О. ГАЙШТУТ, Г. ЛИТВИНЕНКО

АЛГЕБРА. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТА ВПРАВ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ГОЛОВНЕ УПРАВЛІННЯ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ
ТВОРЧА СПІЛКА ВЧИТЕЛІВ УКРАЇНИ

О.Г. Гайштут, Г.М. Литвиненко

АЛГЕБРА

Розв'язування задач і вправ

Навчальний посібник

Рекомендовано Головним управлінням
загальної середньої освіти
Міністерства освіти України

Київ
«Магістр-S»
1997

ББК 22.14я721
Г14

Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М.
Алгебра. Розв'язування задач і вправ. Навчальне видання. — К.: «Магістр-S», 1997. — 256 с.: 43 іл.
ISBN 966-557-032-3

Посібник містить завдання для самостійної роботи учнів. Завдання згруповані за методами розв'язування. На початку кожного параграфа даються стислі теоретичні відомості. До кожного параграфа наведені відповіді і стислі вказівки.

Для учнів і вчителів старших класів шкіл, ліцеїв, гімназій з поглибленим вивченням математики.

ББК 22.14я721

Рецензенти: *М.Я. Суконик*, вчитель математики середньої школи № 145 м. Києва, *Г.М. Клейнер*, вчитель математики, м. Умань.

ISBN 966-557-032-3

ВІД АВТОРІВ

Цей посібник — не звичайне зібрання задач. Задачі і теоретичний матеріал подано так, щоб якнайбільше сприяти самостійній роботі учнів і розвитку математичного мислення.

Задачі згруповані за методами розв'язування. Розв'язування задач кожної групи починається з типових прикладів з детальним поясненням.

Серед поданих задач є як традиційні, на застосування вивчених у шкільному курсі формул і теорем, так і нестандартні, які сприяють розширенню кругозору учнів.

Посібник містить велику кількість різних завдань для самостійної роботи, спрямованих на вироблення вмінь і навичок.

На початку кожного параграфа подані теоретичні відомості. Це дає змогу користуватися посібником незалежно від довідкової літератури.

Мета цієї книжки — ознайомити читача з найбільш поширеними ідеями і методами шкільного курсу математики, показати значні можливості застосування математики для розв'язування практичних задач, глибше зацікавити учнів математикою.

Посібник складається з дев'яти розділів. У першому подано найпростіші та штучні прийоми розв'язування рівнянь, в другому — розв'язування та доведення нерівностей, а також задачі на порівняння виразів. Розділ 3 містить методи розв'язування систем рівнянь, розділ 4 — розв'язування та дослідження рівнянь, нерівностей та систем рівнянь з параметрами, розділ 5 — перетворення алгебраїчних виразів та арифметичне значення кореня. В розділі 6 наведено методи розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей, розділи 7 і 8 містять теми, потрібні для класів з поглибленим вивченням математики, а розділ 9 — задачі підвищеної складності.

Автори сподіваються, що посібник буде корисним не тільки учням, а й вчителям, керівникам математичних гуртків і факультативів різних типів шкіл, зокрема, як спецкурс ліцеїв та гімназій, а також студентам педагогічних вузів.

Розділ I

Рівняння з одним невідомим

§1. Найпростіші прийоми розв'язування рівнянь

Рівняння $f_1(x) = f_2(x)$, *в якому* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$ — *деякі дані функції відносно аргумента* x, *що розглядаються на спільній частині їх областей визначення, називається* ***рівнянням з одним невідомим.***

Значення невідомих, які належать множині допустимих значень рівняння і задовольняють його (тобто перетворюють його в правильну рівність), називають ***коренями*** рівняння.

Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.

Розрізняють рівняння алгебраїчні і трансцендентні.

В ***алгебраїчних*** рівняннях над невідомими можуть здійснюватися, причому в скінченній кількості, тільки операції додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до раціонального степеня.

Якщо над невідомими здійснюються й інші операції, то рівняння називають ***трансцендентним.***

Прикладами трансцендентних рівнянь є показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння, а також рівняння, що містять обернені тригонометричні функції.

Методи розв'язування рівнянь базуються на понятті рівносильності (еквівалентності).

Якщо всі корені рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ будуть одночасно коренями рівняння $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, то останнє рівняння називається наслідком першого.

Два рівняння називають рівносильними (еквівалентними), якщо множини їх коренів збігаються.

В процесі розв'язування рівняння за допомогою різних перетворень замінюють простішим, рівносильним йому рівнянням. Якщо це не вдається, то можливі два такі випадки.

1. Під час переходу до нового рівняння може трапитися втрата коренів.

2. Нове рівняння може містити корені, що не є коренями вихідного рівняння (сторонні корені). Сторонні

корені можна виявити за допомогою перевірки (підстановкою всіх коренів нового рівняння у вихідне).

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(\sqrt{x} + 5)(2x + 1)(x^2 - 16) = 0.$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 5 = 0, \\ x \ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 1 = 0, \\ x \ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ x \ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} |x| = 4, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що тільки при $x = 4$ рівняння має зміст.

Відповідь: 4.

Вправи

Розв'язати рівняння:

1. $x(x - 5)(x + 3) = 0.$
2. $(x + 7)(2x - 1)(x^2 + 4) = 0.$
3. $(x - 7)(3x + 5)(5x - 8) = 0.$
4. $(\sqrt{x} - 7)(x^2 - 1) = 0.$
5. $(\sqrt{x} + 2)(x^2 - 49)(x + 2{,}5) = 0.$
6. $(\sqrt{x} - 5)(x^2 - 4)(x + 3) = 0.$
7. $\dfrac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} = 0.$

Застосування теореми Вієта до усного розв'язування квадратних рівнянь, що мають раціональні корені

Раціональні корені квадратних рівнянь можна знаходити усно, використовуючи теорему Вієта.

Нехай дано повне квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (*)$$

що має раціональні корені x_1 і x_2. Помноживши обидві частини рівняння на a, дістанемо:

$$a^2 x^2 + bax + ac = 0.$$

Позначимо $ax = y$. Рівняння набере вигляду

$$y^2 + by + ac = 0. \qquad (**)$$

Це рівняння відрізняється від вихідного (*) тим, що перший коефіцієнт дорівнює 1, а останній — добутку крайніх коефіцієнтів. Рівняння (**) стало зведеним і таким, що має цілі корені. Отже, їх легко знайти усно, використовуючи теорему Вієта. Нехай це будуть значення y_1 та y_2. Тоді, повертаючись до підстановки, маємо, що $ax = y_1$ і $ax = y_2$. Звідки $x_1 = \frac{y_1}{a}$, $x_2 = \frac{y_2}{a}$.

Висновок. Щоб повне квадратне рівняння, яке має дробові корені, розв'язати усно, використовуючи теорему Вієта, треба:

а) звести дане рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ до рівняння виду $y^2 + by + ac = 0$;

б) кожний одержаний після розв'язування зведеного квадратного рівняння корінь поділити на перший коефіцієнт повного квадратного рівняння.

Приклад 2. Розв'язати усно рівняння:

$$2x^2 - 3x - 9 = 0.$$ → $4x^2 - 6x - 18 = 0$

Розв'язання.

$$2x^2 - 3x - 9 = 0;$$
$$-18$$

$$x_1 = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Відповідь: $3;\ -\frac{3}{2}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння: $4x^2 - x - 5 = 0$.

Розв'язання.

$$4x^2 - x - 5 = 0$$
$$-20$$

$$x_1 = \frac{5}{4}, \quad x_2 = -\frac{4}{4} = -1.$$

Відповідь: $\frac{5}{4};\ -1$.

Вправи

Розв'язати рівняння усно, використовуючи теорему Вієта:

8. $x^2 - x - 2 = 0$. **9.** $x^2 - x - 6 = 0$.

10. $x^2 - 8x + 7 = 0$.
11. $x^2 + 11x + 10 = 0$.
12. $x^2 + 4x - 32 = 0$.
13. $x^2 - 4x - 12 = 0$.
14. $x^2 + 2x - 35 = 0$.
15. $x^2 - 4x - 60 = 0$.
16. $2x^2 - 9x + 10 = 0$.
17. $5x^2 + x - 4 = 0$.
18. $16x^2 - 6x - 1 = 0$.
19. $3x^2 - 8x + 4 = 0$.
20. $3x^2 + 5x - 8 = 0$.
21. $3x^2 - x - 4 = 0$.
22. $5x^2 - 3x - 8 = 0$.
23. $4x^2 + 3x - 7 = 0$.

§2. Розкладання многочленів на множники

Розкласти многочлен на множники означає замінити його добутком, тотожно рівним даному многочлену.

Наведемо приклади, що ілюструють основні прийоми розкладання многочленів на множники:

1. Винесення спільного множника за дужки:

$$4a^5b\,(c + 1) - 3ab^2\,(c + 1) = ab\,(c + 1)\,(4a^4 - 3b).$$

2. Групування: $ab - bc - a + c - b + 1 =$

$$= (ab - bc - b) - (a - c - 1) =$$

$$= b\,(a - c - 1) - (a - c - 1) = (a - c - 1)\,(b - 1).$$

3. Застосування формул скороченого множення:

$$4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 = (2ac + (a^2 + c^2 - b^2)) \times$$

$$\times (2ac - (a^2 + c^2 - b^2)) = ((a + c)^2 - b^2)\,(b^2 - (a - c)^2) =$$

$$= (a + c + b)\,(a + c - b)\,(b + a - c)\,(b - a + c).$$

Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

*Вираз $ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ називається **квадратним тричленом**, або **тричленом 2-го степеня**.*

*Вираз $D = b^2 - 4ac$ називається **дискримінантом** квадратного тричлена.* Квадратний тричлен можна розкласти на множники за формулою:

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2),$$

де x_1 та x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Якщо

1) $D > 0$, маємо два різні корені x_1 та x_2;

2) $D = 0$, маємо $x_1 = x_2$ і $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$;

3) $D < 0$ — добуток буде виражений через комплексні величини.

Приклад 1. Розкласти на множники: $7x^2 - 2x - 5$.

Розв'язання.

$$7x^2 - 2x - 5 = 0;$$

$$-35$$

$$x_1 = \frac{7}{7} = 1,\ x_2 = -\frac{5}{7}.$$

$$7x^2 - 2x - 5 = 7(x - 1)\left(x + \frac{5}{7}\right) = (x - 1)(7x + 5).$$

Відповідь: $(x - 1)(7x + 5)$.

Найбільший ефект засвоєння дає одночасне розв'язування прямих і обернених задач. Повторюючи застосування прямої теореми і теореми, оберненої до теореми Вієта, для усного розв'язування квадратних рівнянь, що мають раціональні корені, і розкладання квадратного тричлена на лінійні множники, доцільно розглядати по дві серії задач.

I. Складання рівнянь (квадратних тричленів) за їх коренями.

II. Усне розв'язування рівнянь. (Розкладання утворених квадратних тричленів на множники.)

Вправи

Розкласти на множники:

1. $x^2 + 5x - 36$.
2. $x^2 - 3x - 28$.
3. $x^2 + 10x - 24$.
4. $x^2 - x - 30$.
5. $3x^2 + 5x - 12$.
6. $3x^2 - 2x - 16$.
7. $6x^2 + 2x - 4$.
8. $8x^2 + 3x - 5$.
9. $16x^2 - 8x - 3$.

З розкладанням многочлена на множники пов'язано розв'язування різних алгебраїчних задач. До них належать задачі на обчислення числових значень виразів, дослідження їх знаків тощо. Крім того, з розкладанням многочлена на множники пов'язані також такі операції, як скорочення дробів і зведення їх до спільного знаменника.

При розкладанні многочлена на множники слід вказати ту числову множину, на якій задача має бути розв'язана. При цьому необхідно зауважити, що многочлен можна розкласти на множники на даній числовій множині, якщо всі коефіцієнти, що входять до співмножника, а також допустимі значення змінних, належать цій числовій множині.

Приклад 2. Розкласти многочлен $a^4 + 4b^4$ на множники на множині раціональних чисел.

Розв'язання. $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2 b^2 + 4b^4 - 4a^2 b^2 =$

$$= (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2 b^2 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab).$$

Приклад 3. Розкласти многочлен $x^5 + x + 1$ на множники на множині раціональних чисел.

Розв'язання. $x^5 + x + 1 = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1) =$

$$= x^2 (x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) = x^2 (x - 1)(x^2 + x + 1) +$$

$$+ (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).$$

Приклад 4. Розкласти многочлен $x^8 + x^4 + 1$ на множники на множині раціональних чисел.

Розв'язання. Виділимо спочатку повний квадрат, а потім розкладемо на множники, використовуючи формулу різниці квадратів: $x^8 + x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 =$

$$= (x^4 + 1)^2 - x^4 = (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2) =$$

$$= ((x^4 + 2x^2 + 1) - 3x^2)((x^4 + 2x^2 + 1) - x^2) =$$

$$= ((x^2 + 1)^2 - 3x^2)((x^2 + 1)^2 - x^2) = (x^2 + 1 + x\sqrt{3}) \times$$

$$\times (x^2 + 1 - x\sqrt{3})(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x).$$

Приклад 5. Розкласти многочлен $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ на множники на множині раціональних чисел.

Розв'язання. 1-й с п о с і б. $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 =$

$$= ((a + b + c)^3 - a^3) - (b^3 + c^3) = ((a + b + c) - a) \times$$

$$\times ((a + b + c)^2 + a(x + b + c) + a^2) - (b + c)(b^2 - bc + c^2) =$$

$$= (b + c)((a + b + c)^2 + a(a + b + c) + a^2) - (b + c)(b^2 - bc + c^2) =$$

$$= (b + c)((a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 + a(a + b) + ac + a^2 -$$

$$- b^2 + bc - c^2) = (b + c)((a + b)^2 + 2(a + b)c + a(a + b) +$$

$$+ (a + b)(a - b) + c(a + b)) = (b + c)(a + b)(a + 2c + a + a -$$

$$- b + c) = (b + c)(a + b)(3a + 3c) = 3(a + b)(a + c)(b + c).$$

2-й спосіб. При $a = -b$ многочлен перетворюється на нуль. Отже, він ділиться на $a + b$. Крім того, многочлен симетричний, тобто такий, що від заміни букв a, b, c відповідно буквами b, c, a він не змінюється. Отже, якщо многочлен має множник $a + b$, то він має також множники $b + c$ і $c + a$. Таким чином, після виділення множника $a + b$ можна передбачити в остаточному результаті наявність множників $b + c$ і $c + a$.

Отже, можна записати:

$$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = k\,(a + b)\,(b + c)\,(a + c);$$

$$k = \frac{(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3)}{(a + b)\,(b + c)\,(a + c)}.$$

Частка k — стале число, оскільки усі члени діленого і дільника третього степеня. Надаючи a, b, c будь-яких значень, наприклад, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, дістанемо: $24 = 8k$. Звідси $k = 3$. Отже,

$$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3\,(a + b)\,(b + c)\,(c + a).$$

Зауважимо, що не можна надавати a, b і c таких значень, при яких ліва і права частини рівності перетворюються в нуль.

Приклад 6. Розкласти многочлен $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$ на множники на множині раціональних чисел.

Розв'язання. 1-й спосіб. $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 =$

$$= ((b - a) + (a - c))^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = (b - a)^3 + (a - c)^3 +$$

$$+ 3\,(b - a)\,(a - c)\,(b - a + a - c) + (c - a)^3 + (a - b)^3 =$$

$$= 3\,(b - a)\,(a - c)\,(b - c)$$

Примітка. При розв'язуванні цього прикладу використовувалась формула $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)$.

2-й спосіб. При $a = b$ многочлен перетвориться в нуль, тобто він ділиться на $a - b$. Вихідний вираз симетричний відносно букв a, b, c. Отже, його множниками також будуть $a - c$ і $c - b$. Тоді можна записати:

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = k\,(a - b)\,(a - c)\,(c - b).$$

При $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$ дістанемо: $-6 = -2k$, звідки $k = 3$. Отже,

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(a-b)(a-c)(c-b).$$

Приклад 7. Розкласти многочлен $a^3+b^3+c^3-3abc$ на множники на множині раціональних чисел.

Розв'язання. Зауважимо, що під час заміни a на $-(b+c)$ многочлен перетворюється в нуль, тобто він ділиться на $a+b+c$. Маємо:$a^3+b^3+c^3-3abc=$

$$=(a+b+c)(m(a^2+b^2+c^2)+n(ab+ac+bc)),$$

де m і n — сталі числа.

При $a=0$, $b=1$, $c=2$ дістанемо $5m+2n=3$.

При $a=0$, $b=1$, $c=1$ дістанемо $2m+n=1$.

Розв'язуючи утворену систему

$$\begin{cases}5m+2n=3,\\2m+n=1,\end{cases}$$

маємо $m=1$, $n=-1$. Тоді $a^3+b+c^3-3abc=$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

Вправи

Розкласти многочлени на множники на множині дійсних чисел:

10. x^4-x^2+1. **11.** $x^{10}+x^5+1$.

Розкласти многочлени на множники на множині раціональних чисел:

12. $a^2b+ab^2+a^2c+b^2c+bc^2+2abc+ac^2$.

13. $a^2+2ab+2bc-b^2$.

14. $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc$.

15. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

§3. Штучні прийоми розв'язування рівнянь

Розглянемо деякі методи розв'язування рівнянь третього й вищих степенів. Застосування цих методів допоможе при розв'язуванні нестандартних і складних задач.

Введення допоміжного невідомого (загальний випадок)

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1.$$

Розв'язання. Понизимо степінь рівняння підстановкою $x^2 - x + 1 = y$. Рівняння набере вигляду

$$\frac{y-1}{y} - \frac{y+1}{y-3} = 1,$$

або після перетворення дістанемо: $y^2 + 2y - 3 = 0$. Звідки $y_1 = -3$, $y_2 = 1$. Повертаючись до підстановки, розв'язуємо рівняння: $x^2 - x + 1$ і $x^2 - x + 1 = -3$.

Відповідь: 0; 1.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\frac{2x^2 - x + 3}{3} - \frac{2x^2}{2x^2 - 4x + 3} = \frac{x}{6}.$$

Розв'язання. Перевіркою переконуємося, що $x = 0$ не є коренем рівняння. Поділивши обидві частини рівняння на x, дістанемо:

$$\frac{2x^2 - x + 3}{3x} - \frac{2x}{2x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{6}.$$

Чисельник і знаменник лівої частини рівняння поділимо на x почленно:

$$\frac{2x - 1 + \frac{3}{x}}{3} - \frac{2}{2x - 4 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{6}.$$

Тепер застосуємо підстановку $2x - 4 + \frac{3}{x} = y$. Рівняння набере вигляду:

$$\frac{y+3}{3} - \frac{2}{y} = \frac{1}{6},$$

або, після перетворення, $2y^2 + 5y - 12 = 0$.

Маємо: $y_1 = -4$, $y_2 = \frac{3}{2}$ і, повертаючись до підстановки, розв'язуємо сукупність рівнянь $2x - 4 + \frac{3}{x} = -4$ та $2x - 4 + \frac{3}{x} = \frac{3}{2}$.

Відповідь: 2; $\frac{3}{4}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2.$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату й згрупуємо квадрат першого й квадрат другого виразів.

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2-x^2}\right) + \frac{2}{x\sqrt{2-x^2}} = 4;$$

$$\frac{2}{x^2(2-x^2)} + \frac{2}{x\sqrt{2-x^2}} = 4;$$

$$\frac{1}{x^2(2-x^2)} + \frac{1}{x\sqrt{2-x^2}} = 2.$$

Застосуємо підстановку $\frac{1}{x\sqrt{2-x^2}} = y$, тоді рівняння набере вигляду $y^2 + y - 2 = 0$, коренями якого є $y_1 = -2$, $y_2 = 1$. Повертаючись до підстановки, розв'язуємо сукупність рівнянь: $\frac{1}{x\sqrt{2-x^2}} = -2$ і $\frac{1}{x\sqrt{2-x^2}} = 1.$

Відповідь: 1; $-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1).$

Вправи

Розв'язати рівняння:

1. $\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^2-3x+3} = \frac{6}{x^2-3x+4}.$
2. $\frac{9x^2-3x+2}{9x^2-3x-1} + 2 + 3x - 9x^2 = 0.$
3. $(x^2-5x+7)^2 - (x-2)(x-3) = 1.$
4. $\left(x + \frac{8}{x}\right)^2 + x = 42 - \frac{8}{x}.$
5. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680.$
6. $x(x-2)(x^2-1) = 24.$
7. $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} = 2.$

8. $\dfrac{x}{x^2+3x+2} - \dfrac{x}{x^2+5x+2} = \dfrac{1}{24}.$

9. $(2x^2+3x-1)^2 - 5(2x^2+3x+3) + 24 = 0.$

10. $\dfrac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3} = 4 + 2x + x^2.$

11. $(x^2+3x+5)^2 - x^2 - 3x - 11 = 0.$

12. $\left(x - \dfrac{6}{x}\right)^2 + x = 2 + \dfrac{6}{x}.$

13. $\dfrac{3}{1+x+x^2} = 3 - x - x^2.$

14. $(2x-3)(2x-1)(x+1)(x+2) = 36.$

15. $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2.$

16. $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+6} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+3} = -\dfrac{1}{5}.$

17. $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \dfrac{3x}{x^2-8x+15}.$

18. $\dfrac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+7} = \dfrac{7}{\sqrt{x+1}}.$

19. $5x^2 + 35x - \sqrt{x^2+7x-2} = 86.$

20. $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} = 3.$

21. $x\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x^2} = 4.$

22. $(x-3)^2 + 3x - 22 = \sqrt{x^2-3x+7}.$

23. $(x-3)^2 = 3\sqrt{x^2-5x+7} - x.$

24. $x^2 + 5x + 4 = 5\sqrt{x^2+5x+28}.$

25. $\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1.$

26. $6x^2 - 9x - 20 = 8\sqrt{2x^2-3x+5}.$

27. $x + \dfrac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^2-2}} = 4.$

28. $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{\sqrt{5-4x^2}} = \dfrac{3}{2}.$

29. $\dfrac{x}{x^2 - x + 2} + \dfrac{x}{x^2 + x + 2} = \dfrac{3}{4}$.

30. $\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x} + \dfrac{2x}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{7}{2}$.

Рівняння однорідні і ті, що зводяться до однорідних

Рівняння виду

$$A_0 f^n(x) + A_1 f^{n-1}(x)\, g(x) + \ldots + A_{n-1} f(x)\, g^{n-1}(x) + A_n g^n(x) = 0, \qquad (*)$$

де $n > 1$ *— натуральне число,* $A_0 \neq 0$, $A_n \neq 0$, $f(x)$ *і* $g(x)$ *— деякі функції, називається* ***однорідним*** *відносно функцій* $f(x)$ *і* $g(x)$.

Рівняння (*) рівносильне рівнянню

$$A_0 \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^n + A_1 \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{n-1} + \ldots + A_{n-1} \frac{f(x)}{g(x)} + A_n = 0$$

$$(g(x) \neq 0), \qquad (**)$$

або рівнянню

$$A_n \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)^n + A_{n-1} \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)^{n-1} + \ldots + A_1 \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

$$(f(x) \neq 0). \qquad (***)$$

Підставляючи $\dfrac{f(x)}{g(x)} = y$ в формулу (**) або $\dfrac{g(x)}{f(x)} = y$ в формулу (***), дістанемо раціональне рівняння виду

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_{n-1} y + A = 0$$

або

$$A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \ldots + A_1 y + A_n = 0.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$(2x^2 - x + 1)^2 + x^2 (2x^2 - x + 1) - 6x^4 = 0.$$

Розв'язання. Очевидно, що $x \neq 0$. Поділимо обидві частини рівняння на x^4 і дістанемо

$$\frac{(2x^2 - x + 1)^2}{x^2} + \frac{2x^2 - x + 1}{x^2} - 6 = 0.$$

Позначимо $\frac{2x^2 - x + 1}{x^2} = y$. Рівняння набере вигляду $y^2 + y - 6 = 0$. Звідки $y_1 = -3$, $y_2 = 2$. При цьому вихідне рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\frac{2x^2 - x + 1}{x^2} = -3 \text{ та } \frac{2x^2 - x + 1}{x^2} = 2.$$

Перше рівняння не має дійсних коренів. Розв'язком другого буде $x = 1$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x-3}}{\sqrt[4]{(2x-1)(2x-3)}} = \frac{8}{3}.$$

Розв'язання. Поділивши почленно чисельник на знаменник, дістанемо:

$$\sqrt[4]{\frac{2x-1}{2x-3}} - \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x-1}} = \frac{8}{3}.$$

Робимо заміну $\sqrt[4]{\frac{2x-1}{2x-3}} = y$. Рівняння набере вигляду $y - \frac{1}{y} = \frac{8}{3}$ або після перетворення: $3y^2 - 8y - 3 = 0$. Звідки знаходимо $y_1 = 3$, $y_2 = -\frac{1}{3}$ (не задовольняє). Повертаємося до підстановки $\sqrt[4]{\frac{2x-1}{2x-3}} = 3$.

Відповідь: $\frac{121}{80}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{3x+6} - \sqrt{x-9} = \frac{5}{6}\sqrt[4]{3x^2 - 21x - 54}.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді:

$$6\sqrt[4]{(3x+6)^2} - 6\sqrt[4]{(x-9)^2} = 5\sqrt[4]{(3x+6)(x-9)}.$$

Дістанемо однорідне рівняння. Оскільки $x \neq -2$, то, поділивши обидві частини рівняння на $\sqrt[4]{(3x+6)^2}$, дістанемо

$$6 - 6\sqrt[4]{\left(\frac{x-9}{3x+6}\right)^2} = 5\sqrt[4]{\frac{x-9}{3x+6}}.$$

Робимо підстановку $\sqrt[4]{\frac{x-9}{3x+6}} = y$ $(y \geq 0)$. Рівняння набере вигляду $6y^2 + 5y - 6 = 0$. Звідки $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = -\frac{3}{2}$ (не задовольняє). Повертаючись до підстановки, дістанемо $\sqrt[4]{\frac{x-9}{3x+6}} = \frac{2}{3}$, звідки $x = 25$.

Відповідь: 25.

Звернемо увагу на умову і відповідь, яку дістали після розв'язування рівнянь виду:

$$x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a} \text{ та } x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a}.$$

Корені рівняння $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$: $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{a}$.

Корені рівняння $x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a}$: $x_1 = a$, $x_2 = -\frac{1}{a}$.

Отже, якщо праву частину рівняння виду $\frac{f(x)}{\varphi(x)} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} = a$ записати у вигляді суми взаємно обернених чисел, то доданки лівої частини можна знаходити усно без введення допоміжного невідомого.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}} + \sqrt[3]{\frac{x+3}{x-2}} = \frac{10}{3}.$$

Розв'язання. Записавши праву частину рівняння у вигляді суми $3 + \frac{1}{3}$, дістанемо сукупність двох рівнянь:

$$\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}} = 3, \qquad \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}} = \frac{1}{3}.$$

Розв'язавши ці рівняння, матимемо: $-\frac{83}{26}$; $\frac{57}{26}$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2-x}{x+5}+\frac{x+5}{x^2-x}=\frac{13}{6}.$$

Розв'язання. Праву частину рівняння можна записати у вигляді суми $\frac{2}{3}+\frac{3}{2}$, тоді дістанемо сукупність рівнянь: $\frac{x^2-x}{x+5}=\frac{2}{3}$ та $\frac{x^2-x}{x+5}=\frac{3}{2}$. Розв'язавши ці рівняння, матимемо: $\frac{5\pm\sqrt{145}}{6}$; $\frac{5\pm\sqrt{145}}{4}$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-x}}-\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2+2}}=\frac{8}{3}.$$

Розв'язання. Записавши праву частину рівняння у вигляді різниці $3-\frac{1}{3}$, дістанемо сукупність рівнянь: $\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-x}}=3$ та $\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-x}}=-\frac{1}{3}$. Розв'язуємо ці рівняння. Друге рівняння не має розв'язків.

Відповідь: $\frac{9\pm\sqrt{145}}{16}$.

Вправи

Розв'язати рівняння:

31. $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$.

32. $x-\frac{1}{x}=a-\frac{1}{a}$.

33. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{17}{4}$.

34. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9$.

35. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=2{,}5$.

36. $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}} = 2.$

37. $\sqrt[5]{\dfrac{16z}{z-1}} + \sqrt[5]{\dfrac{z-1}{16z}} = 2{,}5.$

38. $\sqrt[n]{(x+1)^2} + \sqrt[n]{(x-1)^2} = 2\sqrt[n]{x^2-1}.$

39. $2\sqrt{5x+1} - 2\sqrt{2x-5} = 3\sqrt[4]{(2x-5)(5x+1)}.$

40. $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-9} = \dfrac{3}{2}\sqrt[4]{x^2-3x-54}.$

41. $\sqrt{\dfrac{x}{x^3+3}} + \sqrt{\dfrac{x^3+3}{x^5}} = \dfrac{5}{2x}.$

Доповнення до повного квадрата

Приклад 10. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{(x^2-2)^2} + \frac{1}{(x^2+2)^2} = \frac{40}{9x^4}.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на x^4 $(x \neq 0)$. Маємо:

$$\frac{x^4}{(x^2-2)^2} + \frac{x^4}{(x^2+2)^2} = \frac{40}{9}, \text{ або}$$

$$\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)^2 = \frac{40}{9}.$$

Доповнимо ліву частину рівняння до повного квадрата суми двох виразів, додавши до обох частин рівняння по $\dfrac{2x^4}{x^4-4}$. Маємо:

$$\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^2 + \frac{2x^4}{x^4-4} + \left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)^2 = \frac{40}{9} + \frac{2x^4}{x^4-4}.$$

Звідки $\left(\dfrac{x^2}{x^2-2} + \dfrac{x^2}{x^2+2}\right)^2 = \dfrac{40}{9} + \dfrac{2x^4}{x^4-4}$ або

$$\left(\frac{2x^4}{x^4-4}\right)^2 = \frac{40}{9} + \frac{2x^4}{x^4-4}.$$

Робимо підстановку $\frac{2x^4}{x^4-4} = y$. Рівняння набирає вигляду: $y^2 = \frac{40}{9} + y$. Розв'язавши його, дістанемо $y_1 = \frac{8}{3}$, $y_2 = -\frac{5}{3}$. Отже, маємо сукупність рівнянь:

$$\frac{2x^4}{x^4-4} = \frac{8}{3}, \quad \frac{2x^4}{x^4-4} = -\frac{5}{3}.$$

Відповідь: ± 2, $\pm\sqrt[4]{\frac{20}{11}}$.

Приклад 11. Розв'язати рівняння $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 7$.

Розв'язання. Доповнимо ліву частину рівняння до повного квадрата різниці, додавши до обох частин $-\frac{6x^2}{x+3}$. Маємо: $x^2 - \frac{6x^2}{x+3} + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 7 - \frac{6x^2}{x+3}$,

$$\left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 = 7 - \frac{6x^2}{x+3}.$$

Звідки $\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 = 7 - \frac{6x^2}{x+3}$. Робимо підстановку: $\frac{x^2}{x+3} = y$. Рівняння набирає вигляду: $y^2 = 7 - 6y$. Звідки $y_1 = -7$, $y_2 = 1$. Розв'язуємо сукупність рівнянь:

$$\frac{x^2}{x+3} = -7 \text{ та } \frac{x^2}{x+3} = 1.$$

Відповідь: $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Приклад 12. Розв'язати рівняння $x^4 - 8x - 7 = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді: $x^4 + 1 = 8x + 8$. Доповнимо ліву частину рівняння до повного квадрата суми, додавши до обох частин $2x^2$. Маємо: $x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 + 8x + 8$.

Дістанемо $(x^2+1)^2 = 2\,(x+2)^2$. Звідки $x^2 + 1 = \pm\sqrt{2} \times \times (x+2)$. Дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$x^2 - \sqrt{2}\,x + 1 - 2\sqrt{2} = 0 \text{ і } x^2 + \sqrt{2}\,x + 1 + 2\sqrt{2} = 0.$$

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}$.

Приклад 13. Розв'язати рівняння

$$x^4 + 10x^3 - 125x - 54 = 0.$$

Розв'язання. Доповнимо перші два члени рівняння до повного квадрата суми:

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 25x^2 - 125x - 54 = 0,$$

або після групування $(x^2 + 5x)^2 - 25\,(x^2 + 5x) - 54 = 0$.

Робимо підстановку $x^2 + 5x = y$. Рівняння набере вигляду $y^2 - 25y - 54 = 0$. Звідки $y_1 = 27$, $y_2 = -2$. Розв'язуємо сукупність рівнянь:

$$x^2 + 5x = 27 \text{ і } x^2 + 5x = -2.$$

Відповідь: $\dfrac{-5 \pm \sqrt{133}}{2}$; $\dfrac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Вправи

Розв'язати рівняння:

42. $x^2 + \dfrac{x^2}{(1 + x)^2} = 3.$

43. $\left(\dfrac{x}{x - 1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^2 = \dfrac{10}{9}.$

44. $x^4 - 12x + 323 = 0.$

45. $x^4 + 4x^2 - 4x + 15 = 0.$

46. $x^4 + 6x^3 - 27x - 10 = 0.$

47. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 3 = 0.$

48. $x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 5x - 6 = 0.$

49. $x^4 - 8x + 63 = 0.$

50. $x^4 - 8x^3 + 64x - 57 = 0.$

51. $x^4 - 2x^3 + x - 30 = 0.$

Зворотно-симетричні рівняння

***Симетричним** називається ціле раціональне рівняння виду*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Симетричне рівняння третього степеня має вигляд $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ і розв'язується групуванням:

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0,$$

звідки $(x + 1)(ax^2 - (a - b)x + a) = 0$. Розв'язуємо сукупність рівнянь: $x + 1 = 0$ і $ax^2 - (a - b)x + a = 0$.

Розглянемо узагальнені зворотні рівняння четвертого і шостого степенів, які містять в собі симетричні рівняння.

***Зворотно-симетричним** рівнянням четвертого степеня назвемо рівняння виду $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, в якому виконується залежність між коефіцієнтами $\dfrac{a}{e} = \left(\dfrac{b}{d}\right)^2$.*

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на x^2 і згрупуємо перший член рівняння з п'ятим, другий — з четвертим:

$$\left(ax^2 + \frac{e}{x^2}\right) + \left(bx + \frac{d}{x}\right) + c = 0,$$

$$e\left(\frac{a}{e}x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + d\left(\frac{b}{d}x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Використовуючи залежність між коефіцієнтами рівняння, запишемо його у вигляді

$$e\left(\frac{b^2}{d^2}x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + d\left(\frac{b}{d}x + \frac{1}{x}\right) + c = 0. \qquad (*)$$

Вводимо допоміжне невідоме:

$$\frac{b}{d}x + \frac{1}{x} = y. \qquad (**)$$

Піднесемо обидві частини рівняння (**) до квадрата і виділимо квадрат першого і квадрат другого виразів:

$$\frac{b^2}{d^2}x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{2b}{d}. \qquad (***)$$

Підставивши значення (**) і (***) в рівняння (*), дістанемо рівняння $ey^2 + dy + c - \frac{2be}{d} = 0$, яке і розв'язуємо. Потім повертаємося до підстановки.

Приклад 14. Розв'язати рівняння

$$4x^4 - 16x^3 + 7x^2 - 32x + 16 = 0.$$

Розв'язання. Переконаємося, що рівняння зворотне: $\frac{4}{16} = \left(\frac{-16}{-32}\right)^2$. Рівність виконується. Поділимо обидві частини рівняння на x^2 ($x \neq 0$). Після групування дістанемо:

$$4\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 16\left(x + \frac{2}{x}\right) + 7 = 0.$$

Позначимо $x + \frac{2}{x} = y$, звідки

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4. \qquad (*)$$

Підставивши (*) у рівняння, дістанемо

$$4(y^2 - 4) - 16y + 7 = 0, \text{ або } 4y^2 - 16y - 9 = 0.$$

Звідси $y_1 = \frac{9}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Отже, розв'язуємо сукупність рівнянь $x + \frac{2}{x} = \frac{9}{2}$ і $x + \frac{2}{x} = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: 4; $\frac{1}{2}$.

До ***зворотно-симетричних рівнянь шостого степеня*** *віднесемо рівняння виду*

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + k = 0, \qquad (**)$$

в якому виконується залежність між коефіцієнтами

$$\left(\frac{a}{k}\right)^2 = \left(\frac{b}{f}\right)^3 = \left(\frac{c}{e}\right)^6.$$

Поділимо обидві частини рівняння (**) на x^3 і згрупуємо перший з сьомим, другий — з шостим, третій — з п'ятим членами рівняння.

$$\left(ax^3 + \frac{k}{x^3}\right) + \left(bx^2 + \frac{f}{x^2}\right) + \left(cx + \frac{e}{x}\right) + d = 0, \text{ або}$$

$$k\left(\frac{a}{k}x^3+\frac{1}{x^3}\right)+f\left(\frac{b}{f}x^2+\frac{1}{x^2}\right)+e\left(\frac{c}{e}x+\frac{1}{x}\right)+d=0.$$

Використовуючи дану залежність між коефіцієнтами, дістанемо

$$k\left(\frac{c^3}{e^3}x^3+\frac{1}{x^3}\right)+f\left(\frac{c^2}{e^2}x^2+\frac{1}{x^2}\right)+e\left(\frac{c}{e}x+\frac{1}{x}\right)+d=0.$$

Вводимо допоміжне невідоме:

$$\frac{c}{e}x+\frac{1}{x}=y.$$

Після піднесення обох частин підстановки до квадрата й куба дістанемо:

$$\frac{c^2}{e^2}x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-\frac{2c}{e} \quad \text{та} \quad \frac{c^3}{e^3}x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-\frac{3c}{e}y.$$

Підставивши ці вирази у рівняння, дістанемо рівняння третього степеня, яке й розв'язуємо:

$$k\left(y^3-\frac{3c}{e}y\right)+f\left(y^2-\frac{2c}{e}\right)+ey+d=0.$$

Приклад 15. Розв'язати рівняння

$$x^6-x^5+x^4-7x^3+2x^2-4x+8=0.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є дане рівняння зворотно-симетричним: $\left(\frac{1}{8}\right)^2=\left(\frac{-1}{-4}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^6.$

Поділимо обидві частини рівняння на x^3:

$$x^3-x^2+x-7+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}=0, \text{ або}$$

$$\left(x^3+\frac{8}{x^3}\right)-\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)+\left(x+\frac{2}{x}\right)-7=0.$$

Позначимо $x+\frac{2}{x}=y$. Знайдемо із цієї підстановки $x^2+\frac{4}{x^2}=y^2-4$ та $x^3+\frac{8}{x^3}=y^3-6y$. Підставивши ці вирази у рівняння, маємо:

$$y^3-6y-(y^2-4)+y-7=0,$$

$$y^3 - y^2 - 5y - 3 = 0,$$

$$(y^3 - y) - (y^2 + y) - 3(y + 1) = 0,$$

$$(y + 1)(y^2 - 2y - 3) = 0.$$

Звідки $y_{1,2} = -1$, $y_3 = 3$. Розв'язуємо сукупність рівнянь:

$$x + \frac{2}{x} = -1 \text{ і } x + \frac{2}{x} = 3.$$

Відповідь: 2; 1.

Отже, якщо зворотно-симетричне рівняння парного степеня

$$a_0 x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + \ldots + a_{2k-1} x + a_{2k} = 0,$$

то поділимо на x^k ($k \neq 0$). Підготуємо введення допоміжного невідомого, згрупувавши члени, рівновіддалені від початку і кінця лівої частини рівняння.

Якщо зворотно-симетричне рівняння непарного степеня, то воно завжди має корінь $x = -1$, причому частка від ділення лівої частини рівняння на $x + 1$ є зворотно-симетричним многочленом парного степеня.

Вправи

Розв'язати рівняння:

52. $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0.$

53. $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0.$

54. $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0.$

55. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = 5.$

56. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{5}{4}.$

57. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{18}{x^2} - 3\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{x}\right) = 8.$

58. $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0.$

59. $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x + 1 = 0.$

60. $x^4 + x^3 - 6x^2 + 3x + 9 = 0.$

61. $9x^4 - 18x^3 - 7x^2 + 12x + 4 = 0.$

62. $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0.$

63. $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0.$

64. $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0.$

65. $2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 6x + 8 = 0.$

Метод похідної пропорції

Два тотожно рівні алгебраїчні дроби можна розглядати як пропорцію $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, де a, b, c, d — многочлени відносно x, y, ... , z, зокрема, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Теорема. *Якщо задана пропорція* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b \neq 0$, $d \neq 0$), *то справджуються рівності:*

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}; \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}; \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$(a \neq b,\ c \neq d),$$

які називаються похідними пропорціями.

Доведення. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$, звідки

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \qquad (*)$$

або $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$, звідки

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}. \qquad (**)$$

Поділимо пропорцію (*) на пропорцію (**) (при $a \neq b$, $c \neq d$). Маємо:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}. \qquad (***)$$

Приклад 16. Розв'язати рівняння

$$\frac{2x^2 - x - 2 + x\sqrt{x^2 - x - 2}}{2x^2 - x - 2 - x\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{9}{7}.$$

Розв'язання. Складемо похідну пропорцію (***)

$$\frac{4x^2-2x-4}{2x\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{26}{12};\quad \frac{2x^2-x-2}{2x\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{13}{12}.$$

Запишемо утворене рівняння у вигляді

$$\frac{\sqrt{(x^2-x-2)^2+x^2}}{2x\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{13}{12}.$$

Ще раз складемо похідну пропорцію (***). Маємо:

$$\frac{(\sqrt{x^2-x-2}+x)^2}{(\sqrt{x^2-x-2}-x)^2}=25;\quad \frac{\sqrt{x^2-x-2}+x}{\sqrt{x^2-x-2}-x}=\pm 5.$$

Розв'яжемо сукупність рівнянь

$$\frac{\sqrt{x^2-x-2}+x}{\sqrt{x^2-x-2}-x}=5 \text{ та } \frac{\sqrt{x^2-x-2}+x}{\sqrt{x^2-x-2}-x}=-5.$$

В кожному з цих випадків ще раз складемо похідну пропорцію (***). Маємо:

1) $\dfrac{2\sqrt{x^2-x-2}}{2x}=\dfrac{6}{4}$;

$\dfrac{x^2-x-2}{x^2}=\dfrac{9}{4}$;

$5x^2+4x+8=0$.

Немає дійсних коренів.

2) $\dfrac{2\sqrt{x^2-x-2}}{2x}=\dfrac{-4}{-6}$;

$\dfrac{x^2-x-2}{x^2}=\dfrac{4}{9}$;

$5x^2-9x-18=0$.

$x_1=3,\ x_2=-1{,}2$.

Перевіркою визначаємо, що $x_2=-1{,}2$ не задовольняє рівняння.

Відповідь: 3.

Зауважимо, що механічне використання методу похідної пропорції може призвести до втрати коренів. Щоб запобігти цьому, треба пам'ятати, що з пропорції $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ $(b\neq 0,\ d\neq 0)$ випливає існування похідної пропорції $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$ при додатковій умові $a\neq b$ і $c\neq d$ $\left(\text{тобто якщо } \dfrac{a}{b}\neq 1 \text{ і } \dfrac{c}{d}\neq 1\right)$.

Аналогічно, з пропорції $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b \neq 0$, $d \neq 0$) випливає правильність пропорції $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$ при додатковій умові $a \neq -b$ та $c \neq -d$ $\left(\text{тобто } \frac{a}{b} \neq -1 \text{ та } \frac{c}{d} \neq -1\right)$.

Отже, розв'язування рівнянь методом похідної пропорції базується на таких теоремах:

Теорема 1. *Рівняння*

$$\frac{f_1(x)+f_2(x)}{f_1(x)-f_2(x)} = \frac{\varphi_1(x)+\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)} \qquad (*)$$

є наслідком рівняння

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}, \qquad (**)$$

якщо при значеннях x, які є коренями рівняння (**), *обидві частини цього рівняння не дорівнюють одиниці.*

Теорема 2. *Рівняння*

$$\frac{f_1(x)-f_2(x)}{f_1(x)+f_2(x)} = \frac{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)+\varphi_2(x)} \qquad (*')$$

є наслідком рівняння

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}, \qquad (**')$$

якщо при значеннях x, які є коренями рівняння (**′), *обидві частини цього рівняння не дорівнюють* −1.

Приклад 17. Розв'язати рівняння

$$\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}}.$$

Розв'язання. З'ясуємо випадки, коли ліва і права частини даної пропорції дорівнюють одиниці.

Ліва частина даної пропорції дорівнює 1, коли $x = 2$; права частина дорівнює 1, коли $x = 2$. Отже, робимо висновок, що $x = 2$ — корінь даного рівняння.

Щоб знайти інші корені (якщо вони існують), треба врахувати те, що, оскільки обидві частини рівняння дорівнюють 1, то не можна користуватися теоремою 1, тобто рівняння

$$\frac{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2})},\ \text{або}$$

$$\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{x+5}}{-\sqrt{x-2}}$$

не є наслідком даного рівняння. (Одержане рівняння не має коренів і, якщо не провести попереднього аналізу, можна втратити корінь $x = 2$).

З'ясуємо, як саме треба розв'язувати рівняння.

Визначаємо, що обидві частини даного рівняння ні при яких значеннях x не дорівнюють -1. Отже, використовуючи теорему 2, дістанемо

$$\frac{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2})}\quad\text{або}$$

$$\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}=-\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+5}}.$$

Утворене рівняння є наслідком даного рівняння, а воно має єдиний корінь $x = 2$.

Відповідь: 2.

Вправи

Розв'язати рівняння:

66.

$$\frac{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-x-1}}{\sqrt{x+14}+\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2-x-1}}{\sqrt{x+14}-\sqrt{x+2}}.$$

67.

$$\frac{\sqrt[4]{x^2-x+4}+\sqrt[8]{(x^2-x+4)(x^2-x-11)}+\sqrt[4]{x^2-x-11}}{\sqrt[4]{x^2-x+4}-\sqrt[8]{(x^2-x+4)(x^2-x-11)}+\sqrt[4]{x^2-x-11}}=$$
$$=\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}.$$

68. $$\frac{2x^2-3x+x\sqrt{x^2-3x}}{2x^2-3x-x\sqrt{x^2-3x}}=\frac{7}{3}.$$

69. $$\frac{\sqrt{8+x+x^2}+\sqrt{4-x+x^2}}{\sqrt{8+x+x^2}-\sqrt{4-x+x^2}}=\frac{\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}-2}.$$

70. $$\frac{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-5}}=3.$$

71. $$\frac{2x^2+x+1+x\sqrt{x^2+x+1}}{2x^2+x+1-x\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{4+\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}.$$

Розв'язування ірраціональних рівнянь виду

$$\sqrt{ax^2+mx+c}+\sqrt{ax^2+nx+c}=dx$$

Розглянемо один із способів розв'язування ірраціональних рівнянь.

Приклад 18. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{5x^2-4x+8}+\sqrt{5x^2+3x+8}=7.$$

Розв'язання. Різниця підкореневих виразів дорівнює

$$(5x^2-4x+8)-(5x^2+3x+8)=-7x.$$

Запишемо її у вигляді

$$(\sqrt{5x^2-4x+8})^2-(\sqrt{5x^2+3x+8})^2=-7x \text{ або}$$

$$(\sqrt{5x^2-4x+8}+\sqrt{5x^2+3x+8})\times$$

$$\times(\sqrt{5x^2-4x+8}-\sqrt{5x^2+3x+8})=-7x.$$

За умовою

$$\sqrt{5x^2 - 4x + 8} + \sqrt{5x^2 + 3x + 8} = 7,$$

а тому

$$\sqrt{5x^2 - 4x + 8} - \sqrt{5x^2 + 3x + 8} = -x.$$

Додавши ліві і праві частини рівняння, дістанемо $2\sqrt{5x^2 - 4x + 8} = 7 - x$, звідки

$$4(5x^2 - 4x + 8) = 49 - 14x + x^2.$$

Розв'язавши рівняння і виконавши перевірку, дістанемо $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{17}{19}$.

Відповідь: $1, -\frac{17}{19}$.

Вправи

Розв'язати рівняння:

72. $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 + 3} = 3x$.

73. $\sqrt{2x^2 + 2x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = x$.

74. $\sqrt{3x^2 - x - 1} + \sqrt{x^2 - x - 1} = 2x$.

75. $\sqrt{4x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + x + 2} = -x$.

76. $\sqrt{x^2 + 5x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 2} = 3x$.

Розв'язування рівнянь відносно коефіцієнтів

Приклад 19. Розв'язати рівняння

$$(x^2 - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)(4x - \sqrt{3} - 1) = 0.$$

Розв'язання. Перетворимо ліву частину даного рівняння:

$$x^4 - 2x^2 + 1 + 4\sqrt{3}\,x - 3 - \sqrt{3} + 4x - \sqrt{3} - 1 = 0,$$

$$x^4 - 2x^2 + 4\sqrt{3}\,x + 4x - 3 - 2\sqrt{3} = 0.$$

Введемо допоміжний параметр, позначивши $\sqrt{3} = a$. Рівняння набирає вигляду:

$$x^4 - 2x^2 + 4ax + 4x - a^2 - 2a = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння як квадратне відносно коефіцієнта a. $a^2 - 2(2x - 1)a - (x^4 - 2x^2 + 4x) = 0$.

$$a_{1,2} = 2x - 1 \pm \sqrt{4x^2 - 4x + 1 + x^4 - 2x^2 + 4x} =$$

$$= 2x - 1 \pm \sqrt{(x^2 + 1)^2} = 2x - 1 \pm (x^2 + 1).$$

Дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$a = x^2 + 2x \text{ і } a = -x^2 + 2x - 2.$$

Повернемося до підстановки:

$$\sqrt{3} = x^2 + 2x. \quad \sqrt{3} = -x^2 + 2x - 2.$$

Розв'язуємо знайдені рівняння відносно x:

1) $x^2 + 2x - \sqrt{3} = 0$.
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

2) $x^2 - 2x + 2 + \sqrt{3} = 0$.
Немає дійсних коренів.

Відповідь: $-1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

Вправи

Розв'язати рівняння:

77. $x^3 + 2ax^2 + a^2x + a - 1 = 0$.

78. $x^3 + 2\sqrt{7}\,x^2 + 7x + 4\sqrt{7} + 8 = 0$.

79. $4x^3 - 4\sqrt{5}\,x^2 + 5x - 2\sqrt{5} + 4 = 0$.

Застосування теореми про границю послідовності для розв'язування рівнянь

Розглянемо приклади рівнянь, для розв'язування яких застосовується теорема Вейєрштрасса: *якщо послідовність монотонна та обмежена, то вона має границю.*

Приклад 20. Довести, що послідовність (a_n), де

$$a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}, \quad a > 0,$$

збігається, і обчислити границю.

Розв'язання. Очевидно, що

$$\sqrt{a} < \sqrt{a + \sqrt{a}} < \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}} < \dots,$$

тобто послідовність зростає.

Тепер покажемо, що вона обмежена:

$$a_n^2 = a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}} = a + a_{n-1} < a + a_n. \quad (*)$$

З нерівності $a_n^2 - a_n - a < 0$ (врахувавши, що $a > 0$ та $a_n > 0$), маємо:

$$a_n < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2},$$

тобто послідовність обмежена.

Отже, послідовність (a_n) — монотонна, зростаюча і обмежена зверху, тобто має границю, яку можна легко знайти.

Із залежності (*) маємо

$$a_n^2 = a + a_{n-1}. \quad (**)$$

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = x$.

Переходячи до границі в рівності (**), дістаємо $x^2 = a + x$, звідки

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Оскільки границя зростаючої послідовності з додатними членами не може бути від'ємним числом, то

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Приклад 21. Розв'язати рівняння

$$x^2 - 1 + (x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1)^3 + \dots = 3.$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Ліва частина рівняння є сумою членів нескінченно спадної геометричної прогресії, яка визначається за формулою $S = \frac{a_1}{1 - q}$. Оскільки $S = 3$, $a_1 = x^2 - 1$, $q = x^2 - 1$, рівняння набере вигляду $3 = \frac{x^2 - 1}{1 - (x^2 - 1)}$, звідки $x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

2-й спосіб. Запишемо рівняння у вигляді

$$(x^2 - 1)\,(1 + \underbrace{(x^2 - 1) + (x^2 - 1)^2 + \cdots)}_{3} = 3.$$

Використовуючи теорему Вейєрштрасса, дістанемо $(x^2 - 1)(1 + 3) = 3$, звідки $x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Відповідь: $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Ліву частину рівняння, наведеного у прикладі 21, можна було обчислити, використовуючи формулу суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії. В прикладах, наведених нижче, цього робити не можна.

Приклад 22. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}} = x.$$

Розв'язання. Піднесемо до квадрата обидві частини рівняння і запишемо його у вигляді

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}} = x^2 - x.$$

Ще раз піднесемо обидві частини рівняння до квадрата й використаємо теорему Вейєрштрасса:

$$2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}}_{x^2 - x} = (x^2 - x)^2, \text{ тобто}$$

$$2 + (x^2 - x) = (x^2 - x)^2.$$

Тоді рівняння набере вигляду $(x^2 - x)^2 - x^2 - x - 2 = 0$. Розв'язуємо його як квадратне відносно $x^2 - x$. Розглядуване рівняння рівносильно сукупності двох рівнянь:

$x^2 - x = 2.$	$x^2 - x = -1.$
$x^2 - x - 2 = 0.$	$x^2 - x + 1 = 0.$
$x_1 = 2$, $x_2 = -1$	Немає дійсних коренів.
(-1 не задовольняє рівняння).	

Відповідь: 2.

Приклад 23. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + 2}}} = 2.$$

Розв'язання. Замість числа 2, що стоїть під коренем, підставимо його значення:

$$2 = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + 2}}}\ .$$

Дістанемо

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + 2}}}}}} = 2.$$

Продовжуючи необмежено цей процес, дістанемо ряд, який містить нескінченну кількість членів:

$$x + \underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}}_{2} = 4.$$

Використовуючи теорему Вейєрштрасса, дістанемо, що

$$x + 2 = 4, \quad x = 2.$$

Відповідь: 2.

Вправи

Розв'язати рівняння:

80. $x + x^2 + x^3 + \cdots = 5.$

81. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = 6.$

82. $\sqrt{x + 3\sqrt{x + 3\sqrt{x + 3\sqrt{x + \cdots}}}} = x.$

83. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}}} = x.$

84. $x^{x^3} = 3.$

85. $\sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{1 + \sqrt{x + \cdots}}}}}} = 3.$

86. $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + x}}} = x.$

87. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} = 3.$

Розв'язування рівнянь з модулями

Абсолютна величина (модуль) невід'ємного дійсного числа дорівнює цьому числу; абсолютна величина від'ємного дійсного числа дорівнює протилежному числу:

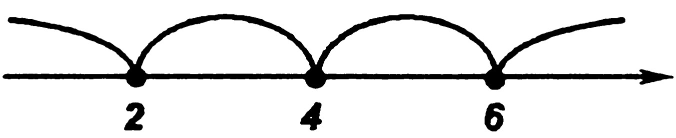
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad a \geq 0; \\ -a, & \text{якщо} \quad a < 0. \end{cases}$$

Покажемо застосування означення абсолютної величини при розв'язуванні рівнянь з модулями.

Приклад 24. Розв'язати рівняння

$$|x-2| + |x-4| + |x-6| = 12.$$

Розв'язання. На числовій осі відкладемо значення змінних, при яких значення кожного модуля дорівнює нулеві. Ці точки розбивають числову вісь на проміжки знакосталості (мал. 1).



Мал. 1

Знаходимо значення змінної для кожного з утворених проміжків.

а) $\begin{cases} x \leq 2, \\ 2 - x + 4 - x + 6 - x = 12, \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 2, \\ x = 0, \end{cases}$ $x = 0.$

б) $\begin{cases} 2 < x \leq 4, \\ x - 2 + 4 - x + 6 - x = 12, \end{cases}$ $\begin{cases} 2 < x \leq 4, \\ x = -4. \end{cases}$

Немає розв'язків.

в) $\begin{cases} 4 < x \leq 6, \\ x - 2 + x - 4 + 6 - x = 12, \end{cases}$ $\begin{cases} 4 < x \leq 6, \\ x = 12. \end{cases}$

Немає розв'язків.

г) $\begin{cases} x > 6, \\ x - 2 + x - 4 + x - 6 = 12, \end{cases}$ $\begin{cases} x > 6, \\ x = 8. \end{cases}$ $x = 8.$

Відповідь: 0; 8.

Проте, зустрічаються рівняння, що містять суму модулів, але у процесі їх розв'язування немає необхідності розглядати проміжки знакосталості.

Приклад 25. Розв'язати рівняння

$$|x-3| + |2x-1| + |x+7| = -2.$$

Розв'язання. Немає дійсних коренів, оскільки сума невід'ємних чисел не може дорівнювати від'ємному числу.

Приклад 26. Розв'язати рівняння

$$|x+2|+|2x-3|+|x-1|+|x-3|-3x+12=0.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$|x+2|+|2x-3|+|x-1|+|x-3|=3x-12.$$

Ліва частина рівняння невід'ємна. Отже, рівняння може мати дійсні корені, якщо $3x-12\ge 0$, тобто при $x\ge 4$. А на цьому проміжку вирази, записані в кожному з модулів, додатні.

Рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x\ge 4, \\ x+2+2x-3+x-1+x-3=3x-12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 4, \\ x=-3{,}5. \end{cases} \quad \text{Немає розв'язків.}$$

Відповідь: немає розв'язків.

Приклад 27. Розв'язати рівняння

$$x^2+|x-2|+|x|+|x+2|+|x-3|+|x+3|-4=0.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$|x-2|+|x|+|x+2|+|x-3|+|x+3|=4-x^2.$$

Ліва частина рівняння невід'ємна. Отже, рівняння матиме розв'язок при $4-x^2\ge 0$, звідки $-2\le x\le 2$. Крім того, ліва частина рівняння є парною функцією, тобто якщо x_0 — корінь даного рівняння, то й $-x_0$ також є його коренем.

Отже, досить знайти корені даного рівняння на проміжку $0\le x\le 2$, а якщо вони є, то до них слід долучити корені, протилежні за знаком до знайдених. На даному проміжку маємо:

$$x^2-x+2+x+x+2-x+3+x+3-4=0,$$

звідки $x^2+x+6=0$.

Рівняння не має розв'язків.

Відповідь: немає розв'язків.

Вправи

88. Розв'язати рівняння $|x| - |x - 2| = 2$.

89. Знайти найменше ціле число, що задовольняє рівняння $|x - 3| + 2\,|x + 1| = 4$.

Розв'язати рівняння:

90. $|x - 1| + |x + 2| - |x - 3| = 4$.

91. $|x - 1| + |x + 2| - |x - 3| = 4$.

92. $|2x - 9| + |x - 6| + x = 4$.

93. $5\,|x - 2| + |x + 1| + |x - 1| + 7 = 3x$.

Ірраціональні рівняння, розв'язування яких зводиться до розв'язування рівнянь з модулями

Приклад 28. Розв'язати рівняння

$$\frac{\sqrt{3x + 26 - 10\sqrt{3x + 1}} - \sqrt{3x + 17 - 8\sqrt{3x + 1}}}{\sqrt{3x + 2 + 2\sqrt{3x + 1}} + \sqrt{3x + 5 - 4\sqrt{3x + 1}}} = -1.$$

Розв'язання. Позначимо $3x + 1 = y^2$ $(y \geq 0)$. Звідки $3x = y^2 - 1$. Підставивши цей вираз у рівняння, маємо

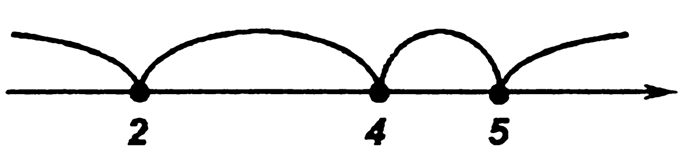
$$\frac{\sqrt{y^2 - 1 + 26 - 10y} - \sqrt{y^2 - 1 + 17 - 8y}}{\sqrt{y^2 - 1 + 2 + 2y} + \sqrt{y^2 - 1 + 5 - 4y}} = -1;$$

$$\frac{\sqrt{(y - 5)^2} - \sqrt{(y - 4)^2}}{\sqrt{(y + 1)^2} + \sqrt{(y - 2)^2}} = -1,$$

звідки $|y - 5| - |y - 4| + |y - 2| + |y + 1| = 0$.

Оскільки $y + 1 > 0$, то рівняння набере вигляду

$$|y - 5| - |y - 4| + |y - 2| + y + 1 = 0 \text{ (мал. 2).}$$



Мал. 2

а) $\begin{cases} y \le 2, \\ -y + 5 + y - 4 - y + 2 + y + 1 = 0; \end{cases}$

система розв'язків не має.

б) $\begin{cases} 2 < y \le 4, \\ -y + 5 + y - 4 + y - 2 + y + 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2 < y \le 4, \\ y = 0; \end{cases}$

система розв'язків не має.

в) $\begin{cases} 4 < y \le 5, \\ -y + 5 - y + 4 + y - 2 + y + 1 = 0; \end{cases}$

система розв'язків не має.

г) $\begin{cases} y > 5, \\ y - 5 - y + 4 + y - 2 + y + 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y > 5, \\ y = 1; \end{cases}$

система розв'язків не має.

Відповідь: розв'язків немає.

Вправи

Розв'язати рівняння:

94. $\sqrt{x - 2 + \sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} = 5\sqrt{2}$.

95. $\dfrac{\sqrt{x - 1 - \sqrt{2x - 3}} + \sqrt{x + 3 - 3\sqrt{2x - 3}}}{\sqrt{x + 11 + 5\sqrt{2x - 3}}} = \dfrac{1}{4}$.

96. $\dfrac{\sqrt{x - 2 + \sqrt{2x - 5}} - \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}}}{\sqrt{x + 10 + 5\sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x + 22 + 7\sqrt{2x - 5}}} = 2$.

Розв'язування рівнянь виду $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$ та $(x+a)^5 - (x+b)^5 = c$

Підстановка $x = y - \dfrac{a+b}{2}$ такі рівняння приводить до біквадратних.

Приклад 29. Розв'язати рівняння

$$(x + 3)^5 - (x - 1)^5 = 64.$$

Розв'язання. Зробимо заміну $x = y - 1$, де $y = \dfrac{3-1}{2}$. Тоді маємо: $(y + 2)^5 - (y - 2)^5 = 64$.

Після перетворень дістанемо: $20y^4 + 160y^2 = 0$, звідки $y = 0$.

Повертаючись до підстановки, маємо $x = -1$.

Відповідь: -1.

Вправи

Розв'язати рівняння:

97. $(x + 1)^4 + (x + 5)^4 = 82$.

98. $(x - 5)^4 + (x - 3)^4 = 16$.

99. $x^4 + (x - 2)^4 = 2$.

100. $(x + 1)^5 - (x + 3)^5 = -32$.

101. $(x + 2)^5 - x^5 = 32$.

Інші прийоми розв'язування рівнянь

1. Якщо в рівнянні $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ виконується залежність між коефіцієнтами

$$a + b = b + c + d = d + e, \qquad (*)$$

то ліва частина рівняння розкладається на множники, одним з яких буде $x^2 - x + 1$, а другий знаходиться діленням лівої частини рівняння на $x^2 - x + 1$.

Доведення. Із залежності між коефіцієнтами маємо: $a = c + d$, $e = b + c$. Підставимо значення даних коефіцієнтів у рівняння:

$$(c + d)\, x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + b + c = 0, \text{ звідки}$$

$$c\,(x^4 + x^2 + 1) + dx\,(x^3 + 1) + b\,(x^3 + 1) = 0,$$

$$c\,(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) + dx\,(x + 1)\,(x^2 - x + 1) +$$
$$+ b\,(x + 1)\,(x^2 - x + 1) = 0,$$

$$c\,((x^2 + 1)^2 - x^2) + dx\,(x + 1)\,(x^2 - x + 1) +$$
$$+ b\,(x + 1)\,(x^2 - x + 1) = 0,$$

$$c\,(x^2 + x + 1)\,(x^2 - x + 1) + dx\,(x + 1)\,(x^2 - x + 1) +$$
$$+ b\,(x + 1)\,(x^2 - x + 1) = 0,$$

$$(x^2 - x + 1)\,(c\,(x^2 + x + 1)) + dx\,(x + 1) + b\,(x + 1) = 0,$$

що й треба було довести. Таким чином, ліва частина рівняння розкладається на множники, перший з яких $x^2 - x + 1$, а другий знаходиться діленням лівої частини рівняння на $x^2 - x + 1$.

Приклад 30. Розв'язати рівняння

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Розв'язання. $1 + 2 = 2 + 3 - 2 = -2 + 5$. Рівність виконується, тобто ліва частина рівняння націло ділиться на тричлен $x^2 - x + 1$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +\,2x^3 & +\,3x^2 & -\,2x & +\,5 & x^2 - x + 1 \\
\cline{6-6}
x^4 & -\,x^3 & +\,x^2 & & & x^2 + 3x + 5 \\
\cline{1-4}
 & 3x^3 & +\,2x^2 & -\,2x & & \\
 & 3x^3 & -\,3x^2 & +\,3x & & \\
\cline{2-4}
 & & 5x^2 & -\,5x & +\,5 & \\
 & & 5x^2 & -\,5x & +\,5 & \\
\cline{3-5}
 & & & 0 & &
\end{array}$$

Рівняння набере вигляду

$$(x^2 - x + 1)\,(x^2 + 3x + 5) = 0.$$

Відповідь: немає дійсних коренів.

2. Розглянемо розв'язування рівняння за допомогою введення двох допоміжних невідомих.

Приклад 31. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[5]{\frac{3+x}{3-x}} - \sqrt[5]{\frac{3-x}{3+x}} = \sqrt[5]{\frac{5+x}{5-x}} - \sqrt[5]{\frac{5-x}{5+x}}.$$

Розв'язання. Нехай

$$\sqrt[5]{\frac{3+x}{3-x}} = a; \quad \sqrt[5]{\frac{5+x}{5-x}} = b,$$

тоді дістанемо, що $a - \frac{1}{a} = b - \frac{1}{b}$. Звідси

$$a-b+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=0;\quad (a-b)\left(1+\frac{1}{ab}\right)=0.$$

Дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь $a=b$ і $ab=-1$ при $x \neq \pm 5$, $x \neq \pm 3$.

Повертаючись до підстановки, дістанемо рівняння, які розв'язуємо:

$$\sqrt[5]{\frac{3+x}{3-x}}-\sqrt[5]{\frac{5+x}{5-x}}=0,$$

$$1+\sqrt[5]{\frac{3+x}{3-x}\cdot\frac{5+x}{5-x}}=0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 32. Розв'язати рівняння $x^9+3x-4=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $3x=-x^9+4$. Підбором переконуємося, що $x=1$ є коренем рівняння. Інших розв'язків рівняння не має, оскільки функція, що міститься в лівій частині, зростає, а у правій частині — спадає. Звідси робимо висновок, що графіки цих функцій не можуть мати більше, ніж одну точку перетину.

Відповідь: 1.

Приклад 33. Розв'язати рівняння $\sqrt[7]{x-1}=\sqrt[3]{3-x}$.

Розв'язання. Підбором переконуємося, що $x=2$ є коренем даного рівняння. Оскільки функція, що міститься в лівій частині, зростає, а в правій — спадає, то інших коренів це рівняння не має.

Відповідь: 2.

Приклад 34. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x}-\sqrt{2-x}-\sqrt{5-3x}+\sqrt{3x-1}+\sqrt{2x-1}-\sqrt{3-2x}=0.$$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$\sqrt{x}+\sqrt{3x-1}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{2-x}+\sqrt{5-3x}+\sqrt{3-2x}$$

і розглянемо функції

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{3x-1}+\sqrt{2x-1} \quad \text{і}$$

$$\varphi(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{5-3x}+\sqrt{3-2x}.$$

Оскільки функція $f(x)$ є монотонно зростаючою, а функція $\varphi(x)$ — монотонно спадною на області їх визначення $\left[\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right]$, то рівняння $f(x) = \varphi(x)$ має єдиний корінь. Щоб знайти його, зробимо заміну $x = y + 1$. Тоді

$$f(y+1) = \sqrt{y+1} + \sqrt{3y+2} + \sqrt{2y+1},$$

$$\varphi(y+1) = \sqrt{-y+1} + \sqrt{-3y+2} + \sqrt{-2y+1}.$$

Легко побачити, що $f(y+1) = \varphi(-y+1)$, або $y + 1 = -y + 1$, звідки $y = 0$.

Повертаючись до підстановки, дістанемо корінь $x = 1$.

Відповідь: 1.

§4. Теорема Безу та її наслідки

Якщо коефіцієнти зведеного рівняння

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a^n = 0,$$

де $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — *цілі числа, то цілі корені рівняння слід шукати серед дільників вільного члена.*

Коли цілий корінь x_1 підбором знайдено, ділимо многочлен на $x - x_1$. Частка від ділення — многочлен $(n-1)$-го степеня. Аналогічно шукаємо його корінь.

Продовжуємо цей процес доти, поки утворений після ділення многочлен буде другого степеня. Прирівнявши його до нуля, дістаємо рівняння другого степеня, корені якого знаходимо, розв'язуючи квадратне рівняння.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6 = 0.$$

Розв'язання. Цілі корені шукаємо серед чисел ± 1; ± 2; ± 3; ± 6. Підставляючи ці числа в рівняння, знаходимо корінь $x_1 = -1$. Ділимо даний многочлен на $x + 1$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 + & x^3 & - x^2 & - 7x & - 6 & x + 1 \\ \cline{6-6}
x^4 + & x^3 & & & & x^3 - x - 6 \\ \cline{1-5}
 & & - x^2 & - 7x & & \\
 & & - x^2 & - x & & \\ \cline{3-4}
 & & & - 6x & - 6 & \\
 & & & - 6x & - 6 & \\ \cline{4-5}
 & & & 0 & &
\end{array}$$

Розв'язуємо утворене рівняння $x^3 - x - 6 = 0$. Знаходимо корінь серед дільників вільного члена методом підбору. Маємо $x_2 = 2$. Виконаємо ділення:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -\ x & -\ 6 & x - 2 \\ \cline{5-5}
x^3 & -\ 2x^2 & & & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & -\ x & & \\
 & 2x^2 & -\ 4x & & \\ \cline{2-3}
 & & 3x & -\ 6 & \\
 & & 3x & -\ 6 & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & &
\end{array}$$

Розв'язуючи рівняння $x^2 + 2x + 3 = 0$, знаходимо, що воно не має дійсних коренів.

Відповідь: -1; 2.

Ділення може бути спрощеним за правилом, яке має назву схеми Горнера.

Рівняння, що має раціональні корені

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — *цілі числа, зводиться до рівняння, що має цілі корені.*

Помножимо почленно обидві частини рівняння на a_0^{n-1}. Дістанемо

$$a_0^n x^n + a_1 a_0^{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} a_0^{n-1} x + a_0^{n-1} a_n = 0.$$

Позначимо

$$a_0 x = y. \qquad (*)$$

Рівняння набуває вигляду

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} a_0^{n-2} y + a_0^{n-1} a_n = 0.$$

Якщо дане рівняння мало раціональні корені, то утворене має цілі корені, які, як і в попередньому випадку, слід шукати серед дільників вільного члена.

Розв'язавши утворене рівняння, повертаємося до підстановки (*) і знаходимо корені даного рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$5x^3 - 6x^2 + 11x - 2 = 0.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на 5^2. Маємо: $5^3 x^3 - 6 \cdot 5^2 x^2 + 55 \cdot 5x - 50 = 0$. Позначимо

$$5x = y, \qquad (**)$$

тоді рівняння набере вигляду

$$y^3 - 6y^2 + 55y - 50 = 0.$$

Цілі корені його шукаємо серед дільників числа 50 (тобто серед чисел ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, ± 25, ± 50). Маємо $y_1 = 1$.

Частка від ділення многочлена $y^3 = 6y^2 + 55y - 50$ на $y - 1$ дає тричлен $y^2 - 5y + 50$, який не має дійсних коренів.

Повертаючись до підстановки (**), дістанемо $x = \frac{1}{5}$.

Вправи

Знайти остачу від ділення:

1. $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 2) : (x - 1)$.
2. $(x^5 + x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 6) : (x + 1)$.
3. $(2x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x - 5) : (x - 2)$.
4. При якому значенні a многочлен $x^3 - 3x^2 + 5x + a$ при діленні на $x + 1$ дає остачу, що дорівнює 4?
5. При якому значенні a многочлен $2x^5 - 3x^3 + 11x^2 - x + a$ при діленні на $x + 2$ дає остачу, що дорівнює 3?
6. Дано многочлен $2x^3 - 3x^2 - ax + b$. Яких числових значень повинні набути a і b, щоб многочлен при діленні на $x + 1$ давав остачу, що дорівнює 7, а при діленні на $x - 1$ — остачу, що дорівнює 5?
7. Визначити, при якому значенні k многочлен $x^4 - 4x^3 + kx^2 - 13x + 6$ ділиться без остачі на $x - 2$.
8. При яких значеннях a і b многочлен $ax^2 + bx^2 - 37x + 14$ ділиться на $x^2 + x - 2$?

Розкласти на множники:

9. $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$.

10. $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$.

11. $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$.

12. $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$.

Розв'язати рівняння:

13. $x^3 - 8x^2 + 13x - 6 = 0$.

14. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

15. $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$.

16. $x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$.

17. $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$.

18. $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0$.

19. $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$.

20. $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0$.

21. $x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x = 0$.

22. $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$.

§5. Метод невизначених коефіцієнтів

Серед способів розкладання многочленів на множники заслуговує уваги метод невизначених коефіцієнтів. Його суть грунтується на властивості тотожної рівності двох многочленів.

Два многочлени можуть бути тотожно рівними тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x рівні між собою, тобто при $a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$ маємо:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 \\ a_2 &= b_2 \\ &\cdots \\ &\cdots \\ a_n &= b_n. \end{aligned}$$

Нехай відомо, що в результаті деяких перетворень утворюється деякий многочлен, коефіцієнти якого невідомі. Ці коефіцієнти позначають буквами і розглядають як невідомі. Далі для визначення цих невідомих коефіцієнтів складається система рівнянь.

Пояснимо це на прикладі.

При яких значеннях a і b многочлен $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ ділиться без остачі на тричлен $x^2 - 3x + 4$?

Розв'язання. Подамо многочлен четвертого степеня у вигляді добутка двох квадратних тричленів:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b = (x^2 - 3x + 4)\,(x^2 + px + q),$$

або після перетворення маємо

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b = x^4 + (p - 3)\,x^3 + (q - 3p + 4)\,x^2 + (4p - 3q)\,x + 4q.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x_3, x_2, x і вільні члени, дістаємо систему:

$$\begin{cases} p - 3 = -3, \\ q - 3p + 4 = 3, \\ 4p - 3q = a, \\ 4q = b, \end{cases}$$

звідки $p = 0$, $q = -1$, $a = 3$, $b = -4$.

Відповідь: $a = 3$, $b = -4$.

Вправи

1. При якому значенні a многочлен $x^3 + 6x^2 + ax + 5$ ділиться без остачі на $x^2 + x + 1$?

2. При яких значеннях a і b многочлен $x^4 - x^3 - 9x^2 + ax - 10$ ділиться без остачі на $x^2 + 2x + b$?

3. При яких значеннях a і b многочлен $x^4 - 2x^3 + ax^2 - 3x + b$ ділиться без остачі на $x^2 - 3x + 3$?

§6. Розв'язування ірраціональних рівнянь

Рівняння $f(x) = \varphi(x)$, де $f(x)$ і $\varphi(x)$ — алгебраїчні функції, причому принаймні одна з них ірраціональна функція, називається ***ірраціональним рівнянням.***

Зрозуміло, що розв'язування ірраціональних рівнянь полягає в зведенні їх до відповідних раціональних рівнянь, які є наслідками даних ірраціональних рівнянь. Одним із стандартних способів розв'язування ірраціональних рівнянь є звільнення їх від коренів за допомогою послідовного піднесення обох частин рівнянь до відповідного степеня.

Зауважимо, що, коли при розв'язуванні ірраціональних рівнянь обидві його частини підносяться до парного степеня, можливе порушення рівносильності і поява сторонніх коренів, які виключаються за допомогою перевірки.

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{9-5x} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{x}.$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата. Маємо:

$$9 - 5x + 3x - 2 - 2\sqrt{27x - 18 - 15x^2 + 10x} = x,$$

звідки

$$7 - 3x = 2\sqrt{-15x^2 + 37x - 18}.$$

Знову піднесемо до квадрата. Маємо:

$$49 + 9x^2 - 42x = -60x^2 + 148x - 72,$$

тобто

$$69x^2 - 190x + 121 = 0,$$

звідки $x_1 = \frac{121}{69}$, $x_2 = 1$. Робимо перевірку і переконуємося, що x_1 — сторонній корінь, а x_2 — задовольняє дане рівняння.

Відповідь: 1.

2-й спосіб. Запишемо рівняння у вигляді:

$$\sqrt{9-5x} = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x}.$$

Це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 9 - 5x \ge 0, \\ 3x - 2 \ge 0, \\ x \ge 0, \\ (\sqrt{9-5x})^2 = (\sqrt{3x-2} + \sqrt{x})^2, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} \le x \le \dfrac{9}{5}, \\ 11 - 9x = 2\sqrt{3x^2 - 2x}. \end{cases}$$

Права частина рівняння при будь-якому значенні x невід'ємна, тобто доповнюємо систему ще однією додатковою умовою:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} \le x \le \dfrac{9}{5}; \\ 11 - 9x \ge 0, \\ (11 - 9x)^2 = 4\,(3x^2 - 2x), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} \le x \le \dfrac{11}{9}; \\ 69x^2 - 190x + 121 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} \le x \le \dfrac{11}{9}, \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dfrac{2}{3} \le x \le \dfrac{11}{9}, \\ x = \dfrac{121}{69}. \end{cases}$$

Остання система має один розв'язок $x = 1$, який і є коренем рівняння.

Відповідь: 1.

Метод складання змішаних систем рівнянь і нерівностей (приєднування до області допустимих значень умови збігу знаків обох частин рівняння) часто дає можливість, не розв'язуючи ірраціональне рівняння, визначити, що воно не має дійсних коренів.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x - 2} - \sqrt{2x - 3} = \sqrt{x} + 1.$$

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень цього рівняння, приєднавши до неї умову збігу знаків обох частин:

$$\begin{cases} x - 2 \ge 0, \\ 2x - 3 \ge 0, \\ x \ge 0, \\ \sqrt{x - 2} - \sqrt{2x - 3} \ge 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x \ge 2, \\ x - 2 \ge 2x - 3, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \ge 2, \\ x \le 1. \end{cases}$$

Система несумісна. Отже, дане рівняння не має коренів.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2 + x - x^2} = \sqrt{x} - 2.$$

Розв'язання. Приєднавши до області допустимих значень рівняння умову збігу знаків обох частин рівняння, дістанемо:

$$\begin{cases} 2 + x - x^2 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ \sqrt{x} - 2 \geq 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0, \\ x \geq 0, \\ x \geq 4, \end{cases} \quad \text{маємо} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 2, \\ x \geq 4. \end{cases}$$

Ця система несумісна, тобто дане рівняння не має коренів.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{5x + 2} - \sqrt[3]{5x - 2} = 2.$$

Розв'язання. Рівняння такого виду розв'язуються піднесенням обох частин до третього степеня за формулою

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b).$$

Дістанемо $5x + 2 - (5x - 2) - 3\sqrt[3]{25x^2 - 4}\ \times$

$$\times\ \underbrace{(\sqrt[3]{5x + 2} - \sqrt[3]{5x - 2})}_{2} = 8.$$

Зважаючи, що за умовою $\sqrt[3]{5x + 2} - \sqrt[3]{5x - 2} = 2$, маємо:

$$4 - 6\sqrt[3]{25x^2 - 4} = 8, \qquad \sqrt[3]{25x^2 - 4} = -\frac{2}{3},$$

звідки $25x^2 - 4 = -\dfrac{8}{27}$, $x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Відповідь: $\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

У деяких випадках доцільно замінити ірраціональне рівняння рівносильною раціональною системою за допомогою введення кількох допоміжних невідомих.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1.$$

Розв'язання. Позначимо $2-x=a^3$; $x-1=b^2$. Додамо ліві й праві частини цих рівнянь і введемо їх в умову рівняння. Дістанемо систему рівнянь, яку розв'язуємо:

$$\begin{cases} a^3+b^2=1, \\ a+b=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} b=1-a, \\ a^3+(1-a)^2=1. \end{cases}$$

Розв'язуючи друге рівняння системи, знайдемо $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-2$ і, повертаючись до підстановки, дістанемо $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=10$.

Відповідь: 1, 2, 10.

Іноді стандартний спосіб розв'язування ірраціональних рівнянь призводить до громіздких перетворень, які можна спростити введенням допоміжного невідомого.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{7x-6}+\sqrt{x+3}=9.$$

Розв'язання. Позначимо $\sqrt{x+3}=y$, $y\ge 0$, тоді $x=y^2-3$ і рівняння набирає вигляду $\sqrt{7y^2-27}+y=9$. Розв'язуючи його, маємо $y^2+3y-18=0$, $y_1=-6$ (не задовольняє), $y_2=3$.

Повертаючись до підстановки, знайдемо $x=6$.

Відповідь: 6.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{x+59}-\sqrt[3]{x-4}=3.$$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{x-4}=y$, тоді $y=y^3+4$ і рівняння набере вигляду

$$\sqrt[3]{y^3+63}-y=3, \text{ або } \sqrt[3]{y^3+63}=y+3.$$

Звідки $y^2 + 3y - 4 = 0$. Розв'язуючи це рівняння, дістаємо $y_1 = -4$, $y_2 = 1$. Повертаючись до підстановки, маємо $x_1 = -60$, $x_2 = 5$.

Відповідь: -60; 5.

Вправи

Розв'язати рівняння:

1. $\sqrt{7-3x} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{x}$.
2. $\sqrt{4x+1} - \sqrt{5-2x} = \sqrt{x+2}$.
3. $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-2}$.
4. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$.
5. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{5+\sqrt{x}} = 1$.
6. $\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12} = 1$.
7. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$.
8. $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x-3} = 0$.

§7. Розв'язування рівнянь різними методами

Вправи

Розв'язати рівняння:

1. $\dfrac{b}{x-a} + \dfrac{a}{x-b} = 2$.
2. $\dfrac{x^2+x-5}{x} + \dfrac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$.
3. $\dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{12}$.
4. $\dfrac{x^2}{a^3} + \dfrac{b^3}{x^2} = \dfrac{b}{a} + \dfrac{b^2}{a^2}$.
5. $\dfrac{x-3}{x-1} + \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{x+6}{x+2} + \dfrac{x-6}{x-2}$.
6. $3\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right) - 7\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

7. $x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} = 4.$

8. $\dfrac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6.$

9. $(x + 3)^3 - (x + 1)^3 = 56.$

10. $4x^2 + 12x + \dfrac{12}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 47.$

11. $\dfrac{(x - a)^2 + x\,(x - a) + x^2}{(x - a)^2 - x\,(x - a) + x^2} = \dfrac{19}{7}.$

12. $1 + \sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 24}} = x.$

13. $\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2.$

14. $\left(\dfrac{x + 5}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + 4\left(\dfrac{x}{x + 5}\right)^{\frac{1}{2}} = 4.$

15. $x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0.$

16. $\sqrt{x^2 + 32} - 2\sqrt[4]{x^2 + 32} = 3.$

17. $x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 4 = 0.$

18. $3\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[3]{x^{-1}} = 2x^{-1}.$

19. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x} + 2} + \dfrac{\sqrt[3]{x} + 3}{5} = 2.$

20. $\dfrac{(5 - x)\sqrt{5 - x} + (x - 3)\sqrt{x - 3}}{\sqrt{5 - x} + \sqrt{x - 3}} = 2.$

21. $\dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - x}} - \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \sqrt{3}.$

22. $\dfrac{\sqrt[3]{x^4} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} = 4.$

23. $\sqrt{x\sqrt[5]{x}} - \sqrt[5]{x\sqrt{x}} = 56.$

24. $\sqrt{10 - x^2} + \sqrt{x^2 + 3} = 5.$

25. $2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 18 = 0.$

26. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3.$

27. $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}.$

28. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}.$

29. $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81.$

30. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{10}{9}.$

31. $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1.$

32. $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9.$

33. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{7}{6}.$

34. $ax^4-x^3+a^2x-a=0.$

35. $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0.$

36. $5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}-22\sqrt[15]{x^7}=0.$

37. $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6.$

38. $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}.$

39. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$

40. $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6.$

41. $(x+\sqrt{x^2-1})^5\cdot(x-\sqrt{x^2-1})^3=1.$

42. $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^3+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2=2.$

43. $\dfrac{\sqrt{(a-x)^2}+\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}{\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}=\dfrac{7}{3}.$

44. $(x+3)^4+(x+5)^4=16.$

45. $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1).$

46. $x^3-x^2-\dfrac{8}{x^3-x^2}=2.$

47. $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0.$

48. $27x^3 + 9x^2 - 48x + 20 = 0.$

49. $4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0.$

50. $x^2 + \dfrac{81x^2}{(9+x)^2} = 40.$

51. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x.$

52. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 1.$

53. $\sqrt[4]{x+8} - \sqrt[4]{x-8} = 2.$

54. $\dfrac{x\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[5]{x^3} - 1} + \dfrac{\sqrt[5]{x^3} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} = 16.$

55. $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{3}.$

56. $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = x - 1.$

57. $\dfrac{\sqrt[7]{x - \sqrt{2}}}{2} - \dfrac{\sqrt[7]{x - \sqrt{2}}}{x^2} = \dfrac{x}{2}\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{x + \sqrt{2}}}.$

58. $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 3.$

59. $6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$

60. $x^3 + x + \sqrt[3]{x^3 + x - 2} = 12.$

Розділ II

Нерівності

§1. Розв'язування нерівностей

Розв'язати нерівність — це означає вказати всі дійсні значення невідомих, для яких ця нерівність справджується.

Для розв'язування нерівностей виду

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n) \lessgtr 0$$

застосовується метод інтервалів. Нагадаємо теорему.

Теорема. *Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на даному проміжку і не має на ньому нулів, то при всіх значеннях x, що належать даному проміжку, функція $f(x)$ зберігає знак.*

Наведемо алгоритм застосування методу інтервалів для розв'язування нерівностей.

1. Знаходимо корені многочлена

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n).$$

2. Відкладаємо знайдені значення коренів многочлена на числовій прямій.

3. Знаходимо знак алгебраїчного виразу на одному з інтервалів.

4. Якщо немає кратних коренів, то знаки чергуються.

5. Записуємо відповідь.

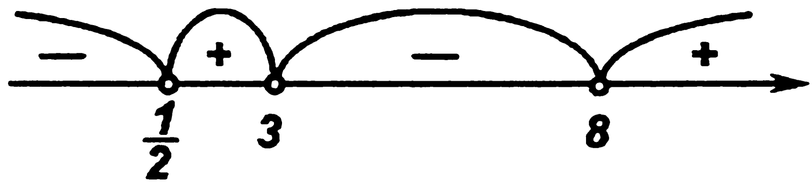
Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$(x - 8)(x - 3)(2x + 1) < 0.$$

Розв'язання. На числовій осі відкладемо корені многочлена $f(x) = (x - 8)(x - 3)(2x + 1)$, $x_1 = 8$, $x_2 = 3$, $x_3 = -\frac{1}{2}$. Визначимо знак многочлена $f(x)$ на одному з утворених проміжків.

На проміжку $\left(-\frac{1}{2};\ 3\right)$ $f(x) > 0$. На решті проміжків знаки чергуються (мал. 3). Записуємо відповідь.

Відповідь: $3 < x < 8$, $x < -\frac{1}{2}$.



Мал. 3

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$(x-2)^{10}(x+3)^{17}(x+1)^{5}(x^2+3)^{17}>0.$$

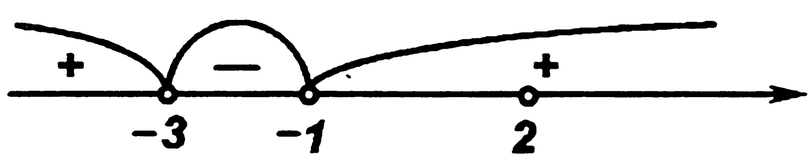
Розв'язання. Перепишемо нерівність у вигляді

$$(x-2)^{10}(x+3)(x+3)^{16}(x+1)(x+1)^{4}(x^2+3)^{17}>0.$$

Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x\neq 2, \\ x\neq -3, \\ x\neq -1, \\ (x+3)(x+1)>0, \end{cases}$$

оскільки при $x\neq 2$, $x\neq -3$, $x\neq -1$ обидві частини нерівності можна поділити на додатний многочлен $(x-2)^{10}(x+3)^{16}(x+1)^{4}(x^2+3)^{17}$, який не впливає на смисл нерівності. Розв'язуючи цю нерівність методом інтервалів (мал. 4), дістанемо, що $x<-3$, $-1<x<2$, $x>2$.



Мал. 4

Відповідь: $x<-3$, $-1<x<2$, $x>2$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\dfrac{x+1}{x-1}\geq\dfrac{x+5}{x+1}$.

Розв'язання. Запишемо нерівність у такому вигляді:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+5}{x+1}\geq 0.$$

Після відповідних перетворень маємо:

$$\frac{2x-6}{(x-1)(x+1)}\leq 0.$$

Утворена нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases}(x-3)(x-1)(x+1) \le 0,\\ x \ne -1,\\ x \ne 1.\end{cases}$$

Розв'язуємо цю нерівність методом інтервалів (мал. 5).

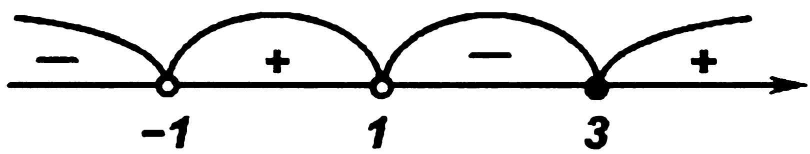


Рис. 5

Відповідь: $x < -1, \ 1 < x \le 3$.

Для розв'язування квадратних нерівностей, дискримінант квадратного тричлена яких менший за нуль, доцільно користуватися правилом, яке випливає з графічного дослідження квадратного тричлена:

1) *Якщо дискримінант квадратного тричлена менший за нуль, то знак квадратного тричлена збігається із знаком коефіцієнта при x^2.*

2) *Якщо дискримінант квадратного тричлена не менший за нуль, то, розклавши його на лінійні множники, розв'язуємо нерівність методом інтервалів.*

Приклад 4. Розв'язати нерівність

$$\frac{(3x^2-2x+4)(x^2-x-6)}{x^2+3x+4} \le 0.$$

Розв'язання. Оскільки дискримінанти тричленів $3x^2-2x+4$ та x^2+3x+4 від'ємні, то їх знаки збігаються з коефіцієнтами при x^2. Отже,

$$3x^2-2x+4 > 0 \text{ та } x^2+3x+4 > 0.$$

Таким чином, дана нерівність рівносильна нерівності $x^2-x-6 \le 0$, $(x-3)(x+2) \le 0$. Звідки $-2 \le x \le 3$.

Відповідь: $-2 \le x \le 3$.

Вправи

Розв'язати нерівності:

1. $(x+3)(x-2) > 0.$
2. $(2x-1)(x-5) \le 0.$
3. $(x+4)(3x-1) < 0.$
4. $(2x-5)(x+6) \ge 0.$
5. $x^2 < 4x.$
6. $(x-3)(x-7) < (x-3)^2.$
7. $(6x-5)(x-8)(x-10)^2 > 0.$
8. $(8-x)(x-2) \ge 0.$
9. $(3-x)(8-x) \ge 0.$
10. $\dfrac{5x-3}{3x+2} \ge 0.$
11. $\dfrac{8-x}{9-x} \le 0.$
12. $x < \dfrac{1}{x}.$
13. $\dfrac{2x+1}{x+2} > 1.$
14. $\dfrac{x-1}{x+3} > 2.$
15. $\dfrac{5x-1}{x+6} \ge 1.$
16. $x^2 - 5x + 6 > 0.$
17. $x^2 - 10x + 25 \ge 0.$
18. $x^2 + 4x + 5 < 0.$
19. $14 - 5x - x^2 < 0.$
20. $\dfrac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0.$
21. $x^2 < -3x.$
22. $x^2 > 2x - 5.$

23. $2x^2 - 1 > x.$

24. $x^2 - 4 < 4 - 2x.$

25. $6 < x^2 - 5x + 12 < 8.$

26. $-8 < x^2 + 8x + 8 < -4.$

27. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) > 0.$

28. $(x + 3)(x + 2)(x - 1)(x - 3) > 0.$

29. $5(x + 3)(x - 2)(x - 3) < 0.$

30. $(x + 3)(x + 2)(x - 1)^2(x - 2)(x^2 + 3x + 5) > 0.$

31. $(x - 3)^{1917}(x + 5)^{1991}(x - 10)^{2000}(x^2 + 4)^{15} > 0.$

32. $(x - 7)^4(x + 3)^5(x - 2)x^6(x + 5)^3 > 0.$

33. $(x - 2)^3(x + 1)^2(x + 3)^4(x - 4)^5(x - 8) > 0.$

34. $(x - 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1)(x^4 - 1) < 0.$

35. $(x + 2)(x - 1)^2(x - 2)(x^2 + 3x + 5) < 0.$

36. $(x - 1)(x^2 + 1)(x^3 - 1)(x^4 + 1) < 0.$

37. $(x^8 - 1)(x^4 - 1) < 0.$

38. $(x^3 - 1)(x - 1) \geq 0.$

39. $x^4 - 13x^2 + 36 > 0.$

40. $x^4 - 29x^2 + 100 \geq 0.$

41. $\dfrac{1}{x - 3} > 2.$

42. $\dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{1}{x + 1} > 3.$

43. $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{2}{x + 3} - \dfrac{3}{x + 2} < 0.$

44. $\dfrac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 3)(x - 4)} > 1.$

45. $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 7x + 10} > 0.$

46. $\dfrac{x^2 - 1}{3x - 7 - 8x^2} > 0.$

47. $\dfrac{(x-1)(x^2-x+1)}{x^3-1} > 0.$

48. $\dfrac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x+3} > 1.$

49. $\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)} > 0.$

50. $\dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^3+2x^2-5x-6} < 0.$

51. $\dfrac{x^3-6x^2+5x+12}{x^4-3x^3+3x^2-3x+2} > 0.$

52. $\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{5}{2+x} < 1.$

53. $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0.$

54. $\dfrac{1}{3x-2-x^2} - \dfrac{3}{7x-4-3x^2} > 0.$

55. $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{3}{x-3}.$

56. $\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25} > 0.$

57. $5x-20 \le x^2 \le 8x.$

58. $x^6-9x^3+8 > 0.$

59. $1 < \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} < 2.$

60. $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0.$

61. $\dfrac{4-x}{x-5} > \dfrac{1}{1-x}.$

62. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \ge 1.$

63. $\dfrac{15}{4+3x-x^2} > 1.$

64. $x^8-6x^7+9x^6-x^2+6x-9 < 0.$

65. $a^4 + a^3 - a - 1 < 0.$

66. $m^3 + m^2 - m - 1 > 0.$

67. $\dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x + 8} \le 0.$

68. $\dfrac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 + 2x + 1} < 0.$

69. $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 1.$

70. $\dfrac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8}{x^2} < 0.$

71. $\dfrac{2 - x}{x^3 + x^2} > \dfrac{1 - 2x}{x^3 - 3x^2}.$

72. $\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{2}{x^2 - x + 1} \le \dfrac{1 - 2x}{x^3 + 1}.$

73. $-9 < x^4 - 10x^2 < 56.$

74. $\dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + 3x - 10} < 0.$

75. $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 2} > 0.$

§2. Розв'язування нерівностей з модулями

Розв'язуючи за означенням модуля нерівності з невідомим під знаком абсолютної величини, маємо:

1. $|f(x)| < a.$

а) Якщо $a \le 0$, нерівність розв'язків не має;

б) Якщо $a > 0$, то дана нерівність еквівалентна нерівності $-a < f(x) < a$.

2. $|f(x)| > a.$

а) Якщо $a \le 0$, то розв'язком нерівності буде область визначення функції $f(x)$;

б) Якщо $a > 0$, то нерівність рівносильна сукупності нерівностей $f(x) > a$, $f(x) < -a$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right| \le 1.$

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна нерівності $-1 \le \dfrac{3x}{x^2-4} \le 1$ або системі нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{x^2-4} \le 1, \\ \dfrac{3x}{x^2-4} \ge -1, \end{cases}$$

звідки

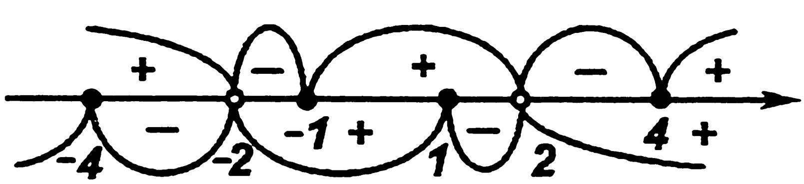
$$\begin{cases} \dfrac{3x}{x^2-4} - 1 \le 0, \\ \dfrac{3x}{x^2-4} + 1 \ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2-3x-4}{(x-2)(x+2)} \ge 0, \\ \dfrac{x^2+3x-4}{(x+2)(x-2)} \ge 0. \end{cases}$$

Дана система нерівностей рівносильна системі

$$\begin{cases} (x-4)(x+1)(x-2)(x+2) \ge 0, \\ (x+4)(x-1)(x-2)(x+2) \ge 0, \\ x \ne \pm 2. \end{cases}$$

Розв'язуємо утворену систему методом інтервалів (мал. 6).

Відповідь: $x \ge 4$, $-1 \le x \le 1$, $x \le -4$.



Мал. 6

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\left|\dfrac{3x+1}{x-5}\right| \ge 1.$

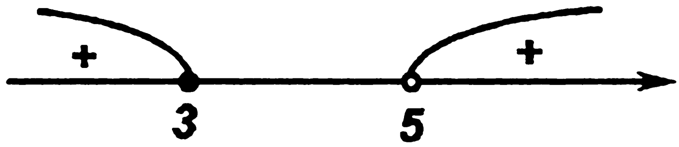
Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності нерівностей $\dfrac{3x+1}{x-5} \ge 1$ та $\dfrac{3x+1}{x-5} \le -1$, або

$$\frac{2x+6}{x-5} \ge 0 \text{ та } \frac{4x-4}{x-5} \le 0.$$

Ці нерівності рівносильні таким системам:

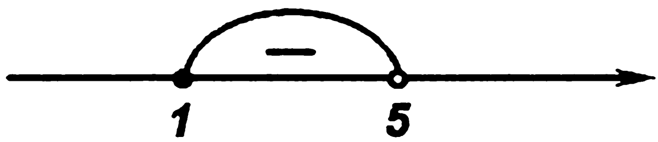
$$\begin{cases}(x+3)(x-5) \ge 0, \\ x \ne 5,\end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases}(x-1)(x-5) \le 0, \\ x \ne 5.\end{cases}$$

Розв'язуємо нерівності методом інтервалів (мал. 7, 8).



Мал. 7

Відповідь: $x \le -3,\ \ 1 \le x < 5,\ \ x > 5.$



Мал. 8

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\dfrac{|x+3|}{x^2+5x+6} \ge 2.$

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності систем:

$$\begin{cases}\dfrac{x+3}{x^2+5x+6} \ge 2, \\ x+3 > 0, \\ x \ne -2\end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases}\dfrac{-(x+3)}{x^2+5x+6} \ge 2, \\ x+3 < 0, \\ x \ne -2.\end{cases}$$

Розв'язуємо ці сукупності нерівностей:

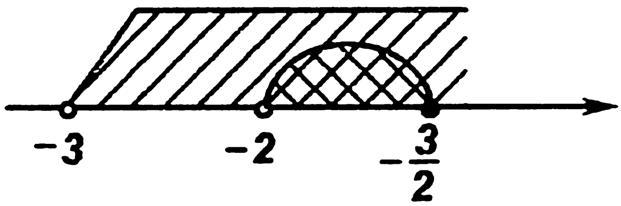
$$\begin{cases}\dfrac{x+3}{(x+3)(x+2)} \ge 2, \\ x > -3, \\ x \ne -2;\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{-(x+3)}{(x+3)(x+2)} \ge 2, \\ x < -3, \\ x \ne -2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+2} - 2 \ge 0, \\ x \ne -2, \\ x > -3;\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{1}{x+2} \le -2, \\ x < -3, \\ x \ne -2;\end{cases}$$

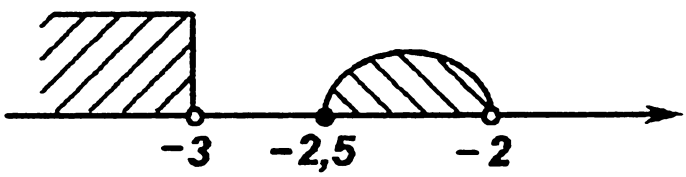
$$\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x+2} \le 0, \\ x > -3, \\ x \ne -2;\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{2x+5}{x+2} \le 0, \\ x \ne -2, \\ x < -3.\end{cases}$$

$-2 < x \le -\dfrac{3}{2}$.	Розв'язків немає.

Розв'язуємо цю сукупність нерівностей методом інтервалів (мал. 9, 10).



Мал. 9



Мал. 10

Відповідь: $-2 < x \le -\dfrac{3}{2}$.

Вправи

Розв'язати нерівності:

1. $|4x - 1| < 11$.
2. $|2x + 5| > 9$.
3. $|2x - 8| \le -9$.
4. $|5x + 3| \ge -4$.
5. $\left|\dfrac{3x - 2}{x - 1}\right| < 2$.
6. $\left|\dfrac{3x + 2}{x - 1}\right| > 3$.
7. $\left|\dfrac{x + 2}{x - 1}\right| \ge 1$.
8. $\left|\dfrac{2x - 1}{x - 1}\right| > 2$.
9. $\left|\dfrac{x^2 - 1}{x + 2}\right| < 1$.
10. $\left|\dfrac{2x - 3}{x^2 - 1}\right| \le 2$.
11. $\left|\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}\right| < 1$.
12. $|2x^2 - 9x + 15| \ge 20$.
13. $|x^2 - 5x| < 6$.
14. $\left|\dfrac{3x + 1}{x - 3}\right| < 3$.
15. $\dfrac{|x - 3|}{x^2 - 5x + 6} \ge 2$.
16. $\left|\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right| \le 1$.

17. $|x-6| > |x^2-5x+9|$.

18. $|x^3-1| > 1-x$.

19. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geq 2x$.

20. $|x-1|+|2-x| > 3+x$.

21. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} < 0$.

Розв'язати системи нерівностей:

22. $\begin{cases} |x^2+5x| < 6, \\ |x+1| \leq 1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} |x^2-4x| < 5, \\ |x+1| < 3. \end{cases}$

§3. Розв'язування ірраціональних нерівностей

Ірраціональними нерівностями *називаються нерівності виду $f_1(x) \lesseqgtr f_2(x)$, де $f_1(x)$ і $f_2(x)$ — деякі алгебраїчні функції, причому принаймні одна з них — ірраціональна функція.*

Звичайно розв'язування ірраціональної нерівності зводять до розв'язування рівносильної їй сукупності систем раціональних нерівностей.

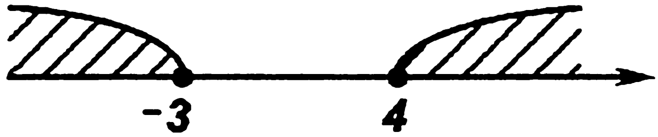
Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$(25-x^2)\sqrt{x^2-x-12} \geq 0.$$

Розв'язання. Область допустимих значень нерівності

$$x^2-x-12 \geq 0, \qquad (*)$$

$x_1 = 4$, $x_2 = -3$. Розв'язуючи нерівність (*), маємо (мал. 11) $x \geq 4$, $x \leq -3$.

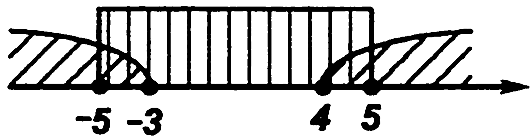


Мал. 11

Другий множник даної нерівності невід'ємний, тому множину його розв'язків дістанемо як множину розв'язків систем нерівностей

$$\begin{cases} 25-x^2 \geq 0, \\ x^2-x-12 \geq 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x^2-25 \leq 0, \\ x^2-x-12 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему нерівностей, дістаємо (мал. 12): $4 \le x \le 5$, $-5 \le x \le -3$.



Мал. 12

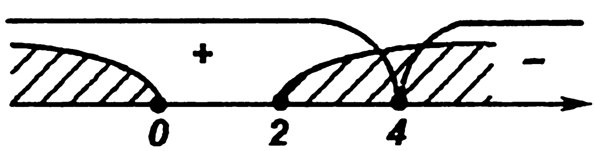
Відповідь: $4 \le x \le 5$, $-5 \le x \le -3$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$4 - x < \sqrt{x^2 - 2x}.$$

Розв'язання. Область допустимих значень даної нерівності

$$x^2 - 2x \ge 0, \ \ x(x-2) \ge 0 \ \ (\text{мал. } 13).$$



Мал. 13

Звідки $x \ge 2$ та $x \le 0$. Розглянемо випадки:

1. $2 \le x \le 4$ та $x \le 0$. Обидві частини нерівності невід'ємні, тому після піднесення їх до квадрата дістаємо рівносильну нерівність

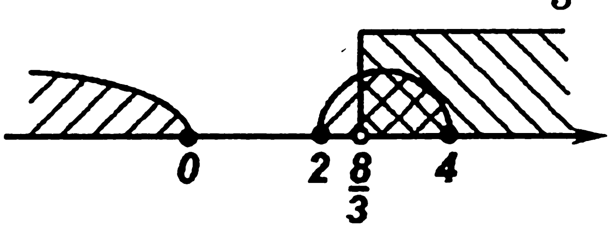
$$(4-x)^2 < x^2 - 2x, \ \ \text{або} \ \ 16 - 8x + x^2 < x^2 - 2x,$$

звідки $x > \dfrac{8}{3}$.

Отже, множина розв'язків нерівності рівносильна сукупності систем

$$\begin{cases} 2 \le x \le 4, \\ x > \dfrac{8}{3} \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x \le 0, \\ x > \dfrac{8}{3}, \end{cases}$$

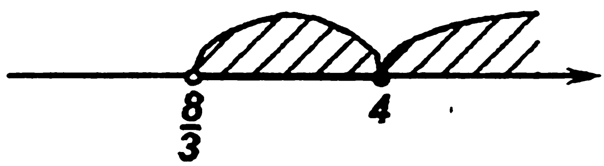
розв'язуючи які (мал. 14), знаходимо $\dfrac{8}{3} < x \le 4$.



Мал. 14

2. $x > 4$. Ліва частина нерівності від'ємна, а права — додатна. Тому нерівність справджується при будь-якому значенні x, що належить даному проміжку $x > 4$.

Поєднуючи отримані розв'язки: $x > 4$ та $\frac{8}{3} < x \leq 4$ (мал. 15), маємо $x > \frac{8}{3}$.



Мал. 15

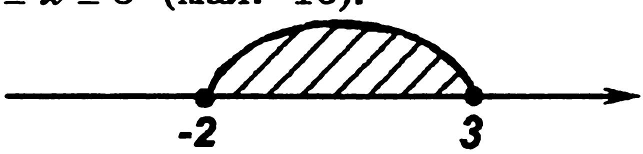
Приклад 3. Розв'язати нерівність

$$3\sqrt{6 + x - x^2} > 4x - 2.$$

Розв'язання. Знаходимо область допустимих значень даної нерівності. Маємо: $6 + x - x^2 \geq 0$, або

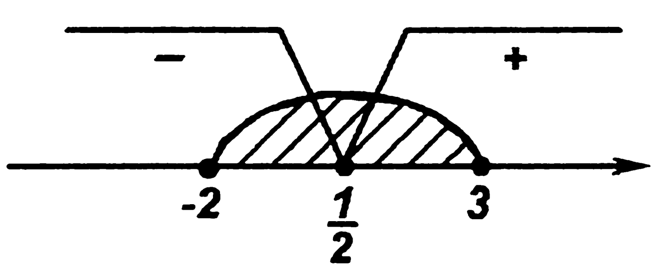
$$x^2 - x - 6 \leq 0. \qquad (*)$$

Оскільки $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ — корені квадратного тричлена $x^2 - x - 6$, то розв'язком нерівності (*) є числовий відрізок $-2 \leq x \leq 3$ (мал. 16).



Мал. 16

Розглянемо усі можливі випадки (мал. 17).



Мал. 17

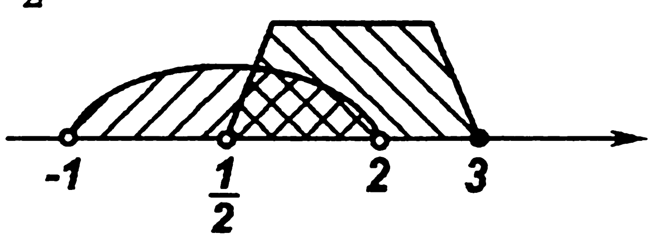
1. $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Ліва частина нерівності невід'ємна, а права — від'ємна. Тому нерівність виконується при

будь-якому значенні x, що належить проміжку $-2 \le x \le \frac{1}{2}$.

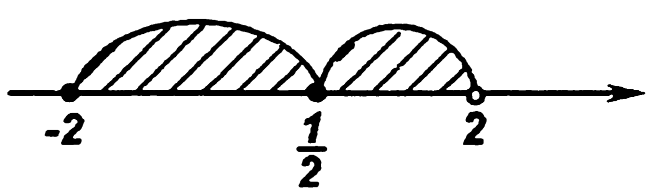
2. $\frac{1}{2} < x \le 3$. Обидві частини нерівності невід'ємні, тому після піднесення до квадрата дістаємо рівносильну нерівність: $9\,(6 + x - x^2) > (4x - 2)^2$,

$$54 + 9x - 9x^2 > 16x^2 - 16x + 4, \qquad x^2 - x - 2 < 0.$$

Корені квадратного тричлена $x^2 - x - 2$ дорівнюють $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Розв'язком даної нерівності на розглянутому числовому проміжку є числовий відрізок $\frac{1}{2} < x < 2$ (мал. 18). Об'єднуючи одержані результати $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ і $\frac{1}{2} < x < 2$, отримаємо $-2 \le x < 2$ (мал. 19).



Мал. 18



Мал. 19

Приклад 4. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{2-x} > 1.$$

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень даної нерівності.

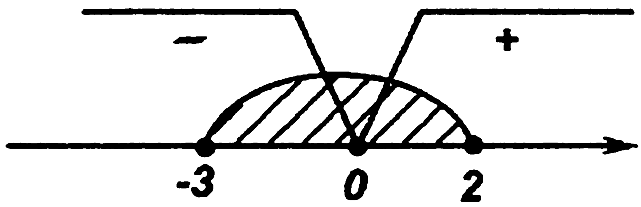
$$\begin{cases} x + 3 \ge 0, \\ 2 - x \ge 0. \end{cases}$$

Маємо $-3 \le x \le 2$. Запишемо дану нерівність у вигляді $\sqrt{x+3} > \sqrt{2-x} + 1$.

Обидві частини даної нерівності невід'ємні, тому, підносячи їх до квадрата, дістаємо нерівність, рівносильну даній.

$$x + 3 > 2 - x + 2\sqrt{2 - x} + 1, \quad x > \sqrt{2 - x}.$$

Розглянемо такий проміжок (мал. 20) і всі можливі випадки.



Мал. 20

1. $-3 \le x \le 0$. Ліва частина нерівності від'ємна, а права — додатна. Тому для будь-якого значення x із розглядуваного проміжку нерівність не виконується.

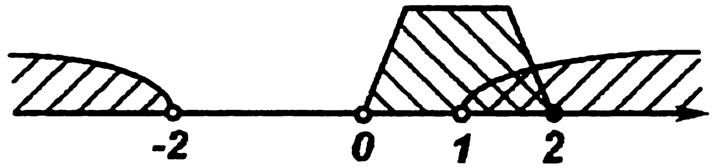
2. $0 < x \le 2$. Обидві частини нерівності невід'ємні, тобто після піднесення до квадрата дістаємо рівносильну нерівність

$$\begin{cases} x^2 > 2 - x, \\ x^2 + x - 2 > 0. \end{cases}$$

Таким чином, множина розв'язків нерівності — це множина розв'язків системи

$$\begin{cases} 0 < x \le 2, \\ x^2 + x - 2 > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему та ілюструючи проміжки існування її розв'язків (мал. 21), дістаємо: $1 < x \le 2$.



Мал. 21

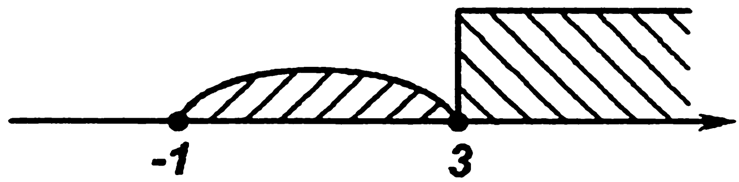
Приклад 5. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 3} - 2\sqrt{x^2 + 1} < -5\sqrt{x - 3}.$$

Розв'язання. Область допустимих значень нерівності визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} -x^2 + 2x + 3 \ge 0, \\ x^2 + 1 \ge 0, \\ x - 3 \ge 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \le 0, \\ x^2 + 1 \ge 0, \\ x \ge 3. \end{cases}$$

Корені квадратного тричлена $x^2 - 2x - 3$ дорівнюють $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ (мал. 22).



Мал. 22

Друга нерівність системи виконується при будь-яких значеннях x. Розв'язком даної системи нерівностей є $x = 3$. Підставивши це значення у вихідну нерівність, дістанемо правильну числову тотожність: $-2\sqrt{10} < 0$.

Відповідь: $x = 3$.

Існує й загальний метод розв'язування нерівностей. Його обгрунтуванням є теорема, сформульована на с. 57.

Розв'яжемо нерівність $f(x) \lesseqgtr 0$, де $f(x)$ — довільна функція.

1. Знаходимо область допустимих значень (ОДЗ) функції $f(x)$.

2. Визначаємо на основі рівносильних перетворень всі її корені, тобто розв'язуємо рівняння $f(x) = 0$.

3. За допомогою знайдених коренів розбиваємо ОДЗ функції $f(x)$ на проміжки знакосталості.

4. Визначаємо, який знак має функція $f(x)$ на кожному з проміжків знакосталості. Отже, знаходимо множину значень аргументу x, при яких функція $f(x)$ набуває додатних значень, тобто розв'язуємо нерівність $f(x) > 0$. Аналогічно розв'язуємо нерівність $f(x) < 0$.

Цей спосіб можна використовувати для розв'язування будь-яких нерівностей $f(x) \lesseqgtr 0$, якщо можна знайти ОДЗ функції $f(x)$, а також її корені.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\dfrac{3 - x}{\sqrt{15 - x}} < 1$.

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді

$$\frac{3 - x - \sqrt{15 - x}}{\sqrt{15 - x}} < 0.$$

1. Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{3 - x - \sqrt{15 - x}}{\sqrt{15 - x}}$ і знайдемо її ОДЗ: $15 - x > 0$, $x < 15$.

2. Знаходимо корені функції $f(x)$:

$$\frac{3 - x - \sqrt{15 - x}}{\sqrt{15 - x}} = 0.$$

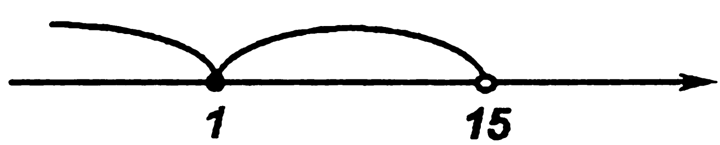
Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x < 15, \\ \sqrt{15 - x} = 3 - x, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x < 15, \\ 3 - x > 0, \\ (\sqrt{15 - x}\,)^2 = (3 - x)^2. \end{cases}$$

Після перетворювання дістанемо

$$\begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 5x - 6 = 0, \end{cases} \qquad x = -1.$$

Отже, ОДЗ функції ділиться на два проміжки знакосталості (мал. 23).



Мал. 23

3. Визначаємо знаки функції $f(x)$ на кожному проміжку.

а) $x < -1$; $f(-10) = \dfrac{13 - 5}{5} > 0$, тобто $f(x) > 0$;

б) $-1 < x < 15$; $f(0) = \dfrac{3 - \sqrt{15}}{\sqrt{15}} < 0$, тобто $f(x) < 0$.

Розв'язком вихідної нерівності будуть ті проміжки, де $f(x) < 0$.

Відповідь: $-1 < x < 15$.

Вправи

Розв'язати нерівності:

1. $\sqrt{x} > -1$.
2. $\sqrt{2x - 5} > 7$.

3. $\sqrt{\dfrac{1-x}{2x-5}} < 3.$

4. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} > 1.$

5. $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}.$

6. $\sqrt{x+2} > x.$

7. $\sqrt{2x+9} < 3-x.$

8. $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x.$

9. $\sqrt{x^2-3x-10} > x-2.$

10. $(1+x)\sqrt{x^2+1} > x^2-1.$

11. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-5} \le \sqrt{5-x}.$

12. $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} > -\sqrt{x-5}.$

13. $\sqrt{3x-x^2} < 4-x.$

14. $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0.$

15. $\sqrt{x^2-x-12} < x.$

16. $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0.$

17. $\sqrt{9x-20} < x.$

18. $\dfrac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}} > 0.$

19. $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2.$

20. $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}.$

21. $\sqrt{x^2-4x} > x-3.$

22. $(x-3)\sqrt{x^2+4} \le x^2-9.$

23. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x+4} > 0.$

24. $\sqrt{x^3+3x+4} > -2.$

25. $\sqrt{x^2-9x+20} \le \sqrt{x-1} \le \sqrt{x^2-13}.$

Розв'язати систему нерівностей:

26. $\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4. \end{cases}$

Розв'язати нерівності:

27. $\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x+1} < 3.$

28. $\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} < 1.$

29. $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \dfrac{1}{x}.$

30. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-13}} + \sqrt{x-3} > \dfrac{5}{\sqrt{x-3}}.$

31. $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x.$

32. $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1.$

§4. Доведення нерівностей

При доведенні нерівностей часто роблять логічну помилку. Вона полягає в тому, що, застосовуючи різні перетворення і діставши очевидну нерівність (наприклад, $(a-b)^2 \geq 0$), роблять висновок: «з цього випливає, що нерівність доведена». Тобто ми справді довели, що, коли припустити, що вихідна нерівність правильна, то отримана в результаті перетворень нерівність теж правильна. Адже правильність отриманої нерівності очевидна, а про вихідну нерівність, яку треба було довести, ми так нічого й не знаємо.

Правильно було б проводити міркування в оберненому порядку, тобто взяти деяку очевидно правильну нерівність і виконати такі перетворення, що приводять до нерівності, яку треба довести. З'ясуємо, як це робити. Будемо вважати вище розглядуване перетворення вихідної нерівності як пошук можливого доведення. Якщо в результаті такого пошуку вдалося прийти до очевидно правильної нерівності, то можна починати справжнє доведення. Від цієї очевидної нерівності за допомогою тих самих перетворень, тільки в оберненому порядку, перейти до вихідної нерівності.

Слід зазначити, що, коли при зведенні даної нерівності до очевидної кожного разу заміняти нерівність на рівносильну їй, перевіряючи і підкреслюючи це, то обернені перетворення не потрібні.

Приклад 1. Довести, що при $a > 0$ справджується нерівність $a + \frac{4}{a} \geq 4$.

Доведення. 1-й спосіб. (Пряме доведення).

Для будь-якого дійсного числа a квадрат різниці $a - 2$ є невід'ємним числом, тобто $(a - 2)^2 \geq 0$ — правильна нерівність. Розкривши дужки в лівій частині цієї нерівності, дістанемо правильну нерівність: $a^2 - 4a + 4 \geq 0$.

Оскільки за умовою $a > 0$, то, поділивши всі члени останньої нерівності на a, дістанемо також правильну нерівність: $a - 4 + \frac{4}{a} \geq 0$. Додамо до обох частин цієї нерівності число 4, тоді дістанемо правильну нерівність: $a + \frac{4}{a} \geq 4$. Що й треба було довести.

2-й спосіб. (Обернене доведення).

Припустимо, що та нерівність, яку треба довести, правильна, тобто

$$a + \frac{4}{a} \geq 4 \text{ при } a > 0. \qquad (*)$$

Тоді, помноживши всі члени цієї нерівності на $a > 0$, дістанемо рівносильну нерівність:

$$a^2 + 4 > 4a. \qquad (**)$$

Нерівність (**) рівносильна такій нерівності:

$$a^2 + 4 - 4a \geq 0. \qquad (***)$$

А остання нерівність у свою чергу рівносильна нерівності

$$(a - 2)^2 \geq 0. \qquad (****)$$

Нерівність (****) правильна, оскільки квадрат будь-якого дійсного числа є числом невід'ємним. Тоді правильна й вихідна нерівність (*), оскільки вона рівносильна нерівності (****).

3-й спосіб. (Доведення від супротивного).

Доведення від супротивного грунтується на такому логічному законі: *якщо з висловлення А випливає висловлення В і висловлення В — хибне, то хибне також і висловлення А.*

Отже, повернемося до розглядуваної нерівності. Протилежною до нерівності $a + \frac{4}{a} \geq 4$ є нерівність

$$a + \frac{4}{a} < 4. \qquad (*)$$

Припустимо, що нерівність (*) правильна. Помноживши обидві частини цієї нерівності на $a > 0$, дістанемо рівносильну нерівність $a^2 + 4 < 4a$, з якої випливає, що

$$a^2 + 4 - 4a < 0, \text{ або } (a - 2)^2 < 0. \qquad (**)$$

Нерівність (**) є наслідком нерівності (*), але вона хибна, оскільки квадрат дійсного числа $a - 2$ не може бути від'ємним числом. Отже, хибна й нерівність (*). Тому правильна протилежна до неї нерівність, а саме $a + \frac{4}{a} \geq 4$, що й треба було довести.

Приклад 2. Довести, що для будь-яких дійсних x і y

$$x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3 > 0.$$

Розв'язання. Розглянемо ліву частину нерівності як квадратний тричлен щодо x:

$$A = x^2 + 2x\,(1 - 2y) + (5y^2 - 6y + 3).$$

Знайдемо дискримінант цього тричлена:

$$D = (2\,(1 - 2y))^2 - 4\,(5y^2 - 6y + 3) =$$

$$= 4\,(-\,y^2 + 2y - 2) = -\,4\,((y - 1)^2 + 1) < 0.$$

Оскільки дискримінант квадратного тричлена від'ємний для будь-яких y, то знак квадратного тричлена збігається зі знаком коефіцієнта при x^2, тобто він додатний для всіх x та y, що й треба було довести.

Приклад 3. Довести, що при будь-якому додатному a справджується нерівність $\sqrt{a} + \sqrt{a+2} < 2\sqrt{a+1}$.

Розв'язання. Запишемо дану нерівність у вигляді

$$\sqrt{a+2} - \sqrt{a+1} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a}.$$

Перенесемо ірраціональність із чисельника в знаменник. Маємо:

$$\frac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}} < \frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}.$$

Здобута нерівність правильна при будь-яких додатних значеннях a. Вона утворилася з попередніх шляхом рівносильних перетворень, тобто правильна й нерівність, яку треба було довести.

Приклад 4. Довести, що в будь-якому трикутнику подвоєна сума всіх медіан більша, ніж сума всіх його сторін.

Розв'язання. Позначимо сторони трикутника через a, b, c, а відповідні їм медіани m_a, m_b, m_c. Розглянемо трикутник, основою якого є сторона c, а вершина міститься в точці перетину медіан. За властивостями сторін трикутника маємо:

$$\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c$$

або

$$2m_a + 2m_b > 3c,$$

$$2m_b + 2m_c > 3a,$$

$$2m_a + 2m_c > 3b.$$

Додавши утворені нерівності, дістанемо:

$$4m_a + 4m_b + 4m_c > 3\,(a + b + c),$$

$$2\,(m_a + m_b + m_c) > \frac{3}{2}(a + b + c).$$

Посилюючи утворену нерівність, матимемо:

$$2\,(m_a + m_b + m_c) > a + b + c,$$

що й треба було довести.

Приклад 5. Довести, що для будь-яких значень x справджується нерівність $x^{18} - x^{17} + x^6 - x + 1 > 0$.

Розв'язання. Визначимо знак лівої частини нерівності на кожному з проміжків $x \le 0$, $0 < x < 1$, $x \ge 1$.

1. Якщо $a \le 0$, то всі парні степені x невід'ємні, $a - x^{17}$ та x набувають також невід'ємних значень. Отже,

ліва частина даної нерівності на цьому проміжку набуває додатних значень і нерівність справджується.

2. Якщо $0 < x < 1$, то, перетворюючи ліву частину нерівності

$$x^{18} - x^{17} + x^6 - x + 1 = x^{18} + x^6(1 - x^{11}) + (1 - x),$$

переконуємося, що на цьому проміжку ліва частина нерівності також набуває додатних значень. Отже, дана нерівність на проміжку (0; 1) справджується.

3. Якщо $x \geq 1$, то, перетворюючи ліву частину нерівності

$$x^{18} - x^{17} + x^6 - x + 1 = x^{17}(x - 1) + x(x^5 - 1) + 1,$$

переконуємося, що, оскільки вирази у дужках набувають невід'ємних значень, то на цьому проміжку дана нерівність також справджується.

Отже, на кожному з розглянутих проміжків дана нерівність справджується, тобто вона справджується при будь-якому значенні x. Що й треба було довести.

Вправи

Довести нерівності:

1. $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, де $a > 0$, $b > 0$.

2. $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

3. $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

4. $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq 4$, де $a > 0$, $b > 0$.

5. $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

6. $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

7. $a^2cd + b^2ad + c^2ab + d^2bc \geq 4abcd$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

8. $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

9. $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

10. $(a+b+c+d)^4 \geq 256abcd$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

11. $(a_1 + a_2 + a_3)^2 \le 3\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$.

12. $\sqrt{(a + c)(b + d)} \ge \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

13. $\left(\dfrac{a + b + c}{3}\right)^2 \ge \dfrac{ab + ac + bc}{3}$.

14. $a + b + c \ge \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$, де $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$.

15. $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc$, де $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$.

16. $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \ge abc\,(a + b + c)$, де $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$.

17. $a^4 + b^4 + c^4 \ge abc\,(a + b + c)$, де $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$.

18. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \ge 2$, $a > 0$, $b > 0$.

19. $\dfrac{a + b}{c} + \dfrac{b + c}{a} + \dfrac{c + a}{b} \ge 6$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

20. $\dfrac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \ge 2$.

21. $a^2 + ab + b^2 \ge 0$.

22. $a^2 + c^2 \ge 2b^2$, якщо $a : b = b : c$.

23. $x^3 + y^3 \ge xy^2 + x^2y$, де $x > 0$, $y > 0$.

24. $a^4 + b^4 \ge a^3b + ab^3$.

25. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \ge 2\,(a + b + c)$.

26. $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 \ge 0$, де $x > 0$, $y > 0$.

27. $3\,(1 + a^2 + a^4) \ge (1 + a + a^2)^2$.

28. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \le \dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{a^2}$, якщо $a > 0$, $b > 0$.

29. $(a + b + c)^2 \ge a(b + c - a) + b(a + c - b) + c(a + b - c)$.

30. $b^2 + a^4 - ab \ge a^3b + 4a^2b$, де $ab < 0$.

31. $a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4 \ge 6a^2b^2$, де $ab > 0$.

32. $x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 9 \ge 0$.

33. $2a^2 + b^2 + c^2 \ge 2a\,(b + c)$.

34. $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + a^2 + a\,(x + y + z + u) \ge 0$.

35. $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 \ge 2x + 12y + 6z$.

36. $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$

37. $1 + 2x^4 \geq 2x^3 + x^2.$

38. $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geq 6abc.$

39. Довести, що при $m > -1$ $\quad m + \dfrac{4}{m^2} \geq 3.$

40. Порівняти за величиною $x^3 + 1$ та $x^2 + x$, де x — дійсні числа.

41. Довести нерівність $ab + ac + bc > 3abc$, де a, b і c — додатні числа, менші за 1.

42. $\dfrac{a+b}{1+a+b} < \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}$, де $a > 0$, $b > 0$.

43. $(1 - x)(1 - y)(1 - z) \geq 8xyz$, якщо x, y, z — додатні числа і $x + y + z = 1$.

44. $a^8 + b^8 \geq \dfrac{1}{128}$, якщо $a + b \geq 1$.

45. $a^2 + 4b^2 \geq \dfrac{1}{5}$, якщо $4b + a = 1$.

46. $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$, якщо $a + b + c = 1$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

47. $\sqrt{6a+1} + \sqrt{6b+1} + \sqrt{6c+1} < 9$, якщо $a + b + c = 2$ та $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

48. $\dfrac{1}{a+b-c} + \dfrac{1}{b+c-a} + \dfrac{1}{c+a-b} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$, де a, b і c — довжини сторін трикутника.

49. $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$, де a, b і c — довжини сторін трикутника.

50. $abc \geq (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)$, якщо a, b і c — довжини сторін трикутника.

51. Довести, що $a + b \leq \sqrt{2}\, c$, де a і b — катети, а c — гіпотенуза прямокутного трикутника.

52. Довести, що куб гіпотенузи прямокутного трикутника більше від суми кубів його катетів.

53. $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2} < 1$, де $n > 1$.

54. $\dfrac{1}{u+1} + \dfrac{1}{u+2} + \dfrac{1}{u+3} + \dots + \dfrac{1}{2u} > \dfrac{1}{2}$, де $u > 2$.

§5. Задачі на порівняння виразів

При розв'язуванні задач на порівняння числових виразів використовується знак $\vee$. Він означає, що порівнюються два числа і невідомо, яке між ними співвідношення. Це записується так: $a \vee b$. Якщо ми зробили рівносильне перетворення, тобто знак нерівності не змінився, то залишається знак $\vee$. Якщо знак нерівності змінився, то знак $\vee$ замінюється на знак $\wedge$. Так робимо доти, доки не прийдемо до очевидної нерівності. Зрозуміло, що коли знак $\vee$ замінює собою знак $<$, то знак $\wedge$ замінює собою знак $>$ і навпаки.

Приклад 1. Порівняти: $A = \sqrt[3]{2}$ і $B = \sqrt[7]{5}$.

Розв'язання. $\sqrt[3]{2} \vee \sqrt[7]{5}$, $\sqrt[21]{2^7} \vee \sqrt[21]{5^3}$,

$$\sqrt[21]{128} \vee \sqrt[21]{125}.$$

Очевидно, що $\sqrt[21]{128} > \sqrt[21]{125}$. Тому знак $\vee$ заміняє знак $>$, тобто $A > B$.

Приклад 2. Порівняти: $A = \sqrt{101} - \sqrt{35}$ і $B = 4$.

Розв'язання. $\sqrt{101} - \sqrt{35} \vee 4$.

$$\sqrt{101} \vee \sqrt{35} + 4.$$

Обидві частини нерівності додатні, тому

$$(\sqrt{101})^2 \vee (\sqrt{35} + 4)^2,$$

$$101 \vee 51 + 8\sqrt{35},$$

$$50 \vee 8\sqrt{35},$$

$$2500 \vee 2240.$$

Очевидно, що $2500 > 2240$. Тому $A > B$.

Приклад 3. Порівняти:

$$A = \sqrt{8 - \sqrt{15}},\ B = \frac{1}{2}(\sqrt{30} - \sqrt{2}).$$

Розв'язання. Обидві частини нерівності додатні, тому

$$\sqrt{8 - \sqrt{15}} \vee \frac{1}{2}(\sqrt{30} - \sqrt{2}),$$

$$(\sqrt{8-\sqrt{15}}\,)^2 \vee \left(\frac{1}{2}(\sqrt{30}-\sqrt{2}\,)\right)^2,$$

$$(8-\sqrt{15}\,) \vee \frac{1}{4}(32-2\sqrt{60}\,),$$

$$8-\sqrt{15} \vee 8-\frac{1}{2}\sqrt{60}, \text{ або } 8-\sqrt{15}=8-\sqrt{15}.$$

Звідси $A = B$.

Приклад 4. Порівняти: $A = 3^{34}$ і $B = 2^{51}$.

Розв'язання. $3^{34} \vee 2^{51}$,

$$3^{2\cdot17} \vee 2^{3\cdot17}, \qquad 9^{17} \vee 8^{17}.$$

Очевидно, що $9^{17} > 8^{17}$. Отже, $A > B$.

Приклад 5. Порівняти: $A = \frac{1}{4}$ і $B = \frac{\sqrt{5}+1}{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$.

Розв'язання. $\frac{1}{4} \vee \frac{\sqrt{5}+1}{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$. Обидві частини нерівності додатні. Тому $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \vee \left(\frac{\sqrt{5}+1}{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right)^2$, або

$$\frac{1}{16} \vee \frac{6+2\sqrt{5}}{25\,(10-2\sqrt{5}\,)},$$

$$\frac{1}{16} \vee \frac{(6+2\sqrt{5}\,)\,(10+2\sqrt{5}\,)}{25\cdot 80},$$

$$\frac{1}{16} \vee \frac{80+32\sqrt{5}}{25\cdot 80},$$

$$125 \vee 80+32\sqrt{5},$$

$$45 \vee 32\sqrt{5},$$

$$2025 \vee 5120.$$

Очевидно, що $2025 < 5120$. Звідси $A < B$.

Приклад 6. Порівняти:

$$A = \frac{10^{1997}+1}{10^{1998}+1} \text{ і } B = \frac{10^{1998}+1}{10^{1999}+1}.$$

Розв'язання. $\dfrac{10^{1997}+1}{10^{1998}+1} \vee \dfrac{10^{1998}+1}{10^{1999}+1}$,

$$\frac{10^{1997}+1}{10^{1998}+1} - 1 \vee \frac{10^{1998}+1}{10^{1999}+1} - 1,$$

$$\frac{10^{1997}-10^{1998}}{10^{1998}+1} \vee \frac{10^{1998}-10^{1999}}{10^{1999}+1},$$

$$\frac{10^{1997}(1-10)}{10^{1998}+1} \vee \frac{10^{1998}(1-10)}{10^{1999}+1},$$

$$\frac{1}{10^{1998}+1} \wedge \frac{10}{10^{1999}+1},$$

$$\frac{1}{10^{1998}+1} \wedge \frac{1}{10^{1998}+0{,}1}.$$

Очевидно, що $\dfrac{1}{10^{1998}+1} < \dfrac{1}{10^{1998}+0{,}1}$, але оскільки знак нерівності у процесі розв'язування змінювався на протилежний, то $A > B$.

Вправи

Порівняти:

1. $A = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, $B = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.
2. $A = (\sqrt{7} + \sqrt{2})^9$, $B = 2^{18}$.
3. $A = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{51}$, $B = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^{51}$.
4. $A = 202^{303}$, $B = 303^{202}$.
5. $A = \dfrac{\sqrt{5}+1}{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$, $B = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.
6. $A = \sqrt[3]{10} + \sqrt{8}$, $B = 5$.
7. $A = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$, $B = \sqrt{1{,}5}$.

Розділ III

Системи алгебраїчних рівнянь

§1. Системи лінійних рівнянь

Систему лінійних рівнянь з двома невідомими записують у вигляді:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

тобто у лівих частинах рівнянь залишають члени, що містять невідомі, а в правих — вільні члени.

Розв'язати систему рівнянь на даній числовій множині означає знайти всі її розв'язки, які належать цій множині, або довести, що в цій області система розв'язків не має.

Дві системи рівнянь називаються рівносильними, якщо всі розв'язки однієї системи є розв'язками другої і навпаки.

Прийоми розв'язування системи двох лінійних рівнянь

I. Спосіб підстановки. З одного із рівнянь системи виражають одну невідому через другу й знайдений вираз підставляють у друге рівняння системи. Наприклад, розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 9, \\ 3x + 7y = -11. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо

$$x = \frac{2y + 9}{5}. \qquad (*)$$

Підставивши замість x вираз (*) в друге рівняння системи, знаходимо:

$$3\left(\frac{2y + 9}{5}\right) + 7y = -11.$$

Звідси дістаємо $y = -2$.

Підставляючи знайдене значення y у рівняння (*), маємо $x = \dfrac{-4 + 9}{5} = 1.$

Відповідь: (1; −2).

II. Спосіб додавання. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 5y = 5, \\ 3x - 2y = 13. \end{cases}$$

Помножимо всі члени першого рівняння на 2, а другого на −5. Тоді коефіцієнти при y в утворених рівняннях будуть протилежними числами:

$$\begin{cases} 4x - 10y = 10, \\ -15x + 10y = -65. \end{cases}$$

Тепер почленне додавання приведе до рівняння з однією змінною $-11x = -55$. Звідси $x = 5$. Підставивши в перше рівняння значення $x = 5$, знаходимо значення y: $10 - 5y = 5$, $y = 1$.

Відповідь: (5; 1).

III. Спосіб порівняння. Цей спосіб полягає в знаходженні значення однієї із змінних (наприклад, x) з кожного рівняння системи. Далі, прирівнюючи знайдені для x вирази, матимемо рівняння з однією змінною.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 4y = 2, \\ 4x + 3y = 14. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} x = \dfrac{4y + 2}{5}, & (*) \\ x = \dfrac{14 - 3y}{4}. & (**) \end{cases}$$

Тоді $\dfrac{4y + 2}{5} = \dfrac{14 - 3y}{4}$, звідки $y = 2$.

Підставляючи знайдене значення y в будь-яке з рівнянь системи (*) або (**), дістанемо $x = 2$.

Відповідь: (2; 2).

Розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою визначників

Розглянемо систему лінійних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

Якщо $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то вона має єдиний розв'язок:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Вираз $a_1b_2 - a_2b_1$ умовимося позначати символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, який називається ***визначником другого порядку***.

Отже,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

За допомогою визначників розв'язання даної системи можна записати у вигляді формул:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Визначник $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta$ назвемо ***головним***, ***визначники*** $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_x$ *і* $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_y$ ***відповідно визначниками для*** x ***та*** y.

Отже, $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$ і $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$. Ці формули для знаходження розв'язків системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими називаються ***формулами Крамера***.

Як бачимо, головний визначник складається з відповідних коефіцієнтів при невідомих в цій системі.

Визначник для кожного з невідомих Δ_x і Δ_y утворюється з головного визначника, якщо в ньому стовпчики коефіцієнтів при цій невідомій замінити стовпчиком вільних членів.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь за допомогою визначників:

$$\begin{cases} 3x - 8y = -2, \\ 7x - 10y = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 7 & -10 \end{vmatrix}} = \dfrac{20+32}{-30+56} = \dfrac{52}{26} = 2,$

$$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}}{26} = \dfrac{12+14}{26} = \dfrac{26}{26} = 1.$$

Вправи

Розв'язати системи способом підстановки:

1. $\begin{cases} 3x - 4y = 10, \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 8x - 3y = 11, \\ 9x + 5y = 4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 11y = -2, \\ 2x + 7y = 13. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x - 7y = 2, \\ 3x + 5y = 8. \end{cases}$

Розв'язати системи рівнянь способом додавання:

5. $\begin{cases} 5x + 3y = 11, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 9x - 5y = -1, \\ 2x + 7y = 16. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7x - 8y = -2, \\ 3x - 2y = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x - 8y = 2, \\ 3x + 4y = 10. \end{cases}$

Розв'язати системи рівнянь способом порівняння та за допомогою визначників:

9. $\begin{cases} 8x - 3y = 5, \\ 2x + 7y = 9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x + 6y = -22, \\ 3x - 2y = -2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x - 7y = -4, \\ 2x - 3y = -1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x + 4y = -2, \\ 3x - 5y = 21. \end{cases}$

Розв'язати системи рівнянь, використовуючи метод Гауса:

13. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2, \\ x - 5y + 2z = -2, \\ 2x + 3y - 3z = 2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 8x - 3y - 2z = 7, \\ 3x - 2y + 5 = -4, \\ 2x + y - z = 4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 2, \\ 3x - 2y - z = 3, \\ 4x + 5y - 3z = 10. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x - 3y - z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \\ 3x + 4y - 5z = 0. \end{cases}$

Розв'язати системи рівнянь:

17. $\begin{cases} x - 2y = 11, \\ 3x + 2y = 9, \\ 4x + 7y = -1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \dfrac{y - 3}{4} = \dfrac{z + 5}{z - 2}, \\ x + 3y - 4z = -13. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ x - 2y = -10, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x + 8y - 5z = 0, \\ 3x - 2y + 3z = 0. \end{cases}$

§2. Штучні прийоми розв'язування систем рівнянь

Класифікувати системи рівнянь за методами їх розв'язування складніше, ніж рівняння. Зовнішньо схожі системи іноді розв'язуються різними методами. Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини другого рівняння системи на -3. Маємо:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ -3x^2y + 3xy^2 = -6. \end{cases}$$

Додаючи почленно обидві частини рівнянь системи, дістаємо: $(x - y)^3 = 1$, $x - y = 1$. Розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2y - xy^2 = 2, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x - y = 1, \\ xy\,(x - y) = 2, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Подальший розв'язок цієї системи вже не складає труднощів.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система зовнішньо нагадує попередню систему, але розв'язувати її слід зовсім іншим способом.

Зрівняємо вільні члени рівнянь системи:

$$\begin{cases} 6x^3 - 6y^3 = 42, \\ 7x^2y + 7xy^2 = 42. \end{cases}$$

Тоді маємо: $6x^3 - 6y^3 = 7x^2y + 7xy^2$.

Поділимо обидві частини рівності на y^3 $(y \neq 0)$:

$$\frac{6x^3}{y^3} - 6 = \frac{7x^2}{y^2} + \frac{7x}{y}.$$

Позначимо $\frac{x}{y} = a$. Дістаємо: $6a^3 - 7a^2 - 7a - 6 = 0$. Розв'язуючи утворене кубічне рівняння, маємо $a = 2$.

Повертаємося до підстановки $\frac{x}{y} = 2$ і розв'язування даної системи зводимо до розв'язування рівносильної їй системи:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$$

Системи рівнянь, ліві частини яких однорідні

Розглянемо розв'язування систем виду

$$\begin{cases} A(x;\ y) = a, \\ B(x;\ y) = b, \end{cases}$$

де a і b — числа, а $A(x;\ y)$ і $B(x;\ y)$ — однорідні вирази відносно x і y.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy - y^2 = 1, \\ 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Зрівняємо праві частини рівнянь системи. Для цього обидві частини першого рівняння помножимо на 6. Маємо:

$$\begin{cases} 12x^2 - 18xy - 6y^2 = 6, \\ 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 6. \end{cases}$$

Тоді $12x^2 - 18xy - 6y^2 = 3x^2 - 4xy + 2y^2$. Звідси $9x^2 - 14xy - 8y^2 = 0$.

Розв'язуючи це рівняння як квадратне відносно x, маємо:

$$x = \frac{7y \pm 11y}{9}.$$

Дана система рівнянь рівносильна сукупності систем

$$\begin{cases} x = 2y, \\ 2x^2 - 3xy - y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{9}y, \\ 2x^2 - 3xy - y^2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи їх способом підстановки, маємо:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ 8y^2 - 6y^2 - y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{9}y, \\ \frac{32}{81}y^2 + \frac{4}{3}y^2 - y^2 = 1. \end{cases}$$

Відповідь: (2; 1), (–2; –1),

$$\left(-\frac{4}{\sqrt{59}};\ \frac{9}{\sqrt{59}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{59}};\ -\frac{9}{\sqrt{59}}\right).$$

2-й спосіб. Так само, як в попередньому розв'язанні, дістаємо однорідне рівняння $9x^2 - 14xy - 8y^2 = 0$. Поділимо обидві частини рівняння на y^2 ($y \neq 0$). Маємо:

$$\frac{9x^2}{y^2} - \frac{14x}{y} - 8 = 0.$$

Позначимо $\frac{x}{y} = z$. Рівняння набере вигляду

$$9z^2 - 14z - 8 = 0,$$

звідки $z_1 = 2$, $z_2 = -\frac{4}{9}$. Дана система рівносильна сукупності систем, кожну з яких розв'язуємо методом підстановки.

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ 2x^2 - 3xy - y^2 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{4}{9}, \\ 2x^2 - 3xy - y^2 = 1. \end{cases}$$

3-й спосіб. Застосуємо підстановку $y = mx$. Маємо

$$\begin{cases} 2x^2 - 3mx^2 - m^2x^2 = 1, \\ 3x^2 - 4mx^2 + 2m^2x^2 = 6, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x^2(2-3m-m^2)=1, \\ x^2(3-4m+2m^2)=6. \end{cases}$$

Поділимо ліву і праву частини першого рівняння системи на відповідні частини другого рівняння:

$$\frac{2-3m-m^2}{3-4m+2m^2}=\frac{1}{6},$$

звідки $8m^2+14m-9=0$, $m_1=\frac{1}{2}$; $m_2=-\frac{9}{4}$.

Дана система рівносильна сукупності систем

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x, \\ 2x^2-3xy-y^2=1 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} y=-\frac{9}{4}x, \\ 2x^2-3xy-y^2=1. \end{cases}$$

Ці системи легко розв'язуються методом підстановки.

Вправи

Розв'язати системи рівнянь:

1. $\begin{cases} 2x^2-3xy+2y^2=1, \\ 2x^2+xy-y^2=2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ 3xy-x^2+y^2=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x^2-3y^2-xy^2=1, \\ xy+y^2=2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2-xy+3y^2=3, \\ 2x^2+5xy-7y^2=0. \end{cases}$

Застосування теореми Вієта при розв'язуванні систем рівнянь

Розглянемо системи виду

$$\begin{cases} ax \pm by=m, \\ xy=n \end{cases}$$

і ті, що зводяться до них.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x-5y=11, \\ xy=-2. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} 3x+(-5y)=11, \\ 3x(-5y)=30. \end{cases}$$

Можна стверджувати, що значення $3x$ і $-5y$, які задовольняють дану систему рівнянь, є коренями рівняння, складеного за допомогою оберненої теореми Вієта: $a^2 - 11a + 30 = 0$, звідки $a_1 = 6$, $a_2 = 5$. Отже,

$$\begin{cases} 3x = 6, \\ -5y = 5 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} 3x = 5, \\ -5y = 6. \end{cases}$$

Відповідь: $(2;\ -1)$, $\left(\frac{5}{3};\ -\frac{6}{5}\right)$.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо дану систему у вигляді

$$\begin{cases} xy + (x - y) = 3, \\ xy\,(x - y) = 2. \end{cases}$$

Значення xy та $x - y$, які задовольняють цю систему рівнянь, є коренями рівняння, складеного на основі твердження, оберненого до теореми Вієта: $a^2 - 3a + 2 = 0$. Розв'язуючи утворене рівняння, маємо: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$. Дану систему рівнянь можна замінити сукупністю рівносильних систем

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 1 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x + (-y) = 2, \\ x\,(-y) = -1 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x + (-y) = 1, \\ x\,(-y) = -2. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{array}{ll} b^2 - 2b - 1 = 0, & c^2 - c - 2 = 0, \\ b_1 = 1 + \sqrt{2}, & c_1 = 2, \\ b_2 = 1 - \sqrt{2}, & c_2 = -1. \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2}, \\ y_1 = -1 + \sqrt{2}, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1 - \sqrt{2}, \\ y_2 = -1 - \sqrt{2}, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -2. \end{cases}$$

Відповідь: $(1 + \sqrt{2};\ -1 + \sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2};\ -1 - \sqrt{2})$, $(2;\ 1)$, $(-1;\ -2)$.

Вправи

Розв'язати системи рівнянь:

5. $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = -12. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ xy = 2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x + y = 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} (x + 0{,}2)^2 + (y + 0{,}3)^2 = 1, \\ x + y = 0{,}9. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5, \\ x^{-2} + y^{-2} = 13. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6, \\ xy + (x + y) = 5. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y + \dfrac{x}{y} = 9, \\ (x + y) \cdot \dfrac{x}{y} = 20. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2y + xy^2 = 20. \end{cases}$

Розв'язування колових систем

Системи рівнянь, що зводяться до найпростіших систем рівнянь виду

$$1)\ \begin{cases} x + y = a, \\ x + z = b, \\ y + z = c \end{cases} \quad \text{або} \quad 2)\ \begin{cases} xy = a, \\ xz = b, \\ yz = c \end{cases}$$

умовно назвемо ***коловими.***

Розв'язування першої системи зводиться до почленного додавання обох частин рівнянь. Дістанемо

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2}. \qquad (*)$$

Далі, використовуючи послідовно перше, друге, третє рівняння системи і рівняння (*), знаходимо x, y, z.

Розв'язування другої системи зводиться до почленного множення обох частин рівнянь. Дістанемо:

$$x^2y^2z^2 = abc.$$

Добуваючи корені з обох частин рівняння і використовуючи послідовно кожне з рівнянь системи, знаходимо x, y, z.

Приклад 6. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)=\dfrac{13}{6}, \\ y\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)=\dfrac{20}{3}, \\ z\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{15}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо дану систему у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}=\dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{yz}{x}+\dfrac{xy}{z}=\dfrac{20}{3}, \\ \dfrac{xz}{y}+\dfrac{zy}{x}=\dfrac{15}{2}. \end{cases}$$

Додавши почленно рівняння системи, маємо

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=\frac{49}{6}.$$

Використовуючи послідовно перше, друге і третє рівняння системи, дістанемо

$$\begin{cases} \dfrac{yz}{x}=6, \\ \dfrac{xz}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{xy}{z}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Перемноживши почленно обидві частини рівняння системи, дістанемо $xyz=6$. Розглядаючи послідовно перше, друге і третє рівняння системи з даними рівняннями, матимемо

$$\begin{cases} x^2=1, \\ y^2=4, \\ z^2=9, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2, \\ z_1 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = -2, \\ z_2 = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -1, \\ y_3 = 2, \\ z_3 = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -2, \\ z_4 = 3. \end{cases}$$

Відповідь: (1; 2; 3), (1; –2; –3),
(–1; 2; –3), (–1; –2; 3).

Приклад 7. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + y + x = 5, \\ yz + y + z = 11, \\ xz + z + x = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо до обох частин кожного рівняння по 1:

$$\begin{cases} xy + y + x + 1 = 6, \\ yz + y + z + 1 = 12, \\ xz + z + x + 1 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} y\,(x + 1) + (x + 1) = 6, \\ y\,(z + 1) + (z + 1) = 12, \\ z\,(x + 1) + (x + 1) = 8, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + 1)\,(y + 1) = 6, \\ (z + 1)\,(y + 1) = 12, \\ (x + 1)\,(z + 1) = 8. \end{cases}$$

Перемноживши почленно обидві частини рівнянь системи, дістанемо $(x + 1)^2\,(y + 1)^2\,(z + 1)^2 = 24^2$. Добуваючи корені з обох частин рівняння і використовуючи послідовно кожне з рівнянь системи, маємо:

$$\begin{cases} z + 1 = \pm 4, \\ x + 1 = \pm 2, \\ y + 1 = \pm 3. \end{cases}$$

Відповідь: (1; 2; 3), (–3; –4; –5).

Вправи

Розв'язати системи рівнянь:

17. $\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} \sqrt[3]{x + y} + \sqrt[3]{y + z} = 3, \\ \sqrt[3]{y + z} + \sqrt[3]{z + x} = 1, \\ \sqrt[3]{z + x} + \sqrt[3]{x + y} = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 5, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{5}{3}, \\ \dfrac{xz}{x+z} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{yz}{y+z} = 4. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{3}{xy} + \dfrac{15}{yz} = 2, \\ \dfrac{15}{yz} + \dfrac{5}{xz} = 2, \\ \dfrac{5}{zx} + \dfrac{3}{xy} = 2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^2 - (y-z)^2 = 1, \\ y^2 - (z-x)^2 = 4, \\ z^2 - (x-y)^2 = 9. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$

Використання теореми Вієта для кубічного рівняння при розв'язанні систем рівнянь

Якщо x_1, x_2, x_3 — корені рівняння

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c. \end{cases}$$

Має місце і обернене твердження.

Наведена вище система рівнянь — це аналог формули Вієта для кубічного рівняння.

Приклад 8. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ xyz = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Піднесемо до квадрата перше рівняння системи. Маємо:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 16.$$

Використовуючи друге рівняння системи, знаходимо $xy + xz + yz = 5$. Отже, дана система рівносильна системі

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ xy + xz + yz = 5, \\ xyz = 2. \end{cases}$$

За теоремою Вієта робимо висновок, що значення x, y і z, які задовольняють дану систему рівнянь, є коренями кубічного рівняння $a^3 - 4a^2 + 5a - 2 = 0$, розв'язуючи яке, дістанемо $a_{1,2} = 1$, $a_3 = 2$.

Вибираючи для x, y і z різні комбінації з цих чисел, дістанемо розв'язки даної системи.

Відповідь: (1; 1; 2), (1; 2; 1), (2; 1; 1).

Вправи

Розв'язати системи рівнянь:

24. $$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 3, \\ \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx} = 3, \\ \dfrac{1}{xyz} = 1. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1{,}5, \\ xyz = 8. \end{cases}$$

Симетричні системи рівнянь

При розв'язуванні систем, симетричних відносно x і y, часто доцільно вводити нові допоміжні невідомі

$$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x^2 + y^2 = u, \\ xy = v, \end{cases} \text{ або}$$

$$\begin{cases} x - y = u, \\ xy = v \end{cases} \text{ тощо.}$$

Приклад 9. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ xy\,(x + y) = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система симетрична відносно x і y. Запишемо її у вигляді

$$\begin{cases} (x + y)\,(x^2 - xy + y^2) + x^3y^3 = 17, \\ xy\,(x + y) = 6, \end{cases} \text{ або}$$

$$\begin{cases} (x+y)\,((x+y)^2 - 3xy) + x^3y^3 = 17, \\ xy\,(x+y) = 6. \end{cases}$$

Поклавши

$$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v, \end{cases}$$

дістанемо

$$\begin{cases} u\,(u^2 - 3v) + v^3 = 17, \\ uv = 6, \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} u^3 - 3uv + v^3 = 17, \\ uv = 6, \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 35, \\ u^3v^3 = 216. \end{cases}$$

Застосувавши твердження, обернене до теореми Вієта, маємо:

$$a^2 - 35a + 216 = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, знаходимо $a_1 = 27$, $a_2 = 8$. Тоді

$$\begin{cases} u = 3, \\ v = 2, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} u = 2, \\ v = 3. \end{cases}$$

Дану систему рівнянь можна замінити сукупністю рівносильних систем

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Відповідь: (2; 1), (1; 2).

Вправи

Розв'язати системи рівнянь:

26. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 3y = -2, \\ 2x^2 - xy + 2y^2 = 20. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 = 62, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 27. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - x - y = 49, \\ xy + x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

§3. Розв'язування систем рівнянь із застосуванням різних прийомів

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19, \\ xy\,(x - y) = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

Помножимо обидві частини другого рівняння системи на -3. Маємо:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19, \\ -3x^2y + 3xy^2 = -18. \end{cases}$$

Додавши рівняння системи, дістанемо:

$$(x - y)^3 = 1, \text{ або } x - y = 1.$$

Склавши систему з утвореного рівняння та другого рівняння даної системи, маємо:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ xy\,(x - y) = 6, \end{cases} \text{ звідки}$$

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Запишемо утворену систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} x + (-y) = 1, \\ x\,(-y) = -6. \end{cases}$$

За твердженням, оберненим до теореми Вієта, маємо рівняння $a^2 - a - 6 = 0$. Розв'язуючи його, дістанемо $a_1 = 3$, $a_2 = -2$. Дана система рівносильна сукупності систем

$$\begin{cases} x = 3, \\ -y = -2 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x = -2, \\ -y = 3. \end{cases}$$

Відповідь: (3; 2), (−2; −3).

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (x + y + 1)^2 + (x + y)^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Перетворимо перше рівняння системи:

$$((x + y) + 1)^2 + (x + y)^2 = 25, \text{ або}$$

$$(x + y)^2 + 2(x + y) + 1 + (x + y)^2 = 25.$$

Звідси $(x + y)^2 + (x + y) - 12 = 0$. Розв'язуючи дане рівняння як квадратне щодо $x + y$, дістанемо

$$x + y = -4 \text{ та } x + y = 3.$$

Дана система рівнянь рівносильна сукупності систем:

$$\begin{cases} x + y = -4, \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Розв'язуючи кожну з утворених систем, матимемо:

$$\begin{cases} x + y = -4, \\ x - y = -\dfrac{3}{4} \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(-\dfrac{19}{8};\ -\dfrac{13}{8}\right)$, $(2;\ 1)$.

При розв'язуванні систем не завжди легко простежити за збереженням рівносильності. Можлива поява сторонніх коренів, які слід виключити за допомогою перевірки.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^4 - 1330x - 23 = 0, \\ x^4 - 1319x - 144 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Віднімаючи почленно від першого рівняння системи друге рівняння, дістанемо $-11x + 121 = 0$, звідки $x = 11$. Неважко помітити, що знайдене значення не є розв'язком жодного з даних рівнянь: їх вільні члени на 11 не діляться.

Справа в тому, що рівняння $-11x + 121 = 0$, яке має єдиний розв'язок $x = 11$, є тільки наслідком системи, але не рівносильне їй. Будь-який розв'язок системи є розв'язком утвореного рівняння, але не навпаки.

Тому покищо можна передбачити, що, коли дана система має розв'язок, то він єдиний і є розв'язком рівняння $-11x + 121 = 0$.

Але $x = 11$ не задовольняє систему. Отже, система не має розв'язків.

Вправи

Розв'язати системи рівнянь:

1. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^3y^3 = -8. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} = \dfrac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 - x - 5 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y^2 - xy = -12, \\ x^2 - xy = 28. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6, \\ xy + x + y = 5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 12\,(x+y)^2 + x = 2{,}5 - y, \\ 6\,(x-y)^2 + x = 0{,}125 + y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x + y} = \dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{13}{6}, \\ xy = 5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ 3x + y + 2z = 7, \\ 2x + 3y + z = 2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 91, \\ x + \sqrt{xy} + y = 13. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sqrt[4]{u+v} - \sqrt[4]{u-v} = 2, \\ \sqrt{u+v} - \sqrt{u-v} = 8. \end{cases}$

12. $$\begin{cases} \sqrt{2x - y + 11} - \sqrt{3x + y - 9} = 3, \\ \sqrt[4]{2x - y + 11} + \sqrt[4]{3x + y - 9} = 3. \end{cases}$$

13. $$\begin{cases} 3\,(2 - \sqrt{x - y}\,)^{-1} + 10\,(2 + \sqrt{x + y}\,)^{-1} = 5, \\ 4\,(2 - \sqrt{x - y}\,)^{-1} - 5\,(2 + \sqrt{x + y}\,)^{-1} = 3. \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x + y = 28. \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4. \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3. \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} \sqrt[4]{u} + \sqrt[4]{v} = 1, \\ \sqrt{u} + \sqrt{v} = 5. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x + y}{2}} + \sqrt{\dfrac{x - y}{3}} = 14, \\ \sqrt{\dfrac{x + y}{8}} - \sqrt{\dfrac{x - y}{12}} = 3. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} (x + 1)\,(y + 1) = 10, \\ (x + y)\,(xy + 1) = 25. \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} (x - y)\,(x^2 + y^2) = 5, \\ (x + y)\,(x^2 - y^2) = 9. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} x^2 + y = y^2 + x, \\ y^2 + x = 6. \end{cases}$$

24. $\begin{cases} x + yz = 2, \\ y + zx = 2, \\ z + xy = 2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 - xy} + \dfrac{4}{y^2 - xy} = -\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{7}{x^2 - xy} - \dfrac{3}{y^2 - xy} = \dfrac{6}{5}. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y - 9 = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 5y - 1 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + xy = 23. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z-1}{4}, \\ 2x + 3y - 5z + 19 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} (x + y)^2 + 2x = 35 - 2y, \\ (x - y)^2 - 2y = 3 - 2x. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{4}{x + y - 1} - \dfrac{5}{2x - y + 3} + \dfrac{5}{2} = 0, \\ \dfrac{3}{x + y - 1} + \dfrac{1}{2x - y + 3} + \dfrac{7}{5} = 0. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x(y + z) = 5, \\ y(x + z) = 8. \end{cases}$

32. $\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{3}, \\ xy - \dfrac{y}{x} = \dfrac{9}{2}. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x^2 + y - 20 = 0, \\ x + y^2 - 20 = 0. \end{cases}$

34. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{x+1}} = 2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}} - \sqrt{\dfrac{y+2}{x+1}} = 1{,}5. \end{cases}$

Розділ IV

Розв'язування та дослідження рівнянь, нерівностей та систем рівнянь з параметрами

§1. Дослідження та розв'язування лінійних рівнянь з параметрами

*Рівняння виду $ax + b = 0$, де a і b — сталі коефіцієнти, називається **лінійним** рівнянням відносно невідомого x.*

Це рівняння рівносильне рівнянню $ax = -b$. Дослідимо його.

1. Якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний розв'язок

$$x = -\frac{b}{a}.$$

2. Якщо $a = b = 0$, то рівняння набирає вигляду

$$0x = 0.$$

Це рівняння задовольняє будь-яке дійсне значення x, а тому воно має безліч розв'язків.

3. Якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то рівняння має вигляд

$$0x = -b.$$

Це рівняння не має розв'язків.

Розглянемо розв'язування раціональних рівнянь з параметрами.

***Рівняннями з параметрами** називаються рівняння виду*

$$f(x;\ \alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ \dots;\ \alpha_n) = 0,$$

де x — шукане невідоме, а α_1; α_2; α_3; ... ; α_n — змінні параметри.

Значення параметрів α_1; α_2; α_3; ... ; α_n, при яких вираз $f(x;\ \alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ \dots;\ \alpha_n) = 0$ має зміст при деяких значеннях x, називаються ***допустимими***.

Розв'язати рівняння з параметрами означає знайти всі його розв'язки для кожної системи допустимих значень параметрів.

При розв'язуванні рівнянь з параметрами область зміни параметрів може бути заданою. Якщо не вказані межі змін параметрів, то вважається, що параметри набувають усіх своїх допустимих значень.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\dfrac{2}{5x-a}=\dfrac{3}{ax-1}$ відносно x.

Розв'язання. Маємо $2\,(ax-1)=3\,(5x-a)$, звідки

$$(2a-15)\,x=2-3a.$$

а) Якщо $a=\dfrac{15}{2}$, то рівняння має вигляд $0x=-\dfrac{41}{2}$. Це рівняння, а отже, і дане рівняння не мають розв'язків;

б) якщо $a\neq\dfrac{15}{2}$, то рівняння має єдиний корінь $x=\dfrac{2-3a}{2a-15}$;

в) визначимо, при яких значеннях a знайдений корінь задовольняє рівняння, тобто знайдемо область визначення.

Область допустимих значень невідомого і параметрів, що входять до рівняння, визначається рівняннями: $5x-a\neq 0$ та $ax-1\neq 0$. При $x=\dfrac{2-3a}{2a-15}$ дістанемо

$$\frac{10-15a}{2a-15}-a\neq 0 \text{ та } \frac{2a-3a^2}{2a-15}-1\neq 0.$$

Звідси

$$10-15a-2a^2+15a\neq 0 \text{ та } 2a-3a^2-2a+15\neq 0,$$

$$a\neq\pm\sqrt{5} \text{ та } a\neq\pm\sqrt{5}.$$

Отже, якщо $a\neq\dfrac{15}{2}$ та $a\neq\pm\sqrt{5}$, рівняння має єдиний корінь $x=\dfrac{2-3a}{2a-15}$.

Якщо $a=\dfrac{15}{2}$, рівняння не має коренів.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{x} = \frac{b}{a - x} \qquad (*)$$

відносно x.

Розв'язання. Область допустимих значень невідомого і параметрів $x \neq 0$, $x \neq a$. Маємо

$$a - x = bx, \ (b + 1)x = a. \qquad (**)$$

а) Якщо $b = -1$, $a = 0$, то рівняння (**) набирає вигляду $0x = 0$. Це рівняння справджується для будь-яких значень x, що входять до області допустимих значень;

б) якщо $b = -1$, $a \neq 0$, то рівняння набирає вигляду $0x = a$. Коренів немає;

в) якщо $b \neq -1$, то рівняння має єдиний розв'язок $x = \frac{a}{b+1}$;

г) перевіримо, при яких значеннях параметрів a і b знайдений корінь задовольняє рівняння.

Виходячи з умови, $x \neq 0$ та $a - x \neq 0$. Отже,

$$\frac{a}{b+1} \neq 0 \text{ та } a - \frac{a}{b+1} \neq 0.$$

Звідси $a \neq 0$ та $b \neq 0$.

Отже, якщо $b = -1$, $a = 0$, то рівняння має безліч коренів, тобто має смисл при будь-яких дійсних x, крім $x = 0$, $x = a$.

Якщо $b = -1$, $a \neq 0$, то розв'язків немає.

Якщо $x \neq a$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $x = \frac{a}{b+1}$.

Вправи

Розв'язати рівняння:

1. $2x = a$.
2. $ax = -3$.
3. $ax = b$.
4. $ax + bx = c$.

5. $a^2 x - ab = a$.

6. $ax - 2x = a^2 - 4$.

7. $ax - b - 1 = x - a$.

8. $(a + x)\, b - a = (b + 1)\, x + ab$.

9. $y + \dfrac{y}{a} = b$.

10. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{b} = c$.

11. $\dfrac{x + b}{ax - ab} = \dfrac{x + a}{b^2 - bx}$.

12. $\dfrac{(1 - a)^2}{x - a} = \dfrac{(1 + a)^2}{x + a}$.

13. $\dfrac{x + a}{x + a + b} + \dfrac{2ab}{x^2 - a^2 - b^2 - 2ab} = \dfrac{x - a}{x - a - b}$.

14. $\dfrac{x}{a^2 - x^2} + \dfrac{a + x}{(a - x)^2} = \dfrac{x - a + 4a^2}{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}$.

15. Визначити, при яких значеннях t рівняння мають додатні розв'язки:

а) $3\,(2 - x) = 4\,(t - 2x)$;

б) $4 - t = \dfrac{2}{x - 1}$.

16. Визначити, при яких значеннях k рівняння мають від'ємні розв'язки:

а) $k - 2 = \dfrac{3x + 1}{x + 1}$;

б) $\dfrac{4x + 3k}{3} = \dfrac{5x - 2k}{4}$.

17. Вираз $\dfrac{5x - 7}{x + 3a}$ дорівнює 1, коли x дорівнює 10. При якому значенні x цей вираз дорівнює 3?

18. При яких значеннях k рівняння

$$3k + 3\,(x + 1) = \frac{3kx + 15}{5}$$

має єдиний розв'язок; не має розв'язків?

19. Визначити, при яких значеннях a корені рівняння $ax = 7x - 1$ кратні 3; кратні 5.

20. Визначити, при яких значеннях параметра a рівняння $3(x + 1) = 4 + ax$ матиме корінь більший, ніж -1.

§ 2. Дослідження системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими

Нехай дано систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

де a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — довільні дійсні числа.

Дослідити систему означає за її коефіцієнтами встановити, який із нижче наведених випадків має місце:

1. Система має єдиний розв'язок (визначена).
2. Система не має розв'язків (несумісна).
3. Система має безліч розв'язків.

Як відомо, кожне з лінійних рівнянь системи зображається в системі координат прямою лінією. Тому очевидно, що:

1) Система має єдиний розв'язок, якщо графіки рівнянь мають одну спільну точку, координати якої і є розв'язками даної системи.

2) Система не має розв'язків, якщо графіки рівнянь взаємно паралельні прямі.

3) Система має безліч розв'язків, якщо графіки рівнянь збігаються (одна й та сама пряма).

Наведемо теорему, що використовується при дослідженні системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Розглянемо дану систему:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Помноживши перше рівняння на b_2, а друге — на $-b_1$ і додавши ці рівняння, матимемо, що

$$(a_1b_2 - b_1a_2)\,x = c_1b_2 - b_1c_2.$$

Помноживши перше рівняння на $-a_2$, а друге — на a_1, і додавши їх, маємо

$$(a_1b_2 - b_1a_2)\,y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases}(a_1b_2 - b_1a_2)\,x = c_1b_2 - b_1c_2,\\ (a_1b_2 - b_1a_2)\,y = a_1c_2 - c_1a_2,\end{cases}$$

рівносильну даній системі.

Теорема. *Якщо* $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ $(\Delta = 0)$ *і* $c_1b_2 - b_1c_2 = 0$ *(*$\Delta_x = 0$*), то* $a_1c_2 - c_1a_2 = 0$ $(\Delta_y = 0)$.

Доведення. Запишемо дані рівняння у вигляді

$$\begin{cases}a_1b_2 = b_1a_2,\\ b_1c_2 = c_1b_2.\end{cases}$$

Перемножимо почленно ліві й праві частини рівностей. Дістанемо $a_1b_2b_1c_2 = b_1a_2c_1b_2$, $a_1c_2 = a_2c_1$. Звідки маємо $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$. Що й треба було довести.

Дослідимо дану систему аналітично.

1. Якщо $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ і $c_1b_2 - b_1c_2 = 0$, тоді й $a_1c_2 - c_1a_2 = 0$, тобто система має безліч розв'язків.

Знайдемо залежність між коефіцієнтами у випадку, коли коефіцієнти не дорівнюють нулю.

З рівності $a_1b_2 = b_1a_2$ маємо $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

З рівності $c_1b_2 = b_1c_2$ маємо $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Отже, в цьому випадку $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Система має безліч розв'язків, якщо коефіцієнти при відповідних невідомих і вільні члени пропорційні.

2. Якщо $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ і $c_1b_2 - b_1c_2 \neq 0$ — система не має розв'язків.

З рівності $a_1b_2 = b_1a_2$ маємо $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

З нерівності $c_1b_2 \neq b_1c_2$ маємо $\dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

Отже, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

Система не має розв'язків, якщо її коефіцієнти пропорційні між собою, але не пропорційні вільним членам системи.

3. Якщо $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ — система має єдиний розв'язок:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

З нерівності $a_1b_2 \neq b_1a_2$ маємо $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

Система має єдиний розв'язок, якщо коефіцієнти при відповідних невідомих не пропорційні між собою.

Приклад 1. Знайти, при яких значеннях a система рівнянь

$$\begin{cases} x + (2a - 1)\,y = 2a, \\ (2a + 1)\,x + (a^2 + 2)\,y = 2\,(a^2 + a + 1) \end{cases}$$

має безліч розв'язків; не має розв'язків.

Розв'язання. Система має безліч розв'язків, якщо

$$\frac{1}{2a+1} = \frac{2a-1}{a^2+2} = \frac{2a}{2\,(a^2+a+1)}.$$

Знайдемо, які значення a задовольняють рівняння

$$\frac{1}{2a+1} = \frac{2a-1}{a^2+2}, \quad 4a^2 - 1 = a^2 + 2, \quad a = \pm 1.$$

Коли $a = 1$, дістанемо $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$, тобто система має безліч розв'язків.

Коли $a = -1$, дістанемо $-1 = -1 = -1$, тобто система має безліч розв'язків.

В інших випадках, тобто при $a \neq \pm 1$, система має єдиний розв'язок.

Відповідь: $a = \pm 1$; значень a, при яких система не має розв'язків, не існує.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (a - 1)^2\,x + (a^2 - 1)\,y = (a + 1)^2, \\ (2a - 1)\,x + (a + 1)\,y = a^2 - 1 \end{cases}$$

відносно невідомих x і y.

Розв'язання. Маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a-1)^2 & a^2-1 \\ 2a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+1) -$$

$$-(2a-1)(a^2-1) = -a(a^2-1).$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} (a+1)^2 & a^2-1 \\ a^2-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3 - (a^2-1)^2 =$$

$$= -a(a+1)^2(a-3).$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} (a-1)^2 & (a+1)^2 \\ 2a-1 & a^2-1 \end{vmatrix} = (a-1)^3(a+1) -$$

$$-(a+1)^2(2a-1) = a(a+1)(a^2-5a+2).$$

Визначимо, при яких значеннях параметра a $\Delta = 0$. Розв'яжемо рівняння $-a(a^2-1) = 0$, звідки $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$. Розглянемо чотири випадки.

а) Нехай $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$. Тоді $\Delta \neq 0$ і система має єдиний розв'язок:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-a(a+1)^2(a-3)}{-a(a^2-1)} = \frac{a^2-2a-3}{a-1},$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a(a+1)(a^2-5a+2)}{-a(a^2-1)} = -\frac{a^2-5a+2}{a-1}.$$

б) Нехай $a = 0$. Дана система має вигляд

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ -x + y = -1. \end{cases}$$

Оскільки $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$, то система має безліч розв'язків: x — будь-яке число, $y = x - 1$.

в) Нехай $a = 1$. Дана система має вигляд

$$\begin{cases} 0x + 0y = 4, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

Оскільки перше рівняння цієї системи не має розв'язку, то й система не має розв'язків.

г) Нехай $a = -1$. Дана система має вигляд

$$\begin{cases} 4x + 0y = 0, \\ -3x + 0y = 0. \end{cases}$$

Ця система має безліч розв'язків: $x = 0$, y — довільне число.

Відповідь: Коли $a \neq 0$ та $a \neq \pm 1$, $x = \dfrac{a^2 - 2a - 3}{a - 1}$, $y = -\dfrac{a^2 - 5a + 2}{a - 1}$; коли $a = 0$, x — будь-яке число, $y = x - 1$; коли $a = -1$, $x = 0$, y — будь-яке число; коли $a = 1$, система не має розв'язків.

Приклад 3. При яких значеннях a система

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

має розв'язки? Знайти їх.

Розв'язання. Вирази, що входять в цю систему, є парними відносно x і y.

Отже, якщо дана система має розв'язком пару чисел $(x_1;\ y_1)$, то розв'язками системи будуть і такі пари чисел: $(x_1; -y_1)$, $(-x_1;\ y_1)$, $(-x_1; -y_1)$. Крім того, оскільки система симетрична відносно невідомих (змінних), то розв'язками будуть і пари чисел $(y_1;\ x_1)$, $(-y_1;\ x_1)$, $(y_1; -x_1)$, $(-y_1; -x_1)$. Тому достатньо знайти розв'язки для $x \geq 0$, $y \geq 0$. Але тоді система запишеться так:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 + y^2 = a, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y = 1 - x, \\ 2x^2 - 2x - (a - 1) = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{2a - 1}}{2}, \\ y_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{2a - 1}}{2}. \end{cases}$$

Обидва значення невідомих можуть бути розв'язком системи за умови $x \geq 0$, $y \geq 0$, якщо

$$\begin{cases} 2a - 1 \geq 0, \\ 1 - \sqrt{2a - 1} \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \ge \frac{1}{2}, \\ a \le 1, \end{cases} \quad \frac{1}{2} \le a \le 1.$$

Тепер легко записати інші пари чисел, що є розв'язками системи.

Вправи

1. При яких значеннях m система рівнянь має додатні розв'язки:

$$\begin{cases} 3x + 7y = m, \\ 2x + 5y = 20? \end{cases}$$

2. Визначити, при яких значеннях a системи рівнянь мають бути від'ємні розв'язки:

а) $\begin{cases} 3x - 6y = 1, \\ 5x - ay = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (a + 5)\, x + (2a + 3)\, y = 3a + 2, \\ (3a + 10)\, x + (5a + 6)\, y = 2a + 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - y = -2, \\ 2ax - 3y = -4. \end{cases}$

3. Визначити, при яких значеннях m система рівнянь

$$\begin{cases} 2mx - 3y = 5, \\ 4x + my = 8 \end{cases}$$

має розв'язки $x > 0$, $y < 0$.

4. Дослідити і розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} (m - 1)\, x + 2my = -2, \\ 2mx + (m - 1)\, y = m - 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + (m - 1)\, y = 12, \\ (m - 1)\, x + 12y = 24; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (a - 2)\, x + 6y = 15, \\ 3x + (2a - 4)\, y = 15; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + (n - 4)\, y = 16, \\ (4 - n)\, x - 50y = 80. \end{cases}$

5. Визначити, при яких значеннях m і n системи рівнянь мають безліч розв'язків:

а) $\begin{cases} mx + ny = 8, \\ 5x + 3y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} mx + (n-1)\,y = 2, \\ 3x + 10y = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ mx + y = n. \end{cases}$

6. Визначити, при яких значеннях a системи не рівнянь мають розв'язків:

а) $\begin{cases} 4x + 3y = 12, \\ 2x + ay = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} ax - 5y = 9, \\ 2x - 3y = 1{,}5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + 2ay = 1, \\ (3a - 1)\,x - ay = 1. \end{cases}$

7. Дано систему двох рівнянь з двома невідомими x та y

$$\begin{cases} (3 + m)\,x + 4y = 5 - 3m, \\ 2x + (5 + m)\,y = 8. \end{cases}$$

Знайти, при яких значеннях m ця система має *а)* безліч розв'язків; *б)* не має розв'язків.

8. Визначити, при яких значеннях a система рівнянь

$$\begin{cases} ax + y = a, \\ 2ax + ay = 4 \end{cases}$$

має: *а)* єдиний розв'язок і знайти його; *б)* безліч розв'язків; *в)* не має розв'язків.

9. Визначити, при яких значеннях a система рівнянь

$$\begin{cases} (a - 1)\,x + 3y = a, \\ x + (a + 1)\,y = 2 \end{cases}$$

має: *а)* єдиний розв'язок і знайти його; *б)* безліч розв'язків; *в)* не має розв'язків.

§3. Розв'язування квадратних рівнянь з параметрами

Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, *де* a, b *і* c — *дійсні числа і* $a \neq 0$, *називається* ***квадратним*** *і розв'язується за формулою*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Якщо $a = 0$, то рівняння є лінійним: $bx + c = 0$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$a(a+1)x^2 - (2a^2 - 1)x + a(a-1) = 0.$$

Розв'язання. Дане рівняння має смисл при будь-яких дійсних значеннях параметра a. Розглянемо три випадки.

а) Нехай $a = 0$. Рівняння набере вигляду $x = 0$. Отже, воно має корінь $x = 0$.

б) Нехай $a = -1$. Рівняння набере вигляду $-x + 2 = 0$. Воно має корінь $x = 2$.

в) Нехай $a \neq 0$ і $a \neq -1$. Тоді, використовуючи формулу для розв'язування квадратного рівняння, маємо:

$$x = \frac{2a^2 - 1 \pm \sqrt{(2a^2-1)^2 - 4a^2(a^2-1)}}{2a(a+1)} = \frac{2a^2 - 1 \pm 1}{2a(a+1)}.$$

Рівняння має два корені: $x_1 = \frac{a}{a+1}$ та $x_2 = \frac{a-1}{a}$.

Відповідь: коли $a = 0$, $x = 0$;

коли $a = -1$, $x = 2$;

коли $a \neq 0$, $a \neq -1$, $x_1 = \frac{a}{a+1}$, $x_2 = \frac{a-1}{a}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

відносно невідомого x.

Розв'язання. Область допустимих значень невідомого та параметрів, що входять до рівняння $x \neq a$, $x \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Після перетворення дістаємо

$$ab\,(x-b)+ab\,(x-a)=(a+b)\,(x^2-ax-bx+ab), \text{ або}$$

$$(a+b)\,x^2-(a^2+b^2+4ab)\,x+2ab\,(a+b)=0.$$

Розглянемо випадки:

а) Якщо $b=-a\neq 0$, то дістаємо $2x=0$, звідки $x=0$ — корінь рівняння;

б) якщо $b\neq -a$, то розв'язуємо квадратне рівняння, позначивши $a+b=m$, $ab=n$. Рівняння набирає вигляду

$$mx^2-(m^2+2n)\,x+2mn=0.$$

$$x_{1,2}=\frac{m^2+2n\pm\sqrt{(m^2+2n)^2-8m^2n}}{2m}=\frac{m^2+2n\pm(m^2-2n)}{2m}.$$

$$x_1=m,\quad x_2=\frac{2n}{m},$$

і, повертаючись до підстановки, дістаємо

$$x_1=a+b,\quad x_2=\frac{2ab}{a+b}.$$

Перевіримо, при яких значеннях a і b знайдені корені задовольняють рівняння.

Корені x_1 та x_2 тоді будуть коренями даного рівняння, коли справджуються такі залежності:

$$x_1-a\neq 0,\ \ x_1-b\neq 0,\ \ x_2-a\neq 0,\ \ x_2-b\neq 0.$$

Оскільки $a\neq 0$, $b\neq 0$, то

$$x_1-a=a+b-a=b\neq 0;$$

$$x_1-b=a+b-b=a\neq 0.$$

Тому $x_1=a+b$ є коренем рівняння для будь-яких a і b, що задовольняють умову $b\neq -a$, $a\neq 0$, $b\neq 0$. Аналогічно

$$x_2-a=\frac{2ab}{a+b}-a=\frac{a\,(b-a)}{a+b}\neq 0;$$

$$x_2-b=\frac{2ab}{a+b}-b=\frac{b\,(a-b)}{a+b}\neq 0.$$

Оскільки $a \neq 0$ та $b \neq 0$, то $b \neq a$.

Відповідь: якщо $b = -a \neq 0$, то $x = 0$;

якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq \pm a$, то

$$x_1 = a + b,\ x_2 = \frac{2ab}{a + b}.$$

Вправи

Розв'язати рівняння:

1. $x^2 + 2ax - 3a^2 = 0.$

2. $x^2 - 3ax + 2a^2 - ab - b^2 = 0.$

3. $x^2 - 4ax + 4a^2 = b^2.$

4. $(a^2 - b^2)\,x^2 - 4abx = a^2 - b^2.$

5. $\dfrac{x - b}{a - b} = \dfrac{x^2}{a^2}.$

6. $\dfrac{m}{x - m} - \dfrac{x}{x + m} = \dfrac{7}{5}.$

7. $\dfrac{2x}{x + b} + \dfrac{x}{x - b} = \dfrac{2}{4x^2 - 4b^2}.$

8. $\dfrac{a + b}{2a - ax + 2 - x} + \dfrac{1}{a + 1} = \dfrac{b + 1}{2x - x^2}.$

9. $\dfrac{1}{ax - bx^2} - \dfrac{1}{a - b} = \dfrac{x - 1}{a^2 - abx - ab + b^2x}.$

10. $(1 + ax)\,x = (1 - x)\,a^2 + a + 1.$

§4. Властивості коренів квадратного рівняння

Позначимо дискримінант квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ через $D = b^2 - 4ac$.

1. Якщо $D > 0$, то рівняння має два різні корені.

2. Якщо $D = 0$, то рівняння має дійсні і рівні між собою корені, або, кажуть, має кратний корінь.

3. Якщо $D < 0$, то рівняння не має дійсних коренів.

Теорема Вієта. *Між коренями x_1 і x_2 квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ та його коефіцієнтами існують співвідношення*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

За допомогою цих співвідношень розв'язується багато задач.

Приклад 1. Дано рівняння $x^2 + bx + c = 0$. Скласти квадратне рівняння, коренями якого були б $y_1 = x_1^2 + x_2^2$, $y_2 = x_1^3 + x_2^3$.

Розв'язання. За теоремою Вієта

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b, \\ x_1 x_2 = c. \end{cases}$$

Піднесемо першу рівність до квадрата та куба. Дістанемо

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = b^2, \quad x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -b^3.$$

Використовуючи умову, матимемо:

$$y_1 + 2c = b^2, \quad y_2 - 3bc = -b^3,$$

звідки

$$y_1 = b^2 - 2c, \quad y_2 = 3bc - b^3.$$

Тоді $y_1 + y_2 = b^2 - 2c + 3bc - b^3$,

$$y_1y_2 = (b^2 - 2c)(3bc - b^3).$$

Шукане рівняння набирає вигляду

$$y^2 - (b^2 - 2c + 3bc - b^3)\,y + (b^2 - 2c)(3bc - b^3) = 0.$$

Приклад 2. При яких значеннях a корені рівняння $x^2 + ax + a$ більші від 1?

Розв'язання. За теоремою Вієта $x_1x_2 = a$. Оскільки $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, то $a > 1$. Але за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -a$. Дістали суперечність, тобто це означає, що таких значень a не існує.

Приклад 3. При яких значеннях a різниця коренів рівняння $2x^2 - (a + 1)x + (a - 1) = 0$ дорівнює їх добутку?

Розв'язання. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = \frac{a+1}{2}$, $x_1x_2 = \frac{a-1}{2}$. Оскільки за умовою $x_1 - x_2 = x_1x_2$, то $x_1 - x_2 = \frac{a-1}{2}$. Розв'язавши утворену систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{a+1}{2}, \\ x_1 - x_2 = \dfrac{a-1}{2}, \end{cases}$$

дістанемо $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Підставимо в рівняння кожний із знайдених коренів.

Відповідь: 2.

Приклад 4. При яких значеннях параметра a рівняння $(1 - 2a)x^2 - 6ax - 1 = 0$ та $ax^2 - x + 1 = 0$ мають спільний корінь?

Розв'язання. Нехай $x = m$ — спільний корінь даних рівнянь. Тоді маємо дві тотожності:

$$(1 - 2a)m^2 - 6am - 1 = 0 \text{ та } am^2 - m + 1 = 0.$$

Додавши їх, маємо $(1 - a)m^2 - (6a + 1)m = 0$. Оскільки дані рівняння не мають коренів, що дорівнюють нулю, то $m \neq 0$. Поділивши обидві частини рівності на m, дістанемо $(1 - a)m - (6a + 1) = 0$.

Перевіркою з'ясуємо, що при $a = 1$ спільних коренів немає і тому $m = \frac{6a+1}{1-a}$. Підставимо знайдене значення m у рівність $am^2 - m + 1 = 0$. Дістанемо

$$a\left(\frac{6a+1}{a-1}\right)^2 + \frac{6a+1}{a-1} + 1 = 0,$$

звідки $36a^3 + 19a^2 - 6a = 0$.

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо значення параметра a, при яких дане рівняння має спільний корінь $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{2}{9}$, $a_3 = -\frac{3}{4}$.

Приклад 5. При яких значеннях параметра a корені рівняння $(a+1)x^2 - 3ax + 4a = 0$ більші за 1?

Розв'язання. Умова $x_1 > 1$ та $x_2 > 1$ виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 2, \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0, \\ D \geq 0. \end{cases} \qquad (*)$$

а) Очевидно, що при $x_1 > 1$ та $x_2 > 1$ всі нерівності цієї системи справджуються.

б) Доведемо обернене, тобто коли справджуються всі нерівності системи, то $x_1 > 1$ та $x_2 > 1$.

З нерівності $D \geq 0$ випливає, що x_1 та x_2 — дійсні числа. З нерівності $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$ випливає, що $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, або $x_1 < 1$, $x_2 < 1$.

А з нерівності $x_1 + x_2 > 2$ випливає, що $x_1 > 1$, $x_2 > 1$.

Систему нерівностей (*) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 2, \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$$

За теоремою Вієта

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{3a}{a+1}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{4}{a+1}. \end{cases}$$

Використовуючи утворені співвідношення, маємо

$$\begin{cases} \dfrac{3a}{a+1} > 2, \\ \dfrac{4a}{a+1} - \dfrac{3a}{a+1} + 1 > 0, \\ 9a^2 - 16a(a+1) \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, дістанемо

$$\begin{cases} \dfrac{a-2}{a+1} > 0, \\ \dfrac{2a+1}{a+1} > 0, \\ 9a^2 - 16a(a+1) \geq 0, \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} (a-2)(a+1) > 0, \\ (2a+1)(a+1) > 0, \\ 7a^2 + 16a \leq 0, \end{cases}$$

звідки знайдемо $-\dfrac{16}{7} \leq a < -1$.

Розв'язання прикладів, в яких використовуються властивості квадратного рівняння, потребують перевірки відповідей. В цьому нас переконує розв'язання такого прикладу.

Приклад 6. При яких значеннях параметра k сума квадратів коренів рівняння $4x^2 - 28x + k = 0$ дорівнює 22,5?

Розв'язання. Нехай x_1 та x_2 — корені даного рівняння. Тоді за умовою $x_1^2 + x_2^2 = 22{,}5$ або

$$(x_1 + x_2)^2 = 22{,}5 + 2x_1x_2. \qquad (*)$$

Але за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 7$, $x_1x_2 = \dfrac{k}{4}$. Підставивши в формулу (*), дістанемо $49 = 22{,}5 + \dfrac{k}{2}$, звідки $k = 53$. Але це число не можна вважати відповіддю, оскільки його дістали в результаті припущення, що корені існують, тобто що дане рівняння має розв'язок. Але при $k = 53$ дискримінант утвореного рівняння $4x^2 - 28x + 53 = 0$ від'ємний і рівняння розв'язків не має.

Відповідь: таких значень немає.

Вправи

1. Знайти b, якщо корені рівняння $24x^2 + bx + 25 = 0$ дійсні та $x_2 = 1{,}5x_1$.

2. Знайти значення a, при яких корені рівняння $(2a-5)x^2-2(a-1)x+3=0$ рівні між собою.

3. При яких значеннях m рівняння $x^2-x+m=0$ не має дійсних коренів?

4. Знайти цілі значення k, при яких рівняння $(k-12)x^2+2(k-12)x+2=0$ не має дійсних коренів.

5. Знайти найменше ціле число k, при якому рівняння $x^2-2(k+2)x+12+k^2=0$ має два різних дійсних кореня.

6. При яких значеннях a сума коренів рівняння $x^2+(2-a-a^2)x-a^2=0$ дорівнює нулеві?

7. При яких значеннях a відношення коренів рівняння $x^2+ax+a+2=0$ дорівнює 2?

8. При якому значенні a різниця між коренями рівняння $(a-2)x^2-(a-4)x-2=0$ дорівнює 3?

9. Знайти всі значення a, при яких сума коренів рівняння $x^2-2a(x-1)-1=0$ дорівнює сумі квадратів його коренів.

10. У рівнянні $x^2-6x+q=0$ знайти таке значення q, при якому корені його x_1 та x_2 задовольняють рівняння $3x_1+2x_2=20$.

11. При якому значенні k рівняння

$$x^2-2xa+k=0$$

матиме корінь, що дорівнює $a-b$?

12. Знайти таке значення k, при якому один з коренів рівняння $x^2-(2k+1)x+k^2+2=0$ у два рази більший, ніж другий корінь.

13. Знайти таке значення m, при якому один з коренів рівняння $x^2-12x+m=0$ на $2\sqrt{5}$ більший за другий корінь.

14. Знайти таке значення a, при якому один з коренів рівняння $2x^2-5ax+2a^2=0$ є кубом другого кореня.

15. Знайти, при яких значеннях m один з коренів рівняння $x^2-2mx+5=0$ в два рази менший, ніж один з коренів рівняння $x^2+4x-4m=0$.

16. Показати, що коли відношення коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дорівнює трьом, то коефіцієнти a, b і c пов'язані умовою $3b^2 - 16ac = 0$.

17. При якому дійсному значенні a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - ax + a^2 - 3a - 2 = 0$ найбільша?

18. При якому дійсному значенні a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a - 2 = 0$ найменша?

19. Знайти, при якому значенні a рівняння

$$x^2 - 2ax + a + 1 = 0 \text{ та } x^2 + ax - a - 1 = 0$$

мають принаймні один спільний корінь.

20. Знайти всі значення a, при яких рівняння

$$x^2 + ax + 1 = 0 \text{ та } x^2 + x + a = 0$$

мають принаймні один спільний корінь.

§5. Властивості коренів рівняння 3-го та 4-го степенів

Якщо x_1, x_2, x_3, x_4 — корені рівняння

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + dx + e = 0,$$

то мають місце співвідношення:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a;$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b;$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -d;$$

$$x_1x_2x_3x_4 = e,$$

які за аналогією до квадратного рівняння і для зручності міркувань часто називають ***формулами Вієта***.

Покажемо, як використовуються властивості коренів рівнянь третього та четвертого степенів при розв'язуванні рівнянь з параметрами.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$x^3 - 6x^2 + 3x + a = 0,$$

якщо відомо, що його корені утворюють арифметичну прогресію.

Розв'язання. За теоремою Вієта

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3,$$

$$x_1x_2x_3 = -a.$$

Запишемо ці рівняння у вигляді:

$$(x_1 + x_3) + x_2 = 6, \qquad (*)$$

$$x_2(x_1 + x_3) + x_1x_3 = 3, \qquad (**)$$

$$x_1x_2x_3 = -a. \qquad (***)$$

Оскільки x_1, x_2, x_3 утворюють арифметичну прогресію, то $x_1 + x_3 = 2x_2$ і тоді з рівняння (*) знайдемо $2x_2 + x_2 = 6$, $x_2 = 2$, а з рівняння (**) дістанемо

$$8 + x_1x_3 = 3, \quad x_1x_3 = -5.$$

Підставляючи $x_2 = 2$ та $x_1x_3 = -5$ у рівняння (***), маємо $a = 10$.

Розв'язуючи рівняння $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$, знаходимо $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$.

Відповідь: –1; 2; 5.

Приклад 2. При яких значеннях a і b корені рівняння $ax^4 + bx^2 + 1 = 0$ утворюють арифметичну прогресію?

Розв'язання. Нехай корені рівняння x_1, x_2, x_3, x_4 утворюють арифметичну прогресію. Тоді $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$. Але за теоремою Вієта

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \qquad (*)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{b}{a}, \qquad (**)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{1}{a}. \qquad (***)$$

З рівняння (*) і властивості прогресії випливає, що $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0$. Звідки $x_4 = -x_1$, $x_3 = -x_2$.

Використовуючи утворені співвідношення між коренями рівнянь (**) та (***), дістанемо

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1^2 x_2^2 = \dfrac{1}{a}. \end{cases}$$

Використовуючи знайдені співвідношення між коренями, запишемо прогресію, яку утворюють корені, у вигляді x_1, x_2, $-x_2$, $-x_1$. Тоді за властивістю арифметичної прогресії $2x_2 = x_1 - x_2$, звідки $x_1 = 3x_2$.

$$\begin{cases} 19x_2^2 = -\dfrac{b}{a}, \\ 9x_2^4 = \dfrac{1}{a}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_2^4 = \dfrac{b^2}{100a^2}, \\ x_2^4 = \dfrac{1}{9a}. \end{cases}$$

Звідси $\dfrac{b^2}{100a^2} = \dfrac{1}{9a}$, $a = \dfrac{9}{100} b^2$.

Відповідь: при будь-якому $b \neq 0$ та $a = \dfrac{9}{100} b^2$.

Приклад 3. При яких дійсних значеннях a многочлен $x^3 + 2x^2 + a$ має кратні корені? Знайти їх.

Розв'язання. Застосовуючи формули Вієта для кубічного рівняння, дістаємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0, \\ x_1x_2x_3 = a. \end{cases}$$

Припустимо, що многочлен має три рівні корені. Тоді

$$\begin{cases} 3x_1 = -2, \\ 3x_1^2 = 0, \\ x_1^3 = -a. \end{cases}$$

Система несумісна. Отже, такий випадок неможливий ні при яких значеннях a.

Нехай тепер многочлен має кратний корінь, тобто $x_1 = x_2$. Тоді система набере вигляду

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -2, \\ x_1^2 + 2x_1x_3 = 0, \\ x_1^2x_3 = -a. \end{cases}$$

З другого рівняння системи випливає, що або $x_1 = 0$, або $x_1 + 2x_3 = 0$.

В першому випадку знаходимо $x_3 = -2$, $a = 0$. В другому випадку маємо $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$, $a = -\frac{32}{27}$.

Відповідь: многочлен $x^3 + 2x^2 + a$ має кратні корені при $a = 0$ (корені $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -2$) і при $a = -\frac{32}{27}$ $\left(\text{корені } x_1 = x_2 = -\frac{4}{3},\ x_3 = \frac{2}{3}\right)$.

Вправи

1. При якому значенні a добуток трьох коренів рівняння $x^4 - 11x^3 + ax^2 - 61x + 30 = 0$ дорівнює 15? Знайти корені цього рівняння.

2. При якому значенні a корені рівняння

$$x^3 - 9x^2 + ax - 15 = 0$$

утворюють геометричну прогресію, різниця якої дорівнює 2? Знайти корені рівняння.

3. При якому значенні a корені рівняння

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 - 40x + 64 = 0$$

утворюють геометричну прогресію, знаменник якої дорівнює -2? Знайти корені рівняння.

4. Відомо, що x_1, x_2 та x_3 — корені рівняння $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. Скласти рівняння, коренями якого є $y_1 = x_1x_2$, $y_2 = x_1x_3$ та $y_3 = x_2x_3$.

5. Відомо, що x_1, x_2 та x_3 — корені рівняння

$$x^3 - x^2 - 1 = 0.$$

Скласти рівняння, коренями якого є $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 + x_3$ та $y_3 = x_2 + x_3$.

6. Знайти суму квадратів коренів рівняння

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = 0.$$

7. При якому значенні m корені рівняння

$$x^3 + x^2 + 2x + m = 0$$

утворюють геометричну прогресію?

8. При якому значенні m корені рівняння

$$x^3 - 9x^2 + 26x + m = 0$$

утворюють арифметичну прогресію?

9. Знайти коефіцієнти a і b рівняння

$$x^4 + x^3 - 18x^2 + ax + b = 0,$$

якщо відомо, що серед його коренів є три рівних цілих числа.

§6. Умови розміщення коренів квадратного рівняння відносно заданих точок

Нехай дано квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0$$

і умови розміщення його коренів відносно заданих точок. Треба визначити, при яких значеннях параметрів корені даного рівняння задовольняють деяким наперед заданим умовам. Розглянемо задачі.

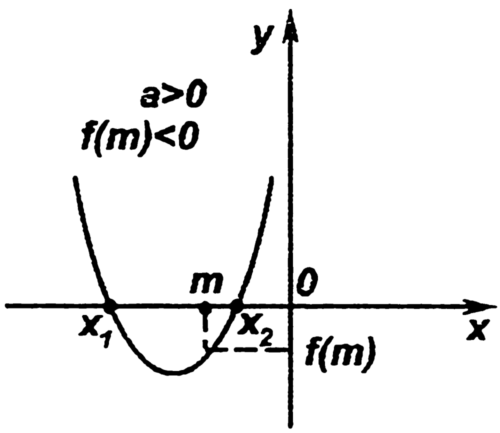
1. При яких умовах дане число m лежить між дійсними коренями x_1, x_2 тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$?

Розв'язання. Нехай $x_1 < m < x_2$. В цьому випадку знак $f(x)$ на інтервалі між коренями протилежний знаку a. Отже, $a f(m) < 0$ (мал. 24).

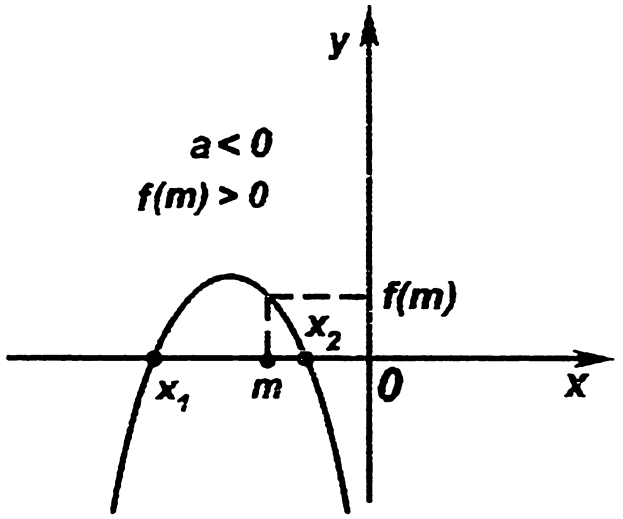
Справджується й обернене твердження. Якщо m — дійсне число й задовольняє нерівність $a f(m) < 0$, то

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 < m < x_2 \ \text{(при } x_1 < x_2) \end{cases} \text{(мал. 25).}$$

2. При яких умовах дане число m не лежить між дійсними коренями x_1, x_2 тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Мал. 24



Мал. 25

Розв'язання. *а*) Нехай $x_1 \le x_2 < m$. Тоді

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \ge 0, \\ a\,f(m) > 0, \\ m > -\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$$

Перша з умов означає, що корені дійсні. Друга умова означає, що m лежить поза проміжком $[x_1, x_2]$. Третя умова означає, що вершина параболи міститься ліворуч від точки m.

Справджується й обернене твердження, тобто виконання цих нерівностей означає, що корені — дійсні числа, m міститься поза проміжком $[x_1, x_2]$ і оскільки m лежить праворуч від вершини параболи, то $x_1 \le x_2 < m$.

Аналогічно для виконання нерівності $m < x_1 \le x_2$ необхідно й достатньо, щоб

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \ge 0, \\ a\,f(m) > 0, \\ m < -\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$$

Приклад 1. При яких значеннях параметра a число 1 міститься між коренями рівняння

$$(12a + 7)\,x^2 - 3\,(14 - 3a)\,x + 11 - 3a = 0?$$

Розв'язання. Для того, щоб число 1 містилося між коренями даного рівняння, необхідно й достатньо, щоб справджувалась нерівність $(12a + 7) f(1) < 0$, тобто нерівність

$$(12a + 7)((12 + 7) - 3(14 - 3a) + 11 - 3a) < 0,$$

яка після перетворень набере вигляду

$$6(12a + 7)(3a - 4) < 0.$$

Розв'язавши її, знайдемо шукану відповідь: $-\frac{7}{12} < a < \frac{4}{3}$.

Відповідь: $-\frac{7}{12} < a < \frac{4}{3}$.

Приклад 2. При яких значеннях k корені квадратного рівняння $x^2 + (2k + 6)x + 4k + 12 = 0$ будуть більші за -1?

Розв'язання. Якщо x_1 та x_2 — корені даного рівняння (умовно $x_1 \le x_2$), то за умовою $-1 < x_1 \le x_2$. Ця умова розміщення коренів виконується, коли справджуються співвідношення:

$$D = (k + 3)^2 - (4k + 12) \ge 0,$$

$$1 \cdot f(-1) = 1 - (2k + 6) + 4k + 12 > 0,$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{2k + 6}{2} > -1.$$

Звідки $-\frac{7}{2} < k \le -3$.

Відповідь: $-\frac{7}{2} < k \le -3$.

Приклад 3. При яких значеннях k корені рівняння $x^2 - 2kx + k + 6 = 0$ має менші від 1?

Розв'язання. Якщо x_1 та x_2 — корені даного рівняння (умовно $x_1 \le x_2$), то за умовою $x_1 \le x_2 < 1$, а це розміщення коренів має місце тоді, коли

$$D = k^2 - (k + 6) \ge 0,$$

$$1 \cdot f(1) = 1 - 2k + k + 6 > 0,$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{2k}{2} < 1.$$

Розв'язавши систему, маємо $k \le -2$.

Відповідь: $k \le -2$.

Приклад 4. При яких значеннях a корені рівняння $2x^2 - (2a - 5)x + a - 3 = 0$ містяться між 0 і 1?

Розв'язання. Якщо x_1 та x_2 — корені даного рівняння (умовно $x_1 \le x_2$), то за умовою $0 < x_1 \le x_2 < 1$, тобто виконуються умови

$$\begin{cases} 0 < x_1 \le x_2, \\ x_1 \le x_2 < 1. \end{cases}$$

Застосовуючи умови розміщення коренів квадратного рівняння відносно заданих точок, дістаємо:

$$\begin{cases} (2a-5)^2 - 8(a-3) \ge 0, \\ 2(a-3) > 0, \\ \dfrac{2a-5}{4} > 0, \\ 2(2-(2a-5)+a-3) > 0, \\ \dfrac{2a-5}{4} < 1, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} (2a-7)^2 \ge 0, \\ a > 3, \\ a > 2{,}5, \\ a < 4, \\ a < 4{,}5. \end{cases}$$

Розв'язуючи утворену систему, матимемо

$$3 < a < 4.$$

Відповідь: $3 < a < 4$.

Вправи

1. Для яких дійсних значень a рівняння

$$(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$$

має один корінь, який більший за 3, а другий — менший за 2?

2. Для яких дійсних значень a обидва корені рівняння $4x^2 - 2x + a = 0$ містяться між -1 та 1?

3. Знайти всі дійсні значення a, при яких обидва корені рівняння $(2a + 3)x^2 + (a + 1)x + 4 = 0$ містяться між 0 та -2.

§7. Розв'язання ірраціональних рівнянь з параметрами

Приклад 1. Розв'язати рівняння відносно змінної x:

$$\sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{1 - (x + a)}.$$

Розв'язання. Область допустимих значень невідомого і параметра a:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a \geq 0, \\ x + a \leq 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння. Після піднесення до квадрата обох частин дістанемо рівносильне рівняння (в силу невід'ємності обох частин рівняння):

$$2\sqrt{ax} = 1 - 2(x + a).$$

Ліва частина утвореного рівняння невід'ємна при всіх допустимих a, x. Отже, $1 - 2(x + a) \geq 0$, звідки $x + a \leq \frac{1}{2}$. Звужуємо область допустимих значень. Дістаємо таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a \geq 0, \\ x + a \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (*)$$

Підносимо до квадрата обидві частини утвореного рівняння. Після перетворення дістаємо рівносильне рівняння $x^2 + (a - 1)x + a^2 - a + \frac{1}{4} = 0$, звідки

$$x_{1,2} = \frac{1 - a \pm \sqrt{2a - 3a^2}}{2}.$$

Знайдемо, при яких допустимих значеннях параметра a обидва знайдені корені є дійсними числами.

$D = 2a - 3a^2 \geq 0$, при $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$, але з системи (*) випливає, що $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$. Отже, при будь-яких a, що задовольняють нерівність $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$, обидва знайдені корені є дійсними числами. Тепер з'ясуємо, чи задовольнять знайдені значення умови $x \geq 0$, $x + a \leq \frac{1}{2}$.

а) Перевіримо виконання умов $x + a \leq \frac{1}{2}$. Маємо

$$x_1 + a = \frac{1 - a - \sqrt{2a - 3a^2}}{2} + a = \frac{1 + a - \sqrt{2a - 3a^2}}{2}.$$

Розв'язавши нерівність $\frac{1 + a - \sqrt{2a - 3a^2}}{2} \leq \frac{1}{2}$, дістанемо $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$. Отже, $x_1 + a \leq \frac{1}{2}$ при всіх допустимих значеннях параметра a:

$$x_2 + a = \frac{1 - a + \sqrt{2a - 3a^2}}{2} + a = \frac{1 + a + \sqrt{2a - 3a^2}}{2}.$$

Нерівність $\frac{1 + a + \sqrt{2a - 3a^2}}{2} \leq \frac{1}{2}$ виконується тільки при $a = 0$. Але коли $a = 0$, маємо

$$D = 0 \text{ та } x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$$

б) Перевіримо виконання умови $x \geq 0$.

$$x_1 = \frac{1 - a - \sqrt{2a - 3a^2}}{2}.$$

Розв'язавши нерівність $\frac{1 - a - \sqrt{2a - 3a^2}}{2} \geq 0$, дістанемо нерівність $(2a - 1)^2 \geq 0$. Умова $x_1 \geq 0$ задовольняє при усіх допустимих значеннях параметра a.

$$x_2 = \frac{1 - a + \sqrt{2a - 3a^2}}{2}.$$

Нерівність $\frac{1 - a + \sqrt{2a - 3a^2}}{2} \geq 0$ також виконується при всіх допустимих значеннях параметра a.

Відповідь: якщо $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1 - a \pm \sqrt{2a - 3a^2}}{2}$;

якщо $a < 0$ або $a > \frac{1}{2}$, то розв'язків немає.

Вправи

Розв'язати рівняння відносно змінної x:

1. $\dfrac{a-2}{\sqrt{x+4}} = 1.$
2. $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}.$
3. $\sqrt{x-2a} - \sqrt{x-a} = 2.$
4. $x + \sqrt{x^2 - x} = a.$
5. $\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1.$
6. $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = a.$

§8. Графічне розв'язування рівнянь з параметрами

Дістати вичерпну інформацію про кожний з параметрів проміжку $(-\infty; \infty)$ при розв'язуванні рівнянь з параметрами можна, використовуючи *графічний метод*.

На графіку видно, при яких значеннях параметра рівняння має розв'язки (і скільки), при яких — не має.

Метод графічного розв'язування рівнянь з параметрами складається з таких етапів:

1. Знаходимо область допустимих значень невідомого і параметрів, що входять до рівняння.

2. Виражаємо параметр a як функцію від x.

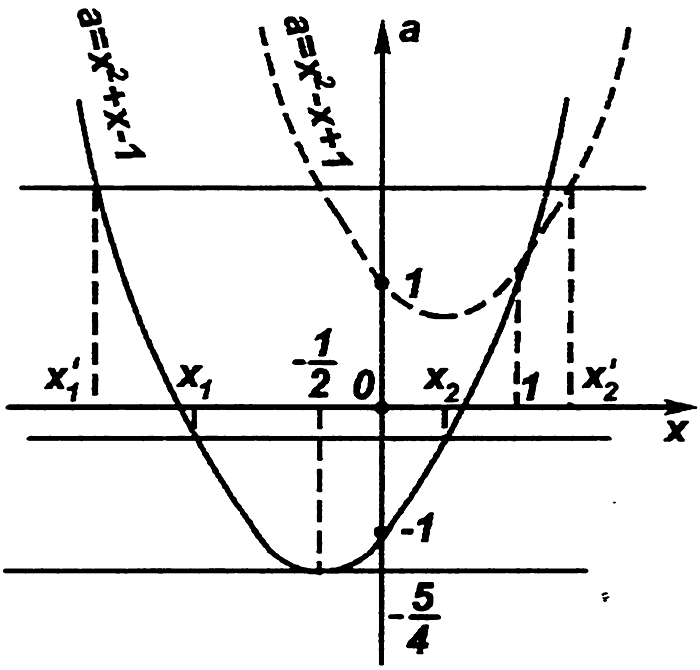
3. В системі координат xOy будуємо графік функції $a = f(x)$ для тих значень x, які входять до ОДЗ даного рівняння.

4. Знаходимо точки перетину прямої $a = c$, де c належить проміжку $(-\infty; \infty)$ з графіком $a = f(x)$.

Можливі випадки:

а) пряма $a = c$ не перетинає графік функції $a = f(x)$. При цьому значенні a рівняння розв'язків не має;

б) пряма $a = c$ перетинає графік $a = f(x)$. Тоді визначаємо абсциси точок перетину. Для цього достатньо розв'язати рівняння $a = f(x)$ відносно x.



Мал. 26

5. Записуємо відповідь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^2 - |x-1| = a$.

1. Область допустимих значень рівняння при будь-якому a $(-\infty;\ \infty)$.

2. Якщо $x \geq 1$, то $a = x^2 - x + 1$; якщо $x < 1$, то $a = x^2 - x + 1$.

3. В системі координат xOa будуємо графіки функцій: $a = x^2 - x + 1$, коли $x \geq 1$, та $a = x^2 + x - 1$, коли $x < 1$.

В результаті дістаємо графік даного рівняння. На мал. 26 цей графік показано жирною лінією.

4. Знаходимо точки перетину прямої $a = c$, де c — будь-яке дійсне число, з графіком функції $a = f(x)$.

Якщо $c \in \left(-\infty;\ -\frac{5}{4}\right)$, то пряма $a = c$ не перетинає графік функції $a = x^2 - |x-1|$. Отже, при $a \in \left(-\infty;\ -\frac{5}{4}\right)$, дане рівняння розв'язків не має.

Пряма $a = c = -\frac{5}{4}$ має з графіком рівняння тільки одну спільну точку. Абсциса цієї точки дорівнює $-\frac{1}{2}$.

Отже, при $a = -\frac{5}{4}$ дане рівняння має єдиний корінь $x = -\frac{1}{2}$.

Пряма $a = c$, де $c \in \left(-\frac{5}{4};\ 1\right]$, перетинає графік даного рівняння в двох точках. Для того, щоб визначити x_1 та x_2, достатньо розв'язати рівняння $a = x^2 + x - 1$ відносно x. Дістанемо

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5 + 4a}}{2},\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5 + 4a}}{2}.$$

Отже, якщо $a \in \left(-\frac{5}{4};\ 1\right]$, то рівняння має два корені. Пряма $a = c$, де $c \in (1;\ +\infty)$, перетинає графік рівняння також у двох точках з абсцисами x_1' та x_2', x_1' — менший корінь рівняння $a = x^2 + x - 1$, тобто

$$x_1' = \frac{-1 - \sqrt{5 + 4a}}{2};$$

x_2 — більший корінь рівняння $a = x^2 - x + 1$, тобто

$$x_2' = \frac{1 + \sqrt{-3 + 4a}}{2}.$$

5. **Відповідь:** якщо $a \in \left(-\infty;\ -\frac{5}{4}\right)$, то дане рівняння не має розв'язків;

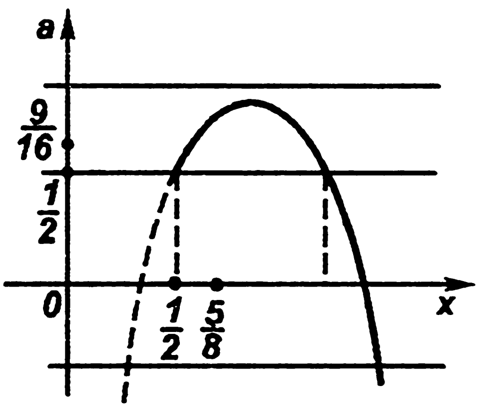
якщо $a = -\frac{5}{4}$, то $x = -\frac{1}{2}$;

якщо $a \in \left(-\frac{5}{4};\ 1\right]$, то

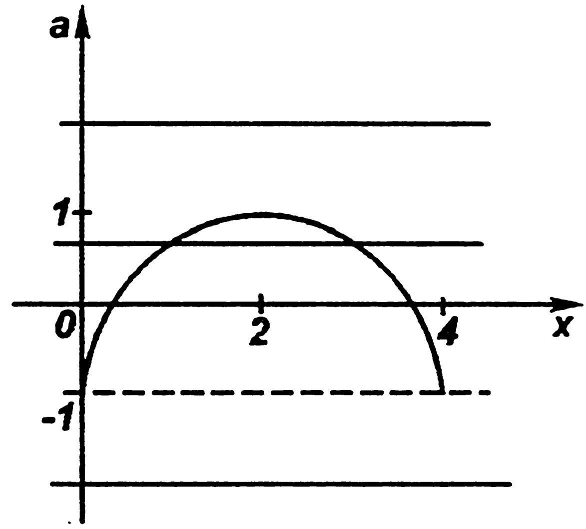
$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5 + 4a}}{2},\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5 + 4a}}{2};$$

якщо $a \in (1;\ +\infty)$, то

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5 + 4a}}{2},\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{-3 + 4a}}{2}.$$



Мал. 27



Мал. 28

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-a} = 2x - 1$.

Розв'язання. Зауважимо, що при $x \geq \frac{1}{2}$ це рівняння можна замінити на рівносильне:

$$x - a = (2x - 1)^2.$$

Виразимо a через x:

$$a = -4x^2 + 5x - 1.$$

Побудуємо графік функції $a = -4x^2 + 5x - 1$ і виділимо ту його частину, де $x \geq \frac{1}{2}$ (мал. 27). Пряма $a = c$, де $c \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, перетинає графік функції (*) в одній точці c, яка має абсцису x', що дорівнює більшому кореню рівняння $-4x^2 + 5x - 1 - a = 0$.

Пряма $a = c$, де $c \in \left[\frac{1}{2}; \frac{9}{16}\right)$, перетинає графік функції (*) в двох точках з абсцисами x_1 та x_2, які дорівнюють кореням рівняння $-4x^2 + 5x - 1 - a = 0$.

Якщо $a = \frac{9}{16}$, то $x_1 = x_2 = \frac{5}{8}$.

Пряма $a = c$, де $c \in \left(\frac{9}{16}; +\infty\right)$, не перетинає графік функції (*). Отже, в цьому випадку рівняння не має розв'язків.

Відповідь: якщо $a \in \left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right)$, то $x' = \frac{5+\sqrt{9-16a}}{8}$;

якщо $a \in \left[\frac{1}{2};\ \frac{9}{16}\right]$, то $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9-16a}}{8}$;

якщо $a \in \left(\frac{9}{16};\ +\infty\right)$, то розв'язків немає.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{4x - x^2} = a + 1$.

Розв'язання. Аналізуючи дане рівняння, з'ясовуємо, що $x \in [0;\ 4]$, графік цього рівняння міститься не нижче від прямої $a = -1$, оскільки $a + 1 \geq 0$, то між прямими $x = 0$ та $x = 4$.

Перетворимо дане рівняння. Дістанемо

$$\begin{cases} x^2 - 4x + (a+1)^2 = 0, \\ a + 1 \geq 0, \end{cases} \text{ або}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (a+1)^2 = 4, \\ a \geq -1. \end{cases} \qquad (*)$$

Система (*) виражає рівняння кола з центром у точці (2; –1) і радіусом, що дорівнює 2 (мал. 28).

При $a \in (-\infty;\ -1)$ та $a \in (1;\ \infty)$ рівняння розв'язків не має. При $c \in [-1;\ 1]$ пряма $a = c$ перетинає графік рівняння у двох точках. Абсциси цих точок легко знайти з рівняння $x^2 - 4x + (a+1)^2 = 0$;

$$x_1 = 2 + \sqrt{3 - a^2 - 2a},\ x_2 = 2 - \sqrt{3 - a^2 - 2a}.$$

Відповідь: якщо $a \in (-\infty;\ -1)$ та $a \in (1;\ \infty)$, то рівняння не має розв'язків;

якщо $a \in [-1;\ 1]$, то

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3 - a^2 - 2a}$.

§9. Розв'язування нерівностей 1-го степеня з параметрами

Нерівностями з параметрами *називаються нерівності виду $F(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \lesseqgtr 0$, де x — невідоме число, яке знаходимо, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — змінні параметри.*

Розв'язування таких нерівностей залежить від допустимих значень параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

При розв'язуванні нерівностей з параметрами область зміни параметрів може бути заданою. Якщо не вказані проміжки зміни параметрів, то вважається, що параметри можуть набувати усіх значень, при яких функція $F(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ має зміст.

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$(m^2 - 1)\, x > m^2 - m$$

відносно x.

Розв'язання. Розглянемо усі можливі випадки:

а) нехай $m^2 - 1 > 0$, тобто $m < -1$, або $m > 1$. Поділивши обидві частини нерівності на $m^2 - 1$, дістанемо $x > \dfrac{m}{m+1}$;

б) нехай $m^2 - 1 < 0$, тобто $-1 < m < 1$. Поділивши обидві частини нерівності на $m^2 - 1$, дістанемо $x < \dfrac{m}{m+1}$;

в) нехай $m = 1$. Нерівність набере вигляду $0x > 0$. Ця нерівність не має розв'язків;

г) нехай $m = -1$. Нерівність набере вигляду $0x > 2$. Нерівність не має розв'язків.

Отже, залежно від значень параметра m нерівність має такі розв'язки:

- коли $m > 1$ або $m < -1$, $x > \dfrac{m}{m+1}$;
- коли $-1 < m < 1$, $x < \dfrac{m}{m+1}$;

- коли $m = \pm 1$, нерівність не має розв'язків.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\frac{1}{2a} + \frac{1-x}{6} > \frac{-3x+5}{8a}$$

відносно x.

Розв'язання. Область допустимих значень невідомого і параметра $a \neq 0$, x — будь-яке число.

Перенесемо усі члени нерівності в ліву частину. Після перетворення маємо

$$\frac{(9-4a)\,x-(3-4a)}{24a} > 0 \text{ або}$$

$$\frac{9-4a}{24a}\,x > \frac{3-4a}{24a}.$$

Розглянемо три випадки.

а) $\frac{9-4a}{24a} = 0$, тобто $a = \frac{9}{4}$. Перевіркою переконуємося в тому, що при $a = \frac{9}{4}$ нерівність виконується для будь-якого значення x.

б) Якщо $\frac{9-4a}{24a} > 0$, тобто $0 < a < \frac{9}{4}$, то, поділивши обидві частини нерівності на $\frac{9-4a}{24a}$, дістанемо $x > \frac{3-4a}{9-4a}$.

в) Якщо $\frac{9-4a}{24a} < 0$, тобто $a < 0$ і $a > \frac{9}{4}$, то при діленні на $\frac{9-4a}{24a}$ дістаємо нерівність протилежного змісту: $x < \frac{3-4a}{9-4a}$.

Відповідь: коли $0 < a < \frac{9}{4}$, $x > \frac{3-4a}{9-4a}$;

коли $a = \frac{9}{4}$, x — будь-яке число;

коли $a < 0$, $a > \frac{9}{4}$, то $x < \frac{3-4a}{9-4a}$.

Вправи

Розв'язати нерівності:

1. $(m-1)\,x < 5m$.
2. $m\,(x-1) > x-2$.
3. $\dfrac{x}{m} + \dfrac{1+3x}{2} > \dfrac{x+2}{4m}$.
4. $\dfrac{2x-5}{m-1} - \dfrac{x+7}{3} \le \dfrac{3x-2m}{2\,(m-1)}$.

§10. Розв'язування нерівностей 2-го степеня з параметрами

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$ax^2 - 2\,(a-1)\,x + a + 2 < 0$$

відносно змінної x.

Розв'язання. Розглянемо такі випадки.

1. $a = 0$. Нерівність набере вигляду $0^2x + 2x + 2 < 0$, тобто $x < -1$.

2. $a \ne 0$. Знайдемо дискримінант лівої частини нерівності:

$$D = 4\,(a-1)^2 - 4a\,(a+2) = 4\,(a^2 - 2a + 1 - a^2 - 2a) =$$

$$= (-4a+1)\cdot 4 = 4\,(1-4a).$$

а) $\begin{cases} D < 0, \\ a < 0, \end{cases}$ тоді $\begin{cases} -4a+1 < 0, \\ a < 0, \end{cases}$ звідси $\begin{cases} a > \dfrac{1}{4}, \\ a < 0. \end{cases}$

Система несумісна, тобто такий випадок виключається.

б) $\begin{cases} D < 0, \\ a > 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} -4a+1 < 0, \\ a > 0, \end{cases}$ звідки $a > \dfrac{1}{4}$.

Нерівність не має розв'язків.

в) $\begin{cases} D = 0, \\ a < 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} a = \dfrac{1}{4}, \\ a < 0. \end{cases}$

Система несумісна. Отже, такий випадок теж виключається.

г) $\begin{cases} D = 0, \\ a > 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ a > 0, \end{cases}$ звідки $a = \frac{1}{4}$.

Нерівність не має розв'язків.

д) $\begin{cases} D > 0, \\ a < 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} -4a + 1 > 0, \\ a < 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} a < \frac{1}{4}, \\ a < 0, \end{cases}$ звідки $a < 0$.

Оскільки корені рівняння $ax^2 - 2(a-1)x + a + 2 = 0$ $x_{1,2} = \frac{a - 1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$, то маємо такі розв'язки нерівності:

$$x > \frac{a - 1 + \sqrt{1-4a}}{a} \text{ та } x < \frac{a - 1 - \sqrt{1-4a}}{a}.$$

е) $\begin{cases} D > 0, \\ a > 0, \end{cases}$ тоді $\begin{cases} a < \frac{1}{4}, \\ a > 0, \end{cases}$ $0 < a < \frac{1}{4}$.

Розв'язок нерівності:

$$\frac{a - 1 - \sqrt{1-4a}}{a} < x < \frac{a - 1 + \sqrt{1-4a}}{a}.$$

Відповідь: коли $a < 0$, то $x > \frac{a - 1 + \sqrt{1-4a}}{a}$ та $x < \frac{a - 1 - \sqrt{1-4a}}{a}$;

коли $0 < a < \frac{1}{4}$, то $\frac{a - 1 - \sqrt{1-4a}}{a} < x < \frac{a - 1 + \sqrt{1-4a}}{a}$;

коли $a = 0$, то $x < -1$;

коли $a \geq \frac{1}{4}$, то розв'язків немає.

Вправи

1. При яких значеннях k нерівність

$$x^2 - (k-3)x - k + 6 > 0$$

справджується при всіх дійсних значеннях x?

2. При яких значеннях a нерівність

$$ax^2 + 2ax + 0{,}5 > 0$$

виконується на всій числовій осі?

3. При якому цілому k нерівність

$$x^2 - 2\,(4k - 1)\,x + 15k^2 - 2k - 7 > 0$$

справджується для будь-якого дійсного x?

4. Знайти всі значення a, для яких нерівність

$$(a + 4)\,x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$$

виконується для всіх дійсних значень x.

5. Знайти такі значення a, для яких нерівність

$$(a - 3)\,x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$$

виконується при всіх значеннях a.

6. Знайти всі значення a, для яких нерівність

$$(a - 1)\,x^2 - (a + 1)\,x + a + 1 > 0$$

виконується при всіх дійсних значеннях x.

7. Розв'язати нерівність $x^2 + ax + a > 0$.

§11. Дослідження рівнянь 2-го степеня з параметрами

Дослідження розв'язування рівнянь з параметрами доцільно проводити за такою схемою, позначивши добуток коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, суму коренів і дискримінант відповідно через P, S і D:

1. Розв'язуючи нерівність $D < 0$, з'ясуємо, при яких значеннях параметра рівняння не має дійсних коренів; інші значення параметра, тобто ті, при яких $D \geq 0$, називатимемо допустимими значеннями.

2. Розв'язуючи нерівність $P < 0$, з'ясуємо, при яких значеннях параметра рівняння має корені різних знаків. Звідси робимо висновок, при яких допустимих значеннях параметра матиме місце нерівність $P > 0$.

3. Розв'язуючи нерівність $S < 0$, з'ясуємо, при яких допустимих значеннях параметра сума коренів є від'ємним числом. Звідси робимо висновок, при яких до-

пустимих значеннях параметра матиме місце нерівність $S > 0$.

4. Окремо досліджуємо усі граничні значення проміжків.

Приклад 1. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$(a - 2)\,x^2 + 2\,(2a - 3)\,x + 5a - 6 = 0$$

дійсні і визначити їх знаки.

Розв'язання. Розглянемо можливі випадки.

1. $a = 2$. Тоді $2\,(4 - 3)\,x + 10 - 6 = 0$, звідки $x = -2$.

2. $a \neq 2$. Тоді

$$x_{1,2} = \frac{-2a + 3 \pm \sqrt{4a^2 - 12a + 9 - (a-2)(5a-6)}}{a-2} =$$

$$= \frac{-2a + 3 \pm \sqrt{-a^2 + 4a - 3}}{a-2}.$$

3. $D < 0$, тобто $-a^2 + 4a - 3 < 0$, звідки $a > 3$ та $a < 1$. Рівняння не має дійсних коренів.

4. $D = 0$, тобто $-a^2 + 4a - 3 = 0$, звідки $a_1 = 3$ та $a_2 = 1$. Рівняння має два рівні дійсні корені. Знаходимо їх, підставляючи в рівняння знайдені значення параметра a.

Коли $a = 3$, $x_1 = x_2 = -3$; коли $a = 1$, $x_1' = x_2' = -1$.

5. $D > 0$, тобто при $1 < a < 2$, $2 < a < 3$, рівняння має два різних корені:

$$x_1 = \frac{-2a + 3 - \sqrt{-a^2 + 4a - 3}}{a-2},$$

$$x_2 = \frac{-2a + 3 + \sqrt{-a^2 + 4a - 3}}{a-2}.$$

Досліджуємо знайдені корені на знак. Запишемо рівняння у вигляді

$$x^2 + 2 \cdot \frac{2a-3}{a-2}\,x + \frac{5a-6}{a-2} = 0.$$

За теоремою Вієта знаходимо

$$P = x_1 x_2 = \frac{5a-6}{a-2},$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{2(2a-3)}{a-2}.$$

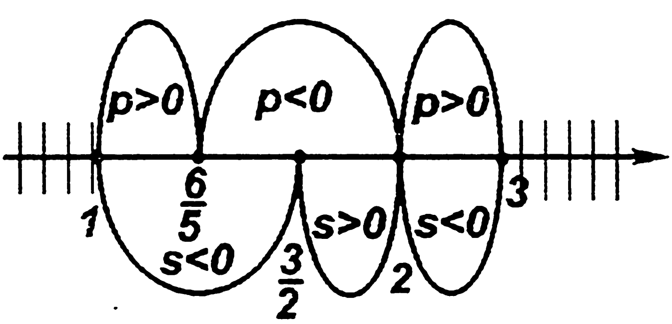
Визначимо, при яких значеннях a $P > 0$, $P < 0$, $P = 0$, $S > 0$, $S < 0$, $S = 0$.

а) $P = \dfrac{5a-6}{a-2} > 0$ при $a > 2$ та $a < \dfrac{6}{5}$;

$$P < 0 \text{ при } \frac{6}{5} < a < 2; \; P = 0 \text{ при } a = \frac{6}{5};$$

б) $S = -\dfrac{2(2a-3)}{a-2} > 0$ при $\dfrac{3}{2} < a < 2$; $S < 0$ при $a > 2$ та $a < \dfrac{3}{2}$; $S = 0$ при $a = \dfrac{3}{2}$.

Побудуємо числову пряму для параметра a та заштрихуємо ту частину прямої, де $D < 0$, тобто частину, яка не входить до області визначення. Зазначимо на малюнку 29 знаки P і S на утворених проміжках.



Мал. 29

Тепер проведемо дослідження коренів рівняння на знак.

а) Якщо $1 < a < \dfrac{6}{5}$ та $2 < a < 3$, то $x_1 < 0$, $x_2 < 0$.

б) Якщо $\dfrac{6}{5} < a < \dfrac{3}{2}$, то $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $|x_1| > |x_2|$.

в) Якщо $\dfrac{3}{2} < a < 2$, то $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $|x_1| < |x_2|$.

Зробимо висновок щодо граничних точок $a_1 = \frac{6}{5}$, $a_2 = \frac{3}{3}$.

г) Якщо $a = \frac{6}{5}$, то $P = x_1x_2 = 0$. Звідси $x_2 = 0$, але тоді з раніше знайденого співвідношення

$$S = x_1 + x_2 = -2\ \frac{2a-3}{a-2}$$

знаходимо $x_1 = -1{,}5$.

д) Якщо $a = \frac{3}{2}$, то $x_1 + x_2 = 0$, звідки $x_1 = -x_2$ і зі співвідношення $x_1x_2 = \frac{5a-6}{a-2}$ знаходимо $x_2 = 3$, тобто при $x_1 = -\sqrt{3}$ $x_2 = \sqrt{3}$.

Відповідь: коли $a < 1$, дійсних коренів немає.
Коли $a = 1$, $x_1 = x_2 = -1$.
Коли $1 < a < \frac{6}{5}$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$.
Коли $a = \frac{6}{5}$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1{,}5$.
Коли $\frac{5}{6} < a < \frac{3}{2}$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $|x_1| > |x_2|$.
Коли $a = \frac{3}{2}$, $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$.
Коли $\frac{3}{2} < a < 2$, $x_i < 0$, $x_2 > 0$, $|x_1| < |x_2|$.
Коли $a = 2$, $x_1 = -2$.
Коли $2 < a < 3$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$.
Коли $a = 3$, $x_1 = x_2 = -3$.
Коли $a > 3$, дійсних коренів немає.

Вправи

Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівнянь дійсні числа, і визначити їх знаки:

1. $x^2 - 2(a-1)x + (2a+1) = 0$.
2. $(a-3)x^2 - 2(3a-4)x + 7a - 6 = 0$.

3. $3ax^2 - 2(3a - 2)x + 3(a - 1) = 0$.
4. $(a - 2)x^2 - 2ax + (2a - 3) = 0$.

§12. Розв'язування ірраціональних нерівностей з параметрами

Приклад. Розв'язати нерівність $x - a > \sqrt{x + a}$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x + a \geq 0, \\ x - a > 0, \\ (x - a)^2 > x + a, \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} x \geq -a, \\ x > a, \\ x^2 - (2a + 1)x + a^2 - a > 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Знайдемо дискримінант квадратного тричлена лівої частини останньої нерівності системи:

$$D = (2a + 1)^2 - 4(a^2 - a) = 8a + 1.$$

Розглянемо три випадки.

1. Коли $D < 0$, тобто $8a + 1 < 0$, $a < -\frac{1}{8}$, то третя нерівність системи справджується при будь-яких дійсних значеннях x.

Отже, розв'язок системи матиме вигляд $x \geq -a$.

2. Якщо $D = 0$, тобто $8a + 1 = 0$, $a = -\frac{1}{8}$, то третя нерівність системи справджується для будь-яких дійсних значень x, крім значення, що дорівнює кореню квадратного тричлена при $a = -\frac{1}{8}$. Знаходимо це значення: $x = \frac{3}{8}$.

Отже, в цьому випадку розв'язок системи буде мати вигляд

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{8}, \\ x \neq \frac{3}{8}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \frac{1}{8} \leq x < \frac{3}{8} \ \text{ та } \ x > \frac{3}{8}.$$

3. $D > 0$, тобто $8a + 1 > 0$, $a > -\frac{1}{8}$. Оскільки корені квадратного тричлена $x^2 - (2a + 1)x + a^2 - a$ дорівнюють

$$x_{1,2} = \frac{2a + 1 \pm \sqrt{8a + 1}}{2},$$

то розв'язок системи (*) набере вигляду

$$\begin{cases} x \geq -a, \\ x > a, \\ x > \dfrac{2a + 1 + \sqrt{8a + 1}}{2}, \quad x < \dfrac{2a + 1 - \sqrt{8a + 1}}{2}. \end{cases}$$

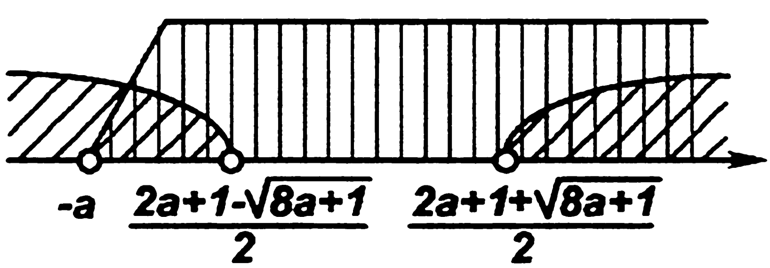
В цьому випадку необхідно розглянути два випадки:

а) нехай $-\frac{1}{8} < a < 0$, тоді $-a > a$. З'ясуємо відносне розміщення на числовій прямій точок, що зображають числа

$$-a, \quad \frac{2a + 1 - \sqrt{8a + 1}}{2} \quad \text{та} \quad \frac{2a + 1 + \sqrt{8a + 1}}{2}.$$

Легко довести, що $\frac{2a + 1 - \sqrt{8a+1}}{2} > -a$, оскільки ця нерівність зводиться до рівносильної $4a + 1 > \sqrt{8a + 1}$, яка справджується при $-\frac{1}{8} < a < 0$.

Отже, якщо $-\frac{1}{8} < a < 0$, маємо (мал. 30):



Мал. 30

$$-a \leq x < \frac{2a + 1 - \sqrt{8a + 1}}{2},$$

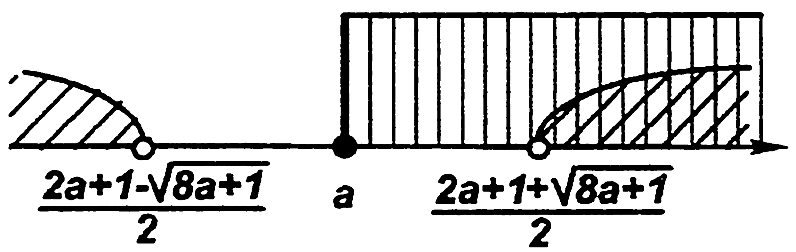
$$x > \frac{2a + 1 + \sqrt{8a + 1}}{2};$$

б) нехай $a \geq 0$. В цьому випадку $a \geq -a$.

Визначивши відносне розміщення на числовій прямій точок, що зображують числа a, $\frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2}$ та $\frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2}$, знайдемо

$$\frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2} < a < \frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2}.$$

Тоді дістанемо такий розв'язок системи (мал. 31):



Мал. 31

$$x > \frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2}.$$

Відповідь: коли $a < -\frac{1}{8}$, $x \geq -a$;

коли $a = -\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8} \leq x < \frac{3}{8}$, $x > \frac{3}{8}$;

коли $-\frac{1}{8} < a < 0$,

$$-a \leq x < \frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2}, \quad x > \frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2};$$

коли $a \geq 0$, $x > \frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2}$.

Вправи

Розв'язати нерівності:

1. $a\sqrt{x+1} < 1$.
2. $(a+1)\sqrt{2-x} < 1$.
3. $\sqrt{a^2+x^2} > x+a-1$.
4. $x+4a > 5\sqrt{ax}$.

Розділ V

Перетворення алгебраїчних виразів

§1. Арифметичне значення кореня

Щоб уточнити застосування символу $\sqrt[n]{a}$, розглянемо поняття арифметичного значення кореня.

***Арифметичним коренем** n-го степеня з невід'ємного числа a називається невід'ємне число b, для якого $b^n = a$.*

Наприклад, $\sqrt{25}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[7]{0}$ мають відповідно такі арифметичні значення: 5, 1, 2, 0, а для $\sqrt{-1}$ та $\sqrt[3]{-27}$ не існує арифметичних значень.

Далі символом $\sqrt[n]{a}$, де n — парне натуральне число та $a \geq 0$, позначимо арифметичне значення кореня, а якщо n — непарне натуральне число та a — будь-яке дійсне число, то цим самим символом $\sqrt[n]{a}$ позначимо єдине дійсне значення кореня (арифметичне для $a \geq 0$ та неарифметичне для $a < 0$).

Наприклад, внаслідок такої домовленості $\sqrt{81} = 9$, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Теорема. При будь-якому натуральному n $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

Доведення. Якщо $a = 0$, теорема очевидна. Нехай $a \neq 0$. Тоді множина всіх дійсних значень $\sqrt[2n]{a^{2n}}$ складається з двох чисел: a та $-a$. Одне з чисел додатне (арифметичне), друге — від'ємне (неарифметичне).

Якщо $a > 0$, то арифметичним значенням кореня є a. Тому в цьому випадку $\sqrt[2n]{a^{2n}} = a = |a|$.

Якщо $a < 0$, то арифметичним значенням кореня є $-a$. Тому $\sqrt[2n]{a^{2n}} = -a = |a|$.

Таким чином, доведено, що в усіх випадках (коли $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

Приклад 1. $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$.

Приклад 2. $\sqrt[4]{(1 - \sqrt{2})^4} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$.

Приклад 3.

$$\sqrt{(2a-7)^2} = |2a-7| = \begin{cases} 2a-7, \text{ якщо } a \geq \dfrac{7}{2}, \\ -2a+7, \text{ якщо } a < \dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

Приклад 4. Спростити вираз

$$A = x + 1 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 10x + 25}.$$

Розв'язання. Вираз A визначений для всіх дійсних значень x, оскільки

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \geq 0 \text{ та}$$

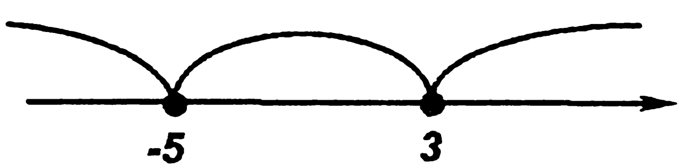
$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2 \geq 0.$$

Перетворюємо його:

$$A = x + 1 + \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x+5)^2} =$$

$$= x + 1 + |x-3| + |x+5|.$$

На числовій прямій відкладемо ті значення x, при яких $x - 3 = 0$ та $x + 5 = 0$ і розглянемо вираз A на кожному з утворених проміжків знакосталості (мал. 32).



Мал. 32

а) Якщо $x \leq -5$, то

$$A = x + 1 - x + 3 - x - 5 = -x - 1;$$

б) якщо $-5 < x \leq 3$, то

$$A = x + 1 - x + 3 + x + 5 = x + 9;$$

в) якщо $x > 3$, то $A = x + 1 + x - 3 + x + 5 = 3x + 3$.

Відповідь: $A = \begin{cases} -x - 1, \text{ якщо } x \leq -5, \\ x + 9, \text{ якщо } -5 \leq x \leq 3, \\ 3x + 3, \text{ якщо } x > 3. \end{cases}$

Приклад 5. Спростити вираз

$$A = \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}$$

для $x = \dfrac{2ab}{b^2+1}$, якщо $a > 0$, b — будь-яке дійсне число.

Розв'язання. Перетворимо даний вираз:

$$A = \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}} = \frac{\sqrt{a + \dfrac{2ab}{b^2+1}} - \sqrt{a - \dfrac{2ab}{b^2+1}}}{\sqrt{a + \dfrac{2ab}{b^2+1}} + \sqrt{a - \dfrac{2ab}{b^2+1}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\dfrac{a}{b^2+1}}\,|b+1| - \sqrt{\dfrac{a}{b^2+1}}\,|b-1|}{\sqrt{\dfrac{a}{b^2+1}}\,|b+1| - \sqrt{\dfrac{a}{b^2+1}}\,|b-1|} = \frac{|b+1| - |b-1|}{|b+1| + |b-1|}.$$

На числовій прямій позначимо значення b, при яких $b + 1 = 0$ та $b - 1 = 0$, тобто $b = -1$ та $b = 1$. Розглянемо вираз A на кожному з утворених проміжків знакосталості (мал. 33).

Мал. 33

а) якщо $b < -1$, то

$$A = \frac{-b-1+b-1}{-b-1-b+1} = \frac{1}{b};$$

б) якщо $-1 \le x \le 1$, то

$$A = \frac{b+1+b-1}{b+1-b+1} = b;$$

в) якщо $b > 1$, то

$$A = \frac{b+1-b+1}{b+1+b-1} = \frac{1}{b}.$$

Відповідь: $\begin{cases} b, & \text{якщо } |b| \le 1, \\ \dfrac{1}{b}, & \text{якщо } |b| > 1. \end{cases}$

Приклад 6. Спростити вираз $A = \dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, коли $x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)$, якщо $a > 0$, $b > 0$.

Розв'язання. Оскільки $a > 0$ та $b > 0$, то

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right) = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

Тоді

$$A = \frac{2b\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^2 - 1}}{\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}} - \sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^2 - 1}} = \frac{2b\sqrt{\dfrac{(a-b)^2}{4ab}}}{\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}} - \sqrt{\dfrac{(a-b)^2}{4ab}}} =$$

$$= \frac{2b\,|a-b|}{a+b-|a-b|}.$$

Розглянемо два випадки:

а) якщо $a \geq b$, то $a - b \geq 0$ та

$$A = \frac{2b\,(a-b)}{a+b-(a-b)} = \frac{2b\,(a-b)}{2b} = a-b;$$

б) якщо $a < b$, то $a - b \leq 0$ та

$$A = \frac{2b\,(b-a)}{a+b-(b-a)} = \frac{2b\,(b-a)}{2a} = \frac{b\,(b-a)}{a}.$$

Відповідь: $A = \begin{cases} a-b, & \text{якщо } a \geq b, \\ \dfrac{b\,(b-a)}{a}, & \text{якщо } a < b. \end{cases}$

Вправи

Спростити вираз:

1. $\sqrt{a^2+6a+9} + \sqrt{a^2-6a+9}$.

2. $\dfrac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^2+1}}$, якщо $a \neq 0$.

3. $\dfrac{a-b}{\sqrt{a^3-2a^2b+ab^2}}$, якщо $a>0,\ a\neq b$.

4. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

для $a=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$, якщо $a>0,\ b>0,\ a\neq b,\ a\neq -b$.

5. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, якщо $1\le x\le 2$.

6. $\dfrac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}}$, якщо $x=\dfrac{2mn}{n^2+1}$

$(m>0,\ n>0)$.

§2. Перетворення складених радикалів

*Вирази виду $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ називаються **складеними квадратними радикалами** (коренями).*

Для перетворення користуються формулою

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-b}}{2}},$$

де $A>0,\ B>0$ та $A^2-B>0$.

Ця формула спрощує складений радикал, якщо A^2-B — точний квадрат, але в цьому випадку зручніше користуватися простішими очевидними формулами:

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}, \qquad (*)$$

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=|\sqrt{a}-\sqrt{b}|,\ \text{де}\ a\ge 0,\ b\ge 0. \qquad (**)$$

Приклад 1. Спростити вираз $\sqrt{18+2\sqrt{45}}$.

Розв'язання. Щоб застосувати формулу (*), запишемо число 45 у вигляді добутку двох чисел, сума яких дорівнює 18. Такими числами є 15 та 3 ($15\cdot 3=45$, $15+3=18$).

Отже,

$$\sqrt{18+2\sqrt{45}}=\sqrt{15+3+2\sqrt{15\cdot 3}}=\sqrt{15}+\sqrt{3}.$$

Відповідь: $\sqrt{15}+\sqrt{3}$.

Приклад 2. Спростити вираз $\sqrt{19 - 2\sqrt{70}}$.

Розв'язання. Запишемо число 70 у вигляді добутку двох чисел, сума яких дорівнює 19. Такими числами є 14 і 5. Отже, застосувавши формулу (**), дістанемо

$$\sqrt{19 - 2\sqrt{70}} = \sqrt{14 + 5 - 2\sqrt{14 \cdot 5}} = \sqrt{14} - \sqrt{5}.$$

Відповідь: $\sqrt{14} - \sqrt{5}$.

Приклад 3. Спростити вираз

$$\sqrt{4 + \sqrt{15}} - \sqrt{4 - \sqrt{15}}.$$

Розв'язання. $\sqrt{4 + \sqrt{15}} - \sqrt{4 - \sqrt{15}} =$

$$= \sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{15}}{2}} - \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{15}}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

Відповідь: $\sqrt{6}$.

Приклад 4. Спростити вираз

$$A = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}.$$

Розв'язання. $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 2\sqrt{8}}}} =$

$$= \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{8} + 1}} = \sqrt{13 + 30\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} =$$

$$= \sqrt{13 + 30(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{43 + 30\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{43 + 2\sqrt{450}} = \sqrt{25} + \sqrt{18} = 5 + 3\sqrt{2}.$$

Відповідь: $5 + 3\sqrt{2}$.

Вправи

Спростити вирази:

1. $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.
2. $\sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$.
3. $\sqrt[4]{7 + \sqrt{48}}$.

4. $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

5. $\sqrt{6-\sqrt{11}} - \sqrt{\dfrac{11}{2}}$.

6. $\sqrt{11-4\sqrt{6}} - 2\sqrt{2}$.

7. $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$.

8. $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

9. $\dfrac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}$.

10. $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

11. $(\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}) \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

12. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$.

13. $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2$.

14. $\dfrac{4+\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{4+\sqrt{7}}} \cdot \dfrac{4-\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{4-\sqrt{7}}}$.

Довести різності:

15. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} =$

$= \sqrt{2}\,(\sqrt{5}+1)$.

16. $\dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}} = 2$.

§3. Тотожні перетворення алгебраїчних виразів

Приклад 1. Спростити вираз

$$A = \frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} - \left(\frac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}} - \sqrt[4]{ax}\right).$$

Розв'язання. Вираз A існує на множині дійсних чисел, коли $a > 0,\ x \geq 0,\ a \neq x$.

Виконаємо перетворення

$$A = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})(\sqrt{a} + \sqrt{x})}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} -$$

$$- \left(\frac{\sqrt[4]{a}\,(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{x})(\sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{ax} + \sqrt[4]{x^2})}{\sqrt[4]{a}\,(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{x})} - \sqrt[4]{ax} \right) =$$

$$= \sqrt{a} + \sqrt{x} - (\sqrt[4]{a^2} - 2\sqrt[4]{ax} + \sqrt[4]{x^2}) =$$

$$= \sqrt{a} + \sqrt{x} - \sqrt{a} + 2\sqrt[4]{ax} - \sqrt{x} = 2\sqrt[4]{ax}.$$

Відповідь: $A = 2\sqrt[4]{ax}$, якщо $a > 0,\ x \geq 0,\ a \neq x$.

Приклад 2. Довести, що коли

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c},$$

то $\dfrac{1}{a^{2n+1}} + \dfrac{1}{b^{2n+1}} + \dfrac{1}{c^{2n+1}} = \dfrac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}}$, де n — ціле додатне число та $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$.

Розв'язання. Перетворимо даний вираз:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a + b + c} = 0, \quad \frac{a + b}{ab} + \frac{a + b}{c\,(a + b + c)} = 0,$$

$$\frac{(a + b)(ac + bc + c^2 + ab)}{abc\,(a + b + c)} = 0,$$

$$\frac{(a + b)(a + c)(b + c)}{abc\,(a + b + c)} = 0.$$

Звідси

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 0. \qquad (*)$$

Нехай, наприклад, $a + b = 0$, або $a = -b$. Тоді співвідношення

$$\frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = \frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}}$$

перетворюється на тотожність $\frac{1}{c^{2n+1}} = \frac{1}{c^{2n+1}}$, оскільки

$$a^{2n+1} = -b^{2n+1}.$$

Аналогічно доводяться випадки, коли $b = -c$ або $c = -a$. Доведення не змінюється, якщо нулю дорівнюють одночасно два співмножники рівності (*). Рівність нулю одночасно трьох співмножників (*) неможлива, оскільки це може бути тільки тоді, коли $a = b = c = 0$, а це суперечить умові.

Приклад 3. Спростити вираз .

$$(x^{-1} + a^{-1})(x + a)^{\frac{1}{n}} - b^{-1} x^{\frac{1}{n}}, \qquad (*)$$

коли

$$x = ab^{\frac{n}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}} - b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{-1}, \qquad (**)$$

якщо $a > 0$, $b > 0$.

Розв'язання. Перетворюємо вираз (*):

$$A = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a}\right)(x + a)^{\frac{1}{n}} - \frac{x^{\frac{1}{n}}}{b} = \frac{x + a}{xa}(x + a)^{\frac{1}{n}} - \frac{x^{\frac{1}{n}}}{b} =$$

$$\frac{(x + a)^{\frac{n+1}{n}}}{xa} - \frac{x^{\frac{1}{n}}}{b}.$$

Дану рівність (**) запишемо у вигляді

$$x = ab^{\frac{n}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}} - b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{-1} = \frac{ab^{\frac{n}{n+1}}}{a^{\frac{n}{n+1}} - b^{\frac{n}{n+1}}},$$

звідки

$$xa^{\frac{n}{n+1}} - xb^{\frac{n}{n+1}} = ab^{\frac{n}{n+1}}; \quad xa^{\frac{n}{n+1}} = xb^{\frac{n}{n+1}} + ab^{\frac{n}{n+1}};$$

$$xa^{\frac{n}{n+1}} = b^{\frac{n}{n+1}}(x+a); \quad b^{\frac{n}{n+1}} = \frac{xa^{\frac{n}{n+1}}}{x+a}; \quad b = \frac{x^{\frac{n+1}{n}}a}{(x+a)^{\frac{n+1}{n}}}.$$

Підставляючи в A, маємо:

$$A = \frac{(x+a)^{\frac{n+1}{n}}}{xa} - \frac{x^{\frac{1}{n}}}{b} = \frac{(x+a)^{\frac{n+1}{n}}}{xa} - \frac{x^{\frac{1}{n}}(x+a)^{\frac{n+1}{n}}}{x^{\frac{n+1}{n}}a} =$$

$$= \frac{(x+a)^{\frac{n+1}{n}}}{xa} - \frac{x^{\frac{1}{n}}(x+a)^{\frac{n+1}{n}}}{x\cdot x^{\frac{1}{n}}a} = 0.$$

Відповідь: 0.

Вправи:

Спростити вирази:

1. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

2. $\dfrac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}} - \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$.

3. $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\dfrac{1}{b}}+3\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)} : \dfrac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}$.

4. $\dfrac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)} : \dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}} - 3\sqrt{mn}$.

5. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right) : \left(1+\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}\right)$.

6. $\dfrac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1} \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1.$

7. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1} + \sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1} - \sqrt{a}\right) \cdot (a-\sqrt{a^3}\,)^{-1},$

$a > 0,\ \ a \neq 1.$

8. $\left(\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}} + \dfrac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right) : \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}\ ,$

$x > a > 0.$

9. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} \cdot \left(\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} + \dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right).$

10. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2.$

11. $\sqrt{\dfrac{x}{x-a^2}} : \left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}} - \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right),$

$x > 0,\quad x > a^2.$

12. $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}} - \sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{a-1}}} : \dfrac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}} -$

$-(1-a^2).$

13. $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}},\ \ 0 < b \leq a.$

14. $\dfrac{z^3}{3} - z,\ \ z = \sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\ .$

15. $x^3 + 3x,\ \ x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$.

16. $(x^{-1} + a^{-1})\,(x + a)^{\frac{1}{n}} - b^{-1}\,x^{\frac{1}{n}}$, коли

$$x = ab^{\frac{n}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}} - b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{-1},\ \text{якщо}\ a > 0,\ b > 0.$$

Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу:

17. $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}$.

18. $\dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

19. $\dfrac{a}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$.

20. $\dfrac{a}{2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}$.

21. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

22. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$.

Розділ VI

Показникові і логарифмічні рівняння та нерівності

§1. Розв'язування показникових рівнянь

Найпростішим показниковим рівняння є рівняння виду $a^x = b$, *де* $a > 0$ *та* $a \neq 0$. Очевидно, що при $b < 0$ це рівняння коренів не має (в області дійсних чисел), оскільки $a^x > 0$ для всіх дійсних значень x.

а) Розв'язком рівняння виду $a^{f(x)} = 1$ (за означенням степеня з нульовим показником) буде $f(x) = 0$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $5^{4\sqrt{x-3}-x} = 1$.

Розв'язання. За означенням степеня з нульовим показником маємо:

$$4\sqrt{x-3} - x = 0, \quad 4\sqrt{x-3} = x,$$

звідки $x^2 - 16x + 48 = 0$.

Розв'язуючи утворене рівняння, дістанемо $x_1 = 4$, $x_2 = 12$.

Відповідь: $x_1 = 4$, $x_2 = 12$.

б) Розв'язком рівняння виду $a^x = a^n$ є $x = n$.

Очевидно, що рівняння $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = \varphi(x)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}.$$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$2^{5 \cdot \frac{x+5}{x-7}} = 2^{7 \cdot \frac{x+17}{x-3} - 2}.$$

Тоді рівняння

$$\frac{5x+25}{x-7} = \frac{7x+119}{x-3} - 2$$

рівносильне даному.

Розв'язуючи утворене рівняння, знаходимо, що $x = 10$.

Відповідь: 10.

в) Якщо ліва та права частини рівняння виду $a^x = b$ не зводяться до однієї основи, то з рівності $x^x = b$ за означенням логарифма випливає $x = \log_a b$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $3^{2x-1} = 5^{3-x}$.

Розв'язання. Прологарифмувавши обидві частини рівняння, дістанемо:

$$\lg 3^{2x-1} = \lg 5^{3-x},$$

$$(2x - 1) \lg 3 = (3 - x) \lg 5,$$

$$2x \lg 3 + x \lg 5 = 3 \lg 5 + \lg 3,$$

$$x (2 \lg 3 + \lg 5) = 3 \lg 5 + \lg 3,$$

звідки $x = \dfrac{3 \lg 5 + \lg 3}{2 \lg 3 + \lg 5}$.

Відповідь: $\dfrac{3 \lg 5 + \lg 3}{2 \lg 3 + \lg 5}$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $3^{x-3} = 5^{x^2 - 7x + 12}$.

Розв'язання. Переходимо до рівносильного рівняння

$$x - 3 = (x^2 - 7x + 12) \log_3 5, \text{ або}$$

$$x - 3 = (x - 3)(x - 4) \log_3 5,$$

звідки або $x = 3$, або $(x - 4) \log_3 5 = 1$.

Звідси $x = 4 + \dfrac{1}{\log_3 5} = 4 + \log_5 3$.

Відповідь: 3, $4 + \log_5 3$.

Рівняння виду

$$A_0\, a^{mx + k_0} + A_1\, a^{mx + k_1} + \cdots A_n\, a^{mx + k_n} = M,$$

де M, A_0, A_1, ... , A_n, a, m та k_0, k_1, ... , k_n — сталі величини, розв'язуються винесенням за дужки спільного множника $a^{mx + k_i}$, де k_i — найменше з чисел k_0, k_1, ... , k_n.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$2^{3\sqrt{x}} + 3 \cdot 2^{3\sqrt{x} - 1} = 20.$$

Розв'язання.

$$2^{3\sqrt{x}-1}(2+3)=20,$$

$$2^{3\sqrt{x}-1}=4,$$

$$2^{3\sqrt{x}-1}=2^2,$$

$$3\sqrt{x}-1=2.$$

Звідси $x = 1$.

Відповідь: 1.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$3^{2x-5}+3^{2x-7}+3^{2x-9}=45\frac{1}{2}+22\frac{3}{4}+11\frac{3}{8}+\dots.$$

Розв'язання. Права частина рівняння є нескінченно спадною геометричною прогресією; $q = 22\frac{3}{4} : 45\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

$S = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{45\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 91$. Тому дане рівняння набирає вигляду

$$3^{2x-9}(3^4+3^2+1)=91,$$

$$3^{2x-9}\cdot 91=91,$$

$$3^{2x-9}=1,$$

звідки $x = 4{,}5$.

Відповідь: 4,5.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$4^{2x}-3^{2x-\frac{1}{2}}=3^{2x+\frac{1}{2}}-2^{4x-1}.$$

Розв'язання.

$$2^{4x}+2^{4x-1}=3^{2x+\frac{1}{2}}+3^{2x-\frac{1}{2}},$$

$$2^{4x-1}(2+1)=3^{2x-\frac{1}{2}}(3+1),$$

$$2^{4x-1}\cdot 3=3^{2x-\frac{1}{2}}\cdot 2^2.$$

Поділивши обидві частини рівняння на 12, маємо

$$2^{4x-3} = 3^{2x-\frac{3}{2}},$$

$$4^{2x-\frac{3}{2}} = 3^{2x-\frac{3}{2}},$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-\frac{3}{2}} = 1. \quad \text{Звідки}$$

$$2x - \frac{3}{2} = 0, \quad x = \frac{3}{4}.$$

Відповідь: $\frac{3}{4}$.

Рівняння виду

$$A_0\, a^{2f(x)} + A_1\, a^{f(x)} + A_2 = 0$$

часто називають ***тричленними показниковими рівняннями.***

Рівняння за допомогою підстановки $a^{f(x)} = y$ зводиться до квадратного рівняння

$$A_0\, y^2 + A_1 y + A_2 = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо корені y_1 та y_2. Після цього розв'язування даного рівняння зводиться розв'язування таких двох рівнянь:

$$a^{f(x)} = y_1 \quad \text{та} \quad a^{f(x)} = y_2.$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння

$$9^{\sqrt{x^2-2x}-x} - 7 \cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}-x-1} = 2.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$3^{2(\sqrt{x^2-2x}-x)} - \frac{7}{3} \cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}-x} = 2$$

і позначимо

$$3^{\sqrt{x^2-2x}-x} = y.$$

Дістанемо рівняння $3y^2 - 7y - 6 = 0$, що має корені $y_1 = 3$ та $y_2 = -\frac{2}{3}$.

Другий корінь не задовольняє даного рівняння, оскільки він не входить до області визначення вихідного рівняння. Отже, вихідне рівняння в області допустимих значень невідомого рівносильне рівнянню

$$3^{\sqrt{x^2-2x}-x} = 3^1,$$

а останнє рівняння рівносильне ірраціональному рівнянню

$$\sqrt{x^2-2x} = x+1.$$

Підносячи обидві частини рівності до квадрата, знайдемо, що $x = -0{,}25$. Оскільки при піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з'явитися сторонні корені, перевірка необхідна саме на цьому етапі. Підстановка знайденого значення x в ірраціональне рівняння показує, що задовольняє його і, отже, вихідне рівняння.

Відповідь: $-0{,}25$.

Рівняння виду

$$A_0\, a^x + A_1\, a^{\frac{x}{2}}\, b^{\frac{x}{2}} + A_2\, b^x = 0$$

легко зводиться до попередніх рівнянь діленням обох частин рівняння на $b^x \neq 0$. Тоді дістанемо

$$A_0\left(\frac{a}{b}\right)^x + A_1\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} + A_2 = 0.$$

Позначивши $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y$, маємо

$$A_0\, y^2 + A_1 y + A_2 = 0.$$

Розв'язавши рівняння, знайдемо y_1 та y_2, після чого повертаємося до підстановки:

$$а)\ \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y_1, \qquad б)\ \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y_2.$$

Приклад 9. Розв'язати рівняння

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$$

Розв'язання. Оскільки $81^x \neq 0$, то дане рівняння рівносильне рівнянню

$$3 \cdot \frac{16^x}{81^x} + 2 = 5 \cdot \frac{36^x}{81^x}, \text{ або } 3\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + 2 = 5\left(\frac{4}{9}\right)^x.$$

Поклавши $\left(\frac{4}{9}\right)^x = y$, приходимо до квадратного рівняння

$$3y^2 - 5y + 2 = 0.$$

Його корені $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{2}{3}$. Розв'язуючи рівняння $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1$ та $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$, дістанемо в першому випадку $x = 0$, а в другому $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$, тобто $2x = 1$, або $x = \frac{1}{2}$.

Відповідь: 0; $\frac{1}{2}$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння

$$3^{2x^2 + 6x - 9} + 4 \cdot 15^{x^2 + 3x - 5} = 3 \cdot 5^{2x^2 + 6x - 9}.$$

Розв'язання. Позначимо $x^2 + 3x - 5 = y$, після чого рівняння запишемо так:

$$3^{2y + 1} + 4 \cdot 15^y = 3 \cdot 5^{2y + 1}, \text{ або}$$

$$3 \cdot 3^{2y} + 4 \cdot 15^y = 15 \cdot 5^{2y}.$$

Поділивши ліву і праву частини на 5^{2y}, приходимо до рівняння

$$3\left(\frac{3}{5}\right)^{2y} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^y - 15 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, дістаємо $\left(\frac{3}{5}\right)^y = \frac{5}{3}$, звідки $y = -1$. Друге рівняння $\left(\frac{3}{5}\right)^x = -3$ розв'язків не має, оскільки $\left(\frac{3}{5}\right)^x > 0$ при всіх допустимих значеннях x.

Повертаючись до підстановки, розв'язуємо квадратне рівняння $x^2 + 3x - 5 = -1$.

Відповідь: 1, -4.

Розглянемо задачі, які розв'язуються за допомогою властивості монотонності показникової функції.

Приклад 11. Розв'язати рівняння

$$3 \cdot 4^x + (3x - 10) \cdot 2^x + 3 - x = 0.$$

Розв'язання. Це рівняння не належить жодному з розглянутих типів. Зробимо заміну $2^x = y$. Рівняння набере вигляду

$$3y^2 + (3x - 10)\, y + 3 - x = 0.$$

Розв'яжемо утворене рівняння як квадратне відносно y. Маємо:

$$y = \frac{-3x + 10 \pm \sqrt{(3x-10)^2 - 12\,(3 - x)}}{6} =$$

$$= \frac{-3x + 10 \pm \sqrt{9x^2 - 48x + 64}}{6} = \frac{-3x + 10 \pm (3x - 8)}{6},$$

звідки або $y = 3 - x$, або $y = \frac{1}{3}$.

Рівняння $2^x = \frac{1}{3}$ має корінь $x = -\log_2 3$.

Тепер розв'яжемо рівняння $2^x = 3 - x$. Легко знайти корінь $x = 1$. Доведемо, що інших коренів у цього рівняння немає. Справді, при $x = 1$ ліва частина рівняння дорівнює правій. Ліва частина — зростаюча функція, а права — спадна. Тому при $x < 1$ ліва частина буде менше, ніж права, а при $x > 1$ навпаки.

Відповідь: 1, $-\log_2 3$.

Приклад 12. Розв'язати рівняння $6^x - 2^x = 32$.

Розв'язання. Легко помітити, що рівняння задовольняє значення $x = 2$. Доведемо, що інших коренів немає. Для цього запишемо рівняння так:

$$3^x - 1 = \frac{32}{2^x}.$$

Права частина є спадною функцією, ліва — зростаючою. Отже, $x = 2$ — єдиний корінь цього рівняння. **Відповідь:** 2.

Вправи

Розв'язати рівняння:

1. $8^x = 32$.
2. $49^x = \frac{1}{7}$.
3. $\sqrt[4]{a^{x+1}} = \sqrt[3]{a^{x-2}}$.
4. $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^8$.
5. $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^x = 128$.
6. $(10^{5-x})^{6-x} = 100$.
7. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{x}}} = \frac{9}{16}$.
8. $1000\sqrt[3]{(0{,}1)^{\frac{3}{x}}} = 100^x$.
9. $\frac{(0{,}2)^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^x$.
10. $\frac{1}{9} \cdot \sqrt{27^{\frac{2x+1}{x}}} = \sqrt{9^{2x-1}}$.
11. $2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 2^{2x-1} = 512$.
12. $3 \cdot 16^{x^2 - 16x - 15\frac{3}{4}} = 48 + 24 + 12 + \ldots$.
13. $8^{x-3} = 9^{x-3}$.
14. $11^{x-7} = 17^{7-x}$.
15. $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4^{x+1}$.
16. $3^{x+2} - 3^x = 72$.
17. $2^x - 2^{x-4} = 15$.
18. $5^{x+1} + 5^{x-1} = 26$.

19. $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0.$

20. $3^{y-10} - 2^{y-9} - 3^{y-11} - 2^{y-12} = 0.$

21. $5^{x-3} - 5^{x-4} - 16 \cdot 5^{x-5} = 2^{x-3}.$

22. $3^x - 2^{x+2} = 3^{x-1} - 2^{x-1} - 2^{x-3}.$

23. $2^x = 5.$

24. $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0.$

25. $4^x + 2^{x+1} = 80.$

26. $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 16.$

27. $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0.$

28. $2^{3x} - \dfrac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \dfrac{1}{2^{x-1}}\right) = 1.$

29. $4^x + 6^x = 9^x.$

30. $3^x + 4^x = 5^x.$

31. $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x.$

32. $(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\,)^x + (\sqrt{2 + \sqrt{3}}\,)^x = 4.$

33. $(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\,)^x + (\sqrt{2 + \sqrt{3}}\,)^x = 2^x.$

34. $\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x \cdot 0{,}125^{1/x}}} = 4\sqrt[3]{2}.$

35. $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01\,(10^{x-1})^3.$

36. $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}.$

37. $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2.$

38. $10^{\frac{2}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4{,}25 \cdot 50^{\frac{1}{x}}.$

39. $(\sqrt[5]{3}\,)^x + (\sqrt[10]{3}\,)^{x-10} = 84.$

40. $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0.$

41. $9^x + 6^x = 2^{2x+1}.$

42. $\dfrac{2^x + 10}{4} = \dfrac{9}{2^{x-2}}.$

43. $5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} = 0.$

44. $5^{x-1} + 5 \cdot 0{,}2^{x-2} = 26.$

45. $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5\,(\sqrt{2}\,)^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0.$

46. $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0.$

47. $(\sqrt{7+\sqrt{48}}\,)^x + (\sqrt{7-\sqrt{48}}\,)^x = 14.$

48. $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24.$

49. $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0.$

50. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$

§2. Розв'язування показниково-степеневих рівнянь

Насамперед зауважимо, що оскільки функція не показникова, а показниково-степенева, що має вигляд $y = u\,(x)^{v\,(x)}$, то її область визначення знаходимо, розглядаючи три випадки:

1. $u\,(x) > 0$, $v\,(x)$ — будь-яке число;
2. $u\,(x) < 0$, $v\,(x)$ — ціле число;
3. $u\,(x) = 0$, $v\,(x)$ — ціле додатне число.

Тоді можна сказати, що -1 є коренем рівняння $x^{2x} = 1$, але не є коренем рівняння $x^{\frac{2x}{3}} = 1$, оскільки вираз $(-1)^{-\frac{2}{3}}$ не визначений, тобто не має змісту. Число -8 не є коренем рівняння $x^{\frac{x}{3}} = x^{-\frac{8}{3}}$, оскільки вираз $(-8)^{-\frac{8}{3}}$ теж не має змісту.

Числа 0 та $-\frac{1}{2}$ є коренями рівняння $x^{2x+5} = x^4$.

Число 0 не є коренем рівняння $x^{x+\frac{5}{2}} = x^2$, оскільки вираз $0^{\frac{5}{2}}$ не має змісту.

Число $-\frac{1}{2}$ є коренем цього рівняння.

Числа 0 та $-\frac{1}{2}$ не є коренями рівняння

$$x^{\frac{2x+5}{3}} = x^{\frac{4}{3}}.$$

Згідно з цим робимо висновок, що розв'язування рівнянь виду

$$(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^m$$

зводиться до випадків:

1. $f(x) = 1,$
2. $f(x) = -1,$
3. $f(x) = 0,$
4. $\varphi(x) = m.$

Перевірка коренів, знайдених у 2, 3 та 4 випадках, обов'язкова.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(x+5)^{x^2-x-1} = x+5.$$

Розв'язання. Розглянемо випадки:

1. $x + 5 = 1,$ $\qquad x_1 = -4.$
2. $x + 5 = -1,$ $\qquad x_2 = -6.$
3. $x + 5 = 0,$ $\qquad x_3 = -5.$
4. $x^2 - x - 1 = 1,$ звідки $\qquad x_4 = 2,\ x_5 = -1.$

Перевіркою переконуємося, що всі знайдені корені задовольняють рівняння.

Відповідь: $-4;\ -6;\ -5;\ 2;\ -1.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$(x+4)^{x^2+9x+8} = 1.$$

Розв'язання. Розглянемо випадки:

1. $x + 4 = 1,$ $\qquad x_1 = -3.$
2. $x + 4 = -1,$ $\qquad x_2 = -5.$
3. $x^2 + 9x + 8 = 0,$ звідки $\qquad x_3 = -8,\ x_4 = -1.$

Перевіркою переконуємося, що всі знайдені корені задовольняють рівняння.

Відповідь: $x_1 = -3$, $x_2 = -5$, $x_3 = -8$, $x_4 = -1$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$x^{\frac{4}{5}} - 7x^{-\frac{2}{5}} + 6x^{-1} = 0.$$

Розв'язання. Зауважимо, що це рівняння не є показниково-степеневим, але оскільки у нього дробові показники степеня, то вважатимемо, що x набуває тільки додатних значень.

Запишемо рівняння у вигляді

$$x^{\frac{9}{5}} - 7x^{\frac{3}{5}} + 6 = 0.$$

Позначивши $x^{\frac{3}{5}} = y$, дістанемо $y^3 - 7y + 6 = 0$ або $(y-1)(y^2 + y - 6) = 0$, звідки $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = -3$.

Проте $x^{\frac{3}{5}} > 0$, тому $y_3 = -3$ не задовольняє рівнянню. Повертаючись до підстановки, дістанемо $x^{\frac{3}{5}} = 1$, звідки $x_1 = 1$. $x^{\frac{3}{5}} = 2$, звідки $x_2 = 2\sqrt[3]{4}$.

Відповідь: 1; $2\sqrt[3]{4}$.

Вправи

Розв'язати рівняння:

1. $(x+2)^{x^2-5x+6} = (x+2)^2$.
2. $(x-7)^{x^2-9x+8} = 1$.
3. $x^x = 1$.
4. $x^x = x$.
5. $x^{x^2-2x} = 1$.
6. $(x-3)^{x^2-x} = (x-3)^2$.
7. $(x^2-x-1)^{x^2-x} = 1$.

§3. Розв'язування логарифмічних рівнянь

***Логарифмічними** називаються рівняння, що містять невідоме під знаком логарифма або в основі логарифма (або те й друге одночасно).*

Найпростішими логарифмічними рівняннями є рівняння виду

$$\log_a x = b \text{ та } \log_x m = n.$$

При розв'язуванні логарифмічних рівнянь використовуються означення логарифма та його властивості, дії логарифмування та потенціювання, різні логарифмічні тотожності.

Розглянемо приклад, коли в співвідношенні $a^x = N$, $N > 0$, $a > 0$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, треба знайти x.

Означення. ***Логарифмом** числа N за основою a називається показник степеня, до якого треба піднести число a, щоб дістати число N.*

Логарифм позначається через $\log_a N$.

Таким чином, вирази

$$\log_a N = x \text{ та } a^x = N$$

мають однаковий зміст.

За означенням, основа логарифма a завжди додатна та відмінна від одиниці. Логарифмоване число N — додатне.

З означення логарифма впливає основна логарифмічна тотожність

$$a^{\log_a b} = b.$$

Розглянемо деякі властивості логарифмів.

1. Якщо число, що логарифмують, та основа логарифма рівні між собою, то логарифм дорівнює одиниці. Справджується й обернене твердження: якщо логарифм дорівнює одиниці, то число і основа логарифма рівні між собою:

$$\log_a a = 1.$$

2. Логарифм одиниці за будь-якою основою $a \neq 1$ і $a > 0$ дорівнює нулю:

$$\log_a 1 = 0.$$

Справджується й обернене твердження.

3. Логарифмічна функція $y = \log_a x$ монотонна на всій області визначення. Вона зростає, коли $a > 1$, та спадає, коли $a < 1$.

4. З рівності $\log_a x_1 = \log_a x_2$, за властивостями монотонної логарифмічної функції, випливає, що $x_1 = x_2$.

5. Логарифм добутку додатних співмножників дорівнює сумі логарифмів за тією самою основою, тобто

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Зауважимо, що умова $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ істотна, оскільки логарифм добутку двох від'ємних чисел $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ має зміст, але

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|.$$

6. Логарифм частки двох додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого та дільника за тією самою основою, тобто

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

Аналогічно властивості 5, якщо $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, то

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|.$$

7. Логарифм степеня будь-якого додатного числа дорівнює логарифму цього числа, помноженому на показник степеня:

$$\log_a x^n = n \log_a x, \quad n \text{ — будь-яке дійсне число.}$$

Наслідок. Логарифм кореня з додатного числа дорівнює логарифму підкореневого виразу, поділеному на показник кореня.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a N, \quad n \text{ — натуральне число.}$$

Знаходження логарифмів заданих чисел або виразів називається операцією ***логарифмування***.

Приклад 1. Прологарифмувати за основою a:

$$\sqrt[5]{\frac{a^3 (a+b)}{cd^2}} \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0).$$

Розв'язання. Запишемо даний вираз у вигляді

$$\sqrt[5]{\frac{a^3(a+b)}{cd^2}} = \frac{a^{\frac{3}{5}}(a+b)^{\frac{1}{5}}}{c^{\frac{1}{5}}d^{\frac{2}{5}}}.$$

За властивостями 5-7 маємо:

$$\log_n\sqrt[5]{\frac{a^3(a+b)}{cd^2}} = \frac{3}{5}\log_n a + \frac{1}{5}\log_n(a+b) -$$

$$-\frac{1}{5}\log_n c - \frac{2}{5}\log_n d.$$

Дія, обернена до логарифмування, називається ***потенціюванням.***

При потенціюванні треба користуватися правилами, оберненими до правил логарифмування: суму логарифмів замінити логарифмом добутку, різницю логарифмів — логарифмом частки.

Приклад 2. Знайти N, якщо

$$\log_a N = \frac{2}{7}\log_a b - 2\log_a c.$$

Розв'язання. За правилами потенціювання запишемо:

$$\log_a N = \log_a b^{\frac{2}{7}} - \log_a c^2,$$

$$\log_a N = \log_a \frac{b^{\frac{2}{7}}}{c^2}.$$

Звідки

$$N = \frac{b^{\frac{2}{7}}}{c^2} = \frac{\sqrt[7]{b^2}}{c^2}.$$

Загальне правило переходу від логарифмів за основою a до логарифмів за іншою основою c має вигляд:

$$\log_a N = \frac{\log_c N}{\log_c a}.$$

Коефіцієнт $\dfrac{1}{\log_c a}$ в цій формулі називають модулем переходу від логарифма c за основою a до логарифма за основою c.

Використовуючи дану формулу, легко довести формули

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad \log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b, \quad \log_{a^n} b^n = \log_a b,$$

$$\log_{a^n} b^k = \frac{k}{n}\log_a b.$$

При розв'язуванні прикладів іноді використовується тотожність

$$a^{\log_m b} = b^{\log_m a},$$

яку пропонуємо довести самостійно.

Рівняння, що розв'язуються за допомогою означення логарифма

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\log_3 (5 + 4 \log_3 (x - 1)) = 2.$$

Розв'язання. За означенням логарифма

$$5 + 4 \log_3 (x - 1) = 3^2, \text{ або}$$

$$4 \log_3 (x - 1) = 9 - 5, \quad \log_3 (x - 1) = 1.$$

За означенням логарифма матимемо $x - 1 = 3$, $x = 4$. Перевіркою переконуємося в правильності розв'язування.

Відповідь: 4.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$\log_4 (2 \log_3 (1 + \log_2 (1 + 3 \log_3 x))) = \frac{1}{2}.$$

Розв'язання. За означенням логарифма

$$2 \log_3 (1 + \log_2 (1 + 3 \log_3 x)) = 2,$$

$$\log_3 (1 + \log_2 (1 + 3 \log_3 x)) = 1.$$

Застосовуємо ще раз означення логарифма:

$$1 + \log_2 (1 + 3 \log_3 x) = 3, \quad \log_2 (1 + 3 \log_3 x) = 2.$$

Звідки, за означенням логарифма,

$$1 + 3 \log_3 x = 4,$$

$$3 \log_3 x = 3, \quad \log_3 x = 1.$$

Відповідь: 3.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\log_3 (4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1.$$

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне рівнянню

$$4 \cdot 3^{x-1} - 1 = 3^{2x-1}.$$

Зробимо підстановку $3^x = y$ і дістанемо квадратне рівняння

$$y^2 - 4y + 3 = 0.$$

Розв'язуючи його, дістанемо $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Повертаючись до підстановки, маємо $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Відповідь: 0; 1.

Логарифмічні рівняння, що розв'язуються потенціюванням

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\lg (x + 10) + \frac{1}{2} \lg x^2 = 2 - \lg 4.$$

Розв'язання. Знаходимо область допустимих значень: $x > -10$, $x \neq 0$. Рівняння набирає вигляду

$$\lg (x + 10) + \lg |x| + \lg 4 = 2,$$

звідки

$$\lg (4 |x| (x + 10)) = \lg 100,$$

а дане рівняння рівносильне такому:

$$4 |x| (x + 10) = 100.$$

Розглядаючи два випадки і розв'язуючи відповідні рівняння, матимемо:

а) $x > 0$, $x^2 + 10x - 25 = 0$, $x = -5 + 5\sqrt{2}$.

б) $-10 < x < 0$, $x^2 + 10x + 25 = 0$, $x = -5$.

Відповідь: $-5 + 5\sqrt{2}$; -5.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$2 - x + 3 \log_5 2 = \log_5 (3^x - 5^{2-x}).$$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$(2 - x) \log_5 5 + \log_5 2^3 = \log_5 (3^x - 5^{2-x}),$$

$$\log_5 (8 \cdot 5^{2-x}) = \log_5 (3^x - 5^{2-x}).$$

Дане рівняння рівносильне рівнянню

$$8 \cdot 5^{2-x} = 3^x - 5^{2-x},$$

$$9 \cdot 5^{2-x} = 3^x.$$

Поділивши обидві частини рівняння на 3^x, дістанемо

$$3^{2-x} \cdot 5^{2-x} = 1, \quad 15^{2-x} = 1,$$

звідки $x = 2$. Перевіркою переконуємося, що $x = 2$ задовольняє рівняння.

Відповідь: 2.

Рівняння другого й вищого степенів відносно логарифма

Приклад 8. Розв'язати рівняння

$$\lg_x 5\sqrt{5} - 1{,}25 = \lg_x^2 \sqrt{5}.$$

Розв'язання.

$$\lg_x 5^{\frac{3}{2}} - 1{,}25 = \frac{1}{4} \lg_x^2 5, \quad x > 0, \quad x \neq 1,$$

$$\frac{3}{2} \lg_x 5 - 1{,}25 = \frac{1}{4} \lg_x^2 5,$$

$$\lg_x^2 5 - 6 \lg_x 5 + 5 = 0, \quad \lg_x 5 = 3 \pm 2.$$

а) $\lg_x 5 = 1, \quad x_1 = 5.$

б) $\lg_x 5 = 5, \quad x^5 = 5, \quad x_2 = \sqrt[5]{5}.$

Відповідь: 5; $\sqrt[5]{5}$.

Рівняння, що містить невідоме і в основі, і в показнику степеня

Приклад 9. Розв'язати рівняння

$$x^{\lg^2 x^2 - 3 \lg x - 4{,}5} = 10^{-2 \lg x}.$$

Розв'язання. Область допустимих значень $x > 0$. На цій множині вихідне рівняння рівносильне рівнянню

$$\lg x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - 4{,}5} = \lg 10^{-2\lg x}, \text{ або}$$

$$(\lg^2 x^2 - 3\lg x - 4{,}5)\lg x = -2\lg x,$$

$$(4\lg^2 x - 3\lg x - 4{,}5)\lg x + 2\lg x = 0,$$

$$\lg x\,(8\lg^2 x - 6\lg x - 5) = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, маємо $\lg x = 0$, $\lg x = \frac{5}{4}$, $\lg x = -\frac{1}{2}$. Звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 10^{\frac{5}{4}}$, $x_3 = 10^{-\frac{1}{2}}$.

Відповідь: 1; $10\sqrt[4]{10}$; $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Застосування основної логарифмічної тотожності

Приклад 10. Розв'язати рівняння

$$\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3 - x)}.$$

Розв'язання. Область допустимих значень:

$$\begin{cases} 9 - 2^x > 0, \\ 3 - x > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^x < 9, \\ x < 3, \end{cases}$$

звідки $x < 3$.

Застосувавши до правої частини основи логарифмічну тотожність, матимемо

$$\log_2(9 - 2^x) = 3 - x.$$

За означенням логарифма

$$2^{3-x} = 9 - 2^x, \quad \frac{8}{2^x} = 9 - 2^x \text{ або } 2^{2x} - 9\cdot 2^x + 8 = 0,$$

звідки $2^x = 1$ та $2^x = 8$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Відповідь: 0; 3.

Приклад 11. Розв'язати рівняння

$$9^{\log_3(1 - 2x)} = 5x^2 - 5.$$

Розв'язання. Рівняння має смисл при $x < 0{,}5$. Перетворюємо ліву частину рівняння, враховуючи основну логарифмічну тотожність і властивість степенів:

$$3^{2\log_3(1-2x)} = 5x^2 - 5,$$

$$3^{\log_3(1-2x)^2} = 5x^2 - 5,$$

$$(1-2x)^2 = 5x^2 - 5.$$

Рівняння, що дістали, є наслідком і воно не рівносильне вихідному рівнянню. Перевіркою переконуємося, що перший його корінь $x_1 = -2 - \sqrt{10}$ задовольняє вихідне рівняння, а сторонній корінь $x_2 = -2 + \sqrt{10}$ з'являється внаслідок розширення ОДЗ. Це сталося при заміні виразу $9^{\log_3(1-2x)}$, що має зміст при $x < 0{,}5$, виразом $(1-2x)^2$, визначеному при будь-якому значенні аргументу.

Відповідь: $-2 - \sqrt{10}$.

Приклад 12. Розв'язати рівняння

$$6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12.$$

Розв'язання. ОДЗ рівняння: $x > 0$ та $x \neq 1$. Вважаючи, що x належить цій області, виконаємо такі перетворення:

$$(6^{\log_6 x})^{\log_6 x} + x^{\log_6 x} = 12,$$

$$x^{\log_6 x} + x^{\log_6 x} = 12,$$

$$x^{\log_6 x} = 6,$$

$$\log_6 x^{\log_6 x} = \log_6 6,$$

$$\log_6^2 x = 1,$$

$$\log_6 x = \pm 1,$$

звідки $x_1 = \frac{1}{6}$ та $x_2 = 6$.

Обидва значення x входять до ОДЗ. Перевіркою переконуємося, що $x_1 = \frac{1}{6}$ та $x_2 = 6$ задовольняють рівняння.

Відповідь: $\frac{1}{6}$; 6.

Логарифмічні рівняння, що розв'язуються за допомогою переходу до іншої основи логарифма

Приклад 13. Розв'язати рівняння

$$\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5.$$

Розв'язання. Зведемо кожний член лівої частини рівняння до логарифмів з основою 2:

$$\log_{2^2} x + \log_{2^{-4}} x + \log_{2^3} x^3 = 5,$$

$$\frac{1}{2}\log_2 x - \frac{1}{4}\log_2 x + \log_2 x = 5,$$

звідки $\frac{5}{4}\log_2 x = 5$, $\log_2 x = 4$, $x = 16$.

Відповідь: 16.

Приклад 14. Розв'язати рівняння

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1.$$

Розв'язання. Зведемо члени до логарифма за основою 2:

$$-\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + 2\log_2(7-x) = 1,$$

звідси

$$2\log_2(7-x) = 1 + \log_2(x-1) + \log_2(x+1).$$

Тоді $(7-x)^2 = 2(x^2-1)$, або $x^2 + 14x - 51 = 0$. Корені цього рівняння $x_1 = 3$, $x_2 = -17$.

Другий корінь не задовольняє даного рівняння. Підставляючи в дане рівняння $x_1 = 3$, переконуємося, що $x = 3$ — його корінь.

Відповідь: 3.

Приклад 15. Розв'язати рівняння

$$\log_{2x} x + \log_{8x^2} x = 0.$$

Розв'язання. Переходячи до логарифмів з основою 2, маємо:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 2x} + \frac{\log_2 x}{\log_2 8x^2} = 0,$$

$$\frac{\log_2 x}{1+\log_2 x}+\frac{\log_2 x}{3+2\log_2 x}=0.$$

Позначимо $\log_2 x = y$. Рівняння набере вигляду

$$\frac{y}{1+y}+\frac{y}{3+2y}=0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знайдемо $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{4}{3}$.

Повертаючись до підстановки, дістанемо

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}.$$

Відповідь: 1; $\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$.

Застосування властивостей монотонності при розв'язуванні логарифмічних рівнянь

Приклад 16. Розв'язати рівняння

$$\log_5 (x+3) = 3 - x.$$

Розв'язання. Легко перевірити, що $x = 2$ є коренем даного рівняння, оскільки функція $y = \log_5 (x+3)$ зростає на всій своїй області визначення, а функція $y = 3 - x$ спадає. Отже, дане рівняння не має інших коренів.

Відповідь: 2.

Приклад 17. Розв'язати рівняння

$$(x+1)\log_3^2 x + 4x\log_3 x - 16 = 0.$$

Розв'язання. Позначимо $\log_3 x = y$. Рівняння набере вигляду

$$(x+1)\,y^2 + 4xy - 16 = 0.$$

Розв'язуючи дане рівняння як квадратне відносно y, знайдемо $y_1 = \frac{4}{x+1}$, $y_2 = -4$. Повертаючись до підстановки, дістанемо два рівняння:

$$\log_3 x = \frac{4}{x+1} \text{ та } \log_3 x = -4.$$

Друге з цих рівнянь легко розв'язується. Для розв'язування першого рівняння достатньо зауважити, що $x = 3$ задовольняє рівняння і функція, що міститься в лівій частині, зростає при $x > 0$, а функція, що міститься в правій частині — спадає.

Відповідь: 3; $\frac{1}{81}$.

Розв'язування нестандартних рівнянь, що містять логарифми

Приклад 18. Розв'язати рівняння

$$-3x^2 + 6x - 2 = \log_2 (x^2 + 1) - \log_2 x.$$

Розв'язання. Область допустимих значень рівняння $x > 0$. Запишемо рівняння у вигляді

$$1 - 3(x - 1)^2 = \log_2 \left(x + \frac{1}{x}\right).$$

З одного боку $1 - 3(x - 1)^2 \le 1$, а з іншого — $\left(x + \frac{1}{x}\right) \ge$ ≥ 2 як сума взаємнообернених додатних величин. Тоді

$$\log_2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \ge 1,$$

тому і ліва і права частини вихідного рівняння можуть бути рівні між собою тільки в тому випадку, коли кожна з них дорівнює 1.

Інакше кажучи, має справджуватись система двох рівнянь з одним невідомим:

$$\begin{cases} 1 - 3(x - 1)^2 = 1, \\ \log_2 \left(x + \frac{1}{x}\right) = 1. \end{cases}$$

Перше рівняння системи має єдиний корінь $x = 1$. Цей корінь задовольняє й друге рівняння, тобто є єдиним розв'язком системи, а разом з нею й вихідного рівняння.

Відповідь: 1.

Приклад 19. Розв'язати рівняння

$$\frac{2}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)\right) = 1 - \log_n x.$$

Розв'язання. Оскільки $x > 0$, то $x + \frac{1}{x} \geq 2$, як сума взаємнообернених додатних чисел, то $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1$.

Але $\arcsin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$ при $x \geq 0$ існує тоді й тільки тоді, коли $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \leq 1$. Тому рівняння може мати розв'язок тільки при $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1$, але тоді $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ та рівняння набере вигляду

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 - \log_\pi x, \quad \log_\pi x = 0, \quad x = 1.$$

Перевіркою переконуємося, що $x = 1$ задовольняє рівняння.

Відповідь: 1.

Вправи

Розв'язати рівняння:

1. $\log_3 (1 - 2x) = 4$.
2. $\log_3 (x - 12) = 2$.
3. $3^{\log_3 (x-7)} = \log_4 64$.
4. $\log_7 \log_3 \log_2 \log_2 x = 0$.
5. $\log_a (1 + \log_b (1 + \log_c (1 + \log_p x))) = 0$.
6. $\log_4 (2 \log_3 (1 + \log_2 (1 + 3 \log_2 x))) = \frac{1}{2}$.
7. $\lg (x + 2) - \lg 5 = \lg (x - 6)$.
8. $\lg (x + 6) - \frac{1}{2} \lg (2x - 3) = 2 - \lg 25$.
9. $\frac{2 \lg x}{\lg (5x - 4)} = 1$.
10. $0{,}5 \lg (2x - 1) + \lg \sqrt{x - 9} = 1$.
11. $\lg 9^{-1} + x \lg \sqrt[3]{3^{5x-7}} = 0$.
12. $\log_4 (x + 3) - \log_4 (x - 1) = 2 - \log_4 8$.

13. $\lg^2 x - \lg x^4 = \lg^2 5 - 4.$

14. $\dfrac{17 - \lg x}{4 \lg x} = 4 \lg x.$

15. $\dfrac{1}{5 - 4 \lg x} + \dfrac{1}{1 + \lg x} = 3.$

16. $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0.$

17. $\log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \ldots = \dfrac{1}{2}.$

18. $x^{\log_2 x + 2} = 8.$

19. $x^{\log_3 x - 4} = \dfrac{1}{27}.$

20. $x^{\log_2 x} = 4x.$

21. $x^{\lg x} = 100x.$

22. $\sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10.$

23. $x^{\log_3 3x} = 9.$

24. $0{,}1 \cdot x^{\lg x - 2} = 100.$

25. $x^{\lg x - 3} = 10^{\lg \frac{10}{x} - 1}.$

26. $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7.$

27. $\log_{\frac{x^3}{2}} 2 \cdot \log_x 2 = \dfrac{1}{2}.$

28. $\log_4 (x + 12) \cdot \log_x 2 = 1.$

29. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2.$

30. $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_4 x + \log_2^2 x = \dfrac{1}{2} \log_x x.$

31. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 6.$

32. $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14.$

33. $\lg (x + 1{,}5) = -\lg x.$

34. $5^{2(\log_5 2 + x)} - 2 = 5^{x + \log_5 2}.$

35. $x \lg \sqrt[5]{5^{2x - 8}} - \lg 25 = 0.$

36. $\sqrt{\log_3 x^9} - 4\log_9 \sqrt{3x} = 1.$

37. $\left(1 + \frac{1}{2x}\right)\lg 3 + \lg 2 = \lg\left(27 - 3^{\frac{1}{x}}\right).$

38. $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5 (3^x - 5^{2-x}).$

39. $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0{,}0001.$

40. $\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4.$

41. $\log_{\frac{1}{2}}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8.$

42. $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1.$

43. $x^{\log_4 x - 2} = 2^{3(\log_4 x - 1)}.$

44. $9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)} = 5^{\log_{\frac{1}{5}}(2x^2+1)}.$

45. $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}.$

46. $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400.$

47. $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0.$

48. $27x^{\log_{27} x} = x^{\frac{10}{3}}.$

49. $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{3}.$

50. $x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4.$

51. $\log_2 3 + 2\log_4 x = x^{\frac{\log_9 16}{\log_3 x}}.$

52. $\log_{10} x + \log_{\sqrt{10}} x + \log_{\sqrt[3]{10}} x + \ldots + \log_{\sqrt[10]{10}} x = 5{,}5.$

53. $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0.$

54. $\log_x (125x) \cdot \log_{25}^2 x = 0.$

55. $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2.$

56. $20\log_{4x} \sqrt{x} + 7\log_{16x} x^3 - 3\log_{\frac{x}{2}} x^2 = 0.$

57. $2{,}5^{\log_3 x} + 0{,}4^{\log_3 x} = 2{,}9.$

58. $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}.$

59. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5.$

60. $\sqrt{2\log_2(-x)} - \log_8 \sqrt{x^2} = 0.$

61. $2\lg x^2 - (\lg(-x))^2 = 4.$

62. $4\log_4^2(-x) + 2\log_4 x^2 = -1.$

63. $\lg^4(x-1)^2 + \lg^2(x-1)^3 = 25.$

64. $3^x = 10 - \log_2 x.$

65. $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x.$

66. $\log_2(34 - 2^x) = 2 - \sqrt{x-4}.$

67. $\lg x = -\sqrt{x-1}.$

68. $\sqrt[3]{x+3} = \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x-4} - 0{,}75).$

§4. Тотожні перетворення показникових та логарифмічних виразів

Приклад 1. Спростити вираз $a^{\frac{\lg\lg a}{\lg a}}$.

Розв'язання.

$$a^{\frac{\lg\lg a}{\lg a}} = \left(a^{\frac{1}{\lg a}}\right)^{\lg\lg a} = (a^{\log_a 10})^{\lg\lg a} = 10^{\lg\lg a} = \lg a.$$

Відповідь: $\lg a$.

Приклад 2. Обчислити $\log_{30} 8$, якщо $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = b$.

Розв'язання. $\log_{30} 8 = 3\log_{30} 2 = 3\log_{30}\frac{30}{15} =$

$$= 3(\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5) = 3(1 - a - b).$$

Відповідь: $3(1 - a - b)$.

Приклад 3. Довести, що

$$\log_a m \cdot \log_b m + \log_b m \cdot \log_c m + \log_c m \cdot \log_a m =$$

$$= \frac{\log_a m \cdot \log_b m \cdot \log_c m}{\log_{abc} m},$$

де $m > 0$, $m \neq 1$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$, $abc \neq 1$.

Розв'язання.

$$\log_a m \cdot \log_b m + \log_b m \cdot \log_c m + \log_c m \cdot \log_a m =$$

$$= \frac{1}{\log_m a \cdot \log_m b} + \frac{1}{\log_m b \cdot \log_m c} + \frac{1}{\log_m c \cdot \log_m a} =$$

$$= \frac{\log_m a + \log_m b + \log_m c}{\log_m a \cdot \log_m b \cdot \log_m c} = \frac{\log_m abc}{\log_m a \cdot \log_m b \cdot \log_m c} =$$

$$= \frac{\log_a m \cdot \log_b m \cdot \log_c m}{\log_{abc} m},$$

що й треба було довести.

Приклад 4. Обчислити суму

$$\frac{1}{\log_2 n} + \frac{1}{\log_3 n} + \frac{1}{\log_4 n} + \ldots + \frac{1}{\log_{1997} n},$$

коли $n = 1997!$

Розв'язання.

$$\frac{1}{\log_2 n} + \frac{1}{\log_3 n} + \frac{1}{\log_4 n} + \ldots + \frac{1}{\log_{1997} n} =$$

$$= \log_n 2 + \log_n 3 + \log_n 4 + \ldots + \log_n 1997 =$$

$$= \log_n (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1997) = \log_n (1997!) = \log_n n = 1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 5. Обчислити $\log_6 16$, якщо $\log_{12} 27 = a$.

Розв'язання. $\log_6 16 = 4 \log_6 2 = \dfrac{4}{\log_2 4} =$

$$= \frac{4}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{6}{1 + \log_2 3}.$$

Тепер перетворимо даний в умові вираз:

$$a = \log_{12} 27 = 3 \log_{12} 3 =$$

$$= \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{\log_3 3 + 2\log_3 2} =$$

$$= \frac{3}{1 + 2\log_3 2} = \frac{3}{1 + \dfrac{2}{\log_2 3}} = \frac{3\log_2 3}{2 + \log_2 3}.$$

Отже, $a = \dfrac{3\log_2 3}{2 + \log_2 3}$, звідки

$$\log_2 3 = \frac{2a}{3 - a} \quad (a \neq 3).$$

Тоді

$$\log_6 16 = \frac{4}{1 + \log_2 3} = \frac{4}{1 + \dfrac{2a}{3 - a}} = \frac{4(3 - a)}{3 + a}.$$

Відповідь: $\dfrac{4(3 - a)}{3 + a}$.

Приклад 6. Нехай a і b — довжини катетів прямокутного трикутника, c — довжина гіпотенузи, $c - b \neq 1$, $c + b \neq 1$.

Довести, що

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

Розв'язання. Якщо $a = 1$, то рівність виконується, оскільки всі доданки, що входять до неї, дорівнюють нулю.

Розглянемо випадок, коли $a \neq 1$. За теоремою Піфагора $c^2 - b^2 = a^2$, або $(c - b)(c + b) = a^2$ і, оскільки $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\log_a (c - b) + \log_a (c + b) = \log_a a^2,$$

звідки

$$\frac{1}{\log_{c-b} a} + \frac{1}{\log_{c+b} a} = 2, \text{ або}$$

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c-b} a \cdot \log_{c+b} a,$$

що й треба було довести.

Вправи

Обчислити:

1. $27^{1-\log_3 2}$.

2. $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 6}}$.

3. $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 + 2\log_5 3}$.

4. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

5. $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 3^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

6. $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

7. $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}$.

8. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$.

9. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$.

10. Знайти $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$, якщо $\log_a 27 = b$.

11. Знайти $\log_{49} 16$, якщо $\log_{14} 2 = a$.

12. Обчислити $\log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3 \cdot \log_3 4)$.

13. Знайти $\log_{abcd} x$, якщо $\log_a x = \alpha$, $\log_b x = \beta$, $\log_c x = \gamma$, $\log_d x = \delta$ та $x \neq 1$.

14. Знайти $\log_{30} 8$, якщо $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

15. Знайти $\log_9 20$, якщо $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

16. Знайти $\log_6 16$, якщо $\log_{12} 2 = a$.

17. Обчислити $\log_3 5$, якщо $\log_6 2 = a$, $\log_6 5 = b$.

18. Обчислити $\log_{35} 28$, якщо $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.

19. Обчислити $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$.

20. Обчислити

$$\lg \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 31^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 32^\circ \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 60^\circ.$$

21. При яких x числа $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 3)$ є трьома послідовними членами арифметичної прогресії?

22. Обчислити $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9$, якщо відомо, що $\lg 2 = 0{,}3010$.

23. Перевірте, що

$$\log_{0,5} \sin 70^\circ + \log_{0,5} \sin 50^\circ + \log_{0,5} \sin 10^\circ = 3.$$

§5. Розв'язування систем показникових і логарифмічних рівнянь

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_x y - 4\log_y x = 3, \\ y^2 - 2x^3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. З першого рівняння системи випливає, що шукані значення x і y повинні задовольняти умови: $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$.

При таких умовах перше рівняння системи рівносильне рівнянню

$$\log_x y - \frac{4}{\log_x y} = 3, \text{ або}$$

$$\log_x^2 y - 3\log_x y - 4 = 0,$$

звідки $\log_x y = 4$ та $\log_x y = -1$ або $y = x^4$ та $y = x^{-1}$. Тому дана система рівнянь рівносильна сукупності двох систем рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^4, \\ y^2 - 2x^3 = 0 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} y = x^{-1}, \\ y^2 - 2x^3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи рівнянь і враховуючи, що $x \neq 0$, $y \neq 0$, дістанемо шукані розв'язки даної системи:

$$x_1 = \sqrt[5]{2},\ y_1 = \sqrt[5]{16},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{2}},\ y_2 = \sqrt[5]{2}.$$

Відповідь: $(\sqrt[5]{2};\ \sqrt[5]{16})$, $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}};\ \sqrt[5]{2}\right)$.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2y = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. З другого рівняння системи знайдемо $y = x^{-2}$ і підставимо його в перше рівняння. Дістанемо

$$x^{x+x^{-2}} = x^{-2(x-x^{-2})}, \text{ або}$$

$$x^{x+\frac{1}{x^2}} = x^{-2x+\frac{2}{x^2}}.$$

Розв'язуємо утворене рівняння.

а) $x = -1$; перевіряємо: $(-1)^{-1+1} = (-1)^{2+2}$, $1 = 1$, $x_1 = -1$;

б) $x = 0$; перевіряємо: $0^{0+\frac{1}{0}} = 0^{0+\frac{2}{0}}$ — не має змісту;

в) $x = 1$; $1^2 = 1^0$, $1 = 1$, $x_2 = 1$

г) $x + \frac{1}{x^2} = -2x + \frac{2}{x^2}$, або $3x^3 - 1 = 0$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Знаючи x, знаходимо відповідні значення y з рівняння $y = x^{-2}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = \sqrt[3]{9}$. Перевіркою переконуємося, що знайдені значення x та y є розв'язками системи.

Відповідь: $(-1;\ 1)$; $(1;\ 1)$; $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\ \sqrt[3]{9}\right)$.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо дану систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 2^3 \cdot 3, \\ 2^y \cdot 3^x = 2 \cdot 3^3. \end{cases}$$

Перемноживши почленно рівняння системи, маємо

$$2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 2^4 \cdot 3^4, \text{ або}$$

$$6^{x+y} = 6^4,$$

звідки

$$x + y = 4. \qquad (*)$$

Поділивши рівняння системи почленно, дістанемо

$$2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = 2^2 \cdot 3^{-2}, \text{ або}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

звідки

$$x - y = 2. \qquad (**)$$

Розв'язування вихідної системи рівнянь зводиться до розв'язування рівносильної їй системи, що складається з утворених рівнянь (*) та (**):

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є пара чисел: $x = 3$, $y = 1$.

Відповідь: (3; 1).

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^{\lg y} = 100, \\ \log_y x = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Шукані значення x та y повинні задовольняти умови $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$. Після перетворення дістанемо систему

$$\begin{cases} \lg y \lg x = 2, \\ x = y^2, \end{cases} \quad \text{звідки}$$

$$\begin{cases} \lg y \cdot \lg y^2 = 2, \\ x = y^2, \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} \lg^2 y = 1, \\ x = y^2. \end{cases}$$

Маємо

$$\begin{cases} \lg y = \pm 1, \\ x = y^2. \end{cases} \quad y_1 = 0{,}1$$

Тоді $x_1 = 0{,}01$, $y_2 = 10$, $x_2 = 100$. Знайдені пари значень є розв'язками даної системи. Перевіркою переконуємося в цьому.

Відповідь: (0,01; 0,1); (100; 10).

Вправи

Розв'язати системи рівнянь:

1. $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg (y + x)^2 - \lg x = 2 \lg 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 10^{1 + \lg (x + y)} = 50, \\ \lg (x - y) + \lg (x + y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2^{\frac{x - y}{2}} + 2^{\frac{y - x}{2}} = 2{,}5, \\ \lg (2x - y) + 1 = \lg (y + 2x) + \lg 6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2 \log_2 (x + y), \\ \log_2 (x + y) + \log_2 (x^2 - xy + y^2) = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^{2y^2 - 1} = 5, \\ x^{y^2 + 2} = 125. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4^{x + y} = 2^{y - x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 - 5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ x^y = 4^6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \log_x (3x + 2y) = 2, \\ \log_y (2x + 3y) = 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \log_{xy} \dfrac{y}{x} - \log_y^2 x = 1, \\ \log_2 (y - x) = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \log_x y = 2, \\ \log_{x+1}(y+23) = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} (x^2+y)\cdot 2^{y-x^2} = 1, \\ 9\,(x^2+y) = 6^{x^2-y}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 12. \end{cases}$

16. $\begin{cases} (x+y)^x = (x-y)^y, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_3 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27, \\ \log_3 y - \log_3 x = 1. \end{cases}$

§6. Розв'язування показникових нерівностей

Розв'язування найпростіших показникових нерівностей базується на використанні властивостей монотонності показникової функції.

Розглянемо розв'язування найпростіших показникових нерівностей.

1. Нерівність $a^x > c$, де $a > 0$, $a \neq 1$:

а) якщо $c \leq 0$, то нерівність виконується при будь-якому значенні x (оскільки для будь-якого значення x $a^x > 0$);

б) якщо $c > 0$, то, записавши нерівність у вигляді $a^x > a^{\log_a c}$, дістанемо:

коли $a > 1$, $x > \log_a c$,

коли $0 < a < 1$, $x < \log_a c$.

2. Нерівність $a^x < c$, де $a > 0$, $a \neq 1$:

а) якщо $c \leq 0$, то нерівність не має розв'язку;

б) якщо $c > 0$, то, записавши нерівність у вигляді $a^x < a^{\log_a c}$, дістанемо:

коли $a > 1$, $x < \log_a c$,

коли $0 < a < 1$, $x > \log_a c$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$\frac{0{,}2^{x+0,5}}{\sqrt{5}} > \frac{0{,}04^x}{25}.$$

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді

$$\frac{5^{-x-0,5}}{5^{0,5}} > \frac{5^{-2x}}{5^2}, \text{ або } 5^{-x-1} > 5^{-2x-2},$$

звідки $-x-1 > -2x-2$, $x > -1$.

Відповідь: $x > -1$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$1 < 5^{1-\frac{1}{2}x} < 25.$$

Розв'язання. Оскільки $5^0 < 5^{1-\frac{1}{2}x} < 5^2$, то

$$0 < 1 - \frac{1}{2}x < 2, \; -2 < \frac{1}{2}x - 1 < 0, \; -1 < \frac{1}{2}x < 1,$$

і, нарешті, $-2 < x < 2$.

Відповідь: $-2 < x < 2$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $0{,}5^{x^2-x} > 3$.

Розв'язання. Маємо $0{,}5^{x^2-x} > 0{,}5^{\log_{0,5} 3}$, звідки

$$x^2 - x + \log_2 3 < 0.$$

Утворена нерівність не має розв'язків, оскільки дискримінант тричлена у лівій частині неравності від'ємний.

Відповідь: немає розв'язків.

Приклад 4. Розв'язати нерівність

$$\frac{15}{2^x+1} + \frac{4}{2^{x-1}-3} > \frac{12}{2^{x+1}}.$$

Розв'язання. Запишемо дану нерівність у вигляді

$$\frac{15}{2^x+1} + \frac{8}{2^x-6} > \frac{6}{2^x}.$$

Позначимо $2^x = y$. Очевидно, що $y > 0$. Дістанемо

$$\frac{15}{y+1} + \frac{8}{y-6} > \frac{6}{y}.$$

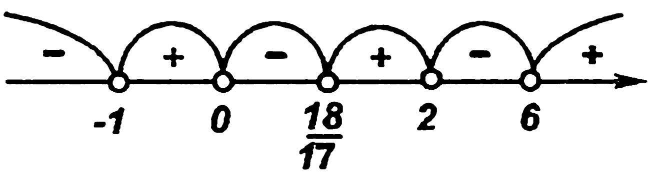
Розв'язуючи нерівність

$$\frac{15}{y+1} + \frac{8}{y-6} - \frac{6}{y} > 0,$$

матимемо

$$\frac{17y^2 - 52y + 36}{y(y+1)(y-6)} > 0, \text{ або}$$

$$(17y^2 - 52y + 36)\, y\,(y+1)(y-6) > 0.$$



Мал. 34

Визначимо проміжки знакосталості (мал. 34) при $y > 0$:

а) $-1 < y < 0$ не задовольняє;

б) $\frac{18}{17} < y < 2$, $y > 6$.

Повертаючись до підстановки, дістанемо

1) $\frac{18}{17} < 2^x < 2$;

$2^{\log_2 \frac{18}{17}} < 2^x < 2$;

$\log_2 \frac{18}{17} < x < 1$.

2) $2^x > 6$;

$2^x > 2^{\log_2 6}$;

$x > \log_2 6$.

Відповідь: $\log_2 \frac{18}{17} < x < 1$, $x > \log_2 6$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність

$$3^{2x+5} \leq 3^{x+2} + 2.$$

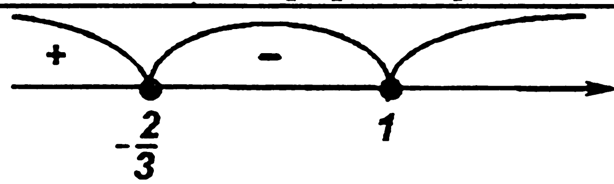
Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді

$$3 \cdot 3^{2x+4} \leq 3^{x+2} + 2.$$

Позначивши $3^{x+2} = y$ $(y > 0)$, прийдемо до нерівності

$$3y^2 \leq y + 2, \quad 3y^2 - y - 2 \leq 0,$$

$$(y-1)(3y+2) \leq 0.$$



Мал. 35

Визначимо проміжки знакосталості (мал. 35). Маємо $-\frac{2}{3} \le y \le 1$. Повертаючись до підстановки, дістаємо

$$-\frac{2}{3} \le 3^{x+2} \le 1.$$

Але нерівність $3^{x+2} \ge -\frac{2}{3}$ задовольняється при будь-якому дійсному x. Тоді розв'язком даної нерівності буде $3^{x+2} \le 3^0$, звідки $x + 2 \le 0$, $x \le -2$.

Відповідь: $x \le -2$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність

$$12^x + 5^x > 13^x.$$

Розв'язання. Обидві частини нерівності поділимо на $13^x > 0$. Дістанемо

$$\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x > 1.$$

Кожна з функцій $\left(\frac{12}{13}\right)^x$ та $\left(\frac{5}{13}\right)^x$ визначена на множині дійсних чисел. Крім того, обидві вони монотонно спадні. Тому функція

$$f(x) = \left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x - 1$$

монотонно спадна.

Оскільки $f(2) = 0$, то $x = 2$ — єдиний корінь функції $f(x)$ і, отже, $f(x) > 0$, коли $x < 2$.

Відповідь: $x < 2$.

3. Розв'язування нерівності $(f(x))^{\varphi(x)} > 1$ зводиться до розв'язування двох систем

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) < 0. \end{cases}$$

4. Розв'язування нерівності $(f(x))^{\varphi(x)} < 1$ зводиться до розв'язування таких систем:

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) < 0 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) > 0. \end{cases}$$

Приклад 7. Розв'язати нерівність

$$(x-2)^{x^2-6x+8} > 1.$$

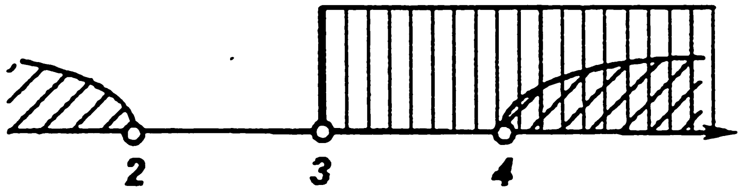
Розв'язання. Використовуючи монотонність показникової функції, замінимо дану нерівність рівносильною сукупністю двох систем:

$$а) \begin{cases} x-2>1, \\ x^2-6x+8>0; \end{cases} \qquad б) \begin{cases} 0<x-2<1, \\ x^2-6x+8<0. \end{cases}$$

Розв'язком системи

$$а) \begin{cases} x>3, \\ (x-4)(x-2)>0 \end{cases} \text{ (мал. 36)}$$

є нерівність $x > 4$.

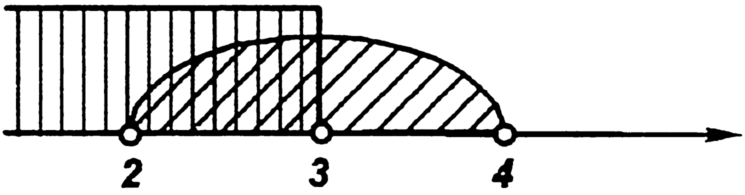


Мал. 36

Розв'язком системи

$$б) \begin{cases} 2<x<3, \\ (x-4)(x-2)<0 \end{cases} \text{ (мал. 37)}$$

є нерівність $2 < x < 3$.



Мал. 37

Приклад 8. Розв'язати нерівність

$$(x^2-8x+15)^{x-6} < 1.$$

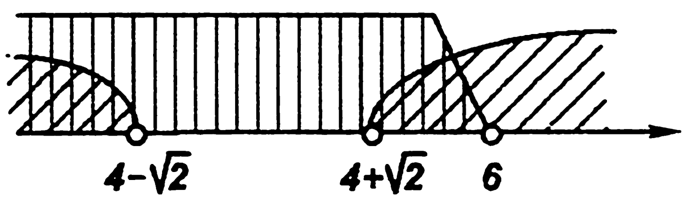
Розв'язання. Використовуючи монотонність показникової функції, замінимо дану нерівність рівносильною сукупністю двох систем:

$$а)\ \begin{cases} x^2 - 8x + 15 > 0, \\ x - 6 < 0; \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} 0 < x^2 - 8x + 15 < 1, \\ x - 6 > 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи $а)$ $\begin{cases} x^2 - 8x + 14 > 0, \\ x < 6 \end{cases}$ (мал. 38) є

всі значення x, що задовольняють нерівності

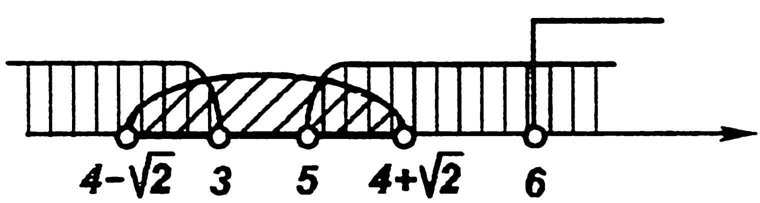
$$x < 4 - \sqrt{2}, \ \ 4 + \sqrt{2} < x < 6.$$



Мал. 38

Розв'язуючи систему $б)$ $\begin{cases} x^2 - 8x + 14 < 0, \\ x^2 - 8x + 15 > 0, \\ x > 6 \end{cases}$ (мал. 39),

робимо висновок, що система несумісна.



Мал. 39

Відповідь: $x < 4 - \sqrt{2}$; $4 + \sqrt{2} < x < 6$.

Вправи

Розв'язати нерівності:

1. $2^{3 - 6x} > 1$.
2. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x + 2}} > 3^{-x}$.
3. $0{,}1^{4x^2 - 2x - 2} \le 0{,}1^{2x - 3}$.
4. $2^x + 2^{1 - x} - 3 < 0$.
5. $\dfrac{4^x + 2x - 4}{x - 1} \le 2$.

6. $x^2 \cdot 5^x - 5^{2+x} < 0$.
7. $4^{x+1} - 16^x < 2\log_4 8$.
8. $\dfrac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1} < 2$.
9. $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \le 9$.
10. $5^{2x+1} > 5^x + 4$.
11. $3^{\frac{x-3}{3x-2}} < \dfrac{1}{3}$.
12. $0{,}5^{x-2} > 6$.
13. $\dfrac{1}{3^x+5} < \dfrac{1}{3^{x+1}-1}$.
14. $0{,}5^x \le 0{,}25^{x^2}$.
15. $1 < 3^{|x^2-x|} < 9$.
16. $|2^{4x^2-1} - 5| \le 3$.
17. $2^{1-2^{\frac{1}{x}}} < 0{,}125$.
18. $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$.
19. $(x+5)^{x^2-4x+3} > 1$.
20. $(x+3)^{x^2-5x+4} < 1$.
21. $(x^2-6x+8)^{x-3} < 1$.
22. $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$.
23. $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1$.
24. $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.
25. $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$.
26. $(x^2-8x+16)^{x-6} < 1$.

§7. Розв'язування логарифмічних нерівностей

Розглянемо основні види логарифмічних нерівностей.

1. Розв'язування нерівностей виду $\log_{\varphi(x)} f(x) \ge k$ зводиться до розв'язування систем

а) $\begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) \ge \varphi^k(x); \end{cases}$ *б*) $\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1, \\ 0 < f(x) \le \varphi^k(x). \end{cases}$

2. Розв'язування нерівностей виду $\log_{\varphi(x)} f(x) \le k$ зводиться до розв'язування систем

а) $\begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ 0 < f(x) \le \varphi^k(x); \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) \ge \varphi^k(x). \end{cases}$

3. Розв'язування нерівностей виду

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \ge \log_{\varphi(x)} h(x)$$

зводиться до розв'язування систем

а) $\begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) \ge h(x) > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1, \\ 0 < f(x) \le h(x). \end{cases}$

4. Розв'язування нерівностей виду

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \le \log_{\varphi(x)} h(x)$$

зводиться до розв'язування систем

а) $\begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ 0 < f(x) \le h(x); \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) \ge h(x), \\ h(x) > 0. \end{cases}$

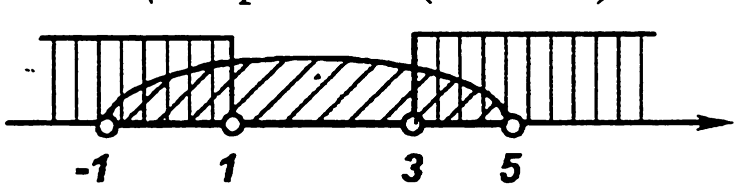
Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$\log_8 (x^2 - 4x + 3) < 1.$$

Розв'язування. Користуючись властивістю логарифмічної функції, дістаємо, що дана нерівність рівносильна нерівності $0 < x^2 - 4x + 3 < 8$, тобто

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 8, \\ x^2 - 4x + 3 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ x^2 - 4x + 3 > 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо ці нерівності (мал. 40).



Мал. 40

Відповідь: $3 < x < 5$; $-1 < x < 1$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2 + 4x}{2x - 3} < 1.$$

Розв'язання. Ця нерівність рівносильна нерівності

$$\frac{x^2 + 4x}{2x - 3} > \frac{1}{3}.$$

Розв'язуючи нерівність $\frac{x^2 + 4x}{2x - 3} > \frac{1}{3}$, дістанемо

$$\frac{3x^2 + 12x - 2x + 3}{3\,(2x - 3)} > 0, \text{ або}$$

$$\frac{3x^2 + 10x + 3}{2x - 3} > 0,$$

звідси

$$\frac{(x + 3)\,(3x + 1)}{2x - 3} > 0.$$

Розв'язуючи дану нерівність методом інтервалів, дістанемо відповідь.

Відповідь: $-3 < x < -\frac{1}{3}$, $x > \frac{3}{2}$.

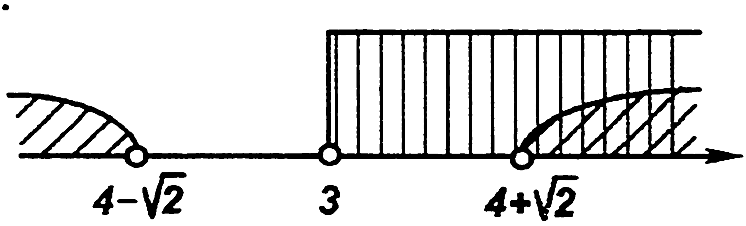
Приклад 3. Розв'язати нерівність

$$\log_{(x-2)}(x^2 - 8x + 15) > 0.$$

Розв'язання. Ця нерівність рівносильна таким двом системам нерівностей:

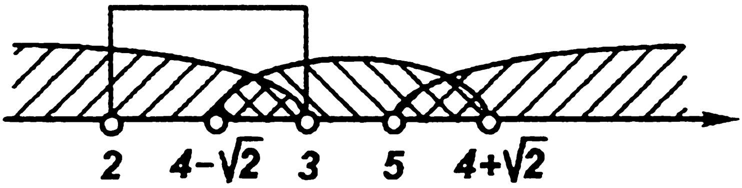
а) $\begin{cases} x - 2 > 1, \\ x^2 - 8x + 15 > 1; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ 0 < x^2 - 8x + 15 < 1. \end{cases}$

Розв'язком системи *а)* $\begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 8x + 14 > 0 \end{cases}$ (мал. 41) є всі значення x, що задовольняють нерівність $x > 4 + \sqrt{2}$.



Мал. 41

Розв'язком системи *б)* $\begin{cases} 2 < x < 3, \\ x^2 - 8x + 15 > 0, \\ x^2 - 8x + 14 < 0 \end{cases}$ (мал. 42) є всі значення x, що задовольняють нерівність $4-\sqrt{2} < x < 3$.



Мал. 42

Відповідь: $x > 4+\sqrt{2}$; $4-\sqrt{2} < x < 3$.

Вправи

Розв'язати нерівності:

1. $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) > 0$.
2. $\log_5(3x-1) < 1$.
3. $\log_{0,5}(x^2-5x+6) > -1$.
4. $\log_3 \dfrac{1-2x}{x} \le 0$.
5. $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \le 0$.
6. $\log_2 x \le \dfrac{2}{\log_2 x - 1}$.
7. $\dfrac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$.
8. $\log_{0,2}(x^2-x-2) > \log_{0,2}(-x^2+2x+3)$.
9. $\dfrac{\log_2(x+1)}{x-1} > 0$.
10. $\sqrt{\dfrac{x-5}{7x-x^2-10}} > 0$.
11. $\log_8(x^2-4x+3) < 1$.
12. $\log_2 \log_2 \dfrac{x-1}{2-x} > -1$.
13. $\dfrac{\lg^2 x + \lg x - 6}{\lg x} > 0$.
14. $\log_{x-2}(x^2-8x+15) > 0$.
15. $\log_{x^2-6x+8}(x-4) > 0$.

16. $x^{\lg (x^2 - 6x + 5)} > 1.$

17. $\log_x (x^2 - 2x - 3) > 0.$

18. $\log_{3-x} (x - 2{,}5) > 0.$

19. $\log_{0,2}^2 (x - 1) > 4.$

20. $(x - 1) \log_2 (x^2 - 4x + 3) < 0.$

21. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x < 6.$

22. $\log_4 (x + 7) > \log_2 (x + 1).$

23. $2^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} > 2{,}5.$

24. $\log_{\frac{1}{5}} x + \log_4 x > 1.$

25. $\log_{2x} (x^2 - 5x + 6) < 1.$

26. $\log_2^2 (x - 1)^2 - \log_{0,5} (x - 1) > 5.$

27. $x^{\log_2 x} + 16x^{-\log_2 x} < 17.$

28. $\log_{x^2} (3 - 2x) > 1.$

29. $\log_x (x + 1) < \log_{\frac{1}{x}} (2 - x).$

30. $\log_{|x-4|} (2x^2 - 9x + 4) > 1.$

Розділ VII

Комплексні числа

§1. Алгебраїчна форма комплексного числа

Число, що задовольняє рівність $x^2 = -1$, позначають буквою i та називають ***уявною одиницею***.

Таким чином, $i^2 = -1$.

Числа виду $a + bi$, де a і b — будь-які дійсні числа, називають ***комплексними числами***. *Числа a і bi називаються відповідно* ***дійсними*** *й* ***уявними*** *частинами комплексного числа.*

Комплексне число $a + 0i$ ототожнюють з дійсним числом a.

Комплексні числа виду $a + bi$ та $a - bi$ називаються ***спряженими***.

Комплексні числа виду $a + bi$ та $-a - bi$ називаються ***протилежними***.

Два комплексних числа $a + bi$ та $a_1 + b_1 i$ вважаються рівними між собою в тому й тільки тому випадку, коли $a = a_1$, $b = b_1$. З цього означення випливає, що комплексне число $a + bi$ дорівнює нулеві тоді й тільки тоді, коли $a = 0$, $b = 0$.

Приклад 1. Виконати дії над комплексними числами:

а) $(5 - 7i) + (-9 - 2i) = -4 - 9i$;

б) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$.

Приклад 2. Виконати дії над комплексними числами:

а) $(-4 + 3i) - (-1 + 5i) = -3 - 2i$;

б) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\,i$.

Приклад 3. Виконати дії над комплексними числами:

а) $(5 - 2i)(4 + 3i) = 20 + 15i - 8i - 6i^2 = 20 + 7i + 6 = 26 + 7i$;

б) $(4 - 7i)(4 + 7i) = 16 - 49i^2 = 16 + 49 = 65$;

в) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)\,i$.

Приклад 4. Виконати дії над комплексними числами:

а) $$\frac{3 - 7i}{5 + 4i} = \frac{(3 - 7i)(5 - 4i)}{(5 + 4i)(5 - 4i)} = \frac{15 - 12i - 35i + 28i^2}{25 - 16i^2} = -\frac{13}{41} - \frac{47}{41}\,i;$$

$$б)\ \frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2-d^2i^2}=$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Для піднесення комплексного числа до степеня спочатку треба знайти результати піднесення до степеня уявної одиниці і знаючи, що $i^2=-1$, маємо:

$$i^1=i,\ \ i^2=-1,\ \ i^3=-i,\ \ i^4=1,\ \ i^5=i,$$

$$i^6=-1,\ \ i^7=-1,\ \ i^8=1.$$

Очевидно, маємо чотири значення, які чергуються: $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, де $k=0,\pm1,\pm2$ та ін.

Приклад 5. Виконати дію: $(1+i)^{12}=((1+i)^2)^6=$

$$=(1+2i+i^2)^6=(1+2i-1)^6=64i^6=-64.$$

На множині комплексних чисел дія добування кореня завжди виконується і в результаті утворюються значення, кількість яких дорівнює показнику кореня.

Зокрема, квадратний корінь має два значення, які знаходяться за формулою

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\ \pm\ i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

де знак «+» у дужках береться при $b>0$, а знак «−» — при $b<0$.

Приклад 6. Виконати дію

$$\sqrt{5+12i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}\ \pm\ i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right)=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}}+i\sqrt{\frac{8}{2}}\right)=\pm(\sqrt{9}+i\sqrt{4})=\pm(3+2i).$$

Приклад 7. Розкласти на комплексні множники a^4+b^2.

Розв'язання. $a^4+b^2=(a^2+bi)(a^2-bi)$.

Приклад 8. Визначити x та y, якщо

$$x+2y+3xi-5yi=7-i.$$

Розв'язання. $x + 2y + (3x - 5y)i = 7 - i$.

На основі означення рівності комплексних чисел маємо:

$$\begin{cases} x + 2y = 7, \\ 3x - 5y = -1. \end{cases}$$

Розв'язуючи утворену систему, дістанемо: $x = 3$, $y = 2$.

Відповідь: (3; 2).

Вправи

Виконати дії над комплексними числами:

1. *а)* $(3 + 2i) + (2 + 4i)$; *в)* $(-3 + i) + (2 - 4i)$;

б) $(2 - 3i) + (1 + 2i)$; *г)* $(-1 - 2i) + (-3 - i)$.

2. *а)* $(2a - 3bi) + (-a - bi) + (4a + 2bi) - (2a - 5bi)$;

б) $(5x + 3yi) + (-2x + 8yi) - (2x - yi) + (7x + 2yi)$.

3. *а)* $2i \cdot 3i$; *б)* $2{,}5i \cdot 4i$; *в)* $-ai \cdot 5i$; *г)* $mi \cdot ni$.

4. *а)* $(3 + 5i) \cdot 2$; *б)* $(1 - i)(-4)$; *в)* $(-3 + 4i) \cdot 2i$; *г)* $(-8 - 7i)(-3i)$.

5. *а)* $(2 - 3i)(4 - i)$; *г)* $(3 + 2i)(3 - 2i)$;

б) $(1 - 2i)(5 - i)$; *д)* $(m - ni)(m + ni)$;

в) $(5 - i)(5 + i)$; *е)* $(\sqrt{a} + i\sqrt{b})(\sqrt{a} - i\sqrt{b})$.

6. *а)* $4i : 2$; *в)* $(2 + i) : i$; *д)* $\dfrac{4}{1 - 2i}$;

б) $6i : 2i$; *г)* $\dfrac{4}{3i}$; *е)* $\dfrac{5i}{2 + 3i}$.

7. *а)* $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$; *в)* $\dfrac{a}{a + bi}$; *д)* $\dfrac{a + i\sqrt{b}}{a - i\sqrt{b}}$;

б) $\dfrac{5 - i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{2}}$; *г)* $\dfrac{\sqrt{a}}{a + 2i\sqrt{a}}$; *е)* $\dfrac{m - ni}{m + ni}$.

8. *а)* i^6; *б)* i^{15}; *в)* i^{36}; *г)* i^{254}.

9. *а)* $(1 + i)^2$; *г)* $(1 - i)^3$; *є)* $(1 + i)^4$;

б) $(1 - i)^2$; *д)* $(a + bi)^2$; *ж)* $(1 - i)^4$;

в) $(1 + i)^3$; *е)* $(2 - i\sqrt{3})^3$; *з)* $(1 - i)^8$.

10. $(1 + i)^{10} - (1 - i)^{10}$.

11. *а)* $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i}$; *б)* $\dfrac{a+bi}{c+di} - \dfrac{a-bi}{c-di}$.

12. $\dfrac{\sqrt{1+m} + i\sqrt{1-m}}{\sqrt{1+m} - i\sqrt{1-m}} - \dfrac{\sqrt{1-m} + i\sqrt{1+m}}{\sqrt{1-m} - i\sqrt{1+m}}$.

13. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$.

14. Розкласти на комплексні множники:

а) $a^2 + b^2$; *в)* $a^2 + 4b^2$; *д)* $a + b$;

б) $a^2 + 4$; *г)* $c^2 + 1$; *е)* $a + 1$.

15. Визначити x та y з рівняння, якщо:

а) $2 + 5ix - 3iy = 14i + 3x - 5y$;

б) $\dfrac{8i}{x} + iy - 2 = 7i - \dfrac{10}{x} + y$;

в) $\dfrac{i}{x} + \dfrac{i}{y} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{5i}{y}$;

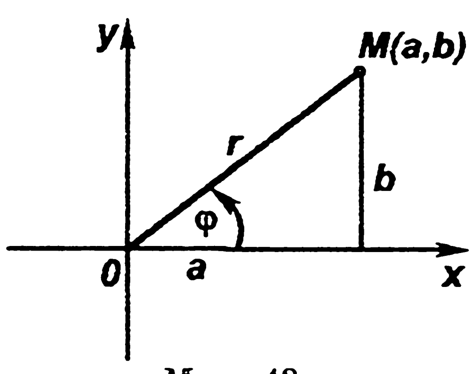
г) $3 - 5y + 2xi + 7yi = 1 + 11i$.

§2. Тригонометрична форма комплексного числа

Комплексне число $a + bi$ геометрично зображають точкою M, абсциса якої в прямокутній системі координат дорівнює a, а ордината — b (мал. 43).

З іншого боку, те саме комплексне число можна зобразити в іншій системі координат вектором $\overline{OM}$.

Довжина вектора, що зображує комплексне число, називається модулем цього комплексного числа і позначається буквою r. З малюнка видно, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Мал. 43

Кут φ між додатним напрямком осі абсцис і вектором OM, що зображує комплексне число $a + bi$, називається ***аргументом*** комплексного числа

$$(0 \leq \varphi < 360^\circ).$$

Аргумент φ комплексного числа $a+bi$ пов'язаний з a і b формулою $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Приклад 1. Знайти модуль і аргумент комплексного числа $-3-3i$.

Розв'язання. $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = 9\sqrt{2}$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

Цю умову задовольняють як кут 45°, так і кут 225°. Але кут 45° не є аргументом числа $-3-3i$. Правильна відповідь буде $\varphi = 225°$. Цей результат дістанемо, якщо врахувати, що абсциса і ордината даного комплексного числа від'ємні. Отже, точка M міститься в третій чверті.

Форма запису комплексного числа $a+bi$ називається алгебраїчною.

Абсциса a та ордината b комплексного числа $a+bi$ виражаються через модуль r і аргумент φ формулами $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Тоді маємо:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Цей вираз називається ***тригонометричною формою комплексного числа*** c з модулем r та аргументом φ.

Приклад 2. Подати в тригонометричній формі число $1-i$.

Розв'язування. Маємо $r = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = -1$. Тут $a = 1$, а $b = -1$. Отже, φ знаходиться і четвертій чверті. Звідси $\varphi = 315°$ і можемо записати

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°).$$

Приклад 3. Виразити в алгебраїчній формі число $2(\cos 300° + i\sin 300°)$.

Розв'язання. Оскільки $\cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sin 300° = \sin(360° - 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то маємо

$$2\cos(300° + i\sin 300°) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Модуль добутку двох комплексних чисел, записаних в тригонометричній формі, дорівнює добутку модулей співмножників, а аргумент дорівнює сумі аргументів співмножників, тобто якщо

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \quad \text{то}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Модуль частки двох комплексних чисел, записаних в тригонометричній формі, дорівнює частці модулей, а аргумент — різниці аргументів діленого і дільника, тобто, якщо

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \quad \text{то}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)).$$

При піднесенні комплексного числа

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

до степеня n дістаємо:

$$(r (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Ця формула називається формулою Муавра, за ім'ям англійського математика Муавра (1667-1754).

Приклад 4. Піднести до шостого степеня число

$$z = 2 (\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ).$$

Розв'язання. $z^6 = 64 (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) =$

$$= 64 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = -32 - 32\sqrt{3}\, i.$$

Оскільки $\cos 240^\circ = \cos (270^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$,

$$\sin 240^\circ = \sin (270^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Приклад 5. Піднести до 20-го степеня число

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Розв'язання. Запишемо це число в тригонометричній формі: $z = 1 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$. Звідси

$$z^{20} = 1^{20}(\cos 1200^\circ + i \sin 1200^\circ) = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Корінь n-го степеня з комплексного числа добувається за допомогою формули

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

де $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n - 1$.

Модуль кореня n степеня з комплексного числа дорівнює кореню того самого степеня з модуля підкореневого виразу, а аргумент для кожного значення кореня визначається за формулою

$$\varphi_{k+1} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ \text{де}\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n - 1.$$

Приклад 6. Знайти $\sqrt[3]{1}$.

Розв'язання. $1 = 1(\cos 360^\circ k + i \sin 360^\circ k)$,

$$\sqrt[3]{1} = 1(\cos 120^\circ k + i \sin 120^\circ k).$$

Коли $k = 0,\ 1,\ 2$, дістанемо відповідно

$$n_1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 1,$$

$$n_2 = 1(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = 1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$n_3 = 1(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = 1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Вправи

Виразити в тригонометричній формі:

1. *а*) i; *в*) $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; *д*) $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$;

   б) $-i$; *г*) $\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$; *е*) $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

2. *а*) $4 + 3i$; *в*) $-\sqrt{3} + i$;

   б) $1 - i\sqrt{3}$; *г*) $5 + 12i$.

Записати в алгебраїчній формі:

3. *а*) $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; *в*) $8\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $6(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$; *г*) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Виконати дії над числами, поданими в тригонометричній формі:

4. *а*) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)\cdot\sqrt{3}(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$;

в) $(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ) : (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$;

г) $6(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) : 2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$;

д) $(\cos 30^\circ + i\sin (30^\circ))^9$;

е) $\left(3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^6$.

Обчислити:

5. *а*) $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{90}$; *б*) $\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{90}$.

6. *а*) $\sqrt[4]{\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ}$; *б*) $\sqrt[5]{\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ}$.

Знайти всі значення кореня:

7. *а*) $\sqrt[3]{-1}$; *б*) $\sqrt[4]{1}$; *в*) $\sqrt[4]{-16}$; *г*) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

Розділ VIII

Сполуки та біном Ньютона

§1. Сполуки та їх види

Нехай A — сукупність різних предметів, що мають спільну ознаку. Наприклад, A — сукупність парних чисел від 1 до 10, або учнів даної школи, або заданих точок на площині тощо. Замість слів «сукупність» будемо говорити «множина».

Отже, A — множина, що складається з скінченої кількості елементів a_1, a_2, a_3, ... , a_n.

З різних елементів множини A можна утворити групи, які називаються ***сполуками***.

Розрізняють три види сполук: *розміщення, перестановки, комбінації.*

Сполуки, кожна з яких містить m різних елементів, узятих з даних n елементів множини A ($m \le n$), і відрізняються одне від одного складом елементів, або порядком їх розташування, називаються ***розміщеннями*** з n елементів по m у кожному.

Кількість таких розміщень позначається символом A_n^m.

Так, наприклад, різні трицифрові числа, що записані трьома з дев'яти цифр 1, 2, 3, ..., 9 і не містять однакових цифр, утворюють розміщення. Їх кількість зображається так: A_9^3.

Кількість усіх можливих розміщень із n елементів по m в кожному визначається формулою

$$A_n^m = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-(m-1)).$$

В окремих випадках формулу для A_n^m записують у вигляді $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ і називається факторіалом.

Приклад 1. Обчислити A_9^3.

Розв'язання. $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Приклад 2. На кожній з десяти карток записана одна з цифр 0, 1, 2, 3, ..., 9. Беруть чотири картки і складають із цифр, записаних на них, чотирицифрове число. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти таким чином?

Розв'язання. Всього різних комбінацій із чотирьох карток можна скласти стільки, скільки існує розміщень з 10 елементів по 4. Умовам задачі не задовольняють комбінації цифр, що починаються нулем. Таких комбінацій буде A_9^3. Вилучивши їх із загального числа розміщень A_{10}^4, дістанемо шукане:

$$A_{10}^4 - A_9^3 = \frac{10!}{6!} - \frac{9!}{6!} = \frac{9!\,(10-1)}{6!} = \frac{9!\,9}{6!} = 4536.$$

Приклад 3. Скільки різних правильних дробів можна скласти з чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 так, щоб у кожний дріб входили два числа?

Розв'язання. Очевидно, всього різних дробів із даних чисел можна скласти стільки, скільки існує розміщень із 8 елементів по 2 (A_8^2). Але нас цікавлять лише правильні дроби, яких буде в два рази менше, тобто

$$\frac{1}{2}A_8^2 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7 = 28.$$

Перестановками (P_n) називаються сполуки з n елементів, які відрізняються між собою тільки порядком розташування елементів. Їх кількість обчислюється за формулою:

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ \dots\ n = n!.$$

Приклад. Скількома способами можна розселити 5 чоловік в п'яти номерах готелю?

Розв'язання. $P_5 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

Відповідь: 120.

Приклад 4. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна утворити за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4?

Розв'язання. З даних п'яти цифр можна утворити стільки чисел, скільки є перестановок з 5 елементів. Серед цих чисел є такі, які починаються з нуля; вони не п'ятицифрові. Чисел, які починаються з нуля, стільки, скільки існує перестановок з 4 елементів. Тому шукана кількість п'ятицифрових чисел дорівнює $P_5 - P_4 = 120 - 24 = 96$.

Відповідь: 96.

Приклад 5. Знайти x з рівняння $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}} = 132$, де $n \geq 10$ — натуральне число.

Розв'язання. Згідно з формулами для обчислення перестановок і розміщень маємо:

$$\frac{(x+2)!\,(x-n)!}{(x-n)!\,x!} = 132, \text{ або } \frac{(x+2)!}{x!} = 132,$$

де $x+2 \geq 0$, $x-n \geq 0$ та $x \geq 0$. Скорочуючи дріб на $x!$, дістанемо квадратне рівняння $x^2 + 3x - 130 = 0$, яке рівносильне даному, якщо x — натуральне. Розв'язуючи це рівняння, знаходимо, що $x = 10$ (корінь $x = -13$ не враховується).

Відповідь: 10.

Сполуки, кожна з яких складається з m різних елементів, узятих з n елементів множини A $(m \leq n)$, відрізняються одне від одного принаймні одним елементом, називаються ***комбінаціями*** з n елементів по m. Кількість таких комбінацій позначається символом C_n^m. Зміна порядку елементів в одній комбінації не приводить до нової комбінації. Кількість різних комбінацій з n елементів по m обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}, \text{ або } C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Комбінації мають такі властивості:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$.
2. Для всіх $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ справджується рівність
$$(n+1)\,C_n^m = (m+1)\,C_{n+1}^{m+1}.$$
3. Для всіх $m = 1, 2, \ldots, n$ справджується рівність
$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

Приклад 6. Скільки різних хокейних команд можна скласти з 9 нападаючих, 5 захисників та 3 воротарів, якщо до складу команди повинні увійти 3 нападаючих, 2 захисники та 1 воротар?

Розв'язання. З 9 нападаючих можна вибрати трьох C_9^3 різними способами. З 5 захисників можна вибрати двох C_5^2 різними способами. З трьох воротарів можна вибрати одного воротаря трьома способами. Комбінуючи кожну трійку нападаючих з парами захисників, дістаємо $C_9^3 \cdot C_5^2$ різних команд без воротарів. Комбінуючи ці команди з кожним із воротарів, маємо

$$C_9^3 \cdot C_5^2 \cdot 3 = \frac{9!\ 5! \cdot 3}{6!\ 3!\ 3!\ 2!} = 2880$$

різних команд.

Приклад 7. Скільки діагоналей має опуклий n-кутник?

Розв'язання. Кожна пара вершин даного многокутника визначає або одну з його сторін, або одну з його діагоналей. Тому кількість усіх сторін і діагоналей дорівнює C_n^2. Але многокутник має n сторін, тому кількість його діагоналей дорівнює

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $12\, C_{x+3}^{x-1} = 55\, A_{x+1}^2$.

Розв'язання. Оскільки $C_{x+3}^{x-1} = C_{x+3}^{x+3-(x-1)}$, то дане рівняння запишемо у вигляді $12\, C_{x+3}^4 = 55\, A_{x+1}^2$, або

$$12\,\frac{(x+3)(x+2)(x+1)\,x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 55\,(x+1)\,x,$$

звідки, пам'ятаючи, що x — тільки натуральне число, знайдемо: $x = 8$.

Приклад 9. Розв'язати нерівність $C_{10}^{x-1} > 2\, C_{10}^x$.

Розв'язання. Ліва частина нерівності має зміст тоді і тільки тоді, коли x — ціле число, що належить проміжку [1; 11]. Права частина має зміст тоді і тільки тоді, коли x — ціле число і належить проміжку [0; 10]. Отже, розв'язками нерівності можуть бути тільки цілі значення x, що містяться на проміжку [1; 10].

Використовуючи формулу для комбінацій, запишемо дану нерівність так:

$$\frac{10!}{(x-1)!\,(10-x+1)!} > 2\,\frac{10!}{x!\,(10-x)!}.$$

Поділивши обидві частини нерівності на $\frac{10!}{(x-1)!\,(10-x)!}$, дістанемо $\frac{1}{11-x} > \frac{2}{x}$, звідки $x > 22 -$

$-2x$, тобто $x > \frac{22}{3}$. Враховуючи те, що x — натуральне число, яке належить проміжку $[1;\ 10]$, дістанемо, що розв'язками даної нерівності є 8; 9; 10.

Відповідь: 8; 9; 10.

Приклад 10. Знайти x та y з умови

$$C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} : C_{x+1}^{y-1} = 5 : 5 : 3.$$

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^{y}, \\ 3\,C_{x+1}^{y} = 5\,C_{x+1}^{y-1}, \end{cases}$$

де $x \ge y$ — натуральні числа.

З першого рівняння системи випливає, що $y + 1 + y = x + 1$, тобто $x = 2y$. Тоді з другого рівняння дістаємо

$$3\,C_{2y+1}^{y} = 5\,C_{2y+1}^{y-1}, \text{ або } \frac{3\,(2y+1)!}{y!\,(y+1!)} = \frac{5\,(2y+1)!}{(y-1)!\,(y+2!)}.$$

Скорочуючи на спільний множник $\frac{(2y+1)!}{(y+1)!\,(y-1)!}$, маємо $3\,(y+2) = 5y$, звідки $y = 3$ та $x = 6$.

Відповідь: (6; 3).

Вправи

Обчислити:

1. *а)* A_8^5; *б)* $\frac{A_6^3}{A_5^2}$; *в)* $\frac{A_{10}^6 + A_{10}^5}{A_9^5 - A_9^4}$; *г)* $\frac{A_8^3 + A_7^4}{A_6^3}$.

2. *а)* P_4; *б)* $\frac{P_8}{P_6}$; *в)* $\frac{P_5 + P_4}{P_3}$; *г)* $\frac{P_6 - P_4}{P_3}$.

3. *а)* C_6^2; *б)* C_{20}^{17}; *в)* C_{100}^{98}; *г)* C_{54}^{52}.

4. *а)* $\frac{A_7^4 - P_5}{A_5^2}$; *б)* $\frac{2P_3 + 3A_4^2}{5P_5 - P_3}$.

5. *а)* $\frac{A_n^5 + A_n^4}{A_n^3}$; *в)* $\frac{A_{n+m}^{n-m+2} + A_{n+m}^{n-m+1}}{A_{n+m}^{n-m}}$;

   б) $\frac{A_n^{m+2} + A_n^{m+1}}{A_n^m}$; *г)* $\frac{A_n^m \cdot P_{n-m}}{P_{n-1}}$.

6. *а*) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$; *б*) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Розв'язати рівняння:

7. *а*) $A_x^3 = 56x$; *в*) $5\,C_x^3 = C_{x+2}^4$;

б) $A_{x+1}^2 = 30$; *г*) $C_x^3 = \dfrac{5x\,(x-3)}{4}$.

8. *а*) $C_x^3 + C_x^2 = 15\,(x-1)$; *в*) $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$;

б) $C_x^4 = \dfrac{15A_x^2}{4}$; *г*) $C_{x+1}^5 = \dfrac{3A_x^3}{8}$.

9. *а*) $\dfrac{A_{x+1}^{n+1}\,P_{x-n}}{P_{x-1}} = 90$; *б*) $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n\,P_{x-n}} = 132$.

Розв'язати системи рівнянь:

10. *а*) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = \dfrac{5}{3}; \end{cases}$ *б*) $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2{,}5x, \\ C_{x-1}^y = 10. \end{cases}$

11. Під час зустрічі 16 чоловік потиснули один одному руки. Скільки рукостискань було зроблено?

12. 30 учнів захотіли обмінятися фотокартками. Скільки всього карток треба для цього?

13. Учні школи вивчають 10 різних предметів. Скількома способами можна скласти розклад уроків на один день, щоб при цьому було 5 різних предметів?

14. Бригадир повинен відправити на роботу бригаду з 5 чоловік. Скількома способами можна організувати бригаду з 5 чоловік з 12?

15. Скількома способами можна вибрати з 15 чоловік делегацію у складі 3-х чоловік?

16. Скільки прямих ліній можна провести через 8 точок, з яких ніякі три не лежать на одній прямій?

17. Визначити число всіх діагоналей правильного 15-кутника.

18. Скільки різних площин можна провести через 10 точок, якщо ніякі три з них не лежать на одній прямій і ніякі чотири точки не лежать в одній площині?

19. Скільки різних п'ятизначних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 3, 5, 7?

20. Знайти суму цифр в усіх п'ятизначних числах, записаних за допомогою 1, 4, 6, 7, 8.

21. Скількома способами можна скласти дозор з трьох солдат і одного офіцера, якщо є 80 солдат і 3 офіцери?

§2. Біном Ньютона

Формула

$$(x + a)^n = C_n^0\, x^n + C_n^1\, x^{n-1}\, a + C_n^2\, x^{n-2}\, a^2 + \ldots + C_n^n\, a_n,$$

*де n — натуральне число, називається **формулою бінома Ньютона**, а її права частина називається **розкладом бінома**.*

Коефіцієнти 1, C_n^1, C_n^2, ... , C_n^b, ... , 1 називаються біноміальними. Записуючи різницю $x - a$ у вигляді $x + (-a)$, маємо

$$(x - a)^n = x^n - C_n^1\, x^{n-1}\, a + c_n^2\, x^{n-2}\, a^2 - \ldots +$$

$$+ (-1)^k\, C_n^k\, x^{n-k}\, a^k + \ldots + (-1)^n\, a^n.$$

Зазначимо такі властивості розкладу бінома.

1. Кількість всіх членів розкладу на одиницю більше показника бінома.

2. Сума показників степенів x та a кожного члена розкладу дорівнює показнику степеня бінома.

3. Загальний член розкладу T_{k+1} має вигляд

$$T_{k+1} = C_n^k\, x^{n-k}\, a^k.$$

Поклавши у формулі $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, дістаємо перший, другий, третій, ..., $(n + 1)$-й члени розкладу.

4. Біноміальні коефіцієнти членів, рівновіддалених від кінців розкладу, рівні між собою, оскільки

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

5. Біноміальний коефіцієнт $(k + 1)$-го члена розкладу пов'язаний з попереднім біноміальним коефіцієнтом співвідношенням

$$C_n^k = \frac{n + 1 - k}{k}\, C_n^{k-1},$$

з якого випливає таке правило:

Кожний біноміальний коефіцієнт розкладу, починаючи з другого, дорівнює попередньому біноміальному

коефіцієнту, помноженому на показник степеня букви x попереднього члена і поділеному на кількість попередніх до нього членів.

6. Якщо показник бінома — число непарне ($n = 2p + 1$), то біноміальні коефіцієнти

$$C_{2p+1}^{0},\ C_{2p+1}^{1},\ \dots,\ C_{2p+1}^{p}$$

зростають ($p < p + 1$), а

$$C_{2p+1}^{p+1},\ C_{2p+1}^{p+2},\ \dots,\ C_{2p+1}^{2p+1}$$

спадають. Коефіцієнти $C_{2p+1}^{p} = C_{2p+1}^{p+1}$ — найбільші.

Якщо показник бінома — число парне ($n = 2p$), то біноміальні коефіцієнти C_{2p}^{0}, C_{2p}^{1}, ... , C_{2p}^{p} — зростають $\left(p < \dfrac{2p+1}{2}\right)$, а C_{2p}^{p}, C_{2p}^{p+1}, ... , C_{2p}^{2p} — спадають. Розклад має один найбільший коефіцієнт C_{2p}^{p}.

7. Сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n. Справді, поклавши у формулі Ньютона $x = a = 1$, маємо

$$(1 + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n.$$

8. Сума біноміальних коефіцієнтів членів розкладу, що стоять на парних місцях, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів членів, що стоять на непарних місцях, і дорівнює 2^{n-1}, тобто

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}.$$

Приклад 1. Знайти всі раціональні члени розкладу бінома $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5$.

Розв'язання. Нехай шуканий член дорівнює T_{k+1}. Тоді $T_{k+1} = C_5^k (\sqrt[3]{3})^{5-k} \cdot (\sqrt{2})^k = C_5^k \cdot 3^{\frac{5-k}{3}} \cdot 2^{\frac{k}{2}}$, де $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

З цих чисел треба вибрати таке k, при якому показники $\dfrac{5-k}{3}$ та $\dfrac{k}{2}$ будуть цілими числами. Очевидно, що $k = 2$ і є шуканий член

$$T_{2+1} = C_5^2 \cdot 3 \cdot 2 = 60.$$

Приклад 2. Знайти середній член розкладу

$$\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}.$$

Розв'язання. Розклад має 13 членів. Тому середнім членом є сьомий. Маємо:

$$T_7=C_{12}^6\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6(\sqrt[3]{x})^6=C_{12}^6\,\frac{1}{x^3}\,x^2=C_{12}^6\,x^{-1}.$$

Приклад 3. Знайти член розкладу $\left(\sqrt[9]{\frac{1}{x^8}}-\sqrt[3]{x^2}\right)^7$, який не містить x.

Розв'язання. Запишемо загальний член розкладу:

$$T_{k+1}=C_7^k\,(-\sqrt[3]{x^2})^k\left(\sqrt[9]{\frac{1}{x^8}}\right)^{7-k}=(-1)^k\,C_7^k\,x^{\frac{2k}{3}}\,x^{\frac{8k-56}{9}}=$$

$$=(-1)^k\,C_7^k\,x^{\frac{14k-56}{9}}.$$

У шуканому члені $\frac{14k-56}{9}=0$, звідки $k=4$. Тому шуканим членом є п'ятий член

$$T_5=(-1)^4\,C_7^4\,x^0=C_7^3.$$

Приклад 4. Знайти член розкладу

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21},$$

який містить a і b в однакових степенях.

Розв'язання. Запишемо загальний член розкладу

$$T_{k+1}=C_{21}^k\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^k\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{21-k}=$$

$$=C_{21}^k\,\frac{b^{\frac{k}{2}}}{a^{\frac{k}{b}}}\cdot\frac{a^{\frac{21-k}{3}}}{b^{\frac{21-k}{b}}}=C_{21}^k\,a^{\frac{21-k}{3}-\frac{k}{6}}\,b^{\frac{k}{2}-\frac{21-k}{6}}=$$

$$=C_{21}^k\;a^{\frac{42-3k}{6}}\;b^{\frac{4k-21}{6}}.$$

За умовою задачі $\frac{42-3k}{6} = \frac{4k-21}{6}$, або $7k = 63$, $k = 9$. Тоді

$$T_{10} = C_{21}^{9} \; a^{\frac{5}{2}} \; b^{\frac{5}{2}} = C_{21}^{9}\, a^2\, b^2 \sqrt{ab}.$$

Приклад 5. Знайти найменше значення n в розкладі $(x + a)^n$, при якому відношення двох сусідніх коефіцієнтів розкладу дорівнює $5 : 8$.

Розв'язання. За умовою задачі

$$C_n^k : C_n^{k+1} = 5 : 8, \text{ або } \frac{k+1}{n-k} = \frac{5}{8}.$$

Звідки $n = \frac{13k+8}{5}$, або $n = 2k + 1 + \frac{3\,(k+1)}{5}$.

Оскільки k — натуральне число, то воно буде найменшим при найменшому натуральному k, при якому $n + 1$ ділиться на 5, тобто при $k = 4$. Тоді

$$n = 8 + 1 + 3 = 12.$$

Приклад 6. Знайти п'ятий член розкладу

$$(\sqrt[3]{2} - \sqrt{2^{-1}})^n,$$

якщо останній член розкладу дорівнює $\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}\right)^{\log_3 8}$.

Розв'язання. За умовою останній член розкладу

$$(-\sqrt{2^{-1}})^n = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}\right)^{\log_3 8}.$$

Оскільки показникова функція додатна, то задача має розв'язок при парному n. Тоді

$$2^{-\frac{n}{2}} = \left(3^{-\frac{5}{3}}\right)^{\log_3 8}, \text{ або } 2^{-\frac{n}{2}} = (3^{\log_3 8})^{-\frac{5}{3}}, \quad 2^{-\frac{n}{2}} = 2^5,$$

звідки $-\frac{n}{2} = -5$ та $n = 10$.

$$T_5 = C_{10}^4 \,(\sqrt{2^{-1}})^4\, (\sqrt[3]{2})^6 = 210.$$

Приклад 7. Визначити показник n в розкладі $\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right)^n$, якщо 10-й член цього розкладу за спадними степенями величини x має найбільший коефіцієнт.

Розв'язання. За формулою загального члена знаходимо $T_{k+1} = C_n^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}x\right)^{n-k} = \left(C_n^k \cdot \frac{2^k}{5^n}\right) \cdot x^{n-k}$.

Коефіцієнт $(k+1)$-го члена дорівнює $C_n^k \cdot \frac{2^k}{5^n}$.

За умовою коефіцієнт 10-го члена розкладу більший від коефіцієнта 9-го та 11-го членів, тобто

$$\begin{cases} C_n^9 \cdot \dfrac{2^9}{5^n} > C_n^8 \cdot \dfrac{2^8}{5^n}, \\ C_n^9 \cdot \dfrac{2^9}{5^n} > C_n^{10} \cdot \dfrac{2^{10}}{5^n}, \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} 2(n-8) > 9, \\ 10 > 2(n-9), \end{cases}$$

звідки випливає $12{,}5 < n < 14$, а отже, $n = 13$.

Приклад 8. Знайти x, якщо відомо, що третій член розкладу бінома $(x + x^{\lg x})^5$ дорівнює 1 000 000.

Розв'язання. Маємо

$$T_3 = C_5^2\, x^{5-2}\, (x^{\lg x})^2 = 10x^{3+2\lg x}.$$

За умовою

$$10x^{3+2\lg x} = 1\ 000\ 000.$$

Логарифмуючи дану рівність за основою 10 $(x > 0)$, дістаємо рівняння

$$2\lg^2 x + 3\lg x - 5 = 0,$$

звідки знаходимо, що $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-\frac{5}{2}}$.

Вправи

1. Знайти розклад бінома:

а) $(x + a)^7$;	*в*) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^6$;
б) $(x - a)^8$;	*г*) $(2\sqrt[3]{x} - 4\sqrt{x})^4$.

2. Знайти дев'ятий член розкладу $(a+\sqrt{b})^{12}$.

3. Знайти середній член розкладу $(x\sqrt{x}-1)^{14}$.

4. Знайти член розкладу $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a})^{20}$, що містить a^7.

5. Знайти член розкладу $(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[5]{x^8})^{12}$, що містить $x^{\frac{22}{3}}$.

6. Знайти член розкладу $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$, який не містить a.

7. Знайти член розкладу $\left(\sqrt[9]{\frac{1}{z^8}}+\sqrt[3]{z^2}\right)^7$, який не містить z.

8. Знайти член розкладу $(\sqrt[3]{c^{-2}}+\sqrt[5]{c^3})^{20}$, який не містить c.

9. Знайти показник степеня бінома, якщо шостий член розкладу $(\sqrt[30]{a^{-1}}+\sqrt[5]{a})^n$ не містить a.

10. Знайти показник степеня бінома, якщо біноміальні коефіцієнти четвертого і шостого членів розкладу відповідно дорівнюють 120 і 252.

11. У розкладі $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ коефіцієнт п'ятого члена відноситься до коефіцієнта третього члена, як 7 : 2. Знайти той член розкладу, який містить букву x в першому степені.

12. Знайти той член розкладу бінома $\left(z\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^n$, який після спрощень містить z^5, якщо сума біноміальних коефіцієнтів розкладу дорівнює 128.

13. Визначити x з умови, що п'ятий член розкладу бінома $(\sqrt{x}+x^{-1})^6$ дорівнює $\frac{5}{9}$.

Розділ IX

Різні задачі

1. Знайти трицифрове число, якщо його цифри відмінні від 0, а сума різних двоцифрових чисел, складених із них, дорівнює цьому трицифровому числу.

2. До числа a додали суму його цифр b, а до результату додали суму цифр числа b. Знайти число a, якщо остаточно дістали 60.

3. Від трицифрового числа відняли число, записане тими самими цифрами, але в оберненому порядку, а утворену різницю «перевернули» і додали до різниці. Знайти утворену суму.

4. Якщо першу цифру даного двоцифрового числа зменшити на 1 і утворене число перемножити з даним, то дістанемо трицифрове число, яке записане трьома однаковими цифрами. Знайти дане число.

5. Сума цифр двох даних двоцифрових чисел дорівнює першому з них, а сума цих двох двоцифрових чисел дорівнює квадрату суми цифр першого числа. Знайти дані числа.

6. Знайти значення виразу:

$$a^{31} - 74a^{30} + 74a^{29} - \ldots + 74a^{17} - 74a^{16} + 74a^{15} + 15,$$

якщо $a = 73$.

7. Спростити вираз

$$70\,(71^9 + 71^8 + 71^7 + \ldots + 71^2 + 71) + 1.$$

8. Довести, що сума $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{99} + 2^{100}$ ділиться на 3.

9. Довести, що $2^9 + 2^{99}$ ділиться на 100.

10. Скількома способами можна скласти відрізок довжиною 1 м з відрізків довжиною 7 см і 12 см?

11. Довести, що коли a, b, c — натуральні числа і $a^2 + b^2 = c^2$, то abc ділиться на 60.

12. Обчислити значення виразу $\dfrac{2a - b}{3a - b} + \dfrac{5b - a}{3a + b}$, якщо відомо, що $10a^2 - 3b^2 + 5ab = 0$ та $9a^2 - b^2 \neq 0$.

13. Обчислити значення виразу $\dfrac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$, якщо відомо, що

$$\frac{x}{x^2 + x + 1} = a.$$

14. При яких цілих x вираз $\dfrac{2x + 3}{5x + 1}$ є цілим числом?

15. Декілька шахматистів провели між собою матч-турнір, в якому кожний учасник зіграв з кожним іншим декілька партій. За скільки кругів закінчилося це змагання, якщо всього було зіграно 224 партії?

16. Знайти всі цілі числа x, y, z, які задовольняють рівняння $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$.

17. Довести, що коли a, b, c додатні та

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}, \text{ то}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}.$$

18. Довести, що рівність

$$\frac{y + z - x}{yz} + \frac{z + x - y}{zx} = \frac{x + y - z}{xy}$$

виконується тоді й тільки тоді, коли один з доданків в її лівій частині дорівнює 0.

19. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$x\,(x + 1)\,(x^2 + x + 2) = 2y^2.$$

20. Знайти найменше значення виразу $|36^m - 5^n|$, де m і n — натуральні числа.

21. Якою цифрою закінчується число

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n,$$

якщо число $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ закінчується цифрою 1?

22. Довести, що коли дійсні числа x, y, z задовольняють умови $x + y + z = 2$, $xy + xz + yz = 1$, то всі вони належать відрізку $\left[0;\ \frac{4}{3}\right]$.

23. Довести, що коли $5x + 2y$ ділиться на 17, то $9x + 7y$ ділиться на 17.

24. Яких цілих значень набуває дріб $\dfrac{x^2 + x + 1}{xy - 1}$, якщо x, y — цілі числа?

25. Довести, що при будь-яких цілих m і n

$$(5m + 3n + 1)^5 \cdot (3m + n + 4)^4$$

ділиться на 16.

26. При яких x та y вираз $\dfrac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$ набуває найбільшого й найменшого значень?

27. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 + 13z^2 = 12xy + 4xz + 6yz, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 288. \end{cases}$$

28. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 + 2ax + a^2 + 4a = 0, \\ 2x^2 - y^2 = 4a\,(a - x + y - 1). \end{cases}$$

29. При яких a і b рівняння

$$(x - a)^3 - (x - b)^3 = b^3 - a^3$$

має єдиний розв'язок?

30. При яких x, y, що задовольняють умову $x^4 + y^4 = 1$, сума $x^9 + y^9$ набуває найбільшого значення?

31. Знайти всі цілі x та y, що задовольняють рівняння $(2x + 5y + 1)\,(2^{|x|} + x^2 + x + y) = 105$.

32. При яких a і b рівняння

$$\sqrt[3]{(ax + b)^2} + \sqrt[3]{(ax - b)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2 - b^2} = \sqrt[3]{b}$$

має єдиний розв'язок?

33. Довести, що не існує цілих чисел x та y, для яких справджується рівність

$$\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 1} = 11.$$

34. Довести нерівність

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} < 3.$$

35. При яких значеннях a, b, c рівняння

$$\sqrt{x + a\sqrt{x} + b} + \sqrt{x} = c$$

має нескінченну кількість розв'язків?

36. Довести, що при $m, n \geq 1$

$$n\sqrt{m - 1} + m\sqrt{n - 1} \leq mn.$$

37. Чи правильне твердження $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{24}$?

38. Спростити дріб, позбавившись від ірраціональності в знаменнику: $\dfrac{295 - 413\sqrt[3]{2} + 177\sqrt[3]{4}}{5 + 3\sqrt[3]{4} - 7\sqrt[3]{2}}$.

39. Знайти цілу частину числа

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6}}}} +$$

$$+ \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \ldots + \sqrt[3]{6}}}}.$$

40. Знайти всі натуральні числа x, y, z, які задовольняють рівність $x^2 y = x + y^2$.

41. Знайти цілі розв'язки рівняння

$$\log_3 (2x + 1) + \log_5 (4x + 1) + \log_7 (6x + 1) = 3x.$$

42. Розв'язати рівняння $\log_2 (1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$.

43. Розв'язати нерівність $9^n + 10^n < 11^n$.

44. Записали два числа — перше й друге. До першого додали друге і дістали третє. До другого додали третє і дістали четверте і т.д. Чому дорівнює сума шести записаних чисел, якщо п'яте дорівнює 7?

45. Знайти корені рівняння $x^x + x^{1-x} = x + 1$ в області додатних чисел.

46. Довести правильність нерівності

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2,$$

де a, b, c — довжини сторін трикутника, S — його площа.

47. Знайти коефіцієнти a, b, c, якщо відомо, що всі корені многочлена $x^5 - 10x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 32$ — дійсні й додатні.

48. При яких цілих x вираз $\sqrt{x^2 - x + 1}$ є цілим числом?

49. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{4x - y^2} - \sqrt{y + 2} = \sqrt{4x^2 + y}.$$

50. Розв'язати рівняння $\sqrt{4x - 1} + \sqrt{4x^2 - 1} = 1$.

Відповіді та вказівки

Розділ I

§1.

1. 0; 5; –3. **2.** –7; $\frac{1}{2}$. **3.** 7; $-\frac{5}{3}$; $\frac{8}{5}$. **4.** 49; 1; **5.** 7. **6.** 25; 2. **7.** Немає дійсних коренів. **8.** 2; –1. **9.** 3; –2. **10.** 7; 1. **11.** –10; –1. **12.** –8; 4. **13.** 6; –2. **14.** –7; 5. **15.** 10; –6. **16.** 2; $\frac{5}{2}$. **17.** –1; $\frac{4}{5}$. **18.** $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{8}$. **19.** 2; $\frac{2}{3}$. **20.** $-\frac{8}{3}$; 1. **21.** $\frac{4}{3}$; –1. **22.** $\frac{8}{5}$; –1. **23.** $-\frac{7}{4}$; 1.

§3.

1. $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **2.** 0; $\frac{1}{3}$; $\frac{3 \pm \sqrt{153}}{18}$. **3.** 2; 3. **4.** 2; 4; $\frac{-7 \pm \sqrt{17}}{2}$. **5.** 12; –1. **6.** 3; –2. **7.** 3; –2; $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. **8.** 1; 2; $\frac{-11 \pm \sqrt{113}}{2}$. **9.** 1; $-\frac{5}{2}$; –2; $\frac{1}{2}$. **10.** –1. **11.** –2; –1. **12.** 3; –2; $-1 \pm \sqrt{7}$. **13.** 0; –1; –2; 1. **14.** 2; $-\frac{5}{2}$. **15.** –6; –4; $\frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$. **16.** –1; –4. **17.** $7 \pm \sqrt{34}$. **18.** 1. **19.** –9; 2. **20.** 27; $-\frac{1}{8}$. **21.** ± 8. **22.** 6; –3. **23.** 2; 3; $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$. **24.** –9; 4. **25.** $-\frac{8}{3}$; 1. **26.** 4; $-\frac{5}{2}$. **27.** ± 2. **28.** ± 1; $\pm\frac{1}{2}$. **29.** 1; 2. **30.** 2; $\frac{1}{2}$; $3 \pm 2\sqrt{2}$. **31.** a; $\frac{1}{a}$. **32.** a; $-\frac{1}{a}$. **33.** –2; $-\frac{2}{3}$; 1; $-\frac{1}{3}$. **34.** 2; $\frac{1}{2}$. **35.** $2b - a$; $2a - b$. **36.** 1. **37.** 2; $-\frac{1}{511}$. **38.** Немає розв'язків. **39.** 3. **41.** $-\sqrt[3]{4}$; 1. **42.** $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **43.** $\pm\frac{1}{2}$. **44.** Немає дійсних коренів. **45.** Немає коренів. **50.** 3; 1; $2 \pm \sqrt{23}$.

51. 3; –2. **52.** –1; $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **53.** --1; $2 \pm \sqrt{3}$. **54.** –1; 3; $\frac{1}{3}$. **55.** $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 2; $-\frac{1}{2}$. **56.** 2; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$. **57.** 6; 1. **58.** $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; $-2 \pm \sqrt{3}$. **59.** $\frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$; $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **60.** –1; –3. **61.** 1; $-\frac{2}{3}$; 2; $-\frac{1}{3}$. **62.** Немає дійсних коренів. **63.** $\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$; $-1 \pm \sqrt{2}$. **64.** 2; 1; $\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$. **65.** $\frac{-5 \pm \sqrt{57}}{4}$; 2; –1. **66.** 2; $-\frac{3}{4}$. **67.** 4; –3. **68.** 4. **69.** 1; $\frac{4}{3}$. **70.** ± 3. **71.** 1; $-\frac{1}{2}$. **72.** $-\frac{11}{5}$; 1. **73.** $-\frac{5}{7}$; 1. **74.** 2. **75.** 0; 2. **76.** 2. **77.** $x_1 = 1 - a$; при $a \ge 1$ і $a \le -3$; $x_2 = \frac{-1 - a \pm \sqrt{a^2 + 2a - 3}}{2}$. **78.** $-2 - \sqrt{7}$. **79.** $\frac{\sqrt{5} - 2}{2}$. **80.** $\frac{5}{6}$. **81.** 6. **82.** 4. **83.** 2. **84.** $\sqrt{3}$. **85.** 61. **86.** 3. **87.** 6. **88.** $x \ge 2$. **89.** –1. **90.** –8. **91.** –8; 2. **92.** Немає розв'язків. **93.** Немає розв'язків. **94.** 8. **95.** Немає розв'язків. **96.** Немає розв'язків. **97.** –2; –4. **98.** 5; 3. **99.** 1. **100.** –1; –3. **101.** 0; –2.

§4.

1. 7. **2.** 18. **3.** 37. **4.** 1. **5.** –3. **6.** $a = 3$, $b = 9$. **7.** 9. **8.** $a = 15$, $b = 8$. **9.** $(x - 2)^2(x - 3)$. **10.** $(x - 1)^2(x^2 + 4)$. **11.** $(x - 1)^2 (x + 1) (x - 2)$. **12.** $(x + 1)^4 (x - 3)$. **13.** $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 6$. **14.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. **18.** $x_{1,2} = 1$. **19.** $x_{1,2} = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -1$. **20.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = -2$. **21.** $x_1 = 0$, $x_{2,3,4} = 1$, $x_5 = -2$. **22.** $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

§5.

1. 6. **2.** $a = -16$, $b = 2$; $a = 19$, $b = -5$. **3.** $a = 2$, $b = 6$.

§6.

1. 1. **2.** 2. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** 0. **5.** 9. **6.** 4; –3. **7.** 8; $8 \pm \frac{12\sqrt{21}}{7}$. **8.** 1; $\frac{3}{2}$; 2.

§7.

1. $a + b$; $\frac{a+b}{2}$. **2.** 1; –5; $-1 \pm \sqrt{6}$. **3.** 1; –3. **4.** $\pm a\sqrt{b}$; $\pm b\sqrt{a}$. **5.** 0. **6.** –1; 3; $\frac{1}{3}$. **7.** 1; $\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$. **8.** 1; 3. **9.** 1; –5. **10.** 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}(-11 \pm \sqrt{105})$. **11.** Якщо $a \neq 0$, то $3a$; $-2a$. Якщо $a = 0$, то розв'язків немає. **12.** 7. **13.** –1; 3. **14.** $\frac{5}{3}$. **15.** –5; 2. **16.** –7; 7. **17.** $\pm 2\sqrt{2}$. **18.** $\pm 2\sqrt{2}$. **19.** 8; 27. **20.** *Вказівка.* Записати рівняння у вигляді $\frac{(\sqrt{5-x})^3 + (\sqrt{x-3})^3}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x+3}} = 2$ і розкласти чисельник лівої частини рівняння на множники. **Відповідь:** 3; 5. **21.** 4. **22.** 8. **23.** 1024. **24.** ± 1; $\pm\sqrt{6}$. **25.** 64. **26.** 64. **27.** –1. **28.** 6; –2. **29.** 3; $3 \pm 2\sqrt{5}$. **30.** 1; –3. **31.** 0; –3; $\frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$. **32.** 2; $\frac{1}{2}$. **33.** 0; –2. **34.** Якщо $a = 0$, то $x = 0$. Якщо $a \neq 0$, то $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\sqrt[3]{a}$. **35.** 2. **36.** 0; 4. **37.** 2; –7. **38.** 0; –1. **39.** 1; $-\frac{1}{3}$. **40.** *Вказівка.* Записати рівняння у вигляді

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x + 2\sqrt{x^2 - 16} - 12, \text{ або}$$

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = (\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4})^2 - 12.$$

Відповідь: 5. **41.** *Вказівка.* Слід звернути увагу на те, що $(x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1}) = 1$. **Відповідь:** ± 1. **42.** 0. **43.** $\frac{4b-a}{3}$; $\frac{4a-b}{3}$, якщо $a = b$, то розв'язків немає. **44.** –3; –5. **45.** 1; 0; –2. **46.** –1; 2. **47.** $-\frac{1}{2}$. **48.** $\frac{2}{3}$;

$-\frac{5}{3}$. **49.** $\pm\frac{1}{2}$; $2 \pm \sqrt{3}$. **50.** $1 \pm \sqrt{19}$. **51.** 1. **52.** 3. **53.** 8. **54.** 32. **55.** 64. **56.** 5. **57.** 1; –1. **58.** *Вказівка.* Помножити обидві частини рівняння на $\sqrt{2-x} + \sqrt[3]{7+x}$. Дістанемо $2 - x + 7 + x = 3\left(\sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{7+x}\right)$ або $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{7+x} = 3$. **Відповідь:** 1; –6. **59.** $\frac{190}{63}$; $\frac{2185}{728}$. **60.** 2.

Розділ II

§1.

1. $x > 2$; $x < -3$. **2.** $\frac{1}{2} \le x \le 5$. **3.** $-4 < x < \frac{1}{3}$. **4.** $x \ge \frac{5}{2}$; $x \le -6$. **5.** $0 < x < 4$. **6.** $x > 3$. **7.** $x < \frac{5}{6}$; $8 < x < 10$; $x > 10$. **8.** $2 \le x \le 8$. **9.** $x \ge 8$; $x \le 3$. **10.** $x \ge \frac{3}{5}$; $x < -\frac{2}{3}$. **11.** $8 \le x < 9$. **12.** $0 < x < 1$; $x < -1$. **13.** $x > 1$; $x < -2$. **14.** $-7 < x < -3$. **15.** $x \ge \frac{7}{4}$; $x < -6$. **16.** $x > 3$; $x < 2$. **17.** $x \in R$. **18.** Немає розв'язків. **19.** $x > 2$; $x < -7$. **20.** $-6 < x < -3$. **21.** $-3 < x < 0$. **22.** $x \in R$. **23.** $x > 1$; $x < -\frac{1}{2}$. **24.** $-4 < x < 2$. **25.** $3 < x < 4$; $1 < x < 2$. **26.** $-4 < x < -2$; $-6 < x < -4$. **27.** $x > 3$; $-2 < x < 1$. **28.** $x > 3$; $-2 < x < 1$; $x < -3$. **29.** $2 < x < 3$; $x < -3$. **30.** $x > 2$; $-3 < x < -2$. **31.** $x < -5$; $3 < x < 10$; $x > 10$. **32.** $x > 7$; $2 < x < 7$; $-5 < x < -3$. **33.** $2 < x < 4$; $x > 8$. **34.** Немає розв'язків. **35.** $1 < x < 2$; $-2 < x < 1$. **36.** Немає розв'язків. **37.** Немає розв'язків. **38.** $x \in R$. **39.** $x > 3$; $-2 < x < 2$; $x < -3$. **40.** $x \ge 5$; $-2 \le x \le 2$; $x \le -5$. **41.** $3 < x < 3{,}5$. **42.** $\frac{1-\sqrt{73}}{6} < x < -1$; $1 < x < \frac{1+\sqrt{73}}{6}$. **43.** $x > 1$; $-2 < x < -1$; $x < -3$. **44.** $x > 4$; $2{,}5 < x < 3$. **45.** $x > 5$; $2 < x < 3$; $x < 1$. **46.** $-1 < x < 1$. **47.** $x \ne 1$. **48.** $x > 1{,}5$;

$1 < x < \sqrt{2}$; $x < -\sqrt{2}$. **49.** $0{,}5 < x < 3$; $-2 < x < -1$; $-4 < x < -3$. **50.** $1 < x < 2$; $-2 < x < -1$. **51.** $x > 4$; $2 < x < 3$; $-1 < x < 1$. **52.** $x < -2$; $x > 2$. **53.** $-1 < x < 2$; $2 < x < 3$. **54.** $x < 1$; $\frac{4}{3} < x < 2$. **55.** $-4{,}5 < x < -2$; $x > 3$. **56.** $x < \frac{1}{3}$; $3 < x < 5$; $x > 5$. **57.** $0 \le x \le 8$. **58.** $x < 1$; $x > 2$. **59.** $1 < x < 6$. **60.** $-1 < x < 5$. **61.** $1 < x < 3$; $3 < x < 5$. **62.** $-1 < x < 0$; $x < -2$. **63.** $-1 < x < 4$. **64.** $-1 < x < 1$. **65.** $-1 < x < 1$. **66.** $m > 1$. **67.** $-8 < x \le 1$. **68.** $-2 < x < -1$; $-1 < x < 2$. **69.** $x < -3$; $-2 < x < -1$. **70.** $-2 < x < 0$; $0 < x < 1$. **71.** $x < -7$; $-1 < x < 0$; $0 < x < 1$; $x > 3$. **72.** $x < -1$; $-1 < x \le 2$. **73.** $-\sqrt{14} < x < -3$; $-1 < x < 1$; $3 < x < \sqrt{14}$. **74.** $x < -5$; $-3 < x < -1$; $1 < x < 2$. **75.** $x < -2$; $1 < x < 2$; $x > 3$.

§2.

1. $-2{,}5 < x < 3$. **2.** $x > 2$; $x < -7$. **3.** Немає розв'язків. **4.** $x \in R$. **5.** $0 < x < \frac{4}{5}$. **6.** $x > \frac{1}{6}$; $x \ne 1$. **7.** $x \ge -\frac{1}{2}$; $x \ne 1$. **8.** $x > \frac{3}{4}$; $x \ne 1$. **9.** $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. **10.** $x \le \frac{-1-\sqrt{11}}{2}$; $x \ge \frac{-1+\sqrt{11}}{2}$. **11.** $x > 0$. **12.** $x \le -0{,}5$; $x \ge 5$. **13.** $-1 < x < 2$; $3 < x < 6$. **14.** $x < \frac{4}{3}$. **15.** $1{,}5 \le x < 2$. **16.** $0 \le x \le 1{,}6$; $x \ge 2{,}5$. **17.** $1 < x < 3$. **18.** $x < -1$; $0 < x < 1$; $x > 1$. **19.** $x < 3$. **20.** $x < 0$; $x > 6$. **21.** $-5 < x < -2$; $2 < x < 3$; $3 < x < 5$. **22.** $-2 < x \le 0$. **23.** $-1 < x < 2$.

§3.

1. $x \ge 0$. **2.** $x \ge 27$. **3.** $1 \le x < \frac{46}{19}$. **4.** $\frac{3}{4} < x < 2$. **5.** $x \ge 1$. **6.** $-2 \le x < 2$. **7.** $-4{,}5 \le x < 0$. **8.** $x \le -2$; $5 \le x < 5\frac{9}{13}$. **9.** $x \le -2$; $x > 14$. **10.** $x > -1$. **11.** Розв'язків немає. **12.** $x \geq 5$. **13.** $0 \leq x \leq 3$. **14.** $x < \frac{3}{4}$; $4 < x < 7$. **15.** $x \geq 4$. **16.** $-3 < x < 1$. **17.** $\frac{20}{9} \leq x < 4$; $x > 5$. **18.** $-1 < x < \sqrt[3]{4}$. **19.** $x < 2\sqrt{5} - 4$. **20.** $x > \frac{2\sqrt{21}}{3}$. **21.** $x \leq 0$; $x > 4{,}5$. **22.** $x \leq -\frac{5}{6}$; $x \geq 3$. **23.** $x > \frac{\sqrt{34} - 1}{2}$. **24.** $x \geq -1$. **25.** $5 \leq x \leq 7$; $x \neq 4$. **26.** $1{,}75 \leq x < 4$. **27.** $0{,}8 \leq x < 1$. **28.** $x \leq 2$; $-1 \leq x < \frac{\sqrt{13} - 1}{6}$. **29.** $-2 \leq x < 0$; $0 < x \leq 2$. **30.** $x > 5$. **31.** $x < -2$; $0 < x < 1$; $x > 1$. **32.** $-2 < x \leq -1$; $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{3}$.

§4.

2. **Розв'язання.** $$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} > \sqrt{\sqrt{ab}\,\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

3. В доводжуваній нерівності $\frac{x+y+z+t}{4} \geq \sqrt[4]{xyzt}$, де $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $t > 0$, покладемо $x = a$, $y = b$, $z = c$ і $t = \frac{a+b+c}{3}$. Дістанемо

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc\,\frac{a+b+c}{3}}, \text{ або}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc\,\frac{a+b+c}{3}}.$$

Піднесемо обидві частини останньої нерівності до четвертого степеня:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq abc\,\frac{a+b+c}{3}.$$

Помноживши обидві частини нерівності на $\frac{3}{a+b+c}$, дістанемо $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$. Нарешті, добувши кубічний корінь з обох частин нерівності, маємо:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

32. Замінити дану нерівність на рівносильну їй:

$$(x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 + 6y + 9) \geq 0.$$

34. Замінити дану нерівність на рівносильну їй:

$$\left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}\right) + \left(y^2 + ay + \frac{a^2}{4}\right) + \left(z^2 + az + \frac{z^2}{4}\right) + \\ + \left(u^2 + au + \frac{a^2}{4}\right) \geq 0.$$

35. Замінити дану нерівність на рівносильну їй:

$$(x^2 - 2x + 1) + (4y^2 - 12y + 9) + (3z^2 - 6z + 3) + 1 > 0.$$

41. Оскільки $a < 1$, $b < 1$, $c < 1$ за умовою, то

$$ab > abc, \ ac > abc, \ bc > abc.$$

Додавши почленно утворені нерівності, маємо

$$ab + ac + bc > 3abc.$$

43. $1 - x = y + z \geq 2\sqrt{yz}$; $1 - y = x + z \geq 2\sqrt{xz}$; $1 - z = x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Помноживши почленно ці нерівності, маємо $(1-x)(1-y)(1-z) \geq 8xyz$. **45.** $\begin{cases}(4b + a)^2 = 1, \\ 4(b - a)^2 \geq 0,\end{cases}$ звідки $\begin{cases}16b^2 + 8ab + a^2 = 1, \\ 4b^2 - 8ab + 4a^2 \geq 0.\end{cases}$ Додавши почленно утворені нерівності, маємо: $20b^2 + 5a^2 \geq 1$ або $a^2 + 4b^2 \geq \frac{1}{5}$.

46. 1-й спосіб. $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < \sqrt{4a^2+4a+1} + \sqrt{4b^2+4b+1} + \sqrt{4c^2+4c+1} = 2a + 1 + 2b + 1 + 2c + 1 = 2(a + b + c) + 3 = 5.$

2-й спосіб. $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} =$

$$= \sqrt{(4a+1)\cdot 1} + \sqrt{(4b+1)\cdot 1} + \sqrt{(4c+1)\cdot 1} <$$

$$< \frac{(4a+1)+1}{2} + \frac{(4b+1)+1}{2} + \frac{(4c+1)+1}{2} =$$

$$= 2(a+b+c)+3 = 2\cdot 1 + 3 = 5.$$

48. Позначимо $a+b-c=x$, $b+c-a=y$, $c+a-b=z$. Додавши почленно ці рівності, дістанемо $a+b+c=x+$ $+y+z$. Тоді дана нерівність запишеться у вигляді

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq \frac{9}{x+y+z}, \text{ або}$$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z) \geq 9; \quad \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3}\cdot\frac{x+y+z}{3} \geq 1.$$

Оскільки

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3} \geq \sqrt[3]{\dfrac{1}{xyz}}, \\ \dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}, \end{cases}$$

то, перемноживши почленно ці нерівності, дістанемо шукану нерівність. **49.** За властивістю сторін трикутника $a > |b-c|$, $b > |a-c|$, $c > |a-b|$. Піднесемо кожну частину даних нерівностей до квадрата. Потім додамо почленно утворені нерівності і після спрощення дістанемо $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+ac+bc)$.

50. Очевидні нерівності

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0, \\ (a-c)^2 \geq 0, \\ (b-c)^2 \geq 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} (a-b)^2+c^2 \geq c^2, \\ (a-c)^2+b^2 \geq b^2, \\ (b-c)^2+a^2 \geq a^2, \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} c^2 \geq c^2-(a-b)^2, \\ b^2 \geq b^2-(a-c)^2, \\ a^2 \geq a^2-(b-c)^2. \end{cases}$$

Розкладемо праві частини нерівностей на множники. Маємо:

$$\begin{cases} c^2 \geq (c - a + b)(c + a - b), \\ b^2 \geq (b - a + c)(b + a - c), \\ a^2 \geq (a - b + c)(a + b - c). \end{cases}$$

Перемножимо почленно утворені нерівності і здобудемо корені з обох частин. Після спрощення дістанемо

$$abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(a + c - b).$$

51. Позначимо гіпотенузу c, катети a і b. Запишемо очевидну нерівність $(a - b)^2 \geq 0$, звідки $a^2 + b^2 \geq 2ab$, або $2(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab$. Врахувавши, що $a^2 + b^2 = c^2$, дістанемо $2c^2 \geq (a + b)^2$, звідси $a + b \leq c\sqrt{2}$.

Розділ III

§1.

1. (2; –1). **2.** (1; –1). **3.** (3; 1). **4.** (1; 1). **5.** (1; 2). **6.** (1; 2). **7.** (2; 2). **8.** (2; 1). **9.** (1; 1). **10.** (–2; –2). **11.** (1; 1). **12.** (–2; 2). **13.** (1; 1). **14.** (1; –1). **15.** (2; 3). **16.** (1; 1). **17.** (1; 1; 1). **18.** (1; 1; –1). **19.** (2; 1; 1). **20.** (1; 1; 1). **21.** (–1; –2; –5). **22.** (5; –3). **23.** Немає розв'язків. **24.** $(x;\ y) \in R$.

§2.

1. (1; 1), (–1; –1), $\left(\frac{\sqrt{7}}{14};\ \frac{\sqrt{7}}{35}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{7}}{14};\ -\frac{\sqrt{7}}{35}\right)$. **2.** (1; 1), (–1; –1), $\left(\frac{1}{\sqrt{13}};\ \frac{5}{\sqrt{13}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{13}};\ -\frac{5}{\sqrt{13}}\right)$. **3.** (1; 1), (–1; –1), $\left(\frac{2\sqrt{15}}{3};\ \frac{-7\sqrt{15}}{15}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{15}}{3};\ \frac{7\sqrt{15}}{15}\right)$. **4.** (1; 1), (–1; –1), $\left(-\frac{7}{2}\sqrt{\frac{6}{61}};\ \sqrt{\frac{6}{91}}\right)$, $\left(\frac{7}{2}\sqrt{\frac{6}{61}};\ -\sqrt{\frac{6}{91}}\right)$. **5.** (3; 4), (4; 3). **6.** (–4; 3), (3; –4). **7.** (2; 1), $\left(3;\ \frac{2}{3}\right)$. **8.** (3; 1), (–1; –3). **9.** (2; 1), $\left(-\frac{2}{3};\ -3\right)$. **10.** (2; 1), (1; 2). **11.** (0,6; 0,3), (0,4; 0,5). **12.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. **13.** (1; 2), (2; 1). **14.** (4; 1), $\left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **15.** (2; 1), (–1; –2). **16.** (4; 1), (1; 4). **17.** (1; 2; 3), (–1; –2; –3). **18.** (–4; 5; 3). **19.** (3; –2; 6). **20.** (1; 3; 5), (–1; –3; –5). **21.** (1; 2; 3). **22.** $\left(\frac{120}{61}; \frac{120}{11}; \frac{120}{19}\right)$. **23.** $\left(\frac{13}{12}; \frac{10}{3}; \frac{45}{12}\right)$, $\left(-\frac{13}{2}; -\frac{10}{3}; -\frac{45}{12}\right)$. **24.** (1; 1; 1). **25.** (2; 2; 2). **26.** $(5 + 2\sqrt{5};\ 5 - 2\sqrt{5})$; $(5 - 2\sqrt{5};\ 5 + 2\sqrt{5})$. **27.** (1; 3), (3; 1), (–1; –3), (–3; –1). **28.** (4; –3), (–3; 4), $\left(\frac{3 + \sqrt{181}}{4}; \frac{3 - \sqrt{181}}{4}\right)$, $\left(\frac{3 - \sqrt{181}}{4}; \frac{3 + \sqrt{181}}{4}\right)$.

§3.

1. (–1; 2), (2; –1). **2.** (2; 3), (3; 2). **3.** (4; 3), (4; –3). **4.** (7; 3), (–7; –3). **5.** (1; 2), (2; 1). **6.** $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}\right)$. **7.** (2; 4), (4; 2). **8.** (5; 1), (–5; –1). **9.** (2; –1; 1). **10.** (9; 1), (1; 9). **11.** (41; 40). **12.** (3; 1). **13.** (5; 4). **14.** (1; 27), (27; 1). **15.** (1; 81), (81; 1). **16.** (1; 8), (8; 1). **17.** (16; 1). **18.** (124; 76). **19.** (2; 1), (–2; –1). **20.** (3; 2), (–3; –2), $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$. **21.** (4; 1), (1; 4). **22.** (2; 1), (–1; –2). **23.** (2; 2), (–3; –3), $\left(\frac{1 + \sqrt{21}}{2}; \frac{1 - \sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(\frac{1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{1 + \sqrt{21}}{2}\right)$. **24.** (1; 1; 1), (–2; –2; –2). **25.** (5; 3), (–5; –3). **26.** (1; 2), $\left(-\frac{239}{146}; \frac{117}{146}\right)$. **27.** (3; 5), (5; 3). **28.** (3; 0; 5). **29.** (3; 2), (1; 4), (–3; –4). **30.** (2; –3). **31.** (1; 2; 3), (1; 4; 1), (5; 2; –1). **32.** (2; 3), (–2; –3). **33.** (4; 4), (–5; –5), $\left(\frac{1 + \sqrt{77}}{2}; \frac{1 - \sqrt{77}}{2}\right)$, $\left(\frac{1 - \sqrt{77}}{2}; \frac{1 + \sqrt{77}}{2}\right)$. **34.** (11; 1).

Розділ IV

§1.

1. $x = \frac{a}{2}$. 2. Коли $a \neq 0$, $x = -\frac{3}{a}$; при $a = 0$ розв'язків немає. 3. Коли $a \neq 0$, $x = \frac{b}{a}$; коли $a = 0$, $b \neq 0$, немає розв'язків; при $a = 0$, $b = 0$, x — будь-яке дійсне число. 4. Коли $a \neq -b$, $x = \frac{c}{a+b}$; коли $a = -b$, $c \neq 0$, немає розв'язків; коли $a = -b$, $c = 0$, x — будь-яке число. 5. Коли $a \neq 0$, $x = \frac{b+1}{a}$; коли $a = 0$, x — будь-яке число. 6. Коли $a \neq 2$, $x = a + 2$; коли $a = 2$, x — будь-яке число. 7. Коли $a \neq 1$, $x = \frac{b-a+1}{a-1}$; коли $a = 1$, $b = 0$, x — будь-яке дійсне число; коли $a = 1$, $b \neq 0$, немає розв'язків. 8. $x = -a$. 9. Коли $a \neq 0$, $a \neq -1$, $y = \frac{ab}{a+1}$; коли $a = -1$, $b \neq 0$, немає розв'язків; коли $a = -1$, $b = 0$, будь-яке дійсне число y. 10. Коли $a \neq -b$, $a \neq 0$, $x = \frac{abc}{a+b}$; коли $a = -b$, $c \neq 0$, немає розв'язків; коли $a = -b$, $c = 0$, x — будь-яке дійсне число. 11. Коли $a \neq -b$, $a \neq 0$, $a^2 + 2b^2 + ab \neq 0$, $x = \frac{a^2+b^2}{a+b}$; коли $a = -b$, немає розв'язків. 12. $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, $x = \frac{a^2+1}{2}$; коли $a = 0$, x — будь-яке дійсне число. 13. Коли $b \neq 0$, $2a + b \neq 0$, $x = a$; коли $b = 0$, x — будь-яке дійсне число. 14. Коли $a = \frac{1}{3}$, x — будь-яке дійсне число, крім $x = \pm\frac{1}{3}$; коли $a \neq \frac{1}{3}$, немає розв'язків. 15. *а*) $t > \frac{3}{2}$; *б*) $t > 6$, $t < 4$. 16. *а*) $k > 5$, $k < 3$;

б) $k > 0$. **17.** 53. **18.** *а*) $k \neq 5$; *б*) $k = 5$. **19.** *а*) $a = 7 - \frac{1}{3m}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$; *б*) $a = 7 - \frac{1}{5m}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. **20.** $2 < a < 3$.

§2.

1. $28 < m < 30$. 2. *а*) $10 < a < 12$; *б*) $-\frac{22}{7} < a < -\frac{14}{11}$; *в*) $3 < a < 4{,}5$. 3. $-\frac{24}{5} < m < \frac{5}{4}$. 4. *а*) При $m = -1$ безліч розв'язків, при $m = \frac{1}{3}$ немає розв'язків; при $m \neq -1$ і $m \neq \frac{1}{3}$ $x = \frac{2(m-1)}{3m-1}$, $y = \frac{m+1}{1-3m}$; *б*) при $m = 7$ безліч розв'язків, при $m = -5$ немає розв'язків, при $m \neq 7$, $m \neq -5$ $x = \frac{24}{m+5}$, $y = \frac{12}{m+5}$; *в*) при $a = 5$ безліч розв'язків; при $a = -1$ немає розв'язків; при $a \neq 5$, $a \neq -1$ $x = \frac{15}{a+1}$; $y = \frac{15}{2(a+1)}$; *г*) при $n = -6$ безліч розв'язків; при $n = 14$ немає розв'язків; при $n \neq -6$ і $n \neq 14$ $x = \frac{80}{14-n}$, $y = \frac{16}{n-14}$. 5. *а*) $n = 6$, $m = 10$; *б*) $n = -19$, $m = -6$; *в*) $n = \frac{8}{3}$, $m = \frac{2}{3}$. 6. *а*) $\frac{3}{2}$; *б*) $\frac{10}{3}$; *в*) $-\frac{1}{6}$. 7. *а*) $m = -1$; *б*) $m = -7$. 8. *а*) при $a \neq 2$, $a \neq 0$ $x = \frac{a+2}{a}$, $y = -2$; *б*) при $a = 2$ безліч розв'язків; *в*) при $a = 0$ система не має розв'язків. 9. *а*) при $a \neq \pm 2$ $x = \frac{a+3}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$; *б*) при $a = 2$ безліч розв'язків; *в*) при $a = -2$ немає розв'язків.

§3.

1. $-3a$; a. 2. $2a + b$; $a - b$. 3. $2a - b$, $2a + b$. 4. Коли $|a| = |b| = 0$, безліч розв'язків; коли $|a| = |b| \neq 0$, то $x = 0$;

коли $|a| \neq |b|$, $x_1 = \dfrac{a+b}{a-b}$, $x_2 = \dfrac{b-a}{a+b}$. 5. Коли $a \neq b$, $a \neq 0$, $x_1 = a$, $x_2 = \dfrac{ab}{a-b}$. 6. Коли $m \neq 0$, $x_1 = \dfrac{3m}{2}$, $x_2 = -\dfrac{2}{3}m$. 7. Коли $b \neq 0$, $x_1 = \dfrac{b}{2}$, $x_2 = -\dfrac{b}{6}$. 8. Коли $a \neq \pm 1$, $b \neq \pm 1$, $x_1 = a+1$, $x_2 = b+1$; коли $a = 1$, $b = \pm 1$, $x = b+1$; коли $a \neq 1$, $b = \pm 1$, $x = a+1$; коли $a = -1$, немає розв'язків. 9. *Вказівка.* Записати рівняння у вигляді

$$\frac{1}{x(a-bx)} - \frac{1}{a-b} = \frac{x-1}{(a-bx)(a-b)}.$$

Коли $x \neq 0$, $a \neq b$, $a - bx \neq 0$, воно рівносильне

$$x^2(b-1) - x(a-1) + a - b = 0.$$

Позначимо $a - 1 = m$, $b - 1 = n$. Віднімемо почленно члени другого рівняння з першого. Маємо: $a - b = m - n$. Рівняння набере вигляду $nx^2 - mx + m - n = 0$. Розв'язуючи його і повертаючись до підстановки, дістанемо $x = 1$, коли $b = 1$, $a \neq b$, $x_1 = \dfrac{a-b}{b-1}$, $x_2 = 1$, коли $a \neq b$, $b = 1$, $a \neq b^2$. 10. *Вказівка.* Записати рівняння у вигляді $ax^2 + (a^2+1)x - (a^2+a+1) = 0$ і позначити $a^2 + 1 = b$. Розв'язуючи утворене рівняння $ax^2 + bx - (a+b) = 0$ і повертаючись до підстановки, дістанемо: $x = 1$, коли $a = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{a^2+a+1}{a}$, коли $a \neq 0$.

§4.

1. $b = -50$. 2. $a = 4$. 3. $m > \dfrac{1}{4}$. 4. $k = 13$. 5. $k = 3$. 6. $a_1 = -2$, $a_2 = 1$. 7. $a_1 = -\dfrac{3}{2}$; $a_2 = 6$. 8. $a_1 = \dfrac{3}{2}$; $a_2 = 3$. 9. $a_1 = \dfrac{1}{2}$; $a_2 = 1$. 10. $q = -16$. 11. $a^2 - b^2$. 12. $k = 4$.

13. $m = 31$. **14.** $a_1 = 0$, $a_2 = 4$, $a_3 = \frac{1}{4}$. **15.** $m = 3$. **17.** $y_{\max} = y(3) = 13$. **18.** $y_{\min} = y(1) = 3$. **19.** $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = -\frac{2}{3}$. **20.** $a = -2$.

§5.

1. $a = 41$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$. **2.** $a = 23$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$. **3.** $a = -30$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$, $x_4 = -8$. **4.** $y^3 - y^2 - 2y - 1 = 0$. **5.** $y^3 - 2y^2 + y + 1 = 0$. **6.** 10. **7.** 8. **8.** −24. **9.** $a_1 = -52$; $b_1 = -40$; $a_2 = 41$; $b_2 = -\frac{351}{16}$.

§6.

1. $2 < a < 5$. **2.** $-2 < a \le \frac{1}{4}$. **3.** $-\frac{3}{2} < a < 15 - 4\sqrt{17}$ і $a > 15 + 4\sqrt{17}$.

§7.

1. При $a > 2$ $x = a^2 - 4a$; при $a \le 2$ немає дійсних коренів. **2.** При $a = 0$ $x = 0$; при $a \ge 1$ $x = \frac{(a-1)^2}{4}$; при $0 < a < 1$, $a < 0$ розв'язків немає. **3.** Коли $a \le -4$, $x = \frac{1}{16}(a^2 + 24a + 16)$; при $a > -4$ немає розв'язків. **4.** При $0 \le a < \frac{1}{2}$, $a \ge 1$ $x = \frac{a^2}{2a-1}$; при $\frac{1}{2} \le a < 1$, $a < 0$ розв'язків немає. **5.** При $a = 2$ розв'язків немає; коли $a \le \frac{1}{3}$, $a > 2$, $x = \frac{2a+1}{a-2}$. **6.** При $0 < a \le 1$ $x_1 = -\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{a} - a\right)^2$, $x_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} - a\right)^2$; при $a \le 0$, $a > 1$ немає розв'язків.

§9.

1. При $m > 1$ $x < \frac{5m}{m-1}$; $m \neq 1$ для будь-яких дійсних x; при $m < 1$ $x > \frac{5m}{m-1}$. 2. При $m > 1$ $x > \frac{m-2}{m-1}$; $m = 1$ для будь-яких дійсних x; $m < 1$, $x < \frac{m-2}{m-1}$. 3. При $m < -\frac{1}{2}$, $m > 0$ $x > \frac{2}{3}\left(\frac{1-m}{1+2m}\right)$; при $m = -\frac{1}{2}$ немає розв'язків; при $-\frac{1}{2} < m < 0$ $x < \frac{2}{3}\left(\frac{1-m}{1+2m}\right)$. 4. При $m > 2{,}5$, $m < 1$ $x \geq \frac{8\,(m+2)}{5-2m}$; при $m = 2{,}5$ будь-яке дійсне число; при $1 \leq x < 2{,}5$ $x \leq \frac{8\,(m+2)}{5-2m}$.

§10.

1. $-3 < k < 5$. 2. $0 \leq a < \frac{1}{2}$. 3. $k = 3$. 4. $a < -6$. 5. $a > 6$. 6. $a > \frac{5}{3}$. 7. При $a \leq 0$ і $a \geq 4$

$$x < \frac{-a-\sqrt{a^2-4a}}{2}, \quad x > \frac{\sqrt{a^2-4a}-a}{2};$$

при $0 < a < 4$ нерівність виконуется для будь–яких дійсних x.

§11.

1. $a < -\frac{1}{2}$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $|x_2| > |x_1|$; при $a = -\frac{1}{2}$ $x_1 = 0$, $x_2 = -3$; при $-\frac{1}{2} < a < 0$ $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; при $a = 0$ $x_1 = x_2 = -1$; при $0 < a < 4$ немає дійсних коренів; при $a = 4$ $x_1 = x_2 = 3$; коли $a > 4$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. 2. При

$a < -2$ $x_1 > 0$, $x_2 > 0$; при $a = -2$ $x_1 = x_2 = 2$; при $-2 < a < \frac{1}{2}$ немає дійсних коренів; при $a = \frac{1}{2}$ $x_1 = x_2 = 1$; при $\frac{1}{2} < a < \frac{6}{7}$ $x_1 > 0$, $x_2 > 0$; при $a = \frac{6}{7}$ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$; при $\frac{6}{7} < a < \frac{4}{3}$ $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $|x_1| > |x_2|$; коли $a = \frac{4}{3}$, $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$; коли $\frac{4}{3} < a < 3$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; при $a = 3$ $x = \frac{3}{2}$; при $a > 3$ $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. **3.** При $a < 0$ $x_1 > 0$, $x_2 > 0$; при $a = 0$ $x = \frac{3}{4}$; при $0 < a < \frac{2}{3}$ $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $|x_1| < |x_2|$; при $a = \frac{2}{3}$ $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; при $\frac{2}{3} < a < 1$ $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $|x_1| > |x_2|$; при $a = 1$ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$; при $1 < a < \frac{4}{3}$ $x_1 > 0$, $x_2 > 0$; при $a = \frac{4}{3}$ $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. **4.** При $a = 1$ $x_1 = x_2 = -1$; при $1 < a < \frac{3}{2}$ $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; при $a = \frac{3}{2}$ $x_1 = 0$, $x_2 = -6$; при $\frac{3}{2} < a < 2$ $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $|x_1| < |x_2|$; при $a = 2$ $x = \frac{1}{4}$; при $2 < a < 6$ $x_1 > 0$, $x_2 > 0$; при $a = 6$ $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$.

§12.

1. При $a \le 0$ $x \ge -1$; при $a > 0$ $-1 \le x < \frac{1}{a^2} - 1$. **2.** При $a \le -1$ $x \le 2$; при $a > -1$ $2 - \frac{1}{(a+1)^2} < x \le 2$. **3.** При $a > 1$ $x < \frac{2a-1}{2(a-1)}$; при $a \le 1$ будь–яке дійсне число. 4. При $a \geq 0$ $0 \leq x < a$, $x > 16a$; при $a < 0$ розв'язків немає.

Розділ V

§1.

1. $-2a$ при $a \leq -3$; 6 при $-3 < a \leq 3$; $2a$ при $a > 3$. 2. 2 при $a > 0$; -2 при $a < 0$. 3. $-\frac{\sqrt{a}}{a}$ при $a < b$; $\frac{\sqrt{a}}{a}$ при $a > b$. 4. $\frac{b}{a}$ при $a < b$; $\frac{a}{b}$ при $a > b$. 5. 2. 6. $\frac{1}{n}$ при $0 < n \leq 1$.

§2.

1. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. 2. $2\sqrt{2} + 1$. 3. $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}(\sqrt{3} + 1)$. 4. $\sqrt{5} - 1$. 5. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 6. $-\sqrt{3}$. 7. $\sqrt{5} - 2$. 8. 1. 9. 0. 10. $\sqrt{6} + \sqrt{2}$. 11. -2. 12. 3. 13. 2. 14. 9.

§3.

1. $x - 1$. 2. 0. 3. $\frac{1}{ab}$. 4. $(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2$. 5. $\sqrt{a - 1}$. 6. $\sqrt{x}$. 7. $\frac{1}{a}$. 8. 1. 9. -1. 10. 1. 11. $\frac{a^2}{4(a^2 - x)}$. 12. $\sqrt{a^2 - 1}$. 13. 1 при $0 < b \leq a$, $a \neq 0$. 14. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 15. 4. 16. 0. 17. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} - 2}{4}$. 18. $\frac{\sqrt{30} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{12}$. 19. $a(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. 20. $-a(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. 21. $\frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a + b}$. 22. $\frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}{5}$.

Розділ VI

§1.

1. $\frac{5}{3}$. **2.** $-\frac{1}{2}$. **3.** 11. **4.** −4. **5.** $\frac{7}{3}$. **6.** 7; 4. **7.** $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. **8.** 0,5; 1. **9.** 2. **10.** $-\frac{1}{2}$; 1. **11.** 3. **12.** −1; 17. **13.** 3. **14.** 7. **15.** 2. **16.** 2. **17.** 4. **18.** 1. **19.** 2. **20.** 13. **21.** 5. **22.** 4. **23.** $\log_2 5$. **24.** 1; $\log_3 2$. **25.** 3. **26.** 1. **27.** 0; $\log_7 5$. **28.** 1. **29.** $\log_{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **30.** 2. **31.** 2. **32.** 2; −2. **33.** 2. **34.** $-\frac{1}{5}$; 3. **35.** 1; 2. **36.** $\pm\sqrt{3}$. **37.** 0. **38.** $\pm\frac{1}{2}$. **39.** 20. **40.** 3; $3\log_6 2$. **41.** 0. **42.** 3. **43.** 1. **44.** 1; 3. **45.** 2,5. **46.** 0; 1; 2. **47.** ± 2. **48.** 1. **49.** −2. **50.** 0; $\frac{1}{2}$.

§2.

1. −2; −3; −1; 1; 4. **2.** 1; 6; 8. **3.** 1. **4.** −1; 1. **5.** −1; 2. **6.** −1; 2; 3; 4. **7.** −1; 1; 2; 0.

§3.

1. −40. **2.** 21. **3.** 12. **4.** 256. **5.** 1. **6.** 2. **7.** 8. **8.** 14; 6. **9.** 4; 1. **10.** 13. **11.** 2. **12.** 5. **13.** 500; 20. **14.** 10; $10^{-\frac{17}{16}}$. **15.** 10; $\sqrt{10}$. **16.** 10; $10^{\frac{1}{9}}$. **17.** 2. **18.** $\frac{1}{8}$; 2. **19.** 27; 3. **20.** 4; $\frac{1}{2}$. **21.** 100; $\frac{1}{10}$. **22.** 100; $\frac{1}{100}$. **23.** $\frac{1}{9}$; 3. **24.** 0,1; 1000. **25.** 1; 100. **26.** 16. **27.** 2; $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$. **28.** 4. **29.** $2^{-\sqrt{2}}$; $2^{\sqrt{2}}$. **30.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1. **31.** $\frac{1}{3}$; 3. **32.** $\frac{1}{7}$; 7. **33.** $\frac{1}{2}$. **34.** 0. **35.** 5; −1. **36.** 3; 81. **37.** $\frac{1}{2}$. **38.** 2. **39.** $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10}$; 10; 100. **40.** $\frac{1}{9}$; 3. **41.** $\frac{1}{128}$; 2. **42.** 9;

$\frac{1}{27}$. **43.** 2; 64. **44.** 0; 2. **45.** 3; $\frac{1}{9}$. **46.** 9. **47.** $\frac{1}{12}$. **48.** $3 \cdot 27^3$. **49.** $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **50.** 2. **51.** $\frac{16}{3}$. **52.** $\sqrt[10]{10}$. **53.** 8; $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. **54.** 5; $\frac{1}{625}$. **55.** 3; $\sqrt{3}$. **56.** 1; 4; $\frac{1}{4\sqrt[5]{8}}$. **57.** 3; $\frac{1}{3}$. **58.** 100. **59.** $\frac{1}{25}$. **60.** -1; -64. **61.** -1; -64. **62.** $-\frac{1}{2}$. **63.** 11; 1,1. **64.** 2. **65.** $\frac{1}{4}$; 2. **66.** 5. **67.** 1. **68.** 5.

§4.

1. $\frac{27}{8}$. **2.** 20. **3.** 144. **4.** 10. **5.** 680. **6.** 3. **7.** -11. **8.** 24. **9.** 19. **10.** $\frac{1}{b}$. **11.** $\frac{2a}{1-a}$. **12.** $-\frac{1}{2}$. **13.** $\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma}$. **14.** $\frac{3(1-a)}{1+b}$. **15.** $\frac{a+1}{2b}$. **16.** $\frac{4a}{1-a}$. **17.** $\frac{b}{1-a}$. **18.** $\frac{2-a}{a+b}$. **19.** 2. **20.** 0. **21.** $x = \log_2 5$. **22.** 0,3010.

§5.

1. (1; 2), (16; -28). **2.** (18; 2), (2; 18). **3.** (4,5; 0,5). **4.** (4; 2). **5.** (1; 1), $\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{6}}{3}\right)$. **6.** (5; 1), (5; -1). **7.** $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. **8.** (1; 1). **9.** (16; 3), $\left(\frac{1}{64}; -2\right)$. **10.** (5; 5). **11.** (1; 3). **12.** (5; 5). **13.** (2; 4). **14.** $(\sqrt{3}; 1)$, $(-\sqrt{3}; 1)$. **15.** (27; 4), $\left(\frac{1}{18}; -3\right)$. **16.** $\left(\frac{2}{9}; \frac{1}{9}\right)$. **17.** (8; 2), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$. **18.** $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$, (3; 9).

§6.

1. $x < \frac{1}{2}$. **2.** $x > 2$. **3.** $x \in R$. **4.** $0 < x < 1$. **5.** $\frac{1}{2} \le x < 1$. **6.** $-5 < x < 5$. **7.** $x < 0$, $x > \log_4 3$. **8.** $x \in R$.

9. $x \le 2$. **10.** $x > 0$. **11.** $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{4}$. **12.** $x < 1 - \log_2 3$. **13.** $-1 < x < 1$. **14.** $0 \le x \le 0{,}5$. **15.** $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $1 < x < 2$. **16.** $-1 \le x \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$. **17.** $0 < x < 0{,}5$. **18.** $x < \log_{0,4} 2$. **19.** $-4 < x < 1$, $x > 3$. **20.** $-3 < x < -2$, $1 < x < 4$. **21.** $x < 3 - \sqrt{2}$, $4 < x < 3 + \sqrt{2}$. **22.** $2 < x < 3$, $x > 4$. **23.** $x < \frac{5}{3}$, $2 < x < 3$. **24.** $0 < x < 2$. **25.** $x > -2$. **26.** $x < 3$, $5 < x < 6$.

§7.

1. $\frac{1}{5} < x < \frac{2}{5}$. **2.** $\frac{1}{3} < x < 2$. **3.** $1 < x < 2$, $3 < x < 4$. **4.** $\frac{1}{3} \le x < \frac{1}{2}$. **5.** $\frac{1}{2} \le x \le 4$. **6.** $0 < x \le \frac{1}{2}$, $2 < x \le 4$. **7.** $0 < x < 10$. **8.** $2 < x < \frac{5}{2}$. **9.** $-1 < x < 0$, $x > 1$. **10.** $1 < x < 2$. **11.** $-1 < x < 1$, $3 < x < 5$. **12.** $3 - \sqrt{2} < x < 2$. **13.** $0{,}001 < x < 1$, $x > 100$. **14.** $4 - \sqrt{2} < x < 3$, $x > 4 + \sqrt{2}$. **15.** $4 < x < 3 + \sqrt{2}$, $x > 5$. **16.** $3 - \sqrt{5} < x < 1$, $x > 3 + \sqrt{5}$. **17.** $x > 1 + \sqrt{5}$. **18.** $2{,}5 < x < 3$. **19.** $1 < x < 1{,}04$. **20.** $x < 2 - \sqrt{2}$, $3 < x < 2 + \sqrt{2}$. **21.** $0 < x < 27$. **22.** $-1 < x < 2$. **23.** $0 < x < 0{,}5$, $x > 2$. **24.** $x > 4^{\log_{0,8} 0,2}$. **25.** $0 < x < 0{,}5$, $1 < x < 2$, $3 < x < 6$. **26.** $1 < x < 1 + \frac{1}{2\sqrt[4]{4}}$, $x > 3$. **27.** $\frac{1}{4} < x < 1$, $1 < x < 4$. **28.** $-3 < x < 1$. **29.** $0 < x < 1$, $\frac{\sqrt{5}+1}{2} < x < 2$. **30.** $x < 0$, $x > 5$.

Розділ VII

§1.

1. *а)* $5 + 6i$; *б)* $3 - i$; *в)* $-1 - 3i$; *г)* $-4 - 3i$. **2.** *а)* $3a + 3bi$; *б)* $8x + 14yi$. **3.** *а)* -6; *б)* -10; *в)* $5a$; *г)* $-mn$. **4.** *а)* $6 + 10i$; *б)* $-4 + 4i$; *в)* $-8 - 6i$;

г) $-21+24i$. **5.** *а)* $5-14i$; *б)* $3-11i$; *в)* 26; *г)* 13; *д)* m^2+n^2; *е)* $a+b$. **6.** *а)* $2i$; *б)* 3; *в)* $1-2i$; *г)* $-\frac{4}{3}i$; *д)* $\frac{4}{5}+\frac{8}{5}i$; *е)* $\frac{15}{13}+\frac{10}{13}i$. **7.** *а)* $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; *б)* $1-2i\sqrt{2}$; *в)* $\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{abi}{a^2+b^2}$; *г)* $\frac{\sqrt{a}}{a+4}-\frac{2}{a+4}i$; *д)* $\frac{a^2-b}{a^2+b}+\frac{2a\sqrt{b}}{a^2+b}i$; *ж)* $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}-\frac{2mni}{m^2+n^2}$. **8.** *а)* -1; *б)* $-i$; *в)* 1; *г)* -1. **9.** *а)* $2i$; *б)* $-2i$; *в)* $-2+2i$; *г)* $-2-2i$; *д)* a^2-b^2+2abi; *е)* $-10-9\sqrt{3}i$; *є)* -4; *ж)* -4; *з)* 16. **10.** $64i$. **11.** *а)* 0; *б)* $\frac{2(bc-ad)}{c^2+d^2}i$. **12.** $2m$. **13.** 1. **14.** *а)* $(a+bi)(a-bi)$; *б)* $(a+2i)(a-2i)$; *в)* $(a+2bi)(a-2bi)$; *г)* $(c+i)(c-i)$; *д)* $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b})$; *е)* $(\sqrt{a}+i)\times(\sqrt{a}-i)$. **15.** *а)* $(4;\ 2)$; *б)* $(2;\ 3)$; *в)* $(4{,}5;\ 18)$; *г)* $(2;\ 1)$.

§2.

1. *а)* $1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; *б)* $1\cdot\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$; *в)* $1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; *г)* $1(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)$; *д)* $1\times(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$; *е)* $1(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ)$. **2.** *а)* $5\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)+i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)\right)$; *б)* $2(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)$; *в)* $2(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)$; *г)* $13\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{12}{5}\right)+i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{12}{15}\right)\right)$. **3.** *а)* $2\sqrt{3}+2i$; *б)* 6; *в)* $4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$; *г)* $2+2\sqrt{3}i$. **4.** *а)* $12\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; *б)* $\frac{3}{2}(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ)$; *в)* $\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ$; *г)* $3(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$; *д)* $\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ$; *е)* $729\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$. **5.** *а)* 1; *б)* 1. **6.** *а)* $\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$; $\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$; $\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ$; $\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ$; *б)* $\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ$; $\cos 117^\circ+i\sin 117^\circ$; $\cos 189^\circ+i\sin 189^\circ$; $\cos 261^\circ+$

$+ i\sin 261^\circ$; $\cos 333^\circ + i\sin 333^\circ$. **7.** *а*) $\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ$; $\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ$; $\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ$; *б*) $\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ$; $\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ$; $\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ$; $\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ$; *в*) $2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$; $2(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$; $2(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$; $2(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$; *г*) $\sqrt{2}\times(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$; $\sqrt{2}(\cos 165^\circ + i\sin 165^\circ)$; $\sqrt{2}(\cos 285^\circ + i\sin 285^\circ)$.

Розділ VIII

§1.

1. *а*) 6720; *б*) 6; *в*) 15; *г*) $\frac{49}{5}$. **2.** *а*) 24; *б*) 56; *в*) 24; *г*) 116. **3.** *а*) 15; *б*) 1140; *в*) 4950; *г*) 1431. **4.** *а*) 4,5; *б*) $\frac{8}{99}$. **5.** *а*) $(n-3)^2$; *б*) $(n-m)^2$; *в*) $4m^2$; *г*) n. **6.** *а*) $n(n+1)$; *б*) $\frac{n}{n+1}$. **7.** *а*) 9; *б*) 5; *в*) 14; 3; *г*) 7. **8.** *а*) 9; *б*) 12; *в*) 10; *г*) 8. **9.** *а*) 9; *б*) 10. **10.** *а*) (15; 6); *б*) (6; 3). **11.** 120. **12.** 840. **13.** 252. **14.** 792. **15.** 455. **16.** 28. **17.** 90. **18.** 120. **19.** 96. **20.** 3120. **21.** 246480.

§2.

2. $495a^4b^4$. **3.** $-3432x^{10}\sqrt{x}$. **4.** $125970a^7$. **5.** Немає. **6.** C_{17}^8. **7.** C_7^4. **8.** Немає. **9.** 35. **10.** 10. **11.** $84x$. **12.** $35z^2$. **13.** 3.

Розділ IX

1. 132; 264; 396. **2.** 50; 47 або 44. **3.** 0 або ± 198, або 1089. **4.** 37. **5.** (19; 81), (18; 63). **6.** 15. **7.** 71^{10}. **9.** Дана сума ділиться на 100. **10.** $m = 4$ та $n = 6$. **12.** -3. **14.** $x = 0$. **16.** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. **19.** (1; 2), (1; −2), (−2; 2), (2; −2). **27.** $x = 4$, $y = 6$, $z = 2$. **28.** Коли $a = 0$, $x = 0$, $y = 0$; коли $a = -\frac{2}{3}$, $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$. **31.** $x = 0$, $y = 4$.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Гайштут Олександр Григорович,
Литвиненко Григорій Миколайович

АЛГЕБРА. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ І ВПРАВ

За редакцією авторів

Художник **Нещерецький П.В.**

Коректор **Яценко О.В.**

Комп'ютерна верстка **Вербовіков А.М.**

Підписано до друку 25.06.97 р. Формат 84×108/32.
Папір офсетний № 1. Друк офсетний. Гарнітура Шкільна.
Умов. друк. арк. 13,44. Обл.-вид. арк. 10,21.
Тираж 10 000 прим. Замовлення № 0217224.

МСП Науково-практичний, навчально-методичний центр «Магістр-S»
Творчої спілки вчителів України

253030, Київ-30, вул. Б.Хмельницького, 16/18. Тел. 229-89-29.

Віддруковано з готових фотоформ на комбінаті друку
видавництва «Преса України».
252047, Київ-47, пр-т Перемоги, 50