

Олексій Ігнатенко

СИСТЕМИ ГОЛОСУВАННЯ І ТЕОРІЯ ІГОР



Олексій Ігнатенко, 2019

Системи голосування і теорія ігор

Стаття

site.ua – клуб українських топ-блогерів і ексклюзивні новини, 2019

Олексій Ігнатенко. Системи голосування і теорія ігор, 2019

Усі права застережено.

Про наукове суперництво видатних вчених, парадокс Кондорсе і його систему голосування. Про систему Борда, вченого, який придумав метр і як його виміряти та маніпуляції. Про систему голосування, яка використовується зараз в Linux та Wikipedia і скандал в Кірібаті.

Текст статті – Олексій Ігнатенко

Макетування – Упорядник ©

Посилання на оригінальний текст статті:

[частина перша](#)

[частина друга](#)

[частина третя](#)

© Олексій Ігнатенко, 2019

© [site.ua](#), 2019

© Упорядник, 2022

Цю сторінку навмисно залишено порожньою

Зміст

Частина перша: парадокси і властивості	6
Невеличка передмова	6
Теорія ігор і системи голосування	7
Дві альтернативи	9
Три і більше альтернативи	10
Відносна більшість з двома турами	11
Парування з вибуванням	12
Частина друга: Кондорсе проти Борда	14
Система Кондорсе	15
Реальні випадки парадоксу Кондорсе	18
Система Борда	19
Забуття і нове життя систем Борда і Кондорсе	23
Частина третя: Теорема Ерроу – неможливість чи можливість? . .	25
Відблиск неможливості	25
Теорема Ерроу	26
Той, хто в деталях	28
Теорема Сена і інші парадоксальні результати	30
Теорема Сена	30
Список Ліста	31
Парадокс Анскомб	31
Суть проблеми	32
Інші варіанти	33

Цю сторінку навмисно залишено порожньою

Частина перша: парадокси і властивості

Який зробити наступний хід, якщо невідома гра?

Невеличка передмова

Проблема узгодженої поведінки та ухвалення рішень великими колективами ключова для всієї історії людства. Якщо дивитись під цим кутом зору, то значні історичні зміни були наслідком розвитку або появи нового типу взаємодії між рядовими учасниками процесу. Делегування права ухвалення рішень (навіть і не добровільне) за ієрархією дозволила організувати великі імперії Сходу і Єгипту. Відповідним було і обґрунтування. Наприклад, світогляд персів уявляв світ ареною боротьби Добра і Зла, де цар на чолі бюрократії намагається привнести порядок та наблизити перемогу, тому невиконання рішення старшого за посадою було, взагалі кажучи, військовим злочином. Власне якість рішення визначалась місцем в ієрархії – цар не помиляється.

І мабуть найбільш відомими, хто вибився з цієї протореної колії, були греки. Сильно спрощуючи, ідея греків полягала в наступному: щоб ухвалити найкраще (оптимальне) рішення потрібно спочатку почути всі можливі, а потім проголосувати. Те рішення, яке обере більшість – найкраще. Інші народи правда казали, що грекам просто подобається триндіти в агорі замість того щоб боротись за перемогу Добра у вселенській битві, але грекам було все одно, результат на табло – персів вони перемогли.

Так чи інакше, саме греки (і потім римляни) прославили виборчі процедури, на сьогодні можна констатувати, що демократія хоч і погана штука, але краще поки що немає. Далі мова буде йти про виборчі системи, але з математичної точки зору. Виявляється, що, в певній мірі, повторюється ситуація з попередньої статті про [американську конституцію](#), коли політики сформулювали умови виходячи з певних абстрактних понять про справедливість, загальність і того, як має бути влаштований конституційний устрій. А потім (після акуратної математичної формалізації) виявилось, що ці умови неможливо виконати (точно як у анекдоті про розумне, добре і вічне).

Закінчуючи передмову зазначу, що після того, як системи голосування увійшли в життя розвинутих країн важливим питанням стало можливість маніпуляцій або впливу на процес голосування з метою отримання бажаного результату. Така задача може формулюватись в термінах теорії ігор і це обумовлює назву.

Сьогодні покращені засоби доставки інформації пронизують кожну секунду існування де б ви не знаходились, і скоро кожна новина, подія та загалом будь-яка активність буде спробою маніпуляції і впливу на свідомість. Особливо це стосується сильних емоцій, бо так інформація запам'ятовується найкраще. Отже є сенс спокійно почати *ab ovo*¹.

Теорія ігор і системи голосування

Коли ми говоримо про теорію ігор у застосуванні до голосування, природно виникає питання: А в чому ж тут гра? Відповісти на це питання важливо для подальшої побудови моделі, яка (звичайно) буде спрощенням реального життя, і висновків, які можна зробити на її основі.

Для визначення гри необхідно задати три речі: гравців, їх стратегії і їх виграші. На роль гравців виникає дві можливості: кандидати та виборці. Ідеальною була б модель де були б і ті і інші, але розв'язати таку модель буде вже неможливо. Модель з кандидатами-гравцями пов'язана з теоремою про медіанного виборця (там виборці вважаються розподіленими вздовж певної осі, наприклад, праві – ліві). Інший підхід полягає у розгляді системи з точки зору виборців. Кандидати тут вважаються фіксованими альтернативами, які вибирають гравці. Їх вплив – це їх голос, поданий за певного кандидата (або ранжування всіх кандидатів). Результат буде залежати від обраної системи голосування, а виграш гравця це перемога кандидата який йому більше подобається.

Приклад. Шестеро виборців (їм відповідають стовпці) мають наступні уподобання щодо напоїв:

¹з початку (лат.), букв. од яйця [прим. уряд.]

	виборці					
	1	2	3	4	5	6
1	чай	кава	чай	кава	сік	сік
2	кава	чай	сік	сік	кава	чай
3	сік	сік	кава	чай	чай	кава

NB Тут число – порядковий номер виборця. В усіх інших прикладах – **кількість** виборців.

Як їм вибрати один напій? Або, більш загально, як агрегувати уподобання групи людей? В ідеалі ми шукаємо функцію, яка відображає всі уподобання в один вектор-результат, наприклад:

сік
чай
кава

Якщо ми говоримо про вибори, то в даному конкретному прикладі перемагає один варіант, який стоїть на першому місці – тобто сік. Якщо ж нас цікавить весь вектор, то в загальному формулюванні така функція називається функцією соціального вибору. В цьому випадку виборці 5 і 6 найбільш задоволені – виграла альтернатива, яка є їх першим вибором. Виборці 3 і 4 помірно задоволені – виграв їх другий вибір. Виборці 1 і 2 зовсім незадоволені. Будемо вимірювати задоволеність-незадоволеність цілими числами, наприклад виграші в даній ситуації будуть такі

1 і 2 – 0 балів

4 і 3 – 1 бал

6 і 5 – 2 бали

Отже, виникає природна постановка гри. Гравці – виборці, дії – вибір кандидата у бюлетені, виграш – місце переможця в особистих уподобаннях. Чим вище, тим краще. І тут виникає дві проблеми:

Зрозуміло, що результат буде залежати від системи голосування, тобто механізму агрегації. Очевидно, що деякі системи

кращі за інших, яка з них найкраща для конкретного випадку або взагалі? І які властивості має хороша система? Найпростішою стратегією виборців є «щире голосування», тобто голосування за найвищу можливу альтернативу зі своїх уподобань. Однак не все так просто, іноді гравці можуть забезпечувати собі кращий кінцевий результат проголосувавши за іншу альтернативу. Це вимагає точного знання уподобань інших та системи голосування і називається «стратегічним голосуванням».

NB Далі ми розглянемо «ідеальний світ» де виборці голосують щиро, тобто вибирають свій перший можливий варіант. Це зроблено з метою продемонструвати **принципові** можливості систем голосування і поведінки виборців.

Дві альтернативи

Випадок двох можливих альтернатив найпростіший.

Нагадаємо, що **Абсолютна більшість** це правило, за яким перемагає той, хто набрав більше половини перших місць у уподобаннях виборців. І **результат**, який був отриманий в 1952 році Кеннетом Меєм звучить так (у спрощеній формі):

Для ситуації двох альтернатив абсолютна більшість є єдиною системою, яка забезпечує наступні властивості:

- вона відноситься до всіх виборців однаково;
- вона відноситься до альтернатив однаково;
- вона монотонна: якщо один з виборців забере свій голос у програвшого кандидата і передасть його переможцю, то результат буде той самий.

Якщо кількість виборців непарна, то вона завжди забезпечує переможця. З практичної точки зору для великої кількості виборців вона забезпечує переможця і для парної кількості, оскільки точна рівність голосів має ймовірність дуже близьку до 0. В принципі правило абсолютної більшості використовували дуже давно, грецька демократія загалом була побудована на цьому правилі (з певними обмеженнями).

Три і більше альтернативи

Теорема дала надію що такий самий трюк можна повернути і для більшої кількості альтернатив (тобто сформулювати систему властивостей і виділити виборчі процедури, які їм задовольняють). Але виявилось, що для трьох і більше альтернатив метод абсолютної більшості просто далеко не завжди визначає переможця. Це явно не те, що б ми хотіли від виборчої системи. Отже, властивість 1: **Виборча система має завжди визначати переможця**. Найближча до абсолютної більшості (для 3 і більше альтернатив) є відносна більшість.

Відносна більшість це правило, за яким перемагає той, хто набрав більшість перших місць у уподобаннях виборців. Відносна більшість теж практично завжди визначає переможця. Чому ж не використовувати її?

Розглянемо новорічний приклад.

	виборці		
	2	2	3
1	олів'є	шуба	холодець
2	шуба	олів'є	шуба
3	холодець	холодець	олів'є

Переможця за абсолютною більшістю не існує. За системою відносної більшості перемагає холодець.

Але виявляється, що ця система вразлива до численних парадоксів:

- **Парадокс абсолютного лузера**. Абсолютна більшість (4 з 7) вважають холодець найгіршим вибором!
- **Залежність від нерелевантних альтернатив**. Якщо виявиться, що оселедця немає і шубу приготувати неможливо, то переможе олів'є.
- **Парадокс переможця за Кондорсе** (про цю систему буде в наступній частині). Якщо ми спробуємо проголосувати пари альтернатив, то отримаємо наступний результат: холодець – шуба (3 виборців вважають, що холодець краще (третій стовпчик таблиці), виборці з першого і другого стовпчика вважають, що шуба краще – в сумі це 4 голоси. Отже 3 проти 4, перемагає шуба), шуба – олів'є (5 vs 2),

холодець – олів'є (3 vs 4). Тобто шуба попарно перемагає будь-яку іншу альтернативу (є переможцем за Кондорсе), але програє в результаті.

- Також ця система вразлива до **стратегічного голосування**. Якщо двоє перших виборців вирішать: Та ну його те олів'є, ми будемо голосувати за шубу, щоб тільки не холодець. Тобто відхилення від щирого голосування (за перший вибір) дає їм більший вигравш.
- Ну і звичайно можлива ситуація, коли невелика група вибирає переможця, оскільки інші поділені між конкуруючими кандидатами.

Відносна більшість з двома турами

Логічно запитати, а давайте якось «підкрутимо» цю відносну більшість щоб було краще. Наприклад, візьмемо відносну більшість з другим туром – дуже знайома нам система. Але вона теж вразлива до великої кількості парадоксів і маніпуляцій (тут опишемо лише декілька).

Приклад. Вибори на острові Скарбів.

		виборці (кількість)					
		3	2	4	2	4	2
1	Доктор Лівсі	Доктор Лівсі	Капітан Смолет	Капітан Смолет	Джим	Джим	
2	Капітан Смолет	Капітан Смолет	Доктор Лівсі	Джим	Доктор Лівсі	Капітан Смолет	
3	Джим	Джим	Джим	Доктор Лівсі	Капітан Смолет	Доктор Лівсі	

Доктор Лівсі є переможцем Кондорсе. Дійсно:

Доктор Лівсі – Джим (9 : 8)

Доктор Лівс – Капітан Смолет (9 : 8)

Але в другий тур проходять (рахуємо перші місця) Джим і Капітан Смолет (по 6).

В другому турі розгромно перемагає Капітан (11 : 6) (**Парадокс переможця за Кондорсе**)

А от якщо Джим зніме кандидатуру, то все вирішиться в першому турі.

Доктор Лівсі – Капітан Смолет (9 : 8). (**Залежність від нерелевантних альтернатив**)

Найбільш вражає те, що ця система не є **монотонною**. Припустимо, що двоє останніх виборців вирішують збільшити свою підтримку Капітану і ставлять його на перше місце. Як зміниться результат?

Ну тепер в другий тур проходять вже Доктор Лівсі і Капітан Смолет, тому Доктор Лівсі стає переможцем. Ще раз: ми додали голосів переможцю, а він в результаті програв!

Отже, додамо у перелік бажаних властивостей

- властивість 2. Монотонність (М).
- властивість 3. Переможець за Кондорсе (ПК). Якщо є єдиний переможець попарних голосувань, то він має бути переможцем.
- властивість 4. Незалежність від нерелевантних альтернатив (ННА)

Парування з вибуванням

Парування з вибуванням застосовується, наприклад, в американському конгресі при розгляді законопроектів. Існує чіткий порядок, який визначає як проходить законопроект. Для такої системи можливий парадокс другорядного переможця – це ситуація, коли результатом голосування є альтернатива, яку всі вважають гіршою за іншу. Звучить дивно? Припустимо, що троє учасників зібрались випити і вибирають між чотирма варіантами. Їх відношення до них задається так:

Перший: горілка < пиво < коньяк < вино

(тобто вино на першому місці, коньяк на другому і т.д.)

Другий: пиво < коньяк < вино < горілка

Третій: коньяк < вино < горілка < пиво

І треба швидко знайти прийнятний для всіх варіант. Вони вирішують голосувати альтернативи попарно, відкидаючи ті, які набрали меншість голосів. Кожен голосує щиро, у відповідності до свого відношення.

Спочатку вони голосують вино чи горілка. Двоє вважають, що горілка краще за вино, тому вино відпадає. Далі горілку голосують проти пива. Двоє вважають, що пиво краще за горілку, тому залишається пиво. Нарешті пиво проти коньяку. Двоє вважають, що коньяк краще, отже всі йдуть пити коньяк. Але чекайте, ВСІ троє насправді думають, що вино краще за коньяк! Виходить, що запропонована система голосування не змогла вибрати альтернативу, яку всі б хотіли більше ніж отриманий результат.

Властивість яка порушується тут називається **Парето оптимальність**. Це п'ята властивість яку б ми хотіли бачити в ідеальній системі голосування.

(далі будуть інші, більш складні системи голосування)

Частина друга: Кондорсе проти Борда

«– Я збирався сказати, – ображено мовив Додо, – що найкраща штука, щоб висохнути, це Партиїні Перегони ...

Додо усе влаштував... Спершу він намітив маршрут – таке собі коло («Насправді форма не має значення», – запевнив Додо), а тоді розташував усе товариство тут і там уздовж дистанції... кожен починав бігти, коли йому спадало на думку, й так само сходив з дистанції, коли йому було до вподоби ... після півгодинки біганини, коли всі вже майже повністю висохли, Додо несподівано вигукнув:

– Перегони закінчено!

Усі скупчилися довкола нього, відсапуючись та запитуючи: «Ну, так хто ж переміг?». Щоб відповісти на це запитання, Додо був змушений поринути в тяжкі роздуми й довгенько стояв, притиснувши пальця до чола ... Перегодом Додо сказав:

– Усі перемогли, й усі мають отримати призи.»

Аліса в Країні Див

У попередній частині² ми закінчили на ідеях, які важливо підкреслити:

Для системи двох альтернатив голосування абсолютною більшістю (більше половини "за") має хороші властивості, і фактично тому застосовувалося на практиці з часів афінської демократії. При перенесенні методу для випадку більшої кількості альтернатив виникають парадокси, втрата властивостей. Коротше кажучи, результат нам категорично не подобається.

Історичний відступ. Цікаво, що хоча абсолютна більшість є для нас очевидним вибором, до греків зазвичай застосовувалось одностайне

²У веб-варіанті було публікації. [прим. уряд.]

схвалення. Ну дійсно, адже якщо за вождя або царя проголосував 51 відсоток, це ж значить, що 49 відсотків – проти? І що з ними робити тоді? Тому при оголошенні нового лідера схвалення відбувалось бряцанням мечей по щитам, або схвальними вигуками, щоб зробити атмосферу повної підтримки. Якщо ж якась група осіб виступала проти, то після коротких передвиборчих процедур, переможці викреслювали невдах зі списків виборців, змивали кров і проводили переголосування.

Слід зазначити, що це досить звична річ для математики, коли при узагальненні на більшу розмірність частина властивостей втрачається. У цьому разі перед дослідником виникає декілька можливих варіантів, кожен з яких зберігає щось важливе з попереднього методу. Проблема в тому, які ж властивості зберегти? Яка властивість найважливіша для нас?

Система Кондорсе

Після Греції і Риму наступний бурхливий розвиток систем голосування стався у передреволюційній Франції. Саме тоді Марі Жан Антуан Ніколя де Каріта, маркіз де Кондорсе (або просто **Ніколя Кондорсе**) опублікував в 1784 році есе про теорію виборів. Кондорсе був визнаним математиком, членом французької академії наук (і інших), автором трактатів з інтегрування. Кондорсе також дуже переймався питаннями справедливості і моралі, писав памфлети і публіцистичні статті. Вважається, що він був першим, хто почав застосовувати математику для аналізу суспільних процесів. Його робота була відповіддю на ідею виборчої системи Борда (про нього далі), яка була опублікована трохи раніше.



Рис. 1: Марі Жан Антуан Ніколя де Каріта, маркіз де Кондорсе

Пропозиція Кондорсе полягала у використанні переваг абсолютної більшості: потрібно просто запропонувати до голосування всі можливі

пари альтернатив і спитати виборців про їх відношення до кожної. Альтернатива, яка перемаже в усіх парах, стає очевидним переможцем.

Згадаємо приклад про напої з попередньої частини³ (без останнього виборця⁴).

	виборці				
	1	2	3	4	5
1	чай	кава	чай	кава	сік
2	кава	чай	сік	сік	чай
3	сік	сік	кава	чай	кава

Нагадую, що кожен стовпець відповідає одному виборцю. Для обчислення створимо всі можливі пари:

чай – кава; чай – сік; сік – кава.

Тепер кожен парі потрібно проголосувати.

Чай вище за каву у 2 виборців і нижче у 3, тобто рахунок у парі чай – кава 3 : 2.

Чай вище за сік у 3 виборців і нижче у 2, тобто рахунок у парі чай – сік 3 : 2.

Сік вище за каву у 2 виборців і нижче у 3, тобто рахунок у парі сік – кава 2 : 3.

В результаті чай перемагає в усіх парах, тому він має бути оголошеним переможцем. Це суть ідеї Кондорсе. Цей метод, як це часто буває, не був придуманий Кондорсе, він описаний ще в трудах Миколи Кузанського (1401 – 1464) в контексті виборів германських монархів. Заслуга Кондорсе в іншому: він сформулював проблему, яка отримала назву парадокс Кондорсе.

Розглянемо приклад.

Нехай є рада (міста, села, області), яка ухвалює рішення щодо розподілу коштів. І склад ради такий: Ліва партія 3 місця, Центристи 4 місця,

³У веб-варіанті було *статті*. [прим. упоряд.]

⁴Насправді тут помилка – викинуто передостаннього виборця. Без *останнього* це: сік – кава – чай (див. частину першу). [прим. упоряд.]

Права партія 5 місць. Є три можливих напрямки фінансування: здоров'я, безпека та освіта. У кожній партії є своє бачення важливості цих напрямків:

пріоритет	ліві (3 голоси)	центр (4 голоси)	праві (5 голосів)
1	освіта	здоров'я	безпека
2	здоров'я	безпека	освіта
3	безпека	освіта	здоров'я

Тобто праві вважають, що найперше потрібно фінансувати безпеку, потім освіту і здоров'я в останню чергу.

Очевидно, якщо поставити всі альтернативи на одне голосування (відносна більшість), то переможе безпека (5 голосів), в той же час 7 депутатів (більше половини) вважають, що здоров'я важливіше за безпеку, просто вони не можуть дійти згоди, фінансувати освіту чи здоров'я.

Застосуємо ідею Кондорсе, для цього утворимо пари.

Безпека перемагає освіту (9 : 3), і потім програє здоров'ю (7 : 5).

Освіта перемагає здоров'я (8 : 4).

Тобто переможця за Кондорсе не існує, але це півбіди. Виникає циклічна структура як у грі камінь-ножиці-бумага. Взагалі виходить, що порушується транзитивність "сили" альтернатив:

здоров'я перемагає безпеку

безпека перемагає освіту

освіта перемагає здоров'я

При цьому всі уподобання окремих виборців є транзитивними! Тобто кожен з них окремо може визначити, що найкраще, а група (з таким правилом вибору) – вже ні.

Нагадую, що транзитивність – це властивість відношення (або системи уподобань), така, що якщо А краще за Б, а Б краще за В, то А краще за В.

Наприклад, відношення "більше" для дійсних чисел транзитивне. А відношення підлеглих у феодалізмі не завжди (оце саме "васал мого васала – не мій васал").

Це мабуть найбільш важлива ідея, сформульована Кондорсе: при застосуванні правила абсолютної більшості для визначення переможця у попарних "змаганнях" для більш як двох альтернатив уподобання групи втрачають транзитивність і виникає парадокс Кондорсе (навіть у дуже простих ситуаціях для трьох альтернатив).

Реальні випадки парадоксу Кондорсе

Чи зустрічається парадокс Кондорсе у сучасному житті? (Спойлер: теоретично так, але практично досить рідко). Випадки появи цього парадоксу в американському політичному процесі є джерелом публікацій і суперечок. Розглянемо один з них.

Процедура ухвалення нового закону в американському Конгресі складна і формалізована. Один або декілька законів об'єднуються в білль, який передається на розгляд відповідному комітету. Далі депутати можуть подавати поправки до білля, поправки до існуючих поправок, альтернативний білль і поправки до альтернативного білля. Таким чином, протягом процедури розгляду в залі можливо ШІСТЬ різних потенційних законів: статус кво (те що зараз), рекомендований комітетом білль, білль з поправкою, білль з поправленою поправкою, альтернативний білль, альтернативний білль з поправкою.

Процедура вимагає голосувати їх у певній послідовності: третій варіант проти четвертого, потім п'ятий проти шостого. Потім переможці паруються, і білль, що отримав підтримку, голосується проти статус кво, переможець стає новим статусом кво.

Така система дає можливість спробувати впливати на процес ухвалення за допомогою "вбивчої поправки", тобто поправки, яка створює парадокс Кондорсе. Для цього потрібно виконання трьох умов:

- Білль, що пропонується, перемагає статус кво
- Поправка перемагає оригінальний білль
- Поправка програє статусу кво

Досить рідкісне поєднання факторів, але вважається, що "вбивчі поправки" існують, наприклад, в історії американського Конгресу їх нараховують до десяти (цілі публікації присвячені пошуку таких ситуацій).

Одна з найбільш яскравих це **Поправка Пауела** (1956 рік). Президент Ейзенхауер зібрав 1.5 мільйона доларів (на той час значні кошти) на підтримку місцевих шкіл по усій країні. Вважалося, що білль має пройти, як ніж крізь масло: хто буде голосувати проти допомоги школам? Але Пауелл запропонував поправку, яка відсікала школи з сегрегацією від допомоги. Мотивація була наступна: південні штати не хочуть припиняти свою практику, отже федеральні кошти не повинні це підтримувати. Пауелл сам був афроамериканцем і демократом. Він очолював комітет з освіти і висував цю поправку до всіх законів, що стосувались коштів федерального бюджету.

Його поправка розколола конгрес. Частина республіканців і північних демократів голосували за неї (і цього вистачило для того, щоб вона вибила оригінальний білль), всі південні демократи були проти. Але потім білль з поправкою не отримав підтримки проти статус кво і загинув.



Рис. 2: Адам Клейтон Пауелл молодший

Система Борда

Найпринциповіший науковий суперник Кондорсе, **Жан-Шарль шевальє де Борда** був класичним вченим того часу: інженер, фізик, математик, геодезист і морський офіцер. Можливо, вершиною його діяльності було головування в комісії, де зібрались такі знаменитості: Лавуазьє, Кондорсе, Лаплас, Монж, Кулон та Лагранж. Мета комісії була стандартизувати систему вимірів. І саме Борда запропонував схему виміру і назву "метр". Взагалі Борда був більш інженерно-орієнтованим, тому він хотів привнести у вибори точність чисельних методів.



Рис. 3: Жан-Шарль шевальє де Борда

Проблема, яку хотів розв'язати Борда, називається розщеплення голосів, тобто ситуація з прикладу попередньої статті:

виборці (кількість)			
	2	2	3
1	олів'є	кава	холодець
2	шуба	олів'є	шуба
3	холодець	холодець	олів'є

Ми вже знаємо, що переможець за системою відносної більшості – холодець (3 голоси). Це сталося тому, що більша група виборців (4 голоса) поділена (розщеплена) між іншими альтернативами порівну.

Система голосування, яку запропонував Борда, є ефективним замінником голосування пар і полягає в обчисленні "рейтингу" альтернатив. Кожен виборець створює перелік: яка альтернатива на першому місці, яка на другому і т.д. Якщо у нас є m альтернатив, то за кожне перше місце альтернатива отримує $m - 1$ балів. За кожне друге $m - 2$ бал і т.д. За кожне останнє – 0 балів.

За системою Борда:

олів'є отримує 2 перших місця, 2 других місця і 3 третіх місця, тобто $2 * 2 + 2 = 6$ балів.

шуба отримує 2 перших місця, 5 других місць, тобто $2 * 2 + 5 = 9$ балів.

холодець отримує 3 перших місця, 5 останніх місць, тобто $3 * 2 = 6$ балів.

Перемагає шуба (і вона є також переможцем за Кондорсе для цього прикладу).

Якщо у нас є дві альтернативи, то система Борда – це те саме, що і абсолютна більшість. Для більшої кількості альтернатив вона дозволяє повніше відобразити відношення до всіх кандидатів, а не тільки до першого місця. Це страхує від появи кандидата, який не подобається багатьом, але має підтримку достатньої групи для перемоги відносною більшістю за умов розщеплення голосів між іншими. Також вона проста в обчисленні, набагато швидша за голосування всіх пар (уявіть, якщо альтернатив більше 10). В 1784 році ця система була затверджена для виборів нових членів Академії Наук.

Як і система Кондорсе, система Борда була придумана до нього. Є відомості, що вона застосовувалась в римському Сенаті в 2 ст. н.е. Пізніше ця система і система Кондорсе обговорювались в трактаті каталонського вченого Рамона Лулського "Мистецтво виборів" (1299).

Однак у цієї системи був суттєвий недолік, який Борда не помітив. Давайте розглянемо конкретний приклад. Припустимо, вибирається галузь для позачергового додаткового фінансування і депутати формують список пріоритетів.

кожен стовпець – один депутат						
армія	медицина	культура	армія	медицина	культура	армія
наука	армія	медицина	наука	армія	медицина	наука
культура	наука	армія	культура	наука	армія	культура
медицина	культура	наука	медицина	культура	наука	медицина

За системою Борда результат наступний:

Армія $3 * 3 + 2 * 2 + 2 = 15$ балів (3 перших місця, 2 других місця, 2 третіх місця)

Медицина $2 * 3 + 2 * 2 = 10$ балів (2 перших місця, 2 других місця)

Культура $2 * 3 + 3 = 9$ балів (2 перших місця, 3 третіх місця)

Наука $3 * 2 + 2 = 8$ балів (3 других місця, 2 третіх місця)

Також можна зазначити, що армія – переможець за відносною більшістю. Переможця за Кондорсе немає.

Але тепер припустимо, що внаслідок якихось подій потреба в додатковому фінансуванні армії пропадає і вона зникає з цього переліку. Логічно припустити, що перше місце перейде до медицини? Давайте розберемось:

кожен стовпець – один депутат						
наука	медицина	культура	наука	медицина	культура	наука
культура	наука	медицина	культура	наука	медицина	культура
медицина	культура	наука	медицина	культура	наука	медицина

Медицина: два перших місця + два других місця + три третіх місця = 6 балів (для трьох альтернатив перше місце дає 2 бали)

Культура: два перших місця + три других місця + два третіх місця = 7 балів
 Наука: три перших місця + два других місця + два третіх місця = 8 балів

І наука перемагає, хоча вона і була остання в попередньому раунді! (це мрії звичайно).

Цей парадокс має назву *парадокс неявики*. Система Борда також вразлива до деяких інших парадоксів, але є і інша причина, яка зруйнувала використання цієї системи. Цією системою дуже просто маніпулювати: потрібно просто розташовувати свої уподобання не щиро, а "топити" найбільшого конкурента на найнижчу позицію. Розглянемо модифікований приклад.

виборці (кількість)		
	2	2
1	олів'є	шуба
2	шуба	олів'є
3	холодець	холодець

Тут всі не люблять холодець, у нього 0 балів. За системою Борда:

$$\text{олів'є отримує } 4 * 2 + 3 = 11$$

$$\text{шуба отримує } 3 * 2 + 4 = 10$$

Тобто олів'є перемагає, якщо все чесно. Але припустимо, що 3 останніх виборці, знаючи уподобання інших, поставили олів'є на останнє місце. В цьому разі:

$$\text{олів'є отримує } 4 * 2 = 8$$

$$\text{шуба отримує } 3 * 2 + 4 = 10$$

$$\text{холодець отримує } 3$$

Перемагає шуба, і це настільки просто, що де б не застосовували цю систему, люди починали поводити себе цілком однотипно – топити найбільших конкурентів. Це сталося і на виборах нових академіків у Франції. Коли Борда повідомили про цю особливість, він вигукнув свою знамениту фразу: "Моя система призначена лише для чесних!". У 1800 році

в Академію Наук завітав перший консул Наполеон Бонапарт. Йому вистачило 5 хвилин на ознайомлення і перше ж його рішення заміняло систему Борда на абсолютну більшість (якщо ніхто не набрав 50%+, місце залишалось незайняте).

Забуття і нове життя систем Борда і Кондорсе

Кондорсе загинув в результаті революції, яку він наближав і вітав. Його проект конституції з гарантією базових громадянських прав не сподобався Робесп'єру. Кондорсе також протестував проти страти королівської сім'ї. Таке якобинці не пробачили, Кондорсе був оголошений ворогом, переховувався в лісах. Врешті-решт, його спіймали і кинули у в'язницю, де він помер. Усе, що залишилось після, це книга, у якій система Кондорсе виявилася замкненою надовго.

Борда пережив терор і помер у віці 65 років в Парижі. Але його роботи з систем голосування теж були забуті.

В 1873 році британський математик [Чарльз Латвідж Доджсон](#)⁵ почав досліджувати виборчі процедури. Він перевідкрив (знову) систему Борда і парадокс Кондорсе. Вважається, що в одній зі своїх книжок він зобразив цей цикл в алегоричній формі бігу по колу (див. епіграф). Книжка називалася "Аліса в Країна Див". Доджсон запропонував декілька способів для вирішення проблеми циклів, але всі вони були невдалими. Пізніші спроби (в основному не дуже вдалі) були сконцентровані на тому як покращити систему Кондорсе у випадку, коли виникають цикли.

Однак, декілька десятиліть тому ситуація змінилася. Зникла одна з перепон на шляху використання системи Кондорсе – витрати часу на процедури парування і підрахунок, які тепер можливо автоматизувати. Також утворилися добровільні об'єднання програмістів, які створювали вільні програмні продукти. Один з важливих елементів таких ком'юніті – врахування голосу кожного учасника. У 2000 році ком'юніті Debian проєкт вирішило провести дослідження для визначення найкращої системи для внутрішнього голосування. Після трьох років Debian почав використовувати модифіковану систему Кондорсе, назва якої радує душу

⁵Відомий під псевдонімом Льюїс Керрол. [прим. упоряд.]

кожного кодера : clonproof Schwartz sequential dropping, коротко CSSD або [метод Шульце](#) (там є перелік всіх середовищ, які використовують цей метод. І цей перелік вражає, зокрема там Debian, Ubuntu, TopCoder, Wikipedia (на деяких мовах), 11 піратських партій різних країн).

Метод Шульце працює, як Кондорсе за відсутності циклів. За наявності циклів він намагається відкинути "слабші" зв'язки. Урешті-решт, цикл розривається і залишається один переможець.

Тобто на сьогодні можна сказати, що метод Кондорсе активно використовується в кіберпросторі і, можливо, скоро перейде у реальний світ.

Система Борда прийнята офіційно у двох країнах: Науру і Кірібаті. Вона працює там з 70хх років і відмітилась декількома скандалами. Зокрема, на виборах 1991 року представники правлячої партії поставили свого головного конкурента на останнє місце. Тепер у вчених є предмет дослідження, як поведуться виборці в цих умовах, на цю тему навіть серйозні статті пишуть (наприклад така робота [пруф](#)). І все таки система Борда не популярна. Останнім крупним вченим, який наразі захищає її є Дональд Саарі. Його аргументація по суті базується на тому, що складні соціальні відносини не можна зводити до системи попарних "дуелей". Крім того, система Кондорсе так само вразлива до маніпуляцій і парадоксів (хоча те, що маніпулювати системою Борда легше, це факт). Можливо з часом щось зміниться і заочна дуель Кондорсе і Борда продовжиться.

(далі буде про Ерроу і його теорему)

Частина третя: Теорема Ерроу – неможливість чи можливість?

Коли ціле – більше, ніж сума частин

Відблиск неможливості

Кеннет Ерроу з дитинства любив читати. Коли його карали за щось і за американською традицією того часу зачиняли в кімнаті, він спокійно брав з полички том енциклопедії і поринав у читання. Тому з часом йому придумали інше покарання: виганяли з дому гратися на вулиці. Ерроу був студентом Оскара Моргенштерна (одного з батьків теорії ігор), досліджував економіку. Але найважливішим моментом його життя стало отримання роботи у RAND. (RAND – науково-дослідний відділ корпорації Douglas Aircraft, який вербував на роботу найперспективніших вчених того часу. Така собі перша в світі спроба зробити фабрику досліджень).

Там працювали Нейман і Неш, Айзекс і Белман. Там народився системний аналіз, лінійне і динамічне програмування, метод Монте-Карло та інші. Цікаво, що більша частина отриманих досліджень була «побічним ефектом», який виникав від співробітництва і спілкування такої кількості яскравих науковців.

Ерроу взяли на позицію статистика-математика для дослідження розташування американських підводних човнів з ядерними ракетами, але про цю роботу нічого особливо невідомо. Одного разу Олаф Хелмер (логік і філософ) висловив у розмові з Ерроу таку проблему:

«Сполучені Штати Америки – це абстракція. А от люди, виборці – це реальність, їх цінності впливають на вибори і рішення. Але яким чином цінності окремих особистостей формують цінності країни?». Ерроу відповів: «Та це досить просто, я читав нещодавно щось на цю тему, думаю, що можна застосувати певні механізми агрегації». Хелмер запропонував йому написати щось на цю тему.

Коли Кеннет сів за роботу, він зрозумів, що не все так просто. Поступово робота захопила його, і в 1948 році він нарешті презентував свій результат. Пізніше цей результат став основою його дисертаційної роботи,

книги, яка стала найцитованішою роботою за все його життя, і однією з причин присудження нобелівки з економіки. Ідея була проста: сформулювати декілька очевидних математичних властивостей систем голосування, і знайти ті системи, які їм задовільняють. Результат був несподіваним: для пари дуже простих властивостей єдина система, яка підходила, була диктатура. Коли Ерроу додав властивість «і щоб не диктатура», жодної системи не залишилося.

Трохи забігаючи наперед, скажу, що результат – теорема Ерроу, – хоча і був по суті негативним, створив цілу область досліджень (теорію соціального вибору). Після публікації дослідження сконцентрувалися на напрямках, які доводили схожі результати для інших ситуацій або пробували вийти за умови теореми (створити інші системи голосування). Так чи інакше, теорема стала таким собі каменем на роздоріжжі, який кожен має пройти, і вирішити, куди ж іти далі.

Важливо підкреслити, що теорема Ерроу є математичним результатом з усіма плюсами і мінусами. Плюси в тому, що за виконання вхідних припущень вона завжди вірна. Мінус в тому, що інтерпретації результату і вхідних припущень можуть бути різними і залежать від розуміння конкретного науковця чи читача.

Так нерідко зустрічаються коментарі в дусі: «Ідеальна (або справедлива) система голосування не існує» або «Теорема Ерроу прирікає нас на диктатуру» і навіть «Демократія неможлива, і це довів Ерроу».

Давайте розбиратися, що ж доведено.

Теорема Ерроу

Перед формулюванням теореми важливо визначити припущення і їх значення.

Кожен виборець має повні транзитивні уподобання. Повнота означає, що виборець має визначити відношення до всіх альтернатив. Транзитивність означає, що якщо А краще за Б, а Б краще за В, то обов'язково А краще за В.

Вимагається транзитивність результату виборів. По суті,

це означає, що виборча система повертає упорядкований список альтернатив, вершина якого – переможець. Таким чином, забороняються цикли в результуючому векторі і завжди є переможець.

Ці два стартові припущення цілком зрозумілі. Далі йдуть ще дві властивості.

Парето. Якщо ВСІ виборці вважають альтернативу А кращою за альтернативу Б, то в результаті альтернатива А має бути краще за альтернативу Б. Зокрема, якщо всі вважають, що кандидат П краще всіх інших, то він і має перемогти.

Незалежність від нерелевантних альтернатив (ННА). Це мабуть найбільш важлива властивість. Формальне визначення таке: співвідношення між А та Б в результуючому векторі має визначатись тільки відношенням виборців до А та Б, наявність чи відсутність інших альтернатив не має на це впливати. По суті питання ілюстрацією є історія (не знаю, наскільки реальна) про філософа [Сідні Моргенбессера](#), відомого своєю дотепністю, якому офіціант запропонував на вибір десерт: яблучний або чорничний пиріг. Моргенбессер вибрав яблучний. Через декілька хвилин офіціант підійшов знову і сказав: «Вибачте, я не помітив, що у нас є ще вишневий пиріг». На що філософ незворушно відповів: «У цьому разі я буду чорничний». (більше історій [тут](#)) Очевидно, що вишневий пиріг є нерелевантним для вибору між яблучним і чорничним, але його наявність спричинила зміну вибору. Ерроу вимагає у системи виборів бути незалежною від таких впливів.

Нарешті ми можемо сформулювати велику і жахливу її.

Теорема Ерроу. Для ситуації трьох і більше альтернатив єдина система голосування, що задовольняє властивостям Парето та Незалежності від нерелевантних альтернатив є диктатура.

Ця теорема дійсно «вибухнула» в 50-і роки. Нечасто ціла область науки виникає від одного негативного результату. Чому негативного? Бо

Ерроу додав ще одну властивість, яку б ми хотіли від результату «і щоб була не диктатура», тоді виходить, що жодна система не підходить. Результатом стала поширена думка, сформульована Самуельсоном (також нобеліатом з економіки): «Ерроу показав раз і назавжди, що ідеальна система голосування неможлива».

Але диявол в деталях, як і завжди.

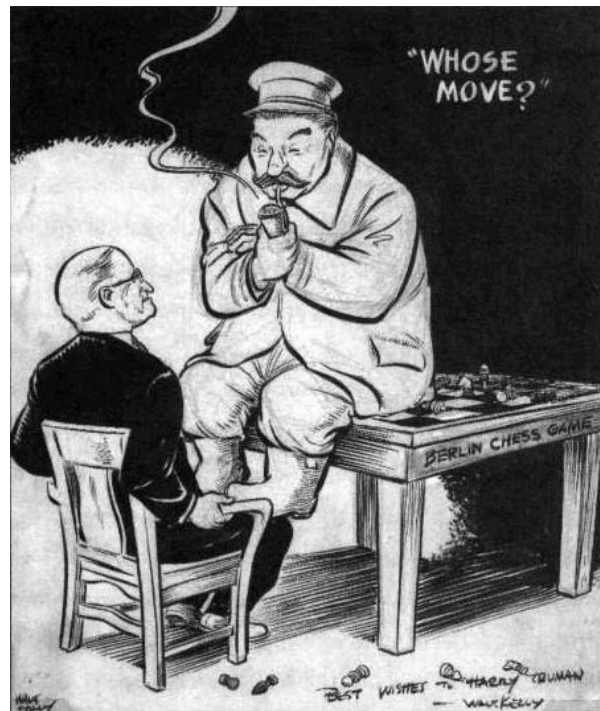
Той, хто в деталях

По-перше, теорема Ерроу стосується лише ситуацій, коли альтернатив більше двох. Другий тур президентських виборів, голосування законів (де альтернативи – «за» і «проти»), голосування за умов двопартійної системи (коли всі інші – малопопулярні) не потрапляє під дію цієї теореми.

По-друге, диктатура за Ерроу – це не стариган у військовій формі аля Зімбабве. Тут швидше диктатура в класично-римському стилі: коли все погано, то призначаємо диктатора. Як він скаже, так і буде. Тобто диктатура в цій теоремі означає, що вибирається один виборець, уподобання якого і дорівнюють функції соціального вибору. Цікаво, що диктатура в цьому розуміння є цілком «законним» способом визначення переможця. Дійсно:

Вона завжди дає результат і цей результат завжди транзитивний.

Виконується властивість Парето. Є такий жарт про Радянський союз з американської книжки про вибори: «Якщо всі (з диктатором Сталіним включно) голосують, щоб народ отри-



мав безкоштовну горілку, то всі отримують горілку. Якщо всі, крім Сталіна, хочуть безкоштовну горілку, то це вже зовсім інша історія.» Але, як видно з цього жарту, Парето для диктатури виконується.

ННА також виконується для диктатури, тому що по суті колективний вибір зводиться до індивідуального. А індивідуальні уподобання є транзитивними.

По-третє, теорема Ерроу стосується ординальних систем (там, де виборці вибирають порядок розташування альтернатив: вище означає краще) з правилом одна людина – один голос. Хоча це і охоплює майже всі виборчі системи, що використовуються в світі, існують і інші варіанти, про які поговоримо нижче.

По-четверте, Ерроу ніяк не враховує можливість маніпуляцій або стратегічного голосування. У його теоремі вважається, що виборці голосують щиро.

Нарешті головний результат теореми можна сформулювати так: **будь-яка існуюча система, яка не диктатура (і задовольняє вхідним визначенням), ДЛЯ ЯКОГОСЬ ВИПАДКУ не є Парето або ННА.** Але ж це не означає завжди, в цьому і є відмінність математики від життя. Якщо ми зрозуміємо, що іноді (наприклад раз на 100 років) у нас буде порушуватись одна з властивостей, можливо, це не так і погано? Наприклад, одне дослідження 1992 року показало, що з 14270 трійок кандидатів тільки 71 створили цикли. Тобто, груба ймовірність парадоксу Кондорсе 1 з 200, не так вже й багато.

Отже, досить багато АЛЕ перед тим, як оголошувати про неможливість демократії. Тим не менше, сила теореми не стільки в тому, що вона визначила неможливість «ідеальної» системи голосування, а у виявленні ПРОБЛЕМИ соціального вибору. Група раціональних людей не може визначити правило агрегації їхніх уподобань навіть для досить "простих вимог" до цього правила. Я взяв "прості вимоги" у лапки, оскільки, на думку Дональда Саарі, ННА насправді є дуже суворим обмеженням. Але перед тим як описати його розуміння проблеми з теоремою Ерроу опи-

шемо ще декілька результатів, що виникли після появи теореми про неможливість.

Теорема Сена і інші парадоксальні результати

Теорема Сена

Амартія Кумар Сен (ще один нобелівський лауреат з економіки) запропонував модель, коли деякі учасники (принаймні двоє) мають зробити індивідуальний вибір хоча б однієї пари альтернатив. Сен назвав цю властивість **Мінімальним лібералізмом**. Звучить, як абракадабра, але це досить реалістична модель для засідання комітетів або рад. Приклад. Припустимо, що певна рада з двох професорів кафедри конярства та бджільництва оголосили конкурс на заміщення вакантної посади доцента. Є три претенденти.

Ім'я	Публікації з конярства	Публікації з бджільництва
А	7	5
Б	3	9
В	2	7

При цьому А та Б подають документи на конярство, тому їх оцінює професор Копитко, а А і В подають документи на бджільництво (так, А подає документи відразу на два напрямки) і їх долю вирішує професор Прополіс. Професори мають визначити, який претендент краще а який гірше і вони ухвалюють рішення виключно по кількості публікацій. Якщо вони погоджуються щодо певного відношення альтернатив, то це переноситься у функцію соціального вибору. Найкраща альтернатива обирається у якості переможця. Виявляється, що:

- Професор Копитко вирішує, що А краще за Б у конярстві;
- Обоє одноголосно вирішують, що Б краще за В взагалі;
- Професор Прополіс вирішує, що В краще за А в бджільництві.

Отримуємо не транзитивну систему уподобань А краще Б, Б краще В, В краще А...

Теорема Сена. Для системи з трьох і більше альтернатив не існує системи ухвалення рішень, яка б задовільняла властивостям Парето та Мінімального лібералізму.

Список Ліста

Філософ Крістофер Ліст запропонував ще один парадокс. Отже, приклад.

На тій же кафедрі конярства та бджільництва проводять екзамени з конярства та бджільництва. Троє екзаменаторів відмічають, пройшов студент екзамен чи ні. Якщо екзаменатор вважає, що студент завалив хоча б один іспит, він ставить загальну оцінку незадовільно. Доля студента вирішується більшістю голосів.

Приклад рішення щодо іспитів

іспит			
професор	конярство	бджільництво	загальна оцінка
Кіньок	так	так	так
Прополіс	ні	так	ні
Копитко	так	ні	ні
Чи пройшов студент?	так	так	ні

Виходить, що більшість вважає, що студент склав обидва іспити, але загальне рішення негативне – більшість вважає, що він завалив.

Парадокс Анскомб

[Елізабет Анскомб](#), – британський філософ, учениця Вітгенштейна. Парадокс Анскомб формулюється так:

Чи можливо, щоб більшість була у меншості по більшості питань? Виявляється – так, це можливо.

Розглянемо приклад.

Виборець	питання 1	питання 2	питання 3
А	Так	Так	Ні
Б	Ні	Так	Так
В	Так	Ні	Так
Г	Ні	Ні	Ні
Д	Ні	Ні	Ні
Результат	Ні	Ні	Ні

Виборці А, Б, В складають більшість, яка підтримує спільну позицію більшістю по всіх питаннях (2 проти 1), але які програють меншості Г і Д по всіх питаннях.

Це, до речі, приклад того, як політична коаліція може бути нездатною провести жодне питання, хоча члени коаліції підтримують кожне питання більшістю голосів. І саме тому для партій так важливо підтримувати дисципліну з голосуванням своїх депутатів.

Суть проблеми

Виявляється, що всі ці парадокси є проявами старого знайомого – парадоксу Кондорсе, або циклу Кондорсе. Цикл, тобто ситуація, коли для групи виборців А краще за Б, Б краще за В і В краще за А є природним наслідком зростання розмірності. Це головна ідея Дональда Саарі, який досліджує це у своїх книгах. Справа в тому, що для двох альтернатив простір рішень є одномірним, точка відповідає рішенням більшості виборців. А якщо ми додамо ще одну пару, простір стає вже ЧОТИРИВИМІРНИМ, оскільки для коректного представлення відношення потрібно задати відношення виборців для кожної з чотирьох можливих пар.

Для того, щоб побороти це «прокляття розмірності» Ерроу і запропонував властивість ННА, яка фактично розриває зв'язки між парами і зводить задачу до ситуації, коли вони мають бути незалежні – кінцевий результат для кожної пари залежить лише від відношення до цієї пари. Але нічого не буває безкоштовно і за це довелось заплатити скороченням можливих функцій соціального вибору до однієї – диктатури. (Навіть найкращий з можливих Кондорсе-методів, метод Шульце, порушує ННА). Тобто, це типова ситуація, коли ціле (відношення групи виборців до альтернатив) є більш складним об'єктом ніж просто набір пар відношень.

Власне це і є інтерпретація теореми Ерроу від Саарі (і вона видається мені обгрунтованою). Ерроу намагався звести складне переплетення соціальних зв'язків до незалежної системи пар і отримав у результаті неможливість системи голосування, складнішої за диктатуру. Можливо не потрібно зводити все до системи незалежних пар? Можливо властивість

ННА не має такого вже значення? І тоді ми можемо знайти інший варіант голосування, який би враховував «волю виборців»?

Загалом теорема про неможливість спричинила такий бурхливий пошук та створення нових методів голосування, що можна сказати, що вона більше все таки про нові можливості. І про них піде мова далі.

Інші варіанти

Чи можливі інші варіанти, які б обходили умови теореми Эрроу? Так, такі системи є:

- **Approval voting**. Голосування схвалення, коли кожен з виборців вибирає всіх кандидатів, які йому подобаються (і іноді також всіх, які не подобаються).
- **Інтервальне голосування**, коли виборці оцінюють альтернативу за шкалою. Так працює Амазон і IMDb.
- **Зважене голосування**, коли у одного виборця не один голос.

P.S. Всі імена кафедр, професорів, коней і бджіл, що зустрічаються у цій публікації є вигаданими. Будь-які збіги випадкові.

Цю сторінку навмисно залишено порожньою

