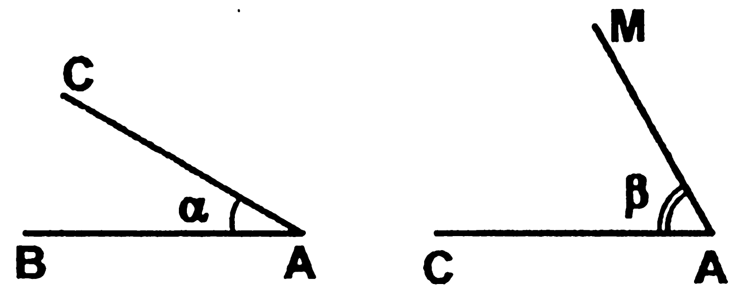


Розв'язок.

Довільним радіусом з вершини кута α опишемо дугу, яка перетинає його сторони в точках M і N; тим же радіусом опишемо з центра C дугу, яка перетинає AB в точці P. З центра P радіусом, що дорівнює MN, опишемо дугу, яка перетинає попередню дугу в точці Q. Сполучимо точки Q і C. Трикутники LNM і CQP мають по три рівні сторони і тому рівні. Отже,

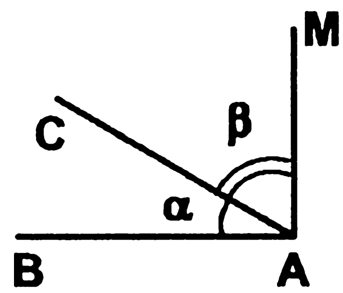
$$\angle QCP = \angle NLM = \alpha.$$

685. Побудувати кут, що дорівнює сумі двох даних кутів.

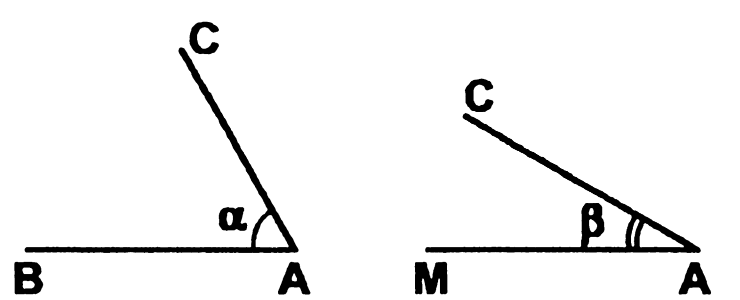


Розв'язок.

Побудуємо $\angle CAB = \alpha$. На стороні AC кута CAB побудуємо $\angle MAC = \beta$ так, щоб сторона MA лежала поза $\angle CAB$; тоді $\angle MAB = \angle\alpha + \angle\beta$.



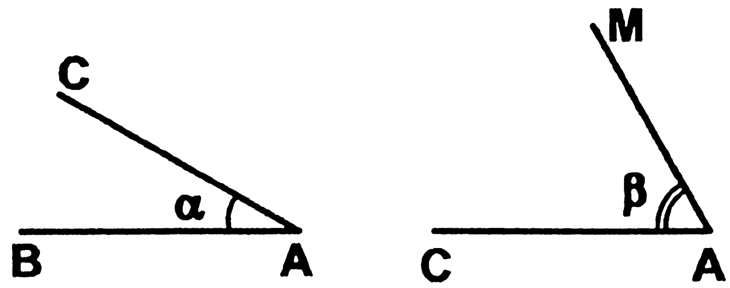
686. Побудувати кут, що дорівнює різниці двох даних кутів.



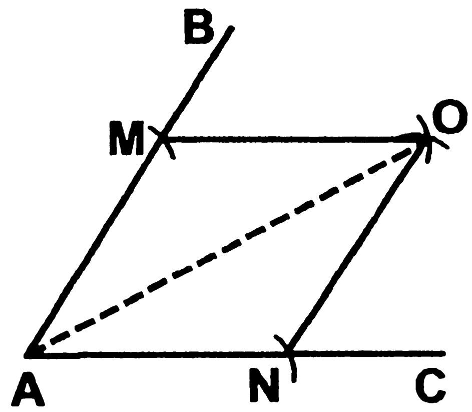
Розв'язок.

Побудуємо $\angle BAC = \alpha$ $(\alpha > \beta)$. На стороні AC кута CAB побудуємо $\angle MAC = \beta$ так, щоб сторона MA лежала всередині $\angle CAB$; тоді

$$\angle MAB = \angle\alpha - \angle\beta.$$



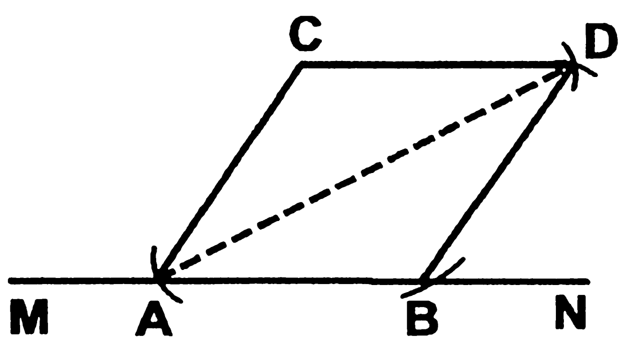
687. Поділити даний кут пополам.



Розв'язок.

Довільним радіусом з вершини A даного кута BAC опишемо дугу, яка перетинає його сторони в точках M і N; з центрів M і N рівними радіусами, більшими від половини MN, опишемо дуги; AO ділить $\angle BAC$ пополам ($\Delta AOM = \Delta AON$).

688. Через дану точку C провести пряму, паралельну даній прямій MN.

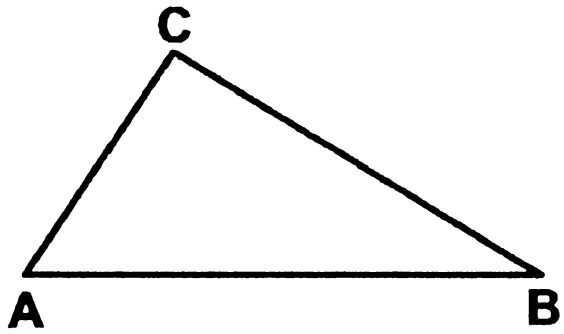


Розв'язок.

З даної точки C довільним радіусом проведемо дугу, що перетинає дану пряму. Нехай A і B — точки перетину. З точок C і B тим же радіусом проведемо дуги до їх перетину в точці D.

Сполучимо точки C і D, дістанемо шукану пряму, оскільки $CABD$ є ромбом.

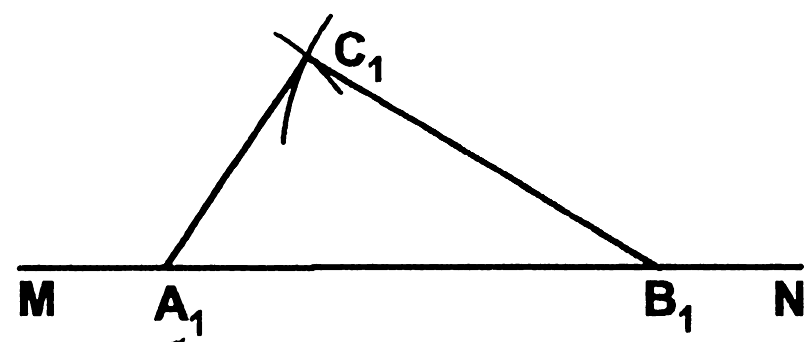
689. Побудувати трикутник, що дорівнює заданому трикутнику ABC.



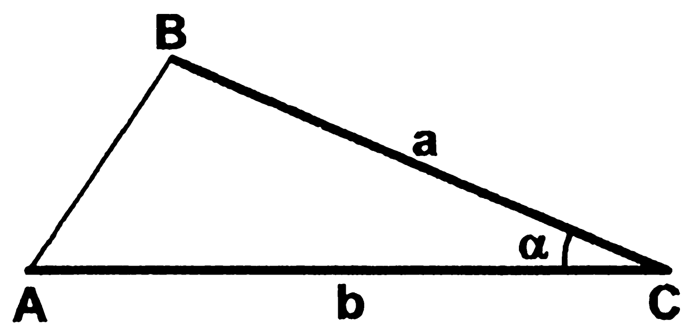
Розв'зок.

На довільній прямій MN від довільної точки відкладемо відрізок A_1B_1, що дорівнює AB. З точки A_1 як з центра опишемо дугу радіусом, що дорівнює AC, а з точки B_1 — дугу радіусом, що дорівнює BC. Точку їх перетину C_1 сполучимо з кінцями відрізка A_1B_1.

Трикутник $A_1B_1C_1$ — шуканий.



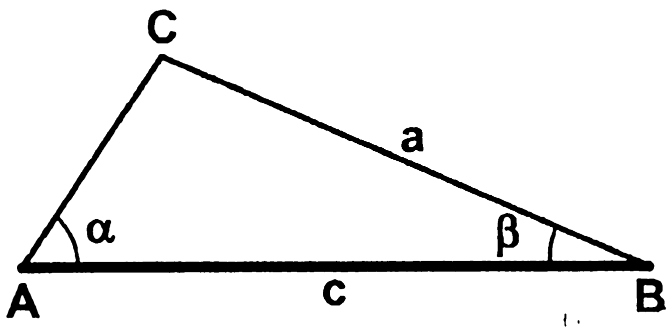
690. Побудувати трикутник за двома сторонами a і b та куту між ними C.



Розв'язок.

Побудуємо кут, що дорівнює даному, і відкладаємо на його сторонах від вершини відрізки, що дорівнюють даним. Сполучимо їх кінці, одержуємо шуканий трикутник.

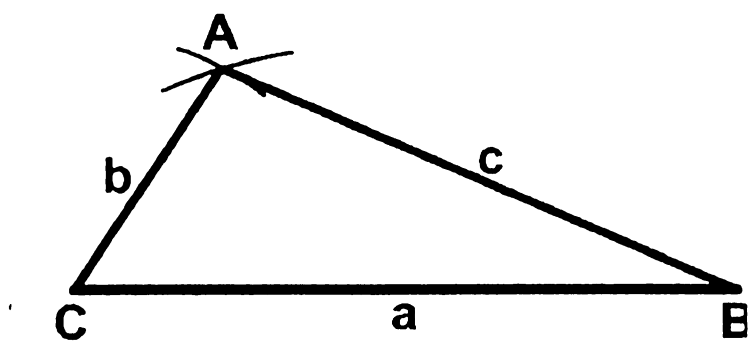
691. Побудувати трикутник за стороною c та двом прилеглим до неї кутам A і B.



Розв'язок.

Відкладемо на довільній прямій відрізок $AB = c$, побудуємо на його кінцях A і B дані кути і продовжимо їх сторони (що не збігаються з AB) до їх перетину в точці C. Трикутник ABC — шуканий.

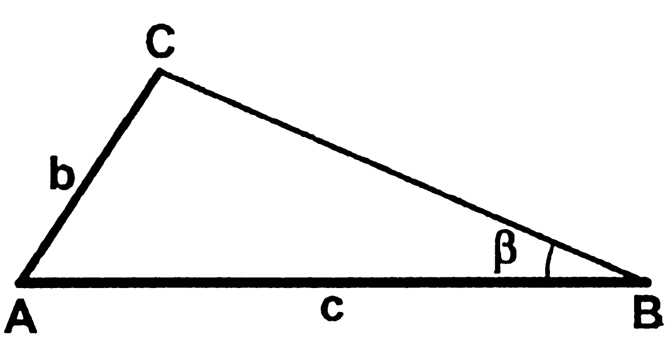
692. Побудувати трикутник за трьома даними сторонами: a, b, c.



Розв'язок.

Відкладемо на довільній прямій одну із даних сторін, наприклад, a, проведемо з її кінців радіусами, що дорівнюють відрізкам b і c, дві дуги. Точку їх перетину сполучимо з кінцями.

693. Побудувати трикутник за двома сторонами c і b на куту проти однієї із них B.



Розв'язок.

Побудуємо кут B, що дорівнює даному, і відкладаємо на його стороні від вершини B даний відрізок $AB = c$. З точки A як з центра описуємо дугу радіусом, що дорівнює b, до перетину з продовженням другої сторони даного кута в точці C. Задача має один розв'язок, коли дуга дотикається BC, два розв'язки, коли вона перетинає BC в двох точках, або не має розв'зків, коли дуга не має з BC жодної спільної точки.

Загальна схема розв'язування задач на побудову

Розв'язування більш складних задач на побудову складається з етапів:

1. Аналіз

Припускаємо, що задача розв'язана. Робимо від руки креслення шуканої фігури, намагаючись звести задачу до найпростіших, розв'язування яких відомо.

2. Побудова

Використовуючи складений при аналізі план розв'язання, будуємо шукану фігуру.

3. Синтез

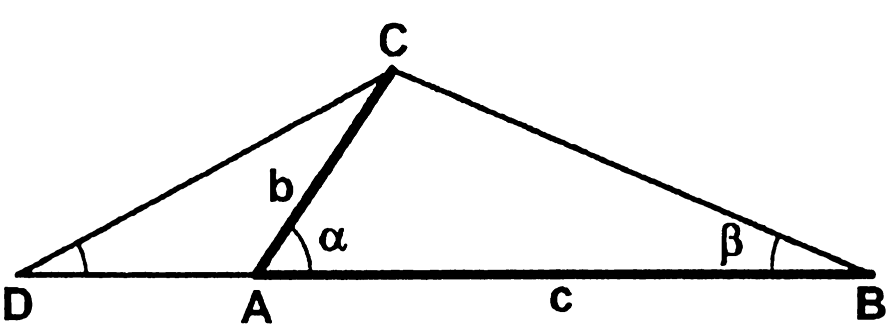
Доводимо, що одержана фігура задовільняє всім вимогам задачі на основі відомих теорем.

4. Дослідження

Встановлюємо кількість розв'язків та умови, за яких задача має або не має розв'язок.

Розглянемо приклад більш складної задачі на побудову.

694. Побудувати трикутник, якщо дано два кута A і B та суму двох його сторін c і b.



Аналіз.

Щоб відшукати спосіб розв'язання задачі, треба, як кажуть, зробити аналіз задачі. Для цього припустимо, що задачу розв'язано і що ΔABC — шуканий. Знайдемо зв'язок між шуканими елементами трикутника та даними задачі.

Відкладемо на продовженні сторони AB за точку A відрізок $AD = AC$ і сполучимо точки C і D; ΔACD — рівнобедрений.

$$\angle CAB = \angle CDA + \angle DCA = 2\angle CDA.$$

Отже, $\angle CDA = \frac{1}{2}\angle CAB.$

Трикутник BCD можна побудувати за стороною $BD = b + c$ та двом прилеглим кутам D і B. Таким чином, знайдено дві вершини B і C шуканого трикутника. Третя A є вершиною рівнобедреного трикутника ACD, в якому відомі основа CD та кути при основі.

Побудова.

На довільній прямій відкладемо відрізок DB, що дорівнює даному відрізку $b + c$. На стороні BD при вершині D будуємо кут BDC, що дорівнює $\frac{\alpha}{2}$. При вершині B будуємо кут DBC, що дорівнює β. Дістали трикутник BCD. Перпендикуляр до середини відрізка DC перетинає BD в точці A.

Доведення.

Кут B побудованого трикутника дорівнює даному $\angle B$ за побудовою. Кут CAB побудованого трикутника як зовнішній кут трикутника ACD дорівнює

$$\angle ACD + \angle ADC = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle A = \angle A.$$

Далі, трикутник ACD — рівнобедрений, оскільки за побудовою

$$\angle DCA = \angle CDA = \frac{1}{2}\angle A,$$

отже, $AC = AD$. Тому

$$AC + AB = DA + AB = DB.$$

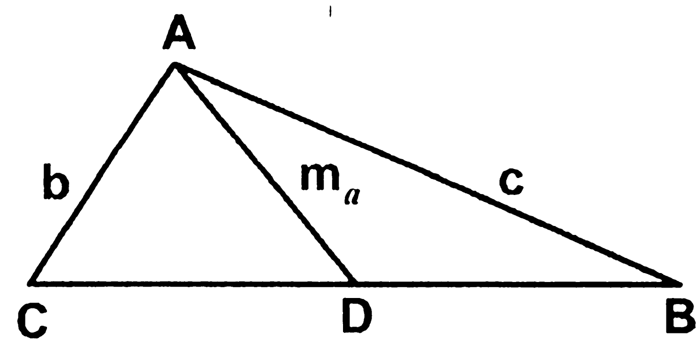
Трикутник ABC задовольняє умову задачі.

Дослідження.

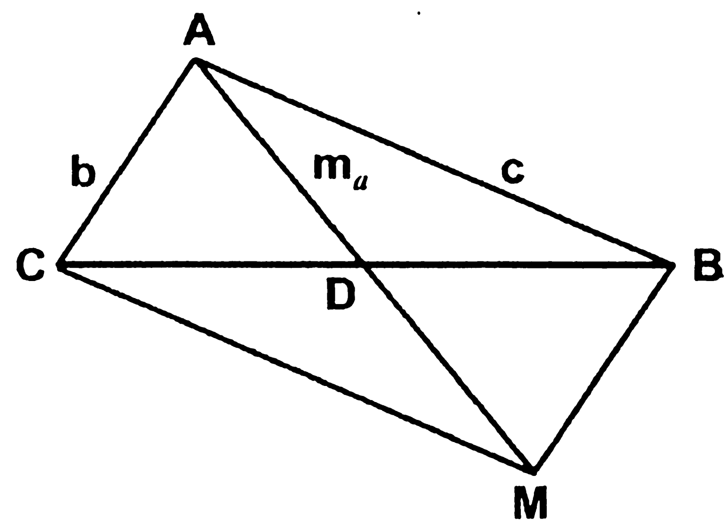
Задача має єдиний розв'язок за умови, що сума двох даних кутів менше $180°$.

Примітка. Надалі при розв'язуванні задач на побудову ми будемо обмежуватись аналізом.

695. Побудувати трикутник, знаючи b, c, m_a.



Припустимо, що задача розв'язана, тобто знайдено такий ΔABC, у якого $AC = b$, $AB = c$ і $AD = m_a$. Розглянемо малюнок і спробуємо розбити задачу на кілька відомих елементарних задач. Але жоден з трикутників ABD, ADC, ABC за запропонованими даними побудувати не можна.



Продовживши медіану AD на такий самий відрізок, дістанемо точку M, яку сполучимо з точками B і C.

$\Delta ABD = \Delta CDM$ за першою ознакою рівності трикутників;

$BD = DC$ за умовою;

$AD = DM$ за побудовою;

$\angle ADB = \angle CDM$ як вертикальні.

Трикутник AMC можна побудувати за трьома сторонами:

$$AM = 2m_a,\ AC = b,\ CM = c.$$

D — середина відрізка AM.

На продовженні відрізка CD відкладемо $DB = CD$. ΔABC — шуканий.

696. Побудувати рівнобедрений трикутник за висотою та бічною стороною.

697. Побудувати рівнобедрений трикутник за висотою та кутом при основі.

698. Побудувати рівнобедрений трикутник за основою та перпендикуляром, опущеним з кінця основи на бічну сторону.

699. Побудувати рівнобедрений трикутник за основою та висотою, проведеною на основу.

700. Побудувати прямокутний трикутник за катетом та медіаною, проведеною на другий катет.

701. Побудувати прямокутний трикутник за гострим кутом та його бісектрисою.

702. Побудувати прямокутний трикутник за катетом та висотою, опущеною на гіпотенузу.

703. Побудувати трикутник, знаючи b, c, h_b.

704. Побудувати трикутник, знаючи b, $\angle A$, h_b.

705. Побудувати трикутник, знаючи b, $\angle A$, l_a.

706. Побудувати трикутник, знаючи m_a, $\angle C$, h_b.

707. Побудувати трикутник, знаючи b, m_b, h_b.

708. Побудувати трикутник, знаючи b, $\angle A$, m_b.

709. Побудувати трикутник, знаючи $\angle C$, $\angle A$, l_b.

710. Побудувати трикутник, знаючи b, a, m_b.

711. Побудувати трикутник, знаючи $\angle C$, $\angle B$, h_b.

712. Побудувати трикутник, знаючи b, a, h_a.

713. Побудувати трикутник, знаючи a, l_c, h_b.

Метод спрямлення

714. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою та сумою катетів.

715. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою та різницею катетів.

716. Побудувати прямокутний трикутник за сумою катетів та гострим кутом.

717. Побудувати прямокутний трикутник за різницею катетів та гострим кутом.

718. Побудувати прямокутний трикутник за катетом та різницею гіпотенузи і другого катета.

719. Побудувати прямокутний трикутник за сумою гіпотенузи і катета $b + c$ та гострим кутом A.

720. Побудувати прямокутний трикутник за периметром та гострим кутом.

721. Побудувати трикутник за стороною, прилежним до неї кутом та сумою двох інших сторін.

722. Побудувати трикутник за сумою сторін a і b, стороною c та кутом A.

723. Побудувати трикутник за різницею сторін a і b, стороною c та кутом B.

724. Побудувати трикутник, якщо дано два його кута A і B та сума двох його сторін a і b.

725. Побудувати трикутник, якщо дано два його кута A і B та різниця двох його сторін a і b.

726. Побудувати трикутник, якщо дано його периметр та два кута A і B.

Алгебраїчний метод

727. Побудувати трикутник, знаючи a, $b + c$, $b - c$.

728. Побудувати трикутник, знаючи $a + b$, $a + c$, $a + b + c$.

729. Побудувати трикутник, знаючи $a + b$, $b + c$, $a + c$.

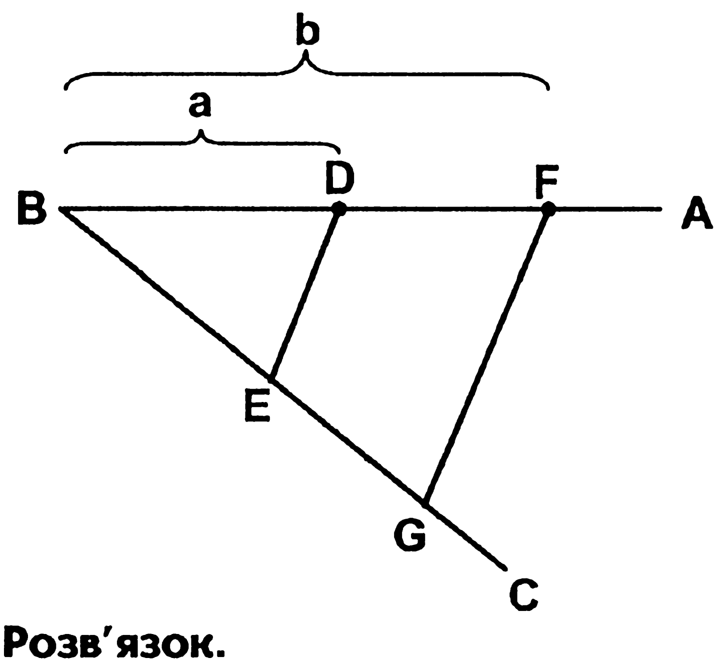
730. Побудувати трикутник, знаючи $a + b + c$, $a - b$, $a - c$.

731. Побудувати трикутник, знаючи c, b, $\angle A + \angle B$.

732. Побудувати трикутник, знаючи a, $\angle A + \angle B$, $\angle B - \angle C$.

733. Побудувати трикутник, знаючи a, $\angle A$, $\angle B - \angle C$.

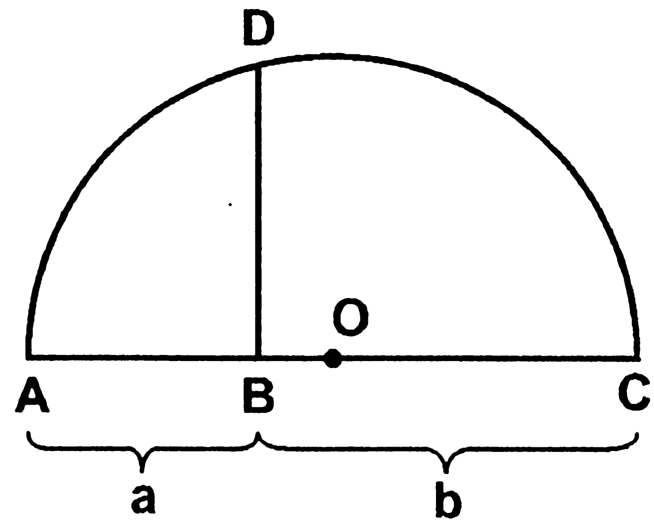
734. До трьох даних відрізків a, b, c знайти четвертий пропорційний, тобто знайти такий відрізок x, який задовольняв би пропорцію $a : b = c : x$ (знайти відрізок, який виражається формулою $x = \dfrac{bc}{a}$).



Розв'язок.

$\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{x}$. На сторонах довільного кута ABC відкладаємо відрізки $BD = a$, $BF = b$, $BE = c$. Точки D і E сполучимо. Побудуємо $FG \parallel DE$. Відрізок BG буде шуканим.

735. Побудувати відрізок, який виражається формулою $x = \sqrt{a \cdot b}$.



Розв'язок.

Маємо $x^2 = a \cdot b$, звідки x знаходиться за допомогою побудови середнього пропорційного.

На довільній прямій відкладемо відрізки $AB = a$ і $BC = b$; на відрізку AC як на діаметрі опишемо півколо. З B проведемо до перетину з колом перпендикуляр BD. Цей перпендикуляр і є шуканим середнім пропорційним між a і b.

736. Побудувати відрізок, який виражається формулою $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Розв'язок.

Знаходимо гіпотенузу прямокутного трикутника, у якого a і b — катети.

737. Побудувати відрізок, який виражається формулою $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Розв'язок.

Знаходимо катет прямокутного трикутника, у якого гіпотенуза a, а другий катет b.

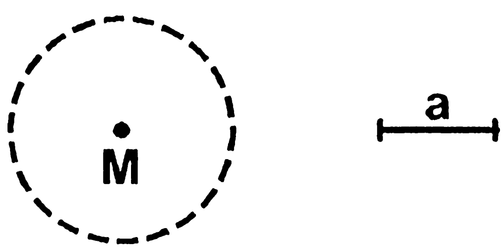
Метод геометричних місць

Геометричне місце точок (*ГМТ*) — це сукупність всіх точок, які мають певну властивість.

Поняття «*геометричне місце точок*» обумовлює прийом розв'язування задач на побудову. Суть його полягає в тому, що задача на побудову звичайно зводиться до визначення положення на площині однієї або кількох точок, які повинні задовольняти двом умовам. Якщо ми відкинемо одну з умов, то умові, що залишиться, буде задовольняти нескінченна сукупність точок, що утворює деяке геометричне місце. Відновимо відкинуту умову і відкинемо іншу. Умові, що залишилась, знову буде задовольняти нескінченна сукупність точок, що утворює нове геометричне місце. Шукана точка повинна задовольняти обом умовам задачі, а значить, має належати обом геометричним місцям. Якщо побудувати кожне зі знайдених геометричних місць, то точка їх перетину і буде шуканою. Задача буде мати стільки розв'язків, скільки спільних точок мають знайдені геометричні місця.

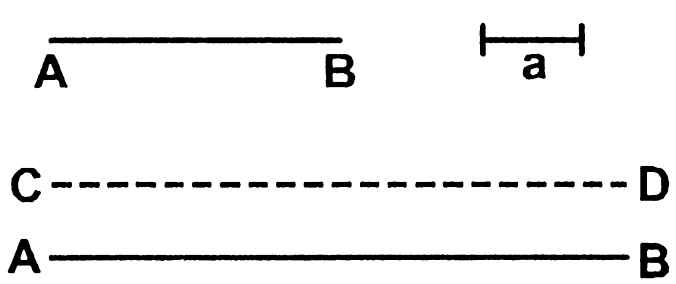
Основні задачі на метод геометричних місць

738. Знайти точку, що знаходиться від даної точки A на даній відстані a.



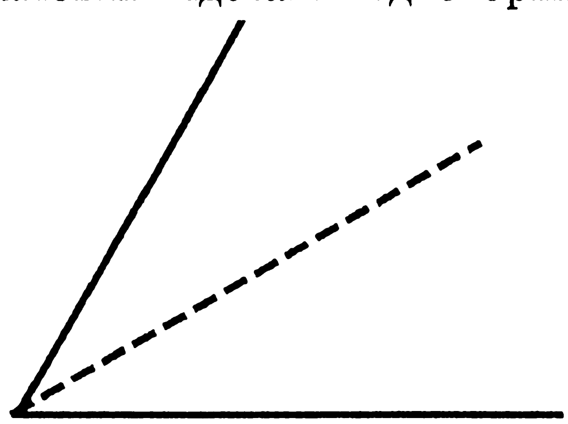
Геометричне місце точок, які віддалені на відстань, що дорівнює a, від даної точки M, є коло, описане з центра M радіусом a.

739. Знайти точку, що знаходиться від даної прямої на даній відстані.



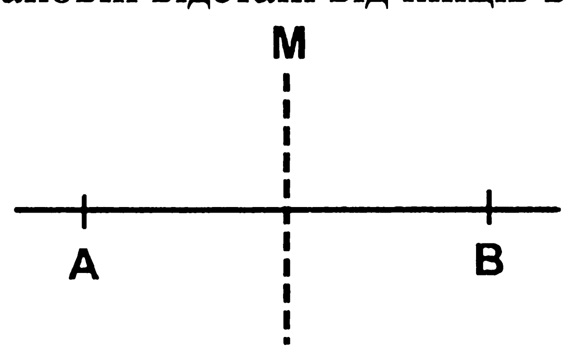
Геометричне місце точок, які віддалені на дану відстань a від прямої AB, утворюють дві паралельні прямі CD і MN, які віддалені від AB на відстань a.

740. Знайти точку, що знаходиться на однаковій відстані від сторін кута.



Геометричне місце точок, які знаходятья на однаковій відстані від сторін кута, є бісектриса цього кута.

741. Знайти точку, що знаходиться на однаковій відстані від кінців відрізка.



Геометричне місце точок, які знаходяться на однаковій відстані від кінців відрізка, є перпендикуляр до відрізку, проведений з його середини, або серединний перпендикуляр.

Задачі

742. Знайти точку, що знаходиться на відстані a від прямої AB і на відстані b від прямої CD.

743. Знайти точку, віддалену від даної точки A на відстань, що дорівнює a, та від даної точки B на відстань, що дорівнює b.

744. Знайти точку, що знаходиться на однаковій відстані від двох даних точок M і N, та на однаковій відстані від сторін даного кута BAC.

745. Знайти точку, що знаходиться на даній відстані a від точки C та на однаковій відстані від точок A і B.

746. На даній прямій AB знайти точку, рівновіддалену від двох прямих MN і PQ, що перетинаються.

747. На стороні трикутника знайти точку, рівновіддалену від двох інших сторін трикутника.

748. Знайти точку, рівновіддалену від трьох вершин даного трикутника.

749. Знайти точку, рівновіддалену від трьох сторін даного трикутника.

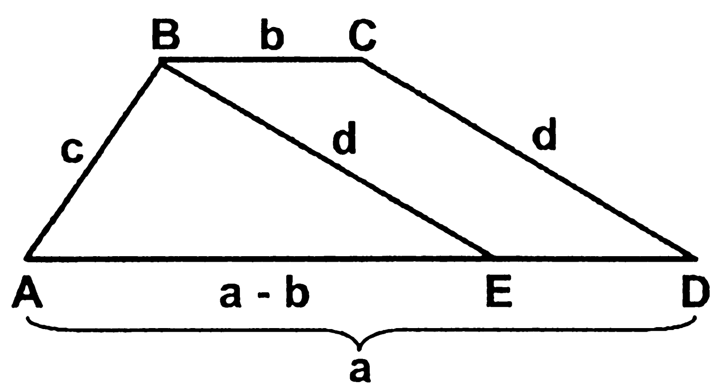
750. Побудувати коло заданого радіуса, що проходить через дві дані точки.

751. Поділити пополам кут між двома прямими, що не перетинаються в межах малюнка.

Метод паралельного перенесення

Суть паралельного перенесення полягає в тому, що після переміщення будь-якого відрізка паралельно своєму початковому положенню, його нове положення разом з початковим буде утворювати пару протилежних сторін паралелограма, чим зручно користуватись при розв'язуванні деяких задач.

752. Побудувати трапецію за чотирма сторонами a, b, c, d.



Аналіз.

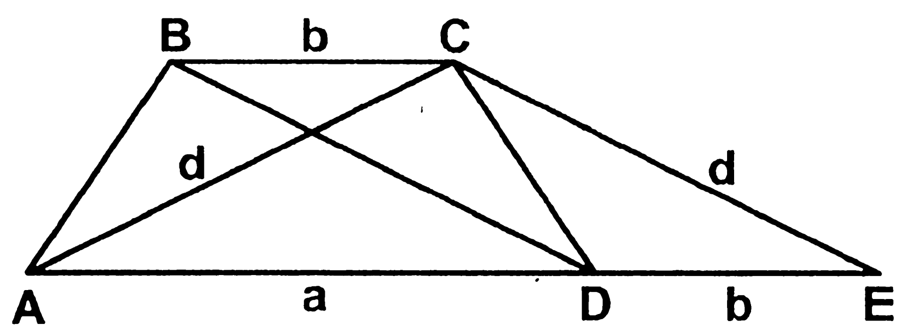
Нехай $ABCD$ — шукана трапеція. Перенесемо CD паралельно самій собі в BE.

В утвореному після переміщення трикутнику ABE

$$AE = a - b, \ BE = d, \ AB = c.$$

Отже, цей трикутник може бути побудований за трьома сторонами. Побудувавши його, легко знайти точки C і D.

753. Побудувати рівнобічну трапецію за двома основами та діагоналлю.



Аналіз.

Нехай $ABCD$ — шукана трапеція. Перенесемо BD паралельно самій собі в CE.

В утвореному після переміщення трикутнику ACE

$$AE = a + b, \ CE = BD = d, \ AC = d.$$

Отже, цей трикутник може бути побудований за трьома сторонами. Побудувавши його, легко знайти точки D і B.

Задачі

754. Побудувати трикутник за основою c та медіанами p і q його бічних сторін.

755. Побудувати паралелограм за двома суміжними сторонами та однією діагоналлю.

756. Побудувати паралелограм за двома діагоналями та стороною.

757. Побудувати паралелограм за двома суміжними сторонами та одному з кутів.

758. Побудувати паралелограм за двома діагоналями та висотою.

759. Побудувати паралелограм за діагоналлю, стороною та висотою, проведеною на цю сторону.

760. Побудувати паралелограм за діагоналлю, стороною та висотою, проведеною на іншу сторону.

761. Побудувати прямокутник за суміжними сторонами.

762. Побудувати прямокутник за стороною та діагоналлю.

763. Побудувати прямокутник за діагоналлю та кутом між ними.

764. Побудувати ромб за стороною та одним з кутів.

765. Побудувати ромб за діагоналлю та одним з кутів.

766. Побудувати ромб за двома діагоналями.

767. Побудувати ромб за діагоналлю та висотою.

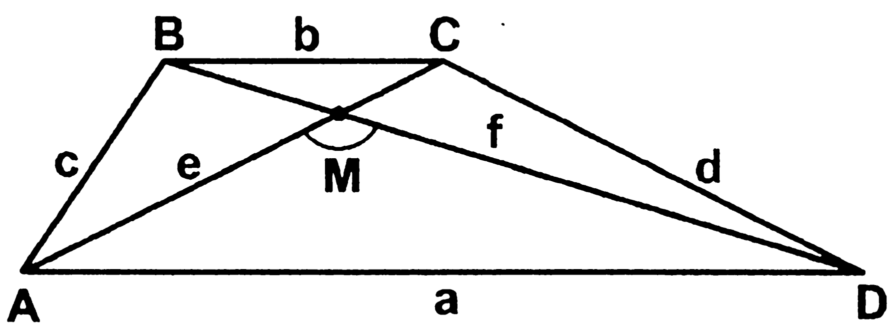
768. Побудувати ромб за висотою та одним з кутів.

769. Побудувати квадрат за його діагоналлю.

770. Побудувати трапецію, якщо дано її діагоналі, кут між ними та бічна сторона.

771. Побудувати трапецію за двома паралельным сторонами та двома діагоналями.

772. Побудувати трапецію за одним її кутом, двома діагоналями та середньою лінією.



Прийняті позначення в трапеції $ABCD$:

основи — $AD = a$, $BC = b$

бічні сторони — $AB = c$, $CD = d$

діагоналі — $AC = e$, $BD = f$

кути $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$

кут між діагоналями — $\angle M$

висота трапеції — h,

середня лінія — m.

Побудувати трапецію, якщо задано:

773. a, b, c, e.

774. a, c, d, e.

775. a, c, d, h.

776. a, e, f, h.

777. a, b, c, h.

778. a, b, e, h.

779. a, c, d, $\angle A$.

780. a, b, c, $\angle B$.

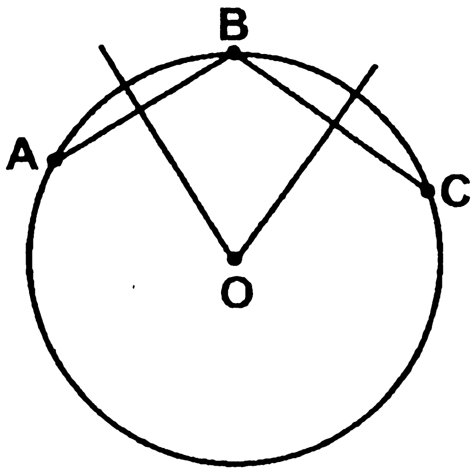
781. a, c, e, $\angle M$.

782. a, h, $\angle A$, $\angle D$.

783. a, b, $\angle A$, $\angle D$.

784. a, c, m, $\angle A$.

785. Знайти центр заданого кола.



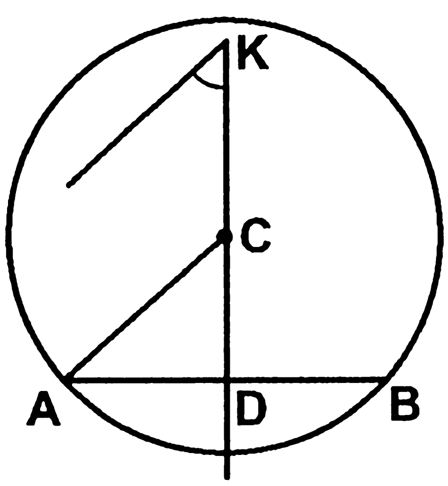
Аналіз.

Візьмемо на колі три довільні точки *A*, *B* і *C*. Будемо шукати центр кола, що проходить через ці точки. Геометричне місце точок, рівновіддалених від двох заданих точок *A* і *B*, є перпендикуляр, що проходить через середину відрізка *AB*.

Аналогічно, центр кола лежить на перпендикулярі, що проходить через середину відрізка *BC*.

Отже, шуканий центр лежить на перетині перпендикулярів, проведених до середин хорд *AB* і *BC*.

786. На відрізку *AB* як на хорді побудувати дугу кола так, щоб вписанний кут, що спирається на цю дугу, дорівнював даному.



Аналіз.

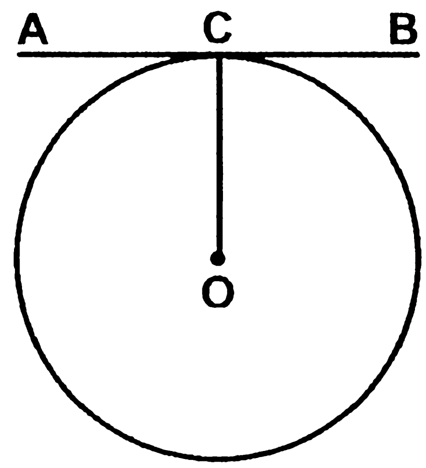
Припустимо, що задачу розв'язано і *C* є центром шуканої дуги. Оскільки відрізок *AB* служить хордою шуканої дуги, то точка *C* лежить на перпендикулярі *CD* до прямої *AB*, проведеному з середини відрізка *AB*. $\angle ACB$, як центральний, має бути в два рази більшим, ніж даний вписаний кут, а $\angle ACD$ повинен дорівнювати даному. Звідси випливає побудова.

Побудова.

З середини *D* відрізка *AB* проводимо до нього перпендикуляр і при будь-якій його точці *K* будуємо кут, що дорівнює даному, однією стороною якого служить *KD*. З точки *A* проводимо пряму, паралельну другій стороні побудованого кута. Вона перетне пряму *KD* в точці *C*.

З точки *C* як з центра радіусом *CA* описуємо дугу.

787. Через дану точку, що лежить на колі, провести до заданого кола дотичну.



Аналіз.

Припустимо, що *C* — точка дотику прямої *AB* з колом. Радіус кола, проведений в точку дотику, перпендикулярний дотичній. Звідси випливає побудова.

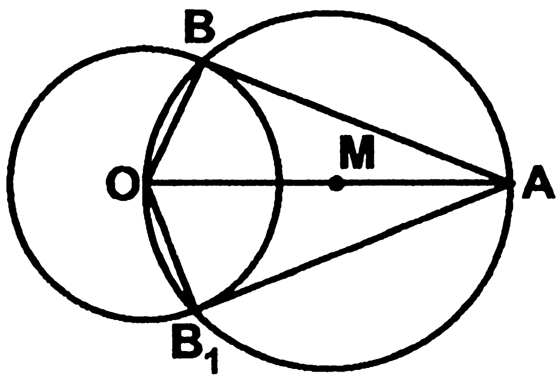
Побудова.

Проведемо радіус кола *OC* і через кінець його *C* будуємо перпендикуляр *AB* до цього радіуса.

788. Через дану точку *A*, що лежить поза колом з центром *O*, провести до кола дотичну.

Аналіз.

Припустимо, що задачу розв'язано. *B* — точка дотику шуканої дотичної *AB*. ΔABO — прямокутний.



Побудова.

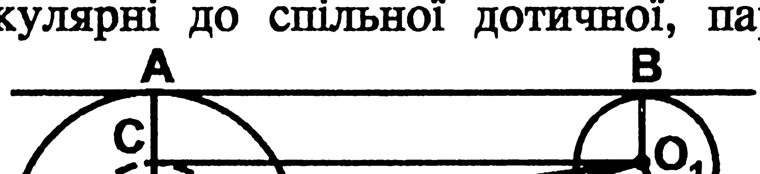
Сполучимо точки O і A. Поділимо AO пополам. З одержаної точки M радіусом MO опишемо коло. Через точки B і B_1, в яких це коло перетинається з даною точкою, проводимо прямі AB і AB_1. Ці прямі і будуть дотичними, оскільки кути ABO і AB_1O, як такі, що спираються на діаметр, — прямі.

Висновок. Дві дотичні, проведені до кола з точки поза ним, рівні і утворюють рівні кути з прямою, що сполучає цю точку з центром.

789. До двох кіл O і O_1 провести спільну зовнішню дотичну.

Аналіз.

Припустимо, що задачу розв'язано. Нехай AB буде спільною дотичною, A і B — точки дотику. Проведемо радіуси OA і O_1B. Ці радиуси, як перпендикулярні до спільної дотичної, пара-



лельні між собою; тому, якщо з O_1 проведемо $O_1C \parallel BA$, то трикутник OCO_1 буде прямокутним з прямим кутом при вершині C. Значить, якщо опишемо з центром в точці O радіусом OC коло, то воно буде дотикатись до прямої O_1C в точці C.

Радіус цього допоміжного кола дорівнює різниці радіусів даних кіл.

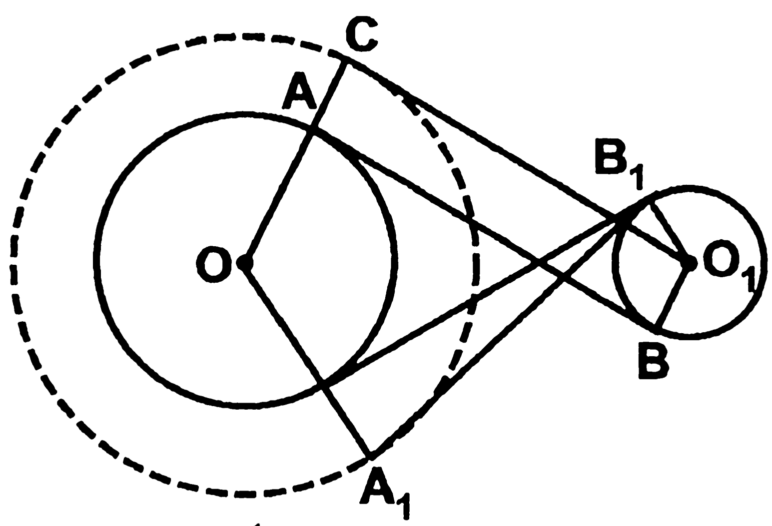
Побудова.

Опишемо коло з центром у точці O і радіусом, що дорівнює різниці даних радіусів. З O_1 проводимо до цього кола дотичну O_1C; через точку дотику C проводимо радіус OC і продовжуємо його до зустрічі з даним колом в точці A. Потім з точки A проводимо AB паралельно CO_1.

790. До двох кіл O і O_1 провести спільну внутрішню дотичну.

Аналіз.

Припустимо, що задачу розв'язано. Нехай AB буде спільною дотичною, A і B — точки дотику. Проведемо радіуси OA і O_1B. Ці радиуси, як перпендикулярні до спільної дотичної, пара-



лельні між собою. Тому, якщо з O_1 проведемо $O_1C \parallel BA$ і продовжимо OA до перетину з O_1C в точці C, то $OC \perp O_1C$; внаслідок цього коло, описане радіусом OC з центром в точці O, буде дотикатися до прямої O_1C в точці C. Радіус цього допоміжного кола відомий: він дорівнює

$$OA + AC = OA + O_1B,$$

тобто дорівнює сумі радіусів даних кіл.

Побудова.

Опишемо коло з центром в точці O і радіусом, що дорівнює сумі даних радіусів. З O_1 проводимо до цього кола дотичну O_1C. Точку дотику C сполучимо з O. Нарешті, через точку A, в якій OC перетинається з даним колом, проводимо AB паралельно CO_1.

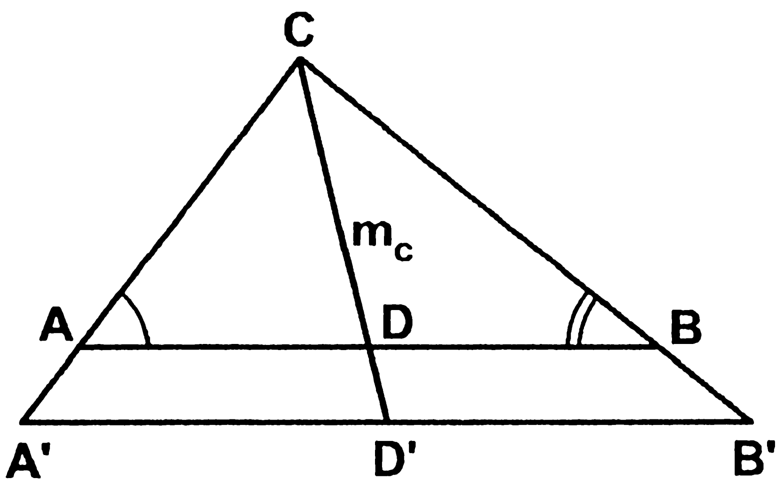
Таким чином можна побудувати і іншу спільну внутрішню дотичну.

Метод подібності

В багатьох задачах на побудову умову задачі вдається поділити на дві такі частини: одна з них цілком визначає форму шуканої фігури, а друга — її розмір.

Застосування метода подібності полягає в тому, що спочатку за тими елементами, які визначають форму фігури, будують фігуру, подібну шуканій, а потім за допомогою перетворення наидають їй тих розмірів, які відповідають другій частині задачі.

791. Побудувати трикутник за двома кутами A і B та медіаною m_c.



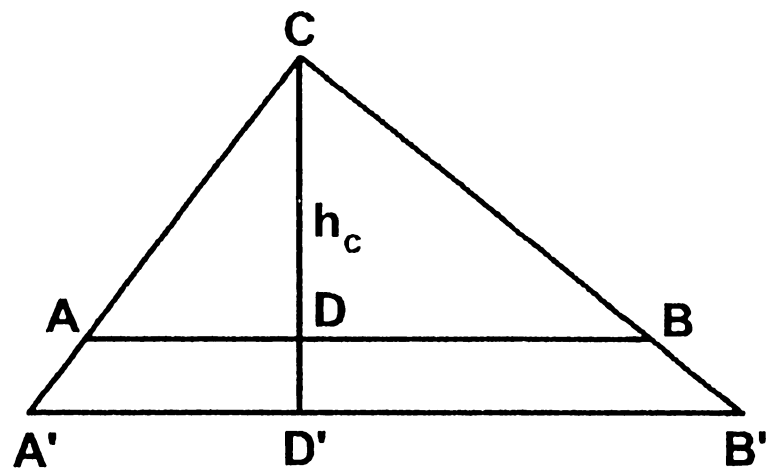
Розв'язок.

За двом кутами A і B можна побудувати трикутник A_1B_1C подібний даному. Якщо за центр подібності взяти вершину C, то перетворення можна виконати так: на медіані CD_1 побудованого трикутника відкладаємо відрізок CD, що дорівнює даній довжині m_c, і через точку D проводимо пряму, паралельну A_1B_1, що перетинає прямі CA_1 і CB_1 в точках A і B. Трикутник ACB — шуканий.

792. Побудувати трикутник, якщо дані $a:b$, $\angle C$ і h_c.

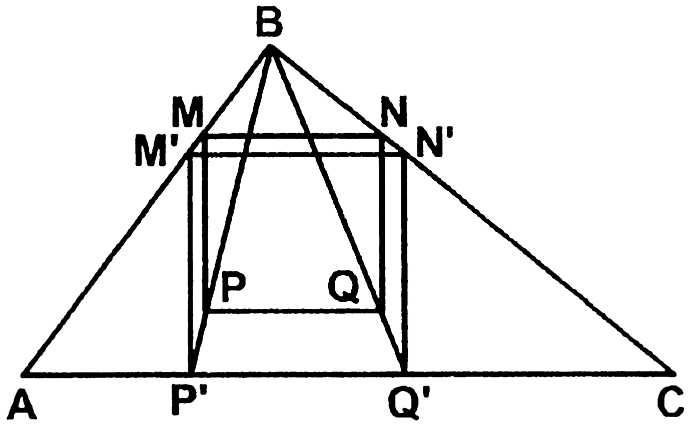
Розв'язок.

Перші дві умови $a:b$ і $\angle C$ цілком визначають форму шуканого трикутника. Візьмемо будь-які два відрізки a_1 і b_1, відношення яких дорівнює $a:b$, і побудуємо трикутник $A'B'C$ за двома сторонами a_1 і b_1 та кутом C між ними. Цей трикутник буде подібний шуканому.



За центр подібності зручно взяти вершину C. На висоті CD' трикутника $A'B'C$ або на її продовженні відкладаємо відрізок $CD = h$ і через точку D проводимо пряму, паралельну $A'B'$, до перетину зі сторонами CA' і CB' (або їх продовженнями) в деяких точках A і B. Трикутник ABC — шуканий.

793. В даний трикутник вписати квадрат так, шоб дві його вершини лежали на основі трикутника, а дві інші — на його бічних сторонах.



Розв'язок.

В даному трикутнику ABC проводимо відрізок $MN \parallel AC$ і на відрізку MN будуємо квадрат $MNPQ$. Прийнявши за центр подібності вершину B, проводимо прямі BP і BQ і продовжуємо їх до перетину в точках P' і Q' зі стороною AC. Квадрат $M'N'Q'P'$ — шуканий.

Задачі

794. Побудувати трикутник, якщо дано $\angle A$, $\angle B$, l_a.

795. Побудувати трикутник, якщо дано $\angle A$, $\angle B$, h_c.

796. Побудувати трикутник, якщо дано $\angle A$, $\angle B$, r.

797. Побудувати трикутник, якщо дано $a : b$, $\angle C$, m_a.

798. Побудувати трикутник, якщо дано $a : b$, $\angle C$, l_a.

799. Побудувати трикутник, якщо дано $h_c : l_c$, $\angle A$, m_c.

800. Побудувати паралелограм, якщо дано: співвідношення двох його сторін, кут та одна з діагоналей.

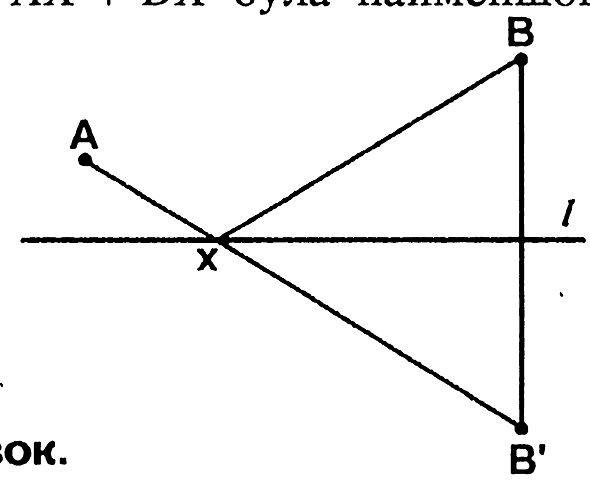
801. Побудувати паралелограм, якщо дано: висота, співвідношення діагоналей та кут між ними.

802. У даний ромб вписати квадрат, вершини якого лежать на сторонах ромба.

Метод симетрії

Часто, проводячи аналіз задачі, буває зручно для всієї фігури або її частини побудувати фігуру, їй симетричну відносно будь-якої осі. Після такої побудови інколи виявляється така залежність між елементами фігур, яку раніше важко було помітити.

804. Дано пряму l та дві точки A і B по одну сторону від неї. Знайти на прямій таку точку X, щоб сума відстаней $AX + BX$ була найменшою.



Розв'язок.

Побудуємо точку B', симетричну точці B відносно прямої l.

Нехай X — шукана точка, тоді $BX = B'X$ і $AX + XB = AX + XB'$; отже, задача зводиться до знаходження точки X такої, що сума $AX + XB'$ має найменшу величину. Цій умові, очевидно, задовольняє X — точка перетину даної прямої l та прямої AB'.

805. На нескінченній прямій AB знайти таку точку C, щоб прямі CM і CN, проведені з точки C до даних точок M і N, що знаходяться по один бік від AB, утворювали б з прямими CA і CB рівні кути.

806. Дано два кола з центрами в точках O і O_1 та пряма AB, що їх не перетинає. Знайти на прямій AB точку X таку, щоб дотичні з неї до даних кіл були нахилені до AB під однаковими кутами.

807. Дано кут ABC та точку M всередині нього. Знайти на одній стороні кута точку X і на другій — точку Y так, щоб периметр трикутника MXY був найменшим.

Задачі різні

808. В трикутнику проекції бічних сторін на основу дорівнюють 5 і 9 м, а більша бічна сторона дорівнює 15 м.
На які частини ділиться ця бічна сторона перпендикуляром до основи, що проходить через його середину?

809. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 3 м, а кожна з бічних сторін дорівнює 6 м. Пряма, паралельна основі, відтинає від трикутника трапецію, верхня основа якої дорівнює сумі бічних сторін.
Визначити сторони трапеції.

810. В трикутник вписано паралелограм, кут якого збігається з кутом трикутника. Сторони трикутника, які утворюють цей кут, дорівнюють 20 і 25 см, а паралельні їм сторони паралелограма відносяться як 6:5.
Визначити сторони паралелограма.

811. В трикутник, основа якого дорівнює 48 м, а висота 16 м, вписано прямокутник з відношенням сторін 5:9, причому більша сторона лежить на основі трикутника.
Визначити сторони прямокутника.

812. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 6 м, а висота 9 м.
Знайти сторони вписаного в трикутник прямокутника, якщо його діагоналі паралельні бічним сторонам трикутника.

813. Сума гіпотенузи і одного з катетів прямокутного трикутника дорівнює 49 см, а другий катет дорівнює 35 см.
Знайти гіпотенузу і перший катет.

814. Катети прямокутного трикутника 12 і 35 см.
Визначити медіану гіпотенузи.

815. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить протилежний катет на частини в 4 і 5 см.
Знайти гіпотенузу.

816. Висота, опущена на гіпотенузу заданого прямокутного трикутника, ділить його на два прямокутних трикутника. Медіани цих трикутників, проведені до їх гіпотенуз, дорівнюють 3 і 4 м.
Визначити медіану даного трикутника, проведену до гіпотенузи.

817. Висота трикутника, опущена на основу, дорівнює 12 см, а кути при основі 45° і 60°.
Знайти сторони трикутника.

818. Діагоналі ромба 24 і 70 см.
Визначити висоту ромба.

819. В рівнобедреному трикутнику висота, опущена на бічну сторону, ділить її на відрізки 7 і 2 см, рахуючи від вершини.
Визначити основу трикутника.

820. В рівнобедреному трикутнику висота, опущена на основу, дорівнює 20 см; висота, опущена на бічну сторону, дорівнює 24 см.
Визначити сторони трикутника.

821. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за один з катетів на 25 см і більша від другого на 2 см.
Знайти сторони трикутника.

822. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на частини у відношенні 2:5.
В якому відношенні ділиться гіпо-

тенуза висотою, що проходить через вершину прямого кута?

823. Висота, опущена на бічну сторону рівнобедреного трикутника, ділить її на відрізки 3 і 2 см, рахуючи від вершини.
Знайти довжину цієї висоти та периметр даного трикутника.

824. З точки, що лежить на стороні рівностороннього трикутника і ділить її на відрізки 1 і 3 см, опущені перпендикуляри на дві інші сторони.
Знайти довжини цих перпендикулярів.

825. Менша основа рівнобедреної трапеції дорівнює 10 м, а периметр її дорівнює 56 м. Діагональ трапеції ділить її тупий кут пополам.
Знайти висоту трапеції.

826. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а бічна сторона дорівнює 27 см.
Визначити сторони трикутника, вершинами якого є основи висот заданого.

827. Прямокутний трикутник висотою, проведеною через вершину прямого кута, ділиться на два трикутника. Медіани прямих кутів цих двох трикутників дорівнюють 1,2 і 2 м.
Визначити бісектрису прямого кута заданого трикутника.

828. *Визначити* в трикутнику третю сторону, якщо дві інші утворюють кут 60° і відповідно дорівнюють 5 і 8 см.

829. *Визначити* в трикутнику третю сторону, якщо дві інші утворюють кут 120° і відповідно дорівнюють 3 і 5 см.

830. *Визначити* в трикутнику третю сторону, якщо дві інші утворюють кут 45° і відповідно дорівнюють 2 і 3 см.

831. Сторони трикутника відносяться між собою як 13:14:15, а висота, опущена на средню за величиною сторону, дорівнює 36 см.
Знайти сторони трикутника.

832. Дві сторони трикутника відповідно дорівнюють 8 і 13 см, а кут проти більшої з них дорівнює 60°.
Визначити третю сторону.

833. Одна з сторін трикутника дорівнює 13 см, а кут, що лежить проти цієї сторони, дорівнює 120°; сума двох інших сторін трикутника дорівнює 15 см.
Визначити сторони трикутника.

834. Основа трикутника дорівнює 22 см, а бічні сторони дорівнюють 15 і 23 см.
Визначити медіану основи.

835. В трикутнику ABC: $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см.
Визначити висоту, опущену на сторону BC.

836. Основа трикутника дорівнює 2 м, а прилеглі до нього кути дорівнюють 30° і 45°.
Визначити бічні сторони трикутника.

837. Сторони даного паралелограма відповідно дорівнюють 12 см і 14 см, а діагоналі відносяться як 7:11.
Визначити довжини діагоналей.

838. Основи трапеції дорівнюють 9 і 4 см, а бічні сторони 3 і 4 см.
Визначити висоту трапеції.

839. З точкиаа кола проведено дві хорди, кожна з яких дорівнює радіусу.
Знайти кут між ними.

840. В крузі дано дві взаємно перпендикулярні хорди, кожна з яких ділиться іншою на два відрізки 3 і 7 см.
Знайти відстань до кожної хорди від центра круга.

841. Хорда перетинає діаметр під кутом 30° і ділить його на два відрізки 3 і 7 см.
Знайти відстань від центра до хорди.

842. З точки кола проведено взаємно перпендикулярні хорди, віддалені від центра на 6 і на 10 см.
Визначити їх довжину.

843. Дано два концентричні кола. В більшому колі дано дві взаємно перпендикулярні хорди, дотичні до меншого, кожна з хорд ділиться іншою на частини в 3 і 7 см.
Знайти радіус меншого кола.

844. З точки M, що лежить поза колом, проведено до нього дві січні, що утворюють кут 45°. Менша дуга кола, що міститься між сторонами кута, дорівнює 30°.
Скільки градусів має більша дуга?

845. AB — діаметр, BC — дотична. Січна AC ділиться більшим колом (в точці D) пополам.
Визначити кут CBD.

846. В колі, радіус якого дорівнює 14 см, визначити відстань від центра до хорди, що стягує дугу в 120°.

847. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 2 см, кут при вершині —120°.
Визначити діаметр описаного кола.

848. Менша сторона прямокутника дорівнює 1 м, гострий кут між діагоналями —60°.
Знайти радіус описаного кола.

849. В прямокутному трикутнику катети дорівнюють 12 і 5 см.
Визначити радіус вписаного кола.

850. Радіус кола дорівнює 25 см, а дві паралельні хорди цього кола відповідно дорівнюють 14 і 40 см.
Визначити відстань між хордами.

851. В коло радіуса 5 см вписано прямокутний трикутник так, що один з його катетів знаходиться вдвічі ближче до центра, ніж інший.
Визначити катети.

852. Радіуси двох кіл, що перетинаються, дорівнюють 15 і 20 см.
Визначити відстань між центрами кіл, якщо довжина їхньої спільної хорди дорівнює 24 см.

853. Радіуси двох кіл, що мають зовнішній дотик, відповідно дорівнюють 4 і 9 м.
Визначити довжину відрізка спільної зовнішньої дотичної між точками дотику.

854. В рівнобічній трапеції основи дорівнюють 8 і 6 м, а висота — 7 м.
Визначити радіус описаного навколо цієї трапеції кола.

855. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 і 4 м.
Визначити радіус вписаного кола.

856. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 і 6 см.
Визначити радіус кола, що дотикається до катетів цього трикутника і має центр на гіпотенузі.

857. Сторони прямокутника 2 і 24 см. *Знайти* сторони рівновеликого йому прямокутника, якщо їх відношення дорівнює 3:4.

858. Сторона прямокутника відноситься до його діагоналі як 3:5, а інша сторона дорівнює 8 см.
Знайти площу прямокутника.

859. Периметр прямокутника дорівнює 14 м, а площа — 12 $м^2$.
Знайти діагональ цього прямокутника.

860. Сторони прямокутника 3 м і 1 м. *Знайти* площу чотирикутника, утвореного бісектрисами кутів прямокутника, проведеними до взаємного перетину.

861. Висоти паралелограма відносяться як 2:3, периметр його дорівнює 40 см, а гострий кут — 30°.
Визначити площу паралелограма.

862. Площа паралелограма дорівнює 36 $см^2$, а відстані від точки перетину діагоналей до сторін відповідно дорівнюють 2 і 3 см.
Знайти периметр паралелограма.

863. Висота ромба дорівнює 24 см, а одна з його діагоналей — 30 см.
Знайти площу ромба.

864. *Довести*, що сума відстаней від точки, взятої всередині рівностороннього трикутника, до його сторін дорівнює висоті трикутника.

865. Перпендикуляри, опущені з точки, що лежить всередині рівностороннього трикутника зі стороною 12 см, на сторони трикутника, відносяться як 1:2:3.
Знайти довжини цих перпендикулярів.

866. Сума двох сторін трикутника дорівнює 15 см, а висоти, опущені на ці сторони, дорівнюють 4 і 6 см.
Визначити площу трикутника.

867. Дві сторони трикутника дорівнюють 10 і 14 см, а кут проти першої з них дорівнює 45°.
Знайти площу трикутника.

868. *Визначити* площу рівнобедреного трикутника, якщо основа дорівнює 30 см, а висота, опущена на бічну сторону, дорівнює 24 см.

869. Сторони трикутника дорівнюють 26, 28 і 30 см.
Визначити площі трикутників, на які розбивається даний трикутник висотою та медіаною, проведеними до середньої за величиною сторони.

870. *Визначити* площу трикутника, якщо дві сторони його дорівнюють 27 і 29 см, а медіана третьої сторони дорівнює 26 см.

871. *Знайти* площу рівнобедреного трикутника, якщо висота, опущена на основу, дорівнює 20 см, а висота, опущена на бічну сторону, дорівнює 24 см.

872. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 і 8 см. В трикутнику дано точку на відстані 2 см від кожного з катетів.
Знайти відстань до даної точки від гіпотенузи.

873. Медіани рівнобедреного трикутника дорівнюють 18, 15 і 15 см.
Знайти площу цього трикутника.

874. Сторони трикутника відносяться як 4:13:15, а площа дорівнює 96 $см^2$.
Знайти сторони трикутника.

875. Сторони трикутника дорівнюють 4, 13 і 15 см. Всередині трикутника дано точку на відстані 5 см від першої сторони і на відстані 1 см від другої.
Знайти відстань до даної точки від третьої сторони.

876. Основа трикутника дорівнює 10 см, а медіани бічних сторін дорівнюють 9 і 12 см.
Знайти площу трикутника.

877. Площа трикутника дорівнює 84 см^2, а дві його сторони дорівнюють 15 і 14 см.
Знайти третю сторону.

878. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 7 і 13 см, а її площа дорівнює 40 см^2.
Визначити периметр трапеції.

879. Основи трапеції 6 і 20 см, а бічні сторони 13 і 15 см.
Визначити площу трапеції.

880. Основи трапеції 3 і 12 см, а одна з бічних сторін 17 см.
Визначити іншу бічну сторону, якщо площа трапеції дорівнює 60 см^2.

881. Висота трапеції дорівнює 12 см, а діагоналі її дорівнюють 20 і 15 см.
Знайти площу трапеції.

Задачі на доведення

882. *Довести*, що кут, який доповнює менший з двох суміжних кутів до прямого, дорівнює піврізниці суміжних кутів.

883. *Довести*, що бісектриси двох суміжних кутів взаємно перпендикулярні.

884. На кожній стороні рівностороннього трикутника ABC відкладено однакові відрізки $AB_1 = BC_1 = CA_1$. Точки A_1, B_1 і C_1 сполучено відрізками прямих.
Довести, що трикутник $A_1B_1C_1$ також рівносторонній.

885. *Довести*, що в трикутнику сторона менша за половину периметра.

886. *Довести*, що сума відстаней від будь-якої точки всередині трикутника до його вершин:
1) менша за периметр та
2) більша від половини периметра.

887. *Довести*, що пряма, перпендикулярна до бісектриси кута, відтинає від його сторін рівні відрізки.

888. *Довести*, що коли в трикутнику дві висоти рівні між собою, то такий трикутник рівнобедрений.

889. *Довести*, що коли дві сторони і медіана одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і медіані другого трикутника, то такі трикутники рівні.
Розглянути два випадки:
1) медіану проведено до однієї з даних сторін;
2) медіану проведено між даними сторонами.

890. З вершини трикутника ABC проведено пряму, паралельну бісектрисі кута B, до перетину в точці D з продовженням сторони AB.
Довести, что $BD = BC$.

891. *Довести*, що в будь-якому трикутнику бісектриса лежить між висотою та медіаною, проведеними з однієї вершини.

892. З вершини прямого кута прямокутного трикутника проведені: бісектриса прямого кута, медіана

гіпотенузи та висота, опущена на гіпотенузу.

Довести, що бісектриса ділить навпіл кут між висотою та медіаною.

893. *Довести*, що коли медіана дорівнює половині сторони, до якої вона проведена, то трикутник прямокутний.

894. *Довести*, що в прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.

895. *Довести*, що медіана трикутника менша від півсуми сторін, проведених з тієї ж вершини.

896. *Довести*, що сума медіан трикутника менша за периметр, але більша від півпериметра трикутника.

897. *Довести*, що в прямокутному трикутнику медіана і висота, проведені до гіпотенузи, утворюють кут, що дорівнює різниці гострих кутів трикутника.

898. *Довести*, що в рівнобедреному трикутнику сума відстаней до кожої точки основи від бічних сторін є величиною сталою і дорівнює висоті, опущеній на бічну сторону.

899. *Довести*, що коли один з кутів трикутника дорівнює сумі двох інших, то трикутник прямокутний.

900. *Довести*, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна основі.

901. *Довести*, що сума відстаней від будь-якої точки, що лежить всередині паралелограма, до його сторін є величиною сталою.

902. *Довести,* що середини сторін будь-якого опуклого чотирикутника є вершинами паралелограма.

903. *Довести*, що коли кожну з середин двох протилежних сторін будь-якого чотирикутника сполучити з серединами діагоналей, то утвориться паралелограм.

904. *Довести*, що бісектриси кутів прямокутника при перетині утворюють квадрат.

905. *Довести*, що основи перпендикулярів, опущених з точок перетину діагоналей ромба на його сторони, утворюють вершини прямокутника.

906. *Довести*, що відрізки, які сполучають середини суміжних сторін рівнобічної трапеції, утворюють ромб.

907. *Довести*, що коли в трапеції сума протилежних кутів дорівнює 180°, то ця трапеція рівнобічна.

908. *Довести*, що коли кути при основі трапеції різні, то різниця проекцій бічних сторін трапеції на її основу дорівнює різниці основ трапеції.

909. *Довести*, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний її основам і дорівнює їх піврізниці.

910. *Довести*, що бісектриси кутів, прилеглих до однієї з непаралельних сторін трапеції, перетинаються під прямим кутом в точці, що лежить на середній лінії трапеції.

911. *Довести*, що кут, утворений двома дотичними, вдвічі більший за кут, утворений хордою, яка сполучає точки дотику, з радіусом, проведеним в одну з цих точок.

912. *Довести*, що радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, вдвічі менший за радіус описаного кола, а сума обох радіусів дорівнює висоті трикутника.

913. *Довести*, що сума діаметрів кіл, вписаного в прямокутний трикутник та описаного навколо нього, дорівнює сумі його катетів.

914. Діаметр AB і хорда AC утворюють кут 30°. Через точку C проведено дотичну, що перетинає продовження AB в точці D.
Довести, що трикутник ACD — рівнобедрений.

915. *Довести*, що коли два круга дотикаються зовнішньо, то частина зовнішньої спільної дотичної, обмежена точками дотику, є середнім пропорційним між діаметрами кругів.

916. Якщо в прямокутний трикутник ABC вписати квадрат $DEFK$ так, щоб сторона FK лежала на гіпотенузі AB, то ця сторона є середнім пропорційним між відрізками гіпотенузи BF і KA (точки на гіпотенузі розміщені в такій послідовності: B, F, K, A).
Довести, що $FK = \sqrt{BF \cdot KA}$

Задачі на побудову

917. Побудувати трикутник, якщо дано середини його сторін.

918. Побудувати трикутник за двома медіанами та кутом між ними.

919. Побудувати трикутник за висотою, опущеною на основу, та медіанами бічних сторін.

920. Побудувати трикутник за основою та медіанами бічних сторін.

921. Побудувати паралелограм, якщо дано периметр, одна діагональ та кут між діагоналлю та стороною.

922. Побудувати паралелограм, якщо дано дві висоти, проведені з однієї вершин, та кут.

923. Побудувати прямокутник за стороною та сумою діагоналей.

924. Побудувати прямокутник за діагоналлю та сумою двох нерівних сторін.

925. Побудувати прямокутник за діагоналлю та різницею двох нерівних сторін.

926. Побудувати прямокутник за стороною та сумою діагоналі з іншою стороною.

927. Побудувати прямокутник за стороною та різнцею діагоналі з іншою стороною.

928. Побудувати ромб за стороною та діагоналлю.

929. Побудувати ромб за кутом та діагоналлю, що проходить через вершину цього кута.

930. Побудувати ромб за сумою діагоналей та кутомто між діагоналлю і стороною.

931. Побудувати ромб, якщо дано сума сторони і діагоналі та один з кутів.

932. Побудувати ромб, якщо дано різниця сторони і діагоналі та один з кутів.

933. Побудувати ромб, якщо дано сторона та сума діагоналей.

934. Побудувати ромб, якщо задані сторона та різниця діагоналей.

935. Побудувати ромб, якщо дано сума діагоналей та кут між стороною і діагоналлю.

936. Побудувати рівносторонній трикутник за радіусом описаного кола.

937. Побудувати рівносторонній трикутник за радіусом вписаного кола.

938. Побудувати рівнобедрений трикутник за бічною стороною та радіусом описаного кола.

939. Побудувати рівнобедрений трикутник за основою та радіусом описаного кола.

940. Побудувати рівнобедрений трикутник за висотою, проведеною на основу, та радіусом описаного кола.

941. Побудувати рівнобедрений трикутник за висотою, проведеною на основу, та радіусом вписаного кола.

942. Побудувати рівнобедрений трикутник за основою та радіусом вписаного кола.

943. Побудувати рівнобедрений трикутник за кутом при вершині та радіусом вписаного кола.

944. Побудувати прямокутний трикутник за катетом та радіусом вписаного кола.

945. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою та радіусом вписаного кола.

946. Побудувати прямокутний трикутник, якщо дано радіуси вписаного і описаного кіл.

947. Побудувати прямокутний трикутник за гострим кутом та радіусом описаного кола.

948. Побудувати трикутник за основою, висотою, проведеною до основи, та радіусом описаного кола.

949. Побудувати трикутник за стороною, кутом, прилеглим до цієї сторони, та радіусом описаного кола.

950. Побудувати трикутник за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, та радіусом описаного кола.

951. Побудувати трикутник, якщо дано: висота, проведена до основи, кут при основі та радіус описаного кола.

952. Побудувати трикутник, якщо дано: бічна сторона, висота, проведена до основи, та радіус описаного кола.

953. Побудувати трикутник за висотою і бісектрисою, проведеними з вершини одного з кутів, та радіусом описаного кола.

954. Побудувати трикутник за стороною, кутом, прилеглим до цієї сторони, та радіусом вписаного кола.

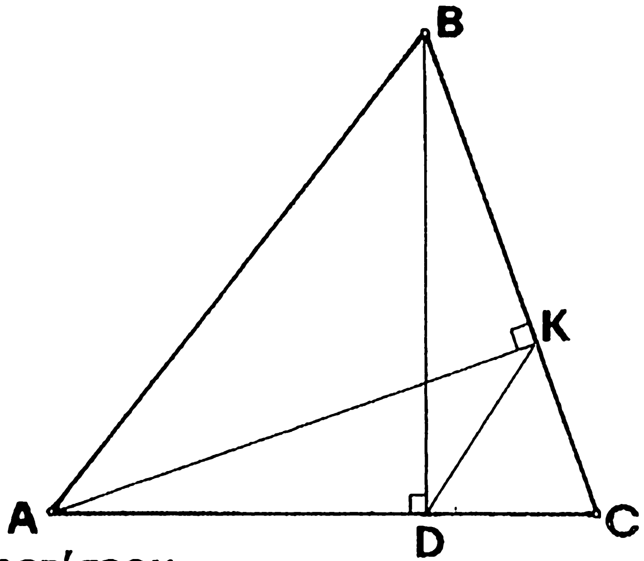
955. Побудувати трикутник за бічною стороною, висотою, проведеною до основи, та радіусом вписаного кола.

Розділ 4

Задачі для гурткової та факультативної роботи

Задача 956.

Дано: ΔABC, $AK \perp BC$, $BD \perp AC$.
Довести: $\Delta CKD \backsim \Delta ABC$.



Розв'язок.

$\Delta AKC \backsim \Delta BDC$ ($\angle C$ — спільний, $\angle AKC = \angle BDC = 90°$), тому

$$\frac{KC}{DC} = \frac{AC}{BC}, \qquad (*)$$

$\Delta KDC \backsim \Delta ABC$ ($\angle C$ — спільний, а сторони, що його утворюють, пропорційні). За співвідношенням (*) маємо:

$$\frac{KC}{AC} = \frac{DC}{BC}, \quad \cos\angle C = k$$

(k — коефіцієнт подібності).

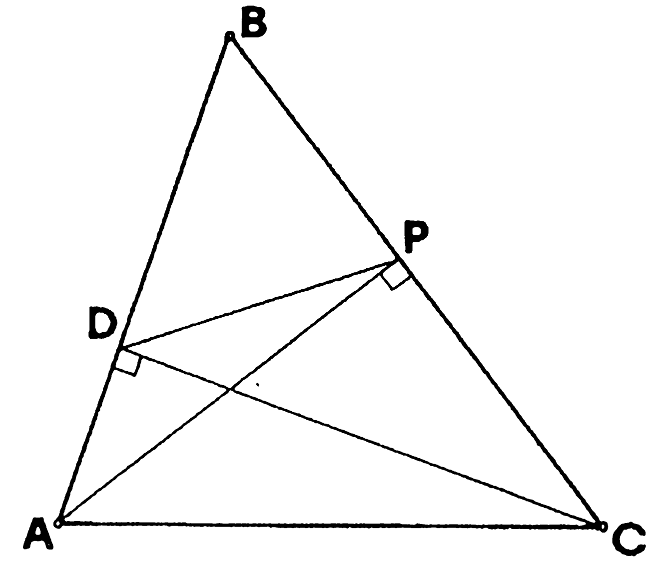
Висновок: пряма, що сполучає основи висот гострокутного трикутника, відтинає від цього трикутника подібний до нього трикутник.

Задача 957.

Дано: ΔABC, $AP \perp BC$, $CD \perp AB$,
$S_{ABC} = 18$, $S_{DBP} = 2$, $PD = 2\sqrt{2}$.
Знайти: R (радіус кола, описаного навколо ΔABC).

Розв'язок.

$\Delta DBP \backsim \Delta ABC$,



$$\frac{S_{\Delta DBP}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{DP^2}{AC^2} = \cos^2\angle B = \frac{1}{9}$$

(задача 956), звідки

$$AC = 3DP = 6\sqrt{2}, \ \cos\angle B = \frac{1}{3}.$$

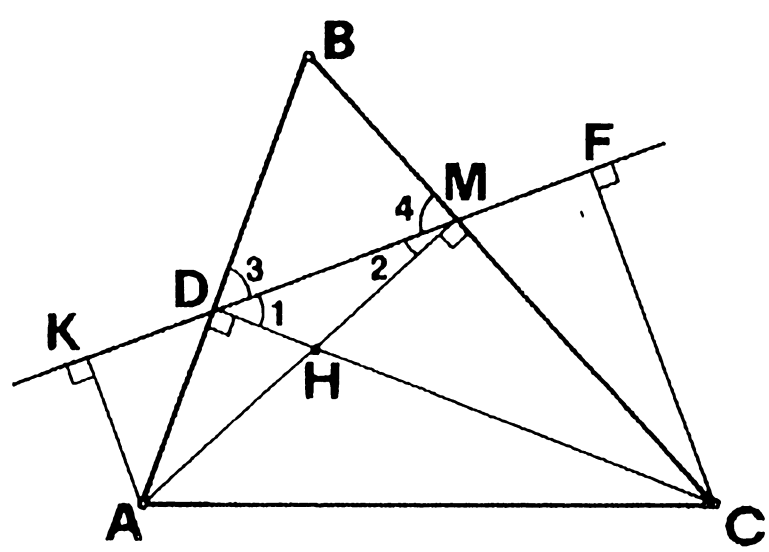
Тоді $\sin\angle B = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

З $\dfrac{AC}{\sin\angle B} = 2R$ знаходимо R.

Відпоівідь: 4,5.

Задача 958.

Дано: ΔABC, $AM \perp BC$, $CD \perp AB$,
$AK \perp KF$, $CF \perp KF$.
Довести: $KD = MF$.



Розв'язок.

Нехай $\angle 1 = \alpha$, $\angle 2 = \beta$. Тоді

$$\angle 3 = 90^\circ - \alpha,\ \angle 4 = 90^\circ - \beta,$$

$$\Delta ABC \backsim \Delta DBM \text{ (задача 956)},$$

R — радіус кола, описаного навколо ΔABC

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BM}{BD} = \frac{2R\sin(90^\circ - \alpha)}{2R\sin(90^\circ - \beta)} =$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\cos\beta},$$

але $AB \cdot CD = BC \cdot AM$, звідки

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{CD}.\ \text{Маємо:}$$

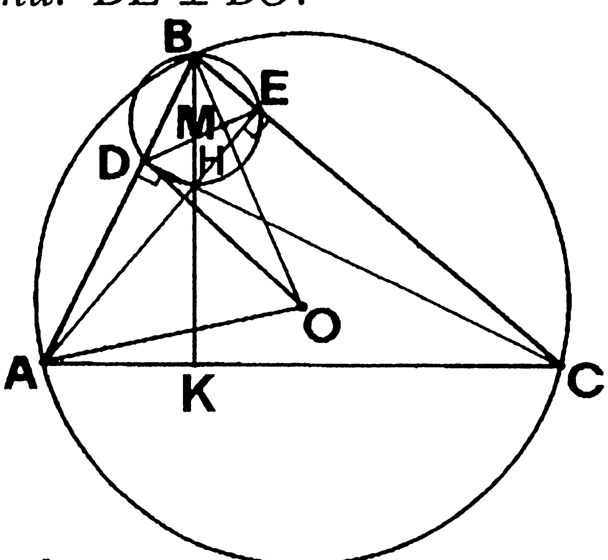
$$\frac{AM}{CD} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta},\quad \underbrace{AM \cdot \cos\beta}_{KM} = \underbrace{CD\cos\alpha}_{DF},$$

$$KD + DM = DM + MF,\ KD = MF.$$

Задача 959.

Дано: ΔABC, O — центр описаного кола, $AE \perp BC$, $CD \perp AB$.

Довести: $DE \perp BO$.



Розв'язок.

Нехай $\angle OAB = \angle ABO = \alpha$, тоді

$\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle ACB = \angle BHE$ (кути з взаємно перпендикулярними сторонами). Але

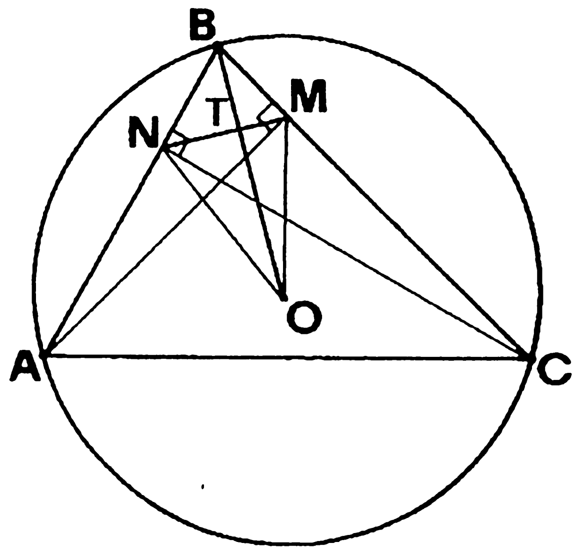
$\angle BHE = \angle BDE = 90^\circ - \alpha$ (задача 957),

$$\angle BDE + \angle DBO = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ,$$

отже, $\angle BMD = 90^\circ$.

Задача 960.

Дано: ΔABC, O — центр описаного кола, $AM \perp BC$, $CN \perp AB$,



$$\angle ABC = \beta,\ S_{NOMB} = S.$$

Знайти: AC.

Розв'язок.

$\angle NTB = 90^\circ$ (задача 958), тоді

$$S = \frac{MN \cdot BO}{2}, \qquad (*)$$

$$\Delta NBM \backsim \Delta ABC.$$

Коефіцієнт подібності $\cos\beta$ (задача 956), $\frac{MN}{AC} = \cos\beta$, звідки

$$MN = AC\cos\beta, \qquad (1)$$

$$\frac{AC}{\sin\beta} = 2 \cdot BO \text{ (теорема синусів)},$$

$$AC = 2 \cdot BO\sin\beta. \qquad (2)$$

Підставляючи (1) і (2) в формулу (*), дістанемо

$$S = \frac{AC\cos\beta\, AC}{4\sin\beta} = \frac{AC^2}{4\,\mathrm{tg}\,\beta},$$

звідки $AC = 2\sqrt{S \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$.

Відповідь: $2\sqrt{S \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$.

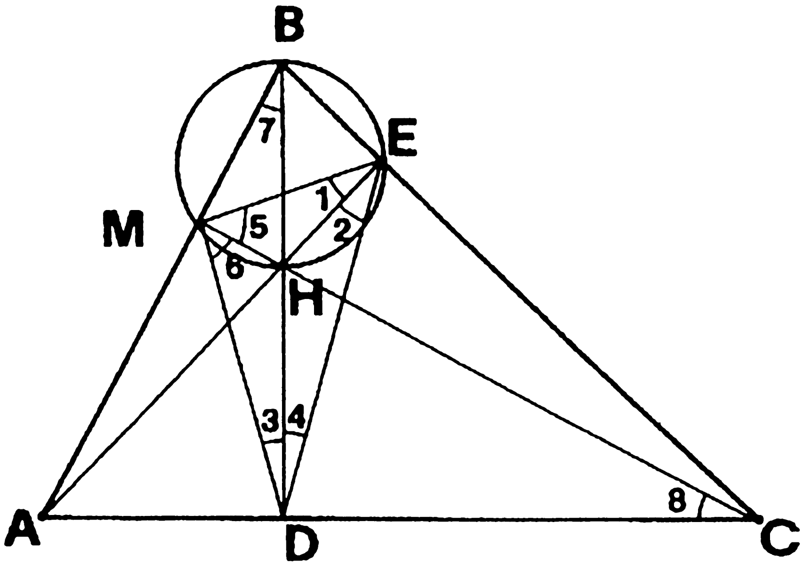
Задача 961.

Дано: ΔABC, $AE \perp BC$, $BD \perp AC$, $CM \perp AB$.

Довести: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$.

Розв'язок.

Навколо чотирикутників $MBEH$, $DHEC$, $AMHD$ можна описати коло (чому?).



Нехай $\angle 1 = \angle 7 = \alpha$ (вписані, що спираються на одну й ту ж саму дугу). Тоді $\angle BAC = 90^\circ - \alpha$, $\angle 8 = \alpha$,

$$\angle 8 = \angle 2 = \alpha$$

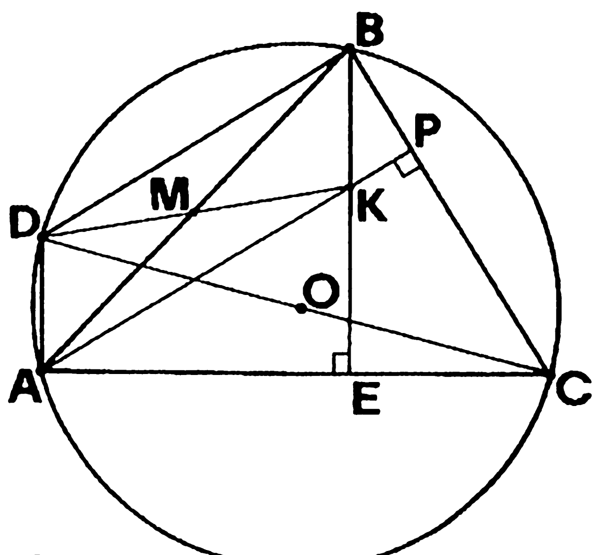
(вписані, що спираються на одну й ту ж саму дугу).

Значить, $\angle 1 = \angle 2$. Аналогічно довести, що $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$.

Задача 962.

Дано: ΔABC, O — центр описаного кола, $BE \perp AC$, $AP \perp BC$.

Довести: $AM = MB$ і $DM = MK$.



Розв'язок.

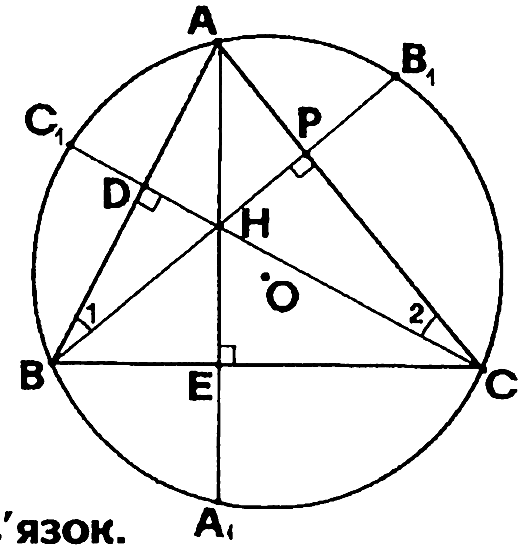
$$\angle CAD = \angle DBC = 90^\circ,$$

значить, $DA \parallel BK$, $BD \parallel AK$. $ADBK$ — паралелограм.

Задача 963.

Дано: ΔABC, O — центр описаного кола, $AE \perp BC$, $BP \perp AC$, $CD \perp AB$.

Довести: $\smile B_1A = \smile AC_1$, $\smile C_1B = \smile BA_1$, $\smile A_1C = \smile CB_1$.



Розв'язок.

Нехай $\angle 1 = \alpha$, тоді

$$\angle BAP = 90^\circ - \alpha, \ \angle 2 = \alpha.$$

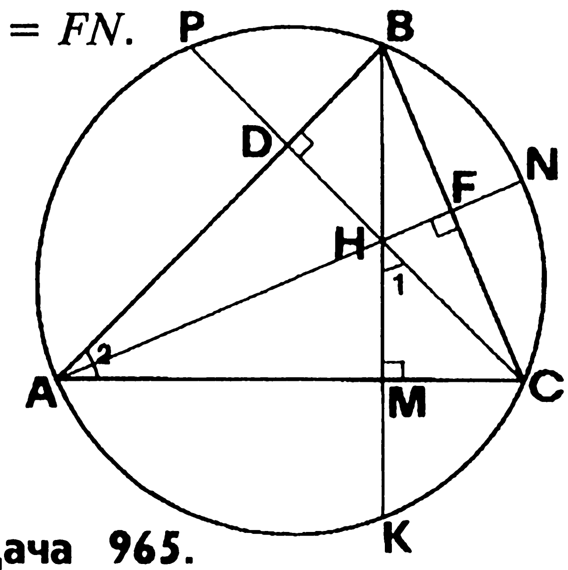
Значить, $\angle 1 = \angle 2$ і $\smile B_1A = \smile AC_1$.

Аналогічно довести справедливість інших рівностей.

Задача 964.

Дано: ΔABC, вписаний в коло, $BM \perp AC$, $CD \perp AB$, $AF \perp BC$.

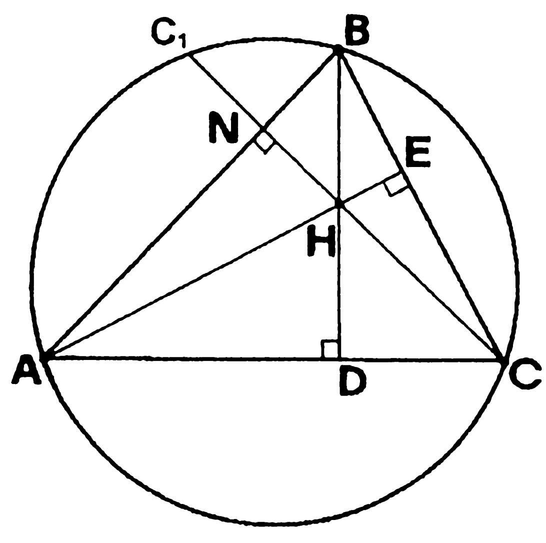
Довести: $HM = MK$, $HD = DP$, $HF = FN$.



Задача 965.

Дано: ΔABC, $CN \perp AB$, $AE \perp BC$, $BD \perp AC$.

Довести: $AN \cdot NB = CN \cdot HN$.



Розв'язок.

Виконаємо додаткові побудови: $AN \cdot BN = CN \cdot NC_1$, але

$$NC_1 = HN \text{ (задача 964)}.$$

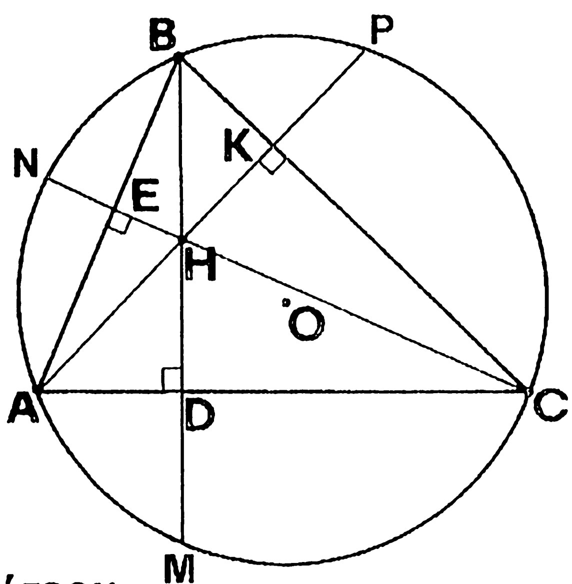
Тому $AN \cdot BN = CN \cdot HN$.

Задача 966.

Дано: ΔABC, O — центр описаного кола, $BD \perp AC$, $AK \perp BC$, $CE \perp AB$.

Довести:

$BH \cdot HD = AH \cdot HK = CH \cdot HE$.



Розв'язок.

$$AH \cdot HP = BH \cdot HM = CH \cdot HN, \text{ або}$$

$$AH \cdot 2 \cdot HK = BH \cdot 2 \cdot HD =$$

$$= CH \cdot 2 \cdot HE,$$

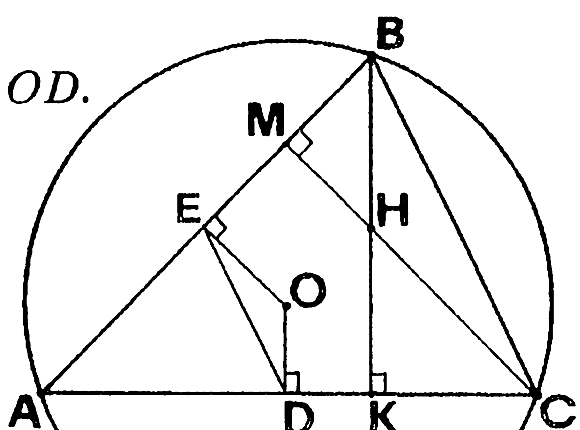
$$AH \cdot HK = BH \cdot HD = CH \cdot HE.$$

Задача 967.

Дано: ΔABC, O — центр описаного кола, $CM \perp AB$, $BK \perp AC$, $OD \perp AC$.

Довести:

$BH = 2 \cdot OD$.



Розв'язок.

$OE \perp AB$, ED — середня лінія трикутника BCA. $\Delta OED \backsim \Delta BHC$ ($ED \parallel BC$, $OE \parallel CM$, $OD \parallel BK$).

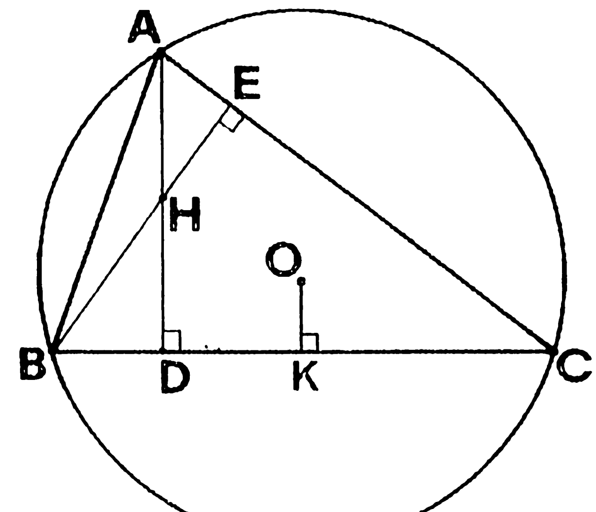
З подібності маємо:

$$\frac{ED}{BC} = \frac{OD}{BH} = \frac{1}{2}, \; BH = 2 \cdot OD.$$

Задача 968.

Дано: ΔABC, O — центр описаного кола радіуса R, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$.

Довести: $BC^2 + AH^2 = 4R^2$.



Розв'язок.

$$OK \perp BC, \; CK^2 + OK^2 = OC^2,$$

$$4CK^2 + 4OK^2 = 4OC^2, \; AH = 2OK,$$

$$4 \cdot \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + AH^2 = 4R^2,$$

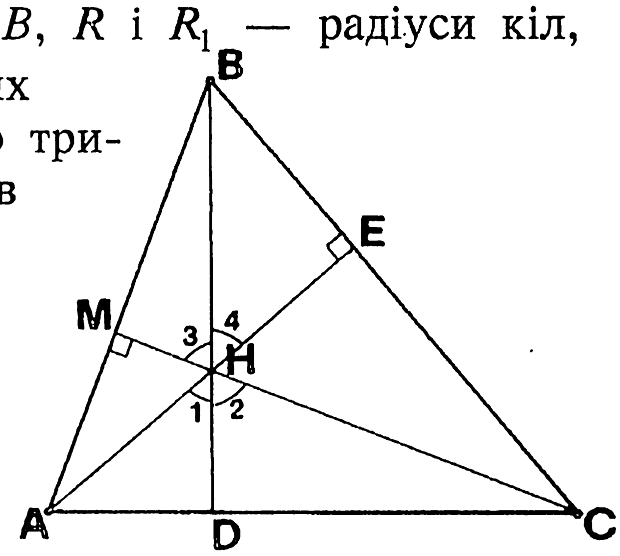
$$BC^2 + AH^2 = 4R^2.$$

Задача 969.

Дано: ΔABC, $BD \perp AC$, $AE \perp BC$, $CM \perp AB$, R і R_1 — радіуси кіл, описаних навколо трикутників ABC і AHC.

Довести:

$R = R_1$.



Розв'язок.

Нехай $\angle 1 = \angle 4 = \alpha$, $\angle 2 = \angle 3 = \beta$. Тоді $\angle ABC = 180° - (\alpha + \beta)$. Маємо:

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R,$$

звідки $AC = 2R \sin(\alpha + \beta)$,

$$\frac{AC}{\sin \angle AHC} = 2R.$$

Отже, $AC = 2R_1 \sin(\alpha + \beta)$,

$$2R \sin(\alpha + \beta) = 2R_1 \sin(\alpha + \beta),$$

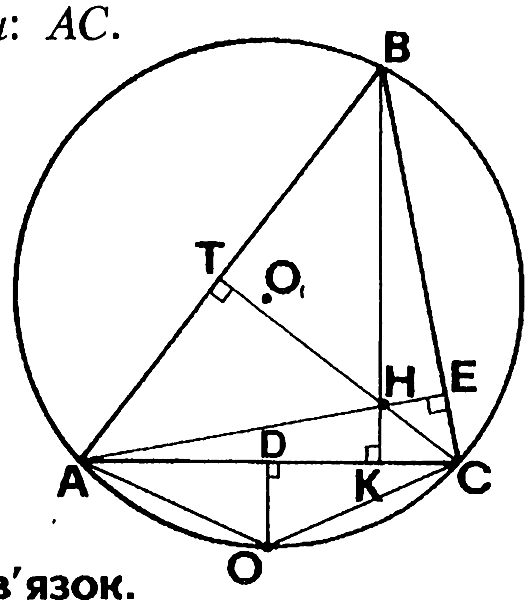
$$R = R_1;$$

$$R_{AHC} = R_{AHB} = R_{BHC} = R_{ABC}.$$

Задача 970.

Дано: ΔABC, $BK \perp AC$, $AE \perp BC$, $R = 1$ (радіус описаного кола з центром в т. O_1). Відомо, що O — центр кола, що проходить через точки A, C і H.

Знайти: AC.



Розв'язок.

$R_{AHC} = R_{ABC}$ (задача 967).

Нехай $\angle ABC = \beta$, тоді

$$\angle AOC = 180° - \beta,$$

$$\frac{AC}{\sin\beta} = 2R_{ABC}, \qquad (*)$$

$$OD \perp AC,\ AD = AO \cos\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\beta}{2};$$

$$AC = 2R_{AHC} \cos\frac{\beta}{2}.$$

Підставляємо в формулу (*)

$$\frac{2R_{AHC} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\sin\beta} = 2R_{ABC},\ \cos\frac{\beta}{2} = \sin\beta,$$

звідки знаходимо $\beta = 60°$,

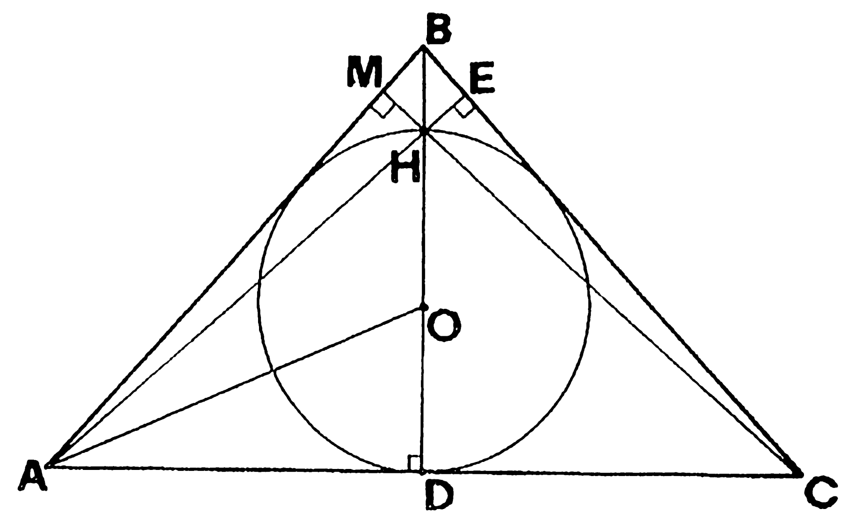
$$AC = 2 \sin 60° = \sqrt{3}.$$

Відповідь: $\sqrt{3}$.

Задача 971.

Дано: ΔABC, $AB = BC$, O — центр вписаного кола, $AE \perp BC$, $CM \perp AB$, $BD \perp AC$, H — належить колу.

Знайти: $\cos \angle BCA$.



Розв'язок.

Нехай $\angle BCA = \alpha$, а $OD = r$. Тоді

$$\angle OAD = \frac{\alpha}{2},\ \angle EAC = 90° - \alpha,$$

$$AD = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \text{ і}$$

$$AD = 2 \cdot r \cdot \operatorname{ctg}(90° - \alpha).$$

Маємо: $r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot r \cdot \operatorname{tg}\alpha$,

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{4 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

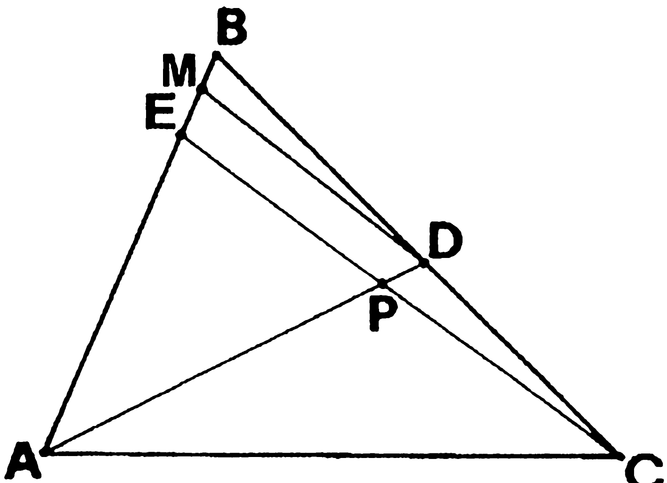
звідки $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$, а $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

Задача 972.

Дано: ΔABC, $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{7}{5}$, $\dfrac{BE}{EA} = \dfrac{1}{4}$.

Знайти: $AP : AD$.



Розв'язок.

Проведемо $DM \parallel PE$. $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BM}{ME} = \dfrac{7}{5}$.

Нехай $BM = 7x$, $ME = 5x$,

$EA = 4BE = 48x$, $\Delta AEP \backsim \Delta AMD$,

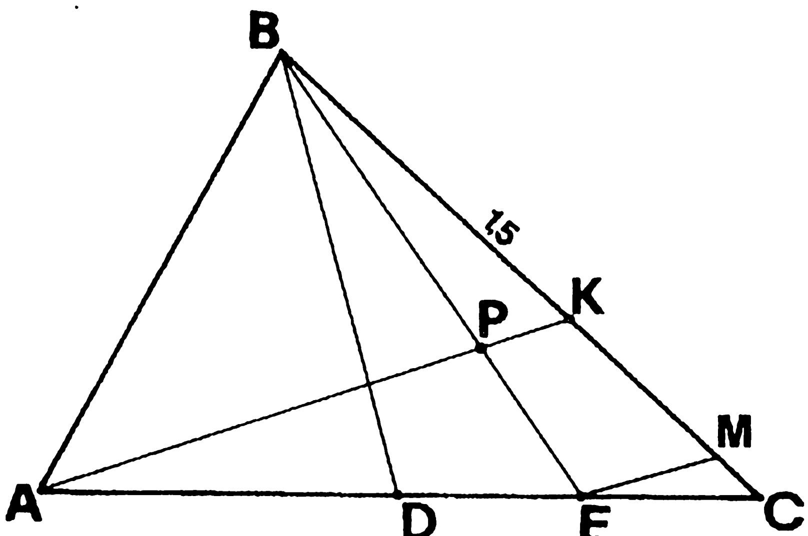
$$\frac{AP}{AD} = \frac{AE}{AM} = \frac{48}{53}.$$

Відповідь: 48:53.

Задача 973.

Дано: ΔABC, $AD = DC$, P — точка перетину медіан ΔDBC, $BK = 1{,}5$.

Знайти: KC.



Розв'язок.

Проведемо $EM \parallel AK$, $\dfrac{BP}{PE} = \dfrac{BK}{KM} = \dfrac{2}{1}$,

$BK = 2x$, $KM = x$, $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{KM}{MC} = \dfrac{3}{1}$,

$KM = 3y$, $MC = y$, $2x = 1{,}5$,

але $x = 3y$, $6y = 1{,}5$,

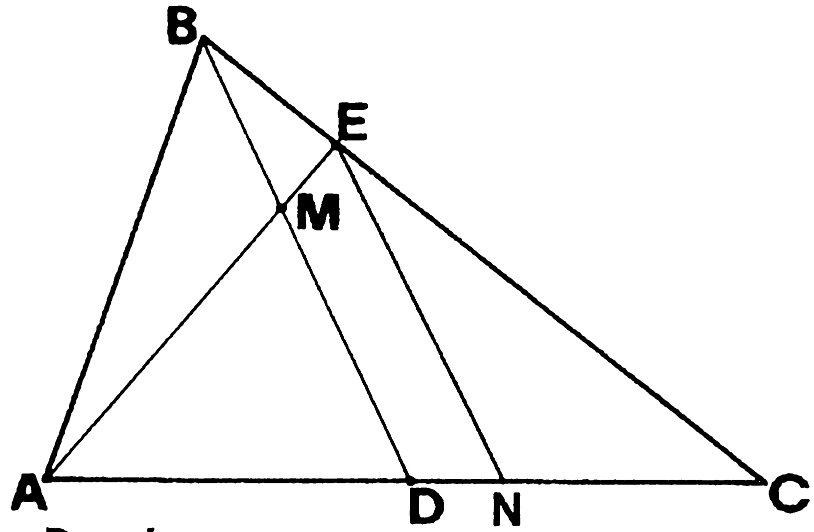
$$KC = 4y = \frac{4 \cdot 1{,}5}{6} = 1.$$

Відповідь: 1.

Задача 974.

Дано: ΔABC, $AD = DC$, $AM = 4ME$.

Знайти: $S_{ABE} : S_{AEC}$.



Розв'язок.

Проведемо $EN \parallel BD$. Нехай $ME = x$, тоді $AM = 4x$, $\Delta AMD \backsim \Delta AEN$,

$\dfrac{AD}{AN} = \dfrac{AM}{AE} = \dfrac{4}{5}$, $AD = 4y$, $DN = y$,

$NC = 3y$, $DN : NC = BE : EC = 1 : 3$,

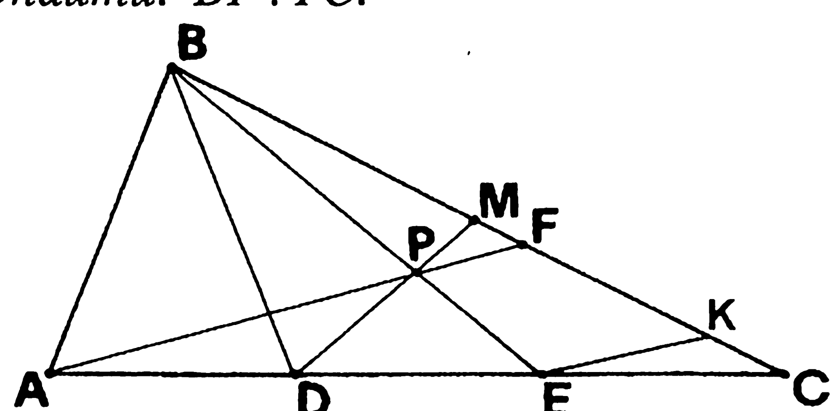
$$\frac{S_{ABE}}{S_{AEC}} = \frac{BE}{EC} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: 1:3.

Задача 975.

Дано: ΔABC, $\angle ABD = \angle DBC$,
$DE = EC$, $BM = MC$,
$AB : BC = 1 : 6$.

Знайти: $BF : FC$.



Розв'язок.

Проведемо $EK \parallel AF$, $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{6}$.

Нехай $AD = a$, тоді $DC = 6a$,

$$DE = EC = 3a,\ \frac{AE}{EC} = \frac{FK}{KC} = \frac{4}{3},$$

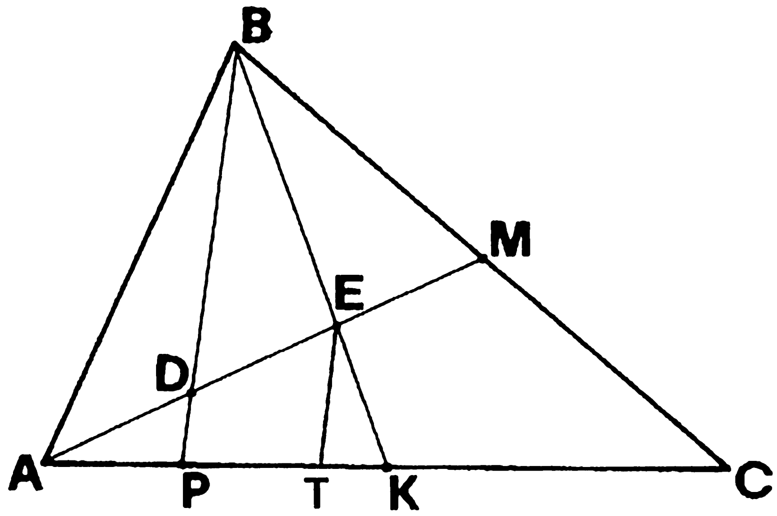
$$BF = 8b,\ KC = 3b,\ FK = 4b,$$

$$BF : FC = 8 : 7.$$

Відповідь: 8:7.

Задача 976.

Дано: ΔABC, $BM = MC$,
$AD = DE = EM$, $PK = 3$.
Знайти: AC.



Розв'язок.

AM — медіана, $AE = \frac{2}{3}AM$, отже, BK — медіана, звідки $AK = KC$ і $EK = \frac{1}{3}BK$. Проведемо $ET \parallel BP$,

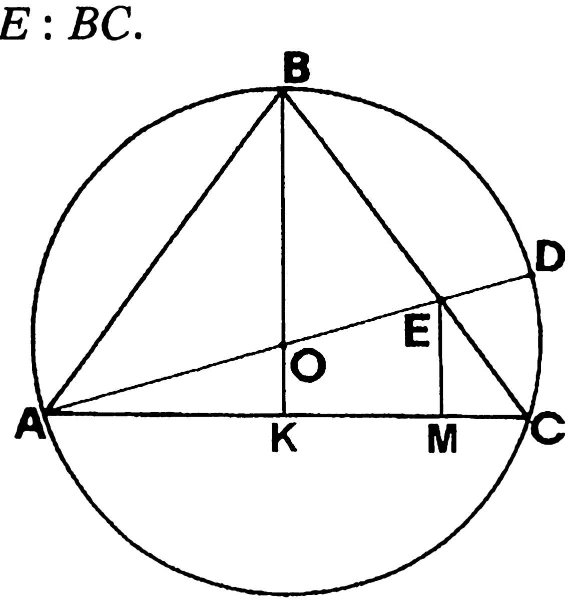
$$\Delta EKT \backsim \Delta BKP,\ \frac{EK}{BK} = \frac{TK}{PK} = \frac{1}{3},$$

$$TK = 1,\ PT = AP = 2,\ AC = 2AK = 10.$$

Відповідь: 10.

Задача 977.

Дано: ΔABC, $AB = BC$, O — центр описаного кола, $AE = 5ED$.
Знайти: $CE : BC$.



Розв'язок.

$$BK \perp AC,\ EM \perp AC.$$

Нехай $ED = x$, тоді $AE = 5x$,

$$AD = 2R = 6x,$$

$$AO : OE = AK : KM = 3 : 2,$$

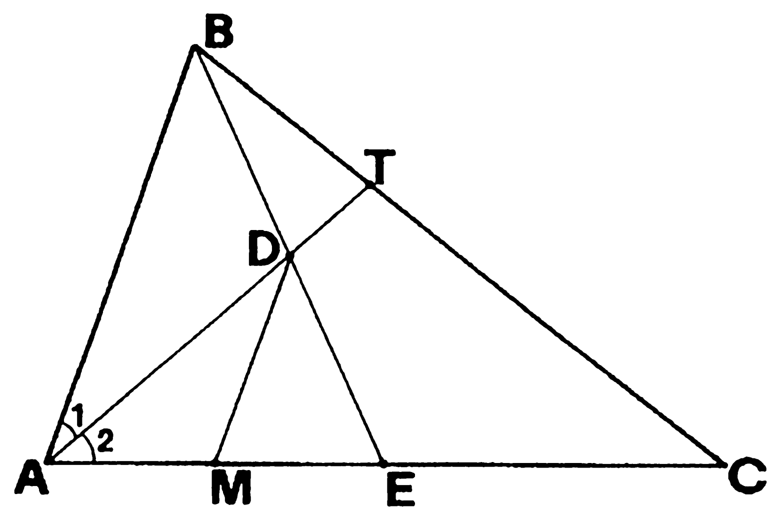
$$\Delta CEM \backsim \Delta CBK,$$

$$CE : BC = CM : CK = 1 : 3.$$

Відповідь: 1:3.

Задача 978.

Дано: ΔABC, $AE = EC$, $\angle 1 = \angle 2$,
$BC = 3BT$, $AM = ME$.
Знайти: $DM : AC$.



Розв'язок.

Нехай $BT = b$, тоді $TC = 2b$,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BT}{TC} = \frac{1}{2},\ \text{але } AC = 2AE,$$

$$\frac{AB}{AE} = 1,\ AB = AE,\ \angle 1 = \angle 2,$$

значить, $\angle ADE = 90°$ і

$$DM = ME = AM\ \text{(доведіть)}.$$

Нехай $DM = AM = ME = a$, тоді $EC = 2a$, $DM : AC = 1 : 4$.

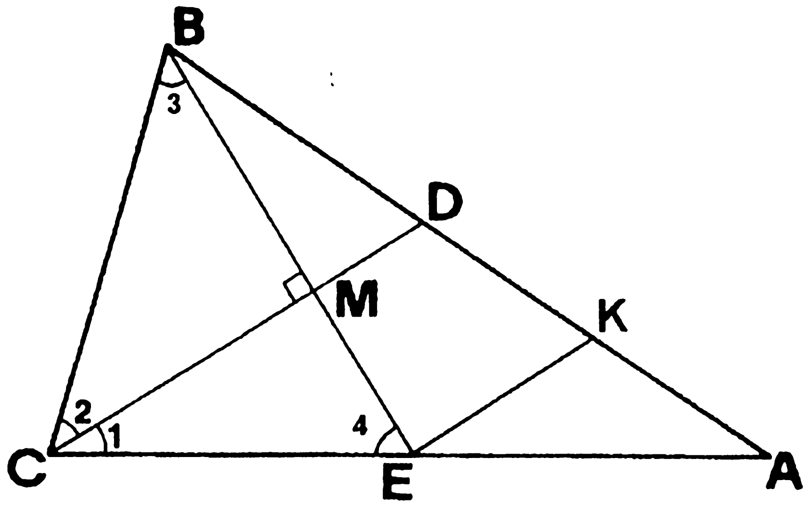
Відповідь: 1:4.

Задача 979.

Дано: ΔABC, $\angle 1 = \angle 2$, $CE = EA$,
$CD \perp BE$, $BE = 4$, $CD = 5$.
Знайти: S_{ABC}.

Розв'язок.

Нехай $\angle 1 = \angle 2 = \alpha$, тоді



$$\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ - \alpha,\ CB = CE,$$
$$BM = ME = 2.$$

Проведемо $EK \parallel CD$,

$$EK = \frac{1}{2}CD = \frac{5}{2},\ CM = CD - MD = \frac{15}{4},$$

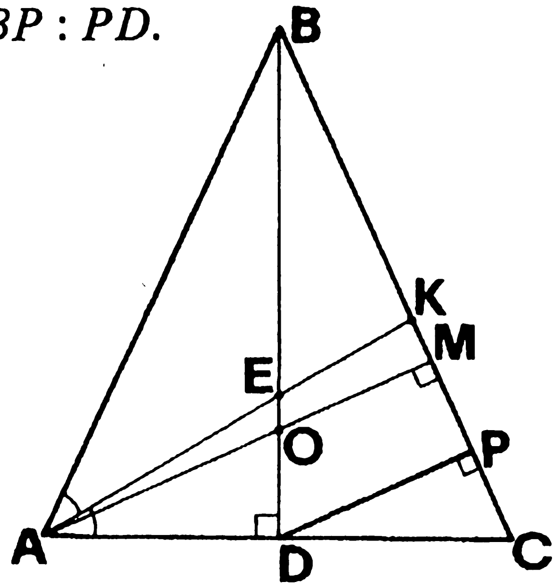
$$S_{ABC} = 2 \cdot S_{CBE} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BE \cdot CM = 15.$$

Відповідь: 15.

Задача 980.

Дано: ΔABC, $AB = BC$, $BD \perp AC$, $AM \perp BC$, $\angle BAK = \angle KAC$, $DP \perp BC$, $BO = 7OD$.

Знайти: $BP : PD$.



Розв'язок.

Нехай $OD = x$, тоді $BO = 7x$. Проведемо $DP \parallel AM$, $\frac{BO}{OD} = \frac{BM}{MP} = \frac{7}{1}$,

$$BM = 7y,\ MP = y,\ \Delta DPC \backsim \Delta AMC,$$

$$MP = PC = y,\ DP^2 = BP \cdot PC,$$

звідки $DP = 2\sqrt{2}\,y$.

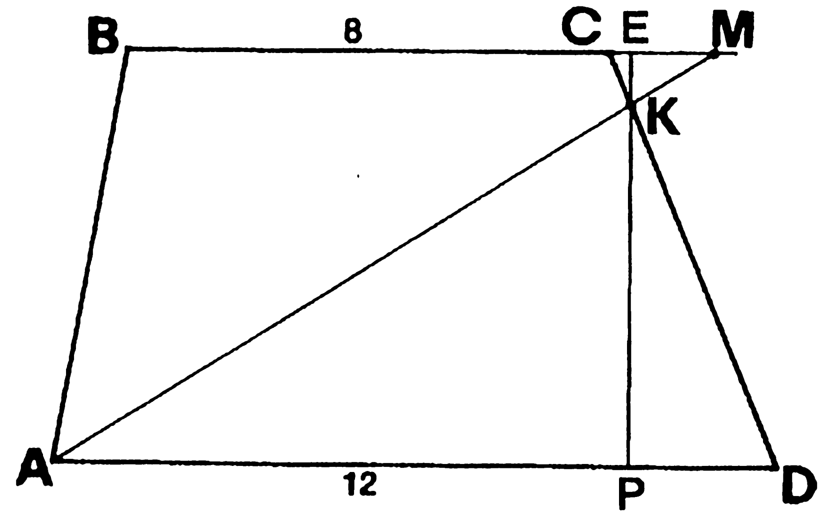
$$\frac{BP}{PD} = 2\sqrt{2}.$$

Відповідь: $2\sqrt{2}$.

Задача 981.

Дано: $ABCD$ — трапеція, $AD = 12$, $BC = 8$, на прямій BC вибрано точку M так, що $S_{ABCK} = S_{AKD}$.

Знайти: CM.



Розв'язок.

Через точку K проведемо

$$EP \perp AD,\ S_{AKD} = \frac{1}{2}S_{ABCD},$$

$$S_{AKD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot PK = 6PK,$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot EP = 10PE,$$

$$5PE = 6PK,$$

звідки $\frac{PE}{PK} = \frac{6}{5},\ \frac{PK + KE}{PK} = \frac{6}{5},$

$$1 + \frac{KE}{PK} = \frac{6}{5},\ \frac{KE}{PK} = \frac{1}{5},$$

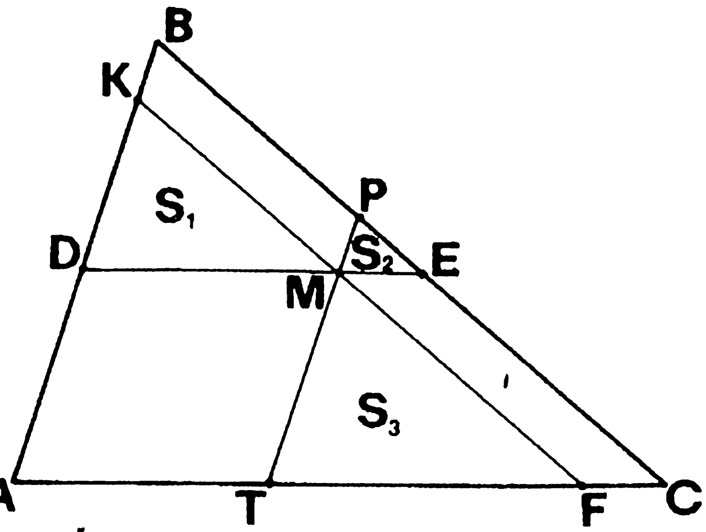
$$\Delta CKM \backsim \Delta AKD,\ \frac{KE}{PK} = \frac{CM}{AD},\ \frac{CM}{12} = \frac{1}{5}.$$

Відповідь: 2,4.

Задача 982.

Дано: ΔABC, M — довільна точка, через яку проходять прямі $DE \parallel AC$, $TP \parallel AB$, $KF \parallel BC$, $S_{KDM} = S_1$, $S_{MPE} = S_2$, $S_{TMF} = S_3$.

Знайти: S_{ABC}.



Розв'язок.

$\Delta MKD \backsim \Delta ABC$, $\Delta MPE \backsim \Delta ABC$,

$\Delta TMF \backsim \Delta ABC$,

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{DM}{AC}; \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{ME}{AC};$$

$$\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{TF}{AC}; \quad \frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S_{ABC}}} =$$

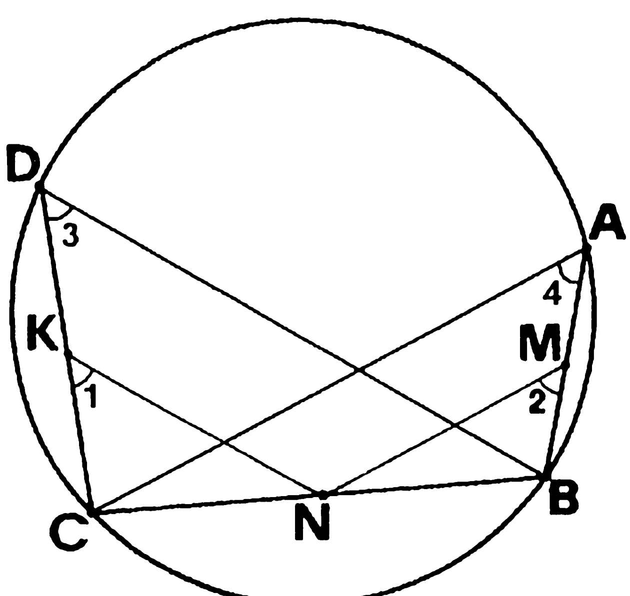
$$= \frac{DM + ME + TF}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1,$$

звідки $S_{ABC} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Відповідь: $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Задача 983.

Дано: DC, CB, BA — хорди,
$DK = KC$, $CN = NB$, $BM = MA$.
Довести, що $\angle 1 = \angle 2$.



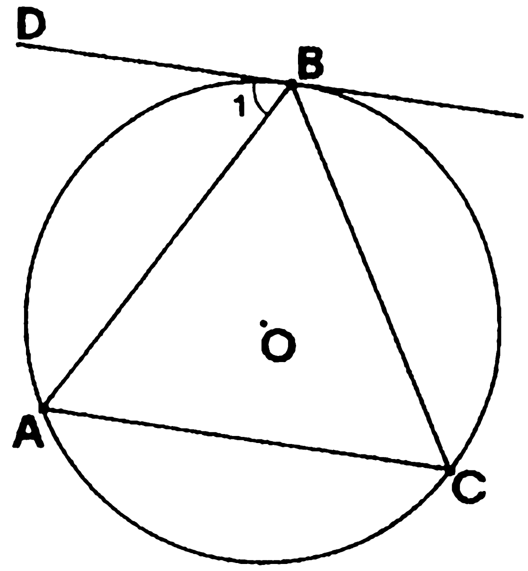
Розв'язок.

Сполучили точки D і B, а також C і A. $\angle 3 = \angle 4$ (як такі, що спираються на одну й ту ж саму дугу, вписані), але

$$\angle 3 = \angle 1, \text{ а } \angle 4 = \angle 2.$$

Задача 984.

Дано: ΔABC, O — центр описаного кола, DB — дотична.
Знайти: $\angle DBC + \angle A$.



Розв'язок.

$\angle C = \angle 1$ (довести),

$$\angle A + \angle C + \angle ABC = 180°,$$

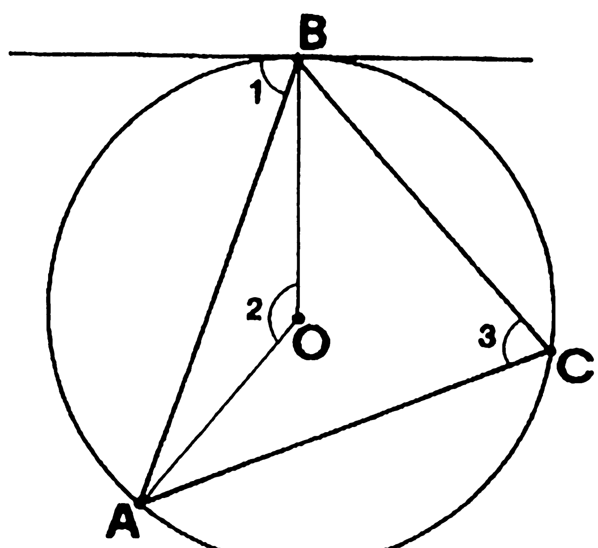
$$\angle A + (\angle 1 + \angle ABC) = 180°,$$

$$\angle A + \angle DBC = 180°.$$

Відповідь: 180°.

Задача 985.

Дано: ΔABC, O — центр описаного кола, DB — дотична до нього,
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.
Знайти: $\angle BAC + \angle ABC$.



Розв'язок.

Нехай $\angle 1 = \angle 3 = \alpha$, тоді
$\angle 2 = 2\alpha$, $2\alpha + \alpha + \alpha = 180°$,

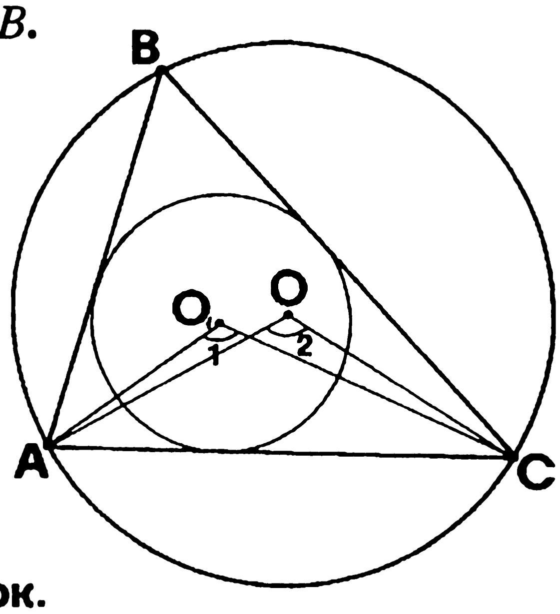
$$\alpha = 45°.$$

Відповідь: 45°.

Задача 986.

Дано: ΔABC, O_1 і O — центри вписаного та описаного кіл, $\angle 1 = \angle 2$.

Знайти: $\angle B$.



Розв'язок.

Нехай $\angle B = \alpha$, тоді

$$\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - \alpha, \text{ а}$$

$$\angle O_1AC + \angle O_1CA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle 1 = \angle 2 = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

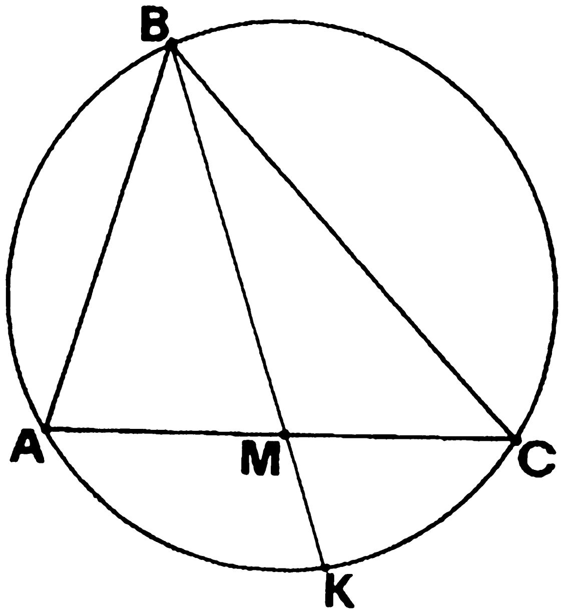
але $2\angle B = \angle 2$, тобто $2\alpha = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$, звідки знаходимо α.

Відповідь: 60°.

Задача 987.

Дано: ΔABC, $AM = MC$, навколо трикутника описано коло, $BM = 3MK$.

Знайти: $BM : AC$.



Розв'язок.

Нехай $MK = x$, тоді $BM = 3x$,

$$AM = MC = y,\ BM \cdot MK = AM \cdot CM,$$

$$3x^2 = y^2,\ \frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

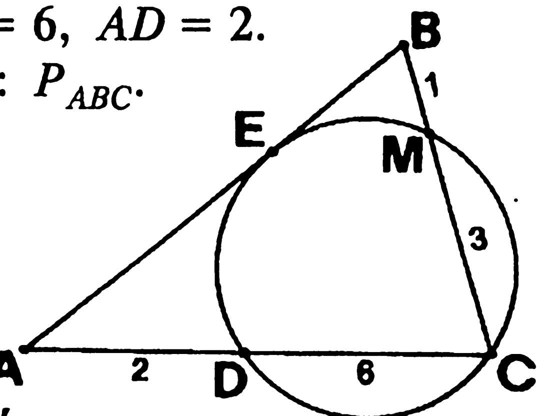
$$\frac{BM}{AC} = \frac{3x}{2y} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 988.

Дано: ΔABC, коло проходить через точку C, дотикається до сторони AB в точці E. $BM = 1$, $MC = 3$, $DC = 6$, $AD = 2$.

Знайти: P_{ABC}.



Розв'язок.

$BE^2 = BC \cdot BM$, $AE^2 = AC \cdot AD$.

Маємо $BE = 2$, $AE = 4$.

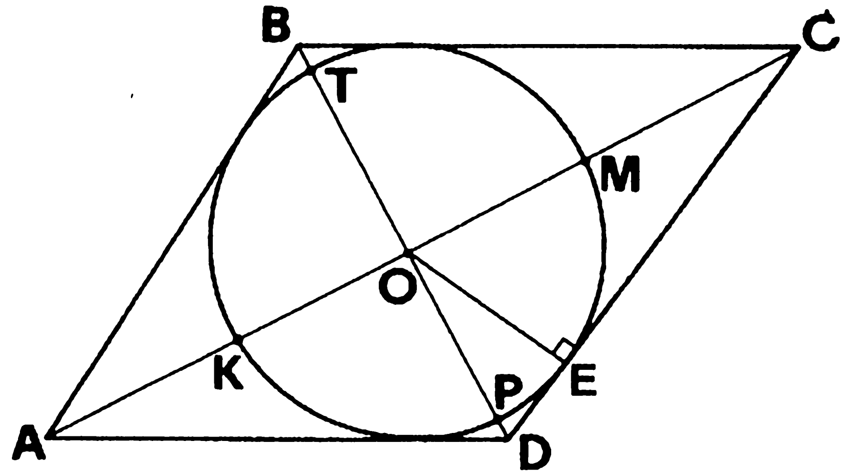
Відповідь: 18.

Задача 989.

Дано: $ABCD$ — ромб, O — центр вписаного кола радіуса r.

Довести:

$$r = \sqrt[4]{KC \cdot MC \cdot DT \cdot DP}.$$



Розв'язок.

$$OE \perp DC,\ OE = r.$$

Нехай $\angle OCE = \alpha$, тоді

$$\angle ODE = 90^\circ - \alpha,\ EC = r \cdot \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$DE = r \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\begin{cases} DE^2 = DT \cdot DP, \\ CE^2 = KC \cdot MC, \end{cases}$$

$$\times \begin{cases} r^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = DT \cdot DP, \\ r^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha = KC \cdot MC, \end{cases}$$

$$r^4 = DT \cdot DP \cdot KC \cdot MC.$$

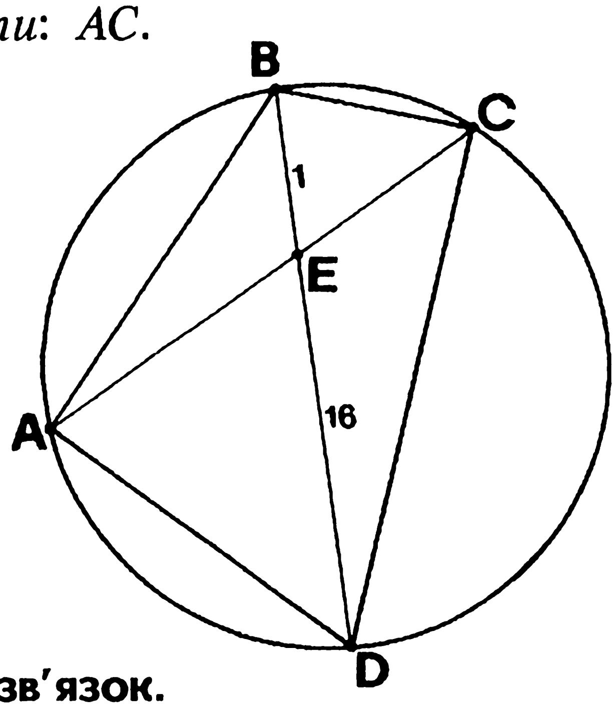
$$r = \sqrt[4]{KC \cdot MC \cdot DT \cdot DP}.$$

Задача 990.

Дано: $ABCD$ — чотирикутник, вписаний в коло,

$S_{ABE} = 4S_{BEC}$, $BE = 1$, $DE = 16$.

Знайти: AC.



Розв'язок.

З рівності $S_{ABE} = 4S_{BEC}$ випливає, що $AE = 4CE$. Нехай $CE = x$, тоді

$$AE = 4x,\ AE \cdot EC = BE \cdot ED,$$

$$4x^2 = 16.$$

Відповідь: 10.

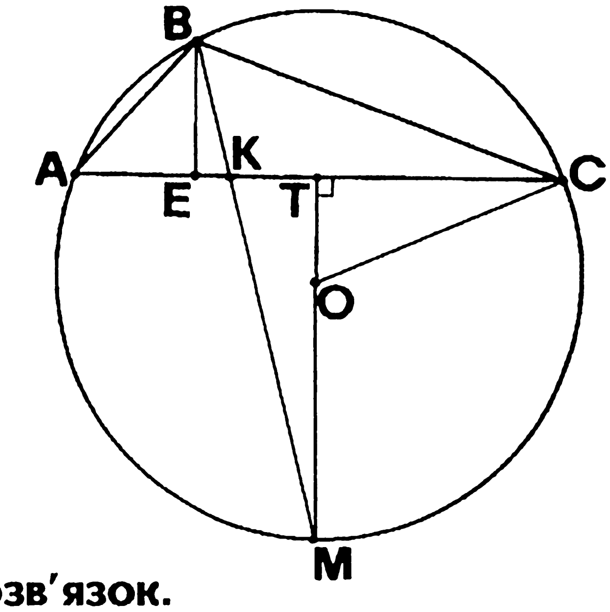
Задача 991.

Дано: ΔABC, $\angle ABC > 90^\circ$, O — центр описаного кола, $OT \perp AC$,

$BE \perp AC$, $\angle ABK = \angle KBC$, $OT = 4$,

$BE = 1{,}5$, $BK : KM = 1 : 6$.

Знайти: $S_{\Delta ABC}$.



Розв'язок.

Сполучимо точку M з точкою O. Точки M, O, T лежать на одній прямій (доведіть). $\Delta BEK \backsim \Delta MKT$,

$$\frac{BE}{MT} = \frac{BK}{KM},\ \frac{15}{TM} = \frac{1}{6},$$

звідки $TM = 9$.

$$OM = OC = TM - OT = 5,$$

$$TC = 3,\ AC = 2TC = 6,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BE.$$

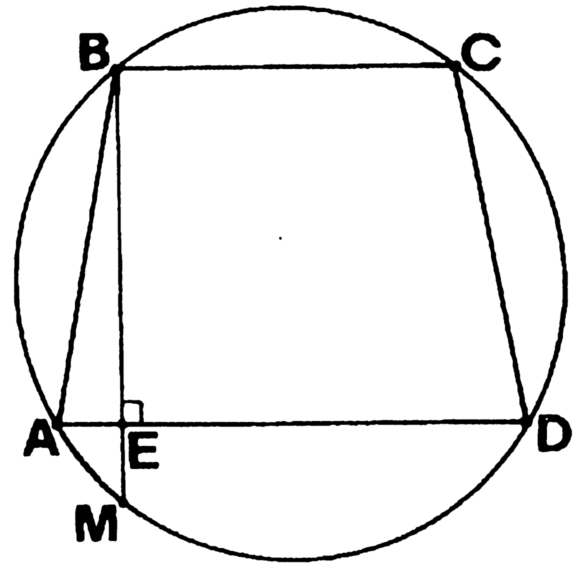
Відповідь: 4,5.

Задача 992.

Дано: $ABCD$ — трапеція, вписана в коло, $BE \perp AD$, $AD = a$,

$BC = b$.

Довести: $a^2 - b^2 = 4 \cdot BE \cdot EM$.



Розв'язок.

$$AE \cdot ED = BE \cdot EM,$$

$$AE = \frac{a-b}{2} \text{ (доведіть)},$$

$$ED = \frac{a+b}{2} \text{ (доведіть)},$$

$$\frac{a-b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = BE \cdot EM,$$

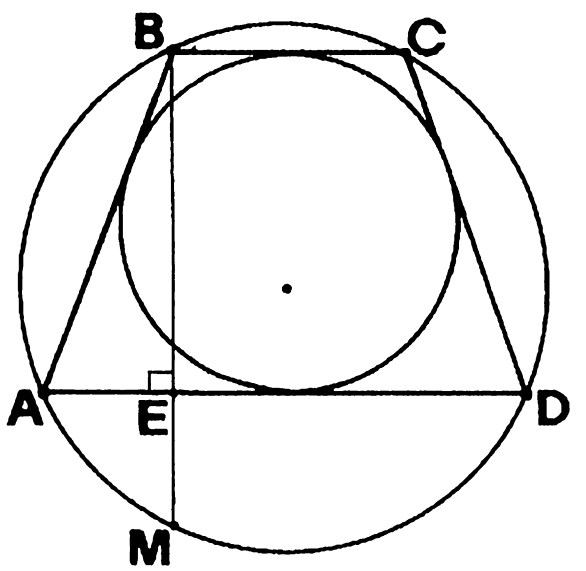
$$a^2 - b^2 = 4 \cdot BE \cdot EM.$$

Задача 993.

Дано: $ABCD$ — трапеція, вписана в коло. В дане коло вписано інше коло.

$BE \perp AD$, $P_{ABCD} = 20$, $AE = 3$.

Знайти: EM.



Розв'язок.

$$4AB = 20,\ AB = 5,\ BE = 4,$$

$$BE \cdot EM = AE \cdot ED,$$

звідки $EM = \dfrac{AE \cdot ED}{BE} = \dfrac{15}{4}$.

Задача 994.

Дано: ΔABC, $AB = c$, $AC = b$,

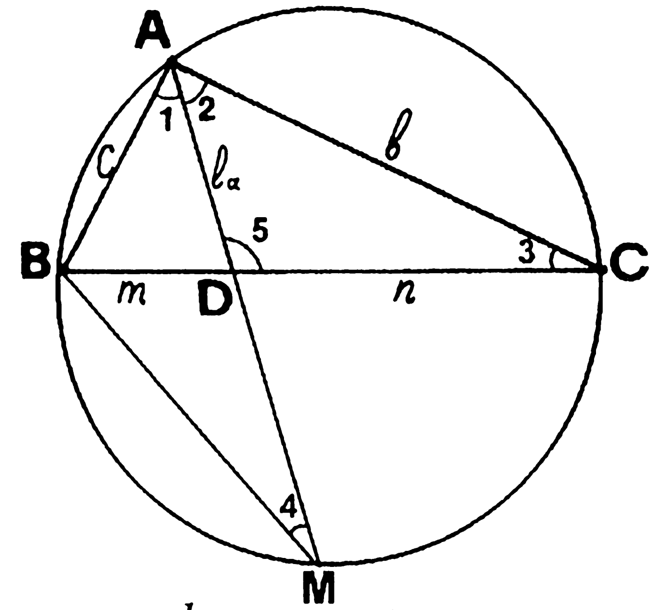
$\angle 1 = \angle 2$, $AD = l_a$, $BD = m$, $DC = n$.

Довести: $l_a^2 = b \cdot c - m \cdot n$.

Розв'язок.

Виконаємо додаткові побудови (див. мал.). $\Delta ABM \backsim \Delta ADC$,

$(\angle 3 = \angle 4,\ \angle 1 = \angle 2$, тоді $\angle 5 = \angle ABM)$,



$$\frac{l_a}{c} = \frac{b}{l_a + DM},$$

звідки $l_a^2 + l_a \cdot DM = bc$. Але за теоремою про хорди, що перетинаються всередині круга, $l_a \cdot DM = mn$. Тоді

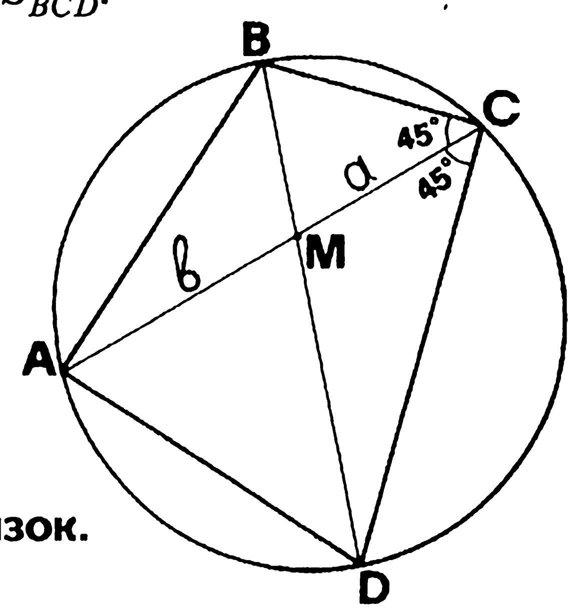
$$l_a^2 + mn = bc \text{ або } l_a^2 = bc - mn.$$

Задача 995.

Дано: $ABCD$ — чотирикутник, вписаний в коло, $\angle BCA = \angle ACD = 45°$,

$CM = a$, $MA = b$.

Знайти: S_{BCD}.



Розв'язок.

$$a^2 = BC \cdot CD - BM \cdot MD,$$

але $BM \cdot MD = ab$,

$$a^2 = BC \cdot CD - ab,$$

$$a^2 = 2 \cdot S_{BCD} - ab,$$

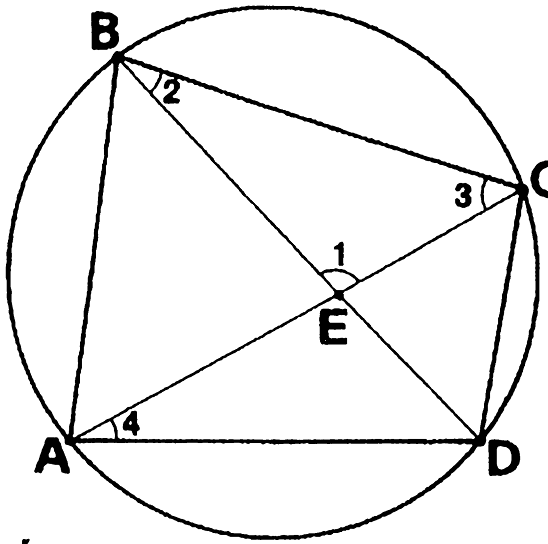
звідки знаходимо S_{BCD}.

Відповідь: $\frac{1}{2}(a^2 + ab)$.

Задача 996.

Дано: $ABCD$ — чотирикутник, вписаний в коло, $\angle 1 + \angle ABC = 180°$, $BC \cdot AD = 6$.

Знайти: $BE \cdot AC$.



Розв'язок.

Оскільки $\angle ABC + \angle ADC = 180°$, а за умовою $\angle ABC + \angle 1 = 180°$, то

$$\angle ADC = \angle 1,\ \angle 2 = \angle 4.$$

$$\Delta BEC \backsim \Delta ACD$$

$$(\angle 2 = \angle 4,\ \angle 1 = \angle ADC),\ \frac{BC}{AC} = \frac{BE}{AD},$$

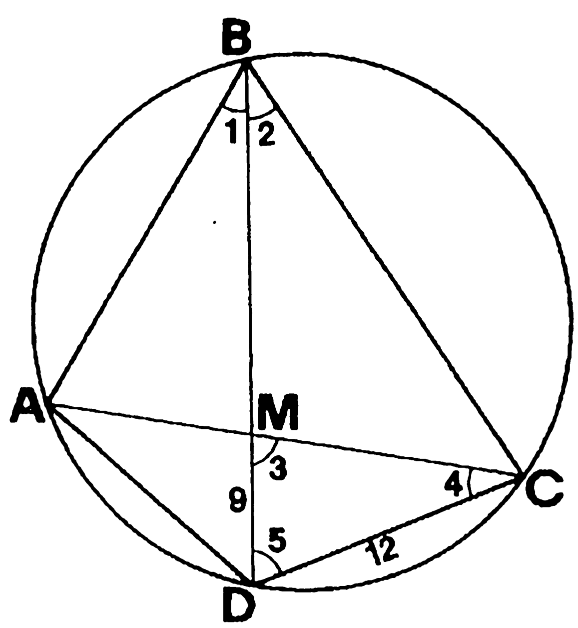
$$AC \cdot BE = BC \cdot AD.$$

Відповідь: 6.

Задача 997.

Дано: $ABCD$ — чотирикутник, вписаний в коло, $\angle 1 = \angle 2$, $DC = 12$, $MD = 9$.

Знайти: BM.



Розв'язок.

$$\Delta DMC \backsim \Delta BCD$$

($\angle 2 = \angle 4$, доведіть, $\angle 5$ — спільний).

Нехай $BM = x$, маємо $\frac{BD}{DC} = \frac{DC}{MD}$, $\frac{x+9}{12} = \frac{12}{9}$, звідки знаходимо $x = 7$.

Відповідь: 7.

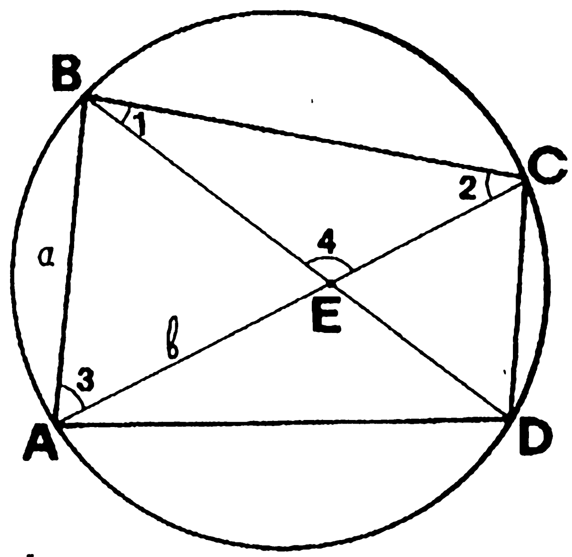
Задача 998.

Дано: $ABCD$ — чотирикутник, вписаний в коло, $AB = a$, $AC = b$,

$$S_{BAC} = \frac{ab}{2}\sin \angle 1,$$

$\angle 4 = 100°$, кути 1 і 3 — гострі.

Знайти: $\angle ADC$.



Розв'язок.

$$S_{BAC} = \frac{ab}{2} \cdot \sin \angle 3.$$

За умовою $S_{BAC} = \frac{ab}{2} \cdot \sin \angle 1$, звідки $\angle 3 = \angle 1$, $\Delta BEC \backsim \Delta BAC$ ($\angle 2$ — спільний, $\angle 1 = \angle 3$).

Отже, $\angle ABC = \angle 4 = 100°$. Тоді

$$\angle ADC = 80°.$$

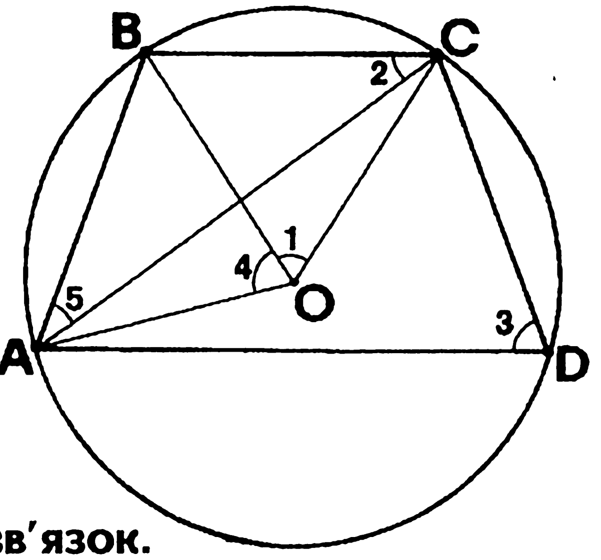
Відповідь: 80°.

Задача 999.

Дано: $ABCD$ — трапеція, O — центр описаного кола, $S_{ABO} = S_{BOC}$, $\angle 1$ і $\angle 4$ — гострі кути,

$$\angle 1 - \angle 2 = 30°.$$

Знайти: $\angle 3$.



Розв'язок.

Нехай $AO = BO = OC = R$.

За умовою $S_{ABO} = S_{BOC}$,

$$\frac{1}{2}R^2 \sin \angle 1 = \frac{1}{2}R^2 \sin \angle 4,$$

звідки випливає, що $\angle 1 = \angle 4$,

$$\angle 1 - \angle 2 = 30°,\ \angle 4 - \angle 2 = 30°,$$

$$2\angle 2 - \angle 2 = 30°,\ \angle 4 = 60°,\ \angle 1 = 60°,$$

$$\angle AOC = 120°,\ \angle 3 = 60°.$$

Відповідь: 60°.

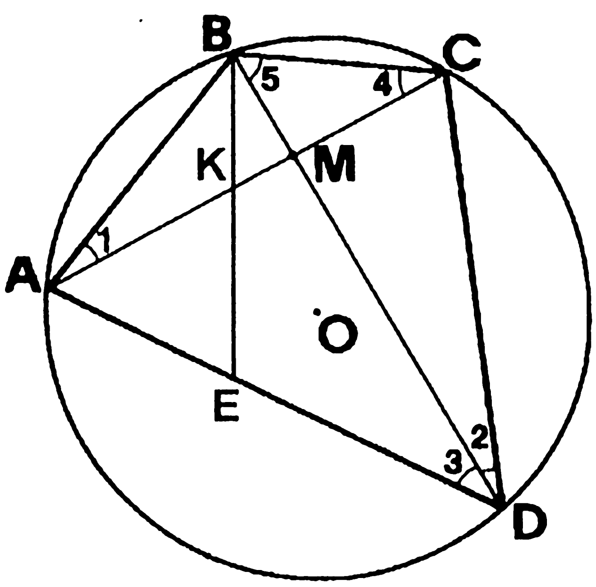
Задача 1000.

Дано: $ABCD$ — чотирикутник, вписаний в коло.

Довести:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

(теорема Птолемея).



Доведення.

Побудуємо $\angle ABK = \angle 5$,

$$\Delta ABK \backsim \Delta BCD$$

$$(\angle ABK = \angle 5,\ \angle 1 = \angle 2),$$

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BD}{CD},$$

$$BD \cdot AK = AB \cdot CD. \qquad (*)$$

$$\Delta CBK \backsim \Delta ABD$$

$$(\angle KBC = \angle ABD,\ \angle 3 = \angle 4),$$

$$\frac{BC}{KC} = \frac{BD}{AD},$$

$$BD \cdot KC = BC \cdot AD. \qquad (**)$$

Складаючи співвідношення (*) і (**), дістанемо

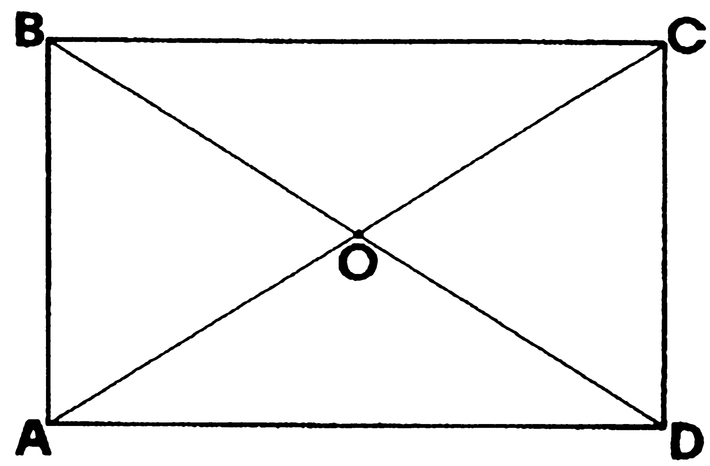
$$BD\,(AK + KC) = AB \cdot CD + BC \cdot AD,$$

$$BD \cdot AC = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Задача 1001.

Дано: $ABCD$ — прямокутник.

Довести теорему Піфагора з використанням теореми Птолемея.



Розв'язок.

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

$$AC^2 = CD^2 + AD^2.$$

Чому при доведенні можна використовувати теорему Птолемея?

Задача 1002.

Дано: $ABCD$ — трапеція, $AB = CD$.

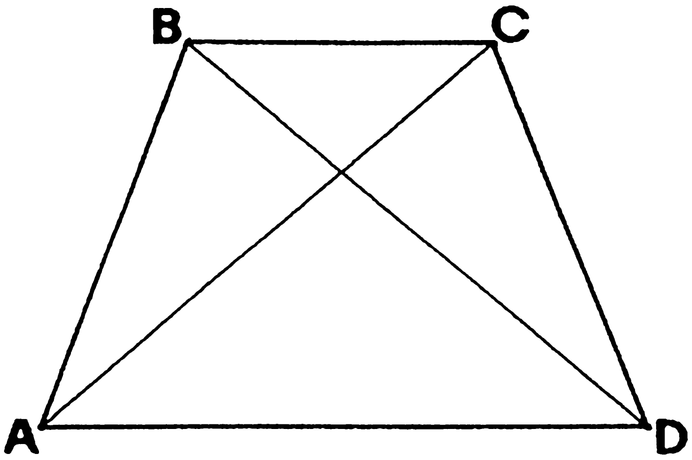
Довести: $AC \cdot BD = AB^2 + AD \cdot BC$.

Доведення.

За теоремою Птолемея маємо:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

$$AC \cdot BD = AB^2 + AD \cdot BC.$$

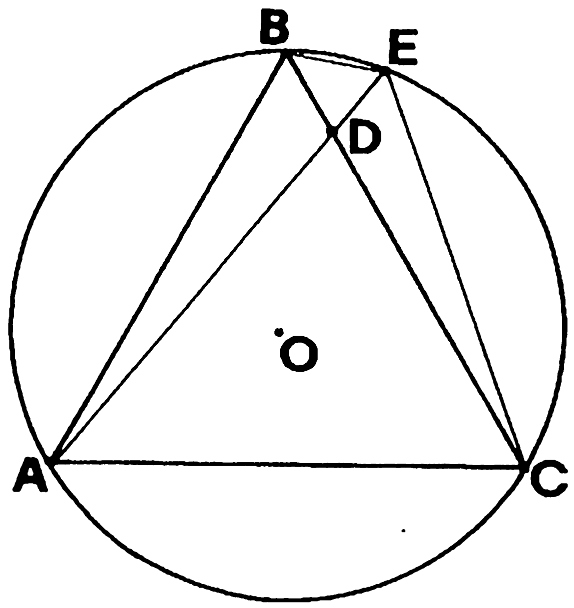


Чому при доведенні можна використовувати теорему Птолемея?

Задача 1003.

Дано: ΔABC, $AB = BC = AC$, O — центр описаного кола, D — довільна точка, що належить BC, E — точка перетину прямої AD з колом.

Довести: $AE = BE + EC$.



Доведення.

За теоремою Птолемея

$$AE \cdot BC = BE \cdot AC + AB \cdot EC,$$

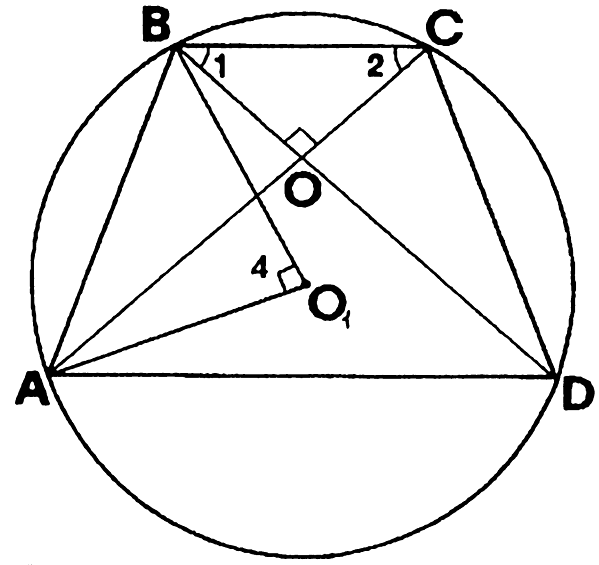
$$AE \cdot BC = BE \cdot BC + BC \cdot EC,$$

звідки $AE = BE + EC$.

Задача 1004.

Дано: $ABCD$ — трапеція, R — радіус описаного кола з центром O_1, $AC \perp BD$.

Довести: $S_{AOB} = \dfrac{AC^2 - 2R^2}{4}$.



Доведення.

$\angle 1 = \angle 2 = 45^\circ$, тоді $\angle 4 = 90^\circ$ (чому?). За теоремою Птолемея

$$AC^2 = AB^2 + AD \cdot BC, \; AB^2 = 2R^2,$$

$$AD = AO \cdot \sqrt{2}, \; BC = BO \cdot \sqrt{2},$$

$$AC^2 = 2R^2 + 2AO \cdot BO,$$

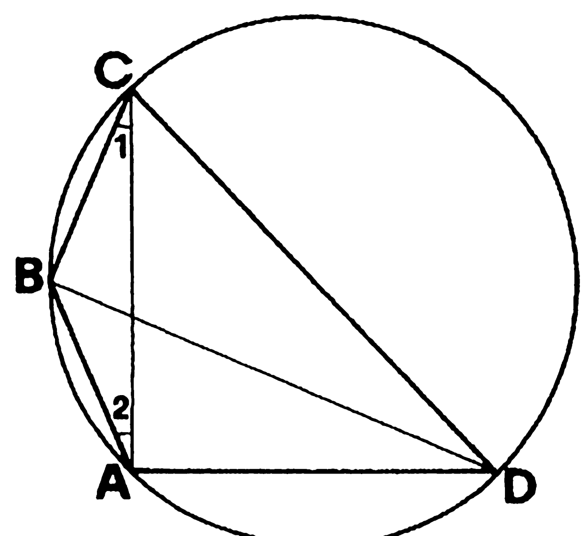
$$AC^2 = 2R^2 + 4S_{AOB},$$

звідки знаходимо S_{AOB}.

Задача 1005.

Дано: $ABCD$ — чотирикутник, вписаний в коло, $\angle 1 = \angle 2$, $AC \cdot BD = 3AB$.

Знайти: $CD + AD$.



Розв'язок.

За теоремою Птолемея $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$, $AB = BC$.

Маємо $3AB = AB \cdot CD + AB \cdot AD$, $3AB = AB\,(CD + AD)$, звідки знаходимо $AD + CD$.

Відповідь: 3.

Відповіді та розв'язки

1. 137°. **2.** 36°. **3.** 80°. **4.** 72°. **5.** 40°. **6.** 150°. **7.** 135°. **9.** 140°. **10.** 15°. **11.** 73°. **12.** 52°. **14.** 20°. **15.** 75°. **16.** 80°. **17.** 105°, 105°, 75°. **18.** 80°, 80°, 100°, 100°. **19.** 70°, 70°, 110°, 110°. **20.** 140°. **21.** *а*) так, *б*) так, *в*) ні. **23.** *а*) рівнобедрений, *б*) рівносторонній. **24.** 15. **25.** 7. **26.** 12. **27.** 12. **28.** 6. **29.** 90°. **30.** 51°. **31.** 40°. **32.** в 3 рази. **33.** 60°. **34.** 45°. **35.** 70°. **36.** 68°. **37.** 90°. **38.** 45°. **39.** 80°. **40.** 40°. **41.** 20°. **42.** 80°. **43.** 60°. **44.** 40°. **45.** 50°. **46.** 34°. **47.** 60°. **48.** 1. **49.** 1,5. **50.** 3. **51.** 120°. **52.** 75°. **53.** 90°. **54.** 1:2. **55.** 75°. **56.** 88°. **57.** 30°. **58.** 70°. **59.** *а*) 120°, *б*) 60°, *в*) 120°. **60.** 114°. **61.** 113°. **62.** 104°. **64.** 70°. **67.** 144°. **68.** 108°. **70.** 75°. **71.** 38°. **72.** 7. **75.** 100°. **76.** 14. **77.** 80°. **78.** 134°. **84.** 12. **85.** 4. **86.** 21. **87.** 64. **88.** 24. **89.** 23. **90.** 1. **91.** 4,6. **92.** 28. **93.** 21. **94.** 96. **95.** 60°. **96.** 21. **98.** 24. **99.** 3. **100.** 78°. **101.** 40°. **102.** 60°. **103.** 10. **104.** 27. **105.** 5. **106.** 40°. **107.** 20°. **108.** 30°. **109.** 70°. **110.** 90°. **111.** 270°. **112.** 90°. **113.** 8. **114.** 24. **115.** 6. **116.** 18. **117.** 43. **118.** 150°. **119.** 12. **120.** 90°. **121.** 58°. **122.** 60°. **124.** 25. **132.** 21. **133.** 5. **134.** 34. **135.** 33. **136.** 18. **137.** 6. **138.** 8. **139.** 24. **140.** 4. **141.** 20. **142.** 66°. **144.** 69°. **145.** 72°. **147.** 15. **148.** 4. **149.** 54°. **150.** 140°. **152.** 135°. **153.** 10. **154.** 26. **155.** 7. **156.** 9. **157.** 120°. **158.** 24°. **159.** 62. **160.** 12. **161.** 25. **162.** 84. **163.** 24. **164.** 15. **165.** 8. **166.** 22,5°. **167.** 60°. **168.** 6. **169.** 76. **171.** 16. **172.** 120°. **173.** 30°. **174.** 114°. **177.** 60°. **178.** 60°. **179.** 114°. **180.** 6. **181.** 75°. **182.** 140°. **183.** 27°. **185.** 15°. **186.** 1,5. **187.** 35°. **188.** 104°. **189.** 48°. **190.** 55°. **191.** 78°. **192.** 8. **193.** 4. **194.** 24. **195.** 1. **196.** 10. **197.** 7. **198.** 16. **199.** 120°. **201.** 6:5. **202.** 44. **203.** 3. **205.** 11. **206.** 2. **207.** 10. **208.** 60°. **209.** 24. **210.** 4. **211.** 90°. **212.** 8. **218.** 38. **219.** 114. **220.** 16. **221.** 46. **222.** 16,5. **223.** 12. **224.** 16. **225.** 75. **226.** 24. **228.** 12. **229.** 9. **230.** 30. **231.** 45. **232.** 128. **233.** 75. **234.** 85. **235.** 17. **236.** 375. **237.** 22. **238.** 192. **239.** 100. **240.** 32. **241.** 4:1. **242.** 1:3. **243.** 378. **244.** 20. **245.** 19,2. **246.** 100. **247.** 18. **249.** 128. **250.** 10. **251.** 4. **252.** 121,5. **253.** 4. **254.** 99. **256.** 64. **257.** 2. **258.** 16. **259.** 32. **260.** 60°. **261.** 30. **262.** 10. **263.** 52. **264.** 40°. **265.** 50°. **267.** 20. **268.** 16. **269.** 140°. **270.** 105°. **271.** 160°. **272.** 80°. **273.** 120°. **274.** 70°. **275.** 80°. **276.** 40°. **277.** 90°. **278.** 30°. **279.** 90°. **280.** В 3 раза. **281.** 60°. **282.** 45°. **283.** 40°. **284.** 1:2. **285.** 12. **286.** 1,5. **287.** 10°. **288.** 3. **289.** 12. **290.** 12. **291.** 12. **292.** 18. **293.** 120°. **295.** 80°. **297.** 80°. **298.** 90°. **299.** 160°. **300.** 220°. **301.** 90°. **302.** 6. **303.** 6. **304.** 20. **305.** 9:2. **306.** $S = \frac{P^2}{16}$. **307.** 15°. **308.** 1. **309.** 30°. **310.** 16. **311.** 4,5. **313.** 45°. **314.** 8:24. **315.** 3. **316.** 7. **318.** 3:10. **319.** h^2. **320.** $\frac{c^2}{4}$. **321.** $\frac{a^2}{2}$. **322.** 31,5. **323.** 48. **324.** 25. **325.** 5. **326.** 5:15. **327.** 2,4. **328.** 12. **330.** 14. **331.** $\frac{25}{11}$; $\frac{30}{11}$. **332.** 4. **333.** 128. **334.** 65. **335.** 10. **336.** 6. **337.** 13. **338.** 10,5. **339.** 62. **340.** 8. **344.** 1:2. **345.** 1:3. **346.** 2:3. **347.** 1:3. **348.** 4. **349.** 1. **350.** 6. **351.** 5. **352.** 12. **353.** 3. **354.** 3:4. **355.** 6. **356.** 1:4. **357.** 12. **358.** 2,5. **359.** 45. **360.** 1:3. **361.** 18. **362.** 9. **363.** $\frac{160}{3}$. **365.** 15. **366.** 98. **367.** 21:25. **368.** $\frac{12}{7}$.

369. 10. **370.** 10. **371.** 1,5. **372.** 20. **373.** 10; 18. **374.** 2,4. **375.** 30. **376.** $\frac{49\sqrt{3}}{2}$. **377.** 36. **378.** 270. **379.** $10\sqrt{2}$. **380.** 6. **381.** 12. **382.** 12. **383.** 8. **384.** *а*) гострокутний, *б*) тупокутний, *в*) прямокутний, *г*) прямокутний, *д*) гострокутний. **385.** 120. **386.** $25\sqrt{3}$. **387.** 300. **388.** 120. **389.** 20. **390.** $2\sqrt{2}$. **391.** 490. **392.** 7. **393.** 10. **394.** 10. **395.** 4. **396.** 30. **397.** 12. **398.** 39. **399.** 24. **400.** 7,2. **401.** 13. **402.** 98. **404.** $\frac{50}{7}$. **405.** 20,25. **406.** 4,8. **407.** 10. **408.** $\frac{28\sqrt{3}}{3}$. **409.** 8. **410.** 35. **411.** 12. **412.** 24. **413.** 12. **414.** 8. **415.** 96. **416.** $2\sqrt{5}$. **417.** $\frac{25}{3}$. **418.** 7,2. **419.** 10. **420.** 3. **421.** 108. **422.** $1 : \sqrt{2}$. **423.** $\frac{1}{2}\sqrt{10}$. **424.** $\sqrt{2}$. **426.** 10,5. **427.** 4. **428.** 10. **429.** 7. **430.** 4. **431.** 5. **433.** 4. **434.** $2\sqrt{17}$. **435.** $\frac{8}{3}$. **436.** 9. **437.** 36. **438.** 16. **439.** 10. **440.** 10. **441.** 8. **442.** Проведемо $KF \perp AD$.

$$ED = EF + FD = TK + FD,$$

але $FD = MT$ $(\Delta MBT = \Delta FKD)$.

$$ED = TK + MT = MK,$$

що і треба було довести.

443. Проведемо $BE \perp AD$ і $CK \perp AD$.

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 = AB^2 - AE^2 + ED^2 =$$
$$= AB^2 + (ED^2 - AE^2) =$$
$$= AB^2 + \underbrace{(ED + AE)}_{AD} \cdot \underbrace{(ED - AE)}_{BC} =$$
$$= AB^2 + AD \cdot BC.$$

444. $\begin{cases} BD^2 = AB^2 + AD^2 \\ AC^2 = AB^2 + BC^2, \end{cases}$

$$\overline{BD^2 - AC^2 = AD^2 - BC^2},$$

що і треба було довести.

445. $\frac{1}{2}b^2 \operatorname{ctg}\beta$. **446.** $\frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\alpha$. **447.** $\frac{1}{2}c^2 \sin\alpha\cos\alpha$. **448.** $c\sin\alpha\cos\alpha$. **449.** $2m_c \sin\beta$. **450.** $2m_c^2 \sin\alpha\cos\alpha$. **451.** $m_c^2\cos\alpha$. **452.** $\frac{h^2}{\cos\alpha}$. **453.** $h\operatorname{ctg}\alpha + h\operatorname{ctg}\gamma$. **454.** $c\cos\alpha + c\sin\alpha\operatorname{ctg}\gamma$. **455.** 40°. **456.** 60°. **457.** 60°. **458.** 45°, 75°, 60°. **459.** 160°. **460.** 40°. **461.** 70°. **462.** 108°; 48°. **463.** 20°. **464.** 2. **465.** 20°. **466.** 150°. **467.** 600°. **468.** 40°. **469.** 135°. **470.** 140°. **471.** 20° або $\varnothing$. **472.** 52°. **473.** 60° або 30°. **474.** 180°. **475.** 70°; 60°; 50°. **476.** 55°; 65°; 60°. **477.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **478.** $1 : \sqrt{3}$. **479.** $\sqrt{3}$. **480.** $12\sqrt{3}$. **481.** 10. **482.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **483.** $a = R\sqrt{3}$. **484.** 64. **485.** $\frac{4}{3}$. **486.** 7,5. **487.** 3. **488.** $4\sqrt{3}$. **489.** $\frac{10}{3}$. **490.** 36. **491.** 15. **492.** 2. **493.** 4. **494.** 1. **495.** 2. **496.** 6. **497.** 36. **498.** 216. **499.** 15. **500.** 10. **501.** 8. **502.** 8,125. **503.** 4. **504.** 21,25; 4. **505.** 18,125; 2. **506.** $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$. **507.** $a_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$. **508.** 19,5. **509.** 34. **510.** 135°. **511.** 30°. **512.** 30° або 60°. **513.** 16. **514.** 16. **515.** $3 + \sqrt{3}$. **516.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **517.** $\sqrt{3}$. **518.** 2. **519.** $\frac{50}{3}$. **520.** $\sqrt{216}$. **521.** 8. **522.** $\frac{8}{3}\sqrt{3}$. **523.** 3. **524.** 3. **525.** 5. **526.** 12. **527.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

528. $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$. **529.** 60°; 120°. **530.** 48. **531.** 16 або 4. **532.** 8. **533.** 4. **534.** $4\sqrt{5}$. **535.** 4,5. **536.** 12,5. **537.** 14. **538.** 9; 8. **539.** 3. **540.** 11. **541.** 8:9. **542.** 13. **543.** 1:11. **544.** $9-6\sqrt{3}$. **545.** 12. **546.** 12,5. **547.** 12. **548.** 12. **549.** 14,4. **550.** 36. **551.** 2. **552.** 17. **553.** 12. **554.** *а*) на колі, *б*) всередині круга, *в*) поза кругом. **555.** 16. **556.** 8. **557.** 24. **558.** 4. **559.** 15. **560.** 4. **561.** 3. **562.** 10,5; 17,5. **563.** 12; 18. **564.** $AB > BE$, але $AB = ED$. Тоді маємо $ED > BE$.

565. Нехай $BC = a$, тоді $AD = 3a$. $AE = \frac{AD - BC}{2} = a$. Але $ED = AB = 2a$.

$$\angle ABE = 30°,\ \angle 1 = 60°.$$

566. $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}BE =$

$$= \frac{AB + CD}{2}BE = AB \cdot BE.$$

567. $\angle BAE = 30°$. Нехай $AB = x$, тоді $BE = \frac{1}{2}x$. $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}BE =$

$$= \frac{AB + CD}{2}BE = AB \cdot BE.\ \frac{1}{2}x^2 = 2,$$

звідки $x = 2$. $P_{ABCD} = 4AB = 8$.

568. Проведемо $BK \perp AD$.

$$AE = AT = DE = DP = 8,$$

$$TB = BM = MC = CP = 2,$$

$$AK = AE - KE = 6,$$

$$AB = AT + TB = 10,$$

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = 8,$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}BK = 80.$$

569. Проведемо $BK \perp AD$.

$$TB = BM = KE = x,\ AT = AE = 8.$$

$$AK = 8 - x,\ AB = 8 + x,$$

$$BK = \sqrt{(8 + x)^2 - (8 - x)^2} = 4\sqrt{2x}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}BK.$$

$$80 = \frac{16 + 2x}{2} \cdot 4\sqrt{2x},$$

звідки $\frac{20}{8 + x} = \sqrt{2x}$. Підбором впевнюємось, що $x = 2$ є коренем рівняння. Інших розв'язків немає, оскільки функція, що стоїть в лівій частині, спадає, а в правій — зростає, отже, графіки цих функцій не можуть мати більше, ніж один перетин.

Відповідь: 2.

570. $P_{ABCD} = (AD + BC) + (AB + CD) =$

$$= 2(AD + BC) = 16.$$

571. $AM = AE$, $DP = ED$, тоді

$$AE \cdot ED = 2.\ \angle AOD = 90°.$$

$$OE^2 = r^2 = AE \cdot ED = 2.$$

$$S_{круга} = \pi r^2 = 4\pi.$$

572. $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}BE =$

$$= \frac{AB + CD}{2}BE = AB \cdot BE.\ AB = DE.$$

$$S_{ABCD} = DE \cdot BE = 2\frac{DE \cdot BE}{2} = 2S_{BED}.$$

573. Проведемо $BE \perp AD$. $P_{ABCD} = 4AB$, звідки $AB = 4$, але оскільки $AB = DE$, то $DE = 4$. $BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = 3$,

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}BE =$$

$$= \frac{AB + CD}{2}BE = AB \cdot BE = 12.$$

574. $AB = ED$. Проведемо $BE \perp AD$. Нехай $AB = ED = x$.

$$BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \sqrt{25 - x^2}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} BE =$$

$$= \frac{AB + CD}{2} BE = AB \cdot BE = x\sqrt{25 - x^2}.$$

Розв'язуючи рівняння $x\sqrt{25 - x^2} = 12$, знаходимо $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, тобто $AB = 4$ ($AB = 3$ не задовільняє).

$$P_{ABCD} = 4AB = 16.$$

575.
$P_{ABCD} = AB + CD + AD + BC = 4AB,$

$$4AB = 16,$$

звідки $AB = 4$.

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} BE =$$

$$= \frac{AB + CD}{2} BE = AB \cdot BE = 4BE,$$

$$4BE = 12,$$

звідки $BE = 3$. $ED = AB$.

$$ED = 3,\ BD = \sqrt{BE^2 + ED^2} = 5.$$

576. Проведемо $BE \perp AD$.

$$\sin \angle BAD = \frac{BE}{AB},\ \operatorname{tg} \angle ADB = \frac{BE}{ED},$$

але $ED = AB$, значить,

$$\operatorname{tg} \angle ADB = \frac{BE}{AB}.\ \sin \angle BAD = \operatorname{tg} \angle ADB.$$

577. Нехай $\angle ADC = x$, тоді

$$\angle BCD = 2x.\ x + 2x = 180°,$$

$$x = 60°,\ \angle 2 = 30°,\ \angle 3 = 45°.$$

$$\angle 1 = 180° - (\angle 2 + \angle 3) = 105°.$$

578. $\angle 2 + \angle 3 = 180° - \angle 1 = 75°.$

$$2\angle 2 + 2\angle 3 = 150°,$$

звідки $2\angle 2 = 150° - 90° = 60°.$

$$\angle ADC = 60°,\ \angle BCD = 120°.$$

Значить, $\angle BCD = 2\angle CDA$.

579. Нехай $\angle CDA = x$. Маємо

$$x + 2x = 180°,$$

звідки $x = 60°$. $\angle 2 = 30°$,

$$\angle 3 = 180° - (\angle 1 + \angle 2) = 45°.$$

$\angle BAD = 90°$, тобто $AB \perp AD$.

580. $\angle 3 = \angle 4 = 90°$.

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 =$$

$$= 45° + 45° + 90° + 90° = 270°.$$

581. Нехай $OK = OM = OE = r$.

$$AD \cdot BC = (r + KD)\cdot(r + MC) =$$

$$= r^2 + r(KD + MC) + KD \cdot MC =$$

$$= r^2 + r(DE + EC) + DE \cdot CE.$$

$$\angle COD = 90°.$$

Тоді $OE^2 = DE \cdot CE$, $r^2 = DE \cdot CE$. Маємо $AD \cdot BC = r^2 + r \cdot CD + r^2 =$

$$= 2r^2 + r \cdot CD = \frac{2r(2r + CD)}{2} =$$

$$= \frac{AB(AB+CD)}{2} = \frac{AB(AD+BC)}{2} = S_{ABCD}.$$

582. $\angle COD = 90°$.

$$CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = 10.$$

$$CO \cdot OD = CD \cdot OE,$$

звідки $OE = r = 4{,}8$.

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} AB =$$

$$= \frac{AB + CD}{2} AB = 94{,}08.$$

583. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$. $CD = DE$. Нехай $AB = 2r$. $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} AB =$

$$= \frac{AB + CD}{2} AB = \frac{2r + DE}{2} \cdot 2r =$$

$$= 2r^2 + r \cdot DE = \frac{2S}{\pi} + r \cdot DE,$$

що і треба було довести.

584. $PK \perp AD$, $\angle BOA = 90°$,

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 5,$$

$$\frac{AO \cdot BO}{2} = \frac{AB \cdot OM}{2},$$

звідки $OM = r = 2{,}4$. $PK = 2r = 4{,}8$.

585. $PK \perp AD$, $MO \perp AB$, $OM = 2{,}4$, $\angle BOA = 90°$. Нехай $OB = x$,

$$AB = \sqrt{x^2 + 16},$$

$$AM = \sqrt{AO^2 - OM^2} = 3{,}2,$$

$$AO^2 = AM \cdot AB,\ 16 = 3{,}2\sqrt{x^2 + 16},$$

$$5 = \sqrt{x^2 + 16}.$$

Звідси маємо $x = 3$.

586. $PK = 2r = 4$, $OM = r = 2$,

$$\angle BOA = 90°.\ OM = AM \cdot BM,$$

звідки $AM = AK = KD = 4$. Проведемо $BE \perp AD$, $BE = PK = 4$, $ED = AB = 5$.

$$BD = \sqrt{BE^2 + ED^2} = \sqrt{41}.$$

587. 4. **588.** 1:2. **589.** 1:4.

590. $4(2 + \sqrt{2})$. **591.** 360.

ЗМІСТ

Навчально-методичний посібник

ГАЙШТУТ Олександр Григорович

ЛИТВИНЕНКО Григорій Миколайович

ГЕОМЕТРІЯ — ЦЕ НЕСКЛАДНО

Планіметрія

Під редакцією авторів

Художник **Нещерецький П.В.**

Технічний редактор **Вербовіков А.М.**

Комп'ютерна верстка **Вербовіков А.М.**

Здано до набору 21.10.96 р. Підписано до друку 6.06.97 р. Формат $84 \times 108^{1}/_{16}$.
Папір газетний. Друк офсетний. Гарнітура Таймс.
Умовн. друк. арк. 11,76. Обл.-вид. арк. 20,78. Тираж 10 000 прим.
Замовлення № 0217191.

МСП Науково-практичний, навчально-методичний центр «Магістр-S»
Творчої спілки вчителів України

252030, Київ-30, вул. Б. Хмельницького, 16/18.

Тел. 229-89-29.

Віддруковано з готових фотоформ на комбінаті друку
видавництва «Преса України»

252047, м. Київ-47, пр-т Перемоги, 50

Видавництво науково-практичного, навчально-методичного центру

«Магістр-S»

Творчої спілки вчителів України

видало навчально-методичні посібники з математики:

- **Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Геометрія — це нескладно... Стереометрія.** (укр. та рос. мовами). Мета книги – допомогти учням систематизувати знання з шкільного курсу геометрії. Цьому сприяє структура книги, на початку якої подано довідковий матеріал, знання якого необхідне для розв'язування задач з стереометрії. 128 с.
- **Литвиненко Г.М., Собко М.С. Збірник задач і вправ для екзамену з математики на атестат про середню освіту.** Пропонований збірник рекомендовано Міністерством освіти для письмового екзамену з математики на атестат про середню освіту в середніх загальноосвітніх навчально-виховних закладах України. Допущено Міністерством освіти України. 64 с.
- **Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по геометрии.** Пособие содержит более 1000 задач со множеством примеров, их решениями и разбором. На большом разнообразном материале авторам удалось систематизировать по методам решений основные типы задач школьной планиметрии. Для учащихся 7-11 классов, абитуриентов, преподавателей математики. Рекомендовано Министерством образования Украины. 256 с.
- **Мерзляк А.Г., Полонский В. Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по тригонометрии.** Книга построена по принципу «ключевая задача + упражнения», поэтому она является не только обширнейшим дидактическим материалом, но и обучающим сборником задач. Предлагаемое пособие – это полный курс тригонометрии в задачах.

Готує до друку:

- **Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Алгебра. Розв'язування задач і вправ.** (укр. та рос. мовами). Посібник ознайомить читача з найбільш поширеними ідеями і методами шкільного курсу математики. Книга буде корисною як учням, так і вчителям, керівникам математичних гуртків і факультетів різних типів шкіл.
- **Гайштут О.Г., Ушаков Р.П. Тригонометрія. Довідник-задачник.** (укр. та рос. мовами). Посібник містить задачі для самостійної роботи учнів. Задачі згруповані за тематикою. На початку кожного параграфу подаються стислі теоретичні відомості. Для учнів старших класів, абітурієнтів, викладачів.
- **Гайштут А.Г. Приемы интенсификации обучения математике в 5-6 классах.** В методическом пособии изложен опыт работы по активизации индивидуально-групповой деятельности учащихся с созданием на уроках игровых ситуаций. Предназначается учителям математики.
- **Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Учимся решать задачи с параметрами.**
- **Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по началам анализа.**