Ісаак КУШНІР
Леонід ФІНКЕЛЬШТЕЙН

АЛГЕБРА:
від опанування до захоплення

Посібник для учнів

7–9 класів

Ісаак Кушнір
Леонід Фінкельштейн

Алгебра:
від опанування до захоплення

Посібник для учнів 7—9 класів

ФАКТ
ВИДАВНИЦТВО
Київ • 2002

УДК 512 (07)
ББК 22.14я721
К 96

**Видання здійснене у співпраці
з ТОВ «Поліграфічний Центр “Фоліант”»**

ISBN 966-664-057-0

ШАНОВНІ ДРУЗІ!

Вітаємо вас з тим, що ви починаєте вивчати нову науку — АЛГЕБРУ. На перший погляд, з алгеброю вам доводилося зустрічатися й раніше — прямо з початкової школи ви вивчали числа й закони, з невідомою величиною х задовго до сьомого класу судилося познайомитись, та й інші букви замість чисел ви давно вже використовували.

Але все не так просто!

Якщо у 1–6 класах вивчалися деякі поняття, елементи, факти науки, то з сьогоднішнього дня вивчається сама НАУКА. Тобто відтепер за мету ставиться поступове оволодіння теорією та практикою, систематичність подання матеріалу, вичерпність знань, умінь та навичок під час розв'язування задач.

Саме це доведеться вам, друзі, робити протягом 7–9 класу, а потім і надалі — у старших класах та вищих навчальних закладах. Для когось із вас зустріч з алгеброю буде щасливою, комусь поталанить менше. Але зараз ви всі «на рівних», бо тільки починаєте... Математику, що вивчалася у 5–6 класах, якщо й були з нею деякі проблеми, можна надолужити досить швидко, і почати сьогодні вивчення алгебри з вірою та надією на успіх.

Чому, разом з підручником, який вам видали у школі або ви придбали самі за порадою вчителя, ми пропонуємо цей навчальний посібник?

По-перше тому, шо ми, автори цієї книжки, — вчителі, і вже багато років викладаємо курс алгебри саме так. Тобто у такій же послідовності, з такою ж насиченістю, з таким же тлумаченням тем, як це зроблено у книжці.

Друга причина теж дуже серйозна. Річ у тому, що програма шкільного курсу математики (тобто теми, які вам потрібно вивчити та знати), на жаль, не залишається стабільною — часто на місці одних тем з'являються інші, які, в свою чергу, теж швидко кудись зникають. Тому у посібнику, який перед вами, подаються основні, найважливіші та найстабільніші теми програми з курсу алгебри для учнів 7–9 класів. І якщо під час навчання ви побачите, що якогось розділу не вистачає (до речі, таке буває і під час роботи зі шкільним підручником — занадто швидко змінюються програми), то знайте — ця відсутня тема не є найважчою. Її ви легко зрозумієте завдяки поясненню вчителя або самостійному опрацюванню. Ще раз підкреслимо: **найважчі, найважливіші, найнеобхідніші теми курсу алгебри детально опрацьовані у нашому посібнику**.

І третя причина, чому нам хотілось би, щоб ви користувались цією книжкою. Буквально з першої сторінки ви побачите велику кількість (більшість!) розв'язаних задач. Так буде й надалі — доки ви опановуватимете увесь курс. Навіщо ми це робимо, чому ми «не надаємо вам можливості» розв'язувати задачі самостійно? Тому що, як ми вважаємо, навчитися розв'язувати задачі (а саме це єдиний критерій засвоєння математики!) можна перш за все завдяки тому, що ці задачі ґрунтовно розбираються, а іноді — навіть вивчаються. І тоді поступово виробляється хист та з'являється бажання розв'язати задачу самостійно, одержати правильну відповідь не тільки для оцінки, а й, головне, для власного задоволення, для розуміння, що тема засвоєна та можна рухатися далі. Ну а нерозв'язані задачі відшукати неважко — було б бажання! Ось ми й робимо все для того, щоб виникло у вас, дорогі друзі, таке бажання!

Успіхів вам у вашій роботі. Певні, що ваша плідна праця та наш посібник — це саме те, що потрібно для знань та захоплення.

Щасти вам!

Автори

7

КЛАС

ГЛАВА 1. АЛГЕБРИЧНІ ВИРАЗИ

§ 1. ЧИСЛОВІ ВИРАЗИ

Ми починаємо розмову про математику на вищому рівні, ніж у книзі «Не хочу бути двієчником»[1]. І справа не тільки в тому, що ви подоросліщали на рік. Ми маємо познайомитись з новим розділом математики — алгеброю, а це відбивається як на фактичному матеріалі, так і на його викладі. Однак, «зв'язок часів» існує, і це простежуватиметься вже на перших сторінках книги.

Числові вирази... Вдумайтесь у ці слова, в їхню математичну сполуку: «числа» і «вирази». З'єднавши ці два слова, ми висловлюємо думку (математичну думку!) за допомогою чисел; наприклад,

$$\frac{17-8}{124}, \text{ або } 9, \text{ або } 2+5\cdot(14{,}3-6).$$

Це і є числові вирази. А якщо у числовому виразі виконати математичні дії, то дістанемо числовий вираз у вигляді одного числа, яке називається **значенням виразу**.

ПИТАННЯ. Коли виникають числові вирази?

ВІДПОВІДЬ. Перш за все, коли ви розв'язуєте приклади або задачі; але ж не тільки! Ще вони виникають, коли ви плануєте похід у кіно і при цьому хочете підрахувати, скільки вам потрібно на квитки, морозиво, метро... Потреба у числових виразах справді велика, ми натрапляємо на них повсякчас, інколи навіть на помічаючи цього.

[1] І. Кушнір, Л. Фінкельштейн. Не хочу бути двієчником. — К.: Факт, 2001.

ПИТАННЯ. Але ж усе це, мабуть, нецікаво?! Чи існують «родзинки», «перлини» у задачах з числовими виразами?

ВІДПОВІДЬ. Існують! І одразу ж дамо пораду: зверніть увагу на **мовний фонд алгебри** — коли числовий вираз подається *з допомогою слів*. Так, ви вже неодноразово з цим зустрічались, але тоді ще не прийшов час класифікації. Наприклад, ми говоримо: «сума двох чисел 2 і 3». За цим «ховається» числовий вираз: $2+3$.

ПИТАННЯ. Для чого необхідне мовне формулювання?

ВІДПОВІДЬ. Щоб сформулювати закони (і не тільки математичні!). Тому мовні математичні вирази, які найчастіше використовуються, ми називаємо *золотим мовним фондом алгебри*:

- Сума двох чисел: $2+3$ (далі $a+b$).
- Сума декількох чисел: $2+3+5+\ldots$ (далі $a+b+c+\ldots$).
- Різниця двох чисел: $4-2$ (далі $a-b$).
- Добуток двох чисел: $5\cdot 3$ (далі $a\cdot b$).
- Добуток декількох чисел: $2\cdot 3\cdot 15\cdot 10\cdot\ldots$ (далі $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot\ldots$).
  - Подвоєний добуток двох чисел: $2ab$.
- Частка двох чисел: $7:5$ (далі $a:b$).
- Степінь: 2^5 (далі a^n).
- Квадрат суми двох чисел: $(5+7)^2$ (далі $(a+b)^2$).
- Квадрат різниці двох чисел: $(7-3)^2$ (далі $(a-b)^2$).
- Сума квадратів двох чисел: 3^2+2^2 (далі a^2+b^2).
- Різниця квадратів двох чисел: 3^2-2^2 (далі a^2-b^2).
- Неповний квадрат суми двох чисел: $3^2+3\cdot 2+2^2$ (далі a^2+ab+b^2).
- Неповний квадрат різниці двох чисел: $3^2-3\cdot 2+2^2$ (далі a^2-ab+b^2).
- Куб суми двох чисел: $(7+5)^3$ (далі $(a+b)^3$).
- Куб різниці двох чисел: $(7-5)^3$ (далі $(a-b)^3$).
- Сума кубів двох чисел: 6^3+4^3 (далі a^3+b^3).
- Різниця кубів двох чисел: 6^3-4^3 (далі a^3-b^3).

І взагалі, без *слова* числовий вираз є малоефективним. Саме *слово* допоможе розв'язати задачу, побудувавши числовий вираз.

ПРИКЛАД. Один робітник виготовляє протягом години 7 деталей, а інший — 9 деталей. Скільки деталей вони виготовлять разом протягом 4 годин?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Складаємо за даними в умові *словами* числовий вираз і знаходимо його *значення*:

$$7 \cdot 4 + 9 \cdot 4 = 64 \text{ (дет.)}$$

ВІДПОВІДЬ. 64 деталі.

ПОРАДА. Щоб додавати числові вирази без помилок, треба добре пам'ятати **порядок дій**.

> *Якщо у числовому виразі нема дужок, то спочатку виконують піднесення до степеня, потім дії множення та ділення, потім дії додавання та віднімання.*

Наприклад, $2 \cdot 7^2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 9 = 2 \cdot 49 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 9 = 490 - 12 + 9 = 487.$

> *Якщо у числовому виразі є дужки, то спочатку виконують всі дії над числами у дужках.*

Наприклад, $\left(3^2 \cdot 2 - 4\right) \cdot 4 - \left(12 + 3 - 7\right) = \left(9 \cdot 2 - 4\right) \cdot 4 - 8 = 56 - 8 = 48.$

ПРИКЛАД. Після сьомого прання шматок господарчого мила, який має форму прямокутного паралелепіпеда, зменшився удвічі. Скільки ще разів цим шматком мила можна буде випрати білизну?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Після семи процесів пранням об'єм шматка мила, що залишився, складав $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ частину початкового. Витрачено мила:

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \text{ (шматка).}$$

♦ **Склали числовий вираз! Наближаємось до відповіді!** ♦

Отже, щоразу на прання витрачалась $\frac{1}{8}$ частина шматка. А саме стільки і залишилось. Тобто мила залишилось на одне прання.

ВІДПОВІДЬ. На одне прання.

ПОРАДА. Повторіть, що таке найбільший спільний дільник — НСД і найменше спільне кратне — НСК.

ПРИКЛАД. Давня легенда розповідає, як до мудреця Хозрата Алі підійшов чоловік і запитав його:

— Яке число ділиться без остачі на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?[1]

Мудрець відповів:

— Перемнож між собою число днів тижня, число днів місяця і число місяців року (вважалось, що в кожному місяці 30 днів).

Перевірте, чи правий Хозрат Алі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Мудрець правий. Кратне чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 дорівнює 2520 (перевірте це самостійно!). Але

$$2520 = 7\cdot 30\cdot 12 \text{ — числовий вираз!}$$

Зауважимо, що числа, кратні 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, складають нескінченну множину, яка називається множиною спільних кратних цих чисел. Серед них число $2520 = 7\cdot 30\cdot 12$ — найменше.

ВІДПОВІДЬ. Мудрець правий.

Приклади на всі дії зі звичайними та десятковими дробами і задачі, в яких для розв'язання складаються числові вирази, власне, на повторення курсу шостого класу. Ми ще не раз пропонуватимемо вам задачі на повторення. Вважаємо, що це дуже корисно і навіть необхідно. Отже,

ЗАДАЧА. Обчислити значення виразів:

1) $\left(10:2\frac{2}{3}+7{,}5:10\right)\cdot\left(\frac{3}{40}-\frac{7}{30}\cdot 0{,}25+\frac{157}{360}\right);$

2) $\left(\frac{0{,}216}{0{,}15}+\frac{2}{3}:\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{196}{225}-\frac{7{,}7}{24\frac{3}{4}}\right)+0{,}695:1{,}39;$

[1] Були ж люди! — *Прим. авторів.*

3) $1\frac{7}{20}:2{,}7+2{,}7:1{,}35+0{,}4:2\frac{1}{2}\cdot\left(4{,}2-1\frac{3}{40}\right).$

4) $\left(\dfrac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}03}{\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}-\dfrac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{80}}\right):2\frac{1}{20}.$

5) $6:\frac{1}{3}-0{,}8:\dfrac{1{,}5}{\frac{3}{2}\cdot 0{,}4\cdot\dfrac{50}{1:\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4}+\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0{,}25}}{6-\dfrac{46}{1+2{,}2\cdot 10}}.$

ВІДПОВІДЬ. 1) $2\frac{3}{80}$; 2) 5; 3) 3; 4) 10; 5) 11.

Розповідь про числовий вираз ніколи не може бути закінченою. Розглянемо ще одну задачу (до речі, такі задачі називаються *текстовими*), яка задається мовно, а розв'язується за допомогою числовних виразів.

ЗАДАЧА. На зупинці біля школи у порожній автобус зайшли учні. На маршруті було ще тільки 5 зупинок. На першій та другій зупинках разом з автобуса вийшло 12 учнів, на другій та третій разом — 15, на третій та четвертій — 11, на четвертій та п'ятій — 16, а на п'ятій та першій зупинках разом з автобуса вийшло 18 учнів. На жодній із зупинок до автобуса ніхто не заходив. Скільки всього учнів їхало в автобусі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Покажемо, що і в такій задачі розв'язання одержуємо за допомогою числового виразу. Підрахуємо, скільки всього було «виходів учнів» з автобуса. (Це число співпадає, звичайно, з загальною кількістю учнів, що їхали в автобусі!).

Розглянемо суму $12+15+11+16+18$. У ній «кожен вихід» підрахований двічі: наприклад, вихід учня на третій зупинці буде враховано в числі «виходів» як на другій і третій так і на третій і четвертій зупинках. Таким чином, загальна кількість учнів, що їхали в автобусі, дорівнює $(12+15+11+16+18):2=36$.

ВІДПОВІДЬ. 36 учнів.

§ 2. АЛГЕБРИЧНІ ВИРАЗИ

Якщо у числовому виразі замінити хоча б одне число буквою, то отримаємо вже не числовий вираз, а алгебричний.

Наприклад:

$$2+a \text{ або } 2+(a-a):3.$$

І нехай вас не дивує, що у другому прикладі, це очевидно, у дужках стоїть нуль, тобто *значення* виразу дорівнює 2 і не залежить від a. Але ж це *значення* не залежить! А ось у записі цього виразу є a. Тому це *алгебричний вираз*!

— Тату, — звернувся Буратіно до тата Карла, — мені в школі нудно: $2+3, 7+8$... Якийсь дитячий садок «Золотий ключик»! Склади мені алгебру!

— Гаразд, — погодився тато Карло! І написав...

ПИТАННЯ. «?» Що написав тато Карло?

ВІДПОВІДЬ. «!» Він до числового виразу дописав БУКВИ:

$$2+3+x; \quad 7+8-c.$$

Якщо замість букв, що входять до алгебричного виразу, підставити якісь числа і виконати дії, то результат цих дій називають значенням алгебричного виразу (при даних значеннях букв).

Ти знаєш, початок алгебри —
Це до узагальнення крок,
Бо нащо ж нам схожі вирази
Обчислювать кожен урок?
Нехай собі числа міняються,
Ми шлях оберемо свій,
Замінимо числа на букву
І будем присвоювать їй
Будь-які значення різні —
Загальна вже й відповідь є.
Скажем «па-па» арифметиці,
Нам алгебра другом стає,
Символом, знаком, початком —
Відважний рішення хід, —
Дорога, якою підемо
У переможний похід!

Перейдемо до нашої першої алгебричної задачі:

ЗАДАЧА. Знайдіть значення алгебричних виразів:

1) $9a\cdot(a-8)+135$, якщо $a=3$;

2) $(p+0{,}6)(p-0{,}6)$, якщо $p=0{,}2$;

3) $k+\frac{2}{3}\left(k-\frac{2}{3}\right)$, якщо $k=\frac{1}{6}$;

4) $(3m+6)\cdot n$, якщо $m=-\frac{1}{3}, n=1{,}2$;

5) $\frac{a}{b}+3c$, якщо $a=10$, $b=5$, $c=-\frac{1}{3}$;

6) $(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)$,

якщо $a=0$, $b=1$, $c=3$, $d=3$, $e=4$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 0; 2) $-0{,}32$; 3) $-\frac{1}{6}$; 4) 6; 5) 1; 6) 168.

У попередніх класах ви вже зустрічались з математичними формулами, у яких присутні букви. Наприклад, $S=V\cdot t$ — формула шляху; $n=2k$ — формула парного числа; $S=\frac{1}{2}(a+b)h$ — формула площі трапеції і т. д. Отже, хоча як окремий предмет алгебру ви тільки починаєте вивчати, але певні її елементи вам вже знайомі.

Для розв'язання задач вам необхідно буде навчитись складати алгебричні вирази.

ПИТАННЯ. Чим відрізняється складання алгебричних виразів від складання числових виразів?

ВІДПОВІДЬ. Відверто кажучи, нічим! Просто треба пам'ятати, що коли в умові задачі якась величина задана не числом, а буквою, то в цьому немає нічого «жахливого». Треба оперувати з цією буквою так само, ніби там було б число.

Розглянемо декілька задач, щоб проілюструвати це правило.

ЗАДАЧА 1. Скільки є хвилин а) в 2 годинах 30 секундах? б) в m годинах? в) в t секундах? г) в m годинах t хвилинах l секундах?

ВІДПОВІДЬ. а) 120,5 хвилини; б) $60m$ хвилин;

в) $\frac{t}{60}$ хвилин; г) $\left(60m+t+\frac{l}{60}\right)$ хвилин.

ЗАДАЧА 2. Поїзд проходить протягом години 40 км. Скільки кілометрів він подолає протягом 2 годин? 2,5 годин? t годин?

ВІДПОВІДЬ. 80 км; 100 км; $40t$ км.

ЗАДАЧА 3. Для охолодження доменної печі крізь її стінки щодоби пропускається 26 кубометрів води. Скільки кубометрів води проходить крізь стінки доменної печі протягом а) двох діб? б) п'яти діб? в) m діб?

ВІДПОВІДЬ. а) $52\,\text{м}^3$; б) $130\,\text{м}^3$; в) $26m\,\text{м}^3$.

ЗАДАЧА 4. В одному зошиті — 12 аркушів. Скільки аркушів а) у 5 зошитах? б) у 8 зошитах? в) у a зошитах?

ВІДПОВІДЬ. а) 60 аркушів; б) 96 аркушів; в) $12a$ аркушів.

ЗАДАЧА 5. Населення міста — 3600 чоловік. Підрахуйте кількість населення цього міста через рік, якщо щорічний приріст населення в місті 2%; 4%; 5%; 6%; p%.

ВІДПОВІДЬ. 3672, 3744, 3780, 3816, $\left(3600+\dfrac{3600\cdot p}{100}\right)$.

ЗАДАЧА 6. Під час виготовлення хліба з пшеничної муки виходить припічка, що складає $\frac{1}{4}$ ваги використаної муки. Скільки вийде хліба з a кілограмів пшеничної муки? Обчислити при $a=4; a=6$.

ВІДПОВІДЬ. $\frac{5}{4}a$ кг; 5 кг; 7,5 кг.

ЗАДАЧА 7. Батько на 30 років старший за сина. Скільки років батькові, якщо синові p років?

ВІДПОВІДЬ. $p+30$ років.

ЗАДАЧА 8. У залізничній касі продано a квитків вартістю 3 гривні та b квитків вартістю 5 гривень. Скільки одержано грошей за всі квитки?

ВІДПОВІДЬ. $(3a+5b)$ гривень.

ЗАДАЧА 9. В одному мішку m кілограмів муки, в другому — на n кілограмів менше. Скільки кілограмів муки у другому мішку? Чому число n не може бути більшим за число m?

ВКАЗІВКА. $m-n\geq 0$.

ЗАДАЧА 10. Першого дня засіяно $\frac{1}{4}$ посівної площі. Скільки гектарів було засіяно першого дня, якщо вся посівна площа дорівнює a гектарам?

ВІДПОВІДЬ. $\frac{1}{4}a$ гектарів.

ПОРАДА. Зверніть увагу на задачі із зірочкою (*). Вона позначає задачу підвищеної складності.

Зрозуміло всім відразу:
Зірка — знак дороговказу.
І, щоб не трапилась невдача,
Розв'язуй з зіркою задачу!

ЗАДАЧА.* У двох мішках є однакова кількість картоплі. З першого мішка висипали 10%, а потім досипали 10%. Кількість картоплі у другому мішку спочатку збільшили на 10%, а потім зменшили на 10%. У якому мішку тепер більше картоплі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо початкову кількість картоплі у кожному з мішків через x. У першому мішку після зменшення кількості картоплі на 10% її стало $0{,}9x$, після збільшення на 10% картоплі стало

$$0{,}9x + 0{,}09x = 0{,}99x.$$

У другому мішку після збільшення на 10% картоплі стало $1{,}1x$, а після зменшення на 10% стало

$$1{,}1x - 0{,}11x = 0{,}99x.$$

ВІДПОВІДЬ. У мішках картоплі лишилось однаково.

У цій задачі ми вже не тільки використовуємо алгебричні вирази, але й записуємо рівність таких виразів. Ця тема потребує вже більш детального вивчення, до якого ми зараз і перейдемо.

Алгебричні рівності. Формули.

ПИТАННЯ. Що таке числова рівність?

ВІДПОВІДЬ. Два числових вирази, з'єднані знаком «дорівнює» (=), є числовою рівністю:

$$7 = 7; \quad 12 = 10 + 2.$$

УВАГА. Знак рівності може з'єднати і нерівні числові вирази, наприклад,

$$3 = 5\ ??$$

В цьому випадку це *хибна рівність*. З цих двох слів (знову слова!) будуть створені нерівності ($3 < 5$)! Але про це пізніше.

Тепер познайомимося з *алгебричними рівностями*: два алгебричних вирази, з'єднані знаком «дорівнює» (=):

$$a = a;\quad 2b = 2b;\quad 3c = 4;\quad 7a + 3b = 4v.$$

ПИТАННЯ. А формули також можна назвати рівностями?

ВІДПОВІДЬ. Так, можна!

За допомогою формул і букв запишемо деякі алгебричні співвідношення:

$n = 2k\ (k \in \mathbb{N})$ — формула парного числа.

$n = 2k+1\ (k \in \mathbb{N})$ — формула непарного числа.

$n = 3k\ (k \in \mathbb{N})$ — формула числа, що ділиться на 3.

Запишемо у вигляді формул властивості арифметичних дій (арифметичні закони):

ДОДАВАННЯ.

Переставний закон:

словами: **від перестановки доданків сума не змінюється,**

формула: $a + b = b + a.$

Сполучний закон:

словами: **доданки можна поєднувати в групи,**

формула: $(a+b)+c = a+(b+c).$

МНОЖЕННЯ.

Переставний закон:

словами: **від перестановки співмножників добуток не змінюється,**

формула: $a \cdot b = b \cdot a.$

Сполучний закон:

словами: **добуток не змінюється, якщо яку-небудь групу співмножників, що стоять поруч, замінити їх добутком,**

формула: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$

Розподільний закон множення відносно додавання:

словами: **для того, щоб помножити суму декількох доданків на число, треба кожен з доданків помножити на це число і результати скласти,**

формула: $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c.$

Формули кожна наука має,
Їх не злічити всіх,
Алгебра, друже, допомагає,
Вивчити добре їх.
Формулу вмійте скласти,
Мусите й довести,
І застосувати,
Одним словом — знати!
Скільки всього треба,
Суцільні завали...
Треба, щоб із алгеброю
Ви відпочивали.
Формула життєва,
Формула знання,
Треба, аби другом
Стала вам вона!

ЗАДАЧА 1. Запишіть у вигляді рівності такі твердження:

1) сума будь-якого числа і нуля дорівнює цьому числу;

2) різниця будь-якого числа і нуля дорівнює цьому числу;

3) добуток зворотніх чисел дорівнює одиниці;

4) добуток будь-якого числа і нуля дорівнює нулю;

5) добуток будь-яких двох чисел дорівнює добутку двох чисел, їм протилежних;

6) добуток двох рівних чисел дорівнює квадрату заданого числа;

7) добуток трьох рівних чисел дорівнює кубу заданого числа.

ВІДПОВІДЬ. 1) $a+0=a$; 2) $a-0=a$; 3) $a\cdot\frac{1}{a}=1$;

4) $a\cdot 0=0$; 5) $a\cdot b=(-a)\cdot(-b)$;

6) $a\cdot a=a^2$; 7) $a\cdot a\cdot a=a^3$

ЗАДАЧА 2. Дано два числа: a та b. Напишіть:

1) потроєний добуток цих чисел;
2) подвоєний добуток числа a та суми цих чисел;
3) різницю числа x та квадрата суми цих чисел.

ВІДПОВІДЬ. 1) $3ab$; 2) $2a(a+b)$; 3) $x-(a+b)^2$.

ЗАДАЧА 3. Дано три числа: a,b та c. Написати:

1) збільшене утричі перше число;
2) подвоєний добуток перших двох чисел;
3) збільшений утричі добуток другого та третього чисел;
4) добуток суми перших двох чисел та їхньої різниці;
5) подвоєний добуток перших двох з цих чисел на збільшену втричі суму першого з них та третього;
6) добуток перших двох з цих чисел на квадрат третього;
7) частку від ділення суми двох з цих чисел на третє.

ВІДПОВІДЬ. 1) $3a$; 2) $2ab$; 3) $3bc$;
4) $(a+b)(a-b)$; 5) $2ab\cdot 3(a+c)$;
6) $ab\cdot c^2$; 7) $\frac{a+b}{c}$.

ЗАДАЧА 4. Написати загальну формулу:

1) числа, кратного 11; 2) числа, кратного 2 і 3.

ВІДПОВІДЬ. 1) $11k\,(k\in\mathbb{N})$; 2) $6l\,(l\in\mathbb{N})$.

ЗАДАЧА 5. Прочитати алгебричні вирази, використовуючи терміни «сума», «різниця», «добуток» і «частка»:

а) mp; б) $20+xy$; в) $p-lk$;
г) $pl+nk$; д) $p-q$; е) $(2+k)x$;
ж) $\frac{m}{n}+q$; з) $(p-q)(p+q)$.

ЗАДАЧА 6. Записати число, що має

1) m десятків та n одиниць;
2) p сотень та q одиниць;
3) a сотень, b десятків та c одиниць.

ВІДПОВІДЬ. 1) $10m+n$; 2) $100p+q$;
3) $100a+10b+c$.

Розглянемо тепер три текстові задачі, для розв'язання яких потрібно написати (але спочатку придумати!) формулу.

ЗАДАЧА 7. У саду росте m рядів дерев по n дерев в кожному ряду. Визначити кількість дерев у саду, позначивши це число буквою P. Обчислити P при $m=8$, $n=6$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$P=mn$. При $m=8, n=6, P=8\cdot 6=48$.

ВІДПОВІДЬ. $P=mn$; 48 дерев.

ЗАДАЧА 8. Кінозал поділяється проходом на 2 частини, причому в кожній частині є r рядів стільців по s стільців у кожному ряду. Визначити загальну кількість стільців у кінозалі, позначивши це число буквою N. Заповнити таблицю:

r	20	25	16
s	9	15	8
N			

ВКАЗІВКА. $N=2rs$.

ЗАДАЧА 9. Машину завантажили a мішками пшениці вагою b кілограмів кожен і c мішками вівса, вагою d кілограмів кожен. Знайти вагу всього вантажу.

ВІДПОВІДЬ. $P=ab+cd$.

Але ж формулу потрібно не тільки написати, а й використати! У наступних трьох задачах формула вже відома, тому застосуйте її для розв'язання.

ЗАДАЧА 10. Відомо, що вага P тіла в грамах, його об'єм V в кубічних сантиметрах і питома вага d матеріалу, з якого виготовлене це тіло, в грамах, поділених на кубічний сантиметр $\left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$, пов'язані формулою $d=\frac{P}{V}$. Знайти:

1) питому вагу заліза, якщо 30 см^3 заліза важать 234 г.
2) вагу шматка міді об'ємом в 50 см^3, якщо питома вага міді дорівнює $8{,}9\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $7{,}8\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$; 2) 445 г.

ЗАДАЧА 11. На думку лікарів, кількість годин h щоденного сну людини у віці до 18 років визначається за формулою:

$$h = 8 + \frac{18 - t}{2}, \text{ де } t \text{ — вік у роках.}$$

Користуючись цією формулою, складіть таблицю тривалості щоденного сну в залежності від віку:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
h																		

ЗАДАЧА 12. «Жива» вага корови визначається (наближенно) за формулою:

$$P = \frac{l \cdot k}{50},$$

де P — вага корови у кілограмах, l — довжина спини корови від холки до хвоста в сантиметрах, k — обхват біля лопаток в сантиметрах. Знайти живу вагу корови, якщо $l = 112$ см, $k = 170$ см.

ВІДПОВІДЬ. 380,8 кг.

І, нарешті, з однієї формули можна отримувати інші:

ЗАДАЧА 13. З формули $A = n \cdot R$ виразити R через A та n.

ВІДПОВІДЬ. $R = \frac{A}{n}$.

ЗАДАЧА 14. З формули $V = \frac{S}{t}$ виразити:

1) t через V та S;
2) S через V та t.

ВІДПОВІДЬ. 1) $t = \frac{S}{V}$; 2) $S = t \cdot V$.

ЗАДАЧА 15. З формули $S = V \cdot t + l$ виразити:

1) l через S, V та t;
2) V через S, t та l;
3) t через S, V та l;

ВІДПОВІДЬ. 1) $l = S - V \cdot t$; 2) $V = \frac{S - l}{t}$; 3) $t = \frac{S - l}{V}$.

§ 3. ПОВТОРЕННЯ: «НЕРІВНОСТІ»

З *числовими нерівностями* ви вже зустрічалися: $5 > 3$ — істинна числова нерівність. $7 < 6$ — хибна числова нерівність.

У алгебрі повна аналогія: $a > b$; $c < d$ — алгебричні нерівності, які називають просто «нерівності». І це не дивно — адже вони узагальнюють числові нерівності.

ПИТАННЯ. Чи можна нерівність «описати» словами?

ВІДПОВІДЬ. Так. Наприклад, нерівність $x > y$ читається так: «ікс більший за ігрек».

Подвійні нерівності:	$c < a < b$.
Строгі нерівності:	$a > b$; $c < d$.
Нестрогі нерівності:	$m \geq n$; $c \leq d + 5$.

ПИТАННЯ. Як «описати» мовно нестрогі нерівності?

ВІДПОВІДЬ. Словами «не більше», «не менше»:

$a \leq b$ — «a не більше за b»; $x \geq y$ — «x не менший за y».

ЗАДАЧА 1. Порівняти значення виразів:

1) $\frac{2}{3}$ та $\frac{3}{2}$; 2) $4 \cdot 12{,}3$ та $12{,}3 \cdot \frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{7} - \frac{1}{3}$ та $\frac{1}{8} - \frac{1}{10}$;

4) $3\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3}$ та $\left(2\frac{2}{3} - \frac{7}{8}\right) \cdot 2$; 5) $\frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{4}{5}$ та $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}$.

Розглянемо наступну задачу (зверніть увагу, вона із зірочкою!) і нагадаємо, що коли перша цифра двоцифрового числа дорівнює a, а друга — b, то це число записується так: $\overline{ab}$, тобто

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b.$$

ЗАДАЧА 2.* Чи існує двоцифрове число, яке удвічі рази більше за добуток своїх цифр?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай існує таке двоцифрове число, коли

$$\overline{ab} = 2 \cdot a \cdot b.$$

Тоді

$$10 \cdot a + b = 2 \cdot a \cdot b, \text{ або } b = 2 \cdot a \cdot (b - 5).$$

Розглянемо детальніше останню рівність. Оскільки b — цифра, то $b \geq 0$. Тоді й $b-5 \geq 0$, тобто $b \geq 5$. Оскільки у правій частині рівності є множник 2, то ліва частина рівності ділиться на 2, і b — парна цифра. Отже, b дорівнює або 6, або 8. Якщо $b=6$, то $a=3$. Якщо ж $b=8$, то $a=\frac{4}{3}$, що неможливо. Отже, шукане число — $\overline{36}$.

ВІДПОВІДЬ. 36.

ЗАДАЧА 3. Порівняти значення виразів:

1) a та $-a$ при $a=2$ та при $a=-3$;

2) $2{,}8a-5$ та $-3{,}8a+4$ при $a=-1$ та при $a=0$;

3) $2x-3y$ та $2x+3y$ при $x=2{,}8$ та $y=-4{,}2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) При $a=2, a>-a$, при $a=-3, a<-a$.

ЗАДАЧА 4. Порівняти значення виразів:

1) $3x-2$ і $2x-3$ при $x=-\frac{1}{3}$; 2) xy і $\frac{x}{y}$ при $x=4{,}2$; $y=0{,}23$.

ЗАДАЧА 5. Порівняти значення виразів:

1) $\frac{|x-2|}{4}$ та $|2x-3|$ при $x=0$; 2) $|x|$ та $|x-2|$ при $x=-2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $|2x-3|>\frac{|x-2|}{4}$; 2) $|x|<|x-2|$.

ЗАДАЧА 6. Записати у вигляді подвійної нерівності:

1) 9 менше 10 та 10 менше 15; 2) x більше a та менше b;

3) a більше 2,3 та менше 4.

ЗАДАЧА. Перевірити, чи виконуються нерівності:

1) $x>4{,}7$ при $x=1{,}8;\ 4{,}7;\ 6{,}3$; 2) $a<12{,}4$ при $a=10;\ 12{,}4;\ -7$;

3) $-1<x<3{,}5$ при $x=0;\ -5;\ -0{,}5$?

ЗАДАЧА 7. У шестицифровому числі перша цифра співпадає з четвертою, друга з п'ятою і третя з шостою. Довести, що це число є кратним 7, 11, 13.

ДОВЕДЕННЯ

Позначимо першу цифру числа буквою a, другу — b, третю — c. Тоді дане число запишеться так: $\overline{abcabc}$. За умовою,

$$\overline{abcabc}=1000\cdot\overline{abc}+\overline{abc}=1001\cdot\overline{abc}=7\cdot 11\cdot 13\cdot\overline{abc}.$$

§ 4. ДУЖКИ В АЛГЕБРІ. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Слово «дужки» вам знайоме. Нагадаємо, що вони застосовувались у діях з числами, якщо потрібно було (або зручно!) змінити порядок дій.

> *Використання дужок у алгебричних виразах аналогічне застосуванню їх у числових виразах.*

Ми маємо на меті сформулювати деякі правила, необхідні для роботи з дужками, але перш поговоримо про тотожності та тотожні перетворення.

ОЗНАЧЕННЯ. Рівність, істинна при всіх допустимих значеннях букв, що входять до її складу, називається тотожністю, а вирази, розташовані у лівій та правій її частинах називаються тотожно рівними.

Наприклад, $3a+8=3a+8$; $7x=7x$; $\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$.

ПИТАННЯ. Що означає: «допустимі значення букв»?

ВІДПОВІДЬ. Це ті значення букв, за яких алгебричні вирази, що входять у рівність, мають сенс.

ПИТАННЯ. Що означає «має сенс»? У книзі «Не хочу бути двієчником» ми з таким поняттям не зустрічались?!

ВІДПОВІДЬ. Справді, не зустрічались. В алгебрі може виникнути ситуація, коли одне (або декілька) числових значень букв алгебричного виразу неможливе. Наприклад, «ділення на нуль»: $\frac{1}{a}$.

Очевидно, при $a=0$ алгебричний вираз $\frac{1}{a}$ не має сенсу.

ЗАУВАЖЕННЯ! Рівності, які виражають основні властивості (закони) дій над числами:

$$a+b=b+a;\ ab=ba \text{ й т. і. —}$$

є тотожностями.

ЗАДАЧА. Чи є тотожно рівними такі вирази:

1) $3+7ab$ та $7ba+3$; 3) $(m+n)\cdot 0$ та $m+n$;

2) $3x+5$ та $3(x+5)$; 4) $p(m+n)$ та $pm+pn$.

ВІДПОВІДЬ. 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так.

ОЗНАЧЕННЯ. Заміну одного виразу іншим, тотожно рівним йому виразом, називають тотожним перетворенням або просто перетворенням.

> *Узяття в дужки та розкриття дужок — це тотожні перетворення.*

ОЗНАЧЕННЯ. Якщо якийсь алгебричний вираз можна за допомогою тотожних перетворень записати у вигляді суми декількох інших алгебричних виразів, то він називається **алгебричною сумою**.

УВАГА! НЕЗВИЧНО!!!

$a-b$ — це алгебрична сума,

оскільки $a-b=a+(-b)$ — тотожне перетворення.

(Чудеса у цих задачах
Можуть статись навсправжки —
Із різниці вийде сума,
Якщо вжити тут дужки.)

ПРИКЛАД. Записати вираз $2a-3b-5c+d$ у вигляді алгебричної суми.

ВІДПОВІДЬ. $2a-3b-5c+d=2a+\left(-3b-5c\right)+d.$

Правило розкриття дужок, перед якими стоїть знак «плюс»:

> *Знак перед дужками та самі дужки прибираються, зберігається знак кожного з доданків.*

Наприклад, $3a-5p+\left(2c-1-4b\right)=3a-5p+2c-1-4b.$

Правило розкриття дужок, перед якими стоїть знак «мінус»:

> *Знак перед дужками і дужки прибираються, знаки виразів, що стоять у дужках, змінюються («плюс» на «мінус», «мінус» на «плюс»).*

Наприклад, $2b-c-\left(2a+3b-5\right)=2b-c-2a-3b+5.$

Якщо перед дужкою знак стоїть «плюс»,
Нічого, повірте, я більш не боюсь!
Дужки прибираю рухом одним,
Все буде, як треба, — зовсім без змін.

Якщо ж перед дужкою «мінус» стоїть,
Тоді спрага дії прокинеться вмить:
Повинен я знаки спокійно міняти —
Нічого страшного, але треба знати:
Де «плюс» був — там «мінус» поставити треба,
А «мінус» — на «плюс» є змінити потреба!

ЗАДАЧА 1. Обчислити:

1) $\frac{2ab(b+c)}{b-c}$ при $a=c=\frac{1}{3}; b=\frac{1}{2}$;

2) $\frac{(3k+l)2k}{k-l}+\frac{1}{3}$ при $k=\frac{1}{3}; l=0{,}1$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $1\frac{2}{3}$; 2) $3\frac{10}{21}$.

ЗАДАЧА 2. Обчислити:

1) $(x+1)(x+2)(x+3)$ при $x=2$; $x=3$;

2) $2(x+3)(x-4)$ при $x=4$;

3) $\frac{3(m+n)(m-n)}{2m+1}-0{,}7$ при $m=2{,}5$; $n=1{,}3$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 60; 120; 2) 0; 3) 1,58.

ЗАДАЧА 3. Обчислити:

1) $\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}\right):c+2ab$ при $a=6{,}8$; $b=2{,}4$; $m=2$; $n=3$; $c=0{,}7$.

2) $\frac{3(x-y)}{2p+q}-1$ при $x=8{,}31$; $y=2{,}29$; $p=2{,}01$; $q=2$.

3) $\frac{5(bc+m)}{2q+4\frac{1}{4}}$ при $b=\frac{2}{3}$; $c=6$; $q=\frac{1}{2}$; $m=\frac{1}{5}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 38,64; 2) 2; 3) 4.

ПОВТОРЕННЯ

а) $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}.$

ВІДПОВІДЬ. 32.

б) $\left(1\frac{2}{5}+3{,}5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3{,}4:2\frac{1}{8}-0{,}35.$

ВІДПОВІДЬ. 3.

в) $\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{21}{45}}{1\frac{5}{6}}\cdot\dfrac{1{,}125+1\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{0{,}59}.$

ВІДПОВІДЬ. $\frac{5}{6}$.

г) $\left(\dfrac{3{,}75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1{,}875}-\dfrac{2\frac{3}{4}+1{,}5}{2{,}75-1\frac{1}{2}}\right)\cdot\dfrac{10}{11}.$

ВІДПОВІДЬ. 6.

ЗАДАЧА 4. Вказати порядок дій у виразах і прочитати їх:

1) $ab-c$; 4) $a+b(c-d)$; 7) $a:c(p-q)$;
2) $(a+c)c-d$; 5) $(m+n):(m-n)$; 8) $(x-y)z+p$;
3) $(m-n):p$; 6) $l-2p(c+k)$; 9) $m:(a-b)+n$.

ЗАДАЧА 5. Знайти числове значення таких виразів:

1) $3|a|+5|b|$ при $a=-2; b=-1$;
2) $|2x-3y|$ при $x=0{,}5; y=-0{,}7$;
3) $4|a|+8-a$ при $a=-2$;
4) $-3|x|+2x-1$ при $x=-5$;

ВІДПОВІДЬ. 1) 11; 2) 3,1; 3) 18; 4) –26.

ЗАДАЧА 6. Знайти таке найбільше трицифрове число, яке ділилося б на 7, і якщо викреслити першу його цифру, то одержане число знову ділитиметься на 7.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай шукане число має вигляд $\overline{abc}$. За умовою $\overline{abc}=7k$, де k — натуральне, та $\overline{bc}=7n$, де n — також натуральне число. Тоді, з одного боку

$$\overline{abc}-\overline{bc}=100a,$$

а з іншого

$$\overline{abc}-\overline{bc}=7(k-n)$$

Звідси: a ділиться на 7. Це можливо за двох випадків: якщо $a=0$ (що неможливо, бо a — перша цифра числа) або якщо $a=7$. Шукане число буде найбільшим, коли буде найбільшим $\overline{bc}$, тобто коли $\overline{bc}=98$ (це найбільше двоцифрове число, яке ділиться на 7). Отже, шукане число дорівнює 798.

ВІДПОВІДЬ. 798.

ЗАДАЧА 7. Спростити:

1) $3x-(5x-(2x-1))$; 2) $2a-(+10a)$;

3) $8a-(4a-3b)-5b$.

ЗАДАЧА 8. Довести, що за будь-яких значень a значення виразу $2(3a-5)-(-7-(5-6a))$ парне.

ДОВЕДЕННЯ

Маємо:

$$2(3a-5)-(-7-(5-6a))=6a-10-(-7-5+6a)=$$
$$=6a-10-(-12+6a)=6a-10+12-6a=2\text{ —}$$

парне число, що й треба було довести.

ЗАДАЧА 9. Знайти суму трьох послідовних натуральних чисел, з яких найменше дорівнює $2n$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$2n+(2n+1)+(2n+2)=6n+3.$$

ВІДПОВІДЬ. $6n+3$.

ЗАДАЧА 10. Довести, що сума трьох послідовних цілих чисел ділиться без остачі на 3.

ДОВЕДЕННЯ

Маємо:

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3.$$

Оскільки в одержаному виразі кожен з доданків ділиться на 3, то твердження задачі доведено.

ЗАДАЧА 11. Чи істинне твердження, що коли різниця двох натуральних чисел — парне число, то їхня сума також парне число?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай n та m — два натуральних числа. За умовою, їхня різниця

$$n - m = 2k \text{ —}$$

парне число. Нехай $n + m = p$. Тоді

$$(n - m) + (n + m) = 2k + p,$$

$$\text{або } 2n = 2k + p.$$

Для того, щоб остання рівність виконувалась, необхідно, щоб p було парним числом.

ВІДПОВІДЬ. Твердження істинне.

ЗАДАЧА 12. Чи є істинним твердження, що коли різниця двох натуральних чисел є число непарне, то їхня сума — також число непарне.

ВКАЗІВКА. Задача аналогічна попередній. (Відповідь — так.)

ЗАДАЧА 13. Якщо сума трьох послідовних цілих чисел є число непарне, то добуток цих чисел ділиться на 24. Довести.

ДОВЕДЕННЯ

Якби менше число було непарним, то таким було б і більше число, а середнє число було б тоді парним. Але тоді сума цих чисел — парне число, що суперечить умові. Отже, менше число, а також більше число — парні. Тоді одне з них кратне 4 (покажіть!), і, отже, добуток цих чисел кратний 8. Але з трьох послідовних цілих чисел одне завжди ділиться на 3, отже, добуток трьох таких чисел ділиться на 24, що й треба було довести.

ЗАДАЧА 14.* Яке двоцифрове число, якщо прочитати його справа наліво, збільшується в 4,5 рази?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

МІРКУВАННЯ!

1) Шукане число більше 10 і менше 25 (оскільки $25 \cdot 4{,}5$ — число трицифрове).

2) Шукане число парне (оскільки добуток його і 4,5 — ціле число).

3) «Перевернуте» число кратне 9 (оскільки містить 9 половин парного числа).

4) Шукане число кратне 9 (оскільки складається з тих самих цифр, що й обернене).

5) Шукане число — 18 (між 10 та 25 немає іншого парного числа, кратного 9).

ВІДПОВІДЬ. 18.

ЗАДАЧА 15. Теплохід іде з Києва до Запоріжжя протягом двох діб, повертається — протягом трьох діб. Визначити, який час пливтиме пліт з Києва до Запоріжжя.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай пліт пропливає відстань a від Києва до Запоріжжя за x діб. Тоді його швидкість, що дорівнює швидкості течії Дніпра, є $\frac{a}{x}$ км/добу. Швидкість теплохода за течією $\frac{a}{2}$ км/добу. Отже, швидкість теплохода у стоячій воді буде $\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{x}\right)$ км/добу. А оскільки швидкість руху теплоход проти течії дорівнює $\frac{a}{3}$ км/добу, то швидкість у стоячій воді — $\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{x}\right)$ км/добу. Отже, маємо:

$$\frac{a}{2}-\frac{a}{x}=\frac{a}{3}+\frac{a}{x}; \quad x=12.$$

ВІДПОВІДЬ. 12 діб.

ЗАДАЧА 16. Вологість свіжоскошеної трави 60%, сіна — 15%. Скільки сіна вийде з однієї тонни свіжоскошеної трави?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

В одній тонні свіжоскошеної трави 60% вологи, тобто 600 кг, тому сухої маси

$$1000-600=400 \text{ (кг)}.$$

Ця маса в сіні складає 85%, звідки вага сіна складає

$$400:\frac{85}{100}=470\frac{10}{17} \text{ (кг)}.$$

ВІДПОВІДЬ. $470\frac{10}{17}$ кг.

ЗАДАЧА 17. Розставити у виразі $4\cdot 12+18:6+3$ дужки так, щоб вийшло а) число 50; б) найменше можливе число; в) найбільше можливе число.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\text{а) } 4\cdot 12+18:(6+3)=50;\quad \text{б) } (4\cdot 12+18):(6+3)=\frac{22}{3};$$

$$\text{в) } 4\cdot(12+18:6+3)=72.$$

ЗАДАЧА 18. У виразі $1:2:3:4:5:6:7:8:9$ розставити дужки так, щоб результат був а) мінімальним; б) максимальним.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

а) Мінімальний результат ми дістанемо, якщо... взагалі не будемо розставляти дужки, бо за означенням

$$1:2:3:4:5:6:7:8:9=1:(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9).$$

Справді, частка буде мінімальною, якщо чисельник дробу буде найменшим, а знаменник — найбільшим. Тобто дужки взагалі не потрібні!

б) Максимальний результат отримується таким чином:

$$1:(2:3:4:5:6:7:8:9)=1:\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}=\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2}.$$

Справді, ми все одно мусимо ділити на 2, оскільки 2 стоїть у даному виразі після першого знаку ділення. А чисельник ми зробили якомога більшим.

ЗАДАЧА 19.* За дев'ять однакових книжок заплатили більше ніж 11 гривень, але менше ніж 12 гривень. За 13 таких книжок заплатили 15 гривень і декілька копійок, але не більше ніж 16 гривень. Яка вартість однієї книжки?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Очевидно, що одна книжка коштує більше гривні, але менше двох гривень. Нехай вартість книжки складає 1 гривню та x копійок. Враховуючи, що

$$1100 \leq 900 + 9x \leq 1200,$$

маємо $23 \leq x \leq 33$. Але крім того x задовольняє умову

$$1500 \leq 1300 + 13x \leq 1600,$$

тому $16 \leq x \leq 23$. Отже, вартість книжки — 1 гривня 23 копійки.

ВІДПОВІДЬ. 1 гривня 23 копійки.

ГЛАВА 2. РІВНЯННЯ З ОДНИМ НЕВІДОМИМ

§ 1. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ

Рівність, яка містить невідоме число x, зустрічається у першому класі: $2+x=4$. Така рівність зветься *рівнянням*. Ви підросли і тепер дізнаєтесь про нього детальніше.

ПИТАННЯ. Якщо рівність містить букву, то чим вона відрізняється від тотожності?

ВІДПОВІДЬ. Тотожність справедлива при *всіх* припустимих значеннях букв, що входять до його складу, а рівняння — тільки при деяких. Ці букви називаються *невідомими* та, зазвичай, позначаються x, y, z, u...

Коренем рівняння називається те значення невідомого, при якому це рівняння перетворюється на істинну рівність.

> *Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх нема.*

Наприклад,

число 5 є коренем рівняння $2x=10$, оскільки $2\cdot5=10$.

> *Коренів може не бути взагалі, або бути один, два, три, ..., багато.*

З розмови на перерві:

— **ДЛЯ** чого в школі рівняння?

— **ДЛЯ** того, щоб навчитися знаходити їхні корені!

— **А** коли це закінчиться?

— **КОЛИ** закінчиться математика!!!

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

В
А
Ж
Л
И
В
О

ПИТАННЯ. Навести приклад рівняння, що має 2002 корені.

ВІДПОВІДЬ. $(x-1)(x-2)(x-3)...(x-2002)=0.$

ПИТАННЯ. Навести приклад рівняння, що не має коренів.

ВІДПОВІДЬ. а) $x^2=-5$; б) $\frac{1}{x-3}=0$; в) $7x+6=7x+10.$

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

ЗАДАЧА 1. Скласти рівняння, коренем якого будуть тільки такі числа:

1) 2; 2) 0; 3) -15; 4) a.

ВІДПОВІДЬ. 1) $4x+8=16$; 2) $7x=0$;
3) $2x+10=-20$; 4) $a+x=2a$.

ЗАДАЧА 2. Знайти корені рівнянь:

1) $x(x-3)=0$;
2) $x(x-2)(x+3)=0$;
3) $2x(4-x)=0$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x_1=0, x_2=3$; 2) $x_1=0, x_2=2, x_3=-3$;
3) $x_1=0, x_2=4$.

ЗАДАЧА 3. Перевірити, чи буде

1) число 2 коренем рівняння $7x+9=15$;
2) число 8 коренем рівняння $20-2x=4$;
3) число 7 коренем рівняння $x-1=20-2x$;
4) число 4 коренем рівняння $3x-2=x+6$.

ВІДПОВІДЬ. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) так.

ЗАДАЧА 4. Які з наведених рівностей є тотожностями:

1) $9+a=a+9$; 2) $xy=yx$; 3) $b+7=8$;

4) $2(a+b)=2a+2b$; 5) $7x=6x+x$.

ВІДПОВІДЬ. Усі, крім рівності 3.

ЗАДАЧА 5. Чому не мають коренів рівняння:

1) $\frac{1}{x-1}=0$; 2) $\frac{8}{(x-1)(x-2)}=0$; 3) $x^2=-3$;

4) $(x-1)^2+9=0$; 5) $|x|+2=0$; 6) $|x-1|+|x|+12=0$?

ЗАДАЧА 6. Не розв'язуючи рівняння $5(2x+3)=17$, доведіть, що його корінь не є цілим числом.

ДОВЕДЕННЯ

Якби x був цілим числом, то вираз $2x+3$ теж був би цілим числом, а отже, просте число 17 розклалося б на прості множники, що неможливо.

ЗАДАЧА 7. Чи можуть мати додатний корінь рівняння:

1) $(x+8)(x+7)=0$; 2) $x^2+6x+1=0$;

3) $\frac{x+9}{x-9}=0$; 4) $ax=2$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Ні, оскільки, якщо $x>0$, то $x+8>0$ і $x+7>0$, а добуток двох додатних чисел не дорівнює нулю.

2) Ні, оскільки, якщо $x>0$, то $x^2+6x+1>0$.

3) Ні, оскільки, якщо $x>0$, то $x+9>0$ та $\frac{x+9}{x-9}\neq 0$.

4) Може, якщо $a>0$.

ВІДПОВІДЬ. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так.

§ 2. ПРО РІВНОСИЛЬНІСТЬ РІВНЯНЬ. МОДУЛЬ І ПАРАМЕТР В РІВНЯННЯХ

І. Рівносильність рівнянь

ОЗНАЧЕННЯ. Рівняння, що мають одні й ті ж корені, або не мають коренів, називаються рівносильними.

> *Якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак, то дістанемо рівняння,* **рівносильне даному**.
>
> *Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, що не дорівнює нулю, то дістанемо рівняння,* **рівносильне даному**.

Наведемо приклади рівносильних рівнянь:

$$4x+6=10 \quad \text{та} \quad 4x=10-6;$$
$$7x+8=2 \quad \text{та} \quad 14x+16=4.$$

ЗАДАЧА. Чи рівносильні рівняння

1) $2(x-1)=8$ та $2x=10$; 2) $\frac{2x}{5}=1$ та $2x=5$;

3) $5x+1=2$ та $10x+2=4$; 4) $2x-1=4$ та $x+5=7$;

5) $5x+4=9$ та $2x-1=1$; 6) $5x+3=18$ та $\frac{5x+3}{3}=6$;

7) $\frac{x-1}{x-2}=1$ та $2x+3=2x+4$; 8) $x+1=4$ та $\frac{x+1}{2}=\frac{4}{3}$.

ВІДПОВІДЬ. 1)–3) — так; 4) ні; 5)–7) — так; 8) ні.

ІІ. Модуль в рівняннях

ПОРАДА. Повторіть тему «Модуль числа». Дуже детально вона викладена у книзі «Не хочу бути двієчником».

ЗГАДАЙ!

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ якщо } x>0 \\ -x, \text{ якщо } x<0 \\ 0, \text{ якщо } x=0 \end{cases}$$

ПИТАННЯ. Чим відрізняється рівняння з модулем від такого ж, але без модуля?

ВІДПОВІДЬ. У рівнянні з модулем розглядаються випадки в залежності від знака підмодульного виразу. І відповідей також буде дві — кожен випадок дасть свою відповідь.

ЗАДАЧА 1. Розв'язати рівняння $|x+1|=8$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Нехай $x+1>0$. Тоді $|x+1|=x+1$, і задане рівняння набуде вигляду:

$$x+1=8,\ x_1=7.$$

2) Нехай $x+1<0$. Тоді $|x+1|=-(x+1)=-x-1$, і задане рівняння набуде вигляду

$$-x-1=8;\ x_2=-9.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_1=-9,\ x_2=7$.

ЗАДАЧА 2. Розв'язати рівняння $|x|+1=4$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$|x|=4-1=3.$$

Якщо $x\geq 0$, то $|x|=x$, отже $x=3$. Якщо $x<0$, то $|x|=-x$, отже $-x=3$; $x=-3$.

ВІДПОВІДЬ. $x_1=3,\ x_2=-3$.

ЗАДАЧА 3. Розв'язати рівняння:

1) $|x|=0$; 2) $|x|=4$; 3) $|x|=\frac{1}{4}$;

4) $|x-1|=3$; 5) $|x|+1=5$; 6) $2|x|-1=|x|+7$;

7) $7+3|x|=22-2|x|$; 8) $5|x|-6=-3|x|+26$;

9) $|x|+|x-2|+|x+2|=0$; 10) $x^2+|x-3|=|x-3|$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x=0$; 2) $x_1=4,\ x_2=-4$;

3) $x_1=\frac{1}{4},\ x_2=-\frac{1}{4}$; 4) $x_1=4,\ x_2=-2$;

5) $x_1=4,\ x_2=-4$; 6) $x_1=8,\ x_2=-8$;

7) $x_1=3,\ x_2=-3$; 8) $x_1=4,\ x_2=-4$;

9) коренів нема; 10) $x=0$.

III. Що таке параметр?

Питання, поставлене у назві, — надзвичайно важливе. У рівняння вводиться, окрім невідомого, одна або декілька букв. Саме вони називаються параметрами. Наприклад,

$$2ax + b - 1 = c.$$

Введення параметрів впливає не стільки на знаходження невідомого, як на дослідження відповіді. Ось простий приклад:

$$2x = 3,\ x = \frac{2}{3}\text{ — ніяких проблем.}$$

Тепер уведемо один параметр:

$$ax = 3 \text{ —}$$

і при $a = 0$ — рівняння не має розв’язків ($0 \cdot x \neq 3$)!!!

Отже, параметр завжди вимагає уваги й акуратності. Розглянемо деякі нескладні задачі.

ЗАДАЧА 1. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{2x}{a-2} = 5$ не має розв’язків?

РОЗВ’ЯЗАННЯ

При $a = 2$ дане рівняння не має розв`язків, оскільки при $a = 2$ у знаменнику вийде нуль, а на нуль, як відомо, ділити не можна. При інших значеннях $a$ рівняння завжди має розв`язок (який?!).

ВІДПОВІДЬ. При $a = 2$.

ЗАДАЧА 2. Розв’язати рівняння $ax + 10x = 15x$.

ВІДПОВІДЬ. При $a = 5$ x — будь-яке; при $a \neq 5$ $x = 0$.

ЗАДАЧА 3. При яких значеннях параметра a рівняння $|x| + a = 1$ має розв’язок?

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Маємо

$$|x| = 1 - a.$$

Оскільки $|x| \geq 0$, то

$$1 - a \geq 0;\quad a \leq 1.$$

ВІДПОВІДЬ. При $a \leq 1$.

ЗАДАЧА 4. Розв'язати рівняння з параметром:

$$(a-2)x=-3.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо $a \neq 2$, то рівняння має один корінь $x=\dfrac{-3}{a-2}$. Якщо $a=2$, то рівняння не має коренів.

ВІДПОВІДЬ. При $a=2$ розв'язків нема;

при $a \neq 2$ $x=\dfrac{3}{2-a}$.

ЗАДАЧА 5. Розв'язати рівняння з параметром: $\dfrac{2a-1}{2ax+3}=1$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Очевидно, що $2ax+3 \neq 0$. Маємо:

$$2a-1=2ax+3, \text{ тоді } ax=a-2.$$

При $a=0$ розв'язків нема. При $a \neq 0$ $x=\dfrac{a-2}{a}$. Крім того, ми маємо врахувати, що $2ax+3 \neq 0$:

$$2a\frac{a-2}{a}+3 \neq 0; \quad 2a-4+3 \neq 0; \quad a \neq \frac{1}{2}.$$

ВІДПОВІДЬ. При $a=0$ та $a=\dfrac{1}{2}$ — розв'язків нема,

при інших a $x=\dfrac{a-2}{a}$.

§ 3. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ

ОЗНАЧЕННЯ. Рівняння вигляду $ax = b$, де x — змінна величина, a та b — деякі числа, називається лінійним рівнянням з однією змінною.

ПИТАННЯ. Досі ми зустрічалися лише з лінійними рівняннями?

ВІДПОВІДЬ. Так, проте ці рівняння не містили в собі іншої букви (параметра), крім невідомого.

Через те, що рівняння $ax = b$ містить букви (параметри!), доречно провести дослідження.

1) Нехай $a = 0$, $b \neq 0$. Маємо $0 \cdot x = b$. Оскільки $b \neq 0$, то **рівняння $ax = b$ при $a = 0$, $b \neq 0$ розв'язків не має.**

2) Нехай $a \neq 0$. Тоді $x = \frac{b}{a}$, тобто

рівняння $ax = b$ при $a \neq 0$ має єдиний розв'язок.

3) Якщо $a = 0$, $b = 0$, то маємо тотожність $0 \cdot x = 0$, істинну при будь-якому значенні x, тобто будь-яке число є коренем рівняння:

рівняння $ax = b$ при $a = 0$, $b = 0$ має безліч розв'язків.

Зазначимо, що якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають рівнянням першого степеня з одним невідомим. Кожне рівняння першого степеня з одним невідомим має ОДИН корінь. ЛІНІЙНЕ рівняння може не мати коренів або мати один чи, навіть, безліч коренів.

Розв'язання багатьох рівнянь зводиться до розв'язання лінійних рівнянь.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $12(3x + 5) + 7x = 9x - 12$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$36x + 60 + 7x = 9x - 12; \quad 36x + 7x - 9x = -12 - 60;$$

$$34x = -72; \quad x = -\frac{72}{34} = -\frac{36}{17}; \quad x = -2\frac{2}{17}.$$

ВІДПОВІДЬ. $x = -2\frac{2}{17}$.

ВПРАВА 1. Показати, що дані рівняння не мають розв'язків, і пояснити чому:

$$1)\ x+5=x;\quad 2)\ x-2=x-3;\quad 3)\ 2x=2(x+1).$$

ВПРАВА 2. Показати, що будь-яке число є коренем кожного з даних рівнянь:

$$1)\ 3(x+1)=3x+3;\quad 2)\ 3x-4=4(x-1)-x;$$
$$3)\ 2(x+7)-19=2x-5.$$

ВПРАВА 3. Визначити, які з даних рівнянь не мають розв'язків, і які рівняння мають безліч розв'язків:

$$1)\ 2x+1=2x+3;\quad 2)\ 4x-3-3x-4=x-7;$$
$$3)\ 5x-15-3x-6=2x-25;\quad 4)\ 5(x-2)=5x-10.$$

ВПРАВА 4. Скласти рівняння першого степеня з одним невідомим, коренем якого було б число $4;\ -3;\ \frac{1}{2};\ -0{,}2$.

Розв'язання рівнянь першого степеня і рівнянь, що до них зводяться.

Ми запропонуємо вам різні рівняння — прості та складні (переважно прості). Навіщо? Щоб ви, любі читачі, **відпрацювали техніку розв'язання рівнянь, не помилялись у знаках, уміли переносити «відомі в один бік, невідомі — в інший», згадали пропорції та відсотки (у цих темах теж є рівняння), не боялись рівнянь у задачах з фізики.**

Погляньте, які серйозні проблеми постають перед вами! Тому, не гаючи часу, беріться до розв'язання рівнянь. І ще одна порада: не пропускайте приклади, що здаються вам простими. Розв'язуйте усе поспіль! Це дуже важливо та корисно.

ЗАДАЧА 1. Розв'язати рівняння:

$$1)\ x+5=-2;\quad 2)\ 7+x=3;\quad 3)\ (-3)+x=5;\quad 4)\ (-1)+x=-3;$$
$$5)\ (-6)+x=5;\quad 6)\ x+(-2)=-5;\quad 7)\ (+5)-a=-12;$$
$$8)\ m-(-8)=13;\quad 9)\ n-\left(+1\frac{2}{3}\right)=-4\frac{1}{2};\quad 10)\ (-6)+q=-1.$$

<u>ВІДПОВІДЬ.</u> $1)\ x=-7;\quad 2)\ x=-4;\quad 3)\ x=8;\quad 4)\ x=-2;$
$5)\ x=11;\quad 6)\ x=-3;\quad 7)\ a=17;\quad 8)\ m=5;$
$9)\ n=-2\frac{5}{6};\quad 10)\ q=5.$

ЗАДАЧА 2. Розв'язати рівняння:

1) $d-(-8)=0$; 2) $(-15{,}4)+x=0$; 3) $0-y=-0{,}5$;
4) $(-1)+z=0{,}32$; 5) $u-(-1)=0{,}135$; 6) $3x-2=-17$;
7) $4a+3=-13$; 8) $34-3x=-20$; 9) $\frac{a}{5}+3=-7$;
10) $\frac{n}{4}-2=-5$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $d=-8$; 2) $x=15{,}4$; 3) $y=0{,}5$; 4) $z=1{,}32$;
5) $u=-0{,}865$; 6) $x=-5$; 7) $a=-4$; 8) $x=18$;
9) $a=-50$; 10) $n=-12$.

ЗАДАЧА 3. Розв'язати рівняння:

1) $5-\frac{12}{k}=-3$; 2) $4+\frac{15}{x}=-8$; 3) $0{,}6x-4=-2{,}8$;
4) $0{,}12+0{,}8x=-0{,}08$; 5) $1\frac{1}{4}x-5\frac{3}{8}=-6\frac{1}{2}$;
6) $3\frac{5}{6}-4\frac{1}{5}x=-2\frac{7}{12}$; 7) $0{,}4x-12{,}03=0{,}13$;
8) $0{,}1-0{,}01x=-1$; 9) $0{,}02x-1{,}008=0{,}002$;
10) $3x-1=5x$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $k=1\frac{1}{2}$; 2) $x=-1\frac{1}{4}$; 3) $x=2$; 4) $x=-0{,}25$;
5) $x=-0{,}9$; 6) $x=1\frac{19}{36}$; 7) $x=30{,}4$; 8) $x=110$;
9) $x=50{,}5$; 10) $x=-\frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 4. Розв'язати рівняння:

1) $7y+8=3y$; 2) $0{,}7z-1=0{,}3z$; 3) $3+41{,}8t=42t$;
4) $2-1{,}6a=3{,}4a$; 5) $3+7{,}4x=2{,}8x$; 6) $0{,}15+0{,}8x=-0{,}12$;
7) $0{,}15x-1{,}008=0{,}002$; 8) $20x+0{,}4\left(x-6\frac{1}{4}\right)=-2$;
9) $3(x-5)=12x-7$; 10) $4(7x-4)=2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $y=-2$; 2) $z=2{,}5$; 3) $t=15$; 4) $a=0{,}4$;
5) $x=-\frac{15}{23}$; 6) $x=-0{,}3375$; 7) $x=6\frac{11}{15}$;
8) $x=\frac{5}{204}$; 9) $x=-\frac{8}{9}$; 10) $x=\frac{9}{14}$.

ЗАДАЧА 5. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{1}{2}x-15=x$; 2) $\frac{4}{17}x-18=2x$; 3) $\frac{9}{11}x+8=8$;

4) $2c-\frac{1}{3}c=5$; 5) $\frac{1}{5}(2x-1)=4$; 6) $\frac{2}{11}(3x-4)=5$;

7) $\frac{2}{3}\left(4x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{8}$; 8) $\frac{2x}{3}+\frac{7}{9}=5$; 9) $\frac{x-4}{5}=\frac{2}{3}$;

10) $\frac{1}{x-4}=2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x=-30$; 2) $x=-10\frac{1}{5}$;

3) $x=0$; 4) $c=3$;

5) $x=10\frac{1}{2}$; 6) $x=10\frac{1}{2}$; 7) $x=\frac{25}{192}$;

8) $x=6\frac{1}{3}$; 9) $x=7\frac{1}{3}$; 10) $x=4\frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 6. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{a}{2x-4}=\frac{3}{5}$; 2) $2ax=7$; 3) $\frac{x}{a}=3$; 4) $\frac{3x}{4}=-\frac{1}{2}$;

5) $\frac{-5}{3x}=-\frac{3}{4}$; 6) $\frac{-0{,}4}{0{,}2x}=1{,}8$; 7) $5x-7=-0{,}8+3{,}4$;

8) $0{,}12-2{,}5x=-0{,}8$; 9) $4{,}8x-0{,}3=4{,}2\cdot(-3{,}5)$;

10) $1\frac{3}{4}-5x=2\frac{3}{4}:\left(-3\frac{2}{3}\right)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x=\frac{5}{6}a+2$ при $a\neq 0$, при $a=0$ коренів нема;

2) $x=\frac{7}{2a}$ при $a\neq 0$, при $a=0$ коренів нема;

3) $x=3a$ при $a\neq 0$; при $a=0$ коренів нема;

4) $x=-\frac{2}{3}$; 5) $x=2\frac{2}{9}$;

6) $x=-1\frac{1}{9}$; 7) $x=1{,}92$;

8) $x=0{,}368$; 9) $x=-3$;

10) $x=\frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 7. Розв'язати рівняння:

1) $20x+0{,}4\cdot\left(-6\frac{1}{4}\right)=4\frac{2}{3}:\left(-\frac{1}{4}\right)$;

2) $2(x+3)-3(x+2)=5-4(x+2)$;

3) $2(x+1)-1=3-(1-2x)$;

4) $2(1-x)-5=-2x-3$;

5) $(3x+8)+(2x-5)=13$;

6) $(2y+13)+(17-5y)=240$;

7) $\left(5x^3-3x^2+4x+6\right)+\left(3x^2-5x^3-x-17\right)=67$;

8) $2t+\left(\frac{3}{4}t-\frac{5}{7}t\right)=57$; 9) $\left(1\frac{1}{5}-0{,}5t\right)+(0{,}4t-1{,}12)=0{,}4$;

10) $(25x-5)+(0{,}2x-2{,}7x)+0{,}5x=6{,}5$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x=-\frac{97}{120}$; 2) $x=-1$; 3) коренів нема; 4) x — будь-яке число; 5) $x=2$; 6) $y=-70$; 7) $x=26$; 8) $t=28$; 9) $x=-3{,}2$; 10) $x=0{,}5$.

ЗАДАЧА 8. Розв'язати рівняння:

1) $(2+5{,}7p)+(18{,}2-0{,}855p)+3{,}45p=36{,}79$;

2) $(3x-4b)+(7b+2x)=13b$;

3) $(5x-7a)+(-2x+a)=3a$;

4) $(13k+10x)+(-8x-9k)=12k$;

5) $(2x-4m)+(4x+5m)=19m$;

6) $(4x-4)-(3x-3)=1$;

7) $(x-1)+(x-2)-(x-3)=-4$;

8) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-\left(-2x-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{6}$;

9) $\left(\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}x+0{,}6\right)-\left(\frac{7}{12}x-0{,}3\right)=5{,}8$;

10) $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{2}=19$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $p=2$; 2) $x=2b$; 3) $x=3a$; 4) $x=4k$; 5) $x=3m$; 6) $x=2$; 7) $x=-4$; 8) $x=-\frac{4}{11}$; 9) $x=6\frac{17}{25}$; 10) $x=6$.

ЗАДАЧА 9. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{4x}{9}-\frac{5x}{12}=1$; 2) $\frac{3x}{2}+\frac{x}{6}-\frac{2x}{9}=13$; 3) $\frac{x-3}{3}=4$;

4) $\frac{5x-4}{2}=\frac{16x+1}{7}$; 5) $\frac{5-z}{8}=\frac{18-5z}{12}$;

6) $\frac{1-9y}{5}=\frac{19+3y}{8}$; 7) $\frac{4t+33}{21}=\frac{17+t}{14}$;

8) $\frac{x}{2}=\frac{3}{5}$; 9) $\frac{0{,}07}{0{,}09}=\frac{2x}{1{,}8}$; 10) $\frac{ax}{b}=\frac{c}{d}$ $(a\neq 0)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x=36$; 2) $x=9$; 3) $x=15$; 4) $x=10$; 5) $z=3$; 6) $y=-1$; 7) $t=-3$; 8) $x=1{,}2$; 9) $x=0{,}7$; 10) $x=\frac{bc}{ad}$.

§ 4. ПОВТОРЕННЯ...

ЗАДАЧА 1. Знайдіть число, зворотне:

а) сумі чисел $\frac{2}{3}$ та $\frac{3}{5}$;

б) добутку чисел $\frac{1}{12}$ та $\frac{3}{5}$;

в) частці чисел $2\frac{2}{3}$ та 0,8.

ВІДПОВІДЬ. а) $\frac{15}{19}$; б) 20; в) 0,3.

ЗАДАЧА 2. При яких значеннях змінних вираз не має сенсу:

а) $\frac{2}{3x-9}$; б) $\frac{1}{4y+1}$; в) $\frac{1}{|x|-3}$?

ВІДПОВІДЬ. а) при $x = 3$; б) при $y = -\frac{1}{4}$;

в) при $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

ЗАДАЧА 3. Чи вірно, що:

а) $|a+b| = |a| + |b|$; б) $|a-b| = |a| - |b|$; в) $|ab| = |a| \cdot |b|$?

ВІДПОВІДЬ. 1) Ні; 2) ні; 3) так.

ЗАДАЧА 4. Чи може сума п'яти послідовних натуральних чисел бути простим числом?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай S — сума п'яти послідовних натуральних чисел. Маємо:

$$S = n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4 = 5n + 10.$$

Одержана сума кратна 5, але не дорівнює 5, отже, S — число складене.

ВІДПОВІДЬ. Ні.

ЗАДАЧА 5. Чи вірно, що a — додатне число?

ВІДПОВІДЬ. Ні.

ЗАДАЧА 6. Відомо, що $a \neq 0$ та $b \neq 0$. Чи істинне у такому випадку твердження, що $a+b \neq 0$?

ВКАЗІВКА. Згадайте, які числа називаються протилежними.

ВІДПОВІДЬ. Ні.

ЗАДАЧА 7. Що більше:

а) a або $-a$; б) a або $2a$; в) a або $\frac{1}{a}$; г) a або a^2?

ВІДПОВІДЬ. а) $a \geq -a$, якщо $a \geq 0$; $a < -a$, якщо $a < 0$;
б) $a \geq 2a$, якщо $a \leq 0$; $a < 2a$, якщо $a > 0$;
в) $a \geq \frac{1}{a}$, якщо $a \geq 1$ або $-1 \leq a < 0$;
$a < \frac{1}{a}$, якщо $a < -1$ або $0 < a < 1$;
г) $a > a^2$, якщо $0 < a < 1$; ,
$a \leq a^2$ якщо $a \leq 0$ або $a \geq 1$.

ЗАДАЧА 8. При яких a і b справедливі рівності:

а) $|a| = a$; б) $\frac{|a|}{a} = 1$; в) $|a| - |b| = |a-b|$; г) $\frac{a|b|}{|a|b} = -1$?

ВІДПОВІДЬ. а) $a \geq 0$; б) $a > 0$;
в) $a \leq b \leq 0$ або $a \geq b \geq 0$;
г) $a > 0, b < 0$ або $a < 0, b > 0$.

ЗАДАЧА 9. Доведіть, що будь-яку суму, яка перевищує сім песет, можна заплатити монетами у три песети і п'ять песет, не одержуючи здачі.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Перший спосіб. Досить перевірити, що монетами у три і п'ять песет можна заплатити 8, 9 та 10 $(8 = 3+5, 9 = 3+3+3, 10 = 5+5)$, а потім додавати монети по 3 песети.

Другий спосіб (**майбутньому учаснику математичних олімпіад**). Будь-яке натуральне число m при діленні на три дає остачу 0, 1 або 2. Якщо відомо, що $m > 7$, то

$$\text{або } m = 3n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 3,$$

$$\text{або } m = 3n+1,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 3,$$

$$\text{або } m = 3n+2,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Якщо $m = 3n$, то суму в m песет можна заплатити монетами в три песети.

Якщо $m = 3n + 1$, то тоді $m = 3(n-3) + 3 \cdot 3 + 1 = 3(n-3) + 5 \cdot 2$, де $n \geq 3$, тобто суму можна виплатити монетами в 3 та 5 песет.

Якщо $m = 3n + 2$, то $m = 3(n-1) + 3 + 2 = 3(n-1) + 5$.

Таким чином, суму можна завжди заплатити кількома монетами в три песети і, в разі необхідності, двома або однією монетою в п'ять песет.

ЗАДАЧА 10. Записати дане твердження у вигляді рівності та знайти значення x, при яких рівність істинна:

а) число x складає 20% числа 82;

б) число 20 складає 12% числа x.

ВІДПОВІДЬ. а) $x = \frac{1}{5} \cdot 82$, $x = 16{,}4$; б) $20 = 0{,}12x$, $x = 166\frac{2}{3}$.

ЗАДАЧА 11. Родзинки, які одержують під час висушування винограду, складає 32% всього винограду. З якої кількості винограду виходить 2 кг родзинок?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

За умовою 2 кг складають 32% від ваги винограду. Вага винограду дорівнює

$$\frac{2 \cdot 100}{32} = 6{,}25 \text{ (кг)}.$$

ВІДПОВІДЬ. 6,25 кг.

ЗАДАЧА 12. Мале підприємство, збувши продукцію на 3348 умовних одиниць, зазнало 4% збитку. Яка собівартість цієї продукції?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Збиток обчислюється у відсотках по відношенню до собівартості (що береться за 100%). Отже, 3348 у. о. складає

$$100\% - 4\% = 96\%$$

собівартості. Отже, продукція обійшлася малому підприємству в

$$\frac{3348 \cdot 100}{96} = 3487{,}5 \text{ у. о.}$$

ВІДПОВІДЬ. 3487,5 у. о.

ЗАДАЧА 13. Морська вода містить 5% (за об'ємом) солі. Скільки літрів річкової води треба додати до 40 літрів морської води, щоб вміст солі в суміші складав 2%?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

В 40 л морської води міститься

$$40\cdot 0{,}05=2 \text{ (л) солі.}$$

Щоб 2 л складали 2% загального об'єму, останній має дорівнювати $2:0{,}02=100$ (л), тобто додати треба

$$100-40=60 \text{ (л)}$$

води з річки.

ВІДПОВІДЬ. 60 літрів.

ЗАДАЧА 14. Виконуючи контрольну роботу з математики 12% учнів класу взагалі не розв'язали задачі, 32% розв'язали з помилками, решта 14 учнів розв'язали правильно. Скільки учнів було в класі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

14 учнів, які правильно розв'язали задачі, складають

$$100\%-(12\%+32\%)=56\%$$

всіх учнів класу. Загальна кількість учнів класу була

$$\frac{14\cdot 100}{56}=25.$$

ВІДПОВІДЬ. 25 учнів.

ЗАДАЧА 15. Шматок сплаву міді з оловом вагою 12 кг містить 45% міді. Скільки чистого олова треба додати до цього шматка, щоб новий сплав містив 40% міді?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Сплав містить $12\cdot 0{,}45=5{,}4$ (кг) міді. Оскільки в новому сплаві ці 5,4 кг міді складають (за вагою) 40%, то вага нового сплаву буде

$$5{,}4:0{,}40=13{,}5 \text{ (кг).}$$

Отже, треба додати

$$13{,}5-12=1{,}5 \text{ (кг).}$$

ВІДПОВІДЬ. 1,5 кг.

ЗАДАЧА 16. Троє бізнесменів заробили 4080 у. о. Суми, які заробили перший і другий, співвідносяться як $7\frac{1}{2}:1\frac{3}{4}$; заробіток третього складає $43\frac{1}{3}\%$ заробітку першого. Скільки заробив кожен?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Заробіток другого складає

$$1\frac{3}{4}:7\frac{1}{2}=\frac{7}{30}$$

заробітку першого або, у відсотках,

$$\frac{7}{30}\cdot 100\% = 23\frac{1}{3}\%.$$

Загальний заробіток складає

$$100\% + 23\frac{1}{3}\% + 43\frac{1}{3}\% = 166\frac{2}{3}\%$$

від заробітку першого. Один відсоток заробітку першого складає

$$4080:166\frac{2}{3} = 24{,}48 \text{ (у. о.)},$$

отже, перший заробив 2448 у. о. Другий заробив $23\frac{1}{3}\%$ цієї суми, тобто

$$\frac{2448\cdot 23\frac{1}{3}}{100} = 571{,}2 \text{ (у. о.)}.$$

Третій заробив

$$\frac{2448\cdot 43\frac{1}{3}}{100} = 1060{,}8 \text{ (у. о.)}.$$

ВІДПОВІДЬ. 2448 у. о.; 571,2 у. о.; 1060,8 у. о.

§ 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ РІВНЯНЬ

Щоби зовсім не пропасти,
Треба нам рівняння скласти!
Хоч крутись, а хоч вертись,
А складати їх навчись!

Ну не супся так сердито!
Ці задачі — знамениті!
В розв'язанні, як годиться,
Нам рівняння знадобиться!

Ти лякаєшся дарма,
Бо страшного тут нема,
Маєш добре тільки знати —
Треба КОРІНЬ відшукати.

Отже, поспішай до діла
І розв'язуй все сміливо,
Все уважно прочитай,
Зрозумій, запам'ятай!

ЗАДАЧА 1. У трьох класах разом було 119 учнів. У першому класі учнів більше, ніж у другому, на 4 особи, але менше, ніж в третьому, на 3 особи. Скільки учнів було в кожному класі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай кількість учнів в першому класі буде x. Тоді у другому класі було $(x-4)$ особи, а у третьому — $(x+3)$ особи. За умовою задачі в класі було 119 учнів, отже

$$x+x-4+x+3=119.$$

Розв'язуємо рівняння: $3x=120$; $x=40$. Отже в першому класі було 40 учнів, у другому — 36, а у третьому — 43.

ВІДПОВІДЬ. 40, 36 та 43 учня.

ЗАДАЧА 2. У одному баці бензину було вдвічі більше, ніж у другому. Якщо перелити з першого бака в другий 25 л бензину, то в баках стане бензину порівну. Скільки літрів бензину було в кожному баці спочатку?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай у другому баці було x літрів бензину. Тоді в першому баці було $2x$ літрів бензину. Коли з першого бака перелили 25 літрів, то в ньому залишилось $(2x-25)$ літрів. Тоді у другому баці стало $(x+25)$ літрів. За умовою задачі, тепер у баках бензину порівну:

$$2x-25=x+25.$$

Розв'язуємо рівняння:

$$2x-25=x+25; \quad x=50.$$

Отже, в одному баці було 100 л бензину, в другому 50 л.

ВІДПОВІДЬ. 100 л, 50л.

ЗАДАЧА 3. Коли батькові було 27 років, то синові виповнилося 3 роки, а тепер синові втричі менше років, ніж батькові. Скільки років тепер кожному з них?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай тепер синові x років, тоді батькові $3x$ років. Оскільки різниця у літах батька і сина постійна і дорівнює за умовою 24 рокам (27 – 3 = 24), то

$$3x-x=24; \quad x=12; \quad 3x=36.$$

ВІДПОВІДЬ. Синові 12 років, батькові 36 років.

ЗАДАЧА 4. Господарство має дві силосні ями. До першої заклали 55 т силосу, до другої — 63 т. Коли з другої ями взяли на 13 т більше силосу, ніж з першої, в ній залишилося удвічі менше силосу, ніж у першій ямі. Скільки тонн силосу взяли з кожної ями?

ВІДПОВІДЬ. 45 т, 58 т.

ЗАДАЧА 5. Рити котлован поставили два екскаватори. Перший екскаватор вибирав протягом години на 40 кубометрів землі більше, ніж другий. Перший працював 16 годин, а другий — 24 години, причому обидва екскаватори вибрали протягом цього часу 8640 кубометрів землі. Скільки кубічних метрів землі вибирав протягом години кожен з екскаваторів?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай перший екскаватор вибирав протягом години x м^3 землі. Тоді другий екскаватор вибирав протягом години $(x-40)$ м^3 землі. Перший екскаватор викопав $16x$ м^3, а другий $24\cdot(x-40)$ м^3. За умовою вони викопали 8640 м^3. Маємо:

$$16x+24\cdot(x-40)=8640;$$
$$16x+24x-960=8640,$$
$$40x=9600;\quad x=240\ (\text{м}^3).$$

Таким чином, перший екскаватор вибирав протягом години 240 м^3, другий протягом години вибирав 240 – 40 = 200 (м^3).

ВІДПОВІДЬ. 240 м^3, 200 м^3.

ЗАДАЧА 6. На одному складі вугілля удвічі більше, ніж на другому. Якщо на перший склад привезти ще 80 т вугілля, а на другий склад 145 т, то на складах буде вугілля порівну. Скільки тон вугілля було на кожному складі спочатку?

ВІДПОВІДЬ. 130 т, 65 т.

ЗАДАЧА 7. На шкільній математичній олімпіаді учням запропонували для розв'язання 10 задач. За кожну правильно розв'язану задачу зараховувалось по 5 балів, а за нерозв'язану списувалось 3 бали. Скільки задач було правильно розв'язано учнем, який за остаточного підрахунку одержав 34 бали?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай x — кількість правильно розв'язаних учнем задач. Тоді неправильно розв'язаних задач було $(10-x)$. За правильно розв'язані задачі учень одержав $5x$ балів, а за нерозв'язані йому списали $3(10-x)$ балів. Оскільки за умовою він одержав 34 бали, можна скласти і розв'язати рівняння:

$$5x-3\cdot(10-x)=34;\quad 5x-30+3x=34;$$
$$8x=64;\quad x=8.$$

ВІДПОВІДЬ. 8 задач.

ЗАДАЧА 8. Ділянку площею 864 га розділена на 3 лани так, що третій лан має площу, яка дорівнює сумі площ перших двох ланів. Визначити площу кожного з ланів, якщо відомо, що площі другого і першого ланів співвідносяться як 11 : 5 відповідно.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай площа першого лану буде $5x$ га. Тоді площа другого лану буде $11x$ га, третього $11x+5x=16x$ (га). Оскільки вся ділянка має площу 864 га, то можна скласти рівняння:

$$5x+11x+16x=864;\quad x=27 \text{ (га)}.$$

Тоді площа першого лану $27\cdot 5=135$ (га). Тепер легко можна знайти площу другого (297 га) і третього (432 га) ланів.

ВІДПОВІДЬ. 135 га, 297 га, 432 га.

Скільки поганих оцінок було,
Скільки солоних сліз натекло,
Скільки було тяжкого страждання,
Бо не вдавалося скласти рівняння.
Мучились, бились, кинули все —
І без води залишився басейн.

Без рівняння назавжди
Басейн буде без води!

ЗАДАЧА 9. Перша труба наповнює басейн за половину того часу, за який друга труба наповнює $\frac{2}{3}$ цього басейну. Друга труба окремо наповнює басейн на 6 годин довше, ніж одна перша труба. Скільки часу наповнює басейн кожна труба окремо?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай перша труба наповнює басейн протягом x годин, тоді друга труба — протягом $(x+6)$ годин; $\frac{2}{3}$ басейну друга труба наповнить протягом $\frac{2}{3}(x+6)$ годин. За умовою задачі маємо рівняння:

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x+6);\quad \text{звідси } x=3,\ x+6=9.$$

Отже, перша труба наповнює басейн протягом трьох годин, а друга — протягом дев'яти годин.

ВІДПОВІДЬ. Протягом 3 годин, протягом 9 годин.

ЗАДАЧА 10. Один з суміжних кутів у 8 разів більший іншого. Знайти величину кожного з кутів у градусах.

ВІДПОВІДЬ. 160°, 20°.

ЗАДАЧА 11. Довжина прямокутника вдвічі більша його ширини. Периметр прямокутника дорівнює 144 см. Знайти довжину і ширину прямокутника.

ВІДПОВІДЬ. 48 см, 24 см.

ЗАДАЧА 12. Я задумав число. Якщо це число збільшити втричі і до одержаного добутку додати 17, то вийде 62. Знайти задумане число.

ВІДПОВІДЬ. 15.

ЗАДАЧА 13. Кава при смаженні втрачає 12% своєї ваги. Скільки кілограмів свіжої кави треба взяти, щоб одержати 4,4 кг смаженої кави?

ВІДПОВІДЬ. 5 кг.

ЗАДАЧА 14. Яблука при сушінні втрачають 84% своєї ваги. Скільки треба взяти свіжих яблук, щоб одержати 16 кг сушених?

ВІДПОВІДЬ. 100 кг.

ЗАДАЧА 15. Скласти задачу, розв'язання якої привело б до складання рівняння $x + 2x = 30$.

ЗАДАЧА 16. Сума трьох послідовних чисел дорівнює 18. Знайти ці числа.

ВІДПОВІДЬ. 5, 6, 7.

ЗАДАЧА 17. Сума двох чисел дорівнює 74, а їхня різниця дорівнює 24. Знайти ці числа.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай перше число буде x. Тоді друге число буде $74 - x$. Оскільки їхня різниця дорівнює 24, то можна скласти рівняння:

$$x - (74 - x) = 24; \quad \text{звідси} \quad x - 74 + x = 24;$$

$$2x = 98; \quad x = 49.$$

Таким чином, перше число дорівнює 49, а друге — 25.

ВІДПОВІДЬ. 49 та 25.

ЗАДАЧА 18. Сума двох чисел дорівнює 60, а їхня частка дорівнює 3. Знайти ці числа.

ВІДПОВІДЬ. 45 та 15.

ЗАДАЧА 19. Сума двох чисел дорівнює 45, а співвідносяться вони як 7 : 8. Знайти ці числа.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай перше число дорівнює x, тоді друге дорівнює $45 - x$. Оскільки ці числа співвідносяться як 7 : 8, то одержуємо рівняння:

$$\frac{x}{45-x}=\frac{7}{8}.$$

Звідси

$$8x=315-7x;\quad 15x=315;$$
$$x=21;\quad 45-x=24.$$

ВІДПОВІДЬ. 21 та 24.

УВАГА! Задача № 20 нескладна, але вона дуже важлива і корисна. Такі задачі треба знати майже напам'ять.

ЗАДАЧА 20. Швидкість руху пароплава за течією річки 18 км/год, а проти течії — 14 км/год. Знайти швидкість течії річки та швидкість пароплава у стоячій воді.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай x — швидкість течії річки. Тоді швидкість пароплава у стоячій воді дорівнюватиме: $(18-x)$ км/год, а з іншого боку, ця ж швидкість дорівнює $(14+x)$ км/год. Отже,

$$18-x=14+x;\quad \text{звідси } 2x=4;$$

$x = 2$ (км/год) — швидкість течії річки. Тоді $18-2=16$ (км/год) (або $14+2=16$ (км/год)) — швидкість пароплава у стоячій воді.

ВІДПОВІДЬ. 2 км/год, 16 км/год.

ЗАДАЧА 21. (Стародавня задача). Летить зграя гусей, а назустріч їй — один гусак: «Здорові були, сто гусей!». «Нас не сто гусей, — відповідає йому ватажок зграї, — якби нас було стільки, скільки тепер, та ще стільки ж, та напівстільки, та ще чвертьстільки, та ще ти, гусаче, з нами, отоді нас було б сто гусей». Скільки було у зграї гусей?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай у зграї було x гусей. Тоді

$$x+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+1=100;\quad 11x=396;\quad x=36.$$

ВІДПОВІДЬ. У зграї було 36 гусей.

ЗАДАЧА 22. (З «Грецької антології»).

— Скажи мені, знаменитий Піфагоре, скільки учнів відвідують твою школу і слухають твої бесіди?

— Половина моїх учнів, — відповів філософ, — вивчає математику, чверть — музику, сьома частина мовчить, і є ще троє.

Скільки ж всього учнів було у школі Піфагора?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задача зводиться до рівняння

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x,$$

розв'язуючи яке, одержимо $x = 28$. Отже, школу Піфагора відвідують 28 чоловік.

ВІДПОВІДЬ. 28 чоловік.

ЗАДАЧА 23. Завод повинен був виконати завдання протягом 15 днів. Щоденно випускаючи по дві машини поза планом, він вже за два дні до кінця терміну не тільки виконав план, а й випустив ще 6 машин. Скільки машин повинен був випустити завод за планом?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай завод повинен був випустити x машин, а випустив $(x+6)$ машин. Щоденно за планом мало випускатись $\frac{x}{15}$ машин, а випускалось $\frac{x+6}{15-2}$. Оскільки за умовою відомо, що завод випускав щоденно дві машини поза планом, то

$$\frac{x+6}{13}-\frac{x}{15}=2;\quad 15(x+6)-13x=390;$$

$$15x+90-13x=390;\quad 2x=300;\quad x=150.$$

ВІДПОВІДЬ. 150 машин.

УВАГА! Наступна задача також дуже важлива. Обов'язково спробуйте спочатку її розв'язати самостійно, а потім неодмінно уважно прочитайте її розв'язання.

ЗАДАЧА 23. Двоє ковалів, працюючи разом, можуть виконати певну роботу за 8 днів. Скільки днів знадобиться другому ковалеві на цю роботу, якщо перший виконує її за 12 днів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай другий коваль виконує всю роботу за x днів. Тоді за день він виконає $\frac{1}{x}$ всієї роботи. Перший за день виконує $\frac{1}{12}$ частину роботи. Тоді, працюючи разом, вони за день виконають $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{12}\right)$ частину роботи. Одержимо рівняння:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}; \quad \text{звідси } x = 24 \text{ (дні)}.$$

ВІДПОВІДЬ. 24 дні.

УВАГА! Ми ніяк не позначали всю виконану роботу, але ви маєте розуміти, що таке $\frac{1}{2}$ всієї роботи, $\frac{1}{3}$ всієї роботи, $\frac{1}{x}$ всієї роботи.

ЗАДАЧА 24. Дядька Івана запитали:

— Скільки Вам років?

Він відповів:

— Візьміть тричі мої роки через три роки, та відніміть тричі мої роки три роки тому — от і матимете мої роки!

Скільки дядькові Івану років?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Шукану кількість років позначимо x. Вік через три роки — $(x+3)$, а вік 3 роки тому — $(x-3)$. Маємо рівняння:

$$3(x+3)-3(x-3)=x;$$
$$x=18 \text{ (років)}.$$

ВІДПОВІДЬ. Дядько Іван молодий — йому 18 років.

ЗАДАЧА 25. З розмови двох приятелів:

— Скільки років Тарасові?

— Давайте поміркуємо. Вісімнадцять років тому він був рівно втричі старшим за свого сина. Я це добре пам'ятаю, бо того року відбувався перепис населення.

— Дозвольте, мені достеменно відомо, що саме зараз він удвічі старший за свого сина. Це інший син?

— Ні, той самий: він має тільки одного сина. І тому неважко порахувати, скільки тепер років Тарасові та його синові.

А справді, скільки?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо синові тепер x років, то батькові $2x$. Вісімнадцять років тому кожному з них було на 18 років менше: батькові — $(2x-18)$ років, синові — $(x-18)$ років. До того ж відомо, що батько був тоді втричі старшим за сина:

$$3(x-18)=2x-18.$$

Розв'язавши це рівняння, маємо $x=36$ (років).

ВІДПОВІДЬ. Синові 36 років, батькові 72 роки.

ЗАДАЧА 26.* У магазині є на однакову суму цукерки по ціні 2 гривні за кілограм і по ціні 3 гривні за кілограм. У яку ціну треба продавати суміш з цих цукерок?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо S — однакову вартість цукерок кожного сорту. Тоді цукерок першого сорту буде $\frac{S}{2}$ кг, а другого — $\frac{S}{3}$ кг. Всього цукерок буде

$$\frac{S}{2}+\frac{S}{3}=\frac{5S}{6}\text{ (кг)}.$$

Загальна вартість суміші дорівнює

$$S+S=2S\text{ (гривень)}.$$

Отже, кілограм суміші коштує

$$2S:\frac{5S}{6}=\frac{2S\cdot 6}{5S}=2{,}4\text{ (гривні)}.$$

ВІДПОВІДЬ. 2,4 гривні.

ЗАДАЧА 27.* (Поганий жарт.) В одній склянці було трохи цукру, в іншій — така ж кількість солі. Якийсь бешкетник пересипав з першої склянки у другу 20 г цукру. Потім дві третини суміші, яка утворилась у другій склянці, пересипав у першу. Після цього в першій склянці виявилось вчетверо більше суміші, ніж у другій. Скільки цукру і солі було в склянках спочатку?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай спочатку в першій склянці було x г цукру, у другій — x г солі. Після першого пересипання в першій склянці стало $(x-20)$ г цукру, а у другій всього цукру та солі — $(x+20)$ г.

Після другого пересипання у другій склянці залишиться $\frac{1}{3}(x+20)$ г суміші, а в першій стане

$$x-20+\frac{2}{3}(x+20)=\frac{5x-20}{3} \text{ (г)}.$$

Оскільки відомо, що в першій склянці виявилось суміші вчетверо більше, ніж у другій, то

$$\frac{4}{3}(x+20)=\frac{5x-20}{3}; \quad \text{звідси } x=100,$$

тобто в кожній склянці було по 100 г.

ВІДПОВІДЬ. По 100 г.

УВАГА! Ніколи не поводьтеся так, як «герой» попередньої задачі!

ПОВТОРЮЄМО! ПОГЛИБЛЮЄМО!

Решта задач цього параграфу зовсім не на складання рівнянь, але згадати їх не завадить. Автори певні, що у початківців ці задачі викличуть труднощі! Тому рекомендуємо уважно розібрати кожну з них.

ЗАДАЧА 1. Якщо a та b — будь-які натуральні числа, то чи можна стверджувати, що розв'язок (корінь) рівняння

$$x+a=b$$

буде завжди натуральним числом?

ВІДПОВІДЬ. Ні. Це буде так, тільки якщо $b>a$.

ЗАДАЧА 2. Якщо a та b — будь-які натуральні числа, то які з наведених рівнянь не завжди матимуть розв'язання у множині натуральних чисел:

1) $x:a=b$; 2) $ax=b$;

3) $x+a=b$; 4) $x-a=b$.

ВІДПОВІДЬ. 2), 3).

ЗАДАЧА 3. Вираз $5a-2a-3ab+b$ подати у вигляді алгебричної суми (різниці) двох доданків, з яких один $5a-2a$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $5a-2a-3ab+b=5a-2a+(-3ab+b)$;

2) $5a-2a-3ab+b=5a-2a-(3ab-b)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $5a-2a+(-3ab+b)$;

2) $5a-2a-(3ab-b)$.

ЗАДАЧА 4. У виразі $2x^3+5x^2y-4xy^2-y^3$ взяти крайні члени у дужки зі знаком «плюс» перед ними, а середні члени — у дужки зі знаком «мінус» перед ними.

ВІДПОВІДЬ. $(2x^3-y^3)-(4xy^2-5x^2y)$.

ЗАДАЧА 5. Тричлен $2a-b+4$ подати у вигляді різниці двох виразів зі зменшуваним $2a$.

ВІДПОВІДЬ. $2a-(b-4)$.

ЗАДАЧА 6. У наведених виразах треба замінити знак перед дужками на протилежний, не змінюючи значення виразів:

1) $a-(2b-3a)$; 2) $x+(1-x^2)$;

3) $m^2+1-(m-n)$; 4) $x-y-(y-x)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $a+(-2b+3a)$; 2) $x-(-1+x^2)$;

3) $m^2+1+(-m+n)$; 4) $x-y+(-y+x)$.

ГЛАВА 3. ОДНОЧЛЕНИ І БАГАТОЧЛЕНИ

§ 1. СТЕПІНЬ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Цей параграф ми почнемо з поради: не «спіймайтеся» на схожості термінів «степінь» та «показник степеня».

> *Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за одиницю, називається добуток n множників, кожен з яких дорівнює a:*
>
> $$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}.$$
>
> **основа степеня** **показник степеня**

> *Степенем числа a з показником 1 називається саме число a:*
>
> $$a^1 = a.$$

ОЗНАЧЕННЯ. Знаходження значення степеня називають **піднесенням до степеня.**

ПРИКЛАД. 1) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ — число 2 піднесли до п'ятого степеня; 2) $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$ — число -1 піднесли до третього степеня; 3) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$ — число -2 піднесли до четвертого степеня.

Особливості степеня

1) Якщо підносити до степеня додатне число, виходить додатне число.

$$2^3=8;\quad (0{,}6)^4=0{,}1296;\quad \left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}.$$

2) Якщо підносити до степеня нуль, виходить нуль.

$$0^n=0.$$

3) Якщо підносити до степеня від'ємне число з парним показником, виходить додатне число: $a^{2n}>0$, якщо $a<0$.

$$(-5)^2=25;\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16};\quad (-0{,}2)^2=0{,}04.$$

4) Якщо підносити до степеня від'ємне число з непарним показником, виходить від'ємне число: $a^{2n+1}<0$, якщо $a<0$.

$$(-2)^3=-8;\quad \left(-\frac{1}{3}\right)^5=-\frac{1}{243};\quad (-0{,}5)^3=-0{,}125.$$

ЗАПАМ'ЯТАЙ!!! Коли потрібно визначити порядок дій у виразі, то піднесення до степеня виконується раніше, ніж множення та ділення.

ЗАПАМ'ЯТАЙ!!! Для запису великих чисел застосовуються степені числа 10.

Наприклад, відстань від Землі до Сонця записують у вигляді

$$1{,}5\cdot 10^8 \text{ км}.$$

ЗАДАЧА 1. Замінити добутки степенями:

1) $5\cdot5\cdot5\cdot5$; 2) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$; 3) $t\cdot t\cdot t\cdot t$;

4) $\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}$; 5) $(x-y)(x-y)(x-y)$;

6) $a\cdot a+b\cdot b\cdot b\cdot b$; 7) $a\cdot x\cdot x\cdot x+b\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y$;

8) $\underbrace{p\cdot p\cdot p\cdot p\cdot\ldots\cdot p}_{k}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 5^4; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$; 3) t^4; 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^5$;

5) $(x-y)^3$; 6) a^2+b^4; 7) ax^3+by^4; 8) p^k.

ЗАДАЧА 2. Обчислити:

1) 3^2; 2) 2^3; 3) 1^7; 4) $(-1)^8$; 5) $(-1)^7$;

6) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$; 7) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$; 8) $2\cdot(-3)^3$; 9) $-\frac{2}{5}(-5)^2$.

ЗАДАЧА 3. Довести, що

1) $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$; 2) $1^3+2^3+3^3+\ldots+9^3=45^2$.

ЗАДАЧА 4. Записати у вигляді суми розрядних доданків числа:

1) 13 425; 2) 7 048 305; 3) 12 410 108.

ВІДПОВІДЬ. 1) $1\cdot10^4+3\cdot10^3+4\cdot10^2+2\cdot10^1+5$;

2) $7\cdot10^6+4\cdot10^4+8\cdot10^3+3\cdot10^2+5$;

3) $1\cdot10^7+2\cdot10^6+4\cdot10^5+1\cdot10^4+1\cdot10^2+8$.

ЗАДАЧА 5. Вказати порядок дій у таких виразах:

1) $2x^2$; $7a^4$; $-4y^2$.

2) $0{,}2p^2$; $-\frac{2}{3}l^2$; $9bc^2$; $-0{,}3cq^3$.

3) a^2+1; $3a^2-4$; $6pc^2+8$.

4) $(a+b)^2$; $(a-b)^2$; $3(a^2+b^2)$; $-\frac{1}{2}(p^2-q^2)$.

5) $c:(m+n)^2$; $6(a+b)^3-3$; $p+(m+n):q$.

ЗАДАЧА 6. Обчислити $y=2x^2$ при таких значеннях x:

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$	-1
$y=2x^2$							

ЗАДАЧА 7. Обчислити:

1) $\dfrac{1+a+a^2}{1+a-a^2}$ при $a=\frac{1}{2}$;

2) $2a^3+3a^2-5a+6$ при $a=2$; $a=-\frac{1}{2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $1\frac{2}{5}$; 2) 24; 9.

ЗАДАЧА 8. Обчислити:

1) $3a^2-2b^3$ при $a=-1, b=-2$;

2) $5m^2n^3+4(m-n)$ при $m=-\frac{1}{2}, n=-1$;

3) $x^2+2xy+y^2$ при $x=-5, y=-4$;

4) a^2-3a+6 при $a=-\frac{1}{3}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 19; 2) $\frac{3}{4}$; 3) 81; 4) $7\frac{1}{9}$.

ЗАДАЧА 9. Обчислити:

1) $3ab^2-2a^2b$ при $a=-4, b=3$;

2) $\frac{3}{4}p^2-\frac{1}{2}q^3$ при $p=\frac{2}{3}, q=-4$;

3) $\frac{2x^4-3y^3}{1-x^2}$ при $x=-\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{3}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) -204; 2) $32\frac{1}{3}$; 3) $\frac{17}{54}$.

ЗАДАЧА 10. Обчислити:

1) $3(a^2-b^2)-4(a+b)$ при $a=-0{,}5$, $b=0{,}1$;

2) $2(c-d)^2-3(c+d)(c-d)$ при $c=2\frac{1}{2}$, $d=-1\frac{1}{2}$;

3) $5(t+u)^3-(t+u)^2+3(t+u)$ при $t=-1{,}2$, $u=2{,}5$;

4) $\frac{2k^2-4k-1}{k^2+k+1}$ при $k=-\frac{3}{4}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 2,32; 2) 20; 3) 13,195; 4) $3\frac{11}{13}$.

ЗАДАЧА 11. Обчислити:

1) $a(2a-b)^3-3a(a-2b)^2$ при $a=2$, $b=-\frac{2}{3}$;

2) $\frac{3a^2-2ab-4b^2}{2a^3b^2-1}$ при $a=-\frac{2}{3}$, $b=1\frac{1}{2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $136\frac{16}{27}$; 2) $2\frac{3}{7}$.

ЗАДАЧА 12. Подати у вигляді квадрата числа:

$$0{,}25;\ 0{,}09;\ 225;\ \frac{25}{144};\ 1\frac{24}{25};\ 0{,}0004.$$

ЗАДАЧА 13. Подати у вигляді куба числа:

$$8;\ -27;\ -216;\ -\frac{1}{64}.$$

ЗАДАЧА 14. Чому дорівнюють значення виразів:

1) $x^2; -x^2; (-x)^2$ при $x = 2; -1; 4$;

2) $x^3; -x^3; (-x)^3$ при $x = 2; -1$?

ЗАДАЧА 15. Записати у вигляді виразу:

1) квадрат суми чисел a та 1;

2) суму квадратів чисел x та y;

3) різницю квадратів чисел p та q;

4) квадрат різниці чисел m та n;

5) подвоєний добуток чисел a та $3b$;

6) подвоєний квадрат добутку чисел p та q;

7) потроєний квадрат різниці чисел $2a$ та $-3b$;

8) квадрат напівсуми чисел a та b;

9) квадрат напіврізниці чисел m та n;

10) частку від ділення квадрата суми чисел x та y на суму квадратів цих чисел;

11) добуток суми чисел a та b на неповний квадрат їхньої різниці;

12) добуток куба суми двох чисел на квадрат суми цих чисел.

ЗАДАЧА 16. Розв'язати рівняння:

1) $x^8 = 0$; 2) $x^{15} = 0$; 3) $15x^9 = 0$; 4) $\frac{1}{7}x^{12} = 0$;

5) $(x-2)^7 = 0$; 6) $(3x+1)^6 = 0$; 7) $(2x+9)^2 = -1$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) 2; 6) $-\frac{1}{3}$;

7) нема коренів.

ЗАДАЧА 17. Довести, що рівняння не мають розв'язків:

1) $x^4 + 1 = 0$; 2) $2y^6 + 5 = 0$; 3) $x^8 + x^4 + 2 = 0$.

§ 2. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Не лякайтеся, шановний читачу, деякої, на перший погляд, незрозумілості заголовка. Адже кожен з термінів вам зрозумілий: «степінь», «натуральний», «показник». Тільки тепер, коли доведеться перемножувати $2^{12} \cdot 2^{90}$, ви використовуватимете правила, про які йтиме мова далі.

> *Коли перемножують степені з однаковими основами, основу залишають незмінною, а показники степенів додаються:*
> $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ *— основна властивість степеня*

Справді,

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n} = a^{m+n}.$$

Наприклад, $a^5 \cdot a^7 = a^{12}$.

> *Коли ділять степені з однаковими основами, основу залишають незмінною, а показники степенів віднімаються:*
> $a^m : a^n = a^{m-n};\quad m > n;\quad a \neq 0.$

Цю властивість доведемо, користуючись основною властивістю степеня. Доведемо, що

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^m.$$

Справді,

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^{m-n+n} = a^m.$$

Таким чином, за означенням частки

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Наприклад, $a^7 : a^5 = a^2$.

Коли підносять степінь до степеня, основу залишають незмінною, а показники цих степенів перемножують:

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}.$$

Справді,

$$\left(a^m\right)^n = \Big(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m}\Big)^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m}}_{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{mn} = a^{mn}.$$

ПРИКЛАД. $\left(a^5\right)^7 = a^{35}$.

Коли підносять добуток до степеня, до цього степеня підноситься кожен з множників:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Справді,

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n} = a^n \cdot b^n.$$

ПРИКЛАД. $(ab)^7 = a^7 \cdot b^7$.

Коли підносять дріб до степеня, до цього степеня підноситься чисельник та знаменник:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad b \neq 0.$$

Доведення аналогічне попереднім.

ПРИКЛАД. $\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a^5}{b^5}$.

Перш ніж розглядати задачі, на хвилинку заплющте очі та пригадайте ще раз усі правила, які ви щойно прочитали. Згадали? Ось тепер переходимо до задач!

ЗАДАЧА 1. Записати добуток у вигляді степеня:

$$1)\ x^5\cdot x^7;\quad 2)\ \left(\frac{1}{2}a\right)^5\cdot\frac{1}{2}a;\quad 3)\ (4p)\cdot(4p)^{10};$$

$$4)\ a^7\cdot a^p\cdot a;\quad 5)\ \left(-\frac{7}{8}x\right)^4\cdot\left(-\frac{7}{8}x\right)^5.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ x^{12};\ \ 2)\ \left(\frac{1}{2}a\right)^6;\ \ 3)\ (4p)^{11};$

$4)\ a^{p+8};\ \ 5)\ \left(-\frac{7}{8}x\right)^9.$

ЗАДАЧА 2. Спростити вирази:

$$1)\ x^4\cdot\left(x^2\right)^7;\quad 2)\ \frac{2^5\cdot\left(2^3\right)^4}{2^{15}};\quad 3)\ \left(x^4\right)^2\cdot\left(x^8\right)^3;\quad 4)\ \frac{3^7\cdot 27}{(3^2)^3}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$4)\ \frac{3^7\cdot 27}{(3^2)^3}=\frac{3^7\cdot 3^3}{3^6}=\frac{3^{10}}{3^6}=3^4=81.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ x^{18};\ \ 2)\ 4;\ \ 3)\ x^{32};\ \ 4)\ 81.$

ЗАДАЧА 3. Скласти таблицю квадратів чисел від 1 до 30.

ЗАДАЧА 4. Скласти таблицю кубів чисел від 1 до 20.

ЗАДАЧА 5. Записати 2^{60} у вигляді степеня з основою:

4; 8; 16; 32.

ЗАДАЧА 6. Довести, що:

а) квадрати протилежних чисел рівні;

б) куби протилежних чисел протилежні.

ЗАДАЧА 7. Виконати множення та ділення (O — знак дії):

$$1)\ a^{m+1}\text{O}a^m;\quad 2)\ x^m\text{O}x^n;\quad 3)\ c^{2n+1}\text{O}c^{n-1};\quad 4)\ -6a^3b^5\text{O}4ab^2.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1):\ 1^1)\ a^{m+1}\cdot a^m=a^{2m+1};\quad 1^2)\ a^{m+1}:a^m=a^{m+1-m}=a^1=a.$$

ВІДПОВІДЬ. $1^1)\ a^{2m+1};\ \ 1^2)\ a;\qquad 2^1)\ x^{m+n};\ \ 2^2)\ x^{m-n};$

$3^1)\ c^{3n};\ \ 3^2)\ c^{n+2};\qquad 4^1)\ -24a^4b^7;\ \ 4^2)\ -1{,}5a^2b^3.$

Увага! Увага! Одна заувага!
Тут різні основи! Тому нема мови,
Щоб множити їх,
БО ЗДІЙМУТЬ НА СМІХ!

$$3^p a^m \cdot 2^5 b^4 = 3^p a^m \cdot 2^5 b^4.$$

ЗАДАЧА 8.* Що більше 5^{15} чи 3^{23}?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$3^{23} = 9\cdot\left(3^3\right)^7;\quad 5^{15} = 5\cdot\left(5^2\right)^7;\qquad 9>5;\, 3^3>5^2,\text{ тому } 3^{23}>5^{15}.$$

ВІДПОВІДЬ. $3^{23}>5^{15}$.

ЗАДАЧА 9.* Довести, що 16^5+2^{15} ділиться на 33.

ДОВЕДЕННЯ

$$16^5+2^{15}=\left(2^4\right)^5+2^{15}=2^{20}+2^{15}=2^{15}\left(2^5+1\right)=33\cdot 2^{15}.$$

ЗАДАЧА 10.* Довести, що значення виразу $333^{555}+555^{333}$ ділиться на 37.

ДОВЕДЕННЯ

$$333^{555}+555^{333}=3^{555}\cdot 111^{555}+5^{333}\cdot 111^{333}=111^{333}\left(3^{555}\cdot 111^{222}+5^{333}\right).$$

Оскільки $111=3\cdot 37$, то твердження доведено.

ЗАДАЧА 11.* Довести, що значення числового виразу $11^{11}+12^{12}+13^{13}$ ділиться на 10.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Доведемо, що $11^{11}+12^{12}+13^{13}$ закінчується нулем. Справді, 11^{11} — закінчується цифрою 1; $12^{12}=\left(12^4\right)^3$, але 12^4 закінчується цифрою 6. Будь-яке число, що закінчується шісткою, в будь-якому степені також закінчується цифрою шість (доведіть це самостійно). Підрахуємо, якою цифрою закінчується 13^{13}. Число 13^2 закінчується цифрою 9, число 13^4 — цифрою 1, тоді число 13^{13} закінчується цифрою 3, оскільки $13^{13}=\left(13^4\right)^3\cdot 13$.

Отже, сума $11^{11}+12^{12}+13^{13}$ закінчується цифрою 0.

§ 3. ОДНОЧЛЕНИ

ПИТАННЯ. Зі словом «одночлен» у книзі «Не хочу бути двієчником» ми не зустрічалися?

ВІДПОВІДЬ. Правильно. Це алгебричний термін. Він потребує означення та вивчення.

ОЗНАЧЕННЯ. Одночлен — це алгебричний вираз, що являє собою добуток чисел та змінних у деяких степенях (може й у першій степені).

Наприклад, $12ab$; $-pq$; $-0{,}7x^3$; $2a^3b$.

> *Числовий множник одночлена називається* **коефіцієнтом.**

УВАГА! Коефіцієнт одночлену a^3 або a^2b дорівнює 1, але **коефіцієнт 1 не пишеться:** $1\cdot p^3a^2=p^3a^2$.

> *Одночлен, який містить тільки один числовий множник, що стоїть на першому місці (коефіцієнт), і основи всіх степенів різні, називається* **одночленом стандартного вигляду**. *Сума показників степенів усіх змінних, що входять до одночлена називається* **степенем одночлена**.

Наприклад, $-\dfrac{2}{3}a^3b^2$ — одночлен п'ятого степеня.

ЗАДАЧА 1. Привести одночлен до стандартного вигляду:

1) $7aa^2a$; 2) $2p^2n\cdot 0{,}5pn$; 3) $10p^2q\left(-1{,}2p^4\right)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $7a^4$; 2) p^3n^2; 3) $-12p^6q$.

ЗАДАЧА 2. Знайти коефіцієнти одночленів:

1) $3pa^2$; 2) $-a^2b^4$;

3) $-\dfrac{1}{5}a^2b^3$; 4) $-0{,}8x^2y^7$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 3; 2) -1; 3) $-\dfrac{1}{5}$; 4) $-0{,}8$.

ЗАДАЧА 3. Обчислити значення одночленів:

1) $3{,}7a^2$, якщо $a=0{,}4$; 2) $-0{,}5m^3$, якщо $m=0{,}6$;

3) $-3a^3b$, якщо $a=0{,}1$; $b=4$;

4) $\frac{1}{21}x^2y^2$, якщо $x=-\frac{1}{3}$; $y=4\frac{1}{2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $0{,}592$; 2) $-0{,}108$; 3) $-0{,}012$; 4) $\frac{3}{28}$.

Множення одночленів. Піднесення одночлена до степеня

ПИТАННЯ. Чому дії з одночленами ми починаємо з дії добутку?

ВІДПОВІДЬ. Додавання одночленів призведе до багаточлена — теми наступного параграфа, а поки...

> *Щоб помножити одночлен на одночлен, застосовуються правила дій зі степенями і правило піднесення до степеня.*

ПРИКЛАД. $-2a^3b^4\cdot 7a^mb^5=-14a^{3+m}b^9$;

$$\left(-\frac{2}{3}x^5y\right)^3=-\frac{8}{27}x^{15}y^3.$$

Отже, ви самі бачите — нічого складного тут нема! Головне — діяти акуратно: стежити за знаком, не забувати збирати «докупи» всі степені з однією основою.

ЗАДАЧА 1. Виконати множення:

1) $a\cdot(+2)$; 2) $(-b)\cdot 5$; 3) $(-c)\cdot\frac{3}{4}$; 4) $\left(-1\frac{3}{4}\right)\cdot(-b)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $2a$; 2) $-5b$; 3) $-\frac{3}{4}c$; 4) $1\frac{3}{4}b$.

ЗАДАЧА 2. Виконати множення:

1) $(-a)\cdot(-b)\cdot(-c)$; 2) $(+x)\cdot(-y)\cdot(-z)$;

3) $(-k)\cdot(+m)\cdot(+n)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $-abc$; 2) xyz; 3) $-kmn$.

ЗАДАЧА 3. Виконати множення:

1) $(+2b)\cdot(-3c)$; 2) $(-4a)\cdot(-5x)$;

3) $(+8m)\cdot\left(-\frac{1}{2}n\right)$; 4) $(-6p)\cdot\left(-\frac{2}{3}q\right)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $-6bc$; 2) $20ax$; 3) $-4mn$; 4) $4pq$.

ЗАДАЧА 4. Виконати множення:

1) $(+3ab)\cdot(-2a^2b)$; 2) $(-8x^2y)\cdot(2xy^2)$;

3) $\left(+\frac{2}{3}c^3d^2\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}c^2d\right)$; 4) $(-m^2n^2)\cdot\left(+\frac{5}{6}m^3n\right)$;

5) $(-0{,}6x^2y^3)\cdot(+0{,}5x^3y^3)$; 6) $(+2{,}4k^2b^4)\cdot(-0{,}5k^3)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $-6a^3b^2$; 2) $-16x^3y^3$;

3) $-\frac{1}{2}c^5d^3$; 4) $-\frac{5}{6}m^5n^3$;

5) $-0{,}3x^5y^6$; 6) $-1{,}2k^5b^4$.

ЗАДАЧА 5. Виконати множення:

1) $(-18a^3b^3c)\cdot(-2ab^3c^3)$; 2) $(-8x^2y)\cdot(2xy^2)$;

3) $\left(+\frac{4}{3}c^8d^2\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}c^3d^3\right)$; 4) $(-m^2n^2)\cdot 7$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $36a^4b^6c^4$; 2) $-16x^3y^3$; 3) $-c^{11}d^5$; 4) $-7m^2n^2$

ЗАДАЧА 6. Виконати множення:

1) $(-8a^3b^2c)\cdot(-2ab^2c^3)$;

2) $\left(-1\frac{1}{2}x^2y^3z\right)\cdot\left(-1\frac{1}{3}xy^2z^3\right)$;

3) $\left(+1\frac{1}{4}a^2b^2c^3d\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}a^3bc^2\right)$;

4) $(-2{,}5m^3n^2p)\cdot(-3{,}4m^2n^3pq^2)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $16a^4b^4c^4$; 2) $2x^3y^5z^4$;

3) $-\frac{1}{2}a^5b^3c^5d$; 4) $8{,}5m^5n^5p^2q^2$.

ЗАДАЧА 7. Виконати дії:

1) $(+3a^n)\cdot(-4a)$; 2) $(-5x^{m+1})\cdot(-2x^2)$;

3) $(+4m^2n)\cdot(-6m^{k-3}n^{k+1})$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $-12a^{n+1}$; 2) $10x^{m+3}$; 3) $-24m^{k-1}n^{k+2}$.

ЗАДАЧА 8. Виконати дії:

1) $(-0{,}4a^nb^m)\cdot(-0{,}8a^{n+1}b^{2m})$;

2) $\left(-\frac{2}{3}x^{k-1}y^2\right)\cdot\left(+\frac{3}{4}xy^{k+1}\right)$;

3) $(-8a^mx^{n+1}y^n)\cdot\left(-\frac{1}{2}a^{3-m}x^{n-1}y^2\right)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $0{,}32a^{2n+1}b^{3m}$; 2) $-0{,}5x^ky^{k+3}$;
3) $4a^3x^{2n}y^{n+2}$.

ЗАДАЧА 9. Виконати дії:

1) $(a^p)^3$; 2) $(-3x^a)^2$; 3) $(2m^k)^2$;

4) $(-0{,}7y)^2$; 5) $(a^p)^k$; 6) $(2^ka^m)^4$.

ВІДПОВІДЬ. 1) a^{3p}; 2) $9x^{2a}$; 3) $4m^{2k}$;
4) $0{,}49y^2$; 5) a^{pk}; 6) $2^{4k}a^{4m}$.

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

УВАГА!

$12^5\cdot10^{15}=12^5\cdot10^{15}$,

а не 120^{5+15}.

$a^6\cdot b^7=a^6\cdot b^7$,

а не ab^{13}.

Але $x^6\cdot y^6=(xy)^6$.

УВАГА!

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

§ 4. БАГАТОЧЛЕНИ

ПИТАННЯ. Багаточлен — це коли багато одночленів? Наприклад, $2abcdmnkl...$?

ВІДПОВІДЬ. Ні, ви написали одночлен, тому що

ОЗНАЧЕННЯ. Багаточленом називається алгебрична сума декількох одночленів.

> *Одночлени, з яких складається багаточлен, називають* **членами багаточлена**.

> *Якщо багаточлен складається з двох членів, його називають* **двочленом**.

Наприклад, $a^2 + b^3$ — двочлен.

> *Якщо багаточлен складається з трьох членів, його називають* **тричленом**.

Наприклад, $2a^2 + p - 1$ — тричлен.

ПОРАДА! Ви вже вмієте працювати з одночленами та приводити їх до стандартного вигляду. Отже, перше, що треба зробити при дослідженні багаточлена — це привести усі його доданки-одночлени до стандартного вигляду.

> **Подібними членами** *багаточлена називають доданки, які відрізняються тільки коефіцієнтами або зовсім не відрізняються.*

Наприклад, 7^2 та $-\frac{2}{3}^2$, $3ab^2$ та $-7{,}5b^2a$.

> *Спрощення багаточлена, коли кожна сума подібних членів замінюється одним одночленом, називається* **зведенням подібних членів**.

Багаточленом стандартного вигляду *називається багаточлен, в якому всі одночлени зведені до стандартного вигляду, зведені подібні члени, а одночлени розташовані у порядку спадання степенів.*

Наприклад, $3x^2y+2xy^2+zx+xy+y+x+1$. (Зверніть увагу, що порядок одночленів одного степеня несуттєвий.)

Степенем багаточлена стандартного вигляду *називають найбільший із степенів одночленів, що входять до нього.*

Наприклад, степінь багаточлена $2x^3y-7y^2+5xy-8$ дорівнює 4.

УВАГА! Будь-який багаточлен можна привести до стандартного вигляду.

ЗАДАЧА 1. Скласти багаточлен з одночленів:

1) $7x^2$, $2x$ та 4; 2) $4x^2$, $-12x$ та 5;

3) $9a^3$, $4a^2b$ та b^3; 4) $17a^4$, $18a^4$, $2b$ та -1.

ЗАДАЧА 2. Які з даних виразів — багаточлени?

1) $7-4$; 2) $28ap^3$; 3) $x^3-4x+\frac{8}{x}$;

4) -35; 5) $ab(a-b)$; 6) $(2-3x)^2$.

ВІДПОВІДЬ. 1), 2), 4).

ЗАДАЧА 3. Спростити багаточлен

$$2ab-2bc+4ac-5ab+3bc-4ac.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\underline{2ab}-\underline{\underline{2bc}}+4ac-\underline{5ab}+\underline{\underline{3bc}}-4ac=$$

$$=(2ab-5ab)-(2bc-3bc)+(4ac-4ac)=$$

$$=-3ab+bc+0=bc-3ab.$$

ВІДПОВІДЬ. $bc-3ab$.

Радимо підкреслювати подібні члени лініями: однією, двома, хвилястою, кольоровими!!!

ЗАДАЧА 4. Звести подібні члени багаточлена:

1) $5a^2+\left(-2a^2\right)+\left(-4a^2\right)$; 2) $(-8xy)+(+10xy)+(-3xy)$;

3) $3a^2b+\left(-a^2b\right)+\left(+2a^2b\right)+\left(-6a^2b\right)$;

4) $\left(-7y^2\right)+(-4y)+\left(-y^2\right)+(+5y)+\left(-8y^2\right)$;

5) $\frac{2}{5}a^2b-\frac{7}{8}ab^2-a^2b-ab^2$; 6) $15a+2b+4a-3b$;

7) $-3a-4b^2+2a-7b^2-1$;

8) $\left(-\frac{3}{4}ab\right)+\left(\frac{2}{3}a^2b\right)+(+ab)+\left(-\frac{5}{6}a^2b\right)+\left(-\frac{1}{2}ab\right)$;

9) $\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)+\left(-\frac{3}{8}x^2y\right)+\left(+\frac{3}{4}x^2y\right)+$

$+\left(-\frac{7}{8}xy^2\right)+\left(+\frac{1}{2}xy^2\right)$;

10) $(+3pq)+\left(-4{,}2p^2\right)+\left(+0{,}3p^2\right)+$

$+(+2q)+(-5pq)+(-3q)$;

11) $(-0{,}3ab)+\left(-0{,}2a^2\right)+(+1{,}4b)+\left(-5a^2\right)+(-2{,}3ab)$;

12) $5a^n+\left(-2a^n\right)+\left(-8a^{n+1}\right)+\left(+6a^n\right)+\left(-a^{n+1}\right)$;

13) $\left(-9x^{k+1}\right)+\left(-4x^k\right)+\left(+12x^{k+1}\right)+$

$+\left(+5x^k\right)+\left(+x^{k+1}\right)$;

14) $-2x^2-3xy-5-7x^2-4xy$;

15) $\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^2-4ab+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}b^2+4ab$;

16) $0{,}8xy^2-0{,}4x^2y-0{,}9x^2y^2-0{,}8xy^2-0{,}4x^2y-0{,}9x^2y^2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $-a^2$; 2) $-xy$; 3) $-2a^2b$; 4) $-16y^2+y$;

5) $-\frac{3}{5}a^2b-1\frac{7}{8}ab^2$; 6) $19a-b$; 7) $-a-11b^2-1$;

8) $-\frac{1}{4}ab-\frac{1}{6}a^2b$; 9) $\frac{3}{8}x^2y-\frac{7}{8}xy^2$;

10) $-2pq-3{,}9p^2-q$; 11) $-2{,}6ab-5{,}2a^2+1{,}4b$;

12) $9a^n-9a^{n+1}$; 13) $4x^{k+1}+x^k$;

14) $-9x^2-7xy-5$; 15) a^2;

16) $-0{,}8x^2y-1{,}8x^2y^2$.

§ 5. ДОДАВАННЯ ТА ВІДНІМАННЯ БАГАТОЧЛЕНІВ

Давши означення багаточлену та одночлену, починаємо вивчення дій з багаточленами.

> *Для того, щоб скласти два та більше багаточленів, досить поєднати їх знаком «плюс». Якщо у знайденій сумі будуть подібні члени, їх слід звести.*

Наприклад,

$$(2a+3b)+(a-4b)=2a+3b+a-4b=3a-b;$$

> *Якщо треба відняти багаточлени, то після першого багаточлена треба поставити знак «мінус» і другий багаточлен взяти в дужки.*

Наприклад,

$$(5m-3n^2)-(2-m+7n^2)=5m-3n^2-2+m-7n^2=$$
$$=6m-10n^2-2.$$

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

Ніколи це не забувай,
Дужки ти вміло розкривай!

$$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

ДОРОГИЙ ЧИТАЧУ! Тобі, напевно, здається, що книга містить багато простих та однотипних задач. Повір, так треба! Навчись «на автопілоті» розв'язувати такі задачі. І тоді з легкістю долатимеш труднощі. І незабаром ти скажеш: «Алгебра? Це просто!»

Ми радимо тобі робити все акуратно, не намагатись «вгадати», а послідовно розкривати дужки, зводити подібні, записувати усі проміжні підрахунки. Потім це стане у нагоді!

Отже...

ЗАДАЧА 1. Розкрити дужки та звести подібні доданки:

1) $7a-(4a-3b)-5b$; 2) $-(2a-3x)-4x+(-x-3b)$;
3) $2{,}8ab-3a+(-ab-4ab)-7b$; 4) $7a-(2a-4)$;
5) $28a-(3-2x-a)$; 6) $3a-(a+2b)$; 7) $5x-(3x+2y)$;
8) $4y-(5+y)$; 9) $(2m-3n)-(5m+6n)$;
10) $(6a^2-5a)-(a^2+7a)$; 11) $3xy-(+10xy)$;
12) $5x^2y-(-2x^2y)$; 13) $-12abc-(-abc)$;
14) $4ab-(+4ab)$; 15) $\frac{1}{2}p-(-p)$; 16) $\frac{3}{4}q-\left(-\frac{1}{8}q\right)$;
17) $1\frac{3}{5}x-\left(-\frac{2}{3}x\right)$; 18) $-\frac{5}{6}y-\left(-\frac{1}{3}y\right)$;
19) $(15a+2b)+(4a-3b)$; 20) $(x^2+4x-5)+(x^2-3x+2)$;
21) $(4a^2b-3ab^2)+(-a^2b+2ab^2)$;
22) $(a^2-2ab+b^2)+(a^2+2ab+b^2)$;
23) $(x^2+2xy+y^2)+(2xy-x^2-y^2)$;
24) $(5m^2-5m+3)+(-4m^2-5m-3)$;
25) $(2y^2-4y-1)+(-1+4y-2y^2)$;
26) $(10a-6b+5c-4d)+(9a-2b-4c+2d)$;
27) $(13x-11y+10z)-(-15x+10y-15z)$;
28) $(7m^2-4mn-n^2)-(-2m^2-mn+2n^2)$;
29) $(14ab-37bc-2cd)-(16bc+11cd)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $3a-2b$; 2) $-2a-2x-3b$;
3) $-2{,}2ab-3a-7b$; 4) $5a+4$; 5) $29a+2x-3$;
6) $2a-2b$; 7) $2x-2y$; 8) $3y-5$;
9) $-3m-9n$; 10) $5a^2-12a$; 11) $-7xy$;
12) $7x^2y$; 13) $-11abc$; 14) 0;
15) $1{,}5p$; 16) $\frac{7}{8}q$; 17) $2\frac{4}{15}$;
18) $-0{,}5y$; 19) $19a-b$; 20) $2x^2+x-3$;
21) $3a^2b-ab^2$; 22) $2a^2+2b^2$; 23) $4xy$;
24) m^2-10m; 25) -2; 26) $19a-8b+c-2d$;
27) $28x-21y+25z$; 28) $9m^2-3mn-3n^2$;
29) $14ab-53bc-13cd$.

ЗАДАЧА 2. Розкрити дужки та звести подібні доданки:

1) $(11abc-16bcd-24cde)-(-9abc+bcd)$;

2) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{5}z\right)-\left(-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z\right)$;

3) $\left(\frac{1}{5}ab+\frac{1}{7}bc-\frac{2}{3}ac\right)-\left(-\frac{4}{5}ab-\frac{3}{14}bc-\frac{1}{5}ac\right)$;

4) $\left(\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{2}{3}ab-\frac{5}{6}a^2b^2-1\right)-\left(a^2b^2-\frac{1}{3}x^2y^2+\frac{1}{12}ab-\frac{1}{4}\right)$;

5) $\left(\frac{2}{3}x^3-3x^2y+\frac{1}{4}xy^2-2y^3-1\right)-$

$-\left(3x^3-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}y^3-\frac{1}{3}x^2y-2xy^2\right)$;

6) $(0{,}6ab-0{,}5bc+cd)-(-0{,}5ab+2{,}5bc-cd)$;

7) $(0{,}5abc+0{,}3bcd-1{,}5acd)-(-1{,}5abc+0{,}6bcd-2acd)$;

8) $(1{,}4x^2+2{,}24xy-1{,}5y^2)-\left(-10\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{8}xy-1\frac{1}{2}y^2\right)$;

9) $\left(1\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{8}ab+2\frac{1}{2}ac-3{,}25bc\right)-$

$-\left(0{,}08a^2+0{,}135ab-ac+1\frac{3}{4}bc\right)$;

10) $(0{,}8a^3b^2c-0{,}15a^4b^3c^2+1{,}6a^5b^4c^3)-$

$-(3{,}2a^3b^2c+2{,}1a^4b^3c^2-0{,}02a^5b^4c^3)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $20abc-17bcd-24cde$; 2) $1\frac{1}{6}x+1\frac{1}{6}y-\frac{9}{20}z$;

3) $ab+\frac{5}{14}bc-\frac{7}{15}ac$;

4) $\frac{5}{6}x^2y^2-\frac{3}{4}ab-1\frac{5}{6}a^2b^2-\frac{3}{4}$;

5) $-2\frac{1}{3}x^3-2\frac{2}{3}x^2y+2\frac{1}{4}xy^2-2\frac{1}{2}y^3-\frac{1}{3}$;

6) $1{,}1ab-3bc+2cd$; 7) $2abc-0{,}3bcd+0{,}5acd$;

8) $12{,}15x^2+2{,}865xy$;

9) $1{,}67a^2-0{,}51ab+3\frac{1}{2}ac-5bc$;

10) $-2{,}4a^3b^2c-2{,}25a^4b^3c^2+1{,}62a^5b^4c^3$.

ЗАДАЧА 3. Розкрити дужки та звести подібні доданки:

1) $\left(4a^2-2ab-b^2\right)-\left(-a^2+b^2-2ab\right)+\left(3a^2-ab+b^2\right)$;

2) $\left(-8x^3+4x^2-x+1\right)+\left(2x^3-3+x^2-6x\right)-$

$-\left(5x^3-8x^2-3x-1\right)$;

3) $-5a^n-\left(+3a^n\right)$; 4) $-8x^{n+1}-\left(-2x^{n+1}\right)$;

5) $-9a^{2n+1}-\left(-3a^{2n+1}\right)$; 6) $-\frac{1}{2}b^{m+2}-\left(-\frac{1}{3}b^{m+2}\right)$;

7) $\left(5x^2-ax+a^2\right)+\left(3x^2+2ax-3a^2\right)+\left(-4ax+2a^2-x^2\right)$;

8) $\left(2a^4+5a^3b-3a^2b^2-6ab^3\right)+$

$+\left(3a^4-8a^3b+2a^2b^2-6ab^3\right)$;

9) $\left(8a^n-2b^m+c\right)+\left(-4a^n-5b^m-c\right)$;

10) $\left(3x^{n+1}+10x^n-7x\right)+\left(x-9x^{n+1}-10x^n\right)$;

11) $\left(3a^{n+3}-9a^{n+2}+5a^{n+1}-2a^n\right)-$

$-\left(-a^n+10a^{n+3}-5a^{n+1}-7a^{n+2}\right)$;

12) $3x-\left(5x-(2x-1)\right)$; 13) $9a^2+\left(7a^2-2a-\left(a^2-3a\right)\right)$;

14) $\left(5a^2-3b^2\right)+\left(-\left(a^2-2ab-b^2\right)+\left(5a^2-2ab-3b^2\right)\right)$;

15) $3a-\left(2c-\left(6a-(c-b)+c+(a+8b-bc)\right)\right)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $8a^2-ab-b^2$; 2) $-11x^3+13x^2-4x-1$;

3) $-8a^n$; 4) $-6x^{n+1}$; 5) $-6a^{2n+1}$; 6) $-\frac{1}{6}b^{m+2}$;

7) $7x^2-3ax$; 8) $5a^4-3a^3b-a^2b^2-12ab^3$;

9) $4a^n-7b^m$; 10) $-6x^{n+1}-6x$;

11) $-7a^{n+3}-2a^{n+2}+10a^{n+1}-a^n$; 12) -1;

13) $15a^2+a$; 14) $9a^2-5b^2$;

15) $10a+9b-2c-bc$.

♦♦

Втомились від прикладів? Але ж з кожним новим (навіть більш складним) прикладом було усе простіше й простіше, чи не так? Це як у спорті: складні тренування — але усе більше і більше впевненості і, як результат, чудовий виступ на змаганнях!

ЗАДАЧА 1. Довести, що

1) сума двох послідовних чисел — непарне число;
2) сума чотирьох послідовних чисел не ділиться на 4;
3) сума семи послідовних чисел ділиться на 7.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Маємо: $n+n+1=2n+1$.

2) Маємо: $n+n+1+n+2+n+3=4n+6$. Оскільки перший доданок ділиться на 4, а другий — ні, сума цих доданків на 4 не ділиться.

4) Маємо:

$$n+n+1+n+2+n+3+n+4+n+5+n+6=7n+21.$$

Очевидно, що це число ділиться на 7.

ЗАДАЧА 2. Учневі треба було помножити 78 на двоцифрове число, в якому кількість десятків втричі більша за кількість одиниць. Помилково він переставив цифри у другому співмножнику, внаслідок чого одержав добуток на 2808 менший від істинного. Чому дорівнює істинний добуток?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай x — кількість одиниць множника (x — ціле число, менше 10), тоді кількість десятків — $3x$. Отже, множник дорівнює

$$3\cdot 10x+x=31x.$$

Помилково записаний множник був

$$10x+3x=13x.$$

Правдивий добуток є $78\cdot 31x$, помилково одержаний добуток є $78\cdot 13x$. За умовою

$$78\cdot 31x-78\cdot 13x=2808;$$

звідси $x=2$, тоді правдивий добуток дорівнює 4836.

ВІДПОВІДЬ. 4836.

ЗАДАЧА 3. У двоцифровому числі десятків утричі більше, ніж одиниць. Якщо від цього числа відняти число, записане тими ж цифрами, але у зворотному порядку, то вийде 36. Знайти це число.

ВІДПОВІДЬ. 62.

§ 6. МНОЖЕННЯ БАГАТОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Все дуже просто:

> *Для того, щоб помножити одночлен на багаточлен, треба помножити цей одночлен на кожен член багаточлена і одержані добутки скласти.*

ПРИКЛАД. $(7p^2-3p-1)\cdot 3p^3=21p^5-9p^4-3p^3$.

Теорію закінчено!!! Переходимо до розв'язання прикладів.

ЗАДАЧА 1. Виконати множення і там, де це можливо, спростити:

1) $(a^m+2a^2)\cdot a^n$; 2) $(3x^{n+1}-2x^n)\cdot 5x$;

3) $8p^{q-1}\left(\frac{1}{2}p^{q+1}-\frac{3}{4}p\right)$; 4) $-6m^xn^x\left(-\frac{1}{3}m^{2-x}-\frac{1}{2}n^{4-x}\right)$;

5) $(2x^3-3x^2+3x-1)\cdot 4x^2y^2$;

6) $(8a^3-4a^2b^2-3ab^2+5b^3)\cdot(-2a^2b)$;

7) $(-2a^3x+5a^2x^2-5ax^3+3x^4)\cdot(-3ax^2)$;

8) $(4xy^2z-7x^2yz^2+3x^2yz)\cdot(-5xyz)$;

9) $(1-0{,}3a+0{,}15a^2)\cdot 4a$;

10) $(2{,}25x^2-1{,}5xy+2{,}5y^2)\cdot(-2{,}4xy)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $a^{m+n}+2a^{n+2}$; 2) $15x^{n+2}-10x^{n+1}$;

3) $4p^{2q}-6p^q$; 4) $2m^2n^x+3m^xn^4$;

5) $8x^5y^2-12x^4y^2+12x^3y^2-4x^2y^2$;

6) $-16a^5b+8a^4b^3+6a^3b^3-10a^2b^4$;

7) $6a^4x^3-15a^3x^4+15a^2x^5-9ax^6$;

8) $-20x^2y^3z^2+35x^3y^2z^3-15x^3y^2z^2$;

9) $4a-1{,}2a^2+0{,}6a^3$;

10) $-5{,}4x^3y+3{,}6x^2y^2-6xy^3$.

ЗАДАЧА 2. Виконати множення і там, де це можливо, спростити:

1) $1\frac{1}{3}ab\cdot\left(\frac{3}{4}a^2b-1\frac{1}{2}ab^2-\frac{5}{6}b^3\right)$;

2) $6(3p+4q)-8(5p-q)+(p-q)$;

3) $2(x+y)+4(x-y)-(x+y)-(x-7y)$;

4) $-3(a-b)-2(a+b)-(3a-2b)+5(a-2b)$;

5) $4(x-y+z)-2(x+y-z)-3(-x-y-z)$;

6) $2a^2-a(2a-5b)-b(2a-b)$;

7) $6m^2-5m(-m+2n)+4m\left(-3m-2\frac{1}{2}n\right)$;

8) $5(2{,}4-0{,}9x+0{,}16x^2)-4(-1+1{,}5x+0{,}2x^2)$;

9) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right)\cdot 6a-\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b\right)\cdot 12b$;

10) $10x(5x^2-7y)-6x(5y+7x^2)-3xy$;

11) $4a(5b-2a)-4(7a^2-3ab)-2a(3a-3b)$;

12) $1{,}4x(0{,}5x-0{,}3y)-5(0{,}4y^2-4xy)+0{,}2y(8y-5x)$.

13) $(1{,}5a^2-2{,}15)\cdot 0{,}6a-(3{,}2a-1{,}8)\cdot 0{,}5a^2-$

$-1{,}8(2{,}6a^2-1{,}8a+3{,}2)$;

14) $\left(\frac{1}{2}x^2-y\right)\cdot(-0{,}25xy+x^2)-(x^2-0{,}4xy)\cdot\left(\frac{1}{4}y+x\right)$;

15) $(x^2-y)\cdot(xy+x^3)-(x^2-xy^2)\cdot(y+x^2y)-$

$-y^3(x+x^3)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $a^3b^2-2a^2b^3-1\frac{1}{9}ab^4$; 2) $-21p+31q$;

3) $4x+4y$; 4) $-3a-7b$; 5) $5x-3y+9z$;

6) $3ab+b^2$; 7) $-m^2-20mn$; 8) $16-10{,}5x$;

9) $3a^2-8ab-4b^2$; 10) $8x^3-103xy$;

11) $38ab-42a^2$; 12) $0{,}7x^2+18{,}58xy-0{,}4y^2$;

13) $-0{,}7a^3+1{,}95a-3{,}78a^2-5{,}76$;

14) $0{,}5x^4-0{,}125x^3y+0{,}35xy^2-0{,}85x^2y-x^3$;

15) $x^5-xy^2-x^2y-x^4y$.

ПОВТОРЕННЯ

ЗАДАЧА 1. Довести тотожність:

$$3(a-b)-2(a+b)-(4a-5b)+4(a-2b)=a-8b.$$

ЗАДАЧА 2. Чи є тотожними вирази:

1) $(2a-1)a$ та $2a^2-a$;

2) $(p^2-q^2)p^2$ та $p^4-q^2p^2$;

3) $(a-b-c)ab$ та a^2b-ab^2-abc?

ВІДПОВІДЬ. Так.

ЗАДАЧА 3. Знайти значення алгебричних виразів:

1) $17(4a+8b)-6(5a+7b)$ при $a=5, b=-8$;

2) $a(2b+1)-b(2a-1)$ при $a=10, b=-5$;

3) $8ab(4a^2-b^2)+4ab(b^2-3a^2)$ при $a=20, b=-5$;

4) $4a^2(5a-3b)-5a^2(4a+b)$ при $a=-2, b=-3$.

ВІДПОВІДЬ. 1) -562; 2) 5; 3) -790000; 4) 204.

ЗАДАЧА 4. Сума двох чисел дорівнює 40. Якщо одне з них помножити на 2, а друге на 5, сума добутків дорівнюватиме 110. Знайдіть ці числа.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай перше число буде x, тоді друге $40-x$. За умовою задачі складаємо рівняння:

$$2x+5(40-x)=110.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$2x+200-5x=110;\quad 3x=90;\quad x=30.$$

Отже, перше число дорівнює 30, тоді друге число дорівнює 10.

ВІДПОВІДЬ. 30; 10.

ЗАДАЧА 5. Розв'язати рівняння:

1) $8(x+3)=48$; 2) $5(x-1)=30$;

3) $(z+2)\cdot 4=60$; 4) $(2x-1)\cdot 9=36$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 3; 2) 7; 3) 13; 4) $2\frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 6. Розв'язати рівняння:

1) $3(y-5)+8=17$; 2) $5(x-2)-9=11$;

3) $6(x-3)+2(x+2)=10$; 4) $5(x-1)-4(x-3)=-20$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 8; 2) 6; 3) 3; 4) -27.

ЗАДАЧА 7. Розв'язати рівняння:

1) $3(2x-1)-5(x-3)+6(3x-4)=83$;

2) $4(x+2)-7(2x-1)+9(3x-4)=30$;

3) $8(7-4y)-7(4y+1)+5(8y-1)=19$;

4) $3(2x+1)-5(12x-7)+7(6x-1)=23$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 5; 2) 3; 3) $1\frac{1}{4}$; 4) $\frac{2}{3}$.

ЗАДАЧА 8. Розв'язати рівняння:

1) $0{,}2x+0{,}5x+5(5x-1)-2{,}7x=6{,}5$;

2) $3(0{,}4x-1{,}2)+2{,}3x=3{,}4$;

3) $0{,}6(x-0{,}6)+0{,}8(x-0{,}4)=1$;

4) $1{,}3(x-0{,}7)-0{,}12(x+10)-5x=-9{,}75$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 0,5; 2) 2; 3) 1,2; 4) 2.

ЗАДАЧА 9. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=12$; 2) $\frac{y}{2}-\frac{y}{8}=5$; 3) $\frac{y}{7}=y-1$;

4) $2z+5=\frac{z}{8}$; 5) $\frac{5x}{12}-\frac{3x}{8}=\frac{1}{2}$; 6) $\frac{3x}{14}+\frac{x}{4}=\frac{2}{7}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $\frac{3x+2x}{6}=12$; $5x=72$; $x=\frac{72}{5}$.

3) $y=7(y-1)$; $y=7y-7$; $6y=7$; $y=\frac{7}{6}$.

4) $2z-\frac{z}{8}=-5$; $16z-z=-40$; $15z=-40$; $z=-\frac{8}{3}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $14\frac{2}{5}$; 2) $13\frac{1}{3}$; 3) $1\frac{1}{6}$;

4) $-2\frac{2}{3}$; 5) 12; 6) $\frac{8}{13}$.

ЗАДАЧА 10. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{x-5}{2}+\frac{x-1}{8}=\frac{x-3}{4}+\frac{x-4}{3}$;

2) $\frac{9x+7}{2}-x+\frac{x-2}{7}=36$;

3) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}-\frac{3x-4}{3}=5$;

4) $\frac{5x-1}{7}-\frac{4x-3}{2}-\frac{3-2x}{2}=6$;

5) $x-\frac{x-1}{3}-\frac{2x-5}{5}+\frac{x+8}{6}=7$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 13; 2) 9; 3) 4,1; 4) $-21{,}5$; 5) 10.

ЗАДАЧА 11. Розв'язати рівняння:

$$2-\frac{1-2x}{3}=\frac{3x-20}{6}-\frac{x}{4}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Помножимо обидві частини рівняння на 12. Маємо:

$$24-4(1-2x)=2(3x-20)-3x;\quad 24-4+8x=6x-40-3x;$$
$$20+8x=3x-40;\quad 5x=-60;\quad x=-12.$$

ВІДПОВІДЬ. -12.

ЗАДАЧА 12. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{6x+7}{7}-3=\frac{5x-3}{8}$; 2) $\frac{x-3}{8}=9-\frac{2x-41}{9}$;

3) $10-\frac{3x-1}{2}=\frac{6x+3}{11}$; 4) $2-\frac{3x-7}{4}+\frac{x+17}{5}=0$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 7; 2) 40,12; 3) 5; 4) 13.

ЗАДАЧА 13. Розв'язати рівняння:

1) $x+\frac{2x-7}{2}-\frac{3x+1}{5}=5-\frac{x+6}{2}$;

2) $\frac{2x-5}{6}+\frac{x+2}{4}=\frac{5-2x}{3}-\frac{6-7x}{4}-x$;

3) $\frac{x-4}{5}+\frac{3x-2}{10}=\frac{2x+1}{3}-7$; 4) $\frac{4x}{3}-17+\frac{3x-17}{4}=\frac{x+5}{2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 3; 2) 1; 3) 34; 4) 15.

ЗАДАЧА 14. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{3x-2}{11}-\frac{x}{3}=\frac{3x-5}{7}-\frac{5x-3}{9}$;

2) $\frac{5x+1}{6}+\frac{3x-1}{5}=\frac{9x+1}{8}-\frac{1-x}{3}$;

3) $\frac{x+4}{5}-x+5=\frac{x+3}{3}-\frac{x-2}{2}$;

4) $\frac{2x-10}{3}-15=\frac{3x-40}{11}-\frac{57-x}{5}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) -3; 2) 7; 3) 6; 4) 17.

ЗАДАЧА 15. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{1}{2}(z-1)+\frac{1}{3}(z+2)=3-\frac{1}{4}(z+3)$;

2) $x-\frac{3}{17}(2x-1)=\frac{7}{34}(1-2x)+\frac{10x-3}{2}$;

3) $\frac{9x-0{,}7}{4}-\frac{5x-1\frac{1}{2}}{7}=\frac{7x-1{,}1}{3}-\frac{5(0{,}4-2x)}{6}$;

4) $\frac{2(2-3x)}{0{,}01}-2{,}5=\frac{0{,}02-2x}{0{,}02}-7{,}5$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $1\frac{12}{13}$; 2) $\frac{25}{67}$; 3) 0,3; 4) 0,808.

ЗАДАЧА 16.* Розв'язати рівняння:

1) $x-\frac{1-\frac{3x}{2}}{4}-\frac{2-\frac{x}{4}}{3}=2$;

2) $x+2-\frac{2x-\frac{4-3x}{5}}{15}=\frac{7x-\frac{x-3}{2}}{5}$;

3) $x-\frac{\frac{x}{2}-\frac{3+x}{4}}{2}=3-\frac{\left(1-\frac{6-x}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}{2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 2; 2) $3\frac{50}{71}$; 3) 3.

ЗАДАЧА 17. (*Знову задача і... знову складна.*) Дачник, який поспішає на електричку, пройшов у першу годину 3,5 км і зрозумів, що рухаючись з такою швидкістю, він запізниться на 1 годину. Тому решту шляху він рухається зі швидкістю 5 км/год і прибуває за 30 хвилин до відходу електрички. Визначити, який шлях мав пройти дачник.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай x км — довжина шляху. Рухаючись із швидкістю 3,5 км/год дачник подолає цю відстань протягом $\frac{x}{3{,}5}$ годин. А оскільки він запізниться до електрички на годину, то в момент його виходу до відходу електрички лишалось $\left(\frac{x}{3{,}5}-1\right)$ години. За годину після виходу дачника залишалось до відходу електрички $\left(\frac{x}{3{,}5}-2\right)$ години, а пройти треба було ще $(x-3{,}5)$ км. Прискоривши рух до 5 км/год дачник подолає цю відстань протягом $\frac{x-3{,}5}{5}$ годин. Оскільки він прийде за $\frac{1}{2}$ години до відходу електрички, то

$$\frac{x}{3{,}5}-2-\frac{x-3{,}5}{5}=\frac{1}{2}; \quad \text{звідси } x=21.$$

ВІДПОВІДЬ. 21 км.

ЗАДАЧА 18. (*Ще раз рівняння з параметром.*) Розв'язати рівняння: а) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$; б) $\frac{a-1}{2ax+3}=1$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

а) При $a=0$ та при $b=0$ рівняння розв'язків не має.
При $a\neq 0, b\neq 0$ $x(a+b)=abc$.

1) Якщо $a=-b$, $c=0$, тоді $0\cdot x=0$, $x\in\mathbb{R}$ (x набуває будь-яких значень).

2) Якщо $a=-b$, $c\neq 0$, тоді $0\cdot x=abc$ — рівняння коренів не має.

3) Якщо $a\neq -b$, тоді $x=\frac{abc}{a+b}$.

б) Зрозуміло, що $2ax+3\neq 0$ (*). Маємо:

$$a-1=2ax+3;\quad 2ax=a-4.$$

1) Якщо $a=0$, $0=-4$ (?!) — рівняння розв'язків не має.

2) Якщо $a\neq 0$ $x=\dfrac{a-4}{2a}$. Накладемо умову (*):

$$2a\frac{a-4}{2a}+3\neq 0;\quad a\neq 1.$$

ВІДПОВІДЬ. а) При $a=0$, при $b=0$ та при $a=-b$, $c\neq 0$ — рівняння коренів не має;
при $a=-b$, $c=0$ x — будь-яке число;
при $a\neq -b$ $x=\dfrac{abc}{a+b}$.

б) При $a\neq 0$, $a\neq 1$ $x=\dfrac{a-4}{2a}$;
при $a=0$ і при $a=1$ — рівняння коренів не має.

§ 7. МНОЖЕННЯ БАГАТОЧЛЕНА НА БАГАТОЧЛЕН

Легко здогадатися, що правило добутку багаточлена на багаточлен ґрунтується на правилі добутку одночлена на багаточлен.

> *Для того, щоб помножити багаточлен на багаточлен, треба помножити кожен член одного багаточлена на кожен член іншого багаточлена і всі одержані добутки скласти.*

Наприклад,

$$(3a+b-c+4)(a-b)=3a^2+ab-ac+4a-3ab-b^2+bc-4b=$$
$$=3a^2-2ab-ac+bc+4a-4b.$$

Ось і прийшов час довести найзнаменитіші із знаменитих, найпотрібніші з потрібних, найважливіші з важливих

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ.

Ці формули необхідно

знати напам'ять!

вміти доводити!

вміти проговорювати!

вміти не забувати!!!

Увага! У цьому параграфі ми ще не приділятимемо уваги діям за допомогою формул скороченого множення. Перед нами поки що стоїть інша задача — навчитися множити багаточлен на багаточлен. Тому ці формули треба просто **довести** і починати — запам'ятовувати. **ПОТІМ ЗНАДОБИТЬСЯ!!!**

Отже, доведіть (**самостійно!**) такі формули:

1) $(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$;

2) $(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$;

3) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$;

4) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$;

5) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

ЗАДАЧА 1. Виконати дії:

1) $(2a+3)(5a-4)$; 2) $(5p-3q)(4p-q)$;
3) $(2a+3b)(2a-5b)$; 4) $(3a+2b)(a-b)$;
5) $(5b-4c)(3b-2c)$; 6) $(6a^2+5b^2)(2a^2-4b^2)$;
7) $(4z^2-1)(z^2+5)$; 8) $(5ab^2+4b^3)(3ab^3-4a^2)$;
9) $(7x^3y^2-xy)(-2x^2y^2+5xy^3)$;
10) $(4b^2+2a^2-4ab)(3ab+2a^2-3b^2)$;
11) $(3m^2+4n^2-2mn)(-mn-n^2+5m^2)$;
12) $(5ab^2-3a^3+2a^2b)(-ab+2a^2-4b^2)$;
13) $(5m^2-3m^3+4m-1)(3-2m^2-6m)$;
14) $(a^3+2a^2b-5ab^2-3b^3)(5a-4b)$;
15) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}z\right)$;
16) $(1+0{,}6m+0{,}12n^2)(m-0{,}5n^2)$;
17) $(2a^4-5a^3b-3a^2b^2+ab^3-4b^4)(a^2+2ab+b^2)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $10a^2+7a-12$; 2) $20p^2-17pq+3q^2$;
3) $4a^2-4ab-15b^2$; 4) $3a^2-ab-2b^2$;
5) $15b^2-22bc+8c^2$;
6) $12a^4-14a^2b^2-20b^4$;
7) $4z^4+19z^2-5$;
8) $15a^2b^5+12ab^6-20a^3b^2-16a^2b^3$;
9) $-14x^5y^4+35x^4y^5+2x^3y^3-5x^2y^4$;
10) $4a^4-2a^3b-10a^2b^2+24ab^3-12b^4$;
11) $15m^4-13m^3n+19m^2n^2-2mn^3-4n^4$;
12) $-6a^5+7a^4b+20a^3b^2-13a^2b^3-20ab^4$;
13) $6m^5+8m^4-47m^3-7m^2+18m-3$;
14) $5a^4+6a^3b-33a^2b^2+5ab^3+12b^4$;
15) $\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{36}xy-\frac{1}{24}xz-\frac{1}{6}y^2-\frac{5}{24}yz-\frac{1}{16}z^2$;
16) $m+0{,}6m^2-0{,}18mn^2-0{,}5n^2-0{,}06n^4$;
17) $2a^6-a^5b-11a^4b^2-10a^3b^3-$
$-5a^2b^4-7ab^5-4b^6$.

ЗАДАЧА 2. Виконати дії:

1) $(3x^4 - 6x^3y + 4x^2y^2 - 9xy^2 - y^4)(x^2 - 2xy + y^2)$;

2) $(a^4 + 5a^3 + 4a^2 - 3a + 1)(a^2 + 2a + 1)$;

3) $(x - a)(x - b)(x - c)$;

4) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 1)$;

5) $(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b)$;

6) $(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $3x^6 - 12x^5y + 19x^4y^2 - 14x^3y^3 + 3x^2y^4 -$
$- 9x^3y^2 + 18x^2y^3 - 9xy^4 + 2xy^5 - y^6$;

2) $a^6 + 7a^5 + 15a^4 + 10a^3 - a^2 - a + 1$;

3) $x^3 - ax^2 - bx^2 - cx^2 + abx + acx + bcx - abc$;

4) $x^6 - 1$; 5) $a^4 - b^4$; 6) $a^5 + b^5$.

ЗАДАЧА 3. Спростити вирази та обчислити результат.

1) $(a - 4)(a - 2) - (a - 1)(a - 3)$ при $a = 1\frac{3}{4}$;

2) $(m - 5)(m - 1) - (m + 2)(m - 3)$ при $m = -2\frac{3}{5}$;

3) $(x - 2)(x - 3) + (x + 6)(x - 5) - 2(x^2 - 7x + 13)$
при $x = 5{,}6$;

4) $(x + 1)(x + 2) + (x + 3)(x + 4)$ при $x = 0{,}4$;

5) $(a - 1)(a - 2) + (a - 3)(a - 4)$ при $a = 0{,}2$;

6) $(a - 2)(a + 3) + (a + 2)(a - 3)$ при $a = 0{,}6$;

7) $(x - 1)(x + 2) + (x + 1)(x - 2)$ при $x = 2\frac{1}{2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $1\frac{1}{2}$; 2) 24; 3) 6; 4) 18,32;
5) 12,08; 6) $-11{,}28$; 7) 8,5.

ЗАДАЧА 4. Виконати дії, якщо $x = a + b$, $y = a - b$:

1) $5x + 3y$; 2) $2x - xy$;

3) $-3x - 2xy$; 4) $3y(2 - x) - 5x(1 - y)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $8a + 2b$; 2) $2a + 2b - a^2 + b^2$;
3) $2b^2 - 3b - 2a^2 - 3a$; 4) $2a^2 + a - 11b - 2b^2$.

ЗАДАЧА 5. Розв'язати рівняння:

1) $(3x-1)(2x+7)-(x+1)(6x-5)=16;$

2) $(3x-2)(2x+3)-(6x^2-85)=99;$

3) $(x+1)(x+2)-(x-3)(x+4)=6;$

4) $(2x-3)(3x-1)-(6x+2)(x-5)=25;$

5) $2(3x-1)(2x+5)-6(2x-1)(x+2)=48;$

6) $7(2x-5)-\big(5(7x-2)-2(5x-7)\big)=-72;$

7) $(2x-5)-3x+\big(8x+5(6-x)\big)=27;$

8) $3(2x-5)-$
$$-2\big((3x+4)-(4x-5)\big)+\big(2(x-1)-3(2x-3)\big)=2;$$

9) $10x-\big(6x-2\big(3x-4(1-x)\big)-(9x+8)\big)=27;$

10) $2x+2\big(-\big(-x-3(x-3)\big)\big)=2;$

11) $\frac{3}{8}x-\frac{7}{8}-\frac{1}{6}(1-x)=1\frac{2}{3};$

12) $\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}-\frac{2}{9}x-1\frac{1}{9}=-2.$

ВІДПОВІДЬ. 1) 1; 2) 4; 3) -4; 4) $\frac{12}{17}$;

5) $5\frac{3}{4}$; 6) 3; 7) 1; 8) 7;

9) 1; 10) 2; 11) 5; 12) 13.

ЗАДАЧА 6. Добуток двох послідовних цілих чисел на 38 менше добутку наступних двох послідовних цілих чисел. Визначити ці числа.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай перше число — x, тоді друге — $x+1$. Наступні два числа $x+2$ та $x+3$. Враховуючи умову задачі, маємо рівняння

$$(x+2)(x+3)-x(x+1)=38.$$

Розв'яжемо його:

$$x^2+3x+2x+6-x^2-x=38;$$

$$4x=38-6;\ \ 4x=32;\ \ x=8.$$

ВІДПОВІДЬ. 8, 9, 10, 11.

ЗАДАЧА 7. Дано квадрат. Якщо одну його сторону зменшити на 1,2 м, а іншу на 1,5 м, то площа одержаного прямокутника буде на 14,4 м^2 меншою від площі даного квадрата. Визначити сторону квадрата.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай сторона квадрата буде x м. Тоді його площа буде $x \cdot x = x^2$ (м^2). Після зменшення обох його сторін на 1,2 м і 1,5 м, сторони матимуть довжину: $(x - 1{,}2)$ м та $(x - 1{,}5)$ м, а площа прямокутника, що утворився, буде $(x - 1{,}2) \cdot (x - 1{,}5)$ м^2. Враховуючи умову, одержуємо рівняння

$$x^2 - (x - 1{,}2)(x - 1{,}5) = 14{,}4,$$

розв'язуючи яке, одержимо:

$$x^2 - x^2 + 1{,}5x + 1{,}2x - 1{,}5 \cdot 1{,}2 = 14{,}4;$$

$$\text{звідси} \quad 2{,}7x = 16{,}2; \quad x = 6 \text{ (м)}.$$

ВІДПОВІДЬ. 6 м.

ЗАДАЧА 8. Якщо довжину прямокутника зменшити на 4 см, а ширину його збільшити на 7 см, то вийде квадрат, площа якого буде на 100 см^2 більшою від площі прямокутника. Визначити сторону квадрата.

ВІДПОВІДЬ. 24 см.

ЗАДАЧА 9. Шкільний спортивний майданчик прямокутної форми має довжину 41,5 м, ширину 27,5 м. Доріжка, що оточує майданчик, має зовнішній периметр 154 м. Знайти ширину доріжки, якщо вона однакова для всього майданчика.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай ширина доріжки x м. Тоді зовнішній периметр, що оточує доріжку, складається з периметру самого спортивного майданчика і до кожної з сторін додається по $2x$ м. Маємо:

$$154 = 2 \cdot 41{,}5 + 4x + 2 \cdot 27{,}5 + 4x.$$

Отже,

$$77 = 41{,}5 + 27{,}5 + 4x; \quad 4x = 77 - 69; \quad x = 2.$$

ВІДПОВІДЬ. 2 м.

§ 8. ДІЛЕННЯ БАГАТОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Продовжуємо вивчати дії з багаточленами. Зверніть увагу, як легко ділиться багаточлен на одночлен. Чого не скажеш про ділення багаточлена на багаточлен. Останнє не входить до програми загальноосвітньої школи, але детально вивчається у поглибленому курсі математики (спеціалізовані класи).

> *Для того, щоб поділити багаточлен на одночлен, треба кожен з членів багаточлена розділити на цей одночлен і одержані результати скласти.*

Наприклад, $\left(3a^3b^2-4a^4b^5-a^7b^4\right):2a^3b=\frac{3}{2}b-2ab^4-\frac{1}{2}a^4b^3$.

ЗАДАЧА 1. Виконати ділення:

1) $(3ab+4ac):a$; 2) $\left(8a^2-4a\right):4a$;

3) $\left(4c^2d-12c^4d^2\right):\left(-4c^2d\right)$; 4) $\left(-10x^3+5x^2-20x\right):5x$.

5) $\left(10m^3n^5+20m^2n^3\right):5m^2n^2$; 6) $(4a-8b+6c):2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $3b+4c$; 2) $2a-1$; 3) $-1+3c^2d$;
4) $-2x^2+x-4$; 5) $2mn^3+4n$; 6) $2a-4b+3c$.

ЗАДАЧА 2. Виконати ділення, а результат перевірити множенням:

1) $\left(6a^2b^3-3a^3b^4-15a^4b^3+12a^2b^3\right):3a^2b^3$;

2) $\left(2{,}8a^5b^3-0{,}12a^4b^4-a^3b^5\right):\left(-0{,}4a^3b^3\right)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $2-ab-5a^2+4$; 2) $-7a^2+0{,}3ab+2{,}5b^2$.

ЗАДАЧА 3. Знайти числове значення виразу:

$$\left(16x^2-8x\right):(-4x)-(x+2)-4\left(\frac{1}{4}x-\frac{5}{8}\right),\ \text{якщо } x=\frac{2}{3}.$$

ВІДПОВІДЬ. $-1{,}5$.

ЗАДАЧА 4. Довести тотожності:

1) $\left(\frac{3}{4}a-1\right)\cdot 8+\left(-15a^2+5a\right):(-5a)+(-3a+2)=6a-7;$

2) $\left(3x^2\left(a^2+b^2\right)-3a^2b^2+\right.$

$\left.+3\left(x^2+(a+b)x+ab\right)\cdot\left(x(x-a)-b(x-a)\right)\right):2x^2=1\frac{1}{2}x^2;$

3) $\left(\left(ax-2(a+2)\right)\left(a(x-1)+2\right)+\right.$

$\left.+2\left(-a^2+4\right)+3a^2x\right):(-2ax)=1-\frac{1}{2}ax.$

ЗАДАЧА 5. Розв'язати рівняння:

1) $6x+\left(4x^3-12x^2\right):2x^2=10;$

2) $6x-\left(14x^2-21x^3\right):7x^2+15=14.$

ВІДПОВІДЬ. 1) 2; 2) $\frac{1}{9}$.

ГЛАВА 4. РОЗКЛАДАННЯ БАГАТОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

§ 1. ВИНЕСЕННЯ МНОЖНИКА ЗА ДУЖКИ

Як завжди у подібних випадках, починаємо з поради, тому що винесення за дужки — одна з важливіших операцій алгебри, її необхідно вивчити теоретично і неодноразово (!) закріпити на практиці. *Винесення за дужки* присутнє майже у кожному алгебричному прикладі. Переважно це стандартна операція. Але бувають випадки, які потребують деякого тренування і навіть винахідливості. Ось чому практична частина параграфа така велика. Винесення за дужки — одна з перших дій при розкладанні на множники.

Розкласти на множники означає представити багаточлен у вигляді добутку.

Розкладання на множники — тотожне перетворення.

Розв'язуючи приклади радимо завжди переконатися, що після перетворень змінилася форма багаточлена, але не його значення. Роблячи перевірку (усно розкриваючи дужки), ви тим самим перевіряєте правильність перетворення.

Наприклад, $ax^2+bx^2+3x^2=x^2(a+b+3)$.

Всі доданки мали спільний множник — x^2. Його ми винесли за дужки. Не забувайте робити перевірку:

$$x^2(a+b+3)=x^2\cdot a+x^2\cdot b+x^2\cdot 3=ax^2+bx^2+3x^2.$$

Тепер читач має пройти довгий шлях та розв'язати велику кількість прикладів з короткою умовою: **розкласти на множники**.

ЗАДАЧА 1. Розкласти на множники:

1) $2x+2y$; 2) $3a+3b$; 3) $5m-5n$;
4) $10p-5q$; 5) $12c+8d$; 6) $15k-9l$;
7) $ax-ay$; 8) $mn+n$; 9) $cd-bc$;
10) $ab+b$; 11) $mx-m$; 12) $-2a-5ab$;
13) $7ab+7ac$; 14) $5mn-5m$; 15) $4ax+8a$;
16) $6ab-3bc$; 17) $-15ax-20ay$; 18) $-2mn-4n$;
19) a^4-ab; 20) $mn-n^2$; 21) c^5+c^3;
22) x^3+x^2; 23) x^4-x^2; 24) y^3-y^4;
25) $3x^2-6x^3$; 26) $9m^4-6m^2$; 27) $6z^4-12z^6$;
28) $15a^3+5a^2$; 29) $7y^5+21y^3$; 30) $10a^6+30a^5$;
31) x^2y-xy^2; 32) $a^2x^2-ax^3$; 33) $18ab^3-9b^4$;
34) $a^3b^2+a^2b^3$; 35) $6a^2x+12ax^3$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $2(x+y)$; 2) $3(a+b)$; 3) $5(m-n)$;
4) $5(2p-q)$; 5) $4(3c+2d)$; 6) $3(5k-3l)$;
7) $a(x-y)$; 8) $n(m+1)$; 9) $c(d-b)$;
10) $b(a+1)$; 11) $m(x-1)$; 12) $a(-2-5b)$;
13) $7a(b+c)$; 14) $5m(n-1)$; 15) $4a(x+2)$;
16) $3b(2a-c)$; 17) $5a(-3x-4y)$;
18) $2n(-m-2)$; 19) $a(a^3-b)$; 20) $n(m-n)$;
21) $c^3(c^2+1)$; 22) $x^2(x+1)$; 23) $x^2(x^2-1)$;
24) $y^3(1-y)$; 25) $3x^2(1-2x)$;
26) $3m^2(3m^2-2)$; 27) $6z^4(1-2z^2)$;
28) $5a^2(3a+1)$; 29) $7y^3(y^2+3)$;
30) $10a^5(a+3)$; 31) $xy(x-y)$;
32) $ax^2(a-x)$; 33) $9b^3(2a-b)$;
34) $a^2b^2(a+b)$; 35) $6ax(a+2x^2)$.

ЗАДАЧА 2. Розкласти на множники:

1) $3x^3y^3+15x^2y^2$; 2) $3a^2x+6ax^2$; 3) $9a^4-12a^3b$;

4) $18ab^3-9b^4$; 5) $5xy^2-10x^3y^4$; 6) $8m^2n^3+10mn^2$;

7) $3x^3y^3+15x^2y^2$; 8) a^m+a^{m+1}; 9) $x^{m+n}-x^m$;

10) $y^{m+1}-y$; 11) $5x^{m+2}+10x^2$; 12) $a^{3n}-a^{2n}$;

13) $a^nb^{2n}+a^nb^n$; 14) $4x^{n+2}+20x^n$;

15) $15x^{2n+3}-25x^{n+1}$; 16) $14acx-7a^{n+1}c^{n+2}x$;

17) $ax+bx+cx$; 18) a^3-2a^2-a;

19) $m^4+3m^3-m^2$; 20) $5x-10xy+10ax$;

21) $3ab+9ac-12ad$; 22) $15x^3y^2+10x^2y-20x^2y^3$;

23) $4ax-8ax^2+12ax^3$; 24) $3ab^3+6ab^2-18ab$;

25) $40m^2n-25mn^2+30mn$; 26) $-4x^3y+6x^2y^2-8x^4y^3$;

27) $-3m^4n^2-6m^3n^3+9m^2n^4$;

28) $10a^4b^3-15a^4b^2+20a^3b^4$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $3x^2y^2(xy+5)$; 2) $3ax(a+2x)$;

3) $3a^3(3a-4b)$; 4) $9b^3(2a-b)$;

5) $5xy^2(1-2x^2y^2)$; 6) $2mn^2(4mn+5)$;

7) $3x^2y^2(xy+5)$; 8) $a^m(1+a)$;

9) $x^m(x^n-1)$; 10) $y(y^m-1)$;

11) $5x^2(x^m+2)$; 12) $a^{2n}(a^n-1)$;

13) $a^nb^n(b^n+1)$; 14) $4x^n(x^2+5)$;

15) $5x^{n+1}(3x^{n+2}-5)$; 16) $7acx(2-a^nc^{n+1})$;

17) $x(a+b+c)$; 18) $a(a^2-2a-1)$;

19) $m^2(m^2+3m-1)$; 20) $5x(1-2y+2a)$;

21) $3a(b+3c-4d)$; 22) $5x^2y(3xy+2-4y^2)$;

23) $4ax(1-2x+3x^2)$; 24) $3ab(b^2+2b-6)$;

25) $5mn(8m-5n+6)$;

26) $2x^2y(-2x+3y-4x^2y^2)$;

27) $3m^2n^2(-m^2-2mn+3n^2)$;

28) $5a^3b^2(2ab-3a+4b^2)$.

ЗАДАЧА 3. Розкласти на множники:

1) $-8x^4y^3-12x^2y^4-16x^3y^2$;

2) $a(x+y)+b(x+y)$; 3) $a(x-4)+b(x-4)$;

4) $x(a+3)-y(a+3)$; 5) $m(a+1)-n(a+1)$;

6) $3a(a-b)+2b(a-b)$; 7) $6m(p-3)+5n(p-3)$;

8) $5x(a+b)-4y(a+b)$; 9) $7(p-q)-2p(p-q)$;

10) $3(x+y)+(x+y)^2$; 11) $5(a-b)+2(a-b)^2$;

12) $4(x+y)(x-y)+(x+y)$; 13) $x+y-(x+y)^2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $4x^2y^2(-2x^2y-3y^2-4x)$;

2) $(x+y)(a+b)$; 3) $(x-4)(a+b)$;
4) $(x-y)(a+3)$; 5) $(a-1)(m-n)$;
6) $(a-b)(3a+2b)$; 7) $(p-3)(6m+5n)$;
8) $(a+b)(5x-4y)$; 9) $(p-q)(7-2p)$;
10) $(x+y)(3+x+y)$; 11) $(a-b)(5+2a-2b)$;
12) $(x+y)(4x-4y+1)$; 13) $(x+y)(1-x-y)$.

Не втекти від «мінуса» ніяк!
Щоб «винести», ми змінимо знак!

ЗАДАЧА 4. Розкласти на множники:

1) $x(a-b)+y(b-a)$; 2) $a(m-n)-b(n-m)$;

3) $p(x-y)-q(y-x)$; 4) $2m(x-3)-5n(3-x)$;

5) $a^2(x-1)-b(1-x)$; 6) $2x(a-b)-3y(b-a)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $x(a-b)+y(b-a)=x(a-b)-y(a-b)=(a-b)(x-y)$;

2) $a(m-n)-b(n-m)=a(m-n)+b(m-n)=(m-n)(a+b)$;

3) $p(x-y)-q(y-x)=p(x-y)+q(x-y)=(x-y)(p+q)$;

4) $2m(x-3)-5n(3-x)=2m(x-3)+5n(x-3)=$
$=(x-3)(2m+5n)$;

5) $a^2(x-1)-b(1-x)=a^2(x-1)+b(x-1)=(a^2+b)(x-1)$;

6) $2x(a-b)-3y(b-a)=2x(a-b)+3y(a-b)=(2x+3y)(a-b)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(a-b)(x-y)$; 2) $(m-n)(a+b)$;

3) $(x-y)(p+q)$; 4) $(x-3)(2m+5n)$;
5) $(x-1)(a^2+b)$; 6) $(a-b)(2x+3y)$.

ЗАДАЧА 5. Розкласти на множники:

1) $m^2(a-2)+n(2-a)$; 2) $5(x-3)-a(3-x)$;
3) $x(x-4)-3(4-x)$; 4) $a(b-5)+2(5-b)$;
5) $p(p-1)-4(1-p)$; 6) $6(x-2)+x(2-x)$;
7) $2a(x-y)-(y-x)$; 8) $(p-q)+2a(q-p)$;
9) $3x(x-1)-(1-x)$; 10) $2k(a-b)-(b-a)$;
11) $3a(x-1)-2b(x-1)+c(x-1)$;
12) $x(p-a)-y(p-a)-z(p-a)$;
13) $p(a^2+b^2)+q(a^2+b^2)-r(a^2+b^2)$;
14) $a(m^2+1)-b(m^2+1)-c(m^2+1)$;
15) $x(p-a)+y(a-p)-z(p-a)$;
16) $m(n-2)+p(n-2)+(2-n)$;
17) $x(a+b+c)-y(a+b+c)+z(a+b+c)$;
18) $2a(x+y-z)-3b(x+y-z)-5c(x+y-z)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(a-2)(m^2-n)$; 2) $(x-3)(5+a)$;
3) $(x-4)(x+3)$; 4) $(b-5)(a-2)$;
5) $(p-1)(p+4)$; 6) $(x-2)(6-x)$;
7) $(x-y)(2a+1)$; 8) $(p-q)(1-2a)$;
9) $(x-1)(3x+1)$; 10) $(a-b)(2k+1)$;
11) $(x-1)(3a-2b+c)$; 12) $(p-a)(x-y-z)$;
13) $(a^2+b^2)(p+q-r)$; 14) $(m^2+1)(a-b-c)$;
15) $(p-a)(x-y-z)$; 16) $(n-2)(m+p-1)$;
17) $(a+b+c)(x-y+z)$;
18) $(x+y-z)(2a-3b-5c)$.

ЗАДАЧА 6. Знайти числове значення виразів, розклавши їх попередньо на множники:

1) a^2+15a при $a=85$; 2) $2ab-2a$ при $a=15, b=11$;
3) $32a^2x-25ax$ при $a=0{,}4$, $x=15$;
4) $5x(m-2)-4x(m-2)$ при $x=0{,}4, m=5{,}75$;
5) $4a^2(x+7)-3a^2(x+7)$ при $a=-0{,}2$, $x=8$;
6) $x(a+3)-y(a+3)$ при $a=4$, $x=\frac{3}{4}$, $y=\frac{1}{2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 8500; 2) 300; 3) $-73{,}2$;
4) $1\frac{1}{2}$; 5) 0,6; 6) $1\frac{3}{4}$.

ЗАДАЧА 7. Довести, що:

1) значення виразу 13^4+13^3 кратне 14;

2) значення виразу 36^5-6^9 кратне 30;

3) значення виразу 37^9-37^8 кратне 36;

4) значення виразу $5^{18}-25^8$ — кратне 120;

5) значення виразу 18^3-3^6 кратне 7.

ДОВЕДЕННЯ

1) $13^4+13^3=13^3(13+1)=13^3\cdot 14$ — кратне 14;

2) $36^5-6^9=6^{10}-6^9=6^9(6-1)=6^8\cdot 6\cdot 5=6^8\cdot 30$ — кратне 30;

3) $37^9-37^8=37^8(37-1)=37^8\cdot 36$ — кратне 36;

4) $5^{18}-25^8=5^{18}-5^{16}=5^{16}(5^2-1)=$

$=5^{15}\cdot 5\cdot 24=5^{15}\cdot 120$ — кратне 120;

5) $18^3-3^6=(2\cdot 9)^3-3^6=2^3\cdot 3^6-3^6=$

$=3^6\cdot(8-1)=3^6\cdot 7$ — кратне 7.

ЗАДАЧА 8. Обчислити найкоротшим шляхом:

1) $5{,}83\cdot 19+5{,}83\cdot 54+5{,}83\cdot 27$; 2) $23{,}4\cdot 8+46{,}6\cdot 8$;

3) $17{,}9\cdot 15+25{,}1\cdot 15$; 4) $21\cdot 3{,}8+63\cdot 3{,}8+17\cdot 3{,}8$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 583; 2) 560; 3) 645; 4) 383,8.

ЗАДАЧА 9. Розв'язати рівняння:

1) $x(x-2)=0$; 2) $y(7-y)=0$; 3) $5z(z+4)=0$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 0 або 2; 2) 0 або 7; 3) 0 або -4.

Ось гарна є порада
(щоб не набив ти гуль):
в таких, як ці, рівняннях
завжди є корінь нуль!

ЗАДАЧА 10. Розв'язати рівняння $7x^2-7x=0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задане рівняння рівносильне рівнянню $7x(x-1)=0$. Добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю. Отже, $x=0$ або **(а не і!)** $x=1$.

ВІДПОВІДЬ. $x_1=0$; $x_2=1$ (можна і так записати в[illegible]відь!).

ЗАДАЧА 11. Розв'язати рівняння:

1) $4y^2 - y = 0$; 2) $5y^2 = 8y$; 3) $x^3 - 7x^2 = 0$;

4) $6p^3 - p^2 = 0$; 5) $y^2 - 2y = 0$; 6) $x^7 + 6x^6 = 0$;

7) $3x^2 + 6(x+2) = 12$; 8) $x^3 - 5(x^2 - 2) = 10$;

9) $x^2 - 5(x-3) = 15$; 10) $2y^2 - 7(y^2 - 3) = 21$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 0 або $\frac{1}{4}$; 2) 0 або $\frac{8}{5}$; 3) 0 або 7;

4) 0 або $\frac{1}{6}$; 5) 0 або 2; 6) 0 або -6;

7) 0 або -2; 8) 0 або 5; 9) 0 або 5; 10) 0.

ЗАДАЧА 12.* Розв'язати рівняння:

$$x^2(x-2) - 2x(x-2)(x-1) = 0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$x(x-2)(x-2x+2) = 0; \quad -x(x-2)(x-2) = 0;$$

$$x(x-2)^2 = 0; \quad x = 0 \text{ або } x = 2.$$

ВІДПОВІДЬ. 0 або 2.

ЗАДАЧА 13.* Розв'язати рівняння:

$$3x(1-x)^2 - x^2(1-x) = 0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$x(1-x)(3-3x-x) = 0; \quad x(1-x)(3-4x) = 0;$$

$$x = 0, x = 1 \text{ або } x = 0{,}75.$$

ВІДПОВІДЬ. $x = 0, x = 1$ або $x = 0{,}75$.

§ 2. СПОСІБ ГРУПУВАННЯ

ПИТАННЯ. Як розкласти на множники багаточлен, у якого не всі члени мають спільний множник?

ВІДПОВІДЬ. Потрібно переконатися, чи не містять спільний множник декілька пар, навіть якщо у кожної з них він різний. Тоді їх об'єднують у групи в залежності від цього спільного множника. У цьому й полягає спосіб групування.

ПРИКЛАД. Розкласти на множники багаточлен:

$$ax+bx+ay+by+az+bz.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Як бачимо, багаточлен містить три пари одночленів з однаковими спільними множниками:

$$ax+bx;\ ay+by;\ az+bz.$$

Їх ми об'єднаємо у три групи. Винесемо в першій групі x, в другій — y та в третій — z. Маємо

$$ax+bx+ay+by+az+bz=x(a+b)+y(a+b)+z(a+b).$$

Групування виконане: як бачимо, тепер три доданки мають спільний множник $(a+b)$. Його можна винести за дужки. Дістанемо:

$$ax+bx+ay+by+cz+dz=(a+b)(x+y+z).$$

ВІДПОВІДЬ. $(a+b)(x+y+z)$.

ПОРАДА! І знов найкраща порада проста: розв'язувати якомога більше прикладів та бути уважними!

Почнемо з простого. Для першої задачі вам досить навичок, отриманих під час розв'язання задач попереднього параграфа.

ЗАДАЧА 1. Розкласти на множники:

1) $a(m+n)+bm+bn$; 2) $x(a+b)+ay+by$;
3) $a(x-y)+bx-by$; 4) $ac+bc+a(a+b)$;
5) $a(x-c)+bc-bx$; 6) $m(p+q)-pn-qn$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(m+n)(a+b)$; 2) $(a+b)(x+y)$;
3) $(x-y)(a+b)$; 4) $(a+b)(a+c)$;
5) $(x-c)(a-b)$; 6) $(p+q)(m-n)$.

ЗАДАЧА 2. Розкласти на множники:

1) x^3+3x^2+3x+9; 2) $x^2-xy-2x+2y$;

3) $m^2+mn-5m-5n$; 4) $a^2-ab-3a+3b$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $x^3+3x^2+3x+9=x^2(x+3)+3(x+3)=(x^2+3)(x+3)$;

4) $a^2-ab-3a+3b=a(a-b)-3(a-b)=(a-3)(a-b)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(x^2+3)(x+3)$; 2) $(x-y)(x-2)$;
3) $(m+n)(m-5)$; 4) $(a-3)(a-b)$.

ЗАДАЧА 3. Розкласти на множники:

1) $10ay-5by+2ax-bx$; 2) $6by-15bx-4ay+10ax$;

3) $4x^2-4xz-3x+3z$; 4) $3ax-4by-4ay+3bx$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $10ay-5by+2ax-bx=5y(2a-b)+x(2a-b)=$
$=(5y+x)(2a-b)$;

2) $6by-15bx-4ay+10ax=6by-4ay-15bx+10ax=$
$=2y(3b-2a)-5x(3b-2a)=(2y-5x)(3b-2a)$;

3) $4x^2-4xz-3x+3z=4x(x-z)-3(x-z)=(x-z)(4x-3)$;

4) $3ax-4by-4ay+3bx=3ax+3bx-4by-4ay=$
$=3x(a+b)-4y(b+a)=(3x-4y)(a+b)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(5y+x)(2a-b)$; 2) $(2y-5x)(3b-2a)$;
3) $(x-z)(4x-3)$; 4) $(3x-4y)(a+b)$.

ЗАДАЧА 4. Розкласти на множники:

1) $5ax-6bx-5ay+6by$; 2) $10a^2+21xy-14ax-15ay$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $5ax-6bx-5ay+6by=5ax-5ay-6bx+6by=$
$=5a(x-y)-6b(x-y)=(5a-6b)(x-y)$;

2) $10a^2+21xy-14ax-15ay=10a^2-15ay+21xy-14ax=$
$=5a(2a-3y)-7x(-3y+2a)=(5a-7x)(2a-3y)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(5a-6b)(x-y)$; 2) $(5a-7x)(2a-3y)$.

ЗАДАЧА 5. Розкласти на множники:

1) $30ax-34bx-15a+17b$; 2) $5a^2-5ax-7a+7x$;

3) $3x^2-3xy+3y^2-3xy$; 4) $12a^2-6ab+3b^2-6ab$;

5) $x+x^2-x^3-x^4$; 6) $x^3+x^2y-x^2z-xyz$;

7) $5ax^2-10ax-bx+2b-x+2$;

8) $m^2x^4-mnx^3+2mx^2-2nx-n+mx$;

9) $xyz+x^2y^2+3x^4y^5+3x^3y^4z-xy-z$;

10) $12a^2b^2-6abc+3ac^2-6a^2bc-c+2ab$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(15a-17b)(2x-1)$; 2) $(a-x)(5a-7)$;
3) $3(x-y)^2$; 4) $3(2a-b)^2$; 5) $x(1+x)^2(1-x)$;
6) $x(x+y)(x-z)$; 7) $(x-2)(5ax-b-1)$;
8) $(mx-n)(mx^3+2x+1)$;
9) $(xy+z)(xy+3x^3y^4-1)$;
10) $(2ab-c)(6ab-3ac+1)$.

ЗАДАЧА 6. Знайти двома способами числове значення таких виразів, а) попередньо розклавши їх на множники, б) не розкладаючи їх на множники, та з'ясувати, який спосіб простіший:

1) $5a^2-5ax-7a+7x$ при $a=-0{,}1$, $x=-1$;

2) $p^2-pq-3p+3q$ при $p=\frac{1}{2}$, $q=0{,}125$;

3) $a^2+ab-3a-3b$ при $a=2{,}1$, $b=-3$;

4) $3ax-4by+4ay-3bx$ при $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $x=2$, $y=-3$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $-6{,}75$; 2) $-\frac{15}{16}$; 3) $0{,}81$; 4) 1.

ЗАДАЧА 7. Обчислити:

1) $139\cdot15+18\cdot139+15\cdot261+18\cdot261$;

2) $125\cdot48-31\cdot82-31\cdot43+125\cdot83$;

3) $14{,}7\cdot13-2\cdot14{,}7+13\cdot5{,}3-2\cdot5{,}3$;

4) $3\frac{1}{3}\cdot4\frac{1}{5}+4{,}2\cdot\frac{2}{3}+3\frac{1}{3}\cdot2\frac{4}{5}+2{,}8\cdot\frac{2}{3}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 13200; 2) 12500; 3) 220; 4) 28.

ЗАДАЧА 8. Розв'язати рівняння:

1) $x(x-13)+3(x-13)=0$; 2) $y(y-5)-5(5-y)=0$;

3) $x^2-4x+x-4=0$; 4) $2x^3-3x^2+2x-3=0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $(x-13)(x+3)=0$; $x_1=13, x_2=-3$;

2) $y(y-5)+5(y-5)=0$; $(y+5)(y-5)=0$; $y_1=-5, y_2=5$;

3) $x^2-4x+x-4=0$; $x(x-4)+x-4=0$; $(x-4)(x+1)=0$;

$x_1=4, x_2=-1$;

4) $2x^3-3x^2+2x-3=0$; $x^2(2x-3)+(2x-3)=0$;

$(2x-3)(x^2+1)=0$; і оскільки $x^2+1\neq 0$, то $x=\frac{3}{2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x_1=13, x_2=-3$; 2) $y_1=-5, y_2=5$;

3) $x_1=4, x_2=-1$; 4) $x=\frac{3}{2}$.

§ 3. ФОРМУЛА РІЗНИЦІ КВАДРАТІВ

Ми починаємо вивчати формули скороченого множення!!!

ПИТАННЯ. Що таке «скорочене множення»?

ВІДПОВІДЬ. Скорочене множення — це множення багаточленів за формулами, які прискорюють процес звичайного множення багаточленів.

У ДАНОМУ ВИПАДКУ множиться сума двох чисел $(a+b)$ на їхню різницю $(a-b)$. Зробимо це за звичайним правилом множення багаточлена на багаточлен:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2.$$

Дістали формулу скороченого множення:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2. \qquad (1)$$

Отже,

> *добуток суми двох чисел на їхню різницю дорівнює різниці квадратів цих чисел.*

Під час розкладання на множники різниці квадратів двох чисел $\left(a^2-b^2\right)$ формула (1) записується «задом наперед»:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b). \qquad (2)$$

Отже,

> *різниця квадратів двох чисел дорівнює добутку різниці цих чисел на їхню суму.*

Різницю двох квадратів
Ти завжди пам'ятай!
І суму на різницю
Ти швидко помножай!
Це перший крок у справі,
Що маєш ти пройти,
Щоб легко рахувати,
Щоб відповідь знайти!

Застосування формули «різниці двох квадратів» «туди»

ЗАДАЧА 1. Виконати дії:

1) $(m+n)(m-n)$;
2) $(p-q)(p+q)$;
3) $(c+d)(d-c)$;
4) $(a+3)(a-3)$;
5) $(x+1)(x-1)$;
6) $(1+a)(1-a)$;
7) $(2a+b)(2a-b)$;
8) $(a+3b)(a-3b)$;
9) $(5x-y)(5x+y)$;
10) $(2m-3n)(2m+3n)$;
11) $\left(2d-\frac{1}{2}\right)\left(2d+\frac{1}{2}\right)$;
12) $\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y\right)$;
13) $\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)$;
14) $(2xy-1)(2xy+1)$;
15) $\left(5a^2-1\right)\left(5a^2+1\right)$;
16) $\left(4m^2+6n\right)\left(4m^2-6n\right)$;
17) $\left(a^n+b^n\right)\left(a^n-b^n\right)$;
18) $\left(x^k+y\right)\left(x^k-y\right)$;
19) $\left(2^k a^p-1\right)\left(2^k a^p+1\right)$;
20) $\left(0{,}2a^m-0{,}3b^n\right)\left(0{,}2a^m+0{,}3b^n\right)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) m^2-n^2; 2) p^2-q^2; 3) d^2-c^2; 4) a^2-9; 5) x^2-1; 6) $1-a^2$; 7) $4a^2-b^2$; 8) a^2-9b^2; 9) $25x^2-y^2$; 10) $4m^2-9n^2$; 11) $4d^2-\frac{1}{4}$; 12) $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2$; 13) a^4-b^4; 14) $4x^2y^2-1$; 15) $25a^4-1$; 16) $16m^4-36n^2$; 17) $a^{2n}-b^{2n}$; 18) $x^{2k}-y^2$; 19) $4^k a^{2p}-1$; 20) $0{,}04a^{2m}-0{,}09b^{2n}$.

ЗАДАЧА 2. Довести тотожності:

1) $(1+a)(1-a)\left(1+a^2\right)=1-a^4$;
2) $5a^2-3(a+1)(a-1)=2a^2+3$;
3) $7\left(n^2-2\right)-4(n+3)(n-3)=3n^2+22$.

ДОВЕДЕННЯ

1) $(1+a)(1-a)\left(1+a^2\right)=\left(1-a^2\right)\left(1+a^2\right)=1-a^4$;
2) $5a^2-3(a+1)(a-1)=5a^2-3\left(a^2-1\right)=5a^2-3a^2+3=2a^2+3$;
3) $7(n^2-2)-4(n+3)(n-3)=7n^2-14-4n^2+36=3n^2+22$.

ЗАДАЧА 3. Обчислити, використовуючи формулу

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Наприклад, $21\cdot 19=(20+1)(20-1)=20^2-1^2=400-1=399$.

1) $31\cdot 29$; 2) $199\cdot 201$; 3) $72\cdot 68$; 4) $61\cdot 59$; 5) $2{,}1\cdot 1{,}9$;
6) $4{,}01\cdot 3{,}99$; 7) $15{,}2\cdot 14{,}8$; 8) $19{,}9\cdot 20{,}1$; 9) 35^2-25^2;
10) 55^2-45^2; 11) $\left(4\frac{1}{6}\right)^2-\left(1\frac{1}{6}\right)^2$; 12) $\left(7\frac{5}{9}\right)^2-\left(4\frac{4}{9}\right)^2$;
13) $50{,}7^2-50{,}6^2$; 14) $0{,}8^2-0{,}3^2$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Читач звісно ж здогадався, чому до задачі 3 не наводяться відповіді. Ці відповіді легко можна отримати на калькуляторі. Але не робіть цього — користі ніякої!!!

ЗАДАЧА 4. Виконати дії:

1) $(x+2y+3z)(x-2y+3z)$; 2) $(a+2b+4c)(a-2b-4c)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x^2+6xz+9z^2-4y^2$; 2) $a^2-4b^2-16c^2-16bc$.

Використання формули «різниці двох квадратів» «назад»

ЗАДАЧА 1. Розкласти на множники:

1) $25-x^2$; 2) c^2-36; 3) a^2-1;
4) $1-m^2$; 5) $4x^2-9$; 6) m^2-4n^2;
7) $36q^2-25$; 8) $1-81x^2$; 9) $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2$;
10) $\frac{1}{4}a^2-b^2$; 11) a^2b^2-4; 12) x^2y^2-9;
13) $16-m^2n^2$; 14) $49-p^2q^2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(5-x)(5+x)$; 2) $(c-6)(c+6)$;
3) $(a-1)(a+1)$; 4) $(1-m)(1+m)$;
5) $(2x-3)(2x+3)$; 6) $(m-2n)(m+2n)$;
7) $(6q-5)(6q+5)$; 8) $(1-9x)(1+9x)$;
9) $\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y\right)$; 10) $\left(\frac{1}{2}a-b\right)\left(\frac{1}{2}a+b\right)$;
11) $(ab-2)(ab+2)$; 12) $(xy-3)(xy+3)$;
13) $(4-mn)(4+mn)$; 14) $(7-pq)(7+pq)$.

ЗАДАЧА 2. Розкласти на множники:

1) $1-0{,}01a^2$; 2) $4p^4-9$; 3) $1-x^2y^2$; 4) $p^2-a^2b^2$;

5) $16b^4-9c^2$; 6) $81a^2b^2-1$; 7) $x^4y^2-z^2$;

8) $100a^4-81b^6$; 9) a^6-4; 10) a^4-b^4;

11) x^4-16; 12) c^4-1; 13) $1-16a^4$;

14) $(m+n)^2-p^2$; 15) $(x+3y)^2-z^2$;

16) $(3a+4b)^2-9c^2$; 17) $(a-3b)^2-16c^2$;

18) $(2m-1)^2-100m^2$; 19) $(x-y)^2-x^2y^2$;

20) $(5p+3q)^2-25$; 21) $(2a+3b)^2-c^4$;

22) $(x+y^2)^2-9y^4z^4$; 23) $(3p^2-4q^2)^2-1$;

24) $(a^2-b)^2-1$; 25) $(a^2-b^2)^2-1$;

26) $(m-n)^2-25m^2n^2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(1-0{,}1a)(1+0{,}1a)$; 2) $(2p^2-3)(2p^2+3)$;

3) $(1-xy)(1+xy)$; 4) $(p-ab)(p+ab)$;

5) $(4b^2-3c)(4b^2+3c)$; 6) $(9ab-1)(9ab+1)$;

7) $(x^2y-z)(x^2y+z)$; 8) $(10a^2-9b^3)(10a^2+9b^3)$;

9) $(a^3-2)(a^3+2)$; 10) $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$;

11) $(x^2-4)(x^2+4)$; 12) $(c^2-1)(c^2+1)$;

13) $(1-4a^2)(1+4a^2)$; 14) $(m+n+p)(m+n-p)$;

15) $(x+3y-z)(x+3y+z)$;

16) $(3a+4b-3c)(3a+4b+3c)$;

17) $(a-3b-4c)(a-3b+4c)$;

18) $(-8m-1)(12m-1)$;

19) $(x-y+xy)(x-y-xy)$;

20) $(5p+3q-5)(5p+3q+5)$;

21) $(2a+3b-c^2)(2a+3b+c^2)$;

22) $(x+y^2-3y^2z^2)(x+y^2+3y^2z^2)$;

23) $(3p^2-4q^2-1)(3p^2-4q^2+1)$;

24) $(a^2-b-1)(a^2-b+1)$;

25) $(a^2-b^2-1)(a^2-b^2+1)$;

26) $(m-n-5mn)(m-n+5mn)$.

ЗАДАЧА 3. Розкласти на множники:

$$1)\ (x+1)^2-\frac{1}{4}x^2;\quad 2)\ (b-c)^2-0{,}04b^2.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ (x+1)^2-\frac{1}{4}x^2=\left(x+1-\frac{1}{2}x\right)\left(x+1+\frac{1}{2}x\right)=\left(\frac{x}{2}+1\right)\left(\frac{3x}{2}+1\right);$$

$$2)\ (b-c)^2-0{,}04b^2=(b-c+0{,}2b)(b-c-0{,}2b)=$$
$$=(1{,}2b-c)(0{,}8b-c).$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $\left(\frac{x}{2}+1\right)\left(\frac{3x}{2}+1\right)$; 2) $(1{,}2b-c)(0{,}8b-c)$.

ЗАДАЧА 4. Розкласти на множники:

$$1)\ (a+3)^2-0{,}25;\quad 2)\ (c-2)^2-\frac{4}{9}c^2.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $(a+2{,}5)(a+3{,}5)$; 2) $\left(\frac{1}{3}c-2\right)\left(\frac{5}{3}c-2\right)$.

ЗАДАЧА 5. Розкласти на множники:

$$1)\ p^2-(q-r)^2;\qquad 2)\ 25m^2-(m-n)^2;$$
$$3)\ 81m^2-\left(3m^2-1\right)^2;\qquad 4)\ x^6y^2-(x-y)^2.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ p^2-(q-r)^2=\big(p-(q-r)\big)\big(p+(q-r)\big)=$$
$$=(p-q+r)(p+q-r);$$

$$2)\ 25m^2-(m-n)^2=\big(5m-(m-n)\big)\big(5m+(m-n)\big)=$$
$$=(4m+n)(6m-n);$$

$$3)\ 81m^2-\left(3m^2-1\right)^2=\left(9m-\left(3m^2-1\right)\right)\left(9m+\left(3m^2-1\right)\right)=$$
$$=\left(9m-3m^2+1\right)\left(9m+3m^2-1\right);$$

$$4)\ x^6y^2-(x-y)^2=\left(x^3y-(x-y)\right)\left(x^3y+(x-y)\right)=$$
$$=\left(x^3y-x+y\right)\left(x^3y+x-y\right).$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $(p-q+r)(p+q-r)$; 2) $(4m+n)(6m-n)$;
3) $\left(9m-3m^2+1\right)\left(9m+3m^2-1\right)$;
4) $\left(x^3y-x+y\right)\left(x^3y+x-y\right)$.

ЗАДАЧА 6. Розкласти на множники:

1) $a^4b^2-(c^2-d)^2$; 2) $\frac{4}{25}y^2-(x-y)^2$;

3) $(1+x)^2-(y+z)^2$; 4) $(m+n)^2-(4-5p)^2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $a^4b^2-(c^2-d)^2=(a^2b-(c^2-d))(a^2b+(c^2-d))=$
$=(a^2b-c^2+d)(a^2b+c^2-d)$;

2) $\frac{4}{25}y^2-(x-y)^2=\left(\frac{2}{5}y-(x-y)\right)\left(\frac{2}{5}y+(x-y)\right)=$
$=\left(\frac{2}{5}y-x+y\right)\left(\frac{2}{5}y+x-y\right)=\left(\frac{7}{5}y-x\right)\left(x-\frac{3}{5}y\right)$;

3) $(1+x)^2-(y+z)^2=((1+x)+(y+z))((1+x)-(y+z))=$
$=(1+x+y+z)(1+x-y-z)$;

4) $(m+n)^2-(4-5p)^2=((m+n)+(4-5p))((m+n)-(4-5p))=$
$=(m+n+4-5p)(m+n-4+5p)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(a^2b-c^2+d)(a^2b+c^2-d)$;
2) $\left(\frac{7}{5}y-x\right)\left(x-\frac{3}{5}y\right)$;
3) $(1+x+y+z)(1+x-y-z)$;
4) $(m+n+4-5p)(m+n-4+5p)$.

ЗАДАЧА 7. Розкласти на множники:

1) $a^2-(2b+c)^2$; 2) $1-(2a-3b)^2$;

3) $4-(3a+2b)^2$; 4) $25a^2-(b^2+c^2)^2$;

5) $100p^2-(x-y)^2$; 6) $\frac{1}{4}x^2-(a-b)^2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(a-2b-c)(a+2b+c)$;
2) $(1-2a+3b)(1+2a-3b)$;
3) $(2-3a-2b)(2+3a+2b)$;
4) $(5a-b^2-c^2)(5a+b^2+c^2)$;
5) $(10p-x+y)(10p+x-y)$;
6) $\left(\frac{1}{2}x-a+b\right)\left(\frac{1}{2}x+a-b\right)$.

ЗАДАЧА 8. Розкласти на множники:

1) $9a^2b^4-(c-d)^2$; 2) $(m^2+n^2)^2-(p^2+1)^2$;

3) $(4+7a)^2-(8b-9c)^2$; 4) $(2x+3)^2-(x-1)^2$;

5) $(2m-n)^2-(m+n)^2$; 6) $(3a-2b)^2-(a+b)^2$;

7) $(5p+3q)^2-4q^2$; 8) $9(m+n)^2-(m-n)^2$;

9) $9(a-b)^2-4(x-y)^2$; 10) $4(a-b)^2-(a+b)^2$;

11) $16(a+b)^2-9(x+y)^2$; 12) $4(a+b)^2-9(a-b)^2$;

13) $16(x-y)^2-25(x+y)^2$; 14) $49(2m-3n)^2-9(m+n)^2$;

15) $4(3p+5q)^2-16(2p-q)^2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(3ab^2-c+d)(3ab^2+c-d)$;
2) $(m^2+n^2-p^2-1)(m^2+n^2+p^2+1)$;
3) $(4+7a-8b+9c)(4+7a+8b-9c)$;
4) $(x+4)(3x+2)$; 5) $3m(m-2n)$;
6) $(2a-3b)(4a-b)$; 7) $5(5p+q)(p+q)$;
8) $4(2m+n)(m+2n)$;
9) $(3a-3b-2x+2y)(3a-3b+2x-2y)$;
10) $(a-3b)(3a-b)$;
11) $(4a+4b-3x-3y)(4a+4b+3x+3y)$;
12) $(5a-b)(5b-a)$; 13) $-(9x+y)(x+9y)$;
14) $(11m-24n)(17m-18n)$;
15) $4(7p+3q)(7q-p)$.

ЗАДАЧА 9. Розв'язати рівняння:

1) $x^2-36=0$; 2) $x^2-\frac{1}{4}=0$; 3) $2x^2=50$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $(x-6)(x+6)=0$; $x_1=6,\ x_2=-6$;

2) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$; $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{2}$;

3) $x^2=25$; $x^2-25=0$; $(x-5)(x+5)=0$; $x_1=5,\ x_2=-5$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x_1=6,\ x_2=-6$; 2) $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{2}$;
3) $x_1=5$; $x_2=-5$.

ЗАДАЧА 10. Розв'язати рівняння:

1) $x^2-9=0$; 2) $x^2-0{,}04=0$; 3) $x^2-1{,}44=0$; 4) $x^2=25$;

5) $x^2=\frac{1}{16}$; 6) $3x^2-27=0$; 7) $9x^2=16$; 8) $4x^2-25=0$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x_1=3, x_2=-3$; 2) $x_1=0{,}2, x_2=-0{,}2$;
3) $x_1=1{,}2, x_2=-1{,}2$; 4) $x_1=5, x_2=-5$;
5) $x_1=\frac{1}{4}, x_2=-\frac{1}{4}$; 6) $x_1=3, x_2=-3$;
7) $x_1=1\frac{1}{3}, x_2=-1\frac{1}{3}$; 8) $x_1=2\frac{1}{2}, x_2=-2\frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 11. Довести, що різниця квадратів двох послідовних парних чисел ділиться на 4 без остачі.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай $2n$ та $2n+2$ — два послідовних парних числа. Маємо:

$$(2n+2)^2-(2n)^2=(2n+2+2n)(2n+2-2n)=$$
$$=(4n+2)\cdot 2=4\cdot(2n+1)\ —$$

ділиться без остачі на 4.

ЗАДАЧА 12. Довести, що якщо a — ціле число, то a^3-a ділиться на 6 без остачі.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Оскільки

$$a^3-a=a\left(a^2-1\right)=a(a-1)(a+1),$$

то a^3-a є добутком трьох послідовних цілих чисел. Принаймні одне з них — парне, і принаймні одне — ділиться на три (поясніть це самостійно). Отже, їхній добуток ділиться на 6.

ЗАДАЧА 13. Доведіть, що при кожному натуральному n число $(n+4)^2-n^2$ ділиться на 8.

ДОВЕДЕННЯ

$$(n+4)^2-n^2=(n+4-n)(n+4+n)=4(2n+4)=$$
$$=4\cdot 2(n+2)=8(n+2)\text{ — ділиться на 8.}$$

§ 4. КВАДРАТ ДВОЧЛЕНА

Під час множення двох однакових чисел ми отримуємо добуток цих чисел, котрий називається квадратом числа. Наприклад, $3 \cdot 3 = 3^2$ — квадрат числа 3, $175 \cdot 175 = 175^2$ — квадрат числа 175.

В алгебрі також добуток алгебричного виразу на такий же вираз дає степінь з показником два, або квадрат виразу:

$$a \cdot a = a^2;\ \ 7x^4 \cdot 7x^4 = \left(7x^4\right)^2;\ \ (a+b)(a+b) = (a+b)^2.$$

Вираз $(a+b)^2$ називається квадратом двочлена. В обчисленнях для нього використовують формулу скороченого добутку, яку ми й виведемо, користуючись правилом множення багаточлена на багаточлен:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Отже,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Квадрат суми двох чисел дорівнює квадратові першого числа плюс подвійний добуток першого числа на друге плюс квадрат другого числа.

Розглянемо тепер квадрат різниці двох чисел.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Отже,

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Квадрат різниці двох чисел дорівнює квадратові першого числа мінус подвійний добуток першого числа на друге плюс квадрат другого числа.

Наприклад,

1) $(2a+3b)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2;$

2) $(8x-4y)^2 = (8x)^2 - 2 \cdot 8x \cdot 4y + (4y)^2 = 64x^2 - 64xy + 16y^2.$

Любі друзі, просимо до праці:
Зрозумійте, що є «*a* плюс *b* в квадраті»,
Через те, що — скажемо вам явно —
Формула корисна й дуже славна.
Вчать її уже багато літ,
Формулу цю знає цілий світ.
Отже, «*a* плюс *b* в квадраті» зліва,
Справа: три доданки — всім на диво!
Вам ці всі доданки треба знати
І назавжди їх запам'ятати:
З «*a*-квадрат» цю суму починайте
І про «два *a b*» не забувайте,
Залишилось «*b*-квадрат» додати,
Щоби вірну відповідь дістати!
Вивчили? — Скінчилися турботи!
Так мерщій же, друзі, до роботи!

ЗАДАЧА 1. Виконати дії:

1) $(m+n)^2$; 2) $(p-q)^2$; 3) $(c-d)^2$;

4) $(2+a)^2$; 5) $(3-b)^2$; 6) $(x+5)^2$;

7) $(x-1)^2$; 8) $(9a-b)^2$; 9) $(5z+t)^2$;

10) $(5x-2y)^2$; 11) $(a^4+2b)^2$; 12) $(x^2+y^2)^2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

10) $(5x-2y)^2=(5x)^2+2\cdot(5x)\cdot(-2y)+(-2y)^2=$
$=25x^2-20xy+4y^2$;

11) $(a^4+2b)^2=(a^4)^2+2\cdot(a^4)\cdot(2b)+(2b)^2=$
$=a^8+4a^4b+4b^2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $m^2+2mn+n^2$; 2) $p^2-2pq+q^2$;
3) $c^2-2cd+d^2$; 4) $4+4a+a^2$;
5) $9-6b+b^2$; 6) $x^2+10x+25$; 7) x^2-2x+1;
8) $81a^2-18ab+b^2$; 9) $25z^2+10zt+t^2$;
10) $25x^2-20xy+4y^2$; 11) $a^8+4a^4b+4b^2$;
12) $x^4+2x^2y^2+y^4$.

ЗАДАЧА 2. Виконати дії:

1) $(z^3-u^3)^2$; 2) $(m^3+n^2)^2$; 3) $(2m^3+3n)^2$;

4) $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$; 5) $\left(b+\frac{1}{3}\right)^2$; 6) $\left(x-\frac{1}{5}\right)^2$; 7) $\left(\frac{x}{2}-\frac{4}{3}\right)^2$;

8) $\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{3}\right)^2$; 9) $\left(2\frac{1}{3}m+1\frac{1}{2}n\right)^2$; 10) $(0{,}5b-0{,}4c)^2$;

11) $(0{,}2x^2-5y)^2$; 12) $(a^m-a)^2$; 13) $(4a^2b+5a^3b^2)^2$;

14) $(7x^4y^3+3x^2y)^2$; 15) $\left(\frac{3}{5}a^3b-\frac{2}{3}a^3b^4\right)^2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

4) $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=a^2-2\cdot\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}=a^2-a+\frac{1}{4}$;

9) $\left(2\frac{1}{3}m+1\frac{1}{2}n\right)^2=\left(\frac{7}{3}m+\frac{3}{2}n\right)^2=\frac{49}{9}m^2+2\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{2}mn+\frac{9}{4}n^2=$

$=\frac{49}{9}m^2+7mn+\frac{9}{4}n^2$;

12) $(a^m-a)^2=a^{2m}-2a^m\cdot a+a^2=a^{2m}-2a^{m+1}+a^2$;

13) $(4a^2b+5a^3b^2)^2=16a^4b^2+2\cdot 4a^2b\cdot 5a^3b^2+25a^6b^4=$

$=16a^4b^2+40a^5b^3+25a^6b^4$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $z^6-2z^3u^3+u^6$; 2) $m^6+2m^3n^2+n^4$;

3) $4m^6+12m^3n+9n^2$; 4) $a^2-a+\frac{1}{4}$;

5) $b^2+\frac{2}{3}b+\frac{1}{9}$; 6) $x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}$; 7) $\frac{x^2}{4}-\frac{4}{3}x+\frac{16}{9}$;

8) $\frac{a^2}{16}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{9}$; 9) $\frac{49}{9}m^2+7mn+\frac{9}{4}n^2$;

10) $0{,}25b^2-0{,}4bc+0{,}16c^2$; 11) $0{,}04x^4-2x^2y+25y^2$;

12) $a^{2m}-2a^{m+1}+a^2$;

13) $16a^4b^2+40a^5b^3+25a^6b^4$;

14) $49x^8y^6+42x^6y^4+9x^4y^2$;

15) $\frac{9}{25}a^6b^2-\frac{4}{5}a^6b^5+\frac{4}{9}a^6b^8$.

ЗАДАЧА 3. Виконати дії:

1) $\left(1\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{5}{6}x^3y^3\right)^2$; 2) $\left(1{,}2x^2y-0{,}5x^3y^2\right)^2$;

3) $\left(-2{,}5m^2n^2-0{,}2m^3n^2\right)^2$; 4) $\left(-1{,}3p^2q^4+0{,}5p^3q\right)^2$;

5) $\left(0{,}3a^n-2a^{n-1}\right)^2$; 6) $\left(a^p+b^q\right)^2$; 7) $\left(2x^m-3y^n\right)^2$;

8) $\left(a^{n+1}+\frac{1}{2}a^4\right)^2$; 9) $\left(5x^3-2y^{n-1}\right)^2$;

10) $\left(\frac{1}{2}a^{n-1}b^2+a^{n+1}\right)^2$; 11) $\left(\frac{2}{3}x^{m-2}-\frac{3}{4}x^{2m-1}\right)^2$;

12) $\left(\frac{3}{5}a^{2n-1}b^2+\frac{2}{3}a^{n-1}b^3\right)^2$; 13) $\left(\frac{5}{6}x^{2n-1}y^n-\frac{3}{5}x^{n+1}y^2\right)^2$;

14) $\left(0{,}5a^{2n+1}-\frac{1}{3}ab^n\right)^2$; 15) $\left(0{,}3a^n-0{,}2a^{n+1}b^{n-1}\right)^2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\frac{9}{4}x^4y^4+\frac{5}{2}x^5y^5+\frac{25}{36}x^6y^6$;

2) $1{,}44x^4y^2-1{,}2x^5y^3+0{,}25x^6y^4$;

3) $6{,}25m^4n^4+m^5n^4+0{,}04m^6n^4$;

4) $1{,}69p^4q^8-1{,}3p^5q^5+0{,}25p^6q^2$;

5) $0{,}09a^{2n}-1{,}2a^{2n-1}+4a^{2n-2}$;

6) $a^{2p}+2a^pb^q+b^{2q}$; 7) $4x^{2m}-12x^my^n+9y^{2n}$;

8) $a^{2n+2}+a^{n+5}+\frac{1}{4}a^8$;

9) $25x^6-20x^3y^{n-1}+4y^{2n-2}$;

10) $\frac{1}{4}a^{2n-2}b^4+a^{2n}b^2+a^{2n+2}$;

11) $\frac{4}{9}x^{2m-4}-x^{3m-3}+\frac{9}{16}x^{4m-2}$;

12) $\frac{9}{25}a^{4n-2}b^4+\frac{4}{5}a^{3n-2}b^5+\frac{4}{9}a^{2n-2}b^6$;

13) $\frac{25}{36}x^{4n-2}y^{2n}-x^{3n}y^{n+2}+\frac{9}{25}x^{2n+2}y^4$;

14) $0{,}25a^{4n+2}-\frac{1}{3}a^{2n+2}b^n+\frac{1}{9}a^2b^{2n}$;

15) $0{,}09a^{2n}-0{,}12a^{2n+1}b^{n-1}+0{,}04a^{2n+2}b^{2n-2}$.

Увага всім! Дівчата й юнаки!
Тепер завдання буде *навпаки*!

ЗАДАЧА 4. Представити тричлени у вигляді квадратів двочленів:
1) x^2+2x+1; 2) $4a^2+4ab+b^2$; 3) $25x^2+20xy+4y^2$;
4) m^2+n^2-2mn; 5) $4a^2+4a+1$; 6) $-6a-a^2-9$;
7) $-a^2-2a-1$; 8) $a^4+2a^2b+b^2$; 9) $25m^4-10m^2n+n^2$;
10) $-x^4-2nx^2-n^2$; 11) $4a^4-4a^2b^2+b^4$;
12) $9m^4+6m^2n^2+n^4$; 13) $36p^4+12p^2q^2+q^4$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(x+1)^2$; 2) $(2a+b)^2$; 3) $(5x+2y)^2$;
4) $(m-n)^2$; 5) $(2a+1)^2$; 6) $-(a+3)^2$;
7) $-(a+1)^2$; 8) $(a^2+b)^2$; 9) $(5m^2-n)^2$;
10) $-(x^2+n)^2$; 11) $(2a^2-b^2)^2$;
12) $(3m^2+n^2)^2$; 13) $(6p^2+q^2)^2$.

ЗАДАЧА 5. *Знайти x, якщо кожен із представлених тричленів є квадратом двочлена:
1) a^2+2a+x; 2) $m^2-\frac{1}{2}mp+x$; 3) $36a^2-x+49b^2$;
4) $a^2-6ab+x$; 5) m^4-3m^2+x; 6) a^2+ab+x;
7) $4a^2-10a+x$; 8) $x+6a+9a^2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 1; 2) $\frac{1}{16}p^2$; 3) $84ab$ або $-84ab$; 4) $9b^2$;
5) 2,25; 6) $\frac{1}{4}b^2$; 7) 6,25; 8) 1.

ЗАДАЧА 6. Розв'язати рівняння:
1) $x^2-(x-2)^2=16$;
2) $2(2x+1)^2-8(x+1)(x-1)=34$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $x^2-x^2+4x-4=16$; $4x=20$; $x=5$;
2) $8x^2+8x+2-8x^2+8=34$; $8x=24$; $x=3$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x=5$; 2) $x=3$.

ЗАДАЧА 7. Розв'язати рівняння:

1) $3(x-1)^2-3x(x-5)=21$;

2) $(3x+5)(3x-5)-(3x-1)^2=10$;

3) $3(x+2)^2+(2x-1)^2-7(x+3)(x-3)=28$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x=2$; 2) $x=6$; 3) $x=-6$.

ЗАДАЧА 8. Довести (і запам'ятати!) тотожності:

1) $(a-b)^2=(b-a)^2$;

2) $(-a-b)^2=(a+b)^2$;

3) $(-a-b)(a+b)=-(a+b)^2$;

4) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

5) $(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$.

ДОВЕДЕННЯ

4) $(a+b+c)^2=((a+b)+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

ЗАДАЧА 9. Довести тотожності:

1) $(4x+13)(x^2+1)-(4x-3)(x+2)^2=25$;

2) $2(m-n)^2-2(m+n)^2-4(m+n)(m-n)=$

$=4n^2-4m^2-8mn$.

ЗАДАЧА 10. Розкласти на множники:

1) $(x^2+y^2)^3-2x^2y^2(x^2+y^2)$; 2) $(p-q)^3+2pq(p-q)$;

3) $4ab(a+b)-(a+b)^3$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

2) $(p-q)^3+2pq(p-q)=(p-q)\left((p-q)^2+2pq\right)=$

$=(p-q)(p^2-2pq+q^2+2pq)=(p-q)(p^2+q^2)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(x^2+y^2)(x^4+y^4)$; 2) $(p-q)(p^2+q^2)$;

3) $-(a+b)(a-b)^2$.

§ 5. СУМА І РІЗНИЦЯ КУБІВ ДВОХ ЧИСЕЛ

Продовжуємо вивчати формули скороченого множення. Розглянемо розкладання на множники суми та різниці кубів двох чисел:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \quad (1)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2). \quad (2)$$

ПИТАННЯ. Як довести і «прочитати» ці формули?

ВІДПОВІДЬ. Щоб не тільки прочитати, але й запам'ятати запропоновані формули, звертаємо вашу увагу на назви виразів:

$a^2 + ab + b^2$ — неповний квадрат суми;

$a^2 - ab + b^2$ — неповний квадрат різниці.

Доведемо формулу (1) (формула (2) доводиться аналогічно):

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

> *Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів на неповний квадрат їхньої різниці.*

Правило для різниці кубів двох виразів пропонуємо вам сформулювати самостійно.

Наче з заліза чи із дуба
Вираз цей вагомий — сума кубів,
Просто слів ніяких вже немає,
Так ця формула нас всіх вражає!
І нехай не кажуть тугодуми:
«В неї лиш основ є сума», —
Безпідставні ці ідеї —
Є й квадрат неповний в неї.
Вона треба нам для розкладання,
Щоб розв'язувать складні рівняння.
Тож питання ставим руба:
Треба знати суму кубів!

ПОВТОРИМО ТАБЛИЦЮ КУБІВ!

$$1^3=1;\quad 2^3=8;\quad 3^3=27;\quad 4^3=64;\quad 5^3=125;$$
$$6^3=216;\quad 7^3=343;\quad 8^3=512;\quad 9^3=729;\quad 10^3=1000.$$

ЗАДАЧА 1. Розкласти на множники:

1) x^3+y^3; 2) m^3-n^3; 3) $1+a^3$; 4) a^3-125;

5) $\frac{1}{8}-a^3$; 6) $27x^3+1$; 7) $8a^3+b^3$; 8) p^3-64;

9) $-a^3-b^3$; 10) $0{,}008+a^3b^3$; 11) $x^3y^3+27p^3$;

12) $216a^3-125b^3$; 13) $\frac{1}{64}m^3-1$; 14) $-a^6-1000b^9$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$;

2) $(m-n)(m^2+mn+n^2)$;

3) $(1+a)(1-a+a^2)$; 4) $(a-5)(a^2+5a+25)$;

5) $\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}a+a^2\right)$;

6) $(3x+1)(9x^2-3x+1)$;

7) $(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$;

8) $(p-4)(p^2+4p+16)$;

9) $-(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

10) $(0{,}2+ab)(0{,}04-0{,}2ab+a^2b^2)$;

11) $(xy+3p)(x^2y^2-3pxy+9p^2)$;

12) $(6a-5b)(36a^2+30ab+25b^2)$;

13) $\left(\frac{1}{4}m-1\right)\left(\frac{1}{16}m^2+\frac{1}{4}m+1\right)$;

14) $-(a^2+10b^3)(a^4-10a^2b^3+100b^6)$.

ЗАДАЧА 2. Представити у вигляді багаточлена:

1) $(a-1)(a^2+a+1)$; 2) $(a-b^2)(a^2+ab^2+b^4)$;

3) $(a^2+1)(a^4-a^2+1)$; 4) $(2m+1)(4m^2-2m+1)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) a^3-1; 2) a^3-b^6; 3) a^6+1; 4) $8m^3+1$.

ЗАДАЧА 3. Доведіть, що значення виразу

а) $327^3 + 173^3$ ділиться на 500;

б) $731^3 - 631^3$ ділиться на 100;

в) $321^3 - 123^3$ ділиться на 198;

г) $321^3 + 123^3$ ділиться на 111;

д) $15^6 + 1$ ділиться на 113.

ДОВЕДЕННЯ

а) $327^3 + 173^3 = (327 + 173)(327^2 - 327 \cdot 173 + 173^2)$.

Оскільки $327 + 173 = 500$, то твердження задачі доведено.

б) $731^3 - 631^3 = (731 - 631)(731^2 + 731 \cdot 631 + 631^2)$.

Оскільки $731 - 631 = 100$, то твердження задачі доведено.

в), г) — доводяться аналогічно.

д) $15^6 + 1 = (15^2)^3 + 1 = (15^2 + 1)(15^4 - 15^2 + 1)$.

Але ж $15^2 + 1 = 225 + 1 = 226$ — ділиться на 113.

ЗАДАЧА 4. Доведіть, що якщо сума двох натуральних чисел ділиться на деяке число, то й сума їхніх кубів ділиться на це число.

ВКАЗІВКА. Випливає з формули суми кубів двох чисел.

§ 6. КУБ СУМИ (РІЗНИЦІ) ДВОХ ВИРАЗІВ

Розповідь піде про формулу

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b).$$

ПИТАННЯ. Чи можливо провести аналогію між формулами квадрата суми (різниці) двох виразів і куба суми (різниці) двох виразів?

ВІДПОВІДЬ. Так! Пошук закономірностей завжди корисний, і не тільки у математиці.

Запишемо ці формули, співставивши їх:

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab; \quad (1')$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b). \quad (2')$$

Як бачимо, формули схожі: $a^2 + b^2$, $a^3 \pm b^3$. У формулі (1') — подвійний добуток ($\pm 2ab$), у формулі (2') — потрійний добуток.

А ще формула (2') доводиться за допомогою формули(1'):

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) =$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

Формулу куба різниці доведіть самостійно.

ЗАДАЧА 1. Виконати дії:

1) $(a - bc)^3$; 2) $(2x - 4y)^3$; 3) $(3x^2 + 1)^3$;

4) $(2a^3b - 3cd^3)^3$; 5) $\left(\frac{1}{2}m^2 + 1\right)^3$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $a^3 - 3a^2bc + 3ab^2c^2 - b^3c^3$;

2) $8x^3 - 48x^2y + 96xy^2 - 64y^3$;

3) $27x^6 + 27x^4 + 9x^2 + 1$;

4) $8a^9b^3 - 36a^6b^2cd^3 + 54a^3bc^2d^6 - 27c^3d^9$;

5) $\frac{1}{8}m^6 + \frac{3}{4}m^4 + 1\frac{1}{2}m^2 + 1$.

ЗАДАЧА 2. Виконати дії:

1) $\left(2x^4y-\frac{1}{3}\right)^3$; 2) $\left(xy^4+x^4y\right)^3$; 3) $\left(\frac{1}{4}abc^2-\frac{1}{2}a^2bc\right)^3$

ВІДПОВІДЬ. 1) $8x^{12}y^3-4x^8y^2+\frac{2}{3}x^4y-\frac{1}{27}$;

2) $x^3y^{12}+3x^6y^9+3x^9y^6+x^{12}y^3$;

3) $\frac{1}{64}a^3b^3c^6-\frac{3}{32}a^4b^3c^5+\frac{3}{16}a^5b^3c^4-\frac{1}{8}a^6b^3c^3$.

ЗАДАЧА 3. Розкласти на множники:

1) $8x^3+12x^2+6x+1$; 2) $27a^3-27a^2+9a-1$;

3) $1-3y+3y^2-y^3$; 4) $\frac{1}{8}m^3+\frac{3}{4}m^2n^2+1\frac{1}{2}mn^4+n^6$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(2x+1)^3$; 2) $(3a-1)^3$;

3) $(1-y)^3$; 4) $\left(\frac{1}{2}m+n^2\right)^3$.

§ 7. ЗАСТОСУВАННЯ ДЕКІЛЬКОХ СПОСОБІВ РОЗКЛАДАННЯ НА МНОЖНИКИ

Вам пропонується серія задач на розкладання на множники. **Увага**! Розв'язання або відповіді наводяться вибірково.

ЗАДАЧА 1. Розкласти на множники:

1) $7m^2 - 7$; 2) $x^3 - x$;

3) $5a^2 - 5a$; 4) $a^3b - ab^3$;

5) $5m^3 - 5mn^2$; 6) $5a^2 - 20x^2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $7m^2 - 7 = 7(m^2 - 1) = 7(m-1)(m+1)$;

2) $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$;

4) $a^3b - ab^3 = ab(a^2 - b^2) = ab(a-b)(a+b)$.

ЗАДАЧА 2. Розкласти на множники:

1) $7x^2y^2 - 63x^2z^2$; 2) $p^4q^2 - p^2q^4$;

3) $2x^2 + 4xy + 2y^2$; 4) $5a^2 + 10ab + 5b^2$;

5) $3m^2 - 6m + 3$; 6) $6p^2 - 12p + 6$;

7) $3xy^2 + 6xy + 3x$; 8) $2a - 4ab + 2ab^2$;

9) $9a^4b^2 - 18a^3b^3 + 9a^2b^4$;

10) $12x^5y + 24x^4y + 12x^3y$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $7x^2y^2 - 63x^2z^2 = 7x^2(y^2 - 9z^2) = 7x^2(y-3z)(y+3z)$;

2) $p^4q^2 - p^2q^4 = p^2q^2(p^2 - q^2) = p^2q^2(p-q)(p+q)$;

6) $6p^2 - 12p + 6 = 6(p^2 - 2p + 1) = 6(p-1)^2$;

7) $3xy^2 + 6xy + 3x = 3x(y^2 + 2y + 1) = 3x(y+1)^2$;

9) $9a^4b^2 - 18a^3b^3 + 9a^2b^4 = 9a^2b^2(a^2 - 2ab + b^2) = 9a^2b^2(a-b)^2$.

ЗАДАЧА 3. Розкласти на множники:

1) $81-(x^2+6x)^2$; 2) $9(5n-4p)^2-64n^2$;

3) $a^2-2ab+b^2-c^2$; 4) $(a^2+1)^2-4a^2$;

5) $(x^2+4x)^2-16$; 6) $36a^2-(a^2+9)^2$;

7) $m^2+2mn+n^2-p^2$; 8) $100x^2-4(7x-2y)^2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

5) $(x^2+4x)^2-16=(x^2+4x-4)(x^2+4x+4)=$
$=(x^2+4x-4)(x+2)^2$;

6) $36a^2-(a^2+9)^2=(6a-(a^2+9))(6a+(a^2+9))=$
$=-(a^2-6a+9)(a^2+6a+9)=-(a-3)^2(a+3)^2$;

7) $m^2+2mn+n^2-p^2=(m+n)^2-p^2=(m+n-p)(m+n+p)$;

8) $100x^2-4(7x-2y)^2=$
$=(10x-2(7x-2y))(10x+2(7x-2y))=$
$=(4y-4x)(24x-4y)=16(y-x)(6x-y)$.

ЗАДАЧА 4. Розкласти на множники:

1) $81a^2-16(2a-3b)^2$; 2) $(a+3b)^2-9(b-c)^2$;

3) $9(2a-x)^2-4(3a-x)^2$; 4) $(4a+3b)^2-16(a-b)^2$;

5) $x^2+2xy+y^2-1$; 6) $p^2-2pq+q^2-4$;

7) $1-p^2-2pq-q^2$; 8) $9x^2-4y^2+4yz-z^2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $81a^2-16(2a-3b)^2=(9a-4(2a-3b))(9a+4(2a-3b))=$
$=(9a-8a+12b)(9a+8a-12b)=(a+12b)(17a-12b)$;

6) $p^2-2pq+q^2-4=(p-q)^2-4=(p-q-2)(p-q+2)$;

7) $1-p^2-2pq-q^2=1-(p+q)^2=(1-p-q)(1+p+q)$;

8) $9x^2-4y^2+4yz-z^2=9x^2-(2y-z)^2=$
$=(3x-2y+z)(3x+2y-z)$.

ЗАДАЧА 5. Розкласти на множники:

1) $9-x^2+2xy-y^2$; 2) $4-a^2-2ab-b^2$;

3) $1-m^2+2mn-n^2$; 4) $4a^2-20ab+25b^2-36$;

6) $16m^2-8mn+n^2-49$; 7) $25x^2-4a^2+12ab-9b^2$.

ЗАДАЧА 6. Розкласти на множники:

1) a^2-b^2-a+b; 2) x^2-y^2+x+y;

3) $m^3-m^2n-mn^2+n^3$; 4) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$;

5) $a^2+2ab+b^2-ac-bc$; 6) $xz-yz-x^2+2xy-y^2$;

7) $m^2+2mn+n^2-p^2+2pq-q^2$;

8) $a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $a^2-b^2-a+b=a^2-b^2-(a-b)=(a-b)(a+b)-(a-b)=$
$=(a-b)(a+b-1)$;

3) $m^3-m^2n-mn^2+n^3=m^2(m-n)-n^2(m-n)=$
$=(m-n)(m^2-n^2)=(m-n)(m-n)(m+n)=(m-n)^2(m+n)$;

7) $m^2+2mn+n^2-p^2+2pq-q^2=(m+n)^2-(p-q)^2=$
$=(m+n-p+q)(m+n+p-q)$.

ЗАДАЧА 7. Розкласти на множники:

1) $x^5-x^3+x^2-1$; 2) $m^8+m^3-m^2-1$;

3) a^3-8+6a^2-12a; 4) $p^3+8+6p+12p$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $x^5-x^3+x^2-1=(x^5-x^3)+(x^2-1)=$
$=x^3(x^2-1)+(x^2-1)=(x^2-1)(x^3+1)=$
$=(x-1)(x+1)(x+1)(x^2-x+1)=$
$=(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$;

3) $a^3-8+6a^2-12a=(a^3-8)+6a(a-2)=$
$=(a-2)(a^2+2a+4)+6a(a-2)=$
$=(a-2)(a^2+2a+4+6a)=$
$=(a-2)(a^2+8a+4)$.

ЗАДАЧА 8. Розкласти на множники:

1) a^4+a^3+a+1; 2) x^4+x^3-x-1;

3) $a^3+a^2b-ab^2-b^3$; 4) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ a^4+a^3+a+1=a^3(a+1)+(a+1)=(a+1)(a^3+1)=$$
$$=(a+1)^2(a^2-a+1);$$

$$4)\ x^3-x^2y-xy^2+y^3=x^2(x-y)-y^2(x-y)=$$
$$=(x^2-y^2)(x-y)=(x-y)(x-y)(x+y)=$$
$$=(x-y)^2(x+y).$$

ЗАДАЧА 9. Розкласти на множники:

1) m^4-n^4; 2) a^6-b^6;

3) x^4-x^3+x-1; 4) $a^6-a^4+2a^3+2a^2$;

5) $(a+b)^3-(a-b)^3$; 6) $(a+b)^4-(a-b)^4$;

7) $a^5-a^3+a^2-1$; 8) c^5-c^4-c+1.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ m^4-n^4=(m^2-n^2)(m^2+n^2)=(m-n)(m+n)(m^2+n^2);$$

$$2)\ a^6-b^6=(a^2)^3-(b^2)^3=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)=$$
$$=(a-b)(a+b)(a^4+a^2b^2+b^4);$$

$$4)\ a^6-a^4+2a^3+2a^2=a^4(a^2-1)+2a^2(a+1)=$$
$$=a^4(a-1)(a+1)+2a^2(a+1)=(a+1)(a^4(a-1)+2a^2)=$$
$$=(a+1)(a^5-a^4+2a^2)=a^2(a+1)(a^3-a^2+2);$$

$$6)\ (a+b)^4-(a-b)^4=$$
$$=((a+b)^2-(a-b)^2)((a+b)^2+(a-b)^2)=$$
$$=(a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2)\times$$
$$\times(a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2)=$$
$$=4ab(2a^2+2b^2)=8ab(a^2+b^2);$$

$$7)\ a^5-a^3+a^2-1=a^3(a^2-1)+(a^2-1)=(a^2-1)(a^3+1)=$$
$$=(a-1)(a+1)^2(a^2-a+1).$$

ЗАДАЧА 10. Розкласти на множники:

1) $x^4 - x^3 - x + 1$; 2) $a^3 + a^2 - a - 1$;

3) $c^3 - c^2 - c^6 + c^5$; 4) $2a^4 + 2a^3 - 2a^2 - 2a$;

5) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

4) $2a^4 + 2a^3 - 2a^2 - 2a = 2a^3(a+1) - 2a(a+1) =$

$= (a+1)(2a^3 - 2a) = 2a(a^2 - 1)(a+1) =$

$= 2a(a-1)(a+1)(a+1) = 2a(a-1)(a+1)^2$;

5) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 =$

$= x^4(x-1) - 2x^2(x-1) + (x-1) =$

$= (x-1)(x^4 - 2x^2 + 1) = (x-1)(x^2-1)^2 =$

$= (x-1)(x-1)^2(x+1)^2 = (x-1)^3(x+1)^2$.

ЗАДАЧА 11.** Розкласти на множники:

1) $x^2 + 6x + 8$; 2) $x^2 - 5x + 6$; 3) $a^2 - 7ab + 12b^2$;

4) $a^2 - 7ab + 10b^2$; 5) $x^2 - x - 12$; 6) $x^2 + x - 12$;

7) $a^2 - 3ab - 10b^2$; 8) $a^2 + 2ab - 15b^2$; 9) $2a^2 + 10a + 12$;

10) $2x^2 + 14x + 24$; 11) $2m^2 - 6m + 4$; 12) $3p^2 + 27p + 54$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $x^2 + 6x + 8 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 8 = (x+3)^2 - 1 =$

$= (x+3-1)(x+3+1) = (x+2)(x+4)$;

6) $x^2 + x - 12 = x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 12 =$

$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = \left(x+\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\right) = (x-3)(x+4)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(x+2)(x+4)$; 2) $(x-2)(x-3)$;
3) $(a-4b)(a-3b)$; 4) $(a-2b)(a-5b)$;
5) $(x+3)(x-4)$; 6) $(x-3)(x+4)$;
7) $(a+2b)(a-5b)$; 8) $(a+5b)(a-3b)$;
9) $2(a+2)(a+3)$; 10) $2(x+3)(x+4)$;
11) $2(m-1)(m-2)$; 12) $3(p+3)(p+6)$.

ЗАДАЧА 12.** Розкласти на множники:

1) x^8+x^4-2; 2) a^5-a^2-a-1;

3) a^4+4; 4) a^4+a^2+1;

5) a^3+a^2-12; 6) x^3-7x+6.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $x^8+x^4-2=\left(x^4-1\right)^2+3x^4-3=\left(x^4-1\right)^2+3\left(x^4-1\right)=$
$=\left(x^4-1\right)\left(x^4-1+3\right)=\left(x^4-1\right)\left(x^4+2\right)$;

2) $a^5-a^2-a-1=\left(a^5-a\right)-\left(a^2+1\right)=a\left(a^4-1\right)-\left(a^2+1\right)=$
$=a\left(a^2+1\right)\left(a^2-1\right)-\left(a^2+1\right)=\left(a^2+1\right)\left(a^3-a-1\right)$;

3) $a^4+4=\left(a^2+2\right)^2-(2a)^2=\left(a^2-2a+2\right)\left(a^2+2a+2\right)$;

4) $a^4+a^2+1=\left(a^2+1\right)^2-a^2=\left(a^2-a+1\right)\left(a^2+a+1\right)$;

5) $a^3+a^2-12=\left(a^3-8\right)+\left(a^2-4\right)=(a-2)\left(a^2+2a+4\right)+$
$+(a-2)(a+2)=(a-2)\left(a^2+2a+4+a+2\right)=$
$=(a-2)\left(a^2+3a+6\right)$;

6) $x^3-7x+6=\left(x^3-1\right)-7x+7=$
$=(x-1)\left(x^2+x+1\right)-7(x-1)=(x-1)\left(x^2+x-6\right)=$
$=(x-1)\left(\left(x^2-4\right)+(x-2)\right)=(x-1)(x-2)(x+3)$.

ЗАДАЧА 13. Розв'язати рівняння:

1) $x^3-x=0$; 2) $3x-12x^3=0$;

3) $x^3+x=3x^2+3$; 4) $y^3-2y^2-y+2=0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $x^3-x=0$; $x\left(x^2-1\right)=0$; звідси $x(x-1)(x+1)=0$; отже,
$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-1$;

2) $3x-12x^3=0$; $3x\left(1-4x^2\right)=0$; $3x(1-2x)(1+2x)=0$; отже,
$x_1=0,\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=-\frac{1}{2}$;

3) $x^3+x=3x^2+3$; $x\left(x^2+1\right)-3\left(x^2+1\right)=0$; $\left(x^2+1\right)(x-3)=0$.
І оскільки $x^2+1\neq0$, то $x=3$.

ЗАДАЧА 14. Виконати ділення:

1) $(c^2-d^2):(c+d)$; 2) $(c^2-d^2):(c-d)$;

3) $(m^2-n^2):(m+n)$; 4) $(x^2-9):(3+x)$;

5) $(a^2-4):(a-2)$; 6) $(m^2-1):(1+m)$;

7) $(k^2-4):(2-k)$; 8) $(25-a^2):(5+a)$;

9) $(1-9c^2):(3c+1)$; 10) $(36-p^2):(6-p)$;

11) $(1-4x^2):(1-2x)$;

12) $(49-x^2y^2):(xy+7)$;

13) $(16-m^2n^2):(mn+4)$;

14) $(16a^2-9b^2):(4a+3b)$;

15) $(49x^2-81y^2):(9y+7x)$;

16) $(100m^2-64n^2):(10m-8n)$;

17) $(100m^4-64n^6):(8n^3-10m^2)$;

18) $\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{9}b^2\right):\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b\right)$;

19) $\left(\frac{49}{81}m^2-\frac{25}{64}n^2\right):\left(\frac{5}{8}n+\frac{7}{9}m\right)$;

20) $\left(\frac{4}{25}x^2-\frac{9}{16}y^2\right):\left(\frac{3}{4}y-\frac{2}{5}x\right)$;

21) $\left(\frac{9}{16}c^2-\frac{4}{25}d^2\right):\left(\frac{2}{5}d-\frac{3}{4}c\right)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $c-d$; 2) $c+d$; 3) $m-n$;
4) $x-3$; 5) $a+2$; 6) $m-1$;
7) $-(k+2)$; 8) $5-a$; 9) $1-3c$;
10) $6+p$; 11) $1+2x$; 12) $7-xy$;
13) $4-mn$; 14) $4a-3b$; 15) $7x-9y$;
16) $10m+8n$; 17) $-(10m^2+8n^3)$;
18) $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b$; 19) $\frac{7}{9}m-\frac{5}{8}n$;
20) $-\left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y\right)$; 21) $-\frac{3}{4}c-\frac{2}{5}d$.

ЗАДАЧА 15. Виконати ділення:

1) $(a^2+2ab+b^2):(a+b)$; 2) $(x^2-2xy+y^2):(x-y)$;

3) $(a^4+2a^2b^2+b^4):(a^2+b^2)$;

4) $(m^4-2m^2n^2+n^4):(m^2-n^2)$;

5) $(9x^2+30x+25):(3x+5)$; 6) $(a^2+2a+1):(a+1)$;

7) $(x^2-4x+4):(x-2)$; 8) $(9-12x+4x^2):(3-2x)$;

9) $(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3):(a+b)$;

10) $(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3):(x-y)$;

11) $(m^3+3m^2n+3mn^2+n^3):(m^2+2mn+n^2)$;

12) $(p^3-3p^2q+3pq^2-q^3):(p^2-2pq+q^2)$;

13) $(a^3+b^3):(a+b)$; 14) $(n^3-27):(n-3)$;

15) $(a^3-b^3):(a-b)$; 16) $(8a^3-1):(2a-1)$;

17) $(x^3+8):(x+2)$; 18) $(27+8y^3):(3+2y)$;

19) $(x^3-1):(x-1)$; 20) $(a^6+b^6):(a^2+b^2)$;

21) $(a^3-b^3):(a-b)$; 22) $(m^3-n^3):(m-n)$;

23) $(x^3-y^3):(x^2+xy+y^2)$; 24) $(a^3+1):(a^2-a+1)$;

25) $(m^3+n^3):(m^2-mn+n^2)$;

26) $\left(\frac{1}{8}x^3-1\right):\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)$;

27) $(8a^3-27):(4a^2+6a+9)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $a+b$; 2) $x-y$; 3) a^2+b^2; 4) m^2-n^2;
5) $3x+5$; 6) $a+1$; 7) $x-2$; 8) $3-2x$;
9) $(a+b)^2$; 10) $(x-y)^2$; 11) $m+n$; 12) $p-q$;
13) a^2-ab+b^2; 14) n^2+3n+9; 15) a^2+ab+b^2;
16) $4a^2+2a+1$; 17) x^2-2x+4; 18) $9-6y+4y^2$;
19) x^2+x+1; 20) $a^4-a^2b^2+b^4$;
21) a^2+ab+b^2; 22) m^2+mn+n^2; 23) $x-y$;
24) $a+1$; 25) $m+n$; 26) $\frac{1}{2}x-1$; 27) $2a-3$.

ЗАДАЧА 16.* Записати вираз $2x^2+2y^2$ у вигляді суми двох квадратів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$2x^2+2y^2=\left(x^2+2xy+y^2\right)+\left(x^2-2xy+y^2\right)=$$
$$=(x+y)^2+(x-y)^2.$$

ЗАДАЧА 17. * Якщо $a\neq 0$ або $b\neq 0$, то значення виразу $5a^2-6ab+5b^2$ додатне. Довести.

ДОВЕДЕННЯ

Перетворимо даний вираз:

$$5a^2-6ab+5b^2=4a^2-8ab+4b^2+a^2+2ab+b^2=$$
$$=(2a-2b)^2+(a+b)^2,$$

що доводить твердження задачі.

ЗАДАЧА 18. Довести, що при всіх x

$$(x-3)(x-5)+2>0.$$

ДОВЕДЕННЯ

Маємо:

$$(x-3)(x-5)+2=x^2-8x+15+2=x^2-8x+17.$$

Виділимо повний квадрат:

$$x^2-8x+17=(x-4)^2+1>0.$$

ЗАДАЧА 19.* Подати вираз $24xy$ у вигляді різниці квадратів двох багаточленів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо: $24xy=12xy-(-12xy)$. Тепер представимо $12xy$ як подвійний добуток. Можливі декілька варіантів:

$$24xy=(x+6y)^2-(x-6y)^2=(3xy+2)^2-(3xy-2)^2=$$
$$=\left(\frac{1}{3}x+18y\right)^2-\left(\frac{1}{3}x-18y\right)^2=$$
$$=(2xy+3)^2-(2xy-3)^2=(xy+6)^2-(xy-6)^2.$$

ЗАДАЧА 20.* Представити вираз $2a(a^2+3b^2)$ у вигляді суми кубів двох багаточленів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$2a(a^2+3b^2)=2a^3+6ab^2=$$
$$=(a^3+3ab^2+3a^2b+b^3)+(a^3+3ab^2-3a^2b-b^3)=$$
$$=(a+b)^3+(a-b)^3.$$

ЗАДАЧА 21.* Довести, що модуль різниці квадратів двох послідовних непарних натуральних чисел дорівнює подвійній сумі цих чисел.

ДОВЕДЕННЯ

Нехай $2n-1$ та $2n+1$ — два послідовних непарних натуральних числа. Маємо

$$\left|(2n-1)^2-(2n+1)^2\right|=|-8n|=8n=2((2n-1)+(2n+1)).$$

ЗАДАЧА 22.* Довести справедливість рівності:

$$(n-2)(n-1)n(n+1)+1=(n^2-n-1)^2.$$

ДОВЕДЕННЯ

Маємо:

$$(n-2)(n-1)n(n+1)+1=(n-2)(n+1)(n-1)n+1=$$
$$=(n^2-n-2)(n^2-n)+1=$$
$$=(n^2-n)^2-2(n^2-n)+1=(n^2-n-1)^2.$$

ПОВТОРЕННЯ

ЗАДАЧА 1. Із сталевого дроту діаметром 5 мм необхідно виготовити циліндричну пружину заввишки 122 мм. Підрахувати кількість витків пружини, якщо зазор поміж витками ненавантаженої пружини дорівнює 8 мм.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай x — кількість витків пружини. Зауважимо, що зазорів у пружині на один менше, ніж витків. За умовою задачі складемо рівняння:

$5x+8(x-1)=122$; звідси $5x+8x-8=122$; $x=10$.

ВІДПОВІДЬ. 10 витків.

ЗАДАЧА 2. Електропоїзд проїхав повз світлофор за 5 секунд, а повз платформи завдовжки 150 м за 15 секунд. Яка довжина електропоїзда та його швидкість?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай швидкість електропоїзд x м/с. Тоді довжина поїзда $5x$ метрів. За 15 секунд електропоїзд проходить відстань у $15x$ метрів, або $(150+5x)$ метрів — довжину платформи плюс власну довжину. Маємо рівняння $15x=150+5x$; звідси $x=15$, тобто швидкість електропоїзда дорівнює 15 м/с, а його довжина 75 м $(15\cdot 5=75)$.

ВІДПОВІДЬ. 15 м/с; 75 метрів.

ЗАДАЧА 3. Женя схуд за весну на 20%, тому за літо поправився на 30%, за осінь схуд на 20%, а за зиму поправився на 10%. Поправився чи схуд Женя за рік?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай вага Жені була 100 (од. ваги). Тоді після весни його вага стала $100-20=80$ (од. ваги). Після літа: $80+\dfrac{30\cdot 80}{100}=104$ (од. ваги). Після осені: $104-\dfrac{20\cdot 104}{100}=83{,}2$ (од. ваги). І, нарешті, після зими вага Жені дорівнювала $83{,}2+8{,}32=91{,}52$ (од. ваги).

ВІДПОВІДЬ. Схуд.

ГЛАВА 5. АЛГЕБРИЧНІ ДРОБИ

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ. СКОРОЧЕННЯ ДРОБІВ

ПИТАННЯ. Вивчаючи числа, ми від цілих перейшли до дробів. В алгебрі така ж закономірність? Чи алгебричні дроби принципово відрізняються від числових?

ВІДПОВІДЬ. Дамо спочатку означення:

> *Вираз вигляду* $\frac{A}{B}$, *де літери A і B позначають алгебричні (зокрема, числові) вирази* $(B \neq 0)$, *називається* **алгебричним дробом**.

Як бачимо, алгебричні дроби дуже схожі на числові. Але в алгебричних дробах правило «На нуль ділити не можна!» «супроводжує» майже кожен алгебричний дріб.

Наприклад, дроби

$$\frac{2}{a};\ \frac{3}{b-1};\ \frac{a}{p};\ \frac{x}{y+d}$$

мають зміст, якщо

$$a \neq 0;\ b \neq 1;\ p \neq 0;\ y \neq -d.$$

ПОРАДА. Записуючи алгебричний дріб, пам'ятай про допустимі значення букв, що входять у цей дріб.

Основна властивість дробу: *якщо чисельник та знаменник дробу помножити або поділити на той самий алгебричний вираз, то дістанемо рівний йому дріб:*

$$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb},\quad \text{де } b\neq 0;\ m\neq 0.$$

Основна властивість дробу дозволяє замінити дріб вигляду $\frac{am}{bm}$ **тотожно рівним** дробом $\frac{a}{b}$. Таке перетворення називають **скороченням дробу**.

ЗАДАЧА 1. Записати у вигляді дробу частку від ділення алгебричних виразів:

1) $a:5$; 2) $7:p$; 3) $l:k$; 4) $(a+b):8$;
5) $9:(x^2-y)$; 6) $(x+y):p$; 7) $l^2:(a-b)$;
8) $4x:(3x+7y)$; 9) $(a-b)^3:(x+y)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $a:5=\frac{a}{5}$;

8) $4x:(3x+7y)=\frac{4x}{3x+7y}$.

ЗАДАЧА 2. Яке значення мають такі дроби:

1) $\frac{0}{a}$, якщо $a\neq 0$; 2) $\frac{0}{2b}$, якщо $b\neq 0$;

3) $\frac{0}{x-y}$, якщо $x\neq y$?

ВІДПОВІДЬ. 0.

ЗАДАЧА 3. При яких значеннях x обертаються в нуль такі дроби:

1) $\frac{x-2}{5}$; 2) $\frac{x+4}{x}$; 3) $\frac{x-3}{x+1}$; 4) $\frac{x(x-10)}{x+15}$;

5) $\frac{(x+2)(x-3)}{x+5}$; 6) $\frac{(x+1)(x-4)}{x-3}$?

ВІДПОВІДЬ. 1) 2; 2) –4; 3) 3; 4) 0; 10; 5) – 2; 3; 6) – 1; 4.

ЗАДАЧА 4. При яких значеннях x такі дроби не мають сенсу:

$$1)\ \frac{5}{x-1};\ 2)\ \frac{1}{x-1};\ 3)\ \frac{x}{x-8};\ 4)\ \frac{x}{2x-8};\ 5)\ \frac{x-1}{x+1};$$

$$6)\ \frac{1-x}{2-x};\ 7)\ \frac{1}{x-a};\ 8)\ \frac{2}{x-b};\ 9)\ \frac{1}{x^2-1};\ 10)\ \frac{1}{(x-1)(x-2)}?$$

ВІДПОВІДЬ. 1) 1; 2) 1; 3) 8; 4) 4; 5) –1;
6) 2; 7) a; 8) b; 9) ± 1; 10) 1; 2.

ЗАДАЧА 5. Не змінюючи величини виразу, перетворити його так, щоб чисельник і знаменник дробу не мав знаку мінус:

$$1)\ \frac{-2a}{-5b};\ 2)\ \frac{8c^2}{-15x};\ 3)\ -\frac{-3m}{4n};$$

$$4)\ -\frac{-x}{-y};\ 5)\ -\frac{3x^2y}{-10z};\ 6)\ \frac{-4ab}{7cd}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ \frac{-2a}{-5b}=\frac{2a}{5b};\ 2)\ \frac{8c^2}{-15x}=-\frac{8c^2}{15x};\ 3)\ -\frac{-3m}{4n}=\frac{3m}{4n};$$

$$4)\ -\frac{-x}{-y}=-\frac{x}{y};\ 5)\ -\frac{3x^2y}{-10z}=\frac{3x^2y}{10z};\ 6)\ \frac{-4ab}{7cd}=-\frac{4ab}{7cd}.$$

ЗАДАЧА 6. Не змінюючи величини виразу, перетворити його так, щоб перед дробом стояв знак мінус.

$$1)\ \frac{1-x}{a};\ 2)\ \frac{m}{1-n};\ 3)\ \frac{a-b}{c+d};$$

$$4)\ \frac{x-5}{x-2};\ 5)\ \frac{a-x}{b-x};\ 6)\ \frac{-a-b}{c+d}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ \frac{1-x}{a}=-\frac{1-x}{-a}=-\frac{x-1}{a};\ 2)\ \frac{m}{1-n}=-\frac{-m}{1-n}=-\frac{m}{n-1};$$

$$3)\ \frac{a-b}{c+d}=-\frac{b-a}{c+d}=-\frac{a-b}{-(c+d)};\ 4)\ \frac{x-5}{x-2}=-\frac{5-x}{x-2}=-\frac{x-5}{2-x};$$

$$5)\ \frac{a-x}{b-x}=-\frac{x-a}{b-x}=-\frac{a-x}{x-b};\ 6)\ \frac{-a-b}{c+d}=-\frac{a+b}{c+d}=-\frac{-a-b}{-c-d}.$$

ЗАДАЧА 7. Пояснити справедливість рівностей:

1) $\dfrac{a-2}{b-4}=\dfrac{2-a}{4-b}=-\dfrac{a-2}{4-b}=-\dfrac{2-a}{b-4}$;

2) $\dfrac{a}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{a}{(a-x)(b-x)}=$

$=-\dfrac{a}{(a-x)(x-b)}=-\dfrac{a}{(x-a)(b-x)}$.

ЗАДАЧА 8. Скоротити дроби:

1) $\dfrac{ab}{cb}$; 2) $\dfrac{7xy}{14x}$; 3) $\dfrac{6a^2b^2}{8a^4b}$; 4) $\dfrac{16p^2q^2}{24pq^8}$;

5) $\dfrac{30ab^2}{15a^2b}$; 6) $\dfrac{12x^2yz}{18x^2y^2z^2}$; 7) $\dfrac{4a^2b^4}{8a^2b^2}$;

8) $\dfrac{9a(x+y)^2}{3a^2(x+y)}$; 9) $\dfrac{10a^2b(x-y)^2}{15a^2b(x-y)^3}$;

10) $\dfrac{7x^4y^2(a+b)}{21x^2y^2(a+b)^2}$; 11) $\dfrac{3(a-b)(a-c)^2}{6(a-b)(a-c)}$;

12) $\dfrac{a(x+y)}{a(x+y)}$; 13) $\dfrac{8a(a+b)}{4a(a+b)}$; 14) $\dfrac{a-b}{b-a}$;

15) $\dfrac{a(x-a)}{b(a-x)}$; 16) $\dfrac{5a(x-y)}{15a(y-x)}$; 17) $\dfrac{3m(x-1)}{9m^2(1-x)}$;

18) $\dfrac{8a^2b^2(x-5)}{12a^4(5-x)}$; 19) $\dfrac{14xy^5(2a-3b)}{21x^2y^2(3b-2a)}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{a}{c}$; 2) $\dfrac{y}{2}$; 3) $\dfrac{3b}{2a^2}$; 4) $\dfrac{2p}{3q^6}$;

5) $\dfrac{2b}{a}$; 6) $\dfrac{2}{3yz}$; 7) $\dfrac{b^2}{2}$; 8) $\dfrac{3(x+y)}{a}$;

9) $\dfrac{2}{3(x-y)}$; 10) $\dfrac{x^2}{3(a+b)}$; 11) $\dfrac{a-c}{2}$;

12) 1; 13) 2; 14) -1; 15) $-\dfrac{a}{b}$; 16) $-\dfrac{1}{3}$;

17) $-\dfrac{1}{3m}$; 18) $-\dfrac{2b^2}{3a^2}$; 19) $-\dfrac{2y^3}{3x}$.

ЗАДАЧА 9. Скоротити дроби:

1) $\frac{5a-5b}{10a}$; 2) $\frac{3x+3y}{6x}$; 3) $\frac{4m-4n}{8a+8b}$; 4) $\frac{6p+6q}{12x+12y}$;

5) $\frac{ac-bc}{ac+bc}$; 6) $\frac{ax+bx}{ax-bx}$; 7) $\frac{a^2}{a^2+ab}$; 8) $\frac{xy}{x-xy}$;

9) $\frac{pq^3}{p^2q-pq^2}$; 10) $\frac{ac-bc}{c^2+cd}$; 11) $\frac{k^2+k}{kx-ky}$; 12) $\frac{a^2+3ab}{a^2b+3ab^2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\frac{a-b}{2a}$; 2) $\frac{x+y}{2x}$; 3) $\frac{m-n}{2(a+b)}$; 4) $\frac{p+q}{2(x+y)}$;

5) $\frac{a-b}{a+b}$; 6) $\frac{a+b}{a-b}$; 7) $\frac{a}{a+b}$; 8) $\frac{y}{1-y}$;

9) $\frac{q^2}{p-q}$; 10) $\frac{a-b}{c+d}$; 11) $\frac{k+1}{x-y}$; 12) $\frac{1}{b}$.

ЗАДАЧА 10. Скоротити дроби:

1) $\frac{x^2-2xy}{xy-2y^2}$; 2) $\frac{x^2-2xy}{2y^2-xy}$; 3) $\frac{3x^2+4xy}{9x^2y-16y^3}$;

4) $\frac{2ac-4bc}{5a^3c-20ab^2c}$; 5) $\frac{x^3-2x^2}{2x^3y^2-x^4y^2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $\frac{x(x-2y)}{y(x-2y)}=\frac{x}{y}$; 2) $\frac{x^2-2xy}{2y^2-xy}=\frac{x(x-2y)}{y(2y-x)}=-\frac{x}{y}$;

3) $$\frac{3x^2+4xy}{9x^2y-16y^3}=\frac{x(3x+4y)}{y(9x^2-16y^2)}=\frac{x(3x+4y)}{y(3x+4y)(3x-4y)}=$$

$$=\frac{x}{y(3x-4y)};$$

4) $$\frac{2ac-4bc}{5a^3c-20ab^2c}=\frac{2c(a-2b)}{5ac(a^2-4b^2)}=\frac{2(a-2b)}{5a(a-2b)(a+2b)}=$$

$$=\frac{2}{5a(a+2b)};$$

5) $$\frac{x^3-2x^2}{2x^3y^2-x^4y^2}=\frac{x^2(x-2)}{x^3y^2(2-x)}=-\frac{1}{xy^2}.$$

ЗАДАЧА 11. Скоротити дроби:

1) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$; 2) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; 3) $\frac{a^2-b^2}{2a-2b}$; 4) $\frac{1-x^2}{3(1+x)^2}$;

5) $\frac{x-y}{x^2-y^2}$; 6) $\frac{a+1}{a^2-1}$; 7) $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$; 8) $\frac{y^2-x^2}{(x+y)^2}$;

9) $\frac{a^2-1}{1-a}$; 10) $\frac{m-n}{(n-m)^2}$; 11) $\frac{(a+1)^2}{a^2-1}$; 12) $\frac{a^2-1}{(a-1)^2}$;

13) $\frac{3x^2-3xy}{3(x-y)^2}$; 14) $\frac{20a^2-45b^2}{(2a+3b)^2}$; 15) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$;

16) $\frac{a^2-2a+1}{a^2-1}$; 17) $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$; 18) $\frac{5m^2-10mn+5n^2}{15m^2-15n^2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $a-b$; 2) $\frac{x-2}{x+2}$; 3) $\frac{a+b}{2}$; 4) $\frac{1-x}{3(1+x)}$; 5) $\frac{1}{x+y}$;

6) $\frac{1}{a-1}$; 7) $\frac{a-b}{a+b}$; 8) $\frac{y-x}{x+y}$; 9) $-(a+1)$; 10) $\frac{1}{m-n}$;

11) $\frac{a+1}{a-1}$; 12) $\frac{a+1}{a-1}$; 13) $\frac{x}{x-y}$; 14) $\frac{5(2a-3b)}{2a+3b}$;

15) $\frac{x+y}{x-y}$; 16) $\frac{a-1}{a+1}$; 17) $\frac{a-b}{2(a+b)}$; 18) $\frac{m-n}{3(m+n)}$.

ЗАДАЧА 12. Скоротити дроби:

1) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$; 2) $\frac{2x^3-2y^3}{5x^2-5y^2}$; 3) $\frac{3m^2-3n^2}{6m^3+6n^3}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$;

2) $\frac{2x^3-2y^3}{5x^2-5y^2}=\frac{2(x-y)(x^2+xy+y^2)}{5(x-y)(x+y)}=\frac{2(x^2+xy+y^2)}{5(x+y)}$;

3) $\frac{3m^2-3n^2}{6m^3+6n^3}=\frac{3(m^2-n^2)}{6(m^3+n^3)}=\frac{(m-n)(m+n)}{2(m+n)(m^2-mn+n^2)}=$

$=\frac{(m-n)}{2(m^2-mn+n^2)}$.

ЗАДАЧА 13. Скоротити дроби:

1) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$; 2) $\dfrac{a^4-x^4}{a^2-x^2}$; 3) $\dfrac{a^3-b^3}{a^4-b^4}$; 4) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$;

5) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}$; 6) $\dfrac{16-8a+a^2}{ab-4b}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) x^2-y^2; 2) a^2+x^2; 3) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{(a^2+b^2)(a+b)}$;

4) x^2-y^2; 5) $\dfrac{1}{a-b}$; 6) $\dfrac{a-4}{b}$.

ЗАДАЧА 14. Скоротити дроби:

1) $\dfrac{5x^3y+5xy^3}{x^4-y^4}$; 2) $\dfrac{a^4-b^4}{ab^2+a^3}$; 3) $\dfrac{2a+4}{a^3+8}$; 4) $\dfrac{1-2a+a^2}{a^2-1}$;

5) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{2a^4-2b^4}$; 6) $\dfrac{3n^2-3m^2}{6m^3+6n^3}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{5xy}{x^2-y^2}$; 2) $\dfrac{a^2-b^2}{a}$; 3) $\dfrac{2}{a^2-2a+4}$; 4) $\dfrac{a-1}{a+1}$;

5) $\dfrac{a+b}{2(a-b)(a^2+b^2)}$; 6) $\dfrac{n-m}{2(n^2-mn+m^2)}$.

ЗАДАЧА 15. Скоротити дроби:

1) $\dfrac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}$; 2) $\dfrac{ac-bc+ad-bd}{ac+bc+ad+bd}$;

3) $\dfrac{ab+ac+b^2+bc}{ax+ay+bx+by}$; 4) $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}$;

5) $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$; 6) $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$;

7) $\dfrac{1-3y+3y^2-y^3}{z-zy+x-xy}$; 8) $\dfrac{x^2-ax+bx-ab}{x^3+bx^2+ax+ab}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{x+y}{x-y}$; 2) $\dfrac{a-b}{a+b}$; 3) $\dfrac{b+c}{x+y}$; 4) $a+b-c$;

5) $\dfrac{a+b-c}{a-b+c}$; 6) $\dfrac{1}{x+1}$; 7) $\dfrac{(1-y)^2}{x+z}$; 8) $\dfrac{x-a}{x^2+a}$.

ЗАДАЧА 16. Скоротити дроби:

1) $\frac{a^2-b^2}{a^2-a-b-b^2}$; 2) $\frac{5a^3+a^2b+5ab^2+b^3}{5ab+b^2}$;

3) $\frac{a^3+1}{6a^2+12a+6}$; 4) $\frac{(a+b)^3}{a^3+b^3+3ab(a+b)}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $$\frac{a^2-b^2}{a^2-a-b-b^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)-(a+b)}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a-b-1)}=$$
$$=\frac{a-b}{a-b-1};$$

2) $$\frac{5a^3+a^2b+5ab^2+b^3}{5ab+b^2}=\frac{5a(a^2+b^2)+b(a^2+b^2)}{b(5a+b)}=$$
$$=\frac{(a^2+b^2)(5a+b)}{b(5a+b)}=\frac{a^2+b^2}{b};$$

3) $$\frac{a^3+1}{6a^2+12a+6}=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{6(a^2+2a+1)}=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{6(a+1)^2}=$$
$$=\frac{a^2-a+1}{6(a+1)};$$

4) $$\frac{(a+b)^3}{a^3+b^3+3ab(a+b)}=\frac{(a+b)^3}{(a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab(a+b)}=$$
$$=\frac{(a+b)^3}{(a+b)(a^2+2ab+b^2)}=1.$$

ЗАДАЧА 17.* Скоротити дроби:

1) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$; 2) $\frac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}$; 3) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9}$;

4) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}$; 5) $\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{a^2+c^2-b^2+2ac}$; 6) $\frac{a^3-a^2b+ab^2}{b^3+a^3}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\frac{x+3}{x+2}$; 2) $\frac{a+2}{a+5}$; 3) $\frac{x-4}{x-3}$;

4) $\frac{x+1}{x+7}$; 5) $\frac{b+c-a}{a+b+c}$; 6) $\frac{a}{a+b}$.

ЗАДАЧА 18. Довести тотожності:

1) $$\frac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}=\frac{x+c}{2x+y};$$

2) $$\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}=\frac{1}{3a^2-b^2}.$$

ЗАДАЧА 19. Довести, що частка від ділення двоцифрового числа на суму його цифр менше 10.

ДОВЕДЕННЯ

Розглянемо відношення:

$$\frac{\overline{ab}}{a+b}=\frac{10a+b}{a+b}=\frac{a+b+9a}{a+b}=1+\frac{9a}{a+b}.$$

Оскільки a та b — натуральні числа, то

$$0<\frac{a}{a+b}<1;\quad 0<\frac{9a}{a+b}<9.$$

Отже,

$$\frac{\overline{ab}}{a+b}=1+\frac{9a}{a+b}<10,$$

що й треба було довести.

ГЛАВА 6. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

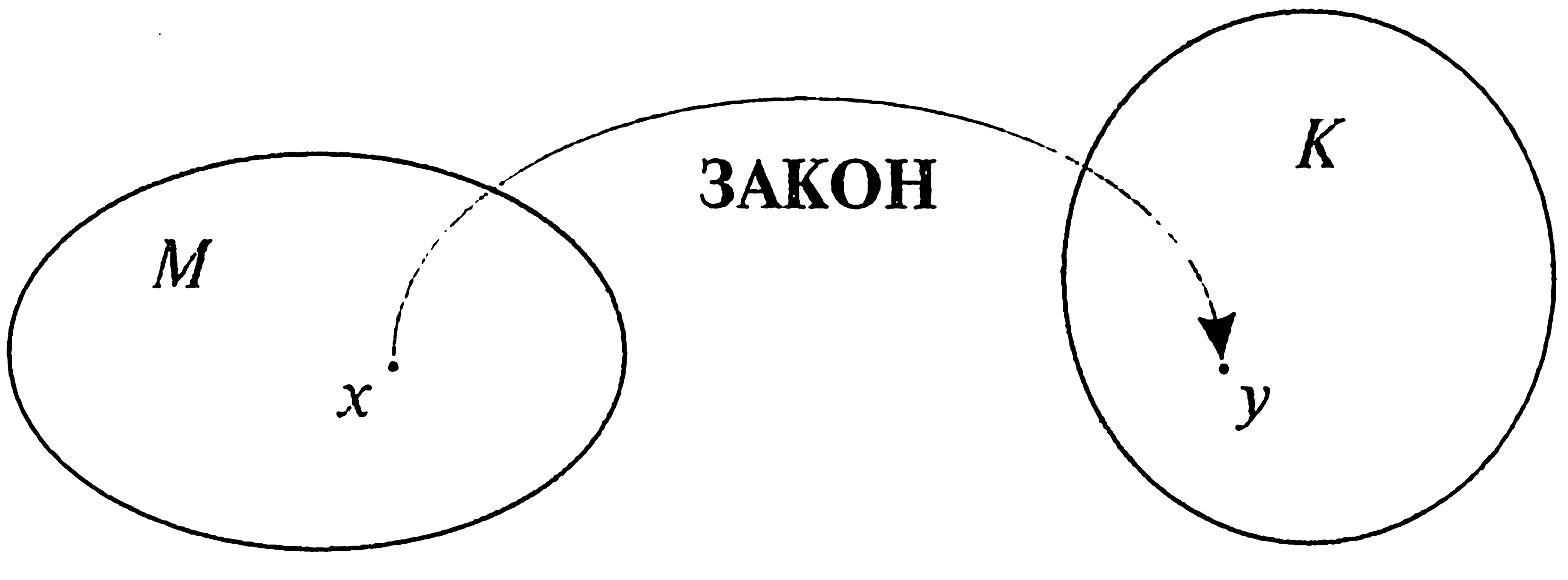
§ 1. ЩО ТАКЕ ФУНКЦІЯ

Напевне, слово «функція» ви вже зустрічали. Коли ми говоримо «функція», то маємо на увазі — залежність між двома або більше об'єктами. В математиці функцію означають більш строго.

ОЗНАЧЕННЯ. Якщо задані дві множини, M та K, і заданий *закон* (*правило*), за яким *кожному* **елементу** x з множини M ставиться у відповідність *один цілком визначений* **елемент** y з множини K, то кажуть, що *на множині M* задана **функція** із *значеннями в множині K.*

Кажуть також, що **залежна змінна** y є *функцією* **незалежної змінної** x. Змінну x називають **аргументом** даної функції, множину M — **областю (множиною) визначення** даної функції, а відповідність між x та y — **функціональною відповідністю** (або **функціональною залежністю**).

Отже, зазвичай **незалежна** змінна позначається буквою x, **залежна** — буквою y. У такому випадку пишуть, що задана функція $y(x)$. Але, ясна річ, *задання* функції *не залежить* від позначення букв. Бувають інші позначення: $f(x)$, $S(t)$ і т. д.



Ліричний відступ авторів

Поняття «функція» — це основне поняття в математиці. Відтепер мало не на кожному уроці ви будете зустрічатися з цім поняттям: вивчати в теорії, розв'язувати задачі, писати контрольні роботи... Але це не найголовніше.

Вивчення функції дозволить вам, з одного боку глибше порозумітися у деяких інших предметах, що вивчаються чи будуть вивчатися надалі. А з другого — у черговий раз перед вами, друзі, виникла можливість захопитися красою математики!

Отже, поставтеся до вивчення теми якомога серйозніше, і наукове та естетичне задоволення дуже скоро прийдуть до вас.

Функція може бути задана різними способами.

1. Функція може бути задана **формулою**[1].

Наприклад, таблицю квадратів можна задати формулою $y = x^2$. За допомогою цієї формули можна показати, що, наприклад, числу 12 відповідає $12^2 = 144$.

ЗАДАЧА 1. Функція задана формулою $y = 3x - 5$. Знайти
$$y(0);\ y(-1);\ y(10).$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$y(0) = 3 \cdot 0 - 5 = -5;\quad y(-1) = 3 \cdot (-1) - 5 = -3 - 5 = -8;$$
$$y(10) = 3 \cdot 10 - 5 = 25.$$

ЗАДАЧА 2. Обчислити значення функції y при x, що дорівнює $-1;\ 0;\ -2;\ 1;\ 3$, де:
$$1)\ y = x;\quad 2)\ y = -x;\quad 3)\ y = -3x - 2.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $y(-1) = -1;\quad y(0) = 0;\quad y(-2) = -2;\quad y(1) = 1;\quad y(3) = 3;$
2) $y(-1) = 1;\quad y(0) = 0;\quad y(-2) = 2;\quad y(1) = -1;\quad y(3) = -3;$
3) $y(-1) = 3 - 2 = 1;\quad y(0) = -2;\quad y(-2) = 6 - 2 = 4;$
$y(1) = -3 - 2 = -5;\quad y(3) = -9 - 2 = -11.$

[1] Таке задання функції називають аналітичним.

2. Функція може бути задана **таблицею**.

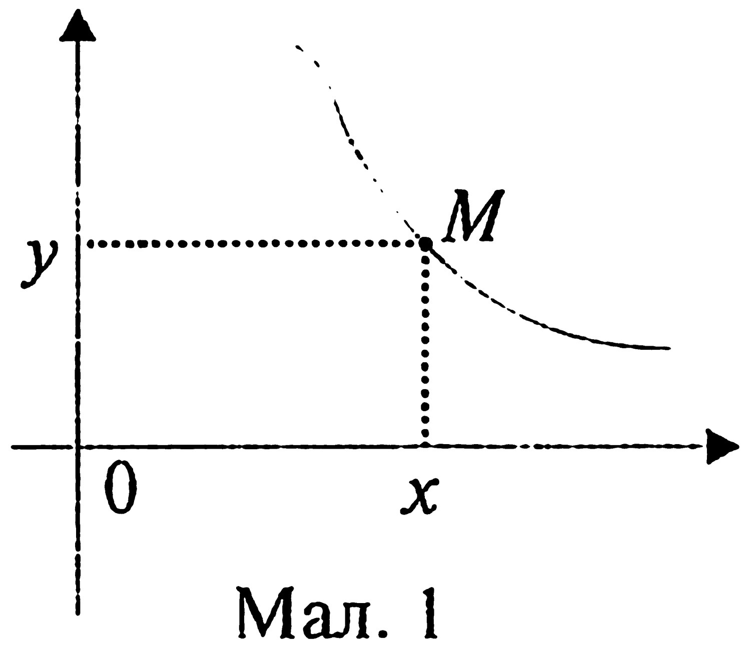
Наприклад,

x	0	1	2	3	4
y	0	1	8	27	64

Згідно цієї таблиці значенню $x=0$ відповідає $y=0$, значенню $x=2$ відповідає $y=8$ і т. д.

3. Функція може бути задана **за допомогою графіка**.

Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції (мал. 1).



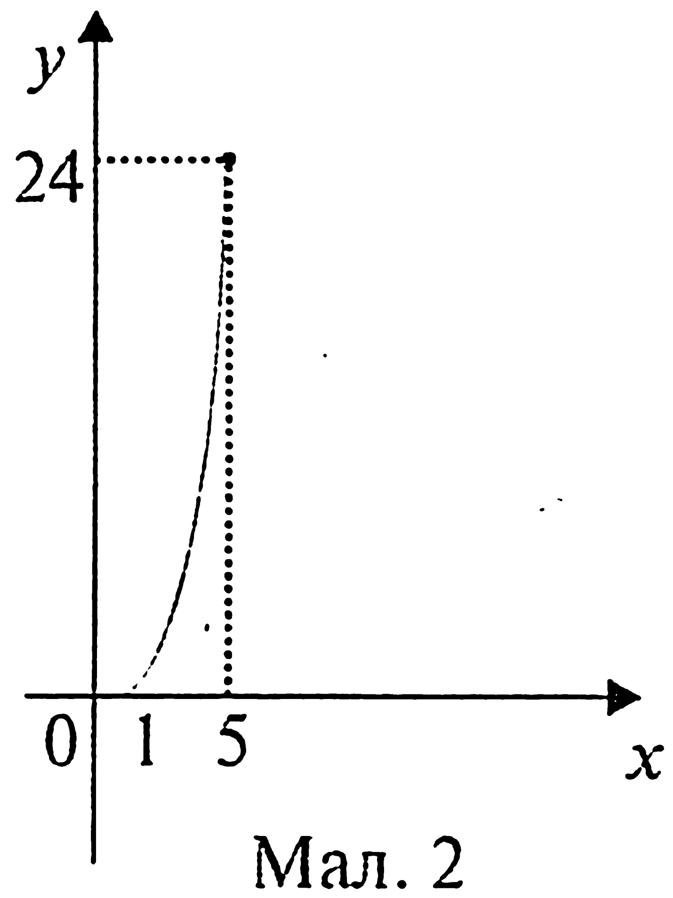
Мал. 1

ЗАДАЧА 3. Побудувати графік $y=x^2-1$, де $1\le x\le 5$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Складемо таблицю відповідних значень аргументу і функції:

x	1	2	3	4	5
y	0	3	8	15	24



Мал. 2

Таблиця задає точки з координатами $(1;0)$; $(2;3)$; $(3;8)$; $(4;15)$; $(5;24)$. Відмітимо їх на координатній площині, потім поєднаємо ці точки плавною лінією. Графік функції $y=x^2-1$, де $1\le x\le 5$ зображено на малюнку 2.

ЗАДАЧА 4. Дано функцію $y=-x^2+1$. Чи належить графіку цієї функції точка з координатами: 1) $(-1;0)$; 2) $(0;1)$; 3) $(2;0)$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Знайдемо значення y при $x=-1$:

$$y(-1)=-(-1)^2+1=-1+1=0.$$

Оскільки $y(-1)=0$, то точка $(-1;0)$ належить графіку даної функції.

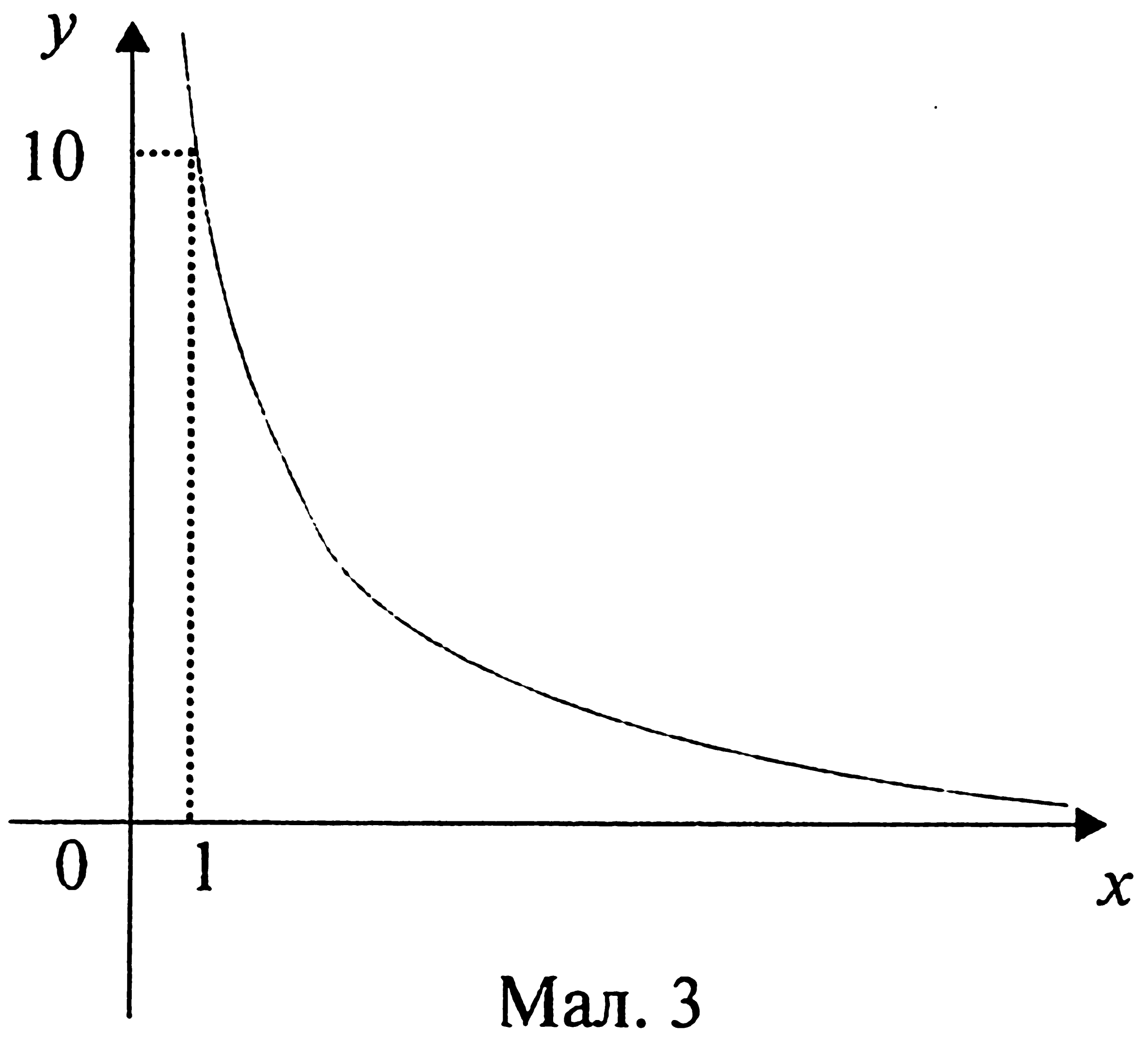
2) $y(0)=0+1=1$. Точка графіка з абсцисою $x=0$ має ординату $y=1$, тому точка $(0;1)$ належить графіку даної функції.

3) $y(2)=-4+1=-3$, тобто точка $(2;0)$ не належить графіку даної функції.

ЗАДАЧА 5. Функцію задано формулою $y=\frac{10}{x}$, де $1\le x\le 10$. Накресліть графік цієї функції.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	10	5	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{9}$	1



Мал. 3

§ 2. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

Починаємо вивчати алгебричні функції. Простішою з них є лінійна функція.

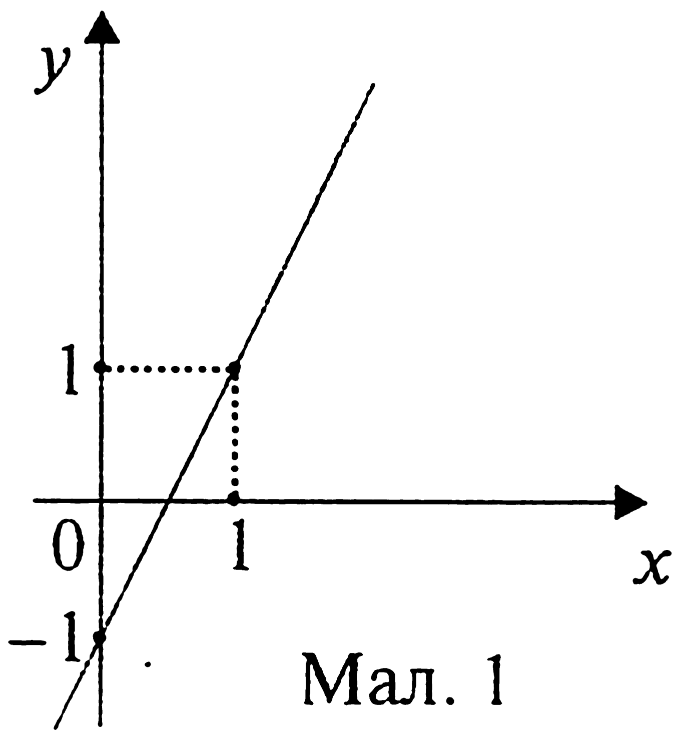
> *Лінійною функцією називається функція, яку можна задати формулою*
>
> $$y = kx + b,$$
>
> *де x — незалежна змінна, k та b — деякі числа.*

Можна довести, що графіком лінійної функції буде **пряма**.

Оскільки пряма однозначно визначається двома точками, то для побудови графіка функції $y = kx + b$ **достатньо побудувати дві точки цього графіка.**

ЗАДАЧА 1. Побудувати графік функції $y = 2x - 1$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ



Мал. 1

x	0	1
y	-1	1

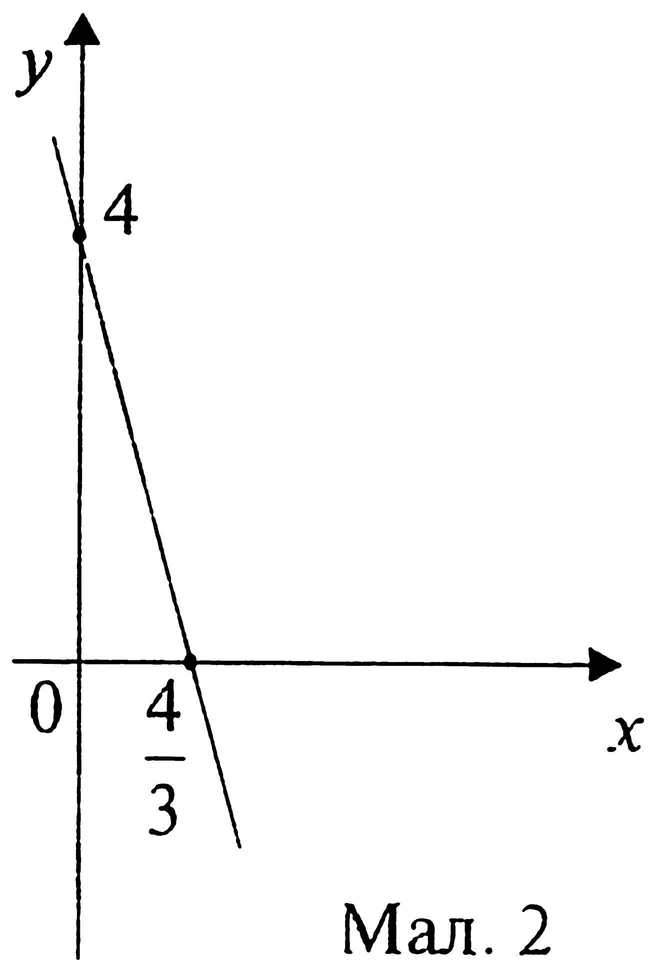
ЗАДАЧА 2. Знайти точки перетину графіка функції $y = -3x + 4$ з осями координат і побудувати графік.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Знайдемо точку перетину графіка даної функції з віссю абсцис. Ордината цієї точки дорівнює 0. Тому

$$0 = -3x + 4; \quad \text{звідси } x = \frac{4}{3}.$$

Отже, точка перетину графіка з віссю абсцис має координати $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$. Знайдемо точку



Мал. 2

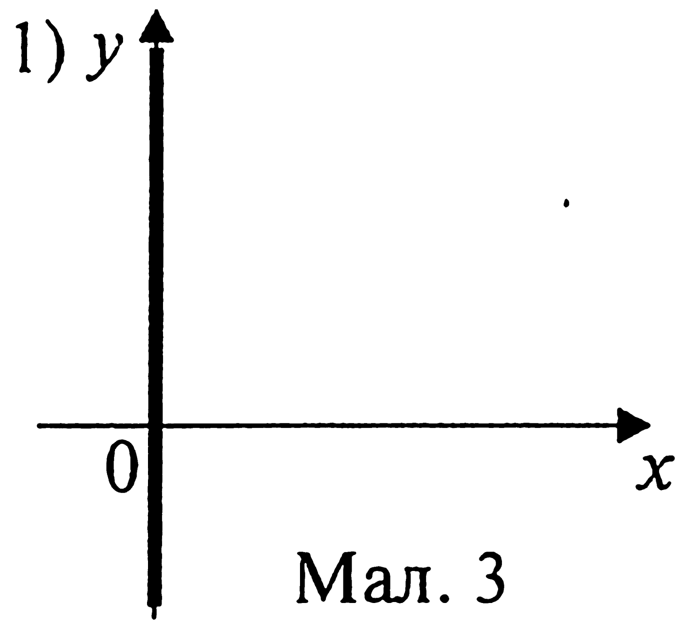
перетину графіка з віссю ординат. Оскільки абсциса цієї точки дорівнює 0, то $y = -3 \cdot 0 + 4$; $y = 4$. Отже, точка перетину графіка з віссю ординат має координати $(0;4)$. Графік зображено на малюнку 2.

ЗАДАЧА 3. Побудувати графік функції:

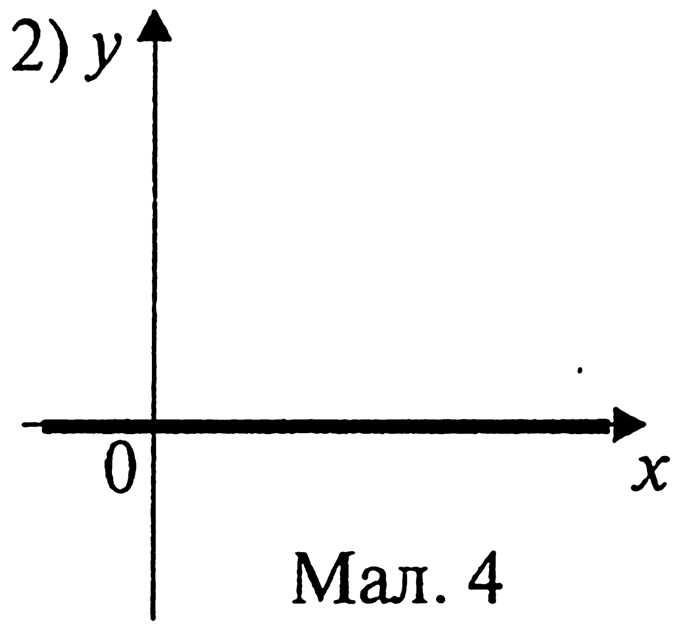
$1)\ x = 0;\ \ 2)\ y = 0;\ \ 3)\ y = 1;\ \ 4)\ y = -1;\ \ 5)\ x = 2;$

$6)\ x = -2;\ \ 7)\ y = x;\ \ 8)\ y = -\dfrac{x}{2};\ \ 9)\ y = -x;\ \ 10)^*\ y = |x|.$

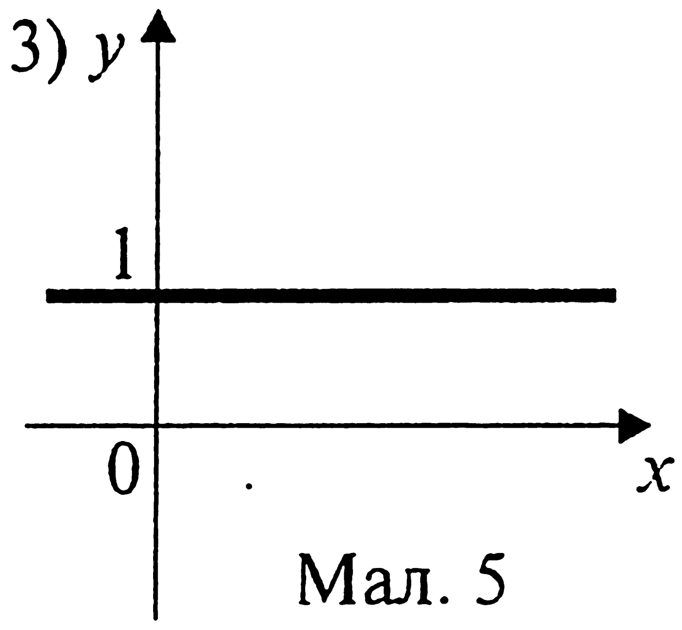
РОЗВ'ЯЗАННЯ



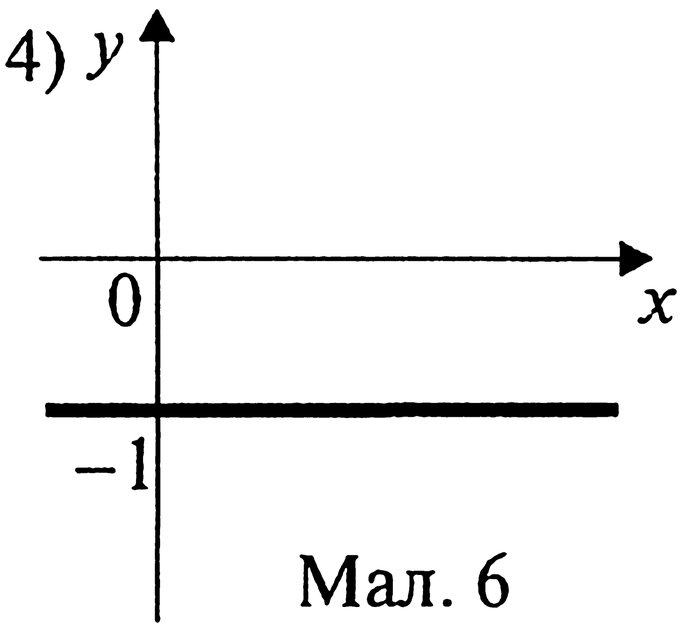
Мал. 3



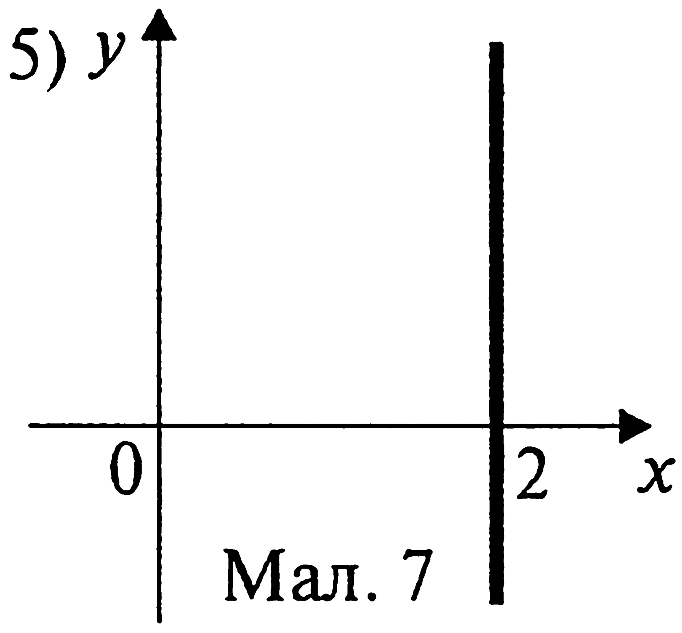
Мал. 4



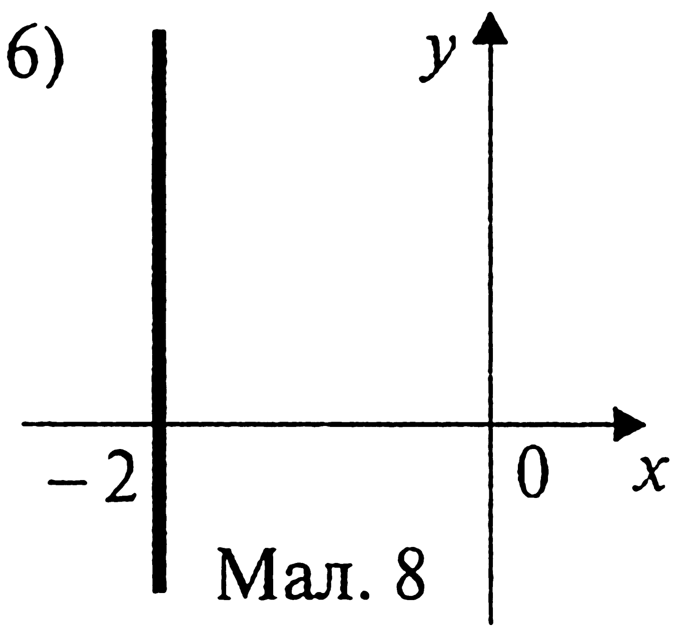
Мал. 5



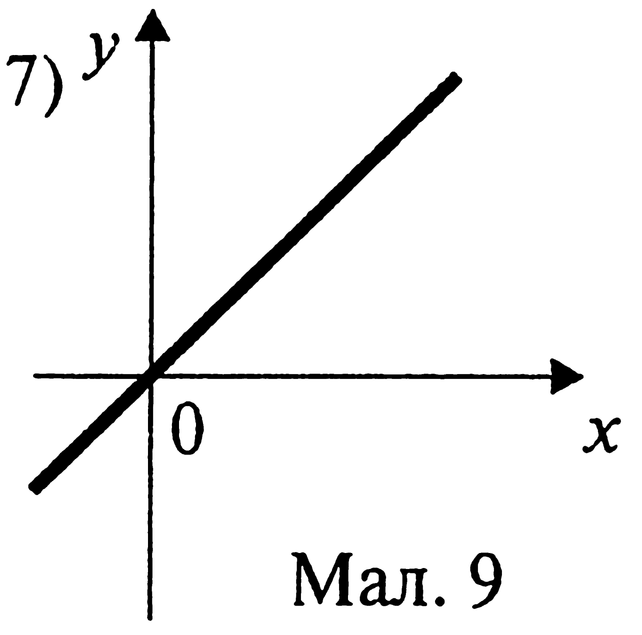
Мал. 6



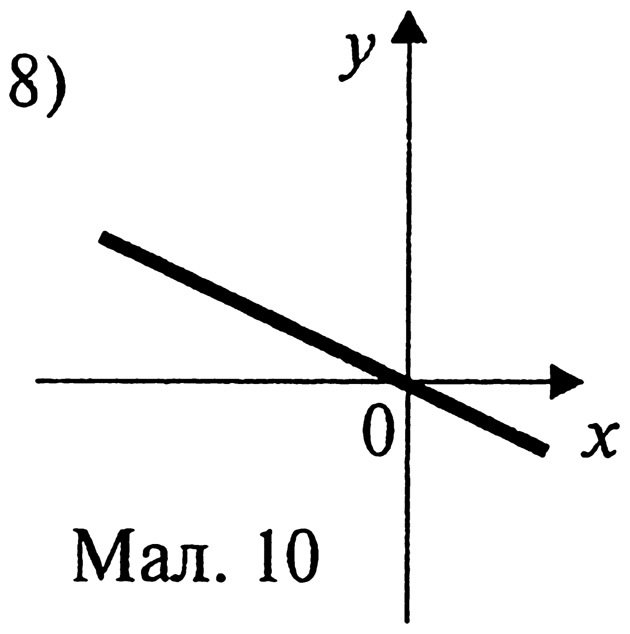
Мал. 7



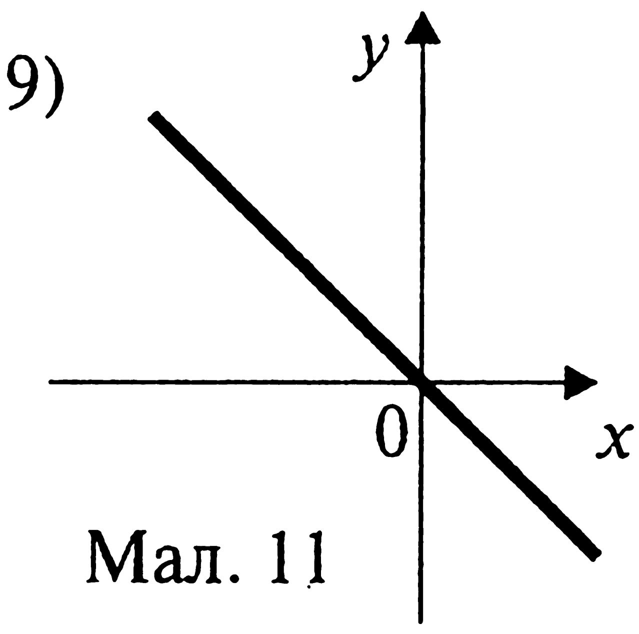
Мал. 8



Мал. 9

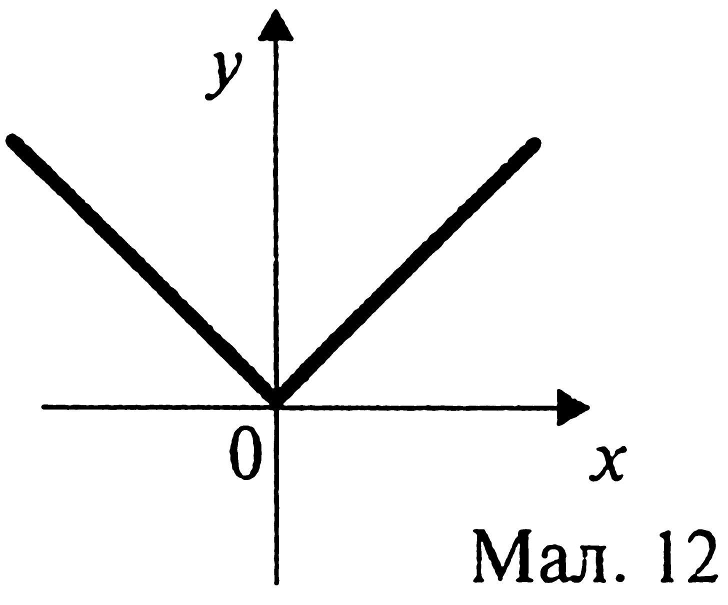


Мал. 10



Мал. 11

10) а) Нехай $x \geq 0$, тоді $|x| = x$; $y = x$.
б) Нехай $x \leq 0$, тоді $|x| = -x$; $y = -x$.
Графік зображено на малюнку 12.



Мал. 12

ГЛАВА 7. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

§ 1. ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ДВОМА НЕВІДОМИМИ

Ми вивчили лінійне рівняння, яке містило одне невідоме. Існують лінійні рівняння, що містять не одне, а два невідомих (дві змінні). Це рівняння вигляду

$$ax + by = c,$$

де x та y — змінні, a, b та c — деякі числа.

Кожну пару чисел, що задовольняють рівнянню з двома змінними, називають *розв'язком цього рівняння.*

Наприклад, рівняння $2x-3y=5$ має розв'язками пари чисел:

$$x=0, y=-\frac{5}{3}; \quad x=1, y=-1 \quad \text{і т. д.}$$

ЗАДАЧА 1. Чому дорівнює значення c, якщо відомо, що графік рівняння $2x+3y=c$ проходить через точку $A(0;-1)$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо точка A належить графіку $2x+3y=c$, то її координати задовольняють цьому рівнянню, тобто

$$2\cdot 0+3\cdot(-1)=c; \text{ звідси } c=-3.$$

ВІДПОВІДЬ. $c=-3$.

ЗАДАЧА 2. Яким має бути коефіцієнт b рівняння $2x+by=0$, щоб графік цього рівняння проходив через точку $M(-1;2)$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

За аналогією з розв'язанням попередньої задачі:

$$2\cdot(-1)+b\cdot 2=0;$$

звідси

$$2b=2;\ \ b=1.$$

ВІДПОВІДЬ. $b=1$.

§ 2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА НЕВІДОМИМИ

ПИТАННЯ. Чим відрізняються рівняння з двома невідомими від такого ж рівняння, якщо разом з ним розглядається і друге?

ВІДПОВІДЬ. У таких двох рівняннях невідомі x та y означають ті самі числа.

Нехай задано два рівняння з двома змінними

(наприклад, $2x-5y=7$ та $3x-4y=1$).

Якщо треба знайти **спільний розв'язок** цих рівнянь, то говорять, що необхідно розв'язати **систему двох рівнянь**.

Записують систему рівнянь, об'єднуючи їх фігурною дужкою: наприклад,

$$\begin{cases}2x-5y=7\\3x-4y=1\end{cases}.$$

Розв'язати систему рівнянь — *це означає знайти всі її розв'язки або виявити, що їх нема.*

Як розв'язувать системи?
Ліпшої немає теми:
Тут потрібна підготовка
Й спосіб гарний — **підстановка**!

Спосіб підстановки

Спосіб пояснимо на прикладі. Нехай необхідно розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x - 3y = 21 \\ x + 2y = 7 \end{cases}.$$

Виразимо з другого рівняння системи змінну x через y:

$$x = 7 - 2y. \qquad (1)$$

Підставимо (1) в перше рівняння системи:

$$2 \cdot (7 - 2y) - 3y = 21.$$

Одержимо

$$14 - 4y - 3y = 21; \ \ 14 - 7y = 21; \ \ 7y = -7; \ \ y = -1.$$

Підставивши знайдене значення y в рівняння (1), одержимо

$$x = 7 - 2(-1); \ \ x = 9.$$

Отже, розв'язанням системи буде пара чисел

$$x = 9, \ y = -1.$$

Щоб розв'язати систему способом підстановки треба:

1) виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через іншу;

2) одержаний вираз підставити в друге рівняння системи замість цієї змінної;

3) розв'язати одержане рівняння з однією змінною;

4) знайти значення другої змінної.

ЗАДАЧА 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 1 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{8} = -2 \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Спростимо задану систему:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 2x - y = -16 \end{cases}.$$

З другого рівняння системи маємо:

$$y = 2x + 16.$$

Підставимо знайдене значення y в перше рівняння системи:

$$3x - 2(2x + 16) = 6.$$

Тоді

$$3x - 4x - 32 = 6; \quad -x = 38; \quad x = -38.$$

Отже,

$$y = 2(-38) + 16; \quad y = -60.$$

ВІДПОВІДЬ. $x = -38,\ y = -60.$

ЗАДАЧА 2. Розв'язати системи рівнянь:

$$1)\begin{cases} y = x + 1 \\ 5x + 2y = 16 \end{cases}; \qquad 2)\begin{cases} y - 2x = 1 \\ 6x - y = 7 \end{cases};$$

$$3)\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}; \qquad 4)\begin{cases} 4x - 5y = 17 \\ x + 0{,}5y = 2{,}5 \end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ (2;3);\ \ 2)\ (2;5);$
$3)\ (4;2);\ \ 4)\ (3;-1).$

ЗАУВАЖЕННЯ. Записувати відповідь системи парою чисел у круглих дужках не зовсім коректно, оскільки нам невідомо, яка змінна на першому місці, а яка — на другому. Але розв'язуючи системи відносно x та y, домовляються, що в записі розв'язку системи парами чисел у круглих дужках на першому місці мається на увазі x, а на другому — y.

ЗАДАЧА 3. Розв'язати системи рівнянь:

$$1)\begin{cases} x - 3y = 17 \\ x - 2y = -13 \end{cases}; \qquad 2)\begin{cases} y - 3x = 5 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases};$$

$$3)\begin{cases} 7x - 3y = 13 \\ x - 2y = 5 \end{cases}; \qquad 4)\begin{cases} 4x - y = 11 \\ 6x - 2y = 13 \end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ (-73;-30);\ \ 2)\ \left(1\frac{2}{11};8\frac{6}{11}\right);$
$3)\ (1;-2);\ \ 4)\ (4{,}5;7).$

ЗАДАЧА 4. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x = 5y \\ -3x + 8y = -13 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x - 2y = 41 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 9x + 2y = 4 \\ 8x + y = 2 \end{cases}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\left(-7\frac{2}{9}; -4\frac{1}{3}\right)$; 2) $(7; -3)$; 5) $(0;2)$.

ЗАДАЧА 5. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ \frac{2}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{5}{y} = 35 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 27 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} \frac{3}{x+y} + \frac{5}{x-y} = 4 \\ \frac{1}{x+y} + \frac{15}{x-y} = 4 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} \frac{10}{x+y} - \frac{4}{x-y} = 3 \\ \frac{7}{x+y} - \frac{6}{x-y} = 2 \end{cases}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(3;4)$; 2) $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{6}\right)$;

3) $(3; -2)$; 4) $(17{,}6; -14{,}4)$.

ЗАДАЧА 5. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 2 - 5(0{,}2y - 2x) = 3(3x + 2) + 2y \\ 4(x - 2y) - (2x + y) = 2 - 2(2x + y) \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 3(y - 2x) - (5y + 2) = 5(1 - x) \\ 7 - 6(x + y) = 2(3 - 2x) + y \end{cases}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(-2; -2)$; 2) $(-17;5)$.

Спосіб додавання

Спосіб додавання полягає в тому, що для виключення одного з невідомих додають або віднімають задані рівняння системи, спочатку помноживши їх на *«зручні числа»*[1].

---

[1] Для того, щоб помножити рівняння на число, необхідно помножити на це число ліву та праву частини рівняння.

ЗАДАЧА 1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Помножимо перше рівняння на 3, друге на 2, і віднімемо від першого рівняння друге. Одержимо:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{c} 6x - 9y = 3 \\ 6x - 2y = 4 \end{array} \\ \hline -9y - (-2y) = 3 - 4 \end{array},$$

або $-9y + 2y = -1;\ -7y = -1;\ y = \frac{1}{7}.$

Значення x знайдемо, як завжди, підставивши знайдене значення y в одне з рівнянь системи:

$$2x - 3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right) = 1;\ 2x - \frac{3}{7} = 1;\ x = \frac{5}{7}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\left(\frac{5}{7}; \frac{1}{7}\right)$.

ЗАДАЧА 2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 10x - 3y = -1 \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Помножимо перше рівняння системи на 2 і віднімемо від другого. Одержимо:

$$\begin{cases} 10x + 4y = 6 \\ 10x - 3y = -1 \end{cases};$$

$$-3y - 4y = -1 - 6;\quad -7y = -7;\quad y = 1.$$

Підставимо значення y в перше рівняння системи:

$$10x + 4 = 6;\ x = \frac{1}{5}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\left(\frac{1}{5}; 1\right)$.

ЗАДАЧА 3. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases}2x+11y=15\\10x-11y=9\end{cases}$; 2) $\begin{cases}8x-17y=4\\-8x+15y=4\end{cases}$;

3) $\begin{cases}4x-7y=30\\4x-5y=90\end{cases}$; 4) $\begin{cases}x-3y=4\\5x+3y=-1\end{cases}$;

5) $\begin{cases}7x-3y=-1\\4x-5y=-17\end{cases}$; 6) $\begin{cases}1-3y=2(x-2)\\1-3x=3y-2\end{cases}$;

7) $\begin{cases}7(2x+y)-5(3x+y)=6\\3(x+2y)-2(x+3y)=-6\end{cases}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(2;1)$; 2) $(-8;-4)$; 3) $(60;30)$; 4) $\left(\frac{1}{2};-\frac{7}{6}\right)$;
5) $(2;5)$; 6) $(-2;3)$; 7) $(-6;0)$.

Графічний спосіб

Для того, щоб розв'язати систему лінійних рівнянь з двома змінними, можна використовувати **графіки рівнянь**.

Для цього треба:

1) Побудувати графік кожного з рівнянь системи.

2) Знайти координати точки перетину побудованих графіків (якщо вони перетинаються).

ПРИКЛАД. Розв'язати систему рівнянь:

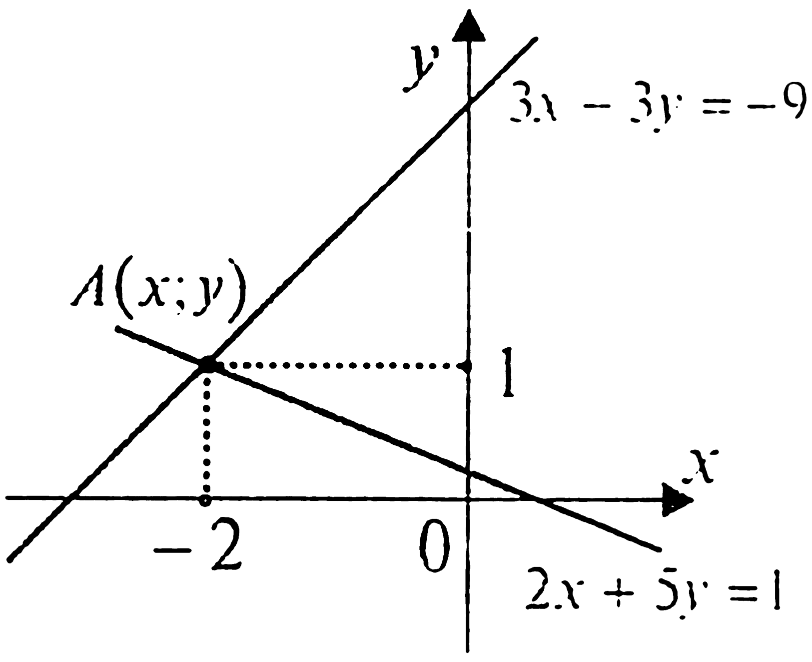
$$\begin{cases}2x+5y=1\\3x-3y=-9\end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Побудуємо в координатній площині графіки двох рівнянь системи (мал. 1).

Координати точки A є розв'язком системи. Як бачимо на малюнку, це буде точка з координатами $(-2;1)$, тобто

$$\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}.$$

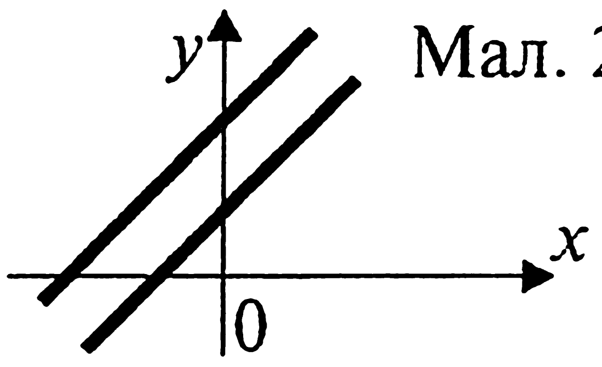


Мал. 1

МОЖЛИВІ ВАРІАНТИ!!!

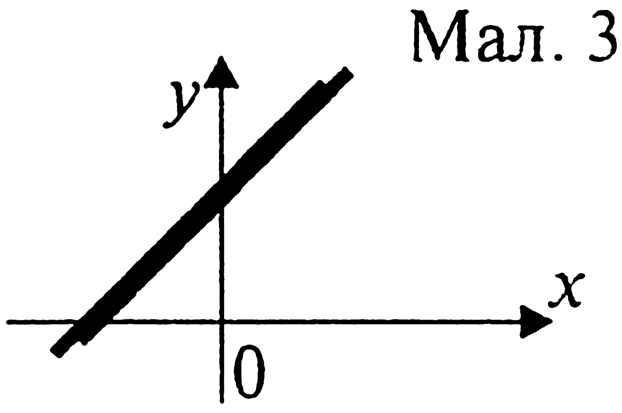
При побудові графіків рівнянь можливі три випадки взаємного розташування двох прямих:

1. **Прямі перетинаються** (мал. 1). Тоді система *має єдиний розв'язок.*



Мал. 2

2. **Прямі паралельні** (мал. 2).
Тоді система рівнянь *розв'язків не має.*



Мал. 3

3. **Прямі співпадають** (мал. 3).
Це означає, що система *має нескінченну кількість розв'язань.*

ПРИКЛАД. Розв'язати графічно системи рівнянь:

$$1)\begin{cases}2x-y=0\\ y-x=1\end{cases};\quad 2)\begin{cases}2x-y=1\\ 4x-2y=2\end{cases};\quad 3)\begin{cases}3x-3y=5\\ y-x=-1\end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $(1;2)$; 2) нескінченна множина розв'язків; 3) розв'язків нема.

§ 3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Умова текстової задачі може містити дані для складання не одного рівняння, а двох. Тоді використовуються системи двох рівнянь з двома невідомими.

ЗАДАЧА 1. Половина одного числа на 4 більше третини іншого, а половина другого на 18 більше чверті першого. Знайти ці числа.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай перше число буде x, а друге — y. Тоді за умовою

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=4 \text{ та } \frac{y}{2}-\frac{x}{4}=18.$$

Дістали систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=4\\ \frac{y}{2}-\frac{x}{4}=18\end{cases}.$$

Розв'яжемо її:

$$\begin{cases}3x-2y=24\\ 2y-x=72\end{cases}; \quad \begin{cases}2x=96\\ 2y-x=72\end{cases}.$$

Звідси

$$\begin{cases}x=48\\ 2y-48=72\end{cases}; \quad \begin{cases}x=48\\ y=60\end{cases}.$$

Отже, перше число 48, а друге — 60.

ВІДПОВІДЬ. 48 та 60.

Наступну задачу розв'яжіть самостійно.

ЗАДАЧА 2. Відстань між двома пристанями на річці 60 км. Цю відстань катер долає за течією протягом 2 годин, а проти течії протягом 3 годин. Знайти власну швидкість катера і швидкість річки.

ВІДПОВІДЬ. Швидкість руху катера 25 км/год, швидкість течії річки 5 км/год.

ЗАДАЧА 3. Через 5 років вік брата співвідноситиметься до віку сестри як 7:5. Скільки зараз років кожному з них, якщо рік тому брат був вдвічі старшим за сестру?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай зараз сестрі x років, брату — y років. Тоді

$$\frac{y-1}{x-1}=2 \text{ та } \frac{y+5}{x+5}=\frac{7}{5}.$$

Дістали систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{x-1}=2 \\ \dfrac{y+5}{x+5}=\dfrac{7}{5} \end{cases}.$$

Звідси:

$$\begin{cases} y-1=2(x-1) \\ 5(y+5)=7(x+5) \end{cases}; \quad \begin{cases} x=5 \\ y=9 \end{cases}.$$

Отже, зараз сестрі 5 років, брату — 9 років.

ВІДПОВІДЬ. 5 років та 9 років.

ЗАДАЧА 4. Якщо задумане двоцифрове число поділити на суму його цифр, то в частці вийде 4, а в остачі — 3. Якщо від задуманого числа відняти подвоєну суму його цифр, то вийде 25. Яке число було задумано?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай шукане число $\overline{ab}=10a+b$. За умовою задачі складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 10a+b=4(a+b)+3 \\ 10a+b-2(a+b)=25 \end{cases};$$

звідси

$$\begin{cases} 2a-b=1 \\ 8a-b=25 \end{cases}.$$

Отже, $a=4$; $b=7$. Тоді шукане число:

$$10\cdot 4+7=47.$$

ВІДПОВІДЬ. 47.

ЗАДАЧА 5. В одній посудині 49 літрів води, а в іншій — 56 літрів. Якщо долити доверху першу посудину з другої посудини, то друга посудина виявиться наповненою тільки наполовину. Якщо ж долити другу посудину доверху з першої, то перша виявиться наповненою тільки на одну третину. Яка місткість кожної з посудин?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай місткість першої посудини x літрів, місткість другої посудини y літрів. Якщо першу посудину долити доверху, тобто долити $(x-49)$ літрів, то у другій посудині залишиться

$$56-(x-49)=105-x \text{ (літрів)}.$$

За умовою $105-x=\frac{y}{2}$.

Якщо ж другу посудину долити доверху з першої, тобто долити $(y-56)$ літрів, то в першій посудині залишиться.

$$49-(y-56)=105-y \text{ (літрів)}.$$

За умовою $105-y=\frac{x}{3}$.

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}105-x=\frac{y}{2}\\105-y=\frac{x}{3}\end{cases}.$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо: $x=63$; $y=84$; звідси місткість першої посудини 63 літри, а другої — 84 літри.

ВІДПОВІДЬ. 63 літри та 84 літри.

ЗАДАЧА 6. Відстань між пунктами A та B — 37 км. З пункту A в пункт B о 7 годині 18 хвилин виїхав один автобус, а о 7 годині 48 хвилин — з тією ж швидкістю інший автобус. Велосипедист, що виїхав з B в A о 7 годині 28 хвилин зустрів перший автобус о 7 годині 58 хвилин, а другий о 8 годині 19 хвилин. Знайдіть швидкості велосипедиста і автобусів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо швидкість автобусів через v_1, швидкість велосипедиста через v_2.

Перший автобус рухався до зустрічі з велосипедистом

$$7\,\text{год}\ \ 58\,\text{хв} - 7\,\text{год}\ \ 18\,\text{хв} = 40\,\text{хв},$$

а другий автобус —

$$8\,\text{год}\ \ 19\,\text{хв} - 7\,\text{год}\ \ 48\,\text{хв} = 31\,\text{хв}.$$

Велосипедист до зустрічі з автобусами рухався відповідно

$$7\,\text{год}\ \ 58\,\text{хв} - 7\,\text{год}\ \ 28\,\text{хв} = 30\,\text{хв}$$

та

$$8\,\text{год}\ \ 19\,\text{хв} - 7\,\text{год}\ \ 28\,\text{хв} = 51\,\text{хв}.$$

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 40v_1 + 30v_2 = 37 \\ 31v_1 + 51v_2 = 37 \end{cases};\ \text{звідси} \begin{cases} v_1 = 0{,}7 \\ v_2 = 0{,}3 \end{cases}.$$

Таким чином швидкість автобусів 0,7 км/хв, або 42 км/год, а швидкість велосипедиста 0,3 км/хв, або 18 км/год.

ВІДПОВІДЬ. 42 км/год, 18 км/год.

8

КЛАС

ГЛАВА 1. ПОВТОРЕННЯ

ОГЛЯД АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ В ПРИКЛАДАХ

Перш ніж починати вивчати алгебру восьмого класу, радимо повторити задачі й приклади за сьомий клас. Вони подані оглядово, але деякі з них підвищеної складності — тим більше є сенс задуматися над розв'язаннями.

ЗАДАЧА 1. Якщо n — натуральне число, які числа можуть бути представлені у вигляді наступних алгебричних виразів:

$$2n;\quad 2n+1;\quad 3n;\quad 3n+1?$$

ВІДПОВІДЬ. Парні; непарні; що діляться на 3; що при діленні на 3 дають в остачі 1.

ЗАДАЧА 2. Довести, що а) сума парного і непарного чисел є число непарне; б) сума двох непарних чисел є число парне; в) сума трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3.

ДОВЕДЕННЯ

а) Маємо: $2n+2n+1=4n+1$ — непарне число ($n \in \mathbb{N}$).

б) Маємо: $2n+1+2k+1=2n+2k+2=2(n+k+2)$ — парне число ($n,k \in \mathbb{N}$).

в) Маємо три послідовних натуральних числа: n, $n+1$, $n+2$ ($n \in \mathbb{N}$). Тоді їхня сума $n+n+1+n+2=3n+3$ — очевидно, ділиться на 3.

ЗАДАЧА 3. Довести, що якщо $n \in \mathbb{N}$, то $\frac{n(n+1)}{2}$ — натуральне число.

ДОВЕДЕННЯ

Нехай n — парне число. Тоді $n(n+1)$ ділиться на 2, і отже, $\frac{n(n+1)}{2}$ — натуральне число. Нехай n — непарне число. Тоді $n+1$ — парне число, і отже, $\frac{n(n+1)}{2}$ — натуральне число.

ЗАДАЧА 4. Сформулювати і довести тотожності:

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; 2) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;

3) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;

4) $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$;

5) $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$;

6) $a^6 \pm b^6 = (a^2 \pm b^2)(a^4 \mp a^2b^2 + b^4)$

ЗАДАЧА 5. Довести тотожності:

1) $\frac{(m+n)^2}{2} + \frac{(m-n)^2}{2} = m^2 + n^2$; 2) $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$;

3) $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = mn$; 4) $\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2 = 1$.

ДОВЕДЕННЯ

1) $$\frac{(m+n)^2}{2} + \frac{(m-n)^2}{2} = \frac{m^2 + 2mn + n^2 + m^2 - 2mn + n^2}{2} = \frac{2m^2 + 2n^2}{2} = m^2 + n^2;$$

3) $$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = \left(\frac{m+n}{2} - \frac{m-n}{2}\right) \cdot \left(\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2}\right) = \frac{2n}{2} \cdot \frac{2m}{2} = mn;$$

4) $$\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2 = \frac{a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2}{(a^2+1)^2} = \frac{a^4 + 2a^2 + 1}{(a^2+1)^2} = 1.$$

ЗАДАЧА 6. Довести, що при будь-яких значеннях m вирази

1) m^2-2m+1; 2) $|3m-1|$; 3) $|m-1|+|m-3|+5|8m-1|$;

4) $m^2|m|$; 5) $\frac{m^2}{|m|}$; 6) $2(3m-1)-(-8-(3-6m))$

додатні (невід'ємні).

ДОВЕДЕННЯ

1) $m^2-2m+1=(m-1)^2\geq 0$;

2) $|3m-1|\geq 0$, тому що модуль будь-якого числа невід'ємний;

4) $m^2\geq 0; |m|\geq 0$;

6) $2(3m-1)-(-8-(3-6m))=6m-2+8+3-6m=9>0$.

ЗАДАЧА 7. Обчислити:

1) $3mn(2m+n)$, при $m=\frac{1}{2}$; $n=-1$;

2) $\frac{8ab(a+1)}{a^2-b^2}$ при $a=-2$; $b=-3$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 0; 2) $9\frac{3}{5}$.

ЗАДАЧА 8. Якщо сума трьох послідовних цілих чисел є число непарне, то їхній добуток ділиться на 24. Довести.

ДОВЕДЕННЯ

Оскільки сума даних чисел — число непарне, то два з них (менше і більше) — парні, а середнє — непарне. Одне з двох послідовних парних чисел кратне 4 і, отже, добуток цих чисел кратний 8. Але з трьох послідовних чисел одне завжди ділиться на 3, а отже, добуток трьох таких чисел ділиться на 24, що і треба було довести.

ЗАДАЧА 9. Розкласти на множники:

1) a^4-b^4; 2) $8a^3-1$;

3) $(a+b)^3+(a-b)^3$;

4) $a^2+2ab+b^2-9$;

5) $1-x^2-2xy-y^2$;

6) $ab+ac+b^2+2bc+c^2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$;

2) $8a^3-1=(2a-1)(4a^2+2a+1)$;

3) $(a+b)^3+(a-b)^3=$

$=(a+b+a-b)\left((a+b)^2-2(a+b)(a-b)+(a-b)^2\right)=$

$=2a\left(a^2+2ab+b^2-2a^2+2b^2+a^2-2ab+b^2\right)=8ab^2$;

4) $a^2+2ab+b^2-9=(a+b)^2-3^2=(a+b+3)(a+b-3)$;

5) $1-x^2-2xy-y^2=1-(x+y)^2=(1+x+y)(1-x-y)$;

6) $ab+ac+b^2+2bc+c^2=a(b+c)+(b+c)^2=(b+c)(a+b+c)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$; 2) $(2a-1)(4a^2+2a+1)$;
3) $8ab^2$; 4) $(a+b+3)(a+b-3)$;
5) $(1+x+y)(1-x-y)$; 6) $(b+c)(a+b+c)$.

ЗАДАЧА 10. Розкласти на множники:

1) $(x+y)^4-(x-y)^4$; 2) a^2-a-12;

3) $x^2-8x+15$; 4) $m^2+3m-10$;

5) $2x^2+10x+12$; 6) a^3+a^2-2;

7) x^2-3x+2; 8) $m^4+m^2n^2+n^4$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $(x+y)^4-(x-y)^4=$

$=\left((x+y)^2+(x-y)^2\right)\left((x+y)^2-(x-y)^2\right)=$

$=\left(x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2\right)\times$

$\times\left(x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2\right)=$

$=\left(2x^2+2y^2\right)4xy=8xy\left(x^2+y^2\right)$;

2) $a^2-a-12=a^2+3a-4a-12=a(a+3)-4(a+3)=$

$=(a+3)(a-4)$;

3) $x^2-8x+15=x^2-3x-5x+15=(x-5)(x-3)$;

4) $m^2+3m-10=m^2+5m-2m-10=m(m+5)-2(m+5)=$

$=(m+5)(m-2)$.

5) $2x^2+10x+12=2\left(x^2+5x+6\right)=2(x+3)(x+2)$;

6) $a^3+a^2-2=\left(a^3-1\right)+\left(a^2-1\right)=(a-1)\left(a^2+a+1\right)+$
$+(a-1)(a+1)=(a-1)\left(a^2+2a+2\right)$;

7) $x^2-3x+2=x^2-x-2x+2=x(x-1)-2(x-1)=$
$=(x-1)(x-2)$;

8) $m^4+m^2n^2+n^4=m^4+n^4+m^2n^2=$
$=\left(m^2+n^2\right)^2-2m^2n^2+m^2n^2=\left(m^2+n^2\right)^2-m^2n^2=$
$=\left(m^2+n^2+mn\right)\left(m^2+n^2-mn\right)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $8xy\left(x^2+y^2\right)$; 2) $(a+3)(a-4)$;
3) $(x-5)(x-3)$; 4) $(m+5)(m-2)$;
5) $2(x+3)(x+2)$; 6) $(a-1)\left(a^2+2a+2\right)$;
7) $(x-1)(x-2)$; 8) $\left(m^2+n^2+mn\right)\left(m^2+n^2-mn\right)$.

Отже, повторили, розім'ялися і...

УПЕРЕД!!!

ГЛАВА 2. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. ВЛАСТИВОСТІ

§ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Ми продовжуємо вивчення алгебричних дробів. В цьому параграфі ми введемо новий термін: *«раціональні вирази»*. Для цього у вигляді короткого конспекту повторимо основну термінологію, необхідну для введення нового терміна.

Короткий конспект

➢ **Математичний вираз** складається з допомогою чисел, букв та математичних знаків.

Наприклад, $\dfrac{\left(3a^2-4\right)^2}{7}-2a$.

➢ Математичний вираз, що складається тільки з чисел, називається **числовим виразом**.

Наприклад, $\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{4}{7}\right)^4:3;\ \ 2^2$.

➢ Якщо у математичному виразі нема ділення на букву (змінну), то він називається **цілим виразом**.

Наприклад, $7a^2-4a-1;\ \ \dfrac{3a^3-4}{8}$.

➢ Якщо вираз містить дії ділення на інший вираз з буквою (змінною), то він називається **дробовим**.

Наприклад, $\frac{3}{2a+1}$; $\frac{x}{4}-\frac{7}{(x+1)^2}$.

➢ Цілі та дробові вирази називаються **раціональними виразами**. Або, іншими словами, вирази, в яких використовуються операції додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня (з цілим показником) називаються **раціональними виразами**.

➢ Значення змінних, при яких виконуються всі математичні операції, що є у виразі, називаються **допустимими значеннями змінних**.

➢ Множина допустимих значень змінних називається ще **областю допустимих значень змінних** (скорочено **ОДЗ**).

ЗАДАЧА 1. Які з записаних виразів є цілими, а які дробовими:

1) $7x^4y^4$; 2) $\frac{2}{a}$; 3) $\frac{3-a}{2a}+9$;

4) $\frac{2}{a^2-b}\cdot(2+m)$; 5) $\frac{2}{3}a-4b$; 6) $9x-\frac{1}{3}$?

ВІДПОВІДЬ. 1), 5), 6) — цілі; 2), 3), 4) — дробові.

ЗАДАЧА 2. З раціональних виразів

$$8x^2-3xy;\ \frac{a}{8};\ \frac{13}{m};\ a(2a-b)-\frac{b}{5a};\ \frac{1}{4}p^2-\frac{1}{3}a^2;\ \frac{p}{p+2}-8$$

виписати ті, які є цілими виразами; дробовими виразами.

ВІДПОВІДЬ. Цілі вирази: $8x^2-3xy$; $\frac{a}{8}$; $\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{3}a^2$;

інші — дробові вирази.

ЗАДАЧА 3. Знайти значення дробу:

$\frac{2x-1}{x-3}$ при 1) $x=0$; 2) $x=-1$; 3) $x=\frac{1}{2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) 0.

ЗАДАЧА 4. Скласти дріб, чисельник якого — квадрат суми двох чисел, а знаменник — сума квадратів цих чисел.

ВІДПОВІДЬ. $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$.

ЗАДАЧА 5. Знайти ОДЗ виразів:

$$1)\ \frac{x}{x-3};\quad 2)\ \frac{m+8}{m^2+10};\quad 3)\ \frac{p^2-1}{p}+\frac{3}{p-1};$$

$$4)\ \frac{x-3}{x-7}:(x-2);\quad 5)\ \frac{x-8}{x-9}:|x|;$$

$$6)\ \frac{|x|(x-1)}{|x-1|};\quad 7)\ \frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{x}$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\neq 3$; 2) будь-яке дійсне число;
3) $p\neq 0$ та $p\neq 1$; 4) $x\neq 7$ та $x\neq 2$;
5) $x\neq 9$ та $x\neq 0$; 6) $x\neq 1$; 7) $x\neq -1$ та $x\neq 0$.

ЗАДАЧА 6. Розв'язати рівняння:

$$1)\ \frac{x}{x}=1;\quad 2)\ \frac{x-1}{x-1}=1;\quad 3)\ \frac{3x-6}{3x-6}=1;$$

$$4)\ \frac{x-a}{x-a}=1;\quad 5)\ \frac{|x|-2}{|x|-2}=1;\quad 6)\ \frac{x^2-1}{x^2-1}=1.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) Усі дійсні числа, крім 0 ($x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$);
2) $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$; 3) $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 2$;
4) $x\in\mathbb{R}$, $x\neq a$; 5) $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\pm 2$;
6) $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\pm 1$.

ЗАДАЧА 7. Знайти область визначення функції:

$$1)\ y=\frac{a}{x-3};\quad 2)\ y=\frac{2}{x(x-2)};\quad 3)\ y=x+\frac{1}{x+8}.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\neq 3$; 2) $x\neq 0$; $x\neq 2$; 3) $x\neq -8$.

ПИТАННЯ. Що спільного у термінах

1) «ОДЗ»;
2) «множина допустимих значень»;
3) «область визначення»?

ВІДПОВІДЬ. Вони ідентичні!!!

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 15 до 30 хвилин)

I. Розкласти на множники:

1) $144a^2 - 1$; 2) $27x^3 - 125$;

3) $x^2 - 4x + 3$; 4*) $x^4 + 4$.

II. Знайти значення виразу:

$3x + \frac{7}{x-1}$ при $x = \frac{1}{2}$.

III. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{x(x-3)}{5} = 0$; 2) $\frac{|x-1|}{4} = 0$; 3) $\frac{x^2-9}{7} = 0$;

4) $\frac{x-2}{x-2} = 0$; 5) $\frac{1}{|x|} = 0$; 6) $\frac{|x-1|-1}{2} = 0$.

IV. Знайти область визначення функції:

1) $y = \frac{x-1}{x+3}$; 2) $y = \frac{1}{x^2-1}$;

3) $y = \frac{1}{2|x|}$; 4) $y = x + \frac{1}{|x|-2}$.

V*. Розв'язати рівняння:

$|x-2| = x - 2$.

ВІДПОВІДЬ. I. 1) $(12a-1)(12a+1)$;

2) $(3x-5)(9x^2+15x+25)$;

3) $(x-3)(x-1)$;

4) $(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)$.

II. $-12\frac{1}{2}$.

III. 1) $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; 2) $x = 1$; 3) $x = \pm 3$;

4) $x \in \varnothing$; 5) $x \in \varnothing$; 6) $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

IV. 1) $x \neq -3$; 2) $x \neq \pm 1$; 3) $x \neq 0$; 4) $x \neq \pm 2$.

V. $x \geq 2$.

§ 2. ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ ДРОБУ

(Майже повторення 7 класу)

Згадайте!

У алгебрі основна властивість дробу аналогічна властивості дробу у арифметиці: для довільних a, b та c, де $b \neq 0$ та $c \neq 0$ виконується рівність

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc},$$

і отже, дріб $\frac{ac}{bc}$ можна замінити тотожно рівним йому дробом $\frac{a}{b}$.

ПИТАННЯ. Що таке **спільний множник** чисельника та знаменника?

ВІДПОВІДЬ. Ось він: $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ — те, на що можна спростити чисельник і знаменник дробу; це може бути число, буква, одночлен і навіть багаточлен — **побачите, розв'язуючи задачі...**

ЗАДАЧА 1. Не змінюючи величини дробу, перетворити його так, щоб чисельник і знаменник дробу не містили знака мінус:

$$1)\ \frac{-3a}{-4b};\quad 2)\ \frac{8c^2}{-15x};\quad 3)\ -\frac{-2p}{4n};\quad 4)\ -\frac{-a}{-b};\quad 5)\ -\frac{7x^2}{-10a}.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ \frac{3a}{4b};\quad 2)\ -\frac{8c^2}{15x};\quad 3)\ \frac{2p}{4n};\quad 4)\ -\frac{a}{b};\quad 5)\ \frac{7x^2}{10a}.$

ЗАДАЧА 2. Не змінюючи величини дробу, перетворити його так, щоб перед дробом стояв знак мінус:

$$1)\ \frac{4-b}{c};\quad 2)\ \frac{p}{2-q};\quad 3)\ \frac{x-y}{x+y};\quad 4)\ \frac{a-2}{a-3};\quad 5)\ \frac{a-x}{q-2}.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ -\frac{b-4}{c};\quad 2)\ -\frac{p}{q-2};\quad 3)\ -\frac{y-x}{x+y};$

$4)\ -\frac{a-2}{3-a};\quad 5)\ -\frac{a-x}{2-q}.$

ЗАДАЧА 3. Спростити дроби:

$$1)\ \frac{2a}{3a};\quad 2)\ \frac{7p}{21p};\quad 3)\ \frac{-3ab}{4a^2b};\quad 4)\ \frac{8a^2b}{24ab^2};$$

$$5)\ \frac{8ab}{20pb};\quad 6)\ \frac{3ax^3}{9ay};\quad 7)\ \frac{24m^2n^4}{18mn};\quad 8)\ \frac{-3p^2q}{6p^4a}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ \frac{2a}{3a}=\frac{2}{3};\quad 2)\ \frac{7p}{21p}=\frac{1}{3};\quad 3)\ \frac{-3ab}{4a^2b}=\frac{-3}{4a};$$

$$4)\ \frac{8a^2b}{24ab^2}=\frac{a}{3b};\quad 5)\ \frac{8ab}{20pb}=\frac{2a}{5p};\quad 6)\ \frac{3ax^3}{9ay}=\frac{x^3}{3y};$$

$$7)\ \frac{24m^2n^4}{18mn}=\frac{4mn^3}{3};\quad 8)\ \frac{-3p^2q}{6p^4a}=\frac{-q}{2p^2a}.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ \frac{2}{3};\ 2)\ \frac{1}{3};\ 3)\ \frac{-3}{4a};\ 4)\ \frac{a}{3b};\ 5)\ \frac{2a}{5p};$

$6)\ \frac{x^3}{3y};\ 7)\ \frac{4mn^3}{3};\ 8)\ \frac{-q}{2p^2a}.$

ЗАДАЧА 4. Зобразити частку у вигляді дробу та спростити цей дріб:

$$1)\ 5m^3n^2:\left(15m^8n^4\right);\qquad 2)\ 36a^4b^{10}:\left(48a^4b^2\right);$$

$$3)\ -21p^5q^4:\left(-2p^3q^2\right);\ 4)\ -10a^2b:\left(-2ab\right).$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ 5m^3n^2:\left(15m^8n^4\right)=\frac{5m^3n^2}{15m^8n^4}=\frac{1}{3m^5n^2};$$

$$2)\ 36a^4b^{10}:\left(48a^4b^2\right)=\frac{36a^4b^{10}}{48a^4b^2}=\frac{3b^8}{4};$$

$$3)\ -21p^5q^4:\left(-2p^3q^2\right)=\frac{-21p^5q^4}{-2p^3q^2}=\frac{21p^2q^2}{2};$$

$$4)\ -10a^2b:\left(-2ab\right)=\frac{-10a^2b}{-2ab}=5a.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ \frac{1}{3m^5n^2};\ 2)\ \frac{3b^8}{4};\ 3)\ \frac{21p^2q^2}{2};\ 4)\ 5a.$

ЗАДАЧА 5. Спростити дроби:

$$1)\ \frac{4^{15}}{20^{20}};\quad 2)\ \frac{35^{30}}{14^{12}}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Маємо:

$$\frac{4^{15}}{20^{20}}=\frac{2^{30}}{(2\cdot 10)^{20}}=\frac{2^{30}}{2^{20}\cdot 10^{20}}=\frac{2^{10}}{10^{20}}=\frac{1}{2^{10}\cdot 5^{20}};$$

2) Маємо:

$$\frac{35^{30}}{14^{12}}=\frac{(7\cdot 5)^{30}}{(7\cdot 2)^{12}}=\frac{7^{30}\cdot 5^{30}}{7^{12}\cdot 2^{12}}=\frac{7^{18}\cdot 5^{30}}{2^{12}}.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ \dfrac{1}{2^{10}\cdot 5^{20}};\quad 2)\ \dfrac{7^{18}\cdot 5^{30}}{2^{12}}.$

ЗАДАЧА 6. Спростити дроби:

$$1)\ \frac{m(x-3)}{n(x-3)};\quad 2)\ \frac{2(a+1)}{c(a+1)};\quad 3)\ \frac{ab(y+2)}{q(y+2)};$$

$$4)\ \frac{18a(m-n)}{16ab(m-n)};\quad 5)\ \frac{25x(p^2-1)}{-5x^2(p^2-1)};\quad 6)\ \frac{4a+16b}{8};$$

$$7)\ \frac{2x-4}{x-2};\quad 8)\ \frac{15x-15y}{3x-3y};\quad 9)\ \frac{7a(a+2)}{2a+4};$$

$$10)\ \frac{a^2-25}{2a-10};\quad 11)\ \frac{4x-8}{x^2-4};\quad 12)\ \frac{(x+3)^2}{2x+6};$$

$$13)\ \frac{x^2-2x+1}{x^2-1};\quad 14)\ \frac{y^2-9}{y^2-6y+9};\quad 15)\ \frac{6mn-18n}{(m-3)^2};$$

$$16)\ \frac{a^2-100}{2a+20};\quad 17)\ \frac{(m+3)^2}{3m^2+9m};\quad 18)\ \frac{x^2+8x+16}{x^2-16};$$

$$19)\ \frac{px-qx}{p^2-q^2};\quad 20)\ \frac{ab-2b^2}{(a-2b)^2};\quad 21)\ \frac{y^2-4}{y^2-4y+4};$$

$$22)\ \frac{p^3-1}{p^2+p+1};\quad 23)\ \frac{m^3n^3+n^3}{m^2-m+1};\quad 24)\ \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2};$$

$$25)\ \frac{p(a-1)}{p^2(a^2-1)};\quad 26)\ \frac{q^2-qm}{(q-m)^2};\quad 27)\ \frac{p^2-25q^2}{2p-10q}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

6) $\dfrac{4a+16b}{8}=\dfrac{4(a+4b)}{8}=\dfrac{a+4b}{2}$;

8) $\dfrac{15x-15y}{3x-3y}=\dfrac{15(x-y)}{3(x-y)}=5$;

9) $\dfrac{7a(a+2)}{2a+4}=\dfrac{7a(a+2)}{2(a+2)}=\dfrac{7a}{2}$;

10) $\dfrac{a^2-25}{2a-10}=\dfrac{(a-5)(a+5)}{2(a-5)}=\dfrac{a+5}{2}$;

12) $\dfrac{(x+3)^2}{2x+6}=\dfrac{(x+3)^2}{2(x+3)}=\dfrac{x+3}{2}$;

13) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x-1}{x+1}$;

23) $\dfrac{m^3n^3+n^3}{m^2-m+1}=\dfrac{n^3(m^3+1)}{m^2-m+1}=\dfrac{n^3(m+1)(m^2-m+1)}{m^2-m+1}=n^3(m+1)$;

25) $\dfrac{p(a-1)}{p^2(a^2-1)}=\dfrac{p(a-1)}{p^2(a-1)(a+1)}=\dfrac{1}{p(a+1)}$;

26) $\dfrac{q^2-qm}{(q-m)^2}=\dfrac{q(q-m)}{(q-m)^2}=\dfrac{q}{q-m}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{m}{n}$; 2) $\dfrac{2}{c}$; 3) $\dfrac{ab}{q}$; 4) $\dfrac{9}{8b}$; 5) $\dfrac{5}{-x}$;

6) $\dfrac{a+4b}{2}$; 7) 2; 8) 5; 9) $\dfrac{7a}{2}$; 10) $\dfrac{a+5}{2}$;

11) $\dfrac{4}{x+2}$; 12) $\dfrac{x+3}{2}$; 13) $\dfrac{x-1}{x+1}$; 14) $\dfrac{y+3}{y-3}$;

15) $\dfrac{6n}{m-3}$; 16) $\dfrac{a-10}{2}$; 17) $\dfrac{m+3}{3m}$; 18) $\dfrac{x+4}{x-4}$;

19) $\dfrac{x}{p+q}$; 20) $\dfrac{b}{a-2b}$; 21) $\dfrac{y+2}{y-2}$; 22) $p-1$;

23) $n^3(m+1)$; 24) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$; 25) $\dfrac{1}{p(a+1)}$;

26) $\dfrac{q}{q-m}$. 27) $\dfrac{p+5q}{2}$.

ЗАДАЧА 7. Знайти значення дробів:

1) $\frac{9a^2-81}{a+3}$ при $a=-2$;

2) $\frac{6n^2+12mn}{5mn+10m^2}$ при $m=\frac{1}{3}$, $n=-0{,}1$;

3) $\frac{a^2+10a+25}{a+5}$ при $a=-0{,}8$;

4) $\frac{a^2+2ac+c^2}{a^2+ac-ab-cb}$ при $a=-1$; $b=-0{,}5$; $c=-0{,}5$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

4) $\frac{a^2+2ac+c^2}{a^2+ac-ab-cb}=\frac{(a+c)^2}{a(a+c)-b(a+c)}=\frac{(a+c)^2}{(a+c)(a-b)}=\frac{a+c}{a-b}$;

при $a=-1$; $b=-0{,}5$; $c=-0{,}5$ $\frac{a+c}{a-b}=\frac{-1-0{,}5}{-1+0{,}5}=\frac{-1{,}5}{-0{,}5}=3$.

ВІДПОВІДЬ. 1) -45; 2) $-\frac{9}{25}$; 3) 4,2; 4) 3.

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 10 до 15 хвилин)

Спростити дроби:

1) $\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}$; 2) $\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$;

3) $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}$; 4) $\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$;

5) $\frac{16-8a+a^2}{ab-4b}$; 6) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$; 7) $\frac{a^3+1}{6a^2+12a+6}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\frac{a}{a+b}$; 2) x^2-y^2; 3) $\frac{x+y}{x-y}$;

4) $\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}$; 5) $\frac{a-4}{b}$;

6) $\frac{x+3}{x+2}$; 7) $\frac{a^2-a+1}{6(a+1)}$.

§ 3. СУМА І РІЗНИЦЯ ДРОБІВ

Розглянемо дії з алгебричними дробами. Почнемо з дій додавання та віднімання.

ПИТАННЯ. Чи є аналогія з числовими дробами?

ВІДПОВІДЬ. Дії додавання та віднімання алгебричних дробів аналогічні відповідним діям з числовими дробами.

Додавання та віднімання дробів з однаковими знаменниками

Щоб скласти (відняти) два дроби з однаковим знаменником, слід скласти (відняти) їхні чисельники, а знаменник залишити незмінним:

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{p}=\frac{a+b}{p}.$$

Доведемо цю рівність. Звертаємо увагу читача, що для доведення, на перший погляд, очевидного факту, слід застосувати нестандартний прийом.

Отже, нехай $\frac{a}{p}=x$; $\frac{b}{p}=y$. Тоді, за означенням частки, $a=px$, $b=py$. Звідси $a+b=px+py=p(x+y)$. Оскільки $p\neq 0$, то

$$x+y=\frac{a+b}{p};\ \text{або}\ \frac{a}{p}+\frac{b}{p}=\frac{a+b}{p}.$$

ПРИКЛАД. Додайте дроби:

$$1)\ \frac{2ab}{m-n}+\frac{5+ab}{m-n};\quad 2)\ \frac{a-b}{a+b}-\frac{3b-1}{a+b}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ \frac{2ab}{m-n}+\frac{5+ab}{m-n}=\frac{2ab+5+ab}{m-n}=\frac{3ab+5}{m-n};$$

$$2)\ \frac{a-b}{a+b}-\frac{3b-1}{a+b}=\frac{a-b-(3b-1)}{a+b}=\frac{a-b-3b+1}{a+b}=\frac{a-4b+1}{a+b}.$$

ЗАДАЧА 1. Виконати дії:

$$1)\ \frac{a}{b}-\frac{c-a}{b};\quad 2)\ \frac{2a+3b}{p}-\frac{3b-2a}{p};$$

$$3)\ \frac{2b-1}{m}-\frac{3b-4}{m}+\frac{1}{m};\quad 4)\ \frac{p}{6b}-\frac{2p}{6b}+\frac{3p-2}{6b};$$

$$5)\ \frac{2a+5}{(m-n)^2}+\frac{a}{(m-n)^2}-\frac{4}{(m-n)^2}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ \frac{a}{b}-\frac{c-a}{b}=\frac{a-(c-a)}{b}=\frac{a-c+a}{b}=\frac{2a-c}{b};$$

$$3)\ \frac{2b-1}{m}-\frac{3b-4}{m}+\frac{1}{m}=\frac{2b-1-3b+4+1}{m}=\frac{4-b}{m};$$

$$5)\ \frac{2a+5}{(m-n)^2}+\frac{a}{(m-n)^2}-\frac{4}{(m-n)^2}=\frac{2a+5+a-4}{(m-n)^2}=\frac{3a+1}{(m-n)^2}.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ \frac{2a-c}{b};\ 2)\ \frac{4a}{p};\ 3)\ \frac{4-b}{m};\ 4)\ \frac{p-1}{3b};\ 5)\ \frac{3a+1}{(m-n)^2}.$

ЗАДАЧА 2. Спростити вирази:

$$1)\ \frac{a}{b-1}+\frac{q}{1-b};\quad 2)\ \frac{x}{a^2-1}-\frac{y}{1-a^2};\quad 3)\ \frac{a^2}{a-1}+\frac{2a-1}{1-a};$$

$$4)\ \frac{a^3}{3-a}+\frac{27}{a-3};\quad 5)\ \frac{7m-1}{m-1}-\frac{2}{1-m}+\frac{m}{m-1}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ \frac{a}{b-1}+\frac{q}{1-b}=\frac{a}{b-1}-\frac{q}{b-1}=\frac{a-q}{b-1};$$

$$5)\ \frac{7m-1}{m-1}-\frac{2}{1-m}+\frac{m}{m-1}=\frac{7m-1}{m-1}+\frac{2}{m-1}+\frac{m}{m-1}=$$

$$=\frac{7m-1+2+m}{m-1}=\frac{8m+1}{m-1}.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ \frac{a-q}{b-1};\ 2)\ \frac{x+y}{a^2-1};\ 3)\ a-1;$

$4)\ -(a^2+3a+9);\ 5)\ \frac{8m+1}{m-1}.$

ЗАДАЧА 3. Розв'язати рівняння:

1) $\dfrac{x-3}{1-x}-\dfrac{2x-8}{1-x}=0;$ 2) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{3}{x-3}=0;$

3) $\dfrac{x-8}{x-1}-\dfrac{x}{x-1}=0;$ 4) $\dfrac{ax}{a-b}-\dfrac{3}{a-b}=0.$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $\dfrac{x-3-2x+8}{1-x}=0;$ $\dfrac{-x+5}{1-x}=0;$ $-x+5=0;$ $x=5.$

2) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{3}{x-3}=0;$ $\dfrac{x-3}{x-3}=0$ — рівняння не має розв'язків.

4) $\dfrac{ax}{a-b}-\dfrac{3}{a-b}=0$ $(a\neq b)$. Отже, $\dfrac{ax-3}{a-b}=0;$ звідси $ax-3=0.$

Рівняння має розв'язок при $a\neq 0$ — тоді $x=\dfrac{3}{a}.$

ВІДПОВІДЬ. 1) $x=5;$ 2) $x\in\varnothing;$ 3) $x\in\varnothing;$

4) при $a\neq 0, a\neq b$ $x=\dfrac{3}{a};$ при $a=0$ або при $a=b$ $x\in\varnothing.$

Додавання та віднімання дробів з різними знаменниками

Нехай потрібно додати два дроби: $\dfrac{a}{b}$ та $\dfrac{c}{d}$. Використаємо основну властивість дробів і зведемо їх до спільного знаменника: $\dfrac{ad}{bd}$ та $\dfrac{cb}{db}$. Отже,

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=\frac{ad+bc}{bd}}.$$

Віднімання дробів виконується аналогічним чином.

Наприклад, 1) $\dfrac{a}{2a^2b}+\dfrac{b}{ab}=\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{2b}{2ab}=\dfrac{1+2b}{2ab};$

2) $\dfrac{a}{3b}-\dfrac{b}{4p}=\dfrac{a\cdot 4p}{12bp}-\dfrac{b\cdot 3b}{12bp}=\dfrac{4ap-3b^2}{12bp}.$

ЗАДАЧА 1. Виконати дії:

$$1)\ \frac{a}{3}+\frac{3a}{2b};\quad 2)\ \frac{1}{3b}-5;\quad 3)\ \frac{x-y}{3a}-\frac{y}{a};\quad 4)\ \frac{17y}{24c}-\frac{25y}{36c}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ \frac{a}{3}+\frac{3a}{2b}=\frac{2ab+9a}{6b}=\frac{a(2b+9)}{6b};$$

$$3)\ \frac{x-y}{3a}-\frac{y}{a}=\frac{x-y-3y}{3a}=\frac{x-4y}{3a};$$

$$4)\ \frac{17y}{24c}-\frac{25y}{36c}=\frac{51y}{72c}-\frac{50y}{72c}=\frac{y}{72c}.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ \frac{a(2b+9)}{6b};\quad 2)\ \frac{1-15b}{3b};\quad 3)\ \frac{x-4y}{3a};\quad 4)\ \frac{y}{72c}.$

ЗАДАЧА 2. Виконати додавання або віднімання:

$$1)\ 2-\frac{3x-y}{5}+\frac{2x-y}{3};\quad 2)\ \frac{4}{a}-3-\frac{7}{a};\quad 3)\ \frac{7}{x-1}-\frac{4}{x}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ 2-\frac{3x-y}{5}+\frac{2x-y}{3}=\frac{30-9x+3y+10x-5y}{15}=\frac{30+x-2y}{15};$$

$$2)\ \frac{4}{a}-3-\frac{7}{a}=\frac{4-3a-7}{a}=\frac{-3-3a}{a};$$

$$3)\ \frac{7}{x-1}-\frac{4}{x}=\frac{7x-4x+4}{x(x-1)}=\frac{3x+4}{x(x-1)}.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ \frac{30+x-2y}{15};\quad 2)\ \frac{-3-3a}{a};\quad 3)\ \frac{3x+4}{x(x-1)}.$

ЗАДАЧА 3. Спростити вирази:

$$1)\ \frac{3x-4y}{2x^2y}+\frac{7x-y}{5xy^2};\qquad 2)\ \frac{2x}{7(x+y)}-\frac{3y}{2(x+y)};$$

$$3)\ \frac{a^2}{4(a-b)}-\frac{b^2}{2(a-b)};\qquad 4)\ \frac{13c}{bm-bn}-\frac{12b}{cn-cm}.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ \frac{13xy-20y^2+14x^2}{10x^2y^2};\quad 2)\ \frac{4x-21y}{14(x+y)};$

$3)\ \frac{a^2-2b^2}{4(a-b)};\quad 4)\ \frac{13c^2+12b^2}{bc(m-n)}.$

ЗАДАЧА 4. Виконати дії:

1) $\dfrac{5}{2x-2}+\dfrac{3}{4x-4}$;

2) $\dfrac{7}{5a+5}-\dfrac{3}{10a+10}$;

3) $\dfrac{a}{3a+3b}-\dfrac{2a}{6a+6b}$;

4) $\dfrac{3x}{4x+4y}-\dfrac{x}{8x+8y}$;

5) $\dfrac{2m}{5m+5n}+\dfrac{3n}{5m-5n}$;

6) $\dfrac{7x}{3x+3y}-\dfrac{2x}{3x-3y}$;

7) $\dfrac{5b}{ax+ay}-\dfrac{2a}{5x+5y}$;

8) $\dfrac{3m}{an+am}+\dfrac{2n}{bn+bm}$;

9) $\dfrac{7a}{x^2-9}+\dfrac{5a}{x-3}+\dfrac{a}{x+3}$;

10) $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{x+2}{x^2-4}$;

11) $\dfrac{m}{1-a}+\dfrac{m}{1+a}+\dfrac{m}{1-a^2}$;

12) $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{a-2}-\dfrac{4}{a^2-4}$;

13) $\dfrac{m-n}{2m-2n}+\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;

14) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x+y}{2x-2y}$;

15) $\dfrac{7a-1}{2a^2+6a}+\dfrac{5-3a}{a^2-9}$;

16) $\dfrac{a-b}{5a+5b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$;

17) $\dfrac{x+1}{x^2-x}-\dfrac{x+2}{2x^2-2}$;

18) $\dfrac{a+b}{a}-\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b^2}{a^2-ab}$;

19) $\dfrac{7}{2x-4}-\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{12}{x^2-4}$;

20) $\dfrac{5}{2x^2+6x}-\dfrac{4-3x^2}{x^2-9}-3$;

21) $\dfrac{7}{8a^2-18b^2}+\dfrac{1}{2a^2+3ab}-\dfrac{1}{4ab-6b^2}$;

22) $\dfrac{2}{n+2}+\dfrac{n+3}{n^2-4}-\dfrac{3n+1}{n^2-4n+4}$;

23) $\dfrac{3}{a+2}+\dfrac{a+1}{a^2-9}-\dfrac{a-1}{(a+3)(a+2)}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $\frac{5}{2x-2}+\frac{3}{4x-4}=\frac{5^{(2}}{2(x-1)}+\frac{3}{4(x-1)}=\frac{10+3}{4(x-1)}=\frac{13}{4(x-1)}$;

2) $\frac{7}{5a+5}-\frac{3}{10a+10}=\frac{7^{(2}}{5(a+1)}-\frac{3}{10(a+1)}=\frac{14-3}{10(a+1)}=\frac{11}{10(a+1)}$;

3) $\frac{a}{3a+3b}-\frac{2a}{6a+6b}=\frac{a^{(2}}{3(a+b)}-\frac{2a}{6(a+b)}=\frac{2a-2a}{6(a+b)}=0$;

4) $\frac{3x}{4x+4y}-\frac{x}{8x+8y}=\frac{6x-x}{8(x+y)}=\frac{5x}{8(x+y)}$;

5) $\frac{2m}{5m+5n}+\frac{3n}{5m-5n}=\frac{2m}{5(m+n)}+\frac{3n}{5(m-n)}=$

$=\frac{2m(m-n)+3n(m+n)}{5(m+n)(m-n)}=\frac{2m^2+3n^2+mn}{5(m^2-n^2)}$;

6) $\frac{7x}{3x+3y}-\frac{2x}{3x-3y}=\frac{7x}{3(x+y)}-\frac{2x}{3(x-y)}=$

$=\frac{x(7(x-y)-2(x+y))}{3(x+y)(x-y)}=\frac{x(5x-9y)}{3(x^2-y^2)}$;

7) $\frac{5b}{ax+ay}-\frac{2a}{5x+5y}=\frac{5b}{a(x+y)}-\frac{2a}{5(x+y)}=\frac{25b-2a^2}{5a(x+y)}$;

8) $\frac{3m}{an+am}+\frac{2n}{bn+bm}=\frac{3m^{(b}}{a(n+m)}+\frac{2n^{(a}}{b(n+m)}=\frac{3bm+2an}{ab(n+m)}$;

9) $\frac{7a}{x^2-9}+\frac{5a^{(x+3}}{x-3}+\frac{a^{(x-3}}{x+3}=\frac{a(7+5x+15+x-3)}{(x-3)(x+3)}=$

$=\frac{a(6x+19)}{(x-3)(x+3)}$;

10) $\frac{4}{x+2}+\frac{3}{x-2}-\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{4(x-2)+3(x+2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)}=$

$=\frac{4x-8+3x+6-x-2}{x^2-4}=\frac{6x-4}{x^2-4}$;

11) $\frac{m}{1-a}+\frac{m}{1+a}+\frac{m}{1-a^2}=\frac{m(1+a+1-a+1)}{1-a^2}=\frac{3m}{1-a^2}$;

12) $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}-\frac{4}{a^2-4}=\frac{a-2+a+2-4}{a^2-4}=$

$$=\frac{2a-4}{a^2-4}=\frac{2(a-2)}{(a-2)(a+2)}=\frac{2}{a+2};$$

13) $\frac{m-n}{2m-2n}+\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}=\frac{m-n}{2(m-n)}+\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}=\frac{1}{2}+\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}=$

$$=\frac{m^2-n^2+2m^2+2n^2}{2(m^2-n^2)}=\frac{3m^2+n^2}{2(m^2-n^2)};$$

14) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{2x-2y}=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{2(x-y)}=$

$$=\frac{2x^2+2y^2-(x+y)^2}{2(x^2-y^2)}=\frac{2x^2+2y^2-x^2-2xy-y^2}{2(x^2-y^2)}=$$

$$=\frac{x^2-2xy+y^2}{2(x-y)(x+y)}=\frac{(x-y)^2}{2(x-y)(x+y)}=\frac{x-y}{2(x+y)};$$

15) $\frac{7a-1}{2a^2+6a}+\frac{5-3a}{a^2-9}=$

$$=\frac{7a-1}{2a(a+3)}+\frac{5-3a}{(a-3)(a+3)}=\frac{(7a-1)(a-3)+(5-3a)\cdot 2a}{2a(a-3)(a+3)}=$$

$$=\frac{7a^2-21a-a+3-6a^2+10a}{2a(a^2-9)}=\frac{a^2-12a+3}{2a(a^2-9)};$$

16) $\frac{a-b}{5a+5b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{5(a+b)}-\frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}=$

$$=\frac{(a-b)^2-(a^2+b^2)\cdot 5}{5(a-b)(a+b)}=\frac{-2(2a^2+2b^2+ab)}{5(a^2-b^2)};$$

17) $\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x+2}{2x^2-2}=$

$$=\frac{x+1}{x(x-1)}-\frac{x+2}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)(x+1)-(x+2)x}{2x(x^2-1)}=$$

$$=\frac{2x^2+4x+2-x^2-2x}{2x(x^2-1)}=\frac{x^2+2x+2}{2x(x^2-1)};$$

18) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a^2-ab}=\frac{(a+b)(a-b)-a^2+b^2}{a(a-b)}=0;$

19) $\frac{7}{2x-4}-\frac{3}{x+2}-\frac{12}{x^2-4}=\frac{7(x+2)-6(x-2)-24}{2(x^2-4)}=$

$=\frac{7x+14-6x+12-24}{2(x^2-4)}=\frac{x+2}{2(x^2-4)}=\frac{1}{2(x-2)};$

20) $\frac{5}{2x^2+6x}-\frac{4-3x^2}{x^2-9}-3=\frac{5}{2x(x+3)}-\frac{4-3x^2}{(x-3)(x+3)}-3=$

$=\frac{5(x-3)-4\cdot 2x+2x\cdot 3x^2-3\cdot 2x(x^2-9)}{2x(x^2-9)}=$

$=\frac{5x-15-8x+6x^3-6x^3+54x}{2x(x^2-9)}=\frac{3(17x-5)}{2x(x^2-9)};$

21) $\frac{7}{8a^2-18b^2}+\frac{1}{2a^2+3ab}-\frac{1}{4ab-6b^2}=$

$=\frac{7}{2(4a^2-9b^2)}+\frac{1}{a(2a+3b)}-\frac{1}{2b(2a-3b)}=$

$=\frac{7ab+2b(2a-3b)-a(2a+3b)}{2ab(2a+3b)(2a-3b)}=-\frac{(a-b)(a-3b)}{ab(4a^2-9b^2)};$

22) $\frac{2}{n+2}+\frac{n+3}{n^2-4}-\frac{3n+1}{n^2-4n+4}=$

$=\frac{2}{n+2}+\frac{n+3}{(n-2)(n+2)}-\frac{3n+1}{(n-2)^2}=$

$=\frac{2n^2-8n+8+n^2+3n-2n-6-3n^2-6n-n-2}{(n-2)^2(n+2)}=$

$=\frac{-14n}{(n-2)^2(n+2)};$

23) $\frac{3}{a+2}+\frac{a+1}{a^2-9}-\frac{a-1}{(a+3)(a+2)}=$

$=\frac{3a^2-27+a^2+2a+a+2-a^2+3a+a-3}{(a+2)(a^2-9)}=$

$=\frac{3a^2+7a-28}{(a+2)(a^2-9)}.$

ЗАДАЧА 5. Спростити вирази:

1) $\frac{3}{2m+6}-\frac{m-2}{m^2-6m+9}$; 2) $\frac{5-a}{a^2-8a+16}+\frac{6}{5a-20}$;

3) $\frac{1}{2x+2}-\frac{x-1}{3x^2+6x+3}$; 4) $\frac{4}{3m-3n}+\frac{3m-n}{2m^2-4mn+2n^2}$;

5) $\frac{5}{2n-3}+\frac{2}{2n+3}-\frac{n-1}{9-4n^2}$; 6) $\frac{1}{3m-2}-\frac{4}{2+3m}-\frac{3m-5}{4-9m^2}$;

7) $\frac{1+a}{a-3}-\frac{1-2a}{3+a}-\frac{a(1-a)}{9-a^2}$; 8) $\frac{(x-1)\cdot x}{x^2-25}-\frac{x-3}{x+5}+\frac{x-2}{5-x}$;

9) $\frac{2}{a-1}+\frac{5}{a+1}-\frac{3a}{(a+1)^2}$; 10) $\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x-2}+\frac{2x}{x^2+4x+4}$;

11) $\frac{1}{p-3}-\frac{3}{2p+6}-\frac{p}{2p^2-12p+18}$;

12) $\frac{7}{m}-\frac{4}{m-2n}-\frac{m-n}{4n^2-m^2}$;

13) $\frac{4x-3}{3-2x}-\frac{4+5x}{3+2x}-\frac{3+x-10x^2}{4x^2-9}$;

14) $\frac{4a^2-3a+5}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}+\frac{6}{1-a}$;

15) $\frac{2a-1}{2a}-\frac{2a}{2a-1}-\frac{1}{2a-4a^2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\frac{m^2-20m+39}{2(m+3)(m-3)^2}$; 2) $\frac{a+1}{5(a-4)^2}$; 3) $\frac{x+5}{6(x+1)^2}$;

4) $\frac{17m-11n}{6(m-n)^2}$; 5) $\frac{15n+8}{4n^2-9}$; 6) $\frac{5-6m}{9m^2-4}$;

7) $\frac{2(a^2-a+3)}{a^2-9}$; 8) $\frac{-(x^2-4x+5)}{x^2-25}$;

9) $\frac{4a^2+7a-3}{(a+1)^2(a-1)}$; 10) $\frac{x^2-20x-28}{(x+2)^2(x-2)}$;

11) $-\frac{2p^2-15p+45}{2(p-3)^2(p+3)}$; 12) $\frac{4m^2-9mn-28n^2}{m(m^2-4n^2)}$;

13) -2; 14) $\frac{12a}{1-a^3}$; 15) $-\frac{1}{a}$.

ЗАДАЧА 6. Спростити вирази:

1) $\frac{1}{6x-4y}-\frac{1}{6x+4y}+\frac{3x}{4y^2-9x^2}$;

2) $\frac{3x+2}{x^2-2x+1}-\frac{6}{x^2-1}-\frac{3x-2}{x^2+2x+1}$;

3) $\frac{3}{a^2+2ab+b^2}-\frac{4}{a^2-2ab+b^2}+\frac{5}{a^2-b^2}$;

4) $\frac{1}{a-b}-\frac{3ab}{a^3-b^3}-\frac{b-a}{a^2+ab+b^2}$;

5) $\frac{1}{6a^2+12a+6}-\frac{1}{3a^2-3}+\frac{1}{6a^2-12a+6}$;

6) $\frac{1}{2+4m+2m^2}-\frac{1}{1-m^2}+\frac{1}{2-4m+2m^2}$;

7) $\frac{n}{m^2-mn}+\frac{m}{mn+n^2}-\frac{m^2+n^2}{m^3-mn^2}$;

8) $\frac{a}{a-b}+\frac{4a^2b-ab^2}{b^3-a^3}+\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}$;

9) $\frac{2}{3a+6}-\frac{a-2}{2a^2+4a}-\frac{2}{3a^2+12a+12}-\frac{4}{3a(a+2)^2}$;

10) $\frac{1}{(a-b)(b-c)}-\frac{1}{(b-c)(a-c)}-\frac{1}{(c-a)(b-a)}$;

11) $\frac{4}{(a-x)(c-x)}-\frac{3}{(a-x)(c-a)}+\frac{3}{(a-c)(x-c)}$;

12) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $-\frac{1}{3x+2y}$; 2) $\frac{10(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$; 3) $\frac{2(2a^2-7ab-3b^2)}{(a^2-b^2)^2}$;

4) $\frac{2(a-b)}{a^2+ab+b^2}$; 5) $\frac{2}{3(a^2-1)^2}$; 6) $\frac{2m^2}{(m^2-1)^2}$;

7) $\frac{m-n}{n(m+n)}$; 8) $\frac{(a-b)^2}{a^2+ab+b^2}$; 9) $\frac{1}{6a}$; 10) 0;

11) $\frac{1}{(a-x)(c-x)}$; 12) $\frac{1}{abc}$.

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 20 до 30 хвилин)

I. Виконати дії:

1) $\frac{a}{a-b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{a+b}$; 2) $\frac{a^3+a^2b+ab^2}{a^3-b^3}$; 3) $\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$.

II. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{x^2-49}{7+x}=8x$; 2) $\frac{x^2-12x+36}{6-x}=-5x$.

III*. Довести тотожності:

1) $\frac{3ac+3bc-3ab-3b^2}{6ac^2+6bc^2-6ab^2-6b^3}=\frac{1}{2(b+c)}$;

2) $\frac{2p^4+3p^3+2p+3}{(p^2-p+1)(2p+3)}=p+1$.

ВІДПОВІДЬ. I. 1) 1; 2) $\frac{a}{a-b}$; 3) $\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}$.

II. 1) $x=-1$; 2) $x=-1\frac{1}{2}$.

III. Маємо:

1) $\frac{3ac+3bc-3ab-3b^2}{6ac^2+6bc^2-6ab^2-6b^3}=$

$$=\frac{3c(a+b)-3b(a+b)}{6c^2(a+b)-6b^2(a+b)}=\frac{(a+b)(3c-3b)}{(a+b)(6c^2-6b^2)}=$$

$$=\frac{3(a+b)(c-b)}{6(a+b)(c-b)(c+b)}=\frac{1}{2(b+c)};$$

2) $\frac{2p^4+3p^3+2p+3}{(p^2-p+1)(2p+3)}=\frac{p^3(2p+3)+(2p+3)}{(p^2-p+1)(2p+3)}=$

$$=\frac{(2p+3)(p^3+1)}{(p^2-p+1)(2p+3)}=\frac{(p+1)(p^2-p+1)}{p^2-p+1}=p+1.$$

§ 4. МНОЖЕННЯ І ДІЛЕННЯ ДРОБІВ

Ми продовжуємо вивчення дій з алгебричними дробами. Розглянемо множення та ділення алгебричних дробів. Будьте уважними: поява в рівності букви часто потребує додаткового дослідження.

Множення дробів

Множення дробів в алгебрі аналогічне множенню дробів у арифметиці:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Доведемо, що ця рівність істинна при всіх допустимих значеннях букв (тобто при $b \neq 0$, $d \neq 0$). Нехай $\frac{a}{b}=x$, $\frac{c}{d}=y$. За означенням частки $a=bx$, $c=dy$. Звідси

$$ac=bx\cdot dy=bd\cdot xy.$$

Оскільки $bd \neq 0$, то з рівності $ac=bd\cdot xy$ за означенням ділення маємо $xy=\frac{ac}{bd}$. Отже, при $b\neq 0, d\neq 0$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Щоб помножити дріб на дріб, необхідно перемножити окремо їхні чисельники та окремо їхні знаменники, і перший добуток записати чисельником, а другий — знаменником.

Наприклад, $\frac{3p}{2q}\cdot\frac{a}{4d}=\frac{3pa}{8qd}$.

Дроби та цілі числа перемножуються за тим самим правилом (оскільки цілий вираз — це дріб зі знаменником 1).

Наприклад, $\frac{3a}{2b}\cdot 5=\frac{15a}{2b}$.

Піднесення дробу до степеня n тотожне множенню n однакових дробів:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Щоб піднести дріб до степеня, необхідно піднести до цього степеня чисельник і знаменник, і перший результат записати у чисельник дробу, а другий — у знаменник.

Наприклад, $\left(\frac{7a}{2b}\right)^2 = \frac{49a^2}{4b^2}$.

Ділення дробів

Нагадаємо, що розділити вираз M на вираз N означає знайти такий вираз Q, що $Q\cdot N = M$.

Дія ділення обернена до дії добутку:

$$\frac{2}{5}:\frac{7}{8} = \frac{2}{5}\cdot\frac{8}{7},$$

і взагалі

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Щоб розділити один дріб на інший треба перший дріб помножити на дріб, обернений до другого.

Наприклад, $\frac{x^3}{d}:\frac{y^2}{p} = \frac{x^3p}{dy^2}$.

ЗАДАЧА 1. Виконати множення:

1) $\frac{2a}{b}\cdot\frac{3c}{d}$; 2) $\frac{7x}{4y}\cdot\frac{5x}{4y^2}$; 3) $\frac{9x}{7y^2}\cdot 3$;

4) $\frac{14x^5}{2ab}\cdot\frac{3a^2}{7x^2}$; 5) $\frac{9a^2}{8b^4}\cdot\frac{6b^3}{18a^{10}}$; 6) $\frac{x^3}{7}\cdot\frac{21a^2}{5x^4}$;

7) $2\cdot\frac{a^3}{6}$; 8) $m\cdot\frac{2p^4}{3m^5}$; 9) $p^2\cdot\frac{3ab}{4p^7}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

4) $\dfrac{14x^5}{2ab}\cdot\dfrac{3a^2}{7x^2}=\dfrac{2x^3\cdot 3a}{2b}=\dfrac{3ax^3}{b}$; 8) $m\cdot\dfrac{2p^4}{3m^5}=\dfrac{2p^4}{3m^4}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{6ac}{bd}$; 2) $\dfrac{35x^2}{16y^3}$; 3) $\dfrac{27x}{7y^2}$; 4) $\dfrac{3ax^3}{b}$; 5) $\dfrac{3}{8a^8b}$;

6) $\dfrac{3a^2}{5x}$; 7) $\dfrac{a^3}{3}$; 8) $\dfrac{2p^4}{3m^4}$; 9) $\dfrac{3ab}{4p^5}$.

ЗАДАЧА 2. Виконати ділення:

1) $\dfrac{2a}{b}:\dfrac{3c}{d}$; 2) $\dfrac{7x}{4y}:\dfrac{5x}{4y^2}$; 3) $\dfrac{9x}{7y^2}:3$;

4) $\dfrac{14x^5}{2ab}:\dfrac{3a^2}{7x^2}$; 5) $\dfrac{9a^2}{8b^4}:\dfrac{6b^3}{18a^{10}}$; 6) $\dfrac{x^3}{7}:\dfrac{21a^2}{5x^4}$;

7) $2:\dfrac{a^3}{6}$; 8) $m:\dfrac{2p^4}{3m^5}$; 9) $p^2:\dfrac{3ab}{4p^7}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{2ad}{3bc}$; 2) $\dfrac{7y}{5}$; 3) $\dfrac{3x}{7y^2}$; 4) $\dfrac{49x^7}{3a^3b}$; 5) $\dfrac{27a^{12}}{8b^7}$;

6) $\dfrac{5x^7}{147a^2}$; 7) $\dfrac{12}{a^3}$; 8) $\dfrac{3m^6}{2p^4}$; 9) $\dfrac{4p^9}{3ab}$.

ЗАДАЧА 3. Спростити вираз:

1) $16x^2y^3:\dfrac{20x^5y^4}{3a^2b}$; 2) $-\dfrac{25x^4y^3}{14a^2}\cdot\left(-\dfrac{21ab}{10x^3y^2}\right)$;

3) $\dfrac{8b^2cd}{9a^5}:\dfrac{7cd}{12a^3}\cdot\dfrac{28a^4}{3b^2}$; 4) $\dfrac{3p^2mq}{2a^2b^2}\cdot\dfrac{3abc}{8x^2y^2}:\dfrac{9a^2b^2c^5}{28pxy}$;

5) $\dfrac{a^2-ab}{b^3}\cdot\dfrac{b^2}{a}$; 6) $\dfrac{x^2-y^2}{6x^2y^2}:\dfrac{x+y}{3xy}$; 7) $\dfrac{a^2b}{3ab^2}:\dfrac{a^2b}{a^2-2ab}$;

8) $\dfrac{x^2+xy}{x}:\dfrac{xy+y^2}{y}$; 9) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\dfrac{a^4}{(a+b)^2}$;

10) $\dfrac{a^2-25}{a^2-3a}:\dfrac{a^2+5a}{a^2-9}$; 11) $\dfrac{x^2-4y^2}{x^2-xy}\cdot\dfrac{x-y}{x^2+2xy}$;

12) $\dfrac{3m^2-3n^2}{m^2+mp}:\dfrac{6m-6n}{m+p}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $16x^2y^3 : \dfrac{20x^5y^4}{3a^2b} = \dfrac{16x^2y^3 \cdot 3a^2b}{20x^5y^4} = \dfrac{12a^2b}{5x^3y}$;

3) $\dfrac{8b^2cd}{9a^5} : \dfrac{7cd}{12a^3} \cdot \dfrac{28a^4}{3b^2} = \dfrac{8b^2cd \cdot 12a^3 \cdot 28a^4}{9a^5 \cdot 7cd \cdot 3b^2} = \dfrac{128a^2}{9}$;

10) $\dfrac{a^2-25}{a^2-3a} : \dfrac{a^2+5a}{a^2-9} = \dfrac{(a-5)(a+5)(a-3)(a+3)}{a(a-3)a(a+5)} = \dfrac{(a-5)(a+3)}{a^2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{12a^2b}{5x^3y}$; 2) $\dfrac{15bxy}{4a}$; 3) $\dfrac{128a^2}{9}$; 4) $\dfrac{7mp^3q}{4a^3b^3c^4xy}$;

5) $\dfrac{a-b}{b}$; 6) $\dfrac{x-y}{2xy}$; 7) $\dfrac{a-2b}{3b^2}$; 8) 1;

9) $\dfrac{a^2(a-b)}{a+b}$; 10) $\dfrac{(a-5)(a+3)}{a^2}$;

11) $\dfrac{x-2y}{x^2}$; 12) $\dfrac{m+n}{2m}$.

ЗАДАЧА 4. Виконати дії:

1) $\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2} \cdot \dfrac{3a+3b}{4a-4b}$; 2) $\dfrac{5-5a}{(1+a)^2} : \dfrac{10-10a^2}{3+3a}$;

3) $-\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \cdot \dfrac{3(a-b)^2}{4(a+b)^3}$; 4) $-\dfrac{(x+y)^2}{xy-y^2} : \left(-\dfrac{xy+y^2}{(x-y)^2}\right)$;

5) $\dfrac{5m-5n}{4m+4n} \cdot \dfrac{8m+8n}{15m-15n}$; 6) $\dfrac{2a+2b}{3a-3b} : \dfrac{6a+6b}{5a-5b}$;

7) $\dfrac{ax+ay}{x^2-2xy+y^2} \cdot \dfrac{2x+2y}{ax^2+2axy+ay^2}$;

8) $\dfrac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2} : \dfrac{am^2-2amn+an^2}{3m+3n}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{3}{4}$; 2) $\dfrac{3}{2(1+a)^2}$; 3) $-\dfrac{3}{4(a+b)}$;

4) $\dfrac{(x-y)(x+y)}{y^2}$; 5) $\dfrac{2}{3}$; 6) $\dfrac{5}{9}$;

7) $\dfrac{2}{(x-y)^2}$; 8) $\dfrac{3}{m-n}$.

ЗАДАЧА 5. Виконати дії:

1) $\frac{2a^3-2b^3}{3a+3b}\cdot\frac{6a^2-6b^2}{a^2-2ab+b^2}$; 2) $\frac{x^2+xy}{5x^2-5y^2}\cdot\frac{x^2-xy}{3x^3+3y^3}$;

3) $\frac{5x^2-10xy}{x^2+4y^2}\cdot\frac{x^4-16y^4}{15(x-2y)^2}$; 4) $\frac{a^4-x^4}{a^3-x^3}:\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$;

5) $\frac{a^2-5a+6}{a^2+7a+12}\cdot\frac{a^2+3a}{a^2-4a+4}$; 6) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10}:\frac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14}$

7) $\frac{3a^2+6ab+3b^2}{4a+4b}\cdot\frac{2a^2-2b^2}{9a^2-9b^2}$;

8) $\frac{5x^2-10xy+5y^2}{2x^2-2xy+2y^2}:\frac{8x-8y}{10x^3+10y^3}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $4(a^2+ab+b^2)$; 2) $\frac{x^2}{15(x^3+y^3)}$; 3) $\frac{x(x+2y)}{3}$;

4) $\frac{(a+x)^2(a-x)}{a^2+ax+x^2}$; 5) $\frac{a(a-3)}{(a+4)(a-2)}$;

6) $\frac{(x-1)(x-7)}{(x+4)(x+5)}$; 7) $\frac{a+b}{6}$; 8) $\frac{25(x^2-y^2)}{8}$.

Пропонується задача з новим формулюванням. Запам'ятайте його!

ЗАДАЧА 6. Виключити цілу частину:

1) $\frac{x+2y}{x+y}$; 2) $\frac{1+a^2+a}{1+a}$; 3) $\frac{2+a+a^2}{1+a^2}$; 4) $\frac{3+x+x^2}{3+x^2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $\frac{x+2y}{x+y}=\frac{x+y+y}{x+y}=\frac{x+y}{x+y}+\frac{y}{x+y}=1+\frac{y}{x+y}$;

2) $\frac{1+a^2+a}{1+a}=\frac{1+a+a^2}{1+a}=1+\frac{a^2}{1+a}$;

3) $\frac{2+a+a^2}{1+a^2}=\frac{1+a^2+1+a}{1+a^2}=1+\frac{1+a}{1+a^2}$;

4) $\frac{3+x+x^2}{3+x^2}=\frac{3+x^2+x}{3+x^2}=1+\frac{x}{x^2+3}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $1+\frac{y}{x+y}$; 2) $1+\frac{a^2}{1+a}$; 3) $1+\frac{1+a}{1+a^2}$; 4) $1+\frac{x}{x^2+3}$.

ЗАДАЧА 7. Спростити:

1) $\dfrac{\frac{1}{8}}{1-\frac{3}{8}}$; 2) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$; 3) $\dfrac{y-\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}+1}$; 4) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}}$;

5) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$; 6) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$; 7) $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^2}}$; 8) $\dfrac{a-\frac{x^2}{a}}{x-\frac{a^2}{x}}$;

9) $\dfrac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}}$; 10) $\dfrac{\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}}{\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x}}$; 11) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $\dfrac{\frac{1}{8}}{1-\frac{3}{8}}=\dfrac{1}{8}:\dfrac{5}{8}=\dfrac{1}{5}$; 2) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}}=\dfrac{1}{4}:\dfrac{5}{6}=\dfrac{6}{4\cdot5}=\dfrac{3}{10}$;

3) $\dfrac{y-\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}+1}=\dfrac{\frac{y^2-1}{y}}{\frac{1+y}{y}}=\dfrac{y^2-1}{1+y}=y-1$; 4) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}}=\dfrac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{1}{ab}}=a+b$;

9) $\dfrac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}}=\dfrac{\frac{1+x+1-x}{1-x^2}}{\frac{1+x-1+x}{1-x^2}}=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$;

11) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}=\dfrac{(a+b)(a^2-b^2)}{(a-b)(a+b)^2}=\dfrac{(a+b)(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)^2}=1.$

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{1}{5}$; 2) $\dfrac{3}{10}$; 3) $y-1$; 4) $a+b$; 5) $\dfrac{y+x}{y-x}$;

6) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b}$; 7) x; 8) $-\dfrac{x}{a}$; 9) $\dfrac{1}{x}$; 10) $\dfrac{x+1}{x-1}$; 11) 1.

ЗАДАЧА 8. Спростити:

1) $\dfrac{\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$; 2*) $1+\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{x+2}}$; 3*) $1-\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a+1}}$;

4*) $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{x}}}$; 5) $\dfrac{x-2+\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$; 6) $\dfrac{1-\dfrac{2b}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}}{a-b}$;

7) $\dfrac{\dfrac{m}{n}-2-\dfrac{3n}{m}}{\dfrac{m}{n}+\dfrac{3n}{m}-4}$; 8) $\dfrac{\dfrac{x}{4}-1+\dfrac{3}{4x}}{\dfrac{x}{2}-\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{2}}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$; 2) $\dfrac{x^2}{2}+x+1$; 3) $1-a-a^2$;

4) $\dfrac{10x+3}{7x+2}$; 5) $\dfrac{x\left(x^2-2x+3\right)}{x^2+x+1}$; 6) $\dfrac{a-b}{a^2}$;

7) $\dfrac{m+n}{m-n}$; 8) $\dfrac{x-1}{2(x+4)}$.

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 10 до 20 хвилин)

I. Виконати дії:

1) $\dfrac{a^2+ax+x^2}{ax+2ay}:\dfrac{a^3-x^3}{bx+2by}$; 2) $\dfrac{4m^2-25n^2}{m^3+8}:\dfrac{2m+5n}{m^2-2m+4}$;

II. Довести тотожності:

1) $\dfrac{a-\dfrac{x^2}{a}}{x-\dfrac{a^2}{x}}=-\dfrac{x}{a}$; 2) $\dfrac{27a^2+27ab+27b^2}{6a+6b}\cdot\dfrac{2a^2-2b^2}{9a^3-9b^3}=1$.

ВІДПОВІДЬ. I. 1) $\dfrac{b}{a\left(a-x\right)}$; 2) $\dfrac{2m-5n}{m+2}$.

§ 5. ПЕРЕТВОРЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Цей параграф присвячений перетворенню раціональних виразів. У задачах підсумовуються всі правила дій з алгебричними дробами. Крім цього, ви зможете наочно впевнитися, як важливо вміти розкладати на множники.

Окремі із запропонованих прикладів зустрічаються навіть на вступних іспитах до вищих навчальних закладів. Будьте уважні і старанні — не пропустіть жодної з поданих нижче задач. Періодично повторюючи їх, накопичуйте технічний потенціал майбутнього абітурієнта.

РЕКОМЕНДАЦІЯ. Приклади цього розділу радимо робити по діях — вірогідність помилки зменшується!

ЗРАЗОК. Виконати дію:

$$\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right).$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1°) Перша дія:

$$\frac{a}{a+1}+1=\frac{a+a+1}{a+1}=\frac{2a+1}{a+1}.$$

2°) Друга дія:

$$1-\frac{3a^2}{1-a^2}=\frac{1-a^2-3a^2}{1-a^2}=\frac{1-4a^2}{1-a^2}=\frac{(1-2a)(1+2a)}{(1-a)(1+a)}.$$

3°) Третя дія:

$$\frac{2a+1}{a+1}:\frac{(1-2a)(1+2a)}{(1-a)(1+a)}=\frac{(2a+1)(1-a)(1+a)}{(1-2a)(1+2a)(a+1)}=\frac{1-a}{1-2a}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\dfrac{1-a}{1-2a}.$

Отже, переходимо до прикладів. Їх буде, як і завжди, чимало. Розв'язання наводяться вибірково, а відповіді — повністю. Не забувайте перевіряти кінцевий результат!

ЗАДАЧА 1. Виконати дії:

1) $\left(\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}\right):\frac{4m}{10m-5}$;

2) $\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\frac{4a^2-4}{3}$;

3) $\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\left(\frac{b}{a}-2+\frac{a}{b}\right)$;

4) $\left(\frac{3a}{1-3a}+\frac{2a}{2a+1}\right):\frac{6a^2+10a}{1-6a-6a^2}$;

5) $\left(\frac{a}{x-a}-\frac{a}{x+a}\right)\cdot\frac{x^2+2ax+a^2}{2a^2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) 1°) $\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}=\frac{(2m+1)^2-(2m-1)^2}{(2m-1)(2m+1)}=$

$=\frac{4m^2+4m+1-4m^2+4m-1}{(2m-1)(2m+1)}=\frac{8m}{(2m-1)(2m+1)}$;

2°) $\frac{8m}{(2m-1)(2m+1)}:\frac{4m}{10m-5}=\frac{8m\cdot5(2m-1)}{(2m-1)(2m+1)\cdot4m}=$

$=\frac{10}{2m+1}$;

2) 1°) $\frac{a+1}{2a-2}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}=\frac{a+1}{2(a-1)}+\frac{6}{2(a^2-1)}-\frac{a+3}{2(a+1)}=$

$=\frac{(a+1)^2+6-(a+3)(a-1)}{2(a^2-1)}=$

$=\frac{a^2+2a+1+6-a^2+a-3a+3}{2(a^2-1)}=$

$=\frac{10}{2(a^2-1)}=\frac{5}{a^2-1}$;

2°) $\frac{5}{a^2-1}\cdot\frac{4(a^2-1)}{3}=\frac{20}{3}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\frac{10}{2m+1}$; 2) $\frac{10}{3}$; 3) $\frac{1}{a+b}$; 4) $\frac{5}{6a+10}$; 5) $\frac{x+a}{x-a}$.

ЗАДАЧА 2. Виконати дії:

1) $(x^2-1)\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-1\right)$; 2) $\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)$;

3) $\left(1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\dfrac{a}{x}\right)\cdot\dfrac{x^3}{a^3-x^3}$;

4) $\left(\dfrac{a^2+b^2}{a}+b\right):\left(\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$;

5) $\left(\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{a}{x+a}\right):\left(\dfrac{x+a}{a}-\dfrac{x-a}{x}\right)$;

6) $\left(\dfrac{b}{a^2-ab}+\dfrac{a}{b^2-ab}\right)\cdot\dfrac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) 1°) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{x+1-x+1-x^2+1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{3-x^2}{x^2-1}$;

2°) $(x^2-1)\cdot\dfrac{3-x^2}{x^2-1}=3-x^2$;

2) 1°) $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^3+y^3}{xy^2}=\dfrac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy^2}$;

2°) $\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-xy+y^2}{xy^2}$;

3°) $\dfrac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy^2}:\dfrac{x^2-xy+y^2}{xy^2}=x+y$;

6) 1°) $\dfrac{b}{a^2-ab}+\dfrac{a}{b^2-ab}=\dfrac{b}{a(a-b)}+\dfrac{a}{b(b-a)}=\dfrac{b^2-a^2}{ab(a-b)}$;

2°) $\dfrac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}=\dfrac{ab(a+b)}{a^2-b^2}$;

3°) $\dfrac{b^2-a^2}{ab(a-b)}\cdot\dfrac{ab(a+b)}{a^2-b^2}=-\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{a+b}{b-a}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $3-x^2$; 2) $x+y$; 3) -1; 4) $\dfrac{ab^2(a^2+ab+b^2)}{a^2-b^2}$;

5) $\dfrac{ax}{x^2-a^2}$; 6) $\dfrac{b+a}{b-a}$.

ЗАДАЧА 3. Виконати дії:

1) $\left(\frac{2a}{a+2}+\frac{2a}{6-3a}+\frac{8a}{a^2-4}\right):\frac{a-4}{a-2}$;

2) $\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}\right):\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right)$.

3) $\left(x^2-1\right)\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+1\right)$;

4) $\left(\frac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\frac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\frac{1}{a-1}\right):\frac{a^2+1}{1-a}$;

5) $\left(\frac{a^2+ab}{a^2b-b^3}-\frac{2a^2}{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}\right)\left(1+\frac{b-a}{a}-\frac{b^2}{a^2}\right)$;

6) $\left(\frac{a^2}{a+n}-\frac{a^2}{a^2+n^2+2an}\right):\left(\frac{a}{a+n}-\frac{a^2}{a^2-n^2}\right)$;

7) $\left(\frac{2a}{a+1}+\frac{2}{a-1}+\frac{4a}{a^2-1}\right)\left(\frac{2a}{a+1}+\frac{2}{a-1}-\frac{4a}{a^2-1}\right)$;

8) $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{x+y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right):\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

8) 1°) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$;

2°) $\frac{2}{x+y}\cdot\frac{x+y}{xy}=\frac{2}{xy}$;

3°) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}=\frac{y^2+x^2+2xy}{x^2y^2}=\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}$;

4°) $\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}:\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}=1$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\frac{4a}{3(a-4)}$; 2) $\frac{a^2+b^2}{a\left(a^2-b^2\right)}$; 3) x^2+2x-1;

4) $\frac{1}{a^2+a+1}$; 5) $\frac{a^2+b^2}{a(a-b)}$; 6) $\frac{a(n-a)}{n+a}\cdot\frac{a+n-1}{n}$;

7) 4; 8) 1.

ЗАДАЧА 4. Виконати дії:

1) $\left(\dfrac{1}{2a-b}+\dfrac{3b}{b^2-4a^2}-\dfrac{2}{a+b}\right):\left(\dfrac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}+1\right)$;

2) $\left(m+1-\dfrac{1}{1-m}\right):\left(m-\dfrac{m^2}{m-1}\right)$;

3) $\left(\dfrac{2ab}{4a^2-9b^2}+\dfrac{b}{3b-2a}\right):\left(1-\dfrac{2a-3b}{2a+3b}\right)$;

4) $\left(\dfrac{p}{p^2-4}+\dfrac{2}{2-p}+\dfrac{1}{p+2}\right):\left(p-2+\dfrac{10-p^2}{p+2}\right)$;

5) $\left(a-\dfrac{1}{1-a}\right):\dfrac{a^2-a+1}{a^2-2a+1}$;

6) $\left(\dfrac{1}{1-a}-1\right):\left(a-\dfrac{1-2a^2}{1-a}+1\right)$;

7) $\left(\dfrac{1}{a^2-ab}-\dfrac{3b^2}{a^4-ab^3}-\dfrac{b}{a^3+a^2b+ab^2}\right)\left(b+\dfrac{a^2}{a+b}\right)$;

8) $\left(\dfrac{2a}{2a+b}-\dfrac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\dfrac{2a}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{b-2a}\right)$;

9) $\left(\dfrac{2q}{p+2q}-\dfrac{4q^2}{p^2+4pq+4q^2}\right):\left(\dfrac{2q}{p^2-4q^2}+\dfrac{1}{2q-p}\right)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $-\dfrac{3}{4(a+b)}$; 2) $-m$; 3) $\dfrac{b}{2(3b-2a)}$; 4) $\dfrac{1}{2-p}$;

5) $a-1$; 6) $\dfrac{1}{a}$; 7) $\dfrac{1}{a}$; 8) $\dfrac{2a(b-2a)}{b+2a}$; 9) $\dfrac{2q(2q-p)}{2q+p}$.

ЗАДАЧА 5. Довести тотожності:

1) $\left(\dfrac{4c^2+21}{2-2c}-6\right):\dfrac{2cn+3n-4c-6}{2-2c}=\dfrac{2c+3}{n-2}$;

2) $\dfrac{2ab+4b-3a-6}{2-2b^2}:\left(\dfrac{4b^2+21}{2+2b}-6\right)=\dfrac{a+2}{(2b-3)(1-b)}$;

3) $\left(\dfrac{2a+1}{2a-1}-\dfrac{2a-1}{2a+1}\right):\left(1:\left(1-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{4a^2}\right)\right)=\dfrac{2(2a-1)}{a(2a+1)}$;

4) $\left(\dfrac{a}{b}-x\right)\cdot\dfrac{b}{ax+b}=1$, якщо $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

ЗАДАЧА 6. Довести тотожність і перевірити її при $p=-1, q=-2$:

$$\left(\frac{1}{p-2q}+\frac{6q}{4q^2-p^2}-\frac{2}{p+2q}\right):\left(\frac{p^2+4q^2}{p^2-4q^2}+1\right)=-\frac{1}{2p}.$$

ЗАДАЧА 7. Довести тотожності та перевірити їх шляхом підстановки будь-яких числових значень букв:

1) $\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2b}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{ab+b^2}+\frac{b}{a^2+ab}\right)\right):\frac{b}{a-b}=\frac{a}{a+b};$

2) $\left(a-\frac{4ab}{a+b}+b\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)=a-b;$

3) $\left(\frac{p^2-q^2}{pq}-\frac{1}{p+q}\cdot\left(\frac{p^2}{q}-\frac{q^2}{p}\right)\right):\frac{p-q}{p}=\frac{p}{p+q};$

4) $\left(\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}\cdot\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cdot\frac{a^2+c^2}{a^2c^2}\right):$

$$:\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2b^2};$$

5) $\left(\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+y}\left(\frac{x+y}{3x}-x-y\right)\right):\frac{x-y}{x}=\frac{2x}{x-y};$

6) $\left(\frac{1}{(m+n)^2}\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{m^2+2mn+n^2}\cdot\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\right):$

$$:\frac{m-n}{m^3n^3}=\frac{mn(mn-m+n)}{m^2-n^2}.$$

ЗАДАЧА 8. Спростити:

1) $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right)\left(a-\frac{2a-1}{a+1}\right);$

2) $\frac{8+a^3}{x^2-y^2}:\frac{4-2a+a^2}{x-y}:\left(x+\frac{xy+y^2}{x+y}\right);$

3) $\left(\frac{2x^2+x}{x^3-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)\left(1+\frac{x+1}{x}-\frac{x^2+5x}{x^2+x}\right).$

ВІДПОВІДЬ. 1) 1; 2) $\frac{a+2}{(x+y)^2}$; 3) $\frac{x-1}{x(x+1)}$.

ЗАДАЧА 9. Спростити:

1) $\left(\dfrac{1}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+2ab+b^2}\right):\dfrac{b^2+4ab-a^2}{a^2-b^2}$;

2) $\left(\dfrac{b^2}{a^3-ab^2}+\dfrac{1}{a+b}\right):\left(\dfrac{a-b}{a^2+ab}-\dfrac{a}{b^2+ab}\right)$;

3) $\left(\dfrac{c-d}{c^2+cd}-\dfrac{c}{d^2+cd}\right):\left(\dfrac{d^2}{c^3-cd^2}+\dfrac{1}{c+d}\right)$;

4) $\left(\dfrac{1}{c^2+2cd+d^2}+\dfrac{1}{c^2-d^2}-\dfrac{1}{c^2-2cd+d^2}\right):\dfrac{d^2+4cd-c^2}{c^2-d^2}$;

5) $\left(\dfrac{2x^2+3x}{4x^2+12x+9}-\dfrac{3x+2}{2x+3}+\dfrac{4x-1}{2x+3}\right)\cdot\dfrac{2x+3}{2x-3}$;

6) $\left(\dfrac{3a+2}{3a^2+1}-\dfrac{18a^3-a-9}{9a^4-1}+\dfrac{3a-2}{3a^2-1}\right):\dfrac{a^2+10a+25}{9a^4-1}$;

7) $\left(\dfrac{x+1}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}-\dfrac{4x^2}{x^2-1}\right):\left(-2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-x}{x^2}-1\right)\right)$;

8) $\dfrac{4a-2b}{3ab}:\left(\dfrac{8ab}{12a^2-3b^2}+\dfrac{2a-b}{2a+b}-\dfrac{2a+b}{6a-3b}\right)$;

9) $\dfrac{xy}{x+y}:\left(\dfrac{x^2}{(x^2-y^2)(x+y)}-\dfrac{2xy^2}{x^4-2x^2y^2+y^4}+\right.$

$\left.+\dfrac{y^2}{(x-y)^2(x+y)}\right)$;

10) $\dfrac{a^2+b^2}{ab}\cdot\left(\dfrac{6a+b}{a^2-b^2}:\dfrac{6a^3+b^3+a^2b+6ab^2}{2ab^2-2a^2b}+\dfrac{a+b}{a^2+b^2}\right)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{2a}{(a+b)(b^2+4ab-a^2)}$; 2) $\dfrac{b}{b-a}$;

3) $\dfrac{d-c}{d}$; 4) $\dfrac{1}{d^2-c^2}$; 5) 1; 6) $\dfrac{1}{a+5}$;

7) $2\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^3$; 8) $\dfrac{2a+b}{ab}$; 9) xy;

10) $\dfrac{a^2+b^2}{ab(a+b)}$.

ЗАДАЧА 10. Спростити:

$$1)\ \left(\frac{x}{xy+y^2}-\frac{x^2+y^2}{x^3-xy^2}+\frac{y}{x^2-xy}\right):\frac{x^2-2xy+y^2}{x^3+y^3};$$

$$2)\ \left(\frac{2x^2y+2xy^2}{7x^3+x^2y+7xy^2+y^3}\cdot\frac{7x+y}{x^2-y^2}+\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)\cdot\left(x^2-y^2\right);$$

$$3)\ \left(\frac{5}{a^2-2a-ax+2x}-\frac{1}{8-8a+2a^2}\cdot\frac{20-10a}{x-2}\right):\frac{25}{x^3-8};$$

$$4)\ \left(\frac{3a}{9-3x-3a+ax}-\frac{1}{a^2-9}:\frac{x-a}{3a^2+9a}\right)\cdot\frac{x^3-27}{3a}.$$

ВІДПОВІДЬ. $1)\ \dfrac{x^2-xy+y^2}{y(x-y)};\quad 2)\ x+y;$

$3)\ \dfrac{x^2+2x+4}{5(a-x)};\quad 4)\ \dfrac{x^3+3x+9}{a-x}.$

ЗАДАЧА 11. Довести, що значення виразу

$$\frac{2}{ab}:\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2-\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$$

при всіх допустимих значеннях a та b є сталим числом.

ЗАДАЧА 12.* Спростити:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\frac{2}{1-x^2};$$

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{4}{1-x^4}.$$

Додаючи до отриманого результату четвертий даний дріб, а потім п'ятий і шостий, дістанемо:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{32}{1-x^{32}}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\dfrac{32}{1-x^{32}}.$

Увага! Готуємося до математичних олімпіад!

ЗАДАЧА 13. Спростити вирази:

1) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{2x(x-1)^2}{x^4+x^2+1}+\dfrac{2x^2(x^2-1)^2}{x^8+x^4+1}$;

2) $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$;

3*) $\dfrac{(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3}{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Маємо

$$x^8+x^4+1=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)=$$
$$=(x^4-x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

Тому спільний знаменник дорівнює x^8+x^4+1, а чисельник шуканої суми дорівнює

$$(x^2-x+1)^2(x^4-x^2+1)+2x(x-1)^2(x^4-x^2+1)+$$
$$+2x^2(x^2-1)^2=x^8-x^4+1.$$

Отже, дана сума дорівнює $\dfrac{x^8-x^4+1}{x^8+x^4+1}$.

2) $\dfrac{(x^2-x+1)(x^2+x-1)}{(x^2-x+1)(x^2+1+x)}+$

$$+\frac{(x-x^2+1)(x+x^2-1)}{(x^2+x-1)(x^2+x+1)}+\frac{(x^2-x-1)(x^2-x+1)}{(x^2-x-1)(x^2+1+x)}=$$
$$=\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}+\frac{x-x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=$$
$$=\frac{x^2+x-1+x-x^2+1+x^2-x+1}{x^2+x+1}=$$
$$=\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}=1.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{x^8-x^4+1}{x^8+x^4+1}$; 2) 1; 3) $(x+y)(y+z)(z+x)$.

ЗАДАЧА 14. *** Спростити вираз $\dfrac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(19^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(20^4+\frac{1}{4}\right)}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Помножимо кожен множник у чисельнику і знаменнику на 16 і скористаємось рівністю

$$n^4+4=\left(n^2-2n+2\right)\left(n^2+2n+2\right)=\left((n-1)^2+1\right)\left((n+1)^2+1\right).$$

Дістанемо, що даний вираз дорівнює

$$\frac{\left(2^4+4\right)\left(6^4+4\right)\ldots\left(38^4+4\right)}{\left(4^4+4\right)\left(8^4+4\right)\ldots\left(40^4+4\right)}=$$

$$=\frac{\left(1^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\ldots\left(37^2+1\right)\left(39^2+1\right)}{\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\left(9^2+1\right)\ldots\left(39^2+1\right)\left(41^2+1\right)}=\frac{1}{841}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\dfrac{1}{841}$.

Умовні тотожності

Умовні тотожності відрізняються від тотожностей, які ми розглядали вище, додатковою умовою (назва говорить сама про себе).

ЗАДАЧА 1. Довести, що якщо $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1\,(*)$, то

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

ДОВЕДЕННЯ

Помножимо обидві частини рівності $(*)$ на $a+b+c$, маємо:

$$a+b+c=\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{c+a}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}=$$

$$=\frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{c+a}+b+\frac{c^2}{a+b}+c,$$

і тому, $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0$, що й вимагалося довести.

ЗАДАЧА 2. Дано: $p+q=1$. Довести: $\frac{p}{q^3-1}-\frac{q}{p^3-1}=\frac{2(q-p)}{p^2q^2+3}$.

ДОВЕДЕННЯ

Маємо

$$\frac{p}{q^3-1}-\frac{q}{p^3-1}=\frac{1-q}{q^3-1}-\frac{1-p}{p^3-1}=$$

$$=\frac{-1}{q^2+q+1}+\frac{1}{p^2+p+1}=\frac{(q-p)(q+p+1)}{(q^2+q+1)(p^2+p+1)}=$$

$$=\frac{2(q-p)}{(q^2+q+1)(p^2+p+1)}.$$

Далі

$$(q^2+q+1)(p^2+p+1)=$$

$$=p^2q^2+pq(p+q)+p(p+q)+(p+q)+q^2+1=$$

$$=p^2q^2+pq+p+1+q^2+1=p^2q^2+q(p+q)+p+2=$$

$$=p^2q^2+q+p+2=p^2q^2+1+2=p^2q^2+3,$$

що й вимагалося довести.

ЗАДАЧА 3. Довести, що якщо $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$, то

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$$

(властивість ряду рівних відношень).

ДОВЕДЕННЯ

Нехай $\frac{a_1}{b_1}=k$, тобто $a_1=kb_1$. Тоді

$$a_2=kb_2,\ a_3=kb_3,\ldots,\ a_n=kb_n.$$

Маємо

$$a_1+a_2+\ldots a_n=k(b_1+b_2+\ldots+b_n),$$

або

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=k=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n},$$

що й вимагалося довести.

ЗАДАЧА 4. («Похідні пропорції»). Довести, що якщо $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d};\quad \frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{c\pm d};\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

ЗАДАЧА 5. Довести, що якщо $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\ldots=\frac{x_n}{x_{n+1}}$, то

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{x_2+x_3+\ldots+x_{n+1}}\right)^n=\frac{x_1}{x_{n+1}}$$

ДОВЕДЕННЯ

На основі властивості ряду рівних відношень маємо:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{x_2+x_3+\ldots x_{n+1}}=\frac{x_1}{x_2},$$

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{x_2+x_3+\ldots+x_{n+1}}=\frac{x_2}{x_3},\ \ldots,\ \frac{x_1+x_2+\ldots x_n}{x_2+x_3+\ldots+x_{n+1}}=\frac{x_n}{x_{n+1}}.$$

Перемножимо усі ці n рівностей, дістанемо:

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{x_2+x_3+\ldots+x_{n+1}}\right)^n=\frac{x_1}{x_{n+1}},$$

що й вимагалося довести.

ЗАДАЧА 6. Довести, що якщо $a+b=c+d$, то

$$\frac{abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}{ab+cd}=a+b.$$

ДОВЕДЕННЯ

Маємо:

$$\frac{abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}{ab+cd}=\frac{abcd\,\frac{cd(b+a)+ab(d+c)}{abcd}}{ab+cd}=$$

$$=\frac{cd(a+b)+ab(a+b)}{ab+cd}=\frac{(a+b)(cd+ab)}{ab+cd}=a+b,$$

що й вимагалося довести.

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 25 до 40 хвилин)

I. Довести тотожності:

1) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n^2-1}$;

2) $\left(a-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{a-b}\right)=1.$

II. Виконати дії:

1) $\frac{b}{ab-5a^2}-\frac{15b-25a}{b^2-25a^2}$;

2) $\frac{c+6b}{ac+2bc-6ab-3a^2}+\frac{2b}{a^2+2ab}-\frac{b}{ab-3a^2}.$

III. Спростити дроби:

1) $\frac{a^2-3a+2}{a^2+a-2}$; 2) $\frac{a^4+a^3+4a^2+3a+3}{a^3-1}$;

3) $\frac{2a^2-5ab+3b^2}{2a^2-ab-3b^2}$; 4) $\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc}.$

IV. Виконати дії:

$$\frac{x^2-bx+ax-ab}{x^2+bx-ax-ab}:\frac{x^2+bx+ax+ab}{x^2-bx-ax+ab}.$$

І знову задачі...

ЗАДАЧА 1. Довести, що якщо $x=\frac{ab}{a+b}$, то

$$\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\cdot\frac{b^3}{a^3}=\frac{a+2b}{b+2a}.$$

ЗАДАЧА 2. Довести, що при будь-якому цілому значенні a та довільному x значення виразу

$$\left(a-\frac{a^2+x^2}{a+x}\right)\cdot\left(\frac{2a}{x}+\frac{4a}{a-x}\right)$$

є парним числом.

ЗАДАЧА 3. Довести тотожність великого Леонарда Ойлера:

$$a^3+b^3+\left(\frac{b\left(2a^3+b^3\right)}{a^3-b^3}\right)^3=\left(\frac{a\left(a^3+2b^3\right)}{a^3-b^3}\right)^3.$$

ЗАДАЧА 4. Довести, що при будь-якому натуральному n значення виразу

$$\left(n-9+\frac{27}{n}-\frac{27}{n^2}\right):\left(\frac{9}{n^2}-\frac{6}{n}+1\right)$$

є натуральним числом.

ЗАДАЧА 5. Чи може вираз $\frac{a+9}{a+6}$ (a — ціле) бути цілим числом? Якщо так, то за яких значень a?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Оскільки

$$\frac{a+9}{a+6}=\frac{a+6+3}{a+6}=1+\frac{3}{a+6},$$

то, щоб останній вираз був цілим, a має дорівнювати

$$-3;-5;-7;-9.$$

ЗАДАЧА 6. При яких цілих n значення дробів

$$1)\ \frac{3n}{n+2};\quad 2)\ \frac{7n}{n-4};\quad 3)\ \frac{5n^2+2n+3}{n};\quad 4)\ \frac{(n-3)^2}{n}$$

є цілим числом?

ВІДПОВІДЬ. 1) $n=-8;-5;-4;-1;0;1;4.$

2) $n=-24;-10;-3;0;2;3;5;6;8;11;18;32.$

3) $n=-3;-1;1;3.$

4) $n=-9;-3;-1;1;3;9.$

§ 6. ДРОБОВІ РІВНЯННЯ

Ви вже добре орієнтуєтесь у лінійних рівняннях. Але повторення, як відомо, мати навчання, тому уважно розв'яжіть подані нижче приклади. Тим більше, що усі вони містять, крім невідомих, інші букви, тобто це рівняння з параметрами!

У наступних задачах x, y, z, u, t — змінні, решта — параметри.

ЗАДАЧА 1. Розв'язати рівняння:

1) $3x+a=5x-b$; 2) $2a+5x=7x-2b$;

3) $ax-b-a=x-c$; 4) $5x+2a=3x+2$;

5) $3-2a+5x=4a+9-x$; 6) $5(x-a)=3(x+b)$;

7) $6(a-x)=7(b-x)$; 8) $(a+x)b-a=(b+1)x+ab$;

9) $2m-(m+n)x=(m-n)x$; 10) $y+\frac{y}{a}=b$; 11) $z-a=\frac{z}{b}$;

12) $\frac{u}{p}+\frac{u}{q}=m$; 13) $\frac{z}{m}-\frac{z}{n}=1$; 14) $\frac{x-m}{n}=\frac{x-n}{m}$;

15) $\frac{a+x}{b}-2=\frac{x-b}{a}$; 16) $\frac{z-a}{a}-m=\frac{z-b}{b}$;

17) $m-\frac{n+y}{n}=n-\frac{n+y}{m}$; 18) $\frac{t+p}{q}-\frac{q}{p}=\frac{t-q}{p}+\frac{p}{q}$;

19) $\frac{a+t}{a}-m=\frac{b+t}{b}-n$; 20) $\frac{x-m}{m}+p=\frac{x-n}{n}+q$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x=\frac{a+b}{2}$; 2) $x=a+b$; 3) при $a\neq 1$ $x=\frac{b+a-c}{a-1}$;

при $a=1, b=c-1$ x — будь-яке;

при $x=1, b\neq c-1$ — коренів нема;

5) $x=1+a$; 6) $x=\frac{5a+3b}{2}$; 8) $x=-a$;

9) $x=1$, якщо $m\neq 0$; x — будь-яке, якщо $m=0$;

10) $y=\frac{ab}{a+1}$, при $a\neq 0, a\neq -1, b\neq 0$;

при $a=-1$ та $b=0$ y — будь-яке число;

при $a=-1$ та $b\neq 0$ або при $a=0$ — коренів нема;

18) якщо $p=0$ або $q=0$, то коренів нема;

якщо $p=q\neq 0$, то t — будь-яке число;

якщо $p\neq q$, то $t=0$.

ЗАДАЧА 2. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{y+d}{c}-\frac{y-c}{d}=2;$ 2) $\frac{x-m}{n+m}=\frac{x-n}{n-m};$

3) $\frac{2x-m}{n+m}=\frac{2x+n}{m-n};$ 4) $\frac{a+bz}{a+b}=\frac{c+dz}{d+c};$

5) $\frac{m+nx}{m-n}=\frac{p+qx}{p-q};$ 6) $\frac{y}{a-b}-\frac{3}{a+b}=\frac{4by}{a^2-b^2};$

7) $\frac{z}{a}+\frac{z}{b-a}=\frac{a}{a+b};$

8) $\frac{x+n}{m+n}+\frac{x-n}{m-n}=\frac{1}{m+n}-\frac{x-n}{m^2-n^2}+\frac{2x}{m};$

9) $\frac{a-x}{b-a}-\frac{x+a}{a+b}=\frac{2ax}{a^2-b^2};$

10) $\frac{a-x}{b-a}+\frac{3x}{a+b}=\frac{3a^2-ab-4b^2}{a^2-b^2}.$

Дробово-лінійні та дробово-раціональні рівняння

Розглянемо розв'язання **дробово-лінійних** рівнянь, тобто рівнянь вигляду

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=c, \quad (*)$$

де $P(x)$ та $Q(x)$ — лінійні функції (зокрема, $P(x)$ може бути сталою), а c — деяке число.

Наприклад, $\frac{3}{x}=0;$ $\frac{3x-8}{4x-5}=2.$

Для того, щоб розв'язати таке рівняння, його потрібно або звести до лінійного, або записати у вигляді рівняння, права частина якого — алгебричний дріб, а ліва — нуль.

Майте на увазі! Знаменник дробово-лінійного рівняння **не повинен дорівнювати нулю**!

Якщо в рівнянні $(*)$ $P(x)$ та $Q(x)$ — багаточлени, то рівняння називається **дробово-раціональним.**

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $\dfrac{x-2}{x+4}=2.$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$\frac{x-2}{x+4}-2=0;\quad \frac{x-2-2x-8}{x+4}=0;$$

$$\frac{-x-10}{x+4}=0;\quad \begin{cases}-x-10=0\\ x+4\neq 0\end{cases};\quad \begin{cases}x=-10\\ x\neq -4\end{cases};\quad x=-10.$$

ВІДПОВІДЬ. $x=-10.$

ЗАДАЧА 1. Розв'язати рівняння:

$$1)\ \frac{x-8}{x}=0;\quad 2)\ \frac{9+x}{x}=0;\quad 3)\ \frac{2x}{x+7}=0;$$

$$4)\ \frac{x}{x+3}=0;\quad 5)\ \frac{x^2}{x-1}=0;\quad 6)\ \frac{6x^3}{x^2+15}=0;$$

$$7)\ \frac{x+3}{x}-2=0;\quad 8)\ \frac{x-8}{x}=3;\quad 9)\ \frac{3x-4}{x}=2;$$

$$10)\ \frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+1};\quad 11)\ \frac{10}{3}-\frac{7u+2}{6u+18}=2+\frac{3u-1}{4u+12}.$$

ЗАДАЧА 2. Розв'язати дробово-раціональні рівняння:

$$1)\ \frac{y-2}{y-6}=\frac{y}{y-5};\qquad 2)\ \frac{3x-1}{3x+1}=2-\frac{x-3}{x+3};$$

$$3)\ \frac{3x-5}{x-1}-\frac{2x-5}{x-2}=1;\qquad 4)\ \frac{9x-7}{3x-2}-\frac{4x-5}{2x-3}=1;$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

2) $\dfrac{3x-1}{3x+1}=\dfrac{2x+6-x+3}{x+3};\quad \dfrac{3x-1}{3x+1}=\dfrac{x+9}{x+3}.$ При $x\neq -3, x\neq -\dfrac{1}{3}$:

$$(3x-1)(x+3)=(x+9)(3x+1);$$

$$3x^2-x+9x-3=3x^2+27x+x+9;$$

$$-20x-12=0;\quad x=-\frac{12}{20}=-\frac{3}{5}.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $y=10$; 2) $x=-\dfrac{3}{5}$; 3) $x=3$; 4) $x=1$.

ЗАДАЧА 3. Розв'язати дробово-раціональні рівняння:

1) $\frac{14}{3z-12}-\frac{2+z}{z-4}=\frac{3}{8-2z}-\frac{5}{6}$;

2) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}$;

3) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}$;

4) $\frac{t^2-3}{1-t^2}+\frac{t+1}{t-1}=\frac{4}{1+t}$;

5) $\frac{y^2+17}{y^2-1}=\frac{y-2}{y+1}-\frac{5}{1-y}$;

6) $\frac{3}{(2x+5)^2}+\frac{4}{(2x+1)^2}=\frac{7}{(2x+5)(2x+1)}$;

7) $\frac{12x^2+30x-21}{16x^2-9}=\frac{3x-7}{3-4x}+\frac{6x+5}{4x+3}$;

8) $5+\frac{96}{x^2-16}=\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

2) Маємо:

$$\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{(1-2x)(1+2x)};$$

отже,

$$\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{(2x+1)^2-8}{(2x-1)(2x+1)}.$$

При $x\neq\pm\frac{1}{2}$ звідси дістанемо:

$$(2x-1)^2=(2x+1)^2-8;$$
$$4x^2-4x+1=4x^2+4x+1-8;$$

або, після спрощень,

$$8x=8;\quad x=1.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $z=5$; 2) $x=1$; 3) $x=-1$;
4) $t=4$; 5) $y=5$; 6) $x=-8{,}5$;
7) $x=3$; 8) $x=8$.

ЗАДАЧА 4. Розв'язати рівняння відносно невідомого x:

1) $\frac{a}{x}-1=\frac{b}{x}-9$; 2) $\frac{x}{a}-\frac{a}{2x}=\frac{2x+a}{2a}-\frac{a}{x}$;

3) $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b}$; 4) $\frac{a}{a-x}=\frac{b}{b-x}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Маємо:

$\frac{a}{x}-\frac{b}{x}=1-9$; $\frac{a-b}{x}=-8$; $x=\frac{b-a}{8}$ при $a\neq b$ (бо $x\neq 0$).

2) Маємо (при $a\neq 0$):

$$\frac{2x^2-a^2}{2ax}=\frac{2x^2+ax-2a^2}{2ax}.$$

Знаменники двох алгебричних дробів рівні, а отже, рівні й чисельники:

$$2x^2-a^2=2x^2+ax-2a^2;\quad ax=a^2;\quad x=a\quad (a\neq 0).$$

3) Очевидно, що $b\neq 0$, $x\neq 1$. Маємо:

$$b+bx=a-ax;\quad bx+ax=a-b;\quad x(a+b)=a-b.$$

При $a+b\neq 0$, $x=\frac{a-b}{a+b}$. Причому $1\neq\frac{a-b}{a+b}$, тобто $b\neq 0$.

4) Очевидно, що $x\neq a, x\neq b$. Маємо:

$$ab-ax=ab-bx;\quad ax=bx;\quad (a-b)x=0.$$

Подальші обчислення виконайте самостійно.

ВІДПОВІДЬ. 1) При $a\neq b$ $x=\frac{b-a}{8}$, при $a=b$ — розв'язків нема;

2) при $a=0$ — розв'язків нема, при $a\neq 0$ $x=a$;

3) при $a+b=0$ та при $b=0$ — розв'язків нема, при $a+b\neq 0, b\neq 0$ $x=\frac{a-b}{a+b}$;

4) при $a=b$ x— будь-яке число, не рівне a, при $a\neq b$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ $x=0$, при $a\neq b$ та $a=0$ або $b=0$ — розв'язків нема.

УВАГА! У наступній задачі за умовою відомо, що рівняння має єдиний розв'язок. Це дає право не перевіряти, коли рівняння **не має жодного розв'язку** (*в знаменнику нуль*), або коли **рівняння має нескінченну кількість розв'язків** (*рівняння вигляду* $0\cdot x=0$).

ЗАДАЧА 5. Відомо, що наведені рівняння мають тільки один розв'язок відносно невідомого x. Знайти цей розв'язок.

1) $\dfrac{3}{x-a}-\dfrac{2}{x+a}=\dfrac{3x-7a}{x^2-a^2}$; 2) $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}=2$;

3) $\dfrac{n+x}{d+x}=\dfrac{n}{d}+\dfrac{1}{6}$; 4) $\dfrac{x-s}{2x+t}-\dfrac{3x+t}{6x-s}=0$;

5) $\dfrac{x+a}{2}-\dfrac{2}{x+a}=\dfrac{x-a}{2}$; 6) $\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{cx}=\dfrac{d}{cx}-\dfrac{b-a}{c}$;

7) $c\left(\dfrac{d}{ab}-\dfrac{ab}{x}\right)+d=\dfrac{c^2}{x}$; 8) $\dfrac{1}{m+n}+\dfrac{m+n}{x}=\dfrac{1}{m-n}+\dfrac{m-n}{x}$;

9) $\dfrac{ax+b}{x-m}+\dfrac{cx+n}{x-n}=a+c$; 10) $\dfrac{c+x}{cx}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{c}{c+x}$;

11) $\dfrac{x-2a}{x+3a}=3-\dfrac{2x^2-13a^2}{x^2-9a^2}$; 12) $\dfrac{a}{2b+ax}=\dfrac{b}{2a-bx}+\dfrac{2ab}{2+abx}$;

13) $\dfrac{1}{a^2-b^2}+\dfrac{a+b}{x}=\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{a-b}{x}$;

14) $\dfrac{1}{bc-bx}-\dfrac{1}{ac-ax}=\dfrac{2}{b^2-bx}-\dfrac{2}{ab-ax}$;

15) $\dfrac{a}{x+a}-\dfrac{b}{x+b}=\dfrac{a-b}{x-b}$; 16) $\dfrac{a}{c-x}+\dfrac{c}{a-x}=\dfrac{a+c}{b-x}$;

17) $\dfrac{ax+b}{mx-m}-\dfrac{ax-b}{nx-n}=\dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{n}$; 18) $\dfrac{m}{m-x}-\dfrac{b^2}{(m-x)c}=\dfrac{mc-b^2}{c}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $6a$; 2) $\dfrac{2ab}{a+b}$; 3) $\dfrac{d^2}{5d-6n}$; 4) $\dfrac{s^2-t^2}{7s+5t}$;

5) $\dfrac{2-a^2}{a}$; 6) $\dfrac{b+d-ac}{b-a}$; 7) $\dfrac{abc}{d}$; 8) m^2-n^2;

9) $\dfrac{amn+mn+cmn+bn}{n+b+am+cn}$; 10) $\dfrac{c}{c-1}$; 11) $4a$;

12) $\dfrac{2(a^2-b^2-2a^2b^2)}{ab(a^2-b^2+2)}$; 13) $\dfrac{b^4-a^4}{b}$;

14) $2c-b$; 15) $\dfrac{-ab}{a+2b}$; 16) $\dfrac{a^2(b-c)+c^2(b-a)}{ab+bc-2ac}$;

17) $\dfrac{(a+b)n}{(a-b)m}$; 18) $m-1$.

ЗАДАЧА 6. Розв'язати рівняння, відносно букв (невідомих), вказаних у дужках:

1) $S = ab\ (a, b)$; 2) $S = a^2 t\ (t)$; 3) $Q = \dfrac{bh}{2}\ (b, h)$;

4) $V = \dfrac{1}{3}QH\ (Q, H)$; 5) $S = \dfrac{(a+b)h}{2}\ (h, a, b)$;

6) $a = \dfrac{V_1 - V_0}{t}\ (t, V_0, V_1)$; 7) $\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2}\ (F, f_1, f_2)$;

8) $R = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\ (r_1, r_2)$; 9) $\dfrac{1+a}{1-a} = \dfrac{b}{c}\ (a, b, c)$;

10) $\dfrac{a}{a-t} = \dfrac{b}{b-t}\ (a, b, t)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ І ВІДПОВІДІ (вибірково)

Знову ми не досліджуємо формулу розв'язку, тобто вважаємо, що задані рівняння завжди мають тільки один розв'язок.

1) $a = \dfrac{S}{b};\ b = \dfrac{S}{a}$. 2) $t = \dfrac{S}{a^2}$.

3) $2Q = bh;\ b = \dfrac{2Q}{h};\ h = \dfrac{2Q}{b}$.

4) $3V = QH;\ Q = \dfrac{3V}{H};\ H = \dfrac{3V}{Q}$.

5) $2S = (a+b)h;\ h = \dfrac{2S}{a+b};\ a + b = \dfrac{2S}{h};\ a = \dfrac{2S}{h} - b$.

6) $at = V_1 - V_0;\ t = \dfrac{V_1 - V_0}{a};\ V_1 = at + V_0$.

7) $\dfrac{1}{F} = \dfrac{f_1 + f_2}{f_1 \cdot f_2};\ F = \dfrac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2};\ \dfrac{1}{f_1} = \dfrac{1}{F} - \dfrac{1}{f_2};\ \dfrac{1}{f_1} = \dfrac{f_2 - F}{F \cdot f_2}$; звідси:

$$f_1 = \frac{F \cdot f_2}{f_2 - F}.$$

8) $Rr_1 + Rr_2 = r_1 r_2;\ Rr_1 - r_1 r_2 = -Rr_2;\ r_1(R - r_2) = -Rr_2$; тоді:

$$r_1 = \frac{-Rr_2}{R - r_2}.$$

9) $(1+a)c = (1-a)b;\ c + ac = b - ab;\ ac + ab = b - c$; звідси:

$$a(b+c) = b - c;\ a = \frac{b-c}{b+c}.$$

ЗАДАЧА 1. Якщо число є точним квадратом, то сума його цифр або ділиться на 3, або в результаті ділення на 3 дає в остачі 1. Довести це.

ДОВЕДЕННЯ

Будь-яке число при діленні на 3 дає в остачі 0, 1 або 2. Тому його можна представити у вигляді:

$$3k;\ \ 3k-1;\ \ 3k+1.$$

Квадрат першого виразу ділиться на 3, квадрати двох інших виразів при діленні на 3 дають в остачі 1:

$$(3k\pm 1)^2=9k^2\pm 6k+1=3\left(3k^2\pm 2k\right)+1.$$

ЗАДАЧА 2. Число $\overline{aabb}$ — точний квадрат. При яких значеннях a та b це можливо?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розглянемо числа вигляду $\overline{aabb}$. Вони діляться на 11, бо

$$\overline{aabb}=1000a+100a+10b+b=$$

$$=1100a+11b=11(100a+b),$$

Оскільки задане число — чотирицифрове, то воно є квадратом двоцифрового числа (покажіть це самостійно!). Отже, якщо існує число $10x+y$, для якого

$$(10x+y)^2=\overline{aabb},$$

то воно також повинно ділитися на 11, бо 11 — число просте. Крім цього,

$$10x+y>31,$$

бо його квадрат більший за

$$1000>961=31^2.$$

Отже, умові задачі можуть відповідати тільки двоцифрові числа, більші за 31 і кратні 11:

$$33;\ \ 44;\ \ 55;\ \ 66;\ \ 77;\ \ 88;\ \ 99.$$

Безпосередньою перевіркою визначаємо, що шукане число 88, отже,

$$a=7;\ \ b=4.$$

Задачі на складання рівнянь

ЗАДАЧА 1. Чисельник дробу на 2 менший від знаменника. Якщо чисельник дробу зменшити у 3 рази, а до знаменника додати 3, то дістанемо $\frac{1}{8}$. Знайти дріб.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо через x чисельник дробу. Тоді знаменник дробу буде $x+2$. Зменшимо чисельник у 3 рази: $\frac{x}{3}$; до знаменника додамо 3: $x+2+3=x+5$. За умовою, отриманий дріб дорівнює $\frac{1}{8}$, тобто

$$\frac{\frac{x}{3}}{x+5}=\frac{1}{8};\quad \text{або}\quad \frac{x}{3(x+5)}=\frac{1}{8}.$$

Розв'язуємо рівняння

$$8x=3x+15;\quad 5x=15;\quad x=3.$$

Отже, чисельник дорівнює 3, знаменник — 5, а дріб рівний $\frac{3}{5}$.

ВІДПОВІДЬ. $\frac{3}{5}$.

ЗАДАЧА 2. Знаменник дробу на 4 більший його чисельника. Якщо збільшити чисельник і знаменник на 1, то дріб дорівнюватиме $\frac{1}{2}$. Знайти дріб.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай x — знаменник дробу. Тоді $(x-4)$ — чисельник цього дробу. Збільшимо на 1 чисельник і знаменник. Дістанемо $x-4+1=x+3$ та $x+1$, відповідно. За умовою, утворений дріб дорівнює $\frac{1}{2}$. Маємо рівняння:

$$\frac{x-3}{x+1}=\frac{1}{2};\quad 2x-6=x+1;\quad x=7.$$

Отже, знаменник дробу 7, чисельник 3.

ВІДПОВІДЬ. $\frac{3}{7}$.

ЗАДАЧА 3. Знаменник дробу на 4 більший від його чисельника. Якщо до чисельника цього дробу додати 11, а від знаменника відняти 1, то дістанемо дріб, обернений до даного. Знайти даний дріб.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо через x чисельник даного дробу, $(x+4)$ — знаменник. Тоді за умовою:

$$\frac{x+11}{(x+4)-1}=\frac{x+4}{x};\quad x^2+11x=x^2+7x+12;\quad 4x=12;\quad x=3.$$

Отже, даний дріб дорівнює $\frac{3}{7}$.

ВІДПОВІДЬ. $\frac{3}{7}$.

ЗАДАЧА 4. Знаменник дробу на 5 більший від його чисельника. Якщо до чисельника цього дробу додати 14, а від знаменника відняти 1, то дістанемо дріб, обернений до даного. Знайти даний дріб.

ВІДПОВІДЬ. $\frac{4}{9}$.

ЗАДАЧА 5. Два додатних числа співвідносяться, як 3 : 2. Якщо менше з них розділити на 4, а більше розділити на 9, то перша частка буде на 4 більша від другої. Знайти початкові числа.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо ці числа як $3x$ та $2x$. Тоді за умовою маємо:

$$\frac{2x}{4}=\frac{3x}{9}+4;\quad \frac{x}{2}=\frac{x+12}{3};\quad 3x=2x+24;\quad x=24.$$

Отже, ці числа — 72 та 48.

ВІДПОВІДЬ. 72; 48.

ЗАДАЧА 5. Відстань між містами A та B уздовж шосе дорівнює 50 км. З міста A до міста B вирушив велосипедист, а за 1 год 30 хв навздогін йому виїхав мотоцикліст, який обігнав велосипедиста і прибув до міста B на 1 год раніше. Знайти швидкість кожного, якщо відомо, що мотоцикліст рухався у 2,5 рази швидше.

ВІДПОВІДЬ. 12 км/год; 30 км/год.

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 20 до 35 хвилин)

I. Розв'язати рівняння:

1) $\dfrac{z+2}{z-2}=\dfrac{z^2}{z^2-4}+\dfrac{6}{2+z};$

2) $\dfrac{3}{1-6t}=\dfrac{2}{6t+1}-\dfrac{8+9t}{36t^2-1};$

3) $\dfrac{3}{1-z^2}=\dfrac{2}{(1+z)^2}-\dfrac{5}{(1-z)^2}.$

II. Розв'язати рівняння з буквеними коефіцієнтами відносно x, якщо відомо, що ці рівняння мають тільки один розв'язок:

1) $\dfrac{a+b}{x-a}-\dfrac{a-b}{x+a}=0;$

2) $\dfrac{a-b}{x-a}-\dfrac{a+b}{x-b}=0.$

III. Одне з невідомих чисел на 12 більше за друге. Якщо менше число розділити на 7, а більше розділити на 5, то перша частка буде на 4 меншою від другої частки. Знайти дані числа.

ВІДПОВІДЬ. I. 1) $z=8$; 2) $t=\dfrac{1}{3}$; 3) $z=-\dfrac{3}{7}$.

II. 1) $x=-\dfrac{a^2}{b}$; 2) $x=\dfrac{a^2+b^2}{2b}$.

III. 28 та 40.

ГЛАВА 3. КВАДРАТНІ КОРЕНІ І ДІЙСНІ ЧИСЛА

§ 1. ПОНЯТТЯ КВАДРАТНОГО І АРИФМЕТИЧНОГО КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ

ПИТАННЯ. Чи можна знайти аналогію квадратному кореню?

ВІДПОВІДЬ. У попередньо вивченому матеріалі — ні. Введення квадратного кореня розгортає для нас не тільки нову сторінку алгебри, але й нові можливості як для вивчення теорії, так і для нових задач. Причому не тільки в алгебрі (геометрії, фізиці, хімії).

Чому виникає квадратний корінь?

Розв'язуючи **лінійне** рівняння, наприклад, $2x = 5$, дістанемо **один корінь**: $x = \frac{5}{2}$.

Розв'язуючи **нелінійне** рівняння $x^2 = 25$, отримуємо **два корення**: $x_1 = 5$; $x_2 = 5$. Числа 5 та –5 називаються квадратними коренями з числа 25.

ОЗНАЧЕННЯ. Квадратним коренем з числа a називається число, квадрат якого дорівнює a.

Наприклад, квадратний корінь з 4 дорівнює ± 2, бо $(\pm 2)^2 = 4$; квадратний корінь з 225 дорівнює ± 15, тому що $(\pm 15)^2 = 225$.

Арифметичний квадратний корінь

ПИТАННЯ. Для чого?

ВІДПОВІДЬ. Щоб уникнути багатозначності!

Наприклад, квадратний корінь із 25 додати квадратний корінь із 100 дорівнює:

$$\left[\begin{array}{l}5+10\\-5+10\\-5-10\\5-10\end{array}\right.=\left[\begin{array}{l}15\\5\\-15\\-5\end{array}\right..$$

А якщо таких коренів буде три, п'ять... ?!!

ОЗНАЧЕННЯ. Арифметичним квадратним коренем ($\sqrt{a}$) з невід'ємного числа a називається невід'ємне число ($\sqrt{a}\geq 0$), квадрат якого дорівнює a. Вираз, що стоїть під знаком кореня, називається **підкореневим виразом**.

Символом $\sqrt{a}$ позначають тільки арифметичний квадратний корінь, хоча при читанні слово «арифметичний» випускають.

Наприклад: $\sqrt{25}=5$; $\sqrt{36}=6$.

ПАМ'ЯТАЙ. Особливо зауважимо, що $\sqrt{a}$ не завжди має сенс: a має бути невід'ємним. Отже, якщо $\sqrt{a}=m$, то

$$\begin{cases}a\geq 0\\m\geq 0\\a=m^2\end{cases}.$$

Радимо запам'ятати таблицю квадратних коренів для усного обчислення:

$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{25}=5$
$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{100}=10$
$\sqrt{121}=11$	$\sqrt{144}=12$	$\sqrt{169}=13$	$\sqrt{196}=14$	$\sqrt{225}=15$
$\sqrt{256}=16$	$\sqrt{289}=17$	$\sqrt{324}=18$	$\sqrt{361}=19$	$\sqrt{400}=20$

Корені з чисел, що не є точними квадратами, знаходять наближено з допомогою таблиць і калькуляторів.

Наприклад,

$$\sqrt{12} \approx 3{,}46; \quad \sqrt{67} \approx 8{,}19; \quad \sqrt{101} \approx 10{,}05; \quad \sqrt{24397} \approx 156{,}2.$$

ЗАДАЧА 1. Обчислити:

1) $\sqrt{9}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{144}$;

2) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{\frac{4}{9}}$; $\sqrt{\frac{16}{25}}$; $\sqrt{\frac{1}{81}}$;

3) $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt{0{,}09}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{0{,}36}$;

4) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; $\sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}}$.

ЗАДАЧА 2. Довести, що

1) 9 — квадратний корінь з числа 81;
2) 12 — арифметичний квадратний корінь з 144;
3) -8 не є квадратним коренем з 49.

ЗАДАЧА 3. Добути квадратний корінь з чисел, які є точними квадратами:.

1) 841; 2) 784; 3) 1225; 4) 1764; 5) 2401;
6) 2601; 7) 4761; 8) 5929; 9) 6889; 10) 9801.

ЗАДАЧА 4. Обчислити:

1) $\sqrt{0{,}04}$; 2) $\sqrt{0{,}25}$; 3) $\sqrt{\frac{36}{25}}$;

4) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$; 5) $\sqrt{0{,}0169}$; 6) $\sqrt{10{,}24}$.

> *При добуванні кореня з дробів, працюй тільки з простими незмішаними дробами!!!*

ЗАДАЧА 5. Обчислити значення виразів:

1) $-2\cdot\sqrt{81}$; 2) $30:\sqrt{9}$; 3) $\sqrt{25}\cdot\sqrt{100}$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt{0{,}81}-2$;

5) $\sqrt{0{,}64}-\sqrt{0{,}09}$; 6) $\sqrt{2{,}25}-\sqrt{1{,}44}$; 7) $\sqrt{2{,}25}-\frac{1}{7}\sqrt{1{,}96}$;

8) $\sqrt{0{,}49}\cdot\sqrt{3364}$.

ЗАДАЧА 6. Знайти значення виразів:

1) $\sqrt{2a+3}$, якщо $a=-1$; $a=83$; $a=11$;

2) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right):5$, якщо $a=1\frac{9}{16}$; $b=\frac{9}{16}$.

ЗАДАЧА 7. Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{400}$; 2) $\sqrt{-25}$; 3) $\sqrt{(-5)^2}$; 4) $-\sqrt{36}$;

5) $\sqrt{(-36)\cdot(-9)}$; 6) $\sqrt{-100\cdot 9}$?

ВІДПОВІДЬ. 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) так; 5) так; 6) ні.

ЗАДАЧА 8. Знайти число, арифметичний квадратний корінь з якого дорівнює 17; 10; -36.

ВІДПОВІДЬ. 17^2; 10^2; не існує.

ЗАДАЧА 9. Знайти число, квадратний корінь з якого дорівнює 0; 9; 10; 0,07.

ВІДПОВІДЬ. 0; 81; 100; 0,0049.

ЗАДАЧА 10. Знайти значення змінної, при якій істинна рівність:

1) $\sqrt{2+8x}=4$; 2) $\sqrt{\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}}=0$; 3) $\sqrt{x}=2$;

4) $\sqrt{x^2-25}=0$; 5) $\sqrt{x^2+8}=1$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) За означенням арифметичного квадратного кореня маємо:

$$2+8x>0\text{, тобто } x>-\frac{1}{4}$$

та

$$\left(\sqrt{2+8x}\right)^2=2+8x.$$

Отже,

$$2+8x=16;\ \ 8x=14;\ \ x=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}\ \text{ і }\ \frac{7}{4}>-\frac{1}{4}.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $x=\frac{7}{4}$; 2) $x=\frac{3}{4}$; 3) $x=4$;

4) $x=\pm 5$; 5) розв'язків нема.

Готуємося до олімпіади!

ЗАДАЧА. За яких цілих значень x вираз $\sqrt{x^2 - x + 1}$ являє собою ціле число?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Даний вираз є цілим числом, якщо

$$x^2 - x + 1 = n^2,$$

де n — натуральне число. Але тоді квадрати натуральних чисел

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \text{ та } 4x^2 - 4x + 4 = (2n)^2$$

відрізняються на 3, і, таким чином, перший з них дорівнює 1. Звідси,

$$x = 0 \text{ або } x = 1.$$

ВІДПОВІДЬ. $x = 0$ або $x = 1$.

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 8 до 15 хвилин)

I. Обчислити:

1) $\sqrt{110889}$; 2) $\sqrt{11108889}$; 3) $\sqrt{1{,}5129}$;

4) $\sqrt{0{,}0576}$; 5) $\sqrt{0{,}027225}$;

6) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$; 7) $\sqrt{8\frac{1}{36}}$; 8) $\sqrt{6\frac{30}{49}}$; 9) $\sqrt{13\frac{1}{11}}$;

10) $\sqrt{10{,}5625} - \sqrt{4{,}4521}$.

II. Чи мають зміст вирази (і за яких значень букв):

1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{-9}$; 3) $\sqrt{a}$; 4) $\sqrt{a^2}$;

5) $\sqrt{\frac{a^2}{a^2-1}}$; 6) $\sqrt{-\frac{x^2}{x^2+1}}$?

§ 2. ДІЙСНІ ЧИСЛА

Питання-повторення

Які числа ми вивчали, починаючи з першого класу?

ВІДПОВІДЬ. 1) натуральні: 1; 2; 3; ... (позначаються буквою $\mathbb{N}$);
2) від'ємні: -1; -3; -7; ...
3) число «0» (нуль!);
4) цілі: 2; 100; -4; -67; 0; ... (позначаються — $\mathbb{Z}$);
5) дробові: $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; 0,8; 10,06; ...

> *Цілі та дробові числа складають множину* **раціональних** *чисел (позначається буквою $\mathbb{Q}$). Раціональними (від латинського слова «ratio» — відношення, частка) їх називають тому, що кожне з них можна записати за допомогою частки двох цілих чисел.*

ПИТАННЯ. Що означає: $5 \in \mathbb{N}$?

ВІДПОВІДЬ. Число 5 *належить* множині натуральних чисел.

ПИТАННЯ. Що означає: $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$?

ВІДПОВІДЬ. Число $\frac{2}{3}$ *не належить* множині натуральних чисел.

Новий клас дробів — періодичні!

Нехай потрібно розділити 4 на 33. Отримаємо (перевірте!):

$$\frac{4}{33} = 0{,}121212...$$

Нескінченні десяткові дробі такого вигляду називаються **періодичними**.

Запис: $\frac{4}{33} = 0,(12)$.

Читається: нуль цілих, 12 в періоді.

Можна довести, що кожне раціональне число може бути представлене у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу; кожен нескінченний десятковий періодичний дріб є деяким раціональним числом.

Ірраціональні числа

— А вони існують?
— Існують!
— Доведіть!
— Будь ласка!

ТЕОРЕМА. Не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2.

ДОВЕДЕННЯ

Нехай це не так, і існує таке раціональне число, представлене нескоротним дробом $\frac{p}{q}$. Тоді

$$\frac{p^2}{q^2} = 2, \text{ тобто } p^2 = 2q^2. \quad (1)$$

Права частина рівності (1) парна, отже, і p^2 — число парне, таким чином, і p — парне. (Доведіть це самостійно!). Отже, $p = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$). Підставимо цей вираз у рівність (1):

$$4k^2 = 2q^2, \text{ або } 2k^2 = q^2;$$

звідси q — також парне число, але тоді дріб $\frac{p}{q}$ спрощується, що суперечить припущенню. Отже, не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2.

Теорема доведена.

Обчислюючи значення $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π ми отримуємо **нескінченні неперіодичні десяткові дроби**:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135...; \quad \sqrt{3} = 1{,}73205...; \quad \pi = 3{,}1415926...$$

Отже, нескінченні десяткові неперіодичні дроби — це приклад чисел, що *не є раціональними*.

Нескінченний неперіодичний десятковий дріб називається **ірраціональним числом** *(слово «ірраціональний» означає нераціональний, від латинського «ir» — «не»).*

Раціональні та ірраціональні числа створюють множину **дійсних чисел** *(позначається буквою $\mathbb{R}$).*

ЗАДАЧА 1. Представити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$1)\ \frac{1}{7};\quad 2)\ \frac{43}{15};\quad 3)\ \frac{2}{19}.$$

ЗАДАЧА 2. Порівняти:

1) 8,462 та 8,474;
2) 28,034 та 28,027;
3) 2,(37) та 2,373.

ЗАДАЧА 3. Обчислити з точністю до тисячних:

1) $0{,}2+\sqrt{2}$; 2) $-2{,}3+\sqrt{3}$;

3) $\pi-\sqrt{2}$; 4) $1:\pi$; 5) $\pi:\sqrt{7}$.

§ 3. ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ

Властивості арифметичного квадратного кореня прості. Але усе ж зверніть увагу, наскільки вони не схожі на властивості, які вивчалися попередньо: «Новий час — нові пісні», нова операція — нові її властивості.

ВЛАСТИВІСТЬ 1. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ (при $a\geq 0$, $b\geq 0$).

ДОВЕДЕННЯ

Оскільки $a\geq 0$, $b\geq 0$, то $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\geq 0$. Крім того,

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2=ab.$$

ВЛАСТИВІСТЬ 2. $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (при $a\geq 0$, $b>0$).

ВЛАСТИВІСТЬ 3. $\sqrt{a^{2k}}=a^k$ (при $a\geq 0$, $k\in\mathbb{N}$).

ЗАДАЧА 1. Знайти значення виразу:

1) $\sqrt{25\cdot 36}$; 2) $\sqrt{144\cdot 169}$; 3) $\sqrt{0{,}01\cdot 0{,}25}$;

4) $\sqrt{49\cdot 225}$; 5) $\sqrt{5625\cdot 0{,}09}$; 6) $\sqrt{4\cdot 16\cdot 100}$;

7) $\sqrt{12\cdot 12\cdot 12\cdot 12}$; 8) $\sqrt{40\cdot 90}$; 9) $\sqrt{900\cdot 81}$;

10) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 11) $\sqrt{\frac{25}{81}}$; 12) $\sqrt{17^2-8^2}$;

13) $\sqrt{45{,}8^2-44{,}2^2}$; 14) $\sqrt{5^2-4^2}$; 15) $\sqrt{\left(1\frac{1}{16}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

4) $\sqrt{49\cdot 225}=\sqrt{49}\cdot\sqrt{225}=7\cdot 15=105$.

(І тільки так!!! Не треба спочатку перемножувати під коренем, а потім добувати корінь на калькуляторі!)

ВІДПОВІДЬ. 1) 30; 2) 156; 3) 0,05; 4) 105; 5) 22,5;
6) 80; 7) 144; 8) 60; 9) 270; 10) $2\frac{1}{3}$;
11) $\frac{5}{9}$; 12) 15; 13) 12; 14) 3; 15) $\frac{15}{16}$.

ЗАДАЧА 2. Представити вираз у вигляді добутку коренів:

$$1)\ \sqrt{21};\quad 2)\ \sqrt{9};\quad 3)\ \sqrt{6b};\quad 4)\ \sqrt{3(a+b)};\quad 5)\ \sqrt{1000}.$$

ЗАДАЧА 3. Представити вираз у вигляді частки коренів:

$$1)\ \sqrt{\frac{3}{5}};\quad 2)\ \sqrt{\frac{3}{17}};\quad 3)\ \sqrt{\frac{4}{p}};\quad 4)\ \sqrt{\frac{a}{c-d}}.$$

ЗАДАЧА 4. Знайти значення виразу:

$$1)\ \sqrt{20}\cdot\sqrt{45};\quad 2)\ \sqrt{10}\cdot\sqrt{40};\quad 3)\ \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{6}{25}};\quad 4)\ \sqrt{30}\cdot\sqrt{120};$$

$$5)\ \sqrt{\frac{4}{25}\cdot\frac{49}{81}\cdot\frac{121}{144}};\quad 6)\ \sqrt{\frac{16}{25}\cdot\frac{625}{1225}\cdot\frac{1225}{3025}};\quad 7)\ \sqrt{\frac{121}{625}\cdot\frac{169}{9025}\cdot\frac{441}{900}}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ \sqrt{20}\cdot\sqrt{45}=\sqrt{20\cdot 45}=\sqrt{900}=30;$$

$$3)\ \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{6}{25}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6}{3\cdot 25}}=\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}.$$

ЗАДАЧА 5. Довести, що:

$$1)\ 5\sqrt{\frac{a}{25}}=\sqrt{a};\quad 2)\ \sqrt{x}=\frac{1}{4}\sqrt{16x}.$$

ТЕОРЕМА. При будь-якому значенні a є істинною рівність

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

ДОВЕДЕННЯ

1) Нехай $a=0$. За означенням арифметичного квадратного кореня $\sqrt{a^2}=0$.

2) Якщо $a>0$, то $\sqrt{a^2}=a$.

3) Якщо $a<0$, то $-a>0$, тому $\sqrt{a^2}=-a$. Тобто

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases}a, \text{ якщо } a\ge 0\\ -a, \text{ якщо } a<0\end{cases}.$$

Але (згадай!) $|a|=\begin{cases}a, \text{ якщо } a\ge 0\\ -a, \text{ якщо } a<0\end{cases}.$

Звідси $\sqrt{a^2}=|a|$. Теорема доведена.

ПРИКЛАДИ. 1) $\sqrt{15^2}=15$; 2) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$;

3) $\sqrt{(-8)^2}=|-8|=8$; 4) $\sqrt{(-0{,}08)^2}=0{,}08$;

5) $\sqrt{16^2a^{10}}=16|a^5|$; 6) $\sqrt{2^{10}a^8}=2^5a^4$;

7) (!!!) $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=|a|\sqrt{b}$;

8) $\sqrt{2^4x^4y^{40}c^{400}}=\sqrt{2^4}\cdot\sqrt{x^4}\cdot\sqrt{y^{40}}\cdot\sqrt{c^{400}}=$

$=2^2x^2y^{20}c^{200}$

ЗАДАЧА 6. Обчислити:

1) $\sqrt{(0{,}2)^2}$; 2) $\sqrt{(-0{,}8)^2}$; 3) $\sqrt{(-0{,}4)^2}$; 4) $3\sqrt{17^2}$;

5) $0{,}3\sqrt{(-24)^2}$; 6) $2\sqrt{(-13)^2}$; 7) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$;

8) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^4}$; 9) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^6}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 0,2; 2) 0,8; 3) 0,4; 4) 51; 5) 7,2; 6) 26;
7) $\sqrt{2}-1$; 8) $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$; 9) $\left(\sqrt{2}-1\right)^3$.

ЗАДАЧА 7. Спростити:

1) $\sqrt{a^2b^{10}}$; 2) $\sqrt{x^2y^{18}}$; 3) $\sqrt{(-a)^2\cdot b^{10}}$;

4) $\sqrt{(-x)^8\cdot 7^8\cdot y^{10}}$; 5) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^8a^8(-b)^8}$;

6) $\sqrt{25x^2}$ при $x>0$; 7) $\sqrt{36p^2}$ при $p<0$;

8) $\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2\cdot x^2}$ при $x<0$;

9) $-\sqrt{225a^2}$ при $a>0$; 10) $\sqrt{(5-a)^2}$ при $a\le 5$;

11) $\sqrt{(5-a)^2}$ при $a\ge 5$; 12) $\sqrt{(x-y)^2}$ при $x<y$;

13) $\sqrt{(2a-1)^2}$ при $a>\frac{1}{2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $|a|\cdot|b^5|$; 3) $|a|\cdot|b^5|$; 5) $\left(\frac{1}{2}\right)^4a^4b^4$;

6) $5x$; 8) $x\left(1-\sqrt{5}\right)$; 10) $5-a$; 11) $a-5$.

УВАГА! 1) Запам'ятай тотожність $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

2) Запам'ятай, що $\sqrt{-a^2}$ має сенс тільки якщо $a = 0$.

А тепер варто згадати, що називається **тотожними виразами**.

ЗАДАЧА 8. Замінити вирази тотожними:

1) $\left(\sqrt{a-1}\right)^2$; 2) $\sqrt{l^2}$; 3) $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$; 4) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^4}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $a-1$; 2) $|l|$; 3) $\sqrt{3}-1$; 4) $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$.

ЗАДАЧА 9. Знайти значення виразу:

1) $\sqrt{2x+5}$, при $x = 2$; $x = -2$; $x = 5{,}5$;

2) $\sqrt{26-x}$, при $x = 1$; $x = 17$; $x = 25$; $x = 30$.

ЗАДАЧА 10. Спростити вирази:

1) $\sqrt{a^{20}}$; 2) $\sqrt{p^8}$, при $p < 0$; 3) $0{,}3\sqrt{m^4}$;

4) $\sqrt{0{,}25a^{16}}$, при $a < 0$; 5) $\sqrt{144t^6}$, при $t < 0$.

ВІДПОВІДЬ. 1) a^{10}; 2) p^4; 3) $0{,}3\,m^2$; 4) $0{,}5\,a^8$; 5) $-12t^3$.

ЗАДАЧА 11. Користуючись правилом добування коренів з добутку, добути корінь з чисел:

1) $\sqrt{24336}$; 2) $\sqrt{30625}$; 3) $\sqrt{26244}$; 4) $\sqrt{27225}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Оскільки

$$24336 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 13\cdot 13 = 12^2\cdot 13^2,$$

маємо

$$\sqrt{24336} = \sqrt{12^2\cdot 13^2} = 12\cdot 13 = 156;$$

2) Аналогічно,

$$\sqrt{30625} = \sqrt{7^2\cdot 25^2} = 7\cdot 25 = 175;$$

3) $\sqrt{26244} = \sqrt{9^2\cdot 18^2} = 9\cdot 18 = 162$;

4) $\sqrt{27225} = \sqrt{11^2\cdot 15^2} = 11\cdot 15 = 165$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 156; 2) 175; 3) 162; 4) 165.

Де помилка?
(популярні задачі)

ЗАДАЧА 1. Маємо два довільних числа m та n, причому $n > m$. Знайти помилку в таких перетвореннях:

$$m^2 - 2mn + n^2 = n^2 - 2mn + m^2;$$

$$(m-n)^2 = (n-m)^2$$

$$\sqrt{(m-n)^2} = \sqrt{(n-m)^2};$$

$$m - n = n - m; \quad 2m = 2n; \quad m = n,$$

тобто два довільних числа рівні між собою (?!).

РОЗВ'ЯЗАННЯ

При $n > m$

$$\sqrt{(m-n)^2} = |m-n| = n - m;$$

$$\sqrt{(n-m)^2} = |n-m| = n - m.$$

ЗАДАЧА 2. Обчислюючи значення виразу $a + \sqrt{1 - 2a + a^2}$ при $a = 5$, учні отримали різні відповіді. Один з учнів обчислював так:

$$a + \sqrt{1 - 2a + a^2} = a + \sqrt{(1-a)^2} = a + 1 - a = 1.$$

Другий, підставивши замість a його значення, що дорівнює 5, отримав:

$$5 + \sqrt{1 - 10 + 25} = 5 + 4 = 9.$$

Яка з цих відповідей істинна і де помилка?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Діставши вираз $a + \sqrt{(1-a)^2}$, потрібно було записати:

$$a + \sqrt{(1-a)^2} = a + |1 - a|,$$

і оскільки

$$a > 1 \ (a = 5),$$

то

$$a + |1 - a| = a + a - 1 = 10 - 1 = 9.$$

Отже, перша відповідь хибна, а друга — істинна.

ЗАДАЧА 3. Знайти помилку в «доведенні» того, що $2\cdot 2=5$: Візьмемо рівність:

$$16-36=25-45.$$

Додамо до обох частин цієї рівності по $20\frac{1}{4}$, дістанемо:

$$16-36+20\frac{1}{4}=25-45+20\frac{1}{4}.$$

Звідси:

$$4^2-2\cdot 4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot 5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2;$$

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2.$$

Добуваючи квадратний корінь з обох частин рівності, маємо:

$$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2};\ \text{звідси}\ 4=5,\ \text{або}\ 2\cdot 2=5\ (!?)$$

Помилку знайдіть самі!

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 10 до 20 хвилин)

I. Обчислити:

1) $\sqrt{25\cdot 36}$; 2) $\sqrt{100\cdot 49}$; 3) $\sqrt{16\cdot 144}$; 4) $\sqrt{169\cdot 64}$;

5) $\sqrt{225\cdot 121}$; 6) $\sqrt{2025\cdot 81}$; 7) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; 8) $\sqrt{\frac{625}{2025}}$;

9) $\sqrt{\frac{9}{49}\cdot\frac{25}{144}\cdot\frac{36}{625}}$.

II. Добути корені:

1) $\sqrt{3^2+4^2}$; 2) $\sqrt{117^2-108^2}$; 3) $\sqrt{-(9)^2}$; 4) $\sqrt{(-9)^2}$;

5) $\sqrt{-a^2}$; 6) $\sqrt{(-a)^2}$; 7) $\sqrt{-0{,}25}$; 8) $\sqrt{-(x-y)^2}$.

III. Спростити:

1) $\sqrt{(9-x)^2}$ при $x\le 9$; 2) $\sqrt{(9-x)^2}$ при $x\ge 9$;

3) $\sqrt{(x-2y)^2}$ при $x<2y$; 4) $\sqrt{(5a+10)^2}$ при $a>-2$.

§ 4. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНІ КОРЕНІ

Вивчення властивостей арифметичного квадратного кореня дозволяє віддатися «звичній справі» — розв'язанню прикладів. Ми розглянемо перетворення виразів, що містять квадратні корені. І хоча це новий тип задач, ми знову будемо виконувати *тотожні перетворення*. Правда, тепер вони грунтуються на використанні властивостей арифметичного квадратного кореня.

I. Винесення множника з-під знака кореня. Внесення множника під знак кореня

Винесення множника з-під знака кореня ґрунтується на властивості кореня добутку:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ (при } a \geq 0,\ b \geq 0).$$

ПИТАННЯ. Для чого?

ВІДПОВІДЬ. Щоб тотожно спрощувати вирази.

ПИТАННЯ. Як?

ВІДПОВІДЬ. Представити підкореневий вираз у вигляді співмножників так, щоб одного з них зручно було б використати для добування квадратного кореня (a^2; a^4; $(a \pm b)^2$ і т. д.).

ПИТАННЯ. Оскільки доведеться добувати квадратний корінь з a^2 або з a^4, то знову треба буде користуватися рівністю

$$\sqrt{a^2} = |a|?$$

ВІДПОВІДЬ. Так, інакше задача буде розв'язана невірно.

Приклади на винесення множника з-під знака кореня:

1) $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$;

2) $\sqrt{a^9} = \sqrt{a^8 \cdot a} = \sqrt{a^8} \cdot \sqrt{a} = |a^4| \cdot \sqrt{a} = a^4\sqrt{a}$ $(a \geq 0)$;

3) $\sqrt{3a^2b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{3b} = |a|\sqrt{3b}$ $(b \geq 0)$.

Внесення множника під знак квадратного кореня також ґрунтується на властивості коренів.

ПИТАННЯ. Чи можна перевірити правильність винесення множника з-під знака квадратного кореня?

ВІДПОВІДЬ. Так. Для цього користуються *внесенням множника під знак квадратного кореня*. Це тотожне перетворення обернене винесенню множника з-під знака квадратного кореня.

ПРИКЛАДИ на внесення множника під знак кореня:

1) $3\sqrt{5}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45}$;

2) $a\sqrt{c}=\sqrt{a^2c}$ $(a>0;\ c>0)$;

3) $a\sqrt{c}=-\sqrt{a^2c}$ $(a<0;\ c>0)$.

УВАГА! Вираз $a\sqrt{x}$ може бути додатним чи від'ємним, в залежності від знака a. Після внесення a під корінь вираз $\sqrt{a^2x}$ **тільки невід'ємний**. Тому розглядаються два випадки:

$$a\sqrt{x}=\begin{cases}\sqrt{a^2x}, \text{ якщо } a\geq 0\\ -\sqrt{a^2x}, \text{ якщо } a<0\end{cases}.$$

ЗРАЗОК. $$-a\sqrt{3}=\begin{cases}-\sqrt{3a^2}, \text{ якщо } a\geq 0\\ \sqrt{3a^2}, \text{ якщо } a<0\end{cases}.$$

ЗАДАЧА 1. Винести множник з-під знака кореня і перевірити результат внесенням множника під знак кореня:

1) $\sqrt{50}$; 2) $\sqrt{27}$; 3) $\sqrt{32}$; 4) $\sqrt{108}$; 5) $\sqrt{98}$; 6) $\sqrt{128}$;

7) $\sqrt{280}$; 8) $\sqrt{605}$; 9) $\sqrt{490}$; 10) $\sqrt{\frac{7}{8}}$; 11) $\sqrt{\frac{12}{27}}$; 12) $\sqrt{0{,}5}$;

13) $\sqrt{2b^2}$ $(b>0;\ b<0)$; 14) $\sqrt{3x^2}$ $(x>0;\ x<0)$; 15) $\sqrt{40y^4}$;

16) $\sqrt{8a^3}$ $(a>0;\ a<0)$; 16) $3\sqrt{4a^2bc^3}$ $(a>0;\ c<0)$;

17) $\frac{3a}{4}\sqrt{18a^3b}$ $(a<0)$; 18) $\sqrt{\frac{4}{9}p^3}$; 19) $\sqrt{\frac{25}{36}a^7}$; 20) $\sqrt{\frac{121}{144}x^5}$.

ЗРАЗОК. **Розв'язання.** $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

Перевірка. $5\sqrt{2}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{50}$.

ЗАДАЧА 2. Винести множник з-під знака кореня і перевірити результат внесенням множника під знак кореня:

1) $\sqrt{\frac{20}{27}b^9}$; 2) $\sqrt{\frac{a^2b}{9}}$; 3) $m^2\sqrt{\frac{25a^3}{49b^2}}$; 4) $\sqrt{\frac{7(a^2-2ab+b^2)}{81(a^2+2ab+b^2)}}$;

5) $\sqrt{a^5(b-3)^2}$ при $a>0$; $b\geq 3$; 6) $\sqrt{a^3(3-a)^2}$ при $0<a\leq 3$.

ЗАДАЧА 3. Внести множник під знак кореня[1]:

1) $2\sqrt{5}$; 2) $3\sqrt{4}$; 3) $4\sqrt{7}$; 4) $1{,}2\sqrt{3}$; 5) $2{,}2\sqrt{7}$; 6) $4{,}2\sqrt{2}$;

7) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; 8) $\frac{2}{5}\sqrt{2}$; 9) $\frac{143}{2435}\sqrt{1}$ (жарт!); 10) $2\frac{1}{2}\sqrt{2}$;

11) $a\sqrt{2}$ ($a>0$; $a<0$); 12) $p\sqrt{2}$; 13) $2m\sqrt{mn}$; 14) $ab\sqrt{\frac{b}{a}}$;

15) $2xy\sqrt{\frac{7x}{3y}}$; 16) $p^4\sqrt{\frac{c}{p^6}}$; 17) $(a-b)\sqrt{\frac{p}{a^2-b^2}}$;

18) $\frac{7}{x+y}\sqrt{\frac{3x^2-3y^2}{2}}$; 19) $ab\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$; 20) $\frac{1}{a}\sqrt{a^2-a}$;

21) $\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{a^2+ab}{a^2-2ab+b^2}}$; 22) $(x-y)\sqrt{-\frac{2}{x-y}}$; 23) $a^4\sqrt{\frac{1}{a^3}}$;

24) $mn\sqrt{\frac{m}{n}}$ ($m<0$); 25) $(2-a)\sqrt{\frac{2a}{a-2}}$ при $a>2$;

26) $(a-b)\sqrt{\frac{3a}{b^2-a^2}}$ при $0<a<b$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

25) Оскільки $a>2$, то $2-a<0$. Тому

$$(2-a)\sqrt{\frac{2a}{a-2}}=-\sqrt{\frac{2a(2-a)^2}{a-2}}=-\sqrt{\frac{2a(a-2)^2}{a-2}}=-\sqrt{2a(a-2)}.$$

26) Оскільки $0<a<b$, то

$$(a-b)\sqrt{\frac{3a}{b^2-a^2}}=-\sqrt{\frac{3a(b-a)^2}{(b-a)(b+a)}}=-\sqrt{\frac{3a(b-a)}{a+b}}.$$

[1] Якщо це не вказано у кожному окремому випадку, вважаємо, що букви додатні.

ЗАДАЧА 4. Яке число більше:

1) $2\sqrt{5}$ чи $5\sqrt{2}$; 2) $7\sqrt{3}$ чи $\frac{1}{2}\sqrt{1026}$;

3) $\frac{1}{5}\sqrt{200}$ чи $10\sqrt{\frac{1}{5}}$; 4) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}$ чи $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}$?

ЗАДАЧА 5. Розташувати в порядку зростання числа:

1) $2\sqrt{3}$; $5\sqrt{6}$; $\sqrt{29}$; $4\sqrt{2}$; 2) $5\sqrt{2}$; $\sqrt{58}$; $4\sqrt{14}$; $2\sqrt{21}$.

ЗАДАЧА 6. Спростити:

1) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$; 2) $\sqrt{\frac{p}{2}+\frac{p}{4}}$; 3) $\sqrt{\frac{m^2}{3}+\frac{m^2}{9}}$; 4) $\sqrt{\frac{a^2}{c^2}+\frac{3a^2}{c^2}}$.

ЗАДАЧА 7. Довести, що:

1) $(a-1)\sqrt{\frac{3a}{1-a^2}} = -\sqrt{\frac{3a(1-a)}{1+a}}$ при $0<a<1$;

2) $x+\sqrt{(x-1)^2} = \begin{cases} 2x-1, \text{ якщо } x \geq 1 \\ 1, \text{ якщо } x<1 \end{cases}$;

3) $(m-n)\sqrt{\frac{m+n}{(m-n)^2}} = \begin{cases} \sqrt{m+n}, \text{ якщо } m>n \\ -\sqrt{m+n}, \text{ якщо } m<n \end{cases}$.

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 8 до 15 хвилин)

I. Винести множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{500}$; 2) $\sqrt{600}$; 3) $\sqrt{1000}$; 4) $\sqrt{1{,}25}$;

5) $\sqrt{ay^2}$ при $y>0$; 6) $\sqrt{x^6}$ при $x<0$; 8) $\sqrt{\frac{3(x+y)^2}{16}}$;

7) $\frac{2c}{3}\sqrt{49c^6d^3}$ $(c>0;\ d>0)$; 9) $\sqrt{x^6(a-2)^4}$ при $x>0$; $a \geq 2$.

II. Внести множник під знак кореня:

1) $5\sqrt{12}$; 2) $0{,}2\sqrt{5}$; 3) $-p^4\sqrt{7}$;

4) $(x-1)\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$ при $0<x<1$;

5) $\frac{3}{a-b}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$ при $0<a<b$.

II. Перетворення виразів з квадратними коренями

Розглянемо тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені. Задач буде багато, і всі вони корисні, усі мають бути розв'язані. Без оволодіння технікою роботи з коренями подальший шлях закритий!

ЗАДАЧА 1. Виконати дії:

1) $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}+3\sqrt{32}-\sqrt{50}$;

2) $2\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{72}-\sqrt{80}$;

3) $\left(0{,}5\sqrt{24}-3\sqrt{40}\right)-\left(\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{1000}\right)$;

4) $\left(\sqrt{32}+\sqrt{0{,}5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{48}\right)$;

5) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{4{,}5}-\sqrt{12{,}5}-0{,}5\sqrt{200}+\sqrt{242}+6\sqrt{1\frac{1}{8}}-\sqrt{24{,}5}$;

6) $\frac{1}{2}\sqrt{48}-2\sqrt{75}-\sqrt{54}+5\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}+4{,}5\sqrt{2\frac{2}{3}}+2\sqrt{27}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}+3\sqrt{32}-\sqrt{50}=$

$=2\sqrt{9\cdot 2}+3\sqrt{4\cdot 2}+3\sqrt{16\cdot 2}-\sqrt{25\cdot 2}=$

$=6\sqrt{2}+6\sqrt{2}+12\sqrt{2}-5\sqrt{2}=19\sqrt{2}$;

2) $2\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{72}-\sqrt{80}=$

$=2\sqrt{4\cdot 5}-\sqrt{9\cdot 5}+3\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{36\cdot 2}-\sqrt{16\cdot 5}=$

$=4\sqrt{5}-3\sqrt{5}+9\sqrt{2}+6\sqrt{2}-4\sqrt{5}=15\sqrt{2}-3\sqrt{5}$;

3) $\left(0{,}5\sqrt{24}-3\sqrt{40}\right)-\left(\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{1000}\right)=$

$=0{,}5\sqrt{24}-3\sqrt{40}-\sqrt{150}-\sqrt{54}+\sqrt{1000}=$

$=0{,}5\sqrt{4\cdot 6}-3\sqrt{4\cdot 10}-\sqrt{25\cdot 6}-\sqrt{9\cdot 6}+\sqrt{100\cdot 10}=$

$=\sqrt{6}-6\sqrt{10}-5\sqrt{6}-3\sqrt{6}+10\sqrt{10}=4\sqrt{10}-7\sqrt{6}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $19\sqrt{2}$; 2) $15\sqrt{2}-3\sqrt{5}$; 3) $4\sqrt{10}-7\sqrt{6}$;
4) $4\frac{1}{4}\sqrt{2}+3\frac{1}{3}\sqrt{3}$; 5) $6\frac{1}{2}\sqrt{2}$; 6) 0.

ЗАДАЧА 2. Спростити вирази:

1) $\frac{1}{4}\sqrt{18}+\frac{1}{3}\sqrt{8}-\frac{1}{6}\sqrt{50}$; 2) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt{48}$;

3) $7\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{7}$;

4) $0{,}1\sqrt{200}-2\sqrt{0{,}08}+4\sqrt{0{,}5}+0{,}4\sqrt{50}$;

5) $3\sqrt{a}-5\sqrt{a}-2\sqrt{b}-3\sqrt{b}$;

6) $-3\sqrt{x}-2\sqrt{y}-\frac{1}{2}\sqrt{4}+\sqrt{x}-5$;

7) $\sqrt{25a^2}-\sqrt{36b^2}-\sqrt{144a^2}+\sqrt{4a^2}$;

8) $\sqrt{121a}-\sqrt{36b}-\sqrt{9a}+\sqrt{81b}$;

9) $5\sqrt{a}-3\sqrt{25a}+2\sqrt{36a}+2\sqrt{9a}$;

10) $4a\sqrt{63ab^2}-3\sqrt{112a^3b^2}+2ab\sqrt{343ab}-5b\sqrt{28a^3b}$;

11) $5\sqrt{4x}+4\sqrt{x}-6\sqrt{9x}-8\sqrt{2x}+8\sqrt{\frac{1}{4}x}+4\sqrt{8x}+1$;

12) $3\sqrt{8x}-\sqrt{18x}-5\sqrt{\frac{1}{2}x}+\sqrt{4\frac{1}{2}x}+\sqrt{50x}-\sqrt{32x}+\sqrt{72x}$.

ВІДПОВІДЬ. 9) $8\sqrt{a}$; 10) $4ab\sqrt{7ab}$; 11) 1; 12) $9\sqrt{2x}$.

ЗАДАЧА 3. Довести, що

$$6m\sqrt{54m^2n}-7\sqrt{96m^3n^3}+4mn\sqrt{294mn}-n\sqrt{1944mn^2}=$$
$$=18\sqrt{6mn}\left(\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}\right).$$

ЗАДАЧА 4. Довести, що значення виразу

$$A=\sqrt{(1+x)^2y}+\sqrt{(1-x)^2y}-\sqrt{(x-y)^2}-\sqrt{4y}+\sqrt{(x+y)^2}$$

при $1>x>y$ не залежить від x.

ДОВЕДЕННЯ

$$A=|1+x|\sqrt{y}+|1-x|\sqrt{y}-|x-y|-2\sqrt{y}+|x+y|.$$

Беручи до уваги обмеження, дістанемо:

$$(1+x)\sqrt{y}+(1-x)\sqrt{y}-(x-y)-2\sqrt{y}+x+y=$$
$$=\sqrt{y}(1+x+1-x)-x+y-2\sqrt{y}+x+y=2y.$$

ЗАДАЧА 5. Довести, що значення виразу

$$\sqrt{4a^2-4b^2}+\sqrt{(a+b)^2}-5\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{9a^2-9b^2}-\sqrt{(a-b)^2}$$

при $a>b$ не залежить від a.

ДОВЕДЕННЯ

Маємо

$$\sqrt{4a^2-4b^2}+\sqrt{(a+b)^2}-5\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{9a^2-9b^2}-\sqrt{(a-b)^2}=$$
$$=2\sqrt{a^2-b^2}+|a+b|-5\sqrt{a^2-b^2}+3\sqrt{a^2-b^2}-|a-b|=$$
$$=a+b-a+b=2b.$$

ЗАДАЧА 6. Спростити:

$$\sqrt{2x^2-4x+2}-\sqrt{4y^2-8y+4}+$$
$$+\sqrt{2x^2+4x+2}+\sqrt{9y^2-18y+9}\quad (x>1; y>1).$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\sqrt{2x^2-4x+2}-\sqrt{4y^2-8y+4}+\sqrt{2x^2+4x+2}+\sqrt{9y^2-18y+9}=$$
$$=\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2}-2\sqrt{(y-1)^2}+\sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2}+3\sqrt{(y-1)^2}=$$
$$=\sqrt{2}|x-1|-2|y-1|+\sqrt{2}|x+1|+3|y-1|=$$
$$=\sqrt{2}(x-1)-2y+2+\sqrt{2}(x+1)+3y-3=$$
$$=\sqrt{2}x-\sqrt{2}-2y+2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}+3y-3=$$
$$=2x\sqrt{2}+y-1.$$

ЗАДАЧА 7. Виконати дії:

$$3a\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}-3x\sqrt{\frac{(a-x)^2}{a^2-x^2}}-2a\sqrt{\frac{(a+x)(a-x)}{(a+x)^2}}+\frac{4x}{a+x}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{4}}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $3x\sqrt{\dfrac{(a-x)^2}{a^2-x^2}}=3x\sqrt{\dfrac{(a-x)^2}{(a-x)(a+x)}}=3x\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$;

2) $2a\sqrt{\dfrac{(a+x)(a-x)}{(a+x)^2}}=2a\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$;

3) $\frac{4x}{a+x}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{4}}=\frac{4x}{2\sqrt{(a+x)^2}}\sqrt{(a-x)(a+x)}=2x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}};$

4) $3a\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}-3x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}-2a\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}+2x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=$

$$=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}(3a-3x-2a+2x)=$$

$$=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\cdot(a-x)=$$

$$=\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}\cdot\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}}(a-x)=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a+x}\cdot(a-x).$$

ЗАДАЧА 8. Довести, що при $x>y>0$

$$2y\sqrt{1-y}+x\sqrt{\frac{1}{x-y}}-x\sqrt{\frac{a}{ax-ay}}-\sqrt{x^3-x^2y}+$$

$$+\sqrt{x^2y\left(\frac{x}{y}-1\right)}-y^2\sqrt{\frac{4(1-y)}{y^2}}=0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

1) $\sqrt{\frac{a}{ax-ay}}=\sqrt{\frac{a}{a(x-y)}}=\sqrt{\frac{1}{x-y}};$

2) $\sqrt{x^3-x^2y}=x\sqrt{x-y};$

3) $\sqrt{x^2y\left(\frac{x}{y}-1\right)}=x\sqrt{y\cdot\frac{x-y}{y}}=x\sqrt{x-y};$

4) $y^2\sqrt{\frac{4(1-y)}{y^2}}=2y\sqrt{1-y}.$

5) Врешті маємо:

$$2y\sqrt{1-y}+x\cdot\frac{1}{\sqrt{x-y}}-x\cdot\frac{1}{\sqrt{x-y}}-$$

$$-x\sqrt{x-y}+x\sqrt{x-y}-2y\sqrt{1-y}=0,$$

що й треба було довести.

ЗАДАЧА 9. Обчислити:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{25}$; 3) $3\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{14}$;

4) $\frac{3}{4}\sqrt{24}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}$; 5) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{ab}$; 6) $\sqrt{3m}\cdot\sqrt{3}$;

7) $3\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{a}}$; 8) $\frac{3}{4}\sqrt{2\frac{1}{2}a}\cdot\sqrt{\frac{0{,}4}{a}}$; 9) $b\sqrt{3\frac{1}{3}b}\cdot c\sqrt{2c}$;

10) $0{,}5\sqrt{0{,}2a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}$; 11) $\left(\sqrt{12}-3\sqrt{75}\right)\cdot\sqrt{3}$;

12) $\left(\sqrt{6}-3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{8}\right)\cdot 2\sqrt{6}$;

13) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{a}+\frac{3}{4}\sqrt{a^3}-\frac{7}{8}\sqrt{a^5}\right)\cdot\left(-16\sqrt{a^3}\right)$;

14) $\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}\right)\cdot\sqrt{ab}$;

15) $\left(\sqrt{7}+5\right)\left(\sqrt{7}+5\right)$; 16) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$;

17) $\left(5-\sqrt{15}\right)\left(3+\sqrt{15}\right)$; 18) $\left(7\sqrt{5}-4\right)\left(2\sqrt{5}-1\right)$;

19) $\left(2a+3\sqrt{x}\right)\left(3a-2\sqrt{x}\right)$; 20) $\left(m-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)\left(m+\sqrt{mn}\right)$;

21) $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$;

22) $\left(3+2\sqrt{6}-\sqrt{33}\right)\left(\sqrt{22}+\sqrt{6}+4\right)$;

23) $\left(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{1{,}6}+3\sqrt{0{,}4}\right)$;

24) $\left(p+\sqrt{2}\right)\left(p-\sqrt{2}\right)$;

25) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$;

26) $\left(\sqrt{15}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{15}-\sqrt{7}\right)$;

27) $\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)$.

ВІДПОВІДЬ. 11) -39; 12) $12-18\sqrt{2}+16\sqrt{3}$;
13) $14a^4-12a^3-8a^2$; 14) $ab+2b-a+1$;
19) $6a^2+5a\sqrt{x}-6x$; 20) $m^2-n+(m-1)\sqrt{mn}$;
21) $4\sqrt{6}-8\sqrt{3}$; 22) 24; 23) 8.

ЗАДАЧА 10. Спростити вирази:

1) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{5+3\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}-1}{6}$;

3) $\frac{3\sqrt{6}-2\sqrt{5}+1}{18}-\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{5}-2}{6}-\frac{2\sqrt{2}-3}{15}$;

4) $\frac{3\sqrt{6}-2\sqrt{5}+1}{8}-\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{5}-2}{6}-\frac{4\sqrt{6}+5\sqrt{5}-1}{12}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\frac{7+\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{17+7\sqrt{2}}{12}$;

3) $\frac{-12\sqrt{2}+53+35\sqrt{5}}{90}$; 4) $\frac{13-3\sqrt{6}-4\sqrt{5}}{24}$.

ЗАДАЧА 11. Довести рівності:

1) $\left(\sqrt{0{,}6}+\sqrt{0{,}3}-\sqrt{0{,}9}\right)\left(\sqrt{0{,}2}+2\sqrt{0{,}2}+2\sqrt{0{,}3}+\sqrt{0{,}6}\right)=1{,}2$;

2) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{2}{3}}-4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(3\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)=-\sqrt{2}$.

ЗАДАЧА 12. У скільки разів $\sqrt{45}$ більший за $\sqrt{5}$?

ВІДПОВІДЬ. У 3 рази.

ЗАДАЧА 13. Обчислити:

1) $\sqrt{18}:\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{40}:\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{200}:\sqrt{8}$;

4) $\sqrt{180}:\sqrt{5}$; 5) $8\sqrt{2}:4$; 6) $4\sqrt{2}:2\sqrt{2}$;

7) $\left(10\sqrt{48}-6\sqrt{27}+4\sqrt{12}\right):\sqrt{3}$;

8) $\left(15\sqrt{50}+5\sqrt{200}-3\sqrt{450}\right):\sqrt{10}$.

ВІДПОВІДЬ. 7) 30; 8) $16\sqrt{5}$.

ЗАДАЧА 14. Виконати дії:

1) $\left(\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}\right):\sqrt{xy}\quad(x,y>0)$;

2) $\left(\sqrt{a^5b^3}-\sqrt{a^3b^5}\right):\sqrt{a^3b^3}\quad(a,b>0)$;

3) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x}{2}}\right):\sqrt{x}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $\left(\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}\right):\sqrt{xy}=\sqrt{x^3y:xy}+\sqrt{xy^3:xy}=$

$=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=|x|+|y|=x+y;$

2) $\left(\sqrt{a^5b^3}-\sqrt{a^3b^5}\right):\sqrt{a^3b^3}=\sqrt{a^5b^3:a^3b^3}-\sqrt{a^3b^5:a^3b^3}=$

$=\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}=|a|-|b|=a-b;$

3) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x}{2}}\right):\sqrt{x}=\sqrt{x:x}-\sqrt{\frac{x}{2}:x}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$

ЗАДАЧА 15. Розкласти на множники:

1) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{15}-\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{21}+\sqrt{14}$; 4) $\sqrt{20}-\sqrt{30}$;
5) $\sqrt{ab}-\sqrt{ac}$; 6) $\sqrt{a+b}-\sqrt{a^2-b^2}$; 7) $5+\sqrt{5}$; 8) $2-\sqrt{2}$;
9) $a+\sqrt{a}$; 10) $ab-\sqrt{a}$; 11) $a+b+\sqrt{a+b}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $\sqrt{6}+\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot3}+\sqrt{3}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+1\right);$

2) $\sqrt{15}-\sqrt{10}=\sqrt{3\cdot5}-\sqrt{2\cdot5}=\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right);$

3) $\sqrt{21}+\sqrt{14}=\sqrt{3\cdot7}+\sqrt{2\cdot7}=\sqrt{7}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right);$

4) $\sqrt{20}-\sqrt{30}=\sqrt{2\cdot10}-\sqrt{3\cdot10}=\sqrt{10}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right);$

5) $\sqrt{ab}-\sqrt{ac}=\sqrt{a\cdot b}-\sqrt{a\cdot c}=\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right);$

6) $\sqrt{a+b}-\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a+b}-\sqrt{(a-b)(a+b)}=$

$=\sqrt{a+b}\left(1-\sqrt{a-b}\right);$

9) $a+\sqrt{a}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right);$ 10) $ab-\sqrt{a}=\sqrt{a}\left(b\sqrt{a}-1\right);$

11) $a+b+\sqrt{a+b}=\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a+b}+1\right).$

ВІДПОВІДЬ. 1) $\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+1\right)$; 2) $\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$; 3) $\sqrt{7}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$;
4) $\sqrt{10}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$; 5) $\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)$;
6) $\sqrt{a+b}\left(1-\sqrt{a-b}\right)$; 9) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)$;
10) $\sqrt{a}\left(b\sqrt{a}-1\right)$; 11) $\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a+b}+1\right)$.

ЗАДАЧА 16. Розкласти на множники:

1) $a+b-\sqrt{a^2-b^2}$; 2) $\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a-b}$;

3) $\sqrt{a^3+b^3}+\sqrt{a^2-b^2}$; 4) $\sqrt{ax}-\sqrt{by}+\sqrt{bx}-\sqrt{ay}$;

5) $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}+\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $a+b-\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)$;

2) $\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a-b}=\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a-b}+\sqrt{a-b}=$

$=\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a+b}+1\right)$;

3) $\sqrt{a^3+b^3}+\sqrt{a^2-b^2}=$

$=\sqrt{(a+b)(a^2-ab+b^2)}+\sqrt{(a-b)(a+b)}=$

$\sqrt{a+b}\cdot\left(\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{a-b}\right)$;

4) $\sqrt{ax}-\sqrt{by}+\sqrt{bx}-\sqrt{ay}=\sqrt{ax}-\sqrt{ay}-\sqrt{by}+\sqrt{bx}=$

$=\sqrt{a}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)$; 2) $\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a+b}+1\right)$;

3) $\sqrt{a+b}\cdot\left(\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{a-b}\right)$;

4) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$.

ЗАДАЧА 17. Спростити дроби:

1) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}$;

3) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$; 4) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\frac{1}{7}\sqrt{21}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; 3) $\frac{\sqrt{ab}}{b}$; 4) $x+\sqrt{xy}+y$.

ОЗНАЧЕННЯ. Вирази $a\sqrt{b}$ та $p\sqrt{b}$, де a, b та p — раціональні числа називаються **подібними**.

Наприклад,

$3\sqrt{7}$ та $4{,}8\sqrt{7}$ — подібні вирази.

ЗАДАЧА 18. Довести подібність виразів:

1) $\sqrt{2}$ та $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{3}$ та $\sqrt{75}$; 3) $3\sqrt{12}$ та $2\sqrt{48}$;

4) $5\sqrt{63}$ та $4\sqrt{28}$; 5) $\sqrt{216}$ та $\sqrt{\frac{3}{8}}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ та $\sqrt{243}$;

7) $\sqrt{135}$ та $\sqrt{\frac{3}{5}}$; 8) $\sqrt{2\frac{1}{3}}$ та $\sqrt{84}$.

ДОВЕДЕННЯ

1) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$;

5) $\sqrt{216} = 6\sqrt{6}$; $\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{6}$; 6) $\sqrt{243} = 27\sqrt{\frac{1}{3}}$.

ЗАДАЧА 19. Перетворити вирази:

1) $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2$; 2) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)^2$; 3) $\left(2\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2$;

4) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{18}+\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2$; 5) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$; 6) $\left(1-\sqrt{3}\right)^2$;

7) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$; 8) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)^2$; 9) $\left(a-\sqrt{b}\right)^2$;

10) $\left(m+\sqrt{n}\right)^2$; 11) $\left(2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)^2$; 12) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{xy}+2\sqrt{x}\right)^2$;

13) $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2$; 14) $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2$; 15) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)^2$

16) $\left(2\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2$; 17) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{18}+\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2$;

18) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2$; 19) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}+1\right)^2$;

20) $\left(3\sqrt{15}+2\sqrt{5}-5\sqrt{10}\right)^2$.

ЗАДАЧА 20. Спростити:

1) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 14; 2) 26; 3) 4; 4) 2.

ЗАДАЧА 21. Довести тотожності (**формула складного радикала**):

1) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$,

при $a>0$; $b>0$; $a^2-b>0$;

2) $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$,

при $a>0$; $b>0$; $a^2-b>0$.

ДОВЕДЕННЯ

Доведемо першу рівність (друга — аналогічно) Піднесемо обидві частини рівності до квадрата (вони додатні!). Дістанемо:

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+2\sqrt{\frac{a^2-a^2+b}{2^2}}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2-b}+a-\sqrt{a^2-b}}{2}+\sqrt{b}=a+\sqrt{b}=\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2.$$

ЗАДАЧА 22. Користуючись доведеними формулами, спростити вирази :

1) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{5-\sqrt{21}}$; 3) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$;

4) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; 5) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$; 6) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{4-3}}{2}}+\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{4-3}}{2}}=$

$$=\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right);$$

6) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x+\sqrt{4x-4}}=$

$$=\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-4x+4}}{2}}+\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-4x+4}}{4}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x+x-2}{2}}+\sqrt{\frac{x-x+2}{2}}=\sqrt{x-1}+1.$$

ЗАДАЧА 23. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу:

1) $\frac{5}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{10}}$; 4) $\frac{12}{5\sqrt{5}}$; 5) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; 6) $\frac{p}{\sqrt{p}}$;

7) $\frac{2a^2}{\sqrt{a}}$; 8) $\frac{3n}{5\sqrt{n}}$; 9) $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$; 11) $\frac{a+b}{2\sqrt{a-b}}$;

12) $\frac{a-b}{b\sqrt{a+b}}$; 13) $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$; 14) $\frac{12}{3-\sqrt{3}}$; 15) $\frac{18}{\sqrt{7}-1}$;

16) $\frac{8}{\sqrt{5}+1}$; 17) $\frac{m}{\sqrt{m}+1}$; 18) $\frac{n}{1-\sqrt{n}}$; 19) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

20) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 21) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 22) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

23) $\frac{1-m}{\sqrt{1-\sqrt{m}}}$; 24) $\frac{1-n}{\sqrt{1+\sqrt{n}}}$; 25) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

26) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; 27) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}$; 28) $\frac{14}{\sqrt{3}-\sqrt{10}}$;

29) $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$; 30) $\frac{m+n+\sqrt{m^2-n^2}}{m+n-\sqrt{m^2-n^2}}$;

31) $\frac{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2+a^2}}$; 32) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 5) $\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{a\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{a}}{a}=\sqrt{a}$;

9) $\frac{1}{\sqrt{a+b}}=\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}}=\frac{\sqrt{a+b}}{\left(\sqrt{a+b}\right)^2}=\frac{\sqrt{a+b}}{a+b}$;

21) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}=$

$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x-y}$;

$$23)\ \frac{1-m}{\sqrt{1-\sqrt{m}}}=\frac{(1-m)\cdot\sqrt{1-\sqrt{m}}}{1-\sqrt{m}}=\frac{(1-m)\cdot\sqrt{1-\sqrt{m}}\cdot\left(1+\sqrt{m}\right)}{\left(1-\sqrt{m}\right)\left(1+\sqrt{m}\right)}=$$

$$=\frac{(1-m)\cdot\sqrt{1-\sqrt{m}}\cdot\left(1+\sqrt{m}\right)}{1-m}=\sqrt{1-\sqrt{m}}\cdot\left(1+\sqrt{m}\right).$$

ВІДПОВІДЬ. 13) $2-\sqrt{2}$; 14) $6+2\sqrt{3}$; 15) $3\sqrt{7}+3$; 16) $2\sqrt{5}-2$; 17) $\frac{m\left(\sqrt{m}-1\right)}{m-1}$; 18) $\frac{n\left(1+\sqrt{n}\right)}{1-n}$; 19) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$; 20) $(a+b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$; 25) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 26) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$; 27) $-2\sqrt{8}-2\sqrt{5}$; 28) $-2\sqrt{3}-2\sqrt{10}$; 29) $\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$; 30) $\frac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{n}$; 31) $\frac{x^2-\sqrt{x^4-a^4}}{a^2}$; 32) $\frac{x^2+1+\sqrt{x^4-1}}{2}$.

ЗАДАЧА 24. Знищити ірраціональність у чисельнику дробу:

1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{2+\sqrt{3}}{7}$; 3) $\frac{\sqrt{2}+1}{5}$; 4) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{7}$;

5) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$; 6) $\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{xy}$; 7) $\frac{\sqrt{a}+1}{a}$; 8) $\frac{1-\sqrt{m}}{m}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$5)\ \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{(a-b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{a-b}{(a-b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}};$$

$$6)\ \frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{xy}=\frac{\left(x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\right)\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)}{xy\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{x^2y-y^2x}{xy\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)}=\frac{xy(x-y)}{xy\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)}=\frac{x-y}{\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)}.$$

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 20 до 35 хвилин)

I. Виконати множення:

1) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$; 2) $\left(5+\sqrt{6}\right)\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$;

3) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{n}{m}}-\frac{ab}{n}\sqrt{mn}+\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{m}{n}}\right)\cdot a^2b^2\sqrt{\frac{n}{m}}\cdot m.$

II. Виконати ділення:

1) $\sqrt{10}:\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{15}:\sqrt{5}$; 3) $\left(\sqrt{mn}+\sqrt{\frac{m}{n}}\right):\sqrt{\frac{m}{n}}$.

III. Довести подібність виразів:

1) $\sqrt{\frac{1}{27}}$ та $\sqrt{0{,}1875}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{125}}$ та $\sqrt{\frac{80}{81}}$.

IV. Довести, що

$$\frac{1}{m}\sqrt{8{,}64m^2z}-\frac{b^2}{c^3}\sqrt{\frac{6c^6z}{b^4}}+3{,}1a^2\sqrt{\frac{6z}{a^4}}+$$
$$+mx\sqrt{\frac{0{,}54z}{m^2x^2}}-\frac{a^2}{y}\sqrt{\frac{0{,}375y^2z}{a^4}}=3{,}35\sqrt{6z}.$$

V. Спростити:

$$\sqrt{a^2x-2abx+b^2x}-\sqrt{a^2x-2acx+c^2x}+$$
$$+\sqrt{b^2x+2bcx+c^2x}\ \text{ при } a>b>c;$$

VI. Піднести до квадрата: $\left(2\sqrt{8}-\frac{1}{2}\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2$.

VII. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу:

1) $\frac{9}{2\sqrt{3}-3}$; 2) $\frac{6}{3\sqrt{2}+4}$; 3) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$; 4) $\frac{15}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$.

ВІДПОВІДЬ. I. 1) $3+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$; 2) $19\sqrt{2}$;
3) $a^3\left(bn-b^3m+am\right)$.

II. 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $n+1$.

V. $2c\sqrt{x}$. VI. $\frac{73}{2}-8\sqrt{3}-8\sqrt{6}+3\sqrt{2}$.

VII. 1) $6\sqrt{3}+9$; 2) $9\sqrt{2}-12$;
3) $3\sqrt{5}+2\sqrt{7}$; 4) $\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{2}$.

III. Практикум

ЗАДАЧА 1. Виконати дії:

$$1)\ \frac{5}{4-\sqrt{11}}+\frac{1}{3+\sqrt{7}}-\frac{6}{\sqrt{7}-2}-\frac{\sqrt{7}-5}{2};$$

$$2)\ \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{5}-2}-\frac{2}{\sqrt{3}-2}+\frac{\sqrt{3}-1}{6};$$

$$3)\ \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}};\quad 4)\ \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $4-3\sqrt{7}+\sqrt{11}$; 2) $\frac{59+8\sqrt{2}+13\sqrt{3}+26\sqrt{5}}{6}$;

3) $\frac{10-3\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{13-\sqrt{5}}{2}$.

ЗАДАЧА 2. Виконати дії: $\left(\frac{1}{a-\sqrt{b}}+\frac{1}{a+\sqrt{b}}\right):\frac{a}{a^2-b}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ \frac{1}{a-\sqrt{b}}+\frac{1}{a+\sqrt{b}}=\frac{a+\sqrt{b}+a-\sqrt{b}}{a^2-b}=\frac{2a}{a^2-b};$$

$$2)\ \frac{2a}{a^2-b}:\frac{a}{a^2-b}=2.$$

ВІДПОВІДЬ. 2.

ЗАДАЧА 3. Спростити: $\left(\frac{1}{b-\sqrt{a}}+\frac{1}{b+\sqrt{a}}\right):\frac{\frac{1}{a^2b}}{\sqrt{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ab^2}\right)}}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Ділене дорівнює $\frac{2b}{b^2-a}$, дільник дорівнює $\frac{3}{a\sqrt{b^2-a}}$.

ВІДПОВІДЬ. $\frac{2ab}{3\sqrt{b^2-a}}$.

ЗАДАЧА 4. Довести тотожність:

$$\sqrt{a}-\frac{a-\frac{1}{a^2}}{\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}}+\frac{1-\frac{1}{a^2}}{\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}}+\frac{2}{\sqrt{a^3}}=0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

У першому дробу в чисельнику дістанемо $\frac{a^3-1}{a^2}$, а в знаменнику — $\frac{a-1}{\sqrt{a}}$. Після спрощення маємо $\frac{a^2+a+1}{a\sqrt{a}}$. Аналогічно, другий дріб дорівнює $\frac{a-1}{a\sqrt{a}}$.

ЗАДАЧА 5. Виконати дії:

1) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}:\frac{1}{\left(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}\right)\sqrt{a+x}}$;

2) $\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right):\sqrt{1-a^2}$;

3) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right):\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)\sqrt{a+x}}$;

4) $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}\right):\sqrt{a}$;

5) $\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}+1\right):\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)$;

6) $\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right):\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $a+x+\sqrt{a^2-x^2}$; 2) $\frac{2}{1-a^2}$; 3) $2\sqrt{ax}$;

4) $\frac{2}{b}$; 5) $\frac{2}{x^2}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

ЗАДАЧА 6. Спростити:

1) $\dfrac{a+\sqrt{a^2-ab}}{a-\sqrt{a^2-ab}}+\dfrac{a-\sqrt{a^2-ab}}{a+\sqrt{a^2-ab}}$;

2) $\dfrac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\dfrac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{2(2a-b)}{b}$; 2) x; 3) $-\dfrac{4}{a^2}$.

ЗАДАЧА 7. Обчислити:

1) $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{6}+11\right)$;

2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\right)$;

3) $\dfrac{\left(1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\right)\cdot a^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+2\sqrt{ab}}$;

4) $\left((a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+a-b\right)\left((a-b)\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-1\right)\right)$.

ВКАЗІВКИ

1) Звільнитися від ірраціональності у знаменниках.

2) Ділене дорівнює $\dfrac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{b}$;

дільник дорівнює $\dfrac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$.

3) Чисельник дорівнює a^2-b^2, знаменник — $a+b$.

4) У першому співмножнику винести за дужки $(a-b)$.

ВІДПОВІДЬ. 1) -115; 2) $\dfrac{\sqrt{a-b}}{b}$; 3) $a-b$; 4) $2b(a-b)$.

ЗАДАЧА 8. Виконати дії:

1) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 2) $\dfrac{1}{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\dfrac{1}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$;

3) $\dfrac{1}{a+a\sqrt{b}}-\dfrac{1}{a-a\sqrt{b}}$; 4) $\left(1+\dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right):\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)$;

5) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right):\left(\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)$;

6) $\left(\sqrt{a}+\dfrac{ab^2+c}{\sqrt{ab^2+c}}\right):\left(b\sqrt{a}+b\sqrt{ab^2+c}\right)$;

7) $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{\sqrt{a}+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt{ab}-\sqrt{a}}{a-b}$;

8) $\left(\dfrac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}}-\dfrac{m-\sqrt{m^2-n^2}}{m+\sqrt{m^2-n^2}}\right):\dfrac{4m\sqrt{m^2-n^2}}{n^2}$;

9) $\left(1-a^2\right):\left(\left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\left(\dfrac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\right)+1$;

10) $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab}+a}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-a}-\dfrac{2\sqrt{a}}{a-b}\right)$;

11) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\dfrac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):4\sqrt{ab}$;

12) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

13) $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3+\dfrac{2x^2}{\sqrt{x}}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\dfrac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{a+b}{a-b}$; 2) $\dfrac{2a}{b^2}$; 3) $\dfrac{2\sqrt{b}}{a(b-1)}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$; 5) $\sqrt{1-x}$;

6) $\dfrac{1}{b}$; 7) $\dfrac{\sqrt{b}(a-b)}{b-1}$; 8) 1; 9) $\dfrac{2}{1-a}$; 10) $-\dfrac{a+b}{2}$;

11) $\dfrac{1}{2\sqrt{a}(a-b)}$; 12) 1; 13) 3.

ЗАДАЧА 9. Обчислити:

1) $\dfrac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;

2) $\dfrac{\left(\sqrt{75}+\sqrt{50}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{6\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{1-5\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 1; 2) 5; 3) 3.

ЗАДАЧА 10. Знайти числове значення виразу $5x^2-6xy-2y^2$ при $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ та $y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

ВІДПОВІДЬ. $141+140\sqrt{6}$.

ЗАДАЧА 11. Довести, що при $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$ $(b>0;\ a>0)$

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\begin{cases}b,\ \text{якщо}\ b\ge 1\\ \dfrac{1}{b},\ \text{якщо}\ 0<b<1\end{cases}.$$

ДОВЕДЕННЯ

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\right)^2}{\left(\sqrt{a+x}\right)^2-\left(\sqrt{a-x}\right)^2}=\frac{2a+2\sqrt{a^2-x^2}}{2x}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\frac{a+\sqrt{a^2-\left(\dfrac{2ab}{b^2+1}\right)^2}}{\dfrac{2ab}{b^2+1}}=\frac{a\left(b^2+1\right)+\sqrt{a^2\left(b^2-1\right)^2}}{2ab}.$$

Якщо $0<b<1$ (та $a>0$), то $\sqrt{a^2\left(b^2-1\right)^2}=-a\left(b^2-1\right)$. Отже, даний вираз дорівнює $\dfrac{a\left(b^2+1\right)-a\left(b^2-1\right)}{2ab}=\dfrac{1}{b}$. Якщо $b\ge 1$, то даний вираз дорівнює $\dfrac{a\left(b^2+1\right)+a\left(b^2-1\right)}{2ab}=b$.

ВІДПОВІДЬ. $\dfrac{1}{b}$, якщо $0<b<1$; b, якщо $b\ge 1$.

ЗАДАЧА 12. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\sqrt{6}}{12}.$$

ЗАДАЧА 13. Довести, що

$$\frac{\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^3+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\left(\sqrt{xy}-x\right)}{x-y}=0.$$

ДОВЕДЕННЯ

Позначимо буквою A даний вираз. Тоді

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}-\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^3}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}-\sqrt{y^3}+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}-\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{3\sqrt{x}\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{y}\right)^3}-\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0,$$

що й треба було довести.

ЗАДАЧА 14. Спростити вираз $\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}-\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^2}-\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо буквою A даний вираз. Маємо

$$A=\left(\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\sqrt{x+y}}{x+2\sqrt{xy}+y-x-y}\right)^2-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2(x+y)}{\left(2\sqrt{xy}\right)^2}-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}=\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{2\sqrt{xy}}-1\right)=$$

$$=\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}\cdot\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}=\frac{(x+y)^2}{4xy}.$$

ЗАДАЧА 15. Розкласти на множники:

1) $a-b+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{c}$; 2) $a+4m+4\sqrt{am}$;

3) $a-n-2\sqrt{np}-p$; 4) $\sqrt{xy}-\sqrt{xz}-\left(y-2\sqrt{yz}+z\right)$;

5) $2a+\sqrt{a}-4\sqrt{ax}-\sqrt{x}+2x$; 6) $a-b+2\sqrt{bz}-2\sqrt{ax}+x-z$;

7) $2a-a\sqrt{n}+\left(\sqrt{n}-2\right)\cdot\left(\sqrt{an}-\sqrt{a}\right)^2$;

8) $5x^2+10x\sqrt{x}-20x-40\sqrt{x}$;

9) $a^3\sqrt{b}+4a^2b\sqrt{a}-a\sqrt{b}-4b\sqrt{a}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)$; 2) $\left(\sqrt{a}+2\sqrt{m}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{n}-\sqrt{p}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{n}+\sqrt{p}\right)$;

4) $\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$;

5) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\left(2\sqrt{a}-2\sqrt{x}+1\right)$;

6) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}-\sqrt{b}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}+\sqrt{b}-\sqrt{z}\right)$;

7) $a\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-2\right)^2$; 8) $5\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2\left(\sqrt{x}-2\right)$;

9) $\sqrt{ab}(a+1)\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)$.

Готуємося до математичної олімпіади!

ЗАДАЧА 1. Довести справедливість рівності

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2,\text{ якщо } 1\le x\le 2.$$

ДОВЕДЕННЯ

Перший спосіб. Виділимо «повний квадрат» у кожному з підкореневих виразів:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}+1-1}=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|.$$

Аналогічно, $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\left|\sqrt{x-1}-1\right|$.

Беручи до уваги, що $1\le x\le 2$, отримуємо шукану рівність.

Другий спосіб. За формулою складного радикала маємо:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-4(x-1)}}{2}}=$$

$$=2\sqrt{\frac{x+\sqrt{(x-2)^2}}{2}}=2\sqrt{\frac{x+2-x}{2}}=2$$

(врахували, що $1\le x\le 2$).

ЗАДАЧА 2. Довести справедливість рівності:

$$b\sqrt{2}\cdot\frac{2a+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}=\sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3}\quad(b>0).$$

ЗАДАЧА 3. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Помноживши чисельник і знаменник дробу на 2, дістанемо:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right).$$

ЗАДАЧА 4. Спростити вираз

$$\frac{m}{m^2+1}\sqrt{1+\left(\frac{m^2-1}{2m}\right)^2}\quad (m\neq 0).$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$\frac{m}{m^2+1}\sqrt{1+\left(\frac{m^2-1}{2m}\right)^2}=\frac{m}{m^2+1}\sqrt{\frac{4m^2+m^4-2m^2+1}{4m^2}}=$$

$$=\frac{m}{m^2+1}\sqrt{\frac{(m^2+1)^2}{4m^2}}=\frac{m}{m^2+1}\cdot\frac{m^2+1}{2|m|}=\frac{m}{2|m|}.$$

Якщо $m<0$, то

$$|m|=-m;\quad \frac{m}{2|m|}=\frac{m}{-2m}=-0{,}5;$$

якщо $m>0$, то

$$|m|=m;\quad \frac{m}{2|m|}=\frac{m}{2m}=0{,}5.$$

ВІДПОВІДЬ. 0,5 при $m>0$; $-0{,}5$ при $m<0$.

ЗАДАЧА 5. Спростити вираз

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\sqrt{16}=4=\sqrt{4}+\sqrt{4}$, тоді, позначивши шуканий вираз через A, маємо:

$$A=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1.$$

ВІДПОВІДЬ. $\sqrt{2}-1$.

ЗАДАЧА 6. **(Задача Евкліда.)** Сторони правильних п'ятикутника, шестикутника та десятикутника, вписаних у коло радіуса R, виражаються формулами:

$$a_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}};\quad a_6 = R;\quad a_{10} = \frac{1}{2}R\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Довести, що квадрат сторони п'ятикутника дорівнює сумі квадратів сторін шестикутника і десятикутника.

ДОВЕДЕННЯ

$$a_6^2 + a_{10}^2 = R^2 + \frac{1}{4}R^2\left(\sqrt{5}-1\right)^2 = R^2\left(1+\frac{1}{4}\left(5-2\sqrt{5}+1\right)\right) =$$

$$= R^2\,\frac{4+6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}R^2\left(10-2\sqrt{5}\right) = a_5^2.$$

ЗАДАЧА 7. Довести, що $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ — число ірраціональне.

ДОВЕДЕННЯ

Припустимо, що число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ — раціональне, тобто

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} = \frac{p}{q}\ (p \text{ та } q \text{ — цілі}, q \neq 0).$$

Тоді $\sqrt{2}+\sqrt{5} = \frac{p}{q} - \sqrt{3}$. Піднесемо обидві частини цієї рівності до квадрата:

$$5 + 2\sqrt{10} + 2 = \frac{p^2}{q^2} + 3 - \frac{2p}{q}\sqrt{3},$$

тобто

$$\sqrt{10} + \frac{p}{q}\sqrt{3} = \frac{p^2}{2q^2} - 2 = \frac{p_1}{q_1}\ (p_1 \text{ та } q_1 \text{ — цілі}, q_1 \neq 0).$$

Знову підносячи до квадрата, дістанемо

$$10 + \frac{3p^2}{q^2} + \frac{2p}{q}\sqrt{30} = \frac{p_1^2}{q_1^2};$$

$$\sqrt{30} = \frac{q}{2p}\left(\frac{p_1^2}{q_1^2} - \frac{3p^2}{q^2} - 10\right),$$

тобто $\sqrt{30}$ — раціональне число. Але це не так. Отримане протиріччя доводить твердження.

ЗАДАЧА 8. Спростити вираз

$$\sqrt{\frac{a-\sqrt{x}}{a+\sqrt{x}}}+\sqrt{\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}}-\sqrt{\frac{16}{a^2-x}},\ \text{при}\ x=4(a-1).$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Виразимо a через x: $a=\dfrac{x+4}{4}$ і підставимо у даний вираз:

$$\sqrt{\frac{x-4\sqrt{x}+4}{x+4\sqrt{x}+4}}+\sqrt{\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x-4\sqrt{x}+4}}-\sqrt{\frac{16^2}{(x+4)^2-16x}}=$$

$$=\frac{\left|\sqrt{x}-2\right|}{\left|\sqrt{x}+2\right|}+\frac{\left|\sqrt{x}+2\right|}{\left|\sqrt{x}-2\right|}-\frac{16}{\sqrt{x^2-8x+16}}=$$

$$=\frac{\left(x-4\sqrt{x}+4\right)+\left(x+4\sqrt{x}+4\right)}{\left|\left(\sqrt{x}\right)^2-4\right|}-\frac{16}{|x-4|}=$$

$$=\frac{2x+8}{|x-4|}-\frac{16}{|x-4|}=2\frac{x-4}{|x-4|}.$$

Далі, $x>4$, якщо $a>2$, та $0\le x<4$, якщо $1\le a<2$.

ВІДПОВІДЬ. 2, якщо $a>2$; -2, якщо $1\le a<2$.

ЗАДАЧА 9. Спростити вираз

$$\frac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1+ax)\sqrt{1-bx}},\ \text{при}\ a<b<2a\ \text{та}\ x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}\ (*).$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

З умови $(*)$ випливає, що $a^2x^2=\dfrac{2a}{b}-1$, звідки $b=\dfrac{2a}{1+a^2x^2}$ та

$$\frac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1+ax)\sqrt{1-bx}}=\frac{(1-ax)\sqrt{1+\dfrac{2ax}{1+a^2x^2}}}{(1+ax)\sqrt{1-\dfrac{2ax}{1+a^2x^2}}}=\frac{(1-ax)\sqrt{(1+ax)^2}}{(1+ax)\sqrt{(1-ax)^2}}=1,$$

оскільки $a<b$, тобто $\sqrt{\dfrac{2a}{b}-1}<1$, а отже, $1-ax>0$ та $1+ax>0$.

ВІДПОВІДЬ. 1.

Задачі для самостійного розв'язку

ЗАДАЧА 1. Довести, що при $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ вираз

$$ax^2 + bx + c \;\; (a \neq 0)$$

обертається в нуль.

ЗАДАЧА 2. Довести, що дріб

$$\frac{x + y - 1}{x - y + 1} \text{ при } x = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{ab} + 1} \text{ та } y = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab} - 1}$$

набуває значення $-\sqrt{ab}$.

ЗАДАЧА 3. Довести, що вираз

$$\sqrt{\frac{3}{4} - x + \sqrt{2x} - \frac{3}{2}\sqrt{1 - 4x}}$$

обертається в нуль при $x = \dfrac{1}{12}$.

ЗАДАЧА 4. Довести рівність

$$\left(\frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{a^3}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} + \sqrt{ax} \right) \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \right)^2 = 1.$$

ЗАДАЧА 5. Довести, що якщо $x = \sqrt{ab}$ та $a > b$, то

$$\frac{\sqrt{(a + x)(x + b)} + \sqrt{(a - x)(x - b)}}{\sqrt{(a + x)(x + b)} - \sqrt{(a - x)(x - b)}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

ЗАДАЧА 6. Довести істинність рівності

$$\frac{x^2 + ax + b}{x^2 + bx + c} = \frac{a}{b} \text{ при } x = -\sqrt{\frac{b^2 - ac}{a - b}}.$$

ГЛАВА 4. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

§ 1. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ

Просимо оцінити урочистість моменту. Введення квадратного кореня дозволяє нам почати вивчення нового типу рівнянь — квадратних. Це рівняння, які супроводжують кожну людину, поки вона стикається не тільки з математикою, але й з багатьма розділами інших наук.

Відмінність квадратних рівнянь від лінійних у тому, що якщо в лінійних рівняннях невідоме x тільки у першому степені. то у квадратних — у другому. Наприклад, $2x+a=b$ — лінійне рівняння, $2x^2+cx=b$ — квадратне рівняння.

ОЗНАЧЕННЯ. Квадратним рівнянням називається рівняння, що має вигляд $ax^2+bx+c=0$, де x — змінна, a, b та c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

ПРИКЛАД. $3x^2-3x-4=0$; $x^2=5$; $bx^2=3$, $b \neq 0$; $7x^2-2ax=0$.

Числа a, b і c називаються **коефіцієнтами квадратного рівняння.** *Число a називається* **першим коефіцієнтом**, *b* — **другим коефіцієнтом**, *c* — **вільним членом.**

ОЗНАЧЕННЯ. Якщо $c=0$ або $b=0$, то квадратне рівняння називається **неповним квадратним рівнянням.**

ПРИКЛАД. $17x^2=0$; $2x^2+3x=0$ — неповні квадратні рівняння.

Крім означення квадратного рівняння ми час від часу користуватимемося означенням рівняння степеня не вище другого:

ОЗНАЧЕННЯ. Рівнянням степеня не вище другого називається рівняння вигляду $ax^2+bx+c=0$, де x — змінна, a, b та c — деякі числа.

УВАГА! *Лінійне рівняння* — теж рівняння степеня *не вище другого* ($a=0$). *Ця термінологія вам стане у нагоді при розв'язанні рівнянь з параметрами (буквами).*

Типи неповних квадратних рівнянь

➢ Перший тип: $\boldsymbol{ax^2=0}$.

Це рівняння рівносильне рівнянню $x^2=0$ (бо якщо відомо, що це квадратне рівняння, то $a\neq 0$). Його єдиний корінь $x=0$.

➢ Другий тип: $\boldsymbol{ax^2+c=0}$ ($c\neq 0$ і, звичайно, $a\neq 0$).

Це рівняння рівносильне рівнянню $x^2=-\frac{c}{a}$. Якщо $-\frac{c}{a}>0$ — рівняння має два розв'язки:

$$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}};\quad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Якщо $-\frac{c}{a}<0$ — рівняння розв'язків не має.

➢ Третій тип: $\boldsymbol{ax^2+bx=0}$ ($b\neq 0$ і, звичайно, $a\neq 0$).

Це рівняння рівносильне рівнянню $x(ax+b)=0$. Добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із співмножників дорівнює нулю. Тому рівняння має два корені:

$$x_1=0;\quad x_2=-\frac{b}{a}.$$

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння:

1) $9x^2-4=0$; 2) $9x^2+3=0$; 3) $5x^2+8x=0$; 4) $x^2=256$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $9x^2=4$; $x^2=\frac{4}{9}$; $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{2}{3}$; 2) $9x^2=-3$; $x\in\varnothing$;

3) $x(5x+8)=0$; $x_1=0$, $x_2=-\frac{8}{5}$; 4) $x_1=16$, $x_2=-16$.

ЗАДАЧА 1. Розв'язати рівняння:

1) $-7x^2+14=0$; 2) $x^2=0{,}64$; 3) $x^2=\frac{25}{81}$; 4) $x^2=2\frac{7}{9}$;

5) $x^2=0{,}3364$; 6) $x^2=2{,}3716$; 7) $5x^2-80=0$;

8) $9x^2-361=0$; 9) $x^2=3$; 10) $4x^2=7$; 11) $3x^2=1$;

12) $2x^2=1$; 13) $\frac{5}{9}x^2-3380=0$; 14) $0{,}09x^2=0{,}6084$;

15) $67-6x^2=43$; 16) $79-7x^2=16$; 17) $8x^2-0{,}85=0{,}13$;

18) $4{,}3-6x^2=2{,}8$; 19) $2\frac{1}{4}-\frac{2}{9}x^2=2\frac{1}{8}$;

20) $7\frac{1}{4}-\frac{3}{5}x^2=3\frac{1}{2}$; 21) $x^2-a^2=0$; 22) $x^2-m=0$;

23) $a^2x^2-b^2=0$; 24) $n^2x^2-1=0$; 25) $a^2x^2-\frac{1}{a}=0$;

26) $ax^2-\frac{b^2}{a}=0$; 27) $\frac{2}{a}x^2=7$; 28) $\frac{2}{3}(a+5)x^2=7$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $-7x^2=-14$; $7x^2=14$; $x^2=2$; $x_1=\sqrt{2}, x_2=-\sqrt{2}$;

21) $x^2-a^2=0$; $x^2=a^2$; $\sqrt{x^2}=\sqrt{a^2}$; $|x|=|a|$; $x=\pm a$;

22) $x^2-m=0$; $x^2=m$; $x=\pm\sqrt{m}$ $(m\geq 0)$;

23) $a^2x^2-b^2=0$; $a^2x^2=b^2$; $x^2=\frac{b^2}{a^2}$; $x=\pm\frac{b}{a}$;

24) $n^2x^2-1=0$; $n^2x^2=1$; $x^2=\frac{1}{n^2}$; $x=\pm\frac{1}{n}$;

25) $a^2x^2-\frac{1}{a}=0$; $a^2x^2=\frac{1}{a}$; $x^2=\frac{1}{a^3}$; при $a>0$ $x=\pm\sqrt{\frac{1}{a^3}}$, при $a\leq 0$ $x\in\varnothing$;

26) $ax^2-\frac{b^2}{a}=0$; $ax^2=\frac{b^2}{a}$; $x^2=\frac{b^2}{a^2}$; $x=\pm\frac{b}{a}$;

27) $\frac{2}{a}x^2=7$; $x^2=7\cdot\frac{a}{2}$; при $a>0$ $x=\pm\sqrt{\frac{7a}{2}}$, при $a\leq 0$ $x\in\varnothing$;

28) $\frac{2}{3}(a+5)x^2=7$; $x^2=\frac{7\cdot 3}{2(a+5)}$; при $a>-5$ $x=\pm\sqrt{\frac{21}{2(a+5)}}$, при $a\leq -5$ $x\in\varnothing$.

ЗАДАЧА 2. Розв'язати рівняння:

1) $x^2-5x=0$; 2) $x^2+9x=0$; 3) $x^2-0{,}6x=0$;

4) $x^2=0{,}8x$; 5) $4x^2+6x=9x^2-15x$;

6) $13x-7x^2=5x^2+8x$; 7) $12x^2-5x=9x^2+7x$;

8) $8{,}5x-3x^2=3{,}5x+2x^2$; 9) $x(x-15)=3(108-5x)$;

10) $47-x(3x+4)=2(17-2x)-62$;

11) $(x-7)(x+3)+(x-1)(x-5)=-16$;

12) $10(x-2)+19=(5x-1)(1+5x)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $x^2-5x=0$; $x(x-5)=0$; $x_1=0, x_2=5$.

2) $x^2+9x=0$; $x(x+9)=0$; $x_1=0, x_2=-9$.

5) $4x^2+6x=9x^2-15x$; $9x^2-15x-4x^2-6x=0$;

$$5x^2-21x=0;\quad x(5x-21)=0;\quad x_1=0, x_2=\frac{21}{5}.$$

11) $x^2-7x+3x-21+x^2-x-5x+5=-16$; $2x^2-10x=0$;

$$2x(x-5)=0;\quad x_1=0, x_2=5.$$

Виділення квадрата двочлена

Квадрат двочлена — це вираз вигляду $(a\pm b)^2$.

Будь-яке квадратне рівняння містить такий квадрат двочлена; якщо його виділити, то можна розв'язати це рівняння[1].

Навчимося (**легко**!) виділяти квадрат двочлена. Покажемо цей прийом на прикладі.

ПРИКЛАД. Нехай потрібно виділити квадрат двочлена у квадратному рівнянні:

$$x^2+12x-64=0.$$

Маємо:

$$x^2+12x-64=x^2+2\cdot 6x+36-36-64=(x+6)^2-100.$$

Далі квадратне рівняння розв'язати зовсім легко:

$$(x+6)^2-100=0;\quad (x+6)^2=100;\quad x+6=\pm 10;\quad x_1=-16, x_2=4.$$

[1] І навіть вивести формулу для знаходження коренів квадратного рівняння (див. наступний параграф).

ЗАДАЧА 1. Розв'язати рівняння, виділивши повний квадрат:

$$x^2-4x=45.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо

$$x^2-4x-45=0;\ \ x^2-2\cdot2\cdot x+4-4-45=0;\ \ (x-2)^2-49=0;$$

$$(x-2)^2=49;\ x-2=\pm\sqrt{49};\ x-2=\pm7;$$

$$x_1=2+7=9,\ x_2=2-7=-5.$$

ЗАДАЧА 2. Способом виділення квадрата двочлена розв'язати рівняння:

1) $x^2-5x-24=0$;   2) $16x^2-24x-27=0$;

3) $x^2+12x+20=0$;   4) $3x^2-7x+4=0$;

5) $5y^2-3y-8=0$;   6) $3x^2-7x-48=0$;

7) $2x^2-7x+3=0$;   8) $2a^2-9a+10=0$;

9) $15x^2=22x+37$;   10) $\frac{1}{3}x^2+2x-9=0$;

11) $\frac{1}{7}x^2-2x+7=0$;   12) $0{,}7x^2-1{,}3x+0{,}6=0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $x^2-2\cdot\frac{5}{2}\cdot x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}-24=0;\ \ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{121}{4};$

$$x-\frac{5}{2}=\pm\frac{11}{2};\ \ x_1=8,x_2=-3.$$

2) $16x^2-2\cdot4x\cdot3+9-9-27=0;\ \ (4x-3)^2=36;$

$$4x-3=\pm6;\ \ x_1=\frac{9}{4},x_2=-\frac{3}{4}.$$

4) Обидві частини рівняння помножимо на 3, маємо:

$$9x^2-21x+12=0.$$

Далі

$$9x^2-2\cdot3x\cdot\frac{21}{6}+\frac{441}{36}-\frac{441}{36}+12=0;\ \ \left(3x-\frac{21}{6}\right)^2=\frac{1}{4};$$

$$3x-\frac{21}{6}=\pm\frac{1}{2};\ \ x_1=\frac{4}{3},x_2=1.$$

7) Обидві частини рівняння помножимо на 2, маємо:

$$4x^2-14x+6=0;\ \ 4x^2-2\cdot 2x\cdot\frac{7}{2}+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}+6=0;$$

$$\left(2x-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{4};\ \ 2x-\frac{7}{2}=\pm\frac{5}{2};\ \ x_1=3, x_2=\frac{1}{2}.$$

9) $15x^2-22x-37=0;\ \ 15\cdot 15x^2-15\cdot 22x-15\cdot 37=0;$

$$225x^2-2\cdot 15x\cdot 11+121-121-555=0;\ \ (15x-11)^2=676;$$

$$15x-11=\pm 26;\ \ x_1=-1, x_2=\frac{37}{15}.$$

10) Обидві частини рівняння помножимо на 3, маємо:

$$x^2+6x-27=0;\ \ x^2+2\cdot 3\cdot x+9-9-27=0;$$

$$(x+3)^2=36;\ \ x+3=\pm 6;\ \ x_1=-9, x_2=3.$$

12) Обидві частини рівняння помножимо на $\frac{10}{7}$, маємо:

$$x^2-\frac{13}{7}x+\frac{6}{7}=0;$$

$$x^2-2\cdot\frac{13}{14}x+\frac{168}{196}=x^2-2\cdot\frac{13}{14}x+\frac{169}{196}-\frac{1}{196}=0;$$

$$\left(x-\frac{13}{14}\right)^2=\frac{1}{196};\ \ x-\frac{13}{14}=\pm\frac{1}{14};\ \ x_1=\frac{6}{7}, x_2=1.$$

§ 2. ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

Для того, щоб розв'язувати лінійні рівняння, особливо напружуватись не потрібно. Неважко розв'язати і деякі квадратні рівняння (наприклад, неповні квадратні рівняння). Повне квадратне рівняння розв'язується за допомогою виділення повного квадрата. Однак щоразу виділяти повний квадрат — робота не з цікавих. Універсальним способом розв'язання квадратного рівняння є формула, про яку зараз ітиме мова.

Отже, нижче ми виведемо, мабуть, найголовнішу формулу шкільної математики! Ця формула дозволить розв'язати *будь-яке* квадратне рівняння, що має дійсні корені (раціональні та ірраціональні числа).

Нехай задано квадратне рівняння

$$ax^2+bx+c=0.$$

Виділимо повний квадрат. Для цього спочатку розділимо обидві його частини на a (воно, за означенням квадратного рівняння, не дорівнює нулю):

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Розглянемо $\frac{b}{a}x$ як подвійний добуток двох чисел: $\frac{b}{2a}$ та x. Тоді

$$x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0;$$

$$x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a};$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a};$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

ОЗНАЧЕННЯ. Вираз $D=b^2-4ac$ називається **дискримінантом** даного квадратного рівняння («дискримінант» — від латинського «discriminantis» — розрізнювач).

Далі маємо

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}.$$

В залежності від знака D можливі випадки:

- Якщо $D>0$, то дане рівняння рівносильне рівнянню

$$(2ax+b)^2=\left(\sqrt{D}\right)^2,$$

яке **має два кореня:**

$$2ax+b=\sqrt{D},\quad x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\quad \text{або}\quad 2ax+b=-\sqrt{D},\quad x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Прийнята скорочена форма запису:

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}},\quad \text{де}\quad \boldsymbol{D=b^2-4ac}.$$

- Якщо $D=0$, то $2ax+b=0$, і рівняння **має єдиний корінь**:

$$\boldsymbol{x=-\frac{b}{2a}}.$$

- Якщо $D<0$ — рівняння **коренів не має**!!!

Отже,

> *Для знаходження коренів квадратного рівняння*
>
> $$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$$
>
> *можна користуватися формулою*
>
> $$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}},\ \textit{де}\ \boldsymbol{D=b^2-4ac}.$$

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $3x^2-13x+14=0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Використаємо формулу (*). Тут $a=3, b=-13, c=14$;

$$D=b^2-4ac=(-13)^2-4\cdot3\cdot14=169-168=1;$$

$$x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{1}}{2\cdot3}=\frac{13\pm1}{6};$$

$$x_1=\frac{13+1}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3};\quad x_2=\frac{13-1}{6}=2.$$

ОЗНАЧЕННЯ. Якщо у квадратному рівнянні $a = 1$, то таке рівняння називатимемо **зведеним квадратним рівнянням**.

У зведеному квадратному рівнянні другий коефіцієнт прийнято позначати буквою p, а вільний член — q, тобто

$x^2 + px + q = 0$ — зведене квадратне рівняння.

Легко вивести формулу коренів зведеного квадратного рівняння (зробіть це самостійно!):

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2};$$

причому, якщо $p^2 - 4q > 0$, то рівняння має два кореня; якщо $p^2 - 4q = 0$, то один корінь $\left(x = -\frac{p}{2}\right)$; якщо $p^2 - 4q < 0$, то рівняння коренів не має.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $x^2 - 14x + 13 = 0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{14 \pm 12}{2}; \quad x_1 = 13, x_2 = 1.$$

Звичайно, квадратне рівняння може бути у неявній формі:

ЗАДАЧА 1. Розв'язати рівняння:

$$(2x - 7)^2 + (3x - 5)^2 - (4x - 9)(4x + 9) = 2(76 - 28x).$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$(2x - 7)^2 + (3x - 5)^2 - (4x - 9)(4x + 9) =$$
$$= 4x^2 - 28x + 49 + 9x^2 - 30x + 25 - 16x^2 + 81 =$$
$$= -3x^2 - 58x + 155.$$

Отже, дане рівняння рівносильне рівнянню

$$-3x^2 - 58x + 155 = 152 - 56x; \quad 3x^2 + 2x - 3 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Практикум

ЗАДАЧА 1. Розв'язати рівняння:

1) $8x^2-30x+27=0$; 2) $3x^2-5x-8=0$;

3) $x^2-4x-45=0$; 4) $0{,}9x^2-x+0{,}1=0$;

5) $20x^2-7x-6=0$; 6) $x^2+8x-33=0$;

7) $x^2-8x=20$; 8) $x^2+12x-64=0$;

9) $x^2-4x=45$; 10) $x^2+12x=-35$;

11) $x^2+14x+24=0$; 12) $x^2+x-30=0$;

13) $x^2-x-20=0$; 14) $x^2-x-30=0$;

15) $x^2-x-12=0$; 16) $x^2-7x+12=0$;

17) $(3x-1)(x+2)=20$; 18) $(x-4)(4x-3)+3=0$;

19) $(x-3)^2+(x-4)^2-(x-5)^2=17x-54$;

20) $(x+5)^2+(x-2)^2+(x-7)(x+7)=11x+30$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\frac{9}{4};\frac{3}{2}$; 2) $\frac{8}{3};-1$; 3) $-5;\ 9$;

4) $1;\frac{1}{9}$; 5) $-\frac{2}{5};\frac{3}{4}$; 17) $-\frac{11}{3};2$; 20) $5;\ -3\frac{1}{3}$.

ЗАДАЧА 2. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{x^2}{5}-\frac{2x}{3}=\frac{x-5}{6}$; 2) $\frac{x(x-7)}{3}-1=\frac{11x}{10}-\frac{x-4}{3}$;

3) $\frac{5(x-1)}{4}=\frac{x}{6}+\frac{6}{x}$; 4) $\frac{7}{x}+\frac{21-63x}{7}+8x-9=0$;

5) $\frac{(x+3)^2}{5}+1-\frac{(3x-1)^2}{5}=\frac{x(2x-3)}{2}$;

6) $\frac{5x-x^2}{3}-\frac{(5x-11)^2}{4}=6-\frac{(7-x)^2}{2}$;

7) $\frac{(x-12)^2}{6}-\frac{x}{9}+\frac{x(x-9)}{18}=\frac{(x-14)^2}{2}+5$;

8) $6x+\frac{(3+5x)^2}{2}=\frac{8-2x}{5}-\frac{(x+3)(x+7)}{2}$.

ВІДПОВІДЬ. 2) $10;-0{,}7$; 4) $-7;\ 1$; 5) $2;\ -\frac{1}{2}$; 7) $18;\ 15{,}8$.

ЗАДАЧА 3. Розв'язати рівняння:

1) $3x+\frac{(x-3)^2}{4}=\frac{(x+3)^2}{8}+\frac{(x+1)(x-1)}{3}$;

2) $\frac{5x-1}{9}+\frac{3x-1}{5}=\frac{2}{x}+x-1$;

3) $x-7+\frac{(x-6)^2}{3}=\frac{(x+4)^2}{2}-\frac{(x+2)(x+6)}{4}$;

4) $(3x-8)^2-(4x-6)^2+(5x-2)(5x+2)=96$;

5) $\frac{5x^2+9}{6}-\frac{4x^2-9}{5}=3$; 6) $\frac{3x^2-11}{8}+\frac{74-2x^2}{12}=10$;

7) $\frac{8x^2-3}{5}+\frac{9x^2-5}{4}=2$; 8) $\frac{13x^2-4}{12}-\frac{20-3x^2}{18}=3\frac{5}{9}$.

ВІДПОВІДЬ. 1)5; $-1\frac{2}{5}$; 3) 0; 60; 4) ± 2;

5) рівняння не має коренів; 6) $x=\pm 5$.

Перші задачі про квадратні рівняння

КОМЕНТАР. Пропонується розв'язати ті ж квадратні рівняння, *змінюється тільки форма задачі.*

ЗАДАЧА 1. При яких значеннях x вираз $x^2-9x-20$ набуває значення, рівного 2?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$x^2-9x-20=2;\quad x^2-9x-22=0;$$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81+88}}{2};\quad x_1=11, x_2=-2.$$

ВІДПОВІДЬ. При $x=11$ або $x=-2$.

ЗАДАЧА 2. Знайти корені рівняння

$$3x^2-2x-4=0.$$

ВКАЗІВКА. Щоб знайти корені рівняння, його треба розв'язати.

ВІДПОВІДЬ. $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}$.

ЗАДАЧА 3. При яких значеннях x вирази x^2-2x та $x+4$ рівні?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$x^2-2x=x+4;$$

звідси

$$x^2-2x-x-4=0;\quad x^2-3x-4=0;\quad x_1=4, x_2=-1.$$

ВІДПОВІДЬ. При $x=4$ або $x=-1$.

ЗАДАЧА 4. При яких значеннях x вираз $x-3$ дорівнює виразу x^2-2x-4?

ВІДПОВІДЬ. При $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

ЗАДАЧА 5. Довести, що

1) рівняння $2x^2-3x-5=0$ має різні корені;

2) рівняння $x^2-6x+9=0$ має один корінь;

3) рівняння $3x^2-x+5$ не має коренів.

ЗАДАЧА 6. При яких значеннях x вирази:

$$1)\ \frac{2}{x^2-x};\quad 2)\ \frac{2}{x^2-x-1};\quad 3)\ \frac{3}{x^2-x+5}$$

не мають змісту?

ВІДПОВІДЬ. 1) При $x_1=0, x_2=1$; 2) при $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$;

3) вираз має зміст при всіх значеннях x.

ЗАДАЧА 7. При яких значеннях x дріб $\frac{x^2-x-4}{5}$ дорівнює нулю?

ВІДПОВІДЬ. При $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

ЗАДАЧА 8. Знайти менший корінь рівняння

$$24x(x+1)=4x^2-7.$$

ВІДПОВІДЬ. $-0{,}7$.

ЗАДАЧА 9. (Увага! Параметр!). При якому значенні a рівняння

$$3x^2 - 2x - a = 0$$

1) має два корені; 2) не має розв'язків; 3) має рівні корні?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Будь-яке дослідження квадратного рівняння завжди пов'язане з **дискримінантом**. Маємо:

$$D = 4 + 12a.$$

Рівняння має два розв'язки, якщо $D > 0$, тобто

$$4 + 12a > 0, \text{ або } a > -\frac{1}{3}.$$

Рівняння не має розв'язків, якщо $D < 0$, тобто

$$4 + 12a < 0, \text{ або } a < -\frac{1}{3}.$$

Рівняння має рівні корені (один корінь), якщо $D = 0$, тобто

$$a = -\frac{1}{3}.$$

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 20 до 30 хвилин)

Розв'язати рівняння і перевірити розв'язки (підставивши знайдені корені у рівняння).

1) $61x(x+1) = 31x^2 - 17$; 2) $(x+15)(x+5) = -9$;
3) $(10+x)(x+14) = -3$; 4) $2x(7x+3) = 6x^2 - 1$;
5) $(2x+4)(x+4{,}5) = -2$; 6) $27x(x+1) = 17x^2 - 18$;
7) $(x+6)(x+1) = -6$; 8) $(x+12)(x+8) = -3$;
9) $25x(3x+1) = 50x^2 + 66$.

§ 3. ТЕОРЕМА ВІЄТА

ПИТАННЯ. Теорема? Хіба в алгебрі є теореми?

ВІДПОВІДЬ. Теорема — це твердження, що потребує доведення. Звісно, можна було б і не називати твердження, про яке піде мова, теоремою. Але, мабуть, це твердження є досить важливим, якщо воно називається не просто теоремою, а теоремою Вієта!

Ім'я Франсуа Вієта — чи не єдине ім'я математика, яке вам зустрінеться на уроках алгебри.

Корені квадратного рівняння є предметом ретельного вивчення шкільної математики. Не розв'язуючи рівняння, теорема Вієта дозволяє знайти суму та добуток коренів квадратного рівняння.

Франсуа Вієт
(1540—1603)

Французький математик, якого називають батьком символьної алгебри. У 1591 році Вієт увів буквені позначення, як для невідомих, так і для коефіцієнтів рівняння. Починаючи з Вієта, алгебра набуває рис загальної науки про алгебричні рівняння, яка ґрунтується на буквеному численні.

Сформулюємо і доведемо (пряму) теорему Вієта

Сума коренів квадратного рівняння дорівнює відношенню другого коефіцієнта до першого, взятого з протилежним знаком, а добуток дорівнює відношенню вільного члена до першого коефіцієнта.

Отже, нам потрібно довести, що у квадратному рівнянні $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ його корені x_1 та x_2 пов'язані такими співвідношеннями:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Наведені співвідношення іноді в літературі називаються формулами Вієта.

ДОВЕДЕННЯ

За формулою коренів квадратного рівняння маємо:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{\left(b+\sqrt{D}\right)\left(b-\sqrt{D}\right)}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

що й вимагалось довести.

Розглянемо тепер теорему, обернену до теореми Вієта

Якщо числа x_1 та x_2 такі, що їхня сума дорівнює $-\frac{b}{a}$, а добуток дорівнює $\frac{c}{a}$, то ці числа є коренями рівняння $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)}$.

ДОВЕДЕННЯ

Покажемо, що якщо виконані умови теореми, то x_1 і x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$, або рівносильного йому рівняння

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \quad (1)$$

Підставимо у рівняння (1) замість $\frac{b}{a}$ та $\frac{c}{a}$ їхні значення. Маємо:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0.$$

Звідси

$$x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0;$$

$$x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = 0;$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0;$$

а отже, $x = x_1$ або $x = x_2$,

що й треба було довести.

Найважливіше використання (прямої) теореми Вієта

Доведемо, що якщо x_1 і x_2 — корені **квадратного тричлена** ax^2+bx+c, де $a\neq 0$, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

ДОВЕДЕННЯ

За теоремою Вієта, маємо:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right)=$$

$$=a\left(x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right)=a(x-x_1)(x-x_2),$$

що й треба було довести.

Перейдемо тепер до розв'язання прикладів.

ЗАДАЧА 1. Перевірити, чи є дані числа коренями рівнянь:

1) $x^2-8x+7=0$; 1 та 7; 2) $x^2+6x-3=0$; 1 та 5;

3) $x^2-12x-13=0$; 1 та 13; 4) $x^2-9x-12=0$; 3 та 4.

ЗАДАЧА 2. Не розв'язуючи рівнянь, з'ясувати, чи мають вони корені:

1) $2x^2-7x-3=0$; 2) $3x^2-4x+4=0$;

3) $\frac{1}{2}x^2-9x-1000=0$; 4) $x^2-3x+5000$.

ЗАДАЧА 3. Не розв'язуючи рівняння, визначити знаки коренів:

1) $2x^2-x-1=0$; 2) $x^2-2x+3=0$;

3) $-x^2-4x-8=0$; 4) $3x^2-\sqrt{3}x+1=0$.

ЗАДАЧА 4. Знайти суму і добуток коренів рівняння:

1) $x^2-26x+13=0$; 2) $z^2-2z-15=0$;

3) $x^2-12=0$; 4) $-x^2+x=0$;

5) $-4x^2-2x+3=0$.

ЗАДАЧА 5. Знайти корені рівняння і виконати перевірку за теоремою, оберненеою до теореми Вієта:

1) $x^2-9x-10=0$; 2) $y^2-12y+11=0$;

3) $7x^2-2x-15=0$; 4) $5x^2+12x+7=0$.

ЗАДАЧА 6. Знайти підбором корені рівняння:

1) $x^2-3x+2=0$; 2) $x^2-8x+7=0$;

3) $a^2+5a+6=0$; 4) $x^2-4x-5=0$;

5) $p^2+9p-10=0$; 6) $y^2+5y-14=0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Якщо це рівняння має цілі корені, то оскільки їхній добуток дорівнює 2, це можуть бути або числа 1 та 2, або -1 та -2. Оскільки їхня сума має дорівнювати 3, то корені даного рівняння 1 та 2.

ЗАДАЧА 7. Скласти зведені квадратні рівняння, корені яких:

1) 1 та 2; 2) -3 та 4; 3) -1 та -4; 4) $\frac{1}{2}$ та 2;

5) $1-\sqrt{2}$ та $1+\sqrt{2}$; 6) $2+\sqrt{3}$ та $2-\sqrt{3}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Якщо $x_1=1$, а $x_2=2$ (або $x_1=2$, а $x_2=1$ — це не важливо), то, за теоремою Вієта, оскільки $x_1+x_2=1+2=3$; $x_1\cdot x_2=1\cdot 2=2$, маємо рівняння $x^2-3x+2=0$.

ЗАДАЧА 8. При якому значенні k

1) рівняння $x^2+kx-24=0$ матиме корінь, рівний -3;

2) рівняння $kx^2+12x-3=0$ матиме корінь, рівний $\frac{1}{5}$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Якщо $x_1=-3$, то оскільки $x_1\cdot x_2=-24$, маємо: $x_2=8$. Далі, $x_1+x_2=-k$, тобто $k=-5$.

ЗАДАЧА 9. При яких значеннях a рівняння

1) $x^2+12x+a=0$; 2) $9x^2+6x+a=0$;

3) $4x^2+ax+9=0$; 4) $x^2+2(a-4)x+a^2+6a+3=0$

мають два рівних кореня?

ВКАЗІВКА. Рівняння має рівні корені, якщо $D=0$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 36; 2) 1; 3) ± 12 4) $\frac{13}{14}$.

ЗАДАЧА 10. Довести, що якщо дискримінант рівняння $ax^2+bc+c=0$ $(a>0)$ дорівнює нулю, то ліва частина цього рівняння є повним квадратом.

ДОВЕДЕННЯ

Маємо $ax^2+bc+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Оскільки за умовою $D=0$, то $x_1=x_2=x_*$, а отже $(a>0)$,

$$ax^2+bc+c=a(x-x_*)(x-x_*)=\left(\sqrt{a}(x-x_*)\right)^2.$$

ЗАДАЧА 11. При якому значенні p число 0 є коренем квадратного рівняння $-2x^2-3px-p-1=0$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо $x_1=0$, то за теоремою Вієта

$$0=x_1\cdot x_2=\frac{-p-1}{-2}=\frac{p+1}{2};\quad p=-1.$$

ВІДПОВІДЬ. $p=-1$.

ЗАДАЧА 12. Визначити коефіцієнт c квадратного рівняння $ax^2+bc+c=0$, якщо один з його коренів дорівнює $-\frac{b}{a}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$-\frac{b}{a}=x_1+x_2=-\frac{b}{a}+x_2;\quad x_2=0;\quad \frac{c}{a}=x_1\cdot x_2=0;\quad c=0.$$

ВІДПОВІДЬ. $c=0$.

ЗАДАЧА 13. Знайти усі значення параметра p, при яких відношення коренів рівняння $2x^2+(p-10)x+6=0$ дорівнює 12.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

За теоремою Вієта та умовою маємо:

$$x_1x_2=3;\ (1)\qquad x_1+x_2=\frac{10-p}{2};\ (2)\qquad \frac{x_1}{x_2}=12.\ (3)$$

З (1) та (3) маємо: $x_1=6$, $x_2=0{,}5$ або $x_1=-6$, $x_2=-0{,}5$. Тоді з (2) дістанемо: $p=-3$ або $p=23$.

ВІДПОВІДЬ. -3 або 23.

ЗАДАЧА 14. При яких значеннях параметра k один з коренів рівняння $x^2-(3k+2)x+k^2-1=0$ утричі більший за другий корінь?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо

$$x_1+x_2=3k+2;\quad x_1x_2=k^2-1;\quad x_1=3x_2.$$

Звідси

$$x_2=\frac{3k+2}{4};\quad x_2^2=\frac{k^2-1}{3}.$$

Тоді

$$\frac{k^2-1}{3}=\left(\frac{3k+2}{4}\right)^2,$$

отже (квадратне рівняння відносно k!), $k=-2$ або $k=-\frac{14}{11}$.

ВІДПОВІДЬ. $k=-2$ або $k=-\frac{14}{11}$.

ЗАДАЧА 15. При яких додатних значеннях параметра c один корінь рівняння $8x^2-6x+9c^2=0$ дорівнює квадрату другого?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо

$$x_1+x_2=\frac{6}{8}=\frac{3}{4};\quad x_1\cdot x_2=\frac{9c^2}{8};\quad x_2=x_1^2.$$

Тоді

$$x_1^2+x_1-\frac{3}{4}=0 \text{ та } x_1^3=\frac{9c^2}{8};$$

звідси

$$x_1=-\frac{3}{2} \text{ або } x_1=\frac{1}{2}.$$

Таким чином,

$$c^2=-3 \text{ або } c^2=\frac{1}{9};\quad c\in\varnothing \text{ або } c=\pm\frac{1}{3}.$$

Беручи до уваги умову задачі, $c=\frac{1}{3}$.

ВІДПОВІДЬ. $\frac{1}{3}$.

ЗАДАЧА 16. Скласти квадратне рівняння, корені якого були б удвічі більші коренів рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$.

ВІДПОВІДЬ. $x^2 - 10x + 24 = 0$.

ЗАДАЧА 17. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$. Скласти квадратне рівняння, корені якого були б рівні кореням даного рівняння, помноженим на k.

ВІДПОВІДЬ. $x^2 + kpx + k^2 q = 0$.

ЗАДАЧА 18. Визначити коефіцієнти квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ так, щоб його корені дорівнювали p та q.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

За теоремою Вієта

$$\begin{cases} p + q = -p \\ pq = q \end{cases}; \quad \begin{cases} 2p + q = 0 \\ q(p-1) = 0 \end{cases}.$$

Друге рівняння системи рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$q = 0 \text{ та } p - 1 = 0.$$

Тоді з першого рівняння системи маємо:

$$q_1 = 0, p_1 = 0; \qquad q_2 = -2, p_2 = 1.$$

ВІДПОВІДЬ. $p_1 = q_1 = 0$; $p_2 = 1$, $q_2 = -2$.

УВАГА! Наступна задача надзвичайно важлива, корисна і популярна!

ЗАДАЧА 19. Не розв'язуючи квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

знайти:

$$1)\ x_1 - x_2;\quad 2)\ x_1^2 \pm x_2^2;\quad 3)\ x_1^3 \pm x_2^3;\quad 4)\ x_1^4 \pm x_2^4,$$

де $x_1 > x_2$ — корені цього рівняння.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\cdot\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2};$$

$$\text{звідси } x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \text{ (бо } x_1 > x_2).$$

2) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=$

$$=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2};$$

$$x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)=-\frac{b}{a}\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}=-\frac{b\sqrt{b^2-4ac}}{a^2};$$

$$\boldsymbol{x_1^2+x_2^2=\frac{b^2-2ac}{a^2};\quad x_1^2-x_2^2=-\frac{b\sqrt{b^2-4ac}}{a^2}.}$$

3) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=$

$$=-\frac{b}{a}\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)=-\frac{b}{a}\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2-3\cdot\frac{c}{a}\right)=$$

$$=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}=\frac{3abc-b^3}{a^3};$$

$$x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=$$

$$=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\left((x_1+x_2)^2-x_1x_2\right)=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{c}{a}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\cdot\frac{b^2-ac}{a^2}=\frac{(b^2-ac)\sqrt{b^2-4ac}}{a^3};$$

$$\boldsymbol{x_1^3+x_2^3=\frac{3abc-b^3}{a^3};\quad x_1^3-x_2^3=\frac{(b^2-ac)\sqrt{b^2-4ac}}{a^3}.}$$

4) $x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)^2-\frac{2c^2}{a^2}=$

$$=\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)^2-\frac{2c^2}{a^2}.$$

$$x_1^4-x_2^4=(x_1^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2)=-\frac{b\sqrt{b^2-4ac}}{a^2}\frac{(b^2-2ac)}{a^2}=$$

$$=-\frac{b(b^2-2ac)\sqrt{b^2-4ac}}{a^4};$$

$$\boldsymbol{x_1^4+x_2^4=\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)^2-\frac{2c^2}{a^2};\quad x_1^4-x_2^4=-\frac{b(b^2-2ac)\sqrt{b^2-4ac}}{a^4}.}$$

ЗАДАЧА 20. Знайти залежність між коефіцієнтами квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, якщо сума його коренів удвічі більша за їхню різницю.

ВІДПОВІДЬ. $3b^2=16ac$.

ЗАДАЧА 21. Довести, що різниця коренів квадратного рівняння

$$5x^2-2(5k+3)x+5k^2+6k+1=0$$

не залежить від k.

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 35 до 50 хвилин)

1) Довести, що

$$\frac{x-2\sqrt{xy^2}+y^2-16}{\sqrt{x}-y+4}=\sqrt{x}-y-4.$$

2) Виконати дії:

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{\frac{a^4}{x^4}-1},\quad \text{якщо } |a|>|x|>0.$$

3) Виконати дії:

$$\left(\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right)^2.$$

4) При яких значеннях k рівняння

$$2x^2+(k-9)x+k^2+3k+4=0$$

має рівні корені?

5) Знайти c, якщо один із коренів рівняння

$$x^2-12x+c=0$$

більший за другий на $2\sqrt{5}$.

6) Довести, що при будь-яких дійсних значеннях a, b та c рівняння

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2}$$

має дійсні корені.

ВІДПОВІДЬ. 2) $\frac{a^2}{x^2}$; 3) 1; 4) 1; -7; 5) 31.

ГЛАВА 5. ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ

§ 1. ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Ми вже зустрічалися з дробово-раціональними рівняннями. Але оскільки тоді ви вміли розв'язувати лише лінійні рівняння, то знайомство це було дуже поверховим. Тепер, озброєні практикою роботи з квадратними рівняннями, розпочнемо!

Нагадаємо, що дробово-раціональним називається рівняння вигляду

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0, \quad (*)$$

де $P(x)$ та $Q(x)$ — деякі багаточлени.

Рівняння $(*)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} P(x)=0 \\ Q(x)\neq 0 \end{cases}. \quad (**)$$

Система $(**)$ розв'язується таким чином:

1) розв'язуємо рівняння $P(x)=0$;

2) перевіряємо умову $Q(x)\neq 0$.

Але, звісно, на практиці ви найчастіше зустрічатиметесь з рівняннями, які мають бути зведені до дробово-раціональних. Ці рівняння, як правило, матимуть вигляд $A(x)=B(x)$, де $A(x)$ та $B(x)$ — дробово-раціональні вирази.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння: $\frac{x}{x-3}-\frac{5}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо

$$\frac{x(x+3)-5(x-3)}{x^2-9}-\frac{18}{x^2-9}=0;\quad \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=0.$$

Отже, ми звели початкове рівняння до дробово-раціонального. Далі маємо:

$$\begin{cases} x^2-2x-3=0 \\ x\neq\pm3 \end{cases}.$$

Розв'язавши перше рівняння системи (квадратне рівняння!), знайдемо:

$$x_1=3; x_2=-1,$$

але оскільки $x\neq\pm3$, дістанемо, що $x=3$ — сторонній корінь даного рівняння. Отже, $x=-1$.

ВІДПОВІДЬ. $x=-1$.

Нагадаємо, що частковим випадком дробово-раціональних рівнянь є дробово-лінійні рівняння, тобто рівняння вигляду (*), де $P(x)$ та $Q(x)$ — лінійні вирази.

ЗАДАЧА 1. Розв'язати дробово-лінійні рівняння:

1) $\frac{71-3x}{6x-9}=\frac{1}{3}$; 2) $\frac{17}{5x}=2-\frac{7}{x}$; 3) $\frac{25x+3}{3x+7}=5$;

4) $\frac{49-2x}{16x}-0{,}5=0$; 5) $\frac{8x}{36x-21}=\frac{1}{2}$; 6) $\frac{9}{x}+\frac{13}{2x}=2$;

7) $\frac{2+x}{4x-2}+\frac{3}{4}=0$; 8) $\frac{12}{x}-\frac{5}{6x}-\frac{2}{3}=0$; 9) $\frac{5x}{10x-13}=\frac{3}{2}$;

10) $\frac{17x+26}{4x+3}-3=0$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 14,8; 2) 5,2; 3. 3,2; 4) 4,9; 5) 1,05;
6) 7,75; 7) –0,125; 8) 16,75; 9) 1,95; 10) –3,4.

Наступна задача містить додаткову умову, з якою ми вже зустрічалися: відомо, що рівняння має тільки один корінь. Нагадаємо, що тоді ми можемо не досліджувати випадки, коли рівняння не має коренів (у знаменнику нуль) або має нескінченну кількість коренів (зводиться до рівняння $0\cdot x=0$).

ЗАДАЧА 2. Розв'язати рівняння, якщо кожне має єдиний корінь:

1) $\dfrac{ax-b}{a+b}+\dfrac{a+bx}{a-b}=\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$; 2) $\dfrac{5}{b+3}-\dfrac{x}{3-b}=\dfrac{6x}{b^2-9}$;

3) $\dfrac{x}{a^2-a+1}-\dfrac{1}{2a+2}=\dfrac{2x-1}{2a^2-2a+2}+\dfrac{a-ax}{a^3+1}$;

4) $\dfrac{x}{a^2}=\dfrac{1+x}{(1+a)^2}-\dfrac{1-a}{1+a}$; 5) $\dfrac{a^2+1}{a^2-1}=1+\dfrac{a^2-x}{a+1}-\dfrac{a^2+x}{a-1}$;

6) $\dfrac{x+k}{m+k}-\dfrac{mk}{(m+k)^2}=\dfrac{mk}{m^2-k^2}$; 7) $\dfrac{1}{2ab^2}-\dfrac{3x}{2ab}=\dfrac{x}{a^2-ab}$;

8) $\dfrac{a^2+x}{b^2-a^2}+\dfrac{a^2-x}{a^2+b^2}=\dfrac{2b^2x+2a^2+2b^2}{b^4-a^4}$;

9) $\dfrac{(3n+1)x}{n}-\dfrac{3n}{n+1}=\dfrac{n^2}{(n+1)^3}+\dfrac{(2n+1)x}{n(n+1)^2}$;

10) $\dfrac{x-1}{a-1}+\dfrac{2x-1}{a^4-1}+\dfrac{1-x}{a+1}=\dfrac{2a^2(1-x)}{1-a^4}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Зазначимо, що $a\neq -b$ та $a\neq b$, бо інакше вираз у правій частині рівняння не має сенсу. Помножимо обидві частини рівняння на a^2-b^2, дістанемо: $(ax-b)(a-b)+(a+bx)(a+b)=(a+b)^2$.

Розкривши дужки та звівши подібні доданки, маємо: $x=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ $(a\neq -b, a\neq b)$; 2) -5 $(b\neq\pm 3)$;

3) $\dfrac{a}{2}$ $(a\neq -1, a\neq 0)$; 4) $\dfrac{a^4}{1+2a}$ $(a\neq -1, a\neq 0, a\neq -\frac{1}{2})$;

5) $-\dfrac{1}{a}-a$ $(a\neq\pm 1, a\neq 0)$; 6) $\dfrac{k(m^2+k^2)}{m^2-k^2}$ $(|m|\neq|k|)$;

7) $\dfrac{a-b}{b(3a-b)}$ $(a\neq b, a\neq 0, b\neq 0, a\neq\frac{b}{3})$;

8) $\dfrac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2-b^2}$ $(|a|\neq|b|)$;

9) $\dfrac{n}{n+1}$ $(n\neq 0, n\neq -1, n\neq -\frac{4}{3})$; 10) $\dfrac{3}{4}$ $(a\neq\pm 1)$.

Практикум

ЗАДАЧА 1. Розв'язати рівняння:

1) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}=2\dfrac{2}{3}$; 2) $\dfrac{x}{x+4}+\dfrac{x}{x-4}=5\dfrac{5}{9}$;

3) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-3}{x+3}=3\dfrac{1}{3}$; 4) $\dfrac{5x+7}{x-2}-\dfrac{2x+21}{x+2}=8\dfrac{2}{3}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) При $x\neq\pm1$ маємо:

$$x(x-1)+x(x+1)=2\frac{2}{3}(x^2-1);\quad x^2-x+x^2+x=\frac{8}{3}x^2-\frac{8}{3};$$

звідси

$$\frac{8}{3}x^2-2x^2=\frac{8}{3};\quad \frac{2}{3}x^2=\frac{8}{3};$$

$$2x^2=8;\quad x^2=4;\quad x=\pm2.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) ±2; 2) ±5; 3) ±6; 4) ±4.

ЗАДАЧА 2. Розв'язати рівняння:

1) $\dfrac{2}{x}-15=8x$; 2) $1-\dfrac{15}{x}=\dfrac{16}{x^2}$; 3) $x-25=\dfrac{54}{x}$;

4) $1-\dfrac{25}{x^2}=\dfrac{24}{x}$; 5) $x-\dfrac{20}{x}=1$; 6) $7-2x=\dfrac{3}{x}$;

7) $4x-\dfrac{2}{x}=7$; 8) $2+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{9}{x}$; 9) $1+\dfrac{12}{x}=x$;

10) $\dfrac{4}{x}+5=\dfrac{1}{x^2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Оскільки $x\neq0$, помножимо обидві частини рівняння на x, дістанемо квадратне рівняння

$$8x^2=2-15x,\ \text{або}\ 8x^2+15x-2=0;$$

звідси:

$$x_1=0{,}125,\ x_2=-2.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $-2; 0{,}125$; 2) $-1; 16$; 3) $-2; 27$; 4) $-1; 25$;
5) $-4; 5$; 6) $0{,}5; 3$; 7) $-0{,}25; 2$; 8) $0{,}5; 4$;
9) $-3; 4$; 10) $-1; 0{,}2$.

ЗАДАЧА 3. Розв'язати рівняння:

1) $3+\frac{27}{x}+x^2+\frac{81}{x^3}=0;$ 2) $\frac{8}{x^4}-\frac{5}{x^3}-\frac{8}{x}+5=0;$

3) $12x+\frac{20}{x}-\frac{25}{x^2}-15=0;$ 4) $40+16x-\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}=0;$

5) $3x^3+5x+\frac{40}{x^2}+24=0;$ 6) $10+\frac{1}{2x^3}-\frac{5}{2x^2}-\frac{2}{x}=0.$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Оскільки $x \neq 0$, помножимо обидві частини рівняння на x^3, дістанемо:

$$x^5+3x^3+27x^2+81=0; \quad x^3\left(x^2+3\right)+27\left(x^2+3\right)=0;$$

звідси

$$\left(x^3+27\right)\left(x^2+3\right)=0.$$

Але $x^2+3>0$ для усіх дійсних x, тоді $x^3+27=0$, отже, $x=-3$, (бо $(-3)^3=-27$).

ВІДПОВІДЬ. 1) -3; 2) 1; 1,6; 3) 1,25; 4) $-2{,}5$; 0,5; 5) -2; 6) $\pm 0{,}5$; 0,2.

ЗАДАЧА 4. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{x^3-8}{2x-4}=12x-18;$ 2) $\frac{x^4-256}{16-x^2}=2(7x+12);$

3) $\frac{8x^3+27}{4x+6}=5x+21;$ 4) $\frac{x^4-256}{16+x^2}=2(8-2x);$

5) $\frac{16x^4-81}{36-16x^2}=5x-12;$ 6) $\frac{x^3+64}{16+4x}=11-\frac{x}{4};$

7) $\frac{x^4-625}{25-x^2}=-(8x+90);$ 8) $\frac{x^3-125}{x-5}=8x+35;$

9) $\frac{27x^3+125}{3x+5}=-(5+48x);$ 10) $\frac{16x^4-1}{16x^2-4}=4x+2{,}5.$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Ясно, що $x \neq 2$. Перетворимо ліву частину рівняння:

$$\frac{x^3-8}{2(x-2)}=\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{2(x-2)}=\frac{x^2+2x+4}{2}.$$

Таким чином, рівняння набуде вигляду:

$$\frac{x^2+2x+4}{2}=12x-18;$$

звідси

$$x^2-22x+40=0;\quad x_1=20,\ x_2=2.$$

Оскільки $x\neq 2$, то корінь x_2 — сторонній.

ВІДПОВІДЬ. 1) 20; 2) -10; 3) 5,5; 4) -8; 4; 5) $-6{,}5$; 6) 7; 7) 13; 8) -2; 9) -2; 10) 4,5.

ЗАДАЧА 5. Розв'язати рівняння:

1) $\dfrac{3x-7}{x+5}=\dfrac{x-3}{x+2}$; 2) $\dfrac{2x-5}{x-1}=\dfrac{5x-3}{3x+5}$;

3) $\dfrac{5-x}{2x-1}=\dfrac{15-4x}{3x+1}$; 4) $\dfrac{7}{x}-\dfrac{21+65x}{7}+8x+11=0.$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Очевидно, що $x\neq -5$; $x\neq -2$. Використовуючи властивість пропорції, маємо:

$$(3x-7)(x+2)=(x-3)(x+5);$$
$$3x^2+6x-7x-14=x^2+5x-3x-15;$$
$$\text{звідси } 2x^2-3x+1=0.$$

За формулою коренів квадратного рівняння:

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm1}{4};\quad x_1=1,\ x_2=\frac{1}{2}.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $1;\frac{1}{2}$; 2) 4; -7; 3) 2; 4) $7;-\frac{7}{9}$.

ЗАДАЧА 6. Розв'язати рівняння:

1) $\dfrac{(x+3)^2}{5x}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{(3x-1)^2}{5x}=\dfrac{2x-3}{2}$;

2) $\dfrac{(x-12)^2}{6x}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{(x-9)}{18}=\dfrac{(x-14)^2}{2x}+\dfrac{5}{x}$;

3) $3+\dfrac{(x-3)^2}{4x}=\dfrac{(x+3)^2}{8x}+\dfrac{(x+1)(x-1)}{3x}$;

4) $\dfrac{6}{5x-1}=3x+8$;

5) $\dfrac{x(1-x)}{1+x}=6;$

6) $\dfrac{14}{x^2-9}+\dfrac{4-x}{3+x}=\dfrac{7}{x+3}-\dfrac{1}{3-x};$

7) $\dfrac{1}{2-x}-1=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6-x}{3x^2-12};$

8) $\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{2}{x-3};$

9) $1-\dfrac{3-2x}{5-x}=\dfrac{3}{3-x}-\dfrac{x+3}{x+1};$

10) $\dfrac{2+x}{2x-2}-\dfrac{9x^2+x+2}{x^2-1}=\dfrac{85-12x}{4x+4}-\dfrac{10-4x}{3x+3};$

11) $\dfrac{30}{x^2-1}-\dfrac{13}{x^2+x+1}=\dfrac{7+18x}{x^3-1};$

12) $\dfrac{x+36}{x^3-1}=\dfrac{x+6}{x-1}-\dfrac{x^2-x+16}{x^2+x+1};$

13) $\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x^2-2x}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=0.$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Маємо:

$$2(x+3)^2-2(3x-1)^2+10-5x(2x-3)=0 \quad (x\neq 0);$$

$$2(x+3+3x-1)(x+3-3x+1)+10-10x^2+15x=0;$$

$$(8x+4)(4-2x)-10x^2+15x+10=0;$$

$$32x-16x^2+16-8x-10x^2+15x+10=0;$$

$$26x^2-39x-26=0; \quad x_1=2; x_2=-\frac{1}{2}.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $2;\ -\frac{1}{2};$ 2) $18;\ 15{,}8;$ 3) $5;\ -1\frac{2}{5};$

4) $-2{,}8;\ \frac{1}{3};$ 5) $-2;-3;$ 6) $4;-5;$ 7) $\frac{2}{3};-3;$

8) $2{,}5;\ 5;$ 9) $2;-9;$ 10) $-\frac{7}{2};\frac{29}{41};$ 11) $9;-4;$

12) $2;\ -\frac{7}{9};$ 13) $3.$

ЗАДАЧА 7. Розв'язати рівняння:

1) $\dfrac{1}{x^3-x^2+x-1}-\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{x^2-7x}{\left(x^4-1\right)}-\dfrac{4x^2}{x^3+x^2+x+1}$;

2) $\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-7}$;

3) $\dfrac{1}{x-9}+\dfrac{1}{x-7}=\dfrac{1}{x+18}+\dfrac{1}{x-10}$;

4) $\dfrac{x+11}{x^2-1}-\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{2(x+7)}{x+1}-4$;

5) $\dfrac{4(3x+1)}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{3x-2}{x-1}-\dfrac{2x+3}{x+3}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Маємо:

$$\frac{1}{x^2(x-1)+(x-1)}-\frac{4}{x+1}-\frac{x^2-7x}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}+\frac{4x^2}{x^2(x+1)+(x+1)}=0;$$

$$\frac{1}{(x-1)\left(x^2+1\right)}-\frac{4}{x+1}-\frac{x^2-7x}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}+\frac{4x^2}{(x+1)\left(x^2+1\right)}=0;$$

$$\frac{(x+1)-4(x-1)\left(x^2+1\right)-\left(x^2-7x\right)+4x^2(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}=0.$$

Це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x+1-4x^3-4x+4x^2+4-x^2+7x+4x^3-4x^2=0 \\ (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\neq 0 \end{cases};$$

звідси

$$\begin{cases} x^2-4x-5=0 \\ x\neq \pm 1 \end{cases}.$$

Тепер запропонуємо інший варіант оформлення — з використанням знака «сукупність» (квадратної дужки). Отже, маємо:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=5 \end{array}\right. ; \\ x\neq \pm 1 \end{cases}$$

звідси $x=5$.

ВІДПОВІДЬ. 1) 5; 2) $10; 5\frac{1}{5}$; 3) $12; 8\frac{1}{4}$; 4) 5; 4; 5) 7; −1.

ЗАДАЧА 8. Розв'язати рівняння з буквеними коефіцієнтами:

1) $\frac{a^3x}{b}=\frac{b}{ax}$; 2) $\frac{ax}{b^2}=\frac{b^2}{a^5x}$; 3) $\frac{a^5}{b^3x}=\frac{bx}{a^5}$;

4) $\frac{m^3}{n^2x}=\frac{n^4x}{m}$; 5) $\frac{x}{x+a}+\frac{x}{x-a}=2\frac{2}{3}$;

6) $\frac{ax+b}{a}=\frac{ab}{a^2-x}$; 7) $\frac{2x+b}{x-b}=\frac{x-b}{x+a}$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Очевидно, що $a\neq 0, b\neq 0$. Маємо:

$$a^4x^2=b^2;\quad x^2=\frac{b^2}{a^4};\quad |x|=\sqrt{\frac{b^2}{a^4}}=\frac{|b|}{|a^2|};\quad x=\pm\frac{b}{a^2}.$$

5) Перетворимо ліву частину рівняння:

$$\frac{x}{x+a}+\frac{x}{x-a}=\frac{x(x-a)+x(x+a)}{(x+a)(x-a)}=\frac{x(x-a+x+a)}{x^2-a^2}=\frac{2x^2}{x^2-a^2}.$$

За умовою,

$$\frac{2x^2}{x^2-a^2}=2\frac{2}{3},$$

тоді при $x\neq\pm a$:

$$2x^2=\frac{8}{3}\left(x^2-a^2\right);\quad \frac{1}{3}x^2=\frac{4}{3}a^2;\quad x^2=4a^2;\quad x=\pm 2a.$$

Оскільки $x\neq\pm a$, дістанемо, що при $a=0$ розв'язку нема, а при $a\neq 0$ $x=\pm 2a$.

6) Очевидно, що $a\neq 0$; $x\neq a^2$. Маємо:

$$a^3x-ax^2+a^2b-bx=a^2b;\quad ax^2-a^3x+bx=0;$$

$$x\left(ax-a^3+b\right)=0;\quad x=0 \text{ або } ax=a^3-b.$$

Звідси

$$x=0 \text{ або } x=\frac{a^3-b}{a}.$$

Оскільки $x\neq a^2$, то

$$a^2\neq\frac{a^3-b}{a};\quad b\neq 0.$$

Таким чином, рівняння має розв'язок $x=\frac{a^3-b}{a}$ тільки при $a\neq 0$, $b\neq 0$. При $a\neq 0$, $b=0$ рівняння має розв'язок $x=0$.

7) Очевидно, що $x \neq b$; $x \neq -a$. Маємо:

$$(2x+b)(x+a)=(x-b)^2;$$

$$2x^2+2ax+bx+ab=x^2-2bx+b^2;\ \ x^2+(2a+3b)x+ab-b^2=0.$$

Знайдемо дискримінант одержаного рівняння:

$$D=(2a+3b)^2-4(ab-b^2)=4a^2+12ab+9b^2-8ab+4b^2=$$

$$=4(a+b)^2+9b^2>0,$$

оскільки $D=0$ при $a=-b=0$, але тоді $x=0$, що не підходить, бо $x \neq b$; $x \neq -a$. Отже,

$$x=\frac{-(2a+3b)\pm\sqrt{D}}{2},\ \text{де}\ D=4(a+b)^2+9b^2.$$

Але ще треба врахувати умову $x \neq b$; $x \neq -a$ (зробіть це самостійно).

ВІДПОВІДЬ. 1) При $a=0$ та при $b=0$ — розв'язків нема;
при $a \neq 0, b \neq 0$ $x=\pm\frac{b}{a^2}$;

2) при $a=0$ та при $b=0$ — розв'язків нема;
при $a \neq 0, b \neq 0$ $x=\pm\frac{b^2}{a^3}$;

3) при $a=0$ та при $b=0$ — розв'язків нема;
при $a \neq 0, b \neq 0$ $x=\pm\frac{a^5}{b^2}$;

4) при $m=0$ та при $n=0$ — розв'язків нема;
при $m \neq 0, n \neq 0$ $x=\pm\frac{m^2}{n^3}$;

5) при $a=0$ — розв'язків нема; при $a \neq 0$ $x=\pm 2a$;

6) при $a=0$ — розв'язків нема;
при $a \neq 0, b=0$ $x=0$;
при $a \neq 0, b \neq 0$ $x=0$ або $x=\frac{a^3-b}{a}$;

7) при $a=-b=0$ — розв'язків нема;
при $a=-b, b \neq 0$ $x=-2b$;
при $a \neq -b$ $x=\frac{-(2a+3b)\pm\sqrt{D}}{2}$,
де $D=4(a+b)^2+9b^2$.

§ 2. ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ (РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ)

Задачі на складання рівнянь, або текстові алгебричні задачі, являють собою традиційний розділ шкільної математики.

У дещо зміненій формі умови вони досить часто зустрічаються у геометрії, фізиці, хімії, біології. Розв'язання цих задач розвиває логіку, уважність, спостережливість.

Умовно текстові задачі можна поділити на типи:

- Задачі на сумісну роботу.
- Задачі на рух.
- Задачі на проценти та суміші.
- Геометричні задачі.

У восьмому класі відбувається перше знайомство з такими задачами. Але поміж них вже зустрічаються задачі підвищеної складності, а також олімпіадні задачі.

Ми почнемо з двох простих задач, однотипні яким ви вже розв'язували у шостому та сьомому класах.

ЗАДАЧА 1. Швидкий поїзд протягом години проходить 60 км, а пасажирський — 40 км. Визначити відстань між двома містами, якщо відомо, що швидкий поїзд проходить цю відстань на 2 год 15 хв швидше від пасажирського.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай x км — відстань між містами. Тоді швидкий поїзд проходить цю відстань протягом $\frac{x}{60}$ годин, а пасажирський — протягом $\frac{x}{40}$ годин. З огляду на умову задачі, складемо рівняння:

$$\frac{x}{60}+2\frac{15}{60}=\frac{x}{40}.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо, що $x=270$. Отже, відстань між містами дорівнює 270 км.

ВІДПОВІДЬ. 270 км.

ЗАДАЧА 2. На кришталеву люстру підняли ціну на 45 %, а потім ще на 20 %. На скільки відсотків збільшилася ціна люстри після двох підвищень?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай x — попередня ціна люстри. Після першого підвищення люстра коштувала

$$x + 0{,}45x = 1{,}45x,$$

а після другого підвищення вона ще подорожчала:

$$1{,}45x + 0{,}2 \cdot 1{,}45x = 1{,}74x.$$

Таким чином, після двох підвищень ціна люстри збільшилася на $0{,}74x$ або на 74 %.

ВІДПОВІДЬ. На 74 %.

У наступних трьох задачах вже потрібно розв'язувати квадратні рівняння.

ЗАДАЧА 3. Ширина прямокутника складає 75 % його довжини. Знайти периметр цього прямокутника, якщо відомо, що площа прямокутника дорівнює 48 м^2.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай довжина прямокутника дорівнює x м. Тоді ширина прямокутника дорівнює $\frac{3}{4}x$ м. Оскільки площа прямокутника дорівнює 48 м^2, то можна скласти рівняння:

$$x \cdot \frac{3}{4}x = 48.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$x^2 = 64; \quad x_1 = 8, x_2 = -8.$$

Отже, довжина прямокутника дорівнює 8 м, а тому ширина його дорівнює

$$8 \cdot \frac{3}{4} = 6 \text{ (м)},$$

тоді периметр прямокутника дорівнює:

$$2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 = 28 \text{ (м)}.$$

ВІДПОВІДЬ. 28 м.

ЗАДАЧА 4. Якщо кожен учасник шахового турніру зіграє по одній партії з кожним із решти учасників, то всього буде зіграна 231 партія. Скільки всього шахістів приймають участь у турнірі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай x — кількість учасників турніру. Оскільки кожен учасник не грає сам із собою, то йому необхідно зіграти $x-1$ партію. Оскільки в кожній партії грає дві особи, маємо рівняння

$$\frac{x(x-1)}{2}=231.$$

Розв'язуємо це рівняння:

$$x^2-x=462;\quad x^2-x-462=0;\quad x_1=22,\ x_2=-21.$$

За змістом задачі, нас влаштовує тільки додатне значення x, таким чином, у турнірі приймали участь 22 особи.

ВІДПОВІДЬ. 22 шахіста.

ЗАДАЧА 5. Сума двох чисел дорівнює 6, а неповний квадрат їхньої суми дорівнює 31. Знайти ці числа.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай перше число дорівнює x, тоді друге число дорівнює $6-x$. Неповний квадрат суми цих чисел дорівнює за умовою 31, отже,

$$x^2+x(6-x)+(6-x)^2=31.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$x^2+6x-x^2+36-12x+x^2=31;$$

$$x^2-6x+5=0;\quad x_1=5,\ x_2=1.$$

УВАГА! Традиційна помилка! Тут часто-густо учні роблять висновок:

Отже, перше число дорівнює 5, *а друге* — 1.

Учнем, який так записав розв'язок, отримана правильна відповідь, але **задача розв'язана невірно**! Далі необхідно міркувати таким чином:

Якщо $x=5$ — перше з даних чисел, то $6-5=1$ — друге число; якщо ж перше із заданих чисел дорівнює 1, то друге дорівнює $6-1=5$.

ВІДПОВІДЬ. 1 та 5.

І. Задачі на сумісну роботу

ЗАДАЧА 6. Басейн наповнюють дві труби протягом 6 годин. Одна перша труба заповнює його на 5 годин швидше, ніж одна друга. За який час кожна труба, діючи окремо, зможе наповнити басейн?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай перша труба наповнює басейн протягом x годин, тоді друга труба наповнить його протягом $(x+5)$ годин. Протягом однієї години першою трубою наповниться $\frac{1}{x}$ частина басейну, другою трубою — $\left(\frac{1}{x+5}\right)$ частина басейну, а разом — $\frac{1}{6}$ частина басейну. Маємо рівняння: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$. Розв'яжемо це рівняння:

$$\begin{cases} 6x+30+6x=x^2+5x \\ x(x+5)\neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2-7x-30=0 \\ x(x+5)\neq 0 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} x_1=10 \\ x_2=-3 \end{array}\right.$$

За змістом задачі, $x=10$. Отже, перша труба може заповнити басейн протягом 10 годин, тоді друга труба — $10+5=15$ (годин).

ВІДПОВІДЬ. 10 годин, 15 годин.

ЗАДАЧА 7. Ремонт шляху проводили дві бригади. Кожна з них відремонтувала по 10 км, хоча друга бригада скінчила роботу на один день швидше від першої. Скільки кілометрів шляху ремонтувала кожна бригада за день, якщо обидві разом ремонтували протягом дня по 4,5 км?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай перша бригада ремонтувала x км у день; тоді друга ремонтувала $(4{,}5-x)$ км у день. Перша бригада працювала $\frac{10}{x}$ днів, друга — $\frac{10}{4{,}5-x}$ днів. Складаємо рівняння: $\frac{10}{x}-\frac{10}{4{,}5-x}=1$.

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо корені: $x_1=2$; $x_2=22{,}5$. Другий корінь не підходить, бо за змістом задачі число $(4{,}5-x)$ має бути додатним. Отже, перша бригада ремонтувала щодня по 2 км шляху, а друга — по $4{,}5-2=2{,}5$ (км).

ВІДПОВІДЬ. 2 км, 2,5 км.

ЗАДАЧА 8. Один самоскид може перевезти цеглу на 24 год швидше, ніж другий. Якщо спочатку дві третини всієї цегли перевезе перший самоскид, а решту — другий, то знадобиться на 33 години більше, ніж якби одночасно працювали обидва самоскиди. За який час може перевезти цеглу кожен самоскид?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай перший самоскид може перевезти цеглу протягом t годин, тоді другий протягом $(t+24)$ години. Всю роботу рахуємо рівною 1. Протягом однієї години перший самоскид може перевезти $\frac{1}{t}$ частину цегли, а другий $\frac{1}{t+24}$ частину цегли. Одночасно працюючи, протягом однієї години самоскиди зможуть перевезти $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+24}=\frac{2t+24}{t(t+24)}$ частину цегли, витративши на всю роботу

$$\frac{1}{\frac{2t+24}{t(t+24)}}=\frac{t(t+24)}{2t+24}\text{ (годин).}$$

Перший самоскид $\frac{2}{3}$ всієї цегли може перевезти протягом

$$\frac{2}{3}:\frac{1}{t}=\frac{2}{3}t\text{ (годин);}$$

частину, що залишилася, другий самоскид може перевезти протягом

$$\frac{1}{3}:\frac{1}{t+24}=\frac{t+24}{3}\text{ (годин).}$$

За умовою задачі складаємо рівняння:

$$\frac{2t}{3}+\frac{t+24}{3}-33=\frac{t(t+24)}{2t+24};$$

звідси (при $t\neq-12$)

$$t+8-33=\frac{t(t+24)}{2t+24};\quad (t-25)(2t+24)=t(t+24)$$

$$t^2-50t-600=0;\quad t_1=60, t_2=-10\text{ — сторонній корінь.}$$

Отже, перший самоскид може перевезти цеглу протягом 60 год, тоді другий витратить на це $60+24=84$ (год).

ВІДПОВІДЬ. 60 год, 84 год.

II. Задачі на рух

ЗАДАЧА 9. Відстань між двома станціями залізниці дорівнює 96 км. Перший поїзд проходить цю відстань на 40 хв швидше, ніж другий. Швидкість першого поїзда більша за швидкість другого на 12 км/год. Визначити швидкість обох поїздів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай швидкість першого поїзда x км/год, тоді швидкість другого поїзда $(x-12)$ км/год. Тоді перший поїзд був на шляху $\frac{96}{x}$ годин, а другий поїзд — $\frac{96}{x-12}$ годин. Складаємо рівняння:

$$\frac{96}{x-12}-\frac{96}{x}=\frac{2}{3}.$$

Розв'язуючи його і відкидаючи сторонній корінь, маємо: $x=48$. Отже, швидкість першого поїзда 48 км/год, швидкість другого поїзда 36 км/год.

ВІДПОВІДЬ. 48 км/год, 36 км/год.

ЗАДАЧА 10. Дирижабль пролетів відстань у 40 км проти вітру (швидкість вітру 30 км/год); потім пройшов той самий шлях у зворотному напрямку, витративши на дорогу в обидва кінці 2,5 години. Визначити власну швидкість дирижабля.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай власна швидкість дирижабля дорівнює x км/год, тоді швидкість проти вітру дорівнює $(x-30)$ км/год, а швидкість за вітром — $(x+30)$ км/год. Складаємо рівняння:

$$\frac{40}{x+30}+\frac{40}{x-30}=2{,}5.$$

Розв'язуючи його, дістанемо, що $x=50$ (корінь $x=-18$ не підходить за змістом задачі).

ВІДПОВІДЬ. $x=50$ км/год.

ЗАДАЧА 11. Поїзд повинен був пройти 54 км. На 14 кілометрі він затримався на 10 хв біля семафора; а потім, збільшивши початкову швидкість на 10 км/год, він прибув до місця призначення із запізненням на 2 хв. Визначити початкову швидкість.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай x км/год — початкова швидкість поїзда. Тоді час, який він повинен був витратити на шлях довжиною 54 км, дорівнює $\frac{54}{x}$ годин. З іншого боку, час знаходження поїзда на шляху складається з часу на шлях довжиною 14 км, тобто $\frac{14}{x}$ годин, часу зупинки біля семафора — 10 хв, тобто $\frac{1}{6}$ години, і, нарешті, з часу, який залишився на шлях довжиною 40 км (поїзд пройшов їх із швидкістю $(x+10)$ км/год), тобто $\frac{40}{x+10}$ годин. Враховуючи запізнення на 2 хв, що дорівнюють $\frac{1}{30}$ години, дістанемо рівняння:

$$\frac{54}{x}-\frac{1}{30}=\frac{14}{x}+\frac{1}{6}+\frac{40}{x+10},$$

яке після перетворень набуде вигляду $x^2+10x-2000=0$, звідки $x_1=40$, $x_2=-50$. Від'ємний корінь не підходить за змістом задачі. Отже, початкова швидкість поїзду 40 км/год.

ВІДПОВІДЬ. 40 км/год.

ЗАДАЧА 12. Відстань між двома містами, якщо рухатись річкою, 80 км. Пароплав проходить цей шлях в обидва кінці за 8 год 20 хв. Знайти його власну швидкість, якщо швидкість течії — 4 км/год.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай швидкість пароплава у стоячій воді — x км/год. Тоді за течією пароплав рухається із швидкістю $(x+4)$ км/год, а проти течії — $(x-4)$ км/год. За течією пароплав іде $\frac{80}{x+4}$ години, проти течії — $\frac{80}{x-4}$ години. За умовою, він витрачає на це $8\frac{1}{3}$ години:

$$\frac{80}{x+4}+\frac{80}{x-4}=8\frac{1}{3}.$$

Розв'язуючи рівняння і відкидаючи від'ємний корінь, знаходимо, що швидкість пароплава у стоячій воді дорівнює 20 км/год.

ВІДПОВІДЬ. 20 км/год.

III. Задача на суміші

ЗАДАЧА 13. Дві окремо узяті суміші цукрового сиропу, перша з яких містить 0,8 кг, а друга 0,6 кг цукру, з'єднали разом і отримали 10 кг нового цукрового сиропу. Обчислити, скільки треба було взяти першого і другого сиропів, якщо відомо, що цукру містилося в першому сиропі на 10 % більше, ніж у другому.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо через x кг вагу першого сиропу; тоді вага другого сиропу дорівнює $(10-x)$ кг. За умовою,

$$\frac{0{,}8\cdot 100}{x}-\frac{0{,}6\cdot 100}{10-x}=10.$$

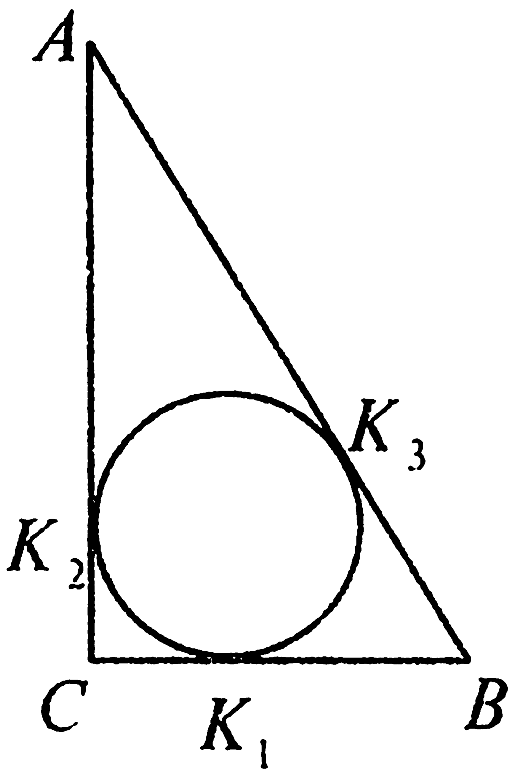
Звідси $x=4$ ($x=20$ не підходить за змістом задачі). Тоді вага першого сиропу 4 кг, а другого — 6 кг.

ВІДПОВІДЬ. 4 кг і 6 кг.

IV. Геометричні задачі

ЗАДАЧА 14. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки 5 та 12 см. Знайти катети.

РОЗВ'ЯЗАННЯ



Мал. 1

У трикутнику ABC ($\angle ACB=90°$) коло дотикається сторін трикутника у точках K_1, K_2, K_3 (мал. 1). Тоді

$$BK_3=5\text{ (см)};\quad AK_3=12\text{ (см)}.$$

Оскільки дотичні, проведені з однієї точки, рівні, то $CK_1=CK_2$, $BK_1=BK_3$, $AK_2=AK_3$. Позначимо $CK_1=x>0$. Тоді

$$BC=x+5;\ AC=x+12,\ AB=5+12=17.$$

За теоремою Піфагора:

$$(x+5)^2+(x+12)^2=17^2.$$

Звідси, враховуючи, що $x>0$, маємо: $x=3$. Отже, $CK_1=3$ (см) та

$$BC=3+5=8\text{ (см)};\quad AC=3+12=15\text{ (см)}.$$

ВІДПОВІДЬ. 8 см, 15 см.

ЗАДАЧА 15. Дві вершини квадрата належать колу з радіусом R, дві другі — дотичній до цього кола. Знайти сторону квадрата.

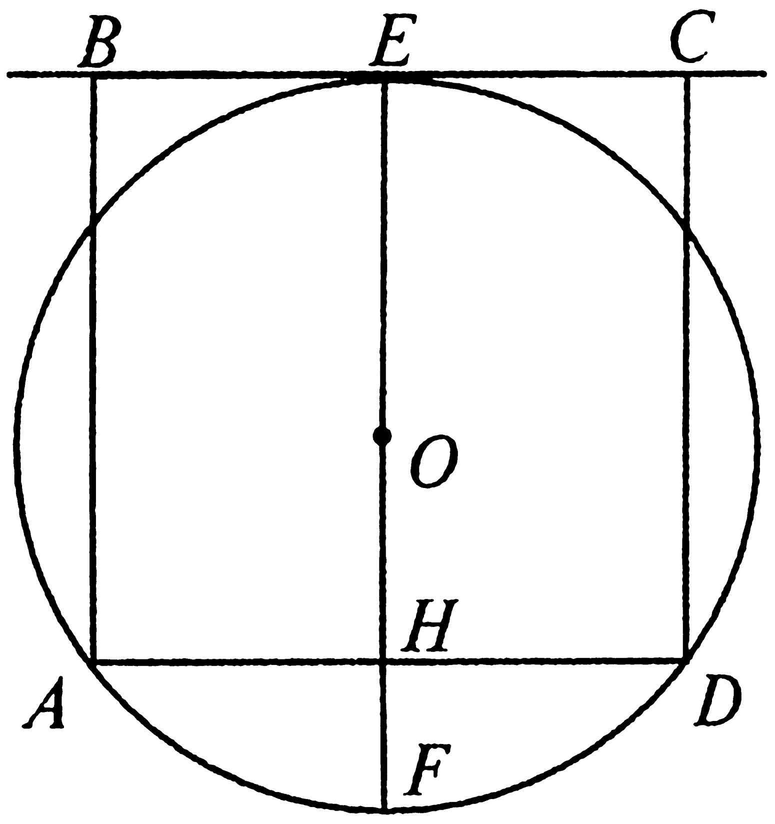
РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай $ABCD$ — даний квадрат (мал. 2), EF — діаметр кола, x — сторона квадрата, H — точка перетину діаметра EF та сторони квадрата AD. Тоді за теоремою про добуток відрізків хорд:

$$EH \cdot HF = AH \cdot HD;$$

звідси

$$x(2R - x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$



Мал. 2

Розв'язуючи квадратне рівняння, дістанемо, що $x = 1{,}6R$.

ВІДПОВІДЬ. $1{,}6R$.

Практикум

ЗАДАЧА 1. Учні випускного класу обмінюються своїми фотографічними картками. Скільки було учнів, якщо для обміну знадобилося 870 фотографічних карток.

ВІДПОВІДЬ. 30 учнів.

ЗАДАЧА 2. Два автомобіля вирушають одночасно з одного міста до другого. Швидкість першого на 10 км/год більша за швидкість другого, і тому перший автомобіль прибуває на місце на 1 год раніше, ніж другий. Визначити швидкість першого і другого автомобілів, якщо відома відстань між містами — 560 км.

ВІДПОВІДЬ. 80 км/год, 70 км/год.

ЗАДАЧА 3. З аеродрому вилітають одночасно до пункту, розташованому на відстані 1600 км, два літаки. Швидкість першого на 80 км/год більша за швидкість другого, а тому він прилітає до місця призначення на годину раніше. Визначити швидкості кожного з літаків.

ВІДПОВІДЬ. 400 км/год, 320 км/год.

ЗАДАЧА 4. Під час розіграшу першості з футболу було проведено 55 матчів, причому кожна команда зустрічалася з кожною, що залишилися, тільки раз. Скільки команд взяли участь у розіграші?

ВІДПОВІДЬ. 11 команд.

ЗАДАЧА 5. Фотографічна картка розміром 12 см на 18 см має рамку однакової ширини. Визначити ширину рамки, якщо її площа дорівнює площі картки.

ВІДПОВІДЬ. 3 см.

ЗАДАЧА 6. Квітник, який має форму прямокутника із сторонами 2 м і 4 м, оточений доріжкою, яка всюди має однакову ширину. Визначити ширину цієї доріжки, якщо її площа у 9 разів більша за площу квітника.

ВІДПОВІДЬ. 3 м.

ЗАДАЧА 7. Посередині прямокутного майданчика зі сторонами 12 м і 10 м потрібно розбити прямокутний квітник площею 8 м^2 так, щоб краї квітника були розташовані на однаковій відстані від країв майданчика. На якій відстані від краю майданчика має розташуватись край квітника?

ВІДПОВІДЬ. 4 м.

ЗАДАЧА 8. Пароплав пройшов за течією річки 48 км і стільки ж проти течії, весь шлях зайняв 5 годин. Визначити швидкість пароплава у стоячій воді, якщо швидкість течії річки — 4 км/год.

ВІДПОВІДЬ. 20 км/год.

ЗАДАЧА 9. Відстань між двома пристанями на річці дорівнює 80 км. Пароплав проходить цей шлях вперед і назад за 8 год 20 хв. Визначити швидкість пароплава у стоячій воді, якщо швидкість течії річки — 4 км/год.

ВІДПОВІДЬ. 20 км/год.

ЗАДАЧА 10. З порту одночасно вийшли два кораблі: один на північ, а другий на схід. Коли минуло 2 години, відстань між ними дорівнювала 60 км. Знайти швидкість кожного корабля, враховуючи, що швидкість одного з них на 6 км/год більша, за швидкість другого.

ВІДПОВІДЬ. 18 км/год; 24 км/год.

ЗАДАЧА 11. З листкової жерсті прямокутної форми виготовлена відкрита згори коробка таким чином, що по кутках вирізані квадрати із стороною 5 см. Отримані при цьому краї загнуті. Якого розміру був лист жерсті, якщо довжина його удвічі більша за ширину і якщо об'єм коробки дорівнює 1500 см^3?

ВІДПОВІДЬ. 40 см на 20 см.

ЗАДАЧА 12. З двох міст, відстань між якими 900 км, вирушають назустріч один одному два поїзди і зустрічаються посеред шляху. Визначити швидкість кожного поїзда, якщо перший вийшов на 1 годину пізніше другого і мав швидкість на 5 км/год більшу, ніж швидкість другого поїзда?

ВІДПОВІДЬ. 50 км/год, 45 км/год.

ЗАДАЧА 13. Вартість тканини зменшили на стільки відсотків, скільки гривень коштував один метр тканини до зниження цін. На скільки відсотків могла бути знижена ціна на тканину, якщо метр її почали продавати по 16 гривень?

ВІДПОВІДЬ. На 20% або на 80%.

ЗАДАЧА 14. Після двох послідовних знижень цін на те саме число відсотків ціна фотоапарата «впала» з 30 грв. до 19,2 грв. На скільки відсотків знижувалася ціна фотоапарата щоразу?

ВІДПОВІДЬ. 20%.

ЗАДАЧА 15. Бригада лісорубів мусила за планом заготувати протягом декількох днів 216 м^3 дров. Перші 3 дні бригада виконувала встановлену планом норму, а потім щодня заготовляла 8 м^3 поза планом, тому вже за день до кінця строку було заготовлено 232 м^3 дров. Скільки дров на день мала заготовляти бригада за планом?

ВІДПОВІДЬ. 24 м^3.

ЗАДАЧА 16. Два автомобілі вийшли одночасно з міст A та B назустріч один одному. По годині автомобілі зустрілися і, не зупиняючись, продовжували рухатись з тією ж швидкістю. Перший прибув до міста B на 27 хв пізніше, ніж другий прибув до міста A. Визначити швидкість кожного з автомобілів, якщо відома відстань між містами — 90 км.

ВІДПОВІДЬ. 40 км/год, 50 км/год.

ЗАДАЧА 17. У глядацькому залі розташовано 320 місць. Потому, як кількість місць у кожному ряду збільшили на 4 і додали ще один ряд, у глядацькому залі нараховувалось 420 місць. Скільки тепер рядів у глядацькому залі, якщо їх було більше 10?

ВІДПОВІДЬ. 21 ряд.

ЗАДАЧА 18. Для перевезення 15 т овочів замовили декілька вантажівок певної вантажопідйомності. За відсутності саме таких вільних машин, гараж надіслав вантажівки вантажопідйомністю на півтонни меншою, але виділив таких машин на одну більше. Скільки тонн овочів узяла кожна з вантажівок?

ВІДПОВІДЬ. 2,5 т.

ЗАДАЧА 19. Фермер мусив засіяти 200 га до визначеного строку, але засівав щодня на 5 га більше, ніж планувалося, і тому закінчив роботу на 2 дні раніше строку. Скільки днів знадобилося фермерові на сівбу?

ВІДПОВІДЬ. За 8 днів.

ЗАДАЧА 20. Два велосипедиста вирушають одночасно назустріч один одному з пунктів A та B, відстань між якими 28 км, і за годину зустрічаються. Не зупиняючись, вони рухаються з тією ж швидкістю, і перший прибуває до пункту B на 35 хв раніше, ніж другий до пункту A. Визначити швидкість кожного велосипедиста.

ВІДПОВІДЬ. 16 км/год; 12 км/год.

ЗАДАЧА 21. У кришці ящика, що має форму прямокутника довжиною 30 см і шириною 20 см, треба вирізати прямокутний отвір площею в 200 см^2 так, щоб краї його були всюди на однаковій відстані від країв кришки. На якій відстані від краю кришки повинен розташуватися край отвору?

ВІДПОВІДЬ. 5 см.

ЗАДАЧА 22. З посудини місткістю 20 л, заповненої цукром, відсипали певну кількість цукру і долили води; потім відлили таку ж кількість суміші і знову долили води. У посудині залишилося 5 л цукру. Скільки літрів суміші щоразу відбирали з посудини?

ВІДПОВІДЬ. 10 л.

ЗАДАЧА 23. За планом тракторист повинен упродовж двох днів обробити прямокутну ділянку землі, довжина якої 400 м, а ширина — 300 м. Тракторист почав роботу від країв ділянки, рухаючись кругом за периметром необробленої частини, потроху наближаючись до середини. На якій відстані від краю ділянки повинен зупинитися тракторист, обробивши половину ділянки?

ВІДПОВІДЬ. 50 м.

ЗАДАЧА 24. Два поїзда виходять з двох міст, відстань між якими 360 км, і рухаються назустріч один одному. Вони зустрінуться посеред шляху, якщо другий поїзд вийде із станції на 1,5 години раніше від першого. Якщо ж вони вийдуть одночасно, то за 5 годин їм до зустрічі залишиться проїхати 90 км. Знайти швидкість кожного поїзду.

ВІДПОВІДЬ. 30 км/год, 24 км/год.

ЗАДАЧА 25. Двоє робітників, виконуючи певну роботу разом, могли б закінчити його за 12 днів. Якщо спочатку працюватиме тільки один з них, а коли він виконає половину всієї роботи, його змінить другий робітник, то вся робота завершиться за 25 днів. Скільки днів знадобиться кожному робітникові на виконання усієї роботи?

ВІДПОВІДЬ. 30 днів, 20 днів.

ЗАДАЧА 26. Двоє туристів йдуть один одному назустріч: один з пункту A, другий з B. Перший виходить з A на 6 годин пізніше, ніж другий з B, а коли зустрілися, з'ясувалося, що він пройшов на 12 км менше за другого. Рухаючись далі з тією ж швидкістю, перший приходить до B за 8 годин, а другий до A за 9 годин. Визначити відстань від A до B та швидкість кожного туриста.

ВІДПОВІДЬ. 84 км, 6 км/год, 4 км/год.

ЗАДАЧА 27. Двоє каменярів, якщо другий почне роботу на $1\frac{1}{2}$ дні пізніше від першого, викладуть стіну протягом 7 днів. Скільки днів знадобиться кожному з них окремо, щоб викласти цю стіну, якщо другий каменяр виконає цю роботу на 3 дні швидше, ніж перший?

ВІДПОВІДЬ. 14 днів, 11 днів.

ЗАДАЧА 28. Водонапірний бак наповнюється з двох труб протягом 2 год 55 хв. Перша труба наповнює його на 2 год швидше, ніж друга. За який час кожна труба, діючи окремо, наповнить бак?

ВІДПОВІДЬ. 5 годин, 7 годин.

ЗАДАЧА 29. Кооператив купив на певну суму товару і продав його з націнкою у 100 гривень. На виручені гроші кооператив купив нового товару, який продав за 1 210 гривень, встановивши на цей товар стільки ж відсотків націнки, скільки й першим разом. На яку суму кооператив купив товару першого разу?

ВІДПОВІДЬ. 1 000 гривень.

ЗАДАЧА 30. З двох пунктів A та B, відстань між якими невідома, виходять одночасно назустріч один одному двоє туристів. Зустрівшись, з'ясували, що перший пройшов на 4 км менше за другого; рухаючись далі, перший приходить до B за 4 год 48 хв після зустрічі, а другий приходить до A за 3 год 20 хв після зустрічі. Знайти відстань від A до B.

ВІДПОВІДЬ. 44 км.

ЗАДАЧА 31. З двох аеродромів вилітають одночасно назустріч один одному вертоліт та учбовий літак. До моменту зустрічі вертоліт пройшов на 100 км менше від літака. Шлях, що залишився, літак покриває за 1 год 20 хв, а вертоліт за 3 год. Знайти відстань між аеродромами та швидкість літака і вертольота.

ВІДПОВІДЬ. 500 км, 150 км/год, 100 км/год.

ЗАДАЧА 32. З двох пунктів A та B, відстань між якими 24 км, відправлені одночасно два автомобіля назустріч один одному. Після їхньої зустрічі автомобіль, що вийшов з A, приходить до B за 16 хв, а другий автомобіль приходить до A за 4 хв. Визначити швидкість кожного автомобіля.

ВІДПОВІДЬ. 60 км/год, 120 км/год.

ЗАДАЧА 33. У випуклому багатокутнику проведені усі можливі діагоналі; з'ясувалося, що їх усього 14. Скільки сторін має цей багатокутник?

ВІДПОВІДЬ. 7 сторін.

ЗАДАЧА 34. Який багатокутник має число діагоналей на 12 більше від числа його сторін?

ВІДПОВІДЬ. Восьмикутник.

ЗАДАЧА 35. Декілька точок розташовані на площині так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Провели усі прямі, що попарно з'єднують ці точки. Визначити, скільки було точок, якщо число проведених прямих дорівнює 45.

ВІДПОВІДЬ. 10 точок.

ГЛАВА 6. СТЕПІНЬ З ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ

Нагадаємо, що степенем числа a з натуральним показником n називається вираз

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}.$$

Наприклад, $2^5 = 32$; $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$; $(-3)^4 = 81$. Ви також знаєте властивість ділення степенів з однаковою основою:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \ (m > n).$$

Природно поставити питання: як визначити дію ділення, якщо $m \le n$? Розглянемо, наприклад, вирази:

$$2^4 : 2^4 \text{ та } 2^4 : 2^6.$$

Оскільки

$$2^4 = 16 \text{ та } 2^6 = 64,$$

то

$$2^4 : 2^4 = 1 \text{ та } 2^4 : 2^6 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}.$$

Таким чином, якщо *формально* застосувати правило ділення степенів у цьому випадку, то ми дістанемо істинні рівності:

$$2^0 = 2^{4-4} = 2^4 : 2^4 = 1 \text{ та } 2^{-2} = 2^{4-6} = 2^4 : 2^6 = \frac{1}{2^2}.$$

Це показує, що є сенс ввести відповідні означення степеня з нульовим та від'ємним показниками.

ОЗНАЧЕННЯ 1. Довільне число, відмінне від нуля, у нульовому степені дорівнює одиниці:

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

ОЗНАЧЕННЯ 2. Якщо $a \neq 0$ та n — ціле від'ємне число, то

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

ПРИКЛАДИ. $425^0 = 1$; $(-1467)^0 = 1$; $\left(\frac{7}{29}\right)^0 = 1$;

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2};\ 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27};\ (-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49};$$

$$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125};\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16;$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{27}{125}} = \frac{125}{27} = 4\frac{17}{27}.$$

ЗАДАЧА 1. Обчислити:

1) 2^{-2}; 3^{-2}; 2^{-3}; 8^{-1};

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; $\left(\frac{5}{6}\right)^{-4}$; $(0,3)^{-3}$;

3) $(-8)^{-2}$; $\left(-\frac{1}{12}\right)^{-1}$; $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-3}$; $(-1)^{-5}$;

4) -5^{-1}; -10^{-2}; -5^{-2}; $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}$;

5) $-0,25^{-1}$; $8\cdot 4^{-2}$; $25\cdot 5^{-3}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ (ЗРАЗКИ)

2) $(0,3)^{-3} = \left(\frac{3}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{1000}{27}$.

3) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{4}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$.

ЗАДАЧА 2. Зобразити дроби у вигляді алгебричних виразів, у яких не використовується операція ділення:

1) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{625}$;

2) 0,01; 0,001; 0,0001; 0,0000001;

3) $\frac{5}{128}$; $\frac{3}{125}$; $\frac{8}{243}$; $5\frac{3}{32}$;

4) 0,00015; 0,0000023; 0,00000124; 2,000003;

5) $\frac{1}{x^2}$; $\frac{2}{x^5}$; $\frac{a^3}{b^3}$; $\frac{x^3}{y^2}$;

6) $\frac{1}{a^3}$; $\frac{1}{a^n}$; $\frac{x^2}{y^5}$; $\frac{a^n}{b^m}$;

7) $\frac{2n}{3m^2}$; $4x\cdot\frac{1}{y^6}$; $\frac{2}{(a+b)^2}$; $\frac{5xy}{2(x-y)^4}$;

8) $\frac{a+b}{a-b}$; $\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$; $\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}$; $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4^4}\right)^3$;

9) $\frac{ab}{c}$; $\frac{5x^2}{a^{-2}}$; $\frac{a^2b^{-2}}{cd^{-1}}$; $\frac{1}{2a^{-3}b^{-1}c^2}$;

10) $\frac{5}{(a-b)^{-2}}$; $\frac{3xy}{7(x-y)^{-3}}$; $\frac{2^{-1}(x+y)}{5^{-1}a^{-2}(x-y)^{-2}}$;

11) $\frac{1}{a^{-n}b^{-m}}$; $\frac{9}{5^{-1}x^{-k}z^{-1}}$; $\frac{5a}{3^{-2}(a-b)^{-n}(a+b)^m}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ (ЗРАЗКИ)

1) $\frac{1}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^6=2^{-6}$;

2) $0{,}0001=10^{-4}$;

3) $5\frac{3}{32}=\frac{163}{32}=163\cdot\frac{1}{32}=163\cdot 2^{-5}$;

4) $2{,}000003=2+3\cdot 0{,}000001=2+3\cdot 10^{-6}$;

6) $\frac{x^2}{y^5}=x^2y^{-5}$;

7) $\frac{5xy}{2(x-y)^4}=5xy\cdot 2^{-1}\cdot(x-y)^{-4}$;

$$8)\ \frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=\frac{\left(b^2+a^2\right)mn}{b^2a^2(n-m)}=\left(b^2+a^2\right)mnb^{-2}a^{-2}(n-m)^{-1};$$

$$9)\ \frac{5a}{3^{-2}(a-b)^{-n}(a+b)^{m}}=5a\cdot 3^2(a-b)^n(a+b)^{-m}=$$

$$=45a(a-b)^n(a+b)^{-m}.$$

Властивості степеня з цілим показником

> *Степінь з цілим від'ємним показником має ті самі властивості, що й степінь з натуральним (тобто цілим додатним) показником. А саме:*
>
> $$a^m\cdot a^n=a^{m+n};\quad a^m:a^n=a^{m-n};\quad \left(a^m\right)^n=a^{mn}.$$

ПРИКЛАД ДОВЕДЕННЯ. Покажемо, що співвідношення

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

має місце і для цілих від'ємних показників. Справді, якщо $m<0$, $n<0$ (m та n цілі), то

$$a^m\cdot a^n=\frac{1}{a^{-m}}\cdot\frac{1}{a^{-n}}=\frac{1}{a^{-(m+n)}}=a^{m+n}.$$

ЗАДАЧА 1. Виконати дії:

1) $a^3\cdot a^{-2}$; 2) $x^4\cdot x^{-1}$;

3) $5a^{-5}\cdot 7a^4$; 4) $\frac{3}{4}m^{-2}n^4\cdot 8m^3n^{-2}$;

5) $5a^n:\frac{1}{3}a^{-n}$; 6) $0{,}8x^{-1}:0{,}4x^{-1}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

3) $5a^{-5}\cdot 7a^4=5\cdot 7a^{-5+4}=35a^{-1}=\frac{35}{a}$;

5) $5a^n:\frac{1}{3}a^{-n}=5\cdot 3\cdot a^{n-(-n)}=15a^{2n}$;

6) $0{,}8x^{-1}:0{,}4x^{-1}=\left(0{,}8:0{,}4\right)\cdot x^{-1-(-1)}=2\cdot x^0=2.$

ЗАДАЧА 2. Зобразити дроби у вигляді алгебричних виразів, у яких не використовується операція ділення:

$$1)\ \frac{ab}{a^{-2}};\quad 2)\ \frac{5x^2}{25x^{-3}};\quad 3)\ \frac{a^2b^{-2}}{cd^{-3}};\quad 4)\ \frac{1}{2a^{-1}b^{-1}c^2};$$

$$5)\ \frac{5(a-b)}{(a-b)^{-2}};\quad 6)\ \frac{3xy(x-y)^7}{4(x-y)^{-2}};\quad 7)\ \frac{2^{-1}(x+y)}{5^{-1}a^{-2}(x-y)^{-2}}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1)\ \frac{ab}{a^{-2}}=ab\cdot a^2=a^{1+2}\cdot b=a^3b;$$

$$5)\ \frac{5(a-b)}{(a-b)^{-2}}=5(a-b)\cdot(a-b)^2=5(a-b)^3.$$

ЗАДАЧА 3. Зобразити дроби у вигляді алгебричних виразів, у яких не використовуються від'ємні степені:

$$1)\ \frac{2a^{-3}}{a^{-1}};\quad 2)\ \frac{5^{-1}xb^{-2}}{2^{-3}ab^{-4}};\quad 3)\ \frac{4a^{-2}b^{-1}}{5x^{-2}b};$$

$$4)\ \frac{a^{-1}b^2}{a^{-2}b};\quad 5)\ \frac{3(a-b)^{-2}}{4^{-1}(a-b)^{-1}};\quad 6)\ \left(\frac{x+y}{x-1}\right)^{-1}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$2)\ \frac{5^{-1}xb^{-2}}{2^{-3}ab^{-4}}=\frac{2^3xb^{-2+4}}{5a}=\frac{8xb^2}{5a};$$

$$3)\ \frac{4a^{-2}b^{-1}}{5x^{-2}b}=\frac{4x^2}{5a^2b^{1+1}}=\frac{4x^2}{5a^2b^2}.$$

ЗАДАЧА 4. Виконати дії:

$$1)\ \left(x^{-4}+x^2+x^{-1}\right):x^{-1};\quad 2)\ \left(a^{-4}+a^{-2}b^{-1}+ab^{-2}\right)\cdot a^4\cdot b^{-4}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Маємо:

$$\left(a^{-4}+a^{-2}b^{-1}+ab^{-2}\right)\cdot a^4\cdot b^{-4}=$$

$$a^{-4}\cdot a^4\cdot b^{-4}+a^{-2}b^{-1}\cdot a^4\cdot b^{-4}+ab^{-2}\cdot a^4\cdot b^{-4}=$$

$$=a^{-4+4}\cdot b^{-4}+a^{-2+4}b^{-1+(-4)}+a^{1+4}b^{(-2)+(-4)}=$$

$$=b^{-4}+a^2b^{-5}+a^5b^{-6}.$$

ЗАДАЧА 5. Розкрити дужки:

1) $\left(2x+3x^{-1}\right)\cdot\left(3x-2x^{-1}\right)$;

2) $\left(3m-2n^{-1}\right)\left(4m^{3}-5n^{-2}\right)$;

3) $\left(a^{-2}+a^{-1}+1\right)\left(a^{-2}+a\right)$;

4) $\left(3p^{-2}-2p^{-1}-1\right)\left(-4p^{2}+p^{-1}\right)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

2) $\left(3m-2n^{-1}\right)\left(4m^{3}-5n^{-2}\right)=$

$$=3m\cdot 4m^{3}-3m\cdot 5n^{-2}-2n^{-1}\cdot 4m^{3}+2n^{-1}\cdot 5n^{-2}=$$

$$=12m^{4}-15mn^{-2}-8m^{3}n^{-1}+10n^{-3}.$$

ЗАДАЧА 6. Виконати дії:

1) $\left(-a^{2}\right)^{-3}$; $(-1)^{2n}$; $(-1)^{2n-1}$;

2) $\left(\dfrac{3x^{-1}}{5a^{-2}}\right)^{-1}$; 3) $\left(\left(-\dfrac{m}{n}\right)^{-3}\right)^{-1}$; 4) $\left(-\dfrac{5a^{n+1}}{3b^{n}}\right)^{-2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

2) $\left(\dfrac{3x^{-1}}{5a^{-2}}\right)^{-1}=\dfrac{5a^{-2}}{3x^{-1}}=\dfrac{\frac{5}{a^{2}}}{\frac{3}{x}}=\dfrac{5x}{3a^{2}}.$

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 10 до 20 хвилин)

Спростити:

1) $\left(a^{-2}+b^{-1}\right)^{2}$;

2) $\left(x^{-2}+a^{-3}\right)\left(x^{-2}-a^{-3}\right)$;

3) $\dfrac{a^{-2}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}+a^{3}\left(a^{3}-2ab+b^{2}\right)$;

4) $\left(1+\dfrac{x^{-n}+4^{-n}}{x^{-n}-4^{-n}}\right)^{-2}$.

ГЛАВА 7. ДЕЯКІ ВАЖЛИВІ ФУНКЦІЇ

§ 1. ОБЕРНЕНА ПРОПОРЦІЙНІСТЬ

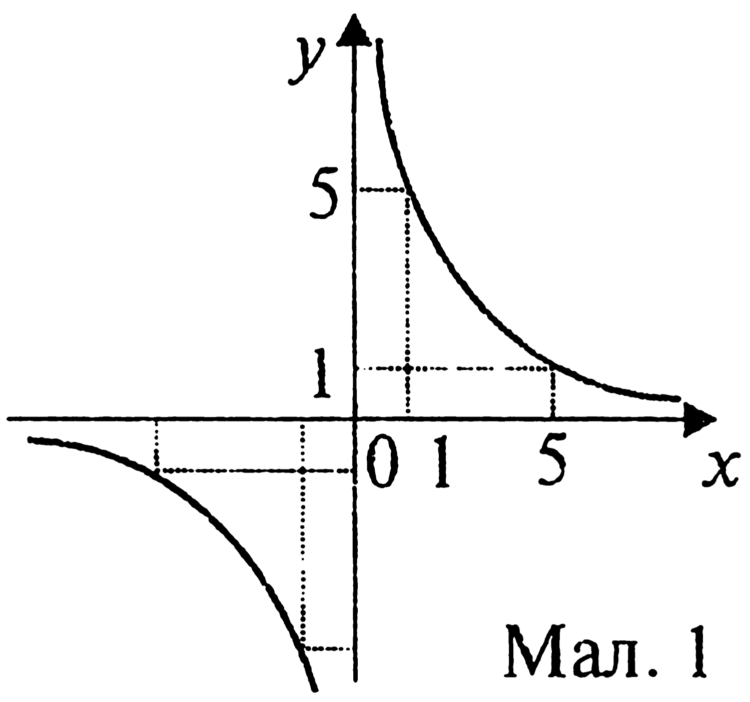
ОЗНАЧЕННЯ. Оберненою пропорційністю називають функцію, задану формулою $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$. Число k називають коефіцієнтом оберненої пропорційності.

Оскільки для цієї функції $x \neq 0$ (на нуль ділити не можна!), то її областю визначення є множина усіх дійсних чисел, крім нуля.

Неважко відповісти на питання, чому функція $y = \frac{k}{x}$ називається «оберненою пропорційністю»: при збільшенні в декілька разів значення аргументу x відповідне значення функції y зменшується у стільки ж разів.

Розглянемо, наприклад, функцію $y = \frac{5}{x}$ та складемо таблицю значень цієї функції для декількох значень аргументу (при $x \neq 0$).

x	-5	-2	-1	1	2
y	-1	$-2{,}5$	-5	5	$2{,}5$

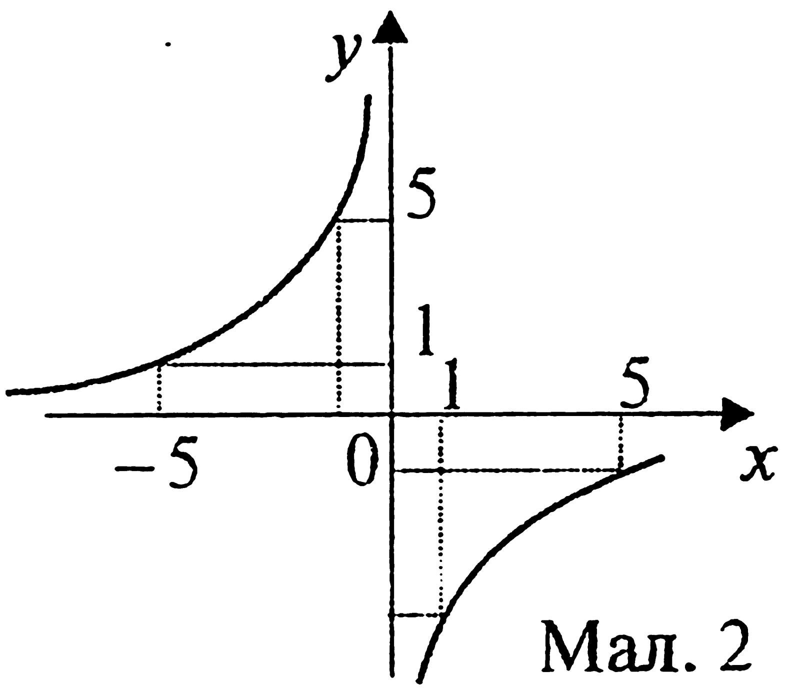


Мал. 1

Маючи таблицю, можна побудувати ескіз графіка (мал. 1). Отже, графік функції $y = \frac{5}{x}$ складається з двох частин.

Він називається **гіперболою**. Можна розглянути ще приклади оберненої пропорційності: $y=\frac{1}{3x}$, $y=\frac{2}{5x}$ і, взагалі, $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$; їхні графіки будуть схожі на щойно розглянутий графік.

Розглянемо тепер графік функції $y=-\frac{5}{x}$. Склавши таблицю (зробіть це самостійно!) можна побудувати ескіз графіка (мал. 2).



Мал. 2

Отже, ви бачите, що форма графіка збереглася, але він симетрично відображений відносно осі ординат. Таку ж форму буде мати графік $y=\frac{k}{x}$ $(k<0)$.

Підсумовуючи, можна сказати, що

графік функції $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ — гіпербола.

Наведемо основні властивості цієї функції.

- Графік її симетричний відносно початку координат.
- Графік не проходить через початок координат $(x\neq 0)$.
- Областю визначення функції буде множина дійсних чисел, крім нуля.
- Областю значення функції буде множина дійсних чисел, крім нуля.
- Графік ніколи не перетне осі координат.

Ці властивості не залежать від знаку k. Наведемо тепер властивості, які притаманні лише функції $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$.

- Якщо $x>0$, то $y>0$, якщо $x<0$, то $y<0$.
- Якщо розглянути дві точки з додатними абсцисами, то більшу ординату буде мати та точка, абсциса якої менша. Те саме справедливо для двох точок з від'ємними координатами.
- Графік функції «необмежений» в усі боки.

Властивості функції $y=\frac{k}{x}$ $(k<0)$ аналогічні. Сформулюйте й покажіть їх самостійно.

ЗАДАЧА 1. Накреслити графіки функцій $y = -\frac{2}{x}$, $y = \frac{1}{3x}$, $y = \frac{0{,}2}{x}$.

ЗАДАЧА 2. Накреслити графіки функцій $y = \frac{1}{|x|}$, $y = \left|\frac{1}{2x}\right|$, $|y| = \frac{1}{x}$.

ЗАДАЧА 3. Які з точок $A_1(0;1)$, $A_2(1;0)$, $B_1(2;1)$, $B_2(1;1)$, $C_1(-1;1)$, $C_2(-1;-1)$ належать графіку функції $y = \frac{1}{x}$.

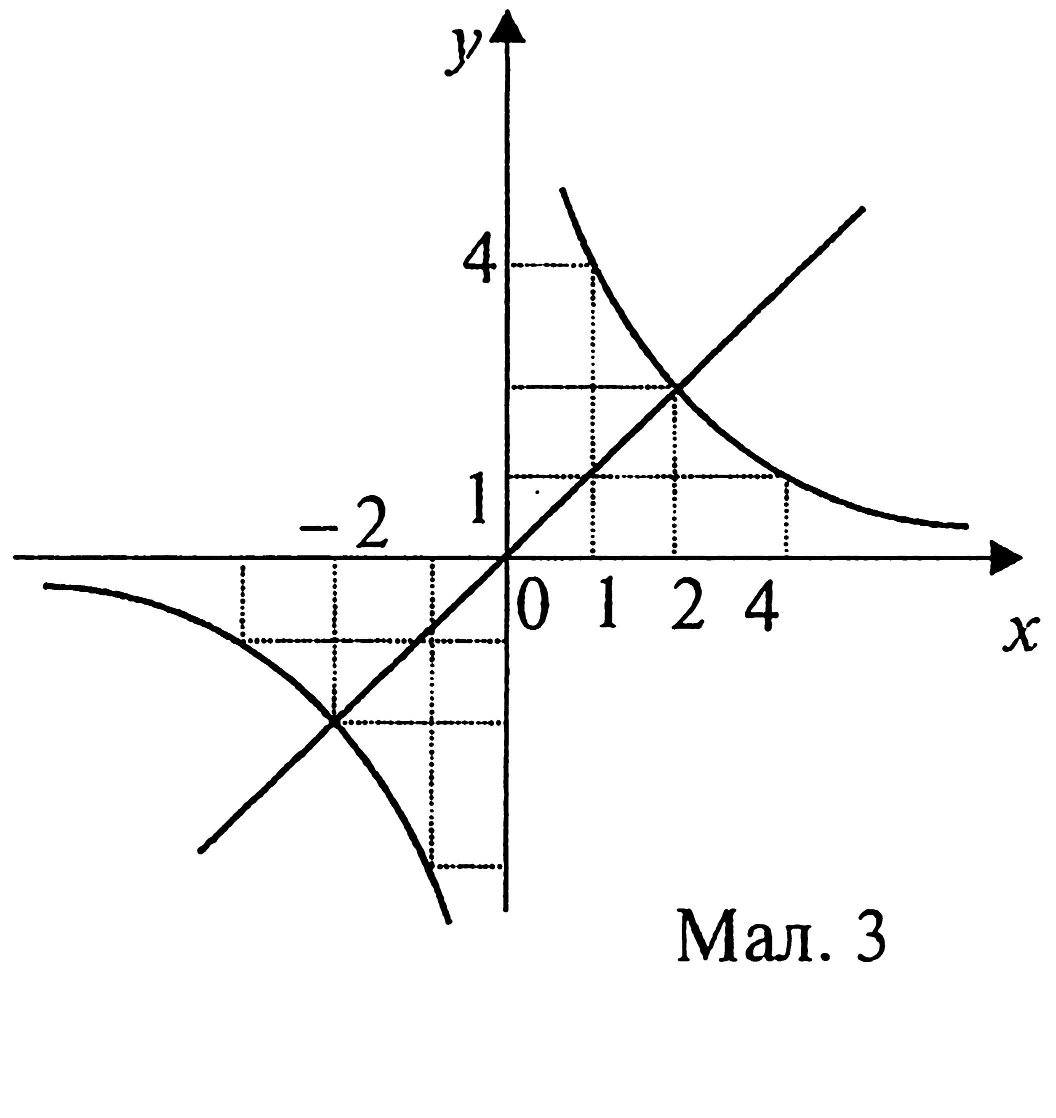
ВІДПОВІДЬ. Графіку функції $y = \frac{1}{x}$ належать точки B_2, C_2.

ЗАДАЧА 4. Розв'язати графічно рівняння:

1) $\frac{4}{x} = x$; 2) $\frac{2}{|x|} = |x - 1|$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Щоб розв'язати графічно дане рівняння, побудуємо в одній координатній площині графіки двох функцій $y = \frac{4}{x}$ та $y = x$ і знайдемо абсциси точок перетину:



Мал. 3

Отже, це рівняння має два розв'язки: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) −2; 2; 2) −1; 2.

§ 2. ФУНКЦІЇ $y = x^2$ ТА $y = \sqrt{x}$

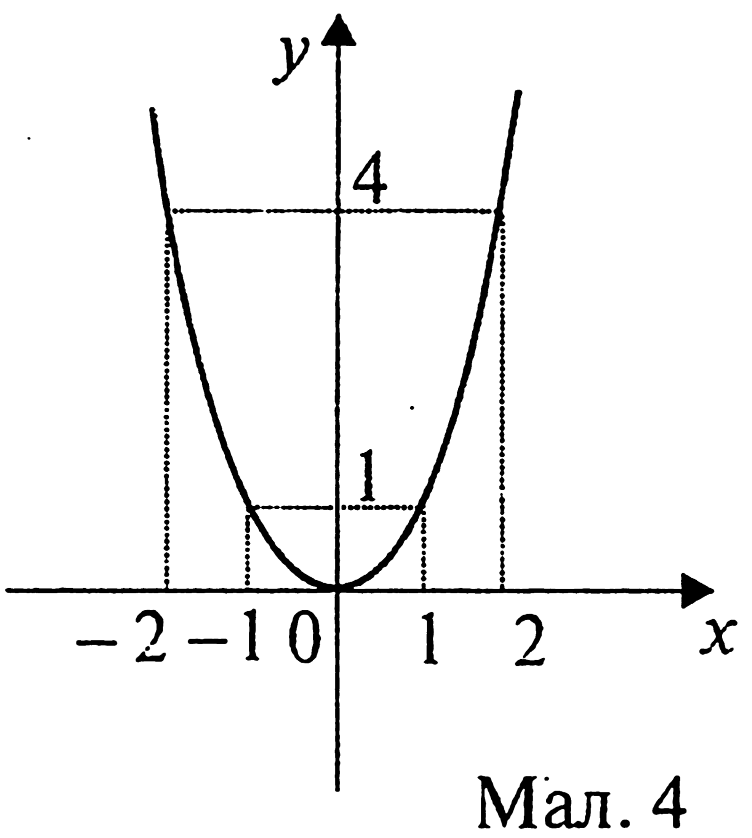
Функція $y = x^2$

Ця функція — одна з найпопулярніших функцій шкільної алгебри. Мине трохи часу, і практично на кожному уроці алгебри її згадуватимуть. Накреслимо графік цієї функції та дослідимо її.

Спочатку складемо таблицю:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Тепер за точками накреслимо ескіз графіка (мал. 4).



Мал. 4

Крива $y = x^2$ називається **квадратичною параболою** або просто **параболою**.

Розглянемо основні властивості функції $y = x^2$.

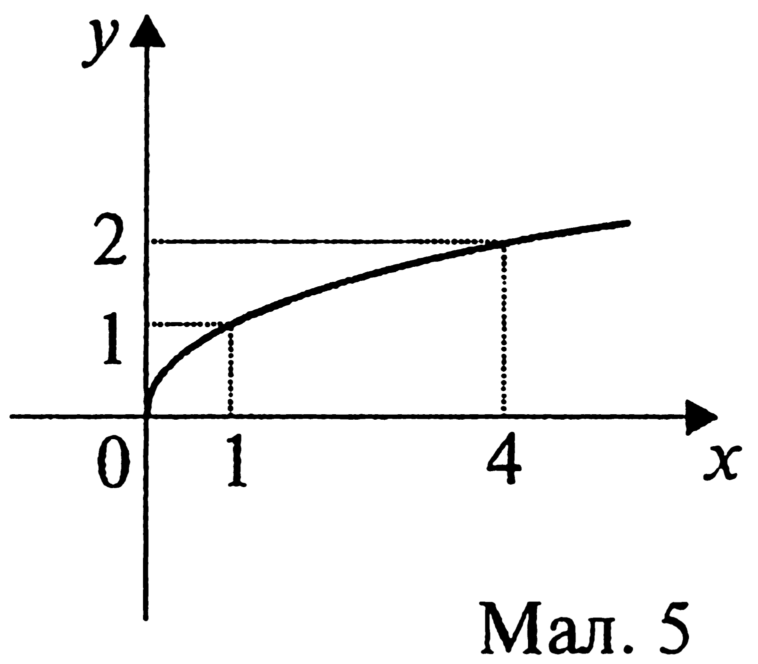
- При всіх значеннях x функція $y = x^2$ невід'ємна (бо $x^2 \ge 0$).
- Протилежним значенням аргументу відповідають рівні значення функції: якщо, наприклад, $x = 2$, то $y = 4$; якщо $x = -2$, то $y = 4$. Це означає, що графік функції симетричний відносно осі y.
- Якщо $x = 0$, то $y = 0$, а це означає, що графік проходить через початок координат.
- На правій півосі функція зростає: чим більша абсциса точки, тим більша її ордината. На лівій півосі навпаки: чим більша абсциса точки, тим менша її ордината.
- У початку координат, точці $O(0;0)$, функція приймає найменше значення $y = 0$.

Функція $y = \sqrt{x}$

Ця функція також зустрічатиметься ще не раз. Знову розпочнемо її дослідження з побудови невеличкої таблиці значень, але слід одразу зауважити, що функція визначена лише при $x \geq 0$, оскільки змінна x знаходиться під знаком квадратного кореня.

x	0	1	4	9	16
y	0	1	2	3	4

Тепер за точками накреслимо ескіз графіка (мал. 5).



Мал. 5

Розглянемо основні властивості функції $y = \sqrt{x}$.

- Область визначення: $x \geq 0$.
- Область значення: $y \geq 0$.
- Графік функції проходить через початок координат.
- Функція зростає: чим більша абсциса точки, тим більша її ордината.

Маленький практикум

ЗАДАЧА 1. Довести, що графік функції $y = x^2$ проходить через точки $A_1(-1;1)$, $A_2(-3;9)$.

ЗАДАЧА 2. Розв'язати графічно рівняння $x^2 = \sqrt{x}$.

ЗАДАЧА 3. Побудувати графіки функцій $y = |x|^2$ та $y = \sqrt{|x|}$.

9

КЛАС

ГЛАВА 1. НЕРІВНОСТІ

§ 1. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ

Ми розуміємо, що термін «нерівність» для читача не новий. Але тільки тепер, у дев'ятому класі, ми зможемо докладно вивчити одну з найважливіших тем не тільки шкільної алгебри, але й математики взагалі. А почнемо ми... з самого початку!

ПИТАННЯ. Що означає фраза: «число a більше (менше) за число b»?

ВІДПОВІДЬ. Це означає, що різниця $a-b$ є додатним (від'ємним) числом. Позначається це так:

$$a>b \ (a<b).$$

ПИТАННЯ. Що означає фраза: «число a не менше (не більше) за число b»?

ВІДПОВІДЬ. Це означає, що число a або більше (менше) за число b, або дорівнює йому. Іншими словами, це означає, що різниця $a-b$ є або додатним (від'ємним) числом, або нулем. Позначається це так:

$$a\geq b \ (a\leq b).$$

Інший варіант прочитання цього співвідношення:

«a більше або дорівнює (менше або дорівнює) b».

Знаки «<» та «>» запропонував Томас Гарріот (1560—1621). Знаки «≤» і «≥» — Джон Валліс (1616—1703).

Перейдемо тепер до загального означення нерівності.

ОЗНАЧЕННЯ. Два алгебричні вирази, з'єднанні знаками «більше» (>), «менше» (<), «не більше» ($\le$) або «не менше» ($\ge$), утворюють нерівність.

ПРИКЛАДИ. $5>3$; $-50+44<20$; $a\ge b$; $b+d\le c$; $c>\frac{2-a}{4d}$.

(Тут слід нагадати, що число є частковим випадком алгебричного виразу!)

ЗАПАМ'ЯТАЙ! Знаки «більше» (>), «менше» (<), «не більше» ($\le$) та «не менше» ($\ge$) називаються *знаками нерівності.*

ЗАПАМ'ЯТАЙ! Вираз, записаний ліворуч від знака нерівності, називається **лівою частиною нерівності**, а вираз, записаний праворуч від знака нерівності — **правою частиною нерівності**.

ОЗНАЧЕННЯ. Нерівності, що не містять букв, називаються **числовими нерівностями** ($20-3\cdot 5>3$; $45<100$).

ОЗНАЧЕННЯ. Якщо хоча б одна частина нерівності — вираз, який містить букви, то така нерівність називається **буквеною**, або **нерівністю із змінними**.

Нерівності можуть бути **істинними** *(справедливими):*

$$20-3\cdot 5>3; \quad a^2\ge 0,$$

або **хибними** *(несправедливими):*

$$-3>2; \quad 7p^2<0.$$

УВАГА! Щоб визначити, чи істинна числова нерівність, досить порахувати значення числових виразів у лівій та правій частинах нерівності та порівняти результати. З буквеними нерівностями — складніше. Буквена нерівність може бути справедливою при *всіх значеннях букв*, що входять до її складу. Тоді вона називається **тотожною нерівністю**. Наприклад, $a^2\ge 0$; $a^2+a+5\ge 0$. Встановлення цього факту називається **доведенням нерівності.** Інші буквені нерівності істинні лише при деяких значеннях змінних, що входять до їхнього складу. Знаходження цих значень змінних називається **розв'язанням нерівності**.

Якщо дві нерівності мають протилежні (однакові) знаки, то вони називаються **нерівностями протилежного (однакового) змісту**.

Наприклад, нерівності $-3<0$ та $20>5$ — нерівності протилежного змісту.

ОЗНАЧЕННЯ. Нерівності, утворені за допомогою знаків > та < називаються **строгими**. Нерівності, утворені за допомогою знаків $\geq$ та $\leq$ називаються **нестрогими**.

Властивості числових нерівностей

ВЛАСТИВІСТЬ 1. Якщо $a>b$, то $b<a$; якщо $b<a$, то $a>b$.

ДОВЕДЕННЯ

Якщо $a>b$, то різниця $a-b$ — додатне число. Звідси випливає, що число $b-a=-(a-b)$ — від'ємне. А це означає, що $b<a$. Друге твердження доводиться аналогічно.

ВЛАСТИВІСТЬ 2. Якщо $a>b$ та $b>c$, то $a>c$.

ДОВЕДЕННЯ

Якщо $a>b$ та $b>c$, то числа $a-b$ та $b-c$ —додатні. Тоді їхня сума: $(a-b)+(b-c)=a-c$ — також число додатне. А це й означає, що $a>c$.

Ця властивість називається *транзитивністю нерівностей*. Сформулюйте і доведіть аналогічне твердження для знаку «менше».

ВЛАСТИВІСТЬ 3. Якщо $a>b$ та c — будь-яке дійсне число, то $a+c>b+c$.

ДОВЕДЕННЯ

Якщо $a>b$, то $a-b$ — додатне число. Але $a-b=(a+c)-(b+c)$, тобто різниця $(a+c)-(b+c)$ — число також додатне. А це означає, що $a+c>b+c$.

Іншими словами, нерівність *не порушиться* (тобто *збереже свій знак*), якщо до обох її частин додати одне й те саме число.

ВЛАСТИВІСТЬ 4. Якщо $a+b>c$, то $a>c-b$ та $a+b-c>0$.

ДОВЕДЕННЯ

Якщо до обох частин нерівності $a+b>c$ додати (це можна робити за попередньою властивістю) число $(-b)$, то дістанемо нерівність $a>c-b$; якщо ж до обох частин нерівності $a+b>c$ додати $(-c)$, то дістанемо нерівність $a+b-c>0$.

Тобто, будь-який член нерівності можна перенести з однієї частини до другої, змінивши знак перед ним на протилежний.

ВЛАСТИВІСТЬ 5. Якщо $a>b$ та $c>0$, то $ac>bc$; якщо $a>b$ та $c<0$, то $ac<bc$.

ДОВЕДЕННЯ

Якщо $a>b$ та $c>0$, то добуток $(a-b)c$, а отже, і різниця $(ac-bc)$ — додатні числа, тобто $ac>bc$.

Якщо ж $a>b$ та $c<0$, то добуток $(a-b)c$, а отже, і різниця $(ac-bc)$ — числа від'ємні, тому $ac<bc$.

Отже, нерівність залишається істинною, якщо обидві її частини помножити на одне й те саме додатне число; нерівність змінює свій зміст на протилежний (тобто знак нерівності змінюється на протилежний), якщо обидві її частини помножити на одне й те саме від'ємне число.

ВЛАСТИВІСТЬ 6. Якщо $a>b$ та $c>d$, то $a+c>b+d$.

ДОВЕДЕННЯ

Оскільки $a>b$, то за властивістю 3, $a+c>b+c$. Аналогічно, з того, що $c>d$, випливає: $b+c>b+d$. Отже, за властивістю 2, $a+c>b+d$.

Тобто дві нерівності одного змісту можна почленно додавати, при цьому дістанемо нерівність того ж змісту, що й початкові.

УВАГА!!! Якщо $a>b$ та $c<d$, то, відверто кажучи, нічого не можна сказати про співвідношення між $a+c$ та $b+d$:

$$3>1,\ 1<4,\ \text{але } 3+1<1+4;$$
$$3>1,\ 2<3,\ \text{але } 3+2>1+3;$$
$$3>1,\ 2<4,\ \text{але } 3+2=1+4.$$

ВЛАСТИВІСТЬ 7. Якщо $a>b>0$ та $c>d>0$, то $ac>bd$.

ДОВЕДЕННЯ

Оскільки $a>b$ та $c>0$, то за властивістю 5: $ac>bc$. Аналогічно, оскільки $c>d$ та $b>0$, то $bc>bd$. Отже, за властивістю 2, $ac>bd$.

Отже, якщо дві нерівності одного змісту з додатними членами можна почленно перемножити, при цьому дістанемо нерівність того ж змісту.

ВЛАСТИВІСТЬ 8. Якщо $a>b>0$ та $n\in\mathbb{N}$, то $a^n>b^n$.

ДОВЕДЕННЯ

Ця властивість є наслідком властивості 7 (яку треба застосувати n разів).

Іншими словами, нерівність, обидві частини якої — додатні, не порушиться, якщо кожну її частину піднести до одного й того ж степеня.

Ми розглянули властивості строгих нерівностей. Всі вони можуть бути переформульовані та доведені й для нестрогих нерівностей. Радимо це обов'язково зробити самостійно!

ЗАДАЧА 1. Поставити знак нерівності між числами a та b, якщо відомо, що

1) $(a-b)$ — додатне число;
2) $(a-b)$ — від'ємне число;
3) $(a-b)$ — невід'ємне число.

ЗАДАЧА 2. Порівняти числа $\frac{1}{6}$ та $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

ЗАДАЧА 3. Що можна сказати про знаки чисел a та b, якщо

1) $a\cdot b>0$; 2) $\frac{a}{b}>0$; 3) $a\cdot b<0$; 4) $\frac{a}{b}<0$?

ЗАДАЧА 4. Дана нерівність $a>b$. Чи завжди $a^2>b^2$? Навести приклади.

§ 2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Ми розглянули достатньо властивостей нерівностей, щоб перейти до розв'язання нерівностей. Багато чим це нагадує розв'язання рівнянь — тут теж відбувається пошук значень невідомих. (Звичайно, як і в рівняннях, вони позначаються буквами x, y, z, ...).

Ми розглянемо розв'язання нерівностей з одним невідомим (однією змінною).

ОЗНАЧЕННЯ. Розв'язком нерівності з однією змінною називаються **всі** значення цієї змінної, при яких дана нерівність є істинною.

ПИТАННЯ. Це схоже на поняття розв'язку рівняння, чи не так?

ВІДПОВІДЬ. Саме так. Пояснимо це на простому прикладі:

Нехай треба розв'язати рівняння

$$3x-7=2.$$

Зрозуміло, що $x=3$.

Якщо ж треба розв'язати нерівність

$$3x-7>2,$$

то за властивостями нерівностей (дивись на наступній сторінці) маємо:

$$3x>2+7;\quad 3x>9;\quad x>3.$$

Отже, будь-яке число, більше за 3 задовольняє дану нерівність. Наприклад, $x=5$: $3\cdot5-7=8>2$.

ОЗНАЧЕННЯ. Розв'язати нерівність означає знайти її розв'язки або показати, що їх нема.

Тобто, повна аналогія з розв'язком рівнянь!

Але! Не існує поняття «корінь нерівності»!!!

ОЗНАЧЕННЯ. Дві нерівності називаються рівносильними, або еквівалентними, якщо вони мають одні й ті ж самі розв'язки.

Розв'язуючи нерівності (саме так, як і рівняння), їх замінюють на більш прості рівносильні нерівності, які вже можна легко розв'язати.

Ці заміни нерівностей на простіші здійснюються на основі простих тверджень (властивостей нерівностей), які випливають з властивостей числових нерівностей, які ми вже розглянули. (Оскільки при кожному фіксованому значенні змінної буквена нерівність стає числовою.) Розглянемо ці властивості.

➢ Якщо з однієї частини нерівності перенести у другу доданок із протилежним знаком, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.

➢ Якщо обидві частини нерівності помножити або розділити на одне й теж саме додатне число, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.

➢ Якщо обидві частини нерівності помножити або розділити на одне й теж саме від'ємне число, замінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.

Перша властивість має важливий наслідок: якщо в лівій та правій частинах нерівності є однакові доданки (з однаковими знаками перед ними), то їх можна відкинути, і дістати рівносильну нерівність.

Наприклад, нерівності

$$(2x+4)+(x-2)>(x-3)+(x-2) \quad \text{та} \quad 2x+4>x-3$$

рівносильні.

ЗАДАЧА 1. Чи будуть рівносильними такі пари нерівностей:

1) $x+5>7$ та $x>2$;

2) $x+4>1$ та $x<-3$;

3) $x+2x-4>2+x$ та $x>3$;

4) $\frac{x-5}{4}+12x>\frac{7x}{2}-12x$ та $\frac{x-5}{4}>\frac{7x}{2}$;

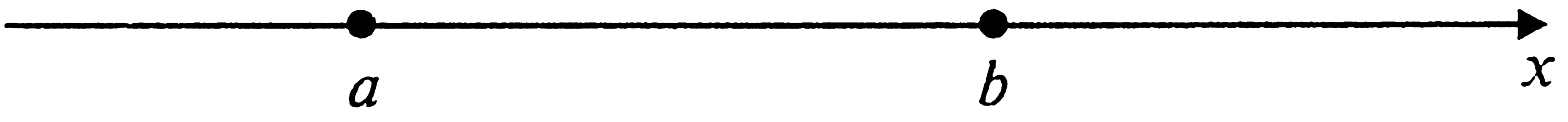
5) $x-\frac{x+5}{2}<x-\frac{x+2}{3}$ та $\frac{x+5}{2}>\frac{x+2}{3}$?

ВІДПОВІДЬ. 1), 3), 5) — так; 2), 4) — ні.

Ви вже чули термін «числові проміжки». Вони служать для запису відповідей у нерівностях. Далі ми поговоримо про них більш докладно. Отже,

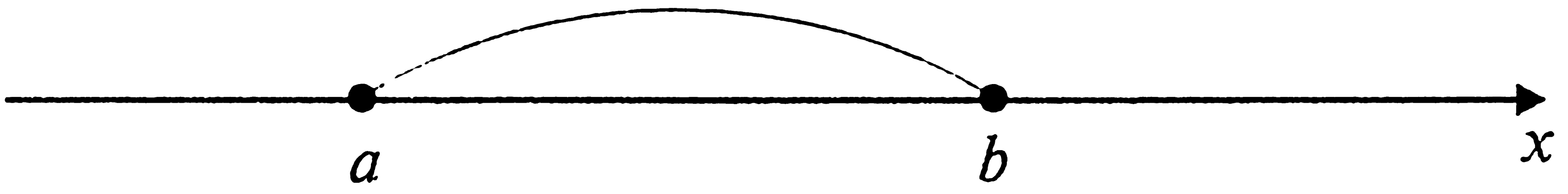
Числові проміжки

Позначимо на числовій прямій (мал. 1) точки з координатами a та b, такі що $a < b$.



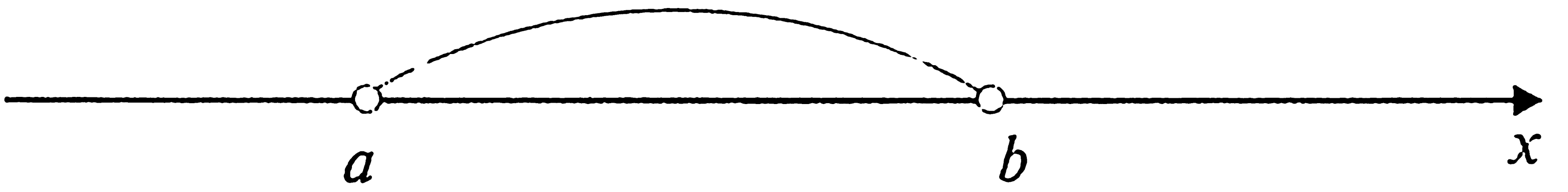
Мал. 1

Множина усіх дійсних чисел x, що відповідають нерівності $a \le x \le b$ (мал. 2), називається **відрізком** і позначається $[a; b]$.



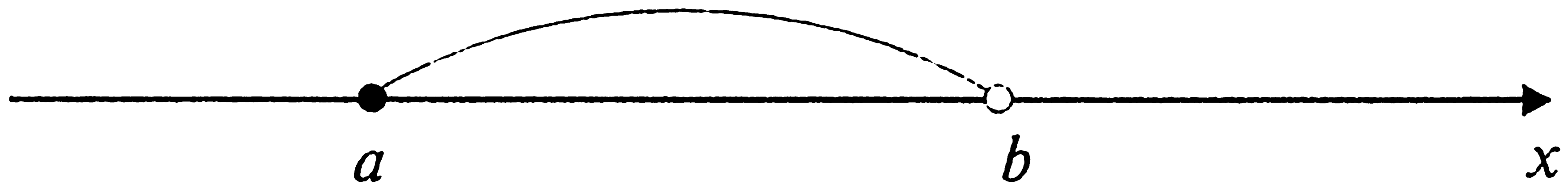
Мал. 2

Множина усіх дійсних чисел x, що відповідають нерівності $a < x < b$ (мал. 3), називається **інтервалом** і позначається $(a; b)$.

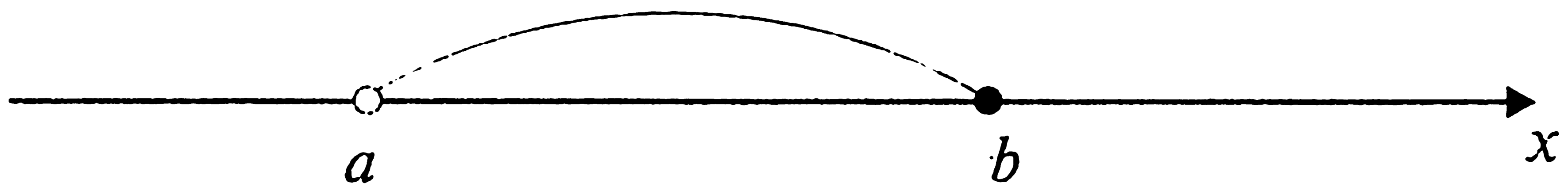


Мал. 3

Множина усіх дійсних чисел x, що відповідають нерівності $a \le x < b$ (мал. 4) або $a < x \le b$ (мал. 5), називається **півінтервалом** і позначається, відповідно, $[a; b)$ або $(a; b]$.



Мал. 4



Мал. 5

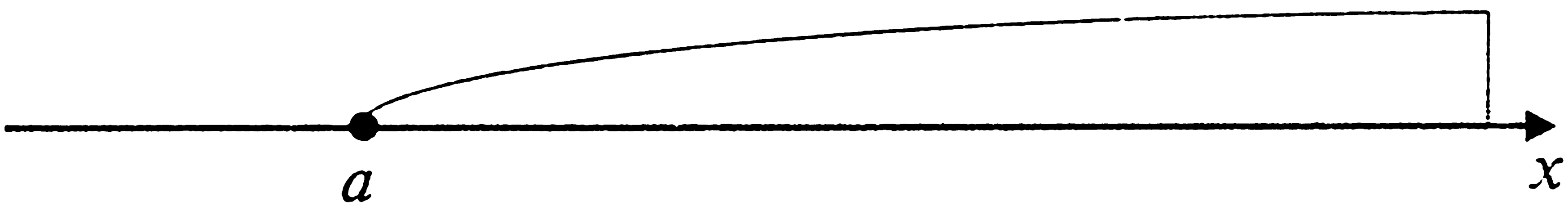
ОЗНАЧЕННЯ. Відрізки, інтервали та півінтервали називаються **числовими проміжками**.

ЗАУВАЖЕННЯ. Нерівності $a \le x \le b$, $a < x < b$, $a \le x < b$, $a < x \le b$ називаються **подвійними**.

Як ви бачили, усі ці числові проміжки скінченні, вони описують усі x, розташовані на числовій прямій між двома числами. Але інколи потрібно описати усі x, більші або менші за певне число

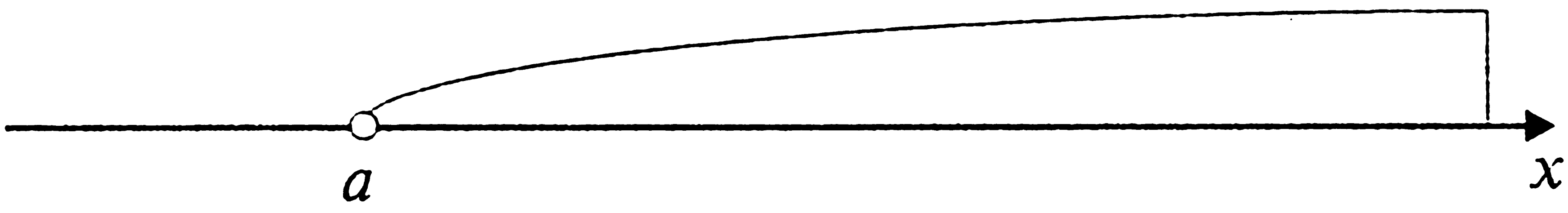
Для цього використовують **нескінченні числові проміжки.**

Множина дійсних чисел x, що відповідають нерівності $x \geq a$ (мал. 6), позначається $[a;+\infty)$ (читається це так: «від a до плюс нескінченності, включаючи a»).



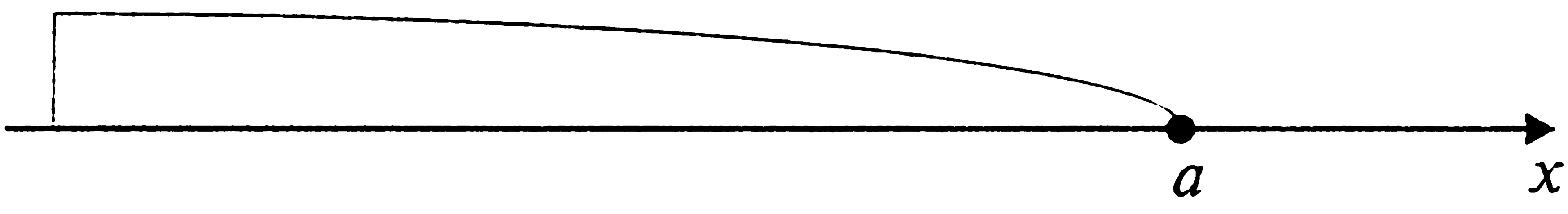
Мал. 6

Множина дійсних чисел x, що відповідають нерівності $x > a$ (мал. 7), позначається $(a;+\infty)$ («від a до плюс нескінченності, не включаючи a»).



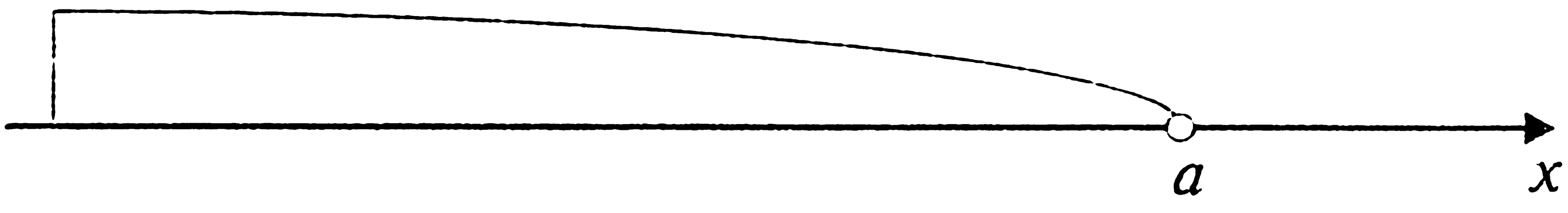
Мал. 7

Множина дійсних чисел x, що відповідають нерівності $x \leq a$ (мал. 8), позначається $(-\infty;a]$ («від мінус нескінченності до a, включаючи a»).



Мал. 8

Множина дійсних чисел x, що відповідають нерівності $x < a$ (мал. 9), позначається $(-\infty;a)$ («від мінус нескінченності до a, не включаючи a»).

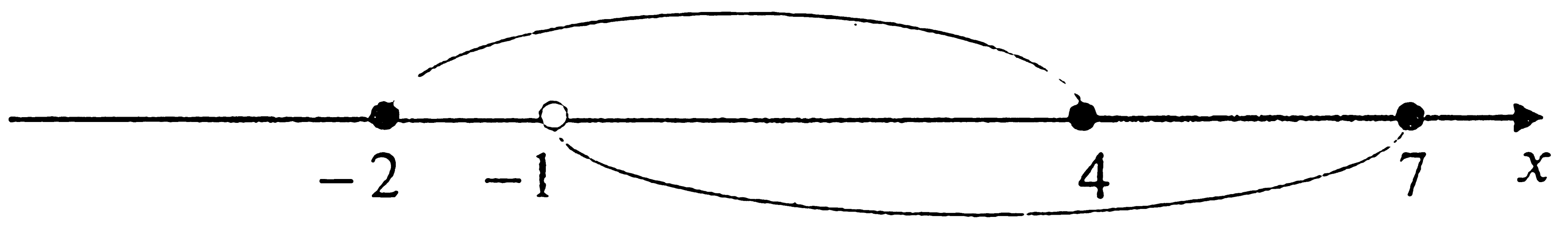


Мал. 9

Множина усіх дійсних чисел зображається усією числовою прямою і позначається $(-\infty;+\infty)$ (читається: «від мінус нескінченності до плюс нескінченності»).

При розв'язанні нерівностей важливо не тільки отримати відповідь, але й правильно її записати. Для цього треба розібратися, що таке *об'єднання* та *перетин* числових проміжків.

На одному малюнку (мал. 10) зобразимо два числові проміжки: відрізок $[-2;4]$ та напівінтервал $(-1;7]$.



Мал. 10

Проміжок $(-1;4]$ (напівінтервал) — спільна частина даних числових проміжків, тобто числа із проміжка $(-1;4]$ належать проміжкам $[-2;4]$ **та** $(-1;7]$ **одночасно.**

ОЗНАЧЕННЯ. Множина, що являє собою спільну частину деяких даних множин, називається їхнім **перетином**.

ПОЗНАЧЕННЯ. Знак перетину двох множин: «$\cap$».

ФОРМА ЗАПИСУ. $[-2;4]\cap(-1;7]=(-1;4]$.

Кожне число з проміжка (відрізка) $[-2;7]$ належить *хоча б одному* з проміжків: **або** $[-2;4]$, **або** $(-1;7]$, **або їм обом**.

ОЗНАЧЕННЯ. Множина, що містить елементи, які належать хоча б одній з двох даних множин, називається їхнім **об'єднанням**.

ПОЗНАЧЕННЯ. Знак об'єднання двох множин: «$\cup$».

ФОРМА ЗАПИСУ. $[-2;4]\cup(-1;7]=[-2;7]$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Об'єднання двох проміжків не завжди проміжок:

$$[-2;-1)\cup[4;7]=[-2;-1)\cup[4;7] -$$

і нічого іншого тут не напишеш!

Проміжки $[-2;-1)$ та $[4;7]$ **не мають спільних елементів**.

ОЗНАЧЕННЯ. Якщо множини не мають спільних елементів, то кажуть, що їхній перетин **пустий**.

ПОЗНАЧЕННЯ. Знак «пуста множина»: $\varnothing$.

ФОРМА ЗАПИСУ. $[-2;-1)\cap[4;7]=\varnothing$.

Системи і сукупності нерівностей

ОЗНАЧЕННЯ. Розв'язати систему нерівностей з одним невідомим — означає знайти усі значення невідомого, при яких всі нерівності системи істинні.

ЗАПАМ'ЯТАЙ!!! Розв'язком *системи* нерівностей буде *перетин* множин, що є розв'язками цих нерівностей.

Наприклад, розв'язками *системи* нерівностей (при $a < b$)

$$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$$

будуть усі x з *перетину* множин $(a;+\infty)$ та $(-\infty;b)$, тобто з множини

$$(a;b) = (a;+\infty) \cap (-\infty;b).$$

Звісно, у системі можуть бути й подвійні нерівності: розв'язком системи нерівностей

$$\begin{cases} a < x < b \\ c < x < d \end{cases}$$

буде множина $(a;b) \cap (c;d)$ (тобто усі точки цієї множини).

З іншого боку, систему нерівностей можна записати у вигляді подвійної нерівності: системи нерівностей

$$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq a \\ x < b \end{cases}; \quad \begin{cases} x > a \\ x \leq b \end{cases}$$

рівносильні подвійним нерівностям $a < x < b$, $a \leq x \leq b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$, відповідно.

ОЗНАЧЕННЯ. Розв'язати сукупність нерівностей з одним невідомим — означає знайти всі значення невідомого, при яких хоча б одна з нерівностей системи істинна.

ЗАПАМ'ЯТАЙ!!! Розв'язком *сукупності* нерівностей буде *об'єднання* множин, що є розв'язками цих нерівностей.

Наприклад, розв'язком *сукупності* нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} a < x < b \\ c < x < d \end{array}\right.$$

буде множина $(a;b) \cup (c;d)$.

§ 3. ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ

ОЗНАЧЕННЯ. Лінійними називаються нерівності вигляду $ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$.

Якщо $a > 0$, то нерівність $ax > b$ рівносильна нерівності $x > \frac{b}{a}$, отже, множина розв'язків нерівності є проміжок $\left(\frac{b}{a};+\infty\right)$.

Якщо $a < 0$, то нерівність $ax > b$ рівносильна нерівності $x < \frac{b}{a}$. Отже, множина розв'язків нерівності є проміжок $\left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$.

Якщо $a = 0$, то нерівність набуває вигляду $0 \cdot x > b$, тобто вона не має розв'язків якщо $b \geq 0$ та істинна при довільних x, якщо $b < 0$.

Зверніть увагу, що ми фактично розв'язали нерівність з параметром (навіть з двома — a та b)!

ЗАДАЧА 1. Сформулювати і довести аналогічні твердження для інших лінійних нерівностей.

ЗАДАЧА 2. Розв'язати нерівності:

1) $3x > 6$; 2) $3x < 6$; 3) $3x \geq 6$; 4) $3x \leq 6$;
5) $-3x > 6$; 6) $-3x < 6$; 7) $-3x \geq 6$; 8) $-3x \leq 6$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $x > 2$; $x \in (2;+\infty)$; 2) $x < 2$; $x \in (-\infty;2)$;
3) $x \geq 2$; $x \in [2;+\infty)$; 4) $x \leq 2$; $x \in (-\infty;2]$;
5) $x < -2$; $x \in (-\infty;-2)$; 6) $x > -2$; $x \in (-2;+\infty)$;
7) $x \leq -2$; $x \in (-\infty;-2]$; 8) $x \geq -2$; $x \in [-2;+\infty)$.

УВАГА! Існує декілька форм запису відповіді при розв'язанні нерівностей. Наприклад, в 1) можна записати відповідь так:

«множиною розв'язків є проміжок $(2;+\infty)$»,

або так: «$x > 2$»,

або просто так: «$(2;+\infty)$»,

або ж так: «$x \in (2;+\infty)$».

Між ними нема ніякої різниці. Ми будемо дотримуватись останньої форми запису.

Багато нерівностей після перетворень зводяться до лінійних.

ЗАДАЧА 3. Розв'язати нерівність:

$$3(x-1)+2(1-3x)\geq 2(2x-1).$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розкривши дужки, дістанемо:

$$3x-3+2-6x\geq 4x-2;\quad -3x-1\geq 4x-2;$$
$$-3x-4x\geq -2+1;\quad -7x\geq -1,$$

звідси $x\leq \frac{1}{7}$.

ВІДПОВІДЬ. $x\in\left(-\infty;\frac{1}{7}\right]$.

ЗАДАЧА 4. Розв'язати нерівність:

$$\frac{2x-1}{3}>\frac{4x-5}{2}$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$4x-2>12x-15;\quad -8x+13>0;\quad x<\frac{13}{8}.$$

ВІДПОВІДЬ. $x\in\left(-\infty;\frac{13}{8}\right)$.

ЗАДАЧА 5. Розв'язати нерівності:

1) $3x+7>3(x+1)$;
2) $2(3x-6)\leq 3(2x-8)$;
3) $\frac{x+3}{3}-8>\frac{2x-1}{3}+1$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) $3x+7>3x+3;\quad 7>3;\quad x\in(-\infty;+\infty)$;
2) $6x-12\leq 6x-24;\quad -12\leq -24$ (?!); $x\in\varnothing$;
3) $x+3-24>2x-1+3;\quad x-24>2x-1;\quad x<-23$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in(-\infty;+\infty)$; 2) $x\in\varnothing$; 3) $x\in(-\infty;-23)$.

ЗАДАЧА 6. Розв'язати нерівності:

1) $3{,}5(x+1)>4x-\frac{x-1}{2}$; 2) $2x-3<7(1+x)$;

3) $3{,}5(x+1)<4x-\frac{x-1}{2}$; 4) $\frac{x+1}{2}-\frac{x+2}{3}<2+\frac{x}{6}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in(-\infty;+\infty)$; 2) $x\in(-2;+\infty)$;
3) $x\in\varnothing$; 4) $x\in(-\infty;+\infty)$.

ЗАДАЧА 7. Знайти найбільше ціле x, що відповідає нерівності

$$\frac{2x+1}{3}-\frac{3x-1}{2}>1.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо: $2(2x+1)-3(3x-1)-6>0$; звідси $-5x>1$, або $x<-\frac{1}{5}$, отже, найбільше ціле x, що відповідає цій нерівності, -1.

ВІДПОВІДЬ. -1.

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 20 до 45 хвилин)

Розв'язати нерівності, зобразити розв'язки на числовій прямій і знайти найбільше ціле x, що відповідає нерівності:

1) $\frac{9x+2}{10}-\frac{10x-2}{9}>2$; 2) $\frac{8x+4}{11}-\frac{9x-5}{10}>2$;

3) $\frac{7x+3}{8}-\frac{6x-2}{5}>1{,}5$; 4) $\frac{7x+1}{9}-\frac{4x-5}{5}>1$;

5) $\frac{3x-5}{4}-\frac{5x-8}{6}>\frac{1}{6}$; 6) $\frac{5x-2}{8}-\frac{3x-1}{4}>-\frac{2}{3}$;

7) $\frac{4x-3}{3}-\frac{8x-2}{5}>-\frac{8}{7}$; 8) $\frac{6x-2}{7}-\frac{7x-2}{8}>-\frac{4}{3}$;

9) $\frac{5x-1}{4}-\frac{8x-3}{5}>-\frac{3}{2}$; 10) $2+\frac{x-4}{5}\le 2$.

ВІДПОВІДЬ. (На останнє питання):
1) -8; 2) -7; 3) -3; 4) 4; 5) -2;
6) 5; 7) 2; 8) 72; 9) 5; 10) 4.

§ 4. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

ЗАДАЧА 1. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 3x+5<17-x \\ 4x>x-6 \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розв'язуємо кожну з нерівностей:

перша —

$$3x+5<17-x;\quad 3x+x<17-5;\quad 4x<12;\quad x<3;$$

друга —

$$4x>x-6;\quad 4x-x>-6;\quad 3x>-6;\quad x>-2.$$

Отже, дана система рівносильна системі

$$\begin{cases} x<3 \\ x>-2 \end{cases}.$$

Звідси, $x \in (-2;3)$.

ВІДПОВІДЬ. $x \in (-2;3)$.

УВАГА! Радимо для кращого розуміння малювати числову пряму та числові проміжки на ній, як це робилось вище.

ЗАДАЧА 2. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{1}{11}x+11 \le 11\frac{1}{11} \\ 0{,}175x-\frac{3}{4}<0{,}425x-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Систему можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{1}{11}x \le \frac{1}{11} \\ 0{,}25x>-0{,}25 \end{cases};\quad \text{або}\quad \begin{cases} x \le 1 \\ x>-1 \end{cases},$$

звідси $x \in (-1;1]$.

ВІДПОВІДЬ. $x \in (-1;1]$.

ЗАДАЧА 3. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} \le x+1{,}5 \\ 2x-8>3-0{,}5x \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$\begin{cases} x-1 \le 4x+6 \\ 2x+0{,}5x>3+8 \end{cases}; \text{ або } \begin{cases} x \ge -\dfrac{7}{3} \\ x>4{,}4 \end{cases};$$

звідси $x>4{,}4$.

ВІДПОВІДЬ. $x \in (4{,}4; +\infty)$.

ЗАДАЧА 4. Розв'язати систему з трьох нерівностей з однією змінною:

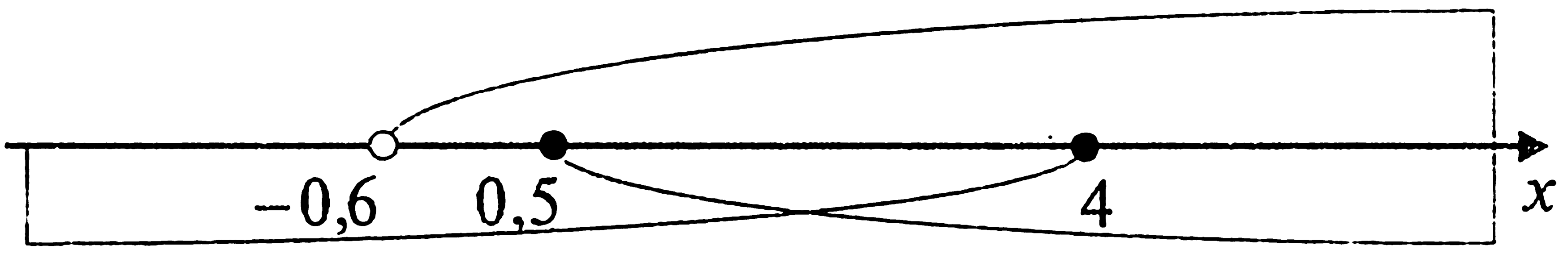
$$\begin{cases} \dfrac{2x}{3}-1<3-2(1-2x) \\ 3x-5 \le 1-2(1-x) \\ 1-2x \le 3(2x-1) \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$\begin{cases} 2x-3<9-6+12x \\ 3x-5 \le 1-2+2x \\ 1-2x \le 6x-3 \end{cases}; \begin{cases} 10x>-6 \\ x \le 4 \\ 8x \ge 4 \end{cases}; \begin{cases} x>-0{,}6 \\ x \le 4 \\ x \ge 0{,}5 \end{cases}$$

звідси (див. мал. 11) $x \in [0{,}5;4]$.



Мал. 11

ВІДПОВІДЬ. $x \in [0{,}5;4]$.

ЗАДАЧА 5. Знайти цілочисельні розв'язки системи нерівностей:

$$\begin{cases} 13-2x>0 \\ 3x-9>0 \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Зведемо систему нерівностей до вигляду:

$$\begin{cases} x<6{,}5 \\ x>3 \end{cases},$$

тоді $3<x<6{,}5$.

Проміжку $(3;6{,}5)$ належать цілі числа 4; 5; 6.

ВІДПОВІДЬ. 4; 5; 6.

ЗАДАЧА 6. Розв'язати подвійну нерівність:

$$12-4x\le 2x<8-5x.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$\begin{cases} 12-4x\le 2x \\ 2x<8-5x \end{cases}; \quad \begin{cases} 6x\ge 12 \\ 7x<8 \end{cases}; \quad \begin{cases} x\ge 2 \\ x<\dfrac{8}{7} \end{cases}; \quad x\in\varnothing.$$

ВІДПОВІДЬ. $x\in\varnothing$.

ЗАДАЧА 7. Розв'язати системи нерівностей:

$$1)\ \begin{cases} 4x<x+6 \\ 2x<3x-1 \end{cases}; \qquad 2)\ \begin{cases} 2x-7>8-3x \\ 7x-1<x+23 \end{cases};$$

$$3)\ \begin{cases} 6x-11<3x+4 \\ 11x-6>7x+14 \end{cases}; \qquad 4)\ \begin{cases} \dfrac{3}{4}x+10\le\dfrac{43}{4} \\ 0{,}1x-\dfrac{2}{5}<0{,}35x+\dfrac{3}{5} \end{cases};$$

$$5)\ \begin{cases} \dfrac{7}{12}x-\dfrac{53}{12}\ge -5 \\ 2{,}3x-\dfrac{2}{3}<\dfrac{1}{3}-0{,}2x \end{cases}; \qquad 6)\ \begin{cases} \dfrac{3}{4}x-4>\dfrac{2}{3}x-3 \\ 0{,}7x-\dfrac{3}{2}\le 0{,}45x+3 \end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in(1;2)$; 2) $x\in(3;4)$; 3) $x\in\varnothing$; 4) $x\in(-4;1]$; 5) $x\in[-1;\ 0{,}4)$; 6) $x\in(12;18]$.

ЗАДАЧА 8. Розв'язати системи нерівностей:

1) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{6} > x - 0{,}5 \\ 2x + 3 < 7x - 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \dfrac{2x-2{,}5}{3} > 3x + 1{,}5 \\ 3x + 7 \le 2x + 11 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} \dfrac{x - \frac{1}{4}}{2} \ge x - 0{,}25; \\ 0{,}3x - 2 \le 5 + x \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} - 2 < 1 + 2(x-1) \\ 2x + 3 \ge x + 3(2 - x); \\ 3 - \dfrac{x}{2} \le 6 + 2(1 - x) \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{4x}{7} + 2 < \dfrac{2}{7} + 2(x-1) \\ 0{,}4x + 0{,}25 \le 0{,}05 + 2(0{,}1x + 0{,}4); \\ 0{,}2x + \dfrac{3}{2} > 0{,}3(x-1) - \dfrac{1}{4}(2x+1) \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{0{,}6x+1}{3} - \dfrac{2}{3} < 2 + 0{,}2(x-3) \\ \dfrac{3}{2} - \dfrac{x}{5} \le 0{,}3 + 3(0{,}2x - 1) \\ \dfrac{x}{4} - 0{,}2 \ge 0{,}55 + 2\left(\dfrac{5}{8}x - 3\right) \end{cases}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x \in \varnothing$; 2) $x \in (-\infty; -1)$; 3) $x \in [-10; 0{,}25]$;
4) $x \in \left[\dfrac{3}{4}; \dfrac{10}{3}\right]$; 5) $x \in (2{,}6; 3]$; 6) 5,25.

ЗАДАЧА 9. Знайти цілочисельні розв'язки систем нерівностей:

1) $\begin{cases} 6 - 2x > 3 \\ 3x - 4 > x - 7 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 7 - 3x < 2{,}5 \\ 3x + 1 \le 2x + 3 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 2x - 9{,}5 \ge 1{,}5 \\ 4x - 2 < 3x + 4 \end{cases}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) –1; 0; 1; 2) 2; 3) цілочисельних розв'язків нема.

ЗАДАЧА 10. Розв'язати подвійні нерівності:

1) $3 - x < 2x \le 6 - x$;

2) $2x - 4 \le x < 3x - 6$;

3) $5 - 2x \le 3x \le 2x + 1$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x \in (1; 2]$; 2) $x \in (3; 4]$; 3) 1.

§ 5. ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ З МОДУЛЕМ

Наведемо основні твердження (теореми) про нерівності, що містять знак модуля (абсолютної величини числа).

ТВЕРДЖЕННЯ 1. Нерівність

$$|x| < h \quad (h > 0)$$

рівносильна подвійній нерівності

$$-h < x < h,$$

тобто системі нерівностей:

$$\begin{cases} x > -h \\ x < h \end{cases}.$$

ТВЕРДЖЕННЯ 2. Нерівність

$$|x| > h \quad (h > 0)$$

рівносильна сукупності нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} x > h \\ x < -h \end{array}\right.,$$

тобто

$$x > h \text{ або } x < -h.$$

Доведемо, наприклад, твердження 1. Маємо: якщо $x \geq 0$, то $|x| = x$, і нерівність $|x| < h$ перетворюється у нерівність $x < h$. Тобто $0 \leq x < h$. Якщо ж $x < 0$, то $|x| = -x$, і задана нерівність $|x| < h$, набуває вигляду $-x < h$, або $x > -h$. Тобто $-h < x < 0$. Отже, $-h < x < h$.

Твердження 2 доведіть самостійно.

УВАГА! Ці твердження зазвичай застосовуються, якщо замість x в них підставити деякий алгебричний вираз від x.

ЗАДАЧА 1. Розв'язати нерівність $|x-2| < 5$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

За твердженням 1 маємо

$$-5 < x-2 < 5; \text{ або } -5+2 < x < 5+2; \text{ або } -3 < x < 7.$$

ВІДПОВІДЬ. $x \in (-3;7)$.

ЗАДАЧА 2. Розв'язати нерівність $|x+3|>5$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

За твердежнням 2 маємо

$$\left[\begin{array}{l}x+3>5\\x+3<-5\end{array}\right.;\text{ або }\left[\begin{array}{l}x>2\\x<-8\end{array}\right..$$

ВІДПОВІДЬ. $x\in(-\infty;-8)\cup(2;+\infty)$.

ЗАДАЧА 3. Розв'язати нерівність $|2x-3|\le 2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$\begin{cases}2x-3\le 2\\2x-3\ge -2\end{cases};\ \begin{cases}2x\le 5\\2x\ge 1\end{cases};\ \begin{cases}x\le 2{,}5\\x\ge 0{,}5\end{cases};\ x\in[0{,}5;2{,}5].$$

ВІДПОВІДЬ. $x\in[0{,}5;2{,}5]$.

ЗАДАЧА 4. Розв'язати нерівність $|4x+10|\ge 6$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$\left[\begin{array}{l}4x+10\ge 6\\4x+10\le -6\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}4x\ge -4\\4x\le -16\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x\ge -1\\x\le -4\end{array}\right.;\ x\in(-\infty;-4]\cup[-1;+\infty).$$

ВІДПОВІДЬ. $x\in(-\infty;-4]\cup[-1;+\infty)$.

ЗАДАЧА 5. Розв'язати нерівності:

1) $|x|>4$; 2) $|x|<4$; 3) $|x|\ge 4$; 4) $|x|\le 4$;

5) $|2x+1|>1$; 6) $|2x+1|<1$; 7) $|2x+1|\ge 1$; 8) $|2x+1|\le 1$;

9) $|x|>0$; 10) $|x|<0$; 11) $|x|\ge 0$; 12) $|x|\le 0$;

13) $|x|>-1$; 14) $|x|<-1$.

ВІДПОВІДЬ. 9) $x\ne 0$; 10) $x\in\varnothing$; 11) $x\in(-\infty;+\infty)$;
12) $x=0$; 13) $x\in(-\infty;+\infty)$; 14) $x\in\varnothing$.

ЗАДАЧА 6. Розв'язати нерівність:

$$1<|x-3|\le 4.$$

ВІДПОВІДЬ. $x\in[-1;2)\cup(4;7]$.

Для розв'язання наступної задачі ми вперше застосуємо метод, яким часто користуватимемось у майбутньому, — *метод інтервалів.*

ЗАДАЧА 7. Розв'язати нерівність:

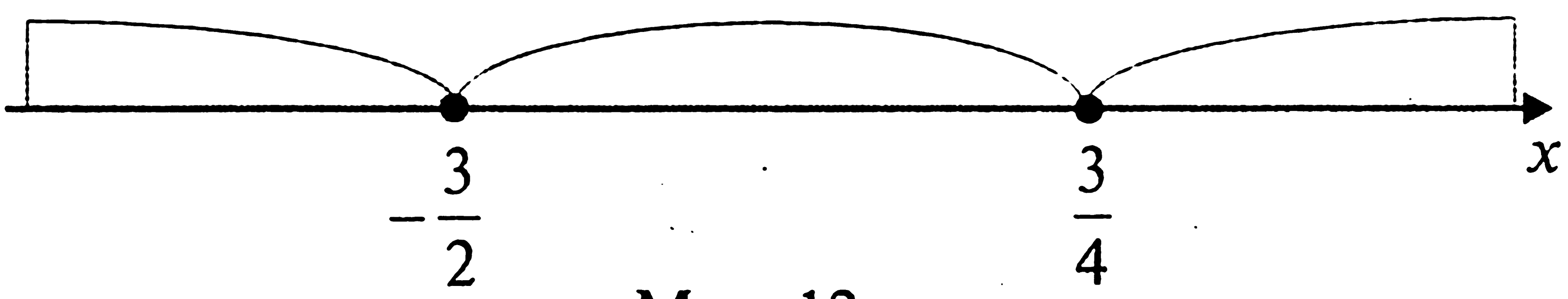
$$|2x+3| \geq |4x-3|.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Перепишемо нерівність у вигляді:

$$|2x+3| - |4x-3| \geq 0,$$

позначимо на числовій прямій точки, у яких підмодульні вирази дорівнюють нулю: $-\frac{3}{2}$ та $\frac{3}{4}$ (мал. 12),



Мал. 12

та розглянемо три проміжки:

1) $x < -\frac{3}{2}$. Маємо:

$$-2x-3+4x-3 \geq 0; \quad 2x \geq 0; \quad x \geq 3.$$

Але ці розв'язки не входять у проміжок $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$, тому $x \in \varnothing$.

2) $-\frac{3}{2} \leq x < \frac{3}{4}$. Маємо

$$2x+3+4x-3 \geq 0; \quad x \geq 0.$$

Враховуючи, що $-\frac{3}{2} \leq x < \frac{3}{4}$, дістанемо: $0 \leq x < \frac{3}{4}$.

3) $x \geq \frac{3}{4}$. Маємо:

$$2x+3-4x+3 \geq 0; \quad 2x \leq 6; \quad x \leq 3.$$

Враховуючи, що $x \geq \frac{3}{4}$, дістанемо: $\frac{3}{4} \leq x \leq 3$.

Об'єднуючи відповіді, маємо

$$x \in [0;3].$$

ВІДПОВІДЬ. $x \in [0;3]$.

ЗАДАЧА 8. Розв'язати нерівності:

1) $|x+1|-|x|\ge 0$; 2) $|2x-5|-|4x+7|\ge 0$;

3) $|2x-7|-|3x+5|\ge 0$; 4) $|x|-|5x-2|<0$;

5) $|x-2|>|x+1|-3$; 6) $|12-x|>15-|x+3|$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$; 2) $x\in\left[-6;-\frac{1}{3}\right]$; 3) $x\in[-12;\,0{,}4]$.

4) $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; 5) $x\in(-\infty;2)$;

6) $x\in(-\infty;-3)\cup(12;+\infty)$.

ЗАДАЧА 9. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases}|x+2|\le 1\\ |x|<-x+1\end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

З першої нерівності маємо:

$$-1\le x+2\le 1;\quad -3\le x\le -1;$$

зокрема, $x<0$, тобто $|x|=-x$. Тоді друга нерівність набуде вигляду:

$$-x<-x+1;\quad 0<1;$$

тобто x — будь-яке. Отже, розв'язками системи будуть усі x, що задовольняють першій нерівності.

ВІДПОВІДЬ. $x\in[-3;-1]$.

§ 6. ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ ТА КВАДРАТНІ НЕРІВНОСТІ

Дробово-раціональні та квадратні нерівності ми ще будемо детально розглядати у наступній главі за допомогою метода інтервалів. А зараз ми просто продемонструємо, як розв'язувати такі нерівності за допомогою систем та сукупностей лінійних нерівностей.

ЗАДАЧА 1. Розв'язати нерівність:

$$\frac{3x-10}{4-2x} \le -1.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Дана в умові нерівність рівносильна нерівності

$$\frac{3x-10}{4-2x} + 1 \le 0;$$

звідси

$$\frac{3x-10+4-2x}{4-2x} \le 0; \quad \frac{x-6}{4-2x} \le 0.$$

Коли алгебричний дріб недодатний? Тоді й тільки тоді, коли або чисельник недодатний, а знаменник — додатний, або ж, навпаки, чисельник невід'ємний, а знаменник — від'ємний. Отже, ця нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} x-6 \le 0 \\ 4-2x > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-6 \ge 0 \\ 4-2x < 0 \end{cases};$$

звідси маємо

$$\begin{cases} x \le 6 \\ x < 2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \ge 6 \\ x > 2 \end{cases};$$

отже,

$$x \in (-\infty; 2) \text{ або } x \in [6; +\infty).$$

ВІДПОВІДЬ. $x \in (-\infty; 2) \cup [6; +\infty)$.

ЗАУВАЖЕННЯ! Звісно, сукупність двох систем можна було б записати за допомогою позначки сукупності: $\left[\vphantom{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}}\right.$.

ЗАДАЧА 2. Розв'язати нерівність:

$$x^2-5x+6<0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

За теоремою Вієта коренями рівняння $x^2-5x+6=0$ будуть числа 2 та 3. Тому

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Отже, дана нерівність рівносильна нерівності

$$(x-2)(x-3)<0.$$

Добуток двох виразів від'ємний тоді й тільки тоді, коли один з них — додатний, а інший — від'ємний. Отже, ця нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x-3<0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-2<0 \\ x-3>0 \end{cases};$$

звідси

$$\begin{cases} x>2 \\ x<3 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x<2 \\ x>3 \end{cases};$$

$$x\in(2;3) \text{ або } x\in\varnothing.$$

Отже, $x\in(2;3)$.

ВІДПОВІДЬ. $x\in(2;3)$.

ЗАДАЧА 3. Розв'язати дробово-раціональні нерівності:

1) $\dfrac{6-x}{x-3}>2$; 2) $\dfrac{2x-1}{x+2}\geq -3$; 3) $\dfrac{5-3x}{2-4x}\geq 2$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in(3;4)$; 2) $x\in(-\infty;-2)\cup[-1;+\infty)$;
3) $x\in[-0{,}2;0{,}5)$.

ЗАДАЧА 4. Розв'язати квадратні нерівності:

1) $x^2+x-6\geq 0$; 2) $x^2-9x+14\leq 0$; 3) $2x^2-3x+1<0$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$;
2) $x\in[2;7]$; 3) $x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

§ 7. ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРОМ

Розглянемо лінійні нерівності, в яких, крім невідомого x, є ще буква (параметр). Такі нерівності потребують при розв'язані додаткових досліджень (в залежності від значень параметра).

ЗАДАЧА 1. Розв'язати нерівність:

$$ax > 3.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо $a > 0$, то $x > \frac{3}{a}$.

Якщо $a < 0$, то $x < \frac{3}{a}$.

Якщо $a = 0$, то нерівність набуде вигляду $0 > 3$; звідси $x \in \varnothing$.

ЗАДАЧА 2. Розв'язати нерівність:

$$ax > -3.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо $a > 0$, то $x > -\frac{3}{a}$.

Якщо $a < 0$, то $x < -\frac{3}{a}$.

Якщо $a = 0$, то маємо: $0 > -3$; звідси $x \in (-\infty; +\infty)$.

ЗАДАЧА 3. Розв'язати нерівність:

$$ax - b > 3 - 2x.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Дана нерівність рівносильна нерівності $(a+2)x > b+3$.

Якщо $a+2 > 0$, тобто при $a > -2$, маємо: $x > \frac{b+3}{a+2}$.

Якщо $a+2 < 0$, тобто при $a < -2$, маємо: $x < \frac{b+3}{a+2}$.

Якщо $a+2 = 0$, тобто при $a = -2$, маємо: $b+3 < 0$; звідси, якщо $b < -3$, то $x \in (-\infty; +\infty)$, а якщо $b \geq -3$, то $x \in \varnothing$.

ЗАДАЧА 4. Розв'язати нерівність:

$$(m+1)x+4<(3-2m)x-1$$

ВІДПОВІДЬ. При $m<\frac{2}{3}$ $x\in\left(\frac{5}{2-3m};+\infty\right)$;

при $m>\frac{2}{3}$ $x\in\left(-\infty;\frac{5}{2-3m}\right)$;

при $m=\frac{2}{3}$ $x\in\varnothing$.

ЗАДАЧА 5. Розв'язати нерівність:

$$\frac{(a+2)x}{a-1}-\frac{2}{3}<2x-1.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Дана нерівність рівносильна нерівності

$$\left(2-\frac{a+2}{a-1}\right)x>\frac{1}{3};$$

звідси

$$\left(\frac{a-4}{a-1}\right)x>\frac{1}{3}.$$

Якщо $a=4$ або $a=1$, то розв'язків нема.

Якщо $\frac{a-4}{a-1}>0$, тобто при $a\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$ маємо:

$$x>\frac{a-1}{3(a-4)}.$$

Якщо $\frac{a-4}{a-1}<0$, тобто при $a\in(1;4)$ маємо:

$$x<\frac{a-1}{3(a-4)}.$$

§ 8. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Ви вже знайомі з нерівностями, справедливими при всіх допустимих значеннях букв, що входять до їхнього складу. Наприклад, $a^2 \geq 0$, $|x| \geq 0$, $\sqrt{a} \geq 0$. Доведення нерівностей (тобто встановлення, що нерівність справедлива при всіх допустимих значеннях букв) — це важлива і цікава тема курсу алгебри.

Найпопулярніший спосіб доведення нерівностей — зведення їх до вищезгаданих очевидних нерівностей за допомогою тотожних перетворень. Ще одна важлива очевидна нерівність: $(a \pm b)^2 \geq 0$.

ЗАДАЧА 1. Довести, що при будь-яких значеннях a:

$$a^2 + 1 \geq 2a.$$

ДОВЕДЕННЯ

Маємо: $a^2 + 1 - 2a = (a-1)^2 \geq 0$. Рівність при $a = 1$.

ЗАДАЧА 2. Довести, що при будь-яких значеннях a:

1) $\dfrac{2a}{1+a^2} \leq 1$; 2) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$;

3) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$; 4) $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b)$.

ДОВЕДЕННЯ

1) Маємо:

$$\frac{2a}{1+a^2} - 1 = \frac{2a-1-a^2}{1+a^2} = -\frac{a^2-2a+1}{1+a^2} = -\frac{(a-1)^2}{1+a^2} \leq 0.$$

Рівність при $a = 1$.

2)–3) Маємо:

$$a^2 \pm ab + b^2 = \frac{1}{2}\left(2a^2 \pm 2ab + 2b^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2 \pm 2ab + b^2 + a^2 + b^2\right) = \frac{1}{2}\left((a \pm b)^2 + a^2 + b^2\right) \geq 0.$$

Рівність при $a = b = 0$.

4) Маємо:

$$a^2 + b^2 + 2 - 2(a+b) = a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 = (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0.$$

Рівність при $a = b = 1$.

ЗАДАЧА 3. Довести, що при $a>0$ та $b>0$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}.$$

ДОВЕДЕННЯ

Нерівність $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$ справедлива при всіх невід'ємних значеннях a та b. Отже,

$$a-2\sqrt{ab}+b\geq 0;\quad \text{або}\quad \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab},$$

що й треба було довести.

ЗАДАЧА 4. (Геометрична нерівність.) Нехай у прямокутному трикутнику a та b — катети, c — гіпотенуза. Довести, що

$$a^3+b^3<c^3.$$

ДОВЕДЕННЯ

Оскільки довжина гіпотенузи більша за довжину катета, то

$$c>a \text{ та } c>b.$$

Домножимо першу нерівність на $a^2>0$, другу — на $b^2>0$:

$$ca^2>a^3 \text{ та } cb^2>b^3.$$

Додамо ці дві нерівності одного змісту:

$$ca^2+cb^2>a^3+b^3;\quad c\left(a^2+b^2\right)>a^3+b^3.$$

Але за теоремою Піфагора $a^2+b^2=c^2$, звідси

$$c\cdot c^2>a^3+b^3;\quad c^3>a^3+b^3,$$

що й треба було довести.

Розглянемо деякі спеціальні методи доведення нерівностей.

Застосування нерівності $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ $(a>0;\ b>0)$

Перш за усе доведемо її. Маємо

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0 \text{ (оскільки } ab>0).$$

Ця нерівність має мовне формулювання: сума зворотних додатних величин не менша двох.

ЗАДАЧА 5. Довести, що якщо $a>0$, то

$$a+\frac{1}{a}\geq 2.$$

ДОВЕДЕННЯ

Справді, оскільки $a\cdot\frac{1}{a}=1$, то $a+\frac{1}{a}$ — сума зворотних величин, а отже, $a+\frac{1}{a}\geq 2$.

ЗАДАЧА 6. Довести, що $\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2.$

ДОВЕДЕННЯ

Дану нерівність запишемо у вигляді:

$$\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2.$$

Отримали очевидну нерівність про суму зворотних величин.

ЗАДАЧА 7. Довести, що якщо $a>0, b>0, c>0$, то

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\geq 6.$$

ДОВЕДЕННЯ

Дану нерівність запишемо у вигляді:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\geq 6.$$

Тобто ми маємо довести, що

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 6.$$

Але кожен вираз у дужках, як сума зворотних величин, не менший за два, а отже, дана нерівність доведена.

Наступна нерівність дуже важлива і має численні застосування при доведенні не тільки алгебричних, а й геометричних нерівностей.

ЗАДАЧА 8. Довести, що якщо $a>0, b>0, c>0$, то

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9.$$

ДОВЕДЕННЯ

Маємо:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1=$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+3\ge 9,$$

оскільки $\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\ge 6.$

ЗАДАЧА 9. Довести, що якщо $a>0, b>0, c>0$, то

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

ДОВЕДЕННЯ

Додамо число $3=1+1+1$ до лівої та правої частин даної нерівності. Дістанемо рівносильну їй нерівність:

$$\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c}+1+\frac{c}{a+b}+1\ge\frac{3}{2}+3;$$

звідси

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}\ge\frac{9}{2};$$

або, якщо винести $a+b+c$ за дужки:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\ge\frac{9}{2}.$$

Помножимо обидві частини цієї нерівності на 2, дістанемо

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 9;$$

звідси

$$((a+b)+(b+c)+(a+c))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 9,$$

а ця нерівність випливає з попередньої задачі.

ЗАДАЧА 10. **(Геометрична нерівність.)** Нехай у трикутнику ABC: h_a, h_b, h_c — висоти, r — радіус вписаного кола. Довести, що

$$h_a+h_b+h_c \geq 9r.$$

ДОВЕДЕННЯ

Для доведення знов використаємо нерівність із задачі 8. Але спочатку доведемо, що

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}.$$

Справді, нехай S — площа трикутника ABC. Тоді

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a;\text{ звідси }\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S}.$$

Аналогічно

$$\frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S};\ \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}.$$

Отже,

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2p}{2S}=\frac{p}{S},$$

де $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — напівпериметр трикутника ABC. Тепер лишилось використати формулу

$$r=\frac{S}{p}.$$

Тому $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}.$

За нерівністю із задачі 8:

$$(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\geq 9.$$

Оскільки вираз у других дужках дорівнює $\frac{1}{r}$, то

$$(h_a+h_b+h_c)\cdot\frac{1}{r}\geq 9,\text{ або } h_a+h_b+h_c\geq 9r,$$

що й вимагалось довести.

Перейдемо до наступного методу доведення нерівностей.

Застосування нерівності трьох квадратів: $a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc$

Доведемо цю нерівність. Маємо:

$$a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+b^2+c^2+a^2+c^2-2ab-2ac-2bc\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right)\ge 0.$$

Рівність при $a=b=c$.

ЗАДАЧА 11. Довести нерівність :

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\ge\frac{ab+ac+bc}{3}$$

ДОВЕДЕННЯ

Покажемо, що дана нерівність рівносильна нерівності трьох квадратів. Справді:

$$(a+b+c)^2\ge 3(ab+ac+bc);$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\ge 3ab+3ac+3bc;$$

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc.$$

ЗАДАЧА 12. Довести нерівність

$$a^2+b^2+c^2\ge\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right),$$

де $a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0$.

ДОВЕДЕННЯ

За нерівністю трьох квадратів, $a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc$. Але ж

$$ab+ac+bc=\left(\sqrt{ab}\right)^2+\left(\sqrt{ac}\right)^2+\left(\sqrt{bc}\right)^2,$$

тому знов застосуємо нерівність трьох квадратів:

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2+\left(\sqrt{ac}\right)^2+\left(\sqrt{bc}\right)^2\ge a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}=$$

$$=\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right),$$

що доводить потрібну нерівність.

ЗАДАЧА 13. Довести, що якщо $a>0, b>0, c>0$, то

$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c).$$

ДОВЕДЕННЯ

Запишемо нерівність трьох квадратів для a^4, b^4, c^4. Маємо:

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2.$$

Запишемо тепер нерівність трьох квадратів для a^2b^2; b^2c^2; a^2c^2:

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geq a^2bc+b^2ac+c^2ab=abc(a+b+c),$$

що й треба було довести.

Застосування нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ $(a \geq 0; b \geq 0)$

Цю нерівність ми вже довели (задача 3). Вона називається нерівністю між середнім арифметичним та середнім геометричним двох чисел.

ЗАДАЧА 14. Довести, що для довільних чисел a та b має місце нерівність:

$$(9a^2+2)(2b^2+1) \geq 24ab.$$

ДОВЕДЕННЯ

До невід'ємних чисел $9a^2$ та 2 застосуємо нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним:

$$\frac{9a^2+2}{2} \geq \sqrt{18a^2}.$$

Аналогічно,

$$\frac{2b^2+1}{2} \geq \sqrt{2b^2}.$$

Перемножимо ці нерівності:

$$(9a^2+2)(2b^2+1) \geq 4\sqrt{36a^2b^2}=4\cdot 6|ab| \geq 24ab;$$

звідси

$$(9a^2+2)(2b^2+1) \geq 24ab,$$

що й треба було довести.

ЗАДАЧА 15. Довести нерівність:

$$n\sqrt{m-1}+m\sqrt{n-1}\le mn$$

ДОВЕДЕННЯ

За умовою $m\ge1$, $n\ge1$. Застосуємо нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним, маємо:

$$n\sqrt{(m-1)\cdot1}\le n\cdot\frac{m-1+1}{2}=\frac{nm}{2};$$

аналогічно,

$$m\sqrt{(n-1)\cdot1}\le m\cdot\frac{n-1+1}{2}=\frac{mn}{2}.$$

Додавши ці дві нерівності, дістанемо шукану. Знак рівності буде, якщо $m=n=2$.

Практикум

ЗАДАЧА 16. Довести (при $a\ge0, b\ge0$) нерівність:

$$\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

ДОВЕДЕННЯ

Розглянемо очевидну нерівність: $2ab\le a^2+b^2$. Додамо до її обох частин a^2+b^2 та поділимо обидві частини на 4. Дістанемо:

$$\frac{2ab+a^2+b^2}{4}\le\frac{a^2+b^2+a^2+b^2}{4};$$

звідси

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2};\ \text{тобто}\ \frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

оскільки $a+b\ge0$. Рівність при $a=b$.

ЗАДАЧА 17. Довести нерівність:

$$2a^2+b^2+c^2\ge2a(b+c).$$

ДОВЕДЕННЯ

$$a^2+a^2+b^2+c^2-2ab-2ac=(a-b)^2+(a-c)^2\ge0,$$

що й треба було довести.

ЗАДАЧА 18. Доверти нерівність при $a \geq 0, b \geq 0, u > 0$

$$au + \frac{b}{u} \geq 2\sqrt{ab}.$$

ДОВЕДЕННЯ

І спосіб. Маємо:

$$au + \frac{b}{u} = \left(\sqrt{au} - \sqrt{\frac{b}{u}}\right)^2 + 2\sqrt{ab} \geq 2\sqrt{ab}.$$

Рівність досягається при $a = b = 0$ та при $a \neq 0, b \neq 0, u = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

ІІ спосіб. Використати нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним.

ЗАДАЧА 19. Довести нерівність:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$$

ДОВЕДЕННЯ

$$a^2 + b^2 + 1 - (ab + a + b) = \frac{1}{2}\left(2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(a^2 - 2ab + b^2\right) + \left(a^2 - 2a + 1\right) + \left(b^2 - 2b + 1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2\right) \geq 0,$$

що й вимагалось довести. Рівність досягається при $a = b = 1$.

ЗАДАЧА 20. Довести нерівність при $ab > 0, ac > 0$:

$$\frac{2a^2 + 4b^2 + c^2}{4ab + 2ac} \geq 1.$$

ДОВЕДЕННЯ

З умови випливає, що $4ab + 2ac > 0$. Отже, досить довести, що

$$2a^2 + 4b^2 + c^2 \geq 4ab + 2ac.$$

Маємо:

$$2a^2 + 4b^2 + c^2 - (4ab + 2ac) = \left(a^2 - 4ab + 4b^2\right) + \left(c^2 - 2ac + a^2\right) =$$

$$= (a - 2b)^2 + (c - a)^2 \geq 0,$$

що й вимагалось довести. Рівність досягається при $a = c = 2b$.

ЗАДАЧА 21. Довести, що якщо $c>0$, то при будь-яких дійсних a та b має місце нерівність:

$$\frac{a^2+3c^2+b^2+1}{2c}\geq a+b+1.$$

ДОВЕДЕННЯ

Доведемо, що $a^2+3c^2+b^2+1-2c(a+b+1)\geq 0$. Маємо:

$$a^2+3c^2+b^2+1-2c(a+b+1)=a^2+3c^2+b^2-2ac-2bc-2c+1=$$
$$=\left(a^2-2ac+c^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2c+1\right)=$$
$$=(a-c)^2+(b-c)^2+(c-1)^2\geq 0,$$

що й вимагалось довести. Рівність при $a=b=c=1$.

ЗАДАЧА 22. Довести, що при всіх дійсних значеннях x

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10\geq 1.$$

ДОВЕДЕННЯ

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10=$$
$$=\left(x^2-7x+6\right)\left(x^2-7x+12\right)+10=$$
$$=\left(\left(x^2-7x+9\right)-3\right)\left(\left(x^2-7x+9\right)+3\right)+10=$$
$$=\left(x^2-7x+9\right)^2-9+10=\left(x^2-7x+9\right)^2+1\geq 1.$$

Рівність при $x^2-7x+9=0$, тобто при $x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2}$.

ЗАДАЧА 23. Довести нерівності (при всіх допустимих значеннях букв, якщо додатково нічого не вказано):

1) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$; 2) $(a+b)^4\leq 8\left(a^4+b^4\right)$;

3) $(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8abc$; 4) $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2(a+b)}$;

5) $2\leq\sqrt{8-a}+\sqrt{a-4}\leq 2\sqrt{2}$; 6) $3\left(1+a^2+a^4\right)\geq\left(1+a+a^2\right)^2$;

7) $\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2+(a-b)^2}>a\quad(a>0,b>0)$;

8) $2a^2+5b\geq 6a\sqrt{b}$; 9) $a^4+b^4\geq a^2b+ab^2\quad(a>0,b>0)$;

10) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{ac}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}}\quad(a>0,b>0,\ c>0)$.

ГЛАВА 2. ФУНКЦІЇ І ГРАФІКИ

§ 1. ФУНКЦІЇ. ПОВТОРЕННЯ

З функціями ви вже знайомились у сьомому та восьмому класах. Там розглядалось поняття функції та вивчались основні властивості лінійної функції $y = kx + b$, найпростішої квадратичної функції $y = x^2$, а також функції $y = \sqrt{x}$. Зараз ми почнемо більш глибоке вивчення функцій, їхніх різновидів та властивостей.

А почнемо ми, як завжди, з повторення основних ідей та термінів.

ОЗНАЧЕННЯ. Якщо задані дві множини, D та K, і заданий *закон* (*правило*), за яким *кожному* **елементу** x з множини D ставиться у відповідність *один цілком визначений* **елемент** y з множини K, то кажуть, що *на множині D* задана **функція** із *значеннями в множині K*.

Кажуть також, що **залежна змінна** y є *функцією* **незалежної змінної** x. Змінну x називають **аргументом** даної функції, множину D — **областю (множиною) визначення** даної функції, а відповідність між x та y — **функціональною відповідністю** (або **функціональною залежністю**).

Цю залежність між x та y умовно записують, наприклад, так: $y = f(x)$ або $y = \varphi(x)$.

Усі значення, яких набуває функція $f(x)$ (при x, що належать області визначення), створюють **область значень** функції. Позначається вона E або $E(f)$.

Нагадаємо основні способи визначення функцій.

1. Функцію можна задати мовно.

Наприклад, знаменита функція Діріхле задається так:

$f(x)=0$, якщо x — число ірраціональне,

та $f(x)=1$, якщо x — число раціональне.

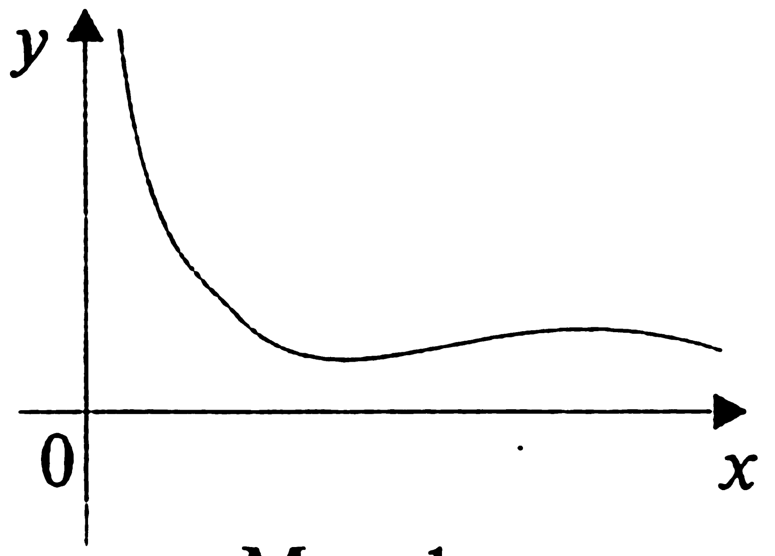
2. Функцію можна задати таблично.

Наприклад,

x	0	1	2	3	4
y	0,5	1,3	8,6	2,7	6,4

3. Функцію можна задати графічно.

Наприклад,



Мал. 1

4. Функцію можна задати аналітично.

Наприклад,

$$y=x^2.$$

5. Функцію можна задати кусково-аналітично.

Наприклад,

$$y=\begin{cases}\dfrac{-2x+8}{3}, \text{ якщо } x\le -2\\ x^2, \text{ якщо } -2\le x\le 2\\ \dfrac{5x-2}{2}, \text{ якщо } x\ge 2\end{cases}.$$

Побудуйте графік цієї функції самостійно.

УВАГА! Хоча функція Діріхле задана у всіх дійсних точках, графік її побудувати неможливо! При табличному способі задання функції ми знаємо її значення тільки у скінченній кількості точок! При графічному способі задання функції ми знаємо тільки якісну поведінку функції у тих деталях, які вдалося передати на малюнку! Найбільш повний опис дають аналітичний та кусково-аналітичний способи задання.

ЗАДАЧА 1. Знайти області визначення (D) та області значення (E) таких функцій:

$$1)\ y=-x;\quad 2)\ y=-\frac{1}{2}x;\quad 3)\ y=7x;\quad 4)\ y=|x|;$$

$$5)\ y=|x-1|;\quad 6)\ y=\frac{1}{x};\quad 7)\ y=x^2;\quad 8)\ y=\sqrt{x}.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $D\colon x\in\mathbb{R}$; $E\colon y\in\mathbb{R}$; 2) $D\colon x\in\mathbb{R}$; $E\colon y\in\mathbb{R}$;
3) $D\colon x\in\mathbb{R}$; $E\colon y\in\mathbb{R}$; 4) $D\colon x\in\mathbb{R}$; $E\colon y\geq 0$;
5) $D\colon x\in\mathbb{R}$; $E\colon y\geq 0$; 6) $D\colon x\neq 0$; $E\colon y\neq 0$;
7) $D\colon x\in\mathbb{R}$; $E\colon y\geq 0$; 8) $D\colon x\geq 0$; $E\colon y\geq 0$.

ЗАДАЧА 3. Знайти область визначення функцій:

$$1)\ y=3x-5;\quad 2)\ y=\frac{1}{x-2};\quad 3)\ y=\sqrt{x-1}$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in\mathbb{R}$; 2) $x\neq 2$; 3) $x\geq 1$.

ЗАДАЧА 4. Знайти область значення функцій:

$$1)\ y=-\frac{1}{2}x;\quad 2)\ y=\frac{1}{2x-3};\quad 3)\ y=\sqrt{3-x}$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $y\in\mathbb{R}$; 2) $y\neq 0$; 3) $y\geq 0$.

ЗАДАЧА 5. Функція задана формулою

$$f(x)=2x^3-\frac{1}{2}x^2-1.$$

Знайти $f(0)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2)$.

ВІДПОВІДЬ. $f(0)=-1$; $f(-1)=-3{,}\dot{5}$; $f(1)=0{,}5$; $f(2)=13$.

ЗАДАЧА 6. Побудувати графіки функцій на проміжку $(-1;1)$:

$$1)\ y=-3x;\quad 2)\ y=\frac{2}{7x};\quad 3)\ y=\frac{1}{3}x^2;\quad 4)\ y=\sqrt{2x}.$$

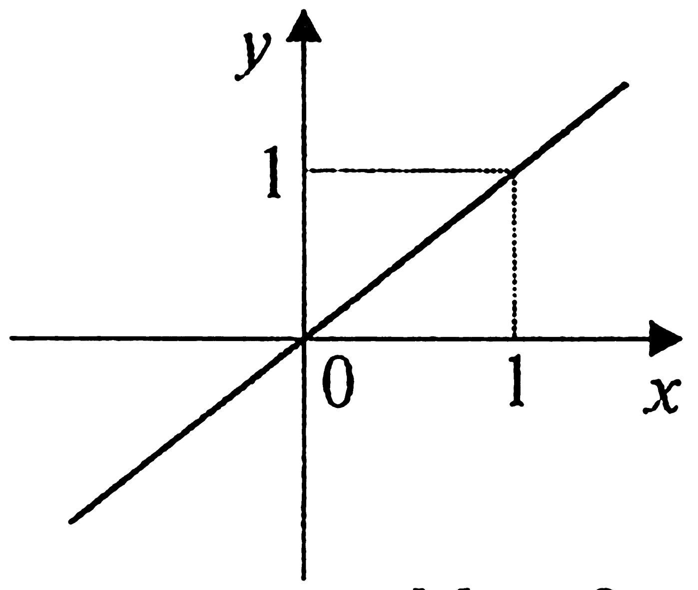
ЗАДАЧА 7. Функція задана формулою $f(x)=2x^2$. При яких значеннях x: $f(-x)=f(x)$?

ВІДПОВІДЬ. При будь-яких x ($x\in\mathbb{R}$).

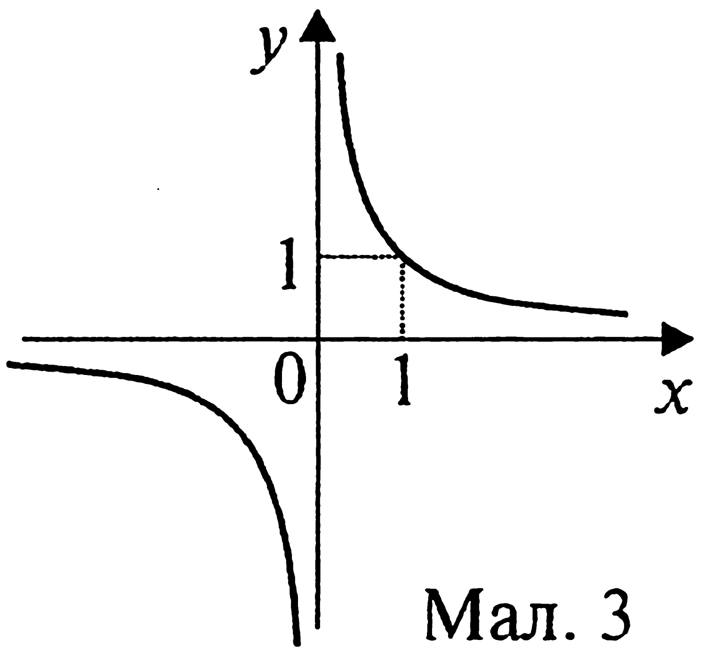
ЗАДАЧА 8. Функція задана формулою $f(x)=\frac{1}{3}x^3$. При яких значеннях x: $f(-x)=-f(x)$.

ВІДПОВІДЬ. При будь-яких x ($x\in\mathbb{R}$).

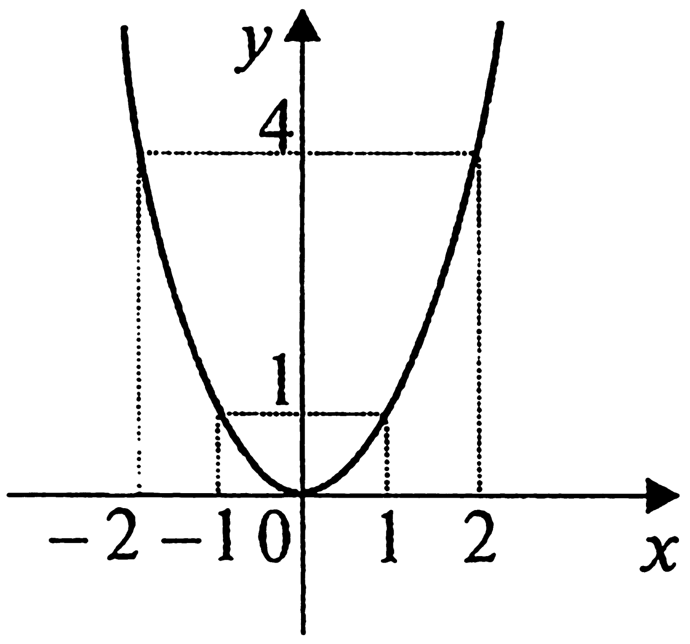
ЗАДАЧА 9. На малюнках зображені функції:



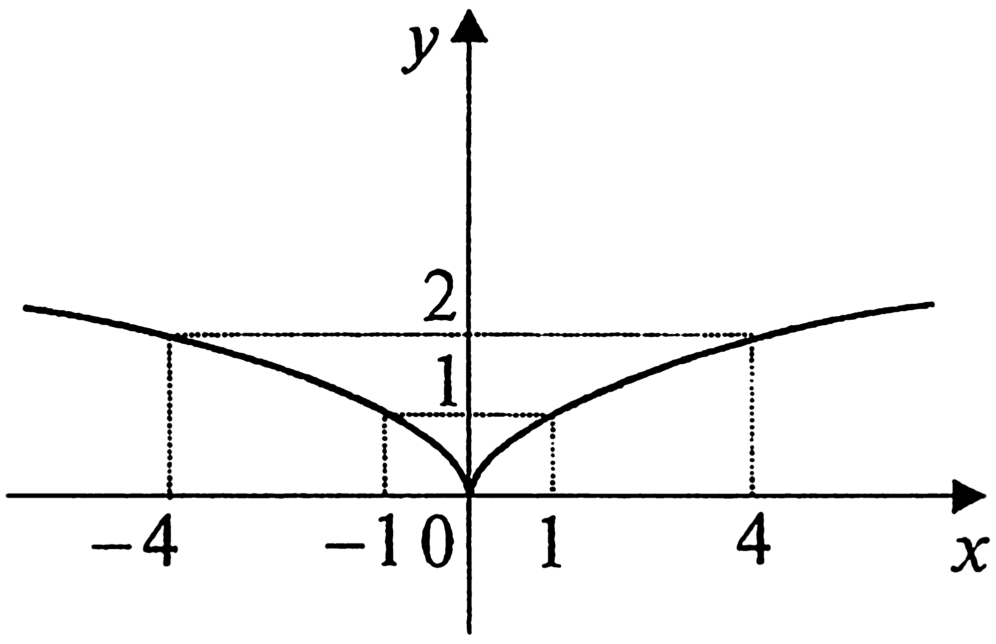
Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4



Мал. 5

1) Знайти області визначення функцій.
2) Знайти області значення функцій.
3) Визначити для яких з функцій

$$f(x)=f(-x);\quad f(x)=-f(x)?$$

4) Для яких значень аргументу

$$f(x)=2;\quad f(x)=0?$$

5) Для яких значень x значення $f(x)$

найбільше; найменше?

ЗАДАЧА 10. *** Побудувати графіки функцій:

1) $y=\dfrac{2|x|}{3x}$; 2) $y=|x-2|-2x$; 3) $|y-1|=x-4$;

4) $y=5x^2$; 5) $y=\dfrac{1}{5}x^2$; 6) $y=7|x|x$; 7) $y=\dfrac{|x-4|}{x-4}$;

8) $y=2x^2-1$; 9) $y=\sqrt{|x|}$; 10) $y=x-\sqrt{x^2}$;

11) $y=\sqrt{x}-1$; 12) $|y|=\sqrt{x}$.

§ 2. ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ

ОЗНАЧЕННЯ. Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо її область визначення симетрична відносно початку координат, і для кожного значення x в області визначення

$$f(-x) = f(x).$$

Наприклад, $y = x^2$, $y = |x|$.

ОЗНАЧЕННЯ. Функція $y = f(x)$ називається *непарною*, якщо її область визначення симетрична відносно початку координат, і для кожного значення x в області означення

$$f(-x) = -f(x).$$

Наприклад, $y = x$, $y = \frac{1}{x}$.

ОЗНАЧЕННЯ. Функція називається *зростаючою* на деякій множині з області визначення, якщо більшому (меншому) значенню аргументу з цієї множини відповідає більше (менше) значення функції.

Наприклад, $y = x$ на усій числовій прямій, $y = x^2$ на $[0;+\infty)$.

ОЗНАЧЕННЯ. Функція називається *спадною* на деякій множині з області визначення, якщо більшому (меншому) значенню аргументу з цієї множини відповідає менше (більше) значення функції.

Наприклад, $y = -x$ на всій числовій прямій, $y = x^2$ на $(-\infty;0]$.

ЗАДАЧА 1. Дослідити на парність функцію $y = x^{10}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

D: $x \in \mathbb{R}$ — симетрична множина відносно початку координат;

$$f(x) = x^{10};\ \ f(-x) = (-x)^{10} = x^{10}.$$

Тобто

$$f(-x) = f(x)$$

для всіх x з області визначення. Отже, функція є парною.

ЗАДАЧА 2. Дослідити на парність функцію $y = x^7$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$D: x \in \mathbb{R};$$

$$f(x) = x^7;\; f(-x) = (-x)^7 = -x^7.$$

Тобто,

$$f(-x) = -f(x)$$

для всіх x з області визначення. Отже, функція є непарною.

ЗАДАЧА 3. Дослідити на парність функцію $y = x^2 + x^3$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$D: x \in \mathbb{R};$$

$$f(x) = x^2 + x^3;\; f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3.$$

Тобто,

$$f(-x) \neq f(x);\; f(-x) \neq -f(x).$$

Отже, функція властивостей парності та непарності не має.

ЗАДАЧА 4. Дослідити на зростання та спадання функцію:

$$y = 2x^3 + 1$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай $x_1 < x_2$ — два довільних дійсних числа. Тоді

$$x_1^3 < x_2^3;\; 2x_1^3 < 2x_2^3,\; 2x_1^3 + 1 < 2x_2^3 + 1,$$

тобто

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Отже, $y = 2x^3 + 1$ зростає на всій числовій прямій.

ЗАДАЧА 5. Чи буде функція зростаючою або спадною:

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = 1 - 3x$; 3) $y = 1 - x^2$;

4) $y = 2 + x^2$; 5) $y = 1 - 3x^3$; 6) $y = \sqrt{-x}$; 7) $y = |x|$.

ВІДПОВІДЬ. 1) зростаюча; 2) спадна;
3) зростаюча на $(-\infty;0]$ та спадна на $[0;+\infty)$;
4) спадна на $(-\infty;0]$ та зростаюча на $[0;+\infty)$;
5) спадна; 6) спадна на $(-\infty;0]$;
7) спадна на $(-\infty;0]$ та зростаюча на $[0;+\infty)$.

§ 3. ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

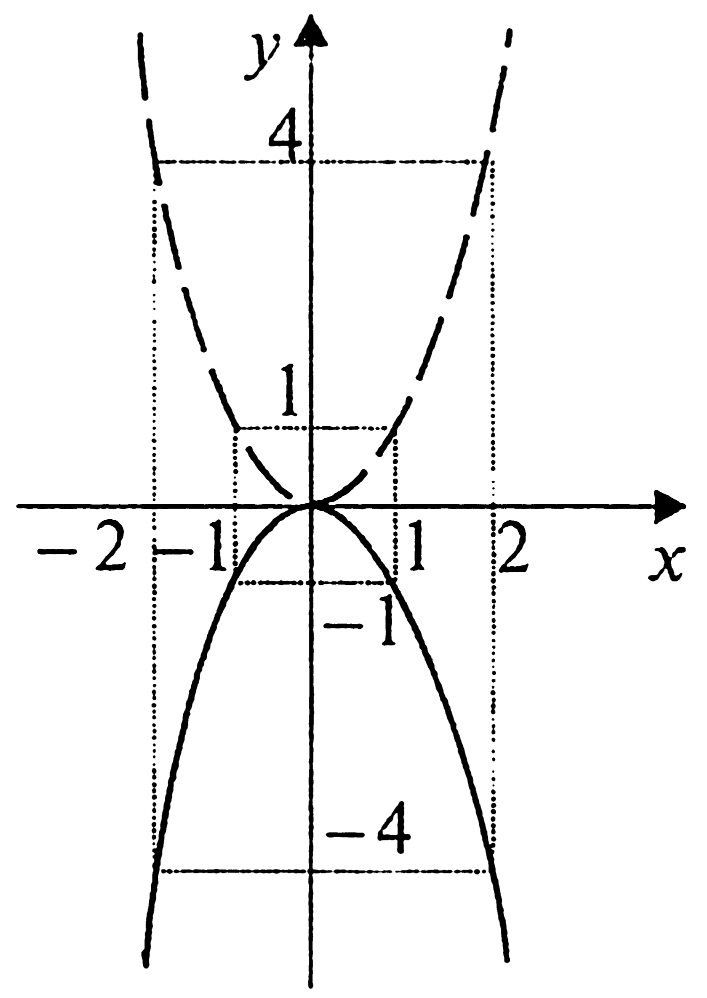
Нехай побудовано графік функції $y = f(x)$. Маючи цей графік, можна побудувати графіки функцій $y = -f(x)$; $y = f(-x)$, $y = mf(x) + n$ й т. і. за допомогою елементарних геометричних перетворень (зсуви, розтягування/стискання, симетричні відображення). Розглянемо ці перетворення.

1. Побудова графіка функції $y = -f(x)$

Отже (мал. 1), нехай вже побудовано графік функції $y = f(x)$, наприклад, $y = x^2$. Побудуємо графік $y = -f(x)$.

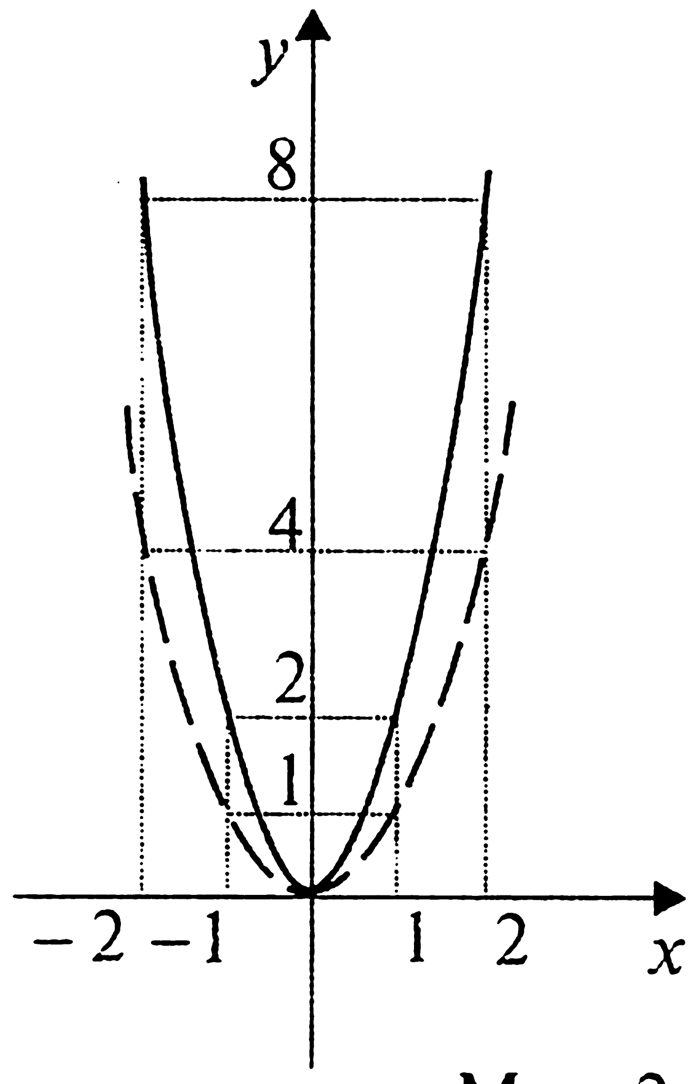
При одному і тому ж значенні x ординати точок графіка функції $y = f(x)$ і функції $y = -f(x)$ відрізняються тільки знаком. Тобто графік функції $y = -f(x)$, **симетричний** графіку функції $y = f(x)$ **відносно осі** x.

На малюнку показано, як із графіка $y = x^2$ отримати графік $y = -x^2$.



Мал. 1

2. Побудова графіка функції $y = mf(x)$ $(m > 0;\ m \neq 1)$

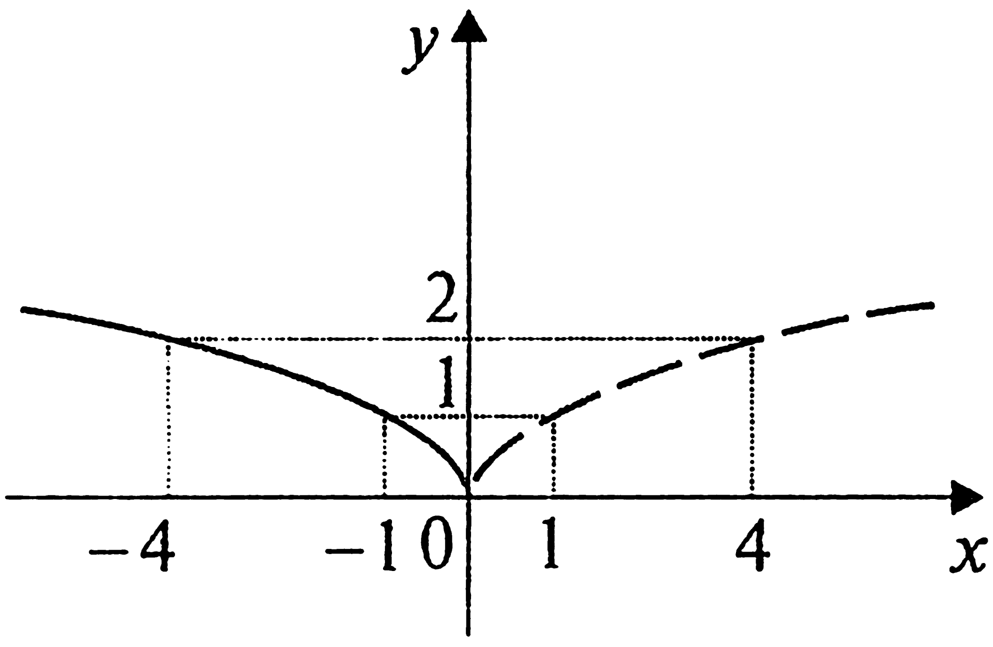


Мал. 2

Маємо (див. мал. 2) графік функції $y = f(x)$ (наприклад, $y = x^2$). Нехай потрібно побудувати графік функції $y = 2x^2$ (або, в загальному випадку, $y = mx^2$). Щоб отримати ординати точок цієї функції, слід помножити на 2 (в загальному випадку — на m) відповідні ординати точок графіка функції $y = f(x)$. Тобто даний графік розтягується вдвічі уздовж осі y. Взагалі, таке перетворення графіка називається його **розтягненням уздовж осі** y з коефіцієнтом m, якщо $m > 1$, і **стисканням уздовж осі** y, якщо $0 < m < 1$.

Комбінуючи ці два методи можна побудувати графік функції $y = mf(x)$ при довільному m, якщо задано графік функції $y = f(x)$.

3. Побудова графіка функції $y = f(-x)$

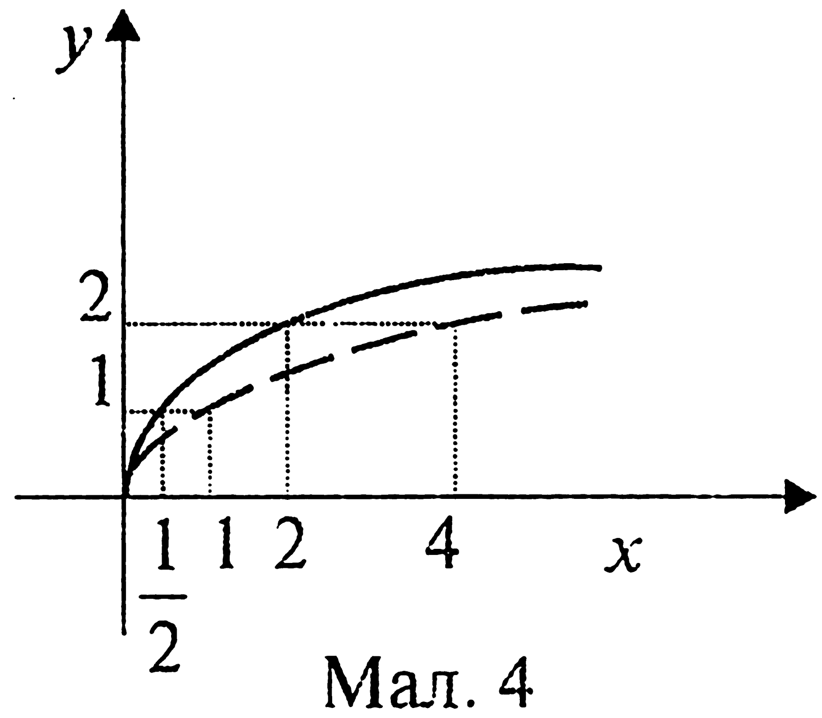


Мал. 3

Отже (мал. 3), нехай вже побудовано графік функції $y = f(x)$. наприклад, $y = \sqrt{x}$. Побудуємо графік функції $y = f(-x)$. Ясно, що протилежним значенням аргументу x відповідають ті самі значення функцій $y = f(x)$ та $y = f(-x)$, відповідно. Тобто графік функції $y = f(-x)$ симетричний графіку функції $y = f(x)$ відносно осі y. На малюнку показано, як із графіка $y = \sqrt{x}$ отримати графік $y = \sqrt{-x}$.

4. Побудова графіка функції $y = f(mx)$ $(m > 0;\ m \neq 1)$

Знов-таки, нехай вже побудовано графік функції $y = f(x)$, наприклад, $y = \sqrt{x}$ (мал. 4). Побудуємо графік функції $y = f(mx)$. Якщо взяти дві точки — на першому та другому графіках, такі що абсциса другої буде в m разів менша (якщо $m > 1$) або в $\frac{1}{m}$ разів більша (якщо $0 < m < 1$) за абсцису першої, то ординати цих точок будуть однакові. Тобто щоб отримати графік функції $y = f(mx)$ потрібно графік функції $y = f(x)$ **стиснути в m разів (якщо $m > 1$) до осі y** або **розтягнути в $\frac{1}{m}$ разів (якщо $0 < m < 1$) від осі y**.



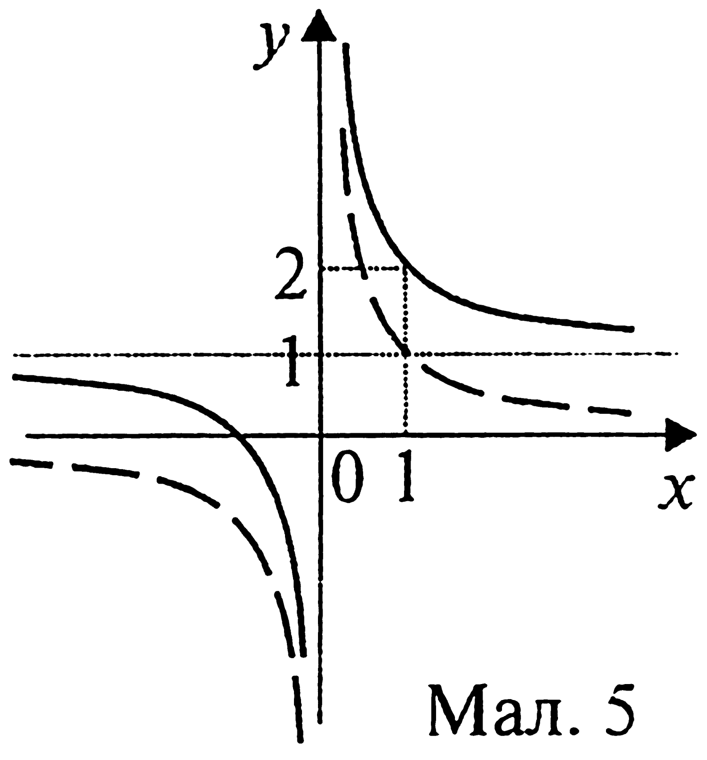
Мал. 4

На малюнку показано як маючи графік функції $y = \sqrt{x}$ побудувати графік функції $y = \sqrt{2x}$.

Комбінуючи третій та четвертий методи, можна побудувати графік функції $y = f(mx)$ при довільному m, якщо задано графік функції $y = f(x)$.

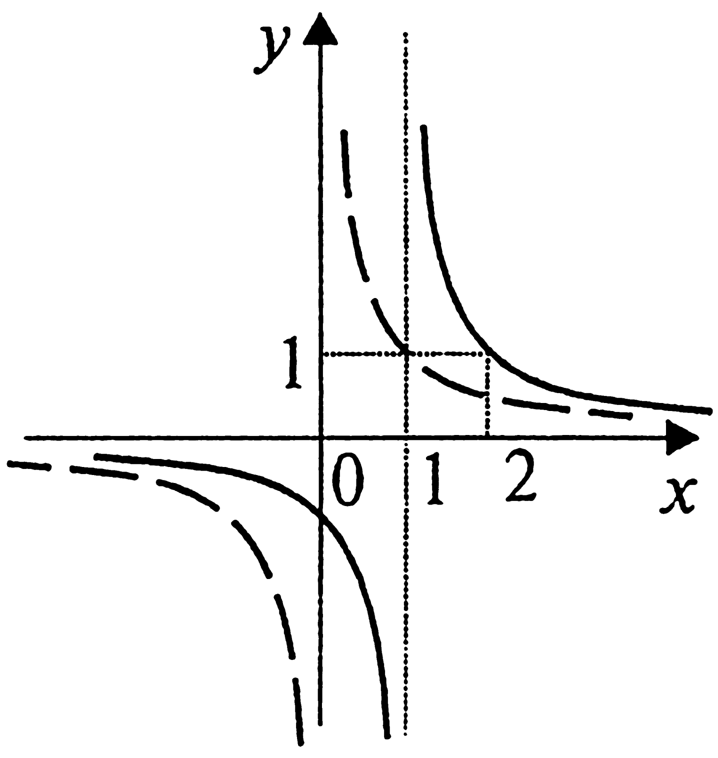
5. Побудова графіка функції $y = f(x) + m$

Порівнюючи ординати точок графіків функції $y = f(x)$ та $y = f(x) + m$ з однаковими абсцисами, дійдемо висновку, що графік функції $f(x) + m$ можна отримати, якщо графік функції $y = f(x)$ перенести на m одиниць в додатному напрямку осі y, якщо $m > 0$ або у від'ємному напрямку, якщо $m < 0$. На мал. 5 показано, як з графіка функції $y = \frac{1}{x}$ отримати графік $y = \frac{1}{x} + 1$.



Мал. 5

6. Побудова графіка функції $y = f(x + m)$



Мал. 6

Порівнюючи абсциси точок графіків функцій $y = f(x)$ та $y = f(x + m)$ з однаковими ординатами, доходимо висновку, що графік функції $y = f(x + m)$, можна отримати, якщо графік функції $y = f(x)$ перенести на m одиниць у від'ємному напрямку осі x, якщо $m > 0$, та у додатному напрямку осі x, якщо $m < 0$. На мал. 6 показано, як з графіка функції $y = \frac{1}{x}$ отримати графік функції $y = \frac{1}{x-1}$.

Отже, елементарними геометричними перетвореннями можна, маючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = kf(mx + s) + t$ для довільних k, m, s, t.

ЗАДАЧА 1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -\frac{1}{2}x$; 2) $y = -\frac{1}{2}x^2$; 3) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$; 4) $y = (x-1)^2$;

5) $y = \sqrt{x-1}$; 6) $y = x^2 - 1$; 7) $y = 1 + \sqrt{x}$; 8) $y = -\frac{1}{x+1}$;

9) $y = 2\sqrt{x+2} + 3$; 10) $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2$; 11) $y = \frac{2}{x+1} - 1$;

12) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x-1} + 1$; 13) $y = \frac{1}{2x}$; 14) $y = 2(x-1)^2 - 1$.

§ 4. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

З найпростішою квадратичною функцією $y = x^2$ ми вже зустрічались. Тепер розглянемо загальну квадратичну функцію.

ОЗНАЧЕННЯ. Функція, яка задається формулою $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, b, c — довільні числа, називається **квадратичною** функцією. Наприклад, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2x^2 + 5$, $y = (3x - 5)^2$, $y = x^2 - x + 1$.

Ви вже добре знайомі з графіком функції $y = x^2$. Крива, зображена на цьому графіку, називається *параболою*. Парабола складається з двох частин (віток). Вона має вісь симетрії.

Більш загальна квадратична функція: $y = ax^2$. Знаючи правила перетворення графіків функцій, ми можемо легко побудувати графік цієї функції: це буде також парабола, вітки якої направлені догори, якщо $a > 0$, і вниз, якщо $a < 0$. Графік буде стиснутий або розтягнутий вздовж осі y в залежності від того, менше чи більше одиниці буде $|a|$.

Розглянемо тепер загальний випадок: $y = ax^2 + bx + c$. Маємо:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

(вже знайоме вам з восьмого класу виділення повного квадрата).

Звідси випливає, що графік функції $y = ax^2 + bx + c$ можна отримати з графіка функції $y = x^2$ за допомогою елементарних перетворень. Справді, позначимо

$$\frac{b}{2a} = m; \quad \frac{b^2 - 4ac}{4a} = n.$$

Тоді

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + m)^2 - n,$$

а це означає, що для побудови графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ потрібно:

1) побудувати графік $y = ax^2$ $\left(f(x) \to af(x)\right)$;

2) побудувати графік $y = a(x + m)^2$ $\left(f(x) \to f(x+m)\right)$;

3) побудувати графік $y = a(x + m)^2 - n$ $\left(f(x) \to f(x) - n\right)$.

ОЗНАЧЕННЯ. Точка $A\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ називається **вершиною** параболи, яка є графіком функції $y=ax^2+bx+c$.

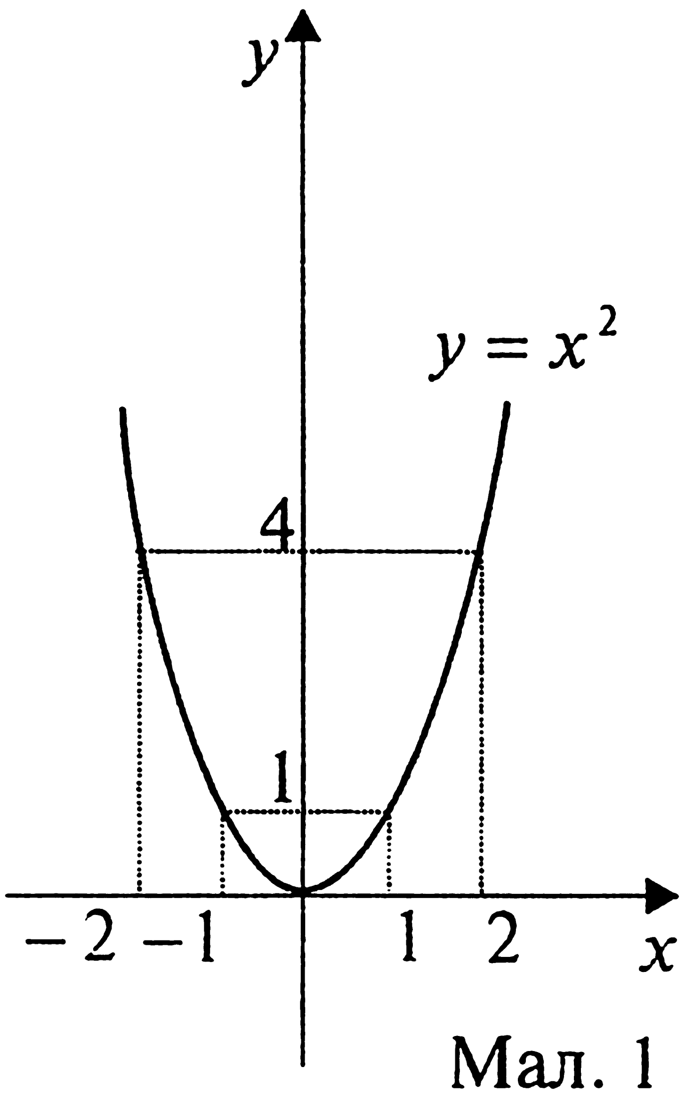
УВАГА! 1) Якщо $a>0$, то вітки параболи направлені догори, якщо $a<0$, то донизу. 2) Парабола має вертикальну вісь симетрії, яка проходить через вершину.

ПРИКЛАД. Побудувати графік функції $y=2x^2-4x+1$.

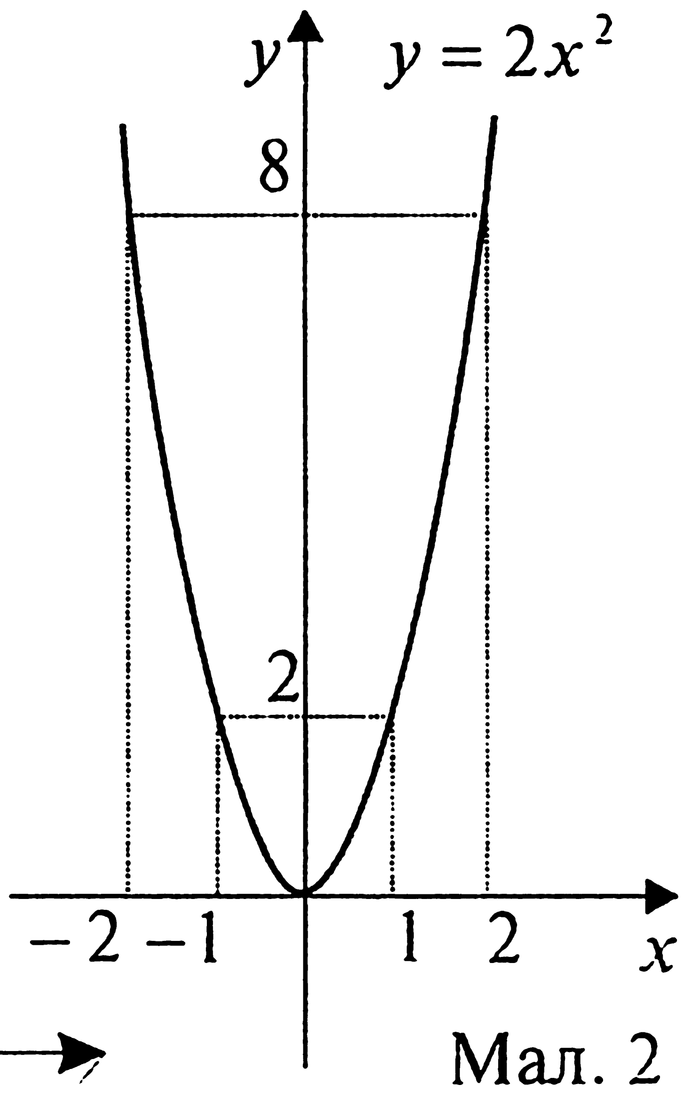
РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$2x^2-4x+1=2\left(x^2-2x+1\right)-1=2(x-1)^2-1.$$

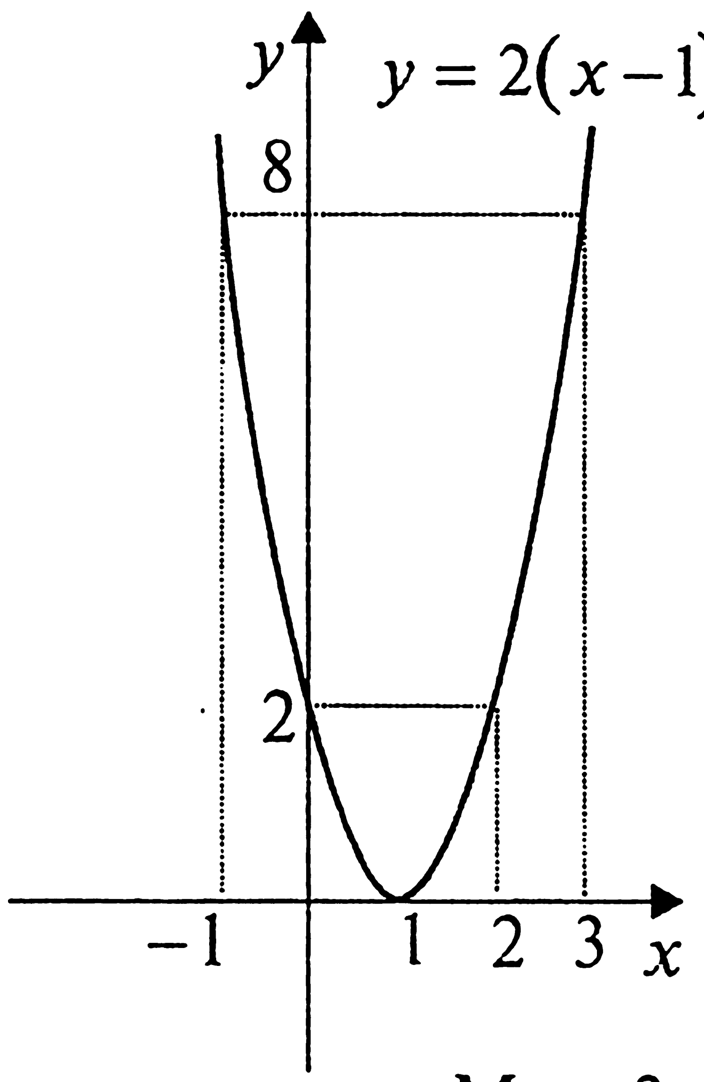
Процес перетворення цього графіка з графіка функції $y=x^2$ зображений на малюнках:



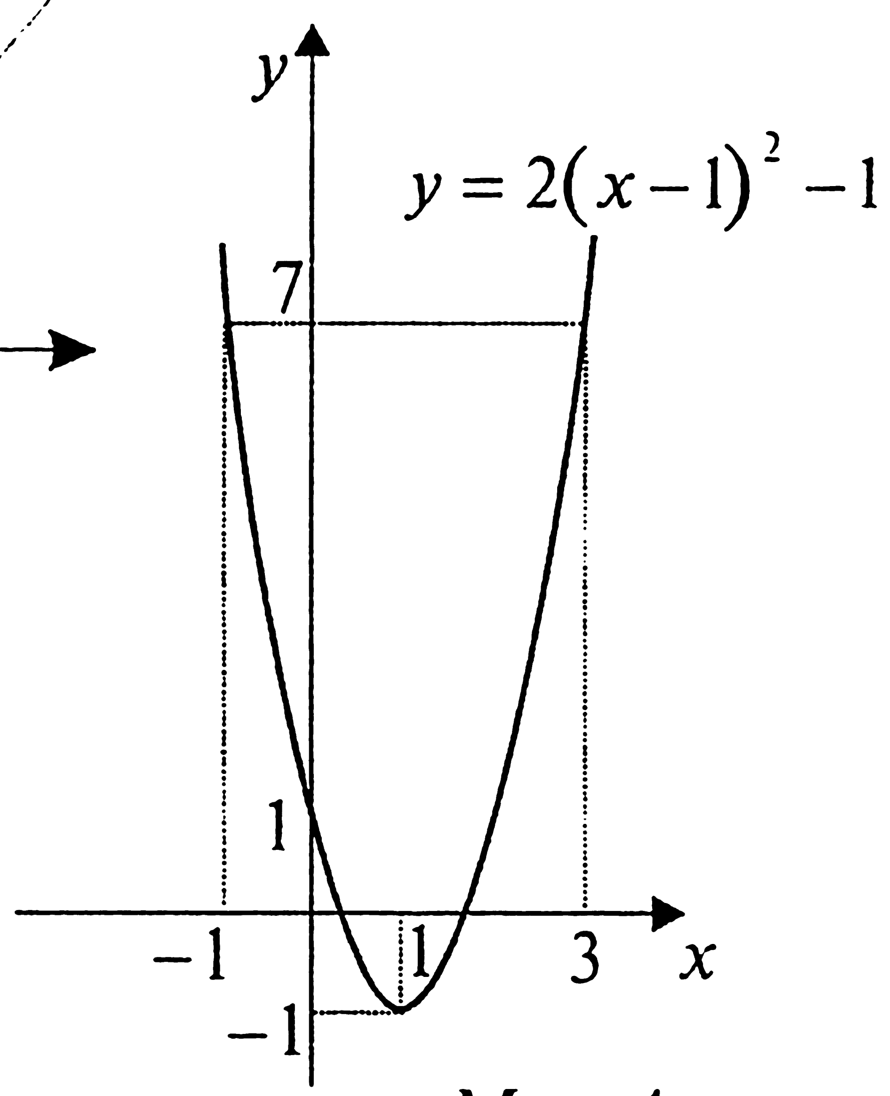
Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4

Як бачите, робота чималенька! Як правило, обмежуються спрощеним варіантом побудови параболи — за чотирма точками:

- вершиною параболи;
- двома точками перетину з віссю x (якщо вони існують);
- точкою перетину з віссю y.

Отже, нехай задана функція $y = ax^2 + bx + c$. Графіком її, нагадаємо, є парабола з вершиною у точці $A\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$. Можна запам'ятати формулу лише для абсциси вершини, а ординату отримати, підставивши цю абсцису в дану функцію. Для знаходження точок перетину з віссю x потрібно розв'язати квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Корені його і будуть абсцисами точок перетину (а ординати, звісно, дорівнюватимуть нулеві). Звичайно, корінь може бути й один, або це рівняння взагалі може не мати коренів. Ці випадки ми детально розглянемо нижче. І, нарешті, ордината точки перетину параболи з віссю y дорівнюватиме c, оскільки при $x = 0$ маємо: $y = c$.

Потому отримані чотири точки з'єднують плавною лінією, враховуючи знак a: від цього залежить куди направлені вітки параболи. Крім цього, треба пам'ятати про вісь симетрії параболи, яка проходить через вершину параболи.

Розглянемо побудову попереднього графіка за допомогою цього спрощеного метода побудови.

ПРИКЛАД. Побудувати графік функції $y = 2x^2 - 4x + 1$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо: $a = 2 > 0$ — вітки параболи направлені догори; $c = 1$ — ординати точки перетину з віссю y; $b = -4$. Далі, $-\frac{b}{2a} = 1$; в точці 1 значення даної функції дорівнює -1. Тому вершина параболи має координати $A(1; -1)$. Знайдемо корені рівняння $2x^2 - 4x + 1 = 0$. Дістанемо: $x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отже, ми отримали чотири точки шуканої параболи. Позначимо їх на координатній площині (звісно, ірраціональні числа ми зможемо відмітити лише приблизно). З'єднавши ці точки плавною лінією, отримаємо графік з мал. 4.

ЗАДАЧА 1. В яких точках графіки функцій перетинають вісь x:

1) $y=2x^2$; 2) $y=3x^2-1$; 3) $y=x(3-x)$;

4) $y=x^2-5x+6$; 5) $y=-x^2+2x-1$; 6) $y=3x^2-5x-2$.

ЗАДАЧА 2. Знайти вершини парабол:

1) $y=x^2-3x-1$; 2) $y=2x^2-4x-3$; 3) $y=x^2-x$;

4) $y=-2x^2-3x+1$; 5) $y=x^2+x+8$; 6) $y=-2x^2+289$.

ЗАДАЧА 3. Побудувати графіки функцій:

1) $y=-2x(x-1)$; 2) $y=x^2-8x+12$; 3) $y=-x^2+5x-6$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

3) Вітки параболи направлені униз. Абсциса вершини параболи дорівнює

$$-\frac{5}{-2}=\frac{5}{2},$$

а ордината:

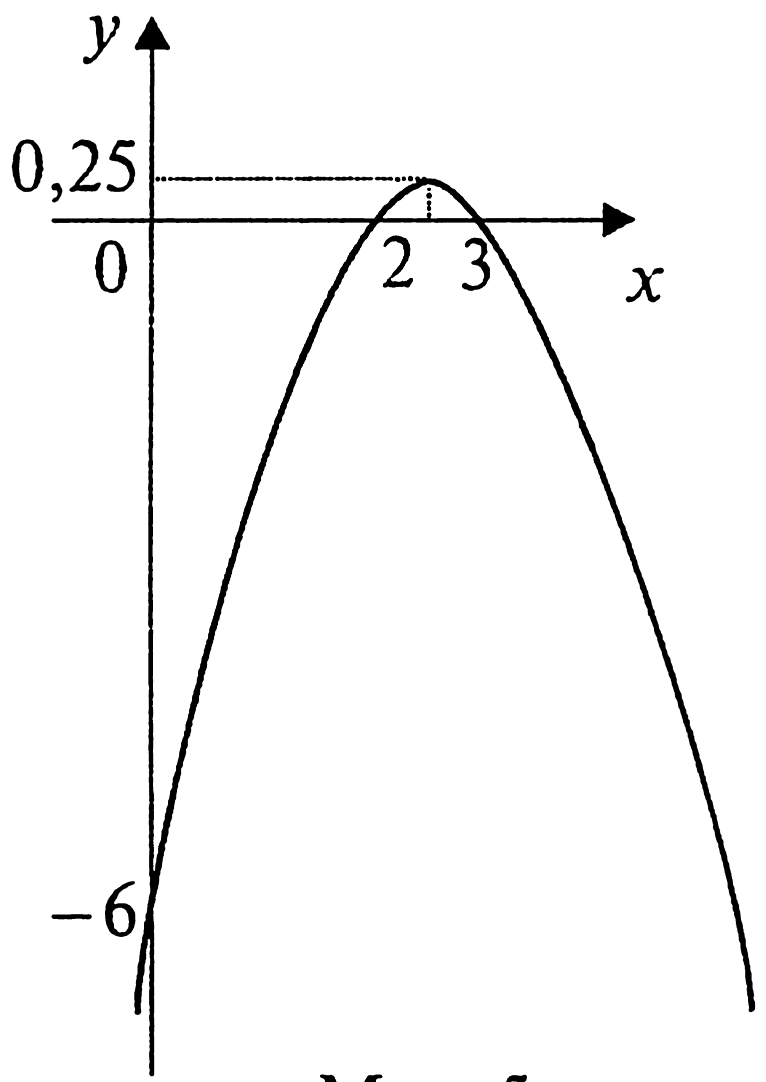
$$-\left(\frac{5}{2}\right)^2+5\cdot\frac{5}{2}-6=-\frac{25}{4}+\frac{25}{2}-6=\frac{1}{4}.$$

Точки перетину з віссю x:

$$-x^2+5x-6=0;\quad x_1=2, x_2=3.$$

Точка перетину з віссю y:

$$y(0)=-6.$$



Мал. 5

З'єднавши отримані точки плавною лінією (враховуючи вісь симетрії параболи), дістанемо графік, зображений на мал. 5.

ЗАДАЧА 4. Чи проходить графік функції $y=-3x^2-2x+3$ через точку $A(-1;2)$; $B(0;0)$; $C(-1;0)$?

ВІДПОВІДЬ. Так; ні; ні.

ЗАДАЧА 5. Знайти p у квадратичній функції $y=2x^2-3p+x$, якщо її графік проходить через точку:

1) $O(0;0)$; 2) $B(-1;2)$; 3) $C(-1;-3)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

3) $-3=2\cdot(-1)^2-3p+(-1)$; $-3=2-3p-1$; $3p=4$; $p=\frac{4}{3}$.

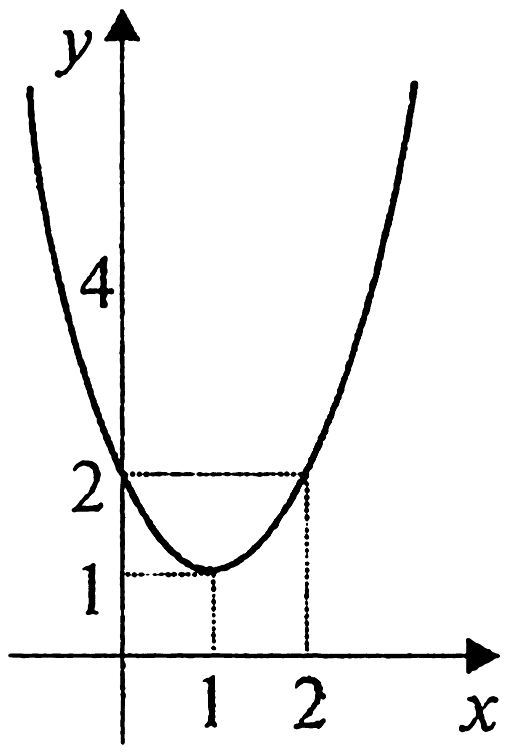
Що ж робити, коли графік квадратичної функції не перетинає вісь x? Розглянемо, наприклад, функцію

$$y = x^2 - 2x + 2.$$

Вершина параболи має координати $(1;1)$ (покажіть це самостійно). Точка перетину з віссю y має ординату 2. А от вісь x ця парабола не перетинає, бо рівняння

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

не має дійсних коренів (дискримінант його менший за нуль). Тобто в нас є дві точки замість чотирьох. У такому випадку, як правило, або знаходять ще декілька точок, просто підставивши довільні x та порахувавши відповідні y; або обмежуються трьома точками і знаходять точку, симетричну точці перетину параболи з віссю y, відносно осі симетрії параболи (ця нова точка, звісно належить параболі).



Мал. 6

Отже, у даному випадку, ордината шуканої точки буде теж, ясна річ, дорівнювати 2, а абсциса буде симетрична точці 0 відносно точки 1 — абсциси вершини. Тобто абсциса шуканої точки дорівнюватиме теж 2.

Нарешті, маючи ці три точки (вершину, точку перетину з віссю y та симетричну їй точку відносно осі симетрії) будуємо графік даної функції (мал. 6).

І, нарешті, можлива ситуація, коли точка перетину параболи з віссю x буде одна. Це буде тоді, коли відповідне рівняння буде мати єдиний корінь, тобто дискримінант його дорівнюватиме нулю. У цьому випадку зліва у функції стоїть повний квадрат (поясніть це самостійно!), тобто функція має вигляд

$$y = a(x-b)^2,$$

де a та b — довільні числа. Такі параболи ви вже, звісно, будували за допомогою перетворень графіків. Вершина її має координати $(b;0)$, вісь y парабола перетинає у точці ab^2. Знов-таки, третю точку можна вибрати симетричною точці $(0;ab^2)$ відносно осі симетрії.

Як саме будувати цю параболу: за цими трьома точками або ж перетворенням графіка функції $y = x^2$ — справа смаку.

ЗАДАЧА 6. Побудувати графіки функцій:

1) $y=2x^2-3x+5$; 2) $y=-x^2-2x-4$;

3) $y=9x^2-6x+1$; 4) $y=-x^2-2x-1$.

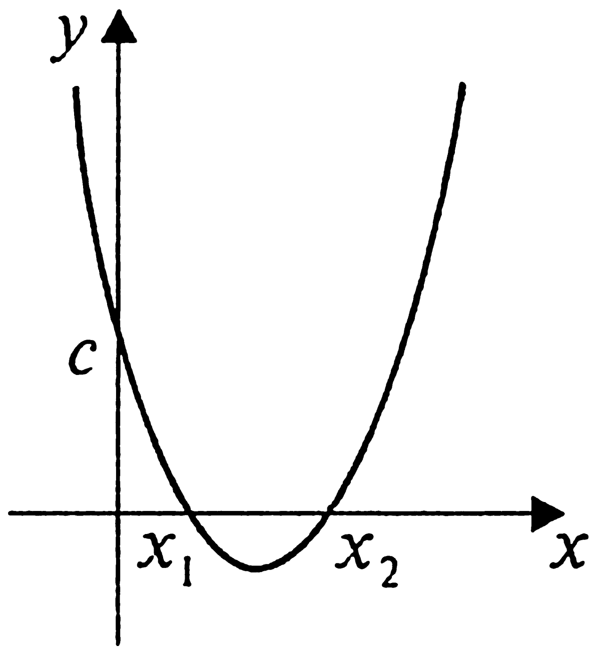
Підсумуємо наші знання про розташування графіків квадратичних функцій відносно осей координат. Отже, нехай задано квадратичну функцію

$$y=ax^2+bx+c,$$

D — дискримінант квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, $x_1\le x_2$ — корені цього рівняння (якщо вони існують).

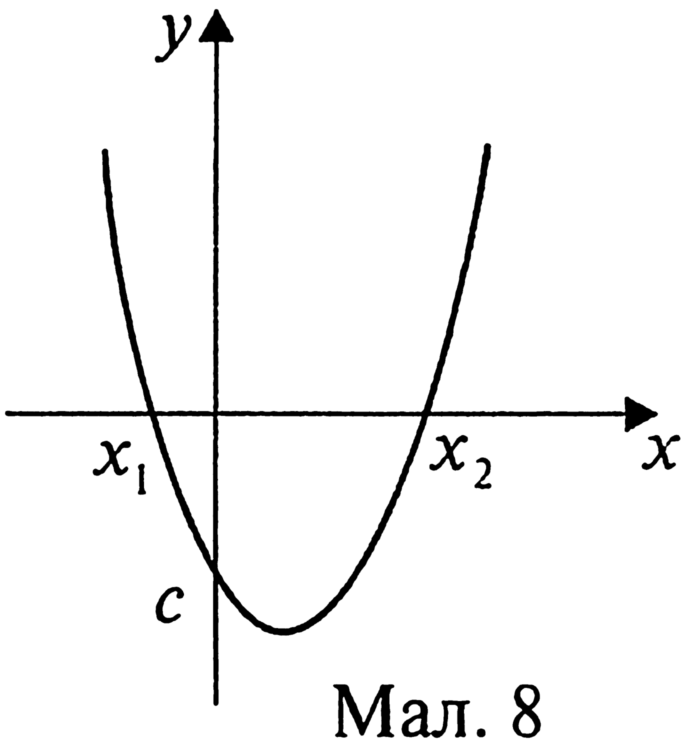
Спочатку наведемо можливі варіанти розташування парабол, якщо $a>0$, тобто вітки параболи направлені догори.

$a>0$; $D>0$; $c>0$



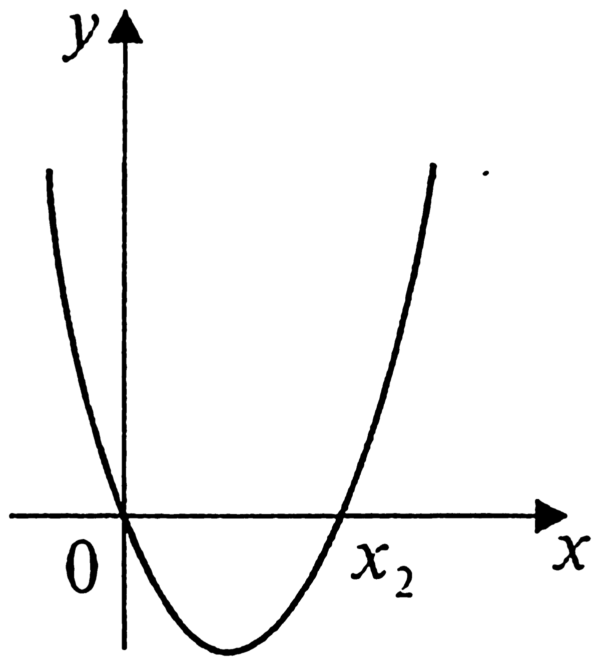
Мал. 7

$a>0$; $D>0$; $c<0$



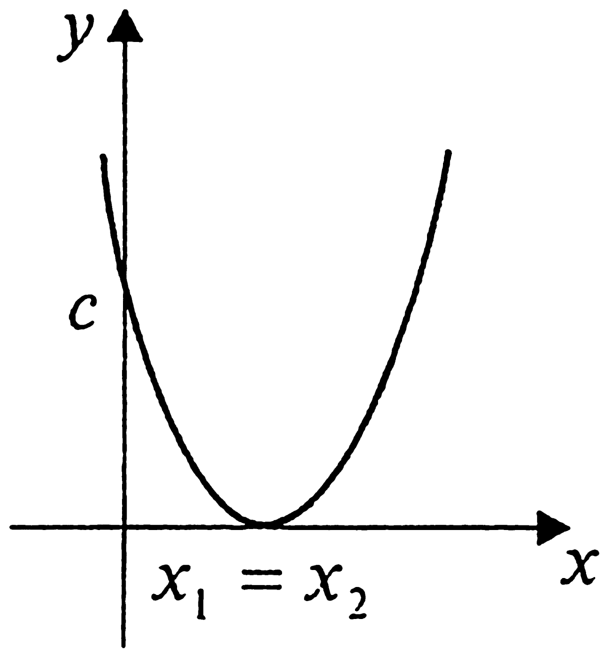
Мал. 8

$a>0$; $D>0$; $c=0$



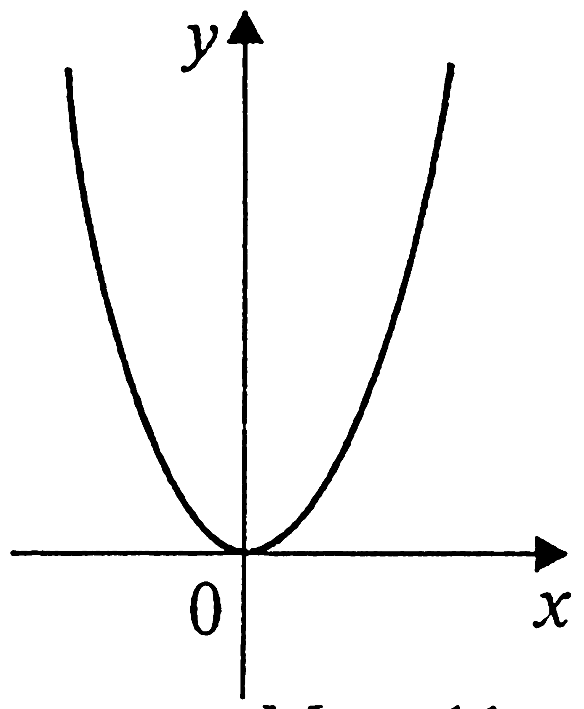
Мал. 9

$a>0$; $D=0$; $c>0$



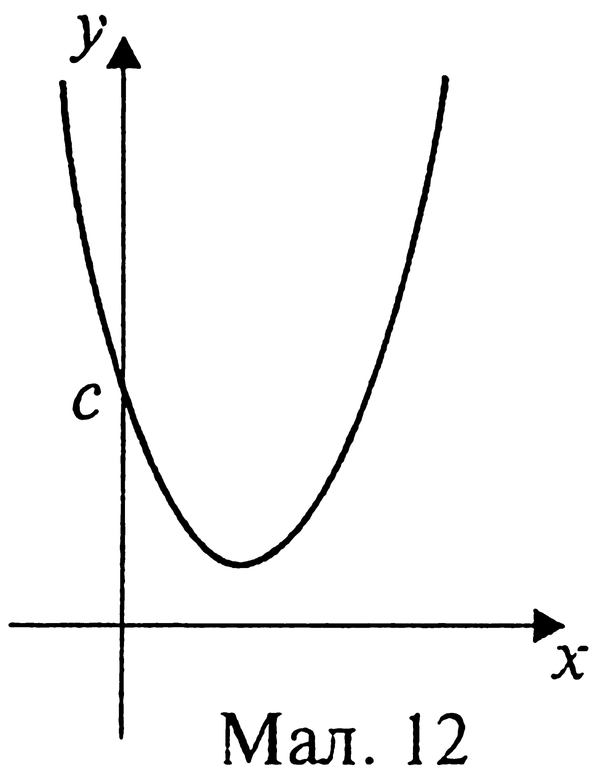
Мал. 10

$a>0$; $D=0$; $c=0$



Мал. 11

$a>0$; $D<0$; $c>0$



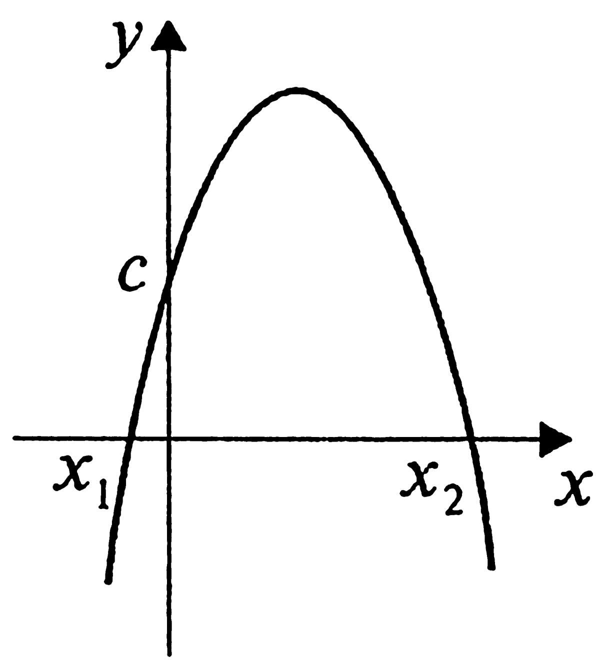
Мал. 12

Випадки $a>0$; $D=0$; $c<0$ та $a>0$; $D<0$; $c\le 0$ неможливі!!! (Покажіть це самостійно.)

УВАГА! На мал. 7, 10, 12 вершина параболи розташована праворуч осі y. Випадки, коли вона розташована ліворуч — абсолютно аналогічні, ви маєте їх розглянути самостійно.

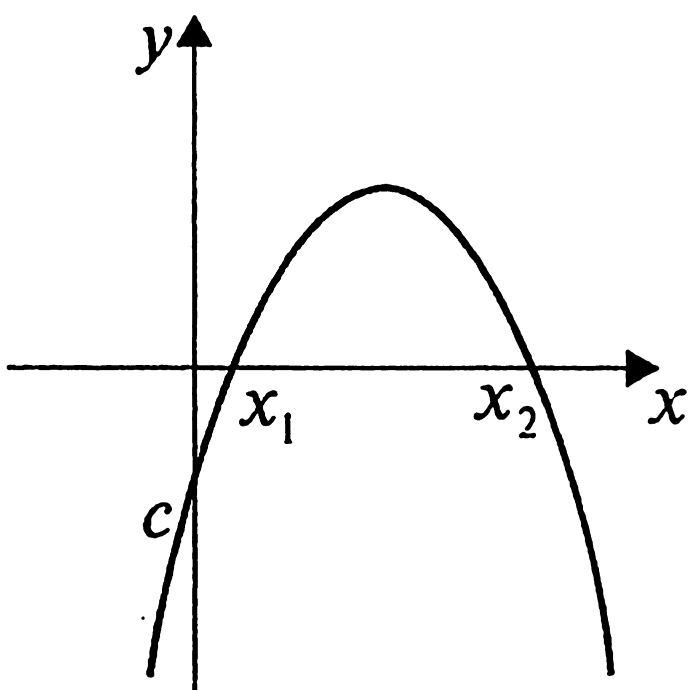
Тепер розглянемо випадки, коли $a<0$, тобто вітки параболи направлені вниз.

$\boldsymbol{a<0;\ D>0;\ c>0}$



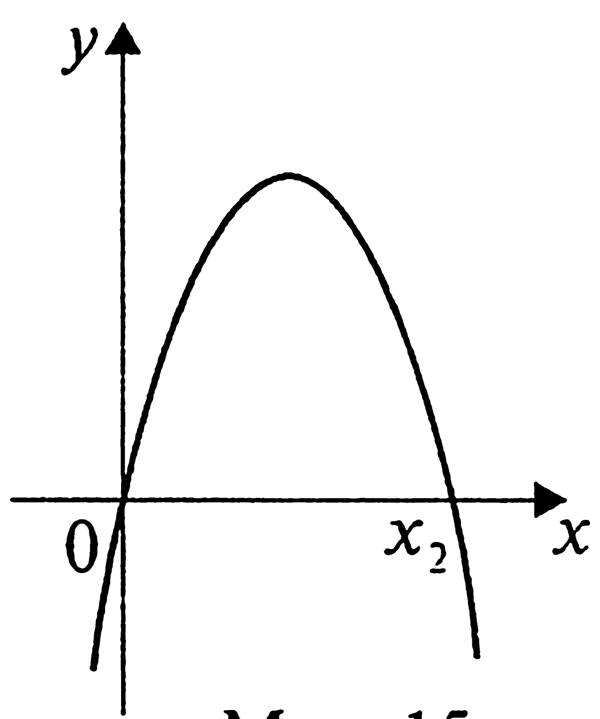
Мал. 13

$\boldsymbol{a<0;\ D>0;\ c<0}$



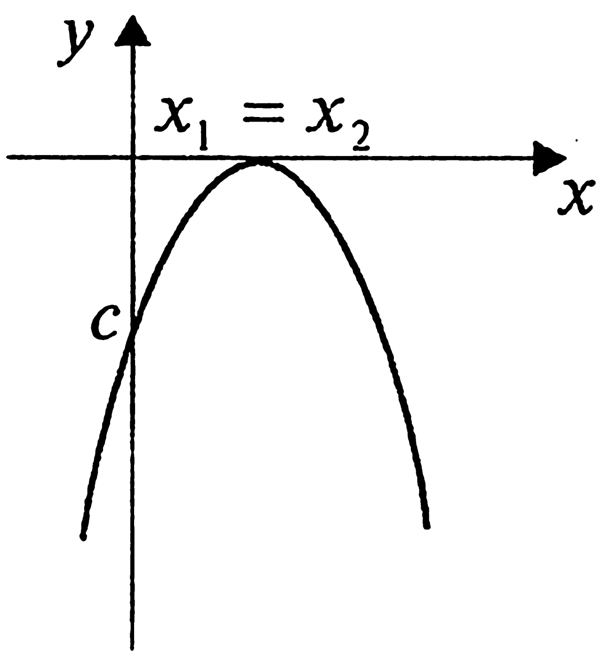
Мал. 14

$\boldsymbol{a<0;\ D>0;\ c=0}$



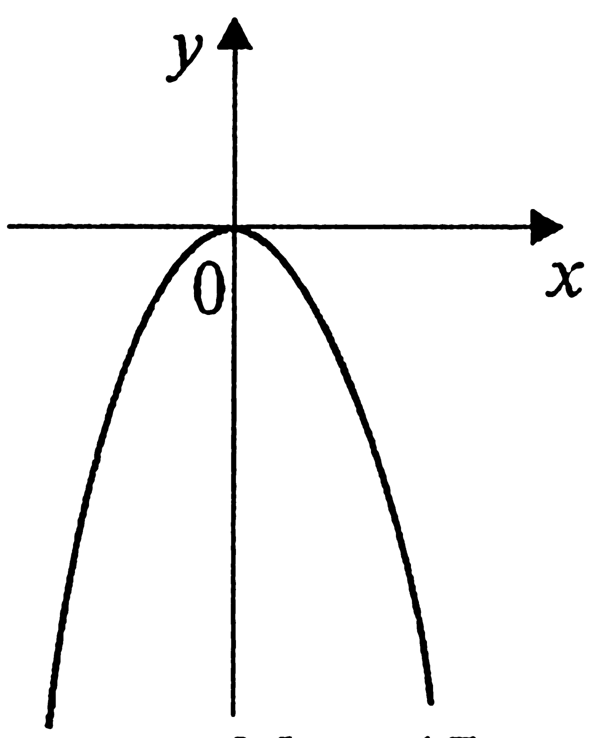
Мал. 15

$\boldsymbol{a<0;\ D=0;\ c<0}$



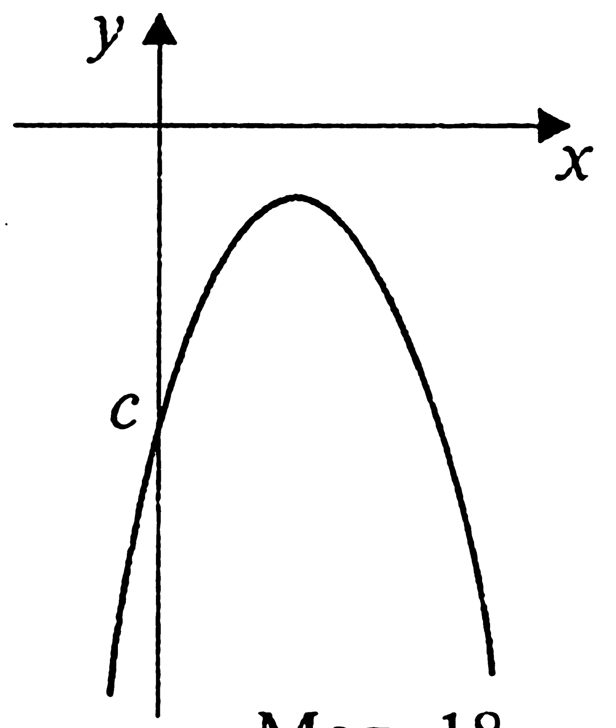
Мал. 16

$\boldsymbol{a<0;\ D=0;\ c=0}$



Мал. 17

$\boldsymbol{a<0;\ D<0;\ c<0}$



Мал. 18

Знов-таки, випадки $a<0;\ D=0;\ c>0$ та $a<0;\ D<0;\ c\geq 0$ неможливі! (Покажіть це самостійно.)

І знову, самостійно розберіть випадки, коли вершина параболи розташована ліворуч осі y.

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 30 до 45 хвилин)

Побудувати графіки функцій:

1) $y=2x^2-3x+1$; 2) $y=4x^2+4x+1$;

3) $y=-16x^2+6x+1$; 4) $y=-x^2+x+1$;

5) $y=2x^2+3x+4$; 6) $y=-25x^2-10x-1$.

§ 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ КВАДРАТНИХ НЕРІВНОСТЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРАФІКІВ

При вивченні теми «Нерівності» ми розглядали розв'язання квадратних нерівностей за допомогою сукупностей та систем лінійних нерівностей. Але тепер, володіючи відомостями про функції ми можемо спростити цей підхід. У наступному параграфі ми розглянемо метод інтервалів, а зараз почнемо з розв'язання квадратних нерівностей за допомогою графіків відповідних квадратичних функцій.

Нехай потрібно розв'язати квадратну нерівність

$$ax^2+bx+c \vee 0,$$

де $\vee$ — один із знаків нерівності ($>$, $<$, $\geq$, $\leq$). Побудуємо графік квадратичної функції

$$y=ax^2+bx+c$$

за «скороченою схемою»: знайдемо точки перетину цієї параболи з віссю x (тобто корені квадратного рівняння

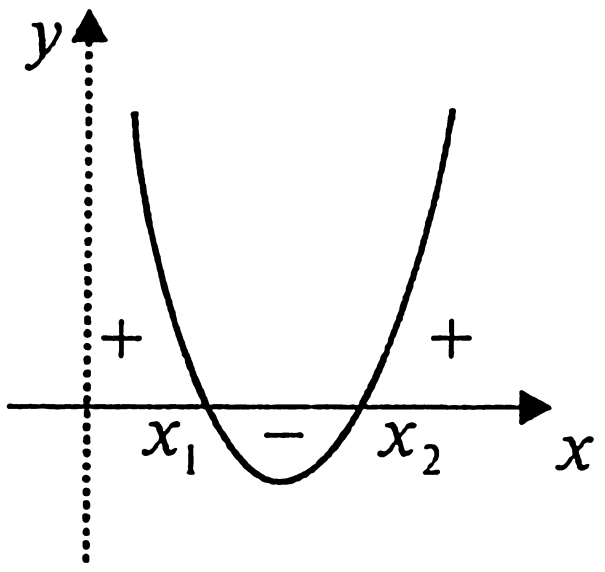
$$ax^2+bx+c=0,$$

якщо вони існують) та визначимо, куди напрямлені вітки параболи (в залежності від знака a). Точка перетину з віссю y та координата вершини нас зараз не цікавлять.

Розглянемо декілька випадків:

1) $\boldsymbol{a>0, D>0}$ (мал. 1).

$ax^2+bx+c>0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$
$ax^2+bx+c\geq 0$	$x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$
$ax^2+bx+c<0$	$x\in(x_1;x_2)$
$ax^2+bx+c\leq 0$	$x\in[x_1;x_2]$

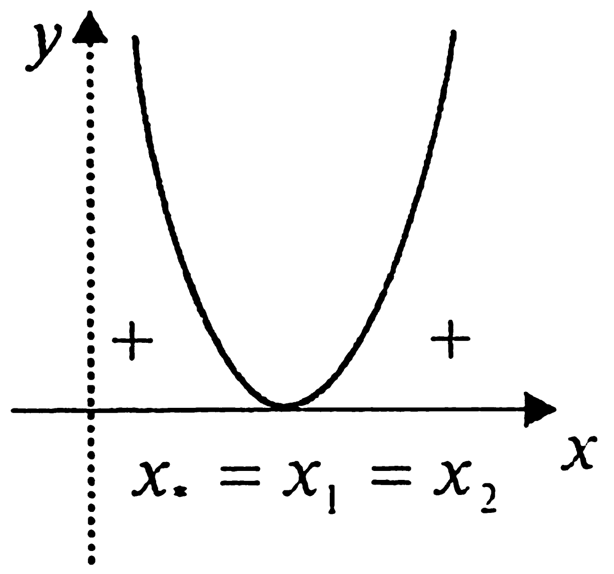


Мал. 1

УВАГА! Вісь y зображена на малюнку пунктиром, тому що від неї для розв'язання нерівності нічого не залежить!)

2) $\boldsymbol{a}>\mathbf{0}, \boldsymbol{D}=\mathbf{0}$ (мал. 2).

$ax^2+bx+c>0$	$x\in(-\infty;x_*)\cup(x_*;+\infty)$
$ax^2+bx+c\geq 0$	$x\in\mathbb{R}$
$ax^2+bx+c<0$	$x\in\varnothing$
$ax^2+bx+c\leq 0$	$x=x_*$

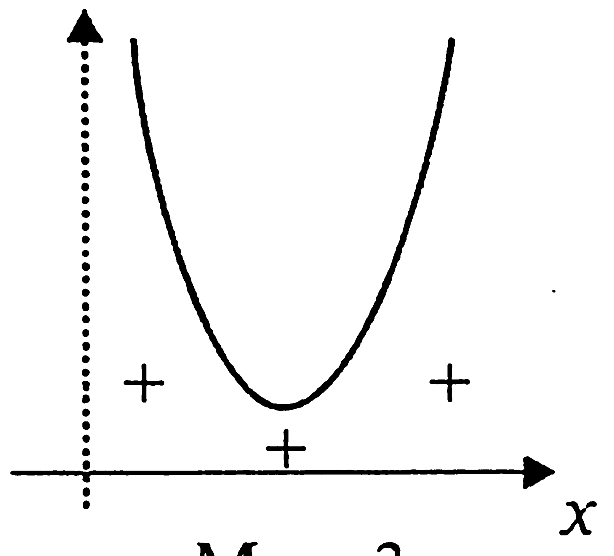


Мал. 2

(Зверніть увагу на останній рядок: розв'язком нерівності є одна точка!)

3) $\boldsymbol{a}>\mathbf{0}, \boldsymbol{D}<\mathbf{0}$ (мал. 3).

$ax^2+bx+c>0\,(\geq 0)$	$x\in\mathbb{R}$
$ax^2+bx+c<0\,(\leq 0)$	$x\in\varnothing$

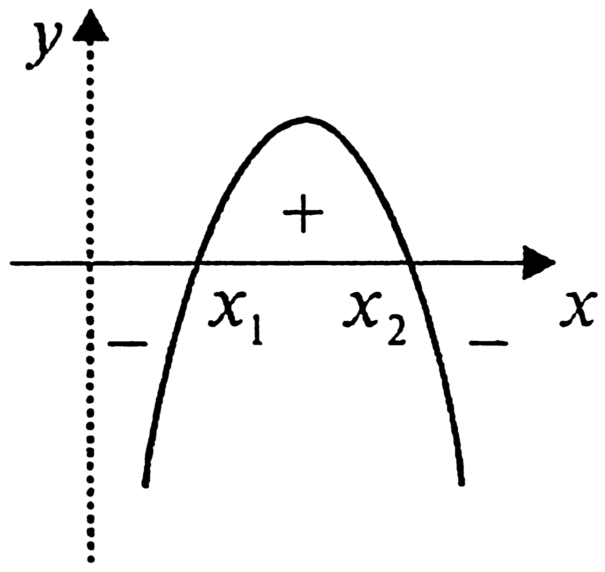


Мал. 3

Тепер розглянемо випадок, коли вітки параболи направлені вниз.

4) $\boldsymbol{a}<\mathbf{0}, \boldsymbol{D}>\mathbf{0}$ (мал. 4).

$ax^2+bx+c>0$	$x\in(x_1;x_2)$
$ax^2+bx+c\geq 0$	$x\in[x_1;x_2]$
$ax^2+bx+c<0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$
$ax^2+bx+c\leq 0$	$x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$



Мал. 4

УВАГА! Як бачите, «картинка» зворотна до першого випадку. І зрозуміло чому: наприклад, нерівність $-2x^2+3x-2>0$ рівносильна нерівності $2x^2-3x+2<0$, а графіки відповідних квадратичних функцій симетричні відносно осі x. Тому ми не будемо розглядати два інші випадки. Ви, за бажанням, можете це зробити самостійно. Але хотілося б порадити:

> якщо коефіцієнт a менший за нуль, помножити обидві частини нерівності на -1 (при цьому знак нерівності зміниться на протилежний!), а потім розв'язати нерівність, як показано вище.

ЗАДАЧА 1. Розв'язати нерівності:

1) $x^2<3$; 2) $x^2>5$; 3) $x^2>x$; 4) $x^2<x$;

5) $x^2+x-6>0$; 6) $2x^2-3x+1\le 0$;

7) $-x^2-2x+1>0$; 8) $-2x^2-5x+3\le 0$;

9) $x^2-2x+1>0$; 10) $x^2-6x+9<0$;

11) $x^2-10x+25\ge 0$; 12) $x^2-8x+16\le 0$;

13) $x^2+x+8>0$; 14) $x^2+x+9<0$;

15) $2x^2+x+7>0$; 16) $3x-x^2-10>0$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$; 2) $x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};+\infty\right)$;

3) $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; 4) $x\in(0;1)$;

5) $x\in(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$; 6) $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$;

7) $x\in\left(-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right)$;

8) $x\in(-\infty;-3]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$;

9) $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; 10) $x\in\varnothing$;

11) $x\in\mathbb{R}$; 12) $x=4$; 13) $x\in\mathbb{R}$;

14) $x\in\varnothing$; 15) $x\in\mathbb{R}$; 16) $x\in\varnothing$.

§ 6. МЕТОД ІНТЕРВАЛІВ

Ви вже зустрічались з ідеями методу інтервалів при розв'язанні нерівностей з модулем. Зараз ми розглянемо цей метод повністю. Метод інтервалів, перш за все, застосовується при розв'язанні нерівностей вигляду

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)\vee 0 \quad (*)$$

(нагадаємо, що $\vee$ означає один із знаків нерівності: $>, <, \geq, \leq$). Зверніть увагу: **всюди в дужках** x **— на першому місці**!

Перший крок методу. Знаходимо нулі виразу, який стоїть у лівій частині нерівності ($*$) та розташовуємо їх на числовій прямій (звісно, у порядку зростання). Вони розіб'ють числову пряму на декілька інтервалів.

Другий крок методу. На першому інтервалі справа (праворуч від найбільшого поставленого числа) ставимо знак «+», а потім знаки чергуються справа наліво: з «+» на «–», з «–» на «+».

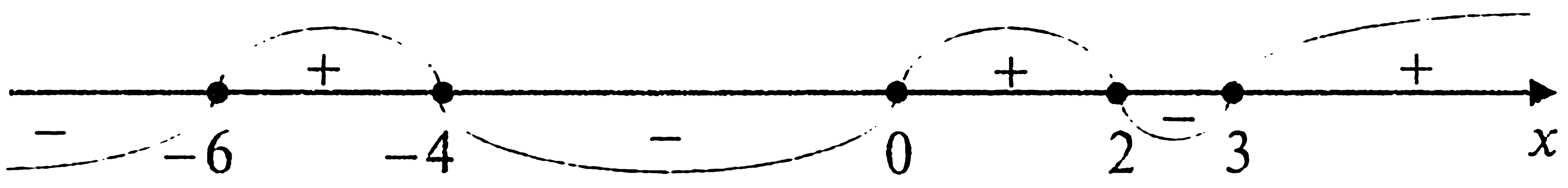
Третій крок методу. Враховуючи знак нерівності, записуємо відповідь.

Розглянемо це на прикладі: нехай дана нерівність

$$(x-2)(x+4)(x-3)x(x+6)>0.$$

Нулями виразу, що стоїть у лівій частині будуть числа 2, -4, 3, 0, -6. Розташуємо їх на числовій прямій (мал. 1) та розставимо знаки «+» та «–» справа наліво.

ЗАПАМ'ЯТАЙ! Це інколи називається «пустити змійку»!



Мал. 1

Нам потрібні інтервали зі знаком «+» (оскільки в нерівності стоїть «більше нуля»): $x \in (-6;-4)\cup(0;2)\cup(3;+\infty)$ — це й буде відповідь!

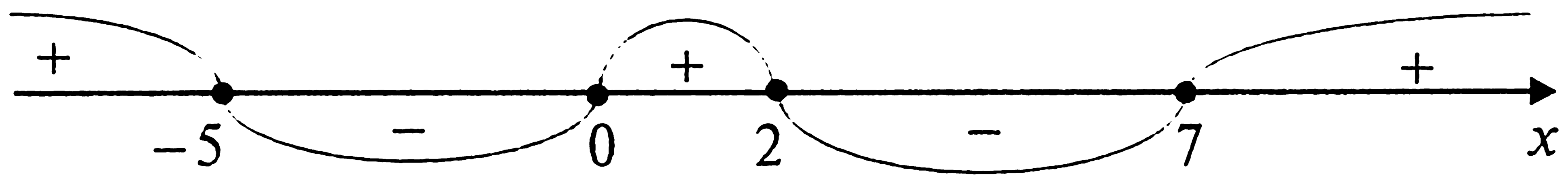
УВАГА! Обґрунтування методу полягає в тому, що якщо розглянути функцію $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$, то вона буде змінювати знак при переході через свої нулі, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, а на першому інтервалі справа вона додатна.

ЗАДАЧА 1. Розв'язати нерівність:

$$(x-2)(x+5)x(x-7)\le 0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

На числовій прямій розташуємо нулі виразу, що стоїть у лівій частині даної нерівності: $2, -5, 0, 7$ — та «пустимо змійку» (мал. 2).



Мал. 2

Враховуючи знак нерівності (зверніть увагу: нерівність нестрога, тому нас цікавлять і точки, де вираз обертається в нуль!), записуємо відповідь.

ВІДПОВІДЬ. $x\in[-5;0]\cup[2;7]$.

Розв'язання квадратних нерівностей методом інтервалів

Ви вже добре знаєте, що якщо дискримінант квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ невід'ємний, то квадратний тричлен ax^2+bx+c можна розкласти на множники:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

де x_1, x_2 — корені рівняння. Це дозволяє звести процедуру розв'язання квадратних нерівностей до застосування методу інтервалів.

Справді, нехай дана квадратна нерівність

$$ax^2+bx+c\vee 0.$$

Будемо вважати, що $a>0$ (у протилежному випадку помножимо обидві частини на -1 і змінимо знак нерівності. Якщо дискримінант відповідного квадратного рівняння строго додатний, розкладемо ліву частину нерівності на множники і поділимо на додатне число a обидві частини нерівності:

$$(x-x_1)(x-x_2)\vee 0.$$

Отриману нерівність розв'яжемо методом інтервалів.

Якщо дискримінант дорівнює нулю або від'ємний, то діємо як показано у попередньому параграфі (випадки 2 та 3).

УВАГА! Яким підходом користуватися, знов-таки, справа смаку! Метод інтервалів більш універсальний, але про графіки теж не можна забувати!

ЗАДАЧА 2. Розв'язати нерівності:

1) $3x^2-2x-1>0$; 2) $2x^2-x-1\le 0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Оскільки

$$3x^2-2x-1=3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right),$$

то задана нерівність рівносильна нерівності

$$(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)>0,$$

звідси $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

2) Маємо:

$$2x^2-x-1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1);\quad \left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)\le 0.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$; 2) $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

«Тонкощі» методу інтервалів

Наступні задачі вимагають, крім прямого застосування методу інтервалів, деякої підготовчої роботи. Слід чітко розуміти, що наведена процедура методу інтервалів застосовується лише до нерівностей вигляду (*) (всюди в дужках x на першому місці!).

ЗАДАЧА 3. Розв'язати нерівності:

1) $(x-1)(x+3)(2-x)(x+4)\ge 0$;
2) $(2-x)(3-x)(x+2)(x+3)>0$;
3) $(x^2-1)(x+3)\ge 0$;
4) $(x-1)(2-x)(9-x^2)\ge 0$;
5) $-x(x-1)(x-2)(x-3)\ge 0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Перепишемо нерівність так, щоб в усіх дужках x був на першому місці:

$$(x-1)(x+3)(x-2)(x+4)\le 0.$$

Далі розв'язуємо звичайним чином.

2) Дана нерівність рівносильна нерівності

$$(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)>0$$

(двічі помножили на -1, тому знак нерівності не змінився).

3) Розкладемо вираз у першій дужці на множники:

$$(x-1)(x+1)(x+3)\le 0$$

(використали формулу для різниці квадратів).

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in[-4;-3]\cup[1;2]$;
2) $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;2)\cup(3;+\infty)$;
3) $x\in[-3;-1]\cup[1;+\infty)$;
4) $x\in(-\infty;-3]\cup[1;2]\cup[3;+\infty)$;
5) $x\in[0;1]\cup[2;3]$.

ЗАДАЧА 3. Розв'язати нерівності:

1) $(x-1)(x^2+1)\le 0$; 2) $x^4-16\ge 0$;

3) $(x+1)(x^3-8)>0$; 4) $(2-x)(x^2-9)(x^2+1)>0$;

5) $(x-1)^2(x-2)(x+3)\le 0$;

6) $(x-1)^2(x-2)(x+3)<0$;

7) $(x-11)^2(x-2)(x+3)\le 0$;

8) $(x-11)^2(x-2)(x+3)<0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Оскільки $x^2+1>0$ для всіх x, то дана нерівність рівносильна нерівності $x-1\le 0$, звідси $x\le 1$.

2) Дана нерівність рівносильна нерівності:

$$(x^2-4)(x^2+4)\ge 0,$$

або, знов розкладаючи на множники і враховуючи, що $x^2+4>0$ для всіх x:

$$(x-2)(x+2)\ge 0,$$

а цю нерівність вже можна розв'язати методом інтервалів

3) Розклавши другу дужку на множники, дістанемо:

$$(x+1)(x-2)(x^2+2x+4)>0.$$

Але $x^2+2x+4>0$ для всіх x (дивись попередній параграф!), тому дана нерівність рівносильна нерівності

$$(x+1)(x-2)>0.$$

4) Дана нерівність рівносильна нерівності:

$$(x-2)(x-3)(x+3)<0.$$

5) Оскільки $(x-1)^2 \geq 0$, то дана нерівність рівносильна такій сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ (x-2)(x+3)\leq 0 \end{array}\right.$$

(при $x=1$ дана нерівність виконується: $0 \leq 0$). Нерівність з сукупності має розв'язком відрізок $[-3;2]$. Число 1 належить цьому відрізку, тому, об'єднуючи відповіді, маємо: $x \in [-3;2]$.

6) А ця нерівність при $x=1$ є хибною, тому вона рівносильна системі:

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ (x-2)(x+3)<0 \end{cases}.$$

Звідси

$$x \in (-3;-1) \cup (1;2).$$

7) Маємо:

$$\left[\begin{array}{l} x-11=0 \\ (x-2)(x+3)\leq 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=11 \\ x\in[-3;2] \end{array}\right..$$

Звідси

$$x \in [-3;2] \cup \{11\}.$$

(Число у фігурних дужках означає множину, що складається з однієї точки на числовій прямій.)

8) Маємо:

$$\begin{cases} x-11\neq 0 \\ (x-2)(x+3)<0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x\neq 11 \\ x\in(-3;2) \end{cases}; \quad x\in(-3;2).$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in(-\infty;1]$; 2) $x\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$; 3) $x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$; 4) $x\in(-\infty;-3)\cup(2;3)$; 5) $x\in[-3;2]$; 6) $x\in(-3;-1)\cup(1;2)$; 7) $x\in[-3;2]\cup\{11\}$; 8) $x\in(-3;2)$.

ПОРАДА. Радимо ще раз уважно розібрати попередню задачу. Ви маєте добре зрозуміти, коли треба розглядати систему, а коли сукупність. Пам'ятайте:

система — це *«і перше, і друге»*;

сукупність — *«або перше, або друге, або і перше, і друге»*.

Розв'язання дробово-раціональних нерівностей методом інтервалів

Метод інтервалів дозволяє спростити розв'язання дробово-раціональних нерівностей, які ми колись розв'язували за допомогою зведення до сукупностей і систем.

Нехай дана нерівність вигляду (всі числа α_i, β_i — **різні** !)

$$\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}{(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)} \vee 0. \quad (**)$$

Обидві частини цієї нерівності помножимо на додатне число

$$(x-\beta_1)^2(x-\beta_2)^2\ldots(x-\beta_n)^2$$

(це число буде додатним, а не невід'ємним, оскільки, за умовою, $x \neq \beta_1, x \neq \beta_2, \ldots, x \neq \beta_n$). Тоді ми позбавимось знаменника і дістанемо нерівність вигляду $(*)$. Тобто нерівність $(**)$ рівносильна системі:

$$\begin{cases}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)\vee 0 \\ x \neq \beta_1, x \neq \beta_2, \ldots, x \neq \beta_n\end{cases}.$$

Першу нерівність цієї системи можна розв'язати за допомогою методу інтервалів. Якщо ця нерівність (а отже, і нерівність $(**)$) строга (зі знаками $>$ або $<$), то її розв'язок не буде включати в себе точки $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, а тому система буде рівносильна першій нерівності. Якщо ж нерівність нестрога (зі знаками $\geq$ або $\leq$), то потрібно із знайденого її розв'язка «викинути» (або, як ще кажуть, «виколоти») точки $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

ЗАДАЧА 1. Розв'язати нерівність:

$$\frac{x-1}{x+3} > 0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Помножимо обидві частини нерівності на квадрат знаменника $(x+3)^2$. Дістанемо нерівність, рівносильну даній нерівності:

$$(x-1)(x+3) > 0.$$

(Нерівність строга, тому те, що $x \neq -3$ вже враховано).

Розв'язавши цю нерівність за допомогою методу інтервалів, дістанемо відповідь.

ВІДПОВІДЬ. $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

ЗАДАЧА 2. Розв'язати нерівність:

$$\frac{x-1}{x+3} \geq 0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Помножимо обидві частини нерівності на квадрат знаменника $(x+3)^2$. Дістанемо систему, рівносильну даній нерівності:

$$\begin{cases} (x-1)(x+3) \geq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}.$$

(Нерівність нестрога, тому ми маємо врахувати умову $x \neq -3$.) Перша нерівність системи легко розв'язати методом інтервалів:

$$x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty).$$

Але точку -3 потрібно відкинути («виколоти»).

ВІДПОВІДЬ. $x \in (-\infty; -3) \cup [1; +\infty).$

ЗАДАЧА 3. Розв'язати нерівність:

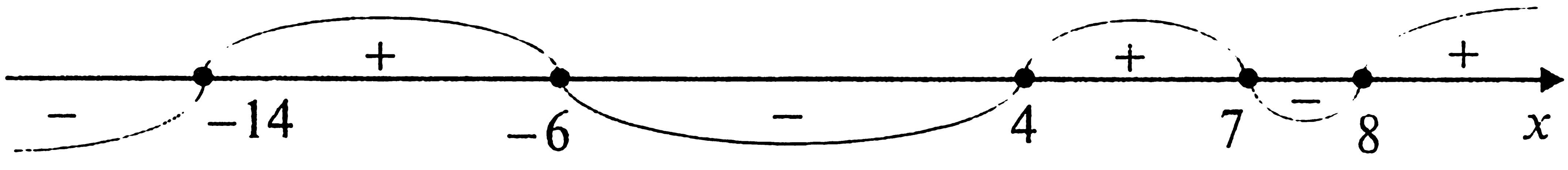
$$\frac{(x-4)(x+14)(x-8)}{(x+6)(x-7)} \geq 0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Дана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} (x-4)(x+14)(x-8)(x+6)(x-7) \geq 0 \\ (x+6)(x-7) \neq 0 \end{cases}.$$

Першу нерівність розв'яжемо за допомогою методу інтервалів:



Мал. 3

Маємо:

$$x \in [-14; -6] \cup [4; 7] \cup [8; +\infty).$$

Тепер потрібно врахувати умову

$$x \neq -6; \quad x \neq 7.$$

ВІДПОВІДЬ. $x \in [-14; -6) \cup [4; 7) \cup [8; +\infty).$

ЗАДАЧА 4. Розв'язати нерівність:

$$\frac{(x-1)^2(2x-1)^3(x+5)(x-4)}{(x+1)(x-2)(3-x)} \le 0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Оскільки $(x-1)^2(2x-1)^2 \ge 0$, маємо:

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 2x-1=0 \\ \begin{cases} (2x-1)(x+5)(x-4)(x+1)(x-2)(x-3) \ge 0 \\ (x+1)(x-2)(3-x) \ne 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Розв'язавши першу нерівність сукупності за методом інтервалів (зробіть це самостійно!) дістанемо:

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \\ \begin{cases} x \in (-\infty;-5] \cup \left[-1;\frac{1}{2}\right] \cup [2;3] \cup [4;+\infty) \\ (x+1)(x-2)(3-x) \ne 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

ВІДПОВІДЬ. $x \in (-\infty;-5] \cup \left(-1;\frac{1}{2}\right] \cup \{1\} \cup (2;3) \cup [4;+\infty)$.

ЗАДАЧА 5. Розв'язати нерівність:

$$\frac{\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2-4x+13\right)}{\left(x^2-6x+5\right)\left(x^2-6x+8\right)} > 0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Оскільки $x^2-4x+13>0$ для всіх x, то дана нерівність рівносильна нерівності:

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-5)(x-2)(x-4)} > 0.$$

Це не є нерівністю вигляду (* *), оскільки у чисельнику та знаменнику є однаковий множник. Тому потрібно відкинути його, врахувавши, що він не дорівнює нулю.

ВІДПОВІДЬ. $x \in (-\infty;1) \cup (1;2) \cup (3;4) \cup (5;+\infty)$.

Досі ми розглядали виключно дробово-раціональні нерівності у формі (* *), але, звісно, є багато нерівностей, де, наприклад, і зліва, і справа стоять алгебричні дроби:

$$\frac{A(x)}{B(x)} \vee \frac{C(x)}{D(x)},$$

$A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ — деякі алгебричні вирази. Працювати з ними дуже просто: перенести всі доданки до однієї частини нерівності, звести до спільного знаменника, а потім розв'язати отриману нерівність, як ми робили раніше.

УВАГА!!! В жодному випадку не можна таку нерівність розглядати як «щось схоже на пропорцію» і перемножувати «крайні та середні члени»! Це призведе до помилки!

Звичайно, можуть бути й інші типи дробово-раціональних нерівностей. Але всі вони зводяться до нерівностей, що розглянуті вище. Розв'яжемо деякі приклади.

ЗАДАЧА 6. Розв'язати нерівність:

$$\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Перенесемо усі члени до лівої частини та зведемо до спільного знаменника:

$$\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}-1<0; \quad \frac{2+x+5(2-x)-(2-x)(2+x)}{(2-x)(2+x)}<0;$$

звідси

$$\frac{2+x+10-5x-4+x^2}{(2-x)(2+x)}<0; \quad \frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}<0.$$

Оскільки $x^2-4x+8>0$ для будь-яких x, то дана нерівність рівносильна нерівності

$$(2+x)(2-x)<0,$$

тобто

$$(x+2)(x-2)>0.$$

Цю нерівність вже легко розв'язати за методом інтервалів.

ВІДПОВІДЬ. $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

ЗАДАЧА 7. Розв'язати нерівність:

$$1<\frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Оскільки $x^2+1>0$ для будь-яких x, то можна помножити всі частини даної подвійної нерівності на x^2+1, причому знаки нерівності збережуться. Маємо:

$$x^2+1<3x^2-7x+8<2x^2+2;$$

$$\begin{cases}2x^2-7x+7>0\\x^2-7x+6<0\end{cases}.$$

Перша нерівність отриманої системи істинна для будь-яких x, а з другої нерівності $x\in(1;6)$.

ВІДПОВІДЬ. $x\in(1;6)$.

ЗАДАЧА 8. Розв'язати нерівність:

$$\frac{4-x}{x-5}>\frac{1}{1-x}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$\frac{4-x}{x-5}-\frac{1}{1-x}>0;\quad \frac{(4-x)(1-x)-(x-5)}{(x-5)(1-x)}>0;$$

$$\frac{4-x-4x+x^2-x+5}{(x-5)(1-x)}>0;\quad \frac{x^2-6x+9}{(x-5)(1-x)}>0;$$

$$\frac{(x-3)^2}{(x-5)(x-1)}<0.$$

Отримана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases}(x-5)(x-1)<0\\x\neq 3\end{cases}.$$

Звідси

$$x\in(1;3)\cup(3;5).$$

ВІДПОВІДЬ. $x\in(1;3)\cup(3;5)$.

ЗАДАЧА 9. Розв'язати нерівності:

1) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1;$

2) $\dfrac{2-x}{x^3+x^2}>\dfrac{1-2x}{x^3-3x^2};$

3) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-x+1}\le\dfrac{1-2x}{x^3+1}.$

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;-1);$
2) $x\in(-\infty;-7)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(3;+\infty);$
3) $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;2].$

Готуємося до контрольної роботи

(Очікуваний час розв'язування — від 30 до 45 хвилин)

Розв'язати нерівності:

1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)<0;$
2) $(x-2)(2-x)(x-3)(x-1)>0;$
3) $x^2-8x+12\le 0;$
4) $\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{-1-x}<0;$
5) $\dfrac{(x+1)(x-2)(x+3)}{(x-1)(2-x)(x-3)}\ge 0;$
6) $\dfrac{(x^2+2x+3)(-x^2+3x-2)}{(x^2+2x+1)(x-1)}\ge 0;$
7) $\dfrac{15}{4+3x-x^2}>1.$

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in(-4;-3)\cup(-2;-1);$
2) $x\in(1;2)\cup(2;3);$
3) $x\in[2;6];$
4) $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(1;+\infty);$
5) $x\in[-3;-1]\cup(1;2)\cup(2;3);$
6) $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2];$
7) $x\in(-1;4).$

ГЛАВА 3. РІВНЯННЯ. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

§ 1. РІВНЯННЯ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ

Якщо наївно спитати: «Яких задач у шкільній алгебрі найбільше», — то, мабуть, перше місце посядуть задачі, які починаються словами «розв'язати рівняння» або «розв'язати систему». У цій главі ми розглянемо чимало таких задач, майже кожні дві-три з яких вимагають індивідуального прийому для розв'язання. Рівняння, що вивчаються у цій главі, об'єднує одне: усе це рівняння, степінь яких вищий за другий. Пояснимо це докладніше.

Ще з сьомого класу ви знайомі з поняттям багаточлена. Нагадаємо, що багаточленом степеня n з однією змінною називається алгебричний вираз

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

де $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — деякі числа.

У цьому параграфі ми будемо розглядати так звані **рівняння *n*-го степеня**, які або мають вигляд

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (n > 2),$$

або зводяться до цього вигляду після алгебричних перетворень (піднесення до степеня, розкриття дужок, зведення подібних тощо).

Ми почнемо з великої кількості рівнянь, які під час розв'язання зводяться до квадратних рівнянь.

Наступні три задачі присвячені рівнянням четвертого степеня, які називаються *біквадратними*. Чому? Бо в них змінна x є тільки у другому та четвертому степенях. Отже,

ЗАДАЧА 1. Розв'язати рівняння:

$$3x^4 - 8x^2 - 3 = 0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Зробимо заміну:

$$x^2 = t.$$

Дістанемо квадратне рівняння відносно t:

$$3t^2 - 8t - 3 = 0.$$

Розв'яжемо його, пам'ятаючи, що оскільки $t = x^2$, то $t \geq 0$:

$$t_1 = 3 \quad \text{або} \quad t_2 = -\frac{1}{3} < 0 \text{ — не підходить.}$$

Отже, $t = 3$, тобто

$$x^2 = 3.$$

Звідси,

$$x_1 = \sqrt{3}, \; x_2 = -\sqrt{3}.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_1 = \sqrt{3}, \; x_2 = -\sqrt{3}.$

ЗАДАЧА 2. Розв'язати рівняння:

$$x^4 - 6x^2 + 12 = 0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Зробимо заміну:

$$x^2 = t.$$

Одержимо квадратне рівняння відносно t:

$$t^2 - 6t + 12 = 0.$$

Оскільки дискримінант цього рівняння менший за нуль, то воно не має коренів. А тому коренів не має й дане рівняння.

ВІДПОВІДЬ. $x \in \varnothing.$

ЗАДАЧА 3. Розв'язати рівняння:

$$1)\ 4x^4 - 5x^2 + 1 = 0; \quad 2)\ 2x^4 + 3x^2 + 4 = 0.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm\frac{1}{2}$; 2) $x \in \varnothing$.

Заміни змінних, один з варіантів яких ми щойно розглянули, взагалі дуже ефективний прийом для розв'язання рівнянь. Інколи «зовнішній вигляд» рівняння сам підказує, що саме можна замінити на нову змінну. У наступних трьох задачах заміни майже очевидні.

ЗАДАЧА 4. Розв'язати рівняння:

$$\left(x^2-16x\right)^2-2\left(x^2-16x\right)-63=0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Зробимо заміну:

$$x^2-16x=t.$$

Тоді

$$t^2-2t-63=0;$$

$$t=9 \text{ або } t=-7;$$

$$x^2-16x=9 \text{ або } x^2-16x=-7;$$

$$x^2-16x-9=0 \text{ або } x^2-16x+7=0;$$

$$x=8\pm\sqrt{73} \text{ або } x=8\pm\sqrt{57}.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_{1,2}=8\pm\sqrt{73},\ x_{3,4}=8\pm\sqrt{57}.$

ЗАДАЧА 5. Розв'язати рівняння:

$$\frac{x+1}{x^2+x-1}+\frac{x^2+x-1}{x+1}=2.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Зробимо заміну:

$$\frac{x+1}{x^2+x-1}=t,$$

тоді

$$\frac{x^2+x-1}{x+1}=\frac{1}{t} \quad (x^2+x-1\neq 0,\ x\neq -1).$$

Тобто

$$t+\frac{1}{t}=2.$$

Зрозуміло, що $t>0$ (бо інакше сума у останній рівності від'ємна).

Тепер використаємо добре знайому вам нерівність

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \quad (a>0,\, b>0),$$

рівність у якій досягається лише при $a=b$ (тоді обидва дроби у нерівності дорівнюють одиниці). Отже,

$$t=1;\quad \frac{x+1}{x^2+x-1}=1;\quad x+1=x^2+x-1;$$

$$x^2=2;\quad x_{1,2}=\pm\sqrt{2}.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}.$

ЗАДАЧА 6. Розв'язати рівняння:

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{17}{4}.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_1=-2,\ x_2=-\frac{2}{3},\ x_3=-\frac{1}{3},\ x_4=1.$

У наступних трьох рівняннях перед заміною слід зробити декілька алгебричних перетворень, майже очевидних.

ЗАДАЧА 7. Розв'язати рівняння:

$$\left(2x^2-x+5\right)^2+3\left(2x^2-x-1\right)-10=0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

У першій дужці зробимо невеличке перетворення, так, щоб у ній виділити вираз, який стоїть у другій дужці:

$$\left(2x^2-x-1+6\right)^2+3\left(2x^2-x-1\right)-10=0.$$

Тепер вже зробимо заміну:

$$2x^2-x-1=t,$$

тоді

$$(t+6)^2+3t-10=0;$$

$$t^2+12t+36+3t-10=0;\quad t^2+15+26=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-13 \\ t=-2 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} 2x^2-x-1=-13 \\ 2x^2-x-1=-2 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing \\ x\in\varnothing \end{array}\right..$$

ВІДПОВІДЬ. $x\in\varnothing.$

ЗАДАЧА 8. Розв'язати рівняння:

$$\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Перш за все, зазначимо, що $x\neq-1,\ x\neq-2,\ x\neq-4,\ x\neq1.$ Тепер розкриємо дужки у знаменниках:

$$\frac{6}{x^2+3x+2}+\frac{8}{x^2+3x-4}=1,$$

і зробимо аналогічно розв'язанню попередньої задачі:

$$\frac{6}{x^2+3x+2}+\frac{8}{x^2+3x+2-6}=1.$$

Зробимо заміну:

$$x^2+3x+2=t,$$

тоді

$$\frac{6}{t}+\frac{8}{t-6}=1\quad(t\neq0,\ t\neq6);$$

$$6t-36+8t=t^2-6t;\ \ t^2-20t+36=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}t=18\\t=2\end{array}\right.;\quad\left[\begin{array}{l}x^2+3x+2=18\\x^2+3x+2=2\end{array}\right.;\quad\left[\begin{array}{l}x^2+3x-16=0\\x^2+3x=0\end{array}\right..$$

Звідси

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{73}}{2},\ x_3=0,\ x_4=-3.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{73}}{2},\ x_3=0,\ x_4=-3.$

ЗАДАЧА 9. Розв'язати рівняння:

$$\left(x^2-6x\right)^2-2(x-3)^2=81.$$

ВКАЗІВКА

Записати рівняння у вигляді

$$\left(x^2-6x\right)^2-2\left(x^2-6x+9\right)=81.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_1=3,\ x_{2,3}=3\pm2\sqrt{5}.$

Наступні п'ять рівнянь розв'язуються за допомогою прийому, який використовувався при виведенні формули коренів квадратного рівняння — *виділення повного квадрата*.

ЗАДАЧА 10. Розв'язати рівняння:

$$x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}=40.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо: $x\neq-9$ та

$$x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}-2x\cdot\frac{9x}{9+x}=40-2x\cdot\frac{9x}{9+x};$$

$$\left(x-\frac{9x}{9+x}\right)^2=40-2\cdot9\cdot\frac{x^2}{9+x};$$

$$\left(\frac{x^2}{9+x}\right)^2+18\frac{x^2}{9+x}-40=0.$$

Тепер зробимо заміну

$$\frac{x^2}{9+x}=t.$$

Розв'язавши отримане квадратне рівняння, дістанемо:

$$\frac{x^2}{9+x}=-20 \text{ або } \frac{x^2}{9+x}=2;$$

$$x^2+20x+180=0 \text{ або } x^2-2x-18=0;$$

$$x\in\varnothing \text{ або } x=1\pm\sqrt{19}.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{19}.$

ЗАДАЧА 11. Розв'язати рівняння:

$$x^2+\frac{64}{x^2}-\frac{5x-30}{2}=\frac{25x^2}{16}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо: $x\neq0$ та

$$x^2+\frac{64}{x^2}+15-\frac{5x}{2}=\frac{25x^2}{16}.$$

Виділимо повний квадрат:

$$x^2+\frac{64}{x^2}+16=\frac{25x^2}{16}+\frac{5x}{2}+1.$$

Тоді

$$\left(x+\frac{8}{x}\right)^2-\left(\frac{5x}{4}+1\right)^2=0;$$

$$\left(x+\frac{8}{x}+\frac{5x}{4}+1\right)\left(x+\frac{8}{x}-\frac{5x}{4}-1\right)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{9x}{4}+\frac{8}{x}+1=0\\ \frac{8}{x}-\frac{x}{4}-1=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}9x^2+4x+32=0\\ 32-x^2-4x=0\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\ x^2+4x-32=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=-8\\ x=4\end{array}\right..$$

ВІДПОВІДЬ. $x_1=-8,\ x_2=4.$

ЗАДАЧА 12. Розв’язати рівняння:

$$x^4+6x^3+5x^2-12x+3=0.$$

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Маємо:

$$x^4+6x^3+9x^2-4x^2-12x+3=0.$$

$$\left(x^2+3x\right)^2-4\left(x^2+3x\right)+3=0.$$

Зробивши заміну ($x^2+3x=t$) та розв'язавши отримане рівняння, дістанемо:

$$\left[\begin{array}{l}x^2+3x=3\\ x^2+3x=1\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x^2+3x-3=0\\ x^2+3x-1=0\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}\\ x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}\end{array}\right..$$

ВІДПОВІДЬ. $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2},\ x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}.$

ЗАДАЧА 13. Розв'язати рівняння:

$$x^4+4x^3+3x^2+2x-1=0.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}.$

ЗАДАЧА 14. Розв'язати рівняння:

$$x^4-8x+63=0.$$

ВІДПОВІДЬ. $x\in\varnothing.$

Прийом, що використовується у наступних двох задачах важко чітко назвати. Ідея його в тому, що у рівнянні є три буквені вирази, один з яких є добутком двох інших. Тоді є сенс поділити обидві частини рівняння на цей вираз.

ЗАДАЧА 15. Розв'язати рівняння:

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\,\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Поділимо обидві частини рівняння на $\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$, враховуючи, що $x\neq\pm1$ (за областю визначення) та $x\neq\pm2$ (перевірка). Маємо:

$$20\left(\frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)}\right)^2-5+48\,\frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=0.$$

Зробимо заміну:

$$\frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=t,$$

тоді

$$20t^2+48t-5=0;\quad t=-\frac{5}{2}\ \text{або}\ t=\frac{1}{10};$$

звідси

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=-\dfrac{5}{2}\\[2ex] \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{10}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}=-\dfrac{5}{2}\\[2ex] \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{10}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}7x^2+9x+14=0\\ 3x^2-11x+6=0\end{array}\right..$$

Отже,

$$x \in \varnothing \text{ або } \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right..$$

ВІДПОВІДЬ. $x_1 = 3,\ x_2 = \dfrac{2}{3}$.

ЗАДАЧА 16. Розв'язати рівняння:

$$2\left(x^2 + x + 1\right)^2 - 7(x-1)^2 = 13\left(x^3 - 1\right).$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Поділимо обидві частини рівняння на $(x-1)^2$ ($x = 1$ — не є коренем даного рівняння). Маємо:

$$2\left(\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}\right)^2 - 7 = 13\,\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}.$$

Зробимо заміну:

$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = t,$$

тоді

$$2t^2 - 13t - 7 = 0;\quad t = 7 \text{ або } t = -\frac{1}{2};$$

звідси

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1} = 7 \\ \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2 + x + 1 = 7x - 7 \\ 2x^2 + 2x + 2 = 1 - x \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \\ x = -1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

ВІДПОВІДЬ. $x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1,\ x_4 = -\dfrac{1}{2}$.

Два наступних рівняння можна звести до такого вигляду:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = k,$$

$$\text{де } a + b = c + d.$$

Тоді потрібно перемножити перші дужки на другі, а треті — на четверті, а потім зробити заміну.

ЗАДАЧА 17. Розв'язати рівняння:

$$(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$4+7=5+6,$$

тому перегрупуємо дужки:

$$((x-4)(x-7))\cdot((x-5)(x-6))=1680;$$

$$\left(x^2-11x+28\right)\left(x^2-11x+30\right)=1680.$$

Тепер зробимо заміну:

$$x^2-11x+28=t,$$

тоді

$$t\,(t+2)=1680;\;\; t^2+2t-1680=0;$$

$$t=40 \text{ або } t=-42;$$

$$x^2-11x+28=40 \text{ або } x^2-11x+28=-42;$$

$$x^2-11x-12=0 \text{ або } x^2-11x+70=0;$$

$$x=12 \text{ або } x=-1 \text{ або } x\in\varnothing.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_1=-1,\ x_2=12.$

ЗАДАЧА 18. Розв'язати рівняння:

$$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Спочатку зведемо рівняння до потрібного вигляду:

$$12\left(x-\frac{1}{12}\right)\cdot 6\left(x-\frac{1}{6}\right)\cdot 4\left(x-\frac{1}{4}\right)\cdot 3\left(x-\frac{1}{3}\right)=5;$$

$$\left(x-\frac{1}{12}\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{864}.$$

Оскільки $\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$, перегрупуємо дужки і розкриємо їх:

$$\left(x^2-\frac{5}{12}x+\frac{1}{36}\right)\left(x^2-\frac{5}{12}x+\frac{1}{24}\right)=\frac{5}{864}.$$

Далі обчислюємо, як раніше.

ВІДПОВІДЬ. $x_1=-\frac{1}{12},\ x_2=\frac{1}{2}.$

При розв'язанні трьох наступних рівнянь використовується такий прийом: якщо у рівнянні зустрічаються два квадратних тричлени

$$ax^2+b_1x+c \text{ та } ax^2+b_2x+c$$

(вони розрізняються лише другим коефіцієнтом), то можна винести в них обох x за дужки, а потім зробити заміну.

ЗАДАЧА 19. Розв'язати рівняння:

$$\frac{3x}{2x^2+5x+2}+\frac{5x}{2x^2+11x+2}=\frac{2}{3}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

При $x \neq 0$ дане рівняння рівносильне рівнянню:

$$\frac{3x}{x\left(2x+\dfrac{2}{x}+5\right)}+\frac{5x}{x\left(2x+\dfrac{2}{x}+11\right)}=\frac{2}{3};$$

звідси

$$\frac{3}{2x+\dfrac{2}{x}+5}+\frac{5}{2x+\dfrac{2}{x}+11}=\frac{2}{3}.$$

Зробимо заміну:

$$2x+\frac{2}{x}+5=y,$$

тоді

$$\frac{3}{y}+\frac{5}{y+6}=\frac{2}{3};$$

звідси:

$$3(3y+18+5y)=2y(y+6);\quad 54+24y=2y^2+12y;$$

$$2y^2-12y-54=0;\quad y^2-6y-27=0;$$

$$y=9 \text{ або } y=-3;$$

$$2x+\frac{2}{x}+5=9 \text{ або } 2x+\frac{2}{x}+5=-3;$$

$$2x^2-4x+2=0 \text{ або } 2x^2+8x+2=0;$$

$$x=1 \text{ або } x=-2\pm\sqrt{3}.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_1=1,\ x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}.$

ЗАДАЧА 20. Розв'язати рівняння:

$$\frac{2x^2-x+3}{3}-\frac{2x^2}{2x^2-4x+3}=\frac{x}{6}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо: $x \neq 0$ та

$$\frac{x\left(2x+\frac{3}{x}-1\right)}{3}-\frac{2x^2}{x\left(2x+\frac{3}{x}-4\right)}=\frac{x}{6};$$

$$\frac{2x+\frac{3}{x}-1}{3}-\frac{2}{2x+\frac{3}{x}-4}=\frac{1}{6}.$$

Зробимо заміну:

$$2x+\frac{3}{x}-1=y,$$

тоді $y \neq 3$ та

$$\frac{y}{3}-\frac{2}{y-3}=\frac{1}{6}.$$

Звідси

$$\left(y^2-3y-6\right)\cdot 6=3\left(y-3\right);$$

$$6y^2-18y-36=3y-9;\ \ 6y^2-21y-27=0;$$

$$2y^2-7y-9=0;$$

$$y=\frac{9}{2}\ \text{або}\ y=-1.$$

Отже,

$$2x+\frac{3}{x}-1=\frac{9}{2}\ \text{або}\ 2x+\frac{3}{x}-1=-1;$$

$$4x^2-11x+6=0\ \text{або}\ 2x^2+3=0;$$

$$x=2\ \text{або}\ x=\frac{3}{4}\ \text{або}\ x\in\varnothing.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_1=2,\ x_2=\frac{3}{4}.$

ЗАДАЧА 21. Розв'язати рівняння:

$$\left(2x^2-3x+1\right)\left(2x^2+5x+1\right)=9x^2.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Оскільки $x \neq 0$, то

$$x\left(2x-3+\frac{1}{x}\right)\cdot x\left(2x+5+\frac{1}{x}\right)=9x^2;$$

$$\left(2x-3+\frac{1}{x}\right)\left(2x+5+\frac{1}{x}\right)=9.$$

Зробимо заміну:

$$2x+\frac{1}{x}-3=y,$$

тоді

$$y(y+8)=9;\quad y^2+8y-9=0;$$

$$y=-9 \text{ або } y=1;$$

$$2x+\frac{1}{x}-3=-9 \text{ або } 2x+\frac{1}{x}-3=1;$$

$$2x^2+6x+1=0 \text{ або } 2x^2-4x+1=0;$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2} \text{ або } x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}}{2},\ x_{3,4}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}.$

Для розв'язання наступного рівняння потрібно використати останні два з розглянутих нами прийомів.

ЗАДАЧА 22. Розв'язати рівняння:

$$(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_1=-6,\ x_2=-4,\ x_{3,4}=\dfrac{-15\pm\sqrt{129}}{2}.$

Далі в цьому параграфі ми розглядатимемо виключно *рівняння вищих степенів з цілими коефіцієнтами*:

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0\quad (n>2),$$

де $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — деякі цілі числа.

Нам знадобляться три факти про такі рівняння:

1. Якщо $x = a$ — корінь такого рівняння, то двочлен $x - a$ у лівій частині цього рівняння можна винести за дужки.

2. Якщо таке рівняння має цілі корені, то вони є дільниками вільного члена — коефіцієнта a_0.

3. Якщо коренем такого рівняння є нескоротний дріб $\frac{a}{b}$, то число a є дільником вільного члена — коефіцієнта a_0, а число b є дільником старшого коефіцієнта a_n.

Отже, шлях для розв'язання таких рівнянь простий: спочатку перевірити, чи не є якийсь дільник a вільного члена a_0 коренем рівняння. Якщо так, то переписати рівняння так, щоб $x - a$ можна було винести за дужки (тоді в дужках буде рівняння меншого степеня); якщо ж ні, то перевіряти можливі дробові корені. (А якщо ні те, ні інше «не пройде», то шукати інший прийом для розв'язання...).

ЗАДАЧА 23. Розв'язати рівняння:

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Цілі корені ми маємо шукати серед дільників вільного члена — числа 120:

$$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5; \pm 6; \pm 8; \pm 10;$$
$$\pm 12; \pm 15; \pm 20; \pm 24; \pm 30; \pm 40; \pm 60; \pm 120.$$

Завдяки підстановці пересвідчимося, що $x = 2$ — корінь даного рівняння. Отже, двочлен $x - 2$ можна винести за дужки. Зробимо це, перетворивши дане рівняння.

Маємо:

$$x^4 - 2x^3 - 2x^3 + 4x^2 - 23x^2 + 46x + 60x - 120 = 0;$$
$$x^3(x-2) - 2x^2(x-2) - 23x(x-2) + 60(x-2) = 0;$$
$$(x-2)(x^3 - 2x^2 - 23x + 60) = 0.$$

Тепер ми повинні розв'язати рівняння

$$x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0.$$

Дільниками числа 60 є числа

$$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 12; \pm 15; \pm 20; \pm 30; \pm 60.$$

Знов-таки, проста підстановка допоможе пересвідчитися, що $x = 3$ — корінь цього рівняння. Маємо:

$$(x-2)(x^3-3x^2+x^2-3x-20x+60)=0;$$

$$(x-2)(x^2(x-3)+x(x-3)-20(x-3))=0;$$

$$(x-2)(x-3)(x^2+x-20)=0;$$

звідси

$$x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=4,\ x_4=-5.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=4,\ x_4=-5.$

ЗАДАЧА 24. Розв'язати рівняння:

$$10x^3-3x^2-2x+1=0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Дільники вільного члена — числа 1 та -1 не є коренями даного рівняння. Отже, будемо шукати дробові корені. Дільники старшого коефіцієнта, числа 10, такі:

$$\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10.$$

Підстановкою пересвідчимося, що $x=-\dfrac{1}{2}$ — корінь даного рівняння. Тому $x+\dfrac{1}{2}$, або, що, по суті, те саме, $2x+1$, можна винести за дужки:

$$10x^3+5x^2-8x^2-4x+2x+1=0;$$

$$5x^2(2x+1)-4x(2x+1)+(2x+1)=0;$$

$$(2x+1)(5x^2-4x+1)=0.$$

ВІДПОВІДЬ. $x=-\dfrac{1}{2}.$

ЗАДАЧА 25. Розв'язати рівняння:

1) $x^3-4x^2+x+6=0;$

2) $x^3-3x^2+4x-2=0;$

3) $12x^3-32x^2+25x-6=0.$

ВІДПОВІДЬ. 1) $x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=3;$ 2) $x=1;$

3) $x_1=\dfrac{1}{2},\ x_2=\dfrac{3}{2},\ x_3=\dfrac{2}{3}.$

Наступне рівняння четвертого степеня має таку властивість: його перший коефіцієнт дорівнює останньому, другий — передостанньому і т. і.

ЗАДАЧА 26. Розв'язати рівняння:

$$2x^4+9x^3-x^2+9x+2=0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Поділимо обидві частини рівняння на x^2 ($x\neq 0$), маємо:

$$2x^2+9x-1+\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}=0.$$

Перегрупуємо доданки у лівій частині:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+9\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

Зробимо заміну

$$x+\frac{1}{x}=t,$$

тоді, якщо піднести обидві частини цієї рівності до квадрата, дістанемо:

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2;$$

звідси

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2.$$

Звідси маємо:

$$2t^2-4+9t-1=0;$$

$$t=-5 \text{ або } t=\frac{1}{2};$$

$$x+\frac{1}{x}=-5 \text{ або } x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2};$$

$$x^2+5x+1=0 \text{ або } 2x^2-x+2=0;$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2} \text{ або } x\in\varnothing.$$

ВІДПОВІДЬ. $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}.$

Для розв'язання наступного рівняння потрібна комбінація двох останніх прийомів.

ЗАДАЧА 27. Розв'язати рівняння:

$$4x^5+x^4-5x^3-5x^2+x+4=0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Підстановкою пересвідчимося, що -1 є коренем цього рівняння. Винесемо $x+1$ за дужки (підрахунки проробіть самостійно):

$$(x+1)\left(4x^4-3x^3-2x^2-3x+4\right)=0.$$

Отже, ми маємо розв'язати рівняння

$$4x^4-3x^3-2x^2-3x+4=0.$$

Поділимо обидві частини рівняння на x^2 $(x\neq 0)$ та перегрупуємо доданки:

$$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0.$$

Розв'язавши це рівняння (зробіть це самостійно!), отримаємо, що $x=1$. Враховуючи вже знайдений корінь початкового рівняння, записуємо відповідь.

ВІДПОВІДЬ. $x_{1,2}=\pm 1.$

Розв'язання останнього рівняння цього параграфа ґрунтується на тій самій ідеї.

ЗАДАЧА 28. Розв'язати рівняння:

$$9x^4-15x^3+28x^2-20x+16=0$$

ВКАЗІВКА

Поділити обидві частини рівняння на x^2 $(x\neq 0)$:

$$9x^2+\frac{16}{x^2}-5\left(3x+\frac{4}{x}\right)+28=0.$$

Далі зробити заміну

$$3x+\frac{4}{x}=t.$$

ВІДПОВІДЬ. $x\in\varnothing.$

§ 2. СИСТЕМИ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ

У цьому параграфі ми розглянемо різноманітні системи алгебричних рівнянь. Знов-таки, кожні дві-три системи уособлюють в собі новий прийом, який варто розібрати та запам'ятати.

Почнемо ми з систем, які розв'язуються за допомогою так званого метода підстановки, з яким ви вже зустрічались у сьомому класі. Його доцільно використовувати, якщо одне з рівнянь системи дуже просте і дозволяє одразу знайти значення якогось невідомого (задача 1) або виразити одне невідоме через інше (задачі 2 та 3).

ЗАДАЧА 1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}(x-2)(y+3)=0\\ x^2+2xy-y^2=5.\end{cases}$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

З першого рівняння системи

$$x=2 \text{ або } y=-3.$$

Тому дана система рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ x^2+2xy-y^2=5\end{cases}\\ \begin{cases}y=-3\\ x^2+2xy-y^2=5\end{cases}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ 4+4y-y^2=5\end{cases}\\ \begin{cases}y=-3\\ x^2-6x-9=5\end{cases}\end{array}\right.;$$

отже, можливі чотири пари розв'язків:

$$\begin{cases}x=2\\ y=2+\sqrt{3}\end{cases}, \quad \begin{cases}x=2\\ y=2-\sqrt{3}\end{cases}, \quad \begin{cases}x=3+\sqrt{23}\\ y=-3\end{cases}, \quad \begin{cases}x=3-\sqrt{23}\\ y=-3\end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\left\{(x;y)\,\middle|\,(2;2+\sqrt{3});(2;2-\sqrt{3});(3+\sqrt{23};-3);(3-\sqrt{23};-3)\right\}.$

УВАГА! Перед вами трохи незвична форма запису відповіді. Власне, як саме записувати відповідь — не так вже й важливо. Головне правильно знайти розв'язок!

ЗАДАЧА 2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

З другого рівняння виразимо x через y, маємо:

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ 2(y-1)^2 - (y-1)y + 3y^2 - 7(y-1) - 12y + 1 = 0 \end{cases};$$

звідси

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ 2y^2 - 11y + 5 = 0 \end{cases}.$$

З другого рівняння отриманої системи знаходимо y:

$$y = \frac{1}{2} \text{ або } y = 5.$$

Тоді з першого рівняння, відповідно,

$$x = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \text{ або } x = 5 - 1 = 4.$$

ВІДПОВІДЬ. $\left\{(x; y) \middle| \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); (4; 5)\right\}$.

ЗАДАЧА 3. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x + z = 13 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 8 \end{cases}.$$

ВКАЗІВКА

У першому та другому рівняннях виразити, відповідно, y та z через x та підставити у третє рівняння. Розв'язавши отримане рівняння, дістанемо:

$$x = 4 \text{ або } x = 1\frac{2}{3}.$$

Тоді з перших двох рівнянь знайти y та z.

ВІДПОВІДЬ. $\left\{(x; y; z) \middle| (4; 3; 1); \left(1\frac{2}{3}; 7\frac{2}{3}; 8\right)\right\}$.

Розглянемо тепер системи двох рівнянь з двома невідомими, для розв'язання яких доцільно перейти до рівносильної системи, перше рівняння якої є сумою рівнянь даної системи, а друге — їхньою різницею.

ЗАДАЧА 4. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=5 \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$\begin{cases} 2x=12 \\ 2y=2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\{(x;y)\,|\,(6;1)\}$.

ЗАДАЧА 5. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x+3y=21 \\ 4x-3y=3 \end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\{(x;y)\,|\,(3;3)\}$.

ЗАДАЧА 6. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2+y^2-x+y=17 \\ 2x^2-y^2-x-y=13 \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$\begin{cases} 4x^2-2x-30=0 \\ 2y^2+2y-4=0 \end{cases}.$$

З першого рівняння отриманої системи:

$$x=3 \text{ або } x=-\frac{5}{2};$$

а з другого:

$$y=-2 \text{ або } y=1.$$

ВІДПОВІДЬ. $\left\{(x;y)\,\middle|\,(3;-2);(3;1);\left(-\frac{5}{2};-2\right);\left(-\frac{5}{2};1\right)\right\}$.

ЗАДАЧА 7. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}(x+y)^2+(x-y)^2=10\\(x+y)^2-(x-y)^2=8\end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\{(x;y)\,|\,(2;1);(1;2);(-1;-2);(-2;-1)\}$.

ЗАДАЧА 8. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}x^3+3xy^2=158\\3x^2y+y^3=-185\end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$\begin{cases}x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=-27\\x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=343\end{cases};$$

звідси

$$\begin{cases}(x+y)^3=-27\\(x-y)^3=343\end{cases};\quad \begin{cases}x+y=-3\\x-y=7\end{cases}.$$

І знов застосовуємо той самий прийом:

$$\begin{cases}2x=4\\2y=-10\end{cases};\quad \begin{cases}x=2\\y=-5\end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\{(x;y)\,|\,(2;-5)\}$.

Розглянемо системи, які розв'язуються за допомогою знайомої вам теореми, оберненої до теореми Вієта (повторіть її!).

ЗАДАЧА 9. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}x+y=5\\xy=4\end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

За теоремою, оберненої до теореми Вієта, розв'язки даної системи є коренями рівняння

$$k^2-5k+4=0,$$

звідси $k=4$ або $k=1$.

Отже,

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\{(x;y) \mid (4;1);(1;4)\}$.

ЗАДАЧА 10. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = 14 \\ xy = -48 \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Перепишемо дану систему у вигляді:

$$\begin{cases} x + (-y) = 14 \\ x \cdot (-y) = 48 \end{cases}.$$

Тоді x та $-y$ — корені рівняння

$$k^2 - 14k + 48 = 0;$$

$$k = 6 \text{ або } k = 8.$$

Отже,

$$\begin{cases} x = 6 \\ -y = 8 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = 8 \\ -y = 6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = -8 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = 8 \\ y = -6 \end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\{(x;y) \mid (6;-8);(8;-6)\}$.

ЗАДАЧА 11. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ xy = 2 \end{cases}.$$

ВКАЗІВКА

Переписати дану систему у вигляді

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x \cdot 3y = 12 \end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\left\{(x;y) \middle| \left(\frac{3}{2};\frac{4}{3}\right);(2;1)\right\}$.

ЗАДАЧА 12. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Враховуючи, що $xy > 0$, піднесемо друге рівняння до квадрата, дістанемо:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 y^2 = 9 \end{cases}.$$

Тоді x^2 та y^2 — корені рівняння

$$k^2 - 10k + 9 = 0;$$

$$k = 9 \text{ або } k = 1.$$

Звідси

$$\begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \end{cases}.$$

Враховуючи, що x та y мають бути одного знаку ($xy > 0$), записуємо відповідь.

ВІДПОВІДЬ. $\{(x;y) \mid (3;1);(-3;-1);(1;3);(-1;-3)\}$.

ЗАДАЧА 13. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{x^2}{y^2} = 7 \\ (x+y)\dfrac{x^2}{y^2} = 12 \end{cases}.$$

ВКАЗІВКА

Зробити заміну

$$x + y = a; \quad \frac{x^2}{y^2} = b.$$

ВІДПОВІДЬ. $\{(x;y) \mid (2;1);(6;-3);(6+2\sqrt{3};-2-2\sqrt{3});$

$(6-2\sqrt{3};-2+2\sqrt{3})\}$.

ЗАДАЧА 14. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2xy-z^2=16 \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розглянемо цю систему, ніби z — параметр, а не змінна:

$$\begin{cases} x+y=4-z \\ xy=\dfrac{16+z^2}{2} \end{cases}.$$

Тоді розв'язки отриманої системи будуть коренями рівняння

$$k^2-(4-z)\,k+\frac{16+z^2}{2}=0.$$

Але дискримінант D цього рівняння недодатний:

$$D=(4-z)^2-4\,\frac{16+z^2}{2}=-\left(z^2+8z+16\right)=-(z+4)^2\le 0.$$

Отже, воно має розв'язок (а разом з ним і вихідна система), тільки якщо $z=-4$, тоді $k=4$, тобто $x=4$ та $y=4$.

ВІДПОВІДЬ. $\{(x;y;z)\,|\,(4;4;-4)\}$.

У наступних двох системах одне з рівнянь так зване *однорідне*: усі одночлени, які зустрічаються у ньому, мають однаковий степінь.

ЗАДАЧА 15. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 \\ x^2-xy-2x-3y=6 \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

При $y=0$ система розв'язків не має. При $y\ne 0$ ця система рівносильна системі:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2-2\left(\dfrac{x}{y}\right)-3=0 \\ x^2-xy-2x-3y=6 \end{cases}.$$

З першого рівняння маємо:

$$\frac{x}{y}=3 \text{ або } \frac{x}{y}=-1.$$

Отже, дана система рівносильна сукупності двох систем

$$\begin{cases} x = 3y \\ 9y^2 - 3y^2 - 6y - 3y = 6 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = -y \\ y^2 + y^2 + 2y - 3y = 6 \end{cases}.$$

Тепер треба розв'язати другі рівняння цих систем.

ВІДПОВІДЬ. $\left\{(x;y) \,\middle|\, (6;2); \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right); (-2;2); \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)\right\}$.

ЗАДАЧА 16. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy^2 + x^2y + x^3 = 14y^3 \\ x + y = 3 \end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\{(x;y) \mid (2;1)\}$.

Розглянемо тепер так звані однорідні системи. Рівняння, що входять до їхнього складу, дуже схожі на однорідні, але можуть містити і вільні члени (число без змінної). Такі системи розв'язуються стандартною заміною (якщо тільки $x = 0$ не задовольняє системі):

$$y = tx \quad (t \neq 0).$$

ЗАДАЧА 17. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Зробимо заміну

$$y = tx \quad (t \neq 0),$$

тоді

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x^2t + t^2x^2 = 3 \\ x^2 + 2x^2t - 2t^2x^2 = 6 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2\left(2 - 3t + t^2\right) = 3 \\ x^2\left(1 + 2t - 2t^2\right) = 6 \end{cases}.$$

Поділимо перше рівняння системи на друге ($x \neq 0$):

$$\frac{2 - 3t + t^2}{1 + 2t - 2t^2} = \frac{1}{2};$$

звідси

$$4t^2 - 8t + 3 = 0; \quad t = \frac{3}{2} \text{ або } t = \frac{1}{2}.$$

Тоді дана система рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=\frac{3}{2}x \\ 2x^2-3\cdot\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ 2x^2-3\cdot\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^2=3 \end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=\frac{3}{2}x \\ -\frac{x^2}{4}=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ \frac{3}{4}x^2=3 \end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in\varnothing \\ y\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=4 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}\end{array}\right..$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x=-2 \\ y=-1. \end{cases}$$

ВІДПОВІДЬ. $\{(x;y)\,|\,(2;1);(-2;-1)\}$.

ЗАДАЧА 18. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x+2y)(x+3y)=300 \\ (y+2x)(y+3x)=300 \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Зробимо заміну $y=tx$ $(t\neq 0)$:

$$\begin{cases} (x+2tx)(x+3tx)=300 \\ (tx+2x)(tx+3x)=300 \end{cases}.$$

Поділимо перше рівняння системи на друге:

$$\frac{(1+2t)(1+3t)}{(t+2)(t+3)}=1;$$

звідси:

$$t=-1 \text{ або } t=1.$$

Подальші обчислення проробіть самостійно.

ВІДПОВІДЬ. $\{(x;y)\,|\,(5;5);(-5;-5);(5\sqrt{6};-5\sqrt{6});$

$(-5\sqrt{6};5\sqrt{6})\}$.

Наступні дві системи не є однорідними, але їх теж можна розв'язати заміною $y=tx$. Але треба не забувати перевіряти, чи не є розв'язком $x=y=0$.

ЗАДАЧА 18. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 40y \\ y^3 + x^2y = 10x \end{cases}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо $x = 0$, то $y = 0$ (і навпаки!).

Якщо $x \neq 0$, то зробимо заміну $y = tx$ $(t \neq 0)$:

$$\begin{cases} x^3 + x^3t^2 = 40tx \\ x^3t^3 + x^3t = 10x \end{cases}; \quad \begin{cases} x^3\left(1+t^2\right) = 40tx \\ x^3t\left(t^2+1\right) = 10x \end{cases};$$

$$\frac{x^3\left(1+t^2\right)}{x^3t\left(t^2+1\right)} = \frac{40tx}{10x}; \quad \frac{1}{t} = 4t; \quad t^2 = \frac{1}{4};$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ або } t = -\frac{1}{2}.$$

Далі все робимо звичайним чином.

ВІДПОВІДЬ. $\left\{(x;y) \,\middle|\, (0;0);(4;2);(-4;-2)\right\}.$

ЗАДАЧА 19. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy + \dfrac{y}{x} = 2\left(x^2 + y^2\right) \\ xy - \dfrac{x}{y} = x^2 + y^2 \end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\begin{cases} x \in \varnothing \\ y \in \varnothing \end{cases}.$

В останній задачі цього параграфа ми пропонуємо ще дві системи, у яких потрібно зробити доцільні заміни.

ЗАДАЧА 20. Розв'язати системи рівнянь:

$$1)\ \begin{cases} x + y = 5 \\ x^2y^2 - 10xy + 24 = 0 \end{cases}; \quad 2)\ \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^3 = 12 \\ (xy)^2 + xy = 6 \end{cases}.$$

ВІДПОВІДЬ. 1) $\left\{(x;y) \,\middle|\, (2;3);(3;2);(4;1);(1;4)\right\}$;

2) $\left\{(x;y) \,\middle|\, (2;1);(-2;-1)\right\}.$

ГЛАВА 4. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

§ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Поняття послідовності — одне з основних понять математики. Розглянемо виписані підряд натуральні числа:

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Кажуть, що це — **послідовність** натуральних чисел.

Наведемо ще приклади послідовностей:

1) послідовність усіх парних натуральних чисел:

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

2) послідовність усіх непарних натуральних чисел:

$$1, 3, 5, 7, \ldots$$

3) послідовність усіх чисел, обернених до натуральних

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Кожне число, що входить до послідовності, називається **членом послідовності**. Член послідовності, що знаходиться на першому місці, називається **першим членом послідовності**, член послідовності, що знаходиться на другому місці, називається **другим членом послідовності** тощо. Таким чином, кожен член послідовності має свій номер, який вказує на місце цього члена в послідовності. Отже, числу 1 (номеру 1) відповідає деяке число, яке ми позначимо, наприклад, a_1 (або x_1 або u_1 — це не має значення), числу 2 — число a_2, числу 3 — число a_3, і т. і., ..., числу n — число a_n, і т. д.

Тоді кажуть, що задана числова послідовність

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

або, скорочено, $\{a_n\}$.

Число a_n — це n-ий член послідовності (загальний член послідовності). За допомогою формули для загального члена задається власне послідовність.

Наприклад, якщо

$$a_n = n,$$

то це означає, що задана послідовність $\{a_n\}$ натуральних чисел:

$$1, 2, 3, \ldots$$

якщо ж

$$a_n = n^2,$$

то це означає, що задана послідовність $\{a_n\}$ квадратів натуральних чисел:

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, n^2, \ldots$$

Послідовності бувають **скінченні** та **нескінченні**:

$$2, 4, 6, 8, 10 \text{ — скінченна послідовність;}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots \text{ — нескінченна послідовність.}$$

Послідовність називається **зростаючою**, якщо кожен наступний її член не менший за попередній, тобто якщо

$$a_{k+1} \geq a_k.$$

Послідовність називається **спадною**, якщо кожен наступний її член не більший за попередній, тобто якщо

$$a_{k+1} \leq a_k.$$

Наприклад, послідовність кубів натуральних чисел:

$$1, 8, 27, 64, \ldots \text{ —}$$

є зростаючою послідовністю, оскільки

$$a_n = n^3 < (n+1)^3 = a_{n+1}.$$

Послідовність всіх чисел, обернених до натуральних чисел:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \text{ —}$$

є спадною послідовністю, оскільки

$$a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}.$$

ЗАДАЧА 1. Написати декілька членів послідовності $\{a_n\}$, якщо

$$a_n = 1 + n.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

При $n = 1$

$$a_1 = 1 + 1 = 2;$$

при $n = 2$

$$a_2 = 1 + 2 = 3;$$

при $n = 3$

$$a_3 = 1 + 3 = 4.$$

ВІДПОВІДЬ. 2, 3, 4, ...

ЗАДАЧА 2. Написати декілька членів послідовності $\{a_n\}$, якщо

$$a_n = \frac{1}{n^2}.$$

ВІДПОВІДЬ. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

ЗАДАЧА 3. Написати декілька перших членів послідовності натуральних чисел, кратних 7. Якою є формула загального члена цієї послідовності?

ВІДПОВІДЬ. 7, 14, 21, 28, ...

Формула загального члена: $a_n = 7n$, $n \in \mathbb{N}$.

ЗАДАЧА 4. Написати декілька членів послідовності, якщо

$$a_n = (-1)^n n^2.$$

ВІДПОВІДЬ. $-1, 4, -9, 16, -25, \ldots$

ЗАДАЧА 5. Написати загальний член послідовності

1) $1, 6, 11, 16, \ldots$ 2) $-1, 1, -1, 1, \ldots$

3) $-3, -6, -9, \ldots$ 4) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots$

ВІДПОВІДЬ. 1) $a_n = n + 5$; 2) $a_n = (-1)^n$;

3) $a_n = -3n$; 4) $a_n = \frac{1}{n^2}$.

§ 2. АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Розглянемо таку послідовність:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots$$

Кожен її член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, збільшеному на число d.

Така послідовність називається **арифметичною прогресією**.

Отже, основна її властивість така:

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Число d називається **різницею арифметичної прогресії**.

Наприклад, нехай задана послідовність

$$2, 5, 8, 11, \ldots$$

Це — арифметична прогресія із першим членом 2 та різницею

$$d = 3.$$

> *Формула n-го члена арифметичної прогресії така:*
>
> $$\boldsymbol{a_n = a_1 + d(n-1)}.$$

Доведемо її. Оскільки

$$a_{n+1} - a_n = d,$$

то $a_2 - a_1 = d$; $a_3 - a_2 = d$; $a_4 - a_3 = d$; ... $a_n - a_{n-1} = d$.

Складемо почленно ці рівності, отримаємо:

$$a_n - a_1 = d(n-1); \text{ або } a_n = a_1 + d(n-1).$$

> *У арифметичній прогресії кожен її член, окрім першого і, якщо він є, останнього, дорівнює середньому арифметичному попереднього і наступного членів:*
>
> $$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}.$$

Справді, візьмемо три послідовних члена довільної арифметичної прогресії: a_{n-1}, a_n, a_{n+1} $(n \geq 2)$. Оскільки

$$a_{n-1} = a_n - d, \quad a_{n+1} = a_n + d,$$

то

$$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n, \text{ або } a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Можна довести, що якщо у послідовності кожен її член, окрім першого і, якщо він є, останнього, дорівнює середньому арифметичному попереднього і наступного членів, то ця послідовність є арифметичною прогресією.

> *У скінченній арифметичній прогресії сума членів, рівновіддалених від крайніх членів, дорівнює сумі крайніх членів.*

Справді, розглянемо арифметичну прогресію a_1, a_2, ..., a_n. Маємо:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n,$$
$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n,$$

і таке інше. Властивість доведено.

Сума перших *n* членів арифметичної прогресії

Нехай дана арифметична прогресія a_1, a_2, ..., a_n, ... Позначимо через S_n суму її n перших членів:

$$\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}.$$

> *Справедлива формула:*
> $$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.}$$

Справді, запишемо цю суму двома способами:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n;$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Додавши почленно ці рівності, отримаємо

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

За розглянутою вище властивістю арифметичної прогресії, усі вирази у дужках рівні між собою, а кількість таких виразів дорівнює n. Отже,

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

тобто

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + (a_1 + (n-1)d)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

ЗАДАЧА 1. Написати формулу загального члена арифметичної прогресії, перший член якої -7, а різниця дорівнює 21,2.

ВІДПОВІДЬ. $a_n = -7 + 21{,}2 \cdot (n-1)$.

ЗАДАЧА 2. Шостий член арифметичної прогресії дорівнює 21, а різниця дорівнює -5. Знайти перший член цієї прогресії.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$21 = a_6 = a_1 + 5d = a_1 + 5 \cdot (-5) = a_1 - 25; \quad a_1 = 46.$$

ВІДПОВІДЬ. 46.

ЗАДАЧА 3. Відомо, що третій член арифметичної прогресії дорівнює 5, а сьомий дорівнює 29. Знайти перший член прогресії та її різницю.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Оскільки $a_3 = a_1 + 2d$, $a_7 = a_1 + 6d$, то звідси дістанемо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 5 \\ a_1 + 6d = 29 \end{cases}.$$

Віднявши перше рівняння від другого, дістанемо:

$$4d = 24; \quad d = 6; \quad a_1 = -7.$$

ВІДПОВІДЬ. $a_1 = -7$; $d = 6$.

ЗАДАЧА 4. Чи буде арифметичною прогресією послідовність $a_n = 4n + 3$?

ВІДПОВІДЬ. Так, це арифметична прогресія із першим членом 7 та різницею 4.

ЗАДАЧА 5. Довести, що в арифметичній прогресії $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ будь-які чотири члени a_m, a_n, a_k, a_l, такі що $m + n = k + l$, зв'язані співвідношенням $a_m + a_n = a_k + a_l$.

ДОВЕДЕННЯ

$$a_m + a_n = a_1 + d(m-1) + a_1 + d(n-1) = 2a_1 + d(m+n-2);$$
$$a_k + a_l = a_1 + d(k-1) + a_1 + d(l-1) = 2a_1 + d(k+l-2).$$

Оскільки $m + n = k + l$, то $a_m + a_n = a_k + a_l$, що й вимагалось.

ЗАДАЧА 6. Дана арифметична прогресія, така що

$$a_p = q; \quad a_q = p.$$

Знайти a_m.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$a_p - a_q = a_1 + d(p-1) - (a_1 + d(q-1)) = d(p-q).$$

За умовою $a_p - a_q = q - p$, отже,

$$q - p = d(p-q).$$

Звідси знаходимо, що $d = -1$. Але, з аналогічних міркувань:

$$a_m - a_p = (m-p)d;$$

звідси

$$a_m = a_p + (m-p)d = q - m + p.$$

ВІДПОВІДЬ. $q - m + p$.

ЗАДАЧА 7. Скільки членів арифметичної прогресії $1, 4, \ldots$, рахуючи від першого, потрібно скласти, щоб сума дорівнювала 425 ?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Оскільки $a_1 = 1, a_2 = 4$, то різниця прогресії дорівнює

$$d = a_2 - a_1 = 3.$$

Далі використаємо формулу для обчислення суми перших n членів прогресії:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1 + 1 + 3(n-1))n}{2} = \frac{(3n-1)n}{2} = 425.$$

Звідси дістаємо рівняння відносно n:

$$3n^2 - n - 850 = 0; \quad n = 17.$$

ВІДПОВІДЬ. 17.

ЗАДАЧА 8. Знайти S_{30}, якщо $a_1 = 0{,}2$, $a_2 = 0{,}5$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$d = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3; \quad a_{30} = 0{,}2 + 0{,}3(30-1) = 8{,}9;$$

$$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = 136{,}5.$$

ВІДПОВІДЬ. 136,5.

ЗАДАЧА 9. Обчислити: $7{,}5+9{,}8+12{,}1+\ldots+53{,}5$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Відзначимо, що

$$9{,}8-7{,}5=12{,}1-9{,}8=2{,}3.$$

Таким чином, необхідно обчислити суму членів арифметичної прогресії, у якій $a_1=7{,}5$; $d=2{,}3$; $a_n=53{,}5$. Оскільки

$$a_n=a_1+(n-1)d; \text{ то } 7{,}5+2{,}3(n-1)=53{,}5;$$

звідси $n=21$. Тепер можна знайти шукану суму

$$S_{21}=\frac{a_1+a_{21}}{2}\cdot 21=\frac{7{,}5+53{,}5}{2}\cdot 21=640{,}5.$$

ВІДПОВІДЬ. 640,5.

ЗАДАЧА 10. Дані вирази: $(a+x)^2$; (a^2+x^2); $(a-x)^2$; ... Довести, що вони складають арифметичну прогресію та знайти суму n її перших членів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай $b_1=(a+x)^2$; $b_2=(a^2+x^2)$; $b_3=(a-x)^2$. Маємо:

$$b_2-b_1=b_3-b_2=-2ax.$$

Отже, b_1, b_2, b_3 утворюють арифметичну прогресію з різницею $d=-2ax$. Знайдемо S_n:

$$S_n=\frac{\left(2(a+x)^2-2ax(n-1)\right)\cdot n}{2}=\left(a^2+(3-n)ax+x^2\right)n.$$

ВІДПОВІДЬ. $\left(a^2+(3-n)ax+x^2\right)n$.

ЗАДАЧА 11. Знайти суму двадцяти членів арифметичної прогресії $a_1, a_2, \ldots$, якщо $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Оскільки a_6 та a_{15}, а також a_9 та a_{12} є рівновіддаленими членами від a_1 та a_{20}, то за властивістю арифметичної прогресії: $a_6+a_{15}=a_9+a_{12}=a_1+a_{20}$. Звідси, за умовою,

$$2(a_1+a_{20})=20;\quad a_1+a_{20}=10;\quad S_{20}=\frac{(a_1+a_{20})\cdot 20}{2}=100.$$

ВІДПОВІДЬ. 100.

§ 3. ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Розглянемо таку послідовність:

$$u_1, u_1q, u_1q^2, \ldots (q \neq 0).$$

Кожен її член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число $q \neq 0$.

Ця послідовність називається **геометричною прогресією**.

Отже, основна її властивість така:

$$u_n = u_{n-1} \cdot q, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Число q називається **знаменником геометричної прогресії**.

Наприклад, нехай задана послідовність

$$2, 4, 8, 16, \ldots$$

Це — геометрична прогресія з першим членом 2 та знаменником

$$q = 2.$$

Формула n-го члена геометричної прогресії така:

$$\boldsymbol{u_n = u_1 \cdot q^{n-1}}.$$

Доведемо її. Маємо:

$$u_n = u_{n-1} \cdot q = (u_{n-2} \cdot q) \cdot q = ((u_{n-3} \cdot q) \cdot q) \cdot q = \ldots = u_1 \cdot q^{n-1}.$$

У геометричній прогресії кожен її член, крім першого і, якщо він є, останнього, є середнім геометричним попереднього і наступного членів, тобто

$$\boldsymbol{u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1}}.$$

Справді, візьмемо три послідовних члена довільної геометричної прогресії: u_{n-1}, u_n, u_{n+1} $(n \geq 2)$. Оскільки

$$u_{n-1} = u_1q^{n-2}, \quad u_{n+1} = u_1q^n,$$

то звідси

$$u_{n-1} \cdot u_{n+1} = u_1q^{n-2} \cdot u_1q^n = u_1^2q^{2n-2} = \left(u_1q^{n-1}\right)^2.$$

Отже, враховуючи що

$$u_n = u_1q^{n-1},$$

отримаємо потрібну формулу.

Можна довести, що якщо у послідовності кожен її член, окрім першого і, якщо він є, останнього, дорівнює середньому геометричному попереднього і наступного членів, то ця послідовність є геометричною прогресією.

У скінченній геометричній прогресії добуток членів, рівновіддалених від крайніх членів, дорівнює добутку крайніх членів.

Справді, розглянемо геометричну прогресію u_1, u_2, ..., u_n. Маємо:

$$u_2 u_{n-1} = (u_1 q)(u_1 q^{n-2}) = u_1(u_1 q^{n-1}) = u_1 u_n,$$

$$u_3 u_{n-2} = (u_1 q^2)(u_1 q^{n-3}) = u_1(u_1 q^{n-1}) = u_1 u_n,$$

і таке інше. Властивість доведено.

Сума перших *n* членів геометричної прогресії

Нехай дана арифметична прогресія $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ Позначимо через S_n суму її n перших членів:

$$\boldsymbol{S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n}.$$

Справедлива формула (якщо $q \neq 1$):

$$\boldsymbol{S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1 - qu_n}{1-q}}.$$

Справді,

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 + u_1 q + \ldots + u_1 q^{n-1}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $q \neq 0$. Дістанемо

$$S_n q = u_1 q + u_1 q^2 + \ldots + u_1 q^n;$$

звідси

$$S_n - S_n q = u_1 - u_1 q^n; \quad S_n(1-q) = u_1(1-q^n).$$

Якщо $q \neq 1$, то

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1 - qu_n}{1-q}.$$

Зауважимо, що при $q = 1$ усі члени геометричної прогресії однакові.

ЗАДАЧА 1. Написати формулу загального члена геометричної прогресії, перший член якої 3, а знаменник дорівнює 2.

ВІДПОВІДЬ. $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

ЗАДАЧА 2. Шостий член геометричної прогресії дорівнює 162, а знаменник дорівнює 3. Знайти перший член цієї прогресії.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$u_6 = 162 = u_1 \cdot 3^5 = 243u_1; \quad u_1 = \frac{2}{3}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\frac{2}{3}$.

ЗАДАЧА 3. Відомо, що третій член геометричної прогресії дорівнює 28, а сьомий дорівнює 448. Знайти перший член прогресії та її знаменник.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Оскільки $u_3 = u_1 q^2$, $u_7 = u_1 q^6$, то звідси отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} u_1 q^2 = 28 \\ u_1 q^6 = 448 \end{cases}.$$

Оскільки $q \neq 0$ (за означенням) та $u_1 \neq 0$ (бо тоді всі члени прогресії — нульові), то поділивши друге рівняння на перше, маємо:

$$q^4 = 16; \quad q = \pm 2; \quad u_1 = 7.$$

ВІДПОВІДЬ. $u_1 = 7$; $q = \pm 2$.

ЗАДАЧА 4. Визначити суму 6 членів геометричної прогресії:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$u_1 = \frac{1}{4}; \quad q = 2; \quad S_6 = \frac{\frac{1}{4}\left(1 - 2^6\right)}{1 - 2} = 15\frac{3}{4}.$$

ВІДПОВІДЬ. $15\frac{3}{4}$.

ЗАДАЧА 5. Знайти восьмий член геометричної прогресії, у якої

$$u_1 = 3;\ u_n = 96;\ S_n = 189.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Оскільки $u_n = u_1 q^{n-1}$, то

$$96 = 3q^{n-1};\ q^{n-1} = 32;$$

звідси

$$q^n = 32q.\ (1)$$

Далі використаємо формулу суми n перших членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1};$$

звідси

$$189 = \frac{3(q^n - 1)}{q - 1};$$

тобто

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = 63.\ (2)$$

З (1) та (2) дістанемо:

$$\frac{32q - 1}{q - 1} = 63;\ 32q - 1 = 63q - 63;\ q = 2.$$

Отже,

$$u_8 = u_1 q^7 = 3 \cdot 2^7 = 384.$$

ВІДПОВІДЬ. 384.

ЗАДАЧА 6. Довести, що в геометричній прогресії u_1, u_2, ... будь-які чотири члени u_m, u_n, u_k, u_l, для яких $m + n = k + l$, зв'язані співвідношенням $u_m u_n = u_k u_l$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$u_m u_n = u_1 q^{m-1} \cdot u_1 q^{n-1} = u_1^2 q^{m+n-2};$$

$$u_k u_l = u_1 q^{k-1} u_1 q^{l-1} = u_1^2 q^{k+l-2}.$$

Оскільки $m + n = k + l$, то $u_m u_n = u_k u_l$, що й вимагалось.

ЗАДАЧА 7. Знайти геометричну прогресію, якщо сума перших трьох її членів дорівнює 21, а добуток цих членів дорівнює 64.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$\begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=21 \\ u_1\cdot u_1\, q\cdot u_1q^2=64 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=21 \\ (u_1q)^3=64 \end{cases};$$

$$\begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=21 \\ u_1q=4 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_1\left(1+q^2\right)=17 \\ u_1q=4 \end{cases}.$$

Звідси

$$\frac{1+q^2}{q}=\frac{17}{4}; \quad q=4 \text{ або } q=\frac{1}{4}.$$

Тоді $u_1=1$ або, відповідно, $u_1=16$. Звідси маємо дві можливі прогресії, які розрізняються лише порядком членів:

$$1, 4, 16 \text{ або } 16, 4, 1.$$

ВІДПОВІДЬ. 1, 4, 16 або 16, 4, 1.

ЗАДАЧА 8. У скінченній геометричній прогресії сума всіх членів без останнього дорівнює 33, сума всіх членів без першого дорівнює -66, а сума всіх членів без першого і двох останніх дорівнює -18. Знайти перший член і знаменник прогресії.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}=33; \qquad (1)$$

$$u_2+u_3+\ldots+u_n=-66; \qquad (2)$$

$$u_2+u_3+\ldots+u_{n-2}=-18. \qquad (3)$$

Обидві частини рівняння (1) помножимо на знаменник q:

$$u_2+u_3+\ldots+u_n=33q.$$

Тоді з рівняння (2) дістанемо:

$$33q=-66; \quad q=-2.$$

Помножимо обидві частини рівняння (3) на q та віднімемо почленно від рівняння (1), враховуючи, що $qu_k=u_{k+1}$. Маємо:

$$u_1+u_2=33+18q; \quad u_1+u_1q=33+18q;$$

$$u_1-2u_1=33-36; \quad u_1=3.$$

ВІДПОВІДЬ. $u_1=3$; $q=-2$.

ЗАДАЧА 9. Три числа утворюють одночасно арифметичну та геометричну прогресії. Знайти залежність між ними.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай x, y та z — шукані числа. Тоді

$$y = x + d = xq; \quad z = x + 2d = xq^2.$$

Звідси:

$$d = xq - x \text{ та } d = \left(xq^2 - x\right) \cdot \frac{1}{2},$$

а отже,

$$x(q-1) = \frac{1}{2}x\left(q^2 - 1\right); \quad x(q-1) - \frac{1}{2}x(q-1)(q+1) = 0,$$

$$x(q-1)\left(1 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\right) = 0; \quad x(1-q)^2 = 0.$$

Якщо $x = 0$, то $x = y = z = 0$ (це геометрична прогресія, знаменник якої можна вибрати довільним).

Якщо ж $x \neq 0$, то $q = 1$, а $x = y = z$ (цей випадок включає до себе й попередній).

ВІДПОВІДЬ. Вони рівні між собою.

ЗАДАЧА 10. Чотири числа утворюють геометричну прогресію. Якщо від них відняти, відповідно, 2, 1, 7 та 27, то отримані числа утворять арифметичну прогресію. Знайти початкові числа.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо шукані числа так: u, uq, uq^2, uq^3. За умовою, числа $u - 2, uq - 1, uq^2 - 7, uq^3 - 27$ утворюють арифметичну прогресію. Тоді:

$$\begin{cases} 2(uq-1) = (u-2) + \left(uq^2 - 7\right) \\ 2\left(uq^2 - 7\right) = (uq-1) + \left(uq^3 - 27\right) \end{cases}; \quad \begin{cases} u(q-1)^2 = 7 \\ u(q-1)^2 q = 14 \end{cases};$$

звідси

$$u = 7; \quad q = 2.$$

Тому

$$uq = 14; \quad uq^2 = 28; \quad uq^3 = 56.$$

ВІДПОВІДЬ. 7, 14, 28, 56.

Сума членів нескінченної геометричної прогресії, у якої $|q|<1$

У математиці часто доводиться зустрічатися з сумами нескінченної кількості доданків. Власне, це не входить до курсу шкільної математики. Але є виключення: *сума членів нескінченної геометричної прогресії, у якої* $|q|<1$.

Наприклад, такими прогресіями будуть послідовності

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \quad \text{та} \quad 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots$$

Суму членів такої прогресії можна знайти за допомогою знайомої вам формули суми n перших членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{u_1}{1-q}\left(1-q^n\right),$$

Значення виразу $\frac{u_1}{1-q}$ не залежить від n, а значення q^n при необмеженому збільшенні n стає все ближчим і ближчим до нуля (оскільки $|q|<1$). Тому значення $1-q^n$ буде все ближчим і ближчим до одиниці. Ось чому вважається (за домовленістю!), що сума членів такої прогресії знаходиться за формулою:

$$S = \frac{u_1}{1-q}.$$

ЗАДАЧА 1. Знайти суму всіх членів геометричної прогресії:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Це нескінченна геометрична прогресія із знаменником:

$$q = \frac{1}{2},$$

тому

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

ВІДПОВІДЬ. 2.

ЗАДАЧА 2. Періодичний дріб

$$0{,}1212\ldots$$

перетворити на звичайний.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Маємо:

$$0,(12)=\frac{12}{100}+\frac{12}{1000}+\ldots$$

Це нескінченна геометрична прогресія із знаменником

$$q=\frac{1}{100}.$$

Сума всіх членів цієї прогресії і буде значенням даного періодичного дробу. Отже,

$$0,(12)=\frac{\frac{12}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{4}{33}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\frac{4}{33}$.

ЗАДАЧА 3. Знайти нескінченну геометричну прогресію, у якої $|q|<1$, таку що починається з 3, а сума її членів дорівнює $\frac{7}{2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

За умовою,

$$S=\frac{7}{2}, u_1=3.$$

Підставивши ці значення у формулу $S=\frac{u_1}{1-q}$, отримаємо:

$$\frac{7}{2}=\frac{3}{1-q};\quad q=\frac{1}{7}.$$

Отже, шукана прогресія така: $3, \frac{3}{7}, \frac{3}{49}, \ldots$

ВІДПОВІДЬ. $3, \frac{3}{7}, \frac{3}{49}, \ldots$

ЗАДАЧА 4. Знайти три перших члена нескінченної геометричної прогресії, у якої $|q|<1$, сума якої дорівнює 6, а сума 5 перших членів дорівнює $\frac{93}{16}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

За умовою:

$$\begin{cases} \dfrac{u_1}{1-q}=6 \\ \dfrac{u_1\left(1-q^5\right)}{1-q}=\dfrac{93}{16} \end{cases}.$$

Підставивши у друге рівняння замість $\frac{u_1}{1-q}$ його значення з першого рівняння, отримаємо:

$$6\left(1-q^5\right)=\frac{93}{16};\;\; q^5=\frac{1}{32};\;\; q=\frac{1}{2}.$$

Тоді

$$u_1=6\cdot(1-q)=6\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=3;\;\; u_2=u_1q=\frac{3}{2};\;\; u_3=u_1q^2=\frac{3}{4}.$$

ВІДПОВІДЬ. 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

ЗАДАЧА 1. Виконати дії:

1) $\dfrac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}$; 2) $\dfrac{|x-1|\cdot|x|}{x^2-x+1-|x|}$;

3) $\dfrac{\sqrt{1+\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)^2}}{(x^2+1)\cdot\dfrac{1}{x}}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{m+2}, \text{ якщо } m\in(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(3;+\infty) \\ -\dfrac{1}{m+2}, \text{ якщо } m\in(0;3) \end{cases}$;

2) $\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2+1}, \text{ якщо } x\in(-\infty;0) \\ \dfrac{x}{1-x}, \text{ якщо } x\in[0;1) \\ \dfrac{x}{x-1}, \text{ якщо } x\in(1;+\infty) \end{cases}$;

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}, \text{ якщо } x>0 \\ -\dfrac{1}{2}, \text{ якщо } x<0 \end{cases}$.

ЗАДАЧА 2. Виконати дії:

1) $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}+\sqrt{\dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}{\sqrt{\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}-\sqrt{\dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}$;

3) $\dfrac{||x|-1|\cdot|x|}{x^2-1}$; 4) $\dfrac{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4|x-1|}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a+b}}{2\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}}, \text{ якщо } 0<-b\le a\\ 1, \text{ якщо } 0\le b\le a, a\ne 0\end{cases}$;

2) $\begin{cases}-\sqrt{a-2}, \text{ якщо } a\in(3;+\infty)\\ -\dfrac{1}{\sqrt{a-2}}, \text{ якщо } a\in(2;3)\end{cases}$;

3) $\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}, \text{ якщо } x\in(1;+\infty)\\ -\dfrac{x}{x+1}, \text{ якщо } x\in[0;1)\\ \dfrac{x}{1-x}, \text{ якщо } x\in(-1;0)\\ \dfrac{x}{x-1}, \text{ якщо } x\in(-\infty;-1)\end{cases}$;

4) $\begin{cases}\dfrac{4-x^2}{x^2+4x-4}, \text{ якщо } x\in\left(-\infty;-2-2\sqrt{2}\right)\cup\\ \qquad\cup\left(-2-2\sqrt{2};-2+2\sqrt{2}\right)\cup\left(-2+2\sqrt{2};1\right)\\ \dfrac{x+2}{2-x}, \text{ якщо } x\in[1;2)\\ \dfrac{x+2}{x-2}, \text{ якщо } x\in(2;+\infty)\end{cases}$

ЗАДАЧА 3. Виконати дії:

1) $\dfrac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}}$, при $x>3$;

2) $\dfrac{a^4-a^2-2a-1}{a^3-2a^2+1}:\dfrac{a^4+2a^3-a-2}{1+\dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{a^2}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$; 2) $\dfrac{a+2}{a^2(a-1)^2}$; 3) $\sqrt{2}$.

ЗАДАЧА 4. Розв'язати рівняння:

1) $||x-4|-4|=3$; 2) $||x-4|+5|=6$;
3) $||x-4|+5|=4$; 4) $|x-4|=x-4$;
5) $|4-x|=x-4$; 6) $|x-4|=4-x$;
7) $x^2-2|x|-3=0$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in\{-3;3;5;11\}$; 2) $x\in\{3;5\}$; 3) $x\in\varnothing$;
4) $x\in[4;+\infty)$; 5) $x\in[4;+\infty)$; 6) $x\in(-\infty;4]$;
7) $x\in\{-3;3\}$.

ЗАДАЧА 5. Розв'язати рівняння:

1) $|x+2|+|x-6|=8$; 2) $|x+2|+|x-6|=4$;
3) $|x+2|+|x-6|=12$; 4) $|x|-2|x+1|+3|x+2|=3$;
5) $|x-1|+|x-2|-|x+3|-|x-5|+7=0$;
6) $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$;
7) $x^2+|x+3|+|3-x|=4{,}5|x|+6$; 8) $||1-3x|-|2x+1||=1$;
9) $x^2+2x-3|x+1|+3=0$; 10) $|x^3+3|x|+1|=1$;
11) $|x^2-2x-3|=|x^2-2x+5|$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in[-2;6]$; 2) $x\in\varnothing$; 3) $x\in\{-4;8\}$;
4) $x\in\{-3{,}5;-1{,}25\}$; 5) $x\in[1;2]$;
6) $x\in\{-2\}\cup[2;+\infty)$; 7) $x\in\{-4;0;4\}$;
8) $x\in\left\{-\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{5};1;3\right\}$; 9) $x\in\{-3;-2;0;1\}$;
10) $x\in\{-2;-\sqrt{3};0\}$; 11) $x=1$.

ЗАДАЧА 6. Розв'язати рівняння:

1) $(x+3)^4+(x+5)^4=16$; 2) $(3-x)^4+(2-x)^4=(5-2x)^4$;

3) $3x^4+4x^3+2x^2+x+6=0$; 4) $x^4-8x^2+x+12=0$;

5) $x^3-2\sqrt{7}\,x^2+7x-4\sqrt{7}+8=0$;

6) $\left(x^2+3x-2\right)^2+3\left(x^2+3x-2\right)-2=x$;

7) $x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in\{-5;-3\}$; 2) $x\in\{2;3\}$; 3) $x\in\varnothing$;

4) $x\in\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$;

5) $x\in\left\{1+\dfrac{1}{2}\sqrt{7}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{-5+4\sqrt{7}};-2+\sqrt{7}\right\}$;

6) $x\in\left\{-1\pm\sqrt{3};-2\pm\sqrt{2}\right\}$;

7) $x\in\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{29}}{2};\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$.

ЗАДАЧА 7. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases}|x+1|+|y-1|=5\\|x+1|=4y-4\end{cases}$; 2) $\begin{cases}3|x|+5y+9=0\\2x-|y|-7=0\end{cases}$;

3) $\begin{cases}y^2-|xy|+2=0\\8-x^2=(x+2y)^2\end{cases}$;

4) $\begin{cases}x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0\\2x^2-5xy-10y^2-3x+9y+7=0\end{cases}$;

5) $\begin{cases}x+2y+3z+4u=30\\2x-3y+5z-2u=3\\3x+4y-2z-u=1\\4x-y+6z-3u=8\end{cases}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\left\{(x;y)\,\middle|\,(-5;2);(3;2)\right\}$; 2) $\left\{(x;y)\,\middle|\,\left(\dfrac{44}{7};-\dfrac{39}{7}\right)\right\}$;

3) $\left\{(x;y)\,\middle|\,\left(-2\sqrt{2};\sqrt{2}\right);\left(2\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\right\}$;

4) $\left\{(x;y)\,\middle|\,(-3;-1);(-1;2);(1;1);(3;1)\right\}$;

5) $\left\{(x;y;z;u)\,\middle|\,(1;2;3;4)\right\}$.

ЗАДАЧА 8. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=5 \\ x+z=12 \\ y+z=9 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} xy=8 \\ yz=3 \\ zx=6 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} xy+yz=8 \\ yz+zx=9 \\ zx+xy=5 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} \dfrac{3}{xy}+\dfrac{15}{yz}=2 \\ \dfrac{15}{yz}+\dfrac{5}{zx}=2 \\ \dfrac{5}{zx}+\dfrac{3}{xy}=2 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x^2-(y-z)^2=4 \\ y^2-(z-x)^2=1 \\ z^2-(x-y)^2=9 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3 \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}=3 \\ \dfrac{1}{xyz}=1 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} x+y+z=9 \\ x^2+y^2+z^2=35 \\ xyz=15 \end{cases}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\{(x;y;z) \mid (4;1;8)\}$;

2) $\left\{(x;y;z) \,\middle|\, \left(4;2;\frac{3}{2}\right);\left(-4;-2;-\frac{3}{2}\right)\right\}$;

3) $\{(x;y;z) \mid (1;2;3)\}$;

4) $\{(x;y;z) \mid (1;2;3);(-1;-2;-3)\}$;

5) $\{(x;y;z) \mid (1;3;5);(-1;-3;-5)\}$;

6) $\left\{(x;y;z) \,\middle|\, \left(\frac{10}{3};\frac{13}{12};\frac{15}{4}\right);\left(-\frac{10}{3};-\frac{13}{12};-\frac{15}{4}\right)\right\}$;

7) $\{(x;y;z) \mid (1;1;1)\}$;

8) $\{(x;y;z) \mid (1;3;5);(1;5;3);(3;1;5);(3;5;1);$
$(5;1;3);(5;3;1)\}$.

ЗАДАЧА 9. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2xy-z^2=16 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x^3+xy^2=40y \\ y^3+x^2y=10x \end{cases}$;

3) $\begin{cases} xy+\dfrac{y}{x}=2\left(x^2+y^2\right) \\ xy-\dfrac{x}{y}=x^2+y^2 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x+y+xy=7 \\ x^2+y^2+xy=13 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x+xy+y=5 \\ x^3+x^3y^3+y^3=17 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ (xy+8)(x+y)=2 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} x^5+y^5=33 \\ x+y=3 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} x^2+y=5 \\ x^6+y^3=65 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} 10\left(x^4+y^4\right)=-17\left(x^3y+xy^3\right) \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$;

10) $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$; 11) $\begin{cases} x^3-y^3=8(x-y) \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\{(x;y;z)\,|\,(4;4;-4)\}$;

2) $\{(x;y)\,|\,(0;0);(4;2);(-4;-2)\}$; 3) $\begin{cases} x\in\varnothing \\ y\in\varnothing \end{cases}$;

4) $\{(x;y)\,|\,(3;1);(1;3)\}$; 5) $\{(x;y)\,|\,(2;1);(1;2)\}$;

6) $\{(x;y)\,|\,(3;-2);(-2;3)\}$;

7) $\{(x;y)\,|\,(2;1);(1;2)\}$;

8) $\{(x;y)\,|\,(2;1);(-2;1);(1;4);(-1;4)\}$;

9) $\{(x;y)\,|\,(2;-1);(-2;1);(1;-2);(-1;2)\}$;

10) $\{(x;y)\,|\,(2;1);(2;-1);(-2;1);(-2;-1);(1;2);$
$(1;-2);(-1;2);(-1;-2)\}$;

11) $\{(x;y)\,|\,(2;2);(-2;-2);\left(2\sqrt{2};0\right);\left(-2\sqrt{2};0\right);$
$\left(0;2\sqrt{2}\right);\left(0;-2\sqrt{2}\right)\}$.

ЗАДАЧА 10. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y^2}{x} = \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x^2 + y - 20 = 0 \\ x + y^2 - 20 = 0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x^2 + y^4 = 20 \\ x^4 + y^2 = 20 \end{cases}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $\{(x;y) \mid (2;1);(-1;-2)\}$;

2) $\left\{(x;y) \middle| (-5;-5);(4;4);\left(\dfrac{1+\sqrt{77}}{2};\dfrac{1-\sqrt{77}}{2}\right);\right.$

$\left.\left(\dfrac{1-\sqrt{77}}{2};\dfrac{1+\sqrt{77}}{2}\right)\right\}$;

3) $\{(x;y) \mid (2;2);(2;-2);(-2;2);(-2;-2)\}$.

ЗАДАЧА 11. Розв'язати системи нерівностей та нерівності:

1) $\begin{cases} |x-1| + |x-10| - 23 > 0 \\ |2-x| > 10 \end{cases}$; 2) $x|x-2| > \dfrac{1}{2}$;

3) $x^2 + 3|x| + 2 > 6x|x|$; 4) $|x-6| > |x^2 - 5x + 9|$;

5) $(|x|-1)^2 > 2$; 6) $\left|\dfrac{3x+1}{|x-3|}\right| < 3$;

7) $\left|\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right| \le 1$; 8) $\dfrac{x^2 - |x| - 12}{x-3} \ge 2x$;

9) $\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6 \\ |x+1| \le 1 \end{cases}$; 10) $\begin{cases} |x^2 - 4x| < 5 \\ |x+1| < 3 \end{cases}$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x \in (-\infty;-8) \cup (17;+\infty)$;

2) $x \in \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2};\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{2+\sqrt{6}}{2};+\infty\right)$;

3) $x \in (-\infty;1)$; 4) $x \in (1;3)$;

5) $x \in \left(-\infty;-1-\sqrt{2}\right) \cup \left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$;

6) $x \in \left(-\infty;\dfrac{4}{3}\right)$; 7) $x \in [0;1,6] \cup [2,5;+\infty)$;

8) $x \in (-\infty;3)$; 9) $x \in (-2;0]$; 10) $x \in (-1;2)$.

ЗАДАЧА 12. При яких значеннях x різниця

$$\frac{11x^2-5x+6}{x^2+5x+6}-x$$

приймає лише від'ємні значення?

ВІДПОВІДЬ. $x\in(-3;-2)\cup(1;2)\cup(3;+\infty)$.

ЗАДАЧА 13. При яких значеннях m нерівність

$$\frac{x^2+mx-1}{2x^2-2x+3}<1$$

виконується для будь-яких x?

ВІДПОВІДЬ. $m\in(-6;2)$.

ЗАДАЧА 14. Розв'язати нерівності:

1) $\left(\frac{x^2}{8}+\frac{3x}{4}+\frac{3}{2}+\frac{1}{x}\right)\left(1-x-\frac{(x-2)^2(1-x)}{(x+2)^2}\right)>0$;

2) $\frac{x^4+3x^3+4x^2-8}{x^2}<0$; 3) $\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10}<0$;

4) $x^2\left(x+3\sqrt{5}\right)+5\left(3x+\sqrt{5}\right)>0$;

5) $\left(x^2+4x+10\right)^2-7\left(x^2+4x+11\right)+7<0$.

ВІДПОВІДЬ. 1) $x\in(-2;0)\cup(0;1)$; 2) $x\in(-2;0)\cup(0;1)$;
3) $x\in(-\infty;-5)\cup(-3;-1)\cup(1;2)$;
4) $x\in\left(-\sqrt{5};+\infty\right)$; 5) $x\in(-3;-1)$.

ЗАДАЧА 15. Побудувати графіки функцій:

1) $y=|x-1|+|x-2|$; 2) $y=|x-3|+|x-2|+|2x-8|$;

3) $y=\frac{|x+1|+|x-1|}{|x+1|-|x-1|}$; 4) $y=\frac{x}{|x|}$; 5) $y=x|x|$;

6) $y=x^2+5|x|+6$; 7) $y=|x^2+5x+6|$;

8) $y=|x^2+5|x|+6|$; 9) $y=-x^2+4|x|-5$;

10) $y=\frac{x^2-3x+2}{|x-2|}$; 11) $|y|=4-x^2$; 12) $y=\frac{1}{|x-1|}$;

13) $y=\frac{1}{|x|-1}$; 14) $|y|=\frac{1}{|x|-1}$; 15) $y=|x|-\frac{1}{x-1}$;

16) $y=|x|-\frac{1}{|x-1|}$; 17) $y=|x|-\frac{1}{||x|-1|}$.

ЗМІСТ

7 КЛАС

8 КЛАС

9 КЛАС

Кушнір Ісаак, Фінкельштейн Леонід

К96 Алгебра: від опанування до захоплення. Посібник для учнів 7–9 класів. — К.: Факт, 2002. — 448 с., іл.

ISBN 966-664-057-0

У книжці розглядається курс алгебри для учнів 7–9 класів. Велика кількість задач і вправ, чітка структура, стислість і, у той же час, повнота теоретичних відомостей, наявність дидактичних матеріалів роблять посібник цікавим та корисним.

Для учнів 7–9 класів загальноосвітніх та спеціалізованих шкіл, вчителів математики, репетиторів.

УДК 512 (07)
ББК 22.14я721

КУШНІР Ісаак
ФІНКЕЛЬШТЕЙН Леонід

АЛГЕБРА:
від опанування до захоплення
Посібник для учнів 7–9 класів

Київ, «Факт», 2002, 448 с., іл.

Науковий редактор *Дмитро Фінкельштейн*
Літературний редактор *Дзвенислава Матіяш*
Технічний редактор *Станіслав Чистяков*
Коректор *Ніна Тихоновська*
Макетування обкладинки *Інокентій Вировий*
Верстка та макетування *Олександр Дмитрієв*

Видавництво «Факт»
04080, Україна, Київ-80, а/с 76
Тел./факс: (044) 417 1366, 416 8754
Відділ збуту: (044) 417 5053
www.fact.kiev.ua
E-mail: office@fact.kiev.ua

Поліграфічний центр «Фоліант»
Україна, Київ, вул. Електриків, 26
Тел./факс (044) 416 3001
E-mail: foliant@webber.kiev.ua

Здано до виробництва 15.05.2002. Підписано до друку 12.08.2002. Формат 60×100 1/16. Друк офсетний. Папір офсетний № 1. Гарнітура «Таймс». Ум.-друк. арк. 31,11. Обл. вид. арк. 19,82. Наклад 3 000 прим. зам. 106.

ФАКТ
ВИДАВНИЦТВО

СУЧАСНІ КНИЖКИ СУЧАСНОГО ВИДАВНИЦТВА