Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Г. П. Лопушанська

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2004

ББК В161.6я73-1+В161.68я73-1
Лоп-77
УДК [517.9+517.958](075.8)

Рецензенти:

проф. *О. І. Бобик*
(Львів, Львівський національний університет імені І. Франка);
проф. *П. І. Каленюк*
(Львів, Національний університет "Львівська політехніка");
проф. *В. Г. Самойленко*
(Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка).

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів
Протокол N 14/18.2-977 від 09.06.2003

Лопушанська Г. П.
Лоп 77 Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики: Навчальний посібник. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 165 с.

Ц: 5,20

Викладено традиційні теми курсу звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики за скороченою програмою.

ББК В161.6я73-1+В161.68я73-1

©Лопушанська Г. П., 2004

ВСТУП

У процесі вивчення фізичних явищ не завжди вдається вивести закони, які пов'язують відомі величини – характеристики цих явищ. Часто спочатку одержують залежності між цими величинами та їхніми похідними.

Приклади. 1. Нехай $x(t)$ – кількість нерозкладеної речовини в момент часу t під час радіоактивного розпаду. Відомий закон: швидкість радіоактивного розпаду пропорційна до наявної кількості нерозкладеної речовини, тобто $\frac{dx}{dt} = -kx$, k – стала радіоактивного розпаду.

2. Нехай $x(t)$ – положення точки на прямій в момент часу t під час прямолінійного руху тіла масою m під дією сили $f(t, x, \frac{dx}{dt})$ ($\frac{dx}{dt}$ – швидкість руху, $\frac{d^2x}{dt^2}$ – прискорення). Відомий другий закон Ньютона записуємо у вигляді $m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, \frac{dx}{dt})$.

3. Потенціал електростатичного поля з густиною заряду $\varrho(x, y, z)$ у точці (x, y, z), який позначимо через $u(x, y, z)$, задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\varrho(x, y, z)$.

Означення. Співвідношення між змінною t, функцією $x(t)$ та її похідними до порядку n називається звичайним диференціальним рівнянням порядку n і записуємо у вигляді

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0,$$

де F – задана функція.

Рівняння у прикладі 1 – це звичайне диференціальне рівняння першого порядку, у прикладі 2 – звичайне диференціальне рівняння другого порядку, рівняння у прикладі 3 не є звичайним диференціальним рівнянням, оскільки u є функцією трьох змінних, то рівняння з частинними похідними.

Звичайні диференціальні рівняння надалі називатимемо просто диференціальними рівняннями.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння на інтервалі (a, b) називається функція, підставляючи яку в рівняння одержуємо тотожність на інтервалі (a, b).

При довільному значенні сталої C функція $x = Ce^{-kt}$ є розв'язком рівняння радіоактивного розпаду на всій числовій осі.

Розв'язок диференціального рівняння $\frac{dx}{dt} = f(t)$ знаходимо за допомогою інтегрування $x = \int f(t)dt + C$. Тому процес визначення розв'язку диференціального рівняння називатимемо часто *інтегруванням* диференціального рівняння.

Завдання курсу – вивчити методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними та методи розв'язування задач для рівнянь з частинними похідними другого порядку. Однак для багатьох рівнянь такі методи невідомі. Тому вивчатимемо також методи дослідження існування розв'язків диференціальних рівнянь, їхніх властивостей.

Розділ 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Рівняння першого порядку, розв'язані стосовно похідної

1.1.1. Основні поняття

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(t, x, x') = 0,$$

де F – задана неперервно диференційовна функція. Окремим його випадком є рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.1}$$

яке називається диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним стосовно похідної.

Надалі переважно вважатимемо функцію $f(t, x)$ визначеною і неперервною в деякій області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Уточнимо поняття розв'язку.

Розв'язком диференціального рівняння (1.1) на інтервалі (a, b) називається функція $x = \varphi(t)$, визначена та неперервно диференційовна на (a, b), підставляючи яку у рівняння, одержуємо тотожність на інтервалі (a, b), тобто $\frac{d\varphi}{dt} = f(t, \varphi(t)), t \in (a, b)$. Очевидно, точка $(t, \varphi(t))$ повинна належати області визначення функції f для усіх $t \in (a, b)$.

Не завжди вдається записати розв'язок диференціального рівняння у явному вигляді. Ми використовуватимемо також розв'язки у неявному та параметричному вигляді.

Розв'язком у неявному вигляді диференціального рівняння (1.1) називається співвідношення $\Phi(t, x) = 0$, яке визначає $x = \varphi(t)$ як неявну функцію t і ця функція $(x = \varphi(t))$ є розв'язком рівняння у зазначеному вище розумінні.

Наприклад, рівняння $\frac{dx}{dt} = \frac{t+x(x^2+t^2-1)}{-x+t(x^2+t^2-1)}$ має такий розв'язок у неявному вигляді: $x^2 + t^2 - 1 = 0$. Справді, нехай $x = x(t)$ – неявно задана цим співвідношенням функція ($x = (t^2-1)^{\frac{1}{2}}$ або $x = -(t^2-1)^{\frac{1}{2}}$), тоді $x^2(t) + t^2 - 1 \equiv 0$. Диференціюючи цю тотожність, одержуємо $2x(t)x'(t)+2t = 0$, звідки $x' = -\frac{t}{x}$. Підставляємо знайдений вираз похідної у задане рівняння $-\frac{t}{x} = \frac{t+x(x^2+t^2-1)}{-x+t(x^2+t^2-1)}$, тобто $t + x\frac{t+x(x^2+t^2-1)}{-x+t(x^2+t^2-1)} = 0$. Враховуючи, що $x^2+t^2-1 = 0$, матимемо очевидну тотожність $t + x\frac{t}{-x} = 0$.

Розв'язком у параметричному вигляді диференціального рівняння (1.1) називається така система неперервно диференційовних функцій $t = t(\tau)$, $x = x(\tau)$, $\tau \in (\alpha, \beta)$, що $\frac{x'(\tau)}{t'(\tau)} \equiv f(t(\tau), x(\tau))$, $\tau \in (\alpha, \beta)$.

Наприклад, рівняння $\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}$ має розв'язок $t = \cos\tau$, $x = \sin\tau$, $\tau \in (0, \pi)$, оскільки правильна тотожність $\frac{\cos\tau}{-\sin\tau} = -\frac{\cos\tau}{\sin\tau}$.

1.1.2. Геометричний зміст

Нехай $x = \varphi(t)$ – розв'язок рівняння (1.1). Крива на площині, задана рівнянням $x = \varphi(t)$, називається *інтегральною кривою* рівняння (1.1). $\varphi'(t) = tg\alpha(t)$, $\alpha(t)$ – кут, утворений дотичною до цієї кривої і віссю Ot. Оскільки $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, то у точці $(t, x) \in \Omega$ дотична до інтегральної кривої рівняння (1.1) утворює з віссю Ot кут $\alpha = arctg\ f(t, x)$.

Поставивши у відповідність довільній точці $(t, x) \in \Omega$ вектор одиничної довжини під таким кутом α до осі Ot, що $tg\alpha = f(t, x)$, задаємо *поле напрямів*, яке ще називається *векторним полем рівняння (1.1)*. Розв'язати диференціальне рівняння (1.1) мовою геометрії означає побудувати таку гладку криву в області Ω, дотична до якої у кожній точці має напрям векторного поля рівняння (1.1).

Поле напрямів будується не хаотично, а за допомогою ліній, у точках яких поле напрямів однакове. Такі лінії називаються *ізоклінами*. Наприклад, ізоклінами рівняння $x' = t^2 + x^2$ є лінії $k = t^2 + x^2$. Бачимо, що $k \geq 0$, а отже, усі інтегральні криві цього рівняння – монотонно неспадні, при $k = 0$ ізокліною є одна точка $(0, 0)$, усі інші ізокліни – кола, при віддалянні яких від початку координат тангенси кутів між дотичними до інтегральних кривих та віссю Ot збільшуються. Можемо ще знайти множину точок перегинів інтегральних кривих рівняння, тобто множину $x'' = 0$: $x'' = 2t + 2xx' = 2t + 2x(t^2 + x^2)$, отож множиною точок перегинів інтегральних кривих рівняння є $t + x(t^2 + x^2) = 0$.

Взявши за вихідну довільну точку площини, проводимо інтегральну криву цього рівняння. Оскільки векторне поле цього рівняння визначене в довільній точці площини, то його інтегральні криві заповнюють усю площину. Конкретна інтегральна крива повністю визначається однією точкою. Тому природно поряд із рівнянням задавати додаткову інформацію, щоб з усієї нескінченної множини розв'язків визначити потрібний.

Задача Коші. Знайти такий розв'язок рівняння (1.1), який задовольняє умову

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

де t_0, x_0 – задані числа. Умо[redacted] (1.2) називають *початковою умовою* або *умовою Коші.*

Мовою геометрії задача Коші (1.1),(1.2) полягає у знаходженні такої інтегральної кривої рівняння (1.1), яка проходить через задану точку (t_0, x_0).

Скажемо, що область $\Omega_0 \subset \Omega$ є *областю єдиності* для рівняння (1.1), якщо для довільної точки $(t_0, x_0) \in \Omega_0$ два довільні розв'язки задачі Коші (1.1),(1.2), графіки яких належать Ω_0, визначені на деякому інтервалі (a, b), збігаються на (a, b).

Наведені вище приклади свідчать про те, що, за винятком окремих (скінченної або зліченної кількості), розв'язки рівняння (1.1) утворюють множину, залежну від одного параметра.

Означення 1. Неперервна функція

$$x = \varphi(t, C) \tag{1.3}$$

називається *загальним розв'язком* рівняння (1.1) в області $U \subset \Omega_0$ (Ω_0 є областю єдиності рівняння (1.1)), якщо

1) для довільної точки $(t_0, x_0) \in U$ рівняння $x_0 = \varphi(t_0, C)$ однозначно визначає $C_0 = \psi(t_0, x_0)$;

2) функція $x = \varphi(t, C_0)$ є розв'язком задачі Коші для рівняння (1.1) з початковими даними (t_0, x_0).

З означення випливає, що $\psi(t, x)$ – неперервна функція.

Справді, маємо тотожність $x = \varphi(t, \psi(t, x))$. Нехай $t_k \to t_0$, $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$, $(t_k, x_k), (t_0, x_0) \in U$, $C_0 = \lim\limits_{k\to\infty} \psi(t_k, x_k)$. Перейдемо до границі у рівностях $x_k = \varphi(t_k, \psi(t_k, x_k))$. За неперервністю функції φ одержуємо $x_0 = \varphi(t_0, C_0)$. За означенням це рівняння має єдиний розв'язок $C_0 = \psi(t_0, x_0)$. Отож, $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(t_k, x_k) = \psi(t_0, x_0)$.

Якщо відомо загальний розв'язок рівняння, то розв'язується задача Коші (1.1),(1.2) для довільної початкової точки (t_0, x_0) з області Ω_0 єдиності рівняння (1.1).

В означенні загального розв'язку $\psi : U \to J(U) \subset \mathbb{R}$. Тоді (1.3) є множиною функцій, залежною від сталої $C \in J$.

З означення випливає, що для довільного значення сталої $C \in J(U)$ функція $x = \varphi(t, C)$ є розв'язком рівняння (1.1) і довільний розв'язок рівняння (1.1), графік якого лежить в U, входить до множини (1.3) при певному значенні сталої $C \in J(U)$.

Загальний розв'язок у вигляді, розв'язаному стосовно сталої, тобто у вигляді $\psi(t,x) = C$, називається *загальним інтегралом* рівняння, а функція ψ – *інтегралом* рівняння.

Розв'язок, який одержуємо з загального при конкретному значенні сталої C, називається *частинним* розв'язком рівняння (1.1).

1.1.3. Інтегровні типи диференціальних рівнянь

Розглянемо ті випадки рівнянь першого порядку, розв'язаних стосовно похідної, для яких можна знайти загальні розв'язки в явному або неявному вигляді. Якщо для деяких точок (t_0, x_0) можливо $f(t,x) \to \infty$ при $(t,x) \to (t_0, x_0)$, тобто інтегральні криві рівняння $x' = f(t,x)$ у цих точках мають вертикальні дотичні, то можна замість такого рівняння розглядати рівняння $t' = \frac{1}{f(t,x)}$ (вважаючи t функцією змінної x). Щоб не вилучати рівняння, інтегральні криві яких в окремих точках мають вертикальні чи горизонтальні дотичні, записуватимемо диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане стосовно похідної, також у симетричному вигляді

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0 \tag{1.4}$$

із рівноправними змінними t, x.

1. *Рівняння з відокремленими змінними.* Це рівняння вигляду

$$T(t)dt + X(x)dx = 0, \tag{1.5}$$

де $T(t)$ та $X(x)$ – задані неперервні функції.

Нехай $x = x(t)$ – розв'язок рівняння (1.2). Тоді $T(t)dt + X(x(t))x'(t)dt \equiv 0$, звідки $\int\limits_{t_0}^{t} T(t)dt + \int\limits_{t_0}^{t} X(x(t))x'(t)dt = C$ для довільного значення t_0, тобто

$$\int\limits_{t_0}^{t} T(t)dt + \int\limits_{x_0}^{x} X(x)dx = C \tag{1.6}$$

($x_0 = x(t_0)$, C – довільна стала).

Ми довели, що довільний розв'язок рівняння (1.5) входить у множину (1.6) при конкретному значенні C (розв'язок, який задовольняє початкову умову $x_0 = x(t_0)$ при $C = 0$).

Співвідношення (1.6) можемо також записати у вигляді

$$\int T(t)dt + \int X(x)dx = C \qquad (1.6')$$

або $\Phi(t,x) = C$. Нехай $x = x(t)$ – неявно задана цим співвідношенням функція. Диференціюючи (1.6) за змінною t, одержуємо $\Phi'_t(t,x(t)) + \Phi'_x(t,x(t))x'(t) \equiv 0$, тобто $T(t)dt + X(x(t))x'(t)dt \equiv 0$. Отже, знайдена з (1.6) як неявна функція $x = x(t)$ є розв'язком рівняння (1.5).

Згідно з означенням (1.6) (або (1.6')) – загальний розв'язок рівняння (1.5) (у неявному вигляді).

Рівняння вигляду

$$M_1(t)M_2(x)dt + N_1(t)N_2(x)dx = 0 \qquad (1.7)$$

називається *рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Припустимо спочатку, що $M_2(x)N_1(t) \neq 0$. Ділимо рівняння (1.4) на $M_2(x)N_1(t)$ – відокремлюємо змінні. Одержуємо $\frac{M_1(t)}{N_1(t)}dt + \frac{M_2(x)}{N_2(x)}dx = 0$. Це рівняння вигляду (1.5). За доведеним, його загальний розв'язок

$$\int \frac{M_1(t)}{N_1(t)}dt + \int \frac{M_2(x)}{N_2(x)}dx = C. \qquad (1.8)$$

Якщо $M_2(x) = 0$ при $x = x_0$, то вертикальна пряма $x = x_0$ є інтегральною кривою рівняння (1.7). Справді, $dx_0 = 0$, тому, підставляючи функції $x = x_0$ у рівняння (1.7), одержуємо правильну рівність $M_1(t)M_2(x_0)dt + N_1(t)N_2(x_0)dx_0 = 0$. Аналогічно доводимо, що горизонтальна пряма $t = t_0$, якщо $N_1(t_0) = 0$, є інтегральною кривою рівняння (1.7).

Отже, щоб мати всі розв'язки рівняння (1.7), до загального розв'язку (1.8) треба додати функції $x \equiv x_i$, $t \equiv t_j$, де x_i, t_j – корені рівнянь $M_2(x) = 0$ та $N_1(t) = 0$ відповідно.

До рівнянь з відокремленими змінними зводяться рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = F(at + bx + c), \qquad (1.9)$$

де a, b, c – сталі, F – функція одного аргументу $z = at + bx + c$.

Зробимо у рівнянні (1.9) заміну $z = at + bx + c$, тобто від змінних t, x перейдемо до змінних t, z. Знаходимо $\frac{dz}{dt} = a + b\frac{dz}{dt}$, враховуючи рівняння (1.9), $\frac{dz}{dt} = a + bF(z)$. Одержали рівняння вигляду (1.7).

2. *Однорідним* називається рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = F(\frac{x}{t}). \tag{1.10}$$

Зробимо заміну $z = \frac{x}{t}$, тобто $x = zt$. Диференціюємо цю рівність: $dx = tdz + zdt$. Рівняння (1.10) перетворюється до такого $tdz + zdt = F(z)dt$, тобто $tdz + (z - F(z))dt = 0$. А це рівняння вигляду (1.7).

3. *Лінійним* називається рівняння вигляду

$$x' + p(t)x = g(t). \tag{1.11}$$

Функція $p(t)$ називається коефіцієнтом рівняння, а $g(t)$ – вільним членом. Якщо $g(t) = 0$, то одержуємо рівняння $x' + p(t)x = 0$, яке називається *лінійним однорідним рівнянням (ЛОР)*, відповідно лінійне рівняння (1.8) ще називають *лінійним неоднорідним рівнянням (ЛНР)*.

Насправді ЛОР є рівнянням з відокремлюваними змінними і його загальний розв'язок $x = Ce^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}$ знаходимо відомим методом.

Розв'язок ЛНР шукатимемо *методом варіації сталої*: у такому ж вигляді як загальний розв'язок відповідного ЛОР, але з заміною сталої C на невідому функцію $C(t)$, тобто у вигляді

$$x = C(t)e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}. \tag{1.12}$$

Підставляючи функцію (1.12) у рівняння (1.11), одержуємо

$$C'(t)e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} + C(t)e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}(-p(t)) + p(t)C(t)e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} = g(t),$$

а після спрощень $C'(t) = g(t)e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}$. Звідси $C(t) = \int\limits_{t_0}^{t} g(s)e^{\int\limits_{t_0}^{s} p(\tau)d\tau}ds + C_1$ (C_1 – довільна стала). Підставляючи знайдену функцію $C(t)$ в (1.12), одержуємо загальний розв'язок рівняння (1.11)

$x = \Big(\int\limits_{t_0}^{t} g(s)e^{\int\limits_{t_0}^{s} p(\tau)d\tau}ds + C_1\Big)e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}$ або

$$x = e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}\int\limits_{t_0}^{t} g(s)e^{\int\limits_{t_0}^{s} p(\tau)d\tau}ds + C_1e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}. \tag{1.13}$$

Із (1.13) бачимо, що *загальний розв'язок ЛНР дорівнює сумі частинного розв'язку цього рівняння* $\tilde{x} = e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} \int\limits_{t_0}^{t} g(s)e^{\int\limits_{t_0}^{s} p(\tau)d\tau} ds$ *і загального розв'язку відповідного ЛОР.*

4. Рівняння вигляду (1.4) називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є диференціалом деякої функції $u(t,x)$

$$du(t,x) = M(t,x)dt + N(t,x)dx. \tag{1.14}$$

Крім того, $du(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx$. Звідси та з (1.14) одержуємо $\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx = M(t,x)dt + N(t,x)dx$, а за довільністю dt та dx,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M(t,x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = N(t,x). \tag{1.15}$$

Згідно з (1.14) рівняння (1.4) тепер можемо записати у вигляді $du(t,x) = 0$, його загальний розв'язок $u(t,x) = C$.

Теорема. *Нехай функції $M, N, \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial t}$ неперервні у деякій зв'язній області Ω. Щоб рівняння (1.4) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб*

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}, \ (t,x) \in \Omega. \tag{1.16}$$

Д о в е д е н н я. Якщо рівняння (1.4) є рівнянням у повних диференціалах, то є така неперервно диференційовна функція $u(t,x)$, яка задовольняє систему (1.15). Диференціюючи першу з рівностей (1.15) за змінною x, а другу – за змінною t, одержуємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}, \ (t,x) \in \Omega. \tag{1.17}$$

Праві частини (1.17) неперервні (за умовою теореми), отже, неперервні й ліві частини, а тоді $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$. Із рівності лівих частин (1.17) випливає рівність їх правих частин, тобто (1.16).

Нехай тепер правильна тотожність (1.16). Для доведення того, що рівняння (1.4) є у повних диференціалах, достатньо довести існування функції $u(t,x)$, що задовольняє систему (1.15).

Якщо у першому з рівнянь (1.15) зафіксувати $x = x_0$, то одержимо звичайне диференціальне рівняння $\frac{du}{dt} = M(t,x_0)$, звідки

$u(t,x_0) = \int\limits_{t_0}^{t} M(t,x_0)dt + C$ (t_0, C – довільні сталі). Враховуючи довільність x_0, маємо також $u(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t} M(t,x)dt + C(x)$, тут уже $C(x)$ – довільна функція. Знайдений вираз для u підставляємо в друге з рівнянь (1.15). Одержуємо $\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial M(t,x)}{\partial x}dt + C'(x) = N(t,x)$ або

$$C'(x) = N(t,x) - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial M(t,x)}{\partial x}dt. \tag{1.18}$$

$\frac{\partial}{\partial t}\big(N(t,x) - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial M(t,x)}{\partial x}dt\big) = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial M(t,x)}{\partial x}dt = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial M(t,x)}{\partial x}$. Останній вираз дорівнює нулю згідно з (1.16). Отже, з (1.18) знаходимо $C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \big(N(t,x) - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial M(t,x)}{\partial x}dt\big)dx + Const = \int\limits_{x_0}^{x} N(t,x)dx - \int\limits_{t_0}^{t} M(t,x)dt + \int\limits_{t_0}^{t} M(t,x_0)dt + Const$. Тепер $u(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t} M(t,x)dt + \int\limits_{x_0}^{x} N(t,x)dx - \int\limits_{t_0}^{t} M(t,x)dt + \int\limits_{t_0}^{t} M(t,x_0)dt + Const$, тобто

$$u(t,x) = \int\limits_{x_0}^{x} N(t,x)dx + \int\limits_{t_0}^{t} M(t,x_0)dt + Const. \tag{1.19}$$

Зауважимо, що, починаючи з другого рівняння (1.15), за допомогою аналогічних міркувань, ми одержали б такий вираз для шуканої функції

$$u(t,x) = \int\limits_{x_0}^{x} N(t_0,x)dx + \int\limits_{t_0}^{t} M(t,x)dt + Const. \tag{1.20}$$

Вираз у правій частині (1.19) є інтегралом за одною ламаною, а у (1.20) – за іншою, але з однаковими початковою (t_0, x_0) та кінцевою (t,x) точками. Можемо також записати

$$u(t,x) = \int\limits_{(t_0,x_0)}^{(t,x)} N(t, x)dx + M(t,x)dt + Const. \tag{1.21}$$

інтегруємо за довільною кривою, що з'єднує точки (t_0, x_0) та (t, x), оскільки за умови (1.16) результат інтегрування не залежить від кривої, а лише від початкової та кінцевої точок.

Означення 2. Функція $m(t,x)$, при множенні на яку рівняння (1.4) стає рівнянням у повних диференціалах, називається *інтегрувальним множником* цього рівняння.

Нехай $m(t,x)$ – інтегрувальний множник рівняння (1.4). Тоді рівняння $m(t,x)M(t,x)dt + m(t,x)N(t,x)dx = 0$ є у повних диференціалах, а за умов теореми для цього необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial(mM)}{\partial x} = \frac{\partial(mN)}{\partial t}. \tag{1.22}$$

Рівняння (1.22) є рівнянням у частинних похідних першого порядку, знаходити з нього невідомий інтегрувальний множник важко. З (1.22) легко знайти інтегрувальний множник в окремих випадках.

Приклад. $m = m(\omega(t,x))$, де $\omega(t,x)$ – відома функція. Рівність (1.22) набуває вигляду $m\frac{\partial M}{\partial x} + Mm'(\omega)\frac{\partial \omega}{\partial x} = m\frac{\partial N}{\partial t} + Nm'(\omega)\frac{\partial m}{\partial t}$, тобто $m(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}) = m'(\omega)(N\frac{\partial m}{\partial t} - M\frac{\partial m}{\partial x})$ або

$$\frac{dm}{m} = \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N\frac{\partial m}{\partial t} - M\frac{\partial m}{\partial x}} d\omega. \tag{1.23}$$

Ліва частина (1.23) є функцією змінної ω, отже, і права частина має бути функцією ω. Навпаки, якщо

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N\frac{\partial m}{\partial t} - M\frac{\partial m}{\partial x}} = \varphi(\omega), \tag{1.24}$$

то з (1.23), тобто з рівняння $\frac{dm}{m} = \varphi(\omega)d\omega$ знаходимо невідомий інтегрувальний множник $m(\omega) = Ce^{\int \varphi(\omega)d\omega}$. Отож, (1.24) є необхідною й достатньою умовою того, що рівняння (1.4) має інтегрувальний множник, який залежить лише від ω.

Завдання. 1. Показати, що для лінійного рівняння є інтегрувальний множник, який залежить лише від t, знайти його.

2. Вивести необхідні й достатні умови того, що рівняння (1.4) має інтегрувальний множник: а) вигляду $m = m(x)$; б) вигляду $m = m(tx)$, в) вигляду $m = m(t + x)$, г) вигляду $m = m(t^2 + x^2)$.

1.2. Задача Коші. Теорема існування та єдиності

1.2.1. Допоміжні поняття та твердження

Через $C(a,b)$ $(C[a,b])$ позначаємо лінійний векторний простір непе рервних на $(a,b)([a,b])$ функцій. $C[a,b]$ – нормований простір, норм $||\varphi||_{C[a,b]} = ||\varphi|| = \max\limits_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|$.

Твердження. Послідовність функцій $\varphi_n(t)$ із $C[a,b]$ рівномірно збіга ється до функції $\varphi(t)$ на відрізку $[a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $||\varphi_n - \varphi||$ – 0 при $n \to \infty$.

Через $C^1(a,b)$ $(C^1[a,b])$ позначаємо лінійний векторний простір непе рервно диференційовних на (a,b) $([a,b])$ функцій. $C^1[a,b]$ – нормовані простір, $||\varphi||_{C^1[a,b]} = ||\varphi||_1 = \max[\max\limits_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|, \max\limits_{t\in[a,b]} |\varphi'(t)|]$.

Означення 1. Скажемо, що функція $\varphi(t)$ задовольняє на інтервал (a,b) умову Ліпшиця, якщо існує така стала $L > 0$, що для довільни $t_1, t_2 \in (a,b)$ правильна нерівність

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le L|t_1 - t_2|. \qquad (1.25$$

З означення видно, що функція, яка задовольняє на інтервалі $(a,b$ умову Ліпшиця, є неперервною. Обернене твердження неправильне, ос кільки для функції, яка задовольняє на інтервалі (a,b) умову Ліпшиця маємо $\frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{|t_1-t_2|} \le L$, а для неперервних функцій, графіки яких мають вертикальні дотичні, ця умова не виконується.

Якщо функція φ має обмежену похідну на (a,b), то вона задовольня на інтервалі (a,b) умову Ліпшиця.

Справді, за теоремою Лагранжа існує таке $\xi \in (t_1,t_2)$, що $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) = \varphi'(\xi)(t_1 - t_2)$. Тоді

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| = |\varphi'(\xi)||t_1 - t_2| \le \sup_{\xi\in(a,b)} |\varphi'(\xi)||t_1 - t_2| = L|t_1 - t_2|.$$

Звідси випливає, що функція з $C^1[a,b]$ задовольняє на відрізку $[a,b$ умову Ліпшиця.

Можна показати таке: *якщо функція задовольняє на відрізку $[a,b$ умову Ліпшиця і має похідну, то ця похідна обмежена.*

1.2.2. Теореми Пеано та Пікара

Розглянемо задачу Коші (1.1),(1.2), умови її розв'язності, властивості розв'язків.

Теорема Пеано (теорема існування). *Нехай у деякій області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ функція $f(t,x)$ неперервна. Тоді для довільної точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ задача Коші (1.1),(1.2) має розв'язок $x = \varphi(t)$, визначений у деякому околі $(t_0 - r, t_0 + r)$ точки t_0.*

Теорема Пікара (теорема існування й єдиності). *Нехай у деякій області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ функція $f(t,x)$:*

1) неперервна;

2) задовольняє умову Ліпшиця за аргументом x, тобто існує така стала $L > 0$, що для довільних $(t, x_1), (t, x_2) \in \Omega$ правильна нерівність

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L|x_1 - x_2|. \tag{1.26}$$

Тоді для довільної точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ задача Коші (1.1),(1.2) має єдиний розв'язок $x = \varphi(t)$, визначений у деякому околі $(t_0 - r, t_0 + r)$ точки t_0.

Доведення теореми Пікара полягає у доведенні існування та доведенні єдиності розв'язку задачі Коші. Доведення існування розв'язку розіб'ємо на декілька етапів.

1. Доведемо, що задача (1.1),(1.2) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \tag{1.27}$$

Нехай функція $x = \varphi(t)$ є розв'язком задачі (1.1),(1.2) на інтервалі $(t_0 - r, t_0 + r)$. Тоді $\varphi \in C^1(t_0 - r, t_0 + r)$,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \equiv f(t, \varphi(t)),\ t \in (t_0 - r, t_0 + r), \quad \varphi(t_0) = x_0. \tag{1.28}$$

Інтегруючи тотожність у (1.28) на інтервалі (t_0, t), $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$, одержуємо $\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau$, тобто

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau,\ t \in (t_0 - r, t_0 + r). \tag{1.29}$$

(1.29) означає, що функція $x = \varphi(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння (1.27) на інтервалі $(t_0 - r, t_0 + r)$.

Нехай тепер функція $x = \varphi(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння (1.27) на інтервалі $(t_0 - r, t_0 + r)$, тобто $\varphi \in C(t_0 - r, t_0 + r)$ і задовольняє тотожність (1.29) на інтервалі $(t_0 - r, t_0 + r)$. Оскільки функція $f(\tau, \varphi(\tau))$ є неперервною на інтервалі $(t_0 - r, t_0 + r)$, то права частина (1.29) має неперервну похідну на цьому інтервалі, а отже, $\varphi \in C^1(t_0 - r, t_0 + r)$. Замінюючи у (1.29) t на t_0, одержуємо $\varphi(t_0) = x_0$. Диференціюючи (1.29), одержуємо, що $\frac{d\varphi(t)}{dt} \equiv f(t, \varphi(t)), t \in (t_0 - r, t_0 + r)$. Отож, функція $x = \varphi(t)$ є розв'язком задачі (1.1),(1.2) на інтервалі $(t_0 - r, t_0 + r)$.

Введемо інтегральний оператор $A: \ (Ax)(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$ з областю визначення $C(t_0 - r, t_0 + r)$. Тепер інтегральне рівняння (1.29) набуває вигляду операторного рівняння

$$x = Ax, \ x \in C(t_0 - r, t_0 + r). \tag{1.29'}$$

2. Нехай $P = \{(t, x) : |t - t_0| \le a, |x - x_0| \le b\}$, числа a, b вибрані так, щоб $P \subset \Omega$, $P_r = \{(t, x) : |t - t_0| \le r \le a, |x - x_0| \le b\}$. Введемо також клас функцій

$$M_r = \{\varphi \in C[t_0 - r, t_0 + r] : \varphi(t_0) = x_0, \quad ||\varphi - x_0|| \le b\} =$$
$$= \{\varphi \in C[t_0 - r, t_0 + r] : \varphi(t_0) = x_0, \ (t, \varphi(t)) \in P_r \text{ при } |t - t_0| \le r\}.$$

Це клас функцій, графіки яких проходять через точку (t_0, x_0) і не виходять за межі прямокутника P_r через верхній чи нижній бік.

Покажемо, що можна вибрати число r таким, щоб $A\varphi \in M_r$ для довільної функції $\varphi \in M_r$. Маємо $||A\varphi - x_0|| = \max\limits_{|t - t_0| \le r} |A\varphi(t) - x_0| =$

$$= \max_{|t - t_0| \le r} \Big| \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)d\tau) \Big| \le \max_{|t - t_0| \le r} \Big| \int\limits_{t_0}^{t} \max_{|t - t_0| \le r} |f(\tau, \varphi(\tau)|d\tau) \Big| \le$$

$\le \max\limits_{|t - t_0| \le r} \Big| \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \Big| \max\limits_{(t,x) \in P_r} |f(t, x)| \le \max\limits_{(t,x) \in P} |f(t, x)| r = Mr$. Отже, при $r \le \min(a, \frac{b}{M})$ оператор A діє у просторі функцій M_r.

3. Доведемо існування розв'язку операторного рівняння (1.29') у просторі M_r. Побудуємо послідовність

$$\varphi_n(t) : \varphi_0(t) = x_0, \varphi_{n+1}(t) = A\varphi_n(t), \ n = 1, 2, \ldots.$$

За доведеним у попередньому пункті, $\varphi_n \in M_r, n = 1, 2, \ldots$. Доведемо, що ця послідовність рівномірно збігається на відрізку $[t_0 - r, t_0 + r]$. Зауважимо, що $\varphi_n(t) = \varphi_0(t) + (\varphi_1(t) - \varphi_0(t)) + \cdots + (\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t))$,

46/12-1

тому збіжність послідовності $\varphi_n(t)$ тотожна збіжності розвинення

$$\varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)]. \tag{1.30}$$

Оцінимо члени цього розвинення. Маємо при $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$

$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = |(A\varphi_0)(t) - \varphi_0(t)| = |(Ax_0)(t) - x_0| = |\int\limits_{t_0}^{t} f(t, x_0)dt| \le C,$

$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| = |(A\varphi_1)(t) - (A\varphi_0)(t)| = |\int\limits_{t_0}^{t}[f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_0(t))]dt| \le$

$|\int\limits_{t_0}^{t}|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_0(t))|dt| \le |\int\limits_{t_0}^{t} L|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)|dt| \le LC|t - t_0|,$

$|\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| = |(A\varphi_2)(t) - (A\varphi_1)(t)| = |\int\limits_{t_0}^{t}[f(t, \varphi_2(t)) - f(t, \varphi_1(t))]dt| \le$

$|\int\limits_{t_0}^{t} L|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)|dt| \le |\int\limits_{t_0}^{t} L^2C|t - t_0|dt| = L^2C\frac{|t-t_0|^2}{2}.$

Використовуючи метод математичної індукції, легко довести, що

$|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \le L^nC\frac{|t-t_0|^n}{n!} \le L^nC\frac{r^n}{n!},\ t \in [t_0 - r, t_0 + r],\ n = 1, 2, \ldots.$

Тому мажорантним для розвинення (1.6) на відрізку $[t_0 - r, t_0 + r]$ буде розвинення $|x_0| + \sum\limits_{k=1}^{n} L^{k-1}C\frac{r^{k-1}}{(k-1)!}$, яке збігається. За ознакою Вейєрштрасса розвинення (1.6), як і послідовність $\varphi_n(t)$, рівномірно збігаються на відрізку $[t_0 - r, t_0 + r]$.

4. Нехай $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$. За властивістю рівномірно збіжних послідовностей $\varphi \in C[t_0 - r, t_0 + r]$. Доведемо, що функція $\varphi(t)$ є розв'язком рівняння (1.29') на цьому відрізку. Аналогічно до попереднього

$|(A\varphi_n)(t) - (A\varphi)(t)| = |\int\limits_{t_0}^{t}[f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi(t))]dt| \le$

$|\int\limits_{t_0}^{t} L|\varphi_n(t) - \varphi(t)|dt|$, тому $||A\varphi_n - A\varphi|| \le Lr||\varphi_n - \varphi||$. Оскільки збіжність за нормою рівнозначна рівномірній збіжності, то з цієї нерівності випливає рівномірна збіжність на $[t_0 - r, t_0 + r]$ послідовності $(A\varphi_n)(t)$: $\lim\limits_{n\to\infty}(A\varphi_n)(t) = (A\varphi)(t)$. Переходячи у тотожності $\varphi_{n+1}(t) = A\varphi_n(t)$ до границі, коли $n \to \infty$, одержимо $\varphi(t) = A\varphi(t), t \in [t_0 - r, t_0 + r]$.

Для доведення єдиності розв'язку задачі (1.1),(1.2) використаємо лему Гронуола-Беллмана.

НАУКОВА БІБЛІОТЕКА № 2

Лема Гронуола-Беллмана. *Нехай $u(t), v(t)$ – неперервні невід'ємні функції на інтервалі (a,b), $t_0 \in (a,b)$, A – невід'ємна стала і*

$$u(t) \le A + \Big|\int_{t_0}^{t} u(\tau)v(\tau)d\tau\Big|,\ t \in (a,b). \tag{1.31}$$

Тоді

$$u(t) \le Ae^{\left|\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau\right|},\ t \in (a,b). \tag{1.32}$$

Доведення леми. Позначимо через $V(t)$ праву частину нерівності (1.31). Тоді $V(t_0) = A$, $V(t) \ge A \ge 0$, а з (1.31) –

$$u(t) \le V(t),\ t \in (a,b). \tag{1.33}$$

Розглянемо два випадки.

А. $t > t_0$. Тоді $V(t) = A + \int_{t_0}^{t} u(\tau)v(\tau)d\tau$, $V'(t) = u(t)v(t)$ і з (1.33) $V'(t) \le V(t)v(t)$ або $V'(t) - V(t)v(t) \le 0$. Помножимо обидві частини нерівності на $e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}$. Одержуємо $(V(t)e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau})' \le 0$, а після інтегрування за (t_0,t): $V(t)e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau} \le A$, звідки $V(t) \le Ae^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}$. Враховуючи (1.33), одержуємо

$$u(t) \le Ae^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}. \tag{1.34}$$

Б. $t < t_0$. Тоді $V(t) = A - \int_{t_0}^{t} u(\tau)v(\tau)d\tau$, $V'(t) = -u(t)v(t)$, а з (1.33) $V'(t) \ge -V(t)v(t)$, або $V'(t) + V(t)v(t) \ge 0$. Множимо обидві частини нерівності на $e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}$. Одержуємо $(V(t)e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau})' \ge 0$, а після інтегрування за (t,t_0): $A - V(t)e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau} \ge 0$, звідки $V(t) \le Ae^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau} = Ae^{\left|\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau\right|}$. Враховуючи (1.33), одержуємо (1.32).

Доведемо тепер єдиність розв'язку у теоремі Пікара. Нехай $\varphi(t), \psi(t)$ – два розв'язки задачі (1.1),(1.2) на інтервалі (t_0-r, t_0+r). За доведеним

$\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau$, $\psi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \psi(\tau))d\tau$, $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$. Піднімаючи ці тотожності, одержуємо

$\varphi(t) - \psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} [f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))]d\tau$, звідки, враховуючи умову 2 теореми, $|\varphi(t) - \psi(t)| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} L|\varphi(\tau) - \psi(\tau)|d\tau|$.

Нехай $u(t) = |\varphi(t) - \psi(t)| \geq 0$. Маємо $u(t) \leq L|\int\limits_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau|$, $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$. За лемою Гронуола-Беллмана $u(t) \leq 0$, а отже, $u(t) = 0$, тобто $\varphi(t) = \psi(t)$, $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$.

1.2.3. Наслідки з теорем Пеано та Пікара

1. *Продовження розв'язку задачі Коші.*

Ми довели існування єдиного розв'язку $x = \varphi(t)$ задачі (1.1),(1.2), визначеного на інтервалі $(t_0 - r, t_0 + r)$, де $r = \min(a, \frac{b}{M})$, $M = \max\limits_{(t,x)\in P} |f(t, x)|$, P – довільно вибраний прямокутник всередині області Ω (з центром у точці (t_0, x_0)). Оскільки умови теореми виконуються в усій області Ω, то можна точку $K(t_0 + r, \varphi(t_0 + r))$ взяти за початкову, побудувати такий прямокутник P^1 з центром у K, який весь знаходився б всередині області Ω, і розглянути задачу Коші для рівняння (1.1) з початковою умовою

$$x(t_0 + r) = x_1 \qquad (x_1 = \varphi(t_0 + r)) \tag{1.35}$$

замість умови (1.2). За доведеним, існує єдиний розв'язок $x = \varphi_1(t)$ задачі (1.1),(1.35), визначений на деякому інтервалі (t_0+r-r_1, t_0+r+r_1).

На інтервалі $(t_0 + r - r_1, t_0 + r)$ маємо два розв'язки цієї задачі, $x = \varphi_1(t)$ та $x = \varphi(t)$. За єдиністю розв'язку задачі Коші, $\varphi_1(t) = \varphi(t)$, $t \in (t_0+r-r_1, t_0+r]$. На $[t_0+r, t_0+r+r_1)$ функція $x = \varphi_1(t)$ є продовженням розв'язку $x = \varphi(t)$ задачі (1.1),(1.2).

Цей процес можна продовжувати (праворуч і ліворуч). Але доки? Розглянемо приклад. Задачу Коші

$$x' = x^2,\ x(0) = 1 \tag{1.36}$$

легко розв'язати. Загальний розв'язок рівняння $x = -\frac{1}{t+C}$ підставляємо у початкову умову, одержуємо $C = -1$, звідки розв'язок задачі $x = -\frac{1}{t-1}$. Він не може бути продовжений до точки $t = 1$ і праворуч.

Те саме стосується розв'язку задачі $x' = x^2 + t$, $x(0) = 1$, оскільки п $t \geq 0$ маємо $x^2 + t \geq x^2$, а тоді, враховуючи геометричний зміст похід функції, графік розв'язку цієї задачі праворуч від точки $t = 0$ пови бути над графіком розв'язку задачі (1.36).

Означення 2. Розв'язок $x = \varphi(t)$ рівняння (1.1) на інтервалі $(a$ називається *продовжуваним вправо* за точку b, якщо існує розв'я $x = \varphi_1(t)$ рівняння (1.1) на інтервалі (a, b_1), $b_1 > b$, звуження як на (a, b) збігається з $\varphi(t)$. Продовження вліво розв'язку визначаєт аналогічно. Розв'язок $x = \varphi(t)$ рівняння (1.1) на інтервалі (a, b) нази ється *непродовжуваним*, якщо довільне його продовження збігаєтьс ним самим.

Нехай функція $x = \varphi(t)$ є розв'язком рівняння (1.1) на інтерв (a,b). Цей інтервал називається *максимальним інтервалом існує ня розв'язку* $x = \varphi(t)$, якщо розв'язок $x = \varphi(t)$ непродовжуваний праворуч, ні ліворуч.

Теорема 1. *Нехай функція $f(t, x)$ неперервна в області Ω, $x = \varphi(t$ розв'язок рівняння (1.1) на деякому інтервалі. Тоді функція $x = \varphi$ може бути продовжена (як розв'язок) на максимальний інтервал іс вання (a, b). Крім того, якщо (a, b) – максимальний інтервал існуван розв'язку $\varphi(t)$, то при $t \to a-0$ та $t \to b-0$ точки $(t, \varphi(t))$ наближають до межі області або $\varphi(t)$ віддаляється у безмежність (якщо область необмежена).*

2. *Неперервна залежність розв'язку задачі Коші від даних.*

Оскільки функція $f(t, x)$, числа t_0, x_0 задані в результаті певн вимірювань, припущень, а отже, з деякими наближеннями, то важли з'ясувати, як похибки заданих величин впливають на розв'язок зада

Нехай $Q(\Omega, \mathcal{M}) = \{(t_0, x_0, f),\ (t_0, x_0) \in \Omega,\ f \in \mathcal{M}\}$ – клас дан задачі (1.1),(1.2), $\mathcal{M}$ – такий клас функцій, при якому задача має єд ний розв'язок в області Ω, (a, b) – максимальний інтервал існуван розв'язку $x = x(t)$ задачі Коші (1.1),(1.2), $Q_\delta(\Omega, \mathcal{M}) = \{(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0, \tilde{f})$ $Q(\Omega, \mathcal{M}) : |\tilde{t}_0 - t_0| < \delta,\quad |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta,\ |\tilde{f}(t, x) - f(t, x)| < \delta,\ (t, x) \in \Omega\}$

Розглянемо задачу

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(t, x),\ x(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0. \qquad (1.3$$

Означення 3. Скажемо, що розв'язок $x = x(t)$ задачі Коші (1.1),(1. *неперервно залежить від даних* $Q(\Omega, \mathcal{M})$ задачі, якщо він мало змін ється на довільному відрізку $[t_0 - T_1, t_0 + T_2] \subset (a, b)$ при малих змін

даних, тобто для довільних $[t_0 - T_1, t_0 + T_2] \subset (a, b)$, $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon, T_1, T_2) > 0$, що для довільних $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0, \tilde{f}) \in Q_\delta(\Omega, \mathcal{M})$ розв'язок $x = \tilde{x}(t)$ задачі (1.37) визначений на відрізку $[t_0 - T_1, t_0 + T_2]$ і $|\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \in [t_0 - T_1, t_0 + T_2]$.

Теорема 2. *Нехай функція $f(t, x)$ задовольняє в області Ω умови теореми Пікара. Тоді розв'язок задачі (1.1),(1.2) неперервно залежить від вхідних даних.*

Доведення. За умовою теореми $\mathcal{M}$ – клас функцій $f(t, x)$, які задовольняють умови теореми Пікара. Спочатку вибираємо таке δ_1, що при $\delta < \delta_1$, $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0, \tilde{f}) \in Q_\delta(\Omega, \mathcal{M})$ розв'язок $x = \tilde{x}(t)$ задачі (1.37) визначений на відрізку $[t_0 - T_1, t_0 + T_2]$. Це можливо за теоремою 1.

Оскільки задача Коші рівнозначна певному інтегральному рівнянню, то правильні тотожності

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau, \quad \tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 + \int_{\tilde{t}_0}^{t} \tilde{f}(\tau, \tilde{x}(\tau))d\tau, \ t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Віднімемо їх. Одержимо

$$\tilde{x}(t) - x(t) = \tilde{x}_0 - x_0 + \int_{\tilde{t}_0}^{t} [\tilde{f}(\tau, \tilde{x}(\tau)) - f(\tau, x(\tau))]d\tau - \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} f(\tau, x(\tau))d\tau,$$

звідки $|\tilde{x}(t) - x(t)| \le |\tilde{x}_0 - x_0| + |\int_{\tilde{t}_0}^{t} [|\tilde{f}(\tau, \tilde{x}(\tau)) - f(\tau, \tilde{x}(\tau))| +$

$$+|f(\tau, \tilde{x}(\tau)) - f(\tau, x(\tau))|]d\tau| + |\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} |f(\tau, x(\tau))|d\tau| \le$$

$$\delta + |\int_{\tilde{t}_0}^{t} [\delta + L|\tilde{x}(\tau) - x(\tau)|]| + M|\tilde{t}_0 - t_0| \le \delta(1 + T + M) + L|\int_{\tilde{t}_0}^{t} |\tilde{x}(\tau) - x(\tau)|d\tau|,$$

де $T = \max(T_1, T_2)$. За лемою Гронуола-Беллмана $|\tilde{x}(t) - x(t)| \le \delta(1 + T + M)e^{L|t - \tilde{t}_0|} \le \delta(1 + T + M)e^{L(T+\delta)}$, $t \in [t_0 - T_1, t_0 + T_2]$. Отже, за заданим $\varepsilon > 0$ вибираємо δ з умов $\delta(1 + T + M)e^{L(T+\delta)} < \varepsilon$, що можливо (наприклад, $\delta < \min[1, \frac{\varepsilon}{(1+T+M)e^{L(T+1)}}]$), та $\delta < \delta_1$.

Зауважимо, що неперервну залежність від даних задачі Коші можна також довести і тоді, коли $\mathcal{M}$ – клас неперервних, обмежених функцій $f(t, x)$ в області Ω і таких, що задача має єдиний розв'язок в області Ω (див. [11]).

Означення 4. Задача називається *коректною* або *коректно сформульованою*, якщо її розв'язок існує, єдиний та неперервно залежить від даних задачі.

Ми довели, що за умов теореми Пікара задача Коші є коректною.

3. *Залежність розв'язку задачі Коші від параметра.*
Розглянемо задачу

$$x' = f(t, x, \mu), \ x\,|_{t=t_0} = g(\mu). \tag{1.38}$$

Функція $f(t, x, \mu)$ визначена в області $\Omega_1 = \Omega \times I$, $I \subset \mathbb{R}$, функція $g(\mu)$ – на відрізку I, $(t_0, g(\mu_0), \mu_0) \in \Omega_1$.

Теорема 3. *Нехай $g \in C(I)$, функція $f(t, x, \mu)$ неперервна в області Ω_1, задовольняє умову Ліпшиця за аргументом x, а саме, існує така додатна стала L, що для довільних $(t, x_1, \mu), (t, x_2, \mu) \in \Omega_1$ правильна нерівність*

$$|f(t, x_1, \mu) - f(t, x_2, \mu)| \le L|x_1 - x_2|.$$

Тоді існують такі $r > 0$, $\varepsilon > 0$, що задача Коші (1.38) має єдиний розв'язок $x = \varphi(t, \mu)$, визначений для $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$, $\mu \in [\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$, рівномірно неперервний за параметром μ.

Існування та єдиність розв'язку доводиться, як у теоремі Пікара, оскільки стала Ліпшиця не залежить від параметра. Покажемо, що цей розв'язок неперервно залежить від параметра μ. Маємо

$$|f(t, \varphi(t, \mu), \mu) - f(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0)| \le$$

$$\le |f(t, \varphi(t, \mu), \mu) - f(t, \varphi(t, \mu_0), \mu)| + |f(t, \varphi(t, \mu_0), \mu) - f(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0)| \le$$

$$\le L|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)| + |f(t, \varphi(t, \mu_0), \mu) - f(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0)|,$$

$|f(t, \varphi(t, \mu_0), \mu) - f(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0)| \le \eta$, $|g(\mu) - g(\mu_0)| \le \eta_0$ при $|\mu - \mu_0| \le \delta$, $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$ за неперервністю функцій (η та η_0 малі при малих δ). Враховуючи рівнозначність задачі Коші інтегральному рівнянню, одержуємо $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)| \le \eta_0 + \eta r + L|\int\limits_{t_0}^{t} |\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu_0)| d\tau|$, звідки за лемою Гронуола-Беллмана $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)| \le (\eta_0 + \eta r)e^{Lr}$.

Зауваження. У випадку лінійного рівняння

$$x' + p(t, \mu)x = q(t, \mu)$$

при p, $q \in C((a, b) \times [\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon])$ розв'язок задачі Коші з довільними початковими даними ($t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in \mathbb{R}$) буде визначений та неперервний при $t \in (a, b)$, $\mu \in [\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$.

Теорема 4. *Якщо функція $f(t,x,\mu)$ неперервна за змінною t, має неперервні похідні за змінними x, μ до порядку p в області Ω_1, $g \in C^p(I)$, то розв'язок задачі (1.38) має неперервні похідні до порядку p за параметром μ.*

Зауважимо, що з цих теорем також одержуємо неперервну залежність розв'язку задачі Коші (1.1),(1.2) від початкових даних. Справді, заміною $x = x_0 + y$ задачу (1.1),(1.2) зводимо до задачі

$$y' = f(t, x_0 + y), \quad y(t_0) = 0,$$

в якій права частина рівняння залежить від x_0 як від параметра.

4. *Існування загального розв'язку.*

Теорема 5. *Нехай функція $f(t,x)$ задовольняє умови теореми Пікара в області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Тоді в деякому околі довільної точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ існує загальний розв'язок рівняння (1.1).*

Доведення. Нехай $(t_0, x_0) \in \Omega$, P – прямокутник, введений під час доведення теореми Пікара, $P_{\frac{1}{2}} = \{(t,x) \in P : |x - x_0| \le \frac{b}{2}\}$.

Для довільної точки $(t_0, \tilde{x}) \in P_{\frac{1}{2}}$ існує єдиний розв'язок задачі Коші для рівняння (1.1) з початковою умовою $x(t_0) = \tilde{x}$. Позначимо цей розв'язок як

$$x = \varphi(t, \tilde{x}). \tag{1.39}$$

(1.39) є розв'язком рівняння (1.1) для довільного $\tilde{x}$, $|\tilde{x} - x_0| \le \frac{b}{2}$.

Візьмемо точку $(t_1, x_1) \in P_{\frac{1}{2}}$ настільки близькою до точки (t_0, x_0), щоб інтегральна крива $x = \varphi_1(t, t_1, x_1)$ рівняння (1.1), яка проходить через точку (t_1, x_1), перетинала пряму $t = t_0$ у такій точці $\tilde{x}_1$, що $|\tilde{x}_1 - x_0| \le \frac{b}{2}$. Функція $x = \varphi_1(t, t_1, x_1)$ також є розв'язком рівняння (1.1), який задовольняє початкову умову $x(t_0) = \tilde{x}$ при $\tilde{x} = \tilde{x}_1$: $\varphi_1(t_0, t_1, x_1) = \tilde{x}_1$. За єдиністю розв'язку задачі Коші

$$\varphi_1(t, t_1, x_1) = \varphi(t, \tilde{x}_1), \ t \in (t_0 - r_1, t_0 + r_1), \tag{1.40}$$

r_1 – деяке число, тобто цей довільно взятий розв'язок рівняння (1.1) входить у множину розв'язків (1.39) при $\tilde{x} = \tilde{x}_1$. При цьому $C_1 = \tilde{x}_1 = \varphi_1(t_0, t_1, x_1) = \psi(t_1, x_1)$, те саме значення $\tilde{x}_1$ задовольняє умову $\varphi(t_1, \tilde{x}_1) = x_1$. За теоремою 3 $\psi(t_1, x_1)$ – неперервна функція (t_1, x_1) близько до точки (t_0, x_0).

Множина усіх таких точок (t_1, x_1), тобто таких точок (t, x), що $C = \psi(t, x)$, $|C - x_0| \le \frac{b}{2}$ задовольняє рівність $\varphi(t, C) = x$, визначає окіл точки (t_0, x_0), у якому $\psi(t, x) = C$ є загальним інтегралом рівняння (1.1), а (1.39), тобто $x = \varphi(t, C)$, є загальним розв'язком рівняння (1.1).

5. *Гладкість розв'язку задачі Коші.*

Теорема 6. *Якщо функція $f(t,x)$ має неперервні похідні до порядку p, то розв'язок задачі Коші має неперервні похідні до порядку $p+1$.*

Це випливає з тотожностей $x'(t) = f(t,x(t))$, $x''(t) = f_t((t,x(t))) + f_x(t,x(t))x'(t) = f_t(t,x(t)) + f_x(t,x(t))f(t,x(t))$ і т.д.

6. *Голоморфність розв'язку задачі Коші.*

Означення 5. Функція $f(t,x)$ називається *голоморфною* в точці $(t_0,x_0$ якщо вона в деякому околі цієї точки збігається зі збіжним степеневим розвиненням $f(t,x) = \sum\limits_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}(t-t_0)^i(x-x_0)^j$. Функція $f(t,x)$ називається *голоморфною* в області Ω, якщо вона голоморфна в довільній точці області Ω.

Теорема Коші (про голоморфний розв'язок). *Якщо функція $f(t,x$ голоморфна в точці (t_0,x_0), то існує єдиний голоморфний в точці t_0 розв'язок задачі (1.1),(1.2)* $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(t-t_0)^k$.

1.3. Рівняння першого порядку нерозв'язані стосовно похідної

1.3.1. Основні поняття. Теорема існування й єдиності

Це рівняння вигляду

$$F(t,x,x') = 0. \tag{1.41}$$

Розв'язком цього рівняння на інтервалі (a,b) є така функція $x = \varphi(t)$, $\varphi \in C'(a,b)$, що $F(t,\varphi(t),\varphi'(t)) \equiv 0, t \in (a,b)$.

Припускаємо, що у кожній точці $(t,x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ рівняння (1.41) визначає одне або декілька значень $x_1' = f_1(t,x),\ldots,x_m' = f_m(t,x)$. Кожній точці $(t,x) \in D$ поставимо у відповідність m одиничних векторів, які утворюють з віссю Ox кути $\alpha_1 = arctg\ f_1(t,x),\ldots,\alpha_m = arctg\ f_m(t,x)$. Одержано поле напрямів – векторне поле рівняння (1.41).

Знаходження розв'язку рівняння (1.41) з геометричного погляду полягає у знаходженні інтегральних кривих кожного з рівнянь

$$x' = f_k(t,x),\ k = \overline{1,m},$$

тобто сукупності таких кривих $x = \varphi_k(t)$, $k = \overline{1,m}$ в області Ω, дотичні до яких у кожній точці (t,x) мають відповідно напрями $\alpha_k = arctg\ f_k(t,x)$, $k = \overline{1,m}$.

Приклад. Рівняння $(x')^2 - 1 = 0$ визначає у кожній точці площини два значення x' : $x'_1 = 1, x'_2 = -1$. Отже, через кожну точку (t, x) площини може проходити дві інтегральні криві рівняння: одна має напрям дотичної, що утворює кут 45^0 з віссю Ox, друга – кут -45^0. Це будуть прямі $x = t + C$, $x = -t + C$.

Задача Коші для рівняння (1.41) полягає у знаходженні такого розв'язку цього рівняння, який задовольняє умову

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.42}$$

тобто у знаходженні інтегральної кривої рівняння (1.41), що проходить через задану точку (t_0, x_0).

Якщо рівняння (1.41) можна розв'язати стосовно похідної, як це було у прикладі, то одержимо загалом декілька значень x'

$$x' = f_1(t, x), \ldots, x' = f_m(t, x). \tag{1.43}$$

Сукупність рівностей (1.43) можна розглядати як m диференціальних рівнянь, розв'язаних стосовно похідної. Відповідно матимемо m задач Коші $x' = f_k(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, $k = \overline{1, m}$ для рівнянь, розв'язаних стосовно похідної, а отже, при неперервних $f_k(t, x)$, не менше m інтегральних кривих рівняння (1.41) проходить через точку (t_0, x_0). Якщо кожна інтегральна крива має інший напрям дотичної в точці (t_0, x_0), то кажуть, що задача Коші *має єдиний розв'язок.*

У точці (t_0, x_0) порушується єдиність розв'язку рівняння (1.41), якщо через неї проходить дві інтегральні криві в тому самому напрямі, тобто з тією самою дотичною.

Область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ називається *областю єдиності* для рівняння (1.41), якщо через кожну точку $(t, x) \in \Omega$ у заданому напрямі проходить тільки одна інтегральна крива рівняння.

Теорема існування й єдиності. *Нехай: 1)* $F(t_0, x_0, x'_0) = 0$;

2) функція $F(t, x, x')$ *та її похідні першого порядку неперервні в деякому замкненому околі* U *точки* (t_0, x_0, x'_0);

3) $\frac{\partial F(t_0, x_0, x'_0)}{\partial x'} \neq 0$.

Тоді існує єдиний розв'язок $x = \varphi(t)$ *задачі Коші (1.41),(1.42), визначений у деякому околі точки* t_0, *при цьому* $\varphi'(t_0) = x'_0$.

Доведення. З умов 1-3 випливає, за теоремою про неявну функцію, існування такого замкненого околу V точки (t_0, x_0), у якому

рівняння (1.41) однозначно визначає як неявну неперервно диферен-ційовну функцію $x' = f(t,x)$. При цьому $F(t,x,f(t,x)) \equiv 0$, (t,x) V, $x'_0 = f(t_0,x_0)$.

Оскільки функція $f(t,x)$ неперервно диференційовна в замкненом околі V, вона задовольняє умову Ліпшиця у V, а тоді за теоремо Пікара існує єдиний розв'язок задачі Коші

$$x' = f(t,x),\ x(t_0) = x_0,$$

визначений у деякому околі (t_0-r, t_0+r) точки t_0. З означення розв'язк маємо $\varphi'(t) \equiv f(t,\varphi(t))$, $t \in (t_0-r, t_0+r)$, а тоді $F(t,\varphi(t),f(t,\varphi(t)))$ $F(t,\varphi(t),\varphi'(t)) \equiv 0$, $t \in (t_0-r, t_0+r)$, тобто функція $x = \varphi(t)$ є розв'язк рівняння (1.41) на інтервалі (t_0-r, t_0+r). Крім того, $\varphi(t_0) = x_0$, $\varphi'(t_0)$ $f(t_0,\varphi(t_0)) = x'_0$, тобто функція $x = \varphi(t)$ є розв'язком задачі Ко (1.41),(1.42) на інтервалі (t_0-r, t_0+r) і задовольняє умову $\varphi'(t_0) = x$

Зауваження. Якщо рівняння $F(t_0,x_0,x') = 0$ визначає m різних дій них значень $x'_k = f_k(t_0,x_0)$, $k = \overline{1,m}$ і для кожної точки (t_0,x_0,x'_k) ви конуються умови теореми, то через точку (t_0,x_0) у різних m напрям проходить по одній інтегральній кривій рівняння (1.41), а отже, чер точку (t_0,x_0) проходить точно m інтегральних кривих рівняння (1.4 у різних напрямах.

1.3.2. Особливі точки й особливі розв'язки

Означення 1. Точка (t_0,x_0), при якій задача Коші для рівнян (1.41) має єдиний розв'язок, називається *звичайною* точкою для рівня ня (1.41), точка (t_0,x_0), у якій порушується єдиність розв'язку зада Коші – *особливою* точкою для цього рівняння.

Особливими можуть бути лише ті точки, в яких порушується хо одна з умов теореми існування й єдиності. Умова 2 цієї теореми, як умова неперервності функції $f(t,x)$ у теоремі Пікара для рівняння

$$x' = f(t,x), \tag{1.44}$$

розв'язаного стосовно похідної здебільшого порушується у скінченні або зліченній множині точок (t_0,x_0).

Приклади. Праві частини обох рівнянь $\frac{dx}{dt} = \frac{t+x}{t+2x+1}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{t+2x+1}{t+x}$ мають розрив у точці, що є розв'язком системи алгебричних рівнянь

$$t + x = 0,\ t + 2x + 1 = 0,$$

ґа у точці $(1, -1)$. Ця точка є особливою для обох рівнянь. Розв'язуючи рівняння, бачимо, що жодна інтегральна крива рівняння не проходить через неї, але в довільному її околі виконуються умови теореми Пікара і тому через довільну точку поза $(1, -1)$ проходить єдина інтегральна крива кожного з цих рівнянь.

Інтегруючи рівняння $\frac{dx}{dt} = \frac{2x}{t}$, одержуємо $x = Ct^2$ – сім'ю парабол $x = 0$. Точка $(0, 0)$ – особлива точка, через яку проходить безліч інтегральних кривих рівняння.

Дослідження поведінки інтегральних кривих в околі особливої точки рівняння першого порядку, розв'язаного стосовно похідної, проведемо пізніше.

Умова 3 теореми існування й єдиності, як і умова Ліпшиця у теоремі Пікара для рівняння (1.44), може порушуватись на окремих кривих. Якщо ці криві є інтегральними, то одержуємо *особливі інтегральні криві* рівняння або особливі розв'язки.

Означення 2. Особливим розв'язком рівняння називається такий розв'язок рівняння, кожна точка якого є особливою, тобто така інтегральна крива рівняння, кожної точки якої дотикається принаймні одна інтегральна крива цього рівняння.

Наприклад, права частина рівняння $x' = (t - x)^{\frac{1}{2}}$ є неперервною, але $(t - x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(t-x)^{\frac{1}{2}}}$ на прямій $x = t$. Тільки функція $x = t$ може бути особливим розв'язком заданого рівняння. Ця функція взагалі не є розв'язком рівняння $x' = (t - x)^{\frac{1}{2}}$, а тому це рівняння не має особливих розв'язків.

Якщо функція F неперервно диференційовна (виконується умова 2 теореми існування й єдиності), то особливими розв'язками рівняння (1.41) можуть бути лише ті розв'язки, для яких не виконується умова цієї теореми, тобто для яких одночасно

$$F(t, x, x') = 0, \ \frac{\partial}{\partial x'} F(t, x, x') = 0. \tag{1.45}$$

Виключивши x' із (1.45), одержимо

$$\Phi(t, x) = 0. \tag{1.46}$$

Крива (1.46), тобто крива (1.45), називається *дискримінантною кривою* рівняння (1.41).

При зазначеній умові на F (неперервній диференційовності) особливими інтегральними кривими рівняння (1.41) можуть бути тільки

дискримінантні криві цього рівняння. Однак умови теореми є лиш достатніми, тому дискримінантні криві рівняння є тільки підозрілим на особливі інтегральні криві цього рівняння.

Для того щоб дискримінантна крива рівняння (1.41) була його особ ливим розв'язком, необхідно, щоб вона:

а) була розв'язком рівняння;

б) кожної точки її дотикалась принаймні ще одна інтегральна крив цього рівняння.

Приклад. $x = tx' + (x')^2$. Дискримінантною кривою цього рівнянн є крива

$$x = tx' + (x')^2,\ 0 = t + 2x',$$

тобто парабола $x = -\frac{t^2}{4}$. Функція $x = -\frac{t^2}{4}$ є розв'язком заданог рівняння. Перевіримо виконання умови б. Рівняння має загальни розв'язком сім'ю прямих $x = Ct + C^2$ (C – довільна стала). Неха $x_1(t) = -\frac{t^2}{4}$, $x_2(t) = Ct + C^2$. Щоб перевірити виконання умови б достатньо показати, що для довільного значення t_0 знайдеться так значення сталої $C = C_0$, що

$$x_1(t_0) = x_2(t_0), \quad x_1'(t_0) = x_2'(t_0),$$

тобто $-\frac{t_0^2}{4} = Ct_0 + C^2$, $-\frac{t_0}{2} = C$. Оскільки при $C = C_0 = -\frac{t_0}{2}$ маєм правильну тотожність $-\frac{t_0^2}{4} = -\frac{t_0^2}{2} + \frac{t_0^2}{4}$, то умова б виконується. Отже функція $x = -\frac{t^2}{4}$ є особливим розв'язком заданого рівняння.

Перевіряючи умову б, ми одночасно бачили, що точки параболи $x = -\frac{t^2}{4}$ з абсцисою t_0 дотикається інтегральна пряма $x = -\frac{t_0}{2}t + (-\frac{t_0}{2})^2$.

Означення 3. Крива l називається *обвідною* однопараметричної сім кривих

$$\Phi(t, x, C) = 0,\ C \in [C_1, C_2], \tag{1.47}$$

якщо кожної точки кривої l дотикається якась крива сім'ї (1.47) і жодн дуга кривої l не збігається з дугою окремої кривої сім'ї (1.47).

Теорема 1. *Нехай (1.47) – загальний розв'язок рівняння (1.41) і сім' кривих (1.47) має обвідну l. Тоді l є особливим розв'язком рівнянн (1.47).*

Д о в е д е н н я. Довільна точка M обвідної l одночасно нале жить деякій кривій сім'ї (1.47) (за означенням обвідної), тобто деякі

інтегральній кривій рівняння (1.41). У точці M дотичні до l та цієї інтегральної кривої збігаються (знову за означенням обвідної) і мають напрям векторного поля рівняння (1.41). Отож, l – розв'язок рівняння (1.41). Оскільки через довільну точку l проходить дві інтегральні криві рівняння (1.41) – l і крива сім'ї (1.47) й у спільній точці ці криві мають спільну дотичну, то l – особливий розв'язок рівняння (1.41).

Теорема 2. *Нехай функція $\Phi(t, x, C)$ має неперервні похідні першого порядку та похідні Φ'_t, Φ'_x одночасно не дорівнюють нулю. Тоді існує обвідна сім'ї кривих (1.47), яку визначає система рівнянь*

$$\Phi(t, x, C) = 0,\ \Phi'_C(t, x, C) = 0. \tag{1.48}$$

Доведення. Нехай обвідна l сім'ї кривих (1.47) задана параметрично $t = t(\tau), x = x(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta]$. За означенням обвідної для кожного значення $\tau \in [\alpha, \beta]$ існує таке значення $C = C(\tau)$, що

$$\Phi(t(\tau), x(\tau), C(\tau)) = 0,\ \tau \in [\alpha, \beta]. \tag{1.49}$$

Диференціюючи цю тотожність за змінною τ, одержуємо

$$\Phi'_t t'(\tau) + \Phi'_x x'(\tau) + \Phi'_C C'(\tau) = 0. \tag{1.50}$$

$\frac{x'(\tau)}{t'(\tau)}$ – кутовий коефіцієнт дотичної до кривої l, $-\frac{\Phi'_t}{\Phi'_x}$ – до кривої сім'ї (1.47). За означенням обвідної $\frac{x'(\tau)}{t'(\tau)} = -\frac{\Phi'_t(t(\tau),x(\tau),C(\tau))}{\Phi'_x(t(\tau),x(\tau),C(\tau))}$, а отже,

$$\Phi'_t(t(\tau), x(\tau), C(\tau))t'(\tau) + \Phi'_x(t(\tau), x(\tau), C(\tau))x'(\tau) = 0. \tag{1.51}$$

Тепер з (1.50) та (1.51) випливає, що $\Phi'_C C'(\tau) = 0$. Оскільки $C'(\tau)$ відмінна від тотожного нуля (різних точок обвідної дотикаються різні криві сім'ї (1.47)), то

$$\Phi'_C(t(\tau), x(\tau), C(\tau)) = 0,\ \tau \in [\alpha, \beta]. \tag{1.52}$$

Одночасне виконання тотожностей (1.49) та (1.52) означає, що обвідна задовольняє систему (1.48).

Нехай тепер l – деяка задана параметрично крива, яка задовольняє систему (1.49). Маємо (1.49) та (1.52). Диференціюючи (1.49) за змінною τ, одержуємо (1.50), а з врахуванням (1.52) одержуємо (1.51). (1.51)

означає, що крива l і крива сім'ї (1.47) у спільній точці мають спільн дотичну. Отже, задана системою (1.49) крива l – обвідна (1.47).

Приклад. Загальним розв'язком рівняння $x = tx' + (x')^2$ є сім'я пр мих $x = Ct + C^2$. Розв'язуємо систему вигляду (1.49) : $x = Ct + C^2$, 0 $t + 2C$. Маємо $C = -\frac{t}{2}$, $x = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4}$, тобто $x = -\frac{t^2}{4}$. Це особливи розв'язок заданого рівняння.

1.3.3. Методи інтегрування

1. Рівняння (1.41) можна розв'язати стосовно похідної

$$x' = f_k(t, x),\ k = \overline{1, m}. \qquad (1.5$$

Сукупність $x = \varphi_k(t, C)$, $k = \overline{1, m}$ загальних розв'язків кожного з рі нянь (1.53) є загальним розв'язком рівняння (1.41).

2. Рівняння (1.41) можна задати параметрично

$$t = \varphi(u, v),\ x = \psi(u, v),\ x' = \xi(u, v),\ (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2. \qquad (1.54$$

Згадаємо, що $x' = \frac{dx}{dt}$, тобто $dx = x'dt$. Із (1.54) знаходимо

$$dt = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv, \qquad dx = \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv,$$

тоді $\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \xi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right)$ або

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial u} - \xi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v} - \xi\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)dv = 0. \qquad (1.54'$$

Одержали диференціальне рівняння, розв'язане стосовно похідної. Як що $v = v(u, C)$ – його загальний розв'язок, то з (1.54) одержуєм загальний розв'язок рівняння (1.41) у параметричному вигляді $t = \varphi(u, v(u, C))$, $x = \psi(u, v(u, C))$.

Цей метод інтегрування рівняння (1.41) називається *методом вве дення параметра.*

Метод введення параметра застосовують, якщо :

1) рівняння (1.41) можна задати параметрично;

2) диференціальне рівняння (1.54') інтегрується в квадратурах.

Умова 1 виконується завжди для рівнянь, розв'язаних стосовно t або x, тобто для рівнянь вигляду

$$t = f(x, x'), \qquad (1.55$$

$$x = g(t, x'). \tag{1.56}$$

Рівняння (1.55) має такий параметричний запис:

$$x = x,\ x' = p,\ t = f(x, p).$$

Розглянемо окремі випадки, коли виконується умова 2.

При розв'язуванні рівняння $t = f(x')$ чи $x = g(x')$ методом введення параметра треба розв'язувати рівняння з відокремлюваними змінними.

Рівняння Лагранжа

$$x = t\varphi(x') + \psi(x') \tag{1.57}$$

є окремим випадком рівняння (1.56). Його параметричний запис

$$t = t,\ x' = p,\ x = t\varphi(p) + \psi(p).$$

Звідси $\varphi(p)dt + t\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp = pdt$ або

$$(\varphi(p) - p)\frac{dt}{dp} + t\varphi'(p) + \psi'(p) = 0. \tag{1.58}$$

Рівняння (1.58) є лінійним, а отже, інтегрується у квадратурах.

Якщо $\varphi(p) \equiv p$, то одержуємо *рівняння Клеро* $x = tx' + \psi(x')$. Замість (1.58) одержуємо $(t\varphi'(p) + \psi'(p))dp = 0$. Звідси $dp = 0$ або $tp + \psi'(p) = 0$. Враховуючи параметричний запис рівняння, одержуємо загальний розв'язок рівняння Клеро $x = Ct + \psi(C)$, а також окремий розв'язок рівняння у параметричному вигляді $tp + \psi'(p) = 0$, $x = tp + \psi(p)$. Можна показати, що цей розв'язок є особливим розв'язком рівняння Клеро.

Розділ 2. РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ І НОРМАЛЬНІ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Основні поняття та властивості. Теореми існування й єдиності розв'язку задачі Коші

2.1.1. Основні поняття. Еквівалентність канонічного р няння n-го порядку та нормальної системи рівнянь

Означення 1. Співвідношення

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0,$$

яке сполучає змінну t, функцію $x(t)$ та її похідні до порядку n, нази ється диференціальним рівнянням порядку n.

Розв'язком цього рівняння на інтервалі (a, b) називається функ $x = x(t)$ класу $C^n(a, b)$, після підставляння якої в рівняння одержує тотожність на інтервалі (a, b).

Означення 2. Сукупність співвідношень

$$F_1(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(q_1)}, \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(q_n)}) = 0$$

$$\ldots$$

$$F_n(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(q_1)}, \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(q_n)}) = 0$$

між змінними t, функціями $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ та їхніми п хідними відповідно до порядків $q_1, \ldots, q_n$, називається системою диф ренціальних рівнянь порядку $q = q_1 + \cdots + q_n$.

Сукупність функцій $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ відповідно клас $C^{q_1}(a, b), \ldots, C^{q_n}(a, b)$ називається розв'язком системи диференціал них рівнянь на інтервалі (a, b), якщо після підставляння їх у цю сист му кожне з рівнянь системи перетворюється у тотожність на інтерва (a, b).

Система диференціальних рівнянь, розв'язана стосовно похідних н вищих порядків

$$x_1^{(q_1)} = f_1(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(q_1-1)}, \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(q_n-1)})$$

$$\ldots$$

$$x_n^{(q_n)} = f_n(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(q_1-1)}, \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(q_n-1)}),$$

називається *канонічною* системою диференціальних рівнянь.

Окремим випадком канонічної система диференціальних рівнянь є диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане стосовно старшої похідної

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \tag{2.1}$$

канонічне диференціальне рівняння порядку n).

Канонічна система диференціальних рівнянь при $q_1 = \cdots = q_n = 1$ має вигляд

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\ldots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{2.2}$$

називається *нормальною системою диференціальних рівнянь.*

Надалі розглядатимемо рівняння (2.1) та систему (2.2). Між ними існує зв'язок: *рівняння (2.1) завжди можна звести до деякої нормальної системи порядку n, а при певних умовах систему (2.2) можна звести до еквівалентного їй канонічного рівняння n-го порядку.* Покажемо це.

Нехай $x = x(t)$ – розв'язок рівняння (2.1) на інтервалі (a, b). Введемо нові функції

$$x_1 = x(t),\ x_2 = x'(t),\ \ldots,\ x_n = x^{(n-1)}(t). \tag{2.3}$$

Одержуємо очевидні тотожності

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) \\ &\ldots \\ x_{n-1}'(t) &= x_n(t) \\ x_n'(t) &= f(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n-1}(t)),\ t \in (a, b). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Це означає, що сукупність функцій (2.3) є розв'язком на (a, b) системи

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\ldots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Навпаки, якщо (2.3) є розв'язком на (a,b) системи (2.5), то правильн тотожності (2.4), а тоді $x_1 \in C^n(a,b)$ і $x_n' = x_{n-1}'' = \dots = x_1^{(n)} =$ $= f(t, x_1(t), x_1'(t), \dots, x_1^{(n)}(t))$, $t \in (a,b)$. Отже, $x = x_1(t)$ є розв'язко рівняння (2.1) на інтервалі (a,b).

Ми довели, що рівняння (2.1) еквівалентне нормальній системі (2.5

Покажемо, що при додаткових припущеннях на функції f_i знахо ження розв'язку нормальної системи диференціальних рівнянь (2.2) зв диться до розв'язування деякого канонічного рівняння порядку n.

Нехай $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ – розв'язок системи (2.2) на інте валі (a,b). Тоді маємо

$$\begin{aligned} x_1'(t) &\equiv f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\dots \qquad\qquad , t \in (a,b). \\ x_n'(t) &\equiv f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned} \tag{2.}$$

Припускаємо, що

функції $f_i(t, x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, n$ мають неперервні частинні похідні до порядку n. (2.

Продиференціюємо першу з тотожностей (2.6) за t. Матимемо

$$x_1''(t) = \frac{\partial f_1(t,x_1(t),\dots,x_n(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1(t,x_1(t),\dots,x_n(t))}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial f_1(t,x_1(t),\dots,x_n(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1(t,x_1(t),\dots,x_n(t))}{\partial x_i} f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Нехай $F_2(t, x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f_1(t,x_1,\dots,x_n)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1(t,x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n$

Тоді одержану вище тотожність записуємо як

$$x_1''(t) \equiv F_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in (a,b).$$

Диференціюючи її послідовно ще $n-2$ рази за t, вводячи на кожно кроці функції

$$F_k(t, x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial F_{k-1}(t,x_1,\dots,x_n)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{k-1}(t,x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n),$$

$k = \overline{3,n}$, одержуємо систему тотожностей

$$\begin{aligned} x_1'(t) &\equiv f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_1''(t) &\equiv F_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\dots \\ x_1^{(n-1)}(t) &\equiv F_{n-1}(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_1^{(n)}(t) &\equiv F_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in (a,b). \end{aligned} \tag{2.}$$

Розглянемо сукупність перших $n-1$ рівнянь цієї системи для кожного фіксованого значення t як алгебричну систему рівнянь

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_1'' &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots \\ x_1^{(n-1)} &= F_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Якщо

$$\frac{D(f_1, F_2, \dots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_n)} \neq 0, (t, x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \tag{2.10}$$

систему (2.9) можна розв'язати стосовно $x_2, \dots, x_n$. Її розв'язок

$$x_2 = \omega_2(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)}), \dots, x_n = \omega_n(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)}) \tag{2.11}$$

підставляємо в останню з тотожностей (2.8). Одержуємо $x_1^{(n)}(t) \equiv F_n(t, x_1(t), \omega_2(t, x_1(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t)), \dots, \omega_n(t, x_1(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t))$, $t \in (a, b)$, тобто

$$x_1^{(n)}(t) \equiv f(t, x_1(t), x_1'(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t)), t \in (a, b). \tag{2.12}$$

Отже, якщо $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ – розв'язок системи (2.2) на інтервалі (a, b) і виконуються припущення (2.7) та (2.10), то функція $x = x_1(t)$ задовольняє рівняння

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \tag{2.13}$$

на інтервалі (a, b), де $f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) = F_n(t, x, \omega_2(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \dots, \omega_n(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}))$.

Доведемо таке: якщо $x = x_1(t)$ є розв'язком рівняння (2.13) на інтервалі (a, b), а функції $x_2(t), \dots, x_n(t)$ знайдені з (2.9), тобто за формулами (2.11), то вектор-функція $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ задовольняє систему (2.2) на інтервалі (a, b).

Оскільки $x_2(t), \dots, x_n(t)$ знайдені з (2.9), то вже маємо

$$x_1'(t) \equiv f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in (a, b). \tag{2.14}$$

Диференціюємо цю тотожність і віднімаємо від неї другу з тотожностей (2.9). Враховуючи вигляд F_2, матимемо

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))\right) \equiv 0, t \in (a,b),$
враховуючи (2.14), –

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f_1(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))\right) \equiv 0, t \in (a,b).$$

Диференціюємо далі (за t) $k-1$ з тотожностей (2.8) та віднімає від неї k-ву тотожність, $k = \overline{3,n}$. Зважаючи на вирази для функцій і тотожність (2.14), одержуємо

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f_1(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))\right) \equiv 0,$$

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_2(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))\right) \equiv 0,$$

$$\ldots$$

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_{n-1}(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))\right) \equiv 0, t \in (a,b)$$

Розглядаємо одержану систему тотожностей як лінійну алгебрич систему з невідомими $\frac{dx_i}{dt} - f_i(t,x_1(t),\ldots,x_n(t)), i = \overline{2,n}$. Визначник за умовою (2.10), відмінний від нуля, тому

$$\frac{dx_i}{dt} - f_i(t,x_1(t),\ldots,x_n(t)) \equiv 0, i = \overline{2,n}.$$

Приєднуючи до цих тотожностей тотожність (2.14), одержуємо (2.6

Отже, в припущеннях (2.7) та (2.10) нормальна система дифере ціальних рівнянь (2.2) еквівалентна канонічному рівнянню (2.13).

2.1.2. Геометричне тлумачення нормальної системи та розв'язку

Сукупність $t = t, x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ є параметричним з писом деякої кривої у просторі $\mathbb{R}^{n+1}$. Ця крива є графіком розв'язк $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ системи диференціальних рівнянь (2.2). Вон називається *інтегральною кривою* системи (2.2). Записуючи систем (2.2) у вигляді

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{f_1(t,x_1,\ldots,x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t,x_1,\ldots,x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(t,x_1,\ldots,x_n)},$$

...имо, що вектор дотичної до інтегральної кривої системи (2.2) пропорційний векторові $(1, f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n))$.

Поставимо у відповідність кожній точці $(t, x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ вектор $(1, f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n))$. Сукупність таких векторів називається *векторним полем*, заданим системою (2.2).

Отже, розв'язати систему (2.2) – це означає знайти таку гладку криву у просторі $\mathbb{R}^{n+1}$, дотична до якої у кожній точці має напрям заданого системою (2.2) векторного поля.

Задача *Коші* для системи (2.2) полягає у знаходженні такої інтегральної кривої системи, яка проходить через задану точку $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тобто у знаходженні такого розв'язку $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ системи, що задовольняє умови

$$x_1(t_0) = x_{10}, \ldots, x_n(t_0) = x_{n0}. \tag{2.15}$$

Ці умови називаються початковими умовами для нормальної системи (2.2).

Рівняння (2.1) введенням допоміжних функцій (2.3) зводиться до нормальної системи (2.5), початкові умови для якої мають вигляд (2.15). Записуючи (2.3), записуємо їх у вигляді

$$x(t_0) = x_{10}, x'(t_0) = x_{20}, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n0}. \tag{2.16}$$

Умови (2.16) називаються початковими умовами для диференціального рівняння порядку n.

Задача Коші для рівняння (2.1) полягає у знаходженні такого розв'язку $x = x(t)$ рівняння, що задовольняє умови (2.16).

2.1.3. Теореми існування й єдиності

Теорема Пікара для нормальної системи. *Нехай функції $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$ визначені в області $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, неперервні і задовольняють умову Ліпшиця за аргументами $x_1, \ldots, x_n$, тобто існує така стала L, що для довільних $(t, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$, $(t, \tilde{\tilde{x}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{x}}_n) \in \Omega$ правильні нерівності*

$$|f_i(t, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) - f_i(t, \tilde{\tilde{x}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{x}}_n)| \le L \sum_{k=1}^{n} |\tilde{x}_k - \tilde{\tilde{x}}_k|, \; i = \overline{1, n}. \tag{2.17}$$

Тоді для довільної точки $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in \Omega$ існує єдиний розв'язок $x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ задачі Коші (2.2),(2.15), визначений у деякому околі точки t_0.

Д о в е д е н н я. Як при доведенні теореми Пікара для скалярн рівняння першого порядку, замінюємо задачу (2.2),(2.15) еквівалент системою інтегральних рівнянь

$$x_1 = x_{10} + \int_{t_0}^{t} f_1(t, x_1, \dots, x_n)dt$$

$$\dots \qquad (2$$

$$x_n = x_{n0} + \int_{t_0}^{t} f_n(t, x_1, \dots, x_n)dt.$$

Нехай $P = \{(t, x_1, \dots, x_n) : |t - t_0| \le a, |x_i - x_{i0}| \le b_i,\ i = \overline{1,n}\}$, чи a_i, b_i вибрані так, щоб паралелоедр P був всередині області Ω, $P_r = \{(t, x_1, \dots, x_n) : |t - t_0| \le r \le a, |x_i - x_{i0}| \le b_i,\ i = \overline{1,n}\}$. Введ також клас вектор-функцій

$$\mathcal{M}_r = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C[t_0 - r, t_0 + r] : \varphi_i(t_0) = x_{i0}, |\varphi_i(t) - x_{i0}| \le$$
$$t \in [t_0 - r, t_0 + r],\ i = \overline{1,n}\} = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C[t_0 - r, t_0 + r] :$$
$$\varphi_i(t_0) = x_{i0}, i = \overline{1,n}, (t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in P_r \text{ для } t \in [t_0 - r, t_0 +$$

Це клас функцій, графіки яких проходять через точку $(t_0, x_{10}, \dots,$ і не виходять за межі P_r при всіх $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$.

Доведемо існування розв'язку системи інтегральних рівнянь (2 у класі $\mathcal{M}_r$ при певних r методом послідовних наближень. Побуду послідовності функцій

$$\varphi_1^{(p+1)}(t) = x_{10} + \int_{t_0}^{t} f_1(t, \varphi_1^{(p)}(t), \dots, \varphi_1^{(p)}(t))dt$$
$$\dots$$
$$\varphi_n^{(p+1)}(t) = x_{n0} + \int_{t_0}^{t} f_n(t, \varphi_1^{(p)}(t), \dots, \varphi_1^{(p)}(t))dt,\ p = 0, 1, \dots$$
$$\varphi_1^{(0)}(t) = x_{10}, \dots, \varphi_n^{(0)}(t) = x_{n0}.$$

Нехай $M = \max\limits_{\substack{(t, x_1, \dots, x_n) \in P \\ i = \overline{1,n}}} |f_i(t, x_1, \dots, x_n)|$. Оскільки

$$|\varphi_i^{(p+1)}(t) - x_{i0}| = |\int_{t_0}^{t} f_i(t, \varphi_1^{(p)}(t), \dots, \varphi_1^{(p)}(t))dt| \le M|t - t_0| \le Mr,$$

$\overline{1,n}$, то при $r \le \min\{a, \frac{b_1}{M}, \dots, \frac{b_n}{M}\}$ побудовані послідовності фун належать до класу $\mathcal{M}_r$. Введемо функцію

$$\omega^{(p)}(t) = |\varphi_1^{(p+1)}(t) - \varphi_1^{(p)}(t)| + \dots + |\varphi_n^{(p+1)}(t) - \varphi_n^{(p)}(t)|.$$

держуємо

$$\omega^{(p)}(t) = |\int_{t_0}^{t}[f_1(t,\varphi_1^{(p)}(t),\dots,\varphi_n^{(p)}(t)) - f_1(t,\varphi_1^{(p-1)}(t),\dots,\varphi_n^{(p-1)}(t))]dt| +$$

$$+ |\int_{t_0}^{t}[f_n(t,\varphi_1^{(p)}(t),\dots,\varphi_n^{(p)}(t)) - f_n(t,\varphi_1^{(p-1)}(t),\dots,\varphi_n^{(p-1)}(t))]dt|.$$

Маючи на умову Ліпшиця, маємо

$$\omega^{(p)}(t) \le |\int_{t_0}^{t} L\omega^{(p-1)}(t)dt| + \dots + |\int_{t_0}^{t} L\omega^{(p-1)}(t)dt| = nL|\int_{t_0}^{t}\omega^{(p-1)}(t)dt|. \tag{2.19}$$

$\omega^{(0)}(t) \le C$, а з (2.19)

$$\omega^{(1)}(t) \le Ln|\int_{t_0}^{t}\omega^{(0)}(t)dt| \le CLn|t-t_0|$$

$$\omega^{(2)}(t) \le Ln|\int_{t_0}^{t}\omega^{(1)}(t)dt| \le C(Ln)^2|\int_{t_0}^{t}|t-t_0|dt| = C(Ln)^2\frac{|t-t_0|^2}{2}\dots.$$

Використовуючи метод математичної індукції, доводимо, що

$$\omega^{(p)}(t) \le C(Ln)^p\frac{|t-t_0|^p}{p!} \le C(Ln)^p\frac{r^p}{p!}.$$

Звідси випливає рівномірна збіжність на відрізку $[t_0-r, t_0+r]$ розвинення $\sum\limits_{p=0}^{\infty}\omega^{(p)}(t)$, а отже, розвинень $\sum\limits_{p=0}^{\infty}|\varphi_i^{(p+1)}(t) - \varphi_i^{(p)}(t)|$, $i=\overline{1,n}$ та послідовностей $\varphi_1^{(p)}(t),\dots,\varphi_n^{(p)}(t)$.

Далі показуємо, що вектор-функція $\varphi_1(t) = \lim\limits_{p\to\infty}\varphi_1^{(p)}(t),\dots,\varphi_n(t) = \lim\limits_{p\to\infty}\varphi_n^{(p)}(t)$ є розв'язком системи (2.2) на всьому відрізку $[t_0-r, t_0+r]$.

Маємо

$$\varphi_i^{(p+1)}(t) - \varphi_i(t) = \int_{t_0}^{t}[f_i(t,\varphi_1^{(p)}(t),\dots,\varphi_n^{(p)}(t)) - f_i(t,\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))]dt.$$

Оцінимо праву частину

$$|\int_{t_0}^{t}[f_i(t,\varphi_1^{(p)}(t),\dots,\varphi_n^{(p)}(t)) - f_i(t,\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))]dt| \le$$

$\le |\int_{t_0}^{t}\sum\limits_{k=1}^{n}|\varphi_i^{(p)}(t) - \varphi_i(t)|dt|$, $i=\overline{1,n}$. Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n}|\varphi_i^{(p)}(t) - \varphi_i(t)| \to 0$, то $f_i(t,\varphi_1^{(p)}(t),\dots,\varphi_n^{(p)}(t))dt \to \int_{t_0}^{t} f_i(t,\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))dt$, $p\to\infty$. Отож, переходячи у тотожностях $\varphi_i^{(p+1)}(t) = x_{i0} + \int_{t_0}^{t} f_i(t,\varphi_1^{(p)}(t),\dots,\varphi_n^{(p)}(t))dt$

до границі при $p \to \infty$, одержуємо

$$\varphi_i(t) = x_{i0} + \int_{t_0}^{t} f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))dt, \; i = \overline{1,n}; t \in [t_0 - r, t_0 + r].$$

Доведемо єдиність розв'язку задачі Коші. Якщо $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$–два розв'язки задачі (2.1),(2.15), а отже, два розв'яз системи інтегральних рівнянь (2.18), то маємо тотожності

$$\varphi_i(t) = x_{i0} + \int_{t_0}^{t} f_i(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)dt$$

$$\psi_i(t) = x_{i0} + \int_{t_0}^{t} f_i(t, \psi_1, \ldots, \psi_n)dt, \; i = \overline{1,n}.$$

Нехай $u(t) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|$. Із попередніх тотожностей одержує

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} |\int_{t_0}^{t} [f_i(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) - f_i(t, \psi_1, \ldots, \psi_n)]dt|.$$

Враховуючи, що функції f_i задовольняють умову Ліпшиця, звід одержуємо $u(t) \leq nL|\int_{t_0}^{t} u(t)dt|$. За лемою Гронуола $u(t) = 0$, а отж $\varphi_i(t) = \psi_i(t)$, $i = \overline{1,n}, t \in [t_0 - r, t_0 + r]$.

Теорема Пікара для канонічного рівняння. *Нехай функція $f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$ неперервна в області $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ і задовольняє умо Ліпшиця за аргументами $x, x', \ldots, x^{(n-1)}$, тобто існує така стала $L >$ що для довільних $(t, \tilde{x}, \tilde{x}', \ldots, \tilde{x}^{(n-1)}), (t, \tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{x}}', \ldots, \tilde{\tilde{x}}^{(n-1)}) \in \Omega$ правиль нерівність*

$$|f(t, \tilde{x}, \tilde{x}', \ldots, \tilde{x}^{(n-1)}) - f(t, \tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{x}}', \ldots, \tilde{\tilde{x}}^{(n-1)})| \leq L \sum_{k=0}^{n-1} |\tilde{x}^{(k)} - \tilde{\tilde{x}}^{(k)}|.$$

Тоді для довільної точки $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in \Omega$ існує єдиний розв'яз $x = \varphi(t)$ задачі Коші (2.1),(2.16), визначений у деякому околі точки

Д о в е д е н н я. Вводячи нові функції (2.3), зводимо зада (2.1),(2.16) до задачі Коші (2.5),(2.15) для нормальної системи дифере ціальних рівнянь. Праві частини системи (2.5) задовольняють умо теореми Пікара для нормальної системи, тому існує єдиний розв'яз $x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ задачі Коші (2.5),(2.15), визначений у де кому околі точки t_0. Функція $x = \varphi_1(t)$ є єдиним розв'язком зада (2.1),(2.16).

2.1.4. Загальний розв'язок

Канонічне рівняння n-го порядку $x^{(n)} = f(t)$ розв'язується його n-кратним інтегруванням. Одержуємо множину функцій, яка залежить від n довільних сталих $C_1, \ldots, C_n$. Тому природним є таке означення.

Означення 3. Нехай Ω – область єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння (2.1). *Загальним розв'язком* рівняння (2.1) в області $U \subset \Omega$ називається така функція $x = \varphi(t, C_1, \ldots, C_n)$, що:

1) для довільних $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in U$ система

$$\varphi(t_0, C_1, \ldots, C_n) = x_{10}$$
$$\frac{d\varphi(t_0, C_1, \ldots, C_n)}{dt} = x_{20}$$
$$\ldots$$
$$\frac{d^{n-1}\varphi(t_0, C_1, \ldots, C_n)}{dt^{n-1}} = x_{n0},$$

має єдиний розв'язок $C_{10}, \ldots, C_{n0}$;

2) функція $x = \varphi(t, C_{10}, \ldots, C_{n0})$ є розв'язком задачі Коші для рівняння (2.1) з початковими даними $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in U$.

Зауважимо, що $(C_{10}, \ldots, C_{n0}) \in J(U) \subset \mathbb{R}^n$ при $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in U$. З означення загального розв'язку випливає, що для довільних $(C_1, \ldots, C_n) \in J(U)$ функція $x = \varphi(t, C_1, \ldots, C_n)$ є розв'язком рівняння (2.1) і довільний розв'язок задачі Коші з початковою точкою в U виражається цією функцією при певних $(C_1, \ldots, C_n) \in J(U)$.

Розглядаємо нормальну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\ldots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{2.2}$$

в області $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Припускаємо, що функції $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, n$ неперервно диференційовні в Ω, а отже, за теоремою Пікара через кожну точку області Ω проходить єдина інтегральна крива $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ системи.

Означення 4. *Загальним розв'язком* системи (2.2) в області $U \subset \Omega$ називається така система функцій:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t, C_1, \ldots, C_n) \\ &\ldots \\ x_n &= \varphi_n(t, C_1, \ldots, C_n), \end{aligned} \tag{2.20}$$

що

1) для довільних $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in U$ система (2.20) має єдин розв'язок $C_{10}, \ldots, C_{n0}$;

2) система функцій

$$x_1 = \varphi_1(t, C_{10}, \ldots, C_{n0})$$
$$\ldots$$
$$x_n = \varphi_n(t, C_{10}, \ldots, C_{n0}),$$

є розв'язком задачі Коші для системи (2.2) з початковими даними $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in U$.

Зауважимо, що $(C_1, \ldots, C_n) \in J(U) \subset \mathbb{R}^n$, якщо $(t, x_1, \ldots, x_n) \in$ Якщо (2.20) є загальним розв'язком системи (2.2) в U, то для довільних $(t, x_1, \ldots, x_n) \in U$ система (2.20) однозначно розв'язна стосов $C_1, \ldots, C_n$:

$$C_1 = \psi_1(t, x_1, \ldots, x_n)$$
$$\ldots \qquad (2.$$
$$C_n = \psi_n(t, x_1, \ldots, x_n),$$

при довільних $(C_1, \ldots, C_n) \in J(U)$ (2.20) є розв'язком системи (2.2 U.

Кожна з функцій $\psi_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$ належить класу $C^1(\Omega)$ (теоремою про обернене відображення) і тотожно дорівнює сталій, як замість $x_1, \ldots, x_n$ підставити розв'язок системи (2.2).

2.2. Інтеграл, перший інтеграл, загальний інтеграл нормальної системи диференціальних рівнянь

Означення 1. Відмінна від тотожної сталої функція $\psi(t, x_1, \ldots,$ називається *інтегралом* системи (2.2), якщо вона перетворюється у тотожну сталу на розв'язку системи (2.2), тобто

$$\psi(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \equiv C \qquad (2.$$

для довільного розв'язку $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системи (2.2).

Якщо $\psi(t, x_1, \ldots, x_n)$ – інтеграл системи (2.2), то рівність

$$\psi(t, x_1, \ldots, x_n) = C$$

називається *першим інтегралом* системи (2.2).

Припускаємо, що $\qquad f_i \in C^1(\Omega),\ i = \overline{1.n}.$

Диференціюючи тотожність (2.22) за t, одержуємо

$$\frac{\partial\psi(t,x(t))}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi(t,x(t))}{\partial x_j}f_j(t,x(t))=0 \tag{2.23}$$

на довільного розв'язку $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$ системи (2.2). Насамперед (2.23) є тотожністю за $(t,x_1,\dots,x_n)\in\Omega$, оскільки кожна така точка належить якомусь розв'язку системи (2.2). Навпаки, якщо виконується (2.23) в області Ω, то диференціал функції $\psi(t,x(t))$ дорівнює нулю вздовж розв'язку системи (2.2), а тоді є (2.22) вздовж розв'язку системи (2.2).

Отже, неперервно диференційовна в області Ω функція $\psi(t,x_1,\dots,x_n)$ є інтегралом системи (2.2), коли вона задовольняє тотожність

$$\frac{\partial\psi(t,x_1,\dots,x_n)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi(t,x_1,\dots,x_n)}{\partial x_j}f_j(t,x_1,\dots,x_n)=0,\quad (t,x_1,\dots,x_n)\in\Omega. \tag{2.24}$$

Означення 2. Неперервні функції $\psi_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,\psi_k(t,x_1,\dots,x_n)$ $(k\le n)$ називаються *залежними* в області Ω, якщо існує така неперервна функція Φ k змінних, що

$$\Phi\big(\psi_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,\psi_k(t,x_1,\dots,x_n)\big)\equiv 0,\ (t,x_1,\dots,x_n)\in\Omega,$$

незалежними, якщо вони не є залежними.

Для незалежності в області Ω неперервно диференційовних функцій $\psi_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,\psi_k(t,x_1,\dots,x_n)$ необхідно і достатньо, щоб

$$rang\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial t} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}\\ & \cdots\\ \frac{\partial\psi_k}{\partial t} & \frac{\partial\psi_k}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial\psi_k}{\partial x_n}\end{pmatrix}=k\,(k\le n). \tag{2.25}$$

Теорема 1. *Для незалежності в області Ω неперервно диференційовних інтегралів $\psi_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,\psi_n(t,x_1,\dots,x_n)$ системи (2.2) необхідно і достатньо, щоб*

$$det\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}\\ \cdots\\ \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}\ne 0,\ (t,x_1,\dots,x_n)\in\Omega. \tag{2.26}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\psi_1(t,x),\dots,\psi_n(t,x)$ – незалежні інтеграл системи (2.2) в області Ω. Тоді виконується (2.25) при $k=n$, а з (2.24) маємо

$$\frac{\partial\psi_1(t,x)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_1(t,x)}{\partial x_j}f_j(t,x)=0$$

$$\dots \qquad (2.27)$$

$$\frac{\partial\psi_n(t,x)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_n(t,x)}{\partial x_j}f_j(t,x)=0,\ (t,x)\in\Omega.$$

Розглядаючи для кожної фіксованої точки $(t,x)\in\Omega$ (2.27) як лінійн неоднорідну алгебричну систему рівнянь стосовно невідомих $f_1,\dots,f_n$ за теоремою Крамера одержуємо (2.26).

Теорема 2. *Існує не більше ніж n незалежних інтегралів системи (2.2*

Д о в е д е н н я. Нехай $\psi_1(t,x),\dots,\psi_{n+1}(t,x)$ – незалежні інтеграл системи (2.2) в області Ω. Тоді з (2.24) маємо

$$\frac{\partial\psi_1(t,x)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_1(t,x)}{\partial x_j}f_j(t,x)=0$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial\psi_n(t,x)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_n(t,x)}{\partial x_j}f_j(t,x)=0 \qquad (2.28$$

$$\frac{\partial\psi_{n+1}(t,x)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_{n+1}(t,x)}{\partial x_j}f_j(t,x)=0,$$

$$(t,x)=(t,x_1,\dots,x_n)\in\Omega.$$

Розглядаючи для кожного значення $(t,x)\in\Omega$ (2.28) як лінійну однорідну алгебричну систему рівнянь стосовно невідомих $1,f_1,\dots,f_n$, з теоремою Крамера одержуємо

$$det\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial t} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}\\ & \dots\\ \frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial t} & \frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial x_n}\end{pmatrix}=0,\ (t,x)\in\Omega.$$

Отже, функції $\psi_1,\dots,\psi_{n+1}$ залежні в Ω.

Означення 3. Система n незалежних перших інтегралів системи диференціальних рівнянь (2.2), тобто система вигляду (2.21), в якій

ψ_n – незалежні інтеграли в області Ω, називається *загальним інтегралом* системи (2.2).

припущенні, що функції $f_i(t,x)$, $i=\overline{1,n}$ неперервно диференційов-
, поняття загального розв'язку і загального інтегралу системи
і рівнозначними.

справді, з означення загального розв'язку та теореми про існуван-
оберненого відображення випливає, що система (2.21), одержана з
), є загальним інтегралом системи (2.2).
для доведення зворотного твердження достатньо показати розв'яз-
системи вигляду (2.21) стосовно $x_1,\dots,x_n$. Це випливає з теореми
теореми про існування оберненого відображення.

Інтеграл, перший інтеграл, загальний інтеграл системи диференціальних рівнянь у симетричній формі

Означення 1. Система

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{a_2(x_1,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{a_n(x_1,\dots,x_n)}, \tag{2.29}$$

$a_i(x)=a_i(x_1,\dots,x_n)$, $i=\overline{1,n}$ – задані функції в $\Omega\in\mathbb{R}^n$, називається
системою диференціальних рівнянь у симетричній формі.
Надалі припускатимемо, що $a_i\in C^1(\Omega)$, $i=\overline{1,n}$ і одночасно не пере-
ються в нуль в області Ω, тобто $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2(x)\neq 0, x\in\Omega$.
Якщо $a_n(x)\neq 0$ у деякому околі точки $x\in\Omega$, то систему (2.31) у
му околі можна записати у вигляді нормальної системи диферен-
льних рівнянь

$$\frac{dx_1}{dx_n}=\frac{a_1(x)}{a_n(x)},\dots,\frac{dx_{n-1}}{dx_n}=\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}. \tag{2.30}$$

бачимо, що кожна нормальна система диференціальних рівнянь є
ним випадком системи диференціальних рівнянь у симетричній
мі. У системі (2.29) змінні $x_1,\dots,x_n$ рівноправні.
Означення 2. Інтегралом системи (2.29) називається інтеграл нор-
ної системи, до якої зводиться система (2.29) у заданій підмножині

умови (2.24) випливає необхідна й достатня умова того, що непе-
но диференційовна функція $\psi(x)$ є інтегралом системи (2.29)

$$\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}=0,\ x\in\Omega. \tag{2.31}$$

За теоремою 2 підрозділу 2.2 для системи (2.29) існує не більше н $n-1$ незалежних інтегралів.

Означення 3. Інтегровною комбінацією системи (2.29) називаєть диференціальне рівняння, яке є наслідком рівнянь системи (2.29) і лег інтегрується.

Для побудови інтегровних комбінацій системи (2.29) використовує властивості пропорцій: якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} = \frac{\lambda a+\mu c}{\lambda b+\mu d}$ для довільних λ, μ

Приклад. Інтегровними комбінаціями системи

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$$

є $d(x+y+z) = 0$ (оскільки $\frac{dx+dy+dz}{y-z+z-x+x-y} = \frac{dx}{y-z}$ і є скінченним виразо $xdx + ydy + zdz = 0$, тобто $d(x^2+y^2+z^2) = 0$. Загальним інтеграл системи є

$$x+y+z = C_1, \quad x^2+y^2+z^2 = C_2.$$

Розділ 3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Теореми існування й єдиності

Означення 1. Нормальна система диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\
&\cdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

називається *лінійною* нормальною системою. Функції $a_{ij}(t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ – коефіцієнти лінійної системи, а функції $g_i(t)$, $(i = \overline{1, n})$ – її вільні члени. Лінійна система, всі вільні члени якої тотожно дорівнюють нулю, називається лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь (ЛОС), відповідно систему (3.1) ще називають лінійною неоднорідною системою (ЛНС).

При неперервних на (a, b) коефіцієнтах $a_{ij}(t)$ та вільних членах $g_i(t)$ $(i = \overline{1, n})$ система (3.1) задовольняє умови теореми Пікара в смузі $D = [\alpha, \beta] \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ для довільного замкненого відрізка $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, стала Ліпшиця $L = \max\limits_{\substack{i,j=\overline{1,n} \\ t\in[\alpha,\beta]}} |a_{ij}(t)|$.

Тому задача Коші

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) & x_1(t_0) &= x_{10} \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + g_2(t) & x_2(t_0) &= x_{20} \\
&\cdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t) & x_n(t_0) &= x_{n0}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

при довільних $t_0 \in [\alpha, \beta], x_{10} \in \mathbb{R}, \ldots, x_{n0} \in \mathbb{R}$ однозначно розв'язна в околі точки t_0. Однак теорему Пікара для лінійної системи можна уточнити: правильна сильніша теорема.

Теорема 1 (існування та єдиності для лінійної системи). *Нехай $a_{ij}, g_i \in C(a,b)$, $i,j = \overline{1,n}$. Для довільних $t_0 \in (a,b)$, x_1 $\mathbb{R}, \ldots, x_{n0} \in \mathbb{R}$ існує єдиний розв'язок $x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ за Коші (3.2), визначений на всьому інтервалі (a,b).*

Д о в е д е н н я. Як і при доведенні теореми Пікара, замінимо за (3.2) еквівалентною системою інтегральних рівнянь

$$x_1(t) = x_{10} + \int_{t_0}^{t} [a_{11}(\tau)x_1(\tau) + \cdots + a_{1n}(\tau)x_n(\tau) + g_1(\tau)]d\tau$$

$$\cdots \qquad (\ldots$$

$$x_n(t) = x_{n0} + \int_{t_0}^{t} [a_{n1}(\tau)x_1(\tau) + \cdots + a_{nn}(\tau)x_n(\tau) + g_n\tau)]d\tau.$$

Виберемо такий довільний відрізок $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, що $t_0 \in [\alpha,\beta]$. хай

$$\mathcal{M} = \{\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in C[\alpha,\beta],\ \varphi_i(t_0) = x_{i0},\ i = \overline{1,n}\},$$

$$\varphi_1^{(0)}(t) = x_{10}, \ldots, \varphi_n^{(0)}(t) = x_{n0},$$

$$\varphi_1^{(p+1)}(t) = x_{10} + \int_{t_0}^{t} [a_{11}(\tau)\varphi_1^{(p)}(\tau) + \cdots + a_{1n}(\tau)\varphi_n^{(p)}(\tau) + g_1(\tau)]d\tau$$

$$\cdots$$

$$\varphi_n^{(p+1)}(t) = x_{10} + \int_{t_0}^{t} [a_{n1}(\tau)\varphi_1^{(p)}(\tau) + \cdots + a_{nn}(\tau)\varphi_n^{(p)}(\tau) + g_n(\tau)]d\tau$$

$$p = 0, 1, \ldots.$$

Зрозуміло, що $\varphi^{(p)} = (\varphi_1^{(p)}, \ldots, \varphi_n^{(p)}) \in \mathcal{M}$ для довільного $p = 0, 1,$

Зауважимо, що для загальної (нелінійної) нормальної системи ференціальних рівнянь треба було звужувати інтервал, на якому нюється аргумент, щоб послідовні наближення не виходили за м вибраного прямокутника. Тепер цієї небезпеки немає, оскільки обл зміни значень функцій безмежна.

Як при доведенні теореми Пікара для нормальної системи дифе ціальних рівнянь доводиться рівномірна збіжність послідовності ве

функції $\varphi^{(p)}(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$ до розв'язку задачі на цьому відрізку та єдиність розв'язку.

Оскільки для довільного значення $t \in (a, b)$ знайдеться такий відрізок $[\alpha, \beta]$, що $t \in [\alpha, \beta] \subset (a, b)$, то існує єдиний розв'язок задачі Коші у довільній точці t інтервалу (a, b).

Означення 2. Лінійним неоднорідним рівнянням (ЛНР) називається диференціальне рівняння вигляду

$$Lx(t) \equiv x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = g(t), \qquad (3.5)$$

лінійним однорідним рівнянням (ЛОР) – диференціальне рівняння вигляду

$$Lx(t) \equiv x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0. \qquad (3.6)$$

Функції $a_i(t), i = \overline{1, n}$ називаються коефіцієнтами лінійного рівняння, а функція $g(t)$ – вільним членом ЛНР.

Задача Коші для рівняння (3.5), як відомо з попереднього, полягає у знаходженні такого розв'язку рівняння в околі точки t_0, який задовольняє умови

$$x(t_0) = x_{10},\ x'(t_0) = x_{20}, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n0}, \qquad (3.7)$$

де $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ – задані числа.

Теорема 2 (існування та єдиності для лінійного рівняння). *Нехай a_i, $g \in C(a, b), i = \overline{1, n}$. Для довільних $t_0 \in (a, b), x_{10} \in \mathbb{R}, \ldots, x_{n0} \in \mathbb{R}$ існує єдиний розв'язок $x = \varphi(t)$ задачі Коші (3.5),(3.7), визначений на всьому інтервалі (a, b).*

За доведеним вище, задача Коші (3.5),(3.7) еквівалентна задачі Коші для ЛНС

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x_2 && x_1(t_0) = x_{10}\\
&\qquad\cdots\\
&\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n && x_{n-1}(t_0) = x_{20}\\
&\frac{dx_n}{dt} = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n + g(t) && x_n(t_0) = x_{n0},
\end{aligned} \qquad (3.8)$$

де $x_1(t) = x(t), x_2(t) = x'(t), \ldots, x_n(t) = x^{(n-1)}(t)$. Тому теорема 2 випливає з теореми 1.

3.2. Властивості розв'язків лінійних систем

Нехай $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ & \ldots & \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \ldots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$, тоді $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \ldots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$ і ЛНС можемо записати у матричному вигляді

$$X' = A(t)X + G(t), \tag{3.9}$$

ЛОС відповідно набуває вигляду

$$X' = A(t)X. \tag{3.9'}$$

3.2.1. Загальні властивості розв'язків лінійних систем

1. Лінійна комбінація розв'язків ЛОС також є розв'язком ЛОС.

Нехай $X_k(t) = (x_{1k}(t), \ldots, x_{nk}(t))$, $k = \overline{1,m}$ розв'язки системи (3.9') на інтервалі (a,b), $X(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k X_k(t)$. Підставляємо вектор-функцію $X(t)$ у систему (3.9') і враховуємо, що $X_k'(t) - A(t)X_k(t) \equiv 0$, $k = \overline{1,m}$.

Аналогічно доводяться такі твердження.

2. Сума розв'язку ЛОС і розв'язку відповідної ЛНС є розв'язком ЛНС.

3. Різниця двох розв'язків ЛНС є розв'язком відповідної ЛОС.

4. Нехай $X_k(t)$-розв'язки систем $X' = A(t)X + G_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, тоді $X(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} X_k(t)$ є розв'язком системи $X' = A(t)X + \sum\limits_{k=1}^{m} G_k(t)$.

3.2.2. Спеціальні властивості розв'язків лінійних систем

Означення 1. Вектор-функції $X_k(t)$, $k = \overline{1,m}$ називаються *лінійно залежними* на інтервалі (a,b), якщо існують такі сталі $c_1, \ldots, c_m$, що $c_1^2 + \cdots + c_m^2 \neq 0$ і

$$\sum_{k=1}^{m} c_k X_k(t) \equiv 0,\ t \in (a,b). \tag{3.10}$$

Вектор-функції $X_k(t)$, $k = \overline{1,m}$ лінійно незалежні на інтервалі (a,b), якщо вони не є лінійно залежні, а отже, з (3.10) випливає, що $c_1 = \dots = c_m = 0$.

Тотожність (3.10) запишемо у вигляді

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{m} c_k x_{1k}(t) \equiv 0 \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{m} c_k x_{nk}(t) \equiv 0. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Розглядаючи (3.11) як лінійну однорідну алгебричну систему рівнянь при кожному фіксованому значенні $t \in (a,b)$, на основі теореми Крамера бачимо, що лінійна залежність вектор-функцій $X_k(t)$ визначається властивостями матриці

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}(X_1, \dots, X_m) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1m}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2m}(t) \\ & & \dots & \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nm}(t) \end{pmatrix},$$

яка називається матрицею Вронського для $X_k(t)$, $k = \overline{1,m}$.

Теорема 1. *Якщо вектор-функції $X_1(t), \dots, X_n(t)$ лінійно залежні на інтервалі (a,b), то визначник Вронського для них*

$$W(t) = W(X_1, \dots, X_n) = det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ & & \dots & \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \equiv 0, \quad t \in (a,b). \tag{3.12}$$

Справді, за теоремою Крамера умова (3.12) є необхідною для існування нетривіального розв'язку алгебричної системи рівнянь (3.11) при кожному фіксованому значенні $t \in (a,b)$.

Завжди правильна протилежна теорема. Тому при $W(X_1, \dots, X_n) \neq 0$ на (a,b) вектор-функції $X_1(t), \dots, X_n(t)$ лінійно незалежні на інтервалі (a,b).

Зауважимо, що теорема, обернена до теореми 1, загалом неправильна. Справді, вектор-функції $X_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$, $X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ лінійно неза-

лежні на довільному інтервалі, однак $det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = 0$.

Теорема, обернена до теореми 1, правильна при додатковому припущенні на вектор-функції $X_1(t), \ldots, X_n(t)$.

Теорема 2. *Нехай вектор-функції $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ — розв'язки деякої ЛОС з неперервними коефіцієнтами на інтервалі (a, b), $W(t_0) = W(X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0)) = 0$ для деякого значення $t_0 \in (a, b)$. Тоді вектор-функції $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ лінійно залежні на (a, b).*

Доведення. Оскільки $W(t_0) = 0$, то з (3.10) за теоремою Крамера вектори $X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0)$ лінійно залежні, тобто існують такі сталі $c_1, \ldots, c_m$, що $c_1^2 + \cdots + c_m^2 \neq 0$ і

$$\sum_{k=1}^{m} c_k X_k(t_0) = 0. \tag{3.13}$$

Розглянемо вектор-функцію $X(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k X_k(t)$. Вона є розв'язком ЛОС за властивістю 1. Із (3.13) одержуємо $X(t_0) = 0$. За теоремою існування й єдиності розв'язку задачі Коші $X(t) = 0$ на (a, b), тобто $\sum\limits_{k=1}^{m} c_k X_k(t) \equiv 0$ на (a, b) при сталих $c_1, \ldots, c_m$, хоч одна з яких відмінна від нуля. За означенням вектор-функції $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ лінійно залежні на (a, b).

Наслідки. *1. Визначник Вронського для розв'язків ЛОС з неперервними коефіцієнтами на інтервалі (a, b) або тотожно дорівнює нулю на (a, b), або не перетворюється в нуль у жодній точці інтервалу (a, b).*

2. Розв'язки $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ ЛОС з неперервними коефіцієнтами лінійно залежні на інтервалі (a, b) тоді і тільки тоді, коли

$$W(X_1(t), \ldots, X_n(t)) \equiv 0 \text{ на інтервалі } (a, b),$$

лінійно незалежні на інтервалі (a, b) тоді і тільки тоді, коли

$$W(X_1(t), \ldots, X_n(t)) \neq 0,\ t \in (a, b).$$

Теорема 3. *Максимальна кількість лінійно незалежних розв'язків ЛОС з неперервними коефіцієнтами дорівнює n.*

Доведення. Достатньо показати, що довільний розв'язок $X^*(t)$ такої системи на інтервалі (a, b) є лінійною комбінацією n її лінійно незалежних розв'язків $X_1, \ldots, X_n$, тобто показати існування таких сталих

$c_1, \ldots, c_m$, що

$$X^*(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k(t),\ t \in (a, b). \tag{3.14}$$

Нехай $t_0 \in (a, b)$. За припущенням, вектори $X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0)$ лінійно незалежні, отже $W\big(X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0)\big) \neq 0$, а тоді існує розв'язок $c_1 = c_1^*, \ldots, c_n = c_n^*$ лінійної неоднорідної алгебричної системи

$$\sum_{k=1}^{m} c_k X_k(t_0) = X^*(t_0). \tag{3.15}$$

Розглянемо вектор-функцію $X(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k^* X_k(t)$. Вектор-функції $X(t)$ та $X^*(t)$ є розв'язками ЛОС з неперервними коефіцієнтами на (a, b) і задовольняють одну й ту саму початкову умову $X(t_0) = X^*(t_0)$ (згідно з (3.15)), тобто є розв'язками тієї самої задачі Коші. За теоремою існування та єдиності $X^*(t) \equiv X(t)$, $t \in (a, b)$, тобто одержуємо (3.14) при $c_k = c_k^*$, $k = \overline{1, n}$.

Із теорем 1 та 3 випливає, що сукупність усіх розв'язків ЛОС з неперервними коефіцієнтами утворює лінійний векторний простір розмірності n. Його база, тобто n лінійно незалежних розв'язків ЛОС, називається *фундаментальною системою розв'язків* цієї системи диференціальних рівнянь.

Теорема 4. *Фундаментальна система розв'язків ЛОС з неперервними коефіцієнтами існує.*

Д о в е д е н н я. Нехай $B = \big(b_{ij}\big)_{i,j=\overline{1,n}}$ – така стала матриця, що $detB \neq 0$, $X_i(t)$ – розв'язок заданої ЛОС, який задовольняє початкову умову $X_i(t_0) = \begin{pmatrix} x_{1i}(t_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ni}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{ni} \end{pmatrix}$, $i = \overline{1, n}$. Такі вектор-функції існують за теоремою існування й єдиності. Оскільки $W(X_1, \ldots, X_n)\,|_{t=t_0} = detB \neq 0$, то вектор-функції $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ – лінійно незалежні на (a, b).

3.2.3. Формула Остроградського-Ліувілля

За правилом диференціювання визначника, $W'(t)$

$$= det\begin{pmatrix} x'_{11}(t) & x'_{12}(t)\dots x'_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t)\dots x_{2n}(t) \\ & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t)\dots x_{nn}(t) \end{pmatrix} + \dots + det\begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t)\dots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t)\dots x_{2n}(t) \\ & \dots \\ x'_{n1}(t) & x'_{n2}(t)\dots x'_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Запишемо ЛОС у вигляді $x'_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k$, $i = \overline{1,n}$. Підставляючи розв'язок $X_j(t)$ у систему, одержуємо $x'_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_{kj}$, $i = \overline{1,n}$. Тоді

$$det\begin{pmatrix} x'_{11}(t) & x'_{12}(t) & \dots & x'_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ & \dots & & \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} =$$

$$= det\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}x_{k1}(t) & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}x_{k2}(t) & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}x_{kn}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ & \dots & & \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} det\begin{pmatrix} a_{1k}x_{k1}(t) & a_{1k}x_{k2}(t) & \dots & a_{1k}x_{kn}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ & \dots & & \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} =$$

$$= det\begin{pmatrix} a_{11}x_{11}(t) & a_{11}x_{12}(t) & \dots & a_{11}x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ & \dots & & \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} = a_{11}W(t).$$ Аналогічно перетворюючи інші доданки у виразі для $W'(t)$, одержуємо $W'(t) = [a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)]W(t)$, звідки

$$W(t) = W(t_0)e^{\int\limits_{t_0}^{t}[a_{11}(t)+\dots+a_{nn}(t)]dt}. \tag{3.16}$$

3.2.4. Структура загального розв'язку лінійної системи

Теорема 5. *Загальний розв'язок ЛОС з неперервними коефіцієнтами має вигляд*

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k(t), \tag{3.17}$$

де $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ – її фундаментальна система розв'язків, $c_1, \ldots, c_n$ – довільні сталі.

Д о в е д е н н я. Потрібно довести, що

1) довільний розв'язок $X^*(t)$ ЛОС можна записати у вигляді (3.17), вибравши певні значення сталих $c_1, \ldots, c_n$;

2) при довільних сталих $c_1, \ldots, c_n$ (3.17) є розв'язком ЛОС.

Друге твердження випливає з загальної властивості 1 розв'язків лінійних систем, а перше – з теореми 3.

Теорема 6. *Загальний розв'язок ЛНС з неперервними коефіцієнтами дорівнює сумі її частинного розв'язку $\tilde{X}(t)$ і загального розв'язку відповідної ЛОС, тобто має вигляд*

$$X(t) = \tilde{X}(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k X_k(t), \tag{3.18}$$

де $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ – фундаментальна система розв'язків ЛОС, $c_1, \ldots, c_n$ – довільні сталі.

Д о в е д е н н я. З загальних властивостей 1 та 2 розв'язків лінійних систем випливає, що (3.18) є розв'язком ЛНС при довільних сталих $c_1, \ldots, c_n$. Нехай тепер $X^*(t)$ – довільний розв'язок ЛНС (3.9), $Y(t) = X^*(t) - \tilde{X}(t)$. За загальною властивістю 3 $Y(t)$ задовольняє відповідну ЛОС, а тому за теоремою 5 має вигляд (3.17) при певних сталих $c_1, \ldots, c_n$. Отже, $X^*(t)$ має вигляд (3.18) при цих значеннях сталих.

3.2.5. Метод варіації сталих

Якщо відома фундаментальна система розв'язків $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ ЛОС, то частинний (а отже, й загальний) розв'язок ЛНС можна побудувати методом варіації сталих (методом Ейлера), тобто у вигляді

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) X_k(t),$$

де $c_1(t), \ldots, c_n(t)$ – невідомі функції.

Підставляючи цю вектор-функцію у систему (3.9), одержуємо

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(t) X_k(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t) X_k'(t) - A(t) \sum_{k=1}^{n} c_k(t) X_k(t) = G(t)$$

або $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k'(t)X_k(t) + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(t)[X_k'(t) - A(t)X_k(t)] = G(t)$, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(t)X_k(t) = G(t).$$

Ми одержали при кожному фіксованому значенні t лінійну неоднорідну алгебричну систему рівнянь з відмінним від нуля визначником (визначником Вронського), тому ця система має розв'язок $c_k'(t) = \omega_k(t)$, $k = \overline{1,n}$. Інтегруючи, знаходимо невідомі функції $c_k(t)$, $k = \overline{1,n}$.

Для скалярного лінійного рівняння 1-го порядку цим методом одержано загальний розв'язок у вигляді (1.11).

3.3. Властивості розв'язків лінійного рівняння n-го порядку

3.3.1. Основні теореми

Розв'язки ЛНР

$$Lx(t) \equiv x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = g(t) \qquad (3.19)$$

та відповідного ЛОР

$$Lx(t) \equiv x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \qquad (3.20)$$

з неперервними коефіцієнтами володіють такими самими властивостями, як і розв'язки ЛНС та ЛОС. Їх можна вивести за допомогою таких самих міркувань. Покажемо, як їх одержати з відповідних властивостей розв'язків лінійних систем. Для цього, вводячи нові функції

$$x_1(t) = x(t), x_2(t) = x'(t), \ldots, x_n(t) = x^{(n-1)}(t), \qquad (3.21)$$

зводимо рівняння (3.19) та (3.20) відповідно до систем

$$X' = A(t)X + G(t) \quad \text{та} \quad X' = A(t)X,$$

де $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix}$, $G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g(t) \end{pmatrix}$.

Лема. *Функції $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ класу $C^{n-1}(a,b)$ тоді і тільки тоді лінійно залежні на інтервалі (a,b), коли лінійно залежні на (a,b) вектор-функції*

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \ldots, X_n(t) = \begin{pmatrix} x_n(t) \\ x_n'(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Д о в е д е н н я. Нехай функції $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ лінійно залежні на інтервалі (a,b). Тоді існують такі сталі $c_1, \ldots, c_n$, що $c_1^2 + \cdots + c_n^2 \neq 0$ і

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t) \equiv 0,\ t \in (a,b). \tag{3.23}$$

Диференціюючи тотожність (3.23) $n-1$ раз (що можливо, оскільки задані функції належать класу $C^{n-1}(a,b)$), одержуємо

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k'(t) \equiv 0,$$

$$\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k^{(n-1)}(t) \equiv 0,\ t \in (a,b).$$

Сукупність усіх цих тотожностей можна записати у векторній формі. Одержуємо

$$\sum_{k=1}^{n} c_k X_k(t) \equiv 0,\ t \in (a,b). \tag{3.24}$$

Тотожність (3.24) означає, що вектор-функції $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ лінійно залежні на (a,b).

Обернене твердження очевидне: з (3.24) випливає (3.23).

У нових змінних (3.21) вектор-функції $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ набувають вигляду $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ldots, X_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$. Вони є розв'язками ЛОС з матрицею $A(t)$ тоді і тільки тоді, коли функції $x_1(t), \ldots, x_n(t)$

є розв'язками ЛОР (3.20). Визначник Вронського для ЛОС тепер набуває вигляду

$$W(t) = W\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) = det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

і називається визначником Вронського для лінійного рівняння.

Враховуючи лему, з теорем 1-4 для ЛОС одержуємо такі самі за змістом теореми про властивості розв'язків ЛОР.

Теорема 1. *Якщо функції $x_1(t), \dots, x_n(t)$ класу $C^{(n-1)}(a,b)$ лінійно залежні на інтервалі (a,b), то визначник Вронського для них тотожно дорівнює нулю на (a,b).*

Теорема 2. *Нехай функції $x_1(t), \dots, x_n(t)$ – розв'язки деякого ЛОР з неперервними коефіцієнтами на інтервалі (a,b) і $W\big(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)\big) = W(t_0) = 0$ для деякого значення $t_0 \in (a,b)$. Тоді функції $x_1(t), \dots, x_n(t)$ лінійно залежні на (a,b).*

Наслідки. *1. Визначник Вронського для розв'язків ЛОР з неперервними коефіцієнтами на інтервалі (a,b) або тотожно дорівнює нулю на (a,b), або не перетворюється в нуль у жодній точці інтервалу (a,b).*

2. Розв'язки $x_1(t), \dots, x_n(t)$ ЛОР з неперервними коефіцієнтами лінійно залежні на інтервалі (a,b) тоді і тільки тоді, коли

$$W\big(x_1, \dots, x_n\big) \equiv 0 \text{ на інтервалі } (a,b),$$

лінійно незалежні на інтервалі (a,b) тоді і тільки тоді, коли

$$W\big(x_1, \dots, x_n\big) \neq 0,\ t \in (a,b).$$

Теорема 3. *Максимальна кількість лінійно-незалежних розв'язків ЛОР порядку n з неперервними коефіцієнтами дорівнює n.*

Із теорем 1 та 3 випливає, що сукупність усіх розв'язків ЛОР з неперервними коефіцієнтами утворює лінійний векторний простір розмірності n. Його база, тобто n лінійно незалежних розв'язків ЛОР, називається *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 4. *Фундаментальна система розв'язків ЛОР з неперервними коефіцієнтами існує.*

Враховуючи вигляд матриці $A(t)$ для ЛОС, до якої зводиться ЛОР, із формули (3.16) одержуємо формулу Остроградського-Ліувілля

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(t)dt}.$$

3.3.2. Структура загального розв'язку лінійного рівняння

Теорема 5. *Загальний розв'язок ЛОР з неперервними коефіцієнтами має вигляд* $$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t),$$
де $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ – її фундаментальна система розв'язків, $c_1, \ldots, c_n$ – довільні сталі.

Теорема 6. *Загальний розв'язок ЛНР з неперервними коефіцієнтами дорівнює сумі її частинного розв'язку $\tilde{x}(t)$ і загального розв'язку відповідного ЛОР, тобто має вигляд* $$x(t) = \tilde{x}(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t),$$
де $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ – фундаментальна система розв'язків ЛОР, $c_1, \ldots, c_n$ – довільні сталі.

3.3.3. Метод варіації сталих

Нехай $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ – фундаментальна система розв'язків ЛОР. За методом варіації сталих розв'язок ЛНР шукатимемо у вигляді

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) x_k(t), \tag{3.25}$$

де $c_1(t), \ldots, c_n(t)$ – невідомі функції.

Враховуючи лему та результати підрозділу 3.2.5, матимемо лінійну алгебричну систему рівнянь

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{n} c_k'(t) x_k(t) = 0 \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(t) x_k^{(n-2)}(t) = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(t) x_k^{(n-1)}(t) = g(t) \end{gathered} \tag{3.26}$$

для визначення $c_1'(t), \ldots, c_n'(t)$ при кожному значенні $t \in (a, b)$. Визначником системи (3.26) є визначник Вронського для лінійно незалежних розв'язків ЛОР з неперервними коефіцієнтами, який відмінний від нуля

на інтервалі (a, b). Отже, система (3.26) однозначно визначає $c_i'(t) = \omega_i(t)$, а тому й $c_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Зауважимо, що систему (3.26) можемо також одразу одержати з системи (3.19) для випадку лінійних систем диференціальних рівнянь, якщо зводити ЛНР до відповідної ЛНС і шукати її розв'язок за допомогою методу варіації сталих.

3.4. Лінійні системи та рівняння зі сталими коефіцієнтами

3.4.1. Побудова фундаментальної системи розв'язків ЛОР методом Ейлера

Рівняння $x' = ax$, де a – деяке число, має загальний розв'язок $x(t) = Ce^{at}$. Тому природно шукати розв'язки ЛОР

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = 0 \tag{3.27}$$

зі сталими коефіцієнтами a_i у вигляді

$$x = e^{\lambda t}, \tag{3.28}$$

де λ – невідоме число. Підставляючи функцію (3.28) у рівняння, після ділення на відмінний від нуля множник $e^{\lambda t}$ матимемо

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{3.29}$$

Одержане лінійне алгебричне рівняння степеня n має коренями ті числа λ_j, $j = \overline{1, n}$, при яких функції $x_j(t) = e^{\lambda_j t}$ є розв'язками рівняння (3.27). Тому рівняння (3.29) називається *характеристичним рівнянням* для рівняння (3.27).

Якщо всі корені характеристичного рівняння різні, то маємо n лінійно незалежних розв'язків рівняння $x = e^{\lambda_1 t}, \ldots, x = e^{\lambda_n t}$ – фундаментальну систему розв'язків рівняння (3.27).

Зокрема, якщо $\lambda_j = \alpha + \beta i$ – комплексне число, то при дійсних коефіцієнтах рівняння є коренем число $\lambda_{j+1} = \alpha - \beta i$. Оскільки $e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t}e^{\beta t i} = e^{\alpha t}(\cos\ \beta t + i \sin\ \beta t)$, $e^{(\alpha-\beta i)t} = e^{\alpha t}e^{-\beta t i} = e^{\alpha t}(\cos\ \beta t - i \sin\ \beta t)$, функції $e^{\alpha t}\cos\ \beta t$ та $e^{\alpha t}\sin\ \beta t$ лінійно незалежні, то замінимо дві комплекснозначні функції $e^{(\alpha+\beta i)t}$, $e^{(\alpha-\beta i)t}$ у фундаментальній системі розв'язків рівняння на функції $e^{\alpha t}\cos\ \beta t$, $e^{\alpha t}\sin\ \beta t$.

Якщо серед коренів характеристичного рівняння є кратні, то кількість різних розв'язків вигляду (3.28) є меншою за n і треба шукати необхідні розв'язки в іншому вигляді.

Якщо характеристичне рівняння має корінь λ_1 кратності s, то лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняня (3.27) будуть функції

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t}, \dots,\ t^{s-1}e^{\lambda_1 t}. \tag{3.30}$$

Справді, якщо $\lambda_1 = 0$ – корінь кратності s, то рівняння (3.29) насправді має вигляд

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-s}\lambda^s = 0,$$

а тоді рівняння (3.27) має вигляд

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-s}x^{(s)} = 0$$

і має розв'язки $1,\ t, \dots, t^{s-1}$.

Якщо $\lambda_1 \neq 0$, то заміною $x = e^{\lambda_1 t}y$ рівняння (3.27) зводиться до ЛОР рівняння

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}y' + b_n y = 0, \tag{3.31}$$

в якого коефіцієнти також сталі (в цьому легко переконатись, обчислюючи похідні при цій заміні). Розв'язку $x = e^{\lambda_1 t}$ рівняння (3.27) відповідає розв'язок $y = 1$ рівняння (3.31), а кореню λ_1 кратності s характеристичного рівняння (3.29) – корінь $k = 0$ тієї самої кратності характеристичного рівняння для рівняння (3.31): згідно з заміною, $e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_1 t}e^{kt}$, звідки $\lambda_1 = \lambda_1 + k$. Оскільки за доведеним рівняння (3.31) має розв'язки $1,\ t, \dots, t^{s-1}$, то, враховуючи зроблену заміну, для рівняння (3.27) одержуємо розв'язки (3.30).

Те, що функції (3.30) є розв'язками ЛОР (3.27) для кореня λ_1 кратності s характеристичного рівняння, можна також довести, використовуючи таку властивість лінійного диференціального оператора

$$L[x] = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}x' + a_n x$$

зі сталими коефіцієнтами: нехай $D(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$, $f \in C^n(a,b)$, тоді

$$L[e^{\lambda t}f] = e^{\lambda t}\big(D(\lambda)f + \frac{D'(\lambda)}{1!}f' + \dots + \frac{D^{(n)}(\lambda)}{n!}f^{(n)}\big).$$

Зауважимо таке: оскільки $L[x]$ є лінійною комбінацією виразів $x^{(k)}$, то достатньо цю властивість довести для випадку $L[x] = x^{(k)}$, тобто довести правильність тотожності $(e^{\lambda t} f(t))^{(k)} = e^{\lambda t} \sum\limits_{m=0}^{k} \frac{(\lambda^k)^{(m)}}{l!} f^{(m)}(t)$.

Застосовуючи виведену формулу до функції $f(t) = t^j$, $j = \overline{0, s-1}$ при $\lambda = \lambda_1$ і враховуючи, що $D^{(m)}(\lambda_1) = 0$ при $m = \overline{0, s-1}$, а $(t^j)^{(m)} = 0$ при $m > j$, а отже $m \geq s$, одержуємо $L[e^{\lambda_1} t^j] = 0$.

Висновки. Щоб побудувати фундаментальну систему розв'язків ЛОР зі сталими коефіцієнтами, треба:

1) знайти корені $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристичного рівняння (3.29);

2) для кожного дійсного власного значення λ_j кратності s_j маємо s_j лінійно незалежних розв'язків $e^{\lambda_j t}$, $te^{\lambda_j t}, \ldots, t^{s_j - 1} e^{\lambda_j t}$;

для довільних двох комплексно спряжених власних значень $\lambda_j = \alpha + \beta\, i$, $\lambda_{j+1} = \alpha - \beta\, i$ кратності s_j маємо $2s_j$ лінійно незалежних розв'язків

$e^{\alpha t} \cos\, \beta t$, $te^{\alpha t} \cos\, \beta t, \ldots, t^{s_j - 1} e^{\alpha t} \cos\, \beta t$,

$e^{\alpha t} \sin\, \beta t$, $te^{\alpha t} \sin\, \beta t, \ldots, t^{s_j - 1} e^{\alpha t} \sin\, \beta t$.

3.4.2. Метод Ейлера побудови фундаментальної системи розв'язків ЛОС

Розглядаємо ЛОС

$$X' = AX, \tag{3.32}$$

в якої матриця A має сталі елементи $a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$. Шукатимемо її розв'язки у вигляді

$$X = He^{\lambda t}, \tag{3.33}$$

де λ – невідоме число, $H = (h_1, \ldots, h_n)$ – невідомий вектор.

Підставляємо вектор-функцію (3.33) у систему (3.32). Одержуємо $\lambda He^{\lambda t} = AHe^{\lambda t}$ (E – одинична матриця) або, після ділення на $e^{\lambda t}$,

$$(A - \lambda E)H = 0. \tag{3.34}$$

Бачимо, що для існування нетривіальних розв'язків вигляду (3.33) необхідно, щоб

$$det(A - \lambda E) = 0, \tag{3.35}$$

тобто, щоб число λ було власним значенням матриці A.

Рівняння (3.35) називається *характеристичним рівнянням* для системи (3.32). Воно є алгебричним рівнянням степеня n, тому має n

комплексних коренів $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. З'ясуємо, чи завжди можна побудувати фундаментальну систему розв'язків системи (3.32) за допомогою вектор-функцій вигляду (3.33).

1. Усі власні значення матриці A різні. З курсу алгебри відомо, що *для простого власного значення λ_j матриці A* $\quad rang(A-\lambda_j E) = n-1$.

Тоді лінійна однорідна алгебрична система рівнянь (3.34) має один лінійно незалежний розв'язок H_j – власний вектор матриці A.

Покажемо, що розв'язки $X_j(t) = H_j e^{\lambda_j t}$, $j = \overline{1,n}$ системи (3.32) лінійно незалежні, а отже, утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Нехай $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j H_j e^{\lambda_j t} = 0$, тобто $\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} c_j h_{1j} e^{\lambda_j t} = 0, \\ \quad \ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_j h_{nj} e^{\lambda_j t} = 0. \end{array}$

Із лінійної незалежності функцій $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ при різних λ_j випливає, що для кожного значення j одночасно $c_j h_{1j} = 0, \ldots, c_j h_{nj} = 0$. Оскільки вектор H_j ненульовий, то $c_j = 0$, $j = \overline{1,n}$.

Зауваження. Якщо, наприклад, число λ_1 комплексне, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, то $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ (оскільки коефіцієнти рівняння (3.35) дійсні). У цьому випадку замість комплекснозначних розв'язків $X_1(t)$ та $X_2(t)$ до фундаментальної системи розв'язків вводимо розв'язки $Y_1(t) = ReX_1(t)$ та $Y_2(t) = ImX_1(t)$, які лінійно незалежні.

2. Нехай власне значення λ_1 матриці A має кратність s. Покажемо, що
$$n - s \le rang(A - \lambda_1 E) \le n - 1.$$

Введемо позначення $\Delta(\lambda) = det(A - \lambda E)$. Тоді $\Delta(\lambda_1) = \Delta'(\lambda_1) = \cdots = \Delta^{(s-1)}(\lambda_1) = 0$, $\Delta^{(s)}(\lambda_1) \neq 0$. Обчислимо

$$\Delta'(\lambda_j) = \tfrac{d}{d\lambda} det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} |_{\lambda = \lambda_j} =$$

$$det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_j & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} - \lambda_j \end{pmatrix} + \cdots + det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_j & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_j & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots -1 \end{pmatrix} =$$

$$-det \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_j & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \\ a_{n2} & \ldots a_{nn} - \lambda_j \end{pmatrix} - \cdots - det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_j & \ldots & a_{1n-1} \\ & \ldots & \\ a_{n-1\,1} & \ldots & a_{n-1\,n-1} - \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Так само обчислюємо $\Delta"(\lambda_1), \ldots, \Delta^{(s-1)}(\lambda_1)$, $\Delta^{(s)}(\lambda_1)$. Бачимо, що $\Delta^{(s)}(\lambda_1)$ дорівнює скінченній сумі визначників порядку $n - s$ (мінорів

матриці $A - \lambda_1 E$). Тоді хоч один із таких визначників відмінний від нуля. Звідси $n - s \leq rang(A - \lambda_1 E) \leq n - 1$.

Можливі два випадки:

а) $rang(A - \lambda_1 E) = n - s$. Алгебрична система рівнянь (3.30) має $n - (n - s) = s$ лінійно незалежних розв'язків $H_1, \ldots, H_s$, а система диференціальних рівнянь (3.28) – s лінійно незалежних розв'язків $X_1(t) = H_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, X_s(t) = H_s e^{\lambda_1 t}$, якраз стільки, скільки дорівнює кратність кореня рівняння (3.35). У цьому випадку, як і у випадку простого кореня характеристичного рівняння (3.35), фундаментальна система розв'язків ЛОС утворена з вектор-функцій вигляду (3.33);

б) $rang(A - \lambda_1 E) > n - s$. Алгебрична система рівнянь (3.34) має менше, ніж $n - (n - s) = s$ лінійно незалежних розв'язків H_j, а система диференціальних рівнянь (3.32) – менше s лінійно незалежних розв'язків вигляду (3.33).

Доведемо, що для кореня λ_1 характеристичного рівняння у цьому випадку існує s лінійно незалежних розв'язків ЛОС у вигляді

$$X_k(t) = Q_{k,s-1}(t) e^{\lambda_1 t},\ k = \overline{1, s}, \tag{3.36}$$

де $Q_{k,s-1}(t)$ – вектор-функція, компоненти якої є поліномами степеня $\leq s - 1$.

Нехай K – невироджена матриця, $X(t) = KZ(t)$. Система (3.32) набуває вигляду $KZ' = AKZ$ або $Z' = K^{-1}AKZ$. Виберемо матрицю перетворення K такою, щоб матриця $B = K^{-1}AK$ мала нормальну жорданову форму. Одержана ЛОС

$$Z' = BZ \tag{3.37}$$

розпадається на декілька незалежних простіших систем диференціальних рівнянь. Запишемо першу з них

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda_1 z_1 \\ z_2' &= z_1 + \lambda_1 z_2 \\ &\ldots \\ z_p' &= z_{p-1} + \lambda_1 z_p, \end{aligned} \tag{3.38}$$

де p-розмір першої клітки Жордана ($p \leq s$).

Одержану систему легко проінтегрувати. Знаходимо $z_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$

$z_2(t) = (c_1 t + c_2)e^{\lambda_1 t}$

...

$z_p(t) = (c_1 \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} + \dots + c_{p-1}t + c_p)e^{\lambda_1 t}$.

Це загальний розв'язок системи (3.38), зокрема, маємо такі p її лінійно

незалежні розв'язки $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}.$

В інші рівняння системи (3.37) функції $z_1, \dots, z_p$ не входять, так само як у (3.38) не входять z_i при $i > p$. Кожну з систем вигляду (3.38) можна доповнити до системи p рівнянь з n невідомими, наприклад, так $z_1' = \lambda_1 z_1 + 0 \cdot z_2 + \dots + 0 \cdot z_n$

$z_2' = z_1 + \lambda_1 z_2 + 0 \cdot z_3 + \dots + 0 \cdot z_n$

...

$z_p' = z_{p-1} + \lambda_1 z_p + 0 \cdot z_{p+1} + \dots + 0 \cdot z_n$,

і вважати її розв'язки n-вимірними векторами, прийнявши $z_i = 0$ для тих i, які не входять у систему. Вони будуть одночасно розв'язками системи (3.37). Отже, маємо такі p лінійно незалежні розв'язки системи (3.37):

$$Z_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \quad Z_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \dots, Z_p(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}.$$

Звідси одержуємо p лінійно незалежних розв'язків системи (3.32) $X_1(t) = KZ_1(t), \dots, X_p(t) = KZ_p(t)$, які мають вигляд (3.36). Якщо є декілька кліток Жордана для власного значення λ_1 матриці A $(p < s)$, то відповідно одержуємо ще розв'язки аналогічного вигляду – разом s лінійно незалежних розв'язків системи (3.32) вигляду (3.36).

Висновки. Щоб побудувати фундаментальну систему розв'язків ЛОС зі сталими коефіцієнтами, треба:

1) знайти корені $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристичного рівняння (3.35)(власні значення матриці A);

2) для дійсного власного значення λ_j кратності s_j у випадку $rang(A - \lambda_j E) = n - s_j$ знайти s_j лінійно незалежних власних векторів $H_1, \ldots, H_{s_j}$, розв'язуючи алгебричну систему рівнянь (3.34), одержуємо s_j розв'язків ЛОС $X_1(t) = H_1 e^{\lambda_j t}, \ldots, X_{s_j}(t) = H_{s_j} e^{\lambda_j t}$;

довільним двом комплексно спряженим власним значенням λ_j, λ_{j+1} кратності s_j у цьому випадку відповідатиме $2s_j$ розв'язків ЛОС $Re\ H_1 e^{\lambda_j t},\ Im\ H_1 e^{\lambda_j t}, \ldots,\ Re\ H_{s_j} e^{\lambda_j t}, Im\ H_{s_j} e^{\lambda_j t}$;

3) для дійсного власного значення λ_j кратності s_j у випадку $rang(A - \lambda_j E) > n - s_j$ знайти s_j лінійно незалежних розв'язків ЛОС у вигляді (3.36), а саме $X(t) = Q_{s_j - 1}(t) e^{\lambda_1 t}$, записуючи вектор-поліном $Q_{s_j-1}(t)$ степеня $s_j - 1$ із невідомими коефіцієнтами і підставляючи вектор-функцію $X(t)$ у ЛОС для визначення цих коефіцієнтів; за доведеним, серед знайдених коефіцієнтів s_j будуть довільними;

для двох комплексно спряжених власних значень $\lambda_j = \alpha + \beta\ i$ та $\lambda_{j+1} = \alpha - \beta\ i$ кратності s_j у цьому випадку шукаємо $2s_j$ лінійно незалежних розв'язків ЛОС у вигляді

$$X(t) = \left(Q_{s_j-1}(t) \cos\ \beta t + \hat{Q}_{s_j-1}(t) \sin\ \beta t\right) e^{\alpha t},$$

записуючи вектор-поліноми $Q_{s_j-1}(t)$, $\hat{Q}_{s_j-1}(t)$ із невідомими коефіцієнтами.

Зауважимо, що в випадку 3 можемо одразу знайти лінійну комбінацію лінійно незалежних розв'язків ЛОС, які відповідають дійсному власному значенню λ_j чи двом комплексно спряженим власним значенням $\lambda_j = \alpha + \beta\ i$ та $\lambda_{j+1} = \alpha - \beta\ i$.

Розглянутий метод побудови фундаментальної системи розв'язків ЛОС зі сталими коефіцієнтами називається *методом Ейлера.*

Зауваження. ЛОР (3.27) зі сталими коефіцієнтами відомим способом можна звести до ЛОС зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння для неї матиме вигляд

$$det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник за останньою стрічкою, одержуємо рівняння (3.29) – характеристичне рівняння для ЛОР (3.27).

З курсу алгебри відомо, що кількість кліток Жордана для власного значення λ_j матриці A $m_j = n - r_j$, де $r_j = rang(A - \lambda_j E)$. З вигляду матриці $A - \lambda E$ випливає, що $r_j = n - 1$ для довільного її власного значення. Тому у жордановій формі матриці A є по одній клітці Жордана для кожного власного значення. Крім того, для власного значення λ_j кратності $s_j > 1$ завжди $r_j > n - s_j$. Отже, s_j лінійно незалежних розв'язків ЛОС, які відповідають λ_j, можна знайти у вигляді (3.36) при $s = s_j$. Перша компонента розв'язку є розв'язком ЛОР (3.27) і має вигляд $x(t) = Q_{s_j-1}(t)e^{\lambda_j t} = (c_0 + c_1 t + \cdots + c_{s_j-1}t^{s_j-1})e^{\lambda_j t}$. Зрозуміло, що можна за s_j лінійно незалежних розв'язків такого вигляду вибрати $e^{\lambda_j t}$, $te^{\lambda_j t}, \ldots, t^{s_j-1}e^{\lambda_j t}$.

3.4.3. Метод невизначених коефіцієнтів

Ми знаємо, якщо відома фундаментальна система розв'язків лінійної системи чи рівняння, то частинний (а отже, загальний) розв'язок відповідної ЛНС чи ЛНР можна знайти методом варіації сталих. У випадку сталих коефіцієнтів системи чи рівняння та спеціального вигляду вільного члена іноді легше частинний розв'язок ЛНС чи ЛНР шукати методом невизначених коефіцієнтів. Цей метод ґрунтується на такій теоремі.

Теорема 1. *Нехай вільний член $F(t)$ лінійної системи*

$$X' = AX + F(t) \tag{3.39}$$

зі сталими коефіцієнтами є вектор-квазіполіномом степеня l типу $\alpha+\beta i$, тобто має вигляд

$$F(t) = e^{\alpha t}\big(P_l(t)\cos\beta t + \hat{P}_l(t)\sin\beta t\big), \tag{3.40}$$

де $P_l(t)$ та $\hat{P}_l(t)$ – вектор-функції, компонентами яких є поліноми, максимальна степінь яких l. Тоді існує розв'язок системи (3.39) у вигляді вектор-квазіполінома того самого типу степеня $\leq l+s$, де s – кратність кореня $\alpha+\beta i$ характеристичного рівняння ($s = 0$, якщо число $\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння), тобто у вигляді

$$\tilde{X}(t) = e^{\alpha t}\big(Q_{l+s}(t)\cos\beta t + \hat{Q}_{l+s}(t)\sin\beta t\big), \tag{3.41}$$

де $Q_{l+s}(t)$ та $\hat{Q}_{l+s}(t)$ – вектор-поліноми степеня $l+s$.

В умовах цієї теореми частинний розв'язок системи (3.39) шукаємо у вигляді (3.40) з невідомими коефіцієнтами вектор-поліномів. Для знаходження цих коефіцієнтів підставляємо (3.41) у систему (3.39).

Приклад. $X' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t - \sin t \end{pmatrix}$. Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Вільний член системи є сумою двох вектор-квазіполіномів $F(t) = F_1(t) + F_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \end{pmatrix}$. $F_1(t)$ є вектор-квазіполіном степеня 1 типу 0, $F_2(t)$ є вектор-квазіполіном степеня 0 типу i, тому за теоремою існує частинний розв'язок системи у вигляді $\tilde{X}(t) = \tilde{X}_1(t) + \tilde{X}_2(t) = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \cos t + b_1 \sin t \\ c_1 \cos t + d_1 \sin t \end{pmatrix}$, a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1 – невідомі коефіцієнти. Якщо матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ замінити матрицею $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, власними значеннями якої є числа $i, -i$, то $\tilde{X}_2(t)$ треба шукати вже у вигляді $\begin{pmatrix} (a_1 t + b_1)\cos t + (c_1 t + d_1)\sin t \\ (a_2 t + b_2)\cos t + (c_2 t + d_2)\sin t \end{pmatrix}$.

Д о в е д е н н я теореми 1. Нехай K – невироджена матриця, $X(t) = KZ(t)$. При перетворенні системи (3.39) одержуємо $KZ' = AKZ + F(t)$ або

$$Z' = K^{-1}AKZ + G(t), \tag{3.42}$$

де $G(t) = K^{-1}F(t)$ і має такий самий вигляд як $F(t)$, а саме $G(t) = e^{\alpha t}\big(\mathcal{P}_l(t)\cos\beta t + \hat{\mathcal{P}}_l(t)\sin\beta t\big)$. Перетворюємо цю вектор-функцію $G(t) = e^{\alpha t}\big(\mathcal{P}_l(t)\frac{e^{\beta t i}+e^{-\beta t i}}{2} + \hat{\mathcal{P}}_l(t)\frac{e^{\beta t i}+e^{-\beta t i}}{2}\big) = \frac{\mathcal{P}_l(t)-\hat{\mathcal{P}}_l(t)i}{2}e^{(\alpha+\beta i)t} + \frac{\mathcal{P}_l(t)+\hat{\mathcal{P}}_l(t)i}{2}e^{(\alpha-\beta i)t} = R_l(t)e^{(\alpha+\beta i)t} + \overline{R_l(t)}e^{(\alpha-\beta i)t}$. Отже,

$$G(t) = R_l(t)e^{\gamma t} + \overline{R_l(t)e^{\gamma t}}. \tag{3.43}$$

Виберемо матрицю перетворення K такою, щоб матриця $B = K^{-1}AK$ мала нормальну жорданову форму. ЛНС (3.42) розпадається на декілька незалежних простіших систем диференціальних рівнянь. Запишемо першу з них

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda_1 z_1 + g_1(t) \\ z_2' &= z_1 + \lambda_1 z_2 + g_2(t) \\ &\dots \\ z_p' &= z_{p-1} + \lambda_1 z_p + g_p(t), \end{aligned} \tag{3.44}$$

де p – розмір першої клітки Жордана.

Нехай спочатку $g_j(t) = a_j t^m e^{\gamma t}$ (для всіх j те саме число m), тобто

замість (3.44) розглядаємо систему

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda_1 z_1 + a_1 t^m e^{\gamma t} \\ z_2' &= z_1 + \lambda_1 z_2 + a_2 t^m e^{\gamma t} \\ &\dots \\ z_p' &= z_{p-1} + \lambda_1 z_p + a_p t^m e^{\gamma t}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

У системі (3.45) зробимо заміну $z_i = z_i^* e^{\lambda_1 t}$, $i = \overline{1,p}$. Тоді $z_i' = (\frac{dz_i^*}{dt} + \lambda_1 z_i^*)e^{\lambda_1 t}$, $i = \overline{1,p}$, а система (3.45) спрощується до системи

$$\begin{aligned} \frac{dz_1^*}{dt} &= a_1 t^m e^{(\gamma-\lambda_1)t} \\ \frac{dz_2^*}{dt} &= z_1^* + a_2 t^m e^{(\gamma-\lambda_1)t} \\ &\dots \\ \frac{dz_p^*}{dt} &= z_{p-1}^* + a_p t^m e^{(\gamma-\lambda_1)t}, \end{aligned}$$

яку легко проінтегрувати.

А. $\gamma \neq \lambda_1$. Знаходимо $z_1^*(t) = a_1 \int t^m e^{(\gamma-\lambda_1)t} dt = \frac{a_1}{\gamma-\lambda_1} t^m e^{(\gamma-\lambda_1)t} - \frac{a_1 m}{\gamma-\lambda_1} \int t^{m-1} e^{(\gamma-\lambda_1)t} dt + c_1 = \dots = q_{m1}^*(t) e^{(\gamma-\lambda_1)t}$, де $q_{m1}^*(t)$ – поліном степеня m (сталі інтегрування можемо вибирати нулями, оскільки шукаємо частинний розв'язок рівняння). Знайдений розв'язок підставляємо у друге рівняння системи диференціальних рівнянь. Маємо $\frac{dz_2^*}{dt} = (q_{m1}^*(t) + A_2 t^m)e^{(\gamma-\lambda_1)t}$. Інтегруючи, знаходимо $z_2^*(t) = q_{m2}^*(t)e^{(\gamma-\lambda_1)t}$ і так далі. Отже, $z_i^*(t) = q_{mi}^*(t)e^{(\gamma-\lambda_1)t}$, $i = \overline{1,p}$, де $q_{mi}^*(t)$ – поліноми степеня m.

Б. $\gamma = \lambda_1$. Тоді $z_1^* = A_1 \int t^m dt = \frac{a_1}{m+1} t^{m+1}$, $\frac{dz_2^*}{dt} = \int (\frac{A_1}{m+1} t^{m+1} + a_2 t^m) dt$ і так далі. Отже, $z_i^*(t) = q_{(m+i)i}^*(t)$ – поліноми степеня $m+i$, або ж $z_i^*(t) = \tilde{q}_{(m+p)i}(t)$, $i = \overline{1,p}$, де $\tilde{q}_{(m+p)i}(t)$ – поліноми степеня $\leq m+p$.

У результаті одержуємо такий вигляд розв'язку системи (3.45):

$$z_i = \begin{cases} q_{m+i}^*(t)e^{\gamma t}, & \gamma \neq \lambda_1 \\ \tilde{q}_{(m+p)i}(t)e^{\gamma t}, & \gamma = \lambda_1 \end{cases}, \; i = \overline{1,p}.$$

Аналогічно у випадку інших кліток Жордана Враховуючи вигляд (3.43) вільного члена $G(t)$ ЛНС (3.42) та загальну властивість лінійних систем, одержуємо такий вигляд розв'язку системи (3.42):

$$Z(t) = \tilde{Q}_{l+s}(t)e^{(\alpha+\beta i)t} + \overline{\tilde{Q}_{l+s}(t)e^{(\alpha+\beta i)t}}, \tag{3.46}$$

де $\tilde{Q}_{l+s}(t)$ – вектор-поліном степеня $\leq l+s$, s – кратність кореня $\alpha+\beta i$ характеристичного рівняння для вихідної системи.

Після перетворення виразу (3.46), одержуємо вектор-функцію вигляду (3.41), такий самий вигляд має розв'язок $X(t)$ вихідної системи (3.39).

3.4.4. Наслідок для ЛНР n-го порядку

Розглядаємо ЛНР зі сталими коефіцієнтами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = f(t), \tag{3.47}$$

де

$$f(t) = e^{\alpha t}\big(P_l(t)\cos\ \beta t + \hat{P}_l(t)\sin\ \beta t\big), \tag{3.48}$$

$P_l(t)$, $\hat{P}_l(t)$ – поліноми, максимальний степінь яких l.

За допомогою зведення рівняння (3.47) до ЛНС і на підставі теореми 1 можемо стверджувати, що існує розв'язок рівняння (3.47) у вигляді

$$\tilde{x}(t) = e^{\alpha t}\big(Q_{l+s}(t)\cos\beta t + \hat{Q}_{l+s}(t)\sin\beta t\big), \tag{3.49}$$

де $Q_{l+s}(t)$ та $\hat{Q}_{l+s}(t)$ – поліноми степеня $l+s$, s – кратність кореня $\alpha+\beta i$ характеристичного рівняння. Однак це твердження можна уточнити.

На підставі загальної властивості 4 для лінійних рівнянь достатньо розглянути випадок $f(t) = at^m e^{\gamma t}$, a, γ – числа.

За доведеним існує частинний розв'язок рівняння (3.47) у вигляді

$$\tilde{x}(t) = (q_0 + q_1 t + \cdots + q_{s-1}t^{s-1} + q_s t^s + \cdots + q_{m+s}t^{m+s})e^{\gamma t}, \tag{3.50}$$

s – кратність кореня γ характеристичного рівняння. Якщо число γ є коренем характеристичного рівняння кратності s, то відповідне ЛОР має розв'язком функцію $x_0(t) = (c_0+c_1t+\cdots+c_{s-1}t^{s-1})e^{\gamma t}$ при довільних $c_0, c_1, \ldots, c_{s-1}$. Крім того, $x(t) = \tilde{x}(t) - x_0(t)$ також є розв'язком рівняння (3.47) при довільних $c_0, c_1, \ldots, c_{s-1}$. Виберемо $c_i = q_i$, $i = \overline{0, s-1}$. Одержимо $x(t) = (q_s t^s + \cdots + q_{m+s}t^{m+s})e^{\gamma t} = t^s(q_s + \cdots + q_{m+s}t^m)e^{\gamma t}$.

Отже, можемо сформулювати уточнену теорему, на якій ґрунтується метод невизначених коефіцієнтів для лінійного рівняння (3.47).

Теорема 2. *Нехай вільний член $f(t)$ лінійного рівняння (3.47) зі сталими коефіцієнтами є квазіполіномом степеня l типу $\alpha + \beta i$, тобто має вигляд (3.48). Тоді існує розв'язок рівняння (3.47) у вигляді*

$$x(t) = e^{\alpha t}t^s\big(Q_l(t)\cos\beta t + \hat{Q}_l(t)\sin\beta t\big),$$

де $Q_l(t)$ та $\hat{Q}_l(t)$ – поліноми степеня l, s – кратність кореня $\alpha + \beta i$ характеристичного рівняння ($s = 0$, якщо число $\alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння).

Розділ 4. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ

4.1. Стійкість за Ляпуновим. Основні поняття

Розглянемо нормальну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\ldots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{4.1}$$

яку надалі записуватимемо у векторному вигляді

$$x' = f(t, x).$$

Припускатимемо, що функції $f_i(t, x)$, $i = \overline{1, n}$ визначені при $t \geq t_0$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ та виконані умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші при $t \geq t_0$.

З'ясуємо залежність розв'язку задачі Коші від початкових умов на безмежному інтервалі $t \geq t_0$. Використовуємо позначення $|x| = [x_1^2 + \cdots + x_n^2]^{\frac{1}{2}}$, якщо $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Означення 1. Розв'язок $\varphi(t)$ системи (4.1) називається *стійким* (за Ляпуновим), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для довільного вектора x_0, для якого $|x_0 - \varphi(t_0)| < \delta$, розв'язок $x(t)$ системи (4.1), який задовольняє початкову умову

$$x(t_0) = x_0, \tag{4.2}$$

визначений при всіх $t \geq t_0$ і $|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ для всіх $t > t_0$.

Можна сказати, що розв'язок системи (4.1) стійкий, якщо він неперервно залежить від початкових даних на всій півосі $t \geq t_0$.

Означення 2. Розв'язок $\varphi(t)$ системи (4.1) називається *асимптотично стійким*, якщо він стійкий і для довільного розв'язку $x(t)$ системи (4.1) на півосі $t \geq t_0$, для якого $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ при деякому $\delta > 0$, маємо $\lim\limits_{t \to \infty} |x(t) - \varphi(t)| = 0$.

З означення випливає таке: якщо розв'язок $\varphi(t)$ системи (4.1) асимптотично стійкий, то графіки усіх таких розв'язків $x(t)$ системи (4.1), для яких початкові точки близькі до початкової точки розв'язку $\varphi(t)$, не тільки близькі до графіка розв'язку $\varphi(t)$ на всій півосі $t > t_0$, але наближаються до графіка розв'язку $\varphi(t)$ при $t \to \infty$.

Ми доведемо теореми, які дають достатні умови стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості розв'язку системи (4.1).

Насамперед зауважимо, що дослідження на стійкість довільного розв'язку системи (4.1) можна звести до дослідження на стійкість тривіального розв'язку деякої іншої нормальної системи диференціальних рівнянь.

Справді, нехай $\varphi(t)$ – розв'язок задачі Коші (4.1),(4.2), $x(t) = \varphi(t) + y(t)$. Тоді $\varphi' + y' = f(t, \varphi + y)$, $\varphi(t_0) + y(t_0) = x_0$, а отже, $y(t)$ є розв'язком задачі

$$y' = g(t, y), \ y(t_0) = 0, \tag{4.3}$$

де $g(t, y) = f(t, \varphi + y) - \varphi'(t)$. При цьому $g_i(t, 0, \ldots, 0) = 0$, $i = \overline{1, n}$, а отже, вектор-функція $y(t) \equiv 0$ є розв'язком задачі (4.3).

Надалі припускаємо, що

$$f_i(t, 0, \ldots, 0) = 0, \ i = \overline{1, n}, \tag{4.4}$$

тому вектор-функція $x(t) \equiv 0$ задовольняє систему (4.1) і нульові початкові умови $x(t_0) = 0$ (система (4.1) має тривіальний розв'язок).

З означень 1, 2 випливають такі означення.

Тривіальний розв'язок $\varphi(t) \equiv 0$ системи (4.1) називається *стійким*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для довільного вектора x_0, для якого $|x(t_0)| < \delta$, розв'язок $x(t)$ задачі Коші (4.1),(4.2) визначений на півосі $t \geq t_0$ і $|x(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$.

Тривіальний розв'язок системи (4.1) називається *асимптотично стійким*, якщо він стійкий і для довільного розв'язку $x(t)$ системи (4.1) на півосі $t \geq t_0$, для якого $|x(t_0)| < \delta$ при деякому $\delta > 0$, маємо $\lim\limits_{t \to \infty} |x(t)| = 0$.

Означення 3. Траєкторією розв'язку $x(t)$ системи (4.1) називається множина точок $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \geq t_0$ у $\mathbb{R}^n$.

Це лінія у $\mathbb{R}^n$. Зауважимо, що інтегральною кривою системи (4.1) є лінія $(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \geq t_0$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Сформулюємо тепер попередні означення мовою геометрії.

Означення 4. Тривіальний розв'язок системи (4.1) називається *стійким*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що траєкторія довільного розв'язку $x(t)$ системи (4.1), яка бере початок всередині δ–околу початку координат, визначена при $t \geq t_0$ і не виходить за межі ε-околу початку координат для всіх $t > t_0$.

Означення 5. Тривіальний розв'язок системи (4.1) називається *асимптотично стійким*, якщо він стійкий і для довільного розв'язку $x(t)$ системи (4.1) на півосі $t \geq t_0$, траєкторія якого бере початок всередині деякого δ-околу початку координат, маємо $\lim\limits_{t \to \infty} |x(t)| = 0$.

Нехай $x(t)$ – розв'язок системи (4.1), $w(t) = v(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$, тоді $w'(t) = \frac{\partial v(t,x(t))}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial v(t,x(t))}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v(t,x(t))}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial v(t,x(t))}{\partial x_i} f_i(t, x(t))$.

Означення 6. Похідною вздовж розв'язку системи (4.1) функції $v(t, x)$ називається функція змінних t, x

$$\dot{v}(t, x) = \frac{dv}{dt}\Big|_{(4.1)} = \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} f_i(t, x).$$

4.2. Автономні системи

Означення 1. Нормальна система звичайних диференціальних рівнянь називається *автономною*, якщо її праві частини явно не залежать від незалежної змінної, тобто система має вигляд

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\ldots \\ x_n' &= f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{4.5}$$

де функції $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ визначені та неперервні в деякій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Векторне поле системи (4.5) $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ є векторним полем швидкостей руху точки по траєкторії системи.

Надалі припускаємо, що $f_i \in C^1(\Omega)$, а отже, через кожну точку області Ω проходить єдина траєкторія системи (4.5).

Зазначимо основні властивості розв'язку автономної системи диференціальних рівнянь.

Теорема 1. *Якщо $x = \varphi(t)$ – розв'язок системи (4.5), то вектор-функція $x = \varphi(t + c)$ – також розв'язок системи (4.5) для довільного $c \in \mathbb{R}^1$.*

Д о в е д е н н я. Нехай $\psi(t) = \varphi(t + c)$. Тоді $\frac{d\psi_i(t)}{dt} = \frac{d\varphi_i(t+c)}{d(t+c)} = f_i(\varphi_1(t + c), \ldots, \varphi_n(t + c)) = f_i(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 2. *Розв'язок $x = x(t)$ автономної системи (4.5) може бути одним із трьох типів:*

а) неперіодичний, тобто $x(t_1) \neq x(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$;

б) періодичний, тобто існує така додатна стала T, що $x(t+T) = x(t)$ для довільного t і $x(t_1) \neq x(t_2)$ при $t_1, t_2 \in [0, T), t_1 \neq t_2$;

в) постійний, тобто $x(t) = x^0$ для всіх t.

Траєкторії, які відповідають розв'язку типу а, називаються *незамкненими*, типу б – *замкненими*, або *циклами*, типу в – *точкою спокою* або *положенням рівноваги*.

З теореми випливає, що траєкторії автономної системи не мають точок самоперетину.

Доведення теореми. Нехай розв'язок $x = x(t)$ не є типу а. Тоді існують такі $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$, що $x(t_1) = x(t_2)$. Нехай $t_2 > t_1$, $t_2 - t_1 = \tau$. За теоремою 1 вектор-функція $y = x(t+\tau)$ також є розв'язком системи (4.18). Оскільки $y(t_1) = x(t_1 + \tau) = x(t_2) = x(t_1)$, тобто розв'язки $x(t)$ і $y(t)$ збігаються при $t = t_1$, то за теоремою існування й єдиності $x(t) \equiv y(t)$, тобто $x(t) \equiv x(t+\tau)$.

Розглянемо множину $K = \{\tau \in \mathbb{R}^1 : x(t) \equiv x(t+\tau), t \in \mathbb{R}^1\}$. Зазначимо її основні властивості:

1) якщо $\tau \in K$, то $-\tau \in K$, тобто $x(t) \equiv x(t-\tau), t \in \mathbb{R}^1$. Це випливає з теореми існування й єдиності, оскільки $x(t_2 - \tau) = x(t_1) = x(t_2)$;

2) якщо $\tau_1, \tau_2 \in K$, то $\tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 \in K$. Справді, $x(t + \tau_1 \pm \tau_2) = x(t + \tau_1) = x(t)$.

Нехай $K_+ = \{\tau \in K : \tau > 0\}$. Існує $inf\, K_+ = T \geq 0$. Можливі такі випадки:

а) $T > 0$. Тоді $x(t+T) = x(t)$ і $x(t_1) \neq x(t_2)$ при $t_1, t_2 \in [0, T), t_1 \neq t_2$. Отже, маємо розв'язок типу б;

б) $T = 0$. У цьому випадку існує послідовність чисел τ_n із множини K_+, яка збігається до нуля. Тоді $\left(\frac{t}{\tau_n} - [\frac{t}{\tau_n}]\right)\tau_n \to 0$ при $n \to \infty$, тобто $t - [\frac{t}{\tau_n}]\tau_n \to 0$ при $n \to \infty$. Оскільки $[\frac{t}{\tau_n}]\tau_n \in K$, то $x(t) = x(t - [\frac{t}{\tau_n}]\tau_n) \to x(0)$ для довільного $t \in \mathbb{R}^1$. Маємо розв'язок типу в.

Означення 2. Положення рівноваги x^0 називається стійким, якщо постійний розв'язок $x(t) = x^0$ системи (4.5) є стійким.

4.3. Достатні умови стійкості та нестійкості

Означення 1. Функція $v(x) = v(x_1, \ldots, x_n)$ називається *додатно визначеною* (*від'ємно визначеною*) в околі U початку координат, якщо $v(x) > 0$ ($v(x) < 0$) для всіх $x \in U \setminus \{0\}$, $v(0) = 0$.

Приклад. Функція $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ додатно визначена в $\mathbb{R}^n$.

Надалі припускатимемо, що функції $f_i(x)$ визначені та неперервно диференційовні в $\mathbb{R}^n$ і $f_i(0) = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Означення 2. Додатно визначена, неперервно диференційовна в деякому околі U початку координат функція $v(x)$, для якої

$$\dot{v}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x) \leq 0,\ x \in U,$$

називається *функцією Ляпунова* для системи (4.5).

Зауваження. Якщо $v(x)$ – інтеграл системи (4.5), то $v(x) = 0$. Тому прикладом функції Ляпунова для системи (4.5) є додатно визначений інтеграл $v(x)$ цієї системи.

Теорема 1 (Ляпунова про стійкість). *Якщо існує функція Ляпунова для системи (4.5), то тривіальний розв'язок системи (4.5) стійкий.*

Доведення. Виберемо таке $\varepsilon > 0$, що куля $K_\varepsilon = \{x \in U : |x| < \varepsilon\}$ лежить в околі U початку координат. Сфера $S_\varepsilon = \{x \in U : |x| = \varepsilon\}$ – межа цієї кулі. Оскільки S_ε – обмежена замкнена множина, функція $v(x)$ неперервна і додатна на S_ε, то $\min\limits_{x \in S_\varepsilon} v(x) = k > 0$. Розглянемо кулю K_δ, яка належить U. Оскільки $v(0) = 0$, то $\delta > 0$ можна вибрати настільки малим, щоб $v(x) < k$ для всіх $x \in K_\delta$.

Нехай $x(t)$ – такий розв'язок системи (4.5), що $|x(t_0)| = |x_0| < \delta$. Оскільки $\dot{v}(x) \leq 0$ в U і $v(x_0) < k$, то одержуємо, що $v(x) < k$ вздовж усієї траєкторії розв'язку $x(t)$ системи (4.5). Отже, траєкторія розв'язку, яка починається в кулі K_δ, не може перетнути межу кулі K_ε, бо $v(x) \geq k$ на S_ε.

Теорема 2 (Ляпунова про асимптотичну стійкість). *Нехай у деякому околі U точки 0 існує така функція Ляпунова, що функція $\dot{v}(x)$ від'ємно визначена в U. Тоді тривіальний розв'язок системи (4.5) асимптотично стійкий.*

Доведення. Виберемо K_ε і K_δ як при доведенні теореми 1. Нехай $x(t)$ – такий розв'язок системи (4.5), що $|x(t_0)| = |x_0| < \delta$. Оскільки $\dot{v}(x) \leq 0$ в U, то невід'ємна функція $w(t) = v(x(t))$ не зростає. Отже, існує $\lim\limits_{t \to \infty} w(t) = A$. При цьому $A \geq 0$. Якщо $A > 0$, то $w(t) \geq A$ для всіх $t \geq t_1 \geq t_0$ й існує таке α, $0 < \alpha < \varepsilon$, що $|x(t)| \geq \alpha$ для всіх $t \geq t_1$. На множині $\{x : \alpha \leq |x| \leq \varepsilon\}$ функція $\dot{v}(x) = \frac{dv}{dt}\,|_{(4.5)}$ строго від'ємна. Тому за неперервністю $\dot{v}(x) \leq -m < 0$ на цій множині, а отже, і на траєкторії розв'язку $x(t)$. Маємо $w'(t) \leq -m$, $t \geq t_1$. Інтегруючи, одержуємо $w(t) \leq w(t_1) - m(t - t_1)$. Права частина стає від'ємною при зростанні t, що неможливо при $A > 0$.

Отож, $A = 0$, тобто $\lim\limits_{t \to \infty} v(x(t)) = 0$. За неперервністю функції $v(x)$ одержуємо $v(\lim\limits_{t \to \infty} x(t)) = 0$. Оскільки $v(0) = 0$ і тільки тоді, то $\lim\limits_{t \to \infty} x_i(t) = 0$, $i = \overline{1, n}$, тобто $\lim\limits_{t \to \infty} |x(t)| = 0$.

Теорема 3 (Четаєва про нестійкість). *Нехай U – окіл нуля, U_1 – така область в U, що початок координат належить її межі. Якщо існує така неперервно диференційовна в U_1 функція $v = v(x)$, що*

$v(x) > 0, \quad \dot{v}(x) > 0$ для $x \in U_1$,
$v(x) = 0$ у тих точках межі області U_1, які належать U,
то тривіальний розв'язок системи (4.5) нестійкий.

Доведення. Нехай γ – траєкторія розв'язку $x(t)$ системи (4.5), яка виходить із точки $x_0 \in U_1$, $w(t) = v(x(t))$. З умов теореми $w(0) > 0$, $w'(t) > 0$ доки $\gamma \subset U_1$. Тому $w(t) > 0$ доки $\gamma \subset U_1$ і γ не може перетнути ту частину межі області U_1, на якій $v(x) = 0$. Траєкторія γ вийде за межі U_1, віддаляючись від початку координат.

Розглянемо приклади.

1. Нехай $x(t)$ – розв'язок рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g(x). \tag{4.6}$$

Система функцій $x_1 = x, x_2 = x'$ буде розв'язком системи диференціальних рівнянь

$$x_1' = x_2,\ x_2' = -g(x_1). \tag{4.7}$$

Запишемо систему (4.7) в симетричній формі $\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-g(x_1)} = dt$ і знайдемо її перший інтеграл, розв'язавши рівняння $g(x_1)dx_1 + x_2dx_2 = 0$. Одержуємо $\int\limits_0^{x_1} g(x_1)dx_1 + \frac{x_2^2}{2} = C$.

Якщо функція $g = g(x)$ неперервна, $g(0) = 0$ і $xg(x) > 0$ для $x \neq 0$, то функція $v(x_1, x_2) = \int\limits_0^{x_1} g(x)dx + \frac{x_2^2}{2}$ є функцією Ляпунова для системи (4.7). Отже, тривіальний розв'язок як системи (4.7), так і рівняння (4.6) стійкий.

2. Нехай $x(t)$ – розв'язок рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} = -g(x). \tag{4.8}$$

Система функцій $x_1 = x, x_2 = x'$ буде розв'язком системи диференціальних рівнянь

$$x_1' = x_2,\ x_2' = -g(x_1) - f(x_1)x_2. \tag{4.9}$$

Візьмемо функцію $v(x_1, x_2) = \int\limits_0^{x_1} g(x)dx + \frac{x_2^2}{2}$ і знайдемо $v(x) = \frac{dv}{dt}\,|_{(4.7)} = g(x_1)x_2 + x_2(-g(x_1) - f(x_1)x_2) = -f(x_1)x_2^2$.

Якщо функція $g(x)$ неперервна, $g(0) = 0$ і $xg(x) > 0$, $x \neq 0$, $f(x)$ неперервна і додатна, то $v(x)$ від'ємно визначена в околі нуля. Отож, за теоремою 2 тривіальний розв'язок системи (4.9) (а також рівняння (4.8)) асимптотично стійкий.

3. Знову розглянемо рівняння (4.6), але за умов $g(x) < 0$, $x > 0$ і $g(0) = 0$. Нехай $U_1 = \{(x_1, x_2) \in U : x_1 > 0, x_2 > 0\}$, $v = x_1 x_2$. Тоді в U_1 $v(x) > 0$ і $\dot{v}(x) = x_2^2 - x_1 g(x_1) > 0$. Звідси, за теоремою 3, тривіальний розв'язок системи (4.7), а також рівняння (4.6) нестійкий.

4.4. Стійкість за першим наближенням

Припускаємо, що праві частини автономної системи (4.5), тобто функції $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1,n}$ неперервні в $\mathbb{R}^n$ і мають неперервні похідні за $x_1, \ldots, x_n$ до другого порядку включно. Крім того, вважаємо, що $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = \overline{1,n}$, а отже, система (4.5) має тривіальний розв'язок.

Використовуючи формулу Тейлора, подаємо систему (4.5) в околі початку кординат у вигляді

$$\begin{aligned} x_1' &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + R_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\ldots \\ x_n' &= \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j + R_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{4.10}$$

де a_{ij} – сталі, $|R_i(x_1, \ldots, x_n)| \leq M|x|^2$, $i, j = \overline{1,n}$. Позначимо через A матрицю з елементами a_{ij}, через $R(x)$ – вектор-функцію з компонентами $R_1(x), \ldots, R_n(x)$. Система (4.10) набуває вигляду

$$x' = Ax + R(x).$$

Лінійна система

$$x' = Ax \tag{4.11}$$

називається *системою першого наближення* для (4.10).

Теорема (про стійкість за першим наближенням). *Якщо всі власні значення матриці A мають від'ємні дійсні частини, то тривіальний*

розв'язок системи (4.10) асимптотично стійкий. Якщо хоч одне з власних значень матриці A має додатну дійсну частину, то тривіальний розв'язок системи (4.10) нестійкий.

Зауважимо, що ця теорема не охоплює одного випадку: всі власні значення матриці A мають дійсні частини ≤ 0, причому дійсна частина принаймні одного з них дорівнює нулю. Останній випадок описано в [13].

Відомі ефективні ознаки перевірки того, що всі власні значення матриці A мають від'ємні дійсні частини.

Д о в е д е н н я. Існує невироджене перетворення $y = Kx \quad (x = K^*y)$, тобто

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k \quad (x_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}^* y_k), \tag{4.12}$$

яке зводить матрицю A до нормальної жорданової форми. При перетворенні (4.12) система (4.11) розпадається на $p \leq n$ незалежних систем, перша з яких має вигляд

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 y_1 + y_2 + \tilde{R}_1(y) \\ &\cdots \\ y_{n_1}' &= \lambda_1 y_{n_1} + \tilde{R}_{n_1}(y). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Тут λ_1 – власне значення матриці A, $n_1 + \cdots + n_p = n$, $\tilde{R}_i(y)$ є лінійними комбінаціями функцій $R_j(K^*y)$, $j = \overline{1,n}$, а тому існує така додатна стала M_1, що $|\tilde{R}_i(y)| \leq M_1 |K^*y|^2$. Далі $(K^*y)_i^2 = x_i^2 = (\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ik}^* y_k)^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_{ik}^*)^2 \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 = N|y|^2$. Отже, $|\tilde{R}_i(y)| \leq M_1 N |y|^2$.

У кожній із систем вигляду (4.13) зробимо заміну

$$z_i = y_i \gamma^{n_1 - i},\ 1 \leq i \leq n_1, \quad z_{n_1+i} = y_{n_1+i} \gamma^{n_2 - i}, 1 \leq i \leq n_2, \quad \ldots, \gamma > 0.$$

Тоді матимемо

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} x_k \quad (x_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}^* z_k), \tag{4.14}$$

а система (4.11) перейде у систему

$$
\begin{gathered}
z_1' = \lambda_1 z_1 + \gamma z_2 + Q_1(z) \\
\dots \\
z_{n_1}' = \lambda_1 z_{n_1} + Q_{n_1}(z) \\
z_{n_1+1}' = \lambda_2 z_{n_1+1} + \gamma z_{n_1+2} + Q_{n_1+1}(z) \\
\dots \\
z_n' = \lambda_p z_n + Q_n(z).
\end{gathered}
\tag{4.15}
$$

При цьому $Q_i(z) = \gamma^{n_1-i}\tilde{R}_i(y)$, $1 \le i \le n_1$, $Q_{n_1+i}(z) = \gamma^{n_2-i}\tilde{R}_{n_1+i}(y)$, $1 \le i \le n_2$, ... З оцінок $|\tilde{R}_i|$ випливає, що $|Q_i(z)| \le M_2(\gamma)|z|^2$, $i = \overline{1,n}$, $M_2(\gamma) = const > 0$.

Систему (4.15) можна записати у матричному вигляді

$$
\frac{dz}{dt} = (\Lambda + B)z + Q(t,z),
$$

де Λ – діагональна матриця.

Візьмемо функцію Ляпунова у вигляді

$$
v(x) = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z_j} = (z, \overline{z}). \tag{4.16}
$$

Тут і надалі через $\overline{z}$ позначаємо комплексно спряжений до z вираз, а через (u,v) – скалярний добуток векторів u, v.

Обчислимо $\frac{dv}{dt}\,|_{(4.10)} = \big((\Lambda + B)z, \overline{z}\big) + \big(z, (\overline{\Lambda} + \overline{B})\overline{z}\big) + \big(Q(t,z), \overline{z}\big) + \big(z, \overline{Q(t,z)}\big) = \big((\Lambda + \overline{\Lambda})z, \overline{z}\big) + \big(Bz, \overline{z}\big) + \big(z, \overline{B}\overline{z}\big) + \big(Q(z), \overline{z}\big) + \big(z, \overline{Q(z)}\big)$.

Перший із цих доданків дорівнює $\sum\limits_{j=1}^{n}(\lambda_j + \overline{\lambda_j})|z_j|^2 = 2\sum\limits_{j=1}^{n} Re\lambda_j |z_j|^2 \le -2\omega \sum\limits_{j=1}^{n} |z_j|^2$, оскільки $Re\lambda_j \le -\omega < 0$ для всіх j за умовою теореми.

При досить малому γ усі елементи b_{jk} матриці B малі за модулем, далі для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо γ настільки малим, щоб $|b_{jk}| \le \varepsilon$, $j,k = \overline{1,n}$. Тоді матимемо $\big|\big(Bz, \overline{z}\big)\big| \le \sum\limits_{j,k=1}^{n} |b_{jk}||z_j||z_k| \le \varepsilon \sum\limits_{j,k=1}^{n} |z_j||z_k| = \varepsilon(\sum\limits_{j=1}^{n} |z_j|)^2 \le n\varepsilon \sum\limits_{j=1}^{2} |z_j|^2 = n\varepsilon|z|^2$. Аналогічно оцінюємо інші доданки

у виразі $\frac{dv}{dt}\,|_{(4.10)}$. Одержуємо $\frac{dv}{dt}\,|_{(4.10)} \leq -2\omega|z|^2 + 2n\varepsilon|z|^2 + 2M_2|z|^3 = -2(\omega - n\varepsilon)|z|^2 + 2M_2|z|^3 = -2\omega_1|z|^2(1 - \frac{M_2}{\omega_1}|z|)$, де $\omega_1 = \omega - n\varepsilon$, $\omega_1 > 0$ при досить малому ε. Вибираючи такий окіл U початку координат, щоб $\frac{M_2}{\omega_1}|z| < \frac{1}{2}$, одержуємо $\frac{dv}{dt}\,|_{(4.10)} \leq -\omega_1|z|^2 = -\omega_1 v(x)$. Тому функція $\frac{dv}{dt}\,|_{(4.10)}$ від'ємно визначена в околі U точки $x = 0$. Ми довели, що функція Ляпунова (4.16) задовольняє умови теореми про асимптотичну стійкість тривіального розв'язку системи (4.10).

Нехай тепер $Re\lambda_1 > 0$. Використаємо теорему Четаєва. Візьмемо $v(x) = |z_1|^2$. Маємо

$$v(0) = 0, \quad \frac{dv}{dt}\,|_{(4.10)} = 2Re\lambda_1|z_1|^2 + H(z),$$

де $|H(z)| \leq C|z|^3$. Тоді $\frac{dv}{dt}\,|_{(4.10)} \geq 2Re\lambda_1|z_1|^2 - C|z|^3$. У точці $z_1 \neq 0, z_2 = \cdots = z_n = 0$ при досить малих значеннях $|z_1|$ $\frac{dv}{dt}\,|_{(4.10)} \geq (2Re\lambda_1 - C|z_1|)|z_1|^2 > 0$.

Тому існує область U_1, межа якої містить початок координат і в якій $v(x) > 0$, $\frac{dv}{dt}\,|_{(4.10)} > 0$. За теоремою Четаєва тривіальний розв'язок системи (4.10) нестійкий.

Зауваження. З означення стійкості та структури загального розв'язку випливає [13], що тривіальний розв'язок ЛОС (4.11) стійкий, асимптотично стійкий, нестійкий тоді й тільки тоді, коли матриця Вронського $\Phi(t)$ відповідно обмежена, обмежена і $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t) = 0$, має необмежені елементи.

Використовуючи структуру матриці Вронського для ЛОС зі сталими коефіцієнтами, доведена вище теорема уточнюється [13]: тривіальний розв'язок ЛОС зі сталими коефіцієнтами стійкий тоді й тільки тоді, коли для довільного простого власного значення λ_j $Re\lambda_j \leq 0$, а для кратного $Re\lambda_j < 0$, асимптотично стійкий тоді й тільки тоді, коли всі власні значення мають від'ємні дійсні частини, нестійкий тоді й тільки тоді, коли існує хоч одне просте λ_j, для якого $Re\lambda_j > 0$, або хоч одне кратне, для якого $Re\lambda_j \geq 0$.

4.5. Поведінка траєкторій автономної системи двох рівнянь в околі точки спокою

З'ясуємо поведінку траєкторій автономної системи двох рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{4.17}$$

в околі положення рівноваги $O = (0,0)$. Очевидно, що

$$f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0. \tag{4.18}$$

Траєкторія системи (4.17) є розв'язком рівняння

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1,x_2)}{f_1(x_1,x_2)}. \tag{4.19}$$

Умови (4.18) тепер означають, що точка O є *особливою точкою* рівняння (4.19). Отже, досліджуючи поведінку траєкторій автономної системи (4.17) в околі положення рівноваги O, ми одночасно досліджуватимемо поведінку розв'язку рівняння (4.19) в околі особливої точки O. Запишемо

$f_1(x_1,x_2) = \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x_2}x_2 + O(x_1^2+x_2^2)$,

$f_2(x_1,x_2) = \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x_2}x_2 + O(x_1^2+x_2^2)$.

Перрон довів, що доданки $O(x_1^2+x_2^2)$ не впливають на поведінку траєкторій системи (4.17) в околі положення рівноваги, якщо

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x_2} - \lambda \end{pmatrix} \neq 0 \text{ при } Re\lambda = 0.$$

Нехай $\frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x_1} = a$, $\frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x_2} = b$, $\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x_1} = c$, $\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x_2} = d$. Далі розглядаємо лінійну систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ax_1 + bx_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \tag{4.20}$$

і рівняння

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{cx_1 + dx_2}{ax_1 + bx_2} \tag{4.21}$$

у припущенні, що $\lambda = 0$ не є власним значенням матриці $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Траєкторії системи (4.20) є інтегральними кривими рівняння (4.21) і навпаки. Оскільки матриця A є дійсна, то можливі такі випадки:

1) власні значення λ_1, λ_2 матриці A дійсні та різні;
2) власні значення λ_1, λ_2 матриці A комплексно-спряжені;
3) власні значення матриці A збігаються ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$).

У кожному з цих випадків поведінка траєкторій системи (4.20) (інтегральних кривих рівняння (4.21)) різна. Розглянемо ці випадки окремо.

1. Існує невироджене перетворення $X = KY$, яке зводить матрицю A до діагонального вигляду, а систему (4.20) до системи

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2,$$

відповідно рівняння (4.21) – до рівняння $\frac{dy_2}{dy_1} = k\frac{y_2}{y_1}$ $(k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \neq 1)$. Його розв'язки

$$y_2 = C|y_1|^k, \; C = const. \tag{4.22}$$

При $k > 0$ лінії (4.22) є параболами, що проходять через точку O і дотикаються у ній до осі Oy_1, якщо $k > 1$, до осі Oy_2, якщо $k \in (0, 1)$. Відповідно через положення рівноваги O проходять усі траєкторії системи (4.20) і в точці O усі траєкторії мають спільну дотичну. Її напрям збігається з напрямом власного вектора, який відповідає меншому за абсолютною величиною власному значенню матриці A.

Таку точку спокою системи (4.20) (особливу точку рівняння (4.21)) називають *вузлом*. Цей вузол стійкий, якщо обидва власні значення матриці A від'ємні, нестійкий, якщо обидва власні значення матриці A додатні.

При $k < 0$ лінії (4.22) є гіперболами та півпрямими – півосями системи координат. Отже, в довільному околі точки O з усіх траєкторій системи (4.20) є лише півпрямі. Усі інші траєкторії спочатку наближаються до точки спокою, а потім віддаляються від неї.

Таку точку спокою системи (4.20) (особливу точку рівняння (4.21)) називають *сідлом*. Сідло є нестійкою точкою спокою.

2. Якщо власні значення матриці A суто уявні, $\lambda_1 = qi$, $\lambda_2 = -qi$, то усі розв'язки системи (4.20) мають вигляд

$$x(t) = \overline{h_1}\cos qt + \overline{h_2}\sin qt,$$

де $\overline{h_1}, \overline{h_2}$ – певні вектори, а отже, є періодичними. Траєкторії системи (4.20) – замкнені лінії, які оточують початок координат.

Таку точку спокою системи (4.20) (особливу точку рівняння (4.21)) називають *центром*. Центр – стійке положення рівноваги, але не асимптотично стійке.

Якщо $\lambda_1 = p + qi$, $\lambda_2 = p - qi$, $p \neq 0$, то усі розв'язки системи (4.20) мають вигляд

$$x(t) = e^{pt}\left(\overline{h_1}\cos qt + \overline{h_2}\sin qt\right),$$

і не є періодичними. Траєкторії системи (4.20) мають вигляд спіралей, які закручуються до початку координат при $p < 0$ і розкручуються при $p > 0$.

Таку точку спокою системи (4.20) (особливу точку рівняння (4.21)) називають *фокусом*. При $p < 0$ положення рівноваги – стійкий фокус, а при $p > 0$ – нестійкий фокус.

3. Існує невироджене перетворення $X = KY$, яке зводить матрицю A до нормальної жорданової форми $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$. Відповідно рівняння (4.21) зведеться до рівняння

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda_0 y_2}{\lambda_0 y_1 + y_2} \tag{4.23}$$

або

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{y_2}{y_1}. \tag{4.24}$$

Розв'язавши рівняння (4.23), побачимо, що усі його розв'язки проходять через точку O і в цій точці мають спільну дотичну. Таку точку спокою системи (4.20) (особливу точку рівняння (4.21)) називають *виродженим вузлом*.

Розв'язками рівняння (4.24) є півпрямі $y_2 = Cy_1$, C – довільна стала. Таку точку спокою системи (4.20) (особливу точку рівняння (4.21)) називають *дикритичним вузлом*.

Вироджений чи дикритичний вузол є стійким, якщо $\lambda_0 < 0$, нестійким, якщо $\lambda_0 > 0$.

Розділ 5. РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

5.1. Основні поняття. Існування загального розв'язку

Означення 1. Рівнянням з частинними похідними першого порядку називається співвідношення

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = 0 \tag{5.1}$$

між змінними $x_1, \ldots, x_n$, функцією $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ та її похідними першого порядку.

Означення 2. Розв'язком рівняння (5.1) в області $\Omega \in \mathbb{R}^n$ називається функція $u(x)$ класу $C^1(\Omega)$, після підставляння якої у рівняння (5.1), одержуємо тотожність в області Ω.

Розглянемо рівняння $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ в $\mathbb{R}^2$. Його розв'язками є $u = f(x_2)$, де f – довільна неперервно диференційовна функція однієї змінної.

Як бачимо, на відміну від звичайних диференціальних рівнянь, множина розв'язків рівняння з частинними похідними містить довільні функції. Однак є мало типів рівнянь з частинними похідними, навіть першого порядку, для яких відомо всю множину розв'язків. До таких рівнянь належить *квазілінійне* рівняння з частинними похідними першого порядку

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = b(x, u), \tag{5.2}$$

де $a_1(x, u), \ldots, a_n(x, u), b(x, u)$ – задані функції класу $C^1(\Omega_1)$, $\Omega_1 = \Omega \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Його розв'язок $u = u(x)$ визначає деяку поверхню в $\mathbb{R}^{n+1}$ з вектором нормалі $\overline{\nu} = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, -1)$. Рівнянням (5.2) визначене векторне поле $\overline{F} = (a_1(x, u), \ldots, a_n(x, u), b(x, u))$. Тоді рівняння (5.2) можна записати у вигляді $\overline{F} \cdot \overline{\nu} = 0$. Отже, розв'язок рівняння (5.2) задає таку поверхню в $\mathbb{R}^{n+1}$, яка дотикається до векторного поля $\overline{F}$. Ця поверхня називається *інтегральною поверхнею* рівняння (5.2).

Означення 3. Система звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{a_1(x, u)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x, u)} = \frac{du}{b(x, u)}. \tag{5.3}$$

називається *характеристичною системою* для рівняння (5.2), а інтегральні криві системи (5.3) – *характеристиками* рівняння (5.2). Це

криві $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t), u = U(t), t \in (\alpha, \beta)$, які дотикаються до векторного поля $\overline{F}$.

Нехай $u = \varphi(x)$ – інтегральна поверхня рівняння (5.2), точка $(x_0, U_0) = (x(t_0), U(t_0))$ належить їй, а інтегральна крива $x(t), U(t)$ системи (5.3) належить Ω_1 при $t \in (\alpha, \beta)$, нехай $v(t) = \varphi(x(t))$. Тоді $v'(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi(x(t))}{\partial x_j} x_j'(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi(x(t))}{\partial x_j} a_j(x(t), U(t)) = b(x(t), U(t))$. Оскільки $U'(t) = b(x(t), U(t))$, то матимемо $v'(t) = U'(t)$, звідки $v(t) = U(t) + C$. За припущенням $\varphi(x_0) = \varphi(x(t_0)) = U(t_0)$, тобто $v(t_0) = U(t_0)$. Тому $C = 0$ і $v(t) = U(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, тобто $\varphi(x(t)) = U(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$.

Це означає, що всі точки $(x(t), U(t))$ інтегральної кривої системи (5.3) лежать на інтегральній поверхні $u = \varphi(x)$ рівняння (5.2), якщо одна точка $(x(t_0), U(t_0))$ лежить на ній.

Отже, інтегральні поверхні рівняння (5.2) утворюються з інтегральних кривих системи (5.3). За допомогою розв'язків системи (5.3) побудуємо загальний розв'язок рівняння (5.2).

Спочатку розглянемо окремий випадок – *лінійне однорідне* рівняння з частинними похідними першого порядку

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \tag{5.4}$$

де $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ – задані функції з $C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Характеристична система для рівняння (5.4) має вигляд

$$\frac{dx_1}{a_1(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x)} = \frac{du}{0},$$

$u = C$ – один з її перших інтегралів. Характеристичною для рівняння (5.4) також називають систему

$$\frac{dx_1}{a_1(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x)}. \tag{5.5}$$

Відомо, що існує не більше ніж $n-1$ незалежних інтегралів системи (5.5) $\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$. Функція $\psi_k(x)$ є інтегралом системи (5.5) тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє тотожність $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} = 0$, $x \in \Omega$. Порівнюючи цю тотожність із (5.4), бачимо, що інтеграли системи (5.5)

є розв'язками рівняння (5.4) й інших розв'язків рівняння (5.4) не має. Отже, множина функцій

$$u = \Phi(\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)), \ x \in \Omega, \tag{5.6}$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція, є *загальним розв'язком* рівняння (5.4): при довільній неперервно диференційовній функції Φ (5.6) є розв'язком рівняння (5.4) і довільний розв'язок рівняння (5.4) входить у сім'ю розв'язків (5.6) при певній неперервно диференційовній функції Φ.

Розв'язок $u = u(x)$ квазілінійного рівняння з частинними похідними (5.2) шукатимемо як неявно задану співвідношенням

$$V(x, u) = 0, \ V \in C^1(\Omega_1). \tag{5.7}$$

функцію. Диференціюючи тотожність $V(x, u(x)) = 0$, $x \in \Omega$, знаходимо $u_{x_i} = -\frac{V_{x_i}}{V_u}$ і підставляємо знайдені вирази для u_{x_i} у рівняння (5.2). Одержуємо

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u(x)) \frac{\partial V(x, u(x))}{\partial x_j} + b(x, u(x)) \frac{\partial V(x, u(x))}{\partial u} = 0, x \in \Omega.$$

Якщо вважати змінні $x_1, \ldots, x_n, u$ незалежними, то рівняння

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u) \frac{\partial V}{\partial x_j} + b(x, u) \frac{\partial V}{\partial u} = 0. \tag{5.8}$$

є лінійним однорідним рівнянням з частинними похідними (вигляду (5.4)), тому, за доведеним, має загальний розв'язок

$$V = \Phi\big(\psi_1(x, u), \ldots, \psi_n(x, u)\big), \ (x, u) \in \Omega_1,$$

де $\psi_1(x, u), \ldots, \psi_n(x, u)$ – незалежні інтеграли характеристичної системи (5.3), Φ – довільна функція класу C^1. Враховуючи (5.7), одержуємо сім'ю розв'язків рівняння (5.2) у неявному вигляді

$$\Phi\big(\psi_1(x, u), \ldots, \psi_n(x, u)\big) = 0, \ (x, u) \in \Omega_1. \tag{5.9}$$

Доведемо, що (5.9) є загальним розв'язком рівняння (5.2). Ми вже показали, що (5.9) є розв'язком рівняння (5.2) при довільній неперервно

диференційовній функції Φ. Ще треба довести, що довільний розв'язок рівняння (5.2) можна ввести у сім'ю (5.9), вибравши певну функцію Φ, адже, припускаючи усі змінні $x_1, \ldots, x_n, u$ у рівнянні (5.8) незалежними, ми могли втратити деякі розв'язки цього рівняння. Наше завдання показати, що насправді такої втрати розв'язків немає.

Нехай $u = \varphi(x)$ – довільний розв'язок рівняння (5.2). Тоді

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, \varphi(x)) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} = b(x, \varphi(x)),\ x \in \Omega. \tag{5.10}$$

Оскільки $\psi_k(x, u)$ – інтеграли системи (5.3), то

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u) \frac{\partial \psi_k(x, u)}{\partial x_j} + b(x, u) \frac{\partial \psi_k(x, u)}{\partial u} = 0,\ (x, u) \in \Omega_1,$$

а отже,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, \varphi(x)) \frac{\partial \psi_k(x, \varphi(x))}{\partial x_j} + b(x, \varphi(x)) \frac{\partial \psi_k(x, \varphi(x))}{\partial u} = 0,\ x \in \Omega,\ k = \overline{1, n}. \tag{5.11}$$

Введемо позначення $\Psi_k(x) = \psi_k(x, \varphi(x)),\ k = \overline{1, n}$. Тоді $\frac{\partial \Psi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_k}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$. Домножуємо тотожність (5.10) на $\frac{\partial \psi_k(x, \varphi(x))}{\partial u}$ і додаємо її почленно до відповідної тотожності (5.11). Одержуємо

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, \varphi(x)) \Big(\frac{\partial \psi_k(x, \varphi(x))}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_k(x, \varphi(x))}{\partial u} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \Big) = 0,\ x \in \Omega,\ k = \overline{1, n}$$

або в нових позначеннях

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, \varphi(x)) \frac{\partial \Psi_k(x, \varphi(x))}{\partial x_j} = 0,\ x \in \Omega.$$

Бачимо, що кожна з функцій $\Psi_k(x)$, $k = \overline{1, n}$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння (5.4), тобто – інтегралом системи (5.5). Система (5.5) має не більше $n-1$ незалежних інтегралів, тому функції $\Psi_k(x)$, $k = \overline{1, n}$ – залежні: існує така неперервно диференційовна функція Φ_1, що $\Phi_1\big(\psi_1(x, \varphi(x)), \ldots, \psi_n(x, \varphi(x))\big) = 0,\ x \in \Omega$. Отже, розв'язок $u = \varphi(x)$ входить у сім'ю (5.9) при $\Phi = \Phi_1$.

5.2. Задача Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку

За аналогією до звичайного диференціального рівняння першого порядку, природно з усієї множини розв'язків рівняння

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = b(x,u) \tag{5.2}$$

виділяти один, задаючи додатково його значення при фіксованій одній із незалежних змінних, наприклад,

$$u\,|_{x_n=x_{n0}} = h(x_1,\ldots,x_{n-1}), \tag{5.12}$$

де h – відома функція. Задача (5.2),(5.12) називається *задачею Коші* для рівняння (5.2).

При $n=2$ рівняння (5.2) має вигляд

$$a_1(x_1,x_2,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1,x_2,u)\frac{\partial u}{\partial x_2} = b(x_1,x_2,u), \tag{5.13}$$

його розв'язок $u=u(x_1,x_2)$ задає поверхню в $\mathbb{R}^3$, умова (5.12) набуває вигляду

$$u\,|_{x_2=x_{20}} = h(x_1) \tag{5.14}$$

і визначає криву на площині $x_2=x_{20}$. Отже, мовою геометрії задача Коші (5.13),(5.14) полягає у знаходженні інтегральної поверхні рівняння (5.13), яка проходить через плоску криву (5.14). Тому природним узагальненням задачі (5.13),(5.14) є задача знаходження інтегральної поверхні рівняння (5.13), яка проходить через довільно задану криву Γ у $\mathbb{R}^3$

$$x_1=\varphi_1(\tau),\ x_2=\varphi_2(\tau),\ u=h(\tau),\ \tau\in(\alpha,\beta). \tag{5.15}$$

Задачу (5.13),(5.15) також називаємо задачею Коші для рівняння (5.13).

У випадку n незалежних змінних задача Коші для рівняння (5.2) полягає у знаходженні інтегральної поверхні цього рівняння, яка проходить через задану $n-1$-вимірну гіперповерхню

$$\begin{gathered} x_1=\varphi_1(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}),\\ \cdots\\ x_n=\varphi_n(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}),\\ u=h(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}),\quad (\tau_1,\ldots,\tau_{n-1})\in D\subset\mathbb{R}^{n-1}. \end{gathered} \tag{5.16}$$

Розглянемо задачу Коші для квазілінійного рівняння (5.13).

Теорема 1. *Нехай $a_1, a_2, b \in C^1(\Omega_1)$, $\varphi_1, \varphi_2, h \in C^1(\alpha, \beta)$ і крива (5.15) не є характеристикою рівняння (5.13). Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші (5.13),(5.15), визначений у деякому околі кривої (5.15).*

Доведення. Через точки кривої Г проведемо характеристики рівняння (5.13). Для цього треба для кожного значення $\tau \in (\alpha, \beta)$ розв'язати задачу Коші

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1(x_1, x_2, u), \quad x_1 \mid_{t=0} = \varphi_1(\tau), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_2(x_1, x_2, u), \quad x_2 \mid_{t=0} = \varphi_2(\tau), \\ \frac{du}{dt} &= b(x_1, x_2, u), \quad u \mid_{t=0} = h(\tau). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Використовуємо теореми про неперервну залежність від параметра та диференційовність розв'язку задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. За умов теореми існує єдиний (для кожного значення $\tau \in (\alpha, \beta)$) розв'язок

$$x_1 = x_1(t, \tau), x_2 = x_2(t, \tau), u = u(t, \tau) \tag{5.18}$$

задачі (5.17), неперервно диференційовний за $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ і $\tau \in (\alpha, \beta)$.

Доведемо, що сім'я кривих (5.18) визначає поверхню $V(x_1, x_2, u) = 0$ у $\mathbb{R}^3$. Для цього достатньо довести, що з рівностей (5.18) можна вилучити змінні t, τ. Маємо

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tau} & \frac{\partial x_2}{\partial \tau} & \frac{\partial u}{\partial \tau} \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} a_1 \mid_{t=0} & a_2 \mid_{t=0} & b \mid_{t=0} \\ \frac{\partial x_1 \mid_{t=0}}{\partial \tau} & \frac{\partial x_2 \mid_{t=0}}{\partial \tau} & \frac{\partial u \mid_{t=0}}{\partial \tau} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), h(\tau)) & a_2(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), h(\tau)) & b(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), h(\tau)) \\ \varphi_1'(\tau) & \varphi_2'(\tau) & h'(\tau) \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї матриці дорівнює 2 за припущенням теореми. Тому у деякому околі $t = 0$ і для всіх $\tau \in (\alpha, \beta)$ ранг матриці Якобі дорівнює 2, а отже, з (5.18) можна вилучити t, τ.

Зокрема, якщо $det \begin{pmatrix} a_1(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)) & a_2(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)) \\ \varphi_1'(\tau) & \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}_2(\tau) \end{pmatrix} \neq 0$, то відображення $x_1 = x_1(t, \tau), x_2 = x_2(t, \tau)$ має обернене $t = t(x_1, x_2), \tau = \tau(x_1, x_2)$, а тоді $u = u(t(x_1, x_2), \tau(x_1, x_2))$, тобто $u = z(x_1, x_2)$ і визначає поверхню в $\mathbb{R}^3$, задану в явному вигляді. Це шуканий розв'язок задачі Коші.

Зауважимо таке: коли крива (5.15) є характеристикою для рівняння (5.13), то задача Коші має здебільшого безліч розв'язків. Справді, візьмемо довільну гладку криву l в області Ω_1, що перетинає криву (5.15) і не дотикається до неї, через точки кривої l проводимо характеристики (задана характеристика (5.15) – одна з них). За теоремою 1 сукупність цих характеристик утворює інтегральну поверхню рівняння (5.13), яка проходить через задану характеристику (5.15) і через криву l. Одержуємо розв'язок задачі Коші (5.13),(5.15). Оскільки таких кривих l можна вибрати безліч, то існує безліч розв'язків задачі Коші (5.13),(5.15) у цьому випадку.

Теорема 2. *Нехай $a_i \in C^1(\Omega_1)$, $\varphi_i, h \in C^1(D), i = \overline{1,n}$ і поверхня (5.16) не є характеристичною для рівняння (5.2), тоді існує єдиний розв'язок задачі (5.2),(5.16), визначений у деякому околі поверхні (5.16).*

Доведення виконуємо за тією самою схемою, що й у випадку $n = 2$. Розглядаємо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(x_1, \dots, x_n, u), \quad x_1 \mid_{t=0} = \varphi_1(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}),$$
$$\dots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a_n(x_1, \dots, x_n, u), \quad x_n \mid_{t=0} = \varphi_n(\tau, \dots, \tau_{n-1}),$$
$$\frac{du}{dt} = b(x_1, \dots, x_n, u), \quad u \mid_{t=0} = h(\tau, \dots, \tau_{n-1}),$$

що залежить від параметрів $(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \in D$. Для кожного значення $(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \in D$ існує її єдиний розв'язок

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \\ &\dots \\ x_n &= x_n(t, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \\ u &= u(t, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}), \end{aligned} \tag{5.19}$$

визначений і неперервно диференційовний для $t \in (-\varepsilon, \varepsilon), (\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \in D$. За умовою теореми з системи рівностей (5.19) можна вилучити $t, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$. Одержуємо $V(x_1, \dots, x_n, u) = 0$. Це шуканий розв'язок задачі.

Якщо поверхня (5.16) є характеристичною поверхнею для рівняння (5.2), то як для випадку $n = 2$ розв'язок задачі Коші неєдиний.

Розділ 6. КВАЗІЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

6.1. Зведення до канонічного вигляду та класифікація рівнянь у випадку двох незалежних змінних

Рівняння вигляду

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \qquad (6.1)$$

де $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $a,b,c \in C(\Omega)$, називають квазілінійним рівнянням з частинними похідними другого порядку з лінійною головною частиною

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}.$$

Розв'язком рівняння (6.1) в області Ω є функція $u = u(x,y)$ з класу $C^2(\Omega)$, підставляючи яку в рівняння (6.1), одержуємо тотожність в області Ω.

Канонічним називатимемо найпростіший вигляд рівняння (6.1) у нових незалежних змінних

$$\xi = \varphi(x,y),\ \eta = \psi(x,y),\ (x,y) \in \Omega. \qquad (6.2)$$

Далі вважатимемо перетворення (6.2) невиродженим в Ω, а функції $\varphi, \psi \in C^2(\Omega)$. Тоді $u(x,y) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = v(\xi,\eta)$,

$$\begin{aligned}
&u_x = v_\xi \varphi_x + v_\eta \psi_x,\\
&u_y = v_\xi \varphi_y + v_\eta \psi_y,\\
&u_{xx} = (v_{\xi\xi}\varphi_x + v_{\xi\eta}\psi_x)\varphi_x + v_\xi \varphi_{xx} + (v_{\eta\xi}\varphi_x + v_{\eta\eta}\psi_x)\psi_x + v_\eta \psi_{xx} =\\
&\qquad = v_{\xi\xi}\varphi_x^2 + 2v_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x + v_{\eta\eta}\psi_x^2 + v_\xi\varphi_{xx} + v_\eta\psi_{xx},\\
&u_{xy} = v_{\xi\xi}\varphi_x\varphi_y + v_{\xi\eta}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + v_{\eta\eta}\psi_x\psi_y + v_\xi\varphi_{xy} + v_\eta\psi_{xy},\\
&u_{yy} = v_{\xi\xi}\varphi_y^2 + 2v_{\xi\eta}\varphi_y\psi_y + v_{\eta\eta}\psi_y^2 + v_\xi\varphi_{yy} + v_\eta\psi_{yy}.
\end{aligned}$$

Підставляючи знайдені вирази для похідних у рівняння (6.1), одержуємо

$$A(\xi,\eta)v_{\xi\xi} + 2B(\xi,\eta)v_{\xi\eta} + C(\xi,\eta)v_{\eta\eta} + F_1(\xi,\eta,v.v_\xi,v_\eta) = 0, \qquad (6.3)$$

де $A = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2$,

$B = a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y) + c\varphi_y\psi_y$,

$C = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2$.

З'ясуємо, як вибрати перетворення (6.2), щоб деякі з коефіцієнтів A, B, C стали нулями.

Рівняння з частинними похідними першого порядку

$$a(x,y)z_x^2 + 2b(x,y)z_x z_y + c(x,y)z_y^2 = 0 \qquad (6.4)$$

називається *характеристичним* для рівняння (6.1).

Лема. *Функція $z = z(x,y)$ є розв'язком рівняння (6.4) тоді і тільки тоді, коли співвідношення $z(x,y) = C$ є розв'язком звичайного диференціального рівняння*

$$a(x,y)dy^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dx^2 = 0. \tag{6.5}$$

Доведення. Нехай $z = z(x,y)$, $z \in C^1(\Omega)$ і є розв'язком рівняння (6.4). Якщо $z_y \neq 0$, то співвідношення $z(x,y) = C$ визначає як неявну неперервно диференційовну функцію $y = y(x)$. Тоді $z(x,y(x)) = C$ і $dy = -\frac{z_x}{z_y}dx$. Підставляємо ці вирази у ліву частину рівняння (6.5). Одержуємо $a(-\frac{z_x}{z_y}dx)^2 - 2b(-\frac{z_x}{z_y}dx) + cdx^2 = \frac{\left(az_x^2+2bz_xz_y+cz_y^2\right)dx^2}{z_y^2}$. Вираз у чисельнику дорівнює нулю згідно з (6.4). Отже, функція $y = y(x)$ задовольняє рівняння (6.5).

Навпаки, нехай $z(x,y) = C$ – розв'язок рівняння (6.5). Тоді знайдена із цього співвідношення як неявна функція $y = y(x)$ задовольняє рівняння (6.5). При цьому $z_x = -z_y\frac{dy}{dx}$. Підставляючи цей вираз у ліву частину рівняння (6.4), одержуємо $a(-z_y\frac{dy}{dx})^2 + 2b(-z_y\frac{dy}{dx}) + cz_y^2 = (ady^2 - 2bdxdy + cdx^2)z_y^2$. Вираз у дужках дорівнює нулю згідно з (6.5).

Враховуючи такий зв'язок між розв'язками рівнянь (6.4) і (6.5), рівняння (6.5) також називають *характеристичним* для рівняння (6.1).

Вираз $\Delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)$ називається *дискримінантом* рівняння (6.1). Рівняння (6.1) називається *гіперболічним* або рівнянням *гіперболічного типу* в області Ω, якщо $\Delta(x,y) > 0$, $(x,y) \in \Omega$, *параболічним* в області Ω, якщо $\Delta(x,y) = 0$, $(x,y) \in \Omega$, *еліптичним* в області Ω, якщо $\Delta(x,y) < 0$, $(x,y) \in \Omega$, рівнянням мішаного типу в Ω, якщо $\Delta(x,y)$ міняє знак в області Ω.

Розглянемо окремо усі ці випадки.

1. $\Delta(x,y) > 0$. Із рівняння (6.5) одержуємо два різні звичайні диференціальні рівняння, розв'язані стосовно похідної

$$a(x,y)dy = \left(b(x,y) + \Delta^{\frac{1}{2}}(x,y)\right)dx, \quad a(x,y)dy = \left(b(x,y) - \Delta^{\frac{1}{2}}(x,y)\right)dx, \tag{6.6}$$

їх загальні інтеграли $\varphi(x,y) = C$, $\psi(x,y) = C$. За лемою функції $\varphi(x,y), \psi(x,y)$ є розв'язками рівняння (6.4), а тому $A(\xi,\eta) = C(\xi,\eta) = 0$.

Отже, якщо в перетворенні (6.2) взяти за функції φ, ψ інтеграли рівнянь (6.6), то у головній частині рівняння (6.3) залишиться тільки один доданок $Bv_{\xi\eta}$. Покажемо, що $B \neq 0$.

Оскільки $\varphi_x = -\varphi_y \frac{dy}{dx}$, $\psi_x = -\psi_y \frac{dy}{dx}$, то з (6.6) $\varphi_x = -\frac{b+\Delta^{\frac{1}{2}}}{a}\varphi_y$, $\psi_x = -\frac{b-\Delta^{\frac{1}{2}}}{a}\psi_y$. Тому $B = a(-\frac{b+\Delta^{\frac{1}{2}}}{a}\varphi_y)(-\frac{b-\Delta^{\frac{1}{2}}}{a}\psi_y) + b\big((-\frac{b+\Delta^{\frac{1}{2}}}{a}\varphi_y)\psi_y + (-\frac{b-\Delta^{\frac{1}{2}}}{a}\psi_y)\varphi_y\big) + c\varphi_y\psi_y = \big(a\frac{b^2-\Delta}{a^2} + b\frac{-b-\Delta^{\frac{1}{2}}-b+\Delta^{\frac{1}{2}}}{a} + c\big)\varphi_y\psi_y = \frac{b^2-\Delta-2b^2+ac}{a}\varphi_y\psi_y = -\frac{2\Delta}{a}\varphi_y\psi_y \neq 0$. Після ділення на B рівняння (6.3) набуває вигляду

$$v_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta). \tag{6.7}$$

Це канонічний вигляд рівняння гіперболічного типу, його перша канонічна форма. Якщо у рівнянні (6.7) перейти до нових незалежних змінних $\alpha = \xi + \eta, \beta = \xi - \eta$, то одержимо

$$\tilde{v}_{\alpha\alpha} - \tilde{v}_{\beta\beta} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta). \tag{6.8}$$

Це друга канонічна форма рівняння гіперболічного типу.

2. $\Delta = 0$. Рівняння (6.5) набуває вигляду $a(x,y)dy = b(x,y)dx$. Нехай $\varphi(x,y) = C$ – його загальний інтеграл. Взявши у (6.2) за φ цю функцію, а за ψ – довільну двічі неперервно диференційовну в Ω, незалежну з φ, тобто таку, що $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)} \neq 0$, $(x,y) \in \Omega$, одержимо, що $A = 0, C \neq 0$.

Доведемо, що $B = 0$. Знову враховуємо, що $\varphi_x = -\frac{b}{a}\varphi_y$. Маємо $B = a(-\frac{b}{a}\varphi_y)\psi_x + b(-\frac{b}{a}\varphi_y\psi_y + \psi_x\varphi_y) + c\varphi_y\psi_y = -\frac{\Delta}{a}\varphi_y\psi_y = 0$. Отже, рівняння (6.3) набуває вигляду

$$v_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta).$$

Це канонічний вигляд рівняння параболічного типу.

3. $\Delta < 0$. У рівняннях (6.6) наявні комплексні вирази, тому перші інтеграли мають як дійсну, так і уявну частини

$$\varphi(x,y) + i\psi(x,y) = C, \quad \varphi(x,y) - i\psi(x,y) = C, \tag{6.9}$$

які й використовуються для зведення рівняння (6.1) до канонічного вигляду. Запишемо

$a(\varphi + i\psi)_x^2 + 2b(\varphi + i\psi)_x(\varphi + i\psi)_y + c(\varphi + i\psi)_y^2 =$
$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 - (a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2) +$
$(a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y) + c\varphi_y\psi_y)i = A - C + Bi.$

За доведеним, $A - C + Bi = 0$, тобто $A - C = 0$ і $B = 0$. Форма $ap^2 + 2bpq + cq^2$ додатно визначена при $\Delta < 0$, тому $A = C \neq 0$. У нових змінних $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ одержуємо рівняння

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta).$$

Це канонічний вигляд рівняння еліптичного типу.

Прикладом рівняння гіперболічного типу є *рівняння коливання струни*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \ a^2 = const > 0.$$

Прикладом рівняння параболічного типу є *рівняння поширення тепла у стержні*

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t).$$

Прикладом рівняння еліптичного типу є *рівняння Пуассона*

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y),$$

воно описує різні стаціонарні фізичні процеси.

Рівняння Трікомі $tu_{xx} + u_{tt} = 0$ належить до змішаного типу: при $t < 0$ воно гіперболічне, а при $t > 0$ – еліптичне.

6.2. Зведення до канонічного вигляду та класифікація рівнянь у випадку багатьох незалежних змінних

Загальний вигляд квазілінійного рівняння з частинними похідними другого порядку з n незалежними змінними та головною лінійною частиною такий:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + F(x, u, grad\ u) = 0, \tag{6.10}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $a_{ij} \in C(\Omega)$. Розв'язком рівняння (6.10) в області Ω є функція $u = u(x)$ з класу $C^2(\Omega)$, підставляючи яку в рівняння, одержуємо тотожність в області Ω. Тому можна вважати, що $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, так що різних коефіцєнтів $a_{ij}(x)$ головної частини рівняння маємо $\frac{n(n+1)}{2}$.

Канонічним виглядом (канонічною формою) такого рівняння називаємо рівняння вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k v_{\xi_k \xi_k} + \Phi(\xi, v, grad\ v) = 0, \tag{6.11}$$

де δ_k – числа, які набувають значень 0, 1 або -1, у нових незалежних змінних

$$\xi_k = \varphi_k(x),\ k = \overline{1,n}. \tag{6.12}$$

Зауважимо, що загалом рівняння (6.10) не завжди можна звести до вигляду (6.11) в області, оскільки на n функцій $\varphi_k(x)$ накладаємо $\frac{n(n+1)}{2} - 1 > n$ (при $n > 2$) умов.

Доведемо, що *при сталих коефіцієнтах головної частини ($a_{ij}(x) = a_{ij}$), а отже, в точці x_0 (замінюючи $a_{ij}(x)$ на $a_{ij}(x_0) = a_{ij}$) рівняння (6.10) завжди можна звести до канонічного вигляду (6.11).*

Розглянемо квадратичну форму

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j. \tag{6.13}$$

Відомо, що існує невироджене перетворення

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} s_k,\ i = \overline{1,n}, \text{коротко } z = Cs, \tag{6.14}$$

яке зводить форму (6.13) до канонічного вигляду $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k s_i^2$. При цьому $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} (\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik} s_k)(\sum\limits_{l=1}^{n} c_{jl} s_l) = \sum\limits_{k,l=1}^{n} \big(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} c_{ik} c_{jl}\big) s_k s_l$.
Отже,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} c_{ik} c_{jl} = \delta_{kl}. \tag{6.15}$$

Покажемо, що, вводячи нові незалежні змінні у рівнянні (6.10), за формулами

$$\xi = C^t x, \text{ тобто } \xi_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik} x_i,\ k = \overline{1,n} \tag{6.16}$$

одержимо рівняння (6.11).

Маємо $u(x) = v(\xi)$, $u_{x_i} = \sum\limits_{k=1}^{n} v_{\xi_k} c_{ik}$, $u_{x_i x_j} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{n} v_{\xi_k \xi_l} c_{ik} c_{jl}$.

Підставляємо знайдені вирази у головну частину рівняння (6.10). Одержуємо $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \big(\sum\limits_{k,l=1}^{n} c_{ik} c_{jl} v_{\xi_k \xi_l}\big) = \sum\limits_{k,l=1}^{n} \big(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} c_{ik} c_{jl}\big) v_{\xi_k \xi_l}$. Згідно з (6.15) вираз у дужках дорівнює δ_{kl}.

Рівняння (6.10) називається *еліптичним* у точці x_0 (в області Ω), якщо у його канонічному вигляді (6.11) усі коефіцієнти $\delta_k \neq 0$ і одного знака. Прикладом є *рівняння Пуассона* $\sum\limits_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} = f(x)$.

Рівняння (6.10) називається *гіперболічним* у точці x_0 (в області Ω), якщо у його канонічному вигляді (6.11) усі коефіцієнти $\delta_k \neq 0$ і знак одного з цих чисел протилежний до всіх інших. Прикладом є *хвильове рівняння* $\sum\limits_{j=1}^{n-1} u_{x_j x_j} - u_{x_n x_n} = f(x)$.

Рівняння (6.10) називається *параболічним* у точці x_0 (в області Ω), якщо у його канонічному вигляді (6.11) один з коефіцієнтів δ_k дорівнює нулеві, а усі інші коефіцієнти $\delta_k \neq 0$ і одного знака. Прикладом є *рівняння теплопровідності* $\sum\limits_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} - u_{x_n} = f(x)$.

Зрозуміло, що є рівняння, які не належать до рівнянь цих трьох типів.

6.3. Характеристики основних рівнянь математичної фізики

Щоб повністю описати реальний фізичний процес, крім диференціального рівняння, яке описує його, потрібно задавати додаткові умови: початковий стан процесу (початкові умови), режим на межі області, в якій відбувається процес (крайові умови). Виділяють три основні типи задач для диференціальних рівнянь: *задачу Коші* – задають початкові умови, процес розглядають в усьому просторі, *крайову задачу* – задають крайові умови, *мішану задачу* – задають і початкові, і крайові умови.

Нехай S – деяка досить гладка n - вимірна поверхня (задана, наприклад, рівнянням $\omega(x) = 0$) і у кожній її точці визначений деякий недотичний напрям l, який неперервно змінюється під час руху вздовж S, наприклад, напрям нормалі ν до поверхні.

Задача Коші для рівняння (6.10) полягає у знаходженні такого його розв'язку, який задовольняє початкові умови

$$u\,|_S = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial l}\,|_S = \psi(x), \; x \in S, \tag{6.17}$$

де φ, ψ – задані функції на поверхні S.

Окремим випадком поверхні S є гіперплощина $x_n = 0$, на якій умови (6.17) при $l = \nu$ набувають вигляду

$$u\,|_{x_n = x_n^0} = \varphi(x'),\; u_{x_n}\,|_{x_n = x_n^0} = \psi(x'),\; x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega_0. \tag{6.18}$$

Перейдемо до такої локальної системи координат $\xi = (\xi', \xi_n)$ з центром у точці $x \in S$, що вісь ξ_n має напрям ν, а інші осі лежать у дотичній площині до поверхні S: $\xi_1 = \omega_1(x), \ldots, \xi_{n-1} = \omega_{n-1}(x), \xi_n = \omega(x)$. У нових координатах рівняння поверхні S набуває вигляду $\xi_n = 0$. Початкові умови (6.17) при $l = \nu$ набувають вигляду

$$v \mid_{\xi_n=0} = \varphi_1(\xi'), \ \frac{\partial v}{\partial \xi_n} \mid_{\xi_n=0} = \psi_1(\xi'). \tag{6.19}$$

Нехай $u(x) = v(\xi)$, тоді $u \mid_S = v \mid_{\xi_n=0}$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} \mid_S = \frac{\partial v}{\partial \xi_n} \mid_{\xi_n=0}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum\limits_{l=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \xi_l} \frac{\partial \omega_l}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum\limits_{l,k=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_l \partial \xi_k} \frac{\partial \omega_l}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} + \sum\limits_{l=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \xi_l} \frac{\partial^2 \omega_l}{\partial x_i \partial x_j}$ $(\omega_n(x) = \omega(x))$. Підставляючи обчислені похідні у рівняння (6.10), одержуємо

$$A v_{\xi_n \xi_n} + B = 0, \tag{6.20}$$

де $A = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \omega_{x_i} \omega_{x_j}$, $B = B(\xi, v, \frac{\partial v}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_{n-1} \partial \xi_n})$.

Вираз B повністю визначається початковими даними задачі

$v \mid_{\xi_n=0} = \varphi_1(\xi')$, $\frac{\partial v}{\partial \xi_i} \mid_{\xi_n=0} = \frac{\partial}{\partial \xi_i}(v \mid_{\xi_n=0}) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_i}, i < n$,

$\frac{\partial v}{\partial \xi_n} \mid_{\xi_n=0} = \psi_1(\xi')$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i \partial \xi_n} \mid_{\xi_n=0} = \frac{\partial}{\partial \xi_i}(\frac{\partial v}{\partial \xi_n} \mid_{\xi_n=0}) = \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_i}, i < n$,

Бачимо, що за допомогою початкових даних (функцій φ та ψ) можемо визначити значення в точках поверхні S усіх похідних невідомої функції, які входять у рівняння (6.10), крім $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_n^2} \mid_{\xi_n=0}$. Цей вираз знаходимо з рівняння (6.20), якщо $A \neq 0$.

Означення 1. Поверхня S, задана рівнянням $\omega(x_1, \ldots, x_n) = 0$, називається *характеристичною поверхнею* для рівняння (6.10), якщо у кожній точці цієї поверхні виконується рівність

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \omega_{x_i} \omega_{x_j} = 0. \tag{6.21}$$

Зауважимо, що (6.21) можна розглядати як рівняння з частинними похідними першого порядку, тоді воно визначає цілу сім'ю характеристичних поверхонь $\omega(x_1, \ldots, x_n) = C$.

Рівняння (6.21) називається *характеристичним рівнянням* для рівняння (6.10) або *рівнянням характеристик* для (6.10).

При $A = 0$ з (6.20) одержуємо $B = 0$. Оскільки вираз B повністю визначається заданими функціями φ та ψ, то рівність $B = 0$ дає зв'язок між даними задачі Коші у точках характеристичної поверхні. Отже, у точках характеристичної поверхні не завжди можна задавати довільно u та $\frac{\partial u}{\partial \nu}$. За умови узгодження початкових даних на характеристичній поверхні розв'язок задачі може не існувати або бути неєдиним.

Приклад. Розглянемо задачу Коші

$$u_{tx} = 0, \ u\,|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t\,|_{t=0} = \psi(x).$$

Пряма $t = 0$ є характеристикою рівняння, $u_{tx}\,|_{t=0} = \psi'(x)$. Тому з рівняння одержуємо необхідну умову розв'язності задачі $\psi'(x) = 0$, а отже, $\psi(x) = a = const$. Загальний розв'язок рівняння $u(x,t) = F_1(x) + F_2(t)$, де F_1, F_2 – довільні неперервно диференційовні функції. З початкових умов $F_1(x) + F_2(0) = \varphi(x)$, $F_2'(0) = a$. Знаходимо $F_2(t) = at + b(t)$, де $b(t)$ – довільна гладка функція, що задовольняє умови $b(0) = b'(0) = 0$. Розв'язок вихідної задачі $u(x,t) = \varphi(x) + at + b(t)$ неєдиний.

Теорема Коші-Ковалевської встановлює, що при голоморфних даних задачі і за умови, що поверхня S не є характеристичною для рівняння (6.10), задача Коші (6.10),(6.19) має єдиний голоморфний розв'язок у деякому околі поверхні S.

Рівняння (6.21) можна записати у вигляді

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\nu_i\nu_j = 0, \tag{6.22}$$

оскільки $\frac{\omega_{x_i}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_{x_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \nu_i$, $i = \overline{1,n}$. Напрям $\nu(x)$ називається характеристичним у точці $x \in S$, якщо він задовольняє рівність (6.22) у цій точці.

Знайдемо характеристичні поверхні (характеристичні напрями) для основних рівнянь математичної фізики.

1. Для хвильового рівняння $a^2 \sum\limits_{j=1}^{n-1} u_{x_j x_j} - u_{x_n x_n} = f(x)$ рівняння (6.22) набуває вигляду $a^2 \sum\limits_{j=1}^{n-1} \nu_j^2 - \nu_n^2 = 0$. Крім того, $\sum\limits_{j=1}^{n} \nu_j^2 = 1$. Віднімаючи ці рівності, одержуємо $(1 + a^2)\nu_n^2 = a^2$. Нормаль до характеристичної

поверхні утворює з віссю Ox_n сталий кут, косинус якого $\nu_n = \pm\frac{a}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}$. Характеристичною поверхнею є бічна поверхня кругового конуса з віссю, паралельною до осі Ox_n, твірні якого утворюють з віссю Ox_n сталий кут, синус якого дорівнює ν_n, а саме $\sum\limits_{j=1}^{n-1}(x_j - x_j^0)^2 = a^2(x_n - x_n^0)^2$, x^0 – довільна точка $\mathbb{R}^n$.

Характеристиками рівняння коливання струни є прямі $x - at = C$, $x + at = C$.

2. Для рівняння теплопровідності $\quad a^2\sum\limits_{j=1}^{n-1} u_{x_jx_j} - u_{x_n} = f(x)$ (6.22) набуває вигляду $a^2\sum\limits_{j=1}^{n-1}\nu_j^2 = 0$. Враховуючи, що $\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_j^2 = 1$, одержуємо $\nu_n^2 = 1$. Отже, характеристичними поверхнями є гіперплощини $x_n = Const$.

3. Для рівняння Пуассона $\sum\limits_{j=1}^{n} u_{x_jx_j} = f(x)$ рівняння характеристик $\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_j^2 = 0$ несумісне з рівністю $\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_j^2 = 1$, тому рівняння Пуассона не має дійсних характеристичних поверхонь.

Зауваження. З теореми Коші-Ковалевської не одержуємо однозначної розв'язності задачі Коші з початковими даними (навіть голоморфними) вигляду (6.18) для рівняння теплопровідності, оскільки гіперплощини $x_n = const$ є характеристичними поверхнями для нього. Далі побачимо, що для рівняння теплопровідності однозначно розв'язна задача з однією початковою умовою $u\,|_{x_n=x_n^0} = \varphi(x')$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ (без припущення голоморфності функції φ).

Питання єдиності розв'язку задачі Коші в класі неголоморфних (хоч і досить гладких) функцій повністю не розв'язане до теперішнього часу.

Крім того, теорема Коші-Ковалевської не розв'язує питання про коректність задачі Коші. Про це свідчить такий приклад.

Приклад Адамара. Розглянемо задачу Коші для рівняння Лапласа

$$u_{tt} + u_{xx} = 0,\ u\,|_{t=0} = 0,\ u_t\,|_{t=0} = e^{-n^{\frac{1}{2}}}\cos\ nx,\ n > 0$$

з голоморфними початковими даними. Існує єдиний розв'язок $u(x,t) = \frac{1}{n}e^{-n^{\frac{1}{2}}}\,sh\ nt$. Бачимо, що при довільно малому значенні $t > 0$ за рахунок вибору досить великого n розв'язок може бути довільно великим, хоч початкові дані обмежені для всіх $n > 0$.

Розділ 7. КОРЕКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

7.1. Задача Коші для хвильового рівняння

7.1.1. Формули розв'язку задачі Коші

Нехай $\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}$. Оператор Δ називається *оператором Лапласа.*

Класичним розв'язком задачі Коші для хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,t), \quad u\,|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\,|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \tag{7.1}$$

називається функція $u = u(x,t)$, двічі неперервно диференційовна в $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$, неперервно диференційовна в $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ (клас таких функцій позначатимемо через $C^2(t>0) \cap C^1(t \geq 0)$), підставляючи яку у рівняння й початкові умови одержуємо тотожності відповідно в $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ та $\mathbb{R}^3$.

Розв'язок задачі (7.1) шукатимемо у вигляді суми $u = u_1 + u_2 + u_3$, де u_1, u_2, u_3 – розв'язки відповідно задач

$$u_{tt} = a^2\Delta u, \quad u\,|_{t=0} = 0, \quad u_t\,|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,\, t > 0 \tag{7.1'}$$

$$u_{tt} = a^2\Delta u, \quad u\,|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\,|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,\, t > 0 \tag{7.1''}$$

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,t), \quad u\,|_{t=0} = 0, \quad u_t\,|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,\, t > 0. \tag{7.1'''}$$

Доведемо, що *розв'язки задач (7.1") та (7.1"') можна одразу записати, знаючи розв'язок задачі (7.1')*, а саме:

а) якщо $u_1 = v(x,t,\varphi)$ – розв'язок задачі (7.1') класу $C^3(t>0) \cap C^2(t \geq 0)$ при $\psi = \varphi$, то $u_2 = v_t(x,t,\varphi)$ – розв'язок задачі (7.1");

б) якщо $u_1 = w(x,t,\tau,f)$ – розв'язок задачі

$$u_{tt} = a^2\Delta u, \quad u\,|_{t=\tau} = 0, \quad u_t\,|_{t=\tau} = f(x,\tau), \quad x \in \mathbb{R}^3,\, t > 0, \tag{7.2}$$

тобто розв'язок задачі вигляду (7.1') (при заміні t на $t-\tau$), то $u_3 = \int\limits_0^t w(x,t,\tau,f(x,\tau))d\tau$ – розв'язок задачі (7.1"').

Доведемо твердження *а*. Спочатку перевіримо, що функція u_2 задовольняє початкові умови задачі (7.1"). Використовуючи (7.1'), маємо $v_t(x,t,\varphi)\,|_{t=0} = (u_1)_t|_{\psi=\varphi,t=0} = \varphi(x)$, отже $u_2\,|_{t=0} = \varphi(x)$.
$(u_2)_t\,|_{t=0} = v_{tt}\,|_{t=0} = a^2(\Delta v)_{t=0} = a^2\Delta(v\,|_{t=0}) = a^2\Delta(u_1\,|_{t=0}) = 0$. Далі

підставляємо u_2 у рівняння, враховуючи, що $v \in C^3(t > 0)$. Одержуємо $(u_2)_{tt} = (v_t)_{tt} = ((u_1)_{tt})_t = a^2(\Delta u_1)_t = a^2\Delta(u_1)_t = a^2\Delta v_t = a^2\Delta u_2$.

Доведемо твердження *б*. З вигляду функції $u_3 \mid_{t=0} = 0$, $(u_3)_t = w \mid_{\tau=t} + \int\limits_0^t w_t(x,t,\tau,f(x,\tau))d\tau$. Використовуючи (7.2), маємо $w \mid_{t=\tau} = 0$, тому $u_3 \mid_{t=0} = 0$. Далі $(u_3)_{tt} = w_t \mid_{\tau=t} + \int\limits_0^t w_{tt}(x,t,\tau,f)d\tau$, $\Delta u_3 = \int\limits_0^t \Delta w(x,t,\tau,f)d\tau$, тоді $(u_3)_{tt} - a^2\Delta u_3 = f(x,t) + \int\limits_0^t [w_{tt} - a^2\Delta w]d\tau = f(x,t)$.

7.1.2. Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння

Доведемо, що функція

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}(x)} \psi(\xi)dS, \tag{7.3}$$

де $S_{at}(x)$ – сфера радіуса at з центром у точці x, тобто $\{\xi : |\xi - x| = at\}$, є розв'язком задачі (7.1') класу $C^2(t > 0)$, якщо $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, класу $C^3(t > 0)$, якщо $\psi \in C^3(\mathbb{R}^3)$.

Переходячи у формулі (7.3) від інтегрування за $S_{at}(x)$ до інтегрування за сферою радіуса 1 з центром у початку координат $S_1(0) = S_1$ (тоді $dS = a^2t^2dS_1$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – біжучі координати точки на S_1), одержуємо

$$u(x,t) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{S_1} \psi(x + at\alpha)dS_1.$$

Тепер бачимо, що $u \mid_{t=0} = 0$, $u_{x_i} = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{S_1} \psi_{x_i}(x + at\alpha)dS_1$,

$\Delta u = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{S_1} \Delta\psi(x + at\alpha)dS_1$, $u_t = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_1} \psi(x + at\alpha)dS_1 + \frac{t}{4\pi} \int\limits_{S_1} \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_i} a\alpha_i dS_1$, звідки $u_t \mid_{t=0} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_1} \psi(x)dS_1 = \frac{1}{4\pi}\psi(x) \int\limits_{S_1} dS_1 = \psi(x)$.

Запишемо u_t інакше $u_t = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int\limits_{S_{at}(x)} \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}\alpha_i dS$. Перетворимо другий доданок за формулою Остроградського і позначимо його через $\frac{1}{4\pi at} I(x,t)$, $I(x,t) = \int\limits_{|\xi - x| < at} \Delta\psi(\xi)d\xi = \int\limits_0^{at} dr \int\limits_{S_r(x)} \Delta\psi(\xi)dS$.

Тепер $u_t = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} I(x,t)$, $u_{tt} = \frac{u_t}{t} - \frac{u}{t^2} - \frac{1}{4\pi at^2} I(x,t) + \frac{1}{4\pi at} I_t(x,t) =$
$= \frac{u}{t^2} + \frac{1}{4\pi at^2} I(x,t) - \frac{u}{t^2} - \frac{1}{4\pi at^2} I(x,t) + \frac{1}{4\pi at} I_t(x,t) = \frac{1}{4\pi at} I_t(x,t) =$
$= \frac{1}{4\pi at} a \int\limits_{S_{at}(x)} \Delta\psi(\xi) dS$. Бачимо, що $u \in C^2(t > 0)$, якщо $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, крім того,
$u_{tt} - a^2 \Delta u = \frac{a^2 t}{4\pi} \int\limits_{S_1} [\Delta\psi(x + at\alpha) - \Delta\psi(x + at\alpha)] dS_1 = 0.$

Використовуючи (7.3) та твердження *а, б,* одержуємо *формулу Кірго-фа* розв'язку задачі (7.1)

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}(x)} \psi(\xi) dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{S_{at}(x)} \frac{\psi(\xi)}{t} dS +$$
$$+ \int\limits_0^t \Big(\frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int\limits_{S_{a(t-\tau)}(x)} f(\xi,\tau) dS \Big) d\tau.$$

Перетворимо останній доданок у формулі. Зробимо у ньому заміну $a(t-\tau) = r$. Одержимо
$\int\limits_0^t \Big(\frac{1}{4\pi a^2 \tau} \int\limits_{S_{ar}(x)} f(\xi, t - \frac{r}{a}) dS \Big) d\tau = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{|\xi - x| < at} \frac{f(\xi, t - |\xi - x| a^{-1})}{|\xi - x|} d\xi.$

Отже, якщо $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $f \in C^2(t > 0)$, то існує класичний розв'язок задачі (7.1). Він визначається формулою

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}(x)} \psi(\xi) dS + + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{S_{at}(x)} \frac{\varphi(\xi)}{t} dS +$$
$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{|\xi - x| < at} \frac{f(\xi, t - \frac{|\xi - x|}{a})}{|\xi - x|} d\xi. \tag{7.4}$$

Приклад. Розв'язок задачі
$u_{tt} = \Delta u + x_1 x_2 x_3 e^t, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, t > 0,$
$u\,|_{t=0} = \sin x_1, \quad u_t\,|_{t=0} = \cos x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1$
має вигляд $u(x,t) =$
$= \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{S\ t(x)} \cos\xi_2 dS + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{S\ t(x)} \frac{\sin\xi_1}{t} dS + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\xi - x| <\ t} \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3 e^{t - \frac{|\xi - x|}{3}}}{|\xi - x|} d\xi.$

Зауваження. 1. Щоб знати значення у точці (x,t) третього доданка формули (7.4), треба знати значення функції $f(\xi,\tau)$ на множині $\{(\xi,\tau) : |\xi - x| = a(t-\tau), \tau < t\}$. Ця множина є межею конуса в $\mathbb{R}^4$, який називається *конусом минулого.* Оскільки при знаходженні $u(x,t)$ враховують значення $f(\xi,\tau)$ при $\tau < t$, то цей доданок у формулі називається *запізнюючим потенціалом.*

2. Нехай $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$, $\psi(x) \neq 0$ при $|x| < R$.

Для того щоб значення одержаного за формулою (7.3) розв'язку задачі (7.1) у точці $x_0 \in \mathbb{R}^3$ у момент часу t було відмінним від нуля, треба щоб були ненульовими значення функції $\psi(x)$ на сфері $S_{at}(x_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi - x_0| = at\}$, тобто, щоб у момент часу t ця сфера перетиналась із кулею $|x| < R$. Отже, якщо $|x_0| > R$, то існують такі значення t_1, t_2, що $u(x_0,t) \equiv 0$ для $t < t_1$ та $t > t_2$ ($t_1 = \frac{|x_0|-R}{a}$, $t_2 = \frac{|x_0|+R}{a}$). Такі самі значення має розв'язок $u(x,t)$ у точках сфери $\{x : |x| = |x_0|\}$.

Отже, за формулою (7.3) збурення (задане функцією ψ) поширюється зі швидкістю a у вигляді сферичної хвилі $|x| = at$ з різко вираженими переднім і заднім фронтами – діє *принцип Гюйгенса.*

За принципом накладання хвиль збурення від довільних початкових даних в області $K \subset \mathbb{R}^3$, може досягнути лише тих точок, які належать об'єднанню всіх меж конусів $\{(x,t) : |\xi - x| = at\}$ (*конусів майбутнього*) з вершинами $(\xi, 0)$, $\xi \in K$.

7.1.3. Розв'язок задачі Коші для рівняння коливання мембрани

Використовуючи формулу (7.3) і твердження *а, б,* можна одержати формулу розв'язку задачі Коші для рівняння коливання мембрани, а також для рівняння коливання струни.

Нехай u – розв'язок задачі Коші для рівняння коливання мембрани

$$u_{tt} = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + f(x_1,x_2,t), \quad u\,|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\,|_{t=0} = \psi(x),$$
$$x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, t > 0. \tag{7.5}$$

Оскільки φ, ψ, f не залежать від змінної x_3, то й розв'язок u не залежатиме від x_3. Перейдемо у формулі (7.3) від інтегрування за сферою $S_{at}(x)$ до інтегрування за кругом $K_{at}(x)$. Нехай dK – проекція на площину x_1Ox_2 елемента dS сфери $S_{at}(x)$, ν – нормаль до dS. Відомо, що $\frac{dK}{dS} = \cos(\nu,t) = \alpha_3$. Тоді формула (7.3) набуде вигляду

$u_1(x_1,x_2,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} 2 \int\limits_{K_{at}(x)} \frac{\psi(\xi_1,\xi_2)}{\alpha_3} dK.$

$\alpha_3 = \frac{\xi_3 - x_3}{at} = \left(1 - (\frac{\xi_1 - x_1}{at})^2 - (\frac{\xi_2 - x_2}{at})^2\right)^{\frac{1}{2}}$, тому

$$u_1(x_1,x_2,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} 2at \int\limits_{K_{at}(x)} \frac{\psi(\xi_1,\xi_2)}{\left(a^2t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}} dK.$$

Отже, якщо $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f \in C^2(t > 0)$, то існує класич-

ний розв'язок задачі (7.5). Він визначається *формулою Пуассона*

$$u_1(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|\xi-x|<at}\frac{\psi(\xi_1,\xi_2)}{\left(a^2t^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}}d\xi_1d\xi_2+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\xi-x|<at}\frac{\varphi(\xi_1,\xi_2)}{\left(a^2t^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}}d\xi_1d\xi_2+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{|\xi-x|<a(t-\tau)}\frac{f(\xi_1,\xi_2,\tau)}{\left(a^2(t-\tau)^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}}d\xi_1d\xi_2. \qquad (7.6)$$

Цей метод виведення формули (7.6) із формули (7.3) називається *методом спуску*.

Зауваження. Нехай $\varphi(x)\equiv 0$, $f(x,t)\equiv 0$, $\psi(x)\neq 0$ для $|x|<R$.

Щоб одержаний за формулою (7.6) розв'язок задачі (7.5) у точці $x_0\in\mathbb{R}^2$ у момент часу t був відмінним від тривіального, треба, щоб були ненульовими значення функції $\psi(x)$ у крузі $K_{at}(x_0)=\{\xi\in\mathbb{R}^2:|\xi-x_0|\leq at\}$, тобто, щоб у момент часу t цей круг перетинався з кругом $|x|<R$. Отже, якщо $|x_0|>R$, то існують такі значення t_1,t_2, що $u(x_0,t)\equiv 0$ для $t<t_1$, $u(x_0,t)\equiv Const$ для $t>t_2$ ($t_1=\frac{|x_0|-R}{a}$, $t_2=\frac{|x_0|+R}{a}$). Такі самі значення має розв'язок $u(x,t)$ у точках $\{x\in\mathbb{R}^2:|x|=|x_0|\}$.

Бачимо, що першим доданком у формулі (7.6) описано поширення збурення у вигляді циліндричної хвилі (напрямна паралельна осі x_3) з різко вираженим переднім фронтом та відсутнім заднім фронтом. Кажуть, що є *явище дифузії* хвилі, принцип Гюйгенса порушується.

За принципом накладання хвиль збурення від довільних початкових даних в області $K\subset\mathbb{R}^2$ досягає тих точок, які належать об'єднанню всіх конусів $\{(x,t):|\xi-x|\leq at\}$ (конусів майбутнього) з вершинами $(\xi,0)$, $\xi\in K$. Тому кожної точки $x\in\mathbb{R}^2$, починаючи з деякого моменту часу t, досягатимуть збурення від точок множини K, а ще через певний час ці збурення будуть однакові за величиною.

Щоб знати значення у точці (x,t) третього доданка формули (7.6) (запізнюючого потенціалу), треба знати значення функції $f(\xi,\tau)$ на множині $\{(\xi,\tau):\ |\xi-x|\leq a(t-\tau)\}$, тобто всередині конуса минулого.

7.1.4. Розв'язок задачі Коші для рівняння коливання струни

Нехай u – розв'язок задачі Коші для рівняння коливання струни

$$\begin{gathered} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x = x_1 \in \mathbb{R}^1, t > 0 \\ u\mid_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\mid_{t=0} = \psi(x), \quad x = x_1 \in \mathbb{R}^1, t > 0. \end{gathered} \tag{7.7}$$

Розіб'ємо сферу $S_{at}(x)$ на сферичні пояси висоти $d\xi_1$. Тоді $dS = 2\pi a t d\xi_1$ і з формули (7.3) одержуємо $u(x_1,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} 2\pi a t \int\limits_{x_1-at}^{x_1+at} \psi(\xi_1) d\xi_1 = \frac{1}{2a} \int\limits_{x_1-at}^{x_1+at} \psi(\xi_1) d\xi_1$, $\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi = a\psi(x+at) + a\psi(x-at)$. Тому на підставі властивостей *а,б* формула розв'язку задачі (7.7) набуває вигляду $u(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi +$

$$+ \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi. \tag{7.8}$$

Із формули (7.8) бачимо, що $u \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$, якщо $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(t > 0)$.

Формула (7.8) називається *формулою Даламбера.* Її ж одержуємо, розв'язуючи задачу (7.7) методом характеристик.

Характеристиками для рівняння коливання струни є прямі $x - at = c$, $x + at = c$. За формулою Даламбера, щоб знати $u(x,t)$, треба знати значення $\varphi(\xi)$ у точках $\xi = x - at$ та $\xi = x + at$, а значення $\psi(\xi)$ у точках всього інтервалу ($\xi \in (x - at, x + at)$). Тому для початкового збурення, заданого функцією φ, діє принцип Гюйгенса, а для початкового збурення, заданого функцією ψ, є дифузія хвилі, для збурення, заданого функцією f, маємо накладання обох випадків.

7.1.5. Єдиність розв'язку задачі Коші

Доведемо, що задача Коші має єдиний класичний розв'язок. Для визначеності доведемо це для задачі (7.5).

Нехай u_1, u_2 – два розв'язки задачі (7.5), тоді функція $u = u_1 - u_2$ задовольняє задачу

$$\begin{gathered} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u\mid_{t=0} = 0, \quad u_t\mid_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{7.9}$$

Візьмемо довільну точку $A(x_0, y_0, t_0)$ і з неї як із вершини побудуємо конус $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2(t-t_0)^2$ до перетину з площиною $t=0$. Це характеристична поверхня для рівняння коливання мембрани – характеристичний конус. Нехай K – внутрішність цього конуса, $K_б$ – його бічна поверхня, K_0 – основа. Для розв'язку $u(x,y,t)$ задачі (7.9) маємо

$$\int\limits_K u_t\big(u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})\big)dxdydt=0.$$

Перетворимо підінтегральний вираз, враховуючи, що $u_tu_{tt}=\frac{1}{2}(u_t^2)_t$, $u_tu_{xx}=(u_tu_x)_x-u_{tx}u_x=(u_tu_x)_x-\frac{1}{2}(u_x^2)_t$, $u_tu_{yy}=(u_tu_y)_y-\frac{1}{2}(u_x^2)_t$. Одержуємо

$u_t\big(u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})\big)=\frac{a^2}{2}\big(\frac{1}{a^2}u_t^2+u_x^2+u_y^2\big)_t-a^2(u_tu_x)_x-a^2(u_tu_y)_y.$

Маємо $\frac{a^2}{2}\int\limits_K\big[(\frac{1}{a^2}u_t^2+u_x^2+u_y^2)_t-2(u_tu_x)_x-2(u_tu_y)_y\big]dxdydt=0.$

Використовуючи формулу Остроградського, перетворимо цей інтеграл до інтеграла за межею області K. Із початкових умов задачі $u_t=u_x=u_y=0$ на K_0. Тому залишиться тільки один інтеграл

$$\int\limits_{K_б}\big[(\tfrac{1}{a^2}u_t^2+u_x^2+u_y^2)\cos(\nu,t)-2(u_tu_x)\cos(\nu,x)-2(u_tu_y)\cos(\nu,y)\big]dS=0.$$

На поверхні $K_б$ $\quad a^2(\cos^2(\nu,x)+\cos^2(\nu,y))=\cos^2(\nu,t)$ (рівняння характеристичного конуса). Тому попередня рівність набуває вигляду

$$\int\limits_{K_б}\big[u_t^2(\cos^2(\nu,x)+\cos^2(\nu,y))+(u_x^2+u_y^2)\cos(\nu,t)-2u_tu_x\cos(\nu,x)-$$
$$-2u_tu_y\cos(\nu,y)\big]dS=0 \text{ або}$$
$$\int\limits_{K_б}\big[\big(u_t\cos(\nu,x)-u_x\cos(\nu,t)\big)^2+\big(u_t\cos(\nu,y)-u_y\cos(\nu,t)\big)^2\big]dS=0.$$

Звідси одержуємо

$u_t\cos(\nu,x)-u_x\cos(\nu,t)=0,\quad u_t\cos(\nu,y)-u_y\cos(\nu,t)=0$ або

$$\frac{u_x}{\cos(\nu,x)}=\frac{u_y}{\cos(\nu,y)}=\frac{u_t}{\cos(\nu,t)}=p.$$

Позначимо через l напрям твірної характеристичного конуса. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial l}=u_x\cos(l,x)+u_y\cos(l,y)+u_t\cos(l,t)=$$
$$=p[\cos(\nu,x)\cos(l,x)+\cos(\nu,y)\cos(l,y)+\cos(\nu,t)\cos(l,t)]=p\cos(\nu,l)=0.$$

Отже, $u=const$ вздовж твірної l. Оскільки $u\,|_{t=0}=0$, то $u=0$ вздовж твірної l, зокрема $u(A)=0$.

Ми показали таке: якщо $u(x,0)=u_t(x,0)=0$ для $x\in K_0$, то розв'язок задачі (7.9) дорівнює нулю у вершині A характеристичного

конуса з основою K_0, а отже, всередині цього характеристичного конуса. Якщо ж $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ у деякій області Ω_0 на площині xOy, то розв'язок задачі дорівнюватиме нулю всередині області $\tilde{\Omega}$, одержаної об'єднанням усіх характеристичних конусів, основи яких належать Ω_0.

Зауваження. Задання u та u_t в області Ω_0 не визначає однозначно розв'язок задачі Коші поза $\tilde{\Omega}$. Для доведення цього достатньо показати, що при $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ для $x \in K_0$ і довільної точки B поза $\tilde{\Omega}$ існує такий розв'язок v задачі (7.5), що при $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, $x \in K_0$ $v(B) \neq 0$.

Можна перевірити, що для довільної двічі неперервно диференційовної функції g і таких довільних чисел α, β, що $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ функція $v(x,y,t) = g(a^2t + \alpha x + \beta y)$ задовольняє рівняння $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$. Функція $g(a^2t + \alpha x + \beta y)$ зберігає сталі значення на площині $a^2t + \alpha x + \beta y = C$. Виберемо числа α, β такими, щоб ця площина проходила через точку B і не перетинала K_0. Тоді $v(B) = g(C)$ і може набувати довільних значень залежно від вибору функції g.

7.1.6. Неперервна залежність розв'язку задачі Коші від даних

Нехай $u(x,t)$ – розв'язок задачі (7.7), $\tilde{u}(x,t)$ – розв'язок задачі

$$\begin{gathered} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \tilde{f}(x,t), \\ u\mid_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), \quad u_t\mid_{t=0} = \tilde{\psi}(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{7.10}$$

Тоді функція $u - \tilde{u}$ задовольняє задачу

$$\begin{gathered} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) - \tilde{f}(x,t), \\ u\mid_{t=0} = \varphi(x) - \tilde{\varphi}(x), \quad u_t\mid_{t=0} = \psi(x) - \tilde{\psi}(x), \\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{7.11}$$

Припускаємо, що

$$|f(x,t) - \tilde{f}(x,t)| < \delta, \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0,T],$$

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| < \delta, \quad |\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| < \delta,\ x \in \mathbb{R} \tag{7.12}$$

й оцінюємо розв'язок задачі (7.11). Згідно з формулою (7.8) маємо

$$|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| = |\tfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}[\psi(\xi) - \tilde{\psi}(\xi)]d\xi + \tfrac{\varphi(x+at) - \tilde{\varphi}(x+at) + \varphi(x-at) - \tilde{\varphi}(x-at)}{2}$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} [f(\xi,t-\tau)-\tilde{f}(\xi,t-\tau)]d\xi| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \delta d\xi + \frac{2\delta}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \delta d\xi = \delta(t+1+\frac{t^2}{2}).$$

Отже, для довільних $\varepsilon > 0, T > 0$ існує таке $\delta = \frac{\varepsilon}{T+1+\frac{T^2}{2}}$, що за умови (7.12) $|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)| < \varepsilon$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$.

Так само, використовуючи формули (7.4) та (7.6), доводимо неперервну залежність розв'язків задач (7.1) та (7.5) від даних.

7.2. Мішані задачі для рівняння коливання струни

Нехай $\Pi : x \in (0,l),\ t > 0$, $\overline{\Pi} : x \in [0,l],\ t \geq 0$. Задача знаходження у півсмузі Π розв'язку $u \in C^2(\Pi) \cap C^1(\overline{\Pi})$ рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{7.13}$$

який задовольняє умови

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\,|_{t=0} = \psi(x),\ x \in [0,l], \tag{7.14}$$

$$l_1 u \equiv (\alpha u_x + \beta u)_{x=0} = \mu_1(t),\ l_2 u \equiv (\gamma u_x + \delta u)_{x=l} = \mu_2(t),\ t \geq 0, \tag{7.15}$$

де $f, \varphi, \psi, \mu_1, \mu_2$ – задані функції, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – задані числа, називається *мішаною задачею* для рівняння (7.13). Умови (7.14) є *початковими умовами* задачі, а умови (7.15) – *крайовими умовами.*

Для існування розв'язку цієї задачі необхідно, щоб

$$f \in C(\Pi),\ \varphi \in C^1[0,l],\ \psi \in C[0,l],\ \mu_i \in C[0,+\infty),\ i = 1,2,$$

а також виконувались *умови узгодження початкових і крайових даних*

$$\alpha\varphi'(0) + \beta\varphi(0) = \mu_1(0),\ \gamma\varphi'(l) + \delta\varphi(l) = \mu_2(0).$$

Доведемо коректність задачі (7.13)-(7.15). Розглянемо окремі випадки крайових умов (7.15)

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \tag{7.15'}$$

$$u_x(0,t) = \mu_1(t),\ u_x(l,t) = \mu_2(t), \tag{7.15''}$$

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = \mu_1(t),\ u_x(l,t) + h_2 u(l,t) = \mu_2(t), \tag{7.15'''}$$

$h_1,\ h_2$ – додатні сталі.

Задача (7.13),(7.14),(7.15') називається *першою мішаною задачею*, задача (7.13),(7.14),(7.15") – *другою мішаною задачею*, а задача (7.13),(7.14),(7.15"') – *третьою мішаною задачею* для рівняння коливання струни.

7.2.1. Єдиність розв'язку мішаної задачі

Нехай u_1, u_2 – два розв'язки задачі (7.13),(7.14),(7.15'), $u = u_1 - u_2$. Функція $u(x,t)$ задовольняє задачу

$$\begin{gathered} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ (x,t) \in \Pi \\ u(x,0) = u_t(x.0) = 0,\ x \in [0,l], \quad u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t \geq 0. \end{gathered} \tag{7.16}$$

Тоді правильна тотожність $\int\limits_0^l [u_t(u_{tt} - a^2 u_{xx})]dx = 0. t \geq 0$. Перетворимо її ліву частину, враховуючи, що $u_t u_{tt} = \frac{1}{2}(u_t^2)_t$, $\int u_t u_{xx} dx = u_t u_x - \int u_{tx} u_x dx$, $u_{tx} u_x = \frac{1}{2}(u_x^2)_t$. Одержимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(u_t^2 + a^2 u_x^2\right)_t dx = a^2 (u_t u_x)_{x=0}^{x=l}, t \geq 0. \tag{7.17}$$

Функція $E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(u_t^2 + a^2 u_x^2\right) dx$ називається *інтегралом енергії* для струни. Це сума кінетичної та потенціальної енергії струни в момент часу t. Тотожність (7.17) можемо записати у вигляді

$$E'(t) = a^2 (u_t u_x)\Big|_{x=0}^{x=l}. \tag{7.17'}$$

Враховуючи умови задачі (7.16), маємо $u_t\mid_{x=0} = (u\mid_{x=0})_t = 0$, $u_t\mid_{x=l} = (u\mid_{x=l})_t = 0$, а тоді з (7.17') одержуємо $E'(t) = 0$, $t \in (0,T)$, або

$$E(t) \equiv Const = E(0).$$

Фізичний зміст одержаної рівності полягає в тому, що повна енергія струни за відсутності зовнішніх впливів не змінюється з часом (закон збереження енергії).

Оскільки $u_t(x,0) = 0$, $u_x(x,0) = (u(x,0))_x = 0$, то $E(0) = 0$. Отже, $E(t) \equiv 0$, а тоді $u_t = u_x = 0$, тобто $u(x,t) \equiv Const$. Але $u(x,0) = 0$, тому $u(x,t) \equiv 0$, тобто $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, $(x,t) \in \Pi$.

Якщо u_1, u_2 – два розв'язки другої мішаної задачі, то $u = u_1 - u_2$ задовольняє задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ (x,t) \in \Pi,$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0.$$

Із крайових умов цієї задачі випливає, що права частина (7.17') дорівнює нулю. Далі достатньо повторити наведені вище міркування, щоб одержати $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, $(x,t) \in \Pi$.

Нехай тепер u_1, u_2 – два розв'язки задачі (7.13)-(7.15), $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$, $u = u_1 - u_2$ задовольняє задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ (x,t) \in \Pi,$$
$$u(x,0) = u_t(x.0) = 0, \quad \alpha u_x(0,t) + \beta u(0,t) = \gamma u_x(l,t) + \delta u(l,t) = 0.$$

Тепер тотожність (7.17') набуває вигляду
$E'(t) = a^2 \frac{\beta}{\alpha}(u_t u)_{x=0} - a^2 \frac{\delta}{\gamma}(u_t u)_{x=l}$, або
$\int\limits_0^l \left(\frac{1}{a^2}u_t^2 + u_x^2\right)_t dx - \frac{\beta}{\alpha}(u^2)_t \mid_{x=0} + \frac{\delta}{\gamma}(u^2)_t \mid_{x=l} = 0,\ t \in (0,T).$
Звідси при $\alpha\beta < 0, \gamma\delta > 0$ одержуємо $u_t = u_x = u \mid_{x=0} = u \mid_{x=l} = 0$, тобто $u(x,t) \equiv 0$ при $x \in (0,l), t \in (0,T)$, зокрема при $h_1 = -\alpha\beta > 0, h_2 = \gamma\delta > 0$ одержуємо єдиність розв'язку третьої мішаної задачі.

7.2.2. Неперервна залежність розв'язку мішаної задачі від даних

Нехай u_1 – розв'язок задачі (7.13)-(7.15), u_2 – розв'язок задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \tilde{f}(x,t),\ x \in (0,l), t \in (0,T)$$
$$u \mid_{t=0} = \tilde{\varphi}(x),\ u_t \mid_{t=0} = \tilde{\psi}(x),\ x \in [0,l]$$
$$l_1 u = \tilde{\mu}_1(t),\ l_2 u = \tilde{\mu}_2(t),\ t \in [0,T].$$

Тоді $u = u_1 - u_2$ буде розв'язком задачі

$$\begin{gathered} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) - \tilde{f}(x,t),\ x \in (0,l), t \in (0,T) \\ u \mid_{t=0} = \varphi(x) - \tilde{\varphi}(x),\ u_t \mid_{t=0} = \psi(x) - \tilde{\psi}(x), \\ l_1 u = \mu_1(t) - \tilde{\mu}_1(t),\ l_2 u = \mu_2(t) - \tilde{\mu}_2(t). \end{gathered} \tag{7.18}$$

Припускаємо, що різниці $F(x,t) = f(x,t) - \tilde{f}(x,t), \Phi(x) = \varphi(x) - \tilde{\varphi}(x), \Phi'(x), \Psi(x) = \psi(x) - \tilde{\psi}(x), \quad M_1(t) = \mu_1(t) - \tilde{\mu}_1(t), \quad M_2(t) = \mu_2(t) -$

$\tilde{\mu}_2(t)$, $M_1'(t), M_2'(t)$ малі за абсолютною величиною при $x \in [0,l], t \in [0,T]$.

Знову записуємо тотожність

$$\int_0^l [u_t(u_{tt} - a^2 u_{xx})]dx = E'(t) - a^2(u_t u_x)_{x=0}^{x=l},\ t \in [0,T].$$

Інтегруючи її на інтервалі $(0,t)$ та враховуючи (7.18), одержуємо

$$\begin{aligned} E(t) = \int_0^t \int_0^l u_t F(x,t)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l [\Psi^2(x) + a^2(\Phi'(x))^2]dx + \\ +a^2 \int_0^t [u_t(l,t)u_x(l,t) - u_t(0,t)u_x(0,t)]dt,\ t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{7.19}$$

У випадку $l_1 u = u(0,t)$, $l_2 u = u(l,t)$ (7.19) набуває вигляду

$$\begin{aligned} E(t) = \int_0^t \int_0^l u_t F(x,t)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l [\Psi^2(x) + a^2(\Phi'(x))^2]dx + \\ +a^2 \int_0^t [M_2'(t)u_x(l,t) - M_1'(t)u_x(0,t)]dt,\ t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Оскільки u, u_t, u_x обмежені в прямокутнику $[0,l]\times[0,T]$, то права частина (7.20) мала за абсолютною величиною, тоді значення $E(t)$ мале. Для довільного $x \in (0,l)$ маємо

$$u(x,t) - u(0,t) = \int_0^x u_x dx \le x^{\frac{1}{2}}(\int_0^x u_x^2 dx)^{\frac{1}{2}} \le (lE(t))^{\frac{1}{2}}. \tag{7.21}$$

Тому різниця $u(x,t) - u(0,t) = u(x,t) - M_1(t)$ мала, а отже, значення $u(x,t)$ малі за абсолютною величиною у прямокутнику $[0,l] \times [0,T]$.

У випадку $l_1 u = u_x(0,t)$, $l_2 u = u_x(l,t)$ (7.19) набуває вигляду

$$\begin{aligned} E(t) = \int_0^t \int_0^l u_t F(x,t)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l [\Psi^2(x) + a^2(\Phi'(x))^2]dx + \\ +a^2 \int_0^t [u_t(l,t)M_2(t) - u_t(0,t)M_1(t)]dt,\ t \in [0,T], \end{aligned}$$

звідки знову випливає, що значення $E(t)$ мале, а тоді з (7.21) – що значення $u(x,t)$ малі за абсолютною величиною у прямокутнику $[0,l] \times [0,T]$, якщо малі значення $|u(0,t)|$. Покажемо, що також малі значення $|u(0,t)|$ при $t \in [0,T]$.

Нехай $lE(t) < \varepsilon^2$, $t \in [0,T]$. Тоді

$$|\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l u dx| = |\int\limits_0^l \frac{\partial u}{\partial t} dx| \leq \int\limits_0^l |u_t| dx \leq (l\int\limits_0^l u_t^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon,$$

$$|\int\limits_0^l u(x,t)dx - \int\limits_0^l u(x,0)dx| = |\int\limits_0^t (\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l u(x,t)dx)dt| \leq \varepsilon t \leq T\varepsilon.$$

Звідси $|\int\limits_0^l u(x,t)dx| \leq T\varepsilon + \int\limits_0^l |\Phi(x)|dx$, а отже, набуває малих значень для $t \in [0,T]$.

Інтегруючи нерівність (7.21), одержуємо $|\int\limits_0^l u(x,t)dx - lu(0,t)| \leq l\varepsilon$, звідки $l|u(0,t)| \leq l\varepsilon + |\int\limits_0^l u(x,t)dx|$, а тому $l|u(0,t)|$ набуває малих значень для всіх $t \in [0,T]$.

Загалом із (7.19) одержуємо

$$\tilde{E}(t) \equiv E(t) - \frac{a^2\beta}{2\alpha}u^2\mid_{x=0} + \frac{a^2\delta}{2\gamma}u^2\mid_{x=l} = \int\limits_0^t\int\limits_0^l u_t F(x,t)dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_0^l [\Psi^2(x) +$$

$$a^2(\Phi'(x))^2]dx + a^2\int\limits_0^t [u_t(l,t)M_2(t) - u_t(0,t)M_1(t)]dt - \frac{a^2\beta}{2\alpha}\Phi^2(0) + \frac{a^2\delta}{2\gamma}\Phi^2(l)$$

для $t \in [0,T]$. За припущеннями права частина одержаної рівності мала за абсолютною величиною, тому малі значення $\tilde{E}(t)$. Якщо $\alpha\beta < 0, \gamma\delta > 0$, а отже, у випадку третьої крайової задачі, $E(t) \leq \tilde{E}(t)$, а також $-\frac{a^2\beta}{2\alpha}u^2\mid_{x=0} \leq \tilde{E}(t)$, $\frac{a^2\beta}{2\gamma}u^2\mid_{x=l} \leq \tilde{E}(t)$. Тому малих значень набувають $E(t)$ та $u(0,t)$. Тоді з (7.21)

$$|u(x,t)| \leq (l\tilde{E}(t))^{\frac{1}{2}} + |u(0,t)|,\ t \in [0,T], \tag{7.22}$$

а отже, значення $u(x,t)$ малі за абсолютною величиною у прямокутнику $[0,l] \times [0,T]$.

7.2.3. Існування розв'язку першої мішаної задачі. Метод Фур'є

1. Розглянемо задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (0,l), t > 0 \tag{7.23}$$

$$u\mid_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\mid_{t=0}=\psi(x), \tag{7.24}$$

$$u\mid_{x=0}=0,\ u\mid_{x=l}=0. \tag{7.25}$$

Її розв'язок шукатимемо *методом розділення змінних (методом Фур'є)*, тобто у вигляді

$$u(x,t)=X(x)T(t). \tag{7.26}$$

Підставляючи функцію (7.26) у рівняння (7.23), одержуємо $X(x)T"(t)=a^2X"(x)T(t)$, звідки $\frac{T"(t)}{a^2T(t)}=\frac{X"(x)}{X(x)}$. Ліва частина одержаної тотожності залежить від x, а права – від t, тому рівність можлива лише, коли вирази праворуч та ліворуч сталі. Отже, $\frac{T"(t)}{a^2T(t)}=\frac{X"(x)}{X(x)}=-\lambda$, λ– сталий параметр. Одержуємо звичайні диференціальні рівняння

$$X"(x)+\lambda X(x)=0, \tag{7.27}$$

$$T"(t)+a^2\lambda T(t)=0. \tag{7.28}$$

Так ми поділили змінні у рівнянні (7.23).

Підставляємо функцію (7.26) у крайові умови (7.25). Одержуємо $X(0)T(t)=0, X(l)T(t)=0,\ t>0$. Звідси $X(0)=0$ і $X(l)=0$. Приєднуємо ці умови до рівняння (7.27)

$$X"(x)+\lambda X(x)=0,\quad X(0)=0,\ X(l)=0. \tag{7.29}$$

Одержали лінійну однорідну крайову задачу для звичайного диференціального рівняння з параметром. Функція $X(x)\equiv 0$ є розв'язком задачі (7.29) при довільному значенні λ. Ті значення параметра λ, при яких задача (7.29) має нетривіальні розв'язки, називаються *власними значеннями* задачі, а самі розв'язки – *власними функціями* крайової задачі. Задача знаходження власних значень і власних функцій крайової задачі (7.29) називається задачею на власні значення або *задачею Штурма-Ліувілля.*

Розв'яжемо задачу (7.29). Якщо $\lambda>0$, то загальний розв'язок рівняння $X(x)=C_1\cos\lambda^{\frac{1}{2}}x+C_2\sin\lambda^{\frac{1}{2}}x$, C_1,C_2 – довільні сталі. Підставляємо його в крайові умови $X(0)=C_1=0$, $X(l)=C_2\sin\lambda^{\frac{1}{2}}l=0$. При $C_2=0$ одержали б $X(x)\equiv 0$, тому $\sin\lambda^{\frac{1}{2}}l=0$. Звідси знаходимо власні значення задачі $\lambda_k=(\frac{k\pi}{l})^2$, $k=1,2,\ldots$. Відповідні власні функції будуть $X_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k=1,2,\ldots$. Так само переконуємось, що серед $\lambda\le 0$ власних значень немає.

Підставляємо знайдені власні значення у рівняння (7.28), одержуємо послідовність рівнянь

$$T''_k(t) + (\frac{ak\pi}{l})^2 T_k(t) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

Їхні загальні розв'язки

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t,$$

A_k, B_k – довільні сталі, $k = 1, 2, \ldots$.

При всіх $k = 1, 2, \ldots$ функції $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$ задовольняють рівняння (7.23) і крайові умови (7.24). Оскільки рівняння (7.23) і крайові умови (7.24) є лінійними однорідними, то для довільного N функція $\sum\limits_{k=1}^{N} u_k(x,t)$ також буде задовольняти рівняння (7.23) і крайові умови (7.24). Розглянемо розвинення

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t). \tag{7.30}$$

Якщо розвинення (7.30) і розвинення

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k)_{tt}(x,t), \tag{7.31}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k)_{xx}(x,t), \tag{7.32}$$

одержані почленним диференціюванням (7.30), рівномірно збігаються, то й сума розвинення (7.30), тобто функція

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t\right) \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{7.30'}$$

також буде задовольняти рівняння (7.23) і крайові умови (7.24) при довільних сталих A_k, B_k.

Справді, тоді $u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left[(u_k)_{tt} - a^2 (u_k)_{xx}\right] = 0.$

Припустимо, що розвинення (7.30)-(7.32) рівномірно збігаються в П, і підставимо функцію (7.30') в початкові умови (7.24). Одержуємо

$u(x,0) \equiv \lim\limits_{t\to 0} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) \equiv \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} = \varphi(x),$

$u_t(x,0) \equiv \sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_k)_t(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \frac{ak\pi}{l} \sin\frac{k\pi x}{l} = \psi(x).$

Одержані рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} = \varphi(x), \tag{7.33}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{ak\pi}{l} \sin\frac{k\pi x}{l} = \psi(x) \tag{7.34}$$

можна розглядати як розвинення Фур'є відповідно функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ за повною ортогональною на $(0,l)$ системою функцій $\{\sin\frac{k\pi x}{l}\}_{k=1}^{\infty}$.

Відомо, що *розвинення Фур'є кусково неперервно диференційовних на $(0,l)$ функцій рівномірно й абсолютно збігаються.* Для таких функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ із (7.33) та (7.34) знаходимо

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi, \quad B_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi,\ k = 1,2,\ldots \tag{7.35}$$

як коефіцієнти Фур'є відповідних розвинень.

Теорема 1. *Якщо $\varphi(x)$ на відрізку $[0,l]$ двічі неперервно диференційовна, має кусково-неперервну третю похідну та задовольняє умови*

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0,$$

а $\psi(x)$ неперервно диференційовна, має кусково-неперервну другу похідну та задовольняє умови

$$\psi(0) = \psi(l) = 0,$$

то функція $u(x,t)$ у вигляді розвинення (7.30') з коефіцієнтами A_k, B_k, визначеними формулами (7.35), є розв'язком першої мішаної задачі

(7.23)-(7.25), двічі неперервно диференційовним всередині прямокутника $x \in (0,l), t \in (0,T)$, неперервно диференційовним у його замиканні.

Д о в е д е н н я. Залишається довести рівномірну збіжність розвинень (7.30'),(7.31),(7.32). Інтегруючи частинами вирази (7.35) і враховуючи умови теореми, одержуємо

$$A_k = -(\frac{l}{k\pi})^3 \tilde{A}_k, \quad B_k = -(\frac{l}{k\pi})^3 \tilde{B}_k, \tag{7.36}$$

де $\tilde{A}_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi'''(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi, \quad \tilde{B}_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi''(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi.$

Оскільки $\frac{|\tilde{A}_k|}{k} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k^2} + |\tilde{A}_k|^2\right], \quad \frac{|\tilde{B}_k|}{k} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k^2} + |\tilde{B}_k|^2\right]$, за нерівністю Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\tilde{A}_k|^2 \leq \int\limits_0^l [\varphi'''(\xi)]^2 d\xi$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\tilde{B}_k|^2 \leq \int\limits_0^l [\psi''(\xi)]^2 d\xi$, то збігаються розвинення

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\tilde{A}_k|}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\tilde{B}_k|}{k}. \tag{7.37}$$

Підставляючи вирази (7.36) у розвинення (7.30'), одержуємо

$$u(x,t) = -(\frac{l}{\pi})^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}(\tilde{A}_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + \tilde{B}_k \sin\frac{ak\pi}{l}t)\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{7.38}$$

Це розвинення мажорується розвиненням $(\frac{l}{\pi})^3 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\left(|\tilde{A}_k| + |\tilde{B}_k|\right)$, що збігається. Отже, розвинення (7.30') збігається абсолютно й рівномірно.

Враховуючи вирази (7.36), подаємо розвинення (7.31) у вигляді

$$\frac{a^2 l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(\tilde{A}_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + \tilde{B}_k \sin\frac{ak\pi}{l}t)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Мажорантним для нього є розвинення $\frac{a^2 l}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(|\tilde{A}_k| + |\tilde{B}_k|\right)$, яке, за доведеним, збіжне. Розвинення, мажорантне для (7.32), відрізняється від останнього множником a^2. Отже, розвинення (7.31) та (7.32) абсолютно й рівномірно збігаються і (7.30') можна почленно диференціювати двічі за x і за t.

Зауваження. Якщо функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ неперервно диференційовні на $(0,l)$ і на кінцях інтервалу дорівнюють нулю, то з (7.35) одержуємо $A_k = \frac{a_k}{k}$, $B_k = \frac{b_k}{k}$, де $a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^l \varphi'(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$, $b_k = \frac{2l}{k\pi^2}\int\limits_0^l \psi'(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$, $k = 0,1,\ldots$, що забезпечує рівномірну й абсолютну збіжність розвинення (7.30'). Відомо, що розвинення Фур'є довільної функції з інтегровним квадратом збігається до неї в середньому. Нехай $u^N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N}\left(A_k\cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$ – частинна сума розвинення (7.30'), тоді

$$\int\limits_0^l \left[u^N(x,0) - \varphi(x)\right]^2 dx \to 0,\ \int\limits_0^l \left[u_x^N(x,0) - \varphi'(x)\right]^2 dx \to 0,$$

$$\int\limits_0^l \left[u_t^N(x,0) - \psi(x)\right]^2 dx \to 0,\ N \to \infty. \tag{7.39}$$

Оскільки $|u(x,0)| = |u(0,0) + \int\limits_0^x u_x(x,0)dx| \le |u(0,0)| + \left(l\int\limits_0^l u_x^2(x,0)dx\right)^{\frac{1}{2}}$, то, повторюючи міркування, наведені при доведенні неперервної залежності розв'язку мішаної задачі від початкових даних, із (7.39) одержуємо, що значення $u^N(x,t) - u(x,t)$ малі в кожній точці $(x,t) \in \Pi$.

Справді, ми довели, що значення $u(x,t)$ малі при малих $E(0)$ та $u(0,t)$. Відповідно при малих виразах (7.39) одержуємо малі значення $u^N(x,t) - u(x,t)$ у прямокутнику $x \in [0,l], t \in [0,T]$.

Отже, правильна теорема 2.

Теорема 2. *Нехай функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ неперервно диференційовні на $(0,l)$ і на кінцях інтервалу дорівнюють нулю. Якщо існує розв'язок $u(x,t)$ задачі (7.23)-(7.25), двічі неперервно диференційовним всередині прямокутника $x \in (0,l), t \in (0,T)$, то рівномірно у його замиканні*

$$u^N(x,t) - u(x,t) \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

2. Розглянемо загальну першу мішану задачу

$$\begin{gathered} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ x \in (0,l), t > 0 \\ u\mid_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\mid_{t=0} = \psi(x), \quad u\mid_{x=0} = \mu_1(t),\ u\mid_{x=l} = \mu_2(t). \end{gathered} \tag{7.40}$$

Її розв'язок шукаємо у вигляді $u = u_1 + u_2$, де u_2 задовольняє крайові умови задачі (7.40), тобто $u_2\mid_{x=0} = \mu_1(t)$, $u_2\mid_{x=l} = \mu_2(t)$. Таку функцію

завжди можна знайти у вигляді $u_2 = A(t)x + B(t)$. Маємо $B(t) = \mu_1(t)$, $A(t)l + B(t) = \mu_2(t)$, звідки $A(t) = \frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)}{l}$. Отже, $u_2(x,t) = \frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)}{l}x + \mu_1(t)$, а тоді

$$u(x,t) = u_1(x,t) + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l}x + \mu_1(t). \tag{7.41}$$

Підставляючи (7.41) в (7.40), одержуємо задачу, розв'язком якої повинна бути функція $u_1(x,t)$

$$\begin{gathered} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_1(x,t),\ x \in (0,l), t > 0 \\ u\mid_{t=0} = \varphi_1(x),\ u_t\mid_{t=0} = \psi_1(x), \quad u\mid_{x=0} = 0,\ u\mid_{x=l} = 0. \end{gathered} \tag{7.42}$$

Тут $\quad f_1(x,t) = f(x,t) - \frac{\mu_2"(t)-\mu_1"(t)}{l}x - \mu_1"(t)$,
$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \frac{\mu_2(0)-\mu_1(0)}{l}x - \mu_1(0)$, $\psi_1(x) = \psi(x) - \frac{\mu_2'(0)-\mu_1'(0)}{l}x - \mu_1'(0)$.
Задача (7.42) простіша ніж задача (7.40), бо у неї однорідні крайові умови. Розв'язок задачі (7.42) знову подаємо у вигляді суми $u_1 = v + w$, де v – розв'язок задачі

$$\begin{gathered} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (0,l), t > 0 \\ u\mid_{t=0} = \varphi_1(x),\ u_t\mid_{t=0} = \psi_1(x), \quad u\mid_{x=0} = 0,\ u\mid_{x=l} = 0, \end{gathered} \tag{7.43}$$

а w – розв'язок задачі

$$\begin{gathered} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_1(x,t),\ x \in (0,l), t > 0 \\ u\mid_{t=0} = 0,\ u_t\mid_{t=0} = 0, \quad u\mid_{x=0} = 0,\ u\mid_{x=l} = 0. \end{gathered} \tag{7.44}$$

Задача (7.43) – це задача вигляду (7.23)-(7.25) і для її розв'язності у класі $C^2(\Pi) \cap C^1(\overline{\Pi})$ достатньо, щоб функції φ_1 та ψ_1 задовольняли умови теореми 1, тобто $\varphi \in C^2[0,l]$, мала кусково-неперервну третю похідну, $\psi \in C^1[0,l]$, мала кусково-неперервну другу похідну, $\mu_1, \mu_2 \in C^1[0,t], t > 0$,

$$\varphi(0) = \mu_1(0),\ \varphi(l) = \mu_2(0), \varphi"(0) = \varphi"(l) = 0, \psi(0) = \mu_1'(0),\ \psi(l) = \mu_2'(0). \tag{7.45}$$

Розв'язок задачі (7.44) шукаємо у вигляді

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{7.46}$$

з невідомими $T_k(t)$. Кожний член розвинення (7.46) задовольняє крайові умови задачі. Тому для знаходження $T_k(t)$ підставляємо (7.46) (припускаючи, що його можна почленно диференціювати двічі за x і за t) у рівняння та початкові умови задачі (7.44). Одержуємо

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[T_k"(t)+(\frac{ak\pi}{l})^2T_k(t)\right]\sin\frac{k\pi x}{l}=f_1(x,t),$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_k(0)\sin\frac{k\pi x}{l}=0,\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty}T_k'(0)\sin\frac{k\pi x}{l}=0.$ Звідси знаходимо

$$T_k"(t)+(\frac{ak\pi}{l})^2T_k(t)=f_{1k}(t),\ T_k(0)=0,\ T_k'(0)=0, \tag{7.47}$$

де $f_{1k}(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$ – коефіцієнти розвинення Фур'є функції $f(x,t)$.

Отже, $T_k(t)$ – розв'язок задачі Коші (7.47) для кожного $k=1,2,\ldots$. Знаходимо $T_k(t)=\frac{l}{ak\pi}\int\limits_0^t f_{1k}(\tau)\sin\frac{ak\pi(t-\tau)}{l}d\tau$ або

$T_k(t)=\frac{2}{ak\pi}\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right)\sin\frac{ak\pi(t-\tau)}{l}d\tau.$

Із попередніх досліджень випливає, що наші формальні операції будуть законними, якщо функція $f_1(x,t)$ неперервна, має неперервні частинні похідні за x до другого порядку включно і при всіх значеннях t задовольняє умови $f_1(0,t)=f_1(l,t)=0$, тобто функція $f(x,t)$ неперервна, має неперервні частинні похідні за x до другого порядку включно, функції $\mu_1(t),\mu_2(t)$ двічі неперервно диференційовні при $t\geq 0$ і при всіх значеннях $t\geq 0$

$$f(0,t)=\mu_1"(t),\ f(l,t)=\mu_2"(t). \tag{7.48}$$

Умови (7.45) та (7.48) є умовами узгодження даних задачі.

7.2.4. Властивості власних значень і власних функцій

Якщо розв'язок задачі

$$\begin{gathered}\varrho(x)u_{tt}=\left(p(x)u_x\right)_x-q(x)u,\quad (x,t\in\Pi)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t\mid_{t=0}=\psi(x),\ l_1u=l_2u=0,\end{gathered} \tag{7.49}$$

де $\varrho(x),p(x),p'(x),q(x)$ – неперервні функції, $p(x)\geq p_0>0,\varrho(x)\geq\varrho_0>0,q(x)\geq 0,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta$ - числа, $\alpha^2+\beta^2\neq 0,\gamma^2+\delta^2\neq 0$, шукати у вигляді

(7.26), тобто у вигляді $u(x,t) = X(x)T(t)$, то одержимо

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{7.50}$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)X'(x)] + [\lambda\varrho(x) - q(x)]X(x) = 0, \tag{7.51}$$

$$\alpha X'(0) + \beta X(0) = 0,\ \gamma X'(l) + \delta X(l) = 0. \tag{7.52}$$

Кожному власному значенню λ_k задачі (7.51),(7.52) відповідає власна функція $X_k(x)$, визначена з точністю до сталого множника. Виберемо цей множник так, щоб $\int\limits_0^l \varrho(x)X_k^2(x)dx = 1$. Таку власну функцію називатимемо нормованою.

Виявимо *основні властивості власних функцій* крайової задачі (7.51),(7.52).

1. Власні функції $X_k(x)$ та $X_m(x)$, які відповідають різним власним значенням λ_k та λ_m, *ортогональні* з вагою $\varrho(x)$ на відрізку $[0,l]$, тобто

$$\int\limits_0^l \varrho(x)X_k(x)X_m(x)dx = 0, k \neq m. \tag{7.53}$$

За означенням

$$\tfrac{d}{dx}[p(x)X_k'(x)] + [\lambda_k\varrho(x) - q(x)]X_k(x) = 0,$$
$$\tfrac{d}{dx}[p(x)X_m'(x)] + [\lambda_m\varrho(x) - q(x)]X_m(x) = 0.$$

Множимо першу рівність на $X_m(x)$ другу – на $X_k(x)$ і віднімаємо почленно, одержуємо

$$X_m(x)\frac{d}{dx}[p(x)X_k'(x)] - X_k(x)\frac{d}{dx}[p(x)X_m'(x)] +$$
$$(\lambda_k - \lambda_m)\varrho(x)X_k(x)X_m(x) = 0$$

або

$$(\lambda_k - \lambda_m)\varrho(x)X_k(x)X_m(x) + \tfrac{d}{dx}\big[p(x)\big(X_k'(x)X_m(x) - X_k(x)X_m'(x)\big)\big] = 0.$$

Інтегруючи цю рівність на $(0,l)$, одержуємо

$$(\lambda_k - \lambda_m)\int\limits_0^l \varrho(x)X_k(x)X_m(x)dx = -p(x)\big(X_k'(x)X_m(x) - X_k(x)X_m'(x)\big)\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

Із крайових умов (7.52) випливає, що права частина дорівнює нулю,

тоді $(\lambda_k - \lambda_m)\int\limits_0^l \varrho(x)X_k(x)X_m(x)dx = 0$. Оскільки $\lambda_k \neq \lambda_m$, то одержуємо (7.53).

2. Власні функції крайової задачі (7.51),(7.52) дійсні.

Якщо λ_k – власне значення цієї задачі, то $\overline{\lambda_k}$ (рискою позначаємо комплексно спряжений вираз) також є власним значенням задачі. За доведеним

$(\lambda_k - \overline{\lambda_k})\int\limits_0^l \varrho(x)X_k(x)\overline{X_k(x)}dx = 0$, тобто $Im\lambda_k \int\limits_0^l \varrho(x)|X_k(x)|^2dx = 0$,

а отже, $Im\lambda_k = 0$.

3. Множимо рівність $\frac{d}{dx}[p(x)X_k'(x)] - q(x)X_k(x) = -\lambda_k\varrho(x)X_k(x)$, на $X_k(x)$, інтегруємо її на $(0,l)$, враховуючи (7.53), одержуємо

$\lambda_k = -\int\limits_0^l \left[\frac{d}{dx}[p(x)X_k'(x)] - q(x)X_k(x)\right]X_k(x)dx.$

Перший доданок інтегруємо частинами. Одержуємо

$$\lambda_k = \int\limits_0^l [p(x)(X_k'(x))^2 + q(x)(X_k(x))^2]dx - [p(x)X_k(x)X_k'(x)]\,|_{x=0}^{x=l}\,. \quad (7.54)$$

Якщо

$$[p(x)X_k(x)X_k'(x)]\,|_{x=0}^{x=l} \leq 0, \quad (7.55)$$

то з формули (7.54) випливає, що всі власні значення крайової задачі (7.51),(7.52) невід'ємні.

Можна перевірити, що для першої, другої та третьої крайових задач умова (7.55) виконується.

Розділ 8. КОРЕКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Рівняння параболічного типу найчастіше виникають під час вивчення процесів теплопровідності та дифузії.

8.1. Перша крайова задача для рівняння теплопровідності

8.1.1. Принцип максимуму та наслідки

Нехай Ω – область в $\mathbb{R}^3$, S – її межа, Q – циліндр з основою Ω і твірними, паралельними до осі Ot, Q_T – частина цього циліндра, обмежена знизу площиною $t = 0$, а зверху – площиною $t = T > 0$, разом з верхньою основою, а саме $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in (0,T]\}$, Γ – параболічна межа циліндра Q_T, тобто об'єднання його бічної поверхні $\{(x,t) : x \in S, t \in (0,T]\}$ і нижньої основи $\overline{\Omega}$.

Через $C^{2,1}_{x,t}(Q_T)$ позначаємо клас функцій $u(x,t)$ з неперервними похідними другого порядку за змінними x_1, x_2, x_3 та першого порядку за змінною t в Q_T.

Формулювання першої крайової задачі для рівняння теплопровідності. Знайти розв'язок $u \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ рівняння

$$u_t = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) + f(x,t), \tag{8.1}$$

який задовольняє початкову умову

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in \Omega \tag{8.2}$$

і крайову умову

$$u\,|_S = \mu(x,t),\ (x,t) \in S \times [0,T]. \tag{8.3}$$

Зауважимо, що для існування розв'язку задачі необхідно, щоб

$f \in C(Q_T)$, $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, $\mu \in C(S \times [0,T])$, $\varphi(x) = \mu(x,0)$, $x \in S$.

Остання умова – це умова узгодження початкових і крайових даних.

Теорема 1. *Розв'язок $u \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ рівняння*

$$u_t = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) \tag{8.1'}$$

набуває найменшого і найбільшого значення на Γ, тобто при $t = 0$ або на бічній поверхні циліндра Q_T.

Принцип максимуму. Якщо $u \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ задовольняє рівняння (8.1), $f(x,t) \le 0$, $(x,t) \in Q_T$, то або $u \le 0$ в Q_T, або u набуває свого (додатного) максимуму на Γ

$$u(x,t) \le \max[0, \max_{x\in\overline{\Omega}, t=0} u(x,t), \max_{x\in S, 0\le t\le T} u(x,t)] =$$
$$= \max[0, \max_{\Gamma} u(x,t)], \ (x,t) \in Q_T.$$

Принцип мінімуму. Якщо $u \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ задовольняє рівняння (8.1), $f(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in Q_T$, то або $u \ge 0$ в Q_T, або u набуває свого (від'ємного) мінімуму на Γ

$$u(x,t) \ge \min[0, \min_{x\in\overline{\Omega}, t=0} u(x,t), \min_{x\in S, 0\le t\le T} u(x,t)] =$$
$$= \min[0, \min_{\Gamma} u(x,t)], \ (x,t) \in Q_T.$$

Розв'язок $u \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ рівняння (8.1) задовольняє оцінку

$$|u(x,t)| \le \max_{\Gamma} |u(x,t)| + t \max_{\overline{Q_T}} |f(x,t)|, \ (x,t) \in Q_T. \tag{8.4}$$

Доведення. Оскільки теорема про мінімум зводиться до теореми про максимум заміною знака розв'язку u та функції f, то достатньо довести теорему про максимум.

Нехай $M = \max_{\overline{Q_T}} u(x,t) > 0$, $m = \max_{\Gamma} u(x,t)$. Припускаємо, що $m < M$, тобто існує така точка (x_0, t_0) всередині Q_T, що $u(x_0,t_0) = M$. Розглянемо функцію $v(x,t) = u(x,t) + \frac{M-m}{6d^2}|x - x_0|^2$, де d – діаметр області Ω. Маємо

$$v\,|_{\Gamma} \le m + \frac{M-m}{6} = \frac{5m}{6} + \frac{M}{6} < M, \quad v(x_0,t_0) = M.$$

Отже, функція v не набуває свого найбільшого значення на Γ. Нехай $\max_{\overline{Q_T}} v(x,t) = v(x_1,t_1)$, тоді $x_1 \in \Omega$, $t_1 \in (0,T]$. З умов максимуму $v_{x_i x_i} \le 0, i = 1,2,3$, $v_t = 0$, якщо $t_1 < T$, $v_t \ge 0$, якщо $t_1 = T$. Звідси випливає, що у точці (x_1,t_1) $v_t - a^2(v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2} + v_{x_3x_3}) \ge 0$. З іншого боку, $v_t - a^2(v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2} + v_{x_3x_3}) = u_t - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) - a^2\frac{M-m}{d^2} = f - a^2\frac{M-m}{d^2} < 0$, якщо $f \le 0$. Одержали суперечність. Тоді $m \ge M$.

Нехай $m_0 = \max_{\Gamma} |u(x,t)|$, $K = \max_{\overline{Q_T}} |f(x,t)|$. Розглянемо функцію $w = u - Kt$. Маємо $w_t - a^2(w_{x_1x_1} + w_{x_2x_2} + w_{x_3x_3}) = f - K \le 0$. Використаємо принцип максимуму для функції w. Одержимо $w \le m_0$, а тоді $u(x,t) \le m_0 + Kt$. Застосовуючи принцип мінімуму для функції $w_1 = u + Kt$, одержуємо $w_1 \ge -m_0$, звідки $u \ge -m_0 - Kt$. Отже, $|u(x,t)| \le m_0 + Kt, (x,t) \in \overline{Q_T}$, тобто одержуємо оцінку (8.4).

З принципу максимуму одержуємо такі наслідки.

Теорема 2. *Розв'язок задачі (8.1)-(8.3) з класу* $u \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ *єдиний.*

Д о в е д е н н я. Якби існувало два розв'язки u_1 і u_2 задачі, то функція $u = u_1 - u_2$ задовольняла би рівняння (8.1') і $u\mid_\Gamma = 0$. Тоді за теоремою 1 $u \equiv 0$, тобто $u_1 \equiv u_2$ у Q_T.

Теорема 3. *Розв'язок задачі (8.1)-(8.3) з класу* $u \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ *неперервно залежить від даних задачі.*

Д о в е д е н н я. Нехай f, $\tilde{f} \in C(\overline{Q_T})$, φ, $\tilde{\varphi} \in C(\overline{\Omega})$, μ, $\tilde{\mu} \in C(S\times[0,T])$, $\varphi(x) = \mu(x,0)$, $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\mu}(x,0)$, $x \in S$, u – розв'язок задачі (8.1)-(8.3), $\tilde{u}$ – розв'язок задачі

$$u_t = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) + \tilde{f}(x,t),\ (x,t) \in Q_T$$
$$u\mid_{t=0} = \tilde{\varphi}(x),\ x \in \Omega$$
$$u\mid_S = \tilde{\mu}(x,t),\ (x,t) \in S \times [0,T]$$

і $|\tilde{f}(x,t) - f(x,t)| \le \varepsilon$, $(x,t) \in \overline{Q_T}$, $|\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| \le \varepsilon$, $x \in \overline{\Omega}$, $|\tilde{\mu}(x,t) - \mu(x,t)| \le \varepsilon$, $(x,t) \in S \times [0,T]$. За теоремою 1 з оцінки (8.4) одержуємо $|\tilde{u}(x,t) - u(x,t)| \le \max\limits_{(x,t)\in\Gamma} |\tilde{u}(x,t) - u(x,t)| + t \max\limits_{(x,t)\in\overline{Q_T}} |\tilde{f}(x,t) - f(x,t)| = \max[\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} |\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)|, \max\limits_{(x,t)\in S\times[0,T]} |\tilde{\mu}(x,t) - \mu(x,t)|] + t \max\limits_{(x,t)\in\overline{Q_T}} |\tilde{f}(x,t) - f(x,t)| \le \varepsilon + T\varepsilon = \varepsilon(1+T)$ для всіх $(x,t) \in Q_T$.

8.1.2. Існування розв'язку

Нехай $Q_T = (0,l) \times (0,T]$. *Перша крайова задача* для рівняння поширення тепла у стержні

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

полягає у знаходженні розв'язку $u \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T) \cap C(\overline{O_T})$, який задовольняє початкову умову

$$u\mid_{t=0} = \varphi(x),\ x \in (0,l)$$

і крайові умови

$$u\mid_{x=0} = \mu_1(t),\ u\mid_{x=l} = \mu_2(t),\ t \in [0,T].$$

Умови узгодження початкових і крайових даних набувають вигляду $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(l) = \mu_2(0)$.

Розв'язок задачі шукаємо за тією самою схемою, що й розв'язок першої мішаної задачі для рівняння коливання струни. Відмінності проілюструємо на прикладі простішої задачі

$$\begin{gathered} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T \\ u\mid_{t=0} = \varphi(x),\ x \in (0,l), \quad u\mid_{x=0} = u\mid_{x=l} = 0,\ t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{8.5}$$

Шукаючи її розв'язок методом Фур'є, одержуємо

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(\frac{ak\pi}{l})^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}, A_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \tag{8.6}$$

Оскільки $0 < (\frac{ak\pi}{l})^m e^{-(\frac{ak\pi}{l})^2 t} \leq C$ для довільного натурального числа m, то як розвинення (8.6), так і розвинення, одержані почленним диференціюванням (8.6) один раз за t і двічі за x, мажоруються розвиненням $C\sum\limits_{k=1}^{\infty} |A_k|\,|\sin\frac{k\pi x}{l}|$, яке збігається для такої кусково неперервно диференційовної функції $\varphi(x)$, що $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Отже, розвинення (8.6) і розвинення, одержані його почленним диференціюванням один раз за t і двічі за x, рівномірно й абсолютно збігаються в Q_T, тому (8.6) є розв'язком задачі (8.5) класу $C^{2,1}_{x,t}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ при такій функції $\varphi(x)$.

Зауваження. Насправді розв'язок (8.6) є нескінченно диференційовною функцією всередині Q_T, як тільки $\varphi(x)$ є кусково неперервно диференційовною і $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

8.2. Задача Коші для рівняння теплопровідності

Нехай Q – півпростір $\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\} = \{t > 0\}$, $C^{2,1}_{x,t}(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ – клас функцій, двічі неперервно диференційовних за x та неперервно диференційовних за t в Q, неперервних, охоплюючи й гіперплощину $t = 0$, $\quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$.

Формулювання задачі Коші. Знайти розв'язок $u(x,t)$ рівняння

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x,t), \tag{8.7}$$

який належить класу $C^{2,1}_{x,t}(t>0)\cap C(t\geq 0)$, обмежений і задовольняє початкову умову

$$u\mid_{t=0}=\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{8.8}$$

8.2.1. Єдиність розв'язку

Нехай u_1, u_2 – два розв'язки задачі (8.7),(8.8). З умови обмеженості розв'язку випливає існування такого числа $M>0$, що $|u_1(x,t)|<M$ і $|u_2(x,t)|<M$ для $(x,t)\in Q$. Тоді $u=u_1-u_2$ буде розв'язком задачі

$$u_t=a^2\Delta u,\ (x,t)\in Q,\quad u\mid_{t=0}=0 \tag{8.9}$$

і $|u(x,t)|<2M$ у півпросторі Q.

Безпосередньо принцип максимуму не можемо застосувати, оскільки функція $u(x,t)$ може не досягати максимуму чи мінімуму в Q. Розглянемо скінченну область $Q_{RT}=\{(x,t):|x|<R,\ t\in[0,T]\}$, а в ній функцію $v(x,t)=\frac{4M}{R^2}\left(\frac{|x|^2}{2}+a^2nt\right)$.

Функція $v(x,t)$ задовольняє в області Q_{RT} рівняння

$$u_t=a^2\Delta u \tag{8.7'}$$

і, крім того, $v(x,0)=\frac{2M|x|^2}{R^2}\geq 0=u(x,0)$,
$v\mid_{|x|=R}=2M+\frac{4M}{R^2}a^2nt\geq 2M\geq|u\mid_{|x|=R}|$.

Нехай Γ_{RT} – параболічна межа області Q_{RT}. Функція $v(x,t)-u(x,t)$ задовольняє рівняння (8.7') і $[v(x,t)-u(x,t)]\mid_{\Gamma_{RT}}\geq 0$. Тоді за теоремою 1 $v(x,t)-u(x,t)\geq 0, (x,t)\in Q_{RT}$.

Функція $v(x,t)+u(x,t)$ також задовольняє рівняння (8.7') і $[v(x,t)+u(x,t)]\mid_{\Gamma_{RT}}\geq 0$. Знову за теоремою 1 $v(x,t)+u(x,t)\geq 0, (x,t)\in Q_{RT}$. Отже, $-v(x,t)\leq u(x,t)\leq v(x,t),\quad (x,t)\in Q_{RT}$ або
$|u(x,t)|\leq v(x,t)=\frac{4M}{R^2}\left(\frac{|x|^2}{2}+a^2nt\right),\quad (x,t)\in Q_{RT}$.

Переходячи в одержаній нерівності до границі, коли $R,T\to\infty$, одержуємо $u(x,t)\equiv 0$ для довільно вибраної точки $(x,t)\in Q$.

8.2.2. Існування розв'язку задачі Коші

Розв'язок задачі (8.7),(8.8) шукаємо у вигляді суми $u=v+w$, де v та w – розв'язки відповідно задач

$$u_t=a^2\Delta u,\ (x,t)\in Q,\quad u\mid_{t=0}=\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{8.10}$$

$$u_t=a^2\Delta u+f(x,t),\ (x,t)\in Q,\quad u\mid_{t=0}=0,\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{8.11}$$

Як і у випадку задачі Коші для хвильового рівняння, можна перевірити таке: якщо $v=v(x,t,\varphi(x))$ є розв'язком задачі (8.10), то функція $w(x,t)=\int\limits_0^t v(x,t-\tau,f(x,\tau))d\tau$ буде розв'язком задачі (8.11).

Теорема. *Якщо функція $\varphi(x)$ неперервна й обмежена в $\mathbb{R}^n$, то існує розв'язок задачі (8.10) класу $C^{2,1}_{x,t}(t>0)\cap C(t\geq 0)$ і обмежений в Q. Він виражається формулою*

$$v(x,t)=\frac{1}{(2a)^n(\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\varphi(y)dy. \qquad (8.12)$$

Формула (8.12) називається *формулою Пуассона* або *інтегралом Пуассона.*

Враховуючи зауваження, одержуємо, що функція

$$w(x,t)=\int\limits_0^t\Big(\frac{1}{(2a)^n\pi^{\frac{n}{2}}(t-\tau)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}f(y,\tau)dy\Big)d\tau$$

є розв'язком задачі (8.11). Отже, розв'язок задачі (8.7),(8.8) виражається формулою

$$u(x,t)=\frac{1}{(2a)^n(\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\varphi(y)dy+$$
$$\int\limits_0^t\Big(\frac{1}{(2a)^n\pi^{\frac{n}{2}}(t-\tau)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}f(y,\tau)dy\Big)d\tau,\ (x,t)\in Q.$$

Д о в е д е н н я теореми. Розглянемо функцію

$$G(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{(2a)^n(\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}, & x\in\mathbb{R}^n, t>0\\ 0, & x\in\mathbb{R}^n,\ t\leq 0,\ |x|+|t|\neq 0\end{cases}.$$

Бачимо, що функція $G(x,t)$ нескінченно диференційовна в усіх точках $(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}$, крім точки $(0,0)$. Безпосередньо перевіряємо, що вона задовольняє рівняння (8.1') в області $Q\setminus\{0\}$, тобто

$$G_t\equiv a^2\Delta G,\ (x,t)\in Q\setminus\{0\}.$$

Доведемо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x,t)dx=1. \qquad (8.13)$$

$$I=\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x,t)dx=\frac{1}{(2a)^n(\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}dx_1\ldots dx_n=$$
$$\frac{1}{(2a)(\pi t)^{\frac{1}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_1^2}{4a^2t}}dx_1\cdot\ldots\cdot\frac{1}{(2a)(\pi t)^{\frac{1}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_n^2}{4a^2t}}dx_n.$$

У кожному з інтегралів зробимо заміну $x_i=2at^{\frac{1}{2}}\xi_i$, $dx_i=2at^{\frac{1}{2}}d\xi_i$. Тоді $I=\Big(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi\Big)^n=1$, оскільки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi=\pi^{\frac{1}{2}}$. Функцію $G(x,t)$ називають *фундаментальним розв'язком* рівняння теплопровідності.

Бачимо, що функцію (8.12) можна записати у вигляді
$v(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\varphi(y)dy$.

Зробимо в інтегралі (8.12) заміну $y = x + 2at^{\frac{1}{2}}\xi$, $dy = 2at^{\frac{1}{2}}d\xi$. Матимемо

$$v(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2}\varphi(x + 2at^{\frac{1}{2}}\xi)d\xi. \tag{8.14}$$

Оскільки функція φ обмежена, то існує така додатна стала M, що $|\varphi(x+2at^{\frac{1}{2}}\xi)| \le M$ для усіх $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тоді $v(x,t) \le \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} M d\xi = M$. Отже, інтеграл (8.14) рівномірно збіжний. За властивостями інтегралів, залежних від параметрів, функція $v(x,t)$ визначена, неперервна й обмежена у півпросторі Q.

Так само переконуємось у рівномірній збіжності інтегралів

$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y,t)\varphi(y)dy$ та $\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{x_ix_i}(x-y,t)\varphi(y)dy, i = \overline{1,n}$, при $(x,t) \ne (0,0)$.
Тоді функції $v_t(x,t), v_{x_ix_i}(x,t)$ є неперервними, при цьому

$$v_t - a^2\Delta v = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y,t)\varphi(y)dy - a^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta G(x-y,t)\varphi(y)dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(G_t(x-y,t) - a^2(G_{x_1x_1}(x-y,t) + \cdots + G_{x_nx_n}(x-y,t))\big)\varphi(y)dy = 0.$$

Ми довели, що функція (8.14) належить класу $\in C^{2,1}_{x,t}(Q)$, обмежена в Q і задовольняє рівняння (8.1').

Зауважимо, що насправді функція (8.14) нескінченно диференційовна в усіх точках $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, крім точки $x = 0, t = 0$. Це випливає, як і попередні її властивості, з властивостей функції $G(x,t)$ та властивостей інтегралів, залежних від параметрів.

Доведемо, що функція (8.14) задовольняє початкову умову задачі (8.10), тобто

$$\lim_{t\to 0, x\to x_0} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2}\varphi(x + 2at^{\frac{1}{2}}\xi)d\xi = \varphi(x_0),\ x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{8.15}$$

Зауважимо, що $\varphi(x_0) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2}\varphi(x_0)d\xi$. Тоді

$$v(x,t) - \varphi(x_0) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2}[\varphi(x + 2at^{\frac{1}{2}}\xi) - \varphi(x_0)]d\xi. \tag{8.16}$$

З обмеженості функції φ випливає існування такого додатного числа M, що $|\varphi(x)| \le M$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тоді $|v(x,t) - \varphi(x_0)| \le \frac{2M}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} d\xi = 2M$. Отже, інтеграл (8.16) збігається рівномірно в Q і для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $N > 0$, що

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{|\xi|>N} e^{-|\xi|^2} |\varphi(x + 2at^{\frac{1}{2}}\xi) - \varphi(x_0)| d\xi < \frac{\varepsilon}{2},\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0. \qquad (8.17)$$

За неперервністю функції φ у точці x_0, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що, коли $|\tilde{x} - x_0| < \delta$, то $|\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Виберемо таке t_0, що $t_0^{\frac{1}{2}} < \frac{\delta}{4Na}$. При $|\xi| < N$ для усіх $t < t_0$, $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ маємо $|x + 2at^{\frac{1}{2}}\xi - x_0| \le |x - x_0| + 2at^{\frac{1}{2}}|\xi| \le |x - x_0| + 2at_0^{\frac{1}{2}} N < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} < \delta$, звідси за неперервністю функції φ $|\varphi(x + 2at^{\frac{1}{2}}\xi) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тепер

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{|\xi|<N} e^{-|\xi|^2} |\varphi(x + 2at^{\frac{1}{2}}\xi) - \varphi(x_0)| d\xi < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{|\xi|<N} e^{-|\xi|^2} d\xi < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (8.18)$$

для усіх $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$, $t < t_0$.

Із (8.17) та (8.18) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для усіх $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$, $t < t_0$ $|v(x,t) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Тому функція (8.12) задовольняє початкову умову задачі (8.10) і є неперервною, охоплюючи гіперплощину $t = 0$, тобто при $t \ge 0$.

Неперервну залежність розв'язку задачі Коші від даних можна довести з використанням формули розв'язку, як у випадку рівняння коливання струни.

Використовуючи фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності, розв'язок задачі (8.7), (8.8) ще можна подати у вигляді

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\varphi(y)dy + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dy,\ (x,t) \in Q.$$

Розділ 9. РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Рівняння еліптичного типу одержують під час вивчення різних стаціонарних (які не змінюються з часом) процесів. Найпростішим є рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{9.1}$$

Означення 1. Функція $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ називається *гармонічною в скінченній області* $\Omega \in \mathbb{R}^n$, якщо вона у цій області має неперервні похідні до другого порядку включно і задовольняє рівняння Лапласа (9.1) в усіх точках області Ω.

Функція $u(x)$ називається *гармонічною в нескінченній області* Ω, якщо вона у цій області має неперервні похідні до другого порядку включно, задовольняє рівняння Лапласа (9.1) в усіх точках області Ω та рівномірно прямує до нуля при прямуванні точки x до безмежності, тобто $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, якщо $n \geq 3$, рівномірно обмежена при прямуванні точки x до безмежності, тобто $u(x) \to C = Const$ при $|x| \to \infty$, якщо $n = 2$.

Далі розглядаємо такі області Ω в $\mathbb{R}^n$, які обмежені однією або декількома замкненими поверхнями (кривими при $n = 2$). Використовуватимемо позначення $r(x, x_0) = |x - x_0|$, $x,\ x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Безпосередньо перевіряємо, що функція $u = \frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}$ є гармонічною в довільній області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, що не містить точки x_0, а функція $u = ln\frac{1}{|x-x_0|}$ – гармонічна в довільній області на площині, яка не містить точки x_0. Функцію

$$\omega_n(x, x_0) = -\frac{1}{\sigma_n |x - x_0|^{n-2}}, \quad x, x_0 \in \mathbb{R}^n, n \geq 3,$$

де σ_n – площа поверхні одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$, називають *фундаментальним розв'язком* рівняння (9.1), зокрема $\omega_3(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi|x-x_0|}$. Фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа для випадку $n = 2$ є функція $\omega_2(x, x_0) = \frac{1}{2\pi} ln\frac{1}{|x-x_0|}$.

9.1. Коректні задачі для рівняння Лапласа

9.1.1. Формули Гріна. Інтегральне зображення функції

Нехай Ω – скінченна область у $\mathbb{R}^3$, обмежена кусково-неперервно диференційовною орієнтовною поверхнею S, $\nu(x)$ – зовнішня нормаль до поверхні S у точці $x \in S$, $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))$.

Нехай функції $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ мають неперервні похідні першого порядку в області Ω, неперервні в $\overline{\Omega}$, тобто належать до класу функцій

$C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Правильна формула Остроградського

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3}\right) dx = \int\limits_{S} \left[P_1(x)\nu_1(x) + P_2(x)\nu_2(x) + P_3(x)\nu_3(x)\right] dS. \tag{9.2}$$

Нехай функції $u(x), v(x)$ мають неперервні похідні другого порядку в області Ω, неперервні похідні першого порядку в $\overline{\Omega}$, тобто $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Розглянемо $\int\limits_{\Omega} v\Delta u dx$. Перетворимо підінтегральний вираз $v\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}(v\frac{\partial u}{\partial x_i}) - \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$. Тоді $\int\limits_{\Omega} v\Delta u dx =$
$= \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(v\frac{\partial u}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(v\frac{\partial u}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(v\frac{\partial u}{\partial x_3})\right] dx - \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right] dx.$
Перший доданок перетворимо за формулою Остроградського (при $P_i = v\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$). Одержуємо

$\int\limits_{\Omega} v\Delta u dx = \int\limits_{S} \left[v\frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_1 + v\frac{\partial u}{\partial x_2}\nu_2 + v\frac{\partial u}{\partial x_3}\nu_3\right] dS - \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right] dx.$
Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\nu_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\nu_3 = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, то остаточно одержуємо

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u dx = \int\limits_{S} v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right] dx, \tag{9.3}$$

$$u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}).$$

Формула (9.3) називається *першою формулою Гріна* для оператора Лапласа.

Оскільки функції u та v належать одному й тому ж функціональному класу, то у (9.3) можемо поміняти місцями u та v, одержуючи правильну рівність

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v dx = \int\limits_{S} u\frac{\partial v}{\partial \nu} dS - \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial v}{\partial x_3}\right] dx.$$

Почленно віднімаючи останню рівність від (9.3), матимемо

$$\int\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int\limits_{S} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) dS, \; u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}). \tag{9.4}$$

Формула (9.4) називається *другою формулою Гріна* для оператора Лапласа.

Використовуючи формули Гріна, досліджуємо основні властивості гармонічних функцій.

Виведемо інтегральне зображення функції класу $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Теорема 1. *Для довільної функції $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ правильне зображення*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x|} - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|y-x|}\right) dS_y - \tag{9.5}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega \Delta u(y) \frac{1}{|y-x|} dy, \; x \in \Omega.$$

Доведення. Нехай x_0 – довільна точка області Ω, $\frac{1}{|y-x_0|}$ як функція змінної y належить до класу $C^2(\Omega \setminus x_0) \cap C^1(\overline{\Omega} \setminus x_0)$ та гармонічна в $\Omega \setminus x_0$, а отже, $\Delta \frac{1}{|y-x_0|} = 0$, $y \neq x_0$. Виріжемо з області Ω кулю $K_\varepsilon(x_0)$ з центром у точці x_0 настільки малого радіуса ε, щоб $K_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$ і запишемо другу формулу Гріна (9.4) для функцій $u(y)$, $v(y) = \frac{1}{|y-x_0|}$ і області $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus K_\varepsilon(x_0)$. Зауважимо, що межею цієї області є $S \cup S_\varepsilon$ (S_ε – сфера радіуса ε з центром у точці x_0). Одержуємо

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \Delta u \frac{1}{|y-x_0|} dy = \int\limits_S \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x_0|} - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x_0|}\right) dS + \tag{9.6}$$

$$+ \int\limits_{S_\varepsilon} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x_0|} - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x_0|}\right) dS.$$

Тепер перейдемо до границі, коли $\varepsilon \to 0$. Інтеграл за S від ε не залежить. На S_ε $|y - x_0| = \varepsilon$ і зовнішня нормаль направлена від точки $y \in S_\varepsilon$ до центра x_0, тому $\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x_0|} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$ при $y \in S_\varepsilon$. Отже,

$$\int\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x_0|} dS = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} dS, \; - \int\limits_{S_\varepsilon} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x_0|} dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{S_\varepsilon} u(y) dS.$$

Скористаємось теоремою про середнє для цих інтегралів. Тоді

$\int\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} dS = \frac{\partial u(y_\varepsilon)}{\partial \nu} \int\limits_{S_\varepsilon} dS = 4\pi\varepsilon^2 \frac{\partial u(y_\varepsilon)}{\partial \nu}$, аналогічно $\int\limits_{S_\varepsilon} u(y) dS = 4\pi\varepsilon^2 u(y_\varepsilon)$, де y_ε – деяка точка на S_ε. Отож, $\int\limits_{S_\varepsilon} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x_0|} - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x_0|}\right) dS =$ $= \frac{1}{\varepsilon} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \frac{\partial u(y_\varepsilon)}{\partial \nu} - \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 u(y_\varepsilon) = 4\pi\varepsilon \frac{\partial u(y_\varepsilon)}{\partial \nu} - 4\pi u(y_\varepsilon)$ і цей вираз збігається до $-4\pi u(x_0)$, коли $\varepsilon \to 0$. Переходячи в (9.6) до границі, коли $\varepsilon \to 0$, одержуємо

$$\int\limits_\Omega \Delta u \frac{1}{|y-x_0|} dy = \int\limits_S \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x_0|} - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x_0|}\right) dS - 4\pi u(x_0),$$

а звідси – формулу (9.5), замінивши точку x_0 довільною точкою $x \in \Omega$.

Зауваження. Якщо Ω – область в $\mathbb{R}^2$, то так само одержуємо інтегральне зображення довільної функції $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} ln \frac{1}{|y-x|} - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} ln \frac{1}{|y-x|}\right) dS_y - \tag{9.5'}$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int\limits_\Omega \Delta u(y) ln \frac{1}{|y-x|} dy, \; x \in \Omega.$$

Із формул (9.5) та (9.5') одержуємо інтегральне зображення гармонічної в області Ω функції, неперервно диференційовної на межі

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x|} - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|y-x|}\right) dS_y, \; x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \tag{9.6'}$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} ln \frac{1}{|y-x|} - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} ln \frac{1}{|y-x|}\right) dS_y, \; x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2. \tag{9.6''}$$

Ці формули називаються основними формулами теорії гармонічних функцій. Вони свідчать про те, що значення гармонічної функції всередині області виражаються через її значення та значення її нормальної похідної на межі області.

9.1.2. Основні властивості гармонічних функцій

Нехай $u(x)$ – гармонічна функція у скінченній області $\Omega \in \mathbb{R}^3$ з межею S, неперервно диференційовна в замиканні області.

1. Із першої формули Гріна (формули (9.3)) при $v(x) = u(x)$ одержуємо $\int\limits_S u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \int\limits_\Omega \left[(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_3})^2\right] dx$, звідки видно, що

$$\int\limits_S u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \geq 0. \tag{9.7}$$

2. Із першої формули Гріна при $v(x) = 1$ одержуємо

$$\int\limits_S \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0. \tag{9.8}$$

3. Нехай S_1 – довільна неперервно диференційовна поверхня всередині області Ω, Ω_1 – область, обмежена поверхнею S_1. Із формули (9.6') одержуємо

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_1} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x|} - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|y-x|}\right) dS_y, \; x \in \Omega_1. \qquad (9.9)$$

Для значень x всередині області підінтегральний вираз справа у формулі (9.9) не має особливості і є нескінченно диференційовною функцією від x_1, x_2, x_3. Тому за властивостями інтегралів, залежних від параметрів (в (9.9) параметрами є x_1, x_2, x_3), одержуємо, що функція u нескінченно диференційовна в Ω_1, її похідні можна обчислювати, диференціюючи підінтегральний вираз у (9.9). Оскільки для довільної точки $x \in \Omega$ існує така гладка поверхня S_1, що $x \in \Omega_1$, то одержуємо нескінченну диференційовність функції u в області Ω. Отже, *гармонічна в скінченній області функція є нескінченно диференційовною в цій області.*

4. Середнє арифметичне гармонічної функції.

Теорема 2. *Нехай функція u гармонічна в області Ω, $S_R(x)$ – куля радіуса R з центром у точці $x \in \Omega$, яка разом з межею знаходиться всередині Ω. Значення гармонічної функції в центрі кулі дорівнює середньому арифметичному її значень на поверхні цієї кулі*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{S_R(x)} u(y) dS. \qquad (9.9')$$

Д о в е д е н н я. Оскільки на сфері $|y-x| = R$, $\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x|} = \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2}$, то за формулою (9.6') $u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{S_R(x)} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} dS + \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{S_R(x)} u(y) dS$. Враховуючи властивість (9.8), одержуємо (9.9').

5. Принцип максимуму для гармонічної функції.

Теорема 3. *Гармонічна всередині скінченної області та неперервна у замиканні цієї області, відмінна від тотожної сталої, функція набуває найбільшого і найменшого значення на межі області.*

Д о в е д е н н я. За теоремою Вейєрштрасса, неперервна в обмеженій замкненій області $\overline{\Omega}$ функція досягає у ній найбільшого і найменшого

значень. Припустимо, що існує така точка x_0 всередині Ω, що $u(x_0) = M = \max\limits_{\overline{\Omega}} u(x)$. Виберемо число ϱ настільки малим, щоб сфера $S_\varrho(x_0)$ з центром у точці x_0 радіуса ϱ перебувала всередині області Ω. За теоремою 2

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi\varrho^2} \int\limits_{S_\varrho} u(y)dS \leq \frac{1}{4\pi\varrho^2} \int\limits_{S_\varrho} u_\varrho^{\max} dS = u_\varrho^{\max},$$

де $u_\varrho^{\max}$–найбільше значення функції u на сфері S_ϱ. Знак рівності можна використати лише для $u(x) = C = const$. За припущенням $u(x_0) \geq u_\varrho^{\max}$. Отже, $u(x_0) = u_\varrho^{\max}$ для вибраного ϱ і всіх менших значень.

Ми довели, що функція $u(x) = M$ всередині та на поверхні довільної сфери з центром у точці x_0, яка повністю належить області Ω. Щоб одержати суперечність із припущенням достатньо показати, що $u(x) = M$ для довільної точки $x \in \Omega$. З'єднаємо точку x з точкою x_0 довільною лінією l, яка повністю належить Ω. Проведемо сферу $S_{\varrho_1}(x)$ з центром у точці x, яка повністю належить області Ω. Нехай $x^{(1)} \in l$ і така, що $\frac{\varrho_1}{2} < |x^{(1)} - x| < \varrho_1$, а тому точка $x^{(1)}$ лежить всередині сфери $S_{\varrho_1}(x)$. За доведеним, $u(x) = u(x^{(1)})$. Проведемо сферу $S_{\varrho_2}(x^{(1)})$ з центром у точці $x^{(1)}$, яка повністю належить області Ω. Нехай $x^{(2)} \in l$ і така, що $\frac{\varrho_2}{2} < |x^{(2)} - x^{(1)}| < \varrho_2$ і так далі. Скінченною кількістю p таких сфер ми покриємо всю лінію l, точка x_0 лежатиме всередині $S_{\varrho_p}(x^{(p)})$. При цьому $u(x) = u(x^{(1)}) = u(x^{(2)}) = \cdots = u(x^{(2)}) = u(x_0) = M$. Одержано суперечність із припущенням.

9.1.3. Формулювання основних задач для рівняння Пуассона. Єдиність і неперервна залежність від крайових даних розв'язку задачі Діріхле

Надалі вважатимемо Ω скінченною областю, обмеженою замкненою поверхнею S, а через Ω_e позначатимемо безмежну область поза Ω ($\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$). Область Ω_e також обмежена поверхнею S. Нехай F_0, f – задані неперервні функції відповідно в Ω, на S. Ми доведемо пізніше, що для рівняння Пуассона коректними є такі задачі.

Внутрішня задача Діріхле (перша внутрішня крайова задача). Знайти функцію $u(x)$ класу $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, яка задовольняє рівняння

$$\Delta u(x) = F_0(x),\ x \in \Omega, \tag{9.10}$$

а на поверхні S набуває заданих значень $f \in C(S)$

$$u\,|_S = f(y),\ y \in S. \tag{9.11}$$

Внутрішня задача Неймана (друга внутрішня крайова задача). Знайти функцію $u(x)$ класу $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, яка задовольняє рівняння (9.10) і таку, що $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ на поверхні S набуває заданих значень $f \in C(S)$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} |_S = f(y),\ y \in S. \tag{9.12}$$

Внутрішня задача Пуанкаре (третя внутрішня крайова задача). Знайти функцію $u(x)$ класу $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, яка задовольняє рівняння (9.10) і таку, що $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u$ на поверхні S набуває заданих значень $f \in C(S)$

$$(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u) |_S = f(y),\ y \in S, \tag{9.13}$$

де σ – задана неперервна функція на S.

Зовнішня задача Діріхле (перша зовнішня крайова задача). Знайти функцію $u(x)$ класу $C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega}_e)$, яка задовольняє рівняння

$$\Delta u(x) = F_0(x),\ x \in \Omega_e, \tag{9.10'}$$

на поверхні S набуває заданих значень $f \in C(S)$ і задовольняє умову на безмежності $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$, якщо $n \geq 3$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) \leq C$, якщо $n = 2$.

Зовнішня задача Неймана (друга зовнішня крайова задача). Знайти функцію $u(x)$ класу $C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega}_e)$, яка задовольняє рівняння (9.10'), крайову умову (9.12) й умову на безмежності $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$, якщо $n \geq 3$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) \leq C$, якщо $n = 2$.

Зовнішня задача Пуанкаре (третя зовнішня крайова задача) формулюється так само з заміною крайової умови на (9.13).

Зауваження. Крайові умови для внутрішніх і зовнішніх крайових задач формально виглядають однаково, але граничні значення функцій у них розуміємо по-різному: зсередини для внутрішніх задач та ззовні для зовнішніх задач.

Теорема 4 (єдиності розв'язку задачі Діріхле). *Розв'язок задачі Діріхле (як внутрішньої, так і зовнішньої) єдиний.*

Д о в е д е н н я випливає з принципу максимуму. Нехай u_1, u_2 – розв'язки внутрішньої задачі Діріхле, $u = u_1 - u_2$. Функція u гармонічна в Ω і дорівнює нулю на поверхні S. За теоремою 3 $u(x) \equiv 0$ в області $\overline{\Omega}$, а отже, $u_1 = u_2$ в $\overline{\Omega}$.

Нехай u_1, u_2 – два розв'язки зовнішньої задачі Діріхле, $u = u_1 - u_2$. Функція u дорівнює нулю на поверхні S, гармонічна в безмежній області Ω_e, а отже, прямує до нуля на безмежності. Тому для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $R > 0$, що $|u(x)| < \varepsilon$ при $|x| > R$. Нехай S_R – сфера радіуса R. У скінченній частині області Ω_e, обмеженій поверхнями S та S_R, функція $u(x)$ гармонічна, а тоді за теоремою 3 $|u(x)| < \varepsilon$ в цій області. При $\varepsilon \to 0$ $R \to \infty$, тому спрямовуючи ε до нуля, одержуємо $|u(x)| \leq 0$, $x \in \Omega_e$, тобто $u(x) = 0$, $x \in \Omega_e$.

Теорема 5. *Розв'язок задачі Діріхле (як внутрішньої, так і зовнішньої) неперервно залежить від крайових даних.*

Доводиться, як і теорема 4, на підставі принципу максимуму.

Теорема 6. *Якщо послідовність гармонічних всередині області Ω, неперервних в $\overline{\Omega}$, функцій u_n рівномірно збігається на межі S області, то ця послідовніть рівномірно збігається в усій області.*

Доведення. Нехай $u_n|_S = f_n$. За припущенням послідовність f_n рівномірно збігається на S. Тоді за критерієм Коші для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне N, що при $n, m > N$ всюди на S $|f_n - f_m| < \varepsilon$. Оскільки $[u_n(x) - u_m(x)]|_S = f_n - f_m$, то за принципом максимуму одержуємо $|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon$, $x \in \overline{\Omega}$ для таких n, m. Знову за критерієм Коші робимо висновок, що послідовність $u_n(x)$ збігається рівномірно в $\overline{\Omega}$.

9.1.4. Функція Гріна задачі Діріхле

Нехай функції $u(x), v(x)$ гармонічні в області Ω, неперервно диференційовні в $\overline{\Omega}$. Із другої формули Гріна одержуємо $0 = \int\limits_S (\frac{\partial u}{\partial \nu} v - u \frac{\partial v}{\partial \nu}) dS$, а згідно з (9.9), $u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S (\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x|} - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|y-x|}) dS_y$, $x \in \Omega$.

Віднімаючи ці дві рівності, матимемо

$$u(x) = \int\limits_S [\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}(v(y) - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|y-x|}) - u(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}(v(y) - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|y-x|})] dS_y, \quad x \in \Omega. \tag{9.14}$$

Розглянемо функцію

$$G(y, x) = v(y, x) - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|y-x|}, \ y \in \overline{\Omega}, \ x \in \Omega. \tag{9.15}$$

Означення 2. Функцією Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа називається функція $G(y,x)$, яка визначена при $y \in \overline{\Omega}$, $x \in \Omega$ і володіє властивостями:

1) $G(y,x)$ як функція точки y є гармонічною всередині області Ω, за винятком точки x;

2) $G(y,x)\mid_{y\in S} = 0$;

3) в області Ω допускає зображення (9.15), де $v(y,x)$ гармонічна всюди всередині Ω.

Побудова функції Гріна зводиться до знаходження такої гармонічної всередині області Ω функції $v(y,x)$, яка задовольняє крайову умову $v\mid_{y\in S} = \frac{1}{4\pi|y-x|}$, $y \in S$. Отже, $G(y,x)$ є функцією Гріна задачі Діріхле, якщо $v(y,x)$ є розв'язком спеціальної задачі Діріхле.

Враховуючи крайову умову (9.11), з (9.14) одержуємо зображення розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа за допомогою функції Гріна для $f \in C^1(S)$

$$u(x) = \int\limits_S f(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}G(y,x)dS,\ x \in \Omega. \tag{9.16}$$

У випадку плоскої області Ω зображення (9.15) замінюється так: $G(y,x) = v(y,x) - \frac{1}{2\pi}ln\frac{1}{|y-x|}$, $x,y \in \Omega$.

Аналогічно вводиться *функція Гріна зовнішньої задачі Діріхле.*

9.1.5. Деякі методи побудови фунції Гріна

Для областей спеціального вигляду функцію Гріна легко побудувати, використовуючи принцип симетрії.

Розглянемо приклади.

1. Ω – півпростір $\{x_3 > 0\}$. Тоді

$$G(y,x) = \frac{1}{4\pi}\Big[\frac{1}{[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2]^{\frac{1}{2}}}\Big].$$

Розв'язок задачі Діріхле $u\mid_{x_3=0} = f(x_1,x_2)$ набуває вигляду

$$u(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_3}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{f(y_1,y_2)dy_1dy_2}{[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}},\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_3 > 0.$$

2. Ω – куля $K_R(0)$ радіуса R з центром у точці 0, її межа – S_R. Нехай $x \in K_R(0)$, x^* – така точка поза $K_R(0)$, що $|x||x^*| = R^2$. Тоді $G(y,x) = -\frac{1}{4\pi}\Big[\frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|x||x^*-y|}\Big]$. Гармонічність при $x \neq y$ такої функції була відзначена, при $y \in S$ трикутник з вершинами у точах $O(0), X(x), Y(y)$ подібний до трикутника з вершинами у точках $O(0), X^*(x^*), Y(y)$, тому

$\frac{|x-y|}{|x^*-y|} = \frac{|x|}{R}$, тобто $\frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|x||x^*-y|} = 0$, якщо $y \in S_R$.

За формулою (9.16) розв'язок задачі Діріхле $u\,|_{S_R} = f(y)$, $y \in S_R$ при $f \in C^1(S_R)$ набуває вигляду

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_R} f(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\Big(\frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|x||x^*-y|}\Big)dS,\ x \in K_R(0). \qquad (9.17)$$

Перетворимо підінтегральний вираз. Маємо

$\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x-y|} = \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{1}{|x-y|}\nu_1(y) + \frac{\partial}{\partial y_2}\frac{1}{|x-y|}\nu_2(y) + \frac{\partial}{\partial y_3}\frac{1}{|x-y|}\nu_3(y) =$

$= -\frac{1}{|x-y|^2}\Big[\frac{y_1-x_1}{|x-y|}\nu_1(y) + \frac{y_2-x_2}{|x-y|}\nu_2(y) + \frac{y_3-x_3}{|x-y|}\nu_3(y)\Big] =$

$= -\frac{1}{|x-y|^2}\Big[\cos(r,y_1)\cos(\nu,y_1) + \cos(r,y_2)\cos(\nu,y_2) + \cos(r,y_3)\cos(\nu,y_3)\Big] =$
$-\frac{1}{|x-y|^2}\cos(r,\nu)$, де $r = \overline{xy}$ – вектор з початком у точці x та кінцем у точці y. Аналогічно $\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x^*-y|} = -\frac{1}{|x^*-y|^2}\cos(r^*,\nu)$, де $r^* = \overline{x^*y}$.

За теоремою косинусів із трикутників OXY та OX^*Y (при $y \in S$)

$|x|^2 = R^2 + |x-y|^2 - 2R|x-y|\cos(r,\nu)$,

$|x^*|^2 = R^2 + |x^*-y|^2 - 2R|x^*-y|\cos(r^*,\nu)$.

Тепер $\frac{\partial}{\partial\nu_y}\Big(\frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|x||x^*-y|}\Big) = -\frac{1}{|x-y|^2}\cos(r,\nu) + \frac{1}{|x^*-y|^2}\cos(r^*,\nu) =$

$= \frac{|x|^2-R^2-|x-y|^2}{2R|x-y|^3} - \frac{|x^*|^2-R^2-|x^*-y|^2}{2|x||x^*-y|^3} = \frac{|x|^2-R^2}{R|x-y|^3}$.

Підставляючи знайдений вираз у (9.17), одержуємо зображення розв'язку задачі Діріхле у кулі

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R}\int\limits_{S_R} f(y)\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^3}dS,\ x \in K_R(0). \qquad (9.18)$$

Формула (9.18) називається *формулою Пуассона*. Можна обгрунтувати, що при неперервній функції $f(y)$ вона справді є розв'язком задачі Діріхле.

Якщо $f(y) = 1$, $y \in S_R$, то за принципом максимуму розв'язком задачі Діріхле є функція $u(x) \equiv 1$, $|x| \le R$. Із формули (9.18) у цьому випадку одержуємо $\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{S_R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^3}dS = 1$, $|x| \le R$.

Теорема 7 (Ліувілля). *Гармонічна в усьому просторі $\mathbb{R}^3$ функція є тотожним нулем.*

Д о в е д е н н я. Оскільки $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке R, що $|u(x)| < \varepsilon$ при $|x| > R$. З формули (9.18) для такого R одержуємо

$$|u(x)| \leq \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{S_R} |u(y)| \frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^3} dS \leq \varepsilon \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{S_R} \frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^3} dS = \varepsilon,$$

тобто $|u(x)| \leq \varepsilon$ для довільної точки $x \in \mathbb{R}^3$ та довільного ε. Отже, $u(x) = 0$ в усьому просторі.

За допомогою функції Гріна подібно одержуємо розв'язок зовнішньої задачі Діріхле для кулі

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{S_R} f(y) \frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^3} dS, \; x \notin K_R(0). \tag{9.19}$$

3. При побудові функції Гріна задачі Діріхле для плоскої області доцільно використовувати метод конформних відображень. Він дає змогу побудувати функцію Гріна для плоскої області Ω, якщо відома аналітична функція $w = w(z, z_0)$, яка відображає область Ω на одиничний круг $|w| < 1$ так, що точка $z = z_0$ переходить у точку $w = 0$. Тоді

$$G(y, x) = \frac{1}{2\pi} ln \; |w(z, z_0)|, \; z = y_1 + iy_2, \; z_0 = x_1 + ix_2.$$

Справді, $G(y, x) \mid_{y \in S} = \frac{1}{2\pi} ln \; |w(z, z_0)| \mid_{|w|=1} = \frac{1}{2\pi} ln \; 1 = 0$. Так що ця функція задовольняє умову 2 в означенні функції Гріна. За побудовою точка z_0 є нулем функції $w(z, z_0)$, який є простим за конформністю відображення ($w'(z_0, z_0) \neq 0$). Тому $w(z, z_0) = (z - z_0) w_1(z, z_0)$ і функція $w_1(z, z_0)$ аналітична, $w_1(z_0, z_0) \neq 0$. Маємо

$G(y, x) = \frac{1}{2\pi} ln \; |z - z_0| + \frac{1}{2\pi} ln \; |w_1(z, z_0)| = \frac{1}{2\pi} ln \; |x - y| + v(y, x)$,

де $v(y, x) = \frac{1}{2\pi} ln \; |w_1(z, z_0)|$.

Перший доданок є гармонічною функцією при $x \neq y$. Відомо, що $ln \; w_1(z, z_0) = ln \; |w_1(z, z_0)| + iarg \; ln \; w_1(z, z_0)$. Так що $v(y, x)$ як дійсна частина аналітичної функції є гармонічною функцією для всіх $y, x \in \Omega$.

Нехай Ω – смуга $x_1 \in \mathbb{R}$, $0 < x_2 < \pi$. Функція $w_1 = e^z$ відображає конформно смугу $0 < Im \; z < \pi$ на верхню півплощину, $w_1^0 = e^{z_0}$, а

функція $w = \frac{w_1 - w_1^0}{w_1 - \overline{w}_1^0}$ – верхню півплощину на одиничний круг. Отже, шукана функція $w = \frac{e^z - e^{z_0}}{e^z - e^{\overline{z_0}}}$, а шукана функція Гріна

$$G(y,x) = \frac{1}{2\pi} ln|\frac{e^z - e^{z_0}}{e^z - e^{\overline{z_0}}}| = \frac{1}{2\pi} ln|\frac{e^{y_1+iy_2} - e^{x_1+ix_2}}{e^{y_1+iy_2} - e^{x_1-ix_2}}|.$$

Після перетворень одержуємо $G(y,x) = \frac{1}{4\pi} ln \frac{e^{2x_1} - 2e^{x_1+y_1}\cos(x_2-y_2) + e^{2y_1}}{e^{2x_1} - 2e^{x_1+y_1}\cos(x_2+y_2) + e^{2y_1}}$.

9.1.6. Поведінка похідних гармонічної функції на безмежності

Нехай $u(x)$ – гармонічна функція в безмежній області $\Omega_e \subset \mathbb{R}^3$. Проведемо сферу $S_R = S_R(0)$ настільки великого радіуса R, щоб уся поверхня S перебувала всередині неї. Тоді функція $u(x)$ буде гармонічною поза S_R (і на самій сфері), тому згідно з (9.19) її можна подати у вигляді

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{S_R} u(y) \frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^3} dS, \ |x| > R. \qquad (9.19')$$

Візьмемо таку точку x, що $|x| > 2R$, тобто $R < \frac{|x|}{2}$. Тоді $|x-y| \geq |x| - |y| = |x| - R > \frac{|x|}{2}$, $\frac{1}{|x-y|^3} < \frac{8}{|x|^3}$, тому $\frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^3} < \frac{8}{|x|^3}(|x|^2 - R^2) < \frac{8}{|x|}$. Тепер із формули (9.19') $|u(x)| < \frac{2}{\pi R|x|} \int\limits_{S_R} |u(y)| dS = \frac{C}{|x|}$, де $C = \frac{2}{\pi R} \int\limits_{S_R} |u(y)| dS$. Отож,

$$|u(x)| \leq \frac{C}{|x|}, \ |x| \to \infty. \qquad (9.20)$$

Із (9.19') $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{S_R} u(y) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^3} dS.$ Оцінимо цю похідну $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^3} = \frac{2x_1}{|x-y|^3} - \frac{3(|x|^2 - R^2)}{|x-y|^4} \frac{x_1 - y_1}{|x-y|}$. Нехай знову $|x| > 2R$. Тоді правильні попередні оцінки. Враховуючи очевидні нерівності $\frac{x_1}{|x|} \leq 1$, $\frac{x_1 - y_1}{|x-y|} \leq 1$, одержуємо $|\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^3}| \leq \frac{64}{|x|^2}$, а отже, $|\frac{\partial u}{\partial x_1}| < \frac{16}{\pi R|x|^2} \int\limits_{S_R} |u(y)| dS = \frac{C_1}{|x|^2}$, $|x| \to \infty$. Аналогічні оцінки для $\frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}$.

Висновок. При $|x| \to \infty$ гармонічна функція $u(x)$ має поведінку (9.20), $|\frac{\partial u}{\partial x_i}| \leq \frac{C_1}{|x|^2}$, $i = 1,2,3$, а також $|\frac{\partial u}{\partial \nu}| \leq \frac{C_2}{|x|^2}$, $C_2 = 3C_1$.

9.1.7. Єдиність розв'язку задачі Неймана

Теорема 8. *Розв'язок внутрішньої задачі Неймана єдиний з точністю до довільної адитивної сталої (різниця двох довільних розв'язків внутрішньої задачі Неймана дорівнює тотожній сталій). Розв'язок зовнішньої задачі Неймана єдиний.*

Д о в е д е н н я. Нехай u_1, u_2 – два розв'язки внутрішньої задачі Неймана, а отже є гармонічними функціями в Ω і задовольняють ту саму крайову умову $\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\mid_S = f(y)$, $\frac{\partial u_2}{\partial \nu}\mid_S = f(y), y \in S$. Тоді функція $u = u_1 - u_2$ також гармонічна в Ω і задовольняє крайову умову $\frac{\partial u}{\partial \nu}\mid_S = 0$. З першої формули Гріна при $v(x) = u(x)$ одержуємо $\int\limits_S u\frac{\partial u}{\partial \nu}dS$ $= \int\limits_\Omega \left[(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_3})^2\right]dx$. У нашому випадку ліва частина цієї рівності дорівнює нулю, тоді й права частина дорівнює нулю, а отже, $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$. Отож, $u(x) = u_1(x) - u_2(x) = Const$, $x \in \Omega$.

Із властивості гармонічної функції ($\int\limits_S \frac{\partial u}{\partial \nu}dS = 0$) випливає необхідна умова розв'язності внутрішньої задачі Неймана

$$\int\limits_S f(y)dS = 0.$$

Нехай u_1, u_2 – два розв'язки зовнішньої задачі Неймана. Тоді функція $u = u_1 - u_2$ задовольняє крайову умову $\frac{\partial u}{\partial \nu}\mid_S = 0, y \in S$ і є гармонічною в безмежній області Ω_e. Проведемо сферу $S_R = S_R(0)$ настільки великого радіуса R, щоб уся поверхня S перебувала всередині неї. Запишемо першу формулу Гріна для області $\tilde{\Omega}$, обмеженої поверхнями S та S_R і при $v(x) = u(x)$

$$\int\limits_S u\frac{\partial u}{\partial \nu}dS + \int\limits_{S_R} u\frac{\partial u}{\partial \nu}dS = \int\limits_{\tilde{\Omega}} \left[(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_3})^2\right]dx.$$

Звідси, враховуючи крайову умову, одержуємо

$\int\limits_{\tilde{\Omega}} \left[(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_3})^2\right]dx = \int\limits_{S_R} u\frac{\partial u}{\partial \nu}dS$. На S_R, за доведеним, маємо $|u(x)| \leq \frac{C}{R}$, $|\frac{\partial u}{\partial \nu}| \leq \frac{C_2}{R^2}$, тому $|\int\limits_{S_R} u\frac{\partial u}{\partial \nu}dS| \leq \frac{CC_2}{R^3}\int\limits_{S_R} dS = \frac{4\pi CC_2}{R} = \frac{C_3}{R}$. Тоді $\int\limits_{\tilde{\Omega}} \left[(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_3})^2\right]dx \leq \frac{C_3}{R}$. Переходячи у цій нерівності до границі при $R \to \infty$, одержуємо $\int\limits_\Omega \left[(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_3})^2\right]dx = 0$.

Звідси випливає, що $u(x) \equiv C$, $x \in \Omega_e$. Але $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, тому ця стала дорівнює нулю і $u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega_e$.

9.1.8. Розв'язок задачі Діріхле в крузі

Ми показали, як можна побудувати розв'язок задачі Діріхле за допомогою функції Гріна. Аналогічно, вводячи функції Гріна інших крайових задач, можна з існування функції Гріна виводити існування розв'язку крайової задачі при довільних неперервних крайових даних.

В областях спеціального вигляду можна будувати розв'язок крайової задачі методом Фур'є. Покажемо це на прикладі задачі Діріхле в крузі.

Запишемо оператор Лапласа в полярних координатах

$x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi$: $\quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$.

Сформулюємо задачу Діріхле: знайти гармонічну функцію $u = u(r, \varphi)$, $0 \le r < R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, тобто двічі неперервно диференційовний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{9.21}$$

в крузі $r < r_0$, який неперервний на колі $r = r_0$ та задовольняє крайову умову

$$u(R, \theta) = f(\theta),\ \theta \in [0, 2\pi], \tag{9.22}$$

(f – задана неперервна функція).

Шукатимемо розв'язок задачі (9.21),(9.22) у вигляді

$$u = R(r)\Phi(\varphi). \tag{9.23}$$

Підставляючи (9.23) у рівняння (9.21) та відокремлюючи змінні, одержуємо два звичайні диференціальні рівняння

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \tag{9.24}$$

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0. \tag{9.25}$$

Оскільки $u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi)$, то $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Ця умова (умова періодичності) для розв'язків рівняння (9.24) забезпечується тільки при $\lambda = n^2$, $n = 0, 1.2, \ldots$. При цьому

$$\Phi_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi.$$

Підставляємо значення λ у рівняння (9.25), одержуємо

$$r^2 R_n{}'' + rR_n' - n^2 R_n = 0.$$

Розв'язки цих рівнянь

$R_n(r) = c_n r^n + d_n r^{-n}$, $n = 1.2, \ldots$, $R_0(r) = c_0 + d_0 ln\ r$.

Оскільки гармонічна функція обмежена в крузі, а отже і в його центрі (при $r = 0$), то й $R_n(r)$ повинні бути обмеженими, зокрема, при $r = 0$. Тому $d_n = 0$, $n = 0, 1.2, \ldots$. Тепер згідно з (9.23) маємо $u_n = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = c_n r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$. Розглянемо

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \tag{9.26}$$

Припустимо, що розвинення (9.26) рівномірно збігається при $r \leq r_0$. Задовольняючи крайову умову (9.22), одержуємо

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \tag{9.27}$$

Звідси знаходимо

$A_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad A_n = \frac{1}{\pi r_0^n} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad B_n = \frac{1}{\pi r_0^n} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta.$

Розвинення (9.27) мажорується розвиненням $\frac{|A_0|}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (|r_0^n A_n| + |r_0^n B_n|)$, яке збігається, якщо функція f двічі неперервно диференційовна (тоді $r_0^n A_n = O(\frac{1}{n^2})$, $\quad r_0^n B_n = O(\frac{1}{n^2})$). Отже, для такої f розвинення (9.27) є рівномірно збіжним.

Послідовності $\{r_0^n A_n\}$ та $\{r_0^n B_n\}$ обмежені, тому розвинення (9.26) мажорується розвиненням

$$\frac{M}{2} + M \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n, \tag{9.28}$$

збіжним при $\varrho = \frac{r}{r_0} < 1$. Розвинення (9.26) можна записати у вигляді степеневого розвинення $\frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} Re(A_n - B_n i)(x + yi)^n$. Мажорантними для похідних цього розвинення є відповідні похідні розвинення (9.28),

які збігаються при $\varrho < 1$ (за теорією степеневих розвинень). Тому розвинення (9.26) можна диференціювати почленно. Оскільки кожний доданок цього розвинення задовольняє рівняння Лапласа, то й сума (функція $u(r,\varphi)$) задовольняє рівняння Лапласа всюди всередині круга.

Ми довели, що розвинення (9.26) справді є розв'язком задачі Діріхле (9.21),(9.22), якщо функція f двічі неперервно диференційовна. Доведемо, що (9.26) є також розв'язком цієї задачі при довільній неперервній f.

Нехай f_m – послідовність двічі неперервно диференційовних функцій, яка рівномірно збігається до f, u_m – розв'язок задачі (21),(22) при крайових даних f_m. За наслідком із принципу максимуму (теоремою 6) із рівномірної збіжності послідовності f_m випливає рівномірна збіжність у крузі $r \le r_0$ послідовності u_m до неперервної функції u. За побудовою $u\,|_{r=r_0} = f$. Доведемо, що функцію u при $r < r_0$ можна подати у вигляді розвинення (9.26) з тими самими коефіцієнтами.

Маємо $u_m(r,\varphi) = \frac{A_0^{(m)}}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n (A_n^{(m)} \cos n\varphi + B_n^{(m)} \sin n\varphi)$. Коефіцієнти $A_n^{(m)}$ та $B_n^{(m)}$ виражаються через f_m так само, як A_n та B_n через f, тому для довільного $\varepsilon > 0$ при досить великих m $|A_n^{(m)} - A_n| < \varepsilon$ і $|B_n^{(m)} - A_n| < \varepsilon$. Звідси $|\frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) - u_m| =$

$= |\frac{A_0 - A_0^{(m)}}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n [(A_n - A_n^{(m)}) \cos n\varphi + (B_n - B_n^{(m)}) \sin n\varphi]| \le 2\varepsilon \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varrho^n = \frac{2\varepsilon}{1-\varrho}$.

Перетворимо розвинення (9.26), підставляючи вирази для коефіцієнтів A_n та B_n. Одержуємо $u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta) d\theta +$

$+ \frac{1}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{r_0})^n [\int\limits_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \cos n\varphi + \int\limits_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \sin n\varphi] =$

$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{r_0})^n \int\limits_0^{2\pi} f(\theta) \cos n(\theta - \varphi) d\theta =$

$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta) [1 + 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{r_0})^n \cos n(\theta - \varphi)] d\theta.$

Перетворимо вираз у дужках $1 + 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varrho^n \cos n\psi =$

$= -1 + 2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varrho^n \cos n\psi = -1 + 2Re \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varrho^n e^{in\psi} = -1 + 2Re \frac{1}{1 - \varrho e^{i\psi}} =$

$= \frac{1-\varrho^2}{1+\varrho r^2-2\varrho\cos\psi}$. Отже, $u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\frac{1-(\frac{r}{r_0})^2}{1+(\frac{r}{r_0})^2-2\frac{r}{r_0}\cos(\theta-\varphi)}d\theta$, тобто

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2+r^2-2rr_0\cos(\theta-\varphi)}d\theta. \qquad (9.29)$$

Формула (9.29) називається *інтегралом Пуассона* для круга.

9.2. Метод потенціалу

9.2.1. Потенціали об'єму та поверхневі потенціали

Ми вивели зображення довільної функції $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, $\Omega \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\partial u(y)}{\partial\nu}\frac{1}{|y-x|}dS_y - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S u(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|y-x|}dS_y - \qquad (9.30)$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_\Omega \Delta u(y)\frac{1}{|y-x|}dy,\ x\in\Omega$$

у вигляді суми трьох доданків.

Означення 1. Інтеграл $V(x) = \int\limits_\Omega \varrho(y)\frac{1}{|y-x|}dy$ називається *об'ємним потенціалом*, а функція $\varrho(y)$ – його *густиною*.

Інтеграл $v(x) = \int\limits_S \mu(y)\frac{1}{|y-x|}dS_y$ називається *поверхневим потенціалом простого шару* з густиною $\mu(y)$.

Інтеграл $w(x) = \int\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|y-x|}dS_y$ називається *поверхневим потенціалом подвійного шару* з густиною $\mu(y)$.

Ці означення не є випадковими, а мають фізичний зміст. Відомо з фізики, що розміщений у деякій точці $x_0 \in \mathbb{R}^3$ електричний заряд величини q створює електростатичне поле, напруженість якого у будь-якій точці $x \neq x_0$ дорівнює $\overline{E(x)} = kq\frac{\overline{x_0x}}{|x-x_0|^3}$, або, в проекціях, $E_{x_1} = kq\frac{x_1-x_{01}}{|x-x_0|^3}$, $E_{x_2} = kq\frac{x_2-x_{02}}{|x-x_0|^3}$, $E_{x_3} = kq\frac{x_3-x_{03}}{|x-x_0|^3}$, де k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від вибраної системи одиниць (надалі вважатимемо $k=1$), а потенціал $u(x) = \frac{q}{|x-x_0|} + C$ (потенціалом електростатичного поля називається така функція $u(x)$, що $\frac{\partial u}{\partial x_i} = -E_{x_i}, i = 1,2,3,$).

Потенціали, створювані декількома точковими зарядами, додаються, а створювані неперервно розподіленими зарядами є інтегралами. Отже, потенціал заряду, розподіленого в області Ω з об'ємною густиною $\varrho(y)$, дорівнює об'ємному потенціалу $V(x)$, потенціал заряду, розподіленого за поверхнею S з поверхневою густиною $\mu(y)$, є поверхневим потенціалом простого шару $v(x)$.

Граничне розміщення двох зарядів q та $-q$, розміщених на осі l у точках x' та $x"$ на відстані h, які в процесі наближення до точки x_0 (вздовж l) змінюють заряд так, що $qh = Const$, у фізиці називають диполем, вісь l-віссю цього диполя, а число p – моментом диполя. Потенціал цього диполя у точці x (поза l)

$$u(x) = \lim_{h\to 0} q\left(\frac{1}{|x-x'|} - \frac{1}{|x-x"|}\right) = \lim_{h\to 0} p\frac{\frac{1}{|x-x'|} - \frac{1}{|x-x"|}}{h} = p\frac{\partial \frac{1}{|x-x_0|}}{\partial l} = p\frac{\cos(\overline{x_0x}, l)}{|x-x_0|^2}.$$

Якщо на орієнтованій поверхні S розподілений диполь з густиною моменту $\mu(y)$, вісь якого у кожній точці $y \in S$ має напрям зовнішньої нормалі $\nu(y)$, то потенціал цього диполя у точці x дорівнює поверхневому потенціалу подвійного шару $w(x)$. Одночасно ми довели, що

$$w(x) = -\int\limits_S \mu(y)\frac{\cos(\overline{xy}, \nu(y))}{|y-x|^2} dS_y.$$

Повернемось до формули (9.30). Розв'язуючи задачі Діріхле для рівняння Пуассона $\Delta u = f_0$, відомо значення $u\,|_S = f(y), y \in S$, але невідомо $\frac{\partial u}{\partial \nu}\,|_S$. З (9.30) одержуємо зображення розв'язку цієї задачі

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \mu(y)\frac{1}{|y-x|}dS_y - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S f(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}\frac{1}{|y-x|}dS_y - \frac{1}{4\pi}\int\limits_\Omega f_0(y)\frac{1}{|y-x|}dy,$$

$x \in \Omega$ у вигляді суми трьох потенціалів з однією невідомою густиною $\mu(y)$.

Аналогічно з (9.30) одержуємо зображення розв'язку задачі Неймана $\frac{\partial u}{\partial \nu}\,|_S = f(y), y \in S$ для рівняння Пуассона

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S f(y)\frac{1}{|y-x|}dS_y - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}\frac{1}{|y-x|}dS_y - \frac{1}{4\pi}\int\limits_\Omega f_0(y)\frac{1}{|y-x|}dy,$$

$x \in \Omega$, з невідомою густиною $\mu(y)$.

Зауважимо, що, розв'язуючи крайові задачі для рівняння Лапласа ($f_0(y) = 0, y \in \Omega$), третього доданка у кожному з цих зображень (об'ємного потенціалу) немає.

Є різні методи знаходження невідомих густин $\mu(y)$. Один з них – метод крайових інтегральних рівнянь.

Для доведення існування розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа застосуємо *метод потенціалу*. Згідно з цим методом розв'язок задачі Діріхле (як внутрішньої, так і зовнішньої) шукають у вигляді одного поверхневого потенціалу подвійного шару

$$w(x) = \int\limits_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|y-x|} dS_y \tag{9.31}$$

з невідомою густиною $\mu(y)$, а розв'язок задачі Неймана (як внутрішньої, так і зовнішньої) шукають у вигляді одного поверхневого потенціалу простого шару

$$v(x) = \int\limits_S \mu(y) \frac{1}{|y-x|} dS_y \tag{9.32}$$

з невідомою густиною $\mu(y)$.

Можна перевірити, що при довільній неперервній $\mu(y)$ функції $v(x)$ та $w(x)$ є гармонічними в Ω та Ω_e. Справді, $x \neq y$ при $x \in \Omega$, тому можна диференціювати $v(x)$ під знаком інтеграла, $\Delta v(x) = \int\limits_S \mu(y) \Delta_x \frac{1}{|y-x|} dS_y = 0$, $x \in \Omega$, оскільки $\Delta_x \frac{1}{|y-x|} = 0$ при $x \neq y$. Аналогічно $\Delta w(x) = \int\limits_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \Delta \frac{1}{|y-x|} dS_y = 0$, $x \in \Omega$.

Отже, для знаходження невідомих густин достатньо задовольнити крайові умови. Для доведення існування розв'язку внутрішньої задачі Діріхле у вигляді (9.31), потрібно довести існування такої неперервної функції $\mu(y), y \in S$, що

$$\lim_{x \to x_0 \in S, x \in \Omega} w(x) = f(x_0),\ x_0 \in S. \tag{9.33}$$

Щоб довести існування розв'язку зовнішньої задачі Діріхле у вигляді (9.31), треба довести існування такої неперервної функції $\mu(y), y \in S$, що

$$\lim_{x \to x_0 \in S, x \in \Omega_e} w(x) = f(x_0),\ x_0 \in S. \tag{9.34}$$

Аналогічно при розв'язуванні внутрішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа одержуємо таку умову на невідому неперервну функцію $\mu(y)$

$$\lim_{x \to x_0 \in S, x \in \Omega} \frac{\partial v(x)}{\partial \nu} = f(x_0),\ x_0 \in S, \tag{9.35}$$

а у випадку зовнішньої задачі Неймана – .

$$\lim_{x \to x_0 \in S, x \in \Omega_e} \frac{\partial v(x)}{\partial \nu} = f(x_0),\ x_0 \in S. \tag{9.36}$$

9.2.2. Властивості об'ємного та поверхневих потенціалів

Поверхневі потенціали (9.31) і (9.32) є невласними інтегралами, залежними від параметра x, тому передусім треба показати їхню збіжність. Нагадаємо деякі відомі твердження з теорії таких інтегралів.

Якщо функція $F(x, y)$ неперервна при $y \in S, x \neq y$, то інтеграл

$$u(x) = \int\limits_S F(x, y) dS_y \tag{9.37}$$

є неперервною функцією x, якщо x не належить поверхні S.

Означення 2. Інтеграл (9.37) називається *рівномірно збіжним у точці* $x_0 \in S$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий окіл $U_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 і така частина $\sigma_\varepsilon(x_0)$ поверхні S, яка містить точку x_0 строго всередині себе, що для довільної точки $x \in U_\varepsilon(x_0)$ $|\int\limits_{\sigma_\varepsilon(x_0)} F(x, y) dS_y| < \varepsilon$.

Якщо

$$|F(x, y)| \leq \frac{\mathcal{F}(x, y)}{|x - y|^\gamma},\ \gamma < 2 \tag{9.38}$$

і функція $\mathcal{F}(x, y)$ неперервна, то інтеграл (9.37) рівномірно збігається у кожній точці поверхні S. Рівномірно збіжний у точці $x_0 \in S$ інтеграл (9.37) є функцією від x, неперервною в точці x_0.

Щоб довести рівномірну збіжність інтеграла (9.31), потрібно накласти деякі вимоги на поверхню S.

Означення 3. Замкнена поверхня S називається *поверхнею Ляпунова*, якщо:

1) у кожній точці поверхні існує дотична площина;

2) існує таке $d > 0$, що для довільної точки $x_0 \in S$ сфера $S_d(x_0)$ ділить поверхню S на дві частини, одна з яких міститься всередині, а інша – зовні цієї сфери, а прямі, паралельні до нормалі $\nu(x_0)$, перетинають частину поверхні S всередині сфери не більше ніж у одній точці;

3) нехай $\theta = (\nu(y_1), \nu(y_2))$ – гострий кут між нормалями до S у точках $y_1, y_2 \in S$; існують такі додатні числа $a, \alpha, \alpha \in (0, 1]$, що для довільних $y_1, y_2 \in S \cap S_d(x_0)$

$$\theta \leq a|y_1 - y_2|^\alpha.$$

Умова 1 дає змогу побудувати місцеву систему координат ξ з центром у довільній точці x_0 поверхні S, осі ξ_1, ξ_2 якої лежать у дотичній площині до S в точці x_0, а вісь ξ_3 має напрям $\nu(x_0)$. З умови 2 випливає, що у вибраній місцевій системі координат рівняння частини поверхні $S \cap S_d(x_0)$ можна записати у явному вигляді

$$\xi_3 = g(\xi_1, \xi_2).$$

Тоді з умови 1 випливає існування та неперервність похідних g_{ξ_1}, g_{ξ_2}. У нових координатах вектор нормалі $n(y) = (g_{\xi_1}, g_{\xi_2}, 1)$.

Введемо позначення

$$r_0 = |y - x_0|,\ \theta_0 = (\nu(y), \nu(x_0)) \text{ при } y \in S \cap S_d(x_0)$$

і вважатимемо число d настільки малим, що $ad^\alpha \le 1$, так що $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

За властивостями функції $\cos t$ маємо $\cos\theta_0 \ge 1 - \frac{\theta_0^2}{2} \ge 1 - \frac{a^2 r_0^{2\alpha}}{2}$, звідси

$$1 - \cos\theta_0 \le \frac{a^2 r_0^{2\alpha}}{2}, \tag{9.39}$$

а також $\frac{1}{\cos\theta_0} \le \frac{1}{1 - \frac{a^2 r_0^{2\alpha}}{2}} \le 1 + a^2 r_0^{2\alpha} \le 1 + a^2 d^{2\alpha} \le 2.$

Але $\cos\theta_0 = \cos(\nu(y), \xi_3) = \frac{1}{(1 + g_{\xi_1}^2 + g_{\xi_2}^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Тому $\frac{1}{\cos^2\theta_0} = 1 + g_{\xi_1}^2 + g_{\xi_2}^2 \le (1 + a^2 r_0^{2\alpha})^2 = 1 + 2a^2 r_0^{2\alpha} + a^4 r_0^{4\alpha}$.

Звідси $g_{\xi_1}^2 + g_{\xi_2}^2 \le 2a^2 r_0^{2\alpha} + a^4 r_0^{4\alpha} = a^2 r_0^{2\alpha}(2 + a^2 r_0^{2\alpha}) \le 3a^2 r_0^{2\alpha}$.

Отож, $|\cos\theta_0| \ge \frac{1}{2}$, $\quad |g_{\xi_1}| \le 3^{\frac{1}{2}} a r_0^\alpha$, $\quad |g_{\xi_2}| \le 3^{\frac{1}{2}} a r_0^\alpha$, тобто

$$|\cos(\nu(y), \xi_1)| \le 3^{\frac{1}{2}} a r_0^\alpha, \quad |\cos(\nu(y), \xi_2)| \le 3^{\frac{1}{2}} a r_0^\alpha, \tag{9.40}$$

$$|\cos(\nu(y), \xi_3)| \ge \tfrac{1}{2}.$$

Перейдемо від (ξ_1, ξ_2) до полярної системи координат $\xi_1 = \varrho_0 \cos\theta_0$, $\xi_2 = \varrho_0 \sin\theta_0$ ($\varrho_0^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$, а отже, $r_0^2 = \varrho_0^2 + \xi_3^2$). Оскільки $|\frac{\partial g}{\partial \varrho_0}| = |g_{\xi_1}\cos\theta_0 + g_{\xi_2}\sin\theta_0| \le (g_{\xi_1}^2 + g_{\xi_2}^2)^{\frac{1}{2}} \le 3^{\frac{1}{2}} a r_0^\alpha \le 3^{\frac{1}{2}}$, то $|\xi_3| = |g(\xi_1, \xi_2)| \le 3^{\frac{1}{2}} \varrho_0$.

Тепер бачимо, що $r_0^2 = \varrho_0^2 + \xi_3^2 \le \varrho_0^2 + 3\varrho_0^2 = 4\varrho_0^2$, тобто $r_0 \le 2\varrho_0$. Раніше мали оцінку $|\frac{\partial g}{\partial \varrho_0}| = |\frac{\partial \xi_3}{\partial \varrho_0}| \le 3^{\frac{1}{2}} a r_0^\alpha$. Звідси $|\frac{\partial \xi_3}{\partial \varrho_0}| \le 3^{\frac{1}{2}} a 2^\alpha \varrho_0^\alpha$. Знову інтегруючи, знаходимо $|\xi_3| \le \frac{3^{\frac{1}{2}} a 2^\alpha \varrho_0^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, тобто

$$|\xi_3| = |g(\xi_1, \xi_2)| \le C \varrho_0^{\alpha+1}. \tag{9.41}$$

Враховуючи, що $r_0 \le 2\varrho_0$, із (9.39) та (9.40) одержуємо

$$1 - \cos\theta_0 \le C\varrho_0^{2\alpha}, \quad |\cos(\nu(y), \xi_1)| \le C\varrho_0^{\alpha},$$

$$|\cos(\nu(y), \xi_2)| \le C\varrho_0^{\alpha}, \quad |\cos(\nu(y), \xi_3)| \ge \frac{1}{2}. \tag{9.42}$$

Теорема 1. *Якщо поверхня S є поверхнею Ляпунова, то потенціал (9.31) (потенціал подвійного шару) з неперервною густиною рівномірно збігається у кожній точці $x \in S$.*

Д о в е д е н н я. Для збіжності потенціалу (9.31) достатньо розглядати

$$\int\limits_{\sigma} \mu(y) \frac{\cos(\overline{xy}, \nu(y))}{|y - x|^2} dS_y, \tag{9.43}$$

де σ – частина поверхні S всередині сфери $S_d(x_0)$, оскільки на іншій частині поверхні S підінтегральний вираз не має особливості (інтеграл по цій частині поверхні має скінченне значення).

Введемо місцеву систему координат з центром у точці x_0 і обчислимо вираз $\cos\varphi_0 = \cos(\overline{x_0y}, \nu(y))$. Одержуємо $\cos\varphi_0 =$

$\cos(\overline{x_0y}, \xi_1)\cos(\nu(y), \xi_1) + \cos(\overline{x_0y}, \xi_2)\cos(\nu(y), \xi_2) + \cos(\overline{x_0y}, \xi_3)\cos(\nu(y), \xi_3)$

$= \frac{\xi_1}{r_0}\cos(\nu(y), \xi_1) + \frac{\xi_2}{r_0}\cos(\nu(y), \xi_2) + \frac{\xi_3}{r_0}\cos(\nu(y), \xi_3)$.

Звідси, враховуючи оцінки (9.42), одержуємо

$$\left|\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right| \le \frac{3C\varrho_0^{\alpha}}{\varrho_0^2} = \frac{B}{\varrho_0^{2-\alpha}}. \tag{9.44}$$

Перейдемо в інтегралі (9.43) від інтегрування за σ до інтегрування за її проекцією σ' на площину $\xi_1 O \xi_2$ місцевої системи координат. Зауважимо, що $dS = \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\cos\theta_0}$. Тепер $\int\limits_{\sigma} \mu(y) \frac{\cos\varphi_0}{|y-x_0|^2} dS_y = \int\limits_{\sigma} \mu(\xi_1, \xi_2) \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\cos\theta_0}$.

Враховуючи, що $|\mu(y)| \le M$, $y \in S$, $|\cos\theta_0| = |\cos(\nu(y), \xi_3)| \ge \frac{1}{2}$ (згідно з (9.42)), і (9.44), одержуємо $|\mu(\xi_1, \xi_2) \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} \frac{1}{\cos\theta_0}| \le \frac{2MB}{\varrho_0^{2-\alpha}}$. Отже, інтеграл (9.43) рівномірно збігається, якщо точка $x = x_0$ належить поверхні S і потенціал (9.31) визначений у точках поверхні S, а отже, у всьому просторі $\mathbb{R}^3$.

Значення $w(x_0) = \int\limits_{\sigma} \mu(y) \frac{\cos\varphi_0}{|y-x_0|^2} dS_y$ потенціалу подвійного шару в точці $x_0 \in S$ називається *прямим значенням потенціалу подвійного шару*.

Якщо точка x не належить S, а наближається до деякої точки $x_0 \in S$, то вираз $\lim\limits_{x \to x_0 \in S, x \in \Omega} w(x)$, який ми далі позначатимемо через $w_i(x_0)$ називається *граничним значенням зсередини потенціалу подвійного шару*, а $\lim\limits_{x \to x_0 \in S, x \in \Omega_e} w(x) = w_e(x_0)$ – *граничним значенням ззовні потенціалу подвійного шару*.

Граничні та прямі значення потенціалу подвійного шару не збігаються, також різними є граничні значення зсередини і ззовні поверхневих потенціалів подвійного шару. Можна довести, що

$$\begin{aligned} w_i(x_0) &= \int\limits_S \mu(y) \frac{\cos\varphi_0}{|y - x_0|^2} dS_y - 2\pi\mu(x_0) = w(x_0) - 2\pi\mu(x_0), \\ w_e(x_0) &= \int\limits_S \mu(y) \frac{\cos\varphi_0}{|y - x_0|^2} dS_y + 2\pi\mu(x_0) = w(x_0) + 2\pi\mu(x_0). \end{aligned} \tag{9.45}$$

Потенціал простого шару – неперервна функція в усьому просторі $\mathbb{R}^3$.

Якщо точка x не належить S, $x_0 \in S$ і досить близько до x, то можна обчислити *нормальну похідну потенціалу простого шару* $\frac{\partial v(x)}{\partial \nu(x_0)}$, диференціюючи підінтегральний вираз. Матимемо

$\frac{\partial v(x)}{\partial \nu(x_0)} = \int\limits_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{1}{|y-x|} dS = \int\limits_S \mu(y) \frac{\cos\psi}{|y-x|^2} dS$, де $\psi = (\overline{xy}, \nu(x_0))$ – кут між вектором $\overline{xy}$ і напрямом нормалі у фіксованій точці $x_0 \in S$.

Нормальна похідна потенціалу простого шару є рівномірно збіжним інтегралом, якщо S – поверхня Ляпунова, тому визначено її пряме значення $\frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu(x_0)}$. Граничні значення відповідно дорівнюють

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu(x_0)}\Big)_i &= \frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu(x_0)} + 2\pi\mu(x_0), \\ \Big(\frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu(x_0)}\Big)_e &= \frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu(x_0)} - 2\pi\mu(x_0). \end{aligned} \tag{9.46}$$

Повернемось до питання про розв'язність крайових задач для рівняння Лапласа. Шукаючи розв'язок внутрішньої задачі Діріхле у вигляді потенціалу (9.31), ми одержали співвідношення (9.33) для невідомої густини $\mu(y)$. Використовуючи формулу (9.45), запишемо це співвідношення у вигляді

$$\int\limits_S \mu(y) \frac{\cos\varphi_0}{|y - x_0|^2} dS_y - 2\pi\mu(x_0) = f(x_0), \; x_0 \in S. \tag{9.47}$$

Це *інтегральне рівняння Фредгольма другого роду* стосовно невідомої неперервної функції μ.

Так само співвідношення (9.34), яке повинна задовольняти густина $\mu(y)$ потенціалу подвійного шару, у вигляді якого шукаємо розв'язок зовнішньої задачі Діріхле, за допомогою другої властивості (9.45) дає інтегральне рівняння

$$\int\limits_S \mu(y)\frac{\cos\varphi_0}{|y-x_0|^2}dS_y + 2\pi\mu(x_0) = f(x_0),\ x_0 \in S. \tag{9.48}$$

Розв'язок внутрішньої задачі Неймана шукали у вигляді потенціалу простого шару (9.32). Співвідношення (9.35) для невідомої густини потенціалу за допомогою властивості (9.46) набуває вигляду інтегрального рівняння

$$\int\limits_S \mu(y)\frac{\cos(\overline{x_0y},\nu(x_0))}{|y-x_0|^2}dS + 2\pi\mu(x_0) = f(x_0),\ x_0 \in S. \tag{9.49}$$

Співвідношення (9.36), яке повинна задовольняти густина $\mu(y)$ потенціалу простого шару, у вигляді якого шукаємо розв'язок зовнішньої задачі Неймана, за допомогою другої властивості (9.46) дає інтегральне рівняння

$$\int\limits_S \mu(y)\frac{\cos(\overline{x_0y},\nu(x_0))}{|y-x_0|^2}dS - 2\pi\mu(x_0) = f(x_0),\ x_0 \in S. \tag{9.50}$$

Зауважимо, що ядро $\frac{\cos\varphi_0}{|y-x_0|^2}$ інтегрального рівняння (9.47) при заміні місцями x_0 та y дає ядро $\frac{\cos(\overline{x_0y},\nu(x_0))}{|y-x_0|^2}$ інтегрального рівняння (9.50), тому ці ядра спряжені. Відповідно інтегральні рівняння (9.47) та (9.50) спряжені. Так само спряженими є інтегральні рівняння (9.48) та (9.49). Ядра інтегральних рівнянь (9.47)-(9.50) є величинами порядку $O\left(\frac{1}{\varrho_0^{2-\alpha}}\right)$, $\alpha \in (0,1]$, а тому полярними і для них правильні теореми Фредгольма.

Можна довести, що число $\frac{1}{2\pi}$ не є характеристичним числом для ядра інтегрального рівняння (9.47) (і спряженого інтегрального рівняння (9.50)), тому для довільної неперервної функції f існує єдиний розв'язок як інтегрального рівняння (9.47), так і інтегрального рівняння (9.50).

Також можна довести, що число $-\frac{1}{2\pi}$ є характеристичним числом ядра інтегрального рівняння (9.48) (і спряженого (9.49)), тому ці інтегральні рівняння розв'язують за третьою теоремою Фредгольма.

Розділ 10. ДОПОМІЖНІ ПОНЯТТЯ ТА ТЕОРЕМИ АНАЛІЗУ

10.1. Ортонормальні системи. Розвинення Фур'є

Функції $x(t), y(t)$ із $L_2(0,l)$ називаються *ортогональними*, якщо $\int\limits_0^l x(t)y(t)dt = 0$. Система функцій $x_k(t)$ із $L_2(0,l)$ називається ортонормальною в $L_2(0,l)$, якщо $(x_k, y_l) = \int\limits_0^l x_k(t)y_l(t)dt = \delta_{kl}$, де δ_{kl} – символи Кронекера ($\delta_{kl} = 0$ при $k \neq l$, $\delta_{kk} = 1$).

Будь-яка ортонормальна система складається з лінійно незалежних функцій. Справді, якщо $\sum\limits_k C_k x_k(t) \equiv 0$, то

$(\sum\limits_k C_k x_k(t), x_l(t)) = \sum\limits_k C_k(x_k(t), x_l(t)) = C_l = 0$ для всіх l.

Будь-яка система лінійно незалежних функцій із $L_2(0,l)$ перетворюється в ортонормальну систему функцій із $L_2(0,l)$ процесом ортогоналізації Шмідта.

Нехай система $\{x_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормальна в $L_2(0,l)$ і $f \in L_2(0,l)$. Числа $c_k = (f, x_k)$ називаються *коефіцієнтами Фур'є*, а розвинення $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k(t)$ – *розвиненням Фур'є* функції f за ортонормальною системою $\{x_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$.

$\int\limits_0^l (f - \sum\limits_{k=1}^{N} c_k x_k(t))^2 dt = \int\limits_0^l f^2(t)dt - \sum\limits_{k=1}^{N} c_k^2$. Звідси випливає нерівність

$$\sum_{k=1}^{N} c_k^2 \leq \int_0^l f^2(t)dt, \tag{10.1}$$

яка називається *нерівністю Бесселя*.

Із повноти простору $L_2(0,l)$ та нерівності (10.1) випливає, що розвинення Фур'є функції f збігається в $L_2(0,l)$ до деякої функції f_1 із $L_2(0,l)$ (але не обов'язково до f). Для збіжності розвинення Фур'є функції f до f необхідно і достатньо, щоб виконувалась *рівність Парсеваля-Стеклова*

$$\sum_{k=1}^{N} c_k^2 = \int_0^l f^2(t)dt, \tag{10.2}$$

(умова замкненості або повноти системи $\{x_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2(0,l)$).

10.2. Лінійні оператори

Нехай D, M – лінійні множини. Оператор L, який переводить елементи множини D у елементи множини M, називається *лінійним*, якщо для довільних елементів $f, g \in D$, довільних комплексних чисел λ, μ правильна рівність

$$L(\lambda f + \mu g) = \lambda L f + \mu L g.$$

При цьому множина $D = D_L$ називається областю визначення оператора L.

Нехай на множинах D та M визначена збіжність елементів. Лінійний оператор L називається *неперервним* із D у M, якщо зі збіжності $f_k \to f$ у D випливає збіжність $Lf_k \to Lf$ у M.

Нехай D та M – лінійні нормовані простори з нормами $||\,||_D$ та $||\,||_M$ відповідно. Лінійний оператор L називається *обмеженим* із D у M, якщо існує таке число $C > 0$, що для довільного $f \in D$ правильна нерівність $||Lf||_M \leq C||f||_D$.

Якщо лінійний оператор, який діє з лінійного нормованого простору у лінійний нормований простір, обмежений, то він неперервний.

Справді, якщо $f_k \to f$ у D, тобто $||f_k||_D \to 0, k \to \infty$, то $||Lf_k||_M \to 0, k \to \infty$.

Окремим випадком лінійних операторів є лінійні функціонали – лінійні оператори з D у множину комплексних чисел.

Приклади лінійних операторів і функціоналів:

1) лінійний звичайний диференціальний оператор порядку m $(Lf)(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k(t) f^{(k)}(t)$, $a_m(t) \neq 0$;

2) лінійний *інтегральний оператор* $(Kf)(x) = \int\limits_G \mathcal{K}(x,y) f(y) dy$, $x \in G$, G – область у $\mathbb{R}^n$; функція $\mathcal{K}(x,y)$ називається його *ядром*;

якщо ядро $\mathcal{K}(x,y) \in L_2(G \times G)$, тобто $\int\limits_{G \times G} |\mathcal{K}(x,y)|^2 dx dy = C^2 < \infty$, то оператор K обмежений, а отже, неперервний з $D = L_2(G)$ у $M = L_2(G)$; $\quad ||Kf||^2 = \int\limits_G \Big| \int\limits_G \mathcal{K}(x,y) f(y) dy \Big|^2 dx \leq$
$\leq \int\limits_G \Big[\int\limits_G |\mathcal{K}(x,y)|^2 dy \int\limits_G |f(y)|^2 dy \Big] dx = C^2 ||f||^2$, тобто $||Kf|| \leq C||f||$, $f \in L_2(G)$;

інтегральний оператор K з неперервним ядром $\mathcal{K}(x,y)$ обмежений із

$D = L_2(G)$ у $M = C(\overline{G})$:

$$|Kf|_C = \max_{x\in\overline{G}} |\mathcal{K}(x,y)| = \max_{x\in\overline{G}} |\int\limits_G \mathcal{K}(x,y)f(y)dy| \leq$$

$$\leq \max_{x\in\overline{G}} \Big(\int\limits_G |\mathcal{K}(x,y)|^2 dy\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_G |f(y)|^2 dy\Big)^{\frac{1}{2}} \leq MV^{\frac{1}{2}}||f||,\ V = (\int\limits_G dy); \tag{10.3}$$

3) лінійний функціонал $Lf = (g,f) = \int\limits_G g(y)f(y)dy$, де $f \in L_2(G)$, g – фіксована функція з $L_2(G)$: $|Lf| = |(g,f)| \leq ||g||\,||f||$ за нерівністю Буняковського-Коші.

Якщо $(Lf,g) = (f,L^*g)$, $f,g \in L_2(G)$, то оператор L^* називається *спряженим* до оператора L. Спряженим до інтегрального оператора K є інтегральний оператор з ядром $\overline{\mathcal{K}(y,x)}$. Справді,
$(Kf,g) = \int\limits_G (Kf)\overline{g}dx = \int\limits_G \big(\int\limits_G \mathcal{K}(x,y)f(y)dy\big)\overline{g}(x)dx$
$= \int\limits_G f(y)\big(\int\limits_G \mathcal{K}(x,y)\overline{g}(x)dx\big)dy = \int\limits_G f\overline{K^*g}dy = (f,K^*g)$.

10.3. Лінійні інтегральні рівняння

Інтегральними рівняннями називаються рівняння, які містять невідому функцію під знаком інтеграла.

Інтегральні рівняння

$$\int\limits_G \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \tag{10.4}$$

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)dy + f(x), \tag{10.5}$$

стосовно невідомої функції $\varphi(x)$ в області $G \in \mathbb{R}^n$ називаються *інтегральними рівняннями Фредгольма* першого та другого роду відповідно. Інтегральне рівняння (10.5) при $f = 0$ називається однорідним інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду, відповідним рівнянню (10.5).

Інтегральні рівняння

$$\int\limits_G \mathcal{K}^*(x,y)\psi(y)dy = g(x), \tag{10.4'}$$

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G \mathcal{K}^*(x,y)\psi(y)dy + g(x), \tag{10.5'}$$

де $\mathcal{K}^*(x,y) = \overline{\mathcal{K}(y,x)}$, називаються спряженими до рівнянь (10.3) та (10.4) відповідно.

Скорочено в операторній формі ці рівняння записують так: $K\varphi = f$, $\varphi = \lambda K\varphi + f$, $K^*\psi = g$, $\psi = K^*\psi + g$.

Ті значення параметра λ, при яких однорідне інтегральне рівняння має ненульові розв'язки, називаються *характеристичними числами ядра* $\mathcal{K}(x,y)$, а відповідні розв'язки – *власними функціями ядра.* Зауважимо, що характеристичні числа ядра $\mathcal{K}(x,y)$ та власні значення оператора K взаємно обернені, а власні функції збігаються.

Розв'язок інтегрального рівняння (10.5) можна шукати *методом послідовних наближень* $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$, $\varphi^{(p)}(x) = \lambda K\varphi^{(p-1)}(x) + f(x)$, $p = 1, 2, \ldots$. Використовуючи метод математичної індукції, можна довести, що

$$\varphi^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \lambda^k K^k f, \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{10.6}$$

де $(K^p f)(x)$ називаються ітераціями функції f. Згідно з (10.3),

$||K^p f||_C = ||K(K^{p-1}f)||_C \leq MV||K^{p-1}f||_C \leq (MV)^2||K^{p-2}f||_C \leq \cdots \leq (MV)^p||f||_C$. Із цієї оцінки випливає, що розвинення

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x),\ x \in \overline{G}, \tag{10.7}$$

яке називається *розвиненням Неймана*, мажорується числовим розвиненням $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k (MV)^k = \frac{||f||_C}{1-|\lambda|MV}$, яке збігається у крузі $|\lambda| < \frac{1}{MV}$.

Отже, інтегральне рівняння Фредгольма (10.5) з неперервним ядром при $|\lambda| < \frac{1}{MV}$ має єдиний розв'язок $\varphi \in C(\overline{G})$ для довільної $f \in C(\overline{G})$. Цей розв'язок є сумою рівномірно збіжного розвинення (10.7) і задовольняє оцінку $||f||_C \leq \frac{||f||_C}{1-|\lambda|MV}$.

Зауважимо, що єдиність розв'язку також випливає з цієї оцінки: якщо φ_0 – розв'язок відповідного однорідного інтегрального рівняння, тобто $\varphi_0 = \lambda K\varphi_0$, то $||\varphi_0|| \leq |\lambda|MV||\varphi_0||$, звідки одержуємо суперечність $1 \leq |\lambda|MV$, якщо $\varphi \neq 0$.

Нехай $n = 1$, $G = (0, l)$, $\mathcal{K}(x, y) = 0$ при $0 < x < y < l$. Таке ядро називається *ядром Вольтерра*, а відповідні інтегральні рівняння (10.4) та (10.5) набувають вигляду

$$\int_0^x \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \tag{10.8}$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy + f(x) \tag{10.9}$$

і називаються *інтегральними рівняннями Вольтерра* першого та другого роду відповідно.

Інтегральне рівняння (10.8) диференціюванням зводиться до рівняння другого роду $\mathcal{K}(x, x)\varphi(x) + \lambda \int_0^x \frac{\partial \mathcal{K}(x,y)}{\partial x}\varphi(y)dy = f'(x)$, якщо $\mathcal{K}(x, y), \mathcal{K}_x(x, y)$ неперервні, $\mathcal{K}(x, x) \neq 0$, $f \in C^1([0, l])$ і $f(0) = 0$.

Шукаючи розв'язок інтегрального рівняння (10.9) з неперервним ядром (тоді $|\mathcal{K}(x, y)| \leq M$) методом послідовних наближень, одержуємо $|K^p f| = |K(K^{p-1}f)| = \left| \int_0^x \mathcal{K}(x, y)(K^{p-1}f)(y)dy \right| \leq M^p ||f||_C \int_0^x \frac{y^{p-1}}{(p-1)!}dy = ||f||_C \frac{(Mx)^p}{p!}$. Отже, розвинення Неймана (10.7) мажорується числовим розвиненням $||f||_C \sum_{p=0}^{\infty} |\lambda|^p \frac{(Ml)^p}{p!} = ||f||_C e^{|\lambda| Ml}$, а тому збігається рівномірно на $[0, l]$ при довільному λ, визначаючи неперервну функцію $\varphi(x)$. Ми довели, що неперервне ядро Вольтерра не має характеристичних чисел.

Ядро $\mathcal{K}(x, y) = \frac{\mathcal{A}(x,y)}{|x-y|^\alpha}$, де $\mathcal{A}(x, y) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$, при $\alpha < n$ називається *полярним ядром*, при $\alpha < \frac{n}{2}$ – слабо полярним. Інтегральний оператор з полярним ядром діє з $C(\overline{G})$ у $C(\overline{G})$, з $L_2(G)$ у $L_2(G)$ та обмежений, $||Kf||_C \leq N||f||_C$, $||Kf||_{L_2} \leq (NN^*)^{\frac{1}{2}}||f||_{L_2}$, де $N = \max_{x \in \overline{G}} \int_G |\mathcal{K}(x, y)|dy$, $N^* = \max_{x \in \overline{G}} \int_G |\mathcal{K}^*(x, y)|dy$.

При $|\lambda| < \frac{1}{N}$ існує єдиний розв'язок інтегрального рівняння (5) з полярним ядром у вигляді рівномірно збіжного розвинення Неймана.

10.4. Теореми Фредгольма

Нехай ядро інтегрального оператора неперервне або полярне.

Якщо інтегральне рівняння (10.5) розв'язне у $C(\overline{G})$ для довільної $f \in C(\overline{G})$, то спряжене рівняння (10.5') – розв'язне у $C(\overline{G})$ для довільної $f \in C(\overline{G})$. Розв'язки визначаються однозначно (перша теорема Фредгольма).

Якщо рівняння (10.5) розв'язне у $C(\overline{G})$ не для довільної $f \in C(\overline{G})$, то:

1) відповідні (10.5) і (10.5') однорідні рівняння мають однакову (скінченну) кількість лінійно незалежних розв'язків (друга теорема Фредгольма);

2) для розв'язності рівняння (10.5) необхідно і достатньо, щоб функція f була ортогональною до будь-якого розв'язку спряженого однорідного рівняння (третя теорема Фредгольма).

У кожному крузі $|\lambda| < R$ є лише скінченна кількість характеристичних чисел ядра $\mathcal{K}(x, y)$ (четверта теорема Фредгольма).

Теорема Гільберта-Шмідта. *Якщо $f = Kh$, ядро $\mathcal{K}(x, y)$ інтегрального оператора K неперервне і самоспряжене, то розвинення Фур'є функції f за системою $\varphi_k(x)$ власних функцій ядра $\mathcal{K}(x, y)$ збігається рівномірно на $\overline{G}$ до цієї функції $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x)$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Бобик О. І.* Рівняння математичної фізики (Класифікація, основні крайові задачі, теорема Ковалевської і характеристики): Текст лекцій. Львів: ЛДУ, 1990.

2. *Бобик О. І.* Рівняння математичної фізики (Гармонічні функції, коректність граничних задач для рівняння Лапласа і Пуасона, функція точкового джерела): Текст лекцій. Львів: ЛДУ, 1990.

3. *Бобик О. І., Бобик І. О.* Практикум з рівнянь математичної фізики. Львів, 1996. Ч. 1.

4. *Бобик О. І., Бобик І. О.* Практикум з рівнянь математичної фізики. Львів, 1996. Ч. 2.

5. *Бокало М. М.* Рівняння математичної фізики (Класифікація рівнянь з частинними похідними. Постановки крайових задач. Задача Коші): Текст лекцій. Львів: ЛДУ, 1994.

6. *Кошляков Н. С., Глинер Э. В., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970.

7. *Лавренюк С. П.* Курс диференціальних рівнянь. Львів: ВНТЛ, 1997.

8. *Лавренюк С. П.* Збірник задач з диференціальних рівнянь. Ч. 1. Львів: ЛДУ, 1998.

9. *Лопатинский Я. Б.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. К.: Вища шк., 1984.

10. *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. К.: Либідь, 2001.

11. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.

12. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ГИФМЛ, 1961.

13. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А.* Диференціальні рівняння: приклади й задачі. К.: Либідь, 1994.

14. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. К.: Либідь, 1994.

15. *Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука, 1964.

16. *Тихонов А. И., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

Додаткова:

1. *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высш. шк., 1991.

2. *Бобик О. І.* Рівняння математичної фізики (Теорія потенціалу, рівняння Гельмгольца, задача Штурма-Ліувіля, спеціальні функції): Текст лекцій. Львів: ЛДУ, 1990.

3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.

4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.

5. *Кошляков Н. С., Глинер Э. В., Смирнов М. М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: ГИФМЛ, 1962.

6. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высш. шк., 1967.

7. *Николенко В. Н.* Уравнения математической физики. М., 1981.

8. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.

9. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики. Физматгиз, 1961.

10. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1958.

11. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.

12. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1979.

13. *Шкіль М. І., Сотниченко М. А.* Звичайні диференціальні рівняння. К.: Вища шк., 1992.

ЗМІСТ

Вступ 3

Розділ 1. Диференціальні рівняння першого порядку 5

1.1. Рівняння першого порядку, розв'язані стосовно похідної 5

1.1.1. Основні поняття (5). 1.1.2. Геометричний зміст (6). 1.1.3. Інтегровні типи диференціальних рівнянь (8).

1.2. Задача Коші. Теорема існування та єдиності 14

1.2.1. Допоміжні поняття та твердження (14). 1.2.2. Теореми Пеано та Пікара (14). 1.2.3. Наслідки з теорем Пеано та Пікара (19).

1.3. Рівняння першого порядку нерозв'язані стосовно похідної 24

1.3.1. Основні поняття. Теорема існування й єдиності (24). 1.3.2. Особливі точки й особливі розв'язки (26). 1.3.3. Методи інтегрування (30).

Розділ 2. Рівняння вищих порядків і нормальні системи диференціальних рівнянь 32

2.1. Основні поняття та властивості. Теореми існування й єдиності розв'язку задачі Коші 32

2.1.1. Основні поняття. Еквівалентність канонічного рівняння n-го порядку та нормальної системи рівнянь (32). 2.1.2. Геометричне тлумачення нормальної системи та її розв'язку (36). 2.1.3. Теореми існування й єдиності (37). 2.1.4. Загальний розв'язок (41).

2.2. Інтеграл, перший інтеграл, загальний інтеграл нормальної системи диференціальних рівнянь 42

2.3. Інтеграл, перший інтеграл, загальний інтеграл системи диференціальних рівнянь у симетрічній формі 45

Розділ 3. Лінійні диференціальні рівняння та системи лінійних диференціальних рівнянь 47

3.1. Теореми існування й єдиності 47

3.2. Властивості розв'язків лінійних систем 50

3.2.1. Загальні властивості розв'язків лінійних систем (50). 3.2.2. Спеціальні властивості розв'язків лінійних систем (50). 3.2.3. Формула Остроградського-Ліувілля (54). 3.2.4. Структура загального розв'язку лінійної системи (54). 3.2.5. Метод варіації сталих (55).

3.3. Властивості розв'язків лінійного рівняння n-го порядку 56
3.3.1. Основні теореми (56). 3.3.2. Структура загального розв'язку лінійного рівняння (59). 3.3.3. Метод варіації сталих (59).
3.4. Лінійні системи та рівняння зі сталими коефіцієнтами 60
3.4.1.Побудова фундаментальної системи розв'язків ЛОР методом Ейлера (60). 3.4.2. Метод Ейлера побудови фундаментальної системи розв'язків ЛОС (62). 3.4.3. Метод невизначених коефіцієнтів (67). 3.4.4. Наслідок для ЛНР n-го порядку (70).

Розділ 4. Елементи теорії стійкості 71
4.1. Стійкість за Ляпуновим. Основні поняття 71
4.2. Автономні системи 73
4.3. Достатні умови стійкості та нестійкості 74
4.4. Стійкість за першим наближенням 77
4.5. Поведінка траєкторій автономної системи двох рівнянь в околі точки спокою 80

Розділ 5. Рівняння з частинними похідними першого порядку ... 84
5.1. Основні поняття. Існування загального розв'язку 84
5.2. Задача Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку 88

Розділ 6. Квазілінійні рівняння з частинними похідними другого порядку 91
6.1. Зведення до канонічного вигляду та класифікація рівнянь у випадку двох незалежних змінних 91
6.2. Зведення до канонічного вигляду та класифікація рівнянь у випадку багатьох незалежних змінних 94
6.3. Характеристики основних рівнянь математичної фізики 96

Розділ 7. Коректні задачі для рівнянь гіперболічного типу 100
7.1. Задача Коші для хвильового рівняння 100
7.1.1. Формули розв'язку задачі Коші (100). 7.1.2. Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння (101). 7.1.3. Розв'язок задачі Коші для рівняння коливання мембрани (103). 7.1.4. Розв'язок задачі Коші для рівняння коливання струни (105). 7.1.5. Єдиність розв'язку задачі Коші (105). 7.1.6. Неперервна залежність розв'язку задач Коші від даних (107).
7.2. Мішані задачі для рівняння коливання струни 108

7.2.1. Єдиність розв'язку мішаної задачі (109). 7.2.2. Неперервна залежність розв'язку мішаної задачі від даних (110). 7.2.3. Існування розв'язку першої мішаної задачі. Метод Фур'є (112). 7.2.4. Властивості власних значень і власних функцій (119).

Розділ 8. Коректні задачі для рівнянь параболічного типу 122
8.1. Перша крайова задача для рівняння теплопровідності 122
8.1.1. Принцип максимуму та наслідки (122). 8.1.2. Існування розв'язку (124).
8.2. Задача Коші для рівняння теплопровідності 125
8.2.1. Єдиність розв'язку (126). 8.2.2. Існування розв'язку задачі Коші (126).

Розділ 9. Рівняння еліптичного типу 130
9.1. Коректні задачі для рівняння Лапласа 130
9.1.1. Формули Гріна. Інтегральне зображення функції (130).
9.1.2. Основні властивості гармонічних функцій (133). 9.1.3. Формулювання основних задач для рівняння Пуассона. Єдиність і неперервна залежність від крайових даних розв'язку задачі Діріхле (135). 9.1.4. Функція Гріна задачі Діріхле (137). 9.1.5. Деякі методи побудови функції Гріна (138). 9.1.6. Поведінка похідних гармонічної функції на безмежності (141). 9.1.7. Єдиність розв'язку задачі Неймана (142). 9.1.8. Розв'язок задачі Діріхле в крузі (143).
9.2. Метод потенціалу 146
9.2.1. Потенціали об'єму та поверхневі потенціали (146). 9.2.2. Властивості об'ємного та поверхневих потенціалів (149).

Розділ 10. Допоміжні поняття та теореми аналізу 154
10.1. Ортонормальні системи. Розвинення Фур'є 154
10.2. Лінійні оператори 155
10.3. Лінійні інтегральні рівняння 156
10.4. Теореми Фредгольма 159

Список літератури 160

Навчальне видання

Лопушанська Галина Петрівна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА
РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Підручник

Редактор Н. Й. Плиса

Комп'ютерний набір і верстка Г. П. Лопушанська

Технічний редактор С. З. Сеник

Коректор У. І. Крук

Підп. до друку 11.05.2004. Формат 60x84/16. Папір друк.
Друк на різограф. Гарнітура AmsPpt. Умовн. друк. арк. 9,28.
Обл.-вид. арк. 10,3. Тираж 300 прим. Зам. 406
Видавничий центр Львівського національного університету
імені Івана Франка. 79000 Львів, вул. Дорошенка, 41.