КОМУНІСТИЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. Т. АРТЕМА

М. ГОЛУБЕНКО, Є. КОВАЛЕНКО, М. СИГІДИН

КУРС МАТЕМАТИКИ

ДЛЯ КОМУНІСТИЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМ. ТОВ. АРТЕМА, ДЛЯ РАДПАРТШКІЛ, НЕІНДУСТРІЯЛЬНИХ РОБФАКІВ ТА ТЕХНІКУМІВ

Державний Науково-Методологічний Комітет Наркомосвіти УСРР по секції Політосвіти **ДОЗВОЛИВ** до вжитку, як підручник для Комвузів та як посібник для радпартшкіл

КНИГОСПІЛКА

Укрголовліт 5023. Харків.
Замовлення 1655. Т. 3000.
Літ.-друкарня
КНИГОСПІЛКИ
Нетеченська
наб., 14.
1927.

ПЕРЕДМОВА

Ця книжка—підручник з математики для Комуністичного Університету ім. тов. Артема. Таке безпосереднє призначення книги. Але її використати можуть і Радпартшколи й неіндустріяльні Робфаки та, до деякої міри, неіндустріяльні Технікуми. Виходячи з головного призначення книги, автори й вибрали з математики ті чи инші відділи її. Завданням собі автори поставили дати не систематичний курс математики, а той курс, що його вимагають сучасні потреби Комвузів (роля математики у Комвузі — дати достатню підготовку до слухання курсів економічних наук і до певної міри призвичаїти студента до математичного думання). Через це курс починається з наочно-індуктивної методи й поволі переходить до більш-менш строгих математичних формульовок і положень. Автори намагалися зробити цей перехід повільно, рівнобіжно з розвитком знання та навичок у студентів. А тому, перші розділи книги написано мовою далеко простішою за останні.

Друга особливість «Курсу» полягає в бажанні авторів дати суцільний, монолітний курс, без поділу на старі розділи (аритметику, геометрію то-що). В міру можливости та вміння автори сплели ці відділи один з одним, намагаючись додержуватися органічного звязку поміж ними і певної необхідної послідовности та потреби тої чи иншої частини у звязку з цілим.

Через те, що «Курс» розраховано на навчання за лабораторною методою, автори намагалися надати підручникові такого характеру, щоб його можна було дати до рук студентів для самостійної проробки різних частин. А це вимагало спеціяльного підходу до тих або инших питань, а також найпростішої мови. Мусимо попередити, що цей підручник не є задачник й що ті задачі, що їх дано в розділах книги або після розділів, є тільки зразкові. Автори не думають, що вивчаючи математику з книги, треба обмежитися лише цими задачками.

Що до порядку розподілу матеріялу, автори подали його в тій послідовності, як це вимагають умови праці в Комвузі. Але залежно від умов праці в инших школах та особистих міркувань викладача, якщо він цього забажає, можна використовувати цю книгу й у иншій послідовності.

Наприкінці автори зазначають, що книгу складалося за дуже тяжких умов, а тому в ній безумовно є похибки; за вказівки на них автори висловлюють зарані подяку.

Користуючися з цієї нагоди, автори висловлюють подяку Правлінню Комуніверситету ім. тов. Артема за його прихильність до видання книги, а також т.т. Карпенкові Н. П. та Литвинові О. І. за їхні турботи що до видання.

Автори

ВСТУП

Дії з числами цілими. Закони аритметичних дій. Заокруглення чисел. Поняття про дріб

Кожному, хто бажає вивчити математику з цієї книги, необхідно вже знати деякі частини цієї науки, що їх, звичайно, всі знають. Ми тут коротко нагадуємо ці початкові відомості.

Насамперед згадаємо, як записуються числа.

Нумерація

§ 1. Зі статистики ми взнаємо, що на 1 січня 1925 року на Україні було міського населення 3 834 000, а сільського—24 025 000.

Вже тут ми бачимо чотири числа й вони всі різно написані. Число «1» складається з одної цифри, число «1925» з чотирьох, а останні два числа—з семи та восьми цифр. Маленькі числа ми записуємо з допомогою меншої кількости цифр, а великі—з допомогою більшої кількости. Кожна річ підчас лічби має назву одиниця. Якщо число речей не більше від дев'яти, ми записуємо це число з допомогою однієї цифри, цифри одиниць. Десять одиниць складають один десяток і число десять і більше, але менше ніж десять десятків, записуємо з допомогою двох цифр. Останню цифру числа звемо одиницями, а ту, що перед нею—десятками. Таке число, як «25» складається з двох десятків та п'ятьох одиниць. Цифру «5», що стоїть на останньому місці в числі, на місці одиниць, ми звемо цифрою *першого порядку*, цифру «2» звемо цифрою *другого порядку*.

На третьому, від кінця, місці ми пишемо цифри, що визначають сотні й звемо ці цифри цифрами *третього порядку* або цифрами порядку сотень.

Якщо нам потрібно записати ще більше число, то треба буде збільшити й кількість цифр. Ми об'єднуємо цифри трьох порядків—першого, другого та третього в одну групу, що має назву *класа*. Першій класі, що складається з трьох останніх цифр, надають назву—*класа одиниць*. Друга класа має назву—*класа тисяч*, третя класа є *класа мільйонів*, четверта—*класа більйонів* або *мільярдів* і т. д.

Таким чином, кожна цифра становить один порядок, а кожні три цифри, починаючи з одиниць, з останньої цифри числа, становлять *класу*. Кожне число поділяють, щоб його зручніше було зачитати, на класи, виділяючи для кожної класи по три цифри, починаючи з останньої; підчас такого поділу на класи в усіх класах, опріч найвищої, найпершої, з початку, мусить бути по три цифри; перша, з початку, класа може мати й 3, й 2, й 1 цифру.

Тут-же треба підкреслити, що кожна одиниця вищого порядку в 10 разів більша від одиниці безпосередньо нижчого порядку, а кожна одиниця вищої класи в 1 000 разів більша за одиницю безпосередньо нижчої класи. Напр., у числі 3 840 000 перша цифра 3 є цифра сьомого порядку, визначає одиниці третьої класи—мільйони; ця класа має в собі одну тільки цифру 3. Безпосередньо нижча класа складається з трьох цифр (трьох порядків) 840, також і остання класа має в собі три цифри—самі нулі. Класа одиниць та класа тисяч мають в собі по три цифри, а класа мільйонів—лише одну. Відділено на письмі класи одну від одної таким чином, що поміж класами залишено порожнє місце. Цей спосіб розділу класів одної від одної далеко зручніший, аніж вживання протинки. Далі, зверніть увагу, що остання класа визначає одиниці, а друга—тисячі, кожна-ж тисяча рівно в 1 000 разів більша за одиницю; третя, з кінця, класа визначає мільйони, а мільйон також у 1 000 разів більший за тисячу.

Підчас поділу чисел на порядки та класи, нам доводиться користуватися з нуля. Це саме буває тоді, коли в даному числі немає одної або й декількох одиниць якогось порядку. Наприклад, у числі 3 834 000 три останні цифри—нулі; хоча нуль сам по собі не визначає жадної одиниці, проте він відограє дуже велику ролю в даному числі, а саме—він вказує, що в числі немає зовсім одиниць першої класи, й, таким чином, зараз-же ми розуміємо, що 834 є вже одиниці другої класи—класи тисяч. Ще яскравіше помічаємо ролю числа 0 у другому з даних спочатку чисел: 24 025 000; тут ми бачимо нуль не тільки наприкінці, але й на шостому, від кінця, місці, він у даному разі вказує, що сотень тисяч у числі немає. Якби ми пропустили в числі нуля або дописали зайвого або нарешті написали його не на належному місці, ми зовсім змінили-б наше число. Найкраще це розібрати з таких вправ:

Вправи—Зачитайте числа та вкажіть однакові вони чи ні: 107 та 170; 1 950 та 1 095; 22 000, 22, 2 200, 220 та 20 002, 2 002, 202.

Нуля називають н е в а р т і с н о ю цифрою, а всі инші цифри, крім нуля, є цифри в а р т і с н і.

§ 2. Д і ї. Ми розглянемо зараз ті дії, що доводиться робити з числами й що кожному читачеві вони вже відомі. Ми тут нагадаємо про них і підкреслимо те, з чого скористуємося далі.

Додавання Розвяжім задачу: За період 1922/3 року кількість робітників, що працювали в кам'яновугляній промисловості на Україні, була 119 180 чол., а за період 1923/4 року ця кількість збільшилася на 33 905 чол. Скільки робітників було зайнято року 1923/4 в кам'яновугляній промисловості?

Ми знаємо, що в данім разі нам треба до першого числа додати друге. Зробіть це додавання Згадайте, що підчас додавання доводиться нам підписувати друге число під першим так, щоб одиниці другого числа стали під одиницями першого, десятки — під десятками, сотні — під сотнями. Додавання звичайно починають робити з одиниць, потім додають одні до одних десятки, далі сотні й т. д. Результат додавання пишуть під рискою. Якщо після додавання ми дістанемо, в якомусь порядкові 10, ми підписуємо під цим порядком нуля, а одиницю додаємо до одиниць вищого порядку. Якщо при додаванні одиниць якогось порядку ми дістанемо більше від десяти, то число цілих десятків становить одиниці вищого порядку, і ми їх туди додаємо, а остачу від цілого числа десятків підписуємо під даним порядком. Запам'ятаймо зараз-же, що ті числа, які ми додаємо, звуться д о д а н к и, а те число, що дістаємо після додавання, звемо с у м а. Доданків може бути і більше від двох, а наслідком додавання їх усіх буде спільна їхня сума.

$$\begin{array}{r} 119\,180 \\ +\ \ 33\,905 \\ \hline 153\,085 \end{array}$$

Віднімання

§ 3. **Задача** — За останніми відомостями статистики на всій Україні було населених пунктів 43 013; в цьому числі на АМСРР припадало 705. Скільки населених пунктів у самій Україні?

Щоби розвязати цю задачу, нам доведеться від 43 013 відняти 705. Зробім цю дію. Підписуємо, як і підчас додавання, дані числа одне під одним, щоб одиниці були під одиницями, десятки—під десятками й т. д. Віднімання починаємо з кінця, з одиниць. З трьох одиниць ми мусимо відняти 5, а тому, що ми цього не зможемо зробити, ми беремо 1 десяток, перетворюємо його на одиниці й уже з тринадцятьох одиниць віднімаємо 5. Результат—8—підписуємо під одиницями. Продовжуємо так віднімання до кінця; у всякому разі, коли доведеться віднімати від меншого числа одиниць, якогось порядку, більше—ми беремо одну одиницю більшого від даного порядку, перетворюємо її на 10 одиниць меншого, і тоді віднімання стає можливим.

$$\begin{array}{r} 43\,013 \\ -\qquad 705 \\ \hline 42\,308 \end{array}$$

Звернім увагу на такий випадок, коли в даному числі, що від нього віднімаємо, буде декілька нулів поряд 2 000 — 1 385.

Беремо 1 тисячу, перетворюємо її на 10 сотень, із 10 сотень беремо 1 і перетворюємо на 10 десятків, нарешті з 10 десятків беремо 1 і перетворюємо на 10 одиниць. Після цього віднімаємо, як і раніш.

$$\begin{array}{r} 2\,000 \\ -\ 1\,385 \\ \hline 615 \end{array}$$

Запам'ятаймо такі назви чисел підчас віднімання: те число, що від нього віднімаємо, або инакше, те число, що ми його зменшуємо, звуть з м е н ш е н и к. Те число, що його саме віднімаємо, звуть в і д ' є м н и к. Результат віднімання ми називаємо о с т а ч а або р і з н и ц я.

Основні закони додавання

§ 4. Як-би гарно ми не вивчили аритметичних дій, може трапитися помилка, коли ми робимо додавання або віднімання, а тому необхідно навчитися перевіряти ці дії. Ця перевірка залежить від такого закону (закон перемінний додавання): від зміни порядку доданків сума не міняється. Такий закон дуже легко перевірити й він трапляється нам на кожному кроці. Напр., коли ми маємо дістати 8 карб., то байдуже—чи дадуть нам 5 крб. та 3 крб., чи инакше—3 крб. та 5 крб.

Користуючися з цього закону, ми можемо перевіряти додавання, міняючи місця доданків. Напр., дано додавання таке:

$$\begin{array}{r} 4\,875 \\ +\,3\,125 \\ \hline 8\,000 \end{array} \quad \text{Перевірмо таким чином} \quad \begin{array}{r} 3\,125 \\ +\,4\,875 \\ \hline 8\,000 \end{array}$$

Якщо дано не два, а більше доданків, нам доведеться користуватися з другого закону, що не важчий від першого.

Задача—За відомостями на 1 жовтня 1924 р. в усій УСРР сільсько-господарських комун було по різних кол. губернях:

Волинська	12	Київська	28	Полтавська	33
Донецька	27	Одеська	42	Харківська	17
Катеринославська	83	Подільська	29	Чернігівська	18

Скільки було всіх сільсько-господарських комун в УСРР?

Відповідь на цю задачу ми можемо знайти, додаючи послідовно числа—12, 27, 83, 28, 42, 29, 33, 17, 18 і дістанемо 289. Можемо инакше знайти кількість комун, а саме—додамо спочатку по 3 числа—$12+27+83=122$ (перші), $28+42+29=99$ (другі) й $33+17+18=68$ (треті губерні). Щоб дістати всю кількість комун, додаємо всі ці три суми разом і маємо $122+99+68=289$, цеб-то ту саме суму. Підчас додавання першим разом, ми додавали доданки один до одного послідовно, а другим разом, ми створили групи по 3 доданки в кожній і потім додали одну до одної ці 3 часткові суми, що дістали з груп. Можна було-б ще инакше взнати загальну кількість комун в УСРР, хоча-би злучаючи спочатку 4 губерні, потім другі 4 й нарешті дві перші суми додаючи до кількости комун у Чернігівщині. (Перевірте це). Можна ще вигадати багато способів для підрахунку кількости комун. Але, якщо ми не помиляємося, загальна остаточна сума буде 289.

Таким чином, ми приходимо до другого закону додавання (до закону злучного): підчас додавання дані доданки можна злучити в які завгодно групи доданків, пробробити додавання в кожній групі окремо, а для находження загальної суми додати одну до одної часткові суми.

Цей другий закон дозволяє нам перевірити додавання в тому випадкові, коли дано не 2, а більше доданків. В цьому разі, щоб упевнитися, що додавання зроблено вірно, треба поміняти порядок доданків і пошукати знов суму, або розбити суму на групи й додати члени-доданки кожної групи, а потім додати одну до одної суми цих груп. Можна для перевірки взяти инші ще групи. Якщо результати різноманітних додавань будуть однакові, можна сподіватися, що додавання зроблено вірно.

Вправа—Зробіть додавання 179 + 4 563 + 1 905 + 268 та перевірте результат.

Залежність поміж доданками та сумою

§ 5. Додавання можна перевірити ще инакшим способом, а для цього треба помітити залежність поміж доданками та сумою. Цю залежність ми побачимо з таких задач:

Задача 1 — Робітник дістав за місяць 63 карб. платні, а його дружина 32 карб. Скільки вони мали вдвох платні на місяць?

2 — Робітник та дружина його заробили за місяць 95 карб., а сам робітник заробив 63 карб. Скільки заробила дружина?

3 — Робітник разом з дружиною заробив 95 карб., а сама дружина 32 карб. Скільки заробив сам робітник?

Щоб розвязати ці задачки, нам доводиться зробити такі розрахунки:

для 1-ї зад. — 63 карб. + 32 карб. = 95 карб.,
для 2-ї зад. — 95 крб. — 63 карб. = 32 карб.,
для 3-ї зад. — 95 карб. — 32 карб. = 63 карб.

Можна було-б придумати таких задачок дуже багато. Розгляньмо тепер просто додавання: 89 + 97 = 186 і попробуймо відняти від суми (186) спочатку 1-й, а ~~в другий раз~~ другий доданок. Після віднімання дістанемо:

186 — 89 = 97 у першім разі і 186 — 97 = 89 у другому.

Таких прикладів та задачок можна придумати скільки завгодно й усі вони впевнюють нас, що *кожний доданок є рівний сумі без другого доданку.*

На підставі цієї залежности між доданками та сумою можна перевіряти додавання за допомогою віднімання: з суми відняти один з доданків і мусимо дістати другий доданок.

Залежність поміж зменшеником, від'ємником та різницею

§ 6. Щоб перевірити віднімання, ми мусимо дослідити, яка залежність між зменшеником, від'ємником та різницею. Таку залежність ми помітимо з задач.

Задача 1—30 вересня р. 1925 в УСРР було лікарсько-амбулаторних участків усіх 1 497; із них 162 обслуговували транспортників. Скільки було загально-громадянських участків?

2—Із 1 497 амбулаторних участків 1 335 було загально-громадянських, а останні—транспортні. Скільки було транспортних лікарських участків?

3—Загально громадянських амбулаторних участків було 1 335, а транспортних 162. Скільки було всіх участків?

Ці три задачі розвязують таким чином:

1 зад.—1 497—162 = 1 335; **2** зад.—1 497—1 335 = 162; **3** зад.—1 335 + 162 = 1 497.

Розгляньте ще такі приклади на віднімання:

734 — 689 = 45; 734 — 45 = 689; 689 + 45 = 734.

Розглядаючи такі задачі та приклади, ми помічаємо такі властивості віднімання:

1—Зменшеник є рівний сумі різниці та від'ємника.

2—Від'ємник є рівний різниці між зменшеником та різницею даного віднімання.

Ці саме властивості можна висловити ще й так:

1—Щоб знайти зменшеника, знаючи різницю та від'ємника, треба до різниці додати від'ємника.

2—Щоб знайти від'ємника, треба від зменшеника відняти різницю.

Ці властивості дозволяють нам перевірити віднімання двома способами—або з допомогою додавання або з допомогою віднімання. Щоб перевірити віднімання, треба або додати до різниці від'ємника й мусимо дістати зменшеника, або—від зменшеника відняти різницю й мусимо мати від'ємника.

Зміна суми від зміни доданків

§ 7. Попробуємо дослідити тепер, як змінюється сума у звязку зі зміною доданків. Розгляньмо задачі:

1—Робітник у січні мав платні 60 крб., а в лютому заробіток його був 72 крб., Скільки він заробив за ці два місяці?

2—Його товариш заробив у січні 67 крб., а в лютому також, як і перший—72 крб. Скільки заробив цей робітник за два місяці?

Яка причина того, що за два місяці ці робітники мали неоднаковий заробіток? На це вплинув безумовно заробіток січневий, бо у лютому заробіток у них обох був однаковий; і той робітник, що заробив більше за січень, має більший заробіток і за два місяці. На скільки-ж більше заробив другий? Відповідь на таке запитання знайдемо в такому:

Перший заробив за 2 міс. 60 + 72 = 132 крб.
Другий » » » » 67 + 72 = 139 »

На скільки другий заробив більше від першого? 139 — 132 = 7 крб.

На скільки другий заробив більше від першого в січні місяці? 67 — 60 = 7 крб.

Другий робітник заробив настільки більше від першого, наскільки більше заробив він у січні.

Досліджуємо на таких прикладах зміну суми ще раз:

+ 182 перший доданок		Збільшуємо на 18 перш. дод.	+ 200
215 другий »		Не змінюємо другий додан.	215
397 сума		Нова сума	415

Наскільки змінилася сума? 415 — 397 = 18.

Ми можемо пробити таким чином багато задачок та вправ і вони всі дадуть нам змогу зробити такий висновок:

Якщо один із доданків збільшити або зменшити на якесь число, сума також збільшиться або зменшиться настільки саме.

Якби змінювалися обидва доданки, то сума також мінятиметься відповідним чином.

Простежмо зміну суми, коли один з доданків зменшується, а другий збільшується на таку саме величину.

Задача—Одного місяця батько заробив 80 крб., а син—50. Другого місяця заробіток батька знизився на 20 крб., а заробіток сина збільшився на 20 крб. Чи змінилася чи ні загальна величина заробітку їх обох укупі другого місяця?

Приклади:	Перший додан.	120	Збільшуємо перш. додан. на	100	220
	Другий »	250	Зменшуємо друг. » »	100	150
	Сума	370	Сума		370

Таких прикладів можна проробити багато й мати висновок:

Якщо один із доданків збільшуємо, а другий зменшуємо на одне й те саме число, сума лишається без зміни.

Зміна різниці від зміни зменшеника та від'ємника

§ 8. **Задача**—Комунгосп одержав від одної цеглярні 15 000 шт. цегли, а від другої—20 000 шт. В кожній партії було по 350 шт. бою (зіпсованої цегли). Скільки штук гарної цегли дістав Комунгосп з кожної цеглярні? Чому неоднакову кількість цегли гарної має завод із кожної цеглярні? Наскільки більше було приставлено цегли з другої цеглярні, аніж з першої? Наскільки більше вийшло гарної цегли з другої цеглярні?

Дуже легко мати відповідь на це питання.

Розгляньмо тут такі приклади:

Зменшеник	75	Збільшуємо зменш. на 20, стане	95
Від'ємник	40	Від'ємник не міняємо	40
Різниця	35	Різниця	55

Наскільки збільшилась різниця?

$$55 - 35 = 20$$

Зменшеник	80	Зменшуємо зменш, на 12, стане	68
Від'ємник	50	Від'ємник без зміни	50
Різниця	30	Різниця	18

Що стало з різницею?

$$30 - 18 = 12$$

Всі такі вправи нам доводитимуть, що збільшуючи або зменшуючи на якесь число зменшеника, ми настільки саме збільшуємо або зменшуємо різницю, якщо від'ємника лишаємо без зміни.

Задача—Р. 1916 кількість коней в УСРР була 5 423 000, р. 1923 стала 3 758 100, а р. 1924—3 929 300. Наскільки зменшилася кількість коней р. 1923 та 1924 з р. 1916?

Зробіть такі віднімання: 5 423 000 — 3 758 100 = 1 664 900 та 5 423 000 — 3 929 300 = 1 493 700 (перевірте це).

Зменшення кількости коней в УСРР в порівнянні з р. 1916 було неоднакове. Року 1922 зменшення було більше й можна взнати наскільки—1 664 900—1 493 700 = 171 200. Від чого походить ця неоднаковість зменшення коней, ми зрозуміємо, якщо згадаємо, що ми порівнюємо неоднакові кількості коней р. 1923 та 1924 з кількістю коней 1926. Взнаємо ще, на скільки більше було коней р. 1924, аніж р. 1923. Для цього віднімемо 3 929 300 — 3 758 100 = 171 200.

Розгляньмо ще такі приклади, де зменшеника ввесь час лишатимемо без зміни, а від'ємника або збільшимо або зменшимо на декілька одиниць.

$\begin{array}{r} 89 \\ -\ 32 \\ \hline 57 \end{array}$	Збільшуємо від'ємника на 10 (зменшеник без зміни)	$\begin{array}{r} 89 \\ -\ 42 \\ \hline 47 \end{array}$	Різниця зменшується на 10	$\begin{array}{r} 57 \\ -\ 47 \\ \hline 10 \end{array}$
$\begin{array}{r} 75 \\ -\ 50 \\ \hline 25 \end{array}$	Зменшуємо від'ємника на 15 а зменшеника лишаємо без зміни	$\begin{array}{r} 75 \\ -\ 35 \\ \hline 40 \end{array}$	Різниця збільшується на 15	$\begin{array}{r} 40 \\ -\ 25 \\ \hline 15 \end{array}$

Такі приклади та задачі приводять нас до висновку: з б і л ь ш у ю ч и а б о з м е н ш у ю ч и в і д ' є м н и к а н а я к е с ь ч и с л о й лишаючи зменшеника без зміни, м и н а с т і л ь к и с а м е з м е н ш у є м о або з б і л ь ш у є м о р і з н и ц ю.

Нарешті, досліджуємо такий випадок зміни різниці, коли зміняються одночасно і зменшеник і від'ємник на однакове число.

Задача—За перший місяць існування кооперативу було продано краму на 1 500 карб., а всіх витрат було 1 250 карб. За другий місяць одержано за проданий крам на 300 карб. більше, а тим часом і витрати збільшились на 300 карб. Який був чистий прибуток за перший та за другий місяць існування кооперативу?

Проробіть усі потрібні дії і ви побачите, що чистого прибутку було і за перший і за другий місяць однаково.

Розгляньмо ще такі приклади:

Зменшеник	100	Збільшуємо зменшеника на 20	120
Від'ємник	60	» від'ємника » »	80
Різниця	40	Різниця	40
Зменшеник	72	Зменшуємо зменшеника на 12	60
Від'ємник	37	» від'ємника » »	25
Різниця	35	Різниця	35

Такі задачі та вправи дають нам змогу зробити висновок: *якщо зменшеника та від'ємника одночасно збільшити або зменшити на одне число, то різниця лишиться без зміни.*

Множення

§ 9. **Задача**—Що-дня на утримання загону червоноармійців потрібно 752 карб. Скільки потрібно цьому загонові на рік (365 дн.)?

Щоб розвязати таку задачу, треба 752 помножити числом 365. Підписуємо одне число під одним і перше множимо другим. Перше число звуть *множеник*, а те, що ним множуть, звуть *множник*; результат множення називають *добуток* (або здобуток).

$$\begin{array}{r} \times\ 752 \\ 365 \\ \hline 3760 \\ 4512 \\ 2256 \\ \hline 274480 \end{array}$$

Розгляньте, як саме роблять множення. Починають множення знов з кінця і множать спочатку цілого множеника першою цифрою з кінця у множнику. Добуток підписують під рискою і називають *перший частковий добуток*. Далі знов увесь множеник множать десятками множника. *Другий частковий добуток* підписують під першим, але таким чином, щоб його найменший порядок був під десятками, бо його ми дістали від множення десятками множника і він нам дає десятки. Так само продовжуємо множення і далі й увесь час, коли доводиться множити новою цифрою множника, частковий добуток записуємо, відступаючи що-разу на одну цифру ліворуч далі.

Особливо заслуговують увагу такі випадки множення, що ми їх розглянемо на таких прикладах.

Задача—Завод виготовив 100 парових казанів (котлів), що кожний важить 155 пуд. Скільки важуть всі казани?

$$\begin{array}{r} \times\ 155 \\ 100 \\ \hline 15\,500 \end{array}$$

Пам'ятаймо, що від множення вартісні цифри ті саме, що й у множеникові, а лише на кінці дописується 2 нулі, стільки, скільки їх є у множникові.

На підставі цього дуже легко множити кожне число числами 10, 100, 1000 й т. далі—слід тільки до цифр даного числа дописати стільки нулів, скільки їх є у множникові.

Задача—Кожному з червоноармійців було видано по 150 набоїв. Скільки набоїв видано на ескадрон, якщо в ескадронові було 107 червоноармійців?

$$\begin{array}{r} \times\ 150 \\ 107 \\ \hline 1050 \\ +\ 150 \\ \hline 16050 \end{array}$$

Треба помножити 150 числом 107. У цьому випадкові як і звичайно, ми починаємо множити цілого множеника числом одиниць множника. Далі треба було-б помножити множеника числом десятків множника. Але у множникові десятків зовсім немає, а тому після одиниць ми множимо цілого множеника числом сотень множника. В такому разі доводиться і відповідний частковий добуток підписувати під сотнями першого.

Вправа—Помножіть $4\,126 \times 2\,005 = ?$

Слід звернути увагу на випадок, коли множеник і множник обидва разом мають наприкінці нулі.

Задача—На заводі було 200 робітників одного розряду; кожному з них потрібно видати платні по 40 карб. Скільки треба карбованців, щоб розплатитися з робітниками цього розряду?

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}40\\200\end{array} \\ \hline 8\,000 \end{array}$$

В такому разі, коли обидва члени множення закінчуються на нулі, ми перемножуємо самі вартісні цифри й у остаточному добуткові дописуємо стільки нулів, на правому боці, скільки їх було у множеникові та множникові разом.

Вправа—Зробіть множення: $3\,725 \times 100$; $5\,027 \times 904$; $4\,500 \times 40$; 125×80.

Ділення

§ 10. **Задача**—39 964 пуди пресованого сіна займають 412 куб. саж. Скільки важить кожна куб. саж. цього сіна?

$$\begin{array}{r|l} 39964 & 412 \\ \cline{2-2} -3708 & 97 \\ \cline{1-1} 2884 & \\ -2884 & \\ \cline{1-1} 0000 & \end{array}$$

Поділяючи 39 964 п. на 412, ми мусимо відокремити у числі 39 964 стільки цифр з л і в а, щоб вони склали число більше від 412. У данім разі відокремлюємо 3 996. Число 412 міститься в 3 996 всього 9 разів. Число 9 становить десятки результату ділення, бо й 3 996 становлять десятки[1]). Далі множимо 412 числом 9 і добуток віднімаємо від 3 996. До остачі переписуємо дальшу цифру з даного, для поділу, числа і поділяємо 2 884 на 412. Цифра 7 становить одиниці результату ділення. Помноживши 412 числом 7 і віднімаючи цей добуток од 2 884, ми не маємо вже жадної остачі. Результат ділення є 97.

Те число, що його ми поділяємо, звуть д і л е н и к, а те, що на нього поділяємо, звуть д і л ь н и к; нарешті, результат поділу, звуть ч а с т к а.

Не завжди, як відомо, ділення можна зробити до кінця націло, часто буде в нас о с т а ч а.

$$\begin{array}{r|l} 800 & 60 \\ \cline{2-2} -60 & 13 \\ \cline{1-1} 200 & \\ -180 & \\ \cline{1-1} 20 & \end{array}$$

Зробивши ділення, бачимо, що частка буде 13, але ще лишається 20, що й складають остачу.

[1]) 30 000 становлять 3 000 дес., 9 000 це є 900 дес., а 9 сот. є 90 десятків.

Особливо підкреслюємо той випадок ділення, коли в частці будуть в середині числа нулі. Нехай маємо ділення 93 040 : 455.

```
 93040 | 455
-910   |----
 ----    204
  204
 -----
  2040
  1820
 -----
   220
 . . . .
```

Поділяючи 930 на 455, маємо в частці 2 сотні. Помножаючи 455 . 2 й віднімаючи добуток од 930, маємо 20, а після перенесення цифри 4, маємо 204. В числі 204 дільник 455 не міститься жадного разу, а тому в частці на місце десятків пишемо 0. Переносячи до числа 204 останню цифру діленика 0, дістанемо 2 040, що поділяється на 455 і дає цифру одиниць 4.

Вправа—Поділіть 7 380 : 298; 738 000 : 2 000; 73 800 : 200; 144 : 24; 1 440 : 240; 22 110 : 55; 2 940 : 28.

Основні закони множення

§ 11. Повчімось перевіряти множення. Для цього нам потрібно знати закони, що до деякої міри нагадають нам закони додавання. Ми помічаємо, насамперед, що $4 . 5 = 20$ і $5 . 4 = 20$; $20 . 15 = 300$ й $15 . 20 = 300$. Тому, що у всіх випадках множення можна переміняти місця множеника й множника, їх обидва—множеника і множника разом—звуть *чинники*. Закон перший множення є закон перемінний. Він дає нам, що *добуток не залежить від порядку чинників*.

Ми користуємося з цього закону, коли перевіряємо множення. Для перевірки ми просто переміняємо місця чинників й помножуємо вдруге; якщо добутки в цих двох випадках є однакові, то можна сподіватися, що множення виконано вірно.

У додаванні ми бачили закон злучний. Тут теж він вірний. Ми побачимо це з таких прикладів.

Нехай потрібно помножити $2 . 3 . 4 . 5$. Звичайно, ми множимо, спочатку $2 . 3$, їхній добудок (6) множимо числом 4; новий добуто (24) множимо числом 5 і загальний добуток буде $24 . 5 = 120$. Те саме число 120 ми дістанемо й инакше: перемножимо спочатку $2 . 3 = 6$, потім $4 . 5 = 20$ і нарешті $6 . 20 = 120$ або ще инакше: $3 . 4 = 12$, далі $12 . 5 = 60$ і, нарешті, $2 . 60 = 120$.

Можна перевірити цей закон на яких завгодно числах і скільки забажаємо разів, беручи скільки хочемо чинників.

Цей закон вказує нам, що *підчас множення чинники можна сполучати в які завгодно групи й для находження загального добутку перемножити один одним усі часткові добутки*.

Тут до речи вкажемо ще один закон аритметики, що торкається одночасно додавання та множення разом. До цього закону ми повернемось пізніш, хоч у житті ми користуємося з нього дуже часто. Вияснемо цей закон на таких простих прикладах.

Задача—Робітник має 4 грошини по 5 коп. і 4 грошини по 10 коп. Його прохають дати дрібні гроші й замість цього взяти собі грошини по 15 коп. Скільки грошин по 15 коп. дістане робітник?

Ясно,—робітник дістане 4 грошини по 15 коп. Але нам слід докладно розібрати цю просту задачу. Робітник дає $5 \cdot 4 = 20$ коп. п'ятаками й $10 \cdot 4 = 40$ коп. гривениками, а має $15 \cdot 4 = 60$ коп. грошима по 15 коп. В той-же час $10 + 5 = 15$.

Таким чином, помножаючи 5 числом 4 та 10 числом 4, а потім, додаючи ці добутки один до одного, ми дістанемо те саме, що і в тому разі, коли ми спочатку додамо $5 + 10$, а потім 15 помножимо числом 4 [1]).

Цей факт ми можемо перевірити на таких ще прикладах.

$20 \cdot 5 + 40 \cdot 5 = 60 \cdot 5$ (а $60 = 20 + 40$);

$20 \cdot 5 + 40 \cdot 5 = (20 + 40) \cdot 5$

$82 \cdot 17 + 18 \cdot 17 = 100 \cdot 17 = 1\,700$ (а $82 + 18 = 100$).

$35 \cdot 100 = 20 \cdot 100 + 15 \cdot 100$ або $(25 + 15)\,100 = 25 \cdot 100 + 15 \cdot 100$.

Цей закон висловлюють так: *щоб помножити суму якимось числом, можна помножити кожний з доданків суми даним числом, а всі добутки від цього множення додати один до одного.*

Залежність між чинниками та добутком

§ 12. Для провірки множення ми користуємося з закону перемінного, і тоді перевіряємо множення з допомогою також множення. А можна множення перевіряти і иншим способом. Тут нам потрібно помітити, як залежать між собою чинники та добуток.

Задача 1—Робітників одного розряду було 8 чоловік у цеху; кожному з них місячна платня була 45 карб. Скільки витрачається на платню всім 8 робітникам цього цеху за місяць?

2—В одному цеху 8 робітників дістають однакову місячну платню. Всім їм за місяць видано 360 карб. Яка місячна платня одного?

3—Всім робітникам одного розряду виплачено 360 карб.; на кожного припадає по 45 карб. Скільки було робітників цього розряду?

Всі ці задачки розвязуються досить легко. Ось розвязка їх.

1—$45 \times 8 = 360$ карб.; **2**— $360 : 8 = 45$ карб.; **3**—$360 : 45 = 8$.

Подібні задачки та приклади приводять нас до висновку: *кожний із двох чинників дістанемо, поділяючи їхній добуток на другого чинника.*

Звідси ми маємо спосіб перевірки множення: *щоб перевірити множення двох чисел, треба добуток поділити на одного з чинників* і в разі, коли дістанемо в частці другий чинник, множення можна вважати за правильне.

---

[1]) Записуємо це так $5 \cdot 4 + 10 \cdot 4 = (15 + 10) \cdot 4$, де дужки після знаку $=$ вказують, що спочатку робимо додавання в дужках, а далі суму множимо числом 4.

Залежність між часткою, діленником та дільником

§ 13. Такі саме міркування проводять нас і до виявлення залежности між елементами ділення. Розгляньмо такі приклади:

$120:4=30$, а звідси $120:30=4$ й $30 \cdot 4=120$, цеб-то **1**—*поділяючи діленика на частку, дістаємо дільника,*

2—*помножаючи частку дільником, дістанемо діленика.*

Ці дві властивості дозволяють нам перевіряти ділення в тому разі, коли не маємо остачі. Для перевірки є 2 способи: **1**—з допомогою ділення: поділяємо діленика на частку й мусимо дістати дільника; **2**—з допомогою множення: перемножуємо частку й дільника й мусимо дістати діленика,

Вправи—Поділіть і перевірте (різними способами) 33 600 : 275; 6 000 : 75; 720 : 16 =

Ми знаємо, що ділення може в деяких випадках бути незакінченим; тоді до инших елементів додається ще остача. Пошукаємо залежність між елементами ділення в цьому випадкові.

Задача—1 січня р. 1925 в цілій УСРР було загально-освітніх курсів 59, а в них учнів 4 950: радпартшкіл було 41 і учнів 5 139. По скільки учнів припадало на одну радпартшколу та на одні курси?

І ту, й иншу задачу розвяжемо ми з допомогою ділення.

```
 4950 | 59            5139 | 41
-472  |----          -41   |----
 ----   83            ---   125
  230                 103
 -177                 -82
  ---                 ---
   53                 219
                     -205
                      ---
                       14
```

Таким чином, на курси припадало приблизно, а не точно 83 чол., а на кожну радпартшколу по 125. І та й друга відповідь не є точна; вони обидві є наслідок ділення з остачою. Як-же перевірити ці ділення?

Міркуємо так: якби всі курси мали по однаковій кількості учнів, то по всіх 59 курсах було-б учнів $83 \cdot 59=4\,897$, але учнів на всіх курсах є більше (а саме 4 950) й більше на 53. Це саме можемо сказати й про радпартшколи: якби в кожній школі було рівно по 125 учнів, то в усіх радпартшколах було-б 5 125, а не 5 139, цеб-то на 14 менше. Ще инакше: якби в усіх радпартшколах було на 14 учнів менше, то в них усіх було-б по 125.

Такі задачі, а також і приклади, що подамо нижче, вказують нам, що *помножуючи дільника часткою й додаючи до цього добутку остачу, дістанемо діленика.*

Або инакше: **в і д н і м а ю ч и в і д д і л е н и к а о с т а ч у т а п о д і л я ю ч и р і з н и ц ю н а ч а с т к у, д і с т а н е м о д і л ь н и к а.**

Перевірте цей закон на таких прикладах:

108 : 15; 424 : 20; 5 375 : 64.

Зміна добутку від зміни чинників

§ 14. Розгляньмо задачі.

1—Робітник має платні 2 карб. що-дня. Скільки він заробить за 6 днів?

2—У скільки разів збільшиться його заробіток, якщо він працюватиме не 6 днів, а втричі більше (18 днів)?

3— У скільки разів збільшиться його заробіток, якщо поденна платня збільшиться вдвічі?

Відповідь на задачі дуже ясна: якщо збільшиться кількість днів роботи, в стільки саме разів збільшиться й заробіток. Якщо збільшиться поденна платня, в стільки разів збільшиться й заробіток.

Приклад—$12 \times 5 = 60$. Збільшіть 12 удвічі. Перемножіть $24 . 5$. У скільки разів новий добуток більший від 60?

Вправа—Перевірте таблицю змін множеника 8, множника 5 і добутка 40.

	Множеник	Множник	Добуток	В ск. разів змінився добуток?
	8	5	40	
Збільш. множеника в 3 рази	24	5	120	В 3 рази (120 : 40 = 3) збільш.
Збільш. множника в 4 рази	8	20	160	В 4 рази (160 : 48 = 3) збільш.
Зменшуємо множеник в 2 рази	4	5	20	В 2 рази (40 : 20 = 2) зменш.

Вивід—**Я к щ о о д и н з ч и н н и к і в з б і л ь ш у є т ь с я** (або зменшується) **в д е к і л ь к а р а з і в, у с т і л ь к и р а з і в з б і л ь ш и т ь с я** (або зменшиться) **й д о б у т о к.**

А що стане, коли один із чинників збільшуємо, а другий зменшуємо в однакове число разів?

Задача 1—Робітниця купила 4 фунт. хліба по 12 коп. за фунт. Скільки грошей витратила вона?

2— Вдруге вона купила 8 фунт. хліба, але за фунт платила по 6 коп. Скільки тепер витратила вона грошей?

3—Виручку кооперативу розкладено в 2 пачки грошей. В одній було 8 папірців по 5 червінців, а в другій 40 папірців по 1 черв. У якій пачці більше?

Розвязати ці задачки дуже легко.

Розгляньте ще таку таблицю й заповніть місця зі знаком ? в ній, як це зроблено в перших рядках:

Множеник	Множник	Добуток
24	15	360
Зменшуємо в 2 рази	Збільшуємо в 2 рази	
12	30	360 не змін.
Збільшуємо в 2 рази	Зменшуємо в 3 рази	
48	5	240 змінив.
Зменшуємо в 3 рази	Збільшуємо в 3 рази	
?	?	?
Збільшуємо в 5 раз.	Зменшуємо в 5 раз.	
?	?	?
Збільшуємо в 4 раз.	Зменшуємо в 5 раз.	
?	?	?

З таких прикладів та задач бачимо, що **добуток не міняється, якщо одночасно одного з чинників збільшити, а другого-зменшити в однакове число разів.**

Зміна частки від зміни діленика та дільника

§ 15. **Задача**—Дві артіли робітників заробили по 400 карб. В одній артілі було 20 робітників, а в другій—вдвічі менше. Кожна артіль поділяє нарівно заробіток поміж своїми членами. В скільки разів заробив кожний робітник першої артіли менше від кожного робітника другої?

Кожний робітник першої артіли заробив по 20 карб., а кожний робітник другої артіли—по 40 карб. Робітник другої заробив удвічі більше від робітника першої.

Вправа—Одного дня артіль із 10 чол. заробила 30 карб., а другого—втричі більше. Скільки заробітку припало того та другого дня на одного робітника?

Відповідь буде: першого дня заробіток робітника був 3 карб., а другого—9карб. Другого дня на кожного робітника вийшло більше, бо й робітники всі заробили втричі більше.

Долучимо сюди ще такі вправи: Поділяємо $80:10=8$. Збільшуємо діленика вдвічі й поділяємо $160:10=16$. Складаємо подібно до цього таблицю.

	Діленик	Дільник	Частка	
	80	8	10	
Збільш. діленика вдвічі	160	8	20	Частка збільшилася вдвічі.
Зменшуємо діленика в 5 разів	16	8	2	Частка зменш. в 5 разів.
Збільшуємо дільника в 5 разів	80	40	2	Частка зменш. в 5 разів.
Зменшуємо дільника в 4 рази	80	2	40	Частка збільш. в 4 рази.

Такі вправи та задачі всі вказують нам таку властивість ділення: коли діленика збільшуємо (або зменшуємо) в декілька разів, частка також збільшується (або зменшується) в стільки саме разів. Якщо дільника збільшуємо (або зменшуємо) в декілька разів, частка, навпаки, зменшується (або збільшується) в стільки-ж разів.

А що стане з часткою, якщо одночасно дільника збільшуємо й діленика також збільшуємо в однакове число разів (або одночасно і діленика і дільника зменшуємо в однакове число разів)?

Задача—Перевозячи вугілля для заводу, першого дня було найнято 20 возів і заплачено їм всім 60 карб. Другого дня було возів удвічі менше й усієї платні також удвічі менше. Чи однакова була платня від возу першого й другого дня?

Ясно, що платня була однакова.

Розгляньте такий приклад:

	Діленик		Дільник	Частка
	120		40	3
Збільшуємо в 2 рази . .	240	Збільшуємо в 2 рази .	80	3
Зменшуємо в 4 рази . .	30	Зменшуємо в 4 рази .	10	3
Збільшуємо в 5 разів . .	600	Збільшуємо в 5 разів . .	200	3

Такі задачі та приклади вказують нам: Якщо одночасно збільшити або зменшити діленика та дільника в однакове число разів, частка лишається без зміни.

Вправа—Вигадайте сами приклад, щоб перевірити цей закон.

Заокруглення чисел

§ 16. В кожному статистичному довідникові ви дуже часто помітите такі числа, що закінчуються нулями. Напр., населення всієї УСРР на 1 січня 1925 р. було 27 859 000. Засіяно було по УСРР 1925 р. польових культур: жита 4 832 000 дес., пшениці озимої—2 292 000 дес., ярої 2 162 000. Вродило того-ж року жита 323 000 пуд., пшениці озимої — 121 000 пуд., пшениці ярої—107 000 пуд.

Це не визначає, що цілком точно так і було, як дають ці числа. Ці числа не точні. Але річ в тому, що здебільшого в практичному житті й у науці нам не потрібні точні числа. Наприклад, коли ми міряємо віддаль одного міста від якогось иншого, то міряємо верствами, але вже ні в якому разі не аршинами або вершками; і коли ми кажемо, що від одного міста до другого 30 верств, то можемо трішки помилитися. Так само в тому разі, коли міряємо розміри кімнати, ми беремо аршини, але вже не звертаємо уваги до вершків.

І звичайне життя дає нам на кожному кроці наближені числа. Коли ви запитуєте робітника, скільки всього робітників на його заводі, він одповідає вам приблизно. Якщо про завод кажуть, що там є 1 000 робітників, то може бути там і 999 або 1 001, і 998 або 1 002 й т. д. робітників. Одначе, якщо на заводі було-б 512 робітників, то ніхто-б не казав, що робітників є 1 000; скоріше-б казали, що їх 500. В тому-ж разі, коли-б на заводі було 991 робітник, знов-би казали, що їх є 1000.

Як-же робиться це заокруглення чисел? Розгляньмо такі вправи:

1—На заводі є 391 робітник. Скільки тут сотень робітників?

Точна відповідь є більше від 3, але менше від 4 сотень. Така відповідь уже дає нам уявлення про кількість робітників. Щоб краще ще підкреслити кількість, ми обмежуємося одним числом сотень або 3 або 4. У цьому разі нам вигідніше казати, що робітників на заводі є 400; справді, кажучи так, ми помиляємося на 11 робітників, а якби казали, що робітників 300, ми помилялись-би на 89.

2 – На селі 97 незаможників. Скільки це десятків їх? Краще казати, що незаможників 10 десятків або 100 чол., ніж казати, що їх 9 десятків (90); бо в першому разі ми помиляємося на 3, а в другому на 7.

3—Комосередок нараховує 32 члени. Скільки десятків членів? У даному разі кажемо наближено—3 десятки (30) членів і помиляємося на 2 члени, а якби казали, що членів 4 десятки (40), то помилялися-б аж на 8 осіб.

4—Робітник дістав платні 53 карб. Скільки десятків карбов. дістав робітник? Тут також кажемо, що робітник має платні 5 червінців або 50 карб.

5—У сільгоспі 78 корів. Скільки десятків корів у сільгоспі наближено?

Якби ми казали, що у сільгоспі 70 або 7 десятків корів, ми помилилися-б, зменшуючи справжню кількість на 8 корів. Якщо-ж скажемо, що корів є 80 або 8 десятків, помиляємося на 2 корови. Безумовно, краще вже припустити, що сільгосп має 80 корів і помилитися лише на 2 корови, аніж брати кількість корів за 70 і помилятися на 8.

Цього правила додержуються завжди, заокруглюючи числа та беручи неточні, наближені значіння: дбають про те, щоб помилка була як-найменша.

Такі числа, що в них ми відкидаємо лише самі одиниці, називаються заокруглені до десятків, бо десятки в нас будуть ще точні.

Заокругліть до десятків числа:

1) 83 карб.	2) 728 верств	3) 682 кг.
4) 217 тон.	5) 51 чол.	6) 109 хат.

Розглядаючи ці приклади, ви бачите, що в тому разі, коли цифра одиниць є менша від п'ятьох, ми її просто відкидаємо. Напр., замість 72 чол., кажемо 70 чол. Коли-ж цифра одиниць є більша від п'ятьох, відкидаючи її, збільшуємо цифру десятків на 1 і замість 88 беремо 90. Якщо цифра одиниць є рівна 5, можна робити і те й друге. Здебільшого тут також збільшують цифру десятків на одиницю й замість 375 беруть 380.

Це саме правило для заокруглення чисел ми зберігаємо й далі: Якщо перша з цифр, що їх заміняємо нулями, 5 або більше від 5, попередню перед цією цифру збільшуємо на 1, а всі останні після неї заміняємо на нулі. Якщо-ж перша з тих цифр, що їх заміняємо на нулі, менша від 5, заміна на нулі цих цифр не впливає на попередні.

Приклад 1—В маленькому місті населення 8 326. Заокруглити це число до сотень.

Заокруглення дає 8 300. В цьому разі ми помиляємося на 26. А якби замість 8 326 взяти 8 400, помилилися-б на 74. Наше правило й допомагає тому, щоб помилка була як-найменша.

2—Заокруглити до тисяч число: 32 729 та поясніть чому взято буде 33 000?

3—Заокруглити до десятків такі числа:

а) зібрано збіжжя 74 пуди з десятини

б) в будинкові мешкають 79 чоловіки

в) в садку 52 яблуні.

4—Заокруглити до сотень: в отарі 581 вівця.

5—Заокруглити до тисяч:

а) віддаль між двома будинками 3075 метрів

б) на заводі працює 4 793 робітники

6—Заокруглити до мільйонів:

Населення УСРР, міського — 3 834 014 чол., сільського — 24 024 621 чол.

Поняття про дріб

§ 17. На кожному кроці в житті доводиться нам чути такі вирази: ми купуємо півфунта олії, кажемо про три чверті години й т. д.

Ми знаємо, що половину хліба ми дістанемо тоді, як розріжемо цілий хліб на 2 рівні частини; так само й половину кожної речи матимемо, поділяючи цю річ на 2 рівні частини. Поділяючи гроші між трьома робітниками нарівно, ми кажемо, що кожний робітник дістав третину цих грошей. Ці дробові числа записують так:

$\frac{1}{2}$ (половина); $^1/_3$ (одна третя частина). Доводиться казати тут ще про $^1/_4$ (чверть); иноді кажуть і $^3/_4$ (три чверті).

Підчас вимірювань робітникові й селянинові можуть трапитися ще дрібніші частини, що вже рідко трапляються в житті.

Буває, напр. $^1/_8$ (восьма) частина десятини; купують $^3/_8$ (три восьмих) фунти перцю; кажуть про $^5/_8$ (п'ять восьмих) і про $^7/_8$ (сім восьмих). Зараз поки нам досить тільки знати, що $^7/_8$, напр., фунти ми маємо тоді, коли цілого фунта поділено на 8 рівних частин і з них нам дано тільки 7.

Якщо ми поділяємо свою зарплатню на 5 рівних частин, кожна частина дає нам $^1/_5$ (одну п'яту).

На скільки треба розділити дільницю землі, щоб дістати одну шосту ($^1/_6$)?

Як назвати кожну частину будинку, якщо його поділено на 10 рівних частин?

Як назвати кожну частину одиниці, якщо одиницю поділено на 2 рівні частини?, а на 5 рівних частин?

Робітник поділив свою зарплатню на 8 рівних частин, одну з цих частин він виплачує за помешкання й комунальні послуги, а три такі частини — на купівлю одягу. Назвіть ці дроби.

Одиницю поділено на 20 рівних частин; таких частин взято 3. Як назвати цей дріб?

Дріб записують за допомогою двох чисел.

Число, що стоїть попід рискою та вказує, на скільки частинок (рівних) поділено одиницю, звемо знаменик, а число понад рискою, що вказує, скільки саме частинок узято, називаємо чисельник.

РОЗДІЛ 1

Метричні міри. Додавання та віднімання десяткових дробів. Лінійні діяграми. Функція

Метричні міри довжини

§ 1. Нещодавно міряли довжину ми на аршини, сажені, верстви, а тепер, після декрету Радвлади, міряємо на метричні міри. За головну одиницю довжини вживаємо ми тепер м е т р а, що приблизно є рівний 1 арш. та $6^1/_2$ верш. Пізніше ми подамо точніші значіння для переходу від старих мір до нових та навпаки (див. таблицю № 1). Щоб міряти менші за метра довжини, метра поділяють на 10 частин; кожну десяту частину метра називають д е ц и м е т р. Ще дрібніші довжини міряють с а н т и м е т р о м; у дециметрі міститься 10 сантиметрів. Оця ось обставина, що в кожній мірі є рівно 10 безпосередньо менших, є велика перевага метричної системи мір перед старою системою. У старих мірах, щоб уміти з ними робити всі потрібні розрахунки, треба було знати багато різноманітних чисел, що звуть їх одиничні взаємовідношення між мірами, вони вказують, скільки менших мір міститься у безпосередньо більшій. Завчити ці числа та ввесь час не забувати їх, це було не такою вже легкою річчю. Тепер у новій системі це все усувається, бо замість різних чисел треба буде завчити саме число 10. Це ми побачимо з такої таблиці:

1 км. (або km) кілометр містить 10 гектометрів;

1 гм. (або hm) гектометр містить 10 декаметрів;

1 дкм. (або dkm) декаметр містить 10 метрів;

1 м. (або m) метр містить 10 дециметрів;

1 дм. (або dm) дециметр містить 10 сантиметрів (або центиметрів);

1 см. (або cm) сантиметр містить 10 міліметрів (мм або mm).

Із цих мір найчастіше вживають к і л о м е т р а, для визначення великих довжин. Кілометр майже рівний верстві, (точніше, кілометр на $^1/_{20}$ коротший за верству (див. табл. № 1). Міри — гектометр та декаметр майже ніколи не трапляються, а замість них кажуть 100 та 10 метрів. З дрібніших від метру мір найуживаніший сантиметр. Між сантиметром та вершком можна вказати таке взаємовідношення: вершок є рівний $4^1/_2$ (чотирьом з половиною) сантиметрам. Дюйм або цаль теж більше за сантиметр: у дюймі $2^1/_2$ сантиметри;

тому практичне життя, звичайно, й не вимагає дрібнішої від сантиметра міри. Але техніка та наука не рідко користуються й з міліметра. Це вже дуже дрібна величина, що про неї уявлення ми дістанемо з таких взаємовідношень:

1 сантиметр = 10 міліметрам; 1 вершок = 43 міл.; 1 цаль = 25 мм.

Тут зараз слід помітити, що ці початкові додатки, що, стоячи перед словом метр, дають нам різні метричні міри довжини, ввесь час провадяться в усіх мірах метричної системи. Мають вони однакове значіння, а саме: кіло визначає 1 000, гекто — 100, дека—10 раз узяту ту міру, що стоїть поза нею. Деці визначає—десяту, санти (або центи)—соту, мілі —тисячну частину.

Для метричних мір погодилися на інтернаціональних з'їздах завести одноманітні скорочення. Ці скорочення ми й подаємо двома абетками: українською перше й латинською (остання в дужках). Латинську абетку взято через те, що з неї користуються вчені всіх країн, майже в усіх означеннях.

Задача 1 — Виміряйте довжину та ширину кожної з тих кімнат, де у вас відбувається навчання. (Міряти треба на метри, дециметри та сантиметри).

2. На скільки довжина кожної з цих кімнат більша за ширину тієї-ж кімнати?

3—Виміряйте на сантиметри ширину долоні.

4—Виміряйте довжину та ширину столів та стільців у математичному кабінеті.

Метричні міри ваги

§ 2. Поруч із метричними мірами довжини, запроваджено в нас і метричні міри для виміру ваги. Тут за одиницю визнано грама або кілограма. Грам — це дуже дрібна міра, він дорівнює майже чверті золотника, а тому самого грама рідко вживають (на грами міряють тепер лише такі речі, що їх купують дуже небагато напр., перець або дорогоцінні речі, як срібло, золото то-що). Декаграма (10 грамів) та гектограма (100 грамів) зовсім не вживають, як назвиська. Переважно ми чуємо, як міру ваги, кілограм або просто кіло. Це є 1000 грамів. Скорочено слово грам записують гр. (або лат. абеткою gr), а кілограм кг (або kg).

Після запровадження метричної системи ми стали звати 400 грамів фунт; тут використано те, що наш старий фунт дорівнював 409 гр. Практика пішла ще далі, і ми чуємо півфунта замість 200 гр., $1/4$ (чверть) фунта—це є 100 гр., $1/8$ (одна восьма) фунта — 50 гр.

Для мір ще більших від кілограма (кілограм на наші старі міри є майже $2^1/_2$ фунти) тепер вживають тону. Тона є 1000 кг. На наші старі міри тона приблизно 61 пуд.

Перетворення одних мір на инші

§ 3. У цих мірах ваги ми не помічаємо такого простого взаємовідношення межи більшими та меншими мірами, як це було в мірах довжини, бо взаємовідношення тут між більшими та меншими мірами не всі є рівні 10. Але все-ж і тут взаємовідношення ці далеко простіші, ніж були межи старими мірами. Ця простота відбивається на перетвореннях одних мір на инші. Ми побачимо це з таких прикладів:

1—Обернути 7 км. 5 гм. на метри.

Обертаємо кілометри на гектометри $10 \times 7 = 70$ гм.

Додаємо ще 5 гм. Тоді виходить $70 + 5$ гм. $= 75$ гм.

Обертаємо гектометри на декаметри $10 \times 75 = 750$ дкм.

Обертаємо декаметри на метри $10 \times 750 = 7500$ метр.

2 - Обернути 3 гм. 4 дкм. 8 м. на метри.

Обертаємо гектометри на декаметри $10 \times 3 = 30$ дкм. та додаємо ще 4 дкм. Маємо 34 дкм. Декаметри обертаємо на метри й додаємо ще 8 м., і 348 м. буде відповідь.

3—Обернути 7 тон 25 кг. на кілограми.

Тони дають $1000.7 = 7000$ кг. Разом 7025 кг.

4 – Обернути 4 кг. 50 гр. на грами.

Обернувши кілограми, дістанемо 4000 гр., а разом 4050 гр.

5—Обернути на вищі міри 253 метри.

Поділяючи $253 : 10$, дістанемо 25 дкм. та 3 м.; поділяючи $25 : 10$, знаходимо 2 гм. 5 дкм. Таким чином, 253 м. $=$ 2 гм. 5 дкм. 3 м.

6– Обернути 15 750 гр. на вищі міри.

Поділяємо на 1 000 і маємо 15 кг. 750 гр.

Розглядаючи такі вправи, ми можемо побачити, що обернення більших мір на менші все полягає в тому, що дописуємо до даних цифр вищого числа один або декілька нулів, а якщо міри йдуть одні після одних безпосередньо й вищі міри тільки в 10 разів більші за менші, то обернення більших мір на менші полягає просто в послідовному переписуванні одних цифр після одних. Так само й обернення менших мір на більші є просто відділення одної за одною цифр з кінця; якщо обертаємо менші міри на такі вищі, що рівно в 10 разів більші від цих менших, то відділяємо по одній цифрі, а якщо вищі в 1000 разів більші від нижчих—відділяємо на нижчі останні 3 цифри, а всі передні будуть вищими.

Приклад 1—562 см. буде 5 м. 6 дм. 2 см.

» **2**—18 650 кг. дає 18 т. 650 кг., або 18 тон 6 центнерів 50 кг.

(Центнер $= 100$ кг.)

Карбованці та копійки

§ 4. Схожі з метричними мірами наші міри грошей—карбованці та копійки. Їх так само легко обернути одні на другі. Наприкл., 175 коп. обертаємо на 1 карб. 75 коп., а 52 карб. 48 коп. обертаємо на 5 248 коп.

Якщо бажають скоротити запис самих назв, то числа, що складаються з карбованців та копійок, записують не з двома назвами, а з одною. За такого запису пишуть назву тільки к а р б., і часто цю назву пишуть не позаду від числа, а попереду. Дуже легко записати в такому разі число, що складається із самих карбованців; таке, напр., число: карб. 142, карб. 39, карб. 81.

Щоби записувати й копійки, умовляються відділяти карбованці від копійок протинкою. В такому разі запис 72,45 карб., або ще більше вживають карб. 72,45 читають 72 карб. 45 к. Звернім зараз увагу на цей запис. Карбованці записуємо до протинки, лівобіч від неї, а позаду, правобіч од протинки, безпосередньо за нею, пишемо гривеники, іще далі, правобіч від гривеників, пишемо самі копійки. Таким чином, запис карб. 3,70 визначає 3 карб. 70 коп, а запис 3,07 визначає 3 карб. 7 коп. Нуля написано на місці гривеників, бо у другому числі гривеника немає жадного.

Вправа 1 — Зачитайте числа 35,75 карб., карбованців 141,5.

2 — Напишіть, вживаючи протинку: п'ятдесят карбов., тридцять дві коп; шість карб. двадцять коп.; чотири карб. вісім коп.

Особливо слід замітити випадки:

1) коли маємо запис карб. 2,4. Тут 2 визначає карб., а 4 гривеники;

2) коли запис буде 0,35 карб. У такому разі карбованців немає зовсім, гривеників 3 й простих копійок 5; тому запис є 35 коп.

Такий запис грошових сум є дуже зручний і цілком відповідає тим діям, що пророблюють з грішми на рахівниці. Розгляньмо задачі.

1 — Робітник заробив за півмісяця 27,39 карб., йому повернув товариш боргу 2 карб. й дружина його заробила 21,41 карб. Скільки всього грошей має подружжя на ці півмісяця?

Додаємо всі три дані числа, підписуючи карбованці під карбованцями, як це вже й раніш робили, гривеники всіх чисел одні під одними, копійки під копійками також у всіх доданках. У другому доданкові гривеників та копійок ми не мали; ми написали на їхньому місці нулі, щоб не помилитися й не підписати 2 на неналежному місці. Додаючи одиниці, ми дістаємо 1 грив., обернувши 10 коп. на 1 гривеник, додаємо його до гривеників, а на місці одиниць буде лише 0. Розберіть, як далі зроблено додавання.

$$\begin{array}{r} 27{,}39 \\ +\ 2{,}00 \\ 21{,}41 \\ \hline 50{,}80 \end{array}$$

2—Із заробітку карб. 50,80 витрачено карб. 17,95. Скільки ще лишилося грошей?

У цьому разі доводиться зробити віднімання.

Підписуємо так, як і підчас додавання. Починаємо віднімання з копійок. Щоб було від чого відняти 5 коп., у зменшеникові один гривеник обертаємо на копійки й віднімаємо від 10 коп. Для віднімання гривеників доводиться брати карбованці, бо з семи не вміємо відняти 9 гривеників. А тому, що карбованців у зменшеникові немає, доводиться брати 10 (один десяток) карбованців, обертати його спочатку на самі карбованці. З десятьох карбованців беремо знов 1 карб. (лишається карбованців 9) і, обернувши його на гривеники, дістанемо 10 грив., а разом з тими, що залишалися, 17 гривеників. Віднімання далі вже цілком таке, як віднімання звичайних чисел.

$$\begin{array}{r} 50{,}80 \\ -\ 17{,}95 \\ \hline 32{,}85 \end{array}$$

Вправа 1—Підрахувати чек, де написано: цукор карб. 1,22; чай карб. 0,93; тютюн карб. 1; знижки карб. 0,07.

2 — В одній газеті (відділ «Біржа») читаємо такі відомості про ціни на різні товари в карбованцях

	Вчора	Збільш.	Зменш.	Сьогодні
Пшениця за пуд . . .	1,25	0,03	—	?
Жито » »	?	0,06	—	0,98
Сукно за метр	8,42	—	0,54	?

Доповніть ціни там, де стоїть знак запитання.

Десяткові дроби. Запис та читання їх

§ 5. Той саме спосіб запису, що ми його вживали при записові грошей, можна поширити й далі, беручи за основу такі положення. До протинки, лівобіч від неї, записуємо ми карбованці, на першому місці, правобіч від протинки, пишемо гривеники, або десяті частини карбованця, на другому місці, правобіч від протинки (безпосередньо правобіч від десятих), пишемо копійки,—соті частини карбованця. Оце ось ми й беремо за основу. В кожному числі ми його цілу частину відділяємо протинкою, після протинки правобіч від неї пишемо десяті частини цілого, ще далі, правобіч, соті частини.

Напр., 7,34 метр. визначає 7 метрів, 3 десятих й 4 сотих частин метра. Головна підстава цього способу запису полягає в тому, що ми поширюємо правило запису цілих чисел на дробові частини. У нас тепер не лише для самих цілих, але й для дробів — цеб-то для частинок від цілого—кожна цифра у десять разів більша від безпосередньо за нею правою. Після цілих одиниць, правобіч від них, зараз після протинки, пишемо десяті частини одиниці; ясна річ, що десята частина в десять разів менша від цілої одиниці. Правобіч від десятих пишуть частинки, що в 10 разів дрібніші від десятих; инакше такі частини, що їх у кожній десятій частині буде 10, а тому цих частинок у цілій одиниці буде 100. Такі частинки ми звемо соті. Правобіч від сотих пишуть частини, що в 10 разів дрібніші від сотих; цих частинок у цілій одній одиниці є 1000, а через це їх називають тисячні. Дрібніші за тисячні частини, вживають дуже вже рідко (далі йдуть десятитисячні, стотисячні, мільйонні й т. д.). У практиці обмежуються здебільшого сотими, зрідка—тисячними частинами.

Вживаючи цього записа, ми маємо, напр., що 1 золотн. є рівний 4,266 гр. Цей дріб нам вказує, що в золотникові є 4 цілих гр., 2 десятих, 6 сотих та 6 тисячних частин граму. Инакше—4 цілих та 266 тисячних граму, бо в десятій частині 10 сотих й 100 тисячних частин, а у двох десятих 200 тисячних частин. У сотій—10 тисячних частин, а 6 сотих мають в собі 60 тисячних. Тому ми й читаємо: 4 ціл. та 266 тисячних граму.

Ще приклад—1 кг. є рівний 0,06105 пуд. Цей дріб нам показує, що цілих пудів у кілограмові 0, цеб-то немає зовсім: також немає й десятих частинок пуда. Сотих частин пуда є 6. Ці соті можна перетворити на тисячні й тоді їх буде 60. Опріч цих, є ще одна тисячна—разом 61 тисячна. Десятитисячних немає, бо на їхньому місці стоїть 0. Перетворюючи 61 тисячну на десятитисячні, маємо 610 десятитисячних або 6100 стотисячних. Та ще маємо 5 стотисячних, що й дає нам всього 6105 стотисячних.

Ми бачимо, що цілі частини в числі можуть бути, а може їх і не бути. Якщо їх немає, то на місці цілих ми пишемо 0. Дробові частини не читають кожну зокрема, а всі разом переводячи на найдрібніші. З прикладів:

$$0{,}5=\frac{5}{10};\quad 0{,}72=\frac{72}{100};$$

$$0{,}08=\frac{8}{100};\quad 0{,}316=\frac{316}{1000};\quad 0{,}2014=\frac{2014}{10000}$$

можемо вивести таке правило: десятковий дріб це є такий простий дріб, що в ньому чисельник є те число, що стоїть правобіч від протинки, а знаменик є одиниця з стількома нулями, скільки цифр у десяткового дроба правобіч від протинки.

Вправи — Зачитайте дроби в цих прикладах:

1—Відро води важить 12,2994 кг. або 0,75086 пуд.

2—Один метр є рівний 1,406 арш. або 0,469 саж.

3—Один арш. є рівний 0,7112 метр. або 71,12 см.

4—100 штук двохдюймових цвяшків важуть 0,6667 фунтів.

Напишіть з допомогою цифр такі дроби:

5—П'ять цілих сімдесят дві сотих.

6—Чотирнадцять цілих вісім сотих.

7—(Нуль цілих) тринадцять тисячних.

8—62 цілих п'ять сотих.

9—Зверніть увагу на дроби: 3,2; 3,02. Які частини визначає 2 в першому дробові? Що стоїть на місці десятих частин у другому дробові? Зачитайте обидва дроби.

10—На якому місці після протинки пишуть десяті частини?

11—Які частини пишуть на третьому місці після протинки?

12—На якому місці після протинки пишуть тисячні?

13—Написати дроби: $\frac{32}{100}$; $\frac{64}{1000}$; $\frac{2}{100}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{8}{1000}$, вживаючи протинку.

14—Скільки цифр після протинки у десяткового дроба, якщо остання цифра числа визначає тисячні?

Такі дроби, що ми про них оце кажемо, які ми записуємо з допомогою протинки, що в них знаменик є 10, 100, 1000, або взагалі одиниця з нулями, називають дроби десяткові.

Заокруглення десяткових дробів

§ 6. Десяткові дроби вживають тепер на кожному кроці. У техніці вони майже цілком замінили дроби прості, у практичному житті—поволеньки теж увіходять до вжитку, а в науці майже виключно здибуємо ці дроби. Через це й перехід від мір старих на метричні міри дають, звичайно, теж у вигляді десяткових дробів. У науці часто доводиться дуже точно знати взаємовідношення поміж старими та новими мірами. Напр., із довідника ми можемо вишукати, що і грам є рівний 0,2344 золотн. або і золотн. рівний 4,2658 грам. Для звичайного життя й навіть для досить точних технічних вимірів такі значіння мір непотрібні. Тут виникає питання, які-ж тоді брати числа, переводячи ці міри одні на одні. На допомогу нам приходить правило заокруглення дробових чисел. Це правило своєю суттю таке саме, як і для заокруглення цілих чисел. Якщо ми бажаємо взнати, скільки грамів припадає на золотник і не можемо брати до уваги частини грама, ми кажемо, що 1 зол. є рівний 4 грам. цілком відкидаючи дріб 0,2658. А якщо ми, по суті справи, мусимо робити перехід точніше й виміряти навіть десяті частини граму, ми кажемо, що 1 зол. є рівний 4,3 гр. У даному разі, відкидаючи дріб з сотих тисячних та десятитисячних частин граму й залишаючи самі цілі та десяті частини, ми збільшуємо ці десяті на 1 ; якби ми взяли—1 зол.= = 4,2 гр., ми зовсім залишили-б без уваги 6 сотих, 5 тисячних та 8 десятитисячних частин граму. Цеб-то помилка наша біля 6 сотих. Беручи-ж, що 1 зол. = 4,3 гр., ми замість 6 сотих беремо 1 десяту, инакше 10 сотих, а тому помиляємось не більше, як на 4 сотих граму. Помилка на 4 сотих безумовно менша, аніж помилка на 6 сотих; тому краще брати—1 зол. = 4,3 гр. Після цього зрозуміле стане правило заокруглення:

Заокруглюючи десятковий дріб до цілих, або десятих, сотих і т. д. частинок, ми в тому разі, коли перша цифра серед тих, що їх відкидаємо, менша від п'яти, просто беремо частину даних цифр, не міняючи їх. В тому-ж разі, коли перша з тих цифр, що відкидаємо, 5 або більша від п'яти, ми збільшуємо на одиницю останню з тих цифр, що їх залишаємо.

Напр., 1 см. є рівний 0,393701 цаля. Відкидаючи соті й инші дрібніші частини, ми беремо 1 см. = 0,4 ц. й звемо це значіння сантиметру з точністю до 0,1 цаля. Коли-ж беремо до уваги й соті частини, кажемо 1 см. = 0,39 цал., бо перша з цифр, що їх відкидаємо, є 3. Останнє число є значіння сантиметру в переході на цалі з точністю до сотої (до 0,01) цаля.

Вправи—Заокругліть до десятої (сотої) частини дроби:

1—1 м. є рівний 1,40607 арш. або 0,468692 сж.

2—1 верства є рівна 1,067 кілометр.

3—1 пуд=16,3805 кілогр. або 0,016 тон.

4—1 кілогр.=0.06105 пуд, або 2,442 фунт.

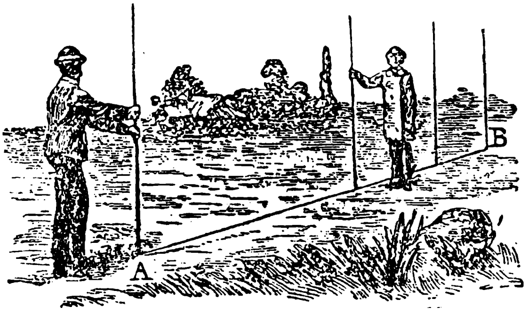
Слід нагадати, що в двох останніх вправах, 3-й та 4-й, мова йде про старі пуди та фунти, що їх уживали в нас до запровадження метричної системи мір, а що тепер ми беремо за 1 пуд просто 16 кг., а за фунт 400 гр. (0,4 кг.).

Тичкування простої. Вимір довжин на землі

§ 7. Метричні міри є міри десяткові, бо в них кожна безпосередньо вища міра в 10 разів більша від меншої. Це дозволяє нам дуже легко користуватися з метричних мір не тільки при записах, а й підчас рисування планів. Ось, напр., маємо план кімнати, де замість кожного метру довжини, взято 1 см. (рис. 1). Довжина нашої кімнати на рисункові є 4,9 см., а ширина — 2,7 см. Тому справжня довжина кімнати є 4,9 м., инакше 4 м. 9 дм., а ширина — 2,7 м. або 2 м. 7 дм. Через це в землемірстві давно вже почали вживати метричних мір, а зараз міряють виключно на метри.

Рис. 1.

Для виміру довжини на землі потрібно буває якось намітити ту лінію, яку саме треба міряти. Якщо ми бажаємо виміряти довжину огорожі навколо заводу, ми можемо це зробити, міряючи саму цю огорожу. В даному разі ми не відійдемо від огорожі. Але часто-густо доводиться міряти такі дільниці, де не тільки немає огорожі, а навіть ніяк не позначено й меж ділянки. Отже, доводиться якось провести саму лінію. Вкажемо на малюнкові, як це робити.



Мал. 2.

Нехай нам потрібно провести просту лінію від A до B (мал. 2). Ми встромляємо в місці (або як кажуть у точці) A тичку, цеб-то палицю, трошки вищу за зріст людини (мал. 2), а другу, таку-ж приблизно палицю встромляємо в точці B. Далі наш помічник встромляє ще кілька паличок поміж цими двома так, щоб коли подивитися, стоячи за тичкою A, на тичку B, усі проміжні тички не висувалися ані на правий, ані на лівий бік, або щоб їх усі затулила тичка A, коли з-за неї дивимося на тичку B. Доводиться точно встромляти такі тички на землі, бо коли-б ми ухилилися від них у той чи инший бік, ми-б, замість простої між точками A та B, дістали криву лінію, що безумовно довша від простої. Ясна річ, що межи двома точками A та B можна

Мал. 3.

провести лише одну просту. Таку просту в дальшому ми зватимемо просто АВ. Спосіб проведення простої з допомогою тичок зветься тичкуванням простої.

Коли вже просту протичковано, тоді довжину її міряють, протягаючи мірну ціп або стрічку рулетки (мал. 3) від одної до одної послідовно через усі тички від А до В.

Задача — Протичкуйте та виміряйте на землі просту. Початкову та кінцеву точки виберіть сами (проста мусить бути довша за 20 м.; міряти її з точністю до дециметру, відкидаючи частини менші від половини дециметру, а більші — рахуючи за цілий дециметр).

Лінійні діяграми

§ 8. Дуже часто ми рисуємо прості й на папері. Ми вже казали про рисунок плану, але иноді рисують не самий план, а рисунком допомагають яскраво порівняти між собою різні величини. Розгляньмо такий приклад.

За даними перепису 15 березня 1923 р. на 100 військових службовців припадає: робітників 20, селян 69, инших 11; за національним складом поділяються таким чином: українців 43, руських 41, білорусів 7, євреїв 5, инших 5.

Коли нам дано такі числа, ми не можемо цілком яскраво уявити собі, як розподіляються військові службовці. Отут і допомагає нам рисунок. Ми можемо умовитись, напр., що 1 мм. дає нам на рисункові 1 людину. В такому разі проста 69 мм. завдовжки вказує нам число селян, проста 20 мм. довга дає число робітників і остання довга 11 мм. дає число инших. Найповерховіший погляд на рисунок уже дає нам змогу помітити, кого, з якого походження службовців більше й кого менше. Так само нарисовано й другу частину нашого рисунку. З цього рисунку ми зразу бачимо, як розподіляється число службовців за національним складом.

Рис. 4.

На нашому рисунку всі розміри вдвічі менші.

Спосіб запису чисел з допомогою простих ми будемо звати будовою діяграм лінійних. Ми пізніш побачимо, що діяграми бувають ще й иншого роду. Ці лінійні діяграми вживають особливо тоді, коли порівнюють між собою довжини річок, довжини залізничих шляхів у різних державах то-що. Головне, на що мусимо звернути увагу, це є вірно нарисувати просту й надати їй вірного значіння. Щоб нарисувати просту, ми вживаємо лінійку, а щоб точно поміряти довжину та відкласти її, доводиться брати лінійку з поділом на сантиметри та міліметри. Иноді користуються при цьому з циркуля, та про цей спосіб ми вкажемо далі.

Задачі — Нарисуйте лінійні діяграми з таких даних:

1 — Експлуатаційна довжина залізниць в кілометрах (р. 1924)

Донецькі	одноколійка	1 400
	двоколійка	800
Дніпропетровські	одноколійка	2 100
	двоколійка	600
Південно-Західні	одноколійка	3 000
	двоколійка	1 200
	вузька колія	600
Південні разом із Кримськими	одноколійка	2 900
	двоколійка	600

(За 100 кілометрів візьміть 1 мм., або 2 мм., або 5 мм.)

2 — Довжина річних шляхів

	р. Дніпро	р. Півд. Буг
Загальна довжина	8 152 клм.	179 клм.
в тому числі:		
судохідних	2 125 »	188 »
сплавних	1 892 »	

Заокруглити дані числа до сотень та нарисувати лінійні діяграми.

Додавання десяткових дробів

§ 9. **Задача** — Англійський ярд дорівнює 0,914 метра, а сажень на 1,223 м. довший від ярду. Скільком метрам дорівнює сажень?

$$\begin{array}{r} 0{,}914 \\ +\ 1{,}223 \\ \hline 2{,}137 \end{array}$$

Щоб розвязати таку задачу, нам доводиться зробити додавання. Ми підписуємо в такому разі одне під одним дані числа, щоб одиниці були під одиницями, десяті частини під десятими, соті під сотими і т. д. Саме додавання починаємо з найнижчого порядку, в даному разі з тисячних частинок. Додавання тисячних та сотих частинок одних до одних ми зуміємо зробити, що до десятих — то після додавання маємо 11 десятих, а це нам дає 1 цілу та 1 десяту (бо в цілій одиниці 10 десятих). Підписуємо у сумі цілі під цілими, десяті під десятими й т. д.

Задача — У фізичній лабораторії був залізний стрижень 2,52 м. завдовжки. Від нагріву він розширюється на 0,0015 м. Яка його довжина після нагріву.

У даному разі доводиться додати 2,52 м. та 0,0015 м. Підписуємо, як і першого разу дані доданки; помічаємо, що в одному доданкові тисячних та десятитисячних частин немає, а в другому вони є; отож, в другому доданкові доводиться ці десяткові частинки писати праворуч від сотих.

$$\begin{array}{l} \ \ 2{,}52 \\ +\ 0{,}0015 \\ \hline \ \ 2{,}5215 \end{array}$$

Иноді в таких випадках у першому доданкові порожні місця заповнюють нулями.

Тут нам потрібно помітити, що *дописуючи до десяткового дробу на правому боці його нулі, ми не зміняємо його величини.*

Справді, дріб 2,5 вказує нам, що в числі є цілих 2 й десятих 5; якщо ми напишемо 2,500, то теж бачимо, що дане число має 2 цілих, 5 десятих, а сотих та тисячних не має зовсім.

Вправи — Яка різниця між числами 0,5 та 0,50? Яке з чисел — 5,72 та 5,7200 більше, а яке менше?

Віднімання десяткових дробів

§ 10. **Задача** — 1 арш. є рівний 0,7112 м. На скільки метр. довший за аршин? (Відпов. у частинах метра).

Доводиться нам із цілого метру відняти 0,7112 м. Щоб можливо було віднімати частини, ми обертаємо цілу одиницю на десяті частини, з 10 десятих одну обертаємо на 10 сотих, а з них одну — на 10 тисячних, і нарешті, одну тисячну обертаємо на 10 десятитисячних. Далі віднімаємо 2 від 10 десятитисячних, а останні всі частини від 9 відповідних частинок.

$$\begin{array}{r} 1{,}0000 \\ -\ 0{,}7112 \\ \hline 0{,}2888 \end{array}$$

Задача 1 — На одному возі було 1,250 тони піску, а на другому на 0,275 тони менше. Скільки було піску на другому возі?

2 — Наш радянський карбованець (срібна монета) важить 4,6875 зол.; чистого срібла в ньому — 4,21875 зол. Скільки було домішки (лігатури)?

3. Завод пересилає залізницею свої вироби. Вага нетто (чиста вага самих виробів) — 49,175 кг. На залізниці зважено вагу брутто (цеб-то самі вироби разом із пакуванням) й у залізничому квитку визначено: вага брутто — 51,40 (точність до 0,01). Скільки важить тара (саме пакування)?

Поняття про функцію

§ 11. Пароплав у стоячій воді проходить за годину 17,5 клм.; скільки він пройде у річці, де вода тече 3,2 клм. за годину та у другій річці, де швидкість води 2,7 клм. за год.?

Для нас ясно, що в першій річці пароплав, ідучи за водою, пропливе більше, ніж у другій, ідучи також за водою. Так само легко зрозуміти, що в тому разі, коли пароплав ітиме проти води, він у першій річці пройде за годину менший шлях, ніж у другій. Виходить таким чином, що значіння суми залежить од доданків, а значіння різниці залежить від зменшеника та від'ємника. Але на це й треба було чекати, бо ми згадуємо, що сума та різниця змінюються залежно від зміни елементів цих дій.

Цю істину ми можемо висловити також иншими словами. Умовимося називати ту величину, що залежить від других, *функція*. Тут зараз зуміємо вказану істину висловити: *сума є функція доданків, різниця є функція зменшеника та від'ємника.*

Такі положення вказують нам тільки, що сума залежить від величини доданків, а різниця — від величини зменшеника та від'ємника. Але вже й такі загальні вказівки досить часто допомагають нам розбирати різні питання. Слово функція вживається не в самій лише математиці. Ми, наприклад, чуємо, що дорога, яку проходить мандрівник, є функція часу (мандрівник з часом проходить все більшу дорогу). Коли ми встановлюємо, що одна величина є функція від иншої, то цим саме ми вже намічаємо той шлях, що може нас привести до вишукання першої величини залежно від другої. Ще приклади:

1 — Ціна якоїсь кількости заліза залежить від ціни за 1 пуд та від кількости пудів, цеб-то ціна заліза є функція кількости заліза та ціни за 1 пуд.

2 — Далі можемо дослідження продовжити й шукати, від чого залежить ціна 1 пуду заліза або инакше—функцією: від скількох та яких величин є ціна пуду заліза. Такі дослідження робить вже не математика, а инші науки. Математика-ж намагається вишукати числову залежність між функцією та тою величиною, що від неї залежить функція.

Задачі до 1 розділу

1 — Протичкуйте на дворі невеличкі лінії, щоб вони обмежували якусь дільницю землі. Виміряйте ці лінії і знайдіть, якої довжини огорожа мусить бути навколо цієї дільниці. Чи буде довжина огорожі функція від довжини сторін участку?

2 — Використайте для лінійних діяграм, беручи 1 мм. за 1 тисячу кілометрів такі дані про телеграф та телефон в УСРР на 1 жовтня 1924 року.

Протяг телеграфних ліній	13 054	км.
» » проводів	93 943	»
Протяг телефонних ліній	12 842	км.
» » проводів	31 277	»

(Дані числа заокруглити до тисяч).

3 — Машинні ложиська виробляють з досить гарних сортів бабіту. До складу бабіту в одному ложиську входять мідь, цина та антимон. Усе ложисько важить 3,8400 кг.; міди в ньому — 0,2688 кг., цини — 3,1488 кг. Скільки антимону в цьому сорті бабіту?

4 — Сількооператив купує у Радгоспі овес ціною по 59,25 карб. за тону. За перевіз кооператив виплачує по 6,25 карб. з тони. На кожну тону кооперативу треба різних витрат для обслуговування кооперативу 0,66 карб. та 0,3 карб. на непередбачені витрати. Яка собівартість цього вівса для кооперативу?

4а — Обчисливши собівартість, кооператив робить на кожну тону для членів націнки 6,67 карб. Для нечленів кооперативу ціну встановлено — 76,47 карб. Скільки коштує овес для члена кооперативу? На скільки дорожче продає кожну тону вівса кооператив приватньому покупцеві?

5 — Кооператив купив товар. Цей товар перевезено залізницею. Кооператив має про вагу товару такі відомості: вага брутто (вага товару разом з упакуванням) — 22,4 центнери, вага тари (самого упакування) — 2,668 цент. Коли перевірили ввесь товар, виявилося, що 1,25 цент. зіпсувалося. Скільки центнерів гарного товару дістав кооператив?

6 — Щоб перевести старі міри на нові, вживають таблиць. Раз селянин приставив на цукроварню 23 пуд. 34 ф. цукрового буряку; обертаючи ці міри на метричні, ми маємо такі відомості: 20 пуд. = = 327,6099 кг.; 3 пуд. = 49,1415 кг.; 30 ф. = 12,2853 кг.; 4 ф. = 1,6380 кг. Скільки кілограмів буряку дістала цукроварня? Заокруглити ці числа до 0,01 кг.

7 — Року 1915 цукрового буряку в нас усього було засіяно 730,75 тисяч гектарів (гектар — майже десятина). З цієї кількости на саму Київщину та Поділля припадало 402,41 тис. гект. Скільки тисяч гектарів буряку припадало на инші місцевості?

8 — Ширина садиби 68,55 м., а довжина на 22,75 м. більша. Цю садибу треба огородити з трьох боків; з двох боків ушир та з одного боку — вдовж. На ворота треба залишити 2,75 м. Яка довжина огорожі?

9 — Культгосп робить дослідження й найшов, що гусак дає щороку пір'я 1,285 кг., а гуска — на 0,875 кг. менше. Скільки кілограмів пір'я дають що-року гусак та гуска разом.

10 — Технічні вправи

a. $\begin{array}{r} 75{,}089 \\ +\ 21{,}135 \\ \hline \end{array}$

b. 3,000 + 7,254

c. 15 + 18,39

d. 1,25 − 0,74

e. 5 − 4,625

f. 75,89 + 0,325 + 48,989,

g. 7 + 0,02,

h. 0,5 + 0,5,

k. 0,2 + 1,4,

l. 3 − 0,037,

m. 15 − 0,15,

n. 1 − 0,0026,

o. 82,1 + 6,009,

p. 0,8 + 0,8,

r. 0,009 + 2,5

s. 42,5 − 9,8,

t. 21 + 0,21.

РОЗДІЛ 2

Множення та ділення десяткового дробу на одноцифрове число та на 10, 100, 1000. Поверхня прямокутника. Поняття про відсоток

Множення десяткового дробу одноцифровим числом

§ 1. **Задача 1**—Один кілограм чаю коштує 2,25 карб. Скільки коштуватиме 7 кг. цього чаю?

Безумовно, всім відомо, що для відповіді, нам потрібно помножити ціну одного кілограму числом 7. Для множення підписуємо під 2,25 число 7, і починаємо множити, як це робили з цілими числами. Множення починаємо з найнижчого порядку, з сотих частинок карбованця, копійок, потім переходимо до множення десятих частинок—гривеників, і нарешті, до множення цілих чисел.

$$\begin{array}{r} 2,25 \\ \times\ 7 \\ \hline 15,75 \end{array}$$

Задача 2—Знаючи, що саж. дорівнює 2,134 м., знайти, чому дорівнюватимуть 8 саж. і заокруглити результат до сотих метру.

Маємо знову множення. Від помноження тисячних частин метру (міліметрів) числом 8, ми знайдемо міліметри. Такожіод помноження сотих матимемо соті і взагалі в добутков матимемо ті саме частини, що їх помножаємо.

$$\begin{array}{r} 2,134 \\ \times\ 8 \\ \hline 17,072 \\ \hline 17,07 \end{array}$$

Розглянувши оці дві задачі, бачимо таке правило для помноження десяткових дробів цілим числом: *десятковий дріб множимо, як ціле число, не зважаючи на протинку; в добуткові відділяємо з правого боку стільки цифр, скільки мали їх у множеникові.*

Вправа 1—Кілограм цукру коштує 0,6 карб. Скільки треба заплатити за 3 кг?

2—Кожна точка землі на її середині (на екваторі) проходить за секунду 0,442 км. Яку віддаль проходить земля за 6 секунд? А за 8 секунд? (6 секунд це 0,1 хвилини).

Підчас таких множень треба звернути увагу на випадок, коли в добуткові наприкінці здибаємо один або кілька нулів. Нехай маємо множення 1,875×8 (зробіть це). Добуток маємо15,000. Цеб-то в добуткові не буде в нас десятих, сотих і тисячних, а лишаються самі цілі. Тут ще раз помічаємо, що нулі наприкінці десяткового дробу можна відкинути

$$\begin{array}{r} 1,875 \\ \times\ 8 \\ \hline 15,000 \end{array}$$

Графік переходу від одних до одних мір

§ 2. Дуже зручно переводити одні на одні міри з допомогою рисунку. Для рисунку, звичайно, беруть міліметровий папір (папір, що його розділено на міліметри) й рисують 2 прості – ОХ та ОУ; одну справа наліво, а другу—просто від себе (за помітками міліметрового паперу). Якщо ми бажаємо нарисувати перехід від метрів до аршинів, то через точку, де перетинаються перші дві прості, візьмемо нову просту третю. Щоб узяти цю третю, ми одмітимо на першій простій ОХ через 1 сантиметр поділи. Ці поділи даватимуть нам величини числа метрів. Понад поділом 1, відходячи просто від себе (за помітками паперу) намітимо на віддалі 1,4 см. другу точку. З'єднуючи другу точку з точкою О, дістанемо просту. Ця проста й дає нам змогу переводити аршини на метри, або метри на аршини. Для більшої зручности пишемо через 1 сантиметр, почінаючи від точки О, на простій ОХ 1 м., 2 м., 3., 4. й т. д., а на простій ОУ через 1 см. від О пишемо 1 арш., 2 арш., 3 арш., 4 арш. Щоб обернути з допомогою такого рисунку—метри на аршини, напр. 5 м., ми шукаємо на простій ОХ помітку 5. Через цю помітку йдемо просто від себе до того, доки дійдемо до третьої. Після цього за лінією міліметрового паперу повертаємо просто до ОУ і там находимо відповідне число аршинів 7.

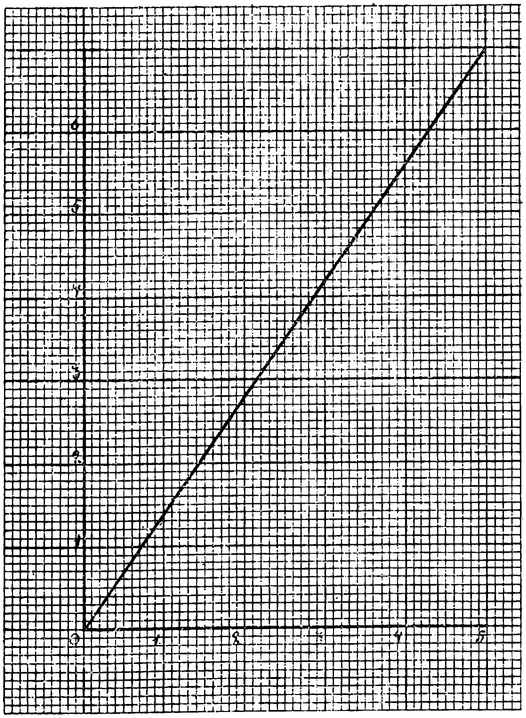


Рис. 5.

Вправа — Найдіть, скільком аршинам цілим та десятим частинам відповідають 2 м., 3 м., 4 м.

Якщо бажаємо обернути аршини на метри, проробімо те саме, тільки міняючи порядок.

Напр., перетворюємо 1, 5 арш. на метри. Через точку на простій ОУ, де відмічено 1,5 (посередині між 1 та 2), посуваємося за лінією міліметрового паперу правобіч до простої третьої, а дійшовши до цієї простої, повертаємо до простої ОХ. У даному разі до простої ОХ ми йдемо посередині межи двома лініями міліметрового паперу, і найдемо на простій ОХ відповідь 1 м. та ще половина міліметру. Це нам дає 1,05 м. (півміліметр — це 0,5 мм. або 0,05 см.).

Вправа 1 — Нарисуйте перехід од сажнів до метрів, беручи 1 саж = 2 м.

2—Нарисуйте перехід од сантиметрів до цалів, беручи 1 ц. = 25 см. (За одиницю беріть в обох вправах на рисункові 1 см.).

Ділення десяткового дробу на ціле число (одноцифрове)

§ 3. **Задача 1**—Коли видавали півмісячну платню—на 8 робітників нашого цеху припало 258 карб. Ці гроші роздано всім нарівно. Скільки припало на кожного?

```
 258 карб. | 8
— 24       |-----
 ---       | 32,25
   18
 — 16
   ---
    20
  — 16
    ---
     40
   — 40
     ---
     00
```

Відповідь на задачу дає ділення. Отже поділяємо. Починаємо ділення з найвищого порядку, а тому, що 2 сотні на 8 не поділяються націло, берем для початку 25 десятків. У частці знайдемо 3 десятки. Помноживши 8×3 й віднявши 24 від 25, матимемо 1 десяток карб. у остачі; до цього ще дописується 8 з діленика, і 18 карбованців поділяємо на 8. У частці буде 2 одиниці. Від поділу ще лишається 2 одиниці—2 карб. Ми дописуємо до них нуля й перетворюємо, таким чином, на десяті частини карбованця, на гривеники. Продовжуємо ділення: 20 десятих поділяємо на 8, і одержуємо 2 десятих. Щоб відокремити десяті частини карбованця від цілих карбованців, пишемо перед десятими протинку. Далі остачу від ділення десятих (4) збільшуємо знову в 10 разів і дістанемо 40 сотих. Тут уже остачі не буде, й ділення закінчено.

2 — Підчас маневрування паротяг пройшов усього 9 км. і витратив 1,35 тони води. Скільки тон води витрачав він на один кілометр?

```
 1,35 | 9
—  9  |-----
 ---  | 0,15
   45
 — 45
   ---
   00
```

Поділяючи в даному разі, ми зараз-же маємо в частці 0 цілих, бо 1 на 9 націло поділити неможна. Перетворюючи цілу одиницю на десяті частини й дописуючи 3 десятих, матимемо разом 13 десятих; 9 у 13 міститься 1 раз. До остачі 4 дописуємо 5 сотих і 45 поділяємо вже без остачі на 9.

Дуже часто трапляються випадки, коли ділення не закінчується. Напр., поділити 25 : 6. Ми дістали 2 цифри частки—4,1 такі, що не повторюються, а наступна після них цифра 6 повторюється, якби робили далі ділення. Нам у таких випадках доводиться обмежуватися тою точністю, що її потрібує задача, а зайві цифри відкидати. Відкидаючи цифри, ми повинні додержуватися правила: якщо перша з цифр, що їх відкидаємо менша від 5, ми просто відкидаємо дрібні частини; якщо перша згадана цифра 5 або більша від 5, останню цифру з тих, що залишаються, збільшуємо на 1. Тому й у нашому прикладі беремо 4,17 (точність до 0,01).

```
 25  | 6
— 24 |------
 --- | 4,166
  10
 — 6
  ---
   40
 — 36
   ---
    40
  — 36
    ---
    40
```

Вправа 1 — Щоб зробити собі одяг, робітник мусив витратити 52,5 карб. Кооператив згодився продати робітникові одяг з умовою виплатити ці гроші за півроку, що-разу однаково. По скільки доведеться вносити робітникові що-місяця? (Відп.—8,75 карб.).

2 — Стоп нейзільбер (нове срібло) складається з міди, нікелю та цинку; міди треба брати ½ всієї кількости, нікелю та цинку по $^1/_4$. На заводі треба виготувати 2,5 кг. нейзільберу. По скільки треба взяти кожного з металів? (Відп.—1,25; 0,625).

Поверхня прямокутника

§ 4. **Задача**—Сільгосп має сад та город. Довжина саду від вулиці 1 км., а довжина городу на другому боці вулиці—0,75 км. Що більше—сад чи город?

Ясна річ, що на таке запитання неможна дати відповіди через те, що нам невідомо, які завширшки сад та город. Щоб вказати, що більше,—треба знати не саму лише довжину.

Ще задача. У селянина кімната 5 м. завдовжки, а в його сусіди—6 м. Яка кімната більша?

Тут знову ми кажемо, що нам не досить знати лише довжину кімнат, а треба ще знайти, які вони широкі. Таким чином поверхня залежить від довжини та ширини, або инакше,—п о в е р х н я є ф у н к ц і я д о в ж и н и т а ш и р и н и.

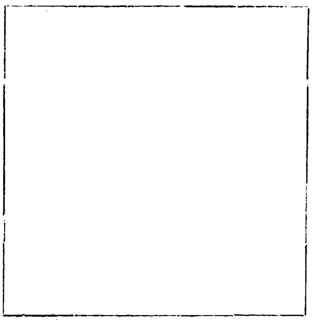


Рис. 6.

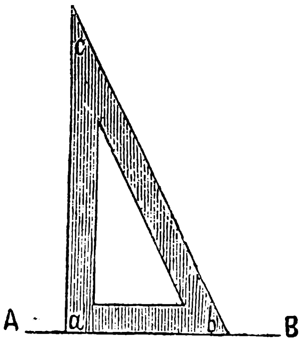


Рис. 7.

Щоб вимірювати поверхню, вживають к в а д р а т о в и х м і р. Тепер у нас за міру поверхонь беруть квадратового метра. Це є такий чотирикутник (рис. 6), що в нього всі боки завдовжки 1 м. Щоб нарисувати квадрата, беруть звичайну лінійку й до неї міцно притулюють косинця (рис. 7); по лінійці ведуть один бік квадрату, а другий бік по сторчовому (непохилому) бокові косинця. Пересувають косинця й прикладають його до протилежного кінця першого боку. Тут ведуть третій бік квадрату. Треба подбати про те, щоб усі боки були рівні один одному. Відклавши, як указано, три боки, легко нарисувати й четвертого, злучаючи 2 кінцеві точки протилежних боків. Такого роду квадрат і вживають за міру поверхонь.

Якщо доводиться міряти маленькі поверхні, як от аркуш паперу у зошиті чи книзі, маленькі коробочки то що, їх міряють на квадратові сантиметри. Кв. сантиметр є квадрат, що в нього всі боки завдовжки 1 см.

Вправа 1—Знайдіть на міліметровому папері квадратовий сантиметр.

2—Знайдіть тамож кв. міліметр та квадратовий дециметр.

3—Зберіться групами чоловіка по чотири—п'ять і одміряйте в кімнаті, в якомусь її куті, квадратовий метр.

Одміряйте на міліметровому папері довжину 6 см. Означіть цей відтинок простої на кінцях її AB (рис. 8). Притуліть до цього відтинку лінійку, а до лінійки косинця, щоб можна було повести через точки A та B нові відтинки AD та BC. Кожний з цих відтинків візьміть завдовжки по 4 см. Злучіть точки D та C простою й ви дістанете прямокутника.

Порахуйте, скільки квадратових сантиметрів займає поверхня цього прямокутника й ви знайдете число 36.

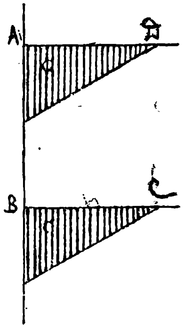


Рис. 8.

Нарисуйте ще раз прямокутника на картатому пепері. Візьміть його більший бік 12 поділів завдовжки, а менший—п'ять. Повчімося вимірювати поверхню прямокутника. Подивімось, скільки карток (квадратиків) буде в одному рядкові біля його більшого боку. Ясна річ, що квадратиків буде 12 (бо він є протягнутий на 12 карток).

Безпосередньо вище понад першим рядком карток ми можемо взяти знов другий ряд, де буде також 12 карток. Понад другим беремо третій, далі четвертий і п'ятий. Узявши п'ятий рядок карток, ми заповнимо щільно усю поверхню нашого прямокутника. Скільки-ж вийде всіх карток у прямокутникові? В кожному рядкові біля більшого боку буде по 12 карток, а рядків буде 5; тому й поверхня виходить—12.5=60 карток.

Можна розглянути багато прямокутників і в усіх випадках ми помітимо це-ж саме. Якщо матимемо, що довжина прямокутної кімнати буде 8 м., а ширина—5 м., то вкладаючи квадратові метри щільно один біля одного вздовж довжини кімнати, ми вкладемо їх рівно 8; поруч із цим рядом квадратових метрів ми можемо покласти другий, третій четвертий і, нарешті, п'ятий. Рядків буде рівно стільки, яка ширина кімнати; а тому поверхня кімнати вийде 8.5=40 кв. метрів.

Помітивши це, ми не будемо вкладати квадратових метрів на підлозі кімнати, а скористуємося з правила: *щоб обчислити поверхню прямокутника, потрібно виміряти на однакові міри його довжину та ширину й перемножити довжину шириною.*

Дістанемо поверхню в квадратових мірах з тою назвою, яка була в довжини та ширини.

Вправа 1—Довжина лінійки 25 см., а ширина 3 см. Яка її поверхня? Обов'язково пишіть назву. (Відп.—75 кв. см.).

2—Довжина кімнати 15,5 м., а ширина 6 м. Яка її поверхня? (Яка назва у квадратових мір поверхні тут?).

3—Довжина стола 3,75 м., а ширина 1,2 м. Яка його поверхня? Цей стіл пофарбували; на це витратили на матеріял та роботу по 0,8 коп. за кв. метр. Скільки коштував ремонт стола? (Відп.—3,6 карб.).

Правило знаходження поверхні прямокутника математики записують дуже коротко—таким чином: рисують якого завгодно невеликого прямокутника й пишуть, що його довга сторона містить a одиниць довжини (метрів, сантиметрів чи міліметрів—це однаково). Друга сторона—ширина—має b таких саме одиниць довжини. Щоби вказати, що треба помножити довжину шириною, пишуть $a.\ b$ ($a \times b$). Безумовно, літеру a ми не можемо помножити літерою b; але ми знаємо, що літера a заміняє собою число, що дає довжину, а літера b заміняє число, що дає ширину прямокутника. У кожному випадкові ми, замість a та b, беремо потрібні числа й перемножаємо самі ці числа. Літеровий запис не дає змоги знайти поверхні, а тільки вказує, що робити для її знаходження.

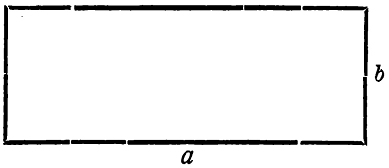


Рис. 9.

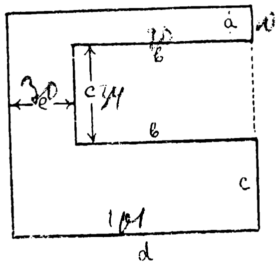


Рис. 10.

Вправа—Поверхня будинку має форму, що вказано на рисункові 10; точками вказано двір цього будинку. Розміри на рисункові зазначено літерами. Знайти поверхню двору й будинка, якщо літери мають такі значіння: $a = 10$ м.; $b = 70$ м.; $c = 34$; $d = 101$, м.; $e = 30$ м.

Поверхня квадрату

§ 5. Для виміру поверхонь доводиться вживати й великих і малих мір, залежно від того, які саме поверхні міряємо. Напр., міряючи поверхню цілої держави, ми беремо великі міри—кв. кілометри, міряючи поверхню кімнати, вживаємо метри, а коли доводиться у техниці виміряти досить малі речі, як от поверхні цвяхів, шрубів, ґвинтів, то-що, трапляються вже й сантиметри, й міліметри. Отже, потрібно знати взаємовідношення поміж великими та малими мірами. Дуже легко вишукати ці взаємовідношення. Подивившися на міліметровий папір, зараз помічаємо там дуже дрібні квадратики — квадратові міліметри й більші квадратики — кв. сантиметри. Знаючи, що кожна сторона кв. сантиметру є завдовжки 10 мм., вираховуємо, що поверхня кв. сантиметру дорівнює 10×10 цеб-то 100 кв. мм.

Цілком таким способом, побачимо, що кожна сторона кв. дм. є довга 10 см., а тому поверхня кв. дм. виносить 10×10 або 100 кв. см. Те саме можна продовжити й далі й зазначити взаємовідношення инших мір.

Замітьмо, що у всіх цих випадках доводиться нам перемножувати число 10 само собою. Умовились записувати таке множення скорочено й писати $10.10 = 10^2$, цеб-то, писати число 10 один раз й біля нього вгорі праворуч дописувати маленьку цифру 2, щоб вказати 2 чинники 10. Таким саме чином запис 5^2 визначає, що потрібно знайти добуток 5.5. Читають цей запис так: 10^2 — 10 у другому ступені або 10 у квадраті; 5^2 — 5 у другому ступені або 5 у квадраті.

Вправи—Вичисліть 2^2 ; 7^2.

Такі множення числа самим собою доводиться нам робити, обчислюючи поверхню квадрату, (див. рисунок 11) зі сторонами кожна по a см. (чи дм. чи метр, взагалі якихось однакових одиниць).

Ми й тут пишемо: поверхня квадрату є a^2 і розуміємо, що це визначає, що a помножене числом a, цеб-то помножено саму собою довжину боку нашого квадрату.

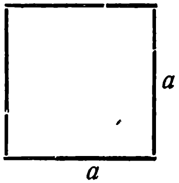


Рис. 11.

Виходить, таким чином, що поверхня прямокутника залежить від двох чисел: a та b (довжини та ширини прямокутника) а поверхня квадрату від одного числа a, бо у квадрата й довжина й ширина однакові. Цю саме думку, як уже відомо, ми висловлюємо ще так: поверхня прямокутника є функція довжини та ширини його, а поверхня квадрату є функція одної величини—довжини його боку.

Квадратові міри

§ 6. Навчившися находити поверхню квадрату та знаючи довжини боків квадрату, ми зуміємо взнати, у скільки разів більше чи менше одна одної квадратові міри; для цього досить тільки відповідні міри довжини (так звані, лінійні міри) піднести до квадрату. Згадавши, напр., що в сажені є 3 арш., а кв. сажень є такий квадрат, що кожний бік дорівнює сажневі, находимо, що поверхня кв. сажню дорівнює 3^2 квадр. арш., инакше 9 кв. арш.

Ми подаємо тут таблицю метричних мір поверхні:

1 кв. км.	$= 10^2$	або	100	кв. гм.
1 кв. гм.	$= 10^2$	»	100	кв. дкм.
1 кв. дкм.	$= 10^2$	»	100	кв. м.

1 кв. м.	$= 10^2$	або	100	кв. дм.
1 кв. дм.	$= 10^2$	»	100	кв. см.
1 кв. см.	$= 10^2$	»	100	кв. мм.

Зауважте, між иншим, що часто, замість назви «квадратовий», пишуть біля назви міри знак квадрату — число 2 вгорі, тому запис м.^{2} треба розуміти «кв. метр», запис см^2—кв. сантиметр.

Тут також, як і в лінійних мірах, квадратового гектометра та квадратового декаметра майже не здибуємо.

Коли доводиться міряти поверхню землі, ми тепер, замість десятини, користуємося з гектару, а для дрібних дільниць, як отдвір, будівлі то-що, з ару. Ар—це є кв. декаметр, а тому 1 ар $= 100$ м^2, а гектар — це є 100 арів або 1 дкм.^{2}. Гектар досить близький до десятини, а саме 1 га (це скорочено так записують гектар, а ар записують скорочено — а) дорівнює 0,9 дес., а десятина-це є 1,1 га. Ще иноді кажуть: 11 десятин = 12 гектар.

Вправа 1—Знаючи, що 1 дес. = 1,09 га, оберніть на гектари 3 та 5 дес. і заокругліть відповідь до сотих частин.

2 — Сільсько-господарча комуна має городу 7 га. Скільки це десятин, якщо 1 га = 0,92 д.?

3 — Нарисуйте график обернення кв. метрів на кв. аршини, беручи, що 1 кв. м. = 2 кв. арш.

4 — Знаючи, що 9 см.^{2} = 1,40 цал.^{2}. знайти, чому дорівнює 1 см.^{2}.

5— Поверхня кімнати 75 кв. м., її ширина 6 м. Яка довжина цієї кімнати?

Прямокутні діяграми. Прямий кут

§ 7. Знайомство з поверхнею прямокутника дозволяє нам збудувати діяграми прямокутні. Щоб зручніше було казати про фігури, ми умовимося називати такі дві прості, що мають однаковий напрямок, рівнобіжні[1]) прості. Уявлення про такі прості ми маємо, розглядаючи два рядки літер на одній сторінці в книзі, або обидві рейки залізниці в тому місці, де немає заокруглення, колії на м'якій дорозі від двох коліс передніх або двох задніх у воза. Так само можемо помітити рівнобіжні прості в тій кімнаті, де ми перебуваємо, у зошитах; особливо яскраво кидається це в лінованих зошитах, бо там ми бачимо досить багато ліній рівнобіжних одна до одної. Помітьмо зараз, що рівнобіжні прості на всій далечині однаково відстоять одна від одної. Тому можна висловити, що рівнобіжні прості однаково віддалені одна від одної.

Вправа 1 — Вкажіть рівнобіжні прості на квадраті та на прямокутникові.

2 — Пошукайте рівнобіжні прості на столі, на стінах кімнати.

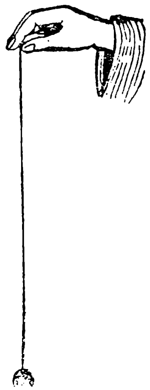
3 — Де ви ще помічаєте рівнобіжні прості в природі?

Всі ми знаємо, що всі речі, падаючи на землю, падають просто до землі, не ухиляючися в бік якщо їх не відносить вітром. Щоб уявити собі цей напрям, можна до нитки прив'язати якусь вагу, напр., камінь; візьмімо нитку завдовжки дециметрів 30 — 50 і поче-

[1]) Замість слова рівнобіжні—кажуть паралельні.

кавши, доки камінь заспокоїться й не буде хитатися, побачимо (див. мал.), що він натягне нитку просто до землі. Цей напрям ми звемо **прямовисний** (вертикальний). Усі речі, кажемо ми, прямовисно падають на землю.

Другий цікавий напрям—це **поземний** (горизонтальний). Про цей напрям ми уявимо, покладаючи на воду в широкому посуді якусь лінійку. Ця лінійка ввесь час буде на поверхні води (ми її беремо настільки легеньку, щоб вона не потонула). Звичайно, поземні всі лінії, що ми проводимо на столі, якщо стіл стоїть не похило.



Мал. 12.

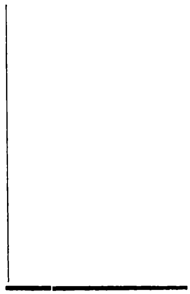


Рис. 13.

Якщо ми візьмемо 2 прості — одну поземну, а другу прямовисну, то ці прості складатимуть кута, що його звуть **прямий кут** (рис. 13). Такий кут ми бачимо в косинця, поставивши його одним із менших боків на поземний стіл. Але кут безумовно лишатиметься прямим і тоді, якщо ми косинця просто покладемо на стіл. Прямі кути ми дуже часто бачимо навколо себе; напр., на кожному аркуші цієї книги ви найдете по 4 прямі кути, де сходяться й перегинаються 2 прості. Щоб нарисувати прямого кута, користуються з лінійки та косинця. (Як ?)...

Вправа 1 — Знайдіть прямого кута в кімнаті, де відбувається наше навчання. Знайдіть такого кута в природі взагалі,

2 — Нарисуйте прямого кута.

3 — Вкажіть, де є прямі кути у квадрата та прямокутника.

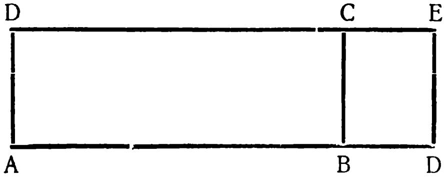
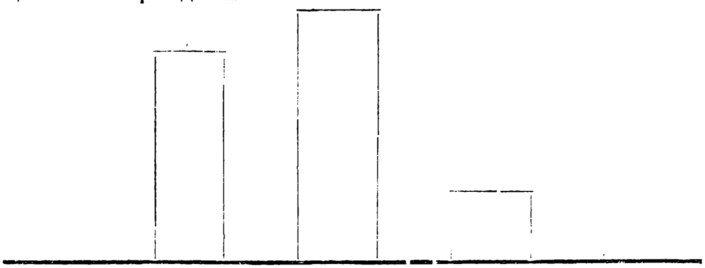


Рис. 14.

Щоб називати прямий кут та відрізняти його від инших, умовилися казати, або одну літеру, напр., A (рис. 14) це кут між простими DA та AB, або 3 літери. Для того саме кута беруть назву ще DAB. Зауважмо ще, що точка A, де перетинаються обидві прості, складаючи кути, зветься **вершок** кута, а самі ці прості — **боки** кута. Такі умови дозволяють нам без сумніву відрізняти один од одного 2 кути прямі по обидва боки від простої CB. Кут праворуч від неї є CBD (або DBC), а кут ліворуч — ABC (або CBA). Тут не відограє жадної ролі, яку із літер A чи C в останньому куті ми візьмемо на першому місці, а яку накінці, важливо лише, щоб точка B, яка стоїть біля вершка, була посередині.

Нарешті, треба умовитися й про назву тих простих, що утворюють прямого кута. Одну з них звуть **сторчем** (або перпендикуляром) відносно другої; кажуть напр., що DA є сторч до AB або що AB сторч до DA.



Розгляньмо тепер, як нарисовано діяграму про кількість поліклінік та амбулаторій. У нас є такі дані: в середині р. 1925 було поліклінік та амбулаторій загально-громадянських 135, робмеду 160, транспортних 35. Щоб нарисувати діяграми, ми вибираємо за основи наших прямокутників 5 мм., а висоти підбираємо так, що в них поверхні були в одного — 135, у другого — 160 і в третього — 35 кв. мм. У такому разі висоти виходять — 27, 32 й 7 мм.

Тепер уже досить просто нарисуємо діяграми, беручи прямокутники з відповідними висотами.

Цілком так рисують прямокутні діяграми і взагалі. Коли нам дано різні числа, ми вибираємо за основу прямокутників цілком довільне число, а висоти підшукуємо з допомогою ділення так, щоб поверхні дорівнювали даним числам. Напр., маючи дані про кількість скоту на Україні року 1925 (числа взято заокруглені): коней 4 000 000 голів; великої рогатої худоби — 8 000 000 г.; овець — 9 000 000 г., свиней — 3 500 000 голів, ми визнаємо, що ці числа голів стануть нам за поверхні. В яких мірах брати ці поверхні, залежить від величини нашої діяграми. Якби ми бажали дати велику діяграму на стіну, можна було-б узяти за маштаб 1 кв. см.=100.000 голів скоту. Тоді поверхні стали-б для коней 40 кв. см., для рогат. скоту — 80 кв. см., овець — 90 кв. см. і свиней — 35 кв. см. Нехай тут вибираємо за основу 4 см. Висоти стануть I—10 см., II—20 см., III—22,5 см. і IV—8,75 см. Збудувавши прямокутники з цими висотами, ми й матимемо потрібні діяграми.

Вправи — Нарисуйте діяграми для таких даних; р. 1924 зібрано було по Україні з 1 десятини в пудах

Жита озимого	39,1	Вівса	42,1
Пшениці озимої	35,6	Гречки	40,1
Пшениці ярої	22,2	Проса	56,7
Ячменю	27,8	Кукурудзи	72,2
Сонячника	64,3		
Льону	29,9		
Конопель	44,1		

Якщо потрібно, заокругліть ці числа.

Множення десяткового дробу числами 10, 100, 1000

§ 8. **Задача 1** — В таблиці для перетворення старих мір на метричні знаходимо 1 саж. — 2,134 м. Скільки метрів у 10 саж.?

$$\begin{array}{r} 2,134 \\ \times\ 10 \\ \hline 21,34 \end{array}$$

Щоб розвязати цю задачу, доводиться виконати множення 2,134 × 10. Міркуємо так: збільшуючи 4 тисячних метра в десять разів, матимемо 40 тисячних, а це дає 4 сотих. Збільшуючи 3 соті в 10 разів, дістанемо 30 сотих або 3 десятих. В наслідок збільшення 1 десятої в 10 разів буде 1 ціла й нарешті 2×10 = 20. Отже, збираючи до купи всі ці окремі множення та їхні добутки, знаходимо результат множення — 21,34.

Задача 2 — Один аршин дорівнює 0,71 м. Чому дорівнюють 10 арш?

$$\begin{array}{r} 0,71 \\ \times\ 10 \\ \hline 7,1 \end{array}$$

Збільшуючи 7 десятих у 10 разів, знаходимо 7 цілих, а збільшуючи 1 соту в 10 разів, маємо 1 десяту, а тому добуток буде 7,1 м.

Можна пробити багато таких задачок й наслідком їх усіх буде те, що кожний порядок даного числа перетворюється на порядок безпосередньо вищий. Цього саме ми можемо досягти, переносячи протинку, що відокремлює цілі від десяткових знаків[1]) на одну цифру правобіч. Отже, *щоб помножити десятковий дріб числом 10, треба протинку в даному дробу перенести на один знак правобіч*; підчас такого перенесення може стати спочатку нуль. Цього нуля ми викреслюємо.

Задача 3 — Один повздовжний метр квадратового заліза 5 мм. завдовжки, важить 0,196 кг. Наш завод має відправити 100 метрів цього заліза. Скільки вони заважуть?

$$\begin{array}{r} 0,196 \\ \times\ 100 \\ \hline 19,6 \end{array}$$

Збільшуючи тисячні частини кілограму (грами) у 100 разів, матимемо десяті частини кг.; від збільшення сотих частин у 100 разів дістанемо цілі кілограми, а від збільшення десятих частин у 100 разів — дістанемо десятки кілограмів. Отже, набудемо 19 цілих та 6 десятих кг.

Проробіть ще такі множення: 07,53 × 100 та 2 144 × 100.

Ще приклад 2,5 × 100. Збільшуючи ціле число 2 у 100 разів, маємо 200, а збільшуючи 5 десятих у 100 разів, набудемо 50.

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ \times 100 \\ \hline 250 \end{array}$$

Проробивши подібні множення й розглядаючи дані числа та добутки, приходимо до висновку, — *щоб помножити десятковий дріб числом 100, мусимо перенести*

[1]) Цифри, що визначають десяті, соті, тисячні то-що, мають назву десяткові знаки.

протинку на 2 цифри правобіч від її попереднього місця; якщо попереду числа набудемо (зліва від першої вартісної цифри) нуля, його закреслюємо, а якщо не вистачить десяткових знаків на правому боці для перенесення протинки, дописуємо нулі.

Задача 4 — Аршин пасу завод продає по 3,75 карб. Сьогодні завод відправив для гуртового склепу 1000 арш. цього пасу. Скільки це коштує?

$$\begin{array}{r} 3{,}75 \\ \times\, 1000 \\ \hline 3750 \end{array}$$

Міркуємо, як і раніше: від множення сотих частин карбованця (копійок) числом тисяча, набудемо десятки карбованців, від множення десятих частин (гривеників) — стануть сотні карбованців, а $3 \times 1\,000 = 3\,000$.

Розглянувши такі приклади, маємо правило: щоб помножити десяткового дроба числом 1000, треба протинку перенести на 3 цифри правобіч, якщо нуль опиниться спочатку, його закреслюємо, якщо не вистачить цифр у десяткового дроба на правому боці, дописуємо нулі.

Всі ці три правила можна об'єднати на одне: щоб помножити десятковий дріб числом, що є 1 з нулями, треба перенести протинку в даному числі на стільки знаків правобіч, скільки нулів у множникові.

Вправа 1 — Помножіть $0{,}7 \times 100$; $2{,}35 \times 10$; $0{,}5 \times 1000$.

2 — Заводові потрібно 1 000 квадратових крицевих прутів, щоб кожний з них був 0,075 м. завдовжки. Скільки метрів прута треба мати заводові?

3 — Яка завдовжки дротина мусить бути, щоб з неї можна було зробити 100 цвяшків, беручи на кожний по 8,3 см.?

Ділення десяткового дробу на 10, 100, 1000

§ 9. **Задача 1** — За 10 днів праці робітникові, що працював поденно, виплачено 27,5 карб. Скільки карб. мав робітник поденно?

Ми повинні 37,5 карб. поділити на 10. Поділяючи 37 на 10, маємо частку 3, а остачу 7. 7 перетворюємо на десяті частини карбованця; дістанемо 7 десятих; додаємо до них ще 5 десятих і маємо всіх десятих 75. У 75 десятих 10 міститься 7 разів. Тому, що ці 7 є вже десяті частини, ми після цифри 3 пишемо протинку й цифру 7 пишемо на місці десятих. Знов ми маємо остачу 5 десятих, а після дописування нуля, перетворення на соті, дістанемо 50 сотих. 50 сотих, поділяючись на 10, дають частку 5 сотих. Таким чином вишукали, що заробляв робітник що-дня по 3,75 карб.

$$\begin{array}{rl} 37{,}5 & \big|\, 10 \\ -30 & \big|\, 3{,}75 \\ \hline 75 & \\ -70 & \\ \hline 50 & \\ -50 & \\ \hline :\,: & \end{array}$$

Задача 2—Садиба має всього 2 325 кв. м. Довжина її дорівнює 100 м. Яка її ширина?

```
 2325  | 100
-200   |------
  325  | 23,25
 -300
   250
  -200
    500
   -500
```

Поділяючи знов, як і в перший раз і перетворюючі остачі на десяті та соті частини метру, дістанемо 23,25 м. Слід не забути поставити протинку на належному місці цеб-то там, де закінчуємо поділ цілих квадр. метрів.

Задача 2—1000 штук великих п'ятнадцятидюймових бринталів (гвіздків) важить 1142,86 фунт. Скільки важить один такий бринталь?

```
 1142,86  | 1000
-1000     |---------
  1428    | 1,14286
 -1000
   4286
  -4000
    2860
   -2000
     8600
    -8000
      6000
     -6000
```

Поділяючи, маємо, що цілих буде лише сама одиниця, що вже першу остачу 142 цілих доводиться перетворювати на десяті. Після цифри 1 ставимо протинку, а далі дістанемо дальші цифри частки, поділяючи як і вище, переносячи спочатку одну по одній дані цифри з діленика, а потім дописуючи нулі.

Вправа—Заокруглити це число до тисячних або сотих.

Ми можемо пробобити, скільки забажаємо такого роду ділень; порівнюючи поміж собою числа дані для ділення та частки, ми помітимо таке правило: *щоб поділити дане число на одиницю з нулями* (10, 100, 1000 й т. д.), *ми повинні тільки відокремити протинкою з правого боку стільки цифр, скільки нулів у дІленикові*, якщо не вистачає цифр у дІленикові, ми попереду в частці дописуємо нулі.

```
  7   | 100
  70  |------
  700 | 0,07
 -700
```

Напр., поділяючи 7 на 100 бачимо, що цілих одиниць немає жадної; перетворивши 7 на десяті, матимемо 70 десятих і знов не можемо їх поділити на 100; перетворивши 70 десятих на соті, зуміємо 700 сотих поділити на 100. Через це й у частці ми на місці цілих та десятих пишемо нулі й 7 опиняється лише на місці сотих.

Вправи 1—32 : 100 = 0,32; робимо без поділу; також 2 : 10 = 0,2; 3750 : 1000 = 3,750 = 3,75.

У всіх вправах далі зробіть ділення просто на підставі правила перенесення протинки.

2—Товарова станція займає поверхню 6875 кв. м. Довжина її 100 м. Яка її ширина?

3—Для криці, що її вживають на різці, беруть звичайно на 1000 кг. стопу вуглецю 10,5 кг., мангану (марганцю) 11 кг., кременю 2 кг. Все инше в стопі залізо. Скільки кожного з цих металів буде взято на 1 кг. стопу? На 100 кг.? На 8 кг.?

4—Машина для піднесення вантажу дозволяє людині витратити сили в 100 разів меншу від тої ваги, що він підносить. Яку силу витрачає робітник, відносячи з допомогою цієї машини 60 пудів? А 200 кг.?

Поняття про відсоток

§ 10. Слово **відсоток** або ще инакше **процент** чуємо ми тепер майже на кожному кроці. У відсотках ми вказуємо ті гроші, що сплачуємо у свою профспілку, у партійні чи громадські організації; у відсотках вказуємо, на скільки збільшилася чи зменшилася продукція заводу, фабрики, селянського господарства; на скільки скорочено чи збільшено число робітників і т. д. **Відсоток** (або процент) **визначає соту частину числа.**

Тому, щоб знайти відсоток, слід тільки поділити дане число на 100. Напр., на заводі було 3 500 робітників. Один відсоток із них герої праці. Скільки було героїв праці на цьому заводі?

Ми робимо ділення $3\,500 : 100 = 35$ і взнаємо, що було 35 героїв праці.

Щоб найти більше, ніж один відсоток, треба буде дане число, що припадає на один відсоток, збільшити в певне число разів. Наприклад.

Задача—Робітник має платні 82 карб. на місяць. Він із цих грошей вносить 3 відсотки до профспілки. Скільки карбованців він вносить до профспілки?

Щоб розвязати таку задачу, ми спочатку вишукаємо, скільки карбованців припадає на один відсоток. (Слово відсоток заміняють знаком %). $82 : 100 = 0{,}82$, а після цього не важко взнати, скільки припадає на 3%, а саме $0{,}82 \times 3 = 2{,}46$ карб.

Вправа 1—Згадайте, скільки карб. ви мали платні на місяць, скільки % % (відсотків) вносили до профспілки, до парткому то-що й узнайте, скільки було карбованців цих внесків.

2—На заводі було 1 235 робітників. Одного дня не вийшли на роботу 8% робітників. Скільки робітників не працювали в той день на заводі? А скільки робітників працювали? (Заокруглити).

3—На машинобудівельному заводі з 2 375 робітників—10% підлітків. Скільки підлітків на цьому заводі? (Відповідь заокруглити до цілих).

Доводиться з відсотками проробляти задачі й цілком протилежного характеру. Напр., такі:

Задача—Адміністрація заводу становить 8% всіх співробітників цього заводу. Скільки людей працює на заводі, якщо адміністрації всього 14 чоловіка?

Тому, що 14 чолов. це є 8%, ми знайдемо, що на 1% припадає 14 : 8 = 1,75 чол. Хоч дробового числа людей не може бути, проте це часто може трапитися в обчисленнях з %%. Згадавши, що 1,75 становлять 1%, а вся кількість співробітників є 100%, шляхом множення розвяжемо задачу. 1,75 × 100 = 175. (Проробіть ці всі дії).

Задача 1—Купуючи крам, кооператив необережно перевіз його; через це 6%, цеб-то 3 кгр., зіпсувалося. Скільки кіло всього краму купив кооператив? Скільки було гарного краму?

2—Облігація Державної позики дає 6% прибутку. Скільки коштує ця облігація, якщо прибуток є 0,3 карб.?

Задачі до 2-го розділу

1—Яка поверхня садиби, що має форму прямокутника завдовжки 100 м., а завширшки 83,5 м.?

2—Обчислити, чому є рівне $a\ b$, якщо $a = 75,42$, а $b = 9$?

3—Найдіть a^3, якщо $a = 305$?

4—Службовець має на місяць 89,75 карб. платні. Цього місяця він вніс до профспілки та каси взаємодопомоги 3%, а до инших організацій—4%. Скільки карб. залишилось у нього? (Відп.—83,47 к.).

5—Робітник купив у ЦРК різного товару на 6,9 карб. Кооператив дає членам знижки 3%. Скільки карб. знижки дістане робітник? (Заокруглити до 0,01). (Відп.—20 коп.).

6—Один із стопів, що з них виробляють ложиська на паротяги для осей, має в собі 8% цинку та 10% цини, а все инше—мідь. По скільки кілограмів треба взяти кожного з цих металів, щоби стопу було 185 кг.? (Відп.—14,8 кг., 18,5 кг.).

7—Робітник має кватирю з двох кімнат, що обидві завширшки 5 м.; одна завдовжки 6,5 м., а друга—4,25 м. Робітник виплачує по 9 коп. за кв. м. Скільки він виплачує за всю кватирю? (Відп.—4,84 крб.).

8—З дротини зроблено 100 цвяхів; на кожний цвях одрізували по 2,75 см. Обрізків стало 1,5 см. Яка завдовжки була вся дротина?

9—Ціна 1 кг. цукру 60 коп. у кооперативі, а в приватній крамниці на 10% вище. Яка ціна 4 кг. цукру в приватній крамниці? (Відп.—2,64 крб.).

10—Після виплати місячного заробітку, профспілка одержала від робітників та службовців 216,76 карб., стягуючи з кожного члена по 3%. Скільки виплачено було всієї зарплатні за цей місяць?

11—Сільгосп. р. 1924 мав засів під жито 17,2 га своєї землі, р. 1925 він збільшив засів на 10%, а 1926 зменшив на 7%, порівнюючи з попереднім роком. Скільки гектарів засівав сільгосп. р. 1925 та 1926? (Заокруглити відповідь до десятих гектару). (Відп.—18,9 га, 17,6 га).

12—Сотня п'ятидюймових цвяшків (з шапинкою) важить 8,191 кг. Скільки грамів важить один такий цвях? (Заокруглити до цілих грамів).

РОЗДІЛ 3

Множення десяткових дробів. Об'єм рівнобіжностінника

Множення десяткових дробів

§ 1. Розвяжемо задачу: човен проходить 3,25 км. за годину. Скільки він пройде за 2,4 години?

Щоб розвязати цю задачу, нам доводиться зробити множення. Підписуємо одне число під одним, як от робили помножаючи многоцифрове число многоцифровим і проробляємо дію так, неначе-б то були цілі числа. Але беручи 325 замість 3,25 збільшуємо це число в 100 разів, через що й добуток збільшується в 100 разів. Так само, беручи 24 замість 2,4, збільшуємо це число в 10 разів, через що добуток, уже збільшений в 100 разів, збільшується ще в 10 разів; таким чином, остаточно добуток 7 800 є збільшений за той, що шукаємо, у 1 000 разів, тому число 7 800 треба зменшити у 1 000 разів, а для цього, як ми знаємо, досить перенести протинку через три цифри від правого боку до лівого. Дістанемо 7,8 км., що його пройшов човен за 2,4 години.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}3,25\\ 2,4\end{array} \\ \hline +\begin{array}{r}1300\\ 650\end{array} \\ \hline 7,800 \end{array}$$

Розвяжемо ще задачу: Кімната 7,5 метр. завдовжки й 3,6 метр. завширшки. Обчислити поверхню підлоги цієї кімнати.

Помножимо 7,5 числом 3,6, неначеб-то це були цілі числа. Дістаємо 2 700. Відділяємо протинкою дві цифри, знаходимо 7,5 . 3,6=27 метр.

Ще приклад: 4,256 помножити числом 2,4.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}4,256\\ 2,4\end{array} \\ \hline +\begin{array}{r}17024\\ 8512\end{array} \\ \hline 10,2144 \end{array}$$

З наведених прикладів можемо вивести ось яке правило: для множення десяткового дробу десятковим дробом, множимо їх, як цілі числа, не зважаючи на протинки; в добуткові — відділяємо з правого боку стільки цифр, скільки мали їх у тих числах, що перемножали. Це правило поширюється на ті випадки, коли множимо ціле число десятковим дробом або навпаки.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}8,34\\ 32\end{array} \\ \hline \begin{array}{r}1668\\ 2502\ \end{array} \\ \hline 266,88 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}0,24\\ 0,023\end{array} \\ \hline \begin{array}{r}72\\ 48\ \end{array} \\ \hline 0,00552 \end{array}$$

(дві цифри поза протинкою) (п'ять цифр поза протинкою)

Вправи 1. 3,25 . 24	35 . 0,436	
52,4 . 15		
0,24 . 12	28 . 1,5	
0,345 . 243 (заокруглити).		
2. 3,25 . 4,12	2,4 . 0,002	8,5 . 200
25,4 . 3,25	23,4 . 0,05	25,4 . 30
0,24 . 2,7	3,4 . 20	400 . 2,6
3. 0,002 . 0,03	0,0002 . 0,004	
0,001 . 0,02	0,02 . 0,02	

4. (2,35 + 4,3 + 2,2 . 3,6) . 4,5

Примітка. Спочатку зробіть множення 2,2 . 3,6, далі додавання чисел 2,35 числа 4,3 та добутка 2,2 . 3,6, а нарешті суму помножіть числом 4,5. Зверніть увагу на порядок дій.

Задача 1—Помпа виточує за годину 32,6 відер води. Скільки вона виточить за 5,4 годин?

2—Автомобіль пробігає 62,4 кілом. за годину. Скільки він пробіжить за 2,25 годин?

Обчислити поверхню прямокутної дільниці землі: 14,2 метрів завдовжки й 12,5 метрів завширшки.

На цій задачі можете перевірити вищенаведене правило множення десяткових дробів. Замість 14,2 метр., візьмемо йому рівне 142 дециметри, а замість 12,5 метр. — рівне йому 125 дециметрів. Помноживши 142 числом 125, дістанемо 17 750 квадратових дециметрів. Якщо нам потрібно дізнатися, скільки це буде квадратових метрів, то мусимо число 17 750 зменшити в 100 разів, а для цього треба лише написати протинку на належному місці. Таким чином, дістаємо 177,5 кв. метрів.

Дайте відповідь на такі запитання:

1—Як зміняється віддаль, що її проходить автомобіль за 2,5 години, коли його хуткість збільшиться вдвічі?

2—Чи впливає зміна (чинників) на добуток?

3—Чи можна назвати добуток функцією чинників?

4—Чи буде поверхня прямокутника функцією його довжини та ширини?

5—Що є спільного у 3-му та 4-му запитанні?

Находження відсотків даного числа

§ 2. Із попереднього розділу ми вже знаємо, що таке відсоток, та як знайти декілька відсотків від даного числа. Тепер розвяжемо трішки складніші задачі:

1—На заводі перероблено 525 тон металу, в тому числі чавуну — 24%. Скільки чавуну вироблено на заводі?

Вишукаємо спочатку 1% від 525. Це буде 5,25. Щоб дізнатися про 24%, доводиться 5,25 помножити числом 24. Дістаємо 126 тон чавуну.

2—Заробітня платня робітника—73 карб. До профспілки стягають 3,6%. Скільки грошей дістає робітник?

1% від його платні дорівнює 0,73 карб., а 3,6% знайдемо множенням; отже

$$\begin{array}{r} 0{,}73 \\ \times\ 3{,}6 \\ \hline 438 \\ 219 \\ \hline 2{,}628 \end{array}$$

заокруглюючи, дістанемо 2,63. Тому одержує він

$$\begin{array}{r} 73 \\ -\ 2{,}63 \\ \hline 70{,}27 \end{array}$$ карбованців.

3 — Перевозячи 135 кілограмів цукру, розсипали 0,4%. Скільки цукру було розсипано?.

1% складає 1,35 кг., а 0,4% буде

$$\begin{array}{r} 1{,}35 \\ \times\ 0{,}4 \\ \hline 0{,}540 \end{array}$$

Отже було розсипано 0,54 кілограма.

4 — Робітник зі 126 карб. зарплатні витрачає 15% на кватирю, 62,5% на харчі. Скільки карбованців він витрачає разом на кватирю й харчі?

5 — Чавун містить в собі 3,6% вуглецю, 0,62% кремінцю, 4,6% марганцю, 0,28% фосфору, решта — залізо. Найдіть вагу всіх складових елементів в чавуні вагою 82,4 кіло.

Рівнобіжностінник (або паралелопіпед) та куб. Об'єм рівнобіжностінника та куба

§ 3. Різні речі, як от—шматок мила, ящик, у яких ми бачимо 6 стінок, прямокутні своєю формою, звуть прямокутними рівнобіжностінниками або паралелопіпедами. Боки кожного рівнобіжностінника звемо стінами, боки прямокутника — рубами, а вершки прямих кутів вершками рівнобіжностінника. Полічіть, скільки у рівнобіжностінника рубів, вершків? стін, Чи всі руби у нього є рівні? Назовіть ще якінебудь речі, що своєю формою нагадують рівнобіжностінника.

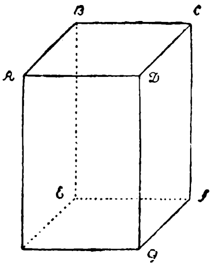
Яку форму здебільшого має кімната? Подібно до того, як у кімнаті розглядаємо довжину, ширину та висоту, так і в кожному рівнобіжностінникові три руба, що сполучаються в одному вершкові є його обмірами: тоб-то довжиною, шириною й висотою. Один з прямокутників рівнобіжностінника звуть основою його (найчастіше нижній). Тоді кожен бічний руб (він є сторчовий або перпендикулярний до боку основи) є висотою рівнобіжностінника.

Рівнобіжностінника, що має всі три обміри рівними, звуть кубом (рис. 16).

Куб, у якого руб дорівнює 1 см. або 1 метрові, 1 сажневі — звуть кубовим сантиметром або кубовим метром, кубовим сажнем, взагалі кубовими одиницями.

Такі куби вживають, як міри об'ємів рівнобіжностінників та кубів. Якщо дізнаємося, скільки кубових одиниць міститься у даному рівнобіжностінникові, то те число, що його одержуємо, звемо об'ємом даного рівнобіжностінника.

Наприклад, об'ємом кімнати буде число, яке вказує, скільки кубичних метрів вмістилось-би в цій кімнаті. Припустимо, що кімната 5 метрів завдовжки, 3 м. завширшки й 4 м. заввишки. Уявіть собі, що ми поклали на підлогу кімнати кубові метри щільно один до одного щоб покрити ними всю підлогу. Скільки їх вмістилося-б на цій підлозі? Ясна річ, що всього 15 (5 . 3) кубових метрів. Ці кубові метри складають перший шар. А скільки таких шарів можна всього покласти для заповнення всієї кімнати? Тільки 4. Через що? Через те, що така висота кімнати. Отже, всього в кімнаті міститиметься 15.4 = 60 кубових метрів.



Рівнобіжностінник або паралелопіпед.
Рис. 15.

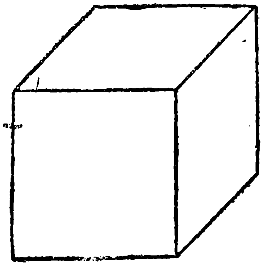


Рис. 16.

Таким чином, для обчислення об'єму кімнати доводиться помножити довжину шириною й те число, що його одержимо, помножити висотою, тоб-то перемножити три обміри рівнобіжностінника.

Вправа 1—Знайдіть вмістимість сараю довжиною 15 метрів, 10 метр. завширшки, висотою 4 метри?

15 . 10 = 150; 150 . 4 = 600 куб. метр.

2—Для фундаменту копають рівчака 25 метр. завдовжки, 1,5 м. завширшки й 2 метри завглибшки. Скільки землі доведеться викопати (в кубових метрах)?

3—Знайдіть об'єм кубового ящика, що в нього кожен руб дорівнює 15 см.?

4—Обчисліть об'єм куба, що має руби 3 см.? 2 см.? 3,4 м.? 2 саж.?

5—Полічімо, скільки кубових дециметрів в одному кубовому метрі. Кожен руб цього куба має 10 дециметрів. Тому об'єм його буде 10 . 10 . 10 = 1000 куб дециметрів.

Скільки в одному куб. сантиметрі міститься кубових міліметрів?

Розглядаючи всі вищенаведені приклади, можемо скласти таке правило: щоб обернути кубові міри на безпосередньо менші, треба число дане збільшити в 1000 разів. Навпаки, щоб одержати з нижчої безпосередньо вищу, треба дане число зменшити в 1000 разів. Наприклад:

23 куб. метра	дорівнює	23 000 куб. децим.
23 куб. метра	»	23 000 000 куб. сан.
23,45 куб. метр.	»	23 450 куб. децим.
5,346 куб. метр.	»	5 436 000 куб. см.

Вправа 1 — Оберніть 537,4 куб. метрів на куб. см.
» 83,543 куб. децим. на куб. см.
» 0,345 куб. метр. на куб. см.

2 — Знайдіть об'єм куба, що в нього руби по 0,2 метри кожен, та результат напишіть кубовими сантиметрами.

3 — Вичисліть об'єм кубів з рубами 2,2 см., 0,4 см., 1,2 дец. Результати оберніть на метри.

4 — Як записати правило вичислення об'єму рівнобіжностінника що в нього боки дорівнюють a м., b м., c м.? Відповідь abc що визначає цей запис? Чи дає цей запис спосіб находження об'єму рівнобіжностінника?

Примітка: Крім кубових метрів, сантиметрів і т. инш. кубових одиниць — для обмірів об'єму в метричній системі існує літр, що є рівний 1 куб. дециметрові або 100 куб. сантиметрам.
Літр = 0,08 відра.
Відро = 12 літрів.

Формула об'єму рівнобіжностінника та куба. Покажчик

§ 4. Правило винайдення об'єму куба математики записують скорочено таким чином: припускають, що кожен руб куба дорівнює a одиницям (метрів, сантиметрів чи міліметрів — це однаково). Щоб вказати, що треба помножити довжину шириною, а результат висотою — пишуть $a.a.a$ або a^3.

Вичисляючи об'єм куба, доводиться помножити якесь число само собою тричі.

Умовились записувати таке множення скорочено й писати $a.a.a = a^3$, цеб-то писати число, що виміряє руб, один раз, а біля нього угорі правобіч дописувати маленьку цифру 3, щоб вказати, що береться тричі чинник a, тоб-то $a.a.a = a^3$.

Добуток однакових чинників звуть степінь. Коли $2.2.2 = 8$ або $2^3 = 8$, то 8 є третій степінь 2-х. Число 3, що вказує скільки разів треба помножити число само собою, звуть покажчиком степеню. Об'єм куба, що має руб = 5 см., буде 5^3. Умовимось означати об'єм літерою V. Тоді $V = a^3$; цей запис має назву формула (див. примітку до § 6).

Вправа 1 — Напишіть формулу поверхні квадрата.

2 — Чому другий степінь звемо квадратом, а третій кубом?

3 — Знайдіть другий степінь чисел (инакше кажучи, піднесіть до другого степеню): 3; 5; 2,5; 0,1; 0,2. Як це записати скорочено?

4 — Знайдіть третій степінь числа (або піднести до третього степеню) 6; 3,2; 0,1; 0,03; 1,2. Запишіть це скорочено.

5 — Вичисліть 4^3; $2{,}5^3$. $(0{,}5)^2$.
$(0{,}4)^3$; $(1{,}2)^3$; $(1{,}01)^3$; $(0{,}01)^3$; $(0{,}001)^3$.

6 — Запишіть скорочено в формі: $2 . 2 . 2 = 2^3 = 8$.
$8 . 8 . 8 = ?$ $2{,}1 . 2{,}1 . 2{,}1 = ?$ $b . b . b = ?$ $x . x . x = ?$

7 — Степінь може бути не тільки другий, третій, а який завгодно; він тоді не визначатиме поверхні квадрата, або об'єму куба, а буде лише множенням однакових чинників. Вичисліть 5^4?

Запишіть скорочено і вичисліть $3 . 3 . 3 . 3 =$, $2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 =$, $0{,}1 . 0{,}1 . 0{,}1 . 0{,}1 =$.

Дайте відповідь на такі питання:

1 — Як змінюється об'єм кімнати, коли висота її збільшується вдвічі?

2 — Як змнюється об'єм рівнобіжностінника, коли ширина його збільшиться або зменшиться вдвічі?

3 — Чи буде змінятись об'єм рівнобіжностінника, якщо будемо зміняти його довжину?

4 — Чи можна сказати, що об'єм рівнобіжностінника є функцією його трьох обмірів? (чому так?)

Обчислення числових значінь літерових виразів

§ 5. В попередньому ми одержали вираз для об'єму куба $v = a^3$, де a визначає яке-небудь число. Найдемо числове значіння виразу, тоб-то об'єм куба, коли a буде рівно 1,2.

$v = 1{,}2^3 = 1{,}2 . 1{,}2 . 1{,}2 = 1{,}728$.

Вправа — Вичисліть значіння $v = a^3$, коли $a = 0{,}2$, коли $a = 1{,}5$, $a = 3{,}4$.

Знайдемо числову вартість літерового виразу $a^3 + b^3$ (яке можна розглядати, як суму об'ємів двох кубів). Коли $a = 3$, $b = 2$, то

$a^3 = 3^3 = 3 . 3 . 3 = 27$;
$b^3 = 2^3 = 2 . 2 . 2 = 8$

Отже $a^3 + b^3 = 27 + 8 = 35$.

Вправа 1 — Знайдіть числову вартість виразу: $a^3 + b^3$, коли $a = 2{,}4$, $b = 3{,}5$

2 — Знайдіть числову вартість виразу: $a^3 + b^3 + c^3$, коли $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$?

3 — Знайдіть числову вартість об'єму рівнобіжностінника за виразом $v = abc$ [1]) на таких умовах:

a	b	c	v
3,5	2,5	4	?
1,2	5	2,5	?
0,8	3,25	1,4	?

[1]) Умовімось між літерами знак множення пропускати. Отже запис a b c визначає a . b . c.

Обчислення ваги рівнобіжностінника та куба через об'єм та питому вагу. Літеровий запис

§ 6. Знайдімо вагу шматка заліза в формі рівнобіжностінника з обмірами 5 см., 6 см., 8 см.

Вичислім спочатку об'єм цього заліза. Якби нам була відома вага одного куб. см. заліза, то легко було-б дізнатися про вагу цілого шматка його. Вагу одного кубічного сантиметру в грамах будь-якої матерії (речовини) звуть **питомою вагою** матерії або речовини. В кінці цієї книги (див. табл.) ми подаємо таблицю питомої ваги деяких фізичних тіл. В цій таблиці знаходимо, що питома вага заліза дорівнює 7,8, тоб-то, 1 куб. см. заліза важить 7,8 грама. Знаючи це, легко вичислити вагу нашого шматка, для чого $7{,}8 \cdot 240 = 1\,872$ грам. або 1,872 кг.

Таким чином, коли питома вага тіла нам відома, то для винайдення ваги його, треба об'єм його, що вичислили в куб. сантиметрах, помножити числом його питомої ваги. Вагу одержуємо, як якесь число грамів і коли воно дуже велике, то перенесенням протинки ліворуч перетворюємо на кілограми або тони.

Позначімо об'єм рівнобіжностінника (або взагалі об'єм будь-якого тіла) літерою v, питому вагу—літерою d, а вагу цілого тіла літерою P. Тоді замість того, щоб говорити: для винайдення ваги тіла, треба помножити його об'єм питомою вагою, ми можемо цей закон записати літерами скорочено, а саме:

$$P = v \cdot d.$$

Цей запис вказує нам, які дії та в якому порядкові треба пробити, щоб вичислити вагу тіла.

Примітка: Сполучення літер, а иноді літер та чисел, як було вже в нас, напр., $v = a^3$; $v = a \cdot b \cdot c$; $p = v \cdot d$—мають назву: **формула**.

Вправи до розділу 3

1— Знайдіть вагу глинцьового кубика, у якого кожен руб 25 см. завдовжки.

2—Вичисліть вагу мармурової розподільчої дошки, якої розміри 1,2; 0,5 та 0,05 метра.

3—Робітник одержує що-місяця 84 крб. Профсоюз стягає 2%, на повітрян. флоту—0,5% та «Т-во Друзі Дітей»—0,25%. Скільки він уплачує у кожну організацію зокрема?

4—Скільки крохмалю в 25,5 кг. картоплі, якщо відомо, що у ній 18,4% його?

5—Друкарський метал є стоп з 22,25% цинка та цини й 55,5% бісмуту. Скільки треба взяти кожного з цих металів, щоб мати 325,6 кгр. друкарського металу, коли на угар треба додати по 10% кожного металу? (Відп.—Цинку та цини по 79,7 кг. приблизно).

6—Кооператив купив у тресті краму на 1345 карб. Витрати кооперативу складають 15,5%. За яку суму мусить продати кооператив цей крам, щоб не мати прибутку?

7—Ціна пшениці була 3 крб. 60 к. за пуд, тепер ціна знизилась на 12,5%. Скільки мусимо заплатити за 100 пуд. пшениці? (Відп.—315 крб.).

8—Вичисліть вагу сталевого бруса розміром 10,5 см., 10,5 см., 2,4 м.

9—Маємо бідон прямокутної форми розміром 12 см., 12 см., 32 см. Скільки гасу можна в нього налити? (Відп.—Прибл. 4,6 літр.).

10—Найдіть вагу шматка чавуну в формі рівнобіжностінника, розміром 0,4 . 0,5 . 1,5 метр.?

11—В колодязі з квадратовим дном 125 см. завдовжки рівень води піднісся на 40 см. Скільки літрів води прибуло? (Відп.—625 л.).

12—Скільки важить вода, що наповнює кубової форми акваріум, у якого кожен руб—1 метр?

13—Яка вагою кам'яна стіна 40 саж. завдовжки, 3 сажні заввишки й товщиною 1 арш., коли 1 куб. см. цегляної кладки важить 1,6 гр.?

14—Скільки важить повітря вашої кімнати, якщо один куб. метр його важить 1,3 кг.?

15—Вичисліть числові значіння формули $v = b,^3$ коли $b = 1,1$ $a^2 + b^2$, коли $a = 2$, $b = 3,2$

$v = a^3 + b^3$, коли $a = 0,2$ і $b = 0,01$

$P = v\,d$, коли $v = 37,8$; $d = 8,7$? $v = 13,549$ куб. см. $d = 1$.

Перетворити на тони. Який реальний зміст має ця остання формула?

З таблиці дізнайтеся про які метали йде розмова.

РОЗДІЛ 4

Ділення десяткових дробів

Ділення десяткового дробу на ціле число

§ 1. **Задача**—На 27 варстатах виткано 823,5 метра сукна. Скільки метрів сукна виробляють на одному станкові?

Через те, що на одному станкові виробляється в 27 разів менше, то для розвязування цієї задачі треба 823,5 поділити на 27.

При діленні десяткового дробу на ціле число роблять те-ж, що й при діленні цілих чисел—окремо знаходять кожну цифру частки.

$$
\begin{array}{r|l}
823{,}5 & 27 \\
\underline{81} & 30{,}5 \\
135 & \\
\underline{135} &
\end{array}
$$

Знаходимо першу цифру частки. Для цього поділяємо 82 десятки на 27, одержуємо в частці 3 (десятки). До остачі дописуємо 3 одиниці тоб-то ми один десяток, що одержали в остачі, обернули на

Обчислення ваги рівнобіжностінника та куба через об'єм та питому вагу. Літеровий запис

§ 6. Знайдімо вагу шматка заліза в формі рівнобіжностінника з обмірами 5 см., 6 см., 8 см.

Вичислім спочатку об'єм цього заліза. Якби нам була відома вага одного куб. см. заліза, то легко було-б дізнатися про вагу цілого шматка його. Вагу одного кубічного сантиметру в грамах будь-якої матерії (речовини) звуть **питомою вагою** матерії або речовини. В кінці цієї книги (див. табл.) ми подаємо таблицю питомої ваги деяких фізичних тіл. В цій таблиці знаходимо, що питома вага заліза дорівнює 7,8, тоб-то, 1 куб. см. заліза важить 7,8 грама. Знаючи це, легко вичислити вагу нашого шматка, для чого $7{,}8 \cdot 240 = 1\,872$ грам. або 1,872 кг.

Таким чином, коли питома вага тіла нам відома, то для винайдення ваги його, треба об'єм його, що вичислили в куб. сантиметрах, помножити числом його питомої ваги. Вагу одержуємо, як якесь число грамів і коли воно дуже велике, то перенесенням протинки ліворуч перетворюємо на кілограми або тони.

Позначімо об'єм рівнобіжностінника (або взагалі об'єм будь-якого тіла) літерою v, питому вагу—літерою d, а вагу цілого тіла літерою P. Тоді замість того, щоб говорити: для винайдення ваги тіла, треба помножити його об'єм питомою вагою, ми можемо цей закон записати літерами скорочено, а саме:

$$P = v \cdot d.$$

Цей запис вказує нам, які дії та в якому порядкові треба пробити, щоб вичислити вагу тіла.

Примітка: Сполучення літер, а иноді літер та чисел, як було вже в нас, напр., $v = a^3$; $v = a \cdot b \cdot c$; $p = v \cdot d$—мають назву: **формула**.

Вправи до розділу 3

1— Знайдіть вагу глинцьового кубика, у якого кожен руб 25 см. завдовжки.

2—Вичисліть вагу мармурової розподільчої дошки, якої розміри 1,2; 0,5 та 0,05 метра.

3—Робітник одержує що-місяця 84 крб. Профсоюз стягає 2%, на повітрян. флоту—0,5% та «Т-во Друзі Дітей»—0,25%. Скільки він уплачує у кожну організацію зокрема?

4—Скільки крохмалю в 25,5 кг. картоплі, якщо відомо, що у ній 18,4% його?

5—Друкарський метал є стоп з 22,25% цинка та цини й 55,5% бісмуту. Скільки треба взяти кожного з цих металів, щоб мати 325,6 кгр. друкарського металу, коли на угар треба додати по 10% кожного металу? (Відп.—Цинку та цини по 79,7 кг. приблизно).

6—Кооператив купив у тресті краму на 1345 карб. Витрати кооперативу складають 15,5%. За яку суму мусить продати кооператив цей крам, щоб не мати прибутку?

7—Ціна пшениці була 3 крб. 60 к. за пуд, тепер ціна знизилась на 12,5%. Скільки мусимо заплатити за 100 пуд. пшениці? (Відп.—315 крб.).

8—Вичисліть вагу сталевого бруса розміром 10,5 см., 10,5 см., 2,4 м.

9—Маємо бідон прямокутної форми розміром 12 см., 12 см., 32 см. Скільки гасу можна в нього налити? (Відп.—Прибл. 4,6 літр.).

10—Найдіть вагу шматка чавуну в формі рівнобіжностінника, розміром 0,4 . 0,5 . 1,5 метр.?

11—В колодязі з квадратовим дном 125 см. завдовжки рівень води піднісся на 40 см. Скільки літрів води прибуло? (Відп.—625 л.).

12—Скільки важить вода, що наповнює кубової форми акваріум, у якого кожен руб—1 метр?

13—Яка вагою кам'яна стіна 40 саж. завдовжки, 3 сажні заввишки й товщиною 1 арш., коли 1 куб. см. цегляної кладки важить 1,6 гр.?

14—Скільки важить повітря вашої кімнати, якщо один куб. метр його важить 1,3 кг.?

15—Вичисліть числові значіння формули $v = b,^3$ коли $b = 1,1$ $a^2 + b^2$, коли $a = 2$, $b = 3,2$

$v = a^3 + b^3$, коли $a = 0,2$ і $b = 0,01$

$P = v\,d$, коли $v = 37,8$; $d = 8,7$? $v = 13,549$ куб. см. $d = 1$.

Перетворити на тони. Який реальний зміст має ця остання формула?

З таблиці дізнайтеся про які метали йде розмова.

РОЗДІЛ 4

Ділення десяткових дробів

Ділення десяткового дробу на ціле число

§ 1. **Задача**—На 27 варстатах виткано 823,5 метра сукна. Скільки метрів сукна виробляють на одному станкові?

Через те, що на одному станкові виробляється в 27 разів менше, то для розвязування цієї задачі треба 823,5 поділити на 27.

При діленні десяткового дробу на ціле число роблять те-ж, що й при діленні цілих чисел—окремо знаходять кожну цифру частки.

$$\begin{array}{r|l} 823,5 & 27 \\ \underline{-81} & \overline{30,5} \\ 135 & \\ \underline{-135} & \end{array}$$

Знаходимо першу цифру частки. Для цього поділяємо 82 десятки на 27, одержуємо в частці 3 (десятки). До остачі дописуємо 3 одиниці тоб-то ми один десяток, що одержали в остачі, обернули на одиниці, й додали 3 одиниці, що в нас були в ділєнику; в одержаних 13 одиницях 27 не міститься ціле число разів, тому одиниць у нас не буде—і в частці пишемо 0. Одержані в остачі 13 одиниць обертаємо на десяті частки, бо в одній одиниці 10 десятих частин, в 13—їх буде 130 і в ділєнику ще є 5 десятих, таким чином, всього у нас буде 135 десятих (технічно ми до остачі 13, зносимо 5, щоб показати, що у нас далі будуть не цілі одиниці, а десяті частини). В частці після 30 ставимо протинку. 27 в 135 міститься 5 разів, значить частка буде 30,5, тоб-то один варстат виробляє 30,5 метрів сукна.

Таким чином, ділення десяткового дробу на ціле число провадиться точнісінько так, як і ділення цілих чисел, лише в частці ставлять протинку, переходячи до ділення десятих частин. Коли вичерпано всі цифри ділєника й одержується остача, то ділення можна ще продовжувати, перетворюючи остачу в подальші частини, доти, поки ділення не буде зроблено без остачі, або поки не досягнемо бажаної точности, або-ж впевнимося, що ділення може продовжуватися без кінця, про що буде зазначено нижче. Наприклад:

$$\begin{array}{r|l}
-\,13{,}95 & 12 \\ \cline{2-2}
12\phantom{{,}95} & 1{,}1625 \\ \cline{1-1}
-\,19 & \\
12 & \\ \cline{1-1}
-\,75 & \\
72 & \\ \cline{1-1}
-\,30 & \\
24 & \\ \cline{1-1}
-\,60 & \\
60 & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

Розгляньмо ще приклад: 0,482 : 25; цілих одиниць в частці не буде; в 4-х десятих 25 також не міститься, виходить, що й десятих не буде, обертаємо 4 десятих на соті долі й додаємо 8, в 48 сотих 25 міститься один раз і т. далі.

$$\begin{array}{r|l}
-\,0{,}482 & 25 \\ \cline{2-2}
25 & 0{,}01928 \\ \cline{1-1}
-\,232 & \\
225 & \\ \cline{1-1}
-\,70 & \\
50 & \\ \cline{1-1}
-\,200 & \\
200 & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

Иноді при діленні десяткових дробів трапляється, що починаючи з якогось моменту, одержується ввесь час одна й та сама остача й наслідком цього в частці одержується число, що безконечно повторюється—ділення буде безкінечним. Наприклад:

```
 _41,5  | 3
   3    |--------
 ----     13,833
  _11
    9
  ----
   _25
    24
   ----
    _10
      9
    ----
     _10
        9
     ----
       10
```

При розвязуванні практичних питань ми можемо взяти частку 13, або 14 і цим самим ми матимемо похибку меншу, ніж на одну одиницю, тому, що дійсна частка більша за 13, але менша від 14; така—відповідь буде, як кажуть, з точністю до одиниці, але-ж можемо взяти й 13,8 або 13,9, тут похибка буде меншою, ніж на одну десяту, або, кажуть, частка з точністю до одної десятої (0,1), бо іста частка буде більшою, ніж 13,8 але меншою, ніж 13,9; отже, можна взяти частку, з якою бажаємо, точністю; наприклад, 13,833 або 13,834—це буде частка з точністю до 0,001, перша—з недостачою, друга—з лишком.

Находження частки з точністю вживається не тільки тоді, коли ділення безкінечне, а й усякий раз, коли, дивлячись на зміст задачі, можна обмежитися тою чи иншою точністю відповіди. На зразок цього, коли при инших діях: додаванні, множенні, ми одержуємо занадто дрібні долі, можемо їх відкинути заокругляючи, таким чином, відповідь до тієї точности, яка припустима за умовами задачі. Наприклад, 3,54 378 грам ми можемо округлити, обмежуючись точністю до 0,1; маємо 3,5 гр.

Приклади:

74,24 : 25 =	0,345 : 75 =
345,56 : 16 =	0,0846 : 36 =
1,748 : 125 =	0,002 : 8 =
0,2 : 3 з точністю до 0,001,	0,476 : 25 =
5,34 : 17 з » » 0,01,	
23,57 : 19 » » » 0,01.	

Примітка: Коли перша цифра, яку відкидають, менша ніж 5, то частку беруть меншу за дійсну її величину й називають наближеним значінням з недостачею, коли-ж ця цифра є 5 або більша за неї, то частку беруть більшою, ніж вона є справді, і звуть її наближеним значінням з лишком.

Ділення дробу на дріб

§ 2. Розвяжемо задачу. Віддаль поміж двома пунктами в 78,435 км. авто проходить за 6,3 години. Скільки кілометрів пройде авто за 1 годину?

Щоб відповісти на це питання, треба 78,435 поділити на 6,3, тоб-то треба поділити десятковий дріб на десятковий. Цей випадок ми можемо звести до попереднього, коли скористуємося відомою властивістю діленика, дільника та частки: *частка не змінюється, коли ми діленика, й дільника збільшимо в однакове число разів.* Користуючись з цього правила, ми завжди можемо збільшувати діленик і дільник так, щоби дільник став цілим числом, і тоді вже робимо за правилом попереднім. В даному разі ми і діленика й дільника збільшуємо в 10 разів, тоб-то в діленику переносимо протинку правобіч через одну цифру, а в дільнику зовсім усуваємо протинку

```
_784,35 | 63
 63     |-----
 ---    | 12,45
_154
 126
 ----
 _283
  252
  ----
  _315
   315
   ---
```

і знаходимо, що авто проходить за годину 12,45 км.

Так само робимо й при діленні цілого числа на дріб.

Наприклад, 83 : 0,25. Згідно з попереднім правилом частка не зміниться, коли збільшимо діленика й дільника в 100 разів. (Чому тут треба збільшити в 100 разів)? Маємо:

```
_8300 | 25
 75   |----
 ---  | 332
 _80
  75
  --
  _50
   50
   --
    0
```

Частку після цього ділення ми одержали вірну й немає ніякої потреби ставити протинку, а коли-б вона з'явилась в процесі ділення, то її ніколи не треба переставляти. Поділити 83 на 2,5; маємо, збільшивши в 10 разів. (А чому?)

```
_830 | 25
 75  |-----
 --- | 33,2
 _80
  75
  --
  _50
   50
   --
    0
```

Протинку зовсім не слід переставляти, тому, що частку одержали вірну.

Таким чином, щоби поділити десятковий дріб, на десятковий дріб, або ціле число на десятковий дріб, треба збільшити ділленика та дільника у стільки разів, щоб дільник став цілим числом і вже потім поділяти, як дріб на ціле число.

Приклади:

1,4 : 0,4	=	0,18 : 0,008	=	18 : 0,009	=
2,45 : 0,35	=	0,02 : 1,25	=	9 : 0,24	=
8,125 : 0,125	=	0,09 : 0,0032	=	8 : 0,0625	=
8,5 : 0,25	=	0,3 : 0,15	=	0,069 : 1,84	=
8,35 : 2,5	=	8 : 0,2	=	0,3 : 0375	=

З точністю до 0,1; 0,01, і т. инш.

Порядок дій в подальшому вказують дужки. Спершу робіть ту, що в дужках, а далі—ту дію, що поза дужками. Загальне правило ще: якщо трапляються разом множення, ділення, додавання та віднімання, то множення й ділення роблять у першу чергу. Напр., $5 + 20 : 4 - 3.2$ роблять $20 : 4 = 5$, $3.2 = 6$ і нарешті $5+5-6 = 4$.

Обчислити вирази:

$$(1{,}7 : 4) + (5 : 0{,}002) - (8{,}1 : 3{,}6) =$$

$$(10 : 0{,}02) - (1{,}69 : 6{,}5) + (2{,}89 : 17) =$$

$$(15 : 1{,}2) . (0{,}7 : 1{,}4) - (0{,}1 : 0{,}25) . (3 : 15) =$$

Примітка: Риска визначає дію ділення.

$$\frac{(2{,}5 - 0{,}75) : 1{,}75}{(40 - 38{,}8) . 5} \qquad \frac{(2{,}5 + 0{,}75) : 3{,}25}{(40 - 38{,}8) . 5}$$

$$\frac{(4{,}45 - 2{,}2) : 0{,}3}{(0{,}823 + 0{,}177) . 30}$$

Обчислити числову вартість формул:

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b}, \quad \text{коли} \quad a = 3{,}5;\ b = 1{,}4.$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b}, \quad \text{коли} \quad a = 0{,}2 \ \text{і} \ b = 0{,}3.$$

Обчислити міць машини за формулою: $x = \frac{F. z}{t}$, коли F сила підойми в кілограмах $= 224$; z — дорога підойми в метрах $= 2{,}4$; t — час роботи $= 4{,}5$.

Задача 1—Колесо паровозу, обернувшись 24 рази, пройшло 53,4 метра. Вичислити обвід цього колеса?

2—За копання канави довжиною 86,4 метра заплатили 36,72 крб. Скільки платили за копання одного метра?

3—Скільки літрів вміщається в сорокавідерній бочці, коли відомо, що один літр дорівнює 0,08 відра?

4—Один метр круглого заліза важить 0,9 кг. Якої довжини це залізо, коли воно важить 14,85 кг.

5—Як зміниться частка, коли ми збільшимо діленик удвічі? втричі?

6—Як зміниться частка, коли ми збільшимо або зменшимо дільника в два? три рази?

Покажіть на числовому прикладі, як змінюється частка від зміни діленика та дільника. Чи можна назвати частку функцією діленика та дільника? (Чому?)

Находження числа за даними %% (відсотками)

Задача—Робітник платить до профспілки з заробітної платні 3 карб. 75 коп., що складає 3% його заробітку. Який заробіток у робітника?

Із задачі ми бачимо, що 375 копійок—є 3% всього його заробітку. Знайдімо $1\% — 375 : 3 = 125$ к. Це є 1% або ставить 0,01 частину його заробітку, а ввесь заробіток, очевидно, буде в 100 разів більший, тоб-то 125 карб.

Розвяжіть задачі:

1—На заводі 420 жінок, що ставить 35% всього числа робітників. Скільки всіх робітників на заводі?

2—Підставка для машини важить 29,75 кг,, що ставить $4,25\%$ ваги всієї машини. Найти вагу машини з підставкою та без підставки?

3—Яка завбільшки страхова сума, коли 2,5% (двох та п'яти десятих відсоткова) премія є рівна 19 карбованцям?

4—Скільки пудів картоплі висипано до льоху, коли $4,5\%$ усушки складає 27 пудів?

5—Щоб погасити борг, щорічно платять 1235 карб., із розрахунку $4,75\%$. Яка величина боргу?

6—Наслідком підвищення ціни на $12,5\%$ ціна за кіло піднялася на 1 карб. 20 коп. Знайти ціну товару за кіло, до й після підвищення?

7—Свіжа скошена трава висихаючи губить 75% своєї ваги. Скільки треба взяти трави, щоб одержати 45 тон сіна?

В усіх попередніх задачах треба було за даними відсотками знайти невідоме основне число, що складає 100%. В § 2 розд. 3, ми також розглядали задачі на відсотки, де треба було від даного 100-відсоткового числа знайти декілька відсотків. Ці дві задачі являються двома основними типами задач на відсотки.

В дальшому § розглянемо третій і останній основний тип задач на вирахування відсотків.

Відсоткове взаємовідношення між числами. (Третій основний випадок)

§ 4. **Задача**—На варстатові виготовано 250 метрів сукна, з них 20 метрів браку. Який відсоток браку?

Для розвязування цієї задачі міркуємо так: загальна кількість матерії 250 метрів рівноважна $100^0/_0$, значить, на $1^0/_0$ припадає 2,50 метра (або 2,5 м.), тому в 20 метрах буде міститись стільки відсотків, скільки разів 2,5 міститься в 20; $20 : 2{,}5 = 8$.

Таким чином, 20 метрів складають $8^0/_0$, коли за основне число взяти 250 метрів, инакше кажучи, 20 метрів у відношенні до 250 метрів і ставлять $8^0/_0$.

Розвяжімо цю-ж задачу, міркуючи трохи инакше. На 250 метрів матерії зіпсованого виявилось 20 м; вирахуймо, скільки метрів зіпсованого сукна припаде на 100 метрів. На 1 метр зіпсовано буде не 20 метрів, а в 250 разів менше, тоб-то $20 : 250 — 0{,}08$ метра, а на 100 метр. зіпсовано буде в 100 разів більше, тоб-то $0{,}08 \times 100 = 8$ метрів; але коли на 100 метрів буде 8 метрів браку, то це й значить, що його буде $8^0/_0$.

Задача 1—На II-му курсі ІНО 124 слухача, із них 90 українців. Найти відсоток українців (з точністю до 0,1).

2—На заводі 650 робітників, жінок 310, останні чоловіки. Найти відсоток жінок у відношенні до всього числа робітників та у відношенні до чоловіків, тоб-то беручи вдруге за основне число—число чоловіків.

3—Перевозячи 3250 цеглин, 123 штуки розбилось. Знайти відсоток бою.

4—За будинок, що коштує 2 700 карб., платять щорічно 30 крб. страхової премії. Який відсоток з оцінки визначає страхова премія?

Будування прямокутних діяграм

§ 5. Ми вже маємо поняття про лінійні діяграми. Крім лінійних діяграм, вживають ще й, так звані, прямокутні діяграми. В цих діяграмах ролю простих ліній виконують прямокутники з однаковими основами, й те чи инше число буде відповідним чином відбиватись на височині цих прямокутників; будуємо ці прямокутні діяграми цілковито так само, як і лінійні.

Величина суходолів у мільйонах кв. кілометрів.

Европа	10
Азія	44
Африка	30
Америка	39
Австралія	9

Дуже часто, особливо тоді, коли дані числа надто великі, діяграми будують, означивши всі дані числа у відсотковій залежності відносно всієї суми даних величин або відносно якого-небудь одного, що приймається за основне число (100 відсотків).

Наприклад — На 1-му курсі комуністичного університету 137 студентів, з них українців — 74, росіян — 44, євреїв — 10 та инших національностів — 9. Знаходимо, що число українців відносно всього числа студентів буде (див. попередній §) — 54%, росіян — 32,1%, євреїв — 7,3%, инших — 6,6% (числа трохи заокруглено — вони в сумі мусять дати 100%). А тепер вже будуємо діяграму звичайним способом.

Складіть діяграми, приймаючи загальну суму за 100%

I — Число убитих підчас світової війни в тисячах чол.

Росія	2 500
Німеччина . .	2 000
Австрія . . .	1 500
Франція . . .	1 400
Англія	800

II — Населення суходолів у мільйонах мешканців

Европа	384
Азія	862
Африка	158
Америка	140
Австралія . . .	6

III — Складіть діяграми за національний склад та вік студентів своєї групи, свого курсу, всього університету.

Находження питомої ваги з об'єму та ваги тіла. Находження висоти прямокутника з поверхні та основи. Поняття про рівнання

§ 6. Лабораторна праця: I — Виміряйте 3 або 4 дерев'яні бруски в формі рівнобіжностінника, зважте кожний брусок на терезах, а потім обчисленням знайдіть, скільки важить 1 куб. см. дерева, тоб-то питому вагу дерева. Знайдіть пересічну аритметичну [1]) всіх ваших результатів і порівняйте знайдене число з питомою вагою в таблиці питомої ваги тіл.

II — Візьміть кілька шматочків заліза й спустіть їх в мензурку з водою; ви таким чином, взнаєте об'єм кожного шматочка; зважте на терезах ці шматочки; обчисленням узнайте, скільки грамів важить 1 куб. см. заліза. Найдіть середню аритметичну всіх ваших результатів і порівняйте одержане число з питомою вагою в таблиці.

III — Теж саме зробімо для міди й скла.

Із оцих вправ можна бачити, що для находження питомої ваги тіла треба всі тіла, означені в грамах, поділити на об'єм тіла, обчислений в куб. сантиметр, бо, таким чином, ми знаходимо, скільки грамів доводиться на один куб. см., тоб-то знаходимо питому вагу тіла.

---

[1]) Тоб-то суму всіх результатів поділіть на число цих результатів; так і дістанете пересічну аритметичну, або середню аритметичну.

Задача 1 — Чавун з розмірами 24 см., 35 см., 4,7 см. важить 1263,78 клгр. Найти питому вагу (з точністю до 0.01).

Пояснення: по-перше, найти об'єм чавуна в куб. сантим., подруге, вагу тіла означити в грам., по-третє — поділити вагу тіла на об'єм.

2 — Вага шматка криці 2437,5 кг., об'єм 312,5 куб. см. Найти питому вагу.

Розвязування цих питань можна узагальнити, користуючись літеровим записом, тоб-то формулою. В § 6 розд. 3, ми розглядали формулу, що показує, як знайти вагу тіла, знаючи його об'єм та питому вагу, ця формула така: $P = v \, . \, d$.

Коли будемо вважати, що P (вага тіла) і v (об'єм тіла) відомі, то d ми одержимо, коли P поділимо на v; відповідь на це питання записується так: $d = \frac{P}{v}$ (риса поміж P та v означає ділення).

Ту величину в формулі, яка невідома й яку бажають відшукати, частіше за все означають літерою x. Таким чином, запис попередньої формули може бути такий: $P = v \, . \, x$ і тоді ця формула показує що вага тіла нам відома, об'єм також, а треба знайти питому вагу; її буде знайдено так: $x = \frac{P}{v}$

Коли-б формулу було записано в такому вигляді: $P = x \, . \, d$, то вона-б показувала, що вага тіла та його питома вага відомі, але треба знайти невідомий об'єм тіла — він буде рівнятись $\frac{P}{d}$ або $x = \frac{P}{d}$.

Формула, в якій одна величина невідома, зветься рівнянням; невідому величину, як вже вказано, дуже часто означають літерою x.

Знайти питому вагу глинця, коли шматок вагою 8,45 кг. має об'єм 3,25 куб. дм.

Складаємо формулу: $8\,450 = 3\,250\,x$, бо ми обернули кг. на гр., а куб. дм. на куб. см.; звідци $x = \frac{8\,450}{3\,250} = 2{,}6$. Таким-же методом можна розвязувати ось які задачі:

1 — Поверхня прямокутної дільниці землі 5 200 кв. м. основа (довжина) 130 м. Найти висоту (ширину).

2 — Об'єм прямокутної скриньки 15 кб. дм. Поверхня дна — 6 кв. дм. Найти висоту ящика.

Вправи до розділу 4

1 — Три кооперативних об'єднання будують завод для печіння хліба, перший кооператив вносить 28% всієї суми, другий — 37%, третій — 27%. Щоби здійснити намір, не вистачає 12600 крб. Які були внески кожного кооперативу? (Відп. — 44 100 крб.; 58275 крб.; 42 525 крб.)

2 — Службовець одержував 1 200 крб. на рік, тепер він має 425 крб. прибавки. Скільки % йому додали? (Відп. — Більше від 35%).

3 — З заробітку в 64 крб. робітник відрахував на безробітних 48 коп. Який відсоток від заробітку стягається на безробітних? (Відп. — 0,75)

4 — Увесь заробіток робітника при поштучній роботі — 72 крб. 24 коп. Приробіток на тарифну сітку становить 72%. Яка ставка робітника в сітці? (Відп.—42 к.).

5 — Зі свого заробітку робітник заплатив у касу спілки 3,75%, причому в нього лишилось на руках 40 крб. 95 коп. Скільки всього заробив робітник?

6 — На заводі працює 1 365 чоловік з них 213 жінок. Знайти відсоток трудящих жінок у відношенні а) до всієї кількости робітників і б) до числа чоловіків.

7 — У школі фабзавучу є 56 учнів, що складає 2,8% всієї кількости робітників заводу. Скільки на заводі всього робітників?

8 — Собівартість матерії на фабриці дорівнює 6 крб. 45 коп. за 1 метр. Гуртова ціна на продаж 7 крб. 15 коп. Який відсоток прибутку має фабрика при гуртовому продажу матерії? Яка буде її гуртова ціна на продаж, якщо собівартість знизиться на 8%, а прибуток буде 12,5%?

9 — Замінити числами знаки ?

Було робітників	Збільшилось на стільки чоловік	Збільшилось на стільки відсотків	Усього робітників
235	35	?	?
?	42	14	?
345	?	?	380
?	?	5	735
640	?	?	820
?	27	?	384

10 — Жито продавали по 3 крб. 60 коп. за пуд. потім ціна знизилась на 12,5%. Скільки тепер треба заплатити за 100 пудів?

11 — Чай продавали по 1 карб. 60 коп. за фунт, з протягом часу ціна його стала 1 крб. 50 коп. На скільки відсотків подешевшав чай?

12 — Замініть числами знаки ?

Виробляли пудів	Збільшилось вирібництво на стільки пудів	Збільшилось вирібництво на стільки відсотків	Виробляють тепер
1235	250	?	?
?	740	?	3564
5649	?	?	7736
?	189	3,5	?
?	?	6,5	532,5

13 — Складіть діяграму, користуючись з таблиці й обчисляючи відсоткове відношення до всієї суми:

Виріб цукру 1913 року

Держави	В тисячах тон	У %%
Германія	2677,5	
Франція	773,5	
СРСР	1785.0	
Америка . . .	714,0	

14 — Складіть діяграму, користуючись з таблиці:

Здоб. вугілля в 1913 році:

Держави	В мільйонах тон	У %%
Англія	213,5	
Германія	156,2	
Франція	64,8	
Америка . .	594,0	
Решта держав. .	42,5	

15 — Обчислити числову вартість літерових виразів:

$$1.\ \frac{a^2+b^2+c^2}{m+}.\quad 2.\ \frac{(a+b)(a-b)}{n-m}.\quad 3.\ \frac{a+b}{m}+\frac{b+c}{n},$$

коли $a=2{,}4$; $b=0{,}2$; $c=1{,}4$; $m=0{,}5$; $n=2$.

16 — Маємо два якихось метали однакового об'єму по 3 450 куб. сант. Перший важить 69 кг., другий 8,77 кг. Що це за метали?

17 — Знайти x у рівнаннях: $24=6x$, $7x=35$, $3{,}5x=70$, $85=1{,}7x$; $3{,}4=0{,}17x$; $2{,}4=0{,}3x$.

18 — Знайти, чому повинна дорівнювати

1	літера	d	із	формули	$P=v.d.$
2	»	v	»	»	$P=v.d.$
	»	c	»	»	$mc=k.$
4	»	l	»	»	$S=kl.$

Примітка: В алгебрі при множенні дуже часто знак множення усувається, замість $a.b$ пишуть ab.

19 — Дільниця землі 2 452 кв. метрів. Довжина її 60,5 метрів. Яка вона завширшки?

20 — Квадратову дільницю землі зі стороною 60 метрів треба замінити рівною їй поверхнею прямокутною зі стороною 120 метрів. Яка буде друга сторона прямокутної дільниці? Якими прямокутними дільницями ще можна замінити дану квадратову поверхню?

РОЗДІЛ 5

Прості дроби. Відсотки

Прибуток на капітал

§ 1. В комерційних розрахунках дуже часто трапляється потреба у відсоткових обчисленнях. Прибуток на капітал вираховують з капіталу тим самим методом, про який ми вже говорили, лише з тою різницею, що в розрахунок входить ще час. В цих розрахунках сума, що на неї нараховують відсотки, зветься первісним капіталом, прибуток — відсотковими грішми; число, що вказує, скільки прибутку дають кожні 100 крб. капіталу — такса відсотків, причому, коли немає ніяких зауважень, то при нарахуванні відсотків приймають рік за 360 днів або 12 місяців, а кожен місяць — 30 день. Наприклад:

Капітал 2 350 крб. поклали в Промбанк за 8% річних. Який прибуток маємо з нього за 3 роки?

Один відсоток від 2 350 становить 23,5, а 8% — у 8 разів більше, 23,5 . 8 = 188 крб. Це прибуток за рік, а за 3 роки він буде утричі більший, тоб-то 188 . 3 = 564 карбованці.

Капітал разом з прибутком звуть нарощеним капіталом. В даному разі нарощений капітал дорівнює 2 350 + 564 = **2 914 крб.**

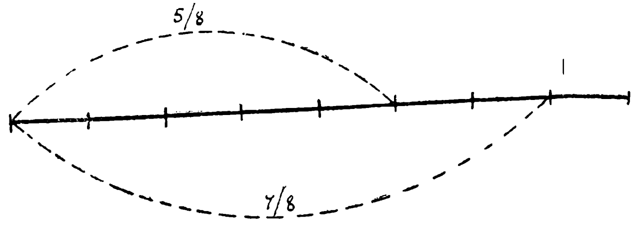
Обчислити прибуток та нарощений капітал в оцих задачах:

Первісн. капіт.	Такса	Час
2 150 крб. —	6	5 років
735 » 50 к.	5	4 роки
4 800 » —	5	8 місяців

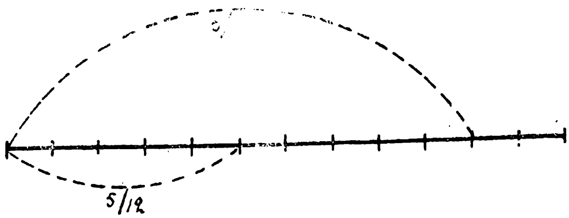
Зміна величини звичайного дробу від зміни чисельника та знаменика. Збільшення та зменшення звичайного дробу в ціле число разів

§ 2. Задачі попереднього § легко розвязуються за допомогою формули, але для цього нам доведеться спочатку ознайомитись з деякими властивостями звичайних дробів:

а) Якщо два дроби мають однакових знамеників, то той дріб більший, у якого чисельник більший, що наочно можна побачити на рисункові — $^7/_8$ фун. цукру більше за $^5/_8$ фун.



б) Якщо-ж два дроби мають однакових чисельників, то той дріб більший, у якого знаменик менший, через те, що в останньому разі частинки будуть більші, а число їх в обох випадках однакове (див. рисунок)—$^5/_6$ фун. більше за $^5/_{12}$ фунта.

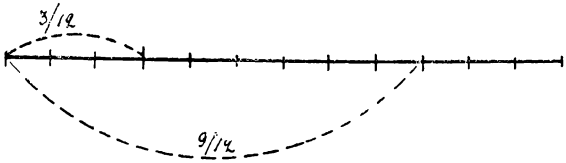


Який з дробів більший: $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{12}$? $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{10}$?

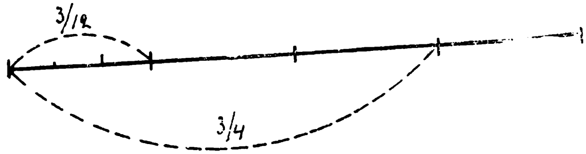
$\frac{3}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{1}{10}$? $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$?

показати графічно рисунком).

З вищенаведеного виникає, що зі збільшенням або зі зменшенням чисельника дробу в декілька разів—величина дробу збільшується в стільки-ж разів (див. рисунок).



Зі збільшенням або зі зменшенням знаменика дробу в декілька разів, величина дробу від цього, навпаки, зменшується або збільшується в стільки саме разів (див. рисунок).



Другий дріб, від зменшення знаменика, збільшився втричі. Таким чином, коли треба збільшити дріб в декілька разів, то для цього досить збільшити його чисельника або зменшити знаменика в стільки саме разів. А коли треба зменшити дріб у декілька разів, то для цього треба або зменшити чисельника або збільшити знаменика в стільки саме разів.

Збільшити дроби: $\frac{3}{7}$ удвічі; $\frac{5}{12}$ втричі; $\frac{4}{15}$ у 5 разів; $\frac{5}{9}$ в 4 рази; $\frac{5}{8}$ в 4 рази.

Зменшити дроби: $\frac{15}{22}$ в 5 раз; $\frac{14}{15}$ удвічі.

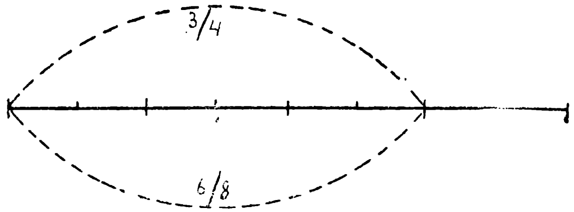
Помножити: $\frac{3}{4}\cdot 2$; $\frac{5}{8}\cdot 4$; $\frac{1}{5}\cdot 3$; $\frac{8}{9}\cdot 2$; $\frac{3}{4}\cdot 5$; $\frac{3}{7}\cdot 2$; $\frac{5}{11}\cdot 8$; $\frac{2}{3}\cdot 4$; $\frac{12}{25}\cdot 9$; $\frac{a}{b}\cdot c$.

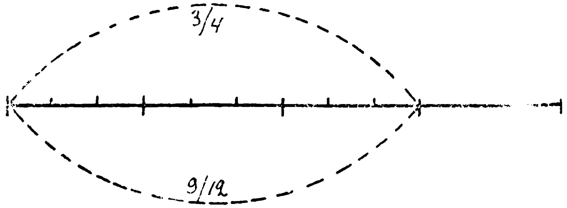
Поділити: $\frac{15}{17}:5$; $\frac{1}{3}:5$; $\frac{1}{2}:3$; $\frac{17}{42}:7$; $\frac{7}{15}:8$; $\frac{7}{8}:2$; $\frac{a}{b}:c$.

Задача 1 — Скільки хліба треба на 20 душ на день, коли на кожну душу припадає $^3/_4$ фунта хліба на день?

2 — $^3/_4$ фун. тютюну розкласти у два пакунки порівну. Скільки треба покласти до кожного пакунка?

З попереднього бачимо, що коли ми чисельника збільшуємо в декілька разів, то дріб збільшується в стільки саме разів. Якщо-ж ми збільшуємо знаменика в декілька разів, то дріб зменшується в стільки саме разів. Тому, коли ми одночасно збільшимо так чисельника, як і знаменика, то величина дробу залишається без зміни. Теж саме відносно зменшення чисельника й знаменика в однакове число разів.





Величина дробу не змінюється, якщо чисельника й знаменика збільшимо або зменшимо в однакове число разів, зміниться лише вигляд дробу.

Цю властивість дробу дуже часто звуть — *основна властивість дробу*. За допомогою формули, цю властивість записують $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$.

Наочно це можна бачити на рисункові (див. вище).

Скорочення дробів. Ознаки подільности на 2, 5, 10, 3, 9, 4, 25

§ 3. Зменшення чисельника й знаменика дробу в однакове число разів, що не зміняє величини дробу, звуть спрощенням або с к о р о ч е н н я м дробу $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ (скорочено на 2).

$\frac{36}{60}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ (скорочено на 6, а потім на 2).

Користь від спрощення полягає в тому, що чисельник та знаменик робляться меншими числами.

Спростіть дроби: $\frac{4}{6}$; $\frac{10}{15}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{6}{9}$; $\frac{5}{15}$; $\frac{2}{8}$; $\frac{8}{12}$;

$\frac{9}{15}$; $\frac{10}{25}$; $\frac{16}{24}$; $\frac{20}{30}$; $\frac{4}{10}$; $\frac{12}{30}$; $\frac{24}{60}$; $\frac{24}{36}$;

$\frac{ac}{bc}$; $\frac{am}{bm}$; $\frac{xa}{ya}$; $\frac{mk}{my}$.

Деколи трапляється потреба швидко спрощувати дроби, а для цього треба вміти швидко підшукувати ті числа, що на них ми можемо поділити одночасно чисельника й знаменика; для цього існують, так звані, о з н а к и п о д і л ь н о с т и, які дають можливість швидко знаходити, на які числа поділяється дане число. Розгляньмо найважніші з цих ознак.

1 — О з н а к а п о д і л ь н о с т и ч и с л о м 10. Числом 10 поділяються ті числа, що мають на кінці принаймні хоч один нуль, бо такі числа можна вважати як складені з десятків, 70, 80, 720, 3 200—всі ці числа поділяються числом 10. (Перевірте).

2 — О з н а к а п о д і л ь н о с т и ч и с л о м 2. Числом 2 поділяються ті числа, у яких остання цифра поділяється на 2 або є 0.

Це бачимо з того, що кожне многоцифрове число можна вважати, як суму двох доданків, з яких один є якісь десятки, а другий— одиниці. Наприклад $736=730+6$. Через те, що перший доданок, який складається з десятків, завжди поділяється числом 2, то значить, коли другий доданок поділяється числом 2, то і вся сума також поділяється числом 2. Тоб-то все залежить від останньої цифри. Числа 844, 538 поділяються числом 2, а числа 731, 2 035 не поділяються.

3—О з н а к а п о д і л ь н о с т и ч и с л о м 5. Числом 5 поділяються ті числа, у яких остання цифра є 5 або 0.

Виходимо з тих самих міркувань, що в попередньому випадкові, коли розглядали подільність числом 2. Наприклад, 845, 1 015, 40 225 поділяються числом 5, числа 736, [illegible], 50 356 числом 5 не поділяються.

4—О з н а к а п о д і л ь н о с т и ч и с л о м 4 т а 25. 100 поділяється так числом 4, як і числом 25. А тому, числами 4 та 25 поділяються ті числа, що на кінці мають, принаймні, два нулі або такі дві цифри, що складають число, яке поділяється числом 4 та 25.

Кожне многоцифрове число можна розкласти на такі два доданки, що перший буде мати на кінці два нулі, другий—позначено двома останніми цифрами, наприклад, $724 = 700 + 24$. Через те, що 24 поділяється числом 4, то і все число також поділяється цим числом. Подібно до цього $350 = 300 + 50$. Число 50 поділяється числом 25, отже і все число 350 поділяється цим числом.

Питання 1 — Чи можна висловитись так: числом 25 поділяються ті числа, які мають на кінці 2 нулі або числа 25, 50, 75?

2 — Як дізнаються про високосний рік?

5 — Ознака подільности чисел числом 9 та 3. Звернімо увагу, що при діленні числом 9, чисел 10, 100, 1 000 й т. д. остача завжди є 1, коли поділяємо 20, 200, 2 000 й т. д. числом 9— остача є 2; коли поділяємо тим самим числом числа 30, 300, 3 000 й т. д. остача—3. Так само поділяючи 600 числом 9, маємо остачу 6 і т. д.

Таким чином, поділяючи кожний порядок числа 738 $(700 + 30 + 8)$ числом 9, маємо остачі 7, 3, 8; сума цих остач, тоб-то $7 + 3 + 8 = 18$, поділяється числом 9. Але остачі 7, 3, 8 — це ті цифри, якими позначається число 738. Отже, числом 9 поділяються ті числа, що їхня сума цифр поділяється числом 9.

Наприклад, 836. Сума цифр $8 + 3 + 6 = 17$ числом 9 не поділяються, тому й 836 числом 9 не поділяється. В числі 2 034 сума цифр $2 + 0 + 3 + 4 = 9$, тому це число поділяється числом 9,

Якщо-ж сума цифр числа поділяється лише числом 3, то і число це поділяється числом 3. Наприклад, сума цифр числа 843, а саме $8 + 4 + 3 = 15$ поділяється числом 3, тому й саме число 843 поділяється числом 3.

Так само наперед бачимо, що число 714—поділяється числом 3, бо $7 + 1 + 4 = 12$, а число 12 поділяється числом 3.

Користуючись з ознаків подільности, скоротіть дроби:

$$\frac{25}{625};\ \frac{15}{225};\ \frac{150}{180};\ \frac{105}{140};\ \frac{35}{55};\ \frac{180}{274};\ \frac{72}{360};\ \frac{900}{1500};\ \frac{144}{720};$$

$$\frac{125}{375};\ \frac{120}{720}.$$

Вивід формули прибутку на капітал.

§ 4. Знайдімо прибуток на капітал 720 карб. за 9 місяців, що покладено в банк за 5%.

1% від 720 буде $\frac{720}{100}$, а 5% буде в 5 разів більше, тоб-то $\frac{720 . 5}{100}$.

Це за 1 рік. За 1 місяць буде в 12 разів менше: $\frac{720 . 5}{100 . 12}$.

За 9 місяців у 9 разів більше $\frac{720 . 5 . 9}{100 . 12}$. Раніш, ніж проробляти ті дії, що вказано цим виразом, скоротимо його, як дріб, 9 у чисельникові й 12 у знаменикові, можемо скоротити на 3; 720 та 100 скоротити на 10, одержимо $\frac{72.5.3}{10.4}$.

Далі 72 й 4 — можемо скоротити на 4, а 10 та 5 — на 5, вийде

$$\frac{18.3}{2} = 27.$$

Звичайно, таке скорочення роблять, не переписуючи кожен раз виразів, а остаточні дії проробляють тільки тоді, коли скорочення вже далі неможливе.

Складемо формулу для розвязки задач, подібних до цієї.

1 — Капітал k покладено в банк за p % на t років.

Формула для вичислення прибутку буде $x = \frac{k.p.t}{100}$.

2 — Капітал k поклали в банк на t місяців за p %?

3 — Капітал k поклали в банк на t днів за p %. Складіть формулу прибутку.

4 — Напишіть формулу нарощеного капіталу, користуючись з даних попередньої задачі.

Розгляньмо ще одну задачу, що її будемо розвязувати, складаючи формулу. Найти основний капітал, коли він за 8 місяців дав прибутку 240 крб. по 18 %? Прибуток за 1 місяць буде $\frac{240}{8}$. Прибуток за 12 місяців $\frac{240.12}{8}$. Прибуток за рік складає 18 %. Один відсоток буде $\frac{240.12}{8.18}$. 100 % або ввесь капітал

$$\frac{240.12.100}{8.18} = 2\,000 \text{ карбованців.}$$

1 — Знайдіть первісний капітал, що за 2 роки по 7% **дав 420 крб.** прибутку?

2 — Знайдіть капітал, що за t років по p% дав 6 крб. прибутку?

Дисконт векселів. Находження дисконту та ціни векселя

§ 5. В комерційних операціях велику ролю відограє вексель; тоб-то грошова умова, що по ній беруть гроші у позику. Умову цю пишуть на окремому, так званому, вексельному паперові. Особа, що бере гроші в позику, зобов'язується заплатити суму, вказану у векселі на призначений речінець. Цю суму звуть *валютою* векселя.

Якщо кредитор (той хто дає в позику гроші), маючи потребу в грошах, хоче продати кому-небудь векселя, то ясна річ, що тої суми, яка написана у векселі (валюти), йому ніхто не дасть, але зроблять якусь знижку залежно від того, скільки часу лишається до плати по векселю. Цю знижку з векселя, що її розраховують у відсотках, звуть **дисконтом**; сума, що її заплатять по векселю до призначеного речінця — є дійсна вартість векселя або **доречінцева ціна** векселя. Отже, дисконтувати векселя, це значить — найти знижку з нього або дисконт та дійсну вартість на день продажу векселя.

Наприклад — вексель в 1800 крб. дисконтовано за 7% (річних) за 10 місяців до строку. Знайти дисконт та дійсну вартість його?

1% з валюти складає $\frac{1\,800}{100}$

7% » » » $\frac{1\,800 \cdot 7}{100}$. Це була-б знижка за рік.

Знижка за 1 місяць складає $\frac{1\,800 \cdot 7}{100 \cdot 12}$

» » 10 » » $\frac{1\,800 \cdot 7 \cdot 10}{100 \cdot 12} = 105$ крб.

Вичисляючи результат, обов'язково раніш треба робити скорочення.

Вправи до розділу 5

1 — Скоротити дроби $\frac{256}{288}$; $\frac{160}{176}$; $\frac{36}{120}$; $\frac{210}{147}$; $\frac{1250}{1625}$; $\frac{231}{660}$.

2 Найдіть прибутки з капіталу й нарощені капітали

Капіт.	Такса	Час обігу	Прибуток	Нарощений капітал
3680	8	3 м.		
15540	6	2 р. 60 к.		
3710	6	3 міс. 18 день.		
4800	5	8 місяців		
168	5	42 дні		

3 — Знайдіть первісний капітал за прибутком, таксою відсотків та часом

Прибуток	Такса	Час	Капітал
264,2	5	4 роки	
196	8	6 міс.	
390	15	4 роки	
728,25	3	5 років	

4 — Знайдіть дисконт та вартість векселя

Валюта	Дисконт. %	Термін	Дисконт	Вартість
6 400	12	3 м.		
1 440	4	7 м.		
3 680	8	3 м.		
19 200	4,5	100 дн.		
5 000	6	36 дн.		
7 200	10,5	160 дн.		
2 480	5	9 міс.		
2 835	6	8 міс.		

5 — Знайдіть валюту через дисконт, термін та відсотки дисконтові

Дисконт	%	Термін	Валюта
168 крб. 80 к.	12,5	48 дн.	
42 „ — »	6	8 міс.	
308 » — »	8	1 рік	

6 — 20 грудня 1925 року Цукротрест подає до дисконту 2 векселя: перший—речінцем 15 травня 1926 року на суму 3 060 крб., другий—1 липня 1926 року на суму 1 890 крб. Дисконт першого векселя за 4%, а другого—5,5%. Скільки одержить Цукротрест за обидва векселі?

7 — Скільки треба заплатити за вексель 5 870 крб. який продають за 4 місяці до речінця за дисконтом за 6% річних? (Відп. — 5 752,6 крб.)

8 — Заводоправління, маючи потребу в грошах продає вексель свого дебетора (довжника) за 10 міс. 10 день до речінця. Валюта векселя — 3 600 крб. Дисконт — 6% річних. Скільки дістане заводоправління грошей? (Відп. — 3 414 крб.)

9 — a% від капіталу становить c карбованців. Чому дорівнює увесь капітал. Напишіть формулу

10 — Вексель, що його валюта a карбованців, продано за t місяців до речінця; дисконт — p% річних. Напишіть формулу дисконту та формулу вартости векселя.

РОЗДІЛ 6

Коло. Кругові діяграми

Складніші задачі на відсотки

§ 1. Розгляньмо ще декілька задач на відсотки. Кооператив, продаючи матерію по 3 крб. 40 коп. за метр, має прибутку 6,25%. Найти собівартість?

Приймаючи собівартість краму за 100%, можемо сказати, що ціна складає $100 + 6{,}25\% = 106{,}25\%$. Це число відсотків припадає на 3 крб. 40 коп. Знаючи це, дізнаємось, скільки крб. складає $1^0/_0$: $3,40:106,25=0,032$ крб. Тому $100^0/_0$ буде 3,2 крб.; це й буде собівартість.

1—Продаючи чай по 1 крб. 40 к. за фунт, мають $30^0/_0$ збитку. Найти собівартість чаю.

2—Крам продано за 434 крб. 70 к., причому мали 15% прибутку. Найдіть собівартість.

Ощадні каси й деякі банки вираховують, так звані, складні відсотки. В такому разі прибуток в кінці першого року додають до первісного капіталу й на другий рік вираховують відсотки разом з капіталу й прибутку за перший рік. Прибуток за другий рік додають до того капіталу, який рахувався на другому році й т. д.

Напр., якщо капітал 200 крб. дає прибутку 5 складних відсотків, то це значить, що з початку другого року капітал буде вже 210 крб. і з цього числа (210) вираховують $5^0/_0$ за другий рік. Докладніше про складні відсотки скажемо в розділі про логаритми.

З відсотками зустрічаємось також, коли маємо справу з процентовими паперами: Селянська позика, Державна позика, різні облігації то-що, які дають власникам прибуток, зазначений на кожному такому папері. Напр., на 100 крб. шостипроцентова облігація дає прибутку на рік 6 крб. 100 крб. або яка инша сума, надрукована на облігації, зветься номінальною вартістю. Риночна або біржева ціна цього паперу може бути вища й нижча номінальної вартости, залежно від фінансової та економічної кон'юнктури країни або підприємства, які випускають цей процентовий папір. Коли ми чуємо, що курс якогось паперу 95, то це визначає, що замість 100 крб. цей процентовий папір коштує 95 крб., а прибуток від нього є 6 крб.

Коло. Його елементи

§ 2. Колом звуть криву лінію, що всі її точки містяться на рівній віддалі від точки в середині, що її звемо осередком або центром. Віддаль від центру до будь-якої точки кола звуть лучом або радіусом (рис. 17). Його позначають літерами латинської мови r або R (читати «ер»). Цілком

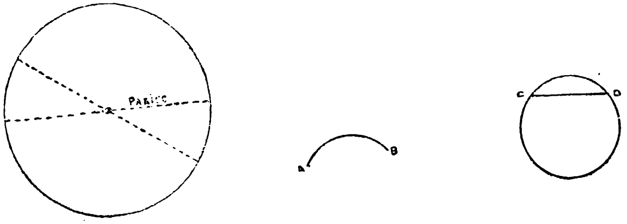


Рис. 17.

зрозуміло, що всі радіуси даного кола є рівні один одному. Просту CD, що сполучає які-небудь дві точки кола, звуть тятивою або хордою. Найбільшу хорду, що проходить через центр, звуть поперечиною або діяметром. Кожен діяметр дорівнює 2 радіусам. Діяметр означають літерами d або D (де). Тому можна писати $D = r + r = 2r$ або $r = \frac{D}{2}$. Щоб нарисувати коло, вживають циркуля. Коли розглядають неціле коло, а лише його яку-небудь частину, то таку частину кола звуть дугою; напр., закруглення залізничої колії. Частину площі, що обмежена колом, так само звуть колом. Частину кола, що обмежена двома радіусами, та дугою як от DOE, звуть вирізком або сектором. Частину кола, що обмежена дугою та хордою, звуть відрізком або сегментом, як от ACB (рис. 18).

Кут

§ 3. Якщо проста буде обертатися так, що одна точка її лишається нерухомою, то утворюється фігура, яка визначає величину обігу даної простої в инше становище відносно свого первісного становища (рис. 19). Цю фігуру звуть

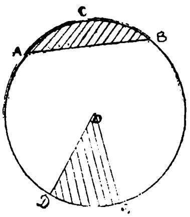


Рис. 18.

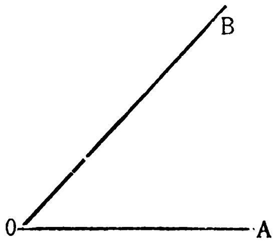


Рис. 19.

кутом. OA—первісне становище, OB—кінцеве, обертання йде проти стрілки годинника. Також і фігуру, що утворюють дві прості OA та OB, виходячи з одної точки O, звуть кутом. Точку O звуть вершком кута, OA та OB—боками кута. Кут позначають трьома літерами, напр., кут AOB, або той самий кут читають і записують так: BOA, при цьому завжди літера, що стоїть біля вершка, мусить бути в середині. Иноді кут позначають одною літерою, яку пишуть біля вершка. Через те, що величина відхилення не залежить від довжини простої, яка обертається, величина кута не залежить від його боків.

Кут ABC = кутові DBE (рис. 20), або пишуть так: $\angle ABC = \angle DBE$ (Знак $<$ визначає кут).

Якщо при обертанні простої OA навколо точки O, кожна точка цієї простої опише коло, то кут звуть повним. В такому разі OA припадає до свойого первісного становища. Коли проста, обертаючись, стане так, що зі своїм первісним становищем становить одну просту, то кут звуть напівповним. Половину напівповного кута звуть прямим кутом. Він є четвертою частиною повного. Боки прямого кута звуть взаємно перпендикулярними і позначають знаком $\perp$, пишуть $OB \perp OA$. Коли $OB \perp OA$, то і навпаки, $OA \perp OB$. Кути, що менші за прямого, звуть гострими, а більші—тупими. (рис. 21). Кут BAC гострий, кут EDF тупий.

Подібно до цього й дві площі можуть утворювати кути, які звуть **двостінними**. Ми вже бачили прямі двостінні кути у рівнобіжностінника та куба. Дві стіни кімнати, сторінки книги, що їх перегортаємо, утворюють двостінні кути.

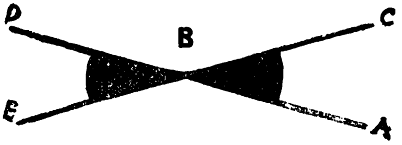


Рис. 20.

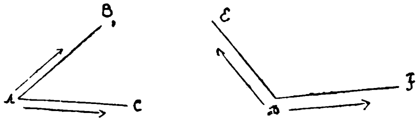


Рис. 21.

Для обміру, рисування й будування кутів існує багато різного приладдя: 1. косинець,— з нього користуються для рисування прямих кутів на папері; 2. екер, що складається з двох перпендикулярних дощечок, з нього користуються для проведення прямих кутів на поверхні землі; 3. теодоліт—складне приладдя, його вживають, щоб міряти кути на землі; 4. транспортир, прилад, з якого користуються для обміру кутів, що нарисовано на папері, а також для будування кутів на папері. Цей прилад (рис. 22) складається з півкола, що

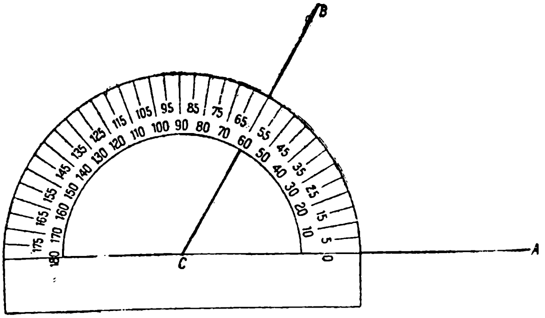


Рис. 22.

його дуга поділена на 180 рівних частин, які звуть градусами (позначаються так: 1^0, 5^0, 15^0, 26^0, і т. д.). Для обміру якогось кута кладуть на нього транспортир так, щоб центр півкола припадав до вершка кута, а край лінійки, що є діяметром, до одного боку кута. Перетин другого боку з півколом вказує число градусів даного кута.

Щоб за допомогою транспортиру збудувати кут в 60^0 завбільшки, прикладаємо транспортир до даної простої АС так, щоб центр припав до даної точки (простої), а діяметр транспортира припав до даної простої; проти числа 60^0 позначаємо на папері точку, яку сполучаємо з даною точкою.

Вправа 1—Нарисуйте декілька кутів гострих та тупих й виміряйте їх транспортиром.

2—Збудуйте при допомозі транспортиру кути: 30^0, 60^0, 45^0, 120^0, 150^0, 200^0, 250^0, 5^0, 10^0, 170^0, 180^0, $22\frac{1}{2}^0$, 270^0.

3—Який кут утворюють стрілки годинника, коли вони показують 3 години? 4? 6 год.?

4—Нарисуйте дві простих взаємно перпендикулярних одна до одної за допомогою косинця та транспортиру.

5—Скільки в цілому колі градусів?

6—Нарисуйте дугу 180^0, 190^0, 30^0?

7—Яку частину прямого кута складають кути 40^0? 30^0? 15^0? 60^0?

Кругові діяграми

§ 4. Подібно до того, як ми користувались з прямокутних діяграм, можна збудувати й колові або, як кажуть, кругові діяграми, розподіляючи коло на сектори, відповідні даним числам. Суму усіх даних чисел приймають за $100^0/_0$; всі дані числа визначають у відсотках до загальної суми. Через те, що ціле коло визначає $100^0/_0$ і має 360^0, то $1^0/_0$ відповідатиме дуга $360^0 : 100 = 3{,}6^0$. Якщо ми маємо $45^0/_0$, то щоб позначити це число за допомогою сектора, треба знайти дугу множенням $3{,}6^0 . 45 = 162^0$. Тоді в центрі кола довільного радіусу будуємо цей кут і боки його продовжуємо до перетину з обводом кола. Так само будуємо сектор для другого, третього числа й т. д. Таким чином все коло буде поділено на сектори відповідно відсотковим взаємовідношенням даних чисел.

Приклад 1—Збудувати кругову діяграму за такими даними:

	Поверхня в тисячах кв. кілом	Поверхня в $^0/_0{}^0/_0$	Число градусів
Азія	800	33,6	121
Америка . . .	700	29,4	106
Африка	544	22,9	82,4
Европа	178	7,5	27
Австралія . . .	156	6,6	23,6
Разом . .	2 378	$100^0/_0$	360^0

2—Збудувати кругову діяграму за такими даними

Федер. Спілки	Число мешканців в мільйонах	$^0/_0{}^0/_0$	Градуси
РСФРР	60		
БСРР	1,6		
УСРР	26		
КСРР	0,76		
Кавказ (опріч Грузії)	6		
Грузія	2		
Сибір	9		

Практичне обчислення обводу кола

§ 5. Зробіть таку спробу. Виміряйте сантиметрами чи міліметрами обвід кола та його діяметр, напр., обвід кола монети та її діяметр, потім довжину кола й діяметрів декількох круглих тіл (напр., склянки, тарілки то-що). Дізнайтеся, в скільки разів у кожному випадкові довжина кола більша за довжину свого діяметру. Завжди ми будемо мати в результаті число 3 з якимось дробом, що середнім ліком наближається до 3,14, якщо обмежитись точністю до 0,01. Взагалі, обвід кожного кола більший від свого діяметру у 3,14 рази (з точністю до 0,01). Якби взяли цю величину з точністю до 0,1, то мали-б 3,1, з більшою точністю буде 3,1416. . . . . Число, що показує, в скільки разів обвід кола більший від свого діяметру, позначають літерою грецької мови π (читати пі): $\pi = 3{,}14$ з точністю до 0,01.

Якщо нам відомо, що обвід кожного кола більший за довжину свого діяметру в 3,14 рази, то, знаючи діяметр даного кола, можна обчислити обвід кола. Напр., коли діяметр колеса дорівнює 2 метрам, то обвід його буде $2 . 3{,}14 = 6{,}28$ метри. Якщо позначити довжину кола літерою C (це), а діяметр—літерою D, то матимемо формулу для вичислення довжини кола: $C = \pi D$ тоб-то, довжина кола є рівна числу π, помноженому діяметром.

Вправа 1—Знайдіть обвід кола, що його радіус дорівнює 10 см? 5 см? 2,5 см? 3 метрам?

Навпаки, коли нам відома довжина кола, можемо обчислити діяметр його. Для цього досить довжину кола поділити числом 3,14, тоб-то π й матимемо $D = \frac{C}{\pi}$.

2—Обчисліть діяметр і радіус кола з обводом 6,28; 62,8 см; 628 см.

Вправи до розділу 6

1—Продано краму за 90 крб., причому одержано 12,5% прибутку. Найдіть собівартість.

2—Куплено 159,6 кгр. чаю за 897 крб. 75 к.; по чому треба продавати кожні 400 грамів чаю, щоб мати прибутку 12%? (Відп.—2,52).

3—Приватній торговець продає мануфактуру за 272 крб. 25 к. з прибутком 12,5%. Найдіть собівартість.

4—Кооператив купив чай по 2 крб. 40 к. за фунт; підчас доставки якусь кількість його було згублено; решту було продано за 693 крб. 36 коп. Не дивлячись на те, що мали прибутку по $12^1/_2$% на фунті, загалом було 10% збитку. Знайдіть, скільки чаю було куплено та загублено? (Відп.—321 ф.).

5—С.-г. кредитове т-во, маючи 26.400 крб. грошей, влаштувало маслобойний завод за 12.000 крб., який щорічно дає прибутку 763 крб. За 7.800 крб. придбало облігацій Селянської позики, що дають 5% прибутку, а решту грошей поклало до Українбанку, що виплачує за вкладки кредитових товариств 7,5%. Скільки %% прибутку має С.-г. т-во на ввесь свій капітал? (Відп.—Біля $6^1/_4$%).

6—Житлокоопові, що будує новий будинок, не вистачає як раз половини потрібних для цього грошей. Позичивши гроші, житлокооп видає векселя на 19.020 крб. на 8 міс. за 8,5 %. Скільки коштує будинок?

7—Кооператив купив 458 пуд. цукру і, щоб заплатити, дав вексель, який у нього був, на 3 000 крб., речінець уплати векселю настає через 1 рік 2 міс., причому дисконт зроблено за 7,5 %. Скільки прибутку одержав кооператив, продаючи цукор по 6 крб. 50 к. за пуд. (Відп.—239,5 крб.).

8—Кооператив купив 1.800 пуд. угноїння по 2 крб. 95 к. за 6 пудовий лантух, з уплатою через 3 міс. Коли купують готівкою, то роблять знижку 3 %. Скільки треба заплатити готівкою? Чи не корисніше було-б кооперативу позичити гроші в банкові за 5 % річних на 3 міс.?

9—Пекарня ХЦРК одержала 600 пуд. борошна по 1 крб. 11 к. за пуд. З випічкою хліба мали припіку 25 %, а витрати на кожні 100 пуд. складають 117 крб. 20 коп. Ціна 1 ф. хліба коштує 5 коп. Прибуток чи збиток має ХЦРК, та скільки саме?

10—Збудуйте кругову діяграму розподілу студентів свого курсу I) за партстажем, II) за віком.

11—Збудуйте кругову діяграму кількости цукру, що вироблено на Україні за такими даними:

Роки	Кількість в мільйонах пуд.
1917 . . .	46
18 . . .	18
19 . . .	4,2
20 . . .	4,6
21 . . .	2,4
22 . . .	10,4

12—Збудуйте кругову діяграму за такими даними
Добуто вугілля в СРСР в мільйонах пудів:

1917	1447
18	722
19	498
20	466

13—Збудуйте кругову діяграму видатків підчас світової війни:

Країни	Видатки в мільярдах крб.
Росія	45
Франція	51
Англія	97
Америка . . .	64
Германія . . .	80
Австро-Угорщина	42

14—Діяметр круглої арени цирку 110 метрів. Найдіть довжину обводу арени.

15—Дерево на обійми має 92 см. Який завдовжки діяметр цього дерева? (З точн. до 0,1).

16—Обчислити обвід колеса паровозу, у якого діяметр дорівнює 1 м. 80 см.

17—Махове колесо, що має діяметр 2 м. 25 см, обертається 28 разів на хвилину. Найдіть шлях, який проходить його точка за секунду (так звану, колову швидкість).

18—На висоті зросту людини дуб має в обіймах 2,4 метра. Припускаючи, що кожен рік наростає шар в 1,75 мм. завдовжки, знайдіть вік дерева.

19—Кругла пилка має в діяметрі 50 см. і кожну хвилину обертається 600 разів. Обчисліть її колову швидкість, тоб-то той шлях, що його проходить пилка за секунду.

20—Шкив, що обертається 400 разів на хвилину має швидкість, 3,5 метрів на сек. Знайдіть діяметр шкива.

21—Знайти довжину закруглення залізничої колії, якщо радіус закруження 520 сажнів, а кут, що відповідає дузі, дорівнює 10^0.

22—Найдіть x з формули та дайте геометричне пояснення:

$$15{,}7 = 3{,}14\,x \qquad 3{,}14 = 21{,}9\,x$$

23—Розвяжіть рівнання:

$$2{,}5\,x = 7{,}5 \qquad 2{,}4\,x = 12$$

$$7{,}5\,x = 1{,}5 \qquad 1{,}4\,x = 7{,}7$$

24. — Від чого залежить довжина кола?

Що зробиться з довжиною кола, якщо діяметр кола збільшимо вдвічі? втричі? Якщо радіус збільшимо вдвічі? втричі? Якщо зменшимо в декілька разів радіус або діяметр? (число π беремо кожен раз з тою самою точністю).

Як можна назвати довжину кола відносно діяметру та радіусу?

РОЗДІЛ 7

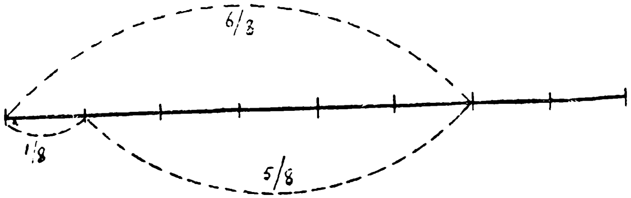
Додавання та віднімання звичайних дробів. Периметр

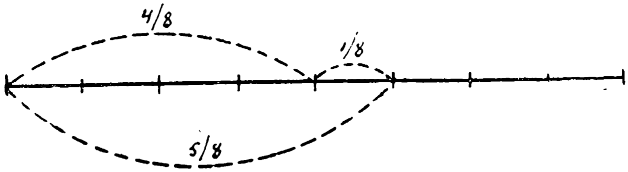
Додавання та віднімання звичайних дробів

§ 1. Від дроту в 1 арш. завдовжки відрізали спочатку $^1/_8$ арш., а потім ще $^5/_8$ арш. Скільки всього дроту відрізали?

Уявім собі ці дроби графічно і ми побачимо, що $^1/_8 + {}^5/_8 = {}^6/_8 = {}^3/_4$

Щоб дізнатися, на скільки другим разом відрізали менше за перший, треба від $^5/_8$ відняти $^1/_8$ $^5/_8 - ^1/_8 = ^4/_8 = ^1/_2$.





Отже бачимо, щоб додати або відняти дроби з однаковими знамениками, треба додати або відняти їх чисельники, а знаменика лишити того самого.

Приклади:

$^1/_6 + ^1/_6 + ^1/_6 + ^1/_6 = ^4/_6 = ^2/_3$.

$^3/_8 + ^3/_8 + ^3/_8 = ^9/_8 = 1^1/_8$.

$^9/_{11} - ^7/_{11} = ^2/_{11}$

$^7/_{12} - ^5/_{12} = ^2/_{12} = ^1/_6$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{k} - \frac{b}{k} = \frac{a-b}{k}$$

Розгляньмо тепер додавання та віднімання дробів з різними знамениками; напр., нехай треба додати: $^2/_3 + ^1/_4$.

Для цього треба раніш перетворити ці дроби так, щоб у них були спільні (однакові) знаменики.

Краще всього це зробити так. Знайдемо спільну найменшу многократь для даних знаменників 3 та 4, тоб-то, таке найменше з усіх чисел, що поділяється числами 3 та 4. Таке число буде 12. Його й беремо за спільного знаменика. Коли у першого дробу ($^2/_3$) зробимо знамеником число 12, яке більше 3-х у 4 рази, то, щоб дріб не змінився величиною, нам треба й чисельника збільшити в 4 рази (на підставі якої властивості дробу?). Тоді, замість $^2/_3$ матимемо $^8/_{12}$; ($^2/_3 = ^8/_{12}$). Так само, замість $^1/_4$ мусимо взяти $^3/_{12}$; ($^1/_4 = ^3/_{12}$).

Отже $\overset{4}{\frown}{}^2/_3 + \overset{3}{\frown}{}^1/_4 = ^8/_{12} + ^3/_{12} = ^{11}/_{12}$.

Числа 4 та 3, що написано понад даними дробами, вказують, в скільки разів треба збільшити чисельника, через те, що збільшили знаменика.

Ці числа звуть додатковими чинниками.

Другий приклад: $^1/_4 + {}^5/_6$. Спільна найменша многократь для чисел 4 та 6 буде 12. Тому спільним знамеником беремо 12. Додатковий чинник для першого дробу є 3 (бо $12:4=3$), а для другого—2. (бо $12:6=2$), тому: $^1/_4 + {}^5/_6 = \overset{3}{^3/_{12}} + \overset{2}{^{10}/_{12}} = {}^{13}/_{12} = 1^1/_{12}$.

Приклади:

$$\overset{5}{^1/_2} + \overset{2}{^2/_5} = {}^5/_{10} + {}^4/_{10} = {}^9/_{10}$$

$$\overset{4}{^2/_3} - \overset{3}{^1/_4} = {}^8/_{12} - {}^3/_{12} = {}^5/_{12}$$

$$\overset{4}{^5/_6} - \overset{3}{^3/_8} = {}^{20}/_{24} - {}^9/_{24} = {}^{11}/_{24}$$

Щоб додати або відняти дроби з різними знамениками: 1. *треба, раніш всього, звести ці дроби до спільного знаменика, а для цього нам потрібно знайти спільну найменшу многократь для знаменників даних дробів;* 2. *знайти для кожного дробу додаткового чинника;* 3. *Помножити кожного чисельника належним додатковим чинником, потім додати або відняти чисельники й підписати спільного знаменика.*

Якщо нам доводиться додавати мішані числа, тоб-то, цілі числа разом з дробом, то додаємо спочатку цілі числа, а потім дроби, напр.:

$$3^3/_4 + 2^5/_8 = 3^6/_8 + 2^5/_8 = 5^{11}/_8 = 6^3/_8\,;$$
$$2^1/_2 + 3^3/_4 + 5^7/_8 = 2^4/_8 + 3^6/_8 + 5^7/_8 = 10^{17}/_8 = 12^1/_8.$$

Примітка: Існують різні способи більш-менш складні, для находження спільної найменшої многократи, але, маючи на увазі, що нам доведеться проробляти дії над невеличкими дробами, можна обмежитись тими відомостями, що їх подаємо тут.

При відніманні трапляються иноді випадки, коли дробова частина зменшеника менша за дробову частину від'ємника, як от: $3^1/_4 - {}^3/_4$, тоді беремо від 3-х одну одиницю й перетворюємо її на четверті частини. $1 = {}^4/_4$ та ще $^1/_4$ буде $^5/_4$ отже зменшеник є $2.\,^5/_4$; таким чином $3^1/_4 - {}^3/_4 = 2^5/_4 - {}^3/_4 = 2^2/_4 = 2^1/_2$

Приклади:

$$3^7/_{12} - 2^{11}/_{12} = 2^{19}/_{12} - 2^{11}/_{12} = {}^8/_{12} = {}^2/_3\,;$$
$$1^1/_8 - {}^3/_4 = 1^1/_8 - {}^6/_8 = {}^9/_8 - {}^6/_8 = {}^3/_8\,;$$
$$5^1/_4 - 3^5/_6 = 5^3/_{12} - 3^{10}/_{12} = 4^{15}/_{12} - 3^{10}/_{12} = 1^5/_{12}.$$

Периметр квадрату та прямокутника

§ 2. Найдімо суму боків квадрату, у якого кожен бік дорівнює $2^3/_8$ метра (рис. 23) $2^3/_8 + 2^3/_8 + 2^3/_8 + 2^3/_8 = 8^{12}/_8 = 9^4/_8 = 9^1/_2$ м. Сума боків будь-якої фігури зветься обводом або **п е р и м е т р о м** цієї фігури.

Якщо бік квадрату позначимо літерою a, то периметр буде дорівнювати $a + a + a + a = 4a$

Чому буде дорівнювати периметр прямокутника, якого боки: 1) $2^3/_4$ м. та $5^5/_8$ м.; 2) $3^1/_8$ м. та $^7/_{16}$ м.; 3) 2,35 м. та 1,25 м.

Найдіть периметр і поверхню фігури, що тут нарисовано.

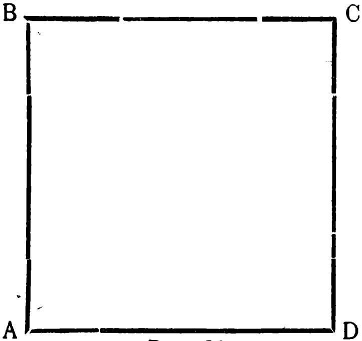


Рис. 23.

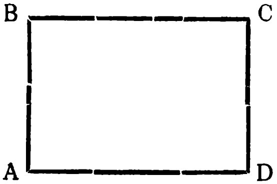


Рис. 24.

Складемо формулу периметру прямокутника, у якого боки дорівнюють a та b.

$$a + a + b + b = 2a + 2b$$

У виразах $4a$ або $2a + 2b$ числові чинники 4 та 2, попереду літери, звуть **с о ч и н н и к о м** або **к о е ф і ц і є н т о м**. Коефіцієнт показує, скільки разів літеру, що біля неї він стоїть, беремо доданком. Його вживається для скорочення писання, напр., $k + k = 2k$.

Якщо бік квадрату b, то як записати його периметр?

Напишіть скорочено $a + a + a + a + a =$

Поверхня прямокутника дорівнює ah. Маємо 5 таких самих прямокутників. Тоді поверхню їх можна записати так:

$$ah + ah + ah + ah + ah = 5ah.$$

Напишіть скорочено за допомогою коефіцієнту $ab + ab + ab$.

Яке геометричне пояснення можна надати цьому виразові?

П р и м і т к а: Коефіцієнт не слід приймати за покажчика степіня, який вказує — скільки разів треба помножити число таким саме числом.

$$a^3 = a\,.\,a\,.\,a;\ 3a = a + a + a.$$

Слід писати: $a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$.

Яке геометричне пояснення можна надати цьому прикладові?

Напишіть скорочено та надайте геометричного пояснення:

$$a^3 + a^3 + a^3 = ?\ \ abc + abc + abc = ?$$

Вправи до розділу 7

1. Проробіть дії:

a. $^{16}/_{25} + {}^{19}/_{25} + {}^{14}/_{25}$; b. $2^1/_4 + 2^1/_4 + 2^1/_4 + 2^1/_4$; c. $4^7/_{12} - 3^5/_{12}$

2. $1 - {}^5/_8$; $1 - {}^3/_{16}$; $^2/_5 + {}^5/_6$; $^3/_4 + {}^5/_8$; $3^1/_3 + 2^1/_5 + {}^7/_{15}$; $^{11}/_{12} + {}^{13}/_{18}$;

$1^1/_2 + {}^1/_3 + 2^3/_8 + {}^{11}/_{12}$; $1^2/_3 + 1^4/_{12} + 1^7/_8$.

3. $^5/_4 + {}^3/_4 - {}^1/_6$; $1^1/_2 - 1^1/_6 + 2^2/_3$; $3^5/_6 - 1^7/_{18} + 4^5/_9$.

4. $\frac{x}{z} - \frac{1}{z}$ $\qquad \frac{2a}{m} + \frac{3a}{m} - \frac{4a}{m}$ $\qquad \frac{2}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{3a} =$

$\frac{a}{3c} + \frac{b}{4c}$ $\qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$\frac{b}{a^2} + \frac{c}{a} - \frac{d}{a}$ $\qquad \frac{7b}{4} - \frac{2b}{5}$

5 — Від рейки $2^3/_4$ м. завдовжки відрізали клапті в $1^1/_2$ м., $^5/_8$ м., $^1/_4$ м. Найдіть довжину тої частини, що залишилася.

6 — З баку вилили 2 рази по $^5/_8$ літрів, один раз — $^3/_4$ літ., та 3 рази по $1^1/_3$ літ., після цього в ньому ще лишилося $1^5/_{24}$ літри. Вичислити вмістимість цього баку.

7 — Один робітник може забрукувати вулицю за 10 день, другий за — 12, третій — за 15 день. Яку частину вулиці вони можуть забрукувати в один день, якщо будуть працювати разом?

8 — Дріт $7^1/_2$ метрів завдовжки розрізали на 2 частини: одна довша за другу на $2^3/_8$ метра. Найдіть довжину обох шматків.

9 — Найдіть загальну вагу таких чавунних речей $12^3/_8$ ф.; $13^3/_{10}$ ф.; $10^3/_5$ ф.; $15^3/_4$ ф.

10 — Треба виготувати чотири шруби завдовжки $1^3/_4$, $2^{15}/_{32}$. $2^5/_8$, $1^7/_{16}$ дюймів. Який завдовжки треба взяти шматок криці, якщо на обрізки треба додати $^5/_8$ дюймів?

11 — Чи можна довжину кола назвати периметром? Чи можна периметр фігури назвати функцією її боків?

12 — Запишіть скорочено:

$x + x + x + y + y$; $\qquad a + a + b + b + b$

$xy + xy + xy$ $\qquad$ Найдіть геометричне пояснення.

13 — Напишіть нескорочено, без коефіцієнтів $5a$; $4ab$; $2a$; $3b$; $7xy$; $3b$; $2bc$; $4abc$

14 — Периметр прямокутника є 40 см. Один бік його втричі більший за другий. Скільки сантиметрів має кожен бік?

Розвязування: I спосіб. — Припустімо, що один бік є одною частиною, тоді в другому боці буде таких частин 3. Отже у всьому периметрові буде $1 + 3 + 1 + 3 = 8$ част.; на одну частину припадає $40 : 8 = 5$ см., значить, друга $= 15$ см.

II спосіб. — Нехай один бік прямокутника буде x см., тоді другий $= 3x$. Отже можемо написати таке рівняння : $x + 3x + x + 3x = 40$ або скорочено $8x = 40$, тому $x = 40 : 8 = 5$, тоб-то один бік є рівний 5 см., а другий — 15 см.

15 — Периметр прямокутника 56 мм. Один бік більший за другий в 6 разів. Найдіть його периметр та поверхню?

16 — Дільницю, землі огорожено парканом 1 200 метрів завдовжки. Один бік дільниці в 5 разів довший за другий. Яка поверхня цієї дільниці?

17 — Периметр прямокутника дорівнює 80 см., довжина його на 10 см. більша за ширину. Найдіть його боки.

Складемо рівняння: $x + x + 10 = 40$; $2x + 10 = 40$; 40 є сума двох доданків $2x$ та 10; на тій підставі, що один доданок дорівнює сумі без другого доданка, маємо $2x = 40 - 10$ або $2x = 30$; $x = 15$. Таким чином, один бік 15 см., другий 25 см. Розвязуючи цю задачу, ми користувались з властивости суми. (Вступ § 5).

18 — Два робітники заробляють 70 крб. Перший одержує на 10 крб. більше за другого. Скільки одержує кожний?

19 — У двох засіках 100 пуд. муки; в одному на 20 пуд. більше, ніж у другому. Скільки в кожному? (Розвязати способом аритметичним та алгебраїчним — складаючи рівняння).

20 — Розвязати рівняння $2x + 30 = 60$; $3x + 15 - 45$; $2x + 2{,}5 = 8{,}5$; $6x + 3^3/_4 = 4^1/_8$; $x - 2 = 5$. В останньому прикладі можна x розглядати, як зменшеник, 2 — від'ємник, а 5 — різницю. Користуючись з властивости, що зменшеник дорівнює різниці плюс від'ємник, легко відшукати x. $2x - 5 = 15$; $3x - 8 = 16$; $2x - {}^1/_2 = 3^1/_2$.

21 — Дві дільниці землі, одна у вигляді квадрату, а друга — прямокутника, огорожено парканом однакової довжини — 360 см. Дізнайтеся, чи будуть у них однакові поверхні. Якщо неоднакові, то яка більша?

РОЗДІЛ 8

Множення звичайних дробів. Находження частини цілого

§ 1. У § 2-му розділу 5-го, ми вже познайомилися з множенням дробу цілим числом. Тепер розгляньмо множення цілого числа дробом.

Хуткість моторного човна дорівнює 18 км. за годину. Яку віддаль пройде човен за 2 години? за 3 години? за $^2/_3$ години?

Щоб дізнатися, скільки човен пройде за 2 години, як нам відомо, необхідно 18 помножити числом 2.

$$18 . 2 = 36 \text{ км.}$$

За 3 години човен пройде $18 . 3 = 54$ км.

Щоб дізнатися, скільки він пройде за $^2/_3$ години, ми пророблюємо ту саму дію, міркуючи так: якщо за годину човен проходить 18 км., то за $^1/_3$ години він пройде втричі менше, тоб-то $18 : 3$ і за 2 таких частини вдвічі більше, або $\frac{18 . 2}{3} = 12$ км.

Приклади:

$$15 \,.\, {}^3/_5 = \frac{15\,.\,3}{5} = 9\,; \qquad 25\,.\,{}^3/_4 = \frac{25\,.\,3}{4} = 18\,{}^3/_4$$

З наведених прикладів можна вивести ще правило: для множення цілого числа дробом треба ціле число помножити чисельником і добуток поділити на знаменика.

З цих самих прикладів бачимо, що добуток може бути й менше за множеника ($18\,.\,{}^3/_4 = 12$; $15\,.\,{}^3/_5 = 9$).

Та воно так і повинно бути, бо при цьому множенні ми, власне кажучи, шукаємо частку від цілого.

Користуючись з правила множення цілого числа дробом, можемо дізнатись, як помножати дріб дробом.

Нехай треба помножити ${}^3/_4$ дробом ${}^5/_6$. Знайдемо ${}^1/_6$ від ${}^3/_4$. Для цього треба дріб ${}^3/_4$ поділити на 6. Маємо $\frac{3}{4\,.\,6}$, а щоб знайти ${}^5/_6$, треба попередній вираз збільшити в 5 разів, тоб-то:

$$\frac{3\,.\,5}{4\,.\,6} = {}^{15}/_{24} = {}^5/_8$$

Приклади:

$${}^3/_4\,.\,{}^7/_5 = \frac{3\,.\,7}{4\,.\,5} = {}^{21}/_{20} = 1\,{}^1/_{20}$$

$${}^8/_9\,.\,{}^4/_5 = \frac{8\,.\,4}{9\,.\,5} = {}^{32}/_{45}$$

Знову з наведених прикладів виводимо таке правило: для множення дробу дробом треба чисельник першого дробу помножити чисельником другого й знаменика першого—знамеником другого й потім перший добуток поділити на другий.

Примітка 1: Раніш, ніж остаточно перемножати чисельників та знамеників, можна скоротити ті вирази на зразок того, як це робиться у формулах, напр., ${}^{15}/_{14}\,.\,{}^7/_{25} = \frac{15\,.\,7}{14\,.\,25}$; скорочуємо 7 та 14 на 7, 15 та 25 на 5; матемемо $\frac{3\,.\,1}{2\,.\,5} = {}^3/_{10}$;

${}^{16}/_{21}\,.\,{}^3/_4 = \frac{16\,.\,3}{21\,.\,4}$; спочатку скоротимо 16 та 4; 21 та 3, а потім уже перемножаємо $\frac{16\,.\,3}{21\,.\,4} = \frac{4\,.\,1}{7\,.\,1} = {}^4/_7$

Примітка 2: Якщо множимо мішані числа, тоб-то ціле число разом із дробом, то їх перетворюємо на неправильний дріб [1]).

$$3\,{}^1/_2\,.\,1\,{}^1/_3 = {}^7/_2\,.\,{}^4/_3 = \frac{17\,.\,4}{2\,.\,3} = \frac{17\,.\,2}{1\,.\,3} = {}^{14}/_3 = 4\,{}^2/_3\,;$$

$${}^3/_4\,.\,1\,{}^2/_3 = {}^3/_4\,.\,{}^5/_3 = {}^5/_4 = 1\,{}^1/_4$$

[1]) Неправильний дріб—це є дріб більший за одиницю; в ньому чисельник більший за знаменика.

Розгляньмо прямокутника, що в нього боки будуть 3 та 4 см. (нарисуйте його), поверхня його буде $3 . 4 = 12$ кв. см., значить, 1 кв. см. є $^{1}/_{12}$ частина поверхні прямокутника.

Відшукаємо тепер поверхню прямокутника, що його боки ставлять $^{2}/_{3}$ та $^{3}/_{4}$ частини даного.

Поверхня його, очевидно, дорівнює $^{2}/_{3} . ^{3}/_{4} = ^{6}/_{12}$ частинам даного. Це ми й справді бачимо з рисунка 25.

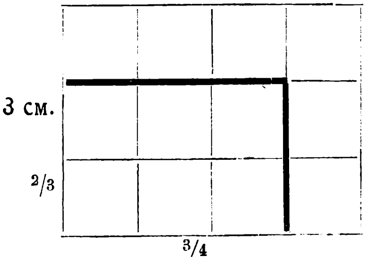


Рис. 25.

Задачі

1 — Нарисуйте прямокутника з боками 3 та 8 см. Розбийте його на квадратові см. й покажіть на рисункові, як знайти добуток $^{2}/_{3} . ^{5}/_{8}$.

2 — Найти поверхню прямокутника з боками $^{5}/_{8}$ арш. та $^{3}/_{4}$ арш. Перевірте відповідь, обернувши аршини на вершки.

3 — Найдіть поверхню квадратів з боками $^{1}/_{2}$ арш.? $^{3}/_{4}$ арш.? $1^{2}/_{3}$ саж.? Перевірте результати, обернувши потім на менші міри.

Можна записати правила множення дробів формулами, означивши чисельників та знамеників літерами:

$$1.\ \frac{a}{b} . \frac{c}{a} = \frac{a . c}{b . a} \qquad 2.\ a . \frac{c}{d} = \frac{a . c}{d} \qquad 3.\ \frac{a}{b} . c = \frac{a . c}{b}$$

Всі три правила множення можна звести до одного, а саме — до першого множення дробу дробом і його твердо пам'ятати; цілі числа розглядати, як дріб зі знамеником 1.

$$5 . ^{3}/_{4} = ^{5}/_{1} . ^{3}/_{4} = \frac{5 . 3}{1 . 4} = ^{15}/_{4} = 3^{3}/_{4}$$

Всі властивості множення, зазначені у вступі (§ 11) для цілих чисел, поширюються також і на дроби. Перевірте це.

Бічна та повна поверхня рівнобіжностінника та куба

§ 2. Коли офарблюємо чи білимо стіни, коли оббиваємо скриню бляхою або навіть вироблюємо скриню із бляхи, доводиться обчисляти поверхні стін, розглядаючи кімнату та скриню, як геометричні тіла: рівнобіжностінник або куб. Сума бічних поверхонь стін звемо бічницею або бічною поверхнею тіла, а суму поверхонь всіх стін повною поверхнею їх.

Напр., знайти бічну й повну поверхню прямокутнього ящика розмірами: 50 . 25 . 10 см.

Поверхня одної бічної стіни буде 50 см. $\times$ 10 см. = 500 кв. см., таких стін дві, значить 500 . 2 = 1000 кв. см., поверхня третьої стіни бічної 25 см. $\times$ 10 см. = 250 кв. см., їх також дві, 250 . 2 = 500 кв. см. Бічна поверхня 1000 + 500 = 1500 кв. см., а це можна записати й формулою: (50 . 10) . 2 + (25 . 10) . 2.

Щоб знайти повну поверхню, треба до бічної додати поверхню основ. Повну поверхню можна записати такою числовою формулою: (50 . 10) . 2 + (25 . 10) . 2 + (50 . 25) . 2 = 4000 кв. см.

1 — Скільки треба бляхи, щоб виготувати скриню розміром 50,5; 24,5; 15 см.?

2 — Найти повну поверхню куба з рубом у 2½ дюйма.

3 — Яка різниця між об'ємом та поверхнею? Якими мірами виміряють поверхню та об'єм?

4 — Від чого залежить величина бокової та повної поверхні рівнобіжностінника та кубу?

5 — Функцією якої величини можна назвати бокову та повну поверхні рівнобіжностінника? Скількох величин?

Формули складання та обчислення їх

§ 3. Складімо літерами формулу бічної поверхні рівнобіжностінника. Хай розміри його будуть a, b, c см. Тоді поверхня однієї стіни буде $a \cdot c$, а через те, що їх дві, то ми, скористувавшись з коефіцієнта, напишемо $2ac$. Так само, дві инших дадуть поверхню $2bc$.

Отже, бічниця визначиться формулою

$$S = 2ac + 2bc$$

а повна поверхня $S = 2ac + 2bc + 2ab$

В цих формулах треба ясно уявляти собі порядок дій. Спочатку ми множимо a числом c і результат числом 2; потім $b \cdot c$ й результат помножаємо числом 2; а потім вже ці добутки додаємо.

Так само бічна поверхня кубу $S = 4a^2$ та повна $T = 6a^2$, де a визначає руб кубу.

1 — Обчислити формулу:

$$S = 2ac + 2bc$$

якщо $a = 2{,}4$; $b = 1{,}5$; $c = 3$?

$a = 1\frac{1}{2}$; $b = 2\frac{1}{3}$; $c = 6$?

2 — Користуючись вказівками § 11 у вступі, поясніть, що формулу $2ac + 2bc$ можна записати й так: $(2a + 2b) \cdot c$.

Що визначають тут дужки? Чому не можна писати без них? Що визначає $2a + 2b$? Чи можна сказати, що бічна поверхня рівнобіжностінника дорівнює периметрові основи, помноженому бічним рубом?

3 — На рисункові 26 розгортка рівнобіжностінника. Найти бічну поверхню його, користуючись з рисунка й розглядаючи бічну поверхню, як прямокутник

4 — Розгорніть куба.

Коли у формулі здибуємо декілька дій, то раніш за все пробробляємо дії множення та ділення, а вже потім додавання та віднімання; найзрозуміліше вказують на порядок дії — дужки. Напр. $ab + cd$, порядок дії нами вже розглядався, але-ж, коли вираз записати тими-ж літерами отак: $(ab + c)\,d$ порядок дій буде вже зовсім инший. Спершу робимо дію, вказану в дужках, значить, множення: a множимо числом b, до результату додаємо c і цю суму помножаємо числом d.

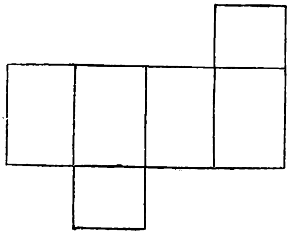


Рис. 26.

1 — Вкажіть порядок дій та обчисліть оці вирази:

$$(a+b).c;\ a+bc;\ ac+b^2;\ a^2+bc;\ (a^2+в)\,c;\ (a+b)^2.c;$$

$$\text{коли } a=2;\ b=1/2;\ c=3/4.$$

Зведення подібних членів

§ 4. Якщо при обчисленні якогось літерового виразу остання дія, що її ми повинні пробробляти, буде додавання або віднімання, то такий літеровий вираз незалежно від кількости літер, що є в ньому, називається многочленом; всі инші літерові вирази називають одночленами, напр.

$$ab+cd;\ a+b;\ a+bc;\ ab+c;\ a^2+b^2 \text{ — многочлени}$$

$$\text{але } a;\ ab;\ abc;\ (a+в).c;\ a^2;\ (a+b)^2;\ \frac{a}{b} \text{ — одночлени.}$$

Можна й так висловити: многочлен складається з одночленів, сполучених між собою знаками плюс або мінус; через це многочлени иноді називають двочленами, тричленами і т. д., напр., вираз $ab + cd$ складається з двох одночленів ab та cd, він є двочлен.

$2a + 3b - 4c$ — тричлен, бо складається з трьох одночленів $2a$, $3b$ й $4c$; $3abc + 4bcd$ — двочлен: він складається з двох одночленів $3abc$ й $4bcd$.

Одночлени, що складаються з однакових літерових виразів і однакових покажчиків біля них, називаються подібними.

Напр., $3a^2b$ та $4a^2b$ або; $5abc$ та $3abc$ — подібні одночлени, але $3a^2b$ та $4ab^2$ не будуть подібними, бо відрізняться покажчиками біля літер. Якщо многочлен складається з одночленів, де є подібні члени, то їх можна злучити в один; таке обертання зветься зведенням подібних членів. Щоби зробити зведення подібних членів, треба додати або відняти їх коефіцієнти, погоджуючись зі знаками, але літерові вирази лишаються не зміненими.

Напр., $2a + 4a = 6a$; $3a^2 + 5a^2 + 4a^2 = 12a^2$

(але було-б помилково написати $12a^6$, тоб-то додавати покажчиків; пригадайте геометричне з'ясування цих виразів).

$3a^2 + 4b^2 + 5a^2 - 2b^2$; члени цього многочлена можна переставити так $3a^2 + 5a^2 + 4b^2 - 2b^2$ і після зведення подібних членів матимемо $8a^2 + 2b^2$.

Вправи — Зробіть зведення подібних членів:

1	$6a^2bc + 3a^2bc + 3a^2bc$	**9**	$m + m + m$
2	$5m^3 - m^3 + 8m^3$	**10**	$0{,}27ab^2 + 0{,}23ab^2$
3	$3a^3 - 3a^3 + 5a^3$	**11**	$^3/_4a^3 + 2{,}5a^3$
4	$4a^2 - 4a^2 + 7a^2$	**12**	$2{,}1a^3 + 2{,}35a^3$
5	$4a^2b - 5a^2b + 7a^2b - a^2b$	**13**	$12x + 2x - 3x$
6	$x^2 + x^2 + x^2 + x^2$	**14**	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x$
7	$x^2 + 4x^2 - 2y$	**15**	$^1/_4x + {}^1/_4x$
8	$15x^3 - 7x^3$		

Множення одночленів

§ 5. Ми вже знаємо, що ab визначає число a помножене числом b. Розгляньмо ще деякі випадки множення одночленів.

1) $2a \cdot 3b$. Знаючи, що множення не залежить від порядку чинників, можемо переписати: $2a \cdot 3b = 2 \cdot 3ab$, а це дає рівність $2a \cdot 3b = 6ab$.

2) $5c \cdot 8d = 5 \cdot 8cd = 40cd$

3) $2a \cdot b = 2ad$

Вправи — Помножіть:

1 $2{,}5a \cdot 4b$ **2** $7ac \cdot b$ **3** $8{,}3kl \cdot 0{,}2m$

Виводимо правило: перемножуючи одночлени з різними літерами, перемножуємо їхні сучинники, а літери переписуємо одну по одній без зміни.

Коли-ж трапляються однакові літери маємо, напр.

1) $2a \cdot 6a = 2 \cdot 6 \cdot a \cdot a = 11\ a^2$ (бо $aa = a^2$)

2) $3b^2 \cdot 7b^3 = 3.7b^2b^3$

Тут доведеться згадати, що $b^2 = bb$; $b^3 = bbb$, а тому $b^2b^3 = bbbbb$; для скорочення пишуть замість цього b^5, вказуючи покажчиком 5, що чинників b узято 5.

Коли маємо множення a^3a^4, то це визначає, що a в першому числі взято чинником 3 рази, а в другому — 4, разом буде 7. Отже $a^3a^4 = a^7$.

Таким чином, покажчики однакових літер підчас множення додаються.

Приклади:

1 $a \cdot a = a^2$, бо a це теж, що й a^1 (один раз чинник a).
2 $a \cdot a^2 = a^3$, бо $1 + 2 = 3$.
3 $a^5 \cdot a^2 = a^7$ (Скільки однакових чинників у числі a^5? Скільки їх у a^2? Скільки їх буде у добуткові?
Ще приклад: $5a^2b . 3a^3bc = 5 . 3a^2a^3bbc = 15a^5b^2c$.

Вправа—Висловіть, як зроблено множення в останньому випадкові?

Вправи до розділу 8

Помножіть:

1 $c \cdot c^2$

2 $d^2 \cdot d^2$

3 $0,25a \cdot 6b^2$

4 $2a^4bc \cdot 3a^3b^2d$

5 $8 \cdot {}^3/_4$; $7 \cdot {}^2/_7$; $12 \cdot {}^5/_6$; $6 \cdot 1^1/_2$; ${}^3/_4 \cdot {}^4/_5$; ${}^8/_{10} \cdot {}^2/_3$;

6 $6 \cdot {}^3/_5$; ${}^3/_{10} \cdot {}^{15}/_{17}$; ${}^5/_6 \cdot {}^6/_5$; $1^4/_3 \cdot 3$; $5 \cdot {}^9/_{25}$;

7 ${}^4/_5 \cdot {}^9/_{10}$; ${}^5/_8 \cdot {}^7/_{15}$; $2^4/_9 \cdot 2^1/_4$; $1^1/_2 \cdot 1^1/_4$

8 $({}^1/_2 + {}^1/_3 + {}^1/_4)\ (2 + {}^1/_5 — {}^1/_7)$.

9 $(4^3/_8 + 1^5/_6 — {}^1/_4) \cdot (2^3/_5 — 1^7/_{15})$

10 ${}^2/_3 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^7/_9$; $1^1/_3 \cdot 1^1/_5 \cdot 1^2/_3$

11 ${}^{11}/_{12} \cdot {}^8/_{15} \cdot {}^{30}/_{49}$; $2^2/_3 \cdot 3^3/_4 \cdot 1^2/_7$; ${}^3/_4 \cdot {}^2/_3 \cdot {}^{13}/_{14} \cdot {}^{21}/_{32}$

12 $({}^1/_2 + {}^1/_3 + {}^1/_4) \cdot (2 + {}^1/_5 — {}^1/_7)$

13 $(4^3/_8 + 1^5/_6 — {}^1/_4) \cdot (2^3/_5 — 1^7/_{15})\ (7^{17}/_{24} — 3^{19}/_{36})\ (2^1/_2 — 3^1/_3 — 2^7/_9) \cdot 1\,{}^1/_3$

14 $({}^3/_4)^2$; $({}^5/_6)^2$; $(1^2/_3)^2$; $({}^1/_2)^2$. $({}^1/_2)^3$; $({}^1/_3)^3$; $({}^1/_2)^3$; $\left(\frac{a}{b}\right)^2$; $\left(\frac{a}{b}\right)^3$;

15—Всяке коло більш за свій діяметр приблизно в $3^1/_7$ рази. Який обвід паровозного колеса, коли діяметр його дорівнює $1^2/_5$ метра?

16—Скільки важить нікелевий кубик, що в нього руб $1^1/_5$ см., коли властива вага нікелю $8^1/_3$?

17—Довжина кімнати $5^3/_5$ м., ширина становить ${}^5/_7$ часток довжини. Найти поверхню підлоги.

18—Товщина головки шворня дорівнює ${}^3/_4$ діяметру цього шворня. Найти товщину головки, коли діяметр дорівнює $1^1/_2$ дюймам.

19—Трест, маючи 936 метрів матерії, запродав одному кооперативу ${}^3/_4$ всієї матерії, а другому—${}^8/_9$ того, що лишалося після цього. Скільки метрів лишилося в тресті й скільки придбав кожний кооператив? (Відп.—Лиш. 16 м.)

20—Від куска матерії довжиною $8^3/_4$ метра відрізано $^4/_7$ части. Визначити, скілько коштує лишок цієї матерії, коли відомо, що метр коштує $2^3/_5$ крб.?

21—Нарисуйте прямокутника з боками $2^1/_2$ см. й $3^1/_2$ см. Обчисліть його поверхню й перевірте результат на рисункові.

22—Обчисліть формулу та поясніть її геометричне значіння $3ah$, якщо

$$a = 3^1/_2,\ h = 5,$$

$$a = 4,\quad h = 2^3/_4,$$

$$a = 5{,}5\quad h = 2{,}4.$$

23—Обчисліть формулу $3\ abc$, якщо

$$a = {}^1/_2;\ b = 2\ {}^2/_3;\ c = 4.$$

24—На рисункові викройка скриньки. Найдіть об'єм та поверхню цієї скриньки:

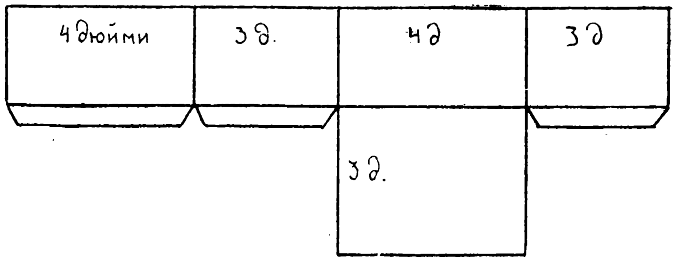


Рис. 27.

25—Будинок застрахований у 1800 крб. Страхового податку платять $^3/_4\%$. Скільки карбованців платять податку?

26—Показати порядок дій та обчислити такі вирази:

1) $a - bc,\ a + bc;\ a - (b + c);\ (a + b) \cdot b - c;\ a + b\ (c - b)$

2) $(a + b) \cdot (a - b);\ (a - b) - (b - c);\ a^2 - b^2;\ a^2 + b^2,$

3) $[(a - b)\ c + a]\ c;\ {}^3/_4\ a^2.$

Примітка: Дробовий коефіцієнт показує, яка частина береться від всього літерового виразу, що перед ним поставлено коефіцієнта.

4) $3a^2;\ (3a)^2;\ a^3 + b^3;\ (a + b)^3;\ [(a + b)\ c - a]\ a$

$a + (b - c);\ a - (b + c);\ a - (b - c)$, як можна ці вирази записати без дужок, користуючись з зауважень, зроблених у вступі.

27— Зробити зведення подібних членів:

1) $5ab + 2ab - 6ab$

2) $3abc - abc.$

3) $2,5xy + 3,4xy - 1,2xy$

4) $5,5xy - 4,5xy$

5) $12ab - 7ab - 5ab$

6) $8,2cd - 4,8cd - 2cd$

7) $12ax + 10bx - 2ax + 5bx + 4ax + 2bx$

8) $5ax + 6bx + 12ax - 3bx + 6ax - 2bx$

28—Розвязати рівнання, зробивши спочатку зведення подібних членів:

1) $3x + 2 + 4x + 3 - x + 5 = 40$

(розвяз: $6x + 10 = 40$; $6x = 40 - 10$; $6x = 30$; $x = 5$)

2) $2x + 1/2 + 4x + 1\,1/2 + x - 1 = 22$

3) $16x + 10 + 10x - 21x + 5 = 35$

4) $2,5x + 10 + 7,5x + 9 - 8x = 49$

5) $3x + 5x - 2 = 14$; $8x - 5x = 10$

6) $x + x + 1/2x + 1/4x + 1 = 100$

29—Розвязати рівнання, зробивши спочатку множення, а потім зведення подібних членів:

1) $5x + 8 + (20 - x) . 2 = 99$

Розвязування $5x + 8 + 40 - 2x = 99$

$3x + 48 = 99$

$3x = 99 - 48$

$3x = 51$

$x = 17$

2) $3x + (10 - x) . 2 + 5 = 30$

3) $(30 + x) . 3 + (10 + x) . 2 = 300$

4) $7 . (x - 8) = 70$

5) $9 . (2x - 5) = 27$

6) $3 . (x + 4) + 4 = 19$

7) $3 . (x + 4) + (x + 5) . 2 = 32$

30—Чотири наймити одержали 157 крб., другий —2-ма крб. більше за першого; третій—3-ма крб. більше за першого; четвертий 2-ма крб. більше за другого. Скільки одержав кожний? (Відп.—4-й одерж. 41 к.).

31—Чотири клапті заліза важуть 56 кг. Другий — 5-ю кг· більше за першого; третій—у 5 разів більше за перший, а четвертий— удвічі більше за третій. Скільки важить кожний? (Відп.—1-й 3, 2-й— 8).

32—Щоби зробити порох, беруть сірку, вугілля та салітру. Сірки беруть у двічі менше за вугілля, а салітри на 100% більше за вугілля та сірку разом. Скільки треба взяти сірки, вугілля та салітри, аби приготувати 18 кг. пороху? (Відп. 2, 4, 12).

33—Робітник II-го розряду одержує на 5 крб. більше, ніж робітник І-го розряду. Робітників І-го було 20 чол., другого—30 чол. Всього вони одержали 1150 крб. Скільки одержував робітник по 1-му та по 2-му розрядам?

Розвязування:

Нехай робітник І-го розряду одержує x крб.;

тоді робітник II-го розряду одержує $x + 5$ крб.;

всі робітники І-го розряду одержують $20x$ крб.;

всі робітники II-го розряду одержують $(x + 5) . 30$ крб.

Всього грошей одержали робітники $20x + (x + 5) . 30$.

Цей вираз, за умовою задачі, мусить дорівняти 1150 крб., тоб-то.

$20x + (x + 5) . 30 = 1150.$

Лишається розвязати це рівняння й знайти чому рівняється x, тоб-то платня для 1-го розряду.

34—Підручник математики коштує на 0,5 крб. дорожче, ніж підручник біології. Скільки коштував той та другий підручник, коли за 1800 примірників з математики й 2000 біології заплатити 6600 крб.? (Відп.—1,5 та 2 крб.).

35—За 30 сажень дубових та соснових дров заплатили 3580 крб. 1 сажень дубових коштує 130 крб., а один сажень соснових—90 крб. Скільки було куплено дубових та соснових? (Відп.—22 та 8).

36—На сторінці невеличкого формату вміщається пересічно 1300 літер великого шрифту та 1850 літер дрібного. Стаття з 37250 літер міститься на 24 сторінках. Скільки сторінок зайнято дрібним та великим шрифтом?

37—36 робітників заводу одержали 230 крб., причому деякі з них одержували по 7 крб., а решта по 6 крб. Скільки було робітників тієї та иншої категорії? (Відп.—14 та 22).

38—У крамниці продали 15 кіло чаю двох сортів за 82 крб. 50 коп. Кіло чаю вищого сорту коштує 7 крб. 50 коп., а гіршого 4 крб. 50 коп. Скільки продали чаю обох сортів?

39—Напишіть формулу бічниці рівнобіжностінника, коли периметр основи означити літерою p, а бічного руба літерою l.

40—У товаристві фізкультури мається водозбір для плавання; його розміри такі: $5 \times 5 \times 2{,}5$ м. (форма рівнобіжностінника). Скільки треба плиток розміром 20×25 см., щоб вимостити дно та стіни цього водозбору? Скільки літрів води вміститься в ньому й скільки ця вода важитиме?

41—Скільки коштувало-б позолотити зовні всі стіни ящика з рубом a см., коли за позолоту 1 кв. см. беруть k коп. Складіть формулу.

Технічні вправи—

Перемножіть одночлени (записати це множення).

42—a та 5; b та 8; a^2 та a^4; b та b^3; $9ab$ та $5cb$;

43—$3a^2$ та $2ab$; $4ab^3$ та $5a^2b^2$; $2{,}5a^3bx$ та $4ab^2x$?

РОЗДІЛ 9

Ділення дробів та одночленів. Обернення дробів десяткових та простих одних на одні

Ділення цілого на дріб. (Находження цілого по частці)

§ 1. Як поділяти дріб на ціле число, ми вже ознайомились у § 2, розділу 5. Розглянемо ділення цілого числа на дріб.

1—Скільки мішків потрібно, щоб розсипати 6 пудів по $^3/_4$ пуди в кожний?

Мішків потрібно стільки, скільки разів $^3/_4$ міститься в 6, тоб-то $6 : {}^3/_4$.

Міркуємо так: $^1/_4$ в 6 міститься $6 . 4$ рази; $^3/_4$ буде міститися в 3 рази менше $\frac{6 . 4}{3} = 8$ разів, отже необхідно мати 8 мішків.

Міркування над такими та подібними до них задачами приводять до такого правила:

Щоби поділити ціле число на дріб, треба ціле число помножити знаменником, а добуток поділити на чисельника.

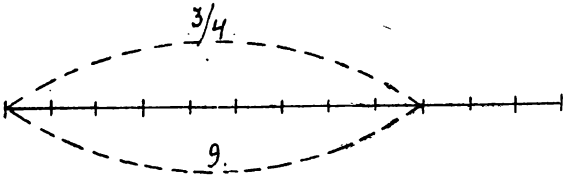
За $^3/_4$ фун. хліба заплатили 9 коп. Скільки коштує 1 фунт?

Якщо $^3/_4$ фун. коштують 9 коп., то одна чверть коштуватиме втричі менш — $^9/_3$, але цілий фунт складається з 4 четвертих і коштуватиме в 4 рази більше, тоб-то $\frac{9 . 4}{3} = 12$ коп.

Тут ми, знаючи ціну частини фунта, знайшли її для всього фунта. Коли порівняти результат нашої дії з тим діленням, що розглядалось вище, побачимо, що ми власне 9 поділили на $^3/_4$; справді

$9 : {}^3/_4 = \frac{9 . 4}{3} = 12.$

Звідси маємо висновок, що ділення цілого числа на дріб визначає находження цілого числа по відомій його частці і, значить, коли треба в такий спосіб знайти число, мусимо зробити дію ділення; після цього стає зрозумілим, чому після ділення частка иноді виходить більшою за діленик. Це бачимо із графика:



Розглянемо ділення ще з одного боку.

Хай частка від ділення 9 на $^3/_4$ буде x, тоб-то $9 : {}^3/_4 = x$. Але діленик рівний дільникові, помноженому часткою (§ 13 Вступу), тоб-то $^3/_4\, x = 9$, значить ми маємо тепер рівнання, з якого необхідно знайти x (нашу частку). Але якщо $^3/_4\, x = 9$, то $^1/_4\, x$ дорівнюватиме числові втричі меншому — $^9/_3$, а цілий x — чотири четвертих — буде в 4 рази більшим: $x = \frac{9 \cdot 4}{3} = 12$

инакше кажучи, коли $^3/_4\, x = 9$, то для находження x — невідомого цілого числа, слід 9 поділити числом $^3/_4$, тоб-то ціле число множимо знамеником й ділимо на чисельника.

Приклади: $12 : \frac{3}{5} = \frac{12 \cdot 5}{3} = 20$; $15 : \frac{5}{7} = \frac{15 \cdot 7}{5} = 21$

$\frac{5}{6} x = 15$, найти x; $x = 15 : \frac{5}{6} = \frac{15 \cdot 6}{5} = 18$;

Вправи — Розвяжіть:

1 $\frac{3}{7} x = 21$; $\frac{5}{8} x = 25$; $18 : \frac{3}{4}$; $12 : \frac{3}{4}$;

2—На роботу не вийшло 20 чол., що становить $^2/_5$ числа всіх робітників. Скільки на заводі всього робітників?

3—На фабриці працює 150 жінок, що становить $^3/_5$ числа всіх робітників. Скільки на фабриці робітників та скільки чоловіків?

4—$^5/_8$ фун. сиру коштує 30 коп. Скільки коштує 1 фунт?

Ділення дробу на дріб

§ 2. З тих-же міркувань виходимо й поділяючи дріб на дріб: $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} = x$; значить $\frac{2}{3} x = \frac{3}{5}$;

$$\frac{1}{3} x = \frac{3}{5 \cdot 2};\quad x = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{9}{10}$$

Виникає таке правило:

Щоби поділити дріб на дріб, треба чисельника першого дробу помножити знамеником другогой знаменика першого дробу — чисельником другого та перший добуток поділити на другий.

Примітка 1: Перед множенням чинників треба дивитись, чи не можна їх скоротити. $\frac{3}{5} : \frac{9}{10} = \frac{3 . 10}{5 . 9} = \frac{1 . 2}{1 . 3} = \frac{2}{3}$

Скорочуємо 3 та 9 на 3; 5 та 10 на 5.

Примітка 2: При діленні мішаних чисел їх спершу слід перетворити на неправильний дріб $1\frac{1}{2} : 2\frac{3}{4} = \frac{3}{2} : \frac{11}{4} = \frac{3 . 4}{2 . 11} = \frac{3 . 2}{1 . 11} = \frac{6}{11}$.

Означімо чисельника та знаменика дробів літерами й покажемо в загальній формі всі три випадки ділення: 1) $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$. 2) $a : \frac{c}{d} = \frac{ad}{c}$. 3) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Ці три випадки приводяться до одного — до ділення дробу на дріб, якщо дивитимемось на ціле число, як на дріб зі знамеником 1

$$5 : \frac{3}{4} = \frac{5}{1} : \frac{3}{4} = \frac{5 . 4}{1 . 3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

Обернення простих дробів на десяткові та навпаки

§ 3. Через легкість дій з десятковими дробами, на практиці частіше користуються з них, а прості трапляємо лише тоді, коли вони нескладні: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^3/_4$, $^5/_8$ і т. д.

За запровадженням у нас метричних мір, знання десяткових дробів стало ще більшою необхідністю, тим більше, що й простий дріб можна перетворити на десятковий. Зробімо зараз це.

Перетворімо дріб $^3/_4$ на десятковий. Ми маємо право дивитись на $^3/_4$, як на частку від ділення числа 3 числом 4 (чому?) й проробляємо це ділення за правилом десяткових дробів.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \underline{28} & 0{,}75 \\ 20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array}$$

Тому, що 4 в 3-х не може міститися, пишемо 0 цілих; перетворюємо 3 одиниці на десяткові частки, на 30 дес.; 4 в 30 дес. міститься 7 разів, остачу 2 перетворімо на соті частки; в 20 сотих 4 міститься 5 разів; значить $^3/_4 = 0{,}75$.

$\frac{5}{8} = 0{,}625;$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 8 \\ \underline{48} & 0{,}625 \\ 20 & \\ \underline{16} & \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

Перетворити на десятковий дріб $^3/_5$; $^7/_8$; $1^3/_4$; $^7/_{20}$ (ціле число лишається без зміни).

Перетворити на десятковий дріб $^2/_3$.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 18 & 6,666\ldots \\ \hline 20 & \\ 18 & \\ \hline 20\ldots & \end{array}$$

Виникає безкінечний дріб, причому одне число періодично повторюється; через це такий безкінечний дріб і зветься періодичним, напр., $^5/_6 = 0,8333\ldots$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 6 \\ \hline 48 & 0,8333\ldots \\ \hline 20 & \\ 18 & \\ \hline 20\ldots & \end{array}$$

Якщо, перетворюючи простий дріб на десятковий, натикаємось на безкінечний періодичний дріб, то тоді беруть його з тою чи иншою точністю, тоб-то заокруглюють цей дріб (див. § 6 розд. 1).

Иноді доводиться, навпаки, десятковий дріб обертати на простий; для цього слід лише відкинути 0 цілих та підписати знаменика, який розуміється з вартости дробу; коли можна, треба скоротити.

$$0,4 = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{10} = \frac{2}{5};\quad 2,35 = 2\frac{\overset{5}{\cancel{35}}}{100} = 2\frac{7}{20}$$

Обернути на простий дріб 0,625; 1,125; 3,25; 0,005.

Записування загальних задач

§ 4. Зробімо підсумки того, що вже розглянули. У всякій задачі між величинами, що даються та тими, які відшукуємо, існує певна з а л е ж н і с т ь, тоб-то відшукувана величина залежить від даних величин і зі зміною даних величин міняється й відшукувана, инакше кажучи, відшукувана величина є функція даних величин. Розвязування кожної задачі можна записувати формулою, яка або зразу дає відповідь на запитання в задачі, або-ж з цієї формули (рівняння) доводиться знаходити відшукувану величину; останнє — в разі, коли формула встановлює лише залежність між відшукуваною та даними величинами. Дані величини в задачі означаються числом або літерою; коли скласти формулу з літер, то її не можна обчислити, доки замість цих літер не підставимо чисел. Така формула вказує лише, які дії та в якій послідовності слід проробляти з даними величинами, щоби знайти відшукувану, та ще дає вираз для розвязування всіх задач одного типу.

Приклади:

1—За хвилину колесо обертається a разів. Скільки разів обернеться колесо, пройшовши c кілом., коли за хвилину проходитиме b метрів?

Розвяз.: Колесо всього пройде $1000c$ метрів, витратить на це $\frac{1000c}{b}$ хвилин; тому, що за хвилину a разів обернеться, всього зробить

$$x = \frac{1000ca}{b} \text{ обертань.}$$

2—Властива вага цегли c, знайти вагу a куб. метр. цегли.

Розвязування: 1 куб. см. важить c грамів, значить 1 куб. метр важить 1 000 000 c грам., виходить a куб. метр. важитимуть: 1 000 000 ac грам., або 1000 ac кгр., або ac тон; отже $x = ac$ тон.

3—Яка вага стіни a м. довжиною, b метр. шириною та c метр. вишиною, коли вага цегли d?

4—Крам коштує a крб. пуд, його продано по b крб. Скільки одержано прибутку, коли його було k пудів? (Два способи; довести, чому вони рівнозначні?)

Ділення одночленів

§ 5. Означаючи дані задачі літерами, ми маємо иноді необхідність робити ділення. Робимо ділення так: коли діленик та дільник мають різні літери, ми тільки записуємо ділення. Напр., $a : b = \frac{a}{b}$ $c : (xy) = \frac{c}{xy}$ записують звичайно дробом.

Коли діленик та дільник мають однакові літери, можна зробити спрощення—скорочення дробів.

$2a^2 : a = \frac{2a^2}{a}$; але a^2 це є aa, а тому $\frac{aa}{a} = a$, бо один із чинників a у чисельникові скорочується зі знамеником.

Ще приклад $\frac{a^5}{a^2}$; a^5 це є добуток п'ятьох чинників a; з цих 5 чинників з a^2 можна 2 чинники скоротити. Отже $\frac{a^5}{a^2} = a^3$.

Звідци правило: при діленні однакових літер від покажчика діленика віднімають покажчика дільника. Ясна річ, коли покажчик діленика більший від покажчика дільника, коли-ж маємо дріб $\frac{a^2}{a^4}$ тут можемо скоротити її лише на a й буде $\frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}$.

Вправи до розділу 9

1—Зробити вказані дії: $2a : 5$; $3a^2 : a$; $3a^2 : a^2$.

$3\frac{1}{2} : 7$; $\quad 12 : \frac{2}{3}$; $\quad 18 : 4\frac{1}{2}$; $\quad \frac{5}{12} : \frac{1}{4}$; $\quad \frac{3}{10} : \frac{2}{5}$; $\quad 2\frac{1}{4} : 1\frac{1}{8}$;

$\frac{3}{4} : \frac{8}{5}$; $\quad 2\frac{1}{3} : 9\frac{1}{3}$.

2 $2:\frac{1}{3}$; $\frac{5}{8}:\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{7}$; $3\frac{1}{5}$; $48:3\frac{1}{5}$; $15:\frac{3}{5}$;

$\frac{5}{8}:\frac{15}{16}$; $7\frac{1}{2}:\frac{1}{22}$; $16:1\frac{1}{3}$.

3 $\left(4\frac{1}{3}.2\frac{1}{4}-7\frac{5}{12}\right):\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)$.

4 $$\frac{\left(2\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right):1\frac{3}{4}}{\left(40:38\frac{4}{5}\right).5}$$

5 $$\frac{7\frac{1}{2}.2\frac{2}{3}-12\frac{1}{4}:3\frac{1}{2}}{110.\frac{3}{5}}$$

6—Розвязати рівнання, найти x:

a) $\frac{3}{5}x=12$; b) $\frac{2}{3}x=14$; c) $\frac{7}{15}x=42$; d) $\frac{2}{3}x=13$;

e) $\frac{3}{5}x=1\frac{2}{5}$; f) $\frac{2}{3}x=1\frac{1}{3}$; g) $\frac{3}{5}x=\frac{2}{3}$; h) $\frac{3}{5}x=2\frac{1}{2}$;

i) $\frac{2}{3}x+2=12$. [Розвязування $\frac{2}{3}x=12-2$; $\frac{2}{3}x=10$ і т. д.]

k) $\frac{3}{4}x-1=14$. l) $\frac{2}{3}x+3=11$.

7—Поверхня прямокутної ділянки 136 $^2/_3$ кв. саж.; ширина її $13^1/_3$ саж.; найти довжину?

Розвязати аритметично й розвязати за допомогою формули (рівнання).

8—Робітник за $2^1/_3$ години виконав $^7/_{10}$ своєї праці. За який час він скінчить всю роботу? (Відп.—3 год. 20 хв.).

9—Кооператив продав $^2/_5$ част. свого чаю по $2^1/_4$ крб.—фунт і виручив $32^2/_5$ крб. Скільки було всього чаю в кооперативі? (Відп.—36 ф.)

10—За $^5/_8$ кг. сиру заплачено 40 коп. Скільки коштує 1 фунт сиру (1 кг. $= 2^1/_2$ фун.) (Відп.—26 коп).

11—Ванна наповнюється з ґранту до $^5/_{12}$ свого об'єму за одну хвилину. За скільки хвилин наповниться вся ванна?

12—Через один ґрант ванна наповнюється за 12 хв., а через другий за 15 хв. Яка частка ванни наповниться за хвилину через обидва ґранти й через скільки хвилин наповниться вся ванна? (Відп.—через $6^2/_3$ хв.)

13—Обвід колеса $14^2/_3$ фута, діяметр $4^2/_3$ ф. У скільки разів обвід довший за діяметр колеса? (Пригадайте, що ви чули з приводу цієї задачі).

14—Із загону війська $^1/_9$ частину було вбито; $^2/_5$ поранено й $^1/_{20}$ попала в полон, лишалося в загоні 7 900 чол. Скільки було спершу в загоні чоловіка, скілько вбито, поранено та взято в полон? (Відп.—Було 18 000 ч.).

15—Кредитове товариство $^4/_9$ всього капіталу витратило на устаткування заводу, $^1/_3$ на купівлю будинка, а лишок віддало кооперативу за $4^1/_2$%, з якого має 450 крб. прибутку. Який капітал був у кредитовому товаристві? (Відп. — 45 000 крб.).

16—Трьом учням дано книжок: перший одержав $^1/_3$ частину всіх книжок, другий $^5/_{18}$, а третій на 6 книг більше за другого. Скільки було всіх книг та скільки дістав кожний? (Відп. — 18, 15, 21).

17—Машинистка передруковує доповідь за $2^1/_2$ дні, а друга за $3^1/_2$ дні. За який час вони разом передрукують цю доповідь?

18—Продаючи крам за 215 крб., мають прибуток, що складає $^3/_{40}$ всієї вартости краму. Скільки коштує для себе крам?

(Розвязати завдання аритметично — на частки та скласти рівнання, означивши x-ом свою ціну всього краму) (Відп. — 200 крб.).

19—Селянин продав коня за 48 крб. з утратою $^3/_{11}$ справжньої ціни. Скільки коштує цей кінь? (Відп. — 66).

20—Продано чай по 2 крб. 20 коп. за фунт з утратою $8^1/_2$%. Найти собівартість чаю.

21—Робітник зі свого заробітку $^1/_{40}$ частину заплатив у спілку, $^1/_{18}$ за житло, $^1/_{24}$ за освітлення, $^1/_8$ боргу, $^7/_{12}$ віддав дружині й у нього на руках лишилося 12 крб. 20 коп. Який заробіток робітника? (Відп. — 72 крб.).

22—Перетворити на десятковий дріб: $\frac{5}{16}$; $\frac{15}{32}$; $\frac{11}{20}$; $\frac{13}{40}$; $\frac{7}{20}$; $1\frac{3}{8}$; $2\frac{1}{5}$; $3\frac{7}{20}$.

23—Означити десятковим дробом, з точністю 0,01: $\frac{5}{7}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{11}{6}$; $2\frac{2}{3}$; $1\frac{3}{17}$.

24—Архимед для числа π знайшов значіння $^{22}/_7$; означте це число десятковим дробом з точністю до 0,01 та порівняйте з тим, що вже знаєте.

25—Скільки відсотків становлять числа: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$.

(Розвязувати, вважаючи цілу одиницю за 100% або перетворивши цей дріб на десятковий, пам'ятаючи, що відсоток є сота частина числа).

26—Написати простим дробом: 5%; 25%; 30%; 0,5%; 0,6%; 1,8%.

27—На заводі працює a чоловіків та b жінок; чоловіки одержують за день по k крб., а жінки по m крб. Скільки завод платить грошей за день? за 24 дні?

28—Віддаль поміж двома пристанями a верстов За скільки годин пройде пароплав цю віддаль туди й назад, коли хуткість течії води—k верстов за годину, а хуткість руху пароплава—l верстов за годину?

29—Перемішано a кіло борошна по k копійок за кіло та b кіло по l копійок за кіло. По чому можна продавати за кіло такої мішанини, щоб мати d копійок прибутку?

30—Рівнобіжностінник розмірами a, b, c см. важить p грамів Узнати властиву вагу тіла, з якого його зроблено.

31—a робітників, працюючи a день, заробляли по a карбованців що-дня. Скільки всього заробили робітники?

32—Куплено a фунтів краму по b крб. за фунт і заплачено за все k копійок. Написати залежність (рівність) між цими трьома величинами.

33—У одного громадянина a крб., у другого b крб., якщо перший дасть другому c крб., то в обох стане грошей однаково; написати залежність (*рівність*) між цими трьома величинами.

34—Капітал a крб. відданий на c %, дає що-року b крб. прибутку. Написати залежність між трьома величинами.

35—Вексель a крб. дисконтується по p % за t місяців до строку, дисконт рівний k крб. Яка залежність (рівняння, формула) між зазначеними величинами?

36—З двох станцій, що між ними віддаль 36 верств, виїхали одночасно 2 поїзди в одному напрямкові; перший проходить за годину $22^3/_4$ верстви, другий $20^1/_2$ верств. Через скільки годин перший потяг дожене другого? (Складіть рівняння. Означте через x число годин, за які пройшли обидва поїзди до зустрічи). (Відп.—Через 16 год.).

37—Летіла зграя гусей. Назустріч летить один гусак та й каже: «Добридень, сто гусей».—«Ні—відповідають йому—нас не сто, а якби нас було стільки, та ще стільки, та ще півстільки, та чверть і ти також з нами, тоді-б то й було-б нас сто». Взнати, скільки летіло гусей. (Складіть рівняння) (Відп.—36 г).

38—Продали мануфактуру за 132 крб., надбавки було 10%. Узнати собівартість (способом аритметичним та складанням рівнань).

39—На передміській станції продали 70 квитків на Рижов та Люботин, всього на 12 крб. та 40 коп. Скільки продали квитків до Люботина та Рижова, коли перші квитки коштують по 20 коп., а другі по 15 коп.? (Відп.—32 та 38).

40—Поділіть $12b:4$; $7k:k$; $8xy:2x$; $x^3:x$; $a^5:a^2$; $10ab^2:2a$; $5a^2bc^3:ac^2$.

Скоротіть дроби: $\frac{8}{4a}$; $\frac{6a}{3b}$; $\frac{c^3}{ac}$; $\frac{a^2b}{abc}$; $\frac{5m^2np^3}{20mnp^2}$.

РОЗДІЛ 10

Кути. Рівнобіжні прості. Трикутники

Сумежні та вершкові кути

§ 1. Крім кутів прямих, тупих та гострих, що ми розглянули в § 3 розд. 6, можна спостерігати ще й такі, що утворюються перетинанням двох доріг, межами двох ділянок землі й т. инш. Ознакою цих кутів є спільний вершок, спільний бік, а також те, що два инші боки ставлять просту лінію. Такі кути звуться сумежними кутами (рис. 28).

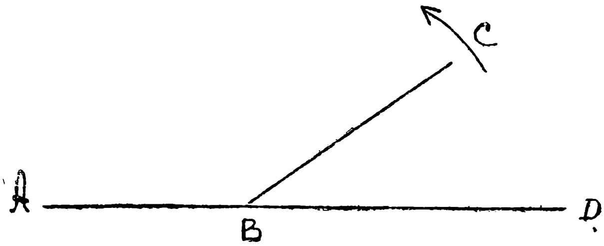


Рис. 28.

На нашому рисункові показано пару сумежних кутів.

Властивість сумежних кутів. Сума сумежних кутів дорівнює двом прямим кутам або 180°. Сума двох сумежних кутів становить половину повного обігу, а через те, що повний обіг є рівний 360°, то, звичайно, половина цього обігу дорівнюватиме 180°; або инакше: коли ставимо сторча до AC у точці O (спільний вершок сумежних кутів) (рис. 29), то ясно видно, що сума двох сумежних кутів становить два прямі кути або 180°.

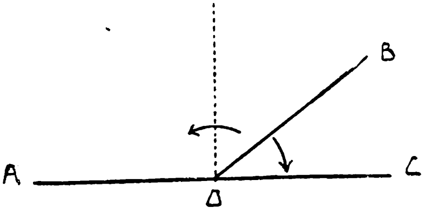


Рис. 29.

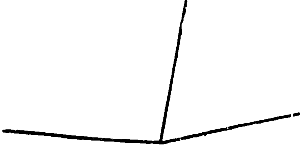


Рис. 30.

Знаючи один із сумежних кутів, можна знайти й другий.

Напр., 1. Коли один із сумежних кутів 30°, то другий 180°—30° = 150°.

2. Один із сумежних кутів складається з 25°. Найти другий.

Примітка: Кути, що в них два боки не становлять просту лінію, не можуть зватись сумежними кутами (рис. 30).

На який бік треба обертати прості, щоби дістати сумежні кути?

Вершкові кути. Вершковими (або вертикальними) кутами називають такі, що в них боки одного складаються з продовження боків другого (рис. 31).

AOD та COB одна пара вершкових кутів, а AOC та BOD—друга пара цих кутів.

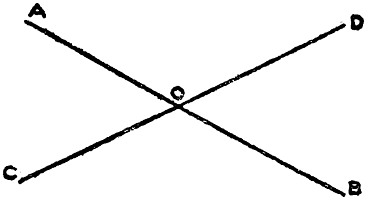


Рис. 31.

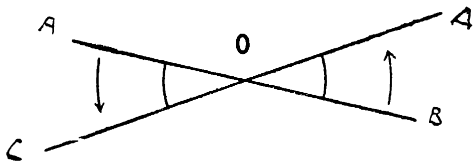


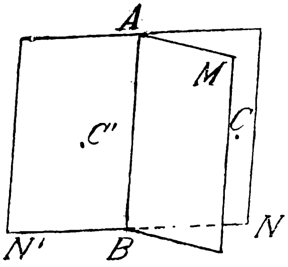
Рис. 32.

Вершкові кути утворюються з перехрещення двох дорог або з розведених ножиць. А де ще ми бачимо вершкові кути?

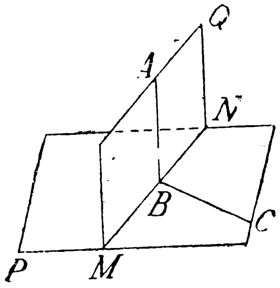
Властивість вершкових кутів. Вершкові кути рівні один одному.

Тому, що кут AOD та кут AOC становлять 180^0 (чому?), а з другого боку, той-же кут AOC разом з кутом COB становлять 180^0, виходить, що $AOD = COB$, бо кожний з них є доповнення з кутом AOC до 180^0

Инакше через те, що величина повороту простої (рис. 32) OD навколо точки O з обох боків цієї точки буде однакова, то й робимо висновок, що $\angle$ AOC рівний $\angle$ BOD.



Двостінний кут сумежний.
Рис. 33.



Двостінні вертикальні кут и.
Рис. 34.

Вправа 1—Коли один з вершкових кутів матиме 50^0, то й другий матиме 50^0. На останні два вершкові кути лишається $360^0 - 100^0 = 260^0$, на кожен по $260^0 : 2 = 130^0$.

2—Один з вершкових кутів 75^0. Найти всі останні кути.

Примітка: Сумежні та вершкові кути можуть ставитися з 2-х площ.

Рівнобіжні прості. Кути при паралельних

§ 2. Рейки залізниці, трамваю, колії дороги нагадують собою лінії, що лежать в одній площі, ідуть на рівній віддалі одна від одної й ніколи не будуть перетинатись, скільки-б ми їх не продовжували в той чи инший бік. Такі прості лінії звуть рівнобіжними або паралельними.

Уявімо, що проста лінія, начеб-то розкололась (уздовж) на дві частини й ця друга частина почала відсуватись від першої, не роблячи ніяких поворотів. Одержані в такий спосіб (відсування без повороту) дві прості—будуть паралельні (рис. 35).

Паралельні прості

Відсування без повороту називається поступовим рухом тієї фігури, що таким способом відсувається. Отже такі прості, що утворились поступовим рухом, є паралельні.

Паралельність позначається знаком $\|$; наприклад, $AB \parallel CD$ (рис. 36)

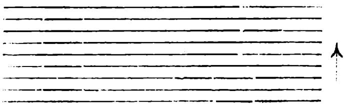


Рис. 35.

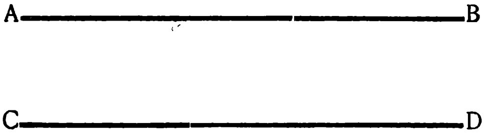


Рис. 36.

Виходячи з другого означення рівнобіжних ліній, можна рисувати їх таким способом: беруть лінійку, й приклавши до неї косинець, проводять просту лінію, далі відсовують косинець уздовж лінійки й знову проводять просту й т. д., поки не одержуть потрібне число рівнобіжних (рис. 37).

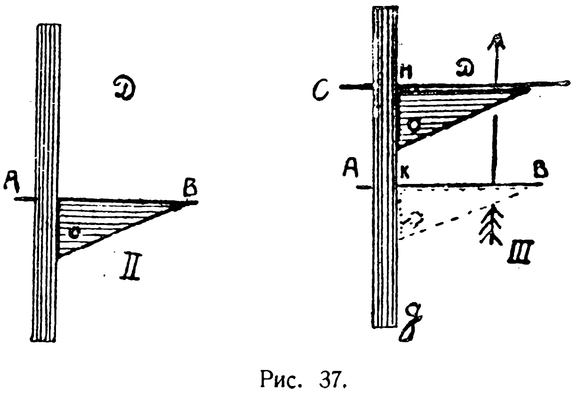


Рис. 37.

Другий спосіб рисування рівнобіжних—до простої (рис. 38) ставимо два перпендикуляри, а потім взявши на них дві точки, які були-б на рівній віддалі від нашої простої—з'єднаємо ці точки. Одержимо нову просту, рівнобіжну до першої, бо вона однаково відстоїть від неї у всіх своїх точках.

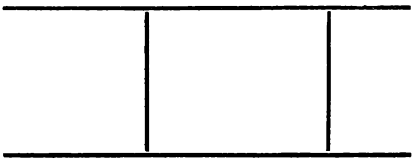


Рис. 38.

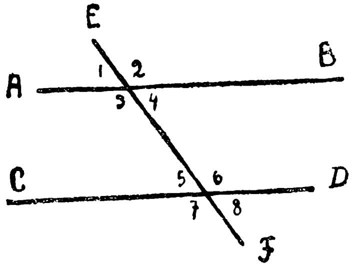


Рис. 39.

Питання 1—Які ви знаєте столярні інструменти, що ними утворюють рівнобіжні?

2—Які руби будуть рівнобіжні у куба? в паралелопіпеді?

3—Які боки будуть рівнобіжні у прямокутника? у квадрата?

4—Нарисувати просту рівнобіжну до даної.

5—Нарисувати просту рівнобіжну до даної, щоб вона проходила через дану точку.

6—Вкажіть рівнобіжні прості, що бачимо ми їх в кімнаті.

Кути, що утворюються при рівнобіжних простих

§ 3. Коли дві рівнобіжні прості перетинаються третьою, маємо 8 кутів.

Тому, що ці дві рівнобіжних прості можна вважати утвореними поступовим рухом одної з них, маємо: верхнім чотирьом кутам відповідають нижчі чотири, а саме: (рис. 39).

1	відповідає	5
2	»	6
3	»	7
4	»	8

Всі ці кути попарно між собою рівні й називаються **відповідними**. Вони мають і иншу назву, причому разглядаються по парі, а саме:

$\left.\begin{matrix} 3 \text{ і } 6 \\ 4 \text{ і } 5 \end{matrix}\right\}$ попарно звуться середові різносторонні

$\left.\begin{matrix} 1 \text{ і } 8 \\ 2 \text{ і } 7 \end{matrix}\right\}$ звуться околишні різносторонні.

Із того, що відповідні кути попарно рівні, виходить, що ці всі кути попарно між собою так само рівні.

Пари кутів далі мають назви

$\left.\begin{matrix}3 \text{ і } 5\\ 4 \text{ і } 6\end{matrix}\right\}$ внутрішні односторонні

$\left.\begin{matrix}1 \text{ і } 7\\ 2 \text{ і } 8\end{matrix}\right\}$ околишні односторонні

Ці кути попарно становлять 180^0.

Доведіть це.

Отже, коли дві паралельні прості перетинаються третьою, то кути відповідні, середові та околишні різносторонні, попарно рівні один одному; кути односторонні середові та околишні попарно становлять 180^0

Коротко кажучи – всі гострі кути один одному рівні, всі тупі — також. Кожний гострий з тупим в сумі дають 180^0 або два прямих.

Вправа: Знаючи, що один кут, утворений перетинанням двох рівнобіжних третьою — дорівнює 20^0, знайти всі останні кути.

Примітка 1: Розглянувши кути 2 і 6 (рис. 40), що назвали ми їх відповідними, побачимо, що в них два боки рівнобіжні, а инші два лежать на одній простій. Але-ж можна збудувати й так кути, щоб у них обидві пари боків були рівнобіжними, їх називають кутами з рівнобіжними боками, й вони будуть один одному рівні у тому разі, коли обидва гострі або тупі, або ставитимуть 180^0, коли один з них гострий, а другий тупий.

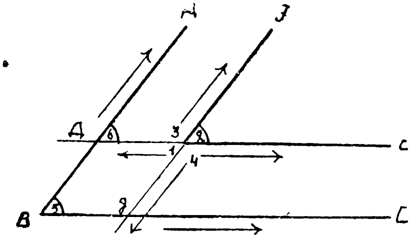


Рис. 40.

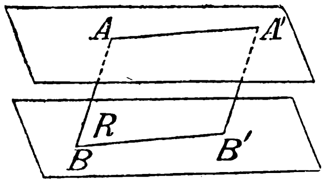


Рис. 41.

$6 = 2 = 5$ (Як кути відповідні):

$1 = 5$ (Чому?)

$4 + 5 = 180^0$ (Як зовнішні односторонні).

Примітка 2: Рівнобіжними можуть бути не тільки прості лінії, але й площі, напр. підлога й стеля, протилежні стіни кімнати будуть рівнобіжні (чи у всякій кімнаті?). Вкажіть рівнобіжні площі в куба та рівнобіжностінника.

Трикутники та їхні вигляди § 4. Фігура утворена трьома простими, що між собою перетинаються,— зветься трикутником.

Він має три вершки й три боки; означаються трикутники трьома літерами, що пишуть біля його вершків; замість слова «трикутник», вживають знак △; таким чином маємо: △ ABC або △ BAC або △ CAB (все рівно).

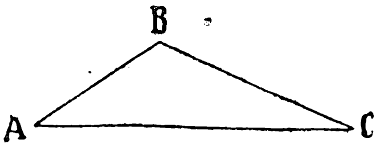


Рис. 42.

Де ви бачили трикутники? Які частини будівель мають форму трикутників? Виріжте трикутника з паперу, вкажіть його боки та вершки.

Трикутники мають різні вигляди.

Що до боків: I - рівнобічний—як всі боки рівні
II—різнобічний—коли боки різні
III—рівнораменний—коли два боки рівні (рис. 43.)

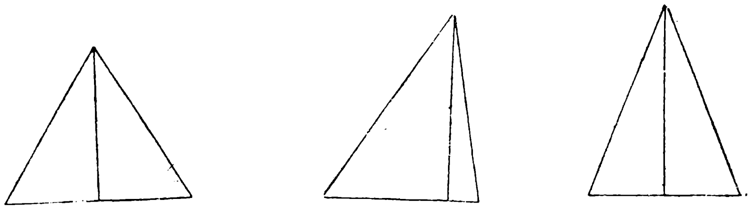


Рис. 43.

Вкажіть, де ви зустрічали рівнобічні, різнобічні та рівнораменні трикутники?

Що до кутів трикутники поділяються на:

I гострокутні—всі кути гострі
II тупокутні—один кут тупий
III прямокутні—один кут прямий (рис. 44)

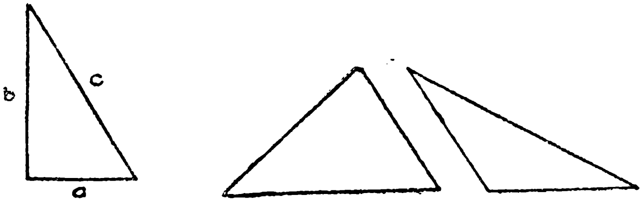


Рис. 44.

Боки прямокутного трикутника мають свої особливі назви: боки що утворюють прямий кут наз.: прямками (катетами), третій бік, що лежить проти прямого кута—зветься протипрямка (гіпотенуза) (рис. 45).

Нарисуйте трикутника, щоб він був одночасно і прямокутний і рівнораменний, або одночасно тупокутний і рівнораменний.

Властивість боків трикутника. Сума двох боків трикутника більша за третій бік: (рис. 46) $AB + BC > AC$; або $BC + AC > AB$.

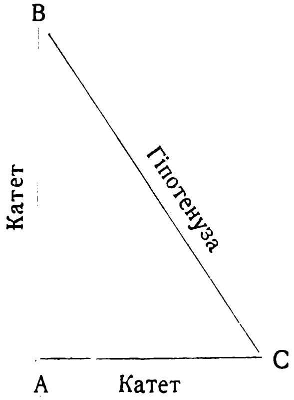


Рис. 45.

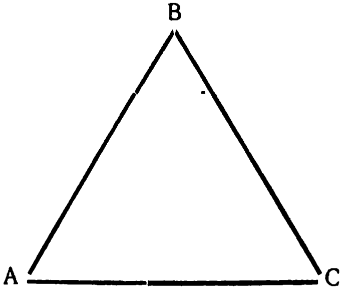


Рис. 46.

Знак > означає «більше» – він гостряком своїм обернутий до меншої величини.

Питання: Чи можна скласти трикутник з таких простих: 3 см. довжиною, 4 см. і 15 см.

Лінії в трикутникові.

Один з боків трикутника зветься основою (частіше нижній, у рівнораменному трик-ові нерівний бік). Вершок кута, що лежить проти основи зветься вершком трикутника. Перпендикуляр, спущений з вершка трикутника на основу або на продовження цієї основи, зветься висота трикутника (рис. 47).

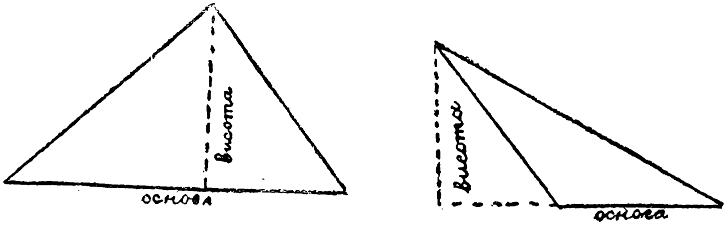


Рис. 47.

Проста, що поділяє кут трикутника пополам, а також перетинається з протилежним боком, зветься бісектриса; зрештою, медіяною зветься проста, що виходить з вершка трикутника й поділяє протилежний бік пополам.

Вправа —Нарисуйте різнобічний трикутник і поведіть в ньому бісектрису, медіяну та висоту.

Такий саме рисунок зробіть і для рівнораменного трикутника, а потім і для рівнобічного.

Отже кожний трикутник має три медіяни, три бісектриси й три висоти, коли ми послідовно братимемо за основу трикутника кожний його бік.

Вправа 1—Нарисуйте різнобічний трикутник й поведіть в ньому 3 висоти.

2—В прямокутному трикутникові поведіть три висоти.

3 —В якому завгодно трик-ові поведіть три медіяни.

4 —У трик-ові поведіть три бісектриси, вимірявши всі кути цього трикутника транспортиром.

Властивість рівнораменного трикутника.

§ 5. В рівнораменному трикутникові бісектриса кута при вершині є разом і медіяна і висота. Нехай в рівнораменному $\triangle$ ABC (рис. 48) з рівними боками AB і BC, BD є бісектрисою кута B, тоб-то поділяє його навпіл:

Перегнімо рисунок вздовж бісектриси і тоді побачимо, що кути, які містяться ліворуч та праворуч у трикутникові, припадуть один до одного всіма своїми частинами. Через те, що кут B поділиться навпіл, то $\angle 3 = \angle 4$; крім цього й BC = AB, значить точка A припадає до точки C. Точка D лишиться на своєму місці, значить, відтинок AD припаде до DC, тоб-то AD = DC, а значить, точка D є середина простої AC і BD — медіяна; крім цього, кути 1-й та другий зливаються один з одним — значить, вони рівні та до цього ще й сумежні; такі-ж кути обов'язково будуть прямі, бо в сумі дають 180°. Виходить BD — сторч до AC, а за означенням буде й висотою нашого трикутника. Таким чином, бісектриса є разом і медіяною і висотою. З того-ж перегинання виходить, що $\angle A = \angle C$, тоб-то: в рівнораменному трикутникові, кути, прилеглі до основи, рівні один одному.

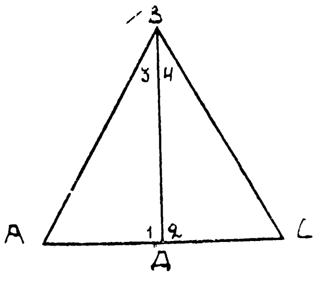


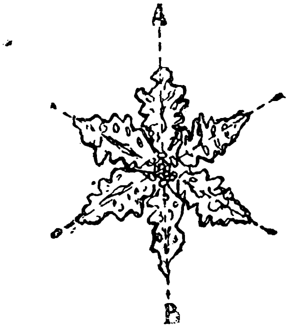
Рис. 48.

Доведіть, що в рівнобічному трикутникові всі лінії можна замінити лише трьома.

Доведіть, що в рівнобічному трикутникові всі кути рівні один одному.

Поняття про симетрію

§ 5а. Коли якийсь предмет можна поділити площею на дві половини так, що одна його частина буде цілком схожою з другою, то такий предмет звуть симетричним відносно площі, а саму площу називають площею симетрії. Яка-небудь фігура може бути симетрична відносно простої, що називається віссю симетрії. Вуха людини симетричні відносно площі, що проходить через ніс згори додолу; куб буде симетрич-



Мал. 49.

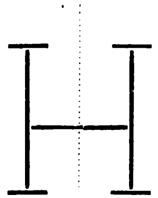


Рис. 50.

ним відносно перпендикулярної площі, яка поділяє його стіни пополам, сніжинка (рис. 49) буде симетрична відносно оси; літера Н

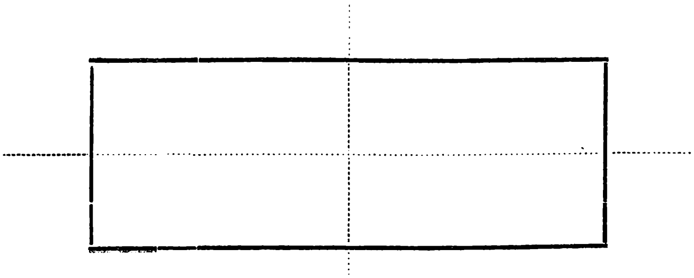
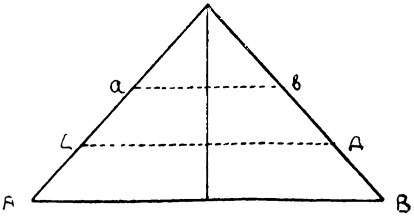


Рис. 51.

(рис. 50) буде симетрична відносно оси, що проходить через середину меншої простої і перпендикулярно до неї. Прямокутник так само має дві вісі симетрії (рис. 51).

§ 5 б. В рівнораменному трикутникові бісектриса кута при вершку є вісь симетрії, бо вона поділяє рівнораменний трикутник на два однакові трикутника (рис. 52).



Мал. 52.

Кожній точці, що лежить на похилому боці, буде симетрична точка на другому боці й ці дві точки лежать на простій перпендикулярній до оси на однаковій віддалі від неї.

Вправи —Які частини людського тіла будуть симетричні й відносно чого?

Найдіть площі симетрії в паралелопіпеді?

Які частини будівлі або сами будівлі будуть симетричні?

Найдіть осі симетрії в квадраті?

Найдіть осі симетрії в таких літерах A, B, D, E, K, M, N, O, S T, U, V, W, X, Z.

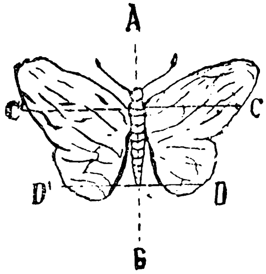
Чи можна образ в дзеркалі назвати симетричним відносно площі зеркала?

Що являється віссю симетрії в колі? Скільки буде осей симетрії у колі?

Будування та пристайність трикутників

§ 6. I. Будування трикутників з трьох даних боків.

Із даних боків 8 см. 5 см. та 7 см. збудувати трикутник. Проведімо спочатку просту, щоб вона дорівнювала 8 см. і з кінців цієї простої, як із центрів, опишемо дві невеличкі дуги радіусом 5 см. та 7 см., а точку, де дуги перетинаються, з'єднаємо з кінцями першої простої. Матимемо бажаний трик-к (рис. 54).



Мал. 53.

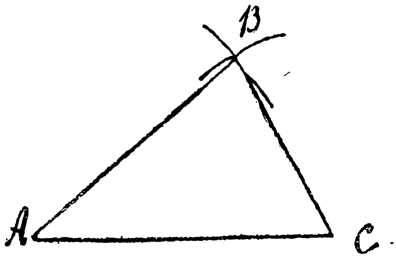


Рис. 54.

Досить мати три боки для визначення трикутника або, инакше кажучи, з трьох боків визначається трикутник і **трик-ки з трьома рівними боками будуть рівні один одному.**

Вправа 1—Збудувати трик-ки з боками 10, 12, 15 см.
2— » » » » 8, 9, 16 см.

II. Будування трикутника, знаючи його бік та два прилеглих до цього боку кути.

Збудуймо трикутник з боком рівним 10 см. та кутами, прилеглими до цього боку, що дорівнюють 60^0 та 40^0.

Рисуємо просту рівну 10 см. і за допомогою транспортира з обох кінців цієї простої будуємо кути в 60^0 та 40^0 і боки кутів продовжуємо, доки вони не перетинатимуться; матимемо бажаний трикутник.

Цих даних досить, щоб збудувати трикутник, бо вони його визначають цілком, а тому **всі трикутники, що мають по одному рівному бокові та двом прилеглим до цього боку кутам, будуть один одному рівні,** а значить і всі останні частини їхні будуть так само рівні.

Вправа — Збудуйте трикутника, що в нього один бік є 5 см., другий 7 см., а кут між ними 50^0. Скільки може бути таких трикутників?

Сума кутів трикутника

§ 7. **Властивість кутів трикутника**
Сума кутів трикутника дорівнює 180^0.

Маємо трик-к ABC (рис. 55). Треба знайти суму його кутів. Через точку B поведімо просту MN, рівнобіжну до боку AC.

Дві рівнобіжні прості AC і MN перетинаються простою AB, і ми маємо рівні середові різносторонні кути

$\angle 1 = \angle 2$, або $\angle A = \angle 2$

Ці самі рівнобіжні прості перетинаються з простою BC й також утворюють середові різносторонні кути $\angle 3 = \angle 4$ або $\angle C = \angle 4$. Ми, таким чином, зібрали всі кути трик-ка навколо точки B по один бік від неї, а сума таких кутів дорівнює 180^0.

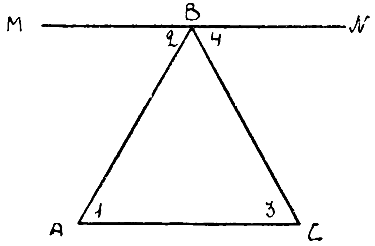


Рис. 55.

Вправа—Коли два кути трик-ка 30^0 та 50^0, то ми можемо знайти й третій кут: $30^0 + 50^0 = 80^0$; $180^0 - 80^0 = 100^0$. Це буде третій невідомий нам кут.

Вправи до розділу 10

1—Один із сумежних кутів має 60^0, 85^0, 90^0. Скільки має другий?

2—Вершковий кут дорівнює $22^1/_2{}^0$. Найти всі останні кути.

3—Коли спільний бік сумежних кутів буде обертатись, то що ставатиме з кутами?

4—Коли один із сумежних кутів почне зменшуватись, то що ставатиме з другим кутом?

5—Чи залежить величина одного сумежного кута від величини другого?

6—Чи можна один із сумежних кутів назвати функцією другого сумежного кута?

7—Один із сумежних кутів більший за другий в 3 рази. Чому рівні кути? Розвязати аритметичним способом і скласти рівнання.

8—Один з сумежних кутів у 9 раз більший за другий. Знайти кути.

9—Один з сумежних кутів на 20^0 більший за другий. Знайти кути (скласти рівнання).

10—Один із сумежних кутів на 36^0 менший за другий. Знайти ці кути.

11—Один із сумежних кутів на 50^0 більший за другий. Знайти кути.

12—Чому дорівнює сума всіх кутів, що мають спільний вершок та розложені по один бік від простої лінії (див. рис. 56).

13—Чому дорівнює сума всіх кутів, розміщених навколо одного вершка (рис. 57).

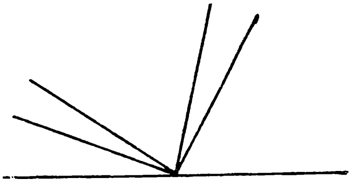


Рис. 56.

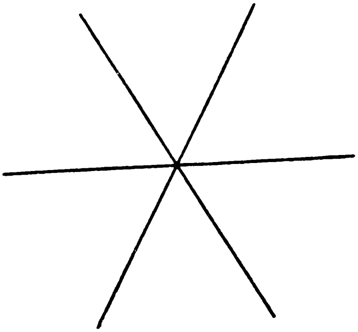


Рис. 57.

14—Навколо точки розложено 12 (або 6) рівних кутів. Яка величина кожного з цих кутів?

15—Чи можна збудувати трикутника з такими боками?

I—8, 9 та 6
II—8, 5 та 2
III—8, 5 та 3

16—Один з кутів, утворених перетинанням двох паралельних простих одною простою, на 15^0 більший за другий. Найти всі 8 кутів.

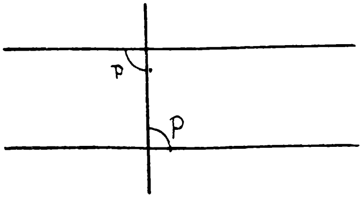


Рис. 58.

17—Один з кутів, утворених перетинанням двох паралельних простих, в 4 рази більший за другий. Найти всі 8 кутів.

18—Довести: Коли проста, що перетинає одну з паралельних, буде перпендикулярна до неї, то вона буде перпендикулярна й до другої. (Довести це на підставі рівности кутів).

19—Назовіть на рисунку 58 всі кути.

20—Найти, чому дорівнює кут у рівнобічному трикутникові.

21—Чому дорівнює сума гострих кутів прямокутного трикутника?

22—Чому дорівнює кожний з гострих кутів прямокутного та рівнораменного трикутника?

23—Кут біля вершка рівнораменного трик-ка—100^0. Чому дорівнюють инші кути?

24—Кут біля основи рівнораменного трик-ка дорівнює 34^0. Чому дорівнює кут біля вершини?

25—Виріжте з паперу трикутник, відрізавши з його кути, складіть їх вершками один до одного. Чому крайні боки кутів становлять просту лінію? (Рис. 59)

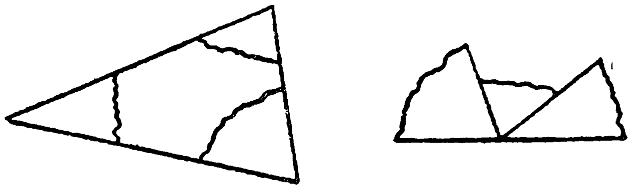


Рис.. 59.

26—Чи бувають трикутники з боками:

$1^1/_2$ см. $3^1/_2$ см. $^3/_4$ см.

27—Периметр трикутника 32 метр. Один бік коротший за другий на 4 метри й довший за третій на 2 м. Найти боки.

28—Дільниця землі має форму рівнораменного трик-ка. Один бік більший за другий на 50 м. Найти боки, знаючи, що довжина всієї межі навкруги ділянки 400 метр. (Завдання допускає дві відповіди).

29—У прямокутному трик-ві один з гострих кутів у 5 разів більший за другий. Найти кути.

30—Дах похилий до стелі під різними кутами, залежно від матеріялу, з якого він побудований. Обчислити, який кут утворюють між собою кроки, коли для залізного даху кут в 30^0, для солом'яного в 60^0.

РОЗДІЛ 11

Рівнобіжник. Рівнобіжностінник. Трапез. Многокутник

Рівнобіжник

§ 1. В попередньому розділі ми вивчали властивості трикутників. Трикутники є найпростіші фігури, з яких утворюються инші, складніші. Із цих складніших ми спершу познайомимося з тими, що мають чотири боки та звуться чотирикутниками. Чотирикутники ми означаємо чотирма літерами, що ставимо біля вершків його (рис. 60).

Прості AC й BD, що з'єднують два протилежні вершки чотирикутника, мають назву к о с и н або д і я г о н а л е й і кожна з них розбиває цей чотирикутник на два трикутники.

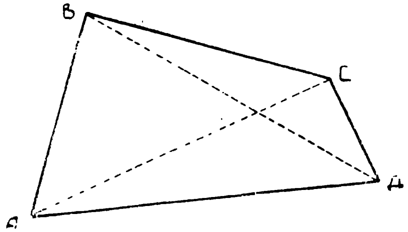


Рис. 60.

Залежно від взаємовідносин між боками чотирикутника, вони мають різні назви; якщо в них протилежні боки рівнобіжні, то вони називаються р і в н о б і ж н и к а м и або паралелограмами (рис. 61). Паралелограми з прямими кутами звуться п р я м о к у т н и к а м и (рис. 62); про них ми вже згадували. Рівнобіжники з прямими кутами та рівними боками мають назву к в а д р а т і в (рис. 63). Рівнобіжники, в яких всі боки рівні, а кути можуть бути й не прямі—звуться р о м б а м и (рис. 64).

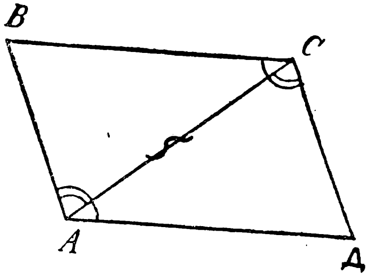


Рис. 61.

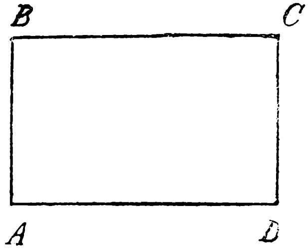


Рис. 62.

Кожний з боків рівнобіжника можна назвати основою його (частіше за основу беруть нижній бік), а перпендикуляр, спущений з вершка кута на основу зветься—в и с о т о ю.

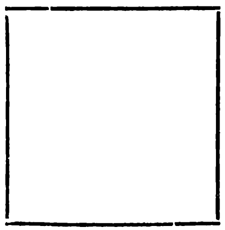


Рис. 63.

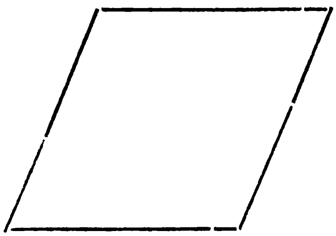


Рис. 64.

Питання 1—Вкажіть, де ви бачили рівнобіжника та ромба.

2—Скільки діягоналей буде в рівнобіжнику, квадратові та ромбові?

3 — Для чого на воротях роблять поперечину, що уявляє собою діягональ?

4 — На які частки поділяється рівнобіжник однією діягоналлю?

5 — Що треба додати до даного трикутника, щоб утворився рівнобіжник?

6 — Який міст буде триваліший? (рис. 65).

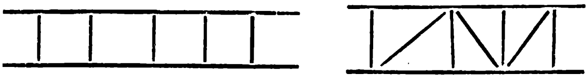


Рис. 65.

Властивість боків рівнобіжника

§ 2. У всякому рівнобіжникові протилежні боки дорівнюють один одному.

Примітка: Звичайно, всі математичні твердження розподіляються на дві такі групи: перша група — це положення остільки ясні, що вони не викликають ніякого сумніву та не потрібують жадного пояснення. Ці положення мають назву аксіоми.

Положення другої групи не такі ясні, як перші, иноді, навіть, можуть викликати вони спочатку заперечення або дивують нас. Після деяких міркувань-доводів, однак, ми упевнюємось в їхній справедливості. Ці положення мають назву теореми.

Доведімо теорему, що у всякому рівнобіжникові протилежні боки дорівнюють один одному.

Провівши діягональ BD (рис. 66), ми розбиваємо рівнобіжника на 2 трикутники, що будуть один одному рівні, бо в них рівно по

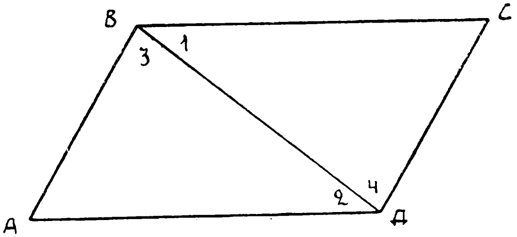


Рис. 66.

одному бокові BD (спільний для обох трикутників) та по два кути, прилеглі до цього боку:

$\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$ (як кути середові різносторонні).

Значить, ці трикутники є рівні, в такому раз всі їхні елементи тепер рівні й бік $AB = CD$, а бік $AD = BC$.

Із рівности трикутників виникає, що діягональ поділяє рівнобіжника на дві рівні частини (пор. зад. ч. 4. § 1).

Властивість кутів рівнобіжника

§ 3. В рівнобіжникові кути, прилеглі до одного боку є рівні 180^0, або двом прямим, а протилежні рівні один одному.

Відомо (рис. 67), що $A + B = 180^0$
$B + C = 180^0$,

як внутрішні односторонні кути при рівнобіжних лініях.

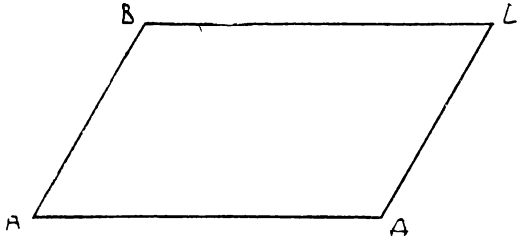


Рис. 67.

Із цих рівностей виходить, що $A = C$, бо вони обидва разом з кутом B становлять 180^0.

Властивість діягоналей рівнобіжника

§ 4. I. Діягоналі рівнобіжника поділяються пополам.

Упевнімося, що $BO = OD$ (рис. 68) та $AO = OC$. Для цього розгляньмо трик-ки BOC та AOD. Ці трик-ки будуть рівні, бо $BC = AD$ (на підставі § 2), $\angle A = \angle C$ та $\angle D = \angle B$ (як середові різносторонні). Маємо: бік та два прилеглих до нього кути одного дорівнюють бокові та двом прилеглим кутам другого три-ка. З рівности цих трикутників знаходимо, що $AO = OC$ та $BO = OD$. Таким чином теорему доведено.

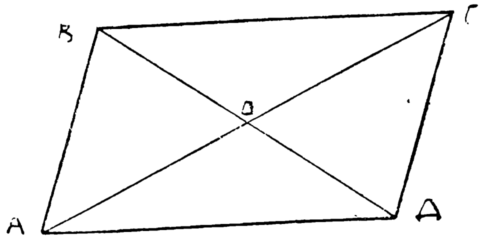


Рис. 68.

II. Діягоналі прямокутника є рівні.

Трик-к ABD рівний трикутникові ACD бо (рис. 69) $AB = CD$; AD належить до обох трикутників, $\angle A = \angle D$ (кути прямі). З рівностей трик-ків виникає, що $AC = BD$.

III. Діягоналі ромбу взаємно перпендикулярні та поділяють кути ромбу пополам.

З рівнораменного трикутника ABC (рис. 70), в якому BO є медіяна (див. п. 1) виходить, що BO є однаково і перпендикуляр і бісектриса.

Трапез § 5. Крім рівнобіжників розгляньмо ще лише один чотирикутник — трапез.

Трапезом називається такий чотирикутник, що в нього два боки рівнобіжні, а два инші нерівнобіжні (рис. 71).

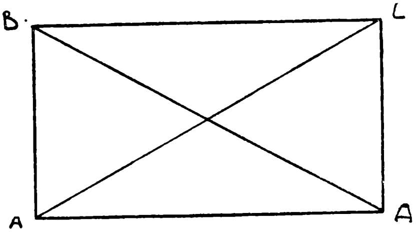


Рис. 69.

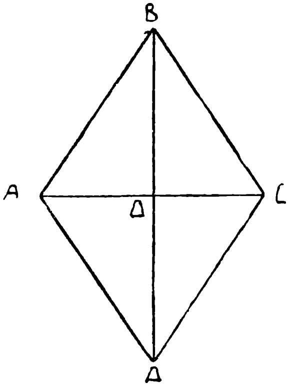
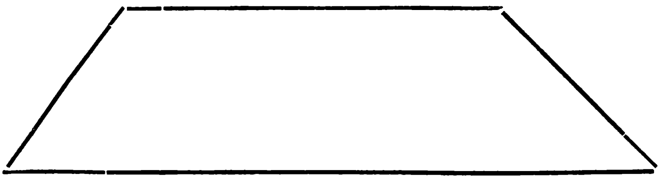
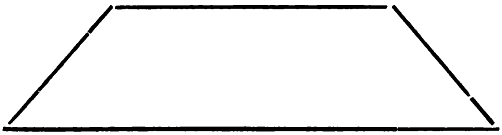


Рис. 70.

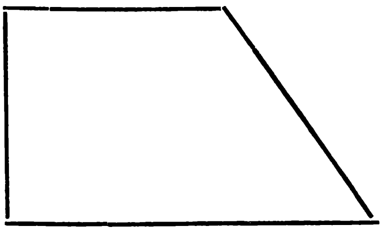
Рівнобіжні боки наз. о с н о в а м и — верхньою та нижньою, нерівнобіжні боки мають назву — боків трапезу. Перпендикуляр з якоїнебудь точки верхньої основи на нижню зветься в и с о т о ю трапезу.



Трапез.



Рівнораменний трапез.



Прямокутний трапез.

Рис. 71.

Питання 1 — Де ви здибували трапез?

2 — У рівнораменного трапеза кути при основі один одному рівні. Чому?

3 — Сума кутів прилеглих до одного якого-небудь боку трапезу рівна 180^0. Чому?

Середня лінія трапезу

§ 6. Проста лінія, що з'єднує середини боків трапезу, зветься середньою лінією цього трапезу.

Середня лінія трапезу ABCD (рис. 72) є MN

Середня лінія трапезу дорівнює півсумі основ. Це видно з того, що середня лінія дорівнює бокам допомічного рівнобіжника FECD (тоб-то $MN = EC = FD$), що утворюється з проведення простої EF через точку M рівнобіжно CD.

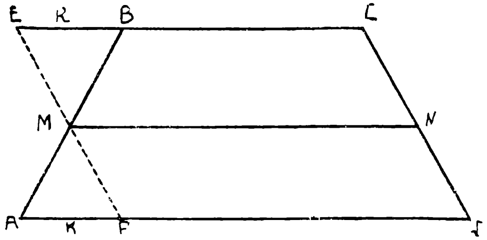


Рис. 72.

Справді, середня лінія з одного боку на відтинок K більша за меншу сторону та на відтинок K менша за більшу сторону нашого трапезу (відтинки K дорівнюють один одному з рівности трикутників AMF та EBM. А чому?).

Можна записати, означивши нижню основу через a, верхню через b
$$MN = b + k$$
$$MN = a - k$$
додавши, дістаємо $2\ MN = b + k + a - k$ (бо k додаємо й віднімаємо)
$$2\ MN = a + b$$
$$MN = \frac{a+b}{2}.$$

Тоб-то, середня лінія рівна півсумі обох основ.

Вправа—Знайдіть середню лінію трапеза, що в нього основи будуть 22,5 та 10,3?

Поверхня рівнобіжника, трикутника та трапеза

§ 7. I. Поверхня рівнобіжника дорівнює добуткові основи та висоти.

Находження поверхні рівнобіжника можна замінити находженням поверхні прямокутника, бо ці поверхні є рівні. (Фігури з рівними поверхнями називаються фігурами рівновеликими).

Спустивши із точки B (рис. 73) в рівнобіжникові ABCD сторча BK, ми розіб'ємо рівнобіжник на трикутник ABK та чотирикутник KBCD. Приложимо тепер трикутник ABK до другого боку чотирикутника KBCD так, щоб лінії AB та CD припали; тоді ми матимемо прямокутник $KBCK_1$; поверхня його дорівнює поверхні рівнобіжника, бо вони утворюються з тих самих частин, лише инакше упорядкованих. Основи прямокутника та рівнобіжника є рівні одна одній. Висоти також. Ми вже знаємо, що поверхня прямокутника дорівнює добуткові основи його та висоти, а тому й поверхня рівнобіжника так само дорівнює цьому добуткові. Означивши основу літерою а та висоту літ. h, а поверхню літ. S можемо записати це в загальному вигляді так $S = a \cdot h$.

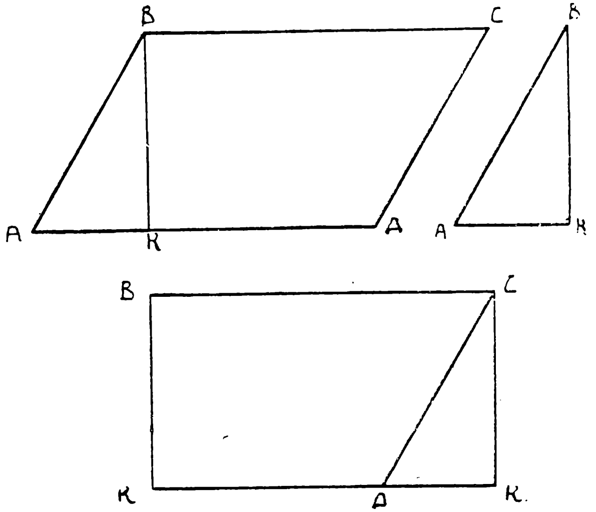


Рис. 73.

Вправа 1 — Знайдіть поверхню дільниці землі в формі рівнобіжника, якщо його основа 32,5 м., а висота 24,3 м.?

2 — Знайдіть поверхню рівнобіжника, де $a = 3^1/_2$ см, ; $h = 2^1/_4$ см.?

II. Поверхня трикутника дорівнює половині добутка основи та висоти.

Доповнімо трикутник ABC (рис. 74) до рівнобіжника, проведенням простих BA′, та CA′, рівнобіжно до AB та AC; відомо вже, що рівнобіжник поділяється на два рівних трикутники; значить, даний трикутник ABC дорівнює половині рівнобіжника ABA′C; тому, що поверхня рівнобіжника дорівнює добуткові основи та висоти, поверхня трикутника дорівнює половині цього добутка.

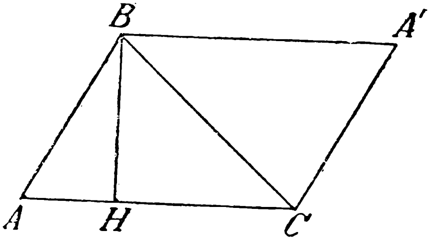


Рис. 74.

При цьому розуміємо, що основа та висота рівнобіжника й трикутника одна одній рівні. Отже поверхня трикутника дорівнює половині добутка основи та висоти. Формула: $S = \frac{a \cdot h}{2}$

Вправа 1 — Знайдіть поверхню трикутника з основою 20 см. та висотою 10 см.

$$S = \frac{20.10}{2} = 100 \text{ кв. см.}$$

2 — Знайдіть поверхню трик-ка, де $a = 2,5$; $h = 1,4$; | $a = 2^1/_2$; $h = 1^3/_5$.

3 — Знайдіть поверхню трикутника з основою 12,5 та висотою 3,4?

4 — Знайдіть поверхню прямокутного трик-ка з катетами 10 та 15.

5 — Як инакше можна сказати: чому дорівнює поверхня прямокутного трикутника?

III. Поверхня трапезу.

До даного трапезу додамо ще один, (рис. 75) такий саме так, щоб верхня основа B_1C_1 стала продовженням AD (нижньої), а нижня AD — продовженням верхньої BC; бік CD зіллється з боком C_1D_1.

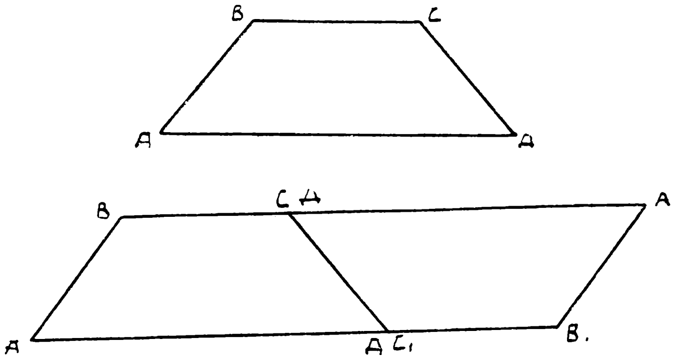


Рис. 75.

Утвориться, таким чином, рівнобіжник, бо в нашому чотирикутникові протилежні боки рівні й рівнобіжні, а кути протилежні так само рівні. Поверхня такого рівнобіжника вдвічі більша за поверхню трапезу. Означивши нижню та верхню основу нашого трапезу через a та b, висоту через h, можемо написати, що поверхня рівнобіжника дорівнює $(a + b) \cdot h$.

А тому, що поверхня трапезу дорівнює половині поверхні рівнобіжника, можемо написати $S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$ тоб-то, поверхня трапезу дорівнює добуткові півсуми її основ та висоти.

Питання:

1. — Які величини треба знати, щоб можна було знайти поверхню трапезу?

2 — Від чого залежить величина поверхні трапезу?

3 — Функцією скількох та яких величин є поверхня трапезу?

4 — Найдіть поверхню трапезу, в якого $a = 12$ см.; $b = 10$ см. $h = 5$ см.

Об'єм прямого рівнобіжностінника

§ 8. Способом, що ми вживали, щоби рівнобіжника перетворити в рівний йому прямокутник і знайти потім поверхню, ми скористуємось для находження об'єму рівнобіжностінника, що в нього основою буде рівнобіжник, а бічними стінами п р я м о к у т н и к и. До цього часу ми знайомилися з рівнобіжностінниками, що у них основи та бічні стіни всі були прямокутники, такий рівнобіжностінник наз. п р я м о к у т н и м. Той рівнобіжностінник, що про нього зараз говоритимемо, в основі має рівнобіжник, а бічними стінами прямокутники, і зветься — п р я м и м: (на рисункові вони майже не відрізняються). Коса коробка з сірників, коли вона поставлена так, що основами будуть рівнобіжники, а бічними стінами — прямокутники, дає зразок прямого рівнобіжностінника.

Знайти об'єм такого рівнобіжностінника — наша задача.

Відрізаємо від даного прямого рівнобіжностінника (рис. 76) частку ABKHEL, так, щоб в основі утворився прямокутний трикутник; ми цю частку перенесемо й додамо до правого боку рівнобіжностінника; у нас, таким чином, утворився прямокутний рівнобіжностінник; об'єм його буде дорівнювати об'єму даного; об'єм-же прямокутного рівнобіжностінника ми вже знаємо, як знайти: для цього треба поверхню основи помножити рубом (висотою). Якщо означимо поверхню рівнобіжника (цеб-то поверхню основи) B та висоту (руб) через H та об'єм—V прямого рівнобіжностінника можна записати так: $V = B . H.$

Вправа — Найдіть об'єм прямого рівнобіжностінника, коли $B = 20{,}4$; $H = 5$ см.

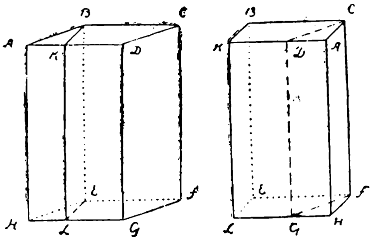


Рис. 76.

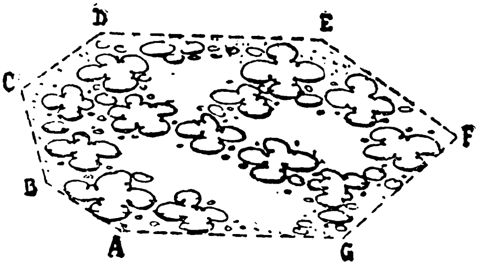


Рис. 77.

Правильний многокутник та його поверхня

§ 9. На рисункові 77 нарисовано план дільниці землі; він становить собою фігуру обмежену простими, які перетинаються між собою; така фігура зветься многокутником.

Дільниця землі може становити многокутник з 5, 6, 7 й т. инш. боками й називатиметься п'я т и к у т н и к о м, ш о с т и к у т н и к о м, с е м и к у т н и к о м і т. д.

Вправи 1—Нарисуйте 8-микутник
2— » 5-тикутник
3— » 6-тикутник

Многокутники мають боки, кути та косини або діягоналі; діягоналі — це такі прості, що з'єднують два несусідні вершки.

Нарисуйте довільну дільницю землі. Спробуйте розбити її на частки, щоб найлегше виміряти їхню поверхню й, таким способом, взнати поверхню всієї дільниці.

Правильні многокутники. Якщо в прямокутникові всі боки один одному рівні й кути так само є рівні, то такий многокутник зветься — правильний. Правильний многокутник ми бачимо, приміром, у мутрі (гайці)—шостикутник, иноді в оливця то-що.

Питання—Пригадайте, де ви бачили правильний 5-тикутник, 8-кутник.

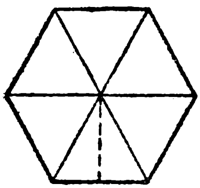


Рис. 78.

Для зручнішого рисування правильних многокутників користуються з кола; розбивають його на рівні частки точками, а точки потім з'єднують хордами послідовно.

Приміром, щоби рисувати шостикутник, беремо коло й розбиваємо його на шість рівних часток, відклавши для цього в центрі кола кути по 60^0 (чому?), і точки, де перетинаються боки кутів з обводом нашого кола, послідовно з'єднуєм; тоді й матимемо шостикутника (всі трикутники будуть рівні один одному, а чому?)

Вправа — Нарисуйте таким способом 5-тикутник.

Поверхня правильного многокутника.

Щоб знайти поверхню правильного многокутника, досить знайти поверхню одного з трикутників, на які розбивається многокутник (бо всі ці трикутники будуть рівні один одному) та помножити її числом боків многокутника. Висоти цих трикутників або перпендикуляри, спущені з центра на боки, називаються апотемами многокутника. (Апотема поділяє бік многокутника пополам — чому?).

Позначивши бік многокутника через a, а апотему через l, матимемо поверхню трикутника $\frac{a\,l}{2}$; поверхня многокутника $\frac{a\,l}{2}\,5$ або $\frac{a\,l}{2}.6$ і т. инш. залежно від числа боків.

Примітка: Якщо переставимо чинники, то можна написати останню формулу так $6\frac{a\,l}{2}$, але 6a чи 5a це є периметр многокутника. Позначивши його літерою, маємо $S = \frac{P\,l}{2}$

Як можна висловити словами цю формулу?

Поверхня многокутника довільної форми

§ 10. Щоб знайти поверхню многокутника якої завгодно форми, розбивають його простими лініями на відомі нам фігури: трапези, рівнобіжники, трикутники й обчисляють поверхні кожної фігури зокрема, вимірявши для цього необхідні лінії, а потім всі поверхні додають одну до одної.

Наприклад, щоб знайти поверхню многокутника ABCDE (рис. 79), ми проводимо просту AC й розбиваємо многокутник на $\triangle$ ABC та трапез ACDE. Обчислюємо поверхню кожної фігури окремо й результати додаємо один до одного. Скажіть, а які лінії треба виміряти, щоб обчислити ці поверхні?

Взагалі, який-би не був многокутник, його завжди можна розбити на трикутники.

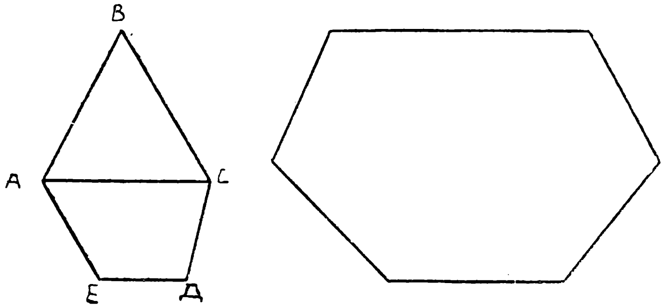


Рис. 79.

Вправа — Розбийте дільницю землі на відомі фігури та скажіть, як знайти її поверхню (рис. 79, другий).

Вправи до розділу 11

1 — Знайдіть поверхню прямокутного трикутника з катетами 20 та 30 см.?

2 — Знайдіть поверхню ромбу з діягоналями 20 та 10 см. (користуючись з того, що дві діягоналі розбивають ромб на чотири трик-ки); з діягоналями 50 та 60 см.? З діягоналями B та b?

3 — Поверхня трикутної дільниці землі 300 кв. м. Основа рівна 30 м. Найти висоту.

З формули для находження поверхні трикутника $\left(S = \frac{ah}{2}\right)$ визначити його основу *a* через S та h.

4 — Поверхня трапезу дорівнює середній лінії, помноженій висотою. Чому можна в такий спосіб висловлювати формулу поверхні трапезу?

Якщо середню лінію трапезу означимо m, то як слід писати формулу поверхні трапезу?

5 — Найти об'єм прямого рівнобіжностінника, що в нього в основі лежить рівнобіжник, що має бік 12 см. та висоту 5 см.; бічний руб рівнобіжностінника дорівнює 2,5 см:

6 — Дільниця землі має форму рівнобіжника з основою 50 см. та висотою 40 см.; її необхідно замінити прямокутною з такою-ж поверхнею. Якої довжини повинні бути боки прямокутника?

7 — Дві дільниці землі мають форму квадрату та прямокутника, обгорожені, однакової довжини, огорожею. Чи будуть поверхні цих дільниць рівні чи ні?

8 — Нарисуйте план чотирикутньої дільниці землі, в якому один бік 5,5 см., а кути, що прилягають до цього боку мають 110^0 та 100^0; другий бік кута 100^0 дорівнює 10,5 см. та утворює із третім боком прямий кут.

9 — Скільки всіх косин у 6-кутникові?

10 — Обчисліть суму кутів у 5-кутникові, розбивши його на трикутники.

11 — Нарисуйте правильний 10-кутник.

12 — Доведіть, що бік шостикутника дорівнює радіусу кола, в якому цей шостикутник збудовано.

13 — Найдіть поверхню 7-кутника, в якого бік дорівнює 2,5 см., а апотема 3,4 см. (відп. — 29,75)

14 — Знайти поверхню 8-кутника, знаючи, що бік його дорівнює 4,5 см. та апотема — 8,2 см.

15 — Бак в прямокутньому перерізі 2,8 . 1,6 м. вміщає 60 гектолітрів води. Яка його глибина?

16 — Копають канал 1,2 км. завдовжки, 33 м. завширшки та 5,4 м. завглибшки. Скільки землі мусять вийняти?

17 — Поверхня трапезу 100 кв. дециметрів, висота = 25 децим., а одна з основ = 3 дец. Вичисліть другу основу. (Відп. — 5).

18 — Обчисліть поверхню прямокутника, якого периметр дорівнює 69,98 метра, а різниця боків дорівнює 8,51 м.

РОЗДІЛ 12

Відношення. Емпіричні графики

Поняття про відношення

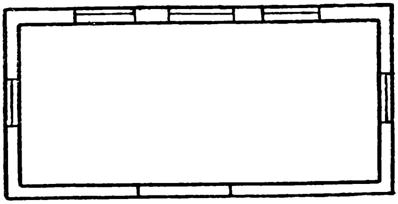
§ 1. Щоб скласти план дільниці землі, кімнати, будівлі, нам треба взяти відповідний маштаб. Приміром, взявши 1 см. за 1 метр, ми зменшуємо всі дійсні розміри в 100 разів; а якби за 1 метр ми взяли 1 мм., ми зменшили-б всі дійсні розміри в 1000 разів. Для означення того, що наші розміри зменшено в 100 або 1000 разів, пишуть так 1 : 100 або 1 : 1000.

Вправа 1 — Нарисуйте план кімнати, в якій довжина 6 **м., ширина** 3 м., маштаб 1 м. = 1 см. або 1 : 100.

2 — Нарисуйте план математичного кабінету з маштабом 1 : 1000.

3 — Знайдіть на географічній мапі за допомогою даного до неї маштабу, дійсну віддаль між декількома містами.

4 — Нарисуйте план двору, садка та невеличкої дільниці землі, підібравши належний маштаб.



План кімнати
Рис. 80.

Вибираючи маштаб, ми записуємо, у скільки разів зменшуємо дійсні розміри й записуємо діленням, яке показує, у скільки разів 1 см. менший за 1 метр. 1 : 100

Число, яке показує, у скільки разів одна величина більша або менша за другу, називається відношенням цих величин одної до одної.

Напр., відношення метра до сантиметра $100 : 1 = 100$

» сантиметра до метра $1 : 100 = \frac{1}{100} = 0{,}01$

» пуда до фунта $40 : 1 = 40$

Можна знаходити відношення між двома простими, двома кутами, двома об'ємами та взагалі поміж двома однорідними величинами.

Вправа 1 — Знайти відношення кілограма до грама. Грама до кілограма. Кілограма до фунта, фунта до грама. Найдіть відношення двох чисел 12 та 20 ; 20 та 30. Яке буде відношення довжини обвода кола до його діяметру? Запишіть відношення а до b?

Всякий дріб можна розглядати, як відношення. Приміром, $^3/_4$ це є відношення, припустимо, двох відтинків, 3-х см. та 4 х см. і т. инш.

Так само всяке відношення можна визначити десятковим дробом: $^3/_4 = 0{,}75$, а це всеодно, що 75%. Ми вже знаходили відсоткове відношення між двома числами. От, скажімо, на заводі робітників 300, серед них 120 жінок; відношення числа жінок до всієї кількости буде $120 : 300$ або $120/300 = {^2/_5}$; обернувши це на соті частки, матимемо: 0,40 або 40%.

Знайти відсоткове відношення числа чоловіків, жінок та дітей до загальної кількости робітників.

Чолов.	Жінок	Дітей
345	125	25
134	75	10
29	35	15

Коли ми взнаємо, у скільки разів одна величина більша або менша за другу, ми, власне кажучи, робимо дію ділення; діленик у відношенні зветься попереднім членом; дільник — наступним, а те число, що виникає наслідком ділення, зветься знаменником відношення.

$$a : b = q \text{ або } \frac{a}{b} = q$$

a — попередній член
b — наступний »
q — знаменик відношення.

Користуючись з відомих залежностей між діленником, дільником та часткою, ми ці саме залежності можемо висловити инакше:

I — Попередній член відношення дорівнює наступному, помноженому знамеником відношення.

Наприклад 1) $x : 5 = 4$; $x = 5.4 = 20$.

2) $\frac{x}{7} = 5$; $x = 35$.

II — Наступний член відношення дорівнює попередньому, поділеному на знаменика відношення.

Приміром, 1) $20 : x = 5$; $x = 20 : 5 = 4$.

2) $\frac{30}{x} = 6$; $x = \frac{30}{6} = 5$.

3) $\frac{24}{x} = 8$; $x = \frac{24}{8} = 3$.

Задача 1 — Відношення між ставками двох робітників 2,5; більша ставка дорівнює 200 крб. Знайти меншу ставку.

Позначивши меншу ставку x-ом, ми пишемо відношення

$\frac{20}{x} = 2{,}5$ звідки $x = 20 : 2{,}5 = 8$ карб.

2 — Відношення між ставками двох робітників 1,5; менша ставка дорівнює 30 крб. Знайти більшу ставку. Маємо

$$\frac{x}{30} = 1{,}5;\ x = 30.\ 1{,}5 = 45 \text{ карб.}$$

Емпіричний графік. Поняття про координати

§ 2. Ми вже познайомились з наочним означенням величини на прикладі: лінійних, прямокутних та колових діяграм. Часто цікавляться не лише порівнанням даної величини з другою, але й тим, як вона міняється з часом, тоб-то цікавляться ходом зміни цієї величини. Такий хід зміни величини відображають графиком. Для будови графику користуються з клітчатого або міліметрового паперу.

Маємо таблицю зміни температури протягом 8 год.

Години	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Температура	$8{,}4^0$	8^0	$7{,}3^0$	$4{,}5^0$	2^0	3^0	$2{,}5^0$	$1{,}5^0$	5^0

Щоб збудувати график, проводимо дві взаємно-перпендикулярні прості, що звуться **в і с я м и**; на поземній вісі за довільним маштабом відкладаємо години, на прямовисній — градуси - ступені (рис. 81). Над цифрою 8 на поземній вісі, праворуч, проти $8,4^0$ ставимо точку; другу точку ставимо проти 9-ї години та проти 8^0 і т. инш. Всі поставлені точки сполучаємо простими. Утворена таким чином ламана й зветься графиком температури.

Складіть график температури за даними таблиці:

Числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Темпера-тура	2^0	$2,5^0$	$3,5^0$	$3,5^0$	6^0	3^0	2^0	2^0	$4,5^0$	7^0

П р и м і т к а: На одному рисункові можуть вміщатись два, три, чотири й більш однорідних графиків.

Взаємноперпендикулярні вісі, якими ми оце користувалися, звуться **к о о р д и н а т н и м и** вісями; поземна вісь зветься **в і с с ю** x-ів (або **а б с ц и с**), прямовисна — віссю y-ів (або віссю **о р д и н а т**) Точка їх перетинання зветься **п о ч а т к о м** координат.

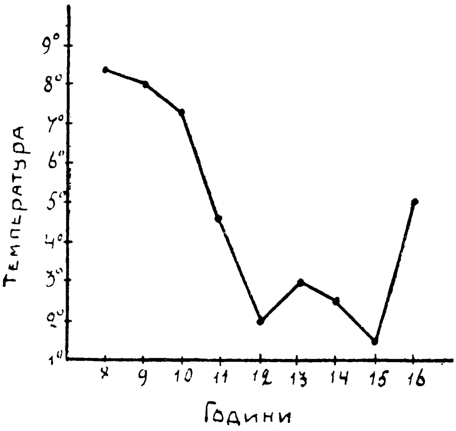


Рис. 81.

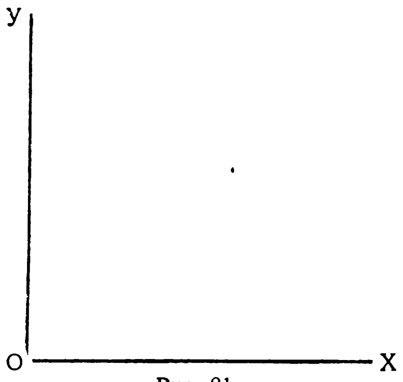


Рис. 81а.

Коли є можливість зазначити на рисункові велику кількість точок та коли відомо, що хід зміни величини був поступовий, **н е с т р и б к а м и**, то точки сполучають не ламаною лінією, а кривою, напр.,

Навантаженість електричної станції:

Години	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кіловати	20	29	50	55	56	57	47	28	21

Такий график дає змогу визначити навантаженість у проміжках між даними числами, напр., о 4½ год., о 5 год.

Можна, за допомогою віддалень, що відкладаємо на вісях x-ів та x-ів, знайти або позначити точку на площі. Напр., якщо на вісі y-ів відкласти 3 одиниці довжини, а на вісі y-ів — 4 одиниці довжини, то точку ми знайдемо на перетинанні перпендикулярів, поставлених в цих точках до вісей. Ці два числа 3 та 4, що визначають певну точку, звуться **координатами** цієї точки та позначаються — (3,4).

Таким чином, для означення точки, нам потрібні два числа: перше вказує на віддаль від точки перетинання на вісей x, друге — на вісі y. Координати початку (точки перетинання вісей) будуть — (0,0), тоб то, нема віддалі ні на вісі x, ні на вісі y.

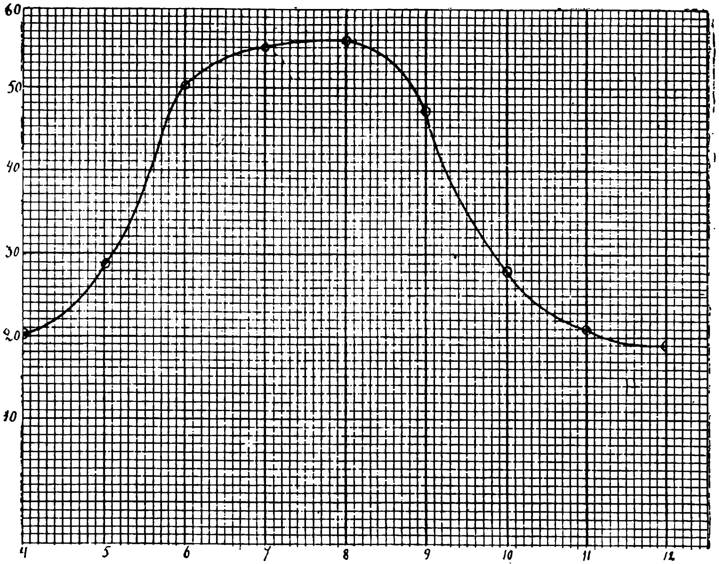


Рис. 82.

Вправи — На клітчатому папері нарисуйте віси координат та розвяжіть задачі.

1 — Знайти точку А з координатами (3,4), (2,5) (за одиницю візьміть довільне число).

2 — Знайти точки за даними координатами: (4,5); (8,10); (2,5); (3,5); (0,2); (0,3); (2,0); (3,0); (0,0).

Вправи до розділу 12

Розвязати рівнання (вважаючи їх за відношення)

1 — a) $\frac{20}{x} = 4$; b) $\frac{3,5}{x} = 7$; c) $2,4 : x = 0,6$; d) $3\frac{1}{2} : x = 1\frac{1}{2}$; e) $\frac{1,2}{x} = 0,12$; f) $x : 3 = 5$; g) $\frac{x}{4} = 8$; h) $30 : x = 5$.

2 — Чому дорівнює відношення кв. метра до кв. дециметра, куб. метра до куб. сантим. ?

3 — Відношення довжини кімнати до ширини рівне 3 : 2. Знайти поверхню підлоги цієї кімнати, коли довжина дорівнює 15 м.

Розвязування: На довжину кімнати доводиться 3 таких частки, яких на ширину доводиться 2; але на довжину доводиться 15 м., значить на одну частку дістанеться 15 : 3 = 5 метрів, а на дві — 10 м.; ширина виходить рівна 10 метр., а поверхня дорівнює 15 . 10 = 150 кв. метр.

4 — Відношення довжини до ширини 4 : 3. Довжина на $1^1/_2$ м. більша за ширину. Знайти поверхню кімнати.

5 — Довжина куска заліза відноситься до своєї ширини та грубини, як 250 : 80 : 3, (слід розуміти, що в довжині — 250 часток, у ширині — 80 част. та в грубині — 3 частки). Знайти вагу цього куска заліза, якщо грубина його дорівнює 15 см.

6 — Стоп важить 170 кг. і складається з олива, міди та сурми у відношенні 12 : 4 : 1. Знайти вагу кожної складової частки?

7 — Нарисуйте графики різних цін на хліб у двох районах на одному рисункові.

М-ці	1 жовтня	1 листоп.	1 грудня	1 січня	1 лютого
Харків	5,7	5,3	5,3	5,1	4,3
Москва	7,3	7	7,1	6,6	7

8 — Нарисуйте графік руху кількости робітників на фабриці

Роки	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Кількість	330	360	520	620	240	130	10	90	120	250	500

9 — Нарисуйте график світового здобичу бавовни в мільйон. кіп.

Роки	15	16	17	18	19	20	21
Мильйонів кіп	26,8	24.2	22,2	20,8	23	21,8	16,1

10 — Нарисуйте трикутник за координатами трьох його вершків (7,2); (11,2); (9,5);

11 — Збудуйте чотирикутники за координатами його вершків:

1) (2,2); (5,2); (2,7); (5,7)

2) (2,2); (7,2); (3,5; (5,5)

Які це будуть чотирикутники?

РОЗДІЛ 13

Пропорціональні величини—пропорції

Прямо й обернено пропорціональні величини

§ 1. Ми вже знаємо, як знайти обвід якогонебудь колеса, якщо відомий його діяметр. Тоді користуємося з формули $C = \pi D$, коли C — визначає довжину обвода, $\pi = 3{,}14$ та D — діяметр колеса.

Зрозуміло, що коли змінюватиметься діяметр, то мінятиметься й обвід колеса. Щоб узнати, як саме мінятиметься обвід зі зміною діяметру, розглянемо табличку, де вже обчислено обвід залежно від різних діяметрів

Діяметр в сантиметрах	1	2	3	4	5	6	7	9	12
Обвід колеса в сантим.	3,14	6,28	9,42	12,56	15,7	18,84	21,98	28,26	37,68

Якщо діяметр буде 2 см., то обвід буде дорівнювати 6,28 см.
» » » 4 » » » » » 12,56 »

У скільки разів збільшився діяметр? У скільки разів збільшився обвід? Обчисліть. Побачите, що й діяметр і обвід колеса збільшились в однакове число разів.

Скажіть, що за відношення між діяметрами? Між обводами? Як бачите, відношення ці рівні. Проробіть цю-ж саму вправу зі стовпцем 3-м та останнім. Із цих прикладів бачимо, що коли діяметр збільшується вдвічі, втричі й т. д., то й обвід через це збільшується вдвічі, втричі й т. д. Така залежність між двома величинами, що при ній зі збільшенням числового значіння одної з них у стільки-ж разів збільшується й друга, або навпаки—зі зменшенням одної—зменшується й друга в стільки-ж разів—зветься прямою пропорціональністю, а самі величини мають назву прямо-пропорціональні.

Ще приклади: 1—Об'єм кімнати та висота з однаковою поверхнею підлоги—прямо-пропорціональні: якби висоту збільшити вдвічі, то й об'єм кімнати збільшився-б удвічі.

2—Цінність краму та кількість купленого цього краму.

За кількість краму вдвічі більшу—грошей так само треба витратити більше вдвічі й т. д.

Пряма пропорціональність є зразок функціональної залежности. Але-ж існує між величинами инша залежність, протилежна до розглянутої.

Напр.—Якщо 10 робітників закінчили роботу в 20 день, то 5 робітників (удвічі менше) скінчать її за 40 день (удвічі більше), цеб-то, коли число робітників зменшилось удвічі, число потрібних для закінчення роботи днів збільшилось у стільки-ж разів. Залежність між величинами, при якій зі збільшенням одної з них у певне число разів друга зменшується в таке саме число разів, або зі зменшенням одної—друга збільшується в стільки саме разів, зветься оберненою пропорціональністю.

Наприклад—Число обертань колеса та його діяметр. Чим більшим буде діяметр, тим менше буде число обертань колеса на даній дорозі.

Знайдіть межи поданими величинами прямо та обернено пропорціональні та поясніть, чому саме ви їх вважаєте такими

1-ша величина	2-а величина
Тиснення на толок	Поверхня толока
Кількість робітників	Виконана робота
Час	Пройдена дорога
Сили, що діють на підойму	Рамено підойми
Число обертань колеса	Число зубців

1-ша величина	2-а величина
Тиснення газу	Об'єм газу
Вага тіла	Об'єм тіла
Число печей	Кількість дров
Довжина матерії	Ширина матерії (на те-ж саме убрання)
Ширина шпалерів	Число кусків
Довжина прямокутного тіла	Ширина його за тої самої поверхні
Поверхня кімнати	Платня за неї
Місячний запас сіна	Число коней

График прямої та оберненої пропорціональности

§ 2. Ми вже рисували график температури, график зміни цін і т. инш. Тепер нарисуємо график зміни прямо-пропорціональних величин взагалі.

Напр., якщо один дюйм рівний 2,5 см., то ясно, що зі збільшенням числа дюймів буде збільшуватись і число сантиметрів, значить кількість дюймів та сантиметрів є величини прямо-пропорціональні; для будування графика складемо табличку

0	дюймів	— 0	сантиметрів	(бо коли немає ніякої частки дюйма, то не буде й сантиметра)
1	»	— 2,5	»	
2	»	— 5	»	
3	»	— 7,5	»	
4	»	— 10	»	

Взявши вісі координат, відкладаємо на вісі x-ів дюйми з довільним маштабом, а на вісі y-ів — сантиметри в тому-ж або иншому маштабі. Знаходимо точки, що відповідають 1 д. та 2,5 см.; 2 д. та 5 см. і т. д. [инакше точки (1; 2,5); (2; 5) і т. д] і з'єднуємо їх простими, взявши на увагу, що нулеві дюймів відповідає 0 см.; таким чином ми знайдемо, що наш график ставитиме просту лінію, яка проходить через початок координат.

Вправа 1—Збудуйте графики прямо-пропорціональних величин:

Тіло рухається зі швидкістю 2 метри за сек.

за 1-у	сек.	пройде	2	м.	
» 2	»	»	4	»	
» 3	»	»	6	»	і т. д.

Перевірте, що цей график буде проста лінія.

2—Нарисуйте график перетворювання фунтів на кілограми, користуючись тим, що

1	кілограм	= 2,5	фун.	
2	»	= 5	»	і т. д.

3—Знайдіть за допомогою збудованого графика проміжні значіння, яких не було в таблиці, напр., скільки фунтів становлять $2\frac{1}{2}$ кг.

(Таке находження проміжних значінь наз. інтерполюванням. Можна, продовжуючи наш график, обертати фунти на кілограми та навпаки, для значінь поза нашою таблицею. Таке находження наз. екстраполюванням).

Вивчаючи графики прямопропорціональних величин, бачимо, що вони становлять п р о с т і л і н і ї, які проходять через початок координат. Навпаки, якщо, спостерігаючи якесь явище, ми збудуємо график ходу зміни цього явища й одержимо просту лінію, ми з цього робимо висновок, що величини явища, яке спостерігаємо, перебувають у прямопропорціональній залежності.

Розгляньмо, якою формулою визначається залежність поміж прямо-пропорціональними величинами. Ми кажемо, що об'єм та висота величини прямо-пропорціональні за однакової поверхні основи.

Маємо формулу $V = B.H$, де V — об'єм; B — поверхня основи та H — висота. Тепер ми кажемо, коли H буде мінятись, то й V прийматиме відповідні значіння. B — лишається ввесь час без зміни. Значіння H відкладаємо на вісі x-ів і значіння V — на вісі y-ів.

Приміром: хай $B = 3$ кв. м.

Якщо H даватимемо значіння 1; 2; 3; 4; . . . . . .

Тоді V прийматиме значіння 3; 6; 9; 12; . . . . . .

Взявши за координати точок кожну пару чисел (1,3); (2,6); (3,9); (4,12)... ми знаходимо ці точки й одержуємо график.

Ще один приклад.—Один робітник за годину виготовляє 3 одиниці продукції. Коли число робітників буде мінятися, то, зрозуміло що від цього мінятиметься й загальна кількість продукції. Кількість робітників ми відкладаємо на вісі x, а кількість продукції — на вісі y.

Щоб скласти формулу залежности між числом робітників та кількістю продукції—робимо так: позначаємо число робітників x-ом, а кількість усиїє продукції y-ом; одержуємо формулу $y = 3x$ (де x означає число робітників, а y — кількість продукції), 3 — число стале в даному прикладі й зветься к о е ф і ц і є н т о м п р о п о р ц і о н а л ь н о с т и.

Взагалі, якщо a є число стале, то $y = ax$ дає нам пряму пропорціональність, бо в даному разі значіння y-ка збільшено в a разів, порівнюючи до відповідних значінь x-а. При збільшенні x-а певним числом разів, збільшиться й y стількома-ж разами. Для будування графику, ми повинні скласти табличку. Для цього x-ові даємо довільне значіння, а значіння y-а, як величини залежної, знайдімо з формули.

Повернімося до формули $y = 3x$. Якщо x-ові дамо значіння 2, то y рівнятиметься $3 \,.\, 2 = 6$.

Коли $x = 4$, то $y = 3.\ 4 = 12$.

Відповідні значіння x-а та y-а записують такою таблицею:

x	y
1	3
2	6
3	9
4	12
0	0

або

x	0	1	2	3	4	5
y	0	3	6	9	12	15

і т. д.

і кожну пару значінь (0,0) і (1,3) і т. д. беремо для визначення точки, а потім і графика.

Можна, взагалі, сказати, що величини, які підлягають такій залежності

$$y = 2x; \quad y = \frac{1}{k}x;$$
$$y = 3x; \quad y = ax \text{ і т. д.}$$
$$y = 5x,$$

є величини прямо-пропорціональні й график їхній буде проста лінія, що проходить через початок координат.

Збудуйте графики $y = 2x$; $y = x$; $y = 4x$; $y = \frac{1}{2}x$

Склавши табличку та даючи x-ові довільні значіння, дістаємо відповідні значіння y-ка.

Примітка: При будуванні графиків абстрактних функцій маштаби на вісі x-ів та y-ів треба брати однаковими.

Графики обернено-пропорціональних функцій

Нехай маємо обернено-пропорціональні величини та такі їхні значіння:

1	робітник	закінчив	роботу	за	12	день
2	»	»	»	»	6	»
3	»	»	»	»	4	»
4	»	»	»	»	3	»
6	»	»	»	»	2	»
8	»	»	»	»	1 ½	»
12	»	»	»	»	1	»

Відклавши на вісі x-ів число робітників, а на вісі y-ів—кількість днів та визначивши, як і завжди, точки, побачимо, що сполучені точки не ставлять простої; у нас виникає ламана лінія, а коли знайти точки для проміжних значінь, то—крива лінія, що зветься гіперболою (рис. 83 та 84).

Збудувати график зміни висоти прямокутника в 24 кв. м., якщо основа буде 1, 1 ½, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 15, 18, 14, висота дорівнює поверхні, поділеній на основу, цеб-то $h = \frac{24}{x}$ або $y = \frac{24}{x}$

Обернено-пропорціональна залежність визначається такою формулою $y = \frac{a}{x}$,

де a є величина стала. Ця формула дійсно визначає обернено-пропорціональну залежність, бо коли ми будемо збільшувати x, цеб-то знаменика, то величина дробу — y буде зменшуватися, і навпаки.

График, що відповідає формулі $y = \frac{1}{x}$ (рис. 84).

Пропорція

§ 3. Розгляньмо таке питання: за 20 метр. мануфактури заплатили 60 крб., за 15 метр. — 45 крб. Зрозуміло, що мова йде про величини пропорціональні тому, що в скільки разів більше куплять мануфактури, в стільки-ж разів більше заплатять за неї.

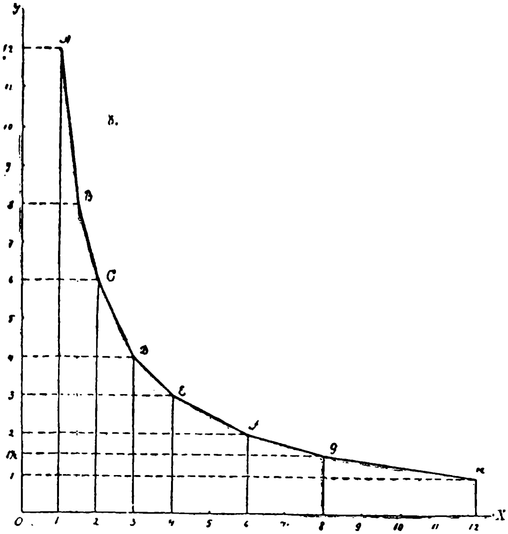


Рис. 83.

Напишіть відношення між кількістю матерії купленої перший та другий раз та відношення між витраченими грішми за обидва рази.

І-е відношення $\frac{20}{15}$ або $20:15$ (знаменик відношення $1\frac{1}{3}$).

ІІ-е відношення $\frac{60}{45}$ або $60:45$ (знаменик відношення $1\frac{1}{3}$).

Ми бачимо, що в обох випадках одержується рівне відношення; це можна показати знаком рівности $\frac{20}{15} = \frac{60}{45}$ або $20:15 = 60:45$.

Така рівність двох відношень зветься пропорцією.

Читається пропорція так: 20 у стільки разів більше за 15, у скільки 60 більше за 45, або 20 так відноситься до 15, як 60 відноситься до 45.

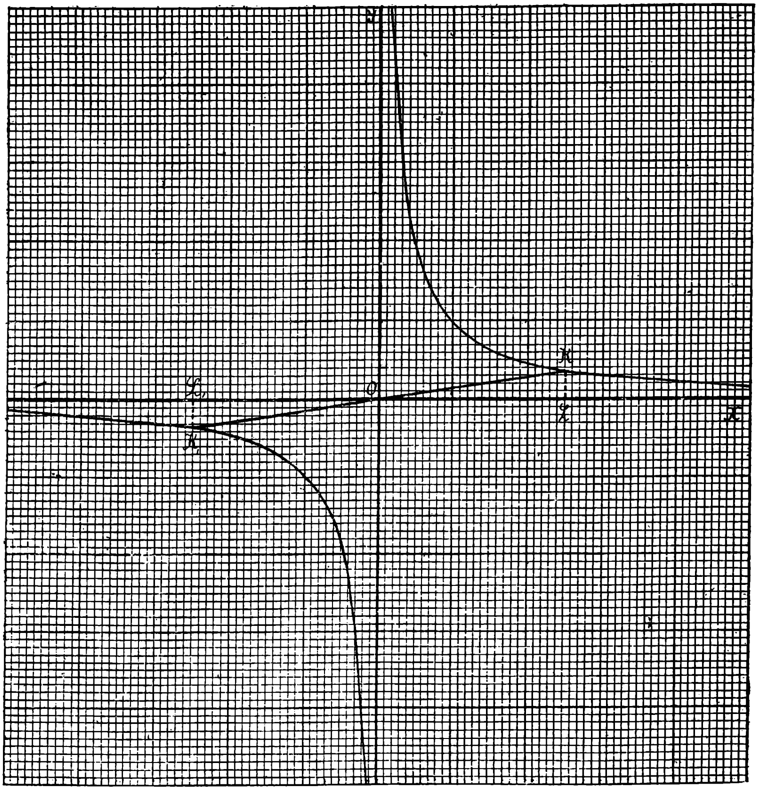


Рис. 84.

Числа, що складають пропорцію, звуться, залежно від їхнього положення, крайніми, (числа 20 та 45) та середніми (15 та 60) членами.

Приклад пропорції $30:15=50:25$; крайні члени 30 та 25; середні 15 та 50.

Напишіть сами три пропорції.

З поданих 4-х пропорцій знайдіть, де правильні, а де неправильні

$8:4=40:20$	$6:3=15:5$
$25:5=10:2$	$10:3=8:5$

Основна властивість пропорції

§ 4. За допомогою пропорцій ми можемо розвязувати задачі на пропорціональні величини, коли три з них відомі, а четверта, пропорціональна до них, невідома. Але, перш за все, познайомімося з основною властивістю пропорції: д о б у т о к к р а й н і х ч л е н і в п р о п о р ц і ї д о р і в н ю є д о б у т к о в і с е р е д н і х ч л е н і в.

Перевірмо: маємо пропорцію $20:15=60:45$

добуток крайніх $20.45=900$

» середніх $15.60=900$

Перевірте правильність цього закону на двох, вами складених пропорціях. (Відсутність цієї властивости свідчить про неправильність пропорції).

Якщо напишемо пропорцію літерами $a:b=c:d$, то наша властивість запишеться так $a.d=b.c$.

Цим законом користуються для находження невідомого числа в пропорції, або, як кажуть, для розвязування пропорції.

Наприклад, $20:15=60:x$.

Тому, що добуток крайніх дорівнює добуткові середніх, пишемо

$$20.x=15.60 \quad \text{або} \quad x=\frac{15.60}{20};$$

Звідси таке правило: щ о б з н а й т и к р а й н і й ч л е н п р о п о р ц і ї, н е о б х і д н о п е р е м н о ж и т и с е р е д н і т а д о б у т о к п о д і л и т и н а в і д о м и й к р а й н і й.

Формулюйте сами правило для знаходження невідомого середнього члена.

Розвяжіть пропорції за зразком

1) $x:12=15:36$; $\left[x=\frac{12.15}{36}=\frac{1.15}{3}=5.\right.$

2) $15{,}2:x=76:10$; $x=\frac{15{,}2.10}{76}=\frac{152}{76}=2$.

1) $20:6=60:x$.

2) $8:x=10:\frac{25}{4}$

3) $10:x=25:50$.

Розвяжімо за допомогою пропорції таку задачу—

Протягом двох годин на станку виготовано 160 шворнів. Скільки шворнів виготують за 5 годин?

Для зручности розмістимо умову в два рядки:

за 2 год. — 160 швор.

» 5 » — x »

Тому, що величини прямо-пропорціональні, відношення між часом мусить рівнятись відношенню виготовлених шворнів, тоб-то: $\frac{2}{5}=\frac{160}{x}$ або $2:5=160:x$.

Звідси, розвязуючи пропорцію $x=\frac{5 \cdot 160}{2}=400$ штук.

Розвяжімо таку задачу—

20 робітників скінчили роботу за 10 день, а 5 таких робітників скінчать за 40 день. Написати відношення між числом робітників та відношення між днями.

I-е відношення $\frac{20}{5}$ або $20:5$ (знаменик відношення 4).

II-е » $\frac{10}{40}$ або $10:40$ (знаменик » $^1/_4$).

Бачимо, що ці відношення нерівні; візьмімо тепер на увагу, що величини тут обернено-пропорціональні; відношення будуть одне одному рівними, якщо друге з них напишемо навпаки, тоб-то $40:10$, матимемо правильну пропорцію $\frac{20}{5}=\frac{40}{10}$; користуючись з цього правила, розвязують пропорції з обернено-пропорціональними величинами.

Розвяжімо задачу—

10 робітників кінчають роботу за 20 днів. За скільки днів скінчать 5 робітників?

Пишемо умову в 2-х рядках

10 роб. — 20 дн.

5 » — x »

Відношення між першими величинами пишемо так, як воно й написано, а відношення між другими величинами пишемо навпаки

$$10:5=x:20$$

звідки $x=\frac{10 \cdot 20}{5}=40$ днів.

Ще приклад—На костюм пішло 1,5 метр. матерії, завширшки 60 см. Скільки треба взяти метрів матерії для того-ж костюму, завширшки 50 см?

1,5 м. = 60 см. $1{,}5:x=50:60$

x » = 50 » $x=\frac{1{,}5 \cdot 60}{50}=1{,}8$ м.

Вправа 1—На 60 робітників вистачить роботи на $7^1/_2$ днів. Чи довго будуть провадити роботу, коли до неї стануть 36 чол.?

2—При 8-мигодин. робочому дні замовлення виконають в 20 день. За який час виконають замовлення, коли буде 10-годин. день?

Примітка: Члени пропорції мають ще одну властивість—
Пропорція не зміниться коли ми
1) переставимо крайні члени.
2) переставимо середні члени.
3) переставимо одночасно крайні з крайніми, а середні з середніми.

$20 : 10 = 50 : 25$	(основна пропорція)
$25 : 10 = 50 : 20$	(переставлені крайні члени)
$20 : 50 = 10 : 25$	(переставлені середні члени)
$25 : 50 = 10 : 20$	(переставлені й ті й инші)

Перевірте правильність цих пропорцій.

Вправи до розділу 13

1—На заводі один робітник виробляє 3 одиниці продукції, 2 робітника 6 одиниць, 3 робітника—9 одиниць. Нарисуйте график.

2—Човен проходить за 1 годину $3^1/_2$ верстви, за 2 години 7 верств, за 3 год. $10^1/_2$ верств і т. д. Нарисуйте график.

3—Нарисуйте графики на одному рисункові $y = 5x$; $y = \frac{3}{4}x$; $y = 8x$.

4—Нарисуйте графики $y = \frac{2}{x}$; $y = \frac{^1/_2}{x}$ або $y = \frac{1}{2x}$.

5—Певну віддаль потяг проходить за 5 год. з швидкістю 30 клм. за годину; зі швидкістю 15 клм. він пройде ту саму віддаль за 10 год. і т. д. Чи пропорціональні ці числа?

6—На жнива для 34 десятин хліба найняли 15 чол. Скільки треба взяти робітників на 102 дес.? (Відп.—45).

7—За $\frac{2}{5}$ фун. чаю заплатили 48 коп. Скільки треба заплатити за 8 фун. того-ж чаю? (Відп.—9 крб. 60 коп.).

8—За 14 хвилин маятник зробив 728 хитань. Скільки хитань він зробить протягом $2^1/_2$ хвилин. (Відп.—130).

9—Розвязати пропорції:

a) $4 : 18 = 2 : x$ b) $30 : x = 10 : 16 =$ c) $x : \frac{2}{3} = 15 : 18.$

d) $\frac{3}{4} : x = \frac{1}{7} : \frac{8}{63}$ e) $27 : x = 45 : 30.$ f) $6\frac{1}{3} : x = 2 : 5\,^2/_3.$

10—Чи високе дерево, коли тінь його 18,5 м. завдожки, а дрючок вжиною 1,5 м. дає тінь 2,6 м. (Відп.—набл. 10,7).

11—Будинок заввишки a метрів дає тінь b метрів, а дзвіниця дає тінь в той самий час — c метрів. Скласти формулу для находження висоти дзвіниці.

12—На вал, що робить 130 обертань за хвилину, надіто колесо 80 сант. у діяметрі та з'єднано ремінем з другим колесом, яке має 50 см. в діяметрі. Взнати кількість обертань другого колеса. (Відповідь—208).

13—Рамена підойми 30 см. та 126 см. На менше рамено діє вага в 168 кг. Яку вагу треба для рівноваги прикласти до довшого рамена? (Відп.—40 кг.).

14—На коротше рамено давить вага 150 кг. Її урівноважує вага 18,5 кг. Найти менше рамено, якщо більше рівне 1,85 м.

РОЗДІЛ 14

Подібні трикутники. Задачі на пропорції

Подібні трикутники

§ 1. Рисування плану, як ми вже вказували, приводить нас до необхідности зменшувати всі розміри даної в дійсності фігури в декілька разів. Але від такого зменшення фігура не губить своєї форми, цеб-то трикутник лишається трикутником і саме такої-ж форми, п'ятикутник — п'ятикутником і т. д. Виходить, так-би мовити, фотографія справжньої фігури, але тільки змінено її розміри. Від такого зменшення міняються лише довжина та ширина фігури, але кути всі лишаються такі самі, які вони були й до зменшення. Через те, що всі инші фігури можна розбити на трикутники, ми розглянемо насамперед такі зменшені та збільшені трикутники. Зауважмо, що фігури, в яких змінено лінійні розміри (довжину та ширину), а кути залишено без зміни, називають **подібні фігури**

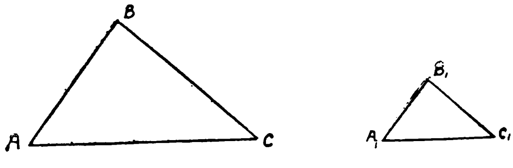


Рис. 85.

Ми розглянемо насамперед подібні трикутники.

Два трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ подібні, якщо у них всі кути дорівнюють один одному, а боки пропорціональні (цеб-то всі відповідні боки трикутника $A_1B_1C_1$ зменшено в однакове число разів, порівнюючи з трикутником ABC (рис. 85).

Таким чином, умови про подібність можна записати:

$$\angle A = \angle A_1; \ \angle B = \angle B_1; \ \angle C = \angle C_1; \ \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$$

Остання потрійна рівність визначає, що всі три відношення дорівнюють одне одному.

Трикутник, подібний даному, легко утворити таким чином. Візьмімо трикутник ABC й поведімо просту B_1C_1 рівнобіжно до BC. Припустімо, що AB_1 є чверть від AB. Поведімо ряд простих рівнобіжно до BC, поділивши AB на частини, рівні AB_1.

У такому разі й відтинок AC поділяється на 4 рівні одна одній частини, а через те $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$, бо кожна з більших сторін у 4 рази більша за меншу.

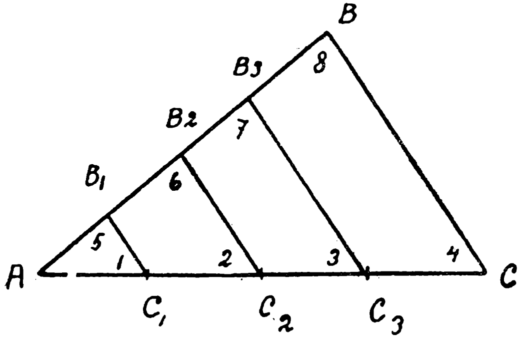


Рис. 86.

Так само, ведімо прості рівнобіжно до AC через точки B_1, B_2, B_3, ми можемо впевнитися, що й $\frac{AB}{AB_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Отже, тепер маємо про боки трикутників $\frac{AB}{AB_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{AC_1}$.

Ще легше можна упевнитися, що кути трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнюють кутам трикутника ABC. Справді бо, кути, що їх відмічено на рисункові 1, 2, 3, 4, дорівнюють один одному, бо вони всі є відповідні при рівнобіжних. Так само й кути 5, 6, 7, 8 відповідні.

Отже, кути трикутників ABC та AB_1C_1 дорівнюють один одному, а боки пропорціональні, иншими словами—трикутник ABC є подібний трикутникові AB_1C_1.

Ми довели це положення лише для випадку, коли перший бік, що ми його відклали, AB_1 є $^1/_4$ боку AB. Трохи складніше, але на тому-ж самому принципові засновано доказ цього положення (теореми) в загальному вигляді.

Ознаки подібности трикутників

§ 2. Що-разу виміряти всі кути трикутників та всі боки, ясна річ, незручно; а тому ми розглянемо тут ті ознаки подібности, що з них звичайно користуються на практиці.

1—Якщо два кути одного трикутника дорівнюють відповідно двом кутам другого, то ці трикутники подібні.

2—Якщо два боки одного трикутника пропорціональні двом бокам другого, а кути, що лежать поміж цими боками в кожному з трикутників, дорівнюють один одному такі трикутники подібні.

3—Якщо три боки одного трикутника пропорціональні трьом бокам другого, такі трикутники подібні.

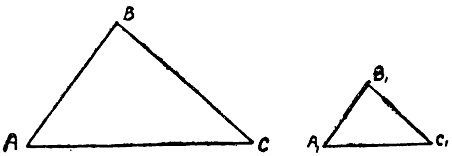


Рис. 87.

Усі ці три теореми справедливі, як це легко побачити на рисункові вимірюванням.

Можна довести всі ці теореми ще й міркуванням. Для доказу 1-ої, напр., досить на більшому бокові відкласти менший бік другого трикутника, хоча-б на бокові AB бік A_1B_1 від точки A й через кінець меншого боку повести просту, рівнобіжну до BC. Тоді новий трикутник (нарисуйте його й назовіть AB_2C_2) дорівнює $A_1B_1C_1$ й подібний трикутникові ABC. Отже $A_1B_1C_1$ подібний трикутникові ABC.

Таким способом можна впевнитися у справедливості й инших теорем. (Міркування там складніше).

Примітка: Замість слова «подібний» часто вживають знак $\backsim$. Отже запис $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, читають — трикутник ABC, є подібний трикутникові $A_1B_1C_1$.

Пристайність та подібність трикутників

§ 3. Цікаво порівняти випадки пристайности та подібности трикутників. (Згадайте попередній рисунок).

Трикутники пристайні, коли	Трикутники подібні, коли
1) $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$ $AB = A_1B_1$	$\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$;
2) $\angle A = \angle A_1$; $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$	$\angle A = \angle A_1$; $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$
3) $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$ $BC = B_1C_1$	$\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$

Вправа 1—На фотографії висота будинку 6,2 см. Віддаль апарату від будинка 14 м., а глибина апарату 8 см. Найти висоту будинку. Вказівка: Згадайте закони фізики.

2—На плані трикутник має розміри 3 см., 4 см. та 5 см. Відомо, що найменший з боків справжнього трикутника—завдовжки 51 м. Знайти инші боки трикутника.

3—У трикутника abc відомо боки $ab = 5$ см.; $bc = 6$ см.; $ca = 8{,}1$ см. У трикутника ABC бік AB = 90 м., бік BC = 96 м.; кут abc та ABC дорівнюють один одному. Знайти довжину бока AC.

4—Три боки маленького трикутника завдовжки 10 см., 11 см., 12 см., а три боки великого 100 м., 120 м.; 110 м. Чи є в цих трикутниках рівні кути та які?

5—Два трикутники менший та більший мають по парі рівних кутів. Бік, що лежить між цими кутами в меншому трикутникові—5 см., а в більшому—7,5 см. Останні боки більшого трикутника—9 см. та—5,1 см. Які боки меншого трикутника?

Усі задачі, що ми їх маємо з подібними трикутниками, приводять нас до розвязування пропорцій. Зауважимо, що пропорціональні один одному боки мають назву — в і д п о в і д н і боки. Вони лежать проти рівних кутів або поміж рівними кутами в даних трикутниках

Задачі на пропорції. Спрощення відношень

§ 4. Пропорції дозволяють нам розвязати задачі на стопи-сумішки металів, а також задачі на сумішки різних речовин. Розглянемо, як це робити на декількох прикладах.

Задача 1—Бронза є стоп з міди (червоної), цини та цинку. Відношення поміж вагою цих складових частин послідовно є 41 : 8 : 1. Потрібно виготовити 75 кг. бронзи. Скільки треба взяти кожного з металів?

З даних задачі, приймаючи, що цинку піде на потрібний стоп x кгр., маємо, що міди піде $41x$ кг., а цини $8x$ кг. Усього разом $41x + 8x + x$ або $50x$ кг. Це має дорівнювати 75 кг. Отже $50x = 75$, $x = \frac{75}{50}$ цеб-то $x = 1{,}5$ кг.

Таким чином для одного стопу треба взяти: міди—$1{,}5 \,.\, 41 = 61{,}5$ кг. цини $1{,}5 \,.\, 8 = 12$ кг. й цинку 1,5 кг.

Задача 2—На тютюновій фабриці перемішано 2 сорти тютюну: вищий по 4,8 крб. за фунт й нижчий по 1,8 крб. за фунт. Дістали 40 фун. мішанини по 3 крб. за фунт. Скільки взято тютюну кожного сорту?

Розвязування—На кожному фунті вищого сорту, що взято на мішанину, губить фабрика $4{,}8 - 3 = 1{,}8$ крб. Отже, на $^1/_{1,8}$ фун. цього сорту фабрика губить 1 крб. На кожному-ж фунті нижчого сорту фабрика виграє $3 - 1{,}8 = 1{,}2$ крб., а на $^1/_{1,2}$ фун. виграє 1 крб. Таким чином, беручи на $^1/_{1,8}$ фун. вищого сорту $^1/_{1,2}$ фун. нижчого, фабрика не виграє й не програє нічого. Тому, треба тютюн перемішати у відношенні $^1/_{1,8} : {}^1/_{1,2}$.

Тут ми здибалися з дробовими відношеннями; їх дуже легко замінити на відношення поміж цілими числами. Розглядаючи члени відношення $1/1{,}8 : 1/1{,}2$, як діленика та дільника, ми можемо кожний з цих членів зменшити в 10 разів, від цього частка або відношення не поміняється. Це зменшення ми зробимо, відкидаючи протинку в знаменикові кожного з дробів. Матимемо $1/18 : 1/12$. Дане відношення можна ще далі спростити, зводячи дроби до спільного знаменика та помножаючи цим саме знамеником. Спільний знаменик 36. Оцим-о числом 36 ми й множимо кожний з дробів. Дістанемо відношення $2:3$. Ясна річ, що відношення $2:3$ простіше за $1/18 : 1/12$, а тим більш за відношення $1/1{,}8 : 1/1{,}2$.

Після цього нам доводиться поділити 40 фун. пропорціонально числам $2:3$ або припускаючи, що вищого сорту було x, а нижчого y ф., поділити число 40 так, щоб $x:y=2:3$.

Инакше кажучи, на кожні 2 фун. вищого сорту тютюну припадає 3 фун. нижчого, а тому $2+3=5$ фун. складаються з 2 фун. вищого та 3 фун. нижчого сорту. У даному числі 40 фун. ці 5 фун. містяться $40:5=8$ разів; отже вищого сорту доведеться взяти $2.8=16$ фун., а нижчого $3.8=24$ фун.

Тут зараз треба зробити підсумки всього попереднього.

Коли маємо відношення поміж дробовими числами, ці відношення краще замінити на відношення поміж цілими числами. Для такого перетворення доводиться «позбавитися від знаменика»,— це значить, привести дані дроби до спільного знаменика й помножити ним кожного з дробів.

Розвязуючи числову задачу на пропорціональний поділ, ми мусимо ввесь час міркувати, скільки саме рівних частин даної величини припадає на кожну частку, вишукати це число, що припадає на одну частину, а тоді й вишукаємо всі потрібні нам частки.

Вправа 1—Замініть дані 4 відношення поміж дробами на відношення поміж цілими числами.

Запис зробити за таким зразком. Дано відношення $2/3 : 5/4$. Зводимо до спільного знаменика; маємо $\underbrace{2/3}_{4} : \underbrace{5/4}_{3} = 8/12 : 15/12$. Множимо кожний з дробів числом $12 — 2/3 : 5/4 = 8 : 15$.

1) $1/2 : 1/3$; 2) $1/4 : 1/8$; 3) $3/4 : 2/5$; 4) $7/8 : 3/10$.

2—Розділити число 70 на частини, щоб вони відносилися одна до одної, як $1/3 : 1/4$.

3—Купив Райкооператив 2 сорти борошна житнього по 9,75 коп. та по 12,5 коп. за кіло. Частину того та иншого борошна кооператив перемішав й дістав 55 кг., що собівартість кожного кілограму була 11 коп. Скільки взято кожного сорту для цієї мішанини?

Примітка: *Дуже часто пропорціональний поділ трапляється в артільних справах, коли заробіток поділяється поміж членами не нарівно, а залежно від їхньої кваліфікації, чи робочого часу, чи ще від яких причин та обставин.*

Розгляньмо, напр., задачу —

Артіль із 3-х робітників заробила 152 крб., працювали вони не однаково; перший робив 4 дні, другий 6, а третій 9 день. Скільки заробив кожний?

Робітники поділяють гроші у відношенні $4:6:9$, инакше: перший з них дістане 4 таких саме частин грошей ($4x$), як другий 6 ($6x$), а третій 9 ($9x$), всього доводиться поділити гроші на $4+6+9=19$ частин ($4x+6x+9x$). Тому на кожну частину припадає $152:19=8$ крб. А робітники мають: перший — $8 . 4 = 32$ крб., другий — $8 . 6 = 48$ крб., третій — $8 . 9 = 72$ крб.

Вправа 1 — Поділити 580 крб. пропорціонально числам $8:12:9$.

2 — Для торговельної операції три кооперативи об'єднуються, але вносять неоднакові гроші; гроші, що вони вкладають в операцію, відносяться, як $5 : 4\frac{1}{2} : 6\frac{1}{2}$. Прибуток від операції 286 крб. По скільки припадає прибутку кожному кооперативу?

Проба

§ 5. Дуже часто доводиться прикладати пропорції до задач на «пробу». Золото та срібло, звичайно, дуже м'які метали, а через це для різних виробів із цих металів не можна брати їх у чистому вигляді, а доводиться до них долучати ще инші метали (звичайно мідь). Кожний примішок називають лігатура, коли його додають до золота або срібла.

У нас, у Радянському Союзі, вживають зараз два роди проб, напр., ми чуємо срібло 84 проби, золото 56 проби, а також кажуть про 600 пробу, 800 пробу то-що. Перша проба походить від тих часів, коли ми фунта поділяли на 96 золотників і показує нам скільки золотників чистого металу припадає на 96 золотників (на 1 фунт стопу). Инакше, проба 84 вказує, що 1 фунт стопу складається з 84 золотників чистого металу та 12 золотників лігатури, ще инакше: золото та лігатура у даному стопі відносяться, як $84:12$.

Проба 600 визначає, що кожний кілограм стопу складається з 600 грам чистого металу та 400 грам лігатури. Ця остання проба має назву метрична, французька або десяткова й поки-що не дуже поширилась у нас.

Знаючи це про пробу, ми дуже легко зуміємо тепер розвязати задачі:

1 — Щоб мати срібло 84-ої проби, майстер стопив $1\frac{1}{2}$ фун. срібла 90-ої проби та $^2/_3$ фун. иншої проби. Якої проби був цей другий стоп?

Розвязування: На кожний фунт першого срібла припадає 90 зол. чистого срібла, а тому всього срібла чистого $90 . 1\frac{1}{2} = 135$ зол. Вийшло всього стопу $1\frac{1}{2} + {}^2/_3 = 2^1/_6$ фун. В ньому на кожний фунт чистого срібла припадає 84 зол., тому всього чистого срібла буде $84 . 2^1/_6 = 182$ зол. Таким чином на другий стоп чистого срібла виходить $182 - 135 = 47$ зол. На один фунт стопу чистого срібла припадає $47 : {}^2/_3 = 70{,}5$ зол., або проба другого стопу 70,5.

Такого роду задачі не дають нам багато нового та цікавого матеріялу. Але знайдімо і цікавіші випадки.

2—Майстер стопив золотий ланцюжок 56-ої проби, що важив 13,5 зол. та каблучку 82-ої проби й дістав стоп 64-ої проби. Скільки важила каблучка?

Тут уже краще прикласти спосіб пропорціональних відношень. На першому золоті на кожному золотнику майстер вигравав $64-56=8$ дев'ятдесят шостих частин золотника срібла чистого, а на другому, дістаючи 64 пробу замість 82-ої, програвав $82-64=18$ дев'ятдесят шостих частин. Одну дев'ятдесят шосту частину майстер вигравав на $^1/_8$ зол., а програвав на $^1/_{18}$ зол. Отже, беручи для стопа золото в ланцюжкові та каблучці у відношенні $^1/_8:{}^1/_{18}$, майстер не виграв і не програв нічого. Заміняючи відношення дробів на відношення цілих чисел, маємо $9:4$. Таким чином, у ланцюжкові було 9 таких частин ваги, яких у каблучці було тільки 4. На 1 таку частину припадає $13{,}5:9=1{,}5$ зол., а на 4 буде $1{,}5:4=6$ зол. Отже каблучка важить 6 зол.

Вправа 1—Майстер стопив $3\frac{1}{2}$ фун. срібла 90-ої проби та 1 фун. срібла 72 проби. Якої проби став стоп?

2—Срібляна ложка важить 8 зол., проба її 84. Скількі міди треба стопити з неї, щоб дістати срібло 56-ої проби.

3—Стопивши 7 зол. 90-ої проби та $3\frac{1}{2}$ зол. иншого срібла, майстер дістав стоп 84-ої проби. Якої проби був другий стоп?

4—Стопивши 3,2 фун. срібла 87-ої проби та декілька срібла 40-ої проби, майстер дістав стоп 72-ої проби. Скільки було взято срібла нижчої проби?

Сумішки спирту. На ті задачі, що ми щойно розібрали, дуже схожі задачі, де доводиться вишукувати міцність спиртових розчинів. Спиртові розчини—це є розчини спирту у воді. Їхня міць (кріпость) визначається у градусах—ступнях, що вказує, який відсоток самого спирту є у розчині. В усьому останньому ці задачі розвязуються, як і задачі на пробу.

Розгляньмо це на таких прикладах:

1—Змішано три сорту спирти: 8 відер—85 градусного, 6 відер—60 градусного та 2 відрі—45 градусного. Якої кріпости стала мішанина цих спиртів?

Розвязування: У першому розчині чистий спирт складав 0,85 усього розчину (Чому так? Згадайте, що таке відсоток). Отже, у першому розчині буде $8\,.\,0{,}85=6{,}8$ відер чистого спирту. У другому розчині чистого спирту буде $6\,.\,0{,}60=3{,}6$ відер; нарешті, у третьому $2\,.\,0{,}45=0{,}9$ відер.

Усього чистого спирту в цій мішанині буде $6{,}8+3{,}6+0{,}9=11{,}3$ відра. А всієї мішанини буде $8+6+2=16$ від.

Щоб узнати міцність всього розчину, ми записуємо умову:
на 16 відер розчину припадає 11,3 відра чист. спирту
на 100 » » » x » » »
і за цією умовою складаємо пропорцію:

$$11,3 : x = 16 : 100 \text{ звідки } x = \frac{11,3 \,.\, 100}{16} = 70,625.$$

Наближено міцність розчину 71 градус.

2—З вина міцністю 60 градусів та 48 градусів після того, як вино перемішали, дістали 36 відер вина 53 градусного. Скільки відер кожного сорту взято на цю мішанину?

Розвязування: На кожному відрі першого розчину ми маємо зайвих $60 - 53 = 7$ градусів, якщо порівняти їх до остаточної мішанини. Один зайвий градус у нас виходить з кожної $^1/_7$ відра першого розчину. На кожному відрі другого розчину ми маємо недостачі $53 - 48 = 5$ градусів. А недостачу 1 градус ми маємо на $^1/_5$ відра другого розчину.

Таким чином, беремо на кожні $^1/_7$ відра першого розчину $^1/_5$ відра другого, инакше: кількість першого вина відноситься до кількости другого, як $^1/_7 : {}^1/_5$. Це відношення заміняємо на $5:7$, обертаючи відношення дробів на відношення цілих чисел. Поділяємо далі, як звичайно $5 + 7 = 12$; $36 : 12 = 3$ і маємо, що першого розчину було $3 \,.\, 5 = 15$, а другого $3 \,.\, 7 = 21$ відро.

Вправа—До 28 відер спирту міцности 82 градуси долито ще спирту 58 градусів таким чином, що новий розчин має міцність 72 градуси. Скільки відер було другої кріпости?

Вправи до розділу 14-го

1—Журавель, що ним витягають воду з криниці, є підойма, яка має менше рамено 0,75 м., а більше 9 м. На скільки підноситься більше рамено, коли менше спускається на 1 м.? (Відп.—12 м.).

2—Оливець 18 см. завдовжки, коли його держуть прямовисно на віддалі ½ м. від свічки, дає на стіні тінь 2 м. завдовжки. На якій віддалі оливець від стіни? (Відп.—5,6 м. наближ.).

3—Аероплана 12 м. завширшки зфотографовано, коли він пролітав просто понад фотографічним апаратом. Глибина фотографічної камери 10 см. На фотографії ширина аероплану 5 мм. На якій височині був аероплан? (Відп.—240 м.).

4—Не маючи ніякого приладу, можна виміряти (дуже наближено) висоту будинку таким чином. Зріст людини 1,6 м. Її тінь має довжину 2 кроки, а тінь від будинку в цей час 24 кроки. Який заввишки будинок? (Відп.—19,2 м.),

5—Один із подібних трикутників ABC, другий $A_1B_1C_1$. Відомо тільки один бік трикутника ABC саме $AB = 16$ м., а боки трикутника

$A_1B_1C_1$ всі виміряно: $A_1B_1 = 4$ см.; $B_1C_1 = 3{,}2$ см.; $C_1A_1 = 5{,}3$ см. Найти боки трикутника ABC.

6—Замінити відношення дробові на відношення між цілими числами:

1) $^1/_7 : ^1/_2$; 2) $^2/_3 : ^3/_5$; 3) $^3/_4 : ^3/_{10}$; 4) $^2/_{15} : ^7/_5$; 5) $^3/_5 : 1$.

7—Три грузчики заробили 6 крб. 70 коп.; перший з них робив $4^1/_2$ години, другий 5, а третій $7^1/_4$ годин. Як їм поділити поміж собою ці гроші? (Відп.—1 крб. 80 коп.; 2 крб; 2 крб, 90 коп.).

8—Поділити число 1540 на чотири частини, щоб вони відносилися одна до одної, як $^1/_2 : ^1/_3 : ^1/_4 : ^1/_5$.

9—В двох шухлядках $4^1/_2$ пуди чаю; кількість чаю другої шухлядки становить $^3/_7$ першої. Скільки чаю в кожній шухлядці? (Відп.—3 п. 6 фун.; 1 п. 14 ф.).

10—Землі орної та луків усього разом 697 гектар. Відношення ріллі до луків $^3/_4 : ^2/_3$. Скільки кожної землі? (Відп.—328 та 369).

11—Довжини Дунаю, Дніпра та Дону відносяться, як $6^1/_4 : 5 : 4^1/_2$. Дунай на 98 геогр. міль довший за Дін. Знайти довжину кожної з річок. (Відп.—350, 280, 252 міль).

12—Ремонт трьох помешкань коштував 60 крб. Ці гроші мусять виплатити три сім'ї, що мешкають там, і виплатити пропорціонально платні за квартиру. Платня першої сім'ї—18 крб.; другої—12 крб., третьої—10 крб. Скільки мусить внести кожна сім'я? (Відп.—27 крб., 18 крб., 15 крб.).

13—Стопили 12 фун. срібла 84-ої проби та 2 фун. міди. Якої проби вийшов стоп? (Відп.—72).

14—Скільки треба взяти золота 90-ої та $83^1/_3$ проби, щоб стало 50 гр. золота 88-ої проби? (Відп.—35 та 15),

15—Скільки срібла 92-ої проби треба стопити з 60 грам. 70-ої проби, щоб мати стоп 84-ої проби? (Відп.—105).

16—Скільки треба долити сорокаградусного спирту до $1^1/_3$ відра чистого (100 градусного) спирту, щоб мати спирт, де на 13 частин води припадає 12 частин спирту? (Відп.—$8^2/_3$ від.).

РОЗДІЛ 15

Подібні многокутники

§ 1. В техниці та й у звичайному житті нам дуже рідко буває можливо нарисувати ті речі, що про них у даному разі ми кажемо, в тому справжньому розмірі, що вони його мають. У більшості випадків доводиться нам ці розміри зменшувати, рисуючи, напр., машини, дільниці землі то-що. Але бувають випадки, коли ми збільшуємо речі на їх малюнкові, приміром, коли ми рисуємо у збільшеному вигляді мікроскопічних тварин. У всіх таких випадках ми користуємося з подібних многокутників або подібних фігур взагалі.

Подібні многокутники це є такі многокутники, що мають однакове число боків, а до того—всі кути одного многокутника дорівнюють кутам другого, й боки поміж рівними кутами пропорціональні.

Приміром, наші п'ятикутники ABCDE та abcde (рис. 88). У них є рівність кутів

$$\angle A = \angle a;\quad \angle B = \angle b;\quad \angle C = \angle c;\quad \angle D = \angle d;\quad \angle E = \angle e.$$

(Зверніть увагу до того, що кут d не визначає в даному разі прямого кута). Між боками п'ятикутників є взаємовідношення

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EA}{ea}; \text{ або } \frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD} = \frac{de}{DE} = \frac{ea}{EA}$$

Инакше кажучи, відповідні боки одного многокутника всі в одне число разів більші за боки другого. У такому разі другий п'ятикутник є зменшений перший (або навпаки, перший многокутник є збільшена копія—другого).

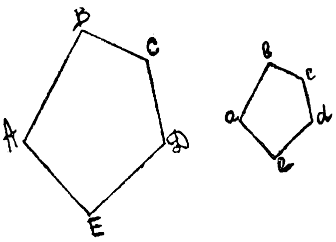


Рис. 88.

Ясна річ, що не тільки п'ятикутники можуть бути подібні, але й инші многокутники. Підкреслюємо, що подібні многокутники мусять мати обидва однакову кількість боків.

Боки, що лежать поміж рівних кутів, мають назву—відповідні.

Подібні многокутники можна розбити на однакову кількість однаково розкладених та подібних трикутників. У цьому легко пересвідчитися, проводячи косини через вершки рівних кутів у кожному з подібних многокутників. Так само, й навпаки, в тому разі, коли два многокутники можна розбити на однакову кількість подібних та однаково розкладених многокутників, то ці многокутники будуть один одному подібні. Ми не подаємо тут доказу цих положень, бо вони вже надто ясні.

Пропорціональний циркуль. Пантограф

§ 2. Для того, щоб нарисувати подібного даному многокутника, доводиться зменшити або збільшити в однакову кількість разів боки даного та зберегти всі кути даного без зміни. Вигідно тут скористатися з пропорціонального циркуля (рис. 89).

Цей циркуль складається з двох таких само ніжок, як і звичайний циркуль, але ніжки ці не скріпляються ґвинтиком зверху, як у звичайному циркулі, а ґвинтик може пересуватися вздовж ніжок тим прорізом, що йде вздовж кожної з ніжок. Якщо ґвинтика закріпити рівно посередині віддалі поміж кінцями циркуля, то розсуваючи їх на певну величину на одному боці, ми матимемо таку саму віддаль і між другими кінцями. Якщо-ж закріпити ґвинтик не в середині, а ближче до одного кінця ніжок, на другому ми матимемо збільшену віддаль в певне число разів. Це число разів залежить від положення ґвинтика (чому?). Таким чином, закріпляючи ґвинтика в певному місці на протязі ніжок, ми можемо зменшувати або збільшувати довжину даного відтинку в певне число разів.

Отже, маючи пропорціонального циркуля, ми закріпляємо його на певному місці й, вимірюючи ним за чергою всі боки даного многокутника, між протилежними ніжками матимемо віддалі, що даватимуть нам боки подібного многокутника у зменшеному чи збільшеному вигляді.

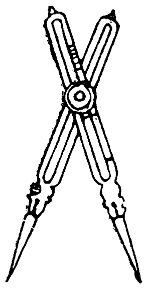


Рис. 89.

Другий прилад, що допомагає нам нарисувати подібного многокутника, це є пантограф. На нашому рисункові 90—ми бачимо так самий прилад, як і спосіб користуватися з нього. Цей прилад складається з рамки, що має форму рівнобіжника ABCD. Посередині, поміж боками AD та BC рівнобіжника є ще одна платівка, яку закріпляють у точках E та F на боках AB та CD рівнобіжника. У закріпленому стані EF мусить бути рівнобіжна до AD (й до BC). Щоб можна було закріпити EF у бажаному місці, на боках AB та CD маються або дірочки через певну віддаль або прорізь уздовж усіх цих боків. Рівнобіжника зроблено таким чином, що боки його можуть обертатись навколо точок A, B, C, D, але за всіх положень рівнобіжник не губить своєї форми рівнобіжника та EF не перестає бути також рівнобіжна до AD.

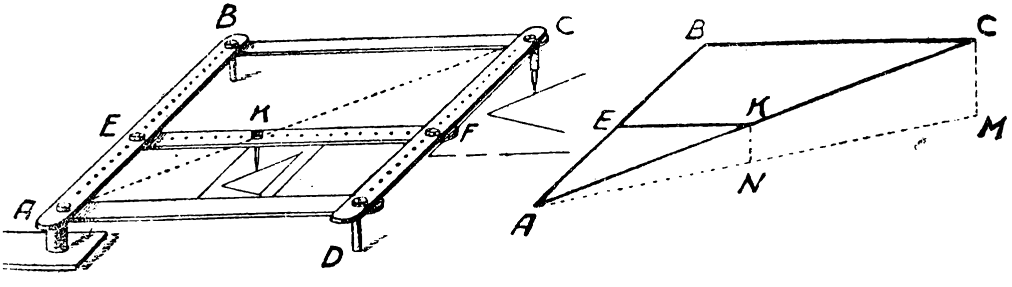


Рис. 90.

Користуємося з цього приладу так. Закріпляємо прилад у точці A, у точку K втикаємо один оливець, а в точку C другий. Обводячи ввесь обвід многокутника оливцем C, ми рисуємо оливцем K його зменшений (цеб-то рисуємо подібний многокутник). Якщо навпаки, обводимо обвід даного многокутника оливцем K, ми примушуємо оливець C нарисувати нам збільшеного многокутника подібного до даного. (Поясніть, чому так).

Вправа 1—Поясніть, користуючись з другої половини останнього рисунку, чому саме пантограф дає фігуру, подібну до даної.

Вказівка: Візьміть до уваги, що AEK $\backsim$ ABC.

2—Зробіть собі з паперу або цупкого картону, а ще краще з дерев'яних платівок пропорціонального циркуля.

3—Зробіть собі з дерев'яних платівок пантографа.

Увага: Останні дві задачі колективні.

Відношення обводів подібних многокутників

§ 3. Умовимося називати відношення поміж відповідними боками подібних многокутників—коефіцієнт (або сучинник) пропорціональности для даного многокутника.

Нехай $\frac{AB}{ab} = k$. У такому разі $AB = k . ab$.; це саме можемо написати про кожну пару відповідних боків подібних многокутників.

Написавши, маємо низку рівностей

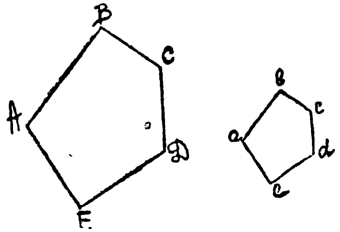


Рис. 91.

$$AB = k . ab$$
$$BC = k . bc$$
$$CD = k . cd$$
$$DE = k . de$$
$$EA = k . ea$$

Додавши один до одного всі ліві боки рівностей та всі праві, матимемо таку рівність

$$AB + BC + CD + DE + EA = kab + kbc + kcd + kde + kea$$

А беручи на правому боці рівности k поза дужки та називаючи обвід одного многокутника літерою P, обвід меншого літерою p, матимемо

$$AB + BC + CD + DE + EA = k\,(ab + kc + cd + de + ea), \quad \text{або } P = k . p.$$

а це нам дає инакше

$$\frac{P}{p} = k. \quad \text{або} \quad \frac{P}{p} = \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EA}{ea}$$

Словами це можна висловити так:

Відношення обводів подібних многокутників дорівнює відношенню відповідних боків.

Ми вказали це положення для п'ятикутників подібних, але, ясна річ, це буде справедливо для яких завгодно подібних многокутників.

Звідци ще вислід:

Сума всіх попередніх членів відношення, відноситься до суми всіх наступних, як кожний попередній до свого наступного.

Подібність правильних фігур

§ 4. Цікаво зазначити ознаки подібности фігур взагалі. Фігура з найменшою кількістю боків—це є трикутник. Чи подібні поміж собою всі трикутники?

На таке питання ми даємо відповідь—ні. Але всі рівнобічні трикутники подібні один одному. Справді, у рівнобічних трикутників усі кути рівні один одному, а саме—по 60^0. Коли-ж один із боків буде зменшений (або збільшений) у декілька разів, то й усі боки будуть зменшені (або збільшені) у стільки саме разів.

З чотирикутників будуть подібні один одному всі квадрати. Тут знову ми помічаємо, що всі кути квадратів рівні один одному й кожний з них дорівнює 90^0. Про боки треба вказати те саме, що й про боки трикутників.

Так само подібні один одному 2 п'ятикутники, 2 шостикутники, 2 сьомикутники і т. д., якщо всі кути та боки в кожному з них дорівнюють один одному. Називаючи такі многокутники, що в них всі боки рівні один одному та всі кути також рівні один одному—многокутниками правильними—ми можемо висловити цю істину: два правильні многокутники з однаковою кількістю боків подібні один одному.

Поверхня подібних фігур

§ 5. Візьмім два подібні квадрати, щоб бік одного був утричі більший за бік другого. З нашого малюнку ясно видно, що поверхня більшого квадрату в 9 разів більша за поверхню меншого. Якщо матимемо, що довжина боку меншого квадрату в n разів менше від боку більшого, то на кожному боці більшого квадрату ми зможемо відкласти бік меншого n разів в один ряд, а рядів таких уздовж другого боку буде також n.

Отже, відношення поверхні більшого квадрату до поверхні меншого буде n^2. Инакше — відношення поверхонь подібних квадратів дорівнює квадратові відношення (відповідних) боків.

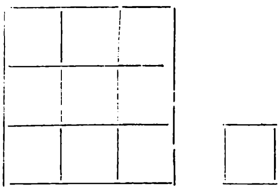


Рис. 92.

Те, що ми оце побачили про відношення поверхонь подібних квадратів, ми можемо казати й про поверхні всіх инших подібних фігур; а саме:

Поверхні подібних фігур відносяться, як квадрати відповідних боків.

Ми зараз побачимо, що це так буде для подібних трикутників, а пізніше вже не важко буде поширити цю істину й для яких завгодно фігур взагалі.

Згадавши, що поверхня трикутника дорівнює добуткові основи та піввисоти його та називаючи основу A, а висоту H, маємо $\frac{AH}{2}$ для поверхні трикутника S (рис. 93).

Якщо поверхня більшого трикутника S, а поверхня меншого s, то $\frac{S}{s} = \frac{AH}{ah}$

У подібних трикутників $\frac{H}{h} = \frac{A}{a}$, а тому, заміняючи рівні відношення одне на одне, маємо

$$\frac{S}{s} = \frac{A}{a} \cdot \frac{H}{h} \text{ та } \frac{S}{s} = \frac{A}{a} \cdot \frac{A}{a} \text{ або } \frac{S}{s} = \frac{A^2}{a^2} \text{ і } \frac{S}{s} = \frac{H^2}{h^2}$$

Для подібних многокутників також вірне це положення.

Розбиваючи, кожний з подібних многокутників на низку подібних трикутників, матимемо (рис. 94), називаючи S_1, S_2, S_3 поверхні послідовного кожного з більших та s_1, s_2, s_3 кожного з менших трикутників, а коефіцієнт пропорціональности k (рис. 94.)

$$\frac{S}{s} = k^2; \ \frac{S_2}{s_2} = k^2; \ \frac{S_3}{s_3} = k^2, \text{ а також і } \frac{S_1 + S_2 + S_3}{s_1 + s_2 + s_3} = k^2.$$

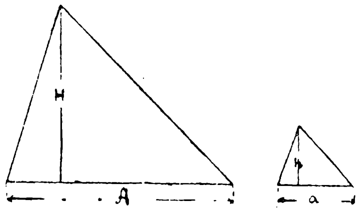


Рис. 93.

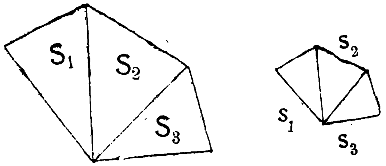


Рис. 94.

(На підставі висліду § 3).

Якби мали ми більше число боків у подібних многокутників, було-б більше членів суми в останньому відношенні, але справа— сама суть від цього не змінилась-би.

Вправа 1—Один із подібних многокутників має поверхню 1000 кв. см. Один із боків його зменшено в 5 разів й нарисовано бік подібного многокутника. Яка саме поверхня подібного многокутника?

2—Один з боків меншого з многокутників (подібних) 2 см., а відповідний йому бік більшого многокутника 32 м. Поверхня меншого многокутника 7,5 см. Яка поверхня більшого?

План § 6. Рисуючи план, ми ввесь час користуємося подібними фігурами. Щоб нарисувати план, треба виміряти боки та кути на місцевості й рисувати кути з їх дійсними розмірами, а боки зменшувати всі в однакове число разів. Кути виміряються астролябією (див. 95 рис), цей прилад складається з кола, що розбито на градуси від 0° (біля точки А) до 360° (біля тої-ж саме точки). Поперечину АВ прикріплено нерухомо до кола й у точках А й В прироблено дві, сторчові до площі кола, платівки. Через ці платівки йдуть прорізи так, щоб проста АВ давала поперечину кола (діяметр). Другу поперечину можна повертати навколо її осередку—центру кола.

Виміряючи кута, насамперед уставляємо поземно саме коло у вершку кута, тоді платівки A і B, а також C і D (теж з прорізами на поперечені кола в точках C та D) встановлюються прямовисно. Направляючи AB одною простою на боці многокутника, а CD на другому боці, ми на колі побачимо розмір кутів між цими простими.

Переносячи цей прилад із одної точки до другої, послідовно ми вимірюємо послідовно всі кути, а рівнобіжно в той-же час і всі боки многокутника на місцевості.

Такий спосіб незручний через те, що треба проробити дуже багато різних вимірів. Є другий спосіб—зручніший за цей. Припустімо, нам потрібно нарисувати план многокутника ABCDEF. Вибираємо один його бік (рис. 96) AB такий, щоб з нього було видно точки у всіх кінцевих точках боків шостикутника (в точках C, D, E та F).

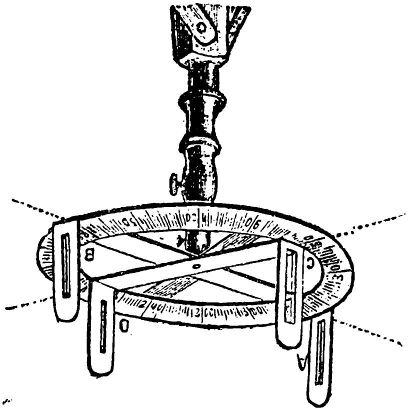


Рис. 95.

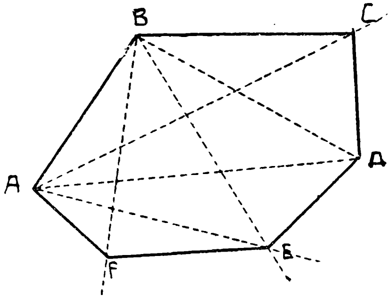


Рис. 96.

Вимірюємо тільки сам бік AB, як-мога точніше. Далі вимірюємо з точки A кути BAC, CAD (або BAD), DAE, EAF, проводимо пунктирні прості AC, AD, AE; знаючи напрямки AC, AD, AE та AF. Далі з точки B вимірюємо кути ABC, ABD, (або CBD), ABE (або DBE), й ABF (або EBF). Знаючи напрямки ліній BC, BD, BE, BF та нарисувавши AB у відповідному маштабі, рисуємо пунктиром прості BC, BD, BE, BF. Перетин цих простих із простими попередніми дає нам точки C, D, E, F—вершки многокутника на плані. Злучаючи послідовно точки B, C, D, E, F, A, ми й маємо потрібний нам многокутник, цеб-то план.

Якщо даний многокутник остільки великий, що його не можна нарисувати попереднім способом, бо не видно з точок A або B усіх вершків многокутника, ми можемо розбити даний многокутник на частини та знімати плана по частинах.

На плані ми можемо бачити розміри всіх його ліній, а знаючи мірило (маштаб), можемо найти справжні розміри цих ліній. Можемо в плані знайти також поверхню даної дільниці. Ми вже не кажемо, що план дозволяє просто бачити форму даної дільниці місцевости.

Примітка: Тут до речи буде вказати, як вимірювати поверхні неправильних фігур, обмежених простими та кривими лініями. Ми звичайно користуємося тоді прозорим папером, поділеним на картки—квадратові міліметри. Накладаючи цей папір на рисунок, ми просто підраховуємо, скільки повних квадратиків та скільки окремо частинок, що на око складають повного квадратика.

Вправа 1—Зробіть собі, промасливши міліметровий папір, прилад для находження поверхні неправильних фігур (цей прилад має назву палетка) й найдіть, користуючись з цього приладу, поверхню листа якоїсь деревини.

2—Нарисуйте план якоїсь дільниці землі (форми многокутника).

Подібні тіла

§ 7. Коли роблять модель якоїсь машини, будинка то-що, то всі розміри (тоб-то довжину, ширину та висоту) зменшують у певне однакове число разів. Дістанемо тіло, що буде подібне до даного. Про такі тіла слід запам'ятати, що їхні об'єми відносяться, як куби—треті ступені—відношення їхніх лінійних розмірів. Напр., зменшуючи на моделі довжину, ширину та висоту будинку в 100 разів, ми зменшуємо його об'єм в $100^3 = 1\,000\,000$ разів.

Вправи до розділу 15-го

1—Модель мутри (гайки) має обвід 1,5 см. Маштаб 1 : 4. Найдіть довжину боку справжньої мутри, якщо вона є правильний шостикутник? (Відп.—1 см.)

2—На плані (див. рис. 97) вказано розміри двох будинків 1 та 2, квітника, двору, флігеля та стайні. Найти поверхню кожного з будинків, двору, квітника, флігеля та стайні, а також довжину огорожі, знаючи, що маштаб 1мм = 1 м.

3—На плані садиби виміряно увесь обвід її, цей обвід дорівнює 24,5 см.; далі виміряно один бік цієї садиби. На плані цей бік має розмір 4,8 см., а спражній розмір цього боку 300 м. Яка завдовжки має бути огорожа навколо цієї садиби, коли на ворота треба залишити 2,75 м.? (Відп.—1528,5 м.).

4—Довжина листа тополі 7,5 см., а на рисункові ця довжина 2,5 см. Рисунок є точна копія справжнього листа. На рисункові цього листа виміряно палеткою його поверхню 1,8 кв. см. Яка поверхня справжнього листа? (Відп.—16,2).

5—Довжина долоні дорослої людини $11\frac{1}{2}$ см., а довжина долоні дитини 7 см. Форма рук кожного з них однакова. У скільки разів поверхня руки дорослої людини більша за поверхню рук дитини? (Відп.—2,7 разів).

6—Нарисовано два подібних трикутники. Боки одного вдвічі менші від боків другого. Скільки менших трикутників можна вмістити на поверхні більшого? Перевірте вашу відповідь рисунком.

7—Де ви бачили правильні многокутники на рисункові чи в дійсності?

8—Розміри моделі машини зменшено в порівнянні зі справжніми розмірами. Довжина моделі є 25 см., а справжня довжина машини 2,8 м. У скільки разів об'єм справжньої машини більший за об'єм моделі? (Відп.—1400 раз. набл.).

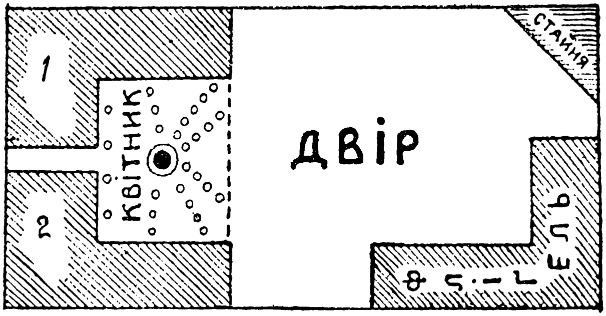


Рис. 97.

9—Коли робили глобус, зробили його поперечину 50 см., а в дійсності поперечина землі 12800 км. Яка заввишки на цьому глобусі має бути найвища гора землі (Гавризанкар)?

РОЗДІЛ 16

Рівнання першого степіня з одною невідомою

Рівнання та тотожність. Розвязка рівнання

§ 1. В питаннях про пропорцію ми знайомилися з визначенням невідомого члена пропорції. Для цього, як ми вже знаємо, треба скористуватися з тої властивости пропорції, що добуток крайніх членів дорівнює добуткові середніх. Коли доводиться шукати невідомий член пропорції

$$8 : x = 10 : 5$$

то, якщо візьмемо добуток середніх, маємо 10x, а крайніх—40; тому

$$10x = 40$$

В цій рівності той вираз, що міститься лівобіч від знака =, зветься лівою частиною рівности, а той, що правобіч—правою частиною її. В наведеному прикладі $10x$ є лівою частиною, а 40 правою. Щоб дізнатися, чому є рівно x, міркуємо так: якщо 10 невідомих величин дорівнює 40, то одна буде в 10 разів менша, тоб-то $40:10=4$. Щоб перевірити це, підстановляємо вишукане значіння невідомої величини, тоб-то 4. Маємо $10 \,.\, 4=40$. Так в лівій, як і в правій частині маємо однакові результати. Отже, знайдена нами розвязка для x є правильна. Ця рівність є справедливою лише тоді, коли $x=4$; При всякому иншому значінні x, ліва частина не буде дорівнювати правій. Така рівність, що вона є справедлива при деяких значіннях невідомої величини, а не при яких завгодно, зветься умовною рівністю або рівнанням. Це можна висловити так: рівнання є умовна рівність або така рівність, яка містить в собі невідому величину (що є справедлива не при якому завгодно значінні цього невідомого, а лише при деяких).

Напр., в рівності

$$x+5=25-x$$

лівою частиною є $x+5$, а правою $25-x$. Якщо підставимо в ліву і в праву частину замість x яке завгодно число, припустімо 4, то в лівій буде $4+5$, тоб-то 9, а в правій $25-4$ цеб-то 21. Значить, 4 не задовольняє цьому рівнанню, бо в тій і в другій частині маємо різні числа.

Підстановляючи замість x різні числа, після декількох спроб, дізнаємося, що при $x=10$ у лівій частині, маємо те саме число, що і в правій, тоб-то $10+5=15$, так само $25-10=15$. Тому рівність

$$x+5=25-x$$

є рівнання, бо вона справедлива не при яких завгодно значіннях x, а лише тоді, коли $x=10$. Те значіння невідомого, яке задовольняє обидві частини рівнання, звуть розвязкою рівнання. В першому прикладі $4x=40$ розвязка є 4, в другому $x+5=25-x$ розвязка є 10.

Не кожна рівність, що має невідомі, є рівнання. Напр., якщо в рівності:

$$5x-2x+8=5+10x+3-7x$$

будемо підстановляти замість x які завгодно числа: 1, 2, 3... або які завгодно дроби, то завжди одержуємо так в лівій, як і в правій частині однакові результати. Підставивши замість x число 2, дістанемо

$$5\,.\,2-2\,.\,2+8=5+10\,.\,2+3-7\,.\,2$$

або

$$10-4+8=5+20+3-14$$

остаточно

$$14=14$$

Поставивши замість x вартість 10, одержимо

$$5\,.\,10-2\,.\,10+8=5+10\,.\,10+3-7\,.\,10$$

$$50-20+8=5+100+3-70$$

$$38-38 \text{ і т. д.}$$

(Піставте ще деякі числа, щоб упевнитись, що в лівій та правій частині дістаємо кожен раз однакові числа).

От такі рівності, що залишаються справедливими за яких завгодно значінь невідомого, звуть тотожністю.

Примітка: Замість слова «розвязка» рівняння, кажуть иноді «корінь» рівняння

Перевірте, чи буде рівність

$$4x + 12 + 2x = 60 + 6x - 48$$

тотожність? чи воно є рівняння? (Чому так?)

§ 2. Розгляньмо рівняння

$$3x - 8 = 22 \quad . \ . \ . \ . \ . \ 1$$

Рівноважні рівняння. Основні властивості рівняння

За декількома спробами можемо знайти корінь цього рівняння; він є рівний 10. Щоб упевнитися в цьому, підстановляємо замість x число 10; одержуємо

$$3 \cdot 10 - 8 = 22$$
$$22 = 22$$

Тому, що в лівій частині й у правій дістали таке саме число 10 дійсно є розвязка цього рівняння.

Додамо до обох частин даного рівняння яке-небудь число, напр., 5, тоді матимемо

$$3x - 8 + 5 = 22 + 5 \quad . \ . \ . \ . \ 2$$

Маємо друге рівняння; його корінь буде той самий, тоб-то 10 в чому можна упевнитись, підстановляючи замість x число 10, в останнє рівняння (зробіть це). Так само, коли від обох частин того самого рівняння

$$3x - 8 = 22$$

віднімемо по 3, то дістанемо:

$$3x - 8 - 3 = 22 - 3 \quad . \ . \ . \ . \ 3$$

Останньому рівнанню також задовольняє той самий корінь 10.

Такі рівнання, як 1, 2, 3, що вони різні виглядом, але мають однакові корені, звуть рівноважні рівняння. Напр. рівняння

$$7 + x = 12$$
$$15 - x = 10$$

є рівноважними, бо-ж перше й друге мають коренем число 5 ($x = 5$).

Через те, що, взявши яке завгодно рівняння і, додаючи до обох частин його або віднімаючи від обох частин його однакові числа, одержуємо рівноважні рівняння, тоб-то такі, що мають однакові корені, то приходимо до ось-яких правил:

1—Якщо до обох частин рівняння додамо по однаковому числу, то одержуємо рівняння рівноважне до даного.

2—Якщо від обох частин рівнання віднімемо по однаковому числу, то одержимо рівнання рівноважне до даного.

Так само, коли обидві частини рівнання:

$$3x - 8 = 22$$

помножимо яким-небудь числом, напр., 3, то одержимо рівнання

$$9x - 24 = 66$$

яке так само, як і дане, має коренем число 10. (Перевірте підстановкою).

Нарешті, коли обидві частини даного рівнання поділимо на одне те саме число, напр., на 2, то одержимо

$$\frac{3x-8}{2} = 11$$

яке теж має такий корінь, як і дане рівнання. (Перевірте це). Взагалі

3—Якщо обидві частини рівнання помножимо яким небудь числом, то одержимо рівнання рівноважне до даного.

4—Якщо обидві частини рівнання поділити на одне й те саме число, то одержимо рівнання рівноважне до даного.

Вправа 1—Дано рівнання $3x = 18$. Пошукайте корінь його. Помножте обидві частини його яким-небудь числом. Розвяжіть одержане рівнання й порівняйте їх корені.

2—Те саме зробіть з рівняннями

$$5x = 35; \qquad 13x = 91$$

3—Дано рівнання $5x + 1 = 8x - 14$ та $3x + 17 = 10x - 18$.

Перевірте, чи будуть вони рівноважними, якщо корінь першого з них є 5.

Розвязування рівнання першого степеню з одною невідомою

§ 3. Через те, що вишукувати корінь рівнання спробами дуже буває важко, бо доводиться робити дуже багато спроб, ми подамо найпростіший спосіб находження розвязки рівнань, або, як його називають, спосіб розвязування рівнань, що збудовано на підставі правил § 2-го. Припустімо, що треба розвязати таке рівнання

$$8x - 3 = 45$$

В лівій частині його міститься член з невідомим x, а саме, член 8x та відомий член 3. У правій частині маємо відомий член 45. Якби ми мали можливість це рівнання звести до такого виду, щоб в одній частині був тільки невідомий член, а в другій—відомий, як от $8x = 16$; $3x = 27$; $5x = 90$ й т. д., то розвязування даного рівнання не мало-б ніяких труднощів. Зробімо таке обернення. На підставі правила 1-го § 2 (цього розділу), коли додамо до обох частин рівнання по однаковому числу, то одержимо рівнання рівноважне до даного. Додамо до обох частин даного рівнання $8x - 3 = 45$ по 3. Тоді маємо

$$8x - 3 + 3 = 45 + 3$$

в лівій частині маємо два рівних числа; із них одне додається, а друге віднімається, вони зникають і ми дістаємо тоді таке рівнання:

$$8x = 45 + 3$$

Порівнюючи останнє до даного, помічаємо, що число 3, яке було в лівій частині зі знаком мінус (—), після обернення перейшло в праву частину зі знаком плюс (+), тоб-то **при перенесенні члена рівнання з одної частини у другу, знак цього члена зміняється на зворотній.**

Із рівнання $8x = 45 + 3$ маємо $8x = 48$; $x = \frac{48}{8} = 6$. Підставивши розвязку 6 у дане рівнання, побачимо, що ця розвязка задовольняє йому.

Розгляньте ще приклад $5x + 1 = 26$

Щоб звести його до такого виду, де-б у лівій частині було-б лише невідоме, а в правій—тільки відомі, треба, щоб в лівій частині не було члена $+1$. Для цього, за правилом 2-м § 2-го (цього розділу) віднімаємо від обох частин по 1. Дістаємо

$$5x + 1 - 1 = 26 - 1$$

У лівій частині $1 - 1$ зникають, після чого маємо

$$5x = 26 - 1$$

Тут також бачимо, що 1, яка була у лівій частині зі знаком +, перейшла в праву зі знаком мінус (—). Одержали

$$5x = 26 - 1 \text{ або } 5x = 25$$

$$x = 5$$

Таким чином, маємо правило обернення й розвязування рівнання:

Щоб розвязати рівнання, треба скупчити в одній частині його всі невідомі члени, а в другій—всі відомі, переносячи члени з одної в другу зі зворотними знаками (тоб-то + зміняється на —, а — зміняється на +). При цьому оберненні одержуємо рівнання рівноважне до даного, (тоб-то таке, що має однаковий корінь).

Приклади 1—Розвяжіть рівнання $18x - 6 = 60 - 15x$.

Скупчуємо всі невідомі в лівій частині, а відомі у правій. Для цього треба $15x$, що стоїть у правій частині, перенести в ліву, причому цей член міняє знак свій — на +; член 6 переносимо у праву частину теж з зворотнім знаком. Після цього маємо:

$$18x + 15x = 60 + 6$$

Зробивши сполучення подібних членів, дістаємо

$$33x = 66$$

$$x = \frac{66}{33} = 2$$

Перевірте підстановкою кореня у дане рівнання.

Приклад 2—Розвязати рівнання

$$8x + 4 = 80 - 11x \;.\;.\;.\;.\; (a)$$

Після перенесення, дістаємо:

$$8x + 11x = 80 - 4 \;.\;.\;.\;.\; (b)$$

або

$$19x = 76 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (c)$$

$$x = \frac{76}{19} = 4$$

Рівнання (a), (b), (c) є рівноважні; перевірте це, підстановляючи в кожне з них корінь $x=4$

Вправи—Розвязати рівнання

1 $8x - 73 = 27 - 12x$

2 $13x - 15 = 5x + 25$

3 $2y + 6 = y + 13.$

4 $6x + 11 + 4x = 5x + 61.$

5 $8x + 16 - x = 20 + 3x.$

6 $15x + 0{,}5 = 10 - 8x + 13{,}5.$

7 $9x = 3x + 2x + 60.$

8 $14x - 120 + 2x - 35 + 15 - x - 10 = 0.$

9 $15x - 12 - 8 = x + 12x - 16.$

10 $72x - 20x - 4 = 48x - 6x + 18.$

Складання рівнань

§ 4. За допомогою рівнань можна розвязувати такі задачі, що звичайним аритметичним способом розвязати буває дуже важко. На жаль, загальних правил для розвязування задач за допомогою рівнань не існує. Тут треба мати звичку що до застосування рівнань до розвязування задач, але загальні вказівки ось які:

Те число, що його шукаємо (те, що про нього йде мова в задачі) позначаємо якоюсь літерою *x* або *y*, як то звичайно водиться у математиків, припускаючи, що *x* це є якесь число. Шукають звязок поміж шуканим числом та числами даними у задачі. Цей звязок за допомогою знаків дій, як от додавання, віднімання, множення, ділення, зводять до того, щоб дістати два рівних вирази, тоб-то — рівнання; розвязуючи його, знаходять невідоме.

Приклад 1—Місячний заробіток робітниці на 20 крб. менший за заробіток робітника й на 35 крб. більший заробітку підлітка. Заробіток усіх трьох 225 крб. Знайти заробіток робітника, робітниці та підлітка.

Міркуємо так—Позначімо заробіток підлітка літерою x. Тоді через те, що робітниця одержує більше за підлітка на 35 крб., то її заробіток буде $x+35$. Заробіток робітника більше за заробіток робітниці на 20 крб., а тому, коли робітниця одержує $x+35$, то робітник $x+35+20$. Таким чином маємо

Заробіток підлітка x крб.

» робітниці $x+35$ крб.

» робітника $x+35+20$ крб.

Але по умові їх загальний заробіток є 225 крб.

Тому $x+x+35+x+35+20$ дорівнює 225 крб., що дає нам можливість скласти таке рівняння

$$x+x+35+x+35+20=225$$

$$3x+35+35+20=225$$

або

$$3x+90=225$$

$$3x=225-90$$

$$3x=135$$

$$x=\frac{135}{3}$$

$$x=45$$

Ми позначили літерою x заробіток підлітка, тому його заробіток дорівнює 45 крб., робітниці 80 крб., а робітника 100 крб.

Примітка: В поданій задачі можна було-б позначити літерою x заробіток робітника або робітниці. Ми склали-б другі рівняння, але результат вичислення заробітка робітника, робітниці й підлітка був-би той самий. Розвяжіть задачу, позначаючи літерою x заробіток робітниці.

2—В одному будинкові 49 мешканців, у другому 20. Скільки треба переселити із першого у другий, щоб у першому було мешканців удвічі більше за другий?

Позначимо шукане число мешканців літерою x. Коли з першого переселити x мешканців, то в ньому залишиться $49-x$. Ці x відійдуть до мешканців другого будинку, тому в ньому буде $20+x$ мешканців. За умовою задачі у першому будинкові буде мешканців удвічі більше за другий, тоб-то подвійне число мешканців другого будинку дорівнює числу мешканців першого. Отже, на підставі вищенаведеного, складаємо таке рівняння

$$49-x=2\ (20+x).$$

Раніш, ніж переносити члени, розмикаємо дужки у правій частині

$$49-x=40+2x$$

Далі, як у попередніх задачах

$$49 - 40 = 2x + x$$
$$9 = 3x$$
$$x = {}^{9}/_{3}$$
$$x = 3$$

Перевірте розвязку за умовою задачі.

Примітка: Коли в рівнанні маємо дужки, то треба раніш усього розімкнути дужки, тоб-то помножити суму або різницю, користуючись з правил:

1 — Щоб помножити суму будь-яким числом. досить помножити кожен доданок цим числом,

2 — Щоб помножити різницю яким небудь числом, досить помножити зменшеника й від'ємника цим числом.

Вправи до розділу 16

Розвяжіть рівнання

1 $3(x - 5) + 10 = 2(x + 1) + 5$.

2 $100 + 4(x - 1) = 5(x + 10) + 36$.

3 $8(x - 2) = 119 - x$.

4 $3(x + 1) + 5(x + 2) = 13 + 4(x + 5)$.

5 $6{,}5(x + 1) + 5(x + 2) = 10(x + 3)$.

Розвяжіть задачі за допомогою рівнань

1—В будинкові три поверхи; у першому на 20 мешканців менше, ніж у другому й на 6 більше, ніж у третьому. Всього населення у будинкові 200 чоловіка. Скільки мешканців на кожном поверсі? (Відп.—62, 82, та 56).

2—Два кооперативи з початку операційного року мали неодинакові капітали: капітал першого був утричі більший за капітал другого. Перший кооператив закінчив рік з прибутком 5000 крб., а другий—з прибутком 2000 крб., через це капітал першого кооперативу в кінці року був на 23 000 крб. більший за капітал другого. Найти первісний капітал кожного кооперативу. (Відп.—30 000 та 10 000 крб.).

3—При продажу краму за 420 крб. мали прибуток. Якби його продали за 350 крб., то мали-б прибутку в 2,4 рази менше. Найти вартість краму. (Відп.—300 крб.).

4—30 службовців одної установи зібрали 145 крб. на паливо; деякі внесли авансом по 5 крб., а деякі по 2,5 крб. Скільки було службовців тої й другої групи? (Відп.—28 та 2 чол.).

5—Артіль кустарів, маючи 20 000 крб., за одну частину цих грошей заорендувала млин, що дає 8% прибутку, а решту вклала в банк за 5%. Загальний прибуток артіли був 1450 крб. Скільки вони платили за млин? (Відп.—15 000).

6—Батькові 35 років, а синові 11. Через скільки років батько буде вдвічі старшим за сина? (Відп.—13 р.).

7—Декілька студентів, передплачуючи книги, повинні були внести по 8 крб., але три з них не мали грошей і тому решта товаришів зобов'язалась внести за них і доплатити по 4 крб. 80 коп. Скільки студентів брало участь у передплаті? (Відп.—5 ч.).

8—Підприємство маючи 15 000 крб., кладе одну частину в банк, що платить 6% річних, за другу купує 5% цінні папери. Загальний прибуток за рік 835 крб. Який капітал вкладено в банк? (Відп.—8 500 крб)..

9—Скільки фунтів срібла 84 та 56 проби треба взяти, щоб одержати стоп у 7 фунтів срібла 68 проби? (Відп.—3 та 4).

10—Яке число при діленні на 12 дає в остачі 9, а при діленні на 13 дає в остачі 7, причому частка в обох випадках однакова? (Відп.—33).

11—Із одного міста вийшов загін, який проходить 78 метрів за 1 хвилину. В той-же час назустріч йому виїхав з другого міста велосипедист, що проїжджає 780 метрів за хвилину. Через який час загін та велосипедист зустрінуться, якщо віддаль від одного міста до другого дорівнює 24,65 кілометрів? (Відп.—біля 29 хв.).

РОЗДІЛ 17

Рівнання першого степеню з одною невідомою (продовження). Відносні числа

Відносні числа

§ 1. Припустімо, що нам треба розвязати таке рівнання:

$$3x - 8 = 2x - 10$$

Перенесімо невідомі члени в ліву частину, а відомі у праву (за правилом § 3, розділ 16) маємо

$$3x - 2x = 8 - 10$$

Тут ми натрапили на випадок неможливого віднімання, бо-ж від 8 не можна відняти 10. Такі випадки при розвязуванні рівнань трапляються дуже часто й ту притичину, яку тут здибуємо, математика усуває тим, що утворює нові числа, так звані, *відʻємні числа*. Припустимо, що нам довелося віднімати 10 від 8. Якщо ми від 8 віднімемо 8, то матимемо — 0. Лишалося не віднято 2 одиниці. Це позначають так: пишуть число 2, а перед ним — (знак мінус), цеб-то $8 - 10 = -2$. Так само $10 - 15 = -5$. Отже, *віднімаючи* більше число від меншого, ми проробляємо звичайне віднімання, тоб-то від більшого віднімаємо менше, але перед різницею пишемо знак мінус.

Такі числа, що перед ними є знак мінус (—), звуть від'ємними числами. Додатними числами звемо звичайні числа, що перед ними є знак +; знак + у деяких випадках не пишуть. Таким чином, + 8 або 8; + 10 або 10 — числа додатні, а — 1; — 2; — 3; — 4; — 5; — 6; — 7; — 8 і т. д.—є числа від'ємні. Завдяки від'ємним числам маємо можливість проробляти всяке віднімання, а значить і розвязувати всякі рівнання, й крім того, від'ємні числа, як побачимо зараз, дають відповідь на питання про зміст розвязки тоді, коли ця розвязка припускає подвійне розуміння. Напр., якщо, розвязуючи задачу, ми дізналися, що, скажемо, паровоз відійшов від станції 20 км. Чи є ця розвязка цілком задовільною? Ні, бо у відповіді маємо ознаку лише величини пройденого шляху (20 км.), але нічого не сказано про напрямок, тоб-то, чи правобіч чи лівобіч від станції пройшов паровоз 20 км. Тому умовились, коли кажемо про величини, що їх можна витлумачувати в протилежних змістах, відмічати ці протилежні величини одну знаком +, другу знаком —.

Коли паровоз пройшов 20 км. праворуч від станції, то пишемо + 20, а якщо ліворуч, то пишемо — 20 [1]). Отже утворення від'ємних чисел дає можливість відмітити не лише число одиниць у даному числі, але й напрямок його, так-би мовити, надати числу якісну характеристику.

Розгляньмо ще такий приклад. Якщо нам скажуть, що температура повітря 5^0, то невідомо ще, чи то є тепло, чи холод, тому, що тут дається лише число одиниць якими виміряємо дану величину. Але зміна температури може йти так в сторону вище 0, як і в сторону нижче 0. Якщо умовимось ту температуру, яка вище 0, відмічати знаком +, а температуру, яка нижче за 0, знаком —, то коли 5^0 визначає тепло, пишемо + 5, а коли холод, то — 5; в першому випадкові вона додатня, а в другому — від'ємна. Ті величини, що їх можна позначити знаками + або —, тоб-то мати протилежний зміст — звуть протилежними величинами. Як от—рух праворуч, рух ліворуч, рух угору, рух униз, температура вище 0, температура нижче 0; прибуток—видаток; виграш—програш; капітал—борги й т. инш. Але не всякій величині можна надати завжди два значіння. Напр., коли в задачі маємо питання: скільки людей мешкає в будинкові й маємо відповідь — 5, то цей результат вказує або на неправильне розвязування задачі або на неправильну умову задачі, бо число людей є величина, що своїм змістом не припускає подвійного тлумачення і тому від'ємне число у відповіді, як результат розвязки задачі може бути правильним лише тоді, коли шукана величина може набувати різні протилежні значіння. Додатні та від'ємні числа складають ряд чисел, що їх називають відносними числами.

---

[1]) Можна цю умову замінити на цілком протилежну й зазначати + 20 напрямок ліворуч, а — 20 напрямок праворуч.

Додавання відносних чисел

§ 2. Повчімось додавати відносні числа. Те правило, що його виведено для двох доданків, буде вірне й для трьох, чотирьох і т. д. Кожен доданок будемо писати у дужках з відповідним знаком, тоб-то, додатні числа зі знаком $+$, а від'ємні зі знаком $-$. Ці знаки, що їх пишемо біля чисел, є знаки величини. Поміж дужками будемо писати знак додавання $+$, який стосується не до самого доданку, а позначає лише дію, що її треба пробити.

Перший випадок: $(+5)+(+3)$.

Звичайний випадок додавання: знаки в дужках $+$ біля 5 і біля 3 визначають зміст величини (напр. прибуток), а знак $+$, що поміж дужками визначає «додати», тоб-то, до 5 крб. прибутку додати 3 крб. прибутку; дістаємо 8 крб. прибутку.

Записуємо $(+5)+(+3)=+8$.

Другий випадок: один який-небудь доданок від'ємний. Припустімо, що нам треба до $(+5)$ додати (-3), що записуємо спочатку так $(+5)+(-3)=$.

Цьому додаванню можемо надати такий зміст: маємо 5 крб. прибутку $(+5)$ та ще збитку три крб (-3). В результаті 5 крб. прибутку та 3 крб. збитку дають 2 крб. прибутку, тоб-то результат буде такий самий, коли-б ми вичислили $+5-3=+2$.

Пишемо $(+5)+(-3)=+5-3=+2$.

Вправа—Розберіть та поясніть рівність $(-5)+(+3)=-2$.

Третій випадок: обидва доданки числа від'ємні $(-5)+(-3)$.

Це можна розуміти подібно до цього: 5 крб. збитку та ще 3 крб. збитку, маємо 8 крб. збитку, тоб-то: $(-5)+(-3)=-8$

Записуємо: $(-5)+(-3)=-5-3=-8$

Коли віднімаємо 5 одиниць та ще віднімаємо 3 одиниці, то всього віднімаємо 8 одиниць. Розглядаючи всі ці випадки, а саме

1 $(+5)+(+3)=+5+3=+8$

2 $(+5)+(-3)=+5-3=+2$

3 $(-5)+(-3)=-5-3=-8$

помічаємо, що у всіх випадках додавання відносних чисел знаки дій, що є поміж дужками, усуваються, а кожен доданок записується зі своїм знаком. Або инакше: при додаванні відносних чисел кожен доданок записують з його власним знаком, а потім роблять підрахунок (сполучення подібних членів).

Приклади

1 $(+7)+(-4)=+7-4=+3$

2 $(+5)+(-4)+(+2)+(-6)=+5-4+2-6=-3$

3 $(+6)+(-2)+(-4)+(+3)=+6-2-4+3=+3$

Це правило поширюється й на той випадок, коли доданки дано у вигляді літерових виразів, як от

1 $(+a)+(+b)=+a+b$

2 $(+a)+(-b)=+a-b$

3 $(-a)+(-b)=-a-b$

4 $(-a)+(+b)=-a+b$

Через те, що під кожною літерою *a* та *b* можна розуміти вирази, що складаються з декількох чинників, напр. x^2y^2, $4a^2xy$, $7a^2b^2c$ і т. д., або вирази, що складаються з декількох доданків, то, висловлюючи подане правило в загальному вигляді, маємо: щоб додати два або декілька виразів, треба до першого дописати всі члени другого, потім третього й т. д. виразів з їх знаками; +, що стоять поміж дужками усунути й зробити, якщо можливо, зведення подібних членів.

Вправи

1 $(+10)+(-4)+(+2)+(-6)=$

2 $(+2)+(-10)+(+8)+(+9)=$

3 $(+5)+(-2)+(+1{,}5)+(+3{,}75)=$

4 $(-8)+(-2)+(-5)+(+15)$

5 $(+a)+(+3a)+(-2a)+(+a)$

6 $(4a)+(+9a)+(-3a)+(+3a)=$

7 $(+4a)+(-5b)+(-3b)+(+2a)=$

8 $(+2x)+(-3y)+(-4)+(-5x)+(+5y)+(-3)=$

9 $(+8x^2y^2)+(+3x^2y)+(-10x^2y)=$

10 $(+3x^2y^2)+(+4xy)+(-x^2y^2)+(-5xy)+(+2x^2y^2)=$

11 $(-8{,}5a^2)+(3{,}5ab)+(-4ab)+(+6{,}25a^2)+(-1{,}5a^2)=$

12 $(3x+4y+5z)+(2x-2y+5z)+(-3x-4y+8z)=$

13 $(-8a^3+5a^2b)+(-3a^3-2a^2b)+5a^3+9a^2b)=$

14 $(+4a^2+2{,}5ab+3b^2)+(-2{,}5b^2-6{,}ab+4{,}5b^2)+$
$+(-3{,}5a^2+1{,}5ab-1{,}5b^2)=$

15 $(-3m^4+5m^4n^2-2n^2m^2)+(2m^4-2m^2n^2+7m^4n^2)=$

Віднімання відносних чисел

§ 3. Розгляньмо знову три випадки.

1—З м е н ш е н и к т а в і д ' є м н и к — д о д а т н і

$$(+10)-(+2)$$

Якщо від 10 крб. прибутку віднімемо 2 крб. прибутку, то одержимо 8 крб. прибутку, тоб-то

$$(+10)-(+2)=(+8)$$

Той самий результат маємо: $+10-2=+8$ отже

$$(+10)-(+2)=+10-2=+8$$

2—З м е н ш е н и к т а в і д ' є м н и к — в і д ' є м н і ч и с л а

$$(-10)-(-2)$$

Щоб зрозуміти випадок, пригадаємо, як робимо перевірку віднімання: додаємо різницю до від'ємника, якщо дію пророблено правильно, то дістанемо зменшеника. Отже, відняти від -10 число -2, це значить—знайти таке число, що коли додаємо його до -2, то дістанемо -10. Таке число є -8, бо $(-8)+(-2)=-10$, тому

$$(-10)-(-2)=-8$$

Той самий результат матимемо $-10+2=-8$, тому

$$(-10)-(-2)=-10+2=-8$$

3—О д н е з ч и с е л д о д а т н є, а д р у г е в і д ' є м н е.

$$(-10)-(+2)$$

Яке число слід додати до $+2$, щоб дістати -10?

Очевидно -12, бо $(-12)+(+2)=-12+2=-10$

Той самий результат дістанемо, зробивши

$$(-10)-(+2)=-10-2=-12$$

Розглядаючи всі три випадки, а саме

$$(+10)-(+2)=+10-2=+8$$

$$(-10)-(-2)=-10+2=-8$$

$$(-10)-(+2)=-10-2=-12$$

дізнаємося, що при виконанні цієї дії зменшеник у всіх випадках лишається без зміни, а від'ємник дописують до зменшеника зі зворотним знаком. Звідки правило:

Щоб відняти відносне число, треба до зменшеника дописати від'ємника з зворотним знаком і сполучити, коли можна, подібні члени.

Приклади

$$(+8)-(+4)=+8-4=+4$$
$$(+8)-(-3)-(+2)=+8+3-2=+9$$
$$(-6)-(-5)-(+2)=-6+5-2=-3$$

Це правило поширюється й на літерові випадки

$$(+a)-(-b)=+a+b$$
$$(+m)-(+n)=+m-n$$
$$(+m)-(+n)-(+p)=+m-n-p.$$

Тому, що під кожною літерою можна розуміти який-небудь вираз, який складається з декількох доданків, то правило віднімання в загальному вигляді буде таке:

щоб відняти один вираз від другого, треба до зменшеника дописати всі члени від'ємника з оберненими знаками й сполучити, якщо можна, подібні члени.

Вправи — Зробіть віднімання

1 $(+8)-(-3)-(+2)$

2 $(+20)-(-6)-(-5)$

3 $(+a)-(-3a)-(+4a)$

4 $(-5a)-(-7a)-(+3a)$

5 $(-2x)-(-4x)-(+6x)$

6 $(+4a^2)-(-3a^2)-(+5b^2)-(-3b^2)-(+5a^2)$

7 $(+8a^2+2ab-b^2)-(3a^2+2ab+b^2)$

8 $(3x^4+5x^2y^2-8y^4)-(-2x^4+5x^2y^2-3y^4)$

9 $(8a^3+5a^2b-4ab^2+6b^3)-(-3a^3+5a^2b^2+6ab^2-b^3)$

Проробіть зазначені дії (додавання й віднімання)

10 $(3a^2+5ax)+(a^2-ax)-(4a^2-3ax)$

11 $(8a^3+12a^2x^2+9ax^2-4x^3)-(4a^3+6a^2x)+(-4ax^2+9x^3)$

12 $(12{,}5p^2-4{,}7z^2+1{,}6t^2)-(-3{,}5p^2+3{,}2t^2)+(4z^2-0{,}8p^2)=$

Розвязати рівнання

13 $9x-(5x+6)=x$

14 $8x+(16-x)=20-(-3x)$

15 $3x-18=5x-(30+x)$

16 $-15+5x+(9-3x)=8x+45-(5x-4)$

Множення відносних чисел

§ 4. При множенні відносних чисел маємо чотири випадки:

1—Множеник і множник додатні числа

$$(+8)\,.\,(+3) = +24$$

(Це випадок аритметичного множення).

2—Множеник число від'ємне, а множник додатнє.

$$(-8)\,.\,(+3)$$

Щоб зрозуміти цей випадок, пригадаймо, що помножити одне число другим, значить, перше—повторити доданком стільки разів скільки у другому одиниць тому

$$(-8)\,.\,(+3) = -8 - 8 - 8 = -24$$

3.—Множеник додатнє число, а множник—від'ємне

$$(+8)\,.\,(-3)$$

Цьому множенню надаємо такий зміст: помножити від'ємним числом—значить—повторити множеник декілька разів від'ємником (а не доданком, як при аритметичному множенні). Тому

$$(+8)\,.\,(-3) = -8 - 8 - 8 = -24$$

4.—Обидва чинники—від'ємні

$$(-8)\,.\,(-3)$$

Тут, згідно змістові множення від'ємним числом, повторюємо множеник тричі від'ємником (для цього, як ми знаємо, треба змінити у множеника знака на зворотний)

$$(-8)\,.\,(-3) = +8 + 8 + 8 = +24$$

З вищенаведених прикладів

1 $(+8)\,.\,(+3) = +24$
2 $(-8)\,.\,(+3) = -24$
3 $(+8)\,.\,(-3) = -24$
4 $(-8)\,.\,(-3) = +24$

бачимо, що в першому й четвертому випадкові добуток має знак +, а у множеника й у множника знаки однакові; в другому та третьому—добуток має знак —, а знаки у множеника й множника різні. Скорочено це висловлюють так: при множенні однакові знаки дають +, а різні —.

Приклади

$(+18)\,.\,(+2) = +36$ $(-12)\,.\,(-12) = +124$

$(+15)\,.\,(-4) = -60$ $(-1{,}5)\,.\,(+3) = -4{,}5$

Якщо число чинників буде більше двох, то кожна пара від'ємних чисел дає добуток зі знаком +. Тому, коли число від'ємних чинників парне, то знак добутка є +, а якщо число цих чинників непарне, то всі парні дадуть добуток з +, а один чинник з мінусом надає остаточному добуткові знак —.

Приклади

$$(+3).(-2).(-4).(-2).(-5)=+240$$
$$(+3).(-2).(-4).(-2)=-48$$

Вправи

1 $(-1{,}5).(-4)=$
2 $(-1{,}5).(+3)=$
3 $(-2).(-8).(+1{,}5).(-3)=$
4 $(+2).(-3).(-2).(-1{,}2).(-4)=$

Ділення відносних чисел

§ 5. Досліджуючи ділення відносних чисел, ми будемо спиратись на ту властивість, що дільник дорівнює добуткові дільника та частки й розглянемо такі чотири випадки:

1—Діленик та дільник числа додатні

$$(+12):(+4)$$

Випадок аритметичного ділення: частка є рівна 3

$$(+12):(+4)=+3$$

2—Діленик додатнє число, а дільник від'ємне

$$(+12):(-4)$$

Тому, що діленик $(+12)$ є добуток від множення дільника (-4) часткою, а дільник – число від'ємне, то зрозуміло, що додатній результат буде лише тоді, коли частка буде мати той самий знак, що й дільник. От чому частку треба брати зі знаком —, і маємо

$$(+12):(-4)=-3$$

3—Діленик від'ємний, а дільник додатній

$$(-12):(+4)$$

В цьому випадкові діленик від'ємний, тому частка, коли її помножимо числом $(+4)$, повинна бути -12, а це можливо лише тоді, коли частка буде від'ємною, тоб-то -3, отже:

$$(-12):(+4)=-3$$

4—І діленик і дільник — числа від'ємні

$$(-12):(-4)$$

Щоб мати (-12), яким числом слід помножити (-4)? Числом $+3$, чи числом -3? Чому так?

$$(-12):(-4)=+3$$

Порівняйте всі ці випадки й виведіть правило. Чому воно походить на правило множення відносних чисел? Чи можна це правило формулювати так:

Коли діленик та дільник мають однакові знаки, то частка є додатньою, а коли різні — то від'ємною?

Вправи

1 $(-15):(-5)$

2 $(-15):(-6)$

3 $(-15):(+4)$

4 $\dfrac{(-15).(-2).(+3).(-4)}{-90}$

5 $\dfrac{(+8).(-3).(-5)}{+40}$

6 $(-6).(-5)+(-4).(+2)-(-6).(+4)$

7 $-80-(-3).(+4)$

8 $(+9):(+3)-(+18):(-6)$

Перетворення, що їх зустрічаємо, розвязуючи рівняння

§ 6. Розвязуючи рівняння з одною невідомою, запобігаємо таких перетворень, від яких дістаємо від'ємні числа. Напр., рівняння

$$3x-5=8x-20$$

перетворюємо на таке

$$+20-5=8x-3x$$

$$+15=+5x$$

$$x=\frac{15}{5}=3$$

Але ніщо не заважає зробити так

$$3x-8x=-20+5$$

$$-5x=-15$$

Не знаючи дій над від'ємними числами, останнє рівняння розвязати було-б важко, треба догадатися, що $-5x$ треба перенести у правий бік, а -15 у лівий. Але знаючи дії над від'ємними числами, легко зробити так

Коли $-5x=-15$, то

$$x=\frac{-15}{-5}=+3$$

Таким чином, запровадження від'ємних чисел, дозволяє спростити техніку розвязування рівнань, гуртуючи невідомі члени в лівій частині, відомі в правій або навпаки.

Крім того, операції з від'ємними числами дають можливість робити ще одне перетворення. Напр., в рівнанні:

$$-5x=-15$$

можемо обидві частини рівняння помножити одним тим саме числом. Від цього, як ми знаємо, дістаємо рівняння рівноважне даному (розд. 16, § 2). Помножаємо обидві частини рівняння числом -1. Одержуємо: $+5x=+15$. Тому маємо право в *рівнанні змінити знаки у всіх членів на зворотні*, бо зміна ця є не що инше, як множення лівої та правої частини рівняння числом -1.

Приклади

$$-29x - 12x + 37 = -168$$

Змінивши всі знаки на зворотні, дістаємо:

$$29x + 12x - 37 = 168$$

Далі розвязуємо за загальними правилами (доробіть).

Примітка: Відомо, що обидві частини рівнання можна помножити будь-яким числом, або поділити на якесь число й одержати рівнання рівноважне до даного. Це правило справедливе у всіх випадках, крім множення числом 0 і ділення на 0. Помноживши яке завгодно число числом 0, дістаємо в добуткові 0; $3 . 0 = 0$; $5 . 0 = 0$; $a . 0 = 0$.

Так само $0 . 3 = 0$; $0 . 5 = 0$; $0 . a = 0$.

Якщо-ж 0 поділити на яке-небудь число, то дістаємо 0. Це цілком зрозуміло через те, що діленик дорівнює дільникові, помноженому часткою. Завжди $\frac{0}{a} = 0$; $\frac{0}{2} = 0$; $\frac{0}{105} = 0$ й т. д. Ділення якого-небудь числа на 0 не має змісту й ділення на 0 є неможлива дія. Справді бо, поділити яке-небудь число a на 0 це, значить, знайти таку частку, що коли її помножимо дільником, тоб-то числом 0, то матимемо a, але такого числа не існує, бо яке-б число ми не помножали числом 0, дістанемо 0, а не число a, тому ділення на 0 неможливе.

Рівнання з дробовими членами

§ 7. Нехай треба розвязати рівнання

$$2x + \frac{x+2}{4} = x + \frac{5x+28}{6},$$

яке має дробові члени.

Щоб позбавитися в ньому від дробових членів, зводимо всі члени до спільного знаменика. Спільний знаменик буде 12, додаткові чинники: для члена $2x$ число 12, для $\frac{x+2}{4}$ чинник 3, для x чинник 12, для $\frac{5x+28}{6}$ чинник 2.

Тоді рівнання рівноважне даному буде таке:

$$\frac{24x}{12} + \frac{3x+6}{12} = \frac{12x}{12} + \frac{10x+56}{12}$$

Якщо тепер помножимо всі члени останнього рівнання числом 12, то, як відомо, одержимо знову рівнання, рівноважне до даного. Щоб помножити кожний член числом 12, досить відкинути знаменика 12 у всіх членів, тоді дістаємо:

$$24x + 3x + 6 = 12x + 10x + 56$$

що вже розвязуємо за відомими правилами.

Корінь цього рівняння $x = 10$ буде корінем даного рівняння Перевірте це.

Для спрощення розвязування, звичайно запис

$$\frac{24x}{12} + \frac{3x+6}{12} = \frac{12x}{12} + \frac{10x+56}{12}$$

не пишуть, а від даного рівняння прямо переходять до рівняння, де знаменика вже відкинуто.

Напр. $\overbrace{\frac{8-x}{6}}^{2} + \overbrace{\frac{3x-5}{3}}^{4} = \overbrace{\frac{x+6}{2}}^{6} - \overbrace{\frac{x}{3}}^{4}$

Спільний знаменик 12; додаткові чинники 2, 4, 6, 4 надписуємо над членами рівняння. Потім помножаємо чисельників додатковими чинниками, відкидаємо знаменика й дістаємо

$$16 - 2x + 12x - 20 = 6x + 36 - 4x$$

або $16 - 20 - 36 = 2x - 12x + 6x - 4x$

$$-40 = -8x$$

помножаємо обидві частини числом -1,

маємо $40 = 8x$

й $x = \frac{40}{8} = 5$

Примітка: Слід зауважити ось що: коли перед дробовим членом рівняння маємо знак —, то він стосується до всього чисельника цього дробового члена, цеб-то помножаючи чисельника додатковим чинником і відкидаючи знаменика, записуємо результат множення з відповідно зміненими знаками. Напр. $x - \frac{x-4}{2} = 7$. Спільний знаменик є 2. Тому дістаємо $2x - x + 4 = 14$; $x = 20$. Тому, що перед дробом $\frac{x-4}{2}$ маємо знак —, то відкидаючи спільного знаменики, в чисельникові дроба $\frac{x-4}{2}$ зміняємо знаки й пишемо $-x + 4$.

Вправи

1 $30 + \frac{2x+1}{3} = 5x - \frac{211-x}{5}$

2 $\frac{x+4}{2} + \frac{16+x}{13} = \frac{10x+134}{26}$

3 $\frac{8-5x}{10} + \frac{3x-8}{5} + \frac{7-x}{3} = \frac{4-x}{3} + \frac{x-1}{4}$

4 $\frac{x-1}{4} + \frac{3x-8}{5} = \frac{5x-8}{10} - 1$

5 $\frac{5x+3}{7} + \frac{10-2x}{3} = -21$

6 $15x + \frac{3(x+1)}{5} = \frac{5(x+2)}{3} - \frac{8(x-1)}{4} + \frac{20x+38}{2}$

7 $\frac{x-9}{7}=\frac{2x-56}{4}+\frac{128-x}{14}-\frac{7x}{28}$

8 $\frac{1}{5}(18-x)+\frac{1}{4}(3x+7)=10-x$

9 $\frac{7x-4,1}{3}-\frac{5x-3,1}{7}=\frac{9x-9,5}{4}$

10 $\frac{x+17}{5}-\frac{1}{2}=\frac{47-3x}{4}-2x$

Розвязати задачі:

1—Паровоз пробігає віддаль між двома станціями з хуткістю 36 км. за годину й повертається зараз назад з хуткістю 21 км. за годину. На ввесь пробіг в обидва кінці він витрачає 19 годин. Яка віддаль між станціями? (Відп.—252 км.).

2—На певній віддалі переднє колесо брички зробило на 100 оборотів більше за заднє. Визначити віддаль, пройдену бричкою, якщо відомо, що довжина обводу переднього колеса 3,3 метра, а заднього 4,2 метра. (Відп.—1540 м.).

3—Дві особи, які мають 10 000 крб., купують будинок. Перший має можливість купити його, якщо до його грошей додати $^1/_5$ капіталу другого. Другий може купити будинок, якщо до його грошей додати $^{11}/_{15}$ капіталу першого. Скільки грошей має кожен? (Відп.—7500 та 2500 крб.).

4—Стоп цини й міди 46 кг. вагою губить у воді 4 кг. Відомо, що ціна губить у воді $^1/_{12}$ своєї ваги, а мідь—$^1/_{10}$. Скільки кг. цини й міди у стопі? (Відп.—36 та 10).

5—Одна фабрика може виконати якесь замовлення у 20 день, а друга в 30 день. За скільки днів вони виконують його одночасно працюючи? (Відп.—12 дн.).

6—Ванну можна налити водою двома ґрантами. Один ґрант вливає 45 літрів за 1 хвилину й наповнює ванну на $5^1/_3$ хвилини швидше, аніж другий ґрант, що наливає 30 літрів за хвилину. Найдіть вміст. ванни (Відп.—480 л.).

7—Один робітник одержує на 12 крб. більше за другого й, крім того, одержав ще від другого 2 крб. боргу. Після цього виявилось, що перший мав у двічі більше за другого. Скільки одержує кожен? (Відп.—30 та 18).

8—Капітал поділили на 2 частини, що відносяться одна до одної, як 3 : 2. Першу було віддано в рост за $4\frac{1}{2}\%$, а другу за $5^1/_4\%$. Спільний прибуток 480 крб. Визначити капітал. (Відп.—10 000).

9—На заводі маємо сорти чавуну з 1% кремнію і з 3% кремнію. Скільки треба взяти кожного сорту, щоб мати 80 тон чавуну з 1,5% кремнію? (Відп.—60 та 20).

10—У Москві пуд кожі (підошовної) коштує 110 крб.. У Ленінграді така сама кожа коштує 80 крб. пуд. Провоз коштує 8 коп. з пуда й верстви. Де міститься між Ленінградом та Москвою станція, для якої вартість кожі, виписаної з Москви й з Ленінграду буде однакова? Віддаль між Москвою та Ленінградом 650 кілом.

Деякі складніші випадки при розвязанні рівнянь

§ 8. Нехай треба розвязати рівняння

$$(x+3)(x+2)=x^2-4+8$$

Це рівняння відрізняється від тих, що ми їх розглянули тим, що невідоме не першого, а другого степіню й, крім того, для його розвязування треба проробити дії, що зазначено у лівій частині; тоб-то множення многочлена многочленом. Як проробляти таке множення? Коли нам доводиться помножити 4325 числом 126 (многоциферне число многоциферним), то ми помножаємо ввесь множеник спочатку числом 6, потім числом 2 й, нарешті, числом 1. (Помножаємо кожним членом множеника тому, що $126=100+20+6$ або 1 сотня + 2 десятки + 6 одиниць. Ці порядки є членами множеника 126). Подібно до того, як при множенні многоциферного числа многоциферним, помножаємо множеника кожним членом множника, так і при множенні многочлена многочленом: спочатку всього многочлена помножаємо першим членом множника, потім другим і т. д. доки не переберемо всіх членів множника. Тому $(x+3)(x+2)=(x+3).x+(x+3).2$.

Звідци $(x+3).x=x^2+3x$, $(x+3).2=2x+6$, або $(x+3).(x+2)=x^2+3x+2x+6$ маємо ось яке правило:

Щоб помножити многочлен многочленом, треба кожен член множеника помножити кожним членом множника (за правилами знаків). Після множення, якщо є подібні члени, роблять сполучення їх. Таким чином дане рівняння перетворюється на отаке

$$x^2+3x+2x+6=x^2-4x+8,$$

далі $x^2+3x+2x-x^2+4x=8-6$;

члени $+x^2$ та $-x^2$ зникають і тоді

$$3x+2x+4x=8-6$$

$$9x=2$$

Отже бачимо, що иноді невідомі другого степіню не утрудняють розвязування рівняння, бо після перетворень зникають.

Вправи до розділу 17

Зробіть приклади на множення многочлена многочленом

1 $(x+5)(2x-4)$

2 $(3x^2+2x-1)(x-5)$

3 $(5a^2-2ac+b^2)(a-b)$

4 $(a^3-a^2b+ab^2-b^2)(a+b)$

5 $(3x^4y^4-2x^2y^2-8)(xy-2)$

6 $(x+2)(x+3)(x+4)$

7 $(3ax-1)(5ax+1)$

8 $(a+b)(a+b)$

9 $(a+b)(a-b)$

10 $(a-b)(a-b)$

Розвязати рівнання

1 $(x+2)(x-1)=x^2-4x$

2 $(x^2+4)(x-5)=x^3-5x^2+18x-48$

3 $x(x-1)-3(x+2)+x(x-5)=2x^2+5x-8.$

РОЗДІЛ 18

Синус та косинус. Обвід та поверхня кола

Поняття про синус кута

§ 1. Між елементами, цеб-то боками та кутами прямокутнього трикутника існує досить просте взаємовідношення. З цього взаємовідношення дуже часто користуються на практиці, а тому ми його зараз і зазначаємо тут (рис. 98).

Візьмім який завгодно прямокутній трикутник ABC й назвімо його гострий кут біля вершка A одною літерою α (грецька літера— читають альфа). Найдімо відношення тої прямки, що лежить проти кута α до протипрямки. Це буде $\frac{BC}{AB}$. Якби ми продовжили боки кута α як завгодно й збудували прямокутнього трикутника ADF, то й там відношення $\frac{DF}{AD}$ буде таке, як $\frac{BC}{AB}$ (бо наші трикутники подібні). Продовжуючі ще далі боки кута α й будуючи прямокутні трикутники, ми знов упевнюємось, що величина відношення не змінюється, бо

$$\frac{BC}{AB}=\frac{DF}{AD}=\frac{GH}{AG}$$

на підставі подібности трикутників.

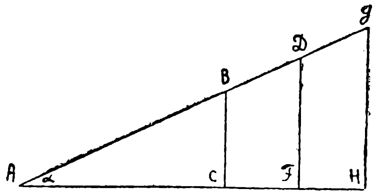


Рис. 98.

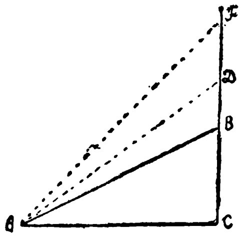


Рис. 99.

З другого-ж боку, коли ми візьмемо инший кут, то вже відношення буде можливо не таке. Зробіть такий дослід. З допомогою лінійки та косинця нарисуйте прямого кута ACB (рис. 99) і поведіть декілька простих з точки A. Це будуть прості AB, AD, AF. Найдіть тут відношення $\frac{BC}{AB}, \frac{DC}{AD}, \frac{FC}{AF}$. Ви упевнитесь, що ці відношення вже не рівні одне одному.

Вправа 1—Нарисуйте який завгодно прямокутний трикутник і другий, що має такий самий гострий кут, як і перший. Найдіть відношення прямки, що лежить проти одного кута до протипрямки в кожному з трикутників. Чи рівні між собою ці відношення й чому?

2—Нарисуйте два прямокутні трикутники, що не мають рівних кутів. Чи подібні ці трикутники? Чи можуть бути в даному разі однакові відношення прямки до протипрямки в цих трикутниках?

Отже, бачимо, що для даного гострого кута, незалежно від довжини його боків, відношення прямки, що лежить проти кута α, до протипрямки не міняється від зміни боків, а міняється від зміни самого кута α.

Це відношення має назву синус (лат. мовою Sinus) й записують

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}.$$

Питання—Чи можна казати, що синус є функція кута α?

Практичні приклади, де вживають синус

§ 2. З синусів можна часто користуватись на практиці.

1—Нехай ми знаємо, що дорога підноситься вгору і кут (рис. 100) $CAB = 12^0$. Наскільки ми підносимося над поверхнею землі, коли проходимо 5 клм.?

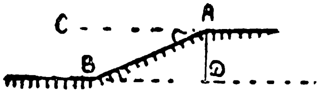


Рис. 100.

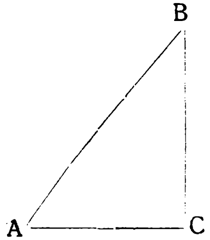


Рис. 101.

Нехай $BA = 5$ км. $CAB = ABD$ (чому?). З трикутника ABD находимо $\sin 12^0 = \frac{AD}{AB.}$ Припустім далі, що вимірюванням знайдено, що $\sin 12^0 = 0{,}2$. Тоді наша рівність дає нам $0{,}2 = \frac{AD}{5,}$ або $AD = 0{,}2 . 5 = 1$ км.

2—Припустім, ми знаємо, що будинок заввишки 6 м. Треба вибрати драбину, щоб вона утворювала кут біля землі 66^0 і досягала до даху будинку. Якої довжини драбина? (Рис. 101).

Нехай ВС мур будинка, АВ драбина, кут $BAC = 66^0$. Тоді $\sin 66^0 = \frac{BC}{AB}$, або підставляючи числа $\sin 66^0 = \frac{6}{AB}$. Якби знайшли, що $66^0 = 0,9$, то мали-б рівнання

$$0,9 = \frac{6}{AB}.$$

Звідци, на підставі властивости відношень або рівнань $AB = \frac{6}{0,9}$, а звідци $AB = 6,66$ м. (наближ.). З цих двох прикладів ми бачимо, як потрібні синуси в практичних питаннях.

Таблиці значінь синусів

§ 3. Щоби зручніше було робити різні розрахунки, де трапляються синуси, ці синуси для різних кутів в межах від 0^0 до 90^0 вираховано й записано в спеціяльних таблицях. Зверніть увагу, що ми кажем «вираховано синуси в межах від 0^0 до 90^0». Коли нам дано кут 0^0, то власне кажучи, ніякого кута тут немає, бо дана проста не відхиляється від свого первісного положення. А якщо нема кута, не можна створити й трикутника й не можна знайти прямки, що лежить проти кута 0^0. Инакше кажучи, ця прямка є 0, а тому й відношення її до протипрямки, яка-б та не була, є також 0.

У цьому можна упевнитися инакше. Якщо візьмемо який завгодно кут α й нарисуємо прямокутнього трикутника, то беручи прямку, що є проти даного кута α й поділяючи її на протипрямку, ми побачимо, що зменшуючи кута, ми зменшуємо й синус. Коли-ж кут буде дуже маленький, величина синуса буде теж дріб дуже малий, а коли, нарешті, кут цілком пропаде, стане рівним нулеві, й синус кута цього зникає, обертається в 0.

Що торкається до синуса 90^0, то це треба розуміти так. Коли ми збільшуємо один з гострих кутів прямокутнього трикутника, то збільшується й протилежний катет (прямка). Досвід може упевнити нас, що чим більше буде кут наближатися до 90^0, то більше буде наближатися до 1 синус цього кута. Цю думку ми й висловлюємо словами

$$\sin 90^0 = 1.$$

У таблицях синуса ми побачимо стовпчики, що мають на горі різні назвиська. У першому стовпчикові (або краще двох перших) ліворуч та останньому (теж двох останніх) праворуч, на кожній сторінці ми маємо величини кута, що їх означено через кожні $10'$ [1]). Ці стовпчики означено знаками градусів та мінут (^{0} та $'$ див. таблицю). Слід тільки звернути увагу, що в тому разі, як ми дивимося на числа градусів та мінут на лівому боці сторінки, вони зростають згори донизі, а на правому боці сторінки на відворот—кути зростають знизу догори.

[1]) Мінута (її позначають знаком $'$) є шістдесята частина градуса.

Безпосередньо за першим стовпчиком ми побачимо далі з лівого боку стовпчик, що має назву на горі sinus, а безпосередньо перед останнім стовпчиком на сторінці теж побачимо стовпчика, що має на споді назву sinus. В цьому останньому стовпчикові назву написано знизу, щоб звернути увагу, що тепер кути рахуються знизу догори.

Розгляньмо приклади. Нехай нам потрібно знайти $\sin 32^0\ 40'$. Находимо в двох перших стовпчиках з лівого боку сторінки 32^0 й нижче від нього в напрямку до 33^0 вишукуємо $40'$. Проти цього, в стовпчикові, що його згори позначено, находимо 0,5398. Це є той синус, що шукаємо. Отже—$\sin 32^0\ 40' = 0{,}5398$. (У таблицях 0 цілих пропущено для скорочення).

Другий приклад—Знайдімо, який є $\sin 71^0\ 10'$. Шукаючи 71^0 з лівого боку, на сторінках таблиці ми його не помітимо, тому переходимо на правий бік сторінок і там знаходимо 71^0. Мінути тепер шукаємо вище від 71^0 (в напрямкові від 71^0 до 72^0). Проти числа $10'$ у стовпчикові що зі споду має напис sin находимо 0,9465. Це нам потрібний синус. Маємо $\sin 71^0\ 10' = 0{,}9465$.

Запам'ятаймо, що з лівого боку ми шукаємо кути до 45^0, а кути більше від 45^0 вишукуємо вже з правого боку.

Вправи—Найдіть $\sin 30^0\ 50'$; $\sin 46^0$; $\sin 59^0\ 30'$; $\sin 40^0\ 20'$.

З тих саме таблиць ми можемо знайти й навпаки величину того кута, що знаємо його синус. Нехай шукаємо, який кут має синус 0,3311. Тут ми дивимося на стовпчик з назвою sinus нагорі. Якщо ми починаємо дивитися на цей стовпчик від самого початку таблиць, ми зараз помітимо, що величина синусів усе зростає поступово. З цього ми й користуємося, шукаючи, де саме в таблицях є під знаком sin число 0,3311. Коли знайдемо це число, звертаємо увагу, скільки мінут та градусів відповідає цьому синусові. Без великих зусиль ми знаходимо (на лівому боці сторінки) $19^0\ 20'$.

Може бути, що ми не знайдемо даного числа у стовпчиків, з лівого боку сторінки з написом sin. Напр., який це кут, що його синус є 0,7642. Не находячи цього числа у стовпчикові з лівого боку з написом Sin, ми переходимо до передостаннього стовпчика з правого боку, що має зі споду напис Sin. Там ми помічаємо, що проти числа 0,7642 стоїть $50'$ нижче від нього 49^0.

Таким чином, наш кут $49^0\ 50'$.

Умовімося—такі рівності, де шукаємо невідомого кута, записувати так $\sin x = 0{,}3311$, а звідци $x = 19^0\ 20'$—та $\sin x = 0{,}7642$ й звідци $x = 49^0\ 50'$. Таким чином ми досягаємо одноманітности, визначаючи невідому величину літерою x, як це робимо й у инших випадках.

Косинус

§ 4. Часто трапляються випадки, коли нам потрібно знати звязок між протипрямкою та прямкою, що прилягає до даного кута, а не лежить проти нього (див. рис. 102).

Повертаємося знов до кута α. Звязок поміж прямкою BC та протипрямкою AB нам дає синус кута α. А звязок поміж протипрямкою та прямкою AC дає косинус. Ми означімо косинус кута α символом $\cos\alpha$ й косинусом кута α будемо звати відношення прямки AC до протипрямки AB.

Взагалі, **косинус даного кута є відношення прямки, що прилягає до цього кута, до протипрямки.**

Тим саме шляхом, як це ми зробили для синуса, ми можемо легко впевнитися, що величина косинусу даного кута не залежить від довжини боків прямокутнього трикутника (перевірте це, як в § 1) та що косинус є функція кута, цеб-то, він змінюється від зміни величини кута. (Чому? Див. § 1).

Розглядаючи просто рисунок, ми побачимо, що зменшуючи кута, ми наближаємо прямку, що прилягає до кута, до протипрямки, а це висловлюють инакше: **від зменшення кута косинус наближається до 1.** Збільшуючи-ж кута до 90^0, ми зменшуємо косинуса, а коли кут досягає 90^0, вже не можна створити трикутника, прилеглої до кута прямки зовсім нема й ми вважаємо, що $\cos 90^0 = 0$.

Ті саме таблиці, що й для синусів, містять у собі значіння косинусів. Косинуси ми вишукуємо тільки зі стовпчика з написом cosin. на горі, якщо кут менший від 45^0, та зі стовпчика з написом cosin. на споді, якщо кут 45^0 або більший за 45^0.

Приклади: $\cos 29^0\ 30' = 0{,}8704$, $\cos 51^0\ 50' = 0.6180$.

Вправа 1—Знайдіть за таблицями: $\cos 32^0\ 40'$; $\cos 61^0\ 10'$.

2—Знайдіть кута x, якщо $\cos x = 0{,}5446$, якщо $\cos x = 0{,}6988$.

3—Потрібно з даного круглого оцупалка витесати шостикутнього бруса з рівними боками. Знайти віддаль між протилежними боками перерізу цього бруса — цеб-то його грубину, якщо радіус кола 12 см.

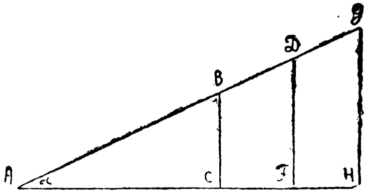


Рис. 102.

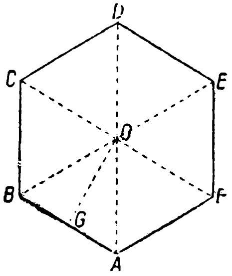


Рис. 103.

Розвязування: Розбиваючи кола на 6 рівних частин та сполучаючи осередок з точками поділу (рис. 103), маємо шостикутника ABCDEF з рівними боками—правильного шостикутника. Тому, що сума кутів біля 0 є 360^0, кожний кут AOB, BOC і т. д. дорівнює

$\frac{360^0}{6}=60^0$, а кут $AOG=30^0$. З трикутника AOG маємо $\cos 30^0=$ $=\frac{OG}{AO}$, або називаючи OG літерою x, $\cos 30^0=\frac{x}{12}$ та, позбавившись від знаменика, $x=12.\cos 30^0$. З таблиць находимо, що $\cos 30^0=0{,}866$. Отже $x=12.\ 0{,}866=10{,}4$ см.

4—Який мусить бути найменше завгрубшки круглий оцупалок, щоб з нього можна було виточити восьмикутню штангу завгрубшки 20 мм.?

У даному разі, міркуючи, як у зад. 3, ми матимемо трикутника з вершком в осередкові кола. Цей кут буде половина від $\frac{360^0}{8}$ цеб-то $22^0\ 30'$. Один із боків трикутника буде половина грубини (віддалі між протилеглими боками) восьмикутника—10 мм., це бік прямка, біля кута $22^0\ 30'$, а протипрямку x мусимо шукати.

Отже $\cos 22^0\ 30'=\frac{10}{x}$, або $x=\frac{10}{\cos 22^0\ 30'}$. (Чому так?)

З таблиць буде $x=10.8$. Це є радіус кола, а грубина, цеб-то поперечина, є 21,6 мм.

Одна залежність між синусом та косинусом

§ 5. Розглядаючи таблиці синусів та косинусів, ми побачимо, що $\sin 30^0=\cos 60^0$; $\sin 57^0\ 20'=$ $=\cos 32^0\ 40'$ і т. д. Неважко упевнитися, що це не випадкове явище (рис. 104). Нехай маємо у трикутникові ABC, що один з гострих кутів дорівнює A, а другий B градусам (ступеням), цеб-то літерою означімо й величину відповідного кута.

Буде $A+B=90^0$ (Чому?) Беручи косинуси та синуси цих кутів, маємо

$$\sin A=\frac{BC}{AB};\ \cos A=\frac{AC}{AB},\ \sin B=\frac{AC}{AB};\ \cos B=\frac{BC}{AB}.$$

Порівняючи між собої ліві частини рівностей, дістанемо

$$\sin A=\cos B;\ \cos A=\sin B.$$

за умовою, що $A+B=90^0$ або $B=90^0—A$. Через це можемо казати, що для кожного значіння x в межах від $x=0$ до $x=90$, ми маємо

$$\sin x=\cos(90^0-x)\ \text{і}\ \cos x=\sin(90^0-x).$$

Правильні многокутники

§ 6. Більшість многокутників, що з ними здибуємося в практичному житті, це є правильні многокутники, цеб-то многокутники, що в них всі боки та всі кути рівні один одному. Такі многокутники можна нарисувати, якщо ми беремо коло й поділяємо його на рівні частини. Поділивши коло, наприклад, на 10 рівних частин точками й сполучивши всі точки поділу послідовно одну з одною, матимемо правильного десятикутника. Цей многокутник має ще назву вписаний, бо він у середині кола. Можна зробити ще описаного десятикутника, проводячи дотичні до кола через усі послідовні точки поділу кола. Луч кола описаного називають луч многокутника, осередок цього кола є осередок многокутника, а сторч з осередку до боку многокутника називають апотемою многокутника (пор. Розд. 11 § 9).

Функції синус та косинус допомагають нам нарисувати правильного многокутника, обчислити його бік (чи ввесь обвід) та поверхню.

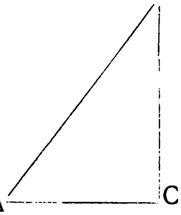


Рис. 104.

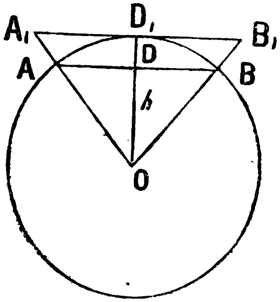


Рис. 105.

Нехай, наприклад, нам потрібно нарисувати якогось вписаного многокутника з числом боків n (число n яке завгодно 3, 4, 5 і т. д. число ціле). Тому, що всі кути біля вершка 0, що під цими кутами поведено луч кола в точки поділу, мусять бути рівні один одному, на кожний кут припадає $\frac{360^0}{n}$. Рисувати такого кута з допомогою транспортиру незручно, бо транспортир не досить удосконалений, в даному разі, прилад і кута $\frac{1}{2}^0$, $\frac{1}{4}^0$ він уже, звичайно, не вказує. Щоб вказати точніший спосіб рисування, припустимо, що AB (рис. 105) є бік n-кутника (так кажемо замість «многокутника з n боками»). В такому разі $AOB = \frac{360^0}{n}$, а $AOD = \frac{AOB}{2}$, або $AOD = \frac{180^0}{n}$. Назвемо $\angle AOD = \alpha$.

З трикутника AOD, якщо луч $AO = r$, ми знаходимо $\sin a = \frac{AD}{AO}$ або $\sin \alpha = \frac{AD}{r}$ і $AD = r \cdot \sin \alpha$.

Знаючи AD, ми знайдемо й AB і матимемо

$$AB = 2r \sin \alpha.$$

Тому, що синуси в таблицях вираховано з точністю до 0,0001, цей спосіб далеко зручніший, ніж відкладання кута за транспортиром. Знаючи довжину боку AB, ми відкладаємо його послідовно на колі й маємо правильного вписаного многокутника (може трапитися й тут незначна помилка, але її виправляють на око або техніку рисування провадять иншим способом, що нам тут непотрібний).

Вправа 1—Поясніть, як обчислити довжину AB, боку описаного n-кутника, знаючи промінь кола та число n.

2—Яке найбільше коло (цеб-то яка поперечина цього кола) можна вифрезувати з дванадцятикутника, де кожний бік 10 см.?

Знаючи один бік правильного многокутника, ми можемо дуже легко найти його обвід (суму всіх боків), бо для цього доводиться тільки довжину одного боку помножити числом боків многокутника. Можна далі знайти й поверхню правильного многокутника, бо вона складатиметься з суми поверхонь трикутників AOB, що вони всі рівні один одному. Тут доведеться обчислити спочатку висоту трикутника $OD = h$, але це вже залишаємо зробити самому читачеві.

Інтерполяція

§ 7. У таблицях, що з них ми шукаємо синуси та косинуси, ці функції дано, звичайно, через $10'$. У більшості випадків такої точности на практиці досить. Але все-ж можуть трапитися випадки, коли нам доводиться шукати синус та косинус такого кута, що його ми не знайдемо в таблицях. У цих випадках користуються з, так званої, інтерполяції. Вкажемо на прикладах, у чому вона полягає.

Нехай нам потрібно вишукати $\sin 13^0\ 22{,}5'$. У таблицях ми не знаходимо цього кута. В такому разі шукаємо 2 найближчі до даного кути, щоби межи ними був даний (отже один кут менший від даного, другий більший від нього).

З таблиць буде $\left\{ \begin{array}{l} \sin 13^0\ 30' = 0{,}2334 \\ \sin 13^0\ 20' = 0{,}2306 \end{array} \right.$

З цих даних бачимо, що коли кут змінюється на $10'$, його синус змінюється, а саме—з р о с т а є на 0,0028.

Даний нам кут $13^0\ 22{,}5'$ змінився, порівнюючи до меншого ($13^0\ 20'$), на $2{,}5'$, а тому можемо, вишукати на скільки збільшиться його синус, припускаючи пропорціональність змін кута та змін синуса, з пропорції (x визначає зміну синуса)

$$x : 0{,}0028 = 2{,}5 : 10;$$

звідци $x = 0{,}0007$. Отже наш синус зріс, порівнюючи до $13^0\ 20'$, на 0,0007 або инакше $\sin 13^0\ 22{,}5' = 0{,}2306 + 0{,}0007$ і нарешті $\sin 13^0\ 22{,}5' \doteq 0{,}2313$.

Другий приклад--Знайти $\cos 42^0\ 56{,}3'$.

Знаходимо з таблиць $\left\{ \begin{array}{l} \cos 43^0 = 0{,}7314. \\ \cos 42^0 50' = 0{,}7333. \end{array} \right.$

Коли кут зростає на $10'$, його косинус спадає на 0,0019. Припускаючи пропорціональність, як вище, зазначаючи літерою x зміну косинуса, що відповідає зміні кута на $6,3'$, маємо

$$x : 0,0019 = 6,3 : 10,$$

а звідци, обмежуючись чотирма десятковими знаками

$$x = 0,0012.$$

Після цього $\cos 42^0\ 56,3' = 0,7333 - 0,0012$

і нарешті $\cos 42^0\ 56,3' = 0,7321.$

Треба звернути увагу на те, що, шукаючи синуса, ми додаємо до синуса меншого кута знайдену зміну, а шукаючи косинуса—віднімаємо від косинуса меншого кута знайдену зміну. Ця різниця залежить від того, що від зросту кута синус зростає, а косинус спадає.

Нарешті, вкажемо ще на двох прикладах, як шукати кута, знаючи його синуса або косинуса, з допомогою інтерполяції.

Який кут, якщо його синус дорівнює 0,7853?

Цю рівність записують, як ми знаємо $\sin x = 0,7853$, або инакше $\operatorname{arc\,sin} 0,7853 = x$. Останній запис читають арк синус $0,7853 = x$, і він вказує нам: знайти кута (або дугу, якщо вважати, що це є кут з вершком в осередку кола), що його синус дорівнює 0,7853.

З таблиць маємо два синуси, що між ними є наш

$$0,7862 = \sin 51^0\ 50'.$$
$$0,7844 = \sin 51^0\ 40'.$$

Різниця між синусами 0,0018 відповідає $10'$. Наш синус зріс, порівнюючи до синуса меншого кута, на $0,7853 - 0,7844 = 0,0009$.

Через це відповідний нашому даному синусові кут зріс не на $10'$, а менше. На скільки саме він зріс, знайдемо з пропорції

$$x : 10' = 0,0009 : 0,0018,$$

а звідци $x = 5'$. Отже, наш кут $51^0\ 40' + 5' = 51^0\ 45'$.

Розвязавши, можемо записати $\sin 51^0\ 45' = 0,7853$, або $\operatorname{arc\,sin} 0,7853 = 51^0\ 45'$.

Другий приклад — Знайти x, якщо $\cos x = 0,4758$ (або $\operatorname{arc\,cos} 0,4758 = x$).

Шукаємо з таблиць найближчі до даного значіння косинусу й маємо

$$0,4746 = \cos 61^0\ 40'.$$
$$0,4772 = \cos 61^0\ 30'.$$

Коли кут збільшується від $61^0\ 30'$ до $61^0\ 40'$, його косинус зменшується на 0,0026. Наш косинус, порівнюючи його до $\cos 61^0\ 30'$ (меншого кута), зменшився на 0,0014 ($0,4772 - 0,4758 = 0,0014$), а тому кут зріс не на $10'$ від $61^0\ 30'$. На скільки саме зріс кут, знаходимо знову з пропорції $x : 10 = 0,0014 : 0,0036$ і маємо $x = 5$ (наближ.). Отже $\operatorname{arc\,cos} 0,4758 = 61^0\ 3,5'$ і наш кут $61^0\ 3,5'$.

Зверніть увагу, що тут є різниця: вишукування кута за синусом трішки відрізняється від вишукування за косинусом. У чому полягає різниця?

Вправи—Знайдіть sin 25^0 42,3′? cos 71^0 89′? arc sin 0,8671? arc cos 0,6347?

Спосіб находження проміжних поміж даними у таблицях величин (синусів, косинусів та кутів у нашому випадкові) називають — інтерполяція. Замість слів «находити наближені середні значіння з таблиць» кажуть «інтерполювати».

Число π § 8. Функція синус (або косинус) дозволяє нам упевнятися, що число π—відношення обводу кола до поперечини цього самого кола—є число близке до 3,14 (або точніше 3,141592...).

Якби мали якогось правильного многокутника, описаного навколо даного кола, і почали-б подвоювати кількість його боків та зменшувати довжину кожного боку й робили-б досить довго цей процес, ми-б усе ближче наближалися до кола. Практично ми так і робимо, вирізуючи коло з паперу. Підчас різання паперу, ми відрізуємо ножицями ввесь час маленькі відтинки простої, але через те, що цих відтинків дуже багато з одного боку, а кожний з них дуже малий, то ми й не помічаємо їх, а вони всі разом дають нам саму лінію кола. Математики так і уявляють собі коло, як многокутника з величезною кількістю сторін (математики кажуть—коло є многокутник з безкінечною, безмежною кількістю сторін й можуть робити з цього певні висновки. Ми цього не можемо зробити в цьому курсі).

Якби ми вписали в дане коло правильного многокутника й почали-б знову збільшувати кількість його боків, а довжину кожного боку зменшувати, то ми знову наблизилися-б до кола, але вже, так-би мовити, шляхом збільшення.

Вправа—Нарисуйте коло, опишіть навколо нього правильного многокутника й подвойте двічі кількість його боків, зменшуючи кожний бік. Впишіть у дане коло многокутника й теж двічі подвойте кількість боків, зменшуючи довжину кожного боку. Чи наближаєтеся ви до кола?

Раніш (розд. 6, § 5) ми з самого виміру знайшли, що π не залежить від величини поперечини кола, що для всіх кол π однакове.

Тепер ми можемо переконатися в цьому незалежно від виміру. Нехай ми маємо яке завгодно коло й припустім, що його луч є r (а поперечина 2 r). Число r яке завгодно. Воно може бути мале, тоді й коло невелике, воно може бути й велике. Впишемо в це коло правильного 90-кутника. Сполучаючи кінці боків цього многокутника (його нарисувати було-б досить важко) з осередком, ми матимемо 90 рівних один одному трикутників, рівнораменних, з однаковими кутами біля вершка—осередка 0. Кожний з цих кутів дорівнює $\frac{360^0}{90} = 4^0$. Половина цього кута 2^0; утворимо прямокутнього трикутника, спускаючи сторч з вершка—осередку кола до бока 90-кутника. Ми маємо, що цей сторч ділитиме 90кутника на рівні частини, бо він є медіяна, бісектриса та висота рівнораменного трикутника. Цей трикутник (його прямка x півбоку 90кутника, протипрямка r, кут проти згаданої прямки—2^0) дає нам $\frac{x}{r} = \sin\ 2^0$ або $x = r\ \sin\ 2^0$. В такому разі цілий бік 90кутника дорівнюватиметь 2x або $2r\ \sin\ 2^0$, а ввесь обвід 90кутника $= 90 \cdot 2r\ \sin\ 2^0 = 180r\ \sin 2^0$. Приймаємо обвід 90кутника за обвід кола. Ясна річ, ми маємо при цьому похибку (але вона не значна). Поділяючи цей обвід на поперечину кола, матимемо $\frac{180r\ \sin 2^0}{2r}$, або по скороченні (2r у чисельникові та знаменикові) $90\ \sin\ 2^0$.

Це є відношення обводу тільки девятидесятикутника до поперечини, але й воно вже дає 3,141. (Вишукайте з таблиці $\sin\ 2^0$ та перевірте). Ця величина дає нам наближення для числа π й наближення досить гарне. Тут зараз підкреслимо, що число r скоротилося, а це вказує нам, що відношення обводу кола до його поперечини не залежить від луча або поперечини кола.

Беручи многокутника з більшою кількістю боків, ми можемо ще точніше вирахувати числове значіння π, але тут иноді доведеться користуватися з таблиць синусів, де більше, як чотири десяткові знаки, якщо гадаємо знайти обвід многокутника з великою кількістю сторін.

Можна було-б проробити такі саме обчислення й для обводу описаного многокутника, дістали-б сходні з цим результати.

Вправа 1—Бік правильного вписаного (або описаного) восьмидесятикутника *a*. Найдіть луч кола, що в нього вписано цього многокутника, найдіть обвід многокутника й приймаючи його обвід за обвід кола, знайдіть число π.

Поверхня кола

§ 9. Щоб найти поверхню кола, ми також уявляємо собі, що коло утворено з величезної кількости («безмежної» кількости) дуже малих («безмежно малих») відтинків простої, боків правильних описаних або вписаних многокутників. Чим більше візьмемо таких відтинків описаних навколо нашого кола (чи вписаних у нього), тим ближче дійдемо до справжнього кола. Сполучаючи кінці цих відтинків з осередком кола, дістанемо дуже багато трикутників, як OAB, (рис. 106).

Усі ці трикутники матимуть однакову висоту OM, сам луч кола й однакову величину основи. Називаючи основу трикутника *a*, а луч r, маємо, що поверхня кожного трикутника дорівнюватиме $\frac{ar}{2}$. Якщо всіх трикутників буде n, то поверхня всіх їх буде $\frac{nar}{2}$.

Число na дає нам обвід многокутника, а за умовою, що число n надзвичайне велике, обводу кола С. Отже, для вичислення поверхні кола S маємо формулу

$$S = \frac{Cr}{2}.$$

З цієї формули користуються нечасто, частіш надають цій формулі иншого вигляду, вставляючи замість С, $2\pi r$ або πd. Тоді формула для поверхні кола стає зручнішою, а саме (коли $C = 2\pi r$)

$$S = \pi r^2,$$

або згадаючи, що $r = \frac{d}{2}$ й беручи $c = \pi d$,

$$S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

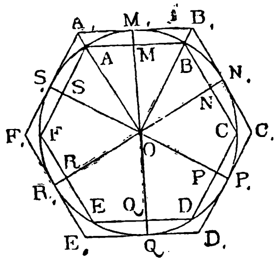


Рис. 106.

Ці дві останні формули й вживають звичайно на практиці.

Розглянемо два приклади:

1 — Луч кола 5 мм. Яка його поверхня?

У формулі $S = \pi r^2$ маємо $r = 5$, а тому $S = 3{,}14 \,.\, 5^2$

і $S = 78{,}5$ кв. мм.

2—Поперечина кола 15 см. Яка його поверхня?

Беремо формулу $S = \frac{\pi d^2}{4}$ і замість d вставляємо 15.

Маємо $S = \frac{3{,}14 \,.\, 15^2}{4}$ а після обчислень 176,6 кв. см.

Вправа 1—Функція яких величин є поверхня кола? а обвід кола?

2—Чи пропорціональний обвід кола його лучеві? Чи пропорціональна поверхня кола лучеві, або поперечникові кола?

3—Знайдіть поверхню кола, знаючи, що 1) $r = 7$ см.; 2) $d = 25$ мм.?

Вправи до розділу 18

1—Знайдіть $\sin 12^0\ 42{,}5'$; $\cos 32^0\ 27'$.

2—Знайдіть x, якщо $x = \arccos 0{,}8888$; $x = \arcsin 0{,}7777$.

3—Яка завдовжки драбина, що торкається будинку на вишині 14 м. від землі й творить з землею кут 35^0? (Відп.—24,6 м.).

4—Звичайно, на залізницях дорога підноситься не більше, як на 8 м. на 1000 м. шляху (як кажуть, піднесення 0,008). Під яким кутом підноситься тоді залізниця понад площею горизонтальною? (Відп.—Менш від 10′).

5—Садиба має форму трапезу, два рівнобіжні боки завдовжки 42 м. та 116 м. є сторчі до третього боку, а четвертий бік утворює з більшою із основ кута 37^0. Найти поверхню садиби. (Відп.—6067 м.).

6—У рівнобіжника 2 сумежні боки завдожки 10 см. та 7 см., а кут між ними $52^0\ 15'$. Найти поверхню. (Відп.—55,3 кв. м.).

7—Дві сили 25 кл. та 40 гр. діють на одну точку під кутом 49^{0} 43,7′. Рівнодієва з більшою з цих сил творить кута 19^{0} 51,5′. Найдіть рівнодієву. (Відп,—59,3 кл.).

8—Бік платівки паркету ромбічної форми є 10 см. Один із кутів цієї платівки 100^{0} 20′. Найти поверхню та об'єм цієї платівки, якщо вона завгрубшки 1 см. (Відп.—98,38).

9—На два шківи треба купити пас. Більше коло має поперечину 1 м., менше 20 см., віддаль поміж осередками 2 м. Який завдовжки буде пас? (Відп.—580,5 см.).

10—На обводі кола на покришці казана є 8 шрубів. Віддаль між осередками цих шрубів увесь час 10 см. Найти поперечину того кола, що проходить через усі осередки шрубів. (Відп.—26,13 см.).

11—Який розхил мусить мати циркуль, щоб нарисувати правильного п'ятикутника, вписаного в коло з поперечником 6 см.?

12—Знайти, яка завдовжки тятива, що її поведено в колі з поперечником 258 мм., а кут осередковий, що відповідає тятиві є 60^{0} 15′. (Відп.—Біля 130 мм.).

13—За однакову ціну продають кам'яні фігурні плитки; одні з них квадратові, з боком 20 см., а другі шостикутні з боком 10 см. У яких кам'яних плиток поверхня більша? (Відп.—У квадр.).

14—Найти поверхню круглої циркової арени, якщо її гряниця завдовжки 150 м. (Відп.—Біля 1800 м.).

15—В середині ринви поперечина її (розріз ринви кола) є 10 см. Яка поверхня розрізу ринви. (Відп.—Біля 78,5 кв. см.).

16—На покришку парового казана потрібно матеріялів; яка поверхня ції покришки, якщо обвід казана по зверховному боці (форма кола) є 86 см.? (Відп.—Біля 590 $см.^{2}$).

17—Знайти поверхню жіночого вахляра завдовжки 20 см. та з кутом найбільшого розхилу 180^{0}?

18—Найти поверхню вахляра завдовжки 20 см. з кутом найбільшого розхилу 160^{0}? (Вказівка: Обчислити поверхню кола, знайдіть поверхню вирізки в 1^{0} і поверхню вирізки в 160^{0}).

19—Скільки важить кам'яна шостикутня колона, що в неї кожний бік 10 см. завширшки й 4 м. заввишки, якщо питома вага каменю 1,7? (Відп.—Біля 294 кл.).

20—Вікно має форму півкола зверху та прямокутника під сподом. Завширшки вікно 90 см., заввишки $2^{3}/_{4}$ м. Яка поверхня вікна?

РОЗДІЛ 19

Тангенс та котангенс. Поверхня та об'єм призми й циліндру

Тангенс

§ 1. Опріч тих функцій, що ми про них казали у розділі 18, є ще не менше важливі функції, що звязують межи собою самі прямки, через посередництво кута. Розгляньмо зараз такі функції.

Нехай маємо якийсь кут α (гострий кут) (рис. 107). Берімо на одному боці його точку B і з неї ведемо сторч до другого боку BC. Дістанемо прямокутнього трикутника ABC, де відтинки BC та AC є прямки. Візьмімо якусь иншу точку на боці кута AB, точку D і з неї знов поведімо DF сторч до боку AC. Дістанемо другий прямокутній трикутник ADF. Трикутники ABC та ADF подібні один до одного (чому?), а через це,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DF}{AF}$$

цеб-то відношення межи прямками даного прямокутнього трикутника не залежить від величини самих прямок.

Якби ми взяли ще один сторч до AC просту JH, було-б теж саме (через подібність). Але коли міняємо кута α, то ясно бачимо, що це відношення мінятиметься, бо AC лишатиметься та-ж сама прямка, а прямки BC, DC та FC змінюються (рис. 108).

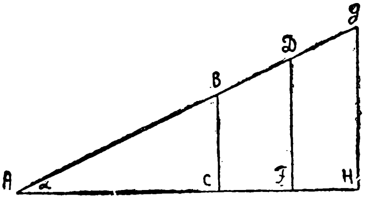


Рис. 107.

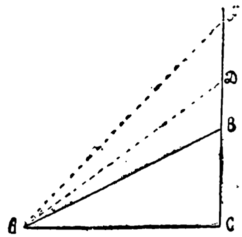


Рис. 108.

Отже, відношення прямки, що лежить проти даного гострого кута прямокутнього трикутника, до прямки, що складає один з боків цього кута, є функція кута й не залежить від довжини боків цього кута (а залежить виключно від розхилу — від самого кута),

Це відношення одної прямки до другої (якої до якої зараз вкажемо) називаємо т а н г е н с кута α й записуємо.

$$\mathrm{tg}\,\alpha \quad \frac{BC}{AC}$$

Можемо казати так: т а н г е н с д а н о г о к у т а є в і д н о ш е н н я п р я м к и, п р о т и л е ж н о ї д а н о м у к у т о в і, д о п р я м к и, п р и л е ж н о ї д о ц ь о г о к у т а.

Таблиці тангенсів містять одночасно з таблицями синусів та косинусів й знов тангенси кутів, що менші або рівні 45^0, шукаємо з таблиць, дивлячись на міру кута з лівого боку сторінки й беручи число, що стоїть у рядкові, який починається мірою кута в градусах та мінутах у стопчикові з написом tg (або tangens). Тангенси кутів, що є рівні, або більші від 45^0, шукаємо, дивлячись на правому боці сторінки на градуси та мінути, й шукаючи відповідне число в стовпчикові з написом tg або tangens під сподом.

Приклади: $tg\ 6^0 40' = 0{,}1169$; $tg\ 71^0 10' = 2{,}9319$.

0 цілих у таблицях не пишуть, якщо цілих більше, ніж 0, то це вже пишуть у таблицях.

Коли находимо кута, знаючи його тангенса, пишемо, як вище $x = arctg.\ 3{,}776$ із таблиць вишукаємо, що $x = 75^0\ 10'$.

Тангенс від зміни кута міняється не так, як синус або косинус. Повертаючись до останнього рисунку, ми бачимо, що, збільшуючи кута біля точки A, ми збільшуємо й протилежну прямку (CB, CD, CF). В тому разі, коли ми брали відношення прямки до протипрямки, у нас чисельник був завжди менший від знаменика, беручи-ж відношення самих прямок, ми маємо випадки, коли.

1—чисельник менший від знаменика $\left(\frac{BC}{AC}\right)$ і

2—чисельник більший за знаменика $\left(\frac{FC}{AC}\right)$

Тому тангенс може бути й більший і менший за одиницю.

Якщо уявимо собі, що кут BAC зменшується, а прямка AC лишається без зміни, то прямка BC також зменшується.

Коли проста AB, нахиляючись до AC, зіллється з AC, тоді кут між цими простими дорівнюватиме 0, прямка BC також $= 0$, а тому й кажуть $tg\ 0^0 = 0$.

Якщо, навпаки, кут BAC збільшуватиметься, проста BA відхилятиметься від AC, точка перетину протипрямки AB з прямкою BC відсуватиметься все далі від точки C, то відношення прямок BC, DC, FC до прямки AC набуватиме все більшого значіння. Коли кут біля точки A дорівнюватиме 90^0, то перетину простої, що його утворюватиме, з простою BC не буде, бо ці прості рівнобіжні.

Математики в такому разі цю думку висловлюють, кажучи, що перетин відбудеться на віддалі безкінечній. Цей вираз, власно, й визначає, що перетину немає. Математики це означають инакше, що тангенс 90^0 є безкінечно велике число й пишуть символічну рівність.

$$tg\ 90^0 = \infty,$$

де знак ∞ (лежаче число 8) є знак безкінечного числа.

Примітка: Поняття безкінечно велике число ∞ містить у собі такі елементи:

1 -- це число, що не має певного значіння, а може змінятися й само збільшуватися;

2 — підчас такого збільшення безкінечно велике число може перебільшити яке завгодно дане число.

У нас у таблицях написано для $tg\ 90^0$ infinite (лат. безкінечне).

Приклади обчислень з тангенсом

§ 2. Виміряти вишину будинку AB можна з допомогою тангенсу. Припустім, що виміром ми знайшли віддаль від точки C, де встановили кутомірний прилад, та основою будинку. Можемо зміряти й частину віддалі в середині будинку. Нехай уся віддаль $AC = b = 32$ м. Міряємо кутоміром кут BC_1A_1, що його один бік спрямовано на верх даху будинку, а другий поземно (рівнобіжно до AC). Припустім, що міряння досить точне й $\angle BC_1A_1 = m = 42^0 47'$

В такому разі з трикутника BC_1A_1 маємо $\operatorname{tg} m = \frac{BA_1}{A_1C_1}$, або

$\operatorname{tg}m = \frac{x}{b}$, бо BA_1 невідоме означаємо x, а відоме A_1C_1 є b

З останньої рівности, позбавляючись від знаменика, маємо

$$x = b\operatorname{tg}m$$

Зробім числові обчислення; для цього, замість літерових виразів, ставимо числа. Буде $x = 32\operatorname{tg}42^0 47'$.

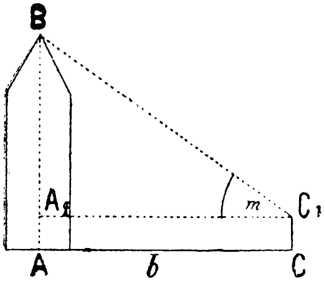


Рис. 109.

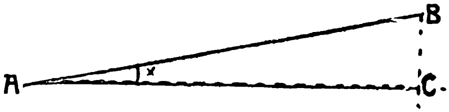


Рис. 110.

Ми стикаємося з випадком інтерполяції, бо кута $42^0 47'$ у таблицях немає. Як це було вже підчас вишукування синусів та косинусів за допомогою інтерполяції, маємо

$$\operatorname{tg} 42^0 40' = 0{,}9217$$
$$\operatorname{tg} 42^0 50' = 0{,}9271$$

Отже, коли кут міняється на $10'$ його тангенс з б і л ь ш у є т ь с я на 0,0054.

Збільшення, що його нам потрібно на $7'$, знаходимо з пропорції $y : 0{,}0054 = 7 : 10$.

Звідци наближено $y = 0{,}0038$.

Ми тут навмисне збільшення означили літерою y, щоб не згадувати про x, яке шукаємо ($x = A_1B$)

Отже $\operatorname{tg} 42^0 47' = 0{,}9255$.

Після цього $x = 32 \cdot 0{,}9255 = 29{,}616$

Або (відкидаючи 0,006) $x = 29{,}62$.

Число x ще не є повна висота будинку, бо ми маємо ще до нього додати AA_1 або CC_1 — вишину кутомірного приладу.

Другий приклад — «Справочная книга для путешественников» радить такий спосіб оцінки кутів: «Беручи око за вершок кута, маємо, що прості, які йдуть від ока до кінців великого та середнього пальців витягненої руки, становлять кут 15^0».

Спробуємо це перевірити, беручи, що віддаль від ока до руки дорівнює 65 см., а віддаль між пальцями 17 см. (рис. 110).

Нехай A є точка в оці, AC = 65 см., а BC, піввіддалі між пальцями, 8,5 см. В такому разі (означаючи $\angle$ BAC через x) маємо $tgx = \frac{8,5}{65}$ або tg x = 0,1308 (набл.). Звідци x = arctg 0,1308.

З таблиць находимо $0,1317 = tg\ 7^0 30'$

$0,1287 = tg\ 7^0 20'$

Різниця між табличними тангенсами 0,003 відповідає 10′, а різниця 0,1308 — 0,1287 = 0,0021 відповідає зміні кута на y. (Взято y з тих причин, що й у першому прикладі). Маємо: $y : 10 = 0,0021 : 0,003$, а звідци $y = 7'$.

Отже, $x = 7^0 27'$. Цей кут є лише половина того кута, що під ним бачимо зазначені пальці. Увесь кут $14^0\ 54'$.

Похибка $15^0 - 14^0\ 54' = 6'$ це є приблизно 0,5%

Вправа 1 — Маківку гори з віддалі 100 м. видно під кутом 30^0. Яка заввишки гора?

2—Два береги річки рівнобіжні; прямо проти мене на протилежному березі є дерево. Коли я повернувсь по-військовому «праворуч» й відійшов на 25 кроків на своєму березі, те саме дерево видно під кутом, що його вимірюю годинником таким чином: просту, що сполучає XII та VI на годиннику направляю по своєму березі й тоді дерево бачу на 3-хвилинах поділу далі від VII в напрямку до VIII. Найти ширину річки?

Котангенс

§ 3. Иноді буває вигідніше мати відношення не протилежної, до даного кута, прямки до прилеглої, а як раз, навпаки, відношення прямки прилеглої до даного кута до протилежної. Таке відношення називають котангенс даного кута й визначають знаком ctg (або в таблицях cotangens). Легко упевнитися, як це ми робили й раніш, що котангенс даного кута є функція лише кута й не залежить від довжини боків кута.

З нашого рисунка ми бачимо (рис. 111), що

$$tg\ A = \frac{BC}{AC};\ tg\ B = \frac{AC}{BC};\ ctg\ A = \frac{AC}{BC},\ ctg\ B = \frac{BC}{AC}, \ldots I$$

Згадаємо, що кути A та B мають властивість $A + B = 90^0$, а тому, взагалі, маємо $tg\ A = ctg\ (90^0 - A)$ (згадайте § 5, розд. 18).

Простежити зміни котангенсу можна так само, як і зміни тангенсу, користуючися з рисунка, але ми користуємося з иншого відношення, що є поміж котангенсом та тангенсом. Рівності (1) дають нам, якщо їх перемножити $tg\ A . + ctg\ A . \ \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{BC}$,

а після скорочення $tg\ A .\ ctg\ A = 1$ і ще $ctg\ A = \frac{1}{tg\ A.}$

Ми й використовуємо останню рівність. Ми знаємо, що тангенс підчас зменшення кута зменшується. Отже в дробу $\frac{1}{tg\ A}$ знаменик підчас зменшення кута зменшується, а тому ввесь дріб збільшується (розділ 5, § 2) в стільки саме разів. Зменшуючи знаменика в 10, 100, 1000 разів, ми тим самим збільшуємо дріб в 10, 100, 1000 разів.

Через те, що знаменик зменшується без кінця, то дріб $\frac{1}{\operatorname{tg} A}$ збільшується без кінця. Це знов символічно висловлюють $\operatorname{ctg} 0 = \infty$, що визначає: в міру наближення кута до 0^0, його котангенс набуває все більшої величини й переростає яке завгодно число.

З другого боку, коли кут A зростає, дріб $\frac{1}{\operatorname{tg} A}$ спадає, бо зростає знаменик дроба. Коли-ж знаменик набуває все більших та більших значінь, дріб стає все менше та менше й нарешті, коли знаменик стане ∞ (коли кут його 90^0), дріб обертається в 0. Це знов треба розуміти символічно. Отже вираз $\operatorname{ctg} 90^0 = 0$ вказує, що в міру наближення кута до 90^0, його котангенс все зменшується і може стати менше якого завгодно малого числа.

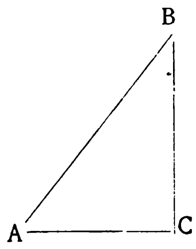


Рис. 111.

Вправа 1—Який заввишки будинок, якщо драбина досягає до вершини даху будинка, коли поставити її на віддалі 3 м. від будинка, звідки дах видно під кутом 70^0?

Драбина, будинок та поверхня землі дають трикутник, де будинок, ясна річ, становить прямий кут з землею. Означаючи висоту будинка через x, маємо $\frac{3}{x} = \operatorname{ctg} 70^0$. Звідци $3 = x.\operatorname{ctg} 70^0$ і $x = \frac{3}{\operatorname{ctg} 70^0}$. За таблицями знаходимо $\operatorname{ctg} 70^0 = 0{,}3640$ і $x = \frac{3}{0{,}364}$ наближ. $x = 8{,}2$ м.

Перевірте цей результат, використовуючи функцію тангенс.

2—Товаровий вагон старого типу 4 саж. завдовжки видно під кутом 5^0, якщо стати проти середини вагона. На якій віддалі цей вагон?

Тригонометричні функції

§ 4. Синус, косинус, тангенс та котангенс усі разом мають назву тригонометричні функції, (тригонометрія—це та частина математики або геометрії, що розвязує питання про находження залежности між боками та кутами трикутника). Ці тригонометричні функції не тільки дозволяють нам розвязувати питання, що ми вказали, а допомагають будувати кути точніш, аніж ми можемо це зробити з допомогою транспортиру. Вкажемо це на таких прикладах.

1—Збудувати кута, що його синус дорівнює $^2/_3$ або найти x, якщо $x = \arcsin {^2/_3}$

Беручи до уваги, що синус є відношення прямки до протипрямки, ми будуємо прямого кута ACB й на одному боці його відкладаємо 2 довільні одиниці. Це наша прямка (рис. 112).

Протипрямка мусить складатися з трьох таких саме одиниць. Тому, з точки B — кінця вже обраної прямки BC — зарисовуємо дугу, щоб її луч дорівнював 3 одиницям, як і на BC. Точка, де перехрещується дуга з простою AC, дає нам вершок нашого кута. Сам кут є BAC. За таблицями ми найдемо, що $BAC = 41^0\ 48{,}6'$. Збудувати такого кута транспортиром надто важко.

II—Якби ми рисували кута, знаючи його косинус, напр., рисували кута x, де $x = \arccos {}^3/_4$, нам довелося-б відкладати на простій AC від точки C якісь 3 одиниці, а закреслюючи другу лучем, що дорівнює 4 одиницям, шукати точку на простій CB; A буде вершок кута. Чому це так?

III—Збудувати кута x, що дає рівність $x = \operatorname{arctg} {}^3/_4$.

Рисуємо знов прямого кута ABC і на одному боці його відкладаємо 3 довільні одиниці (рис. 113), а на другому 4 такі саме одиниці. Дістанемо точки C та A. Злучаючи ці точки, маємо трикутника й у ньому $\operatorname{tg} CAB = {}^3/_4$. З таблиць знайдемо, що $CAB = 36^0\ 52{,}2'$, що знов транспортиром нарисувати на папері неможливо.

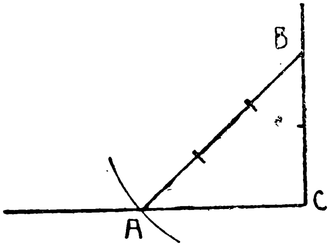


Рис. 112.

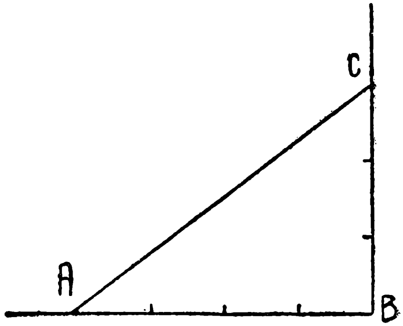


Рис. 113.

Вправи—Найти рисуванням кути, що їх дають рівняння

$$x = \arccos \frac{5}{6}; \quad y = \operatorname{arcctg} 0{,}3; \quad z = \operatorname{arctg} 2 \left(\text{Примітка: } 2 = \frac{1}{2}\right)$$

$$x = \arcsin 0{,}9; \quad y = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}; \quad y = \operatorname{arctg} 1.$$

Про останній кут доведіть, що він є 45^0 і що $\operatorname{tg} 45^0 = \operatorname{ctg} 45^0$. $\sin 45^0 = \cos 45^0$, просто з рисунка.

Поверхня призми § 5. Призма взагалі це є тіло, що з двох боків обмежене многокутниками рівними один одному та до того ще такими, які лежать у рівнобіжних площах, а з усіх инших боків призму обмежують площі, що проходять через рівнобіжні боки многокутників. Рівні многокутники мають назву основи призм (одна основа спідня, друга зверхня), а всі инші площі — стінки, або бічні стінки призми. Залежно від кількости боків основи, призми можуть бути тристінні, чотиристінні й т. д. У нас нарисовано шостистінну призму (рис. 114). Якщо призму уявити собі, що вона стоїть на нижній основі, то боки бічних стінок (їх називають руби призми) можуть бути або прямовисні або ні. Коли бічні руби — сторчі до основи, призму звуть пряма, в иншому разі — похила.

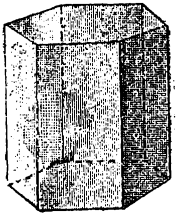


Рис. 114.

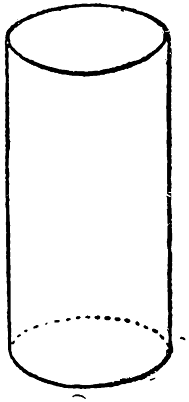


Рис. 115.

Щоби знайти бічну поверхню призми, так звану бічницю, доведеться вишукати поверхню кожної бічної стінки зокрема, а потім додати одну до одної всі ці поверхні. Дуже часто трапляються випадки, що призма має за основу правильного многокутника. В такому разі всі бічні стінки призми рівні одна одній (чому?), а для находження бічниці досить знайти поверхню лише одної стінки й помножити кількістю стінок.

Якби мали ми неправильну шостикутню призму, але пряму й боки основи цієї призми були рівні по черзі a, b, c, d, e, f, а бічні руби h, ми-б находили бічну поверхню S за формулою

$$S = ah + bh + ch + dh + eh + fh$$

(чому всі бічні руби рівні?). Беручи h поза дружки, маємо

$$S = (a + b + c + d + e + f)\, h.$$

Вираз, що маємо в дужках, це є обвід цієї основи.

Називаючи його p, маємо формулу

$$S = p \cdot h.$$

Ясна річ, що ця формула не залежить від кількости боків основи призми. Таку саме формулу маємо ми й для бічниці правильної призми, що дістанемо, припускаючи, що всі боки основи призми рівні один одному.

Коли нам потрібно знайти повну поверхню призми, то називаючи поверхню одної основи літерою B, а повну поверхню призми T, маємо

$$T = ph + 2B.$$

Вправа 1—Основа колони форми правильної шостикутньої призми є 2,6 см., висота 1,6 м. Найти бічницю колони.

2—Для води зроблено дерев'яну ринву форми призми з основою-трапезом, що має два боки в 25 см., один 10 см. і останній 40. Довжина ринви 75 см. Яка її бічниця?

Циліндр § 6. Обточуючи призму так, щоб її основи обернути в кола, ми дістанемо циліндр (рис. 115). На циліндри ми можемо дивитись з одного боку, як на призми з безкінечно великим числом боків у основі, а з другого боку — як на тіло оборотове, що його утворюємо обертанням прямокутника ABCD навколо його боку AB (рис. 115а). Через це, просту AB називають в і с ь о б е р т а н н я, бо навколо неї, як навколо оси, обертається прямокутник; а просту CD, що сама своїм обертанням утворює циліндра, звуть т в і р н а.

Обертаючи циліндра щільно папером один раз навкруги та розгортаючи цей папір на площині, ми матимемо розгортку циліндру.

Ця розгортка (проробіть такий дослід) матиме форму прямокутника, де його один бік буде обвід кола, а другий бік твірна. (Існують ще циліндри похилі, коли твірна не є сторч до основи, але їх ми не розглянемо тут окремо, хоч і для них можна було-б дати формулу для обчислення поверхні.)

Якщо назвати луч кола основи r, а твірну l, то обвід кола буде $2\pi r$, а бічниця циліндру—S

$$S = 2\,\pi r l.$$

Якщо бажаємо обвід шукати за формулою $C = \pi D$, то

$$S = \pi\, D\,.\,l.$$

Вправа 1 — Знайти бічницю циліндричної ринви, що її висота 5 м., а поперечина основи 50 см.

2 — З листа бляхи, що має поверхню 7,8 кв. м., зроблено рурку 5 м. заввишки. Яка поперечина рурки?

Иноді буває потрібно вишукати, так звану, п о в н у п о в е р х н ю циліндру; в такому разі до бічниці ми додаємо ще дві поверхні основ.

Об'єм призми § 7. Дуже часто буває потрібно знайти об'єм призми. Пошукаємо спочатку способу, як знайти об'єм тристінної призми. Таку призму можна вважати за половину рівнобіжностінника, як це бачимо з рисунка 116. Инакше, перерізуючи рівнобіжностінника ABCDEFGH площею, що проходить через точки B, D, H та F, ми розбиваємо рівнобіжностінника на дві рівні тристінні призми. Якщо об'єм рівнобіжностінника є v, його висота h, а поверхня основи B, то $v = B\,.\,h$. Щоб знайти об'єм тристінної призми, досить поділити цю величину на 2. Отже, називаючи літерою V об'єм тристінної призми, маємо $V = \frac{Bh}{2}$ або (Вступ § 15) $V = \frac{B}{2}\,h$.

Тут помічаємо, що $\frac{B}{2}$ дає нам поверхню трикутника ABD, основу трикутньої призми, називаючи цю поверхню основи літерою b, маємо.

$$V = b \, . \, h.$$

Цеб-то й тут **об'єм трикутньої призми дорівнює добуткові поверхні основи призми та висоти.** Це саме положення є вірне й для будь-якої призми многостінної.

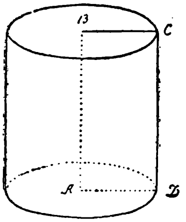


Рис. 115а.

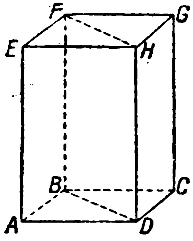


Рис. 116.

Справді, кожну многостінну призму ми можемо розглядати так, що її складено з трикутніх, однакової з нею висоти й до того ще таких, що їхні трикутники основи даватимуть основу даної. Отже, для кожної многостінної призми та сама формула дає спосіб вираховувати її об'єм (рис. 117).

Вправа 1 — На рисункові ви бачите призму, що її основу розбито на трикутники з указаною поверхнею. Найдіть поверхню кожної з трикутніх призм і впевніться, що сума їх дорівнює поверхні многокутньої призми.

2 — Означте поверхні трикутників, що на них побито многостінну призму та висоту призми літерами й знов переконайтеся, що об'єм многостінної призми дорівнює сумі об'ємів тристінних призм,

3 — Горище має форму трикутньої призми. Кожний з трикутників основи є прямокутній з прямками 1,2 м. та 3 м. Довжина горища 11 м. Який його об'єм?

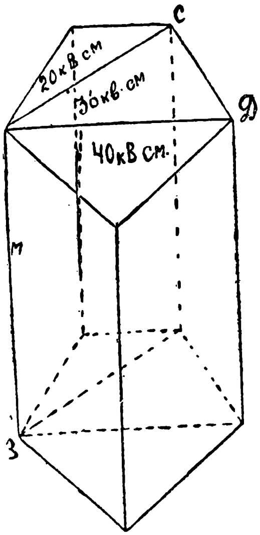


Рис. 117.

4 — Шостикутній кленовий брус з боками шостикутника 15 см., має довжину 2,5 м. Скільки важить цей брус? (Питома вага 0,8).

Об'єм циліндру

§ 8. Розглядаючи циліндр, як границю, що її ми дістанемо, обтісуючи призму та беручи до уваги, що об'єм призми, незалежно від кількости її боків, дає формула $V = B \, . \, h$, ми маємо, що ця сама формула даватиме й об'єм циліндру, якщо B буде визначати поверхню кола його основи, а h висоту.

Тому, що для кола $B = \pi r^2$ або $B = \frac{\pi D^2}{4}$, маємо для об'єму циліндру такі дві формули

$$V = \pi D^2 h, \text{ або } V = \frac{\pi D^2 h}{4}$$

З якої формули користуватись, вказує сама задача, де ми обраховуємо об'єм циліндру.

Вправа 1 — Скільки води містить циліндричний бак з поперечиною 1 м. та висотою 0,5 м.?

2—Коли вилудили в циліндрі боки з середини, помітили, що його внутрішня поверхня 22 кв. д. Ширина циліндру 5 д. Скільки літрів води містить цей циліндр?

Вправи до розділу 19

1—Під яким кутом нахилено руби зубів пилки, що у неї висота зубця 12 мм., а ширина основи зубця 22 мм? (Відп. — 85^0).

2—Переріз залізничого насипу має форму рівнораменного трапезу. Висота насипу 2,5 м., а ширина в нижчій частині 5,75 м. а у верхній 4 м. Який кут ставлять спади насипу з землею? (Відп. — Біля 70^0)

3—Знайдіть поверхню правильного дванадцятикутника, якщо його бік є 2 см. (Відп. — Біля 45 кв. см.)

4—Дах є чотиристінна призма; під цим дахом є горище. Щоб виміряти поверхню та об'єм цього даху, маємо такі дані: обидві основи призми є дві рівнораменні трапези, що в них висота 1,2 м., більша основа 1,7 м., а кут між боками та основою $72^0 38'$. Довжина даху 25 м. Всі розміри дано з внутрішнього боку, щоб їх перекласти на зовнішні розміри, треба зауважити, що цей дах зроблено з дощок 2 см. завгрубшки. Найти зовнішню поверхню та об'єм даху.

5—З дерев'яної штанги циліндричної форми витесано десятикутню правильну призму. Найдіть її бічницю, знаючи, що її висота 0,2 м., а поперечина штанги 1 м. (Відп. — 0,62 кв. м.)

6—Треба пофарбувати круглу піч з поперечиною 1,2 м., а висотою 2,5 м. На 1 кв. м. треба 0,5 кг. оливи. Скільки оливи треба на піч? (Відп. — Біля 4,5 кг.).

7—Скільки важить 1 повздовжний метр круглого заліза завдовжки 1 цаль? (див. табл. питом. ваги).

8—Чавунна колона порожня в середині; вишина її 2 м., зовнішній поперечник 10 см., внутрішній 6 см. Питома вага чавуну 7. Знайти вагу колони.

9—Круглий оливець має поперечину 7 мм., а шостикутній 8 мм. У якого з них більший об'єм?

10 — Дано два катети (прямки) прямокутнього трикутника 2,64 м. та 3,1 м. найти протипрямку та гострі кути. (Відп. — $40^0 25'$; $49^0 35'$ та 4,07 м.).

11 — Прямка прямокутнього трикутника дорівнює 1 м., а кут, що проти неї $40^0 20'$ Найти протипрямку та другу прямку. (Відп. — 1,545 та 1,178).

12 — Прямка дорівнює 18 м., а кут біля неї $47^0 17{,}3'$. Найти инші елементи трикутника. (Відп. — 24,52; 16,63 та $42^0 42{,}7'$).

13. Протипрямка завдовжки 12,725 м., один з гострих кутів $60^0 40'$. Найти прямки. (Відп. — 11,094; 6,234).

14 — Найти x, якщо $x = \operatorname{arctg} 1$, та y, де $y = \operatorname{arctg} 1$. Чому $x = y$?

РОЗДІЛ 20

Рівняння з двома невідомими

Розвязування системи двох рівнань способом додавання або віднімання

§ 1. **Задача**—Пароплав, ідучи за водою, проплив 72 км. за 6 годин; ідучи проти води, він ту саму віддаль пройшов за 9 год. Яка швидкість пароплаву (на спокійній воді) та швидкість річки?

Дуже важко було-б розвязати, а особливо вияснити, й самому собі й другому, спосіб, як розвязати цю задачу без рівнань або з рівнанням із одною невідомою. Значно простіше розвязати її, вживаючи рівняння з двома невідомими, що ми зараз і зазначимо.

Припустімо, що пароплав на спокійній воді проходить в годину x км.

Припустімо вдруге, що сама вода пробігає за годину y км. Із самої задачі ми бачимо, що за водою пароплав проходив за годину 12 км. (72 : 6), а проти води 8 км. У тому разі, коли пароплав іде за водою, він іде швидше, бо опріч власного його руху, ще вода його, так-би мовити підштовхує вперед. Тому, іста швидкість пароплаву за водою складається з його власної швидкости та швидкости течії, цеб-то за нашими припущеннями, ця швидкість є $x + y$.

Так само, коли пароплав іде проти води, його затримує вода, відносячи назад, а тому його дійсна швидкість зменшується на швидкість течії води і є $x - y$.

Ми вже знаємо числові значіння цих обох швидкостей; запишемо тепер умови, що їм підлягають наші невідомі числа x та y, як рівнання.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 12 \\ x - y &= 8 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1.$$

Зауважимо, що x та y у цих обох рівнаннях мають однакові значіння. Додамо ці обидва рівнання одне до одного, почленно, цеб-то праві їх сторони до правих, а ліві до лівих. Додаючи до рівних величин рівні, ми рівности не порушимо, а тому наслідки додавання виходять рівні поміж собою. Злучивши подібні члени, ми спрощуємо рівнання й маємо після додавання.

$$2x = 20, \text{ а звідци } x = 10$$

Ми знайшли, що швидкість пароплаву в спокійній воді є 10 км. Щоб знайти y, цеб-то швидкість течії, напишемо в перше (а можна й у друге) з рівнань замість x відоме нам число 10. Дістанемо рівнання

$$10 + y = 12$$

Це вже є рівання з одною невідомою, з нього ми зуміємо вишукати y. Буде $y = 2$.

Таким чином, знайшли обидві невідомі величини — швидкість пароплаву та швидкість течії води, що були означили x та y.

Умовімося називати такі 2 рівнання з двома невідомими, що в кожному з рівнань кожна невідома зокрема має своє власне й те саме значіння **системою двох рівнань з двома невідомими.** Поставимо собі завдання — повчитися розвязувати такі системи.

Той спосіб, що з нього ми користувалися в першій задачі, можна вжити й далі. Спробуйте розвязати такі задачки:

1—Батько та син заробили за ½ місяця разом 37 карб. Батько заробив на 3 карб. більше від сина. Скільки заробив кожний з них? (Вказівка:

Користуйтеся з такого запису—

Батько заробив . . .	карб.	Означте через невідомі.
Син заробив	»	»
Разом вони зароб. . .	»	»
Батько зароб. більше на	»	»

2—Дротину 25 см. завдовжки треба зігнути під прямим кутом таким чином, щоб її один бік був на $2^1/_2$ см. довший від другого. Який завдовжки буде кожний бік кута?

3—Розвязати систему рівнань

$$x + y = 15 \qquad 1.$$
$$x + 3y = 35 \qquad 2.$$

Якби тут забажали ми також додати дані рівнання одне до одного, ми-б дістали після додавання знов рівнання з двома невідомими. (Перевірте це). Тому віднімемо рівнання одне від одного почленно. Віднімаючи від 1 рівнання 2, після спрощення подібних членів, матимемо.

$$-2y = -20, \text{ а звідци } y = 10$$

Підставімо замість y це його значіння в одне з даних рівнань і набудемо рівнання з одною невідомою.

А тоді найдемо й цю невідому.

(Напр., 1 рівнання дає $x + 10 = 15$, далі $x = 15 - 10$ і нарешті $x = 5$).

4—Розвязати системи рівнань

a) $x + y = 63$ b) $x + 3y = 18$ c) $2x - y = 9$
$y - x = 7$ $x + 7y = 38$ $9x - y = 44.$

Не завжди так, порінююче, легко буває розвязувати системи рівнань з двома невідомими. Иноді доводиться ще зробити деякі допомічні перетворення.

Задача—Один робітник купив 2 кіло цукру рафінаду та 3 кг. піску й заплатив за все 3 крб. 60 коп., а другий купив 3 кг. рафінаду й 2 кг. піску й заплатив 3 крб. 90 коп. Яка ціна кілограму рафінаду і яка ціна піску?

Розвязування: Припустімо, що 1 кг. рафінаду коштує x коп., а 1 кл. піску y коп. Маємо таку систему двох рівнань з двома невідомими

$$2x + 3y = 360$$
$$3x + 2y = 390.$$

На правій стороні рівнання ми мусіли дані числа обернути на копійки, бо на лівій стороні в нас ціни визначено в копійках. У даному разі ми не позбавимося ні додаванням, ані відніманням від жадного із невідомих. Щоб можна було позбавитися невідомих, ми подбаємо про те, щоби зробити рівними коефіцієнти при одному з невідомих в обох рівнаннях. Для цього скористуємося з того, що рівнання не порушується, якщо обидва його боки помножити однаковим числом.

Поставімо, напр., завдання позбавитися від x. Коефіцієнти при x-ові є 2 та 3; ми вишукаємо спільну найменшу крать оцих коефіцієнтів. Одержимо число 6. Зробімо такі перетворення, щоби при x-ові коефіцієнти в обох рівнаннях були рівні 6. Для цього нам досить збільшити (помножити) усі члени першого рівнання числом 3, а всі члени другого числом 2. Вийде в нас

$$6x + 9y = 1\,080$$
$$6x + 4y = 780$$

Бачимо, що коефіцієнти при x в обох рівнаннях однакові. Щоб позбавитися від x, досить відняти рівнання одне від одного. Віднімаючи нижче від верхнього, здобудемо (перевірте)

$$5y = 300, \text{а } y = 60.$$

Після цього, вставляючи числове значіння y замість y в перше з даних рівнань, одержимо

$$2x + 3.60 = 360; \qquad 2x + 180 = 360;$$
$$2x = 180; \qquad x = 90.$$

Таким чином. 1 кг. рафінаду коштує 90 коп., а 1 кг. піску 60 коп.

Вправи—Розвяжіть системи рівнань.

1) $3x + 4y = 85$
$5x + 4y = 107$

Чи є тут при одній з невідомих однакові коефіцієнти? Чи додаванням, чи відніманням позбавитесь ви від одного невідомого?

2) $x + 5y = 35$
$3x + 2y = 26$

Які коефіцієнти при x-ові в цих рівнаннях? Яка найменша спільна крать цих коефіцієнтів? Яке рівнання та яким числом треба помножити щоб дістати два рівнання з рівними при x-ові коефіцієнтами? Чи додавати, чи віднімати доведется для позбавлення від невідомого x?

3) $4x + 5y = 55$
$3x - 2y = 1$

4) $2x + 7y = 34$
$5x + 9y = 51$

5) $15x + 7y = 37$
$9x - 16y = 2$

Одне рівнання з двома невідомими. График простої

§ 2. До цього часу ми розвязували ввесь час 2 рівнання з двома невідомими й не задавали собі питання, а чи не можна розвязати одне рівнання з двома невідомими? Пошукаємо відповіди на таке запитання.

Задача 1—Два робітники заробили 90 крб. Скільки заробив кожний?

Припускаючи, що перший робітник заробив x крб., а другий y маємо рівнання $x + y = 90$. Але з цього рівнання ми не зуміємо знайти ані x, ані y. Тут можливо, що перший заробив 20 крб., другий 70; або перший 12, другий 78 і т. д. Нічого певного про заробіток одного й другого зокрема казати не можемо.

Ще яскравіше ми бачимо це з такої задачі:

Задача 2—З десяти кілограмів заліза зробили відра та кухлі. Скільки заліза пішло на кухоль та кожне відро, якщо відер було 3, а кухлів 7?

Припускаючи, що кожне відро важило x кг., а кожний кухоль y кг., ми маємо рівнання $3x + 7y = 10$, і знову за x та y можемо брати цілком довільні цілі та дробові числа, щоб тільки задовольнити рівнанню. Нічого певного нам одне рівнання не дасть для значінь x та y.

Але часто трапляються випадки, коли нам потрібно буває знайти не самі точні значіння невідомих x та y, а лише звязок між ними, лише характер тої функціональної залежности, що вона звязує x та y. Напр., розглянемо таку залежність, що з неї часто користуються техніка та фізика

$$y = ax + b.$$

Таку формулу прикладають иноді техніки, щоб вишукати швидкість течії річки, a та b дає просто сам дослід, число x знаходиться як число оборотів колеса в приладді, а тоді y дає швидкість течії. Таку саму формулу вживають для находження кількости тепла на випарювання 1 кг. води; в цьому разі a та b визначають просто дані числа, x визначає температуру, а y кількість калорій тепла. В третьому разі ця сама формула дає нам змогу взнати, який об'єм має тіло, що його об'єм при 0^0 був b, нагріли його до x градусів; тут a знов є відоме число, а y дає той самий об'єм, що його шукаємо.

Вже з цих прикладів ми бачимо, що та сама формула дає змогу робити з неї різноманітні висліди, якщо в ній відомі числа a та b дано з досліду, x ми помічаємо що-разу, а y шукаємо. Для того, щоб находити y без багатьох обчислень вживають график. Вкажемо зараз, як зробити график функції $y = ax + b$, коли a та b мають якісь певні значіння. Припустімо, що маємо рівнання (функцію)

$$y = 2x - 7$$

Щоб нарисувати график цієї функції, беремо віси координат OX та OY (рис. 118) й надаємо невідомій x цілком довільне значіння Невідома y набуде певних значінь залежно від значінь x. Маємо таку табличку значінь

$x =$	0	1	2	3	4	5	6
$y =$	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Одкладаючи на координатній площі точки $(0, -7)$; $(1, -5)$;[1] $(2, -3)$; $(3, -1)$; $(4, 1)$; $(5, 3)$; $(6, 5)$ та злучаючи всі ці точки простими, ми побачимо, що всі вони лежатимуть на одній простій. Можна довести, що це не випадковість, а це є необхідна властивість функцій, коли ми її рисуємо графічно. Упевнитися в цьому можна таким чином: ми вже знаємо, що рівнання $y = 2x$ дає нам просту лінію (її нарисовано $O\,C'\,D'$). Порівнюючи-ж два рівнання

1) $y = 2x$ та 2) $y = 2x - 7$

ми бачимо, що ордината кожної точки в другому рівнанні на 7 менше від ординати першої, а тому точки, що задовольняють другому рівнанню, лежать на простій, рівнобіжній до тої, що її дає перше рівнання.

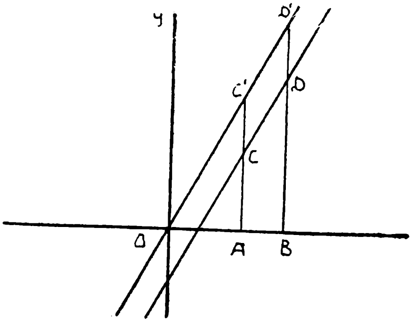


Рис. 118.

Инакше, візьмім на осі OX дві цілком довільні точки A та B. Віддалі OA та OB дадуть нам два числа, припустім a та b. Виразуймо тепер відповідні до цих абсцис a та b ординати. Підставляючи в рівнання $y = 2x$ замість x значіння a, а потім b, ми вишукаємо

[1] Умова: По осі OX одкладаємо додатні значіння правобіч, а від'ємні лівобіч від O; по осі OY додатні вгору, а від'ємні вниз від O.

ординати AC та BD′. Підставляючи ці саме значіння абсцис у рівнання $y = 2x - 7$, ми вираховуємо ординати AC та BD. Після цього вже легко упевнитися, що чотирикутник CC′DD′ є рівнобіжник Справді-ж, у нього боки CC′ та DD′ поміж собою рівні та рівнобіжні, а це буває тільки в рівнобіжникові.

Помітивши, що график функції $y = 2x - 7$ є проста лінія, ми можемо цілком так довести це й про функцію $y = 5x + 2$ і взагалі про функцію $y = ax + b$, де a та b дають нам які завгодно відомі числа, а x та y невідомі величини, й приходимо до висновку: **функція $y = ax + b$ графічно дає просту.**

Розгляньмо ще геометричні значіння чисел a та y (рис. 119).

Якби відкинути число b, ми дістали-б рівнання $y = ax$, що дає нам просту OA.

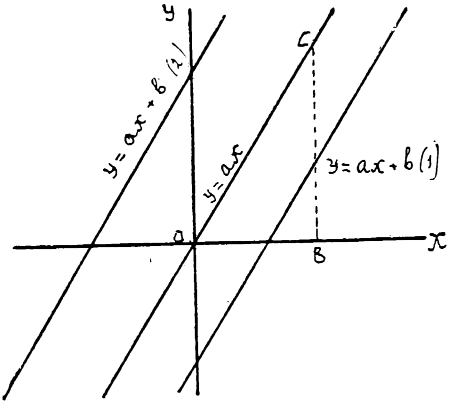


Рис. 119.

Беручи на цій простій довільну точку C, ми матимемо за ординату її $CB = y$, а за абсцису $OB = x$. Із трикутника OCB виходить $CB = OB . \operatorname{tg} COB$, а підставляючи замість CB та OB їх значіння y та x, маємо

$$y = x \operatorname{tg} COB.$$

Порівнявши це останнє рівнання до даного $y = ax$, робимо вислід, що

$$a = \operatorname{tg} COB,$$

цеб-то коефіцієнт a у рівнанні простої $y = ax$ вказує нам тангенс того кута, що під ним проста перехрещується з віссю OX. Через це коефіцієнт a називають **кутовим коефіцієнтом.**

Проста, що її рівнання є $y = ax + b$, рівнобіжна до простої, що має рівнання $y = ax$. Тому ці обидві прості, перехрещуючись з віссю OX, утворюють однакові кути й коефіцієнт a має однакове значіння.

Запам'ятаймо, що далі ми висловлюємося: «проста $y = ax + b$» замість того, щоб казати «проста, що її рівнання є $y = ax + b$».

Розгляньмо ще, яке значіння має коефіцієнт b. Цей коефіцієнт може бути додатній, а може бути і від'ємний, якщо він є додатній, то всі ординати простої $y = ax + b$ вище від ординати простої $y = ax$ (на рисункові відповідну просту означено $y = ax + b$ (2); а якщо b є від'ємне число, ординати простої $y = ax$ вище понад ординати простої $y = ax + b$ (1).

Покладаючи в усіх цих рівнаннях $x = 0$, бачимо, що ми дістанемо з них або $y = 0$ (у рівнанні $y = ax$), або $y = b$ (у випадкові рівнання $y = ax + b$). Точка ($x = 0$, $y = 0$) або (0,0) дає нам початок координат і ця обставина вказує нам, що проста $y = ax$, проходить через початкову точку.

Точка-ж $x = 0$, $y = b$ або $(0,b)$ вказує нам точку на осі ОУ. Отже геометрично ми пояснюємо собі цей факт тим, що проста $y = ax + b$ перехрещується з віссю ОУ у точці на b від початку координат. Якщо b є величина додатня, то проста $y = ax + b$ перехрещується з віссю ОУ там, де ординати додатні в противному разі (b від'ємне) перехрещення буде на боці від'ємних ординат.

Знаючи, що график функції $y = ax + b$ є проста, ми можемо дати досить легенький спосіб для рисування цієї простої.

Ми скористуємося тут із того, що для находження простої досить знати її 2 точки. Нехай, напр., нам дано рівняння

$$y = \frac{1}{2} x + 3.$$

Даючи x-ові яке забажаємо значіння, дістанемо відповідні значіння для y. Ми дамо x-ові значіння, що вказано в цій таблиці.

x	y
0	3
4	5

Через ті точки, що дістали тепер (0,3) та (4,5) (на рисункові 120 це точки A та B) поведімо просту AB, продовжуючи її на обидва боки за дані точки. На цій простій лежатимуть усі точки, що їхні координати x та y задовольнятимуть даному рівнанню, якщо замість x та y підставити туди їхні числові значіння.

Візьмім, напр., $x = 12$, рівнання дає $y = \frac{1}{2} 12 + 3$ або $y = 9$.

Точка (12,9) лежить на нашій простій — це точка C. Даючи y-ові, напр., значіння 0, з рівнання $0 = \frac{1}{2}x + 3$ ми знайдемо $x = -6$. Точка з координатами $(-6,0)$ буде E, вона знов лежить на нашій простій. Ми можемо перевірити це для стількох значінь x та y, для скількох забажаємо.

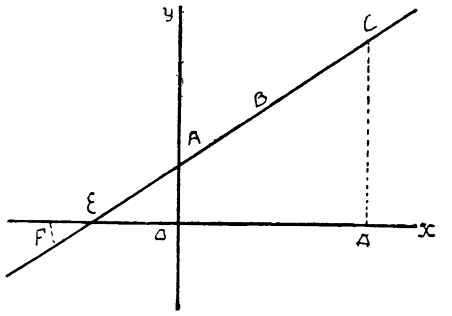


Рис. 120.

З другого боку помітимо, що беручи цілком довільну точку на простій AB та вишукавши з рисунка її координати x та y, ми тим саме знайдемо таку пару значінь невідомих, що вони задовольнятимуть нашому рівнанню. Напр., вибираємо точку F та дивимось, які її координати. З рисунка ми находимо для цих координат так значіння $x = -12$, $y = -3$.

Підставімо ці значіння в наше рівнання й буде

$-3 = \frac{1}{2}(-12) + 3$ або $-3 = -6 + 3$, нарешті $-3 = -3$.

І це положення можна перевірити для всіх точок простої. Таким-же чином можна упевнитися, що координати кожної точки задовольнятимуть дане рівнання.

Приходимо до висновку: якщо нарисувати просту, що відповідає рівнанню $y = ax + b$ то всі значіння невідомих x та y, що задовольняють рівнанню, лежать на даній простій; навпаки, усі точки простої матимуть такі координати, що вони задовольняють даному рівнанню.

Вправи—Нарисуйте график рівнань

1 $y = 3x + 1$ **2** $y = \frac{1}{4}x - 2$

3 $y = 3 - 2x$ **4** $y = 4 - \frac{1}{5}x.$

Перевірте, що, 1. Значіння x та y, що задовольняють рівнанням, дають точки, що лежать на простій;

2. Що координати x та y кожної точки простої, коли їх підставити в дане рівнання, задовольнятимуть йому.

В кожній функції вигляду $y = ax - b$ ми розглядаємо числа a та b, як дані нам зарані відомі числа, а x та y це невідомі, що можуть набувати різних значінь. Иноді кажуть, що числа a та b є величини сталі, що мають певне власне значіння, а числа x та y є величини змінні, що набувають різних значінь. Ці значіння x та y залежать одне від одного, а через те одне з них (переважно, хоч і не необхідно—x) називають незалежною змінною величиною, а друге (в більшості випадків y) називають величиною залежною змінною. Замість незалежна змінна иноді кажуть аргумент, а замість залежна змінна—функція.

Якщо нам дане рівнання з двома невідомими не того типу, що ми щойно розібрали, а иншого, можна його перетворити на перший тип. Нехай маємо рівнання

$$3x - 7x = 4$$

Переносимо член $7y$ на правий, а 4 на лівий бік

$$3x - 4 = 7y$$

міняємо порядок боків

$$7y = 3x - 4$$

і поділяємо обидва боки рівнання на 7. Дістанемо

$$y = \frac{3}{7}x - \frac{4}{7}$$

це вже рівнання має вигляд $y = ax + b$.

В такий спосіб ми можемо перетворити кожне рівнання виду

$$mx + ny = p,$$

де m, n та p визначають сталі величини. Перетворення відбувається, як і в попередньому викладі, послідовно

$$ny = -mx + p \text{ й } y = -\frac{m}{n}x + \frac{p}{n}.$$

Тому, що подібне перетворення не впливає на величину значінь x та y, що їх обумовлює дане рівнання, приходимо до висновку, що й рівнання виду

$$mx + ny = p$$

дає нам просту. Щоб нарисувати просту, тут нема необхідности робити перетворення, а просто в даному рівнанні надавати одній із змінних (невідомих) величин x або y якогось числового значіння й з того саме рівнання вишукувати відповідне значіння для другої змінної.

Вправи—Нарисуйте график функцій

1 $5x + 2y = 20$ **2** $2x - 3y = 1$.

Спосіб підставлення

§ 3. І ті задачі, що ми їх розглядали допіру, і график дають нам змогу зробити висновок, що одне рівнання з двома невідомими x та y, хоч і накладає на x та y деякі обмеження, не дає змоги цілком певно визначити ці невідомі. Щоб мати змогу розвязати рівнання з двома невідомими, треба їх мати вже не одно, а два. Спосіб розвязування, що ми його вказали вище, полягає в тому, що ми перетворюємо дану нам систему двох рівнань на таку, щоб у кожному з них були в одній стороні (звичайно в лівій) самі невідомі, а в другій (звичайно в правій) самі відомі. Для такого перетворення доводиться нам скористатися з перенесення членів, розмикання дужок то-що. Після зведення подібних членів, ми дістанемо такі два рівнання, що в них у кожному буде по 2 члени на одній стороні й по одному на другій. Підбираючи відповідні чинники, щоб порівняти коефіцієнти при одному з невідомих, помножаємо кожне рівнання такими чинниками й потім через додавання або віднімання позбавляємось від одного з невідомих.

В якому-ж разі доводиться додавати й коли віднімати 2 рівнання? Додаємо ми рівнання тоді, коли члени з рівними коефіцієнтами матимуть різні знаки; а віднімаємо, коли ці члени мають знаки однакові. (Поясніть, чому це так?).

Цей спосіб розвязування рівнань зветься з р і в н а н н я м к о е ф і ц і є н т і в (сучинників).

Вправи—Розвяжіть системи рівнань

1 $3x - 2y - 6x + 21 = 12x - 24y - 10.$
$35x - 80 - 60y + 9x = 6y + 7x - 16y.$

2 $10(3x - 5y) - 9(x + y) = 644.$
$5(7x - 2y) = 8(x - y + 5) + 271.$

Вкажемо ще один спосіб для розвязування системи рівнань. Ми розглянемо цей спосіб, розвязуючи таку задачу:

За 45 метр. полотна та 20 метр. сукна заплатили 145 крб., а один метр сукна коштує в 5 разів дорогше від метру полотна. Скільки коштує метр тої та другої матерії?

Припустім, що 1 метр полотна коштує x крб., а один метр сукна y крб. Ціна 45 м. полотна та 20 м. сукна є $45x + 20y$ і перше рівнання виходить $45x + 20y = 145$.

Друга умова вказує, що число y в 5 разів більше від числа x, инакше, що $y = 5x$.

Отже маємо таку систему

$$45x + 20y = 145$$
$$y = 5x$$

У даному разі друге рівнання дає просто значіння y залежно від x. Згадаємо, що невідомі y мають однакові значіння в обох рівнаннях.

Отже, ми можемо в перше рівнання замість y теж написати $5x$, а написавши так, матимемо:

$$45x + 20 \,.\, 5x = 145$$

Це вже є рівнання з одною невідомою, ми його зуміємо розвязати й дістанемо $x = 1$ (перевірте це). Знаючи-ж x, ми знайдемо й y з рівнання $y = 5x$, бо це рівнання тепер буде

$$y = 5 \,.\, 1 = 5.$$

Отже метр полотна коштує 1 крб., а метр сукна 5 крб.

Вправи—Розвяжіть таким засобом системи

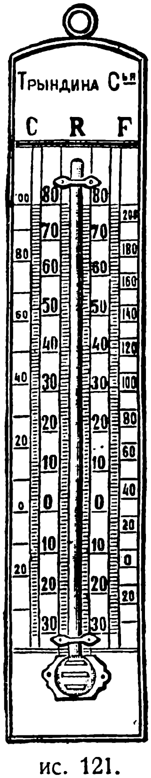
1 $x + y = 10$, $x = y + 2$ **2** $9x - 4y = 6$, $y = x + 1$ **3** $5x - 3y = 1$, $y = 1{,}5x$

Цей спосіб розвязування рівнань ми звемо спосіб п і д с т а в л е н н я.

Вправи до розділу 20

1—Річка тече рівномірно по 2 км. за годину. Пліт пливе цією річкою. Напишіть формулою, де буде пліт через x годин. Дослідіть, як міняється значіння формули, коли x набуває значінь $x = 1,2,3,4,5$. Нарисуйте ці зміни графічно. (Віддаль, що проходе пліт, означте літерою y).

2—Для вимірювання температури, вживають термометри різних систем: Реомюра та Цельзія по всій Европі та ще Фаренгейта в Англії та Сполучених Державах Північної Америки. У термометрах Реомюра та Цельзія температуру, що при ній тає крига визначають 0^0, а у Фаренгейта 32^0. Другу з основних температур, що при ній закипає вода, Реомюр визначив цифрою 80, Цельзій 100, а Фаренгейт 212. Найдіть формулу для обернення градусів Реомюра на градуси Цельзія. (Візьміть означення одних градусів літерою x, а других літерою y). Складіть далі формулу для обернення градусів Фаренгейта на градуси Цельзія. Нарисуйте графики цих функцій.



ис. 121.

3—Завод виробляє що-місяця 18 тон своєї продукції, а потім став збільшувати її що-місяця на 2 тони. Складіть формулу (функцію), щоб вона давала зміну зросту продукції цього заводу, та нарисуйте цю функцію графічно.

4—Потяг ішов зі швидкістю $^3/_4$ км. на хвилину, а коли почався підйом, потяг зменшував свою хуткість на $^1/_{20}$ км. що-хвилини. Нарисуйте графічно функцію зміни швидкости потягу та складіть цю саму функцію.

5—В одному районі було серед членів КНС 122 неписьменних. Що-місяця школа лікнепу (ліквідації неписьменности) при КНС випускає 15 зліквідувалих неписьменність. Складіть формулу та график ліквідації неписьменности в цьому районі.

6—Року 1913 з Росії було вивезено різних товарів до Німеччини та Англії разом на 701 міл крб. До Німеччини було вивезено на 186 мл. крб. більше ніж до Англії. На скільки карбованців було вивезено до кожної з цих держав?

7—На досвідній станції з десятини жита та десятини ячменю було зібрано 120 пуд.; самого ячменю було вдвічі менше, ніж жита. Скільки зібрано було з десятини жита та скільки ячменю?

8—Робітник та його дружина заробили за $^1/_2$ міс. разом 75 крб. Якби робітник заробив на 25 крб. менше, а дружина на 25 крб. більше, вони-б заробили нарівно. Скільки заробив кожний з них?

9—На будівлі працюють всього 23 чол. теслярів та мулярів. Щоденно тесляреві виплачують по 1,25 крб., а муляреві по 1,6 крб. За тиждень праці (6 дн.) всім робітникам видано 204 крб. Скільки було теслярів і скільки мулярів? (Відп.—8 та 15).

10—Вчора в нас у цеху робили 2 робітника та 7 підручних і заробили за день 11 крб., а на другій зміні з такою саме розцінкою робили 1 робітник та 4 підручних й заробили 6 крб. Який заробіток робітника та підручного?

11—У радгоспі було 10 коней та 7 корів і на них усіх разом що-дня видають 176 кг. сіна. Коли прикупили ще одного коня та 2 корови, на годівлю стали витрачувати що-дня 204 кг. сіна. Скільки кг. сіна видавалося що-дня коневі та корові? (Відп.—12 та 8).

12—Два товариші заробили разом 150 крб. Один із них заробив удвічі більше за другого. Скільки заробив кожний?

13—Двом робітникам разом видано 10 червінців. По скільки заробив кожний, якщо одному треба дати на 5 карб. більше від другого?

14—За 2 метри сукна та за 3 метри шерстяної матерії заплатила робітниця 31 крб. Її подруга купила 3 м. цього саме сукна та 7 м. шерстяної матерії й заплатила 49 крб. Найти ціну метра сукна та метра шерстяної матерії. (Відп.—14 та 1 крб.).

15 a) $x + y = 5$, $x - y = 9$ b) $x + 2y = 15$, $2x - 3y = 65$ c) $3x + 4y = 3$, $x = 3y + 1$

РОЗДІЛ 21

Системи рівнань першого степеня

Перетворення підчас розвязування системи рівнань

§ 1. Ті два способи розвязування системи рівнань із двома невідомими, що ми їх вказали в попередньому розділі, прикладатимуться й зараз. Але опріч того, ми ще додамо деякі вказівки, що допоможуть при нагоді розвязування рівнання.

Насамперед, зауважмо, що так рівнання з двома невідомими, як і рівнання з одною невідомою припускають иноді спрощення—скорочення на певне число одного з рівнань. Скорочуємо рівнання даної системи кожне зокрема цілком незалежно від другого рівнання, а тому можемо скорочувати лише одно рівнання або обидва на різні числа. Напр., дано систему

$$x + y = 15$$
$$2x + 10y = 94.$$

У даній системі друге рівнання можна скоротити на 2, поділяючи на 2 усі його члени, бо 2 є спільний чинник усіх членів цього рівнання. Перше рівнання лишаємо без зміни. Будемо мати систему, що є простіша від першої, бо у другому рівнанні всі члени вдвічі менші, ніж у даному.

$$x + y = 15$$
$$x + 5y = 47.$$

Перевірте, що обидві ці системи мають однакові розвязки.

Друге важливе спрощення, що досить часто його приходиться робити, розвязуючи рівнання з двома невідомими, це усунення дужок. Тут ми маємо перед собою два випадки: перед дужками може бути знак $+$ або знак $-$. В першому разі, усуваючи дужки, ми переписуємо всі члени, що були в дужках з їхніми власними знаками. В тому-ж разі, якщо перед дужками був знак $-$, члени, що були в дужках, переписуються без дужок, а знаки перед членами зміняються на обернені, цеб-то $+$ міняється на $-$, а $-$ на $+$.

З усуненням дужок ми вже познайомилися з попереднього. Також познайомилися вже й з позбавленням від знаменика. Це останнє позбавлення теж часто доводиться робити в тому випадкові, коли одно або обидва дані рівнання мають знамеників. Нарешті, остання операція, що нам доводиться з неї користатися, розвязуючи рівнання, це перенесення членів з одного боку рівнання на другий. Всі ці операції прикладатимуться в тих системах рівнань, що ми даємо. Безумовно не кожна з них обов'язково тратиться в кожному з даних рівнань й навіть в кожній з даних систем.

Вправи та задачі

1 $4(3x-2y)+12=x+2;$

$4x+10-10y=5x+15-(12y-x-5).$

2 $15y+5x=50+10x; \quad \frac{y+x}{2}=3y+2x-6.$

3 $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1; \quad \frac{2x-1}{2}-\frac{3y-1}{3}=\frac{5}{6}.$

4 $2+\frac{5x-6y}{13}=4y-3x; \quad 12+\frac{5x-6y}{6}=2y+\frac{3x-2y}{4}.$

5—Два робітники мали кожний однакову платню по 160 крб. за рік, по спецодягу та парі чобіт. Через скорочення штатів робітників цих було звільнено. Перший був на посаді 8 міс. і одержав за це 106 крб. грішми та одяг, другий, він робив $9^1/_2$ міс., одержав 142 крб. та пару чобіт. Як оцінювати одяг та чоботи?

6—Щоб розвинути діяльність книгозбірні та драмгуртка при нашому заводі, довелося позичити 5 600 крб. На книгозбірню дістали гроші по $3^1/_2\%$, а на драмгурток по 5%. Всього що-року за позику доведеться платити 244 крб. Скільки грошей позичено на книгозбірню й скільки на драмгурток?

7—На тютюновій фабриці помішали 2 сорти тютюну й дістали знову 2 сорти. У першій мішанині було взято на 12 кг. першого сорту, 14 кіло другого, а у другій — на 6 кіло першого сорту 20 кіло другого. Кілограм першої мішанини коштував (собівартістю) 16 крб. 80 коп., а кілограм другої 15 крб. Яка була собівартість кожного сорту тютюну?

8—За фунт чаю та 3 кілограми цукру заплатили 2,6 крб. Через деякий час ціна на чай збільшилася на 25%, а на цукор на 10%, тоді на ті саме 1 ф. чаю та 3 кг. цукру було витрачено 3 крб. 16 коп. Яка була ціна 1 ф. чаю та кіло цукру? (До підвищення).

Коли корисна система двох рівнань, а коли—одне рівнання?

§ 2. Ті задачі, що ми оце розвязуємо з допомогою системи двох рівнань з двома невідомими, дуже часто неважко розвязати й з допомогою одного рівнання з одною невідомою. Отже виникає питання, чи слід вживати систему рівнань, чи не краще обмежитися вивченням одного рівнання з одною невідомою, а якщо доведеться вживати системи рівнань, то коли краще користуватися з системи, а коли брати одно рівнання з одною невідомою.

Відповідь на це ми подамо, розглядаючи такі задачі:

1—На двох чеках кооперативу написано: на першому 2 кг. рафінаду та 3 кг. цукр. піску коштують 3 крб. 30 коп., а на другому 2 кг. піску та 3 кг. рафінаду — 3 крб. 45 коп. Яка була в той день ціна кілограму рафінаду та кілограму піску, якщо обидва чеки видано в один день?

Спробуємо розвязати цю задачу з допомогою одного рівнання з одною невідомою. Припустімо, що ціна рафінаду була x коп. за кілограм. 2 кг. рафінаду коштували 2x коп., а на 3 кг. припадало $330-2x$ коп. (Ми обернули всі гроші на копійки). 1 кг. піску коштував $\frac{330-2x}{3}$. Знаючи ціну 1 кг. рафінаду та 1 кг. піску, зуміємо з другої частини задачі скласти рівнання

$$3x + 2 \cdot \frac{330-2x}{3} = 345.$$

Розвязавши це рівнання, знайдемо $x = 75$, а ціна кг. піску буде $\frac{330-2x}{3} = \frac{330-2 \cdot 75}{3}$, що дає 60 коп.

Спробуємо ще раз розвязати цю задачу, але складаючи 2 рівнання з двома невідомими. Для цього припустимо, що 1 кг. рафінаду коштував x коп., а 1 кг. піску y коп. Перше рівнання й друге рівнання складаються тепер досить легко

$$2x + 3y = 330.$$
$$3x + 2y = 345.$$

Довелося на правому боці рівнання дані числа перетворити в копійки, бо на лівому боці рівнань є самі копійки.

Розвязавши цю систему, матимемо $x = 75$ к., а $y = 60$ к.

2 — На кожний з трьох загонів червоноармійців було видано по однаковій кількості набоїв. У першому загоні червоноармійців було на 45 більше, ніж у другому, а тому на кожного червоноармійця припало на 5 набоїв менше, ніж на червоноармійця з другого загону.

У третьому загоні червоноармійців було на 75 менше, ніж у другому, і на кожного припало на 10 набоїв більше, ніж на червоноармійця з другого загону. Скільки було червоноармійців у кожному загоні та по скільки набоїв видано на загін?

Припустімо, що червоноармійців у другому загоні було x людей; в першому вийде $x + 45$, а в третьому $x - 75$.

Припустімо далі, що набоїв на другий загін видано по y штук на червоноармійця, а в такому разі на червоноармійця в першому загоні припало по $y - 5$ шт., а на червоноармійця з третього загону по $y + 10$ шт. Виходить, що всіх набоїв на ввесь перший загін видано було $(y - 5)(x + 45)$ шт.; на ввесь другий yx шт., а на ввесь третій $(y + 10)(x - 75)$ шт. Через те, що кількість набоїв, що їх видано на кожний загін, однаково, маємо 2 такі-о рівнання

$$(y - 5)(x + 45) = xy;$$
$$(y + 10)(x - 75) = xy.$$

Зробивши перемноження та перенесення невідомих членів у ліву сторону рівнання, а відомих у праву, побачимо, що в обох рівнаннях члени xy та $-xy$ скорочуються. Після таких спрощень (проробіть їх) матимемо систему двох рівнань

$$-5x + 45y = 225.$$
$$10x - 75y = 750.$$

Досить зручно розвязати цю систему способом зрівнання сучинників, помножаючи перше рівнання числом 2, а друге лишаючи без зміни. Буде тоді

$$-10x + 90y = 450$$
$$10x - 75y = 750.$$

Якщо тепер додамо рівнання одне до одного та зведемо подібні члени, матимемо (перевірте це)

$$15y = 1\,200, \text{ а звідци } y = 80.$$

Щоб вишукати x, найкраще буде скоротити перше рівнання на 10 і у рівнання $-x + 9y = 45$, підставити замість y число 80. Буде $-x + 720 = 45$, а $x = 675$ (перевірте це).

Знаючи, що в другому загоні 675 червоноармійців та, що на кожного з них припало по 80 набоїв, можемо взнати й кількість червоноармійців у першому та третьому загонах і кількість набоїв, що припадає на кожний загін.

Вийде, що в першому загоні було 720 червоноарм., у третьому 600, а кількість набоїв була 54 000 шт. на кожний загін.

Спробуйте розвязати цю задачу, складаючи рівнання з одною невідомою й ви побачите, що цього вам не вдасться досягти.

3—Двом робітникам видано 50 крб., одному на 6 крб. більше ніж другому. Скільки видано кожному?

Припускаючи, що одному видано x, а другому y крб., складаємо систему двох рівнань з двома невідомими

$$x + y = 50$$
$$x - y = 6$$

й, розвязавши її маємо $x = 28$, $y = 22$ (перевірте).

Якби бажали розвязати цю задачу, складаючи одне рівнання, ми-б припустили, напр., що один робітник одержав x, а другий $x - 6$ крб. Тоді маємо рівнання $x + (x - 6) = 50$ і звідци знов $x = 28$, а платню другого робітника взнаємо, вираховуючи $x - 6 = 28 - 6 = 22$.

З усіх цих задачок ми бачимо, що є такі задачі, що їх краще розвязувати одним рівнанням, є, навпаки, такі, що для розвязування їх доводиться складати 2 рівнання, є, нарешті, й такі, що обидва способи дозволяють вишукати розвязку. В цьому останньому випадкові краще брати той спосіб, що швидше й легше приведе нас до результату.

Вправи—Розвяжіть задачі, складаючи або 1 рівнання з одною невідомою або систему двох рівнань (з 2 невід.).

1—Обвід класної дошки є рівний 3 м. 36 см., довжина її на 32 см. більша за ширину. Яка довжина та ширина дошки?

2—В середині XVIII сторіччя в Оренбурзькій губерні за 2 гуски та за 4 курки платили 50 коп., а за 3 гуски та 5 курок платили 70 коп. Яка була тоді ціна 1 курки та 1 гуски?

3—У майстерні працювали чоловіки та жінки; кількість чоловіків відносилася до кількости жінок, як $5:6$, через деякий час було взято нових 7 робітників, а 3 жінки кинули роботу. Тоді відношення чоловіків до жінок стало $9:7$. Скільки чоловіків та жінок було в майстерні спочатку?

4—Два капітали, що обидва, разом становлять 27 000 крб., дають що-року однаковий прибуток. Перший дає 4%, а другий 5%. Які це капітали?

Графічний спосіб розвязування системи з двома невідомими

§ 3. Дуже часто на практиці користуються, розвязуючи систему рівнань, з графічного способу. Розгляньмо зараз цей спосіб (його частіш за все прикладають у техніці).

Нехай маємо розвязати систему двох рівнань

$$2x + y = 5 \quad . \ . \ . \ . \ 1$$
$$5x - y = 2 \quad . \ . \ . \ . \ 2$$

З цих рівнань 1 та 2 знаходимо $y = -2x + 5$ та $y = 5x - 2$ (перевірте це).

Останній вигляд рівнань яскраво нам указує, що y є функція $x'y$. Користуючись з цього, ми можемо нарисувати прості, що даватимуть нам графіки відповідних функцій. Без сумніву, ми вже зуміємо нарисувати графік фукцій, що їх нам дано рівнанням 1 та 2 й не перетворюючи самі функції так, щоб y був на одній стороні рівнання, а всі инші члени — на другій (див. розд. 20 § 2). Так, звичайно, й роблять на практиці.

Щоб нарисувати просту, що відповідає рівнанню 1-му, самі надаємо одній з невідомих довільне значіння, а значіння другої невідомої обчислюємо залежно від першої. Припустімо, що надаємо такі значіння $x = 1$, а $y = 3$ і вдруге $x = -2$; $y = 9$.

x =	1	—2
y =	3	9

Ці значіння ми записуємо, як вказує таблиця.

Подібну-ж таблицю зробімо для другого рівнання, даючи x-ові значіння 0, а потім 2 й обчисляючи відповідні значіння y (ігреку).

x =	0	2
y =	—2	8

(Перевірте обидві таблиці. Зробіть сами рисунок).

Поведім через точки (1,3) та (— 2,9) одну просту AB й через точки (0, — 2) та (2,8) другу просту CD. Ми вже знаємо, що беручи замість x та y координати якої завгодно точки простої AB, ми задовольнятимем рівнанню 1, а беручи замість x та y координати довільної точки простої CD, задовольнятимем рівнанню 2. Що-ж можемо ми казати про точку, де перетинаються обидві прості — AB та CD? Координати цієї точки, числові значіння x та y задовольнятимуть одночасно й рівнаню 1 й рівнанню 2. Инакше кажучи — координати точки перетину простих дають нам розвязку даної системи. В цьому й полягає графічне розвязування системи рівнань.

Вправи — Розвяжіть графічно такі системи й перевірте розвязку аналітичним способом (що ви знаєте допіру).

1 $x + y = 3$
$x - y = 0$

Якому з невідомих надаєте ви довільне значіння? Скільки разів у кожному з рівнань доведеться надавати одній з невідомих величин довільних значінь?

Скільки точок дістанете, надаючи одній з невідомих 2 довільних значіння та вичисляючи другу невідому?

Яка точка дасть корінь (розвязку) системи?

2 $x - 3y = 1$
$3x + y = 2$

3 $y + 2x = 4$
$3y - 2x = 4$

4 $2x + 3y = 13$
$3x + 2y = 12$

Неозначені та незгідні рівнання

§ 4. Розгляньмо ще таку систему двох рівнань з двома невідомими першого степеня.

$$2x + 3y = 10 \quad (\mathrm{I})$$
$$4x + 6y = 18 \quad (\mathrm{II})$$

Спробуйте розвязати цю систему способом зрівнання сучинників; для цього помножіть всі члени рівнання (1) числом 2 й відніміть від того рівнання, що дістанемо (II). Наслідок буде $0 = +2$, що неможливо (перевірте це).

Спробуйте далі розвязати систему способом підстановлення, взнаючи значіння x з (1) рівнання й підставляючи в друге. Дістанете з 1) $x = \frac{10 - 3y}{2}$ і після підстановлення в друге рівнання $20 - 6y + 6y = 18$ або $20 = 18$, що знов неможливо. (Перевірте й тут усі перетворення).

Нарешті, звернімось до графічного способу. Якщо ви нарисуєте обидві прості, що їхні рівнання є (I) та (II), ви побачите, що прості рівнобіжні одна до одної (зробіть рисунок). В цьому упевнює нас також і те, що коли ми дану систему перетворимо так, щоб визначити y з обох рівнань, ми дістанемо такі вирази

$$y = -\frac{2}{3}x + 10 \text{ та } y = -\frac{2}{3}x + 18.$$

(Перевірте це). Останні-ж рівнання кажуть нам, що обидві прості, перетинаючись з віссю координат OX, становлять такі кути, що їхні тангенси однакові, а в такому разі й кути однакові, цеб-то прості рівнобіжні одна до одної. Рівнобіжні-ж прості не перетинають одна одну, а не маючи точки перетину двох простих, ми не знайдемо й графічного розвязування даної системи.

Такі системи двох рівнань називають суперечні або незгідні рівнання. Зовнішня ознака їх є така: якщо подвоїти (I) рівнання та порівняти його до (II), то побачимо, що та сама сума двох величин дорівнює в одному разі числу 20, а в другому 18.

$$4x + 6y = 20$$
$$4x + 6y = 18$$

Инші неозначені системи.

Спробуйте розвязати, наприклад, систему $2x + 3y = 17$
$4x + 6y = 34$.

Тут ми не маємо суперечності, як це було раніш, але розвязати таку систему не зуміємо. Спробуйте її розвязати тими двома аналітичними засобами, що ви знаєте, й побачите, що вам не вдасться знайти ані x ані y. Коли-ж ви нарисуєте графіки цих рівнань, то побачите, що матимете не дві, а одну просту. Власне кажучи, ми маємо тут одне рівнання, бо друге є просто вислід з першого, що ми дістанемо, помножаючи всі члени першого—числом 2.

Вправи — Поясніть, чому не можна розвязати систем

1 $x - y = 5$, $x = y$ **2** $y = 7 - 2x$, $y + 2x = 3$ **3** $x = 5 - 3y$, $6y = 10 - 2x$.

Системи рівнань з трьома невідомими

§ 5. В житті иноді доводиться мати системи не тільки двох рівнань з двома невідомими, але й системи більшої кількости рівнань з більшим числом невідомих.

Розгляньмо, наприклад, задачу:

З відомостей фабрики ми бачимо, що собівартість метра ситцю становить 39 коп. Цю собівартість фабрика складає з таких частинок: 1. вартість сировини та опалення, 2. заробітня платня й 3. инші витрати. На сировину та опалення припадає на 9 коп. більше, ніж на инші витрати, а на зарплатню на 12 коп. більше, ніж на сировину та опалення. Знайти ці три складові частини собівартости.

Зробім такі припущення — нехай витрачається

1 — на сировину та опалення . . . x коп.
2 — на заробітню платню . . . . y коп.
3 — на инші витрати . . . . . . z коп.

з кожного метра ситцю. Після цих припущень маємо систему трьох рівнань з трьома невідомими

$$x + y + z = 39 \quad (I)$$
$$x = z + 9 \quad (II)$$
$$x = y - 12 \quad (III)$$

(Поясніть, як складено кожне з рівнань цієї системи).

Для цієї системи трьох рівнань з трьома невідомими ми вкажемо ті самі два аналітичні способи розвязування.

1 спосіб додавання або віднімання. Перетворім дані рівнання, переносячи невідомі на лівий бік, а відомі на правий бік у кожному рівнанні. Підписуючи рівнання одне під одним, напишемо відповідні невідомі в певному порядкові.

$$x + y + z = 39 \quad (A)$$
$$x - z = 9 \quad (B)$$
$$x - y = -12 \quad (C)$$

Додаючи до рівнання (A) рівнання (B), матимемо $2x + y = 48$, а додаючи до цього останнього рівнання дане рівнання (C), дістанемо $3x = 36$, звідки $x = 12$.

Вставляючи замість x його числову вартість у рівнання спочатку (C), а потім (B), знайдемо $y = 24$ й $z = 3$.

Вкажім ще раз, як розвязувати систему трьох рівнань. Нехай маємо три повних рівнання з трьома невідомими, цеб-то такі рівнання, що в кожному з них є кожне невідоме.

$$2x + 3y + 4z = 47 \quad (I)$$
$$5x - 2y + 3z = 21 \quad (II)$$
$$4x + y + 5z = 48 \quad (III)$$

Помножмо (III) рівнання (кожного члена його) числом 3 й від добутка віднімемо (I); потім помножмо початкове (III) рівнання числом 2 й добуток додаймо до (II). Після спрощень матимемо (пробробіть це):

$$10x + 11z = 97$$
$$13x + 13z = 117.$$

Набули систему двох рівнань з двома невідомими x та z. Розвязавши цю систему, знайдемо числові значіння x та z, а підставивши їх замість x та z в одне з рівнань даної системи, знайдемо й числове значіння y.

Отже, розвязуючи систему трьох рівнань з трьома невідомими, способом додавання або віднімання, ми дбаємо про те, спочатку, щоб зрівняти сучинники при будь-якому невідомому й шляхом додавання, або віднімання позбавитися від нього. Після цього в нас буде вже система двох рівнань з двома невідомими, а її ми вже вміємо розвязати.

З попереднього ми можемо зробити ще вислід, що коли в задачі ми вводимо 3 невідомих, то для відшукання їх числових значінь (розвязок) необхідно мати 3 рівнання. Одного рівнання або двох рівнань нам не досить також, як це було тоді, коли мали 1 рівнання з двома невідомими (див. розд. 20 § 2).

2 спосіб підстановлення. Зазначмо цей спосіб на простому прикладі. Нехай маємо знов систему трьох рівнань.

$$5x - 4y + 2z = 1 \quad (I)$$

$$20x + 12y - 8z = 9 \quad (II)$$

$$8y - 15x + 3z = 3 \quad (III)$$

Відшукаємо одно невідоме, яке забажаємо, з одного, теж цілком однаково, з якого, рівнань. Ми знайдемо, напр., з (I) рівнання невідоме x. Буде $x = \frac{1 + 4y - 2z}{5}$ (перевірте це). Значіння x, виходить, залежить від y та z. Це значіння підставмо в два рівнання (II) та (III) нашої системи, саме в ті рівнання, що не з них вишукали перше невідоме. Після спрощень та відділення невідомих на один бік, а відомих — на протилежний бік рівнання, матимемо систему двох рівнань з двома невідомими (перевірте це).

$$28y - 16z = 5$$

$$-4y + 9z = 6.$$

Розвязавши цю систему (зробіть це), знайдемо, що $y = 3/4$; $Z = 1$, а тоді знайдемо й x, підставляючи числові значіння замість літер y та z у формулу

$$x = \frac{1 + 4y - 2z}{5} \text{ буде } x = 2/5.$$

Цей спосіб доводить нам, що шляхом находження значіння невідомого x залежно від y та z, ми перетворюємо систему трьох рівнань з трьома невідомими на систему двох рівнань з двома невідомими. З нього ми знов маємо, що ми не зможемо розвязати системи двох рівнань з трьома невідомими, бо її цим способом ми перетворюємо на одно рівнання з двома невідомими.

Цей спосіб особливо придатний в тому разі, коли в одному з рівнань є невідоме, що має сучинника 1. Це невідоме ми й вилучаємо з того рівнання, де його сучинник 1, бо тоді не маємо дробів.

Відносно розвязування задач, складаючи системи трьох рівнань з трьома невідомими, можна сказати те, що сказано про задачі з двома невідомими, а саме: розвязуючи задачі, ми припускаємо, що невідомі нам числа є x, y, z. Складаємо три рівнання, використовуючи дані задач, та розвязуємо їх як це вже вказано.

Що до графічного способу розвязування рівнань з трьома невідомими, він остільки важкий, що ми його не зазначаємо.

Треба ще пам'ятати, що практика дуже рідко вимагає розвязувати системи чотирьох рівнань з чотирма невідомими, п'ятьох рівнань з п'ятьма невідомими, взагалі n рівнань з n невідомими. Способи для розвязування таких систем ті-ж саме, що ми їх вказали про системи трьох рівнань з трьома невідомими.

Вправи до розділу 21

1 — Один приятель каже другому: «Якщо ти мені даси 49 крб., у мене буде втричі більше грошей, ніж у тебе». А другий відповідає: «Дай ти краще мені 49 крб. і тоді я матиму стільки, як і ти». Скільки грошей було в кожного? (Відп. — 245 та 147 крб.)

2 — У ювеліра було 2 годинники золотий та срібний і 2 ретязки (ланцюжки) до них; гірший ретязок коштував 36 крб., а кращий 105 крб. Золотий годинник разом із кращим ретязком коштує в $2^1/_5$ рази дорогше за срібний з гіршим ретязком; коли-ж купувати золотого годинника з гіршим ретязком, треба заплатити тільки на 6 крб. дорогше, як за срібний годинник з кращим ретязком. Найти ціну кожного годинника. (Відп. — 159 та 84 крб.)

3 — Куплено 2 вози та коня. Кінь коштує 840 крб. Перший віз разом із конем в три рази дорогше за другого воза, а ціна другого воза разом з конем відноситься до ціни першого, як 11 : 5. Скільки коштує кожний віз? (Відп. — 600 та 480)

4 — Сім років тому сестра була вдвічі старша брата, а через рік буде тільки в 1½ рази старша за нього. Скільки років братові та сестрі тепер? (Відп.—15, 23)

5 — На сторінці книги невеликого формату пересічно міститься 1 300 літер великого шрифту або 1 850 літер дрібного. Статтю на 37 250 літер надруковано на 24 сторінках Скільки сторінок великого й скільки дрібного шрифту в цій статті? (Відп. — 13 та 11)

6 — Мати та дочка по 7 годин на день прядуть вовну. Коли мати проробила 5 годин, а дочка $1^1/_2$ дні, вони разом напряли 1 ф. прядива. Коли-ж далі мати робила повних 2 дні, а дочка 7 день, вони напряли 4 ф. Скільки кожна з них окремо може напрясти за день? (Відп. — $^1/_2$ ф., $^3/_7$ ф.)

7 — У Німеччині 5 гектолітрів пшениці коштували стільки, як 7 гектолітрів жита. Коли-ж гектолітр пшениці подорогшав на 3 марки, а гектолітр жита подешевшав на 1 марку, ціна пшениці відносилася до ціни жита, як 12 : 7. Скільки коштував спочатку гкл. пшениці й скільки гкл. жита? (Відп.—21 та 15)

8 — Кооператив замовив у Винторзі 75 пляшок червоного та 30 пляшок білого вина, всього на 186 крб. У Винторзі в цей час було знижено ціни на 10 коп. на пляшку червоного й на 20 к. на пляшку білого вина; через це Винторг приставив кооперативу на ту саме суму 80 пл. червоного та 33 пл. білого вина. Скільки коштувала до знижки пляшка вина кожного сорту? (Відп. — 1,6; 2,2)

9 — У крамниці перемішано 2 сорти борошна двома способами. Для першої мішанини взято 2 пуди першого сорту й 3 пуди другого; собівартість пуда цієї мішанини 1 крб. 32 коп. Для другого сорту взято 1 п. першого сорту й 5 п. другого, собівартість цієї мішанини 1 крб. 25 коп. Яка була собівартість кожного пуду з двох перших сортів? (Відп. — 1,5; 1,2 крб.)

10 — Помішано 2 сорти тютюну й також дістали 2 сорти. Для першого сорту мішанини взято 5 ф. тютюну вищого сорту та $2^1/_2$ ф. нижчого; собівартість фунта цієї мішанини 4,4 крб. Для другої мішанини взято 8 ф. першого сорту та 7 ф. другого. Собівартість фунта цієї мішанини була 4,24 крб. Скільки коштував фунт кожного сорту до перемішування? (Відп. — 4,8 та 3,6)

11 — Велосипедний трек (де роблять вправи на велосипедах) овальної форми (витягнуте коло) має довжину 2 700 м. Вздовж його края одночасно в тому самому напрямкові виїхало двоє велосипедистів і перший наздогнав другого на повне коло через 18 хвилин. Після цього вони рушили в протилежних напрямках, починаючи з одного місця, й їхали знову з тою самою швидкістю, що й раніш. Зустрілися через 3,6 хвилин. Яка швидкість кожного велосипедиста за хвилину? (Відп. — 450 та 300 м.)

12 — Кооператив розділив свої гроші на дві частини й після закінчення операції має з першої частини $5^0/_0$, а з другої $4^0/_0$ прибутку, а разом 127 крб. Після цього ці саме гроші (без прибутку) кооператив знов витрачає на купівлю товарів. На цей раз з першої частини кооператив має $4^0/_0$, а з другої $5^0/_0$ прибутку, а через це загальний прибуток на 7 крб більший, як у перший раз. Які були ці частини капіталу? (Відп. — 1 100 та 1 800 крб.)

13 — Банк позичив одному підприємству 950 крб., а другому 1 240 крб. й має з цих обох сум грошей за рік 100 крб. прибутку. Другого року банк перемінив умови позики й від першого підприємства він дістав тепер стільки відсотків, як раніше виплачувало друге, а від другого стільки, скільки раніше виплачувало перше. Цього року банк має прибутки на 2 крб. 90 коп. менше. По скільки %% віддано було гроші кожному підприємству? (Відп. — 4 та $5^0/_0$)

14 - Заводоуправління позичає в двох банків гроші, в одному 7 000 крб., а в другому 8 500 крб. і виплачує банкам неоднакові %%, першому на 135 крб. менше, як другому. Другого року довелося в першому банкові збільшити позичку й позичити 11 000 крб., а в другому 9 500 крб. Відсотки виплачує заводоправління ті саме, але тепер виплачує кожному з банків за рік нарівно. Найти $\%^0/_0$? (Відп. — $4^3/_4$ та $5\frac{1}{2}{}^0/_0$)

15 — Підприємство першого року свого існування дало 2 160 крб. прибутку. Другого року воно дало на $^1/_2 {}^0/_0$ на основний капітал більше, ніж за перший рік, а тому й прибутку було на 240 крб. більше. Який основний капітал підприємства та скільки $^0/_0{}^0/_0$ прибутку? (Відп. — 48 000, $4^1/_2{}^0/_0$)

16 — Радгосп має виплатити банкові через 6 міс. 1 000 крб. Він умовився з банком замість цього частину боргу виплатити через 4 міс., а останню частину через 9 міс. Найти ці обидві частини (Відп. — 600 та 400 крб.)

17 — У санаторію було 42 душі дорослих та 12 дітей і на них усіх видавалося що-дня 87 пляшок молока. Коли-ж число дорослих збільшилося на 3, а число дітей зменшилося на 2 й щоденного пайка кожному (й дорослому й дитині) було збільшено на $^1/_2$ пляшки, на всіх хворих видавалося вже 115 пляшок що-дня. Скільки молока видавалося спочатку що-дня кожній дорослій людині та кожній дитині? (Відп. — $1^1/_2$ та 2).

18 — На хуторі було 10 коней та 14 корів. На годівлю їх витрачали що-дня 180 кг. сіна. Далі довелося щоденно пайок коневі збільшити на $25^0/_0$, а корові на $^1/_3$; за цих умовин на них усіх витрачалося вже 232 кг. сіна. Скільки сіна видавали що-дня кожному коневі та кожній корові? (Відп. — 9,6 та 6).

19 — За 1 фун. чаю та за 3 фун. цукру заплатили 2 крб. 60 к. Коли-ж ціна чаю збільшилася на $25^0/_0$, а ціна цукру на $10^0/_0$, то на ці-ж самі речі довелося витратити 3 крб. 16 коп. Скільки коштує 1 ф. чаю та 1 ф. цукру? (Відп. — 2 крб.; 20 коп.)

20 — Школа купує 400 зошитів та 150 оливців, всього на 27 крб. Через те, що школі дано знижку $10^0/_0$ на зошитах та $15^0/_0$ на оливцях, виплачує школа лише 23 крб. 55 коп. Скільки коштує один зошит та один оливець без знижки? (Відп. — 3 та 10 коп.).

21 — Кооператив за сувій чорного сукна 42 м. та за сувій синього 30 м. заплатив 348 крб. Кооператив зробив надвишку на чорне сукно $12^1/_2{}^0/_0$, а на синє $20^0/_0$ на собівартість. Покупець заплатив за 10 м. чорного та $2^1/_2$ синього 63 крб. Скільки платив сам кооператив за метр кожного сукна? (Відп. — 4; 6 крб.).

22 — Банк купив 15 акцій одного акційного товариства та 24 акції другого й заплатив за всі 5 880 крб. Через деякий час перші акції подорогшали на $30^0/_0$, а другі подешевшали на $5^0/_0$ і банк продав їх усі за 6 636 крб. По якій ціні він купував ту та другу акції? (Відп. — 200; 120).

23 — Один мандрівник розповідав: «Я був у Німеччині, Франції та Італії й витратив на це 3000 марок; у Німеччині витратив я 846 мар., у Франції 1811 франків, а в Італії 205 дукатів». Знаючи, що 7 дукатів на 8 пфен. дорожче за 30 франків та що 1 пфен. є 0,01 марки, найти в марках ціну франка та дукату (Відп. — 0,8 та 3,44).

24 — Коли ми до чисельника та знаменика дробу додамо по 2, то матимемо дріб $^2/_5$, коли-ж од чисельника та знаменика дробу віднімемо по 3, то матимемо $^1/_4$. Який це дріб? (Відп. — $^8/_{23}$).

25 — В одному загоні війська була кіннота та піхота. Для цього загону заготовлено було припасів на 30 дн. Але через те, що кіннота вийшла через 12 дн., для піхоти запасів вистачило на 27 дн. ще далі, після виходу кінноти. На скільки днів вистачало-б цих припасів на кожну частину війська зокрема? (Відп. — 45; 90).

Увага: У цій задачці, а також у декількох, що будуть далі, потрібно вишукати частини $1/x$ або $1/y$. У даній задачі це будуть ті частини запасу, що їх з'їдають піхота або кіннота за день. Найкраще розвязувати такі задачки способом заміни невідомих. Цей спосіб ми вкажемо на такому прикладі: Нехай нам дано розвязати систему

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 25 \quad . \ . \ (I)$$

$$\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 26 \quad . \ . \ . \ . \ (II)$$

Введемо нові невідомі t та u, щоб вони задовольняли умовам

$\frac{1}{x} = t$, а $\frac{1}{y} = u$ . . . (III)

в такому разі $\frac{3}{x} = 3 \cdot \frac{1}{x} = 3t$ і також $\frac{4}{y} = 4u$; $\frac{2}{x} = 2t$; $\frac{5}{y} = 5u$

А тому, наші дані рівнання (I) та (II) набувають вигляду

$$3t + 4u = 25 \quad . \ . \ . \ . \ (A)$$

$$2t + 5u = 26 \quad . \ . \ . \ . \ (B)$$

Розвязавши останню систему яким забажаємо способом, ми знайдемо розвязки $t = 3$; $u = 4$. (Перевірте це).

Щоб знайти після цього значіння x та y, ми користуємось із рівнань (III), куди вставляємо числові значіння u та t. Після підстановлення, матимемо

$$\frac{1}{x} = 3 \text{ й } \frac{1}{y} = 4,$$

а кожне з цих рівнань, шляхом звільнення від знаменників, дає $1 = 3x$ та $1 = 4y$ й остаточно

$$x = {}^1/_3;\ y = {}^1/_4,$$

а це є вже розвязка даної системи (I) та (II).

26—Два робітники можуть закінчити роботу за 8 годин. Перший почав роботу вчасно, а другий спізнився на 3 години. Через це за перший день робітники зробили не всю, а тільки 51/56 всієї роботи, хоч проробили ще цілу 1 годину зайву. За скільки годин кожний робітник, працюючи зокрема, міг-би зробити цю роботу? (Відп.—18 г. 40 хв.; 14 год.).

27—Два робітники, працюючи одночасно, можуть закінчити працю за 80 день. Але перший робив лише 10 день, а другий 12 день. і зробили всього 2/15 робити. За який час кожний з них сам міг-би скінчити цю роботу? (Відп.—120 ; 240).

28—Декілька робітників цілком однакових своїми здібностями виконали певну роботу. Вдруге довелося виконувати таку саму роботу, але тоді робітників було на 1 менше, ніж у перший раз, а тому працювати довелось на 3 дні довше. Таку саму роботу треба було виконати цим робітникам і втретє. Але робота була термінова і, щоб закінчити її на 2 дні швидше, ніж у перший раз, довелося закликати ще 4 робітники. Скільки було робітників у перший раз і за скільки днів виконали вони працю? (Відп.—2 ; 3).

Примітка: Дорогоцінні речі, що їх виробляють з срібла та золота мають, так звану, пробу. За старих часів проба була у нас відзнакою, скільки золотників чистого срібла чи золота припадає на 1 ф. стопу. Тепер у нас поширюється метрична проба, де вказується, скільки грамів чистого металу (срібла чи золота) припадає на кілограм стопу. Зауважмо ще, що всякий примішок до чистого металу має назву лігатура. (Див. розділ 14, § 5).

29—Маємо 2 стопи лігатури з сріблом. У першому стопі кількості цих металів відносяться, як 2 : 3, а в другому, як 3 : 7. Скільки треба взяти фунтів кожного стопу, щоб стало 8 ф. нового стопу, де-б відношення лігатури до срібла було 5 : 11? (Відп.—1 та 7).

30—В ювеліра є 2 клапті срібла. Коли він стопив 375 кг. першого та 125 кг. другого, він дістав стоп 880 проби. Коли ж він стопив 225 кг. першого та 275 кг. другого, то стоп був 850 проби. Якої проби 2 перші клапті? (Відп.—905 та 805).

31—В ювеліра були 2 клапті золота різної проби; 71 ф. першого та 195 ф. другого сорту, коли їх стопити разом, дають стоп 800 проби, а 171 ф. першого сорту та 95 ф. другого—дають стоп 900 проби. Яка проба кожного клаптя? (Відп.—995 та 729).

32—Стопили 13 кг. срібла вищої проби та 12 кг. срібла нижчої проби й дістали срібла 852 проби; вдруге стопили 1,5 кг. вищої та 1 кг. нижчої проби й дістали срібло 860 проби. Найти пробу вищого та нижчого сорту срібла. (Відп.—900 ; 800).

33—У трьох шафах розставлено 226 книг, у другій шафі на 7 кн. більше, ніж у першій і на 22 книги більше, ніж у третій. Скільки книжок у кожній шафі?

Розвяжіть цю задачу двома способами: складаючи одне рівняння з одною невідомою, а потім 3 рівняння з 3 невідомими.

34—Один чоловік купив 8 ф. цукру, 10 ф. кави та 3 ф, чаю й заплатив за все 13,2 крб.; другий (ціни ті саме) купив 4 ф. цукру, 5 ф. кави та 2 ф. чаю й заплатив 7,4 крб.; нарешті, третій купив 6 ф. цукру та 1 ф. чаю й заплатив за це 3,4 крб. Що коштує 1 ф. цукру, 1 ф. чаю та 1 ф. кави? (Відп.—30 коп. 1,6 крб.; 60 коп.).

35—Знайти три кути трикутника, що відносяться один до одного, як 1 : 2 : 3 (Відп.—Один з кутів 60^0)

36—Троє грають у карти з такою умовою: кожний з них мусить покласти на стіл яку бажає суму грошей й не ховати її, поки не скінчать грати 3 рази. Той, хто програє, дає кожному з двох останніх таку суму грошей, яка є перед ним на столі. За 3 рази кожен з грачів програв по одному разу й після цього у кожного з них стало по 100 крб. Скільки грошей поклав кожний перед собою на початку гри? (Відп.—162,5 крб.; 87,5 крб.; 50 крб.).

37—Є три стопа, що в них

у першому	золота	750	гр.,	срібла	200	гр.,	міди	50	гр.
у другому	»	800	»	»	125	»	»	75	»
у третьому	»	700	»	»	250	»	»	50	»

з них треба стопити новий стоп, де має бути 765 гр. золота, 175 гр. срібла та 60 гр. міди. Скільки грамів кожного стопу треба взяти? (Відп.—500; 400; 100).

38—З трьох сортів чаю по 3 крб. перший, по 2 крб. 40 коп. другий та 2 крб. 20 коп. третій за фунт; змішавши їх, одержали один сорт, всього 90 фунт. по 2 крб. 50 коп. за фунт. На цей змішаний чай третього сорту взято на 5 ф. менше, як другого. Скільки фунтів кожного з перших трьох сортів узято? (Відп.—25; 35; 30).

39—Маємо спирт трьох сортів: у 65,80 та 90 градусів, усього спирту 70 пляшок. Якби змішати увесь перший сорт з усім спиртом другого сорту, дістали-б мішанину на 74 градуси. А якби змішати другий сорт із третім, то мішанина буде на 84^0. Скільки було пляшок спирту кожного сорту? (Міцність спирту, так звані, градуси, вказують скільки відсотків чистого спирту припадає на мішанину). (Відп.—20, 30, 20 пл.).

40—На селі була не повна школа, а трирічка. У першому та другому поділі цієї школи було 60 учнів, з першого поділу до другого перейшли 25 учнів, з другого до третього 20, а скінчило третій поділ 35. Після цього стало в другому поділі втричі більше учнів, аніж у першому й на 5 більше, аніж у третьому. Скільки було учнів у кожному поділі (до переведення їх до старших класів)? (Відп.—35, 25, 40).

41—Банк видав грошову позичку трьом артілям і бере за позичку з одної $4^0/_0$, з другої $5^0/_0$, а з третьої $6^0/_0$. Що-року банк пає з цих грошей 530 крб. прибутку. Перша артіль виплачує мроцентових грошей на 70 крб. менше від другої. Якби банк усім артілям позичив ці гроші за 5%, то загальний його прибуток був-би на 30 крб. менше. Скільки карбованців позичила кожна артіль? (Відп.—2 тис.; 3 тис.; 5 тис.).

42. Торговельне підприємство разом провадить три торгові операції на загальну суму 11 100 крб. Перша операція дала 4%, друга $4\frac{1}{2}$%, а третя 5% прибутку, а разом 512 крб. доходу. Безпосередньо підприємство знову пускає в обіг ті саме три частини грошей (без прибуткової суми). Тут-же перша частина грошей приносить $2\frac{1}{2}$%, друга 3% й третя 4% прибутку. Увесь прибуток після другої операції становить 371 крб. Скільки карбованців витрачало підприємство на кожну з указаних операцій? (Відп.—2 600; 3 400; 5 100 крб.).

43—Школа купує в кооперативі 150 зошитів одного сорту, 120 зшитків другого та 200 оливців; на зошитах першого сорту школа дістає 20% знижки, на зшитках другого 15%, а на оливцях 10%. За все куплене школа заплатила 27 крб. 06 коп., а якби не було знижки, треба було-б платити 31 крб. 10 коп. Собівартість одного зошита першого сорту, одного зошита другого та одного оливця, без знижки—18 коп. Скільки коштував кожний зошит першого й другого сорту та оливець? (Відп.—5; 3; 10).

44—Банк позичає трьом заводам гроші з однаковими відсотками. Перший завод виплачує річних відсоткових грошей 80 крб., другий 200 і третій 120 крб. Першому та другому разом позичив банк 5 600 крб. Скільки банк позичив кожному заводові та на яких умовах? (Відп.—1 600; 4 000; 2 400; 5%).

Примітка: Щоб розвязати цю задачу треба скласти три рівнання з трьома невідомими.

45—Міськрада робить замовлення на рейки для трамваю трьом заводам. Коли перший завод працюватиме 3 міс., другий 6 міс. й третий $4^1/_2$ міс., то вони всі разом можуть виконати лише 0,9 замовлення. Коли-ж перший працюватиме 6 міс., другий $2^1/_2$ міс. а третій $1^1/_2$ міс. то виконають лише 0,75 замовлення. Міськрада вирахувала, що коли перший завод працюватиме 4 міс., другий 5 міс., а третій 6 міс., замовлення виконано буде цілком. Скільки часу потрібно кожному заводові, щоб виконати це замовлення, працюючи окремо? (Відп.—дають дробові числа, що треба вирахувати з точністю до 0,1. Користуйтеся із вказівок до зад. 25 цього розділу).

У задачах, що їх вміщено нижче, дані й невідомі величини означено літерами. Дані зазначено початковими літерами, а невідомі визначте останніми літерами латинської абетки (x,y,z).

46—Два брати заробили разом a крб., один на b крб. більше від другого. Скільки заробив кожний?

47—Якщо купити a кг. товару одного сорту та b кг. другого, доведеться заплатити c крб. Якщо-ж купити b кг. першого та a кг. другого сорту, доведеться заплатити d крб. Скільки коштує кіло товару кожного сорту?

48—Сума двох капіталів a крб. Перший дає за рік p%, а другий d% прибутку, а разом m крб. Найти ці капітали?

49 — Дані системи рівнань розвяжіть графічно

1) $x + y = 6$ $x = y$	6) $x + y = 3$ $x = -y$	11) $x = 10y + 1$ $x = 4y + 2$
2) $x + y = 5$ $y = x - 1$	7) $7x - 5y = 15$ $5x - 7y = -3$	12) $y = 4x + 4$ $y = -4x$
3) $x + y = 3$ $y = 2x$	8) $x = 3y + 5$ $2x - 10 = 6y$	13) $7x - 5y = 0$ $3x + 4y = 0$
4) $x + y = 6$ $x - y = 2$	9) $4x + 6y = 5$ $6x + 4y = 5$	14) $y = 3x + 6$ $x + 2y = 15$
5) $3y - x = 2$ $5y - x = 12$	10) $2x + y = 8$ $x - 3y = -3$	15) $10x = 7y + 18$ $10y = 21 - 12x$

РОЗДІЛ 22

Пересічна аритметична та геометрична. Корінь квадратовий

Пересічна аритметична

§ 1. У статистичних таблицях можемо ми знайти такі дані: бюджет селянина р р. 1922—23 по всій Україні на одне господарство становив 273,1 карб. В тому числі на харчові хліба припадало 124,4 крб., на хліба кормові 42,8 карб., на солому 34,0 карб., а решта на инше. Так само про фабрично-заводську промисловість України маємо: по всіх вирібництвах 1 роб. виробляв (на довійнові ціни) в карбованцях

Рік	1912	1921	1922	1922—23	1923—24
	2759,8	602,2	946,5	1258,8	1575,7

Такі пересічні цифри безумовно не визначають, що бюджет кожного селянського господарства становив рівно 273,1 карб. або кожний робітник за останній період виробляв рівно на 1 575,7 карб. Може навіть трапитися в крайньому разі, що жадне селянське господарство не мало такого бюджету або жаден робітник не виробив рівно на 1 575,7 карб. Це, так звані, пересічні вартості, що ми їх здобуваємо, припускаючи, що всі селянські господарства мають однаковий бюджет або, що всі робітники виробляють однакову кількість продукції. Як вишукати такі вартості пересічні, ясно буде з задач.

1 — Робітник за січень місяць заробив 39,75, карб., за лютий 42,3 карб., а за березень 41,55 карб. Який пересічний заробіток робітника за кожний з цих трьох місяців?

Додавши всі числа, знайдемо, що робітник заробив за 3 місяці всього 123,6 карб., а якби що-місяця він мав однакову платню, це дало-б на місяць по 41,2 карб.

Отже маємо таке правило для находження пересічної аритметичної: *усі дані числа треба додати одне до одного й загальну суму їх поділити на число доданків.*

Зверніть увагу ще на такий випадок, що маємо в задачі.

2—Селянський кооператив за час від січня до липня мав иноді прибуток, иноді збиток у своїх операціях. Прибуток зазначено, як додатні величини, збиток, як від'ємні у нашій таблиці

I	II	III	IV	V	VI
61,07	29,24	— 12,32	— 65,24	3,15	27,59

Який пересічний прибуток цього кооперативу за місяць? Тут уже доведеться нам робити додавання даних 6 чисел за правилом додавання від'ємних чисел; загальна сума (перевірте це) буде 43,49, а після поділу на 6 (число місяців) маємо з точністю до 0,01, щомісячний прибуток кооперативу є 7,21 карб.

Вправа 1—За даними Харківської Досвідної Станції пересічна денна температура повітря у лютому місяці 1914 року була така (за числами місяця лютого, температ. С)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1,0	1,9	1,7	1,3	— 0,6	1,5	0,6	0,6	— 2,1	— 2,7	— 1,0	— 2,6	— 1,2	— 1,6

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
— 2,9	— 0,1	2,1	1,6	0,6	1,5	0,1	— 0,7	— 3,0	— 1,7	0,1	— 0,8	— 0,2	1,2

Знайти пересічну місячну температуру повітря.

2—У нашому селі всіх членів комосередку 11, з них троє мають 17 років 8 міс. від народження, один — 18 років 1 міс., два по 18 р. 3 міс., один 18 р. 5 міс., один 18 р. 11 міс., один 19 р., один 19 р. 10 міс., і один 20 років 3 міс. Який пересічний вік членів нашого комосередку?

3—Стан урожаю зазначають за п'ятибальною системою, означаючи найкращий стан засіву числом 5, середній 2,5, а найгірший (коли зовсім не вродило) 0. Агроном зібрав такі відомості, об'їздивши села району, про стан пшениці; у першому селі — 2,5, у другому—2,9, у третьому — 3,1, у четвертому — 1,5, у п'ятому—1,0 і в шостому—2,5. Який стан пшениці в цьому районі?

Пересічна геометрична

§ 2. Шукаючи пересічну аритметичну, ми даємо собі начеб-то таку задачу: на які величини треба замінити дані величини, щоб нові були всі рівні одна одній та щоб сума нових та попередніх величин не змінилася від такої заміни. Доводиться шукати й пересічну геометричну величину; ця величина розвязує таку задачу: дано декілька нерівних чинників, замінити всі ці чинники на рівні один одному, щоб величина добутку не змінилася. Наприклад, дано два числа 4 та 9, їхній добуток 36; це саме число 36 ми дістанемо після множення 6.6. Число 6, що задовольняє цій умові, має назву *корінь квадратовий* з 36, саме находження числа 6 називається *корінюванням* або *добуванням квадратового кореня* з числа 36 та зазначається $6=\sqrt{36}$.

Инакше кажучи, добути корінь квадратовий (або ще кажуть корінь другого степеня) це теж саме, що розкласти число на 2 рівні чинники. Розкладаючи число на 3 рівні один одному чинники, ми кажемо, що добуваємо корінь кубовий (або корінь третього степеня). Наприклад, корінь кубовий з числа 27 є 3, що записується: $\sqrt[3]{27} = 3$. Иноді доводиться розкладати дане число на 4,5 і т. д. рівних чинників, що називають «добувати корінь четвертого, п'ятого й т. д. степеня» і записують, користуючись з того-ж саме знака, тільки на горі пишуть замість 3 (у куб. корені) числа 4, 5 і т. д. Напр. $\sqrt[5]{a}$ корінь п'ятого степеня з числа a.

Добування кореня квадратового має звязок з пропорцією, бо коли дано, наприклад, пропорцію $4 : x = x : 25$, з неї на підставі її основної властивости (§ 4, розд. 13) маємо $x^2 = 100$, цеб-то число 100 складається з двох рівних чинників, що з них кожний дорівнює x-ові. В такому разі $x = \sqrt{100}$, що ми знаходимо з таблиці множення й маємо $x = 10$. Зауважмо, що така пропорція, що в неї 2 середні або 2 крайні члени дорівнюють один одному, має назву **пропорція зімкнена**. Той член пропорції, що він повторюється двічі, є якраз корінь квадратовий з добутка инших. Наприклад, з пропорції $a : x = x : b$ маємо $x^2 = ab$ й $x = \sqrt{ab}$.

Як здобувати корінь квадратовий з чисел взагалі, ми вкажемо в наступному розділі, а поки-що скористуємося з таблиці множення, якщо числа невеликі, або з таблиць в додаткові. Про добування коренів третього й вищих степенів укажемо далі (розділ 33).

Добувати корінь квадратовий доводиться в багатьох практичних задачах, що ми розглянемо зараз.

1—Яку довжину та ширину має дільниця землі, якщо її поверхня 4.800 м., а довжина є $\frac{4}{3}$ її ширини?

Означмо ширину дільниці літерою x, в такому разі довжина буде $\frac{4}{3}x$ за умовою задачі $\frac{4}{3}x \cdot x = 4\,800$, або $\frac{4}{3}x^2 = 4\,800$.

Догадуємось, що $x = 60$, отже ширина дільниці є 60 м., а довжина 80 м.

2—Прямокутню дошку 8 м. завдовжки та 5 см. завширшки треба замінити на квадратову з рівною поверхнею. Який завдовжки бік цього квадрату?

Задача призводить до необхідности вишукати $x = \sqrt{40}$, але такого числа ми не знаємо. Найдімо з таблиць $x = 6,3246$.

Вправи—Добудьте квадратові корені, де можете, користуючись з таблиці множення, а де не зможете, звертайтесь до таблиць

1 $\sqrt{25}$; **2** $\sqrt{900}$. **3** $\sqrt{121}$. **4** $\sqrt{5}$, **5** $\sqrt{42}$ **6** $\sqrt{720}$.

7—Який радіус кола, що його поверхня 12,56 кв. см.?

8—Поверхня квадрату 50 кв. см. Яка довжина квадрату?

Невимірне число

§ 3. Добуваючи квадратового кореня, ми бачимо що в багатьох випадках ми не можемо його знайти націло, а доводиться з таблиць шукати дробове значіння квадр. кореня. Такий, напр., $\sqrt{5}$, що з таблиць знайдем 2,2361. Якби ми захотіли перевірити, чи справді $2{,}2361^2 = 5$, ми-б знайшли, що ця рівність невірна. Так і слід чекати, бо від множення дробу таким саме дробом буде знов дробове число, а не ціле. Отже, в такому випадкові, коли ми не можемо здобути з цілого числа квадратового кореня точно цілим числом, ми не зможемо його точно винайти й дробом, а знайдемо, тільки наближене значіння цього кореня. Самі-ж такі корені, що їх не можемо відшукати точно ні цілим, ані дробовим числом, мають назву числа н е в и м і р н і або числа і р а ц і о н а л ь н і.

У протилежність до них цілі числа та числа дробові називаються числа в и м і р н і або числа р а ц і о н а л ь н і.

Вправи—Які з чисел вимірні та які невимірні,

1 $\sqrt{49}$; **2** $\sqrt{56}$; **3** $\sqrt{100}$; **4** $\sqrt{121}$; **5** $\sqrt{125}$; **6** $\sqrt{150}$.

Формули скороченого множення

§ 4. Щоб перейти до правила добування квадратового кореня з чисел, нам треба простежити, як саме ми підносимо числа до квадрату, бо підносячи числа до квадрату, ми шукаємо добуток рівних чинників, а добуваючи корінь квадратовий, навпаки, цей добуток розбиваємо на 2 рівні чинники.

Нехай, наприклад, маємо перемножити 43 . 43 або 43^2.

Перемножаючи звичайним способом, ми помічаємо, що спочатку ми 3 одиниці множимо числом 3 од., далі 4 десятки множимо числом 3 один., переходимо до множення другим членом, другою цифрою. Тут знов спочатку числом 40 множимо 3 одиниці, а потім 4 десятки. Якби ми розбили кожного з чинників на суму $40 + 3$ замість 43, то нам яскравіш було-б видно сам процес цього множення й ми помітимо, що добуток 40.3 повторено двічі, а тому ми його так і написали в остаточному результаті. Таким саме чином можна піднести до квадрату яке завгодно двоцифрове (і взагалі многоцифрове) число.

$$\begin{array}{r} \times\ 43 \\ 43 \\ \hline +\ 129 \\ 172\ \ \\ \hline 1849 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40+3 \\ 40+3 \\ \hline 40.3+9 \\ 40^2+40.3\qquad \\ \hline 40^2+2.40\,.\,3+3^2 \end{array}$$

Вправи—Піднесіть до квадрату таким способом

$1^0.\ 54.\qquad 2^0.\ 35.\qquad 3^0.\ 81^2.\qquad 4^0.\ 26^2.$

До цього-ж саме результату ми дійдемо ще й иншим шляхом. користуючись з того, що піднесення до квадрату робимо ми, шукаючи поверхню квадрату (рис. 122). Візьмім якийсь квадрат ABCD й виміряємо його бік. Нехай у нас вийде $AE = a$, а $ED = b$. Такі саме будуть у квадрата й усі инші боки. Через це поверхня всього квадрату ABCD становить $(a+b)$ $(a+b)$ або $(a+b)^2$.

З другого-ж боку ми можемо розбити наш квадрат на такі 4 фігури. Відкладемо $DG = ED$ й поведемо через E просту $EH \parallel AB$, а через G просту $GK \parallel AD$. Утворімо, таким чином, фігури EFGD квадрат з боком bм. Його поверхня є b^2. FHCG прямокутник з боками a та b. Поверхня його ab. Далі EFKA теж прямокутник з боками знов a та b, Його поверхня теж є ab. Нарешті, квадрат KBHF з боком a; його поверхня a^2. Додаючи одну до одної поверхні цих чотирьох фігур, ми дістанемо $a^2+2ab+b^2$, а зауваживши, що ці 4 поверхні дають повну поверхню квадрату ABCD й згадавши, як ми раніш вирахували цю поверхню, маємо $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

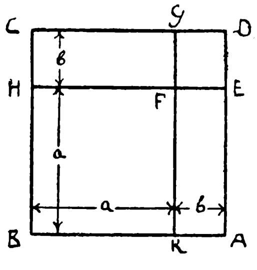


Рис. 122.

У цій формулі літери a та b можуть визначити, які завгодно числа, а не лише десятки та одиниці, як це було вище.

Перевірте тотожність $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ за правилом множення многочлена многочленом (розд. 17, § 5).

Вправи — Перевірте рівності $(1+3)^2 = 1^2 + 2.1.3 + 3^2$ та $(7+4)^2 = 7^2 + 2.7.4 + 4^2$. Ці рівності ми дістали з літерової формули, заміняючи літери a та b у першому разі на числа 1 та 3, а в другому—на числа 7 та 4.

Цю формулу зачитують словами таким чином: к в а д р а т с у м и д в о х ч и с е л д о р і в н ю є к в а д р а т о в і п е р ш о г о ч и с л а, п л ю с п о д в і й н и й д о б у т о к п е р ш о г о т а д р у г о г о, п л ю с к в а д р а т д р у г о г о.

Цю формулу прикладають до піднесення суми двох чисел до квадрату. Наприклад, коли потрібно вичислити 72^2, ми уявляємо собі це як $(70+2)^2$ і за нашою формулою пишемо

$$(70+2)^2 = 70^2 + 2.70.2 + 2^2 = 4\,900 + 280 + 4 = 5\,184.$$

Ця формула дозволяє після деякої практики зробити обчислення в умі.

Вправи—Знайдіть добутки (за формулою) 1 — 51^2. 2 — 67^2.

Ми тут дамо ще одну формулу, що дуже схожа на першу, і що в деяких випадках швидше дозволяє робити обчислення (рис. 123). Розгляньмо тепер квадрат з боком $a - b$. Для цього збудуємо спочатку квадрат ABEP щоб у нього бік був рівний числу a, а потім віднімемо від його боків по b. $AL = EC = b$. Поведімо $LG \parallel AP$ та $CM \parallel AB$. Матимемо, що квадрат LBCD має своїм боком $a - b$. Цей квадрат ми дістанемо з великого ABEP, віднімаючи від нього прямокутник ALGP та прямокутник DCEG. Щоб знов мати однакові прямокутники, що віднімаються, добудуймо ще квадрат CKHE і зараз його віднімемо. Тоді, як видно з малюнка, $LBCD = ABEP - DKHG - ALGP + CKHE$, а переходячи на означення довжин боків одною літерою $(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$ або остаточно $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Словами це читають: квадрат різниці двох чисел дорівнює квадратові першого числа мінус подвійний добуток першого та другого, плюс квадрат другого (Найдіть цю рівність просто множенням).

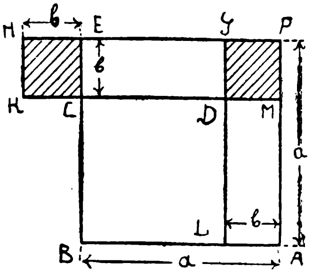


Рис. 123.

Цю формулу прикладають у тому разі, коли перша не вигідна, наприклад, 89^2 легше вирахувати, беручи $(90-1)^2$, аніж $(80 + 9)^2$ і маємо $(90 - 1)^2 = 90^2 - 2 . 90 . 1 + 1^2 = 8\,100 - 180 + 1 = 7\,921$.

Вправи—Вирахуйте **1** 78^2 **2** 47^2 **3** 19^2

Примітка: Коли одиниць більше 5, то легше користуватися з формули квадрат різниці. Коли-ж одиниць 5 або менше, користуються з формули квадрат суми.

Зауважмо ще останню формулу для множення двочленів. Нехай маємо (рис. 124) 1) квадрат ABCD, що його бік є *a*. Віднімімо від

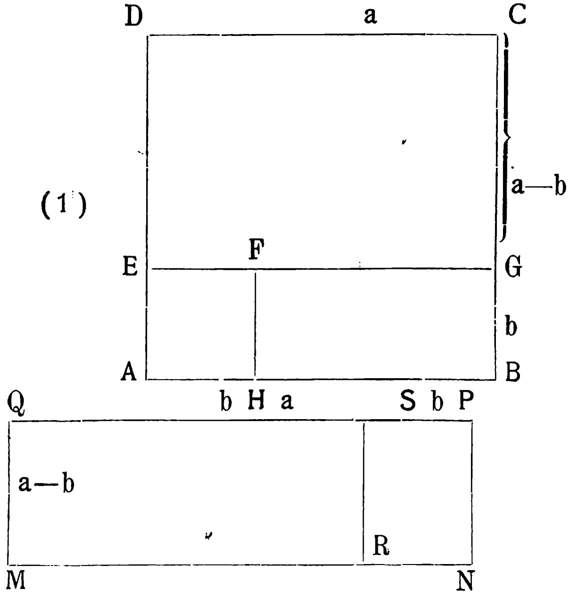


Рис. 124. *)

нього квадрат AHFE, що має бік b. Тоді лишається 2 прямокутники EGCD та FHBG. У цих прямокутників боки DE та FG рівні

*) Довжина QM мусить дорівнювати довжині CG, $QP = AD + AH$.

один одному й кожний з них рівний $a - b$. Якщо прямокутник HBGF притулити до боку CG, то ми матимемо прямокутника, як на 2 рис. MNPQ (там частина R N P S заміняє HBGF),

Поверхня прямокутника на рис. 124 (2) дорівнює $(a+b) \cdot (a-b)$, а через те, що ця поверхня дорівнює сумі поверхонь EGCD та HBGF на рис. 124 (1) і ці поверхні є різниця квадратів з боками a та b, то маємо $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Словами: добуток суми та різниці двох чисел дорівнює різниці квадратів цих саме чисел.

Приклад—$(30 + 2)(30 - 2) = 30^2 - 2^2 = 900 - 4 = 886$. (Перевірте).

Вправи—Вирахуйте, користуючись з останньої формули на зразок $52 \cdot 48 = (50 + 2)(50 - 2)$.

1 $41 \cdot 39$ **2** $57 \cdot 63$ **3** $102 \cdot 98$.

Усі ці три формули можна прикласти й до літерових виразів і до розвязування рівнань. Наприклад, рівнання $(x + 5)^2 = x^2 + 45$ розвяжемо, розімкнувши дужки за формулою

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 45,$$

після перенесення членів $10x = 20$ і $x = 2$.

Вправи до розділу 22

Вправа 1— За даними «Хемвугілля» р. 1921 здобуто вугілля за місяці: січень 1276 тис. пуд., лютий 1136 тис. пуд., березень 972 т. п., квітень 1048 т. п., травень 1280 т. п. Який пересічний здобич Хемвугілля що-місяця був за той період? Заокруглити до цілих тисяч.

2—З мисливської рушниці зроблено 4 пострілм. Перший на 564,8 м., другий на 493,4 м., третій на 546,7 м. і четвертий на 523,1 м. Найти пересічну віддаль пострілу.

3—Здобудьте корені $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{0{,}25}$, $\sqrt{500}$ (таблиця).

4—Поверхня трикутнього поля є 2 646 кв. м., його довжина дорівнює $\frac{3}{4}$ його ширини, знайти довжину та ширинуполя. (Відп. 84 та 63).

5—Розвязати пропорції $75 : x = x : 4$ (таблиця)

$$x : 4 = 25 : x$$

6—Зробіть множення за формулами

7—Зробіть множення за формулами

а) $(a+1)^2$; б) $(b-3)^2$; в) $(0{,}5c-1)^2$; г) $(3x^2+4)^2$; д) $(\frac{4}{3}a-\frac{9}{2}b)^2$;

е) $(a^3-b^3)^2$; ж) $(к+l)(к-l)$; з) $(ax+b)(ax-b)$; и) $(a-bx)(a+bx)$;

і) $(c^2+d)(c^2-d)$; й) $(2m+3n)(2m-3n)$; к) $(5\frac{1}{2}a^2-b)(5\frac{1}{2}a^2+b)$.

8—Розвяжіть систему рівнань

а) $(x-1)^2=x^2+3x-24$; б) $(x-1)(x+1)=(x+2)^2-17$.

9—Розвяжіть рівнання

а) $(x+1)^2+(y+2)^2=x^2+y^2+20-x-2y$,

б) $(x-1)(x+1)+(2y-4)(2y+4)=y(1+4y)-x(2-x)-17$.

10—Зробіть дії з дробами

а) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$; $\frac{x}{x-y}+\frac{3x}{x+y}-\frac{2xy}{x^2-y^2}$

б) $\frac{1}{2m+5}+\frac{2}{2m-5}-\frac{6m+5}{4m^2-25}$

РОЗДІЛ 23

Теорема Пітагора. Добування квадратового кореня

Теорема Пітагора

§ 1. Користуватися з коренів квадратових доводиться особливо часто тоді, коли вишукуємо довжину одного боку прямокутнього трикутника, знаючи два його боки. Таку залежність, що існує поміж боками прямокутнього трикутника, винайшли ще стародавні єгиптяни. Вони помітили, що в прямокутньому трикутникові, що має 2 боки, завдовжки 3 та 4 якихось одиниці, третій бік—гіпотенуза (протипрямка) дорівнює 5 одиницям. Це дуже легко перевірити. Нарисуйте як-мога точніше прямого кута, відкладіть на його двох боках довжини на одній 3, а на другій 4 см. (або дцм) й зазначені на цім відділі точки злучіть простою. Дістанете з цієї простої гіпотенузу, а з усіх трьох боків—трикутника. Виміряйте протипрямку й ви дістанете число, дуже близьке до 5 (рівно 5, коли ви зробите точний рисунок). Трикутник з боками 3, 4, 5 або їм пропорціональними має назву Єгипетський трикутник. Єгиптяни й помітили, що в цьому разі між числами 3, 4 та 5 є взаємовідношення, а саме: $3^2+4^2=5^2$. Таке взаємовідношення поміж квадратами катетів та квадратом гіпотенузи помічали єгиптяни й у инших прямокутніх трикутниках. Це саме взаємовідношення звернуло до себе увагу й греків і вони почали шукати—чи в усіх прямокутніх трикутниках є це взаємовідношення чи ні?

Вправа—Нарисуйте який завгодно прямокутній трикутник, виміряйте його катети, виміряйте гіпотенузу, піднесіть до квадрату довжину кожного з катетів, додайте ці два квадрати один до одного й порівняйте суму квадратів катетів до квадрату гіпотенузи. Чи велику помічаєте різницю між квадратом гіпотенузи та сумою квадратів катетів?

Тільки знаменитому математикові Пітагорові пощастило доказати цілком точно, що в усякому прямокутньому трикутникові квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

У тому, що це положення справедливе, ми можемо впенитися, рисуючи якого-завгодно прямокутнього трикутника та виміряючи його прямки й протипрямку. Але ми можемо піти й далі. Можемо довести й без виміру, що квадрат, який ми будуємо на протипрямці, буде рівний — (своєю поверхнею) сумі поверхонь двох квадратів, що їхні боки дорівнюють кожній прямці. Упевнитися в цьому можемо таким чином.

Візьмімо який завгодно прямокутній трикутник ABC (рис. 125). Збудуймо на його протипрямці квадрат ABDE й доповнімо до більшого квадрату CFGH, прикладаючи такі саме трикутники, як початковий. Замітьмо, що кути A та B у трикутникові ABC (рис. 125). в сумі дають 90^0. Далі біля точки B маємо $\angle CBA + \angle DBF = 90^0$, а $\angle ABD = 90^0$ — це кут квадрату. Тому біля точки B, всі три кути дають 180^0, а значить CB та BF дають одну просту. Так само FD та DG дають просту, GE та EH і HA та AC також. В такому разі, квадрат, що має за свій бік протипрямку,

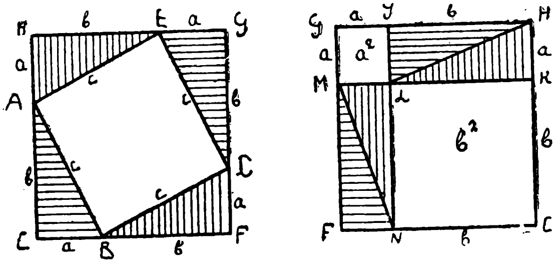


Рис. 125.

можна утворити з квадрату CFGH, одрізуючи від квадрату 4 рівні трикутники ABC, BFD, DGE та EHA. Це инакше записуємо, згадуючи, що поверхня квадрату є квадрат його боку,

$$AB^2 = CFGH - 4\ ABC \qquad (1).$$

З другого-ж боку ми можемо від того самого квадрату CFGH відняти такі саме 4 трикутники, як даний ABC инакше — кладімо трикутника ABC так, щоб його прямка CB пристала до простої HC. Трикутник матиме положення KLH; вдруге, цьому трикутникові ABC даємо положення IHL. Два гострі кути біля точки H, а також біля точки L дорівнюють 90^0, а тому лишається на сумежні кути CKL та HKL теж по 90^0. Втретє та четверте даємо трикутникові ABC положення MLN та MFN й знов кути біля точок M та N дорівнюватимуть по 90^0. Якщо ми згадаємо, що боки квадрату CFGH є сума двох катетів (прямок) AC та CB та подивимось на чотирикутники LMGI та CNLK, то побачимо, що ці два чотирикутники є обидва квадрати, що один з них має бік AC (більший), а другий CB (менший) з трикутника ABC. У такому разі сума поверхонь цих квадратів буде

$$BC^2 + AC^2 = CFGH - 4 \quad ABC. \qquad (2)$$

Наслідком (1) та (2) виходить

$$AB^2 = BC^2 + AC^2,$$

цеб-то ми упевнюємося в справедливості твердження (або як кажуть математики, теореми) Пітагора.

Часто записують це твердження, називаючи кожний бік одною літерою малою по протилежному куту, як указано на рисункові 126. Тоді це твердження матиме вигляд

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Як-би його не записувати, а воно вказує одно. Це твердження можна переписати инакше, переносячи один із членів правого боку рівности на лівий бік. Матимемо, переносячи a^2,

$$c^2 - a^2 = b^2.,$$

що нам указує, що квадрат прямки (катету) дорівнює різниці квадратів гіпотенузи та другого катету.

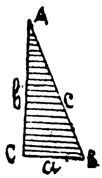


Рис. 126.

Обидва випадки цього твердження Пітагора дають нам змогу вирахувати один з боків прямокутнього трикутника, якщо відомо 2 инші боки. Напр.:

1—Дві прямки прямокутнього трикутника дорівнюють 6 та 8. Яка протипрямка?

Зазначаючи протипрямку літерою x, маємо

$$x^2 = 6^2 + 8^2 \text{ або } x^2 = 36 + 64, \; x^2 = 100,$$

а звідци $\quad x = \sqrt{100}$, цеб-то $\quad x = 10.$

2—Протипрямка прямокутнього трикутника є 15 см., одна з прямок 12 см. Яка друга прямка?

Невідому прямку визначаємо літерою x і маємо

$$x^2 = 15^2 - 12^2, \quad x^2 = 225 - 144, \quad x^2 = 81,$$

Звідци $x = \sqrt{81}$, або $\quad x = 9.$

Вправа 1 — Довгу прямокутню дошку, що її довжина 9 дцм., а ширина 4 дцм. треба замінити на квадратову з такою самою поверхнею. Яка мусить бути довжина цієї дошки?

2 — Вишина будинка 8 м.. Біля нього приставлено драбину, що відходить від будинка на 6 м. по землі й одним кінцем спирається на землю, а другим у верх будинка. Яка довжина драбини?

3 — У прямокутнього трикутника протипрямка є 6 м., а одна з прямок 3 м. Яка друга прямка?

Ця остання задача призводить нас до необхідности вишукати $\sqrt{27}$. Це ми можемо зробити лише користуючися з таблиць.

Класичний спосіб добування квадр. кореня із цілих чисел

§ 2. Тому, що не завжди ми можемо мати при собі таблицю, а також тому, що не в усіх таблицях ми знайдемо досить потрібних для нас чисел для добування квадратового кореня, треба нам вивчити загальний спосіб корінювання, що його ми можемо вживати завжди.

Замітьмо насамперед, що корінь квадратовий із одно- та двоцифрового числа ми здобуваємо просто за таблицею множення, бо знаємо там, що $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{81} = 9$ і $\sqrt{100} = 10$.

Повчімося далі добувати такі корені квадратові, що вони складаються з самих десятків. Роздивімось насамперед такі явища $10^2 = 100$, $20^2 = 400$, $30^2 = 900$, $40^2 = 1600$, $50^2 = 2500$, $60^2 = 3600$, $70^2 = 4900$, $80^2 = 6400$, $90^2 = 8100$, $100^2 = 10000$.

Ми тут спостерігаємо, що круглі десятки після піднесення їх до квадрату дають круглі сотні. Таке явище для нас цілком зрозуміле, бо круглі десятки закінчуються на цифру 0, а після множення знов круглими-ж десятками, в добуткові маємо вже 2 нулі на кінці. Через це можемо здобувати й квадратового кореня, напр $\sqrt{4900} = 70$. Тут ми міркуємо так:

Чотирицифрове число ми дістанемо після піднесення до квадрату числа двоцифрового, цеб-то числа, що складається з десятків та одиниць. Самі десяткі числа, підносячись до квадрату, дають сотні; отже, щоб вишукати, скільки десятків у $\sqrt{4900,}$ треба корінювати самі сотні.

Ми можемо цей самий принцип прикласти й далі, коли, взагалі, дано будь-яке число трицифрове або чотирицифрове, можемо вишукати, скільки десятків у квадратовому корені з цього числа, корінюючи його сотні. Може статися, що ми не дістанемо точного кореня, але вже матимемо наближення до 10 одиниць. Напр., у $\sqrt{2209,}$ відділивши останні 2 цифри (одиниці та десятки) й шукаючи $\sqrt{22,}$ маємо 4 (бо $5^2 = 25$ більше від 22, а тому кажемо $\sqrt{2209} > 40$ й $\sqrt{2209} < 50$.

Вправи— Обчисліть, скільки круглих десятків мають квадратові корені **1** $\sqrt{3721}$; **2** $\sqrt{1936}$; **3** $\sqrt{676}$.

Примітка: Зверніть увагу на останній приклад. Відділяючи в цьому разі 2 останні цифри, маємо шукати $\sqrt{6,}$ а це наближено 2; отже $\sqrt{676} > 20$ й $\sqrt{676} < 30$.

Щоб навчитися шукати й одиниці квадратового кореня, згадаймо, як ми підносимо до квадрату число, що складається з десятків та одиниць. Маємо тут, напр., $42^2 = (40^2 + 2)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = 1600 + 160 + 4 = 1764$.

Розглядаючи уважно та згадуючи формулу (§ 4 розд. 22), ми можемо казати, що *квадрат двохцифрового числа дорівнює квадратові десятків + подвійний добуток числа десятків та одиниць + квадрат одиниць.*

Коли-ж ми маємо добути кореня квадратового з трицифрового або чотирицифрового числа, ми напевне знаємо, що цей корінь складається з десятків та одиниць, а тому підкорінне число (число, що стоїть під знаком $\sqrt{}$) мусить складатися з усіх трьох членів зазначеної суми. Ми й користуємося з цього, добуваючи квадратового кореня.

Нехай нам треба вишукати $\sqrt{1764}$. Шукаємо насамперед, десятки кореня $\sqrt{17} = 4$. Далі можемо піднести 4 дес. до квадрату й дістанемо 16 сотень або 1600. Якщо зробимо віднімання $1764 - 1600 = 164$, то в цій різниці 164 ми вже матимемо тільки подвоєний добуток десятків та одиниць та квадрат одиниць. Щоб знайти одиниці, зауважмо, що подвоєний добуток десятків та одиниць дає самі десятки (одиниць він не може дати, бо виникає від множення десятків). Відділяючи десятки в різниці 164, маємо їх 16; поділяючи ці 16 десятків на подвоєну кількість десятків кореня (на $2 . 4 = 8$), знайдемо (16 : 8 2) одиниці.

Саму дію розкладають таким чином:

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{17'64} = 42 \\ & -16 \\ \hline 82 & 16'4 \\ & - \\ 2 & 164 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Відділяють у підкорінному числі 2 цифри з правого боку протинкою (її звичайно ставлять у горі) й добувають $\sqrt{17}$.
Наслідок корінювання записують правобіч від даного кореня. У нас число 4.

Це є десятки кореня. Підносять знайдену першу цифру кореня до квадрату й підписують результат під сотнями підкорінного числа. (Чому так?). У нашому прикладі це є 16. Віднімають від підкорінного цей квадрат десятків кореня. До остачі, бо вона є сотні, просто переписують десятки та одиниці з підкорінного числа. Нове число (164) містить у собі вже тільки подвійний добуток десятків кореня одиницями та квадрат одиниць. Відділяємо в цій остачі останню цифру з правого боку — відділяємо десятки остачі. Першу цифру кореня (4) помножаємо числом 2 (подвоюємо) й записуємо ліворуч од остачі (164) й між подвоєним числом десятків та остачою проводимо прямовисну просту. Поділяємо десятки остачі (16) на подвоєну кількість десятків кореня (на 8). Число, що дістанемо після поділу, є число одиниць у нашому корені. Ці одиниці дописуємо до подвоєних десятків та підписуємо під ними. (Утворюється в нашому прикладі 82 вище та 2 нижче від нього). Помножаючи число, що складається з подвоєних десятків та одиниць числом одиниць, ми дістанемо подвоєний добуток десятків та одиниць і квадрат одиниць.

Слід звернути увагу до таких окремих випадків добування квадратового кореня, що ми їх розбираємо на прикладах.

1—Відокремлюючи останні 2 цифри з правого боку, маємо для находження десятків кореня ($\sqrt{5}$) одну цифру. Далі, як і в першому разі.

```
 √5'29 = 33
 — 4
43 | 129
   |  —
 3 | 129
```

2

```
 √2401 = 49
 — 16
89 | 801
   |  —
 9 | 801
        0
```

Цифру десятків находимо, як і вище, а коли спробуємо поділяти всі цифри остачі без останньої на подвоєну цифру десятків (80 : 8), маємо частку 10. Ми не можемо за одиниці взяти більше від 9, а тому й беремо за цифру одиниць не 10, а 9.

Вправи—Здобудьте корені квадратові з чисел

1 1846 **2** 784 **3** 841 **4** 2116

Задача 1—Поверхня квадратового поля є 7225 км. м. Які розміри цього поля (цеб-то довжина та ширина)?

2—Липовий брус з квадратовою основою та 4 м. завдовжки важить 156,8 кг. Питома вага липи 0,5. Найдіть, який завгрубшки цей брус?

3—Довжина стола є 60 дм., а ширина 11 дм. Під сподом у цього стола треба зробити планицю навкоси з одного ріжка до протилежного. Яка довжина цієї планиці (стіл прямокутній)?

Перейдімо до добування коренів квадратових з чисел більших, як чотирицифрових. Розгляньмо тут просто приклад: $\sqrt{613089}$

Відділяючи дві цифри з правого боку, маємо добути $\sqrt{6130}$, а для цього нам знов доведеться відокремити ще 2 цифри. Тому саме добування кореня роблять, розбиваючи дане число на групи по 2 цифри, починаючи з правого боку. Добувають кореня квадратового з першої (лівобіч) групи. У нашому прикладі ця група складається з двох цифр, але вона може иноді складатися тільки з одної цифри. Коли знайдемо $\sqrt{61}$ (з першої групи) цифру квадратового кореня, пишемо результат після знаку $=$. Підносимо найдене число (7) до квадрату й цей квадрат віднімаємо від першої групи (61 — 49). До остачі дописуємо 2 цифри дальшої, безпосередньо за першою, групи (у нас стало 1230) і відокремлюємо одну останню цифру на правому боці.

```
    √61'30'89 = 783
    — 49
148  | 1230
     |  —
  8  | 1184
1563 | 4689
     |  —
   3 | 4689
        0
```

Знайдену першу цифру кореня подвоюємо й записуємо лівобіч од прямовисної риски, що теж лівобіч од остачі. Поділяємо всі без останньої цифри остачі на подвоєну першу цифру й находимо другу цифру кореня (у нас 8). Цю цифру дописуємо до подвоєної першої й підписуємо під нею. Після множення верхнього числа нижчим, дістанемо подвоєний добуток першої цифри кореня та другої й квадрат другої. Цей добуток віднімаємо від першої остачі, й до другої остачі приписуємо 2 цифри третьої з початку групи. Знайдену другу цифру дописуємо після першої цифри результату. Далі подвоюємо число, що складається вже з двох перших цифр результату, пишемо результат подвоєння лівобіч од другої остачі, поділяємо на нього всі цифри без однієї цієї остачі, найдемо третю цифру кореня. Продовжуємо цей процес доти, поки не заберемо всіх до кінця групок підкорінного числа.

Цікаво замітити тут такі особливі випадки. Нехай маємо здобути $\sqrt{1014049}$.

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{1'01'40'49} = 1007} \\
\multicolumn{2}{l}{-\;1} \\
\hline
20 & 01 \\
 & - \\
 & 0 \\
\hline
200 & 140 \\
 & - \\
0 & 0 \\
\hline
2007 & 14049 \\
 & - \\
7 & 14049
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{1014049} = 1007} \\
\multicolumn{2}{l}{-\;1} \\
\hline
2007 & 014049 \\
 & - \\
7 & 14049
\end{array}
$$

Розбиваючи це число на групи по дві цифри в кожній (з правого боку) ми маємо в першій групі одну цифру. Находимо $\sqrt{1} = 1$ й пишемо 1 як наслідок корінювання. Після піднесення 1 до квадрату та віднімання, ми не маємо остачі. Переписуємо другу групу 01 і поділяємо першу цифру її на подвоєну першу цифру результату $0:2=0$.

Таким чином, друга цифра кореня є 0. Добуток $20 . 0$ теж є нуль; друга остача 1. До цієї остачі дописуємо третю групу підкорінного числа, й у числі після перенесення відокремлюємо останню цифру 0. Подвоюючи вже 10, маємо 20. Знов поділяємо $14:20$ і маємо вдруге наслідок 0. Це буде третя цифра кореня. Тільки після перенесення останньої групи в нашому випадкові маємо ділити 1404 (бо 9 відокремлено) на 200 (подвоєно число 100 з трьох цифр). Практично роблять це корінювання так, як це вказано в нижчому прикладі, а саме, помічаючи, що перша остача не дає після поділу на 2 навіть 1, дописуєму до подвоєної першої цифри кореня 0, дописуємо нуль, як другу цифру кореня, й переписуємо нову групу з двох цифр. Так само в даному разі робимо й удруге.

Вправа—Найти квадратові корені

1 $\sqrt{193600}$; **2** $\sqrt{42849}$; **3** $\sqrt{497025}$

4 $\sqrt{18215824}$ **5** $\sqrt{13749264}$

Корінь квадратовий з десяткових дробів

§ 3. Щоб закінчити цілком добування квадратового кореня, нам доведеться ще розглянути добування кореня з дробів.

Зауваживши, що $0{,}1^2 = 0{,}01$; $0{,}01^2 = 0{,}0001$; $0{,}001^2 = 0{,}000001$ ми маємо $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$; $\sqrt{0{,}0001} = 0{,}01$; $\sqrt{0{,}000001} = 0{,}001$. А це нам вказує, що й у десяткових дробах кожна цифра кореня квадратового відповідає двом цифрам підкорінечого числа. Через це, для добування квадратового кореня з десяткового дробу розбивають десяткові знаки, починаючи від протинки з лівого боку направо (якраз протилежно тому, як це робиться з цілими числами), на групи на 2 цифри в кожній та шукають кожну цифру кореня, як у випадкові цілих чисел. Обмежуємося тут самими прикладами

$$\sqrt{0{,}8649} = 0{,}93 \qquad\qquad \sqrt{15{,}05'44} = 3{,}88$$

$$\begin{array}{r|r} & -\,81 \\ \hline 183 & 549 \\ 3 & -\,549 \\ \hline & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|r} & -\,9 \\ \hline 68 & 605 \\ 8 & -\,544 \\ \hline 768 & 6144 \\ 8 & -\,6144 \\ \hline & \end{array}$$

В останньому прикладі треба звернути увагу, що, знаходячи другу цифру кореня й поділяючи для цього $60 : 6$, маємо 10. Ми вже знаємо, що найбільше значіння, яке можна взяти для цифри, є 9 і тому спробуємо спочатку взяти за другу цифру кореня 9. Але $69 \cdot 9 = 621$ перебільшує число 605, що ми маємо, й тому замість 9 ми беремо другу цифру 8.

Вправи—Добудьте кореня квадратового

Примітка: цілі числа розбивати на пари, посуваючись від протинки лівобіч, дробові дісяткові знаки—посуваючись правобіч.

1 $\sqrt{309{,}76}$	4 $\sqrt{0{,}0121}$
2 $\sqrt{948{,}64}$	5 $\sqrt{0{,}1089}$
3 $\sqrt{29{,}0521}$	6 $\sqrt{2{,}56}$

Наближений квадратовий корінь

§ 4. Ми вже знаємо, що добути кореня квадратового точно, вдається не завжди. Отже, доводиться повчитися добувати квадратового кореня наближено. Вкажімо на прикладах, як це робити. Нехай маємо знайти $\sqrt{200}$. Корінюючи, як звичайно, маємо 14 та ще остачу 4.

Число 14 і звуть корінь квадратовий з 200 з точністю до 1. Це є корінь з н е д о с т а ч е ю, бо ми корінювали 200 не до кінця, а маємо ще остачу 4. Якби бажали взяти $\sqrt{200}$ з л и ш к о м, то треба додати до 14 ще 1 і матимемо 15.

$$\begin{array}{r|r} & \sqrt{2'00} = 14 \\ & 1 \\ \hline 24 & 100 \\ 4 & -96 \\ \hline & 4 \end{array}$$

Перевірте, що $15^2 > 200$, а $200 > 14^2$, що нам і вкаже инакше $15 > \sqrt{200}$, а $\sqrt{200} > 14$.

П р и м і т к а: 2 останні нерівності об'єднують й записують коротше $15 > \sqrt{200} > 14$.

Якби ми забажали знайти $\sqrt{200}$ з точністю до десятої частини, то згадуючи, що кожна 1 цифра кореня добувається з двох цифр підкоріневого числа, нам довелося-б для того, щоб дістати десяті частини, дописати до остачі (до 4) два нулі, коли-б забажали дістати соті частини кореня, до остачі від десятих дописали-б ще два нулі й т. д. Коротше, щоб дістати кожну дальшу цифру кореня квадратового, треба до останньої остачі дописувати 2 нулі, як це видно з нашого прикладу.

$$\begin{array}{r|r} & \sqrt{200} = 14{,}14 \\ & -1 \\ \hline 24 & 100 \\ 4 & -96 \\ \hline 281 & 400 \\ 1 & -281 \\ \hline 2824 & 11900 \\ 4 & -11296 \\ \hline & 604 \end{array}$$

Слід ще зазначити, що в тому разі, коли десяткових знаків після протинки в даному десятковому дробу непарне число, треба дописати наприкінці дробу нуля, бо кожна цифра кореня добувається з двох цифр підкоріневого числа.

$$\begin{array}{r|r} & \sqrt{3{,}6} = 1{,}89 \\ & -1 \\ \hline 28 & 260 \\ 8 & -224 \\ \hline 369 & 3600 \\ 9 & -3321 \\ \hline & 279 \end{array}$$

Як у випадкові цілих чисел, ми маємо, що 1,89 дає корінь квадратовий з 3,6 з недостачею, а якщо збільшимо останню цифру кореня на 1, матимемо $\sqrt{3{,}6}$ з лишком. Це буде 1,90. (Нуля пишемо наприкінці, щоб вказати, що маємо точність до 0,01), і так як і вище.

$$1{,}90 > \sqrt{3{,}6} > 1{,}89.$$

Добуваючи кореня квадратового з десяткового дробу, слід не проминути поставити в результаті протинку, коли заберемо при корінюванні всі цілі цифри підкоріневого числа. Якщо в підкоріневому буде 0 цілих, він лишатиметься й у корені, бо $\sqrt{0} = 0$.

Вправи—Здобудьте кореня квадратового з точністю до 1, до 0,1, або до 0,01 (при бажанні можна збільшити точність)

1 $\sqrt{0{,}5}$ **2** $\sqrt{2{,}75}$ **3** $\sqrt{83{,}53}$ **4** $\sqrt{624{,}5}$

Вправи до розділу 23

1—Чи прямокутній трикутник, що в нього боки 8,6 та 16 м.? Згадайте, який звязок мусить бути за теоремою Пітагора між боками прямокутнього трикутника.

2—Протипрямка прямокутнього трикутника має довжину 62 м., один із катетів 45 м. Який другий катет?

3—Віддаль між осередками двох шкивів 2,4 м. Діяметр більшого є 35 см., а меншого 18 см. Який завдовжки ремінь, що треба його надіти на ці шкиви?

4—Квадратова кімната має поверхню 16,8 кв. м. Яка її довжина?

5—Відношення метра до аршина иноді дають у формі $\sqrt{2}$. Чи погоджується це значіння з тим, що ви маєте з таблиць?

6—Річка тече зі швидкістю 2 км. на годину; човен пливе поперек річки зі швидкістю 6 км. на годину. Яка іста швидкість човна у воді?

7—Треба витесати з колоди брус з поперечними розмірами 30×90 см. Яка завгрубшки мусить бути колода?

8—Чи можна з колоди, що її поперечина 45 см., витесати квадратового бруса з боком 30 см.?

9—Поле завширшки 9 м.; довжина дороги, що перерізує поле з одного кута в протилежний, на 1 м. довша, ніж довжина самого поля. Найти довжину поля, коли відомо, що воно є прямокутнє? (Відп.—40 м.).

10—Квітник має форму трикутника, найменший бік його 8 м., а периметр 40 м. Знайти инші боки трикутника, знаючи, що він прямокутній? (Відп.—17 та 15 м.).

11—Дах від верху спадає однаково на 2 боки. Висота даху (його форма трикутник) 5,5 м., а прогін 14,6 м. Які завдовжки кроквини?

12—Яка вишина даху, що в нього кроквини по 9,2 м., а прогін 18,8 м.?

13—Які завдовжки мусять бути кроквини для даху, що має висоту 4,3 м., а прогін 12,8 м.?

14—Трикутній стіл має всі боки один одному рівні, а саме по 40 см. Найти поверхню цього стола.

15—Поперечини двох ринв дорівнюють 75 м. та 10 см. Вони сходяться обидві вкупі й далі вода мусить переходити в одну ринву. Яка має бути поперечина нової ринви, щоб вода з двох перших не затримувалася?

16—Дві засіки, однакові завглибшки, мають квадратові основи з боками 2 м. перший і 2,5 м. другий. Треба збудувати третю засіку теж з квадратовою основою й таку саме, як перші завглибшки, щоб у неї місткість була така, як у двох перших. Найти довжину боку основи нової засіки?

17—Мансарду (дах, вказаної на рисункові 127, форми) збудовано таким чином: півкола поділено на 4 рівні частини й кроквини мають напрямки AC, CD, DE, EB. Знайти поверхню частини ABEC та частини ECD, знаючи, що AB = 10 метр.

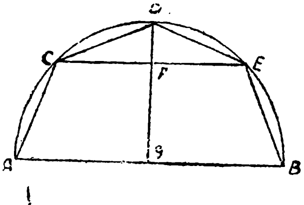


Рис. 127.

18—Історичні задачі. (З старої російської «Аритметики» Магницького XVIII сторіччя).

Довелося якомусь чоловікові приставити драбину до муру, а той мур заввишки 117 ступнів. Чоловік вишукав драбину 125 ступнів завдовжки. Бажає він знати, на скільки ступнів драбини цієї нижчий кінець від муру віддалений буде?

19—З творів індуського математика Бгаскара XII сторіччя. У стародавніх математиків задачі мали форму віршиків (даємо вільний переклад з російської).

На березі річки тополя росла,
самітня, струнка та висока.
Тополя та, мабуть нещасна була:
зламав її вітер жорстокий.
Три фути лиш стовбур стирчить із води
тут, з нашого берега з краю,
а маківка ген-ген упала туди,
на берег противний. Я знаю,
що річка в тім місці завширшки була
4 лиш фути. Питаю,
яка та тополя заввишки була,
і відповідь мати бажаю.

20—(Звідти-ж).

У тихім ставочку в далекій землі
ріс лотос розкішний, чудовий цвіток.
Був корінь глибоко у самому дні
півфута-ж стирчало стебла й пелюсток.
І люди і риби любили його,
а вітер—той заздрив й у воду сховав.
Рибалка знайшов радість ока свого
на 2 фути далі, ніж лотос стирчав.
Тепер я питаю, чи знаєм, яку
ми маємо тут глибину у ставку?

РОЗДІЛ 24

Піраміда та конус

Піраміда § 1. Дуже часто в техніці ми бачимо тіло як у нас на рисункові. Таке тіло звуть **піраміда**. Розгляньте її (рис. 128) уважно, краще на моделі, аніж на рисункові. Ви помітите, що кожна піраміда має один многокутник, що на ньому звичайно стоїть піраміда і що його ми називаємо о с н о в а піраміди; далі в піраміді ще помічаємо бічні стінки. Ці стінки всі є трикутники й сходяться в одній точці, саму цю точку звуть в е р ш о к піраміди. Боки бічних трикутників є б і ч н і р у б и піраміди, а боки основи — р у б и о с н о в и. Залежно від того, скільки боків буде в основі піраміди, вона має назву ч о т и р и с т і н н а (3), т р и с т і н н а (1), ш о с т и с т і н н а (2). Якби ми мали в основі многокутника з n боками, ми-б назвали нашу піраміду n - стінна.

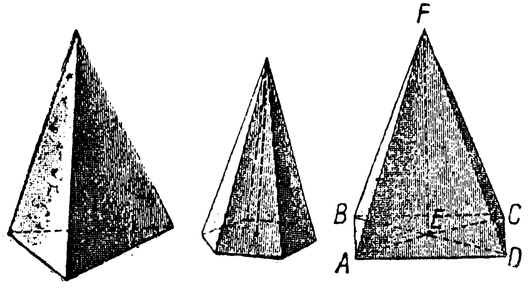


Рис. 128.

На практиці маємо ми справу з пірамідами правильними. Такі піраміди мають за основу правильний многокутник, а сторч з вершка попадає в осередок самої основи. Цей сторч має назву в и с о т а піраміди. Висоту кожного трикутника звуть а п о т е м а піраміди.

Питання — Згадайте, де ви бачили піраміду в практичному житті?

Цікаво помітити, яка є залежність поміж основами піраміди, коли ми в тій саме піраміді збільшуємо або зменшуємо висоту, так-би мовити, одрізуючи спід від піраміди. Нехай маємо SABCDE піраміду (рис. 129), що має висоту H. Переріжмо цю піраміду площею, що є рівнобіжна до основи й відстоїть од вершка на h. Зверху дістанемо піраміду меншу, а знизу таке тіло, що має назву з р і з а н а піраміда.

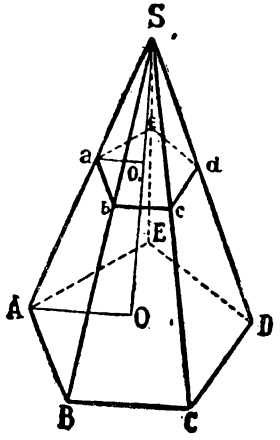


Рис. 129.

Ті 2 п'ятикутники, що ми їх маємо за основи великої та малої піраміди ABCDE та abcde, подібні поміж собою; боки цих п'ятикутників—пропорціональні. Припустімо, що боки меншого п'ятикутника менше від боків більшого в n разів. У такому разі й трикутники ASB та asb (вони також подібні) мають між боками таке саме відношення. Нарешті, й трикутники AOS та aos подібні й боки трикутника aos в n разів менше від боків трикутника AOS. Тоді виходить, що й

$$\frac{SO}{so} = n.$$

А ми вже знаємо з попереднього, що поверхні подібних фігур відносяться, як квадрати відповідних боків; отже $\frac{\text{пов. } ABCDE}{\text{пов. } abcde} = n^2$ або ставлячи замість n відношення висот $\frac{\text{пов. АВСДЕ}}{\text{пов. abcde}} = \left(\frac{SO}{so}\right)^2$ або ще

$$\frac{\text{пов. ABCDE}}{\text{пов. abcde}} = \frac{SO^2}{so^2}.$$

Це важливе взаємовідношення між поверхнями основ піраміди та її перерізу використовує техніка та фізика.

Поверхня піраміди

§ 2. Для практичних цілей потрібно вміти знаходити поверхню та об'єм піраміди. Ми зараз вишукаємо її поверхню. Тут ми маємо відрізняти поверхню тільки бічну (бічницю) або всю повну. Щоб вирахувати бічницю, нам досить, якщо піраміда правильна, вирахувати поверхню одної стінки її трикутника, а потім цю поверхню помножити кількістю боків. Коли-ж буде потрібно вирахувати повну поверхню, доведеться додати до бічниці ще поверхню многокутника — основи.

Вправа — Намет напнули рядном. Цей намет має форму чотиристінної правильної піраміди. Кожний бік основи цього намету дорівнює 6 м., а бічні руби всі по 5 м. Скільки кв. метрів ряднини треба на намет?

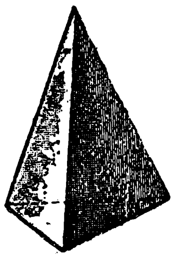


Рис. 130.

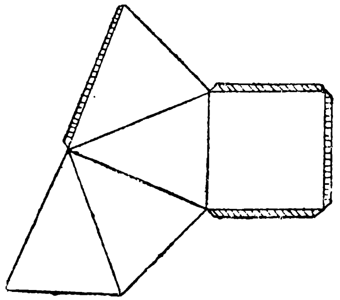


Рис. 131.

Щоб вирахувати, скільки потрібно матеріялу на покрівлю піраміди, роблять иноді розгортку її. Уявім, наприклад, собі, що маємо правильну чотиристінну піраміду. Поставімо її на папір і обведімо її основу оливцем. Матимемо квадрат. Далі, не посуваючи її від її місця, покладімо її на одну стінку бічну, обведімо оливцем цю стінку й матимемо тр-ка. Перевернімо піраміду правобіч, не зсуваючи з місця, обведімо другу, а далі таким саме чином третю й четверту стінки піраміди. Матимемо, нарешті, ту фігуру, що в нас нарисовано (рис. 131).

Вправа 1 — Зробіть з паперу викройку піраміди.

2 — Нарисуйте розгортку тої піраміди, що мається у вашому математичному кабінеті.

Конус та його поверхня

§ 3. На піраміду схожий конус (рис. 132). Це теж гостряк, але він має за основу коло, бічна його поверхня не складається з низки площин, а є вже крива поверхня. Ця поверхня має назву конічна поверхня.

Конус ми можемо утворити, обточуючи піраміду або ввесь час подвоюючи число боків у основі правильної піраміди. Через це математики кажуть, що конуса можна уявляти собі, як піраміду з безкінечною кількістю сторін її основи. Звідци ми дістанемо й правило находження бічниці конуса.

Нехай означено P_n поверхню піраміди, a її апотему, b довжину одного боку основи, а n число всіх боків основи. Тоді $P_n = \frac{abn}{2}$ або, як поміняти порядок чинників

$$P_n = \frac{a\,(bn)}{2}$$

Ця остання формула вказує нам, що бічниця піраміди дорівнює півдобуткові апотеми та обводу основи (бо bn є обвід основи піраміди). Скільки-б не було боків у піраміди, ця формула залишається справедливою. Отже маємо право прикласти її й тоді, коли число боків стане безмежне, цеб-то, коли замість піраміди матимемо конус. У цьому разі обвід, основи піраміди стане обводом кола, а цей обвід, якщо луч кола основи є r (або поперечник d) є $2\pi r$ (або πd). Вставляючи в останню формулу замість bn добуток $2\pi r$ або πd, матимемо для бічниці конуса P_k формулу $P_k = \frac{a \, . \, 2\pi r}{2}$ або

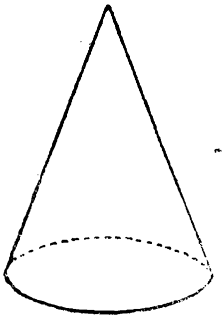


Рис. 132.

$$P_k = \frac{a\pi d}{2} \text{ або}$$

$$P_k = \pi a r, \text{ або } P_k = \frac{\pi a d}{2}$$

Обидві ці формули дають в квадратових мірах поверхню конуса. (Чому міри квадратові? Чи можна у цю формулу поставити значіння a в одніх мірах, а r або d в других?).

Щоб зробити розгортку конуса (рис. 133), ми, покладаючи його на його поверхню, перекатуємо, доки не зробимо повного обертання. Дамо ще формули для повної поверхні піраміди та конусу. Нехай S_n визначає повну поверхню піраміди, а S_k конусу, крім того K поверхня многокутника — основи піраміди. Тоді

$$S_n = \frac{a\,(bn)}{2} + K;$$

$$S_k = \pi a r + \pi r^2 \text{ або } S_k = \frac{\pi a d}{2} + \frac{\pi d^2}{4}.$$

Зауважмо ще, що конус можна утворити, повертаючи прямокутнього трикутника АВС навколо одного з його катетів. В такому разі катет АВ звуть **вісь оборотова**, гіпотенузу АС звуть **твірна конусу**, бо вона своїм рухом утворює конічну поверхню, а сам конус є поверхня **оборотова**. Вісь оборотова це є висота конусу (рис. 134).

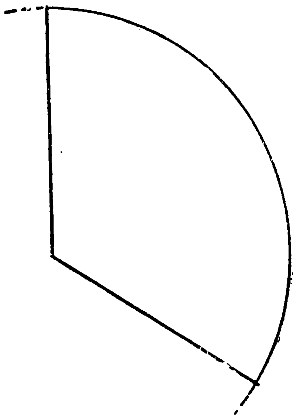


Рис. 133.

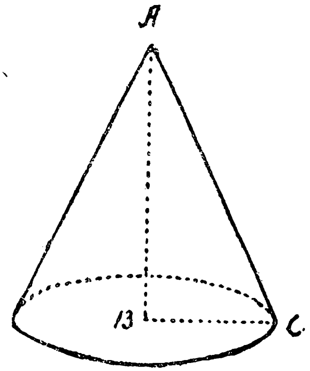


Рис. 134.

Вправа 1 — Луч кола, що є в основі конусу, має довжину 4 сантиметри. Твірна цього конусу — 5 см. Яка його бічниця та повна поверхня?

2 — Зерно зсипано в купу, що має форму конусу. Обвід основи цього конусу є 8 м., твірна 5 м. Зерно покривають рядниною й бажають покрити двічі. Скільки кв. метрів ряднинами треба мати для цього?

Об'єм піраміди та конусу

§ 4. Находження об'єму піраміди ми розіб'ємо на декілька частинок.

Спочатку впевнімося, що об'єм піраміди є функція поверхні основи та висоти піраміди.

Розгляньмо 2 піраміди SABC та JDEF (рис. 135). Візьмімо ці піраміди так, щоб у них поверхні основ були однакові, хоча сами тр-ки нерівні, й висоти теж були однакові й подивимось, чи будуть різні їх об'єми.

Уявім собі, що кожну піраміду ми складаємо з тоненьких аркушів паперу або картону. Тоді, власне кажучи, якщо ми вирізуємо окремо паперові аркуші, якщо ці аркуші зменшуються в міру наближення до вершка піраміди, ми маємо не піраміду, а цілу низку призм. Але що-тонше буде папір, що з нього вирізано наші трикутники, то більше наш збір трикутників наближається до справжньої піраміди. Всі ці трикутники матимуть таку властивість: якщо вони лежать на однаковій віддалі зверху (або знизу), в кожній з пірамід вони матимуть однакову поверхню (згадайте, чому?). А тому, що висота в усіх трикутніх тоненьких паперових призмах однакова, то й об'єми відповідних паперових призм рівні один одному. А в той-же час об'єм кожної піраміди дорівнює сумі об'ємів усіх цих трикутніх призм. Отже об'єми двох цих пірамід однакові. Таким чином, бачимо, що коли беремо 2 піраміди з рівними висотами та рівними поверхнями основи, їх об'єми будуть також рівні.

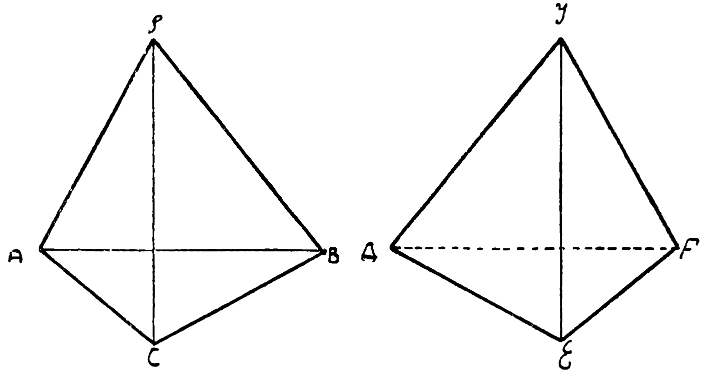


Рис. 135.

Коли-ж поміняємо висоту одної з пірамід, об'єм її мінятиметься, бо в новій піраміді буде більше або менше трикутніх паперових призм. Так само мінятиметься об'єм і від зміни поверхні основи.

Щоб знайти об'єм піраміди, порівнюємо її до призми, що має таку саму поверхню основи й таку саму висоту. Якщо призма та піраміда порожні з середини й налити у піраміду води (або насипати піску), а потім перелити (або пересипати) з піраміди в призму, ви побачите, що доведеться тричі перелити з піраміди у призму, щоб наповнити призму до вінців. Звідци ми приходимо до висновку, що об'єм піраміди дорівнює $^1/_3$ об'єму призми, що має таку саму висоту та поверхню основи. Инакше кажучи, об'єм піраміди дорівнює одній третині добутку її основи та висоти.

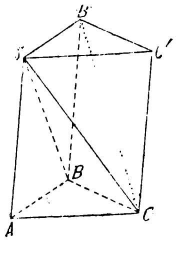


Рис. 136.

Теж саме ми дістанемо й иншим шляхом (рис. 136). Доповнімо нашу піраміду SABC до призми, ведучи прості рівнобіжні до руба AS через точки B та C й прості через точку S, рівнобіжні до AC та AB. Злучаючи B′ та C′, маємо призму. Піраміду ми дістанемо з призми, одрізавши від призми многостінника, що знизу обмежується простою AC зверху трикутником SB′C′, з боків трикутниками C′SC, CSB та BB′S і чотирикутником BCC′B′.

Цей многостінник розбиваємо на 2 тристінні піраміди, що обидві мають вершок у точці S, а за основи дві половини рівнобіжника BCB′C′. (Основа одної BB′C, а другої B′CC′). Ці дві піраміди в такому разі мають однакову висоту та рівні поверхні основ, а тому й об'єми цих пірамід рівні один одному. Одна-ж із цих пірамід, що ми про неї вказали, має вершок у точці S, а основа її $B'CC'$; після перевертання, коли вважати за основу $SB'C'$, а за вершок C напевне має об'єм, як і піраміда початкова. (Бо в цих пірамідах однакова висота й рівні основи). Отже всі 3 піраміди, що з них складається призма, рівні поміж собою. Таким чином, прийшли знов до висновку, що об'єм піраміди є $^1/_3$ об'єму призми (відповідної).

Якщо зазначити об'єм піраміди V, поверхню її основи B, а висоту h, матимемо для об'єму формулу

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h.$$

Все, що допіру ми казали про об'єм тристінної піраміди, вірно й про многостінні піраміди, бо їх можна порізати на тристінні й навпаки з тристінних скласти многостінну, як це видно з рисунка 137. А тому й для обчислення об'єму многостінної піраміди користуються з тої саме формули, що й для тристінної.

Вправа 1 — Скляна піраміда заввишки 8 см. має прямокутню основу з рубами 2 та 3 см. Скільки важить ця піраміда якщо питома вага цього скла 2,6?

2 — Об'єм піраміди з квадратовою основою 15 куб. см., а висота — 5 см. Який руб у неї в основі?

Все, що вказано про об'єм піраміди, можемо прикласти й до об'єму конусу. Справді-ж, коли ми, обточуючи піраміду, збільшуємо кількість її боків, вона наближається до конусу, а формула для вирахування її об'єму не зміняється. Тому ця формула не зміниться й тоді, якщо ми візьмемо в основі піраміди безліч боків, цеб-то обточимо піраміду до конуса. Формула набуде иншого вигляду лише тому, що ми замінимо B на відоме нам πr^2 або $\frac{\pi d^2}{4}$, де r визначає луч, а d поперечину кола основи конуса. Отже для об'єму конусу V маємо формулу $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, або $V = \frac{1}{12}\pi d^2 h$.

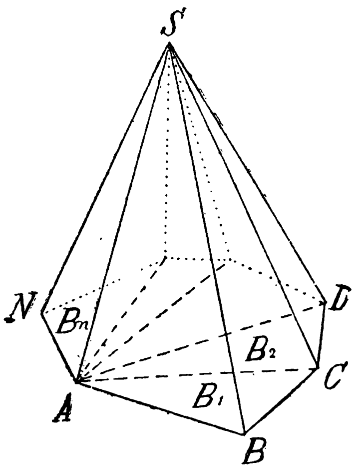


Рис. 137.

Вправа 1 — Голова цукру конічної форми має заввишки 16 см., а поперечина її основи 24 см. Який її об'єм?

2 — Бронзовий обеліск конічної форми має луч основи 4 см., а висоту 10 см. Питома вага цієї бронзи 8. Скільки важить обеліск?

Вправи до розділу 24

1 — Знайдіть, скільки кв. метрівряднини потрібно, щоб напнути намет формою чотиристінної піраміди з висотою 3 м. та з боком основи 4 м. Який об'єм цього намету?

2 — Прямокутня альтанка має квадратову підлогу, а дах її — піраміда, що спадає на 4 боки однаково. Завдовжки й завширшки стіни нижчої її частини — рівнобіжностінника та основ даху по 8 м. Такі саме й руби даху. Яка поверхня та об'єм альтанки?

3 — Найбільша Египетська піраміда (Хеопсова) мала висоту 146 м., а квадратову основу 233 м. завдовжки. Скільки тисяч цегли звичайного розміру $3 \times 6 \times 12$ вершк. треба, щоб збудувати цю піраміду? (Зверніть увагу на назви мір).

4 — Стіг соломи має форму рівнобіжностінника з пірамідою на верху. Основа 4 метри завширшки й 6 завдовжки. Висота до основи піраміди 4 м., а до вершка піраміди $5^1/_2$ м. Скільки пудів важить ця солома, якщо 1 куб. дм. її важить 0,1 кг.?

5 — Чотирикутна правильна піраміда та куб мають однаковий об'єм. Чи однакові, чи ні їхні поверхні?

6 — Найти об'єм правильної тристінної піраміди, що в неї руб основи 25 см., а кут між двома рубами при вершку $50^0\ 20'$.

7 — Правильну шостистінну піраміду розрізано на 2 рівні частини. Поверхня розрізу проходить через вершину та 2 бічні руби й дорівнює 157 кв. см. Кут при вершині поверхні перерізу є $12^0\ 50'$. Знайти поверхню та об'єм цієї шостистінної піраміди до розрізування.

8 — Основа піраміди — правильний трикутник. Один з бічних рубів 23,4 м. завдовжки є сторч до основи, а другий становить з рубом основи кут $56^0\ 20'$. Найти повну поверхню та об'єм піраміди.

9 — Найти бічницю та об'єм конічної втулки, що в неї поперечина основи є 8 см., а висота 10 см.

10 — Обвід основи конусу є 65 см., а висота 30 см. Яка повна поверхня та об'єм конусу?

11 — Бідон для гасу має форму зі споду циліндру, а зверху конусу. Поперечина його основи 32 см., повна висота 80 см., а висота найверхньої конічної частини 30 см. Скільки заліза потрібно на цей бідон, якщо на лютові злучення доводиться збільшити на 3%? Скільки важить гас у цьому бідоні, якщо питома вага гасу 0,8?

12 — Купа жорстви щебню має на споді обвід 36,25 см., висота купи 1,25 см. Знайти її об'єм (купа конічна).

13 — Об'єм купи жорстви 2,4 куб. м., а вишина 1,2 м. Який обвід основи цієї купи, якщо вона конічна?

14 — Конічна купа жорстви з об'ємом 1,2 куб. м., має обвід основи 7,7 м. Яка висота купи?

15 — У башти є конічна баня; поперечина бані 6 м., а вишина 4,2 м. Цю баню бажають позолотити. На кожний квадратовий метр поверхні позолоти потрібно 1,1 гр. Скільки позолоти потрібно на баню?

16 — Кут між твірною та лучем основи конусу є $30^0 30'$, луч 0,12 м. Знайти бічницю та об'єм конусу?

17 — Конус заввишки 20 см.; твірні, що сполучають кінці діяметру (поперечини) основи конусу, становлять кут 15^0. Яка поверхня (повна) та об'єм конусу?

18 — Розгортка конусу має форму вирізки (сектору). Кут біля вершка цього вирізку є $20^1/_2{}^0$, а тятива (хорда) вирізку 25,7 см. Найти бічницю та об'єм цього конусу.

19 — Зробіть розгортку піраміди (якої бажаєте форми).

20 — Зробіть розгортку конусу.

РОЗДІЛ 25

Квадратові рівняння

Рівнання $ax^2 = b$

§ 1. У тих задачах, що ми їх доси розвязували, ми мали два роди рівнань: в одному роді невідомі величини були в нас першого степеня, а в другому разі невідомі були у квадраті—другого степеня. У цьому розділі розгляньмо детально квадратові рівнання.

Квадратові рівнання з одною невідомою це є такі рівнання, де невідоме другого степеня. Далі ми вкажемо, які можуть бути ще члени квадратового рівнання.

Ми вже бачили, що рівнання, напр., $x^2 = 25$ розвязуємо просто корінюванням і маємо $x = \sqrt{25}$, або $x = 5$. Але тепер помітьмо, що така розвязка не повна. Справді бо, коли ми поставимо собі запитання, яке число треба піднести до квадрату, щоб дістати 25, то відповідь буде: або число 5, або число —5. Обидва ці числа задовольняють умові $(5)^2 = 25$ й $(-5)^2 = 25$. Звідси ми виводимо, що $\sqrt{25}$ можна дорівнювати й числу $+5$ й числу -5. Коротше це записують

$$\sqrt{25} = \pm 5,$$

де кожний зі знаків можна брати, залежно від инших умов задачі.

Те, що ми сказали про число 25, можна сказати й про инші числа й написати взагалі

$$\sqrt{a^2} = \pm a.$$

Таким чином корінь квадратовий з кожного числа має два знаки $+$ та $-$.

Цікаво тут зараз запам'ятати, що кореня квадратового з від'ємних чисел добути ми не можемо.

Дійсно-ж, $\sqrt{-36}$, напр., не є число додатнє, бо додатнє число у квадраті дає також додатнє; з другого боку $\sqrt{-36}$ не може бути й числом від'ємним, бо і від'ємне число у квадраті дає теж число додатнє. Корінь квадратовий з від'ємного числа є число нової природи — не додатнє й не від'ємне; таке число називають число уявне. Ми про уявні числа казати не будемо.

Дуже легко побачити, що корінь квадратовий має 2 значіння — додатнє та від'ємне, розглядаючи график функції

$$y = x^2 \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Візьмімо систему координатних осів *хоу* та нарисуємо график цієї функції. Для цього надаємо *х*-ові довільні значіння й вишукуємо відповідні значіння *у*. Нехай ця таблиця дає значіння змінних

$x=$	0	1	-1	2	-2	-3	$+3$
$y=$	0	$+1$	$+1$	4	$+4$	$+9$	$+9$

З таблиці бачимо, що лінія, яка дає на рисункові 138 відображення (відбиток) функції $y = x^2$, уся цілком лежить у боці доданих ординат. Вона вже не є проста. Така лінія має назву п а р а б о л а.

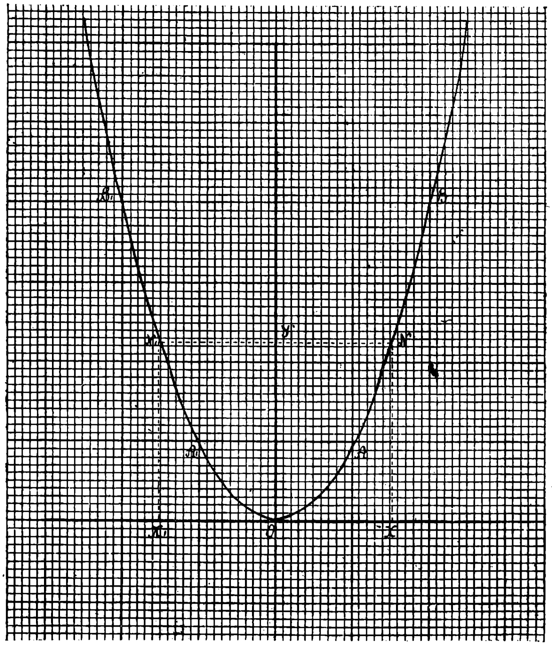


Рис. 138.

Кожна точка цієї лінії має таку властивість, що її координати задовольняють рівнанню (1). З рисунка ми наочно бачимо, що для $y = 4$, ми маємо на кривій — на параболі, дві точки В та B_1, що мають абсциси $+2$ перша й -2 друга. В той же час, шукаючи *x* із рівнання (1), ми маємо добувати корінь квадратовий з *y* бо (1) $x = \sqrt{y}$.

Цей корінь график і вказує: для $y = 4$ буде $\sqrt{4} = \pm 2$.

Вправа — Зробіть собі график функції $y = x^2$ та упевніться з нього, що $\sqrt{1} = \pm 1$, а $\sqrt{9} = \pm 3$.

Підвійне значіння квадратового кореня звичайно не дає неозначености задачі, бо ми маємо переважно додаткові умови, що просто вказують нам, який із коренів треба брати в даному випадкові. Напраклад:

Задача — На паркетній підлозі зіпсувалося 5 квадратових кусочків паркету. Поверхня всього зіпсованого місця є 245 см. Які розміри кожного квадратика?

Зазначаючи розмір (довжину) квадратика літерою x, маємо, що його поверхня є x^2, а вся зіпсована поверхня підлоги $5x^2$. Отже

$$5x^2 = 245, \text{ а } x^2 = 49 \text{ й } x = \pm \sqrt{49},$$

що дає

$$x = +7 \text{ або } x = -7.$$

У даному разі слід взяти тільки одне значіння $x = 7$, бо розміри міряємо тільки додатніми одиницями.

Вправи — Розвяжіть квадратові рівнання, зазначаючи обидва значіння невідомого вказівками 1 та 2 підсподом (напр. x_1, x_2)

1 $x^2 = 4$	**4** $25x^2 - 4 = 0$	**7** $(x - 2) . (x + 2) = 5$
2 $x^2 - 100 = 0$	**5** $ax^2 - ab^2 = 0$	**8** $(x - 5)^2 + 2 = 3$
3 $x^2 - a^2 = 0$	**6** $\frac{2x}{65} = \frac{26}{5x}$	**9** $(3 + x)^2 - 30 = 6$

Перевірте ті значіння x, що ви знайдете, вставляючи в дані рівнання.

Рівнаня $ax^2 + b\ x = 0$

§ 2. **Задача** — Коли від квадрату невідомого числа відняти 5 раз узяте невідоме, остача буде 0. Яке невідоме число?

Нехай невідоме x. Умова задачі дає нам рівнання

$$x^2 - 5x = 0.$$

Ми дістали новий тип квадратового рівнання. Тут уже немає рації переносити якогось члена на правий бік, бо ми тоді матимемо невідомі з того й другого боку рівнання. Тут скористуємося з замикання в дужки й візьмімо поза дужки те, що можливо. Дістанемо, виносячи x

$$x\ (x - 5) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Виходить, що добуток двох чинників є рівний нулеві, а це можливе лише тоді, коли один із чинників дорівнюватиме нулеві. Инакше кажучи (2) рівнання нас зобов'язує визнати, що або $x = 0$ або $x - 5 = 0$.

Перше припущення дає нам зараз корінь $x_1 = 0$, а друге припущення після перенесення члена, 5 дає $x_2 = 5$.

Підстановляючи замість x так перше, як і друге число (0 або 5), матимемо, що дане рівнання задовольнятиметься. (Перевірте це).

Оцей вигляд квадратового рівнання взагалі, якщо визначимо коефіцієнти (сучинники) при x^2 та x літерами a та b, припускаючи, що a та b дані числа, переписуємо

$$ax^2 + bx = 0$$

Якщо ми зуміємо розвязати це літерове рівнання, ми зуміємо розвязати кожне числове, беручи замість літер відповідні числа. Останнє-ж рівнання ми розвязуємо, знову користуючись з дужок. Маємо

$$x\ (ax + b) = 0$$

Як і вище кажемо, що дане рівнання рівноварте двом

$$x = 0 \text{ або } ax + b = 0$$

Розвяжімо друге рівнання, бо перше вже дало корінь.

$$ax = -b \text{ й } x = -\frac{b}{a}$$

Збираючи обидва корені, маємо $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$

Примітка: Можемо писати й так $x_1 = -\frac{b}{a},\ x_2 = 0$

Вправи — Розвяжіть квадратові рівнання

1 $x^2 - 7x = 0$ **3** $5x^2 - 3x = 0$

2 $4x^2 + x = 0$ **4** $x^2 - kx = 0$

5 $(x - 2)^2 + (x + 2)^2 = 4$

6 $nx^2 + mx = 0$

Повне квадратове рівнання

§ 3. Усі ці квадратові рівнання, що ми їх допіру мали, є неповні квадратові рівнання. Повні мають в собі члени й з невідомою у квадраті й з невідомою першого степеня й нарешті члени, що в них немає зовсім невідомого.

Останні члени звуться вільні члени.

Ось приклад квадратового рівнання

$$13x^2 + 5 - 16x = 3x - 5 + 6x^2$$

Звичайно, в такому рівнанні всі його члени переписують в один бік — лівий, а в правому боці залишається тільки 0. У нашому прикладі ми матимемо після злучення подібних членів, розкладаючи за спадними ступенями

$$7x^2 - 19x + 10 = 0$$

Це саме ми можемо зробити з кожним квадратовим рівнянням, а тому ми кажемо, що квадр. рівняння має форму

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Тут літери a, b та c визначають дані числа, а x невідоме. Ми й пошукаємо способу, як розвязувати рівняння цієї форми, але спочатку обмежімося простішим випадком, коли $a = 1$. Нехай маємо рівняння

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Переносячи відомий член правобіч, матимемо

$$x^2 + 2x = 8$$

Ми не можемо сполучити докупи члени $x^2 + 2x$, тому доведеться шукати иншого шляху. Поставімо собі задачу — перетворити дане рівняння на рівновартне йому рівняння першого степеня. Для цього нам доведеться корінювати якось ліву частину рівности. Але корінювати двочлена не можна, бо з рівности $(a)^2 = a^2$ буде $\sqrt{a^2} = a$, а з рівности $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; виходить $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$, цеб-то, після корінювання одночлена матимемо одночлена, а двочлена, матимемо після корінювання тричлена.

Приходимо до думки, чи не можемо зробити, щоб замість $x^2 + 2x$ став у нас тричлен, та ще такий, щоб його можна було корінювати. Ми помічаємо, що x^2 є квадрат числа x, $2x$ є подвоєний добуток 2 та x, а третій член ми просто вгадаємо. З формули про квадрат суми знаємо, що другий член $2x$ мусить бути подвоєний добуток x та ще якогось числа. За це число беремо 1, бо $2x = 2x \cdot 1$. Якщо додати ще до $x^2 + 2x$ число 1, то ми зможемо прокорінювати ліву частину рівности й дістати x у першому степені.

Щоб не порушити рівности, ми додамо по 1 (або по $+1$) до обох боків рівности. В такому разі буде в нас

$$x^2 + 2x + 1 = 9 \text{ або } (x + 1)^2 = 9.$$

Останнє рівняння ми зуміємо прокорінювати й добудемо $x + 1 = \pm\sqrt{9}$ або $x + 1 = \pm 3$. Таким чином, це рівняння розпадається на 2 рівняння першого сепеня

$$x + 1 = 3 \text{ або } x + 1 = -3$$

й ці рівняння нам дають два значіння x.

$$x_1 = 2, \ x_2 = -4.$$

Підставте у рівняння дане знайдені значіння x й перевірте, чи задовольняється за ними рівняння.

Що-разу робити такі перетворення, що оце ми зробили, незручно, а тому їх роблять з рівнянням у загальному вигляді й знаходять спосіб, як воно розвязується. Рівнання у загальному вигляді, якщо коефіцієнт квадратового члена є 1, набуває форми (коефіцієнти літери p та q)

$$x^2 + px + q = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Переносимо вільного члена на правий бік

$$x^2 + px = -q.$$

Розглядаємо члена px, як подвоєний добуток $px = 2x \cdot \frac{p}{2}$.

Щоб мати на лівому боці квадрат суми двочлена, ми додаємо до обох боків рівности по $\left(\frac{p}{2}\right)^2$. (Чому?)

$$x^2 + 2x\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \text{ або } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Члена $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ ми пишемо на першому місці, тому, що він додатній а член $-q$ від'ємний (з зовнішнього боку).

Корінюючи обидва боки рівнання, маємо

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \text{ а звідци}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Ця остання формула дуже важлива, бо з неї якраз саме й користуються, розвязуючи квадратові рівнання, коли невідоме у квадраті має коефіцієнта 1.

Приклад—Розвязати квадратове рівнання

$$x^2 - x - 20 = 0.$$

Порівнюючи дане рівнання та (1), бачимо, що в даному разі теоретичні p та q мають такі значіння $p = -1$; $q = -20$. (Зверніть увагу до знаків!) Отже формула (2) дає

$$x = -\frac{-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 20} \text{ або } x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}.$$

Остання рівність, залежно від того, якого знака беремо перед коренем, дає нам

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2}; \text{ або } x_1 = 5; \; x_2 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = \frac{-8}{2} = -4.$$

(Підстановіть замість x у дане рівнання спочатку 5 і упевніться, що рівність задовольняється. Проробіть те саме й з числом — 4).

Так само можна развязати всяке рівнання, де коефіцієнт члена x^2 є 1.

Вправи—Розвяжіть кв. рівняння

1 $x^2 + 6x + 5 = 0$ **3** $x^2 + x - 2 = 0$

2 $x^2 - 8x + 15 = 0$ **4** $x^2 - 8x - 48 = 0$

Тепер ми маємо змогу перейти до розвязування квадратового рівняння у найзагальнішій формі

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Тут доведеться повторити знов майже ті самі міркування, що ми їх проробили вже двічі. Переносимо вільного члена на правий бік рівности

$$ax^2 + bx = - c$$

Щоб перший член останнього рівнання був точний квадрат незалежно від a, а другий був подвоєний добуток, помножаємо обидва боки рівности числом 4а;

$$4a^2 x^2 + 4abx = - 4ac \text{ або } (2ax)^2 + 2(2ax)b = - 4ac$$

Дужками зазначили ми, яка величина першого члена. Бачимо, що в лівому боці рівности не вистачає до повного квадрату суми двох величин члена b^2. Ми й додаємо по b^2 до обох частин рівнання. Маємо:

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 = b^2 - 4ac \text{ або } (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Корінюючи обидва боки рівности, набудемо

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Під знаком кореня ми маємо якесь число, бо a, b та c дані числа Корінь квадратовий з цього числа теж є якесь число, що доки ми його не знаємо, означаємо $\sqrt{b^2 - 4ac}$.

Це число нам потрібно брати або зі знаком + або —. Вважаючи правий бік рівнання (4) за відоме число, ми розвязуємо це рівнання й знаходимо x, переносячи b на правий бік, $2ax = - b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ та поділяючи на коефіцієнт при x

$$x = \frac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \ldots \quad (5)$$

Це й буде загальна формула для розвязування квадратового рівнання. Вона дає нам 2 значіння x, бо маємо різні значіння залежно від того, чи візьмемо перед коренем квадратовим знак +, чи —.

Прикладаючи практично цю формулу, ми, як і вище, мусимо тільки помітити, які числові значіння мають коефіцієнти a, b, c і не робимо всіх послідовних перетворень, а просто користуємося з остаточної формули (5).

Напр., розвяжімо рівнання $6x^2 - x - 5 = 0$.

Порівнюючи це дане рівнання до теоретичного (3), ми бачимо, що теоретичні коефіцієнти мають такі числові значіння $a = 6$; $b = -1$; $c = -5$. Отже буде $-b = -(-1) = +1$, а $-4ac = -4.6.(-5) = +120$. Після цього формула (5) дає

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.6.(-5)}}{2.6} \text{ або } x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{12}$$

$\sqrt{121} = 11$, а тому, розділяючи обидва знаніння x, дістаємо:

$$x_1 = \frac{1 + 11}{12}; \text{ або } x_1 = 1; \; x_2 = \frac{1 - 11}{12} \text{ або } x_2 = -\frac{5}{6}.$$

Якщо ви підставите ці обидві розвязки у дане рівнання, ви переконаєтесь, що вони обидві задовольняють йому.

Задачі на квадратові рівнання

§ 4. З допомогою квадратових рівнань ми можемо розвязати багато задачок. Розглянемо тут такі приклади:

1—На 1 карб. 20 коп. купили оливців у приватній крамниці. У кооперативі кожний оливець коштує на 2 коп. дешевше, а тому на ту саме суму грошей можна купити на 2 оливці більше. Яка ціна оливця у приватній крамниці?

Припустім, що оливець у приватній крамниці коштує x коп., в такому разі його ціна в кооперативі $x - 2$ коп.

Всього оливців купили у приватній крамниці $\frac{120}{x}$, а в кооперативі купили-б їх $\frac{120}{x - 2}$. Записуючи, що останнє число на 2 більше від першого, ми маємо рівнання

$$\frac{120}{x} = \frac{120}{x - 2} - 2.$$

Щоби розвязати це рівнання, доведеться позбутися від дробів; для цього слід знайти спільного знаменика. У нашому випадкові він є $x(x - 2)$. Помноживши обидва боки рівнання спільним знамеником, матимемо

$$120(x - 2) = 120x - 2x(x - 2),$$

а це після перемноження стане

$$120x - 240 = 120x - 2x^2 + 4x.$$

Переносячи всі члени на правий бік, маємо після зведення подібних членів

$$0 = -2x^2 + 4x + 240,$$

а після скорочення всіх членів на 2 та перестановлення боків рівнання

$$x^2 - 2x - 120 = 0.$$

За формулою (2) § 3 дістанемо $x = 1 + \sqrt{1 + 120}$, а звідци $x = 1 \pm 11$ й маємо дві розвязки

$$x_1 = 12 \qquad\qquad x_2 = -10.$$

Ясна річ, що в даному разі треба взяти тільки x_1, бо ціна оливця є число безумовно додатнє. Отже, ціна оливця в приватній крамниці є 12 коп.

2—Два робітника, працюючи нарізно, фарбуючи кожний по вагону, витратили не однакову кількість часу. Перший пофарбував на 8 год. швидше за другого. Коли-ж удруге вони фарбували обидва вкупі такий саме вагон, витратили на це 4 год. 12 хв. За який час кожний з них окремо може пофарбувати такий вагон?

Припустім, що перший витрачає на це x годин, а другий $x + 8$ год.

Перший що-години фарбує $\frac{1}{x}$ частину вагону, а другий $\frac{1}{x+8}$ част. Обидва разом вони фарбують $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+8}$. З другого боку—вони, витрачаючи на все 4 г. 12 хв., або 4,2 год., фарбують що-години $\frac{1}{4,2}$ або $\frac{5}{21}$ вагону. Отже рівнання є $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+8} = \frac{5}{21}$.

Спільний знаменик $21x\,(x + 8)$. Звільняючись від знаменика, маємо

$$21\,(x + 8) + 21x = 5x\,(x + 8),$$

або після перемноження:

$$21x + 168 + 21x = 5x^2 + 40x,$$

що инакше, переносячи всі члени на правий бік та злучаючи подібні, перепишемо

$$0 = 5x^2 - 2x - 168; \text{ або } 5x^2 - 2x - 168 = 0.$$

А звідци маємо за загальною формулою $x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 . 5 . (-168)}}{2 . 5}$.

Инакше $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3360}}{10}$; находимо, що $\sqrt{3364} = 58$ й

$x_1 = \frac{2 + 58}{10}$ або $x_1 = 6$; $x_2 = \frac{2 - 58}{10}$, або $x_2 = -5{,}6$.

Умови задачі задовольняють перше значіння $x = 6$, а це визначає, що перший сам витрачає 6 год. на працю, а другий $6 + 8$, цеб-то 14 год.

Вправи до розділу 25

Розвяжіть рівнання (точно або до 0,001)

1 $x^2 = 4$	**5** $2x^2 + 3x = 0$
2 $x^2 - 0,4 = 0$	**6** $x^2 - 10x + 24 = 0$
3 $x^2 - 11x = 0$	**7** $4x^2 - 5x - 6 = 0$
4 $6x^2 - 150 = 0$	**8** $x^2 - 10x + 9 = 0$

9 $5x^2 - 42x + 72 = 0$

10—Два сумежні городи такі, що довжина другого на 1 м. більша, а ширина на 1 м. менша від першого. Поверхня другого 360 кв. м. Найти розміри першого, знаючи, що він квадратовий. (Відп.—19).

11—Я забув, скільки було учасників екскурсії, але згадую, що їх було настільки більше за 100, наскільки карбованців менше від 100 припало на кожного всіх витрат. Уся екскурсія коштувала 9831 карб. Скільки було учасників? (Відп.—113).

12—Протипрямка прямокутнього трикутника в 29 разів більша за менший катет, а квадрат другого катету дорівнює 190 кв. м. Найти менший катет. (Скористайтеся з теореми Пітагора). (Відп. не буде точна).

13—Сума катетів прямокутнього трикутника є 53 м., а поверхня його 306 кв. м. Які його катети? (Відп.—36 та 17).

14—Поверхня садка-скверу 384 кв. м. Сквер прямокутній, його довжина на 8 м. більша за ширину. Яка його довжина та ширина? (Відп.—24 та 16).

15—На 200 карб. купили декілька метрів сукна. Коли через деякий час сукно подорогшало, то на ту саме суму можна було-б купити сукна на 5 м. менше, бо за кожний метр довелося платити на 2 карб. більше, ніж першого разу. Скільки купили сукна першого разу? (Відп.—25).

16—Чисельник першого дробу є 1, а чисельник другого 3, знаменик першого на 5 менше від знаменика другого. Якби додати один дріб до другого, мали-б $1/2$. Які це дроби? (Відп.—$1/5$ та $3/10$).

17—Одне з невідомих чисел більше від другого на 2, а добуток цих чисел 63. Знайти ці числа, якщо вони обидва додатні. (Відп.—7 та 9).

18—Для перевозу 1600 червоноармійців було замовлено декілька вагонів. Але тому, що залізниця дала на 8 вагонів менше, ніж сподівалися, довелося збільшити у кожному вагоні кількість червоноармійців на 10. Поскільки червоноармійців думали поміщати в кожний вагон. (Відп.—40).

19—Артіль-комуна заробила 600 карб. і хотіла поділити ці гроші нарівно на кожного робітника. Але в час поділу згадали, що треба виділити ще на 2 відсутніх товаришів, що виїхали у справі артіли. Тоді на кожного члена припало на 10 карб. менше, ніж гадали спочатку. Скільки було всіх членів артіли? (Відп.—12).

20—Два селянина продали свій овес кожний за 48 карб. У другого було вівса на 4 п. більше, а за те він продавав пуд на 5 коп. дешевше від першого. Скільки пудів було в кожного? (Відп.—60 та 64).

РОЗДІЛ 26

Квадратові рівняння

Продовження

Графічний спосіб розвязування

§ 1. Рівнання першого степеня з двома невідомими ми вміємо розвязувати й аналітичним і графічним способом (розділ 21). Можна й квадратові рівнання розвязувати графічно.

Ми вкажемо тут такі приклади. Нехай маємо квадратове рівнання.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Перепишемо це рівнання так $x^2 = 2x + 3$ і спочатку аналітично вишукаємо його розвязки. У даному разі матимемо $x_1 = 3_1$ а $x_2 = -1$. Утворюємо далі сами 2 нові функції, прирівнюючи y-ові обидва боки рівнання $x^2 = 2x + 3$. Матимемо

$$y = x^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (2) \quad \text{та} \quad y = 2x + 3 \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Функція (2) дає нам параболу (§ 1, розд. 25), а функція (3) просту (§ 2, розд. 20). Обидві ці лінії нарисуємо на одному малюнкові цілком незалежно одну від одної. Якщо замість x y (2) підстановимо перший корінь $x = 3$ квадр. рівнання, матимемо $y = 9$; якщо це саме числове значіння $x_1 = 3$ підстановимо у рівнання (3), матимемо й тут $y = 9$. Отже, ця точка, що має координати (3,9), належить одночасно і параболі і простій. Також само, підстановлюючи вартість $x_2 = -1$ у обидва рівнання (2) та (3), матимемо з них—з (2) $y = 1$ й з (3) теж $y = 1$. Отже й точка з координатами $(-1,1)$ також належить одночасно і параболі і простій.

Таким чином, парабола та проста, перетинаючись, дають нам змогу вишукати розвязки квадратового рівнання x_1 та x_2 й обидві ці розвязки виходять абсцисами точок перетину параболи та простої.

Розгляньмо ще приклад. Нехай маємо кв. рівнання.

$$20x^2 - 19x + 3 = 0;$$

переписуємо це рівнання, поділяючи його всі члени на сучинник при x^2. Матимемо $x^2 - \frac{19}{20} x + \frac{3}{20} = 0$, а якщо рисуєм на міліметровому папері, краще обернути в десяткові дроби, і буде

$$x^2 - 0{,}95\,x + 0{,}15 = 0.$$

Переносячи всі члени, опріч x^2 на правий бік, набуваємо рівнання

$$x^2 = 0{,}95x - 0{,}15.$$

Тут утворюємо дві нові функції $y = x^2$ . . . . (II) та $y = 0{,}95x - 0{,}15$ . . . . . (III).

Рисуємо графики функцій (II) та (III); дістанемо параболу та просту, а точки їх перетину й дадуть розвязку даного рівнання.

Отже, ввесь спосіб графічного розвязування такий. Дане рівнання приводимо до вигляду, щоб сучинник члена з x^2 був одиниця. Розбиваємо кв. рівнання на 2 частини, одна з них містить у собі x^2, а друга всі инші члени. Порівнюємо кожну частину рівнання до y й утворюємо, таким чином, 2 функції: квадратову та функцію першого степеня. Квадратова функція завжди матиме рівнання $y = x^2$, а проста має різні вигляди. Рисуємо параболу та просту на підставі даних рівнань. Абсциси точок перетину простої та параболи й дають нам корні (розвязки) квадратового рівнання.

Через те, що парабола має в усіх випадках однакові рівнання, її не доводиться рисувати що-разу знов. Звичайно, користуються в цих випадках з готових парабол; їх роблять або з прозорого паперу або з целулоїду. Рисувати в такому разі доводиться саму просту, а на неї прикладати прозору параболу так, щоб вершок параболи був саме в початку координат. Слід тільки подбати про те, щоб і параболу й просту було нарисовано в однаковому маштабі.

Можуть трапитися тут такі випадки, що їх ми вкажемо на прикладах.

1 — Розвяжіть квадратове рівнання $x^2 - 10x + 25 = 0$. Розвязуючи, ви матимете одну точку перетину (5,25), другої точки перетину не буде, бо проста дотикається до параболи. (Проробіть це).

Примітка: У цьому випадкові, щоб уникнути великого малюнку, за маштаб краще брати 1 мм., цеб-то кожну одиницю на осях дорівнювати 1 мм.

2 — Розвяжіть квадратове рівнання $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Нарисувавши параболу та просту відповідно до даного рівнання, не матимемо жадної точки перетину. Отже рівнання не матиме розвязок. Ми дослідимо умови, коли, це буває, у дальніших §§.

Залежність між розвязками та сучинниками кв. рівнання

§ 2. Розвяжімо квадратове рівнання $x^2 - 8x + 12 = 0$. Його розвязки $x_1 = 6$; $x_2 = 2$ додамо $x_1 + x_2 = 8$ а після множення $x_1 \cdot x_2 = 12$.

Розвяжіть так само рівнання $x^2 - 6x + 5 = 0$; $x^2 - 7x - 30 = 0$ додайте та перемножіть поміж собою розвязки в кожному із цих рівнань та подивіться на коефіцієнти даних рівнань.

Ми помічаємо, що сума розвязок квадратового рівнання дорівнює коефіцієнтові невідомого члена з оберненим (протилежним) знаком, а добуток цих розвязок дорівнює вільному членові з його саме знаком; все це за умовою, що коефіцієнт члена x^2 є 1.

Таке явище не є випадковість, а це є необхідна властивість кв. рівнання й ми можемо переконатися в цьому таким чином.

Маючи квадратове рівнання $x^2 + px + q = 0$ ми маємо його розвязки, якщо їх пишемо кожну окремо $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Додаючи ці розвязки одну до одної, маємо

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$$

бо ми дописуємо другу розвязку до першої, не міняючи знаків.

Помітивши-ж, що $+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ та $-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$. мають цілком однакові величини, а знаки їх протилежні, ми мусимо їх відкинути (знищити), а члени $-\frac{p}{2}$ та $-\frac{p}{2}$ злучити, бо вони подібні; отже маємо:

$$x_1 + x_2 = -p$$

А це й переконує нас, що незалежно від числових вартостей x_1 та x_2 їхня сума дорівнює сучинникові члена з x з протилежним знаком.

Перемножімо тепер x_1 та x_2 маємо

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$$

Користуємося тутз формули; добуток суми (в перших дужках) та різниці (в других дужках) членів $-\frac{p}{2}$ та $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ дорівнює різниці квадратів цих саме членів. Маємо

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2$$

Підносячи $\left(-\frac{p}{2}\right)^2$ маємо $\frac{p^2}{4}$; а підносячи корінь квадратовий до квадрату, дістанемо підкорінне число $\frac{p^2}{4} - q$

Віднімаючи-ж після піднесення, матимемо (помінявши знаки на протилежні) $x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q$; $x_1 x_2 = q$; що упевнює нас, що й добуток розвязків не випадково дорівнює вільному членові.

Користуючися з цієї залежности між коефіцієнтами кв. рівнання та його розвязками, можна скласти рівнання, знаючи його розвязки. Напр., пошукаємо, яке рівнання має розвязки 7 та -4, або: дано $x_1 = +7$, $x_2 = -4$; яке це рівнання квадратове, що має такі розвязки?

Розвязуємо задачу таким чином $x_1 + x_2 = +3$; отже $p = -3$. $x_1 \cdot x_2 = -28$; отже $q = -28$, а тому квадратове рівнання буде

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

Якби в останньому квадратовому рівнанні були дробові коефіцієнти, довелося-б ще позбавитися від дробів.

Можна ще далі взнати заздалегідь, не розвязуючи кв. рівнання, які знаки матимуть його розвязки. Для цього, насамперед, звертаємо увагу до вільного члена. Якщо вільний член додатній, обидві розвязки матимуть однакові знаки (§ 3, розд. 17), а якщо він від'ємний—різні.

Знаючи, опріч того про знак суми розвязок (він є протилежний знакові *p*, сучинника члена з *x* у першому степені), ми далі міркуємо, які це саме знаки розвязок. Докладно це видно з таблиці.

Знак q або добутка $x_1 x_2$	знак p	Знак суми $x_1 + x_2$	Висновок про знаки розвязок кв. рівнання.
$+$	$+$	$-$	Обидва знаки від'ємні
$+$	$-$	$+$	» » додатні
$-$	$+$	$-$	Одна розвязка (більша) від'ємна, друга (менша) додатня.
$-$	$-$	$+$	Більша розвязка додатня, менша від'ємна.

Нарешті, можна кожний тричлен, що складається з квадратового члена, з члена першого степеня якоїсь літери та з вільного члена розкласти на чинники. Вкажемо це на таких прикладах:

1) Дано тричлен $m^2 - 10m + 9$. Розкласти його на чинники. Пирівнюємо тричлен до 0 й розвязуємо квадратове рівнання. Матимемо розвязки $m_1 = 9$; $m_2 = 1$. Знаючи, що $10 = m_1 + m_2$, а $9 = m_1 m_2$, зміняємо 10 на $9 + 1$, а 9 на 9.1 й переписуємо даний тричлен $m^2 - (9+1)m + 9.1$. Перемножаємо не додаючи $m^2 - 9m - m + 9.1$. Виносимо за дужки з двох перших членів m, а з двох останніх -1 (инакше, два останніх члени замикаємо в дужки й ставимо перед ними $-$): $m(m-9) - (m-9)$. Маємо тепер двочлена, що в кожному з його членів є однаковий чинник $m - 9$. Цей чинник беремо поза дужки й маємо остаточно $(m-9)(m-1)$.

2) $35k^2 - 9k - 2$ розкласти на чинники.

Щоб дістати перший випадок, виносимо 35 за дужки. Маємо $35\left(k^2 - \frac{9}{35}k - \frac{2}{35}\right)$; розкладаємо $k^2 - \frac{9}{35}k - \frac{2}{35}$, прирівнюючи його до 0 й находячи k_1 та k_2. Буде тут $k_1 = \frac{2}{5}$; $k_2 = -\frac{1}{7}$. Далі, як і вище $k^2 - \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{7}\right) k - \frac{2}{5}\,\frac{1}{7}$ $\left[k_1 + k_2 = \frac{2}{5} - \frac{1}{7}\right.$ бо k від'ємне$\left.\right]$

$$k^2 - \frac{2}{5}k + \frac{1}{7}k - \frac{2}{5}\,\frac{1}{7} = k\left[k - \frac{2}{5}\right] + \frac{1}{7}\left[k - \frac{2}{5}\right] =$$

$$= \left(k - \frac{2}{5}\right)\left(k + \frac{1}{7}\right)$$

Остаточно-ж, згадавши про чинник 35, маємо

$$35k^2 - 9k - 2 = 35\left(k - \frac{2}{5}\right)\left(k + \frac{1}{7}\right)$$

Найнеобхідніше практично це не взнавати, які знаки матимуть корені розвязки квадратового рівнання, а взнавати, чи даватимуть ці рівнання нам дійсні чи уявні розвязки.

Коли ми, наприклад, у практичній задачі приходимо до рівнання $2x^2 + 5x + 6 = 0$ і, розвязуючи його, маємо $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.2.6}}{4}$, або $x = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{4}$, то це рівнання нам указує, що задача практично неможлива. Під коренем квадратовим ми ма мо тут -23; $\sqrt{-23}$ це є число уявне, а від таких чисел ми зреклися. Вони мають своє значіння, але в практичних випадках ми з них не скористуємося. От через що нам і треба зарані взнати, чи слід розвязувати квадратове рівнання, чи ні, або инакше, чи дійсні чи уявні розвязки має наше квадратове рівнання. Дійсність та уявність розвязок залежить, як бачимо з цього та й з усіх попередніх рівнань, виключно від того, чи буде під коренем квадратовим число додатнє чи від'ємне. Під коренем квадратовим ми маємо в найзагальнішому вигляді квадратового рівнання такий вираз

$$b^2 - 4ac.$$

Якщо цей вираз додатній, то $\sqrt{b^2 - 4ac}$ буде число, або раціональне, або іраціональне, але в усякому разі дійсне. Якщо-ж цей вираз від'ємний, то $\sqrt{b^2 - 4ac}$ буде давати число уявне.

Таким чином, дійсність або уявність кореня квадратового, а тому й усієї розвязки квадратового рівнання залежить від виразу $b^2 - 4ac$. Цей вираз має назву д и с к р и м і н а н т квадратового рівнання, цеб-то вираз, що розвязує питання, чи будуть розвязки дійсні чи уявні,

Вправи — Які розвязки мають дані квадратові рівнання (вкажіть це, не розвязуючи самих рівнань)

1 $x^2 - 4x + 4 = 0$. **2** $2x^2 + 5x - 12 = 0$.

3 $3x^2 + 2x + 8 = 0$

Особливо тут доведеться звернути увагу на випадок, коли $b^2 - 4ac = 0$. У цьому разі обидві формули для розвязування квадратового рівняння дають нам $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ однакове число $x_1 = -\frac{b}{2a}$ $x_2 = -\frac{b}{2a}$

Вправи до розділу 26

Розвяжіть графічно квадратові рівняння

1 $x^2 + 2x - 8 = 0$.
3 $x^2 - 5x - 14 = 0$.
2 $16x^2 - 16x + 3 = 0$.
4 $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Не розвязуючи квадр. рівнань, скажіть, що зумієте, про знаки їх розвязок та про те, чи будуть розвязки дійсні, чи уявні.

5 $2x^2 - 3x - 3 = 0$.
7 $6x^2 - x - 9 = 0$.
6 $x^2 - 5x + 1 = 0$.
8 $3x^2 - 6x + 19 = 0$.

9— Маленькі 2 купки дорослих та підлітків зібрали по 24 карб. кожна купка, на будову радіо. Кожний дорослий давав на це на 1 карб. більше за підлітка, всіх людей було 14. Скільки було дорослих та скільки підлітків? (Відп.—6 та 8).

10— Два селянина вийшли пішки одночасно з свого села до міста, що відстоїть від села на 20 км. Перший ішов швидше за другого і що-години проходив він, на 1 км. більше, ніж другий, а тому й прийшов до міста 1 год. раніш від другого. По скільки кілометрів проходив кожний що-години? (Відп.—5 та 4).

11— Кооператив, купуючи сукно, зробив накидку на ту ціну, що йому коштував метр, стільки %%, скільки карбованців коштував метр кооперативові, а тому він продає кожний метр по 13 карб. 44 коп. Яка собівартість 1 метру сукна? (Відп.—12).

12— Висота прямокутньої кімнати на 1 м. менша від її ширини, а ширина на 1 м. менша від довжини. Стелю та дві сумежні стінки цієї кімнати пофарбували. Довелося фарбувати всього 107 кв. м. Яка висота, ширина та довжина кімнати? (Відп.—5, 6, 7).

13— В нашому радгоспі 2 молотарки. Вони спочатку працювали разом по 8 год. що-дня Коли-ж довелося ремонтувати першу, робила сама друга; коли наладили першу, треба було ремонтувати другу й робила сама перша. Виявилось, що ту-ж саму кількість хліба, що раніш вони разом обидві обмолочували за день, друга молотарка обмолочує на 12 год. швидше від першої. Скільки годин потрібно кожній з них окремо, щоб вона сама зробила ту норму, що роблять обидві за день? (Відп.—12 та 24).

14— Два потяги почтовий з Київа та пасажирний з Ромодану— вийшли одночасно назустріч один одному й зустрілися через 3 години. Далі пішов кожний потяг своїм напрямком і почтовий приїхав до Ромодану на $2^1/_2$ години раніше, ніж пасажирний до Київа. За скільки годин кожний з них проходив цей шлях? (Відп.—5 та $7^1/_2$).

15— Міськрада веде пересправи на приставку необхідного для електристанції приладдя з трьома заводами. Перший завод береться виконати все замовлення на 5 місяців пізніше, ніж другий, та на 9 місяців пізніше, ніж третій. Перші два разом згоджуються виконати це замовлення в той саме час, як і третій. За скільки місяців кожний завод окремо може виконати це замовлення? (Відп.—15, 10, 6).

16— Два села обміняли один одному свої сади. Сад у першому селі був квадратовий, а сад у другому селі прямокутній. Обводи садів дорівнювали один одному, але довжина прямокутнього саду була більша за довжину квадратового на 16 м. Після перевірки вийшло, що поверхні садів відносяться, як $\frac{224}{225}$. Найти довжину кожного саду. (Відп.—240 та 256).

17— Два робітники робили однаковий час, але одержували не однакову поденну платню. Перший прогуляв за цей час 1 день і заробив 60 карб., а другий прогуляв 7 день і заробив 54 карб. Иншого разу перший прогуляв 7 день з того-ж саме строку, як і першого разу, а другий прогуляв лише 1 день. Другий заробив на 27 карб. більше від першого. Який був реченець роботи (першого або другого разу—це байдуже)? (Відп.—25 день).

18— Декілька сумежних житлокоопів вирішили зробити для своїх членів клуб і призначили на це що-року 240 карб., поділяючи витрати на кожного нарівно. Але 3 житлокоопи не згодились на це. Всі инші зробили цей клуб, хоча кожному з них довелося що-року вносити на 4 карб. більше, ніж гадали спочатку. Скільки житлокоопів згодились на клуб? (Відп.—12).

19— На купівлю книжок для книгозбірень в нашому районі відпускали 600 карб. і ці гроші розподілялося між усіма книгозбірнями нарівно. Цього року збільшилось у районі число книгозбірень на 2, а відпустили ті саме 600 карб. Через це на кожну припало на 10 карб. менше, ніж минулого року. Скільки книгозбірень зараз у нашому районі? (Відп. 12).

20— Гуртовий покупець купив на 40 карб. кавунів. Підчас перевозу 50 кавунів було розбито, але всі ці кавуни було продано з прибутком 5 карб., тому, що кожний кавун продавали на 2 коп. дорогше від собівартости. Скільки кавунів куплено? (Відп.—500).

21— Фізика вчить, що річ, коли її пустити прямовисно вниз, падає, проходячи шлях S за формулою $S = gt^2$, де $g = 9{,}8$ м. прискорення сили тяготіння, а t визначає час у секундах. Скільки часу падатиме каменюка, що її кинуто у криницю 80 м. завглибшки? (Відп.—Менше як 3).

22— Камінь кинуто на дно криниці (див. поперед. задачу про закон падання), а через 3,5 секунди після цього почули, як він упав у воду. Фізика вказує, що звук проходить 333 м. за секунду. Найти глибину криниці. (Наближено).

23— Заводоуправління, маючи вільні гроші 10.000 карб., покладає їх у банк. Через рік заводоуправління бере з прибутку тільки 200 карб., а останні гроші на тих саме умовах залишає ще на рік. Ще через рік його капітал разом з відсотками становив 10608 карб. По скільки $^0/_0{}^0/_0$ платив банк? (Відп.—4).

24— Робітник погодився поладнати дорогу 2 кілометри завдовжки за певний час. Але через три тижні після початку роботи він захворів і не робив три тижні. Видужавши, він узяв собі помічника, щоб встигнути закінчити вчасно роботу. З помічником разом вони ремонтували за тиждень на 150 м. більше, ніж перший робітник сам. Роботу закінчили вчасно. На скільки тижнів роботи погодився робітник? (Відп.—10).

25— Райорганізатор їде з одного міста до другого, куди він мусить приїхати о 3-й год. Він їде човном. Але через 2 години човен мусив зупинитися й простояти цілу годину. Щоби вчасно приїхати, довелося закликати на допомогу першому гребцеві ще другого, через що швідкість човна збільшилась на 3 км. за годину й райорганізатор усю віддаль—30 км.—проїхав навіть швидше, ніж гадав, бо вже о пів на третю був у призначеному селі. Коли він виїхав зранку? (Відп.—О 9 г.).

26— Якби потяг збільшив свою хуткість на 9 км. за годину, він виграв-би на 180 км. 40 хвилин. Яка швидкість цього потяга? (Відп.—45 км.).

27— Крамар купив товар і продав його з прибутком 120 карб. На всі виручені гроші він знов купив товар і після продажу має 180 карб. прибутку. Першого разу він мав на 5% прибутку менше, ніж другого. За скільки карбованців куплено було товар першого разу? (Відп.—600 або 480).

28— Досвідна станція садовила 673 молодих дерев по поверхні двох квадратових дільниць; на боці одного квадрату посадовили на 6 дерев більше, ніж на боці другого, а 7 дерев ще лишилось без посадки. Скільки дерев посадили на кожній із дільниць. (Відп.— 225 та 441).

29— 4500 карб. позичено двом організаціям кооперативу та артілі на різних умовах (різні $^0/_0{}^0/_0$). Річний прибуток з кожної частини однаковий. Якби кооператив виплачував такі відсотки, як артіль, він платив-би за рік 80 карб., а якби артіль виплачувала ті %%, що кооператив, вона платила-б що-року 120 карб. По скільки %% позичає гроші кооператив й по скільки артіль? (Відп.— 5 та 4).

30— З формули $S = gt^2 + vt + a$ знайти t, коли відомо S, g, v та a.

РОЗДІЛ 27

Зрізана піраміда. Зрізаний конус

Зрізана піраміда та її поверхня

§ 1. Ми вже знаємо, що зрізана піраміда це є частина піраміди, що є між основою та площею, рівнобіжною до основи. Так основа, як і ця площа, дають многокутники, що подібні один одному (§ 1, Розд. 24). Обидві ці многокутники мають назву о с н о в и піраміди (одна основа спідня, друга верхня).

Щоб найти поверхню піраміди зрізаної, досить обчислити поверхню кожної стінки її—а її кожна стінка є трапез—та поверхні верхньої та спідньої основи. Додаючи ці поверхні одну до одної послідовно, матимемо повну поверхню піраміди. Якщо нам доведеться обчислювати тільки поверхню бічну, так звану, бічницю, ми додаємо одну до одної лише поверхні стінок (без основ). Тут доречи нагадати, що поверхні многокутників основ обчислювати можна або за відомими формулами або розбиттям на трикутники, а поверхні трапезів обчислюємо просто з формул.

У тому випадкові, коли піраміда є правильна, всі її бічні стінки є рівнораменні трапези й тому, якщо довжину одного боку нижчої основи трапезу означимо a, довжину боку верхньої основи b, а апотему (цеб-то висоту трапезу) l, маємо, що поверхня трапезу є $\frac{a+b}{2}\cdot l$. Називаючи число боків узагалі n, дістанемо для бічниці означаючи її літерою P, формулу $P=\frac{a+b}{2}ln$ або $P=\frac{an+bn}{2}\cdot l$.

Тому, що an є обвід усієї нижчої основи, а bn обвід верхньої, то кажуть, що б і ч н и ц я з р і з а н о ї п і р а м і д и д о р і в н ю є д о б у т к о в і п і в с у м и о б в о д і в о с н о в т а а п о т е м и.

Формула $P=\frac{an+bn}{2}\cdot l$.

Поверхня зрізаного конусу

§ 2. Тому, що ця форма дозволяє нам обчислювати бічницю зрізаної піраміди незалежно від кількости боків у її основі, ми можемо прикласти її й у тому разі, коли матимемо зрізаного конуса. Тоді обвід спідньої основи назвемо c — обвід кола, обвід верхньої основи c_1 і формула матиме вигляд $P=\frac{c+c_1}{2}\cdot l$, де l визначає твірну конусу. Якщо бажаємо обводи замінити формулами $2\pi r$, то, називаючи один з лучів двох кол основ R, а другий — r, матимемо $P=\frac{2\pi R+2\pi r}{2}\cdot l$. Цю формулу легко спростити, виносячи 2π поза дужки та скорочуючи 2. Тоді

$$P=\pi(R+r)l.$$

Так само, визначаючи обвід кола через πd й називаючи поперечника одного кола D, а другого d маємо

$$P = \frac{\pi(D+d)}{2} . l$$

Коли користуватись з якої формули, вказує практика.

Вправа 1—Де ви бачили зрізану піраміду та зрізаний конус?

2—Підставка має форму правильної зрізаної піраміди з трикутником у основі. Бік більшої основи 5 м. завдовжки, а бік меншої 3 м. Висота кожного боку 50 см. Скільки кв. метрів заліза потрібно на оббивку з боків цієї підставки?

3—Твірна конусу зрізаного 40 см. Поперечина верхньої основи його 4 м., а обвід спідньої основи 20 м. Найти його бічницю та повну поверхню.

Об'єм зрізаної піраміди

§ 3. Ми дамо формулу, що з її допомогою можна обчислити об'єм зрізаної піраміди. Означімо поверхню спідньої більшої основи P, поверхню вищої меншої основи p, висоту зрізаної піраміди h, а об'єм V, тоді

$$V = \frac{h}{3}(P + \sqrt{Pp} + p).$$

Для охочих ми подаємо тут пояснення, чому саме походить така формула. Залишаючи всі попередні означення, уявімо собі, що ми продовжили всі бічні поверхні зрізаної піраміди доти, поки вони створили повну піраміду. Означімо висоту її H, означімо далі висоту маленької піраміди, що її саме одрізуємо від цілої, щоб піраміда стала зрізана, літерою h_1. Так само й об'єм повної великої піраміди нехай V_1 малої повної V_2. Тоді наш об'єм $V = V_1 - V_2$; $V_1 = \frac{HP}{3}$; $V_2 = \frac{h_1 p}{3}$. Отже $V = \frac{HP}{3} - \frac{h_1 p}{3}$. Ми знаємо (§ 1, Розд. 24), що $\frac{P}{p} = \frac{H^2}{h_1^2}$, а звідци $P = \frac{H^2 p}{h_1^2}$ й тоді $V = \frac{H^3 p}{3h_1^2} - \frac{h_1 p}{3}$. Приводячи до спільного знаменика, маємо $V = \frac{H^3 p - h^3 p}{3h_1^2}$, або $V = \frac{p}{3h_1^2}(H^3 - h_1^3)$.

Скористуємося далі з формули $a^3 - b^3 + (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, що дуже легко перевірити самим множенням.

За цією формулою $H^3 - h_1^3 = (H - h_1)(H^2 + Hh_1 + h_1^2)$ й після цього попередня формула набуває вигляду

$$V = \frac{p}{3h_1^2}(H - h_1)(H^2 + Hh_1 + h_1^2).$$

Заміняємо тут $H - h_1$ через h — висоту зрізаної піраміди — й поділяємо на $h_1{}^2$ останній чинник, тоді $V = \frac{ph}{3}\left(\frac{H^2}{h_1{}^2} + \frac{H}{h_1} + 1\right)$. А з рівности $\frac{H^2}{h_1{}^2} = \frac{P}{p}$ (§ 1, Розд. 24) виводимо $\frac{H}{h_1} = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{p}}$ й тому $V = \frac{ph}{3}\left(\frac{P}{p} + \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{p}} + 1\right)$.

Скористуємося з того, що множення не залежить від порядку й перемножмо вираз у дужках чинником p. Маємо $\frac{P}{p} \cdot p = P$; $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{p}} \cdot p = \frac{\sqrt{Pp^2}}{\sqrt{p}} = \sqrt{Pp}$, бо пишучи замість чинника p під знаком кв. кореня p^2, ми не порушуємо рівности. Збираючи всі ці перетворення, матимемо $V = \frac{h}{3}(P + \sqrt{Pp} + p)$.

Є ще багато способів упевнитися в справедливості цієї формули, але вони всі не легші від даного.

Об'єм зрізаного конусу

§ 4. Знаючи формулу для обчислення об'єму зрізаної піраміди, ми дуже легко виведемо формулу й для вичислення об'єму зрізаного конусу. Уявімо собі, що число боків у основі зрізаної правильної піраміди починає без кінця збільшуватися; від цього формула для вичислення її об'єму не міняє свого вигляду, але форма зрізаної піраміди змінюється. Якщо наша піраміда правильна й число боків її основи ввесь час збільшується, а довжина кожного боку ввесь час зменшується і цей процес продовжується, як кажуть математики, доти, поки число боків в основі стане безкінечно великим, а кожний бік безкінечно малим, то нарешті наша піраміда обертається на конус (порівн. § 2). Через це ми просто заміняємо у формулі $V = \frac{h}{3}(P + \sqrt{Pp} + p)$ тільки поверхні основ піраміди на поверхні основ конусу.

Якщо назвемо луч більшої основи R, а поперечину D та луч меншої основи r, а поперечину її d, то V набуває зручнішої форми $V = \frac{h}{3}(\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \pi r^2} + \pi r^2)$. Але $\sqrt{\pi R^2 \pi r^2} = \sqrt{\pi^2 R^2 r^2} = \pi R r$, як це бачимо з самого означення кореня квадратового, а тому $V = \frac{h}{3}(\pi R^2 + \pi R r + \pi r^2)$, або виносячи π поза дужки, маємо остаточно

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R r + r^2).$$

Иноді вживають ще формулу $V = \frac{\pi h}{12}(D^2 + D d + d^2)$. Цю формулу можна вивести таким саме способом, як і першу.

Вправа 1—Чи є поверхня зрізаної піраміди, функція від її основ? а від її апотеми? а від її висоти?

2—Функція яких та скількох величин є об'єм зрізаної піраміди або зрізаного конусу?

3—Скільки важить підставка під машиною, якщо підставка має форму правильної чотирикутньої піраміди з боком спідньої основи 2 м., а верхньої 1,5 м., висота самої підставки 80 см., а питома вага матеріялу, з якого її зроблено (чавун) 7,8?

4—Найдіть об'єм зрізаного конусу, що в нього поперечина більшої основи 4 см., меншої 1,5 см., висота 5 см. Якщо це буде чарка, скільки грамів води міститься в ній?

Вправи до розділу 27

1—Треба зробити зрізану піраміду, щоб поверхні її основ були 9 кв. см. та 16 кв. см., а об'єм 74 куб. см. Яка висота цієї піраміди?

2—Правильна трикутня зрізана піраміда має бік більшої основи 4 м., а меншої 1 м., руб (рамено трапезу) цієї піраміди є 2,5 м. Який її об'єм?

3—Щоб знайти об'єм підставки під турбіну, виміряли її нижчу основу, всі боки її були рівні й кожний по 3 м. Боки верхньої основи були також усі рівні, а саме по 1 м. Перемірявши руби найшли, що й вони всі рівні один одному й кожний по 2 м. Який об'єм цієї підставки? (Відп. Біля 8 куб. м.). (Підставка—трикутня піраміда).

4—Підставка має форму правильної чотирикутньої зрізаної піраміди з боками основи спідньої по **4** м. та верхньої по $2^1/_2$ м. Коли фарбували по боках цю підставку, заплатили за 13 кв. м. Який об'єм цієї підставки?

5—Про підставку ми знаємо, що вона є чотирикутня[1]) зрізана піраміда, а її об'єм 162,5 куб. дм., висота 6 дм., а бік більшої основи 7,5 дм. Яка її бічниця? (Відп.—130 кв. дм.).

6—Треба зробити затичку, що має форму зрізаного конусу, щоб луч більшої основи був 5 см., луч меншої 3 см., висота теж 3 см. Який об'єм цієї затички? (Відпов.—153,9 куб. см.).

7—У зрізаному конусові, де радіус (луч) меншої основи 24 см., а твірна 35 см. просвердлили, через осередки обох основ, дірку з поперечиною 5 см. Кут між напрамком твірної та свердла, коли робили дірку, був 22^0. Яка повна поверхня та об'єм цієї частини машини?

8—Бронзовий вкладач складається з трьох окремих частин: спочатку це є зрізаний конус з поперечинами 30 см. та 40 см. і висотою 50 см.; далі йде призма шостистінна правильна з віддаллю між протилежними боками 50 см. та висотою 12 см. Призму притулено до більшої основи конусу. З другого боку призми є циліндер з поперечиною 40 см. та висотою 20 см. Нарисуйте цей вкладач та найдіть, скільки він важить, якщо питома вага бронзи 8,6.

[1]) Правильна.

РОЗДІЛ 28

Куля, її поверхня та об'єм

Утворення кулі. Елементи кулі

§ 1. З обертанням півкола A m B (рис. 139) навколо діяметру AB до повного обігу виникає форма кулі, причому півкола AmB опише поверхню кулі, а діяметр півкулі AB з'єднує дві точки на поверхні кулі A і B і пройде через точку O — осередок або центр кулі. Лінія AB наз. д і я м е т р кулі.

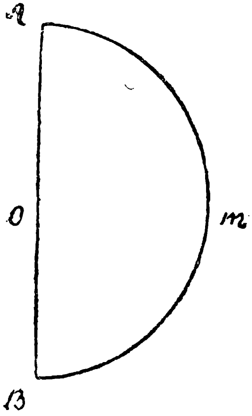


Рис. 139.

Через те, що всі точки півкола будуть на однаковій віддалі від центру, то й усі точки кулі так само будуть на однаковій віддалі від його центру. Тому куля має таке означення:

Куля є таке тіло (така форма), що всі точки його поверхні є на однаковій віддалі від центру.

Лінія, що з'єднує центр кулі з якоюсь точкою її поверхні, наз. лучем або р а д і у с о м кулі.

В кулі, так само, як і в колі діяметр дорівнює двом лучам і так само, як і в колі, можна провести в ній яку завгодно кількість лучів та діяметрів. Коли відріжемо якусь частину кулі, то переріз так само має форму кола (рис. 140). Розмір цього кола буде збільшуватись з наближенням перерізу до центру і, навпаки, буде зменшуватись в міру збільшення віддалі його від центру. Якщо переріжемо кулю так, що переріз пройде через центр, то матимемо коло, яке зветься великим колом, (чому?), а коли почне цей переріз віддалятися від центру, то розмір його зменшуватиметься аж поки з віддаленням від центру, рівним лучеві, не зникне зовсім (обернеться в точку), тоді площа перерізу перетвориться в д о т и ч н у п л о щ у. Тому кажемо, що віддаль великого кола від центру дорівнює 0, а віддаль дотичної площі від центру дорівнює лучеві кулі.

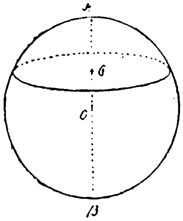


Рис. 140.

Частина кулі, що міститься між двома рівнобіжними перерізами, наз. к у л и с т о ю в е р с т в о ю (рис. 141). Паралельні кола, що утворюють кулисту верству, наз. о с н о в а м и в е р с т в и; обводи цих кол наз. п а р а л е л я м и; віддаль між цими колами (BC) наз. в и с о т о ю в е р с т в и і зрештою, частина поверхні кулі, обмежена паралелями, наз. к у л и с т и м п о я с о м.

На нашому рисункові покажіть кулисту верству, кулистий пояс, висоту верстви, паралелі.

Якщо розрізати кулю площею надвоє (можна нерівними частинами) то куля розпадеться на дві частини, що наз. кулистими відрізками (або сегментами). Коло, що виникає з такого перерізу, зветься основою відрізків, а відтинки діяметру AC й AB звуться висотами відрізків. Частина поверхні кулі, що належить даному відрізкові, наз. відрізковою (або сегментною) поверхнею. Як бачимо, відрізок є окремий випадок кулистої верстви, коли другий (менший) її переріз починає віддалятись від першого і дійде до поверхні кулі; тоді ця кулиста верства і стане кулистим відрізком. Якщо вирізати частину кулі так, як зазначено на рисункові 142, то матимемо частину кулі, що зветься кулистим вирізком (або сектором). (Дайте означення кулистому вирізку).

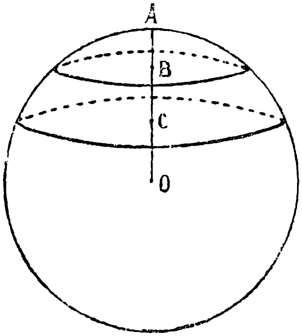


Рис. 141.

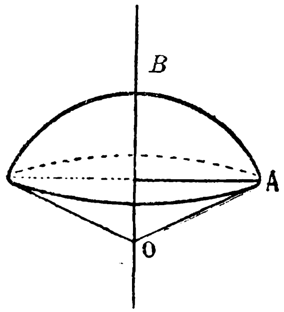


Рис. 142.

Поверхня кулі. § 2. Якщо опишемо навколо кулі циліндра, який-би торкався кулі вздовж великого кола та висота циліндру була-б рівна діяметрові кулі (тоб-то циліндр буде торкатись кулі і своїми основами – верхньою та нижньою), то можна довести, що бічна поверхня цього циліндру дорівнює поверхні кулі (рис. 143). Тому, для обчислення поверхні кулі, досить обчислити бічну поверхню цього циліндру. Діяметр основи цього циліндру рівний діяметрові кулі; означімо його через D. Висота цього циліндру, так само, рівна діяметрові кулі, значить також D. Пригадавши, що бічна поверхні циліндру дорівнює довжині кола основи, помноженій висотою циліндру, маємо:

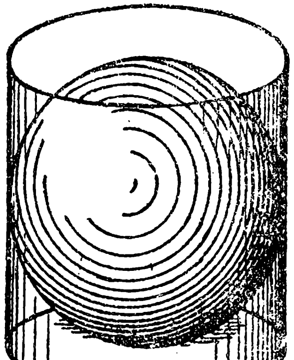


Рис. 143.

Поверхня кулі = поверхні описаного циліндру $= \pi . D . D = \pi D^2$, або замінивши D через 2R, та означивши поверхню кулі через S, дістаємо

$$S = \pi D^2 = \pi (2R)^2 = 4\pi R^2.$$

Але тому що R є радіус кулі, то πR^2 є поверхня кола, що проходить через центр кулі, тоб-то поверхня великого кола. Отже можна сказати, що поверхня кулі дорівнює добуткові з чотирьох та поверхні великого кола.

Або ще инакше *поверхня кулі в 4 рази більша за поверхню кола з однаковим лучем.*

Приклад—Знайти поверхню кулі, коли діяметр $= 6$ см.

Розвязування: $S = 4\pi R^2 = 4 . \pi . 3^2 = 36\pi = 113{,}04$ кв. см.

Об'єм кулі

§ 3. Для обчислення об'єма кулі, уявімо собі кулю, поділену на велику кількість маленьких пірамідок, у яких вершина буде в центрі кулі, а основи в неї на поверхні (рис. 144). Це можна зробити, бо форма таких основ мало чим різниться від площі й тим більше наближатиметься до справжньої площі, чим дужче збільшуватиметься діяметр кулі та зменшуватимуться основи наших пірамідок. Куля, таким чином, складатиметься з великої кількости пірамідок. Об'єм кожної такої пірамідки рівняється добуткові площі основи та $^1/_3$ висоти.

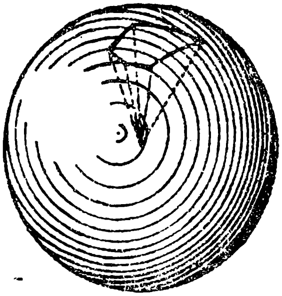


Рис. 144.

Тоб-то $\frac{a . R}{3}$,

де a — величина основи пірамідки,
R — висота пірамідки, (або луч кулі).

Коли-ж число таких пірамідок буде n, то об'єм всіх пірамідок (або все рівно, що об'єм кулі) буде $n . a . \frac{R}{3}$, але $n . a$ є добуток поверхні основи кожної пірамідки та числа цих пірамідок, тоб-то є поверхня кулі, а тому означаючи об'єм кулі через v, маємо

$$v = S . \frac{R}{3}$$

Виходить *об'єм кулі рівняється добуткові його поверхні та $^1/_3$ луча.*

Підставляючи замість S його значіння з § 2-го цього розділу дістаємо:

$$v = 4\pi R^2 . \frac{R}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Цю формулу можна написати инакше, коли замінимо R половиною діяметру. Тоді

$$v = \frac{4}{3} \pi R^2 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3$$

$$v = \frac{4 . \pi . D^3}{3 . 8} = \frac{\pi D^3}{6} .$$

Приклад—Знайти об'єм кулі за діяметром $= 6$ см.

частин цього явища, з його окремих фаз маємо можливість формулювати явище в цілому й справлятись з необхідним обчисленням, як-найкоротше. Така послідовність величин, де кожна наступна утворюється з попередньої за якимсь певним законом, зветься рядом.

Так низка цілих чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . . і т. д. є ряд, бо в зібраних величинах легко помітити закон його утворення, а саме: всяке наступне число складається з попереднього через додання до нього 1. Так само всі парні числа утворюють ряд: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... і т. д., бо і тут можна помітити спільний закон утворення наступного числа з попереднього. Рядами-ж будуть і такі послідовності величин

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots \ldots \text{ і т. д.}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \ldots \ldots \text{ і т д.}$$

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64. \ \ldots \text{ і т. д.}$$

$$1.2,\ 2.3,\ 3.4,\ 4.5 \ldots \ldots \text{ і т. д.}$$

Знайдіть у кожнім з наведених випадків закон утворення наступного числа з попереднього.

Аритметична прогресія

§ 2. Зо всієї великої кількости різноманітних рядів спинімось докладніше лише на двох випадках: на аритметичній та геометричній прогресіях (або поступах).

Аритметичною прогресією (або аритметичним поступом) називається такий ряд чисел, що в ньому кожний член утворюється через додавання до попереднього якогось певного числа.

Це число має назву різниця прогресії.

Такий, скажім, ряд: 6, 9, 12, 15, 18, 21 . . . . . і т. д. є аритметична прогресія з різницею $+3$

Ряд 15, 10, 5, 0, -5, -10 . . . . . і т. д. є прогресія з різницею -5, бо

$$10-15=-5; \qquad 5-10=-5 \text{ і т. д.}$$

Залежно від характеру числа, що додається (тоб-то, чи додаємо ми число додатнє, чи від'ємне), члени прогресії увесь час то зростають, то маліють. Коли різниця додатня, то члени прогресії зростають і прогресія зветьсяростучою; коли-ж різниця від'ємна, то члени прогресії зменшуються й прогресія називається спадною.

Вправи — В наведених нижче аритметичних прогресіях вкажіть ростучі та спадні прогресії, назовіть їхню різницю й продовжіть ще на 2 члени кожну прогресію

1 8, 16, 24, 32, 40 . . . . . .

2 5, 7, 9, 11 . . . .

3 4, 1, — 2, — 5 . . . . . .

4 10, 0, — 10 . . . .

5 10, $7\frac{1}{2}$, 5, $2^1/_2$ . . . . . .

6—Що станеться з різницею прогресії, коли запишемо цю прогресію в оберненому порядкові?

Коли ми знаємо якийсь член прогресії та її різницю, то ми можемо продовжити цю прогресію, а також написати її попередні члени. Коли ми знаємо два члени, що стоять поруч, то ми можемо найти різницю (через віднімання попереднього члена від наступного), а значить і всю прогресію.

Визначення якого завгодно члена прогресії

§ 3. Коли ми перший член аритметичної прогресії позначимо літерою a, а різницю її—літерою k то другий член дорівнюватиме $a + k$. Це записуємо так: $a_2 = a_1 + k$ (тут значок 2 біля a вказує номер члена прогресії, а тому a_3 є означення третього члена прогресії, a_{10} десятого члена, a_n — n-го члена й т. д.).

Отже, виходить $a_2 = a_1 + k$

$$a_3 = a_1 + k + k = a_1 + 2k$$

$$a_4 = a_1 + 3k \quad \text{й т. д.}$$

тому, що кожний дальший член утворюється з попереднього через додавання тієї-ж самої величини k. Розглядаючи, з чого складається a_2, a_3, a_4, . . . , ми бачимо, що кожний член прогресії складається з двох доданків: з a_1, тоб-то з першого члена та з певної кількости різниць; так для другого члена з однієї різниці, для третього — з двох, четвертого — з трьох і т. д., тоб-то число різниць, що додаються, на 1 менше за номера члена. Тому, продовжуючи наш ряд дістаємо

$$a_5 = a_1 + 4k$$
$$a_6 = a_1 + 5k$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$a_n = a_1 + (n - 1)\, k.$$

З цієї формули можна обчислити який завгодно член аритметичної прогресії, коли відомий перший член та різниця. Тому, саме цю формулу називають **ф о р м у л а з а г а л ь н о г о ч л е н а п р о г р е с і ї.** Цілком зрозуміло, що коли прогресія спадна, то k — від'ємне. Це треба мати на увазі, обчислюючи за цією формулою.

Вправа 1— В прогресії 3, 7, 11 . . . . знайти 10-й член

2— » » 20, 16, 12 . . . » 8-й » .

3—Перший член поступу дорівнює 0; різниця 3. Написати шість членів цієї прогресії. Який буде 6 й член? Порівняйте з обчисленням 6-го члена за формулою $a_n = a_1 + (n - 1)k$.

4 — В наведених нижче трьох прогресіях — одна не вірна. Знайдіть її

12, 11, 10, 9, 8 . . . . . .

16, 13, 10, 8, 5 . . . . . .

17, 22, 27, 32 . . . .

Властивість симетрично упорядкованих членів прогресії

§ 4. З'ясуємо одну властивість аритметичної прогресії.

Нехай маємо прогресію

$$a, b, c, d, \ldots\ldots\ldots t, y, z, u$$

з різницею k, де a, b, c, d . . . . . визначають послідовні члени прогресії. Точки вказують на існування пропущеного ряду членів прогресії (при бажанні ці пропущені члени можна вставити). Напишемо цю-ж прогресію тільки в оберненому порядкові

$$u, z, y, t, \ldots\ldots\ldots d, c, b, a$$

Її різниця буде —k (Чому?)

Розгляньмо, наприклад, треті члени від початку та від кінця даної прогресії. Вони матимуть такий вигляд

$$c = a + 2k$$

(бо *c*—третій член прогресії з різн. k)

$$y = u - 2k$$

(бо *y*—третій член прогресії з різн.—k)

Склавши почленно ці рівності, матимемо

$$c + y = a + u,$$

тоб-то **сума членів рівновіддалених від кінців прогресії дорівнює сумі крайніх членів.**

Так само, коли розглянемо четверті члени, матимемо

$d = a + 3k$ (бо d четвертий член прогресії з різн. k)

$t = u - 3k$ (» t » » » » —k)

$$d + t = a + u$$

Взагалі, це правило можна примінити до всіх членів прогресії, що рівновіддалені від початку та від кінця: сума таких членів завжди дорівнює сумі крайніх членів.

Вправа 1 — Перевірте на нижчезазначених прогресіях правильність попередніх висновків

6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42

25, 20, 15, 10, 5, 0, −5, −10, −15

2 — В прогресії відсутні деякі члени. Знайти їх

24, z, 48, 60, 72, x, y, 108, 120, 132.

Сума членів аритметичної прогресії

§ 5. Маємо аритметичну прогресію, що складається з n членів

$$a, b, c, d, \ldots\ldots\ldots y, z, u.$$

Сума членів аритметичної прогресії є така

$$S = a + b + c + \ldots\ldots + y + z + u.$$

Написавши цю суму в оберненому вигляді і маючи на увазі, що від зміни порядку доданків сума не міняється, матимемо

$$S = u + z + y + \ldots\ldots\ldots + c + b + a.$$

Додаємо почленно ці дві рівності

$$S = a + b + c + \ldots\ldots\ldots + y + z + u$$

$$S = u + z + y + \ldots\ldots\ldots + c + b + a$$

$$2S = (a + u) + (b + z) + (c + y) + \ldots + (c + y) + (b + z) + (a + u).$$

Але за § 4-м $b + z = c + y = a + u = \ldots\ldots$

(яка сума рівновіддалених членів)

Значить $2S = \overbrace{(a + u) + (a + u) + (a + u) + \ldots\ldots + (a + u)}^{n \text{ разів}}$

або $2S = (a + u)\,n$; а $S = \frac{(a + u)\,n}{2}$

За допомогою цієї формули можна за даними крайніми членами та за числом членів визначити суму всіх членів прогресії, не обчислюючи кожного члена зокрема.

Иноді, коли останній член прогресії u невідомий, але відомі перший член та різниця прогресії, то останній член обчислюється з формули

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,k$$

Тоді попередня формула для суми членів прогресії, коли підставити в неї замість u вираз $a_1 + (n - 1)k$, визначиться инакше

$$S = \frac{[a_1 + a_1 + (n - 1)k]\,n}{2} = \frac{[2a_1 + (n - 1)k]\,n}{2}$$

З цієї формули користуємось, коли обчислюємо суму членів прогресії з невідомим останнім членом прогресії, але коли знаємо перший член та різницю прогресії (також і кількість членів її).

Примітка: Всі питання, що трапляються в аритметичній прогресії, розвязуємо за допомогою знайдених двох формул

$$a_n = a_1 + (n-1)k \text{ та}$$

$$S = \frac{(a_1 + u)n}{2}$$

В цих формулах п'ять величин: перший член a_1 число членів n, різниця прогресії k, останній член u і сума всіх членів S.

Через те, що всіх величин п'ять, а рівнань, що їх звязують лише два, то визначити невідомі величини можна в тому разі, коли їх буде не більше за дві, инші-ж величини повинні бути відомі.

Вправи до розділу 29

1—Знайти суму 10-ти членів прогресії

$$2,\ 6,\ 10,\ 14\ \ldots\ldots$$

Розвязування:

$$\text{Дано } a_1 = 2,\quad k = 4,\quad n = 10 \qquad S = \frac{[2a_1 + k(n-1)]\,n}{2}$$

$$S = \frac{[2.2 + 4(10-1)]\,10}{2} = \frac{(4+36)\,10}{2} = 200$$

2—$a = 16;\ k = 4;\ S = 88$. Знайти n.

Розвязування

$$88 = \frac{[2.16 + 4(n-1)]\,n}{2}; \qquad 176 = (32 + 4n - 4)\,n;$$

$$176 = (28 + 4n)\,n; \quad 4n^2 + 28n - 176 = 0; \quad n^2 + 7n - 44 = 0;$$

маємо квадратове рівняння; з нього й знайдемо n

$$n = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 44}; \qquad n = \frac{-7 \pm 15}{2}$$

$$n = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}}; \qquad n_1 = 4, \quad n_2 = -11.$$

Для нашої задачі підходить $n = 4$; друге-ж значіння n відкидаємо. (Чому?)

3—Знайти a_7 в прогресії 55, 52, 49 . . . . . .

4—Знайти a_{10} в прогресії 5, 9, 13 . . . . . .

5—Служник вступив на посаду з платнею 216 крб. за рік з умовою щорічно збільшувати платню на 20 крб. Скільки часу він мусить працювати, щоб одержувати 316 крб.? Скільки він одержить за ввесь час своєї праці? (Відп.— 5 р.)

6— За копання колодязя платять спершу за 1 метр 1 крб. 50 коп., а починаючи з другого метру, додають 60 коп. за кожний дальший. Скільки треба заплатити за копання колодязя 14 метрів глибини? (Відп.— 75,6 крб.).

7—В порожнечі річ, падаючи вільно, проходить за першу секунду 4,9 метр., а за кожну дальшу на 9,8 м. більше. Яку віддаль пройде річ за 12 сек.? (Відп.— 705,6 м.).

8— Прямовисно до гори кинуто річ; вона за кожну секунду зменшує свою швидкість на 9,8 м. Скільки часу буде підноситися куля, що виходить з рушниці з хуткістю 490 м. на секунду? (Відп.— 51).

9.—В прогресії $a_7 = 10$; $a_{17} = 50$. Знайти a_1 та k.

П р и м і т к а: Визначте a_7 та a_{17} через a_1 та k.

10— Визначити різницю аритметичної прогресії, в якій перший член $a_1 = 1$; останній $u = 50$; сума $S = 204$? (Відп.— 8).

11 — Знайти суму перших 100 парних чисел
(тоб-то $2 + 4 + 6$ . . . . . . 100 членів).

12— Сума 5-го та 47-го членів аритметичної прогресії $= 0$; сума 12-го та 31-го $= 18$. Знайти прогресію (Відп.— $a_1 = 50$; $k = -2$)

13— Температура земної кори збільшується на 1^0 з заглибленням на кожні 32 метри. Припустивши, що температура верхнього шару 12^0, треба взнати, на якій глибині буде кипіти вода (100^0), плавитися оливо (335^0), чавун (200^0). (Відп.— Біля 2800 м.).

14— Заповнити порожні місця у такій таблиці

	№ 1	№ 2	№ 3
a_1			—37,5
k	3		4
n		40	22
u	50	469	
s	442	9400	

15— Між 1 та 29 вставити 6 чисел, які-б встановили з даними аритметичну прогресію.

16— 1225 крб. поділено на 10 частин так, що кожна дальша частина на 5 крб. більша попередньої. Взнати величину кожної частини (Відп.— Перша част. 100).

17— Дано $a_1 = 15$; $k = -3$; $S = 27$. Знайти n. (Відп.— 2 або 9).

РОЗДІЛ 30

Геометрична прогресія

Поняття про геометричну прогресію

§ 1. В попередньому розділі ми встановили, що ряд є послідовність величин, що змінюються за певним законом і розглянули один із рядів, а саме: аритметичний або аритметичну прогресію. Розгляньмо другий ряд чисел

$$6, 12, 24, 48, 96...$$

Легко помітити, що і цей ряд збудовано за певним законом, а саме: кожен член більше за попередній вдвічі.

Ряд чисел називаємо геометричним рядом, коли частка від ділення кожного числа на попереднє є та сама, тоб-то кожне наступне число одержуємо, як добуток попереднього та цього даного числа.

Те число, яким треба помножити кожен член, щоб одержати наступний, зветься знаменником прогресії. У вищенаведеному прикладі знаменик є

$$\frac{12}{6} \text{ або } \frac{24}{12} \text{ або } \frac{48}{24} \text{ й т. д.}$$

Отже, щоб відшукати знаменика прогресії, треба який-небудь член її поділити на безпосередньо попередній. (Замість геометрична прогресія инколи кажуть кратна прогресія або поступ геометричний).

Коли знаменик у прогресії більший за 1, то числа, члени її зростають і прогресія має назву ростучої, коли-ж знаменик прогресії менший за 1, то члени прогресії маліють (зменшуються) і прогресія має назву спадної.

Наприклад, прогресія 8, 12, 18, 27... є ростуча, бо знаменик її

$$є \ \frac{12}{8}=\frac{18}{12}=\frac{27}{18}=\cdots=1,5$$

прогресія 6; 3; 1,5; 0,75..... спадна бо її знаменик дорівнює

$$\frac{3}{6}=\frac{1,5}{3}=\frac{0,75}{1,5}=0,5.$$

Вправа 1— Визначте знамеників прогресій

а) 10; 25; $62^1/_2$; $156^1/_4$; в) 2; 10; 50; 250

б) 3; 9; 81; 243; г) 360; 90; $22^1/_2$; $5^5/_8$;

2— Продовжуйте далі кожну з нижчеподаних прогресій на 2 члени

6; 30; 150... 360; 120... 1000; 400; 160.....

3— Визначте знаменика прогресії a; a^2; a^3; a^4;.....
Який ряд утворюють покажчики 1, 2, 3....?

Примітка: Якщо знаменик прогресії є числом від'ємним, то члени прогресії будуть один за одним то додатні, то від'ємні. Така прогресія зветься знакозмінною.

Наприклад, 3, -6, $+12$, -24, $+48$, -96 й т. д.

Її знаменик є від'ємний, а саме: -2.

Визначення якого завгодно члена прогресії

§ 2. Припустімо, що числа a, b, c, d..............u утворюють таку прогресію, що її знаменик є q. Тоді на підставі означення прогресії (дивись § 1 ц. розд.) маємо

$$b = a \, . \, q$$

$$c = b \, . \, q, \text{ але } b = aq, \text{ тому } c = aq \, . \, q = aq^2$$

$$d = c \, . \, q, \text{ але } c = d \, . \, q, \text{ тому } d = a \, . \, q \, . \, q \, . \, q = aq^3$$

Розглядаючи, з чого і як складається формула для цих членів, помічаємо, що взагалі кожен член прогресії складається із добутка першого члена та знаменика прогресії, знаменик беремо в степені на одиницю менше від нумера того члена, що його визначаємо. Ми бачимо, що другий член (зазначаємо його літерою a_2)

$$a_2 = aq$$

третій ..... $a_3 = aq^2$

четвертий ... $a_4 = aq^3$

....

десятий .... $a_{10} = aq^9$

....

n-ий член ... $a_n = aq^{n-1}$

За допомогою цієї останньої формули обчислюємо, який завгодно член геометричної прогресії. Наприклад, у прогресії

$$2, \; 4, \; 8, \; 16 \ldots\ldots,$$

у якої знаменником є число 2, десятий член $a_{10} = 2 \, . \, 2^9 = 1024$.

У прогресії 3, 15, 75.... $a_6 = 3 \, . \, 5^5 = 9375$.

У прогресії 60, 30, 15..... у якої знаменником є число $^1/_2$, восьмий член $a_8 = 60 \left(\frac{1}{2}\right)^7 60 \, . \, \frac{1}{128} = \frac{60}{128} = \frac{15}{32}$

(Перевірте це, написавши прогресію).

Обчислення суми членів геометричної прогресії

§ 3. Коли доводиться обчисляти суму членів прогресії, то якщо членів дуже багато та ще й числа великі, знаходити цю суму додаванням дуже незручно й важко. Математика подає формулу для обчислення суми якого завгодно числа членів, що значно полегшує цю роботу.

Нехай маємо прогресію

$$a, b, c, d, \ldots\ldots t, y, u$$

її суму позначимо літерою S тоб-то

$$S = a + b + c + d + \ldots + t + y + u$$

Якщо знаменик її є q, то

$$b = aq \qquad d = cq$$

$$c = bq \qquad y = tq$$

$$u = yq$$

Додавши ці рівності одну до одної, дістанемо

$$b + c + d + \ldots + y + u = aq + bq + cq + \ldots + tq + yq$$

або

$$b + c + d + \ldots + y + u = q\,(a + b + c + \ldots + t + y)$$

Ліва частина є сума всіх членів за винятком першого a, тоб-то $S - a$ в дужках є сума членів без останнього u або $S - u$ тому замість попередньої рівности можемо написати

$$S - a = q\,(S - u)$$

В останній рівності a є перший член прогресії, u — останній а q — знаменик. Це дані величини, невідома лише величина S (сума членів). Розвязуючи це рівнання з одним невідомим S, маємо:

$$S - a = qS - qu;$$

$$qu - a = qS - S;$$

$$qu - a = S\,(q - 1)$$

$$S = \frac{qu - a}{q - 1}$$

З останній формулі, помножаючи чисельника і знаменика дробу числом -1 дістаємо

$$S = \frac{a - qu}{1 - q}$$

Остання формула дуже зручна для обчислення суми членів спадної прогресії, бо через те, що знаменик у неї $q<1$, різниця $1-q$ буде величиною додатньою.

Якщо в формулі

$$S=\frac{qu-a}{q-1}$$

замінимо u йому рівним aq^{n-1}, то

$$S=\frac{q\,aq^{n-1}-a}{q-1}=\frac{aq^n-a}{q-1}$$

Остаточно $$S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

Примітка: В кожній геометричній прогресії кожен член (починаючи з другого) є пересічно пропорціональний між двома сусідніми. Наприкл., в прогресії 6, 12, 24, 48, 96... 12 є пересічно пропорціональне між 6 та 24; 24 є пересічно пропорціональне між 12 та 48 й т. д. Тому 12, 24, 48, 96.... звуть пересічними геометричними членами. Так само, в кожній аритметичній прогресії кожен член є пересічно аритметичним між двома своїми найближчими — наступним та попереднім (перевірте це).

Вправи до розділу 30

1— Знайдіть суму 12 членів геометричної прогресії 2, 4, 8, 16.... $a=2$, $q=2$.

Щоб скористуватися з формули $S=\frac{uq-a}{q-1}$, треба ще раніше знайти u (останній член).

За допомогою формули $S=\frac{a\,(q^n-1)}{q-1}$ швидше найдемо, бо всі дані маємо

$$S=\frac{a\,(q^n-1)}{q-1}=\frac{2\,(2^{12}-1)}{2-1}=2\,(4096-1)=8190.$$

2— Дано $a=4$, $a_5=324$. Знайдіть q?

$$[a_5=aq^4;\ aq^4=324;\ 4q^4=324;\ q^4=81;\ q=1^3].$$

3— Знайдіть суму 6 членів геометричної прогресії... $^2/_3$, $^1/_2$, $^3/_8$....

4— Якщо $a=0{,}5$; $q=0{,}2$, то чому дорівнює a_8?

5— Між числами 8 та 648 поставити три пересічних геометричних, тоб-то таких чисел, які разом з тими, що дано, складають геометричну прогресію.

Якщо між членами 8 та 648 поставимо ще 3 члени, то всього їх буде $2+3=5$. Тоді $648=8 . q^4$ звідки $q^4=\frac{648}{8}=81$; $q=\pm 3$.

Отже, маємо такі прогресії:

8, 24, 72, 216, 648.....

8, —24, +72, —216, +648.....

Кожна задовольняє поставленим вимогам.

6— Показати зріст членів аритметичної та геометричної прогресії графічно, відмічаючи за x номер члена, а за y його величину.

Прогресія аритметична: 2, 4, 6, 8, 10...

» геометрична: 2, 4, 8, 16, 32....

Розглянувши уважно график, помічаємо, що члени геометричної прогресії зростають швидше за членів аритметичної, причому спочатку мало помітна різниця, а потім в міру віддалі від початку стає дуже помітною. Так само що до спадної прогресії (аритметичної та геометричної) члени геометричної прогресії швидше зменшуються, ніж аритметичної.

Ілюструвати різницю між ростом чисел за законами аритметичної та геометричної прогресії — можна ось яким прикладом: — Власник будинка продає його на таких умовах: в будинкові є сходи ґанку — 8 числом та сходи на другий поверх — 15 числом. Покупець платить таким чином: на першу дошку сходів кладе 100 крб., а на кожну наступну на 50 крб. більше; або так на першу дошку сходів кладе 1 коп., на другу 2 коп., на третю 4 коп. й т. д. Покупець вибрав другий спосіб уплати. Але розрахунок виявив, що він переплачує дуже велику суму. Справді, в першому випадкові, за законом аритметичної прогресії, знаходимо, коли прогресія є 100, 150, 200, —

$$S=\frac{[2a+r\,(n-1)]\,n}{2}=\frac{[200+50\ (23-1)]\ 23}{2}=$$

$$=\frac{(200+50 . 22) . 23}{2}=14950 \text{ крб.}$$

У другому — за законом геометричної прогресії дістаємо

$$S=\frac{a\ (q^n-1)}{q-1}=\frac{1 . (2^{23}-1)}{2-1}=2^{23}-1=83886{,}07 \text{ карб.}$$

різниця біля 70 000 карбованців.

7— В геометричній прогресії $a=3$, $q=2$.

Вичисліть суму 9 членів?

8— Якщо $a=6$, $q=2/3$, то чому дорівнює сума 6 членів?

9— Заповніть відповідні місця таблиці

	a	q	n	u	S
№ 1	32	$2\frac{1}{2}$	6		
№ 2	8	$\frac{1}{2}$	5		

10— З бочки зі спиртом 60^0 об'ємом у 3200 літрів виливають половину й остачу доливають водою. Це повторюється чотири рази. Скільки літрів чистого спирту лишиться після останнього переливання?

РОЗДІЛ 31

Логаритми

Поняття про логаритм. Користь їх уживання

§ 1. При багатьох математичних питаннях доводиться пророблятя важкі обчислення з дуже великими числами, що дуже утрудняє й ускладняє техніку вираховувань. Наприклад, для знаходження якогонебудь члена геометричної прогресії, як ми знаємо, треба перший член її помножити знаменником прогресії в степені на 1 меншому номера того числа, що визначаємо ($u = aq^{n-1}$). Якщо номер члена невеличкий (3, 4, 5), то доводиться пророблята множення 2, 3, 4, 5 разів, але якби нам довелося за допомогою множення шукати, наприклад 15-й, 20-й або ще більший член, то нам довелося-б пророблята множення багато разів, а якщо й числа при тому дуже великі, то операція стає виключно важкою для виконання.

От у таких випадках, коли обчислення складне, ми користуємося з окремих прийомів, вживаючи окремі числа, що мають назву логаритми.

Для з'ясування поняття про логаритм та користь його застосовування, розгляньмо таблиці степенів якого-небудь числа, напр., 2:

$2^1 = 2$	$2^8 = 256$	$2^{15} = 32\,768$
$2^2 = 4$	$2^9 = 512$	$2^{16} = 65\,536$
$2^3 = 8$	$2^{10} = 1\,024$	$2^{17} = 131\,072$
$2^4 = 16$	$2^{11} = 2\,048$	$2^{18} = 262\,144$
$2^5 = 32$	$2^{12} = 4\,096$	і т. д.
$2^6 = 64$	$2^{13} = 8\,192$	
$2^7 = 128$	$2^{14} = 16\,384$	

Ця таблиця має одну цікаву ознаку, а саме: розглядаючи ряд 2, 4, 8, 16, 32 . . . й т. д., ми бачимо, що він є геометричною прогресією, тоді, як покажчики степеня 1, 2, 3, 4, 5 . . . і т. д. утворюють аритметичну прогресію. Нехай, тепер нам треба помножити одне одним які-небудь числа, наприклад, 256 та 1024. Цим числам відповідають покажчики 8 та 10 ($2^8 = 256$; $2^{10} = 1\,024$). Додавши ці покажчики, дістаємо $8 + 10 = 18$. Цьому покажчикові відповідає число 262 144, яке і є добутком від множення 256 та 1 024. (Перевірте безпосереднім множенням).

Так само, коли треба було-б помножити 32 та 128, то знайшли-б, що покажчик числа 32 є 5, 128 — 7, а $5 + 7 = 12$. Покажчикові 12 відповідає число 4 096. Воно й є добутком від множення 32 та 128 (перевірте).

Таким чином, за допомогою цієї таблиці маємо можливість обчислення добутка замінити додаванням відповідних покажчиків і по сумі покажчиків знайти результат. Звичайно, цих таблиць не досить, щоб перемножити такі числа, як от 15 та 145, бо їх немає в цій таблиці. Але ми незабаром покажемо, що робити в таких випадках.

Числа ряду нашої таблиці 1, 2, 3, 4, 6 . . . і т. и., що є покажчиками, звуть **логарифмами**. Наприклад, число 4 має логаритмом 2, число 8 має логаритмом 3, число 64 має логаритмом 6 і т. д., коли основа степеня є 2. Скорочено це записують таким способом $\lg_2 4 = 2$: $\lg_2 8 = 3$; $\lg_2 64 = 6$.

Тут цифра 2 біля lg ($\lg_2$) вказує на основу логаритмів. Складімо таблицю чисел та їх логаритмів з основою 3.

$3^1 = 3$	$3^6 = 729$	$3^{11} = 177\,147$
$3^2 = 9$	$3^7 = 2\,187$	$3^{12} = 531\,441$
$3^3 = 27$	$3^8 = 6\,561$	$3^{13} = 1\,594\,323$
$3^4 = 81$	$3^9 = 19\,683$	$3^{14} = 4\,782\,969$
$3^5 = 243$	$3^{10} = 59\,049$	$3^{15} = 14\,348\,907$

І тут, як і в попередній таблиці, числа 3, 9,27, 81 . . . . . . складають геометричну прогресію, а числа 1, 2, 3, 4, 5, ... аритметичну. Найдімо добуток 243 та 2 187. Покажчик (логаритм) числа 243 є 5, а числа 2 187 є 7. Додаємо $5 + 7 = 12$. Покажчикові (логаритмові) 12 відповідає число 531 441 і це й є потрібний добуток.

Звідци робимо такі висновки:

1) В таблицях вищенаведеного типу, **коли ряд чисел складає геометричну прогресію, то відповідні цим числам покажчики (логаритми) складають аритметичну прогресію.**

2) За допомогою цих таблиць **складнішу дію** (наприклад множення) **можна замінити простішою дією** (додаванням покажчиків, що їх звемо **логаритмами**).

3) **Логаритмом числа** (за **якої-небудь основи**) **звуть покажчика степеня, до якого треба піднести основу, щоб одержати це число.**

Вправа 1 — З допомогою таблиць степенів числа 3 зробіть множення

а) 27 . 243

б) 729 . 19 683

в) 81 . 6 561

2 — Обчисліть логарифми числа 25, 625, 3 125 при основі 5.

3 — Обчисліть логарифми чисел 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 100 000 000 при основі 10.

4 — Знайдіть число, маючи основу *a* та логарифм *x*

$$a = 8\,;\ x = 3.$$

$$a = 6\,;\ x = 4.$$

$$a = 7\,;\ x = 2.$$

Десяткові логарифми

§ 2. Через те, що користування таблицями за різних основ незручно, (бо для кожного обчислення треба вказувати, за якої основи беремо логарифми), умовились користуватися з таблиць, що мають основою число 10, тоб-то з такої таблиці

$10^1 =$	10	$10^6 =$	1 000 000
$10^2 =$	100	$10^7 =$	10 000 000
$10^3 =$	1 000	$10^8 =$	100 000 000
$10^4 =$	10 000	$10^9 =$	1 000 000 000
$10^5 =$	100 000	$10^{10} =$	10 000 000 000 і т. д.

Якби ми могли скласти таблицю, де числа 2, 3, 4 . . . 11, 12, 13 . . . . 101, 102, 103, 104 і т. д. кожне було рівне 10 в якомусь степені, то мали-б можливість помножати за допомогою логарифмів які завгодно числа.

На підставі означення логарифму маємо

Якщо $10^1 = 10$, то $\lg 10 = 1$;

$10^2 = 100$, $\lg 100 = 2$;

$10^3 = 1\,000$, $\lg 1\,000 = 3$ й т. д.

П р и м і т к а: У десяткових логарифмів біля знаку lg не пишуть покажчика основи.

Отже, л о г а р и т м и ч и с е л, я к і п о з н а ч а ю т ь с я о д и н и ц е ю з н у л я м и (10, 100, 1 000 й т. д), є ц і л і ч и с л а, щ о м а ю т ь в с о б і с т і л ь к и о д и н и ц ь, с к і л ь к и н у л і в у ц ь о м у ч и с л і. Наприклад, $\lg 1\,000\,000 = 6$, $\lg 1\,000\,000\,000 = 9$ й т. д.

Крім того, розглядаючи ряд чисел та їх логарифми, бачимо, що б і л ь ш о м у ч и с л у в і д п о в і д а є й б і л ь ш и й л о г а р и т м

Логаритми чисел. Характеристика

§ 3. Нехай треба знайти логаритм числа, що не позначається одиницею з нулями, наприклад, числа 2 695. Це значить, знайти такий степінь 10, щоб він був рівний 2 695. Але такого числа немає в нашій таблиці, бо 10, що його піднесено до якого завгодно степеня утворює число, що позначається одиницею з нулями, а нам потрібно одержати число 2 695. Тому цілого значіння для логаритму 2 695 не існує.

Щоб дізнатися про точніше значіння логаритму цього числа, слід узяти на увагу, що число 2695 менше 10 000 й більше 1000, тоб-то

$$10\,000 > 2695 > 1000.$$

Але $\lg 10\,000 = 4$, $\lg 1000 = 3$ (див. § 2).

Тому $4 > \lg 2\,695 > 3$, тоб-то, $\lg 2695$ більше за 3 й менше за 4.

Значить, він дорівнює числу 3 та ще якийсь дріб. Докладнішими міркуваннями знайдемо, що ця дробова частина є безконечним дробом, тоб-то не існує такого конечного числа, щоб 10, яке піднесено до цього степеня, утворило число 2695. За допомогою засобів, що знаходимо у вищій математиці, маємо можливість вирахувати цю дробову частину логаритму з бажаною степеня точности, тоб-то з яким завгодно числом десяткових знаків. Цілу частину логаритму звуть *характеристикою логаритму*, а його дробову частину *мантисою*. Мантиси логаритмів містяться в таблицях, а характеристики знаходять дуже легко за допомогою правила, наведеного нижче.

Припустімо, що треба знайти характеристику логаритму числа 26. Відомо, що $100 > 26 > 10$ (нагадуємо, що цей запис визначає, що 100 більше за 26, а 26 більше за 10).

Але $\lg 10 = 1$, $\lg 100 = 2$, тому $\lg 26$ більше за 1 і менше за 2, тоб-то $\lg 26 = 1 +$ якийсь дріб (з якимсь наближенням).

Також, коли нам треба знайти $\lg 376$, то міркуємо так $1\,000 > 376 > 100$; $\lg 1\,000 = 3$, $\lg 100 = 2$; отже $\lg 376 = 2 +$ якийсь дріб.

Знайти характеристику логаритму числа 87259. Відомо, що 100 000 більше за 87259, а $87259 > 10\,000$; $\lg 100\,000 = 5$, $\lg 1000 = 4$, $\lg 87258 = 4 +$ якийсь дріб.

Таким чином, знайшли, що

$\lg 26 = 1 +$ якийсь дріб з певним наближенням.
$\lg 376 = 2 +$ » » » » »
$\lg 2695 = 3 +$ » » » » »
$\lg 87259 = 4 +$ » » » » »

Порівнюючи ці рівності, знаходимо, що характеристика двоцифрового числа дорівнює 1, трицифрового $= 2$, чотирицифрового $= 3$, п'ятицифрового $= 4$, тоб-то характеристика логаритму всякого числа *більшого від 1 дорівнює числу його цілих цифр без одної.*

Тому,	для	5-тицифрового	числа	характеристика		— 4
»	»	6	»	»	»	— 5
»	»	7	»	»	»	— 6
»	»	8	»	»	»	— 7
»	»	9	»	»	»	— 8
»	»	10	»	»	»	— 9

й так далі.

Вправа 1 — Пошукайте вищенаведеним способом характеристики логаритмів таких чисел 25, 136, 79, 8417, 96 070, 100 000, 38, 426, 1 000 000, 4 357?

2 — Логаритм якого числа має найбільшу характеристику в 1 вправі?

Логаритм з від'ємною характеристикою

§ 4. В попередньому параграфові ми ознайомилися зі способом вишукування характеристики логаритмів цілих чисел, що більше за 1. Для ознайомлення зі способом находження характеристики логаритмів чисел менших одиниці (тоб-то дробових), нам потрібно поширити наші знання про степінь числа.

Припустімо, що нам треба поділити $a^6 : a^6$.

Затим, що діленик та дільник рівні, частка дорівнює одиниці, тоб-то $a^6 : a^6 = 1$ Але те-ж саме ділення можна позначити ще й инакше. Відомо, що при діленні степенів (з однаковими основами) покажчики віднімаються. Тому $a^6 : a^6 = a^0$. Порівнюючи першу рівність з другою, знаходимо, що $a^0 = 1$ тоб-то нулевий степінь усякого числа дорівнює 1.

Піднести a до нулевого степеня немає рації, бо, як ми знаємо, степенювання є перемноження однакових чинників; але, щоб можна було користуватись з виразу a^0, умовились приписати йому вартість 1. Тому $10^0 = 1$, й логаритм одиниці дорівнює нулеві за всякої основи.

Коли доводиться поділяти $a^7 : a^9$, то дістаємо

$$\frac{a^7}{a^9} = \frac{1}{a^2}$$

Можемо написати й так $a^7 : a^9 = a^{-2}$ (бо при діленні покажчика віднімається, коли основи однакові).

Через те що в цьому випадкові ми проробили двічі ту саму дію над тими самими величинами, то й результати мусимо дістати однакові. Тому $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

Сам собою вираз a^{-2}, як і a^0 не має рації; але ми його розуміємо умовно: **від'ємний степінь якого-небудь числа є частка від ділення одиниці на додатній степінь того самого числа.**

Взагалі $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$; $a^{-5}=\frac{1}{a^5}$; $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

На підставі цього можемо розвязати тепер ось які питання
1 — Написати 0,1 у вигляді якогось степеня 10.

Розвязування: $0{,}1=\frac{1}{10}=10^{-1}$

2 — Написати 0,01 у вигляді степеня 10. $[0{,}02=\frac{1}{100}=10^{-2}]$

3 — Написати 0,001 у вигляді степеня 10. $[0{,}001=\frac{1}{1000}=$
$=\frac{1}{10^3}=10^{-3}]$

Порівнюючи
$$0{,}1=10^{-1}$$
$$0{,}01=10^{-2}$$
$$1{,}001=10^{-3}.$$

бачимо, що десятковий дріб, який визначає одну частину яку-небудь, можна утворити, як степінь 10. Якщо дріб позначається одною якою небудь десятковою частиною, то логарітм уявляє собою якесь ціле від'ємне число — характеристику, що має стільки від'ємних одиниць, скільки у десятковому дробові нулів. Як, наприклад,

$\lg 0{,}0001=-4$, бо $0{,}0001=\frac{1}{10000}=\frac{1}{10^4}=10^{-4}$

Нехай нам треба знайти логаритм числа 0,26
$1 > 0{,}26 > 0{,}1$. Тому $\lg 1 > \lg 26 > \lg 0{,}1$
Але $\lg 1=0$, $\lg 0{,}1=-1$; отже $\lg 0{,}26=-1+$ якийсь дріб.

Подібно до цього характеристика логаритму числа 0,026 дорівнює -2 бо $0{,}1 > 0{,}026 > 0{,}01$.

Через те, що $\lg 0{,}01=-2$ $\lg 0{,}1=-1$, $\lg 0{,}026=-2+$дріб.

Від'ємну характеристику записують так

$\lg 0{,}26=\bar{1}$, та ще якийсь дріб.

$\lg 0{,}026=\bar{2}$, » » » »

$\lg 0{,}0026=\bar{3}$, » » » »

$\lg 0{,}00026=\bar{4}$, » » » »

З наведених прикладів можна вивести ось яке правило для визначення логаритму десяткового дробу: характеристика десяткового дробу (додатнього), меншого від одиниці, дорівнює числу нулів, що ними дріб починається, взятому зі знаком мінус.

Вправи до розділу 31

1 — Обчисліть 5^{-2}; 8^{-3}; 4^{-3}; 4^0;
7^0; 7^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}.

2 — Переписати без від'ємних покажчиків вирази $a^{-3}+a^{-2}$; $16^{-2}+2^{-5}+4^{-3}$ та спростити їх.

3 — Напишіть характеристики логаритмів таких чисел
376; 826; 4250; 0,0028;
1; 4 786; 23 700; 65; 390;
6; 0,07; 9; 0,001.

РОЗДІЛ 32

Логаритми

Продовження

Логаритмичні таблиці

§ 1. Розглядаючи таблиці логаритмів, які прикладено в кінці цієї книги, ми помічаємо, що в них містяться лише мантиси логаритмів, а характеристик немає, це через те, що характеристику числа, як ми бачили, можна знайти легко й без таблиць (користуюсь з правил, наведених в попередньому розділі). Напр., для числа 126 знаходимо мантису в таблицях: це буде число 1004, характеристикою буде число 2 (бо число 126 трицифрове) Тому $\lg\ 126 = 2{,}1004$. Подібно до цього

$$\lg\ 194 = 2{,}2878;\ \lg\ 752 = 2\ 8762,$$
$$\lg\ 1080 = 3{,}0334 \text{ й т. д.}$$

В цих таблицях подано мантиси чисел від 100 до 1300 з 4-ма десятковими знаками, тоб-то такі що їх обчислено до десятитисячних частин. Існують таблиці логаритмів, що їх обчислено з 5,7 і більше знаками, але вони вживаються лише там, де необхідна надзвичайно велика точність.

Найдімо логаритми двох чисел, із яких одне в 10 разів більше за друге, напр.,

$$\lg\ 126 = 2{,}1004$$
$$\lg\ 1260 = 3{,}1004$$

так само

$$\lg\ 115 = 2{,}0607$$
$$\lg\ 1150 = 3{,}0607$$

З наведених прикладів можемо вивести таке правило: **коли число збільшується в 10, 100 й т. д. разів (або зменшується в 10, 100 й т. д. разів), то на мантисі логаритму це не відбивається, а характеристика логаритму змінюється залежно від числа порядків, що є до протинки в числі.** Тому всі такі числа, як 35, 350, 3500, 35000 і т. д. — всі вони мають однакову мантису, 5441, а характеристики будуть — для числа 35, — 1, для 350 — 2: для 3500 — 3, й т. д.

Приклади — $\lg 1,8 = 0,2553$ $\quad \lg 18000 = 4,2553$
$\lg 18 = 1,2553$ $\quad \lg 180000 = 5,2553$
$\lg 180 = 2,2553$
$\lg 1800 = 3,2553$

$\lg 0,18 = \bar{1},2553$
$\lg 0,018 = \bar{2},2553$
$\lg 0,0018 = \bar{3},2553$ і т. д.

Після всього наведеного стає зрозумілим, чому в таблицях числа починаються з 100. Якщо нам потрібно знати мантису числа меншого за 100, напр., 72 то шукаємо її там, де стоїть число 720, бо у чисел 72 та 720 мантиси, як ми вже знаємо, мусять бути однаковими, і їх логаритми відрізняються лише характеристиками. Подібно до цього логаритми чисел 45 та 450 також мають різні тільки характеристики, а мантиси у них однакові.

Вправа 1— Пошукайте логаритми отаких чисел: 8; 80; 800; 8000; 0,8; 0,08; 0,008.

2— Теж саме для чисел 15; 150; 1500; 1,5; 0,015; 0,15.

3— Пошукайте логаритми чисел 23; 69; 147; 100; 815; 81; 5; 736; 73,6.

4— Пошукайте логаритми чисел 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

Визначення числа за його логаритмом

§ 2. Припустімо, що нам треба визначити за даним логаритмом відповідне йому число, як от, $= 1,4579$. Міркуємо так: характеристика дорівнює 1, тому це є логаритм якогось двоцифрового числа. Шукаємо в таблицях мантису 4579. Їй відповідає число 287. Отже шукане число — 28,7 (бо характеристика показує, що в числі мусить бути дві цифри цілого числа).

Коли $\lg x = 1,4579$, то $x = 28,7$.

Так саме розвязуємо подібну-ж задачу: lg числа $x = 2,8325$. Яке це число?

Коли характеристика у цьому логаритмові є 2, то значить у ньому три цифри цілого числа. З таблиць видно, що мантисі 8325 відповідає число 680, тому коли $\lg x = 2{,}8325$, то $x = 680$.

Може трапитися й такий випадок — Знайти число, якого логаритм дорівнює 5,7924.

Ясна річ, що шукане число є шостицифрове, а в таблицях проти мантиси 7924 стоїть число 620, тому решту цифр заміняємо нулями, тоб-то шукане число є 620.000.

З наведених прикладів можемо вивести оце правило: **для визначення числа за даним логаритмом, треба вишукати в стовпчикові з написом lg мантису даного логаритму й узяти число, що відповідає цій мантисі, а потім поставити в ньому протинку так, щоб цілих порядків у числі було на одиницю більше, аніж число одиниць в характеристиці логаритму. Якщо в числі, що його взяли з таблиці, не вистачає цілих порядків, то замість останніх дописати відповідно числу нулів.**

Вправа 1— Знайдіть число x, коли $\lg x = 0{,}8254$.

Мантисі 8254 відповідає число 669, логаритмові 0,8254 відповідає число 6,69.

$$x = 6{,}69.$$

2— Знайти числа за їх логаритмами 2,8312; 1,7612; 2,4456; 1,0043; 1,8312; 3,6830; 1,0158; 2,9818; 3,0158.

3— Знайдіть числа за їх логаритмами 1,9908; 0,9425; 3,9425; 1,8149; 2,9908; 1,9425; 0,8306; 3,8149;

4— Знайти логаритми чисел

677; 6770; 6,82; 537; 43; 67,7; 68,3 682; 0,537; 430.

Логаритмування добутка

§ 3. В § 1 попереднього розділу ми бачили, що можливо множення чисел замінити додаванням логаритмів цих чисел та із суми логаритмів знайти результат множення. Розгляньмо цю операцію для яких завгодно чисел. Припустімо, що нам потрібно перемножити два числа A та B, які мають логаритмами p та q. Тоді (пам'ятаючи, що логаритм числа це є покажчик степеня) можемо написати $A = 10^p$

$$B = 10^q$$

Перемножаючи, дістаємо $A \cdot B = 10^p \cdot 10^q = 10^{p+q}$

Знаємо, що $\lg (A \cdot B) = p + q$, а $\lg A = p$; $\lg B = q$,

Отже $\lg (A \cdot B) = \lg A + \lg B$.

Логаритм добутку двох чисел дорівнює сумі логаритмів чинників.

За допомогою поданої формули маємо можливість обчислити добуток двох чисел. Для цього треба знайти логаритм кожного чинника зокрема, додати їх один до одного і з суми логаритмів знайти число.

Вправа 1— Вирахувати добуток: $x = 125 . 1,6$.

$\lg (125 . 1,6) = \lg 125 + \lg 1,6$.

$$\lg 125 = 2,0969$$
$$\lg 1,6 = 0,2041$$
$$\lg x = 2,3010$$
$$x = 200.$$

2— Найдіть добуток

$x = 45 . 1,2 . 250$. $\lg x = \lg 45 + \lg 1,2 + \lg 250$.

$$\lg 45 = 1,6532$$
$$\lg 1,2 = 0,0792$$
$$\lg 250 = 2,3979$$
$$\lg x = 4,1303$$

У таблицях мантисі 1303 відповідає число 135, але через те, що характеристика $= 4$, шукане число має 5 цифр: тому до 135 дописуємо два нулі.

$x = 13\,500$.

3— Обчислити добутки

185.12; 255. 2,6; 0,0255. 0,26; 40. 1,5. 3,6. 90. 0,25. (Відп. 4860).

Логаритмування частки

§ 4. Коли доводиться поділяти число A числом B, де $A = 10^p$, а $B = 10^d$, то пишемо

$$\frac{A}{B} = 10^p : 10^d = 10^{p-d}$$

$$\lg \frac{A}{B} = p - d \text{ або } \lg \frac{A}{B} = \lg A - \lg B.$$

Логаритм частки дорівнює різниці логаритмів діленика та дільника.

За допомогою цієї формули маємо можливість вичислити частку. Припустімо, що нам потрібно поділити 200 на 1,6, тоб-то знайти $x = \frac{200}{1,6}$; логаритмуємо, $\lg x = \lg 200 - \lg 1,6$;

$$\lg 200 = 2,3010$$
$$\lg 1,6 = 0,2041$$
$$\lg x = 2,0969$$
$$x = 125.$$

Другий приклад: $x = 4{,}8 : 0{,}003$? $x = \frac{4\,8}{0{,}003}$

$$\lg x = \lg 4{,}8 - \lg 0{,}003.$$
$$\lg 4{,}8 = 0{,}6812$$
$$\lg 0{,}003 = \bar{3}{,}4771$$
$$\lg x = 3{,}2041$$

(характеристика 3 через те, що

$$0 - (-3) = +3)$$
$$x = 1600.$$

Коли вираз, що треба обчислити, має вид $\frac{a\,b\,c\,d}{k\,l\,m\,n}$, тоб-то, має цілий ряд чинників у чисельниковій у знаменикові, то знаходимо окремо логаритми чисельника й знаменика, а потім від першого логаритму віднімаємо другий.

Приклади —

Обчислити

$$\frac{1234 \,.\, 17{,}5 \,.\, 0{,}62}{458 \,.\, 0{,}08 \,.\, 101{,}2}$$

$\lg 1234 = 3{,}0913$
$\lg 17\ 5 = 1{,}2430$
$\lg 0{,}62 = -1{,}7924$
$\lg$ чисельника $= 4{,}1267$

$\lg 458 = 2{,}6609$
$\text{fg}\ 0{,}08 = -2{,}9031$
$\lg 1012 = 3{,}0052$
$\lg$ знаменика $= 4{,}5692$

$$\lg x = 4,\ 1267$$
$$\bar{4},\ 5692$$
$$\bar{1},\ 5575$$
$$x = 0,\ 361$$

В останньому випадкові ми проробляємо віднімання звичайним способом, але через те, що після віднімання мантис у характеристиці знаменика лишається 3 одиниці, а у характеристиці від'ємника 4 одиниці, то різниця їх буде —1.

Вправи до розділу 32

1— Обчислити $\frac{100{,}5 \,.\, 13{,}8 \,.\, 420 \,.\, 0{,}07}{26 \,.\, 0{,}5 \,.\, 1400}$

(Відпов. — 2.24).

2— Вичислити $\frac{80{,}6 \,.\, 12{,}05 \,.\, 410 \,.\, 0{,}6}{3070 \,.\, 0{,}06}$

(Відп. — 1297).

3— Ящик 10,85 м. завдовжки, 8,12 м., завширшки та 3,5 м. заввишки. Обчислити його об'єм.

4— Бронзова платівка має розміри: довжина 9,6 см. ширина 7,4 см. товщина 8 мм. Питома вага бронзи 8,4. Обчислити вагу цієї платівки.

5— Для обчислення прибутку з капіталу існує формула

$$П = \frac{К.\ Т.\ В.}{100.\ 12},$$

де К — капітал, Т — % такса, В — час (місяці), П — прибуток. Обчислити П, коли К = 117 500 крб. Т = 6,25; В = 18,5.

6— Радіус основи циліндру — 11,05 см., висота — 6,02. Обчислити його бічницю.

7— Обчислити вирази

a) $1{,}001 \cdot 0{,}0125 \cdot 0{,}314$

b) $0{,}804 \cdot 18{,}1 \cdot 0{,}1203$

c) $540 \cdot 125{,}5 \cdot 3{,}08$

d) $\dfrac{128{,}5 \cdot 1080}{64{,}7 \cdot 1006}$

РОЗДІЛ 33

Логаритми

Закінчення

Находження логаритмів многоцифрових чисел

§ 1. Таблиці, що їх додано до цієї книги, містять у собі мантиси логаритмів всіх трицифрових та чотирицифрових чисел від 1 000 до 1 300. У тих випадках, коли нам доводиться шукати логаритм числа більшого за 1300, але меншого за 10 000, тоб-то, якого завгодно чотирицифрового числа, робимо так:

Нехай нам потрібно знайти логаритм числа 2375. В таблицях ми знаходимо мантиси чисел 237 та 238.

мантиса для lg 237 — 3747
» » lg 238 — 3766

Відомо, що збільшуючи число в 10, 100, 1000 й т. д. разів, ми цим самим не збільшуємо мантиси, а збільшуємо лише характеристику. Тому, для логаритмів чисел 2370 або 2380 мантиси будуть ті саме, що й для чисел 237 та 238

мантиса lg 2370 — 3747
» lg 2380 — 3766

Друга мантиса більша за першу на 19 часток (десятичних), тоб-то, коли число змінилось на 10 одиниць (від 2370 до 2380), то мантиса логаритму змінилась на 19 (десятичних) частин. Припускаючи, що в даному разі зміна логаритму пропорціональна зміні числа (тобто, що зі збільшенням числа пропорціонально збільшується й його логаритм), маємо:

При зміні числа на 10 одиниць мантиса зміняється на 19 част.

» » » » 1 одиницю » » » $^{19}/_{10}$ »

Але нам треба знайти мантису для числа 2375, а це число більше за 2370 на 5 одиниць, тому, коли зміна числа на 1 одиницю відповідає зміні мантиси на $^{19}/_{10}$, то зміна числа на 5 одиниць відповідає зміні мантиси на $\frac{19 \cdot 5}{10} = \frac{95}{10} = 9{,}5$ (частин), або заокругляючи, дістаємо 10 частин (десятитисячних). Цю поправку 10 частин додаємо до мантиси логаритму меншого числа:

$$\begin{array}{rr} \lg 2370 — & 3{,}3747 \\ \text{поправка числа } 5 — & 10 \\ \hline \lg 2375 — & 3{,}3757 \end{array}$$

Другий приклад — Знайти lg 8642.

Пошукаємо lg 8640 та lg 8650. (В таблицях нема чисел 8640 та 8650, але є 864 та 865, нулі-ж на кінці числа на величину мантиси не впливають).

$$\lg 8640 — 3{,}9365$$

$$\lg 8650 — 3{,}9370$$

Різниця мантис є 5. При зміні числа на 10 одиниць, мантиса зміняється на 5 частин; при зміні числа на 1 одиницю, мантиса зміняється на $^{5}/_{10}$. Знаходимо поправку на 2 одиниці (8642 — 8640); ця поправка буде $\frac{5 \cdot 2}{10} = \frac{10}{10} = 1$ (частки) тоб-то,

$$\begin{array}{rr} \lg 8640 — & 3{,}9365 \\ \text{поправка на число } 2 — & 1 \\ \hline \lg 8642 — & 3{,}9366 \end{array}$$

Щоб не проробляти кожен раз отаких обчислень, користуються з таблиці поправок, що містяться в логаритмичних таблицях. Ці табличні поправки на сторінці в стовпчиках, поділених вертикальною рисою; від риси лівобіч знаходимо цифри 1, 2, 3, 4. . . . . 9, правобіч проти цих цифр — поправки, відповідно зміни числа на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 одиниць Кожен стовпчик має зверху число, що вказує різницю між двома безпосередніми мантисами (так звану, табличну різницю).

Для тих випадків що ми їх розглянули, стовпчики поправок мають ось який вигляд:

	19
1	1,9
2	3,8
3	5,7
4	7,6
5	9,5
6	11,4
7	13,3
8	15,2
9	17,1

Нам довелося додати поправку на 5 одиниць. В цьому стовпчикові знаходимо, що 5 одиницям відповідає поправка мантиси 9,5 або, заокругляючи, в 10 часток.

Для другого прикладу де різниця двох безпосередніх мантис є рівна 5, стовпчик, що над ним зверху 5, має такий вигляд:

	5
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5

Шукаємо поправку на 2 одиниці. У стовпчикові знаходимо, що зміні на 2 одиниці відповідає поправка в 1 (десятитисячну) для мантиси.

Ці стовпчики, звичайно, позначаються двома літерами «PP», що латинською мовою пишуть partes proportionales, тоб-то пропорціональні частини (тому, що мантиси змінюються пропорціонально зміні чисел).

Примітка: Власне кажучи, зміна логаритму не цілком пропорціональна зміні чисел, але похибка, що її при цьому припускаємо, остільки мала, що не впливає помітно на результат.

Якщо число має більш за чотири цифри, то замість логаритму даного числа шукаємо в таблицях логаритм безпосередньо меншого за нього числа, щоб його вартісна частина складалася з 4 цифр даного, а решту цифр заміняємо нулями.

Напр., коли буває потрібно знайти lg 27 658, то заміняємо його логаритмом числа 27 650. Якщо треба знайти логаритм числа 184 568, то шукаємо логаритм числа 184 600. Звичайно, це викликає деяку неточність, але похибка дуже невелика. Коли бажають мати більше точний результат, користуються з таблиць, які мають 5,7 знаків мантиси.

Вправа 1 — Знайти lg 4288

Розвязуємо: lg 4280 — 3,6314

lg 4290 — 3,6325

Таблична різниця 11; в таблицях цю різницю написано між двома відповідними мантисами.

Шукаємо поправку на число 8 (різниця між даним числом 4288, та найближчим меншим). В стовпчикові *pp*, де зверху стоїть число 11, знаходимо поправку на 8 одиниць; вона дорівнює 8,8. Заокругляючи, беремо 9. Пишемо:

$$\begin{array}{l} \lg\ 4280 - 3{,}6314 \\ +\quad\ \ 8 - \qquad 9 \\ \hline \lg\ 4288 - 3{,}6323 \end{array}$$

2— Знайти lg 86754

Шукаємо логаритм числа 86750. Характеристика його 4. Для знаходження мантиси, беремо число 8675. Шукаємо його мантису

$$\left.\begin{array}{l} \lg\ 8670 - 3{,}9380 \\ \lg\ 8680 - 3{,}9385 \end{array}\right\} \text{Таблична різниця 5}$$

Поправка 2,5 або 3

Остаточно lg 86754 — 4,9383

3— Знайти логаритми чисел 489; 0,4896; 3726; 372,6; 47600; 47265; 948236; 0,00048.

4 — Знайдіть логаритми ось яких чисел 3767; 2548; 3172; 2984; 0,2984; 0,003178.

Находження числа за його логаритмом, коли в таблицях немає відповідної мантиси

§ 2. Нехай треба знайти число, що має логаритм 2,9036. Шукаємо отаку мантису в таблицях, поки-що не звертаючи уваги на характеристику. Дана мантиса відповідає числу, вартісна частина якого є 801.

Пошукаємо ще число, що його логаритм = = 0,9253. В таблицях цій мантисі відповідає число, вартісна частина якого є 842. Тому, що характеристика є 0, то число буде 8,42.

Але часто трапляється, що мантиси логаритму, що її нам дано, в таблицях нема.

Напр., треба знайти число x, коли lg $x = 0{,}8992$. В таблицях знаходимо дві мантиси 8987 та 8993; між ними міститься дана мантиса 8992. Дізнаємося, яка таблична різниця (d); 8993 — 8987 = 6 (десятитисячних).

Далі шукаємо, на скільки дана нам мантиса відрізняється від найближчої меншої, що є в таблицях, тоб-то від 8987. Ця різниця є 8992 — 8987 = 5.

Мантисі 8987 відповідає число 792
» 8993 » » 793

Цілком зрозуміло, що мантиса логаритму числа, що його шукаємо, більше за 8987 і менше за 8993, а тому й шукане число більше 792 і менше 793. Отже, до числа 792 треба додати якусь поправку. Для вичислення цієї поправки міркуємо так: таблична різниця між двома сусідніми мантисами = 6. Це значить, коли число змінюється на 1, то мантиса змінюється на 6 (десятитисячних). Нам треба знайти, наскільки повинно змінитись число, щоб мантиса його логаритму змінилася на 5 (десятитисячних), тоб-то від 8 987 до 8 992. Очевидно, число повинно змінитись на 5 : 6 одиниці або 0,8. Цю поправку д о п и с у є м о до меншого числа, маємо 7928. Але тому, що характеристика дорівнює 0, число буде = 7,928.

Замість того, щоб кожен раз проробляти вищенаведені обчислення, скористуємося з таблиць «*p p*», причому шукаємо той стовпчик, який відповідає табличній різниці (в даному разі 6). Тоді правобіч від вертикальної риси будемо шукати поправку до логаритму (тоб-то різниці між даною мантисою та найближчою меншою), а лівобіч від риси — поправку до числа.

Для даного прикладу стовпчик має такий вигляд:

	6
1	0,6
2	1,2
3	1 8
4	2,4
5	3,0
6	3,6
7	4,2
8	4,8
9	5,4

Поправка до даного нами логаритму є рівна 5 (десятитисячних), бо найближча мантиса, що знаходимо в таблицях — 8 987, а наша мантиса 8 992. Правобіч шукаємо поправку 5, такої нема, а є 4,8 (її беремо, бо вона найближча до 5). Ця поправка відповідає поправці до числа в 8 частин.

Обчислення записуємо так

$\lg x = 0{,}8992$

мантисі 8987 відповідає 792
» 8993 » 793

Табл. різниця 6

Різниця між даною мантисою й найближчою меншою — 5. У стовпчикові, де вгорі над ним є число 6, шукаємо поправку на 5. Поправка — 8. Остаточно:

$$\begin{array}{rcr} 8\,987 & - & 792 \\ + \quad 5 & - & 8 \\ \hline 8\,992 & - & 7\,928 \end{array}$$

Тому, що характеристика $= 0$

$$x = 7{,}928$$

Таким способом знаходимо четвертий знак числа. Точніше проробляти обчислення за поданими нами таблицями немає рації, бо більшої точности вони не можуть дати.

Вправа 1—Найти x, коли логарифм x дорівнює

1,5752	1,6890
0,5752	2,6890
$\bar{1},5752$	0,6890
$\bar{2},5752$	

2—Найти x, коли логарифм x дорівнює

1,6215; 0,6000; 1,5735; $\bar{2},6388$; 1,6585

Логаритмування степеня

§ 3. Нехай маємо $y = a^k$ і треба знайти $\lg a^k$ Через те, що степінь є добуток рівних чинників, то $y = a.a.a.....a.a.$ (k разів)

За правилом логаритмування добутка дістаємо:

$$\lg y = \overbrace{\lg a + \lg a + \lg a \ldots + \lg a}^{k \text{ разів}}$$

$$\text{Тоб-то} \quad \lg y = k \lg a.$$

Лагаритм степеня дорівнює добуткові з покажчика степеня та логаритму степеньованого числа.

Коли маємо $x = 2^{10}$, то логаритмуючи, дістаємо

$$\lg x = 10 \lg 2 = 10.\ 0{,}3010 = 3{,}0100.$$

Шукаємо число, що відповідає логаритмові 3,0100. Знаходимо, $x = 1024$ (приблизно).

Приклади—Обчислити: а) $x = 4{,}2^5$.

$$\lg x = 5\ \lg 4{,}2 = 5\ .\ 0{,}6232 = 3{,}1160.$$

Логаритмові 3,1160 відповідає число 1306,

$$\text{отже } x = 1306$$

б) $x = 42^2 .\ 0{,}8^3$. Маючи на увазі, що в правій частині два чинники (42^2 та $0{,}8^3$), то (як логаритм добутку) $\lg x = \lg\ 42^2 + \lg 0{,}8^3$.

Далі $\lg x = 2 \lg 42 + 3 \lg 0{,}8$ (як логаритм степеня). Записуємо так:

Головні вичислення	Допоміжні вичислення
$2 \lg 42 = 3{,}2464$	$\lg 42 = 1{,}6232$
$3 \lg 0{,}8 = \bar{1}{,}7093$	$2 \lg 42 = 3{,}2464$
$\lg x = 2{,}9557$	$\lg 0{,}8 = \bar{1}{,}9031$
$x = 903.$	$3 \lg 0{,}8 = \bar{1}{,}7093$

Вправи — Вичислення проробляти за допомогою логаритмів:

1—Обчислити поверхню сфери (кулі), що її радіус дорівнює 6,05 метра?

2—Обчислити об‘єм кубу, що в нього руб дорівнює 11,4 см.

3—Прямокутній рівнобіжностінник має основою квадрат; у квадрата бік дорівнює 8,8 см.; висота рівнобіжностінника 25,6 см. Обчислити об‘єм рівнобіжностінника.

Логаритмування кореня

§ 4. Нехай треба обчислити $x = \sqrt[n]{A}$. Підносимо до степеня n обидві частини рівности; дістанемо в лівій x^n, а у правій A (тому, що знак кореня зникає; бо степенювання й корінювання — дії обернені одна до одної). Отже, $x^n = A$. Логаритмуємо обидві частини, маємо

$$n \lg x = \lg A,$$

$$\text{звідци} \quad \lg x = \frac{\lg A}{n}$$

тоб-то, л о г а р и т м к о р е н я д о р і в н ю є ч а с т ц і з л о г а р и т м у п і д к о р і н н о г о ч и с л а т а п о к а ж ч и к а к о р е н я.

За допомогою цього правила маємо можливість добувати кореня в тих випадках, коли звичайні способи дуже складні, як от корені 3-го, 5-го степеня то-що.

Приклад—Добути кореня $\sqrt[3]{15625}$.

Записуємо $x = \sqrt[3]{15625}$; знайти x.

$$\lg x = \frac{\lg 15625}{3} = \frac{4,1939}{3} = 1,3979$$
$$x = 25$$

Допоміжні обчислення $\lg 15625 = 4,1939$

Числу 1560	відповідає	1931
» 1570	»	1959
Таблична різниця		28
Поправка на 3 одиниці—		8,4
числу 1563 —		1931
	+	8
		1939

Примітка: Добуваючи кореня, нам часто доводиться поділяти логаритм підкорінного числа на покажчика кореня. Тому, що часто-густо добуваємо кореня з десяткового дробу, а логаритм десяткового дробу (правильного) має від'ємну характеристику, то ми покажемо, як поділяти від'ємну характеристику та додатню мантису.

Нехай треба добути кореня $\sqrt[5]{0,00256}$.

Записуємо так: | Допоміжні вичислення

$x = \sqrt[5]{0,00256}$.

$\lg x = \dfrac{\lg 0,00256}{5} =$

$= \dfrac{\bar{3},4082}{5}$

$\lg 0,00256 = \bar{3},4082$.

Через те, що логарифм $\bar{3},4082$ має характеристикою — 3, й вона не поділяється (без остачі) на 5, ми додаємо до характеристики — 3 стільки від'ємних одиниць, щоб вона поділялась на 5, у даному разі додаємо 2 одиниці. Тоді характеристика буде — 5. Але, щоб величина логаритму не змінилася, додаємо до мантиси 2 додатніх одиниці. Мантиса буде 2,4082. Робимо так

$$\frac{\bar{3},4082}{5} = \frac{-5+2,4082}{5} = -1 + 0,4816 = \bar{1},4816$$

а із цього логаритму знаходимо $x = 0,3031$.

Якби нам було потрібно цей саме логаритм $\bar{3},4082$ поділити, припустімо, на 7, то додаємо до характеристики 4 від'ємних одиниці, а до мантиси 4 додатніх одниці. Тоді величина логаритму не змінюється.

$$\frac{\bar{3},4082}{7} = \frac{-7+4,4082}{7} = -1+0,6297 = \bar{1},6297.$$

Цілком зрозуміло, що якби нам було потрібно поділити $\bar{3},4082$ на 3, тоб-то, той випадок, коли від'ємна характеристика поділяється на знаменика, тоді ділення проробляємо звичайним порядком; характеристика зміняється лише тоді, коли вона не поділяється на знаменика.

Вправи—Вичислити $\sqrt[3]{0,7227}$.

Розвязання:

$$x = \sqrt[3]{0,7227}$$

$$\lg x = \frac{\lg 0,7227}{3}$$

$$\frac{\bar{1},8589}{3} = \frac{-3+2,8589}{3} =$$

$$= -1+0,9529 = \bar{1},9529.$$

$$x = 0,8972$$

Допоміжні обчислення

722 — 8585

723 — 8591

табл. різн. = 6

Поправка на 7 = 4,2, або 4.

$$\lg 0,7227 \left\{ = \begin{array}{r} \bar{1},8585 \\ +\ 4 \\ \hline \bar{1},8589 \end{array} \right.$$

Вправи до розділу 33

Обчислити вправи, користуючись з правил логаритмування та логаритмичних таблиць

1 $\sqrt[3]{2425}$; $\sqrt[8]{848}$; $\sqrt[5]{27825}$.

2 $\sqrt[3]{0,0065}$; $\sqrt[5]{2,0879}$; $\sqrt[3]{0,06825}$.

3 $\dfrac{138 \, . \, 2,5 \, . \, 860 \, . \, 0,004}{8600 \, . \, 1,2}$

4 $2,5^3 \, . \, 1,8^3 \, . \, 4,6^2$.

5 $\dfrac{48^2 \, . \, 3,6^3}{4,08^2 \, . \, 29^3}$

6 $\dfrac{\sqrt[3]{12658} \, . \, \sqrt[3]{258,9}}{48,5 \, . \, 1,6}$

7— Логаритмувати вирази

a) $x = \frac{abc^3}{k^4}$, c) $x = \sqrt[3]{abc}$

b) $x = \frac{a^2 b^2 \sqrt{c}}{k^2}$ d) $x = \sqrt[n]{a^2 b^2 c^3}$

e) $x = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[4]{c}$.

РОЗДІЛ 34

Складні відсотки (або зложені)

Поняття про складні відсотки

§ 1. В комерційних разрахунках доводиться мати справу не тільки зі звичайними відсотками, про що у нас вже була розмова, а й з складними. Розрахунком звичайних відсотків звемо такий, коли відсотки нараховується ввесь час лише на первісний капітал. Коли-ж відсотки що-року нараховується не на первісний капітал, а на нарощений, то такий розрахунок звуть *складними відсотками*. Коли робітник вкладає до ощадної каси, що платить 4% річних, 20 карб., то пролежавши рік, вони виростуть у $20 + 20 \cdot 0{,}004 = 20{,}8$ карб. Протягом другого року відсотки вже нараховуватиметься не на 20 крб., а на 20,8 крб. Протягом третього року знову на нарощений капітал і т. д. От це і є рахучок складних відсотків. В такому разі кажуть, що капітал росте за законом складних відсотків.

Основна формула для вичислення складних відсотків

§ 2. Коли ощадна каса платить за вкладку Р% річних, то А крб. дадуть в кінці першого року прибутку, як ми знаємо з попереднього $\frac{AP}{100}$.

Отже, в кінці цього року первісний капітал виросте в $A + \frac{Ap}{100}$ або $A\left(1 + \frac{P}{100}\right)$ (нарощен. капітал) (якщо А, спільного чинника, візьмемо за дужки).

Чинника $\left(1 + \frac{P}{100}\right)$ звуть *відсотковим чинником* (*або процентовим чинником*); тому можемо сказати так: *величина капіталу, який дістаємо при нарощенні за складні відсотки за 1 рік, складається шляхом помноження первісного капіталу А величиною відсоткового чинника* $\left(1 + \frac{P}{100}\right)$.

Коли кожен карбованець за рік перетворюється на

$\left(1+\frac{P}{100}\right)$, то $A\left(1+\frac{P}{100}\right)$ карб. перетворюється

на $A\left(1+\frac{P}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{P}{100}\right)=A\left(1+\frac{P}{100}\right)^2$

Це нарощений капітал в кінці другого року.

Подібно до цього (за тими-ж самими міркуваннями) в кінці третього року капітал виросте в $A\left(1+\frac{P}{100}\right)^2\left(1+\frac{P}{100}\right)=$ $=A\left(1+\frac{P}{100}\right)^3$; в кінці четвертого року виросте в

$$A\left(1+\frac{P}{100}\right)^4.$$

Зазначаючи нарощений капітал літерою A зі знаком підсподом, первісний A без знаку, можемо записувати так

в кінці першого року $A_1=A\left(1+\frac{P}{100}\right)$

» другого » $A_2=A\left(1+\frac{P}{100}\right)^2$

$$A_3=A\left(1+\frac{P}{100}\right)^3$$

$$A_4=A\left(1+\frac{P}{100}\right)^4,$$

. . . .

$$A_t=A\left(1+\frac{P}{100}\right)^t.$$

Нарощений капітал є добутком двох чинників: первісного капіталу та відсоткового чинника, взятого в степені, що дорівнює числу років нарощення капіталу.

Формула $A_t=A\left(1+\frac{P}{100}\right)^t$ має назву основної формули нарощення за складними відсотками. Вона складається з 4 величин: A_t — нарощений капітал, A первісний капітал, P — число відсотків, які ростуть на капітал, та t — число років нарощення. Тому, коли три з цих зазначених величин дано — четверту можемо обчислити.

Задачі. § 3. Розвяжім декілька задач на складні відсотки.

1 — Визначення нарощеного капіталу. Капітал 800 крб. вкладено за 5% складних. Яка сума виросте через 8 років?

Маємо $A = 800$, $P = 5$, $t = 8$.

$$A_8 = A\left(1 + \frac{P}{100}\right)^8; \; A_8 = 800 . \, 1{,}05^8.$$

Логаритмуємо	Допоміжні обчислення
$\lg A_8 = \lg 800 + 8 \lg 1{,}05$	$\lg 800 = 2{,}9031$
	$\lg 1{,}05 = 0{,}0212$
$\lg A_8 = 3{,}0727$	
	$8 \lg 1{,}05 = 0{,}1696$
$A_8 = 1182.$	$3{,}0727.$

2 — Визначення первісного капіталу. Відомо, що якийсь капітал за 10 років за 6% складних виріс до 25.600 крб. Знайти первісний капітал.

З основної формули $25.600 = A\left(1 + \frac{6}{100}\right)^{10}$, або $25.600 = A \, 1{,}06^{10}$; звідци $A = \frac{25600}{1{,}06^{10}}$

Логаритмуємо	Допоміжні обчислення
$\lg A = \lg 25\,600 - 10 \lg 1{,}06$	$\lg 25\,600 = 4{,}4082$
	$10 \lg 1{,}06 = 0{,}2530$
$\lg A = 4{,}1552$	$4{,}1552$
$A = 14\,300$ крб.	

Часто доводиться, як ми бачили, помножати логаритм будьяким числом і от тому, що мантиси логаритмів є числа не точні, наближені, тоб-то, ми беремо їх завжди з якоюсь похибкою, від множення, ця похибка значно збільшується. Щоб похибка була меншою, вживають логаритми, яко-мога точніші, не з чотирма десятковими знаками, а з п'ятьма, а то й більше.

3 — Визначення числа років.

Через скільки років капітал 12 800 крб. виросте до 90 600 крб., наростаючи по 4% складних?

$$90\,600 = 12\,800 \, . \, 1{,}04^t.$$

Логаритмуємо $\lg 90\,600 = \lg 12\,800 + t \lg 1{,}04$ або $\lg 90\,600 - \lg 12\,800 = t \lg 1{,}04$, отже

$$t = \frac{\lg 90600 - \lg 12800}{\lg 1{,}04} \qquad \begin{array}{r} \lg 90600 = 4{,}9571 \\ \lg 12800 = 4{,}1072 \\ \hline 0{,}8499 \end{array}$$

$$\lg 1{,}04 = 0{,}0170$$

$$t = \frac{0{,}8499}{0{,}0170} = 50 \text{ років (з нев. похибкою).}$$

В попередніх задачах ми бачили, що для вирахування складних відсотків доводиться користуватися логаритмичними таблицями.

Цікаво порівняти рост за законом складних відсотків з ростом за законом звичайних відсотків. Коли вкладка 25 крб. при складних 4% через 20 років виросте у $25 \cdot 1{,}04^{20}$ або в 54 крб. 70 коп. (перевірте), то при звичайних відсотках вона виросте у 45 карб. (перевірте). Ця різниця неначе б-то не дуже велика, але вона робиться великою зі збільшенням часу. Наприкл., 5 крб. при 4% складаних виростають через 1900 років у таку суму, якої не знайшлося-б на всій земній кулі для виплати, а якщо ті самі 5 крб. покласти на те-ж число років за звичайними відсотками, то вони перетворються в суму біля 400 карбованців.

За законом складних відсотків відбувається багато явищ: зріст населення країни, зріст ділянки лісу, поширення стрижня при нагріванні то-що (поясніть, чому зміна цих явищ відбувається на законові складних відсотків?)

Вправи до розділу 34

1—У що виросте капітал в 500 карб. при складних 10% за 12 років?

2—По перепису в місті було 91 520 населення. Коли щорічний приріст населення 2%, то яка кількість його буде через 20 років?

3—У Харкові 1925 року було 432 700 населення. Щорічний приріст 1,8%. Визначити населення Харкова 1900 року, тоб-то 20 років перед цим.

4—Через скільки років капітал 13 000 крб. виросте у 42 000 крб. при 6% складних?

5—За скільки років капітал підвоїться при 5% складних? (Відп.— Біля 18 років).

6—За який час капітал потроїться при 6% складних? (Відп.— Трошки більше 19 років).

7—Заповніть таблицю (в кожному прикладі три величини дано, а четверту треба знайти).

	A	p	t	At
№ 1	3500	4	12	
№ 2	3625	4		4961
№ 3		5	15	10000

Відпов. № 1—5600

» № 2— 8 років

» № 3—4810 крб.

8—Підчас таксації лісу його об'єм було визначено в 32000 куб. сажнів. Маючи на увазі, що його приріст щорічний дорівнює 1,5%, визначте, який об'єм лісу буде через 12 років?

РОЗДІЛ 35

Елементи теорії ймовірностей

Випадкове явище. Об'єкт теорії ймовірностей

§ 1. Теорія ймовірностей досліджує, так звані, «випадкові явища». В звичайному житті визнають «випадковими» такі явища, що не мають причини. Це не правильно. В низці послідовних явищ, кожне з них призводить наступне й у свою чергу є результат ділання попереднього явища. Ці попередні явища ми звемо причинами явищ наступних.

Якби ми мали можливість кожного даного моменту опанувати всіма явищами, що нас оточують, то для нас не було-б ніяких «випадкових явищ» наступного моменту й ми могли-б передбачити всі явища. Але через те, що ми не можемо охопити одночасно всі явища, що відбуваються навкруги нас, то від нас уникає багато причин явищ і ось ці явища, так-би мовити, для нас несподівані, ми й звемо випадковими, точніше було-б сказати, непередбаченими.

Таким чином, відсутність помітного звязку між причинами різних подій нам лише здається, бо кожне явище, як-би несподівано воно не було, має свої основи й причини для виникнення. Тому ті явища, що їх причини ми з певною точністю передбачити не можемо — чи тому, що ми їх не знаємо, чи тому, що причини занадто складні й не підлягають нашому облікові — ми звемо «випадковими явищами».

Подамо приклад. Припустімо, що кидаємо грошину. Може стати, що після падіння зверху буде або серп і молот, або зворотній бік «решка». Чи той чи другий випадок залежить від багатьох причин.

Від ваги монети та її форми, від її становища за моменту падіння, від місця, величини й напрямку товчка, від якого вона падає, від опору повітря й ще цілої низки инших умов, які до такої міри різноманітні й складні, що не піддаються точному облікові. Тому, результат випадіння тої або иншої сторони ми звемо — «випадковим явищем».

Не дивлячись на всю різноманітність випадкових явищ, всі вони підлягають якимось законам. Вивчення цих законів і є об'єктом теорії ймовірностей.

Подія та випадок. Визначення ймовірности. Противні ймовірності

§ 2. Знайомлючись з елементами теорії ймовірностей доводиться часто вживати слова: подія, випадок.

Випадком (або шансом) називають всяке окреме явище підчас якого-небудь спостереження або спроби. Подія — це поява кожного з однорідних випадків. Напр., в ящикові мається 10 білих куль, 6 чорних та 4 червоних. Виймаємо навмання одну кулю з цього ящика. При цьому ми маємо 20 можливих випадків (поява кожної кулі зокрема) і лише три події (поява білої, чорної або червоної кулі). Сукупність обставин, що за них спостерігаємо появу тої чи иншої події, звемо спробою. Якщо підчас спроби можна сподіватися на появу декількох подій, причому не маємо ніяких основ гадати, що одна з них стане переважати инші, то ці події звемо рівноможливими. Так, напр., якщо в ящикові маємо 4 білих та 4 червоних кулі, то поява білої або червоної кулі будуть подіями рівноможливими; коли-ж у ящикові є 8 білих куль та 12 червоних, то появи тієї або иншої з них не рівноможливі. Крім того, ми припускаємо, що за всіх спроб випадки не згідні один з одним, тоб-то, що при наявності одного з них не може бути одночасно другий. Якщо поява якоїсь події при спробі не певна, тоб-то, якщо невідомо — чи відбудеться вона, чи ні, то міру надії на цю подію звемо ймовірністю. Не важко помітити, що ймовірність події залежить від числа випадків, що вони сприяють її появі, так і від числа випадків несприятливих для її появи; зі зростанням числа сприятливих випадків ймовірність події збільшується, зі зростанням числа, несприятливих випадків — зменшується. Якщо через M позначимо число всіх рівноможливих випадків за даної спроби, а через m число випадків, сприятливих для появи події, якої сподіваємося, то ймовірність її появи буде тим більша, чим більше m, тоб-то вона буде змінятися, як дріб $\frac{m}{M}$, звідки можна зробити такий висновок:

Математична ймовірність події міряється дробом, що її чисельник дорівнює числу випадків, сприятливих для появи події, що її сподіваємося, а знаменик — числу всіх незалежних рівноможливих випадків у даній спробі.

Дріб $\frac{m}{M}$, що виявляє ймовірність події, може набувати всі значіння від 0 до 1. Ймовірність перетворюється в 1, якщо $m = M$, тоб-то, коли всі випадки сприяють появі події, на яку покладаємо надію. В цьому випадкові кажемо, що **подія певна**, тоб-то вона обов'язково мусить статися. Тому, за одиницю міри ймовірностей можемо взяти (прийняти) ймовірність певної події. Коли $m = 0$, то дріб $\frac{m}{M}$ перетворюється на 0, тоб-то за відсутности випадків, сприятливих для появи якої небудь події, ймовірність появи її, є рівна 0.

Нехай імовірність появи події, що її бажано, дорівнює p, тоді, якщо всіх рівноможливих випадків при спробі буде M, а сприятливих появі подій m, то

$$p = \frac{m}{M}$$

Якщо ймовірність появи даної події є $\frac{m}{M}$, то ймовірність непояви її дорівнює

$$\frac{M - m}{M},$$

бо $M - m$ є число випадків несприятливих появі події, а M — число всіх випадків. Означаючи цю останню ймовірність через q і, припускаючи, що $M - m = n$, дістаємо

$$q = \frac{n}{M}$$

ймовірність p та q звемо противними. Сума противних ймовірностей завжди дорівнює 1. Справді

$$p + q = \frac{m}{M} + \frac{n}{M} = \frac{m}{M} + \frac{M - m}{M} = \frac{M}{M} = 1.$$

Якщо ймовірність двох противних подій однакова, тоб-то $p = 1/2$, то ми нічого не можемо сказати наперед відносно того чи другого з них — ми не знаємо, що спричиниться, шанси рівні. Цей випадок має назву **принципу відсутньої основи**. Коли умови появи події дано в дійсності, то ймовірність появи цієї події ми обчислюємо загодя. Це, так звана, **ймовірність à priori**, всупереч чому ймовірність, що її обчислено на підставі спроб (досвідів), звемо ймовірністю á posteriori. Може виникнути сумнів, чи не розходиться ймовірність á priori з досвідом.

Досвіди показали, що різниця дуже незначна і зменшується зі зростанням числа спроб.

Закон великих чисел

§ 3. Основою для всіх практичних застосовань теорії ймовірностей є теорема, що має назву теореми Якова Бернуллі або закон великих чисел.

На підставі цієї теореми можемо вказати з імовірністю як завгодно близькою до певности ті гряниці, між якими мусить міститися число повторень якоїсь випадкової події при великому числі спроб. Теорема свідчить, що число відхилень події не може значно відхилятися від добутку всіх спроб на ймовірність події.

За-для з'ясування цієї важної теореми розгляньмо такий приклад. — Припустімо, що ми кидаємо грошину; ймовірність, появи тої чи иншої сторони однакові та рівні $^1/_2$. Кинемо грошину 100 разів. За цією «теоремою Бернуллі» число падінь на ту або иншу сторону буде міститися між числами 33 та 67. Цеб-то відхилення числа падінь від половини 100 не перевищує 17.

Ймовірність такого віщування так само важна, як віщування, що особа, яка має один виграшний білет, не виграє нічого в наступному тиражі. Збільшімо число кидань у 100 разів, тоб-то будемо кидати її 10 000 разів. Тоді за теоремою Бернуллі число падінь на кожну сторону буде міститися між гряницями 5 175 та 4 825, инакше кажучи, відхилення від половини буде не більше 175. Збільшімо число кидань ще в 100 разів. Тоб-то будемо кидати грошину 1 000 000 разів. Тоді число падінь на кожну сторону буде міститися поміж гряницями 501 750 та 498 250, а значить, відхилення від половини мільйону не більше, як 1 750. При ста мільйонах кидань відхилення від половини не більше 17 500 і т. д.

Рівноставмо тепер два ряди одержаних чисел. Число кидань грошини збільшувалось кожен раз у 100 разів. Найбільші відхилення були послідовно 17, 175, 1750, 17500 й т. д. Ці відхилення хоча й зростали, але значно повільніше; вони збільшувались тільки в 10 разів. Ця обставина має величезне значіння. Ясно, що коли ми будемо розглядати не абсолютні цифри відхилення, а їх відношення до загального числа спроб, то ми будемо діставати все менші й менші дроби. Найбільше відхилення при 100 пробах не перевищує 17% загального числа спроб, при 10 000 вона не перевищує 1,7%, при 1 000 000 вона не перевищує 0,17% і, нарешті, при ста мільйонах не перевищує 0,017%, тоб-то в міру збільшення числа кидань грошини відношення числа падінь грошини на кожну сторону до загального числа падінь сягає дробу $^1/_2$.

Звідци маємо цікавий вислід: якщо робити послідовно два ряди кидань грошини, що містять кожний дуже велике число таких кидань, то ми можемо сподіватися довгочасної правильности.

Відношення (в обох випадках) числа падінь «на зверхній бік» до загального числа падінь будуть майже рівні, а що-більші будуть числа спроб, то більше до рівности будуть ці відношення.

У всіх випадкових явищах, що походять від сукупности багатьох причин так постійних, як і змінних, ми помічаємо власне цю правильність, яка й уявляє собою закон випадкових явищ, що його доводять à priori теорією ймовірностей.

Великі числа виправляють випадок і спостереження над явищами. Масові спостереження відкривають нам правильність та закономірність навіть там, де, на перший погляд, її, здавалося, не може бути.

Розвяжіть приклади:

1 — Кидають іграшну кість. Визначити величину ймовірности, що випаде 4 «очка».

2 — З колоди карт виймають одну карту. Визначити ймовірність появи: 1) винової дами, 2) якого-небудь туза, 3) туза червоної масти, 4) карти жирової масти, 5) якої-небудь фігури.

3 — В лотереї мається 20 квитків виграшів певної ставки, 15 виграшів половинної ставки та 25 квитків пустих. Визначити ймовірність: 1. якого-небудь виграшу; 2. повного виграшу; 3. програшу.

4 — Грошину кидають до гори 2 рази. Яка ймовірність, що при цьому дворазовому викиданні, хоча один раз з'явиться «зверхній бік» (серп та молот)?

5 — Яка завбільшки ймовірність одержати 8 «очків», кинувши 2 кості один раз?

Додавання та множення ймовірностей

§ 4. Теорія ймовірностей, допомагаючи науці, дає можливість розвязувати багато питань практичного життя, де велику ролю відограють «випадкові» явища.

В попередньому §-і ми бачили, що величина ймовірности прямопропорціональна числу сприятливих випадків і обернено пропорціональна числу всіх можливих випадків. Але через те, що безпосередній підрахунок всіх можливих випадків, а також і тих, що вони є сприятливі, дуже трудна справа, то для полегшення обчислення ймовірности користуються з теореми додавання та множення ймовірностей.

Додавання ймовірностей. Коли ймовірність події A є p, а ймовірність події B є q, причому обидві ці події не згідні, то ймовірність того, що наступить, принаймні, одна із цих подій, є рівна $p+q$, тоб-то дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

Напр., з 100 квитків, лотереї я купив 3 квитки, а мій товариш 7, тоді ймовірність мого виграшу (подія A) дорівнює $^3/_{100}$; ймовірність виграшу мого товариша (подія B) дорівнює $^7/_{100}$. Ймовірність, що виграє, принаймні, один з нас, одержимо, коли помітимо, що в нас обох 10 квитків; вона дорівнює $^{10}/_{100}$, але це число є сума

$$p+q=\frac{3}{100}+\frac{7}{100}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}.$$

Так само, коли розглядаємо декілька незгідних подій A зі ймовірністю q; B зі ймовірністю p; C зі ймовірністю t й т. д., то ймовірність P, що наступить, одна з цих подій і дорівнює

$$P=p+q+t+\ldots\ldots$$

Множення ймовірностей. Якщо ймовірність якоїсь події А дорівнює p, а ймовірність другої події В дорівнює q (причому В не залежить від А), то ймовірність того, що відбудуться обидві події, дорівнює добуткові p.q.

Розгляньмо такий приклад:

Я купую один квиток одної лотереї, в якій усього 25 номерів, і з яких 1 тільки виграє. Крім того, я купую 3 квитка другої лотереї, в якій 60 номерів і також 1 виграє. Спитаймося яка ймовірність виграшу в першій та другій лотереї (вкупі)?

Ясно, що ймовірність виграшу в першій дорівнює $\frac{1}{25}$ $\left(p=\frac{1}{25}\right)$, ймовірність виграшу в другій $q=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$. Обчислимо тепер, скільки всього може бути рівноможливих випадків.

У першій	лотереї	витягується	№ 1,	в 2-й—який	завгодно	з 60-ти			
»	»	»	»	№ 2	» »	»	»	»	»
»	»	»	»	№ 3	» »	»	»	»	»

і т. д.

Разом 25 . 60 = 1500.

Сприятливих випадків буде всього 3 (коли в першій лотереї виграв єдиний, що є у мене на руках номер, і в той-же час у другій лотереї витягнуть один з трьох моїх номерів). Тому, ймовірність одночасного виграшу в двох лотереях дорівнює

$\frac{3}{1500}=\frac{1}{500}$, але це число якраз дорівнює добуткові ймовірностей

$$pq=\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{500}.$$

З теореми множення ймовірностей виникає, між иншим, що ймовірність наступу двох незалежних подій завжди менше, аніж ймовірність кожного з них зокрема (якщо тільки події ці непевні), бо добуток двох правильних дробів завжди менше кожного з них.

Для прикладу розгляньмо таку гру. З колоди карт числом 52 ви виймаєте по одній карті, а я її вгадую. За неугадану карту я вам плачу 1 коп., а за вгадану карту ви мені платите 1 крб.

Обмежімося обчисленням ймовірности вашого виграшу, якщо ми зіграємо 100 партій. Для того, щоб ви не лишились зі збитком, потрібно, щоб ви виграли всі 100 партій через те, що досить вам програти хоч одну партію, щоб ви мусили виплатити мені одного карбованця й тоді, навіть вигравши 99 партій, ви за них одержуєте лише 99 коп., а значить ваш збиток є 1 коп.

Оскільки-ж велика ймовірність, що ви виграєте всі 100 партій? Ймовірність виграшу першої партії дорівнює $\frac{51}{52}$; вихід кожної партії цілком не залежить від решти. Тому, ймовірність того, що відбудуться дві незалежні події — виграш вами 1-ої й 2-ої партії дорівнює $\frac{51}{52} \cdot \frac{51}{52} = \left(\frac{51}{52}\right)^2$. Ймовірність того, що ви виграєте 3 партії підряд, дорівнює $\left(\frac{51}{52}\right)^3$.

Нарешті, ймовірність того, що відбудуться всі 100 незалежних подій, дорівнює $\left(\frac{51}{52}\right)^{100}$. Обчислюючи цей вираз за допомогою логаритмів, дістанемо:

$$\left(\frac{51}{52}\right)^{100} = \frac{1}{7}$$

Таким чином, ймовірність щасливого кінця гри для вас також мала, як і ймовірність витягнути один виграшний квиток в лотереї, що в ній мається 7 квитків і з них 6 пустих. Можна, навіть, довести, що-що-більше ви виграєте партій, то більша ймовірність того, що ви будете зі збитком і при тому значно великому, тоб-то в міру збільшення числа партій можна віщувати неминучість вашої повної поразки за гри на запропонованих умовах.

Теорія ймовірностей дозволяє з'ясувати собі поступовий перехід від імовірности до певности, від незнання до знання.

Я кидаю кість; ймовірність, що випаде 6 «очків», дорівнює $\frac{1}{6}$. Ніхто не стане заперечувати, що це легко може статися. Ймовірність що я, кидаючи кість, одержу 2 рази підряд по 6 очків, дорівнюватиме $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$. Це також може статися; але ймовірність, що сторона з 6 очками випаде 10 разів підряд, дорівнює вже $\left(\frac{1}{10}\right)^6 = \frac{1}{60\,000\,000}$, тоб-то ймовірність цієї події нікчемно мала й практично, я буду визнавати неможливим появу цієї події.

Вищенаведене зводить до такого висновку: якщо за якоїсь спроби подія A може відбутися, то за єдиної спроби не можна напевне казати — відбудеться вона чи ні, — але, повторюючи спробу досить велике число разів, можемо зі ймовірністю, що межує з певністю, стверджувати, що подія A не буде повторюватись що-разу.

Більше того, можна дати точніші вказівки, щоб судити про те, як часто повинна відбуватись подія A при многоразовому повторенні спроби, якщо ймовірність події A нам відома.

Ці вказівки дає «теорема Бернуллі».

Математична надія

§ 5. Якщо за якої-небудь спроби, у випадкові появи події А, (ймовірність якої дорівнює p), я виграю k копійок, то кажуть, що за даної спроби моя математична надія виграшу дорівнює pk, тоб-то добуткові виграної суми на ймовірність виграшу.

Якщо-ж у випадкові появи події А, я програю k копійок, то кажуть, що моя математична надія програшу дорівнює $-pk$ (математична надія додатня та від'ємна).

Припустімо, що розігрується в лотерею якась річ. Випущено M квитків на суму S крб. Очевидно, що кожен квиток буде коштувати $\frac{S}{M}$ крб. Особа, що придбає k квитків, заплатить значить за право одержання виграшу $\frac{S}{M} \cdot k$ крб. Позначимо цю суму через А, матимемо:

$$A = S \cdot \frac{k}{M}.$$

В цій формулі $\frac{k}{M}$ є відношення числа випадків сприятливих для виграшу до числа всіх випадків, тоб-то ймовірність p. Тому

$$A = S\,p.$$

Отже, А є добуток суми виграшу на ймовірність її одержання, тоб-то математична надія.

Коли умова питання припускає виграш та програш декількох сум, то формули будуть инші.

В такому разі повна математична надія для цієї особи дорівнює сумі математичних надій всіх сум зокрема.

Загальний принцип застосовування математичної надії:

Якщо математична надія виграшу кожної окремої партії для кожного грача більше математичної надії програшу, то можна, майже з упевністю стверджувати, що після досить великого числа зіграних партій, він буде мати виграш; якщо-ж математична надія програшу перевищує математичну надію виграшу, то грач лишається зі збитком. В першому випадкові гру звемо вигідною для нашого грача, в другому — невигідною.

Таблиця 1.

Порівняльна таблиця мір

Міри українські (старі)	Метричні
ерства=500 саж. . . .	1,067 кілом.
жень=3 арш.=7 фут.	2,134 метр.
ршин=16 вершк. . . .	0,711 метр.
ршок	4,445 сантим.
фут=12 дюймам	0,305 метр.
юйм=10 лініям	2,540 сантим.
Кв.верст.=250000 кв. саж.	1,138 кв. клм.
Кв. сажень=9 кв. арш.= 49 кв. фут.	4,552 кв. метр.
. аршин=256 кв. верш.	0,506 кв. метр.
Кв. вершок=	19,758 кв. стм.
ь. фут=144 кв. дюйм.	0,093 кв. метр.
. дюйм=	6,452 кв. стм.
сятина=2400 кв. саж.	1,093 гектар.
Куб. сажень=27 кб. арш. =343 куб. фут . .	9,713 кб. метр.
аршин=4096 кб.верш.	0,360 кб. метр.
уб. вершок=	87,824 кб. стм.
Куб. фут=1728 кб. дюйм.	28,317 кб. дцм.
Куб. дюйм=	16,387 кб. стм.
ерковець=10 пуд. . . .	163,805 кілогр.
уд=40 фунт.	16,380 кілогр.
унт=32 лотам	0,409 кілогр.
от=3 золотникам . . .	12,797 грам.
олотник=96 долям . .	4,266 грам.
оля=	44,435 мілігр.
гверть=8 міркам . .	2,099 гектолітр.
ка=8 гарцям	26,239 літр.
рець	3,280 літр.
чка=40 відрам . . .	4,920 гектолітр
чро=10 штоф=20 пл. .	12,299 літр.
тоф=10 чаркам . . .	1,230 літр.

Метричні міри	Українські (старі)
Кілометр=1000 метр. .	0,937 верстви
Метр=10 дециметр. . .	1,406 арш.
Дециметр=10 сантиметр.	2,250 верш.
Сантиметр=10 міліметр.	0,225 верш.
Міліметр=1000 мікрон .	0,022 верш.
Кв. кілм.=1000000 кв. мет.	0,879 кв. верстви
Кв. метр=100 кв. децим.	1,977 кв. арш.
Кв. децим.=100 кв. сант.	5,061 кв. вершк.
Кв. сантм.=100 кв. мілім.	0,0506 кв. вершк.
Гектар=100 арам . . .	0,915 десят.
Ар=100 кв. метрам . .	21,967 кв. сажн.
Куб. метр=1000 кб. дцм.	2,780 кб. арш.
Кб. децим.=1000 кб. стм.	0,003 кб. арш.
Кб. сант.=1000 кб. мілім.	0,011 кб. верш.
Тона=1000 кілограм. . .	61,048 пуд.
Центнер=100 кілогр. . .	6,105 пуд.
Кілограм=1000 грам. .	2,44 фунт.
Грам=1000 міліграм . .	0,234 золотн.
Міліграм=	0,022 долі.
Гектолітр=100 літр. . .	8,130 відра.
» = » »	3,811 мірки.
Літр=100 сантилітр. . .	1,301 пляшк.
Сантилітр=	0,081 чарки.

Инші міри	Метричні
Англ. миля=1760 ярд. .	1,609 кілом.
Морська миля (вузол) .	1,852 кілом.
Географічна миля . . .	7,422 кілом.
Ярд=3 англ. фут. . . .	0,914 метра.
Туаз=6 паризьк. фут .	1,949 метра.
Англ. акр.=4840 кв. ярд.	0,405 гектар.
Англ. галон=4 кварт. .	4,546 літра.
Олимпійська стадія= .	192,3 метра.
Атицька стадія= . . .	177,5 метра.
Звичайний крок людини.	0,74 метра.

Таблиця 11

Питома вага деяких тіл

Тверді тіла	
Платина	21,5 $\frac{gr.}{cm.^3}$
Золото	19,3 »
Свинець	11,4 »
Срібло	10,5 »
Мідь	8,9 »
Нікель	8,8 »
Мосяж біля	8,0 »
Залізо (коване)	7,8 »
Цина (олово)	7,3 »
Цинк	7,2 »
Діямант (алмаз)	3,5 »
Глинець (алюміній)	2,7 »
Мармур біля	2,7 »
Скло	2,6 »
Сірка	2,1 »
Лід при 0	0,92 »
Дубове дерево біля	0,8 »
Ялинове дерево	0,5 »
Корок	0,2 »
Рідини	
Живе срібло	13,6 $\frac{gr.}{cm.^3}$
Сірчаний квас	1,8 »
Гліцерин	1,3 »
Молоко	1,03 »
Вода при 4°C	1 »
Морська вода	1,03 »
Гас	0,9 »
Виновий спирт (етиловий алкоголь)	0,8 »
Етиловий сірчаний етер	0,7 »

Таблиця III

Таблиця квадратових коренів

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
1	1,00	51	7,14	101	10,05	151	12,29
2	1,41	52	7,21	102	10,10	152	12,33
3	1,73	53	7,28	103	10,15	153	12,37
4	2,00	54	7,35	104	10,20	154	12,41
5	2,24	55	7,42	105	10,25	155	12,45
6	2,45	56	7,48	106	10,30	156	12,49
7	2,65	57	7,55	107	10,34	157	12,53
8	2,83	58	7,62	108	10,39	158	12,57
9	3,00	59	7,68	109	10,44	159	12,61
10	3,16	60	7,75	110	10,49	160	12,65
11	3,32	61	7,81	111	10,54	161	12,69
12	3,46	62	7,87	112	10,58	162	12,73
13	3,61	63	7,94	113	10,63	163	12,77
14	3,74	64	8,00	114	10,68	164	12,81
15	3,87	65	8,06	115	10,72	165	12,85
16	4,00	66	8,12	116	10,77	166	12,88
17	4,12	67	8,19	117	10,82	167	12,92
18	4,24	68	8,25	118	10,86	168	12,96
19	4,36	69	8,31	119	10,91	169	13,00
20	4,47	70	8,37	120	10,95	170	13,04
21	4,58	71	8,43	121	11,00	171	13,08
22	4,69	72	8,49	122	11,05	172	13,11
23	4,80	73	8,54	123	11 09	173	13,15
24	4,90	74	8,60	124	11,14	174	13,19
25	5,00	75	8,66	125	11,18	175	13,23
26	5,10	76	8,72	126	11,22	176	13,27
27	5,20	77	8,77	127	11,27	177	13,30
28	5,29	78	8,83	128	11,31	178	13,34
29	5,39	79	8,89	129	11,36	179	13,38
30	5,48	80	8,94	130	11,40	180	13,42
31	5,57	81	9,00	131	11,45	181	13,45
32	5,66	82	9,06	132	11,49	182	13,49
33	5,74	83	9,11	133	11,53	183	13,53
34	5,83	84	9,17	134	11,58	184	13,56
35	5,92	85	9,22	135	11,62	185	13,60
36	6,00	86	9,27	136	11,66	186	13,64
37	6,08	87	9,33	137	11,70	187	13,67
38	6,16	88	9,38	138	11,75	188	13,71
39	6,25	89	9,43	139	11,79	189	13,75
40	6,32	90	9,49	140	11,83	190	13,78
41	6,40	91	9,54	141	11,87	191	13,82
42	6,48	92	9,59	142	11,92	192	13,86
43	6,56	93	9,64	143	11,96	193	13,89
44	6,63	94	9,70	144	12,00	194	13,93
45	6,71	95	9,75	145	12,04	195	13,96
46	6,78	96	9,80	146	12,08	196	14,00
47	6,86	97	9,85	147	12,12	197	14,04
48	6,93	98	9,90	148	12,17	198	14,07
49	7,00	99	9,95	149	12,21	199	14,11
50	7,07	**100**	10,00	150	12,25	**200**	14,14

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
201	14,18	254	15,94	307	17,52	360	18,97
202	14,21	255	15,97	308	17,55	361	19,00
203	14,25	256	16,00	309	17,58	362	19,03
204	14,28	257	16,03	310	17,61	363	19,05
205	14,32	258	16,06	311	17,64	364	19,08
206	14,35	259	16,09	312	17,66	365	19,10
207	14,39	260	16,12	313	17,69	366	19,13
208	14,42	261	16,16	314	17,72	367	19,16
209	14,46	262	16,19	315	17,75	368	19,18
210	14,49	263	16,22	316	17,78	369	19,21
211	14,53	264	16,25	317	17,80	370	19,24
212	14,56	265	16,28	318	17,83	371	19,26
213	14,59	266	16,31	319	17,86	372	19,29
214	14,63	267	16,34	320	17,89	373	19,31
215	14,66	268	16,37	321	17,92	374	19,34
216	14,70	269	16,40	322	17,94	375	19,36
217	14,73	270	16,43	323	17,97	376	19,39
218	14,76	271	16,46	324	18,00	377	19,42
219	14,80	272	16,49	325	18,03	378	19,44
220	14,83	273	16,52	326	18,06	379	19,47
221	14,87	274	16,55	327	18,08	380	19,49
222	14,90	275	16,58	328	18,11	381	19,52
223	14,93	276	16,61	329	18,14	382	19,55
224	14,97	277	16,64	330	18,17	383	19,57
225	15,00	278	16,67	331	18,19	384	19,60
226	15,03	279	16,70	332	18,22	385	19,62
227	15,07	280	16,73	333	18,25	386	19,65
228	15,10	281	16,76	334	18,28	387	19,67
229	15,13	282	16,79	335	18,30	388	19,70
230	15,17	283	16,82	336	18,33	389	19,72
231	15,20	284	16,85	337	18,36	390	19,75
232	15,23	285	16,88	338	18,38	391	19,77
233	15,26	286	16,91	339	18,41	392	19,80
234	15,29	287	16,94	340	18,44	393	19,82
235	15,33	288	16,97	341	18,47	394	19,85
236	15,36	289	17,00	342	18,49	395	19,87
237	15,39	290	17,03	343	18,52	396	19,90
238	15,43	291	17,06	344	18,55	397	19,92
239	15,46	292	17,09	345	18,57	398	19,95
240	15,49	293	17,12	346	18,60	399	19,97
241	15,52	294	17,15	347	18,63	**400**	20,00
242	15,56	295	17,18	348	18,65	401	20,02
243	15,59	296	17,20	349	18,68	402	20,05
244	15,62	297	17,23	350	18,71	403	20,07
245	15,65	298	17,26	351	18,74	404	20,10
246	15,68	299	17,29	352	18,76	405	20,12
247	15,72	**300**	17,32	353	18,79	406	20,15
248	15,75	301	17,35	354	18,81	407	20,17
249	15,78	302	17,38	355	18,84	408	20,20
250	15,81	303	17,41	356	18,87	409	20,22
251	15,84	304	17,44	357	18,89	410	20,25
252	15,87	305	17,46	358	18,92	411	20,27
253	15,91	306	17,49	359	18,95	412	20,30

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
413	20,32	466	21,59	519	22,78	572	23,92
414	20,35	467	21,61	520	22,80	573	23,94
415	20,37	468	21,63	521	22,83	574	23,96
416	20,40	469	21,66	522	22,85	575	23,98
417	20,42	470	21,68	523	22,87	576	24,00
418	20,45	471	21,70	524	22,89	577	24,02
419	20,47	472	21,73	525	22,91	578	24,04
420	20,49	473	21,75	526	22,93	579	24,06
421	20,52	474	21,77	527	22,96	580	24,08
422	20,54	475	21,79	528	22,98	581	24,10
423	20,57	476	21,82	529	23,00	582	24,12
424	20,59	477	21,84	530	23,02	583	24,15
425	20,62	478	21,86	531	23,04	584	24,17
426	20,64	479	21,89	532	23,07	585	24,19
427	20,66	480	21,91	533	23,09	586	24,21
428	20,69	581	21,93	534	23,11	587	24,23
429	20,71	482	21,95	535	23,13	588	24,25
430	20,74	483	21,98	536	23,15	589	24,27
431	20,76	484	22,00	537	23,17	590	24,29
432	20,78	485	22,02	538	23,19	591	24,31
433	20,81	486	22,04	539	23,22	592	24,33
434	20,83	487	22,07	540	23,24	593	24,35
435	20,86	488	22,09	541	23,26	594	24,37
436	20,88	489	22,11	542	23,28	595	24,39
437	20,90	490	22,14	543	23,30	596	24,41
438	20,93	491	22,16	544	23,32	597	24,43
439	20,95	492	22,18	545	23,35	598	24,45
440	20,98	493	22,20	546	23,37	599	24,47
441	21,00	494	22,23	547	23,39	**600**	24,49
442	21,02	495	22,25	548	23,41	601	24,52
443	21,05	496	22,27	549	23,43	602	24,54
444	21,07	497	22,29	550	23,45	603	24,56
445	21,10	498	22,32	551	23,47	604	24,58
446	21,12	499	22,34	552	23,49	605	24,60
447	21,14	**500**	22,36	553	23,52	606	24,62
448	21,17	501	22,38	554	23,54	607	24,64
449	21,19	502	22,40	555	23,56	608	24,66
450	21,21	503	22,43	556	23,58	609	24,68
451	21,24	504	22,45	557	23,60	610	24,70
452	21,26	505	22,47	558	23,62	611	24,72
453	21,28	506	22,49	559	23,64	612	24,74
454	21,31	507	22,52	560	23,66	613	24,76
455	21,33	508	22,54	561	23,69	614	24,78
456	21,35	509	22,56	562	23,71	615	24,80
457	21,38	510	22,58	563	23,73	616	24,82
458	21,40	511	22,61	564	23,75	617	24,84
459	21,42	512	22,63	565	23,77	618	24,86
460	21,45	513	22,65	566	23,79	619	24,88
461	21,47	514	22,67	567	23,81	620	24,90
462	21,49	515	22,69	568	23,83	621	24,92
463	21,52	516	22,72	569	23,85	622	24,94
464	21,54	517	22,74	570	23,87	623	24,96
465	21,56	518	22,76	571	23,90	624	24,98

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
625	25,00	678	26,04	731	27,04	784	28,00
626	25,02	679	26,06	732	27,06	785	28,02
627	25,04	680	26,08	733	27,07	786	28,04
628	25,06	681	26,10	734	27.09	787	28,05
629	25,08	682	26,12	735	27,11	788	28,07
630	25,10	683	26,13	736	27,13	789	28,09
631	25,12	684	26,15	737	27,15	790	28,11
632	25,14	685	26,17	738	27,17	791	28,12
633	25,16	686	26,19	739	27,18	792	28,14
634	25,18	687	26,21	740	27,20	793	28.16
635	25,20	688	26,23	741	27,22	794	28,18
636	25,22	689	26,25	742	27,24	795	28,20
637	25.24	690	26,27	743	27,26	796	28,21
638	25,26	691	26,29	744	27,28	797	28,23
639	25,28	692	26,31	745	27,29	798	28,25
640	25,30	693	26,32	746	27,31	799	28,27
641	25,32	694	26,34	747	27,33	**800**	28,28
642	25,34	695	26,36	748	27,35	801	28,30
643	25.36	696	26,38	749	27,37	802	28,32
644	25,38	697	26,40	750	27,39	803	28,34
645	25,40	698	26,42	751	27,40	804	28,35
646	25,42	699	26.44	752	27,42	805	28,37
647	25,44	**700**	26,46	753	27,44	806	28,39
648	25,46	701	26,48	754	27,46	807	28,41
649	25,48	702	26,50	755	27,48	808	28,43
650	25.50	703	26,51	756	27,50	809	28,44
651	25,51	704	26,53	757	27,51	810	28,46
652	25,53	705	26,55	758	27,53	811	28,48
653	25,55	706	26,57	759	27,55	812	28,50
654	25,57	707	26,59	760	27,57	813	28,51
655	25,59	708	26,61	761	27,59	814	28,53
656	25,61	709	26,63	762	27,60	815	28,55
657	25,63	710	26,65	763	27,62	816	28,57
658	25,65	711	26,66	764	27,64	817	28,58
659	25,67	712	26,68	765	27,66	818	28,60
660	25,69	713	26.70	766	27,68	819	28,62
661	25,71	714	26,72	767	27,69	820	28,64
662	25,73	715	26,74	768	27,71	821	28,65
663	25,75	716	26,76	769	27,73	822	28,67
664	25,77	717	26,78	770	27,75	823	28,69
665	25,79	718	26,80	771	27,77	824	28,71
666	25.81	719	26,81	772	27,78	825	28,72
667	25,83	720	26.83	773	27,80	826	28,74
668	25,85	721	26,85	774	27,82	827	28,76
669	25,87	722	26,87	775	27,84	828	28,77
670	25,88	723	26,89	776	27,86	829	28,79
671	25.90	724	26,91	777	27,87	830	28,81
672	25,92	725	26,93	778	27,89	831	28,83
673	25,94	726	26,94	779	27,91	832	28,84
674	25,96	727	26,96	780	27,93	833	28,86
675	25,98	728	26,98	781	27,95	834	28,88
676	26,00	729	27,00	782	27,96	835	28,90
677	26,02	730	27,02	783	27,98	836	28,91

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
837	28,93	878	29,63	919	30,32	960	30,98
838	28,95	879	29,65	920	30,33	961	31,00
839	28,97	880	29,66	921	30,35	962	31,02
840	28,98	881	29,68	922	30,36	963	31,03
341	29,00	882	29,70	923	30,38	964	31.05
842	29,02	883	29,72	924	30,40	965	31,06
843	29,03	884	29,73	925	30,41	966	31,08
844	29,05	885	29,75	926	30,43	967	31,10
845	29,07	886	29,77	927	30,45	968	31,11
846	29,09	887	29.78	928	30,46	969	31,13
847	29,10	888	29,80	929	30,48	970	31,14
848	29,12	889	29,82	930	30,50	971	31,16
849	29,14	890	29,83	931	30,51	972	31,18
850	29,15	891	29,85	932	30,53	973	31,19
851	29,17	992	29,87	933	30,55	974	31,21
852	29,19	893	29,88	934	30,56	975	31,22
853	29,21	894	29,90	935	30,58	976	31,24
854	29.22	895	29,92	936	30,59	977	31,26
855	29,24	996	29,93	937	30,61	978	31,27
856	29,26	897	29,95	938	30,63	979	31,29
857	29,27	898	29,97	939	30,64	980	31,30
858	29,29	899	29,98	940	30,66	981	31,32
859	29,31	**900**	30,00	941	30,68	982	31,34
860	29,33	901	30,02	942	30,69	983	31,35
861	29,34	902	30,03	943	30,71	984	31,37
662	29,36	903	30,05	944	30,72	985	31,38
863	29,38	904	30,07	945	30,74	986	31,40
864	29,39	905	30 08	946	30,76	987	31,42
865	29,41	906	30,10	947	30,77	988	31,43
866	29,43	907	30.12	948	30,79	989	31,45
867	29,44	908	30,13	949	30,81	990	31,46
868	29,46	909	30,15	950	30,82	991	31,48
869	29,48	910	30.17	951	30,84	992	31,50
870	29,50	911	30,18	952	30,85	993	31,51
871	29,51	912	30,20	953	30,87	994	31,53
872	29,53	913	30,22	954	30,89	995	31,54
873	29,55	914	30,23	955	30,90	996	31,56
874	29,56	915	30,25	956	30,92	997	31.58
875	29,58	916	30.27	957	30,94	998	31,59
876	29,60	917	30,28	958	30,95	999	31,61
877	29,61	918	30,30	959	30,97	**1000**	31,62

Таблиця VI.

Таблиця тригонометричних функцій.

°	′	Sinus	Tangens	Cotangens	Cosinus	′	°
0	0	.0000	.0000	Infinite	1.0000	0	90
	10	.0029	.0029	343.7737	1.0000	50	
	20	.0058	.0058	171.8854	1.0000	40	
	30	.0087	.0087	114.5887	1.0000	30	
	40	.0116	.0116	85.9398	.9999	20	
	50	.0145	.0145	68.7501	.9999	10	
1	0	.0175	.0175	57.2900	.9998	0	89
	10	.0204	.0204	49.1039	.9998	50	
	20	.0233	.0233	42.9641	.9997	40	
	30	.0262	.0262	38.1885	.9997	30	
	40	.0291	.0291	34.3678	.9996	20	
	50	.0320	.0320	31.2416	.9995	10	
2	0	.0349	.0349	28.6363	.9994	0	88
	10	.0378	.0378	26.4316	.9993	50	
	20	.0407	.0407	24.5418	.9992	40	
	30	.0436	.0437	22.9038	.9990	30	
	40	.0465	.0466	21.4704	.9989	20	
	50	.0494	.0495	20.2056	.9988	10	
3	0	.0523	.0524	19.0811	.9986	0	87
	10	.0552	.0553	18.0750	.9985	50	
	20	.0581	.0582	17.1693	.9983	40	
	30	.0610	.0612	16.3499	.9981	30	
	40	.0640	.0641	15.6048	.9979	20	
	50	.0669	.0670	14.9244	.9978	10	
4	0	.0698	.0699	14.3007	.9976	0	86
	10	.0727	.0729	13.7267	.9974	50	
	20	.0756	.0758	13.1969	.9971	40	
	30	.0785	.0787	12.7062	.9969	30	
	40	.0814	.0816	12.2505	.9967	20	
	50	.0843	.0846	11.8262	.9964	10	
5	0	.0872	.0875	11.4301	.9962	0	85
	10	.0901	.0904	11.0594	.9959	50	
	20	.0930	.0934	10.7119	.9957	40	
	30	.0958	.0963	10.3854	.9954	30	
	40	.0987	.0992	10.0780	.9951	20	
	50	.1016	.1022	9.7882	.9948	10	84
°	′	Cosinus	Cotangens	Tangens	Sinus	′	°

°	′	Sinus	Tangens	Cotangens	Cosinus	′	°
6	0	.1045	.1051	9.5144	.9945	0	**84**
	10	.1074	.1080	9.2553	.9942	50	
	20	.1103	.1110	9.0098	.9939	40	
	30	.1132	.1139	8.7769	.9936	30	
	40	.1161	.1169	8.5555	.9932	20	
	50	.1190	.1198	8.3450	.9929	10	
7	0	.1219	.1228	8.1443	.9925	0	**83**
	10	.1248	.1257	7.9530	.9922	50	
	20	.1276	.1287	7.7704	.9918	40	
	30	.1305	.1317	7.5958	.9914	30	
	40	.1334	.1346	7.4287	.9911	20	
	50	.1363	.1376	7.2687	.9907	10	
8	0	.1392	.1405	7.1154	.9903	0	**82**
	10	.1421	.1435	6.9682	.9899	50	
	20	.1449	.1465	6.8270	.9894	40	
	30	.1478	.1495	6.6912	.9890	30	
	40	.1507	.1524	6.5606	.9886	20	
	50	.1536	.1554	6.4348	.9881	10	
9	0	.1564	.1584	6.3138	.9877	0	**81**
	10	.1593	.1614	6.1970	.9872	50	
	20	.1622	.1644	6.0844	.9868	40	
	30	.1650	.1673	5.9758	.9863	30	
	40	.1679	.1703	5.8708	.9858	20	
	50	.1708	.1733	5.7694	.9853	10	
10	0	.1736	.1763	5.6713	.9848	0	**80**
	10	.1765	.1793	5.5764	.9843	50	
	20	.1794	.1823	5.4845	.9838	40	
	30	.1822	.1853	5.3955	.9833	30	
	40	.1851	.1884	5.3093	.9827	20	
	50	.1880	.1914	5.2257	.9822	10	
11	0	.1908	.1944	5.1446	.9816	0	**79**
	10	.1937	.1974	5.0658	.9811	50	
	20	.1965	.2004	4.9894	.9805	40	
	30	.1994	.2035	4.9152	.9799	30	
	40	.2022	.2065	4.8430	.9793	20	
	50	.2051	.2095	4.7729	.9787	10	**78**
°	′	Cosinus	Cotangens	Tangens	Sinus	′	°

°	′	Sinus	Tangens	Cotangens	Cosinus	′	°
18	0	.3090	.3249	3.0777	.9511	0	**72**
	10	.3118	.3281	3.0475	.9502	50	
	20	.3145	.3314	3:0178	.9492	40	
	30	.3173	.3346	2.9887	.9483	30	
	40	.3201	.3378	2.9600	.9474	20	
	50	.3228	.3411	2.9319	.9465	10	
19	0	.3256	.3443	2.9042	.9455	0	**71**
	10	.3283	.3476	2.8770	.9446	50	
	20	.3311	.3508	2.8502	.9436	40	
	30	.3338	.3541	2.8239	.9426	30	
	40	.3365	.3574	2.7980	.9417	20	
	50	.3393	.3607	2.7725	.9407	10	
20	0	.3420	.3640	2.7475	.9397	0	**70**
	10	.3448	.3673	2.7228	.9387	50	
	20	.3475	.3706	2.6985	.9377	40	
	30	.3502	.3739	2.6746	.9367	30	
	40	.3529	.3772	2.6511	.9357	20	
	50	.3557	.3805	2.6279	.9346	10	
21	0	.3584	.3839	2.6051	.9336	0	**69**
	10	.3611	.3872	2.5826	.9325	50	
	20	.3638	.3906	2.5605	.9315	40	
	30	.3665	.3939	2.5386	.9304	30	
	40	.3692	.3973	2.5172	.9293	20	
	50	.3719	.4006	2.4960	.9283	10	
22	0	.3746	.4040	2.4751	.9272	0	**68**
	10	.3773	.4074	2.4545	.9261	50	
	20	.3800	.4108	2.4342	.9250	40	
	30	.3827	.4142	2.4142	.9239	30	
	40	.3854	.4176	2.3945	.9228	20	
	50	.3881	.4210	2.3750	.9216	10	
23	0	.3907	.4245	2.3559	.9205	0	**67**
	10	.3934	.4279	2.3369	.9194	50	
	20	.3961	.4314	2.3183	.9182	40	
	30	.3987	.4348	2.2998	.9171	30	
	40	.4014	.4383	2.2817	.9159	20	
	50	.4041	.4417	2.2637	.9147	10	**66**
°	′	Cosinus	Cotangens	Tangens	Sinus	′	°

o	′	Sinus	Tangens	Cotangens	Cosinus	′	o
12	0	.2079	.2126	4.7046	.9781	0	**78**
	10	.2108	.2156	4.6382	.9775	50	
	20	.2136	.2186	4.5736	.9769	40	
	30	.2164	.2217	4.5107	.9763	30	
	40	.2193	.2247	4.4494	.9757	20	
	50	.2221	.2278	4.3897	.9750	10	
13	0	.2250	.2309	4.3315	.9744	0	**77**
	10	.2278	.2339	4.2747	.9737	50	
	20	.2306	.2370	4.2193	.9730	40	
	30	.2334	.2401	4.1653	.9724	30	
	40	.2363	.2432	4.1126	.9717	20	
	50	.2391	.2462	4.0611	.9710	10	
14	0	.2419	.2493	4.0108	.9703	0	**76**
	10	.2447	.2524	3.9617	.9696	50	
	20	.2476	.2555	3.9136	.9689	40	
	30	.2504	.2586	3.8667	.9681	30	
	40	.2532	.2617	3.8208	.9674	20	
	50	.2560	.2648	3.7760	.9667	10	
15	0	.2588	.2679	3.7321	.9659	0	**75**
	10	.2616	.2711	3.6891	.9652	50	
	20	.2644	.2742	3.6470	.9644	40	
	30	.2672	.2773	3.6059	.9636	30	
	40	.2700	.2805	3.5656	.9628	20	
	50	.2728	.2836	3.5261	.9621	10	
16	0	.2756	.2867	3.4874	.9613	0	**74**
	10	.2784	.2899	3.4495	.9605	50	
	20	.2812	.2931	3.4124	.9596	40	
	30	.2840	.2962	3.3759	.9588	30	
	40	.2868	.2994	3.3402	.9580	20	
	50	.2896	.3026	3.3052	.9572	10	
17	0	.2924	.3057	3.2709	.9563	0	**73**
	10	.2952	.3089	3.2371	.9555	50	
	20	.2979	.3121	3.2041	.9546	40	
	30	.3007	.3153	3.1716	.9537	30	
	40	.3035	.3185	3.1397	.9528	20	
	50	.3062	.3217	3.1084	.9520	10	**72**
o	′	Cosinus	Cotangens	Tangens	Sinus	′	o

°	′	Sinus	Tangens	Cotangens	Cosinus	′	°
24	0	.4067	.4452	2.2460	.9135	0	66
	10	.4094	.4487	2.2286	.9124	50	
	20	.4120	.4522	2.2113	.9112	40	
	30	.4147	.4557	2.1943	.9100	30	
	40	.4173	.4592	2.1775	.9088	20	
	50	.4200	.4628	2.1609	.9075	10	
25	0	.4226	.4663	2.1445	.9063	0	65
	10	.4253	.4699	2.1283	.9051	50	
	20	.4279	.4734	2.1123	.9038	40	
	30	.4305	.4770	2.0965	.9026	30	
	40	.4331	.4806	2.0809	.9013	20	
	50	.4358	.4841	2.0655	.9001	10	
26	0	.4388	.4877	2.0503	.8988	0	64
	10	.4410	.4913	2.0353	.8975	50	
	20	.4436	.4950	2.0204	.8962	40	
	30	.4462	.4986	2.0057	.8949	30	
	40	.4488	.5022	1.9912	.8936	20	
	50	.4514	.5059	1.9769	.8923	10	
27	0	.4540	.5095	1.9626	.8910	0	63
	10	.4566	.5132	1.9486	.8897	50	
	20	.4592	.5169	1.9347	.8884	40	
	30	.4617	.5206	1.9210	.8870	30	
	40	.4643	.5243	1.9074	.8857	20	
	50	.4669	.5280	1.8940	.8843	10	
28	0	.4695	.5317	1.8807	.8829	0	62
	10	.4720	.5355	1.8676	.8816	50	
	20	.4746	.5392	1.8546	.8802	40	
	30	.4772	.5430	1.8417	.8788	30	
	40	.4797	.5467	1.8291	.8774	20	
	50	.4823	.5505	1.8165	.8760	10	
29	0	.4848	.5543	1.8040	.8746	0	61
	10	.4874	.5581	1.7917	.8732	50	
	20	.4899	.5619	1.7796	.8718	40	
	30	.4924	.5658	1.7675	.8704	30	
	40	.4950	.5696	1.7556	.8689	20	
	50	.4975	.5735	1.7437	.8675	10	60
°	′	Cosinus	Cotangens	Tangens	Sinus	′	°

°	′	Sinus	Tangens	Cotangens	Cosinus	′	°
30	0	.5000	.5774	1.7321	.8660	0	**60**
	10	.5025	.5812	1.7205	.8646	50	
	20	.5050	.5851	1.7090	.8631	40	
	30	.5075	.5890	1.6977	.8616	30	
	40	.5100	.5930	1.6864	.8601	20	
	50	.5125	.5969	1.6753	.8587	10	
31	0	.5150	.6009	1.6643	.8572	0	**59**
	10	.5175	.6048	1.6534	.8557	50	
	20	.5200	.6088	1.6426	.8542	40	
	30	.5225	.6128	1.6319	.8526	30	
	40	.5250	.6168	1.6212	.8511	20	
	50	.5275	.6208	1.6107	.8496	10	
3	0	.5299	.6249	1.6003	.8480	0	**58**
	10	.5324	.6289	1.5900	.8465	50	
	20	.5348	.6330	1.5798	.8450	40	
	30	.5373	.6371	1.5697	.8434	30	
	40	.5398	.6412	1.5597	.8418	20	
	50	.5422	.6453	1.5497	.8403	10	
33	0	.5446	.6494	1.5399	.8387	0	**57**
	10	.5471	.6535	1.5301	.8371	50	
	20	.5495	.6577	1.5204	.8355	40	
	30	.5519	.6619	1.5108	.8339	30	
	40	.5544	.6661	1.5013	.8323	20	
	50	.5568	.6703	1.4919	.8307	10	
34	0	.5592	.6745	1.4826	.8290	0	**56**
	10	.5616	.6787	1.4733	.8274	50	
	20	.5640	.6830	1.4641	.8258	40	
	30	.5664	.6873	1.4550	.8241	30	
	40	.5688	.6916	1.4460	.8225	20	
	50	.5712	.6959	1.4370	.8208	10	
35	0	.5736	.7002	1.4281	.8192	0	**55**
	10	.5760	.7046	1.4193	.8175	50	
	20	.5783	.7089	1.4106	.8158	40	
	30	.5807	.7133	1.4019	.8141	30	
	40	.5831	.7177	1.3934	.8124	20	
	50	.5854	.7221	1.3848	.8107	10	**54**
°	′	Cosinus	Cotangens	Tangens	Sinus	′	°

°	′	Sinus	Tangens	Cotangens	Cosinus	′	°
36	0	.5878	.7265	1.3764	.8090	0	**54**
	10	.5901	.7310	1.3680	.8073	50	
	20	.5925	.7355	1.3597	.8056	40	
	30	.5948	.7400	1.3514	.8039	30	
	40	.5972	.7445	1.3432	.8021	20	
	50	.5995	.7490	1.3351	.8004	10	
37	0	.6018	.7536	1.3270	.7986	0	**53**
	10	.6041	.7581	1.3190	.7969	50	
	20	.6065	.7627	1.3111	.7951	40	
	30	.6088	.7676	1.3032	.7934	30	
	40	.6111	.7720	1.2954	.7916	20	
	50	.6134	.7766	1.2876	.7898	10	
38	0	.6157	.7813	1.2799	.7880	0	**52**
	10	.6180	.7860	1.2723	.7862	50	
	20	.6202	.7907	1.2647	.7844	40	
	30	.6225	.7954	1.2572	.7826	30	
	40	.6248	.8002	1.2497	.7808	20	
	50	.6271	.8041	1.2423	.7790	10	
39	0	.6293	.8098	1.2349	.7771	0	**51**
	10	.6316	.8146	1.2276	.7753	50	
	20	.6338	.8195	1.2203	.7735	40	
	30	.6361	.8243	1.2131	.7716	30	
	40	.6383	.8292	1.2059	.7698	20	
	50	.6406	.8342	1.1988	.7679	10	
40	0	.6428	.8391	1.1918	.7660	0	**50**
	10	.6450	.8441	1.1847	.7642	50	
	20	.6472	.8491	1.1778	.7623	40	
	30	.6494	.8541	1.1708	.7604	30	
	40	.6517	.8591	1.1640	.7585	20	
	50	.6539	.8642	1.1571	.7566	10	
41	0	.6561	.8693	1.1504	.7547	0	**49**
	10	.6583	.8744	1.1436	.7528	50	
	20	.6604	.8796	1.1369	.7509	40	
	30	.6626	.8847	1.1303	.7490	30	
	40	.6648	.8899	1.1237	.7470	20	
	50	.6670	.8952	1.1171	.7451	10	**48**
°	′	Cosinus	Cotangens	Tangens	Sinus	′	°

°	′	Sinus	Tangens	Cotangens	Cosin.	′	°
42	0	.6691	.9004	1.1106	.7431	0	**48**
	10	.6713	.9057	1.1041	.7412	50	
	20	.6734	.9110	1.0977	.7392	40	
	30	.6756	.9163	1.0913	.7373	30	
	40	.6777	.9217	1.0850	.7353	20	
	50	.6799	.9271	1.0786	.7333	10	
43	0	.6820	.9325	1.0724	.7314	0	**47**
	10	.6841	.9380	1.0661	.7294	50	
	20	.6862	.9435	1.0599	.7274	40	
	30	.6884	.9490	1.0538	.7254	30	
	40	.6905	.9545	1.0477	.7234	20	
	50	.6926	.9601	1.0416	.7214	10	
44	0	.6947	.9657	1.0355	.7193	0	**46**
	10	.6967	.9713	1.0295	.7173	50	
	20	.6988	.9770	1.0235	.7153	40	
	30	.7009	.9827	1.0176	.7133	30	
	40	.7030	.9884	1.0117	.7112	20	
	50	.7050	.9942	1.0058	.7092	10	
45	0	.7071	1.0000	1.0000	.7071	0	**45**
°	′	Cosin.	Cotangens	Tangens	Sinus	′	°

Таблиця V

Таблиця логаритмів

no.	lg.	d.	no	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.
100	0000	43	**140**	1461	31	**180**	2553	24	**220**	3424	20
101	0043	43	141	1492	31	181	2577	24	221	3444	20
102	0086	42	142	1523	30	182	2601	24	222	3464	19
103	0128	42	143	1553	31	183	2625	23	223	3483	19
104	0170	42	144	1584	30	184	2648	24	224	3502	20
105	0212	41	145	1614	30	185	2672	23	225	3522	19
106	0253	41	146	1644	29	186	2695	23	226	3541	19
107	0294	40	147	1673	30	187	2718	24	227	3560	19
108	0334	40	148	1703	29	188	2742	23	228	3579	19
109	0374	40	149	1732	29	189	2765	23	229	3598	19
110	0414	39	**150**	1761	29	**190**	2788	22	**230**	3617	19
111	0453	39	151	1790	28	191	2810	23	231	3636	19
112	0492	39	152	1818	29	192	2833	23	232	3655	19
113	0531	38	153	1847	28	193	2856	22	233	3674	18
114	0569	38	154	1875	28	194	2878	22	234	3692	19
115	0607	38	155	1903	28	195	2900	23	235	3711	18
116	0645	37	156	1931	28	196	2923	22	236	3729	18
117	0682	37	157	1959	28	197	2945	22	237	3747	19
118	0719	36	158	1987	27	198	2967	22	238	3766	18
119	0755	37	159	2014	27	199	2989	21	239	3784	18
120	0792	36	**160**	2041	27	**200**	3010	22	**240**	3802	18
121	0828	36	161	2068	27	201	3032	22	241	3820	18
122	0864	35	162	2095	27	202	3054	21	242	3838	18
123	0899	35	163	2122	26	203	3075	21	243	3856	18
124	0934	35	164	2148	27	204	3096	22	244	3874	18
125	0969	35	165	2175	26	205	3118	21	245	3892	17
126	1004	34	166	2201	26	206	3139	21	246	3909	18
127	1038	34	167	2227	26	207	3160	21	247	3927	18
128	1072	34	168	2253	26	208	3181	20	248	3945	17
129	1106	33	169	2279	25	209	3201	21	249	3962	17
130	1139	34	**170**	2304	26	**210**	3222	21	**250**	3979	18
131	1173	33	171	2330	25	211	3243	20	251	3997	17
132	1206	33	172	2355	25	212	3263	21	252	4014	17
133	1239	32	173	2380	25	213	3284	20	253	4031	17
134	1271	32	174	2405	25	214	3304	20	254	4048	17
135	1303	32	175	2430	25	215	3324	21	255	4065	17
136	1335	32	176	2455	25	216	3345	20	256	4082	17
137	1367	32	177	2480	24	217	3365	20	257	4099	17
138	1399	31	178	2504	25	218	3385	19	258	4116	17
139	1430	31	179	2529	24	219	3404	20	259	4133	17
140	1461		**180**	2553		**220**	3424		**260**	4150	

pp.

	43	42	41
1	4.3	4.2	4.1
2	8.6	8.4	8.2
3	12.9	12.6	12.3
4	17.2	16.8	16.4
5	21.5	21.0	20.5
6	25.8	25.2	24.6
7	30.1	29.4	28.7
8	34.4	33.6	32.8
9	38.7	37.8	36.9

	40	39	38
1	4.0	3.9	3.8
2	8.0	7.8	7.6
3	12.0	11.7	11.4
4	16.0	15.6	15.2
5	20.0	19.5	19.0
6	24.0	23.4	22.8
7	28.0	27.3	26.6
8	32.0	31.2	30.4
9	36.0	35.1	34.2

	37	36	35
1	3.7	3.6	3.5
2	7.4	7.2	7.0
3	11.1	10.8	10.5
4	14.8	14.4	14.0
5	18.5	18.0	17.5
6	22.2	21.6	21.0
7	25.9	25.2	24.5
8	29.6	28.8	28.0
9	33.3	32.4	31.5

	34	33	32
1	3.4	3.3	3.2
2	6.8	6.6	6.4
3	10.2	9.9	9.6
4	13.6	13.2	12.8
5	17.0	16.5	16.0
6	20.4	19.8	19.2
7	23.8	23.1	22.4
8	27.2	26.4	25.6
9	30.6	29.7	28.8

no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.
260	4150	16									
261	4166	17	303	4814	15	345	5378	13	387	5877	11
262	4183	17	304	4829	14	346	5391	12	388	5888	11
263	4200	16	305	4843	14	347	5403	13	389	5899	12
264	4216	16	306	4857	14	348	5416	12	**390**	5911	11
265	4232	17	307	4871	15	349	5428	13	391	5922	11
266	4249	16	308	4886	14	**350**	5441	12	392	5933	11
267	4265	16	309	4900	14	351	5453	12	393	5944	11
268	4281	17	**310**	4914	14	352	5465	13	394	5955	11
269	4298	16	311	4928	14	353	5478	12	395	5966	11
270	4314	16	312	4942	13	354	5490	12	396	5977	11
271	4330	16	313	4955	14	355	5502	12	397	5988	11
272	4346	16	314	4969	14	356	5514	13	398	5999	11
273	4362	16	315	4983	14	357	5527	12	399	6010	11
274	4378	15	316	4997	14	358	5539	12	**400**	6021	10
275	4393	16	317	5011	13	359	5551	12	401	6031	11
276	4409	16	318	5024	14	**360**	5563	12	402	6042	11
277	4425	15	319	5038	13	361	5575	12	403	6053	11
278	4440	16	**320**	5051	14	362	5587	12	404	6064	11
279	4456	16	321	5065	11	363	5599	12	405	6075	10
280	4472	15	322	5079	13	364	5611	12	406	6085	11
281	4487	15	323	5092	13	365	5623	12	407	6096	11
282	4502	16	324	5105	14	366	5635	12	408	6107	10
283	4518	15	325	5119	13	367	5647	11	409	6117	11
284	4533	15	326	5132	13	368	5658	12	**410**	6128	10
285	4548	16	327	5145	14	369	5670	12	411	6138	11
286	4564	15	228	5159	13	**370**	5682	12	412	6149	11
287	4579	15	329	5172	13	371	5694	11	413	6160	10
288	4594	15	**330**	5185	13	372	5705	12	414	6170	10
289	4609	15	331	5198	13	373	5717	12	415	6180	11
290	4624	15	332	5211	13	374	5729	11	416	6191	10
291	4639	15	333	5224	13	375	5740	12	417	6201	11
292	4654	15	334	5237	13	376	5752	11	418	6212	10
293	4669	14	335	5250	13	377	5763	12	419	6222	10
294	4683	15	336	5263	13	378	5775	11	**420**	6232	11
295	4698	15	337	5276	13	379	5786	12	421	6243	10
296	4713	15	338	5289	13	**380**	5798	11	422	6253	10
297	4728	14	339	5302	13	381	5809	12	423	6263	11
298	4742	15	**340**	5315	13	382	5821	11	424	6274	10
299	4757	14	341	5328	12	383	5832	11	425	6284	10
300	4771	15	342	5340	13	384	5843	12	426	6294	10
301	4786	14	343	5353	13	385	5855	11	427	6304	10
302	4800		344	5366		386	5866		428	6314	

pp.

	31	**30**	**29**
1	3.1	3.0	2.9
2	6.2	6.0	5.8
3	9.3	9.0	8.7
4	12.4	12.0	11.6
5	15.5	15.0	14.5
6	18.6	18.0	17.4
7	21.7	21.0	20.3
8	24.8	24.0	23.2
9	27.9	27.0	26.1

	28	**27**	**26**
1	2.8	2.7	2.6
2	5.6	5.4	5.2
3	8.4	8.1	7.8
4	11.2	10.8	10.4
5	14.0	13.5	13.0
6	16.8	16.2	15.6
7	19.6	18.9	18.2
8	22.4	21.6	20.8
9	25.2	24.3	23.4

	25	**24**	**23**
1	2.5	2.4	2.3
2	5.0	4.8	4.6
3	7.5	7.2	6.9
4	10.0	9.6	9.2
5	12.5	12.0	11.5
6	15.0	14.4	13.8
7	17.5	16.8	16.1
8	20.0	19.2	18.4
9	22.5	21.6	20.7

	22	**21**	**20**
1	2.2	2.1	2.0
2	4.4	4.2	4.0
3	6.6	6.3	6.0
4	8.8	8.4	8.0
5	11.0	10.5	10.0
6	13.2	12.6	12.0
7	15.4	14.7	14.0
8	17.6	16.8	16.0
9	19.8	18.9	18.0

no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.
			470	6721	9						
429	6325	10	471	6730	9	513	7101	9	555	7443	8
430	6335	10	472	6739	10	514	7110	8	556	7451	8
431	6345	10	473	6749	9	515	7118	8	557	7459	7
432	6355	10	474	6758	9	516	7126	9	558	7466	8
433	6365	10	475	6767	9	517	7135	8	559	7474	8
434	6375	10	476	6776	9	518	7143	9	**560**	7482	8
435	6385	10	477	6785	9	519	7152	8	561	7490	7
436	6395	10	478	6794	9	**520**	7160	8	562	7497	8
437	6405	10	479	6803	9	521	7168	9	563	7505	8
438	6415	10	**480**	6812	9	522	7177	8	564	7513	7
439	6425	10	481	6821	9	523	7185	8	565	7520	8
440	6435	9	482	6830	9	524	7193	9	566	7528	8
441	6444	10	483	6839	9	525	7202	8	567	7536	7
442	6454	10	484	6848	9	526	7210	8	568	7543	8
443	6464	10	485	6857	9	527	7218	8	569	7551	8
444	6474	10	486	6866	9	528	7226	9	**570**	7559	7
445	6484	9	487	6875	9	529	7235	8	571	7566	8
446	6493	10	488	6884	9	**530**	7243	8	572	7574	8
447	3503	10	489	6893	9	531	7251	8	573	7582	7
448	6513	9	**490**	6902	9	532	7259	8	574	7589	8
449	6522	10	491	6911	9	533	7267	8	575	7597	7
450	6532	10	492	6920	8	534	7275	9	576	7604	8
451	6542	9	493	6928	9	535	7284	8	577	7612	7
452	6551	10	494	6937	9	536	2927	8	578	7619	8
453	6561	10	495	6946	9	537	7300	8	579	7627	7
454	6571	9	496	6955	9	538	7308	8	**580**	7634	8
455	6580	10	497	6964	8	539	7316	8	581	7642	7
456	6590	9	498	6972	9	**540**	7324	8	582	7649	8
457	6599	10	499	6981	9	541	7332	8	583	7657	7
458	6609	9	**500**	6990	8	542	7340	8	584	7664	8
459	6618	10	501	6998	9	543	7348	8	585	7672	7
460	6628	9	502	7007	9	544	7356	8	586	7679	7
461	6637	9	503	7016	8	545	7364	8	587	7686	8
462	6646	10	504	7024	9	546	7372	8	588	7694	7
463	6656	9	505	7033	9	547	7380	8	589	7701	8
464	6665	10	506	7042	8	548	7388	8	**590**	7709	7
465	6675	9	507	7050	9	549	7396	8	591	7716	7
466	6684	9	508	7059	8	**550**	7404	8	592	7723	8
467	6693	9	509	7067	9	551	7412	7	593	7731	7
468	6702	10	**510**	7076	8	552	7419	8	594	7738	7
469	6712	9	511	7084	9	553	7427	8	595	7745	7
470	6721		512	7093		554	7435		596	7752	

pp.

	19	**18**	**17**
1	1.9	1.8	1.7
2	3.8	3.6	3.4
3	5.7	5.4	5.1
4	7.6	7.2	6.8
5	9.5	9.0	8.5
6	11.4	10.8	10.2
7	13.3	12.6	11.9
8	15.2	14.4	13.6
9	17.1	16.2	15.3

	16	**15**	**14**
1	1.6	1.5	1.4
2	3.2	3.0	2.8
3	4.8	4.5	4.2
4	6.4	6.0	5.6
5	8.0	7.5	7.0
6	9.6	9.0	8.4
7	11.2	10.5	9.8
8	12.8	12.0	11.2
9	14.4	13.5	12.6

	13	**12**	**11**
1	1.3	1.2	1.1
2	2.6	2.4	2.2
3	3.9	3.6	3.3
4	5.2	4.8	4.4
5	6.5	6.0	5.5
6	7.8	7.2	6.6
7	9.1	8.4	7.7
8	10.4	9.6	8.8
9	11.7	10.8	9.9

	10	**9**	**8**
1	1.0	0.9	0.8
2	2.0	1.8	1.6
3	3.0	2.7	2.4
4	4.0	3.6	3.2
5	5.0	4.5	4.0
6	6.0	5.4	4.8
7	7.0	6.3	5.6
8	8.0	7.2	6.4
9	9.0	8.1	7.2

no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d	no.	lg.	d
						680	8325	6			
597	7760	7	639	8055	7	681	8331	7	723	8591	6
598	7767	7	**640**	8062	7	682	8338	6	724	8597	6
599	7774	8	641	8069	6	683	8344	7	725	8603	6
600	7782	7	642	8075	7	684	8351	6	726	8609	6
601	7789	7	643	8082	7	685	8357	6	727	8615	6
602	7796	7	644	8089	7	686	8363	7	728	8621	6
603	7803	7	645	8096	6	687	8370	6	729	8627	6
604	7810	8	646	8102	7	688	8376	6	**730**	8633	6
605	8818	7	647	8109	7	689	8382	6	731	8639	6
606	7825	7	648	8116	6	**690**	8388	7	732	8645	6
607	7832	7	649	8122	7	691	8395	6	733	8651	6
608	7839	7	**650**	8129	7	692	8401	6	734	8657	6
609	7846	7	651	8136	6	693	8407	7	735	8663	6
610	7853	7	652	8142	7	694	8414	6	736	8669	6
611	7860	8	653	8149	7	695	8420	6	737	8675	6
612	7868	7	654	8156	6	696	8426	6	738	8681	5
613	7875	7	655	8162	7	697	8432	7	739	8686	6
614	7882	7	656	8169	7	698	8439	6	**740**	8692	6
615	7889	7	657	8176	6	699	8445	6	741	8698	6
616	7896	7	658	8182	7	**700**	8451	6	742	8704	6
617	7903	7	659	8189	6	701	8457	6	743	8710	6
618	7910	7	**660**	8195	7	702	8463	7	744	8716	6
619	7917	7	661	8202	7	703	8470	6	745	8722	5
620	7924	7	662	8209	6	704	8476	6	746	8727	6
621	7931	7	663	8215	7	705	8482	6	747	8733	6
622	7938	7	664	8222	6	706	8488	6	748	8739	6
623	7945	7	665	8228	7	707	8494	6	749	8745	6
624	7952	7	666	8235	6	708	8500	6	**750**	8751	5
625	7959	7	667	8241	7	709	8506	7	751	8756	6
626	7966	7	668	8248	6	**710**	8513	6	752	8762	6
627	7973	7	669	8254	7	711	8519	6	753	8768	6
628	7980	7	**670**	8261	6	712	8525	6	754	8774	5
629	7987	6	671	8267	7	713	8531	6	755	8779	6
630	7993	7	672	8274	6	714	8537	6	756	8785	6
631	8000	7	673	8280	7	715	8543	6	757	8791	6
632	8007	7	674	8287	6	716	8549	6	758	8797	5
633	8014	7	675	8293	6	717	8555	6	759	8802	6
634	8021	7	676	8299	7	718	8561	6	**760**	8808	6
635	8C28	7	677	8306	6	719	8567	6	761	8814	6
636	8035	6	678	8312	7	**720**	8573	6	762	8820	5
637	8041	7	679	8319	6	721	8579	6	763	8825	6
638	8048		**680**	8325		722	8585		764	8831	

pp.

	9	**8**
1	0.9	0.8
2	1.8	1.6
3	2.7	2.4
4	3 6	3.2
5	4.5	4.0
6	5.4	4.8
7	6.3	5.6
8	7.2	6.4
9	8.1	7.2

	7	**6**
1	0.7	0.6
2	1.4	1.2
3	2.1	1.8
4	2.8	2.4
5	3.5	3.0
6	4.2	3.6
7	4.9	4.2
8	5.6	4.8
9	6.3	5.4

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.0
9	6.3

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg	d.	no.	lg.	d.
765	8837	5	807	9069	5	849	9289	5	**890**	9494	5
766	8842	6	808	9074	5	**850**	9294	5	891	9499	5
767	8848	6	809	9079	6	851	9299	5	892	9504	5
768	8854	5	**810**	9085	5	852	9304	5	893	9509	4
769	8859	6	811	9090	6	853	9309	6	894	9513	5
770	8865	6	812	9096	5	854	9315	5	895	9518	5
771	8871	5	813	9101	5	855	9320	5	896	9523	5
872	8876	6	814	9106	6	856	9325	5	897	9528	5
773	8882	5	815	9112	5	857	9330	5	898	9533	5
774	8887	6	816	9117	5	858	9335	5	899	9538	4
775	8893	6	817	9122	6	859	9340	5	**900**	9542	5
776	8899	5	818	9128	5	**860**	9345	5	901	9547	5
777	8904	6	819	9133	5	861	9350	5	902	9552	5
778	8910	5	**820**	9138	5	862	9355	5	903	9557	5
779	8915	6	821	9143	6	863	9360	5	904	9562	4
780	8921	6	822	9149	5	864	9365	5	905	9566	5
781	8927	5	823	9154	5	865	9370	5	906	9571	5
782	8932	6	824	9159	6	866	9375	5	907	9576	5
783	8938	5	825	9165	5	867	9380	5	908	9581	5
784	8943	6	826	9170	5	868	9385	5	909	9586	4
785	8949	5	827	9175	5	869	9390	5	**910**	9590	5
786	8954	6	828	9180	6	**870**	9395	5	911	9595	5
787	8960	5	829	9186	5	871	9400	5	912	9600	5
788	8965	6	**830**	9191	5	872	9405	5	913	9605	4
789	8971	5	831	9196	5	873	9410	5	914	9609	5
790	8976	6	832	9201	5	874	9415	5	915	9614	5
791	8982	5	833	9206	6	875	9420	5	916	9619	5
792	8987	6	834	9212	5	876	9425	5	917	9624	4
793	8993	5	835	9217	5	877	9430	5	918	9628	5
794	8998	6	836	9222	5	878	9435	5	919	9633	5
795	9004	5	837	9227	5	879	9440	5	**920**	9638	5
796	9009	6	838	9232	6	**880**	9445	5	921	9643	4
797	9015	5	839	9238	5	881	9450	5	922	9647	5
798	9020	5	**840**	9243	5	882	9455	5	923	9652	5
799	9025	6	841	9248	5	883	9460	5	924	9657	4
800	9031	5	842	9253	5	884	9465	4	925	9661	5
801	9036	6	843	9258	5	885	9469	5	926	9666	5
802	9042	5	844	9263	6	886	9474	5	927	9671	4
803	9047	6	845	9269	5	887	9479	5	928	9675	5
804	9053	5	846	9274	5	888	9484	5	929	9680	5
805	9058	5	847	9279	5	889	9489	5	**930**	9685	4
806	9063		848	9284		**890**	9494		931	9689	5
									932	9694	

pp.

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.
933	9699	4	975	9890	4	1017	0073	4	1059	0249	4
934	9703	5	976	9894	5	1018	0077	5	**1060**	0253	4
935	9708	5	977	9899	4	1019	0082	4	1061	0257	4
936	9713	4	978	9903	5	**1020**	0086	4	1062	0261	4
937	9717	5	979	9908	4	1021	0090	5	1063	0265	4
938	9722	5	**980**	9912	5	1022	0095	4	1064	0269	4
939	9727	4	981	9917	4	1023	0099	4	1065	0273	5
940	9731	5	982	9921	5	1024	0103	4	1066	0278	4
941	9736	5	983	9926	4	1025	0107	4	1067	0282	4
942	9741	4	984	9930	4	1026	0111	5	1068	0286	4
943	9745	5	985	9934	5	1027	0116	4	1069	0290	4
944	9750	4	986	9939	4	1028	0120	4	**1070**	0294	4
945	9754	5	987	9943	5	1029	0124	4	1071	0298	4
946	9759	4	988	9948	4	**1030**	0128	5	1072	0302	4
947	9763	5	989	9952	4	1031	0133	4	1073	0306	4
948	9768	5	**990**	9956	5	1032	0137	4	1074	0310	4
949	9773	4	991	9961	4	1033	0141	4	1075	0314	4
950	9777	5	992	9965	4	1034	0145	4	1076	0318	4
951	9782	4	993	9969	5	1035	0149	5	1077	0322	4
952	9786	5	994	9974	4	1036	0154	4	1078	0326	4
953	9791	4	995	9978	5	1037	0158	4	1079	0330	4
954	9795	5	996	9983	4	1038	0162	4	**1080**	0334	4
955	9800	5	997	9987	4	1039	0166	4	1081	0338	4
956	9805	4	998	9991	5	**1040**	0170	5	1082	0342	4
957	9809	5	999	9996	4	1041	0175	4	1083	0346	4
958	9814	4	**1000**	0000	4	1042	0179	4	1084	0350	4
959	9818	5	1001	0004	5	1043	0183	4	1085	0354	4
960	9823	4	1002	0009	4	1044	0187	4	1086	0358	4
961	9827	5	1003	0013	4	1045	0191	4	1087	0362	4
962	9832	4	1004	0017	5	1046	0195	4	1088	0366	4
963	9836	5	1005	0022	4	1047	0199	5	1089	0370	4
964	9841	4	1006	0026	4	1048	0204	4	**1090**	0374	4
965	9845	5	1007	0030	5	1049	0208	4	1091	0378	4
966	9850	4	1008	0035	4	**1050**	0212	4	1092	0382	4
967	9854	5	1009	0039	4	1051	0216	4	1093	0386	4
968	9859	4	**1010**	0043	5	1052	0220	4	1094	0390	4
969	9863	5	1011	0048	4	1053	0224	4	1095	0394	4
970	9868	4	1012	0052	4	1054	0228	5	1096	0398	4
971	9872	5	1013	0056	4	1055	0233	4	1097	0402	4
972	9877	4	1014	0060	5	1056	0237	4	1098	0406	4
973	9881	5	1015	0065	4	1057	0241	4	1099	0410	4
974	9886		1016	0069		1058	0245		**1100**	0414	

pp.

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

no.	lg.	d.	no.	lg.	b.	no.	lg.	d	no	lg.	d.
1100	0414	4									
1101	0418	4	1143	0580	4	1185	0737	4	1227	0888	4
1102	0422	4	1144	0584	4	1186	0741	4	1228	0892	4
1103	0426	4	1145	0588	4	1187	0745	3	1229	0896	3
1104	0430	4	1146	0592	4	1188	0748	4	**1230**	0899	4
1105	0434	4	1147	0596	3	1189	0752	3	1231	0903	3
1106	0438	3	1148	0599	4	**1190**	0755	4	1232	0906	4
1107	0441	4	1149	0603	4	1191	0759	4	1233	0910	3
1108	0445	4	**1150**	0607	4	1192	0763	3	1234	0913	4
1109	0449	4	1151	0611	4	1193	0766	4	1235	0917	3
1110	0453	4	1152	0615	3	1194	0770	4	1236	0920	4
1111	0457	4	1153	0618	4	1195	0774	3	1237	0924	3
1112	0461	4	1154	0622	4	1196	0777	4	1238	0927	4
1113	0465	4	1155	0626	4	1197	0781	4	1239	0931	3
1114	0469	4	1156	0630	3	1198	0785	3	**1240**	0934	4
1115	0473	4	1157	0633	4	1199	0788	4	1241	0938	3
1116	0477	4	1158	0637	4	**1200**	0792	3	1242	0941	4
1117	0481	3	1159	0641	4	1201	0795	4	1243	0945	3
1118	0484	4	**1160**	0645	3	1202	0799	4	1244	0948	4
1119	0488	4	1161	0648	4	1203	0803	3	1245	0952	3
1120	0492	4	1162	0652	4	1204	0806	4	1246	0955	4
1121	0496	4	1163	0656	4	1205	0810	3	1247	0959	3
1122	0500	4	1164	0660	3	1206	0813	4	1248	0962	4
1123	0504	4	1165	0663	4	1207	0817	4	1249	0966	3
1124	0508	4	1166	0667	4	1208	0821	3	**1250**	0969	4
1125	0512	3	1167	0671	3	1209	0824	4	1251	0973	3
1126	0515	4	1168	0674	4	**1210**	0828	3	1252	0976	4
1127	0519	4	1169	0678	4	1211	0831	4	1253	0980	3
1128	0523	4	**1170**	0682	4	1212	0835	4	1254	0983	3
1129	0527	4	1171	0686	3	1213	0839	3	1255	0986	4
1130	0531	4	1172	0689	4	1214	0842	4	1256	0990	3
1131	0535	3	1173	0693	4	1215	0846	3	1257	0993	4
1132	0538	4	1174	0697	3	1216	0849	4	1258	0997	3
1133	0542	4	1175	0700	4	1217	0853	3	1259	1000	4
1134	0546	4	1176	0704	4	1218	0856	4	**1260**	1004	3
1135	0550	4	1177	0708	3	1219	0860	4	1261	1007	4
1136	0554	4	1178	0711	4	**1220**	0864	3	1262	1011	3
1137	0558	3	1179	0715	4	1221	0867	4	1263	1014	3
1138	0561	4	**1180**	0719	3	1222	0871	3	1264	1017	4
1139	0565	4	1181	0722	4	1223	0874	4	1265	1021	3
1140	0569	4	1182	0726	4	1224	0878	3	1266	1024	4
1141	0573	4	1183	0730	4	1225	0881	4	1267	1028	3
1142	0577		1184	0734		1226	0885		1268	1031	

pp.

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

	3
1	0.3
2	0.6
3	0.9
4	1.2
5	1.5
6	1.8
7	2.1
8	2.4
9	2.7

no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	pp.
1269	1035	3	1277	1062	3	1285	1089	3	1293	1116	3	
1270	1038	3	1278	1065	4	1286	1092	4	1294	1119	4	
1271	1041	4	1279	1069	3	1287	1096	3	1295	1123	3	
1272	1045	3	**1280**	1072	3	1288	1099	4	1296	1126	3	
1273	1048	4	1281	1075	4	1289	1103	3	1297	1129	4	
1274	1052	3	1282	1079	3	**1290**	1106	3	1298	1133	3	
1275	1055	4	1283	1082	4	1291	1109	4	1299	1136	3	
1276	1059		1284	1086		1292	1113		**1300**	1139		

ЗМІСТ

Стор.