ДОКАЗИ ІСТНОВАНЯ ІНТЕҐРАЛІВ РІВНАНЬ РІЖНИЧКОВИХ.

Написав

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

Кожде рівнане ріжничкове, звичайне або частне, кождий систем таких рівнань представляє змінні зависимі, що виступають в тих рівнанях яко якісь функциї змінної независимої. Функциї ті зовуть ся **функциями інтеґральними** або **інтеґралами**, а наколи їх вставити в дані рівнаня ріжничкові, то они їх зводять до тотожности. Однак істноване таких функций не є, якби се ся видавало, очевидне à priori; нїчо не дає нам права без нїякого застереженя твердити, що так й дїйсно є. Давнїйші аналїтики стреміли лишень до сього, щоби перевести квадратуру даних рівнань ріжничкових, а до сього уживали ріжних а ріжних метод. Доперва перший Cauchy дав строго-аналїтичний доказ, що кожде рівнане ріжничкове (або і їх систем) має інтеґрал, а в новійших часах показали Sturm, Liouville, Abel, Jacobi, Briot, Bouquet, Riemann, Weierstrass, Clebsch, Aronhold, а головно Fuchs, що в теориї рівнань ріжничкових ходить головно не так о зведенє даної задачи до ряду квадратур, як більше о се, щоби з самого рівнаня ріжничкового пізнати вид і перебіг інтеґралу тогож рівнаня в кождій точцї площи зложеного арґументу. Так отже Cauchy подав перший доказ загальний на істнованє інтеґралів, а Fuchs перевів дуже основні розслїди над самими інтеґралами і над їх видами, а то іменно в точках особливих тих інтеґралів.

Перший доказ Cauchy є нам звісний лиш з твору французького математика Moigno;[1]) доказ сей є оснований на підстав-

[1]) Moigno. Leçons sur le calcul différentiel et le calcul integral, том II, лекция 26 і 33.

леню рівнань ріжницевих за дані рівнаня ріжничкові. В подекуди зміненім виді представив сей доказ Lipschitz. Опісля подав Cauchy другий доказ істнованя інтеґралів;[1] доказ сей полягає на розвиненю функций на ряди степенні після форми Mac-Laurin'а; в спосіб більше симетричний виложили його Briot і Bouquet. Побіч тих доказів істнують єще докази Laurent'а і Picard'а, а в кінци в теориї Fuchs'а містить ся також доказ істнованя інтеґралу для лінійного рівнаня ріжничкового ряду n. Докази Cauchy Laurent'а і Picard'а відносять ся до системү рівнань ріжничкових цїлковитих лінїйних першого ряду, але се не вменшає загальности тих доказів, бо як звісно кожде рівнанє ріжничкове висшого ряду дасть ся звести на систем рівнорядних рівнань ріжничкових першого ряду.

Що до рівнань ріжничкових частних, то і там треба було перевести розслїди над істнованєм інтеґралів. Істнованє інтеґралів і для тих рівнань показав перший Cauchy, а опісля Darboux, Méray і Ковалевска; доказ сеї послїдної, так за скоро помершої знаменитої та феноменальної женщини, є під кождим зглядом клясичний.

Ся розвідка не має наміру представляти анї ріжних інтересних метод квадратури, анї хороших та глубоких розслїдів Fuchs'а; єї завданєм є представити у купі ті численні а так важні докази істнованя функций інтеґральних. Містить она перший і другий доказ Cauchy, перший в видї, який йому дав Lipschitz, другий в видї, який йому дали Briot і Bouquet; далї містить она докази Laurent'а, Picard'а і Fuchs'а для цїлковитих, і доказ Ковалевскої для частних рівнань ріжничкових. Подав я усюди лїтературу, о скілько она менї була доступна, і о скільки се було можна старав ся я у всїх тих доказах, що і часом і способом представленя дуже є ріжні, перевести одностайність та одноцїльність.

Перший доказ Cauchy.[2]

1. Возьмім на початок одно лише рівнанє ріжничкове першого ряду:

$$\frac{dy}{dx} = f(xy), \qquad 1)$$

---

[1]) Cauchy. Oeuvres complètes 1 série, том VII.

[2]) Пор. Lipschitz: Lehrbuch der Analysis 504; також Picard: Traité d' analyse том II, 291 et sqts.

де $f(xy)$ є функция дійсна дійсних арґументів x і y, а кромі сього тягла в інтервалї:

$$|x-x_0| < a, \qquad |y-y_0| < b, \qquad 2)$$

де $(x_0 y_0)$ є одною парою вартостий арґументів (xy). Можна проте найти так мале δ і λ, що в нашім інтервалї:

$$|\Delta x| < \delta, \quad |\Delta y| < \delta, \quad |f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(xy)| < \lambda.$$

Приймім дальше — що є гіпотезою зовсїм загальною — що істнує таке додатне K, що:

$$|f(xy_2) - f(xy_1)| < K(y_2-y_1); \qquad 3)$$

а кромі сього возьмім таке додатне A, що:

$$A \leqq a, \qquad AM \leqq b, \qquad 4)$$

де: $M=\max|f(xy)|$ в згаданім інтервалї.

Докажемо тепер, що **істнує тягла функция арґументів x і y така, що сповняє рівнане:**

$$\frac{dy}{dx} = f(xy),$$

і є означена для кождої вартости x з інтервалу:

$$|x-x_0| < A$$

і принимає для $x=x_0$ вартість y_0.

Щоби сей доказ перевести, возьмім інтервал:

$$|x-x_0| < A, \qquad x > x_0,$$

і подїльмо його на інтервали: $(x_0 \cdots x_1)$, $(x_1 \; x_2)$, $\quad (x_{n-1} \cdots x)$. Утворім тепер рівнаня з ріжниць:

$$\left.\begin{aligned} y_1-y_0 &= (x_1-x_0)\, f(x_0y_0). \\ y_2-y_1 &= (x_2-x_1)\, f(x_1y_1). \\ & \\ y-y_{n-1} &= (x-x_{n-1})\, f(x_{n-1}y_{n-1}). \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

Очевидно, що:

$$|y_1-y_0| < b,$$
$$|y_1-y_0| < M(x_1-x_0) < AM < b;$$
$$y_2 = y_0 + (x_1-x_0)\, f(x_0y_0) + (x_2-x_1)\, f(x_1y_1), \text{ отже:}$$
$$|y_2-y_0| < M(x_2-x_0) < MA < b \qquad \text{і т. д.}$$

Послїдна вартість y в рівнанях 5) є проте вираженєм точно означеним, зависимим від x і від точок подїлу $x_1 \; x_2 \quad x_{n-1}$.

2. Спитаймо, чи *се вираженє у сходить до якої означеної границї, наколи при сталїм x всї інтервали зводять ся до зера, отже число тих інтервалів стає безконечно велике*. Покажемо, що така границя дїйсно істнує і що она є такою функциєю арґументу x, якої ми шукаємо.

Приймем, що маємо два способи дальшого подїлу інтервалів $(x_\nu \text{-----} x_{\nu+1})$. Перший спосіб подїлу дасть нам точки:

$$x_0 \; x_1 \; x_2 \qquad x_\alpha \; x_{\alpha+1} \qquad x,$$

другий — для якого місто x і y писати мем x' і y' — є такий, що інтервал $(x_\alpha \quad x_{\alpha+1})$ дїлимо і дістанемо точки:

$$x'_1 = x_\alpha, \qquad x'_m \qquad x'_n = x_{\alpha+1}.$$

Тодї:

$$| y'_m - y'_1 | < (x'_m - x'_1)\, M < (x_{\alpha+1} - x_\alpha)\, M.$$

Наколи дїленє тих інтервалів доведено так далеко, що:

$$x_{\alpha+1} - x_\alpha < \delta, \qquad (x_{\alpha+1} - x_\alpha)\, M < \lambda$$

(δ і λ вже висше вибрані), то тодї:

$$| f(x'_m y'_m) - f(x'_1 y'_1) | < \lambda. \qquad 6)$$

Тепер дістанемо систем рівнань ріжницевих:

$$\left.\begin{aligned} & y'_{1+1} - y'_1 = (x'_{1+1} - x'_1)\, f(x'_1 y'_1). \\ & y'_{1+2} - y'_{1+1} = (x'_{1+2} - x'_{1+1})\, f(x'_{1+1} y'_{1+1}). \\ & \\ & y'_n - y'_{n-1} = (x'_n - x'_{n-1})\, f(x'_{n-1} y_{n-1}). \end{aligned}\right\}$$

Сума тих рівнань дасть на основі 6) рівнанє:

$$y'_n - y'_1 = (x_{\alpha+1} - x_\alpha) \left[f(x'_1 y'_1) + \vartheta\lambda \right], \qquad | \vartheta | < 1.$$

А що:

$$y_{\alpha+1} - y_\alpha = (x_{\alpha+1} - x_\alpha)\, f(x_\alpha y_\alpha), \qquad \text{то:}$$

$$y'_n - y_{\alpha+1} = y'_1 - y_\alpha + (x_{\alpha+1} - x_\alpha) \left[f(x'_1 y_1) - f(x_\alpha y_\alpha) + \vartheta\lambda \right]$$

а що $x'_1 = x_\alpha$, то на основі 3) маємо:

$$| y'_n - y_{\alpha+1} | < | y'_1 - y_\alpha | + (x_{\alpha+1} - x_\alpha) \left[k\, | y'_1 - y_\alpha | + \lambda \right].$$

Положім:

$$| y'_n - y_{\alpha+1} | = V_{\alpha+1}, \qquad \text{то:}$$

$$V_{\alpha+1} < V_\alpha \left[1 + K (x_{\alpha+1} - x_\alpha) \right] + \lambda\, (x_{\alpha+1} - x_\alpha), \text{ або:}$$

$$V_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{K} < \left(V_\alpha + \frac{\lambda}{K} \right) \left[1 + K (x_{\alpha+1} - x_\alpha) \right];$$

отже очевидно дістанемо ($V_0 = o$):

$$V_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{K} < \frac{\lambda}{K} \prod_{s=o}^{\alpha} \left[1 + K(x_{s+1} - x_s)\right].$$

Для додатних x є очевидно:

$$1 + Kx < e^{Kx}, \text{ отже:}$$

$$V_{\alpha+1} < \frac{\lambda}{K}\left(e^{K(x_{\alpha+1} - x_\alpha)} - 1\right), \text{ або}$$

$$|y'_n - y_{\alpha+1}| < \frac{\lambda}{K}\left(e^{K(x_{\alpha+1} - x_\alpha)} - 1\right).$$

Наколи возьмемо за послїдну точку подїлу x, за вартість одержану в перший спосіб подїлу y, в другий спосіб подїлу y', то дістанемо:

$$|y' - y| < \frac{\lambda}{K}\left(e^{K(x - x_0)} - 1\right). \qquad 7)$$

Кождий иньший спосіб подїлу веде до тої самої границї, бо наколи возьмемо єще один спосіб подїлу, який означимо через ($x''y''$), то дістанемо:

$$|y'' - y| < \frac{\lambda}{K}\left(e^{K(x - x_0)} - 1\right)$$

$$|y'' - y'| < \frac{\lambda}{K}\left(e^{K(x - x_0)} - 1\right)$$

отже:

$$|y - y'| < \frac{2\lambda}{K}\left[e^{K(x - x_0)} - 1\right]$$

Бачимо проте, що **при всякім способі твореня інтервалїв має y все точно означену границю.** Та границя є функциєю арґументу x, яка для $x = x_0$ дає y_0.

3. Лишає ся єще доказати, що функция арґументу x, щосьми єї тепер дістали, сповняє рівнанє:

$$\frac{dy}{dx} = f(xy),$$

або є його інтеґралом.

Возьмім в інтервалї A три точки x_0 x x' такі, що:

$$x_0 < x < x';$$

y є вартости функциї арґументу x, y' вартости функциї арґументу x'. Щоби винайти функцию y', приймем, що виходимо з точки x з вартостию y і що дїлимо інтервал (x x') на безконечне число частинок. З другої сторони, наколи возьмемо сам той інтервал $(x-x')$, дістанемо величину Y' таку, що:

$$Y'-y = (x'-x)\ f(xy),$$

а позаяк всї наші інтервали, отже і $|x'-x| < \delta$, то дістанемо:

$$|Y'-y| < \frac{\lambda}{K}\left(e^{K(x'-x)} - 1\right),$$

або:

$$Y'-y = \frac{\vartheta\lambda}{K}\left(e^{K(x'-x)} - 1\right),\quad \text{де } \vartheta^2 < 1.$$

Отже:

$$y'-y = (x'-x)\ f(xy) - \frac{\vartheta\lambda}{K}\left(e^{K(x'-x_0)} - 1\right), \text{ або:}$$

$$\frac{y'-y}{x'-x} = f(xy) - \frac{\vartheta\lambda}{K}\,\frac{e^{K(x'-x_0)} - 1}{x-x};$$

наколи x' сходить до x, а λ є дуже мале, то в границї:

$$\frac{dy}{dx} = f(xy).$$

Q. E. D.

4. Сей доказ можна просто перенести на систем n рівнань:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x\, y_1\, y_2 \quad y_n)\\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x\, y_1\, y_2 \quad y_n)\\
\\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x\, y_1\, y_2 \quad y_n)
\end{aligned}\right\}$$

Заложім, що сї функциї f є тяглими функциями арґументів x і y_s $(s = 1, 2, \quad n)$ в інтервалах:

$$|x-x_0| < a,\quad |y_1-y_1{}^0| < b,\qquad |y_n-y_n{}^0| < b; \qquad 8)$$

M най буде в тім інтервалї найбільшою вартостию функций f. Кромі сього приймем, що і ту, як й висше, для якихнебудь двох точок в области 8) є:

$$| f_i(xy_1'y_2' \cdots yn') - f_i(xy_1y_2 \cdots yn) | < \sum_{s=1}^{n} K_s \, | y'_s - y_s |,$$

де K_s є якісь сталі додатки.

Наколи ту, як і перше, заступимо рівнаня ріжничкові через рівнаня ріжницеві, дістанемо, що в інтервалї:

$$| x - x_0 | < A, \qquad A < a, \qquad AM < b,$$

істнує n тяглих функций $y_1\, y_2 \quad y_n$ арґументу x, що сповняють систем рівнань ріжничкових і принимають для $x = x_0$ вартости $y_1{}^0 y_2{}^0 y_n{}^0$.

Другий доказ Cauchy.

Як вже в вступї сказано, доказ сей подав Cauchy, а виложили його пізнїйше в спосіб більше симетричний Briot і Bouqnet; в тім другім видї і ми переведемо сей доказ.[1])

1. Возьмемо вперед одно рівнанє:

$$\frac{dy}{dx} = f(xy), \qquad\qquad 1)$$

де функция f є однозначна в окруженю точки (x_0y_0); для коротшого представленя приймемо, що $x_0 = y_0 = o$. Функция f(xy) буде проте однозначна що до арґументів x і y, наколи ті послїдні будуть находити ся в колах C і C' з средоточками x=o, евент. y=o, а лучами a і b. Кромі сього закладаємо, що ся функция не тратить тяглости на самих округах, а m a x i m u m єї беззглядної вартости в тім обсягу є M.

Наколи рівнанє 1) має в окруженю x=o інтеґрал однозначний, який стає ся зером для x=o, то тодї з самого рівнаня ріжничкового буде можна дістати вартости походних $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, для x=o. Бо наколи зріжничкуємо рівнанє 1) еще раз і положимо x=o, y=o, то дістанемо $\frac{d^2y}{dx^2}$, зріжничкуємо еще раз, то дістанемо $\frac{d^3y}{dx^3}$

---

[1]) Пор. Briot-Bouquet. Théorie des fonctions elliptiques ст. 325 et sqts.

і т. д. Можна проте на основі форми Mac-Laurina утворити розвинене:

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 x + \frac{1}{2'}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) x^2 + \quad = a_1x + a_2x^2 + \qquad 2)$$

(вільного виразу нема, бо для x=o має бути і y=o).

Цїла суть доказу є в тім, щоби показати, що се розвинене є збіжне, наколи x що до безглядної вартости є достаточно мале. Скоро сього докажемо, то очевидно, що так визначена функция **y** сповняє рівнане ріжничкове, бо дві функції арґументу **x**, себ то $\frac{dy}{dx}$ і f(xy) мають після 2) ту саму вартість для x=o, а так само і їх походні якого-небудь ряду; функциї ті є проте тотожні, або рівнане 1) є сповнене.

2. Наколи маємо дану функцию f(xy), то можна найти в тім самім обсягу збіжности (CC') таку однозначну функцию F(xy), що її частні походні (всї додатні для x=o, y=o) сповняють нерівність:[1])

$$\left|\frac{\partial^{n+p} f}{\partial x^n\, \partial y^p}\right|_{\substack{x=o\\ y=o}} \leqq \left(\frac{\partial^{n+p} F}{\partial x^n\, \partial y^p}\right)_{\substack{x=o\\ y=o}} \qquad 3)$$

Такою функциєю буде функция:[2])

$$F(xy) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)}$$

Возьмім тепер до помочи рівнане ріжничкове:

$$\frac{dv}{dx} = F(xv)$$

і приймім, що се рівнане має інтеґрал v, однозначний в окруженю x=o, а для x=o рівний v=o. Для того v будемо мати анальоґічно розвинене:

$$v = \left(\frac{dv}{dx}\right)_0 x + \frac{1}{2'}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_0 x^2 + \cdots = A_1x + A_2x^2 \cdots \qquad 4)$$

(A додатні). Очевидно, що на основі нерівности 3) буде:

$$|a_m| < A_m.$$

Ряд 2) буде певно збіжний в тім обсягу, де є збіжний ряд 4.

[1]) Пор. Picard loc. cit. II 240.

[2]) ibidem II 239.

Легко можна доказати істнованя функциї v. Напишім рівнанє

$$\frac{dv}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{v}{b}\right)}$$

в виді:

$$\left(1 - \frac{v}{b}\right)\frac{dv}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x}{a}},$$

то наколи v істнує, то ті оба вирази є походними функций $\left(v - \frac{v^2}{2b}\right)$ і $-Ma\log\left(1 - \frac{x}{a}\right)$. Возьмім таку галузь льоґаритму, яка є о для x=o і є однозначна в колї (a). Наколи v=o для x=o, то:

$$v - \frac{v^2}{2b} = -Ma\log\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

отже:

$$v = b - b\sqrt{1 + \frac{2Ma}{b}\log\left(1 - \frac{x}{a}\right)};$$

сей корінь має вартість +1 для x=o.

Так визначена функция v сповняє рівнанє:

$$\frac{dv}{dx} = F(xv);$$

она перестає істнувати для x=o, є однозначна в колї о средоточцї x=o, а лучу ρ, для якого вартість під знаком кореня є о, отже:

$$1 + \frac{2Ma}{b}\log\left(1 - \frac{\rho}{a}\right) = o, \qquad \text{або:}$$

$$\rho = a\left(1 \quad e^{-\frac{b}{2Ma}}\right).$$

Ряд 4) є проте збіжний в колї о лучу ρ; там є збіжний і ряд 2), отже можемо висказати твердженє, що **дане рівнанє ріжничкове має інтеґрал, однозначний в колї о лучу ρ а початку о; інтеґрал сей стає ся зером для x=o.**

Інтеґрал сей є однозначний і лиш один. Тут мусимо і се зазначити, що в колї о лучу ρ є:

$$|v| < b, \qquad \text{отже і} \quad |y| < b.$$

3. Той сам доказ можна перенести і на систем **n** рівнань ріжничкових:[1])

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x\, y_1\, y_2 \quad y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x\, y_1\, y_2 \quad y_n) \\ \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x\, y_1\, y_2 \quad y_n) \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Приймаємо, що сї функциї f_s є однозначні що до арґументів x і y_s в колах о лучах **a** і **b**, зачеркнених з початку яко средоточок на площах x і y_s ($s=1, 2, \quad n$). Наколи в такім обсягу M є maximum функций f, то систем 5) порівнуємо з системом:

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{dv_2}{dx} = \qquad = \frac{dv_n}{dx} = \quad (x\, v_1\, v_2 \quad v_n), \quad 6)$$

де:

$$\varphi(x\, v_1\, v_2 \quad v_n) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{v_1}{b}\right) \quad \left(1-\frac{v_n}{b}\right)}.$$

Систем 6) можна легко з'інтеґровати. Наколи функциї $v_1 v_2 \cdots v_n$ істнують, то позаяк їх походні є рівні і мають ту саму вартість для $x=o$, то ті функциї є ідентичні, отже:

$$v_1 = v_2 = \quad = v_n = v.$$

Вистане проте взяти рівнанє:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{v}{b}\right)^n}, \quad 7)$$

або:

$$\left(1-\frac{v}{b}\right)^n \frac{dv}{dx} = \frac{M}{1-\frac{x}{a}};$$

функция v сповняє проте рівнанє:

$$\frac{b}{n+1}\left[1-\left(1-\frac{v}{b}\right)^{n+1}\right] = -\, Ma \log\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

[1]) Пор. Briot-Bouquet loc. cit. ст. 333.

а з відси:

$$v=a\left[1-\sqrt{1+\frac{(n+1)Ma}{b}\log\left(1-\frac{x}{a}\right)}\right] \qquad 8)$$

Беремо таку галузь льоґаритму, яка є однозначна в колї (a), а є зером для $x=o$; $(n+1)$ коренів в рівнаню 8) є тотожні, наколи виражене під знаком кореня є зером, а се дїє ся для:

$$x=\rho=a\left[1-e^{-\frac{b}{(n+1)Ma}}\right].$$

Рівнане 7) дає нам проте однозначну функцию v арґументу x таку, що вартости того арґументу берем з кола, зачерканого лучем ρ з точки $x=o$. Та функция сповняє рівнане 7), n функций рівних єї сповняють систем 5).

Функция v дасть ся розвинути на ряд:

$$v=\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 x+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_0 x^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 x^3+\cdots \qquad 9)$$

збіжний в колї ρ, а його сочинники можна обчислити постепенно при помочи рівнаня 7).

Наколи возьмемо систем рядів:

$$\left.\begin{aligned}
y_1&=\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0\frac{x}{1!}+\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}\right)_0\frac{x^2}{2!}+\\
y_2&=\left(\frac{dy_2}{dx}\right)_0\frac{x}{1!}+\left(\frac{d^2y_2}{dx^2}\right)_0\frac{x^2}{2!}+\\
y_n&=\left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0\frac{x}{1!}+\left(\frac{d^2y_n}{dx_n}\right)_0\frac{x^2}{2!}+
\end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

що їх сочинники одержалисьмо постепенно з рівнань 5), то ті сочинники мають беззглядну вартість меншу як сочинники ряду 9). Ряди систему 10) є проте збіжні в обсягу (ρ) і є в тім обсягу функциями однозначними. Легко побачити, що сї ряди сповняють систем 5), є проте і н т е ґ р а л а м и т о г о с и с т е м у.

Доказ Laurent'a.[1])

1. Маємо систем рівнань ріжничкових:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1\,(x\, y_1\, y_2 \quad y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2\,(x\, y_1\, y_2 \quad y_n) \\ \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n\,(x\, y_1\, y_2 \quad y_n) \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Заложім, що ті функциї $f_1, f_2, \quad f_n$ є однозначні, скінчені і тяглі, наколи x зміняє ся в інтервалї $(x^0 \text{---} x^0+a)$, y_1 в інтервалї $(y_1{}^0 \text{---} y_1{}^0 \pm a_1)$, y_2 в інтервалї $(y_2{}^0 \text{---} y_2{}^0 \pm a_2)$, ---$y_n$ в інтервалї $(y_n{}^0 y_n{}^0 \pm a_n)$.

Найжеж одною із вартостий аргументу x в інтервалї $(x^0 \text{---} x^0+a)$ є X; інтервал $(x^0 \text{---} X)$ подїлимо на m рівних частий h і положім для $k = 1, 2, \quad n$:

$$\left.\begin{aligned} y'_k - y^0_k &= \int_{x^0}^{x^0+h} f_k\,(x\, y_1{}^0\, y_2{}^0 \quad y_n{}^0)\, dx \\ y''_k - y'_k &= \int_{x^0+h}^{x^0+2h} f_k\,(x\, y'_1\, y'_2 \quad y'_n)\, dx. \\ \\ Y_k - y_k{}^{(m-1)} &= \int_{x^0+(m-1)h}^{X} f_k\,(x\, y_1{}^{(m-1)}\, y_2{}^{(m-1)} \quad y_n{}^{(m-1)})\, dx. \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Наколи в наших інтервалах maxima функций f_s є M_s, то після першого з рівнань 2) буде:

$$y'_k < y^0_k + hM_k, \qquad k = 1, 2, \quad n,$$

а коли возьмемо h так мале, що вартости $y^0_k + hM_k$ не виходять поза інтервал $y^0_k \pm a_k$, то і при вартости y'_k функциї f_k не тратять еще своєї однозначности, скінчености і тяглости.

З другого із рівнань 2) слїдує так само:

$$y''_k < y'_k + hM_k, \qquad \text{або:}$$
$$y''_k < y^0_k + 2hM_k$$

---

[1]) Пор. Laurent: Théorie des équations différentielles ordinaires, simultanées, Paris 1873; також: Zajączkowski: Wykład nauki o równaniach różniczkowych, ст. 58 et sqts.; також: Laurent: Traité d' Analyse том V.

А коли знова виберем ті h так малї, щоби вартости $y^0_k + 2hM_k$ лежали єще в інтервалї $(y^0_k - a_k \quad y^0_k + a_k)$, то для вартости $x_k = x''_k$ функциї f_k задержать єще свій характер однозначний, скінчений і тяглий; і т. д. А коли весь інтервал $(x^0 \quad X) = mh$ возьмемо доволї малий, не більший від найменшої з величин $\frac{a_1}{M_1}, \frac{a_2}{M_2}, \frac{a_n}{M_n}$, то вираженя Y_k будуть єще такими вираженями арґументів y_k, при яких функциї f_k задержать єще свій характер.

Коли додамо рівнаня 2), дістанемо рівнанє:

$$Y_k = y^0_k + \int_{x^0}^{X} f_k(x\ v_1\ v_2 \quad v_n)\, dx, \qquad (k = 1,\ 2, \quad n),$$

де $v_1\ v_2 \quad v_n$ є перериванї функциї арґументу x, такі, що рівнають ся відповідно величинам $y_1^0\ y_2^0 \quad y^0_n$ в інтервалї $x = (x^0 - x^0 + h)$, величинам $y'_1\ y'_2 \quad y'_n$ в інтервалї $x = (x^0 + h \quad x^0 + 2h)$, величинам $y_1^{(m-1)}, y_2^{(m-1)}, \quad y_n^{(m-1)}$ в інтервалї $x = (x_0 + (m-1)\,h \quad X)$.

2. Заким підемо дальше, обчислїм ріжницю між Y_k, а інтеґралом:

$$A_k = y^0_k + \int_{x^0}^{X} f_k(x\ y_1^0\ y_2^0 \quad y^0_n)\, dx.$$

Наколи положимо:

$$\frac{\partial f_k}{\partial y_s} = f_{ks} \qquad (s = 1,\ 2, \quad n),$$

і возьмемо дроб ϑ такий, що:

$$o < \vartheta < 1, \qquad \text{то дістанемо:}$$

$$Y_k - A_k = \int_{x^0}^{X} \left[f_k(x\, v_1\, v_2 \quad v_n) - f_k(x\, y_1^0\, y_2^0 \quad y^0_n) \right] dx =$$

$$= \int_{x^0}^{X} \Big\{ (v_1 - y_1^0)\, f_{k1} \left[x, y_1^0 + \vartheta(v_1 - y_1^0), \quad y_n^0 + \vartheta(v_n - y_n^0)\right] + \quad +$$

$$+ (v_n - y_n^0)\, f_{kn} \left[x, y_1 + \vartheta(v_1 - y_1^0), \quad y_n^0 + \vartheta(v_n - y_n^0)\right] \Big\}\, dx.$$

А що найбільша вартість якої-небудь ріжниці $(v_h - y^0_h)$ має вид:

$$v_h - y^0_h = \int_{x^0}^{x^0+h} f_h(x\ v_1\ v_2 \quad v_n)\, dx,$$

то на кождий случай:

$$y_h - y^0_h < (X - x^0)\, M_k; \qquad 3)$$

Наколи в наших інтервалах:

$$\max |f_{ks}| = M_{ks},$$

то після 3) буде:

$$Y_k - A_k < (X - x^0)^2\, M,$$

де:

$$M = \sum_{s=1}^{n} M_s\, M_{ks}.$$

Подільмо тепер інтервал ($x^0 \ldots X$) на m^2 рівних частий, а то в сей спосіб, що кождий інтервал h поділимо на m рівних частинок h'. Тоді Y_k перейде на Y'_k, а ріжниця:

$$Y'_k - Y_k = \sum_i \int_{x^0 + ih}^{x^0 + (i+1)h} \left[f_k(x\, v_1^{(i)} v_2^{(i)} \ldots v_n^{(i)}) - f_k(x\, y_1^{(i)} y_2^{(i)} \ldots y_n^{(i)}) \right] dx,$$

де $v_1^{(i)}\, v_2^{(i)} \ldots v_n^{(i)}$ є перериванi функциї арґументу x, а їх вартости є відповідно замкнені в інтервалах $(y_1^{(i)} \ldots y_1^{(i+1)})$, $(y_2^{(i)} \ldots y_2^{(i+1)})$, $\ldots (y_n^{(i)} \ldots y_n^{(i+1)})$; вартости ті не зміняють ся в ніякім з інтервалів h'.

Вирази тої суми є меньші після нерівности 3) як:

$$h'^2 M = \left(\frac{X - x^0}{m}\right)^2 M,$$

а проте ріжниця $Y'_k - Y_k$ є менша від m-крати сеї вартости:

$$Y'_k - Y_k < (X - x^0)^2 \frac{M}{m}.$$

Наколи Y''_k, Y'''_k, $\ldots Y_k^{(i)}$ є вартости, які дістає Y_k, наколи інтервал ($x^0 \ldots X$) будемо ділити на m^3, m^4, $\ldots m^{(i+1)}$ частий, то очевидно анальоґічно вийде:

$$\left.\begin{aligned} Y''_k - Y'_k &< (X - x^0)^2 \frac{M}{m^2} \\ Y'''_k - Y'''_k &< (X - x^0)^2 \frac{M}{m^3} \\ Y^{(i)}_k - Y^{(i-1)}_k &< (X - x^0)^2 \frac{M}{m^i} \end{aligned}\right\}$$

Отже тепер дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} Y_k - A_k &= \vartheta_0\,(X-x^0)^2\, M \\ Y_k' - Y_k &= \vartheta_1\,(X-x^0)^2\,\frac{M}{m} \\ Y_k'' - Y_k' &= \vartheta_2\,(X-x^0)^2\,\frac{M}{m^2} \\ Y_k^{(i)} - Y_k^{(i-1)} &= \vartheta_i\,(X-x^0)^2\,\frac{M}{m^i} \end{aligned}\right\}\quad -1 < \vartheta_s < +1.$$

а з відси:

$$Y_k^{(i)} - A_k = (X-x^0)^2\, M \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta_1}{m} + \frac{\vartheta_2}{m^2} + \cdots + \frac{\vartheta_i}{m^i}\right).$$

Права сторона є ґеометричним рядом збіжним, що для $i=\infty$ має вартість означену, отже і ліва сторона для $i=\infty$ мусить бути означена т. є. $Y_k^{(i)}$ наближає ся до границї означеної і скінченої, яка від A_k ріжнити ся ме о величину меншу, як $(X-x^0)^2M$, від Y_k' о величину меншу, як $(X-x^0)^2\frac{M}{m}$ і т. д. Се є доказом, що наколи число m подїлів інтервалу $(x^0 \cdots X)$ росте без кінця, то Y_k наближає ся до границї означеної і скінченої.

3. Возьмім тепер знова рівнанє:

$$Y_k = y_k^0 + \int_{x^0}^{X} f_k\,(x\, v_1\, v_2 \quad v_n)\, dx \qquad (k = 1, 2, \quad n). \qquad 4)$$

Функциї $v_1\, v_2 \quad v_n$ є функциї переривані арґументу x, які в кождім інтервалї h мають вартости незмінні, а їменно вартости: $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \quad y_n^{(i)}$ в інтервалї $x = (x^0+ih \cdots x^0+(i+1)h)$.

Однак наколи приймем, що число m подїлів інтервалу $(x_0 \cdots X)$ росте без кінця в поступі ґеометричнім, то ті функциї можна заступити функциями тяглими, що приймають ту саму вартість для $x=x^0$, x^0+h, $\quad x^0+(m-1)h$; а тодї мож покласти $v_k=Y_k$ для $x=X$, наколи пропустимо величини дальших рядів. А що рівнанє 4) остане, то тодї:

$$y_k^{(i)} = y_k^0 + \int_{x^0}^{x^0+ih} f_k\,(x\, v_1\, v_2 \quad v_n)\, dx,$$

де v_k принимають вартости y_k^0, y_k' y_k'', $\quad$ для вартостий $x=x^0$, x^0+h, $\quad$ Наколи проте h сходить до зера в поступі ґеометричнім, то $v_1\ v_2 \quad v_n$ стають тяглими функциями арґументу x, принимають для $x=x^0$ вартости $y_1^0\ y_2^0 \quad y_n$ і сповняють рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_1^0 + \int_{x^0}^{x} f_1\ (x\ y_1\ y_2 \quad y_n)\ dx. \\ y_2 &= y_2^0 + \int_{x^0}^{x} f_2\ (x\ y_1\ y_2 \quad y_n)\ dx. \\ y_n &= y_n^0 + \int_{x^0}^{x} f_n\ (x\ y_1\ y_2 \quad y_n)\ dx. \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

або, що є то само, сповняють рівнаня ріжничкові 1), які дістанемо з 5) через ріжничкованє.

Істнує проте n функций арґументу x, які вложені в рівнаня 1) місто ($y_1\ y_2 \quad y_n$) зводять ті рівнаня до тотожности. Ті функциї принимають для $x=x^0$ вартости $y_1^0\ y_2^0 \quad y_n^0$, які можна після вподоби вибрати з серед тих вартостий, при яких функциї f_k і їх походні задержують свій характер однозначний, скінчений і тяглий.

Доказ Picard'a.[1]

1. Маємо систем n рівнань ріжничкових першого степеня:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1\ (x\ y_1\ y_2 \quad y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2\ (x\ y_1\ y_2 \quad y_n) \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n\ (x\ y_1\ y_2 \quad y_n) \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

де f_s є функциї тяглї і дійсні дійсних величин $x\ y_1\ y_2 \quad y_n$ в окруженю $(x_0 y_1^0 y_2^0 \cdots y_n^0)$. Функциї ті є означені для таких $x y_1 y_2 \cdots y_n$, що лежать в інтервалах:

$$(x_0 - a \cdots x_0 + a),\quad (y_1^0 - b \cdots y_1^0 + b),\qquad (y_n^0 - b \quad y_n^0 + b),$$

де a і b є сталї додатні.

[1]) Пор. Journal de Mathématique рік 1890: також Picard: Traité d' Analyse том II, ст. 301 et sqts.

Заложім дальше, що можна визначити n величин додатних A, B, L таких, що:

$$| f_i(xy_1'y_2' \cdots y_n') - f_i(xy_1y_2 \cdots y_n) < A\, y_1' - y_1 + B\, y_2' - y_2 + \cdots + L\, y_n' - y_n |,$$

де $(x\, y_1\, y_2 \quad y_n)$ остають в своїх інтервалах.

Як бачимо, заложеня ті є ту такі самі, як в першім доказі Cauchy'го.

2. Возьмім вперед рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{y}_1}{dx} &= f_1\,(x\, y_1{}^0\, y_2{}^0 \quad y_n{}^0) \\ \frac{d\bar{y}_2}{dx} &= f_2\,(x\, y_1{}^0\, y_2{}^0 \quad y_n{}^0) \\ \frac{d\bar{y}_n}{dx} &= f_n\,(x\, y_1{}^0\, y_2{}^0 \quad y_n{}^0) \end{aligned}\right\}$$

Звідси дістанемо через квадратуру величини $\bar{y}_1\, \bar{y}_2 \quad \bar{y}_n$, причім визначимо їх так, що они принимають для x_0 вартости $y_1{}^0\, y_2{}^0 \cdots y_n{}^0$. Дальше возьмім рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{\bar{y}}_1}{dx} &= f_1\,(x\, \bar{y}_1\, \bar{y}_2 \quad \bar{y}_n) \\ \frac{d\bar{\bar{y}}_2}{dx} &= f_2\,(x\, \bar{y}_1\, \bar{y}_2 \quad \bar{y}_n) \\ \frac{d\bar{\bar{y}}_n}{dx} &= f_n\,(x\, \bar{y}_1\, \bar{y}_2 \quad \bar{y}_n) \end{aligned}\right\}$$

З них визначимо через квадратуру величини $\bar{\bar{y}}_1\, \bar{\bar{y}}_2 \quad \bar{\bar{y}}_n$ під умовою, що они для x_0 дістають вартости $y_1{}^0\, y_2{}^0 \quad y_n{}^0$. Наколи підемо дальше, дістанемо в кінци рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1{}^{(m)}}{dx} &= f_1\,(x\, y_1{}^{(m-1)}\, y_2{}^{(m-1)} \quad y_n{}^{(m-1)}) \\ \frac{dy_2{}^{(m)}}{dx} &= f_2\,(x\, y_1{}^{(m-1)}\, y_2{}^{(m-1)} \quad y_n{}^{(m-1)}) \\ \frac{dy_n{}^{(m)}}{dx} &= f_n\,(x\, y_1{}^{(m-1)}\, y_2{}^{(m-1)} \quad y_n{}^{(m-1)}) \end{aligned}\right\}$$

де для $x = x_0$ $y_1{}^{(m)} = y_1{}^0$, $y_2{}^{(m)} = y_2{}^0$, $\quad y_n{}^{(m)} = y_n{}^0$.

Покажемо, що коли m росте без кінця, то $y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \ldots y_n^{(m)}$ сходять до границь, які будуть власне жаданими інтеґралами, під умовою, що x остає достаточно близько від x_0.

Приймім, що maximum беззглядної вартости функций f є M, при чім змінні остають в своїх інтервалах. Возьмім величину ρ, значно більшу як a, то наколи x остане в інтервалї $(x_0-\rho \ldots x_0+\rho)$, то тодї:

$$|\bar{y}_1 - y_1{}^0| < M\rho, \qquad |\bar{y}_n - y_n| < M\rho.$$

Дальше, наколи:

$$M\rho < b,$$

а величини $\bar{y}_1\, \bar{y}_2 \ldots \bar{y}_n$ останують в своїх границях, то очевидно то само буде і для иньших системів вартостий $y_1\, y_2 \ldots y_n$

Приймім величину $\delta > \rho$ і приймім, що x остає в інтервалї $(x_0-\delta \ldots x_0+\delta)$. Наколи положимо:

$$y_1^{(m)} - y_1^{(m-1)} = Y_1^{(m)}, \qquad y_n^{(m)} - y_n^{(m-1)} = Y_n^{(m)},$$

то тодї можна написати:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dY_1^{(m)}}{dx} &= f_1(xy_1^{(m-1)}y_2^{(m-1)} \ldots y_n^{(m-1)}) - f_1(xy_1^{(m-2)}y_2^{(m-2)} \ldots y_n^{(m-2)}) \\
\frac{dY_2^{(m)}}{dx} &= f_2(xy_1^{(m-1)}y_2^{(m-1)} \ldots y_n^{(m-1)}) - f_2(xy_1^{(m-2)}y_2^{(m-2)} \ldots y_n^{(m-2)}) \\
\frac{dY_n^{(m)}}{dx} &= f_n(xy_1^{(m-1)}y_2^{(m-1)} \ldots y_n^{(m-1)}) - f_n(xy_1^{(m-2)}y_2^{(m-2)} \ldots y_n^{(m-2)})
\end{aligned}\right\} (m = 2, 3, \ldots \infty)$$

Однак маємо:

$$|\bar{Y}_1| = |\bar{y}_1 - y_1{}^0| < M\delta, \qquad |\bar{Y}_n| < M\delta.$$

Наші рівнаня показують, що $|\bar{\bar{Y}}_1|, |\bar{\bar{Y}}_2| \ldots |\bar{\bar{Y}}_n|$ є менші як

$$(A + B + \cdots + L)\, M\delta^2$$

і т. д.; постепенно дїйдемо до заключеня, що $|Y_1^{(m)}|\; |Y_2^{(m)}| \ldots |Y_n^{(m)}|$ є менші як:

$$M\delta\, (A + B + \cdots + L)^{m-1}\, \delta^{m-1}.$$

Но:

$$y_1^{(m)} = y_1{}^0 + \bar{Y}_1 + \bar{\bar{Y}}_1 + \bar{\bar{\bar{Y}}}_1 + \ldots + Y_1^{(m)};$$

отже $y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, y_n^{(m)}$ сходять до границї, наколи:

$$(A + B + \cdots + L)\,\delta < 1,$$

а та умова ся сповняє, наколи δ є достаточно мале. Бачимо проте, що $y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \quad y_n^{(m)}$ сходять до означених границь $y_1\, y_2 \quad y_m$, що є тяглими функциями арґументу x в інтервалї $(x_0 - \delta \quad x_0 + \delta)$.

$y_1\, y_2 \quad y_n$ будуть то ряди збіжні в сей спосіб, як проґресия ґеометрична.

Маємо проте:

$$y_1^{(m)} = \int_{x^0}^{x} f_1(x\, y_1^{(m-1)} \quad y_n^{(m-1)})\, dx + y_1^0.$$

а що $y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \quad y_n^{(m)}$ є ріжні від своїх границь для $\lim m = \infty$ безконечно мало, то в границї дістанемо:

$$y_1 = \int_{x^0}^{X} f_1(x\, y_1\, y_2 \quad y_n)\, dx + y_1^0.$$

а з відси:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x\, y_1\, y_2 \quad y_n)$$

і так само для прочих рівнань. Функциї $y_1\, y_2 \quad y_n$ є проте дїйсно інтеґралами системи рівнань ріжничкових.[1])

Докази Fuchs'a.[1])

1. Возьмім рівнанє:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y = 0 \qquad 1)$$

---

[1]) Лїтература теориї Fuchs'a є незвичайно обширна. Тут належить: Abhandlungen von Fuchs, Crelle's Journal т. 66. і 68. Fuchs: Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1886. Heffter: Einleitung in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Schlesinger: Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Koenigsberger: Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen. Laurent: Traité d' Analyse т. V розд. III. Sauvage: Théorie générale des systèmes d'équations différentielles. Tannery: Propriétés des équations différentielles linéaires à coefficients variables (Annales de l'école normale II. серия т. IV. 1875). Floquet: Sur la théorie des équ. diff. lin. (ibid. т. VIII 1879). Fabry: Sur les intégrales des éq. diff. linéaires (Paris 1885). Дальше розвідки Frobenius'a, Hamburger'a, Thomé'a etc. в Crelle's Journal і Sitz. ber. der Berl. Akad. Також: Zajączkowski: Teorya Fuchsa równań różniczkowych (Pam. wydziału mat. przyr. Akad. Umiej. w Krakowie том XIII.

де p_ν є функциями аналїтичними (одно- або много-значні) в якимсь інтервалї, де є тяглї. Оберім в тім інтервалї точку $x=x_0$, то в окруженю сеї точки є:

$$p_k = \mathfrak{P}(x-x_0)$$

о обсягу збіжности R_k (x змінна зложена).

Покажемо, що **наколи найменший з обсягів збіжности рядів p_k є R, то всегда буде можна дістати в тім обсягу інтеґрал даного рівнаня яко ряд степенний збіжний в колї R**; походні $y, y', y'', \quad y^{(n-1)}$ будуть для $x=x_0$ мати вартість після вподоби.

2. В колї R_k є:

$$p_k = \mathfrak{P}_k(x-x_0) = p_{k0} + p'_{k0}(x-x_0) + \quad + p_{k0}^{(\alpha)}(x-x_0)^\alpha + \cdots\cdots$$

де:

$$p_{k0}^{(\alpha)} = \frac{d^\alpha p_k}{dx^\alpha}\Big]_{x=x_0} \frac{1}{\alpha!}$$

Наколи на колї R_k найбільша вартість ряду є g, то:

$$|p_{k0}^{(\alpha)}|\,|x-x_0|^\alpha < g,$$

$$|x-x_0| < R_k.$$

Возьмім проте за $(x-x_0)$ R_k, то:

$$|p_{k0}^{(\alpha)}|\,|R_k|^\alpha < M_k,$$

де M_k є найбільша беззглядна вартість ряду (в колї або на колї); отже:

$$\frac{d^\alpha p_k}{dx^\alpha}\Big]_{x=x_0} \frac{1}{\alpha!} R^\alpha_k < M_k. \qquad 2)$$

Кромі p_k возьмім еще функцию:

$$\varphi_k = \frac{M_k}{1-\dfrac{x-x_0}{R}} = M_k\left[1 + \frac{x-x_0}{R} + \frac{(x-x_0)^2}{R^2} + \quad\right],$$

збіжну в колї R.

При $(x-x_0)^\alpha$ є сочинник:

$$\frac{M_k}{R^\alpha} = \frac{d^\alpha \varphi_k}{dx^\alpha}\Big]_{x=x_0} \frac{1}{\alpha!};$$

звідси:

$$M_k = \frac{d^{\alpha} \varphi_k}{dx^{\alpha}}\Big]_{x=x_0} \frac{1}{\alpha!} R^{\alpha}.$$

Коли се вставити в 2), то наколи місто R_k возьмемо R, дістанемо:

$$\left| \frac{d^{\alpha} p_k}{dx^{\alpha}} \right|_{x=x_0} < \left| \frac{d^{\alpha} \varphi_k}{dx^{\alpha}} \right|_{x=x_0}$$

Всї походні функциї φ_k є проте більші як походні функциї p_k. Наколи в рівнаню 1) місто $p_1, p_2,$ возьмемо $-\varphi_1, -\varphi_2,$ то дістанемо рівнанє:

$$\frac{d^n u}{dx^n} - \varphi_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} - \varphi_2 \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} - \quad - \varphi_n u = o. \qquad 3)$$

Положім:

$$\frac{x - x_0}{R} = t,$$

то:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{1}{R}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{R} \frac{d^2 u}{dt^2} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{R^2} \frac{d^2 u}{dt}$$

і т. д.

$$\frac{d^s u}{dx^s} = \frac{1}{R^s} \frac{d^s u}{dt^s}.$$

Тепер з рівнаня 3) дістанемо:

$$\frac{d^n u}{dt^n} \frac{1}{R^n} - \varphi_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} \frac{1}{R^{n-1}} - \varphi_2 \frac{d^{n-2} u}{dt^{n-2}} \frac{1}{R^{n-2}} - \cdots - \varphi_n u = o. \quad 4)$$

А що:

$$\varphi_k = \frac{M_k}{1 - \frac{x - x_0}{R}} = \frac{M_k}{1 - t}, \qquad \text{то:}$$

$$\left(1 - t\right) \frac{d^n u}{dt^n} - M_1 R \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} - \cdots - M_n R^n u = o.$$

Попробуймо розвязати се рівнанє через ряд степенний:

$$u = \sum_{k=o}^{\infty} b_k t^k .$$

Наколи вставимо се за *u* і зрівнаємо сочинники до зера, тодї дістанемо на b_k систем рівнань; іменно сочинник при t^k зрівнаний до зера дасть:

$$\left.\begin{aligned} (n+k)\ (n+k-1)\quad (k+1)\ b_{n+k} &= (n+k-1)\ (n+k-2) \\ (k+1)\ b_{n+k-1}\ (M_1R+k) &+ (n+k-2)\ (n+k-3) \\ (k-1)\ b_{n+k-2}\ M_2R^2 &+ \cdots + b_k\ M_n\ R^n . \end{aligned}\right\}\quad 5)$$

Наколи положимо $k=o, 1, 2, \cdots$, дістанемо сочинники b_{n+k} обчислені на основі попередних *n* сочинників b_{n+k-1}, b_k. Бачимо проте, що *n* початкових сочинників $b_0\ b_1\ b_2$ b_{n-1} можуть мати вартість після вподоби, а після сього вийдуть і дальші сочинники; наколи ті сочинники $b_0\ b_1$ b_{n-1} є додатні, то і b_n, b_{n+1}, є додатні.

Коли так, то після 5) буде:

$$b_{n+k} = \frac{M_1R+k}{n+k}\ b_{n+k-1} + \lambda b_{n+k-2} +$$

M_1 є найбільша додатна вартість функциї p_1, можна проте M_1 побільшати; побільшім M_1 так, щоби:

$$M_1R + k > n + k, \qquad \text{або:}$$

$$M_1R > n,$$

тодї $\dfrac{M_1R+k}{n+k}$ є дроб неістний, отже:

$$b_{n+k} > b_{n+k-1}.$$

Як бачимо із того, сочинники обчислені на основі додатних $b_0\ b_1 - b_{n-1}$ збільшають ся без кінця.

$$\frac{b_{n+k}}{b_{n+k-1}} = \frac{M_1R+k}{n+k} + \frac{M_2R^2}{(n+k)\ (n+k-1)}\ \frac{b_{n+k-2}}{b_{n+k-1}} +$$

По правій сторонї є *b* з меншим сказником подїлене через *b* з більшим сказником, є се проте дроби істі; в сочинниках при тих дробах чисельники не є зависимі від k, отже:

$$\lim_{k=\infty} \frac{M_2 R^2}{(n+k)\,(n+k-1)} = 0,$$

$$\lim_{k=\infty} \frac{b_{n+k}}{b_{n+k-1}} = \lim_{k=\infty} \frac{M_1 R+k}{n+k} = 1.$$

Наколи u має бути збіжне, то мусить бути:

$$\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{b_\nu t^\nu}{b_{\nu-1} t^{\nu-1}} \right| < 1, \qquad \text{або:}$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{b_\nu}{b_{\nu-1}} \left| t \right| < 1, \qquad \text{а що:}$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{b_\nu}{b_{\nu-1}} = 1, \qquad \text{то:}$$

$$|t| < 1.$$

Ряд u з неозначеними $b_0\ b_1 \quad b_{n-1}$ є проте збіжний в обсягу $|t| < 1$, або $\left|\frac{x-x_0}{R}\right| < 1$, або $|x-x_0| < R$, т. є. в найменшім колї збіжности рядів p_k.

Рівнане 3) має проте в окруженю x_0 інтеґрал:

$$u = b_0 + b_1 \frac{x-x_0}{R} + b_2 \frac{(x-x_0)^2}{R^2} + \cdots \qquad |x-x_0| < R.$$

Ми приняли $b_0\ b_1 \quad b_{n-1}$ додатні, при чім:

$$\frac{b_l}{R^l} = \left.\frac{d^l u}{dx^l}\right]_{x=x_0} \frac{1}{l!}$$

Рівнане 3) можна написати в видї:

$$\left.\frac{d^n u}{dx^n}\right]_{x_0} = \left[\varphi_1 \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots + \varphi_n u\right]_{x_0} = \frac{b_n}{R^n}.$$

Так виглядає n-та походна; походні $u, u', u'', u^{(n-1)}$ представляють ся через неозначені $b_0\ b_1 \quad b_{n-1}$.

Висша походна:

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = \varphi_1 \frac{d^n u}{dx^n} + \varphi_1' \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots,$$

а що n-та походна представляє ся через (n--1)шу, (n—2)гу,...., то:

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\Big]_{x=x_0} = \left\{ A_0 u + A_1 \frac{du}{dx} + \cdots + A_{n-1} \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} \right\}_{x=x_0}$$

а в загалї:

$$\frac{d^{n+s}u}{dx^{n+s}}\Big]_{x=x_0} = A_0^{(s)} b_0 + A_1^{(s)} \frac{b_1}{R} + \cdots + A_{n+1}^{(s)} \frac{b_n}{R^{n-1}},$$

де:

$$u^{(1)}\Big]_{x=x_0} = \frac{b_1}{R}$$

Сочинники $A_\nu^{(s)}$ є очевидно рациональні, цїлковиті і додатні функциї функций $\varphi_1, \varphi_2,$ і їх походних для $x=x_0$.

3. Вернім до даного рівнаня:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0.$$

Положім:

$$\Big| y \Big|_{x=x_0} = b_0, \quad \Big| \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} = \frac{b_1}{R}, \quad \Big| \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \Big|_{x=x_0} = \frac{b_{n-1}}{R^{n-1}}$$

що вільно зробити, бо вартість тих $b_0\ b_1 \quad b_{n-1}$ залежить зовсїм від нас.

Тепер:

$$\frac{d^n y}{dx^n}\Big]_{x=x_0} = \Big[- p_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \cdots - p_n y\Big]_{x=x_0} \qquad 6)$$

Коли се зріжничкуємо, то:

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\Big]_{x=x_0} = \Big[- p_1 \frac{d^n y}{dx^n} - \cdots\Big]_{x=x_0},$$

або на основі 6):

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\Big]_{x=x_0} = \Big[B_0 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + B_1 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \quad\Big]_{x=x_0};$$

в загалї:

$$\frac{d^{n+s}y}{dx^{n+s}}\Big]_{x=x_0} = B_0\ y\Big]_{x=x_0} + B_1 \frac{dy}{dx}\Big]_{x=x_0} + \cdots + B_{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big]_{x=x_0}$$

де $B_\nu^{(s)}$ є анальоґічно утворені, як передтим $A_\nu^{(s)}$.

Маємо проте.

$$\left|\frac{d^{n+s}u}{dx^{n+s}}\right|_{x=x_0} = A_0^{(s)} b_0 + A_1^{(s)} \frac{b_1}{R} + \cdots + A_{n-1}^{(s)} \frac{b_{n-1}}{R^{n-1}},$$

а:

$$\left|\frac{d^{n+s}y}{dx^{n+s}}\right|_{x=x_0} \leqq |B_0^{(s)}| b_0 + |B_1^{(s)}| \frac{b_1}{R} + \cdots + |B_{n-1}^{(s)}| \frac{b_{n-1}}{R^{n-1}},$$

$B_\nu^{(s)}$ є утворене з p_k, $A_\nu^{(s)}$ з ϱ_k, а що:

$$\left|\frac{d^\alpha p_k}{dx^\alpha}\right|_{x=x_0} < \left|\frac{d^\alpha \varrho_k}{dx^\alpha}\right|_{x=x_0},$$

то очевидно:

$$|B_\nu^{(s)}| < |A_\nu^{(s)}|.$$

Отже:

$$\left|\frac{d^{n+s}u}{dx^{n+s}}\right|_{x=x_0} \geqq \left|\frac{d^{n+s}y}{dx^{n+s}}\right|_{x=x_0} \qquad 7)$$

Звідси відразу видно, що істнує інтеґрал даного рівнаня 1).

Бо:

$$\left|\frac{d^{n+s}u}{dx^{n+s}}\right|_{x=x_0} = \frac{b_{n+s}}{R^{n+s}} (n+s)!, \qquad \text{отже:}$$

$$u = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s}{R^s} (x-x_0)^s,$$

збіжне для $|x-x_0| < R$. Наколи утворимо:

$$y = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left[\frac{d^s y}{dx^s}\right]_{x=x_0} (x-x_0)^s,$$

то після 7) кожда походна в ряді y є що до беззглядної вартости менша як походна в ряді u. Наколи порівнаємо ряди u і y, то:

$$\left|y\right|_{x_0} = b_0, \quad \left|\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = \frac{b_1}{R}, \qquad \left|\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right|_{x_0} = \frac{b_{n-1}}{R^{n-1}},$$

а з подальших виразів в y є кождий менший як відповідний вираз в u. Отже ряд y є збіжний в колї $x-x_0 < R$.

Твердженє наше є проте доказане, бо і с т н у є ф у н к ц и я і н т е ґ р а л ь н а, щ о є т а к и м р я д о м с т е п е н н и м, щ о д л я

$x = x_0$ є y і походні $y' y''$ $y^{(n-1)}$ можуть мати вартість після умови.

4. Наколи $p_k = \mathfrak{P}_k(x - x_0)$ є ряд збіжний в засягу $R_k = \infty$, то і $R = \infty$, або инакше p_k є функциї рациональні або цїлковиті переступні. Тодї інтеґрал:

$$y = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots$$

є збіжний в колї $R = \infty$, отже є також функция рациональна, або цїлковито переступна.

В окруженю точок особливих рядів p_k подає вид інтеґралів теория Fuchs'a.

Доказ Ковалевскої.[1])

1. Возьмім систем рівнань о походних частних:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \sum_{i,k} A_{i,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} &= \sum_{i,k} B_{i,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\ & \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \sum_{i,k} L_{i,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, \quad m \\ k &= 1, 2, \quad p \end{aligned} \qquad 1)$$

$A, B,$ L є функциї однозначні, скінчені і тяглі арґументів $u_1\, u_2\, u_m$ в окруженю точки $(u_1^0\, u_2^0 \quad u^0_m)$.

З другої сторони возьмім m функций арґументів $(x_1\, x_2 \quad x_p)$:

$$\varphi_1 (x_1\, x_2 \quad x_p), \qquad (x_1\, x_2 \quad x_p) \qquad \varphi_m (x_2\, x_2 \quad x_p),$$

які є означені, скінчені та тяглі в окруженю точки $(x_1^0\, x_2^0 \quad x^0_p)$, і які зводять ся для $x_s = x^0_s$ $(s = 1, 2, \quad p)$ до $u_1^0\, u_2^0 \quad u^0_m$. Наколи так є, то покажемо, що можна найти m функций $u_1\, u_2 \quad u_m$ $(p+1)$ независимих арґументів $x\, x_1\, x_2 \quad x_p$, які сповняють систем рівнань 1) і зводять ся для $x = x_0$ до $\varphi_1\, \varphi_2$

[1]) Пор. Sophie Kowalewski: Crelle's Journal т. 80.

Заложім, що початкові вартости $u^0{}_i\ x^0{}_2\ x^0{}_k$ є 0. Наколи істнують функциї, що сповняють наші заложеня, то на основі рівнань 1) буде можна одержати їх розвиненя після степений арґументу x. Дістанемо іменно вартости всїх частних походних функциї u для $x = x_1 = \cdots x_p = o$. Се є очевидне для тих походних, в яких x не виступає, бо вартости u є данї для x=0. Що до иньших походних, то ті дістанемо постепенно; так походні, де ріжничковане що до арґументу x переведено раз тілько, є данї через рівнаня ріжничкові 1), ріжничковані якесь число разів що до арґументів $x_1\ x_2 \quad x_p$. Наколи дальше мем ріжничкувати рівнаня 1) з огляду на x, то через ужите рахунку висшорядних походних дістанемо походні частні, де ріжничковане переведене є два рази що до арґументу x і т. д.

Дістанемо проте розвиненя:

$$u_i = P_0{}^i + P_1{}^i\, x + \cdots + P_n{}^i\, x^n + \cdots$$

де P є знані функциї арґументів $x_1\ x_2 \quad x_p$, скінчені, означені і тяглї. Наколи сї розвиненя є збіжні, то они сповнять систем 1).

Основною проте точкою нашого доказу є доказ збїжности даних рядів в певнім обсягу докола вартостий початкових. Ту поступати мем анальоґічно, як при доказї Cauchy'го, а іменно ужием порівнаня з певним другим системом.

Най M буде maximum з поміж беззглядних вартостий функций A, B, L, наколи u лишають ся на своїх площах в колї о лучу r. Ужиймо — як при доказї Briot-Bouquet'a — до порівнаня функциї:

$$F = \frac{M}{1 - \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_m}{r}};$$

яка-небудь частна походна сеї функциї є для $u_1 = u_2 = \cdots u_m = o$ додатна і більша як беззглядні вартости відповідної походної одної з функций A, B, L.

Порівнаймо систем 1) з системом:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{\partial U_3}{\partial x} = \cdots = \frac{\partial U_m}{\partial x} = \\ &= \frac{M}{1 - \dfrac{U_1 + U_2 + \cdots + U_m}{r}} \sum_{i,\,k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

З другої сторони най буде N найбільшою з беззглядних вартостий функций $(x_1 x_2 \cdots x_p)$ (які стають ся зером для $x_1 = x_2 = \cdots \cdots = x_p = 0$), наколи x остають в колї о лучу ρ. Для тих функций φ возьмім до порівнаня функцию:

$$\Phi = \frac{N}{1 - \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_p}{\rho}} - N$$

З виду походних тих функций Ф і F слїдно, що наколи розвинемо U на основі систему 2) [подібно, як се було для *u* з систему 1)], дістанемо сочинники додатні і більші, як беззглядні вартости відповідних сочинників в *u*. Вистане проте показати збіжність рядів, які дістанемо з систему 2). Але U, що мають для x=o ту саму вартість Ф, є тотожні, а систем 2) зведе ся до одного рівнаня:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Mm}{1 - \frac{mU}{r}} \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} + \quad + \frac{\partial U}{\partial x_p} \right). \qquad 3)$$

А що Ф завнсить лиш від суми $(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)$, то можна приняти, що і U завнсить також лиш від сеї суми. Наколи отже приймем, що U є лиш функциєю x і $z = (x_1 + x_2 + \cdots + x_p)$, отже:

$U = U(x, z)$, то рівнанє 3) перейде на:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Mmp}{1 - \frac{mU}{r}} \frac{\partial U}{\partial z} \qquad 4)$$

Маємо тепер розважити інтеґрал U того рівнаня, який для x=o зводить ся до:

$$\frac{N}{1 - \frac{z}{\rho}} - N = \frac{Nz}{\rho - z}$$

Рівнанє 4) каже проте, що два вираження:

U і $\left(1 - \frac{mU}{r}\right) z + Mmpx$ (т. є. інтеґрал рівнаня 4) є одно функциєю другого, отже:

$$\left(1 - \frac{mU}{r}\right) z + Mmpx = f(U).$$

Як визначити тепер ту функцию f(U)?

Ми хочемо, щоби для x=o:

$$U = \frac{Nz}{\rho - z};$$

отже тоді:

$$f\left(\frac{Nz}{\rho - z}\right) = \left(1 - \frac{m}{r}\,\frac{Nz}{\rho - z}\right) z,$$

або наколи положимо:

$$\frac{Nz}{\rho - z}\ t, \qquad \text{отже:} \qquad z = \frac{\rho t}{N+t},$$

то:

$$f(t) = \left(1 - \frac{m}{r}\ t\right), \frac{\rho t}{N+t}.$$

Функция f є проте точно означена, а рівнанє, що нам дає U, мусить конче мати вид:

$$\left(1 - \frac{mU}{r}\right) z + Mmpx = \left(1 - \frac{m}{r}\ U\right) \frac{\rho U}{N+U}.$$

То рівнанє є з огляду на U другого степеня; для x=z=o має оно один корінь 0, другий $\frac{r}{m}$. Для нас важний є лиш корінь 0; він є однозначний, скінчений і тяглий в окруженю z=x=o; він буде також функциєю однозначною, скінченою і тяглою арґументів x, x_1, x_2, x_p в окруженю точок $x=x_1=x_2=\cdots=x_p=o$.

Систем 2), що має інтеґрал однозначний, скінчений і тяглий, доказує, що і систем рівнань ріжничкових 1) має систем інтеґралів, що сповняють дані умови.

2. З того теорему можна вивести єще загальнїйший теорем, наколи приймем, що в системі 1) функциї A, B, L зависять не лиш від u, але і від x x_1 x_2 x_p.

Розважимо іменно $(m+p+1)$ рівнань:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial u_1}{\partial x} = \sum\limits_{i,\,k} A_{i,\,k}\,(u_1\ u_2 \quad u_m;\ x'\ x'_1\ x'_2 \quad x'_p)\ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} = \sum\limits_{i,\,k} B_{i,\,k}\,(u_1\ u_2 \quad u_m;\ x'\ x'_1\ x'_2 \quad x'_p)\ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\
\\
\frac{\partial u_m}{\partial x} = \sum\limits_{i,\,k} L_{i,\,k}\,(u_1\ u_2 \quad u_m;\ x'\ x'_1\ x'_2 \quad x'_p)\ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\
\qquad\qquad \frac{\partial x'}{\partial x} = 1. \\
\qquad\qquad \frac{\partial x'_1}{\partial x} = 0. \\
\\
\qquad\qquad \frac{\partial x'_p}{\partial x} = 0.
\end{array}\right\}$$

Для $x=o$ можем собі дати початкові вартости $u_1\ u_2 \quad u_m$; най они будуть функциями φ; також і вартости початкові $x'\ x'_1 \quad x'_p$ можна покласти які-небудь, отже най они будуть:

$$x'=o,\ x'_1=x_1, \quad x'_p=x_p.$$

Послїдні $(p+1)$ рівнань показують, що можна покласти:

$$x'=x,\ x'_1=x, \quad x'_p=x_p,$$

а через се маємо доказ, що:

істнують інтеґрали системи:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial u_1}{\partial x} = \sum\limits_{i,\,k} A_{i,\,k}\,(u_1\ u_2 \quad u_m;\ x\ x_1 \quad x_p)\ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} = \sum\limits_{i,\,k} B_{i,\,k}\,(u_1\ u_2 \quad u_m;\ x\ x_1 \quad x_p)\ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\
\\
\frac{\partial u_m}{\partial x} = \sum\limits_{i,\,k} L_{i,\,k}\,(u_1\ u_2 \quad u_m;\ x\ x_1 \quad x_p)\ \frac{\partial u_i}{\partial x_k}
\end{array}\right\}$$

які для $x=o$ мають вартости $\varphi_1\ \varphi_2 \quad \varphi_m$.

Тернопіль в грудни 1896 р.